Smart Book

គណិតវិទ្យា

កម្រងវិញ្ញាសា និងចម្លើយ

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀន

គ្រូមត្តេយ្យ គ្រូបឋម គ្រូមធ្យម

ពីឆ្នាំ ២០០២ ដល់ឆ្នាំ ២០១៩

ស្រាវជ្រាវ រៀបរៀង និងចែករំលែកដោយ : ប្រើស ដាក់

២០ មីនា ២០២០

នេះជាវិញ្ញាសា និងចម្លើយ នៃការប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀន

សូមចុចលើវិញ្ញាសាតាមឆ្នាំនីមួយៗ ដែលអ្នកចង់អាន

វិញ្ញាសា ប្រឡងគ្រូមត្តេយ្យ-បឋម

2019	2018
2017	2016
2015	2014
2013	2012
2011	2010
2009	2008
2007	2006
2005	2004
2003	2002

វិញ្ញាសា ប្រឡងគ្រូមធ្យម

2019	2018
2017	2016
2015	2014
2013	2012
2011	2010
2009	2008
2007	2006
2005	2004
2003	2002

Smart Book

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

បន្ទប់លេខ : ....

តុលេខ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា

សម័យប្រឡង : ២១ វិច្ឆិកា ២០១៩

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖ (**0.៥ ពិន្ទុ**)

ក. $\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^3+2x^2-x-3)}{(x^3+3x+1)}$ ខ. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{(4x^2+3x-2)}-\sqrt{(x^2-2x+3)}$ ។

2. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖ (**0.៥ ពិន្ទុ**)

ក. $\log_3(3x+1)-\log_3(2x-1)=3$ ខ. $4(2^{2x})-2^x=1-4(2^x)$ ។

3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖ (**0.៥ ពិន្ទុ**)

ក. $I=\int(2e^x+3)^2e^xdx$ ខ. $J=\int_1^2\frac{x^2-1}{x-1}dx$ ។

4. ក្នុងប្រអប់មួយមានក្រដាសពណ៌លឿង 8 សន្លឹក និងក្រដាសពណ៌បៃតង 6 សន្លឹក ។ អ្នកគ្រូបុប្ផាចាប់យកក្រដាសពណ៌ 6 សន្លឹក ចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ មកធ្វើកាំជ្រួច ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ ៖

ក. គាត់ចាប់បានក្រដាសពណ៌ 6 សន្លឹកសុទ្ធតែពណ៌លឿង ។ (**0.៥ ពិន្ទុ**)

ខ. គាត់ចាប់បានក្រដាសពណ៌ 3 សន្លឹកពណ៌បៃតង ។ (**0.៥ ពិន្ទុ**)

គ. គាត់ចាប់បានយ៉ាងហោចណាស់ក្រដាសពណ៌បៃតង 1 សន្លឹក ។ (**0.៥ ពិន្ទុ**)

5. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=x^3-3x+2$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (**២ពិន្ទុ**)

ខ. កំណត់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដើម្បីឱ្យសមីការ ៖ $x^3-3x+2-m=0$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា ។ (**១ពិន្ទុ**)

6. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(3,-1,2)$, $B(0,-4,2)$ និង $C(-3,2,1)$ ។

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។ (**១.៥0 ពិន្ទុ**)

ខ. ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) កាត់តាមចំណុច A និង B ។ (**១ពិន្ទុ**)

គ. រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។ (**១ពិន្ទុ**)

ឃ. ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ (**0.៥ ពិន្ទុ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៩

1. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2-x-3}{x^3+3x+1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{3+0-0-0}{1+0+0}=\boxed{3}$$

(ព្រោះ $x\to\infty$ នោះ $\frac{n}{x}\to 0$ ដែល n ជាចំនួនថេរ)

ខ. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{(4x^2+3x-2)}-\sqrt{(x^2-2x+3)}$

(មានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$ ឬ $-\infty+\infty$)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(4x^2+3x-2)}^2-\sqrt{(x^2-2x+3)}^2}{\sqrt{(4x^2+3x-2)}+\sqrt{(x^2-2x+3)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-5}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{5}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{|x|\left(\sqrt{\left(4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\right)}$$

• បើ $x\to+\infty$ នោះ $|x|=x$ និង $\frac{n}{x}\to 0$ ដែល n ថេរ

$$=\frac{(+\infty)(3+0-0)}{\sqrt{(4+0-0)}+\sqrt{(1-0+0)}}=\frac{+\infty}{3}=+\infty$$

• បើ $x\to-\infty$ នោះ $|x|=-x$ និង $\frac{n}{x}\to 0$ ដែល n ថេរ

$$=\frac{(-\infty)(3+0-0)}{-\left(\sqrt{(4+0-0)}+\sqrt{(1-0+0)}\right)}=\frac{-\infty}{-3}=+\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\infty}\sqrt{(4x^2+3x-2)}-\sqrt{(x^2-2x+3)}=+\infty}$

2. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $\log_3(3x+1)-\log_3(2x-1)=3$

សមីការលោការីតនេះមានន័យ កាលណា

$$\begin{cases}3x+1>0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1/3\\x>1/2\end{cases}\Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

គេបាន៖

$$\log_3\frac{(3x+1)}{(2x-1)}=3\log_3 3$$

$$\frac{(3x+1)}{(2x-1)}=27$$

$$3x+1=54x-27$$

$$28=51x$$

$x=\frac{28}{51}$ (ជាតម្លៃដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $x>\frac{1}{2}$)

ដូចនេះ $\boxed{x=\frac{28}{51}}$ ជាឫសនៃសមីការ ។

ខ. $4(2^{2x})-2^x=1-4(2^x)$

គេតាង $t=2^x$ នោះគេបាន $t>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

គេបាន $4t^2-t=1-4t$

$4t^2+3t-1=0$

ឃើញថា $a-b+c=4-3+(-1)=0$

នាំឱ្យ $t=-1$ (មិនយកព្រោះ លក្ខខណ្ឌ $t>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$)

$t=-\frac{c}{a}=-\frac{-1}{4}=\frac{1}{4}=2^{-2}$

ចំពោះ $t=2^{-2}\Leftrightarrow 2^x=2^{-2}$ ទាញបាន $x=-2$

ដូចនេះ សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $\boxed{\mathbf{x=-2}}$ ។

3. គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $I=\int(2e^x+3)^2e^xdx$

គេតាង $t=2e^x+3$ នោះ $dt=2e^xdx$

គេបាន $I=\frac{1}{2}\int(2e^x+3)^2\cdot 2e^xdx$

$$=\frac{1}{2}\int t^2dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+c_1\right)$$

$$=\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}c_1=\frac{1}{6}(2e^x+3)^3+c$$

ដែល c_1 និង c ជាចំនួនថេរ ហើយ $\frac{1}{2}c_1=c$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{I=\frac{1}{6}(2e^x+3)^3+c}$ ។

ខ. $J=\int_1^2 \frac{x^2-1}{x-1}dx$

$$=\int_1^2 \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}dx$$

$$=\int_1^2 (x+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=(2+2)-\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$=4-\frac{3}{2}=\boxed{\frac{5}{2}}$$

4. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ ៖

ក្នុងប្រអប់មួយមានក្រដាសពណ៌លឿង 8 សន្លឹក និងបៃតង 6 សន្លឹក ។ អ្នកគ្រូចាប់យកក្រដាសពណ៌ 6 សន្លឹក ដោយចៃដន្យ នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច គឺ $n(S)=C(14,\,6)$

$$n(S)=\frac{14!}{(14-6)!\cdot 6!}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot \not{8}!}{\not{8}!\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=3003$$

ក. គាត់ចាប់បានក្រដាសពណ៌ 6 សន្លឹកសុទ្ធតែពណ៌លឿង

តាង A «ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានក្រដាសពណ៌ 6 សន្លឹកសុទ្ធតែពណ៌លឿង» នោះចំនួនករណីស្របគឺ $n(A)=C(8\,,\,6)$

គេបាន $n(A)=\frac{8!}{(8-6)!\cdot 6!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 1\cdot 6!}=28$

នាំឱ្យ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{28}{3003}=\frac{4}{429}\approx 0.009$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\frac{4}{429}\approx 0.009}$ ។

ខ. គាត់ចាប់បានក្រដាសពណ៌ 3 សន្លឹកពណ៌បៃតង

គាត់ចាប់បានក្រដាសពណ៌ 3 សន្លឹកពណ៌បៃតង មានន័យថា ក្រដាស 3សន្លឹកទៀតមានពណ៌លឿង ព្រោះគាត់ចាប់ 6 សន្លឹក តាង B «ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានក្រដាសពណ៌បៃតង 3 សន្លឹក និងពណ៌លឿង 3 សន្លឹក» នោះចំនួនករណីស្របគឺ

$$n(B)=C(6\,,\,3)\times C(8\,,\,3)$$

$$=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\times\frac{8!}{5!\cdot 3!}=20\times 56=1120$$

នាំឱ្យ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{1120}{3003}=\frac{160}{429}\approx 0.373$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{160}{429}\approx 0.373}$ ។

គ. គាត់ចាប់បានយ៉ាងហោចណាស់ក្រដាសពណ៌បៃតង 1 សន្លឹក

តាង $\overline{A}$ «ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានយ៉ាងហោចណាស់ក្រដាសពណ៌បៃតង 1 សន្លឹក» វាជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនឹងព្រឹត្តិការណ៍ A «ចាប់បានក្រដាសពណ៌ 6 សន្លឹកសុទ្ធ តែពណ៌លឿង»

គេបាន $P(\overline{A})+P(A)=1$

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{4}{429}=\frac{425}{429}\approx 0.991$$

ដូចនេះ $\boxed{P(\overline{A})=\frac{425}{429}\approx 0.991}$ ។

5. **ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$**

គេមាន $f(x)=x^3-3x+2$

(យោបល់អ្នករៀបរៀង ប្រើស ដារ៉ា : ក្នុងនាមខ្ញុំជាអ្នកតាមដានការប្រឡងគ្រូអនុ. និងគ្រូបឋម ម្នាក់យ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់ និងបានធ្វើចម្លើយគ្រប់ឆ្នាំចាប់ពីឆ្នាំ២០០២ ខ្ញុំចាប់អារម្មណ៍ឃើញថា លំហាត់អនុគមន៍ ចេញស្រដៀងគ្នា ឬពេលខ្លះដូចគ្នាទាំងស្រុង ជាក់ស្ដែងដូចជា លំហាត់នេះ $f(x)=x^3-3x+2$ ស្រដៀងនឹងការប្រឡងគ្រូបឋមឆ្នាំ២០១៦ $f(x)=x^3-3x+1$ ប៉ុន្តែដូចគ្នាទាំងស្រុងប្រឡងគ្រូអនុ.២០១៣ $f(x)=x^3-3x+2$ ហេតុនេះ **អ្នកប្រឡងជាប់គ្រូ មិនប្រាកដថាជាអ្នកខ្លាំង ប៉ុន្តែជាអ្នកធ្វើបានចម្លើយត្រូវល្អជាងគេ**)

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=x^3-3x+2$

ដេរីវេ : $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$3(x-1)(x+1)=0$ នោះ $x=1\,,\,x=-1$

គេបាន $f(1)=1^3-3\cdot 1+2=0$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

•បរមា

-ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-1)=4$ ។

-ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(1)=0$ ។

•លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x+2\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x+2\right)=+\infty$

•តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

•ភាពប៉ោងផត និងចំណុចរបត់

ដេរីវេទី២ $f''(x)=\left(3x^2-3\right)'=6x$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0$ នោះ $x=0$

- បើ $x>0$ នោះ $f''(x)>0$

  នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x<0$ នោះ $f''(x)<0$

  នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងក្រោម

- បើ $x=0$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

  នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់ $I(0, f(0))=I(0,2)$

•ផ្ចិតឆ្លុះ

គេនឹង បង្ហាញថា ចំណុចរបត់ $I(0\,,\,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង

បើ $I(a\,,\,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះលុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-x)+f(x)=4$

ដោយ $f(-x)+f(x)$

$=(-x)^3-3(-x)+2+x^3-3x+2$

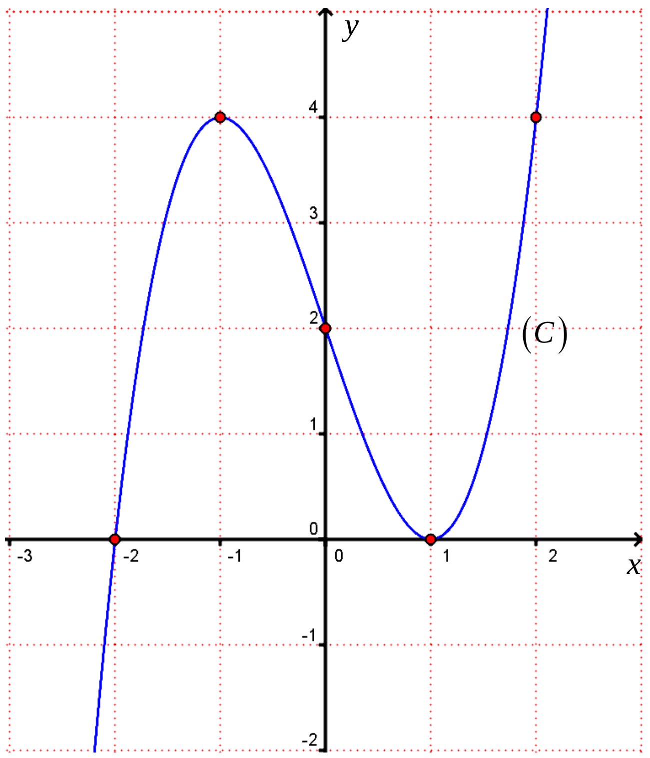
$=-x^3+3x+2+x^3-3x+2=4$ ពិត

ដូចនេះ $I(0\,,\,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ។

•សង់ក្រាប

តារាងតម្លៃលេខ

x	-2	-1	0	1	2
y	0	4	2	0	4



ខ. កំណត់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដើម្បីឱ្យសមីការ

$x^3-3x+2-m=0$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា

គេមាន សមីការ $x^3-3x+2-m=0$

គេបាន $m=x^3-3x+2$

ឫសនៃសមីការនេះបានពីប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ដេក $y=m$ និង ក្រាប C ។ តាមក្រាបដើម្បីឱ្យសមីការ $x^3-3x+2-m=0$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា កាលណា $m\in(0\,,\,4)$

ដូចនេះ តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m កំណត់បានគឺ $\boxed{m\in(0\,,\,4)}$ ។

6. **ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$**

គេមាន $A(3,\,-1,\,2)$, $B(0,\,-4,\,2)$ និង $C(-3\,,\,2\,,\,1)$

$\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A\,,\,z_B-z_A\right)$

$=(0-3\,,\,-4+1\,,\,2-2)$

$=\boxed{\mathbf{(-3\,,\,-3\,,\,0)}}$

$\overrightarrow{AC}=\left(x_C-x_A\,,\,y_C-y_A\,,\,z_C-z_A\right)$

$=(-3-3\,,\,2+1\,,\,1-2)$

$=\boxed{\mathbf{(-6\,,\,3\,,\,-1)}}$

$\overrightarrow{BC}=\left(x_C-x_B\,,\,y_C-y_B\,,\,z_C-z_B\right)$

$=(-3-0\,,\,2+4\,,\,1-2)$

$=\boxed{\mathbf{(-3\,,\,6\,,\,-1)}}$

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) កាត់ A និង B

សមីការការប៉ារ៉ាម៉ែតមានរាង $(\mathrm{d}):\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt\ ,\ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

ដោយ (d) កាត់តាមចំណុច A និង B នោះបន្ទាត់ (d)

មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB} = (-3\ ,\ -3\ ,\ 0)$

នោះទាញបាន $a = -3\ ,\ b = -3\ ,\ c = 0$

ហើយ (d) កាត់តាមចំណុច $A(3,\ -1,\ 2)$

នោះទាញបាន $x_0 = 3,\ y_0 = -1,\ z_0 = 2$

នាំឱ្យ $(\mathrm{d}):\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 - 3t\ ,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 0t \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{(\mathrm{d}):\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -1 - 3t\ ,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}}$ ។

គ. រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

គេនឹងគណនាប្រវែងជ្រុងនីមួយៗនៃត្រីកោណ ABC

$\overrightarrow{AB} = (-3\ ,\ -3\ ,\ 0)$

$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|(-3,\ -3,\ 0)\right| = \sqrt{9+9+0} = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC} = (-6\ ,\ 3\ ,\ -1)$

$AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|(-6\ ,\ 3\ ,\ -1)\right| = \sqrt{36+9+1} = \sqrt{46}$

$\overrightarrow{BC} = (-3\ ,\ 6\ ,\ -1)$

$BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|(-3\ ,\ 6\ ,\ -1)\right| = \sqrt{9+36+1} = \sqrt{46}$

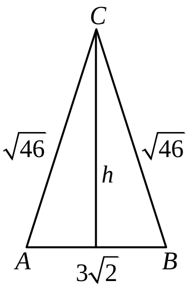
ឃើញថាត្រីកោណ ABC មានប្រវែងជ្រុង $AC = BC = \sqrt{46}$

នាំឱ្យ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល C

ដូចនេះ $\boxed{ABC \text{ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល } C}$ ។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

របៀបទី១ $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}bh$



$$h = \sqrt{\sqrt{46^2} - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{83}{2}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{83}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC} = \dfrac{3\sqrt{83}}{2}}$ ឯកត្តាផ្ទៃក្រឡា ។

របៀបទី២

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (-3\ ,\ -3\ ,\ 0)$ និង $\overrightarrow{AC} = (-6\ ,\ 3\ ,\ -1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 27\vec{k}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|3\vec{i} - 3\vec{j} - 27\vec{k}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-27)^2}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{1+1+9^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{83}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC} = \dfrac{3\sqrt{83}}{2}}$ ឯកត្តាផ្ទៃក្រឡា ។

របៀបទី៣ តាមរូបមន្តហេរ៉ុង

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \ ,\ \ p = \frac{a+b+c}{2}$$

ដោយ $a = 3\sqrt{2}\ ,\ b = c = \sqrt{46}$

គេបាន $p = \dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{46}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{46}$

នាំឱ្យ $p - a = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{46} - 3\sqrt{2} = \sqrt{46} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$p - b = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{46} - \sqrt{46} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$p - c = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{46} - \sqrt{46} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$$S_{ABC} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{46}\right)\left(\sqrt{46} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{46^2} - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{46 - \frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{83}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{83}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC} = \dfrac{3\sqrt{83}}{2}}$ ឯកត្តាផ្ទៃក្រឡា ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

បន្ទប់លេខ : ....

តុលេខ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា

សម័យប្រឡង : ៣០ វិច្ឆិកា ២០១៨

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីត ៖ ក. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$ ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)(\sin 4x)}{-2x^2}$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

2. ចូរដោះស្រាយនៅក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ នៃចំនួនកុំផ្លិចសមីការ ៖ (**១ពិន្ទុកន្លះ**)

ក. $-9Z^2+18Z-36=0$ ។ យើងតាង Z_1 ជាឫសសមីការដែលមានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន និង Z_2 ជាឫសមួយទៀត ។

ខ. ចូររកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2$ ។

3. គណនាអាំងតេក្រាល ៖ ក. $I=\int_1^2\left[(x-1)(x^2+2x-3)\right]dx$ ខ. $J=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)}\right)dx$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

4. អ្នកចិញ្ចឹមសត្វម្នាក់គាត់ទិញ កូនមាន់ កូនទា និងកូនជ្រូកមកចិញ្ចឹម ។ (**១ពិន្ទុកន្លះ**)

បើគាត់ទិញកូនមាន់ 3000 ក្បាល កូនទា 2000 ក្បាល និងកូនជ្រូក 100 ក្បាល គាត់ត្រូវចំណាយអស់ប្រាក់ $12\,000\,000$ រៀល។

បើគាត់ទិញកូនមាន់ 2000 ក្បាល កូនទា 1000 ក្បាល និងកូនជ្រូក 110 ក្បាល គាត់ត្រូវចំណាយអស់ប្រាក់ $8\,800\,000$ រៀល ។

បើគាត់ទិញកូនមាន់ 1100 ក្បាល កូនទា 500 ក្បាល និងកូនជ្រូក 52 ក្បាល គាត់ត្រូវចំណាយអស់ប្រាក់ $4\,510\,000$ រៀល ។

ចូររកតម្លៃ កូនមាន់មួយក្បាល កូនទាមួយក្បាល និងកូនជ្រូកមួយក្បាល ។

5. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2-5x+7}{2-x}$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ និងបង្ហាញថា $f(x)=-x+3-\frac{1}{(x-2)}$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. រកសមីការនៃអាស៊ីមតូតទ្រេត និងអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C របស់ f ។ (**១ពិន្ទុ**)

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $M(-4,2,0)$, $N(0,2,2)$, $P(2,4,4)$ និង $Q(0,6,-8)$ ។

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{PQ}$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. គណនាប្រវែង MN, MP, MQ, NQ, PQ ។ បង្ហាញថាត្រីកោណ MNQ និង MPQ កែងត្រង់ M ។ (**១ពិន្ទុ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៨

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$)

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(x-1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$

$=\dfrac{1^2+1}{1+1}=\boxed{1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 5x)(\sin 4x)}{-2x^2}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$)

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(\sin 5x)}{5x}\times\dfrac{(\sin 4x)}{4x}\times\dfrac{20}{-2}\right)$

$=1\times 1\times(-10)=\boxed{-10}$

2. ក. ដោះស្រាយនៅក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ នៃចំនួនកុំផ្លិច

គេមាន $-9Z^2+18Z-36=0$

$Z^2-2Z+4=0$ (មាន b គូ , តាម Δ')

គេបាន $\Delta'=(-1)^2-4=-3$

នាំឱ្យ $Z_1=\dfrac{-(-1)+\sqrt{-3}}{1}=1+i\sqrt{3}$

$Z_2=\dfrac{-(-1)-\sqrt{-3}}{1}=1-i\sqrt{3}$

ដូចនេះ: $\boxed{Z_1=1+i\sqrt{3}\ ,\ Z_2=1-i\sqrt{3}}$ ។

ខ. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)^2$

ដោយ $\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$

$=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

$\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)^2=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^2=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

ដូចនេះ: **ម៉ូឌុល $r=1$ អាគុយម៉ង់ $\theta=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$**

3. គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $I=\int_1^2\left[(x-1)(x^2+2x-3)\right]dx$

$=\int_1^2(x^3+2x^2-3x-x^2-2x+3)dx$

$=\int_1^2(x^3+x^2-5x+3)dx$

$=\left[\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}+3x\right]_1^2$

$=\left(4+\dfrac{8}{3}-10+6\right)-\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{2}+3\right)$

$=\dfrac{7}{3}+\dfrac{9}{4}-3=\dfrac{28+27-36}{12}=\boxed{\dfrac{19}{12}}$

ខ. $J=\int_{-1}^0\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x-1)}\right)dx$

$=\int_{-1}^0\left(\dfrac{(x-1)'}{(x-1)^2}-\dfrac{(x-1)'}{(x-1)}\right)dx$

$=\left[-\dfrac{1}{x-1}-\ln|x-1|\right]_{-1}^0$

$=(1-\ln 1)-\left(\dfrac{1}{2}-\ln 2\right)=\boxed{\dfrac{1}{2}+\ln 2}$

4. គណនាតម្លៃឯកត្តានៃ កូនមាន់ កូនទា កូនជ្រូក

គេតាង x , y , z ជាតម្លៃឯកត្តា កូនមាន់ កូនទា កូនជ្រូក រៀងគ្នា គិតជារៀល មានតម្លៃវិជ្ជមាន

បម្រាប់ គេអាចសរសេរបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}3000x+2000y+100z=12\,000\,000 & (1)\\ 2000x+1000y+110z=8\,800\,000 & (2)\\ 1100x+500y+52z=4\,510\,000 & (3)\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}2(2)-(1)\to\\ 2(3)-(2)\to\end{array}\begin{cases}1000x+120z=5\,600\,000 & (i)\\ 200x-6z=220\,000 & (ii)\end{cases}$$

គេយក $(i)\div 20+(ii)\to 250x=500000$ នោះ $x=2000$

ទាញរកបានតម្លៃ $z=30000$ រួចទាញរក $y=1500$

ក្រោយពីផ្ទៀងផ្ទាត់ (សូមផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយខ្លួនឯង) ពិត

ដូចនេះ: តម្លៃមួយក្បាលៗនៃកូនមាន់ កូនទា កូនជ្រូករៀងគ្នាគឺ $x=2000$, $y=1500$, $z=30000$ (គិតជារៀល)

5. **ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$**

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{2-x}$

ដោយ $f(x)$ មានន័យកាលណា $2-x\neq 0$ ឬ $x\neq 2$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{2\}=(-\infty\,,2)\cup(2\,,+\infty)}$ ។

បង្ហាញថា $f(x)=-x+3-\dfrac{1}{(x-2)}$

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{2-x}=\dfrac{-x^2+5x-7}{x-2}$

$=\dfrac{-x^2+2x+3x-6-1}{x-2}$

$=\dfrac{-x(x-2)+3(x-2)-1}{x-2}$

$=-x+3-\dfrac{1}{x-2}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=-x+3-\dfrac{1}{(x-2)}}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. រកសមីការនៃអាស៊ីមតូតទ្រេត និងអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

គេមាន $f(x)=-x+3-\dfrac{1}{x-2}$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{x-2}\right)=0$

ដូចនេះ $\boxed{y=-x+3 \text{ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(-x+3-\dfrac{1}{(x-2)}\right)$

$x<2:\ \lim\limits_{x\to 2^-}\left(-x+3-\dfrac{1}{(x-2)}\right)=-2+3-\dfrac{1}{0^-}=+\infty$

$x>2:\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(-x+3-\dfrac{1}{(x-2)}\right)=-2+3-\dfrac{1}{0^+}=-\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\pm\infty$ នោះ $\boxed{x=2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$

• ដែនកំណត់ : $D=(-\infty\,,2)\cup(2\,,+\infty)$ រករួចខាងលើ

• ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=-x+3-\dfrac{1}{x-2}$

ដេរីវេ : $f'(x)=-1+\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2}$

គេឱ្យ $f'(x)=0$ សមមូល $-x^2+4x-3=0$

ករណីពិសេស នោះ $x=1\,,\ x=3$

គេបាន $f(1)=-1+3-\dfrac{1}{(1-2)}=3$

$f(3)=-3+3-\dfrac{1}{(3-2)}=-1$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$

• បរមា

-ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(1)=3$ ។

-ត្រង់ $x=3$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ$(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(3)=-1$ ។

• លីមីត $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=-\infty$ (រករួច)

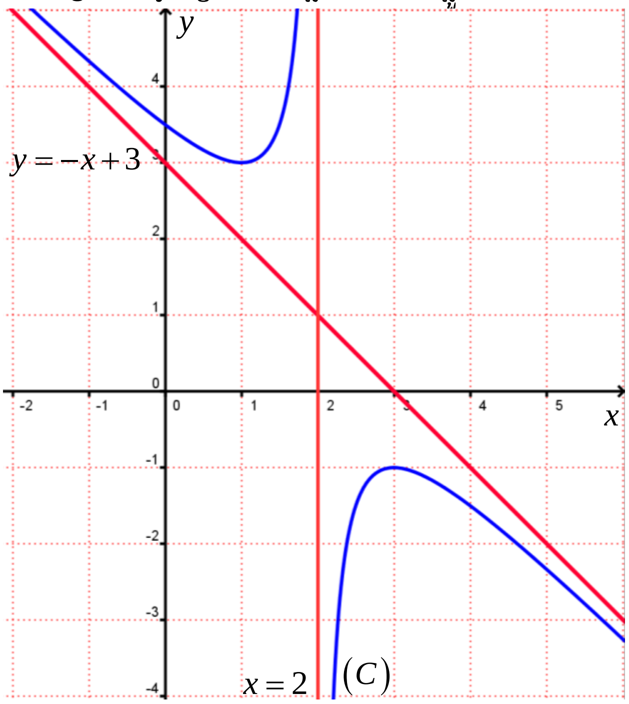
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+3-\dfrac{1}{x-2}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+3-\dfrac{1}{x-2}\right)=+\infty$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$	‖	$+$		$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	3	↗ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$

• សង់ក្រាប (សូមឱ្យតារាងតម្លៃលេខដោយខ្លួនឯង)



II. ចម្លើយផ្នែកធរណីមាត្រ

គេមាន ចំណុច $M(-4, 2, 0)$, $N(0, 2, 2)$,

$P(2, 4, 4)$ និង $Q(0, 6, -8)$

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{MN}=(0+4,\ 2-2,\ 2-0)=\boxed{(4,\ 0,\ 2)}$$

$$\overrightarrow{MP}=(2+4,\ 4-2,\ 4-0)=\boxed{(6,\ 2,\ 4)}$$

$$\overrightarrow{MQ}=(0+4,\ 6-2,\ -8-0)=\boxed{(4,\ 4,\ -8)}$$

$$\overrightarrow{NP}=(2-0,\ 4-2,\ 4-2)=\boxed{(2,\ 2,\ 2)}$$

$$\overrightarrow{NQ}=(0-0,\ 6-2,\ -8-2)=\boxed{(0,\ 4,\ -10)}$$

$$\overrightarrow{PQ}=(0-2,\ 6-4,\ -8-4)=\boxed{(-2,\ 2,\ -12)}$$

ខ. គណនាប្រវែង MN , MP , MQ , NQ , PQ

ប្រវែងជ្រុងខាងក្រោម គិតជាឯកត្តាប្រវែង

$$MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|(4,\ 0,\ 2)\right|=\sqrt{16+0+4}=\boxed{2\sqrt{5}}$$

$$MP=\left|\overrightarrow{MP}\right|=\left|(6,\ 2,\ 4)\right|=\sqrt{36+4+16}=\boxed{2\sqrt{14}}$$

$$MQ=\left|\overrightarrow{MQ}\right|=\left|(4,\ 4,\ -8)\right|=\sqrt{16+16+64}=\boxed{4\sqrt{6}}$$

$$NQ=\left|\overrightarrow{NQ}\right|=\left|(0,\ 4,\ -10)\right|=\sqrt{0+16+100}=\boxed{2\sqrt{29}}$$

$$PQ=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|(-2,\ 2,\ -12)\right|=\sqrt{4+4+144}=\boxed{2\sqrt{38}}$$

បង្ហាញថាត្រីកោណ MNQ និង MPQ កែងត្រង់ M

ដោយ ត្រីកោណ MNQ មានប្រវែងជ្រុងទាំងបីគឺ

$MN=2\sqrt{5}$, $MQ=4\sqrt{6}$, $NQ=2\sqrt{26}$

ដែល $MN^2+MQ^2=20+96=116$

ហើយ $NQ^2=\left(2\sqrt{29}\right)^2=116$

គេបាន $MN^2+MQ^2=NQ^2$ តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ

MNQ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M

ដូចនេះ: $\boxed{MNQ \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } M}$ ។

ដោយ $MP=2\sqrt{14}$, $MQ=4\sqrt{6}$, $PQ=2\sqrt{38}$

ដែល $\left(2\sqrt{14}\right)^2+\left(4\sqrt{6}\right)^2=\left(2\sqrt{38}\right)^2$ ពិត

នាំឱ្យ $MP^2+MQ^2=PQ^2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ

ដូចនេះ: $\boxed{MPQ \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } M}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
បន្ទប់លេខ : ....
តុលេខ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ២៥ វិច្ឆិកា ២០១៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{\dfrac{|x|-1}{2-|x|}}$ ។ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

2. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖ (**0.៥0ពិន្ទុ**)

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3-x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+6}{2x^2-3}$ ។

3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖ (**១ពិន្ទុ**)

ក. $\int_0^1\left(\dfrac{x}{x+2}\right)dx$ ខ. $\int_0^2\left(\dfrac{x^2-3}{x+1}\right)dx$ ។

4. គេមានសមីការ $z^2-6z+12=0$ ។

ក. រកឫសកុំផ្លិច z_1 និង z_2 នៃសមីការនេះ ដោយដឹងថាឫស z_1 មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន ។ (**0.៥0ពិន្ទុ**)

ខ. សរសេរឫស z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (**0.៥0ពិន្ទុ**)

5. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^3+3x^2-2$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (**១.៥0ពិន្ទុ**)

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំណុចរបត់ I ។ (**0.៥0ពិន្ទុ**)

គ. ប្រើប្រាស់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ ចូរពិភាក្សាចំនួនឫសរបស់សមីការ $x^3+3x^2-2=m$ ទៅតាមតម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។ (**0.៥0ពិន្ទុ**)

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(3,-1,2)$, $B(0,-4,2)$ និង $C(-3,2,1)$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ និងគណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. កំណត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC និងគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនេះ ។ (**១ពិន្ទុ**)

2. គេមានប៉ារ៉ាបូល (P) មួយដែលមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ និងមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ក. រកកូអរដោនេកំណុំ F និងសរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ ដោយដឹងថាក្រាភិចវាកាត់តាម $A(2,4)$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. រកតម្លៃ x_1 និងកំណត់ចំណុច B ដោយដឹងថាចំណុច $B(x_1,8)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល (P) ។ (**0.៥0ពិន្ទុ**)

គ. ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលនៅត្រង់ចំណុច A ខាងលើ ។ (**0.៥0ពិន្ទុ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៧

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=\sqrt{\dfrac{|x|-1}{2-|x|}}$ មានន័យលុះត្រា $\begin{cases} 2-|x|\neq 0 & (1) \\ \dfrac{|x|-1}{2-|x|}\geq 0 & (2) \end{cases}$

តាម $(1): 2-|x|\neq 0$ នោះ $x\neq \pm 2$

តាម $(2): \dfrac{|x|-1}{2-|x|}\geq 0$ គេនឹងសិក្សាសញ្ញារបស់វា

•ឫសនៃភាគយក $|x|-1=0$ នោះ $x=\pm 1$

•ឫសនៃភាគបែង $2-|x|=0$ នោះ $x=\pm 2$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
$\lvert x\rvert-1$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$2-\lvert x\rvert$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{\lvert x\rvert-1}{2-\lvert x\rvert}\geq 0$	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$		$-$

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=(-2,-1]\cup[1\,,2)}$ ។

2. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3-x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)}{x(x+1)}$$

$$=\frac{2\cdot 1-1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1}{x^3-x}=\dfrac{1}{2}}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+6}{2x^2-3}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{\infty}{\infty}$)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(3+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{3+0+0}{2-0}=\boxed{\frac{3}{2}}$$ ។

3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x+2}dx=\int_0^1\frac{x+2-2}{x+2}dx=\int_0^1\left(1-2\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$=\int_0^1\left(1-2\cdot\frac{(x+2)'}{x+2}\right)dx$$

$$=\Big[x-2\ln|x+2|\Big]_0^1$$

$$=(1-2\ln 3)-(0-2\ln 2)=\boxed{1-2\ln\frac{3}{2}}$$

ខ. $\displaystyle\int_0^2\frac{x^2-3}{x+1}dx=\int_0^2\frac{x^2-1-2}{x+1}dx$

$$=\int_0^2\left(\frac{x^2-1}{x+1}-2\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\int_0^2\left(x-1-2\cdot\frac{(x+1)'}{x+1}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-x-2\ln|x+1|\right]_0^2$$

$$=(2-2-2\ln 3)-2\ln 1=\boxed{-2\ln 3}$$

4. ក. រកឫសកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ដែល z_1 មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន៖

គេមាន $z^2-6z+12=0$, $\Delta'=9-12=-3$

នាំឱ្យ $z_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{-3}}{1}=3+i\sqrt{3}$

$z_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{-3}}{1}=3-i\sqrt{3}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{z_1=3+i\sqrt{3}\ \ ,\ z_2=3-i\sqrt{3}}$ ។

ខ. សរសេរឫស z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$z_1=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\boxed{2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$z_2=3-i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\boxed{2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)}$$

5. **ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$**

គេមាន $f(x)=x^3+3x^2-2$ **(ប្រហែលគ្រូអនុ.២០១៧)**

•ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=x^3+3x^2-2$

ដេរីវេ : $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$3x(x+2)=0$ នោះ $x=0\,,\,x=-2$

គេបាន $f(0)=0^3+3\cdot 0^2-2=-2$

$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-2=2$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

•បរមា

-ត្រង់ $x=-2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-2)=2$ ។

-ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ$(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(0)=-2$ ។

•លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x^2-2\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3x^2-2\right)=+\infty$

•តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

•ភាពប៉ោង និងភាពផត

ដេរីវេទី២ $f''(x)=\left(3x^2+6x\right)'=6x+6$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x+6=0$ នោះ $x=-1$ ជាឫស

- បើ $x>-1$ នោះ $f''(x)>0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x<-1$ នោះ $f''(x)<0$

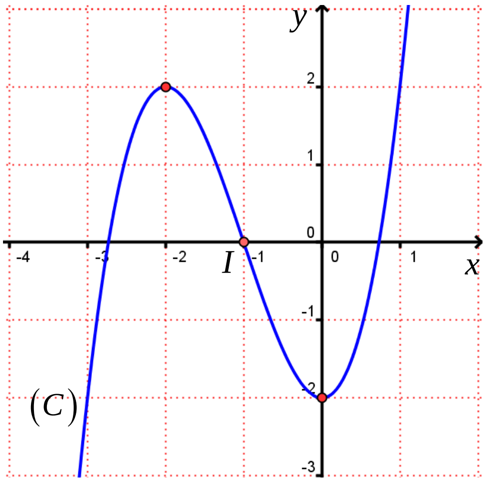
នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផត ចុះខាងក្រោម

- បើ $x=-1$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់មួយតាងដោយ I ដែល

$I(-1,f(-1))$ ឬ $I(-1,0)$

•សង់ក្រាប



ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចរបត់ I

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $T: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ T ប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុចរបត់ $I(-1,0)$

នាំឱ្យ $x_0=-1$, $y_0=0$

នោះ $f'(x_0)=f'(-1)=3(-1)^2+6(-1)=-3$

$f(x_0)=f(-1)=(-1)^3+3(-1)^2-2=0$

គេបាន $T: y=-3(x+1)+0=-3x-3$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{T: y=-3x-3}$ ។

គ. ប្រើប្រាស់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ពិភាក្សាចំនួនឫស របស់សមីការ $x^3+3x^2-2=m$ តាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m

គេមាន សមីការ $x^3+3x^2-2=m$

ឫសនៃសមីការនេះបានពីប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ដេក $y=m$ និង ក្រាប C ។ តាមក្រាបគេបានអត្ថិភាពនៃឫសដូចខាងក្រោម ៖

•$m\in(-\infty,-2)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $x_1<0$

•$m=-2$: សមីការមានឫសបី $x_1=-3\,,x_2=x_3=0$

•$m\in(-2\,,\,2)$: មានឫសបីផ្សេងគ្នា $x_1<x_2<0<x_3$

•$m=2$: សមីការមានឫសបី $x_1=x_2=-2\,,\,x_3=1$

•$m\in(2\,,+\infty)$: សមីការមានឫសវិជ្ជមានតែមួយគត់ $0<x_1$

II. ចម្លើយផ្នែកធរណីមាត្រ

1. ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\,,\,\overrightarrow{BC}$

គេមាន $A(3\,,-1\,,2)\,,\,B(0\,,-4\,,2)\,,\,C(-3\,,2\,,1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A\,,\,z_B-z_A)$

$=(0-3\,,-4+1\,,2-2)$

$=\boxed{(-3\,,-3\,,0)}$

$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A\,,\,y_C-y_A\,,\,z_C-z_A)$

$=(-3-3\,,2+1\,,1-2)$

$=\boxed{(-6\,,3\,,-1)}$

$\overrightarrow{BC}=(x_C-x_B\,,\,y_C-y_B\,,\,z_C-z_B)$

$=(-3-0\,,2+4\,,1-2)$

$=\boxed{(-3\,,6\,,-1)}$

គណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(-3\,,-3\,,0)$

$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2}=3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC}=(-6\,,3\,,-1)$

$AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-6)^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{46}$

$\overrightarrow{BC}=(-3\,,6\,,-1)$

$BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-3)^2+6^2+(-1)^2}=\sqrt{46}$

នាំឱ្យ បរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

$P=AB+AC+BC=3\sqrt{2}+\sqrt{46}+\sqrt{46}$

ដូចនេះ $\boxed{P=3\sqrt{2}+2\sqrt{46}}$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. កំណត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

ដោយ ត្រីកោណ ABC មានប្រវែងជ្រុង $AC=BC=\sqrt{46}$

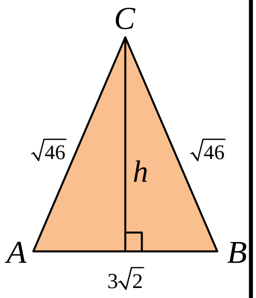
ដូចនេះ $\boxed{ABC \text{ ជាត្រីកោណសមបាទកំពូល } C}$ ។

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនេះ (របៀបទី១)

$h=\sqrt{\sqrt{46^2}-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{166}}{2}$

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{166}}{2}\right)$

$=\dfrac{3\sqrt{83}}{2}$



ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{3\sqrt{83}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនេះ (របៀបទី២)

រូបមន្ត $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}\right|$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -3 & 0\\ -6 & 3 & -1\end{vmatrix}=3\vec{i}-3\vec{j}-27\vec{k}$

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{3^2+(-3)^2+(-27)^2}$

$=\dfrac{3}{2}\sqrt{1+1+9^2}=\dfrac{3\sqrt{83}}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{3\sqrt{83}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

2. ក. រកកូអរដោនេកំណុំ F

ដោយ ប៉ារ៉ាបូល (P) មានកំពូល $O(0\,,0)$ និងមានអ័ក្ស ឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេបាន សមីការស្តង់ដាមានរាង $y^2=4px$

បម្រាប់ ក្រាភិចប៉ារ៉ាបូល (P) កាត់តាម $A(2\,,4)$

គេបាន $4^2=4p\cdot 2$ នោះ $p=2$

ដូចនេះ កូអរដោនេកំណុំ $\boxed{F(p\,,0)=F(2\,,0)}$ ។

សរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ៖

ដោយ សមីការស្តង់ដាមានរាង $y^2=4px$ ដែលមាន $p=2$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាសរសេរបាន $\boxed{(P):\,y^2=8x}$ ។

ខ. រកតម្លៃ x_1 **និងកំណត់ចំណុច** B

ដោយដឹងថាចំណុច $B(x_1\,,8)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល (P)

គេបាន $y^2=8x$ ទៅជា $8^2=8x_1$ នោះ $x_1=8$

ដូចនេះ $\boxed{x_1=8\,,\,B(8\,,8)}$ ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (d) **ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលត្រង់ចំណុច** A

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $(d):\,y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

ដោយ(d)ប៉ះ (P) ត្រង់ $A(2,4)$ នោះ $x_0=2,\,y(x_0)=4$

ហើយ $y^2=8x$ នោះ $2yy'=8$ នោះ $y'=\dfrac{4}{y}$

នាំឱ្យ $y'(x_0)=\dfrac{4}{y(x_0)}=\dfrac{4}{4}=1$

គេបាន $(d):\,y=1(x-2)+4$ ឬ $y=x+2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះសរសេរបាន $\boxed{(d):\,y=x+2}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

បន្ទប់លេខ : ....

តុលេខ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា "១២ + ២"

សម័យប្រឡង : ២៦ វិច្ឆិកា ២០១៦

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖ (**១ពិន្ទុ**)

ក. $\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-3x+2)}{(x^2-x-2)}$ ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖ (**១ពិន្ទុ**)

ក. $\int\frac{1}{(x^2+x-6)}dx$ ខ. $\int x\sin(4-x^2)dx$

3. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច ៖ (**១ពិន្ទុ**)

ក. $-3x^2+2x-1=0$ ខ. $x^4-2x^2-15=0$

4. អ្នកគ្រូបុប្ផាធ្វើប័ណ្ណលេខចំនួន 9 សន្លឹក ដែលសន្លឹកនីមួយៗសរសេរតែមួយលេខខុសៗគ្នា ក្នុងចំណោមពីលេខ 1 ដល់លេខ 9 ។ ក្នុងការពង្រឹងវិធីគុណ ដែលមានតួគុណនីមួយៗជាលេខ 1 ខ្ទង់ គាត់បានឱ្យក្រុមសិស្សនីមួយៗ ចាប់យកប័ណ្ណលេខចំនួន 2 សន្លឹក រួចគណនាផលគុណនៃលេខក្នុងប័ណ្ណទាំងពីរនោះ ។ រកប្រូបាបនៃការចាប់បានប័ណ្ណលេខ 2 សន្លឹក ដែលផលគុណនៃលេខរបស់វាជាចំនួនគូ ។ (**១ពិន្ទុ**)

5. គេមានអនុគមន៍ $f(x): y=x^3-3x+1$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. ប្រើប្រាស់ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ចូរពិភាក្សាតាមតម្លៃ m នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ $x^3-3x+1-m=0$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. គេមានអេលីប (E) ដែលមានចំណុចកំណុំ $F_1(1,-3)$, $F_2(1,1)$ និងកាត់តាមចំណុច $A(-\sqrt{2}+1,1)$ ។

ក. ចូររកចម្ងាយពីផ្ចិតអេលីប (E) ទៅចំណុចកំណុំរបស់អេលីបនោះ ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. គណនាប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូចរបស់អេលីប (E) រួចសរសេរសមីការស្តង់ដានៃអេលីបនោះ ។ (**១ពិន្ទុ**)

2. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ មានទិសដៅអវិជ្ជមាន គេមាន 4 ចំណុច $I(3,-1,5)$, $M(4,2,-1)$, $N(1,-2,3)$ និង $A(1,1,3)$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ (P) កាត់តាម 3 ចំណុច I, M និង N ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IMN និងសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) កាត់តាមចំណុច A និងកាត់ប្លង់ (P) ត្រង់ចំណុច M ។ (**១ពិន្ទុ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៦

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-3x+2)}{(x^2-x-2)}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2-1}{2+1}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\times\dfrac{3x}{\sin 3x}\times\dfrac{2}{3}\right)$

$=1\times 1\times\dfrac{2}{3}=\boxed{\dfrac{2}{3}}$

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+x-6)}dx$

$=\displaystyle\int\frac{1}{(x-2)(x+3)}dx$

$=\displaystyle\int\frac{1}{5}\left[\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x+3)}\right]dx$

$=\dfrac{1}{5}\left[\ln|x-2|-\ln|x+3|\right]+c$, c ថេរ

$=\boxed{\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+3}\right|+c}$

ខ. $\displaystyle\int x\sin(4-x^2)dx$

គេតាង $t=4-x^2$ នោះ $dt=-2xdx$ គេបាន ៖

$\displaystyle\int x\sin(4-x^2)dx=-\frac{1}{2}\int\sin(4-x^2)\cdot(-2xdx)$

$=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\sin(4-x^2)\cdot(-2xdx)$

$=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\sin t dt=-\frac{1}{2}(-\cos t)+c$, c ថេរ

$=\boxed{\dfrac{1}{2}\cos(4-x^2)+c}$

3. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច ៖

ក. $-3x^2+2x-1=0$ មាន $a=-3$, $b=2$, $c=-1$

ដោយ $\Delta'=1-3=-2$

នាំឱ្យ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-2}}{-3}=\dfrac{1}{3}\mp i\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

ដូចនេះ: $\boxed{x=\dfrac{1}{3}-i\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ ,\ x=\dfrac{1}{3}+i\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$ ជាឫស ។

ខ. $x^4-2x^2-15=0$

គេតាង $t=x^2$ គេបាន ៖ $t^2-2t-15=0$

ដោយ $\Delta'=(-1)^2+15=16$

នាំឱ្យ $t=\dfrac{1\pm\sqrt{16}}{1}=\left[\begin{array}{l}5\\-3\end{array}\right.$

ចំពោះ: $t=5$ សមមូល $x^2=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

ចំពោះ: $t=-3$ សមមូល $x^2=-3\Rightarrow x=\pm\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}$

ដូចនេះ: $\boxed{x=\pm\sqrt{5}\ ,\ x=\pm i\sqrt{3}}$ ជាឫសនៃសមីការ ។

4. រកប្រូបាបចាប់បានប័ណ្ណ មានផលគុណនៃលេខរបស់វាជាចំនួនគូ

គេមាន ប័ណ្ណ 9 មានចុះលេខពីលេខ 1 ដល់លេខ 9

ដើម្បីឱ្យផលគុណនៃប័ណ្ណទាំងពីរជាចំនួនគូលុះត្រាតែ គេចាប់បានប័ណ្ណមានលេខគូមួយយ៉ាងតិច មានន័យថា គូមួយ ឬគូពីរ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប័ណ្ណមានផលគុណជាលេខគូ

គេបាន $P(A)=P(\text{គូ សេស})+P(\text{គូ គូ})+P(\text{សេស គូ})$

$=\left(\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{5}{8}\right)+\left(\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{3}{8}\right)+\left(\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{8}\right)$

$=\dfrac{20}{72}+\dfrac{12}{72}+\dfrac{20}{72}=\dfrac{52}{72}=\dfrac{13}{18}$

ដូចនេះ: $\boxed{P(A)=\dfrac{13}{18}=0.72}$ ។

5. ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $y=f(x)=x^3-3x+1$ (ដូចគ្រូអនុ. 2013)

• ដែនកំណត់

ដោយ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ពហុធា មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ: $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\ ,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=x^3-3x+1$

ដេរីវេ : $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$3(x-1)(x+1)=0$ នោះ $x=1\,,\,x=-1$

គេបាន $f(1)=1^3-3\cdot1+1=-1$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+1=3$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• បរមា

-ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-1)=3$ ។

-ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(1)=-1$ ។

• លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x+1\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x+1\right)=+\infty$$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

• ភាពប៉ោងផត និងចំណុចរបត់

ដេរីវេទី២ $f''(x)=\left(3x^2-3\right)'=6x$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0$ នោះ $x=0$

- បើ $x>0$ នោះ $f''(x)>0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x<0$ នោះ $f''(x)<0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងក្រោម

- បើ $x=0$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់ $I(0,f(0))=I(0,1)$

• ផ្ចិតឆ្លុះ:

គេនឹង បង្ហាញថា ចំណុចរបត់ $I(0\,,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង បើ $I(a\,,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះលុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-x)+f(x)=2$

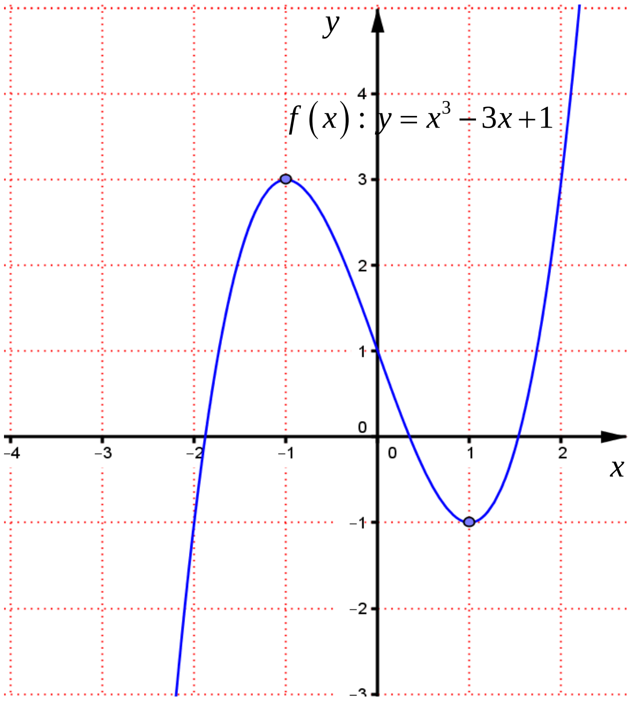
ដោយ $f(-x)+f(x)$

$=(-x)^3-3(-x)+1+x^3-3x+1$

$=-x^3+3x+1+x^3-3x+1=2$ ពិត

ដូចនេះ $I(0\,,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ f

• សង់ក្រាប



ខ. ពិភាក្សាតាមតម្លៃ m នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ

គេមាន សមីការ $x^3-3x+1-m=0$

គេបាន $m=x^3-3x+1$

ឫសនៃសមីការនេះបានពីប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ដេក $y=m$ និងក្រាប C ។ តាមក្រាបគេបានអត្ថិភាពនៃឫសដូចខាងក្រោម ៖

• $m\in(-\infty,-1)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $x_1<0$

• $m=-1$: សមីការមានឫសបី $x_1=-2\,,\,x_2=x_3=1$

• $m\in(-1\,,3)$: សមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា

• $m=3$: សមីការមានឫសបី $x_1=x_2=-1\,,\,x_3=2$

• $m\in(3\,,+\infty)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $0<x_1$

II. ចម្លើយផ្នែកធរណីមាត្រ

1. ក. រកចម្ងាយពីផ្ចិតអេលីប(E) ទៅចំណុចកំណុំរបស់អេលីបនោះ:

ដោយ ផ្ចិតជាចំណុចកណ្តាលនៃ កំណុំទាំងពីរ

គេបាន $2c = F_1F_2$ ឬ $c = \dfrac{F_1F_2}{2}$

ដោយ $F_1(1,-3)$, $F_2(1,1)$

នោះ $F_1F_2 = \sqrt{(1-1)^2+(1+3)^2} = \sqrt{0+4^2} = 4$

នាំឱ្យ $c = \dfrac{F_1F_2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំគឺ $\boxed{c=2}$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. គណនាប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូចរបស់អេលីប (E)

ដោយ អេលីប (E) កាត់តាមចំណុច $A\left(-\sqrt{2}+1\,,1\right)$

តាមនិយមន័យអេលីប ដែលមាន $2a$ ជាប្រវែងអ័ក្សធំ

គេបាន $AF_1 + AF_2 = 2a$

ដោយ $AF_1 = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}-1\right)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$AF_2 = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}-1\right)^2+(1-1)^2} = \sqrt{2}$

នាំឱ្យ $2a = 3\sqrt{2}+\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

ដូចនេះ ប្រវែងអ័ក្សធំ $\boxed{2a=4\sqrt{2}}$ ឯកតាប្រវែង ។

ដោយ $b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-2^2} = 2$

ដូចនេះ ប្រវែងអ័ក្សតូច $\boxed{2b=4}$ ឯកតាប្រវែង ។

➤សរសេរសមីការស្តង់ដានៃអេលីបនោះ:

ដោយ $F_1(1,-3)$, $F_2(1,1)$ មានអាប់ស៊ីសដូចគ្នា

នោះ (E) ជាអេលីបមានអ័ក្សធំស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស

សមីការ ស្តង់ដា $(\mathrm{E}): \dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

ដោយ ផ្ចិត I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ កំណុំទាំងពីរ

$$I(h\,,k) = I\left(\frac{1+1}{2}\,,\frac{-3+1}{2}\right) = I(1\,,-1)$$

គេបាន $h=1\,, k=-1$

នាំឱ្យ សមីការស្តង់ដានៃអេលីបអាចសរសេរបានគឺ៖

$$(\mathrm{E}): \frac{(x-1)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}+\frac{(y+1)^2}{2^2} = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{(\mathrm{E}): \dfrac{(x-1)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{(y+1)^2}{2^2} = 1}$ ។

2. **ក. សរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ (P) កាត់ I , M និង N**

ប្លង់រាង $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$

ដោយ ប្លង់ (P) កាត់តាមបីចំណុច I , M និង N

នោះប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $I(3,-1,5)$ និង

មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{IM}\times\overrightarrow{IN}$

គេមាន $I(3,-1,5)$, $M(4,2,-1)$, $N(1,-2,3)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{IM} = (1\,,3\,,-6)$, $\overrightarrow{IN} = (-2\,,-1\,,-2)$

នោះ $\vec{n} = \overrightarrow{IM}\times\overrightarrow{IN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -12\vec{i}+14\vec{j}+5\vec{k}$

គេបាន $(P): -12(x-3)+14(y+1)+5(z-5) = 0$

$$-12x+14y+5z+36+14-25 = 0$$

$$-12x+14y+5z+25 = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{(\mathrm{P}): -12x+14y+5z+25 = 0}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IMN

រូបមន្ត $S_{IMN} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{IM}\times\overrightarrow{IN}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+14^2+5^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{365} = \frac{\sqrt{365}}{2}$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{S_{IMN} = \dfrac{\sqrt{356}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

➤សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d)

សមីការការប៉ារ៉ាម៉ែតមានរាង $(\mathrm{d}): \begin{cases} x = x_0+at \\ y = y_0+bt\ ,\ t\in\mathbb{R} \\ z = z_0+ct \end{cases}$

ដោយ (d) កាត់តាមចំណុច $A(1\,,1\,,3)$ និងកាត់តាម

ចំណុច $M(4\,,2\,,-1)$ នោះបន្ទាត់ (d) មាន

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AM} = (3\,,1\,,-4)$

នាំឱ្យ $(\mathrm{d}): \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1+t\quad ,\ t\in\mathbb{R} \\ z = 3-4t \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{(\mathrm{d}): \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1+t\quad ,\ t\in\mathbb{R} \\ z = 3-4t \end{cases}}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ០៦ ធ្នូ ២០១៥

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2-2x-1)}{(x^2+1)} \qquad B=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(2x+1)}$$ (១ពិន្ទុ)

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$A=\int(x^2-2x+1)dx \qquad B=\int_0^1\left(3x^3-\frac{1}{4}x\right)dx$$ (១ពិន្ទុ)

3. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (កន្លះពិន្ទុ)

ខ. ចូរគណនា Z^2 រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (កន្លះពិន្ទុ)

4. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{(kx^2-5x+7)}{(kx-2)}$ ។

ក. ចូរសិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ចំពោះ $k=1$ ។ (២ពិន្ទុ)

ខ. ចូរកំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ប៉ះបន្ទាត់ $y=1$ ។ (១ពិន្ទុ)

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ នៃលំហ គេមានបីចំណុច $A(1,2,1)$, $B(2,0,3)$ និង $C(-1,2,0)$ ។

ក. ចូរគណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថា ចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ (១ពិន្ទុ)

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ (១ពិន្ទុ)

2. ប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $(0,0)$ និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'x)$ ។

ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល ដោយដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A(4,8)$ ។ (១ពិន្ទុ)

ខ. គេមានចំណុច $B(x_1,4)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ ។ ចូរគណនាតម្លៃ x_1 ។ (១ពិន្ទុ)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ២០១៥

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2-2x-1\right)}{\left(x^2+1\right)}\quad \text{(រាងមិនកំណត់ } \tfrac{\infty}{\infty}\text{)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2-0-0}{1+0}=\boxed{2}$$

$$B=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)(2x+1)}\quad \text{(រាងមិនកំណត់ } \tfrac{0}{0}\text{)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1}{2x+1}=\frac{3}{-1}=\boxed{-3}$$

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$A=\int\left(x^2-2x+1\right)dx=\boxed{\frac{x^3}{3}-x^2+x+c}$$ ដែល c ថេរ

$$B=\int_0^1\left(3x^3-\frac{1}{4}x\right)dx=\left[\frac{3x^4}{4}-\frac{x^2}{8}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)-(0-0)=\boxed{\frac{5}{8}}$$

3. ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$ ។

ខ. គណនា Z^2 រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

តាមដឺម៉ូ $\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

នាំឱ្យ $Z^2=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$ ។

4. ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C)

គេមាន $f(x)=\frac{\left(kx^2-5x+7\right)}{(kx-2)}$

ចំពោះ $k=1$ គេបាន $f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$

•ដែនកំណត់

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x-2\neq 0\Rightarrow x\neq 2$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=(-\infty\,,\,2)\cup(2\,,\,+\infty)}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

$$f'(x)=\frac{\left(x^2-5x+7\right)'(x-2)-(x-2)'\left(x^2-5x+7\right)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(2x-5)(x-2)-\left(x^2-5x+7\right)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-4x-5x+10-x^2+5x-7}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x+10-7}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

ឱ្យ $f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0$

ដោយ $\forall\in D\ ,\ (x-2)^2>0$

នាំឱ្យ $x^2-4x+3=0$ មានឫសងាយ $x=1\,,\ x=3$

ចំពោះ $x=1:\ f(1)=\frac{1^2-5+7}{1-2}=-3$

$x=3:\ f(3)=\frac{3^2-5\cdot 3+7}{3-2}=1$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	‖	−	0	+

•ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(1)=-3$ ។

•ត្រង់ $x=3$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(3)=1$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\frac{4-10+7}{2+0^--2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\frac{4-10+7}{2+0^+-2}=+\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to2} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

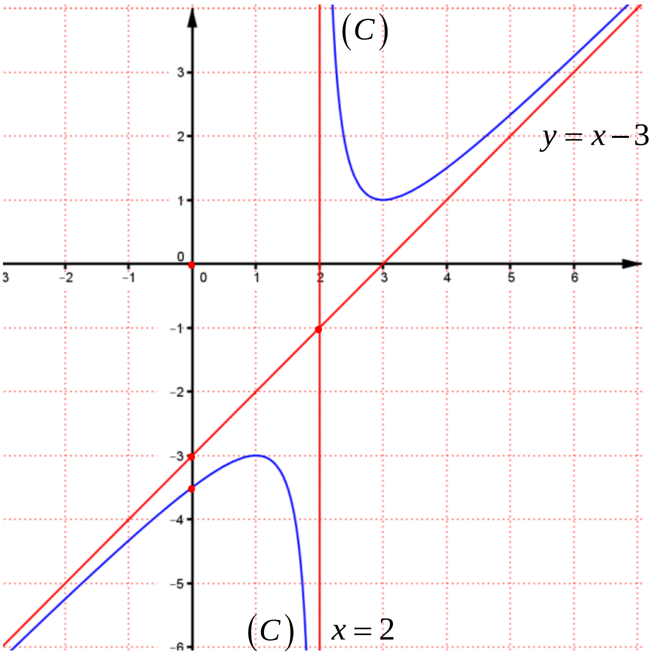
ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

➤សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



• ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ f

ដោយ អាស៊ីមតូតឈរ $x=2$ និងទ្រេត $y=x-3$ ប្រសព្វគ្នា ត្រង់ចំណុច $I(2,-1)$ នាំឱ្យ $I(2,-1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)

ខ. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) ប៉ះបន្ទាត់ $y=1$

គេមាន $f(x)=\dfrac{(kx^2-5x+7)}{(kx-2)}$ និងបន្ទាត់ $y=1$

គេបាន សមីការអាប់ស៊ីស

$$\frac{kx^2-5x+7}{kx-2}=1$$

$$kx^2-5x+7=kx-2$$

$$kx^2+(-5-k)x+9=0$$

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y=1$ លុះត្រាតែ $\begin{cases}a\neq0\\ \Delta=0\end{cases}$

នាំឱ្យ $a=k\neq0$

$$kx^2+(-5-k)x+9=0$$

$$\Delta=(-5-k)^2-36k=0$$

$$25+10k+k^2-36k=0$$

$$k^2-26k+25=0$$

សមីការមានឫសងាយ $k=1$, $k=25$

ដូចនេះ៖ តម្លៃកំណត់បានគឺ $\boxed{k=1\,,\,k=25}$ ។

II. ចម្លើយផ្នែកធរណីមាត្រ

1. ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ៖

គេមាន $A(1,2,1)$, $B(2,0,3)$ និង $C(-1,2,0)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,0,-1)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$

ដូចនេះ៖ គណនាបាន $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}}$ ។

➤បង្ហាញថា ចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}\neq\vec{0}$

នាំឱ្យ បីចំណុច A , B , C មិនរត់ត្រង់ជួរ

ដូចនេះ៖ $\boxed{\text{ចំណុច } A\,,\,B \text{ និង } C \text{ មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ}}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$$

ដូចនេះ៖ ផ្ទៃត្រីកោណ $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

2. ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

គេមាន ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $(0\ ,\ 0)$

និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'x)$

នោះ ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

នាំឱ្យ ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា $y^2 = 4px$

ដោយ ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A(4\ ,\ 8)$

គេបាន $8^2 = 16p \Rightarrow p = 4$ នោះ $y^2 = 4 \cdot 4x$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $\boxed{y^2 = 16x}$ ។

ខ. គណនាតម្លៃ x_1

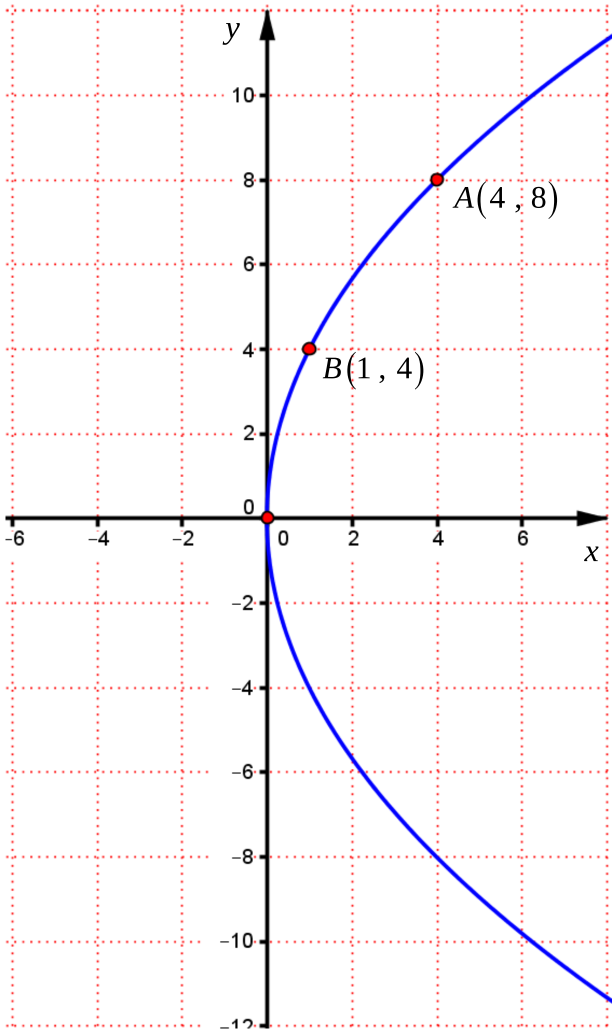
គេមាន ចំណុច $B(x_1\ ,\ 4)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ

គេបាន $y^2 = 16x$ ទៅជា $4^2 = 16x_1$ នោះ $x_1 = 1$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{x_1 = 1}$ ។

ចប់ត្រឹមនេះ

ខ្ញុំសូមបន្ថែមក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូលដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់



ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ០៧ ធ្នូ ២០១៤

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា   រយៈពេល : ១២០ នាទី   ពិន្ទុ : ១០

ផ្នែកពីជគណិត

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $A=\lim\limits_{x\to 1^+}|x+1|+2$ $B=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+1}{x^3-2x^2+5}$ **(កន្លះពិន្ទុ)**

ខ. $C=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ $D=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|x+3|}$ **(កន្លះពិន្ទុ)**

II. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $A=\int_1^2\left(x^2+3x+2\right)dx$ $B=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\cos x+\sin x)}\right)dx$ **(មួយពិន្ទុ)**

ខ. $C=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos x}\right)dx$ $D=\int_2^1\left(\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$ **(មួយពិន្ទុ)**

III. ដោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $9^{-2|x|}=\dfrac{1}{81}$ (កន្លះពិន្ទុ)   ខ. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{-x^2+1}{2}}>256$ **(កន្លះពិន្ទុ)**

IV. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-mx+m}{x-1}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យចំណុច $A(1,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) នៃ $f(x)$ ។ **(កន្លះពិន្ទុ)**

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ចំពោះ $m=0$ ។ **(មួយពិន្ទុ)**

គ. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y=k$ កាត់ខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច B និង C ដែល $BC=\sqrt{5}$ ។ **(កន្លះពិន្ទុ)**

ផ្នែកធរណីមាត្រ

V. គេមានសមីការ $25x^2+9y^2=225$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប រួចបញ្ជាក់ទីតាំងផ្ចិត និងអ័ក្សធំរបស់វាផង ។ **(មួយពិន្ទុ)**

ខ. រកប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូច នៃអេលីបនេះ រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចកំពូល និងកំណុំទាំងពីររបស់វា ។ **(មួយពិន្ទុ)**

VI. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានគេមានបីចំណុច $A(1,0,-2)$, $B(2,1,-1)$ និង $C(1,-2,2)$ ។

ក. គណនាប្រវែងជ្រុង AB និង BC នៃត្រីកោណ ABC ។ **(មួយពិន្ទុ)**

ខ. M និង N ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃជ្រុង AB និង BC ។ ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N ។ **(មួយពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៤

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $A=\lim_{x\to 1^+}|x+1|+2=|1+1|+2=\boxed{4}$

$B=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+1}{x^3-2x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3}=\boxed{2}$

ខ. $C=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\boxed{6}$

$D=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x+3|}=\frac{\sqrt{(-3)^2-1}}{0^+}=\boxed{+\infty}$

II. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $A=\int_1^2\left(x^2+3x+2\right)dx$

$=\int_1^2\left(x^2+3x+2\right)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2$

$=\left(\frac{8}{3}+6+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+2\right)$

$=\frac{38}{3}-\frac{23}{6}=\boxed{\frac{53}{6}}$

$B=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\cos x+\sin x)}\right)dx$

$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)}\right)dx$

$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx=\left[\sin x+\cos x\right]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}$

$=(1+0)-(0-1)=\boxed{2}$

ខ. $C=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}\right)dx$

$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 x}{\cos x}\right)dx=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{1}$

$D=\int_2^1\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_2^1\left(x^{-4}+x^{-2}\right)dx$

$=\left[\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^1=\left[-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}\right]_2^1$

$=\left(-\frac{1}{3}-1\right)-\left(-\frac{1}{24}-\frac{1}{2}\right)=\frac{-4}{3}+\frac{13}{24}=\boxed{-\frac{19}{24}}$

III. ដោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $9^{-2|x|}=\frac{1}{81}$

$9^{-2|x|}=9^{-2}$

$-2|x|=-2$

$|x|=1$ នាំឱ្យ $x=\pm 1$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=\pm 1}$ ។

ខ. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{-x^2+1}{2}}>256$

$4^{-\frac{-x^2+1}{2}}>4^4$

គេបាន $-\frac{-x^2+1}{2}>4$ ឬ $x^2-1>8$ ឬ $x^2-9>0$

ឱ្យ $x^2-9=0$ នោះ $x=\pm 3$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x^2-9>0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)}$ ។

IV. ក. កំណត់តម្លៃ m :

ដើម្បីឱ្យចំណុច $A(1,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង (C) នៃ $f(x)$ លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2a-x)+f(x)=2b$ ឬ $f(2-x)+f(x)=4$

ដោយ $f(x)=\frac{x^2-mx+m}{x-1}$

នោះ $f(2-x)=\frac{(2-x)^2-m(2-x)+m}{(2-x)-1}$

$=\frac{4-4x+x^2-2m+mx+m}{-x+1}$

$=\frac{x^2+(m-4)x-m+4}{-(x-1)}$

$=\frac{-x^2-(m-4)x+m-4}{x-1}$

គេបាន $\frac{x^2-mx+m}{x-1}+\frac{-x^2-(m-4)x+m-4}{x-1}=4$

$$\frac{-(2m-4)x+2m-4}{x-1}=4$$

$$-(2m-4)x+2m-4=4x-4$$

$$-(2m-4)x+2m=4x$$

$$\begin{cases}-(2m-4)=4\\ 2m=0\end{cases} \Rightarrow \quad m=0$$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ $\boxed{m=0}$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ចំពោះ $m=0$ នោះ $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

• ដែនកំណត់

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x-1\neq 0$ នោះ $x\neq 1$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty\,,1)\cup(1\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(x^2)'(x-1)-(x-1)'x^2}{x-1}$

$$=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$

ដោយ $\forall x\in D\,,(x-1)^2>0$

នាំឱ្យ $x^2-2x=0$ នោះ $x=0\,,x=2$

ចំពោះ $x=0: f(0)=\dfrac{0^2}{0-1}=0$

ចំពោះ $x=2: f(2)=\dfrac{2^2}{2-1}=4$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

• ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(0)=0$ ។

• ត្រង់ $x=2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(2)=4$ ។

• លីមីត និងអាសុីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{1+0^- -1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{1+0^+ -1}=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=1$ ជាអាសុីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

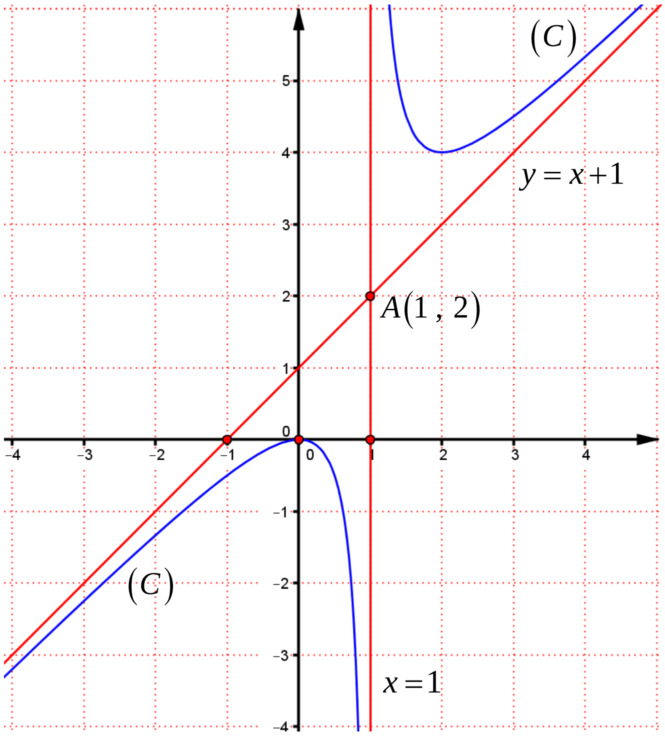
ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x+1$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

➤**សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$**



គ. កំណត់តម្លៃ k

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ និង $y=k$

គេបាន សមីការអាប់សុីស $\dfrac{x^2}{x-1}=k$ ឬ $x^2=kx-k$

ឬ $x^2-kx+k=0$ ទាញបាន $\begin{cases}x_1+x_2=k\\ x_1x_2=k\end{cases}$

ដែល x_1 និង x_2 ជាអាប់ស៊ីសរៀងគ្នានៃចំណុច B និង C

ដោយ $BC=\sqrt{5}$

គេបាន $|x_2-x_1|=\sqrt{5}$

$$(|x_2-x_1|)^2=(\sqrt{5})^2$$

$$x_2^2-2x_2x_1+x_1^2=5$$

$$x_2^2+2x_2x_1+x_1^2-4x_2x=5$$

$$(x_2+x_1)^2-4x_2x=5$$

$$k^2-4k-5=0$$

សមីការមាន $a-b+c=0$ នោះ: $k=-1$, $k=5$

ដូចនេះ: តម្លៃកំណត់បានគឺ $\boxed{k=-1\ ,\ k=5}$ ។

V. ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប :

គេមាន $25x^2+9y^2=225$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 225)

$$\frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=1$$

$$\frac{(x-0)^2}{3^2}+\frac{(y-0)^2}{5^2}=1$$

ជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីប

ដូចនេះ: $\boxed{\text{សមីការនេះជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីប}}$ ។

បញ្ជាក់ទីតាំងផ្ចិត និងអ័ក្សធំរបស់វាផង

គេមាន $\dfrac{(x-0)^2}{3^2}+\dfrac{(y-0)^2}{5^2}=1$

គេអាចសន្និដ្ឋានបានថា វាមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយ និងមានអ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរនៅលើអ័ក្សអរដោនេ

ដូចនេះ: អេលីបមានផ្ចិត $(0\ ,\ 0)$ និងអ័ក្សធំ ជាអ័ក្សឈរនៅលើអ័ក្សអរដោនេ ។

ខ. រកប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូច នៃអេលីបនេះ រួចរកកូអរដោនេ នៃចំណុចកំពូល និងកំណុំទាំងពីររបស់វា

គេមាន $\dfrac{(x-0)^2}{3^2}+\dfrac{(y-0)^2}{5^2}=1$

ផ្ទឹមនឹង $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

គេបាន $h=0\ ,\ k=0\ ,\ a=5\ ,\ b=3$

នាំឱ្យ $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

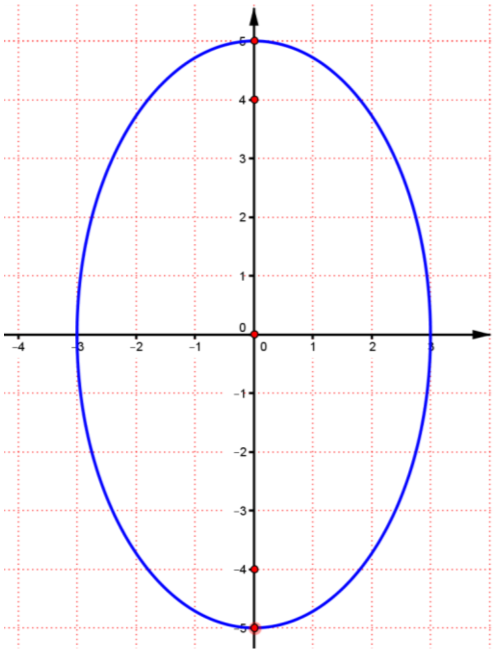
ដូចនេះ: ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=10$

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=6$

កំពូល $V(0\ ,\pm a)$ នោះ: $V_1(0,5)$ និង $V_2(0,-5)$

កំណុំ $F(0\ ,\pm c)$ នោះ: $F_1(0,4)$ និង $F_2(0,-4)$

(ប្រធានគ្មានឱ្យសង់អេលីបទេ តែខ្ញុំសង់ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់)



VI. ក. គណនាប្រវែងជ្រុង AB និង BC នៃត្រីកោណ ABC :

គេមាន $A(1\ ,0\ ,-2)$, $B(2\ ,1\ ,-1)$ និង $C(1,-2\ ,\ 2)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(1\ ,1\ ,1)$ និង $\overrightarrow{BC}=(-1\ ,\ -3\ ,\ 3)$

គេបាន $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$$BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{19}$$

ដូចនេះ: ប្រវែងជ្រុង $AB=\sqrt{3}$ ឯកតាប្រវែង
ប្រវែងជ្រុង $BC=\sqrt{19}$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N

គេមាន $A(1\ ,0\ ,-2)$, $B(2\ ,1\ ,-1)$ និង $C(1,-2\ ,\ 2)$

ដោយ M និង N ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ AB និង BC

គេបាន $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ,\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\ ,\ \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

$$M\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -\frac{3}{2}\right)$$

ហើយ $N\left(\dfrac{x_B+x_C}{2}\ ,\ \dfrac{y_B+y_C}{2}\ ,\ \dfrac{z_B+z_C}{2}\right)$

$$N\left(\frac{3}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$$

ដូចនេះ: $\boxed{M\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -\frac{3}{2}\right)\ ,\ N\left(\frac{3}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ២១ វិច្ឆិកា ២០១៣

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\int \frac{x^{2001}}{\left(1+x^2\right)^{1002}}dx$ **(កន្លះពិន្ទុ)**

ខ. $\int \frac{3x-11}{x^2-6x+9}dx$ **(កន្លះពិន្ទុ)** ។

II. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2+2x$ និង $g(x)=-x+4$ ។ គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់ដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$ នៃផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

III. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{2x-2}$

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

ខ. $M(x_0, y_0)$ ជាចំណុចមួយនៅលើក្រាប (C) ។ បន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច M ហើយកាត់បន្ទាត់អាស៊ីមតូតឈរត្រង់ចំណុច A និងអាស៊ីមតូតទ្រេតត្រង់ B ។

១. ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (d) ។ **(១ ពិន្ទុ)**

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B រួចបង្ហាញថា M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

IV. គេមានប៉ារ៉ាបូលមួយ មានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ ជាគល់នៃអ័ក្ស និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ ដោយដឹងថាក្រាបរបស់វាកាត់ចំណុច $A_1(-2,4)$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ខ. រកតម្លៃនៃ y_2 បើចំណុច $A_2(-3, y_2)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

គ. ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) របស់ប៉ារ៉ាបូល ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៣

I. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^2} \times \frac{x^{2000}}{(1+x^2)^{1000}}dx$

$$= \int \frac{x}{(1+x^2)^2} \times \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1000} dx \quad (1)$$

គេតាង $t = \frac{x^2}{1+x^2}$

នាំឱ្យ $dt = \frac{(x^2)'(1+x^2)-(1+x^2)'x^2}{(1+x^2)^2}dx$

$$= \frac{2x+2x^3-2x^3}{(1+x^2)^2}dx = \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx$$

នោះ (1) អាចសរសេរ

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1+x^2)^2} \times \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1000} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{1000}dt = \frac{1}{2} \times \frac{t^{1001}}{1001} + c$$

$$= \frac{1}{2002}t^{1001} + c = \frac{1}{2002}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1001} + c$$, ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{\int \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx = \frac{1}{2002}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1001} + c \text{ , ថេរ}}$ ។

ខ. $\int \frac{3x-11}{x^2-6x+9}dx = \int \frac{3x-9-2}{(x-3)^2}dx$

$$= 3\int \frac{1}{(x-3)}dx - 2\int \frac{1}{(x-3)^2}dx$$

$$= 3\ln|x-3| + c_1 + 2 \cdot \frac{1}{(x-3)} + c_2$$

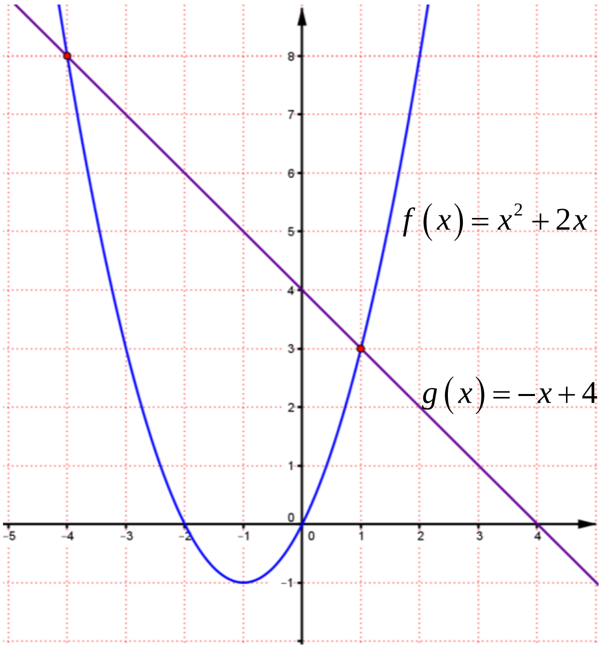
$$= 3\ln|x-3| + \frac{2}{(x-3)} + c \quad , \quad c_1 + c_2 = c$$ ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{\int \frac{3x-11}{x^2-6x+9}dx = 3\ln|x-3| + \frac{2}{(x-3)} + c}$ ។

II. គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្ត :

គេមាន $f(x) = x^2 + 2x$ និង $g(x) = -x + 4$

គេសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរដើម្បីរកមើលចំណុចប្រសព្វ



ផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងទាំងពីរនៅចន្លោះ $[-4 , 1]$ នោះគេបាន មាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់ដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស នៃផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ គឺ

$$V = \pi\int_a^b [g(x)]^2 dx - \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

$$= \pi\int_a^b (-x+4)^2 dx - \pi\int_a^b (x^2+2x)^2 dx$$

$$= \pi\int_{-4}^1 (x^2-8x+16)dx - \pi\int_{-4}^1 (x^4+4x^3+4x^2)dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right]_{-4}^1 - \pi\left[\frac{x^5}{5} + x^4 + \frac{4x^3}{3}\right]_{-4}^1$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x - \frac{x^5}{5} - x^4 - \frac{4x^3}{3}\right]_{-4}^1$$

$$= \pi\left[-\frac{x^5}{5} - x^4 - x^3 - 4x^2 + 16x\right]_{-4}^1$$

$$= \pi\left[\left(-\frac{1}{5} - 1 - 1 - 4 + 16\right) - \left(\frac{1024}{5} - 256 + 64 - 64 - 64\right)\right]$$

$$= \pi\left[\left(10 - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1024}{5} - 320\right)\right]$$

$$= \pi\left(330 - \frac{1025}{5}\right) = \pi(330 - 205) = 125\pi$$

ដូចនេះ មាឌសូលីត $\boxed{V = 125\pi}$ ។

III. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$:

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{2x-2}$

• ដែនកំណត់ :

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $2x-2\neq 0$ ឬ $x\neq 1$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty\,,1)\cup(1\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព :

ដេរីវេ
$$f'(x)=\frac{(2x-3)(2x-2)-2(x^2-3x+4)}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{4x^2-4x-6x+6-2x^2+6x-8}{4(x-1)^2}$$
$$=\frac{2x^2-4x-2}{4(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{2(x-1)^2}$$

ចំពោះ $\forall x\in D$ ឱ្យ $f'(x)=0$ សមមូល $\dfrac{x^2-2x-1}{2(x-1)^2}=0$

នាំឱ្យ $x^2-2x-1=0$

$x^2-2x+1=2$

$(x-1)^2=2 \quad\Rightarrow\quad x=1\pm\sqrt{2}$

គេបាន
$$f\left(1-\sqrt{2}\right)=\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2-3\left(1-\sqrt{2}\right)+4}{2\left(1-\sqrt{2}\right)-2}$$
$$=\frac{3-2\sqrt{2}-3+3\sqrt{2}+4}{-2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{4+\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}=-\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$
$$f\left(1+\sqrt{2}\right)=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-3\left(1+\sqrt{2}\right)+4}{2\left(1+\sqrt{2}\right)-2}$$
$$=\frac{3+2\sqrt{2}-3-3\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{4-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$

• ត្រង់ $x=1-\sqrt{2}$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង

$f\left(1-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\approx-1.9$ ។

• ត្រង់ $x=1+\sqrt{2}$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង

$f\left(1+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\approx 0.9$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+4}{2x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+4}{2x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x}=-\infty$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+4}{2x-2}=\frac{1-3+4}{2+0^--2}=-\infty$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-3x+4}{2x-2}=\frac{1-3+4}{2+0^+-2}=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{2x-2}=\dfrac{1}{2}x-1+\dfrac{2}{2x-2}$

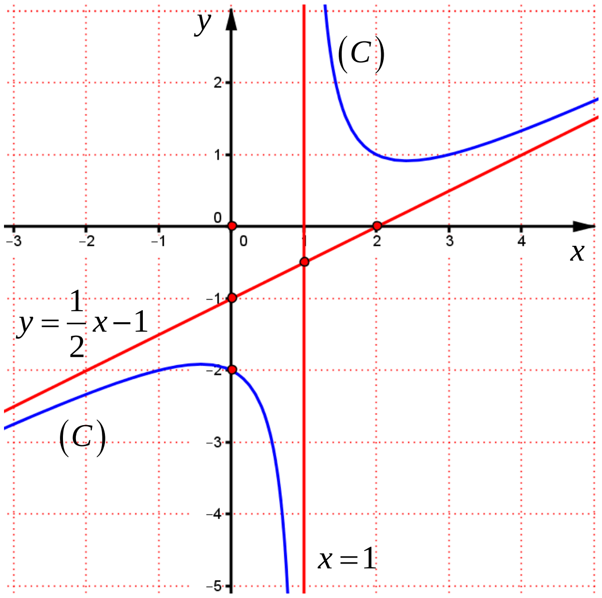
ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{2x-2}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=\dfrac{1}{2}x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-1.9	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0.9	↗ $+\infty$

➢សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



ខ. ១. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (d)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $(d): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ (d) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $M(x_0\ ,\ y_0)$

គេបាន $f'(x_0)=\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0-1)^2}$

$$f(x_0)=\frac{x_0^2-3x_0+4}{2x_0-2}$$

នាំឱ្យ

$$y=\frac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0-1)^2}x\underbrace{-\frac{x_0^3-2x_0^2-x_0}{2(x_0-1)^2}+\frac{x_0^2-3x_0+4}{2(x_0-1)}}_{\text{តាង X}}$$

$$\text{X}=\frac{-x_0^3+2x_0^2+x_0+(x_0^2-3x_0+4)(x_0-1)}{2(x_0-1)^2}$$

$$=\frac{-x_0^3+2x_0^2+x_0+x_0^3-3x_0^2+4x_0-x_0^2+3x_0-4}{2(x_0-1)^2}$$

$$=\frac{-2x_0^2+8x_0-4}{2(x_0-1)^2}=\frac{-x_0^2+4x_0-2}{(x_0-1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{(d): y=\left(\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0-1)^2}\right)x+\left(\dfrac{-x_0^2+4x_0-2}{(x_0-1)^2}\right)}$

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B

ដោយ (d) កាត់បន្ទាត់អាស៊ីមតូតឈរ $x=1$ ត្រង់ចំណុច A នោះ $x_A=1$ គេបាន $A(1\ ,\ y_A)$

គេបាន $y_A=\left(\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0-1)^2}\right)\cdot 1+\left(\dfrac{-x_0^2+4x_0-2}{(x_0-1)^2}\right)$

$$y_A=\frac{x_0^2-2x_0-1-2x_0^2+8x_0-4}{2(x_0-1)^2}=\frac{-x_0^2+6x_0-5}{2(x_0-1)^2}$$

$$=\frac{(x_0-1)(-x_0+5)}{2(x_0-1)^2}=\frac{-x_0+5}{2(x_0-1)}$$

ដូចនេះ កូអរដោនេ $\boxed{A\left(1\ ,\ \dfrac{5-x_0}{2(x_0-1)}\right)}$ ។

ដោយ (d) កាត់បន្ទាត់អាស៊ីមតូតទ្រេត $y=\dfrac{1}{2}x-1$ ត្រង់ចំណុច B នោះ $y_B=\dfrac{1}{2}x_B-1$

គេបាន $y_B=\left(\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0-1)^2}\right)x_B+\left(\dfrac{-x_0^2+4x_0-2}{(x_0-1)^2}\right)$

$$\frac{1}{2}x_B-1=\left(\frac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0-1)^2}\right)x_B+\left(\frac{-x_0^2+4x_0-2}{(x_0-1)^2}\right)$$

$$\left[\frac{1}{2}-\frac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0-1)^2}\right]x_B=\frac{-x_0^2+4x_0-2}{(x_0-1)^2}+1$$

$$\frac{(x_0-1)^2-x_0^2+2x_0+1}{2(x_0-1)^2}x_B=\frac{-x_0^2+4x_0-2+(x_0-1)^2}{(x_0-1)^2}$$

$$\frac{2}{2(x_0-1)^2}x_B=\frac{2x_0-1}{(x_0-1)^2}$$

$$x_B=2x_0-1$$

នាំឱ្យ $y_B=\dfrac{1}{2}x_B-1=\dfrac{1}{2}(2x_0-1)-1=x_0-\dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ កូអរដោនេ $\boxed{B\left(2x_0-1\ ,\ x_0-\dfrac{3}{2}\right)}$ ។

➤បង្ហាញថា M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$

ដោយ $\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{1+2x_0-1}{2}=x_0$

$$\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{\dfrac{5-x_0}{2(x_0-1)}+x_0-\dfrac{3}{2}}{2}$$

$$=\frac{5-x_0+2x_0(x_0-1)-3(x_0-1)}{4(x_0-1)}$$

$$=\frac{5-x_0+2x_0^2-2x_0-3x_0+3}{4(x_0-1)}$$

$$=\frac{2x_0^2-6x_0+8}{4(x_0-1)}=\frac{x_0^2-3x_0+4}{2x_0-2}=y_0$$

នាំឱ្យ $M(x_0\ ,\ y_0)$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ AB

ដូចនេះ $\boxed{M(x_0\ ,\ y_0)\ \text{ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់}\ AB}$ ។

IV. ក. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ :

ដោយ ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល $O(0,0)$ និងមានកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$ នោះវាមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$

គេបាន សមីការស្តង់ដា $y^2=4px$

ដោយ ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A_1(-2,4)$

គេបាន $4^2=4p(-2)$ ឬ $16=-8p$ នាំឱ្យ $p=-2$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដា $\boxed{y^2=-8x}$ ។

ខ. រកតម្លៃនៃ y_2

ដោយ ចំណុច $A_2\left(-3, y_2\right)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ

គេបាន $y_2^2 = -8(-3)$ ឬ $y_2^2 = 24$ នោះ $y_2 = \pm 2\sqrt{6}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{y_2 = \pm 2\sqrt{6}}$ ។

គ. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) របស់ប៉ារ៉ាបូល

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) របស់ប៉ារ៉ាបូល (P) មានរាង

$(\Delta): x = -p$ នោះ $x = -(-2)$ ឬ $x = 2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសគឺ $\boxed{(\Delta): x = 2}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ២៣ វិច្ឆិកា ២០១២

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. គេឱ្យ z ជាចំនួនកុំផ្លិច ដែល $z=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួច z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. គណនា $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

II. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ ហើយមាន $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$ ។

កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

III. ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ខៀវ 7 គ្រាប់ និងពណ៌ក្រហម 5 គ្រាប់ ។ គេចាប់យកឃ្លី 4 គ្រាប់ដោយចៃដន្យ ។

ក. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ឃៀវទាំង 4 គ្រាប់ ។

ខ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវ 3 និងឃ្លីពណ៌ក្រហម 1 ។

គ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមយ៉ាងតិច 1 ។

IV. ប្រអប់មួយមានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែងដែលមានវិមាត្រ x , $2x$ និង h គិតជាម៉ែត្រ ហើយមានផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់ 1m^2 ។

ក. គណនា h ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ. គណនាមាឌប្រអប់ជាអនុគមន៍នៃ x ។ កំណត់តម្លៃនៃ x ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត ។

V. ក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មាន $A(2,0,1)$, $B(0,1,-3)$ និង $C(1,2,0)$ ។

ក. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។

VI. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ ។ បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃបរមាទាំងនោះ ។

ខ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងសមីការអាស៊ីតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. សិក្សាទីតាំងរវាង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

ឃ. សង់តាងអថេរភាពនៃក្រាប (C) ។

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១២

I. **ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត :**

គេមាន $z=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}i^2$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i}$ ។

➤សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$$

នាំឱ្យ $z^2=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

ដូចនេះ $\boxed{z^2=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]}$ ។

ខ. គណនា $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$

គេមាន $z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

និង $z=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$$=2\cos\frac{5\pi}{12}-i2\sin\frac{5\pi}{12}$$

គេផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកពិត រួចផ្នែកនិមិត្ត និងផ្នែកនិមិត្ត

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=2\cos\frac{5\pi}{12}\\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=2\cos\frac{5\pi}{12}\end{cases}\text{ នោះ: }\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ ,\ \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ ។

II. **កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$:**

គេមាន $f(x)=\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ: $x\neq 0$

ហើយ $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$

ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ វាផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}=\ln\sqrt{a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}+1}{x-\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\ln\sqrt{a}$$

$$\frac{1+1}{0-1}=\frac{1}{2}\ln a$$

$$-4=\ln a\qquad\Rightarrow\quad a=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$$

ដូចនេះ: កំណត់បាន $\boxed{a=e^{-4}=\frac{1}{e^4}}$ ។

III. គេមាន ឃ្លីខៀវ 7 និងក្រហម 5 ហើយគេចាប់យក 4 គ្រាប់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច គឺ $n(s)=C(12\ ,5)$ ដែល

$$C(12\ ,4)=\frac{12!}{(12-4)!\cdot 4!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 4!}=495$$

ក. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំង 4 គ្រាប់ :

ចំនួនករណីស្របតាមដោយ $n(A)=C(7,\ 4)$ ដែល

$$C(7,\ 4)=\frac{7!}{(7-4)!\cdot 3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3!\cdot 4!}=35$$

នាំឱ្យ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{35}{495}=\frac{7}{99}$

ដូចនេះ: ប្រូបាបចាប់បានឃ្លីខៀវទាំង 4 គឺ $\boxed{P(A)=\frac{35}{99}}$ ។

ខ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវ 3 និងឃ្លីពណ៌ក្រហម1

ចំនួនករណីស្របតាងដោយ $n(B)=C(7,3)\times C(5,1)$

$$C(7,3)\times C(5,1)=\frac{7!}{4!\cdot 3!}\times 5=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3!}\times 5=175$$

នាំឱ្យ $P(B)=\frac{175}{495}=\frac{35}{99}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{35}{99}}$ ។

គ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមយ៉ាងតិច 1

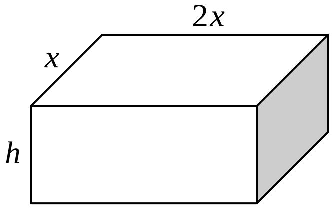
តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីក្រហមយ៉ាងតិច 1

ដោយ C ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនឹងព្រឹត្តិការណ៍ A

គេបាន $P(C)=1-P(A)=1-\frac{35}{99}=\frac{65}{99}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{65}{99}}$ ។

IV. ក. គណនា h ជាអនុគមន៍នៃ x :



ផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់ តាងដោយ S_t ដែល

$S_t=2(x\cdot 2x+x\cdot h+2x\cdot h)=4x^2+6xh$

តែតាមបម្រាប់ $S_t=1\text{ m}^2$

គេបាន $4x^2+6xh=1$ នាំឱ្យ $h=\frac{1-4x^2}{6x}\ (\text{m})$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{h=\frac{1-4x^2}{6x}\ (\text{m})}$ ។

ខ. គណនាមាឌប្រអប់ជាអនុគមន៍នៃ x

មាឌប្រអប់ $V=x\cdot 2x\cdot h=2x^2h$

$$V(x)=2x^2\cdot\frac{1-4x^2}{6x}=\frac{1}{3}(x-4x^3)$$

ដូចនេះ $\boxed{V(x)=\frac{1}{3}(x-4x^3)\quad (\text{m}^3)}$ ។

➤កំណត់តម្លៃនៃ x ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត

គេមាន $V(x)=\frac{1}{3}(x-4x^3)$

នាំឱ្យ $V'(x)=\frac{1}{3}(1-12x^2)$ និង $V'(x)=-8x$

ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុតលុះត្រាតែ $\begin{cases}V'(x)=0\\ V''(x)<0\end{cases}$

ឱ្យ $V'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(1-12x^2)=0$ នោះ $x=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$

ចំពោះ $x=-\frac{1}{2\sqrt{3}}<0$ មិនយក

ចំពោះ $x=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$: $V''\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=-8\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}<0$ ពិត

ដូចនេះ តម្លៃនៃ x គណនាបានគឺ $\boxed{x=\frac{\sqrt{3}}{6}\ (\text{m})}$ ។

V. ក. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

គេមាន $A(2,0,1)$, $B(0,1,-3)$ និង $C(1,2,0)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(-2,1,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,2,-1)$

គេបាន $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & -4\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=7\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$

ដូចនេះ: គណនាបាន $\boxed{\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=7\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

ដោយ $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{7^2+2^2+(-3)^2}=\frac{\sqrt{62}}{2}$

ដូចនេះ ផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $\boxed{S=\frac{\sqrt{62}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

VI. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f :

គេមាន $f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}$ មានក្រាប (C)

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x-1\neq 0$ នោះ $x\neq 1$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)}$ ។

➤គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

ដោយ $f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}$

នាំឱ្យ $f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}}$ ។

ឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}=0$, $(x-1)^2>0$

នោះ $(x-3)(x+1)=0$ នោះ $x=-1$, $x=3$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

ដូចនេះ $f'(x)>0$ កាលណា $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

$f'(x)=0$ ចំពោះ $x=-1$, $x=3$

$f'(x)<0$ កាលណា $x\in(-1,1)\cup(1,3)$

➤ **បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃបរមាទាំងនោះ**

• ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាមួយស្មើ $f(-1)$ ដែល

$$f(-1)=-1+2+\frac{4}{-1-1}=-1 \text{ ។}$$

• ត្រង់ $x=3$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាមួយស្មើ $f(3)$ ដែល

$$f(3)=3+2+\frac{4}{3-1}=7 \text{ ។}$$

ខ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C)

គេមាន $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)=1+2+\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)=1+2+\frac{4}{0^+}=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ នៃក្រាប (C) ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. សិក្សាទីតាំងរវាង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

សិក្សាផលដករវាង សមីការ $f(x)$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត y

$$f(x)-y=\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)-(x+2)=\frac{4}{x-1}$$

• បើ $x<1$ នោះ $\dfrac{4}{x-1}<0$ មានន័យថា $f(x)-y<0$

គេបានក្រាប (C) នៅពីខាងក្រោមបន្ទាត់អាស៊ីមតូតទ្រេត ។

• បើ $x>1$ នោះ $\dfrac{4}{x-1}>0$ មានន័យថា $f(x)-y>0$

គេបានក្រាប (C) នៅពីខាងលើបន្ទាត់អាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃក្រាប (C)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)=-\infty+2+0=-\infty$$

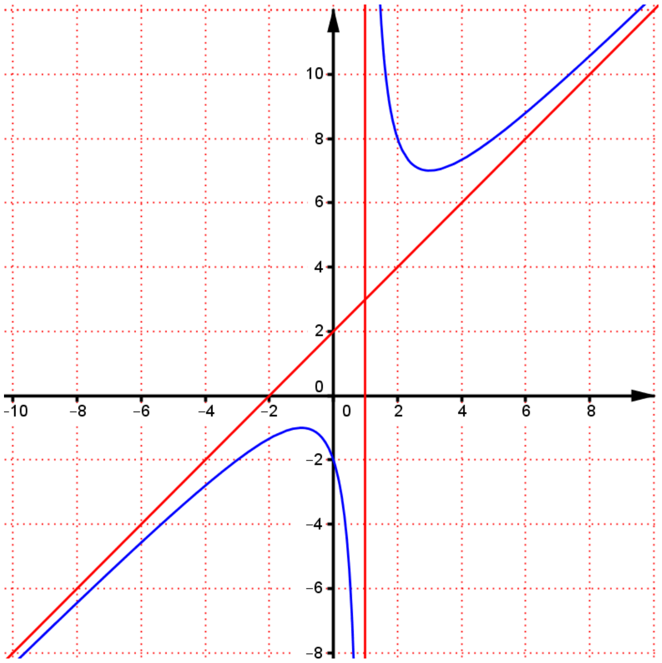
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)=+\infty+2+0=+\infty$$

តារាងអថេរភាពនៃក្រាប (C)

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

ចប់ត្រឹមនេះ

ខ្ញុំសូមបន្ថែមក្រាបដើម្បីធ្វើការផ្ទៀងផ្ទាត់



ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៨ វិច្ឆិកា ២០១១

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ។

ក. គណនា Z^5 រួចទាញរកតម្លៃនៃ $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4$ ។

ខ. សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

II. គេឱ្យសមីការ $(m+1)x^2-2mx+4(m+1)=0$ ។ កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫស x_1 និង x_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1<-1<x_2<1$ ។

III. រង្វង់មួយ និងការេមួយមានផលបូកប្រវែងបរិមាត្រស្មើនឹង 16 m ។ រកប្រវែងកាំរបស់រង្វង់ និងជ្រុងរបស់ការេ ដើម្បីឱ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡារង្វង់ និងផ្ទៃក្រឡាការេមានតម្លៃអប្បបរមា ។

IV. គេប្រមៀលប៊ូលដែលមានសរសេរលេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 តម្រង់ទៅរន្ធ 6 ដែលមានសរសេរលេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ដែរ ។ គេឧបមាថាប៊ូលទាំង 6 ចូលរន្ធទាំង 6 ខុសៗគ្នាជានិច្ច ។

ក. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលលេខ 3 ចូលរន្ធលេខ 3 ។

ខ. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលនីមួយៗចូលរន្ធ ដែលមានលេខដូចរបស់វា ។

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,1,0)$, $B(0,0,2)$, $C(1,-2,3)$ និង $D(1,-2,0)$ ។ រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាមចំណុច A , B , C និង D ។

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ae^x+b$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) កាត់តាមគល់ O នៃតម្រុយអរតូណរមេ និងបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចនោះជាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ ចំពោះតម្លៃ a និង b ដែលរកឃើញ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=1$ ។

ឃ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច $x=1$ ។

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ២០១១

I. ក. គណនា Z^5 :

គេមាន $Z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

តាមដឺម័រ $\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

គេបាន
$$Z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$$
$$=\cos\left(5\cdot\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(5\cdot\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$
$$=\cos 0+i\sin 0$$
$$=1+0i$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{Z^5=1}$ ។

➤ទាញរកតម្លៃនៃ $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4$

តាមរូបមន្ត $1-Z^5=(1-Z)\left(1+Z+Z^2+Z^3+Z^4\right)$

គេបាន $(1-Z)\left(1+Z+Z^2+Z^3+Z^4\right)=1-1=0$

ដោយ $1-Z=1-\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\neq 0$

នាំឱ្យ $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4=0$

ដូចនេះ $\boxed{1+Z+Z^2+Z^3+Z^4=0}$ ។

ខ. សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន
$$1+Z=1+\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$
$$=2\cos^2\frac{\pi}{5}+i2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$$
$$=2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

នាំឱ្យ
$$(1+Z)^4=\left[2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^4$$
$$=16\cos^4\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រសរសេរបានគឺ

$$\boxed{(1+Z)^4=16\cos^4\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)}$$ ។

II. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1<-1<x_2<1$

គេមាន សមីការ $(m+1)x^2-2mx+4(m+1)=0$

គេតាង $f_m(x)=(m+1)x^2-2mx+4(m+1)$

ដើម្បីឱ្យ $f_m(x)$ មានឫស x_1 និង x_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់

$x_1<-1<x_2<1$ លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'>0\\ af(-1)<0\\ af(1)>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m+1\neq 0\\ m^2-(m+1)^2>0\\ (m+1)(m+1+2m+4m+4)<0\\ (m+1)(m+1-2m+4m+4)>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m\neq -1\\ m^2-m^2-2m-1>0\\ (m+1)(7m+5)<0\\ (m+1)(3m+5)>0\end{cases} \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases}m\neq -1\\ 2m+1<0\\ (m+1)(7m+5)<0\\ (m+1)(3m+5)>0\end{cases}$$

គេបាន $2m+1$ មានឫស $m=-\frac{1}{2}$

$(m+1)(7m+5)$ មានឫស $m=-1$, $m=-\frac{5}{7}$

$(m+1)(3m+5)$ មានឫស $m=-1$, $m=-\frac{5}{3}$

តារាងសញ្ញា 0

m	$-\infty$ $-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$m+1\neq 0$	-	-	+	+	+
$2m+1<0$	-	-	-	- 0	+
$(m+1)(7m+5)<0$	+	+ 0	- 0	+	+
$(m+1)(3m+5)>0$	+ 0	- 0	+	+	+
ចម្លើយ					

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{m\in\left(-1,-\frac{5}{7}\right)}$ ។

III. រកប្រវែងកាំរបស់រង្វង់ និងជ្រុងរបស់ការេ

គេតាង a ជាជ្រុងនៃការេ និង r ជាកាំនៃរង្វង់ , $a, r>0$

គេមាន បរិមាត្ររង្វង់ $+$ បរិមាត្រការេ $=16$

គេបាន $2\pi r+4a=16$ នាំឱ្យ $a=4-\frac{\pi}{2}r$

ផលបូកផ្ទៃក្រឡារង្វង់ និងការេគឺ $S=\pi r^2+a^2$

គេបាន $S(r)=\pi r^2+\left(4-\frac{\pi}{2}r\right)^2$

$$=\pi r^2+16-4\pi r+\frac{\pi^2}{4}r^2$$

$$=\left(\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)r^2-4\pi r+16$$

នាំឱ្យ $S'(r)=2\left(\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)r-4\pi$

$$S''(r)=2\left(\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)$$

ដើម្បីឱ្យ S មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $\begin{cases}S'(r)=0\\ S''(r)>0\end{cases}$

គេបាន $S'(r)=0 \Leftrightarrow 2\left(\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)r-4\pi=0$

$$\left(\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)r=2\pi$$

$$\frac{4+\pi}{4}r=2 \Rightarrow r=\frac{8}{4+\pi}$$

ហើយ $S''(r)=2\left(\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)>0$ ពិត

នាំឱ្យ $a=4-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{8}{4+\pi}=4-\frac{4\pi}{4+\pi}=\frac{16}{4+\pi}$

ដូចនេះ $\boxed{r=\frac{8}{4+\pi}\ ,\ a=\frac{16}{4+\pi}}$ ឯកតាប្រវែង ។

IV. ក. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលលេខ 3 ចូលរន្ធលេខ 3

គេមាន រន្ធ 6 ដែលសរសេរលេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(S)=6$

ហើយ ប៊ូលទាំងអស់ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 មានប៊ូល លេខ 3 ចំនួន 1 នាំឱ្យ ចំនួនករណីស្រប $n(A)=1$

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{6}$

ដូចនេះ ប្រូបាបប៊ូលលេខ 3 ចូលរន្ធលេខ 3 គឺ $\boxed{P(A)=\frac{1}{6}}$

ខ. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលនីមួយៗចូលរន្ធ ដែលមានលេខដូចរបស់វា

ដោយ ប៊ូលមាន 6 ចូលរន្ធទាំង 6 ខុសៗគ្នាជានិច្ច

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S)=P(6\ ,6)$ ដែល

$$P(6\ ,6)=\frac{6!}{(6-6)!}=6!=720$$ របៀប

ហើយ ចំនួនករណីដែលប៊ូលនីមួយៗចូលរន្ធ ដែលមានលេខដូចរបស់វាមានមួយករណី នោះ $n(B)=1$

គេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{1}{720}$

ដូចនេះ ប្រូបាបប៊ូលចូលរន្ធដូចលេខរបស់វា $\boxed{P(B)=\frac{1}{720}}$ ។

V. រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាម 4 ចំណុច : (ដូចគ្រូអនុ. 2006)

គេមាន $A(1\ ,1\ ,0)\ ,\ B(0,\ 2\ ,2)\ ,$

$C(1,-2,\ 3)$ និង $D(1\ ,-2\ ,0)$

សមីការស្វ៊ែរាង $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$(S)\cap A$ គេបាន $(1-a)^2+(1-b)^2+c^2=r^2$ (1)

$(S)\cap B$ គេបាន $a^2+(2-b)^2+(2-c)^2=r^2$ (2)

$(S)\cap C$ គេបាន $(1-a)^2+(2+b)^2+(3-c)^2=r^2$ (3)

$(S)\cap D$ គេបាន $(1-a)^2+(2+b)^2+c^2=r^2$ (4)

គេយក $(3)-(4)$ គេបាន $(3-c)^2-c^2=0$

$$(3-c-c)(3-c+c)=0 \Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

គេយក $(1)-(4)$ គេបាន $(1-b)^2-(2+b)^2=0$

$$(1-b+2+b)(1-b-2-b)=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

តាម(2) $a^2+\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2=r^2$

$a^2+\frac{25}{4}+\frac{1}{4}=r^2$ នោះ $a^2+\frac{13}{2}=r^2$ (5)

តាម(1) $(1-a)^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=r^2$

$1-2a+a^2+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=r^2 \Leftrightarrow -2a+a^2+\frac{11}{2}=r^2$ (6)

យក $(5)-(6)$ $2a+1=0$ នាំឱ្យ $a=-\frac{1}{2}$

តាម (5) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{2}=r^2$ នាំឱ្យ $r^2=\frac{27}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{(S):\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}}$ ។

VI. **ក. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b**

គេមាន $f(x)=ae^x+b$ មានខ្សែកោង (C)

$f'(x)=ae^x$

ដោយ ខ្សែកោងកាត់គល់ O និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចនោះ

មានសមីការ $y=x$

គេបាន $\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae^0+b=0 \\ ae^0=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=1\,,\,b=-1}$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

ចំពោះ $a=1\,,\,b=-1$ គេបាន $f(x)=e^x-1$

• ដែនកំណត់ : ដោយ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)}$

• ទិសដៅអថេរភាព :

ដេរីវេ $f'(x)=ae^x=e^x$

ដោយ $e^x>0\,,\,\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

• បរមា : ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$

នោះ f គ្មានបរមាទេ ។

• លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-1\right)=+\infty-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)=0-1=-1$$

• អាស៊ីមតូត :

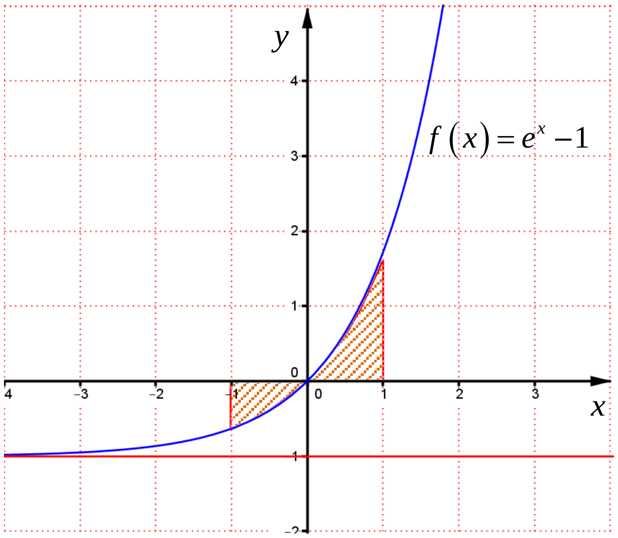
ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ខាង $-\infty$ ។

• តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ $-\infty$

• សង់ក្រាប :



គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=1$

តាមក្រាបនៅចន្លោះ $-1\le x\le 1$ មានផ្ទៃក្រឡាពីរផ្នែកគឺ

• ចន្លោះ $-1\le x\le 0$ ក្រាប C នៅខាងក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស

• ចន្លោះ $0\le x\le 1$ ក្រាប C នៅខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេបាន $S=-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx$

$=-\int_{-1}^{0}\left(e^x-1\right)dx+\int_{0}^{1}\left(e^x-1\right)dx$

$=-\left[e^x-x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x-x\right]_{0}^{1}$

$=-\left[\left(e^0-0\right)-\left(e^{-1}+1\right)\right]+\left[\left(e^1-1\right)-\left(e^0-0\right)\right]$

$=-\left[1-\dfrac{1}{e}-1\right]+\left[e-1-1\right]$

$=\dfrac{1}{e}+e-2$

ដូចនេះ $\boxed{S=\dfrac{1}{e}+e-2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ឃ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច $x=1$

បន្ទាត់ប៉ះមានរាង $T:y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ T ប៉ះក្រាប C ត្រង់ $x=1$ នោះ $x_0=1$

$f'(x_0)=f'(1)=e^1=e$

$f(x_0)=f(1)=e^1-1=e-1$

នាំឱ្យ $T:y=e(x-1)+(e-1)$

$y=ex-e+e-1=ex-1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $\boxed{T:y=ex-1}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមធ្យមសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១២ វិច្ឆិកា ២០១០

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=x\cos x$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y''+y+2\sin x=0$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $4\cos^2 x-1=3\cos x-2\sin^2 x$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ប្រអប់មួយមានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែង ដែលមានប្រវែងទ្រនុងទាំងបីគឺ $x\,,\,y\,,\,x+y$ (គិតជា cm) ។ គេដឹងថាទ្រនុងដែលវែងជាងគេមានប្រវែង $20\,\text{cm}$ ។ កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យប្រអប់នេះមានមាឌធំបំផុត ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int\left(\frac{2010}{\sqrt{x}}-\frac{2011e^x}{2+e^x}\right)dx$ និង $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\cot x)^2\,dx$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

IV. គេមានលេខ $0\,,1\,,2\,,3\,,4$ ។ គេយកលេខទាំងនេះទៅបង្កើតចំនួនដែលធំជាង 2000 និងក្នុងចំនួននីមួយៗគ្មានលេខដដែលពីរដងទេ ។ តើគេអាចបង្កើតចំនួនធំជាង 2000 បានប៉ុន្មាន ? **(២ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ នៃលំហ គេឱ្យចំណុច $A(1\,,1\,,1)$ និង $B(2\,,2\,,0)$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{OA}$ ។

ខ. បន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំណុច B ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ ។ រកកូអរដោនេនៃ H ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ (D) រួចរកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (D) ។ **(២ពិន្ទុ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=e^x$ និង $g(x)=\ln(x+1)+1$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា ខ្សែកោង (C_1) តាង $y=f(x)$ និង (C_2) តាង $y=g(x)$ មានចំណុចរួម $A(0\,,1)$ ។

ខ. គណនា $f'(0)$ និង $g'(0)$ រួចបង្ហាញថាខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមរវាងខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១០

I. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y''+y+2\sin x=0$:

គេមាន $y=x\cos x$

នាំឱ្យ $y'=x'\cos x+(\cos x)'x=\cos x-x\sin x$

$$y''=(\cos x)'-\left[x'\sin x+x(\sin x)'\right]$$

$$=-\sin x-(\sin x+x\cos x)$$

$$=-2\sin x-x\cos x$$

គេបាន $y''+y+2\sin x$

$$=(-2\sin x-x\cos x)+x\cos x+2\sin x=0$$

ដូចនេះ $\boxed{y''+y+2\sin x=0 \text{ ត្រូវបានបង្ហាញ}}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

គេបាន $4\cos^2 x-1=3\cos x-2\sin^2 x$

$$4\cos^2 x-1=3\cos x-2(1-\cos^2 x)$$

$$2\cos^2 x-3\cos x+1=0$$

សមីការមានមានគុណ $a+b+c=0$ នោះសមីការមានឫស

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\cos 0\\ \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$$

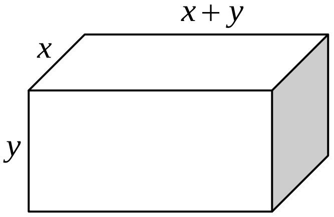
នាំឱ្យ $\left[\begin{array}{l}x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k'\pi\ ,\ k'\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{\left[\begin{array}{l}x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k'\pi\ ,\ k'\in\mathbb{Z}\end{array}\right.}$ ។

II. កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យប្រអប់នេះមានមាឌធំបំផុត :

គេមាន $x+y=20$

នាំឱ្យ $y=20-x$



រូបមន្តមាឌប្រអប់រាងជាប្រលេពីប៉ែតកែងគឺ ៖

$$V=xy(x+y)=20xy$$

$$V(x)=20x(20-x)=400x-20x^2$$

$$V'(x)=400-40x$$

$$V''(x)=-40$$

ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌអតិបរមាលុះត្រាតែ $\begin{cases}V'(x)=0\\ V''(x)<0\end{cases}$

គេបាន $V'(x)=0 \Leftrightarrow 400-40x=0 \Rightarrow x=10$

$V''(x)=-40<0$ ពិត

ចំពោះ $x=10$ នោះ $y=20-x=20-10=10$

ដូចនេះ $\boxed{x=y=10\text{ cm}}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល :

$$\mathbf{I}=\int\left(\frac{2010}{\sqrt{x}}-\frac{2011e^x}{2+e^x}\right)dx$$

$$=\int\left(2010x^{-\frac{1}{2}}-2011\frac{(2+e^x)'}{2+e^x}\right)dx$$

$$=2010\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-2011\ln(2+e^x)+c\ ,\ c \text{ ថេរ}$$

$$=\boxed{4020\sqrt{x}-2011\ln(2+e^x)+c\ ,\ c \text{ ថេរ}}$$

$$\mathbf{J}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\cot x)^2\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x+1+\cot^2 x)dx=\left[\tan x-\text{cot}x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\tan\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{4}\right]-\left[\tan\frac{\pi}{6}-\cot\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=(1-1)-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

IV. រកចំនួនដែលបង្កើតបានធំជាង 2000 : (ដូចគ្រូមធ្យម២០០៥)

ដោយលេខតាមខ្ទង់ដែលត្រូវប្រើមាន៥លេខ 0 , 1 , 2 , 3 , 4

នោះចំនួនដែលធំជាង 2000 អាចជាលេខ 4 ខ្ទង់ ឬ 5 ខ្ទង់

• ចំពោះលេខ 4 ខ្ទង់ដែលធំជាង 2000 គឺ

ខ្ទង់ពាន់ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់រយ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ដប់ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់រាយ មាន 2 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $3\times4\times3\times2=72$ ចំនួន

• ចំពោះលេខ 5 ខ្ទង់ដែលធំជាង 2000 គឺ

ខ្ទង់ម៉ឺន មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ពាន់ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់រយ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់ដប់ មាន 2 ជម្រើស

ខ្ទង់រាយ មាន 1 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $4\times4\times3\times2\times1=96$ ចំនួន

សរុបចំនួនដែលធំជាង $2000=72+96=168$ ចំនួន

ដូចនេះ **ចំនួនដែលអាចបង្កើតបានមាន 168 ចំនួន** ។

V. **ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) :**

ប្លង់រាង $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (P) កាត់តាមចំណុច $A(1,1,1)$

នោះ $x_0=1,\ y_0=1,\ z_0=1$

ហើយ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$

នោះ $a=1,b=1,c=1$

នាំឱ្យ $(P):(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

$(P): x+y+z-3=0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $\boxed{(P): x+y+z-3=0}$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃ H ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ (D)

បន្ទាត់រាង $(D):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt,\ t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+ct\end{cases}$

ដោយ (D) កាត់តាមចំណុច $B(2,2,0)$

នោះ $x_0=2,\ y_0=2,\ z_0=0$

ហើយ (D) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$

នោះ $a=1,b=1,c=1$

នាំឱ្យ $(D):\begin{cases}x=2+t\\ y=2+t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$

គេមាន $(P): x+y+z-3=0$

គេបាន $(2+t)+(2+t)+t-3=0$ នោះ $t=-\frac{1}{3}$

នាំឱ្យ $H:\left(x=y=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\ ,\ z=-\frac{1}{3}\right)$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វ $\boxed{H\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)}$ ។

រួចរកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (D)

រូបមន្ត $d(A,(D))=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OA}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(1,1-1)$ និង $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OA}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=2\vec{i}-2\vec{j}+0\vec{k}$

នាំឱ្យ $d(A,(D))=\dfrac{\sqrt{2^2+2^2+0^2}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{d(A,(D))=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$ ឯកតាប្រវែង ។

VI. **ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា (C_1) និង (C_2) មានចំណុចរួម $A(0,1)$:**

គេមាន $(C_1): f(x)=e^x$

$(C_2): g(x)=\ln(x+1)+1$

ចំពោះ $A(0,1)$ គេបាន $(C_1): 1=e^0$ ពិត

នោះខ្សែកោង (C_1) កាត់ចំណុច $A(0,1)$

ចំពោះ $A(0,1)$ គេបាន $(C_2): 1=\ln(0+1)+1$ ពិត

នោះខ្សែកោង (C_2) កាត់ចំណុច $A(0,1)$

ដូចនេះ **(C_1) និង (C_2) មានចំណុចរួម $A(0,1)$** ។

ខ. គណនា $f'(0)$ និង $g'(0)$

គេមាន $f(x)=e^x$ នោះ $f'(x)=e^x$

នាំឱ្យ $f'(0)=e^0=1$

ហើយ $g(x)=\ln(x+1)+1$

នោះ $g'(x)=\dfrac{(x+1)'}{(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$

នាំឱ្យ $g'(0)=\dfrac{1}{0+1}=1$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{f'(0)=1\ ,\ g'(0)=1}$ ។

បង្ហាញថាខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ មានតម្លៃស្មើគ្នាគឺ $f'(0)=g'(0)=1$

នាំឱ្យ ខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) មានបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ A

ដូចនេះ **ខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A** ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមរវាងខ្សែកោង (C_1) និង (C_2)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

ដោយ (T) កាត់តាមចំណុច $A(0\,,1)$

នោះ $x_0 = 0$, $f(x_0) = 1$

ហើយ (T) មានមេគុណប្រាប់ទិស $f'(x_0) = f'(0) = 1$

គេបាន $(T): y = 1(x - 0) + 1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះរួមនៃខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ត្រង់ A គឺ

$\boxed{(T): y = x + 1}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ១៣ វិច្ឆិកា ២០០៩

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គណនាចំនួនកុំផ្លិច $z=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2002}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2001}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យវិសមីការ $\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$ ចំពោះគ្រប់ x ជារបស់ $\mathbb{R}$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ចូរសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=|x|$ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ និងគ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}$ ។ កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=a+b\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$ រួចគណនា $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេចង់បង្កើតគណៈកម្មការមួយដែលមានសមាជិក 5 នាក់ ក្នុងចំណោមមនុស្សទាំងអស់ 15 នាក់ ។ ក្នុងចំណោមមនុស្ស ទាំងនេះមានពីរនាក់ A និង B ដែលអាចចូលជាសមាជិកគណៈកម្មការបាន លុះត្រាតែចូលទាំងពីរនាក់ ។ តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការបានប៉ុន្មានរបៀប ? **(១ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ (P) មួយដែលកាត់តាមចំណុច $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ និង $C(0,0,3)$ ។

ក. គណនាចម្ងាយ $|OI|$ ពីគល់ O មកប្លង់ (P) ។

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\frac{1}{|OI|^2}=\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}+\frac{1}{|OC|^2}$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. ឱ្យអនុគមន៍មួយកំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x-4}$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ f រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា ខ្សែកោងនេះមានផ្ចិតឆ្លុះមួយ ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង (C) ដោយដឹងថាបន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់តាមចំណុច $A(0,2)$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S នៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=3$, $x=4$ ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ២០០៩

I. ក. គណនាចំនួនកុំផ្លិច z :

គេមាន $z=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2002}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2001}$

$$=\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right]^{1001}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2001}$$

$$=\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{1001}+\left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^{2001}$$

$$=i^{1001}+i^{2001}=i^{1000}\cdot i+i^{2000}\cdot i=i+i=2i$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{z=2i}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យវិសមីការ ពិតគ្រប់ x ជារបស់ $\mathbb{R}$

គេមាន $\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0 \quad (E)$

ដោយ $x^2-8x+20$ មាន $\begin{cases} a=1>0 \\ \Delta'=(-4)^2-20=-4<0 \end{cases}$

នោះ $x^2-8x+20>0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$

ហេតុនេះ ដើម្បីឱ្យ (E) ផ្ទៀងផ្ទាត់លុះត្រាតែវាមានភាគបែង

$$mx^2+2(m+1)x+9m+4<0$$

គេបាន $\begin{cases} m<0 & (1) \\ \Delta'=(m+1)^2-m(9m+4)<0 & (2) \end{cases}$

តាម(2) $m^2+2m+1-9m^2-4m<0$

$$-8m^2-2m+1<0$$

គេឱ្យ $-8m^2-2m+1=0$ មានឫស $x=-\frac{1}{2}\ ,\ x=\frac{1}{4}$

តារាងសញ្ញា

x	0 $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad\quad \frac{1}{4}$ $\quad +\infty$
$-8m^2-2m+1<0$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\quad 0 \quad$ $-$

តាមតារាង $m\in\left(-\infty\ ,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{4}\ ,+\infty\right) \quad (3)$

យក $(1)\cap(3)$ គេបានចម្លើយ $m\in\left(-\infty\ ,-\frac{1}{2}\right)$

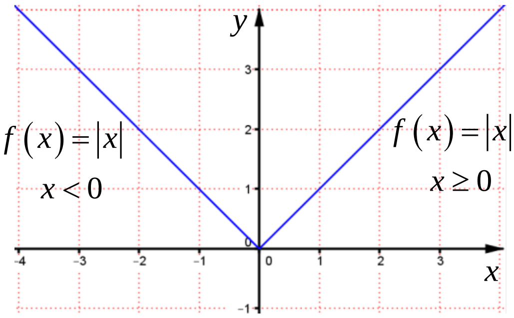
ដូចនេះ តម្លៃនៃកំណត់បានគឺ $\boxed{m<-\frac{1}{2}}$ ។

II. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=|x|$: (ដូចគ្រូបឋម២០០៥)

• ចំពោះ $x\geq 0$: $|x|=x$ នោះ $y=f(x)=x$

• ចំពោះ $x<0$: $|x|=-x$ នោះ $y=f(x)=-x$

គេសង់ក្រាបបាន តាមករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖



➤ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$

គេមាន $f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{បើ } x\geq 0 \\ -x & \text{បើ } x<0 \end{cases}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

$f(0)=0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ } x=0}$ ។

➤ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ គ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$

បើ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $f'_-(0)=f'_+(0)$

តាមនិយមន័យដេរីវេ $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

គេបាន $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1$

និង $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

ដោយ $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ នោះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ គ្មានដេរីវេត្រង់ } x=0 \text{ ទេ}}$ ។

III. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b :

គេមាន $f(x)=a+b\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$

$=\dfrac{a\cos x+a\sin x+b\cos x-b\sin x}{\cos x+\sin x}$

$=\dfrac{(a+b)\cos x+(a-b)\sin x}{\cos x+\sin x}$

ដោយ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+\sin x}$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}a+b=0\\ a-b=1\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{2}}$ ។

➤គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

ចំពោះ $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{2}$ នោះ $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$

គេបាន $\mathbf{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)\right]dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(\cos x+\sin x)'}{\cos x+\sin x}\right]dx$

$=\left[\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 1\right)-\left(0-\dfrac{1}{2}\ln 1\right)=\dfrac{\pi}{4}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\mathbf{I}=\dfrac{\pi}{4}}$ ។

IV. រកចំនួនរបៀបនៃគណកម្មការដែលគេអាចបង្កើតបាន :

គេជ្រើសរើស 5 នាក់ ពីមនុស្សទាំងអស់ 15 នាក់ ដែល ពីរនាក់ A និង B ចូលទាំងពីរនាក់ នោះគេបាន ចំនួនគណកម្មការបង្កើតបានអាចជា ៖

- ជ្រើសរើស 5 នាក់ពីមនុស្ស 13 នាក់ មិនមែន A,B ឬក៏
- ជ្រើសរើស 3 នាក់ពីមនុស្ស 13 នាក់ និង 2 នាក់ទៀតគឺជា A និង B នោះគេបានចំនួនរបៀបទាំងអស់ស្មើនឹង

$C(13,5)+C(13,3)\cdot C(2,2)$

$=\dfrac{13!}{8!\cdot 5!}+\dfrac{13!}{10!\cdot 3!}\cdot 1=1287+286=1573$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនួនគណកម្មការអាចបង្កើតបានគឺ 1573 របៀប}}$ ។

V. ក. គណនាចម្ងាយ $|OI|$ ពីគល់ O មកប្លង់ (P) :

គេមាន $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ និង $C(0,0,3)$

ដោយ ប្លង់ (P) កាត់ A,B,C នោះ (P) មានវ៉ិចទ័រ ណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ដែល

$\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$

នោះ $a=6, b=3, c=2$

ហើយ ប្លង់ (P) កាត់ $A(1,0,0)$

$x_0=1, y_0=0, z_0=0$

ប្លង់ (P) រាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

គេបាន $(P):6(x-1)+3(y-0)+2(z-0)=0$

$(P):6x+3y+2z-6=0$

នោះ $a=6, b=3, c=2, d=-6$

តាមរូបមន្ត $|OI|=d(O,(P))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $O(0,0,0)$ នោះ $x_0=y_0=z_0=0$

គេបាន $|OI|=d(O,(P))=\dfrac{|-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\dfrac{6}{7}$

ដូចនេះ $\boxed{|OI|=\dfrac{6}{7}}$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\dfrac{1}{|OI|^2}=\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}$

គេមាន $\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{OB}=(0,2,0)$ និង $\overrightarrow{OC}=(0,0,3)$

នាំឱ្យ $|OA|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=1^2+0^2+0^2=1$

$|OB|^2=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=0^2+2^2+0^2=4$

$|OC|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=0^2+0^2+3^2=9$

គេបាន $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}$

$=\dfrac{36+9+4}{36}=\dfrac{49}{36}=\dfrac{1}{\left(\frac{6}{7}\right)^2}=\dfrac{1}{|OI|^2}$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1}{|OI|^2}=\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

VI. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍

គេមាន $y = f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}$

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $2x-4 \neq 0$

នាំឱ្យ $2x \neq 4$ នោះ $x \neq 2$

ដូចនេះ $\boxed{D = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty\,,\,2) \cup (2\,,\,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x) = \left(\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}\right)'$

$$= \frac{(2x-2)(2x-4)-2(x^2-2x+1)}{(2x-4)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)(2x-4)-2(x-1)^2}{(2x-4)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)(2x-4-x+1)}{(2x-4)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)(x-3)}{(2x-4)^2}$$

គេឱ្យ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)(x-3)}{(2x-4)^2} = 0$

$\forall x \in D\ ,\ \Leftrightarrow (2x-4)^2 > 0$

នាំឱ្យ $(x-1)(x-3) = 0$ នោះ $x = 1\,,\ x = 3$

គេបាន $f(1) = \dfrac{1^2 - 2\cdot 1 + 1}{2\cdot 1 - 4} = 0$

$f(3) = \dfrac{(3)^2 - 2(3) + 1}{2(3) - 4} = \dfrac{4}{2} = 2$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

• ត្រង់ $x = 1$, $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(1) = 0$ ។

• ត្រង់ $x = 3$, $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(3) = 2$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{2x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1}{2x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^2-2x+1}{2(x-2)} = \frac{9}{2(2+0^- + 2)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^2-2x+1}{2(x-2)} = \frac{9}{2(2+0^+ - 2)} = +\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

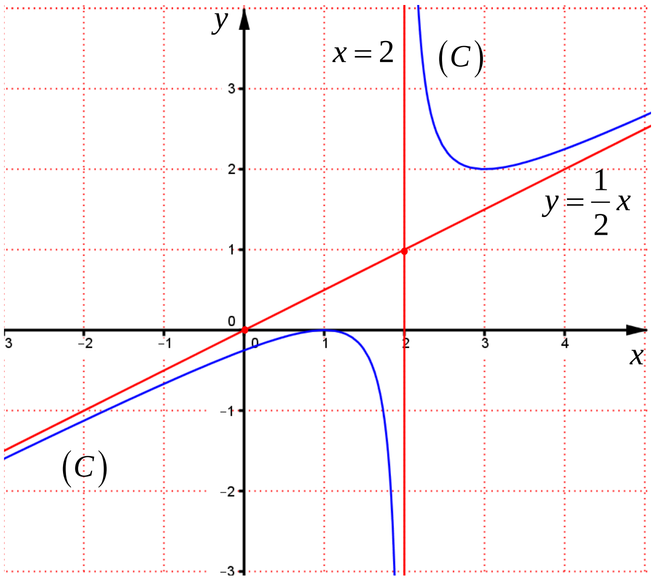
ម្យ៉ាងទៀត $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{2x-4} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2x-4}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{2x-4} = 0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = \dfrac{1}{2}x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

➤សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



➤ស្រាយថាខ្សែកោងនេះមានផ្ចិតឆ្លុះមួយ

របៀបទី១ តាមរូបមន្ត

ដោយ អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x = 2$ និង $y = \dfrac{1}{2}x$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(2\,,1)$ គេនឹងស្រាយថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)

បើ $I(a\,,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C តាងអនុគមន៍ f លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2a-x) + f(x) = 2b$

គេបាន $f(4-x)+f(x)=2$

ដោយ $f(4-x)=\dfrac{(4-x)^2-2(4-x)+1}{2(4-x)-4}$

$=\dfrac{16-8x+x^2-8+2x+1}{8-2x-4}$

$=\dfrac{x^2-6x+9}{-2x+4}=\dfrac{-x^2+6x-9}{2x-4}$

គេបាន $\dfrac{-x^2+6x-9}{2x-4}+\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}=\dfrac{4x-8}{2x-4}=2$ ពិត

ដូចនេះ **ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $I(2,1)$** ។

របៀបទី២ តាមវិធីរំកិលអ័ក្ស

គេបំលែងកិលអ័ក្សពីតម្រុយ xoy ទៅតម្រុយថ្មី XIY

តាមរូបមន្ត បំលែងកិលអ័ក្ស $\begin{cases}x=a+X\\y=b+Y\end{cases}$

ដោយ អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x=-2$ និង $y=-\dfrac{1}{2}x+2$

ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(a,b)=I(2,1)$

គេបាន $\begin{cases}x=2+X\\y=1+Y\end{cases}$

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}$

គេបាន $Y+1=\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}$

$Y+1=\dfrac{(2+X)^2-2(2+X)+1}{2(2+X)-4}$

$Y=\dfrac{4+4X+X^2-4-2X+1}{2X}-1$

$F(X)=\dfrac{X^2+1}{2X}$, $Y=F(X)$

ដោយ $\forall X\neq 0$ គេបាន ៖

$F(-X)=\dfrac{(-X)^2+1}{2(-X)}=-\dfrac{X^2+1}{2X}=-F(X)$

នាំឱ្យ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេសមាន $I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

ដូចនេះ **ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $I(2,1)$** ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $(T):\ y=ax+b$

ដោយ (T) កាត់ $A(0,2)$ នោះ $2=0\cdot a+b$ ឬ $b=2$

គេបាន $(T):\ y=ax+2$

ដោយ (T) ប៉ះ (C) គេផ្ទឹមបានសមីការអាប់ស៊ីស

$\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}=ax+2$

$x^2-2x+1=2ax^2+4x-4ax-8$

$(1-2a)x^2+(-6+4a)x+9=0$

ដើម្បីឱ្យ (T) ប៉ះ (C) លុះត្រាសមីការមានឫសឌុប $\begin{cases}\Delta'=0\\a\neq 1/2\end{cases}$

គេបាន $(-3+2a)^2-9(1-2a)=0$

$9-12a+4a^2-9+18a=0$

$4a^2+6a=0$

$2a(2a+3)=0$

នាំឱ្យ $a=0$, $a=-\dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរកបានមានពីរគឺ

$y=2$, $y=-\dfrac{3}{2}x+2$ ។

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃ S ផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=3$, $x=4$

តាមក្រាប នៅចន្លោះ $3\le x\le 4$ ក្រាបនៅពីលើអាស៊ីមតូតទ្រេត

គេបាន ផ្ទៃកំណត់ដោយ $S=\int_3^4\left[(C)-y\right]dx$ គេបាន ៖

$S=\int_3^4\left[\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2x-4}\right)-\dfrac{1}{2}x\right]dx$

$=\int_3^4\dfrac{1}{2x-4}dx=\dfrac{1}{2}\int_3^4\dfrac{(x-2)'}{x-2}dx$

$=\dfrac{1}{2}\left[\ln|x-2|\right]_3^4=\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\dfrac{\ln 2}{2}$

ដូចនេះ **ផ្ទៃប្លង់កំណត់បាន $S=\dfrac{\ln 2}{2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា** ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ២០ វិច្ឆិកា ២០០៨

វិញ្ញាសា : **គណិតវិទ្យា** **រយៈពេល** : **១២០ នាទី** **ពិន្ទុ** : **១០**

I. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=\log\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , y ជារបស់ $\mathbb{R}$ ។

គ. គេឱ្យសមីការ $x^2+ax+1=0$ ។ រកតម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា x_1 និង x_2 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^2+x_2^2>7$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាល : $I=\int(\tan x-\cot x)^2\,dx$, $J=\int\frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=x^3-x^2-2x$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលស 7 និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅ 10 ។ គេចាប់យកចេញនូវប៊ូលពីរជាមួយគ្នា ។ តើគេមានប៉ុន្មានរបៀប ដើម្បីចាប់យកប៊ូលចេញឱ្យបានយ៉ាងតិចបំផុតនូវប៊ូលសមួយ ? **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេឱ្យស្វ៊ែមួយមានប្រវែងកាំ 9dm ។ កោណមួយចារឹកក្នុងស្វ៊ែនោះ ។ រកកម្ពស់នៃកោណ ដើម្បីឱ្យកោណនោះមានមាឌ អតិបរមា ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$ និងមានខ្សែកោង (C) ។

ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។ បង្ហាញថា អនុគមន៍ f មានអតិបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃអតិបរមានោះ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេក នៃខ្សែកោង (C) ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៨

I. **ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍** :

គេមាន $y=\log\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)$ មានន័យលុះត្រាតែ

$$\begin{cases}4-x^2\ge 0 & (1)\\ 1-\sqrt{4-x^2}>0 & (2)\end{cases}$$

តាម (1) ឱ្យ $4-x^2=0$ សមីការមានឫស $x=\pm 2$

តាម (2) ឱ្យ $1-\sqrt{4-x^2}=0$ ឬ $1=\sqrt{4-x^2}$

$4-x^2=1$ មានឫស $x=\pm\sqrt{3}$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$ -2	-2 $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ 2	2 $+\infty$
$4-x^2\ge 0$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$ 0	$-$
$1-\sqrt{4-x^2}>0$		$+$ 0	$-$ 0	$+$	
ចម្លើយ		(shaded)		(shaded)	

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=[-2\,,\,-)\cup\left(\sqrt{3}\,,\,2\right]}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា វិសមភាពពិតគ្រប់

គេមាន $x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0$

$x^2+2(1-2y)x+\left(5y^2-6y+3\right)>0$

វិសមីការនេះពិត ឬផ្ទៀងផ្ទាត់លុះត្រាតែ $\begin{cases}a>0\\ \Delta'<0\end{cases}$

គេមាន $a=1>0$

ហើយ $\Delta'=(1-2y)^2-\left(5y^2-6y+3\right)$

$=1-4y+4y^2-5y^2+6y-3$

$=-y^2+2y-2$

$=-\left(y^2-2y+1\right)-1$

$=-(y-1)^2-1<0\ ,\ \forall y\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0}$ ពិត គ្រប់តម្លៃនៃ $x\,,\,y\in\mathbb{R}$ ។

គ. រកតម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា $x_1\,,\,x_2$

គេមាន សមីការ $x^2+ax+1=0$ មាន $S=-a\ ,\ P=1$

សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^2+x_2^2>7$

លុះត្រាតែ $\begin{cases}\Delta>0\\ x_1^2+x_2^2>7\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a^2-4>0\\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-7>0\end{cases}$

គេបាន $\begin{cases}a^2-4>0\\ S^2-2P-7>0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a^2-4>0\\ (-a)^2-2\cdot 1-7>0\end{cases}$

$\begin{cases}a^2-4>0\\ a^2-9>0\end{cases}$

កន្សោម a^2-4 មានឫស $a=\pm 2$

កន្សោម a^2-9 មានឫស $a=\pm 3$

តារាងសញ្ញា

a	$-\infty$ -3	-3 -2	-2 2	2 3	3 $+\infty$
$a^2-4>0$	$+$	$+$ 0	$-$ 0	$+$	$+$
$a^2-9>0$	$+$ 0	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
ចម្លើយ	(shaded)				(shaded)

ដូចនេះ $\boxed{a\in(-\infty\,,\,-3)\cup(3\,,\,+\infty)}$ ។

II. **គណនាអាំងតេក្រាល** :

$\mathbf{I}=\int(\tan x-\cot x)^2\,dx$

$=\int\left(\tan^2 x-2\tan x\cot x+\cot x\right)dx$

$=\int\left(\tan^2 x-2+\cot^2 x\right)dx$

$=\int\left[\left(1+\tan^2 x\right)+\left(1+\cot^2 x\right)-4\right]dx$

$=\tan x-\cot x-4x+c\ ,\ c$ ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I}=\tan x-\cot x-4x+c}$, c ជាចំនួនថេរ ។

$\mathbf{J}=\int\dfrac{dx}{x^2-5x+6}$ (លំហាត់ដូចប្រឡងគ្រូមធ្យម ២០០៥)

$=\int\dfrac{dx}{(x-2)(x-3)}$

$=\int\dfrac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)}dx$

$=\int\dfrac{1}{(x-3)}dx-\int\dfrac{1}{(x-2)}dx$

$=\ln|x-3|-\ln|x-2|+c$

$=\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|+c$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{J}=\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|+c}$, c ជាចំនួនថេរ ។

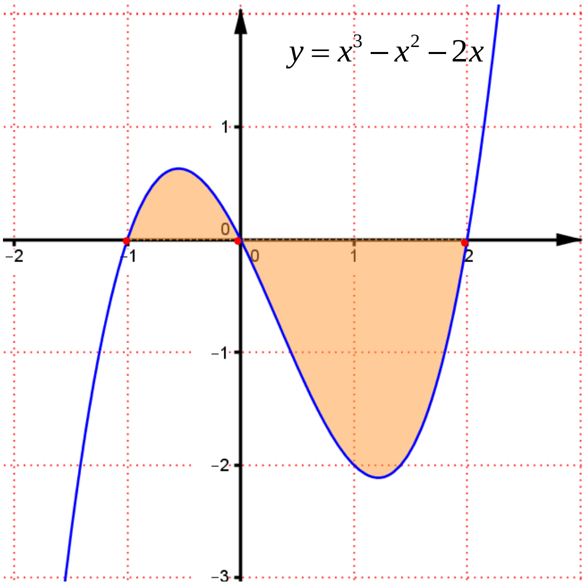
ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេមាន $y=x^3-x^2-2x$ ជាខ្សែកោង

តារាងតម្លៃលេខត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	0	0	-2	0

គេសង់ខ្សែកោងបានដូចខាងក្រោម ៖



តាមក្រាប ផ្ទៃក្រឡាមានពីរផ្នែក គេបាន ៖

$$S=\int_{-1}^{0}\left(x^3-x^2-2x\right)dx-\int_{0}^{2}\left(x^3-x^2-2x\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\left[0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)\right]-\left[\left(4-\frac{8}{3}-4\right)-0\right]$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាគណនាបាន $\boxed{S=\frac{37}{12}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

III. រកចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុត :

គេមាន ប៊ូលពណ៌ស 7 និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅ 10

ព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុតមានន័យថា យកបានប៊ូលសមួយ ឬប៊ូលសពីរ គេបាន ៖

ចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលសមួយយ៉ាងតិចបំផុតគឺ

$$=C(7\,,1)C(10\,,1)+C(7\,,2)$$

$$=7\times10+\frac{7!}{(7-2)!\cdot2!}=70+\frac{7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot2}=70+21=91$$

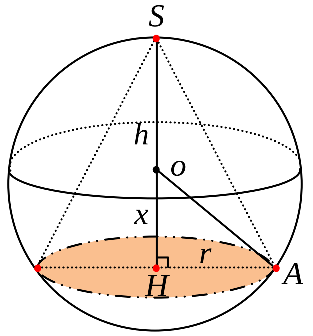
ដូចនេះ: $\boxed{\text{របៀបយកបានប៊ូលសយ៉ាងតិចមួយគឺ 91 របៀប}}$ ។

IV. រកកម្ពស់នៃកោណ ដើម្បីឱ្យកោណនោះមានមាឌ អតិបរមា :

គេតាង h ជាកម្ពស់នៃកោណ

$x=OH$ ដែល $x<9$ ហើយ $h=9+x$

r ជាកាំបាតរបស់កោណ



មាឌកោណ $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (តាមពីតាគ័រ $r^2=9^2-x^2$)

គេបាន $V(x)=\frac{1}{3}\pi\left(81-x^2\right)\left(x+9\right)$

$V(x)=\frac{\pi}{3}\left(-x^3-9x^2+81x+729\right)$

នាំឱ្យ $V'(x)=\frac{\pi}{3}\left(-3x^2-18x+81\right)$

$V'(x)=\pi\left(-x^2-6x+27\right)$

$V''(x)=\pi\left(-2x-6\right)$

ដើម្បីឱ្យមាឌ V អតិបរមា លុះត្រាតែ $\begin{cases}V'(x)=0\\V''(x)<0\end{cases}$

គេបាន $V'(x)=0 \Leftrightarrow \pi\left(-x^2-6x+27\right)=0$

$\Delta'=(-3)^2+27=36=6^2$

នោះ $x=3$, $x=9$ មិនយក

ចំពោះ: $x=3:\ V''(3)=\pi\left(-2\cdot3-6\right)=-12\pi<0$ ពិត

នាំឱ្យ $h=x+9=3+9=12$ dm

ដូចនេះ: កម្ពស់កោណគឺ $\boxed{h=12\ \text{dm}}$ ។

V. ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f :

គេមាន $x>0$, $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$ មានខ្សែកោង (C)

គេបាន $f'(x)=\frac{(x+\ln x)'\,x-x'(x+\ln x)}{x^2}$

$=\frac{x+1-x-\ln x}{x^2}$

$=\frac{1-\ln x}{x^2}$

ដូចនេះ: គណនាបានដេរីវេ $\boxed{f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}}$ ។

➢បង្ហាញថា f មានអតិបរមាមួយ ដែលត្រូវរក

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$

ដោយ $\forall x>0$, $x^2>0$ គេបាន $1-\ln x=0$ នោះ $x=e$

គេបាន $f(e)=\dfrac{e-\ln e}{e}=\dfrac{e-1}{e}$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ត្រង់ $x=e$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពីរ $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយស្មើនឹង $f(e)=\dfrac{e-1}{e}$ ។

ខ. គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\ln x\right)$$

$$=1+(+\infty)(-\infty)=1-\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\ln x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=1+0=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty}$ និង $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x)=1}$ ។

កំណត់សមីការអាសុីមតូតឈរ និងដេក នៃខ្សែកោង (C)

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=0$ ជាអាសុីមតូតឈរ នៃខ្សែកោង (C) ។

ដោយ $\lim_{x\to +\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=1$ ជាអាសុីមតូតដេក នៃខ្សែកោង (C) ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{e-1}{e}$	$\searrow$	1

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៦ វិច្ឆិកា ២០០៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គេឱ្យ $P(z)=z^2+2(2+i)z+3+4i$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។ បញ្ជាក់ថា $P(z)$ ជាការេនៃពហុធាដឺក្រេទី១ ។

ខ. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=1+i$ ។ បង្ហាញថា $z^3=-2+2i$ ។ ចំពោះតម្លៃនៃ z នេះ ចូររកចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $\frac{a}{1+z}+\frac{b}{1+z^3}=2i$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ : $I=\int x^2\ln x dx$, $J=\int\frac{\sin 2x-\cos x}{\cos x}dx$ ។

ខ. គេឱ្យ $g(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$ ។ កំណត់ចំនួនពិត m , n , p ដើម្បីឱ្យបាន $g(x)=m+\frac{n}{x+1}+\frac{p}{x-3}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(-1\,,3)$ រួចគណនា $\int_0^2 g(x)dx$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. គេចង់ជ្រើសរើសសិស្ស 3 នាក់ ក្នុងចំណោមសិស្ស 12 នាក់ ដែលក្នុងនោះមានសិស្សប្រុស 7 នាក់ និងសិស្សស្រី 5 នាក់ ។ រកប្រូបាបដែលគេជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស 2 នាក់ និងសិស្សស្រី 1 នាក់ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n ដើម្បីឱ្យ $F(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃ a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n ដែលរកឃើញក្នុងសំណួរខាងលើ បង្ហាញថា $f(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ គេឱ្យបន្ទាត់ពីរដែលមានសមីការ :

$(D_1):\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ និង $(D_2):\begin{cases}3x+y-5z+1=0\\2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (D_1) និងបន្ទាត់ (D_2) អរតូកូណាល់គ្នា ។

ខ. តើបន្ទាត់ (D_1) និង បន្ទាត់ (D_2) កាត់គ្នាឬទេ ?

គ. ប្លង់ (P) មួយមានសមីការ $2x+3y+z-12=0$ ។ រកចម្ងាយពីគល់តម្រុយ O ទៅប្លង់ (P) ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ២០០៧

I. **ក. បញ្ជាក់ថា** $P(z)$ **ជាការេនៃពហុធាដឺក្រេទី១** :

គេមាន $P(z)=z^2+2(2+i)z+3+4i$

$\Delta'=(2+i)^2-(3+4i)$

$=4+4i+i^2-3-4i=0$

នាំឱ្យ សមីការមានឫសឌុប $z_0=\dfrac{-b'}{a}=-(2+i)$

តាមទ្រឹស្តីបទផលគុណកត្តាគេអាចដាក់ $P(z)$ ជាផលគុណកត្តា

គេបាន $P(z)=(z-z_0)(z-z_0)=(z-z_0)^2$

នាំឱ្យ $P(z)=(z+2+i)^2$

ដូចនេះ $\boxed{P(z) \text{ ជាការេនៃពហុធាដឺក្រេទី១}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $z^3=-2+2i$

គេមាន $z=1+i$

នាំឱ្យ $z^3=(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=-2+2i$

ដូចនេះ $\boxed{z^3=-2+2i}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

➤រកចំនួនពិត a **និង** b

គេមាន $\dfrac{a}{1+z}+\dfrac{b}{1+z^3}=2i$

ដោយ $z=1+i$ និង $z^3=-2+2i$

គេបាន $\dfrac{a}{1+1+i}+\dfrac{b}{1-2+2i}=2i$

$\dfrac{a}{2+i}+\dfrac{b}{-1+2i}=2i$

$\dfrac{a(2-i)}{2^2-i^2}+\dfrac{b(-1-2i)}{(-1)^2-(2i)^2}=2i$

$\dfrac{2a-ai}{5}+\dfrac{-b-2bi}{5}=2i$

$(2a-b)+(-a-2b)i=10i$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}2a-b=0\\-a-2b=10\end{cases}\Bigg|\times 2 \Rightarrow \begin{cases}2a-b=0 & (1)\\-2a-4b=20 & (2)\end{cases}$

បូកអង្គនិងអង្គនៃ $(1)+(2)$ គេបាន $-5b=20$ ឬ $b=-4$

ចំពោះ $b=-4$ នាំឱ្យ $(1):2a-(-4)=0 \Rightarrow a=-2$

ដូចនេះ ចំនួនពិតរកបាន $\boxed{a=-2\ ,\ b=-4}$ ។

II. **ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់** :

គេមាន $\mathbf{I}=\int x^2\ln x\,dx$

គេតាង $u=\ln x$ នោះ $du=\dfrac{1}{x}dx$

$dv=x^2dx$ នោះ $v=\dfrac{1}{3}x^3$

តាមរូបមន្ត អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

$\mathbf{I}=\int x^2\ln x\,dx=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\int\dfrac{1}{3}x^2dx$

$=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x^3}{3}+c$, c ថេរ

$=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+c$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\mathbf{I}=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+c}$ ។

គេមាន $\mathbf{J}=\int\dfrac{\sin 2x-\cos x}{\cos x}dx$

$=\int\dfrac{2\sin x\cos x-\cos x}{\cos x}dx$

$=\int(2\sin x-1)dx$

$=-2\cos x-x+c$, c ថេរ

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\mathbf{J}=-2\cos x-x+c\ ,\ c \text{ ថេរ}}$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត m , n , p

គេមាន $g(x)=m+\dfrac{n}{x+1}+\dfrac{p}{x-3}$

$g(x)=\dfrac{m(x+1)(x-3)+n(x-3)+p(x+1)}{(x+1)(x-3)}$

$=\dfrac{m(x^2-2x-3)+n(x-3)+p(x+1)}{x^2-2x-3}$

$=\dfrac{mx^2+(-2m+n+p)x+(-3m-3n+p)}{x^2-2x-3}$

ផ្ទឹមនឹង $g(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$

គេបាន $\begin{cases}m=1\\-2m+n+p=1\\-3m-3n+p=-6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=1\\n=3/2\\p=3/2\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{m=1\ ,\ n=\dfrac{3}{2}\ ,\ p=\dfrac{3}{2}}$ ។

➤គណនា $\int_0^2 g(x)dx$

ចំពោះ $m=1\,,\,n=\frac{3}{2}\,,\;p=\frac{3}{2}$

គេបាន $g(x)=1+\frac{\frac{3}{2}}{x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x-3}$

នាំឱ្យ $\int_0^2 g(x)dx=1+\frac{\frac{3}{2}}{x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x-3}$

$=\int_0^2\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3}\right]dx$

$=\left[x+\frac{3}{2}\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-3|\right]_0^2$

$=\left(2+\frac{3}{2}\ln x+0\right)-\left(0+0+\frac{3}{2}\ln 3\right)=2$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\int_0^2 g(x)dx=2}$ ។

III. **រកប្រូបាបជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស 2 នាក់ និងសិស្សស្រី 1 :**

គេមាន សិស្សប្រុស 7 នាក់ និងសិស្សស្រី 5 នាក់

គេចង់ជ្រើសរើសសិស្ស 3 នាក់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាចតាងដោយ៖

$n(S)=C(12\,,\,3)=\frac{12!}{(12-3)^2\cdot 3!}$

$=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{9^2\cdot 3\cdot 2}=220$

ដោយ ជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស 2 នាក់ និងស្រី 1 នាក់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីស្របតាងដោយ៖

$n(A)=C(7\,,\,2)\times C(5\,,1)$

$=\frac{7!}{5!\times 2!}\times 5=105$

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{105}{220}=\frac{21}{44}$

ដូចនេះ គណនាបានប្រូបាប $\boxed{P(A)=\frac{21}{44}}$ ។

IV. **ក. កំណត់តម្លៃ** $a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\ldots,\,a_n$:

គេមាន $f(x)=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$

$F(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$

នាំឱ្យ $F'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}$

ដើម្បីឱ្យ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លុះត្រាតែ $F'(x)=f(x)$

$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$

ផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នានៃអថេរ x គេបាន ៖

$\begin{cases}a_1=1\\2a_2=2\\3a_3=3\\\ldots\ldots\ldots\ldots\\na_n=n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\a_2=1\\a_3=1\\\ldots\ldots\ldots\\a_n=1\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n=1}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

ចំពោះ $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n=1$

គេបាន $F(x)=x+x^2+x^3+\ldots+x^n$ (ផលបូកស្ទីតធរ.)

$=\frac{x(x^n-1)}{x-1}=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$

នាំឱ្យ $F'(x)=\left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)'$

$=\frac{[(n+1)x^n-1](x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2}$

$=\frac{(n+1)x^{n+1}-(n+1)x^n-x+1-x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$

$=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$

តែ $F'(x)=f(x)$ នោះ $f(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

V. **ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (D_1) និង (D_2) អរតូកូណាល់គ្នា :**

គេមាន $(D_1):\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$

មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1=(1\,,-2\,,\,3)$

ហើយ $(D_2):\begin{cases}3x+y-5z+1=0\\2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ យក $z=t$

គេបាន $(D_2):\begin{cases}3x+y=5t-1\\2x+3y=8t-3\end{cases}\Big|\times(-3)$

$+\begin{cases}-9x-3y=-15t+3\\2x+3y=8t-3\end{cases}$

$-7x=-7t\quad\Rightarrow x=t$

ចំពោះ $x=t:\;2t+3y=8t-3\Rightarrow y=2t-1$

គេបាន $(D_2): x=t\ ,\ y=-1+2t\ ,\ z=t\ \ ,\ t\in\mathbb{R}$

មានមេគុណប្រាប់ទិស $\vec{u}_2=(1\ ,\ 2\ ,\ 1)$

ដោយ $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=(1)(1)+(-2)(2)+(3)(1)=0$

នាំឱ្យ $\vec{u}_1\perp\vec{u}_2$ មានន័យថា $(D_1)\perp(D_2)$

ដូចនេះ ស្រាយបានថា $\boxed{(D_1)\perp(D_2)}$ ។

ខ. តើបន្ទាត់ (D_1) និង បន្ទាត់ (D_2) កាត់គ្នាឬទេ ?

គេមាន $(D_1): \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$

$$(D_1):\begin{cases}x=t'\\ y=1-2t'\ ,\ t'\in\mathbb{R}\\ z=3t'\end{cases}$$

ហើយ $(D_2):\begin{cases}x=t\\ y=-1+2t\ \ ,\ \ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$

បើបន្ទាត់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នា គេបាន ៖

$$\begin{cases}t'=t & (1)\\ 1-2t'=-1+2t & (2)\\ 3t'=t & (3)\end{cases}$$

តាម (1) និង (3) ជាករណីមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នា

នាំឱ្យ បន្ទាត់ទាំងពីរគ្មានចំណុចប្រសព្វទេ

ដូចនេះ | បន្ទាត់ទាំងពីរ (D_1) និង (D_2) មិនកាត់គ្នាទេ | ។

គ. រកចម្ងាយពីគល់តម្រុយ O ទៅប្លង់ (P)

គេមាន ប្លង់ $(P):\ 2x+3y+z-12=0$

មាន $a=2\ ,\ b=3\ ,\ c=1\ ,\ d=-12$

ចំណុច គល់ $O(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ នោះ $x_0=y_0=z_0=0$

តាមរូបមន្ត $d\left(O,(P)\right)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

គេបាន $d\left(O\ ,\ (P)\right)=\dfrac{|0+0+0-12|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{14}}=\dfrac{6\sqrt{14}}{7}$

ដូចនេះ $\boxed{d\left(O\ ,\ (P)\right)=\dfrac{6\sqrt{14}}{7}}$ ឯកតាប្រវែង ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ១៨ វិច្ឆិកា ២០០៦

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែល z , $\frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $|x|-x=1+2i$ ដែល x ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

គ. គេឱ្យបីចំនួន a , b និង c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $abc=1$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

II. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស និងជាអនុគមន៍កើន ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. ក. រកសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=\frac{e^x}{1-\sin x}$ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=0$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=2x+1+\ln(x-1)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេមានការេមួយមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ a ។ នៅក្នុងការេនោះគេសង់ការេមួយទៀត ដែលមានកំពូលវាជាចំណុចកណ្តាលនៃ ជ្រុងការេមុន ។ គេសង់ការេរបៀបនេះរហូតដល់ការេទី n ។

ក. គណនាផ្ទៃក្រឡាការេទី n ។

ខ. គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេទាំងអស់ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(3,2,0)$ និង $B(0,-1,3)$ ។

ក. រកសមីការប្លង់ (Q) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (AB) ។

ខ. គេឱ្យចំណុច $R(5,0,0)$, $S(0,5,0)$ និង $T(0,0,-5)$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុច R , S និង T ជាចំណុច ដែលស្ថិតនៅលើប្លង់ (Q) ។

គ. គណនាប្រវែង AB និងផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ RST ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៦

I. **ក. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច** z : (ដូចគ្រូមធ្យមឆ្នាំ ២០១១)

គេតាង $z=a+bi$

នាំឱ្យ $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$

$1-z=(1-a)-bi$

គេបាន $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$|1-z|=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$

ដោយ z , $\frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា គេបាន ៖

$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} a^2+b^2=1 & (1) \\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2} & (2) \end{cases}$

តាម (2) $a^2+b^2=(1-a)^2+b^2$

$a^2=1-2a+a^2$ នាំឱ្យ $a=\frac{1}{2}$

តាម (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^2+b^2=1 \Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ កំណត់បានចំនួនកុំផ្លិច $\boxed{z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $|x|-x=1+2i$ ដែល x ជាចំនួនកុំផ្លិច

តាង $x=a+bi$ នាំឱ្យ $|x|=\sqrt{a^2+b^2}$

គេបាន $\sqrt{a^2+b^2}-(a+ib)=1+2i$

$\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)-bi=1+2i$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}-a=1 \\ -b=2 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} \sqrt{a^2+(-2)^2}-a=1 \\ b=-2 \end{cases}$

គេបាន $\sqrt{a^2+4}=1+a$ (លើកអង្គទាំងពីរជាការេ)

$a^2+4=1+2a+a^2 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=\frac{3}{2}-2i}$ ។

គ. ស្រាយថា $\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1$

គេមាន $abc=1$ នោះគេបាន ៖

$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}$

$=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{a+ab+abc}+\frac{ab}{ab+abc+abca}$

$=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{ab+1+a}$

$=\frac{1+a+ab}{1+a+ab}=1$

ដូចនេះ: $\boxed{\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1}$ ។

II. **ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍** f : (ដូចគ្រូមធ្យមឆ្នាំ ២០១១)

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} 1+x^2\ge 0 & (1) \\ x+\sqrt{1+x^2}>0 & (2) \end{cases}$

តាម (1) $1+x^2\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

តាម (2) $x+\sqrt{1+x^2}>0$ ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}$

$1+x^2>x^2$

$\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}$

$x+\sqrt{1+x^2}>x+|x|$

តែ $\forall x\in\mathbb{R}$, $x+|x|\ge 0$

នាំឱ្យ $x+\sqrt{1+x^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានដែនកំណត់ } D=\mathbb{R}}$ ។

ខ. ➢បង្ហាញថា f **ជាអនុគមន៍សេស**

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

នាំឱ្យ $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)$

$=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$

$=\ln\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}$

$$= \ln \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1}$$

$$= -\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = -f(x)$$

ដោយ $f(-x)= f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍សេស}}$ ។

➤បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើន

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

តាមរូបមន្ត $y=\ln(u) \Rightarrow y'=\frac{u'}{u}$

នាំឱ្យ $$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{\left(1+x^2\right)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$ នាំឱ្យ $f'(x)>0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍កើន } \forall x\in\mathbb{R}}$ ។

III. ក. រកសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

គេមាន $y=\frac{e^x}{1-\sin x}$

$$y'=\frac{\left(e^x\right)'(1-\sin x)-(1-\sin x)'e^x}{(1-\sin x)^2}$$

$$=\frac{e^x(1-\sin x)+e^x\cos x}{(1-\sin x)^2}=\frac{e^x(1-\sin x+\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

បន្ទាត់ប៉ះមានរាង $(T): y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

ដោយ (T) ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=0$

គេបាន $x=x_0=0$

$$y'(x_0)=y'(0)=\frac{e^0(1-0+1)}{(1-0)^2}=\frac{2}{1}=2$$

$$y(x_0)=y(0)=\frac{e^0}{1-\sin 0}=\frac{1}{1}=1$$

នាំឱ្យ $(T): y=2(x-0)+1=2x+1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះរកបានគឺ $\boxed{(T): y=2x+1}$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M

គេមាន បន្ទាត់ (T) : $y=2x+1$

ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=2x+1+\ln(x-1)$

នោះគេផ្ទឹមបានសមីការអាប់ស៊ីសដូចខាងក្រោម ៖

$2x+1+\ln(x-1)=2x+1$

$\ln(x-1)=0$

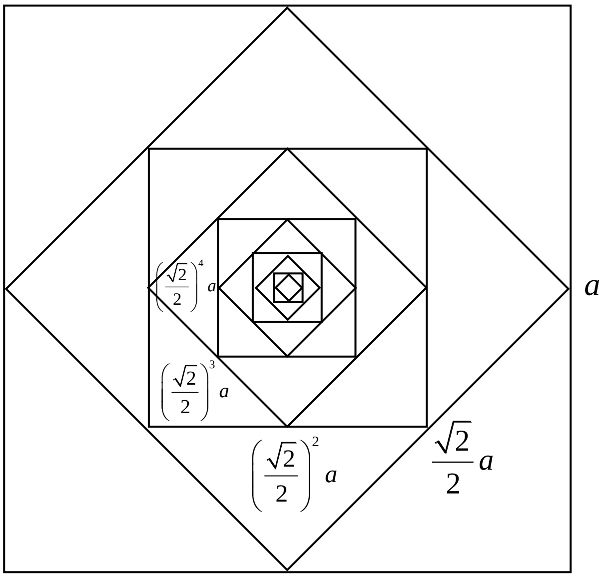
$x-1=e^0$

$x=2$

ចំពោះ $x=2$: $y=2\cdot2+1=5$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{x=2 , y=5}$ ។

IV. ក. គណនាផ្ទៃក្រឡាការេទី n :



គេបានជ្រុងនៃការេបន្តបន្ទាប់ ពីការេទី១ ទី២ ទី៣ ... ទីn គឺ៖

$$\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^0 a , \left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^1 a , \left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 a , \ldots , \left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^{n-1} a$$

ផ្ទៃការេទី១ $s_1=\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^{0\times2}a^2$ ឬ $s_1=\left(\frac{1}{2}\right)^0 a^2$

ផ្ទៃការេទី២ $s_2=\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^{1\times2}a^2$ ឬ $s_2=\left(\frac{1}{2}\right)^1 a^2$

ផ្ទៃការេទី៣ $s_3=\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^{2\times2}a^2$ ឬ $s_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2$

....

ផ្ទៃការេទីn $s_n=\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^{(n-1)\times2}a^2$ នាំឱ្យ $s_n=\frac{a^2}{2^{n-1}}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាការេទី n គឺ $\boxed{s_n=\frac{a^2}{2^{n-1}}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ខ. គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេទាំងអស់

$S = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^0 a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a^2$

$= a^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

$= a^2\left(\frac{s_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}\right) = a^2\left[\frac{1\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}\right]$

$= 2a^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

ដូចនេះ គណនាបានផលបូក $\boxed{S = 2a^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$ ។

V. ក. រកសមីការប្លង់ (Q) :

ប្លង់ (Q) រាង $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

ដោយ (Q) កាត់ $A(3, 2, 0)$

នោះ $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, $z_0 = 0$

ហើយ (Q) កែងនឹងវ៉ិចទ័រ (AB) នាំឱ្យ (Q) មានវ៉ិចទ័រ

ណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-3, -3, 3)$

នោះ $a = -3$, $b = -3$, $c = 3$

នាំឱ្យ $(Q): -3(x-3) - 3(y-2) + 3(z-0) = 0$

$(x-3) + (y-2) - (z-0) = 0$

$x + y - z - 5 = 0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់កំណត់បាន $\boxed{(Q): x + y - z - 5 = 0}$ ។

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា R , S និង T ជាចំណុចស្ថិតនៅលើប្លង់ (Q)

គេមាន $R(5, 0, 0)$, $S(0, 5, 0)$, $T(0, 0, -5)$

និងប្លង់ $(Q): x + y - z - 5 = 0$

បើចំណុច R, S, T ជាចំណុចស្ថិតនៅលើប្លង់ (Q) លុះត្រាតែកូអរដោនេចំណុចទាំងនេះផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការប្លង់ (Q) គេបាន ៖

- ចំពោះ $R(5, 0, 0)$ នោះ $(Q): 5 + 0 - 0 - 5 = 0$ ពិត
- ចំពោះ $S(0, 5, 0)$ នោះ $(Q): 0 + 5 - 0 - 5 = 0$ ពិត
- ចំពោះ $T(0, 0, -5)$ នោះ $(Q): 0 + 0 + 5 - 5 = 0$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{R \in (Q), S \in (Q), T \in (Q)}$ ។

គ. គណនាប្រវែង AB

ដោយ $\overrightarrow{AB} = (-3, -3, 3)$

នាំឱ្យ $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{AB = 3\sqrt{3}}$ ឯកតាប្រវែង ។

➢គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ RST

តាមរូបមន្ត $S_{RST} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{RS} = (-5, 5, 0)$, $\overrightarrow{RT} = (-5, 0, -5)$

គេបាន $\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -25\vec{i} - 25\vec{j} + 25\vec{k}$

នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}\right| = \sqrt{(-25)^2 + (-25)^2 + 25^2} = 25\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{RST} = \frac{25\sqrt{3}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ១៥ ធ្នូ ២០០៥

វិញ្ញាសា : **គណិតវិទ្យា** **រយៈពេល** : **១២០ នាទី** **ពិន្ទុ** : **១០**

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច : $x^2-2x+5=0$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$ ។

គ. សរសេរ $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ **(២ពិន្ទុ)**

II. ចូរសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ : $f(x)=|x|$ រួចស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ តែគ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលពណ៌ស 12 និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅ 15 ។ គេចាប់យកពីក្នុងថង់នូវប៊ូលពីរជាមួយគ្នា ។ តើគេមានប៉ុន្មានរបៀបដើម្បីចាប់យកចេញឱ្យបានយ៉ាងតិចបំផុតប៊ូលពណ៌ ស មួយ ។ **(២ពិន្ទុ)**

IV. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(4,-2,0)$, $B(1,2,2)$, $C(2,-1,0)$ និង $D(2,-2,-1)$ ។

ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច B ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (CD) ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (P) ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $f_m(x)=\ln\left(x^2+4x+m\right)$ ។

ក. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍នេះមានដែនកំណត់ស្មើនឹងចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃនៃ $m=0$ ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=\ln(x+2)+\ln 2$ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $F(x)=2\left[(x+2)\ln|x+2|-x\right]$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(x^2+4x+4\right)$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៥

I. **ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច :**

គេមាន $x^2-2x+5=0$

$x^2-2x+1=-4$

$(x-1)^2=(2i)^2$

$x-1=\pm 2i$

$x=1\pm 2i$

ដូចនេះ សមីការមានឫសពីរគឺ $\boxed{x=1\pm 2i}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b

បើ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$

គេបាន $a(2-i)^2+b(2-i)-20=0$

$a(2-i)^2+b(2-i)-20=0$

$a(4-4i+i^2)+2b-bi-20=0$

$(3a+2b-20)+(-4a-b)i=0$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}3a+2b-20=0\\-4a-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=16\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=-4\ ,\ b=16}$ ។

គ. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$ ដែល $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}=i$

នាំឱ្យ $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3=i^3=-i=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$

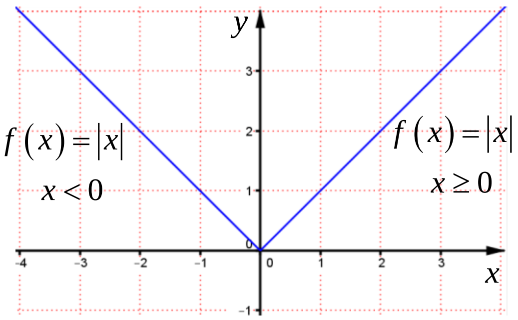
ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគឺ $\boxed{z=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}}$ ។

II. **សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍** $f(x)=|x|$: (ដូចគ្រូបឋម២០០៩)

• ចំពោះ $x\geq 0$: $|x|=x$ នោះ $y=f(x)=x$

• ចំពោះ $x<0$: $|x|=-x$ នោះ $y=f(x)=-x$

គេសង់ក្រាបបាន តាមករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖



➢ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$

គេមាន $f(x)=|x|=\begin{cases}x & \text{បើ } x\geq 0\\-x & \text{បើ } x<0\end{cases}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

$f(0)=0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ } x=0}$ ។

➢ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ គ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$

បើ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $f'_-(0)=f'_+(0)$

តាមនិយមន័យដេរីវេ $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

គេបាន $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1$

និង $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

ដោយ $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ នោះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ គ្មានដេរីវេត្រង់ } x=0 \text{ ទេ}}$ ។

III. **រកចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុត :**

របៀបទី១

គេមាន ប៊ូលពណ៌ស 12 និងប៊ូលខ្មៅ 15 គេយកប៊ូលពីរ

នាំឱ្យ ចំនួនរបៀបចាប់ប៊ូលទាំងអស់ស្មើ $C(27\ ,\ 2)$ ដែល

$C(27\ ,\ 2)=\dfrac{27!}{(27-2)!\cdot 2!}=\dfrac{27\cdot 26\cdot 25!}{25!\cdot 2}=351$

ដោយ ព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុត បំពេញនឹងព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌ខ្មៅទាំងពីរ

ហើយ ព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌ខ្មៅទាំងពីរគឺ $C(15,\ 2)$

$C(15\ ,\ 2)=\dfrac{15!}{(15-2)!\cdot 2!}=\dfrac{15\cdot 14\cdot 13!}{13!\cdot 2}=105$

គេបាន ចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុតស្មើ $C(27,\ 2)=C(15,\ 2)=351-105=246$ របៀប

ដូចនេះ $\boxed{\text{របៀបយកបានប៊ូលសយ៉ាងតិចមួយគឺ } 246 \text{ របៀប}}$ ។

របៀបទី២

ព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុតមានន័យថា យកបានប៊ូលសមួយ ឬប៊ូលសពីរ គេបាន ៖

ចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលសមួយយ៉ាងតិចបំផុតគឺ

$=C(12\,,1)C(15\,,1)+C(12\,,2)$

$=12\times15+\dfrac{12!}{(12-2)!\cdot 2!}$

$=180+\dfrac{12\cdot11\cdot10!}{10!\cdot 2}=180+66=246$

ដូចនេះ: | របៀបយកបានប៊ូលសយ៉ាងតិចមួយគឺ 246 របៀប | ។

IV. **ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) :**

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតមានរាង $(d):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\,,\,t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+ct\end{cases}$

ដោយ (d) កាត់តាមចំណុច $A(4\,,-2\,,0)$

នោះ: $x_0=4\,,\,y_0=-2\,,\,z_0=0$

ហើយ (d) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}=(0\,,-1\,,-1)$

នោះ: $a=0\,,b=-1\,,c=-1$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $\boxed{(d):\begin{cases}x=4\\ y=-2-t\,,\,t\in\mathbb{R}\\ z=-t\end{cases}}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P)

សមីការប្លង់ $(P):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (P) កាត់តាមចំណុច $B(1\,,2\,,2)$

នោះ: $x_0=1\,,\,y_0=2\,,\,z_0=2$

ហើយ (P) កែងនឹងបន្ទាត់ (CD) នាំឱ្យ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{CD}=(0\,,-1\,,-1)$

នោះ: $a=0\,,b=-1\,,c=-1$

គេបាន $(P):0(x-1)-(y-2)-(z-2)=0$

$(P):-(y-2)-(z-2)=0$

$(P):y+z-4=0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $\boxed{(P):y+z-4=0}$ ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (P)

គេមាន $(d):\begin{cases}x=4\\ y=-2-t\\ z=-t\end{cases}$ និង $(P)\,:\,y+z-4=0$

គេបាន $(-2-t)-t-4=0$

$(-2-t)-t-4=0$

$-2t-6=0$

$t=-3$

ចំពោះ $t=-3$ គេបាន $\begin{cases}x=4\,,\\ y=-2-(-3)\\ z=-(-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=1\\ z=3\end{cases}$

ដូចនេះ: | កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $(4\,,1\,,3)$ | ។

V. **ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ មានដែនកំណត់ស្មើ $\mathbb{R}$:**

គេមាន $f_m(x)=\ln(x^2+4x+m)$

របៀបទី១

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+4x+m>0$

គេបាន $(x^2+4x+4)+(m-4)>0$

$(x+2)^2+(m-4)>0$, $(x+2)^2\geq0$

ដើម្បីឱ្យ វិសមីការពិតគ្រប់តម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ លុះត្រា $m-4>0$

នាំឱ្យ $m>4$

ដូចនេះ: | តម្លៃ m កំណត់បានគឺ $m>4$ | ។

របៀបទី២

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+4x+m>0$

ដើម្បីឱ្យ វិសមីការពិតគ្រប់តម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ លុះត្រា $\begin{cases}a>0\\ \Delta'<0\end{cases}$

គេបាន $a=1>0$, $4-m<0$ នោះ: $m>4$

ដូចនេះ: | តម្លៃ m កំណត់បានគឺ $m>4$ | ។

ខ. ចំពោះតម្លៃនៃ $m=0$ ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $f(x)=\ln(x+2)+\ln 2$

គេបាន $\ln(x^2+4x)=\ln(x+2)+\ln 2$

លក្ខខណ្ឌ សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}x^2+4x>0\\ x+2>0\end{cases}$

កន្សោម x^2+4x មានឫស $x=0\,,\,x=-4$

កន្សោម $x+2$ មានឫស $x=-2$

តារាងសញ្ញាដើម្បីទាញរកលក្ខខណ្ឌ

x	$-\infty$ -4	-2		0 $+\infty$
$x^2+4x>0$	$+$	0 $-$	$-$	0 $+$
$x+2>0$	$-$	$-$	0 $+$	$+$
លក្ខខណ្ឌ				

ហេតុនេះ លក្ខខណ្ឌ $x>0$

គេបាន $\ln\left(x^2+4x\right)=\ln\left(2x+4\right)$

$$x^2+4x=2x+4$$

$$x^2+2x-4=0$$

មាន $\Delta'=1+4=5$

$x=-1+\sqrt{5}$, $x=-1-\sqrt{5}<0$ មិនយក

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=-1+\sqrt{5}}$ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

គេមាន $F(x)=2\left[(x+2)\ln|x+2|-x\right]$

$$f(x)=\ln\left(x^2+4x+4\right)$$

គេបាន $F'(x)=\left(2\left[(x+2)\ln|x+2|-x\right]\right)'$

$$=2\left[(x+2)'\ln|x+2|+\left(\ln|x+2|\right)'(x+2)-1\right]$$

$$=2\left[\ln|x+2|+\frac{(x+2)'}{x+2}(x+2)-1\right]$$

$$=2\left[\ln|x+2|+1-1\right]=2\ln|x+2|$$

$$=\ln(x+2)^2=\ln\left(x^2+4x+4\right)=f(x)$$

ដោយ $F'(x)=f(x)$

នាំឱ្យ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អនុគមន៍ } F(x) \text{ ជាព្រីមីទីវនៃ } f(x)}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៣ វិច្ឆិកា ២០០៤

វិញ្ញាសា : **គណិតវិទ្យា** **រយៈពេល** : ១២០ **នាទី** **ពិន្ទុ** : ១០

I. ចូរដោះស្រាយវិសមីការ :

ក. $\sin x+\sqrt{3}\cos x\geq 1$ បើ $-\pi<x<\pi$ ។

ខ. $\log_2(2-x)+\log_4(x+3)\leq 1$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. កំណត់ចំនួនថេរ a និង b ដើម្បីឱ្យចំពោះគ្រប់ x គេបាន : $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x(x+1)}+\dfrac{b}{(x+1)(x+2)}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ រួចរកលីមីត S កាលណា $n\to+\infty$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. គេបង្កើតគណៈកម្មការមួយមានសមាជិក 5 នាក់ ក្នុងចំណោម 12 នាក់ ។ ចំពោះមនុស្សទាំងនេះ មានពីរនាក់ A និង B អាចចូលជាសមាជិកបានលុះត្រាតែចូលទាំងពីរនាក់ ។

ក. តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការនេះបានប៉ុន្មានរបៀប ?

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យ A និង B បានចូលជាសមាជិកគណៈកម្មការទាំងពីរនាក់ ។ **(២ពិន្ទុ)**

IV. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់នៃលំហគេឱ្យប្លង់ (P) និងស្វ៊ែ (S) មានសមីការរៀងគ្នា : $(P): x+2y+2z+5=0$ និង $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និងកាំ R នៃស្វ៊ែ (S) ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S) រួចរកសមីការបណ្តាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ រួចស្រាយថាខ្សែកោងនេះមានផ្ចិតឆ្លុះមួយ ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ដោយដឹងថាបន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់តាមចំណុច $A(0\,,\,2)$ ។

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃ S ផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=3\,,\,x=4$ ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៤

I. ដោះស្រាយវិសមីការ :

ក. $\sin x+\sqrt{3}\cos x\ge 1$ (បើ $-\pi<x<\pi$)

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\ge\frac{1}{2}$$

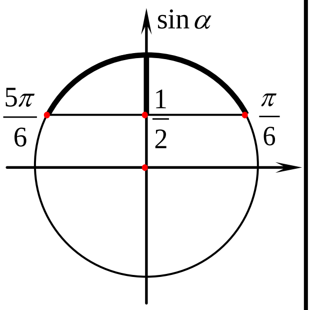
$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\ge\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ge\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$$



ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}}$ ។

ខ. $\log_2(2-x)+\log_4(x+3)\le 1$

វិសមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}2-x>0\\ x+3>0\end{cases}\Rightarrow -3<x<2$

គេបាន $\log_2(2-x)+\frac{1}{2}\log_2(x+3)\le 1$

$$2\log_2(2-x)+\log_2(x+3)\le 2$$

$$\log_2(2-x)^2+\log_2(x+3)\le 2$$

$$\log_2(4-4x+x^2)(x+3)\le\log_2 2^2$$

$$4x+12-4x^2-12x+x^3+3x^2\le 4$$

$$x^3-x^2-8x+8\le 0$$

$$x^2(x-1)-8(x-1)\le 0$$

$$(x-1)(x^2-8)\le 0$$

ឱ្យ $x-1=0\Rightarrow x=1$ និង $x^2-8=0\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$ -3	$-2\sqrt{2}$		1	2 $2\sqrt{2}$	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
x^2-8	$+$	$+$ 0	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
$(x-1)(x^2-8)\le 0$	$-$	$-$ 0	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$
$-3<x<2$						
ចម្លើយ						

ដូចនេះ $\boxed{x\in\left(-3\,,-2\sqrt{2}\right]\cup\left[1\,,2\right)}$ ជាចម្លើយ ។

II. ក. កំណត់ចំនួនថេរ a និង b : (ដូចគ្រូមធ្យមឆ្នាំ 2009)

គេមាន $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x(x+1)}+\dfrac{b}{(x+1)(x+2)}$

$$=\frac{a(x+2)+bx}{x(x+1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a}{x(x+1)(x+2)}$$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}a+b=0\\ 2a=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$

ដូចនេះ៖ កំណត់បាន $\boxed{a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក S

គេមាន $S=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+.......+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ហើយ $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1/2}{x(x+1)}+\dfrac{-1/2}{(x+1)(x+2)}$

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$$

យក $x=1\,,2\,,3\,,\dots,n$ គេបាន ៖

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{2\cdot3}\right]\\ \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2\cdot3}-\dfrac{1}{3\cdot4}\right]\\ \dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3\cdot4}-\dfrac{1}{4\cdot5}\right]\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\end{cases}$$

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

ដូចនេះ៖ គណនាបាន $\boxed{S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)}$

➢រកលីមីត S កាលណា $n\to+\infty$

គេមាន $\lim\limits_{n\to+\infty}S=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ៖ គណនាបាន $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S=\frac{1}{4}}$ ។

III. **ក. តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការនេះបានប៉ុន្មានរបៀប ?**

ដោយ មនុស្សទាំងអស់មាន 12 នាក់ ចង់បង្កើតគណៈកម្មការមានគ្នា 5 នាក់ វាជាបន្សំនៃ 5 ធាតុយកពី 12 ធាតុ

គេតាង $n(s)=C(12\,,5)=\dfrac{12!}{(12-5)!\cdot 5!}$

$=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=792$

ដូចនេះ | ចំនួនគណៈកម្មការបង្កើតបាន 792 របៀប | ។

ខ. រកប្រូបាប A និង B ចូលជាសមាជិកទាំងពីរនាក់

ដើម្បីជ្រើសរើសបាន A និង B ទាំងពីរនាក់ នោះគេត្រូវជ្រើសរើសមនុស្ស 3 ពី 10 នាក់ផ្សេងទៀត

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ជ្រើសបានទាំង A និង B

គេបាន $n(A)=C(2\,,2)\times C(10\,,3)$

$=1\times\dfrac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 3\cdot 2}=120$

នាំឱ្យ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{120}{792}=\dfrac{5}{33}$

ដូចនេះ ប្រូបាបរកបានគឺ $\boxed{P(A)=\dfrac{5}{33}}$ ។

IV. **ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និងកាំ R នៃស្វ៊ែ (S)**

គេបំលែងងសមីការស្វ៊ែ (S) ជាទម្រង់ស្តង់ដា

$(S):\ x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$

$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2+4z)=0$

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+(z^2+4z+4)=9$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=3^2$

ផ្ទឹមនឹង $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

នាំឱ្យ ផ្ចិត $I(a\,,b\,,c)=I(1\,,2\,,-2)$, កាំ $r=3$

ដូចនេះ | ស្វ៊ែនេះមានផ្ចិត $I(1\,,2\,,-2)$ និងកាំ $r=3$ | ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S)

តាមរូបមន្ត $d(I\,,(P))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $I(1\,,2\,,-2)$ និង $(P):x+2y+2z+5=0$

នាំឱ្យ $d(I\,,(P))=\dfrac{|1\cdot 1+2\cdot 2+2(-2)+5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{|6|}{3}=2$

ដោយ $d=2<r=3$ នោះប្លង់ (P) ត្រូវកាត់ស្វ៊ែ (S)

ដូចនេះ | ប្លង់ (P) ត្រូវកាត់ស្វ៊ែ (S) ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

➤រកសមីការបណ្តាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S)

គេតាង សមីការប្លង់ត្រូវរកមានរាង ៖

$(\alpha)\ :\ ax+by+cz+d=0$

ដោយ $(\alpha)\parallel(P)$ នោះ (α) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ដូច (P) គឺ $\vec{n}=(1\,,2\,,2)$ នោះគេបាន ៖

$(\alpha)\ :\ x+2y+2z+d=0$

តែប្លង់ (α) ប៉ះស្វ៊ែ (S) នោះ $d(I\,,(\alpha))=r=3$

គេបាន $\dfrac{|1\cdot 1+2\cdot 2+2(-2)+d|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3\Leftrightarrow\dfrac{|1+d|}{3}=3$

នាំឱ្យ $|1+d|=9\Leftrightarrow 1+d=\pm 9\Rightarrow\left[\begin{array}{l}d=-10\\ d=8\end{array}\right.$

ដូចនេះ បណ្តាសមីការប្លង់ត្រូវរកអាចសរសេរបានគឺ ៖

$\boxed{\begin{array}{l}(\alpha_1)\ :\ x+2y+2z-10=0\\ (\alpha_2)\ :\ x+2y+2z+8=0\end{array}}$ ។

V. **ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍**

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}$

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $-2x-4\neq 0$

នាំឱ្យ $-2x\neq 4$ នោះ $x\neq -2$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{-2\}=(-\infty\,,-2)\cup(-2\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}\right)'$

$=\dfrac{(2x-2)(-2x-4)+2(x^2-2x+1)}{(2x+4)^2}$

$=\dfrac{2(x-1)(-2x-4)+2(x-1)^2}{(2x+4)^2}$

$=\dfrac{2(x-1)(-2x-4+x-1)}{(2x+4)^2}$

$=\dfrac{2(x-1)(-x-5)}{(2x+4)^2}$

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)(-x-5)}{(2x+4)^2}=0$

$\forall x\in D\ ,\ \Leftrightarrow (2x+4)^2>0$

នាំឱ្យ $(x-1)(-x-5)=0$ នោះ $x=1\ ,\ x=-5$

គេបាន $f(1)=\dfrac{1^2-2\cdot 1+1}{-2\cdot 1-4}=0$

$f(-5)=\dfrac{(-5)^2-2(-5)+1}{-2(-5)-4}=\dfrac{36}{6}=6$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

• ត្រង់ $x=-5\ ,\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(-5)=6$ ។

• ត្រង់ $x=1\ ,\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(1)=0$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{-2x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-2x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+1}{-2x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-2x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2-2x+1}{-2(x+2)}=\frac{9}{-2(-2+0^-+2)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2-2x+1}{-2(x+2)}=\frac{9}{-2(-2+0^++2)}=-\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}=-\dfrac{1}{2}x+2+\dfrac{9}{-2x-4}$

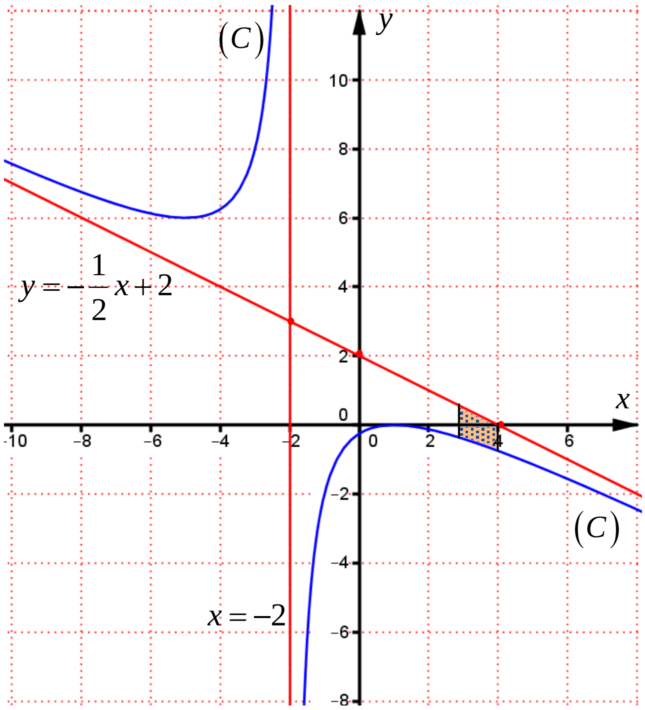
ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{9}{-2x-4}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=-\dfrac{1}{2}x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	6	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↘	$-\infty$

➢សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



➢ស្រាយថាខ្សែកោងនេះមានផ្ចិតបំលែងឆ្លុះមួយ

របៀបទី១ តាមរូបមន្ត

ដោយ អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x=-2$ និង $y=-\dfrac{1}{2}x+2$

ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(-2\ ,\ 3)$ គេនឹងស្រាយថា

I ជាផ្ចិតបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប (C)

បើ $I(a\ ,\ b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C តាងអនុគមន៍ f លុះត្រាតែ

វាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-4-x)+f(x)=6$

ដោយ $f(-4-x)=\dfrac{(-4-x)^2-2(-4-x)+1}{-2(-4-x)-4}$

$=\dfrac{16+8x+x^2+8+2x+1}{8+2x-4}$

$=\dfrac{x^2+10x+25}{2x+4}=\dfrac{-x^2-10x-25}{-2x-4}$

គេបាន $\dfrac{-x^2-10x-25}{-2x-4}+\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}=\dfrac{-12x-24}{-2x-4}=6$

ដូចនេះ **ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $I(-2\ ,\ 3)$** ។

របៀបទី២ តាមវិធីរំកិលអ័ក្ស

គេបំលែងកិលអ័ក្សពីតម្រុយ xoy ទៅតម្រុយថ្មី XIY

តាមរូបមន្ត បំលែងកិលអ័ក្ស $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$

ដោយ អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x = -2$ និង $y = -\frac{1}{2}x + 2$

ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(a, b) = I(-2, 3)$

គេបាន $\begin{cases} x = -2 + X \\ y = 3 + Y \end{cases}$

គេមាន $y = f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{-2x - 4}$

គេបាន $Y + 3 = \frac{x^2 - 2x + 1}{-2x - 4}$

$$Y + 3 = \frac{(X-2)^2 - 2(X-2) + 1}{-2(X-2) - 4}$$

$$Y = \frac{X^2 - 4X + 4 - 2X + 4 + 1}{-2X} - 3$$

$$F(X) = \frac{X^2 + 9}{-2X} \quad , \quad Y = F(X)$$

ដោយ $\forall X \neq 0$ គេបាន ៖

$$F(-X) = \frac{(-X)^2 + 9}{2X} = -\frac{X^2 + 9}{-2X} = -F(X)$$

នាំឱ្យ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេសមាន $I(-2, 3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

ដូចនេះ ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $I(-2, 3)$ ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C)

➤របៀបទី១

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

គេបាន $y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់តាមចំណុច $A(0, 2)$

$$f'(x_0)\cdot 0 - f'(x_0)x_0 + f(x_0) = 2$$

$$-f'(x_0)x_0 + f(x_0) = 2$$

តែ $-f'(x_0)x_0 = \frac{-2(x_0 - 1)(-x_0 - 5)x_0}{(2x_0 + 4)^2}$

$$= \frac{(2x_0^2 - 2x_0)(x_0 + 5)}{(2x_0 + 4)^2}$$

$$= \frac{2x_0^3 + 8x_0^2 - 10x_0}{(2x_0 + 4)^2}$$

$$f(x_0) = \frac{x_0^2 - 2x_0 + 1}{-2x_0 - 4} = \frac{(x_0^2 - 2x_0 + 1)(-2x_0 - 4)}{(2x_0 + 4)^2}$$

$$= \frac{-2x_0^3 + 6x_0 - 4}{(2x_0 + 4)^2}$$

គេបាន $\frac{2x_0^3 + 8x_0^2 - 10x_0}{(2x_0 + 4)^2} + \frac{-2x_0^3 + 6x_0 - 4}{(2x_0 + 4)^2} = 2$

$$\frac{2x_0^3 + 8x_0^2 - 10x_0}{(2x_0 + 4)^2} + \frac{-2x_0^3 + 6x_0 - 4}{(2x_0 + 4)^2} = 2$$

$$8x_0^2 - 4x_0 - 4 = 2(2x_0 + 4)^2$$

$$8x_0^2 - 4x_0 - 4 = 2(4x_0^2 + 16x_0 + 16)$$

$$8x_0^2 - 4x_0 - 4 = 8x_0^2 + 32x_0 + 32$$

$$36x_0 = -36$$

$$x_0 = -1$$

នាំឱ្យ $f'(x_0) = f'(-1) = \frac{2(-1-1)(1-5)}{(-2+4)^2} = 4$

$$f(x_0) = f(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1) + 1}{-2(-1) - 4} = -2$$

នាំឱ្យ $y = 4(x+1) + (-2) = 4x + 2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរកបានគឺ $\boxed{y = 4x + 2}$ ។

➤របៀបទី២

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $(T):\ y = ax + b$

ដោយ (T) កាត់ $A(0, 2)$ នោះ $2 = 0\cdot a + b$ ឬ $b = 2$

គេបាន $(T):\ y = ax + 2$

ដោយ (T) ប៉ះ (C) គេផ្ទឹមបានសមីការអាប់ស៊ីស

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{-2x - 4} = ax + 2$$

$$x^2 - 2x + 1 = -2ax^2 - 4x - 4ax - 8$$

$$(1 + 2a)x^2 + (2 + 4a)x + 9 = 0$$

ដើម្បីឱ្យ (T) ប៉ះ (C) លុះត្រាសមីការមានឫសឌុប $\begin{cases} \Delta' = 0 \\ a \neq -1/2 \end{cases}$

គេបាន $(1 + 2a)^2 - 9(1 + 2a) = 0$

$$(1 + 2a)(2a - 8) = 0$$

$a = 4$, $a = -\frac{1}{2}$ មិនយក (ធ្វើឱ្យជាសមី.ដឺក្រេទី១)

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរកបានគឺ $\boxed{y = 4x + 2}$ ។

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃ S ផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=3$, $x=4$

តាមក្រាប នៅចន្លោះ $3 \le x \le 4$ អាស៊ីមតូតទ្រេតនៅពីលើក្រាប

គេបាន ផ្ទៃកំណត់ដោយ $S=\int_3^4 \left[y-(c)\right]dx$ គេបាន ៖

$$S=\int_3^4 \left[-\frac{1}{2}x+2-\left(-\frac{1}{2}x+2+\frac{9}{-2x-4}\right)\right]dx$$

$$=\int_3^4 \frac{9}{2x+4}dx$$

$$=\frac{9}{2}\int_3^4 \frac{1}{x+2}dx$$

$$=\frac{9}{2}\left[\ln|x+2|\right]_3^4$$

$$=\frac{9}{2}(\ln 6-\ln 5)$$

$$=\frac{9}{2}\ln\frac{6}{5}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃប្លង់កំណត់បាន $S=\frac{9}{2}\ln\frac{6}{5}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ១៤ ធ្នូ ២០០៣

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ : $f(x)=(x^2+3x+5)e^{6x}$, $g(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ ។

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $h(x)=x\ln x+1$ ត្រង់ចំណុច $M(1,1)$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ : $I=\int(2\sin x+3\cos x)dx$, $J=\int\dfrac{dx}{x^2-5x+6}$ ។

ខ. រកផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=x^2+2x$ និងបន្ទាត់ $y=x+2$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. ដោះស្រាយសមីការ : $\dfrac{4-x}{1986}+\dfrac{3-x}{1987}+\dfrac{2-x}{1988}+\dfrac{1-x}{1989}=-4$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

IV. គេមានបីចំណុច $A(-1,1,2)$, $B(0,2,4)$ និង $C(-1,3,1)$ ។

ក. គណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា ចំណុច A , B និង C មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

ខ. ចូររកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{3-x}{x}$ ។

ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ ។

ខ. ចំណុច A និង B មានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា 1 និង 3 ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង C ។ ចូរកំណត់សមីការបន្ទាត់ AB រួចទាញរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ទាំងអស់ដែលស្របនឹងបន្ទាត់ AB ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៣

I. **ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ :**

$$f(x)=\left(x^2+3x+5\right)e^{6x}$$

$$f'(x)=\left(x^2+3x+5\right)'e^{6x}+\left(e^{6x}\right)'\left(x^2+3x+5\right)$$

$$=(2x+3)e^{6x}+6e^{6x}\left(x^2+3x+5\right)$$

$$=\boxed{\left(6x^2+20x+33\right)e^{6x}}$$

$$g(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}=\ln(x+1)-\ln(x-1)$$

$$g'(x)=\frac{(x+1)'}{x+1}-\frac{(x-1)'}{x-1}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x-1}{x^2-1}=\boxed{-\frac{2}{x^2-1}}$$

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ :

គេមាន $h(x)=x\ln x+1$ និងចំណុច $M(1,1)$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=h'(x_0)(x-x_0)+h(x_0)$

គេមាន បន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច $M(1,1)$

នោះ $x_0=1$, $h(x_0)=1$

ហើយ $h'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1$

$h'(x_0)=h'(1)=\ln 1+1=1$

នាំឱ្យ $y=1(x-1)+1=x$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $\boxed{y=x}$ ។

II. **ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ :**

$$\mathbf{I}=\int(2\sin x+3\cos x)\,dx$$

$=-2\cos x+3\sin x+c$, c ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I}=-2\cos x+3\sin x+c \;\; , c \text{ ថេរ}}$ ។

$$\mathbf{J}=\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx=\int\left(\frac{(x-3)'}{x-3}-\frac{(x-2)'}{x-2}\right)dx$$

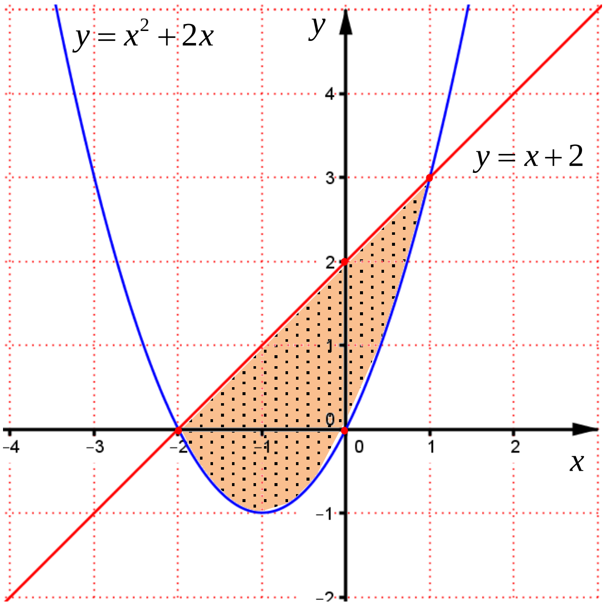
$=\ln|x-3|-\ln|x-2|+c$, c ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{J}=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+c \;\; , c \text{ ថេរ}}$ ។

ខ. រកផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង និងបន្ទាត់

គេមាន ខ្សែកោង $y=x^2+2x$ និងបន្ទាត់ $y=x+2$

គេសង់ក្រាបប៉ារ៉ាបូល និងបន្ទាត់ ដើម្បីដឹងទីតាំង និងប្រើរូបមន្ត



តាមក្រាបផ្ទៃក្រឡាប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបទាំងពីរគឺ

$$S=\int_{-2}^{1}\left[(x+2)-\left(x^2+2x\right)\right]dx$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(-x^2-x+2\right)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)=-3+\frac{3}{2}+6=\frac{9}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃគណនាបាន } S=4.5 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

III. **ដោះស្រាយសមីការ :**

$$\frac{4-x}{1986}+\frac{3-x}{1987}+\frac{2-x}{1988}+\frac{1-x}{1989}=-4$$

$$\frac{4-x}{1986}+1+\frac{3-x}{1987}+1+\frac{2-x}{1988}+1+\frac{1-x}{1989}+1=0$$

$$\frac{1990-x}{1986}+\frac{1990-x}{1987}+\frac{1990-x}{1988}+\frac{1990-x}{1989}=0$$

$$(1990-x)\left(\frac{1}{1986}+\frac{1}{1987}+\frac{1}{1988}+\frac{1}{1989}\right)=0$$

នាំឱ្យ $1990-x=0\Rightarrow x=1990$

ដូចនេះ សមីការមានឬសតែមួយគត់គឺ $\boxed{x=1990}$ ។

IV. ក. គណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

គេមាន $A(-1,1,2)$, $B(0,2,4)$ និង $C(-1,3,1)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(1,1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(0,2,-1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=-5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

ដូចនេះ: គណនាបាន $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}}$ ។

➤ **ទាញបញ្ជាក់ថា ចំណុច A , B និង C មិនរត់ត្រង់គ្នា**

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\neq\vec{0}$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{បីចំណុច } A , B , C \text{ រត់មិនត្រង់ជួរ}}$ ។

ខ. រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-5,1,2)$

គេបាន $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+1^2+2^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{30}$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ផ្ទៃនៃត្រីកោណគឺ } S=\dfrac{\sqrt{30}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$ ។

V. ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ :

គេមាន $y=\dfrac{3-x}{x}=\dfrac{3}{x}-1$

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ មានន័យលុះត្រាតែ $x\neq 0$

ដូចនេះ: ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{0\}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព :

ដេរីវេ $y'=\left(\dfrac{3}{x}-1\right)'=-\dfrac{3}{x^2}<0$, $\forall x\in D$

នាំឱ្យ y ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ D និងគ្មានបរមាទេ

• លីមីត និងអាសុីមតូត

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}-1\right)=0-1=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}-1\right)=0-1=-1$$

$$\lim_{x\to0^-} y=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{3}{x}-1\right)=-\infty-1=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} y=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{3}{x}-1\right)=+\infty-1=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-1$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=-1$ ជាអាសុីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

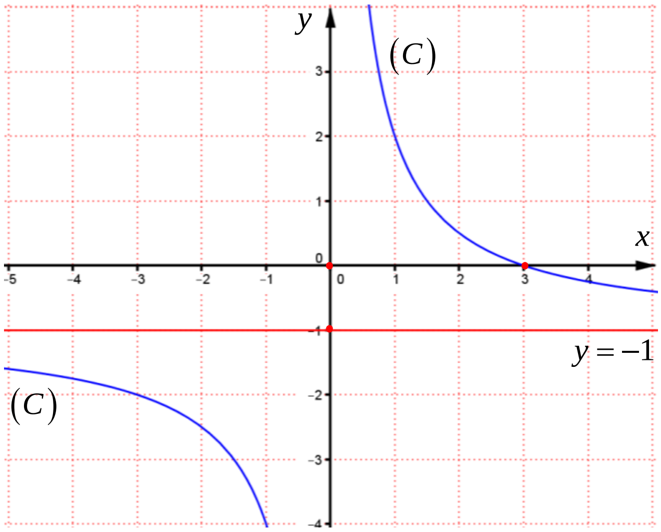
ដោយ $\lim\limits_{x\to0} y=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=0$ ជាអាសុីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	‖	$-$
y	$-1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -1$

• **សង់ខ្សែកោង (C)**

បើ $y=0\Leftrightarrow\dfrac{3-x}{x}=0\Rightarrow x=3$



ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ AB

គេមាន ចំណុច A និង B មានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា 1 និង 3 ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង C នោះគេបាន ៖

ចំពោះ $x=1$: $y(1)=\dfrac{3}{1}-1=2$

ចំពោះ $x=3$: $y(3)=\dfrac{3}{3}-1=0$

គេបាន កូអរដោនេចំណុច $A(1,2)$ និង $B(3,0)$

ដោយ $(AB): y=ax+b$ ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស

$a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{0-2}{3-1}=-1$ និងកាត់ $A(1,2)$

គេបាន $2=(-1)(1)+b$ នាំឱ្យ $b=3$

ដូចនេះ: សមីការបន្ទាត់កំណត់បាន $\boxed{(AB): y=-x+3}$ ។

➢**ទាញរកសមីការ បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ទាំងអស់ស្របនឹងបន្ទាត់ AB**

បន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងបន្ទាត់ (AB) គេបាន $y'(x_0) = -1$

នាំឱ្យ $-\dfrac{3}{x_0^2} = -1$ នោះ $x_0 = \pm\sqrt{3}$

• ចំពោះ $x_0 = -\sqrt{3}$

នាំឱ្យ $y(x_0) = y(-\sqrt{3}) = \dfrac{3}{-\sqrt{3}} - 1 = -\sqrt{3} - 1$

គេបាន $y = -1(x + \sqrt{3}) - \sqrt{3} - 1 = -x - 2\sqrt{3} - 1$

• ចំពោះ $x_0 = \sqrt{3}$

នាំឱ្យ $y(x_0) = y(\sqrt{3}) = \dfrac{3}{\sqrt{3}} - 1 = \sqrt{3} - 1$

គេបាន $y = -1(x - \sqrt{3}) + \sqrt{3} - 1 = -x + 2\sqrt{3} - 1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះទាំងអស់ដែលរកបានគឺ ៖

$$\boxed{y = -x - 2\sqrt{3} - 1 \ , \ y = -x + 2\sqrt{3} - 1}$$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៤ ធ្នូ ២០០២

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ : $f(x)=\dfrac{\sin 2x-\sin x}{\sin 2x+\sin x}$ កាលណា x ខិតជិតសូន្យ ។

ខ. គណនាផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្ត នៃចំនួនកុំផ្លិច : $z=\dfrac{1+i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}$ ។ (**២ពិន្ទុ**)

II. សិក្សាភាពជាប់ និងភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ : $f(x)=\left|(x-1)(x^2-x)\right|$ ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។ (**២ពិន្ទុ**)

III. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=\left|(x-1)(x-2)\right|$ ។ គណនា $J=\int_0^2 f(x)dx$ ។ (**១ពិន្ទុកន្លះ**)

IV. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(6,5,2)$ និង $D(7,7,5)$ ។

ក. បង្ហាញថា $ABCD$ ជាកំពូលនៃប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាមនេះ ។ (**២ពិន្ទុ**)

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=2+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ដែលកំណត់ក្នុង $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ។

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។

ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x)=0$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់ ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 0 ។ (**២ពិន្ទុកន្លះ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០២

I. **ក. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ :**

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-\sin x}{\sin 2x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\times\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\sin x}{x}}{2\times\frac{\sin 2x}{2x}+\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{2\times1-1}{2\times1+1}=\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\lim_{x\to0} f(x)=\frac{1}{3}}$

ខ. គណនាផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្ត នៃចំនួនកុំផ្លិច z :

$$z=\frac{1+i}{\left(1+i\sqrt3\right)^4}=\frac{1+i}{\left[\left(1+i\sqrt3\right)^2\right]^2}$$

$$=\frac{1+i}{\left(1+2i\sqrt3+3i^2\right)^2}$$

$$=\frac{1+i}{\left(-2+2i\sqrt3\right)^2}$$

$$=\frac{1+i}{4\left(-1+i\sqrt3\right)^2}$$

$$=\frac{1+i}{4\left(1-2i\sqrt3+3i^2\right)}$$

$$=\frac{1+i}{4\left(-2-2i\sqrt3\right)}$$

$$=\frac{(1+i)\left(-1+i\sqrt3\right)}{8\left(-1-i\sqrt3\right)\left(-1+i\sqrt3\right)}$$

$$=\frac{-1+i\sqrt3-i-\sqrt3}{8\left(1-3i^2\right)}$$

$$=\frac{\left(-1-\sqrt3\right)+i\left(\sqrt3-1\right)}{32}$$

ដូចនេះ: z មានផ្នែកពិតស្មើ $\frac{-1-\sqrt3}{32}$ និងមានផ្នែកនិមិត្តស្មើ $\frac{\sqrt3-1}{32}$ ។

II. សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃ f ត្រង់ចំណុច $x=0$

យើងមាន $f(x)=\left|(x-1)\left(x^2-x\right)\right|$

$$=\left|x(x-1)^2\right|=|x|(x-1)^2$$

ព្រោះ $(x-1)^2\ge0$ មិនចាំបាច់ដាក់តម្លៃដាច់ខាត

-សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$:

អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$$

• ចំពោះ $x\to0^-$ នោះ $|x|=-x$ យើងបាន :

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left[-x(x-1)^2\right]=-0\cdot1=0$$

• ចំពោះ $x\to0^+$ នោះ $|x|=x$ យើងបាន :

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} x(x-1)^2=0\cdot1=0$$

• ចំពោះ $x=0$ នោះយើងបាន

$$f(0)=|0|(0-1)^2=0$$

យើងឃើញថា $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)=0$

ដូចនេះ: $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ } x=0 \text{ ជាប្រាកដ}}$ ។

-សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$:

f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $f'_-(0)=f'_+(0)$

$$\bullet\, f'_-(0)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)}{h}\ ,\ f(0)=0$$

$$=\lim_{h\to0^-}\frac{|h|(h-1)^2}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-h(h-1)^2}{h}=-1$$

$$\bullet\, f'_+(0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)}{h}\ ,\ f(0)=0$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{|h|(h-1)^2}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h(h-1)^2}{h}=1$$

ឃើញថា $f'_-(0)=-1\ne f'_+(0)=1$

ដូចនេះ: $\boxed{f \text{ គ្មានដេរីវេត្រង់ } x=0 \text{ ទេ}}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល $J=\int_0^2 f(x)dx$ ៖

យើងមាន $f(x)=\left|(x-1)(x-2)\right|=\left|x^2-3x+2\right|$

យើងនឹងសិក្សាសញ្ញានៃកន្សោម x^2-3x+2

ឱ្យ $x^2-3x+2=0$ មានឫស $x=1\,,\ x=2$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

យើងបានតម្លៃនៃ $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ គឺ

-ចំពោះ $0<x<1$: $\left|x^2-3x+2\right|=x^2-3x+2$

-ចំពោះ $1<x<2$: $\left|x^2-3x+2\right|=-\left(x^2-3x+2\right)$

$$\mathbf{J}=\int_0^2 f(x)dx$$

$$=\int_0^2\left|x^2-3x+2\right|dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2-3x+2\right)dx-\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-0\right)-\left[\left(\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-\frac{8}{3}+\frac{12}{2}-4+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2=\boxed{1}$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{J=1}$ ។

IV. ក. បង្ហាញថា $ABCD$ ជាកំពូលនៃប្រលេឡូក្រាម

យើងមាន $A(1\,,1\,,1)$, $B(2\,,3\,,4)$, $C(6\,,5\,,2)$ និង $D(7,7,5)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(1\,,2\,,3)$ និង $\overrightarrow{CD}=(1\,,2\,,3)$

ដោយចតុកោណ $ABCD$ មាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

ដូចនេះ៖ **ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម** ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ៖

តាមរូបមន្ត $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ ដែល $\overrightarrow{AC}=(5\,,4\,,1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}=-10\vec{i}+14\vec{j}-6\vec{k}$$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\sqrt{(-10)^2+(14)^2+\left(-6^2\right)}=2\sqrt{70}$

ដូចនេះ៖ **ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមគឺ $S=2\sqrt{70}$ ឯកតាផ្ទៃ** ។

V. ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=2+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$ ដែល $x\neq-1$

គេបាន $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}$

$$=\frac{-x-1+2}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{-x+1}{(x+1)^3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{f'(x)=\frac{-x+1}{(x+1)^3}}$ ។

➢សិក្សាសញ្ញារបស់វា

ឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{(x+1)^3}=0$

គេបាន $\begin{cases}-x+1=0\\ x+1\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x\neq-1\end{cases}$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)=\frac{-x+1}{(x+1)^3}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

ដូចនេះ៖ $f'(x)>0$ កាលណា $x\in(-1\,,1)$

$f'(x)<0$ កាលណា $x\in(-\infty,\,-1)\cup(1,\,+\infty)$

$f'(x)=0$ ចំពោះ៖ $x=1$

ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x)=0$

គេបាន $2+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$ (គុណនឹង $(x+1)^2$)

$2(x+1)^2+(x+1)-1=0$

$2x^2+5x+2=0$

មាន $\Delta=5^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm3}{4}=\left[\begin{array}{l}-2\\ -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

ដូនេះ៖ សមីការមានឫស $\boxed{x=-2\,,\ x=-\frac{1}{2}}$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ f

• លីមីតតាមចុងដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូត

គេមាន $f(x)=2+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2+5x+2}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+5x+2}{(x+1)^2}=2$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{2x^2+5x+2}{(x+1)^2}\right)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{2x^2+5x+2}{(x+1)^2}\right)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

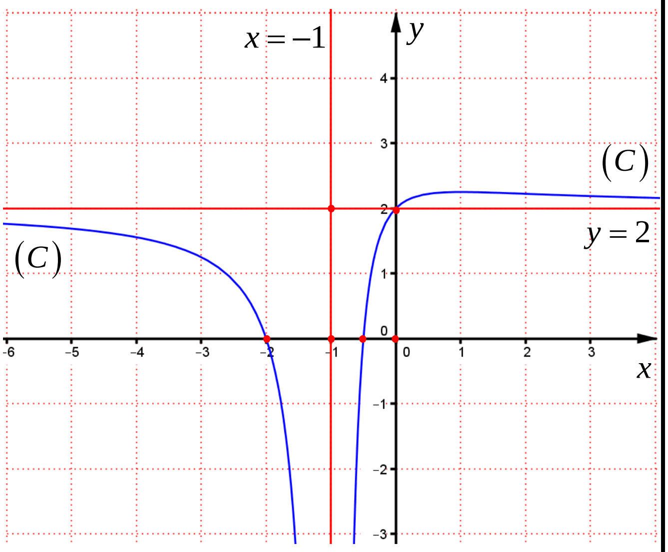
• បរមានៃអនុគមន៍ f : តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)$

ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្ដូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(1)=9/4$ ។

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$9/4$	↘	2

• **គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f**



➢**រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់**

ដោយ ឫសនៃដេរីវេទី២គឺជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចរបត់

គេមាន $f'(x)=\dfrac{-x+1}{(x+1)^3}$

$$f''(x)=\frac{-(x+1)^3-3(x+1)^2(-x+1)}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{-(x+1)-3(-x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2x-4}{(x+1)^4}$$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-4}{(x+1)^4}=0$, $\forall x\in D$,

$(x+1)^4>0$ នាំឱ្យ f'' មានសញ្ញាដូច $2x-4$

គេបាន $2x-4=0$ នោះ $x=2$

$$f(2)=2+\frac{1}{2+1}-\frac{1}{(2+1)^2}=\frac{20}{9}$$

តារាងសញ្ញា $f''(x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

ត្រង់ $x=2$, $f''(x)=0$ ហើយប្ដូរសញ្ញា នេះបញ្ជាក់ថា f ផ្លាស់ប្ដូរភាពផតប៉ោង

ដូចនេះ៖ កូអរដោនេចំណុចរបត់គឺ $\left(2\,,\,\dfrac{20}{9}\right)$ ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង C

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x_0=0$

គេបាន $f'(x_0)=f'(0)=\dfrac{-0+1}{(0+1)^3}=1$

$$f(x_0)=f(0)=2+\frac{1}{0+1}-\frac{1}{(0+1)^2}=2$$

នាំឱ្យ $y=1(x-0)+2=x+2$

ដូចនេះ៖ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរកបានគឺ $\boxed{y=x+2}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៨ តុលា ២០១៩

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ឯកទេសទី១) រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. សិប្បកម្មធ្វើទឹកត្រីមួយបានប្រើដបអស់ចំនួន 1400 ដប ដើម្បីច្រកទឹកត្រីទាំងអស់ដែលមានចំណុះ 600ℓ គត់ ។ គេដឹងថាក្នុងចំណោមដបទាំង 1400 នោះ មានដបខ្លះមានចំណុះ 500 $m\ell$ និងដបខ្លះមានចំណុះ 375 $m\ell$ ។ ចូររកចំនួនដបដែលបានប្រើតាមប្រភេទនៃចំណុះនីមួយៗ ។ (ℓ សម្គាល់លីត្រ , $m\ell$ សម្គាល់មិល្លីលីត្រ) **(២ ពិន្ទុ)**

2. ក្នុងថុងមួយមានកូនតុក្កតាខ្លាឃ្មុំចំនួន8 ដែលក្នុងនោះមានកូនតុក្កតាខ្លាឃ្មុំពណ៌សចំនួន3 និងពណ៌ខ្មៅចំនួន 5 ។ គេចាប់យកកូនតុក្កតាខ្លាឃ្មុំចំនួន3 ពីក្នុងថុងដោយចៃដន្យ ។ ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម ៖

A : «កូនតុក្កតាខ្លាឃ្មុំទាំងបីដែលចាប់បានមានពណ៌ស» ។ **(កន្លះពិន្ទុ)**

B : «កូនតុក្កតាខ្លាឃ្មុំទាំងបីដែលចាប់បានមានពណ៌ដូចគ្នា» ។ **(១ ពិន្ទុ)**

C : «កូនតុក្កតាខ្លាឃ្មុំទាំងបីដែលចាប់បានមានមួយយ៉ាងតិចមានពណ៌ស» ។ **(១ ពិន្ទុ)**

3. គណនាអាំងតេក្រាល ៖ ក. $I=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ **(១ ពិន្ទុ)** ខ. $J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(10\cos x\sin^4 x\right)dx$ **(១ ពិន្ទុ)**

4. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-6\sqrt{3}+\frac{9}{2}i$ និង $z_2=\frac{15\sqrt{3}}{2}-3i$ ។ គណនា z_1+z_2 និងសរសេរ z_1+z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ សរសេរ $(z_1+z_2)^5$ ជាទម្រង់ពីជគណិត និងជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

5. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{-3x^2+18x-25}{x^2-6x+8}$ ។ គេតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់អនុគមន៍ f នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

១. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។ **(១ ពិន្ទុ)**

២. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $+\infty$ ត្រង់ $-\infty$ ត្រង់ $+2$ និងត្រង់ $+4$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។ **(២ ពិន្ទុ)**

៣. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប (C) របស់វា ។ **(២ ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. ក្នុងត្រីកោណ ABC កន្លះបន្ទាត់ពុះនៃមុំ $\angle B$ និងមុំ $\angle C$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ I ។ តាម I គេគូសបន្ទាត់មួយស្របនឹងបន្ទាត់ AB ហើយកាត់បន្ទាត់ AC ត្រង់ D និង BC ត្រង់ E ។ ស្រាយបំភ្លឺថា $DE=AD+BE$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

2. នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $D(2,4,6)$, $E(6,4,2)$ និង $F(-2,-4,4)$ ។

a. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ និង $\overrightarrow{EF}$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

b. បង្ហាញថា ចំណុច D , E , F មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

c. រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច D , E , F ។ **(២ ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ២០១៩

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. រកចំនួនដបដែលបានប្រើតាមប្រភេទនៃចំណុះនីមួយៗ

គេតាង x ជាចំនួនដបដែលមានចំណុះ $500\ m\ell$

y ជាចំនួនដបដែលមានចំណុះ $375\ m\ell$

ដែល $1\ell = 1000\,m\ell$ ឬ $600\ell = 600\,000\,m\ell$

បម្រាប់ គេសរសេរបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x+y=1400 \\ 500x+375y=600\,000 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} 3x+3y=4200 \\ 4x+3y=4800 \end{cases}$$

ដកអង្គនិងអង្គ $-x=-600$ ឬ $x=600$ ដប

នាំឱ្យ $y=1400-x=1400-600=800$ ដប

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} 600+800=1400 \\ 500\cdot 600+375\cdot 800=600\,000 \end{cases}$ ពិត

ដូចនេះ: ដបចំណុះ $500\ m\ell$ មានចំនួន $x=600$ ដប
ដបចំណុះ $375\ m\ell$ មានចំនួន $y=800$ ដប

2. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

គេមាន កូនតុក្កតាខ្លាឃ្មុំចំនួន8 មានពណ៌ស3 និងពណ៌ខ្មៅ 5

គេចាប់យកកូនតុក្កតាខ្លាឃ្មុំចំនួន3 ពីក្នុងធុងដោយចៃដន្យ

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(8\,,3)$

$$n(S)=\frac{8!}{5!\,3!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\,3\cdot 2}=56$$

A : កូនតុក្កតាខ្លាឃ្មុំទាំងបីដែលចាប់បានមានពណ៌ស

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(3\,,3)=1$

នាំឱ្យ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{1}{56}\approx 0.018$

ដូចនេះ: $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{56}\approx 0.018}$ ។

B : កូនតុក្កតាខ្លាឃ្មុំទាំងបីដែលចាប់បានមានពណ៌ដូចគ្នា

មានន័យថា ចាប់បានពណ៌សទាំងបី ឬពណ៌ខ្មៅទាំងបី

នាំឱ្យ $n(B)=C(3\,,3)+C(5\,,3)=1+\dfrac{5!}{2!\,3!}=11$

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{11}{56}\approx 0.196$

ដូចនេះ: $\boxed{P(B)=\dfrac{11}{56}\approx 0.196}$ ។

C : កូនតុក្កតាខ្លាឃ្មុំទាំងបីមានមួយយ៉ាងតិចមានពណ៌ស

តាង D ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានកូនតុក្កតាខ្លាឃ្មុំទាំងបីពណ៌ខ្មៅ

នាំឱ្យ $n(D)=C(5\,,3)=\dfrac{5!}{2!\,3!}=10$

ដោយ ព្រឹត្តិការណ៍ C និង D ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា

គេបាន $P(C)=1-P(D)=1-\dfrac{n(D)}{n(S)}=1-\dfrac{10}{56}=\dfrac{23}{28}$

ដូចនេះ: $\boxed{P(C)=\dfrac{23}{28}\approx 0.821}$ ។

3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\mathbf{I}=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_0^1 \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}dx$$
$$=\Big[\ln(1+e^x)\Big]_0^1$$
$$=\ln(1+e)-\ln 2$$
$$=\boxed{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

$$\mathbf{J}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(10\cos x\sin^4 x\right)dx=10\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\cos x\sin^4 x\right)dx$$

តាង $u=\sin x$ នោះ: $du=\cos x dx$

បើ $x=0$ នោះ: $u=0$

$x=\dfrac{\pi}{6}$ នោះ: $u=\dfrac{1}{2}$

$$\mathbf{J}=10\int_0^{\frac{1}{2}}u^4du=10\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=2\left[u^5\right]_0^{\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1}{32}-0\right)=\boxed{\mathbf{\frac{1}{16}}}$$

4. គណនា z_1+z_2

គេមាន $z_1=-6\sqrt{3}+\dfrac{9}{2}i$ និង $z_2=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}-3i$

គេបាន $z_1+z_2=\left(-6\sqrt{3}+\dfrac{9}{2}i\right)+\left(\dfrac{15\sqrt{3}}{2}-3i\right)$

$$z_1+z_2=\frac{-12\sqrt{3}+15\sqrt{3}}{2}+\frac{9-6}{2}i$$

ដូចនេះ: $z_1+z_2=\boxed{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i}$ ។

សរសេរ z_1+z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $z_1+z_2=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_1+z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$ ។

សរសេរ $(z_1+z_2)^5$ ជាទម្រង់ពីជគណិត និងជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$(z_1+z_2)^5=\left[3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$ តាមរូបមន្តដឺម័រ

$=3^5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$=\boxed{243\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$ ទម្រង់ត្រី.មាត្រ

$=243\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$=\boxed{-\frac{243\sqrt{3}}{2}+\frac{243}{2}i}$ ទម្រង់ពីជគណិត

5. **១. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f**

គេមាន $f(x)=\frac{-3x^2+18x-25}{x^2-6x+8}$ មានក្រាប (C)

ដោយ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2-6x+8\neq 0$

$(x-2)(x-4)\neq 0$ នោះ $x\neq 2$, $x\neq 4$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l}D=\mathbb{R}-\{2\,,\,4\}\\ D=(-\infty\,,\,2)\cup(2\,,\,4)\cup(4\,,\,+\infty)\end{array}}$ ។

២. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $+\infty$ ត្រង់ $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^2+18x-25}{x^2-6x+8}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-3+\frac{18}{x}-\frac{25}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}=\frac{-3}{1}=\boxed{-3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-3x^2+18x-25}{x^2-6x+8}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-3+\frac{18}{x}-\frac{25}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}=\frac{-3}{1}=\boxed{-3}$

ត្រង់ $+2$ និងត្រង់ $+4$

ដោយ $f(x)=\frac{-3x^2+18x-25}{x^2-6x+8}=\frac{-3x^2+18x-25}{(x-2)(x-4)}$

• ចំពោះ: $x\to 2^-$ នាំឱ្យ $x-2\to 0^-$

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-3x^2+18x-25}{(x-2)(x-4)}$

$=\frac{-3\cdot 4+18\cdot 2-25}{0^-(-2)}=\frac{-1}{0^+}=\boxed{-\infty}$

• ចំពោះ: $x\to 2^+$ នាំឱ្យ $x-2\to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-3x^2+18x-25}{(x-2)(x-4)}$

$=\frac{-3\cdot 4+18\cdot 2-25}{0^+(-2)}=\frac{-1}{0^-}=\boxed{+\infty}$

• ចំពោះ: $x\to 4^-$ នាំឱ្យ $x-4\to 0^-$

$\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{-3x^2+18x-25}{(x-2)(x-4)}$

$=\frac{-3\cdot 16+18\cdot 4-25}{(2)(0^-)}=\frac{-1}{0^-}=\boxed{+\infty}$

• ចំពោះ: $x\to 4^+$ នាំឱ្យ $x-4\to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{-3x^2+18x-25}{(x-2)(x-4)}$

$=\frac{-3\cdot 16+18\cdot 4-25}{(2)(0^+)}=\frac{-1}{0^+}=\boxed{-\infty}$

ទាញរកអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរ នៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$

នាំឱ្យ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=-3$ ជាអាស៊ីមតូតដេក នៃក្រាប (C) ទាំងខាង $+\infty$ និងខាង $-\infty$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=\pm\infty$

នាំឱ្យ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=2$ និង $x=4$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

៣. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប (C) របស់វា

• ដែនកំណត់ : បានរករួចក្នុងសំណួរ ១.

• ទិសដៅអថេរភាព

$f(x)=\frac{-3x^2+18x-25}{x^2-6x+8}$ មានរាង $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

គេតាង $u=-3x^2+18x-25$ នោះ $u'=-6x+18$

$v=x^2-6x+8$ នោះ $v'=2x-6$

$$f'(x)=\frac{(-6x+18)(x^2-6x+8)-(2x-6)(-3x^2+18x-25)}{(x^2-6x+8)^2}$$

$$=\frac{-6x^3+36x^2-48x+18x^2-108x+144-(-6x^3+36x^2-50x+18x^2-108x+150)}{(x^2-6x+8)^2}$$

$$=\frac{-6x^3+54x^2-156x+144-(-6x^3+54x^2-158x+150)}{(x^2-6x+8)^2}=\frac{2x-6}{(x^2-6x+8)^2}$$

ដោយ $(x^2-6x+8)^2>0\ ,\ \forall x\in D$

នាំឱ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $2x-6$

គេឱ្យ $f'(x)=0$ សមមូល $2x-6=0$ នោះ $x=3$

គេបាន $f(3)=\dfrac{-3\cdot 9+18\cdot 3-25}{9-6\cdot 3+8}=\dfrac{2}{-1}=-2$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

• បរមា

ត្រង់ $x=3$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ$(+)$

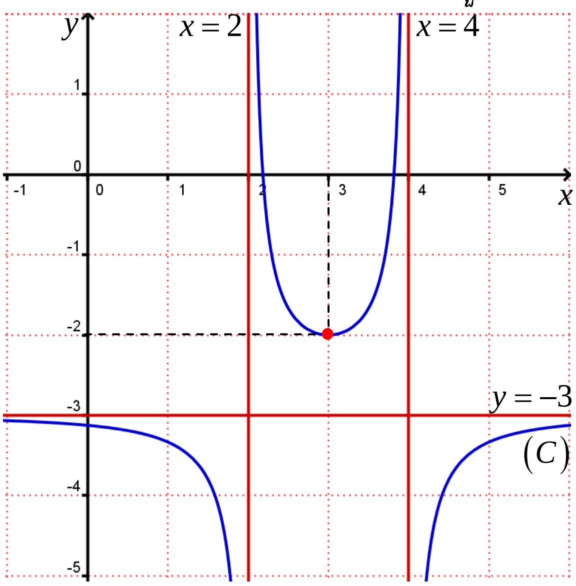
បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(3)=-2$ ។

• លីមីត : បានគណនារួចក្នុងសំណួរ ២.

• តារាងអថេរភាព

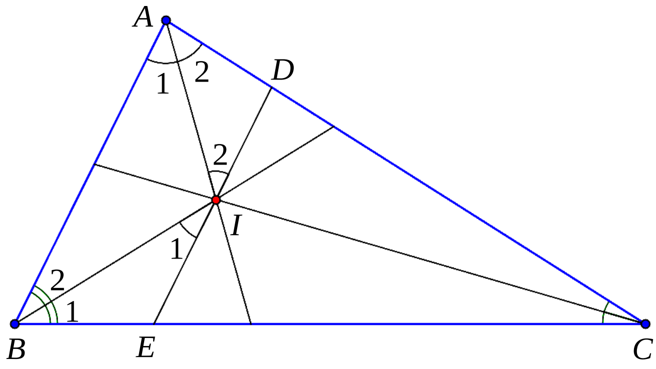
x	$-\infty$	2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-3\searrow-\infty$	‖	$+\infty\searrow$	-2	$\nearrow+\infty$	‖	$-\infty\nearrow$	-3

• សង់ក្រាប (សូមសង់តារាងតម្លៃលេខដោយខ្លួនឯង)



II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. ស្រាយបំភ្លឺថា $DE=AD+BE$



គេមាន $\angle B_1=\angle B_2$ (ព្រោះ $[BI)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle B$)

$\angle I_1=\angle B_2$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង ព្រោះ $AB\,//\,DE$)

នាំឱ្យ $\angle B_1=\angle I_1$ នោះ BEI ជាត្រីកោណសមបាតមាន

កំពូល E ហេតុនេះ $BE=EI$ (1)

គេគូស $[AI)$ គេបាន $[AI)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle A$ ព្រោះថា

កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំទាំងបីត្រូវប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុចគត់

គេបាន $\angle A_1=\angle A_2$ (ព្រោះ $[AI)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle A$)

$\angle A_1=\angle I_2$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង ព្រោះ $AB\,//\,DE$)

នាំឱ្យ $\angle A_2=\angle I_2$ នោះ ADE ជាត្រីកោណសមបាតមាន

កំពូល D ហេតុនេះ $AD=ID$ (2)

បូកអង្គ នៃ (1) និង (2) : $AD+BE=EI+ID$

ដោយ $EI+ID=DE$ នាំឱ្យ $AD+BE=DE$

ដូចនេះ $\boxed{DE=AD+BE}$ ត្រូវបានស្រាយបំភ្លឺ ។

2. a. **រកវ៉ិចទ័រ** $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ **និង** $\overrightarrow{EF}$

គេមាន $D(2,4,6)$, $E(6,4,2)$ និង $F(-2,-4,4)$

$$\overrightarrow{DE}=(x_E-x_D\ ,\ y_E-y_D\ ,\ z_E-z_D)$$
$$=(6-2\ ,\ 4-4\ ,\ 2-6)$$
$$=\boxed{(\mathbf{4}\ ,\ \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{-4})}$$

$$\overrightarrow{DF}=(x_F-x_D\ ,\ y_F-y_D\ ,\ z_F-z_D)$$
$$=(-2-2\ ,\ -4-4\ ,\ 4-6)$$
$$=\boxed{(\mathbf{-4}\ ,\ \mathbf{-8}\ ,\ \mathbf{-2})}$$

$$\overrightarrow{EF}=(x_F-x_E\ ,\ y_F-y_E\ ,\ z_F-z_E)$$
$$=(-2-6\ ,\ -4-4\ ,\ 4-2)$$
$$=\boxed{(\mathbf{-8}\ ,\ \mathbf{-8}\ ,\ \mathbf{2})}$$

b. **បង្ហាញថា ចំណុច D , E , F មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ**

គេមាន $\overrightarrow{DE}=(4\ ,0\ ,-4)$, $\overrightarrow{DF}=(-4\ ,-8\ ,-2)$

$$\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 0 & -4\\ -4 & -8 & -2\end{vmatrix}$$

$$=(0-32)\vec{i}-(-8-16)\vec{j}+(-32-0)\vec{k}$$

$$=-32\vec{i}+24\vec{j}-32\vec{k}$$

ដោយ $\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}=-32\vec{i}+24\vec{j}-32\vec{k}\neq\vec{0}$

ដូចនេះ ចំណុច D , E , F មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

c. **រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច D , E , F**

ប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច D , E , F ត្រូវតែជាប្លង់កាត់តាម ចំណុច D និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}$

សមីការប្លង់ (DEF) ដែលត្រូវរកមានរាង

$(DEF): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (DEF) កាត់ $D(2\ ,4\ ,6)$

នោះ $x_0=2\ ,\ y_0=4\ ,\ z_0=6$

ហើយ (DEF) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{n}=\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}=(-32\ ,24\ ,-32)$

នោះ $a=-32\ ,\ b=24\ ,\ c=-32$

គេបាន សមីការប្លង់ (DEF) សរសេរបាន

$$-32(x-2)+24(y-4)-24(z-6)=0$$
$$4(x-2)-3(y-4)+4(z-6)=0$$
$$4x-3y+4z-8+12-24=0$$
$$4x-3y+4z-20=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់កំណត់បានគឺ

$(DEF): 4x-3y+4z-20=0$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ០៤ វិច្ឆិកា ២០១៨

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គេមានដីមួយកន្លែងមានរាងជាចតុកោណកែង ដែលមានផ្ទៃក្រឡា 72 m^2 និងបរិមាត្រ 36 m ។ រកប្រវែងបណ្តោយ និងទទឹងនៃចតុកោណកែងនេះ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

2. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3 + 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ និង $z_2 = -3 + 2i\sqrt{3}$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

   គណនា $z_1 + z_2$ រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ សរសេរ $\left(\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)^{36}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

3. ថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស 12 នាក់ ស្រី 5 នាក់ និងប្រុស 7 នាក់ ។ គេជ្រើសរើសក្រុមសម្អាត ដោយមួយក្រុមមាន 4 នាក់ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ ៖

   A : ជ្រើសរើសបានក្រុម សិស្សប្រុសទាំងអស់ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

   B : ជ្រើសរើសបានក្រុម សិស្សស្រីពាក់កណ្តាល ។ **(១ ពិន្ទុ)**

4. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖ **(២ ពិន្ទុ)**

   ក. $I = \int_0^3 (2x+1)(x+3)\,dx$ ខ. $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^2 2x}{4}\,dx$ គ. $K = \int_{-6}^{6} \left(2xe^{x^2}\right)dx$ ។

5. គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2 - \ln x + x}{x}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

   ក. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$ កំណត់លើ $(0, +\infty)$ រួចរកលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

   ខ. ដោយយក $f'(x)$ ជាដេរីវេនៃ $f(x)$ ចូរបង្ហាញថា $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$ លើចន្លោះ $(0, +\infty)$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

   គ. ដោយដឹងថាកន្សោម $(x^2 - 1 + \ln x)$ យកតម្លៃអវិជ្ជមានដាច់ខាតលើចន្លោះ $(0, 1)$ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។ **(១ ពិន្ទុ)**

   ឃ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ត្រង់ $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ (Δ) និង (C) ។ សង់ក្រាប (C) និង (Δ) ។ **(១ ពិន្ទុ)**

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. នៅក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន គេមានចំណុច $A(4, 3, 2)$, $B(6, 5, 3)$, $C(7, 6, 4)$ និង $D(5, 4, 3)$ ។ រក $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។ **(៣ ពិន្ទុ)**

2. គេឱ្យសមីការ $\left(\dfrac{2y - 3x}{18}\right)\left(\dfrac{2y + 3x}{2}\right) = 1$ ។

   បង្ហាញថាសមីការខាងលើជាមីការអ៊ីពែបូល រួចរកកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ កំណុំទាំងពីរ និងសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល រួចសង់អ៊ីពែបូល និងអាស៊ីមតូត ។ **(៤ ពិន្ទុ)**

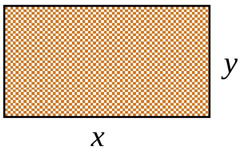
ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ២០១៨

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. រកប្រវែងបណ្តោយ និងទទឹងនៃចតុកោណកែង

គេតាង x ជាប្រវែងបណ្តោយ និង y ជាប្រវែងទទឹង

មានតម្លៃវិជ្ជមាន ដែល $x>y$ (គិតជា m)



ផ្ទៃក្រឡា $72\ \mathrm{m}^2$

បរិមាត្រ 36 m

បម្រាប់ គេសរសេរបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} xy=72 \\ 2(x+y)=36 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} xy=72 \\ x+y=18 \end{cases}$$

តាមវៀត x , y ជាឫសនៃសមីការ $X^2-SX+P=0$

$X^2-18X+72=0$ មាន $\Delta'=81-72=9$

នាំឱ្យ $x=\dfrac{-(-9)+\sqrt{9}}{1}=12$ m

$y=\dfrac{-(-9)-\sqrt{9}}{1}=6$ m

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} xy=12\cdot 6=72 \\ x+y=12+6=18 \end{cases}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\text{បណ្តោយ } x=12\text{m} \ , \ \text{ទទឹង } y=6\text{m}}$ ។

2. គណនា z_1+z_2 រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_1=3+2\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=4-i\sqrt{3}$

$z_2=-3+2i\sqrt{3}$

គេបាន $z_1+z_2=\left(4-i\sqrt{3}\right)+\left(-3+2i\sqrt{3}\right)=\boxed{\mathbf{1+i\sqrt{3}}}$

ដោយ $z_1+z_2=1+i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=\boxed{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

សរសេរ $\left(\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)^{36}$ **ជាទម្រង់ពីជគណិត**

$$\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^{36}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{36} \quad \text{តាមរូបមន្តដឺម័រ}$$

$=\cos 12\pi+i\sin 12\pi$

$=\cos 0+i\sin 0$

$=1+0\cdot i$

ព្រោះ $\cos(2k\pi)=\cos 0$, $\sin(2k\pi)=\sin 0$, $k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ ទម្រង់ពីជគណិតគឺ $\boxed{\left(\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)^{36}=1+0\cdot i}$ ។

3. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

គេមានសិស្ស 12 នាក់ ស្រី 5 នាក់ និងប្រុស 7 នាក់

គេជ្រើសរើសក្រុមសម្អាត ដោយមួយក្រុមមាន 4 នាក់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(12\ ,\ 4)$

$$n(S)=\frac{12!}{8!\cdot 4!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=495$$

A : រកប្រូបាបជ្រើសរើសបានក្រុម សិស្សប្រុសទាំងអស់

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(7\ ,\ 4)$

នាំឱ្យ $n(A)=\dfrac{7!}{3!\cdot 4!}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 4!}=35$

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{35}{495}=\dfrac{7}{99}\approx 0.071$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{7}{99}\approx 0.071}$ ។

B : រកប្រូបាបជ្រើសរើសបានក្រុម សិស្សស្រីពាក់កណ្តាល

មានន័យថា គេជ្រើសរើសបានស្រីពីរនាក់ និងប្រុសពីរនាក់

នាំឱ្យ $n(B)=C(5\ ,\ 2)\times C(7\ ,\ 2)$

$=\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}\times\dfrac{7!}{5!\cdot 2!}$

$=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2\cdot 2}=210$

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{210}{495}=\dfrac{42}{99}=\dfrac{14}{33}\approx 0.424$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{14}{33}\approx 0.424}$ ។

4. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\mathbf{I}=\int_0^3 (2x+1)(x+3)\,dx$$
$$=\int_0^3 (2x^2+7x+3)\,dx$$
$$=\left[\frac{2x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+3x\right]_0^3$$
$$=\left(18+\frac{63}{2}+9\right)-(0)=\boxed{\mathbf{\frac{117}{2}}}$$

$$\mathbf{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{4}\,dx \quad , \quad 1-\cos 4x=2\sin^2 2x$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4x)\,dx$$
$$=\frac{1}{8}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{1}{8}\left[\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\sin\pi\right)-\left(0-\frac{1}{4}\sin 0\right)\right]$$
$$=\frac{1}{8}\left[\left(\frac{\pi}{4}-0\right)-(0)\right]=\boxed{\frac{\pi}{\mathbf{32}}}$$

$$\mathbf{K}=\int_{-6}^{6}\left(2xe^{x^2}\right)dx \quad , \quad \int f'(x)e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+c$$
$$=\int_{-6}^{6}\left(\left(x^2\right)' e^{x^2}\right)dx$$
$$=\left[e^{x^2}\right]_{-6}^{6}=e^{36}-e^{36}=\boxed{\mathbf{0}}$$

5. បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$ **កំណត់លើ** $(0\,,+\infty)$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-\ln x+x}{x}$, f មានន័យលុះត្រាតែ

$\begin{cases}x>0\\ x\neq 0\end{cases}$ ឬ $x>0$ ឬ $x\in(0\,,+\infty)$

គេបាន $f(x)=\dfrac{x^2}{x}-\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x}{x}=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}\text{ កំណត់លើ }(0\,,+\infty)}$ ។

រកលីមីតនៃអនុគមន៍ f **ត្រង់** 0 **និង** $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)=0+1+\infty=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty+1-0=\boxed{+\infty}$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$)

ខ. បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}$

គេមាន $f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$

$$f'(x)=1+-\frac{(\ln x)' x-(x)'\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}}$ ចំពោះ $x\in(0\,,+\infty)$ ។

គ. សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

ចំពោះ $x\in(0\,,1)$ បម្រាប់ $x^2-1+\ln x<0$, $x^2>0$

នោះ $f'(x)=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}<0$

ចំពោះ $x=1$ គេបាន

$$f'(x)=\frac{1^2-1+\ln 1}{1^2}=\frac{0}{1}=0$$

($f(1)=1+1-\dfrac{\ln 1}{1}=2$)

ចំពោះ $x>1$ ឬ $x\in(1\,,+\infty)$ នោះ $\ln x>\ln 1=0$

ហើយ $x^2>1$ ឬ $x^2-1>0$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}>0$

ដូចនេះ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ បានដូចខាងក្រោម៖

$x\in(0\,,1)$	$: f'(x)<0$
$x=1$	$: f'(x)=0$
$x\in(1\,,+\infty)$	$: f'(x)>0$

។

សន្និដ្ឋានត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ នោះ f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(1)=2$

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

ឃ. បង្ហាញថា $(\Delta): y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតត្រង់ $+\infty$

គេមាន $f(x) = x+1-\dfrac{\ln x}{x}$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$

នាំឱ្យ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $(\Delta): y = x+1$

ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។

សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ (Δ) និង (C)

គេមាន $(\Delta): y = x+1$ និង $(C): f(x) = x+1-\dfrac{\ln x}{x}$

សិក្សា ផលដកនៃសមីការ (C) និង (Δ) គេបាន

$$(C)-(\Delta): f(x)-y = \left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)-(x+1) = -\frac{\ln x}{x}$$

សញ្ញានៃ $(C)-(\Delta)$ អាស្រ័យ $-\dfrac{\ln x}{x}$

-ចំពោះ $x=1$ គេបាន $-\dfrac{\ln 1}{1} = 0$ មានន័យថា

ក្រាប (C) កាត់អាស៊ីមតូតទ្រេត (Δ) ។

-ចំពោះ $x>1$ គេបាន $\ln x > \ln 1$ ឬ $\ln x > 0$

នាំឱ្យ $-\dfrac{\ln x}{x} < 0$ មានន័យថា

ក្រាប (C) នៅខាងក្រោមអាស៊ីមតូតទ្រេត (Δ) ។

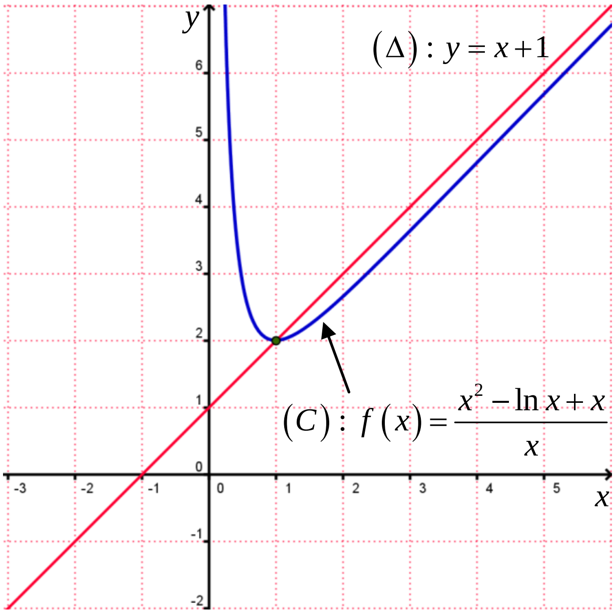
-ចំពោះ $0<x<1$ គេបាន $\ln x < \ln 1$ ឬ $\ln x < 0$

នាំឱ្យ $-\dfrac{\ln x}{x} > 0$ មានន័យថា

ក្រាប (C) នៅខាងលើអាស៊ីមតូតទ្រេត (Δ) ។

សង់ក្រាប (C) និង (Δ)

(សង់តារាងតម្លៃលេខខ្លួនឯង)



II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. រក $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$

គេមាន $A(4,3,2)$, $B(6,5,3)$, $C(7,6,4)$

និង $D(5,4,3)$

គេបាន $\overrightarrow{AD} = (5-4, 4-3, 3-2) = \boxed{(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})}$

$\overrightarrow{BC} = (7-6, 6-5, 4-3) = \boxed{(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})}$

ទាញបញ្ជាក់ថា ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

ដោយ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (1,1,1)$ មានន័យថា

$AD = BC$ និង $AD // BC$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ចតុកោណ } ABCD \text{ ជាប្រលេឡូក្រាម}}$ ។

2. បង្ហាញថាសមីការខាងលើជាមីការអ៊ីពែបូល

គេមាន $\left(\dfrac{2y-3x}{18}\right)\left(\dfrac{2y+3x}{2}\right) = 1$ ឬ $\dfrac{4y^2-9x^2}{36} = 1$

គេបាន $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4} = 1$ មានទម្រង់ដូចសមីការ $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2} = 1$

ដែលជាសមីការស្តង់ដាផ្ចិត O នៃអ៊ីពែបូលដែល

មានអ័ក្សទទឹង នៅលើអ័ក្សអរដោនេ ។

ដូចនេះ: $\left(\dfrac{2y-3x}{18}\right)\left(\dfrac{2y+3x}{2}\right) = 1$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល ។

រកកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ កំណុំទាំងពីរ និងស.អាស៊ីមតូតទាំងពីរ

គេមាន $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4} = 1$ ផ្ទឹមនឹង $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2} = 1$

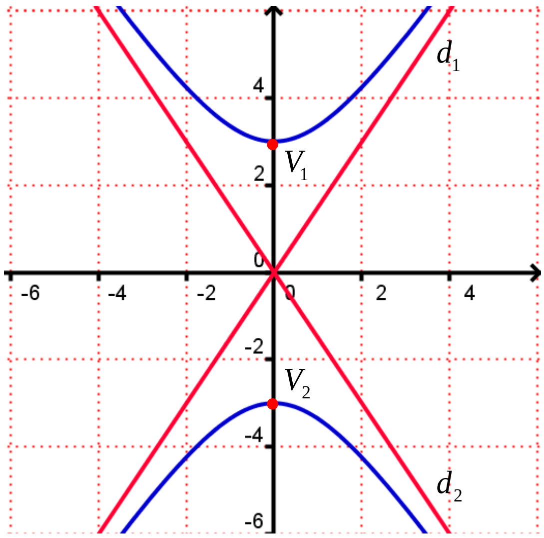
នាំឱ្យ $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

កំពូល $V(0, \pm a)$ នាំឱ្យ $\boxed{V_1(0,3)\ ,\ V_2(0,-3)}$

កំណុំ $F(0, \pm c)$ នាំឱ្យ $\boxed{F_1(0,\sqrt{13}), F_2(0,-\sqrt{13})}$

អា.តូត $y = \pm\dfrac{a}{b}x$ នាំឱ្យ $\boxed{d_1: y = \dfrac{3}{2}x\ ,\ d_2: y = -\dfrac{3}{2}x}$

សង់អ៊ីពែបូល និងអាស៊ីមតូត



ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ២៧ តុលា ២០១៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$ ។ ចូររកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ រួចគណនាកន្សោម

$I=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

2. ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖ **(២ ពិន្ទុ)**

ក. $y'-y\sin x=0$ ចំពោះ $y(0)=e$ ។

ខ. $y''+2y'-15y=0$ ចំពោះ $y(0)=5$ និង $y'(0)=-1$ ។

3. ក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ិចខៀវ 8 ដើម និងប៊ិចក្រហម 7 ដើម ។ អ្នកគ្រូលីដាចាប់យកប៊ិច 5 ដើមព្រមគ្នាពីប្រអប់នោះដោយចៃដន្យទុកសម្រាប់លើកទឹកចិត្តសិស្សពេលបង្រៀននៅថ្ងៃស្អែក ។

ក. រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់បានប៊ិចខៀវ 2 ដើម និងប៊ិចក្រហម 3 ដើម ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ខ. រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់បានប៊ិចក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច ។ **(១ ពិន្ទុ)**

4. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=-x^3-3x^2+1$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ **(៣ ពិន្ទុ)**

ខ. ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង C ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោងនោះ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

គ. ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ស្របនឹងបន្ទាត់ $d: y=-9x+1$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. នៅក្នុងលំហនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ គេមានបន្ទាត់ d កាត់តាមចំណុច $I(1,-3,3)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}=(-1,2,1)$ និងមានប្លង់ P មួយដែលមានសមីការ $P: 2x+y-2z+9=0$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ d និងរកកូអរដោនេនៃចំណុច D នៅលើបន្ទាត់ d ដោយដឹងថា ចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ P ស្មើនឹង 2 ។ **(៣ ពិន្ទុ)**

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ d និងប្លង់ P ។ **(២ ពិន្ទុ)**

2. គេមានប៉ារ៉ាបូលដែលមានចំណុចកំណុំ $F(5,2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $x+1=0$ ។

ចូររកកំពូល V នៃប៉ារ៉ាបូល រួចសរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ ។ **(៤ ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៧

I. ផ្នែកពិជគណិត

1. រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$, តាមរូបមន្ត $\ln u=\dfrac{u'}{u}$

នាំឱ្យ $f'(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)'}{x+\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{1+\dfrac{\left(x^2+2\right)'}{2\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}$

$$=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}}$ ។

គណនាកន្សោម I

គេមាន $I=\int_0^1\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx$ ទាញពីលទ្ធផលខាងលើ

គេបាន $I=\int_0^1 f'(x)\,dx=\left[f(x)\right]_0^1$ ជាចំនួនថេរ

$$=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1$$

$$=\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-\ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)}$ ។

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. គេមាន $y'-y\sin x=0$ **ចំពោះ:** $y(0)=e$

គេបាន $\dfrac{y'}{y}=\sin x$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)

$\ln|y|=-\cos x+c$

$|y|=e^{-\cos x+c}$

$y=\pm e^{-\cos x+c}$

$y=\pm e^{c}\cdot e^{-\cos x}=Ae^{-\cos x}$ ដែល $A=\pm e^{c}$ ថេរ

ដោយ $y(0)=e$ នោះ $Ae^{-\cos 0}=e$ នាំឱ្យ $A=e^2$

គេបាន $y=Ae^{-\cos x}=e^2\cdot e^{-\cos x}=e^{2-\cos x}$

ដូចនេះ $\boxed{y=e^{2-\cos x}}$ ជាចម្លើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម ។

ខ. គេមានសមីការ $y''+2y'-15y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+2\lambda-15=0$

គេបាន $\Delta'=1+15=16$

នាំឱ្យ $\lambda_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=-1-\sqrt{16}=-5$

$\lambda_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=-1+\sqrt{16}=3$

ចម្លើយទូទៅមានរាង $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$ ដែល A , B ថេរ

នាំឱ្យ $y=Ae^{-5x}+Be^{3x}$

$y'=-5Ae^{-5x}+3Be^{3x}$

ដោយ $y(0)=5$ និង $y'(0)=-1$

គេបាន $\begin{cases}y(0)=Ae^0+Be^0=5\\ y'(0)=-5Ae^0+3Be^0=-1\end{cases}$

$\begin{cases}A+B=5\\ -5A+3B=-1\end{cases}\Rightarrow\ A=2\,,\ B=3$

ដូចនេះ $\boxed{y=2e^{-5x}+3e^{3x}}$ ។

3. រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់បាន៖

គេមាន ប៊ិចខៀវ 8 ដើម និងប៊ិចក្រហម 7 ដើម

អ្នកគ្រូលីដាចាប់យកប៊ិច 5 ដើម ដោយចៃដន្យ

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(15,5)$

$$n(S)=\dfrac{15!}{10!\times 5!}=\dfrac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=3003$$

ក. ប៊ិចខៀវ 2 ដើម និងប៊ិចក្រហម 3 ដើម

តាង A: ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ិចខៀវ 2 និងក្រហម 3 ដើម

គេបាន $n(A)=C(8\,,\,2)\times C(7\,,\,3)$

$$n(A)=\dfrac{8!}{6!\,2!}\times\dfrac{7!}{4!\,3!}=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 2}\times\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 6}=980$$

ដូចនេះ: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{980}{3003}=\boxed{\dfrac{140}{429}}$ ។

ខ. ប៊ិចក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច

តាង B: ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ិចក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច

នោះ $\overline{B}$: ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ិចខៀវទាំងអស់ 5 ដើម

ដែល B និង $\overline{B}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា $P(B)+P(\overline{B})=1$

ដោយ $n(\overline{B})=C(8,5)=\frac{8!}{3!\cdot 5!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot\cancel{5!}}{6\cdot\cancel{5!}}=56$

នាំឱ្យ $P(\overline{B})=\frac{n(\overline{B})}{n(S)}=\frac{56}{3003}=\frac{8}{429}$

គេបាន $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{8}{429}=\frac{421}{429}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{421}{429}}$ ។

4. ក. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=-x^3-3x^2+1$ (**ដូចគ្រូអនុ. 2013**)

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=-x^3-3x^2+1$

ដេរីវេ : $f'(x)=-3x^2-6x=-3x(x+2)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$-3x(x+2)=0$ នោះ $x=0\,,\ x=-2$

គេបាន $f(0)=-0^3-3\cdot0^2+1=1$

$f(-2)=-(-2)^3-3(-2)^2+1=-3$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• បរមា

-ត្រង់ $x=-2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-2)=-3$ ។

-ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(0)=1$ ។

• លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-3x^2+1\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3-3x^2+1\right)=-\infty$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

• ភាពប៉ោង និងភាពផត

ដេរីវេទី២ $f''(x)=\left(-3x^2-6x\right)'=-6x-6$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow -6x-6=0$ នោះ $x=-1$ ជាឫស

- បើ $x>-1$ នោះ $f''(x)<0$

  នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតចុះខាងក្រោម

- បើ $x<-1$ នោះ $f''(x)>0$

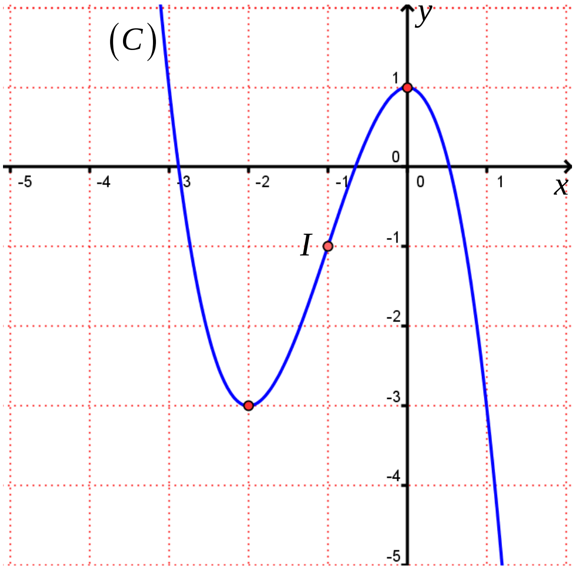
  នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x=-1$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

  នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់មួយតាងដោយ I ដែល

  $I(-1,f(-1))$ ឬ $I(-1,-1)$

• សង់ក្រាប



ខ. ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុចរបត់ I ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោងនោះ

គេនឹង បង្ហាញថាចំណុចរបត់ $I(-1\,,-1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង

បើ $I(a\,,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ លុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-2-x)+f(x)=-2$

ដោយ $f(-2-x)=-(-2-x)^3-3(-2-x)^2+1$

$=(2+x)^3-3(2+x)^2+1$

$=8+12x+6x^2+x^3-12-12x-3x^2+1$

$=x^3+3x^2-3$

នាំឱ្យ $f(-x)+f(x)$

$=\left(x^3+3x^2-3\right)+\left(-x^3-3x^2+1\right)$

$=-2$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{I(-1\,,-1)\text{ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង } C}$ ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ស្របនឹងបន្ទាត់ d

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

ដោយ $T // d : y = -9x + 1$ នោះ $f'(x_0) = -9$

គេបាន $-3x_0^2 - 6x_0 = -9$ ឬ $x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0$

ករណីពិសេស $a + b + c = 0$ នោះ $x_0 = 1$, $x_0 = -3$

• ចំពោះ $x_0 = 1$ នោះគេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ

$$T_1 : y = -9(x - 1) + f(1)$$
$$= -9x + 9 + (-1^3 - 3\cdot 1^2 + 1)$$
$$= -9x + 6$$

• ចំពោះ $x_0 = -3$ នោះគេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ

$$T_2 : y = -9(x + 3) + f(-3)$$
$$= -9x - 27 + \left[-(-3)^3 - 3\cdot(-3)^2 + 1\right]$$
$$= -9x - 26$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប C ស្របនឹងបន្ទាត់ d មានពីរបន្ទាត់គឺ $T_1 : y = -9x + 6$, $T_2 : y = -9x - 26$

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ d

ដោយ d កាត់តាមចំណុច $I(1 , -3 , 3)$

នោះ $x_0 = 1$, $y_0 = -3$, $z_0 = 3$

ហើយ d ស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v} = (-1 , 2 , 1)$

នោះ $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ d មានរាងទូទៅ

$$d : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \ , \ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

ដូចនេះ $d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \ , t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$

រកកូអរដោនេនៃចំណុច D នៅលើបន្ទាត់ d

ដោយដឹងថា ចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (P) ស្មើនឹង 2

តាមរូបមន្ត ចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (P) កំណត់ដោយ

$$d(D,(P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ដោយ $P : 2x + y - 2z + 9 = 0$

នោះ $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 9$

ហើយ D នៅលើបន្ទាត់ d

នោះ $x_0 = 1 - t$, $y_0 = -3 + 2t$, $z_0 = 3 + t$, $t \in \mathbb{R}$

គេបាន $$\frac{|2(1-t) + (-3+2t) - 2(3+t) + 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2$$

$$\frac{|2 - 2t - 3 + 2t - 6 - 2t + 9|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 2$$

$$|2 - 2t| = 6$$

$$|1 - t| = 3$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 - t = 3 \\ 1 - t = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 4 \end{array}\right.$$

• ចំពោះ $t = -2$: នោះ $D(x_0 = 3 , y_0 = -7 , z_0 = 1)$

• ចំពោះ $t = 4$: នោះ $D(x_0 = -3 , y_0 = 5 , z_0 = 7)$

ដូចនេះ ចំណុច D នៅលើបន្ទាត់ d មានពីរចំណុចគឺ

$D_1(3 , -7 , 1)$, $D_2(-3 , 5 , 7)$ ។

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ d និងប្លង់ P

គេមាន $d : x = 1 - t$, $y = -3 + 2t$, $z = 3 + t$, $t \in \mathbb{R}$

$P : 2x + y - 2z + 9 = 0$

គេបាន $2(1 - t) + (-3 + 2t) - 2(3 + t) + 9 = 0$

$2 - 2t - 3 + 2t - 6 - 2t + 9 = 0$

$2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 1$

នាំឱ្យ $A(x = 1 - 1 , y = -3 + 2 , z = 3 + 1)$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ $A(0 , -1 , 4)$ ។

2. រកកំពូល V នៃប៉ារ៉ាបូល

គេមាន កំណុំប៉ារ៉ាបូល $F(5,2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = -1$

នាំឱ្យ ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះដេក មានកំពូល $V(h , k)$

ដោយ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = h - p = -1$

$F(h + p, k) = F(5,2)$ នោះ $h + p = 5$, $k = 2$

គេបាន $\begin{cases} h - p = -1 \\ h + p = 5 \end{cases} \Rightarrow h = 2$, $p = 3$

ដូចនេះ កូអរដោនេកំពូលគឺ $V(h = 2 , k = 2)$ ។

សរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ

សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះដេកកំណត់ដោយ

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ តែដោយ $h = 2$, $k = 2$, $p = 3$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $(y - 2)^2 = 12(x - 2)$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : 0៤ ធ្នូ ២០១៦

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

ផ្នែកពីជគណិត

1. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖ **(២ ពិន្ទុ)**

ក. $\int(1+\cos x)^2\,dx+\int(1-\sin x)^2\,dx$ ខ. $\int\left(\frac{8x-7}{(x-2)(x+1)}\right)dx$

គ. $\int_0^{\pi} e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$ ឃ. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx$ ។

2. ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម ៖ **(២ ពិន្ទុ)**

ក. $y''-3y'+2y=0$ ដោយដឹងថា $y(0)=1$ និង $y'(0)=3$ ។

ខ. $y''-2y'+y=0$ ដោយដឹងថា $y(0)=-3$ និង $y'(0)=2$ ។

3. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$, $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ និង $v=\frac{-(\sqrt{3}+1)}{2}+\frac{(1+\sqrt{3})}{2}i$ ។

ក. ចូរសរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ខ. ចូរគណនាកន្សោម A ដែល $A=v+z_1+z_1^2$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

គ. ចូរគណនា w ដែល $w=z_1^{120}+z_2^{120}$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

4. ក្រុមហ៊ុនមួយត្រូវការជ្រើសរើសបុគ្គលិកបម្រើការងារ 5 នាក់ ។ ក្រោយពីផ្សព្វផ្សាយដំណឹងនេះ មាននិស្សិត 10 នាក់ ក្នុងនោះមានស្រី 4 នាក់ និងប្រុស 6 នាក់ មកដាក់ពាក្យសុំបម្រើការងារ ។ ចូររកប្រូបាបដែលជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចនិស្សិតស្រី 3 នាក់ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

5. គេមានអនុគមន៍ $f(x):y=\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

ខ. រកគ្រប់ចំណុចនៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។ **(១ ពិន្ទុ)**

គ. រកគ្រប់ចំណុច M នៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលមានចម្ងាយពីចំណុច M ទៅអ័ក្សអាប់ស៊ីសស្មើ 2 ដងនៃចម្ងាយពី M ទៅអ័ក្សអរដោនេ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

ឃ. ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំណុច $A(-2\,,9)$ ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ផ្នែកធរណីមាត្រ

គេមានចំណុច $A(2\,,1\,,3)$ និងប្លង់ $(P):2x+y+3z-28=0$ ។

ក. ចូររកចំណុច H និង A' ដោយ H ជាចំណោលកែងនៃ A មកលើប្លង់ (P) និង H ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AA']$ ។ **(២ ពិន្ទុ)**

ខ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A មកលើប្លង់ (P) និងសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច $M(3\,,2\,,5)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។ **(២ ពិន្ទុ)**

គ. ចូរសរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ (H) កាត់តាមចំណុច $I(3\,,-1\,,5)$ ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (AM) ។ **(១ ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៦

ផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int (1+\cos x)^2 dx + \int (1-\sin x)^2 dx$

$= \int \left(1+2\cos x+\cos^2 x\right)dx + \int \left(1-2\sin x+\sin^2 x\right)dx$

$= \int \left(1+2\cos x+\cos^2 x+1-2\sin x+\sin^2 x\right)dx$

$= \int \left(3+2\cos x-2\sin x\right)dx \quad , \ \cos^2 x+\sin^2 x=1$

$= \boxed{3x+2\sin x+2\cos x+c \ , c \ \text{ថេរ}}$

ខ. $\int (\frac{8x-7}{(x-2)(x+1)})dx$

$= \int (\frac{8x+8-15}{(x-2)(x+1)})dx$

$= \int (\frac{8(x+1)}{(x-2)(x+1)} - 15\cdot\frac{1}{(x-2)(x+1)})dx$

$= \int \left(\frac{8}{(x-2)} - 15\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x+1)}\right]\right)dx$

$= 8\ln|x-2| - 5\left(\ln|x-2| - \ln|x+1|\right) + c \ , c \ \text{ថេរ}$

$= \boxed{3\ln|x-2| + 5\ln|x+1| + c \ , c \ \text{ថេរ}}$

គ. $\int_0^{\pi} e^x \left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$

$= \int_0^{\pi} \left(e^x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \left[e^x + \tan x\right]_0^{\pi}$

$= \left(e^{\pi} + \tan\pi\right) - \left(e^0 + \tan 0\right)$

$= \left(e^{\pi}+0\right) - \left(e^0+0\right) = \boxed{e^{\pi}-1}$

ឃ. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x})dx$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x})dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x})dx$

$= \left[\tan x - \cot x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \left(\tan\frac{\pi}{3} - \cot\frac{\pi}{3}\right) - \left(\tan\frac{\pi}{6} - \cot\frac{\pi}{6}\right)$

$= \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម :

ក. គេមាន $y''-3y'+2y=0$ មានសមីការសម្គាល់

$\lambda^2-3\lambda+2=0$ មានឫស $\lambda_1=1 \ , \ \lambda_2=2$

ចម្លើយទូទៅមានរាង $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, A , B ថេរ

គេបាន $y = Ae^x + Be^{2x}$, A , B ថេរ

នាំឱ្យ $y' = Ae^x + 2Be^{2x}$

ដោយ $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae^0+Be^0=1 \\ Ae^0+2Be^0=3 \end{cases}$

$\begin{cases} A+B=1 \\ A+2B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2 \\ A=-1 \end{cases}$

ដូចនេះ: $\boxed{y=-e^x+2e^{2x}}$ ។

ខ. គេមាន $y''-2y'+y=0$ មានសមីការសម្គាល់

$\lambda^2-2\lambda+1=0$ មានឫសឌុប $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0=1$

ចម្លើយទូទៅមានរាង $y = Axe^{\lambda_0 x} + Be^{\lambda_0 x}$, A , B ថេរ

គេបាន $y = Axe^x + Be^x$, A , B ថេរ

នាំឱ្យ $y' = A\left(e^x + xe^x\right) + Be^x$

ដោយ $\begin{cases} y(0)=-3 \\ y'(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cdot 0\cdot e^0+Be^0=-3 \\ A\left(e^0+0\cdot e^0\right)+Be^0=2 \end{cases}$

$\begin{cases} B=-3 \\ A+B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-3 \\ A=5 \end{cases}$

ដូចនេះ: $\boxed{y=5xe^x-3e^x}$ ។

3. ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

គេមាន $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

ដូចនេះ: ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រដែលសរសេរបានគឺ ៖

$\boxed{z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$\boxed{z_2 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}}$

ខ. គណនាកន្សោម A

គេមាន $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ និង $v=\frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}+\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}i$

ដោយ $$z_1+z_1^2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}+\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

នាំឱ្យ $A=v+z_1+z_1^2$

$$=\frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}+\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}i+\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

$$=0$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{A=0}$ ។

គ. គណនា w ដែល $w=z_1^{120}+z_2^{120}$

$$w=z_1^{120}+z_2^{120}$$

$$=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{120}+\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]^{120}$$

$$=\cos(-20\pi)+i\sin(-20\pi)+\cos(20\pi)+i\sin(20\pi)$$

$$=\cos 0+i\sin 0+\cos 0+i\sin 0$$

$$=1+i\cdot 0+1+i\cdot 0=2$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{w=2}$ ។

4. រកប្រូបាបដែលជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចនិស្សិតស្រី 3 នាក់ :

គេមាន និស្សិត 10 នាក់ ប្រុស 6 នាក់ និងស្រី 4 នាក់

គេជ្រើសរើសបុគ្គលិក 5 នាក់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10\,,5)$ ដែល

$$C(10\,,5)=\frac{10!}{5!\cdot 5!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=252$$

ហើយ ជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចនិស្សិតស្រី 3 នាក់មានន័យថា

អាចជ្រើសរើសបាននិស្សិតស្រី 3 នាក់ ឬ 4 នាក់ គេបាន៖

$$n(A)=C(4\,,3)C(6\,,2)+C(4\,,4)C(6\,,1)$$

$$=4\times\frac{6!}{4!\cdot 2!}+1\times 6=4\times\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2}+6$$

$$=4\times 15+6=60+6=66$$

នាំឱ្យ $$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{66}{252}=\frac{11}{42}$$

ដូចនេះ ប្រូបាប $\boxed{P(A)=\frac{11}{42}}$ ។

5. ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន អនុគមន៍ $f(x):y=\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}$

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x\neq -3$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{-3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព :

គេមាន $$f'(x)=\left[\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}\right]'$$

$$=\frac{\left(x^2+5x+15\right)'(x+3)-(x+3)'\left(x^2+5x+15\right)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{(2x+5)(x+3)-\left(x^2+5x+15\right)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{2x^2+6x+5x+15-x^2-5x-15}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}=\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{f'(x)=\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}}$ ។

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x(x+6)}{(x+3)^2}=0$, $(x+3)^2>0$

នាំឱ្យ $x(x+6)=0$ នោះ $x=0$, $x=-6$

គេបាន $$f(0)=\frac{0^2+5\cdot 0+15}{(0+3)}=5$$

$$f(-6)=\frac{(-6)^2+5(-6)+15}{(-6+3)}=-7$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$ -6 -3 0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0 $-$ ‖ $-$ 0 $+$

• ត្រង់ $x=-6$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(-6)=-7$ ។

• ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(0)=5$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-3^-} f(x)=\lim_{x\to-3^-}\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}=\frac{9-15+15}{-3+0^-+3}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-3^+} f(x)=\lim_{x\to-3^+}\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}=\frac{9-15+15}{-3+0^++3}=+\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to-3} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=-3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\frac{x^2+5x+15}{(x+3)}=x+2+\frac{9}{x+3}$

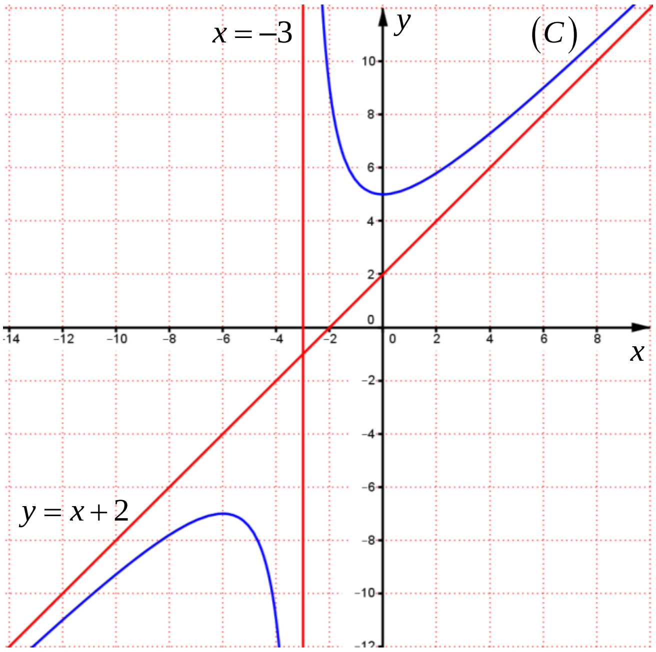
ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9}{x+3}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		-6		-3		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-7	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

➤សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



• ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ f

ដោយ អាស៊ីមតូតឈរ $x=-3$ និងទ្រេត $y=x+2$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(-3,-1)$ ដែលជាផ្ចិតឆ្លុះ នៃក្រាប (C) ។

ខ. រកគ្រប់ចំណុចនៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

គេមាន $f(x)=y=x+2+\frac{9}{x+3}$

ដើម្បីឱ្យ y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប លុះត្រាតែ $\frac{9}{x+3}$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប មានន័យថា 9 ចែកដាច់នឹង $x+3$ នោះគេបាន ៖

$x+3=\{\pm1\,,\pm3\,,\pm9\}$

នាំឱ្យ $x=-4$ នាំឱ្យ $y=-4+2+\frac{9}{-4+3}=-11$

$x=-2$ នាំឱ្យ $y=-2+2+\frac{9}{-2+3}=9$

$x=-6$ នាំឱ្យ $y=-6+2+\frac{9}{-6+3}=-7$

$x=0$ នាំឱ្យ $y=0+2+\frac{9}{0+3}=5$

$x=-12$ នាំឱ្យ $y=-12+2+\frac{9}{-12+3}=-11$

$x=6$ នាំឱ្យ $y=6+2+\frac{9}{6+3}=9$

ដូចនេះ៖ ចំណុចដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបមាន៖

$(-4\,,-11)\,,(-2\,,9)\,,(-6\,,-7)$
$(0\,,5)\,,(-12\,,-11)\,,(6\,,9)$ ។

គ. រកគ្រប់ចំណុច M នៅលើខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេតាង $M(x_M\,,y_M)$ ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង

គេបាន $y_M=\frac{x_M^2+5x_M+15}{(x_M+3)}$ ដែល $x_M\neq-3$

$y_M(x_M+3)=x_M^2+5x_M+15$

ដោយ ចម្ងាយពីចំណុច M ទៅអ័ក្សអាប់ស៊ីសស្មើ 2 ដងនៃចម្ងាយពី M ទៅអ័ក្សអរដោនេ នាំឱ្យ $y_M=2x_M$

នាំឱ្យ $2x_M(x_M+3)=x_M^2+5x_M+15$

$2x_M^2+6x_M=x_M^2+5x_M+15$

$x_M^2+x_M-15=0$

មាន $\Delta=1-4(-15)=61$

នោះ៖ $x_M=\frac{-1-\sqrt{61}}{2}$, $x_M=\frac{-1+\sqrt{61}}{2}$

ចំពោះ៖ $x_M=\frac{-1-\sqrt{61}}{2}$ នាំឱ្យ $y_M=-1-\sqrt{61}$

ចំពោះ៖ $x_M=\frac{-1+\sqrt{61}}{2}$ នាំឱ្យ $y_M=-1+\sqrt{61}$

ដូចនេះ $\boxed{M\left(\frac{-1-\sqrt{61}}{2}\ ,\ -1-\sqrt{61}\right)}$ ឬ

$\boxed{M\left(\frac{-1+\sqrt{61}}{2}\ ,\ -1+\sqrt{61}\right)}$ ។

ឃ. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ (d)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $(\mathrm{d}): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ (d) ប៉ះខ្សែកោងត្រង់ចំណុច $A(-2\ ,\ 9)$

នោះ $x_0=-2\ ,\ y_0=f(x_0)=9$

គេបាន $f'(x_0)=f'(-2)=\frac{-2(-2+6)}{(-2+3)^2}=-8$

នាំឱ្យ $(\mathrm{d}): y=-8(x+2)+9$ ឬ $y=-8x-7$

ដូចនេះ សរសេរបាន $\boxed{(\mathrm{d}): y=-8x-7}$ ។

ផ្នែកធរណីមាត្រ

ក. រកចំណុច H

គេតាង $H(x_H\ ,\ y_H\ ,\ z_H)$ ជាចំណុចដែលត្រូវរក

គេមាន ចំណុច $A(2\ ,1\ ,3)$

និងប្លង់ $(P): 2x+y+3z-28=0$ ដែលមាន

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2\ ,1\ ,3)$

ហើយ $\overrightarrow{AH}=(x_H-2\ ,\ y_H-1\ ,\ z_H-3)$

ដោយ H ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) មានន័យថា

$\overrightarrow{AH}\perp(P)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AH}\parallel\vec{n}$ គេបាន ៖

$\frac{x_H-2}{2}=\frac{y_H-1}{1}=\frac{z_H-3}{3}$

ទាញបាន $\begin{cases}\frac{x_H-2}{2}=\frac{y_H-1}{1} \Rightarrow y_H=\frac{x_H}{2}\\ \frac{x_H-2}{2}=\frac{z_H-3}{3} \Rightarrow z_H=\frac{3x_H}{2}\end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀត $H\in(P)$ នោះ $2x_H+y_H+3z_H-28=0$

គេបាន $2x_H+\frac{x_H}{2}+3\cdot\frac{3x_H}{2}-28=0$

$4x_H+x_H+9x_H-56=0$ នោះ $x_H=4$

នាំឱ្យ $\begin{cases}y_H=\frac{x_H}{2}=\frac{4}{2}=2\\ z_H=\frac{3x_H}{2}=\frac{3\cdot4}{2}=6\end{cases}$

ដូចនេះ រកបានចំណុច $\boxed{H(4\ ,2,\ 6)}$ ។

➢**រកចំណុច A'**

ដោយ $H(4\ ,2\ ,6)$ ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ AA'

គេបាន $\left(\frac{x_A+x_{A'}}{2}\ ,\ \frac{y_A+y_{A'}}{2}\ ,\ \frac{z_A+z_{A'}}{2}\right)=(4\ ,2\ ,6)$

$\left(\frac{2+x_{A'}}{2}\ ,\ \frac{1+y_{A'}}{2}\ ,\ \frac{3+z_{A'}}{2}\right)=(4\ ,2\ ,6)$

នាំឱ្យ $\begin{cases}2+x_{A'}=8\\1+y_{A'}=4\\3+z_{A'}=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{A'}=6\\y_{A'}=3\\z_{A'}=9\end{cases}$

ដូចនេះ រកបានចំណុច $\boxed{A'(6\ ,3,\ 9)}$ ។

ខ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A មកលើប្លង់ (P)

ដោយ $d(A\ ,(P))=AH$

ដែល $\left|\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{(x_H-2)^2+(y_H-1)^2+(z_H-3)^2}$

$=\sqrt{(4-2)^2+(2-1)^2+(6-3)^2}$

$=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$

ដូចនេះ $\boxed{d(A\ ,(P))=AH=\left|\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{14}}$ ឯកតាប្រវែង

➢**សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (Δ)**

សមីការបន្ទាត់ត្រូវរកមានរាង $(\Delta):\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\ ,\ t\in\mathbb{R}\\z=z_0+ct\end{cases}$

ដោយ បន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច $M(3\ ,2\ ,5)$ និង

កែងនឹងប្លង់ (P) នោះ (Δ) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

$\vec{u}=\vec{n}=(2\ ,1\ ,3)$

ដូចនេះ $\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=3+2t\\y=2+t\quad ,\ t\in\mathbb{R}\\z=5+3t\end{cases}}$ ។

គ. សរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ (H)

ប្លង់រាង $(H): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ ប្លង់ (H) កាត់តាមចំណុច $I(3\ ,-1\ ,5)$ និង

កែងនឹងបន្ទាត់ (AM) នោះប្លង់ (H) មានវ៉ិចទ័រ

ណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AM}=(1\ ,1\ ,2)$

គេបាន $(H):(x-3)+(y+1)+2(z-5)=0$

$(H): x+y+2z-12=0$

ដូចនេះ $\boxed{(H): x+y+2z-12=0}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : **២០១៥**

វិញ្ញាសា : **គណិតវិទ្យា** **រយៈពេល** : **១២០ នាទី** **ពិន្ទុ** : **២០**

I. ... (ក្នុងឆ្នាំ 2015 គ្មានការប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូកម្រិតមូលដ្ឋានផ្នែកគណិតវិទ្យាទេ ជ្រើសរើសតែគ្រូកីឡា និងគ្រូបឋម-មតេយ្យ ព្រោះដោយសារតែគេឱ្យនិទ្ទេស A , B , C ជាប់គ្រូដោយស្វ័យប្រវត្តិ ...) ។

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសមធ្យម ឆ្នាំ ២០១៥

I. (គ្មានចម្លើយ)

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ២០ វិច្ឆិកា ២០១៤

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $A=\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx$ ខ. $B=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$ គ. $C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x+\sin^3 x\right)dx$ ។ (3 **ពិន្ទុ**)

II. គេមានអនុគមន៍ពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ ដែល $f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$ និង $g(x)=x-\ln(1+x)$ ។

ក. គណនាដេរីវេ $f(x)$ និង $g(x)$ រួចស្រាយបំភ្លឺថា គ្រប់តម្លៃ $x>0$ គេបាន $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ ។ (2 **ពិន្ទុ**)

ខ. គេមាន $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$ ។ ចូរគណនា $\lim_{n\to\infty} u_n$ ។ (1 **ពិន្ទុ**)

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ z និង w ដែល $z=2\sqrt{2}+4\frac{\sqrt{2}}{2}i$ និង $w=x(x-i)+y(y+i)$, $x,y\in\mathbb{R}$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (1 **ពិន្ទុ**)

ខ. សរសេរ z^4 ជាទម្រង់ $a+bi$ ។ (1 **ពិន្ទុ**)

គ. រកតម្លៃ x និង y បើ $w=-z^4$ ។ (1 **ពិន្ទុ**)

IV. គេមានអនុគមន៍ $y_1=-\frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{9}{4}$ ។

ក. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យប៉ារ៉ាបូល $y_2=-x^2+a$ ប៉ះខ្សែកោងអនុគមន៍ y_1 ។ (1 **ពិន្ទុ**)

ខ. ចូរសរសេរសមីការនៃប៉ារ៉ាបូល ទៅតាមតម្លៃ a ដែលបានរកឃើញក្នុងសំណួរ ក. ។ រួចបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះរបស់វាជាមួយខ្សែកោង y_1 ។ (2 **ពិន្ទុ**)

V. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេដៅ 4 ចំណុច

$A(2,1,3)$, $B(3,6,1)$, $C(2,0,2)$, $D(1,-5,4)$ ។

ក. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ និងគណនា S_{ABCD} ។ (4 **ពិន្ទុ**)

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំណុច A និងស្របនឹង $\overrightarrow{BC}$ ។ (2 **ពិន្ទុ**)

គ. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A , B និង D ។ (2 **ពិន្ទុ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ២០១៤

I. **គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :**

ក. $\mathbf{A}=\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x}dx=\int_1^2 \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx$

$=\int_1^2\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx=\left[x-4\sqrt{x}+\ln|x|\right]_1^2$

$=\left(2-4\sqrt{2}+\ln 2\right)-\left(1-4+0\right)$

$=\boxed{5-4\sqrt{2}+\ln 2}$

ខ. $\mathbf{B}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x\left(\cos x+2\sin x\right)}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos x dx=2\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(1-\frac{1}{2}\right)=\boxed{1}$

គ. $\mathbf{C}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x+\sin^3 x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\sin x\right)\left(1+\cos x\sin x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x+\cos^2 x\sin x+\sin x+\cos x\sin^2 x\right)dx$

$=\left[\sin x-\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(1-0-0+\frac{1}{3}\right)-\left(0-\frac{1}{3}-1+0\right)=\boxed{\frac{8}{3}}$

II. **ក. គណនាដេរីវេ** $f(x)$ **និង** $g(x)$:

គេមាន $f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}}$ ។

ហើយ $g(x)=x-\ln(1+x)$

ដូចនេះ $\boxed{g'(x)=1-\frac{1}{1+x}}$ ។

ស្រាយថា គ្រប់តម្លៃ $x>0$ គេបាន $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$

ដោយ $f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}$

$=\frac{1-x^2-1}{1+x}=-\frac{x^2}{1+x}<0\ ,\ \forall x>0$

នាំឱ្យ $\forall x>0$, f ជាអនុគមន៍ចុះ នាំឱ្យ $f(x)<0$

គេបាន $x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)<0$

$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)\quad(1)$

ដោយ $g'(x)=1-\frac{1}{1+x}$

$=\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0\ ,\ \forall x>0$

នាំឱ្យ $\forall x>0$, g ជាអនុគមន៍កើន នាំឱ្យ $g(x)>0$

គេបាន $x-\ln(1+x)>0$

$\ln(1+x)<x\quad(2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$

ដូចនេះ: $\boxed{x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. គណនា $\lim_{n\to\infty}u_n$

គេមាន $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

នោះ: $u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

$$+\begin{cases}\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\ln(1+0)=0\\ \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)=\ln(1+0)=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\ln(1+0)=0\end{cases}$$

$\lim_{x\to\infty}u_n=0$

ដូចនេះ: គណនាបាន $\boxed{\lim_{x\to\infty}u_n=0}$ ។

III. ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

គេមាន $z=2\sqrt{2}+4\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ឬ $z=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$

មាន $r=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=4$

គេបាន $z=4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=4\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z=4\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$ ។

ខ. សរសេរ z^4 ជាទម្រង់ $a+bi$

គេមាន $z=4\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$z^4=\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$$

$$=4^4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$$

$$=256\left(-1+0i\right)=-256+0i$$

ដូចនេះ $\boxed{z^4=-256+0i}$ ។

គ. រកតម្លៃ x និង y បើ $w=-z^4$

គេមាន $w=x(x-i)+y(y+i)$, $x,y\in\mathbb{R}$

$$=x^2-xi+y^2+yi$$

$$=\left(x^2+y^2\right)+\left(-x+y\right)i$$

ដោយ $w=-z^4$ ដែល $-z^4=256+0i$ គេផ្ទឹមបាន ៖

$$\begin{cases}x^2+y^2=256\\-x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=256 & (1)\\x=y & (2)\end{cases}$$

គេយក (2) ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $2x^2=256\Leftrightarrow x^2=128\Rightarrow x=\pm8\sqrt{2}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{x=y=8\sqrt{2}\ ,\ x=y=-8\sqrt{2}}$ ។

IV. ក. រកតម្លៃ a :

គេមាន អនុគមន៍ $y_1=-\dfrac{1}{4}x^4+2x^2+\dfrac{9}{4}$

ប៉ារ៉ាបូល $y_2=-x^2+a$

គេបាន សមីការអាប់ស៊ីសរវាង y_1 និង y_2

$$-\frac{1}{4}x^4+2x^2+\frac{9}{4}=-x^2+a$$

$$-x^4+8x^2+9=-4x^2+4a$$

$$x^4-12x^2+4a-9=0$$

តាង $t=x^2$ ដែល $t\geq0$

គេបាន $t^2-12t+4a-9=0$

ដើម្បីឱ្យ y_2 ប៉ះជាមួយខ្សែកោង y_1 លុះត្រាសមីការមានឫសឌុប

នាំឱ្យ $\Delta'=0\Leftrightarrow(-6)^2-(4a-9)=0$

គេបាន $36-4a+9=0\Rightarrow a=\dfrac{45}{4}$

ដូចនេះ តម្លៃរកបាន $\boxed{a=\dfrac{45}{4}}$ ។

ខ. សរសេរសមីការនៃប៉ារ៉ាបូល

ចំពោះ $a=\dfrac{45}{4}$ គេបាន សមីការប៉ារ៉ាបូល $y_2=-x^2+\dfrac{45}{4}$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាបូលសរសេរបានគឺ $\boxed{y_2=-x^2+\dfrac{9}{4}}$ ។

➤បញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ:

ចំពោះ $a=\dfrac{45}{4}$ នោះគេបាន $t^2-12t+45-9=0$

$t^2-12t+36=0$ មានឫសឌុប $t_1=t_2=t=6$

ចំពោះ $t=6$ សមមូល $x^2=6\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$

ករណី $x=\pm\sqrt{6}$ គេបាន $y=-\left(\pm\sqrt{6}\right)^2+\dfrac{45}{4}$

$y=-6+\dfrac{45}{4}$ នាំឱ្យ $y=\dfrac{21}{4}$

ដូចនេះ ចំណុចប៉ះមានពីរគឺ $\boxed{\left(-\sqrt{6},\dfrac{21}{4}\right),\left(\sqrt{6},\dfrac{21}{4}\right)}$ ។

V. ក. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$:

គេមាន $A(2,1,3)$, $B(3,6,1)$,

$C(2,0,2)$, $D(1,-5,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(1,5,-2)$ និង $\overrightarrow{DC}=(1,5,-2)$

ដោយ ចតុកោណ $ABCD$ មាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(1,5,-2)$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ចតុកោណ } ABCD \text{ ជាប្រលេឡូក្រាម}}$ ។

➤គណនា S_{ABCD}

តាមរូបមន្ត $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$ ដែល $\overrightarrow{AD}=(-1,-6,1)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&5&-2\\-1&-6&1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(-7)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{51}$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{គណនាបាន } S=\sqrt{51} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D)

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតរាង $(D):\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \ , t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

ដោយ (D) កាត់ $A(2 , 1 , 3)$

នោះ $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $z_0 = 3$

ហើយ (D) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC} = (-1 , -6 , 1)$

នោះ $a = -1$, $b = -6$, $c = 1$

គេបាន $(D):\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 6t \ , t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាមែត $\boxed{(D):\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 6t \ , t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}}$ ។

គ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A , B និង D

សមីកាប្លង់ $(P): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

ដោយ (P) កាត់ $A(2 , 1 , 3)$

នោះ $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $z_0 = 3$

ហើយ (P) កាត់បីចំណុច A, B, D នាំឱ្យ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-7 , 1 , -1)$ នោះ

$a = -7$, $b = 1$, $c = -1$

គេបាន $(P): -7(x - 2) + (y - 1) - (z - 3) = 0$

$$-7x + y - z + 17 = 0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់គឺ $\boxed{(P): -7x + y - z + 17 = 0}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៩ តុលា ២០១៣

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. ផ្នែកពីជគណិត

១. សហគ្រាសដំឡើងទោចក្រយានយន្តមួយបានចំណាយទឹកប្រាក់សរុបក្នុងមួយថ្ងៃសម្រាប់ដំឡើងទោចក្រយានយន្ត x គ្រឿង ចំនួន $f(x)=6x^2+22x+100$ គិតជាម៉ឺនរៀល ហើយសហគ្រាសនេះ បានទទួលប្រាក់ចំណូលមកវិញ ចំនួន $I(x)=5x^2+112x+200$ គិតជាម៉ឺនរៀល ។

ក. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

ខ .ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណេញ បើបរិមាត្រទោចក្រយានយន្តដែលបានលក់ កើនពី 30 គ្រឿង ទៅ 50 គ្រឿង ។ **(១ពិន្ទុ)**

២. ចូរគណនាតម្លៃប្រហែលនៃផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x):\ x=2-y-y^2$ និងអ័ក្សអរដោនេ $(y'y)$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

៣. ដោះស្រាយសមីការ $y'=-y\sin x$ ដោយដឹងថា $y(2\pi)=3e$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

៤. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^3-3x+2$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

ខ. ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនៃឫសរបស់សមីការ $x^3-3x+2-m=0$ ។ **(៤ពិន្ទុ)**

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

គេឱ្យពីរ៉ាមីត $SABCD$ មានបាត $ABCD$ ជាចតុកោណកែង ដែលមានបណ្តោយ $AB=a$ ទទឹង $AD=b$ ទ្រនុង $(SA)\perp$ ប្លង់ $(ABCD)$ និងប្រវែង $SA=2a$ ។ M ជាចំណុចមួយ នៅលើទ្រនុង (SA) ដែល $AM=x$ ដោយ $0\le x\le 2a$ ។ ប្លង់ (MBC) កាត់ទ្រនុង (SD) នៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ត្រង់ N ។

ក. កំណត់រាងរបស់ចតុកោណ $BCNM$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

ខ. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យចតុកោណ $BCNM$ មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត និងតូចបំផុត ។ **(៦ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ២០១៣

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត :

១. ក. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$

គេមាន អនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយ $f(x)=6x^2+22x+100$

អនុគមន៍ប្រាក់ចំណូល $I(x)=5x^2+112x+200$

(គិតជាម៉ឺនរៀល , x ជាចំនួនទោចក្រយានយន្ត)

នាំឱ្យ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញគឺ $P(x)$ ដែល

$$P(x)=I(x)-f(x)$$
$$=\left(5x^2+112x+200\right)-\left(6x^2+22x+100\right)$$
$$=-x^2+90x+100$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $\boxed{P(x)=-x^2+90x+100}$

ខ .ចូរប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណេញ

ប្រាក់ចំណេញបានពីការលក់ទោចក្រយានយន្តកើនពី 30 គ្រឿង ទៅ 50 គ្រឿង គឺ $\int_{30}^{50}P(x)\,dx$

$$=\int_{30}^{50}\left(-x^2+90x+100\right)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+45x^2+100x\right]_{30}^{50}$$
$$=\left(-\frac{50^3}{3}+45\cdot 50^2+100\cdot 50\right)-\left(-\frac{30^3}{3}+45\cdot 30^2+100\cdot 30\right)$$
$$=\frac{227500}{3}-34500=\frac{124000}{3}$$
$$=41333.333333 \text{ ម៉ឺនរៀល}$$

ដូចនេះ តម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណេញគឺ

$\boxed{413333333}$ រៀល ។

២. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C) និងអ័ក្សអរដោនេ

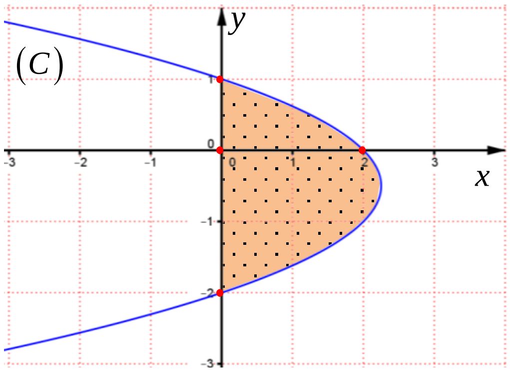
គេមាន $f(x):\ x=2-y-y^2$

រកចំណុចប្រសព្វរវាងអ័ក្ស $y'y$ និងក្រាប (C) នោះ $x=0$

គេបាន $2-y-y^2=0$ នោះ $y=1$, $y=-2$

ក្រាប (C) ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេសង់រូបបាន ដូចខាងក្រោម ៖



នាំឱ្យ $S=\int_{-2}^{1}\left(2-y-y^2\right)dy$

$$S=\int_{-2}^{1}\left(2-y-y^2\right)dy$$
$$=\left[2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)$$
$$=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃគណនាបាន } S=\frac{9}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

គេមាន $y'=-y\sin x$

$\frac{y'}{y}=-\sin x$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)

$\ln y=\cos x+c$, c ថេរ

នាំឱ្យ $y=e^{\cos x+c}$

ដោយ $y(2\pi)=3e$

គេបាន $e^{\cos 2\pi+c}=3e$ ដែល $\cos 2\pi=\cos 0=1$

$e^{1+c}=3e \Leftrightarrow e^c=3 \Rightarrow c=\ln 3$

នាំឱ្យ $y=e^{\cos x+\ln 3}=e^{\cos x}\cdot e^{\ln 3}=3e^{\cos x}$

ដូនេះ សមីការមានឫស $\boxed{y=3e^{\cos x}}$ ។

៤. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=x^3-3x+2$ (**ដូចគ្រូបឋម 2016**)

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\ ,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=x^3-3x+2$

ដេរីវេ : $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$3(x-1)(x+1)=0$ នោះ $x=1\ ,\ x=-1$

គេបាន $f(1)=1^3-3\cdot1+2=0$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• បរមា

-ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-1)=4$ ។

-ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(1)=0$ ។

• លីមីត $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x+2)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3-3x+2)=+\infty$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• ភាពប៉ោងផត និងចំណុចរបត់

ដេរីវេទី២ $f''(x)=(3x^2-3)'=6x$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0$ នោះ $x=0$

- បើ $x>0$ នោះ $f''(x)>0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x<0$ នោះ $f''(x)<0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងក្រោម

- បើ $x=0$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់ $I(0,f(0))=I(0,2)$

• ផ្ចិតឆ្លុះ

គេនឹង បង្ហាញថា ចំណុចរបត់ $I(0\ ,\ 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង

បើ $I(a\ ,\ b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះលុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-x)+f(x)=4$

ដោយ $f(-x)+f(x)$

$=(-x)^3-3(-x)+2+x^3-3x+2$

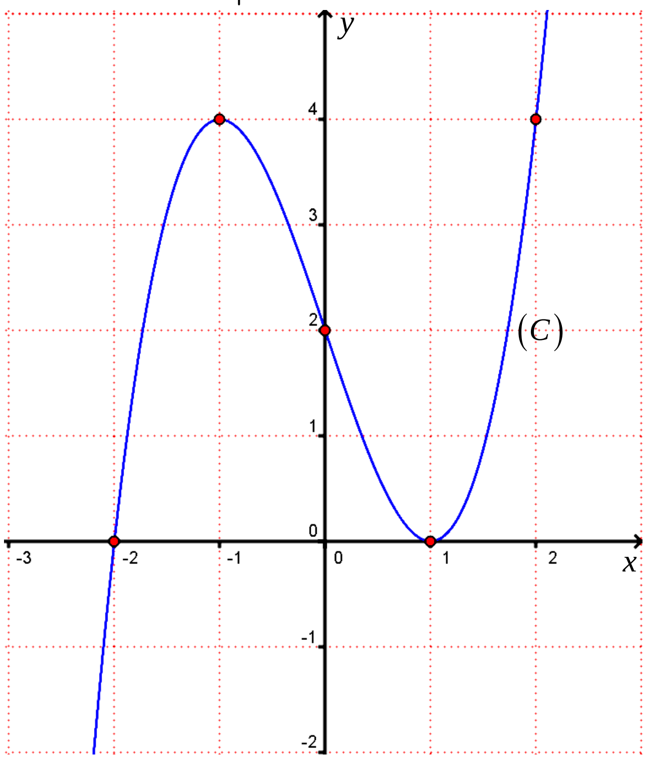
$=-x^3+3x+2+x^3-3x+2=4$ ពិត

ដូចនេះ $I(0\ ,\ 2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ។

• សង់ក្រាប

តារាងតម្លៃលេខ

x	-2	-1	0	1	2
y	0	4	2	0	4



ខ. ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនៃឫស

គេមាន សមីការ $x^3-3x+2-m=0$

គេបាន $m=x^3-3x+2$

ឫសនៃសមីការនេះបានពីប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ដេក $y=m$ និង ក្រាប C ។ តាមក្រាបគេបានអត្ថិភាពនៃឫសដូចខាងក្រោម ៖

•$m\in(-\infty\ ,\ 0)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $x_1<0$

•$m=0$: សមីការមានឫសបី $x_1=-2\ ,\ x_2=x_3=1$

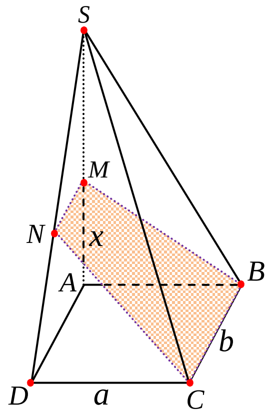
•$m\in(0\ ,\ 4)$: សមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា

•$m=4$: សមីការមានឫសបី $x_1=x_2=-1\ ,\ x_3=2$

•$m\in(4\ ,\ +\infty)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $0<x_1$ ។

II. ចម្លើយផ្នែកធរណីមាត្រ :

ក. កំណត់រាងរបស់ចតុកោណ $BCNM$



គេមាន $(SA)\perp$ ប្លង់ $(ABCD)$ នាំឱ្យ ប្លង់ $(SAB)\perp[BC]$

នោះ $\begin{cases}(SAB)\perp[BC]\\ [MB]\subset(SAB)\end{cases}\Rightarrow [MB]\perp[BC]\ (1)$

គេមាន $\begin{cases}(SAD)\cap(BCNM)=[MN]\\ (BCNM)\perp(SAB)\\ (SAD)\perp(SAB)\end{cases}\Rightarrow[MN]\perp(SAB)$

នាំឱ្យ $[MN]\perp[MB]\ (2)$

តាម (1) និង (2) ចតុកោណ $BCNM$ ជាចតុ.ញាយកែង

ដូចនេះ $\boxed{BCNM \text{ ជាចតុកោណញាយកែង}}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យចតុកោណ $BCNM$ មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត និងតូចបំផុត

ដោយ $BCNM$ ជាចតុកោណញាយកែង

នាំឱ្យ $S=S_{BCNM}=\frac{1}{2}(MN+BC)\cdot MB$

ដោយ ΔSMN និង ΔSAD ជាត្រីកោណកែងដែលមានមុំ $\angle S$ ជាមុំរួម នោះ $\Delta SMN\sim\Delta SAD$ (ម.ម)

វិបាក $\frac{MN}{AD}=\frac{SM}{SA}$ ឬ $\frac{MN}{b}=\frac{2a-x}{2a}$

នោះ $MN=\frac{2ab-xb}{2a}$ ដែល $0\le x\le 2a$

ម្យ៉ាងទៀត តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $MB=\sqrt{MA^2+AB^2}$

នោះ $MB=\sqrt{x^2+a^2}$

គេបាន $S(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2ab-xb}{2a}+b\right)\cdot\sqrt{x^2+a^2}$

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(2b-\frac{b}{2a}x\right)\sqrt{x^2+a^2}$$

$$S(x)=\left(b-\frac{b}{4a}x\right)\sqrt{x^2+a^2}$$

$$S'(x)=\left(-\frac{b}{4a}\right)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\left(b-\frac{b}{4a}x\right)$$

$$=\left(-\frac{b}{4a}\right)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\left(\frac{4ba-bx}{4a}\right)$$

$$=\frac{-b\left(x^2+a^2\right)}{4a\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{4abx-bx^2}{4a\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{-2bx^2+4abx-ba^2}{4a\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{b\left(-2x^2+4ax-a^2\right)}{4a\sqrt{x^2+a^2}}$$

ឱ្យ $S'(x)=0$ តែ $a,b,\ x>0$, $\frac{b}{4a\sqrt{x^2+a^2}}>0$

នោះ $-2x^2+4ax-a^2=0$ មាន

$$\Delta'=4a^2-2a^2=2a^2$$

$$x=\frac{-2a\pm\sqrt{2a^2}}{-2}=\frac{\left(2\pm\sqrt{2}\right)a}{2}$$

តារាងសញ្ញា $S'(x)$

x	0		$\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)a}{2}$		$\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)a}{2}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• ត្រង់ $x=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)a}{2}$, $S'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា S មានតម្លៃតូចបំផុតមួយ ។

• ត្រង់ $x=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)a}{2}$, $S'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា S មានតម្លៃធំបំផុតមួយ ។

ដូចនេះ គេកំណត់តម្លៃនៃ x បានដូចខាងក្រោម ៖

បើ $x=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)a}{2}$ នោះ S_{BCNM} តូចបំផុត

បើ $x=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)a}{2}$ នោះ S_{BCNM} ធំបំផុត ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ២៥ តុលា ២០១២

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ២០

I. (៣ ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ក. គណនាកន្សោម $A=1+z_1+z_1^2$ ។

ខ. សរសេរ z_1 , z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ គណនា $z_1^{2010}+z_2^{2010}$ ។

II. (២ ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការ $2y''-3y'+y=0 \quad (E)$ ។

ខ. រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=2x+1$ ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ ។

III. (៣ ពិន្ទុ) គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$, $x\neq -1$, $x\neq 3$ ។

ក. រក A , B និង C ដែល $f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$ ។

ខ. គណនា $I=\int f(x)dx$ ។

IV. (៣ ពិន្ទុ) គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ 2 គ្រាប់ព្រមគ្នា ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយមានពណ៌ខៀវ និងមួយទៀតពណ៌ក្រហម ។ រកប្រូបាប ៖

ក. លេខចេញលើគ្រាប់ពណ៌ខៀវ ស្មើនឹង 2 ដងនៃលេខចេញលើគ្រាប់ពណ៌ក្រហម ។

ខ. ផលបូកលេខលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរស្មើនឹង 5 ។

V. (៤ ពិន្ទុ) ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានស្វ៊ែ (S) : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ (S) ជាមួយ $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$ ។

ខ. តាង A_1 , A_2 ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (S) និង $\overrightarrow{Ox}$ ។ រកសមីការប្លង់ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A_1 និង A_2 ។

VI. (៥ ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\frac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}$ និងមានក្រាប (C) ។

ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា ។

ខ. រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនោះ ។

គ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះនោះ ។

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសមធ្យម ឆ្នាំ ២០១២

I. **ក. គណនាកន្សោម** $A=1+z_1+z_1^2$:

គេមាន $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

នាំឱ្យ $z_1^2=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

គេបាន $A=1+z_1+z_1^2$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

ដូចនេះ៖ គណនាបានកន្សោម $\boxed{A=0}$ ។

ខ. សរសេរ z_1 , z_2 **ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ**

ដោយ $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$

និង $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}}$

➢**គណនា** $z_1^{2010}+z_2^{2010}$

- $z_1^{2010}+z_2^{2010}$

$=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{2010}+\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{2010}$

$=(\cos 1340\pi+i\sin 1340\pi)+(\cos 2680\pi+i\sin 2680\pi)$

$=(\cos 0+i\sin 0)+(\cos 0+i\sin 0)$

$=(1+0i)+(1+0i)=2$

ដូចនេះ៖ គណនាបាន $\boxed{z_1^{2010}+z_2^{2010}=2}$ ។

II. **ក. ដោះស្រាយសមីការ** (E) :

គេមាន $(E):\ 2y''-3y'+y=0$

សមីការសម្គាល់ $2\lambda^2-3\lambda+1=0$ មានឫស $\lambda=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$, A,B ថេរ

ដូចនេះ៖ សមីការមានចម្លើយ $\boxed{y=Ae^{x}+Be^{\frac{1}{2}x}}$ ។

ខ. រកចម្លើយមួយនៃ (E)

គេមាន $y=Ae^{x}+Be^{\frac{1}{2}x}$ នោះ៖ $y'=Ae^{x}+\frac{1}{2}Be^{\frac{1}{2}x}$

ដោយ ក្រាបនៃចម្លើយ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=2x+1$ ត្រង់ចំណុច $A(0\ ,1)$

គេបាន $\begin{cases}y'(0)=2\\ y(0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+\frac{1}{2}B=2\\ A+B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-2\\ A=3\end{cases}$

ដូចនេះ៖ ចម្លើយមួយនៃ (E) គឺ $\boxed{y=3e^{x}-2e^{\frac{1}{2}x}}$ ។

III. **ក. រក** A , B **និង** C :

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}$$

$$=\frac{A(x^2-6x+9)+B(x^2-2x-3)+C(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-6A-2B+C)+(9A-3B+C)}{(x+1)(x-3)^2}$$

ផ្ទឹមនឹង $f(x)=\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$, $x\neq-1$, $x\neq 3$

គេបាន $\begin{cases}A+B=5 & (1)\\ -6A-2B+C=-14 & (2)\\ 9A-3B+C=13 & (3)\end{cases}$

យក $(3)-(2)$ គេបាន $15A-B=27$ (4)

យក $(1)+(4)$ គេបាន $16A=32$ នោះ៖ $A=2$

តាម $(1): 2+B=5\ \Rightarrow\ B=3$

តាម $(3): 9\cdot2-3\cdot3+C=13\Rightarrow C=4$

ដូចនេះ៖ រកបាន $\boxed{A=2\ ,\ B=3\ ,\ C=4}$ ។

ខ. គណនា $I=\int f(x)dx$

ចំពោះ៖ $A=2$, $B=3$, $C=4$

គេបាន $f(x)=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}$

នាំឱ្យ $\mathbf{I}=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}\right)dx$

$=2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\frac{4}{x-3}+c$, c ថេរ

ដូចនេះ៖ $\boxed{\mathbf{I}=2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\frac{4}{x-3}+c}$ ។

IV. **រកប្រូបាប**

គ្រាប់ឡុកឡាក់ 2 មួយខៀវ មួយក្រហម គេបោះព្រមគ្នា

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាចតាងដោយ $n(S)=6\times 6=36$

ក. លេខចេញលើគ្រាប់ខៀវ ស្មើនឹង 2 ដងនៃលេខគ្រាប់ក្រហម

លេខចេញលើគ្រាប់ខៀវ ស្មើនឹង 2 ដងនៃលេខគ្រាប់ក្រហម

មានបីករណីរួមមាន ៖ (ខ1ក្រ 2) ឬ(ខ 2 ក្រ 4) ឬ(ខ 3 ក្រ 6)

នាំឱ្យ ចំនួនករណីស្របតាងដោយ $n(A)=3$

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{12}}$ ។

ខ. ផលបូកលេខលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរស្មើនឹង 5

ផលបូកស្មើ 5 មាន 4 ករណីគឺ ៖

(ខ1ក្រ 4) ឬ (ខ 2 ក្រ 3) ឬ (ខ 3 ក្រ 2) ឬ (ខ 4 ក្រ1)

នាំឱ្យ ចំនួនករណីស្របតាងដោយ $n(B)=4$

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{1}{9}}$ ។

V. **ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ (S) ជាមួយ $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$**

គេមាន $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$

• ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វនឹង $\overrightarrow{Ox}$ លុះត្រាតែ $y=0$, $z=0$

គេបាន $(x-1)^2+(0-2)^2+(0+2)^2=16$

$(x-1)^2=8 \Rightarrow x=1\pm 2\sqrt{2}$

ដូចនេះ ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ ត្រង់ពីរចំណុចគឺ

$\boxed{\left(1+2\sqrt{2}\,,0\,,0\right),\left(1-2\sqrt{2}\,,0\,,0\right)}$ ។

• ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វនឹង $\overrightarrow{Oy}$ លុះត្រាតែ $x=0$, $z=0$

គេបាន $(0-1)^2+(y-2)^2+(0+2)^2=16$

$(y-2)^2=11 \Rightarrow y=2\pm\sqrt{11}$

ដូចនេះ ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វអ័ក្ស $\overrightarrow{Oy}$ ត្រង់ពីរចំណុចគឺ

$\boxed{\left(0\,,2+\sqrt{11}\,,0\right),\left(0\,,2-\sqrt{11}\,,0\right)}$ ។

• ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វនឹង $\overrightarrow{Oz}$ លុះត្រាតែ $x=0$, $y=0$

គេបាន $(0-1)^2+(0-2)^2+(z+2)^2=16$

$(z+2)^2=11 \Rightarrow z=-2\pm\sqrt{11}$

ដូចនេះ ស្វ៊ែ (S) ប្រសព្វអ័ក្ស $\overrightarrow{Oz}$ ត្រង់ពីរចំណុចគឺ

$\boxed{\left(0\,,0\,,2+\sqrt{11}\right),\left(0\,,0\,,2-\sqrt{11}\right)}$ ។

ខ. រកសមីការប្លង់ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A_1 និង A_2

ដោយ $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$

នាំឱ្យ ស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(1\,,2\,,-2)$

គេមាន $A_1\left(1+2\sqrt{2}\,,0\,,0\right)$, $A_2\left(1-2\sqrt{2}\,,0\,,0\right)$

ប្លង់ (P) រាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

• ករណីប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A_1\left(1+2\sqrt{2}\,,0\,,0\right)$

នោះគេបានប្លង់ (P_1) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1=\overrightarrow{IA_1}$

ដែល $\vec{n}_1=\overrightarrow{IA_1}=\left(2\sqrt{2}\,,-2\,,2\right)$ នាំឱ្យ ៖

$(P_1):\ 2\sqrt{2}\left(x-1-2\sqrt{2}\right)-2(y-0)+2(z-0)=0$

$2\sqrt{2}x-2y+2z-2\sqrt{2}-8=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P_1):\ 2\sqrt{2}x-2y+2z-2\sqrt{2}-8=0}$ ។

• ករណីប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A_2\left(1-2\sqrt{2}\,,0\,,0\right)$

នោះគេបានប្លង់ (P_2) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_2=\overrightarrow{IA_2}$

ដែល $\vec{n}_2=\overrightarrow{IA_2}=\left(-2\sqrt{2}\,,-2\,,2\right)$ នាំឱ្យ ៖

$(P_2):\ -2\sqrt{2}\left(x-1-2\sqrt{2}\right)-2(y-0)+2(z-0)=0$

$-2\sqrt{2}x-2y+2z+2\sqrt{2}+8=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P_2):\ -2\sqrt{2}x-2y+2z+2\sqrt{2}+8=0}$ ។

VI. **ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់**

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$

គេបានលីមីតតត្រង់ចុងដែនកំណត់គឺ

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$ ។

➢សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}$

$$f'(x)=\frac{\left(2e^{2x}-5e^x\right)e^x-e^x\left(e^{2x}-5e^x+4\right)}{e^{2x}}$$

$$=\frac{\left(2e^{2x}-5e^x\right)-\left(e^{2x}-5e^x+4\right)}{e^x}$$

$$=\frac{e^{2x}-4}{e^x}=\frac{\left(e^x-2\right)\left(e^x+2\right)}{e^x}$$

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(e^x-2\right)\left(e^x+2\right)}{e^x}=0$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ e^x>0\ ,\ e^x+2>0$

នាំឱ្យ $e^x-2=0 \ \Rightarrow\ x=\ln 2$

$$f(\ln 2)=\frac{e^{2\ln 2}-5e^{\ln 2}+4}{e^{\ln 2}}=\frac{4-10+4}{2}=-1$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

ត្រង់ $x=\ln 2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាមួយស្មើ $f(\ln 2)=-1$ ។

• សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

ខ. រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស

បើក្រាប (C) ប្រសព្វអ័ក្ស $x'ox$ នោះ $y=f(x)=0$

គេបាន $\dfrac{e^{2x}-5e^x+4}{e^x}=0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}\ ,\ e^x>0$

នាំឱ្យ $e^{2x}-5e^x+4=0$, តាង $t=e^x$, $t>0$

គេបាន $t^2-5t+4=0$ មានឫសងាយ $t=1\ ,\ t=4$

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x=1 \\ e^x=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\ln 4 \end{array}\right.$$

ដូចនេះ ក្រាប (C) ប្រសព្វអ័ក្ស $x'ox$ ត្រង់ពីរចំណុចគឺ

$\boxed{(0\ ,\ 0)\ ,\ (\ln 4\ ,\ 0)}$ ។

➢សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនោះ

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

• ករណីបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច $(0\ ,\ 0)$ គេបាន ៖

$f'(0)=\dfrac{e^0-4}{e^0}=-3$ និង $f(0)=0$

នាំឱ្យ $y=-3(x-0)+0=-3x$

• ករណីបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច $(\ln 4\ ,\ 0)$ គេបាន ៖

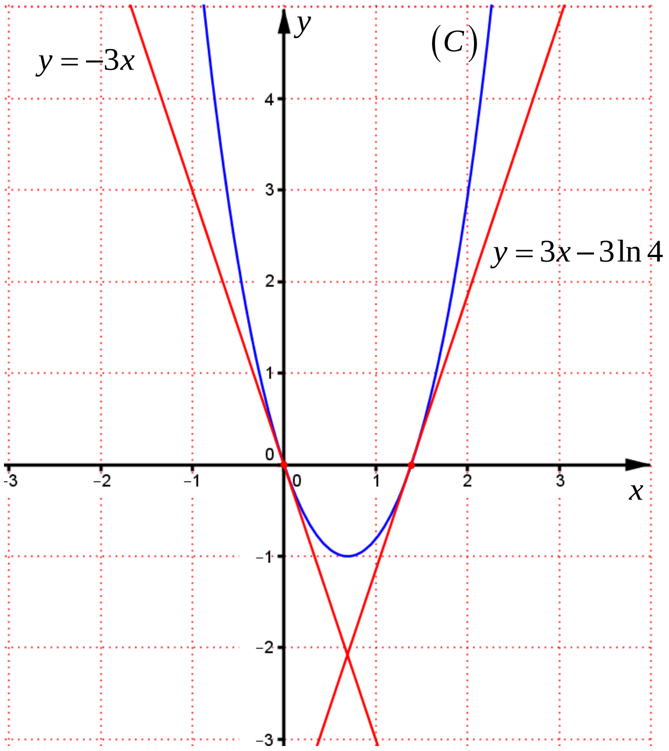
$f'(\ln 4)=\dfrac{e^{2\ln 4}-4}{e^{\ln 4}}=\dfrac{16-4}{4}=3$ និង $f(\ln 4)=0$

នាំឱ្យ $y=3(x-\ln 4)+0=3x-3\ln 4$

ដូចនេះ៖ សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចប្រសព្វទាំងពីរគឺ

$\boxed{y=-3x\ ,\ y=3x-3\ln 4}$ ។

គ. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះនោះ



ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០១១

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែល z , $\frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស និងជាអនុគមន៍កើន ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $I=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)(2+x)^n\,dx$ ។

ខ. $J=\int_{6}^{8}\frac{x}{x^2-6x+8}dx$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេមានថង់បួន A , B , C និង D ។ ក្នុងថង់ A មានប៊ូលស 30 ។ ក្នុងថង់ B មានប៊ូលខ្មៅ 40 ។ ក្នុងថង់ C មានប៊ូលស 10 និងប៊ូលពណ៌ក្រហម 25 ។ ក្នុងថង់ D មានប៊ូលស 5 ប៊ូលពណ៌ខៀវ 3 និងប៊ូលពណ៌ក្រហម 2 ។ គេដាក់ថង់ទាំងបួននៅក្នុងថង់ធំមួយ ។ គេចាប់យកដោយចៃដន្យនូវថង់មួយចេញពីថង់ធំ ហើយលូកយកប៊ូលមួយចេញពីថង់នោះ ។ គណនាប្រូបាប ដើម្បីឱ្យប៊ូលដែលគេលូកយកចេញមានពណ៌ស ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យបន្ទាត់ ℓ មួយដែលកំណត់ដោយ $x=t$, $y=-3+3t$, $z=-2+2t$ និងប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមបន្ទាត់ ℓ និងកាត់តាមចំណុច $A(1,2,1)$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងអ័ក្ស $z'oz$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-2}$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f ។

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (C) ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 2 ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្ស $x'ox$ និងបន្ទាត់ $x=3$ និង $x=4$ ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសមធ្យម ឆ្នាំ ២០១១

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច :

គេមាន $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$

$$\Delta=\left[-(5-i)^2\right]-4(2+i)(2-2i)$$
$$=25-10i+i^2-16+16i-8i+8i^2$$
$$=-2i=1-2i+i^2=(1-i)^2$$

នាំឱ្យ $x=\dfrac{(5-i)\pm\sqrt{(1-i)^2}}{2(2+i)}=\dfrac{5-i\pm(1-i)}{2(2+i)}$

$$=\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-i}{2+i}=\dfrac{(3-i)(2-i)}{2^2-i^2}=\dfrac{6-3i-2i+i^2}{5}\\[2mm] \dfrac{2}{2+i}=\dfrac{2(2-i)}{2^2-i^2}=\dfrac{4-2i}{5}\end{array}\right.$$

$$=\left[\begin{array}{l}1-i\\ \dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i\end{array}\right.$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=1-i\ ,\ x=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i}$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z (លំហាត់ដូចគ្រូបឋមឆ្នាំ ២០០៦)

គេតាង $z=a+bi$

នាំឱ្យ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$

$1-z=(1-a)-bi$

គេបាន $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$|1-z|=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$

ដោយ $z\ ,\ \dfrac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា គេបាន ៖

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$$

នាំឱ្យ $\begin{cases}a^2+b^2=1 & (1)\\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2} & (2)\end{cases}$

តាម(2) $a^2+b^2=(1-a)^2+b^2$

$a^2=1-2a+a^2$ នាំឱ្យ $a=1/2$

តាម(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+b^2=1\ \Rightarrow\ b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ កំណត់បានចំនួនកុំផ្លិច $\boxed{z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ ។

II. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f :

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}1+x^2\geq 0 & (1)\\ x+\sqrt{1+x^2}>0 & (2)\end{cases}$

តាម(1) $1+x^2\geq 0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$

តាម(2) $x+\sqrt{1+x^2}>0$ ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}$

$1+x^2>x^2$

$\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}$

$x+\sqrt{1+x^2}>x+|x|$

តែ $\forall x\in\mathbb{R}$, $x+|x|\geq 0$

នាំឱ្យ $x+\sqrt{1+x^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានដែនកំណត់ } D=\mathbb{R}}$ ។

ខ. ➤បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

នាំឱ្យ $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)$

$$=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$
$$=\ln\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}$$
$$=\ln\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1}$$
$$=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)$$

ដោយ $f(-x)=f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍សេស}}$ ។

➤បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើន

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

តាមរូបមន្ត $y=\ln(u)\ \Rightarrow\ y'=\dfrac{u'}{u}$

នាំឱ្យ $f'(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+\dfrac{\left(1+x^2\right)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$ នាំឱ្យ $f'(x)>0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍កើន } \forall x\in\mathbb{R}}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

$$\mathbf{I}=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)(2+x)^n\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(2-x)(2+x)(2+x)^n\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(2-x)(2+x)^{n+1}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(4-2-x)(2+x)^{n+1}\,dx$$
$$=4\int_{-2}^{2}(2+x)^{n+1}\,dx-\int_{-2}^{2}(2+x)^{n+2}\,dx$$
$$=4\int_{-2}^{2}(2+x)'(2+x)^{n+1}\,dx-\int_{-2}^{2}(2+x)'(2+x)^{n+2}\,dx$$
$$=4\left[\frac{(2+x)^{n+2}}{n+2}\right]_{-2}^{2}-\left[\frac{(2+x)^{n+3}}{n+3}\right]_{-2}^{2}$$
$$=4\left(\frac{4^{n+2}}{n+2}-0\right)-\left(\frac{4^{n+3}}{n+3}-0\right)=\frac{4^{n+3}}{n+2}-\frac{4^{n+3}}{n+3}$$
$$=4^{n+3}\left(\frac{n+3-n-2}{(n+2)(n+3)}\right)=\boxed{\frac{4^{n+3}}{(n+2)(n+3)}}$$

$$\mathbf{J}=\int_{6}^{8}\frac{x}{x^2-6x+8}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{6}^{8}\frac{2x-6+6}{x^2-6x+8}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_{6}^{8}\frac{2x-6}{x^2-6x+8}dx+\int_{6}^{8}\frac{6}{x^2-6x+8}dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_{6}^{8}\frac{\left(x^2-6x+8\right)'}{x^2-6x+8}dx+6\int_{6}^{8}\frac{1}{(x-2)(x-4)}dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left[\ln\left|x^2-6x+8\right|\right]_{6}^{8}-3\int_{6}^{8}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}\right)dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left[\ln\left|x^2-6x+8\right|\right]_{6}^{8}-3\left[\ln\left|\frac{x-2}{x-4}\right|\right]_{6}^{8}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln 24-\ln 8-3\left(\ln\frac{3}{2}-\ln 2\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\ln 3-3(\ln 3-2\ln 2)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[6\ln 2-2\ln 3\right]=\boxed{3\ln 2-\ln 3}$$

IV. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលដែលគេលូកយកចេញមានពណ៌ស :

គេមាន ថង់ A មានប៊ូល ស30

ថង់ B មានប៊ូល ខ្មៅ40

ថង់ C មានប៊ូល ស10 , ក្រហម25

ថង់ D មានប៊ូល ស5 , ខៀវ3 និង ក្រហម2

ដើម្បីយកឱ្យបានឃ្លីស គេត្រូវចាប់ឱ្យបានថង់មួយ និងចាប់បាន ឃ្លីស គេបាន ៖

$P($ឃ្លីស$)=P(A$ស$)+P(C$ស$)+P(D$ស$)$

$$=\left(\frac{1}{4}\times\frac{30}{30}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{10}{35}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{5}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{8}=\frac{25}{56}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រូបាបយកបានឃ្លីស } P(\text{ឃ្លីស})=\frac{25}{56}}$ ។

V. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងអ័ក្ស $z'oz$:

គេមាន $(\ell): x=t\ ,\ y=-3+3t\ ,\ z=-2+2t\ ,\ t\in\mathbb{R}$

ប្លង់ (P) កាត់តាមបន្ទាត់ ℓ និងកាត់ $A(1\,,2\,,1)$

ដោយ (ℓ) កាត់តាមចំណុចតាង $B(0\,,-3\,,-2)$ និងប្លង់ (P) កាត់តាមបន្ទាត់ (ℓ) នោះ (P) កាត់ B ដែរ

ហេតុនេះ (P) ជាប្លង់កាត់ A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ដែល

$\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (ℓ)

គេមាន $\vec{u}=(1\,,3\,,2)$ និង $\overrightarrow{AB}=(-1\,,-5\,,-3)$

$$\vec{n}=\vec{u}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & -5 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$$

នាំឱ្យ $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$(x-1)+(y-2)-2(z-1)=0$$

ដោយ $(P)\cap(z'oz)$ នោះ $x=0\ ,\ y=0$

គេបាន $(0-1)+(0-2)-2(z-1)=0$ នោះ $z=-1/2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុចប្រសព្វ } (P) \text{ នឹងអ័ក្ស } z'oz \text{ គឺ } \left(0,0,-\frac{1}{2}\right)}$ ។

VI. **ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f :**

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ មានខ្សែកោង (C)

• ដែនកំណត់ : f មានន័យលុះត្រាតែ $x-2\neq 0$ ឬ $x\neq 2$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=(-\infty\,,\,2)\cup(2\,,\,+\infty)$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-3x+1}{x-2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to2} f(x)=\pm\infty$ នោះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}=x-1-\dfrac{1}{x-2}$ ហើយ $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

• ទិសដៅអថេរភាព : ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{(x^2-3x+1)'(x-2)-(x-2)'(x^2-3x+1)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(2x-3)(x-2)-(x^2-3x+1)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-7x+6-x^2+3x-1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(x-2)^2+1}{(x-2)^2}=1+\frac{1}{(x-2)^2}>0\ ,\ \forall x\in D$$

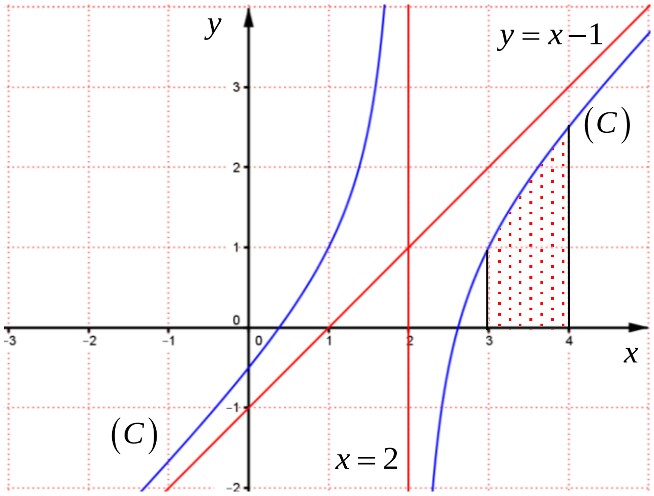
នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើ D គ្មានបរមាទេ

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

• ផ្ចិតឆ្លុះ : ចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតគឺ $(2,1)$

• សង់ក្រាប អាស៊ីតមតូត



ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (C)

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 2 នោះ $f'(x)=2$

គេបាន $1+\dfrac{1}{(x-2)^2}=2$ ឬ $(x-2)^2=1$ នោះ $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

គេរកបាន $f(1)=1$ និង $f(3)=1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

• ករណីប៉ះត្រង់ $(1\,,1)$ គេបាន $y=2(x-1)+1=2x-1$

• ករណីប៉ះត្រង់ $(3\,,1)$ គេបាន $y=2(x-3)+1=2x-5$

ដូចនេះ: **បន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=2x-1$ និង $y=2x-5$** ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S

ផ្ទៃខណ្ឌដោយ (C) អ័ក្ស $x'ox$ និងបន្ទាត់ $x=3$ និង $x=4$

$$S=\int_3^4 f(x)\,dx=\int_3^4\left(x-1-\frac{1}{x-2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-x-\ln|x-2|\right]_3^4$$

$$=(8-4-\ln2)-\left(\frac{9}{2}-3-0\right)$$

$$=4-\ln2-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}-\ln2$$

ដូចនេះ: **គណនាបាន $S=\dfrac{5}{2}-\ln2$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា** ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០១០

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. គេឱ្យចំនួនពិត α មួយដែល $-\pi < \alpha < \pi$ ។

ក. បង្ហាញថា $\sin^2\alpha - 2(1+\cos\alpha) = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $Z^2 - 2Z\sin\alpha + 2(1+\cos\alpha) = 0$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

II. ចតុកោណកែងមួយមានផ្ទៃក្រឡា $2500\,\mathrm{m}^2$ ។ រកប្រវែងជ្រុងនៃចតុកោណកែង ដើម្បីឱ្យវាមានបរិមាត្រតូចបំផុត ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - y = 0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) បើដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយកាត់អ័ក្ស $(y'y)$ ត្រង់ចំណុច $y = 4$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចនេះ ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $(D): y = 2x - 4$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

IV. គេទាញយកអក្សរ បួន ពីតួអក្សរនៃពាក្យ STATISTIQUE ។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលមានពាក្យ SITE តាមលំដាប់នៃតួអក្សរ បើគេទាញយកម្តងមួយៗ ក្នុងករណីទាំងពីរខាងក្រោម ៖

ក. គេមិនដាក់ទៅវិញទេនូវតួអក្សរដែលទាញយកមកហើយ ។

ខ. គេដាក់ទៅវិញនូវតួអក្សរដែលទាញយកមកហើយ មុននឹងទាញយកតួអក្សរមួយទៀត ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ នៃលំហគេមានចំណុច $A(6, 4, -2)$, $B(6, 2, 0)$, $C(4, 2, -2)$ ។

ក. បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ខ. គេឱ្យចំណុច $S(3, y, z)$ ។ គណនាតម្លៃ y និង z ដើម្បីឱ្យ $SABC$ ជាពីរ៉ាមីតនិយ័តមានកំពូល S ។ **(២ពិន្ទុ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ f មានអថេរ x កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{5^x}{5^{2x} - 1}$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា អនុគមន៍ f កំណត់លើសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ខុសពីសូន្យ ។

ខ. បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស ។

គ. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $]0, +\infty[$ រួចទាញរកទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $]-\infty, 0[$ ។

ឃ.ដោះស្រាយសមីការ $f(x) = \frac{2}{3}$ ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ២០១០

I. **ក. បង្ហាញថា** $\sin^2\alpha - 2(1+\cos\alpha) = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$:

របៀបទី១ $\sin^2\alpha - 2(1+\cos\alpha)$

$$= \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

$$= -4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin^2\alpha - 2(1+\cos\alpha) = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$ ។

របៀបទី២ $\sin^2\alpha - 2(1+\cos\alpha)$

$$= (1-\cos^2\alpha) - 2 - 2\cos\alpha$$

$$= -\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1$$

$$= -(\cos x + 1)^2$$

$$= -\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin^2\alpha - 2(1+\cos\alpha) = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

គេមាន $Z^2 - 2Z\sin\alpha + 2(1+\cos\alpha) = 0$

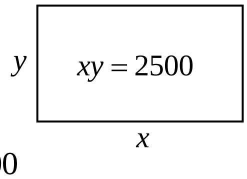
$$\Delta' = (-\sin\alpha)^2 - 2(1+\cos\alpha)$$

$$= \sin^2\alpha - 2(1+\cos\alpha) = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$

នាំឱ្យ $Z = \dfrac{\sin\alpha \pm \sqrt{-4\cos^4\frac{\alpha}{2}}}{1} = \sin\alpha \pm 2i\cos^2\frac{\alpha}{2}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{Z = \sin\alpha \pm 2i\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ ។

II. **រកប្រវែងជ្រុងនៃចតុកោណកែង** :



គេតាង x ជាបណ្តោយ , $x>0$

y ជាទទឹង , $y>0$

គេបាន $xy = 2500$ នោះ $y = \dfrac{2500}{x}$

បរិមាត្រ $P = 2(x+y)$ នោះ $P(x) = 2\left(x + \dfrac{2500}{x}\right)$

នាំឱ្យ $P'(x) = 2\left(1 - \dfrac{2500}{x^2}\right) = 2\left(\dfrac{x^2-2500}{x^2}\right)$

ឱ្យ $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x^2-2500}{x^2}\right) = 0$

នាំឱ្យ $x^2 - 2500 = 0$ នោះ $x = \pm 50$

តារាងសញ្ញា $P'(x)$

x	$-\infty$	-50	0	50	$+\infty$
$P'(x)$	$+$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$

•ត្រង់ $x = 50$, $P'(x) = 0$ និងប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា P មានតម្លៃតូចបំផុតមួយ ។

គេបាន $y = \dfrac{2500}{x} = \dfrac{2500}{50} = 50\text{ m}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រវែងបណ្តោយ} = \text{ប្រវែងទទឹង} = 50\text{m}}$ ។

III. **ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល** :

គេមាន $(E): y'' - y = 0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 1 = 0$ នោះ $\lambda = \pm 1$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, A , B ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{y = Ae^{-x} + Be^{x}}$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)

គេមាន $y = Ae^{-x} + Be^{x}$ នាំឱ្យ $y' = -Ae^{-x} + Be^{x}$

ដោយ ក្រាបនៃចម្លើយកាត់អ័ក្ស $(y'y)$ ត្រង់ចំណុច $y = 4$

នោះ $y(0) = 4$

ហើយ បន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ ចំណុចនេះ គឺ $(0\,,\,4)$ ស្របទៅ

នឹងបន្ទាត់ $(D): y = 2x - 4$ នោះ $y'(0) = 2$

គេបាន $\begin{cases} Ae^{-0} + Be^{0} = 4 \\ -Ae^{-0} + Be^{0} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 4 \\ -A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 3 \\ A = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយមួយនៃ (E) កំណត់បានតាមលក្ខខណ្ឌគឺ

$\boxed{y = e^{-x} + 3e^{x}}$ ។

IV. **គណនាប្រូបាបចាប់បាន SITE តាមលំដាប់ នៃតួអក្សរ :**

ក. គេមិនដាក់ទៅវិញទេនូវតួអក្សរដែលទាញយកមកហើយ

គេមាន តួអក្សរនៃពាក្យ STATISTIQUE មាន 11 អក្សរ

គេបាន $P(\text{SITE})=\frac{2}{11}\times\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{660}$

ដូចនេះ ករណីចាប់ហើយមិនដាក់វិញ $\boxed{P(\text{SITE})=\frac{1}{660}}$ ។

ខ. គេដាក់ទៅវិញមុនយកអក្សរមួយទៀត

ករណីចាប់ហើយដាក់វិញ នោះចំនួនករណីអាចគឺនៅដដែល មិនប៉ះពាល់ដល់ការចាប់លើកក្រោយៗទៀត

គេបាន $P(\text{SITE})=\frac{2}{11}\times\frac{2}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{1}{11}=\frac{12}{14641}$

ដូចនេះ ករណីចាប់ហើយដាក់វិញ $\boxed{P(\text{SITE})=\frac{12}{14641}}$ ។

V. **ក. បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស :**

គេមាន $A(6,4,-2)$, $B(6,2,0)$, $C(4,2,-2)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(0,-2,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,-2,0)$ និង

$\overrightarrow{BC}=(-2,0,-2)$

គេបាន $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

ដោយ ΔABC មាន $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\boxed{ABC \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$ ។

ខ. គណនាតម្លៃ y និង z

គេមាន $S(3,y,z)$ នោះ $\overrightarrow{SA}=(-3,y-4,z+2)$

$\overrightarrow{SB}=(-3,y-2,z)$, $\overrightarrow{SC}=(-1,y-2,z+2)$

នាំឱ្យ $SA=\left|\overrightarrow{SA}\right|=\sqrt{(-3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2}$

$SB=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(y-2)^2+z^2}$

$SC=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2}$

ដោយ $SABC$ ជាពីរ៉ាមីតនិយ័តនោះ $SB=SC=SA$

$$\sqrt{(-3)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{(-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2}$$

$$9+(y-2)^2+z^2=1+(y-2)^2+(z+2)^2$$

$$8+z^2=z^2+4z+4$$

$$z=1$$

ចំពោះ $SA=SB$ និង $z=1$ គេបាន ៖

$$\sqrt{(-3)^2+(y-4)^2+3^2}=\sqrt{(-3)^2+(y-2)^2+1^2}$$

$$9+(y-4)^2+9=9+(y-2)^2+1$$

$$8+(y-4)^2=(y-2)^2$$

$$8+y^2-8y+16=y^2-4y+4$$

$$-4y+20=0$$

$$y=5$$

ដូចនេះ គណនាបានតម្លៃ $\boxed{y=5\ ,\ z=1}$ ។

VI. **ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ខុសពីសូន្យ :**

គេមាន $f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}$ មានន័យ លុះត្រាតែ $5^{2x}-1\neq 0$

នាំឱ្យ $5^{2x}\neq 1$ ឬ $5^{2x}\neq 5^0$ នោះ $x\neq 0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ កំណត់លើ } \mathbb{R}-\{0\}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស

គេមាន $f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}$

$$f(-x)=\frac{5^{-x}}{5^{-2x}-1}=\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^{2x}}-1}=\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1-5^{2x}}{5^{2x}}}$$

$$=\frac{1}{5^x}\times\frac{5^{2x}}{1-5^{2x}}=\frac{5^x}{1-5^{2x}}=-\frac{5^x}{5^{2x}-1}=-f(x)$$

ដោយ $f(-x)=-f(x)$ នោះ f ជាអនុគមន៍សេស

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍សេស}}$ ។

គ. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $]0,+\infty[$

គេមាន $f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}$ សិក្សាលើចន្លោះ $]0,+\infty[$

• លីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{5^x}{5^{2x}-1}=\frac{5^0}{0^+}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{5^{2x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{5^{2x}}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x}{5^{2x}-1}=\frac{0}{-1}=0$$

• អាស៊ីមតូត : ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមាន

សមីការ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

• ទិសដៅអថេរភាព :

ដេរីវេ តាមរូបមន្ត $y=a^{u(x)}\ \Rightarrow\ y'=u'(x)a^{u(x)}\ln a$

ដោយ $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$ នោះគេបាន ៖

$$f'(x)=\frac{\left(5^x\right)'\left(5^{2x}-1\right)-\left(5^{2x}-1\right)'\left(5^x\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{5^x\ln 5\cdot\left(5^{2x}-1\right)-2\cdot 5^{2x}\ln 5\cdot\left(5^x\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

$$=\frac{5^x\ln 5\cdot\left[5^{2x}-1-2\cdot 5^{2x}\right]}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

$$=-\frac{5^x\ln 5\cdot\left(5^{2x}+1\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}<0\ ,\ \forall x\in D$$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$, $f'(x)<0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ ចុះលើចន្លោះ $]0\,,+\infty[$ និងចន្លោះ $]-\infty\,,0[$

• តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$

ដោយ f ជាអនុគមន៍សេស មានគល់ O ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប គេទាញបាន ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $]-\infty\,,0[$ ដូចខាងក្រោម :

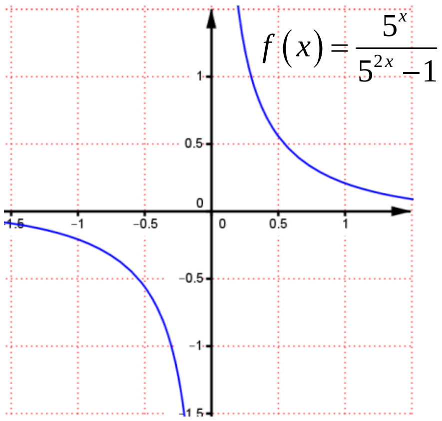
-បើ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

-បើ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ នោះ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 0$

• សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f



ឃ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=\dfrac{2}{3}$

គេបាន $\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}=\dfrac{2}{3}$ (សមីការមានន័យ $x\neq 0$)

$3\cdot 5^x=2\cdot 5^{2x}-2$

$-2\cdot 5^{2x}+3\cdot 5^x+2=0$

គេតាង $t=5^x$ ដែល $t>0$

គេបាន $-2t^2+3t+2=0$

$\Delta=9+16=25=5^2$

$$t=\frac{-3\pm 5}{2(-2)}=\left[\begin{array}{l}2\\-1/2\end{array}\right.$$

ចំពោះ $t=-\dfrac{1}{2}$ មិនយក ព្រោះ $t>0$

ចំពោះ $t=2$ សមមូល $5^x=2$ នាំឱ្យ $x=\log_5 2$

ដូចនេះ **សមីការមានឫស $x=\log_5 2$** ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០០៩

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $z^2-(5-i)z+8-i=0$ ។

ខ. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=29x^2+6x+2010$ ។ បើ $a>0$, $b>0$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ត្រីកោណកែងមួយមានប្រវែងអ៊ីប៉ូតេនុស 5dm ។ កំណត់ប្រវែងជ្រុងនៃមុំកែងរបស់ត្រីកោណកែង ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡារបស់វាមានតម្លៃអតិបរមា ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. ក. ចូរកំណត់ចំនួនថេរ a និង b ដើម្បីឱ្យចំពោះគ្រប់ x គេបាន $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x(x+1)}+\dfrac{b}{(x+1)(x+2)}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+.......+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

IV. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលក្រហម 3 ប៊ូលខ្មៅ 3 និងប៊ូលស 3 ។ គេចាប់យកប៊ូល 3 ពីក្នុងថង់ ដោយយកម្តងមួយៗ ហើយមិនដាក់វិញ ។

ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់យកបានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់យកបានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(1,4,3)$, $B(2,11,4)$, $C(-3,-5,4)$ ។

ក. បង្ហាញថា បីចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A , B , C ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(ax+b)$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=-1$ និងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y=\ln 2$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f ចំពោះតម្លៃ a និង b ដែលរកឃើញ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=-\dfrac{3}{2}$ និងបន្ទាត់ $x=0$ ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៩

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច :

គេមាន $z^2-(5-i)z+8-i=0$

$$\Delta=\left[-(5-i)\right]^2-4\cdot1\cdot(8-i)$$
$$=25-10i+i^2-32+4i$$
$$=25-10i+i^2-32+4i$$
$$=-8-6i=(3i)^2-6i+1$$
$$=(3i-1)^2$$

នាំឱ្យ $z=\dfrac{(5-i)\pm(3i-1)}{2}=\left[\begin{array}{l}2+i\\3-2i\end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{z=2+i\ ,\ z=3-2i}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)$

គេមាន $f(x)=29x^2+6x+2010$

នាំឱ្យ $f'(x)=58x+6$

ចំពោះ $x>0$ នោះ $f'(x)=58x+6>0$

មានន័យថា f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(0\ ,+\infty)$

គេបាន បើ $0<x_1<x_2$ នោះ $f(x_1)<f(x_2)$

ម្យ៉ាងទៀត ចំពោះ $a>0\ ,\ b>0$ គេបាន ៖

$$0<\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}\quad(1)$$
$$0<\frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b}\quad(2)$$

បូកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) គេបាន ៖

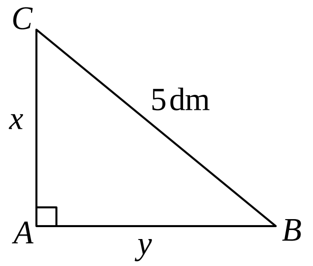
$$0<\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$
$$0<\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$

នាំឱ្យ $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)}$ ។

II. កំណត់ប្រវែងជ្រុងនៃមុំកែងរបស់ត្រីកោណកែង :

តាង $x\ ,\ y>0$ ជាជ្រុងជាប់មុំកែង គិតជា dm ដូចរូប ៖



តាមពីតាគ័រ $y=\sqrt{25-x^2}$ ដែល $0<x<5$

ផ្ទៃត្រីកោណ $S=\dfrac{1}{2}xy$ ឬ $S(x)=\dfrac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}$

នាំឱ្យ $S'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{25-x^2}+\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$$
$$=\frac{25-x^2-x^2}{2\sqrt{25-x^2}}=\frac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}$$

ឱ្យ $f'(x)=0$ សមមូល $\dfrac{25-2x^2}{2\sqrt{25-x^2}}=0$

នាំឱ្យ $25-2x^2=0$ នោះ $x=\pm\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

ហើយ $S\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)\sqrt{25-\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)^2}=\dfrac{25}{4}$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{5\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{5\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

• ត្រង់ $x=\dfrac{5\sqrt2}{2}$, $S'(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា S មានតម្លៃអតិបរមាមួយស្មើ $25/4$ ។

គេបាន $y=\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt2}{2}$

ដូចនេះ ជ្រុងជាប់មុំកែង $\boxed{x=y=\dfrac{5\sqrt2}{2}\text{dm}}$ ។

III. **ក. កំណត់ចំនួនថេរ a និង b** : (លំហាត់ដូចគ្រូបឋមឆ្នាំ 2004)

គេមាន $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x(x+1)}+\dfrac{b}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{a(x+2)+bx}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{(a+b)x+2a}{x(x+1)(x+2)}$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}a+b=0\\ 2a=1\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{2}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក

គេតាង $S=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+.......+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

គេមាន $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1/2}{x(x+1)}+\dfrac{-1/2}{(x+1)(x+2)}$

$\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$

យក $x=1,2,3,...,n$ គេបាន ៖

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{2\cdot3}\right]\\ \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2\cdot3}-\dfrac{1}{3\cdot4}\right]\\ \dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3\cdot4}-\dfrac{1}{4\cdot5}\right]\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\end{cases}$$

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{S=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)}$ ។

IV. **ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់យកបានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា** :

គេមាន ប៊ូលក្រហម 3 , ខ្មៅ 3 ,ស 3

គេចាប់ ប៊ូល 3 ពីក្នុងថង់ ម្ដងមួយៗ ហើយមិនដាក់វិញ

ចាប់បានឃ្លី 3 ពណ៌ដូចគ្នា អាចក្រហម 3ឬខ្មៅ 3 ឬស 3

គេបាន $P($ពណ៌ដូចគ្នា$)=P($ក្រ.3$)+P($ខ្ម3$)+P($ស3$)$

$=\left(\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{1}{28}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\text{ពណ៌ដូចគ្នា})=\dfrac{1}{28}}$ ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់យកបានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌

ចាប់បានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌ អាចជា ៖

កខស ឬ កសខ ឬ ខកស ឬ ខសក ឬ សកខ ឬ សខក

(ដែល ក=ពណ៌ក្រហម , ខ=ពណ៌ខ្មៅ , ស=ពណ៌ស)

ដោយប្រូបាបនៃករណីនីមួយៗមានសតម្លៃស្មើៗគ្នា $\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{3}{7}$

គេបាន $P($ប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌$)=6\left(\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{3}{7}\right)=\dfrac{9}{28}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\text{ប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌})=\dfrac{9}{28}}$ ។

V. **ក. បង្ហាញថា បីចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ**

គេមាន $A(1,4,3)$, $B(2,11,4)$, $C(-3,-5,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(1,7,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-4,-9,1)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 7 & 1\\ -4 & -9 & 1\end{vmatrix}=16\vec{i}-5\vec{j}+19\vec{k}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=16\vec{i}-5\vec{j}+19\vec{k}\neq\vec{0}$

នាំឱ្យ A , B , C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដូចនេះ $\boxed{\text{បីចំណុច } A , B \text{ និង } C \text{ មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ}}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A , B , C

ប្លង់ (P) រាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (P) កាត់តាមចំណុច $A(1,4,3)$

នាំឱ្យ $x_0=1$, $y_0=4$, $z_0=3$

ហើយ (P) កាត់បីចំណុច A , B , C នោះ (P) មានវ៉ិចទ័រ

ណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=16\vec{i}-5\vec{j}+19\vec{k}$

នាំឱ្យ $a=16$, $b=-5$, $c=19$

គេបាន (P) : $16(x-1)-5(y-4)+19(z-3)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):16x-5y+19z-53=0}$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{16^2+(-5)^2+19^2}=\sqrt{642}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{642}}{2}\ \text{ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$ ។

VI. ក. កំណត់តម្លៃ a និង b :

គេមាន $f(x)=\ln(ax+b)$ មានខ្សែកោង (C)

ដោយ ខ្សែកោង (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=-1$

និងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y=\ln 2$

គេបាន $\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(0)=\ln 2 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} \ln(-a+b)=0 \\ \ln b=\ln 2 \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} -a+b=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=1\,,\,b=2}$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f

ចំពោះ $a=1\,,\,b=2$ នោះ $f(x)=\ln(x+2)$

• ដែនកំណត់ $x+2>0$ នោះ $x>-2$

នាំឱ្យ $D=(-2\,,+\infty)$

• លីមីត $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\ln(x+2)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+2)=+\infty$

• អាស៊ីមតូត ដោយ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

• ទិសដៅអថេរភាព : ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}$

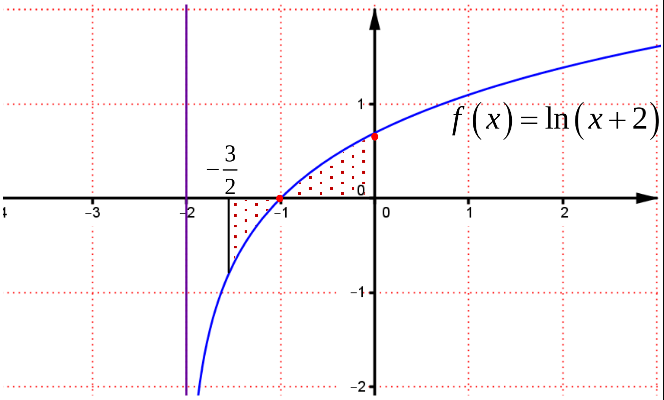
ចំពោះ $x>-2$ នោះ $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}>0$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $D=(-2\,,+\infty)$

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	-2 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

• **សង់ក្រាប**



➢**គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់**

តាមក្រាប គេបានផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយ

$$S=-\int_{-3/2}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{0} f(x)dx$$

$$=-\int_{-3/2}^{-1}\ln(x+2)dx+\int_{-1}^{0}\ln(x+2)dx$$

គណនា $\int\ln(x+2)dx$ តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

គេតាង $u=\ln(x+2)\ \Rightarrow\ du=\dfrac{1}{x+2}dx$

$dv=dx\ \Rightarrow\ v=x$

តាមរូបមន្ត $\int udv=uv-\int vdu$

គេបាន $\int\ln(x+2)dx$

$$=x\ln(x+2)-\int\frac{x}{x+2}dx$$

$$=x\ln(x+2)-\int\frac{x+2-2}{x+2}dx$$

$$=x\ln(x+2)-\int\left(1-2\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=x\ln(x+2)-x+2\ln(x+2)+c$$

$$=(x+2)\ln(x+2)-x+c$$

នាំឱ្យ $\int_{-3/2}^{-1}\ln(x+2)dx$

$$=\left[(x+2)\ln(x+2)-x\right]_{-3/2}^{-1}$$

$$=(0+1)-\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$$

ហើយ $\int_{-1}^{0}\ln(x+2)dx$

$$=\left[(x+2)\ln(x+2)-x\right]_{-1}^{0}$$

$$=(2\ln 2-0)-(0+1)=2\ln 2-1$$

$$S=-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right)+(2\ln 2-1)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+2\ln 2-1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2+2\ln 2-1=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ } S=\dfrac{3\ln 2-1}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៦ តុលា ២០០៨

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការ $\frac{x-1}{1991}+\frac{x-5}{1987}+\frac{x+7}{1999}+\frac{x-11}{1981}=4$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $\ln\sqrt{x^2}=\sqrt{2\ln(-x)}$ ។

គ. ដោះស្រាយវិសមីការ $0<\frac{x^2-2x-3}{x-2}<4$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ A, B, C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ ។

ខ. គណនា $F(x)=\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. គេមានថង់ពីរ A និង B ។ ក្នុងថង់ A មានប៊ូលពណ៌ស 1 និងពណ៌ខ្មៅ 3 ។ ក្នុងថង់ B មានប៊ូលពណ៌ស 5 និងពណ៌ខ្មៅ 3 ។ គេទាញប៊ូលមួយពីថង់ A និងប៊ូលមួយពីថង់ B ហើយប្តូរគ្នា ។

ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យក្នុងថង់ A មានតែប៊ូលពណ៌ខ្មៅបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នា ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យពណ៌ប៊ូលនៅក្នុងថង់នីមួយៗនៅដដែលបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នា ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y'+4y=0$ ។

ខ. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): y''+4y'+4y=-4x$ ។

កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $x\mapsto ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (F) ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់វិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យបួនចំណុចគឺ $A(-2,0,1)$, $B(0,10,3)$, $C(2,0,-1)$ និង $D(5,3,-1)$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A, B និង C

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច D ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

គ. សរសេរសមីការស្វ៊ែផ្ចិត D ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P) ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=3\sin x-2\sin^3 x$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃ f ។

ខ. រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ F កំណត់ដោយ $F(x)=a\cos x+b\cos^3 x$ ជាព្រីមីទីវនៃ f ។ **(២ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ ២០០៨

I. **ក. ដោះស្រាយសមីការ :**

$$\frac{x-1}{1991}+\frac{x-5}{1987}+\frac{x+7}{1999}+\frac{x-11}{1981}=4$$

$$\frac{x-1}{1991}-1+\frac{x-5}{1987}-1+\frac{x+7}{1999}-1+\frac{x-11}{1981}-1=0$$

$$\frac{x-1992}{1991}+\frac{x-1992}{1987}+\frac{x-1992}{1999}+\frac{x-1992}{1981}=0$$

$$(x-1992)\left(\frac{1}{1991}+\frac{1}{1987}+\frac{1}{1999}+\frac{1}{1981}\right)=0$$

នាំឱ្យ $x-1992=0$ នោះ $x=1992$

ហើយ $\frac{1}{1991}+\frac{1}{1987}+\frac{1}{1999}+\frac{1}{1981}\neq 0$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=1992}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

សមីការ $\ln\sqrt{x^2}=\sqrt{2\ln(-x)}$ មានន័យលុះត្រាតែ

$$\begin{cases}x\neq 0\\ \ln(-x)\geq 0\\ -x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\leq -1\\ x<0\end{cases}\Rightarrow x\leq -1$$

ចំពោះ $x\leq -1$ នោះ $\sqrt{x^2}=-x$

គេបាន $\ln(-x)=\sqrt{2\ln(-x)}$

គេតាង $t=\ln(-x)$

គេបាន $t=\sqrt{2t}$ សមមូល $t^2=2t$ ឬ $t(t-2)=0$

នាំឱ្យ $t=0\,,\,t=2$

គេបាន $\left[\begin{array}{l}\ln(-x)=0\\ \ln(-x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x=1\\ -x=e^2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-e^2\end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=-1\,,\ x=-e^2}$ ។

គ. ដោះស្រាយវិសមីការ $0<\frac{x^2-2x-3}{x-2}<4$

អាចសរសេរ $\begin{cases}\frac{x^2-2x-3}{x-2}>0\\ \frac{x^2-2x-3}{x-2}<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2-2x-3}{x-2}>0 & (1)\\ \frac{x^2-6x+5}{x-2}<0 & (2)\end{cases}$

កន្សោម x^2-2x-3 មានឫស $x=-1\,,\,x=3$

កន្សោម x^2-6x+5 មានឫស $x=1\,,\,x=5$

កន្សោម $x-2$ មានឫស $x=2$

ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធវិសមីការ ជាតម្លៃនៃ x បានពីប្រសព្វរវាងចម្លើយ (1) និងចម្លើយ (2) ។

តារាងសញ្ញា (1)

x	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
x^2-2x-3	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2-2x-3}{x-2}>0$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

ចម្លើយ $(1): x\in(-1\,,\,2)\cup(3\,,\,+\infty)$

តារាងសញ្ញា (2)

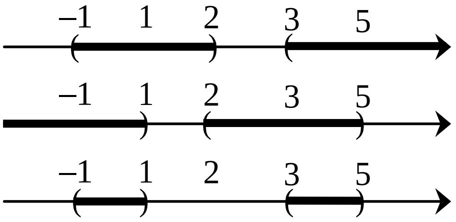
x	$-\infty$	1		2		5	$+\infty$
x^2-6x+5	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x^2-6x+5}{x-2}<0$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

ចម្លើយ $(2): x\in(-\infty\,,\,1)\cup(2\,,\,5)$

ចម្លើយ (1) :

ចម្លើយ (2) :

ចម្លើយ



ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{x\in(-1\,,\,1)\cup(3\,,\,5)}$ ។

II. **ក. កំណត់តម្លៃ** $A\,,\,B\,,\,C$:

គេមាន $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

$$=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x^2+2x+1)}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x^3+2x^2+x}$$

ផ្ទឹមនឹង $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 2A+B+C=20 \\ A=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ C=9 \\ A=6 \end{cases}$$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{A=6\,,\,B=-1\,,\,C=9}$ ។

ខ. គណនា $F(x)=\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$

ចំពោះ $A=6\,,\,B=-1\,,\,C=9$ រកឃើញខាងលើ

គេបាន $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}$

នាំឱ្យ $F(x)=\int\left(\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right)dx$

$=6\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{9}{x+1}+c$, c ថេរ

III. ក. រកប្រូបាបដែលថង់ A មានតែប៊ូលពណ៌ខ្មៅបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នា

គេមាន ថង់ A មានប៊ូលស 1 និងខ្មៅ 3

ថង់ B មានប៊ូលស 5 និងខ្មៅ 3

ដើម្បីឱ្យ ថង់ A មានតែប៊ូលពណ៌ខ្មៅបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នា លុះត្រាតែចាប់បានប៊ូលពណ៌សពីថង់ A និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅពីថង់ B

គេបាន $P(\,A$ មានតែប៊ូលខ្មៅ$\,)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{32}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\,A \text{ មានតែប៊ូលខ្មៅ}\,)=\frac{3}{32}}$ ។

ខ. រកប្រូបាបពណ៌ប៊ូលក្នុងថង់នីមួយៗនៅដដែលបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នា

ដើម្បីឱ្យពណ៌ប៊ូលនៅដដែលបន្ទាប់ពីប្តូរគ្នារួច គឺមានន័យថា ចាប់បានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា អាចជាសដូចគ្នា ឬខ្មៅដូចគ្នា

គេបាន $P(\,$សស ឬ ខខ$\,)=\left(\frac{1}{4}\times\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{16}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\,\text{ប៊ូលនីមួយៗនៅដដែល}\,)=\frac{7}{16}}$ ។

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

គេមាន $(E): y''+4y'+4y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+4\lambda+4=0$

ឬ $(\lambda+2)^2=0$

មានឫសឌុប $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0=-2$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $y=Axe^{\lambda_0x}+Be^{\lambda_0x}$, $A\,,\,B$ ថេរ

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y=Axe^{-2x}+Be^{-2x}}$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b

តាង $f(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (F)

នាំឱ្យ $f'(x)=a$ និង $f''(x)=0$

ដោយ f ជាចម្លើយនៃ $(F): y''+4y'+4y=-4x$

គេបាន $f''+4f'+4f=-4x$

$0+4a+4(ax+b)=-4x$

$4ax+(4a+4b)=-4x+0$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases} 4a=-4 \\ 4a+4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=-1\,,\,b=1}$ ។

V. ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P)

ប្លង់ត្រូវរករាង $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ ប្លង់ (P) កាត់ $A(-2\,,\,0\,,\,1)$

នោះ $x_0=-2\,,\,y_0=0\,,\,z_0=1$

ហើយ ប្លង់ (P) កាត់បីចំណុច $A\,,\,B\,,\,C$ នោះ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(2\,,\,10\,,\,2)$, $\overrightarrow{AC}=(4\,,\,0\,,\,-2)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-20\vec{i}+12\vec{j}-40\vec{k}$

នោះ $a=-20\,,\,b=12\,,\,c=-40$

គេបាន $(P): -20(x+2)+12(y-0)-40(z-1)=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P): 5x-3y+10z=0}$ ។

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់កាត់តាម D ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

សមីការបន្ទាត់ត្រូវរកតាង $(\ell): \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt\,,\,t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+ct \end{cases}$

ដោយ (ℓ) កាត់តាម $D(5\,,\,3\,,\,-1)$

នោះ $x_0=5\,,\,y_0=3\,,\,z_0=-1$

ហើយ (ℓ) កែងនឹងប្លង់ (P) នោះ (ℓ) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ $\vec{u}=(5\,,\,-3\,,\,10)$

នោះ $a=5\,,\,b=-3\,,\,c=10$

ដូចនេះ បន្ទាត់ត្រូវរករាង $\boxed{(\ell): \begin{cases} x=5+5t \\ y=3-3t \quad ,\,t\in\mathbb{R} \\ z=-1+10t \end{cases}}$ ។

គ. សរសេរសមីការស្វ៊ែផ្ចិត D ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P)

ដោយស្វ៊ែ (S) ប៉ះប្លង់ (P) នោះកាំស្វ៊ែជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅប្លង់ (P) នាំឱ្យ $R=d\left(D,(P)\right)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $D(5\,,3\,,-1)$ និង $(P):\ 5x-3y+10z=0$

$$R=\frac{|5\cdot 5-3\cdot 3+10(-1)|}{\sqrt{5^2+(-3)^2+10^2}}=\frac{|6|}{\sqrt{134}}\Rightarrow R^2=\frac{36}{134}=\frac{18}{67}$$

សមីការស្វ៊ែរាង $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

មានផ្ចិត $D(5\,,3\,,-1)$ នោះ $a=5\,,b=3\,,c=-1$

គេបាន $(S):(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\dfrac{18}{67}$

ដូចនេះ $\boxed{(S):(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\dfrac{18}{67}}$ ។

VI. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃ f

គេមាន $f(x)=3\sin x-2\sin^3 x$

• ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

• ខួបអនុគមន៍ $P=2\pi$ ព្រោះ $\forall x\in D$ គេបាន ៖

$$f(x+2\pi)=3\sin(x+2\pi)-2\sin^3(x+2\pi)$$
$$=3\sin x-2\sin^3 x=f(x)$$

• ភាពគូ-សេស : f ជាអនុគមន៍ សេស ព្រោះ ៖

$$f(-x)=3\sin(-x)-2\sin^3(-x)$$
$$=-3\sin x+2\sin^3 x$$
$$=-\left(3\sin x-2\sin^3 x\right)=-f(x)$$

នាំឱ្យ ក្រាបតាងអនុគមន៍ f មានគល់ O ជាផ្ចិតឆ្លុះ

ហេតុនេះ គេសិក្សាតែក្នុងចន្លោះ $[0\,,\pi]$

• ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x)=3\cos x-6\cos x\sin^2 x$

$$=3\cos x\left(1-2\sin^2 x\right)$$
$$=3\cos x\left(\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin^2 x\right)$$
$$=3\cos x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$$

គេឱ្យ $f'(x)=0$ ដើម្បីរកឫស

សមមូល $\left[\begin{array}{l}3\cos x=0\\ \cos x-\sin x=0\\ \cos x+\sin x=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi/2\\ x=\pi/4\\ x=3\pi/4\end{array}\right.$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\cos x-\sin x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\cos x+\sin x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

-ត្រង់ $x=\pi/4\,,f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាស្មើ $f(\pi/4)=\sqrt{2}$

-ត្រង់ $x=\pi/2\,,f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាស្មើ $f(\pi/2)=1$

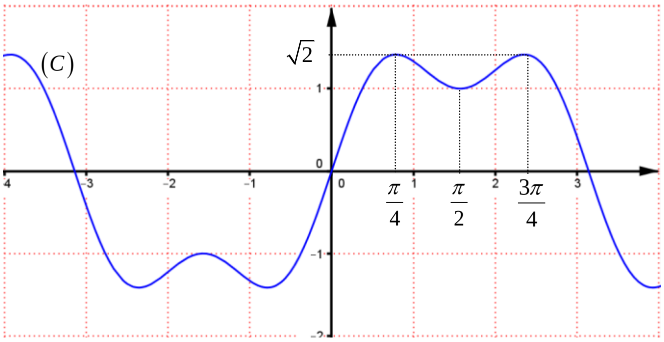
-ត្រង់ $x=3\pi/4\,,f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាស្មើ $f(3\pi/4)=\sqrt{2}$

• តារាងអថេរភាព

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0

• សង់ក្រាប

ដំបូងសង់តែក្នុងចន្លោះ $[0\,,\pi]$ រួចសង់ក្រាបឆ្លុះធៀបគល់ O



ខ. រកចំនួនពិត a និង b

បើ F ជាព្រីមីទីវនៃ f នោះគេបាន

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\left(3\sin x-2\sin^3 x\right)dx$$
$$=\int\sin x\left(3-2\sin^2 x\right)dx=\int\sin x\left(1+2\cos^2 x\right)dx$$
$$=\int\sin x dx+2\int\sin x\cos^2 x dx$$
$$=-\cos x-2\int(\cos x)'\cos^2 x dx=-\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$$

ផ្ទឹមនឹង $F(x)=a\cos x+b\cos^3 x$ នោះ $a=-1\,,b=-\dfrac{2}{3}$

ដូចនេះ រកបានចំនួនពិត $\boxed{a=-1\ ,\ b=-2/3}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៦ តុលា ២០០៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $2xi - y = \dfrac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$ ។

ខ. គេឱ្យ $z = \cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ ។ សរសេរ $(1+z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) = 0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E) ដែល $g(0) = 0$ និង $g'(0) = 1$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ ចំពោះ $x \neq 0$ និង $f(0) = \ln(m-1)$ ។ គណនាលីមីត $f(x)$ កាលណា x ខិតជិត 0 ។ កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅត្រង់ $x = 0$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លី ស 3 និងឃ្លីខ្មៅ 5 ។ គេចាប់យកឃ្លីម្តង 3 ចេញពីក្នុងថង់ ។ រកប្រូបាបដែលគេអាចចាប់យកបានឃ្លី ស 2 និងឃ្លីខ្មៅ 1 ។ **(១ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x-2}$ មានក្រាប (C) ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a , b , c ដើម្បីឱ្យ $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$ ចំពោះ $x \neq 2$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. បង្ហាញថាចំណុច $I(2\,,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ (P) និងស្វ៊ែ (S) ដែលមានសមីការ $(P): x + 2y + 2z + 5 = 0$, $(S):\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z = 0$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត និងប្រវែងកាំនៃស្វ៊ែ (S) ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S) ។

គ. រកសមីការបណ្តាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ២០០៧

I. ក. កំណត់ចំនួនពិត x និង y :

គេមាន $2xi - y = \dfrac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$

$$= \frac{3+3i-2i-2i^2}{(i-2)} = \frac{5+i}{(i-2)}$$

$$= \frac{(5+i)(i+2)}{(i-2)(i+2)} = \frac{5i+10+i^2+2i}{-1-4}$$

$$= \frac{9+7i}{-5} = -\frac{9}{5} - \frac{7}{5}i$$

តាមនិយមន័យចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា គេបាន ៖

$$\begin{cases} 2x = -\dfrac{7}{5} \\ -y = -\dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7}{10} \\ y = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

ដូចនេះ កំណត់បានចំនួនពិត $\boxed{x = -\dfrac{7}{10}\ ,\ y = \dfrac{9}{5}}$ ។

ខ. សរសេរ $(1+z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z = \cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$

នោះ $1+z = 1+\cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$

$$= 2\cos^2\frac{\pi}{9} + i2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

នាំឱ្យ $(1+z)^4 = \left[2\cos\dfrac{\pi}{9}\left(\cos\dfrac{\pi}{9} + i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)\right]^4$

$$(1+z)^4 = 16\cos^4\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+z)^4 = 16\cos^4\dfrac{\pi}{9}\left(\cos\dfrac{4\pi}{9} + i\sin\dfrac{4\pi}{9}\right)}$ ។

II. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

គេមាន $(E): g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) = 0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ មានឫស $\lambda = 2\ ,\ \lambda = 3$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) រាង $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, A, B ថេរ

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅគឺ $\boxed{y = Ae^{2x} + Be^{3x}}$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E) ដែល

គេមាន $g(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$

នោះ: $g'(x) = 2Ae^{2x} + 3Be^{3x}$

ដោយ $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae^0 + Be^0 = 0 \\ 2Ae^0 + 3Be^0 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases} \Bigg| \times(-2)$$

$$+\begin{cases} -2A - 2B = 0 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases}$$

$$B = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -1$$

ដូចនេះ ចម្លើយមួយគឺ $\boxed{g(x) = -e^{2x} + e^{3x}}$ ។

III. ➢គណនាលីមីត $f(x)$ កាលណា x ខិតជិត 0 :

គេមាន $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ ចំពោះ $x \neq 0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\times 1 = 2$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2}$ ។

➢ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$

f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$ និង $f(0) = \ln(m-1)$

គេបាន $\ln(m-1) = 2$ ឬ $m - 1 = e^2$ នោះ: $m = e^2 + 1$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{m = e^2 + 1}$ ។

IV. រកប្រូបាបដែលគេអាចចាប់យកបានឃ្លី ស 2 និងឃ្លី ខ្មៅ 1

គេមាន ឃ្លីស 3 និងឃ្លីខ្មៅ 5 ហើយគេចាប់យកឃ្លីម្តង 3

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(s) = C(8\ ,\ 3) = \dfrac{8!}{3!\,5!} = 56$

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(3,2)\times C(5,1) = 15$

គេបាន P(ស2 ,ខ1) $= \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{15}{56}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រូបាបគណនាបានគឺ P(ស2 ,ខ1)} = \dfrac{15}{56}}$ ។

V. **ក. កំណត់ចំនួនពិត** a , b , c :

គេមាន $g(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}$ ចំពោះ $x\neq 2$

គេបាន $g(x)=x-1-\dfrac{6}{x-2}$ (បានពីចែកពហុធា)

ផ្ទឹមនឹង $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ នោះគេទាញបាន

$a=1 , b=-1 , c=-6$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=1 , b=-1 , c=-6}$ ។

ខ. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C)

គេមាន $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}=\dfrac{4-6-4}{2+0^- -2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x-4}{x-2}=\dfrac{4-6-4}{2+0^+ -2}=-\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $g(x)=x-1-\dfrac{6}{x-2}$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{6}{x-2}\right)=0$

នោះបន្ទាត់ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

គ. បង្ហាញថាចំណុច $I(2 , 1)$ **ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប** (C)

បើ $I(a , b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ g

លុះត្រាតែ $g(2a-x)+g(x)=2b$

ចំពោះ $I(2 , 1)$ គេនឹងបង្ហាញថា $g(4-x)+g(x)=2$

គេមាន $g(x)=x-1-\dfrac{6}{x-2}$

នាំឱ្យ $g(4-x)=(4-x)-1-\dfrac{6}{(4-x)-2}$

$=-x+3-\dfrac{6}{-x+2}$

$=-x+3+\dfrac{6}{x-2}$

គេបាន $g(4-x)+g(x)$

$=\left(-x+3+\dfrac{6}{x-2}\right)+\left(x-1-\dfrac{6}{x-2}\right)=2$

ដោយ $g(4-x)+g(x)=2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុច } I(2 , 1) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប } (C)}$ ។

VI. **ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត និងប្រវែងកាំនៃស្វ៊ែ** (S) :

គេមាន $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$

$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2+4z)=0$

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+(z^2+4z+4)=9$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=3^2$

ទាញបាន $a=1 , b=2 , c=-2$ និងកាំ $r=3$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l}\text{ស្វ៊ែ } (S) \text{ មានកូអរដោនេផ្ចិតតាង } I(1 , 2 , -2) \\ \text{និងប្រវែងកាំ } r=3 \text{ ឯកតាប្រវែង}\end{array}}$ ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) **កាត់ស្វ៊ែ** (S)

រកចម្ងាយពីផ្ចិតស្វ៊ែ ទៅប្លង់ (P)

តាមរូបមន្ត $d(I , (P))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $(P): x+2y+2z+5=0$ នោះ

$a=1 , b=2 , c=2$ និង $d=5$

ហើយ ផ្ចិត $I(1, 2,-2)$ នោះ $x_0=1 , y_0=2 , z_0=-2$

នាំឱ្យ $d(I , (P))=\dfrac{|1\cdot 1+2\cdot 2+2(-2)+5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{|6|}{3}=2$

ដោយ $d(I, (P))=2<r=3$ នោះប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S)

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្លង់ } (P) \text{ កាត់ស្វ៊ែ } (S)}$ ។

គ. រកសមីការបណ្តាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) **ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ**(S)

តាង $(\alpha): ax+by+cz+d=0$ ជាបណ្តាសមីការប្លង់ត្រូវរក

ដោយ $(\alpha)\|(P)$ នោះ (α) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ដូចប្លង់ (P)

គេបាន $(\alpha): x+2y+2z+d=0$

តែ (α) ប៉ះ (S) មានន័យថា $d(I,(\alpha))=r=3$

គេបាន $\dfrac{|x_I+2y_I+2z_I+d|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3$ ដែល $I(1 , 2 , -2)$

$\dfrac{|1+2\cdot 2+2(-2)+d|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3$

$|1+d|=9$ នោះ $1+d=\pm 9$ នោះ $d=\left[\begin{array}{l}-10\\ 8\end{array}\right.$

ដូចនេះ បណ្តាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) មាន

$\boxed{x+2y+2z-10=0 , \ x+2y+2z+8=0}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៣ តុលា ២០០៦

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយវិសមីការ $2^x + 2^{3-x} \leq 9$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x , y គេបាន : $x^2\left(1+\sin^2 y\right)+2x\left(\sin y+\cos y\right)+1+\cos^2 y>0$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $(m+1)x^2-2mx+4(m+1)=0$ មានឫសដែលធំជាងគេនៅចន្លោះ $(-1\,,1)$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 2y''-3y'+y=0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយរបស់សមីការ (E) ដើម្បីឱ្យក្រាបតាងអនុគមន៍ g ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d) សមីការ $y=-\dfrac{1}{2}x$

នៅត្រង់ចំណុច $O(0\,,0)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. កោណមួយមានកម្ពស់ 15cm និងកាំបាត 6cm ។ រកកម្ពស់ និងកាំបាតនៃស៊ីឡាំងចារឹកក្នុងកោណនេះ ដើម្បីឱ្យវាមានមាឌអតិបរមា ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(1\,,1\,,0)$, $B(0,\,2\,,2)$, $C(1,-2,\,3)$ និង $D(1\,,-2\,,0)$ ។ រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាមបួនចំណុច A , B , C និង D ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=(ax+1)^2$ ចំពោះ $x<2$ និង $f(x)=-ax$ ចំពោះ $x\geq 2$ ។

ចូររកតម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅត្រង់ $x=2$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

VII. អនុគមន៍ f កំណត់លើ $D=[2\,,+\infty)$ ដែល $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{(2x-3)(x-1)^2}$ ។

ក. គណនា $a\,,b$ ដែល $f(x)=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(2x-3)}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$, $h(x)=\dfrac{1}{2x-3}$ ។

គ. ទាញរក $I=\int_2^3 f(x)\,dx$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ២០០៦

I. **ក. ដោះស្រាយវិសមីការ**

គេមាន $2^x+2^{3-x}\le 9$

$2^x+\frac{8}{2^x}-9\le 0$

គេតាង $t=2^x$ ដែល $t>0$

គេបាន $t+\frac{8}{t}-9\le 0$ គុណនឹង t មិនប្តូរទិសដៅ)

$t^2-9t+8\le 0$

ឱ្យ $t^2-9t+8=0$ តាមករណីពិសេស $t=1$, $t=8$

តារាងសញ្ញា

t	0	1		8	$+\infty$
$t^2-9t+8\le 0$	$+$	0	$-$	0	$+$

តាមតារាង $1\le t\le 8$ សមមូល $1\le 2^x\le 8$

ឬ $2^0\le 2^x\le 2^3$ នាំឱ្យ $0\le x\le 3$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{0\le x\le 3}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x , y គេបាន $f(x)>0$

$f(x)=x^2(1+\sin^2 y)+2x(\sin y+\cos y)+1+\cos^2 y$

មាន $\Delta'=(\sin y+\cos y)^2-(1+\sin^2 y)(1+\cos^2 y)$

$=\sin^2 y+2\sin y\cos y+\cos^2 y$

$-(1+\cos^2 y+\sin^2 y+\sin^2 y\cos^2 y)$

$=2\sin y\cos y-1-\sin^2 y\cos^2 y$

$=-(1-\sin y\cos y)^2$

ដោយ $\forall y\in\mathbb{R}$, $\sin y\cos y\ne 1$

នោះ $\Delta'=-(1-\sin y\cos y)^2<0$, $\forall y\in\mathbb{R}$

គេបាន កន្សោមមាន $\begin{cases}\Delta'<0\\ a=1+\sin^2 y>0\end{cases}$ នាំឱ្យ $f(x)>0$

ដូចនេះ $\boxed{x^2(1+\sin^2 y)+2x(\sin y+\cos y)+1+\cos^2 y>0}$

II. **កំណត់តម្លៃនៃ m**

គេមាន $(m+1)x^2-2mx+4(m+1)=0$

គេតាង $f(x)=(m+1)x^2-2mx+4(m+1)$

ដោយ សមីការមានឫសដែលធំជាងគេនៅចន្លោះ $(-1\,,1)$

លុះត្រាតែ $f(-1)\times f(1)<0$

ដោយ $f(-1)=(m+1)(-1)^2-2m(-1)+4(m+1)$

$=m+1+2m+4m+4=7m+5$

$f(1)=(m+1)(1)^2-2m(1)+4(m+1)$

$=m+1-2m+4m+4=3m+5$

គេបាន $(7m+5)(3m+5)<0$ (ជាត្រីធាដឺក្រេទី២)

គេឱ្យ $(7m+5)(3m+5)=0$ នោះ $m=-\frac{5}{7}$, $m=-\frac{5}{3}$

តារាងសញ្ញា

t	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$		$-\frac{5}{7}$	$+\infty$
$(7m+5)(3m+5)<0$	$+$	0	$-$	0	$+$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{m\in\left(-\frac{5}{3}\,,-\frac{5}{7}\right)}$ ។

III. **ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល**

គេមាន $(E):\ 2y''-3y'+y=0$

សមីការសម្គាល់ $2\lambda^2-3\lambda+1=0$ តាមករណីពិសេស

សមីការមានឫស $\lambda=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ $g(x)=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$, A , B ថេរ

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $\boxed{g(x)=Ae^x+Be^{\frac{1}{2}x}}$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយរបស់សមីការ (E)

គេមាន $g(x)=Ae^x+Be^{\frac{1}{2}x}$ នោះ $g'(x)=Ae^x+\frac{B}{2}e^{\frac{1}{2}x}$

ដើម្បីឱ្យក្រាបតាងអនុគមន៍ g ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d) សមីការ

$y=-\frac{1}{2}x$ នៅត្រង់ចំណុច $O(0\,,0)$ លុះត្រាតែ

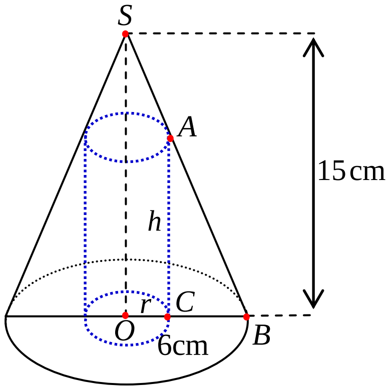
$\begin{cases}g'(0)=-\frac{1}{2}\\ g(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae^0+\frac{B}{2}e^0=-\frac{1}{2}\\ Ae^0+Be^0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=1\\ A=-1\end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយមួយនៃ (E) គឺ $\boxed{g(x)=-e^x+e^{\frac{1}{2}x}}$ ។

IV. រកកម្ពស់ និងកាំបាតនៃស៊ីឡាំងចារឹកក្នុងកោណនេះ

តាង h និង r ជាកម្ពស់ និងកាំនៃស៊ីឡាំង (គិតជា cm)

នាំឱ្យមាឌនៃស៊ីឡាំង $V=\pi r^2 h$



ដោយ ΔABC និង ΔSBO ជាត្រីកោណកែងមាន

$\angle B$ ជាមុំរួម នោះ $\Delta ABC \sim \Delta SBO$ (ម.ម)

វិបាក $\frac{AC}{SO}=\frac{BC}{BO}$ ឬ $\frac{h}{15}=\frac{6-r}{6}$ នោះ $h=\frac{5}{2}(6-r)$

គេបាន $V(r)=\pi r^2\times\frac{5}{2}(6-r)=\frac{5\pi}{2}(6r^2-r^3)$

$V'(r)=\frac{5\pi}{2}(12r-3r^2)$

$V''(r)=\frac{5\pi}{2}(12-6r)$

ដើម្បីឱ្យ V មានតម្លៃអតិបរមា លុះត្រាតែ $\begin{cases}V(r)=0\\ V''(r)<0\end{cases}$

គេបាន $\frac{5\pi}{2}(12r-3r^2)=0$ ឬ $r(12-3r)=0$

នាំឱ្យ $r=0$ មិនយក , $r=4\text{cm}$ យក

គេបាន $V''(4)=\frac{5\pi}{2}(12-6\cdot 4)=-30\pi<0$ ពិត

$h=\frac{5}{2}(6-r)=\frac{5}{2}(6-4)=5\text{cm}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{r=4\text{cm}\ ,\ h=5\text{cm}}$ ។

V. រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាមបួនចំណុច (ដូចគ្រូបឋម 2011)

គេមាន $A(1,1,0)$, $B(0,2,2)$,

$C(1,-2,3)$ និង $D(1,-2,0)$

សមីការស្វ៊ែរាង $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$(S)\cap A$ គេបាន $(1-a)^2+(1-b)^2+c^2=r^2$ (1)

$(S)\cap B$ គេបាន $a^2+(2-b)^2+(2-c)^2=r^2$ (2)

$(S)\cap C$ គេបាន $(1-a)^2+(-2-b)^2+(3-c)^2=r^2$ (3)

$(S)\cap D$ គេបាន $(1-a)^2+(-2-b)^2+c^2=r^2$ (4)

គេយក $(3)-(4)$ គេបាន $(3-c)^2-c^2=0$

$(3-c-c)(3-c+c)=0 \Rightarrow c=\frac{3}{2}$

គេយក $(1)-(4)$ គេបាន $(1-b)^2-(-2-b)^2=0$

$(1-b+2+b)(1-b-2-b)=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$

តាម(2) $a^2+\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2=r^2$

$a^2+\frac{25}{4}+\frac{1}{4}=r^2$ នោះ $a^2+\frac{13}{2}=r^2$ (5)

តាម(1) $(1-a)^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=r^2$

$1-2a+a^2+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=r^2$

$-2a+a^2+\frac{11}{2}=r^2$ (6)

យក $(5)-(6)$ $2a+1=0$ នាំឱ្យ $a=-\frac{1}{2}$

តាម (5) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{2}=r^2 \Leftrightarrow r^2=\frac{27}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{(S):\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}}$ ។

VI. រកតម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅត្រង់ $x=2$

គេមាន $f(x)=\begin{cases}(ax+1)^2 & \text{ចំពោះ } x<2\\ -ax & \text{ចំពោះ } x\geq 2\end{cases}$

ដើម្បីឱ្យ អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=2$ លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

ដោយ $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax+1)^2=(2a+1)^2$

$\lim_{x\to 2^+}(-ax)=-2a$

$f(2)=-2\cdot a=-2a$

គេបាន $(2a+1)^2=-2a$

$4a^2+4a+1=-2a$

$4a^2+6a+1=0$

$\Delta'=3^2-4=5$ នោះ $a=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ $\boxed{a=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{4}}$ ។

VII.ក. គណនា a , b

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{(2x-3)(x-1)^2}$ និង

$$f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(2x-3)}$$
$$=\frac{a(2x-3)+b(x-1)^2}{(2x-3)(x-1)^2}$$
$$=\frac{2ax-3a+bx^2-2bx+b}{(2x-3)(x-1)^2}$$
$$=\frac{bx^2+(2a-2b)x+(-3a+b)}{(2x-3)(x-1)^2}$$

ដោយផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នានៃអថេរ x

គេបាន $\begin{cases}b=1\\2a-2b=-4\\-3a+b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1\\a=-1\end{cases}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{a=-1\,,\,b=1}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(x)$ **និង** $h(x)$

គេមាន $g(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$, $h(x)=\dfrac{1}{2x-3}$

គេតាង $G(x)$, $H(x)$ ជាព្រីមីទីវរៀងគ្នានៃ $g(x)$, $h(x)$

គេបាន $G(x)=\int g(x)dx$

$$=\int\frac{-1}{(x-1)^2}dx$$
$$=\int\frac{-(x-1)'}{(x-1)^2}dx=\frac{1}{x-1}+c_1\ ,\ c_1 \text{ ថេរ}$$

$$H(x)=\int h(x)dx$$
$$=\int\frac{1}{2x-3}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln|2x-3|+c_2\ ,\ c_2 \text{ ថេរ}$$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវរៀងគ្នានៃ $g(x)$ និង $h(x)$ គឺ ៖

$$\boxed{G(x)=\frac{1}{x-1}+c_1\ ,\ H(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-3|+c_2}$$ ។

គ. ទាញរក $I=\int_2^3 f(x)dx$

$$I=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(2x-3)}\right)dx$$
$$=\int_2^3\frac{-1}{(x-1)^2}dx+\int_2^3\frac{1}{(2x-3)}dx$$
$$=\left[\frac{1}{x-1}\right]_2^3+\left[\frac{1}{2}\ln|2x-3|\right]_2^3$$
$$=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 1)$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{\ln 3}{2}$$

ដូចនេះ ទាញរកបាន $\boxed{I=\dfrac{\ln 3}{2}-\dfrac{1}{2}}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ០៣ វិច្ឆិកា ២០០៥

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $-2-2i$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $I=\int(2\sin x+3\cos x)dx$, $J=\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2-e^x$ ដែល $F(0)=1$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើនឹង 1 ត្រង់ $x=1$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច $M(1,2,-3)$ និងស្របជាមួយប្លង់ $(Q): 2x-4y-z+4=0$ រួចគណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ទាំងពីរ ។ **(១ពិន្ទុ)**

V. គេមានតួលេខ $0,1,2,3,4$ ។ ដោយគ្រាន់តែប្រើតួលេខទាំងនេះ តើគេអាចបង្កើតចំនួនបានប៉ុន្មាន ដែលធំជាង 2000 ?
(បញ្ជាក់ : ក្នុងចំនួននីមួយៗគ្មានតួលេខដដែលពីរដងទេ) **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ae^x+b$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) កាត់តាមគល់ O នៃតម្រុយអរតូណរមេ និងបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចនេះ ជាបន្ទាត់ពុះទី១ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f ចំពោះតម្លៃនៃ a និង b ដែលរកឃើញ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្ស $x'Ox$ បន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=1$ ។ **(៣ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ២០០៥

I. ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $-2-2i$

គេមាន $-2-2i$ (មាន $r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$)

$$=2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{2}{2\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}i\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{-2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}i\right)}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

គេមាន $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$

$$\Delta=\left[-(5-i)\right]^2-4(2+i)(2-2i)$$

$$=25-10i+i^2-4\left(4-4i+2i-2i^2\right)$$

$$=25-10i-1-24+8i=-2i$$

ដោយ $2i=1-2i-1=1-2i+i^2=(1-i)^2$

នាំឱ្យ $x=\dfrac{5-i\pm(1-i)}{2(2+i)}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{2+i}\\ \dfrac{3-i}{2+i}\end{array}\right.\Rightarrow x=\left[\begin{array}{l}\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i\\ \dfrac{7}{5}-\dfrac{2}{5}i\end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i\ ,\ x=\frac{7}{5}-\frac{2}{5}i}$ ។

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$$\mathbf{I}=\int(2\sin x+3\cos x)dx$$

$$=2\int\sin xdx+3\int\cos xdx$$

$$=-2\cos x+3\sin x+c$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I}=-2\cos x+3\sin x+c}$, c ជាចំនួនថេរ ។

$$\mathbf{J}=\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\int\frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)}dx$$

$$=\int\frac{1}{(x-3)}dx-\int\frac{1}{(x-2)}dx$$

$$=\ln|x-3|-\ln|x-2|+c=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+c$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{J}=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+c}$, c ជាចំនួនថេរ ។ (គ្រូប-០៥)

ខ. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេបាន $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(x^2-e^x\right)dx$

$$=\frac{x^3}{3}-e^x+c$$

ដោយ $F(0)=1$ សមមូល $\frac{0^3}{3}-e^0+c=1\Rightarrow c=2$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវគណនាបាន $\boxed{F(x)=\frac{x^3}{3}-e^x+2}$ ។

III. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

គេមាន $(E):\ y''-3y'+2y=0$

សមីការសម្គាល់គឺ $\lambda^2-3\lambda+2=0$ មាន $a+b+c=0$

តាមករណីពិសេសសមីការមានឫស $\lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=2$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E): $y=Ae^{\lambda_1x}+Be^{\lambda_2x}$, $A\ ,\ B$ ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{y=Ae^x+Be^{2x}\text{ ជាចម្លើយទូទៅនៃ }(E)}$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

ដោយ $y=Ae^x+Be^{2x}$ នោះ $y'=Ae^x+2Be^{2x}$

គេដឹងថា អនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើនឹង 1 ត្រង់ $x=1$

គេបាន $\begin{cases}y'(1)=0\\ y(1)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae+2Be^2=0\\ Ae+Be^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-\dfrac{1}{e^2}\\ A=\dfrac{2}{e}\end{cases}$

នាំឱ្យ $y=\frac{2}{e}e^x-\frac{1}{e^2}e^{2x}=2e^{x-1}-e^{2x-2}$

ដូចនេះ: (E) មានចម្លើយពិសេស $\boxed{y=2e^{x-1}-e^{2x-2}}$ ។

IV. ➢សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P)

សមីការប្លង់ $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (P) កាត់តាមចំណុច $M(1\ ,2\ ,-3)$

នោះ: $x_0=1\ ,\ y_0=2\ ,\ z_0=-3$

និង $(P)\parallel(Q): 2x-4y-z+4=0$ នាំឱ្យ (P)

មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,-4,-1)$

នោះ: $a=2\ ,\ b=-4\ ,\ c=-1$

ដូចនេះ: $\boxed{(P): 2(x-1)-4(y-2)-(z+3)=0}$ ។

➢គណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ទាំងពីរ

របៀបទី១ តាមរូបមន្ត $d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $(P):2(x-1)-4(y-2)-(z+3)=0$

$2x-4y-z+3=0$ នោះ $d_1=3$

$(Q):2x-4y-z+4=0$ នោះ $d_2=4$

នាំឱ្យ $d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$=\dfrac{|3-4|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

ដូចនេះ ចម្ងាយប្លង់ទាំងពីរគឺ $d=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$ ឯកតាប្រវែង ។

របៀបទី២ យកចំណុច $A(x,y,z)\in(P)$

គេយក $x=y=0$ ជំនួសក្នុង (P) ដើម្បីរក z

$(P):2(0-1)-4(0-2)-(z+3)=0$

$-2+8-z-3=0$ នោះ $z=3$

គេបាន $A(0,0,3)\in(P)$

ដោយ $d\left((P),(Q)\right)=d\left(A,(Q)\right)$

តែ $d\left(A,(Q)\right)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $A(0,0,3)\Rightarrow x_0=y_0=0\,,\ z_0=3$

$(Q):2x-4y-z+4=0$ នោះ

$a=2\,,\ b=-4\,,\ c=-1$

$d\left(A,(Q)\right)=\dfrac{|0+0-3+4|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

ដូចនេះ ចម្ងាយប្លង់ទាំងពីរគឺ $d=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$ ឯកតាប្រវែង ។

V. តើគេអាចបង្កើតចំនួនបានប៉ុន្មានដែលធំជាង 2000 ?(គ្រប.០៥)

ដោយលេខតាមខ្ទង់ដែលត្រូវប្រើមាន៥លេខ $0,1,2,3,4$ នោះចំនួនដែលធំជាង 2000 អាចជាលេខ 4 ខ្ទង់ ឬ 5 ខ្ទង់

• ចំពោះលេខ 4 ខ្ទង់ដែលធំជាង 2000 គឺ

ខ្ទង់ពាន់ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់រយ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ដប់ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់រាយ មាន 2 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $3\times4\times3\times2=72$ ចំនួន

• ចំពោះលេខ 5 ខ្ទង់ដែលធំជាង 2000 គឺ

ខ្ទង់ម៉ឺន មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ពាន់ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់រយ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់ដប់ មាន 2 ជម្រើស

ខ្ទង់រាយ មាន 1 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $4\times4\times3\times2\times1=96$ ចំនួន

សរុបចំនួនដែលធំជាង $2000=72+96=168$ ចំនួន

ដូចនេះ ចំនួនដែលអាចបង្កើតបានមាន 168 ចំនួន ។

VI. ក. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b

គេមាន $f(x)=ae^x+b$ មានខ្សែកោង (C)

នាំឱ្យ $f'(x)=ae^x$

ដោយ (C) កាត់តាមគល់ O នាំឱ្យ $f(0)=0$

$ae^0+b=0$ ឬ $b=-a\ (1)$

ហើយ បន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ នេះ

ជាបន្ទាត់ពុះទី១ $y=x$ នាំឱ្យ $f'(0)=1$

$ae^0=1\Rightarrow a=1$ ជំនួសក្នុង (1) $b=-1$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $a=1\,,\ b=-1$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C)

ចំពោះ $a=1\,,\ b=-1$ គេបាន $f(x)=e^x-1$

ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)$

លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)=0-1=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-1\right)=+\infty-1=+\infty$

អាស៊ីមតូត ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ នោះបន្ទាត់ $y=-1$

ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$

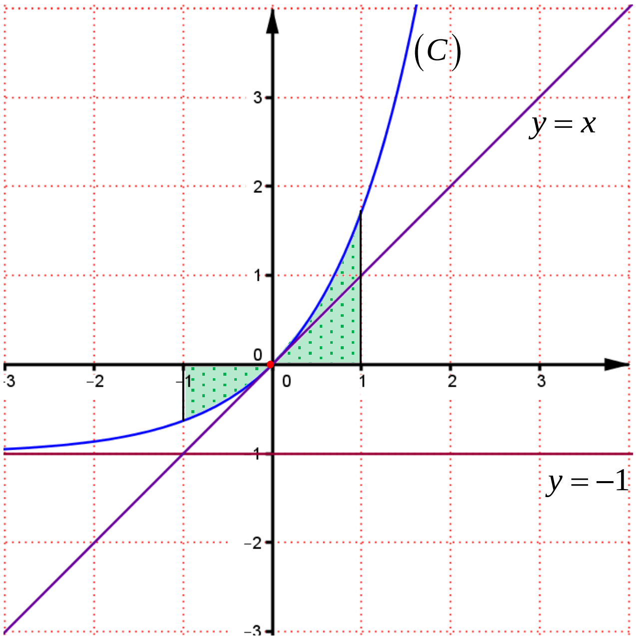
ដេរីវេ $f'(x)=e^x$ នោះ $f'(x)=e^x>0\,,\ \forall x\in D$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច និងគ្មានបរមាទេ

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ $+\infty$

➢សង់ខ្សែកោង (C)



គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់

តាមក្រាប គេបានផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដូចខាងក្រោម ៖

$$S=-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}\left(e^{x}-1\right)dx+\int_{0}^{1}\left(e^{x}-1\right)dx$$

$$=-\left[e^{x}-x\right]_{-1}^{0}+\left[e^{x}-x\right]_{0}^{1}$$

$$=-\left[(1-0)-\left(\frac{1}{e}+1\right)\right]+\left[(e-1)-(1-0)\right]$$

$$=\frac{1}{e}+e-2$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ $S=\frac{1}{e}+e-2$ ឯកតាផ្ទៃ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ
សម័យប្រឡង : ១៧ តុលា ២០០៤

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. រកចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យបំពេញលក្ខខណ្ឌ $(x+y)+(2x-y)i=2-5i$ ។

ខ. ចូរសរសេរ $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}$ ជារាង $a+bi$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. រកក្រឡាផ្ទៃ S ដែលកំណត់ដោយខ្សែកោង $y=\sin x$ ចំពោះ $0\le x\le 3\pi$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ $I=\int x\cos x dx$, $J=\int \frac{5}{5x-7}dx$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់គេមានបីចំណុច $A(1,4,2)$, $B(2,1,3)$, $C(-2,2,-1)$ ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃ ΔABC រួចបង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែង ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេសរសេរលេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 រៀងគ្នាលើកាត់ 9 ។ គេចាប់យកកាត់នេះម្តងមួយៗពីក្នុងថង់ ចំនួន 3 កាត់ មកតម្រៀបតាមលំដាប់ដែលចាប់បាន ។

ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យកាត់ទាំងបីដែលចាប់បាន បង្កើតបានជាចំនួន 123 ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យកាត់ទាំងបីដែលចាប់បាន បង្កើតបានជាចំនួនចែកដាច់នឹង 125 ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. គណនាតម្លៃអតិបរមា អប្បបរមា និងរកកូអរដោនេចំណុចរបត់ របស់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=3xe^{-x^2}$ ។ សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះ ។ **(២ពិន្ទុ)**

VI. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'+2y=x^2$ ។

ក. កំណត់អនុគមន៍ពហុធា g មានសមីការដឺក្រេទី២ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $f-g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): y'+2y=0$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ (E') ។ ទាញរកចម្លើយនៃសមីការ (E) ។ **(២ពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ២០០៤

I. **ក. រកចំនួនពិត x និង y**

គេមាន $(x+y)+(2x-y)i=2-5i$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$

បូកអង្គ $3x=-3 \Rightarrow x=-1$

ដោយ $x+y=2 \Rightarrow y=2-x=2-(-1)=3$

ដូចនេះ រកបាន $\boxed{x=-1\,,\; y=3}$ ។

ខ. សរសេរ $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}$ ជារាង $a+bi$

តាង $Z=1+i\sqrt{3}$ មាន $r=\sqrt{1+\sqrt{3}^2}=2$

នាំឱ្យ $Z=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

គេបាន $Z^{10}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{10}$

$=2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$

$=1024\left[\cos\left(2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

$=1024\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

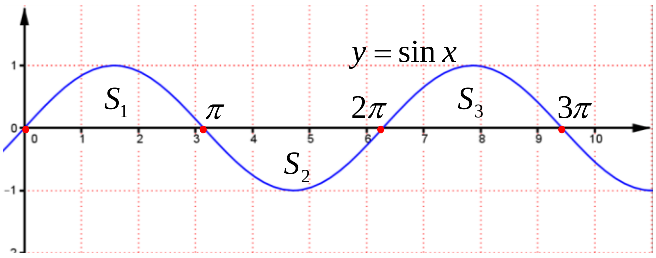
$=1024\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=-512-512\sqrt{3}\,i$

ដូចនេះ $\boxed{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}=-512-512\sqrt{3}\,i}$ ។

II. **ក. រកក្រឡាផ្ទៃ S**

ដើម្បីដឹងថា ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=\sin x$ នៅខាងលើ ឬ ខាងក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស គេត្រូវគូសខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=\sin x$ ចំពោះ $0\le x\le 3\pi$



តាមរូប $S=S_1-S_2+S_3$

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx$$

$$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}-\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}+\left[-\cos x\right]_{2\pi}^{3\pi}$$

$$=-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi-\cos 3\pi+\cos 2\pi$$

$$=-(-1)+1+1+1-(-1)+1=6$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃគណនាបាន } S=6 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$\mathbf{I}=\int x\cos x\,dx$ (តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

គេតាង $u=x$ នោះ $du=dx$

$dv=\cos x\,dx$ នោះ $v=\sin x$

តាមរូបមន្ត $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

$\mathbf{I}=\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=x\sin x-(-\cos x)+c$

$=x\sin x+\cos x+c$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I}=x\sin x+\cos x+c}$ ។

$$\mathbf{J}=\int\frac{5}{5x-7}dx=\int\frac{(5x-7)'}{5x-7}dx=\ln|5x-7|+c$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{J}=\ln|5x-7|+c}$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

III. ➢គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃ ΔABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

គេមាន $A(1\,,4\,,2)\,,\,B(2\,,1\,,3)\,,\,C(-2\,,2\,,-1)$

នោះ $\overrightarrow{AB}=(1\,,-3\,,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-3\,,-2\,,-3)$

នាំឱ្យ $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 1\\ -3 & -2 & -3\end{vmatrix}=11\vec{i}-0\vec{j}-11\vec{k}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{11^2+0^2+(-11)^2}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\frac{11\sqrt{2}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

➢ បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែង

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=xx'+yy'+zz'$

$$=(1)(-3)+(-3)(-2)+(1)(-3)=0$$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ នោះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

ដូចនេះ $\boxed{ABC \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } A \text{ ត្រូវបានបង្ហាញ}}$ ។

IV. ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យកាក់បង្កើតបានជាចំនួន 123

ដោយ គេចាប់យកកាក់នេះម្តងមួយៗពីក្នុងថង់ចំនួនបី

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាចថយចុះម្តងមួយ

ហើយ លេខនីមួយៗមានមួយលេខដូចគ្នាជាករណីស្រប

គេបាន $P(123)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{504}$

ដូចនេះ $\boxed{P(123)=\frac{1}{504}}$ ។

ខ. រកប្រូបាបបង្កើតបានជាចំនួនចែកដាច់នឹង 125

ចំនួនដែលអាចចែកដាច់នឹង 125 មាន

125 , 250 , 375 , 500 , 625 , 750 , 875

តែចំនួនដែលមានលេខ 0 មិនអាចយកបាន នោះនៅសល់តែ

125 , 375 , 625 , 875 គេបានប្រូបាប ៖

$P(\text{ចែកដាច់}125)$

$=P(125)+P(375)+P(625)+P(875)$

$=\frac{1}{504}+\frac{1}{504}+\frac{1}{504}+\frac{1}{504}=\frac{4}{504}=\frac{1}{126}$

ដូចនេះ $\boxed{P(\text{ចែកដាច់}125)=\frac{1}{126}}$ ។

V. ក. គណនាតម្លៃអតិបរមា អប្បបរមា

គេមាន $y=3xe^{-x^2}$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

ដេរីវេ $y'=(3x)'\cdot e^{-x^2}+3x\left(e^{-x^2}\right)'$

$=3e^{-x^2}-6x^2e^{-x^2}$

$=3e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$

ឱ្យ $y'=0 \Leftrightarrow 3e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=0$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}$, $3e^{-x^2}>0$ នោះ y' សញ្ញាដូច $1-2x^2$

នាំឱ្យ $\left(1-2x^2\right)=0$ នោះ $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

គេបាន $y\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$y'=3e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

•ត្រង់ $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'=0$ និងប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា y មានតម្លៃអប្បបរមាមួយស្មើ $\boxed{-\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}}$ ។

•ត្រង់ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'=0$ និងប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា y មានតម្លៃអតិបរមាមួយស្មើ $\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}}$ ។

➢រកកូអរដោនេចំណុចរបត់ របស់ខ្សែកោង

គេដឹងថា អាប់ស៊ីសនៃចំណុចរបត់ គឺជាឫសនៃសមីការ $y''=0$

គេមាន $y'=3e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$

$y''=-6xe^{-x^2}\left(1-2x^2\right)+(-4x)\left(3e^{-x^2}\right)$

$=\left(-2x\left(1-2x^2\right)-4x\right)\left(3e^{-x^2}\right)$

$=3e^{-x^2}\left(4x^3-6x\right)$

$=6xe^{-x^2}\left(2x^2-3\right)$

ឱ្យ $y''=0 \Leftrightarrow 6xe^{-x^2}\left(2x^2-3\right)=0$

ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}$, $6e^{-x^2}>0$ នោះ $x\left(2x^2-3\right)=0$

នាំឱ្យ $x=0$, $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

គេបាន $y(0)=3\cdot 0\cdot e^{0}=0$

$y\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=3\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cdot e^{-\frac{3}{2}}=\pm\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$

ដូចនេះ ចំណុចរបត់មានបីតាងដោយ I មាន

$$\boxed{I_1(0,0)\ ,\ I_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)\ ,\ I_2\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)}$$

ខ. សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍នេះ

ដើម្បីឱ្យងាយស្រួលក្នុងការសង់ក្រាប គេត្រូវមានតារាងអថេរភាព

$\lim\limits_{x\to-\infty}3xe^{-x^2}$ តាង $t=-x$, បើ $x\to-\infty$ នោះ $t\to+\infty$

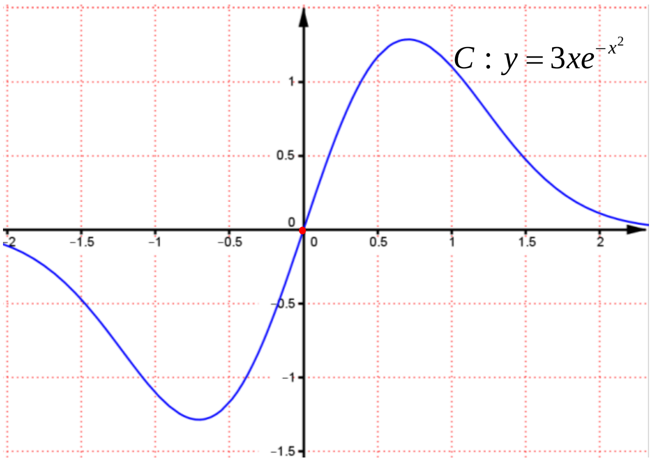
$\lim\limits_{t\to+\infty}-3te^{-t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-3t}{e^{t^2}}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}3xe^{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{e^{x^2}}=0$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

គេសង់ក្រាបបានដូចខាងក្រោម



VI. ក. កំណត់អនុគមន៍ពហុធា g មានសមីការដឺក្រេទី២

ពហុធាដឺក្រេទី២ នៃ g មានរាង $g(x)=ax^2+bx+c$

គេបាន $g'(x)=2ax+b$

ដោយ g ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E): y'+2y=x^2$

គេបាន $g'+2g=x^2$

$(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=x^2$

$2ax^2+(2a+2b)x+(b+2c)=x^2+0x+0$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}2a=1\\2a+2b=0\\b+2c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1/2\\b=-1/2\\c=1/4\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $f-g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): y'+2y=0$

បើ $f-g$ ជាចម្លើយនៃ $(E'): y'+2y=0$

គេបាន $(f-g)'+2(f-g)=0$

$f'-g'+2f-2g=0$

$f'+2f=g'+2g$

$f'+2f=x^2$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាចម្លើយនៃ } (E): y'+2y=x^2}$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (E')

គេមាន $(E'): y'+2y=0$

មានចម្លើយទូទៅរាង $y_c=Ae^{-ax}$, A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ (E') មានចម្លើយ $\boxed{y_c=Ae^{-2x}}$ ។

➤ទាញរកចម្លើយនៃសមីការ (E)

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $(E): y'+2y=x^2$

មានរាង $f=$ ចម្លើយទូទៅអូម៉ូសែន $+$ ចម្លើយពិសេស

$f=y_c+g$

$f=Ae^{-2x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

ដូចនេះ (E) មានចម្លើយ $\boxed{f=Ae^{-2x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១៥ តុលា ២០០៣

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. សរសេរសចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $1+i\sqrt{3}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $|z|-z=1+2i$, (z ជាចំនួនកុំផ្លិច) ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. គណនាដេរីវេទី 5 នៃអនុគមន៍ $f(x)=x^5-2x^4+3x^3-2$ ។

ខ. កំណត់ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $h(x)=x^n$, $(n\in\mathbb{N}^*)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=\cos x$ ដែលខ្សែកោងតាង $F(x)$ កាត់តាមចំណុច $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. រកចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ $y''-3y'+2y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=3$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ពីរ (α) និង (β) មានសមីការរៀងគ្នាគឺ : $3x-2y+2z-5=0$ និង $4x+5y-z+1=0$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្លង់ (α) អរតូកូណាល់ប្លង់ (β) ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ ដែលជាប្រសព្វនៃប្លង់ (α) និង (β) ។ **(២ពិន្ទុ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{x^2-4x+3}$ ។

ក. រកតម្លៃនៃ a និង b ដោយដឹងថាអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x=2$ ។

ខ. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ចំពោះតម្លៃនៃ a និង b ដែលបានរកឃើញ ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ២០០៣

I. **ក. សរសេរសចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ**

គេមាន $1+i\sqrt{3}$ (មាន $r=\sqrt{1^2+\sqrt{3^2}}=2$)

$=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $|z|-z=1+2i$ និង z ជាចំនួនកុំផ្លិច

គេតាង $z=a+bi$ នោះ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

គេបាន $\sqrt{a^2+b^2}-(a+bi)=1+2i$

$\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)+(-b)i=1+2i$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=1\\ b=-2\end{cases}$

$\begin{cases}\sqrt{a^2+4}-a=1 \ (1)\\ b=-2\end{cases}$

តាម (1) $\sqrt{a^2+4}=a+1$ (លើកជាការេ)

$a^2+4=a^2+2a+1$

$a=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{z=\frac{3}{2}-2i}$ ។

II. **ក. គណនាដេរីវេទី 5 នៃអនុគមន៍ f**

គេមាន $f(x)=x^5-2x^4+3x^3-2$

$f(x)=x^5-2x^4+3x^3-2$

$f'(x)=5x^4-8x^3+9x^2$

$f''(x)=20x^3-24x^2+18x$

$f'''(x)=60x^2-48x+18$

$f^{(4)}(x)=120x-48$

$f^{(5)}(x)=120$

ដូចនេះ ដេរីវេទី 5 គឺ $\boxed{f^{(5)}(x)=120}$ ។

ខ. កំណត់ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $h(x)=x^n$

$h'(x)=nx^{n-1}$

$h''(x)=n(n-1)x^{n-2}$

$h'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$h^{(4)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$

....

$h^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)\times\ldots\times2\times1\times x^{n-n}=n!$

ដូចនេះ ដេរីវេទី n គណនាបាន $\boxed{h^{(n)}(x)=n!}$ ។

III. **រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$**

គេបាន $F(x)=\int f(x)dx=\int\cos xdx=\sin x+c$

ដោយ ខ្សែកោងតាង $F(x)$ កាត់តាមចំណុច $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

គេបាន $\sin\frac{\pi}{2}+c=0 \Rightarrow c=-1$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវគណនាបានគឺ $\boxed{F(x)=\sin x-1}$ ។

IV. **រកចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល**

គេមាន $y''-3y'+2y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-3\lambda+2=0$

តាមករណីពិសេស $a+b+c=0$ នោះ $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$

ចម្លើយទូទៅរាង $y=Ae^{\lambda_1x}+Be^{\lambda_2x}$, A, B ថេរ

គេបាន $y=Ae^x+Be^{2x}$

នាំឱ្យ $y'=Ae^x+2Be^{2x}$

ដោយ $\begin{cases}y(1)=1\\ y'(1)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae+Be^2=1 & (1)\\ Ae+2Be^2=3 & (2)\end{cases}$

យក $(2)-(1)$ គេបាន $Be^2=2 \Rightarrow B=2e^{-2}$

តាម (1) $Ae+2e^{-2}\cdot e^2=1 \Rightarrow A=-e^{-1}$

គេបាន $y=Ae^x+Be^{2x}$

$=-e^{-1}\cdot e^x+2e^{-2}\cdot e^{2x}$

$=-e^{x-1}+2e^{2x-2}$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ

$\boxed{y=-e^{x-1}+2e^{2x-2}}$ ។

V. **ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្លង់ (α) អរតូកូណាល់ប្លង់ (β)**

គេមាន $(\alpha): 3x-2y+2z-5=0$

មានវិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1=(3\,,-2\,,2)$

$(\beta): 4x+5y-z+1=0$

មានវិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_2=(4\,,5\,,-1)$

បើ $(\alpha)\perp(\beta)$ លុះត្រាតែ $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$ នោះ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$

ដោយ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=xx'+yy'+zz'$

$=(3)(4)+(-2)(5)+(2)(-1)$

$=12-10-2=0$ ពិត

ដូចនេះ ប្លង់ (α) អរតូកូណាល់ប្លង់ (β) ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់

តាង $\ell:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\,,\,t\in\mathbb{R}\\z=z_0+ct\end{cases}$ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់

ប្រសព្វនៃប្លង់ (α) និង (β)

គេមាន $\begin{cases}(\alpha): 3x-2y+2z-5=0\\(\beta): 4x+5y-z+1=0\end{cases}$ (គេយក $z=t$)

$\begin{cases}3x-2y=5-2t & \times5\\4x+5y=t-1 & \times2\end{cases}$

$\begin{cases}15x-10y=25-10t\\8x+10y=2t-2\end{cases}$

$23x=23-8t \quad\Rightarrow\quad x=1-\dfrac{8}{23}t$

ដោយ $3x-2y=5-2t$

$3\left(1-\dfrac{8}{23}t\right)-2y=5-2t$

$3-\dfrac{24}{23}t-2y=5-2t$

$69-24t-46y=115-46t$

$46y=-46+22t$

$y=-1-\dfrac{11}{23}t$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតគឺ $\begin{cases}x=1-\dfrac{8}{23}t\\y=-1-\dfrac{11}{23}t\quad,\ t\in\mathbb{R}\\z=t\end{cases}$ ។

VI. **ក. រកតម្លៃនៃ a និង b**

ដោយ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 4 ត្រង់ $x=2$

គេបាន $\begin{cases}f'(2)=0\\f(2)=4\end{cases}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{ax^2+bx}{x^2-4x+3}$ នោះគេបាន ៖

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2-4x+3)-(2x-4)(ax^2+bx)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(2)=\frac{(4a+b)(2^2-4\cdot2+3)-(4-4)(ax^2+bx)}{(2^2-4\cdot2+3)^2}$$

$$=\frac{(4a+b)(-1)}{(-1)^2}=-4a-b$$

នាំឱ្យ $\begin{cases}f'(2)=-4a-b=0\\f(2)=\dfrac{a\cdot2^2+b\cdot2}{2^2-4\cdot2+3}=4\end{cases}$

$\begin{cases}-4a-b=0\\-4a-2b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-4\\a=1\end{cases}$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $a=1\,,\,b=-4$ ។

ខ. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f

ចំពោះ $a=1\,,\,b=-4$

គេបាន $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=\dfrac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}$

ដែនកំណត់ $x^2-4x+3\neq0$ នោះ $x\neq1\,,\,x\neq3$

ដូចនេះ $D=(-\infty\,,1)\cup(1\,,3)\cup(3\,,+\infty)$

លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}=1$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{1(-3)}{0^-(-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{1(-3)}{0^+(-2)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{3(-1)}{2(0^-)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{3(-1)}{2(0^+)}=-\infty$$

អាស៊ីមតូត

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ដេរីវេ

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2-4x+3)-(2x-4)(ax^2+bx)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$=\frac{(2x-4)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$=\frac{(2x-4)(x^2-4x+3-x^2+4x)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$=\frac{6(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$$

ឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{6(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}=0$

$\forall x\in D\,,\,(x^2-4x+3)^2>0$ ជានិច្ច

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x-2$ ដែលមានឫស $x=2$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$

ត្រង់ $x=2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាមួយស្មើ $f(2)=-4$

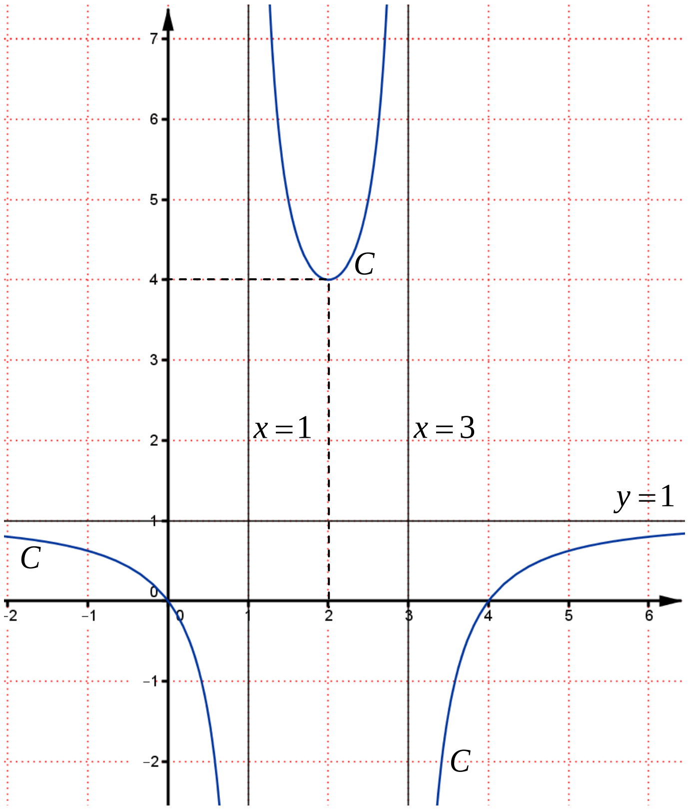
តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$f(x)$	1 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-4	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ 1

សង់ក្រាប និងអាស៊ីមតូត

តារាងតម្លៃលេខនៃក្រាប C

x	0	2	4
y	0	-4	0



ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតមូលដ្ឋាន បង្រៀននៅអនុវិទ្យាល័យ

សម័យប្រឡង : ១១ តុលា ២០០២

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $x^2-2x+5=0$ ។

ខ. គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $8-6i$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ : $I=\int \cos^2 x dx$, $J=\int x\sin x dx$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=2x(x^3+1)$ ដោយដឹងថាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍នេះស្មើ 3 កាលណា $x=-1$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x-1}{|x|+1}$ ។

ក. សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

ខ. តើអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ ឬទេ ? **(១ពិន្ទុ)**

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y'+4y=0$ ។

ខ. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): y''+4y'+4y=-4x$ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដែលអនុគមន៍ $\varphi: x\mapsto ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (F) ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2,2,2)$, $B(2,0,1)$ និង $C(4,1,-1)$ ។

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B ។

ខ. រកសមីការប្លង់កាត់តាមចំណុចទាំងបីនេះ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ។

ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងក្រាបអនុគមន៍ f ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) បន្ទាត់ $x=2$ និង $x=5$ ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម ឆ្នាំ២០០២

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

គេមាន $x^2-2x+5=0$

$$x^2-2x+1=-4$$
$$(x+1)^2=-4$$
$$x+1=\pm\sqrt{-4}$$
$$x=-1\pm 2i$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=-1\pm 2i}$ ។

ខ. គណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $8-6i$

គេតាង z ជាឫសការេនៃចំនួន $8-6i$

គេបាន $z^2=8-6i$

នាំឱ្យ $z=\pm\sqrt{8-6i}$

$$=\pm\sqrt{9-6i-1}$$
$$=\pm\sqrt{9-6i+i^2}$$
$$=\pm\sqrt{(3-i)^2}=\pm(3-i)$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ឫសការេនៃ } 8-6i \text{ ស្មើនឹង } 3-i\ ,\ -3+i}$ ។

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$\mathbf{I}=\int\cos^2 x\,dx$ (តាម $2\cos^2 x=1+\cos 2x$)

$$=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+c \quad , c \text{ ជាចំនួនថេរ}$$
$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c}$ ។

$\mathbf{J}=\int x\sin x\,dx$ (ប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក)

គេតាង $u=x$ នោះ $du=dx$

$dv=\sin x\,dx$ នោះ $v=-\cos x$

រូបមន្ត $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

គេបាន $\int x\sin x\,dx=-x\cos x-\int -\cos x\,dx$

$$=-x\cos x+\sin x+c \quad , c \text{ ថេរ}$$

ដូចនេះ $\boxed{J=-x\cos x+\sin x+c}$ ។

ខ. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=2x(x^3+1)$

គេតាង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

នាំឱ្យ $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x(x^3+1)dx$

$$=2\int(x^4+x)dx$$
$$=2\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}\right)+c$$

ដោយ $F(-1)=3$ នោះ $2\left(\frac{(-1)^5}{5}+\frac{(-1)^2}{2}\right)+c=3$

គេបាន $-\frac{2}{5}+1+c=3 \quad \Rightarrow c=\frac{12}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=\frac{2x^5}{5}+x^2+\frac{12}{5}}$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

III. ក. សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$

គេមាន $f(x)=\frac{x-1}{|x|+1}=\begin{cases}\frac{x-1}{x+1} & \text{បើ } x\ge 0\\ -1 & \text{បើ } x<0\end{cases}$

អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ វាផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$$

ដោយ $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$
$$f(0)=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

នាំឱ្យ $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=-1$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ } x=0}$ ។

ខ. តើអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ ឬទេ ?

បើ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $f'_-(0)=f'_+(0)$

តាមនិយមន័យដេរីវេ $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

គេបាន $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1-(-1)}{x}=\frac{0}{0^-}=0$

និង $f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x-1}{x+1}-(-1)}{x}=\lim_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x-1+x+1}{x+1}}{x}$

$=\lim_{x\to0^+}\dfrac{\frac{2x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to0^+}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{0+1}=2$

ដោយ $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ នោះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ គ្មានដេរីវេត្រង់ } x=0 \text{ ទេ}}$ ។

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

គេមាន $(E): y''+4y'+4y=0$

គេបាន សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+4\lambda+4=0$ ឬ $(\lambda+2)^2=0$

នោះ សមីការសម្គាល់មានឫសឌុប $\lambda_0=-2$

សមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅរាង

$y_c=Ae^{\lambda_0 x}+Bxe^{\lambda_0 x}$, A,B ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ $\boxed{y_c=Ae^{-2x}+Bxe^{-2x}}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $\varphi: x\mapsto ax+b$ អាចសរសេរ $\varphi(x)=ax+b$

នាំឱ្យ $\varphi'(x)=a$ និង $\varphi''(x)=0$

ដោយ φ ជាចម្លើយនៃ (F) នោះគេបាន ៖

$\varphi''+4\varphi'+4\varphi=-4x$

$0+4a+4(ax+b)=-4x$

$4ax+(4a+4b)=-4x$

$\varphi''+4\varphi'+4\varphi=-4x$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}4a=-4\\4a+4b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=-1\,,\,b=1}$ ។

V. ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B

បើ ΔABC កែងត្រង់ B លុះត្រាតែ $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$

មានន័យថា គេបានផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

គេមាន $A(2,2,2)$, $B(2,0,1)$ និង $C(4,1,-1)$

នោះ $\overrightarrow{BA}=(0,2,1)$ និង $\overrightarrow{BC}=(2,1,-2)$

គេបាន $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=xx'+yy'+zz'$

$=(0)(2)+(2)(1)+(1)(-2)$

$=0+2-2=0$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{ABC \text{ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ } B}$ ។

ខ. រកសមីការប្លង់កាត់តាមចំណុចទាំងបីនេះ

ប្លង់ $(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយប្លង់ (ABC) កាត់ $B(2,0,1)$

នាំឱ្យ $x_0=2$, $y_0=0$, $z_0=1$

ហើយ ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec n=\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$

តែ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\0&2&1\\2&1&-2\end{vmatrix}=-5\vec i+2\vec j-4\vec k$

នាំឱ្យ $a=-5$, $b=2$, $c=-4$

គេបាន $(ABC): -5(x-2)+2(y-0)-4(z-1)=0$

$-5x+2y-4z+14=0$

ដូចនេះ $\boxed{(ABC): -5x+2y-4z+14=0}$ ។

VI. ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

ដែនកំណត់ $\begin{cases}x-1\neq0\\x+1\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq1\\x\neq-1\end{cases}$

នាំឱ្យ $D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

លីមីត $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=0$

$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=0$

អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ នោះ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

$\lim_{x\to\pm1}f(x)=+\infty$ នោះ $x=\pm$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ដេរីវេ

$$f'(x)=-2\cdot\frac{(x-1)'}{(x-1)^3}-2\frac{(x+1)'}{(x+1)^3}$$
$$=-2\left[\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x+1)^3}\right]$$
$$=-2\left[\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)^3}\right]$$
$$=-2\left[\frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{(x-1)^3(x+1)^3}\right]$$
$$=-2\left[\frac{2x^3+6x}{(x-1)^3(x+1)^3}\right]=\frac{-4x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

ឱ្យ $f'(x)=0$ សមមូល $\frac{-4x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}=0$

ដោយ $\forall x\in D_f$, $x^2+3>0$, $x-1\neq 0$, $x+1\neq 0$

នាំឱ្យ $-4x=0$ នោះ $x=0$

តារាងសញ្ញា $f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-4x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2+3		$+$		$+$		$+$		$+$	
$(x-1)^3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)=\frac{-4x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាស្មើ $f(0)=2$ ។

តារាងអថេរភាព

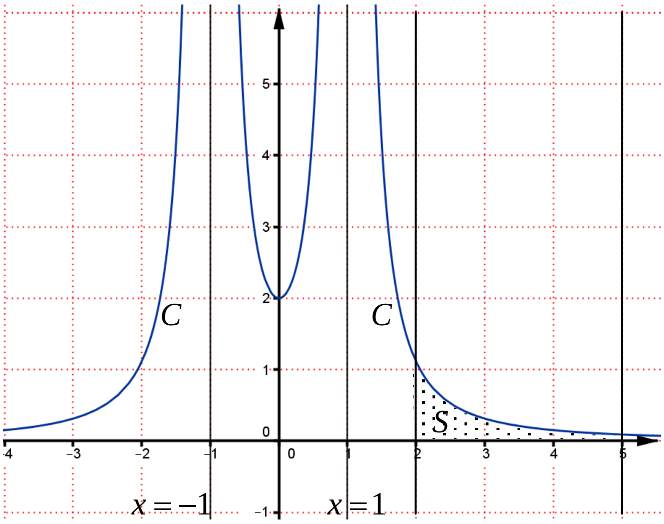
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

សង់ខ្សែកោង (C) តាងក្រាបអនុគមន៍ f

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $f(-x)=\frac{1}{(-x-1)^2}+\frac{1}{(-x+1)^2}$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=f(x)$$

នោះ f ជាអនុគមន៍គូ ដែលមានអ័ក្ស $y'y$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ



ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) បន្ទាត់ $x=2$ និង $x=5$

តាមក្រាប ផ្ទៃកប្លង់ដែលត្រូវគណនាផ្ទៃស្ថិតនៅលើអ័ក្ស $x'ox$

$$S=\int_2^5 f(x)\,dx=\int_2^5\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$
$$=\int_2^5\left(\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}+\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]_2^5$$
$$=\left(-\frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}\right)-\left(-\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+1+\frac{1}{3}=\frac{-3-2+12+4}{12}=\frac{11}{12}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់គឺ $S=\frac{11}{12}$ ឯកតាផ្ទៃ ។