គណិតវិទ្យា

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយអាំងតេក្រាល

dx

$\sin^n x$

$\ln|ax+b|$

$\int$

- ✓វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ
- ✓ឧទាហរណ៍គំរូ
- ✓លំហាត់អនុវត្តន៍
- ✓ចំណេះដឹងបន្ថែម

រៀបរៀងនិងចងក្រងដោយនិស្សិត

ឌឹង យៀង

២០១២

មេរៀនទី 1

អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

១.១ សេចក្តីផ្តើម

នៅក្នុងផ្នែកនេះ យើងធ្វើការគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយអនុវត្តរូបមន្តគ្រឹះ នៃអាំងតេក្រាលសំខាន់ៗ ។ ដំណើរការនៃការធ្វើអាំងតេក្រាលនេះ ជាការរកអនុគមន៍ច្រាស់នៃដេរីវេ ដែលអនុគមន៍ច្រាស់នៃដេរីវេនេះហៅថា **អនុគមន៍ព្រីមីទីវ** ។

១.២ និយមន័យ~លក្ខណៈ ៖

$\forall x \in D \; ; \; F'(x) = f(x)$

ឧទាហរណ៍:

ក. $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^3$ នោះគេថា x^3 ជាព្រីមីទីវនៃ $3x^3$ ។

ខ. $\frac{d}{dx}(x^3+2) = 3x^2$ និង $\frac{d}{dx}(x^3-7) = 3x^2$ នោះគេថា $\frac{d}{dx}(x^3+2)$ និង $\frac{d}{dx}(x^3-7)$ ក៏មានព្រីមីទីវនៃ $3x^2$ ដែរ ។

១.២.២ ទ្រឹស្តីបទ

ក . បើ F និង G ជាព្រីមីទីវនៃ f នោះគេបាន $\exists c \in \Re, G(x) = F(x) + c$

ខ. បើ F ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f នោះគេបានព្រីមីទីវឯទៀតមានរាង $G(x) = F(x) + c$

សម្រាយបញ្ជាក់

<u>ចំណាំ:</u> គ្រួសារនៃអនុគមន៍ $G(x) = F(x) + c$, $c \in \Re$ ជាគ្រួសារព្រីមីទីវនៃ f ដែលមានខ្សែកោងទាំងអស់ ប៉ុនគ្នា (ព្រោះវាត្រូវនិងបំលែងកិលវិចទ័រស្របនឹងអក្ស (oy))។

ឧទាហរណ៍: $G(x) = x^2 + c$ ។

១.២.៣ ទ្រឹស្តីបទ

មានព្រីមីទីវតែមួយគត់នៃ f ដែលយកតម្លៃ y_0 ត្រង់ x_0 (លក្ខខ័ណ្ឌដើម)ឬមានខ្សែកោងរបស់ព្រីមីទីវ f ដែលកាត់តាម $(y_0\ ,\ x_0)$ ។

តាង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវស្គាល់មួយនៃ f បើ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយទៀតនៃ f ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម $G(x_0)=y_0$

តាមទ្រឹស្តីបទមុន នាំអោយ $\exists\, c\in\Re\,,\forall\, x\in\Re \quad G(x)=F(x)+c \quad (I)$

យក $x=x_0$ នោះគេបាន $G(x_0)=F(x_0)+c$ ឬ $y_0=F(x_0)+c$

នាំអោយ $c=y_0-F(x_0)$ ជំនួសក្នុង (I)

$G(x)=F(x)+c$

$G(x)=F(x)+y_0-F(x_0)$ ដូចនេះ $\boxed{G(x)=F(x)+y_0-F(x_0)}$

ឧទាហរណ៍:

ក . រកព្រីមីទីវនៃ $f(x)=3x^2$ ដែលយកតម្លៃ $y_0=2$ ពេល $x_0=3$ ។

ខ . រកព្រីមីទីវ នៃ $f(x)=\sin x$ ដែលខ្សែកោងកាត់តាមចំណុច $A=\left(-\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ក . គេអោយ $f(x)=3x^2$ ដែលយកតម្លៃ $y_0=2$ ពេល $x_0=3$

គេមាន $f(x)=3x^2$ បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹងអថេរ x

នោះ $\int f(x)\,dx=\int 3x^2dx$

$\Rightarrow \quad F(x)=\int 3x^2dx=x^3+c$

$\Rightarrow \quad F(x)=x^3+c$

ដោយយកតម្លៃ $y_0=2$ ពេល $x_0=3$ យើងបាន

$2=3^3+c \quad \Rightarrow \quad c=\ 2-27=-25$

$F(x)=x^3-25$

ដូចនេះ $F(x)=x^3-25$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=3x^2$ ដែលយកតម្លៃ $y_0=2$ ពេល $x_0=3$ ។

ខ - គេមាន $f(x)=\sin x$ ដែលខ្សែកោងកាត់តាមចំណុច $A=\left(-\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$

យើងបាន $f(x)=\sin x$ បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹងអថេរ x

នោះ $\int f(x)\ dx=\int \sin xdx$

$\Rightarrow \qquad F(x=\int \sin xdx=-\cos x+c$

$\Rightarrow \qquad F(x)=-\cos x+c$

ដោយខ្សែកោងកាត់តាមចំណុច $A=\left(-\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ យើងបាន

$$\frac{1}{2}=-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+c \quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$F(x)=\cos x+\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $F(x)=\cos x+\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)=\sin x$ ដែលខ្សែកោងកាត់តាមចំណុច $A=\left(-\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ ។

១.៣. និយមន័យអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវស្គាល់មួយនៃ f នោះព្រីមីទីឯទៀតមានរាង:

$$G(x)=F(x)+c\ ,\ c\in\Re$$

កន្សោម $F(x)+c$ ហៅថាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ នៃ f ដែលកំណត់សរសេរ៖

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+c\ ,\ c\in\Re}$$

ចំណាំ

dx ជាផ្នែកនៃការកំណត់អាំងតេក្រាលនិងការបង្ហាញពីអញ្ញាតិដែលពាក់ពន្ធក្នុងការ រកអាំងតេក្រាល ។

ជាទូទៅ $\int f(x,t)\,dx \neq \int f(x,t)dt$

វិបាក

- $\left(\int f(x)\ dx\right)'=\left(F(x)+c\right)' \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$
- $d\left(\int f(x)\ dx\right)=d\left(F(x)+c\right)\Leftrightarrow F'(x)\ dx=f(x)dx$
- $\int d(F(x))dx=F(x)+c$

ឧទាហរណ៍: គណនា អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ក. $\int\left(3x^2+3y^2\right)dx$ ខ. $\int\left(3x^2+3y^2\right)dy$

គ. $\int x^5dx$ ឃ. $\int\sqrt[3]{x}dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int(3x^2+3y^2)dx$ យើងពិនិត្យទៅឃើញថា ជាអាំងតេក្រាលធៀបនឹងអថេរ x ចំពោះ y ជាចំនួនថេរ នោះយើងបាន $\int(3x^2+3y^2)dx \ =x^3+3y^2x+c$

ដូចនេះ $\int(3x^2+3y^2)dx \ =x^3+3y^2x+c$,c ជាចំនួនថេរ ។

គ. $\int x^5dx$

គេបាន $\int x^5dx=\frac{1}{6}x^6+c$, c ជាចំនួនថេរ ។

ដូចនេះ $\boxed{\int x^5dx=\frac{1}{6}x^6+c}$ ។

១.៤ . លក្ខណៈអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

- $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$
- $\int(f(x)-g(x))dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$
- $\left(\int(f(x)-g(x))dx\right)'=\left(\left(\int f(x)\right)dx\right)'+\left(\left(\int g(x)\right)dx\right)'=f(x)+g(x)$
- $\int\lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx,\ \lambda\in\Re$

១.៥ . រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

1. $\int k\,dx=kx+c$
2. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad n\neq-1$
3. $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$
4. $\int e^x\,dx=e^x+c$
5. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$
6. $\int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
7. $\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$

ការប្រើប្រាស់រូបមន្តខាងលើនេះគឺជាគន្លឹះដ៏សំខាន់ក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ ។

១.៦ . សិក្សាលំហាត់

ចូរគណនាអាំតេក្រាលខាងក្រោម:

ក . $\int (x^2-4)^2\, dx$ ខ. $\int \sqrt[5]{x^2}\, dx$ គ . $\int \frac{1}{x^7}\, dx$

ឃ . $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\, dx$ ច . $\int -\frac{1}{2}e^x\, dx$ ង . $\int \left(2^x - \frac{1}{x}\right) dx$

ដំណោះស្រាយ

ក . $\int (x^2-4)^2\, dx$ យើងបាន

$\int (x^2-4)^2\, dx = \int (x^4 - 8x^2 + 16)\, dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x + c$ c ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ: $\boxed{\int (x^2-4)^2\, dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x + c}$ ។

ខ. $\int \sqrt[5]{x^2}\, dx$

យើងបាន $\int \sqrt[5]{x^2}\, dx = \int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + c = \frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2} + c$,c ជាចំនួនថេរ ។

ដូចនេះ: $\int \sqrt[5]{x^2}\, dx = \frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2} + c$ ។

គ . $\int \frac{1}{x^7}\, dx$

យើងបាន គ . $\int \frac{1}{x^7}\, dx = \int x^{-7} dx = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + c = -\frac{1}{6}x^{-6} + c$

ដូចនេះ: $\int \frac{1}{x^7}\, dx = -\frac{1}{6x^6} + c$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១ . គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក . $\int 3x^2\, dx$ ខ . $\int \ln 2x\, dx$ គ . $\int 12\, dx$ ឃ . $\int x^{-7}\, dx$

ង . $\int \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ ច . $\int 5^x\, dx$ ជ . $\int e^{-2x}\, dx$ ឈ . $\int xe\, dx$

ញ . $\int \left(\frac{e^x}{3} + 2x\right) dx$ ត. $\int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3}\right) dx$ ថ . $\int 0\, dx$ ទ . $\int (7 - 4t - 3t^2)\, dt$

២ . គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

a . $\int\left(6-\frac{5}{4}z^2+2e^z\right)dz$ b . $\int(x^3+3x^2-7)x^4\,dx$ c . $\int\frac{(x^3+2x+5)}{\sqrt{x}}dx$

d . $\int\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$ e . $\int\left(\frac{4}{x}+3x-7e^x\right)dx$ f . $\int(x+2)(x-3)x\,dx$

g . $\int\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ h . $\int\frac{(x^4+2x^2+2)}{x^2}dx$ i . $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$

j . $\int\frac{(x^3-2)}{x^2}dx$ k . $\int(e^{5x}+a^{2x})dx$ l . $\int\frac{(5-x)^2x^2}{\sqrt{x}}dx$

៣ . រកអនុគមន៍ព្រីមីទីវ y ដែលត្រូវនឹងលក្ខខ័ណ្ឌខាងក្រោម:

a . $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ដែល $y=1$ ពេល $x=1$ b . $\frac{dy}{dx}=6x^2+2x+4$ ដែល $y=4$ ពេល $x=0$

c . $\frac{dy}{dx}=3x^2+2x$ ដែល $y=4$ ពេល $x=0$ d. $\frac{dy}{dx}=e^x+1$ ដែល $y=4$ ពេល $x=0$

e . $\frac{dy}{dx}=-\cos x+1$ ដែល $y=\pi$ ពេល $x=\pi$ f . $\frac{dy}{dx}=\sin x+2x$ ដែល $y=1$ ពេល $x=\frac{\pi}{2}$

៤ . ចូររកអនុគមន៍ $f(x)$ បើយើងដឹងថា:

ក . $f'(x^2)=\frac{1}{x}$ បើ $x>0$ ខ . $f'(\ln x)=\begin{cases}1\ , & 0<x\le 1\\ x\ , & x>1\end{cases}$

ការអត់ធ្មត់គឺជាតម្លៃដ៏ប្រសើរដែលមនុស្សត្រូវតែមាន

មេរៀនទី២ វិធីតាងអថេរក្នុងការដោះស្រាយអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

២.១ វិធីតាងអថេរជំនួស

វិធីតាងអថេរជំនួស មានបួនករណីធំៗ ដូចខាងក្រោមៈ

២.១.១ ករណីអនុគមន៍ជាផលគុណកត្តា

កាលណាអនុគមន៍មានរាងជាផលគុណកត្តា គេតាង u ជាកន្សោមដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេ រួចគណនា $du = u'dx$ ហើយយកទៅជំនួសក្នុងអាំងតេក្រាលដើម ។

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោមៈ

ក. $\int (3x+5)^7 dx$ ខ. $\int (2x+3)(x^2+3x+3)^3 dx$

គ. $\int e^x (3e^x+1)^7 dx$ ឃ. $\int \sin x \cos x dx$

ង. $\int \sin^5 x \cos x dx$ ច. $\int (\cot x + \tan x)^2 dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int (3x+5)^7 dx$ តាង $u = 3x+7 \Rightarrow du = 3dx$

យើងជំនួស $\int (u)^7 \frac{du}{3} = \frac{1}{24}u^8 + c$, c ជាចំនួនថេរ

យើងយក $3x+7$ ជំនួសក្នុង u

ដូចនេះ $\int (3x+5)^7 dx = \frac{1}{24}(3x+5)^8 + c$ ។

ខ. $\int (2x+3)(x^2+3x+3)^3 dx$ តាង $u = x^2+3x+3 \Rightarrow du = (2x+3)dx$

យើងជំនួស $\int (u)^3 du = \frac{1}{4}u^4 + c$, c ជាចំនួនថេរ

យើងយក x^2+3x+3 ជំនួសក្នុង u

ដូចនេះ $\boxed{\int (2x+3)(x^2+3x+3)^3 dx = \frac{1}{4}(x^2+3x+3)^4 + c}$ ។

គ . $\int e^x\left(3e^x+1\right)^7 dx$ តាង $u=3e^x+1 \Rightarrow du=3e^x dx$

យើងជំនួស $\int (u)^7 \frac{du}{3}=\frac{1}{24}u^8+c$, c ជាចំនួនថេរ

យើងយក $3e^x+1$ ជំនួសក្នុង u

ដូចនេះ: $\boxed{\int e^x\left(3e^x+1\right)^7 dx=\frac{1}{24}\left(3e^x+1\right)^8+c}$ ។

២.១.២ ករណីអនុគមន៍ជាប្រភាគ

រូបមន្តនេះប្រើក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលដែលអនុគមន៍មានរាង $\frac{N(x)}{D(x)}$ ដែល $N(x)$ និង $D(x)\neq 0$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ។ អនុគមន៍ $\frac{N(x)}{D(x)}$ ជាអនុគមន៍សនិទាន ដែលភាគយក $N(x)$ និង $D(x)$ ជាភាគបែង គ្មានកត្តារួមដែលអាចសម្រួលគ្នាបាន ហើយដឺក្រេភាគយក $N(x)$ ត្រូវតូចជាងដឺក្រេ ភាគបែង $D(x)$ តែបើដឺក្រេភាគយក $N(x)$ ត្រូវធំជាងដឺក្រេភាគបែង $D(x)$ នោះយើងអាចចែក $N(x)$ ដោយ $D(x)$ ។

គេអាចសរសេរ $\frac{N(x)}{D(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$

- ដែល $Q(x)$ គឺជាផលចែក ហើយ $R(x)$ ជាសំណល់ ដែលដឺក្រេ $R(x)$ តូចជាងដឺក្រេ $D(x)$
- វិធីស្រាយបញ្ជាក់ $\frac{N(x)}{D(x)}$ ទៅជាប្រភាគឬ រាងកាណូនិច គឺអាស្រ័យទៅលើភាគបែង ។

យើងបាន ៤ ករណីដែលត្រូវពិភាក្សា:

- **ករណីទី ១**

កត្តាទាំងអស់របស់ភាគបែងជាកន្សោមលីនេអ៊ែរផ្សេងគ្នា ។ កន្សោមលីនេអ៊ែនិមួយៗ $ax+b$ ត្រូវនិង $\frac{A}{ax+b}$ ដែល A , a , b ជាចំនួនពិត ។

កាលណាអនុគមន៍មានរាងជាប្រភាគបែបនេះ គេតាង ជាកន្សោមនៃភាគបែងរួចគណនា $du=u'dx$ ហើយយកទៅជំនួសក្នុងអាំងតេក្រាលដើម ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដូចខាងក្រោម:

ក . $\int \frac{3}{(2x-1)}dx$ ខ . $\int \frac{4}{(3x+1)^7}dx$ គ . $\int \frac{x}{(x-2)(x+1)}dx$

ឃ . $\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+15}dx$ ង . $\int \frac{\cos x}{(\sin x+3)^3}dx$ ច . $\int \frac{1}{x-x^3}dx$

ដំណោះស្រាយ

ក . $\int \frac{3}{(2x-1)}dx$ តាង $u=2x-1 \Rightarrow du=2dx$

យកទៅជំនួសគេបាន $\frac{3}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{3}{2}\ln|u|+\frac{3}{2}c$, c ជាចំនួនថេរ

ជំនួស $2x-1$ ក្នុង u

ដូចនេះ $\int \frac{3}{(2x-1)}dx=\frac{3}{2}\ln|2x-1|+c$ ។

សូមដោះស្រាយខ្លួនឯង ☺

ករណីទី ២

កត្តាទាំងអស់របស់ភាគបែងជាកន្សោមលីនេអ៊ែរ ប៉ុន្តែមានកន្សោមខ្លះច្រំដែល ។ បើកន្សោមច្រំដែល ដែលមាន $(ax+b)'$ មានចំនួន r កត្តានេះយើងបានផលបូកប្រភាគខាងក្រោម:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$$ ដែល $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ ជាចំនួនពិត

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដូចខាងក្រោម:

ក . $\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)^2}dx$ ខ . $\int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}dx$ គ. $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx$

ឃ . $\int \frac{x^2+1}{(x+3)(x-1)^3}dx$ ង. $\int \frac{1}{(e^x-1)^2}dx$ ច. $\int \frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+2)^2}dx$

ករណីទី ៣

កត្តាទាំងអស់របស់ភាគបែងជាផលគុណកន្សោមលីនេអ៊ែរនិងពហុធាដឺក្រេទី២ ដែលពហុធាដឺក្រេទី២នេះមិនច្រំដែលមានន័យថាមានតែមួយកត្តា។ពហុធាដឺក្រេទី២មានរាង ax^2+bx+c ដែល យើងអាចសរសេរជាប្រភាគ $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ ដែល A ; B ជាចំនួនថេរ ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $\int \frac{dx}{x^2-x-6}$ ខ. $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$ គ . $\int \frac{dx}{2x^2+3x+5}$

ឃ. $\int \frac{x^3-5x}{(x^2-9)(x^2+3)}dx$ ង. $\int \frac{2xdx}{(x^2-1)(x^2+3)}$ ច . $\int \frac{14x^3+24x}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$

- **ករណីទី ៤**

កត្តាទាំងអស់របស់ភាគបែងជាផលគុណកន្សោមលីនេអ៊ែរនិងពហុធាដឺក្រេទី២ដែលពហុធាដឺក្រេទី២ខ្លះអាចមានកត្តាច្រំដែល ។ ពហុធាដឺក្រេទី ២ មានរាង $(ax^2+bx+c)^r$ ដែលមាន r កត្តា ។ គេសរសេរ បាន:

$$\frac{A_1+B_1x}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2+B_2x}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{A_3+B_3x}{(ax^2+bx+c)^3}+\cdots+\frac{A_k+B_kx}{(ax^2+bx+c)^k}$$

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក . $\int \frac{2x^4+9x^2+8}{x(x^2+2)^2}dx$ ខ. $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$

គ. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$ ឃ . $\int \frac{4x^2-16x+12}{(x-2)^2(x^2+2x+2)^2}dx$

២.១.៣. ករណីអនុគមន៍ដែលកត្តាណាមួយជាអនុគមន៍អសនិទាន

កាលណាអនុគមន៍ មានកត្តាណាមួយជាអនុគមន៍អសនិទាន គេតាង u ជាកន្សោមនៅក្រោមរ៉ាឌីកាល់ រួច គណនា $du=u'dx$ ហើយយកទៅជំនួសក្នុងអាំងតេក្រាលដើម ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោមខាងក្រោម:

ក. $\int \sqrt{5x-2}dx$ ខ. $\int 5x^2\sqrt{x^3-1}\,dx$ គ. $\int \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x}}dx$

ឃ. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}dx$ ង. $\int 3e^{2x}\sqrt{e^{2x}-7}dx$ ច. $\int a^x\sqrt{1+a^x}dx$

២.១.៤. ករណីអនុគមន៍ដែលមានកន្សោមសាំញ៉ាំ

កាលណាអនុគមន៍មានកន្សោមសាំញ៉ាំ គេតាង u ជាកន្សោមដែលសាំញ៉ាំនោះ រួចគណនា $du=u'dx$ ហើយយកទៅជំនួសក្នុងអាំងតេក្រាលដើម ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int 3xe^{x^2-6}dx$ ខ. $\int 3x\ln(x^2-1)'dx$ គ. $\int \frac{5xe^{\sqrt{x^2-7}}}{\sqrt{x^2-7}}dx$

ឃ . $\int (2x-3)\cos(x^2-3x+6)dx$ ង. $\int \cos(\sin x)\,dx$

សម្គាល់:

ការតាងអថេរជំនួយអាចអនុវត្តបានចំពោះអនុគមន៍ដែលមានរាងងាយមួយចំនួនប៉ុណ្ណោះ។ចំពោះអនុគមន៍ខ្លះទៀត ពុំអាចឲ្យយើងអនុវត្តតាមវិធីតាងអថេរជំនួយ ដូចបានបង្ហាញជូនខាងលើនោះបានទេ ។ ហេតុនេះយើងមានលក្ខណៈសម្គាល់ចំពោះអនុគមន៍ដែលអាចឲ្យគេអនុវត្តន៍បាននូវវិធីតាងអថេរជំនួយ នេះដោយសង្កេតលើលក្ខណៈសំខាន់ៗខាងក្រោមៈ

- តាងផ្នែកណាមួយនៃអនុគមន៍ដោយ u
- ផ្នែកដែលនៅសល់មានដេរីវេនៃ u គឺ u'

ឧទាហរណ៍ទី១ គណនាអាំតេក្រាលមិនកំណត់ $\int x\sqrt{2x^2-9}dx$

ជាដំបូងយើងតាង $u=2x^2-9$ នោះ $du=4xdx$

យើងឃើញថាផ្នែកដែលនៅសល់ក្រោយពីតាង $u=2x^2-9$ គឺ x តែ x ជាផ្នែកដែលមាននៅក្នុងដេរីវេ u' នាំឲ្យ គេ អាចគណនាអាំងតេក្រាល

$\int x\sqrt{2x^2-9}'\,dx$ តាមវិធីជំនួសនេះបាន ។

ឧទាហរណ៍ទី២ គណនាអាំតេក្រាលមិនកំណត់ $\int x\sqrt{2x^3-9}'\,dx$

តាង $u=2x^3-9$ នោះ $du=6x^2dx$

យើងឃើញថាផ្នែកដែលនៅសល់ក្រោយពីតាង $u=2x^3-9$ គឺ x តែ x ជាផ្នែកដែលពុំមាននៅក្នុងដេរីវេ u' នេះឡើយ ព្រោះវាមាន x^2

នាំឲ្យ គេមិនអាចគណនាអាំងតេក្រាល

$\int x\sqrt{2x^2-9}'\,dx$ តាមវិធីជំនួសនេះបានឡើយ ។

២.២. វិធីគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

វិធីសាស្ត្រនេះត្រូវបានគេយកមកប្រើដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលផលគុណនៃពីរអនុគមន៍ វាបានមកពីច្បាប់ផលគុណនៃឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

បើមាន u និង v ជាអនុគមន៍ឌីផេរ៉ង់ស្យែលពីរនៃ x នោះយើងបាន:

$(uv)' = v'u + u'v$ ឬ $\frac{d(vu)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$

នាំឲ្យ $d(vu) = vdu + udv$ ធ្វើអាំងតេក្រាលអង្គសងខាង

យើងបាន:

$\int d(vu) = \int vdu + \int udv$ ឬ $vu = \int vdu + \int udv$

នាំឲ្យ $\boxed{\int udv = vu - \int vdu}$ គេហៅថារូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ។

វិធីតាង ក្នុងរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ក្នុងការប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក យើងអនុវត្តន៍នូវជំហានសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម:

ចែកអាំងតេក្រាលជាពីរផ្នែក

$I = \int f(x)dx = \int \cdots \quad \cdots dx$

តាង u និង v តាមរបៀបខាងក្រោម

តាង $u = \cdots$ នោះ $du = u'dx$

$dv = \cdots dx$ នោះ $v = \int \cdots dx$

- ក្នុងករណីការតាងខាងលើពុំអាចដោះស្រាយបាន យើងត្រូវប្តូរការតាងដូចខាងក្រោម

តាង $u = \cdots$ នោះ $du = u'dx$

$dv = \cdots dx$ នោះ $v = \int \cdots dx$

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក . $\int xe^x dx$ ខ. $\int \ln xdx$ គ. $\int x\ln xdx$

ឃ . $\int (x+1)e^x \ln(xe^x)dx$ ង. $\int x^2 \ln xdx$ ច. $\int x\sqrt{1+x}dx$

ដំណោះស្រាយ:

ក. គេមាន $I = \int xe^x dx$

យើងតាង $u = x \Rightarrow du = dx$ ហើយផ្នែកដែលនៅសល់គឺតាង $v = \int e^x dx = e^x$

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int udv = vu - \int vdu$ យើងបាន

$I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x - c$

ដូចនេះ $\int xe^x dx = xe^x - e^x - c$ ។

ខ. គេមាន $H=\int \ln x dx$

យើងតាង $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$ ហើយផ្នែកដែលនៅសល់គឺតាង $v=\int dx = x$

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int udv = vu-\int vdu$

យើងបាន $H=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx = x\ln(x)-x-c = x\left[\ln(x)-1\right]-c$

ដូចនេះ $\int \ln x dx = x(\ln(x)-1)-c$ ។

គ. គណនាអាំងតេក្រាល $\int x\ln x dx$

យើងតាង $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$ ហើយផ្នែកដែលនៅសល់គឺតាង $v=\int xdx=\frac{1}{2}x^2$

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int udv = vu-\int vdu$

យើងបាន $\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2-c$

ដូចនេះ $\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\left[\ln(x)-\frac{1}{2}\right]-c$ ។

ឃ. គណនាអាំងតេក្រាល $J=\int (x+1)e^x \ln(xe^x)dx$

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int udv = vu-\int vdu$

យើងតាង $u=\ln\left(xe^x\right)\Rightarrow du=\frac{e^x-xe^x}{xe^x}dx$ ហើយផ្នែកដែលនៅសល់គឺតាង

ចំពោះ $v=\int (x+1)e^x dx$ ជាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកម្តងទៀត(ព្រោះអាំងតេក្រាលមានអនុគមន៍ពីរផ្សេងគ្នា) យើងតាង $u_1=x+1 \Rightarrow du_1=dx$ ផ្នែកដែលនៅសល់គឺតាង $v_1=\int e^x dx=e^x$

នោះ $v=(x+1)e^x-\int e^x dx=(x+1)e^x-e^x=xe^x$

នោះយើងបាន $J=xe^x\ln\left(xe^x\right)-\int\left(xe^x\times\frac{e^x-xe^x}{xe^x}\right)dx=xe^x\ln\left(xe^x\right)-\int\left(e^x-xe^x\right)dx$

ចំពោះ $\int xe^x dx$ យើតាង $u_2=x\Rightarrow du_2=dx$

ផ្នែកដែលនៅសល់តាង $v_2=\int e^x dx=e^x$

នោះ $\int xe^x dx = xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x-c$

យើងបាន $J=xe^x\ln\left(xe^x\right)-\left(e^x-\left[xe^x-e^x-c\right]\right)=xe^x\ln\left(xe^x\right)+xe^x-2e^x-c$

ដូចនេះ $\int (x+1)e^x\ln(xe^x)dx = xe^x\ln\left(xe^x\right)+xe^x-2e^x-c$ ។

ដោះស្រាយខ្លួនឯងចំពោះ (ង និង ច)

សម្គាល់

យើងមានការកត់សម្គាល់ក្នុងការតាង នៅពេលអនុវត្តន៍រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោផ្នែកដូចតទៅ:

១ . អាំងតេក្រាលដែលមានផ្នែកមួយជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

នៅពេលដែលអនុគមន៍មានផ្នែកមួយជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល គេតាងផ្នែកដែលគ្មានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដោយ u ហើយផ្នែកអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង dx ដោយ dv ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int 3xe^x dx$ ខ. $\int x^2e^x dx$ គ. $\int 2x^3e^{x^2} dx$ ឃ. $\int \sin 2xe^{\cos x} dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int 3xe^x dx$ យើងតាង $u = 3x \Rightarrow du = 3dx$ ហើយតាង $v = \int e^x dx = e^x$

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int udv = vu - \int vdu$

យើងបាន $\int 3xe^x dx = 3xe^x - 3\int e^x dx = e^x(3x-3) - c$

ដូចនេះ: $\int 3xe^x dx = 3e^x(x-1) - c$ ។

៣ . អាំងតេក្រាលដែលមានផ្នែកមួយជាអនុគមន៍លោការីតនេពែ

នៅពេលដែលអនុគមន៍មានផ្នែកមួយជាអនុគមន៍លោការីតនេពែគេតាងផ្នែកដែលមានអនុគមន៍លោការីតនេពែដោយ u ហើយផ្នែកដែលគ្មានអនុគមន៍លោការីតនេពែ និង du ដោយ dv ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int (x+3)\sqrt{x-2}\, dx$ ខ. $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$ គ. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$ ឃ. $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$

៤ . អាំងតេក្រាលដែលមានផ្នែកមួយជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

នៅពេលដែលអនុគមន៍មានផ្នែកមួយជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រគេតាងផ្នែកដែលគ្មានកន្សោមអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដោយ u ហើយផ្នែកដែលមានកន្សោមអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនិង dx ដោយ dv ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int x\sin xdx$ ខ. $\int x\cos xdx$ គ. $\int e^x\cos xdx$ ឃ. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int x\sin xdx$

តាង $u=x$ នោះ $du=dx$

$dv=\sin xdx$ នោះ $v=\int \sin xdx=\cos x$

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$\int udv=vu-\int vdu$ យើងបាន

$\int x\sin xdx=x\cos x-\int \cos xdx=x\cos x+\sin x+c$

ដូចនេះ $\boxed{\int x\sin xdx=x\cos x+\sin x+c}$ ។

សូមសាកដោះស្រាយខ្លួនឯងចំពោះលេខបន្ទាប់

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាក្រោម៖

១. $\int \sin xd(\sin x)$ ២. $\int \tan^3 xd(\tan x)$ ៣. $\int \frac{d(1+z^2)}{\sqrt{1+z^2}}$ ៤. $\int (1+x)^{15}dx$

៥. $\int \frac{1}{(2x-3)^5}dx$ ៦. $\int \frac{1}{(ax+b)^c}dx$, $c\neq 1$ ៧. $\int \sqrt{8-2x}dx$ ៨. $\int \sqrt[8]{(8+3x)^6}dx$

៩. $\int \frac{m}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}dx$ ១០. $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ ១១. $\int x\sqrt{x^2-1}dx$ ១២. $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx$

១៣. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ១៤. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^5+4}}dx$ ១៥. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{\sqrt{x^4+1}}}dx$ ១៦. $\int \frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}dx$

១៧. $\int xe^{-x}dx$ ១៨. $\int xe^{3x}dx$ ១៩. $\int \sqrt{x}\log x\,dx$ ២០. $\int (\log x)^2dx$

២១. $\int xa^x dx$ ២២. $\int x^n (\log x)^2 dx$ ២៣. $\int x^2 e^{ax} dx$ ២៤. $\int x^n \log x\, dx$

២៥. $\int \log(x+1)^{1+x} dx$ ២៦. $\int x \log\left(\frac{x+2}{2}\right) dx$ ២៧. $\int x^3 \log x\, dx$ ២៨. $\int \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$

២៩. $\int \log(4x) dx$ ៣០. $\int \frac{\log x}{(1+\log x)^2} dx$ ៣១. $\int \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$ ៣២. $\int \frac{\log x}{2(1+x)} dx$

៣៣. $\int e^x \left(\frac{x-1}{x^2}\right) dx$ ៣៤. $\int e^x \frac{x}{(1-x)^2} dx$ ៣៥. $\int e^x \frac{1+x}{2+x} dx$ ៣៦. $\int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2} dx$

៣៧. $\int \sqrt{5x^2-x-1}\, dx$ ៣៨. $\int \sqrt{x^2+3x+1}\, dx$ ៣៩. $\int \sqrt{x^2-x+1}\, dx$ ៤០. $\int \sqrt{2x^2+x+3}\, dx$

៤១. $\int \tan x\, dx$ ៤២. $\int \cot x\, dx$ ៤៣. $\int \tan 3x\, dx$ ៤៤. $\int \cot(2x+1)\, dx$

៤៥. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$ ៤៦. $\int e^{\sin x} d(\sin x)$ ៤៧. $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$ ៤៨. $\int x \cos x dx$

៤៩. $\int x \sin 2x\, dx$ ៥០. $\int x \cos^2 x\, dx$ ៥១. $\int x \tan^2 x\, dx$ ៥២. $\int \arctan\sqrt{x}\, dx$

៥៣. $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ៥៤. $\int \arccos x\, dx$ ៥៥. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ៥៦. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

៥៧. $\int (\arctan x)^2\, dx$ ៥៨. $\int (\arcsin x)^2\, dx$ ៥៩. $\int e^{3x} (\text{six}2x - \cos 2x)^2\, dx$ ៦០. $\int e^x \sin x\, dx$

ព្យាយាមដើម្បីសម្រេច!

មេរៀនទី៣

អាំងតេក្រាល នៃអនុគមន៍អសនិទាន

ដើម្បីសិក្សាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អសនិទានឲ្យបានងាយស្រួល គេបានបែងចែកប្រភេទរបស់វាជាប្រាំពីរប្រភេទសំខាន់ៗដូចខាងក្រោមនេះ៖

៣.១ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int R\left(x,\sqrt[m]{f(x)}\right)$ **ចំពោះ** $m\in IN, m>1$ **ហើយ** $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលរាងបែបនេះយើងត្រូវធ្វើដូចខាងក្រោម:

- តាង $u=\sqrt[m]{f(x)}$ នោះ $u^m=f(x)$រួចទាញរក x ជាអនុគមន៍នៃ u
- ធ្វើឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើអង្គទាំងពីរ $\left(u^m\right)'dx=\left(f(x)\right)'dx$
- ជំនួសលទ្ធផលខាងលើក្នុងអាំងតេក្រាលដើម យើងបានអាំងតេក្រលថ្មីដែលមានអថេរ u

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int\sqrt{5x-7}dx$ ខ . $\int\sqrt[3]{3x+8}dx$ គ . $\int x\sqrt{2x+7}dx$

ឃ. $\int\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}dx$ ង . $\int\dfrac{x^2}{x+\sqrt[3]{x}}dx$ ច. $\int\dfrac{1+\sqrt{x-2}}{x-\sqrt{x-2}}dx$

៣.២ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះយើងត្រូវធ្វើដូចខាងក្រោម:

- បម្លែងជារាង $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx=\sqrt{a}\int\sqrt{(x\pm\alpha)^2\pm k}\ dx$

  ឬ $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx=\sqrt{a}\int\sqrt{k\pm(x\pm\alpha)^2}\ dx$
- **តាង** $u=x\pm\alpha$ នោះ $du=dx$
- ជំនួសលទ្ធិផលខាងលើក្នុងអាំងតេក្រាលដើម យើងបានអាំងតេក្រាលថ្មីដែលមានអថេរ u

$$\int\sqrt{u^2+k}\ du=\frac{1}{2}u\sqrt{u^2+k}+\frac{1}{2}k\ln\left|u+\sqrt{u^2+k}\right|+c$$

$$\int\sqrt{u^2-k}\ du=\frac{1}{2}u\sqrt{u^2-k}-\frac{1}{2}k\ln\left|u+\sqrt{u^2-k}\right|+c$$

$$\int\sqrt{k-u^2}\ du=\frac{1}{2}u\sqrt{k-u^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{u}{\sqrt{k}}+c$$

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int\sqrt{3x^2-12x+27}\ dx$ ខ. $\int\sqrt{x^2+6x+7}\ dx$ គ. $\int\sqrt{-x^2-2x+4}\ dx$

ឃ. $\int\sqrt{-x^2+5x-4}\ dx$ ង. $\int\sqrt{(x-1)(x+2)}\ dx$ ច. $\int\sqrt{(x+4)(-x+2)}\ dx$

៣.៣ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះយើងត្រូវធ្វើដូចខាងក្រោម:

- បម្លែងភាគបែងឲ្យទៅជារាង $\sqrt{u^2+k}$ ឬ $\sqrt{u^2-k}$ ឬ $\sqrt{k-u^2}$
- ជំនួសលទ្ធផលខាងលើក្នុងអាំងតេក្រាលដើម យើងបានអាំងតេក្រាលថ្មីដែលមានអថេរ u

$$\int\frac{1}{\sqrt{u^2+k}}du=\ln\left|u+\sqrt{u^2+k}\right|+c$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{u^2-k}}du=\ln\left|u+\sqrt{u^2-k}\right|+c$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{k-u^2}}du=\arcsin\frac{u}{\sqrt{k}}+c$$

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+5}}du$ ខ. $\int\frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-2}}du$ គ . $\int\frac{1}{\sqrt{2x^2+8x+4}}du$

ឃ . $\int\frac{1}{\sqrt{-2x^2+6x-4}}du$ ង. $\int\frac{1}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}du$ ច. $\int\frac{1}{\sqrt{(1-x)(x+3)}}du$

៣.៤ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះយើងត្រូវធ្វើដូចខាងក្រោម:

- បម្លែងអនុគមន៍ $(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}$

$$=\alpha\left(ax^2+bx+c\right)'\sqrt{ax^2+bx+c}+\beta\sqrt{ax^2+bx+c}$$

- ជំនួសលទ្ធផលខាងលើក្នុងអាំងតេក្រាលដើម យើងបានអាំងតេក្រាលថ្មី

$$\alpha\int\left(ax^2+bx+c\right)'\sqrt{ax^2+bx+c}\;dx+\beta\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{ax^2+bx+c}+\beta\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

បន្ទាប់យើងដោះស្រាយ $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ តាមរាង (៣.២)

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម ៖

ក. $\int(3x-1)\sqrt{x^2+-x+2}\,dx$ ខ. $\int(x)\sqrt{x^2-x+3}\,dx$

គ. $\int(2x-1)\sqrt{x^2-x-1}\,dx$ ឃ. $\int(3x+2)\sqrt{x^2-5}\,dx$

ង. $\int x\sqrt{2x-x^2}\,dx$ ច. $\int(3x-1)\sqrt{x^2-x}\,dx$

៣.៤ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int\frac{1}{(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះយើងត្រូវធ្វើដូចខាងក្រោម:

- តាង $Ax+B=\frac{1}{u}$ រួចទាញរក x ជាអនុគមន៍ u
- ជំនួសលទ្ធិផលខាងលើក្នុងអាំងតេក្រាលដើម យើងបានអាំងតេក្រាលថ្មីដែលមានអថេរ u

$$\int\frac{1}{\sqrt{at^2+bt+c}}\,dt \quad \text{ឬ} \quad \int\frac{1}{\sqrt{\alpha t+\beta}}\,dt$$

- ដោះស្រាយអាំងតេក្រាលនេះ យើងប្រើរបៀបដោះស្រាយខាងដែលធ្លាប់ជួប

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int\frac{1}{(3x-6)\sqrt{x^2-4x+1}}\,dx$ ខ. $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$

គ. $\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$ ឃ. $\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

ង. $\int\frac{1}{(x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ ច. $\int\frac{1}{x\sqrt{(x-2)(x+3)}}\,dx$

ដំណោះស្រាយ

៣.៥ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលរាងបែបនេះយើងត្រូវធ្វើដូចខាងក្រោម:

- បម្លែងអនុគមន៍ $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\alpha\left(ax^2+bx+c\right)'}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
- ជំនួសលទ្ធផលខាងលើក្នុងអាំងតេក្រាលដើម យើងបានអាំងតេក្រាលថ្មី

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \int \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = 2\alpha\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \frac{4x+9}{\sqrt{x^2-6x+7}}dx$ ខ. $\int \frac{2x-6}{\sqrt{-x^2+3x-1}}dx$

គ. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}dx$ ឃ. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

ង. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}}dx$ ច. $\int \frac{x+1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}dx$

ដំណោះស្រាយ

៣.៦ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int \frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះយើងត្រូវធ្វើដូចខាងក្រោម៖

- បម្លែងអនុគមន៍ $\frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\alpha\left(ax^2+bx+c\right)'}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\beta\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
- ជំនួសលទ្ធផលខាងលើក្នុងអាំងតេក្រាលដើម យើងបានអាំងតេក្រាលថ្មី

$$\int \frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\alpha\left(ax^2+bx+c\right)'}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \int \frac{\beta\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \int \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$\int \frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = 2\alpha\sqrt{ax^2+bx+c} + \beta\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx + \lambda\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

- ដោះស្រាយអាំងតេក្រាលនេះបន្តទៅទៀត យើងប្រើរបៀបដោះស្រាយខាងលើដែលយើងធ្លាប់ជួប ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \frac{2x^2+6x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$ ខ. $\int \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+1}}dx$

គ. $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^2-1}}dx$ ឃ. $\int \frac{3x^2-x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

ង. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ច. $\int \frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \frac{2x^2+6x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$

គេមាន $\int \frac{2x^2+6x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$

យើងបម្លែងអនុគមន៍ $\frac{2x^2+6x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}} = \frac{2(x^2-2x+3)+(10x-10)+5}{\sqrt{x^2-2x+3}}$

$$= \frac{2(x^2-2x+3)}{\sqrt{x^2-2x+3}} + \frac{(10x-10)}{\sqrt{x^2-2x+3}} + \frac{5}{\sqrt{x^2-2x+3}}$$

យើងបាន $\int \frac{2x^2+6x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx = \int \frac{2(x^2-2x+3)}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx + \int \frac{(10x-10)}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx + \int \frac{5}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$

$$= 5\int \frac{(2x-2)}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx + 2\int \sqrt{x^2-2x+3}dx + 5\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

១ $\int \frac{1}{\sqrt{4x-3-x^2}}dx$ ២. $\int \frac{1}{\sqrt{-9x^2-6x+2}}dx$ ៣. $\int \frac{1}{\sqrt{6x+8-9x^2}}dx$

៤. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$ ៥. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$ ៦. $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

៧. $\int \frac{1}{\sqrt{4x-3-x^2}}\,dx$ ៨. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ ៩. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

១០. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$ ១១ $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$ ១២. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx$

១៣. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$ ១៤ $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ ១៥ $\int \frac{\sqrt{x}}{(x+1)\,x}\,dx$

១៦. $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ ១៧. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$ ១៨. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$

១៩. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}\,dx$ ២០. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,dx$ ២១. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$

២២. $\int \frac{x^5}{\sqrt{a^3-x^3}}\,dx$ ២៣. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$ ២៤. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

២៥. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$ ២៦. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx$ ២៧. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$

២៨. $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\,dx$ ២៩. $\int \frac{\sqrt{(x^2-9)^3}}{x^6}\,dx$ ៣០. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx$

៣១. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+16}}\,dx$ ៣២. $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-9)^3}}\,dx$ ៣៣. $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

៣៤. $\int \frac{1}{x^2+40\sqrt{4x^2+1}}\,dx$ ៣៥. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\cdot\frac{dx}{x^2}$ ៣៦. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4x-3}}\,dx$

៣៧. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x-5}}\,dx$ ៣៨. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{5x^2-10x+20}}\,dx$ ៣៩. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2}\,dx$

៤០. $\int \frac{2x^2+2x-5}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$ ៤១. $\int \frac{x^2+5x+12}{\sqrt{x^2-2x-1}}\,dx$ ៤២. $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$

៤៣. $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx$ ៤៤. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$ ៤៥. $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx$

មេរៀនទី៤

អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីត និងអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

៤.១ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int \ln|ax+b|dx$ ពេលដែលជួបប្រទះអាំងតេក្រាលដែលមានរាងផ្សេងៗ ប៉ុន្តែយើងអាចបំបែកបានជារាងងាយៗខាងលើ យើងត្រូវប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដើម្បីគណនាវា ។ ដោយយើងតាង u ជាអនុគមន៍លោការីត និង កន្សោមដែលនៅសល់ជា dv ។

គេបានរូបមន្ត:

$$\int \ln|ax+b|dx = \frac{1}{a}(ax+b)\ln|ax+b| - x + c$$

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំនត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \ln|5x-3|dx$ ខ. $\int \ln|(3x+1)(2x+5)|dx$ គ. $\int \ln|(5-4x)(2x+3)|dx$

ឃ. $\int \ln|x(5x+7)|dx$ ង. $\int \ln(3x+1)^2 dx$ ច. $\int \ln\left|\frac{1}{x}-1\right|dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int \ln|5x-3|dx$

របៀបទី១ យើងតាង $u=\ln|5x-3| \Rightarrow du = \frac{5}{5x-3}dx$

ផ្នែកនៅសល់ $dv = dx \Leftrightarrow v = \int dx = x$ តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក គេបាន

$$\int \ln|5x-3|dx = x\ln|5x-3| - \int \frac{5x}{5x-3}dx = x\ln|5x-3| - \int dx - \int \frac{3}{5x-3}dx$$

$$= x\ln|5x-3| - x - \frac{3}{5}\ln|5x-3| + c$$

$$= \frac{1}{5}(5x-3)\ln|5x-3| - x + c$$

ដូចនេះ $\int \ln|5x-3|dx = \frac{1}{5}(5x-3)\ln(5x-3)-x+c$ ។

របៀបទី២ $\int \ln|5x-3|dx$ តាមរូបមន្តៈ $\int \ln|ax+b|dx = \frac{1}{a}(ax+b)\ln|ax+b|-x+c$

យើងបាន $a=5, b=-3$

ដូចនេះ $\int \ln|5x-3|dx = \frac{1}{5}(5x-3)\ln(5x-3)-x+c$ ។

ខ. $\int \ln|(3x+1)(2x+5)|dx$

គេបាន $\int \ln|(3x+1)(2x+5)|dx = \int \ln|3x+3|dx + \int \ln|2x+5|dx$

តាមរូបមន្ត $\int \ln|ax+b|dx = \frac{1}{a}(ax+b)\ln|ax+b|-x+c$

គេបាន $\int \ln|(3x+1)(2x+5)|dx = \frac{1}{3}(3x+1)\ln|3x+1|-x+\frac{1}{2}(2x+5)\ln|2x+5|-x+c$

ដូចនេះ $\boxed{\int \ln|(3x+1)(2x+5)|dx = \frac{1}{3}(3x+1)\ln|3x+1|+\frac{1}{2}\ln|2x+1|-2x+c}$ ។

សាកដោះស្រាយខ្លួនឯងបន្ត ៖)

៤.២ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int \ln|ax^2+bx+c|dx$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះយើងត្រូវយក ax^2+bx+c មករក ឌីស្ក្រីមីណង់ Δ ឬ Δ' ជាមុនសិនៈ

- បើ $\Delta \ge 0$ ឬ $\Delta' \ge 0$ នោះគេបាន $ax^2+bx+c = a(x=x_1)(x-x_2)$ រួចយើងប្រើលក្ខណៈ អាំងតេក្រាលខាងលើ ៤.១ ដើម្បីគណនាវា ។
- បើ $\Delta \le 0$ ឬ $\Delta' \le 0$ នោះយើងប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដើម្បីគណនាវា ។ ដោយយើងតាង u ជាអនុគមន៍លោការីត និង កន្សោមដែលនៅសល់ជា dv ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោមៈ

ក. $\int \ln|3x^2-4x+1|dx$ ខ. $\int \ln|x^2+6x+9|dx$ គ. $\int \ln|x^2-x+2|dx$

ឃ. $\int \ln\sqrt{5x^2-x-6}dx$ ង. $\int \ln\sqrt{x^2-2x+10}dx$ ច. $\int \ln\sqrt{4x^2+12x+9}dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int \ln|3x^2-4x+1|dx$ យើងយក $3x^2-4x+1$ មករកឌីស្ក្រីមីណង់ គេបាន

$3x^2-4x+1=3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ នោះនាំអោយ $\int \ln\left|3x^2-4x+1\right|dx=\int\left|\ln 3(x-1)\left(x-\frac{1}{3}\right)\right|dx$

តាមរូបមន្ត $\int \ln|ax+b|dx=\frac{1}{a}(ax+b)\ln|ax+b|-x+c$

គេបាន $\int \ln|3x-3|dx+\int\ln|3x-1|dx=\frac{1}{3}\left[(3x-3)\ln|3x-3|+(3x-1)\ln|3x-1|-2x\right]+c$

ដូចនេះ: $\boxed{\int \ln\left|3x^2-4x+1\right|dx=\frac{1}{3}\left[(3x-3)\ln|3x-3|+(3x-1)\ln|3x-1|-2x\right]+c}$ ។

៤.៣ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int x^n\ln|f(x)|dx$ ដែល $n\in IN$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះ នោះយើងត្រូវប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដើម្បីគណនាវា ។ ដោយតាង u ជាអនុគមន៍លោការីត និង កន្សោមដែលនៅសល់ជា dv ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int x^3\ln|x-1|dx$ ខ. $\int x^3\ln\left|\sqrt{x-2}\right|dx$ គ. $\int x^2\ln|2-3x|dx$

ឃ. $\int x\ln(2x+3)dx$ ង. $\int x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$ ច. $\int x^3\ln\left|\frac{2x+3}{2x-3}\right|dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int x^3\ln|x-1|dx$

តាង $u=\ln|x-1|\Rightarrow du=-\frac{1}{x-1}dx$, $dv=x^3dx\Rightarrow v=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}$

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក គេបាន

$$\int x^3\ln|x-1|dx=\frac{x^4}{4}\ln|x-1|-\int-\frac{x^4}{4(x-1)}dx=\frac{x^4}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\int\frac{x^4-1+1}{x-1}dx$$

$$=\frac{x^4}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\int\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)+1}{x-1}dx$$

$$=\frac{x^4}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)-\frac{1}{4}\ln|x-1|+c$$

ដូចនេះ: $\boxed{\int x^3\ln|x-1|dx=\frac{1}{4}\left[x^4\ln|x-1|+\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)-\ln|x-1|\right]+c}$ ។

៤.៤ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int\frac{\ln|f(x)|}{x^n}dx$ ដែល $n\in IN$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះ យើងត្រូវពិភាក្សាពីករណីដូចខាងក្រោម៖

- បើ $n=1$ និង $f(x)=x$ នោះយើងតាង $u=\ln x$ ដែល $du=\frac{1}{x}dx$ រួចយើងជំនួសក្នុងអាំងតេក្រាលដើម ។
- បើ $n>1$ នោះយើងតាង u ជាអនុគមន៍លោការីត និង កន្សោមដែលនៅសល់ជា dv ។ រួចយើងអនុវត្តន៍រូបមន្ត $\int udv=uv-\int vdu$ ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំនត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \frac{\ln x}{x}dx$ ខ. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ គ. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

ឃ. $\int \frac{\ln(2x-1)}{x^2}dx$ ង. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ ច. $\int \frac{\ln|3x-2|}{x^3}dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int \frac{\ln x}{x}dx$ តាង $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x}$

គេបាន $\int udu=\frac{u^2}{2}+C$ ជំនួស u ដោយ $\ln x$

ដូចនេះ: $\int\frac{\ln x}{x}dx=\frac{\ln^2 x}{2}+c$ ។

ខ. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ តាង $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x}$

គេបាន $\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+c$ ជំនួស u ដោយ $\ln x$

ដូចនេះ: $\boxed{\int \frac{1}{x\ln x}dx=\ln|\ln|x||+c}$ ។

៤.៥ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $I_n=\int \ln^n xdx$ ដែល $n\in IN$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះ នោះយើងប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដើម្បីគណនាវា ។ ដោយយើងតាង u ជាអនុគមន៍លោការីតនិងកន្សោមដែលនៅសល់ជា dv ។

គេបានរូបមន្ត: $\boxed{I_n=x\ln^n x-nI_{n-1}}$

ឬ $I_n=\int \ln^n xdx=x\left[\ln^n x-n\ln^{n-1}x+n(n-1)\ln^{n-2}x-\cdots+(-1)^n n!\right]$

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

ក. $\int \ln^2 xdx$ ខ. $\int \ln^3 xdx$ គ. $\int \ln^5 xdx$

ឃ. $\int \ln^6 xdx$ ង. $\int \ln^7 xdx$ ច. $\int \ln^9 xdx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int \ln^2 xdx$ តាង $u=\ln^2 x \Rightarrow du=\frac{2\ln x}{x}dx$ នោះ $v=\int dx = x$

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក គេបាន

$$\int \ln^2 xdx = x\ln^2 x - 2\int \ln xdx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + 2c$$

ដូចនេះ $\int \ln^2 xdx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + 2c$ ។

ខ. $\int \ln^3 xdx$ តាង $u=\ln^3 x \Rightarrow du=\frac{3\ln^2 x}{x}dx$ នោះ $v=\int dx = x$

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក គេបាន

$$\int \ln^3 xdx = x\ln^3 x - 3\int \ln^2 xdx = x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + 2c\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\int \ln^3 xdx = x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + 2c\right)}$ ។

៤.៦ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int e^{ax+b}dx$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះយើងត្រូវតាង $u=ax+b$ រួចគណនា $du=u'dx$ ហើយយកទៅជំនួសក្នុងអាំងតេក្រាលដើម ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំនត់ខាងក្រោម:

ក. $\int e^{4x+3}dx$ ខ. $\int e^{-2x}dx$ គ. $\int e^{5x-7}dx$

ឃ. $\int x^2e^{2x^3+4}dx$ ង. $\int \sin x\, e^{\cos x}dx$ ច. $\int \sqrt{e^x+1}dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int e^{4x+3}dx$ តាង $u=4x+3 \Rightarrow du = 4dx$

គេបាន $\int e^u\frac{du}{4} = \frac{1}{4}e^u + c$ ជំនួស u ដោយ $4x+3$

ដូចនេះ $\boxed{\int e^{4x+3}dx = \frac{1}{4}e^{4x+3} + c}$ ។

ខ. $\int e^{-2x}dx$ តាង $u=-2x \Rightarrow du=-2dx$

គេបាន $\int -e^{u}\frac{du}{2}=-\frac{1}{2}e^{u}+c$ ជំនួស u ដោយ $-2x$

ដូចនេះ: $\boxed{\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+c}$ ។

៤.៧ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $I_n=\int x^n e^x dx$ ដែល $n\in IN$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះនោះយើងត្រូវប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ។ ដោយតាង $u=x^n$ និងកន្សោមដែលនៅសល់ជា dv ។ គេបានរូបមន្ត: $\boxed{I_n=x^n e^x-nI_{n-1}}$

ឬ $I_n=\int x^n e^x dx=e^x\left[x^n-\left(x^n\right)'+\left(x^n\right)''-\left(x^n\right)'''+\cdots\right]+c$ ដេរីវេជាបន្ទាប់ ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម ដោយប្រើរូបមន្ត **៤.៧**

ក. $\int x\,e^x dx$ ខ. $\int x^2e^x dx$ គ. $\int x^3e^x dx$

ឃ. $\int x^5e^x dx$ ង. $\int x^4e^{5x} dx$ ច. $\int x^3e^{x^2} dx$

ឆ. $\int x^4e^{-2x} dx$

ដំណោះស្រាយ

៤.៨ អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $I_n=\int \frac{x^n}{e^x}dx$ ដែល $n\in IN$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលរាងបែបនេះ យើងត្រូវបម្លែងអនុគមន៍ $\frac{x^n}{e^x}=x^n e^{-x}$ យើងបាន:

$I_n=\int \frac{x^n}{e^x}dx=\int x^n e^{-x}dx$ បន្ទាប់មកយើងអនុវត្តន៍រូបមន្ត ៤.៧ ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \frac{x}{e^x}dx$ ខ. $\int \frac{x^2}{e^x}dx$ គ. $\int \frac{x^3}{e^x}dx$

ឃ. $\int \frac{x^5}{e^x}dx$ ង. $\int \frac{x^8}{e^x}dx$ ច. $\int \frac{x^{10}}{e^x}dx$

ឆ. គណនា I_{12} ដោយស្គាល់ $\int \frac{x^n}{e^{2x}}dx$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោមៈ

១. $\int xe^{-x}dx$ ២. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$ ៣. $\int (3-2x)e^{x}dx$

៤. $\int (x+1)e^{x}dx$ ៥. $\int \left(1-\frac{2}{3}x\right)e^{x}dx$ ៦. $\int xe^{\frac{x}{5}}dx$

៧. $\int xe^{0,1x}dx$ ៨. $\int x^2e^{-x}dx$ ៩. $\int x^3e^{2x}dx$

១០. $\int x^3e^{x}dx$ ១១. $\int x^2e^{3x}dx$ ១២. $\int x^3e^{-2x}dx$

១៣. $\int (3+x)e^{\sqrt{x}}dx$ ១៤. $\int x\ln x^2dx$ ១៥. $\int x^2\ln xdx$

១៦. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ ១៧. $\int \frac{\ln 3x}{x^2}dx$

មេរៀនទី ៥

អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

៥.១. ករណីងាយ $\int f(\sin x, \cos x.\tan x)dx$ ដែលមាន $d(\sin x), d(\cos x), d(\tan x)$

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \sin^5 x \cos xdx$ ខ. $\int \sin x \cos^3 xdx$ គ. $\int \sin 2x \cos 2xdx$

ឃ. $\int \sin 2x \cos^2 2xdx$ ង. $\int \frac{\cot x}{\sin^2 x}dx$ ច. $\int \frac{1}{\tan x}dx$

ដំណោះស្រាយ

៥.២. អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int \sin^n xdx$ និង $\int cos^n xdx$ ចំពោះ n ជាចំនួនសេស

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះយើងគ្រាន់តែផ្តាច់ផ្នែក $\sin xdx$ ឬ $\cos xdx$ ហើយយើងបំបែកផ្នែកដែលនៅសល់ទៅជាពហុធានៃអនុគមន៍ $\sin^2 x$ និង $\cos^2 x$ នោះយើងនឹងអាចគណនាអាំងតេក្រាលនេះបាន ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \sin^5 xdx$ ខ. $\int \cos^3 xdx$

គ. $\int \sin^7 xdx$ ឃ. $\int \cos^5 2xdx$

ង. $\int \cos^7 xdx$ ច. $\int \cos^3 5xdx$

ដំណោះស្រាយ

៥.៣. អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int \sin^n xdx$ និង $\int cos^n xdx$ ចំពោះ n ជាចំនួនគូ

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលបែបនេះ យើងគ្រាន់តែបំបែក $\sin^n x$ និង $cos^n x$ អោយទៅជាពហុធា

នៃអនុគមន៍ $\sin^2 x$ និង $\cos^2 x$ បន្ទាប់មកប្រើរូបមន្ត $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ និង $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ នោះ យើងនឹងអាចគណនាអាំងតេក្រាលប្រភេទនេះបាន ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំនត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \cos^4 x dx$ ខ. $\int \sin^2 x dx$

គ. $\int \cos^4 3x dx$ ឃ. $\int \sin x^4 2x dx$

ង. $\int \cos^6 2x dx$ ច. $\int \sin x^6 3x dx$

ដំណោះស្រាយ

៥.៤. អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int x^n \sin x dx$ និង $\int x^n \cos x dx$ ចំពោះ $n \in IN$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលបែបនេះ យើងគណនាវាតាមទម្រង់ អាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដោយយក $u = x^n$ និងផ្នែកដែលនៅសល់តាងដោយ dv ។ យើងទទួលបានរូបមន្ត:

$$\int x^n \sin x dx = (-x^n)(\cos x) + (-x^n)'(\cos x)' + (-x^n)''(\cos x)'' + (-x^n)'''(\cos x)''' + \cdots + c$$

$$\int x^n \cos x dx = (-x^n)(\sin x) + (-x^n)'(\sin x)' + (-x^n)''(\sin x)'' + (-x^n)'''(\sin x)''' + \cdots + c$$

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int x \cos x dx$ ខ. $\int x \sin x dx$ គ. $\int x^3 \sin x dx$

ឃ. $\int x^3 \cos x dx$ ង. $\int x^5 \sin x dx$ ច. $\int x^5 \cos x dx$

ដំណោះស្រាយ

៥.៥. អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int f(\sin x, \cos x, \tan x) dx$ ដែល f ជាប្រភាគសនិទាន

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះ យើងតាង $t = \tan\frac{x}{2}$ នោះយើងបាន:

$x = 2\arctan t$ នាំឲ្យ $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

ប៉ុន្តែនៅពេលដែលយើងតាង $t = \tan\frac{x}{2}$ យើងក៏ត្រូវផ្លាស់ប្តូរ $\sin x$ និង $\cos x$ ទៅជាអនុគមន៍នៃ t ផងដែរ ។ យើងត្រូវកំណត់ចំណាំនូវចំណុចទាំងបីដូចខាងក្រោម:

- $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$
- $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

សម្គាល់

- ✓ វិធីនេះត្រូវបានគេប្រើជាពិសេសចំពោះអាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int \dfrac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$
- ✓ បើយក $x = -x$ ជំនួសក្នុងអនុគមន៍ $f(\sin x, \cos x)$ វាមិនប្តូរតម្លៃនោះយើងតាង $\cos x = t$
- ✓ បើយក $x = \pi - x$ ជំនួសក្នុងអនុគមន៍ $f(\sin x, \cos x)$ វាមិនប្តូរតម្លៃនោះយើងតាង $\sin x = t$
- ✓ បើយក $x = \pi + x$ ជំនួសក្នុងអនុគមន៍ $f(\sin x, \cos x)$ វាមិនប្តូរតម្លៃនោះយើងតាង $\tan x = t$

ហើយបន្ទាប់មកយើងប្រើរូបមន្ត:

$\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ $\qquad$ $\cos^2 x = \dfrac{t^2}{1-t^2}$

$\sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\qquad$ $\cos 2x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \dfrac{1}{\sin x}dx$ $\qquad$ ខ. $\int \dfrac{1}{\cos x}dx$

គ. $\int \dfrac{1}{\sin x + \cos x}dx$ $\qquad$ ឃ. $\int \dfrac{1}{\sin x + \cos x + 1}dx$

ង. $\int \dfrac{1}{1+\sin x}dx$ $\qquad$ ច. $\int \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

៥.៦. អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int \sin mx \cos nx dx, \int \cos mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះយើងត្រូវការបម្លែងផលគុណទៅជាផលបូកតាមរូបមន្ត:

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$
$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \sin 5x\cos 3x dx$ ខ. $\int (1-2\sin^2 x)\cos x dx$

គ. $\int \sin x\sin 5x\cos x dx$ ឃ. $\int \sin 2x(2\cos^2 x-1)dx$

ង. $\int \sin 2x\cos^2 x dx$ ច. $\int \frac{\sin 4x\cos x}{2\sin^2 x-1}dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំនត់ខាងក្រោម:

៥.៧. អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int \tan^n x dx$ ដែល $n\in IN$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះ យើងតាង $t=\tan x$ នោះ យើងបាន:

$$x=\arctan t\Rightarrow dx=\frac{1}{1+t^2}dt$$

ប៉ុន្តែនៅពេលដែលយើងតាង $t=\tan x$ យើងក៏ត្រូវផ្លាស់ប្តូរ ទៅជាអនុគមន៍នៃ t ផងដែរ ។ យើងត្រូវកំណត់ចំណាំនូវចំណុចទាំងបីដូចខាងក្រោម៖

$$\int \frac{t}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+c$$
$$\int \frac{1}{1+t^2}dt=\arctan t+c$$
$$\arctan t=\arctan(\arctan x)=x$$

ឧទាហរណ៍ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \tan^2 x dx$ ខ. $\int \tan^3 x dx$ គ. $\int \tan^2 2x dx$ ឃ. $\int \tan^5 x dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

៥.៨. អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int \cot^n x dx$ ដែល $n \in IN$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះ យើងតាង $t = \cot x$ នោះ យើងបាន:

$x = arc\cot t$ នាំអោយ $dx = -\frac{1}{1+t^2}dt$

ប៉ុន្តែនៅពេលដែលយើងតាង $t = \tan x$ យើងក៏ត្រូវផ្លាស់ប្តូរ ទៅជាអនុគមន៍ នៃ t ផងដែរ ។

យើងត្រូវកំណត់ចំណាំនូវចំណុចទាំងបីដូចខាងក្រោម:

$\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)+c$

$\int \frac{1}{1+t^2}dt = -arc\cot t + c$

$arc\cot t = arc\cot(\cot x) = x$

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \cot^2 xdx$ ខ. $\int \cot^3 xdx$ គ. $\int \cot^2 2xdx$ ឃ. $\int \cot^5 xdx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \cot^2 xdx$

តាង $t = \cot x$ នោះ $x = arc\cot t$ នាំអោយ $dx = -\frac{1}{1+t^2}dt$

យើងបាន:

$\int \cot^2 xdx = \int -\frac{t^2}{1+t^2}dt$

នាំអោយ $\int -\frac{t^2}{1+t^2}dt = -\int \frac{t^2-1+1}{1+t^2}dt = -\int \frac{1+t^2}{1+t^2}dt + \int \frac{1}{1+t^2}dt = \int -1dt + \int \frac{1}{1+t^2}dt$

$= -t - arc\cot t + c$ (1)

ជំនួស $t = \cot x$ ក្នុង(1)

$\int \cot^2 xdx = -\cot x - arc\cot(\cot x) + c = -\cot x - x + c$

ដូចនេះ $\boxed{\int \cot^2 xdx = -\cot x - x + c}$

៥.៩. អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int \frac{a\sin x + b\cos x + c}{a'\sin x + b'\cos x + c'}dx$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះ យើងត្រូវ:

សរសេរកន្សោម $a\sin x + b\cos x + c = \alpha(a'\sin x + b'\cos x + c') + \beta(a'\cos x - b'\sin x) + \lambda$

រួចគណនាតម្លៃ α,β និង λ អាំងតេក្រាលខាងលើប្តូរជារាង:

$$\int\frac{a\sin x+b\cos x+c}{a^{'}\sin x+b^{'}\cos x+c^{'}}dx=\alpha\int dx+\beta\int\frac{a^{'}\cos x-b^{'}\sin x}{a^{'}\sin x+b^{'}\cos x+c^{'}}dx+\lambda\int\frac{1}{a^{'}\sin x+b^{'}\cos x+c^{'}}dx$$

$$=\alpha x+\beta\ln\left|a^{'}\sin x+b^{'}\cos x+c\right|+\lambda\int\frac{1}{a^{'}\sin x+b^{'}\cos x+c^{'}}dx$$

ហើយប្រើបន្ទាប់មកគេប្រើរូបមន្ត:**៥.៥** ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int\frac{\sin x-2\cos x+3}{\sin x+2\cos x-3}dx$ ខ. $\int\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int\frac{\sin x-2\cos x+3}{\sin x+2\cos x-3}dx=\int\frac{\sin x-2\cos x-3+6}{\sin x+2\cos x-3}dx=\int dx+\int\frac{6dx}{\sin x+2\cos x-3}$

៥.១០. អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានប្រើត្រីកោណមាត្រឬអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

រំលឹក

១.ទំនាក់ទំនងអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

chx កូស៊ីនុសអ៊ីពែបូលិក shx ស៊ីនុសអ៊ីពែបូលិក

thx តង់សង់អ៊ីពែបូលិក $\cot hx$ កូតង់សង់អ៊ីពែបូលិក

$chx=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ $shx=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ $ch^{2}x-sh^{2}x=1$ $\frac{1}{sh^{2}x}=\coth^{2}x-1$

$thx=\frac{shx}{chx}$ $\coth x=\frac{chx}{shx}$ $\frac{1}{ch^{2}x}=1-th^{2}x$

២.រូបមន្តផលបូកនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

$$ch(a+b)=chachb+shashb$$

$$sh(a+b)=chashb+shachb$$

$$th(a+b)=\frac{tha+thb}{1-thathb}$$

៣.រូបមន្តមុំឌុបនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

$ch2x = ch^2x + sh^2x = 2ch^2x - 1 = 2sh^2x + 1$

$sh2x = 2chxshx$

$th^2x = \frac{2thx}{1+th^2x}$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល $\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ គេកំណត់បានបីករណីដូចខាងក្រោម:

$\int f(t,\sqrt{k^2+t^2})dt$ ឬ $\int f(t,\sqrt{k^2-t^2})dt$ និង $\int f(t,\sqrt{t^2-k^2})dt$

- **ករណីទី១** $\int f(t,\sqrt{k^2+t^2})dt$

  ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលបែបនេះយើងត្រូវប្តូរអថេរ $t = shs$ នោះ

  $s = \arg sh\frac{t}{k} = \ln(\frac{t}{k} + \sqrt{\frac{t^2}{k^2}+1})$

  ឬ តាង $t = k\tan s$ នោះ $s = \mathrm{ar}c\tan\frac{t}{k}$ ។

ឧទាហរណ៍ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}dx$ ខ. $\int \frac{1}{t^2\sqrt{9+t^2}}dx$ គ. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$

ដំណោះស្រាយ

- **ករណីទី២** $\int f(t,\sqrt{k^2-t^2})dt$

  ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះយើងត្រូវប្តូរ អថេរ $t = ths$ នោះ

  $s = \arg\tanh\frac{t}{k}$

  ឬ តាង $t = k.\sin t$ នោះ $s = \arctan\frac{t}{k}$

ឧទាហរណ៍ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$ ខ. $\int \frac{1}{(3-x)^2\sqrt{8-6x+x^2}}dx$ គ. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

ដំណោះស្រាយ

- **ករណី៣** $\int f(t,\sqrt{t^2-k^2})dt$

  ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដែលមានរាងបែបនេះយើងត្រូវប្តូរ អថេរ $t = chs$

  នោះ $s = \arg ch\frac{t}{k} = \ln(\frac{t}{k} + \sqrt{\frac{t^2}{k^2}-1})$ ឬ តាង $t = \frac{k}{\cos s}$ នោះ $s = \arccos\frac{k}{t}$

ឧទាហរណ៍ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$ ខ. $\int \frac{1}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}dx$

គ. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx$ ឃ. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោមៈ

១. $\int \frac{1}{1-\cos x}dx$ ២. $\int \frac{1}{1-\sin x}dx$ ៣. $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$

៤. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$ ៥. $\int (\tan^2 x+\tan^4 x)dx$ ៦. $\int \sin 7x\cos 3x dx$

៧. $\int \sin 2x\sin 5x\cos 2x dx$ ៨. $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}dx$ ៩. $\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}dx$

១០. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ ១១. $\int \frac{1}{\tan^8 x}dx$ ១២. $\int \frac{\cos 2x}{1+\cos x\sin x}dx$

១៣. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx$ ១៤. $\int \frac{\cos x}{(1-\cos x)^2}dx$ ១៥. $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx$

១៦. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$ ១៧. $\int \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx$ ១៨. $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx$

១៩. $\int \frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}dx$ ២០. $\int \frac{1}{\cos 2x\tan x}dx$ ២១. $\int \frac{\cos^2 x}{\cos 3x\sin x}dx$

២២. $\int \frac{1}{1+\tan x}dx$ ២៣. $\int \frac{1}{5-3\cos x}dx$ ២៤. $\int \frac{1}{7+4\sin x}dx$

២៥. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$ ២៦. $\int \frac{\sin^2 x}{1-\sin x}dx$ ២៧. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x-\cos^3 x}dx$

២៨. $\int \frac{1}{\tan^2 x+\sin^2 x}dx$ ២៩. $\int \sqrt{\tan x}dx$ ៣០. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin^3 x-\cos^3 x}dx$

៣១. $\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}dx$ ៣២. $\int \sqrt{1+\sin x}dx$ ៣៣. $\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin x}dx$

៣៤. $\int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\sqrt{\cos^3 x}}dx$ ៣៥. $\int \frac{1}{\sqrt[5]{\sin^3 x\cos^5 x}}dx$ ៣៦. $\int \frac{1}{\sin x\sqrt{\cos x}}dx$

៣៧. $\int \frac{1}{5\sin x+3\cos x+3}dx$ ៣៨. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x-\sin^2 x-1}dx$ ៣៩. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+4\sin x\cos x}dx$

៤០. $\int \frac{\cos^3}{\sin^3 x+\sin x}dx$ ៤១. $\int \frac{\sin x+2\cos x-1}{2\sin x+\cos x+3}dx$ ៤២. $\int \frac{\sin x}{\cos x+\sin 4x-2}dx$

៤៣. $\int \frac{7-3\sin x+\cos x}{1-\sin x+4\cos x}dx$ ៤៤. $\int \frac{\sin x+2\cos x-1}{2\sin x+4\cos x+1}dx$ ៤៥. $\int \frac{\cos x-2\sin x}{2\sin x+2\cos x+2010}dx$

៤៦. $\int \frac{\arctan\frac{2x}{3}}{9+4x^2}dx$ ៤៧. $\int \frac{x-\arctan x}{1+x^2}dx$ ៤៨. $\int th3xdx$

៤៩. $\int th^3xdx$ ៥០. $\int \frac{1}{shx}dx$ ៥១. $\int \frac{1}{chx}dx$

៥២. $\int \sqrt{chx+1}dx$ ៥៣. $\int ch^2x\sqrt[3]{\tan^2 x}dx$ ៥៤. $\int \frac{1}{sh^2x-chx+3}dx$

៥៥. $\int \frac{shxchx}{sh^4x+ch^4}dx$

មេរៀនទី៦ អាំងតេក្រាលកំណត់

៦.១.និយមន័យ

តាង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ នោះផលដក $F(b)-F(a)$ ដែល $a,b\in x$ ហៅថាអាំងតេក្រាលកំណត់នៃ $f(x)$ ពី a ទៅ b និងកំណត់សរសេរដោយ $\int_a^b f(x)dx$ ។

$$\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b) \qquad (1)$$

តម្លៃ a និង b ដែលនៅលើសញ្ញាអាំងតេក្រាល $\int$ ក្នុងសមីការ(1)ហៅថាលីមីតនៃអាំងតេក្រាល ដែល a ជាលីមីតគោលក្រោម និង b ជាលីមីតគោលក្រោម ។ ជាញឹកញាប់ គេកំណត់សរសេរ $F(b)-F(a)$ ដោយ $F(x)|_a^b$ ។

បើ $F(x)+c$ ជាព្រីមីទីវមួយផ្សេងទៀតនៃ $f(x)$ នោះគេបាន:

$$\int_a^b f(x)dx = (F(x)+c)|_a^b = [F(b)-c] = [F(b)+c]-[F(a)+c]$$

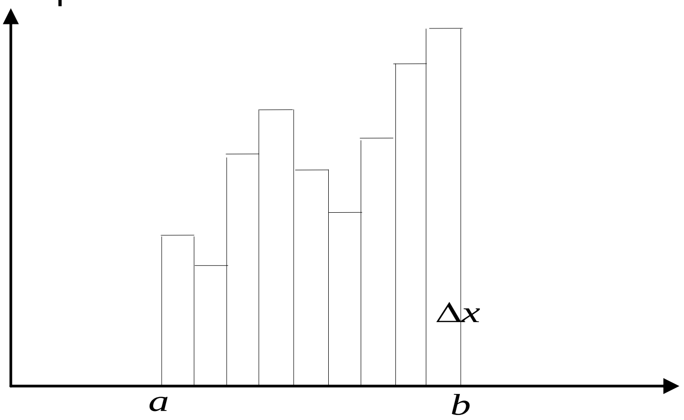
ដូចនេះដើម្បីរក $\int_a^b f(x)dx$ យើងត្រូវស្គាល់ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ហើយតម្លៃ $\int_a^b f(x)dx$ គឺជាតម្លៃផលដករវាង $F(x)$ ត្រង់ចំណុច b និង a ។

ឧទាហរណ៍ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int_1^2 xdx$ ខ. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx$ គ. $\int_1^2 (x^2-2x)dx$ ឃ. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos xdx$

ដំណោះស្រាយ

៦.២. អាំងតេក្រាលក្នុងន័យ Riemann នៃអនុគមន៍ជណ្តើរលើចន្លោះ $[a,b]$



យើងចង់គណនាក្រាឡាផ្ទៃលើពី a ទៅ b យើងចែកចន្លោះ $[a,b]$ ជា n ចំណែកដោយ

$(a = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n = b)$ ដែល $\forall x \in [a_i, a_{i+1}]$, $f(x) = A_i$ ដែល $i \in [1,2,3,\ldots,n-1]$

នោះ $[a,b]$ ផ្ទៃរបស់វាគឺ $I(f)$ ដែល $I(f) = \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)A_i$

$$= (a_2 - a_1)A_1 + (a_3 - a_2)A_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})A_{n-1}$$

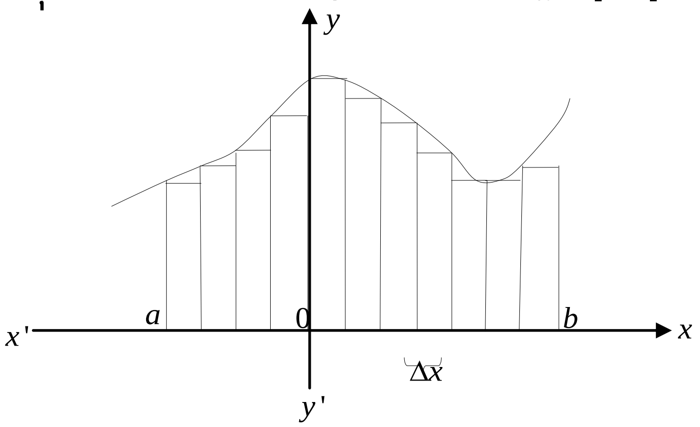
$$= \int_a^b f(x)dx$$

និយមន័យ: f ជាអនុគមន៍ជណ្តើរលើ $[a,b]$ កំណត់ដោយ $(a = a_1, a_2 = a_3, \ldots, a_n = b)$ ហើយនិងមាន

$\forall x \in [a_i, a_{i+1}]$ នោះគេថា $f(x) = A_i$ ជាចំនួនពិតដែលគេហៅថាផ្ទៃ ។

គេសរសេរ $I(f) = \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)A_i = \int_a^b f(x)dx$

៦.២. អាំងតេក្រាលក្នុងន័យ Riemann នៃអនុគមន៍ទ័លលើចន្លោះ $[a,b]$



មានអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់ទ័លលើ $[a,b]$ ហើយគេចែក $[a,b]$ ជា n ចំណែកស្មើគ្នាដែលគំលាត ឬប្រវែងពីរចំណុច

គឺ Δx ។ ដូចនេះក្រឡាផ្ទៃចតុកោណកែងទី i គឺ $f(x_i)\Delta x$ ហើយក៏ជាក្រឡាផ្ទៃនៅក្រោមខ្សែកោង $y=f(x)$ ប៉ុន្តែវា

ស្មើចន្លោះពី $x=x_i$ ទៅ $x=x_{i+1}$ ផងដែរ ។ យើងដឹងថាក្រឡាផ្ទៃចតុកោណកែងទាំងអស់មានចំនួន n នោះយើងទាញបាន:

$f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x$ ដែលជាក្រឡាផ្ទៃសរុបក្រោមខ្សែងកោងនោះក្នុង ចន្លោះ $x=a$ ទៅ $x=b$ វាជាអាំងតេក្រាលកំណត់មានរាង $\int_a^b f(x)\Delta x$ បើ $n\to\infty$ នោះ $\Delta x\to 0$ គេបាន:

$$\int f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$ ហៅថារូបមន្ត Riemann ។

ឧទាហរណ៍ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោមតាមរូបមន្តRiemann:

ក. $\int_0^1 xdx$ ខ. $\int_0^2 (x^2+x^3)dx$ គ. $\int_1^2 x^5dx$ ឃ. $\int_1^3 (x+1)^2dx$

ដំណោះស្រាយ

៦.៣. លក្ខណៈគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលកំណត់

- ❖ $\int_a^a f(x)dx=0$
- ❖ $\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$

- ❖ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- ❖ $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- ❖ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

ឧទាហរណ៍:

១. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx$ ខ. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^4 x dx$

គ. $\int_{-1}^{5} |x| dx$ ឃ. $\int_{-5}^{5} |x+5| dx$

២.គេមាន $\int_1^5 f(x)dx = -1$; $\int_3^5 f(x)dx = 3$ និង $\int_1^5 g(x)dx = 7$ ។

ក.គណនា $\int_3^5 (2f(x)-g(x))dx$ ខ. $\int_1^3 f(x)dx$

៣.គេមាន $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x<2 \\ 3x-2 & x \le 2 \end{cases}$ ។

ចូរគណនា $\int_0^6 f(x)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx$

៦.៤. វិធីប្តូរអថេរក្នុងអាំងតេក្រាលកំណត់

គេមានអាំងតេក្រាលកំណត់ $\int_a^b f(x)dx$ ។

បើយក $x = \mu'(t)$ នោះ $t = \mu^{-1}(x)$

$dx = \mu'(t)dt$

ពេល $x = a$ នោះ $a = \mu(x)$ នាំឲ្យ $t = \mu^{-1}(a)$

ពេល $x = b$ នោះ $b = \mu(x)$ នាំឲ្យ $t = \mu^{-1}(b)$

គេបាន

$$F(x) = \int_{\mu^{-1}(a)}^{\mu^{-1}(b)} f\left[\mu(t)\right]\mu'(t)dt$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧទាហរណ៍

បង្ហាញថារង្វង់ដែលមានផ្ចិតស្ថិតនៅលើគល់តម្រុយអរតូណរមេនិងកាំ R មានក្រឡាផ្ទៃស្មើនឹង πR^2 ។

ដំណោះស្រាយ

៦.៥. អាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែក

គេមាន $\int udv = uv - \int vdu$ នោះ $\int_a^b udv = uv\big|_a^b - \int_a^b vdu$

ឧទាហរណ៍ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int_2^3 x\ln xdx$ ខ. $\int_1^2 xe^x dx$ គ. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin xdx$ ឃ. $\int_1^3 x\sqrt{x+1}dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម:

៦.៦. អាំងតេក្រាល Improper ឬ អាំងតេក្រាលអនន្ត

អាំងតេក្រាលដែលមានរាង $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ឬ $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ និង $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ គេហៅថាអាំងតេក្រាល

Improper ឬ អាំងតេក្រាលអនន្ត ។

- ចំពោះ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ កំណត់បានដោយ $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\int_a^k f(x)dx$
  - ប្រសិនបើអង្គខាងស្តាំមានលីមីតនោះ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាលរួមគឺរួមទៅរកតម្លៃលីមីត ។

- ប្រសិនបើអង្គខាងស្តាំគ្មានលីមីតនោះ $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាលរីក ។

➤ ចំពោះ $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ កំណត់បានដោយ $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{k\to-\infty}\int_{k}^{a} f(x)dx$

- ប្រសិនបើអង្គខាងស្តាំមានលីមីតនោះ $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាលរួមគឺរួមទៅរកតម្លៃលីមីត ។
- ប្រសិនបើអង្គខាងស្តាំគ្មានលីមីតនោះ $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ជាអាំងតេក្រាលរីក ។

➤ ចំពោះ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ កំណត់បានដោយ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$

- ប្រសិនបើអាំងតេក្រាលទាំងពីរនៅអង្គខាងស្តាំជាអាំងតេក្រាលរីកនោះ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ក៏រីកដែរ ។
- ប្រសិនបើអាំងតេក្រាលទាំងពីរនៅអង្គខាងស្តាំជាអាំងតេក្រាលរួមនោះ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ក៏រួមដែរ ។

ឧទាហរណ៍ គណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់ Improper ខាងក្រោមបើមាន:

ក. $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ ខ. $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ គ. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$ ឃ. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់ Improper

ក. $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$

តាមនិយមន័យ $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{k\to+\infty}\int_{a}^{k} f(x)dx$

យើងបាន
$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{2}^{k} \frac{1}{x^2}dx$$
$$= \lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{2}^{k}$$
$$= \lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\right) = 0+\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}}$ ។

ខ. $\int_{-\infty}^{0}e^x dx$

តាមនិយមន័យ $\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\lim_{k\to-\infty}\int_{k}^{a}f(x)dx$

យើងបាន $\int_{-\infty}^{0}e^x dx=\lim_{k\to-\infty}\int_{k}^{0}e^x dx$

$=\lim_{k\to-\infty}(e^x)\Big|_k^0=\lim_{k\to-\infty}(e^0-e^k)$

$=(1-e^{-\infty})=1-\frac{1}{e^{+\infty}}=1$

ដូចនេះ $\boxed{\int_{-\infty}^{0}e^x dx=1}$

គ. $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$

តាមនិយមន័យ $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{k\to+\infty}\int_{a}^{k}f(x)dx$

យើងបាន $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\lim_{r\to+\infty}\int_{0}^{r}\frac{1}{x^4+1}dx=$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. រកតម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់ដូចខាងក្រោម:

ក. $\int_{0}^{4}8dx$ ខ. $\int_{4}^{15}dx$ គ. $\int_{-1}^{1}(8x^2-x)dx$ ឃ. $\int_{-4}^{4}\frac{1}{x^2}dx$ ង. $\int_{6}^{10}\frac{1}{x^2-3}dx$

២. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម:

ក. $\int_{0}^{6}\sqrt{2x+4}dx$ ខ. $\int_{4}^{12}(x^2-4x+7)dx$ គ. $\int_{3}^{9}(x^2-4x=3)(x^3-x+1)dx$

ឃ. $\int_{0}^{5}\ln 3x dx$ ង. $\int_{0}^{3}2^x dx$ ច. $\int_{-4}^{4}(e^x-e^{-x})dx$

៣. គណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម បើគោលក្រោម 2 និងគោលលើ 9 :

ក. $\int xe^{-x}dx$ ខ. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$ គ. $\int (1-x)e^{x}dx$ ឃ. $\int (3-2x)e^{x}dx$

ង. $\int x\ln 3x dx$ ច. $\int x\ln x^2 dx$ ឆ. $\int xe^{-\frac{x}{5}}dx$ ជ. $\int xe^{0,2x}dx$

៤. គណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម បើគោលក្រោម 2 និងគោលលើ 6 :

ក. $\int x\sqrt{x-6}dx$ ខ. $\int x\sqrt{1-x}dx$ គ. $\int (1+x)^8 xdx$ ឃ. $\int (1+x)(x+2)^6 dx$

ង. $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$ ច. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$ ឆ. $\int x^2\ln x dx$ ជ. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

៥. គណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម បើគោលក្រោម $\frac{\pi}{6}$ និងគោលលើ $\frac{\pi}{3}$:

ក. $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}dx$ ខ. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$ គ. $\int \frac{\cos x}{(1-\cos x)^2}dx$ ឃ. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$

ង. $\int \frac{1}{\cos x+\sin x}dx$ ច. $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx$ ឆ. $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx$ ជ. $\int \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx$

៦. គណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម ប្រសិនបើមាន:

ក. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x}dx$ ខ. $\int_{-\infty}^{0} e^{3x}dx$ គ. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ ឃ. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x}dx$ ។

ចំណេះដឹងបន្ថែមលើការគណនាអាំងតេក្រាល

ការគណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើវិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់

គេសង្កេតឃើញថាមានអាំងតេក្រាលមួយចំនួនដែលមានអនុគមន៍ពីរផ្សេងគ្នាហើយដេរីវេនៃអនុគមន៍អាំងពីរ
មិនទាក់ទងគ្នាដែលចាំបាច់យើងត្រូវគណនាតាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដូចជា

$I=\int P(x)e^{ax}dx$;$I=\int P(x)\sin axdx$ និង $I=\int P(x)\cos axdx$ (ក្នុងនោះ $P(x)$ ជាពហុធា) ។

ចំពោះអាំងតេក្រាលមានរាងដូចខាងលើនេះយើងក៏អាចគណនាដោយប្រើវិធីសាស្ត្រផ្សេងពីអាំងតេក្រាល
ដោយផ្នែកគឺវិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់ ។

❖ **ចំពោះអាំងតេក្រាល** $I=\int P(x)e^{ax}dx\,;P(x)$ **ជាពហុធា**

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលប្រភេទនេះយើងមានពីររបៀបៈ

របៀបទី១៖ ប្រើតាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

តាង $\begin{cases}u=P(x)\\dv=e^{ax}dx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=P'(x)dx\\v=\int e^{ax}dx=\dfrac{1}{a}e^{ax}\,;(a\neq 0)\end{cases}$

រួចប្រើរូបមន្តៈ $\int udv=uv-\int vdu$ ។

ក្នុងករណីនេះអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកអាស្រ័យលើដឺក្រេរបស់ពហុធា $P(x)$ ។ មានន័យថាបើពហុធា $P(x)$ មាន

ដឺក្រេទី n យើងត្រូវធ្វើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក n ដងដែរ ។

របៀបទី២៖ ប្រើតាមអាំងវិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់

គេសរសេរ $\int P(x)e^{ax}dx=Q(x)e^{ax}+C \quad (1)$

ដែល $Q(x)$ ជាពហុធាមួយហើយ $\deg(P(x))=\deg(Q(x))$ ។

ដើម្បីរក $Q(x)$ យើងត្រូវធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃ (1) ធៀបនឹង x ហើយផ្ទឹមមេគុណនៃតួដែលមានដឺក្រេដូចគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ គណនា 1) $I=\int x^2e^{3x}dx$

របៀបទី1: ប្រើតាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

តាង $\begin{cases}u=x^2\\du=e^{3x}dx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=2xdx\\v=\dfrac{1}{2}e^{3x}\end{cases}$

នាំឲ្យ $I=\dfrac{1}{3}x^2.e^{3x}-\dfrac{2}{3}\int xe^{3x}dx=\dfrac{1}{3}x^2e^{3x}-\dfrac{2}{3}J$ ដែល $J=\int xe^{3x}dx$ ។

តាង $\begin{cases}u=x\\dv=e^{3x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\dfrac{1}{3}e^{3x}\end{cases}$

យើងតាង $I=\dfrac{1}{3}xe^{3x}-\dfrac{1}{3}\int e^{3x}dx=\dfrac{1}{3}xe^{3x}-\dfrac{1}{9}e^{3x}+C_1 \quad (C_1$ ថេរ$)$

ដូចនេះ: $I=\left(\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{9}x+\dfrac{2}{27}\right)e^{3x}+C$ ដែល C_1 ថេរ ។

របៀបទី2: ប្រើវិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់

គេមាន $\int x^2e^{3x}dx=\left(ax^2+bx+c\right)e^{3x}+C$ ដែល $a\;;b;c$ ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់រក ។

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x គេបាន:

$$x^2e^{3x}=(2ax+b)e^{3x}+3(ax^2+bx+c)e^{3x},\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2e^{3x}=\left[3ax^2+(2a+3b)x+b+3c\right]e^{3x},\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3a=1\\2a+3b=0\\b+3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\b=-\dfrac{2}{9}\\c=\dfrac{2}{27}\end{cases}$$

ដូចនេះ: $I=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)e^{3x}+C$ ដែល C ថេរ ។

2) គណនា $I=\int(x^3+4x^2-2x+7)e^{2x}dx$

គេមាន $\int(x^3+4x^2-2x+7)e^{2x}dx=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}+C$

ដែល a,b,c និង d ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់រក ។ ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x គេបាន៖

$$(x^3+4x^2-2x+7)e^{2x}=(3ax^2+2bx+c)e^{2x}+2(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x},\ \forall x\in\Re$$

$$x^3+4x^2-2x+7=3ax^2+2bx+c+2ax^3+2bx^2+2cx+2d;\forall x\in\Re$$

$$x^3+4x^2-2x+7=2ax^3+(3a+2b)x^2+(2b+2c)x+(c+2d)$$

$$\begin{cases}2a=1\\3a+2b=4\\2b+2c=-2\\c+2d=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{4}{5}\\c=-\dfrac{9}{4}\\d=\dfrac{37}{8}\end{cases}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\int(x^3+4x^2-2x+7)e^{2x}dx=\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{4}{5}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{37}{8}\right)e^{2x}+c\quad;\quad\forall c\in\Re}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int xe^xdx$ ចំលើយ: $I=(x-1)e^x+C$

ខ. $I=\int x^5e^{x^2}dx$ ចំលើយ: $I=\frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^4-2x^2+2\right)+C$

គ. $I=\int\left(x^2-x+3\right)e^{2x}dx$ ចំលើយ: $I=\frac{1}{2}\left(x^2-2x+4\right)e^{2x}+C$

ឃ. $I=\int\left(x^2-2x+5\right)e^{-x}dx$ ចំលើយ: $I=-e^{-x}\left(x^2+5\right)+C$

❖ អាំងតេក្រាលមានរាង $I=\int P(x)\sin axdx$

យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលនេះតាមពីរបៀប៖

របៀបទី១ បើតាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

តាង $\begin{cases}u=P(x)\\dv=\sin axdx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=P'(x)dx\\v=\int\sin axdx=-\frac{1}{a}\cos ax;(a\neq0)\end{cases}$

រួចប្រើរូបមន្ត $\int udv=vu-\int vdu$

របៀបទី២ វិធីសាស្រ្តមេគុណមិនកំណត់

គេសរសេរ: $\int P(x)\sin axdx=Q(x)\cos ax+R(x)\sin ax+C$;$(a\neq0)$ (*)

ដែល $Q(x)$ និង $R(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេតូចជាងឬស្មើដឺក្រេ $P(x)$ ។ ដើម្បីរក $Q(x)$ និង $R(x)$ យើងធ្វើដេរីវេអង្គទាំងពីរនៃសមីការ(*)ធៀបនឹង x រួចផ្ទឹមមេគុណនៃតួដែលមានដឺក្រេដូចគ្នា ។

❖ ធ្វើដូចគ្នាចំពោះ: $I=\int P(x)\cos axdx$

ឧទាហរណ៍: គណនា $\int\left(x^2+7x-5\right)\sin 2xdx$

របៀបទី១ ប្រើតាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

តាង $\begin{cases}u=x^2+7x-5\\dv=\sin 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2x+7\\v=\int\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$

យើងបាន $I=-\frac{1}{x}\left(x^2+7x-5\right)\cos 2x+\frac{1}{2}\int\left(2x+7\right)\cos 2xdx$ (*)

គណនា $J=\int\left(2x+7\right)\cos 2xdx$

តាង $\begin{cases}u=2x+7\\dv=\cos 2xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$

យើងបាន $J=\frac{1}{2}(2x+7)1\sin 2x-\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}\left(2x+7\right)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C_1$ (ដែល C_1 ថេរ)

ដូចនេះ $\boxed{I=\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{7}{2}x+\frac{11}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}\right)\sin 2x+C}$ ដែល C ថេរ ។

របៀបទី២ វិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់

គេមាន $\int\left(x^2+7x-5\right)\sin 2x dx=\left(ax^2+bx+c\right)\cos 2x+\left(\alpha x^2+\beta x+\lambda\right)\sin 2x+C$

ដែល a,b,c,α,β និង λ ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់រក ។

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x គេបាន:

$$\left(x^2+7x-5\right)\sin 2x=\left(2ax+b\right)\cos 2x-2\left(ax^2+bx+c\right)\sin 2x+2\left(2\alpha x+\beta\right)\sin 2x$$

$$+2\left(\alpha x^2+\beta x+\lambda\right)\cos 2x \quad ;\forall x\in\Re$$

នោះ $\left(x^2+7x-5\right)\sin 2x=\left[-2ax^2+\left(2\alpha-2b\right)x+\beta-2c\right]\sin 2x$

$$+\left[2\alpha x^2+(2a+2\beta)x+(b+2\lambda)\right]\cos 2x \quad ;\forall x\in\Re$$

យើងបាន $\begin{cases}-2a=1\\2\alpha-2b=7\\\beta-2c=-5\\2\alpha=0\\2\beta+2a=0\\b+2\lambda=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=-\frac{7}{2}\\c=\frac{11}{8}\\\alpha=0;\beta=\frac{1}{2};\lambda=\frac{7}{4}\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{I=\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+\frac{11}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}\right)\sin 2x+C}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int\left(x^2+7x-5\right)\cos 2x dx$ ចំលើយ $I=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-\frac{11}{4}\right)\sin 2x+\left(\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}\right)\cos 2x+C$

ខ. $I=\int x^2\sin 3x dx$ ចំលើយ $I=\frac{2-9x^2}{27}\cos 3x+\frac{2}{9}x\sin 3x+C$

គ. $I=\int x^3\sin x dx$ ចំលើយ $I=\left(-x^3+6x\right)\cos x+\left(3x^3-6\right)\sin x+C$

ឃ. $I=\int x\cos x dx$ ចំលើយ $I=\cos x+x\sin x+C$

លំហាត់ស្រាវជ្រាវបន្ថែម

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

1. $\int \frac{dt}{1+t^4}$

បំភ្លឺ

$\int \frac{dt}{1+t^4} = \int \frac{dt}{t^4+2t^2+1-2t^2} = \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}t\right)^2} = \int \frac{dt}{\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)}$ ប្រើតាមកាណូនិច

2. $\int t^4\left(1-t^5\right)^5 dt$
3. $\int \frac{\ln^n x}{x} dx$
4. $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$
5. $\int \frac{dt}{\sin t \cos^3 t}$
6. $\int t^n e^t dt$
7. $\int t^n \cos t dt$
8. $\int t^n \sin t dt$
9. $\int_0^1 (\arcsin x)^m dx$
10. $\int_1^e \ln^m x dx,\ m \in IN$
11. $\int \frac{3t^3+10t^2-2t}{\left(t^2-\right)^2} dt$
12. $\int \frac{9t^2-3t+5}{t^3-t^2-t+1} dt$
13. $\int \frac{t^2-t+4}{t^4-5t^2+4} dt$
14. $\int \frac{dt}{t^3\left(t^3+1\right)\left(1-t^3\right)}$
15. $\int \frac{dt}{t^2\left(t^2+t+1\right)^2}$
16. $\int \frac{t^3+3}{t^2(t+2)^4} dt$

17. $\int \frac{dt}{t^4+t^2+1}$

18. $\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2+9}$

19. $\int \frac{dt}{t^8+t^4+1}$

20. $\int \frac{t+1}{\left(t^3-3t+2\right)^{\frac{3}{2}}}dt$

21. $\int \frac{t^2dt}{\left(4+9t^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

22. $\int \frac{t^kdt}{\left(4+9t^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, $k \in IN$

23. $\int \frac{dt}{\left(t^2-5\right)\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}}$

24. $\int \frac{dt}{\left(t^2+5\right)^k(1+t)^{\frac{1}{2}}}$, $k \in IN$

25. $\int \frac{dt}{3+2t^2+3t-\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}$

26. $\int \frac{dt}{a\sin^2 t+b\cos^2 t}$

27. $\int \frac{dt}{\cos^2 t+\tan^2 t}$

28. $\int e^{t\sqrt{2}}\tan^3 t\,dt$

29. $\int \sqrt[3]{t^2(t-1)}\,dt$

30. $\int 3^{\sqrt{2t+1}}dt$

31. $\int \frac{dt}{\sin^4 t\cos^6 t}$

32. $\int \sqrt[3]{\frac{t^5}{(1-t)^{11}}}\,dt$

33. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\frac{\sin^3 t+\cos^3 t}{\sin^4 t+\cos^4 t}dt$

34. គេអោយ $\int\left(At^2+Bt+C\right)^{\frac{1}{2}}dt$ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ។

35. គេអោយ $I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$ ដោយរកទំនាក់ទំនងរវាង $I_{m,n}$ និង $I_{m,n-2}$ ឬរវាង $I_{m,n}$ និង $I_{m-2,n}$ ចូរគណនា $I_{m,n}$ ។

36. បើ $m\in IN$ គេកំណត់ $I_m=\int_0^1\frac{(1-t)^m}{1+t^2}dt$ ។

បង្ហាញថា $I_m=A_m+B_m\pi+C_m\ln 2$ ។ កំណត់ m ដែល $B_m=0$ ឬ $C_m=0$ ។

37. គណនា $I(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{dt}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2}$, $|\alpha|<1$ ។

ទាញរកតម្លៃ នៃ $\varphi(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{2(\alpha-\cos t)dt}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2}$ និង $F(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\alpha\cos t+\alpha^2\right)dt$, $|\alpha<1|$

38. គណនា $\int_0^{\sin^2 x}Arg\sin\sqrt{t}dt+\int_0^{\cos^2 x}Arg\cos\sqrt{t}dt$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ។

39. បើ $x>0$ បង្ហាញថា $\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_x^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$ ។

40. គេអោយអនុគមន៍ f ជាប់លើ $[-1;1]$ ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $F(x)=\int_0^{\sin x}f(t)dt$, $x\in R$

មានដេរីវេ $F'(x)=f(\sin x).\cos x$, $\forall x\in R$ ។

សូមជូនពរ

ឲ្យទទួលបានជោគជ័យ