កម្រងវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន

ពីឆ្នាំ ២០០២ ដល់ ២០១៧

ចងក្រង និង ធ្វើកំណែដោយ ប្រើស ដារ៉ា

ឯកសារទូទៅ
Facebook.com/document4khmer

ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារទូទៅ
document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១១ តុលា ២០០២

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $x^2-2x+5=0$ ។

ខ. គណនាឬសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $8-6i$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ : $I=\int \cos^2 x dx$, $J=\int x\sin x dx$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=2x(x^3+1)$ ដោយដឹងថាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍នេះស្មើ 3 កាលណា $x=-1$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x-1}{|x|+1}$ ។

ក. សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

ខ. តើអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ ឬទេ ? **(១ពិន្ទុ)**

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y'+4y=0$ ។

ខ. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): y''+4y'+4y=-4x$ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដែលអនុគមន៍ $\varphi: x\mapsto ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (F) ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2,2,2)$, $B(2,0,1)$ និង $C(4,1,-1)$ ។

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B ។

ខ. រកសមីការប្លង់កាត់តាមចំណុចទាំងបីនេះ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ។

ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងក្រាបអនុគមន៍ f ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) បន្ទាត់ $x=2$ និង $x=5$ ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០២

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

គេមាន $x^2-2x+5=0$

$$x^2-2x+1=-4$$

$$(x+1)^2=-4$$

$$x+1=\pm\sqrt{-4}$$

$$x=-1\pm 2i$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=-1\pm 2i}$ ។

ខ. គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $8-6i$

គេតាង z ជាឫសការេនៃចំនួន $8-6i$

គេបាន $z^2=8-6i$

នាំឱ្យ $z=\pm\sqrt{8-6i}$

$$=\pm\sqrt{9-6i-1}$$

$$=\pm\sqrt{9-6i+i^2}$$

$$=\pm\sqrt{(3-i)^2}=\pm(3-i)$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ឫសការេនៃ } 8-6i \text{ ស្មើនឹង } 3-i\,,\ -3+i}$ ។

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$\mathbf{I}=\int\cos^2 xdx$ (តាម $2\cos^2 x=1+\cos 2x$)

$$=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+c \quad ,\ c \text{ ជាចំនួនថេរ}$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c}$ ។

$\mathbf{J}=\int x\sin xdx$ (ប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

គេតាង $u=x$ នោះ $du=dx$

$dv=\sin xdx$ នោះ $v=-\cos x$

រូបមន្ត $\int udv=uv-\int vdu$

គេបាន $\int x\sin xdx=-x\cos x-\int -\cos xdx$

$$=-x\cos x+\sin x+c \quad ,\ c \text{ ថេរ}$$

ដូចនេះ $\boxed{J=-x\cos x+\sin x+c}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=2x(x^3+1)$

គេតាង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

នាំឱ្យ $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x(x^3+1)dx$

$$=2\int(x^4+x)dx$$

$$=2\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}\right)+c$$

ដោយ $F(-1)=3$ នោះ $2\left(\frac{(-1)^5}{5}+\frac{(-1)^2}{2}\right)+c=3$

គេបាន $-\frac{2}{5}+1+c=3 \quad\Rightarrow\quad c=\frac{12}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\frac{2x^5}{5}+x^2+\frac{12}{5}}$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

III. ក. សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x-1}{|x|+1}=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1} & \text{បើ } x\geq 0\\ -1 & \text{បើ } x<0\end{cases}$

អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ វាផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$$

ដោយ $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$f(0)=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=-1$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ } x=0}$ ។

ខ. តើអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ ឬទេ ?

បើ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $f'_-(0)=f'_+(0)$

តាមនិយមន័យដេរីវេ $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

គេបាន $f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{-1-(-1)}{x}=\dfrac{0}{0^-}=0$

www.document4khmer.wordpress.com
Facebook.com/document4khmer
document4khmer.wordpress.com

និង $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-(-1)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x-1+x+1}{x+1}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{2x}{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{0+1}=2$

ដោយ $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ នោះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ

ដូចនេះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ ។

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

គេមាន $(E): y''+4y'+4y=0$

គេបាន សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+4\lambda+4=0$ ឬ $(\lambda+2)^2=0$

នោះ សមីការសម្គាល់មានឫសឌុប $\lambda_0=-2$

សមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅរាង

$y_c=Ae^{\lambda_0x}+Bxe^{\lambda_0x}$, A,B ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ $y_c=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $\varphi: x\mapsto ax+b$ អាចសរសេរ $\varphi(x)=ax+b$

នាំឱ្យ $\varphi'(x)=a$ និង $\varphi''(x)=0$

ដោយ φ ជាចម្លើយនៃ (F) នោះគេបាន ៖

$\varphi''+4\varphi'+4\varphi=-4x$

$0+4a+4(ax+b)=-4x$

$4ax+(4a+4b)=-4x$

$\varphi''+4\varphi'+4\varphi=-4x$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}4a=-4\\4a+4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $a=-1\,,b=1$ ។

V. ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B

បើ ΔABC កែងត្រង់ B លុះត្រាតែ $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$

មានន័យថា គេបានផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

គេមាន $A(2\,,2\,,2)\,,B(2\,,0\,,1)$ និង $C(4\,,1\,,-1)$

នោះ $\overrightarrow{BA}=(0\,,2\,,1)$ និង $\overrightarrow{BC}=(2\,,1\,,-2)$

គេបាន $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=xx'+yy'+zz'$

$=(0)(2)+(2)(1)+(1)(-2)$

$=0+2-2=0$ ពិត

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B ។

ខ. រកសមីការប្លង់កាត់តាមចំណុចទាំងបីនេះ

ប្លង់ $(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយប្លង់ (ABC) កាត់ $B(2\,,0\,,1)$

នាំឱ្យ $x_0=2\,,\ y_0=0\,,\ z_0=1$

ហើយ ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec n=\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$

តែ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\0&2&1\\2&1&-2\end{vmatrix}=-5\vec i+2\vec j-4\vec k$

នាំឱ្យ $a=-5\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$

គេបាន $(ABC): -5(x-2)+2(y-0)-4(z-1)=0$

$-5x+2y-4z+14=0$

ដូចនេះ $(ABC): -5x+2y-4z+14=0$ ។

VI. ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

ដែនកំណត់ $\begin{cases}x-1\neq0\\x+1\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq1\\x\neq-1\end{cases}$

នាំឱ្យ $D=(-\infty\,,-1)\cup(-1\,,1)\cup(1\,,+\infty)$

លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=0$

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=0$

អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ នោះ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x\to\pm1}f(x)=+\infty$ នោះ $x=\pm$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ដេរីវេ

www.document4khmer.wordpress.com
ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
document4khmer.wordpress.com

$$f'(x)=-2\cdot\frac{(x-1)'}{(x-1)^3}-2\frac{(x+1)'}{(x+1)^3}$$

$$=-2\left[\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x+1)^3}\right]$$

$$=-2\left[\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)^3}\right]$$

$$=-2\left[\frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{(x-1)^3(x+1)^3}\right]$$

$$=-2\left[\frac{2x^3+6x}{(x-1)^3(x+1)^3}\right]=\frac{-4x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

ឱ្យ $f'(x)=0$ សមមូល $\dfrac{-4x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}=0$

ដោយ $\forall x\in D_f$, $x^2+3>0$, $x-1\neq 0$, $x+1\neq 0$

នាំឱ្យ $-4x=0$ នោះ $x=0$

តារាងសញ្ញា $f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-4x$		+		+	0	−		−	
x^2+3		+		+		+		+	
$(x-1)^3$		−		−		−	0	+	
$(x+1)^3$		−	0	+		+		+	
$f'(x)=\dfrac{-4x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}$		+	‖	−	0	+	‖	−	

ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្ដូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាស្មើ $f(0)=2$ ។

តារាងអថេរភាព

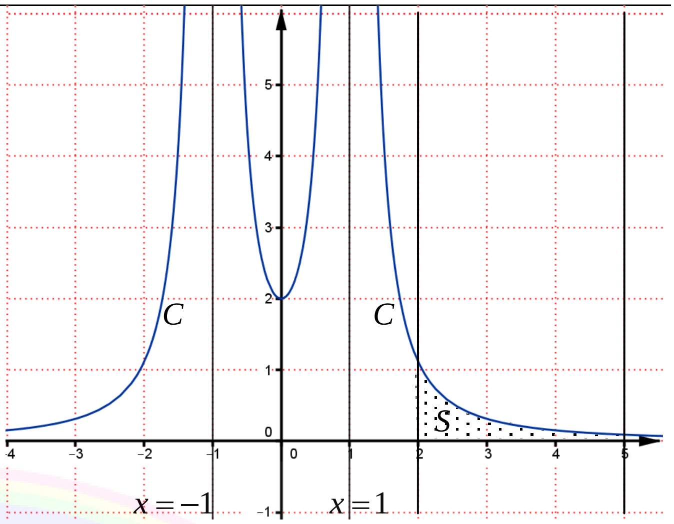
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	0	+	‖	−	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

សង់ខ្សែកោង (C) តាងក្រាបអនុគមន៍ f

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $f(-x)=\dfrac{1}{(-x-1)^2}+\dfrac{1}{(-x+1)^2}$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=f(x)$$

នោះ f ជាអនុគមន៍គូ ដែលមានអ័ក្ស $y'y$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ



ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C)

បន្ទាត់ $x=2$ និង $x=5$

តាមក្រាប ផ្នែកប្លង់ដែលត្រូវគណនាផ្ទៃស្ថិតនៅលើអ័ក្ស $x'ox$

$$S=\int_2^5 f(x)\,dx=\int_2^5\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\int_2^5\left(\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}+\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]_2^5$$

$$=\left(-\frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}\right)-\left(-\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+1+\frac{1}{3}=\frac{-3-2+12+4}{12}=\frac{11}{12}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់គឺ $S=\dfrac{11}{12}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

www.documents4khmer.wordpress.com
ឯកសារខ្មែរ facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០០៣

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. សរសេរសចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $1+i\sqrt{3}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $|z|-z=1+2i$, (z ជាចំនួនកុំផ្លិច) ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. គណនាដេរីវេទី 5 នៃអនុគមន៍ $f(x)=x^5-2x^4+3x^3-2$ ។

ខ. កំណត់ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $h(x)=x^n$, $(n\in\mathbb{N}^*)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=\cos x$ ដែលខ្សែកោងតាង $F(x)$ កាត់តាមចំណុច $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. រកចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ $y''-3y'+2y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=3$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ពីរ (α) និង (β) មានសមីការរៀងគ្នាគឺ : $3x-2y+2z-5=0$ និង $4x+5y-z+1=0$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្លង់ (α) អរតូកូណាល់ប្លង់ (β) ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ ដែលជាប្រសព្វនៃប្លង់ (α) និង (β) ។ **(២ពិន្ទុ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{x^2-4x+3}$ ។

ក. រកតម្លៃនៃ a និង b ដោយដឹងថាអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x=2$ ។

ខ. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ចំពោះតម្លៃនៃ a និង b ដែលបានរកឃើញ ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៣

I. ក. សរសេរសចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $1+i\sqrt{3}$ (មាន $r=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$)

$$=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $|z|-z=1+2i$ និង z ជាចំនួនកុំផ្លិច

គេតាង $z=a+bi$ នោះ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

គេបាន $\sqrt{a^2+b^2}-(a+bi)=1+2i$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)+(-b)i=1+2i$$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=1\\ b=-2\end{cases}$

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+4}-a=1 \ (1)\\ b=-2\end{cases}$$

តាម (1) $\sqrt{a^2+4}=a+1$ (លើកជាការេ)

$$a^2+4=a^2+2a+1$$

$$a=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{z=\frac{3}{2}-2i}$ ។

II. ក. គណនាដេរីវេទី 5 នៃអនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=x^5-2x^4+3x^3-2$

$$f(x)=x^5-2x^4+3x^3-2$$

$$f'(x)=5x^4-8x^3+9x^2$$

$$f''(x)=20x^3-24x^2+18x$$

$$f'''(x)=60x^2-48x+18$$

$$f^{(4)}(x)=120x-48$$

$$f^{(5)}(x)=120$$

ដូចនេះ ដេរីវេទី 5 គឺ $\boxed{f^{(5)}(x)=120}$ ។

ខ. កំណត់ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $h(x)=x^n$

$$h'(x)=nx^{n-1}$$

$$h''(x)=n(n-1)x^{n-2}$$

$$h'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$h^{(4)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$

....

$$h^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)\times\ldots\times2\times1\times x^{n-n}=n!$$

ដូចនេះ ដេរីវេទី n គណនាបាន $\boxed{h^{(n)}(x)=n!}$ ។

III. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេបាន $F(x)=\int f(x)dx=\int\cos xdx=\sin x+c$

ដោយ ខ្សែកោងតាង $F(x)$ កាត់តាមចំណុច $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

គេបាន $\sin\frac{\pi}{2}+c=0 \Rightarrow c=-1$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវគណនាបានគឺ $\boxed{F(x)=\sin x-1}$ ។

IV. រកចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

គេមាន $y''-3y'+2y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-3\lambda+2=0$

តាមករណីពិសេស $a+b+c=0$ នោះ $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$

ចម្លើយទូទៅរាង $y=Ae^{\lambda_1x}+Be^{\lambda_2x}$, A , B ថេរ

គេបាន $y=Ae^x+Be^{2x}$

នាំឱ្យ $y'=Ae^x+2Be^{2x}$

ដោយ $\begin{cases}y(1)=1\\ y'(1)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae+Be^2=1 & (1)\\ Ae+2Be^2=3 & (2)\end{cases}$

យក $(2)-(1)$ គេបាន $Be^2=2 \Rightarrow B=2e^{-2}$

តាម (1) $Ae+2e^{-2}\cdot e^2=1 \Rightarrow A=-e^{-1}$

គេបាន $y=Ae^x+Be^{2x}$

$$=-e^{-1}\cdot e^x+2e^{-2}\cdot e^{2x}$$

$$=-e^{x-1}+2e^{2x-2}$$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ

$\boxed{y=-e^{x-1}+2e^{2x-2}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com
Facebook.com/document4khmer

V. **ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្លង់ (α) អរតូកូណាល់ប្លង់ (β)**

គេមាន $(\alpha): 3x-2y+2z-5=0$

មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1=(3\,,-2\,,2)$

$(\beta): 4x+5y-z+1=0$

មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_2=(4\,,5\,,-1)$

បើ $(\alpha)\perp(\beta)$ លុះត្រាតែ $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$ នោះ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$

ដោយ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=xx'+yy'+zz'$

$=(3)(4)+(-2)(5)+(2)(-1)$

$=12-10-2=0$ ពិត

ដូចនេះ **ប្លង់ (α) អរតូកូណាល់ប្លង់ (β)** ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់

តាង $\ell:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+ct\end{cases}$ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់

ប្រសព្វនៃប្លង់ (α) និង (β)

គេមាន $\begin{cases}(\alpha): 3x-2y+2z-5=0\\ (\beta): 4x+5y-z+1=0\end{cases}$ (គេយក $z=t$)

$\begin{cases}3x-2y=5-2t & \times 5\\ 4x+5y=t-1 & \times 2\end{cases}$

$\begin{cases}15x-10y=25-10t\\ 8x+10y=2t-2\end{cases}$

$23x=23-8t \quad\Rightarrow\quad x=1-\dfrac{8}{23}t$

ដោយ $3x-2y=5-2t$

$3\left(1-\dfrac{8}{23}t\right)-2y=5-2t$

$3-\dfrac{24}{23}t-2y=5-2t$

$69-24t-46y=115-46t$

$46y=-46+22t$

$y=-1-\dfrac{11}{23}t$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតគឺ $\begin{cases}x=1-\dfrac{8}{23}t\\ y=-1-\dfrac{11}{23}t\ \ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$ ។

VI. **ក. រកតម្លៃនៃ a និង b**

ដោយ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x=2$

គេបាន $\begin{cases}f'(2)=0\\ f(2)=4\end{cases}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{x^2-4x+3}$ នោះគេបាន ៖

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2-4x+3)-(2x-4)(ax^2+bx)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(2)=\frac{(4a+b)(2^2-4\cdot2+3)-(4-4)(ax^2+bx)}{(2^2-4\cdot2+3)^2}$$

$$=\frac{(4a+b)(-1)}{(-1)^2}=-4a-b$$

នាំឱ្យ $\begin{cases}f'(2)=-4a-b=0\\ f(2)=\dfrac{a\cdot2^2+b\cdot2}{2^2-4\cdot2+3}=4\end{cases}$

$\begin{cases}-4a-b=0\\ -4a-2b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-4\\ a=1\end{cases}$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $a=1\,,b=-4$ ។

ខ. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f

ចំពោះ $a=1\,,b=-4$

គេបាន $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=\dfrac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}$

ដែនកំណត់ $x^2-4x+3\neq0$ នោះ $x\neq1\,,x\neq3$

ដូចនេះ $D=(-\infty\,,1)\cup(1\,,3)\cup(3\,,+\infty)$

លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=1$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{1(-3)}{0^-(-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{1(-3)}{0^+(-2)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{3(-1)}{2(0^-)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{3(-1)}{2(0^+)}=-\infty$$

អាស៊ីមតូត

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

$\lim_{x\to 3} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2-4x+3)-(2x-4)(ax^2+bx)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$=\frac{(2x-4)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$=\frac{(2x-4)(x^2-4x+3-x^2+4x)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$=\frac{6(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$$

ឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}=0$

$\forall x\in D$, $(x^2-4x+3)^2>0$ ជានិច្ច

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x-2$ ដែលមានឫស $x=2$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖ $-$	0 $+$	‖ $+$	

ត្រង់ $x=2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាមួយស្មើ $f(2)=-4$

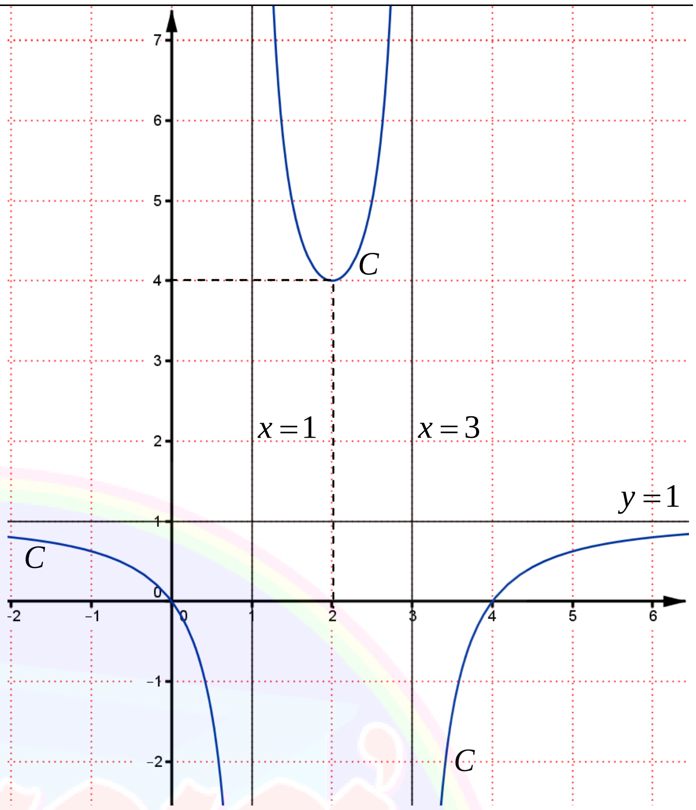
តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖ $-$	0 $+$	‖ $+$	
$f(x)$	1 ↘ $-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	-4 ↗ $+\infty$	‖ $-\infty$ ↗	1

សង់ក្រាប និងអាស៊ីមតូត

តារាងតម្លៃលេខនៃក្រាប C

x	0	2	4
y	0	-4	0



ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៧ តុលា ២០០៤

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. រកចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យបំពេញលក្ខខណ្ឌ $(x+y)+(2x-y)i=2-5i$ ។

ខ. ចូរសរសេរ $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}$ ជារាង $a+bi$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. រកក្រឡាផ្ទៃ S ដែលកំណត់ដោយខ្សែកោង $y=\sin x$ ចំពោះ $0\le x\le 3\pi$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $I=\int x\cos x dx$, $J=\int \frac{5}{5x-7}dx$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់គេមានបីចំណុច $A(1,4,2)$, $B(2,1,3)$, $C(-2,2,-1)$ ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃ ΔABC រួចបង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែង ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេសរសេរលេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 រៀងគ្នាលើកាត 9 ។ គេចាប់យកកាតនេះម្តងមួយៗពីក្នុងថង់ ចំនួន 3 កាត មកតម្រៀបតាមលំដាប់ដែលចាប់បាន ។

ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យកាតទាំងបីដែលចាប់បាន បង្កើតបានជាចំនួន 123 ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យកាតទាំងបីដែលចាប់បាន បង្កើតបានជាចំនួនចែកដាច់នឹង 125 ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. គណនាតម្លៃអតិបរមា អប្បបរមា និងរកកូអរដោនេចំណុចរបត់ របស់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=3xe^{-x^2}$ ។ សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះ ។ **(២ពិន្ទុ)**

VI. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'+2y=x^2$ ។

ក. កំណត់អនុគមន៍ពហុធា g មានសមីការដឺក្រេទី២ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $f-g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): y'+2y=0$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ (E') ។ ទាញរកចម្លើយនៃសមីការ (E) ។ **(២ពិន្ទុ)**

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៤

I. **ក. រកចំនួនពិត x និង y**

គេមាន $(x+y)+(2x-y)i=2-5i$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$

បូកអង្គ $3x=-3 \Rightarrow x=-1$

ដោយ $x+y=2 \Rightarrow y=2-x=2-(-1)=3$

ដូចនេះ រកបាន $\boxed{x=-1\,,\ y=3}$ ។

ខ. សរសេរ $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}$ ជារាង $a+bi$

តាង $Z=1+i\sqrt{3}$ មាន $r=\sqrt{1+\sqrt{3}^2}=2$

នាំឱ្យ $Z=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

គេបាន $Z^{10}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{10}$

$=2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$

$=1024\left[\cos\left(2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

$=1024\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

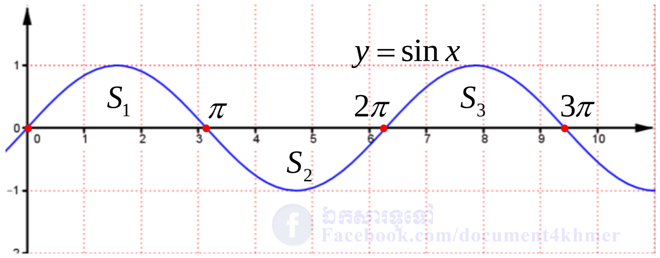
$=1024\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=-512-512\sqrt{3}\,i$

ដូចនេះ $\boxed{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}=-512-512\sqrt{3}\,i}$ ។

II. **ក. រកក្រឡាផ្ទៃ S**

ដើម្បីដឹងថា ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=\sin x$ នៅខាងលើ ឬ ខាងក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស គេត្រូវគូសខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=\sin x$ ចំពោះ $0\le x\le 3\pi$



តាមរូប $S=S_1-S_2+S_3$

$S=\int_0^{\pi}\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx+\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x dx$

$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}-\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}+\left[-\cos x\right]_{2\pi}^{3\pi}$

$=-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi-\cos 3\pi+\cos 2\pi$

$=-(-1)+1+1+1-(-1)+1=6$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃគណនាបាន } S=6 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$\mathbf{I}=\int x\cos x dx$ (តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

គេតាង $u=x$ នោះ $du=dx$

$dv=\cos x dx$ នោះ $v=\sin x$

តាមរូបមន្ត $\int udv=uv-\int vdu$

$\mathbf{I}=\int x\cos x dx=x\sin x-\int\sin x dx$

$=x\sin x-(-\cos x)+c$

$=x\sin x+\cos x+c$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I}=x\sin x+\cos x+c}$ ។

$\mathbf{J}=\int\frac{5}{5x-7}dx=\int\frac{(5x-7)'}{5x-7}dx=\ln|5x-7|+c$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{J}=\ln|5x-7|+c}$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

III. ➤គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃ ΔABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

គេមាន $A(1\,,4\,,2)\,,\ B(2\,,1\,,3)\,,\ C(-2\,,2\,,-1)$

នោះ $\overrightarrow{AB}=(1\,,-3\,,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-3\,,-2\,,-3)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 1\\ -3 & -2 & -3\end{vmatrix}=11\vec{i}-0\vec{j}-11\vec{k}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{11^2+0^2+(-11)^2}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\frac{11\sqrt{2}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com
ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer

➤ **បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែង**

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=xx'+yy'+zz'$

$=(1)(-3)+(-3)(-2)+(1)(-3)=0$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ នោះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

ដូចនេះ $\boxed{ABC \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } A \text{ ត្រូវបានបង្ហាញ}}$ ។

IV. ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យកាក់បង្កើតបានជាចំនួន 123

ដោយ គេចាប់យកកាក់នេះម្តងមួយៗពីក្នុងថង់ចំនួនបី

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាចថយចុះម្តងមួយ

ហើយ លេខនីមួយៗមានមួយលេខដូចគ្នាជាករណីស្រប

គេបាន $P(123)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{504}$

ដូចនេះ $\boxed{P(123)=\frac{1}{504}}$ ។

ខ. រកប្រូបាបបង្កើតបានជាចំនួនចែកដាច់នឹង 125

ចំនួនដែលអាចចែកដាច់នឹង 125 មាន

125 , 250 , 375 , 500 , 625 , 750 , 875

តែចំនួនដែលមានលេខ 0 មិនអាចយកបាន នោះនៅសល់តែ

125 , 375 , 625 , 875 គេបានប្រូបាប ៖

$P(\text{ចែកដាច់}125)$

$=P(125)+P(375)+P(625)+P(875)$

$=\frac{1}{504}+\frac{1}{504}+\frac{1}{504}+\frac{1}{504}=\frac{4}{504}=\frac{1}{126}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\text{ចែកដាច់}125)=\frac{1}{126}}$ ។

V. ក. គណនាតម្លៃអតិបរមា អប្បបរមា

គេមាន $y=3xe^{-x^2}$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

ដេរីវេ $y'=(3x)'\cdot e^{-x^2}+3x\left(e^{-x^2}\right)'$

$=3e^{-x^2}-6x^2e^{-x^2}$

$=3e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$

ឱ្យ $y'=0 \Leftrightarrow 3e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=0$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}\,,\,3e^{-x^2}>0$ នោះ y' សញ្ញាដូច $1-2x^2$

នាំឱ្យ $\left(1-2x^2\right)=0$ នោះ $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

គេបាន $y\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$y'=3e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$	$-$	0	$+$	0	$-$

• ត្រង់ $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'=0$ និងប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា y មានតម្លៃអប្បបរមាមួយស្មើ $\boxed{-\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}}$ ។

• ត្រង់ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'=0$ និងប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា y មានតម្លៃអតិបរមាមួយស្មើ $\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}}$ ។

➤រកកូអរដោនេចំណុចរបត់ របស់ខ្សែកោង

គេដឹងថា អាប់ស៊ីសនៃចំណុចរបត់ គឺជាឫសនៃសមីការ $y''=0$

គេមាន $y'=3e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$

$y''=-6xe^{-x^2}\left(1-2x^2\right)+(-4x)\left(3e^{-x^2}\right)$

$=\left(-2x\left(1-2x^2\right)-4x\right)\left(3e^{-x^2}\right)$

$=3e^{-x^2}\left(4x^3-6x\right)$

$=6xe^{-x^2}\left(2x^2-3\right)$

ឱ្យ $y''=0 \Leftrightarrow 6xe^{-x^2}\left(2x^2-3\right)=0$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}\,,\,6e^{-x^2}>0$ នោះ $x\left(2x^2-3\right)=0$

នាំឱ្យ $x=0\,,\,x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

គេបាន $y(0)=3\cdot 0\cdot e^0=0$

$y\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=3\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cdot e^{-\frac{3}{2}}=\pm\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$

ដូចនេះ ចំណុចរបត់មានបីតាងដោយ I មាន

$\boxed{I_1(0,0)\,,\,I_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)\,,\,I_2\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)}$

ខ. សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះ

ដើម្បីឱ្យងាយស្រួលក្នុងការសង់ក្រាប គេត្រូវមានតារាងអថេរភាព

$\lim\limits_{x\to-\infty}3xe^{-x^2}$ តាង $t=-x$, បើ $x\to-\infty$ នោះ $t\to+\infty$

$\lim\limits_{t\to+\infty}-3te^{-t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-3t}{e^{t^2}}=0$

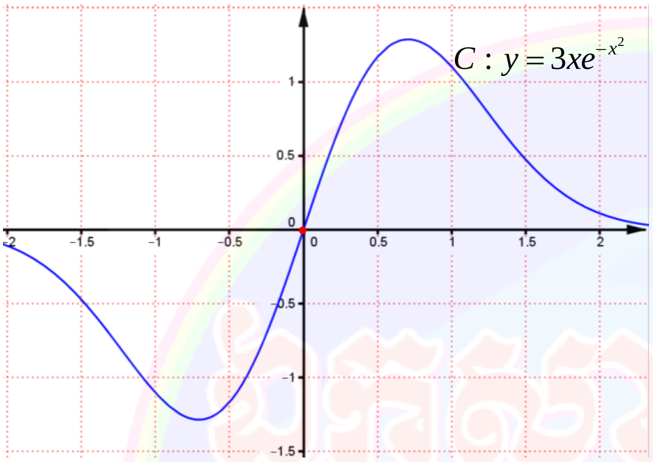
$\lim\limits_{x\to+\infty}3xe^{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{e^{x^2}}=0$

www.document4khmer.wordpress.com

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

គេសង់ក្រាបបានដូចខាងក្រោម



VI. ក. កំណត់អនុគមន៍ពហុធា g មានសមីការដឺក្រេទី២

ពហុធាដឺក្រេទី២ នៃ g មានរាង $g(x)=ax^2+bx+c$

គេបាន $g'(x)=2ax+b$

ដោយ g ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E): y'+2y=x^2$

គេបាន $g'+2g=x^2$

$$(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=x^2$$

$$2ax^2+(2a+2b)x+(b+2c)=x^2+0x+0$$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}2a=1\\2a+2b=0\\b+2c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1/2\\b=-1/2\\c=1/4\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $f-g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): y'+2y=0$

បើ $f-g$ ជាចម្លើយនៃ $(E'): y'+2y=0$

គេបាន $(f-g)'+2(f-g)=0$

$$f'-g'+2f-2g=0$$

$$f'+2f=g'+2g$$

$$f'+2f=x^2$$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាចម្លើយនៃ } (E): y'+2y=x^2}$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (E')

គេមាន $(E'): y'+2y=0$

មានចម្លើយទូទៅរាង $y_c=Ae^{-ax}$, A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ (E') មានចម្លើយ $\boxed{y_c=Ae^{-2x}}$ ។

➤ទាញរកចម្លើយនៃសមីការ (E)

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $(E): y'+2y=x^2$

មានរាង $f=$ ចម្លើយទូទៅអូម៉ូសែន $+$ ចម្លើយពិសេស

$$f=y_c+g$$

$$f=Ae^{-2x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ (E) មានចម្លើយ $\boxed{f=Ae^{-2x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ០៣ វិច្ឆិកា ២០០៥

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $-2-2i$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $I=\int(2\sin x+3\cos x)dx$, $J=\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2-e^x$ ដែល $F(0)=1$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):\ y''-3y'+2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើនឹង 1 ត្រង់ $x=1$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច $M(1,2,-3)$ និងស្របជាមួយប្លង់ $(Q): 2x-4y-z+4=0$ រួចគណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ទាំងពីរ ។ **(១ពិន្ទុ)**

V. គេមានតួលេខ $0,1,2,3,4$ ។ ដោយគ្រាន់តែប្រើតួលេខទាំងនេះ តើគេអាចបង្កើតចំនួនបានប៉ុន្មាន ដែលធំជាង 2000 ?
(បញ្ជាក់ : ក្នុងចំនួននីមួយៗគ្មានតួលេខដដែលពីរដងទេ) **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ae^x+b$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) កាត់តាមគល់ O នៃតម្រុយអរតូណរមេ និងបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចនេះ ជាបន្ទាត់ពុះទី១ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f ចំពោះតម្លៃនៃ a និង b ដែលរកឃើញ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្ស $x'Ox$ បន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=1$ ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៥

I. ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $-2-2i$

គេមាន $-2-2i$ (មាន $r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$)

$$=2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{2}{2\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}i\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{-2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}i\right)}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

គេមាន $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$

$$\Delta=\left[-(5-i)\right]^2-4(2+i)(2-2i)$$

$$=25-10i+i^2-4\left(4-4i+2i-2i^2\right)$$

$$=25-10i-1-24+8i=-2i$$

ដោយ $2i=1-2i-1=1-2i+i^2=(1-i)^2$

នាំឱ្យ $x=\dfrac{5-i\pm(1-i)}{2(2+i)}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{2+i}\\ \dfrac{3-i}{2+i}\end{array}\right.\Rightarrow x=\left[\begin{array}{l}\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i\\ \dfrac{7}{5}-\dfrac{2}{5}i\end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i\ ,\ x=\frac{7}{5}-\frac{2}{5}i}$ ។

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$$\mathbf{I}=\int(2\sin x+3\cos x)dx$$

$$=2\int\sin xdx+3\int\cos xdx$$

$$=-2\cos x+3\sin x+c$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I}=-2\cos x+3\sin x+c}$, c ជាចំនួនថេរ ។

$$\mathbf{J}=\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\int\frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)}dx$$

$$=\int\frac{1}{(x-3)}dx-\int\frac{1}{(x-2)}dx$$

$$=\ln|x-3|-\ln|x-2|+c=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+c$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{J}=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+c}$, c ជាចំនួនថេរ ។ (គ្រូប-០៥)

ខ. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេបាន $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(x^2-e^x\right)dx$

$$=\frac{x^3}{3}-e^x+c$$

ដោយ $F(0)=1$ សមមូល $\frac{0^3}{3}-e^0+c=1\Rightarrow c=2$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវគណនាបាន $\boxed{F(x)=\frac{x^3}{3}-e^x+2}$ ។

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

គេមាន $(E):\ y''-3y'+2y=0$

សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2-3\lambda+2=0$ មាន $a+b+c=0$

តាមករណីពិសេសសមីការមានឫស $\lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=2$

ចម្លើយទូទៅនៃ $(E):\ y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$, $A\ ,\ B$ ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{y=Ae^x+Be^{2x}\text{ ជាចម្លើយទូទៅនៃ }(E)}$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

ដោយ $y=Ae^x+Be^{2x}$ នោះ: $y'=Ae^x+2Be^{2x}$

គេដឹងថា អនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើនឹង 1 ត្រង់ $x=1$

គេបាន $\begin{cases}y'(1)=0\\ y(1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae+2Be^2=0\\ Ae+Be^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-\dfrac{1}{e^2}\\ A=\dfrac{2}{e}\end{cases}$

នាំឱ្យ $y=\frac{2}{e}e^x-\frac{1}{e^2}e^{2x}=2e^{x-1}-e^{2x-2}$

ដូចនេះ (E) មានចម្លើយពិសេស $\boxed{y=2e^{x-1}-e^{2x-2}}$ ។

IV. ➤សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P)

សមីការប្លង់ $(P):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (P) កាត់តាមចំណុច $M(1\ ,2\ ,-3)$

នោះ: $x_0=1\ ,\ y_0=2\ ,\ z_0=-3$

និង $(P)\parallel(Q):2x-4y-z+4=0$ នាំឱ្យ (P)

មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,-4,-1)$

នោះ: $a=2\ ,\ b=-4\ ,\ c=-1$

ដូចនេះ $\boxed{(P):2(x-1)-4(y-2)-(z+3)=0}$ ។

➢គណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ទាំងពីរ

របៀបទី១ តាមរូបមន្ត $d\big((P),(Q)\big)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $(P):2(x-1)-4(y-2)-(z+3)=0$

$2x-4y-z+3=0$ នោះ $d_1=3$

$(Q):2x-4y-z+4=0$ នោះ $d_2=4$

នាំឱ្យ $d\big((P),(Q)\big)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$=\dfrac{|3-4|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

ដូចនេះ ចម្ងាយប្លង់ទាំងពីរគឺ $d=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$ ឯកតាប្រវែង ។

របៀបទី២ យកចំណុច $A(x,y,z)\in(P)$

គេយក $x=y=0$ ជំនួសក្នុង (P) ដើម្បីរក z

$(P):2(0-1)-4(0-2)-(z+3)=0$

$-2+8-z-3=0$ នោះ $z=3$

គេបាន $A(0,0,3)\in(P)$

ដោយ $d\big((P),(Q)\big)=d\big(A,(Q)\big)$

តែ $d\big(A,(Q)\big)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $A(0,0,3)\Rightarrow x_0=y_0=0\,,\ z_0=3$

$(Q):2x-4y-z+4=0$ នោះ

$a=2\,,\ b=-4\,,\ c=-1$

$d\big(A,(Q)\big)=\dfrac{|0+0-3+4|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

ដូចនេះ ចម្ងាយប្លង់ទាំងពីរគឺ $d=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$ ឯកតាប្រវែង ។

V. តើគេអាចបង្កើតចំនួនបានប៉ុន្មាន ដែលធំជាង 2000 ?(គ្រូប.០៥)

ដោយលេខតាមខ្ទង់ដែលត្រូវប្រើមាន៥លេខ $0,1,2,3,4$

នោះចំនួនដែលធំជាង 2000 អាចជាលេខ 4 ខ្ទង់ ឬ 5 ខ្ទង់

- ចំពោះលេខ 4 ខ្ទង់ដែលធំជាង 2000 គឺ

ខ្ទង់ពាន់ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់រយ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ដប់ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់រាយ មាន 2 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $3\times4\times3\times2=72$ ចំនួន

- ចំពោះលេខ 5 ខ្ទង់ដែលធំជាង 2000 គឺ

ខ្ទង់ម៉ឺន មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ពាន់ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់រយ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់ដប់ មាន 2 ជម្រើស

ខ្ទង់រាយ មាន 1 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $4\times4\times3\times2\times1=96$ ចំនួន

សរុបចំនួនដែលធំជាង $2000=72+96=168$ ចំនួន

ដូចនេះ ចំនួនដែលអាចបង្កើតបានមាន 168 ចំនួន ។

VI. ក. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b

គេមាន $f(x)=ae^x+b$ មានខ្សែកោង (C)

នាំឱ្យ $f'(x)=ae^x$

ដោយ (C) កាត់តាមគល់ O នាំឱ្យ $f(0)=0$

$ae^0+b=0$ ឬ $b=-a\ (1)$

ហើយ បន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច $O(0,0)$នេះ

ជាបន្ទាត់ពុះទី១ $y=x$ នាំឱ្យ $f'(0)=1$

$ae^0=1\Rightarrow a=1$ ជំនួសក្នុង (1) $b=-1$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $a=1\,,\ b=-1$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C)

ចំពោះ $a=1\,,\ b=-1$ គេបាន $f(x)=e^x-1$

ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)$

លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)=0-1=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-1\right)=+\infty-1=+\infty$

អាស៊ីមតូត ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ នោះបន្ទាត់ $y=-1$

ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$

ដេរីវេ $f'(x)=e^x$ នោះ $f'(x)=e^x>0\,,\ \forall x\in D$

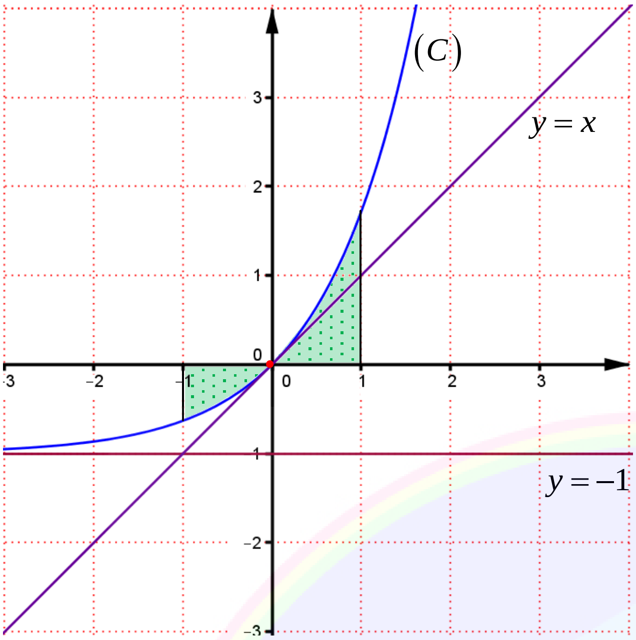
នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច និងគ្មានបរមាទេ

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1 ↗	$+\infty$

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

➤សង់ខ្សែកោង (C)



គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់

តាមក្រាប គេបានផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដូចខាងក្រោម ៖

$$S=-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}\left(e^{x}-1\right)dx+\int_{0}^{1}\left(e^{x}-1\right)dx$$

$$=-\left[e^{x}-x\right]_{-1}^{0}+\left[e^{x}-x\right]_{0}^{1}$$

$$=-\left[(1-0)-\left(\frac{1}{e}+1\right)\right]+\left[(e-1)-(1-0)\right]$$

$$=\frac{1}{e}+e-2$$

ដូចនេះ: ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ $S=\frac{1}{e}+e-2$ ឯកតាផ្ទៃ ។

Facebook.com/document4khmer
document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៣ តុលា ២០០៦

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយវិសមីការ $2^x+2^{3-x}\le 9$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x , y គេបាន : $x^2\left(1+\sin^2 y\right)+2x(\sin y+\cos y)+1+\cos^2 y>0$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $(m+1)x^2-2mx+4(m+1)=0$ មានឫសដែលធំជាងគេនៅចន្លោះ $(-1,1)$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 2y''-3y'+y=0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយរបស់សមីការ (E) ដើម្បីឱ្យក្រាបតាងអនុគមន៍ g ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d) សមីការ $y=-\frac{1}{2}x$ នៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. កោណមួយមានកម្ពស់ 15cm និងកាំបាត 6cm ។ រកកម្ពស់ និងកាំបាតនៃស៊ីឡាំងចារឹកក្នុងកោណនេះ ដើម្បីឱ្យវាមានមាឌអតិបរមា ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,1,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,-2,3)$ និង $D(1,-2,0)$ ។ រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាមបួនចំណុច A , B , C និង D ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=(ax+1)^2$ ចំពោះ $x<2$ និង $f(x)=-ax$ ចំពោះ $x\ge 2$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅត្រង់ $x=2$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

VII. អនុគមន៍ f កំណត់លើ $D=[2,+\infty)$ ដែល $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{(2x-3)(x-1)^2}$ ។

ក. គណនា a , b ដែល $f(x)=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(2x-3)}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$, $h(x)=\dfrac{1}{2x-3}$ ។

គ. ទាញរក $I=\int_2^3 f(x)dx$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៦

I. ក. ដោះស្រាយវិសមីការ

គេមាន $2^x+2^{3-x}\le 9$

$2^x+\frac{8}{2^x}-9\le 0$

គេតាង $t=2^x$ ដែល $t>0$

គេបាន $t+\frac{8}{t}-9\le 0$ គុណនឹង t មិនប្តូរទិសដៅ)

$t^2-9t+8\le 0$

ឱ្យ $t^2-9t+8=0$ តាមករណីពិសេស $t=1$, $t=8$

តារាងសញ្ញា

t	0		1		8		$+\infty$
$t^2-9t+8\le 0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាង $1\le t\le 8$ សមមូល $1\le 2^x\le 8$

ឬ $2^0\le 2^x\le 2^3$ នាំឱ្យ $0\le x\le 3$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{0\le x\le 3}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x , y គេបាន $f(x)>0$

$f(x)=x^2\left(1+\sin^2 y\right)+2x(\sin y+\cos y)+1+\cos^2 y$

មាន $\Delta'=(\sin y+\cos y)^2-\left(1+\sin^2 y\right)\left(1+\cos^2 y\right)$

$=\sin^2 y+2\sin y\cos y+\cos^2 y$

$-\left(1+\cos^2 y+\sin^2 y+\sin^2 y\cos^2 y\right)$

$=2\sin y\cos y-1-\sin^2 y\cos^2 y$

$=-(1-\sin y\cos y)^2$

ដោយ $\forall y\in\mathbb{R}$, $\sin y\cos y\ne 1$

នោះ $\Delta'=-(1-\sin y\cos y)^2<0$, $\forall y\in\mathbb{R}$

គេបាន កន្សោមមាន $\begin{cases}\Delta'<0\\ a=1+\sin^2 y>0\end{cases}$ នាំឱ្យ $f(x)>0$

ដូចនេះ $\boxed{x^2\left(1+\sin^2 y\right)+2x(\sin y+\cos y)+1+\cos^2 y>0}$

II. កំណត់តម្លៃនៃ m

គេមាន $(m+1)x^2-2mx+4(m+1)=0$

គេតាង $f(x)=(m+1)x^2-2mx+4(m+1)$

ដោយ សមីការមានឫសដែលធំជាងគេនៅចន្លោះ $(-1,1)$

លុះត្រាតែ $f(-1)\times f(1)<0$

ដោយ $f(-1)=(m+1)(-1)^2-2m(-1)+4(m+1)$

$=m+1+2m+4m+4=7m+5$

$f(1)=(m+1)(1)^2-2m(1)+4(m+1)$

$=m+1-2m+4m+4=3m+5$

គេបាន $(7m+5)(3m+5)<0$ (ជាត្រីធាដឺក្រេទី២)

គេឱ្យ $(7m+5)(3m+5)=0$ នោះ $m=-\frac{5}{7}$, $m=-\frac{5}{3}$

តារាងសញ្ញា

t	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$-\frac{5}{7}$		$+\infty$
$(7m+5)(3m+5)<0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{m\in\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{7}\right)}$ ។

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

គេមាន $(E):\ 2y''-3y'+y=0$

សមីការសម្គាល់ $2\lambda^2-3\lambda+1=0$ តាមករណីពិសេស

សមីការមានឫស $\lambda=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ $g(x)=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$, A , B ថេរ

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $\boxed{g(x)=Ae^x+Be^{\frac{1}{2}x}}$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយរបស់សមីការ (E)

គេមាន $g(x)=Ae^x+Be^{\frac{1}{2}x}$ នោះ $g'(x)=Ae^x+\frac{B}{2}e^{\frac{1}{2}x}$

ដើម្បីឱ្យក្រាបតាងអនុគមន៍ g ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d) សមីការ $y=-\frac{1}{2}x$ នៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ លុះត្រាតែ

$$\begin{cases}g'(0)=-\frac{1}{2}\\ g(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae^0+\frac{B}{2}e^0=-\frac{1}{2}\\ Ae^0+Be^0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=1\\ A=-1\end{cases}$$

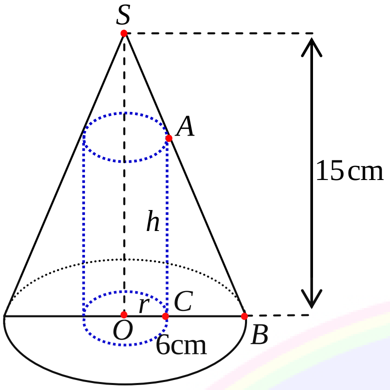
ដូចនេះ ចម្លើយមួយនៃ (E) គឺ $\boxed{g(x)=-e^x+e^{\frac{1}{2}x}}$ ។

document4khmer.wordpress.com
Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

IV. រកកម្ពស់ និងកាំបាតនៃស៊ីឡាំងចារឹកក្នុងកោណនេះ

តាង h និង r ជាកម្ពស់ និងកាំនៃស៊ីឡាំង (គិតជា cm)

នាំឱ្យមាឌនៃស៊ីឡាំង $V=\pi r^2 h$



ដោយ ΔABC និង ΔSBO ជាត្រីកោណកែងមាន

$\angle B$ ជាមុំរួម នោះ $\Delta ABC \sim \Delta SBO$ (ម.ម)

វិបាក $\dfrac{AC}{SO}=\dfrac{BC}{BO}$ ឬ $\dfrac{h}{15}=\dfrac{6-r}{6}$ នោះ $h=\dfrac{5}{2}(6-r)$

គេបាន $V(r)=\pi r^2\times\dfrac{5}{2}(6-r)=\dfrac{5\pi}{2}(6r^2-r^3)$

$V'(r)=\dfrac{5\pi}{2}(12r-3r^2)$

$V''(r)=\dfrac{5\pi}{2}(12-6r)$

ដើម្បីឱ្យ V មានតម្លៃអតិបរមា លុះត្រាតែ $\begin{cases}V'(r)=0\\V''(r)<0\end{cases}$

គេបាន $\dfrac{5\pi}{2}(12r-3r^2)=0$ ឬ $r(12-3r)=0$

នាំឱ្យ $r=0$ មិនយក , $r=4\text{cm}$ យក

គេបាន $V''(4)=\dfrac{5\pi}{2}(12-6\cdot 4)=-30\pi<0$ ពិត

$h=\dfrac{5}{2}(6-r)=\dfrac{5}{2}(6-4)=5\text{cm}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{r=4\text{cm}\,,\ h=5\text{cm}}$ ។

V. រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាមបួនចំណុច (ដូចគ្រូបឋម 2011)

គេមាន $A(1,1,0)$, $B(0,2,2)$,

$C(1,-2,3)$ និង $D(1,-2,0)$

សមីការស្វ៊ែរាង $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$(S)\cap A$ គេបាន $(1-a)^2+(1-b)^2+c^2=r^2$ (1)

$(S)\cap B$ គេបាន $a^2+(2-b)^2+(2-c)^2=r^2$ (2)

$(S)\cap C$ គេបាន $(1-a)^2+(-2-b)^2+(3-c)^2=r^2$ (3)

$(S)\cap D$ គេបាន $(1-a)^2+(-2-b)^2+c^2=r^2$ (4)

គេយក $(3)-(4)$ គេបាន $(3-c)^2-c^2=0$

$(3-c-c)(3-c+c)=0 \Rightarrow c=\dfrac{3}{2}$

គេយក $(1)-(4)$ គេបាន $(1-b)^2-(-2-b)^2=0$

$(1-b+2+b)(1-b-2-b)=0 \Rightarrow b=-\dfrac{1}{2}$

តាម (2) $a^2+\left(2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2=r^2$

$a^2+\dfrac{25}{4}+\dfrac{1}{4}=r^2$ នោះ $a^2+\dfrac{13}{2}=r^2$ (5)

តាម (1) $(1-a)^2+\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=r^2$

$1-2a+a^2+\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}=r^2$

$-2a+a^2+\dfrac{11}{2}=r^2$ (6)

យក $(5)-(6)$ $2a+1=0$ នាំឱ្យ $a=-\dfrac{1}{2}$

តាម (5) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{2}=r^2 \Leftrightarrow r^2=\dfrac{27}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{(S):\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{27}{4}}$ ។

VI. រកតម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅត្រង់ $x=2$

គេមាន $f(x)=\begin{cases}(ax+1)^2 & \text{ចំពោះ } x<2\\ -ax & \text{ចំពោះ } x\ge 2\end{cases}$

ដើម្បីឱ្យ អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=2$ លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax+1)^2=(2a+1)^2$

$\lim\limits_{x\to 2^+}(-ax)=-2a$

$f(2)=-2\cdot a=-2a$

គេបាន $(2a+1)^2=-2a$

$4a^2+4a+1=-2a$

$4a^2+6a+1=0$

$\Delta'=3^2-4=5$ នោះ $a=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ $\boxed{a=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{4}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com
ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

VII.ក. គណនា a , b

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{(2x-3)(x-1)^2}$ និង

$$f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(2x-3)}$$
$$=\frac{a(2x-3)+b(x-1)^2}{(2x-3)(x-1)^2}$$
$$=\frac{2ax-3a+bx^2-2bx+b}{(2x-3)(x-1)^2}$$
$$=\frac{bx^2+(2a-2b)x+(-3a+b)}{(2x-3)(x-1)^2}$$

ដោយផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នានៃអថេរ x

គេបាន $\begin{cases} b=1 \\ 2a-2b=-4 \\ -3a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{a=-1 , b=1}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(x)$ និង $h(x)$

គេមាន $g(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$, $h(x)=\dfrac{1}{2x-3}$

គេតាង $G(x), H(x)$ ជាព្រីមីទីវរៀងគ្នានៃ $g(x), h(x)$

គេបាន $G(x)=\int g(x)dx$

$$=\int\frac{-1}{(x-1)^2}dx$$
$$=\int\frac{-(x-1)'}{(x-1)^2}dx=\frac{1}{x-1}+c_1 \quad , \quad c_1 \text{ ថេរ}$$

$$H(x)=\int h(x)dx$$
$$=\int\frac{1}{2x-3}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln|2x-3|+c_2 \quad , \quad c_2 \text{ ថេរ}$$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវរៀងគ្នានៃ $g(x)$ និង $h(x)$ គឺ ៖

$\boxed{G(x)=\dfrac{1}{x-1}+c_1 \quad , \quad H(x)=\dfrac{1}{2}\ln|2x-3|+c_2}$ ។

គ. ទាញរក $I=\int_2^3 f(x)dx$

$$I=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(2x-3)}\right)dx$$
$$=\int_2^3\frac{-1}{(x-1)^2}dx+\int_2^3\frac{1}{(2x-3)}dx$$
$$=\left[\frac{1}{x-1}\right]_2^3+\left[\frac{1}{2}\ln|2x-3|\right]_2^3$$
$$=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{\ln 3}{2}$$

ដូចនេះ ទាញរកបាន $\boxed{I=\dfrac{\ln 3}{2}-\dfrac{1}{2}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com
ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៦ តុលា ២០០៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $2xi-y=\dfrac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$ ។

ខ. គេឱ្យ $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ ។ សរសេរ $(1+z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E) ដែល $g(0)=0$ និង $g'(0)=1$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ ចំពោះ $x\neq 0$ និង $f(0)=\ln(m-1)$ ។ គណនាលីមីត $f(x)$ កាលណា x ខិតជិត 0 ។ កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅត្រង់ $x=0$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លី ស 3 និងឃ្លីខ្មៅ 5 ។ គេចាប់យកឃ្លីម្តង 3 ចេញពីក្នុងថង់ ។ រកប្រូបាបដែលគេអាចចាប់យកបានឃ្លី ស 2 និងឃ្លីខ្មៅ 1 ។ **(១ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$ មានក្រាប (C) ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត $a\,,b\,,c$ ដើម្បីឱ្យ $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ ចំពោះ $x\neq 2$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. បង្ហាញថាចំណុច $I(2\,,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ (P) និងស្វ៊ែ (S) ដែលមានសមីការ $(P): x+2y+2z+5=0$, $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត និងប្រវែងកាំនៃស្វ៊ែ (S) ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S) ។

គ. រកសមីការបណ្តាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារទូទៅ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៧

I. ក. កំណត់ចំនួនពិត x និង y :

គេមាន $2xi - y = \dfrac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$

$$= \frac{3+3i-2i-2i^2}{(i-2)} = \frac{5+i}{(i-2)}$$

$$= \frac{(5+i)(i+2)}{(i-2)(i+2)} = \frac{5i+10+i^2+2i}{-1-4}$$

$$= \frac{9+7i}{-5} = -\frac{9}{5} - \frac{7}{5}i$$

តាមនិយមន័យចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា គេបាន ៖

$$\begin{cases} 2x = -\dfrac{7}{5} \\ -y = -\dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{10} \\ y = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

ដូចនេះ កំណត់បានចំនួនពិត $\boxed{x = -\dfrac{7}{10} \ , \ y = \dfrac{9}{5}}$ ។

ខ. សរសេរ $(1+z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z = \cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$

នោះ $1+z = 1+\cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$

$$= 2\cos^2\frac{\pi}{9} + i2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

នាំឱ្យ $(1+z)^4 = \left[2\cos\dfrac{\pi}{9}\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)\right]^4$

$$(1+z)^4 = 16\cos^4\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+z)^4 = 16\cos^4\dfrac{\pi}{9}\left(\cos\dfrac{4\pi}{9} + i\sin\dfrac{4\pi}{9}\right)}$ ។

II. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

គេមាន $(E): g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) = 0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ មានឫស $\lambda = 2 \ , \ \lambda = 3$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, A, B ថេរ

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y = Ae^{2x} + Be^{3x}}$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E) ដែល

គេមាន $g(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$

នោះ $g'(x) = 2Ae^{2x} + 3Be^{3x}$

ដោយ $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae^0 + Be^0 = 0 \\ 2Ae^0 + 3Be^0 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases} \Bigg| \times(-2)$$

$$+\begin{cases} -2A - 2B = 0 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases}$$

$$B = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -1$$

ដូចនេះ ចម្លើយមួយគឺ $\boxed{g(x) = -e^{2x} + e^{3x}}$ ។

III. ➤គណនាលីមីត $f(x)$ កាលណា x ខិតជិត 0 :

គេមាន $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ ចំពោះ $x \neq 0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\times 1 = 2$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2}$ ។

➤ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$

f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$ និង $f(0) = \ln(m-1)$

គេបាន $\ln(m-1) = 2$ ឬ $m - 1 = e^2$ នោះ $m = e^2 + 1$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{m = e^2 + 1}$ ។

IV. រកប្រូបាបដែលគេអាចចាប់យកបានឃ្លី ស 2 និងឃ្លី ខ្មៅ 1

គេមាន ឃ្លីស 3 និងឃ្លីខ្មៅ 5 ហើយគេចាប់យកឃ្លីម្តង 3

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(s) = C(8\ ,\ 3) = \dfrac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(3,2)\times C(5,1) = 15$

គេបាន $P(ស2, ខ1) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{15}{56}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រូបាបគណនាបានគឺ } P(ស2, ខ1) = \dfrac{15}{56}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

V. **ក. កំណត់ចំនួនពិត $a\,,b\,,c$:**

គេមាន $g(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$ ចំពោះ $x\neq 2$

គេបាន $g(x)=x-1-\dfrac{6}{x-2}$ (បានពីចែកពហុធា)

ផ្ទឹមនឹង $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ នោះគេទាញបាន

$a=1\,,b=-1\,,\ c=-6$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=1\,,b=-1\,,\ c=-6}$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C)

គេមាន $\lim\limits_{x\to2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}=\dfrac{4-6-4}{2+0^--2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2^+}g(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}=\dfrac{4-6-4}{2+0^+-2}=-\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to2}g(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $g(x)=x-1-\dfrac{6}{x-2}$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{6}{x-2}\right)=0$

នោះបន្ទាត់ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

គ. បង្ហាញថាចំណុច $I(2\,,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)

បើ $I(a\,,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ g

លុះត្រាតែ $g(2a-x)+g(x)=2b$

ចំពោះ $I(2\,,1)$ គេនឹងបង្ហាញថា $g(4-x)+g(x)=2$

គេមាន $g(x)=x-1-\dfrac{6}{x-2}$

នាំឱ្យ $g(4-x)=(4-x)-1-\dfrac{6}{(4-x)-2}$

$=-x+3-\dfrac{6}{-x+2}$

$=-x+3+\dfrac{6}{x-2}$

គេបាន $g(4-x)+g(x)$

$=\left(-x+3+\dfrac{6}{x-2}\right)+\left(x-1-\dfrac{6}{x-2}\right)=2$

ដោយ $g(4-x)+g(x)=2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុច } I(2\,,1) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប } (C)}$ ។

VI. **ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត និងប្រវែងកាំនៃស្វ៊ែ (S) :**

គេមាន $(S):\ x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$

$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2+4z)=0$

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+(z^2+4z+4)=9$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=3^2$

ទាញបាន $a=1\,,b=2\,,c=-2$ និងកាំ $r=3$

ដូចនេះ ស្វ៊ែ (S) មានកូអរដោនេផ្ចិតតាង $I(1\,,2\,,-2)$ និងប្រវែងកាំ $r=3$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S)

រកចម្ងាយពីផ្ចិតស្វ៊ែ ទៅប្លង់ (P)

តាមរូបមន្ត $d(I\,,(P))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $(P):x+2y+2z+5=0$ នោះ

$a=1\,,b=2\,,c=2$ និង $d=5$

ហើយ ផ្ចិត $I(1,2,-2)$ នោះ $x_0=1\,,\ y_0=2\,,\ z_0=-2$

នាំឱ្យ $d(I\,,(P))=\dfrac{|1\cdot1+2\cdot2+2(-2)+5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{|6|}{3}=2$

ដោយ $d(I,(P))=2<r=3$ នោះប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S)

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្លង់ } (P) \text{ កាត់ស្វ៊ែ } (S)}$ ។

គ. រកសមីការបណ្ដាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S)

តាង $(\alpha):ax+by+cz+d=0$ ជាបណ្ដាសមីការប្លង់ត្រូវរក

ដោយ $(\alpha)\parallel(P)$ នោះ (α) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ដូចប្លង់ (P)

គេបាន $(\alpha):x+2y+2z+d=0$

តែ (α) ប៉ះ (S) មានន័យថា $d(I,(\alpha))=r=3$

គេបាន $\dfrac{|x_I+2y_I+2z_I+d|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3$ ដែល $I(1\,,2\,,-2)$

$\dfrac{|1+2\cdot2+2(-2)+d|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3$

$|1+d|=9$ នោះ $1+d=\pm9$ នោះ $d=\left[\begin{array}{l}-10\\8\end{array}\right.$

ដូចនេះ បណ្ដាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) មាន $\boxed{x+2y+2z-10=0\,,\ x+2y+2z+8=0}$ ។

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៦ តុលា ២០០៨

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការ $\frac{x-1}{1991}+\frac{x-5}{1987}+\frac{x+7}{1999}+\frac{x-11}{1981}=4$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $\ln\sqrt{x^2}=\sqrt{2\ln(-x)}$ ។

គ. ដោះស្រាយវិសមីការ $0<\frac{x^2-2x-3}{x-2}<4$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ A , B , C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ ។

ខ. គណនា $F(x)=\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. គេមានថង់ពីរ A និង B ។ ក្នុងថង់ A មានប៊ូលពណ៌ស 1 និងពណ៌ខ្មៅ 3 ។ ក្នុងថង់ B មានប៊ូលពណ៌ស 5 និងពណ៌ខ្មៅ 3 ។ គេទាញប៊ូលមួយពីថង់ A និងប៊ូលមួយពីថង់ B ហើយប្តូរគ្នា ។

ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យក្នុងថង់ A មានតែប៊ូលពណ៌ខ្មៅបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នា ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យពណ៌ប៊ូលនៅក្នុងថង់នីមួយៗនៅដដែលបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នា ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y'+4y=0$ ។

ខ. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): y''+4y'+4y=-4x$ ។

កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $x\mapsto ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (F) ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់វិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យបួនចំណុចគឺ $A(-2,0,1)$, $B(0,10,3)$, $C(2,0,-1)$ និង $D(5,3,-1)$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A , B និង C

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច D ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

គ. សរសេរសមីការស្វ៊ែផ្ចិត D ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P) ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=3\sin x-2\sin^3 x$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃ f ។

ខ. រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ F កំណត់ដោយ $F(x)=a\cos x+b\cos^3 x$ ជាព្រីមីទីវនៃ f ។ **(២ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៨

I. ក. ដោះស្រាយសមីការ :

$$\frac{x-1}{1991}+\frac{x-5}{1987}+\frac{x+7}{1999}+\frac{x-11}{1981}=4$$

$$\frac{x-1}{1991}-1+\frac{x-5}{1987}-1+\frac{x+7}{1999}-1+\frac{x-11}{1981}-1=0$$

$$\frac{x-1992}{1991}+\frac{x-1992}{1987}+\frac{x-1992}{1999}+\frac{x-1992}{1981}=0$$

$$(x-1992)\left(\frac{1}{1991}+\frac{1}{1987}+\frac{1}{1999}+\frac{1}{1981}\right)=0$$

នាំឱ្យ $x-1992=0$ នោះ $x=1992$

ហើយ $\frac{1}{1991}+\frac{1}{1987}+\frac{1}{1999}+\frac{1}{1981}\neq 0$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=1992}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

សមីការ $\ln\sqrt{x^2}=\sqrt{2\ln(-x)}$ មានន័យលុះត្រាតែ

$$\begin{cases} x\neq 0 \\ \ln(-x)\geq 0 \\ -x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\leq -1 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow x\leq -1$$

ចំពោះ $x\leq -1$ នោះ $\sqrt{x^2}=-x$

គេបាន $\ln(-x)=\sqrt{2\ln(-x)}$

គេតាង $t=\ln(-x)$

គេបាន $t=\sqrt{2t}$ សមមូល $t^2=2t$ ឬ $t(t-2)=0$

នាំឱ្យ $t=0\,,\,t=2$

គេបាន $\left[\begin{array}{l} \ln(-x)=0 \\ \ln(-x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x=1 \\ -x=e^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-e^2 \end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=-1\,,\;x=-e^2}$ ។

គ. ដោះស្រាយវិសមីការ $0<\frac{x^2-2x-3}{x-2}<4$

អាចសរសេរ $\begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-2}>0 \\ \frac{x^2-2x-3}{x-2}<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-2}>0 \;(1) \\ \frac{x^2-6x+5}{x-2}<0 \;(2) \end{cases}$

កន្សោម x^2-2x-3 មានឫស $x=-1\,,\,x=3$

កន្សោម x^2-6x+5 មានឫស $x=1\,,\,x=5$

កន្សោម $x-2$ មានឫស $x=2$

ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធវិសមីការ ជាតម្លៃនៃ x បានពីប្រសព្វរវាងចម្លើយ (1) និងចម្លើយ (2) ។

តារាងសញ្ញា (1)

x	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
x^2-2x-3	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2-2x-3}{x-2}>0$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

ចម្លើយ $(1): x\in(-1\,,\,2)\cup(3\,,\,+\infty)$

តារាងសញ្ញា (2)

x	$-\infty$	1		2		5	$+\infty$
x^2-6x+5	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2-6x+5}{x-2}<0$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

ចម្លើយ $(2): x\in(-\infty\,,\,1)\cup(2\,,\,5)$

ចម្លើយ (1) :

ចម្លើយ (2) :

ចម្លើយ

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{x\in(-1\,,1)\cup(3\,,5)}$ ។

II. ក. កំណត់តម្លៃ $A\,,\,B\,,\,C$:

គេមាន $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

$$=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x^2+2x+1)}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x^3+2x^2+x}$$

ផ្ទឹមនឹង $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases}A+B=5\\2A+B+C=20\\A=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-1\\C=9\\A=6\end{cases}$$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{A=6\,,\,B=-1\,,\,C=9}$ ។

ខ. គណនា $F(x)=\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$

ចំពោះ $A=6\,,\,B=-1\,,\,C=9$ រកឃើញខាងលើ

គេបាន $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}$

នាំឱ្យ $F(x)=\int\left(\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right)dx$

$=6\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{9}{x+1}+c$, c ថេរ

III. ក. **រកប្រូបាបដែលថង់ A មានតែប៊ូលពណ៌ខ្មៅបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នា**

គេមាន ថង់ A មានប៊ូលស 1 និងខ្មៅ 3

ថង់ B មានប៊ូលស 5 និងខ្មៅ 3

ដើម្បីឱ្យ ថង់ A មានតែប៊ូលពណ៌ខ្មៅបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នា លុះត្រាតែ ចាប់បានប៊ូលពណ៌សពីថង់ A និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅពីថង់ B

គេបាន $P(A$ មានតែប៊ូលខ្មៅ$)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{32}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A \text{ មានតែប៊ូលខ្មៅ})=\frac{3}{32}}$ ។

ខ. **រកប្រូបាបពណ៌ប៊ូលក្នុងថង់នីមួយៗនៅដដែលបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នា**

ដើម្បីឱ្យពណ៌ប៊ូលនៅដដែលបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នារួច គឺមានន័យថា ចាប់បានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា អាចជាសដូចគ្នា ឬខ្មៅដូចគ្នា

គេបាន $P(\text{សស ឬ ខខ})=\left(\frac{1}{4}\times\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{16}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\text{ប៊ូលនីមួយៗនៅដដែល})=\frac{7}{16}}$ ។

IV. ក. **ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល** :

គេមាន $(E): y''+4y'+4y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+4\lambda+4=0$

ឬ $(\lambda+2)^2=0$

មានឫសឌុប $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0=-2$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $y=Axe^{\lambda_0 x}+Be^{\lambda_0 x}$, $A\,,\,B$ ថេរ

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=Axe^{-2x}+Be^{-2x}}$ ។

ខ. **កំណត់ចំនួនពិត a និង b**

តាង $f(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (F)

នាំឱ្យ $f'(x)=a$ និង $f''(x)=0$

ដោយ f ជាចម្លើយនៃ $(F): y''+4y'+4y=-4x$

គេបាន $f''+4f'+4f=-4x$

$0+4a+4(ax+b)=-4x$

$4ax+(4a+4b)=-4x+0$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}4a=-4\\4a+4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=-1\,,\,b=1}$ ។

V. ក. **សរសេរសមីការប្លង់ (P)**

ប្លង់ត្រូវរករាង $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ ប្លង់ (P) កាត់ $A(-2\,,\,0\,,\,1)$

នោះ $x_0=-2\,,\,y_0=0\,,\,z_0=1$

ហើយ ប្លង់ (P) កាត់បីចំណុច $A\,,\,B\,,\,C$ នោះ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(2\,,10\,,\,2)$, $\overrightarrow{AC}=(4\,,\,0\,,\,-2)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&10&2\\4&0&-2\end{vmatrix}=-20\vec{i}+12\vec{j}-40\vec{k}$

នោះ $a=-20\,,\,b=12\,,\,c=-40$

គេបាន $(P): -20(x+2)+12(y-0)-40(z-1)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P): 5x-3y+10z=0}$ ។

ខ. **សរសេរសមីការបន្ទាត់កាត់តាម D ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)**

សមីការបន្ទាត់ត្រូវរកតាង $(\ell):\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\,,\,t\in\mathbb{R}\\z=z_0+ct\end{cases}$

ដោយ (ℓ) កាត់តាម $D(5\,,\,3\,,\,-1)$

នោះ $x_0=5\,,\,y_0=3\,,\,z_0=-1$

ហើយ (ℓ) កែងនឹងប្លង់ (P) នោះ (ℓ) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ $\vec{u}=(5\,,\,-3\,,\,10)$

នោះ $a=5\,,\,b=-3\,,\,c=10$

ដូចនេះ បន្ទាត់ត្រូវរករាង $\boxed{(\ell):\begin{cases}x=5+5t\\y=3-3t\quad,\,t\in\mathbb{R}\\z=-1+10t\end{cases}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

គ. សរសេរសមីការស្វ៊ែផ្ចិត D ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P)

ដោយស្វ៊ែ (S) ប៉ះប្លង់ (P) នោះកាំស្វ៊ែជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅប្លង់

(P) នាំឱ្យ $R=d\left(D,(P)\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $D(5\,,3\,,-1)$ និង $(P):\ 5x-3y+10z=0$

$$R=\frac{\left|5\cdot5-3\cdot3+10(-1)\right|}{\sqrt{5^2+(-3)^2+10^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{134}}\Rightarrow R^2=\frac{36}{134}=\frac{18}{67}$$

សមីការស្វ៊ែរាង $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

មានផ្ចិត $D(5\,,3\,,-1)$ នោះ $a=5\,,b=3\,,c=-1$

គេបាន $(S):(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\dfrac{18}{67}$

ដូចនេះ $\boxed{(S):(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\dfrac{18}{67}}$ ។

VI. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃ f

គេមាន $f(x)=3\sin x-2\sin^3 x$

• ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

• ខួបអនុគមន៍ $P=2\pi$ ព្រោះ $\forall x\in D$ គេបាន ៖

$$f(x+2\pi)=3\sin(x+2\pi)-2\sin^3(x+2\pi)$$
$$=3\sin x-2\sin^3 x=f(x)$$

• ភាពគូ-សេស : f ជាអនុគមន៍ សេស ព្រោះ ៖

$$f(-x)=3\sin(-x)-2\sin^3(-x)$$
$$=-3\sin x+2\sin^3 x$$
$$=-\left(3\sin x-2\sin^3 x\right)=-f(x)$$

នាំឱ្យ ក្រាបតាងអនុគមន៍ f មានគល់ O ជាផ្ចិតឆ្លុះ

ហេតុនេះ គេសិក្សាតែក្នុងចន្លោះ $[0\,,\pi]$

• ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x)=3\cos x-6\cos x\sin^2 x$

$$=3\cos x\left(1-2\sin^2 x\right)$$
$$=3\cos x\left(\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin^2 x\right)$$
$$=3\cos x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$$

គេឱ្យ $f'(x)=0$ ដើម្បីរកឫស

សមមូល $\left[\begin{array}{l}3\cos x=0\\ \cos x-\sin x=0\\ \cos x+\sin x=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi/2\\ x=\pi/4\\ x=3\pi/4\end{array}\right.$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\cos x-\sin x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\cos x+\sin x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

-ត្រង់ $x=\pi/4$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាស្មើ $f(\pi/4)=\sqrt{2}$

-ត្រង់ $x=\pi/2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាស្មើ $f(\pi/2)=1$

-ត្រង់ $x=3\pi/4$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

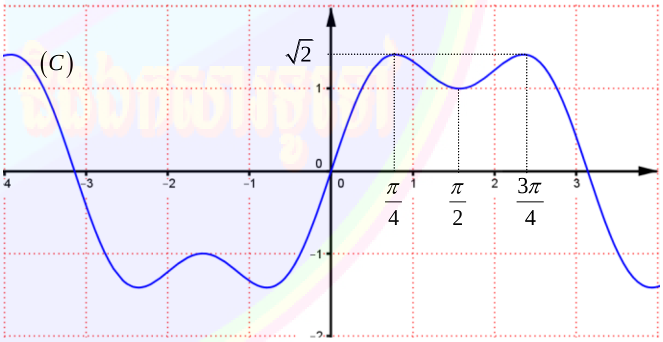
បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាស្មើ $f(3\pi/4)=\sqrt{2}$

• តារាងអថេរភាព

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	0

• សង់ក្រាប

ដំបូងសង់តែក្នុងចន្លោះ $[0\,,\pi]$ រួចសង់ក្រាបឆ្លុះធៀបគល់ O



ខ. រកចំនួនពិត a និង b

បើ F ជាព្រីមីទីវនៃ f នោះគេបាន

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(3\sin x-2\sin^3 x\right)dx$$
$$=\int\sin x\left(3-2\sin^2 x\right)dx=\int\sin x\left(1+2\cos^2 x\right)dx$$
$$=\int\sin x\,dx+2\int\sin x\cos^2 x\,dx$$
$$=-\cos x-2\int(\cos x)'\cos^2 x\,dx=-\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$$

ផ្ទឹមនឹង $F(x)=a\cos x+b\cos^3 x$ នោះ $a=-1\,,b=-\dfrac{2}{3}$

ដូចនេះ រកបានចំនួនពិត $\boxed{a=-1\ ,\ b=-2/3}$

Facebook.com/document4khmer
document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០០៩

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $z^2-(5-i)z+8-i=0$ ។

ខ. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=29x^2+6x+2010$ ។ បើ $a>0\,,\,b>0$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ត្រីកោណកែងមួយមានប្រវែងអ៊ីប៉ូតេនុស 5dm ។ កំណត់ប្រវែងជ្រុងនៃមុំកែងរបស់ត្រីកោណកែង ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡារបស់វាមានតម្លៃអតិបរមា ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. ក. ចូរកំណត់ចំនួនថេរ a និង b ដើម្បីឱ្យចំពោះគ្រប់ x គេបាន $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x(x+1)}+\dfrac{b}{(x+1)(x+2)}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+.......+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

IV. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលក្រហម 3 ប៊ូលខ្មៅ 3 និងប៊ូលស 3 ។ គេចាប់យកប៊ូល 3 ពីក្នុងថង់ ដោយយកម្តងមួយៗ ហើយមិនដាក់វិញ ។

ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់យកបានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់យកបានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(1\,,4\,,3)\,,\,B(2\,,11\,,4)\,,\,C(-3\,,-5\,,4)$ ។

ក. បង្ហាញថា បីចំណុច $A\,,B$ និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច $A\,,B\,,C$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(ax+b)$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=-1$ និងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y=\ln2$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ចំពោះតម្លៃ a និង b ដែលរកឃើញ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=-\dfrac{3}{2}$ និងបន្ទាត់ $x=0$ ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៩

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច :

គេមាន $z^2-(5-i)z+8-i=0$

$$\Delta=\left[-(5-i)\right]^2-4\cdot1\cdot(8-i)$$
$$=25-10i+i^2-32+4i$$
$$=25-10i+i^2-32+4i$$
$$=-8-6i=(3i)^2-6i+1$$
$$=(3i-1)^2$$

នាំឱ្យ $z=\dfrac{(5-i)\pm(3i-1)}{2}=\left[\begin{array}{l}2+i\\3-2i\end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{z=2+i\ ,\ z=3-2i}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)$

គេមាន $f(x)=29x^2+6x+2010$

នាំឱ្យ $f'(x)=58x+6$

ចំពោះ $x>0$ នោះ $f'(x)=58x+6>0$

មានន័យថា f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(0\,,+\infty)$

គេបាន បើ $0<x_1<x_2$ នោះ $f(x_1)<f(x_2)$

ម្យ៉ាងទៀត ចំពោះ $a>0\,,b>0$ គេបាន ៖

$$0<\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}\quad(1)$$
$$0<\frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b}\quad(2)$$

បូកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) គេបាន ៖

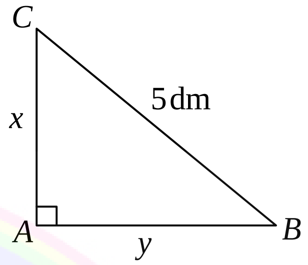
$$0<\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$
$$0<\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$

នាំឱ្យ $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)}$ ។

II. កំណត់ប្រវែងជ្រុងនៃមុំកែងរបស់ត្រីកោណកែង :

តាង $x\,,\,y>0$ ជាជ្រុងជាប់មុំកែង គិតជា dm ដូចរូប ៖



តាមពីតាគ័រ $y=\sqrt{25-x^2}$ ដែល $0<x<5$

ផ្ទៃត្រីកោណ $S=\dfrac{1}{2}xy$ ឬ $S(x)=\dfrac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}$

នាំឱ្យ $S'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{25-x^2}+\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$$
$$=\frac{25-x^2-x^2}{2\sqrt{25-x^2}}=\frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$$

ឱ្យ $f'(x)=0$ សមមូល $\dfrac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}=0$

នាំឱ្យ $25-2x^2=0$ នោះ $x=\pm\dfrac{5}{\sqrt2}=\pm\dfrac{5\sqrt2}{2}$

ហើយ $S\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)\sqrt{25-\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)^2}=\dfrac{25}{4}$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{5\sqrt2}{2}$		0		$\frac{5\sqrt2}{2}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

•ត្រង់ $x=\dfrac{5\sqrt2}{2}$, $S'(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា S មានតម្លៃអតិបរមាមួយស្មើ $25/4$ ។

គេបាន $y=\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt2}{2}$

ដូចនេះ ជ្រុងជាប់មុំកែង $\boxed{x=y=\dfrac{5\sqrt2}{2}\,\text{dm}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com
Facebook.com/document4khmer

III. ក. កំណត់ចំនួនថេរ a និង b : (លំហាត់ដូចគ្រូបឋមឆ្នាំ 2004)

គេមាន $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x(x+1)}+\dfrac{b}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{a(x+2)+bx}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{(a+b)x+2a}{x(x+1)(x+2)}$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}a+b=0\\2a=1\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{2}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក

គេតាង $S=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+.......+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

គេមាន $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1/2}{x(x+1)}+\dfrac{-1/2}{(x+1)(x+2)}$

$\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$

យក $x=1,2,3,\dots,n$ គេបាន ៖

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{2\cdot3}\right]\\[2mm]\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2\cdot3}-\dfrac{1}{3\cdot4}\right]\\[2mm]\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3\cdot4}-\dfrac{1}{4\cdot5}\right]\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\end{cases}$$

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)}$ ។

IV. ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់យកបានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា :

គេមាន ប៊ូលក្រហម 3 , ខ្មៅ 3 ,ស 3

គេចាប់ ប៊ូល 3 ពីក្នុងថង់ ម្តងមួយៗ ហើយមិនដាក់វិញ

ចាប់បានឃ្លី 3 ពណ៌ដូចគ្នា អាចក្រហម 3ឬខ្មៅ 3 ឬស 3

គេបាន $P(\text{ពណ៌ដូចគ្នា})=P(\text{ក្រ}.3)+P(\text{ខ្មៅ}3)+P(\text{ស}3)$

$=\left(\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{1}{28}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\text{ពណ៌ដូចគ្នា})=\dfrac{1}{28}}$ ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់យកបានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌

ចាប់បានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌ អាចជា ៖

កខស ឬ កសខ ឬ ខកស ឬ ខសក ឬ សកខ ឬ សខក

(ដែល ក=ពណ៌ក្រហម , ខ=ពណ៌ខ្មៅ , ស=ពណ៌ស)

ដោយប្រូបាបនៃករណីនីមួយៗមានសតម្លៃស្មើៗគ្នា $\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{3}{7}$

គេបាន $P(\text{ប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌})=6\left(\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{3}{7}\right)=\dfrac{9}{28}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\text{ប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌})=\dfrac{9}{28}}$ ។

V. ក. បង្ហាញថា បីចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ

គេមាន $A(1,4,3)$, $B(2,11,4)$, $C(-3,-5,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(1,7,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-4,-9,1)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&7&1\\-4&-9&1\end{vmatrix}=16\vec{i}-5\vec{j}+19\vec{k}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=16\vec{i}-5\vec{j}+19\vec{k}\neq\vec{0}$

នាំឱ្យ A , B , C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដូចនេះ $\boxed{\text{បីចំណុច } A , B \text{ និង } C \text{ មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ}}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A , B , C

ប្លង់ (P) រាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (P) កាត់តាមចំណុច $A(1,4,3)$

នាំឱ្យ $x_0=1$, $y_0=4$, $z_0=3$

ហើយ (P) កាត់បីចំណុច A , B , C នោះ (P) មានវ៉ិចទ័រ ណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=16\vec{i}-5\vec{j}+19\vec{k}$

នាំឱ្យ $a=16$, $b=-5$, $c=19$

គេបាន $(P)\ :\ 16(x-1)-5(y-4)+19(z-3)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):16x-5y+19z-53=0}$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{16^2+(-5)^2+19^2}=\sqrt{642}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{642}}{2}\text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com
Facebook.com/document4khmer
document4khmer.wordpress.com

VI. ក. កំណត់តម្លៃ a និង b :

គេមាន $f(x)=\ln(ax+b)$ មានខ្សែកោង (C)

ដោយ ខ្សែកោង (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=-1$

និងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y=\ln 2$

គេបាន $\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(0)=\ln 2 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} \ln(-a+b)=0 \\ \ln b=\ln 2 \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} -a+b=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=1\,,\,b=2}$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f

ចំពោះ: $a=1\,,\,b=2$ នោះ: $f(x)=\ln(x+2)$

• ដែនកំណត់ $x+2>0$ នោះ: $x>-2$

នាំឱ្យ $D=(-2\,,+\infty)$

• លីមីត $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\ln(x+2)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+2)=+\infty$

• អាស៊ីមតូត ដោយ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមាន

សមីការ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

• ទិសដៅអថេរភាព : ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}$

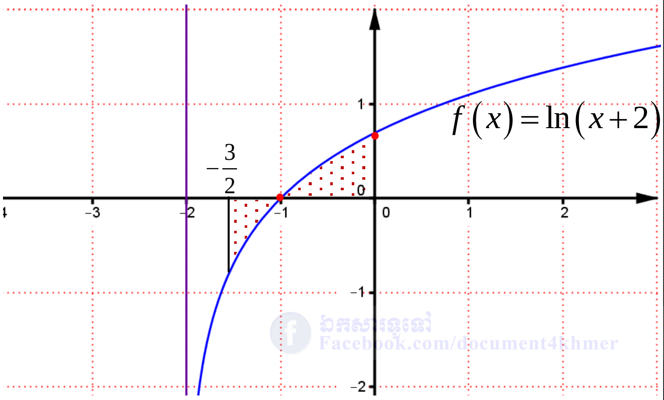
ចំពោះ: $x>-2$ នោះ: $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}>0$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ: $D=(-2\,,+\infty)$

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	-2 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

• សង់ក្រាប



➤គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់

តាមក្រាប គេបានផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយ

$$S=-\int_{-3/2}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{0} f(x)dx$$

$$=-\int_{-3/2}^{-1}\ln(x+2)dx+\int_{-1}^{0}\ln(x+2)dx$$

គណនា $\int \ln(x+2)dx$ តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

គេតាង $u=\ln(x+2) \Rightarrow du=\dfrac{1}{x+2}dx$

$dv=dx \Rightarrow v=x$

តាមរូបមន្ត $\int udv=uv-\int vdu$

គេបាន $\int \ln(x+2)dx$

$$=x\ln(x+2)-\int\frac{x}{x+2}dx$$

$$=x\ln(x+2)-\int\frac{x+2-2}{x+2}dx$$

$$=x\ln(x+2)-\int\left(1-2\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=x\ln(x+2)-x+2\ln(x+2)+c$$

$$=(x+2)\ln(x+2)-x+c$$

នាំឱ្យ $\int_{-3/2}^{-1}\ln(x+2)dx$

$$=\left[(x+2)\ln(x+2)-x\right]_{-3/2}^{-1}$$

$$=(0+1)-\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$$

ហើយ $\int_{-1}^{0}\ln(x+2)dx$

$$=\left[(x+2)\ln(x+2)-x\right]_{-1}^{0}$$

$$=(2\ln 2-0)-(0+1)=2\ln 2-1$$

$$S=-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right)+(2\ln 2-1)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+2\ln 2-1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2+2\ln 2-1=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ } S=\dfrac{3\ln 2-1}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០១០

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. គេឱ្យចំនួនពិត α មួយដែល $-\pi<\alpha<\pi$ ។

ក. បង្ហាញថា $\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)=-4\cos^4\dfrac{\alpha}{2}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $Z^2-2Z\sin\alpha+2(1+\cos\alpha)=0$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

II. ចតុកោណកែងមួយមានផ្ទៃក្រឡា $2500\,\mathrm{m}^2$ ។ រកប្រវែងជ្រុងនៃចតុកោណកែង ដើម្បីឱ្យវាមានបរិមាត្រតូចបំផុត ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-y=0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) បើដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយកាត់អ័ក្ស $(y'y)$ ត្រង់ចំណុច $y=4$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចនេះ ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $(D): y=2x-4$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

IV. គេទាញយកអក្សរ បួន ពីតួអក្សរនៃពាក្យ STATISTIQUE ។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលមានពាក្យ SITE តាមលំដាប់នៃតួអក្សរ បើគេទាញយកម្តងមួយៗ ក្នុងករណីទាំងពីរខាងក្រោម ៖

ក. គេមិនដាក់ទៅវិញទេនូវតួអក្សរដែលទាញយកមកហើយ ។

ខ. គេដាក់ទៅវិញនូវតួអក្សរដែលទាញយកមកហើយ មុននឹងទាញយកតួអក្សរមួយទៀត ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ នៃលំហគេមានចំណុច $A(6,4,-2)$, $B(6,2,0)$, $C(4,2,-2)$ ។

ក. បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ខ. គេឱ្យចំណុច $S(3,y,z)$ ។ គណនាតម្លៃ y និង z ដើម្បីឱ្យ $SABC$ ជាពីរ៉ាមីតនិយ័តមានកំពូល S ។ **(២ពិន្ទុ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ f មានអថេរ x កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា អនុគមន៍ f កំណត់លើសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ខុសពីសូន្យ ។

ខ. បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស ។

គ. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $]0,+\infty[$ រួចទាញរកទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $]-\infty,0[$ ។

ឃ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=\dfrac{2}{3}$ ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០១០

I. ក. បង្ហាញថា $\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}$:

របៀបទី១ $\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)$

$$=\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-2\cdot2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$=4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$$

$$=-4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$ ។

របៀបទី២ $\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)$

$$=(1-\cos^2\alpha)-2-2\cos\alpha$$

$$=-\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1$$

$$=-(\cos x+1)^2$$

$$=-\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^2=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

គេមាន $Z^2-2Z\sin\alpha+2(1+\cos\alpha)=0$

$$\Delta'=(-\sin\alpha)^2-2(1+\cos\alpha)$$

$$=\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

នាំឱ្យ $Z=\dfrac{\sin\alpha\pm\sqrt{-4\cos^4\frac{\alpha}{2}}}{1}=\sin\alpha\pm2i\cos^2\frac{\alpha}{2}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{Z=\sin\alpha\pm2i\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ ។

II. រកប្រវែងជ្រុងនៃចតុកោណកែង :

គេតាង x ជាបណ្ដោយ , $x>0$

y ជាទទឹង , $y>0$

(រូប៖ ចតុកោណកែង ជ្រុង x និង y , $xy=2500$)

គេបាន $xy=2500$ នោះ $y=\frac{2500}{x}$

បរិមាត្រ $P=2(x+y)$ នោះ $P(x)=2\left(x+\frac{2500}{x}\right)$

នាំឱ្យ $P'(x)=2\left(1-\frac{2500}{x^2}\right)=2\left(\frac{x^2-2500}{x^2}\right)$

ឱ្យ $P'(x)=0\Leftrightarrow2\left(\frac{x^2-2500}{x^2}\right)=0$

នាំឱ្យ $x^2-2500=0$ នោះ $x=\pm50$

តារាងសញ្ញា $P'(x)$

x	$-\infty$	-50	0	50	$+\infty$
$P'(x)$	$+$ (ឆូត)	0 (ឆូត)	$-$ (ឆូត) ‖ $-$	0	$+$

•ត្រង់ $x=50$, $P'(x)=0$ និងប្ដូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា P មានតម្លៃតូចបំផុតមួយ ។

គេបាន $y=\frac{2500}{x}=\frac{2500}{50}=50$ m

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រវែងបណ្ដោយ}=\text{ប្រវែងទទឹង}=50\text{m}}$ ។

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

គេមាន $(E): y''-y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-1=0$ នោះ $\lambda=\pm1$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $y=Ae^{\lambda_1x}+Be^{\lambda_2x}$, A , B ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{y=Ae^{-x}+Be^{x}}$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)

គេមាន $y=Ae^{-x}+Be^{x}$ នាំឱ្យ $y'=-Ae^{-x}+Be^{x}$

ដោយ ក្រាបនៃចម្លើយកាត់អ័ក្ស $(y'y)$ ត្រង់ចំណុច $y=4$

នោះ $y(0)=4$

ហើយ បន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ ចំណុចនេះ គឺ $(0,4)$ ស្របទៅ

នឹងបន្ទាត់ $(D): y=2x-4$ នោះ $y'(0)=2$

គេបាន $\begin{cases}Ae^{-0}+Be^{0}=4\\-Ae^{-0}+Be^{0}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=4\\-A+B=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=3\\A=1\end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយមួយនៃ (E) កំណត់បានតាមលក្ខខណ្ឌគឺ

$\boxed{y=e^{-x}+3e^{x}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

IV. គណនាប្រូបាបចាប់បាន SITE តាមលំដាប់ នៃតួអក្សរ :

ក. គេមិនដាក់ទៅវិញទេនូវតួអក្សរដែលទាញយកមកហើយ

គេមាន តួអក្សរនៃពាក្យ STATISTIQUE មាន 11 អក្សរ

គេបាន $P(\text{SITE})=\frac{2}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{660}$

ដូចនេះ ករណីចាប់ហើយមិនដាក់វិញ $\boxed{P(\text{SITE})=\frac{1}{660}}$ ។

ខ. គេដាក់ទៅវិញមុនយកអក្សរមួយទៀត

ករណីចាប់ហើយដាក់វិញ នោះចំនួនករណីអាចគឺនៅដដែល មិនប៉ះពាល់ដល់ការចាប់លើកក្រោយៗទៀត

គេបាន $P(\text{SITE})=\frac{2}{11}\times\frac{2}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{1}{11}=\frac{12}{14641}$

ដូចនេះ ករណីចាប់ហើយដាក់វិញ $\boxed{P(\text{SITE})=\frac{12}{14641}}$ ។

V. ក. បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស :

គេមាន $A(6,4,-2)\,,\,B(6,2,0)\,,\,C(4,2,-2)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(0,-2,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,-2,0)$ និង

$\overrightarrow{BC}=(-2,0,-2)$

គេបាន $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

ដោយ ΔABC មាន $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\boxed{ABC \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$ ។

ខ. គណនាតម្លៃ y និង z

គេមាន $S(3,y,z)$ នោះ $\overrightarrow{SA}=(-3,y-4,z+2)$

$\overrightarrow{SB}=(-3,y-2,z)$, $\overrightarrow{SC}=(-1,y-2,z+2)$

នាំឱ្យ $SA=\left|\overrightarrow{SA}\right|=\sqrt{(-3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2}$

$SB=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(y-2)^2+z^2}$

$SC=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2}$

ដោយ $SABC$ ជាពីរ៉ាមីតនិយ័តនោះ $SB=SC=SA$

$$\sqrt{(-3)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{(-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2}$$

$$9+(y-2)^2+z^2=1+(y-2)^2+(z+2)^2$$

$$8+z^2=z^2+4z+4$$

$$z=1$$

ចំពោះ $SA=SB$ និង $z=1$ គេបាន ៖

$$\sqrt{(-3)^2+(y-4)^2+3^2}=\sqrt{(-3)^2+(y-2)^2+1^2}$$

$$9+(y-4)^2+9=9+(y-2)^2+1$$

$$8+(y-4)^2=(y-2)^2$$

$$8+y^2-8y+16=y^2-4y+4$$

$$-4y+20=0$$

$$y=5$$

ដូចនេះ គណនាបានតម្លៃ $\boxed{y=5\,,\,z=1}$ ។

VI. ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ខុសពីសូន្យ :

គេមាន $f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}$ មានន័យ លុះត្រាតែ $5^{2x}-1\neq 0$

នាំឱ្យ $5^{2x}\neq 1$ ឬ $5^{2x}\neq 5^0$ នោះ $x\neq 0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ កំណត់លើ } \mathbb{R}-\{0\}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស

គេមាន $f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}$

$$f(-x)=\frac{5^{-x}}{5^{-2x}-1}=\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^{2x}}-1}=\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1-5^{2x}}{5^{2x}}}$$

$$=\frac{1}{5^x}\times\frac{5^{2x}}{1-5^{2x}}=\frac{5^x}{1-5^{2x}}=-\frac{5^x}{5^{2x}-1}=-f(x)$$

ដោយ $f(-x)=-f(x)$ នោះ f ជាអនុគមន៍សេស

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍សេស}}$ ។

គ. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $]0,+\infty[$

គេមាន $f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}$ សិក្សាលើចន្លោះ $]0,+\infty[$

• លីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{5^x}{5^{2x}-1}=\frac{5^0}{0^+}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{5^{2x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{5^{2x}}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x}{5^{2x}-1}=\frac{0}{-1}=0$$

• អាស៊ីមតូត : ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមាន សមីការ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

• ទិសដៅអថេរភាព :

ដេរីវេ តាមរូបមន្ត $y=a^{u(x)} \Rightarrow y'=u'(x)a^{u(x)}\ln a$

www.document4khmer.wordpress.com

ដោយ $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$ នោះគេបាន ៖

$$f'(x)=\frac{\left(5^x\right)'\left(5^{2x}-1\right)-\left(5^{2x}-1\right)'\left(5^x\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{5^x\ln 5\cdot\left(5^{2x}-1\right)-2\cdot 5^{2x}\ln 5\cdot\left(5^x\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{5^x\ln 5\cdot\left[5^{2x}-1-2\cdot 5^{2x}\right]}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

$$=-\frac{5^x\ln 5\cdot\left(5^{2x}+1\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}<0\ ,\ \forall x\in D$$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$, $f'(x)<0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $]0\,,+\infty[$ និងចន្លោះ $]-\infty\,,0[$

• តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$

ដោយ f ជាអនុគមន៍សេស មានគល់ O ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប គេទាញបាន ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $]-\infty\,,0[$ ដូចខាងក្រោម :

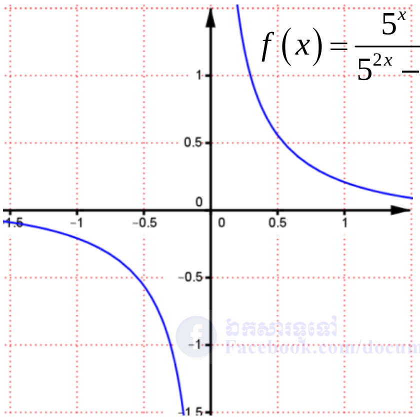
-បើ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

-បើ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ នោះ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

• សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f



ឃ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=\dfrac{2}{3}$

គេបាន $\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=\dfrac{2}{3}$ (សមីការមានន័យ $x\neq 0$)

$3\cdot 5^x=2\cdot 5^{2x}-2$

$-2\cdot 5^{2x}+3\cdot 5^x+2=0$

គេតាង $t=5^x$ ដែល $t>0$

គេបាន $-2t^2+3t+2=0$

$\Delta=9+16=25=5^2$

$t=\dfrac{-3\pm 5}{2(-2)}=\left[\begin{array}{l}2\\-1/2\end{array}\right.$

ចំពោះ $t=-\dfrac{1}{2}$ មិនយក ព្រោះ $t>0$

ចំពោះ $t=2$ សមមូល $5^x=2$ នាំឱ្យ $x=\log_5 2$

ដូចនេះ **សមីការមានឫស $x=\log_5 2$** ។

www.document4khmer.wordpress.com
ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០១១

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែល z , $\frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស និងជាអនុគមន៍កើន ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $I=\int_{-2}^{2}(4-x^2)(2+x)^n\,dx$ ។

ខ. $J=\int_{6}^{8}\frac{x}{x^2-6x+8}\,dx$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេមានថង់បួន A , B , C និង D ។ ក្នុងថង់ A មានប៊ូលស 30 ។ ក្នុងថង់ B មានប៊ូលខ្មៅ 40 ។ ក្នុងថង់ C មានប៊ូលស 10 និងប៊ូលពណ៌ក្រហម 25 ។ ក្នុងថង់ D មានប៊ូលស 5 ប៊ូលពណ៌ខៀវ 3 និងប៊ូលពណ៌ក្រហម 2 ។ គេដាក់ថង់ទាំងបួននៅក្នុងថង់ធំមួយ ។ គេចាប់យកដោយចៃដន្យនូវថង់មួយចេញពីថង់ធំ ហើយលូកយកប៊ូលមួយចេញពីថង់នោះ ។ គណនាប្រូបាប ដើម្បីឱ្យប៊ូលដែលគេលូកយកចេញមានពណ៌ស ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យបន្ទាត់ ℓ មួយដែលកំណត់ដោយ $x=t$, $y=-3+3t$, $z=-2+2t$ និងប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមបន្ទាត់ ℓ និងកាត់តាមចំណុច $A(1,2,1)$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងអ័ក្ស $z'oz$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-2}$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f ។

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (C) ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 2 ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្ស $x'ox$ និងបន្ទាត់ $x=3$ និង $x=4$ ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសមធ្យម ឆ្នាំ ២០១១

I. **ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច :**

គេមាន $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$

$$\Delta=\left[-(5-i)\right]^2-4(2+i)(2-2i)$$
$$=25-10i+i^2-16+16i-8i+8i^2$$
$$=-2i=1-2i+i^2=(1-i)^2$$

នាំឱ្យ $x=\dfrac{(5-i)\pm\sqrt{(1-i)^2}}{2(2+i)}=\dfrac{5-i\pm(1-i)}{2(2+i)}$

$$=\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-i}{2+i}=\dfrac{(3-i)(2-i)}{2^2-i^2}=\dfrac{6-3i-2i+i^2}{5}\\ \dfrac{2}{2+i}=\dfrac{2(2-i)}{2^2-i^2}=\dfrac{4-2i}{5}\end{array}\right.$$

$$=\left[\begin{array}{l}1-i\\ \dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i\end{array}\right.$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=1-i\ ,\ x=\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i}$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z (លំហាត់ដូចគ្រូបឋមឆ្នាំ ២០០៦)

គេតាង $z=a+bi$

នាំឱ្យ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$

$1-z=(1-a)-bi$

គេបាន $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$|1-z|=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$

ដោយ z , $\dfrac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា គេបាន ៖

$$\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$$

នាំឱ្យ $\begin{cases}a^2+b^2=1 & (1)\\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2} & (2)\end{cases}$

តាម (2) $a^2+b^2=(1-a)^2+b^2$

$a^2=1-2a+a^2$ នាំឱ្យ $a=1/2$

តាម (1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+b^2=1\ \Rightarrow\ b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ កំណត់បានចំនួនកុំផ្លិច $\boxed{z=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$ ។

II. **ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f :**

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}1+x^2\geq 0 & (1)\\ x+\sqrt{1+x^2}>0 & (2)\end{cases}$

តាម (1) $1+x^2\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

តាម (2) $x+\sqrt{1+x^2}>0$ ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}$

$1+x^2>x^2$

$\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}$

$x+\sqrt{1+x^2}>x+|x|$

តែ $\forall x\in\mathbb{R}$, $x+|x|\geq 0$

នាំឱ្យ $x+\sqrt{1+x^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានដែនកំណត់ } D=\mathbb{R}}$ ។

ខ. ➢បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

នាំឱ្យ $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)$

$$=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$
$$=\ln\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}$$
$$=\ln\dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1}$$
$$=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)$$

ដោយ $f(-x)=f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍សេស}}$ ។

➢បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើន

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

តាមរូបមន្ត $y=\ln(u)\ \Rightarrow\ y'=\dfrac{u'}{u}$

នាំឱ្យ $f'(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+\dfrac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$ នាំឱ្យ $f'(x)>0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍កើន } \forall x\in\mathbb{R}}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

$$\mathbf{I}=\int_{-2}^{2}(4-x^2)(2+x)^n\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(2-x)(2+x)(2+x)^n\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(2-x)(2+x)^{n+1}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(4-2-x)(2+x)^{n+1}\,dx$$

$$=4\int_{-2}^{2}(2+x)^{n+1}\,dx-\int_{-2}^{2}(2+x)^{n+2}\,dx$$

$$=4\int_{-2}^{2}(2+x)'(2+x)^{n+1}\,dx-\int_{-2}^{2}(2+x)'(2+x)^{n+2}\,dx$$

$$=4\left[\frac{(2+x)^{n+2}}{n+2}\right]_{-2}^{2}-\left[\frac{(2+x)^{n+3}}{n+3}\right]_{-2}^{2}$$

$$=4\left(\frac{4^{n+2}}{n+2}-0\right)-\left(\frac{4^{n+3}}{n+3}-0\right)=\frac{4^{n+3}}{n+2}-\frac{4^{n+3}}{n+3}$$

$$=4^{n+3}\left(\frac{n+3-n-2}{(n+2)(n+3)}\right)=\boxed{\frac{4^{n+3}}{(n+2)(n+3)}}$$

$$\mathbf{J}=\int_{6}^{8}\frac{x}{x^2-6x+8}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{6}^{8}\frac{2x-6+6}{x^2-6x+8}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{6}^{8}\frac{2x-6}{x^2-6x+8}dx+\int_{6}^{8}\frac{6}{x^2-6x+8}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{6}^{8}\frac{(x^2-6x+8)'}{x^2-6x+8}dx+6\int_{6}^{8}\frac{1}{(x-2)(x-4)}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left[\ln\left|x^2-6x+8\right|\right]_{6}^{8}-3\int_{6}^{8}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}\right)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left[\ln\left|x^2-6x+8\right|\right]_{6}^{8}-3\left[\ln\left|\frac{x-2}{x-4}\right|\right]_{6}^{8}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln24-\ln8-3\left(\ln\frac{3}{2}-\ln2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln3-3(\ln3-2\ln2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[6\ln2-2\ln3\right]=\boxed{3\ln2-\ln3}$$

IV. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលដែលគេលូកយកចេញមានពណ៌ស :

គេមាន ថង់ A មានប៊ូល ស 30

ថង់ B មានប៊ូល ខ្មៅ 40

ថង់ C មានប៊ូល ស 10 , ក្រហម 25

ថង់ D មានប៊ូល ស 5 , ខៀវ 3 និង ក្រហម 2

ដើម្បីយកឱ្យបានឃ្លីស គេត្រូវចាប់ឱ្យបានថង់មួយ និងចាប់បាន ឃ្លីស គេបាន ៖

$P($ឃ្លីស$)=P(A$ ស$)+P(C$ ស$)+P(D$ ស$)$

$$=\left(\frac{1}{4}\times\frac{30}{30}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{10}{35}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{5}{10}\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{8}=\frac{25}{56}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ប្រូបាបយកបានឃ្លីស } P(\text{ឃ្លីស})=\frac{25}{56}}$ ។

V. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងអ័ក្ស $z'oz$:

គេមាន $(\ell): x=t\ ,\ y=-3+3t\ ,\ z=-2+2t\ ,\ t\in\mathbb{R}$

ប្លង់ (P) កាត់តាមបន្ទាត់ ℓ និងកាត់ $A(1,2,1)$

ដោយ (ℓ) កាត់តាមចំណុចតាង $B(0,-3,-2)$ និងប្លង់ (P) កាត់តាមបន្ទាត់ (ℓ) នោះ (P) កាត់ B ដែរ

ហេតុនេះ (P) ជាប្លង់កាត់ A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ដែល

$\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (ℓ)

គេមាន $\vec{u}=(1,3,2)$ និង $\overrightarrow{AB}=(-1,-5,-3)$

$$\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&3&2\\-1&-5&-3\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$$

នាំឱ្យ $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$(x-1)+(y-2)-2(z-1)=0$

ដោយ $(P)\cap(z'oz)$ នោះ $x=0\ ,\ y=0$

គេបាន $(0-1)+(0-2)-2(z-1)=0$ នោះ $z=-1/2$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ចំណុចប្រសព្វ}(P)\text{នឹងអ័ក្ស } z'oz \text{ គឺ } \left(0,0,-\frac{1}{2}\right)}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

VI. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f :

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ មានខ្សែកោង (C)

• ដែនកំណត់ : f មានន័យលុះត្រាតែ $x-2\neq 0$ ឬ $x\neq 2$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=(-\infty\,,2)\cup(2\,,+\infty)$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\pm\infty$ នោះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}=x-1-\dfrac{1}{x-2}$ ហើយ

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

• ទិសដៅអថេរភាព : ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{(x^2-3x+1)'(x-2)-(x-2)'(x^2-3x+1)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(2x-3)(x-2)-(x^2-3x+1)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-7x+6-x^2+3x-1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}=1+\frac{1}{(x-2)^2}>0\ ,\ \forall x\in D$$

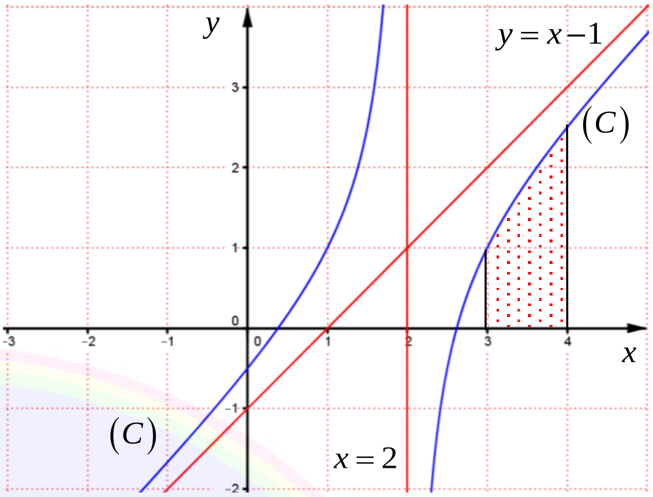
នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើ D គ្មានបរមាទេ

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty\nearrow+\infty$	‖	$-\infty\nearrow+\infty$

• ចិតឆ្លុះ : ចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតគឺ $(2,1)$

• សង់ក្រាប អាស៊ីតមតូត



ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (C)

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 2 នោះ $f'(x)=2$

គេបាន $1+\dfrac{1}{(x-2)^2}=2$ ឬ $(x-2)^2=1$ នោះ $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

គេរកបាន $f(1)=1$ និង $f(3)=1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

• ករណីប៉ះត្រង់ $(1\,,1)$ គេបាន $y=2(x-1)+1=2x-1$

• ករណីប៉ះត្រង់ $(3\,,1)$ គេបាន $y=2(x-3)+1=2x-5$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{បន្ទាត់ប៉ះគឺ } y=2x-1 \text{ និង } y=2x-5}$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S

ផ្ទៃខណ្ឌដោយ (C) អ័ក្ស $x'ox$ និងបន្ទាត់ $x=3$ និង $x=4$

$$S=\int_3^4 f(x)\,dx=\int_3^4\left(x-1-\frac{1}{x-2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-x-\ln|x-2|\right]_3^4$$

$$=(8-4-\ln2)-\left(\frac{9}{2}-3-0\right)$$

$$=4-\ln2-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}-\ln2$$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{គណនាបាន } S=\dfrac{5}{2}-\ln2 \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com
ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ២៥ តុលា ២០១២

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. **(៣ ពិន្ទុ)** គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ក. គណនាកន្សោម $A=1+z_1+z_1^2$ ។

ខ. សរសេរ z_1 , z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ គណនា $z_1^{2010}+z_2^{2010}$ ។

II. **(២ ពិន្ទុ)** ក. ដោះស្រាយសមីការ $2y''-3y'+y=0 \quad (E)$ ។

ខ. រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=2x+1$ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ ។

III. **(៣ ពិន្ទុ)** គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$, $x\neq-1$, $x\neq3$ ។

ក. រក A , B និង C ដែល $f(x)=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}$ ។

ខ. គណនា $I=\int f(x)dx$ ។

IV. **(៣ ពិន្ទុ)** គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ 2 គ្រាប់ព្រមគ្នា ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយមានពណ៌ខៀវ និងមួយទៀតពណ៌ក្រហម ។ រកប្រូបាប ៖

ក. លេខចេញលើគ្រាប់ពណ៌ខៀវ ស្មើនឹង 2 ដងនៃលេខចេញលើគ្រាប់ពណ៌ក្រហម ។

ខ. ផលបូកលេខលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរស្មើនឹង 5 ។

V. **(៤ ពិន្ទុ)** ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានស្វ៊ែ $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ (S) ជាមួយ $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$ ។

ខ. តាង A_1 , A_2 ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (S) និង $\overrightarrow{Ox}$ ។ រកសមីការប្លង់ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A_1 និង A_2 ។

VI. **(៥ ពិន្ទុ)** f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}$ និងមានក្រាប (C) ។

ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា ។

ខ. រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C)ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប(C)ត្រង់ចំណុចនោះ ។

គ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះនោះ ។

www.document4khmer.wordpress.com
ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសមធ្យម ឆ្នាំ ២០១២

I. **ក. គណនាកន្សោម** $A=1+z_1+z_1^2$:

គេមាន $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

នាំឱ្យ $z_1^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

គេបាន $A=1+z_1+z_1^2$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

ដូចនេះ គណនាបានកន្សោម $\boxed{A=0}$ ។

ខ. សរសេរ z_1 , z_2 **ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ**

ដោយ $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$

និង $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}}$

➢**គណនា** $z_1^{2010}+z_2^{2010}$

- $z_1^{2010}+z_2^{2010}$

$=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{2010}+\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{2010}$

$=(\cos 1340\pi+i\sin 1340\pi)+(\cos 2680\pi+i\sin 2680\pi)$

$=(\cos 0+i\sin 0)+(\cos 0+i\sin 0)$

$=(1+0i)+(1+0i)=2$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{z_1^{2010}+z_2^{2010}=2}$ ។

II. **ក. ដោះស្រាយសមីការ** (E) :

គេមាន $(E): 2y''-3y'+y=0$

សមីការសម្គាល់ $2\lambda^2-3\lambda+1=0$ មានឫស $\lambda=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$, A,B ថេរ

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $\boxed{y=Ae^{x}+Be^{\frac{1}{2}x}}$ ។

ខ. រកចម្លើយមួយនៃ (E)

គេមាន $y=Ae^{x}+Be^{\frac{1}{2}x}$ នោះ $y'=Ae^{x}+\frac{1}{2}Be^{\frac{1}{2}x}$

ដោយ ក្រាបនៃចម្លើយ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=2x+1$ ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$

គេបាន $\begin{cases}y'(0)=2\\ y(0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+\frac{1}{2}B=2\\ A+B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-2\\ A=3\end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយមួយនៃ (E) គឺ $\boxed{y=3e^{x}-2e^{\frac{1}{2}x}}$ ។

III. **ក. រក** A , B **និង** C :

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}$$

$$=\frac{A(x^2-6x+9)+B(x^2-2x-3)+C(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-6A-2B+C)+(9A-3B+C)}{(x+1)(x-3)^2}$$

ផ្ទឹមនឹង $f(x)=\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$, $x\neq -1$, $x\neq 3$

គេបាន $\begin{cases}A+B=5 & (1)\\ -6A-2B+C=-14 & (2)\\ 9A-3B+C=13 & (3)\end{cases}$

យក $(3)-(2)$ គេបាន $15A-B=27$ (4)

យក $(1)+(4)$ គេបាន $16A=32$ នោះ $A=2$

តាម $(1): 2+B=5 \Rightarrow B=3$

តាម $(3): 9\cdot 2-3\cdot 3+C=13 \Rightarrow C=4$

ដូចនេះ រកបាន $\boxed{A=2\,,\,B=3\,,\,C=4}$ ។

ខ. គណនា $I=\int f(x)dx$

ចំពោះ $A=2$, $B=3$, $C=4$

គេបាន $f(x)=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}$

នាំឱ្យ $\mathbf{I}=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}\right)dx$

$$=2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\frac{4}{x-3}+c\ ,\ c \text{ ថេរ}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I}=2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\frac{4}{x-3}+c}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

IV. រកប្រូបាប

គ្រាប់ឡុកឡាក់ 2 មួយខៀវ មួយក្រហម គេបោះព្រមគ្នា

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាចតាងដោយ $n(S)=6\times6=36$

ក. លេខចេញលើគ្រាប់ខៀវ ស្មើនឹង 2 ដងនៃលេខគ្រាប់ក្រហម :

លេខចេញលើគ្រាប់ខៀវ ស្មើនឹង 2 ដងនៃលេខគ្រាប់ក្រហម

មានបីករណីរួមមាន ៖ (ខ 1 ក្រ 2) ឬ (ខ 2 ក្រ 4) ឬ (ខ 3 ក្រ 6)

នាំឱ្យ ចំនួនករណីស្របតាងដោយ $n(A)=3$

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{12}}$ ។

ខ. ផលបូកលេខលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរស្មើនឹង 5

ផលបូកស្មើ 5 មាន 4 ករណីគឺ ៖

(ខ 1 ក្រ 4) ឬ (ខ 2 ក្រ 3) ឬ (ខ 3 ក្រ 2) ឬ (ខ 4 ក្រ 1)

នាំឱ្យ ចំនួនករណីស្របតាងដោយ $n(B)=4$

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{1}{9}}$ ។

V. ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ (S) ជាមួយ

$\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$

គេមាន $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$

• ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វនឹង $\overrightarrow{Ox}$ លុះត្រាតែ $y=0$, $z=0$

គេបាន $(x-1)^2+(0-2)^2+(0+2)^2=16$

$(x-1)^2=8 \Rightarrow x=1\pm2\sqrt{2}$

ដូចនេះ ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ ត្រង់ពីរចំណុចគឺ

$\boxed{\left(1+2\sqrt{2}\,,0\,,0\right),\left(1-2\sqrt{2}\,,0\,,0\right)}$ ។

• ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វនឹង $\overrightarrow{Oy}$ លុះត្រាតែ $x=0$, $z=0$

គេបាន $(0-1)^2+(y-2)^2+(0+2)^2=16$

$(y-2)^2=11 \Rightarrow y=2\pm\sqrt{11}$

ដូចនេះ ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វអ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$ ត្រង់ពីរចំណុចគឺ

$\boxed{\left(0\,,2+\sqrt{11}\,,0\right),\left(0\,,2-\sqrt{11}\,,0\right)}$ ។

• ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វនឹង $\overrightarrow{Oz}$ លុះត្រាតែ $x=0$, $y=0$

គេបាន $(0-1)^2+(0-2)^2+(z+2)^2=16$

$(z+2)^2=11 \Rightarrow z=-2\pm\sqrt{11}$

ដូចនេះ ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វអ័ក្ស $\overrightarrow{Oz}$ ត្រង់ពីរចំណុចគឺ

$\boxed{\left(0\,,0\,,2+\sqrt{11}\right),\left(0\,,0\,,2-\sqrt{11}\right)}$ ។

ខ. រកសមីការប្លង់ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A_1 និង A_2

ដោយ $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$

នាំឱ្យ ស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(1\,,2\,,-2)$

គេមាន $A_1\left(1+2\sqrt{2}\,,0\,,0\right)$, $A_2\left(1-2\sqrt{2}\,,0\,,0\right)$

ប្លង់ (P) រាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

• ករណីប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A_1\left(1+2\sqrt{2}\,,0\,,0\right)$

នោះគេបានប្លង់ (P_1) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1=\overrightarrow{IA_1}$

ដែល $\vec{n}_1=\overrightarrow{IA_1}=\left(2\sqrt{2}\,,-2\,,2\right)$ នាំឱ្យ ៖

$(P_1): 2\sqrt{2}\left(x-1-2\sqrt{2}\right)-2(y-0)+2(z-0)=0$

$2\sqrt{2}x-2y+2z-2\sqrt{2}-8=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P_1): 2\sqrt{2}x-2y+2z-2\sqrt{2}-8=0}$ ។

• ករណីប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A_2\left(1-2\sqrt{2}\,,0\,,0\right)$

នោះគេបានប្លង់ (P_2) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_2=\overrightarrow{IA_2}$

ដែល $\vec{n}_2=\overrightarrow{IA_2}=\left(-2\sqrt{2}\,,-2\,,2\right)$ នាំឱ្យ ៖

$(P_2): -2\sqrt{2}\left(x-1-2\sqrt{2}\right)-2(y-0)+2(z-0)=0$

$-2\sqrt{2}x-2y+2z+2\sqrt{2}+8=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P_2): -2\sqrt{2}x-2y+2z+2\sqrt{2}+8=0}$ ។

VI. ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$

គេបានលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់គឺ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com
Facebook.com/document4khmer
document4khmer.wordpress.com

➢សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^{2x}-5e^{x}+4}{e^{x}}$

$$f'(x)=\frac{\left(2e^{2x}-5e^{x}\right)e^{x}-e^{x}\left(e^{2x}-5e^{x}+4\right)}{e^{2x}}$$

$$=\frac{\left(2e^{2x}-5e^{x}\right)-\left(e^{2x}-5e^{x}+4\right)}{e^{x}}$$

$$=\frac{e^{2x}-4}{e^{x}}=\frac{\left(e^{x}-2\right)\left(e^{x}+2\right)}{e^{x}}$$

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(e^{x}-2\right)\left(e^{x}+2\right)}{e^{x}}=0$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ e^{x}>0\ ,\ e^{x}+2>0$

នាំឱ្យ $e^{x}-2=0 \Rightarrow x=\ln 2$

$$f(\ln 2)=\frac{e^{2\ln 2}-5e^{\ln 2}+4}{e^{\ln 2}}=\frac{4-10+4}{2}=-1$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ត្រង់ $x=\ln 2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាមួយស្មើ $f(\ln 2)=-1$ ។

• សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

ខ. រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស

បើក្រាប (C) ប្រសព្វអ័ក្ស $x'ox$ នោះ $y=f(x)=0$

គេបាន $\dfrac{e^{2x}-5e^{x}+4}{e^{x}}=0$, $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ e^{x}>0$

នាំឱ្យ $e^{2x}-5e^{x}+4=0$, តាង $t=e^{x}$, $t>0$

គេបាន $t^{2}-5t+4=0$ មានឫសងាយ $t=1\ ,\ t=4$

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^{x}=1 \\ e^{x}=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\ln 4 \end{array}\right.$$

ដូចនេះ ក្រាប (C) ប្រសព្វអ័ក្ស $x'ox$ ត្រង់ពីរចំណុចគឺ

$\boxed{(0\ ,\ 0)\ ,\ (\ln 4\ ,\ 0)}$ ។

➢សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនោះ

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

• ករណីបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច $(0\ ,\ 0)$ គេបាន ៖

$f'(0)=\dfrac{e^{0}-4}{e^{0}}=-3$ និង $f(0)=0$

នាំឱ្យ $y=-3(x-0)+0=-3x$

• ករណីបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច $(\ln 4\ ,\ 0)$ គេបាន ៖

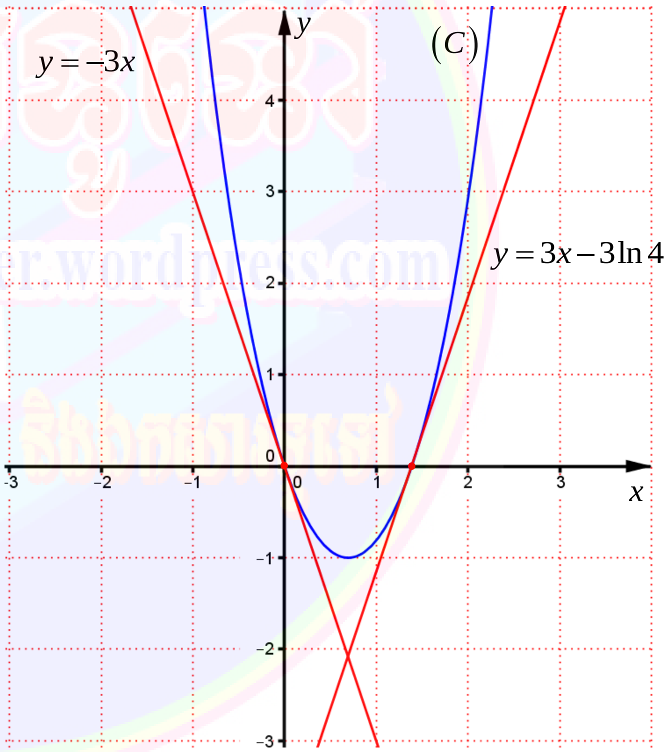
$f'(\ln 4)=\dfrac{e^{2\ln 4}-4}{e^{\ln 4}}=\dfrac{16-4}{4}=3$ និង $f(\ln 4)=0$

នាំឱ្យ $y=3(x-\ln 4)+0=3x-3\ln 4$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចប្រសព្វទាំងពីរគឺ

$\boxed{y=-3x\ ,\ y=3x-3\ln 4}$ ។

គ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះនោះ



www.document4khmer.wordpress.com
ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៩ តុលា ២០១៣

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. ផ្នែកពីជគណិត

១. សហគ្រាសដំឡើងទោចក្រយានយន្តមួយបានចំណាយទឹកប្រាក់សរុបក្នុងមួយថ្ងៃសម្រាប់ដំឡើងទោចក្រយានយន្ត x គ្រឿង ចំនួន $f(x)=6x^2+22x+100$ គិតជាម៉ឺនរៀល ហើយសហគ្រាសនេះ បានទទួលប្រាក់ចំណូលមកវិញ ចំនួន $I(x)=5x^2+112x+200$ គិតជាម៉ឺនរៀល ។

ក. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

ខ .ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណេញ បើបរិមាត្រទោចក្រយានយន្តដែលបានលក់ កើនពី 30 គ្រឿង ទៅ 50 គ្រឿង ។ **(១ពិន្ទុ)**

២. ចូរគណនាតម្លៃប្រហែលនៃផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x):\ x=2-y-y^2$ និងអ័ក្សអរដោនេ $(y'y)$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

៣. ដោះស្រាយសមីការ $y'=-y\sin x$ ដោយដឹងថា $y(2\pi)=3e$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

៤. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^3-3x+2$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

ខ. ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនៃឫសរបស់សមីការ $x^3-3x+2-m=0$ ។ **(៤ពិន្ទុ)**

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

គេឱ្យពីរ៉ាមីត $SABCD$ មានបាត $ABCD$ ជាចតុកោណកែង ដែលមានបណ្តោយ $AB=a$ ទទឹង $AD=b$ ទ្រនុង $(SA)\perp$ ប្លង់ $(ABCD)$ និងប្រវែង $SA=2a$ ។ M ជាចំណុចមួយ នៅលើទ្រនុង (SA) ដែល $AM=x$ ដោយ $0\le x\le 2a$ ។ ប្លង់ (MBC) កាត់ទ្រនុង (SD) នៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ត្រង់ N ។

ក. កំណត់រាងរបស់ចតុកោណ $BCNM$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

ខ. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យចតុកោណ $BCNM$ មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត និងតូចបំផុត ។ **(៦ពិន្ទុ)**

www.document4khmer.wordpress.com
ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៣

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត :

១. ក. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$

គេមាន អនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយ $f(x)=6x^2+22x+100$

អនុគមន៍ប្រាក់ចំណូល $I(x)=5x^2+112x+200$

(គិតជាម៉ឺនរៀល , x ជាចំនួនទោចក្រយានយន្ត)

នាំឱ្យ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញគឺ $P(x)$ ដែល

$$P(x)=I(x)-f(x)$$
$$=(5x^2+112x+200)-(6x^2+22x+100)$$
$$=-x^2+90x+100$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $\boxed{P(x)=-x^2+90x+100}$

ខ .ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណេញ

ប្រាក់ចំណេញបានពីការលក់ទោចក្រយានយន្តកើនពី 30 គ្រឿង ទៅ 50 គ្រឿង គឺ $\int_{30}^{50}P(x)dx$

$$=\int_{30}^{50}(-x^2+90x+100)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+45x^2+100x\right]_{30}^{50}$$
$$=\left(-\frac{50^3}{3}+45\cdot 50^2+100\cdot 50\right)-\left(-\frac{30^3}{3}+45\cdot 30^2+100\cdot 30\right)$$
$$=\frac{227500}{3}-34500=\frac{124000}{3}$$
$$=41333.333333 \text{ ម៉ឺនរៀល}$$

ដូចនេះ តម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណេញគឺ

$\boxed{413333333}$ រៀល ។

២. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C) និងអ័ក្សអរដោនេ

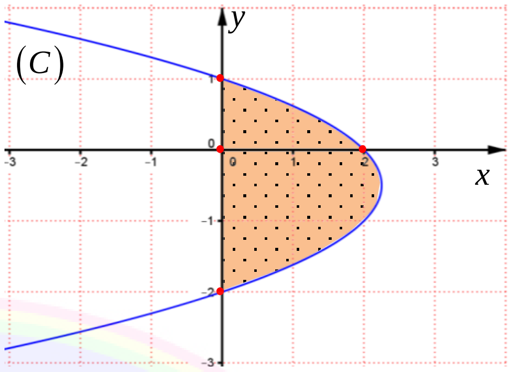
គេមាន $f(x):\ x=2-y-y^2$

រកចំណុចប្រសព្វរវាងអ័ក្ស $y'y$ និងក្រាប (C) នោះ $x=0$

គេបាន $2-y-y^2=0$ នោះ $y=1\,,\ y=-2$

ក្រាប (C) ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេសង់រូបបាន ដូចខាងក្រោម ៖



នាំឱ្យ $S=\int_{-2}^{1}(2-y-y^2)dy$

$$S=\int_{-2}^{1}(2-y-y^2)dy$$
$$=\left[2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)$$
$$=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃគណនាបាន } S=\frac{9}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

គេមាន $y'=-y\sin x$

$\frac{y'}{y}=-\sin x$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)

$\ln y=\cos x+c$, c ថេរ

នាំឱ្យ $y=e^{\cos x+c}$

ដោយ $y(2\pi)=3e$

គេបាន $e^{\cos 2\pi+c}=3e$ ដែល $\cos 2\pi=\cos 0=1$

$e^{1+c}=3e \Leftrightarrow e^c=3 \Rightarrow c=\ln 3$

នាំឱ្យ $y=e^{\cos x+\ln 3}=e^{\cos x}\cdot e^{\ln 3}=3e^{\cos x}$

ដូនេះ សមីការមានឫស $\boxed{y=3e^{\cos x}}$ ។

៤. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=x^3-3x+2$ (**ដូចគ្រូបឋម 2016**)

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=x^3-3x+2$

ដេរីវេ : $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$3(x-1)(x+1)=0$ នោះ $x=1\,,\,x=-1$

គេបាន $f(1)=1^3-3\cdot1+2=0$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• បរមា

-ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-1)=4$ ។

-ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(1)=0$ ។

• លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x+2)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x+2)=+\infty$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• ភាពប៉ោងផត និងចំណុចរបត់

ដេរីវេទី២ $f''(x)=(3x^2-3)'=6x$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0$ នោះ $x=0$

- បើ $x>0$ នោះ $f''(x)>0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x<0$ នោះ $f''(x)<0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងក្រោម

- បើ $x=0$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់ $I(0,f(0))=I(0,2)$

• ផ្ចិតឆ្លុះ

គេនឹង បង្ហាញថា ចំណុចរបត់ $I(0\,,\,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង

បើ $I(a\,,\,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះលុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-x)+f(x)=4$

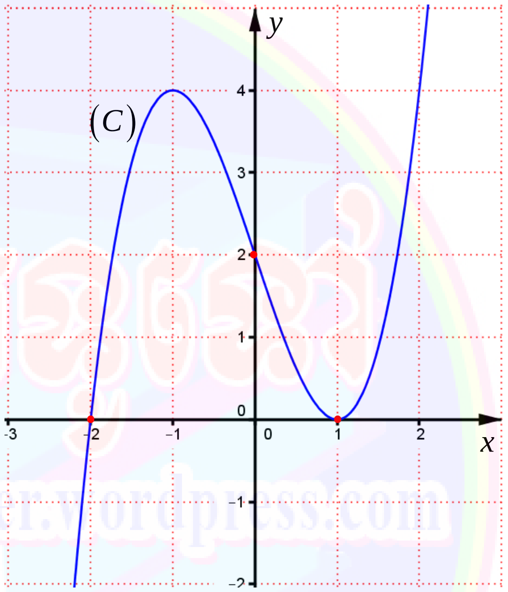
ដោយ $f(-x)+f(x)$

$=(-x)^3-3(-x)+2+x^3-3x+2$

$=-x^3+3x+2+x^3-3x+2=4$ ពិត

ដូចនេះ $I(0\,,\,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ។

• សង់ក្រាប



ខ. ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនៃឫស

គេមាន សមីការ $x^3-3x+2-m=0$

គេបាន $m=x^3-3x+2$

ឫសនៃសមីការនេះបានពីប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ដេក $y=m$ និង ក្រាប C ។ តាមក្រាបគេបានអត្ថិភាពនៃឫសដូចខាងក្រោម ៖

• $m\in(-\infty\,,\,0)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $x_1<0$

• $m=0$: សមីការមានឫសបី $x_1=-2\,,\,x_2=x_3=1$

• $m\in(0\,,\,4)$: សមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា

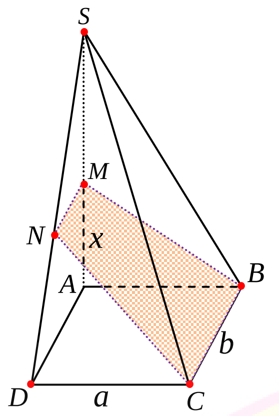
• $m=4$: សមីការមានឫសបី $x_1=x_2=-1\,,\,x_3=2$

• $m\in(4\,,\,+\infty)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $0<x_1$ ។

Facebook.com/document4khmer
document4khmer.wordpress.com

II. ចម្លើយផ្នែកធរណីមាត្រ :

ក. កំណត់រាងរបស់ចតុកោណ $BCNM$



គេមាន $(SA)\perp$ ប្លង់ $(ABCD)$ នាំឱ្យ ប្លង់ $(SAB)\perp[BC]$

នោះ $\left\{\begin{array}{l}(SAB)\perp[BC]\\ [MB]\subset(SAB)\end{array}\right. \Rightarrow [MB]\perp[BC]\ (1)$

គេមាន $\left\{\begin{array}{l}(SAD)\cap(BCNM)=[MN]\\ (BCNM)\perp(SAB)\\ (SAD)\perp(SAB)\end{array}\right. \Rightarrow [MN]\perp(SAB)$

នាំឱ្យ $[MN]\perp[MB]$ (2)

តាម (1) និង (2) ចតុកោណ $BCNM$ ជាចតុ.ព្នាយកែង

ដូចនេះ **$BCNM$ ជាចតុកោណព្នាយកែង** ។

ខ. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យចតុកោណ $BCNM$ មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត និងតូចបំផុត

ដោយ $BCNM$ ជាចតុកោណព្នាយកែង

នាំឱ្យ $S=S_{BCNM}=\frac{1}{2}(MN+BC)\cdot MB$

ដោយ ΔSMN និង ΔSAD ជាត្រីកោណកែងដែលមានមុំ $\angle S$ ជាមុំរួម នោះ $\Delta SMN\sim\Delta SAD$ (ម.ម)

វិបាក $\frac{MN}{AD}=\frac{SM}{SA}$ ឬ $\frac{MN}{b}=\frac{2a-x}{2a}$

នោះ $MN=\frac{2ab-xb}{2a}$ ដែល $0\le x\le 2a$

ម្យ៉ាងទៀត តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $MB=\sqrt{MA^2+AB^2}$

នោះ $MB=\sqrt{x^2+a^2}$

គេបាន $S(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2ab-xb}{2a}+b\right)\cdot\sqrt{x^2+a^2}$

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(2b-\frac{b}{2a}x\right)\sqrt{x^2+a^2}$$

$$S(x)=\left(b-\frac{b}{4a}x\right)\sqrt{x^2+a^2}$$

$$S'(x)=\left(-\frac{b}{4a}\right)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\left(b-\frac{b}{4a}x\right)$$

$$=\left(-\frac{b}{4a}\right)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\left(\frac{4ba-bx}{4a}\right)$$

$$=\frac{-b\left(x^2+a^2\right)}{4a\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{4abx-bx^2}{4a\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{-2bx^2+4abx-ba^2}{4a\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{b\left(-2x^2+4ax-a^2\right)}{4a\sqrt{x^2+a^2}}$$

ឱ្យ $S'(x)=0$ តែ $a,b,\ x>0$, $\frac{b}{4a\sqrt{x^2+a^2}}>0$

នោះ $-2x^2+4ax-a^2=0$ មាន

$\Delta'=4a^2-2a^2=2a^2$

$x=\frac{-2a\pm\sqrt{2a^2}}{-2}=\frac{\left(2\pm\sqrt{2}\right)a}{2}$

តារាងសញ្ញា $S'(x)$

x	0		$\frac{(2-\sqrt{2})a}{2}$		$\frac{(2+\sqrt{2})a}{2}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

•ត្រង់ $x=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)a}{2}$, $S'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា S មានតម្លៃតូចបំផុតមួយ ។

•ត្រង់ $x=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)a}{2}$, $S'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា S មានតម្លៃធំបំផុតមួយ ។

ដូចនេះ គេកំណត់តម្លៃនៃ x បានដូចខាងក្រោម ៖

បើ $x=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)a}{2}$ នោះ S_{BCNM} តូចបំផុត

បើ $x=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)a}{2}$ នោះ S_{BCNM} ធំបំផុត ។

www.document4khmer.wordpress.com
Facebook.com/document4khmer
document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ២០ វិច្ឆិកា ២០១៤

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $A=\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx$ ខ. $B=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$ គ. $C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x+\sin^3 x\right)dx$ ។ (3 ពិន្ទុ)

II. គេមានអនុគមន៍ពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ ដែល $f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$ និង $g(x)=x-\ln(1+x)$ ។

ក. គណនាដេរីវេ $f(x)$ និង $g(x)$ រួចស្រាយបំភ្លឺថា គ្រប់តម្លៃ $x>0$ គេបាន $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ ។ (2 ពិន្ទុ)

ខ. គេមាន $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ ។ (1ពិន្ទុ)

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ z និង w ដែល $z=2\sqrt{2}+4\frac{\sqrt{2}}{2}i$ និង $w=x(x-i)+y(y+i)$, $x,y\in\mathbb{R}$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (1 ពិន្ទុ)

ខ. សរសេរ z^4 ជាទម្រង់ $a+bi$ ។ (1 ពិន្ទុ)

គ. រកតម្លៃ x និង y បើ $w=-z^4$ ។ (1 ពិន្ទុ)

IV. គេមានអនុគមន៍ $y_1=-\frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{9}{4}$ ។

ក. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យប៉ារ៉ាបូល $y_2=-x^2+a$ ប៉ះខ្សែកោងអនុគមន៍ y_1 ។ (1 ពិន្ទុ)

ខ. ចូរសរសេរសមីការនៃប៉ារ៉ាបូល ទៅតាមតម្លៃ a ដែលបានរកឃើញក្នុងសំណួរ ក. ។ រួចបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះរបស់វា ជាមួយខ្សែកោង y_1 ។ (2 ពិន្ទុ)

V. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេដៅ 4 ចំណុច

$A(2,1,3)$, $B(3,6,1)$, $C(2,0,2)$, $D(1,-5,4)$ ។

ក. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ និងគណនា S_{ABCD} ។ (4 ពិន្ទុ)

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំណុច A និងស្របនឹង $\overrightarrow{BC}$ ។ (2 ពិន្ទុ)

គ. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A, B និង D ។ (2 ពិន្ទុ)

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៤

I. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\mathbf{A}=\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx=\int_1^2 \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx$

$=\int_1^2\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx=\left[x-4\sqrt{x}+\ln|x|\right]_1^2$

$=\left(2-4\sqrt{2}+\ln 2\right)-\left(1-4+0\right)$

$=\boxed{5-4\sqrt{2}+\ln 2}$

ខ. $\mathbf{B}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x\left(\cos x+2\sin x\right)}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x dx=2\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(1-\frac{1}{2}\right)=\boxed{1}$

គ. $\mathbf{C}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x+\sin^3 x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\sin x\right)\left(1+\cos x\sin x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\cos^2 x\sin x+\sin x+\cos x\sin^2 x\right)dx$

$=\left[\sin x-\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(1-0-0+\frac{1}{3}\right)-\left(0-\frac{1}{3}-1+0\right)=\boxed{\frac{8}{3}}$

II. ក. គណនាដេរីវេ $f(x)$ និង $g(x)$:

គេមាន $f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$

ដូចនេះ: $\boxed{f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}}$ ។

ហើយ $g(x)=x-\ln(1+x)$

ដូចនេះ: $\boxed{g'(x)=1-\frac{1}{1+x}}$ ។

ស្រាយថា គ្រប់តម្លៃ $x>0$ គេបាន $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$

ដោយ $f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}$

$=\frac{1-x^2-1}{1+x}=-\frac{x^2}{1+x}<0\ ,\ \forall x>0$

នាំឱ្យ $\forall x>0$, f ជាអនុគមន៍ចុះ នាំឱ្យ $f(x)<0$

គេបាន $x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)<0$

$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)\qquad(1)$

ដោយ $g'(x)=1-\frac{1}{1+x}$

$=\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0\ ,\ \forall x>0$

នាំឱ្យ $\forall x>0$, g ជាអនុគមន៍កើន នាំឱ្យ $g(x)>0$

គេបាន $x-\ln(1+x)>0$

$\ln(1+x)<x\quad(2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$

ដូចនេះ: $\boxed{x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$

គេមាន $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

នោះ: $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

$$+\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\ln(1+0)=0\\ \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)=\ln(1+0)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\ln(1+0)=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}u_n=0$

ដូចនេះ: គណនាបាន $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}u_n=0}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com
Facebook.com/document4khmer

III. ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

គេមាន $z=2\sqrt{2}+4\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ឬ $z=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$

មាន $r=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=4$

គេបាន $z=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ ។

ខ. សរសេរ z^4 ជាទម្រង់ $a+bi$

គេមាន $z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$z^4=\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$$

$$=4^4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$$

$$=256\left(-1+0i\right)=-256+0i$$

ដូចនេះ $\boxed{z^4=-256+0i}$ ។

គ. រកតម្លៃ x និង y បើ $w=-z^4$

គេមាន $w=x(x-i)+y(y+i)$, $x,y\in\mathbb{R}$

$$=x^2-xi+y^2+yi$$

$$=\left(x^2+y^2\right)+\left(-x+y\right)i$$

ដោយ $w=-z^4$ ដែល $-z^4=256+0i$ គេផ្ទឹមបាន ៖

$$\begin{cases}x^2+y^2=256\\-x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=256 & (1)\\x=y & (2)\end{cases}$$

គេយក (2) ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $2x^2=256\Leftrightarrow x^2=128\Rightarrow x=\pm8\sqrt{2}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{x=y=8\sqrt{2}\ ,\ x=y=-8\sqrt{2}}$ ។

IV. ក. រកតម្លៃ a :

គេមាន អនុគមន៍ $y_1=-\frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{9}{4}$

ប៉ារ៉ាបូល $y_2=-x^2+a$

គេបាន សមីការអាប់ស៊ីសរវាង y_1 និង y_2

$$-\frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{9}{4}=-x^2+a$$

$$-x^4+8x^2+9=-4x^2+4a$$

$$x^4-12x^2+4a-9=0$$

តាង $t=x^2$ ដែល $t\ge0$

គេបាន $t^2-12t+4a-9=0$

ដើម្បីឱ្យ y_2 ប៉ះជាមួយខ្សែកោង y_1 លុះត្រាសមីការមានឫសឌុប

នាំឱ្យ $\Delta'=0\Leftrightarrow(-6)^2-(4a-9)=0$

គេបាន $36-4a+9=0\ \Rightarrow a=\frac{45}{4}$

ដូចនេះ តម្លៃកបាន $\boxed{a=\frac{45}{4}}$ ។

ខ. សរសេរសមីការនៃប៉ារ៉ាបូល

ចំពោះ $a=\frac{45}{4}$ គេបាន សមីការប៉ារ៉ាបូល $y_2=-x^2+\frac{45}{4}$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាបូលសរសេរបានគឺ $\boxed{y_2=-x^2+\frac{9}{4}}$ ។

➤បញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ

ចំពោះ $a=\frac{45}{4}$ នោះគេបាន $t^2-12t+45-9=0$

$t^2-12t+36=0$ មានឫសឌុប $t_1=t_2=t=6$

ចំពោះ $t=6$ សមមូល $x^2=6\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$

ករណី $x=\pm\sqrt{6}$ គេបាន $y=-\left(\pm\sqrt{6}\right)^2+\frac{45}{4}$

$y=-6+\frac{45}{4}$ នាំឱ្យ $y=\frac{21}{4}$

ដូចនេះ ចំណុចប៉ះមានពីរគឺ $\boxed{\left(-\sqrt{6},\frac{21}{4}\right),\left(\sqrt{6},\frac{21}{4}\right)}$ ។

V. ក. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$:

គេមាន $A(2,1,3)$, $B(3,6,1)$,

$C(2,0,2)$, $D(1,-5,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(1,5,-2)$ និង $\overrightarrow{DC}=(1,5,-2)$

ដោយ ចតុកោណ $ABCD$ មាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(1,5,-2)$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ចតុកោណ } ABCD \text{ ជាប្រលេឡូក្រាម}}$ ។

➤គណនា S_{ABCD}

តាមរូបមន្ត $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$ ដែល $\overrightarrow{AD}=(-1,-6,1)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&5&-2\\-1&-6&1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(-7)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{51}$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{គណនាបាន } S=\sqrt{51} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com
Facebook.com/document4khmer

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D)

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតរាង $(D):\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt\ ,\ t\in\mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

ដោយ (D) កាត់ $A(2\,,1\,,3)$

នោះ $x_0 = 2\ ,\ y_0 = 1\ ,\ z_0 = 3$

ហើយ (D) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC} = (-1\,,-6\,,1)$

នោះ $a = -1\ ,\ b = -6\ ,\ c = 1$

គេបាន $(D):\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 6t\ ,\ t\in\mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $\boxed{(D):\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 6t\ ,\ t\in\mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}}$ ។

គ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A\,,\,B$ និង D

សមីកាប្លង់ $(P): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

ដោយ (P) កាត់ $A(2\,,1\,,3)$

នោះ $x_0 = 2\ ,\ y_0 = 1\ ,\ z_0 = 3$

ហើយ (P) កាត់បីចំណុច A, B, D នាំឱ្យ (P) មានវ៉ិចទ័រ

ណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = (-7\,,1\,,-1)$ នោះ:

$a = -7\ ,\ b = 1\ ,\ c = -1$

គេបាន $(P): -7(x-2) + (y-1) - (z-3) = 0$

$-7x + y - z + 17 = 0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់គឺ $\boxed{(P): -7x + y - z + 17 = 0}$ ។

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ២០១៥

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. ... (ក្នុងឆ្នាំ 2015 គ្មានការប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូកម្រិតមូលដ្ឋានផ្នែកគណិតវិទ្យាទេ ជ្រើសរើសតែគ្រូកីឡា និងគ្រូបឋម-មតេយ្យ ព្រោះដោយសារតែគេឱ្យនិទ្ទេស A , B , C ជាប់គ្រូដោយស្វ័យប្រវត្តិ ...) ។

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៥

I. (គ្មានចម្លើយ)

ឯកសារខ្មែរ www.document4khmer.wordpress.com ចែករំលែកចំណេះដឹង និងឯកសារខ្មែរ
ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ០៤ វិច្ឆិកា ២០១៦

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

ផ្នែកពីជគណិត

1. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖ **(២ ពិន្ទុ)**

ក. $\int (1+\cos x)^2\,dx+\int (1-\sin x)^2\,dx$ ខ. $\int \left(\frac{8x-7}{(x-2)(x+1)}\right)dx$

គ. $\int_0^{\pi} e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$ ឃ. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx$ ។

2. ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖ **(២ ពិន្ទុ)**

ក. $y''-3y'+2y=0$ ដោយដឹងថា $y(0)=1$ និង $y'(0)=3$ ។

ខ. $y''-2y'+y=0$ ដោយដឹងថា $y(0)=-3$ និង $y'(0)=2$ ។

3. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$, $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ និង $v=\frac{-(\sqrt{3}+1)}{2}+\frac{(1+\sqrt{3})}{2}i$ ។

ក. ចូរសរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ខ. ចូរគណនាកន្សោម A ដែល $A=v+z_1+z_1^2$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

គ. ចូរគណនា w ដែល $w=z_1^{120}+z_2^{120}$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

4. ក្រុមហ៊ុនមួយត្រូវការជ្រើសរើសបុគ្គលិកបម្រើការងារ 5 នាក់ ។ ក្រោយពីផ្សព្វផ្សាយដំណឹងនេះ មាននិស្សិត 10 នាក់ ក្នុងនោះមានស្រី 4 នាក់ និងប្រុស 6 នាក់ មកដាក់ពាក្យសុំបម្រើការងារ ។ ចូររកប្រូបាបដែលជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចនិស្សិតស្រី 3 នាក់ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

5. គេមានអនុគមន៍ $f(x): y=\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

ខ. រកគ្រប់ចំណុចនៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។ **(១ ពិន្ទុ)**

គ. រកគ្រប់ចំណុច M នៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលមានចម្ងាយពីចំណុច M ទៅអ័ក្សអាប់ស៊ីសស្មើ 2 ដងនៃចម្ងាយពី M ទៅអ័ក្សអរដោនេ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

ឃ. ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំណុច $A(-2,9)$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ផ្នែកធរណីមាត្រ

គេមានចំណុច $A(2,1,3)$ និងប្លង់ $(P): 2x+y+3z-28=0$ ។

ក. ចូររកចំណុច H និង A' ដោយ H ជាចំណោលកែងនៃ A មកលើប្លង់ (P) និង H ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AA']$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

ខ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A មកលើប្លង់ (P) និងសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច $M(3,2,5)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។ **(២ ពិន្ទុ)**

គ. ចូរសរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ (H) កាត់តាមចំណុច $I(3,-1,5)$ ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (AM) ។ **(១ ពិន្ទុ)**

www.document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៦

ផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int(1+\cos x)^2\,dx+\int(1-\sin x)^2\,dx$

$=\int\left(1+2\cos x+\cos^2 x\right)dx+\int\left(1-2\sin x+\sin^2 x\right)dx$

$=\int\left(1+2\cos x+\cos^2 x+1-2\sin x+\sin^2 x\right)dx$

$=\int(3+2\cos x-2\sin x)\,dx$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$=\boxed{3x+2\sin x+2\cos x+c\ ,\ c\ \text{ថេរ}}$

ខ. $\int\left(\dfrac{8x-7}{(x-2)(x+1)}\right)dx$

$=\int\left(\dfrac{8x+8-15}{(x-2)(x+1)}\right)dx$

$=\int\left(\dfrac{8(x+1)}{(x-2)(x+1)}-15\cdot\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}\right)dx$

$=\int\left(\dfrac{8}{(x-2)}-15\cdot\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{(x-2)}-\dfrac{1}{(x+1)}\right]\right)dx$

$=8\ln|x-2|-5\left(\ln|x-2|-\ln|x+1|\right)+c$, c ថេរ

$=\boxed{3\ln|x-2|+5\ln|x+1|+c\ ,\ c\ \text{ថេរ}}$

គ. $\int_0^{\pi}e^x\left(1+\dfrac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$

$=\int_0^{\pi}\left(e^x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\left[e^x+\tan x\right]_0^{\pi}$

$=\left(e^{\pi}+\tan\pi\right)-\left(e^0+\tan 0\right)$

$=\left(e^{\pi}+0\right)-\left(e^0+0\right)=\boxed{e^{\pi}-1}$

ឃ. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

$=\left[\tan x-\cot x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(\tan\dfrac{\pi}{3}-\cot\dfrac{\pi}{3}\right)-\left(\tan\dfrac{\pi}{6}-\cot\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\left(\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\boxed{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម :

ក. គេមាន $y''-3y'+2y=0$ មានសមីការសម្គាល់

$\lambda^2-3\lambda+2=0$ មានឫស $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$

ចម្លើយទូទៅមានរាង $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$, A , B ថេរ

គេបាន $y=Ae^x+Be^{2x}$, A , B ថេរ

នាំឱ្យ $y'=Ae^x+2Be^{2x}$

ដោយ $\begin{cases}y(0)=1\\y'(0)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae^0+Be^0=1\\Ae^0+2Be^0=3\end{cases}$

$\begin{cases}A+B=1\\A+2B=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=2\\A=-1\end{cases}$

ដូចនេះ: $\boxed{y=-e^x+2e^{2x}}$ ។

ខ. គេមាន $y''-2y'+y=0$ មានសមីការសម្គាល់

$\lambda^2-2\lambda+1=0$ មានឫសឌុប $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0=1$

ចម្លើយទូទៅមានរាង $y=Axe^{\lambda_0 x}+Be^{\lambda_0 x}$, A , B ថេរ

គេបាន $y=Axe^x+Be^x$, A , B ថេរ

នាំឱ្យ $y'=A\left(e^x+xe^x\right)+Be^x$

ដោយ $\begin{cases}y(0)=-3\\y'(0)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A\cdot 0\cdot e^0+Be^0=-3\\A\left(e^0+0\cdot e^0\right)+Be^0=2\end{cases}$

$\begin{cases}B=-3\\A+B=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-3\\A=5\end{cases}$

ដូចនេះ: $\boxed{y=5xe^x-3e^x}$ ។

3. ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

គេមាន $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

ដូចនេះ: ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រដែលសរសេរបានគឺ ៖

$\boxed{z_1=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)}$

$\boxed{z_2=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}}$

www.document4khmer.wordpress.com

ខ. គណនាកន្សោម A

គេមាន $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ និង $v=\frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}+\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}i$

ដោយ $z_1+z_1^2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^2$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

នាំឱ្យ $A=v+z_1+z_1^2$

$$=\frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}+\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}i+\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

$$=0$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{A=0}$ ។

គ. គណនា w **ដែល** $w=z_1^{120}+z_2^{120}$

$$w=z_1^{120}+z_2^{120}$$

$$=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{120}+\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{120}$$

$$=\cos(-20\pi)+i\sin(-20\pi)+\cos(20\pi)+i\sin(20\pi)$$

$$=\cos 0+i\sin 0+\cos 0+i\sin 0$$

$$=1+i\cdot 0+1+i\cdot 0=2$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{w=2}$ ។

4. រកប្រូបាបដែលជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចនិស្សិតស្រី 3 នាក់ :

គេមាន និស្សិត 10 នាក់ ប្រុស 6 នាក់ និងស្រី 4 នាក់

គេជ្រើសរើសបុគ្គលិក 5 នាក់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10\,,5)$ ដែល

$$C(10\,,5)=\frac{10!}{5!\,5!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=252$$

ហើយ ជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចនិស្សិតស្រី 3 នាក់មានន័យថា អាចជ្រើសរើសបាននិស្សិតស្រី 3 នាក់ ឬ 4 នាក់ គេបាន៖

$$n(A)=C(4\,,3)C(6\,,2)+C(4\,,4)C(6\,,1)$$

$$=4\times\frac{6!}{4!\,2!}+1\times 6=4\times\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2}+6$$

$$=4\times 15+6=60+6=66$$

នាំឱ្យ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{66}{252}=\frac{11}{42}$

ដូចនេះ ប្រូបាប $\boxed{P(A)=\frac{11}{42}}$ ។

5. ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន អនុគមន៍ $f(x): y=\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}$

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x\neq -3$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{-3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព :

គេមាន $f'(x)=\left[\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}\right]'$

$$=\frac{\left(x^2+5x+15\right)'(x+3)-(x+3)'\left(x^2+5x+15\right)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{(2x+5)(x+3)-\left(x^2+5x+15\right)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{2x^2+6x+5x+15-x^2-5x-15}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}=\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{f'(x)=\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}}$ ។

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x(x+6)}{(x+3)^2}=0$, $(x+3)^2>0$

នាំឱ្យ $x(x+6)=0$ នោះ $x=0$, $x=-6$

គេបាន $f(0)=\frac{0^2+5\cdot 0+15}{(0+3)}=5$

$$f(-6)=\frac{(-6)^2+5(-6)+15}{(-6+3)}=-7$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-6		-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

• ត្រង់ $x=-6$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(-6)=-7$ ។

• ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(0)=5$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$$

www.document4khmer.wordpress.com
facebook.com/document4khmer

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+5x+15}{(x+3)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{x^2+5x+15}{(x+3)}=\dfrac{9-15+15}{-3+0^-+3}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{x^2+5x+15}{(x+3)}=\dfrac{9-15+15}{-3+0^++3}=+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

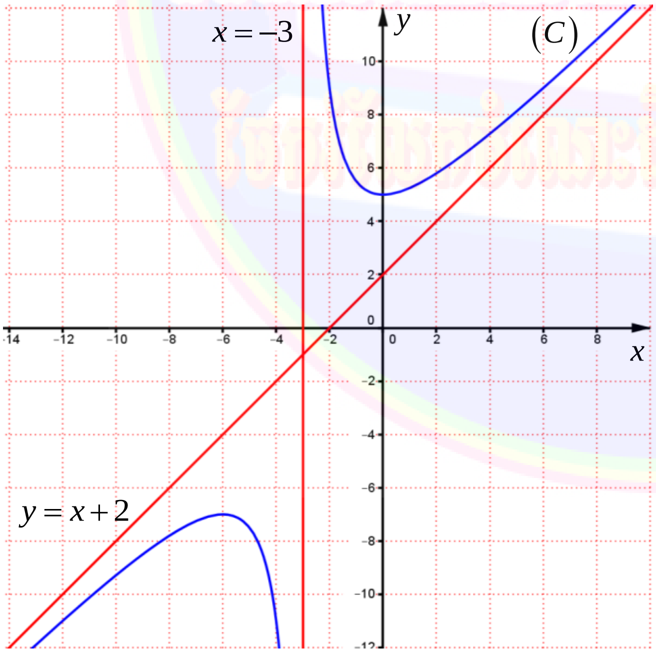
ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2+5x+15}{(x+3)}=x+2+\dfrac{9}{x+3}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{9}{x+3}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	-6	-3	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	‖ −	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-7 ↘ $-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	5 ↗	$+\infty$

➤ សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



• ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ f

ដោយ អាស៊ីមតូតឈរ $x=-3$ និងទ្រេត $y=x+2$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(-3,-1)$ ដែលជាផ្ចិតឆ្លុះ នៃក្រាប (C) ។

ខ. រកគ្រប់ចំណុចនៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

គេមាន $f(x)=y=x+2+\dfrac{9}{x+3}$

ដើម្បីឱ្យ y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប លុះត្រាតែ $\dfrac{9}{x+3}$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប មានន័យថា 9 ចែកដាច់នឹង $x+3$ នោះគេបាន ៖

$x+3=\{\pm1\,,\pm3\,,\pm9\}$

នាំឱ្យ $x=-4$ នាំឱ្យ $y=-4+2+\dfrac{9}{-4+3}=-11$

$x=-2$ នាំឱ្យ $y=-2+2+\dfrac{9}{-2+3}=9$

$x=-6$ នាំឱ្យ $y=-6+2+\dfrac{9}{-6+3}=-7$

$x=0$ នាំឱ្យ $y=0+2+\dfrac{9}{0+3}=5$

$x=-12$ នាំឱ្យ $y=-12+2+\dfrac{9}{-12+3}=-11$

$x=6$ នាំឱ្យ $y=6+2+\dfrac{9}{6+3}=9$

ដូចនេះ ចំណុចដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបមាន៖

$(-4\,,-11)\,,(-2\,,9)\,,(-6\,,-7)$
$(0\,,5)\,,(-12\,,-11)\,,(6\,,9)$ ។

គ. រកគ្រប់ចំណុច M នៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេតាង $M(x_M\,,y_M)$ ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង

គេបាន $y_M=\dfrac{x_M^2+5x_M+15}{(x_M+3)}$ ដែល $x_M\neq-3$

$y_M(x_M+3)=x_M^2+5x_M+15$

ដោយ ចម្ងាយពីចំណុច M ទៅអ័ក្សអាប់ស៊ីសស្មើ 2 ដងនៃចម្ងាយពី M ទៅអ័ក្សអរដោនេ នាំឱ្យ $y_M=2x_M$

នាំឱ្យ $2x_M(x_M+3)=x_M^2+5x_M+15$

$2x_M^2+6x_M=x_M^2+5x_M+15$

$x_M^2+x_M-15=0$

មាន $\Delta=1-4(-15)=61$

នោះ៖ $x_M=\dfrac{-1-\sqrt{61}}{2}$, $x_M=\dfrac{-1+\sqrt{61}}{2}$

ចំពោះ៖ $x_M=\dfrac{-1-\sqrt{61}}{2}$ នាំឱ្យ $y_M=-1-\sqrt{61}$

ចំពោះ៖ $x_M=\dfrac{-1+\sqrt{61}}{2}$ នាំឱ្យ $y_M=-1+\sqrt{61}$

ដូចនេះ $\boxed{M\left(\dfrac{-1-\sqrt{61}}{2}\,,-1-\sqrt{61}\right)}$ ឬ

$\boxed{M\left(\dfrac{-1+\sqrt{61}}{2}\,,-1+\sqrt{61}\right)}$ ។

ឃ. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ (d)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $(\mathrm{d}): y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ (d) ប៉ះខ្សែកោងត្រង់ចំណុច $A(-2\,,9)$

នោះ $x_0=-2\,,\ y_0=f(x_0)=9$

គេបាន $f'(x_0)=f'(-2)=\dfrac{-2(-2+6)}{(-2+3)^2}=-8$

នាំឱ្យ $(\mathrm{d}): y=-8(x+2)+9$ ឬ $y=-8x-7$

ដូចនេះ សរសេរបាន $\boxed{(\mathrm{d}): y=-8x-7}$ ។

ផ្នែកធរណីមាត្រ

ក. រកចំណុច H

គេតាង $H(x_H\,,y_H\,,z_H)$ ជាចំណុចដែលត្រូវរក

គេមាន ចំណុច $A(2\,,1\,,3)$

និងប្លង់ $(P): 2x+y+3z-28=0$ ដែលមាន

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2\,,1\,,3)$

ហើយ $\overrightarrow{AH}=(x_H-2\,,y_H-1\,,z_H-3)$

ដោយ H ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) មានន័យថា

$\overrightarrow{AH}\perp(P)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AH}\parallel\vec{n}$ គេបាន ៖

$$\frac{x_H-2}{2}=\frac{y_H-1}{1}=\frac{z_H-3}{3}$$

ទាញបាន $\begin{cases}\dfrac{x_H-2}{2}=\dfrac{y_H-1}{1} \Rightarrow y_H=\dfrac{x_H}{2}\\[2mm] \dfrac{x_H-2}{2}=\dfrac{z_H-3}{3} \Rightarrow z_H=\dfrac{3x_H}{2}\end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀត $H\in(P)$ នោះ $2x_H+y_H+3z_H-28=0$

គេបាន $2x_H+\dfrac{x_H}{2}+3\cdot\dfrac{3x_H}{2}-28=0$

$4x_H+x_H+9x_H-56=0$ នោះ $x_H=4$

នាំឱ្យ $\begin{cases}y_H=\dfrac{x_H}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\[2mm] z_H=\dfrac{3x_H}{2}=\dfrac{3\cdot4}{2}=6\end{cases}$

ដូចនេះ រកបានចំណុច $\boxed{H(4\,,2\,,6)}$ ។

➤**រកចំណុច** A'

ដោយ $H(4\,,2\,,6)$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ AA'

គេបាន $\left(\dfrac{x_A+x_{A'}}{2}\,,\dfrac{y_A+y_{A'}}{2}\,,\dfrac{z_A+z_{A'}}{2}\right)=(4\,,2\,,6)$

$\left(\dfrac{2+x_{A'}}{2}\,,\dfrac{1+y_{A'}}{2}\,,\dfrac{3+z_{A'}}{2}\right)=(4\,,2\,,6)$

នាំឱ្យ $\begin{cases}2+x_{A'}=8\\1+y_{A'}=4\\3+z_{A'}=12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_{A'}=6\\y_{A'}=3\\z_{A'}=9\end{cases}$

ដូចនេះ រកបានចំណុច $\boxed{A'(6\,,3\,,9)}$ ។

ខ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A **មកលើប្លង់** (P)

ដោយ $d(A\,,(P))=AH$

ដែល $\left|\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{(x_H-2)^2+(y_H-1)^2+(z_H-3)^2}$

$=\sqrt{(4-2)^2+(2-1)^2+(6-3)^2}$

$=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$

ដូចនេះ $\boxed{d(A\,,(P))=AH=\left|\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{14}}$ ឯកតាប្រវែង

➤**សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់** (Δ)

សមីការបន្ទាត់ត្រូវរកមានរាង $(\Delta): \begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+ct\end{cases}$

ដោយ បន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច $M(3\,,2\,,5)$ និង

កែងនឹងប្លង់ (P) នោះ (Δ) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

$\vec{u}=\vec{n}=(2\,,1\,,3)$

ដូចនេះ $\boxed{(\Delta): \begin{cases}x=3+2t\\ y=2+t\quad ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=5+3t\end{cases}}$ ។

គ. សរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ (H)

ប្លង់រាង $(H): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ ប្លង់ (H) កាត់តាមចំណុច $I(3\,,-1\,,5)$ និង

កែងនឹងបន្ទាត់ (AM) នោះប្លង់ (H) មានវ៉ិចទ័រ

ណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AM}=(1\,,1\,,2)$

គេបាន $(H): (x-3)+(y+1)+2(z-5)=0$

$(H): x+y+2z-12=0$

ដូចនេះ $\boxed{(H): x+y+2z-12=0}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com
Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ២៧ តុលា ២០១៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$ ។ ចូររកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ រួចគណនាកន្សោម

$I=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

2. ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖ **(២ ពិន្ទុ)**

ក. $y'-y\sin x=0$ ចំពោះ $y(0)=e$ ។

ខ. $y''+2y'-15y=0$ ចំពោះ $y(0)=5$ និង $y'(0)=-1$ ។

3. ក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ិចខៀវ 8 ដើម និងប៊ិចក្រហម 7 ដើម ។ អ្នកគ្រូលីដាចាប់យកប៊ិច 5 ដើមព្រមគ្នាពីប្រអប់នោះដោយចៃដន្យទុកសម្រាប់លើកទឹកចិត្តសិស្សពេលបង្រៀននៅថ្ងៃស្អែក ។

ក. រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់បានប៊ិចខៀវ 2 ដើម និងប៊ិចក្រហម 3 ដើម ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ខ. រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់បានប៊ិចក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច ។ **(១ ពិន្ទុ)**

4. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=-x^3-3x^2+1$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ **(៣ ពិន្ទុ)**

ខ. ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង C ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោងនោះ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

គ. ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ស្របនឹងបន្ទាត់ $d: y=-9x+1$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. នៅក្នុងលំហនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបន្ទាត់ d កាត់តាមចំណុច $I(1,-3,3)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}=(-1,2,1)$ និងមានប្លង់ P មួយដែលមានសមីការ $P: 2x+y-2z+9=0$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ d និងរកកូអរដោនេនៃចំណុច D នៅលើបន្ទាត់ d ដោយដឹងថា ចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ P ស្មើនឹង 2 ។ **(៣ ពិន្ទុ)**

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ d និងប្លង់ P ។ **(២ ពិន្ទុ)**

2. គេមានប៉ារ៉ាបូលដែលមានចំណុចកំណុំ $F(5,2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $x+1=0$ ។

ចូររកកំពូល V នៃប៉ារ៉ាបូល រួចសរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ ។ **(៤ ពិន្ទុ)**

ឯកសារខ្មែរ Facebook.com/document4khmer
ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារខ្មែរ document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៧

I. ផ្នែកពិជគណិត

1. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$, តាមរូបមន្ត $\ln u=\frac{u'}{u}$

នាំឱ្យ $f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)'}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{1+\frac{(x^2+2)'}{2\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}$

$$=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

ដូចនេះ: $\boxed{f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}}$ ។

គណនាកន្សោម I

គេមាន $I=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$ ទាញពីលទ្ធផលខាងលើ

គេបាន $I=\int_0^1 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^1$ ជាចំនួនថេរ

$$=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1$$

$$=\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-\ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$$

ដូចនេះ: $\boxed{I=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)}$ ។

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. គេមាន $y'-y\sin x=0$ **ចំពោះ:** $y(0)=e$

គេបាន $\frac{y'}{y}=\sin x$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)

$\ln|y|=-\cos x+c$

$|y|=e^{-\cos x+c}$

$y=\pm e^{-\cos x+c}$

$y=\pm e^{c}\cdot e^{-\cos x}=Ae^{-\cos x}$ ដែល $A=\pm e^{c}$ ថេរ

ដោយ $y(0)=e$ នោះ: $Ae^{-\cos 0}=e$ នាំឱ្យ $A=e^2$

គេបាន $y=Ae^{-\cos x}=e^2\cdot e^{-\cos x}=e^{2-\cos x}$

ដូចនេះ: $\boxed{y=e^{2-\cos x}}$ ជាចម្លើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម ។

ខ. គេមានសមីការ $y''+2y'-15y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+2\lambda-15=0$

គេបាន $\Delta'=1+15=16$

នាំឱ្យ $\lambda_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=-1-\sqrt{16}=-5$

$\lambda_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=-1+\sqrt{16}=3$

ចម្លើយទូទៅមានរាង $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$ ដែល A , B ថេរ

នាំឱ្យ $y=Ae^{-5x}+Be^{3x}$

$y'=-5Ae^{-5x}+3Be^{3x}$

ដោយ $y(0)=5$ និង $y'(0)=-1$

គេបាន $\begin{cases}y(0)=Ae^0+Be^0=5\\ y'(0)=-5Ae^0+3Be^0=-1\end{cases}$

$\begin{cases}A+B=5\\ -5A+3B=-1\end{cases}\Rightarrow A=2\ ,\ B=3$

ដូចនេះ: $\boxed{y=2e^{-5x}+3e^{3x}}$ ។

3. រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់បាន៖

គេមាន ប៊ិចខៀវ 8 ដើម និងប៊ិចក្រហម 7 ដើម

អ្នកគ្រូលីជាចាប់យកប៊ិច 5 ដើម ដោយចៃដន្យ

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(15,5)$

$$n(S)=\frac{15!}{10!\times 5!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=3003$$

ក. ប៊ិចខៀវ 2 ដើម និងប៊ិចក្រហម 3 ដើម

តាង A: ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ិចខៀវ 2 និងក្រហម 3 ដើម

គេបាន $n(A)=C(8\ ,\ 2)\times C(7\ ,\ 3)$

$$n(A)=\frac{8!}{6!\cdot 2!}\times\frac{7!}{4!\cdot 3!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 2}\times\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 6}=980$$

ដូចនេះ: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{980}{3003}=\boxed{\frac{140}{429}}$ ។

ខ. ប៊ិចក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច

តាង B: ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ិចក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច

នោះ: $\overline{B}$: ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ិចខៀវទាំងអស់ 5 ដើម

ដែល B និង $\overline{B}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា $P(B)+P(\overline{B})=1$

www.document4khmer.wordpress.com
Facebook.com/document4khmer

ដោយ $n\left(\overline{B}\right)=C(8\,,5)=\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{6\cdot \cancel{5!}}=56$

នាំឱ្យ $P\left(\overline{B}\right)=\dfrac{n\left(\overline{B}\right)}{n(S)}=\dfrac{56}{3003}=\dfrac{8}{429}$

គេបាន $P(B)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-\dfrac{8}{429}=\dfrac{421}{429}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{421}{429}}$ ។

4. ក. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=-x^3-3x^2+1$ (ដូចគ្រូអនុ. 2013)

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=-x^3-3x^2+1$

ដេរីវេ : $f'(x)=-3x^2-6x=-3x(x+2)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$-3x(x+2)=0$ នោះ $x=0\,,\,x=-2$

គេបាន $f(0)=-0^3-3\cdot 0^2+1=1$

$f(-2)=-(-2)^3-3(-2)^2+1=-3$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• បរមា

-ត្រង់ $x=-2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-2)=-3$ ។

-ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(0)=1$ ។

• លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-3x^2+1\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3-3x^2+1\right)=-\infty$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	$-\infty$

• ភាពប៉ោង និងភាពផត

ដេរីវេទី២ $f''(x)=\left(-3x^2-6x\right)'=-6x-6$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow -6x-6=0$ នោះ $x=-1$ ជាឫស

- បើ $x>-1$ នោះ $f''(x)<0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតចុះខាងក្រោម

- បើ $x<-1$ នោះ $f''(x)>0$

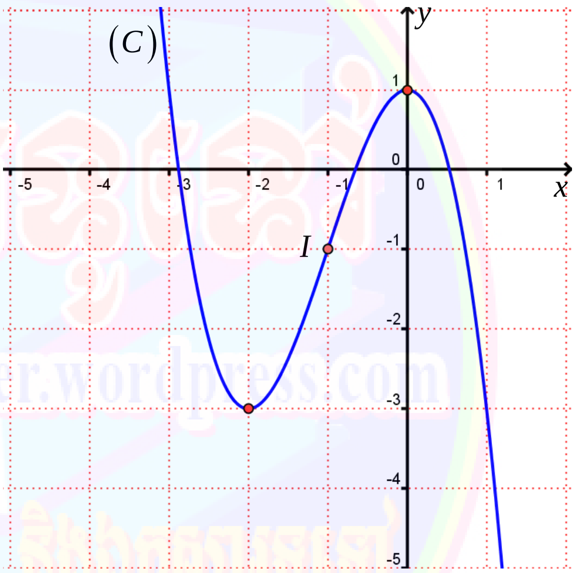
នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x=-1$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់មួយតាងដោយ I ដែល

$I(-1, f(-1))$ ឬ $I(-1,-1)$

• សង់ក្រាប



ខ. ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុចរបត់ I ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោងនោះ

គេនឹង បង្ហាញថាចំណុចរបត់ $I(-1\,,-1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង

បើ $I(a\,,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ លុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-2-x)+f(x)=-2$

ដោយ $f(-2-x)=-(-2-x)^3-3(-2-x)^2+1$

$=(2+x)^3-3(2+x)^2+1$

$=8+12x+6x^2+x^3-12-12x-3x^2+1$

$=x^3+3x^2-3$

នាំឱ្យ $f(-x)+f(x)$

$=\left(x^3+3x^2-3\right)+\left(-x^3-3x^2+1\right)$

$=-2$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{I(-1\,,-1) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង } C}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ស្របនឹងបន្ទាត់ d

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

ដោយ $T // d: y = -9x + 1$ នោះ $f'(x_0) = -9$

គេបាន $-3x_0^2 - 6x_0 = -9$ ឬ $x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0$

ករណីពិសេស $a + b + c = 0$ នោះ $x_0 = 1$, $x_0 = -3$

• ចំពោះ $x_0 = 1$ នោះគេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ

$$T_1: y = -9(x-1) + f(1)$$
$$= -9x + 9 + \left(-1^3 - 3\cdot 1^2 + 1\right)$$
$$= -9x + 6$$

• ចំពោះ $x_0 = -3$ នោះគេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ

$$T_2: y = -9(x+3) + f(-3)$$
$$= -9x - 27 + \left[-(-3)^3 - 3\cdot(-3)^2 + 1\right]$$
$$= -9x - 26$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប C ស្របនឹងបន្ទាត់ d មានពីរបន្ទាត់គឺ $T_1: y = -9x + 6$, $T_2: y = -9x - 26$

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ d

ដោយ d កាត់តាមចំណុច $I(1, -3, 3)$

នោះ $x_0 = 1$, $y_0 = -3$, $z_0 = 3$

ហើយ d ស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v} = (-1, 2, 1)$

នោះ $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ d មានរាងទូទៅ

$$d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \ , \ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

ដូចនេះ $$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \ , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$$

រកកូអរដោនេនៃចំណុច D នៅលើបន្ទាត់ d

ដោយដឹងថា ចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (P) ស្មើនឹង 2

តាមរូបមន្ត ចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (P) កំណត់ដោយ

$$d(D,(P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ដោយ $P: 2x + y - 2z + 9 = 0$

នោះ $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 9$

ហើយ D នៅលើបន្ទាត់ d

នោះ $x_0 = 1 - t$, $y_0 = -3 + 2t$, $z_0 = 3 + t$, $t \in \mathbb{R}$

គេបាន $$\frac{|2(1-t) + (-3+2t) - 2(3+t) + 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2$$

$$\frac{|2 - 2t - 3 + 2t - 6 - 2t + 9|}{\sqrt{4+1+4}} = 2$$

$$|2 - 2t| = 6$$

$$|1 - t| = 3$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 - t = 3 \\ 1 - t = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 4 \end{array}\right.$$

• ចំពោះ $t = -2$: នោះ $D(x_0 = 3, y_0 = -7, z_0 = 1)$

• ចំពោះ $t = 4$: នោះ $D(x_0 = -3, y_0 = 5, z_0 = 7)$

ដូចនេះ ចំណុច D នៅលើបន្ទាត់ d មានពីរចំណុចគឺ

$D_1(3, -7, 1)$, $D_2(-3, 5, 7)$ ។

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ d និងប្លង់ P

គេមាន $d: x = 1 - t$, $y = -3 + 2t$, $z = 3 + t$, $t \in \mathbb{R}$

$P: 2x + y - 2z + 9 = 0$

គេបាន $2(1-t) + (-3+2t) - 2(3+t) + 9 = 0$

$2 - 2t - 3 + 2t - 6 - 2t + 9 = 0$

$2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 1$

នាំឱ្យ $A(x = 1 - 1, y = -3 + 2, z = 3 + 1)$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ $A(0, -1, 4)$ ។

2. រកកំពូល V នៃប៉ារ៉ាបូល

គេមាន កំណុំប៉ារ៉ាបូល $F(5, 2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = -1$

នាំឱ្យ ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះដេក មានកំពូល $V(h, k)$

ដោយ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = h - p = -1$

$F(h + p, k) = F(5, 2)$ នោះ $h + p = 5$, $k = 2$

គេបាន $\begin{cases} h - p = -1 \\ h + p = 5 \end{cases} \Rightarrow h = 2$, $p = 3$

ដូចនេះ កូអរដោនេកំពូលគឺ $V(h = 2, k = 2)$ ។

សរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ

សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះដេកកំណត់ដោយ

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ តែដោយ $h = 2$, $k = 2$, $p = 3$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $(y - 2)^2 = 12(x - 2)$ ។