ជំពូកទី ១

តក្កវិទ្យា

ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន

តក្កវិទ្យា

I. សំណើ និង សំណើសមាស

១. សំណើ

និយមន័យ: *សំណើ*គឺជាកន្សោមគណិតវិទ្យា ឬសញ្ញាដេរីវេ ឬអំណះអំណាងទាំងឡាយណា ដែលគេអាចចម្រៃបានថា ពិត ឬមិនពិត។ ភាពពិត ឬមិនពិតនៃសំណើហៅថា តម្លៃភាពពិត នៃសំណើ។ គេតាងឈ្មោះនៃសំណើដោយអក្សរ $p, q, r, \ldots$។

ឧទាហរណ៍:

p : "$4+5>3$" ជាសំណើ (សំណើពិត)

q : "គរុនិស្សិតជំនាន់ទី១៨ នៃNIEសុទ្ធតែបុគ្គលិក" ជាសំណើ (សំណើ មិនពិត)

r : "តើលោកអញ្ជើញទៅណា?" មិនមែនជាសំណើ (មិនអាចសំរេចបានថាពិតឬ មិនពិត)

២. សំណើសមាស

និយមន័យ: *សំណើសមាស* គឺជាការភ្ជាប់ (ឬផ្សំ) នៃពីរ ឬច្រើនសំណើដោយឈ្នាប់ និង$(\wedge)$ ឈ្នាប់ឬ$(\vee)$ ឈ្នាប់នាំអោយ$(\Rightarrow)$ ឬឈ្នាប់សមមូល$(\Leftrightarrow)$។

ឧទាហរណ៍:

"$5>4$ ឬ $5=4$" ជាសំណើសមាស

"20 ជាចំនួនគត់ និង 20 ជាពហុគុណនៃ 2" ជាសំណើសមាស

❋ ដើម្បីសិក្សាតម្លៃភាពពិតនៃសំណើទាំងឡាយ យើងប្រើសញ្ញា និងតារាងភាពពិតដូចខាងក្រោម:

p
Tពិត
Fមិនពិត

ឬ

p
1ពិត
0មិនពិត

ប្រតិបត្តិ: ចូរជ្រើសរើសអំណះអំណាង ដែលជាសំណើក្នុងចំណោមអំណះអំណាងខាងក្រោម និងកំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើទាំងនោះ។

ក. "អនុគមន៍ជាប់ត្រង់ x_0 សុទ្ធតែមានដេរីវេត្រង់ x_0"

ខ. "24 ចែកដាច់នឹង 4"

គ. "ថ្ងៃស្អែកនឹងមានខ្យល់ព្យុះខ្លាំងបំផុតនៅអាស៊ី"

II. ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

១. ឈ្នាប់និង $(\wedge)$

✍ *និយមន័យ: គេមានពីរសំណើ p, q សំណើសមាស" p និង q" តាងដោយ " $p\wedge q$" ជាសំណើមួយពិត តែក្នុងករណីដែល p និង q ជាសំណើពិតព្រមគ្នា។*

តារាងភាពពិត:

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ឧទាហរណ៍: p : "2013 ចែកដាច់នឹង 3" ជាសំណើពិត

q : "$3>2$" ជាសំណើពិត

គេបាន: $p\wedge q$: "(2013 ចែកដាច់នឹង 3) និង $(3>2)$" ជាសំណើពិត

ប្រតិបត្តិ: គេមានពីរសំណើ p : "4 ជាឫសនៃសមីការ $x^2-5x+4=0$" q : "4 ជាចំនួនបឋម" ។ ចូរកំណត់សំណើ $p\wedge q$ និងតម្លៃភាពពិតនៃ $p\wedge q$ ។

២. ឈ្នាប់ឬ $(\vee)$

✍ *និយមន័យ:* យើងមានពីរសំណើ p, q សំណើសមាស "p ឬ q" តាងដោយ "$p\vee q$" ជាសំណើមួយមិនពិតតែក្នុងករណីដែល p និង q ជាសំណើមិនពិតព្រមគ្នា។

តារាងភាពពិត:

p	q	$p\vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ឧទាហរណ៍1 p : "$30>15$" ជាសំណើពិត

q : "$30=15$" ជាសំណើមិនពិត

គេបាន: $p\vee q$: "$(30>15)$ ឬ $(30=15)$" ជាសំណើពិត។

ឧទាហរណ៍2. p : "9 ជាចំនួនបឋម" ជាសំណើមិនពិត

q : "9 ចែកដាច់នឹង 4" ជាសំណើមិនពិត

គេបាន: $p\vee q$: "(9 ជាចំនួនបឋម) ឬ (9 ចែកដាច់នឹង 4)" ជាសំណើមិនពិត។

ប្រតិបត្តិ: គេមានពីរសំណើដូចខាងក្រោម:

p : " គ្រប់ចតុកោណសុទ្ធតែជាប្រលេឡូក្រាម"

q : "25 ជាពហុគុណនៃ 3"។

ចូរកំណត់សំណើ $p \vee q$ និងតម្លៃភាពពិតរបស់វា។

៣. ឈ្នាប់មិន $(^{-})$ ឬ $(\neg)$

និយមន័យ: ឈ្នាប់មិន ជាប្រមាណវិធីលើបណ្តាសំណើទាំងឡាយដែលពីសំណើ p មួយពិត យើងបានសំណើ " មិន p" មិនពិត និងផ្ទុយទៅវិញ។

គេតាង $\overline{p}$ ឬ $\neg p$ អានថា " មិន p"

តារាងភាពពិត:

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

ឧទាហរណ៍1.

p : "$7 < 11$" ជាសំណើពិត គេបាន $\overline{p}$ "$7 \geq 11$" ជាសំណើមិនពិត

q : " ព្រះអាទិត្យរះពីទិសខាងកើត" ជាសំណើពិត

គេបាន: $\overline{q}$: " ព្រះអាទិត្យរះពីទិសខាងលិច" ជាសំណើមិនពិត។

ប្រតិបត្តិ: គេអោយសំណើដូចខាងក្រោម:

p : "$2011^2 + 2012^2 + 2013^2 < (2011 + 2012 + 2013)$

q : " ម៉ាស៊ីនគិតលេខនេះផលិតនៅប្រទេសជប៉ុន"

ចូរកំណត់សំណើឈ្នាប់មិននិងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើឈ្នាប់មិនរបស់សំណើខាងលើ

៤. ឈ្នាប់នាំអោយ $(\Rightarrow)$

និយមន័យ: គេមានពីរសំណើ p និង q យើងកំនត់សំណើថ្មី " p នាំអោយ q" ។ កំណត់សរសេរដោយ $q \Rightarrow q$ ជាសំណើមួយ ដែលមិនពិតតែក្នុងករណី p ជាសំណើពិត និង q ជាសំណើមិនពិត។

តារាងភាពពិត

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ឧទាហរណ៍: p : "ភ្នំពេញជាស្រុកមួយនៃប្រទេសកម្ពុជា" ជាសំណើមិនពិត

q : "សត្វឆ្កែធំជាងសត្វដំរី" ជាសំណើមិនពិត

គេបាន: $p \Rightarrow q$: "ភ្នំពេញជាស្រុកមួយនៃប្រទេសកម្ពុជា នោះសត្វឆ្កែធំជាងសត្វដំរី" ជាសំណើពិត។

ប្រតិបត្តិ: គេមានពីរសំណើ p: "បុប្ផាចូលចិត្តរៀនគណិតវិទ្យា"

q: "បុប្ផាពូកែដោះស្រាយលំហាត់"

ចូរកំណត់សំណើ $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p, \neg q \Rightarrow \neg p$

៤. ឈ្នាប់សមមូល $(\Leftrightarrow)$

និយមន័យ: គេមានពីរសំណើ p និង q យើងកំណត់សំណើថ្មី " p សមមូល q " ហៅថាឈ្នាប់សមមូលកំណត់សសេរដោយ $p \Leftrightarrow q$ ជាសំណើមួយដែលពិតតែក្នុងករណី p និង q ជាសំណើដែលមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា។

តារាងភាពពិត:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ឧទាហរណ៍: p : "9 ចែកដាច់នឹង 3 " ជាសំណើពិត

q : "9 ជាពហុគុណនៃ 3 " ជាសំណើពិត

គេបាន: $p \Leftrightarrow q$: "9 ចែកដាច់នឹង 3 សមមូលឬលុះត្រាតែ 9 ជាពហុគុណនៃ 3 " ជាសំណើពិត។

ប្រតិបត្តិ: សុខនិយាយថា "ខ្ញុំជាសិស្សពូកែរូបវិទ្យាលុះត្រាតែខ្ញុំបានពិន្ទុរូបវិទ្យាល្អ"។ ចូរតាងសំណើលក្ខខណ្ឌនោះដោយប្រើសញ្ញាឈ្នាប់តក្កវិទ្យា?

III. Proposition **និង តារាងភាពពិត**

ដោយប្រើឈ្នាប់ $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ និងសំណើ $p, q, r, \ldots,$ គេអាចបង្កើតបានសំណើសមាសP$(p, q, r, \ldots)$ ដែលត្រូវបានគេហៅថា Proposition ហើយសំណើ $p, q, r, \ldots$ ត្រូវបានគេហៅថា អថេរ។

<u>ឧទាហរណ៍:</u> តារាងភាពពិតនៃ Proposition $\neg(p\wedge\neg q)$

p	q	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	$\neg(p\wedge\neg q)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

<u>ប្រតិបត្តិ:</u> សិក្សាតារាងភាពពិតនៃ Proposition ខាងក្រោម

ក. $(p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\wedge q)$

ខ. $(\neg p\Rightarrow q)\vee\neg(p\Leftrightarrow\neg q)$

IV. Tautologies និង Contradictions

<u>និយមន័យ:</u>

- Proposition P $(p,q,r,...)$ ហៅថាTautologies កាលណា P$(p,q,r,...)$ ពិតចំពោះគ្រប់តម្លៃភាពពិតនៃអថេរ $p,q,r,...$(មានន័យថាក្នុងជួរឈរនៃ Propositionនោះតារាងសុទ្ធតែ1ទាំងអស់)។
- Proposition P $(p,q,r,...)$ ហៅថា Contradiction កាលណា P$(p,q,r,...)$ មិនពិតចំពោះគ្រប់តម្លៃភាពពិតនៃអថេរ $p,q,r,...$(មានន័យថាក្នុងជួរឈរនៃ Propositionនោះតារាងសុទ្ធតែ0ទាំងអស់)។

<u>ឧទាហរណ៍:</u>

<u>តារាងភាពពិត:</u>

p	$\neg p$	$p\wedge\neg p$	$p\vee\neg p$
1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1

តាមតារាងគេបាន proposition $p\vee\neg p$ ជាTautology និង Proposition $p\wedge\neg p$ Contradiction។

ឧទាហរណ៍: បង្ហាញថា Proposition $p \vee \neg p$ ជាTautology។

តារាងភាពពិត:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee \neg(p \wedge q)$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

ដូចនេះ តាមតារាងភាពពិតយើងបាន $p \vee \neg(p \wedge q)$ ជាសំណើ Tautology។

ប្រតិបត្តិ: តើ Proposition $(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)$ ជាសំណើ Tautology ឬជាសំណើ Contradiction?

V.**សមមូលតក្កវិទ្យា** (Logical Equivalence)

✎និយមន័យ: គេថាពីរ propositions $P(p,q,r,...)$,$Q(p,q,r,...)$ សមមូលបែបតក្កវិទ្យា កំណត់សរសេរដោយ $P(p,q,r,...) \equiv Q(p,q,r,...)$ កាលណា propositions ទាំងពីរដូចគ្នា(បានន័យថាក្នុងជួរឈរនៅក្នុងតារាងនៃ proposition ទាំងពីរមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា)។

ឧទាហរណ៍: គេមានតារាងភាពពិត

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

តាមតារាងតម្លៃភាពពិតខាងលើគេបាន: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

ឧទាហរណ៍: បង្ហាញថា $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

គេមានតារាងភាពពិត

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

ដូចនេះតាមតារាងតម្លៃភាពពិតគេបាន: $(p\wedge q)\vee r\equiv(p\vee r)\wedge(q\vee r)$

ប្រតិបត្តិ: ដោយប្រើតារាងតម្លៃភាពពិតបង្ហាញថា៖

ក. $p\Rightarrow q\equiv\neg p\vee q$

ខ. $p\Rightarrow q\equiv\neg q\Rightarrow\neg p$

VI. **លក្ខណៈនៃឈ្នាប់**

1.$\neg(\neg p)\equiv p, p\wedge p\equiv p$

2.$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r),(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

3.$p\vee q\equiv q\vee p, p\wedge q\equiv q\wedge p$

4.$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r), p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

5.$p\vee f\equiv p, p\wedge t\equiv p$

$p\vee t\equiv t, p\wedge f\equiv f$

6.$p\vee\neg p\equiv t, p\wedge\neg p\equiv f$

$\neg t\equiv f,\neg f\equiv t$

7.$\neg(p\vee q)\equiv\neg p\wedge\neg q,\neg(p\wedge q)\equiv\neg p\wedge\neg q(DemorgensLaw)$

8.$p\wedge(p\vee q)\equiv p, p\vee(p\wedge q)\equiv p$

9.$p\Rightarrow q\equiv\neg p\Rightarrow q\equiv\neg q\Rightarrow\neg p$

10.$p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\equiv(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)\equiv(\neg q\Rightarrow\neg p)\wedge(\neg p\Rightarrow\neg q)$

11.$\left[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\right]\Rightarrow(p\Rightarrow r),\left[(p\Leftrightarrow q)\wedge(q\Leftrightarrow r)\right]\Rightarrow(p\Leftrightarrow r)$

ចំណាំ: ដែល t ជាសំណើមួយពិតជានិច្ច

f ជាសំណើមួយមិនពិតជានិច្ច។

ឧទាហរណ៍: ដោយប្រើលក្ខណៈនៃឈ្នាប់បង្ហាញថា៖

ក. $p\vee(p\wedge q)\equiv p$

ខ. $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge\neg r)\Rightarrow\neg q$

ចម្លើយ:

ក.បង្ហាញថា $p\vee(p\wedge q)\equiv p$

យើងមាន $p\vee(p\wedge q)\equiv(p\wedge t)\vee(p\wedge q)$

$\equiv p(t\vee q)$

$\equiv p\wedge t$

$\equiv p$

ខ.បង្ហាញថា $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge\neg r)\Rightarrow\neg q$

យើងមាន $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv p\Rightarrow(\neg q\vee r)$

$\equiv\neg p\vee(\neg q\vee r)$

$\equiv\neg p\vee r\vee\neg q$

$$\equiv \neg(p \wedge \neg r) \vee \neg q$$

$$\equiv (p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q$$

ប្រតិបត្តិ: ដោយប្រើលក្ខណៈនៃឈ្នាប់បង្ហាញថា៖

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$$

VII. **ទិចារៈ** (Arguments)

✍និយមន័យ: ArgumentsជាអំណះអំណាងដែលពីសំនុំPropositions $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ ហៅថាសម្មតិកម្ម(Premises)ទាញបានProposition Qមួយទៀតហៅថាសេចក្តីសន្និដ្ឋានគេកំណត់សរសេរដោយ $p_1, p_2, p_3, ..., p_n \mapsto$ Q(អានថា $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ ទាញបានQ)។

★ប្រសិនបើសេចក្តីសន្និដ្ឋានQពិតចំពោះគ្រប់សម្មតិកម្ម $p_1, p_2, ..., p_n$ ពិតព្រមគ្នានោះ គេបាន Argument $p_1, p_2, p_3, ..., p_n \mapsto$ Q ត្រឹមត្រូវ(valid)។បើមិនដូច្នោះទេនោះគេថាArgumantនេះមិនត្រឹមត្រូវទេ(fallacy)។

ឧទាហរណ៍:

គេមាន

តាមតារាងភាពពិតគេបាន:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Argument $p, p \Rightarrow q \mapsto q$ is valid (ជួរដេកទី1)

Argument $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ is fallacy (ជួរដេកទី3)

★គេមានគ្រប់Proposition $p_1, p_2, ..., p_n$ ពិតព្រមគ្នាលុះត្រាតែProposition $p_1 \wedge p_2 \wedge .... \wedge p_n$ គេថា Argument $p_1, p_2, p_3, ..., p_n \mapsto$ Q validលុះត្រាតែរាល់ដង $p_1 \wedge p_2 \wedge .... \wedge p_n$ ពិតព្រមគ្នាគេបានQពិតរឺលុះត្រាតែរាល់ដងPropositions($p_1 \wedge p_2 \wedge .... \wedge p_n$)ពិតគេបានQពិតរឺលុះត្រាតែPropositions ($p_1 \wedge p_2 \wedge .... \wedge p_n$) $\Rightarrow Q$ ជាTautology។

ជាទូទៅ: Argument $p_1, p_2, p_3, ..., p_n \mapsto$ Q is valid លុះត្រាតែPropositions ($p_1 \wedge p_2 \wedge .... \wedge p_n$) $\Rightarrow Q$ ជាTautology។

ឧទាហរណ៍: ស្រាយបញ្ជាក់ថាArgument $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \mapsto p \Rightarrow r$ is valid

<u>*ចម្លើយ:*</u> *យើងត្រូវស្រាយថា*Proposition $\left[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\right]\Rightarrow(p\Rightarrow q)$ *ជា* Tautology

p	q	r	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow r$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)$	$p\Rightarrow r$	$\left[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\right]\Rightarrow(p\Rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

តាមតារាងតម្លៃភាពពិតគេបាន Proposition $\left[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\right]\Rightarrow(p\Rightarrow r)$ *ជា* Tautology ។

ដូចនេះគេបាន Argument $p\Rightarrow q;q\Rightarrow r\mapsto p\Rightarrow r$ is valid

ឧទាហរណ៍: ពិនិត្យ Argument *ខាងក្រោម៖*

S_1 : *បើ* MNPQ *ជាការេនោះ* MNPQ *ជាចតុកោណកែង*

S_2 : *បើ* MNPQ *ជាចតុកោណកែងនោះ* MNPQ *ជាប្រលេឡូក្រាម*

S :*បើ* MNPQ *ជាការេនោះ* MNPQ *ជាប្រលេឡូក្រាម*

ក្នុងនេះអំណោះអំណាង S *នៅខាងក្រោមបន្ទាត់តាងឲ្យការសន្និដ្ឋាននៃ* Argument *ហើយអំណោះអំណាង* $S_1;S_2$ *នៅខាងលើបន្ទាត់តាងឲ្យសម្មតិកម្មនៃ* Argument ។

តាង p: "MNPQ *ជាការេ*"

q: " MNPQ *ជាចតុកោណកែង*"

r:"MNPQ *ជាប្រលេឡូក្រាម*"

គេបាន Argument $S_1;S_2\mapsto S$ *មានទម្រង់* $p\Rightarrow q;q\Rightarrow r\mapsto p\Rightarrow r$ *តាមឧទាហរណ៍ខាងលើ* Argument $p\Rightarrow q;q\Rightarrow r\mapsto p\Rightarrow r$ is valid

ដូចនេះ Argument $S_1;S_2\mapsto S$ is valid.

ឧទាហរណ៍: ពិនិត្យ Argument *ខាងក្រោម៖*

S_1 :*បើមេឃភ្លៀងនោះលោក* John *ឈឺ*

S_2 :*មេឃមិនភ្លៀង*

S :*លោក* John *មិនឈឺ*

តាង p:"*មេឃភ្លៀង*"

q:" *លោក* John *ឈឺ*"

នោះគេបាន Argument $S_1;S_2\mapsto S$ *មានទម្រង់* $p\Rightarrow q;\neg p\mapsto\neg q$

ដូច្នេះយើងត្រូវសិក្សា Proposition $\left[\left(p\Rightarrow q\right)\wedge\neg p\right]\Rightarrow\neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\Rightarrow q$	$\left(p\Rightarrow q\right)\wedge\neg p$	$\left[\left(p\Rightarrow q\right)\wedge\neg p\right]\Rightarrow\neg q$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1

តាមតារាង $\left[\left(p\Rightarrow q\right)\wedge\neg p\right]\Rightarrow\neg q$ មិនមែនជា Tautology បានន័យថា Argument $\left[\left(p\Rightarrow q\right)\wedge\neg p\right]\Rightarrow\neg q$ is fallacy

ដូចនេះ Argument $S_1;S_2\mapsto S$ is fallacy

ប្រត្តិបត្តិ: សិក្សាសុពលភាព(Validity)នៃArgumentខាងក្រោម៖

S_1 : បើខ្ញុំមិនខំរៀននោះខ្ញុំប្រលងធ្លាក់

S_2 : បើខ្ញុំខំរៀន

S :ខ្ញុំប្រលងមិនធ្លាក់

VIII. **បរិមាណករ:**

១.បរិមាណករគ្រប់ "$\forall$"

<u>និយមន័យ:</u> សញ្ញា $\forall$ អានថាគ្រប់តាងឲ្យបរិមាណករគ្រប់។ គេប្រើបរិមាណករ $\forall$ ដើម្បីភ្ជាប់អថេរនៃអនុគមន៍សំណើមួយទៅនឹងសាកលមួយដែលត្រូវបានកំណត់ក្នុងគោលគំនិតបំលែងអនុគមន៍សំណើមួយអថេរទៅជាសំណើពីអនុគមន៍ពីរអថេរទៅជាអនុគមន៍សំណើមួយថេរ,ទៅជាសំណើនិងបន្តបន្ទាប់.....។

<u>ឧទាហរណ៍:</u> $x^2+1=8$ ជាអនុគមន៍សំណើមួយអថេរ គេបាន $\forall x\in\mathbb{R}:x^2+1=8$ ជាសំណើមិនពិត។

<u>ឧទាហរណ៍:</u> $a^2+b\geq 0$ ជាអនុគមន៍សំណើពីរងថេរ

$\forall a\in\mathbb{R}:a^2+b\geq 0$ ជាអនុគមន៍សំណើមួយះថេរ

$\forall a\in\mathbb{R},\forall b\in\mathbb{N}:a^2+b\geq 0$ ជាសំណើពិត

<u>ប្រតិបត្តិ:</u> ពិនិត្យតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $\forall x\in\mathbb{R}:x+3>x$ ។

២.បរិមាណករមាន: "$\exists$"

<u>និយមន័យ:</u> សញ្ញា $\exists$ មើលថាមានតាងឲ្យបរិមាណករមានមានន័យថា"មានយ៉ាងតិចមួយ" គេប្រើបរិមាណករមាន $\exists$ ដើម្បីភ្ជាប់អថេរនៃសំណើមួយទៅនឹងសាកលមួយដែលត្រូវបានកំណត់ក្នុងគោលគំនិតបំលែងអនុគមន៍សំណើមួយអថេរទៅជាសំណើពីអនុគមន៍សំណើពីរអថេរទៅជាអនុគមន៍សំណើមួយអថេរទៅជាសំណើនិងន្តបន្ទាត់.....។

<u>ឧទាហរណ៍:</u> គេមាន $x+6=18$ ជាអនុគមន៍សំណើមួយអថេរ

គេបាន $\exists x\in\mathbb{R}:x+6=18$ ជាសំណើពិត

*ឧទាហរណ៍:*ពិនិត្យតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $\exists x\in\mathbb{R}:|x|=x$ មាន $x=4$ នោះ $|4|=4$

ដូចនេះ $\exists x\in\mathbb{R}:|x|=x$ ជាសំណើពិត

ប្រតិបត្តិ: ពិនិត្យតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $\exists a\in\mathbb{R}:a^2=a$ ។

៣.ការប្រើឈ្នាប់មិនលើបរិមាណករ:

$1.\neg\left[\exists x:F(x)\right]\equiv\forall x:\neg F(x)$

$2.\neg\left[\forall x:F(x)\right]\equiv\exists x:\neg F(x)$

$3.\neg\left[\forall x,\exists y:F(x,y)\right]\equiv\exists x,\forall y:\neg F(x,y)$

$4.\neg\left[\exists x,\forall y:F(x,y)\right]\equiv\forall x,\exists y:\neg F(x,y)$

ឧទាហរណ៍:

$$1.\neg\left[\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{N}:x^2+y\geq 0\right]\equiv\exists x,\forall y\in\mathbb{N}:x^2+y<0$$

$$2.\neg\left[\forall x\in\mathbb{R}:x^2+1=4\right]\equiv\exists x\in\mathbb{R}:x^2+1\neq 4$$

៤.វិធីប្រើបរិមាណករ:

$1.\forall x:\left[P(x)\wedge Q(x)\right]\Leftrightarrow\left[\forall x:P(x)\wedge\forall x:Q(x)\right]$

$2.\exists x:\left[P(x)\wedge Q(x)\right]\Leftrightarrow\left[\exists x:P(x)\wedge\forall x:Q(x)\right]$

$3.\forall x:\left[P(x)\vee Q(x)\right]\Leftrightarrow\left[\forall x:P(x)\vee\forall x:Q(x)\right]$

$4.\exists x:\left[P(x)\vee Q(x)\right]\Leftrightarrow\left[\exists x:P(x)\vee\exists x:Q(x)\right]$

$5.\forall x,\forall y:P(x,y)\Leftrightarrow\forall y,\forall x:P(x,y)$

$6.\exists x,\exists y:P(x,y)\Leftrightarrow\exists y,\exists x:P(x,y)$

★*សំគាល់:*

$a.\left[\exists x:P(x)\wedge\exists x:Q(x)\right]\not\Rightarrow\exists x:\left[P(x)\wedge Q(x)\right]$

$Eg:(\exists x\in\mathbb{N}:x|9)\wedge(\exists x\in\mathbb{N}:x>15)\not\Rightarrow\exists x\in\mathbb{N}:(x|9\wedge x>15)$

b.កាលណាគេប្រើបរិមាណករពីរតគ្នាគេត្រូវគិតពីលំដាប់របស់វា។

$Eg:\forall a\in\mathbb{R},\exists b\in\mathbb{R}:b>a$ ជាសំណើពិត

$\exists b\in\mathbb{R},\forall a\in\mathbb{R}:b>a$ ជាសំណើមិនពិត

IX. ប្រភេទនៃសម្រាយបញ្ជាក់:

១.សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់:

*និយមន័យ:*សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់គឺជាការស្រាយបញ្ជាក់ត្រង់ៗទៅតាមអ្វីដែលគេចង់បាន។

ឧទាហរណ៍: បើ a និង b ជាចំនួនគត់សេសនោះ $a+b$ ជាចំនួនគត់គូ។

ចម្លើយ បើ a និង b ជាចំនួនគត់សេសនោះគេអាចតាង $a=2k+1$ និង $b=2l+1$ ដែល k,l ជា

ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។

គេបាន $a+b=(2k+1)+(2l+1)$

$=2k+2l+2$

$=2(k+l+1)$ ជាចំនួនគូ(ពិត)

ដូចនេះ បើ a និង b ជាចំនួនគត់សេសនោះ $a+b$ ជាចំនួនគត់គូ។

ឧទាហរណ៍: បង្ហាញថាបើអនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេលើចន្លោះ $I=(a,b)$ នោះ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ I ។

ចម្លើយ: បើ អនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេលើចន្លោះ $I=(a,b)$

នោះគេបាន $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ចំពោះគ្រប់ $x_0\in I$

យក $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

នោះ $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$

$=f'(x)=0$

ដូចនេះយើងបាន $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=x_0$

ដោយ $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $x_0\in(a,b)$ ។

យើងអាចសន្និដ្ឋានថា: $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $I=(a,b)$ ។

ប្រត្តិបត្តិ: បង្ហាញថា៖

ក.បើ $x,y\in\mathbb{N}, x<y$ នោះ $x+1\le y$

ខ. បើ x និង y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបនោះ $x+y$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។

២.សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម:

✍ <u>និយមន័យ:</u> គេដឹងថាសំណើ $p\Rightarrow q$ និងសំណើ $\neg q\Rightarrow\neg p$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា។សំណើ $\neg q\Rightarrow\neg p$ ជាសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្មនៃសំណើ $p\Rightarrow q$ ។ដូច្នេះដើម្បីបង្ហាញថាសំណើ $p\Rightarrow q$ ពិតនោះគេអាចបង្ហាញថាសំណើ $\neg q\Rightarrow\neg p$ ពិតជាការស្រេចព្រោះថាគេយកសំណើ $\neg q\Rightarrow\neg p$ បង្ហាញថាវាមានភាពងាយស្រួលជាងការបង្ហាញសំណើ $p\Rightarrow q$ ចំពោះករណីមួយចំនួន។

ជំហានក្នុងការដោះស្រាយ:

ឧបមាថា គេចង់បានឬចង់បង្ហាញសំណើ $p\Rightarrow q$ ពិត

- ❖ ជំហានទី១ ត្រូវកំណត់សំណើ p និងសំណើ q អោយបានត្រឹមត្រូវ។
- ❖ ជំហានទី២ ត្រូវកំណត់សំណើ $\neg p$ និងសំណើ $\neg q$ ។
- ❖ ជំហានទី៣ គេផ្តើមពី $\neg q$ បញ្ជាក់រហូតគេបានសំណើ $\neg p$ ដែលជាសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្មគឺមានន័យថាគេបានបង្ហាញថា $\neg q\Rightarrow\neg p$ ជាសំណើពិត។

ដូចនេះគេបាន $p \Rightarrow q$ ជាសំណើពិត។

ឧទាហរណ៍: គេអោយ (a,b) ជាគូនៃចំនួនគត់សនិទាននិង $x = a + ab + b$ ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $a \neq -1$ និង $b \neq -1$ នោះគេបាន $x \neq -1$ ។

ចម្លើយ: តាង $p: "(a \neq -1 \text{ និង } b \neq -1)"$

$q: "(x \neq -1)"$

យើងបាន $\neg q: x = -1 \Leftrightarrow a + ab + b = -1$

$\Leftrightarrow (a+1)(b+1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{smallmatrix} a=-1 \\ b=-1 \end{smallmatrix}\right.$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

ដូចនេះ $\boxed{p \Rightarrow q \text{ ពិត}}$

ឧទាហរណ៍:គេអោយ $x, y \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថាបើ $x - y = 1$ នោះករបាន $x = y = 1$ ។

ចម្លើយ: តាង

$p: "x.y = 1"$

$q: "x = y = 1"$

គេបាន $\neg q: x \neq y \neq 1$

ឧបមាថា $x \neq 1$ នោះយើងបាន $1 < x \Rightarrow 1.y < x.y \Leftrightarrow y < x.y, (y \neq 1)$ មានន័យថា $x.y \neq 1$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា $x.y = 1$

ដូចនេះ $\boxed{p \Rightarrow q \text{ ពិត}}$

ប្រតិបត្តិ: ក. បង្ហាញថាបើគេមាន $(x-5) < 0$ នោះ $0 < x < 5$ ។

ខ. បង្ហាញថាបើមុំឆ្លាស់ក្នុងពីរនៃបន្ទាត់ពីរជាមុំស្មើគ្នានោះបន្ទាត់ទាំងពីរនេះស្របគ្នា។

៣. សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីការពិត:

✍<u>និយមន័យ:</u> សម្រាយបញ្ជាក់នេះសម្រាប់បង្ហាញចំណោទបញ្ហាមួយចំនួនដែលពេលខ្លះគេមិនអាចរកបាននូវចំណុចចាប់ផ្តើមយកមកបកស្រាយតាមសម្រាយបញ្ជាក់ធម្មតា។វិធីនេះគឺគេត្រូវផ្តើមចេញពីសំណើឈ្នាប់មិននៃសំណើដែលគេនឹងត្រូវបង្ហាញថាពិតរហូតទទួលបានសំណើថ្មីដែលផ្ទុយពី ទ្រឹស្តីក្នុងគណិតវិទ្យា។ដូច្នេះសំណើឈ្នាប់មិនជាសំណើមិនពិតមានន័យថាសំណើដើមដែលចង់បង្ហាញនោះត្រូវតែពិត។

វិធីដោះស្រាយ:

- ជំហានទី១ តាង p ជាសំណើដែលត្រូវបង្ហាញ
- ជំហានទី២ កំណត់សំណើ $\neg p$
- ជំហានទី៣ ឧបមាថាសំណើ $\neg p$ ពិត។រួចបកស្រាយបន្តបន្ទាប់រហូតដល់បានលទ្ធផលផ្ទុយពីទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យា។គេបានសំណើ $\neg p$ មិនពិត។ដូច្នេះសំណើ p ពិត។

ឧទាហរណ៍: បង្ហាញថា $\sqrt[4]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ចម្លើយ: តាង $p:"\sqrt[4]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន"

គេបាន $\neg p:"\sqrt[4]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន"

ឧបមាថាសំណើ $\neg p$ ពិតនោះគេអាចសសេរ $\sqrt[4]{2}=\frac{a}{b}$ ដែល a និង b ជាចំនួនគត់បឋមរវាងគ្នា

គេបាន $\frac{a^4}{b^4}=2$ ឬ $a^4=2b^4$

គេបាន a^4 គឺជាពហុគុណនៃ 2 ដូចនេះ a^4 ជាចំនួនគត់គូនោះ a ក៏ជាចំនួនគត់គូដែរ។

តាង $a=2k$ ដែល k ជាចំនួនគត់

គេបាន $2b^4=a^4=4ak^4$

$b^4=2k^4$

ដូចនេះ b^4 ជាចំនួនគត់គូនោះ b ក៏ជាចំនួនគត់គូដែរ

ដោយ a និង b ជាចំនួនគត់គូនោះ a និង b មាន 2 ជាតួចែករួមដែលផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌដែល a និង b ជាចំនួនគត់បឋមរវាងគ្នានោះគេបាន $\sqrt[4]{2}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទាន។

ដូចនេះ $\sqrt[4]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ប្រតិបត្តិ: ក.បង្ហាញថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ខ.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នានោះ $a+b$ និង ab ក៏ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាដែរ។

៤.សម្រាយបញ្ជាក់តាមទ្វេលក្ខខណ្ឌ:

<u>និយមន័យ:</u> សម្រាយបញ្ជាក់តាមទ្វេលក្ខខណ្ឌគឺបើគេចង់ស្រាយអោយបាន $p\Leftrightarrow q$ គេត្រូវសម្រាយបញ្ជាក់តាមជំហានដូចខាងក្រោម:

- ជំហានទី១ បង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ $p\Rightarrow q$
- ជំហានទី២ បង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ $q\Rightarrow p$

ឧទាហរណ៍:បង្ហាញថា $x^2-6x-7=0$ លុះត្រាតែ $x=-1$ ឬ $x=7$

ចម្លើយ:តាង $p:"x^2-6x-7=0";q:"x=-1$ ឬ $x=7"$

- បង្ហាញថា $q\Rightarrow p$ គឺបង្ហាញ $x^2-6x-7=0\Rightarrow "x=-1$ ឬ $x=7"$

បើ $x^2-6x-7=0$ នោះគេបាន $(x+1)(x+7)=0$

នោះ $x+1=0$ ឬ $x+7=0$

គេបាន $x=-1$ ឬ $x=7$

ដូចនេះ $(x\ \ -6x-7=0)\Rightarrow x=-1$ ឬ $x=7$ (1)

- បង្ហាញថា $q\Rightarrow p$ គឺបង្ហាញ $"x=-1$ ឬ $x=7"\Rightarrow(x^2-6x-7=0)$

បើ $x=-1$ នោះ $x^2-6x-7=(-1)^2-6(-1)-7$

$=1+6-7=0$

បើ $x=7$ នោះ $x^2-6x-7=(7)^2-6(7)-7$

$=49-42-7=0$

ដូចនេះ $(x=-1$ ឬ $x=7)\Rightarrow(x^2-6x-7=0)\quad(2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $(x\;\;-6x-7=0)\Rightarrow x=-1$ ឬ $x=7$

ប្រតិបត្តិ: បង្ហាញថា៖

ក/ $x^3-16x=0$ លុះត្រាតែ $(x=0$ ឬ $x=-4$ ឬ $x=4)$

ខ/ $(x-a)(y-b)=0$ លុះត្រាតែ $(x=a$ ឬ $x=7)$ ។

៨.សម្រាយបញ្ជាក់តាមឧទាហរណ៍ផ្ទុយ:

<u>និយមន័យ:</u>វិធីនេះតម្រូវឲ្យគេរកឧទាហរណ៍មួយមកបញ្ជាក់ថាសំណើដែលត្រូវបង្ហាញជាសំណើមិនពិត។ មានន័យថាវិធីនេះអនុវត្តសំរាប់ស្រាយឈ្នាប់ $\Rightarrow$ មួយមិនពិត គឺដើម្បីស្រាយថាសំណើ $p\Rightarrow q$ មិនពិត គេគ្រាន់តែរកឧទាហរណ៍មួយដែល p ជាសំណើពិតនឹង q ជាសំណើមិនពិត។

ឧទាហរណ៍: តើពិតដែរឺទេ? ចំពោះ $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$ បើ $\begin{cases}a<b\\c<d\end{cases}\Rightarrow a-c<b-d$?

ចំលើយ:ខាងលើនេះមិនពិតទេព្រោះ $\begin{cases}1<3\\-9<1\end{cases}\Rightarrow 1-(-9)<3-1$ មិនពិត

ឧទាហរណ៍: តើពិតដែរឺទេ? ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន

គេបាន ចំនួនគត់វិជ្ជមាន b ដែល $a=b^2$

ចំលើយ: យក $a=7$ គេបាន $b^2=7$

ដូច្នេះមិនអាចរកបានចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $b^2=7$ បានទេ ។

ដូចនេះសំណើរខាងលើជាសំណើរមិនពិត ។

សំគាល់ការលើកយកតម្លៃ $a=7$ មកបញ្ជាក់ថាសំណើរមិនពិតបែបនេះហៅថា ឧទាហរណ៍ផ្ទុយ។

ឧទាហរណ៍: តើសំណើរ p :" គ្រប់ប្រទេសនៅក្នុងទ្វិបអាស៊ី ជាប្រទេសកំពុងអភិវឌ្ឍន៍ពិតរឺមិនពិត"

ចំលើយ ប្រទេសចិនក្នុងទ្វីបអាស៊ី ហើយចិនជាប្រទេសអភិវឌ្ឍន៍ ។

ដូចនេះសំណើរខាងលើមិនពិតទេ ។

ប្រតិបត្តិ: បង្ហាញថាសំណើខាងក្រោមនេះ មិនពិតដោយប្រើ ឧទាហរណ៍ផ្ទុយ

ក, បើ $x>y$ នោះ $x^2>y^2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង y ។

ខ, ប្រជាជនរស់នៅទីក្រុងភ្នំពេញគឺជាជនជាតិខ្មែរ។

គ, បើ a និង b ជាចំនួនបឋម ហើយ $n=a^2+b^2$ នោះ n ជាចំនួនបឋម។

ជំពូកទី ១

តក្កវិទ្យា

ផ្នែកលំហាត់

លំហាត់

១.ចូរសរសេរសំណើខាងក្រោមដោយប្រើឈ្នាប់តក្កវិទ្យា និង កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើទាំងនោះ៖

ក). លោកបារ៉ាក់អូបាម៉ាគឺជាប្រធានាធិបតីនៃប្រទេសកម្ពុជា និងមានដើមកំណើតនៅប្រទេសអាមេរិក។

ខ). មិនមានចំនួនពិត x ណាមួយដែល $x^2<0$ រឺ $x+1=0$ ទេ។

គ). គ្រប់ចំនួនពិត a និង b សុទ្ធតែមានលក្ខណៈ $|a+b|\le|a|+|b|$ និង $||a|-|b||\le|a-b|$

ឃ). ១៣ ជាចំនួនបឋម និងជាពហុគុណនៃ៣។

ង). គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n នោះ $2n$ ជាចំនួនគត់គូ រឺ $2n+1$ ជាចំនួនគត់សេស។

ច). គ្រប់ចំនួនពិត a,b ដែល $a\le b$ នោះចន្លោះបិទ $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}/a\le x\le b\}$ និងចន្លោះបើក $]a,b[=\{x\in\mathbb{R}/a<x<b\}$។

ឆ). បើ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នានោះ $a+b$ និង $a\times b$ ក៏ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នាដែរ រឺ $a+b$ ចែកដាច់នឹង២។

២). គរុនិស្សិត ៦នាក់ A, B, C, D, E និង Fមកពីខេត្តផ្សេងៗគ្នាត្រូវបានគេបែងចែកជាក្រុមដែលក្រុមនីមួយៗមានសមាជិកចំនួន ២នាក់ និង មានឯកទេសខុសៗគ្នា។ គរុនិស្សិតទាំង៣ក្រុមនេះត្រូវបានគេរៀបចំអោយចាប់ប៉ុស្តិ៍ដើម្បី ចុះធ្វើកម្មសិក្សាតាមសាលា ផ្សេងៗគ្នា។ ក្រោយពីការរៀបចំរួចគេដឹងថា៖

- គរុនិស្សិតB និងគរុនិស្សិតមកពីខេត្តកំពង់ចាមមិនអោយចូលក្រុម ជាមួយគ្នា
- គរុនិស្សិតF និងគរុនិស្សិតមកពីខេត្តបាត់ដំបងមិនអោយចូលក្រុម ជាមួយគ្នា
- គរុនិស្សិតA និងគរុនិស្សិតមកពីខេត្តបាត់ដំបងត្រូវចុះកម្មសិក្សានៅវិទ្យាល័យព្រះស៊ីសុវត្ថិ
- គរុនិស្សិតB និងគរុនិស្សិតមកពីខេត្តកណ្តាលត្រូវចុះកម្មសិក្សានៅវិទ្យាល័យបាក់ទូក
- គរុនិស្សិតC និងគរុនិស្សិតមកពីខេត្តព្រះសីហនុត្រូវចុះកម្មសិក្សានៅវិទ្យាល័យទួលទំពូង

គេថែមទាំងដឹងទៀតថាគរុនិស្សិតC និង គរុនិស្សិតមកពីខេត្តកំពង់ចាមមានឯកទេស ខាងគណិតវិទ្យា។ គរុនិស្សិតD និង គរុនិស្សិតមកពីខេត្តតាកែវមានឯកទេស ខាង អក្សរសាស្ត្រខ្មែរ។

គរុនិស្សិតF និង គរុនិស្សិតមកពីខេត្តកណ្តាលមានឯកទេស ខាង រូបវិទ្យា។ តើគរុនិស្សិតម្នាក់ៗ មកពីខេត្តណា ហើយមានឯកទេសអ្វីខ្លះ?

៣).ក្នុងការអង្កេតមួយនៃក្រុមនគរបាលពីអំពើឧក្រិដ្ឋមួយគេមានសាក្សីបីនាក់គឺ A, B និង C។
A និយាយថា សៅនៅក្នុងផ្ទះជនរងគ្រោះនៅថ្ងៃដែលមានអំពើឧក្រិដ្ឋកម្ម។
B និយាយថា សៅនៅក្នុងផ្ទះជនរងគ្រោះនៅថ្ងៃដែលមានអំពើឧក្រិដ្ឋកម្ម ហើយសុកមិន ស្លាប់ទេ។
C និយាយថា បើសៅជាឃាតករ នោះសុកមិនស្លាប់ទេ។ ម៉្យាងទៀតតាមប្រភពច្បាស់ការ បានអោយដឹងថាA និង C និយាយពិត រីឯ Bនិយាយមិនពិតទេ។ តើសៅជាឃាតករមែន ទេ?

៤).មនុស្សបីនាក់ ដែលទី១ឈ្មោះផល ទី២ឈ្មោះផាត និង ទី៣ឈ្មោះផេង បាននិយាយដូចតទៅ៖

ផល: ខ្ញុំអាយុ ២២ឆ្នាំ,ខ្ញុំមានអាយុតិចជាងផាត ២ឆ្នាំ និង ច្រើនជាងផេង ១ឆ្នាំ។

ផាត: ខ្ញុំមិនមែនក្មេងជាងគេទេ, ខ្ញុំ និង ផេងមានអាយុខុសគ្នា ៣ឆ្នាំ, ផេងអាយុ ២៥ឆ្នាំ។

ផេង: ខ្ញុំក្មេងជាងផល, ផលអាយុ ២៣ឆ្នាំ, ផាតអាយុច្រើនជាងផល ៣ឆ្នាំ។

តើគេអាចកំណត់អាយុម្នាក់ៗបានឬទេ បើគេដឹងថា បណ្តាសំណើទាំងបីរបស់មនុស្ស ម្នាក់ៗមានសំណើមួយមិនពិត ។

៥). ដោយប្រើតារាងតម្លៃភាពពិតចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

ក). $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

ខ). $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

៦). សិក្សាសុពលភាព (Validity)នៃArgument ខាងក្រោម:

ក).$(p\wedge q)\Rightarrow(p\vee q)$

ខ).$(p\wedge q)\Rightarrow q$

គ).$[\bar{p}\vee\bar{q}]\Rightarrow[\overline{p\wedge q}]$

ឃ).$\left[(p\wedge q)\wedge(\overline{p\vee q})\right]\Rightarrow p$

ង).$\left(\left\{\left[p\wedge(\bar{q}\Rightarrow p)\right]\wedge(p\Leftrightarrow\bar{q})\right\}\Rightarrow(q\vee\bar{p})\right)\Rightarrow p$

ច). $\overline{\left[(p\Rightarrow q)\vee q\right]}\Rightarrow p$

ឆ). $\overline{\left[p\Rightarrow(q\wedge p)\right]}\Rightarrow\bar{q}$

ដ). $(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow \bar{q})\Rightarrow(r\Rightarrow \bar{p})$

ឈ). $(p\Rightarrow r)\Rightarrow\left[(p\Rightarrow \bar{q})\vee(\bar{r}\Rightarrow \bar{q})\right]$

ញ). $\left\{\left[(p\Rightarrow \bar{q})\wedge(r\Rightarrow p)\right]\wedge q\right\}\Rightarrow \bar{r}$

ត). $\overline{\left\{\left[(p\Rightarrow q)\wedge(r\vee p)\right]\Rightarrow\left[(q\wedge p)\Rightarrow r\right]\right\}}\Rightarrow p$

៧).សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់

ក).សម្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times....\times\frac{2009}{2010}\times\frac{2011}{2012}<\frac{1}{\sqrt{2013}}$

ខ).បង្ហាញថា $\frac{1}{15}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times.....\times\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$

គ).ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+......+\frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n}}<3$

ឃ).បង្ហាញថាចំពោះ $\forall$ ចំនួនពិត $a,b,c=0$ នោះ $a^3+b^3+c^3=3abc$

ង).បង្ហាញថា $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ ជាចំនួនសនិទាន

ច).បើយើងមាន $a+b+c=0$ បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{b^2+c^2+a^2}+\frac{1}{c^2+a^2+b^2}=0$

ឆ).បើ $a+b+c=0$ នោះបង្ហាញថា $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1$

ជ). គេអោយ $0<x_1<x_2<.......<x_{12}$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{x_1+x_2+x_3+....+x_9}{x_3+x_6+x_9}+\frac{x_1+x_2+x_3+.....+x_{12}}{x_4+x_8+x_{12}}<7$$

ឈ). ១). បើ x និង y ជាចំនួនគត់សេសនោះ $x+y$ ជាចំនួនគត់គូ

២). បើ x និង y ជាចំនួនគត់សេសនោះ xy ជាចំនួនគត់សេស។

៨).សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត

ក).គេអោយចំនួនបឋមបីផ្សេងគ្នា $p,q\,\&\,r$ បង្ហាញថា $\sqrt[3]{p},\sqrt[3]{q}\,\&\,\sqrt[3]{r}$ មិនមែនជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តណាមួយទេ។

ខ). ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall a;b\in\mathbb{R}$ គេបាន $e^a+e^b\geq 2\sqrt{e^{a+b}}$

គ). បង្ហាញថា $\sqrt{m}$ ជាចំនួនអសនិទាន(mមិនមែនជាការេប្រាកដ)

៩). សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

ក).បង្ហាញថាចំពោះចំនួនគត់ m និង n បើផលគុណ mn មិនមមែនជាពហុគុណនៃ3ដែរ។

ខ). បង្ហាញថាបើ n^2 មិនមែនជាពហុគុណនៃ5 នោះ n មិនមែនជាពហុគុណនៃ5ដែរ

គ). បង្ហាញថាបើ $(x+1)(x-2)=0$ នោះ $x\neq 0$

ឃ). បង្ហាញថាបើ $x(x-5)<0$ នោះ $0<x<5$

ង).បង្ហាញថាបើ $x^2-4<0$ នោះ $-2<x<2$

ច). តើសំណើ"សុខនិយាយថាខ្លួនកំពុងនិយាយកុហក់"មានតម្លៃតក្កវិទ្យាច្បាស់លាស់ឬទេ?

ឆ). នៅក្នុងទ្រឹស្តីបទមួយគេអោយនិយមន័យទៅមនុស្សភរដូចតទៅនេះ៖≪មនុស្សភរជាមនុស្សដែលមិនដែលនិយាយកុហក់ការពិតទាល់តែសោះ≫។បើគឹមហាក់និយាយថា≪ខ្លួនជាមនុស្សភរ≫ចូរបង្ហាញថាគឹមហាក់មិនមែនជាមនុស្សភរទេ។

ជ). រូបវិទូម្នាក់បានធ្វើវិចារដូចខាងក្រោមនេះ៖

- បើសម្មតិកម្មរបស់ខ្ញុំត្រឹមត្រូវការពិសោធន៍ត្រូវតែបានសម្រេច
- ការពិសោធន៍បានសម្រេចហើយ
- ដូច្នោះ សម្មតិកម្មខ្ញុំត្រឹមត្រូវ។តើវិចារនេះត្រឹមត្រូវឬទេ?

ឈ). តើវិចារខាងក្រោមនេះត្រឹមត្រូវឬទេ?

- ទាហានទាំងអស់សុទ្ធតែចេះដើរត្រូវចង្វាក់ជើង
- កូនក្មេងខ្លះមិនចេះដើរត្រូវចង្វាក់ជើងទេ
- ដូច្នោះកូនក្មេងទាំងនេះមិនមែនជាទាហានទេ

ញ). បើសិនជាមានចូររកសន្និដ្ឋានមួយដែលជាវិបាកនៃសំណើទាំងឡាយខាងក្រោមនេះ៖

i. កាលណាខ្ញុំធ្វើលំហាត់ដោយខ្ញុំមិនថ្ងូរគឺខ្ញុំយល់

ii. លំហាត់នេះមិនដូចជាលំហាត់ដែលខ្ញុំធ្លាប់បានធ្វើទេ

iii. គ្មានលំហាត់ងាយណាមួយធ្វើអោយខ្ញុំឈឺក្បាលទេ

iv. ខ្ញុំមិនយល់លំហាត់ណាដែលមិនដូចលំហាត់ដែលខ្ញុំធ្លាប់បានធ្វើទេ

v. ខ្ញុំមិនដែលថ្ងូរនៅពេលធ្វើលំហាត់ទេលើកលែងតែវាធ្វើអោយខ្ញុំឈឺក្បាល។

១០). សម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ

ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

ក . $x^2-x-6=0$ លុះត្រាតែ $x=-2\ ;\ x=3$

ខ . $-2x^2+11x-5=0$ លុះត្រាតែ $x=\dfrac{1}{2}\ ;\ x=5$

គ . $x^2-9=0$ លុះត្រាតែ $x=-3\ ;\ x=3$

ឃ). $(-x+5)(2x-3)=0$ លុះត្រាតែ $x=\dfrac{3}{2}\,;\,x=5$

ង . $x=-2\,;\,x=5$ លុះត្រាតែ $x^2-3x-10=0$

ច . $x=-3\,;\,x=\dfrac{1}{2}$ លុះត្រាតែ $2x^2+5x-3=0$

ឆ . $x\neq\dfrac{7}{2}\,;\,x\neq 4$ លុះត្រាតែ $-2x^2+15x-28\neq 0$

ជ . $x\neq -2\,;\,x\neq 4$ លុះត្រាតែ $x^2-2x-8\neq 0$

ឈ . $x^2+x-6<0$ លុះត្រាតែ $x<2\,;\,x>-3$

ញ . $x\leq 5\,;\,x\geq -1$ លុះត្រាតែ $x^2-4x-5\leq 0$

ដ . $2x^2-5x+2>0$ លុះត្រាតែ $x>2\,;\,x<\dfrac{1}{2}$

ឋ . $x^2+6x-7\neq 0$ លុះត្រាតែ $x\neq -7\,;\,x\neq 1$

១១).តាមរយៈសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ចូរស្រាយថា៖

ក). បើ n ជាចំនួនបឋម នោះ $y=n+1$ ជាចំនួនគូ។

ខ). គ្រប់តម្លៃ x គេបាន $f(x)=4x^2-5$ វិជ្ជមានជានិច្ច។

ជំពូកទី ១

តក្កវិទ្យា

ផ្នែកចម្លើយ

លំហាត់ និង ចម្លើយ

១.ចូរសរសេរសំណើខាងក្រោមដោយប្រើឈ្នាប់តក្កវិទ្យា និង កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើទាំងនោះ៖

ក). លោកបារ៉ាក់អូបាម៉ាគឺជាប្រធានាធិបតីនៃប្រទេសកម្ពុជា និងមានដើមកំណើតនៅប្រទេសអាមេរិក។

<u>ចម្លើយ:</u> តាង P ជាសំណើ: លោកបារ៉ាអូបាម៉ាជាប្រធាធិបតីនៃប្រទេសកម្ពុជា

q ជាសំណើ: លោកបារ៉ាអូបាម៉ាមានដើមកំណើតនៅប្រទេសអាមេរិក

គេបាន ត.(p)=0 និង ត.(q)=1

សំណើ ក).គឺជាសំណើសមាស $p \wedge q \Rightarrow$ ត.($p \wedge q$)=0។

ខ). មិនមានចំនួនពិត x ណាមួយដែល $x^2 < 0$ រឺ $x+1=0$ ទេ។

<u>ចម្លើយ:</u> តាង P ជាសំណើ:មិនមានចំនួនពិត x ណាមួយដែល $x^2 < 0$ ទេ

q ជាសំណើ: មិនមានចំនួនពិត x ណាមួយដែល $x+1=0$ ទេ

គេបាន ត.(p)=1និង ត.(q)=0

សំណើខ).គឺជាសំណើសមាស $p \vee q \Rightarrow$ ត.($p \vee q$)=1។

គ). គ្រប់ចំនួនពិត a និង b សុទ្ធតែមានលក្ខណ:$|a+b| \le |a|+|b|$ និង $||a|-|b|| \le |a-b|$

<u>ចម្លើយ:</u> តាង P ជាសំណើ:គ្រប់ចំនួនពិត a និង b សុទ្ធតែមានលក្ខណ:$|a+b| \le |a|+|b|$

q ជាសំណើ: គ្រប់ចំនួនពិត a និង b សុទ្ធតែមានលក្ខណ:$||a|-|b|| \le |a-b|$

គេបាន ត.(p)=1និង ត.(q)=1

សំណើគ).គឺជាសំណើសមាស $p \wedge q \Rightarrow$ ត.($p \wedge q$)=1។

ឃ). ១៣ ជាចំនួនបឋម និងជាពហុគុណនៃ៣។

<u>ចម្លើយ:</u> តាង P ជាសំណើ:១៣ ជាចំនួនបឋម

q ជាសំណើ: ១៣ជាពហុគុណនៃ៣

គេបាន ត.(p)=1និង ត.(q)=0

សំណើឃ).គឺជាសំណើសមាស $p \wedge q \Rightarrow$ ត.($p \wedge q$)=0។

ង). គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n នោះ $2n$ ជាចំនួនគត់គូ រឺ $2n+1$ ជាចំនួនគត់សេស។

<u>ចម្លើយ:</u> តាង P ជាសំណើ:គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n នោះ $2n$ ជាចំនួនគត់គូ

q ជាសំណើ: គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n នោះ $2n+1$ ជាចំនួនគត់សេស

គេបាន ត.(p)=1និង ត.(q)=1

សំណើ ឃ).គឺជាសំណើសមាស $p\vee q \Rightarrow$ ត.($p\vee q$)=1។

ច). គ្រប់ចំនួនពិតa,bដែល $a\le b$ នោះចន្លោះបិទ$\left[a,b\right]=\left\{x\in\mathbb{R}/a\le x\le b\right\}$និងចន្លោះបើក $\left]a,b\right[=\left\{x\in\mathbb{R}/a<x<b\right\}$។

<u>ចម្លើយ:</u> តាង P ជាសំណើ:គ្រប់ចំនួនពិតa,bដែល $a\le b$ នោះចន្លោះបិទ

$\left[a,b\right]=\left\{x\in\mathbb{R}/a\le x\le b\right\}$

q ជាសំណើ: គ្រប់ចំនួនពិតa,bដែល $a\le b$ នោះចន្លោះបើក $\left]a,b\right[=\left\{x\in\mathbb{R}/a<x<b\right\}$

គេបាន ត.(p)=1និង ត.(q)=1

សំណើ ឃ).គឺជាសំណើសមាស $p\wedge q \Rightarrow$ ត.($p\wedge q$)=1។

ឆ). បើ a និងbជាចំនួនបឋមរវាងគ្នានោះ$a+b$និង$a\times b$ក៏ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នាដែរ រឺ $a+b$ចែកដាច់នឹង២។

<u>ចម្លើយ:</u> តាង P ជាសំណើ:បើ a និងbជាចំនួនបឋមរវាងគ្នានោះ$a+b$និង$a\times b$ក៏ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នាដែរ

q ជាសំណើ: បើ a និងbជាចំនួនបឋមរវាងគ្នានោះ$a+b$ចែកដាច់នឹង២

គេបាន ត.(p)=1និង ត.(q)=1

សំណើឃ).គឺជាសំណើសមាស $p\vee q \Rightarrow$ ត.($p\vee q$)=1។

២). គរុនិស្សិត ៦នាក់ A, B, C, D, E និង Fមកពីខេត្តផ្សេងៗគ្នាត្រូវបានគេបែងចែកជាក្រុម ដែលក្រុមនីមួយៗមានសមាជិកចំនួន ២នាក់ និង មានឯកទេសខុសៗគ្នា។ គរុនិស្សិតទាំង៣ក្រុមនេះត្រូវបានគេរៀបចំអោយចាប់ប៉ុស្តិ៍ដើម្បី ចុះធ្វើកម្មសិក្សាតាមសាលាផ្សេងៗគ្នា។ ក្រោយពីការរៀបចំរួចគេដឹងថា៖

- គរុនិស្សិតB និងគរុនិស្សិតមកពីខេត្តកំពង់ចាមមិនអោយចូលក្រុម ជាមួយគ្នា
- គរុនិស្សិតF និងគរុនិស្សិតមកពីខេត្តបាត់ដំបងមិនអោយចូលក្រុម ជាមួយគ្នា
- គរុនិស្សិតA និងគរុនិស្សិតមកពីខេត្តបាត់ដំបងត្រូវចុះកម្មសិក្សានៅវិទ្យាល័យព្រះស៊ីសុវត្ថិ
- គរុនិស្សិតB និងគរុនិស្សិតមកពីខេត្តកណ្តាលត្រូវចុះកម្មសិក្សានៅវិទ្យាល័យបាក់ទូក

- គរុនិស្សិតC និងគរុនិស្សិតមកពីខេត្តព្រះសីហនុត្រូវចុះកម្មសិក្សានៅវិទ្យាល័យទូលទំពូង

គេថែមទាំងដឹងទៀតថាគរុនិស្សិតC និង គរុនិស្សិតមកពីខេត្តកំពង់ចាមមានឯកទេសខាងគណិតវិទ្យា។ គរុនិស្សិតD និង គរុនិស្សិតមកពីខេត្តតាកែវមានឯកទេស ខាងអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ។ គរុនិស្សិតF និង គរុនិស្សិតមកពីខេត្តកណ្តាលមានឯកទេស ខាងរូបវិទ្យា។ តើគរុនិស្សិតម្នាក់ៗមកពីខេត្តណា ហើយមានឯកទេសអ្វី?

<u>ចម្លើយ:</u> តាមសម្មតិកម្មខាងលើគេបានតារាងភាពពិតដូចខាងក្រោម

	ភ្នំពេញ	កណ្តាល	បាត់ដំបង	កំពង់ចាម	តាកែវ	ព្រះសីហនុ
A	0	0	0	1	0	0
B	0	0	0	0	1	0
C	1	0	0	0	0	0
D	0	0	1	0	0	0
E	0	1	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	1

<u>ដូច្នេះ</u>

A:មកពីខេត្តកំពង់ចាម ឯកទេសគណិតវិទ្យា
B :មកពីខេត្តតាកែវ ឯកទេសអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ
C:មកពីភ្នំពេញ ឯកទេសគណិតវិទ្យា
D:មកពីខេត្តបាត់ដំបង ឯកទេសអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ
E:មកពីខេត្តកណ្តាល ឯកទេសរូបវិទ្យា
F:មកពីខេត្តព្រះសីហនុ ឯកទេសរូបវិទ្យា

៣).ក្នុងការអង្កេតមួយនៃក្រុមនគរបាលពីអំពើឧក្រិដ្ឋមួយគេមានសាក្សីបីនាក់គឺ A , B និង C។

A និយាយថា សៅនៅក្នុងផ្ទះជនរងគ្រោះនៅថ្ងៃដែលមានអំពើឧក្រិដ្ឋកម្ម។

B និយាយថា សៅនៅក្នុងផ្ទះជនរងគ្រោះនៅថ្ងៃដែលមានអំពើឧក្រិដ្ឋកម្ម ហើយសុកមិនស្លាប់ទេ។

C និយាយថា បើសៅជាឃាតករ នោះសុកមិនស្លាប់ទេ។ ម៉្យាងទៀតតាមប្រភពច្បាស់ការបានអោយដឹងថាA និង C និយាយពិត រីឯ Bនិយាយមិនពិតទេ។ តើសៅជាឃាតករមែនទេ?

<u>ចម្លើយ:</u> តាង p ជាសំណើ "សៅនៅក្នុងផ្ទះជនរងគ្រោះនៅថ្ងៃដែលមានអំពើឧក្រិដ្ឋកម្ម"

q ជាសំណើ "សុកមិនស្លាប់ទេ"

r ជាសំណើ "សៅជាឃាតករ"

ដោយ A និយាយពិត ,C និយាយពិតហើយ , B និយាយមិនពិត

គេបាន p ពិត ,$(p\wedge q)$ មិនពិត ,$(r\Rightarrow q)$ ពិត

- p ពិត ហើយ $(p\wedge q)$ មិនពិតនោះគេបាន q មិនពិត (ព្រោះបើ q ពិតនោះគេបាន $(p\wedge q)$ ក៏ពិតដែរ) ។
- q មិនពិត ហើយ $(r\Rightarrow q)$ ពិតនោះគេបាន r មិនពិត (ព្រោះបើ r ពិតនោះគេបាន $(r\Rightarrow q)$ មិនពិត) ។

ដូចនេះ សំណើ "សៅជាឃាតករ"មិនមែនជាសំណើពិតទេ មានន័យថាសៅមិនមែនជាឃាតករទេ។

៤).មនុស្សបីនាក់ ដែលទី១ឈ្មោះផល ទី២ឈ្មោះផាត និង ទី៣ឈ្មោះផេង បាននិយាយដូចតទៅ៖

ផល: ខ្ញុំអាយុ ២២ឆ្នាំ,ខ្ញុំមានអាយុតិចជាងផាត ២ឆ្នាំ និង ច្រើនជាងផេង ១ឆ្នាំ។

ផាត: ខ្ញុំមិនមែនក្មេងជាងគេទេ, ខ្ញុំ និង ផេងមានអាយុខុសគ្នា ៣ឆ្នាំ, ផេងអាយុ ២៥ឆ្នាំ។

ផេង: ខ្ញុំក្មេងជាងផល, ផលអាយុ ២៣ឆ្នាំ, ផាតអាយុច្រើនជាងផល ៣ឆ្នាំ។

តើគេអាចកំណត់អាយុម្នាក់ៗបានឬទេ បើគេដឹងថា បណ្តាសំណើទាំងបីរបស់មនុស្សម្នាក់ៗមានសំណើមួយមិនពិត ។

<u>ចម្លើយ:</u>តាង x,y,z ជាចំនួនអាយុរៀងគ្នានៃ ផល ផាត និង ផេង

គេអាចកំណត់បានដូចតទៅ

ផល:"$(x=22),(x=y-2),(x=z+1)$"

ផាត: "$(x\geq y)\wedge(z\leq y),(y=z+3)\vee(y=z-3),(z=25)$"

ផេង:"$(z<x),(x=23),(y=x+3)$"

ដោយបណ្តាសំណើរបស់មនុស្សម្នាក់ៗមានសំណើមួយមិនពិត យើងនឹងពិនិត្យទៅតាមករណីដូចតទៅ៖

(i) បើ $(x=22)$ ពិត ,$(x=y-2)$ ពិត ,$(x=z+1)$ មិនពិត

$(x=22)$ ពិត$\Rightarrow(x=23)$ មិនពិត$\Rightarrow(y=x+3)$ ពិត

ប៉ុន្តែ សំណើ$(x=y-2)$ និងសំណើ $(y=x+3)$ មិនអាចពិតទាំងពីរទេ

ដូចនេះ ករណី(i)មិនអាចទៅរួចទេ។

(ii) បើ $(x=22)$ពិត $,(x=y-2)$មិនពិត $,(x=z+1)$ពិត

$(x=22)$ពិត$\Rightarrow (x=23)$មិនពិត$\Rightarrow (y=x+3)$ពិត

ដោយ $(y=x+3)$ពិត និង $(x=z+1)$ពិត

បានន័យថា $(y=z+4)$ ពិត

ដូចនេះ $((y=z+3)\vee(y=z-3))$មិនពិត (1)

$((x=22)$ពិត និង $(x=z+1)$ ពិត $)\Rightarrow (z=25)$មិនពិត (2)

(1)និង(2)បញ្ជាក់ថាបណ្តាសំណើរបស់ផាតមានសំណើពីរមិនពិត ដែលផ្ទុយទៅនឹងសម្មតិកម្ម

ដូចនេះ ករណីទី(ii)មិនអាចទៅរួចទេ។

(iii) បើ $(x=22)$មិនពិត $,(x=y-2)$ពិត $,(x=z+1)$ពិត

$(x=y-2)$ពិត $\Rightarrow (y=x+3)$មិនពិត $\Rightarrow (x=23)$ពិត

$((x=y-2)$ពិត $\wedge(x=23)$ពិត $)\Rightarrow (y=25)$ពិត

$(y=x+3)$ មិនពិត$\Rightarrow (z<x)$ពិត

$((z<x)$ពិត$\wedge(x=23)$ពិត$)\Rightarrow (z=25)$មិនពិត

$(z=25)$ មិនពិត$\Rightarrow ((x\le y)$ពិត $,(z\le y)$ពិត $,(y=z+3)$ពិត$)$

$((y=z+3)$ពិត$\wedge(y=25)$ពិត$)\Rightarrow (z=22)$ពិត

ម្យ៉ាងទៀតសំណើ$(x=23,\ y=25,\ z=22)$នេះផ្ទៀងផ្ទាត់សម្មតិកម្មដែលថាបណ្តាសំណើរបស់មនុស្សម្នាក់ៗ មានពីរសំណើពិតនិងមួយសំណើពិត។

<u>ដូចនេះ</u> ផលអាយុ ២៣ឆ្នាំ ផាតអាយុ ២៥ឆ្នាំ និងផេងអាយុ ២២ឆ្នាំ។

៥).ដោយប្រើតារាងតម្លៃភាពពិតចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

ក). $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

ខ). $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

<u>ចម្លើយ:</u> សម្រាយបញ្ជាក់តាមតារាងតម្លៃភាពពិត

ក). $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

តាមតារាងតម្លៃភាពពិតយើងឃើញថា $p\wedge(q\vee r)$ និង $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ មាន តម្លៃភាពពិតដូចគ្នា ។

ដូច្នេះ $\boxed{p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)}$

ខ). $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee q$	$p\vee r$	$p\vee(q\wedge r)$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

តាមតារាងតម្លៃភាពពិតគេបាន $\boxed{p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)}$

៦). សិក្សាសុពលភាព (Validity)នៃArgument ខាងក្រោម:

ក).$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

<u>ចម្លើយ:</u>$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

តាមតារាង គេបាន$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ ជា *Tautology*

ដូចនេះ$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ពិតជានិច្ច

ខ).$(p \wedge q) \Rightarrow q$

<u>ចម្លើយ:</u>$(p \wedge q) \Rightarrow q$

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

តាមតារាងគេបាន$(p \wedge q) \Rightarrow q$ ជា *Tautology*

ដូចនេះ$(p \wedge q) \Rightarrow q$ពិតជានិច្ច

គ). $\left[\overline{p}\vee\overline{q}\right]\Rightarrow\left[\overline{p\wedge q}\right]$

<u>ចម្លើយ:</u> $\left[\overline{p}\vee\overline{q}\right]\Rightarrow\left[\overline{p\wedge q}\right]$

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p}\wedge\overline{q}$	$p\wedge q$	$\overline{p\wedge q}$	$\left[\overline{p}\vee\overline{q}\right]\Rightarrow\left[\overline{p\wedge q}\right]$
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1

តាមតារាង $\left[\overline{p}\vee\overline{q}\right]\Rightarrow\left[\overline{p\wedge q}\right]$ជា *Tautology*

ដូចនេះ$\left[\overline{p}\vee\overline{q}\right]\Rightarrow\left[\overline{p\wedge q}\right]$ពិតជានិច្ច។

ឃ). $\left[(p\wedge q)\wedge\left(\overline{p\vee q}\right)\right]\Rightarrow p$

<u>ចម្លើយ:</u> $\left[(p\wedge q)\wedge\left(\overline{p\vee q}\right)\right]\Rightarrow p$

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\overline{p\vee q}$	$(p\wedge q)\wedge\left(\overline{p\vee q}\right)$	$\left[(p\wedge q)\wedge\left(\overline{p\vee q}\right)\right]\Rightarrow p$
1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0	1

តាមតារាងគេបាន$\left[(p\wedge q)\wedge\left(\overline{p\vee q}\right)\right]\Rightarrow p$ ជា *Tautology*

ដូចនេះ$\left[(p\wedge q)\wedge\left(\overline{p\vee q}\right)\right]\Rightarrow p$ ពិតជានិច្ច។

ង). $\left(\left\{\left[p\wedge(\overline{q}\Rightarrow p)\right]\wedge(p\Leftrightarrow\overline{q})\right\}\Rightarrow(q\vee\overline{p})\right)\Rightarrow p$

<u>ចម្លើយ:</u>$\left(\left\{\left[p\wedge(\overline{q}\Rightarrow p)\right]\Rightarrow(p\Leftrightarrow\overline{q})\right\}\Rightarrow(q\vee\overline{p})\right)\Rightarrow p$

តាង $U=\left(\left\{\left[p\wedge(\overline{q}\Rightarrow p)\right]\Rightarrow(p\Leftrightarrow\overline{q})\right\}\Rightarrow(q\vee\overline{p})\right)\Rightarrow p$

$A=(\overline{q}\Rightarrow p)\quad B=(p\Leftrightarrow\overline{q})\quad C=(q\vee\overline{p})$

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	A	$p\wedge A$	B	$[p\wedge A]\Rightarrow B$	C	$(\{[p\wedge A]\wedge B\}\Rightarrow C)$	U
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1

តាមតារាងគេបាន$\left(\left\{\left[p\wedge(\bar{q}\Rightarrow p)\right]\Rightarrow(p\Leftrightarrow\bar{q})\right\}\Rightarrow(q\vee\bar{p})\right)\Rightarrow p$ ជា *Tautology*

ដូចនេះ$\left(\left\{\left[p\wedge(\bar{q}\Rightarrow p)\right]\Rightarrow(p\Leftrightarrow\bar{q})\right\}\Rightarrow(q\vee\bar{p})\right)\Rightarrow p$ ពិតជានិច្ច។

ច). $\overline{\left[(p\Rightarrow q)\vee q\right]}\Rightarrow p$

<u>ចម្លើយ:</u> $\overline{\left[(p\Rightarrow q)\vee q\right]}\Rightarrow p$ តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	$p\Rightarrow q$	$(p\Rightarrow q)\vee q$	$\overline{[(p\Rightarrow q)\vee q]}$	$\overline{[(p\Rightarrow q)\vee q]}\Rightarrow p$
1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1

តាមតារាងគេបាន$\overline{\left[(p\Rightarrow q)\vee q\right]}\Rightarrow p$ ជា *Tautology*

ដូចនេះ$\overline{\left[(p\Rightarrow q)\vee q\right]}\Rightarrow p$ ពិតជានិច្ច។

ឆ). $\overline{\left[p\Rightarrow(q\wedge p)\right]}\Rightarrow\bar{q}$

<u>ចម្លើយ:</u> $\overline{\left[p\Rightarrow(q\wedge p)\right]}\Rightarrow\bar{q}$ តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	$q\wedge p$	$p\Rightarrow(p\wedge q)$	$\overline{[p\Rightarrow(q\wedge p)]}$	$\bar{q}$	$\overline{[p\Rightarrow(q\wedge p)]}\Rightarrow\bar{q}$
1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1

តាមតារាង គេបាន$\overline{\left[p\Rightarrow(q\wedge p)\right]}\Rightarrow\bar{q}$ ជា *Tautology*

ដូចនេះ$\overline{\left[p\Rightarrow(q\wedge p)\right]}\Rightarrow\bar{q}$ ពិតជានិច្ច។

ជ). $(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow \bar{q})\Rightarrow(r\Rightarrow \bar{p})$

<u>ចម្លើយ:</u> $(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow \bar{q})\Rightarrow(r\Rightarrow \bar{p})$

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	r	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p\Rightarrow q$	$r\Rightarrow \bar{q}$	$r\Rightarrow \bar{p}$	$(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow \bar{q})$	U
1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

តាមតារាងគេបាន $(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow \bar{q})\Rightarrow(r\Rightarrow \bar{p})$ ជា *Tautology*

ដូចនេះ $(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow \bar{q})\Rightarrow(r\Rightarrow \bar{p})$ ពិតជានិច្ច។

ឈ). $(p\Rightarrow r)\Rightarrow\left[(p\Rightarrow \bar{q})\vee(\bar{r}\Rightarrow \bar{q})\right]$

<u>ចម្លើយ:</u> $(p\Rightarrow r)\Rightarrow\left[(p\Rightarrow \bar{q})\vee(\bar{r}\Rightarrow \bar{q})\right]$

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	r	$\bar{q}$	$\bar{r}$	$p\Rightarrow \bar{q}$	$\bar{r}\Rightarrow \bar{q}$	$p\Rightarrow r$	$(p\Rightarrow \bar{q})\vee(\bar{r}\Rightarrow \bar{q})$	U
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

តាមតារាង គេបាន $(p\Rightarrow r)\Rightarrow\left[(p\Rightarrow \bar{q})\vee(\bar{r}\Rightarrow \bar{q})\right]$ ជា *Tautology*

ដូចនេះ$(p\Rightarrow r)\Rightarrow\left[(p\Rightarrow\bar{q})\vee(\bar{r}\Rightarrow\bar{q})\right]$ពិតជានិច្ច។

ញ).$\left\{\left[(p\Rightarrow\bar{q})\wedge(r\Rightarrow p)\right]\wedge q\right\}\Rightarrow\bar{r}$

<u>ចម្លើយ:</u>$\left\{\left[(p\Rightarrow\bar{q})\wedge(r\Rightarrow p)\right]\wedge q\right\}\Rightarrow\bar{r}$

តាង $A=\left\{\left[(p\Rightarrow\bar{q})\wedge(r\Rightarrow p)\right]\wedge q\right\}$

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	r	$\bar{q}$	$\bar{r}$	$p\Rightarrow\bar{q}$	$r\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow\bar{q})\wedge(r\Rightarrow p)$	A	U
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1

តាមតារាង យើងឃើញថា $\left\{\left[(p\Rightarrow\bar{q})\wedge(r\Rightarrow p)\right]\wedge q\right\}\Rightarrow\bar{r}$ ជា*Tautology*

ដូចនេះ $\left\{\left[(p\Rightarrow\bar{q})\wedge(r\Rightarrow p)\right]\wedge q\right\}\Rightarrow\bar{r}$ ពិតជានិច្ច។

ត).$\overline{\left\{\left[(p\Rightarrow q)\wedge(r\vee p)\right]\Rightarrow\left[(q\wedge p)\Rightarrow r\right]\right\}}\Rightarrow p$

<u>ចម្លើយ:</u>

$\overline{\left\{\left[(p\Rightarrow q)\wedge(r\vee p)\right]\Rightarrow\left[(q\wedge p)\Rightarrow r\right]\right\}}\Rightarrow p$

តាង $A=\left[(p\Rightarrow q)\wedge(r\vee p)\right]$, $B=\left[(q\wedge p)\Rightarrow r\right]$

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	r	$p\Rightarrow q$	$r\vee p$	A	$q\wedge p$	B	$A\Rightarrow B$	$\overline{A\Rightarrow B}$	U
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1

តាមតារាង យើងឃើញថា $\overline{\left\{\left[(p\Rightarrow q)\wedge(r\vee p)\right]\Rightarrow\left[(q\wedge p)\Rightarrow r\right]\right\}}\Rightarrow p$ ជា *Tautology*

ដូចនេះ $\overline{\left\{\left[(p\Rightarrow q)\wedge(r\vee p)\right]\Rightarrow\left[(q\wedge p)\Rightarrow r\right]\right\}}\Rightarrow p$ ពិតជានិច្ច។

៧).សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់

ក).សម្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times....\times\frac{2009}{2010}\times\frac{2011}{2012}<\frac{1}{\sqrt{2013}}$

<u>ចម្លើយ:</u>តាង $a=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times.....\times\frac{2009}{2010}\times\frac{2011}{2012}$

តាង $b=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times......\times\frac{2010}{2011}\times\frac{2012}{2013}$

គេបាន $a<b$

$$a^2<ab$$

$$a^2<\frac{1}{2013}$$

$$a<\frac{1}{\sqrt{2013}}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times....\times\frac{2009}{2010}\times\frac{2011}{2012}<\frac{1}{\sqrt{2013}}}$

ខ).បង្ហាញថា $\frac{1}{15}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times.....\times\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$

<u>ចម្លើយ:</u>តាង $p=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times.....\times\frac{99}{100}\ (1)$

គេបាន $p<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}\times....\times\frac{100}{101}\ (2)$

$p > \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times....\times\frac{98}{99}$ (3)

គុណ (1) និង (2)

គេបាន $p^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$ នាំអោយ $p < \frac{1}{10}$ (4)

គុណ (1) និង (3)

គេបាន $p^2 > \frac{1}{200} > \frac{1}{225}$ នាំអោយ $p > \frac{1}{15}$ (5)

តាម (4) និង (5) យើងបាន $\frac{1}{15} < p < \frac{1}{10}$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{15} < \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times.....\times\frac{99}{100} < \frac{1}{10}}$

គ). ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n}} < 3$

ចម្លើយ: ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n}} < 3$

ពិនិត្យ $\forall k \in \mathbb{N}$ គេបាន

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} = \frac{\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k(k+1)}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(k+1)^3} - \sqrt[3]{k^3}}{\sqrt[3]{k(k+1)}\left(\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{k^2}\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{k(k+1)}\left(\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{k^2}\right)}$$

តែ $\frac{1}{\sqrt[3]{k(k+1)}\left(\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{k^2}\right)} > \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(3\sqrt[3]{(k+1)^2}\right)}$

យើងបាន $\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} > \frac{1}{3\sqrt[3]{k(k+1)(k+1)^2}}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k}}-\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}>\frac{1}{3(k+1)\sqrt[3]{k}}$$

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}}<3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}-\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right)$$

បើ $k=1$ នាំអោយ $\frac{1}{2}<3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

$k=2$ នាំអោយ $\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}<3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$

$k=3$ នាំអោយ $\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}<3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$

$k=n$ នាំអោយ $\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$

$$S<3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)<3$$

ដូចនេះ $\boxed{S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+......+\frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n}}<3}$

ឃ).បង្ហាញថាចំពោះ $\forall$ ចំនួនពិត $a+b+c=0$ នោះ $a^3+b^3+c^3=3abc$

<u>ចម្លើយ:</u>បង្ហាញថាចំពោះ $\forall$ ចំនួនពិត $a+b+c=0$ នោះ $a^3+b^3+c^3=3abc$

តាង P ជាពហុធាដែលមានឬស a,b និង c

គេបាន $P(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc$

ដោយ a,b,c ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌសមីការ $P(x)=0$

យើងបាន $a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ac)a-abc=0$ (1)

$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ac)c-abc=0$ (2)

$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ac)b-abc=0$ (3)

យក $(1)+(2)+(3)$ គេបាន

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)+(ab+bc+ac)(a+b+c)-3abc=0$$

តែ $a+b+c=0\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

ដូចនេះ $\boxed{a^3+b^3+c^3=3abc}$ ពិត

ង).បង្ហាញថា $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ ជាចំនួនសនិទាន

ចម្លើយ:បង្ហាញថា $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ ជាចំនួនសនិទាន

តាង $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

គេបាន $x-\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=0$

ដោយ $a+b+c=0$ នាំអោយ $a^3+b^3+c^3=3abc$

គេបាន $x^3-\left(2+\sqrt{5}\right)-\left(2-\sqrt{5}\right)=3x\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}$

$$x^3-\left(2+\sqrt{5}\right)-\left(2-\sqrt{5}\right)=3x\sqrt[3]{4-5}$$

$$x^3-\left(2+\sqrt{5}\right)-\left(2-\sqrt{5}\right)=-3x$$

$$x^3-\left(2+\sqrt{5}\right)-\left(2-\sqrt{5}\right)+3x=0$$

$$x^3+3x-4=0$$

$$(x-1)\left(x^2+x+4\right)=0$$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}; x^2+x+4>0$ ជានិច្ច

គេបាន $x-1=0\Rightarrow x=1$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1\text{ ជាចំនួនសនិទាន}}$

ច).យើងមាន $a+b+c=0$ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2+a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2+b^2}=0$

ចម្លើយ:យើងមាន $a+b+c=0$ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2+a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2+b^2}=0$

ដោយ $a+b+c=0\Rightarrow a+b=-c$

$$a^2+2ab+b^2=c^2$$
$$a^2+b^2-c^2=-2ab$$
$$a^2+2ac+c^2=b^2$$
$$a^2+c^2-b^2=-2ac$$
$$b^2+c^2+2bc=a^2$$
$$b^2+c^2-a^2=-2bc$$
$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=-\frac{1}{2bc}-\frac{1}{2ac}-\frac{1}{2ab}$$
$$=-\frac{(a+b+c)}{2abc}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{b^2+c^2+a^2}+\frac{1}{c^2+a^2+b^2}=0 \quad ;abc\neq 0}$

ឆ).បើ $a+b+c=0$ នោះបង្ហាញថា $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1$

ចម្លើយ: បើ $a+b+c=0$ នោះបង្ហាញថា $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1$

ដោយ $abc=1\Rightarrow a=\frac{1}{bc}$

គេបាន $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{b^2+c^2+a^2}+\frac{1}{c^2+a^2+b^2}=\frac{\frac{1}{bc}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{bc}+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{bc+b+1}$

$$=\frac{1+b+bc}{1+b+bc}$$
$$=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បើ } a+b+c=0 \text{ នោះ } \frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1}$

ជ).គេអោយ $0<x_1<x_2<.......<x_{12}$ ។

បង្ហាញថា $\frac{x_1+x_2+x_3+....+x_9}{x_3+x_6+x_9}+\frac{x_1+x_2+x_3+.....+x_{12}}{x_4+x_8+x_{12}}<7$

ចម្លើយ: គេអោយ $0<x_1<x_2<.......<x_{12}$

បង្ហាញថា $\frac{x_1+x_2+x_3+....+x_9}{x_3+x_6+x_9}+\frac{x_1+x_2+x_3+.....+x_{12}}{x_4+x_8+x_{12}}<7$

ដោយ $x_1 < x_2 < x_3$ នោះ $x_1 + x_2 + x_3 < 3x_3$

$x_4 < x_5 < x_6$ នោះ $x_4 + x_5 + x_6 < 3x_6$

$x_7 < x_8 < x_9$ នោះ $x_7 + x_8 + x_9 < 3x_9$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_9 < 3\left(x_3 + x_6 + x_9\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_9}{x_3 + x_6 + x_9} < 3\ (1)$$

ហើយ $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ នោះ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 4x_4$

$x_5 < x_6 < x_7 < x_8$ នោះ $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 < 4x_8$

$x_9 < x_{10} < x_{11} < x_{12}$ នោះ $x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} < 4x_{12}$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{12} < 4\left(x_4 + x_8 + x_{12}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{12}}{x_4 + x_8 + x_{12}} < 4\ (2)$$

តាម (1) និង (2)

គេបាន $$\boxed{\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_9}{x_3 + x_6 + x_9} + \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{12}}{x_4 + x_8 + x_{12}} < 7}$$

ឈ). ១). បើxនិងyជាចំនួនគត់សេសនោះ$x+y$ជាចំនួនគត់គូ

២). បើxនិងyជាចំនួនគត់សេសនោះxyជាចំនួនគត់សេស។

ចម្លើយ:

១). បង្ហាញថាបើxនិងyជាចំនួនគត់សេសនោះ$x+y$ជាចំនួនគត់គូ

តាង $x = 2k + 1$ និង $y = 2l + 1\,; k, l \in \mathbb{N}$

គេបាន $x + y = 2k + 1 + 2l + 1$

$= 2k + 2l + 2$

$= 2(k + l + 1)$ ជាចំនួនគត់គូ

២). បើxនិងyជាចំនួនគត់សេសនោះxyជាចំនួនគត់សេស

តាង $x = 2m + 1$ និង $y = 2n + 1\,; m, n \in \mathbb{N}$

គេបាន $xy = \left(2m + 1\right)\left(2n + 1\right)$

$= 2(2mn + m + n) + 1$ ជាចំនួនគត់សេស

៨).សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត

ក).គេអោយចំនួនបឋមបីផ្សេងគ្នា $p,q\,\&\,r$ បង្ហាញថា $\sqrt[3]{p},\sqrt[3]{q}\,\&\,\sqrt[3]{r}$ មិនមែនជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តណាមួយឡើយ។

<u>ចម្លើយ:</u> $p,q\,\&\,r$ ជាចំនួនបឋមបីផ្សេងគ្នាបង្ហាញថា $\sqrt[3]{p},\sqrt[3]{q}\,\&\,\sqrt[3]{r}$ មិនមែនជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តណាមួយឡើយ

ឧបមាថា $\sqrt[3]{p},\sqrt[3]{q}\,\&\,\sqrt[3]{r}$ ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

នោះមានចំនួនពិត a,b,c និង d ដែល $\sqrt[3]{p}=a,\sqrt[3]{q}=a+bd,\sqrt[3]{r}=a+cd$

គេបាន $d=\dfrac{\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{p}}{b}=\dfrac{\sqrt[3]{r}-\sqrt[3]{p}}{c}$

$$\Leftrightarrow c(\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{p})=b(\sqrt[3]{r}-\sqrt[3]{p})$$

$$c\sqrt[3]{q}-c\sqrt[3]{p})=b\sqrt[3]{r}-b\sqrt[3]{p})$$

$$(b-c)\sqrt[3]{p}=b\sqrt[3]{r}-c\sqrt[3]{q}$$

តាង α,β និង λ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $\alpha=b-c,\beta=-c,\lambda=b$

យើងបាន៖

$$\alpha\sqrt[3]{p}=\lambda\sqrt[3]{r}+\beta\sqrt[3]{q}$$

$$\alpha^3p=\lambda^3r+3\lambda^2\beta\sqrt[3]{r^2q}+3\lambda\beta^2\sqrt[3]{rq^2}$$

$$\alpha^3p=\beta^3q+\lambda^3r+3\lambda\beta\sqrt[3]{r^2q}\left(\lambda\sqrt[3]{r}+\beta\sqrt[3]{q}\right)$$

$$\alpha^3p=\beta^3q+\lambda^3r+3\lambda\beta\alpha^3\sqrt[3]{pqr}$$

$$\sqrt[3]{pqr}=\frac{\alpha^3p-\beta^3q-\lambda^3r}{3\alpha\beta\lambda}$$

ផ្ទុយពីការពិតព្រោះអង្គទី១ជាចំនួនអសនិទានតែអង្គទី២ជាចំនួនសនិទាន

<u>ដូចនេះ</u> $\boxed{\sqrt[3]{p},\sqrt[3]{q}\ \&\ \sqrt[3]{r}\text{ មិនមែនជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តណាមួយឡើយ}}$

ខ).ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall a;b\in\mathbb{R}$ គេបាន $e^a+e^b\geq 2\sqrt{e^{a+b}}$

<u>ចម្លើយ:</u>ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall a;b\in\mathbb{R}$ គេបាន $e^a+e^b\geq 2\sqrt{e^{a+b}}$

តាង $p:\forall a;b\in\mathbb{R};e^a+e^b\geq 2\sqrt{e^{a+b}}$

$\neg p:\forall a;b\in\mathbb{R};e^a+e^b< 2\sqrt{e^{a+b}}$

គេបាន: $e^a+e^b-2\sqrt{e^{a+b}}<0$

$\left(\sqrt{e^a}-\sqrt{e^b}\right)^2<0$ ផ្ទុយពីការពិត

$\Rightarrow \neg p$:ជាសំណើមិនពិត

ដូចនេះ $\boxed{\forall a;b\in\mathbb{R},\ e^a+e^b\geq 2\sqrt{e^{a+b}}}$

គ).បង្ហាញថា $\sqrt{m}$ ជាចំនួនអសនិទាន(m មិនមែនជាការេប្រាកដ)

ចម្លើយ:បង្ហាញថា $\sqrt{m}$ ជាចំនួនអសនិទាន(m មិនមែនជាការេប្រាកដ)

ឧបមាថា $\sqrt{m}$ ជាចំនួនសនិទាន

$\sqrt{m}=\dfrac{a}{b}$ ដែល a និង b បឋមរវាងគ្នា

$m=\dfrac{a^2}{b^2}$ នាំអោយ $a^2=mb^2$

គេបាន a^2 ជាពហុគុណនៃ m នោះ a ជាពហុគុណនៃ m ដែរ

គេបាន

$a=km$

$k^2m^2=mb^2$

$b^2=\dfrac{m^2k^2}{m}$

$b^2=mk^2$

គេបាន b^2 ជាពហុគុណនៃ m នោះ b ជាពហុគុណនៃ m ដែរដោយ a និង b មានតួចែករួម m ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែរថា a និង b បឋមរវាងគ្នា

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{m}\ \text{ជាចំនួនអសនិទាន}}$

៩). សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

ក).បង្ហាញថាចំពោះចំនួនគត់ m និង n បើផលគុណ mn មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 ទេ នោះ m និង n ក៏មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 ដែរ។

ចម្លើយ:តាង $p:mn$ មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3

$q:m$ និង n មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3

$\neg p:mn$ ជាពហុគុណនៃ 3

$\neg q: m$ និង n ជាពហុគុណនៃ 3

បើ $m=3k$ និង $n=3l$

នោះ $mn=3k\times 3l$

$mn=3(3kl)$

គេបាន $\neg q\Rightarrow \neg p$ ជាសំណើពិត

<u>ដូចនេះ</u> $p\Rightarrow q$ ពិត

ខ).បង្ហាញថាបើ n^2 មិនមែនជាពហុគុណនៃ 5 នោះ n ក៍មិនមែនជាពហុគុណនៃ 5 ដែរ

<u>ចម្លើយ:</u> តាង $p: n^2$ មិនមែនជាពហុគុណនៃ 5

$q: n$ មិនមែនជាពហុគុណនៃ 5

$\neg p: n^2$ ជាពហុគុណនៃ 5

$\neg q: n$ ជាពហុគុណនៃ 5

បើ $n=5k$ និង $n^2=25k^2$ នោះ

$nn=5k\times 5k$

$n^2=5(5k^2)$

គេបាន $\neg q\Rightarrow \neg p$ ជាសំណើពិត

<u>ដូចនេះ</u> $p\Rightarrow q$ ពិត

គ).បង្ហាញថាបើ $(x+1)(x-2)=0$ នោះ $x\neq 0$

<u>ចម្លើយ:</u>តាង p :ជាសំណើ $(x+1)(x-2)=0$

q :ជាសំណើ $x\neq 0$

$\neg p$:ជាសំណើ $(x+1)(x-2)\neq 0$

$\neg q$:ជាសំណើ $x=0$

បើ $x=0$ នោះ $p:(0+1)(0-2)=-2$

គេបាន $\neg q\Rightarrow \neg p$ ជាសំណើពិត

<u>ដូចនេះ</u> $p\Rightarrow q$ ពិត

ឃ).បង្ហាញថាបើ $x(x-5)<0$ នោះ $0<x<5$

<u>ចម្លើយ:</u> តាង p :ជាសំណើ $x(x-5)<0$

q :ជាសំណើ $0<x<5$

$\neg p$:ជាសំណើ $x(x-5)>0$

$\neg q$: ជាសំណើ $5 < x < 0$

បើ $x > 5$ នោះ $p : x(x-5) > 0$

បើ $x < 0$ នោះ $p : x(x-5) > 0$

គេបាន $\neg q \Rightarrow \neg p$ ជាសំណើពិត

<u>ដូចនេះ</u> $p \Rightarrow q$ ពិត

ង).បង្ហាញថាបើ $x^2 - 4 < 0$ នោះ $-2 < x < 2$

<u>ចម្លើយ:</u>តាង p : ជាសំណើ $x^2 - 4 < 0$

q : ជាសំណើ $-2 < x < 2$

$\neg p$: ជាសំណើ $x^2 - 4 > 0$

$\neg q$: ជាសំណើ $2 < x < -2$

បើ $x > 2$ នោះ $p : x^2 - 4 > 0$

បើ $x < -2$ នោះ $p : x^2 - 4 > 0$

គេបាន: $\neg q \Rightarrow \neg p$ ជាសំណើពិត

<u>ដូចនេះ</u> $p \Rightarrow q$ ពិត

ច).តើសំណើ"សុខនិយាយថាខ្លួនកំពុងនិយាយកុហក"មានតម្លៃតក្កវិទ្យាច្បាស់លាស់ឬទេ?

<u>ចម្លើយ:</u>យើងមិនអាចវាយតម្លៃច្បាស់លាស់ទៅលើសំណើ"សុខនិយាយថាខ្លួនកំពុងនិយាយកុហក"ទេព្រោះ៖

- បើសុខនិយាយពិតនោះ"សុខកំពុងកុហកមែន"
- បើសុខនិយាយមិនពិតនោះ"សុខមិនកំពុងកុហកទេ"

ឆ).នៅក្នុងទ្រឹស្តីបទមួយគេអោយនិយមន័យទៅមនុស្សភរដូចតទៅនេះ៖ មនុស្សភរជាមនុស្សដែលមិនដែលនិយាយការពិតទាល់តែសោះ។បើគឹមហាក់និយាយថា "ខ្លួនជាមនុស្សភរ" ចូរបង្ហាញថាគឹមហាក់មិនមែនជាមនុស្សភរទេ។

<u>ចម្លើយ:</u>បង្ហាញថាគឹមហាក់មិនមែនជាមនុស្សភរ៖

- បើសំណើ:"គឹមហាក់និយាយថាខ្លួនជាមនុស្សភរ"ពិត

  $\Rightarrow$គឹមហាក់និយាយការពិតតែមនុស្សភរមិនដែលនិយាយការពិតទាល់តែសោះ។

  ដូច្នេះ គឹមហាក់និយាយការពិតនេះមិនមែនជាមនុស្សភរទេ។
- បើសំណើ:"គឹមហាក់និយាយថាខ្លួនជាមនុស្សភរ"មិនពិត

$\Rightarrow$ គឺមហាក់មិនមែនជាមនុស្សភរទេ។

ដូច្នេះចំពោះគ្រប់ករណីគឺមហាក់មិនមែនជាមនុស្សភរទេ។

ជ).រូបវិទូម្នាក់បានធ្វើវិចារដូចខាងក្រោមនេះ៖

- បើសម្មតិកម្មរបស់ខ្ញុំត្រឹមត្រូវការពិសោធន៍ត្រូវតែបានសម្រេច
- ការពិសោធន៍បានសម្រេចហើយ
- ដូច្នេះ សម្មតិកម្មខ្ញុំត្រឹមត្រូវ។តើវិចារនេះត្រឹមត្រូវឬទេ?

ចម្លើយ:វិចារនេះត្រឹមត្រូវឬទេ?

តាង p ជាសំណើ"បើសម្មតិកម្មរបស់ខ្ញុំត្រឹមត្រូវ"

q ជាសំណើ"ការពិសោធន៍ត្រូវតែបានសម្រេច"

តាមសំណើទីមួយនៃវិចារគឺ $p \Rightarrow q$ ហើយផ្នែកខាងក្រោយនៃវិចារគឺ $q \Rightarrow p$ តែ $p \Rightarrow q$ មិនសមមូលនិង $q \Rightarrow p$ ទេ

ដូចនេះ វិចារនេះមិនត្រឹមត្រូវទេ។

ឈ).តើវិចារខាងក្រោមនេះត្រឹមត្រូវឬទេ?

- ទាហានទាំងអស់សុទ្ធតែចេះដើរត្រូវចង្វាក់ជើង
- កូនក្មេងខ្លះមិនចេះដើរត្រូវចង្វាក់ជើងទេ
- ដូច្នោះកូនក្មេងទាំងនេះមិនមែនជាទាហានទេ

ចម្លើយ:តើវិចារនេះត្រឹមត្រូវឬទេ

តាង p ជាសំណើ: "ជាទាហាន"

q ជាសំណើ: "អ្នកចេះដើរត្រូវចង្វាក់ជើង"

តាមសំណើទីមួយនៃវិចារគឺ $p \Rightarrow q$ ហើយតាមសំណើទី (2) និងទី (3) នៃវិចារគឺ $\neg q \Rightarrow \neg p$ តាមទ្រឹស្តីបទ: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$ ពិត

ដូចនេះ វិចារនេះពិតជាត្រឹមត្រូវ។

ញ).បើសិនជាមានចូររកសន្និដ្ឋានមួយដែលជាវិបាកនៃសំណើទាំងឡាយខាងក្រោមនេះ៖

vi. កាលណាខ្ញុំធ្វើលំហាត់ដោយខ្ញុំមិនថ្ងូរគឺខ្ញុំយល់

vii. លំហាត់នេះមិនដូចជាលំហាត់ដែលខ្ញុំធ្លាប់បានធ្វើទេ

viii. គ្មានលំហាត់ងាយណាមួយធ្វើអោយខ្ញុំឈឺក្បាលទេ

ix. ខ្ញុំមិនយល់លំហាត់ណាដែលមិនដូចលំហាត់ដែលខ្ញុំធ្លាប់បានធ្វើទេ

x.ខ្ញុំមិនដែលថ្ងូរនៅពេលធ្វើលំហាត់ទេលើកលែងតែវាធ្វើអោយខ្ញុំឈឺក្បាល។

<u>ចម្លើយ:</u> រកសេចក្តីសន្និដ្ឋានដែលជាវិបាកនៃសំណើ៖

យើងសង្កេតឃើញថាពាក្យដែលនិយាយតែម្តងគឺ" លំហាត់នេះ" និង " លំហាត់ងាយ"

យើងបាន:

- លំហាត់នេះមិនដូចលំហាត់ដែលខ្ញុំធ្លាប់បានធ្វើទេ
- ដូច្នោះខ្ញុំមិនយល់វាទេ(តាមសំណើទី4)
- ដូច្នោះខ្ញុំថ្ងូរ(តាមសំណើទី1)
- ដូច្នោះវាធ្វើអោយខ្ញុំឈឺក្បាល(តាមសំណើទី5)
- ដូច្នោះវាមិនមែនជាលំហាត់ងាយទេ(តាមសំណើទី3)

<u>ដូចនេះ</u> សេចក្តីសន្និដ្ឋានដែលជាវិបាកនៃសំណើទាំងអស់នេះគឺលំហាត់នេះមិនមែនជាលំហាត់ងាយទេ។

១០) សម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេរលក្ខខណ្ឌ

ក. ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេរលក្ខ័ណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

. $x^2-x-6=0$ លុះត្រាតែ $x=-2\ ;\ x=3$

<u>ចម្លើយ:</u>

ក. ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេរលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

. $x^2-x-6=0$ លុះត្រាតែ $x=-2\ ;\ x=3$

តាង $p: x^2-x-6=0$

$q: x=-2\ ;\ x=3$

គេបាន: $p \Leftrightarrow q: x^2-x-6=0$ លុះត្រាតែ $x=-2\ ;\ x=3$

ដើម្បីអោយ $p \Leftrightarrow q$ ពិត លុះត្រាតែ $p \Rightarrow q$ ពិត និង $q \Rightarrow p$ ពិត

+រក $p \Rightarrow q$

$p \Leftrightarrow q: x^2-x-6=0$ នោះ $x=-2\ ;\ x=3$

ដោ $p: x^2-x-6=0$

$x^2-3x+2x-6=0$

$$x(x-3)+2(x-3)=0$$
$$(x-3)(x+2)=0$$
$$\left[\begin{array}{l} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{array}\right.$$

គេបាន: $x^2-x-6=0$ នោះ $x=-2\ ;x=3$ ពិតនោះ $p\Rightarrow q$ ពិត។

+ រក $q\Rightarrow p$

$q\Rightarrow p:\ x=-2\ ;x=3$ នោះ $x^2-x-6=0$

ដោយ $q:x=-2\ ;x=3$

- វិធីទី១.

$x=-2$ នោះ $x+2=0 \qquad (1)$

$x=3$ នោះ $x-3=0 \qquad (2)$

គុណ $(1)\&(2)$ គេបាន: $x^2+2x-3x-6=0$

$x^2-x-6=0$ ជាសំណើ p

គេបាន: $q\Rightarrow p$ ពិត

- វិធីទី២.

បើ $x=-2$ នោះ $x^2-x-6=0$

$$(-2)^2-(-2)-6=0$$
$$6-6=0$$
$$0=0 \text{ ពិត}$$

បើ $x=3$ នោះ $x^2-x-6=0$

$$3^2-3-6=0$$
$$9-9=0$$
$$0=0 \text{ ពិត}$$

គេបាន: $q\Rightarrow p$ ពិត

ដោយ $p\Rightarrow q$ ពិត $q\Rightarrow p$ ពិត នោះ $p\Leftrightarrow q$ ពិត។

<u>ដូចនេះ</u>$x^2-x-6=0$ លុះត្រាតែ $x=-2\ ,x=3$

ខ. ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេរលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$-2x^2+11x-5=0$ លុះត្រាតែ $x=\dfrac{1}{2}\ ;x=5$

<u>*ចម្លើយ:*</u>*ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេរលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖*

$-2x^2+11x-5=0$ *លុះត្រាតែ* $x=\frac{1}{2}\,;\, x=5$

តាង $p:-2x^2+11x-5=0$

$q:\ x=\frac{1}{2}\,;\, x=5$

គេបាន $p\Rightarrow q:-2x^2+11x-5=0$ *លុះត្រាតែ* $x=\frac{1}{2}\ ;\ x=5$

ដើម្បីអោយ $p\Leftrightarrow q$ *ពិត លុះត្រាតែ* $p\Rightarrow q$ *ពិតនិង* $q\Rightarrow p$ *ពិត។*

+*រក* $p\Rightarrow q$

$p\Rightarrow q:-2x^2+11x-5=0$ *នោះ* $x=\frac{1}{2}\ ;\ x=5$

ដោយ $p:-2x^2+11x-5=0$

តាម $\Delta=b^2-4ac$

$=11^2-4(-2)(-5)$

$\Delta=121-40=81$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{81}=9$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-11-9}{2(-2)}=\frac{-20}{-4}=5$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-11+9}{-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

ដោយ $x=\frac{1}{2}\ ;\ x=5$ *ជាសំណើ* q *នោះ* $p\Rightarrow q$ *ពិត*

+ *រក* $p\Rightarrow q$

គេបាន $p\Rightarrow q:\ x=\frac{1}{2}\ ;\ x=5$ *នោះ* $-2x^2+11x-5=0$

ដោយ $x=\frac{1}{2}$ *នោះ* $x-\frac{1}{2}=0 \quad (1)$

$x=5$ *នោះ* $x-5=0 \quad (2)$

គុណ $(1)\&(2)$ *គេបាន:*

$x^2-\frac{1}{2}x-5x+\frac{5}{2}=0$

$2x^2-x-10x+5=0$

$2x^2-11x+5=0$ គុណនឹង (-1)

$-2x^2+11x-5=0$ ជាសំនើ p

គេបាន: $q\Rightarrow p$ ពិត

ដោយ $p\Rightarrow q$ ពិត $q\Rightarrow p$ ពិត

គេបាន: $p\Leftrightarrow q$ ពិត

<u>ដូចនេះ</u> $p\Leftrightarrow q$ ពិត

គ.ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេរលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x^2-9=0$ លុះត្រាតែ $x=-3\,;x=3$

<u>ចម្លើយ:</u>ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេរលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x^2-9=0$ លុះត្រាតែ $x=-3\,;x=3$

តាង $p: x^2-9=0$

$q: x=-3\ ;\ x=3$

គេបាន $p\Leftrightarrow q: x^2-9=0$ លុះត្រាតែ $x=-3\ ;\ x=3$

ដើម្បីអោយ $p\Leftrightarrow q$ ពិត លុះត្រាតែ $p\Rightarrow q$ ពិតនិង $q\Rightarrow p$ ពិត

+ រក $p\Rightarrow q$

$p\Rightarrow q: x^2-9=0$ នោះ $x=-3\ ;\ x=3$

ដោយ $p: x^2-9=0$

$x^2=9$ នោះ $x=\pm\sqrt{9}$

$x=\pm 3$

$x=-3\ ;\ x=3$ ជាសំណើ q

គេបាន: $p\Rightarrow q$ ពិត

+ រក $q\Rightarrow p$

$q\Rightarrow p: x=-3\,;\,x=3$ នោះ $x^2-9=0$

ដោយ $x=-3$ នោះ $x+3=0$ (1)

$x=3$ នោះ $x-3=0$ (2)

គុណ $(1)\&(2)$ គេបាន:

$x^2+3x-3x-9=0$

$x^2-9=0$ ជាសំនើ p

គេបាន: $q \Rightarrow p$ ពិត

ដោយ $p \Rightarrow q$ ពិត ហើយ $q \Rightarrow p$ ពិត

នោះ $p \Leftrightarrow q$ ពិត

ដូចនេះ $p \Leftrightarrow q$ ពិត

ឃ).ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$(-x+5)(2x-3)=0$ លុះត្រាតែ $x=\frac{3}{2}\,;\,x=5$

ចម្លើយ:ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេរលក្ខខណ្ឌ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$(-x+5)(2x-3)=0$ លុះត្រាតែ $x=\frac{3}{2}\,;\,x=5$

តាង $p:\,(-x+5)(2x-3)=0$

$q:\,x=\frac{3}{2}\;;\;x=5$

$p \Leftrightarrow q:\,(-x+5)(2x-3)=0$ លុះត្រាតែ $x=\frac{3}{2}\;;\;x=5$

ដើម្បីអោយ $p \Leftrightarrow q$ ពិត លុះត្រាតែ $p \Rightarrow q$ ពិត និង $q \Rightarrow p$ ពិត

+ រក $p \Rightarrow q$

$p \Rightarrow q:\,(-x+5)(2x-3)=0$ នោះ $x=\frac{3}{2}\;;\;x=5$

ដោយ $p:\,(-x+5)(2x-3)=0$

$$\left[\begin{array}{l}-x+5=0\\2x-3=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=5\\x=\frac{3}{2}\end{array}\right.$$ ជាសំណើ q

គេបាន $p \Rightarrow q$ ពិត

+ រក $q \Rightarrow p$

$q \Rightarrow p:\,x=\frac{3}{2}\;;\;x=5$

ដោយ $x=\frac{3}{2}$ នោះ $x-\frac{3}{2}=0$

$$2x-3=0 \qquad (1)$$

ដោយ $x=5$ នោះ $x-5=0$

$-x+5=0 \quad (2)$

យក (1) គុណ (2) គេបាន:

$(2x-3)(-x+5)=0$

$(-x+5)(2x-3)=0$ ជាសំណើ p

គេបាន $q \Rightarrow p$ ពិត

ដោយ $p \Rightarrow q$ ពិត $q \Rightarrow p$ ពិត

គេបាន $p \Leftrightarrow q$ ពិត

<u>ដូចនេះ</u> $p \Leftrightarrow q$ ពិត

ង). ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x=-2\,;\, x=5$ លុះត្រាតែ $x^2-3x-10=0$

<u>ចម្លើយ:</u>ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេរលក្ខខណ្ឌ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x=-2\,;\, x=5$ លុះត្រាតែ $x^2-3x-10=0$

តាង $p:\ x=-2\ ;\ x=5$

$q:\ x^2-3x-10=0$

$p \Leftrightarrow q:\ x=-2\ ;\ x=5$ លុះត្រាតែ $x^2-3x-10=0$

ដើម្បីអោយ $p \Leftrightarrow q$ ពិត កាលណា $p \Rightarrow q$ ពិត និង $q \Rightarrow p$ ពិត

+ រក $p \Rightarrow q$

$p \Rightarrow q:\ x=-2\ ;\ x=5$ នោះ $x^2-3x-10=0$

ដោយ $p:\ x=-2\ ;\ x=5$

ដោយ $x=-2$ នោះ $x+2=0 \quad (1)$

$x=5$ នោះ $x-5=0 \quad (2)$

គុណ $(1)\&(2)$ គេបាន:

$x^2+2x-5x-10=0$

$x^2-3x-10=0$ ជាសំនើ q

គេបាន: $p \Rightarrow q$ ពិត

+ រក $q \Rightarrow p$

$q \Rightarrow p:\ x^2-3x-10=0$ នោះ $x=-2\ ;\ x=5$

$$q:\ x^2-3x-10=0$$
$$x^2+2x-5x-10=0$$
$$\left(x^2+2x\right)-\left(5x+10\right)=0$$
$$x\left(x+2\right)-5\left(x+2\right)=0$$
$$\left(x+2\right)\left(x-5\right)=0$$
$$\left[\begin{array}{l} x+2=0 \ \text{នោះ}\ x=-2 \\ x-5=0 \ \text{នោះ}\ x=5 \end{array}\right.\ \text{ជាសំនើ}\ p$$

គេបាន: $q\Rightarrow p$ ពិត

ដោយ $p\Rightarrow q$ ពិត $q\Rightarrow p$ ពិត

នោះ $p\Leftrightarrow q$ ពិត

<u>ដូចនេះ</u> $p\Leftrightarrow q$ ពិត

ច .ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេរលក្ខខណ្ឌ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x=-3\,;\,x=\dfrac{1}{2}$ លុះត្រាតែ $2x^2+5x-3=0$

<u>ចម្លើយ:</u> ច). ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេរលក្ខខណ្ឌ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x=-3\,;\,x=\dfrac{1}{2}$ លុះត្រាតែ $2x^2+5x-3=0$

តាង $p:\ x=-2\ ;\ x=\dfrac{1}{2}$

$$q:\ 2x^2+5x-3=0$$

$p\Leftrightarrow q:\ x=-3\ ;\ x=\dfrac{1}{2}$ លុះត្រាតែ $2x^2+5x-3=0$

ដើម្បីអោយ $p\Leftrightarrow q$ ពិត កាលណា $p\Rightarrow q$ ពិត និង $q\Rightarrow p$ ពិត

+ រក $p\Rightarrow q$

$p\Rightarrow q:\ x=-3\ ;\ x=\dfrac{1}{2}$ នោះ $2x^2+5x-3=0$

ដោយ $p:\ x=-3\ ;\ x=\dfrac{1}{2}$

ដោយ $x=-3$ នោះ $x+3=0 \qquad (1)$

$x=\dfrac{1}{2}$ នោះ $x-\dfrac{1}{2}=0 \qquad (2)$

គុណ $(1)\&(2)$ គេបាន:

$$x^2+3x-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$$

$$2x^2+6x-x-3=0$$

$2x^2+5x-3=0$ ជាសំនើ q

គេបាន: $p\Rightarrow q$ ពិត

+ រក $q\Rightarrow p$

$q\Rightarrow p:\ 2x^2+5x-3=0$ នោះ $x=-3\ ;\ x=\frac{1}{2}$

$$q:\quad 2x^2+5x-3=0$$

$$2x^2+6x-x-3=0$$

$$\left(2x^2+6x\right)-\left(x+3\right)=0$$

$$x\left(x+3\right)-\left(x+3\right)=0$$

$$\left(x+3\right)\left(2x-1\right)=0$$

$\left[\begin{array}{l} x+3=0 \text{ នោះ } x=-3 \\ 2x-1=0 \text{ នោះ } x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$ ជាសំណើ p

គេបាន: $q\Rightarrow p$ ពិត

ដោយ $p\Rightarrow q$ ពិត $q\Rightarrow p$ ពិត

នោះ $p\Leftrightarrow q$ ពិត

<u>ដូចនេះ</u> $p\Leftrightarrow q$ ពិត

ឆ. ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x\neq\frac{7}{2}\,;\,x\neq 4$ លុះត្រាតែ $-2x^2+15x-28\neq 0$

<u>ចម្លើយ:</u> ឆ. ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x\neq\frac{7}{2}\,;\,x\neq 4$ លុះត្រាតែ $-2x^2+15x-28\neq 0$

តាង $p:\ x\neq\frac{7}{2}\ ;\ x\neq 4$

$q:\ -2x^2+15x-28\neq 0$

$p\Leftrightarrow q:\ x\neq\frac{7}{2}\ ;\ x\neq 4$ លុះត្រាតែ $-2x^2+15x-28\neq 0$

ដើម្បីអោយ $p\Leftrightarrow q$ ពិត កាលណា $p\Rightarrow q$ ពិត និង $q\Rightarrow p$ ពិត

+ រក $p \Rightarrow q$

$$p \Rightarrow q: x \neq \frac{7}{2} \ ; \ x \neq 4 \text{ នោះ } -2x^2+15x-28 \neq 0$$

ដោយ $p: x \neq \frac{7}{2} \ ; \ x \neq 4$

ដោយ $x \neq \frac{7}{2}$ នោះ $x - \frac{7}{2} \neq 0 \qquad (1)$

$x \neq 4$ នោះ $x - 4 \neq 0 \qquad (2)$

គុណ $(1)\&(2)$ គេបាន:

$$x^2 - \frac{7}{2}x - 4x + 4 \cdot \frac{7}{2} \neq 0$$

$$2x^2 - 7x - 8x + 28 \neq 0$$

$$2x^2 - 15x + 28 \neq 0$$

$-2x^2 + 15x - 28 \neq 0$ ជាសំនើ q

គេបាន: $p \Rightarrow q$ ពិត

+ រក $q \Rightarrow p$

$$q \Rightarrow p: -2x^2+15x-28 \neq 0 \text{ នោះ } x \neq \frac{7}{2} \ ; \ x \neq 4$$

$$q: \quad -2x^2+15x-28 \neq 0$$

$$-2x^2+8x+7x-28 \neq 0$$

$$\left(-2x^2+8x\right)+\left(7x-28\right) \neq 0$$

$$-2x\left(x-4\right)+7\left(x-4\right) \neq 0$$

$$\left(x-4\right)\left(-2x+7\right) \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x-4 \neq 0 \text{ នោះ } x \neq 4 \\ -2x+7 \neq 0 \text{ នោះ } x \neq \frac{7}{2} \end{array}\right. \text{ ជាសំនើ } p$$

គេបាន: $q \Rightarrow p$ ពិត

ដោយ $p \Rightarrow q$ ពិត $q \Rightarrow p$ ពិត

នោះ $p \Leftrightarrow q$ ពិត

ដូចនេះ $p \Leftrightarrow q$ ពិត

ជ.ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x \neq -2\,;\, x \neq 4$ លុះត្រាតែ $x^2-2x-8 \neq 0$

<u>ចម្លើយ:</u> ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេរលក្ខខណ្ឌ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x \neq -2\,;\, x \neq 4$ លុះត្រាតែ $x^2-2x-8 \neq 0$

តាង $p: x \neq -2 \;\; ; \;\; x \neq 4$

$q: x^2-2x-8 \neq 0$

$p \Leftrightarrow q: x \neq -2 \;\; ; \;\; x \neq 4$ លុះត្រាតែ $x^2-2x-8 \neq 0$

ដើម្បីអោយ $p \Leftrightarrow q$ ពិតកាលណា $p \Rightarrow q$ ពិត និង $p \Rightarrow q$ ពិត

+ រក $p \Rightarrow q$

$p \Rightarrow q: x \neq -2 \;\; ; \;\; x \neq 4$ នោះ $x^2-2x-8 \neq 0$

ដោយ $p: x \neq -2 \;\; ; \;\; x \neq 4$

ដោយ $x \neq -2$ នោះ $x+2 \neq 0 \qquad (1)$

$x \neq 4$ នោះ $x-4 \neq 0 \qquad (2)$

គុណ $(1) \& (2)$ គេបាន:

$$x^2+2x-4x-8 \neq 0$$

$x^2-2x-8 \neq 0$ ជាសំនើ q

គេបាន: $p \Rightarrow q$ ពិត

+ រក $q \Rightarrow p$

$q \Rightarrow p: x^2-2x-8 \neq 0$ នោះ $x \neq -2 \;\; ; \;\; x \neq 4$

$$q: \qquad x^2-2x-8 \neq 0$$

$$x^2+2x-4x-8 \neq 0$$

$$\left(x^2+2x\right)-\left(4x+8\right) \neq 0$$

$$x\left(x+2\right)-4\left(x+2\right) \neq 0$$

$$\left(x+2\right)\left(x-4\right) \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{ll} x+2 \neq 0 & \text{នោះ } x \neq -2 \\ x-4 \neq 0 & \text{នោះ } x \neq 4 \end{array}\right. \text{ ជាសំនើ } p$$

គេបាន: $q \Rightarrow p$ ពិត

ដោយ $p \Rightarrow q$ ពិត $\quad q \Rightarrow p$ ពិត

នោះ $p \Leftrightarrow q$ ពិត

<u>ដូចនេះ</u> $p \Leftrightarrow q$ ពិត

ឈ .ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x^2+x-6<0$ លុះត្រាតែ $x<2\,;\,x>-3$

<u>ចម្លើយ:</u> ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x^2+x-6<0$ លុះត្រាតែ $x<2\,;\,x>-3$

តាង $p:\ x^2+x-6<0$

$q:\ x<2\ ;\ x>-3$

$p \Leftrightarrow q:\ x^2+x-6<0$ លុះត្រាតែ $x<2\ ;\ x>-3$

ដើម្បីអោយ $p \Leftrightarrow q$ ពិតលុះត្រាតែ $p \Rightarrow q$ ពិត និង $q \Rightarrow p$ ពិត

+ រក $p \Rightarrow q$

$p \Rightarrow q:\ x^2+x-6<0$ នោះ $x<2\ ;\ x>-3$

ដោយ $p:\ x^2+x-6<0$

តាម $ax^2+bx+c<0\ ,\ \Delta>0\,;\,a>0$

គេបាន: $\left[\begin{array}{l} x<x_2 \\ x>x_1 \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} p:\quad & x^2+x-6<0 \\ & x^2+3x-2x-6<0 \\ & \left(x^2+3x\right)-\left(2x+6\right)<0 \\ & x\left(x+3\right)-2\left(x+3\right)<0 \\ & \left(x+3\right)\left(x-2\right)<0 \end{aligned}$$

បើ $x+3=0$ នោះ $x=-3$

$x-2=0$ នោះ $x=2$

គេបាន $x_1=-3\ ;\ x_2=2$

$$\left(x+3\right)\left(x-2\right)<0$$

គេបាន: $\left[\begin{array}{l} x<2 \\ x>-3 \end{array}\right.$ ជាសំណើ q

គេបាន: $p \Rightarrow q$ ពិត

+ រក $q \Rightarrow p$

$q \Rightarrow p:\ x<2\ ;\ x>-3$ នោះ $x^2+x-6<0$

ដោយ $x<2$ នោះ $x-2=0 \qquad (1)$

$x>-3$ នោះ $x+3=0 \qquad (2)$

គុណ $(1)\&(2)$ គេបាន:

$$x^2-2x+3x-6<0$$

$$x^2+x-6<0 \text{ ជាសំនើ } p$$

គេបាន: $q \Rightarrow p$ ពិត

ដោយ $p \Rightarrow q$ ពិត $q \Rightarrow p$ ពិត

នោះ $p \Leftrightarrow q$ ពិត

ដូចនេះ $p \Leftrightarrow q$ ពិត

ញ .ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x \le 5\,;\, x \ge -1$ លុះត្រាតែ $x^2-4x-5\le 0$

ចម្លើយ: .ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x \le 5\,;\, x \ge -1$ លុះត្រាតែ $x^2-4x-5\le 0$

តាង $p:\ x\le 5\ ;\ x\ge -1$

$q:\ x^2-4x-5\le 0$

$p \Leftrightarrow q:\ x\le 5\ ;\ x\ge -1$ លុះត្រាតែ $x^2-4x-5\le 0$

ដើម្បីអោយ $p \Leftrightarrow q$ ពិត កាលណា $p \Rightarrow q$ ពិត និង $q \Rightarrow p$ ពិត

+ រក $p \Rightarrow q$

$p \Rightarrow q:\ x\le 5\ ;\ x\ge -1$ នោះ $x^2-4x-5\le 0$

បើ $x\le 5$ នោះ $x^2-4x-5\le 0$

កយ $x=4$ គេបាន $4^2-4(4)-5\le 0$

$$16-16-5\le 0$$

$$-5\le 0 \quad \text{ពិត}$$

បើ $x\ge -1$ នោះ $x^2-4x-5\le 0$

យក $x=-1$ គេបាន $1^2-4(-1)-5\le 0$

$$1-4-5\le 0$$

$-1\le 0$ ពិត

គេបាន: $p\Rightarrow q$ ពិត

+ រក $q\Rightarrow p$

$q\Rightarrow p:\ x^2-4x-5\le 0$ នោះ $x\le 5\ ;\ x\ge -1$

$q:\quad x^2-4x-5\le 0$

$x^2+x-5x-5\le 0$

$\left(x^2+x\right)-\left(5x+5\right)\le 0$

$x\left(x+1\right)-5\left(x+1\right)\le 0$

$\left(x+1\right)\left(x-5\right)\le 0$

$\left[\begin{array}{l} x-5\le 0 \quad \text{នោះ } x\le 5 \\ x+1\ge 0 \quad \text{នោះ } x\ge -1 \end{array}\right.$ ជាសំនើ p

គេបាន:$q\Rightarrow p$ ពិត

ដោយ $p\Rightarrow q$ ពិត $q\Rightarrow p$ ពិត

នោះ $p\Leftrightarrow q$ ពិត

ដូចនេះ $p\Leftrightarrow q$ ពិត

ដ) ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖.

$2x^2-5x+2>0$ លុះត្រាតែ $x>2\ ;\ x<\dfrac{1}{2}$

ចម្លើយ: ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖.

$2x^2-5x+2>0$ លុះត្រាតែ $x>2\ ;\ x<\dfrac{1}{2}$

តាង $p:\ 2x^2-5x+2>0$

$q:\ x>2\ ;\ x<\dfrac{1}{2}$

$p\Leftrightarrow q:\ 2x^2-5x+2>0$ លុះត្រាតែ $x>2\ ;\ x<\dfrac{1}{2}$

ដើម្បីអោយ $p\Leftrightarrow q$ ពិត លុះត្រាតែ $p\Rightarrow q$ ពិត និង $q\Rightarrow p$ ពិត

+ រក $p\Rightarrow q$

$p\Rightarrow q:\ 2x^2-5x+2>0$ នោះ $x>2\ ;\ x<\dfrac{1}{2}$

$p: \quad 2x^2-5x+2>0$

$2x^2-4x-x+2>0$

$(2x^2-4x)-(x-2)>0$

$2x(x-2)-(x-2)>0$

$(2x-1)(x-2)>0$

$\left[\begin{array}{l} x-2>0 \\ 2x-1<0 \end{array}\right.$ នោះ $\left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ ជាសំណើ q

គេបាន: $p \Rightarrow q$ ពិត

+ រក $q \Rightarrow p$

$q \Rightarrow p:\ x>2\ ;\ x<\dfrac{1}{2}$ នោះ $2x^2-5x+2>0$

$q:\ x>2\ ;\ x<\dfrac{1}{2}$

ដោយ $x>2$ យក $x=3$ គេបាន

$2\cdot 3^2-5\cdot 3+2>0$

$18-15+2>0$

$5>0$ ពិត

ដោយ $x<\dfrac{1}{2}$ យក $x=-1$ គេបាន

$2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)+2>0$

$2+5+2>0$

$9>0$ ពិត

គេបាន: $q \Rightarrow p$ ពិត

ដោយ $p \Rightarrow q$ ពិត , $q \Rightarrow p$ ពិត

នោះ $p \Leftrightarrow q$ ពិត

<u>ដូចនេះ</u> $p \Leftrightarrow q$ ពិត

ឋ .ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x^2+6x-7 \neq 0$ លុះត្រាតែ $x \neq -7\ ;\ x \neq 1$

<u>ចម្លើយ:</u> ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$x^2+6x-7\neq 0$ លុះត្រាតែ $x\neq -7\,;\,x\neq 1$

តាង $p:\ x^2+6x-7\neq 0$

$q:\ x\neq -7\ ;\ x\neq 1$

$p\Leftrightarrow q:\ x^2+6x-7\neq 0$ លុះត្រាតែ $x\neq -7\ ;\ x\neq 1$

ដើម្បីអោយ $p\Leftrightarrow q$ ពិត លុះត្រាតែ $p\Rightarrow q$ ពិត និង $q\Rightarrow p$ ពិត

+ រក $p\Rightarrow q$

$p\Rightarrow q:\ x^2+6x-7\neq 0$ នោះ $x\neq -7\ ;\ x\neq 1$

ដោយ $p:\ x^2+6x-7\neq 0$

$$p:\quad x^2+6x-7\neq 0$$
$$x^2-x+7x-7\neq 0$$
$$\left(x^2-x\right)+\left(7x-7\right)\neq 0$$
$$x\left(x-1\right)+7\left(x-1\right)\neq 0$$
$$\left(x-1\right)\left(x+7\right)\neq 0$$

$\left[\begin{array}{l}x-1\neq 0\\ x+7\neq 0\end{array}\right.$ នោះ $\left[\begin{array}{l}x\neq 1\\ x\neq -7\end{array}\right.$ ជាសំណើ q

គេបាន: $p\Rightarrow q$ ពិត

+ រក $q\Rightarrow p$

$q\Rightarrow p:\ x\neq -7\ ;\ x\neq 1$ នោះ $x^2+6x-7\neq 0$

$q:\ x\neq -7\ ;\ x\neq 1$

បើ $x\neq -7$ នោះ $x^2+6x-7\neq 0$

យ $x=6$ នោះ $6^2+6\cdot 6-7\neq 0$

$$36+36-7\neq 0$$
$$65\neq 0 \text{ ពិត}$$

បើ $x\neq 1$ គេបាន $x^2+6x-7\neq 0$

យក $x=-2$ គេបាន $\left(-2\right)^2+6\left(-2\right)-7\neq 0$

$$4-12-7\neq 0$$
$$-15\neq 0 \text{ ពិត}$$

នៈគេបា $q \Rightarrow p$ ពិត

ដោយ $p \Rightarrow q$ ពិត $q \Rightarrow p$ ពិត

នោះ $p \Leftrightarrow q$ ពិត

ដូចនេះ $p \Leftrightarrow q$ ពិត

១១).សម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើឧទាហរណ៍ផ្ទុយ

តាមរយៈសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ចូរស្រាយថា៖

ក). តាមរយៈសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ចូរស្រាយថា៖

បើ n ជាចំនួនបឋម នោះ $y = n+1$ ជាចំនួនគូ។

ចម្លើយ: ប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ដោយឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ស្រាយថា៖

បើ n ជាចំនួនបឋម នោះ $y = n+1$ ជាចំនួនគូ។

ដោយ n ជាចំនួនបឋម

យក $n = 5$ គេបាន $y = 5+1 = 6$ គូ

$n = 7$ គេបាន $y = 7+1 = 8$ គូ

$n = 2$ គេបាន $y = 2+1 = 3$ ជាចំនួនសេស

គេបាន $y = n+1$ ជាចំនួនគូមិនពិតទាំងអស់ទេ

ដូចនេះ សំណើខាងលើមិនពិត។

ខ).តាមរយៈសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ចូរស្រាយថា៖

គ្រប់តម្លៃ x គេបាន $f(x) = 4x^2 - 5$ វិជ្ជមានជានិច្ច

ចម្លើយ:តាមរយៈសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ស្រាយថា៖

គ្រប់តម្លៃ x គេបាន $f(x) = 4x^2 - 5$ វិជ្ជមានជានិច្ច

$f(x) = 4x^2 - 5$

- បើ $x = -2$ គេបាន $f(x) = 4(-2)^2 - 5$

$f(x) = 4 \cdot 4 - 5 = 3 > 0$ ពិត

- បើ $x = 3$ គេបាន $f(x) = 4 \cdot 3^2 - 5$

$f(x) = 4 \cdot 9 - 5 = 31 > 0$ ពិត

- បើ $x = 1$ គេបាន $f(x) = 4 \cdot 1^2 - 5$

$f(x) = 4 - 5 = -1 < 0$ ពិត

គេបានយ៉ាងហោចណាស់ ១ $x = 1, f(1) < 0$

<u>ដូចនេះ</u> សំនើខាងលើមិនពិត។

ជំពូកទី ២

ចំនួន

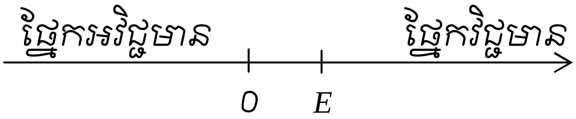
ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន

ចំនួន

I. ចំនួនពិត

ក. <u>បន្ទាត់ចំនួន</u>

គេឲ្យចំណុចOនិងចំណុចE មួយផ្សេងទៀតនៅលើបន្ទាត់l។ប់គេមិនរាប់បញ្ចូលចំណុច O ទេនោះគេ អាចចែកបន្ទាត់lជាពីរផ្នែកនៅសងខាងនៃចំណុចO។ផ្នែកដែលមានចំណុចE ហៅថាផ្នែកវិជ្ជមាននិង ផ្នែកដែលគ្មានចំណុចE ហៅថាផ្នែកអវិជ្ជមាន។



ចំពោះគ្រប់ចំណុចនៅលើបន្ទាត់lដែលមានអង្កត់OEជាឯកតាប្រវែងត្រូវគ្នានឹងចំនួនតាមរបៀបដូចខាងក្រោម:

- *ចំណុចOត្រូវនឹងចំនួន0។*
- *គ្រប់ចំណុចនៅផ្នែកវិជ្ជមានហើយមានចម្ងាយ s ពីចំណុចOត្រូវគ្នានឹងចំនួនវិជ្ជមានs។*

គ្រប់ចំណុចនៅផ្នែកអវិជ្ជមានហើយមានចម្ងាយsពីចំណុចOត្រូវនឹងចំនួនអវិជ្ជមាន$(-s)$។ តាម របៀបនេះគ្រប់ចំណុចM នៅលើ l ត្រូវគ្នានឹងចំនួនតែមួយគត់មានន័យថាចំណុចផ្សេងគ្នាត្រូវគ្នានឹង ចំនួនផ្សេងគ្នា។ ចំនួនxដែលត្រូវនឹងចំណុចM ហៅថាកូអរដោនេ នៃចំណុចM ។ គេកំណត់សរសេរ$M(x)$។ក្នុងករណីនេះបន្ទាត់ l ហៅថាបន្ទាត់ចំនួនដែលមានចំណុច 0 ជាគល់និង E ចំណុច ឯកតា។ កូអរដោនេនៃចំណុចគល់ស្មើនឹង 0 និងកូអរដោនេនៃចំណុចឯកតាស្មើនឹង 1 ។

គ្រប់ចំនួនដែលត្រូវគ្នានឹងគ្រប់ចំណុចនៅលើបន្ទាត់ចំនួនហៅថាចំនួនពិត។ បើគេគូសបន្ទាត់ចំនួនជាបន្ទាត់ដេកនោះផ្នែកវិជ្ជមានត្រូវនៅខាងស្តាំនិងផ្នែកអវិជ្ជមាននៅខាងឆ្វេង។

<u>ប្រតិបត្តិ</u> ដៅចំនួនដូចខាងក្រោមនៅលើបន្ទាត់ចំនួន:

ក- 4 ខ- -3 គ- 2×5 ឃ- -1×5 ង- $-\dfrac{3}{4}$

ខ- <u>ការប្រៀបធៀបចំនួនចំពិត</u>

គេដៅចំនួនវិជ្ជមាននៅលើបន្ទាត់ចំនួនដោយចំណុចជាច្រើននៅផ្នែកខាងស្តាំនៃគល់និងគេដៅចំនួនអវិជ្ជមានដោយចំណុចជាច្រើនទៅផ្នែកខាងឆ្វេងនៃគល់។ បើគេនិយាយចំនួនពិត b ធំជាងចំនួនពិតa ឬaតូចជាងb នោះគេនិយាយថាចំណុចbនៅខាងស្តាំនៃចំណុចa។

គេកំណត់សរសេរ: $a<b$ ឬ $b>a$ ។

- បើ a វិជ្ជមាន គេសរសេរ $a>0$ ។
- បើ a អវិជ្ជមានគេសរសេរ $a<0$ ។

គេអាចប្រៀបធៀបចំនួនពិតតាមលក្ខណៈខាងក្រោម:

ក- ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b គេអាចបានទំនាក់ទំនងមួយក្នុងចំណោមទំនាក់ទំនង

$a<b$, $a=b$, $a>b$ ។

ខ- (a < b និង b < c) $\Rightarrow a<c$ ។ គ- $a>b \Leftrightarrow a-b>0$

គ- <u>តម្លៃដាច់ខាតនៃចំនួនពិត</u>

ចម្ងាយពីគល់ 0 ទៅចំណុច a នៅលើបន្ទាត់ចំនួនហៅថាតម្លៃដាច់ខាតនៃចំនួន a ។

តម្លៃ ដាច់ ខាត នៃចំនួនពិត a កំណត់ដោយ $|a|$ ។

ឧទាហរណ៍ 1 $|5|=5$, $|-5|=5$, $|0|=0$

ប្រតិបត្តិ 1 គណនាតម្លៃខាងក្រោម:

ក- $|7|$ ខ- $|-12|$ គ- $|2\times3|$ ឃ- $\left|-\frac{2}{3}\right|$

<u>ប្រតិបត្តិ</u> 2 កំណត់ចំនួនពិត x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|x|=8$

តាមនិយមន័យនៃតម្លៃដាច់ខាតគេទាញលក្ខណៈខាងក្រោម:

- $|a|=a$ បើ $a\geq0$
- $|a|=-a$ បើ $a<0$
- ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a គេបាន $|a|\geq0$
- $|a|=0$ លុះត្រាតែ $a=0$

ឧទាហរណ៍1 បង្ហាញថាសមភាព $|-a|=|a|$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។

ចម្លើយពិនិត្យសមភាពនេះចំពោះ $a\geq0$ និង $a<0$

i. ចំពោះ $a\geq0$ គេបាន: $|a|=a$ និង $-a\leq0$ នោះ $|-a|=-(-a)=a=|a|$

ii. ចំពោះ $a<0$ គេបាន: $|a|=-a$ និង $-a>0$ នោះ $|-a|=-a=|a|$ ។

តាម i និង ii ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតនៃ a គេបាន $|-a|=|a|$ ។

ប្រតិបត្តិ 3 បង្ហាញថា $a^2=|a|^2$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។

ឃ- ចំណែកថ្នាក់នៃចំនួនពិត

គេតាងសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ $1, 2, 3, \ldots$ ដោយ $\mathbb{N}$ ។គេបាន $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \ldots\}$ ។ ផលបូក និងផលគុណនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $1, 2, 3, \ldots$ គ្រប់ចំនួនគត់អវិជ្ជមាន $-1, -2, -3, \ldots$ និងសូន្យបង្កើតបានជាសំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែលតាងដោយ $\mathbb{Z}$ ។

ផលបូក ផលដក និងផលគុណ នៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។

គ្រប់ចំនួនដែលមានទម្រង់ $\frac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបហើយ $n \neq 0$ ហៅថាចំនួនសនិទាន។ គេតាងសំណុំនៃចំនួនសនិទានដោយ $\mathbb{Q}$ ។

គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប m អាចសរសេរជាទម្រង់ $\frac{m}{1}$ នោះវាក៏ជាចំនួនសនិទានដែរ។ ផលបូក ផលដក ផលគុណ និងផលចែកនៃចំនួនសនិទានក៏ជាចំនួនសនិទានផងដែរ។

មានចំណុចជាច្រើននៅលើបន្ទាត់ចំនួនដែលមិនមែនជាចំនួនសនិទាន។

ឧទាហរណ៍ 1 ការេដែលមានប្រវែងជ្រុងស្មើនឹង 1 មានប្រវែងអង្កត់ទ្រូងស្មើនឹង $\sqrt{2}$ ។គេអាចដៅចំនួន $\sqrt{2}$ នៅលើបន្ទាត់ចំនួនបាន។ចំនួន $\sqrt{2}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទានទេ។ ចំនួនពិតដែលមិនមែនជាចំនួនសនិទានហៅថាចំនួនអសនិទាន។ $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន។ ចំនួនថេរ π ក៏ជាចំនួនអសនិទានដែរ។

សំគាល់គេអាចសរសេរចំនួនសនិទានដែលមិនមែនជាចំនួនគត់ឲ្យទៅជាចំនួនទសភាគកំណត់ឬចំនួនទសភាគខួប។

ឧទាហរណ៍ 2 $\frac{1}{8}=0.125$ ជាចំនួនទសភាគកំណត់។

$-\frac{4}{3}=-1.333\ldots$ ជាចំនួនទសភាគខួបដែលមាន 3 ជាខួប។

$\frac{9}{74}=0.1216216216$ ជាចំនួនទសភាគខួបដែលមាន 216 ជាខួប។

គេអាចសរសេរចំនួនអសនិទានឲ្យទៅចំនួនទសភាគអនន្តដែលគ្មានខួប។

ឧទាហរណ៍ 3 $\sqrt{2}=1.41421356237\ldots$ ជាចំនួនទសភាគអនន្តដែលគ្មានខួប។

$\pi=3.14159\ldots$ ជាចំនួនទសភាគអនន្តដែលគ្មានខួប។

<u>ប្រតិបត្តិ:</u> តើចំនួនណាខ្លះជាចំនួនសនិទានចំនួនអសនិទានក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនេះ $0, 3, \pi, -5, \frac{2}{7}, -\frac{9}{4}, \sqrt{8}, \sqrt{0.16}, \sqrt{3+1}$?

II. កន្សោមរ៉ាឌីកាល់

ក. ការគណនាកន្សោមមានរ៉ាឌីកាល់

- ឫសការេនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានឬសូន្យគេថាចំនួនពិត x ជាឫសការេនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន ឬ សូន្យ a កាលណា $x^2 = a$។ ចំនួនវិជ្ជមាន a មានឫសការេពីរដែលជាចំនួនផ្ទុយគ្នា។ គេតាងឫសការេវិជ្ជមាននៃ a ដោយ $\sqrt{a}$ និងឫសការេអវិជ្ជមាននៃ a ដោយ $-\sqrt{a}$។

  ដូចនេះ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$

<u>ឧទាហរណ៍</u>:

- ឫសការេនៃ 4 គឺ $\sqrt{4} = 2$ និង $-\sqrt{4} = -2$
- ឫសការេនៃ 0 គឺ 0 ហើយកំណត់ដោយ $\sqrt{0} = 0$។
- ចំនួនអវិជ្ជមានគ្មានឫសការេនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិតទេ។

<u>ប្រតិបត្តិ</u> 1: ចូរឲ្យឧទាហរណ៍នៃចំនួនពិត a មួយដែលមិនផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\sqrt{a^2} = a$ ហើយបង្ហាញថា $\sqrt{a^2} = |a|$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a។

- ផលគុណនិងផលចែកនៃឫសការេ

  ចំពោះ $a > 0$ និង $b > 0$

  i. $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

  ii. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

  iii. $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

III-ប្រព័ន្ធរាប់

<u>ក-ប្រព័ន្ធរាប់គោលដប់</u> ជាទូទៅ $n = abcd_{10} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$

ឧទាហរណ៍: $1254 = 1000 + 200 + 50 + 4 = 10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10 + 4$ (ជាទម្រង់ពន្លាតនៃចំនួន 1254)។

<u>ប្រតិបត្តិ</u>: សរសេរទម្រង់ពន្លាតខាងក្រោមនេះជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល10

$3 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 7 \times 10$

<u>ខ-ប្រព័ន្ធរាប់គោល2</u>

ជាទូទៅ $n = abcd_2 = a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2 + d$

<u>ឧទាហរណ៍:</u> ចូរបំប្លែងចំនួន 100110_2 ខាងក្រោមជាប្រព័ន្ធរាប់គោល10

គេបាន $100110_2 = 1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2+0=32+0+0+4+2=38$

<u>ប្រតិបត្តិ</u>: ចូរបំប្លែងចំនួនខាងក្រោមទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល10

ក-100001101_2 ខ-11000101_2 គ-101010101_2

IV. តួចែករួមធំបំផុត

1-<u>តួចែករួមនៃពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ</u>

<u>**និយមន័យ**</u>1: a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ d ជាតួចែករួមនៃ a និង b កាលណា d ជាតួចែកនៃ a ផងនិងជាតួចែកនៃ b ផង។

<u>*ឧទាហរណ៍:*</u> 20 ជាតួចែករួមនៃ 40 និង 100។

<u>**និយមន័យ2**</u>:តួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលធំជាងគេក្នុងចំណោមតួចែករួមនៃ a និង b ហើយតាងដោយ $\delta = PGCD(a,b)$ ឬ $\delta = GCD(a,b)$

<u>*ឧទាហរណ៍:*</u> តួចែកនៃ 40 គឺ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

តួចែកនៃ 30 គឺ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

តួចែករួមនៃ 40 និង 30 គឺ 1, 2, 5 និង 10នោះគេបាន $GCD(40,30)=10$

សំគាល់:បើ a ជាពហុគុណនៃ b នោះ $GCD(a,b)=b$

<u>*ឧទាហរណ៍:*</u> គេមាន 40 ជាពហុគុណនៃ 20 នោះគេបាន $GCD(40,20)=20$

របៀបរកតួចែករួមធំបំផុត:ដើម្បីរកតួចែករួមធំបំផុតនៃពីរចំនួន a និង b ត្រូវបំបែក a និង b ជាកត្តាបឋម។តួចែករួមធំបំផុតនៃ a និង b
ជាផលគុណកត្តាបឋមដែលដូចគ្នានិងមាននិទស្សន្តតូចនៃ a និង b។

<u>*ឧទាហរណ៍:*</u> $60=2\times3\times5$ និង $90=2\times3^2\times5$

ដូចនេះ $GCD(60,90)=2\times3\times5=30$

<u>ប្រតិបត្តិ:</u>រកតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនខាងក្រោម:

ក- 36 និង 180 ខ- 56 និង 84 គ- 60,84 និង 96 ឃ- 96,144 និង 180។

និយមន័យ3:ពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាកាលណា $GCD(a,b)=1$។

ឧទាហរណ៍: 7 និង 8 ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាពីព្រោះ $GCD(8,7)=1$

ប្រភាគ $\frac{8}{15}$ មានភាគយកនិងភាគបែងជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាព្រោះ $GCD(8,15)=1$។

គេថា $\frac{8}{15}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន។

<u>ប្រតិបត្តិ:</u>សម្រួលប្រភាគខាងក្រោម:

ក- $\frac{1581}{306}$ ខ- $\frac{912}{12312}$

2-**<u>លក្ខណ:នៃតួចែករួមធំបំផុតនៃពីរចំនួន</u>**

គេមានពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ។

- បើ a ចែកដាច់នឹង b នោះ $GCD(a,b)=b$
- បើ a ចែកមិនដាច់នឹង b នោះមាន q និង r តែមួយគត់ដែល $a=bq+r$ និង $0<r<b$ ។

$a=bq+r$ នាំឲ្យ $r=a-bq \quad (1)$ ។

បើ d ជាតួចែករួមនៃ a និង b នោះមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ k_1,k_2 ដែល $a=dk_1$ និង $b=dk_2$

ហើយតាម(1): $r=dk_1-dk_2q=d(k_1-qk_2)$ ។

ដូចនេះគ្រប់តួចែករួមនៃ a និង b ជាតួចែកនៃសំណល់ r ។

មានន័យទៀតថា:គ្រប់តួចែករួមនៃ a និង b ជាតួចែករួម b និង r ។

ច្រាសមកវិញ:បើ $a=qb+r$ ហើយ d' ជាតួចែករួមនៃ b និង r នោះមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ k_3,k_4

ដែល $b=d'k_3$, $r=d'k_4$ $a=d'k_3q+d'k_4=d'(k_3q+k_4)$ នាំឲ្យ d' ជាតួចែកនៃ a ។

ដូចនេះ d' ជាតួចែកនៃ a និង b ។

<u>ទ្រឹស្តីបទ:</u>បើ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែល $a=qb+r$ ដោយ $0<r<b$

នោះ $GCD(a,b)=GCD(b,r)$ ។

<u>លំហាត់គំរូ:</u>

ក-រក $GCD(75,25)$

ខ-រក $GCD(213,63)$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក-រក $GCD(75,25)$

ដោយ $75=3\times25+0$ នាំឲ្យ $GCD(15,25)=25$

ខ- $213=3\times63+24$ នាំឲ្យ $GCD(213,63)=GCD(63,24)$

$63=2\times24+15$ នាំឲ្យ $GCD(213,63)=GCD(63,24)=GCD(24,15)$

$24=1\times15+9$ នាំឲ្យ $GCD(213,63)=GCD(63,24)=GCD(24,15)=GCD(15,9)$

$15=1\times9+6$ នាំឲ្យ $GCD(213,63)=GCD(63,24)=GCD(24,15)=GCD(15,9)$

$=GCD(9,6)$

$9 = 1\times 6+3$ នាំឲ្យ $GCD=(213,63)=GCD(6,3)$

$6 = 2\times 3+0$ នាំឲ្យ $GCD(213,63)=GCD(6,3)=3$

3 ជាសំណល់ចុងក្រោយបំផុតខុសពីសូន្យ។

<u>ប្រតិបត្តិ:</u>

ក-រក $GCD(90,45)$ ខ- $GCD(125,95)$

V. ពហុគុណរួមតូចបំផុត (LCM)

1-ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ

ក-<u>និយមន័យ</u> *ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលជាពហុគុណរួមវិជ្ជមានហើយតូចជាងគេនៃ a និង b ។គេកំណត់សរសេរ:*

$\mu = PPCM(a,b)$ ឬ $\mu = LCM(a,b)$

<u>ឧទាហរណ៍:</u> $LCM(3,4)=12$

<u>ជាទូទៅ:</u> ដើម្បីរកពហុគុណរួមតូចបំផុតគេត្រូវគណនាជំហានដូចខាងក្រោម:

ជំហានទី1: *បំបែកចំនួន a និង b ជាផលគុណកត្តាបឋម។*

ជំហានទី2: *គណនាផលគុណនៃកត្តាបឋមទាំងអស់ដោយយកកត្តាដែលមាននិទស្សន្តធំចំពោះកត្តាណាដែលដូចគ្នា។ផលគុណនេះជាពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ a និង b ។*

<u>លំហាត់គំរូ2</u> គណនា $\frac{1581}{306}-\frac{912}{12312}$

<u>ចម្លើយ:</u> ដោយ GCD នៃ 1581និង 306 គឺ $3\times 15=51$

និង GCD នៃ 912និង 12312 គឺ $8\times 19\times 3=456$

ដូចនេះ $\frac{1581}{306}-\frac{912}{12312}=\frac{21\times 51}{6\times 51}-\frac{2\times 456}{27\times 456}=\frac{31}{6}-\frac{2}{27}$

ដោយ LCM នៃ 6 និង 27 គឺ $2\times 27=54$

ដូចនេះគេបាន $\frac{31}{6}-\frac{2}{27}=\frac{31\times 9-2\times 2}{54}=\frac{279-4}{54}=\frac{275}{54}$

<u>ប្រតិបត្តិ:</u>

ក-រក LCM នៃ 120 និង 164។

ខ-គេឲ្យ $a=\frac{315}{1176}$ និង $b=\frac{132}{2079}$ ។គណនា $a-b$

ខ-ទ្រឹស្តីបទ

គ្រប់ពហុគុណនៃ $LCM(a,b)$ ជាពហុគុណរួមនៃ a និង b ។

សម្រាយបញ្ជាក់:

តាង $m=LCM(a,b)$

km ដែល k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិគឺជាពហុគុណមិនសូន្យនៃ m ។

ម្យ៉ាងទៀត $m=as \quad ,m=bt$

ដូចនេះ $km=k(as)=a(ks)$ គឺជាពហុគុណនៃ a ហើយ $km=k(bt)=a(kt)$ គឺជាពហុគុណនៃ b

$km=k(as)=a(ks)$ គឺជាពហុគុណនៃ a ហើយ $km=k(bt)=a(kt)$ គឺជាពហុគុណនៃ b ។

ឧទាហរណ៍: $LCM(24,36)=72$ ហើយ144 ជាពហុគុណនៃ 72។

ដូចនេះ 144 ជាពហុគុណរួមនៃ 24 និង 36 ព្រោះ $144=24\times 6$ និង $144=36\times 4$

ប្រតិបត្តិ:តើ 756 ជាពហុគុណរួមនៃគូចំនួនណា?

ក-40 និង 50	ខ-42 និង 52	គ-40 និង 54	ឃ-42 និង 54

2-**លក្ខណៈនៃពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ**

គ្រប់ a,b និង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិនិងគ្រប់តួចែករួម d នៃ a និង b គេបាន:

1)- $LCM(a,b)=LCM(b,a)$	2)- $LCM(a,a)=a$

3)- $LCM(1,a)=a$	4)- $LCM(a,na)=na$

5) - $LCM(na,nb)=nLCM(a,b)$	6)- $LCM\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=\frac{LCM(a,b)}{d}$

3-ទំនាក់ទំនងរវាង $LCM(a,b)$ និង $GCD(a,b)$

ក-ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនបឋមរវាងគ្នា

ទ្រឹស្តីបទ: បើ a និង b ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នានោះ $LCM(a,b)=ab$

តាង $m=LCM(a,b)$

គេបាន $m=ak_1=bk_2$ នាំឲ្យ ak_1 ចែកដាច់នឹង b តែ a និង b បឋមរវាងគ្នា

ដូចនេះ k_1 ចែកដាច់នឹង b នាំឲ្យបាន $k_1=bq$

$ak_1=bk_2$ សរសេរជា $abq=bk_2$ ឬ $k_2=aq$ នាំឲ្យ $m=bk_2=abq$ នោះ m ជាពហុគុណនៃ ab m តូចបំផុតបើ $q=1$ ។

ដូចនេះ $m(a,b)=ab$ ។

ទ្រឹស្តីបទ: ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b គេបាន $GCD(a,b)\times LCM(a,b)=ab$ ឬ $\delta\mu=ab$

សម្រាយបញ្ជាក់:មានចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b។

យក $\mu = LCM(a,b)$

បើ $\delta = GCD(a,b)$ នោះ $a = \delta a'$ និង $b = \delta b'$ ដែល $GCD(a',b') = 1$។

ដូចនេះ $\mu = LCM(a,b) = LCM(\delta a',\delta b') = \delta LCM(a',b')$។

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើ $LCM(a',b') = a'b'$ ព្រោះ $a'b'$ បឋមរវាងគ្នានោះគេបាន

$\mu = \delta LCM(a',b') = \delta a'b'$

$\delta\mu = (\delta a')(\delta b')$

$\delta\mu = ab$

ដូចនេះ $GCD(a,b) \times LCM(a,b) = ab$។

តាមទ្រឹស្តីបទនេះគេទាញបាន $\mu = \dfrac{ab}{\delta}$ ឬ $LCM(a,b) = \dfrac{ab}{GCD(a,b)}$។

ខ-ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃច្រើនចំនួនគត់

5 មានពហុគុណ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40……………………………………..

10 មានពហុគុណ 10, 20, 30, 40, 50, 60…………………………………………….

15 មានពហុគុណ 15, 30, 45, 60…………………………………………………….

5, 10 និង 15 មានពហុគុណរួមតូចបំផុតគឺ 30។

VI. វិធីចែកដាច់ក្នុង $\mathbb{Z}$

1. **និយមន័យ** គេឲ្យ $a, b \in \mathbb{Z}$។គេថា "b ជាពហុគុណនៃ a" លុះត្រាតែមាន $k \in \mathbb{Z}$ ដែល $b = k \cdot a$ ក្នុងករណីគេថា "a ចែកដាច់ b" កំណត់សរសេរដោយ "$a|b$"។

   $a|b$ លុះត្រាតែមាន $k \in \mathbb{Z}$ ដែល $b = a \cdot k$។

   សំគាល់:

   $a|b$ អានថា a ចែកដាច់ b ឬ b ចែកដាច់នឹង a។

   បើ $a \neq 0, b \neq 0$ នោះ "a ជាពហុគុណនៃ b" ឬ "ជាតួចែកមួយនៃ a"។

   បើ $k = 0$ នោះ $a = 0$, 0 ជាពហុគុណនៃគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប a។

   បើ $\forall b \in \mathbb{Z} : 0|b \Leftrightarrow b = 0$, b ជាពហុគុណនៃ 0។

   បើ $\forall a \in \mathbb{Z}$ យក $a\mathbb{Z} = \{k \cdot a : k \in \mathbb{Z}\}$

   បើ $a = 0$ គេបាន $a\mathbb{Z} = \{0\}$

VII. លក្ខណៈចែកដាច់នៃវិធីបូកវិធីដក

ជាទូទៅ:

1. បើ a,b ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និង c,m,n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $c\,|\,a, c\,|\,b \Rightarrow c\,|\,(am \pm bn)$ ។
2. បើ y,z គឺជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និង x ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែល $\begin{cases} x\,|\,y \\ y\,|\,z \end{cases} \Rightarrow x\,|\,z$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

1. យើងមាន

q,p ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ គេបាន

$c\,|\,a \Rightarrow a = qc \Leftrightarrow am = qmc \quad (1)$

$c\,|\,b \Rightarrow b = pc \Leftrightarrow bn = pnc \quad (2)$

តាម (1) និង(2) បូកអង្គ និង អង្គគេបាន $am \pm bn = qmc \pm pnc$

$= c(mq \pm np)$

$am \pm bn = c(mq \pm np) \Rightarrow c\,|\,(am \pm bn)$

ដូចនេះ $\boxed{c\,|\,a, c\,|\,b \Rightarrow c\,|\,(am \pm bn)}$

2. យើងមាន

u,v ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

$x\,|\,y \Rightarrow y = ux \quad (1)$

$y\,|\,z \Rightarrow z = vy \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $z = uvx \quad \Rightarrow x\,|\,z$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{cases} x\,|\,y \\ y\,|\,z \end{cases} \Rightarrow x\,|\,z}$

ឧទាហរណ៍: បើ $7\,|\,(3x+2)$ បង្ហាញថា $7\,|\,(15x^2 - 11x - 14)$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

យើងមាន

$$15x^2-11x-14=(3x+2)(5x-7)$$
$$\Rightarrow (3x+2)\,|\,(15x^2-11x-14)$$

គេបាន

$$\begin{cases} 7\,|\,(3x+2) \\ (3x+2)\,|\,(15x^2-11x-14) \end{cases} \Rightarrow 7\,|\,(15x^2-11x-14)$$

ដូចនេះ $\boxed{7\,|\,(15x^2-11x-14)}$

<u>ឧទាហរណ៍:</u> ដោយមិនបាច់គណនា បង្ហាញថា $8^{2013}-1$ និង $8^{2014}-1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

<u>ចម្លើយ</u>

យើងមាន

- $$\begin{aligned} 8^{2013}-1 &= (8-1)(8^{2012}+8^{2011}+\ldots+1) \\ &= 7(8^{2012}+8^{2011}+\ldots+1) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{8^{2013}-1 \text{ ចែកដាច់នឹង } 7}$

- $$\begin{aligned} 8^{2014}-1 &= (8-1)(8^{2013}+8^{2012}+\ldots+1) \\ &= 7(8^{2013}+8^{2012}+\ldots+1) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{8^{2014}-1 \text{ ចែកដាច់នឹង } 7}$

<u>ប្រតិបត្តិ</u>

1. បង្ហាញថា $15^{100}+1$ ចែកដាច់នឹង16 ។
2. បង្ហាញថា n^n-1 ចែកដាច់នឹង $n-1$ ។

លំហាត់ និង ចម្លើយ

1. បង្ហាញថា $1+2^{2013}+2^{2013}+3^{2013}+...+2012^{2013}$ ចែកដាច់នឹង 2013 ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$1+2012^{2013}=(1+2012)\left(1+2012+2012^2+...+2012^{2012}\right)$$
$$=2013\left(1+2012+2012^2+...+2012^{2012}\right)$$

$\Rightarrow\left(1+2012^{2013}\right)$ ចែកដាច់នឹង 2013 ។

ធ្វើដូចគ្នាគេបាន:

$1+2012^{2013}, 2^{2013}+2011^{2013}, 3^{2013}+2010^{2013}, ..., 1006^{2013}+1007^{2013}$

ចែកដាច់នឹង 2013 ។

តាង $t_1=1+2012+...+2012^{2012}$

$t_2=2^{2012}+2^{2011}\cdot 2012+...+2012^{2012}$

....

$t_{1006}=1006^{2012}+1006^{2011}\cdot 1007+...+1007^{2012}$

$$\begin{aligned}1+2^{2013}+3^{2013}+...+2012^{2013}&=\left(1+2012^{2013}\right)+\left(2^{2013}+2011^{2013}\right)\\&\quad+\left(3^{2013}+2010^{2013}\right)+...\\&\quad+\left(1006^{2013}+1007^{2013}\right)\\&=2013\left(1+2012+2012^2+...+2012^{2012}\right)\\&\quad+2013\left(2^{2012}+2^{2011}\cdot 2011+...+2011^{2012}\right)+...+\\&\quad 2013\left(1006^{2012}+1006^{2011}\cdot 1007+...+1007^{2012}\right)\\&=2013\left(t_1+t_2+...+t_{1006}\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow 2013\,|\left(1+2^{2013}+3^{2013}+...+2012^{2013}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{1+2^{2013}+3^{2013}+...+2012^{2013} \text{ ចែកដាច់នឹង } 2013}$

2. ចូរបង្ហាញថា បើ n ចែកដាច់នឹង 2 នោះ 3^n-1 ចែកដាច់នឹង 8 ។

<u>ចម្លើយ</u>

យើងមាន

n ចែកដាច់នឹង 2 នោះ $n=2p\ ;\ p\in\mathbb{N}^*$

គេបាន $3^n-1=3^{2p}-1$

$$=9^p-1$$
$$=(9-1)\left(9^{p-1}+9^{p-2}+...+1\right)$$
$$=8\left(9^{p-1}+9^{p-2}+...+1\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បើ } n \text{ ចែកដាច់នឹង } 2 \text{ នោះ } 3^n-1 \text{ ចែកដាច់នឹង } 8}$

3. $\forall n>1$ បង្ហាញថា n^n-n^2+n-1 ចែកដាច់នឹង $(n-1)^2$ ។

ចម្លើយ

រំលឹក បើ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $Q(x)$ កាលណា $P(x)=kQ(x)$ ។

យើងបាន

$$n^n-n^2+n-1=n^2\left(n^{n-2}-1\right)+(n-1)$$
$$=n^2(n-1)\left(n^{n-3}+n^{n-4}+...+1\right)+(n-1)$$
$$=(n-1)\left[n^2\left(n^{n-3}+n^{n-4}+...+n^{-2}+1\right)+1\right]$$
$$=(n-1)\left(n^{n-1}+n^{n-2}+...+1+n^2+1\right)$$
$$=(n-1)\left(n^{n-1}+n^{n-2}+...+1+n^2-n+n+1\right)$$
$$=(n-1)\left(n^{n-1}+n^{n-2}+...+1+n^2-(1+1+...+1)+n+1\right)$$
$$=(n-1)\left(\left(n^{n-1}-1\right)+\left(n^{n-2}-1\right)+...+\left(n^2-1\right)+(n-1)\right)$$
$$=(n-1)\left[(n-1)\left(n^{n-2}+...+1\right)+(n-1)\left(n^{n-3}+...+1\right)+...+(n-1)(n+1)+(n-1)\right]$$
$$=(n-1)^2\left[\left(n^{n-2}+...+1\right)+\left(n^{n-3}+...+1\right)+...+(n+1)+1\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{n^n-n^2+n-1 \text{ ចែកដាច់នឹង } (n-1)^2\quad ,\ \forall n>1}$

VIII. ភាពសមមូលតាម m

1. និយមន័យ

ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\Re$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z}$ ហៅថាទំនាក់ទំនងសមមូលតាម n និង

កំនត់សរសេរដោយ $a \equiv b$ (តាម m) ឬ $a \equiv b \pmod{m}$ ។

ដូចនេះ $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}$ ឬ $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b$ ។

2. លក្ខណះ

i. បើ $m = 0$ គេបាន $a \equiv b \pmod{0} \Leftrightarrow a = b$

ii. បើ $m \neq 0$ គេបាន $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a$ និង b មានសំនល់ស្មើគ្នាក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីត និង n ។

iii. $\forall a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ បើ $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a' \equiv b' \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a + a' = b + b' \pmod{m}$

iv. $\forall a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ បើ $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a' \equiv b' \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a \cdot a' = b \cdot b' \pmod{m}$

v. $\forall a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ បើ $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a' \equiv b' \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a - a' = b - b' \pmod{m}$

vi. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ បើ $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \pmod{m}$

vii. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ បើ $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow na \equiv nb \pmod{m}$

viii. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ បើ $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

សំគាល់: ភាពសមមូលតាម m អាចឲ្យសំណល់ជាចំនួនអវិជ្ជមានបាន។

ឧ. ចូររកតួចុងក្រោយនៃចំនួន 3^{168} ។

ចម្លើយ

រំលឹក: ដើម្បីរកតួចុងក្រោយនៃមួយចំនួនគេត្រូវយកចំនួននោះចែកនឹង 10 ។

យើងមាន

$$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$\left(3^4\right)^{42} \equiv 1^{42} \pmod{10}$$

$$3^{168} \equiv 1 \pmod{10}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តួចុងក្រោយនៃចំនួន } 3^{168} \text{ គឺ } 1}$

ប្រតិបត្តិ

ចូររកសំណល់នៃការចែក 6^{2013} នឹង 37 ។

លំហាត់ និង ចម្លើយ

1. រកលេខចុងក្រោយនៃចំនួន 7^{7^7} ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$7^4 = 2401$$
$$\Rightarrow 2401 \equiv 1 \pmod{10}$$
$$\Rightarrow \quad 7^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

យើងគ្រាន់តែសរសេរ 7^7 ជារាង $4k+r$, $r \geq 0$

ដោយ $7^2 \equiv 1 \pmod 4$

$$\Rightarrow (7^2)^3 \equiv 1^3 \pmod 4$$
$$7^6 \equiv 1 \pmod 4$$

$7^6 \cdot 7 \equiv 3 \pmod 4$ ព្រោះ $7 \equiv 3 \pmod 4$

$$7^7 \equiv 3 \pmod 4$$

គេបាន $7^7 = 4k+3$

$$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$$
$$\Rightarrow (7^4)^k \equiv 1^k \pmod{10}$$
$$7^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$$
$$7^{4k} \cdot 7^3 \equiv 7^3 \pmod{10}$$

$7^{4k+3} \equiv 3 \pmod{10}$ ព្រោះ $7^3 \equiv 3 \pmod{10}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{លេចចុងក្រោយនៃ } 7^{7^7} \text{ គឺ } 3}$

2. រកលេខចុងក្រោយនៃ 3^{100} ។

<u>ចម្លើយ</u>

យើងមាន

$$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$$
$$\Rightarrow \left(3^4\right)^{25} \equiv 1^{25} \pmod{10}$$
$$3^{100} \equiv 1 \pmod{10}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{លេខចុងក្រោយនៃ } 3^{100} \text{ គឺ } 1}$

3. រកលេខ 2 ខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ 3^{2012} ។

<u>ចម្លើយ</u>

យើងមាន

$$3^{10} = 59049 \equiv 49 \pmod{100}$$
$$\left(3^{10}\right)^{200} \equiv 49^{200} \pmod{100}$$
$$3^{2000} \equiv 49^{200} \pmod{100} \qquad (1)$$

តែ

$$49^2 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$$
$$\Rightarrow \left(49^2\right)^{100} \equiv 1^{100} \pmod{100}$$
$$49^{200} \equiv 1 \pmod{100} \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$3^{2000} \equiv 1 \pmod{100}$$
$$\Rightarrow 3^{2000} \cdot 3^{12} \equiv 3^{12} \pmod{100}$$
$$3^{2012} \equiv 3^{12} \pmod{100} \qquad (3)$$

ដោយ

$$3^{10} \equiv 49 \pmod{100}$$
$$\Rightarrow 3^{10} \cdot 3^2 \equiv 441 \pmod{100}$$
$$3^{12} \equiv 41 \pmod{100} \qquad (4)$$

តាម (3) និង (4) គេបាន $3^{2012} \equiv 41 \pmod{100}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{លេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ } 3^{2012} \text{ គឺ } 41}$

4. បង្ហាញថា $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ ចែកដាច់នឹង 7 គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

<u>ចម្លើយ</u>

យើងមាន

$$\oplus \quad 3^2 \equiv 2 \quad (\bmod 7)$$
$$(3^2)^n \equiv 2^n \quad (\bmod 7)$$
$$3^{2n} \equiv 2^n \quad (\bmod 7)$$
$$3^{2n} \cdot 3 \equiv 3 \cdot 2^n \quad (\bmod 7)$$
$$3^{2n+1} \equiv 3 \cdot 2^n \quad (\bmod 7) \qquad (1)$$
$$\oplus \quad 2^n \equiv 2^n \quad (\bmod 7)$$
$$2^n \cdot 2 \equiv 4 \cdot 2^n \quad (\bmod 7)$$
$$2^{n+2} \equiv 4 \cdot 2^n \quad (\bmod 7) \qquad (2)$$

យក $(1)+(2)$ គេបាន

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv (3 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n)(\bmod 7)$$
$$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 7 \cdot 2^n \,(\bmod 7)$$
$$\equiv 0 \quad (\bmod 7)$$

ដូចនេះ $\boxed{3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ ចែកដាច់នឹង } 7}$

3. លក្ខណៈចែកដាច់

ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោលដប់គេឲ្យចំនួនគត់ $I = \overline{i_n i_{n-1} \ldots i_1 i_0} = i_n \cdot 10^n + i_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + i_1 \cdot 10 + i_0$

i. **ភាពចែកដាច់នឹង 2**

ទ្រឹស្តីបទ: ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល 10 ចំនួនគត់ $I = \overline{i_n i_{n-1} \ldots i_1 i_0}$ ចែកដាច់នឹង 2 លុះត្រាតែលេខខ្ទង់រាយ i_0 ចែកដាច់នឹង 2 ។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា 104^{2n} ចែកដាច់នឹង 2 ។

<u>ចម្លើយ</u>

យើងមាន

$$104 \equiv 0 \quad (\bmod 2) \qquad \text{ព្រោះ} \quad 4 \equiv 0 (\bmod 2)$$
$$104^{2n} \equiv 0 \quad (\bmod 2)$$

ដូចនេះ $\boxed{104^{2n} \text{ ចែកដាច់នឹង } 2}$

ii. **ភាពចែកដាច់នឹង** 5

ទ្រឹស្តីបទ: ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោលដប់ចំនួនគត់ $I = \overline{i_n i_{n-1} ... i_1 i_0}$ *ចែកដាច់នឹង* 5 *លុះត្រាតែលេខខ្ទង់រាយជ* i_0 *ចែកដាច់នឹង* 5 ។

ឧទាហរណ៍: បង្ហាញថា 2025^{2013} ចែកដាច់នឹង 5 ។

<u>ចម្លើយ</u>

យើងមាន

$$
\begin{aligned}
5 &\equiv 0 \quad (\text{mod}\, 5) \\
\Rightarrow \quad 2025 &\equiv 0 \quad (\text{mod}\, 5) \\
\Leftrightarrow 2025^{2013} &\equiv 0 \quad (\text{mod}\, 5)
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\boxed{2025^{2013} \text{ ចែកដាច់នឹង } 5}$

iii. **ភាពចែកដាច់នឹង** 4

ទ្រឹស្តីបទ: ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោលដប់ ចំនួនគត់ $I = \overline{i_n i_{n-1} ... i_1 i_0}$ *ចែកដាច់នឹង* 4 *កាលណាចំនួន ដែលកើតឡើងដោយពីរខ្ទង់ខាងចុង* $\overline{i_1 i_0}$ *ចែកដាច់នឹង* 4 ។

ឧទាហរណ៍: បង្ហាញថា 11316^{n+1} *ចែកដាច់នឹង* 4 ។

<u>ចម្លើយ</u>

យើងមាន

$$
\begin{aligned}
16 &\equiv 0 \;\; (\text{mod}\, 4) \\
\Rightarrow \quad 11316 &\equiv 0 \;\; (\text{mod}\, 4) \\
\Leftrightarrow \quad 11316^{n} &\equiv 0 \;\; (\text{mod}\, 4) \\
\Leftrightarrow 11316^{n} \cdot 11316 &\equiv 0 \;\; (\text{mod}\, 4) \\
\Leftrightarrow \quad 11316^{n+1} &\equiv 0 \;\; (\text{mod}\, 4)
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\boxed{11316^{n+1} \text{ ចែកដាច់នឹង } 4}$

iv. **ភាពចែកដាច់នឹង** 25

ទ្រឹស្តីបទ: ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោលដប់ ចំនួនគត់ $I=\overline{i_ni_{n-1}...i_1i_0}$ ចែកដាច់នឹង 25 កាលណាចំនួន ដែលកើតឡើងដោយពីរខ្ទង់ខាងចុង $\overline{i_1i_0}$ ចែកដាច់នឹង 25 ។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា 209075^{101} ចែកដាច់នឹង 25 ។

<u>ចម្លើយ</u>

យើងមាន

$$75\equiv 0 \pmod{25}$$
$$\Rightarrow \quad 209075\equiv 0 \pmod{25}$$
$$\Leftrightarrow 209075^{101}\equiv 0 \pmod{25}$$

ដូចនេះ $\boxed{209075^{101} \text{ ចែកដាច់នឹង } 25}$

v. **ភាពចែកដាច់នឹង** 3

ទ្រឹស្តីបទ: ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោលដប់ ចំនួនគត់ $I=\overline{i_ni_{n-1}...i_1i_0}$ ចែកដាច់នឹង 3 កាលណាផលបូកនៃលេខទាំងអស់របស់ចំនួននេះចែកដាច់នឹង 3 គឺ $i_n+i_{n-1}+...+i_1+i_0$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា 71418 ចែកដាច់នឹង 3 ។

<u>ចម្លើយ</u>

យើងមាន

ផលបូកតួនៃ 71418 គឺ $7+1+4+1+8=21$ គេបាន

$$21\equiv 0 \pmod 3$$
$$\Rightarrow 71418\equiv 0 \pmod 3$$

ដូចនេះ $\boxed{71418 \text{ ចែកដាច់នឹង}}$

VI. ភាពចែកដាច់នឹង 9

ទ្រឹស្តីបទ: ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោលដប់ ចំនួនគត់ $I=\overline{i_n i_{n-1}...i_1 i_0}$ ចែកដាច់នឹង 9 កាលណាផលបូកនៃលេខទាំងអស់របស់ចំនួននេះចែកដាច់នឹង 9 គឺ $i_n+i_{n-1}+...+i_1+i_0$ ចែកដាច់នឹង 9 ។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា 521685 ចែកដាច់នឹង 9 ។

ចម្លើយ

យើងមាន

ផលបូកតួនៃ 521685 គឺ $5+2+1+6+8+5=27$ គេបាន

$$27\equiv 0 \pmod 9$$

$$\Rightarrow 521685\equiv 0 \pmod 9$$

ដូចនេះ $\boxed{521685 \text{ ចែកដាច់នឹង } 9}$

VII. ភាពចែកដាច់នឹង 11

ទ្រឹស្តីបទ: ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោលដប់ ចំនួនគត់ $I=\overline{i_n i_{n-1}...i_1 i_0}$ ចែកដាច់នឹង 9 កាលណា $(i_0+i_2+i_4+...)-(i_1+i_3+i_5+...)$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា 32967 ចែកដាច់នឹង 11 ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$(7+9+3)-(6+2)=11\equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow 32967\equiv 0 \pmod{11}$$

ដូចនេះ $\boxed{32967 \text{ ចែកដាច់នឹង } 11}$

ប្រតិបត្តិ

បង្ហាញថា 850509 ចែកដាច់នឹង 9 និង ចែកដាច់នឹង 11 ។

VIII. វិធីចែកបែបអឺគ្លីត

និយមន័យ: ចំពោះ $b\in\mathbb{Z}^*$ និង $\forall a\in\mathbb{Z}$ ដែល $a=b\cdot q+r$, $0\le r<b$ ជាវិធីចែកបែបអឺគ្លីតរវាង a និង b ដែល q ហៅថាផលចែក , r ហៅថាសំណល់នៃវិធីចែកនេះ។

សំគាល់: បើ $\forall a\in\mathbb{Z}\ ,b\in\mathbb{N}$ ដែល $a=b\cdot q+r\ ,0\le r<b$ គេបាន $a^n=b\cdot Q(n)+r^n\ \ ,Q(n)\in\mathbb{N}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយប្រើរូបមន្តទ្វេធា Newton

យើងមាន

$$
\begin{aligned}
(bq+r)^n &= C_n^n(bq)^n+C_n^{n-1}(bq)^{n-1}r+C_n^{n-2}(bq)^{n-2}r^2+\ldots+C_n^1(bq)r^{n-1}+C_n^0r^n\\
&= C_n^nb^nq^n+C_n^{n-1}b^{n-1}q^{n-1}r+C_n^{n-2}b^{n-2}q^{n-2}r^2+\ldots+C_n^1bqr^{n-1}+r^n\\
&= b\left(C_n^nb^{n-1}q^n+C_n^{n-1}b^{n-2}q^{n-1}r+C_n^{n-2}b^{n-3}q^{n-2}r^2+\ldots+C_n^1qr^{n-1}\right)+r^n\\
&= b\cdot Q(n)+r^n\quad ,\ Q(n)=C_n^nb^{n-1}q^n+C_n^{n-1}b^{n-2}q^{n-1}r+C_n^{n-2}b^{n-3}q^{n-2}r^2\\
&\qquad +\ldots+C_n^1qr^{n-1}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\boxed{a^n=b\cdot Q(n)+r^n\ \ ,Q(n)\in\mathbb{N}}$

ឧទាហរណ៍ រកសំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃចំនួន 2^{2014} នឹង 7 ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$
\begin{aligned}
&2^3=8=7+1\\
\Rightarrow\ &\left(2^3\right)^{671}=(7+1)^{671}\\
\Rightarrow\ &2^{2013}=7^{671}+C_{671}^1\cdot7^{670}\cdot1+\ldots+C_{671}^{670}\cdot7\cdot1^{670}+1\\
&\qquad=7\left(7^{670}+C_{671}^1\cdot7^{669}\cdot1+\ldots+C_{671}^{669}\cdot7\cdot1^{669}+1\right)+1\\
\Leftrightarrow\ &2^{2013}=7\cdot q+1\qquad ;\ q=7^{670}+C_{671}^1\cdot7^{669}\cdot1+\ldots+C_{671}^{669}\cdot7\cdot1^{669}+1\\
\Leftrightarrow\ &2^{2013}\cdot2=(7\cdot q+1)\cdot2\\
\Leftrightarrow\ &2^{2014}=7\cdot2q+2\\
\Leftrightarrow\ &2^{2014}=7\cdot q'+2
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\boxed{2^{2014}\text{ ចែកនឹង } 7 \text{ មានសំណល់ } 2}$

ប្រតិបត្តិ

1. ចូររកសំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃចំនួន 3^{2014} និង 11 ។
2. រកសំណល់នៃការចែក $-17\ ,-21\ ,-33\ ,-48\ ,6\ ,27\ ,49$ នឹង 5 ។

លំហាត់ និង ចម្លើយ

1. បង្ហាញថា $12^{2016}-2^{2000}$ ចែកដាច់នឹង 10 ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$12^{2016}=12^{4\times 504}=12^{4k}=20736^{k}$$
$$20736^{k}=\left(20730+6\right)^{k}=20730^{k}+20730^{k-1}\cdot 6+\ldots+20730\cdot 6^{k-1}+6^{k}$$
$$=2073^{k}\cdot 10^{k}+2073^{k-1}\cdot 10^{k-1}\cdot 6+\ldots+2073\cdot 10\cdot 6^{k-1}+6^{k}$$
$$=10\left(2073^{k}\cdot 10^{k-1}+2073^{k-1}\cdot 10^{k-2}\cdot 6+\ldots+2073\cdot 6^{k-1}\right)+6^{k}$$
$$=10Q^{'}\left(k\right)+6^{k}$$
$$\Rightarrow \quad 12^{2016}=10Q^{'}\left(k\right)+6^{k} \qquad (1)$$

តែ $6^{2}=36=30+6=3\times 10+6$

$6^{3}=216=210+6=21\times 10+6$

....

$6^{k}=10\times Q^{''}\left(k\right)+6 \qquad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $12^{2016}=10Q^{'}\left(k\right)+10Q^{''}\left(k\right)+6$

$$=10\left(Q^{'}\left(k\right)+Q^{''}\left(k\right)\right)+6$$
$$=10Q^{'''}\left(k\right)+6$$

មានន័យថា 12^{2016} មានលេខខាងចុងស្មើនឹង 6

ម្យ៉ាងទៀត

បើ $k=2000\Leftrightarrow 6^{2000}=10Q^{(iv)}\left(k\right)+6$

មានន័យថា 6^{2000} មានលេខខាងចុងស្មើនឹង 6

គេបាន

$$12^{2016}-2^{2000}=10Q^{'''}\left(k\right)+6-10Q^{(iv)}\left(k\right)-6$$
$$=10\left(Q^{'''}\left(k\right)-Q^{(iv)}\left(k\right)\right)$$
$$=10Q\left(k\right)$$

ដូចនេះ: $\boxed{12^{2016}-2^{2000}\text{ ចែកដាច់នឹង }10}$

2. រកលេខចុងក្រោយនៃ 2013^{2013} ។

<u>ចម្លើយ</u>

យើងមាន

$$2013 = 2010 + 3$$

$$\Rightarrow 2013^{2013} = (2010+3)^{2013}$$

$$= 2010^{2013} + 2010^{2012}\cdot 3 + \ldots + 2010\cdot 3^{2012} + 3^{2013}$$

$$= 2010\left(2010^{2012} + 2010^{2011}\cdot 3 + \ldots + 3^{2012}\right) + 3^{2013}$$

$$= 2010Q'(k) + 3^{2013} \qquad (1)$$

មានន័យថា 2013^{2013} ចែកដាច់នឹង 10 មានសំណល់ 3^{2013}

តែ $\quad 3^4 = 81 = 80 + 1$

$$\Rightarrow \left(3^4\right)^{503} = (80+1)^{503}$$

$$3^{2012} = 80Q''(k) + 1$$

$$3^{2012}\cdot 3 = \left(80Q''(k)+1\right)\times 3$$

$$3^{2013} = 80\left(3Q''(k)\right) + 3$$

$$3^{2013} = 80Q'''(k) + 3 \qquad (2)$$

មានន័យថា 3^{2013} ចែកដាច់នឹង 10 មានសំណល់ 3

តាម (1) និង (2) គេបាន $2013^{2013} = 2010Q'(k) + 80Q'''(k) + 3$

$$= 10\left(201Q'(k) + 8Q'''(k)\right) + 3$$

$$= 10Q(k) + 3$$

ដូចនេះ $\boxed{2013^{2013} \text{ មានលេខចុងក្រោយគឺ } 3}$

ជំពូកទី ២

ចំនួន

ផ្នែកលំហាត់

លំហាត់

I. ចូរបំបាត់រ៉ាឌីកាលពីភាគបែង:

ក- $\frac{5}{3-\sqrt{12}}$ ខ- $\frac{3}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ គ- $\frac{3}{\sqrt{3-6x}}$

II. ចូរសម្រួលរ៉ាឌីកាល់:

ក- $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ ខ- $\frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}}$ គ- $-\frac{2}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

ឃ- $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ង- $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{4+\sqrt{12}}}$ ច- $\frac{4}{\sqrt{6+2\sqrt{8}}}$

III. ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោម:

ក- $\sqrt{125}-\sqrt{\frac{8}{9}}-2\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{18}$ ខ- $\sqrt{48}-\frac{\sqrt{27}}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}$

គ- $\frac{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}\right)}{\frac{5}{3+\sqrt{5}}}$

ឃ- $\left(7\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(5\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$

IV. គណនាតម្លៃកន្សោមចំពោះ $A=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ និង $B=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

ក- $A+B$, ខ- AB , គ- A^2B+AB^2 , ឃ- $\frac{A}{B}+\frac{B}{A}$

V. សរសេរចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោលខាងក្រោមជាប្រព័ន្ធគោល10

ក- 10011_2 , ខ- 3410_6 , គ- 10021_3 , គ- 12043_5

VI. ចូរបំប្លែងចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោលខាងក្រោមជាប្រព័ន្ធគោល 5

ក- 1101_2 ខ- 346_{10} គ- 145_6 ឃ- 1201_4

VII. ចូរបំប្លែងចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធខាងក្រោមនេះជាប្រព័ន្ធគោល 2

ក- 1101_3 ខ- 360_8 គ- 104_5 ឃ- 63_7

VIII. ចូរប្រៀបធៀបក្នុងគូចំនួននីមួយៗហើយគណនាផលបូករវាងចំនួនទី1 និងទី2 ក្នុងគូចំនួននីមួយៗខាងក្រោម៖

ក- 10_{10} និង 10_2 ខ- 13_{10} និង 100_2 គ- 123_{10} និង 101101_2

IX. គណនាផលបូកនិងផលដកនៃចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោលដូចខាងក្រោម៖

ក-$1101_2+10110_2$ ខ-$110011_2-10011_2$

គ-1201_3+1122_3 ឃ-4123_5-304_5

X. តើសំណុំនៃចំនួនទាំងនោះជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាឬទេ? បើសិនបឋមរវាងគ្នាចូររកកត្តារួមធំបំផុត

ក-12 និង 57 ខ-77 និង 85 គ-69, 91និង 95

XI. ចូររកពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃចំនួន:

ក-18 និង 28 ខ- 27 និង 63 គ-20, 25 និង 15

XII. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់ជាផលគុណនៃកត្តារួមធំបំផុតនិងពហុគុណរួមបំផុតរបស់វា។

XIII. ឧបមាថា K និង T ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយ $K<T$ ។ប្រសិនបើផលគុណនៃ K និង T គឺ 810 ហើយប្រសិនបើពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ K និង T គឺ 90។

ក-គណនាកត្តារួមធំបំផុតនៃ K និង T ។

ខ-រក K និង T ។

XIV. ឧបមាថា m,n គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ក-បើសិនកត្តារួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ពីរ 825 និង $231m$ ស្មើនឹង165 ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃ m ។

ខ-បើសិនកត្តារួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ពីរ675 និង $165m$ ស្មើនឹង 15 ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃ m ។

XV. ក-ចូររកកត្តារួមធំបំផុតនៃ 27, 45, និង 63។

ខ-ចូររកកត្តារួមធំបំផុតនៃ 28 និង 140។

XVI. ក-ចូររកកត្តារួមធំបំផុតនៃ 3003 និង 8645 តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីត។

ខ-ចូររកកត្តារួមធំបំផុតនៃ 1955 និង 5083 ។

ជំពូកទី ២

ចំនួន

ផ្នែកចម្លើយ

ចម្លើយ

I. បំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង:

ក- $\frac{5}{3-\sqrt{12}}$ គុណ $\frac{5}{3-\sqrt{12}}$ និង $\frac{3+\sqrt{12}}{3+\sqrt{12}}$ ដើម្បីបំបាត់រ៉ាឌីកាល់

គេបាន $\frac{5}{3-\sqrt{12}}\times\frac{3+\sqrt{12}}{3+\sqrt{12}}=\frac{5\left(3+\sqrt{4\times3}\right)}{3^2-\sqrt{12}^2}=\frac{5\left(3+2\sqrt{3}\right)}{9-12}=-\frac{15+10\sqrt{3}}{3}$

ខ- $\frac{3}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{3}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{3\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{9\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{18-3}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$

គ- $\frac{3}{\sqrt{3-6x}}$ គេបាន $\frac{3\sqrt{3-6x}}{\sqrt{3-6x}\times\sqrt{3-6x}}=\frac{3\sqrt{3-6x}}{\sqrt{(3-6x)^2}}=\frac{3\sqrt{3-6x}}{3(1-2x)}=\frac{\sqrt{3-6x}}{1-2x}$

II. ចូរសម្រួលរ៉ាឌីកាល់ពីរជាន់:

ក- $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ គេបាន $\sqrt{5+3+2\sqrt{15}}$

គេអាចសរសេរ $\sqrt{5+3+2\sqrt{15}}=\sqrt{\sqrt{(5)^2}+2\sqrt{5\times3}+\sqrt{(3)^2}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

ខ- $\frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{6+1-\sqrt{4\times6}}}=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{6^2}-2\sqrt{6}+1}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{6}-1\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}-1}$

$=\frac{1}{\sqrt{6}-1}\times\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}+1}=\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6^2}-1}=\frac{\sqrt{6}+1}{5}$

គ- $-\frac{2}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}\Leftrightarrow-\frac{2}{\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}}}=-\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=-\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}}=-\frac{2}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}-1}=-\frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=-\frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}=-2\left(\sqrt{3}+1\right)$$

ឃ- $\sqrt{4+2\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}=\sqrt{\sqrt{(3)^2}+2\sqrt{3}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}=\sqrt{3}+1$

ង- $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{4+\sqrt{12}}}\Leftrightarrow\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3+\sqrt{4\times3}+1}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\sqrt{3^2}+2\sqrt{3}+1\right)}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=1$

ច- $\frac{4}{\sqrt{6+2\sqrt{8}}}\Leftrightarrow\frac{4}{\sqrt{4+4\sqrt{2}+2}}=\frac{4}{\sqrt{2^2+4\sqrt{2}+\sqrt{2^2}}}=\frac{4}{\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}}=2\left(2-\sqrt{2}\right)$

III. ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោម:

ក- $\sqrt{125}$ - $\sqrt{\frac{8}{9}}$ - 2$\sqrt{\frac{5}{4}}$ + $\sqrt{18}$

យើងអាចសរសេរ $\sqrt{25\times5}$ - $\frac{\sqrt{4\times2}}{\sqrt{3^2}}$ - $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2^2}}$ + $\sqrt{9\times2}$

$= 5\sqrt{5}$ - $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ - $\frac{2\sqrt{5}}{2}$ + $3\sqrt{2}$ (ព្រោះ 25+5^2 4=2^2)

$$=\frac{10\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{2}+\frac{9\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3}$$

$$=\frac{8\sqrt{5}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{5}+\frac{7\sqrt{2}}{3}=\frac{12\sqrt{5}+7\sqrt{2}}{3}$$

ខ- $\sqrt{48}-\frac{\sqrt{27}}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}$

គេអាចសរសេរ $\sqrt{16\times3}-\frac{\sqrt{9\times3}}{2}+\frac{\sqrt{4\times3}}{\sqrt{12}\times\sqrt{12}}=\sqrt{4^2\times3}-\frac{\sqrt{3^2\times3}}{2}+\frac{\sqrt{2^2\times3}}{12}$

$$=4\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{12}=\frac{24\sqrt{3}-9\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6}=\frac{16\sqrt{3}}{6}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

គ- $\dfrac{\sqrt{\frac{5}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{5}{3+\sqrt{5}}}$

គេអាចសរសេរ $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{5^2}-3-\sqrt{5}}{10}=\frac{2\sqrt{5}+2}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{5}$

ឃ- $\left(7\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)\left(5\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$

គុណពន្លាតគេបាន: $35\sqrt{35}-7\sqrt{25}+5\sqrt{49}-\sqrt{35}=34\sqrt{35}-35+35=34\sqrt{35}$

IV. គណនាតម្លៃកន្សោមចំពោះ $A=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ និង $B=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

ក-គណនា $A+B$

គេបាន $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}$ តម្រូវភាគបែងរួម

$$=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}-\sqrt{3^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

ខ-គណនា AB

គេបាន $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5^2}-\sqrt{3^2}}=\frac{1}{5-3}=\frac{1}{2}$

គ-គណនា A^2B+AB^2

គេអាចសរសេរ $A^2B+AB^2=AB(A+B)=\sqrt{5}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

ឃ-គណនា $\frac{A}{B}+\frac{B}{A}$

គេបាន $\frac{A}{B}+\frac{B}{A}=\frac{A^2+B^2}{AB}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^2}{\frac{1}{2}}$

$$=2\left[\frac{1}{\sqrt{5^2}-2\sqrt{15}+\sqrt{3^2}}+\frac{1}{\sqrt{5^2}+2\sqrt{15}+\sqrt{3^2}}\right]$$

$$=2\left(\frac{1}{8-2\sqrt{15}}+\frac{1}{8+2\sqrt{15}}\right)=2\left(\frac{8+2\sqrt{15}+8-2\sqrt{15}}{8^2-2^2\times15}\right)=\frac{32}{64-60}=8$$

V. បំប្លែងចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធខាងក្រោមទៅជាប្រព័ន្ធគោល 10

ក-$110011_2=1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$

$$=32+16+0+0+2+1=51_{10}$$

ខ-$3410_6=3\times6^3+4\times6^2+1\times6+0=648+144+6=798_{10}$

គ-$10021_3=1\times3^4+0\times3^3+0\times3^2+2\times3+1=81+6+1=88_{10}$

ឃ-$12043_5=1\times5^4+2\times5^3+0\times5^2+4\times5+3=625+250+20+3=898_{10}$

VI. បំប្លែងចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោលខាងក្រោមទៅជាប្រព័ន្ធគោល 5

ក-$1101_2=1\times2^3+1\times2^2+1=13_{10}$, $13=5\times2+3=23_5$

ដូចនេះ $1101_2=23_5$

ខ-346_{10}

គេបាន $346=5\times69+1$

$69=5\times13+4$

$13=5\times2+3=2341_5$

ដូចនេះ $346_{10}=2341_5$

គ-$145_6=6^2+6\times4+5=65$

$65=5\times13+0$

$13=5\times2+1=210_5$

ដូចនេះ$145_6 = 210_5$

ឃ-$1201_4 = 4^3 + 2\times 4^2 + 1 = 97$

គេបាន $97 = 5\times 19 + 2$

$19 = 5\times 3 + 4 = 341_5$

ដូចនេះ$1201_4 = 341_5$

VII. បំប្លែងចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោលខាងក្រោមជាប្រព័ន្ធគោល 2

ក-$1101_3 = 3^3 + 3^2 + 1 = 37$

$37 = 2\times 18 + 1$

$18 = 2\times 9 + 0$

$9 = 2\times 4 + 1$

$4 = 2\times 2 + 0$

$2 = 2\times 1 + 0 = 100101_2$

ដូចនេះ$1101_3 = 100101_2$

ខ-$360_8 = 3\times 8^2 + 6\times 8 = 240$

$240 = 2\times 120 + 0$

$120 = 2\times 60 + 0$

$60 = 2\times 30 + 0$

$30 = 2\times 15 + 0$

$15 = 2\times 7 + 1$

$7 = 2\times 3 + 1$

$3 = 2\times 1 + 1 = 1110000_2$

ដូចនេះ$360_8 = 1110000_2$

គ-$104_5 = 5^2 + 4 = 29$

$29 = 2\times 14 + 1$

$14 = 2\times 7 + 0$

$7 = 2\times 3 + 1$

$3 = 2\times 1 + 1 = 101101_2$

ដូចនេះ$104_5 = 11101_2$

ឃ-$63_7 = 6\times 7 + 3 = 45$

$45 = 2\times 22 + 1$

$22 = 2\times 11 + 0$

$11 = 2\times 5 + 1$

$5 = 2\times 2 + 1$

$2 = 2\times 1 + 0 = 101101_2$

ដូចនេះ $63_7 = 101101_2$

VIII. ប្រៀបធៀបក្នុងគូចំនួននីមួយៗរួចគណនាផលបូក

ក-10_{10} និង10_2 ត្រូវបំលែងពីគោល 2ទៅគោល10

$10_{10} = 1\times 2 + 0 = 2_{10}$

គេបាន $10_{10} > 2_{10} \Rightarrow 10_{10} > 10_2$

$10_{10} + 10_2 \Leftrightarrow 10_{10} + 2_{10} = 12_{10}$

ដូចនេះ$10_{10} > 2_{10}$ និង$10_{10} + 10_2 = 12_{10}$

ខ-13_{10} និង100_2

$100_2 = 2^2 + 0 + 0 = 4_{10}$

គេបាន $13_{10} > 4_2 \Rightarrow 13_{10} > 100_2$

$13_{10} + 100_2 \Leftrightarrow 13_{10} + 4_{10} = 17_{10}$

ដូចនេះ$13_{10} > 100_2$ និង$13_{10} + 100_2 = 17_{10}$

គ-123_{10} និង101101_2

$101101_2 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 1 = 45_{10}$

គេបាន $123_{10} > 45_{10} \Rightarrow 123_{10} > 101101_2$

$123_{10} + 45_{10} = 168_{10}$

ដូចនេះ$123_{10} > 101101_2$ និង$123_{10} + 101101_2 = 168_{10}$

IX. គណនាផលបូកនិងផលដកក្នុងប្រព័ន្ធគោលខាងក្រោម:

ក-$1101_2 + 10110_2 = 100011_2$

ខ-$110011_2 - 10011_2 = 100000_2$

គ-$1201_3 + 1122_3 = 10100_3$

ឃ- $4123_5 - 304_5 = 3314_5$

ត្រូវធ្វើប្រមាណវិធី

$$\begin{array}{r} 1101_2 \\ +10110_2 \\ \hline 100011_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110011_2 \\ -10011_2 \\ \hline 100000_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1201_3 \\ +1122_3 \\ \hline 10100_3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4123_5 \\ -305_5 \\ \hline 3314_5 \end{array}$$

X. ក-12 និង 57

ចំនួន 12 និង 57 ជាចំនួនមិនបឋមរវាងគ្នាហើយកត្តារួមធំបំផុតគឺ

3)	12	57
	4	19

ខ-77 និង 85

ចំនួននេះបឋមរវាងគ្នា $77=7\times 11$, $85=5\times 19$ ចំនួនទាំងនេះមិនមានកត្តាបឋមរួមទេ។

គ-69, 91និង 95

ចំនួននេះបឋមរវាងគ្នា $69=3\times 23$, $91=13\times 7$, $95=5\times 19$

ចំនួនទាំងនេះមិនមានកត្តាបឋមរួមទេ។

XI. ចូររកពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃចំនួនៈ

ក-18 និង 28

2)	18	28
3)	9	14
2)	3	14
3)	3	7
7)	1	7
	1	1

តាមាការគណនាដូចបានបង្ហាញនៅក្នុងប្រអប់ខាងស្តាំគេបាន ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ 18 និង 28 គឺ $2^2\times 3^2\times 7=252$

ខ-27 និង 63

3)	27	63
3)	9	21
3)	3	7
7)	1	1
	1	1

តាមការគណនាដូចបានបង្ហាញនៅក្នុងប្រអប់ខាងស្តាំ គេបានពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ 27 និង 63 គឺ $3^2\times 7=189$

គ- 20, 25 និង 15

5)	20	25	15
2)	4	5	3
2)	2	5	3
5)	1	5	3
3)	1	1	3
	1	1	1

តាមការគណនាដូចបង្ហាញនៅប្រអប់ខាងស្តាំ គេបានពហុគុណរួមតូចបំផុតគឺ 20, 25 និង 15 គឺ $2^2\times 5^2\times 3=300$

XII. ស្រាយបញ្ជាក់ថាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់ជាផលគុណនៃកត្តារួមធំនិងពហុគុណរួមតូចបំផុតរបស់វាៈឧបមាថា G គឺជាកត្តារួមធំបំផុតនៃពីរចំនួនគត់ K និង T ។

ដូចនេះ K និង T អាចត្រូវបានបញ្ជាក់ថា $K=kG$, $T=tG$ ដោយ k និង t ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

ដូចនេះបើសិន L បញ្ជាក់ពីពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ K និង T

ដូច្នេះ $L=ktG$

ដូច្នេះ $GL=GktG=kGtG=KT$

ដូច្នេះតាមការសម្រាយខាងលើសបញ្ជាក់ឃើញថាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់គឺជាផលគុណនៃកត្តារួមធំបំផុតនិងពហុគុណរួមតូចបំផុតរបស់វា។

XIII. ក-ឧបមាថា G គឺជាកត្តារួមធំបំផុតនិង L គឺពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនគត់ K និង T ។

ដោយ $GL=KT$ (សម្រាយបញ្ជាក់រួចនៅចំនុចមុន)

ដូច្នេះ $90G=810$

ដូច្នេះ $G=9$

ខ-ដោយ $K<T$ យើងយក $K=9k$, $T=9t$ ឬ $k<t$

ដោយ $KT=810$ យើងបាន

$9k\times 9t=810 \Rightarrow kt=10$

ដូច្នេះ $(k,t)=(1,10)$ ឬ $(2,5)$

i. បើ $(k,t)=(1,10)$, $K=9$, $T=90$ ។

ii. បើ $(k,t)=(2,5)$, $K=18$, $T=45$ ។

XIV. ក-រកតម្លៃអប្បបរមានៃ m

$825=3\times 5\times 5\times 11$

$231m=3\times 7\times 11$

$165=3\times 5\times 11$

ដូច្នេះ 825 និង $231m$ ពិតជាមាន $3,5$ និង 11 ជាកត្តារបស់ខ្លួនដូច្នេះ $m=5$

ខ-រកតម្លៃអប្បបរមានៃ n

$675=3\times 3\times 3\times 5\times 5$

$165n=3\times 5\times 11$

$135=3\times 3\times 3\times 5$

ដូច្នេះ 675 និង $165n$ ពិតជាមាន $3,3,3$ និង 5 ជាកត្តារបស់ខ្លួន។

ដូច្នេះ $n=9$

XV. ក-ពីរការគណនាដូចបង្ហាញនៅក្នុងប្រអប់ខាងស្តាំកត្តារួមធំបំផុតនៃ 27, 45និង63គឺ $3\times 3=9$

3)	27	45	63
3)	9	15	21
	3	5	7

ខ-ពីការគណនាដូចបង្ហាញនៅក្នុងប្រអប់ខាងស្តាំ កត្តារួមធំបំផុតនស 28 និងនិង140គឺ $2\times 2\times 7=28$

2)	28	140
2)	14	70
7)	7	35
	1	5

XVI. ក-កត្តារួមធំបំផុតនៃ3003 និង 8645

3003	8645	2
	6006	
	2639	

1	3003	8645	2
	2639	6006	
	364	2639	

1	3003	8645	2
	2639	3003	
	364	2639	7
		2548	
		91	

1	3003	8645	2
	2639	6006	
4	364	2639	7
	364	2548	
	0	91	

ដូច្នេះកត្តារួមធំបំផុតនៃ 3003 និង 8645 គឺ 91។

ខ-កត្តារួមធំបំផុតនៃ 1955 និង 5083

	1955	5083	2
		3910	
		1173	

1	1955	5083	2
	1173	3910	
	782	1173	

1	1955	5083	2
	1173	3910	
	782	1173	1
		782	
		391	

1	1955	5083	2
	1173	3910	
2	782	1173	1
	782	782	
	0	391	

ដូច្នេះកត្តារួមធំបំផុតនៃ 1955 និង 5083 គឺ391។