# លីមីត និង ភាពជាប់

# នៃអនុគមន៍

## ១. និយមន័យលីមីត (Definition of Limit)

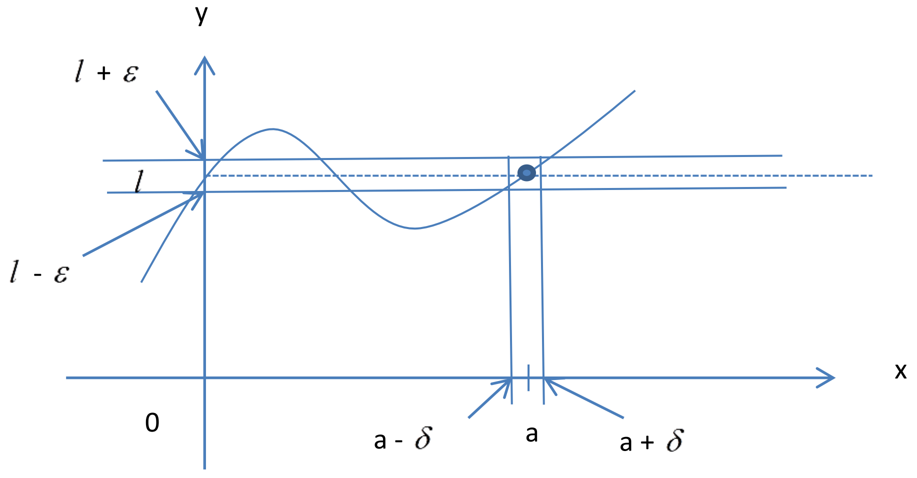
f ជាអនុគមន៍កំនត់បាន ក្នុងចន្លោះបើកណាមួយ ដែលផ្ទុកនូវចំនួនពិត a ។

គេនិយាយថា លីមីតនៃ f(x) ពេល x ខិតទៅរក a គឺ L ហើយយើងសរសេរ

$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 ,\exists\delta>0$ ដែល $|f(x)-L|<\varepsilon$ ពេល $0<|x-a|<\delta$

$\lim_{x\to a} f(x)=l$ មានន័យថាតម្លៃ $f(x)$ អាចយកកាន់តែជិតតម្លៃ $l$ ពេលយើងយកតម្លៃ $x$ កាន់តែជិត $a$ (ប៉ុន្តែ មិនមែនស្មើ $a$ ទេ) ។

$|x-a|$ ជាចំងាយពី $x$ ទៅ $a$ ហើយ $|f(x)-l|$ ជាចំងាយពី $f(x)$ ទៅ $l$




ឧទាហរណ៍ ៖ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$

ដំណោះស្រាយ ៖ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-3|<\delta$ គេបាន $|4x-5-7|<\varepsilon$

តែ $|4x-5-7|=|4(x-3)|=4|x-3|$ នោះ $4|x-3|<\varepsilon$ ឬ $|x-3|<\frac{\varepsilon}{4}$ យើងយកតម្លៃ $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$ ។

## លីមីតឆ្វេង

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \Leftrightarrow L \ \ \forall\varepsilon>0 \ ,\exists\delta>0 \text{ ដែល } |f(x)-L|<\varepsilon \text{ ពេល } a-\delta<x<a$$

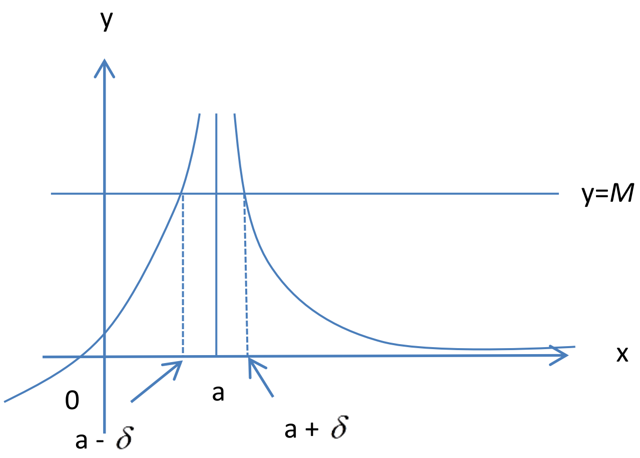
## លីមីតស្តាំ

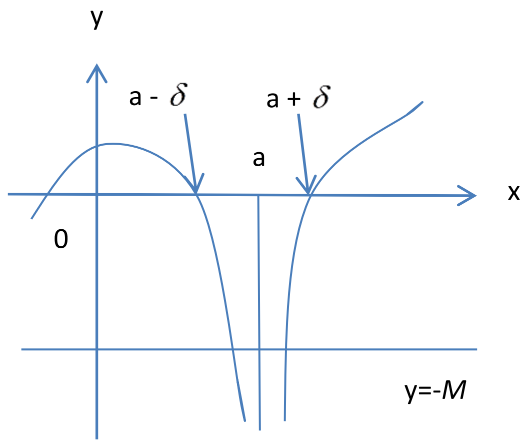
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \ ,\exists\delta>0 \text{ ដែល } |f(x)-L|<\varepsilon \text{ ពេល } a<x<a+\delta$$

## លីមីតមានតម្លៃអនន្ត

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \ \Leftrightarrow \forall M>0 \ ,\exists\delta>0 \text{ ដែល } f(x)>M \text{ ពេល } 0<|x-a|<\delta \text{ ។}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0 \ ,\exists\delta>0 \text{ ដែល } f(x)<-M \text{ ពេល } 0<|x-a|<\delta$$




ឧទាហរណ៍៖ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖ ចំពោះ $\forall M>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-0|<\delta$ គេបាន $\frac{1}{x^2}>M$ នាំអោយ

$x^2<\frac{1}{M}$

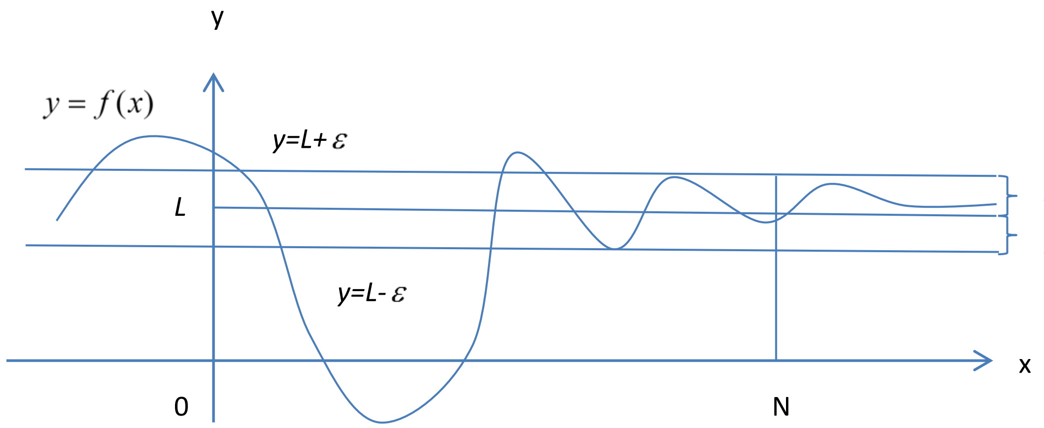
រឺ $|x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$ យក $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ ។

### លីមីតត្រង់តម្លៃអនន្ត

ឧបមាអនុគមន៍ f អាចកំណត់បានលើចន្លោះ (a,+∞) នោះ

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall x>N$ ដែល $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។




ឧទាហរណ៍ ៖ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

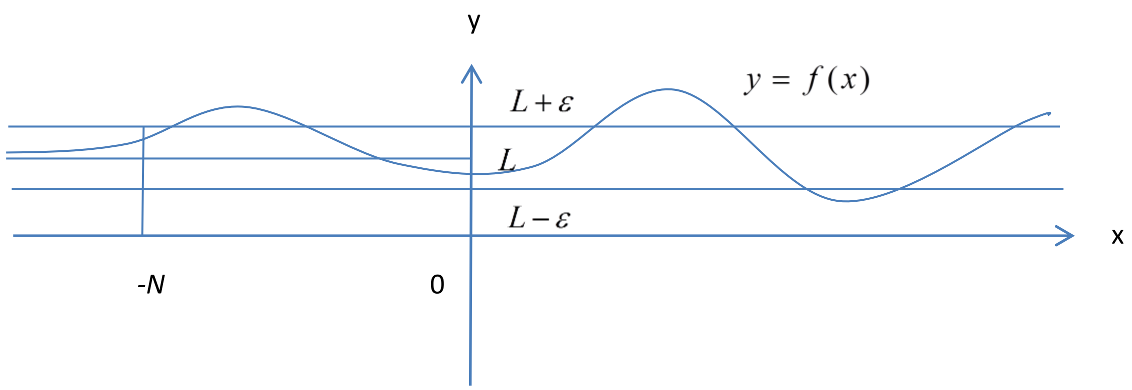
ដំណោះស្រាយ ៖ ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall x>N$ គេបាន $|\frac{1}{x}-0|<\varepsilon$ នាំអោយ $x>\frac{1}{\varepsilon}$

យក $N=\frac{1}{\varepsilon}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ។

ឧបមាអនុគមន៍ f អាចកំណត់បានលើចន្លោះ (-∞,a) នោះ

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall x<-N$ ដែល $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។



ឧទាហរណ៍៖ ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+2}=1$

ដំណោះស្រាយ ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall x<-N$ គេបាន $|\frac{x-1}{x+2}-1|<\varepsilon$

$$\Rightarrow|\frac{-3}{x+2}|<\varepsilon\Leftrightarrow|x+2|>\frac{3}{\varepsilon}$$

គេបាន $-x-2>\frac{3}{\varepsilon}\Leftrightarrow x<-\frac{3}{\varepsilon}-2=\frac{-3-2\varepsilon}{\varepsilon}$ យក $-N=\frac{-3-2\varepsilon}{\varepsilon}$

ដូចនេះ៖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+2}=1$

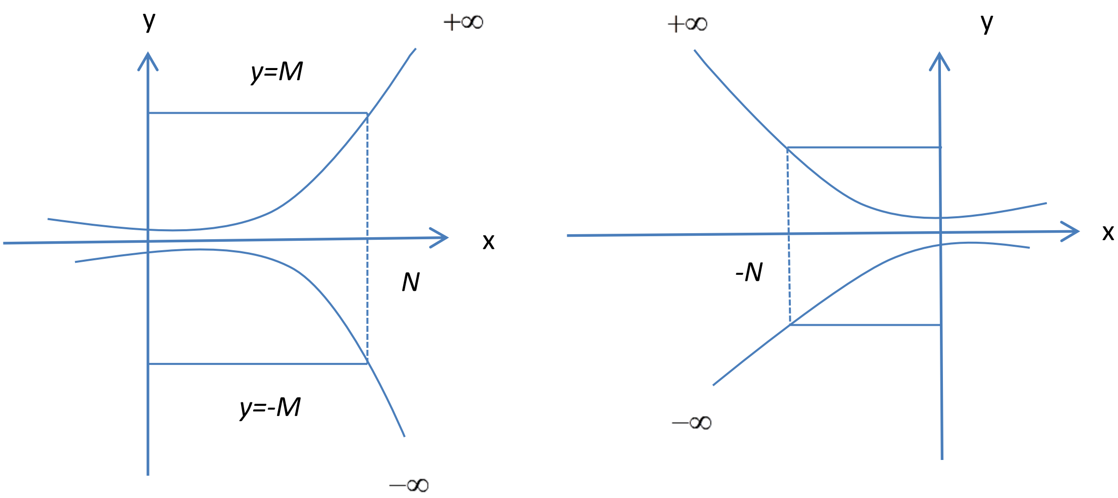
ឧបមាអនុគមន៍ f អាចកំណត់បានលើចន្លោះ(a,+∞) [រៀងគ្នា (-∞,a)]

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (រៀងគ្នា-∞) $\Leftrightarrow\forall M>0,\exists N>0,\forall x>N\Rightarrow f(x)>M$

(រៀងគ្នា $f(x)<-M$ )។

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ (រៀងគ្នា-∞) $\Leftrightarrow\forall M>0,\exists N>0,\forall x<-N\Rightarrow f(x)>M$

(រៀងគ្នា $f(x)<-M$ )។




**ឧទាហរណ៍៖** ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-4x+3)=+\infty$

**ដំណោះស្រាយ៖** ចំពោះ $\forall M>0,\exists N>0$ ដែល $x>N$ គេបាន $x^2-4x+3>M$

$\Rightarrow x^2-4x+3-M>0$

$\Delta^{'}=4-(3-M)=1+M$

$x_1=2+\sqrt{1+M}\,,x_2=2-\sqrt{1+M}$

$\Rightarrow x=]-\infty,2-\sqrt{1+M}[\cup]2+\sqrt{1+M},+\infty[$

តែ $x>0$ គេបាន $x\in]2+\sqrt{1+M},+\infty[$ នាំអោយ $x>2+\sqrt{1+M}=N$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-4x+3)=+\infty$

## ២. លក្ខណៈនៃលីមីត (limit law)

ឧបមាថា c ជាចំនួនថេរ ហើយលីមីត នៃ $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ មានតម្លៃ គេបាន

- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$ $(except\ the\ case\,(+\infty,-\infty))$
- $\lim\limits_{x\to a}[cf(x)]=c\lim\limits_{x\to a}f(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x).\lim\limits_{x\to a}g(x)$ $(except\ the\ case\,(0,\pm\infty))$
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\ \lim\limits_{x\to a}g(x)\neq0(except\ the\ case\,(0,0),(\pm\infty,\pm\infty))$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to a}f(x)]^n,\ \lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}\ (\lim\limits_{x\to a}f(x)\geq0)$ $,n\in\mathbb{N}(1,2,3.......)$
- $\lim\limits_{x\to a}c=c\ ,\ \lim\limits_{x\to a}x=a$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=(\lim\limits_{x\to a}f(x))^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ $(except\ the\ case\ (1,\pm\infty),(\infty,0),(0,0))$

**ទ្រឹស្តីបទ ១**

- បើ f(x) ≤ g(x) ពេល x ខិតទៅរក a ហើយលីមីតនៃ f(x) និង g(x) មានតម្លៃនោះ

  $\lim\limits_{x\to a}f(x)\leq\lim\limits_{x\to a}g(x)$
- បើ f(x)≤g(x) ≤h(x) និង $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=l\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$

  **(The Squeeze Theorem)**
- $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l$

## ៣. រូបមន្តសំខាន់ៗនៃលីមីត

រាងដែលយើងមិនអាចវាយតម្លៃភ្លាមៗបាន $0^0$, $\frac{0}{0}$ , $0\times\infty$ , $\infty^0$ , $\pm\infty\mp\infty$ , $\frac{\infty}{\infty}$ , $1^\infty$

**បើ** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ **នោះ**

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\tan f(x)}{f(x)}=1$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\arcsin f(x)}{f(x)}=1$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\arctan f(x)}{f(x)}=1$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$
6. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}=1$
7. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=\ln a,\ a>0$
8. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(1+f(x))^r-1}{f(x)}=r\ \ (r\in\mathbb{R})$

**បើ** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ **នោះ**

9. $\lim\limits_{x\to x_0}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)}=e$
10. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{f(x)}=0$

**សម្គាល់ ៖** $\ln x<x^n<e^x$ ពេលដែល x ខិតទៅរក $+\infty$ ហើយ n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ , $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ ហើយ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty,\ \lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x=0$

## ៤. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ (Continuity of Function)

យើងសង្កេតឃើញថាកាលណាតម្លៃលីមីត ពេល x ខិតទៅរកតម្លៃកំណត់ណាមួយ យើងក៏អាចគណនាតម្លៃនោះបាន តាមរយ:ការគណនាតម្លៃអនុគមន៍ដោយផ្ទាល់ នៅត្រង់តម្លៃនោះដែរ។ អនុគមន៍ដែលមាន លក្ខណ:បែបនេះ ត្រូវបានគេហៅថាអនុគមន៍ជាប់ ។ យើងនឹងឃើញថា ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ក្នុងន័យ គណិតវិទ្យា គឺឆ្លើយតបយ៉ាងស៊ីជម្រៅទៅនិង ភាពជាប់ ក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃដែរ។ មានន័យថា ភាពជាប់សំដៅ លើអ្វីដែលកើតឡើងរហូត ដោយគ្មានការរំខានឡើយ ។

អនុគមន៍ f **ជាប់** ត្រង់ចំណុច a កាលណា

១. $f(a)$ អាចកំណត់បាន (មានន័យថា a នៅក្នុងដែនកំណត់នៃ f )

២. $\lim_{x\to a} f(x)$ មាន ៣. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

**ឧទាហរណ៍:** តើអនុគមន៍មួយណាដែល មិនជាប់ ?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & if \quad x \neq 0 \\ 1 & if \quad x = 0 \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2} & if \quad x \neq 2 \\ 1 & if \quad x = 2 \end{cases}$

**ដំណោះស្រាយ:**

យើងឃើញថា f(2) គឺមិនអាចកំណត់បានទេ ដូចនេះ f(x) មិនជាប់ត្រង់ 2 ទេ។

ចំនុចនេះយើងបាន f(0)=1 គឺអាចកំណត់បាន តែ $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ មិនមានតម្លៃទេ

ដូចនេះ f(x) មិនមែនជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ 0 ទេ។

ចំនុចនេះយើងបាន f(2)=1 អាចកំណត់បាន ហើយ

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3$មានតម្លៃតែ $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

ដូចនេះ f(x) ក៏មិនមែនជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ 2 ដែរ។

**ចំណាំ៖** អនុគមន៍មួយជាអនុគមន៍ជាប់កាលណាយើងគូសក្រាបដោយគ្មានដកប៊ិចចេញពីក្រដាសទេផ្ទុយទៅវិញបើអនុគមន៍នោះមិនជាប់ទេការគូសក្រាបនឹងត្រូវដកប៊ិចចេញពីក្រដាស ព្រោះនឹងមាន ចំនុចដាច់ត្រង់ណាមួយជាមិនខាន។

> **និយមន័យ៖** អនុគមន៍ f ជាប់ពីខាងស្តាំនៃចំនុច a កាលណា $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
>
> ហើយជាប់ពីខាងឆ្វេងនៃចំនុច a កាលណា $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

**ឧទាហរណ៍៖** ចំពោះចំនួនគត់ណាមួយ n អនុគមន៍ $f(x) = \lfloor x \rfloor$ គឺជាប់ពីខាងស្តាំ តែមិនជាប់ពីខាងឆ្វេង ព្រោះ $\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n = f(n)$ តែ $\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1 \neq f(n)$ ។

> **និយមន័យ៖** អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះណាមួយកាលណាវា **ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំនុច** លើចន្លោះនោះ។

**វិធីសាស្ត្រ ៖** ដើម្បីបង្ហាញអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះណាមួយ

| $f(x)$ | $f$ ជាប់លើ $]a,b[$ | $f$ ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $a$ រឺ $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ | $f$ ជាប់ខាងស្តាំឆ្វេង $b$ រឺ $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ |
|---|---|---|---|
| ជាប់លើ $[a,b[$ $b$ អាច $+\infty$ | ពិត | ពិត | មិនគិត |
| ជាប់លើ $]a,b]$ $a$ អាច $-\infty$ | ពិត | មិនគិត | ពិត |
| ជាប់លើ$[a,b]$ | ពិត | ពិត | ពិត |

**ឧទាហរណ៍ ៖** បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ ជាប់លើចន្លោះ [-1,1]

**ដំណោះស្រាយ៖**បើ -1<a<1 គេបាន

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(1-\sqrt{1-x^2})=\lim_{x\to a}1-\lim_{x\to a}\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{1-a^2}=f(a)$ យើងឃើញថាពល់តម្លៃ a នៅចន្លោះ]-1,1[ សុទ្ធតែធ្វើអោយ f ជាប់។

ហើយ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1=f(-1)$ និង $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1=f(1)$

ដូចនេះ f ជាប់លើចន្លោះ [-1,1] ។

> **ទ្រឹស្តីបទ ៤.២ ៖** ប្រសិនបើ f និង g ជាប់ត្រង់ចំនុច a ហើយ c ជាចំនួនថេរ នោះអនុគមន៍ខាងក្រោមនេះក៏ជាប់ដែរ
>
> $1.\ f\pm g \qquad 2.\ cf \qquad 3.\ fg \qquad 4.\ \frac{f}{g},\ g(a)\neq 0$

**សំរាយ៖** ដោយ f និង g ជាប់ត្រង់ចំនុច a នោះ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ និង $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$

គេបាន $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$

នេះបង្ហាញឱ្យឃើញថា f+g ក៏ជាប់ត្រង់ a ដែរ ហើយដូចគ្នាចំពោះ 2 , 3 និង 4 ។

**ទ្រឹស្តីបទ ៤.៣ ៖**

- រាល់អនុគមន៍ ពហុធាគឺជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$
- រាល់អនុគមន៍ អសនិទានជាអនុគមន៍ជាប់កាលណា តម្លៃវាអាចកំណត់បាន មានន័យថា វាជាប់លើ **ដែនកំណត់** របស់វា ។

**សំរាយ ៖**

អនុគមន៍ពហុធា ជាអនុគមន៍ដែលមានទម្រង់

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ដែល $a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$ ជាចំនួនថេរ ។

យើងឃើញថា $\lim\limits_{x\to x_0}a_0=a_0$ និង $\lim\limits_{x\to x_0}x^n=a^n$ ,n=1,2,3...,n

តែយើងដឹងថា $f(x)=x^n$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ហើយ តាមទ្រឹស្តីបទ ៤.២ $g(x)=cx^n$ ជាប់ និង P(x) ជាផលបូកនៃ អនុគមន៍ប្រភេទ $g(x)$ នាំឱ្យ P(x) ក៏ជាប់ ។

អនុគមន៍ អសនិទានជាអនុគមន៍ដែលមានទម្រង់

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ដែល $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា។ ដែនកំណត់នៃ $f(x)$ គឺ

$D=\{x\in\mathbb{R}\mid Q(x)\neq 0\}$ ហើយយើងដឹងទៀតថា $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ តាមទ្រឹស្តីបទ ៤.២ នោះ $f(x)$ ជាប់លើដែនកំណត់របស់វា ។

**ចំណាំ ៖** អនុគមន៍ច្រាសនៃ អនុគមន៍ជាប់ ជាអនុគមន៍ជាប់ដែរ ព្រោះ ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាស បានមកពីចំនុចឆ្លុះនៃអនុគមន៍ដើមធៀបទៅនឹង បន្ទាត់ y=x ។ ដូចនេះ បើ ក្រាបអនុគមន៍ដើម គ្មានចំនុចដាច់ទេនោះ ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាសក៏គ្មានចំនុចដាច់ដែរ ។

**ទ្រឹស្តីបទ ៤.៤ ៖** ប្រភេទអនុគមន៍ខាងក្រោមនេះ គឺជាប់ត្រង់គ្រប់ចំនុចក្នុងដែនកំណត់របស់វា៖

ពហុធា អនុគមន៍សនិទាន អនុគមន៍រ៉ាឌីកាល អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

,អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រច្រាស អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល អនុគមន៍លោការីត

**ឧទាហរណ៍ ៖** តើអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\ln x+\arctan x}{x^2-1}$ ជាប់នៅកន្លែងណាខ្លះ?

**ដំណោះស្រាយ** យើងដឹងថា អនុគមន៍ $\ln x$ ជាប់ចំពោះ x>0 ហើយ $\arctan x$ ជាប់ចំពោះតម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ ។ដូចនេះ $\ln x+\arctan x$ ជាប់លើ (0,+∞)ម្យ៉ាងទៀត $x^2-1$ ជាប់ចំពោះតម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ ។ ដូចនេះ f ជាប់ពេល $x^2-1\neq 0$ នោះ f ជាប់លើចន្លោះ (0,1) និង (1,+∞)។

វិធីម្យ៉ាងទៀតក្នុងការច្របាច់បញ្ចូលគ្នារវាងពីរអនុគមន៍ f និង g គឺអនុគមន៍បណ្ដាក់

**ទ្រឹស្ដីបទ ៤.៥ ៖** បើអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ b និង $\lim_{x\to a} g(x)=b$ នោះ $\lim_{x\to a} f(g(x))=f(b)$

មានន័យថា $$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(b)$$

**ឧទាហរណ៍ ៖** គណនា $\lim_{x\to 1}\arcsin(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x})$ ?

**ដំណោះស្រាយ ៖** ដោយ $\arcsin$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ នោះយើងអាចប្រើទ្រឹស្ដីបទ ៤.៥

គេបាន $\lim_{x\to 1}\arcsin(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x})=\arcsin(\lim_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x})=\arcsin(\lim_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})})=\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$

**ទ្រឹស្ដីបទ ៤.៦ ៖** បើ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $g(a)$ ហើយ $g$ ជាប់ត្រង់ $a$ នោះអនុគមន៍បណ្ដាក់ $f\circ g=f(g(x))$ ក៏ ជាប់ត្រង់ $a$ ។

**ឧទាហរណ៍ ៖**

$\sqrt{x}$ ជាប់ត្រង់ $x_0>0$ ហើយ $\sin x$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ នោះ $f(x)=\sin x$ ជាប់ត្រង់ $x_0>0$

$\sin x$ ជាប់ត្រង់ $\forall x_0\in\mathbb{R}$ ហើយ $x^n$ ជាប់ត្រង់ $\forall y_0\in\mathbb{R}$ នោះ $f(x)=\sin^n x$ ជាប់ត្រង់ $\forall x\in\mathbb{R}$

**ទ្រឹស្តីបទ ៤. ៧ ៖** គេអោយអនុគមន៍ $f$ មានន័យត្រង់ voisinage នៃ $x_0$ លើកលែងត្រង់ $x_0$ ប៉ុន្តែ $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ នោះគេអាចបង្កើត **បន្លាយភាពជាប់** នៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ $x_0$ បានដែលកំណត់ដោយអនុគមន៍ថ្មីគឺ $g$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & if \quad x\neq x_0 \\ l & if \quad x=x_0 \end{cases}$$

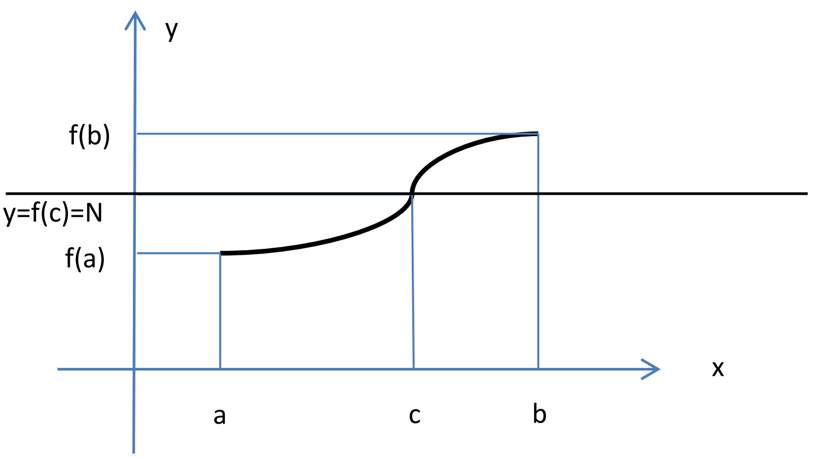
គឺ $g$ ជាប់ត្រង់ $x_0$ ដោយ $\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=l=g(x_0)$

**ឧទាហរណ៍ ៖** រកបន្លាយភាពជាប់ នៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ $x_0$ ដែល $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$

**ដំណោះស្រាយ ៖** ដោយ $\lim_{x\to 1} f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi(1-x)}{x-1}=-\pi$

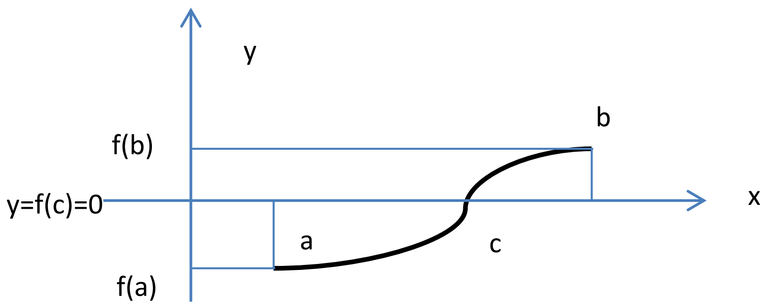
ដូចនេះបន្លាយភាពជាប់នៃ $f$ ត្រង់ $x_0$ គឺ $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin\pi x}{x-1} & if \quad x\neq 1 \\ -\pi & if \quad x=1 \end{cases}$ ។

**ទ្រឹស្តីបទ តម្លៃកណ្តាល ៖** ឧបមាថា $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយមានតម្លៃ $N$ ណាមួយនៅចន្លោះ $[f(a),f(b)]$ ដែល $f(a)\neq f(b)$ ។ នោះប្រាកដជាមានតម្លៃ $c$ យ៉ាងតិច មួយនៅចន្លោះ$[a,b]$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c)=N$ ។



យើងឃើញថាទ្រឹស្តីបទនេះពិតជាត្រឹមត្រូវ ក្នុងន័យធរណីមាត្រ ព្រោះបើយើងគូសបន្ទាត់ $y=N$ កាត់ចន្លោះ $[f(a), f(b)]$ នោះបន្ទាត់ប្រាកដជាកាត់ ខ្សែកោង រឺ បន្ទាត់ដែលគ្មានចំនុចដាច់នោះ( f ជាប់)។ នេះបង្ហាញឱ្យឃើញថាមានតម្លៃណាមួយដែលនៅចន្លោះ $[a,b]$ ដែល $f(c)=N$ ។ទ្រឹស្តីបទនេះត្រូវបានបង្ហាញដោយលោក **Karl Weierstrass** [1]**(1815-1897)** ។

**ករណីពិសេស ៖** ករណីដែល $f(a).f(b)<0$ នោះមានតម្លៃ $c$ យ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ $[a,b]$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c)=N=0$ ។ ករណីនេះភាគច្រើនត្រូវបានគេប្រើ ដើម្បីបង្ហាញថាសមីការមានរឹសនៅចន្លោះបិទណាមួយ។




**ឧទាហរណ៍ ៖** បង្ហាញថាមានរឹសមួយនៃសមីការ $4x^3-6x^2+3x-2=0$ នៅចន្លោះ[1,2] ។

**ដំណោះស្រាយ ៖** ដោយសមីការជាអនុគមន៍ពហុធានោះវាជាអនុគមន៍ជាប់ ដូចនេះ យើងអាចប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល ។ ដោយ $f(1)=-1<0$ និង $f(2)=12>0$ នោះ $f(1).f(2)<0$ មានន័យថាមានតម្លៃ x ណាមួយនៅចន្លោះ[1,2]ដែលធ្វើឱ្យសមីការខាងលើស្មើសូន្យ រឺមានរឹស។

[1] Karl Weierstrass ជាអ្នកគណិតវិទ្យាជនជាតិអាឡឺម៉ង់ដែលបានស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល និង មូលដ្ឋានមួយចំនួននៃ Calculus ។ លោកត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាគ្រូបង្រៀនដ៏ល្អម្នាក់ ហើយអត្ថបទបង្រៀនរបស់គាត់ត្រូវបានពាំនាំទៅអឺរ៉ុបដោយកូនសិស្សរបស់គាត់ ម្យ៉ាងទៀតគាត់ក៏ជាស្ថាបនិកនៃ គណិតវិភាគទំនើបដែរ។

# ៥.លំហាត់និងដំណោះស្រាយ

## ដោយប្រើនិយមន័យគណនាលំហាត់ខាងក្រោម

១. $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-4x+2}{x^2+1}=0$

២. $\lim_{x\to-2}(x^2-2x-1)=-1$

៣. $\lim_{x\to2}(x^3-8)=0$

៤. $\lim_{x\to-1}(\sqrt{x^2-x})=\sqrt{2}$

៥. $\lim_{x\to2}(3^x-1)=5$

៦. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

៧. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}=+\infty$

៨. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-8x}{x^2-4x+4}=-\infty$

៩. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{2x}=3$

១០. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{2x^2-1}=\frac{1}{2}$

១១. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

១២. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x}{x^2-2}=-1$

១៣. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$

១៤. $\lim_{x\to+\infty}(-x^2-3x+2)=-\infty$

១៥. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2+1}{x})=-\infty$

១៦. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{2^x}-3)=+\infty$

### ចំលើយ

## ដោយប្រើនិយមន័យគណនាលំហាត់ខាងក្រោម

១. $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-4x+2}{x^2+1}=0$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-1|<\delta$ គេបាន $|\frac{2x^2-4x+2}{x^2+1}-0|<\varepsilon$ តែ $0<x<2$

គេបាន $x^2>0\Rightarrow x^2+1>1\Rightarrow\frac{1}{x^2+1}<1$ នោះ

$|\frac{2x^2-4x+2}{x^2+1}|<|2x^2-4x+2|=2|x^2-2x+1|=2(|x-1|)^2<\varepsilon\Rightarrow|x-1|<\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$ យក $\delta=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-4x+2}{x^2+1}=0$

២. $\lim\limits_{x\to-2}(x^2-2x-1)=7$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x+2|<\delta$ គេបាន $|x^2-2x-1-7|<\varepsilon$ រឺ $|x^2-2x-8|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow|(x+2)(x-4)|<\varepsilon$ តែ $-3<x<-1\Rightarrow x-4<-5\Rightarrow|(x+2)(x-4)|<5|x+2|<\varepsilon$ យក

$\delta=\frac{\varepsilon}{5}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-2}(x^2-2x-1)=7$

៣. $\lim\limits_{x\to2}(x^3-8)=0$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-2|<\delta$ គេបាន $|x^3-8-0|<\varepsilon$ រឺ $|(x-2)(x^2+2x+4)|<\varepsilon$

តែ $1<x<3\Rightarrow|x^2+2x+4|<19$ គេបាន $|(x-2)(x^2+2x+4)|<19|x-2|<\varepsilon\Rightarrow|x-2|<\frac{\varepsilon}{19}$

យក $\delta=\frac{\varepsilon}{19}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to2}(x^3-8)=0$

៤. $\lim\limits_{x\to-1}(\sqrt{x^2-x})=\sqrt{2}$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x+1|<\delta$ គេបាន $|\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2}|<\varepsilon$ គេបាន

$|\frac{x^2-x-2}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}}|<\varepsilon$ រឺ $|\frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}}|<\varepsilon$ តែ $-2<x<0\Rightarrow\begin{cases}|-4|>|x-2|>|-2|\\\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}>1\end{cases}$ គេបាន

$|\frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}}|<|(x+1)(x-2)|<4|x+1|<\varepsilon\Rightarrow|x+1|<\frac{\varepsilon}{4}$ យក $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-1}(\sqrt{x^2-x})=\sqrt{2}$

៥. $\lim\limits_{x\to2}(3^x-1)=5$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-2|<\delta$ គេបាន $|3^x-1-5|<\varepsilon$ តែ $3^x-6<|3^x-6|$ យក

$3^x-6<\varepsilon\Rightarrow\frac{3^x}{3^2}-\frac{6}{9}<\frac{\varepsilon}{9}\Leftrightarrow3^{x-2}<\frac{\varepsilon+6}{2}$ គេបាន $x-2<\log_3\frac{\varepsilon+6}{2}$ ដោយ $\frac{\varepsilon+6}{2}>3$

នាំអោយ $|x-2|<\log_3\frac{\varepsilon+6}{2}$ យក $\delta=\log_3\frac{\varepsilon+6}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 2}(3^x-1)=5$

៦. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-\frac{\pi}{2}|<\delta$ គេបាន $|\sin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}|<\varepsilon$ តែ

$\sin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{\pi}{4}=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=2\sin(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$ នាំអោយ

$|\sin\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}|=|2\sin(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2})\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|<2|\sin(\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2})|$ ព្រោះ $|\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|\le 1$ ហើយ

$\sin|x|\le|\sin x|$ គេបាន $2\sin|\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}|<\varepsilon\Rightarrow|x-\frac{\pi}{2}|<2\arcsin\frac{\varepsilon}{2}$ យក $\delta=2\arcsin\frac{\varepsilon}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

៧. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}=+\infty$

ចំពោះ $\forall M>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-1|<\delta$ គេបាន $\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}>M$ តែ $0<x<2$ នោះ

$x^2-2x+3>1\Rightarrow\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}>\frac{1}{(x-1)^2}>M$ នាំអោយ $|x-1|<\frac{1}{\sqrt{M}}$ យក $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}=+\infty$

៨. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x}{x^2-4x+4}=-\infty$

ចំពោះ $\forall M>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|x-2|<\delta$ គេបាន $\frac{x^2-8x}{x^2-4x+4}<-M$ តែ $1<x<3$ គេបាន

$x^2-8x>-23$ គេបាន $\frac{-23}{(x-2)^2}<-M\Rightarrow|x-2|<\sqrt{\frac{23}{M}}$ យក $\delta=\sqrt{\frac{23}{M}}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x}{x^2-4x+4}=-\infty$

៩. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{2x}=\frac{3}{2}$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists N>0/\forall x>N$ គេបាន $|\frac{3x-4}{2x}-\frac{3}{2}|<\varepsilon\Leftrightarrow|\frac{-4}{2x}|<\varepsilon$ តែ $x\to+\infty$

គេបាន $\frac{4}{2x}<\varepsilon\Rightarrow x>\frac{4}{2\varepsilon}$ យក $N=\frac{4}{2\varepsilon}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{2x}=\frac{3}{2}$

១០. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{2x^2-1}=\frac{1}{2}$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists N>0/\forall x>N$ គេបាន $|\frac{x^2-x+2}{2x^2-1}-\frac{1}{2}|<\varepsilon\Leftrightarrow|\frac{-2x+5}{2(2x^2-1)}|<\varepsilon$ តែ $x\to+\infty$

គេបាន $\frac{2x-5}{2(2x^2-1)}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{x}{2x^2-1}-\frac{5}{2(2x^2-1)}<\varepsilon$ តែ $\frac{5}{2(2x^2-1)}\to0$ ពេល $x\to+\infty$

គេបាន $\frac{x}{2x^2-1}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{2x^2-1}{x}>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow x>\frac{1}{2\varepsilon}$ យក $N=\frac{1}{2\varepsilon}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{2x^2-1}=\frac{1}{2}$

១១. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists N>0/\forall x<-N$ គេបាន $|\frac{1}{x^2}-0|<\varepsilon$ ដោយ $\frac{1}{x^2}>0$

គេបាន $\frac{1}{x^2}<\varepsilon\Leftrightarrow x^2>\frac{1}{\varepsilon}$ នាំអោយ $x\in]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},+\infty[$

ដោយ $x\to-\infty$ យក $x\in]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}[$ នោះយើងអាចយក $-N=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$

១២. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x}{x^2-2}=-1$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0,\exists N>0/\forall x<-N$ គេបាន $|\frac{-x^2+x}{x^2-2}+1|<\varepsilon\Leftrightarrow|\frac{x-2}{x^2-2}|<\varepsilon$ តែ $x\to-\infty$

គេបាន $\frac{-x+2}{x^2-2}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{-\varepsilon x^2-x+2(1+\varepsilon)}{x^2-2}<\varepsilon$

គេបាន $x\in]-\infty,\frac{1+\sqrt{1+8\varepsilon(1+\varepsilon)}}{-2\varepsilon}[\cup]\frac{1-\sqrt{1+8\varepsilon(1+\varepsilon)}}{-2\varepsilon},+\infty[$ តែ $x\to-\infty$

$\Rightarrow x\in]-\infty,\frac{1+\sqrt{1+8\varepsilon(1+\varepsilon)}}{-2\varepsilon}[$ យើងអាចយក $-N=\frac{1+\sqrt{1+8\varepsilon(1+\varepsilon)}}{-2\varepsilon}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x}{x^2-2}=-1$

១៣. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$

ចំពោះ $\forall M>0,\exists N>0/\forall x>N$ គេបាន $\frac{x^2+1}{x}>M\Leftrightarrow\frac{x^2-Mx+1}{x}>0$

-ករណី $M\le 2$ គេបាន $x\in]0,+\infty[$ យើងអាចយក $N=0$

-ករណី $M>2$ គេបាន $x\in]-\infty,\frac{M-\sqrt{M^2-4}}{2}[\cup]\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2},+\infty[$ តែ $x\to+\infty$ នោះ

យើងយក $x\in]\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2},+\infty[$ យក $N=\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$

១៤. $\lim_{x\to+\infty}(-x^2-3x+2)=-\infty$

ចំពោះ $\forall M>0,\exists N>0/\forall x>N$ គេបាន $-x^2-3x+2<-M\Leftrightarrow-x^2-3x+2+M<0$ គេបាន $x\in]-\infty,\frac{\sqrt{17+4M}-3}{2}[\cup]\frac{\sqrt{17+4M}+3}{2},+\infty[$ ដោយ $x\to+\infty$ នាំអោយ

$x\in]\frac{\sqrt{17+4M}+3}{2},+\infty[$ យើងអាចយក $N=\frac{\sqrt{17+4M}+3}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}(-x^2-3x+2)=-\infty$

១៥. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2+1}{x})=-\infty$

ចំពោះ $\forall M>0,\exists N>0/\forall x<-N$ គេបាន $\frac{x^2+1}{x}<-M\Leftrightarrow\frac{x^2+Mx+1}{x}<0$

-ករណី $M\le 2$ នាំអោយ $x\in]-\infty,0[$ យើងអាចយក $N=0$

-ករណី $M>2$ នាំអោយ $x\in]-\infty,\frac{-M-\sqrt{M^2-4}}{2}[$ ព្រោះ $x\to-\infty$ យក $N=\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2+1}{x})=-\infty$

១៦. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{2^x}-3)=+\infty$

ចំពោះ $\forall M>0,\exists N>0/\forall x<-N$ គេបាន $\frac{1}{2^x}-3>M\Leftrightarrow\frac{1}{M+3}>2^x\Rightarrow x<-\log_2(3+M)$

យក $N=\log_2(3+M)$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{2^x}-3)=+\infty$

# ភាពជាប់

១៧. កំណត់តម្លៃ $m$ និង $n$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $]-\infty,+\infty[$

$$f(x)=\begin{cases} x & ,if\ x\le 1 \\ mx+n & ,if\ 1<x<4 \\ -2x & ,if\ x\ge 4\end{cases}$$

១៨. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} & ,\ x>\pi \\ \cos x+m^2 & ,\ x\le\pi\end{cases}$ កំណត់តម្លៃ $m$ ដើម្បីឲ្យ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=\pi$ ។

១៩. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\sqrt{2\cos x}-1}{2\cos 2x+1}$ , $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{\pi}{3}\right]$

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f(x)$ ឲ្យជាប់ត្រង់ $x_0=\frac{\pi}{3}$ ដែរឬទេ?

២០. គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)\dfrac{x}{|x|+3}$ ។ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ $x_0=0$ ។

២១. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}(x+a)e^{-3x} & , x<0\\ ax^2+2x+1 & , x\geq 0\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

២២. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ។ សិក្សាលីមីតឆ្វេង លីមីតស្តាំត្រង់ចំនុច $x_0=0$ ។ តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f$ ឲ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=0$ បានដែរឬទេ?

២៣. គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ $\quad x\mapsto f(x)=\begin{cases}\sin x+\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & , x\neq 0\\ \sqrt{2} & , x=0\end{cases}$

តើអនុគមន៍ $f$ នេះជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=0$ ឬទេ?

២៤. កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}-2x+a & , x\leq 1\\ \log_3 x & , x>1\end{cases}$

២៥. រកតម្លៃ ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1} & , if\ x\neq 1\\ a & , if\ x=1\end{cases}$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x=1$ ។

២៦. អនុគមន៍ កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}3+x & , if\ x\leq a\\ x^2+1 & , if\ x>a\end{cases}$

កំណត់ចំនួនពិត $a$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ ជាប់ត្រង់ $x=a$ ។

២៧. គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ ហើយមាន $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$ ។ កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឲ្យ $f$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x=0$ ។

២៨. $g$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=\begin{cases}2e^{3x}-3e^{x}-4 & , if\, x\geq 0\\ 1+2x-3m & , if\, x<0\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ $m$ ដើម្បីឲ្យ $g$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

២៩. កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & , if\ x\neq 0\\ a & , if\ x=0\end{cases}$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

៣០. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} x-2+\dfrac{e}{\ln x}\ ,\ if\ x>0, x\neq 1 \\ \ln(m-1)\ ,\ if\ x=0 \end{cases}$

កំណត់តម្លៃ $m$ ដើម្បីឲ្យ $f$ ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=0$ ។

៣១. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$ បើ $x\neq 0$ និង

$$g(x)=\begin{cases} f(x)\ ,\ if\ x\neq 0 \\ \log\left(k+\sqrt{6}\right)+\log\left(k-\sqrt{6}\right), if\ x=0 \end{cases}$$

កំណត់តម្លៃ $k$ ដើម្បីឲ្យ $g$ ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ $f$ ត្រង់ $x=0$ ។

## ដំណោះស្រាយ

១៧. កំណត់តម្លៃ $m$ និង $n$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $]-\infty,+\infty[$

$$f(x)=\begin{cases} x\quad ,if\ x\leq 1 \\ mx+n\quad ,if\ 1<x<4 \\ -2x\ ,\ if\ x\geq 4 \end{cases}$$

អនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $]-\infty,+\infty[$ លុះត្រាតែអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $1$ និង $4$៖

ករណីអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $1$

យើងមាន $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}(mx+n)=\lim\limits_{x\to 1^-} x\Leftrightarrow m+n=1,\quad (1)$

ករណីអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $4$៖

យើងមាន $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^+}(mx+n)=\lim\limits_{x\to 4^-}(-2x)\Leftrightarrow 4m+n=-8,\quad (2)$

តាម $(1)$ និង $(2)$ យើងបាន $m=-3$ និង $n=4$

ដូចនេះ៖ $\boxed{m=-3\ ,\ n=4}$

១៨. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} & , x>\pi \\ \cos x+m^2 & , x\le\pi\end{cases}$ កំណត់តម្លៃ $m$ ដើម្បីឲ្យ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=\pi$ ។

គេមាន $f(\pi)=\cos\pi+m^2=m^2-1$

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{2\sin^2\frac{x-\pi}{2}}{\frac{(x-\pi)^2}{4}\times 4}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\left(\cos x+m^2\right)=m^2-1$$

ដើម្បីឲ្យ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=\pi$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=f(\pi)$

$$\Leftrightarrow m^2-1=\frac{1}{2}\Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}}$

១៩. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sqrt{2\cos x}-1}{2\cos 2x+1}$ , $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{\pi}{3}\right]$

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f(x)$ ឲ្យជាប់ត្រង់ $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ ដែរឬទេ?

យើងមាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{\left[2\left(2\cos^2 x-1\right)+1\right]\left(\sqrt{2\cos x}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{(2\cos x-1)(2\cos x+1)\left(\sqrt{2\cos x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(2\cos x+1)\left(\sqrt{2\cos x}+1\right)}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ គេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f(x)$ ឲ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ បានដោយគ្រាន់តែបន្ថែម $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{4}$ ។

២០. គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)\dfrac{x}{|x|+3}$ ។ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ $x_0=0$ ។

យើងមាន $f(x_0)=f(0)=0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{|x|+3}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x+3}=0$$ ព្រោះ $x\to0^+$ នោះ $|x|=x$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{|x|+3}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{-x+3}=0$$ ព្រោះ $x\to0^-$ នោះ $|x|=-x$

ដោយ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=f(0)$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាប់ត្រង់ $x_0=0$ ។

២១. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}(x+a)e^{-3x} & , x<0\\ ax^2+2x+1 , & x\geq0\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

យើងមាន $f(0)=1$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(ax^2+2x+1\right)=1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+a)e^{-3x}=a$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=f(o)\Leftrightarrow a=1$

ដូចនេះ $\boxed{a=1}$

២២. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ។ សិក្សាលីមីតឆ្វេង លីមីតស្តាំត្រង់ចំនុច $x_0=0$ ។ តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f$ ឲ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=0$ បានដែរឬទេ?

សិក្សាលីមីតឆ្វេង លីមីតស្តាំត្រង់ចំនុច $x_0=0$

យើងមាន $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

បើ $x\to 0^+$ នោះ $\sin\frac{x}{2}>0\Rightarrow\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\sin\frac{x}{2}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=\sqrt{2}$

ដូចនេះ លីមីតស្តាំនៃ $f(x)$ គឺ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\sqrt{2}}$

បើ $x\to 0^-$ នោះ $\sin\frac{x}{2}<0\Rightarrow\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\sin\frac{x}{2}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=-\sqrt{2}$$

ដូចនេះ លីមីតឆ្វេងនៃ $f(x)$ គឺ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\sqrt{2}}$

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f$ ឲ្យជាប់ត្រង់ $x_0=0$ បានដែរឬទេ?

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\sqrt{2}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\sqrt{2}$ នេះបញ្ជាក់ថា $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

គ្មានលីមីតត្រង់ $x_0=0$ ទេ

ដូចនេះគេមិនអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f$ ឲ្យជាប់ត្រង់ $x_0=0$ បានទេ។

២៣. គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto f(x)=\begin{cases}\sin x+\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}\ , & x\neq 0\\ \sqrt{2}\ , & x=0\end{cases}$$

តើអនុគមន៍ $f$ នេះជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=0$ ឬទេ?

យើងមាន $f(x_0)=f(0)=\sqrt{2}$

$$f(x)=\sin x+\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}=\sin x+\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{\sin x}=\sin x+\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\sin x}$$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sin x}\right)=\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sin x}\right)=-\sqrt{2}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\sqrt{2}\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\sqrt{2}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ មិនជាប់ត្រង់ $x_0=0$ ទេ។

២៤. កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}-2x+a\ ,\ x\le 1\\ \log_3 x\ ,\ x>1\end{cases}$

យើងមាន $f(1)=-2+a$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-2x+a)=-2+a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\log_3 x=0$$

ដើម្បីឲ្យ $f$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow -2+a=0\Rightarrow a=2$

ដូចនេះ $\boxed{a=2}$

២៥. រកតម្លៃ ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}\ ,\ if\ x\neq 1\\ a\ ,\ if\ x=1\end{cases}$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x=1$ ។

យើងមាន $f(1)=a$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{1}{6}$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ ជាប់ត្រង់ $x=1$ លុះត្រាតែ

$$f(1)=\lim_{x\to1} f(x)\Leftrightarrow a=\frac{1}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{1}{6}}$

២៦. អនុគមន៍ កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}3+x\,,\ if\ x\le a\\ x^2+1\,,\ if\ x>a\end{cases}$

កំណត់ចំនួនពិត $a$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ ជាប់ត្រង់ $x=a$ ។

យើងមាន $f(a)=3+a$

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-}(3+x)=3+a$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+}\left(x^2+1\right)=a^2+1$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f$ ជាប់ត្រង់ $x=a$ លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(x)$$
$$\Leftrightarrow a^2+1=3+a$$
$$\Leftrightarrow a^2-a-2=0$$
$$\Rightarrow a=-1\,,\ a=2$$

ដូចនេះ $\boxed{a\in\{-1,2\}}$

២៧. គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ $x\neq0$ ហើយមាន $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$ ។ កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឲ្យ $f$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x=0$ ។

យើងមាន $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{\sin x}{x}+1\right)}{x^2\left(x-\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)}=-2$$

ដើម្បីឲ្យ $f$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x=0$ លុះត្រា

$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{a}\right)=-2=\ln e^{-2}\Rightarrow a=e^{-4}$

ដូចនេះ $\boxed{a=e^{-4}}$

២៨. $g$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=\begin{cases}2e^{3x}-3e^{x}-4\ ,\ if\ x\geq 0\\ 1+2x-3m\ ,\ if\ x<0\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ $m$ ដើម្បីឲ្យ $g$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

យើងមាន $g(0)=2-3-4=-5$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2e^{3x}-3e^{x}-4\right)=-5$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+2x-3m)=1-3m$$

$g$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ

$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^+} g(x)=g(0)\Leftrightarrow 1-3m=-5\Rightarrow m=2$

ដូចនេះ $\boxed{m=2}$

២៩. កំណត់តម្លៃ $a$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}\ ,\ if\ x\neq 0\\ a\ ,\ if\ x=0\end{cases}$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

យើងមាន $f(0)=a$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

ដើម្បីឲ្យ $f$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow a=0$

ដូចនេះ $\boxed{a=0}$

៣០. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} x-2+\dfrac{e}{\ln x}\ , if\ x>0, x\neq 1 \\ \ln(m-1)\ , if\ x=0 \end{cases}$

កំណត់តម្លៃ $m$ ដើម្បីឲ្យ $f$ ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=0$ ។

យើងមាន $f(0)=\ln(m-1)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x-2+\frac{e}{\ln x}\right)=-2$$

ដើម្បីឲ្យ $f$ ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow -2=\ln(m-1)\Rightarrow m=1+e^{-2}$$

ដូចនេះ $\boxed{m=1+e^{-2}}$

៣១. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$ បើ $x\neq 0$ និង

$$g(x)=\begin{cases} f(x)\ , if\ x\neq 0 \\ \log\left(k+\sqrt{6}\right)+\log\left(k-\sqrt{6}\right), if\ x=0 \end{cases}$$

កំណត់តម្លៃ $k$ ដើម្បីឲ្យ $g$ ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ $f$ ត្រង់ $x=0$ ។

យើងមាន $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin[\sin(\sin x)]}{\sin(\sin x)}\times\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}\right\}=1$$

ដើម្បីឲ្យ $g$ ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ $f$ ត្រង់ $x=0$

លុះត្រាតែ $\lim_{x\to 0} f(x)=\log\left(k+\sqrt{6}\right)+\log\left(k-\sqrt{6}\right)$

$$\Leftrightarrow 1=\log\left(k^2-6\right)\Leftrightarrow k^2-6=10\Rightarrow k=\pm 4$$

តែ $k=-4$ មិនយក

ដូចនេះ $\boxed{k=4}$

# លីមីតអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

$\mathbf{A}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\mathrm{tg}2x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-u$ *បើ* $x\to\frac{\pi}{2} \Rightarrow u\to 0$

នោះយើងបាន:

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\mathrm{tg}2x}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\mathrm{tg}\left[2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right]}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\mathrm{tg}(\pi-2u)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin u}{-\mathrm{tg}2u}$$ ព្រោះ: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\quad \mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$

$$=-\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin u}{u}\times\frac{2u}{\mathrm{tg}2u}\times\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះយើងបាន: $\boxed{A=-\frac{1}{2}}$

$\mathbf{B}=\lim\limits_{x\to a}(a^2-x^2)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u=a-x \Rightarrow x=a-u$ បើ $x\to a \Rightarrow u\to 0$

នោះយើងបាន:

$$B=\lim_{x\to a}(a^2-x^2)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}=\lim_{x\to a}(a-x)(a+x)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

$$=\lim_{u\to 0}u(2a-u)\mathrm{tg}\left[\frac{\pi(a-u)}{2a}\right]=\lim_{u\to 0}u(2a-u)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2a}\right)$$

$$=\lim_{u\to 0}u(2a-u)\mathrm{cotg}\frac{\pi x}{2a}$$ ព្រោះ: $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{cotg}\alpha$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(2a-u)u}{\mathrm{tg}\frac{\pi u}{2a}}$$ ព្រោះ: $\mathrm{cotg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$

$$= \lim_{u\to 0}\left[\frac{\frac{\pi u}{2a}}{tg\frac{\pi u}{2a}}(2a-u)\frac{2a}{\pi}\right] = \frac{2a}{\pi}\times 2a = \frac{4a^2}{\pi}$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{B = \frac{4a^2}{\pi}}$

$\mathbf{C} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)$ រាងមិនកំណត់ $\infty\times 0$

តាង $u = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{u}$ បើ $n\to\infty \Rightarrow u\to 0$

យើងបាន:

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\times\sin(\pi u) = \lim_{u\to 0}\frac{\sin\pi u}{\pi u}\times\pi = \pi$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{C = \pi}$

$\mathbf{D} = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$ រាងមិនកំណត់ $\infty\times 0$

តាង $u = 1-x \Rightarrow x = 1-u$ បើ $x\to 1 \Rightarrow u\to 0$

យើងបាន:

$$D = \lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2} = \lim_{u\to 0} u\,tg\frac{\pi(1-u)}{2}$$

$$= \lim_{u\to 0} u\,tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi u}{2}\right) = \lim_{u\to 0} u\,cotg\frac{\pi u}{2}$$

ព្រោះ $tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = cotg\alpha$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{u}{tg\frac{\pi u}{2}}$$ ព្រោះ $cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$

$$= \lim_{u\to 0}\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{\frac{\pi u}{2}}{tg\frac{\pi u}{2}}\right)\right] = \frac{2}{\pi}$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{D = \frac{2}{\pi}}$

$\mathbf{E} = \lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi - x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u = \pi - x \Rightarrow x = \pi - u$ បើ $x\to\pi \Rightarrow u\to 0$

យើងបាន:

$$E = \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi - x} = \lim_{u\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi-u}{2}\right)}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{u}{2}\right)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos\frac{u}{2}}{2}$$ ព្រោះ $\sin(\pi-\alpha) = \cos\alpha$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{u}{4}\right)}{u} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin\frac{u}{4}}{\frac{u}{4}}\times\sin\frac{u}{4}\times\frac{1}{2}\right) = 0$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{E = 0}$

$\mathbf{F} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}2x.\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ រាងមិនកំណត់ $\infty\times 0$

តាង $u = \frac{\pi}{4}-x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}-u$ បើ $x\to\frac{\pi}{4} \Rightarrow u\to 0$

យើងបាន:

$$F = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}2x.\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \lim_{u\to 0}\mathrm{tg}2\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\times\mathrm{tgu}$$

$$= \lim_{u\to 0}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2u\right)\times\mathrm{tgu} = \lim_{u\to 0}\mathrm{cotg}2u\times\mathrm{tgu}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{tgu}}{\mathrm{tg}2u} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{\mathrm{tgu}}{u}\times\frac{2u}{\mathrm{tg}2u}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{F = \frac{1}{2}}$

$\mathbf{G} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin 3x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u = \frac{\pi}{3}-x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}-u$ បើ $x\to\frac{\pi}{3} \Rightarrow u\to 0$

យើងបាន:

$$G = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin 3x} = \lim_{u\to 0}\frac{1-2\cos\left(\frac{u}{3}-u\right)}{\sin 3(\pi-3u)}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{1-2\left[\cos\frac{\pi}{3}\times\cos u+\sin\frac{\pi}{3}\times\sin u\right]}{\sin 3u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{1-2\left[\frac{1}{2}\cos u+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin u\right]}{\sin 3u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u-\sqrt{3}\,\mathrm{sinu}}{\sin 3u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{2\sin^2\frac{u}{2}-2\sqrt{3}\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}{\sin 3u}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\lim_{u\to 0}\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\times\frac{3u}{\sin 3u}\left(\sin\frac{u}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{u}{2}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{G = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$\mathbf{H} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{tgx}$ រាងមិនកំណត់ $0 \times \infty$

តាង $u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - u$ បើ $x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow u \to 0$

យើងបាន:

$$\begin{aligned} H &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{tgx} = \lim_{u \to 0} u\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \\ &= \lim_{u \to 0} u\,\text{cotgu} \quad \text{ព្រោះ} \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{cotg}\alpha \\ &= \lim_{u \to 0} \frac{u}{\text{tgu}} = 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{H = 1}$

$\mathbf{I} = \lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u = 1 - x \Rightarrow x = 1 - u$ បើ $x \to 1 \Rightarrow u \to 0$

យើងបាន:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin \pi(1 - u)}{\sin 3\pi(1 - u)} \\ &= \lim_{u \to 0} \frac{\sin(\pi - \pi u)}{\sin(3\pi - 3\pi u)} \\ &= \lim_{u \to 0} \frac{\sin \pi u}{\sin 3\pi u} \qquad \text{ព្រោះ} \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \\ &= \lim_{u \to 0} \left[\frac{\frac{\sin \pi u}{u}}{\frac{\sin 3\pi u}{u}}\right] = \left[\frac{\lim_{u \to 0} \frac{\sin \pi u}{\pi u} \times \pi}{\lim_{u \to 0} \frac{\sin 3\pi u}{3\pi u} \times 3\pi}\right] = \frac{\pi}{3\pi} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{I = \frac{1}{3}}$

$\mathbf{J} = \lim_{x \to a} \frac{\sin(x - a)}{x^3 - a^3}$ រាងមិនកនណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $u = x - a \Rightarrow x = u + a$ បើ $x \to a \Rightarrow u \to 0$

យើងបាន:

$$\begin{aligned} J &= \lim_{x \to a} \frac{\sin(x - a)}{x^3 - a^3} = \lim_{x \to a} \frac{\sin(x - a)}{(x - a)(x^2 + ax + a^2)} \\ &= \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} \times \frac{1}{(u + a)^2 + a(u + a) + a^2} = \frac{1}{(0 + a)^2 + a(0 + a) + a^2} \\ &= \frac{1}{a^2 + a^2 + a^2} = \frac{1}{3a^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះយើងបាន $\boxed{J = \frac{1}{3a^2}}$

$\mathbf{K} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2008x}{\sin 2009x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$K=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2008x}{\sin 2009x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2008x}{2008x}\times\frac{2009x}{\sin 2009x}\times\frac{2008}{2009}=\frac{2008}{2009}$$

ដូចនេះយើងបាន: $\boxed{K=\frac{2008}{2009}}$

**L** $=\lim_{x\to 0}\frac{\tan nx}{\sin mx}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

*យើងបាន:*

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\tan nx}{\sin mx}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan nx}{nx}\times\frac{mx}{\sin mx}\times\frac{n}{m}=\frac{n}{m}$$

ដូចនេះយើងបាន: $\boxed{L=\frac{n}{m}}$

**M** $=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x+2009\pi)}{\sin(4x+2008\pi)}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$M=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x+2009\pi)}{\sin(4x+2008\pi)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2009\pi+3x)}{\sin(2008\pi+4x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin[2008\pi+(\pi+3x)]}{\sin(2008\pi+4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi+3x)}{\sin 4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 3x}{\sin 4x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{4x}{\sin 4x}\times\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}$$

ដូចនេះយើងបាន: $\boxed{M=\frac{3}{4}}$

**N** $=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin 2x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

*យើងបាន:*

$$N=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{x}{2}=0$$

ដូចនេះយើងបាន: $\boxed{N=0}$

**O** $=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x^2}{\sin^2 x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

តាមរូបមន្ត: $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

យើងបាន:

$$O=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x^2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{x+3x^2}{2}\sin\frac{x-3x^2}{2}}{\sin^2 x}$$

$$=-2\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin\left(\frac{x+3x^2}{2}\right)}{\frac{x+3x^2}{2}}\times\frac{\sin\left(\frac{x-3x^2}{2}\right)}{\frac{x-3x^2}{2}}\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times\frac{(x-3x^2)(x+3x^2)}{4}\times\frac{1}{x^2}\right]$$

$$=-2\lim_{x\to0}\frac{x^2-9x^4}{4x^2}=-2\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{4}-\frac{9x^2}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះយើងបាន: $\boxed{O=-\frac{1}{2}}$

**P** $=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$F=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}(1+\cos x+\cos^2 x)}{4x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x}$$ ព្រោះ $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ និង sinx

$$=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cos\frac{x}{2}\cos x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\times\frac{(1+\cos x+\cos^2 x)}{\cos\frac{x}{2}\cos x}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{(1+\cos x+\cos^2 x)}{\cos\frac{x}{2}\cos x}=\frac{3}{4}$$

ដូចនេះយើងបាន: $\boxed{P=\frac{3}{4}}$

**Q** $=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$Q=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}-\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} - \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\times\cos\frac{x}{2}\right)$$

បើ $x \to 0^+; \sin\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sin\frac{x}{2}$

យើងបាន:

$$= 2\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\times\cos\frac{x}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{Q=\sqrt{2}}$ ចំពោះ: $x \to 0^+$

បើ $x \to 0^-$ ; $\sin\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow \left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\sin\frac{x}{2}$

យើងបាន:

$$= -2\sqrt{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\times\cos\frac{x}{2}\right) = -2\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)$$

$$= -\sqrt{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{Q=-\sqrt{2}}$ ចំពោះ: $x \to 0^-$

$\mathbf{R} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{2x - 3\sin 2x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$R = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{2x-3\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin 3x}{x}}{\frac{2x-3\sin 2x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{6\sin 3x}{3x}}{2-\frac{6\sin 2x}{2x}}$$

$$= \frac{6}{2-6} = -\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{R = -\frac{3}{2}}$

$\mathbf{S} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 2009x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$S = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 2009x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{\sqrt{x+9}+3(\sin 2009x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+9-9}{\left(\sqrt{x+9}+3\right)(\sin 2009x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(\sqrt{x+9}+3\right)(\sin 2009x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+9}+3)\frac{\sin 2009x}{2009x}\times 2009} = \frac{1}{12054}$$

ដូចនេះ: $\boxed{S = \frac{1}{12054}}$

$\mathbf{T} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$T = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{T = \frac{1}{2}}$

$\mathbf{U} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$U = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{1-\cos^2 x} - \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{U = \frac{1}{2}}$

$\mathbf{V} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ រាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$V = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{(1-\cos x)}{x^2}\times\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}\times\frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{V = \frac{1}{2}}$

# អនុគមន៍សនិទាន និង អសនិទាន

## គណនាលីមីតខាងក្រោម

៥៣. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2013x^{2013}-2x+1}{x^{2013}-2}$

៥៤. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$

៥៥. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

៥៦. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^n}$

៥៧. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x^{2013}-2013}{x}$

៥៨. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2014x+1}{\ln x}\right)$

៥៩. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}+x\right)$

៦០. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\x>0}}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{x}\right)$

៦១. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right]$

៦២. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{3}{2}}-\ln x+x\right)$

៦៣. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]$

៦៤. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(3x+5)-\ln(x-1)\right]$

## ចម្លើយ

៥៣. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2013x^{2013}-2x+1}{x^{2013}-2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2013x^{2013}-2x+1}{x^{2013}-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2013}\left(2013-\frac{2}{x^{2012}}+\frac{1}{x^{2013}}\right)}{x^{2013}\left(1-\frac{2}{x^{2013}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2013-\frac{2}{x^{2012}}+\frac{1}{x^{2013}}\right)}{\left(1-\frac{2}{x^{2013}}\right)}=\boxed{2013}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2013x^{2013}-2x+1}{x^{2013}-2}=2013$

៥៤. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0}{b_0}=\boxed{\frac{a_0}{b_0}}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a^n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}=\frac{a_0}{b_0}$

៥៥. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ មានរាង $\frac{\infty}{\infty}$

យើងបាន

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\qquad=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{x\sqrt{\frac{1}{x}}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\boxed{1}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=1$

៥៦. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^n}$ មានរាង $\frac{\infty}{\infty}$

$$\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n+\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n$$

$$=\left(\frac{x-\left(x^2-1\right)}{x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\right)^n+\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^n$$

$$=\left(\frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(x+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\right)^n+\left(\frac{x+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}\right)^n$$

យើងបាន $|x|=\begin{cases}-x & ,x<0\\ x & ,x>0\end{cases}$

យើងចែកជាពីរករណីគឺ៖

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^n}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)^n+\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n\right]=\boxed{(-1)^n}$

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)^n+\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n\right]=\boxed{(-1)^n+2^n}$

៥៧. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x^{2013}-2013}{x}$ មានរាង $\frac{\infty}{\infty}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x^{2013}-2013}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2013\ln x-2013}{x}=2013\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2013}{x}=\boxed{0}$

ដូចនេះ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x^{2013}-2013}{x}=0$

៥៨. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2014x+1}{\ln x}\right)$ មានរាង $\frac{\infty}{\infty}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2014x+1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2014+\frac{1}{x}}{\frac{\ln x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2014+\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}=\boxed{2014}$

ព្រោះ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ដូចនេះ៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2014x+1}{\ln x}\right)=2014$

៥៩. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}+x\right)$ មានរាង $-\infty+\infty$

យើងបាន $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^2+3x-4\right)-x^2}{\sqrt{x^2+3x-4}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-4}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}-x}$$

កាលណា $x\to-\infty,\ |x|=-x$

យើងបាន $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}+1\right)}=-\dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}+x\right)=\boxed{-\frac{3}{2}}$

៦០. $\lim_{\substack{x\to+\infty\\x>0}}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{x}\right)$ មានរាងមិនកំណត់ $-\infty+\infty$

យើងបាន

$$\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}=\frac{ax^2+bx+c-ax^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}}=\frac{bx+c}{x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a}\right)}=\frac{b+\frac{c}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}}+\sqrt{a}}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}\right)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{b+\frac{c}{x}}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}}+\sqrt{a}}=\boxed{\dfrac{b}{2\sqrt{a}}}$

៦១. $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right]$ មានរាងមិនកំណត់ $-\infty+\infty$

$$\sqrt[3]{3n^3-2n^2}-n=\frac{n^3-2n^2-n^3}{\left(\sqrt[3]{3n^3-2n^2}\right)^2+n\sqrt[3]{3n^3-2n^2}+n^2}$$

$$=\frac{-2n^2}{n^2\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1\right]}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{3n^3-2n^2}-n\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=\boxed{-\frac{2}{3}}$

៦២. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{3}{2}}-\ln x+x\right)$ មានរាងមិនកំណត់ $-\infty+\infty$

ចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $x^{\frac{3}{2}}-\ln x+x=x^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}\right)+x$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}=o$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{3}{2}}-\ln x+x\right)=\boxed{+\infty}$

៦៣. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]$ មានរាងមិនកំណត់ $-\infty+\infty$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x+a}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}.a}\right]$$

$$=\ln\left(e^a\right)$$

$$=a$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]=\boxed{a}$

៦៥. $\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(3x+5)-\ln(x-1)\right]$ មានរាងមិនកំណត់ $-\infty+\infty$

យើងបាន $\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(3x+5)-\ln(x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{3x+5}{x-1}\right)$

$$=\ln\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+5}{x-1}\right)$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)=\ln 3$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(3x+5)-\ln(x-1)\right]=\ln 3$

# លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងលោការីត

## គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងលោការីតខាងក្រោម

65. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ 66. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$ 67. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

68. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ 69. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$ 70. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

71. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x}$ 72. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}\ (a\neq b)$ 73. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}\ (a\neq b)$

74. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^{tg\,2x}}{x}$ 75. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$ 76. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$

77. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$ 78. $\lim\limits_{x\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\ (a>0)$ 79. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$

80. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\lg(1+10x)}{x}$ 81. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$ 82. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$

83. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$ 84. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{2x+1}$ 85. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}+2\cos 4x-5}{\ln(1+4x^2)-3e^{4x^2}+3}$

86. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+3x)}{x+\sin 3x}$ 87. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x^2}\cos 6x-1}{x^2+\sin 3x^2}$ 88. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(3x+2)e^{3x}-2}{\sin 6x}$

89. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+8}{x^2-6x+3}\right)^{x}$ 90. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[\sin x]{1+x}$ 91. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[2\sin x]{\cos x}$

92. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+e^{3x}\right)}{\sin x}$ 93. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin 2015x}-e^{\sin 2014x}}{\sin 2013x-\sin 2012x}$ 94. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2013^x-2012^x}{2011^x-2010^x}$

## ចម្លើយ

**គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងលោការីតខាងក្រោម៖**

65) គណនា $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $1^{\infty}$

តាមរូបមន្ត $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ យើងបាន:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=e^{2}$$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=e$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=e^{2}$ ។

66) គណនា $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)=\left(\frac{0^2-2(0)+3}{0^2-3(0)+2}\right)=\frac{3}{2} \text{ និង } \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=\left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=\frac{3}{2}$ ។

67) គណនា $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ មានរាងមិនកំណត់ $1^{\infty}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^1=e$$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=e$ និង $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=e$ ។

68) គណនា $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ មានរាងមិនកំណត់ $1^{\infty}$

យើងមាន: $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ នាំឱ្យ

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\times\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}$$

$$=e^{-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}}=e^{-2\times 0}=e^0=1$$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}=e$ និង $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{x}{4}=1\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{4}=1\times 0=0$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=0$ ។

69) គណនា $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+e}$ មានរាងមិនកំណត់

យើងមាន:

$$\frac{x+a}{x+b}=\frac{(x+b)+a-b}{x+b}=1+\frac{a-b}{x+b}$$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{a-b}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a-b}}\right]^{\frac{(a-b)(x+c)}{x+b}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a-b)(x+c)}{x+b}}=e^{a-b}$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a-b}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a-b}}=e$ និង

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)(x+c)}{x+b}=(a-b)\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{c}{x}\right)}{x\left(1+\frac{b}{x}\right)}=(a-b)\times 1=a-b$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+e}=e^{a-b}$ ។

70) គណនា $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ មានរាងមិនកំណត់ $1^{\infty}$

យើងអាចសរសេរ:

$$\frac{x}{2}=\frac{2+x-2}{2}=1+\frac{x-2}{2}$$

នោះ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

តាង $\propto=x-2 \quad\Rightarrow x=\propto+2$ បើ $x\to 2 \quad\Rightarrow\propto\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 2}\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim\limits_{\propto\to 0}\left(1+\dfrac{\propto}{2}\right)^{\frac{1}{\propto}}=\lim\limits_{\propto\to 0}\left(1+\dfrac{\propto}{2}\right)^{\frac{1}{\propto}\times\frac{1}{2}}=\lim\limits_{\propto\to 0}\left[\left(1+\dfrac{\propto}{2}\right)^{\frac{1}{\frac{\propto}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{\propto\to 0}\left(1+\dfrac{\propto}{2}\right)^{\frac{1}{\frac{\propto}{2}}}=e$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\sqrt{e}$ ។

71) គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

តាង $u=e^{ax}-1 \;\Leftrightarrow\; e^{ax}=u+1$ បំពាក់លោការីលើអង្គទាំងពីរ

គេបាន $\ln e^{ax}=\ln(u+1)\Leftrightarrow\; ax=\ln(u+1)\Rightarrow x=\dfrac{\ln(u+1)}{a}$

បើ $x\to 0 \quad\Rightarrow\quad u\to 0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\frac{\ln(u+1)}{a}}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{au}{\ln(u+1)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{a}{\frac{1}{u}\ln(u+1)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{a}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}$

$$=\frac{a}{\ln\left[\lim\limits_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}\right]}=\frac{a}{\ln e}=a$$

ពីព្រោះ $\lim_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}=e$ និង $\ln e=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$ ។

72) គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ $(a\neq b)$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងអាចសរសេរ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1-e^{bx}+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-1)-(e^{bx}-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(e^{ax}-1)}{x}-\frac{(e^{bx}-1)}{x}\right]$$

$$=a-b$$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$ និង $\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{x}=b$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=a-b$ ។

73) គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$ $(a\neq b)$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{ax}-e^{ax}}{x}}{\frac{\sin ax-\sin bx}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{ax}}{x}}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{a\sin ax}{ax}-\frac{b\sin bx}{bx}\right)}=\frac{a-b}{a-b}=1$$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=a-b$ (មើលសម្រាយខាងលើ) និង $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1;\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}=1$ ។

74) គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{tg2x}}{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន:

$\frac{e^{\sin x}-e^{tg2x}}{x}=\frac{e^{\sin x}-1-e^{tg2x}+1}{x}=\frac{(e^{\sin x}-1)-(e^{tg2x}-1)}{x}=\frac{e^{\sin x}-1}{x}-\frac{e^{tg2x}-1}{x}$ នោះ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{tg2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1-e^{tg2x}+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\sin x}-1)-(e^{tg2x}-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{x}\right)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{tg2x}-1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)-\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{tg2x}-1}{tg2x}\right)\left(\frac{tg2x}{2x}\right)\times 2$$

$$=1\times 1-1\times 1\times 2=-1$$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\right)=1;\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{tg2x}-1}{tg2x}\right)=1;\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1;\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg2x}{2x}\right)=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{tg2x}}{x}=-1$ ។

75) គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

តាមរូបមន្ត: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

យើងមាន: $\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}=\dfrac{7^x\left(\dfrac{8^x}{7^x}-1\right)}{5^x\left(\dfrac{6^x}{5^x}-1\right)}=\dfrac{7^x\left[\left(\dfrac{8}{7}\right)^x-1\right]}{5^x\left[\left(\dfrac{6}{5}\right)^x-1\right]}$

នោះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x\left[\left(\dfrac{8}{7}\right)^x-1\right]}{5^x\left[\left(\dfrac{6}{5}\right)^x-1\right]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x\left[\dfrac{\left(\dfrac{8}{7}\right)^x-1}{x}\right]}{5^x\left[\dfrac{\left(\dfrac{6}{5}\right)^x-1}{x}\right]}=\dfrac{1\times\ln\dfrac{8}{7}}{1\times\ln\dfrac{6}{5}}=\dfrac{\ln\dfrac{8}{7}}{\ln\dfrac{6}{5}}$

ពីព្រោះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{8}{7}\right)^x-1}{x}=\ln\dfrac{8}{7}$ ,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{6}{5}\right)^x-1}{x}=\ln\dfrac{6}{5}$ , $\lim\limits_{x\to 0}7^x=1$ , $\lim\limits_{x\to 0}5^x=1$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}=\dfrac{\ln\dfrac{8}{7}}{\ln\dfrac{6}{5}}$ ។

76) គណនា $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$ មានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$

យើងមាន:

$\ln(2x+1)-\ln(x+2)=\ln\dfrac{2x+1}{x+2}=\ln\dfrac{2x+4-3}{x+2}=\ln\left(2-\dfrac{3}{x+2}\right)$

នោះ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(2-\dfrac{3}{x+2}\right)\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x+2}\right)\right]=\ln 2$

ពីព្រោះ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x+2}\right)=2$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]=\ln 2$ ។

77) គណនា $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$ មានរាងមិនកំណត់ $\infty\times\infty$

យើងមាន: $x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

នោះ: $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]=\ln e=1$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=1$ ។

78) គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ $(a>0)$ មានរាងមិនកំណត់ $\infty\times0$

យើងមាន:

$$n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

តាង $n=\frac{1}{t}$ នោះ $t=\frac{1}{n}$ កាលណា $n\to\infty$ នោះ $t\to0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\left(a^{t}-1\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{\left(a^{t}-1\right)}{t}=\ln a$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\ln a$ ។

79) គណនា $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន:

$$\frac{\ln(1+kx)}{x}=\frac{1}{x}\ln(1+kx)=\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}$$

នោះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim\limits_{x\to0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to0}(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right]^{k}=\ln e^{k}=k$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to0}(1+kx)^{\frac{1}{kx}}=\ln e$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=k$ ។

80) គណនា $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log(1+10x)}{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាមរូបមន្តប្តូរគោល: $\log_a x=\log_a b\cdot\log_b x$

នោះគេបាន $\log(1+10x)=\log e\cdot\log_e(1+10x)=\log e\cdot\ln(1+10x)$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log(1+10x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\log e\cdot\ln(1+10x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\log e\cdot\frac{\ln(1+10x)}{x}\right]$

$$=\log e\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+10x)}{10x}\times10=\log e\times1\times10=10\log e$$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+10x)}{10x}=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log(1+10x)}{x}=10\log e$ ។

81) គណនា $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងអាចសរសេរ:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\times 2}{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times 2}{\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{1\times 2}{\ln\left[\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}$$

$$=\frac{2}{\ln e}=2$$

ពីព្រោះ: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$ ; $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}=2$ ។

82) គណនា $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន: $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$

នោះគេអាចសរសេរ: $\frac{\ln\cos x}{x^2}=\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{1}{x^2}\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]$

$$=\ln\left[\lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\times\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}\right]=\ln\left[\lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}$$

$$=\ln\left[e^{\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)}\right]=\ln\left[e^{\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\times 4}\right)}\right]=\ln\left[e^{-\frac{2}{4}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)}\right]=\ln\left(e^{-\frac{1}{2}\times 1}\right)=\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\ln e=-\frac{1}{2}$$

ពីព្រោះ: $\lim\limits_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}=e$ ; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=1$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=-\frac{1}{2}$ ។

83) គណនា $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

ដោយដឹងថា: $x^x=e^{x\ln x}$

តាង $u=x\ln x$ , កាលណា $x\to1$ នោះ: $u\to0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim\limits_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}=1$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=1$ ។

84) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+3}\right)^{2x+1}$ មានរាងមិនកំណត់ $1^\infty$

យើងអាចសរសេរ: $\frac{4x-3}{4x+3}=\frac{4x+3-3-3}{4x+3}=1-\frac{6}{4x+3}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+3}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{4x+3}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{4x+3}\right)^{\left(-\frac{4x+3}{6}\right)\left(-\frac{6}{4x+3}\right)2x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{6}{4x+3}\right)^{-\frac{4x+3}{6}}\right]^{-\frac{6(2x+1)}{4x+3}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6(2x+1)}{4x+3}}=e^{-\frac{12}{4}}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$$

ពីព្រោះ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{4x+3}\right)^{-\frac{4x+3}{6}}=e$ និង

$$-\lim_{x\to\infty}\frac{6(2x+1)}{4x+3}=-\lim_{x\to\infty}\frac{6x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(4+\frac{3}{x}\right)}=-\frac{6\times2}{4}=-\frac{12}{4}=-3$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+3}\right)^{2x+1}=\frac{1}{e^3}$ ។

85) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}+2\cos4x-5}{\ln(1+4x^2)-3e^{4x^2}+3}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}+2\cos4x-5}{\ln(1+4x^2)-3e^{4x^2}+3}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}-3+2\cos4x-2}{\ln(1+4x^2)-3\left(e^{4x^2}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}-3+2(\cos4x-1)}{\ln(1+4x^2)-3\left(e^{4x^2}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{5x^4+9}-3+2(-2\sin^2 2x)}{\ln(1+4x^2)-3\left(e^{4x^2}-1\right)}\quad,\left(\begin{aligned}\cos4x-1&=-(1-\cos4x)\\&=-2\sin^2\frac{4x}{2}=-2\sin^2 2x\end{aligned}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sqrt{5x^4+9}-3-4(\sin^2 2x)}{x^2}}{\dfrac{\ln(1+4x^2)-3\left(e^{4x^2}-1\right)}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{5x^4+9}-3}{x^2}-4\frac{\sin 2x}{x^2}}{\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{x^2}-3\frac{e^{4x^2}-1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x^4+9}-3}{x^2}-4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x^2}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{x^2}-3\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x^2}-1}{x^2}}$$

ដោយ $\bullet\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x^4+9}-3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5x^4+9}-3\right)\left(\sqrt{5x^4+9}+3\right)}{x^2\left(\sqrt{5x^4+9}+3\right)}$

\

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5x^4+9}\right)^2-3^2}{x^2\left(\sqrt{5x^4+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^4+9-9}{x^2\left(\sqrt{5x^4+9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x^4}{x^2\left(\sqrt{5x^4+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sqrt{5x^4+9}+3}$$

$$=\frac{5\times 0^2}{\sqrt{5\times 0^4+9}+3}=\frac{0}{6}=0$$

$$\bullet\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\times 4=1\times 4=4\quad,\quad\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}=1\right)$$

$$\bullet\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{4x^2}\times 4=1\times 4=4\quad,\quad\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{4x^2}=1\right)$$

$$\bullet\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x^2}-1}{4x^2}\times 4=1\times 4=4\quad,\quad\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x^2}-1}{4x^2}=1\right)$$

គេបាន

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x^4+9}+2\cos 4x-5}{\ln\left(1+4x^2\right)-3e^{4x^2}+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x^4+9}-3}{x^2}-4\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x^2}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{x^2}-3\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x^2}-1}{x^2}}=\frac{0-4\times 4}{4-3\times 4}=\frac{-16}{-8}=2$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x^4+9}+2\cos 4x-5}{\ln\left(1+4x^2\right)-3e^{4x^2}+3}=2$ ។

86) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+3x)}{x+\sin 3x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+3x)}{x+\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\ln(1+3x)}{x}}{\frac{x+\sin 3x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\ln(1+3x)}{x}}{1+\frac{\sin 3x}{x}}=\frac{1-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}}{1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}$$

ដោយ

$$\bullet\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times 3=1\times 3=3$$

$$\bullet\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times 3=1\times 3=3$$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+3x)}{x+\sin 3x}=\frac{1-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}}{1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+3x)}{x+\sin 3x}=-\frac{1}{2}$ ។

87) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}\cos 6x-1}{x^2+\sin 3x^2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}\cos 6x-1}{x^2+\sin 3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}\cos 6x-1+e^{2x^2}-e^{2x^2}}{x^2+\sin 3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}\cos 6x-e^{2x^2}+e^{2x^2}-1}{x^2+\sin 3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{2x^2}(1-\cos 6x)+e^{2x^2}-1}{x^2+\sin 3x^2}\quad,\quad\left(1-\cos 6x=2\sin^2\frac{6x}{2}=2\sin^2 3x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{2x^2}(2\sin^2 3x)+e^{2x^2}-1}{x^2+\sin 3x^2}$$

យកភាគយកនិងភាគបែងចែកនឹង $x^2$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2e^{2x^2}\sin^2 3x+e^{2x^2}-1}{x^2}}{\frac{x^2+\sin 3x^2}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2e^{2x^2}\sin^2 3x}{x^2}+\frac{e^{2x^2}-1}{x^2}}{1+\frac{\sin 3x^2}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}\left(-2e^{2x^2}\right)\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{x^2}}{1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{x^2}}$$

ដោយ $\cdot\lim_{x\to 0}\left(-2e^{2x^2}\right)=-2e^{2\times 0^2}=-2e^0=-2\times 1=-2$

$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}\times 9=1\times 9=9$

$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\times 2=1\times 2=2$

$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{3x^2}\times 3=1\times 3=3$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}\cos 6x-1}{x^2+\sin 3x^2}=\frac{-2\times 9+2}{1+3}=\frac{-18+2}{4}=-4$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}\cos 6x-1}{x^2+\sin 3x^2}=-4$ ។

88) $\lim_{x\to 0}\frac{(3x+2)e^{3x}-2}{\sin 6x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3x+2)e^{3x}-2}{\sin 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{3xe^{3x}+2e^{3x}-2}{\sin 6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3xe^{3x}+2\left(e^{3x}-1\right)}{\sin 6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3xe^{3x}+2\left(e^{3x}-1\right)}{x}}{\frac{\sin 6x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}+\frac{2\left(e^{3x}-1\right)}{x}}{\frac{\sin 6x}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}3e^{3x}+2\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-1\right)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}}$$

ដោយ

$\cdot\lim_{x\to 0}3e^{3x}=3e^{3\times 0}=3e^0=3\times 1=1$

$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-1\right)}{3x}\times 3=1\times 3=3$

$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\times 6=1\times 6=6$

នោះ: $\lim_{x\to 0}\frac{(3x+2)e^{3x}-2}{\sin 6x}=\frac{3+2\times 3}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{(3x+2)e^{3x}-2}{\sin 6x}=\frac{3}{2}$ ។

89) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+8}{x^2-6x+3}\right)^x$ មានរាងមិនកំណត់ $1^\infty$

យើងមាន:

$$\frac{x^2-5x+8}{x^2-6x+3}=\frac{x^2-6x+3+x+5}{x^2-6x+3}=1+\frac{x+5}{x^2-6x+3}$$

គេបាន:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+8}{x^2-6x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+5}{x^2-6x+3}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x^2-6x+3}{x+5}}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x^2-6x+3}{x+5}}\right)^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{x^2-6x+3}{x+5}}\right)^{\frac{x^2-6x+3}{x+5}\times\frac{x(x+5)}{x^2-6x+3}}$$

តាមរូបមន្ត

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{x^2-6x+3}{x+5}}\right)^{\frac{x^2-6x+3}{x+5}}\right]^{\frac{x^2+5x}{x^2-6x+3}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x}{x^2-6x+3}}=e^1=e$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+8}{x^2-6x+3}\right)^x=e$ ។

90) $\lim_{x\to 0}\sqrt[\sin x]{1+x}$ មានរាងមិនកំណត់ $1^\infty$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[\sin x]{1+x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\times\frac{x}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{x}{\sin x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=e^1=e$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\sqrt[\sin x]{1+x}=e$ ។

91) $\lim_{x\to 0}\sqrt[2\sin x]{\cos x}$ មានរាងមិនកំណត់ $1^{\infty}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[2\sin x]{\cos x}=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2\sin x}}$$ តាមរូបមន្ត $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}\times\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}}$$

ពីព្រោះ $\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}=e$

ដោយ

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$ តាមរូបមន្ត $\left(\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}=\frac{0}{2\times 1}=0$$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to 0}\sqrt[2\sin x]{\cos x}=e^0=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\sqrt[2\sin x]{\cos x}=1$ ។

92) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+3x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}$$

ដោយ

$$\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times3=1\times3=3$$

$$\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}=\frac{3}{1}=3$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}=3$ ។

93) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2015x}-e^{2014x}}{\sin2013x-\sin2012x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងបាន:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2015x}-e^{2014x}}{\sin2013x-\sin2012x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2015x}-1-e^{2014x}+1}{\sin2013x-\sin2012x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2015x}-1-\left(e^{2014x}-1\right)}{\sin2013x-\sin2012x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2015x}-1-\left(e^{2014x}-1\right)}{x}}{\frac{\sin2013x-\sin2012x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2015x}-1}{x}-\frac{e^{2014x}-1}{x}}{\frac{\sin2013x}{x}-\frac{\sin2012x}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to0}\frac{e^{2015x}-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{e^{2014x}-1}{x}}{\lim_{x\to0}\frac{\sin2013x}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\sin2012x}{x}}$$

ដោយ $\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{2015x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2015x}-1}{2015x}\times2015=1\times2015=2015$

$$\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{2014x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2014x}-1}{2014x}\times2014=1\times2014=2014$$

$$\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin2013x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin2013x}{2013x}\times2013=1\times2013=2013$$

$$\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin2012x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin2012x}{2012x}\times2012=1\times2012=2012$$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to0}\frac{e^{2015x}-e^{2014x}}{\sin2013x-\sin2012x}=\frac{2015-2014}{2013-2012}=1$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to0}\frac{e^{2015x}-e^{2014x}}{\sin2013x-\sin2012x}=1$ ។

94) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2013^x-2012^x}{2011^x-2010^x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

យើងបាន:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2013^x-2012^x}{2011^x-2010^x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2013^x-1-2012^x+1}{2011^x-1-2010^x+1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2013^x-1-\left(2012^x-1\right)}{2011^x-1-\left(2010^x-1\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2013^x-1-\left(2012^x-1\right)}{x}}{\dfrac{2011^x-1-\left(2010^x-1\right)}{x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2013^x-1}{x}-\dfrac{2012^x-1}{x}}{\dfrac{2011^x-1}{x}-\dfrac{2010^x-1}{x}}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2013^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2012^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2011^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2010^x-1}{x}}
\end{aligned}$$

ដោយ $\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2013^x-1}{x}=\ln 2013$ ( តាមរូបមន្ត $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ )

$\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2012^x-1}{x}=\ln 2012$

$\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2011^x-1}{x}=\ln 2011$

$\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2010^x-1}{x}=\ln 2010$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2013^x-2012^x}{2011^x-2010^x}=\dfrac{\ln 2013-\ln 2012}{\ln 2011-\ln 2010}=\dfrac{\ln\dfrac{2013}{2012}}{\ln\dfrac{2011}{2010}}$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2013^x-2012^x}{2011^x-2010^x}=\dfrac{\ln\dfrac{2013}{2012}}{\ln\dfrac{2011}{2010}}$ ។

# លំហាត់បន្ថែម

## គណនា

៩៥. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}), \pm\infty\mp\infty$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+1-x^3+1}{\sqrt[3]{(x^3+2x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}.\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\frac{2}{x^2})}{x^2[\sqrt[3]{(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}.\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x^3})^2}]}$$

$$=\frac{2}{3}$$

៩៦. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{\sqrt{3x+10}-2}, \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{\sqrt{3x+10}-2}=\lim_{x\to-2}\frac{\dfrac{5x+10}{\sqrt[3]{(5x+2)^2}-2\sqrt[3]{5x+2}+4}}{\dfrac{3x+6}{\sqrt{3x+10}+2}}=\frac{5}{3}\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{3x+10}+2}{\sqrt[3]{(5x+2)^2}-2\sqrt[3]{5x+2}+4}=\frac{5}{9}$$

៩៧. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{K!.K}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{K!.K}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(K+1)!-K!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$$

៩៨. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\prod_{r=2}^{n}(1-\frac{1}{r^2})=\lim_{n\to\infty}\prod_{r=2}^{n}(\frac{r^2-1}{r^2})=\lim_{n\to\infty}\prod_{r=2}^{n}(\frac{(r-1)(1+1)}{r^2})$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$$

៩៩.រកចំនួនពិត $a$ និង $b$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b)=0$$

ដោយ

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b)=0\Rightarrow b=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}-an)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3-a^3n^3}{\sqrt[3]{(1-n^3)^2}+\sqrt[3]{an(1-n^3)}+\sqrt[3]{a^2n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(-1-a^3+\frac{1}{n^3})}{n^2[\sqrt[3]{(\frac{1}{n^2}-1)^2}+\sqrt[3]{a(\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^2})}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{n^4}}]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(-1-a^3+\frac{1}{n^3})}{[\sqrt[3]{(\frac{1}{n^2}-1)^2}+\sqrt[3]{a(\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^2})}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{n^4}}]}$$

ប្រសិនបើ $-1-a^3\neq 0\Rightarrow b=\infty$ ដែលវាមិនមែនជាចំនួនពិតឡើយនោះ

$-1-a^3=0\Rightarrow a=-1$ នាំអោយ $b=0$

១០០. $p\in\mathbb{N}$ ហើយ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ ដែលជាចំនួនវិជ្ជមានផ្សេងៗគ្នា គណនា

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_1^n+\alpha_2^n+\cdots+\alpha_p^n}$$

តាង $\alpha_j=\max\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\},1\le j\le p$ គេបាន

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_1^n+\alpha_2^n+\cdots+\alpha_p^n}=\lim_{n\to\infty}\alpha_j\sqrt[n]{\frac{\alpha_1^n}{\alpha_j^n}+\frac{\alpha_2^n}{\alpha_j^n}+\cdots+\frac{\alpha_{j-1}^n}{\alpha_j^n}+1+\frac{\alpha_{j+1}^n}{\alpha_j^n}+\cdots+\frac{\alpha_p^n}{\alpha_j^n}}$$

$$=\alpha_j$$

$$=\max\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\}$$

១០១. $a\in\mathbb{R}^*$ គណនា $\lim_{x\to -a}\frac{\cos x-\cos a}{x^2-a^2}$ $\quad(-\frac{\sin a}{2a})$

១០២. $n\in\mathbb{N}^*$ គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2+\cdots+x^n)}{nx},\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2+\cdots+x^n)}{nx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2+\cdots+x^n)}{x+x^2+\cdots+x^n}.\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{nx}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\cdots+x^{n-1}}{n}$$

$$=\frac{1}{n}$$

១០៣.គណនា $\lim_{n\to\infty}(n^2+n-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^3+8k^2+6k-1}{k^2+4k+3})$

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+n-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^3+8k^2+6k-1}{k^2+4k+3})=\lim_{n\to\infty}(n^2+n-2\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3})$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3})$$

$$=\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3})$$

$$=\frac{5}{12}$$

១០៤.រកតម្លៃ $a\in\mathbb{R}^*$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$

ដោយ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\frac{a^2}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{\frac{a^2x^2}{4}}=\frac{a^2}{2}$ និង $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$

គេបាន $\frac{a^2}{2}=1\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$

១០៥.គណនា $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2+2-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}=\frac{1}{12}$$

១០៦.$\lambda\in\mathbb{R}$ គណនា $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\lambda\sqrt{2n^2-n})$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\lambda\sqrt{2n^2-n})=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-\lambda^2(2n^2-n)}{\sqrt{2n^2+n}+\lambda\sqrt{2n^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(1-\lambda^2)+(1+\lambda^2)}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\lambda\sqrt{2-\frac{1}{n}}}$$

$$=\begin{cases}+\infty,\lambda\in(-\infty,1)\\ \frac{\sqrt{2}}{2},\lambda=1\\ -\infty,\lambda\in(1,+\infty)\end{cases}$$

១០៧.$a,b,c\in\mathbb{R}$ គណនា $\lim_{x\to\infty}(a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x+2}+c\sqrt{x+3})$

-ករណី $a+b+c\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}(a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x+2}+c\sqrt{x+3})=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(a\sqrt{1+\frac{1}{x}}+b\sqrt{1+\frac{2}{x}}+c\sqrt{1+\frac{3}{x}})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(a+b+c)$$
$$=\begin{cases}-\infty, a+b+c<0\\ +\infty, a+b+c>0\end{cases}$$

-ករណី $a+b+c=0$

$$\lim_{x\to\infty}(a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x+2}+c\sqrt{x+3})=\lim_{x\to\infty}(a\sqrt{x+1}-a+b\sqrt{x+2}-b+c\sqrt{x+3}-c)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}+\frac{b+\frac{b}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\frac{1}{x}}+\frac{c+\frac{2c}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\frac{1}{x}}\right)$$
$$=0$$

១០៨.គណនា $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

យើងមាន $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, 1\le k\le n$

ពេលយើងបូកចំពោះតម្លៃ $k=\overline{1,n}$ គេបាន

$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ដោយ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$

តាមទ្រឹស្តីបទSqueeze គេបាន $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=1$

១០៩.ចំពោះ $a>0, p\ge 2$ គណនា $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+ka}}$

ដូចគ្នានិងខាងលើដែរគេបាន $\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+na}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+ka}}\le\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+a}}$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+na}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+a}}=1$ តាមទ្រឹស្តីបទSqueezeគេបាន $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+ka}}=1$

១១០.គណនា $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\ldots(1+n^2)}$ យើងដឹងថា

$$0\le\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\ldots(1+n^2)}<\frac{n!}{1^2.2^2\ldots n^2}=\frac{n!}{(1.2\ldots n).(1.2\ldots n)}$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\dots(1+n^2)} < \frac{n!}{(n!)^2} = \frac{1}{n!}$$

តាមទ្រឹស្តីបទ Squeeze គេបាន

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\dots(1+n^2)} < \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\dots(1+n^2)} = 0$

១១១.គណនា $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}$ $,1^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-4}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{n-4}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{2n^2-n+1}{n-4}}\right]^{\frac{(n-4)(n^2-1)}{2n^3-2n^2+n}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-4)(n^2-1)}{2n^3-2n^2+n}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} = \sqrt{e}$

១១២.គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-\cos x}{1-\sqrt{1+\tan^2 x}}$ $,\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-\cos x}{1-\sqrt{1+\tan^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin^2 x-\cos^2 x)(1+\sqrt{1+\tan^2 x})}{(1-1-\tan^2 x)(\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x(1+\sqrt{1+\tan^2 x})}{-\tan^2 x(\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x)}$$

$$= \frac{-2\cos^2 x(1+\sqrt{1+\tan^2 x})}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x} = -2$$

១១៣.គណនា $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{x}$ $,\infty^{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2x\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}=e^{+\infty}=+\infty$$

១១៤.គណនា $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}},1^{\infty}$

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{\sin x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}-\tan\frac{x}{2}}=e^{0}=1$$

១១៥.គណនា $\lim\limits_{x\to0}(e^{x}+\sin x)^{\frac{1}{x}},1^{\infty}$

$$\lim_{x\to0}(e^{x}+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[e^{x}\left(1+\frac{\sin x}{e^{x}}\right)\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}(e^{x})^{\frac{1}{x}}.\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{\sin x}{e^{x}}\right)^{\frac{e^{x}}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{xe^{x}}}$$

$$=e.e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{xe^{x}}}=e^{2}$$

១១៦.បើ $a,b\in\mathbb{R}^{*}_{+}$ គណនា $\lim\limits_{n\to\pm\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^{n},1^{\infty}$

$$\lim_{n\to\pm\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^{n}=\lim_{n\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^{\frac{a}{\sqrt[n]{b}-1}}\right]^{\frac{n(\sqrt[n]{b}-1)}{a}}$$

$$=e^{\frac{1}{a}\lim\limits_{n\to\pm\infty}\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}=e^{\frac{\ln b}{a}}=b^{\frac{1}{a}}$$

១១៧.បើ $a>0$, គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-1}{x}, \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(a+x)}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(a+x)}-1}{x\ln(a+x)}.\lim_{x\to 0}\ln(a+x)=\ln a$$

១១៨.គណនា

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\arctan\frac{1}{2k^2}$$

ដោយ $\arctan\frac{1}{2k^2}=\arctan\frac{k}{k+1}-\arctan\frac{k-1}{k}$ ព្រោះ

$$\tan\left(\arctan\frac{k}{k+1}-\arctan\frac{k-1}{k}\right)=\frac{\frac{k}{k+1}+\frac{k-1}{k}}{1-\frac{k}{K+1}.\frac{k-1}{k}}=\frac{1}{2k^2}$$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\arctan\frac{1}{2k^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\arctan\frac{n}{n+1}=\frac{\pi}{4}$

១១៩.គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{4k^4+1}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4k^4+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2+2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n^2+2n+1}\right)=\frac{1}{4}$$

១២០.គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^2+1}}, 0^0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0}(x)^{\frac{x}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^x\right)^{\frac{1}{x^2+1}}=1^1$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}x^x=\lim\limits_{x\to 0}e^{x\ln x}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\frac{-\ln t}{t}}=e^0=1$

ហើយ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^2+1}}=1^0=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^2+1}}=1$

១២១.គណនា $\lim_{x\to 0}\left(\cos(\sin(x))\right)^{\frac{1}{x^2}}, 1^{\infty}$

តាង

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\cos\sin x\right)^{x^{-2}}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln\cos\sin x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{\ln\cos\sin x}{\cos\sin x-1}\cdot\frac{\cos\sin x-1}{\sin^2 x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}$$

ព្រោះ $\lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=1$ ; $\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}=-\frac{1}{2}$ ; $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\left(\cos(\sin(x))\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

១២២.គណនា $\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x}, \quad \frac{0}{0}$

តាង $L=\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{1}{2}.\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos x}{-\frac{1}{2}.\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos 2x}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)}$

$$=\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\sin 2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x}=\frac{1}{2}$

១២៣.គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2}\cos^2 x-1}{\sqrt{1+x^2}-1}, \quad \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{x^2}\cos^2 x-1}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(2^{\frac{x^2}{2}}\cos x+1\right)\left(2^{\frac{x^2}{2}}\cos x-1\right)}{x^2}=4\lim_{x\to 0}\frac{2^{\frac{x^2}{2}}\cos x-1}{x^2}$$

$$=4\lim_{x\to0}\left[2^{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}\right)+\frac{2^{\frac{x^2}{2}}-1}{x^2}\right]=-2+2\lim_{x\to0}\frac{2^{\frac{x^2}{2}}-1}{\frac{x^2}{2}}=-2+\ln4$$

ព្រោះ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ ; $\lim_{x\to0}\frac{2^{\frac{x^2}{2}}-1}{\frac{x^2}{2}}=\ln2$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\frac{2^{x^2}\cos^2x-1}{\sqrt{1+x^2}-1}=-2+\ln4$

១២៤.គណនា $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x.\cos^2 2x\ldots\cos^n nx}{x^2}$, $\frac{0}{0}$

ពិនិត្យ $b_k=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^k(kx)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{k^3\cos^{k-1}(kx)}{2}.\left(\frac{\sin(kx)}{kx}\right)=\frac{k^3}{2}$ ចំពោះ $\forall k\in\mathbb{Z}$

តាង

$$L=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x.\cos^2 2x\ldots\cos^n nx}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x(1-\cos^2 2x.\cos^3 3x\ldots\cos^n nx)}{x^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 2x(1-\cos^3 3x.\cos^4 4x\ldots\cos^n nx)}{x^2}$$
$$=b_1+b_2+\ldots+b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{2}=\frac{n^2(n+1)^2}{8}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x.\cos^2 2x\ldots\cos^n nx}{x^2}=\frac{n^2(n+1)^2}{8}$

១២៥.គណនា $\lim_{x\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\sin(\sin x)}$, $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\sin(\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}.\sin x}=\frac{1}{\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}}.\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-\cos(x))\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\sin^2\frac{x}{2})}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\pi\sin^2\frac{x}{2})}{\pi\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sin x}{x}}\right)=0$$

ដូចនេះ $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(x)\right)}{\sin(\sin x)}=0$$

**សូមអរគុណ!**