ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

កិច្ចការស្រាវជ្រាវ
គណិតវិទ្យា
ស៊ីត & សេរី

សាស្ត្រាចារ្យណែនាំ : សៀង វាសនា

គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យាក្រុម៨ ជំនាន់ទី២១

វ៉ាន់ ចាន់សុខកាយ   ហ៊ុយ គាលី

ម៉េង លីនណា   ទន សុខនី

ម៉ាង ពុធាឬទ្ធិ   ឡេង ចិត្រា   ង៉ូវ វាសនា

រក្សា សិទ្ធិ

ស៊ីតនៃចំនួនពិត

សេចក្តីផ្តើម

សញ្ញាណនៃស៊ីត: ស៊ីតគឺជាអនុវត្តន៍ពីសំនុំ $\mathbb{N}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ឬ $\mathbb{C}$ មានន័យថា:

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \text{ ឬ } \mathbb{C}$$

$$n\mapsto f(n)=(u_n)\ :\ \forall n\in\mathbb{N}$$

ឧទាហរណ៍: គេមានសំនុំចំនួនពិត $(u_n)=\left\{-1,2,-5,\frac{1}{3},7,-9\right\}:\forall n\in\mathbb{N}$ ជាស៊ីតនៃចំនួនពិតដែល

$$u_1=-1\ ;\ u_2=2\ ;\ u_3=-5\ ;\ u_4=\frac{1}{3}\ ;\ u_5=7\ ;\ u_6=-9$$

ស៊ីតនព្វន្ត

1. និយមន័យ:

ស៊ីតនព្វន្ត គឺជាស៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកចំនួនថេរ d មួយហៅថាផលសងរួម ។

- បើ (U_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត មានផលសងរួម d និងតួទីមួយ
- U_1 នោះគេបាន:

$u_n=u_{n-1}+d$ និង $d=u_n-u_{n-1}$ ដែល d ហៅថាផលសងរួម ។

ឧទាហរណ៍: គេមានស៊ីតចំនួនពិត $\{u_n\}:5,9,13,17,...$ ជាស៊ីតនព្វន្តពីព្រោះ

$u_2-u_1=9-5=4$

$u_3-u_2=13-9=4$

$u_4-u_3=17-13=4$

....

....

$u_n-u_{n-1}=4\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}$

ឧទាហរណ៍: គេមានស៊ីតចំនួនពិត $\{a_n\}:2,4,6,8,...,2n$ ជាស៊ីតនព្វន្តពីព្រោះ

$a_2-a_1=4-2=2$

$a_3-a_2=6-4=2$

$a_4-a_3=8-6=2$

....

$a_n-a_{n-1}=2n-2(n-1)=2\ ;\forall n\in\mathbb{N}$

<u>ឧទាហរណ៍:</u> គេមានស្ទីតចំនួនពិត $\{a_n\}: 2,4,5,-7,...$ មិនមែនជាស្ទីតនព្វន្តទេពីព្រោះ

$$\left.\begin{array}{l} d = a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2 \\ d = a_3 - a_2 = 5 - 4 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow 2 \neq 1$$

2. <u>តួទី n នៃស្ទីតនព្វន្ត</u>

គេមានស្ទីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, ..., u_{n-1}, u_n$ ដែល u_1 ជាតួទី1 និង u_n ជាតួទី n ដែលមាន n ចំនួនតួហើយ d ជាផលសងរួមនោះតួទី n នៃស្ទីតនព្វន្តកំណត់ដោយ: $u_n = u_1 + (n-1)d \; ; \forall n \in \mathbb{N}$ ។

<u>សម្រាយរូមមន្ត</u>

គេមាន d ជាផលសងរួមនៃស្ទីតនព្វន្ត និង U_1 ជាតួទីមួយ

គេបាន

$$\begin{aligned} U_2 &= U_1 + d && = U_1 + (2-1)d \\ U_3 &= U_2 + d = (U_1 + d) + d = U_1 + 2d && = U_1 + (3-1)d \\ U_4 &= U_3 + d = (U_1 + 2d) + d = U_1 + 3d && = U_1 + (4-1)d \\ U_5 &= U_4 + d = (U_1 + 3d) + d = U_1 + 4d && = U_1 + (5-1)d \end{aligned}$$

....

....

....

តាមលំនាំ $U_n = U_1 + (n-1) \times d$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $U_n = U_1 + (n-1) \times d$ ។

<u>ឧទាហរណ៍:</u> គេមានស្ទីតនព្វន្ត $\{a_n\}: 13, 17, 21, 25, ...$ ចូរកំណត់តួទីn នៃស្ទីតនេះ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមាន: $\{a_n\}: 13, 17, 21, 25, ...$

ដែល $a_1 = 13$ និង $d = a_2 - a_1 = 17 - 13 = 4$

តាមរូបមន្តយើងបាន:

$$\begin{aligned} U_n &= U_1 + (n-1) \times d \\ U_n &= 13 + (n-1)4 \\ &= 13 + 4n - 4 \\ &= 4n + 9 \; ; \; \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

<u>ដូចនេះ:</u> $U_n = 4n + 9 \; ; \forall n \in \mathbb{N}$ ។

3. ផលបូកតួចុងនិងផលបូកតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

ផលបូកស្មើចម្ងាយពីតួចុង $U_1+U_n=U_2+U_{n-1}=U_3+U_{n-2}=\ldots=U_p+U_{n-p+1}$

ស្រាយបញ្ជាក់

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្ទីតនព្វន្ត $U_n=U_1+(n-1)d$

គេបាន
$$U_1+U_n=U_1+U_1+(n-1)d \qquad =2U_1+(n-1)d$$
$$U_2+U_{n-1}=U_1+d+U_1+(n-2)d \qquad =2U_1+(n-1)d$$
$$U_3+U_{n-2}=U_1+2d+U_1+(n-3)d \qquad =2U_1+(n-1)d$$

....

$$U_p+U_{n-p+1}=U_1+(p-1)d+U_1+\left[(n-p+1)-1\right]d$$
$$=2U_1+pd-d+nd-pd$$
$$=2U_1+(n-1)d$$

ឃើញថា ផលបូក $U_1+U_n=U_2+U_{n-1}=U_3+U_{n-2}=\ldots=U_p+U_{n-p+1}=2U_1+(n-1)d$ ដូចគ្នា

ដូចនេះ: ផលបូកស្មើចម្ងាយពីតួចុង $U_1+U_n=U_2+U_{n-1}=U_3+U_{n-2}=\ldots=U_p+U_{n-p+1}$ ។

ឧទាហរណ៍: គេមានស្ទីតនព្វន្ត $\{a_n\}:1,2,3,4,5,6$ នោះយើងបាន: $1+6=2+5=3+4=7$

- ចំណាំ: រូបមន្តខាងលើនេះអនុវត្តន៍បានតែចំពោះចំនួនតួស្ទីតជាចំនួនគូរ ។

4. ផលបូកតួនៃស្ទីតនព្វន្ត

ជាទូទៅ: ផលបូក n តួនៃស្ទីតនព្វន្តដែលមាន U_1 ជាតួទីមួយ និង U_n ជាតួទី n កំណត់ដោយ:

$$S_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n)\ ;\ \forall\in\mathbb{N}$$ ។

សម្រាយរូបមន្ត

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីតនព្វន្តគឺ $S_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n)=\frac{n}{2}\left[2U_1+(n-1)d\right]$

គេមាន

$$+\begin{cases}S_n=U_1+U_2+U_3+\ldots+U_{n-2}+U_{n-1}+U_n\\ S_n=U_n+U_{n-1}+U_{n-2}+\ldots+U_3+U_2+U_1\end{cases}$$
$$2S_n=(U_1+U_n)+(U_2+U_{n-1})+(U_3+U_{n-2})+\ldots+(U_3+U_{n-2})+(U_2+U_{n-1})+(U_1+U_n)$$

តាមផលបូកស្មើចម្ងាយពីតួចុង គេបាន $U_1+U_n=U_2+U_{n-1}=U_3+U_{n-2}=\ldots$

គេបាន $2S_n=(U_1+U_n)+(U_1+U_n)+(U_1+U_n)+...+(U_1+U_n)+(U_1+U_n)+(U_1+U_n)$

មាន n តួនៃ (U_1+U_n)

$2S_n=n(U_1+U_n)$

$S_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n) \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $U_n=U_1+(n-1)d$

នោះ (1) ទៅជា $S_n=\frac{n}{2}\left[U_1+U_1+(n-1)d\right]=\frac{n}{2}\left[2U_1+(n-1)d\right] \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $S_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n)=\frac{n}{2}\left[2U_1+(n-1)d\right]$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n)=\frac{n}{2}\left[2U_1+(n-1)d\right]$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

- ចំណាំ: បើ a , b និង c ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $b=\frac{a+c}{2}$

➤**របៀបទី១** តាមផលបូកស្មើចម្ងាយពីតួចុង បើមានបីតួតគ្នា a , b , c

គេបាន $a+c=b+b$ ឬ $2b=a+c$ នាំឱ្យ $b=\frac{a+c}{2}$

➤**របៀបទី២** តាង a ជាតួទី១ នាំឱ្យ $b=a+d$, $c=a+2d$

គេបាន $\frac{a+c}{2}=\frac{a+a+2d}{2}=\frac{2a+2d}{2}=a+d=b$

ដូចនេះ $b=\frac{a+c}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

<u>លំហាត់មានដំណោះស្រាយ</u>

<u>លំហាត់ទី១</u>

កំណត់តួទីមួយ និងផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដោយដឹងថាផលបូក n តួដំបូងស្មើនឹង $\frac{n^2}{2}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់តួទីមួយ និង ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមាន $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n=\frac{n^2}{2}$

បើ $n=1\Rightarrow S_1=u_1=\frac{1}{2}$

បើ $n=2\Rightarrow S_2=u_1+u_2=\frac{4}{2}=2$

នាំឱ្យ $u_2=2-u_1=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

<u>ដូចនេះ:</u> $u_1 = \frac{1}{2}$ និង $d = 1$ ។

<u>លំហាត់ទី២</u>

គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត 39,37,35,33,......

ក) គណនាផលបូក n តួដំបូង S_n នៃស្វ៊ីតនេះ

ខ) កំណត់តំលៃ n ដើម្បីឲ្យ S_n មានតំលៃអតិបរិមា រួចកំណត់អតិបរិមានោះផង ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមានស្វ៊ីតនព្វន្ត 39,37,35,33,......

តាមរូបមន្ត $U_n = U_1 + (n-1)d \, , \forall n \in \mathbb{N}$

ដោយ $U_1 = 39 \, , \, d = 37 - 39 = -2$

នាំឲ្យ $U_n = 39 + (n-1)(-2)$

$U_n = 41 - 2n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

យើងបាន $S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(39 + (41 - 2n)\right) \, , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{n}{2}(39 + 41 - 2n)$$

$$S_n = -n^2 + 40n \, , \forall n \in \mathbb{N}$$

ដូច្នេះ ផលបូក n តួដំបូង S_n នៃស្វ៊ីតនេះគឺ $S_n = -n^2 + 40n \, , \forall n \in \mathbb{N}$ ។

ខ) កំណត់តំលៃ n ដើម្បីឲ្យ S_n មានតំលៃអតិបរិមា រួចកំណត់តំលៃអតិបរិមា

យើងមាន: $S_n = -n^2 + 40n \, , \forall n \in \mathbb{N}$

យើងអាចសរសេរទៅជា: $S_n = -n^2 + 40n \, , \forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n = -\left(n^2 - 40n + 400\right) + 400$$

$$S_n = -(n-20)^2 + 400$$

ដោយ $-(n+20)^2 \le 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

នាំឲ្យ $S_n = -(n-20)^2 + 400 \le 400$

ទាញបាន S_n មានតំលៃអតិបរិមាកាលណា: $-(n-20)^2 = 0 \Rightarrow n = 20$

ហើយតំលៃអតិបរិមា $S_n = S_{Max} = 400$

<u>ដូច្នេះ:</u> តំលៃ $S_n = S_{Max} = 400$ កាលណា $n = 20$ ។

<u>លំហាត់៣</u>

គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $(U_n), n\in\mathbb{N}$ ដោយដឹងថា $U_{11}=53$ និង $U_{50}=209$ ។ចូរគណនា n តួដំបូង S_n នៃស្វ៊ីតនេះ?

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់ S_n នៃស្វ៊ីតនពន្ត

យើងមាន: $U_{11}=53$ និង $U_{50}=209$

តាមរូបមន្ត $U_n=U_1+(n-1)d\ , n\in\mathbb{N}$

យើងបាន: $\begin{cases}U_{11}=U_1+(11-1)d\\ U_{50}=U_1+(50-1)d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}U_1+10d=53 & (1)\\ U_1+49d=209 & (2)\end{cases}$

យក $(1)-(2)$ យើងបាន:

$$-\begin{cases}U_1+10d=53 & (1)\\ U_1+49d=209 & (2)\end{cases}$$
$$-39d=-156\Rightarrow d=4$$

យក d ជំនួសក្នុង (1) យើងបាន: $U_1=53-10d$

$$=53-10(4)$$
$$U_1=13$$

ដោយ $S_n=\frac{n}{2}\left[2U_1+(n-1)d\right], n\in\mathbb{N}$

$$=\frac{n}{2}\left[2\times13+(n-1)4\right]=\frac{n}{2}(4n+22)$$

$$S_n=2n^2+11, n\in\mathbb{N}$$

<u>ដូច្នេះ</u> S_n នៃស្វ៊ីតនពន្តគឺ $S_n=2n^2+11, n\in\mathbb{N}$ ។

<u>លំហាត់៤</u>

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្តពីរដែលមានតួរ $2,7,12,......$ និង $2,5,8,......$ តើ121តួរនៃស្វ៊ីតទាំងពីរតើមានប៉ុន្មានតួរដែលស្មើគ្នា ?

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់ចំនួនតួរស្មើគ្នានៃស្វ៊ីតទាំងពីរ

យើងមានស្វ៊ីត $2,7,12,......$ និង $2,5,8,......$

យើងតាង $(U_p), \forall p\in\mathbb{N}$ និង $(U_q), \forall q\in\mathbb{N}$ រៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តទាំងពីរ

យើងបាន: $U_p=2+(p-1)5, \forall p\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow U_p = 5p - 3\,,\ \forall p \in \mathbb{N}$

និង $U_q = 2 + (q-1)3\,,\ \forall q \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow U_q = 3q - 1\,,\ \forall q \in \mathbb{N}$

ចំពោះ $1 \le p \le 121$ និង $1 \le q \le 121$ នោះ $U_p = U_q$

គេបាន: $5p - 3 = 3q - 1 \Leftrightarrow 5(p-1) = 3(q-1)$

ទាញបាន: $\begin{cases} p-1 = 3k \\ q-1 = 5k \end{cases}, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3k+1 \\ q = 5k+1 \end{cases}, k \in \mathbb{N}$

ដោយ $1 \le p \le 121$ និង $1 \le q \le 121$

នាំឲ្យ $\begin{cases} 1 \le 3k+1 \le 121 \\ 1 \le 5k+1 \le 121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le k \le 40 \\ 0 \le k \le 24 \end{cases}$

ទាញបាន: $k = \{0;1;2;...;24\}$

ដូច្នេះ: ក្នុងចំនោម 121 តួរនៃស្វ៊ីតទាំងពីរគឺមាន 25 ដែលស្មើគ្នា ។

លំហាត់៥

បង្ហាញថាបីតួរតគ្នានៃ $\frac{a}{a-1}, \frac{3a-2}{a^2-1}, \frac{4-a}{a+1}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាបីតួរតគ្នានៃ $\frac{a}{a-1}, \frac{3a-2}{a^2-1}, \frac{4-a}{a+1}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

បើ $\frac{a}{a-1}, \frac{3a-2}{a^2-1}, \frac{4-a}{a+1}$ ជាបីតួរតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តលុះត្រាតែ $\frac{a}{a-1} + \frac{4-a}{a+1} = 2\left(\frac{3a-2}{a^2-1}\right) \quad (*)$

យើងបាន: $\frac{a}{a-1} + \frac{4-a}{a+1} = \frac{a(a+1) + (4-a)(a-1)}{(a-1)(a+1)}$

$$= \frac{a^2 + a + 4a - 4 - a^2 + a}{a^2 - 1}$$

$$= \frac{6a-4}{a^2-1}$$

នាំឲ្យ $\frac{a}{a-1} + \frac{4-a}{a+1} = 2\left(\frac{3a-2}{a^2-1}\right)$ ពិតតាម $(*)$

ដូច្នេះ: បីតួរតគ្នានៃ $\frac{a}{a-1}, \frac{3a-2}{a^2-1}, \frac{4-a}{a+1}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

លំហាត់៦

គេឲ្យ α, β, φ ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណមួយ ។ស្រាយថាបើ $\text{cotg}(\alpha), \text{cotg}(\beta), \text{cotg}(\varphi)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត $\sin^2(\alpha), \sin^2(\beta), \sin^2(\varphi)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាបើ $\text{cotg}(\alpha), \text{cotg}(\beta), \text{cotg}(\varphi)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត $\sin^2(\alpha), \sin^2(\beta), \sin^2(\varphi)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ

យើងមាន: $\text{cotg}(\alpha), \text{cotg}(\beta), \text{cotg}(\varphi)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $\cot g(\alpha) + \cot g(\varphi) = 2\cot g(\beta)$

$$\Leftrightarrow \cot g(\alpha) - \cot g(\beta) = \cot g(\beta) - \cot g(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} - \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} - \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\beta).\cos(\alpha) - \sin(\alpha).\cos(\beta)}{\sin(\alpha).\sin(\beta)} = \frac{\sin(\varphi).\cos(\beta) - \sin(\beta).\cos(\varphi)}{\sin(\beta)\sin(\varphi)} \quad (*)$$

តែ $\begin{cases} \sin(\beta).\cos(\alpha) - \sin(\alpha).\cos(\beta) = \sin(\beta - \alpha) \\ \sin(\varphi).\cos(\beta) - \sin(\beta).\cos(\varphi) = \sin(\varphi - \beta) \end{cases}$

នាំឲ្យ $(*)$ ទៅជា $\dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha).\sin(\beta)} = \dfrac{\sin(\varphi - \beta)}{\sin(\beta)\sin(\varphi)}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\varphi - \beta)}{\sin(\beta)} \quad (**)$$

ដោយ α, β, φ ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណ (សម្មតិកម្ម)

យើងបាន: $\alpha + \beta + \varphi = \pi \Rightarrow \beta + \varphi = \pi - \alpha$

នាំឲ្យ $\sin(\beta + \varphi) = \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ ដូចគ្នាដែរ $\sin(\varphi + \alpha) = \sin(\pi - \beta) = \sin(\beta)$

នាំឲ្យ $(**)$ ទៅជា $\dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\varphi + \beta)} = \dfrac{\sin(\varphi - \beta)}{\sin(\beta + \alpha)}$

$$\Leftrightarrow \sin(\beta - \alpha).\sin(\beta + \alpha) = \sin(\varphi + \beta).\sin(\varphi - \beta)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(\beta) - \sin^2(\alpha) = \sin^2(\varphi) - \sin^2(\beta)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2(\beta) = \sin^2(\varphi) + \sin^2(\alpha) \quad \text{(ពិត)}$$

ដូច្នេះ: សម្រាយបញ្ជាក់ខាងលើត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៧

មុំទាំងបីនៃត្រីកោណមួយបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។ រករង្វាស់មុំនៃត្រីកោណនេះ ?

ដំណោះស្រាយ

រករង្វាស់មុំនៃត្រីកោណ

តាង x, y ជារង្វាស់មុំស្រួចពីរនៃត្រីកោណកែងនោះដែល $x < y < 90^o$

គេបាន: $90^o = x + 2d$ និង $y = 90^o - d$

តាមលក្ខណៈផលបូកមុំក្នុងត្រីកោណ $x + y + 90^o = 180^o$

$$90^o - 2d + 90^o - d = 90^o$$

$$d = \frac{90^o}{3} = 30^0$$

គេបាន:

$$x = 90^o - 2d = 90^o - 60^o = 30^o$$

$$y = 90^o - 30^o = 60^o$$

ដូច្នេះ មុំក្នុងត្រីកោណគឺ $30^o, 60^o$ និង 90° ។

លំហាត់ទី៨

រកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យបីចំនួន $10-3x$, $2x^2+3$, $7-4x$ ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមាន: បីចំនួន $10-3x$, $2x^2+3$, $7-4x$ ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន: $\frac{(10-3x)+(7-4x)}{2} = 2x^2+3$

$$\Leftrightarrow 17 - 7x = 2(2x^2+3)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 7x - 11 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-7+\sqrt{225}}{8} = 1 \\ x = \frac{-7-\sqrt{225}}{8} = -\frac{11}{4} \end{array} \right.$$

ដូច្នេះ $x = 1$ ឬ $x = -\frac{11}{4}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

<u>លំហាត់អនុវត្តន៍</u>

1. ក) គណនា y បើ $x + y + z = 18$ ដោយ x, y, z ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

   ខ) រកតម្លៃ d ដើម្បីឱ្យ $\frac{z}{x} \in \mathbb{N}$ គណនា x និង z ។

2. ក) តើតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត -5 , -2 , 1 , 4 , … ដែលមានតម្លៃស្មើ 52 ?

   ខ) គេឱ្យសេរី 5+8+11+14+… តើគេត្រូវបូកប៉ុន្មានតួនៃសេរីនេះដើម្បីឱ្យផលបូកវាមានតម្លៃ 670 ?

3. ក) គណនា a , b , c ,និង d នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដោយដឹងថា $a+b+c+d = 22$ និង $a^2+b^2+c^2+d^2 = 166$

ខ) គេមានបួនចំនួនបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។ ដោយដឹងថាផលបូកពីរតួដំបូងស្មើនឹង 60 ហើយផលគុណពីរតួទៀតស្មើនឹង 75 ។ រកចំនួននោះ ។

4 .ក) គណនា a , b , c នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដោយដឹងថា $a+b+c=171$ និង $a^2+b^2+c^2=9845$ ។

ខ) គណនា x, y, z ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដោយដឹងថា $x+y+z=36$ និង $x.y.z=1428$ ។

គ) គណនា a , b , c នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដោយដឹងថា $a+b+c=24$ និង $a^4+b^4+c^4=15392$ ។

ឃ) គណនា x, y, z ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដោយដឹងថា $x+y+z=-9$ និង $x.y.z=48$ ។

5 .គេឱ្យស្វ៊ីតនៃមួយចំនួន $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ ដែល $u_1+u_2+u_3+...+u_n=an^2+bn$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ក) ចូរស្រាយថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

ខ) គណនា u_1 និង d ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ។

6 .ចូរកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយដោយស្គាល់បូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះគឺ $s_n=\frac{3n^2-n}{2}$ ។

7. គេមាន $S_n=\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+....+\frac{n}{1000...0}$ (មាន n លេខសូន្យ។(

ក) ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+....+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}, \forall x\neq 1, n\in\mathbb{N}$ ។

រួចទាញឱ្យបានថា $1+2x+3x^2+.....+nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{[nx-(n+1)]x^n}{(1-x)^2}$ ។

ខ) ទាញរកតម្លៃនៃ S_n និង $\lim_{x\to+\infty} S_n$ ។

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

1. និយមន័យ

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រៈ គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ(ក្រៅពីតួទីមួយ)ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q ដែល
$q \neq 0$ ។ ចំនួនងថេរ q នោះហៅថា **ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ** ។

បង្ហាញថា បើ q ជាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះគេបាន $q = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

តាមនិយមន័យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖ តួនីមួយៗ ស្មើតួមុនបន្ទាប់ គុណនឹងចំនួនថេរមួយ

គេបាន $U_{n+1} = U_n \times q$

នាំឱ្យ $q = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

ដូចនេះ $q = \frac{U_{n+1}}{U_n}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

2. តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

រូបមន្តតួទីn នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ដោយៈ $U_n = U_1 \times q^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

បង្ហាញថា រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ដោយ : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$

គេមាន q ជាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ និង U_1 ជាតួទីមួយ

គេបាន $U_2 = U_1 \times q \qquad = U_1 \times q^{2-1}$

$U_3 = U_2 \times q = (U_1 \times q) \times q = U_1 \times q^2 \qquad = U_1 \times q^{3-1}$

$U_4 = U_3 \times q = (U_1 \times q^2) \times q = U_1 \times q^3 \qquad = U_1 \times q^{4-1}$

$U_5 = U_4 \times q = (U_1 \times q^3) \times q = U_1 \times q^4 \qquad = U_1 \times q^{5-1}$

....

តាមលំនាំ $U_n = U_1 \times q^{n-1}$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $U_n = U_1 \times q^{n-1}$ ។

3. ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

<u>ជាទូទៅ:</u> ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុងស្មើនឹងផលគុណចុងទាំងពីរ ។
គេកំណត់សរសេរដោយ: $U_p \times U_{n-p+1} = U_1 \times U_n \;, \forall p, n \in \mathbb{N}$

បង្ហាញថា ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង $U_1 \times U_n = U_2 \times U_{n-1} = U_3 \times U_{n-2} = \ldots = U_p \times U_{n-p+1}$

តាមរូបមន្ត: តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $U_n = U_1 \times q^{n-1}$

គេបាន $U_1 \times U_n = U_1 \times U_1 \times q^{n-1} \qquad = U_1^2 \times q^{n-1}$

$U_2 \times U_{n-1} = U_1 \times q \times U_1 \times q^{n-2} \quad = U_1^2 \times q^{n-1}$

$U_3 \times U_{n-2} = U_1 \times q^2 \times U_1 \times q^{n-3} \quad = U_1^2 \times q^{n-1}$

....

$U_p \times U_{n-p+1} = U_1 \times q^{p-1} \times U_1 \times q^{(n-p+1)-1}$

$= U_1^2 \times q^{p-1} \times q^{n-p}$

$= U_1^2 \times q^{p-1+n-p} = U_1^2 \times q^{n-1}$

ឃើញថា $U_1 \times U_n = U_2 \times U_{n-1} = U_3 \times U_{n-2} = \ldots = U_p \times U_{n-p+1} = U_1^2 \times q^{n-1}$ ដូចគ្នា

<u>ដូចនេះ:</u> $U_1 \times U_n = U_2 \times U_{n-1} = U_3 \times U_{n-2} = \ldots = U_p \times U_{n-p+1}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

<u>ករណីពិសេស:</u> បើបីចំនួន a, b, c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ

$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow a \times c = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{a \times c}$ ហៅថា **មធ្យមធរណីមាត្រ** ។

4. ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទីមួយ U_1 និងផលធៀបរួម $q \, ; \, q \neq 0$
កំណត់សរសេរដោយ: $S_n = \frac{U_1(q^n - 1)}{q - 1} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$ ។

<u>ស្រាយបញ្ជាក់ថា</u> ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ដោយ $S_n = \frac{U_1(q^n - 1)}{q - 1}$

គេមាន $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$

$S_n = U_1 + U_1 q + U_1 q^2 + \ldots + U_1 q^{n-3} + U_1 q^{n-2} + U_1 q^{n-1} \qquad (1)$

នាំឱ្យ $qS_n = U_1 q + U_1 q^2 + U_1 q^3 + \ldots + U_1 q^{n-2} + U_1 q^{n-1} + U_1 q^n \qquad (2)$

គេយក $(2) - (1)$

$$-\begin{cases} qS_n = \quad U_1q+U_1q^2+U_1q^3+...+U_1q^{n-3}+U_1q^{n-2}+U_1q^{n-1}+U_1q^n \\ S_n = U_1+U_1q+U_1q^2+U_1q^3+...+U_1q^{n-3}+U_1q^{n-2}+U_1q^{n-1} \end{cases}$$

គេបាន $(q-1)S_n = U_1q^n - U_1$

នាំឱ្យ $S_n = \dfrac{U_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$

ដូចនេះ: ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $S_n = \dfrac{U_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

5. ផលគុណ n តួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$

គេបាន: $\begin{cases} p = u_1\times u_2\times u_3\times\cdots\times u_n \ , (1) \\ p = u_n\times u_{n-1}\times\cdots\times u_2\times u_1 \ , (2) \end{cases}$

យក (1) គុណនិង (2)

$$p^2 = (u_1\times u_n)(u_2\times u_{n-1})\cdots(u_{n-1}\times u_2)(u_n\times u_1)$$

$$= (u_1\times u_n)(u_1\times u_n)(u_1\times u_n)\cdots(u_1\times u_n)$$

យើងបាន:

$$p^2 = (u_1\times u_n)^n$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{(u_1\times u_n)^n}$$

ដូច្នេះ ផលគុណ n តួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ដោយ: $p = (u_1\times u_n)^{\frac{n}{2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

6. ផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអន្តនតួ

ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអន្តនតួ $U_1+U_1q+U_2q^2+\cdots+U_1q^{n-1}+\cdots$ ដែល $|q|<1$

កំណត់ដោយ: $S_n = \dfrac{U_1}{1-q}$ ឬ $S_\infty = \dfrac{U_1}{1-q}$ ។

- សម្គាល់: បើ $|q|>1$ នោះ S_n ឬ S_∞ មិនអាចកំណត់បាន ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: ផលបូកអនន្តតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $S_\infty = \dfrac{U_1}{1-q}$

គេមាន $S_n = \dfrac{U_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ ចំពោះ $|q|\neq 1$ អាចសរសេរជា $S_n = \dfrac{U_1q^n}{q-1} - \dfrac{U_1}{q-1}$

បើ $|q|<1$ នោះ q^n កាន់តែតូចទៅៗកាលណាចំនួនតួ n កាន់តែធំទៅៗមានន័យថា

$q^n \to 0$ ពេល $n\to+\infty$

គេបាន $S_n = S_\infty = 0 - \frac{U_1}{q-1} = \frac{U_1}{1-q}$ ព្រោះពេល) $n \to +\infty$ នោះ $q^n \to 0$ នាំឱ្យ $\frac{U_1 q^n}{q-1} \to 0$ (

ដូចនេះ: | ផលបូកអនន្តតួនៃស្វ៊ីត (U_n) ដែល $|q|<1$ កំណត់ដោយ $S_\infty = \frac{U_1}{q-1}$ | ។

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

ផលបូកពីរតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើនឹង9 និងផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួស្មើនឹង 25 ។ ចូរគណនា $q \& U_1$ បើផលធៀបរួម $q>0$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $q \& U_1$

តាមសម្មតិកម្ម: $U_1 + U_2 = 9$ និង $25 = \frac{U_1}{1-q}$ (1)

ដោយ $U_2 = q.U_1$ នាំឲ្យ $U_1 + U_2 = 9 \Leftrightarrow U_1 + q.U_1 = 9$ (2)

តាម(1)និង(2)យើងទាញបាន:

$$\begin{cases} U_1 + U_1.q = 9 & (1) \\ \frac{U_1}{1-q} = 25 & (2) \end{cases}$$

តាម(1) $: \Rightarrow U_1 = \frac{9}{1+q}$ ជំនួសក្នុង(2)គេបាន:

$$\frac{9}{(1+q)(1-q)} = 25 \Leftrightarrow (1+q)(1-q) = \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow 1 - q^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow q^2 = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow q = \frac{4}{5}, q > 0$$

នាំឲ្យ $U_1 = \frac{9}{1+q} = \frac{9}{1+\frac{4}{5}} = 5$

ដូច្នេះ: $q = \frac{4}{5}$ និង$U_1 = 5$ ។

លំហាត់ទី២

តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រស្មើនឹង 3 ហើយមានផលធៀបរួម q ដែលតំលៃដាច់ខាតនៃ q តូចជាងមួយ ។ ផលបូក 3 តួដំបូងស្មើ $\frac{8}{9}$ នៃផលបូក 6 តួដំបូង ។ គណនាផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួនោះ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គណនាផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

តាមសម្មតិកម្មយើងបានៈ

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_1 + U_2 + U_3 = \frac{8}{9}(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6) \end{cases}$$

ដោយ $U_1 + U_2 + U_3 = \frac{U_1(q^3 - 1)}{q - 1} = \frac{3(q^3 - 1)}{q - 1}$

និង $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 = \frac{U_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3(q^6 - 1)}{q - 1}$

គេបានៈ $\frac{3(q^3 - 1)}{q - 1} = \frac{8}{9} \cdot \frac{3(q^6 - 1)}{q - 1}$

$$\Leftrightarrow \frac{(q^3 - 1)}{q - 1} = \frac{8}{9} \cdot \frac{(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{8}{9} \cdot \frac{(q^3 + 1).(q^3 - 1)}{q - 1}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{8}{9}(q^3 + 1) \Leftrightarrow q^3 = \frac{9}{8} - 1$$

$$\Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

នោះ $S_n = \frac{U_1}{1 - q} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6$

ដូច្នេះ $S_n = 6$ ត្រូវបានកំណត់ ។

លំហាត់ទី៣

ក) ដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការ $3x^2 - 8x + 4 = 0$, $(*)$ ។

ខ) គេមាន $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រកើនដែលមាន U_3 & U_4 នៃស៊ីតនេះជាចម្លើយនៃសមីការ $(*)$ ។

a) ទាញរកផលធៀបរួមនៃស៊ីតនេះ ។

b) គណនាតួទីមួយ U_1 នៃស៊ីត ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{R}$ សមីការ $3x^2-8x+4=0$, $(*)$

គេមាន $\Delta = 64-48=16=4^2$

នាំឲ្យ $x_1=\frac{8-4}{6}=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{8+4}{6}=2$

ដូច្នេះ $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=2$ ជាឬសនៃសមីការ $(*)$ ។

ខ) a) ទាញរកផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដោយ $U_3=U_1.q^2$ និង $U_4=U_1.q^3$

គេបាន: $\begin{cases} U_1.q^2=\frac{2}{3} \\ U_1.q^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_1.q^2=2 \\ U_1.q^3=\frac{2}{3} \end{cases}$

- ករណី $\begin{cases} U_1.q^2=\frac{2}{3} & (1) \\ U_1.q^3=2 & (2) \end{cases}$

តាម (2): $U_1.q^3=2$

$\Leftrightarrow U_1.q^2.q=2$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}q=2 \Rightarrow q=3$

ដូច្នេះ ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $q=3$ ។

- ករណី $\begin{cases} U_1.q^2=2 & (1) \\ U_1.q^3=\frac{2}{3} & (2) \end{cases}$

តាម (2): $U_1.q^3=\frac{2}{3} \Leftrightarrow U_1.q^2.q=\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow 2q=\frac{2}{3} \Rightarrow q=\frac{1}{3}$ មិនយកព្រោះ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកើន ។

b) គណនាតួទីមួយ U_1 នៃស្វ៊ីត

យើងមាន: $U_1.q^3=2 \Rightarrow U_1=\frac{2}{q^3}=\frac{2}{27}$

ដូច្នេះ $U_1=\frac{2}{27}$ ។

លំហាត់ទី៤

តើគេត្រូវថែមប៉ុន្មានទៅលើចំនួន $3, 24, 94$ ដើម្បីអោយបាន 3 តួ តៗគ្នាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង a ជាចំនួនដែលត្រូវថែម

គេបាន $3+a$, $24+a$, $94+a$

ដើម្បីឱ្យវាជាស្វ៊ីតធរណីមត្រលុះត្រាតែ

$(24+a)^2=(3+a)(94+a)$ (ធម្យមធរណីមាត្រ)

$576+48a+a^2=282+97a+a^2$

$49a=294$

$a=\frac{294}{49}=6$

ដូចនេះ $\boxed{\text{គេត្រូវថែម } 6 \text{ លើចំនួនទាំង } 3}$

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ a,b,c,d,e មានផលធៀបរួមធំជាង 1 ហើយជាចំនួនបឋមរវាងគ្នានិងតួទី 1 ។ កំណត់ស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងលើដើម្បីឱ្យបាន $6a^2=e-b$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដោយ a,b,c,d,e ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេបាន $b=a\times q$, $c=a\times q^2$, $d=a\times q^3$, $e=a\times q^4$

ដោយ $6a^2=e-b$

នោះ $6a^2=aq^4-aq=aq\left(q^3-1\right)$, $\frac{6a}{q}=\left(q^3-1\right)$ (1)

ដោយ $q\in\mathbb{N}\Rightarrow q^3\in\mathbb{N}\Rightarrow q^3-1\in\mathbb{N}$

នាំឱ្យ $\frac{6a}{q}$ ជាចំនួនចែកដាច់

តែ a និង q ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

នាំឱ្យ $\frac{a}{q}$ ចែកមិនដាច់ , គេបាន $\frac{6}{q}$ ជាចំនួនចែកដាច់

នាំឱ្យ $q=2$, $q=3$, $q=6$

ចំពោះ $q=2$ តាម $(1)\Rightarrow a=\frac{q\left(q^3-1\right)}{6}=\frac{2\left(2^3-1\right)}{6}=\frac{7}{3}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតនោះគឺ $\frac{7}{3},\frac{14}{3},\frac{28}{3},\frac{56}{3},\frac{112}{3}$

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន 7 តួ។ សរសេរស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះបើគេដឹងថាផលបូកបីតួខាងដើមស្មើ 2 ហើយ ផលបូក 3 តួខាងចុងស្មើ 1250 ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

សរសេរស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន 7 តួ

យក $u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលត្រូវរក

<u>តាមបំរាប់</u> $s_1 = u_1+u_2+u_3 = u_1+u_1q+u_1q^2$

$$= u_1\left(1+q+q^2\right) = 2 \qquad (1)$$

$$s_2 = u_5+u_6+u_7 = u_1q^4+u_1q^5+u_1q^6$$

$$= u_1q^4\left(1+q+q^2\right) = 1250 \qquad (2)$$

យក (2) ចែក (1) $\Rightarrow q^4 = \frac{1250}{2} = 625 \quad , q = \pm 5$

.ចំពោះ $q=5$ តាម $(1) \Rightarrow u_1 = \frac{2}{31}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $\frac{2}{31},\frac{10}{31}\frac{50}{31},\frac{250}{31},\frac{1250}{31},\frac{6250}{31},\frac{31250}{31}$

.ចំពោះ $q=-5$ តាម $(1) \Rightarrow u_1 = \frac{2}{21}$

<u>ដូចនេះ</u> ស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $\frac{2}{21},-\frac{10}{21},\frac{50}{21},-\frac{250}{21},\frac{1250}{21},-\frac{6250}{21},\frac{31250}{21}$

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម q ។តួទាំងអស់សុទ្ធតែវិជ្ជមាន u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 ។

ក) គេយក $u_3 = x$ គណនាជាអនុគមន៍នៃ x នូវផលបូក $S_1 = u_1+u_5$ និង $S_2 = u_2+u_4$

ខ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S_2{}^2 = xs_1 + 2x^2$ ។

គ) គណនា x និង q ដើម្បីឱ្យ $S_2 = 20$, $S_1 = \frac{164}{3}$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ក. គណនា $S_1 = u_1+u_5$ ជាអនុគមន៍នៃ x

គេមាន $u_3 = u_1 q^2 \quad \Rightarrow u_1 = \frac{u_3}{q^2} = \frac{x}{q^2}$

$$u_5 = u_1 q^4 = \frac{x}{q^2} \times q^4 = xq^2$$

នាំឱ្យ $S_1 = \frac{x}{q^2} + xq^2 = \frac{x + xq^4}{q^2} = x\left(\frac{1+q^4}{q^2}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{S_1 = x\left(\frac{1+q^4}{q^2}\right)}$

.គណនា $S_2 = u_2 + u_4$

គេមាន $u_2 = \frac{u_3}{q} = \frac{x}{q}$ $u_4 = u_3 q = xq$

នាំឱ្យ $S_2 = \frac{x}{q} + xq = x\left(\frac{1+q^2}{q}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{S_2 = x\left(\frac{1+q^2}{q}\right)}$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S_2{}^2 = xS_1 + 2x^2$

គេមាន $S_2 = x\left(\frac{1+q^2}{q}\right)$

នាំឱ្យ $S_2{}^2 = x^2\left(\frac{1+q^2}{q}\right)^2 = x^2\left(\frac{1+2q^2+q^4}{q^2}\right)$

$$= \frac{x^2 + 2x^2q^2 + x^2q^4}{q^2} = \frac{x^2 + x^2q^4}{q^2} + \frac{2x^2q^2}{q^2}$$

$$= x^2\left(\frac{1+q^4}{q}\right) + 2x^2 = x \cdot x\left(\frac{1+q^4}{q}\right) + 2x^2$$

តែ $S_1 = x\left(\frac{1+q^4}{q^2}\right)$

<u>ដូចនេះ</u> $\boxed{S_2{}^2 = xS_1 + 2x^2}$

គ. គណនា x និង q

គេមាន $s_2{}^2 = xs_1 + 2x^2$

ដោយ $s_2 = 20 \quad , s_1 = \frac{164}{3}$

នាំឱ្យ $(20)^2 = x\left(\frac{164}{3}\right) + 2x^2$

$$400=\frac{164}{3}x+2x^2$$

$$6x^2+164x-1200=0$$

$$3x^2+82x-600=0$$

$$\Delta^{'}=(41)^2-3(-600)$$

$$=1681+1800=3481=59^2$$

នាំឱ្យ $x=\frac{-41-59}{3}<0$ មិនយក

$$x=\frac{-41+59}{3}=6$$

<u>ដូចនេះ</u> $\boxed{x=6}$

គេមាន $s_2=x\left(\frac{1+q^2}{q}\right)$ ដោយ $s_2=20\ ,x=6$

នាំឱ្យ $20=\frac{6+6q^2}{q}$

$$6q^2-20q-6=0$$

$$3q^2-10q+3=0$$

$$\Delta^{'}=(-5)^2-3(3)=16=4^2$$

នាំឱ្យ $q=\frac{5-4}{3}=\frac{1}{3}\ ,q=\frac{5+4}{3}=3$

<u>ដូចនេះ</u> $\boxed{q=\frac{1}{3}\ ,q=3}$ ។

លំហាត់ទី៨

រកពីចំនួនខុសគ្នា x និង y ដែល $x\,,y\,,10$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តហើយ $y\,,x\,,10$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

រកពីចំនួន x និង y

គេមាន $x\,,y\,,10$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

នាំឱ្យ $y=\frac{x+10}{2}$ (1) (មធ្យមនព្វន្ត)

$y\,,x\,,10$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នាំឱ្យ $x^2=10y$ (2) (មធ្យមធរណីមាត្រ)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2)

គេបាន $x^2=10\left(\dfrac{x+10}{2}\right)$

$x^2-5x-50=0$

$\Delta'=(-5)^2-4(-50)$

$=25+200=225=15^2$

$x_1=\dfrac{5+15}{2}=10 \quad , x_2=\dfrac{5-15}{2}=-5$

- ចំពោះ $x=10$ តាម $(1)\Rightarrow y=10$ មិនយក ព្រោះ $x\neq y$
- ចំពោះ $x=-5$ តាម $(1)\Rightarrow y=\dfrac{5}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{x=-5 \text{ និង } y=\dfrac{5}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៩

ក) គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $2,6,18...$ តើចំនួន 486 ជាតួទីប៉ុន្មាន? គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតនេះត្រឹមតួដែលស្មើ 486 ដំបូង។

ខ) គេឲ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $3,9,27,...$ ។ គណនា u_8 និងផលបូក 7 ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. រកតួដែលមានតម្លៃស្មើ 486

យក $u_n=486$

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1q^{n-1}$

ដោយ $u_1=2\ ,q=3$

$486=2(3)^{n-1}$

$486=\dfrac{2}{3}(3)^n$

នាំឱ្យ $3^n=\dfrac{486\times 3}{2}=729=3^6$

$\Rightarrow n=6$

ដូចនេះ $\boxed{u_6=486}$

គណនា S_6

តាមរូបមន្ត $S_n=\dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$

នាំឱ្យ $u_8=\dfrac{u_1(q^6-1)}{q-1}=\dfrac{2(3^6-1)}{3-1}=728$

ខ. គណនា u_8 និង u_7

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 q^{n-1}$

នាំឱ្យ $u_8 = u_1 q^7$ ដោយ $u_1 = 3$, $q = 3$

$\Rightarrow u_8 = 3\times 3^7 = 3^8 = \underline{6561}$

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{u_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$

នាំឱ្យ $S_7 = \dfrac{3\left(3^7-1\right)}{3-1} = \dfrac{3^8-3}{2} = \underline{3279}$

លំហាត់អនុវត្ត

១ . ផលបូកប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ $x + xq + xq_2 + \ldots$ ស្មើ 5 ។ផលបូកពីតួទីប្រាំដល់តួទីប្រាំបួនស្មើ 80 ។ គណនា q និង x ។

២ . គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយតាងដោយ $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ មានផលធៀបរួម q បើយើងសរសេរបញ្ច្រាស $u_n, u_{n-1}, \ldots, u_3, u_2, u_1$ តើស្វ៊ីតនៃចំនួននេះជាស្វ៊ីតអ្វី ?

៣ . ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយស្មើ $3\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$ ចូររកមួយតួទីពីរ និង ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតនេះ។

៤ . ផលគុណបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយស្មើ 216 ហើយផលបូកបីតួដំបូងស្មើនឹង 21 ។ រកបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ដោយដឹងថាផលចែករួមវាខុសពី 2 ។

៥ . ចូរកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (u_n) មួយដោយស្គាល់តួដំបូង $u_1 = 12$ និងមានរេសុង $q = 3$ ។

៦ . ចូរកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (u_n) មួយដោយស្គាល់តួ $u_3 = 24$ និងតួ $u_8 = 768$ ។

៧ . ចូរកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (u_n) មួយដោយស្គាល់តួ $u_4 = 162$ និងមានរេសុង $q = 3$ ។

៨ . ចូរកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (u_n) មួយដោយស្គាល់ផលបូក n តួដំបូង $S_n = \dfrac{3.5^{n+1} - 15}{4}$ ។

៩ . គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{4} + 2u_n + \sqrt{1+8u_n}\right), (n = 0,1,2,..) \end{cases}$ ។

ក) តាង $v_n = \sqrt{1+8u_n}$ ។ បង្ហាញថា $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(v_n + 2\right)$ ។

ខ) បង្ហាញថាស្វ៊ីត $w_n = v_n - 2$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា w_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ) ទាញរកតួ u_n នៃស្វ៊ីត ។

១០ . គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2(2n-1)}{3n(n+1)} \end{cases}$ ។

ក) តាង $v_n = u_n + \frac{2}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ) គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ផលបូកផ្សេងៗ

១. និមិត្តសញ្ញាផលបូក

និមិត្តសញ្ញាផលបូកមួយដែលគេប្រើដើម្បីបង្ហាញពីផលបូកគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតត្រូវបានគេហៅស៊ិចម៉ា $(\sum = sigma)$ អក្សរធំក្រិច $\left(\sum = sigma\right)$ ត្រូវបានគេប្រើដើម្បីបង្ហាញពីផលបូកជាឧទាហរណ៍ផលបូក 4 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $a_n = n^3$ ។

គេកំណត់សរសេរ : $\sum_{n=1}^{4} n^3$ ។

២. ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត

កន្សោមផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n): $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$

គេកំណត់សរសេរដោយ : $S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + ... + u_n$

៣. លក្ខណៈ

$a./ \quad \sum_{k=1}^{n}(\lambda) = \lambda + \lambda + \lambda + ... + \lambda = n\lambda$

$b./ \quad \sum_{k=1}^{n}(\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n}(u_k)$

$c./ \quad \sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k - w_k) = \sum_{k=1}^{n}(u_k) + \sum_{k=1}^{n}(v_k) - \sum_{k=1}^{n}(w_k)$

$d./ \quad \sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(u_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n}(u_k \cdot v_k) + \sum_{k=1}^{n}(v_k)^2$

៤. គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ផ្សេងៗ

- ចំពោះផលបូកដែលមានទម្រង់: $S = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n$

បើ $S = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n$ ដែល (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម d និង (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម q , $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

របៀបដោះស្រាយ

គណនា $S = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n$

ដើម្បីគណនាផលបូក នេះគេត្រូវគណនា $S_n - qS_n$ រួចទាញរក S_n ។

ឧទាហរណ៍គំរូ: គណនាផលបូក $S_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{6}{3^3} + ... + \frac{2n}{3^n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងពិនិត្យ ស្វ៊ីត $(a_n) = 2, 4, 6, ..., 2n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $d = 2$

និង $(b_n) = \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ..., \frac{1}{3^n}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = \frac{1}{3}$

យើងបាន: $S_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{6}{3^3} + ... + \frac{2n}{3^n}$ គុណនិង $q = \frac{1}{3}$ ទៅជា

$$\frac{1}{3}S_n = \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{6}{3^4} + ... + \frac{2(n-1)}{3^n} + \frac{2n}{3^{n+1}}$$

$$S_n - \frac{1}{3}S_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{3^2} - \frac{2}{3^2}\right) + \left(\frac{6}{3^3} - \frac{4}{3^3}\right) + ... + \left(\frac{2n - 2(n-1)}{3^n}\right) - \frac{2n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + ... + \frac{2}{3^n} - \frac{2n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S_n = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{3^n}\right) - \frac{2n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S_n = 2 \cdot \frac{1}{3}\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{2n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{2n}{3^{n+1}} \Rightarrow S_n = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{2n}{3^{n+1}}\right]$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $n = 1 \Rightarrow S_1 = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^1 - \frac{2n}{3^{1+1}}\right] = \frac{3}{2}\left(\frac{9-3-2}{9}\right) = \frac{2}{3}$ (ពិត)

ដូច្នេះ $\boxed{S_n = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{2n}{3^{n+1}}\right]}$ ។

លំហាត់គំរូ:

គណនាផលបូក $S_n = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... + \frac{n}{10^n}$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $S_n = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... + \frac{n}{10^n}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{1}{10}$

គេបាន $\frac{1}{10}S_n=\frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{3}{10^4}+....+\frac{n-1}{10^n}+\frac{n}{10^{n+1}}$

$$S_n=\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+....+\frac{n}{10^n} \qquad (1)$$

$-$

$$\frac{1}{10}S_n=\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^4}+....+\frac{n-1}{10^n}+\frac{n}{10^{n+1}} \qquad (2)$$

$$\frac{9}{10}S_n=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+....+\frac{1}{10^n}-\frac{n}{10^{n+1}}$$

ជាផលបូកតួនៃស្វីតធរណីមាត្រ ដែលមាន $u_1=\frac{1}{10}$, $q=\frac{1}{10}$

$$\Rightarrow\frac{9}{10}S_n=\frac{1}{10}\left[\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n-1}{\frac{1}{10}-1}\right]-\frac{n}{10^{n+1}}$$

$$9S_n=\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n-1}{-\frac{9}{10}}-\frac{n}{10^n}$$

$$9S_n=\left[\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^b-1}{1}\right]\times\left(-\frac{10}{9}\right)-\frac{n}{10^2}$$

$$S_n=-\frac{10}{81}\left[\left(\frac{1}{10}\right)^n-1\right]-\frac{n}{9\times10^n}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=-\frac{10}{81}\left[\left(\frac{1}{10}\right)^n-1\right]-\frac{n}{9\times10^n}}$ ។

លំហាត់គំរូ:

គណនាផលបូក $S_n=1.2+2.2^2+3.2^3+.....+n.2^n$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមាន: $S_n=1.2+2.2^2+3.2^3+.....+n.2^n$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង 2 គេបាន:

$$2S_n = 1\times 2^2 + 2\times 2^3 + 3\times 2^4 + ... + n\times 2^{n+1}$$

$-$

$$S_n = 1\times 2 + 2\times 2^2 + 3\times 2^3 + ... + n\times 2^n$$

$$S_n = -1\times 2 + \left(1\times 2^2 - 2\times 2^2\right) + \left(2\times 2^3 - 3\times 2^3\right) + \left(3\times 2^4 - 4\times 2^4\right) +$$

$$+ .... + \left[(n-1)2^n - n2^n\right] + n\times 2^{n+1}$$

$$S_n = -2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - ..... - 2^n + n\times 2^{n+1}$$

$$= -\left(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n\right) + n\times 2^{n+1}$$

$$S_n = -2\left(\frac{2^n - 1}{2-1}\right) + n\times 2^{n+1}$$

$$= -2\left(2^n - 1\right) + n2^{n+1}$$

$$= -2^{n+1} + 2 + n2^{n+1}$$

$$= (n-1)2^{n+1} + 2$$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n = (n-1)2^{n+1} + 2 \quad , n \in IN}$ ។

លំហាត់គំរូ:

គណនាផលបូក $S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + 2n.x^{2n}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមាន: $S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + 2n.x^{2n}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង x គេបាន

$$xS_n = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + ... + 2n.x^{2n+1}$$

$-$

$$S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + 2n.x^{2n}$$

$$(x-1)S_n = -x - x^2 - x^3 - x^4 - ..... - x^{2n} + 2n.x^{2n+1}$$

$$(x-1)S_n = -\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^{2n}\right) + 2n.x^{2n+1}$$

$$(x-1)S_n = -x\left(\frac{x^{2n} - 1}{x-1}\right) + 2n.x^{2n+1}$$

$$(x-1)S_n = -\left(\frac{x^{2n+1} - x}{x-1}\right) + 2n.x^{2n+1}$$

$$S_n = -\frac{x^{2n+1} - x}{(x-1)^2} + \frac{2n.x^{2n+1}}{x-1}$$

$$S_n = \frac{x - x^{2n+1}}{(x-1)^2} + \frac{2n.x^{2n+1}}{x-1}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{x - x^{2n+1}}{(x-1)^2} + \frac{2n.x^{2n+1}}{x-1}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូគណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

1./ $1\cdot 2 + 3\cdot 4 + 5\cdot 8 + 7\cdot 16 + ... + (2n-1)\cdot 2^n$

2./ $4\cdot 3 + 5\cdot 9 + 6\cdot 27 + 7\cdot 81 + ... + (n+3)\cdot 3^n$

3./ $\frac{7}{2} + \frac{9}{4} + \frac{11}{8} + \frac{13}{16} + ... + \frac{2n+5}{2^n}$

4./ $5\cdot 6 + 7\cdot 36 + 9\cdot 216 + ... + (2n+3)6^n$

5./ $4\cdot 2 + 9\cdot 4 + 14\cdot 8 + ... + (5n-6)2^{n-1} \quad (n \geq 2)$

6./ $1\cdot 3 + 3\cdot 9 + 5\cdot 27 + ... + (2n-5)3^{n-2} \quad (n \geq 4)$

7./ $\frac{5}{3} + \frac{7}{9} + \frac{9}{27} + ... + \frac{2n+3}{3^n}$

8./ $\frac{4}{4} + \frac{10}{16} + \frac{16}{64} + ... + \frac{2(3n-4)}{4^{n-1}} \quad (n \geq 2)$

- ចំពោះផលបូកដែលមានរាង: $S_n = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$, $p \in \mathbb{N}$

វិធានដោះស្រាយ:

- គណនា $(k+1)^{p+1} - k^p$
- ឲ្យតំលៃ $k = \overline{1, n}$
- ធ្វើវិធីបូកអង្គនិងអង្គនៃសមីការ

ឧទាហរណ៏គំរូ: ចូរគណនាផលបូក $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$

យើងមាន: $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ ដែល $k = \overline{1, n}$

$$+\begin{cases} 2^4-1^4=4\times1^3+6\times1^2+4\times1+1 \\ 3^4-2^4=4\times2^3+6\times2^2+4\times2+1 \\ 4^4-3^4=4\times3^3+6\times3^2+4\times3+1 \\ \vdots \\ (n+1)^4-n^4=4\times n^3+6\times n^2+4\times n+1 \end{cases}$$

នោះ $(n+1)^4-1^4=4\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)+6\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+4\left(1+2+\cdots+n\right)+n$

$$(n+1)^4-1^4=4S_n+6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=4S_n+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n$$

$$4S_n=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)$$

$$4S_n=(n+1)\left[(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\right]$$

$$4S_n=(n+1)\left(n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1\right)$$

$$4S_n=(n+1)\left(n^3+n^2\right)$$

$$=n^2(n+1)^2$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ដូច្នេះ $S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ។

- សំគាល់ : ប្រសិនបើ p កាន់តែធំទៅៗយើងមានភាពលំបាកក្នុងការរកផលបូកតាមវិធីនេះណាស់ នោះ ចាំបាច់ត្រូវប្រើនិយមន័យអាំងតេក្រាលក្នុងការរកផលបូកនេះទើបប្រសើរជាងធ្វើដោយផ្ទាល់ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១ . $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

២ . $S_n=1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5$

៣ . $S_n=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$, $k\in\mathbb{N}$ ។

- ចំពោះផលបូកដែលមានទម្រង់: $S_n=\frac{1}{a_1.a_2}+\frac{1}{a_2.a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}.a_n}$

វិធានគណនា:

- បើ a_n & a_{n-1} ជាស្ទីតពីរតគ្នាយើងធ្វើផលសងរវាង $a_n-a_{n-1}=d$, $d\neq0$

- សរសេរទម្រង់ទូទៅ $\frac{1}{a_{k-1}.a_k}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right);k=\overline{1,n}$
- ជំនួសតំលៃ $k=\overline{1,n}$ ហើយបូកអង្គទាំងសងខាងជាការស្រេច ។

<u>ឧទាហរណ៍:</u> ចូរគណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+......+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមាន $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{a}{3n-2}+\frac{b}{3n+1}$

$$1=a(3n+1)+b(3n-2)$$

$$1=3an+a+3bn-2b$$

$$1=(2a+3b)n+(a-2b)$$

គេបាន $\begin{cases}3a+3b=0 & (1)\\ a-2b=1 & (2)\end{cases}$

យក $(1)-3(2)$

$$-\begin{cases}3a+3b=0\\ 3a-6b=3\end{cases}$$

$$9b=-3\Rightarrow b=-\frac{1}{3}$$

តាម (2): $a-2\left(-\frac{1}{3}\right)=1$

$$\Rightarrow a=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

ចំពោះ $a=\frac{1}{3}\ \ ,b=-\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{\frac{1}{3}}{3n-2}-\frac{\frac{1}{3}}{3n+1}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

បើ $n=\{1,2,3,4,...,n-1,n\}$

គេបាន

$$\frac{1}{1\times 4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4\times 7}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{1}{7\times 10}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)$$

.

.

.

$$\frac{1}{(3n-5)(3n-2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2}\right)$$

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3n+1-1}{3n+1}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{3n+1-1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}}$ ។

លំហាត់គំរូ:

គណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 19}+....+\frac{1}{(6n-5)(6n+1)}$

<u>ដំណោះស្រាយ :</u>

គណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 19}+....+\frac{1}{(6n-5)(6n+1)}$

ដោយ $u_n=\frac{1}{(6n-5)(6n+1)}=\frac{1}{(6n+1)-(6n-5)}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+1}\right)$

$$u_n=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+1}\right)$$

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}u_n=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{19}+.....+\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+1}\right)$$

នាំឲ្យ $S_n=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6n+1}\right)=\frac{n}{6n+1}$

ដូច្នេះ $\boxed{S_n=\dfrac{n}{6n+1}}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៏

១ . $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

២ . $\dfrac{1}{1.5}+\dfrac{1}{5.9}+\cdots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

៣ . $\dfrac{1}{4.5}+\dfrac{1}{5.6}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

➢ ចំពោះផលបូកដែលមានទម្រង់: $S_n=\dfrac{1}{a_1.a_2.a_3}+\dfrac{1}{a_2.a_3.a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_n.a_{n+1}.a_{n+2}}$, $a_i\neq 0\,;\forall i\in\mathbb{N}$

វិធាន: -បម្លែងតួ $\dfrac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=\dfrac{1}{d}.\dfrac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_na_{n+1}}-\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right)$ ។

-ឱ្យតម្លៃ $n=1,2,3,4,....$ ។

-ធ្វើវិធីបូក រួចទាញរក S_n ។

ឧទាហរណ៏: ចូរគណនាផលបូក $S_n=\dfrac{1}{1.3.5}+\dfrac{1}{3.5.7}+\dfrac{1}{5.7.9}+......+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{a}{(2n-1)(2n+1)}+\dfrac{b}{(2n+1)(2n+3)}$

$$1=a(2n+3)+b(2n-1)$$

$$1=2an+3a+3bn-b$$

$$1=(2a+2b)n+(3a-b)$$

$$\begin{cases}2a+2b=0\\3a-b=1\end{cases}$$

$$+\begin{cases}a+b=0 & (1)\\3a-b=1 & (2)\end{cases}$$

$$4a=1\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

យក $a=\frac{1}{4}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $b=-\frac{1}{4}$

ចំពោះ $a=\frac{1}{4}$ និង $b=-\frac{1}{4}$ គេបាន:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{\frac{1}{4}}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{\frac{1}{4}}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}\right]=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}-\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}-\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{3\times5}\right)+\left(\frac{1}{3\times5}-\frac{1}{5\times7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1\times3}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{4n^2+6n+2n+3-3}{3(2n+1)(2n+3)}\right]$$

$$=\frac{4n^2+8n}{12(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+4n}{6(2n+1)(2n+3)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\frac{2n^2+4n}{6(2n+1)(2n+3)}\quad ,n\in IN}$

លំហាត់គំរូ:

គណនាផលបូក $S_n = \frac{1}{1\cdot4\cdot7} + \frac{1}{4\cdot7\cdot10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមាន: $S_n = \frac{1}{1\cdot4\cdot7} + \frac{1}{4\cdot7\cdot10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$

គេមាន $u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$

$$= \frac{1}{(3n+4)-(3n-2)}\left[\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} - \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} u_n = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{n}\left[\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} - \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1\cdot4} - \frac{1}{4\cdot7} + \frac{1}{4\cdot7} - \frac{1}{7\cdot10} + \frac{1}{7\cdot10} - \frac{1}{10\cdot13} + ...\right.$$

$$\left. .... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} - \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1\cdot4} - \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$$

$$S_n = \frac{9n^2+15n}{24(3n+1)(3n+4)}$$

ដូច្នេះ $\boxed{S_n = \frac{9n^2+15n}{24(3n+1)(3n+4)}}$ ។

<u>លំហាត់អនុវត្តន៍</u>

១ . $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

២ . $\frac{1}{1.6.11} + \frac{1}{6.11.16} + \frac{1}{11.16.21} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)(5n+6)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

៣ . $\frac{1}{2.5.8} + \frac{1}{5.8.11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)(3n+5)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

២.៣ របៀបស្រាយបញ្ជាក់ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើន (វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា)

លទ្ធផលជាច្រើនក្នុងគណិតវិទ្យាត្រូវបានគេអះអាងថាពិតគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន។ហេតុផលទាំងនេះត្រូវបានគេយកមកពិនិត្យចាប់តាំងពី $n=1$, 2 , 3 , ... ។

<u>របៀបដោះស្រាយ</u> ស្រាយបញ្ជាក់ថាៈ $P(n)=E(n)$; $n\in\mathbb{N}$

ដោយធ្វើតាមវិចារកំណើន គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

- **ជំហាន ១ :**
  - តួ $u_1=P(1)=E(1)$ ពិត
  - តួ $u_2=P(2)=E(2)$ ពិត
  - តួ $u_3=P(3)=E(3)$ ពិត

  ………………………………………

  ………………………………………

  ………………………………………
- **ជំហាន ២ :**
  - ឧបមាថា វាពិតដល់តួទី k គឺ $u_k=E(k)$ ពិត
- **ជំហាន ៣ :**
  - យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ឲ្យឃើញថា វាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $u_{k+1}=E(k+1)$ ពិត
  - ដោយសន្មត់ថាយក $u_k=E(k)$ ជាសម្មតិកម្ម
  - បើសិនជាយើងស្រាយបញ្ជាក់ឃើញថា $u_{k+1}=E(k+1)$ ពិត
  - នាំឲ្យយើងសន្និដ្ឋានថា $u_n=E(n)$; $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍ៈ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+n.n!=(n+1)!-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+n.n!=(n+1)!-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

តាង $P_n=1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+n.n!=(n+1)!-1$

- បើ $n=1$ គេបានៈ $P_1:1.1!=(1+1)!-1$
- បើ $n=2$ គេបានៈ $P_2:P_1+2.2!=(2+1)!-1$
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គេបានៈ

$$P_k=1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+k.k!=(k+1)!-1\ ,\ \forall k\in\mathbb{N}$$

- យើងនិងស្រាយថាវាពិតរហូតដល់ $n=k+1$ គេបានៈ

$$P_{k+1} = 1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + k.k! + (k+1).(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1).(k+1)! \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$$
$$= (k+1)!(k+2) - 1$$
$$= (k+2)! - 1$$
$$= ((k+1)+1)! - 1$$

គេបាន៖ P_{k+1} ពិត

ដូច្នេះ តាមវិចារកំនើនគេបាន៖ $1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ពិត ។

លំហាត់ទី២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

ជំហានទី ១ : បង្ហាញថាវាពិត ចំពោះ $n=1$, $n=2$, $n=3$

- ចំពោះ $n=1$ នាំឲ្យ $1\times 2 = \frac{1}{3}\times 1\times(1+1)(1+2) = 2$

  $2 = 2$ (ពិត)

- ចំពោះ $n=2$

  នាំឲ្យ $1\times 2 + 2\times 3 = \frac{1}{3}\times 2\times(2+1)(2+2) = \frac{24}{3} = 8$

  $8 = 8$ (ពិត)

- ចំពោះ $n=3$

  នាំឲ្យ $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 = \frac{1}{3}\times 3\times(3+1)(3+2)$

  $20 = 20$ (ពិត)

ជំហានទី ២ : ឧបមាថាវាពិត ចំពោះ $n=k$ គេបាន

$$1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

ជំហានទី ៣ : យើងនឹងស្រាយថា វាពិតរហូតដល់តួទី $n = k+1$

$$1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{1}{3}(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[(k+1)+2\right] \quad \text{(ពិត)}$$

ដោយ $1\times 2+2\times 3+3\times 4+......+k\left(k+1\right)=\frac{1}{3}k\left(k+1\right)\left(k+2\right)$

នាំឲ្យ $1\times 2+2\times 3+3\times 4+......+k\left(k+1\right)+\left(k+1\right)\left(k+2\right)$

$$=\frac{1}{3}k\left(k+1\right)\left(k+2\right)+\left(k+1\right)\left(k+2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[k\left(k+1\right)\left(k+2\right)+3\left(k+1\right)\left(k+2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(k+1\right)\left[\left(k+1\right)+1\right]\left[\left(k+1\right)+2\right]\text{(ពិត)}$$

ដូច្នេះ $\boxed{1\times 2+2\times 3+3\times 4+......+n\left(n+1\right)=\frac{1}{3}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១ . ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(1+2+3+\cdots+n\right)\geq n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$

២ . ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា $\forall n\in\mathbb{N}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

ក) $2^2+4^2+6^2+\cdots+\left(2n\right)^2=\frac{2n\left(n+1\right)\left(2n+\right)}{3}$

ខ) $1.2+2.5+3.8+\cdots+n\left(3n-1\right)=n^2\left(n+1\right)$

គ) $1+5+5^2+5^3+\cdots+5^n=\frac{5^n-1}{4}$

៣ . គេតាងស្វ៊ីត $\left(U_n\right)$ កំណត់ដោយ $U_1=0$, $U_2=1$ និង $U_n=\frac{U_{n-1}+U_{n-2}}{2}$, $\forall n>2$ ។

ក) រកតួរ U_3 , U_4 , U_5 , U_6

ខ) ចូរធ្វើការសន្និដ្ឋានពីតួរទូទៅនៃស្វ៊ីត $\left(U_n\right)$ រួចបង្ហាញថាវាត្រឹមត្រូវតាមវិចារអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា។

៤ . បំភ្លឺសំណើនីមួយៗខាងក្រោមដោយប្រើវិចារកំណើន $n\in\mathbb{N}$

a) $1+5+9+\cdots+\left(4n-3\right)=n\left(2n-1\right)$

b) $\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\left(n+1\right)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

ផលសងតួនៃស្វ៊ីត និងផលគុណតួនៃស្វ៊ីត

១ . ផលសងលំដាប់១

គេមានស្វ៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ មួយហើយ $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_2$, $b_3 = a_4 - a_3, ...$ នោះគេថាស្វ៊ីត $(b_n): b_1, b_2, b_3, ...$ ជាផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

❋**របៀបគណនារក** (a_n)

គេមាន: $b_n = a_{n+1} - a_n$ គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$

ដោយ: $\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = (a_2 - a_1) + (a_3 + a_2) + ... + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1$

គេបាន: $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k) = a_n - a_1$ នាំឱ្យ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k)$, $(n \geq 2)$ ។

<u>លំហាត់គំរូ:</u>

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $3 , 4 , 6 , 9 , 13 , ...$ តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត

ពិនិត្យមើល :

$$+\begin{cases} a_2 - a_1 = 4 - 3 = 1 \\ a_3 - a_2 = 6 - 4 = 2 \\ a_4 - a_3 = 9 - 6 = 3 \\ a_5 - a_4 = 13 - 9 = 4 \\ .... \\ a_n - a_{n-1} = n - 1 \end{cases}$$

$$a_n - a_1 = (1 + 2 + 3 + ... + n - 1)$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + \frac{n-1}{2}(1 + n - 1) = 3 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2 - n + 6}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{a_n = \frac{n^2 - n + 6}{2}}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : ចំពោះ $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{6}{2} = 3$ (ពិត)

ចំពោះ $n=2 \Rightarrow a_2 = \frac{2^2-2+6}{2} = 4$ (ពិត)

ចំពោះ $n=3 \Rightarrow a_3 = \frac{3^2-3+6}{2} = 6$ (ពិត)

ចំពោះ $n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{4^2-4+6}{2} = 9$ (ពិត)

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម :

1./ $2, 5, 11, 20, 32, 47, ...$

2./ $2, 8, 17, 29, 44, 64, ...$

3./ $2, 6, 14, 26, 42, 62, ...$

4./ $3, 1, -3, -9, -17, -27, ...$

5./ $1, -2, -8, -17, -29, -44, ...$

6./ $-3, 1, 9, 21, 37, 57, ...$

7./ $1, 6, 13, 22, 33, 46, ...$

8./ $-2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 3, \frac{11}{2}, ...$

9./ $5, \frac{9}{2}, 5, \frac{13}{2}, 9, \frac{25}{2}, ...$

10./ $4, \frac{10}{3}, 3, 3, \frac{10}{3}, 4, ...$

២. ផលសងលំដាប់២

គេមានស្វ៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ហើយ $b_1 = a_2 - a_1, b_2 = a_3 - a_2, b_3 = a_4 - a_3, ..., b_n = a_{n+1} - a_n$, $(b_n): b_1, b_2, b_3, ...$ ជាផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

រូបមន្តគណនា a_n គឺ: $$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k) , (n \geq 2)$$ ។

-ស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងតួលំដាប់ទី២នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺជាផលសងតួលំដាប់ទី១នៃស្វ៊ីត (b_n) ដែល $c_n = b_{n+1} - b_n , n = 1, 2, 3, 4, ...$

រូបមន្តគណនាតួទី n នៃ (b_n) គឺ: $$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(c_k), (n \geq 2)$$ ។

<u>លំហាត់គំរូៈ</u>

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $4, 18, 48, 100, 180, 294, ...$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $4, 18, 48, 100, 180, 294, ...$

គេមានស្វ៊ីត (a_n): $4, 18, 48, 100, 180, 294, ...$

តាងស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទី១ នៃស្វ៊ីត (a_n)

ដែលកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$; $(n = 1, 2, 3, ...)$

គេបាន (b_n): $14, 30, 52, 80, 114, ...$

តាងស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់ទី១ នៃស្វ៊ីត (b_n)

(ព្រោះមិនទាន់អាចកំណត់ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត(b_n)បាន)

ស្វ៊ីត (c_n) កំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$

(c_n): $16, 22, 28, 34, ...$

នាំឲ្យ (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត មានផលសងរួម $d = 6$ និង

តួទី១គឺ $c_1 = 16$ $\Rightarrow c_n = 16 + (n-1)6 = 6n + 10$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$

$$= 14 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k + 10)$$

$$\Rightarrow b_n = 14 + 6\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 10$$

$$= 14 + 6\frac{n(n-1)}{2} + 10(n-1)$$

$$b_n = 14 + 3n^2 - 3n + 10n - 10 = 3n^2 + 7n + 4$$

$n = 1$ $\Rightarrow b_1 = 14$ (ពិត) ដូច្នេះ $b_n = 3n^2 + 7n + 4$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$$a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k^2 + 7k + 4)$$

$$= 4 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 7\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 4$$

$$= 4 + 3\times\frac{1}{6}\times n(n-1)(2n-1) + \frac{7}{2}n(n-1) + 4n - 4$$

$$= \frac{n\left(2n^2 - n - 2n + 1\right) + 7n^2 - 7n + 8n}{2}$$

$$= \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 7n^2 - 7n + 8n}{2}$$

$$= \frac{2n^3 + 4n^2 + 2n}{2} = n^3 + 2n^2 + n$$

ដូច្នេះ $\boxed{a_n = n^3 + 2n^2 + n}$

លំហាត់អនុវត្តន៏

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត

1./ $0, 12, 10, 0, -12, -20, ...$

2./ $1, 2, 6, 15, 31, 56, ...$

ការរកតួទូទៅនៃសមីការស្វ៊ីត (ទំនាក់ទំនងកំណើន)

- ទំនាក់ទំនងមានទម្រង់: $\begin{cases} u_1 = c \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$

របៀបដោះស្រាយទី១

ក្នុងករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = au_n + b$ និង $u_1 = \alpha, (|a| \neq 1, a \neq 0)$ ។

ដើម្បីកំណត់រកតួ u_n គេត្រូវពិចារណាដូចខាងក្រោម:

-រកឬសសមីការសម្គាល់ $r = ar + b$ ។

-តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_n - r$ រួចត្រូវបង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

-រកឱ្យឃើញនូវតួ v_n រួចទាញរក $u_n = v_n + r$ ។

លំហាត់គំរូ

ពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត(u_n)មួយកំនត់លើសំណុំ $\mathbb{N}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $u_1 = \frac{16}{3}$ និង $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$ ចំពោះគ្រប់ n ។ គណនាu_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $\begin{cases} u_1 = \dfrac{16}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{4}{3} \end{cases}$

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$$

មានសមីការសម្គាល់: $r = \dfrac{2}{3}r + \dfrac{4}{3}$

$$3r = 2r + 4$$

$$r = 4$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 4 = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} - 4$$

$$u_{n+1} - 4 = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{3}$$

$$u_{n+1} - 4 = \frac{2}{3}(u_n - 4) \quad (1)$$

តាង $v_n = u_n - 4 \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - 4$

តាម (1) គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n$

ស្ទីត (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q = \dfrac{2}{3}$ និងតួទីមួយ

$$v_1 = u_1 - 4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$= 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

តែ $v_n = u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 4$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n} + 4}$

លំហាត់គំរូ

ពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) មួយកំនត់លើសំណុំ $\mathbb{N}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $u_1 = 5$ និង $u_{n+1} = 3u_n - 2$ ចំពោះគ្រប់ n ។ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$

$$u_{n+1} = 3u_n - 2$$

មានសមីការសម្គាល់: $r = 3r - 2$

$$r = 1$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 1 = 3u_n - 2 - 1$$

$$u_{n+1} - 1 = 3u_n - 3$$

$$u_{n+1} - 1 = 3(u_n - 1) \quad (1)$$

តាង $v_n = u_n - 1 \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - 1$

$(1) \Rightarrow v_{n+1} = 3v_n$

ស្វ៊ីតជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n) ដែលមានផលធៀបរួម និងតួទីមួយ $q = 3$

$$v_1 = u_1 - 1 = 5 - 1 = 4$$

$$\Rightarrow v_n = v_1 \times q^{n-1} = 4 \times 3^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n = v_n + 1$$

$$= 4 \times 3^{n-1} + 1$$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = 4 \times 3^{n-1} + 1}$

<u>របៀបដោះស្រាយទី២</u>

ទម្រង់ $\begin{cases} u_1 = c \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$

<u>របៀបដោះស្រាយ</u> **(ផ្តើមពីស្វ៊ីតជំនួយ នាំបង្កើតស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ឈានទៅរកតួទី n)**

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n = pn + q$ នាំឲ្យ $r_{n+1} = p(n+1) + q \qquad (*)$
- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1}

  នោះ $u_{n+1} = au_n + b$

  គេបាន $r_{n+1} = ar_n + b$

$$p(n+1)+q=a(pn+q)+b$$

$$pn+p+q=apn+aq+b$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} p=ap \\ p+q=aq+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=0 \\ q=\dfrac{b}{1-a} \end{cases}$

- យក $p=0$ និង $q=\dfrac{b}{1-a}$ ជំនួសក្នុង $(*)$

នោះ $r_{n+1}=p(n+1)+q$

នាំឲ្យ $r_{n+1}=\dfrac{b}{1-a}$

- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=au_n+b-\dfrac{b}{1-a}$

$$u_{n+1}-\frac{b}{1-a}=au_n+b-\frac{b}{1-a}$$

$$u_{n+1}-\frac{b}{1-a}=au_n+\frac{b-ab-b}{1-a}$$

$$u_{n+1}-\frac{b}{1-a}=au_n-\frac{ab}{1-a}$$

$$\left(u_{n+1}-\frac{b}{1-a}\right)=a\left(u_n-\frac{b}{1-a}\right) \qquad (**)$$

- តាង $v_n=u_n-\dfrac{b}{1-a}$ នោះ $v_{n+1}=u_{n+1}-\dfrac{b}{1-a}$

នោះ គេបាន $(**)$: $\left(u_{n+1}-\dfrac{b}{1-a}\right)=a\left(u_n-\dfrac{b}{1-a}\right)$

$$v_{n+1}=av_n$$

នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=a$

និងតួទី១ $v_1=u_1-\dfrac{b}{1-a}=c-\dfrac{b}{1-a}$

តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n)

គឺ $v_n=\left(c-\dfrac{b}{1-a}\right)a^{n-1}$

ដោយ $v_n=u_n-\dfrac{b}{1-a}$

នាំឲ្យ $u_n = v_n + \frac{b}{1-a} = \left(c - \frac{b}{1-a}\right)a^{n-1} + \frac{b}{1-a}$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = \left(c - \frac{b}{1-a}\right)a^{n-1} + \frac{b}{1-a}}$ $n \in \mathbb{N}^*$

លំហាត់គំរូ

គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}^*$

ដំណោះស្រាយ

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n = pn + q$ នាំឲ្យ $r_{n+1} = p(n+1) + q$ $(*)$
- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1}

  នោះ $u_{n+1} = 3u_n + 1$

  គេបាន $r_{n+1} = 3r_n + 1$

  $$p(n+1) + q = 3(pn + q) + 1$$

  $$pn + p + q = 3pn + 3q + 1$$

  នាំឲ្យ $\begin{cases} p = 3p \\ p + q = 3q + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2} \end{cases}$
- យក $p = 0$ និង $q = -\frac{1}{2}$ ជំនួសក្នុង $(*)$

  នោះ $(*)$: $r_{n+1} = p(n+1) + q$

  នាំឲ្យ $r_{n+1} = -\frac{1}{2}$
- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

  គេបាន $u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2}$

  $$u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2}$$

  $$u_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right) \qquad (**)$$
- តាង $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ នោះ $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}$ នោះ

គេបាន $(**)$: $\left(u_{n+1}+\frac{1}{2}\right)=3\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$

$$v_{n+1}=3v_n$$

នាំឲ្យ (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=3$

និងតួទី១ $v_1=u_1+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស្ទីតធរណីមាត្រ (v_n)

គឺ $v_n=\frac{5}{2}3^{n-1}$

នាំឲ្យ $u_n=v_n-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}3^{n-1}-\frac{1}{2}$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n=\frac{5}{2}3^{n-1}-\frac{1}{2}}$ $n\in\mathbb{N}^*$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ $n=1$

នាំឲ្យ $u_1=\frac{5}{2}\times3^{1-1}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$ ពិត

លំហាត់គំរូ

គណនាតួទី n នៃស្ទីត: $\begin{cases}a_1=3\\a_{n+1}=5a_n+6\end{cases}$; $n\in\mathbb{N}^*$ ។

__ដំណោះស្រាយ__

- តាងស្ទីតជំនួយ : $r_n=pn+q$ នាំឲ្យ $r_{n+1}=p(n+1)+q$ $(*)$
- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង a_n និង a_{n+1}

នោះ $a_{n+1}=5a_n+6$

គេបាន $r_{n+1}=5r_n+6$

$$p(n+1)+q=5(pn+q)+6$$

$$pn+p+q=5pn+5q+6$$

នាំឲ្យ $\begin{cases}p=5p\\p+q=5q+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=0\\q=\frac{6}{1-5}=-\frac{3}{2}\end{cases}$

- យក $p=0$ និង $q=-\frac{3}{2}$ ជំនួសក្នុង $(*)$

  នោះ $(*)$: $r_{n+1}=p(n+1)+q$

នាំឲ្យ $r_{n+1} = -\frac{3}{2}$

➢ ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $a_{n+1} + \frac{3}{2} = 5a_n + 6 + \frac{3}{2}$

$$a_{n+1} + \frac{3}{2} = 5a_n + \frac{15}{2}$$

$$a_{n+1} + \frac{3}{2} = 5\left(a_n + \frac{3}{2}\right) \qquad (**)$$

➢ តាង $b_n = a_n + \frac{3}{2}$ នោះ $b_{n+1} = a_{n+1} + \frac{3}{2}$

នោះ គេបាន $(**)\ :\ \left(a_{n+1} + \frac{3}{2}\right) = 5\left(a_n + \frac{3}{2}\right)$

$$b_{n+1} = 5b_n$$

នាំឲ្យ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 5$

និងតួទី១ $b_1 = a_1 + \frac{3}{2} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (b_n)

គឺ $b_n = \frac{9}{2}5^{n-1}$

នាំឲ្យ $a_n = b_n - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}5^{n-1} - \frac{3}{2}$

ដូច្នេះ $\boxed{a_n = \frac{9}{2}5^{n-1} - \frac{3}{2}} \quad n \in \mathbb{N}^*$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ $n = 1$

នាំឲ្យ $a_1 = \frac{9}{2} \times 5^{1-1} - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$ (ពិត)

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម ដែល $n \in \mathbb{N}$:

$$1./\ \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases} \quad ; \quad 2./\ \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

$$3./\ \begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 1 \end{cases} \quad ; \quad 4./\ \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$$

$5./\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3 \end{cases}$; $6./\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = -u_n - 6 \end{cases}$

$7./\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = 2a_n - 5 \end{cases}$; $8./\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 1 \end{cases}$

$9./\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = 2u_n + 4 \end{cases}$; $10./\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$

$11./\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 3a_n + 5 \end{cases}$; $12./\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = -2u_n - 3 \end{cases}$

$13./\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = -a_n + 5 \end{cases}$; $14./\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2 \end{cases}$

$15./\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$; $16./\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2 \end{cases}$

$17./\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -3u_n - 1 \end{cases}$; $18./\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 4 \end{cases}$

$19./\begin{cases} u_1 = \frac{1}{5} \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$; $20./\begin{cases} u_1 = -\frac{3}{4} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$

➢ សមីការស្វ៊ីតមានទម្រង់: $U_1 = A \;\; \& \;\; pU_{n+1} = qU_n + f(n) \;\; , \forall p, q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

របៀបដោះស្រាយទី១

វិធានដោះស្រាយ:

តួរទូទៅនៃស្វ៊ីត $U_n = U_n^* + U_n^{**}$ ដែល

U_n^* ជាតួរទូទៅនៃស្វ៊ីត $pU_{n+1} - qU_n = 0$

មានសមីការសំគាល់គឺ: $pr - q = 0 \Rightarrow r = \frac{q}{p}$

នោះយើងបាន: $U_n^* = \mu\left(\frac{q}{p}\right)^n$ ដែល μ ជាចំនួនមួយត្រូវកំណត់ ។

U_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃស្វ៊ីត $pU_n^{**} = qU_n^* + f(n)$

ដើម្បីរក U_n^{**} យើងពិនិត្យពីរករណីដូចខាងក្រោមៈ
- ❖ ករណី $r \neq 0$ នោះ $U_n^{**} = g(n)$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូចនឹង $f(n)$ ដែរ ។
- ❖ ករណី $r = 1$ នោះ $U_n^{**} = ng(n)$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូចនឹង $f(n)$ ដែរ ។

លំហាត់គំរូ

ចូរកំណត់តួរទូទៅនៃស្វ៊ីត $U_1 = 2 \ \& U_{n+1} = U_n + 6n + 4 \ \ , \forall n \in \mathbb{N}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់តួរទូទៅនៃស្វ៊ីត

យើងមានស្វ៊ីត $U_{n+1} = U_n + 6n + 4$

នោះតួរទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺៈ $U_n = U_n^{*} + U_n^{**}$

ដែល U_n^{*} ជាចម្លើយនៃសមីការស្វ៊ីត $U_{n+1} - U_n = 0$

មានសមីការសំគាល់គឺ $r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$ នោះយើងបានៈ $U_n^{*} = \mu$

U_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $U_{n+1}^{**} = U_n^{**} + 6n + 4 \qquad (*)$

ដោយ $r = 1$ នោះ $U_n^{**} = ng(n) = n(\alpha n + \beta)$

យើងទាញបាន $U_{n+1}^{**} = (n+1)g(n+1) = (n+1)(\alpha n + \alpha + \beta)$

យក $\qquad U_n^{*}, U_n^{**}$ ជំនួសក្នុង $(*)$ ទៅជាៈ

$\qquad (n+1)(\alpha n + \alpha + \beta) = n(\alpha n + \beta) + 6n + 4$ យើងយក

- $n = -1 \Leftrightarrow 0 = -(\beta + \alpha) - 2 \Rightarrow \alpha - \beta = 2 \qquad (1)$
- $n = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 4 \qquad (2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញបានៈ $\alpha = 3$, $\beta = 1$ នោះ $U_n^{**} = n(3n+1) = 3n^2 + n$

នាំឲ្យ $\qquad U_n = U_n^{*} + U_n^{**} \Leftrightarrow U_n = 3n^2 + n + \mu$

ពេល $\qquad n = 1 \ : 2 = 3 + 1 + \mu \Rightarrow \mu = -2$

ដូច្នេះ $\qquad \boxed{U_n = 3n^2 + n - 2} \ , \forall n \in \mathbb{N}$ ។

<u>របៀបដោះស្រាយទី២</u>

(ផ្ដើមពី ស្វ៊ីតជំនួយ នាំបង្កើត ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួច រកតួទី n)
- ➢ តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n = pn + q$ នាំឲ្យ $r_{n+1} = p(n+1) + q \qquad (*)$
- ➢ យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1}

  នោះ $\qquad u_{n+1} = au_n + bn + c$

  គេបាន $\qquad r_{n+1} = ar_n + bn + c$

$$p(n+1)+q=a(pn+q)+bn+c$$
$$pn+p+q=apn+aq+bn+c$$
$$pn+p+q=(ap+b)n+aq+c$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} p=ap+b \\ p+q=aq+c \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p=\dfrac{b}{1-a} \\ q=\dfrac{c-p}{1-a}=\dfrac{c-\dfrac{b}{1-a}}{1-a}=\dfrac{c(1-a)-b}{(1-a)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p=\dfrac{b}{1-a} \\ q=\dfrac{c-ac-b}{(1-a)^2} \end{cases}$$

➢ យក $p=\dfrac{b}{1-a}$ និង $q=\dfrac{c-ac-b}{(1-a)^2}$

ជំនួសក្នុង$(*)$ នោះ $r_{n+1}=p(n+1)+q$

នាំឲ្យ $r_{n+1}=\dfrac{b}{1-a}(n+1)+\dfrac{c-ac-b}{(1-a)^2}$

$$=\frac{b(1-a)(n+1)+c-ac-b}{(1-a)^2}$$
$$=\frac{b(n+1-an-a)+c-ac-b}{(1-a)^2}$$
$$=\frac{bn+b-abn-ab+c-ac-b}{(1-a)^2}$$
$$=\frac{bn-abn-ab+c-ac}{(1-a)^2}$$

➢ ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន

$$u_{n+1}-r_{n+1}=au_n+bn+c-\frac{bn-abn-ab+c-ac}{(1-a)^2}$$

$$u_{n+1}-\frac{bn-abn-ab+c-ac}{(1-a)^2}$$

$$= au_n + \frac{(bn+c)(a^2-2a+1)-bn+abn+ab-c+ac}{(1-a)^2}$$

$$= au_n + \frac{a^2bn-abn+a^2c-2ac+ab+ac}{(1-a)^2} = a\left[u_n + \frac{abn-bn+ac+b-c}{(1-a)^2}\right]$$

$$u_{n+1} - \frac{bn-abn-ab+c-ac}{(1-a)^2}$$

$$= a\left[u_n - \frac{bn-abn-ac-b+c}{(1-a)^2}\right] \qquad (**)$$

- តាង $v_n = u_n - \frac{bn-abn-ac-b+c}{(1-a)^2}$

នោះ $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b(n+1)-ab(n+1)-ac-b+c}{(1-a)^2}$

$$= u_{n+1} - \frac{bn+b-abn-ab-ac-b+c}{(1-a)^2}$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{bn-abn-ab-ac+c}{(1-a)^2}$$

គេបាន $(**)$: $\left[u_{n+1} - \frac{bn-abn-ab+c-ac}{(1-a)^2}\right]$

$$= a\left[u_n - \frac{bn-abn-ac-b+c}{(1-a)^2}\right] \qquad (**)$$

$$v_{n+1} = a v_n$$

នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = a$

និងតួទី១ $v_1 = u_1 - \frac{b-ab-ac-b+c}{(1-a)^2}$

$$\Rightarrow v_1 = d + \frac{ab+ac-c}{(1-a)^2}$$

តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n) គឺ

$$v_n = v_1 \cdot a^{n-1} = \left[d + \frac{ab+ac-c}{(1-a)^2}\right]a^{n-1}$$

ដោយ $v_n = \left[d + \frac{ab+ac-c}{(1-a)^2}\right]a^{n-1}$

នាំឲ្យ $u_n = v_n + \frac{bn-abn-ac-b+c}{(1-a)^2}$

នាំឲ្យ

$$u_n = \left[d + \frac{ab+ac-c}{(1-a)^2}\right]a^{n-1} + \frac{bn-abn-ac-b+c}{(1-a)^2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = \left[d + \frac{ab+ac-c}{(1-a)^2}\right]a^{n-1} + \frac{bn-abn-ac-b+c}{(1-a)^2}}$

លំហាត់គំរូ

គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 6n - 1 \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n = pn + q$

នាំឲ្យ $r_{n+1} = p(n+1) + q = pn + p + q \quad (*)$

- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1}

នោះ $u_{n+1} = 3u_n + 6n - 1$

គេបាន $r_{n+1} = 3r_n + 6n - 1$

$$pn + p + q = 3(pn+q) + 6n - 1$$

$$pn + p + q = 3pn + 3q + 6n - 1$$

$$pn + p + q = (3p+6)n + 3q - 1$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} p = 3p + 6 \\ p + q = 3q - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = -3 \\ q = \frac{-1-q}{-2} = \frac{-1+3}{-2} = -1 \end{cases}$$

- យក $p = -3$ និង $q = -1$ ជំនួសក្នុង $(*)$

នោះ $(*)$: $r_{n+1} = p(n+1) + q$

នាំឲ្យ $r_{n+1} = -3(n+1) - 1 = -3n - 4$

- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $u_{n+1} - r_{n+1} = 3u_n + 6n - 1 + 3n + 4$

$u_{n+1} + 3n + 4 = 3u_n + 9n + 3$

$u_{n+1} + 3n + 4 = 3(u_n + 3n + 1) \qquad (**)$

- តាង $v_n = u_n + 3n + 1$

នោះ $v_{n+1} = u_{n+1} + 3(n+1) + 1 = u_{n+1} + 3n + 4$

នោះគេបាន $(**) \quad : \quad (u_{n+1} + 3n + 4) = 3(u_n + 3n + 1)$

$$v_{n+1} = 3v_n$$

នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$ និងតួទី១ $v_1 = u_1 + 3 + 1 = 2 + 4 = 6$

តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n)

គឺ $v_n = 6 \cdot 3^{n-1}$

នាំឲ្យ $u_n = v_n - 3n - 1 = 6 \cdot 3^{n-1} - 3n - 1$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 3n - 1} \quad n \in \mathbb{N}^*$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ $n = 1$

នាំឲ្យ $u_1 = 6 \times 3^{1-1} - 3 \times 1 - 1 = 6 - 4 = 2$ (ពិត)

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីតខាងក្រោមៈ

1./ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4n - 2 \end{cases}$; 2./ $\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4n + 7 \end{cases}$

3./ $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5n + 7 \end{cases}$; 4./ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2n + \frac{1}{2} \end{cases}$

5./ $\begin{cases} u_1 = -6 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3n - \frac{3}{2} \end{cases}$; 6./ $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n - 4n + \frac{5}{2} \end{cases}$

7./ $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \end{cases}$; 8./ $\begin{cases} u_1 = 2\sqrt{3} \\ u_{n+1} = 2u_n + 3n - \sqrt{3} \end{cases}$

9./ $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \sqrt{2}u_n - n + \sqrt{2} \end{cases}$; 10./ $\begin{cases} u_1 = \sqrt{5} \\ u_{n+1} = 2u_n - \sqrt{2}n + 1 \end{cases}$

$$11./\begin{cases}u_1=\sqrt{2}\\ u_{n+1}=2u_n-3\sqrt{2}n-1\end{cases};12./\begin{cases}u_1=\sqrt{3}\\ u_{n+1}=\sqrt{2}u_n-2n+5\end{cases}$$

❖ ទម្រង់សមីការស្វ៊ីត $\begin{cases}u_1=l\\ u_{n+1}=mu_n+(pn+q)k^n\end{cases};n\in\mathbb{N}$

របៀបដោះស្រាយទី១

(ផ្តើមពី ស្វ៊ីតជំនួយ នាំបង្កើត ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួច រកតួទី n)

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n=(an+b)k^n$
- នាំឲ្យ $r_{n+1}=\left[a(n+1)+b\right]k^{n+1}$

$$=(an+a+b)k^{n+1}$$

$$r_{n+1}=(akn+ak+bk)k^n \qquad (*)$$

- យក r_{n+1} និង r_n ជំនួសក្នុង u_{n+1} និង u_n រៀងគ្នា

នោះ $u_{n+1}=mu_n+(pn+q)k^n$

គេបាន $r_{n+1}=mr_n+(pn+q)k^n$

$$(akn+ak+bk)k^n=m(an+b)k^n+(pn+q)k^n$$

$$(akn+ak+bk)k^n=(amn+bm+pn+q)k^n$$

$$(akn+ak+bk)k^n=\left[(am+p)n+bm+q\right]k^n$$

នាំឲ្យ $\begin{cases}ak=am+p\\ ak+bk=bm+q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{p}{k-m}\\ b=\dfrac{q-ak}{k-m}\end{cases}$

- យក $a=\dfrac{p}{k-m}$; $b=\dfrac{q-ak}{k-m}$ ជំនួសក្នុង $(*)$

$(*)$: $r_{n+1}=(akn+ak+bk)k^n$

$$=\left(\frac{kp}{k-m}n+\frac{kp}{k-m}+\frac{q-ak}{k-m}k\right)k^n$$

$$r_{n+1}=\left(\frac{kp}{k-m}n+\frac{kp}{k-m}+\frac{kq-ak^2}{k-m}\right)k^n$$

- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}
- រកទំនាក់ទំនងរវាង u_{n+1} និង u_n

- តាមទំនាក់ទំនងរវាង u_{n+1} និង u_n នាំបង្កើត ស្ទីតធរណីមាត្រ v_n

តាមទំនាក់ទំនង ស្ទីតធរណីមាត្រ v_n គេអាចរកតួទី u_n

លំហាត់គំរូ

គណនាតួទី n នៃស្ទីត: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + (3n+1)5^n \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}^*$

ដំណោះស្រាយ

- តាងស្ទីតជំនួយ : $r_n = (an+b)5^n$

នាំឲ្យ $r_n = (an+b)5^n$

$$r_{n+1} = \left[a(n+1)+b\right]5^{n+1}$$

$$r_{n+1} = (5an+5a+5b)5^n$$

- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1} រៀងគ្នា

នោះ $u_{n+1} = 2u_n + (3n+1)5^n$

គេបាន $r_{n+1} = 2r_n + (3n+1)5^n$

$$(5an+5a+5b)5^n = 2(an+b)5^n + (3n+1)5^n$$

$$(5an+5a+5b)5^n = (2an+2b+3n+1)5^n$$

$$(5an+5a+5b)5^n = \left[(2a+3)n+2b+1\right]5^n$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} 5a = 2a+3 \\ 5a+5b = 2b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1-5a}{3} = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

- យក $a = 1$, $b = -\dfrac{4}{3}$ ជំនួសក្នុង $(*)$

នោះ $(*)$: $r_{n+1} = (5an+5a+5b)5^n$

- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $u_{n+1} - r_{n+1} = 2u_n + (3n+1)5^n - \left(5n - \dfrac{5}{3}\right)5^n$

$$u_{n+1} - \left(5n - \frac{5}{3}\right)5^n = 2u_n + \left(3n+1-5n+\frac{5}{3}\right)5^n$$

$$u_{n+1} - \left(5n - \frac{5}{3}\right)5^n = 2u_n + \left(-2n+\frac{8}{3}\right)5^n$$

$$u_{n+1}-\left(5n-\frac{5}{3}\right)5^n=2\left[u_n-\left(n-\frac{4}{3}\right)5^n\right]\quad(**)$$

- តាង $v_n=u_n-\left(n-\frac{4}{3}\right)5^n$

នោះ $v_{n+1}=u_{n+1}-\left(n+1-\frac{4}{3}\right)5^{n+1}=u_{n+1}-\left(5n-\frac{5}{3}\right)$

តាម $(**)$ គេបាន $v_{n+1}=2v_n$

នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$

និងតួទី១ $v_1=2-5+\frac{20}{3}=\frac{11}{3}$

តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n) គឺ $v_n=\frac{11}{3}\cdot 2^{n-1}$

នាំឲ្យ $u_n=v_n+\left(n-\frac{4}{3}\right)5^n=\frac{11}{3}\cdot 2^{n-1}+\left(n-\frac{4}{3}\right)5^n$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ $n=1$

នាំឲ្យ $u_1=\frac{11}{3}\cdot 2^{1-1}+\left(1-\frac{4}{3}\right)5=\frac{11}{3}-\frac{5}{3}=2$ ពិត

ដូច្នេះ $\boxed{u_n=\frac{11}{3}\cdot 2^{n-1}+\left(n-\frac{4}{3}\right)5^n}$ $n\in\mathbb{N}^*$

<u>របៀបដោះស្រាយទី២</u>

យើងមានសមីការស្វ៊ីត $U_1=A$, $pU_{n+1}=qU_n+f(n)\alpha^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

តួរទូទៅនៃស្វ៊ីត U_n កំណត់ដោយ: $U_n=U_n^*+U_n^{**}$

ដែល U_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការស្វ៊ីត $pU_{n+1}^*=pU_n^*$

ពិនិត្យសមីការសម្គាល់ $pr=q\Rightarrow r=\frac{q}{p}$

នោះគេបាន: $U_n^*=\mu\left(\frac{q}{p}\right)^n$ ដែល μ ជាចំនួនត្រូវកំណត់ ។

និង U_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការស្វ៊ីត $pU_n^{**}=qU_n^{**}+f(n)\alpha^n$

ដើម្បីរក U_n^{**} យើងត្រូវពិនិត្យពីរករណី

- ករណី $x\neq\alpha$ នោះ $U_n^{**}=g(n)\alpha^n$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូចពហុធា $f(n)$ ដែរ ។
- ករណី $x=\alpha$ នោះ $U_n^{**}=ng(n)\alpha^n$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូចពហុធា $f(n)$ ដែរ ។

ជំនួស $U_n^*\ \&U_n^{**}$ ចូរទៅក្នុងសមីការ $pU_n^{**}=qU_n^{**}+f(n)\alpha^n$ ដើម្បីកំណត់ពហុធា $g(n)$ ។

លំហាត់គំរូ

កំណត់តួរទូទៅនៃស្វ៊ីត $\begin{cases} U_1 = 5 \\ U_{n+1} = 2U_n + (n+1)2^n \end{cases}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់តួរទូទៅនៃស្វ៊ីត U_n

យើងមាន $U_{n+1} = 2U_n + (n+1)2^n \quad (*)$ និង $U_1 = 5$

ចម្លើយទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺៈ $U_n = U_n^* + U_n^{**}$

សមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត $U_{n+1}^* = 2U_n^* \Leftrightarrow r = 2$

នោះយើងបានៈ $U_n^* = \mu.2^n$

ដោយ $x = r = 2$ នោះយើងបានៈ $U_n^{**} = n(an+b)2^n$

តាមសមីការ $U_{n+1}^{**} = 2U_n^{**} + (n+1)2^n$

នោះគេបានៈ $(n+1)\left[a(n+1)+b\right]2^{n+1} = 2n(an+b)2^n + (n+1)2^n$ យើងយក

- $n = -1 \Leftrightarrow a - b = 0 \quad (1)$
- $n = 0 \Leftrightarrow a + b = \frac{1}{2}$

តាម (1) និង (2) យើងបានៈ $a = b = \frac{1}{4}$

នាំឲ្យ $U_n^{**} = n(an+b)2^n \Leftrightarrow U_n^{**} = n\left(\frac{1}{4}n + \frac{1}{4}\right)2^n \Rightarrow U_n^{**} = n(n+1)2^{n-2}$

ទាញបានៈ $U_n = U_n^* + U_n^{**} = \mu.2^n + n(n+1)2^{n-2}$

ពេល $n = 1 \Leftrightarrow 2\mu + 1(1+1)2^{1-2} = 5 \Rightarrow \mu = \frac{4}{2} = 2$

នាំឲ្យ $U_n = 2^{n+1} + n(n+1)2^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}$

ដូច្នេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ $U_n = 2^{n+1} + n(n+1)2^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី២

គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីតៈ $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 2u_n + (2n-3)4^n \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ : $r_n=(an+b)4^n$

នាំឲ្យ $r_n=(an+b)4^n$

$$r_{n+1}=\left[a(n+1)+b\right]4^{n+1}$$

$$r_{n+1}=(4an+4a+4b)4^n$$

- យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង u_n និង u_{n+1} រៀងគ្នា

នោះ $u_{n+1}=2u_n+(2n-3)4^n$

គេបាន $r_{n+1}=2r_n+(2n-3)4^n$

$$(4an+4a+4b)4^n=2(an+b)4^n+(2n-3)4^n$$

$$(4an+4a+4b)4^n=(2an+2b+2n-3)4^n$$

$$(4an+4a+4b)5^n=\left[(2a+2)n+2b-3\right]4^n$$

នាំឲ្យ $\begin{cases}4a=2a+2\\4a+4b=2b-3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=\dfrac{-3-4a}{2}=-\dfrac{7}{2}\end{cases}$$

- យក $a=1$, $b=-\dfrac{7}{2}$ ជំនួសក្នុង $(*)$

នោះ $(*)$: $r_{n+1}=(4an+4a+4b)4^n$

នាំឲ្យ $r_{n+1}=(4n+4-14)4^n=(4n-10)4^n$

- ធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=2u_n+(2n-3)4^n-(4n-10)4^n$

$$u_{n+1}-(4n-10)4^n=2u_n+(-2n+7)4^n$$

$$u_{n+1}-(4n-10)4^n=2u_n-2\left(n-\frac{7}{2}\right)4^n$$

$$u_{n+1}-(4n-10)4^n=2\left[u_n-\left(n-\frac{7}{2}\right)4^n\right]\quad(**)$$

- តាង $v_n=u_n-\left(n-\dfrac{7}{2}\right)4^n$

$$=u_{n+1}-(4n-10)4^n$$

នោះ $v_{n+1}=u_{n+1}-\left(n+1-\dfrac{7}{2}\right)4^{n+1}$

តាម (**) គេបាន $v_{n+1}=2v_n$

នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$

និងតួទី១ $v_1=-3+10=7$

តាមរូបមន្ត : តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n) គឺ $v_n=7\cdot 2^{n-1}$

នាំឲ្យ $u_n=v_n+\left(n-\frac{7}{2}\right)4^n=7\cdot 2^{n-1}+\left(n-\frac{7}{2}\right)4^n$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ $n=1$

នាំឲ្យ $u_1=7\cdot 2^{1-1}+\left(1-\frac{7}{2}\right)4=7-10=-3$ ពិត

ដូច្នេះ $\boxed{u_n=7\cdot 2^{n-1}+\left(n-\frac{7}{2}\right)4^n}$ $n\in\mathbb{N}^*$

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

1./ $\begin{cases}u_1=-2\\ u_{n+1}=4u_n-(n+3)2^n\end{cases}$

2./ $\begin{cases}u_1=-1\\ u_{n+1}=4u_n+(3n-2)7^n\end{cases}$

3./ $\begin{cases}u_1=-\frac{1}{2}\\ u_{n+1}=2u_n-(3n-1)4^n\end{cases}$

4./ $\begin{cases}u_1=\sqrt{2}\\ u_{n+1}=3u_n+(2n-1)5^n\end{cases}$

5./ $\begin{cases}u_1=-\sqrt{3}\\ u_{n+1}=7u_n-(3n+2)10^n\end{cases}$

6./ $\begin{cases}u_1=-3\\ u_{n+1}=2u_n+(n+5)3^n\end{cases}$

7./ $\begin{cases}u_1=-4\\ u_{n+1}=-3u_n+(8n-1)5^n\end{cases}$

8./ $\begin{cases}u_1=-\sqrt{2}\\ u_{n+1}=3u_n+(9n+5)6^n\end{cases}$

9./ $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=2u_n-(5n-3)3^n\end{cases}$

10./ $\begin{cases}u_1=2\sqrt{3}\\ u_{n+1}=3u_n+(5n+1)4^n\end{cases}$

❖ កំណាត់សម្គាល់

ចំពោះសមីការស្វ៊ីតមានទម្រង់: $U_1 = A\ ,\ pU_{n+1} = qU_n + f_1(n) + f_2(n) + \cdots + f_k(n)$

តួរទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ: $U_n = U_n^* + U_n^{**} + \cdots + U_n^k$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$pU_{n+1}^* = qU_n^*$$
$$pU_{n+1}^{**} = qU_n^{**} + f_1(n)$$
....
$$pU_{n+1}^k = qU_n^k + f_k(n)$$

ដើម្បីរក $U_n^*, U_n^{**}, ..., U_n^k$ យើងប្រើវិធីសាស្ត្រដែលធ្លាប់សិក្សាដូចខាងលើ ។

➢ សមីការស្វ៊ីតមានទម្រង់: $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$

របៀបដោះស្រាយ

(បង្កើតសមីការសម្គាល់ នាំឲ្យតាងស្វ៊ីតជំនួយ ហើយស្វែងរកស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ឆ្ពោះទៅរកតួទី u_n)

❖ រកតួទី u_n នៃស្វ៊ីត $\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d} \end{cases}$

➢ គេមានសមីការសម្គាល់ ដែលមានទម្រង់ $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$ គឺ $r = \dfrac{ar + b}{cr + d}$

នាំឲ្យ $cr^2 + dr - ar - b = 0$

$$cr^2 + (d - a)r - b = 0$$

- បើ $\Delta > 0$ នោះ សមីការសម្គាល់មានឬសពីរផ្សេងគ្នា r_1 និង r_2 ។

ដើម្បីគណនាតួទី u_n គេត្រូវ :

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = \dfrac{u_n - r_1}{u_n - r_2}$ រួចស្រាយថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ
- គណនា v_n រួចទាញរក u_n

$$v_n = \frac{u_n - r_1}{u_n - r_2} \Rightarrow v_n u_n - r_2 v_n = u_n - r_1$$

$$v_n u_n - u_n = r_2 v_n - r_1$$

$$u_n = \frac{r_2 v_n - r_1}{v_n - 1}$$

ដូច្នេះ $u_n = \dfrac{r_2 v_n - r_1}{v_n - 1}$

- បើ $\Delta = 0$ នោះ សមីការសម្គាល់មានឫសឌុបគឺ $r_1 = r_2 = r_0$

ដើម្បីគណនាតួទី u_n គេត្រូវ :

- តាងស៊ីុតជំនួយ $v_n = \dfrac{1}{u_n - r_0}$ រួចស្រាយថា (v_n) ជាស៊ីុតនព្វន្ត
- គណនា v_n រួចទាញរក u_n

$$v_n = \frac{1}{u_n - r_0} \quad \Rightarrow v_n u_n - r_0 v_n = 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1 + r_0 v_n}{v_n}$$

ដូច្នេះ $u_n = \dfrac{1 + r_0 v_n}{v_n}$

លំហាត់គំរូ

គេពិនិត្យស៊ីុតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 4}{u_n - 1}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 4}{u_n - 1} \quad , \forall n \in IN \end{cases}$

យើងមានៈ $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 4}{u_{n-1}}$ មានសមីការសម្គាល់ $r = \dfrac{3r - 4}{r - 1}$

$$\Rightarrow r^2 - r = 3r - 4$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

តាងស៊ីុត $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 2}$

$v_{n+1} = 1 + v_n$

$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = 1$ ថេរ

$\Rightarrow (v_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = 1$ និង

$v_1 = \dfrac{1}{u_1 - 2} = \dfrac{1}{3-2} = 1$

$\Rightarrow v_n = v_1 + (n-1)d$

$= 1 + (n-1)(1)d$

តាម $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

$\Rightarrow u_n - 2 = \dfrac{1}{v_n}$

$u_n = \dfrac{1}{v_n} + 2 = \dfrac{1}{n} + 2$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \dfrac{2n+1}{n}}$

លំហាត់គំរូ

កំណត់តួទី u_n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{-2u_n - 6}{u_n - 7} \end{cases}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

- គេមានសមីការសម្គាល់ តាមទម្រង់ $u_{n+1} = \dfrac{-2u_n - 6}{u_n - 7}$ គឺ $r = \dfrac{-2r-6}{r-7}$

$\Rightarrow \quad r^2 - 7r = -2r - 6 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 5r + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(6) = 1 > 0$

ដោយ $\Delta > 0$ នោះ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នា គឺ :

$r_1 = \dfrac{5-\sqrt{1}}{2} = 2 \ ; \ r_1 = \dfrac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3} \quad \Leftrightarrow \quad v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 3}$

ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{-2u_n - 6}{u_n - 7}$

$$\Rightarrow v_{n+1}=\frac{\frac{-2u_n-6}{u_n-7}-2}{\frac{-2u_n-6}{u_n-7}-3}=\frac{-2u_n-6-2u_n+14}{-2u_n-6-3u_n+21}=\frac{-4u_n+8}{-5u_n+15}$$

$$\Rightarrow v_{n+1}=\frac{-4(u_n-2)}{-5(u_n-3)}=\frac{4}{5}\left(\frac{u_n-2}{u_n-3}\right)$$

ដោយ $v_n=\frac{u_n-2}{u_n-3}$ $\Rightarrow v_{n+1}=\frac{4}{5}v_n$

$\Rightarrow (v_n)$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ មានរេសុង $q=\frac{4}{5}$ និង តួទី១ គឺ $v_1=\frac{u_1-2}{u_1-3}=\frac{5-2}{5-3}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow v_n=v_1q^n=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ តែ $v_n=\frac{u_n-2}{u_n-3}$

$$\Rightarrow v_nu_n-3v_n=u_n-2$$

$$\Rightarrow v_nu_n-u_n=3v_n-2$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{3v_n-2}{v_n-1}$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}-2}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}-1}=\frac{\frac{9}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}-2}{\frac{3}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}-1}=\frac{9\cdot4^{n-1}-4\cdot5^{n-1}}{3\cdot4^{n-1}-2\cdot5^{n-1}}$$

<u>ដូច្នេះ</u> $\boxed{u_n=\frac{9\cdot4^{n-1}-4\cdot5^{n-1}}{3\cdot4^{n-1}-2\cdot5^{n-1}}}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ :

ចំពោះ $n=1$ $\Rightarrow u_1=\frac{9\cdot4^{1-1}-4\cdot5^{1-1}}{3\cdot4^{1-1}-2\cdot5^{1-1}}=\frac{5}{1}=5$ (ពិត)

លំហាត់អនុវត្តន៏

ចូរកំណត់តួនៃស្ទីតខាងក្រោម:

១ . $(u_n):\begin{cases}u_1=4\\u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{2n-1}\end{cases}$ ២ . $(u_n):\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=\frac{3u_n-4}{u_n-1}\end{cases}$ ។

❖ ទម្រង់សមីការស៊ីត: $\begin{cases} u_1 = \alpha \ , \ u_2 = \beta \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$

<u>របៀបដោះស្រាយទី១</u>

(ផ្តើមពីសមីការសម្គាល់ បង្កើតបានស៊ីតជំនួយ នាំឲ្យមានស៊ីតធរណីមាត្រ ឆ្ពោះទៅរកតួទី u_n)

❖ រកតួទី u_n នៃស៊ីត

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \ , \ u_2 = \beta \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

➢ គេមានសមីការសម្គាល់តាមទម្រង់ $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

គឺ : $r^2 = ar + b$ នាំឲ្យ $r^2 - ar - b = 0$

- បើ $\Delta > 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ r_1 និង r_2

  - គេតាងស៊ីតជំនួយពីរគឺ $x_n = u_{n+1} - r_1 u_n$ និង $y_n = u_{n+1} - r_2 u_n$

គេសរសេរ :

$$\begin{cases} x_n = u_{n+1} - r_1 u_n \\ y_n = u_{n+1} - r_2 u_n \end{cases}$$

គេបានកំណើន $n+1$ គឺ:

$$\begin{cases} x_{n+1} = u_{n+2} - r_1 u_{n+1} \\ y_{n+1} = u_{n+2} - r_2 u_{n+1} \end{cases}$$

ដោយ $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

នាំឲ្យ $\begin{cases} x_{n+1} = au_{n+1} + bu_n - r_1 u_{n+1} \\ y_{n+1} = au_{n+1} + bu_n - r_2 u_{n+1} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = (a - r_1)u_{n+1} + bu_n \\ y_{n+1} = (a - r_2)u_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = (a - r_1)\left(u_{n+1} + \dfrac{b}{a - r_1}u_n\right) \\ y_{n+1} = (a - r_2)\left(u_{n+1} + \dfrac{b}{a - r_2}u_n\right) \end{cases}$$

យក $x_n = u_{n+1} + \dfrac{b}{a - r_1}u_n$; $y_n = u_{n+1} + \dfrac{b}{a - r_2}u_n$

គេបាន $\begin{cases} x_{n+1} = (a - r_1)x_n \\ y_{n+1} = (a - r_2)y_n \end{cases}$

នាំឲ្យគេបាន (x_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមាន

ផលធៀបរួម $q_1 = a - r_1$ និង តួទី១ គឺ $x_1 = u_2 - r_1 u_1$

នាំឲ្យ $x_n = x_1 q^{n-1} = (u_2 - r_1 u_1)(a - r_1)^{n-1}$ និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q_2 = a - r_2$ និង

តួទី១ គឺ $y_1 = u_2 - r_2 u_1$

នាំឲ្យ $y_n = y_1 q^{n-1} = (u_2 - r_2 u_1)(a - r_2)^{n-1}$

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x_n = (u_2 - r_1 u_1)(a - r_1)^{n-1} \\ y_n = (u_2 - r_2 u_1)(a - r_2)^{n-1} \end{cases}$

តែ $\begin{cases} x_n = u_{n+1} - r_1 u_n \\ y_n = u_{n+1} - r_2 u_n \end{cases}$

$$-\begin{cases} u_{n+1} - r_1 u_n = (u_2 - r_1 u_1)(a - r_1)^{n-1} \\ u_{n+1} - r_2 u_n = (u_2 - r_2 u_1)(a - r_2)^{n-1} \end{cases}$$

$$(r_2 - r_1) u_n = (u_2 - r_1 u_1)(a - r_1)^{n-1} - (u_2 - r_2 u_1)(a - r_2)^{n-1}$$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{1}{r_2 - r_1}\left[(u_2 - r_1 u_1)(a - r_1)^{n-1} - (u_2 - r_2 u_1)(a - r_2)^{n-1}\right]$ ដូច្នេះ

$$\boxed{u_n = \frac{1}{r_2 - r_1}\left[(u_2 - r_1 u_1)(a - r_1)^{n-1} - (u_2 - r_2 u_1)(a - r_2)^{n-1}\right]}$$

- បើ $\Delta = 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសឌុបគឺ

  $r_1 = r_2 = r_0$

  - គេតាងស្វ៊ីតជំនួយគឺ $x_n = u_{n+1} - r_0 u_n \qquad (*)$

  គេបានកំណើន $n+1$ គឺ: $x_{n+1} = u_{n+2} - r_0 u_{n+1}$

  ដោយ $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

  នាំឲ្យ $x_{n+1} = a u_{n+1} + b u_n - r_0 u_{n+1}$

  $$x_{n+1} = (a - r_0) u_{n+1} + b u_n$$

  $$x_{n+1} = (a - r_0)\left(u_{n+1} + \frac{b}{a - r_0} u_n\right)$$

  យក $x_n = u_{n+1} + \dfrac{b}{a - r_0} u_n \quad \Rightarrow x_{n+1} = (a - r_0) x_n$

  នាំឲ្យ (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q_0 = a - r_0$

  និង មានតួទី ១ គឺ $x_1 = u_2 - r_0 u_1$

  នាំឲ្យ $x_n = (u_2 - r_0 u_1)(a - r_0)^{n-1} \qquad (**)$

ពី $(*)$ $x_n = u_{n+1} - r_0 u_n$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $r_0^{\,n+1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_n}{r_0^{\,n+1}} = \frac{u_n}{r_0^{\,n+1}} - \frac{u_n}{r_0^{\,n}}$$ តាង $w_n = \frac{u_n}{r_0^{\,n}}$

$$\Rightarrow w_{n+1} - w_n = \frac{x_n}{r_0^{\,n+1}}$$

គេបាន (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $\frac{x_n}{r_0^{\,n+1}}$

និងតួទី១គឺ $w_1 = \frac{u_1}{r_0}$

$$\Rightarrow \quad w_n = w_1 + (n-1)d$$

$$\Rightarrow \quad w_n = \frac{u_1}{r_0} + (n-1)\frac{x_n}{r_0^{\,n+1}}$$

ដោយ $w_n = \frac{u_n}{r_0^{\,n}}$ $\Rightarrow \frac{u_n}{r_0^{\,n}} = \frac{u_1}{r_0} + (n-1)\frac{x_n}{r_0^{\,n+1}}$

$$\Rightarrow \quad u_n = r_0^{\,n}\left(\frac{u_1}{r_0} + (n-1)\frac{x_n}{r_0^{\,n+1}}\right)$$

តែ $x_n = (u_2 - r_0 u_1)(a - r_0)^{n-1}$

$$\Rightarrow \quad u_n = r_0^{\,n}\left[\frac{u_1}{r_0} + (n-1)\frac{(u_2 - r_0 u_1)(a - r_0)^{n-1}}{r_0^{\,n+1}}\right]$$

ដូច្នេះ $$\boxed{u_n = r_0^{\,n}\left[\frac{u_1}{r_0} + (n-1)\frac{(u_2 - r_0 u_1)(a - r_0)^{n-1}}{r_0^{\,n+1}}\right]}$$

- បើ $\Delta < 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួន កុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ $r_1 = p + iq$ និង $r_2 = p - iq$

- គេតាងស្វ៊ីតជំនួយគឺ $z_n = u_{n+1} - (p - iq)u_n$

  គេបានកំណើន $n+1$ គឺ: $z_{n+1} = u_{n+2} - (p - iq)u_{n+1}$

  ដោយ $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

  នាំឲ្យ $z_{n+1} = au_{n+1} + bu_n - (p - iq)u_{n+1}$

$$z_{n+1} = (a - p + iq)u_{n+1} + bu_n$$

$$z_{n+1} = (a - p + iq)\left(u_{n+1} + \frac{b}{a - p + iq_0}u_n\right)$$

  យក $z_n = u_{n+1} + \frac{b}{a - p + iq}u_n$

$$\Rightarrow z_{n+1} = (a - p + iq)z_n$$

នាំឲ្យ (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = a - p + iq$ និងមានតួទី១ គឺ

$z_1 = u_2 - (p - iq)_0 u_1$

នាំឲ្យ $z_n = \left[u_2 - (p - iq)_0 u_1\right](a - p + iq)^{n-1}$

ឧបមាថា $z_n = A_n + iB_n$, A_n , $B_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ ដោយ

$z_n = u_{n+1} - (p - iq)u_n = u_{n+1} - p + iqu_n$

$\Rightarrow u_{n+1} - pu_n - iqu_n = A_n + iB_n$

$\Rightarrow u_{n+1} - pu_n + iqu_n = A_n + iB_n$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = \dfrac{B_n}{q}}$

លំហាត់គំរូ

រកតួទី u_n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ: $\begin{cases} u_1 = 3 \;;\; u_2 = 29 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

(ផ្តើមពីសមីការសម្គាល់ បង្កើតស្វ៊ីតជំនួយ នាំឲ្យមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ឆ្ពោះទៅ រកតួទី u_n)

រកតួទី u_n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n)

កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 3 \;;\; u_2 = 29 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n \end{cases}$

- គេមាន សមីការសម្គាល់តាមទម្រង់ $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n$ គឺ $r^2 = 3r + 10$

  នាំឲ្យ $r^2 - 3r - 10 = 0$

  $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(-10) = 49 > 0$

  ដោយ $\Delta > 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ

  $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 + \sqrt{49}}{2} = 5$ និង $r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3 - \sqrt{49}}{2} = -2$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយពីរគឺ : $x_n = u_{n+1} - r_1 u_n$; $y_n = u_{n+1} - r_2 u_n$

  គេសរសេរ : $\begin{cases} x_n = u_{n+1} - 5u_n \\ y_n = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$ (1)

  គេបានកំណើន $n+1$ គឺ $\begin{cases} x_{n+1} = u_{n+2} - 5u_{n+1} \\ y_{n+1} = u_{n+2} + 2u_{n+1} \end{cases}$

ដោយ $u_{n+2}=3u_{n+1}+10u_n$ (សម្មតិកម្ម)

នាំឲ្យ $\begin{cases} x_{n+1}=3u_{n+1}+10u_n-5u_{n+1} \\ y_{n+1}=3u_{n+1}+10u_n+2u_{n+1} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_{n+1}=-2\left(u_{n+1}+5u_n\right) \\ y_{n+1}=5\left(u_{n+1}+2u_n\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1}=-2x_n \\ y_{n+1}=5y_n \end{cases}$$

ព្រោះ $x_n=u_{n+1}-5u_n$ និង $y_n=u_{n+1}+2u_n$

គេបាន (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q_1=-2$ និងតួទី១ $x_1=u_2-5u_1$

ដោយ $u_1=3$; $u_2=29$ $\Rightarrow x_1=29-15=29-15=14$

$\Rightarrow x_n=14(-2)^{n-1}$ និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម

$q_2=5$ និងតួទី១ $y_1=u_2+2u_1$

$\Rightarrow y_1=29+2\times 3=35$

$\Rightarrow y_n=35\cdot 5^{n-1}$

យក $x_n=14(-2)^{n-1}$ និង $y_n=35\cdot 5^{n-1}$ ជំនួសក្នុងប្រព័ន្ធសមីការ (1)

$$(1)\quad \begin{cases} x_n=u_{n+1}-5u_n \\ y_n=u_{n+1}+2u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{n+1}-5u_n=14(-2)^{n-1} \\ u_{n+1}+2u_n=35\cdot 5^{n-1} \end{cases}$$

$$-\begin{cases} u_{n+1}-5u_n=14(-2)^{n-1} \\ u_{n+1}+2u_n=35\cdot 5^{n-1} \end{cases}$$

$$-7u_n=14(-2)^{n-1}-35\cdot 5^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n=(-2)(-2)^{n-1}+5\cdot 5^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n=(-2)^n+5^n$$

<u>ដូច្នេះ</u> $\boxed{u_n=(-2)^n+5^n}$ ។

<u>របៀបដោះស្រាយទី២</u>

សមីការស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់: $\begin{cases} U_1=a\ ,\ U_2=b \\ pU_{n+2}+qU_{n+1}+rU_n \end{cases}$

ដោះស្រាយសមីការសំគាល់ $p\lambda^2+q\lambda+r=0$ (E)

- ✓ ករណី $\Delta>0$ នោះ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ λ_1,λ_2 ។

  នាំយើងទទួលបាន: $U_n=A\lambda_1^n+B\lambda_2^n\ ,\forall n\in\mathbb{N}$ ដែល A,B ជាចំនួនថេរហើយត្រូវកំណត់តាម $U_1\ \&\ U_2$ ។

- ✓ ករណី $\Delta = 0$ នោះ (E) មានឫសឌុបគឺ λ នាំឲ្យយើងបាន: $U_n = (An+B)\lambda^n$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរហើយត្រូវកំណត់តាម $U_1 \& U_2$ ។
- ✓ ករណី $\Delta < 0$ នោះ (E) មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ: $\lambda = x \pm iy$ ដែល λ អាចសរសេរជាត្រីកោណមាត្របានមានទម្រង់ $\lambda = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ ហើយ $r = |\lambda| = \sqrt{x^2+y^2}$ និង $\tan\varphi = \frac{y}{x}$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ នាំយើងបាន: $U_n = r^n\left(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi\right)$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរហើយត្រូវកំណត់តាម $U_1 \& U_2$ ។

លំហាត់គំរូ

ចូរកំណត់តួនៃស្វ៊ីត (U_n) ដែលកំណត់ដោយ: $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់តួនៃស្វ៊ីត (U_n)

យើងមានស្វ៊ីត $U_{n+2} = 3U_{n+1} - 9U_n$

តាមសមីការសំគាល់យើងបាន:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 9 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4.9 = -27 < 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 3i\sqrt{3}$$

នោះ $\lambda = 3\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

នាំឲ្យ $U_n = 3^n\left(A\cos\frac{n\pi}{3} + B\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

ដោយ $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\left(A\cos\frac{\pi}{3} + B\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ 3^2\left(A\cos\frac{2\pi}{3} + B\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \end{cases}$

ដោយដោះស្រាយសមីការយើងបាន: $A = \frac{5}{9}$, $B = \frac{\sqrt{3}}{27}$

ទាញបាន: $U_n = 3^n\left(\frac{5}{9}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{27}\sin\frac{n\pi}{3}\right), \forall n \in \mathbb{N}$

<u>ដូច្នេះ</u> តួនៃស្វ៊ីតគឺ $U_n = 3^n\left(\frac{5}{9}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{27}\sin\frac{n\pi}{3}\right), \forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់គំរូ

រកតួទី u_n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{6}\ ;\ u_2 = \frac{13}{36} \\ 6u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n \end{cases}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកតួទី u_n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n)

គេមាន សមីការសម្គាល់តាមទម្រង់ $6u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$ គឺ

$$6r^2 = -r + 1$$

$$\Rightarrow 6r^2 + r - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(6)(-1) = 25 > 0$$

ដោយ $\Delta > 0$ នោះ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ :

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{25}}{12} = \frac{-1+5}{12} = \frac{1}{3}$$

$$r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{25}}{12} = \frac{-1-5}{12} = -\frac{1}{2}$$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $x_n = u_{n+1} - r_1 u_n$ និង $y_n = u_{n+1} - r_2 u_n$

គេសរសេរ $\begin{cases} x_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \\ x_n = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{cases} \quad (1)$

គេបាន កំណើន $n+1$ នៃ x_n និង y_n គឺ :

$$\begin{cases} x_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{3}u_{n+1} \\ x_{n+1} = u_{n+2} + \frac{1}{2}u_{n+1} \end{cases}$$

ដោយ $6u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n \Rightarrow u_{n+2} = -\frac{1}{6}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n$

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{6}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n - \frac{1}{3}u_{n+1} \\ x_{n+1} = -\frac{1}{6}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n \\ x_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{1}{6}u_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n\right) \\ x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n \\ x_{n+1} = \frac{1}{3}y_n \end{cases}$$

ព្រោះ $x_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ និង $y_n = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$

គេបាន (x_n) ជាស៊្វីតធរណីមាត្រ មានផលធៀបរួម $q_1 = -\frac{1}{2}$ និង តួទី១គឺ

$$x_1 = u_2 - \frac{1}{3}u_1 = \frac{13}{36} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{13}{36} + \frac{1}{18} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow x_n = x_1 q^{n-1} = \frac{5}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(y_n) ជាស៊្វីតធរណីមាត្រ មានផលធៀបរួម $q_2 = \frac{1}{3}$

និង តួទី១គឺ $y_1 = u_2 + \frac{1}{2}u_1 = \frac{13}{36} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{13}{36} - \frac{1}{12} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$$\Rightarrow y_n = y_1 q^{n-1} = \frac{5}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$(1)\begin{cases} x_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \\ x_n = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\begin{cases} u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{5}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n = \frac{5}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases}$$

$$-\frac{5}{6}u_n = \frac{5}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{5}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n = -\frac{6}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{6}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

<u>ដូច្នេះ</u> តួនៃស្វ៊ីតគឺ $\boxed{u_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}$ ។

<u>សំគាល់</u> : ស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1=\alpha\ ;\ u_2=\beta \\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n \end{cases}$

មាន សមីការសម្គាល់ $r^2=ar+b$ ឬ $r^2-ar-b=0$

ករណី $\Delta>0$ (ដែល r_1 និង r_2 ជាឫសពីរផ្សេងគ្នានៃសមីការសម្គាល់)

នោះ តួទី u_n គឺ $u_n=r_1^n+r_2^n$

<u>លំហាត់អនុវត្តន៍</u>

ចូរកំណត់តួនៃស្វ៊ីតខាងក្រោមៈ

1./ $\begin{cases} u_1=6\ ;\ u_2=20 \\ u_{n+2}=6u_{n+1}-8u_n \end{cases}$; 2./ $\begin{cases} u_1=1\ ;\ u_2=13 \\ u_{n+2}=u_{n+1}+6u_n \end{cases}$

3./ $\begin{cases} u_1=-1\ ;\ u_2=13 \\ u_{n+2}=-u_{n+1}+6u_n \end{cases}$; 4./ $\begin{cases} u_1=2\ ;\ u_2=\frac{10}{4} \\ 4u_{n+2}=8u_{n+1}-3u_n \end{cases}$

5./ $\begin{cases} u_1=\frac{7}{3}\ ;\ u_2=\frac{37}{9} \\ 3u_{n+2}=7u_{n+1}-2u_n \end{cases}$; 6./ $\begin{cases} u_1=6\ ;\ u_2=26 \\ u_{n+2}=6u_{n+1}-5u_n \end{cases}$

7./ $\begin{cases} u_1=2\ ;\ u_2=\frac{25}{9} \\ 9u_{n+2}=18u_{n+1}-5u_n \end{cases}$; 8./ $\begin{cases} u_1=1\ ;\ u_2=25 \\ u_{n+2}=u_{n+1}+12u_n \end{cases}$

9./ $\begin{cases} u_1=7\ ;\ u_2=29 \\ u_{n+2}=7u_{n+1}-10u_n \end{cases}$; 10./ $\begin{cases} u_1=8\ ;\ u_2=34 \\ u_{n+2}=8u_{n+1}-15u_n \end{cases}$

11./ $\begin{cases} u_1=-5\ ;\ u_2=13 \\ u_{n+2}=-5u_{n+1}-6u_n \end{cases}$; 12./ $\begin{cases} u_1=-4\ ;\ u_2=10 \\ u_{n+2}=-4u_{n+1}-3u_n \end{cases}$

$13./\begin{cases} u_1=-2\ ;\ u_2=20 \\ u_{n+2}=-2u_{n+1}+8u_n \end{cases}$; $14./\begin{cases} u_1=3\ ;\ u_2=9 \\ u_{n+2}=3u_{n+1}+4u_n \end{cases}$

❖ សមីការស្វ៊ីតមានទម្រង់: $\begin{cases} u_1=\alpha\ ,\ u_2=\beta \\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n+c \end{cases}$

របៀបដោះស្រាយ

(តាងស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត ដើម្បីបំបាត់ចំនួនថេរ គេបានសមីការសំគាល់ នាំបង្កើតបានស្វ៊ីតជំនួយ ជួយរកតួទី n នៃស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត ហើយឈានទៅរកតួទី u_n)

❖ រកតួទី u_n នៃស្វ៊ីត $\begin{cases} u_1=\alpha\ ,\ u_2=\beta \\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n+c \end{cases}$

➢ តាងស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត $w_n=u_n+\lambda \Rightarrow u_n=w_n-\lambda$

គេបានកំណើន $n+1$ គឺ $u_{n+1}=w_{n+1}-\lambda$

គេបានកំណើន $n+2$ គឺ $u_{n+2}=w_{n+2}-\lambda$

ដោយ $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n+c$ (សម្មត្តិកម្ម)

$\Rightarrow w_{n+2}-\lambda=a(w_{n+1}-\lambda)+b(w_n-\lambda)+c$

$\Rightarrow w_{n+2}-\lambda=aw_{n+1}-a\lambda+bw_n-b\lambda+c$

$\Rightarrow w_{n+2}-aw_{n+1}-bw_n+a\lambda+b\lambda-\lambda-c=0$

នាំឲ្យ $a\lambda+b\lambda-\lambda-c=0 \Rightarrow \lambda=\dfrac{c}{a+b-1}$

គេបាន $w_{n+2}-aw_{n+1}-bw_n=0$

ដោះស្រាយរកតួ w_n តាមវិធីសាស្ត្រ រកតួទី u_n

នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) ដែលមាន

ទម្រង់ $\begin{cases} u_1=\alpha\ ,\ u_2=\beta \\ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n \end{cases}$

(គឺបង្កើតសមីការសម្គាល់ ➔ នាំឲ្យមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ➔ ឆ្ពោះទៅរកតួទី u_n)

បន្ទាប់ពីរកតួទី w_n រួចយកទៅជំនួសនៅក្នុង $u_n=w_n-\lambda$

នាំឲ្យ $u_n=w_n-\dfrac{c}{a+b-1}$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n=w_n-\dfrac{c}{a+b-1}}$

លំហាត់គំរូ

រកតួទី u_n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \ ; \ u_2 = 5 \\ u_{n+2} = 9u_{n+1} - 14u_n + 4 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

(តាងស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត ដើម្បីបំបាត់ចំនួនថេរ គេបានសមីការសំគាល់ នាំបង្កើតបានស្វ៊ីតជំនួយ ជួយរកតួទី n នៃស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត ហើយឈានទៅរកតួទី u_n)

រកតួទី u_n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n)

កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \ ; \ u_2 = 5 \\ u_{n+2} = 9u_{n+1} - 14u_n + 4 \end{cases}$

- តាងស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត $w_n = u_n + \lambda \quad \Rightarrow \; u_n = w_n - \lambda$

គេបាន កំណើន $n+1$ គឺ $u_{n+1} = w_{n+1} - \lambda$

$$u_{n+2} = w_{n+2} - \lambda$$

គេមាន $u_{n+2} = 9u_{n+1} - 14u_n + 4$

$$\Rightarrow w_{n+2} - \lambda = 9(w_{n+1} - \lambda) - 14(w_n - \lambda) + 4$$

$$w_{n+2} - \lambda = 9w_{n+1} - 9\lambda - 14w_n + 14\lambda + 4$$

$$w_{n+2} - 9w_{n+1} + 14w_n - 14\lambda - \lambda + 9\lambda - 4 = 0$$

$$w_{n+2} - 9w_{n+1} + 14w_n - 6\lambda - 4 = 0$$

យក $-6\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

គេបាន $w_{n+2} - 9w_{n+1} + 14w_n = 0$

- មានសមីការសម្គាល់ $r^2 - 9r + 14 = 0$

$$\Delta = (-9)^2 - 4(14) = 81 - 56 = 25 > 0$$

ដោយ $\Delta > 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9+5}{2} = 7$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9-5}{2} = 2$$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយពីរគឺ $\begin{cases} x_n = w_{n+1} - 7w_n \\ y_n = w_{n+1} - 2w_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = w_{n+2} - 7w_{n+1} \\ y_{n+1} = w_{n+2} - 2w_{n+1} \end{cases}$

ដោយ $w_{n+2} - 9w_{n+1} + 14w_n = 0$

$$\Rightarrow w_{n+2} = 9w_{n+1} - 14w_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = w_{n+2} - 7w_{n+1} \\ y_{n+1} = w_{n+2} - 2w_{n+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = 9w_{n+1} - 14w_n - 7w_{n+1} \\ y_{n+1} = 9w_{n+1} - 14w_n - 2w_{n+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = 2w_{n+1} - 14w_n \\ y_{n+1} = 7w_{n+1} - 14w_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = 2(w_{n+1} - 7w_n) \\ y_{n+1} = 7(w_{n+1} - 2w_n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ y_{n+1} = 7y_n \end{cases} \text{ ព្រោះ } \begin{cases} x_n = w_{n+1} - 7w_n \\ y_n = w_{n+1} - 2w_n \end{cases}$$

គេបាន (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន ផលធៀបរួម $q_1 = 2$ និងតួទី ១ គឺ $x_1 = w_2 - 7w_1$ ដោយ

$$w_2 = u_2 + \lambda \text{ និង } w_1 = u_1 + \lambda \left(u_1 = 2 \,,\, u_2 = 5 \,,\, \lambda = -\frac{2}{3} \right)$$

នាំឲ្យ $w_2 = 5 - \frac{2}{3} = \frac{13}{3}$ និង $w_1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$x_1 = \frac{13}{3} - 7\left(\frac{4}{3}\right) = -5 \Rightarrow x_n = x_1 q^{n-1} = (-5)2^{n-1}$ គេបាន (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

ផលធៀបរួម $q_1 = 7$ និងតួទី ១ គឺ $y_1 = w_2 - 2w_1$

$$y_1 = \frac{13}{3} - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3} \Rightarrow y_n = x_1 q^{n-1} = \left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = w_{n+1} - 7w_n = (-5)2^{n-1} \\ y_n = w_{n+1} - 2w_n = \left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad - \begin{cases} w_{n+1} - 7w_n = (-5)2^{n-1} \\ w_{n+1} - 2w_n = \left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1} \end{cases}$$

$$-5w_n = (-5)2^{n-1} - \left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1}$$

$$\Rightarrow w_n = -\frac{1}{5}\left[(-5)2^{n-1} - \left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1} \right]$$

ដោយ $w_n = u_n + \lambda \quad \Rightarrow \quad u_n = w_n - \lambda$

$$\Rightarrow\ u_n = -\frac{1}{5}\left[(-5)2^{n-1} - \left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1}\right] + \frac{2}{3}$$

<u>ដូចនេះ</u> $\boxed{u_n = -\frac{1}{5}\left[(-5)2^{n-1} - \left(\frac{5}{3}\right)7^{n-1}\right] + \frac{2}{3}}$ ។

លំហាត់គំរូ

រកតួទី u_n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 0\ ;\ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n - 5 \end{cases}$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

(តាងស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត ដើម្បីបំបាត់ចំនួនថេរ គេបានសមីការសំគាល់ នាំបង្កើតបានស្វ៊ីតជំនួយ ជួយរកតួទី n នៃស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត ហើយឈានទៅរកតួទី u_n)

រកតួទី u_n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n)

កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 0\ ;\ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n - 5 \end{cases}$

- តាងស្វ៊ីតសិប្បនិម្មិត $w_n = u_n + \lambda \quad \Rightarrow\ u_n = w_n - \lambda$

គេបាន កំណើន $n+1$ គឺ $u_{n+1} = w_{n+1} - \lambda$

$$u_{n+2} = w_{n+2} - \lambda$$

គេមាន $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n - 5$

$$\Rightarrow w_{n+2} - \lambda = 4(w_{n+1} - \lambda) - 8(w_n - \lambda) - 5$$

$$w_{n+2} - 4w_{n+1} + 8w_n - \lambda + 4\lambda - 8\lambda + 5 = 0$$

$$w_{n+2} - 4w_{n+1} + 8w_n - 5\lambda + 5 = 0$$

យក $-5\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1$

គេបាន $w_{n+2} - 4w_{n+1} + 8w_n = 0$

- មានសមីការសម្គាល់ $r^2 - 4r + 8 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(8) = 16 - 32 = -16 < 0$$

ដោយ $\Delta < 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចពីរឆ្លាស់គ្នាគឺ

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 + i\sqrt{16}}{2} = 2 + 2i$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 - i\sqrt{16}}{2} = 2 - 2i$$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ គឺ : $z_n = w_{n+1} - r_2 w_n = w_{n+1} - (2 - 2i)w_n$

គេបានកំណើន $n+1$ គឺ $z_{n+1}=w_{n+2}-(2-2i)w_{n+1}$

ដោយ $w_{n+2}-4w_{n+1}+8w_n=0$ (សម្មតិកម្ម) $\Rightarrow w_{n+2}=4w_{n+1}-8w_n$

$$z_{n+1}=4w_{n+1}-8w_n-(2-2i)w_{n+1}$$

$$=(2+2i)w_{n+1}-8w_n$$

$$z_{n+1}=(2+2i)\left(w_{n+1}-\frac{8}{2+2i}w_n\right)$$

$$=(2+2i)\left[w_{n+1}-(2-2i)w_n\right]$$

$$\Rightarrow z_{n+1}=(2+2i)z_n$$

ព្រោះ $z_n=w_{n+1}-(2-2i)w_n$

គេបាន (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q=2+2i$ និងតួទី១ គឺ $z_1=w_2-(2-2i)w_1$

ដោយ $w_2=u_2+\lambda=1+1=2$ និង $w_1=u_1+\lambda=0+1=1$

$$\Rightarrow z_1=2-(2-2i)\times 1=2i$$

$$\Rightarrow z_n=z_1\cdot q^{n-1}=(2i)(2+2i)^{n-1}$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left[2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^{n-1}$$

$$\Rightarrow z_n=2\left(2\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}$$

$$=2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{4}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right)$$

$$=2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi-\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right]$$

ដោយ $z_n=w_{n+1}-(2-2i)w_n=w_{n+1}-2w_n+2iw_n$

$$w_{n+1}-2w_n+2iw_n=2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right]w_{n+1}-2w_n+2iw_n$$

$$=2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i\,2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$$

នាំឲ្យ $2w_n=2^n\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$

នាំឲ្យ $w_n = 2^{n-1}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$

$$= \left(2\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដោយ $w_n = u_n + \lambda$

$$\Rightarrow u_n = w_n - \lambda = \left(2\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4} - 1$$

ដូច្នេះ $\boxed{u_n = \left(2\sqrt{2}\right)^{n-1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4} - 1}$ ។

❖ សមីការស្វ៊ីតមានទម្រង់: $\begin{cases} u_1 = \alpha \, , u_2 = \beta \\ pu_{n+2} + qu_{n+1} + ru_n = f(n) \end{cases}$

របៀបដោះស្រាយ

ចម្លើយទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ: $u_n = u_n^* + u_n^{**}$ ដែល

u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $pu_{n+2}^* + qu_{n+1}^* + ru_n^* = 0$

តាមសមីការសំគាល់ $p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$, (E)

- ✓ ករណី $\Delta > 0$ នោះ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា λ_1 , λ_2
  នាំឲ្យយើងបាន $u_n^* = A\lambda_1{}^n + B\lambda_2{}^n$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរហើយត្រូវកំណត់តាម u_1 , u_2 ។
- ✓ ករណី $\Delta < 0$ នោះ (E) មានឫស λ
  នាំឲ្យយើងបាន $u_n^* = (An + B)\lambda^n$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរហើយត្រូវកំណត់តាម u_1 , u_2 ។
- ✓ ករណី $\Delta < 0$ នោះ (E) មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ: $\lambda = x \pm iy$ ដែល λ អាចសរសេរជាត្រីកោណមាត្របានមានទម្រង់ $\lambda = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ ហើយ $r = |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2}$ និង
  $\tan\varphi = \frac{y}{x}$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ នាំយើងបាន: $u_n^* = r^n\left(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi\right)$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរហើយត្រូវកំណត់តាម u_1 , u_2 ពេល $u_n = u_n^* + u_n^{**}$ ។

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $pu_{n+2}^{**} + qu_{n+1}^{**} + ru_n^{**} = f(n)$

ដើម្បីរក u_n^{**} យើងត្រូវពិនិត្យមើលបីករណី

- ករណី $\lambda_1 , \lambda_2 \neq 1$ នោះ $u_n^{**} = g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$ ។
- ករណី λ_1 , λ_2 ក្នុងចំនោមឫសណាមួយស្មើ 1 នោះ $u_n^{**} = ng(n)$ ដែលជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$ ។

• ករណី $\lambda_1=\lambda_2=1$ ជាឫសឌុបនោះ $u_n^{**}=n^2g(n)$ដែលជាពហុធាមានដឺក្រេដូច $f(n)$ ។

លំហាត់គំរូ

កំណត់ទី n នៃស្វ៊ីត(u_n) ដែលកំណត់ដោយ: $\begin{cases}u_0=0\ ,u_1=1\\ u_{n+2}-3u_{n+1}+2u_n=n\end{cases}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់ទី n នៃស្វ៊ីត(u_n)

យើងមាន: $u_{n+2}-3u_{n+1}+2u_n=n$

នោះតួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ: $u_n=u_n^*+u_n^{**}$ ដែលu_n^*ជាចម្លើយនៃសមីការស្វ៊ីត$u_{n+2}^*-3u_{n+1}^*+2u_n^*=0$

មានសមីការសំគាល់គឺ $\lambda^2-3\lambda+2=0$ នោះយើងបាន$\lambda=1\ ,\lambda=2$

នាំឲ្យយើងបាន $u_n^*=A+B.2^n$

និង u_n^{**}ជាចម្លើយនៃសមីការ $u_{n+2}^{**}-3u_{n+1}^{**}+2u_n^{**}=n\ ,\ (E)$

ហើយដោយ: $\lambda=1\ ,\lambda=2$ នោះយើងបាន $u_n^{**}=n(\alpha n+\beta)$ ជំនួសក្នុង(E)

យើងបាន: $(n+2)\left[\alpha(n+2)+\beta\right]-3(n+1)\left[\alpha(n+1)+\beta\right]+2n(\alpha n+\beta)=n$

- បើ $n=-2\Leftrightarrow 0-3(-1)(-\alpha+\beta)-4(-2\alpha+\beta)=-2$

  $\Leftrightarrow 5\alpha-\beta=-2\quad(1)$
- បើ $n=-1\Leftrightarrow(\alpha+\beta)-2(-\alpha+\beta)=-1$

  $\Leftrightarrow 3\alpha-\beta=-1\quad(2)$

តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន $\alpha=-\frac{1}{2}\ ,\beta=\frac{1}{2}$

នោះយើងបាន $u_n^{**}=\frac{n}{2}(-n+1)$

នាំឲ្យយើងបាន: $u_n=u_n^*+u_n^{**}=A+B.2^n+\frac{n}{2}(-n+1)$

ដោយ $\begin{cases}u_0=1\\ u_1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\ A+2B=1\end{cases}\Rightarrow A=-1\ ,\ B=1$

<u>ដូច្នេះ</u> $\boxed{u_n=2^n-1+\frac{n}{2}(-n+1)\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}}$ ។

❖ សមីការស៊ីតមានទម្រង់: $\begin{cases} u_0 = \alpha \, , u_1 = \beta \\ pu_{n+2} + qu_{n+1} + ru_n = m\mu^n \end{cases}$

របៀបដោះស្រាយ

ចម្លើយទូទៅនៃស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ: $u_n = u_n^* + u_n^{**}$ ដែល

u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $pu_{n+2}^* + qu_{n+1}^* + ru_n^* = 0$

តាមសមីការសំគាល់ $p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$, (E)

- ✓ ករណី $\Delta > 0$ នោះ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា λ_1 , λ_2
  នាំឲ្យយើងបាន $u_n^* = A\lambda_1{}^n + B\lambda_2{}^n$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរហើយត្រូវកំណត់តាម u_1 , u_2 ។
- ✓ ករណី $\Delta < 0$ នោះ (E) មានឫស λ
  នាំឲ្យយើងបាន $u_n^* = (An + B)\lambda^n$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរហើយត្រូវកំណត់តាម u_1 , u_2 ។
- ✓ ករណី $\Delta < 0$ នោះ (E) មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ: $\lambda = x \pm iy$ ដែល λ អាចសរសេរជាត្រីកោណមាត្របានមានទម្រង់ $\lambda = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ ហើយ $r = |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2}$ និង $\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$, $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ នាំយើងបាន: $u_n^* = r^n \left(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi\right)$ ដែល A , B ជាចំនួនថេរហើយត្រូវកំណត់តាម u_1 , u_2 ពេល $u_n = u_n^* + u_n^{**}$ ។

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $pu_{n+2}^{**} + qu_{n+1}^{**} + ru_n^{**} = m\mu^n$

ដើម្បីរក u_n^{**} យើងត្រូវពិនិត្យមើលបីករណី

- ករណី $\lambda_1 , \lambda_2 \neq \mu$ នោះ $u_n^{**} = k\mu^n$, $k \in \mathbb{R}$ ។
- ករណី λ_1 , λ_2 ក្នុងចំនោមឫសណាមួយស្មើ μ នោះ $u_n^{**} = kn\mu^n$, $k \in \mathbb{R}$ ។
- ករណី $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$ ជាឫសឌុបនោះ $u_n^{**} = kn^2\mu^n$, $k \in \mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូ

កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ: $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} , u_1 = \dfrac{1}{4} \\ u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 2^n \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (u_n)

យើងមាន $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 2^n$

នោះតួទី n នៃស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ: $u_n = u_n^* + u_n^{**}$ ដែល

u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការស៊ីត $u_{n+2}^* - 4u_{n+1}^* + 4u_n^* = 0$

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការស្ទីត $u_{n+2}^{**}-4u_{n+1}^{**}+4u_n^{**}=2^n \quad (E)$

- កំណត់ u_n^*

u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការស្ទីត $u_{n+2}^*-4u_{n+1}^*+4u_n^*=0$

តាមសមីការសំគាល់ $\lambda^2-4\lambda+4=0$ សមីការមានឬសឌុប $\lambda=2$

នោះយើងបាន: $u_n^*=(A+Bn)2^n$

- កំណត់ u_n^{**}

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការស្ទីត $u_{n+2}^{**}-4u_{n+1}^{**}+4u_n^{**}=2^n \quad (E)$

ដោយ $\lambda=2$ ជាឬសឌុបនោះយើងបាន: $u_n^{**}=k.n^2.2^n$

តាមសមីការ (E) យើងបាន:

$$k(n+2)^2.2^{n+2}-4k(n+1)^2.2^{n+1}+4n^2.2^n=2^n$$

បើ $n=0 \Leftrightarrow 16k-8k=1 \Rightarrow k=2^{-3}$

នោះយើងបាន: $u_n^{**}=n^2.2^{n-3}$

នាំឲ្យ $u_n=u_n^*+u_n^{**}=(A+Bn)2^n+n^2 2^{n-3}$

ដោយ $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_1=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A+0.B)2^0=\frac{1}{2} \\ (A+B).2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$

<u>ដូច្នេះ:</u> $\boxed{u_n=(1-n)2^{n-1}+n^2.2^{n-3}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}}$ ។

❖ សមីការស្ទីតមានទម្រង់: $\begin{cases} u_1=\alpha \\ u_{n+1}=ku_n^p \end{cases}$ ដែល $k>0$, $\alpha>0$

<u>របៀបដោះស្រាយ</u>

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ :

- បំពាក់លោការីតនេពៃរលើ $u_{n+1}=ku_n^p$ គឺ

$$\ln u_{n+1}=\ln ku_n^p$$
$$\ln u_{n+1}=k'+p\ln u_n \quad (k'=\ln k) \ (1)$$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n=\ln u_n$

គេបានកំណើន $n+1$ គឺ $v_{n+1}=\ln u_{n+1}$

តាម $(1) \Rightarrow \ v_{n+1}=pv_n+k'$

- ដោះស្រាយរក v_n រួចទាញរក $u_n=e^{v_n}$

ព្រោះ $v_n=\ln u_n$

<u>ដូច្នេះ</u> $\boxed{u_n=e^{v_n}}$

លំហាត់គំរូ

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត(u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\sqrt[3]{u_n} \end{cases}$; $n\in\mathbb{N}^*$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គេមាន $u_{n+1}=\sqrt[3]{u_n}$

- បំពាក់លោការីតនេពៃរលើ $u_{n+1}=\sqrt[3]{u_n}$ គឺ

$$\ln u_{n+1}=\ln\sqrt[3]{u_n}$$
$$\ln u_{n+1}=\frac{1}{3}\ln u_n \quad (1)$$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n=\ln u_n$

គេបានកំណើន $n+1$ គឺ $v_{n+1}=\ln u_{n+1}$

តាម $(1) \Rightarrow \ v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$

គេបាន (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានរេសុង $q=\frac{1}{3}$ និងតួទី១ គឺ $v_1=\ln u_1=\ln 3$

$$\Rightarrow v_n=v_1q^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ln 3$$

ដោយ $v_n=\ln u_n \quad \Rightarrow u_n=e^{v_n}=e^{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ln 3}=3^{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

<u>ដូច្នេះ</u> $u_n = 3^{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

លំហាត់គំរូ

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n^2 \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}^*$ ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

គេមាន $u_{n+1} = 3u_n^2$

- បំពាក់លោការីតនេពៃរលើ $u_{n+1} = 3u_n^2$ គឺ

$$\ln u_{n+1} = \ln 3u_n^2$$
$$\ln u_{n+1} = \ln 3 + 2\ln u_n \quad (1)$$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = \ln u_n$

គេបានកំណើន $n+1$ គឺ $v_{n+1} = \ln u_{n+1}$ ពី (1) $\Rightarrow v_{n+1} = 2v_n + \ln 3 \quad (2)$

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $r_n = \alpha n + \beta$

គេបានកំណើន $n+1$ គឺ

$r_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta = \alpha n + \alpha + \beta$ យក r_n និង r_{n+1} ជំនួសក្នុង v_n និង v_{n+1} រៀងគ្នា

គេបាន $r_{n+1} = 2r_n + \ln 3$

$$\alpha n + \alpha + \beta = 2(\alpha n + \beta) + \ln 3$$
$$\alpha n + \alpha + \beta = 2\alpha n + 2\beta + \ln 3$$
$$\begin{cases} \alpha = 2\alpha \\ \alpha + \beta = 2\beta + \ln 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\ln 3 \end{cases}$$

យក $\alpha = 0$; $\beta = -\ln 3$ ជំនួសក្នុង $r_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta$ គឺ $r_{n+1} = -\ln 3$

- ធ្វើផលសងរវាង v_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $v_{n+1} - r_{n+1} = 2v_n + \ln 3 + \ln 3$

$$v_{n+1} + \ln 3 = 2v_n + 2\ln 3$$
$$v_{n+1} + \ln 3 = 2(v_n + \ln 3)$$

តាង $w_n = v_n + \ln 3 \Rightarrow w_{n+1} = v_{n+1} + \ln 3$

$$\Rightarrow w_{n+1} = 2w_n$$

គេបាន (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ និងតួទី១ គឺ $w_1 = v_1 + \ln 3$ តែ $v_1 = \ln u_1 = \ln 5$

$$\Rightarrow w_1 = \ln 3 + \ln 5 = \ln 15$$
$$\Rightarrow w_n = w_1 q^{n-1} = 2^{n-1}\ln 15$$

ដោយ $w_n = v_n + \ln 3 \Rightarrow v_n = w_n - \ln 3$

$$v_n = 2^{n-1}\ln 15 - \ln 3$$

តែ $v_n = \ln u_n$

$$\Rightarrow u_n = e^{v_n} = e^{2^{n-1}\ln 15 - \ln 3} = e^{\ln\frac{15^{2^{n-1}}}{3}} = \frac{15^{2^{n-1}}}{3}$$

<u>ដូច្នេះ</u> $\boxed{u_n = \dfrac{15^{2^{n-1}}}{3}}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $n = 1 \Rightarrow u_1 = \dfrac{15^{2^{1-1}}}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$ (ពិត)

❖ សមីការស្វ៊ីតមានទម្រង់: $u_{n+1} = f(u_n)$

ឧបមាថា គេមានស្វ៊ីត (u_n) ណាមួយ កំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយ $u_0 = a$ និង $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ គេចង់ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

<u>**របៀបដោះស្រាយ**</u>

ដើម្បីគណនា u_n គេត្រូវ : បង្ហាញថាទំនាក់ទំនងស្វ៊ីតខាងលើជាស្វ៊ីតរួមជាមុខសិន

- ត្រូវដោះស្រាយសមីការ $l = f(l) \Rightarrow l = \{l_1 \ , \ l_2\}$; $(l_1 < l_2)$
- គេត្រូវតាង $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n + l_1}{u_n + l_2}\right)$
- ត្រូវរកទំនាក់ទំនងរវាងតួ v_{n+1} និង v_n រួចត្រូវទាញរកប្រភេទនៃ (v_n)
- គេអាចរកតួ v_n ជាអនុគមន៍នៃ n
- នាំឲ្យ គេអាចទាញបាន u_n

លំហាត់គំរូ

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{12}{u_n}\right) \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}^*$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{12}{u_n}\right) \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

ដោយទំនាក់ទំនងស្វ៊ីតខាងលើជាស្វ៊ីតរួម យើងឧបមាថាវារួមទៅរក l យើងបាន:

- ដោះស្រាយសមីការ $f(l) = l$ គឺ

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{12}{l}\right)$$

$$l - \frac{1}{2}l = \frac{6}{l}$$

$$\frac{1}{2}l^2 = 6 \quad \Rightarrow l^2 = 12$$

$$\left[\begin{array}{l} l_1 = -2\sqrt{3} \quad ; \ |l_1| < 4 \\ l_2 = 2\sqrt{3} \quad ; \ |l_2| < 4 \end{array}\right.$$

- គេត្រូវតាង $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n + l_1}{u_n + l_2}\right)$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1} + l_1}{u_{n+1} + l_2}\right)$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 2\sqrt{3}}{u_{n+1} + 2\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{12}{u_n}\right) - 2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{12}{u_n}\right) + 2\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_n^{\ 2} - 4\sqrt{3}u_n + 12}{u_n^{\ 2} + 4\sqrt{3}u_n + 12}\right)$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_n - 2\sqrt{3}}{u_n + 2\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = 2\ln\left(\frac{u_n - 2\sqrt{3}}{u_n + 2\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = 2v_n \quad \Rightarrow (v_n)$$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ និង តួ

$$v_0 = \ln\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 q^n$

$$v_n = 2^n \ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) \quad \text{តែ} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_n-2\sqrt{3}}{u_n+2\sqrt{3}}\right)$$

$$\ln\left(\frac{u_n-2\sqrt{3}}{u_n+2\sqrt{3}}\right) = 2^n \ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{u_n-2\sqrt{3}}{u_n+2\sqrt{3}} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}$$

$$u_n - 2\sqrt{3} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}\left(u_n+2\sqrt{3}\right)$$

$$u_n - 2\sqrt{3} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n} u_n + 2\sqrt{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}$$

$$u_n - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n} u_n = 2\sqrt{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n} + 2\sqrt{3}$$

$$u_n = 2\sqrt{3}\,\frac{1+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}}$$

<u>ដូច្នេះ</u>

$$\boxed{u_n = 2\sqrt{3}\,\frac{1+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{3}\,\frac{1+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{2^n}} = 2\sqrt{3}$$

លំហាត់ប្រតិបត្តិនៃស្វ៊ីតចំនួនពិត

១. គេអោយស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត បើគេដឹងថា

ក ($U_1 = 7$, $U_5 = 15$ ចូរកំណត់ U_{100}

ខ ($U_3 = 12$, $U_8 = 0$ ចូរកំណត់ U_{18}

គ) $U_7 = \frac{7}{2}$, $U_{13} = \frac{13}{2}$ ចូរកំណត់ U_0

ឃ ($U_9 = 9$, $U_{15} = 18$ ចូរកំណត់ U_{15} ។

២. កគណនាផលបូក (100 តួដំបូងនៃចំនួនគត់សេស ។

ខគណនាផលបូក (100 តួដំបូងនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

គគណនាផលបូក (200 តួដំបូងនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន ។

៣. គេអោយ $x_8 = 27$ និង $x_{28} = -53$ ។

កគណនាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត និងកំណត់តួ (x_{55} ។

ខ គណនាផលបូក ($S = x_8 + x_9 + \cdots + x_{28}$ ។

៤. គេអោយប្រាំចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ គណនាចំនួនទាំងនោះបើគេដឹងថាផលបូកវាស្មើនឹង 125 ហើយផលបូកពីរតួដំបូងស្មើនឹង 38 ។

៥. ចូរសរសេររូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោមៈ

ក) $4 , 15 , 26 , 37 ,...$ ខ) $5 , 1 , -3 , -7 , -11 , ...$

គ) $-2 , -9 , -16 , -23 ,...$ ឃ) $7 , 12 , 22 , 27 ,...$

៦. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $-8 , -3 , 2 , 7,...$ ។

កគណនា (U_{17} និង U_{43}

ខតើតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតដែលស្មើនឹង (322 ។

៧. ក្នុងចំណោមស្វ៊ីតខាងក្រោម តើស្វ៊ីតណាជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ?

ក) $U_n = 13 + 6(n-1)$ ខ) $U_0 = 3$, $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{4}U_n$

៨. គេអោយស្វ៊ីតនព្វន្ត $2 , 7 , 12 ,...$ និងស្វ៊ីតនព្វន្ត $2, 5 , 8 ,...$ ។ តើក្នុងចំណោម 121 តួនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួដែលមានតំលៃស្មើៗគ្នា ?

៩. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (U_n) ដែលមានតួទី n កំណត់ដោយៈ $U_n = \frac{2n+3}{4}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន ។

១០. បើផលបូក 9 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើនឹង 162 ហើយផលបូក 12 ដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើនឹង 288 ។ គណនាផលបូក 30 តួដំបូង នៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

១១. បង្ហាញថាចំនួនខាងក្រោមជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ក) $\frac{1}{x+1}$, $\frac{x}{x^2-1}$, $\frac{1}{x-1}$ ខ) $\frac{a}{x+1}$, $\frac{x+a-1}{2x}$, $\frac{x^2+a-1}{x(x+1)}$

គ) $\left(a^2-2ab-b^2\right)^2$, $\left(a^2+b^2\right)^2$, $\left(a^2+2ab-b^2\right)^2$

១២ . គណនាផលបូកតួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

ក ($2.2+2.8+3.4+4.0+4.6+\cdots$, $n=12$

ខ ($800+785+770+755+740+\cdots$, $n=12$

១៣ . គេមាន S_m និង S_n ជាផលបូក m តួដំបូង និង n តួដំបូងរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល $\dfrac{S_m}{S_n}=\dfrac{m^2}{n^2}$, $n\neq m$ ។ តាងតួទី m គឺ u_m និងតួទី n គឺ u_n ។ បង្ហាញថា $\dfrac{u_m}{u_n}=\dfrac{2m-1}{2n-1}$ ។

១៤ . ឧបមាថា $\{a_n\}$ គឺជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួមវិជ្ជមាន ហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=35$ និង $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=285$ ។ ចូរគណនាផលបូកចាប់ពីតួទី n ដល់តួទី $2n$ ។

១៥ . គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\{a_n\}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម:

$\begin{cases} a_1=1 \\ \ln a_n-\ln a_{n-1}=\ln(n-1)-\ln(n+1) \end{cases}$, $n\geq 2$ ។ ចូគណនាតម្លៃ $\sum_{k=1}^{n}a_k$ ។

១៦ . គណនាផលបូកតួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

ក) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{2^2}{4}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{4}$

ខ) $\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

គ) $-1-2-4-8-\cdots-\left(2^{n-1}\right)$

១៧ . គេអោយ V_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង q ។ បើគេដឹងថា:

ក) $V_1=6$, $V_4=48$ គណនា V_{15}

ខ) $V_4=48$, $V_8=3$ គណនា V_0

១៨ . គេអោយបីចំនួនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ គណនាចំនួនទាំងនោះ បើគេដឹងថាផលគុណនៃចំនួនទាំងនោះស្មើនឹង 3375 ហើយផលបូកវាស្មើនឹង 93 ។

១៩ . គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

ក) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}$

ខ) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^4}-\dfrac{1}{2^5}+\cdots-\dfrac{1}{2^{2n-1}}+\dfrac{1}{3^{2n}}$

គ) $\dfrac{1}{2.5}+\dfrac{1}{3.6}+\dfrac{1}{4.7}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$

ឃ) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

២០ . កំណត់ចំនួនតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោមៈ

ក) $4, 20 , 100 , 200 ,..., 2500$

ខ) $\sqrt{2} , 2 , 2\sqrt{2} , 4 , ..., 512\frac{1}{2}$

គ) $1 , 2 , 4 , 8 , ... , 8192$

ឃ $20 , 10 , 5 , \frac{5}{2} ,... , \frac{5}{256}$

២១ . តួទី 3 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើ 3 និងតួទី 6 ស្មើនិង $\frac{3}{8}$ ។ គណនាផលធៀបរួមតួទីមួយ និងផលបូក 8 តួដំបូង

២២ . គណនា a ដើម្បីបីចំនួន $(a-3)$, $(a+1)$ និង $(4a-2)$ ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

២៣ . គេអោយបួនចំនួនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ គណនាតួទីពីរ និងតួទីបីនៃស្វ៊ីត បើគេដឹងថាតួទីមួយស្មើនឹង 6 ហើយតួទីបួនស្មើនិង 162 ។

២៤ . កំណត់រេសុង q និងតួទីមួយ U_1 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រចុះ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ បើគេដឹងថា $\begin{cases} U_1.U_2.U_3 = 64 \\ U_1^2+U_2^2+U_3^2 = 84 \end{cases}$ ។

២៥ . គេអោយស្វ៊ីតនៃចំនួន $U_1 , U_2 , U_3 ,...,U_n$ កំណត់ដោយៈ $\begin{cases} 3U_n = U_{n-1}+6 \\ U_1 = 2 \end{cases} , n\in\mathbb{N}$

ក) គណនា $U_2 \& U_3$ ។

ខ) ឧបមាថា $V_n = U_n - 3$ ។ បង្ហាញថា V_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដោយកំណត់រេសុងផង ។

២៦ . ចំពោះគ្រប់តម្លៃចំនួនគត់ n ស្វ៊ីតមួយកំណត់ដូចខាងក្រោមៈ $U_o = 0$, $U_{2n} = U_n , U_{2n+1} = 1 - U_n$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃនៃ U_{1998} ។

២៧ . គណនា $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\cdots+\frac{1}{n(n+3)}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២៨ . ចូរកំណត់រេសុង q ដើម្បីអោយរង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងមួយបង្កើតបានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

២៩ . U ជាស្វ៊ីតមួយកំណត់គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ដោយៈ $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ x ដែលនាំអោយ $V_n = U_{n+1} - xU_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

៣០ . គេអោយសមីការដឺក្រេទីបី $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ។ បង្ហាញថាសមីការមានឬសបី x_1 , x_2 , x_3 ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ៈ $U_{m+1} = V_{m+1} = a$, $U_{n+1} = V_{n+1} = b$, $U_{p+1} = V_{p+1} = c$ ដែល $a>0 , b>0 , c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា $\left(a^{b-a}\right)\left(b^{c-a}\right)\left(c^{a-b}\right) = 1$ ។

៣១ . គណនាផលបូកខាងក្រោមៈ

1. $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

2. $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

3. $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

4. $S = 12^3 + 13^3 + 14^3 + \cdots + 50^3$

5. $S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

6. $S = 1.2 + 2.5 + 3.8 + \cdots + 668.2003$

7. $S = \frac{2}{3+1} + \frac{2^2}{3^2+1} + \cdots + \frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}$

8. $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots + \frac{1}{1997.1998}$

9. $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$

10. $S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$

11. $S = 1^3 + 2^3 + \cdots + 1989^3$

12. $S = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1}$

13. $S = 2 + \frac{a+b}{a.b} + \frac{a^2+b^2}{a^2.b^2} + \cdots + \frac{a^n+b^n}{a^n.b^n}$

៣២ . ចូរកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក) $(a_n): 1, 3, 7, 13, 21, 31, \ldots$

ខ) $(a_n): 2, 4, 8, 14, 22, 32, \ldots$

គ) $(a_n): p, q, p, q, p, q, \ldots$

៣៣ . ចូរកំណត់តួទី n និងផលបូកនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក) $(a_n): 4, 5, 7, 10, 14, \ldots$

ខ) $(a_n): 3, 5, 8, 12, 17, 23, \ldots$

គ) $(a_n): 1, 5, 14, 30, 55, 91, \ldots$

៣៤ . ចូរកំណត់តួទី n និងផលបូកនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក) $(a_n): 1, 2, 6, 15, 31, 56, \ldots$

ខ) $(a_n): 4, 18, 48, 100, 180, 294, \ldots$

គ) $(a_n): 1, 2, 5, 12, 27, 58, 121, \ldots$

ឃ) $(a_n): -2, 1, 7, 19, 43, 91, 187, \ldots$

៣៥ . គេអោយស្វ៊ីត $(a_n): -3, 1, 17, 51, 109, \ldots$

ក) កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

ខ) គណនាផលបូក 1989 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

៣៦ . កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតជាអនុគមន៍នៃ n ខាងក្រោម:

$$1.\ (a_n):\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - n + 1 \end{cases}$$

$$2.\ (a_n):\begin{cases} a_1 = 1\ ,\ a_2 = 13 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \end{cases}$$

$$3.\ (a_n):\begin{cases} a_1 = 0\ ,\ a_2 = 3 \\ a_{n+1} = 4a_{n+1} - 3a_n \end{cases}$$

$$4.\ (a_n):\begin{cases} a_1 = 1\ ,\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 1 \end{cases}$$

$$5.\ (a_n):\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2} \end{cases}$$

$$6.\ (a_n):\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 3} \end{cases}$$

៣៧ . គេមាន $S_n = 4 - a_{n-1} - \dfrac{1}{2^{n-2}}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$ ដែល S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ក) កំណត់ទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង a_{n+1} & a_n ។

ខ) កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

៣៨ . គេមាន S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌ $(a_n):\begin{cases} a_1 = 1 \\ S_n = a_{n+1} + n^2 \end{cases}$

ចូរកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

៣៩ . គេមាន S_n ជាផលបូក n ដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ហើយ S_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ $S_n = \dfrac{n}{n-1}a_n\ ,\ n \geq 2$ ។

ក) បញ្ជាក់រក $a_n\ ,\ (n \geq 3)$ អនុគមន៍នឹង n និង a_{n-1} ។

ខ) បញ្ជាក់រក $S_n\ ,\ (n \geq 2)$ អនុគមន៍នឹង n និង S_{n-1} ។

គ) ឧបមាថា $a_1 = 1$ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (S_n) ដែល $n \geq 1$ ។

៤០ . គេមានជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលកំណត់ដោយ: $S_n = 2n^2 - 3n$ ។ ចូរកតម្លៃ a_1 & d រួច គណនា a_8 ។

៤១ . គេមានផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ: $S_n = 2(3^n - 1)$ ។ ចូបង្ហាញថាស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

៤២ . ឧបមាថាគេមានផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោម:

$2a_n - S_n = 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។ ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស៊្វីត a_n ។

៤៣ . ឧបមាថា S_n ជាផលបូក n ដំបូងនៃស៊្វីត (a_n) ដែលមាន $a_1 = 1$ ។ ប្រសិនបើ S_n & a_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$a_n = \dfrac{2S_n^2}{2S_n - 1}$, $(n \geq 2)$ ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស៊្វីត (a_n) ។

៤៤ . បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

ក) ចំនួន $4^n + 2$ ចែកដាច់និង 3 ។

ខ) ចំនួន $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ ចែកដាច់និង 11 ។

គ) ចំនួន $3^{3n+2} + 7^{2n+3}$ ចែកដាច់និង 11 ។

ឃ) ចំនួន $3^{5n} + 4^{5n+2} + 5^{5n+1}$ ចែកដាច់និង 11 ។

៤៥ . គេមានបីតួដំបូងនៃសេរីធរណីមាត្រ $1 + 2 + 4 + \cdots$ ។

ក) រកតំលៃ a_1 និង r ។

ខ) គណនា S_{10} ។

គ) តើសេរីនេះមានប៉ុន្មានតួ បើផលបូករបស់វាស្មើនិង 2047 ។

ឃ) រកទំនាក់ទំនងរវាង a_n & S_n ។

ង) បង្ហាញថា $S_{33} < 2^{33}$ ។

៤៦ . សរសេរបីតួដំបូងនៃសេរីនព្វន្ត $S_n = n^2 - 3n$ ដែល S_n ជាផលបូក n តួ ។ រកតម្លៃនៃ a_1 , & d ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $S_{n+3} - S_n = 6n$ ។ រកទូទៅនៃស៊្វីត (a_n) ។ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះ $n = 1$, $S_{n+3} - S_n = a_5$ ។

៤៧ . តួទូទៅនៃស៊្វីតកំណត់ដោយៈ $a_n = 5n + 2$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $a_{n+1} - a_{n-1} < a_2$ ។

៤៨ . គេអោយ a , b , c , d ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបង្កើតបានជាស៊្វីតនព្វន្តមួយ ។ ចូរស្រាយថាចំនួន $abcd + (b-a)^4$ ជាការេប្រាកដ ។

៤៩ . តើមានត្រីកោណកែងណាមួយដែលមានរង្វាស់នៃជ្រុងទាំងបីរបស់វាបង្កើតបានជាបីតួបន្តគ្នានៃស៊្វីតនព្វន្តដែរ ឬទេ?

៥០ . តើមានត្រីកោណដែលជ្រុងរបស់វា និងបរិមាត្របង្កើតបានជាស៊្វីតនព្វន្តដែរ ឬទេ ?

ឯកសារយោង

- សៀវភៅគណិតវិទ្យាក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡាថ្នាក់ទី១១ទាំងពីរកម្រិត
- សៀវភៅគណិតវិទ្យា (ភាគទី១-១៥) របស់គម្រោង STEPSAM
- សៀវភៅគណិតវិទ្យាវិភាគ សួន សុវ៉ាន់ (ភាគ១)
- សៀវភៅគណិតវិទ្យាស្វីតគរុនិស្សិតជំនាន់ទី ១៩ - ២០
- សៀវភៅគណិតវិទ្យាស្វ៊ីត (លោក លឹម ផល្គុន)
- សៀវភៅគណិតវិទ្យាស្វ៊ីត (លោក អ៊ូច ប៊ុនថន)
- សៀវភៅគណិតវិទ្យាស្វ៊ីតចំនួនពិត (លោក ម៉ែន សុគន្ធ)
- Analyse 1 Cours et 600 exerices corrige’s (DUNOD)
- Mathematics For Engineering Advance Calculate .