គណិតវិទ្យា និង វិទ្យាសាស្ត្រ

MATHEMATICS & SCIENCE

ចំនួនកុំផ្លិច

សម្រាប់សិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២

សិក្សាបន្ថែមនៅផ្ទះក្នុងអំឡុងពេលពិភពលោក

រងគ្រោះដោយជំងឺ COVID-19

រៀបរៀងដោយ ៖ ពុធ ឫទ្ធី

ខែឧសភា ឆ្នាំ ២០២០

ចំនួនកុំផ្លិច

១. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1+3i, z_2 = 5-2i$ ។ គណនា៖

ក. $\dfrac{z_1z_2 + z_1^2}{z_1}$ ខ. $\dfrac{z_1^2 - z_2^2}{z_1 + z_2}$ គ. $\dfrac{z_2^2 - 2z_1z_2}{z_2^2}$

ចម្លើយ

គណនា

ក. $\dfrac{z_1z_2 + z_1^2}{z_1} = \dfrac{z_1(z_2 + z_1)}{z_1} = z_2 + z_1$

ដោយ $z_1 = 1+3i, z_2 = 5-2i$

គេបាន $\dfrac{z_1z_2 + z_1^2}{z_1} = (1+3i)+(5-2i) = 6+i$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{z_1z_2 + z_1^2}{z_1} = 6+i}$ ។

ខ. $\dfrac{z_1^2 - z_2^2}{z_1 + z_2} = \dfrac{(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)}{z_1 + z_2} = z_1 - z_2$

ដោយ $z_1 = 1+3i, z_2 = 5-2i$

គេបាន $\dfrac{z_1^2 - z_2^2}{z_1 + z_2} = (1+3i)-(5-2i) = -4+5i$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{z_1^2 - z_2^2}{z_1 + z_2} = -4+5i}$ ។

គ. $\dfrac{z_2^2-2z_1z_2}{z_2^2}=\dfrac{z_2\left(z_2-2z_1\right)}{z_2^2}=\dfrac{z_2-2z_1}{z_2}$

ដោយ $z_1=1+3i, z_2=5-2i$

គេបាន $\dfrac{z_2^2-2z_1z_2}{z_2^2}=\dfrac{(5-2i)-2(1+3i)}{5-2i}$

$$=\frac{5-2i-2-6i}{5-2i}$$

$$=\frac{3-8i}{5-2i}$$

$$=\frac{(3-8i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}$$

$$=\frac{15+6i-40i+16}{25+4}$$

$$=\frac{31}{29}-\frac{34}{29}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{z_2^2-2z_1z_2}{z_2^2}=\dfrac{31}{29}-\dfrac{34}{29}}$ ។

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ពីជគណិត៖

ក. $\dfrac{(1-2i)(4-i)^2}{2+3i}$ ខ. $\dfrac{(7-3i)(-2-5i)}{(6-5i)^2}$

គ. $\dfrac{3i-5}{4-2i}-\dfrac{7i}{4+2i}$ ឃ. $\dfrac{3-2i}{\sqrt{2}-i}+\dfrac{-1+2i}{\sqrt{2}-1}$

<u>ចម្លើយ</u>

សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ពីជគណិត

ក. $\dfrac{(1-2i)(4-i)^2}{2+3i}=\dfrac{(1-2i)(16-8i-1)}{2+3i}$

$$=\frac{(1-2i)(15-8i)}{2+3i}$$

$$=\frac{15-8i-30i-16}{2+3i}$$

$$=\frac{(-1-38i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$

$$=\frac{-2+3i-76i-114}{4+9}$$

$$=-\frac{116}{13}-\frac{73}{13}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{(1-2i)(4-i)^2}{2+3i}=-\dfrac{116}{13}-\dfrac{73}{13}i}$ ។

ខ. $\dfrac{(7-3i)(-2-5i)}{(6-5i)^2}=\dfrac{-14-35i+6i-15}{36-60i-25}$

$$=\frac{-29-29i}{11-60i}$$

$$=\frac{(-29-29i)(11+60i)}{(11-60i)(11+60i)}$$

$$=\frac{-319-1740i-319i+1740}{121+3600}$$

$$=\frac{1421}{3721}-\frac{2059}{3721}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{(7-3i)(-2-5i)}{(6-5i)^2}=\dfrac{1421}{3721}-\dfrac{2059}{3721}i}$ ។

គ. $\dfrac{3i-5}{4-2i}-\dfrac{7i}{4+2i}=\dfrac{(3i-5)(4+2i)-7i(4-2i)}{(4-2i)(4+2i)}$

$$=\frac{12i-6-20-10i-28i-14}{16+4}$$

$$=-\frac{40}{20}-\frac{26}{20}i$$

$$=-2-\frac{13}{10}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{3i-5}{4-2i}-\dfrac{7i}{4+2i}=-2-\dfrac{13}{10}i}$ ។

ឃ. $\dfrac{3-2i}{\sqrt{2}-i}+\dfrac{-1+2i}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(3-2i)(\sqrt{2}+i)}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}+\dfrac{(-1+2i)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$$=\frac{3\sqrt{2}+3i-2i\sqrt{2}+2}{2+1}+\frac{(-\sqrt{2}-1)+(2\sqrt{2}+2)i}{2-1}$$

$$=\frac{(3\sqrt{2}+2)+(3-2\sqrt{2})i}{3}+(-\sqrt{2}-1)+(2\sqrt{2}+2)i$$

$$=\frac{(3\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}-3)+(3-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}+6)i}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{9+4\sqrt{2}}{3}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{3-2i}{\sqrt{2}-i}+\dfrac{-1+2i}{\sqrt{2}-1}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{9+4\sqrt{2}}{3}i}$ ។

៣. គេឱ្យពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1+3i$ និង $z_2 = 3+5i$ ។ ដោយមិនចាំបាច់គណនា នៅលើប្លង់កុំផ្លិចកំណត់រូបភាពនេះ៖

ក. $z_1 + z_2$

ខ. $2z_1 + z_2$

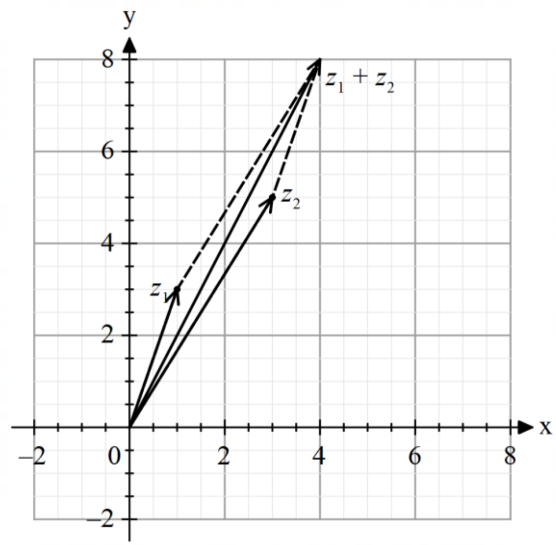
គ. $3z_1 - 2z_2$

ឃ. $-3z_1 + 2z_2$

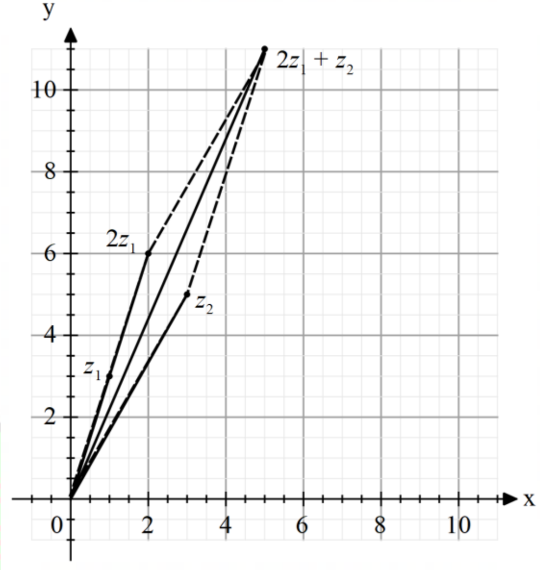
<u>ចម្លើយ</u>

កំណត់រូបភាព

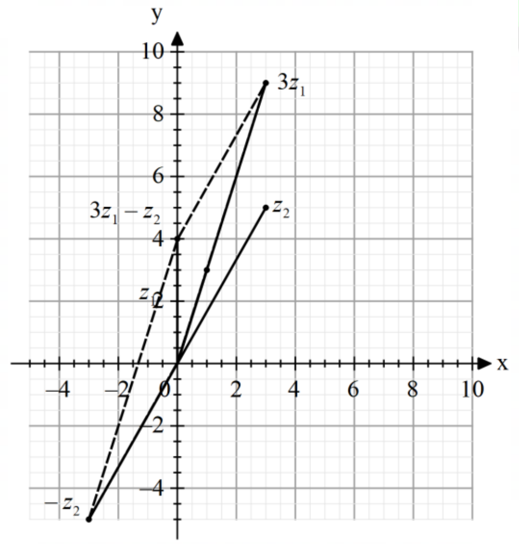
ក. $z_1 + z_2$



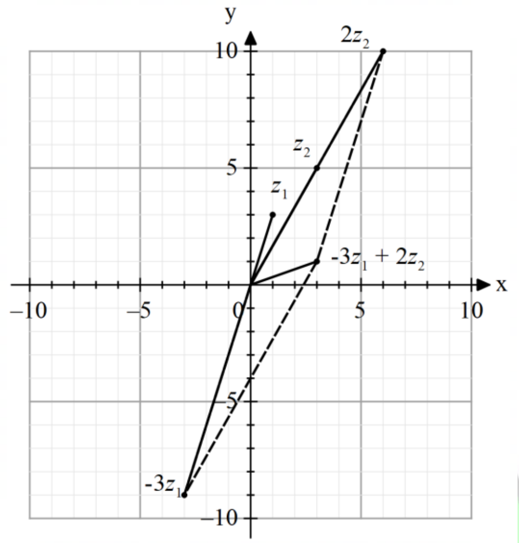
ខ. $2z_1 + z_2$



គ. $3z_1 - z_2 = 3z_1 + (-z_2)$



ឃ. $-3z_1 + 2z_2$



៤. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

ក. $z_1 = 8\sqrt{3} + 8i\sqrt{3}$

ខ. $z_2 = 5 - 25i$

គ. $z_3 = -3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

ឃ. $z_4 = \cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}$

ង. $z_5 = \sin\frac{2\pi}{7} + i\cos\frac{2\pi}{7}$

ច. $z_6 = -\sin\frac{3\pi}{5} + i\cos\frac{3\pi}{5}$

ឆ. $z_7 = 2019$

ជ. $z_8 = 2020i$

ចម្លើយ

សរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ក. $z_1 = 8\sqrt{3} + 8i\sqrt{3}$

$$=8\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=8\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=8\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ ។

ខ. $z_2=5-25i$

គេមាន $|z_2|=\sqrt{25+625}=\sqrt{650}=5\sqrt{26}$

$$\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{-25}{5}=-5\Rightarrow\theta=\arctan(-5)$$

ដូចនេះ

$\boxed{z_2=5\sqrt{26}\left[\cos\left(\arctan(-5)\right)+i\sin\left(\arctan(-5)\right)\right]}$ ។

គ. $z_3=-3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$$=3\left(-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=3\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$=3\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z_3=3\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)}$ ។

ឃ. $z_4=\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}$$

ដូចនេះ $\boxed{z_4=\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}}$ ។

ង. $z_5=\sin\frac{2\pi}{7}+i\cos\frac{2\pi}{7}$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$=\cos\frac{3\pi}{14}+i\sin\frac{3\pi}{14}$$

ដូចនេះ $\boxed{z_5=\cos\frac{3\pi}{14}+i\sin\frac{3\pi}{14}}$ ។

ច. $z_6=-\sin\frac{3\pi}{5}+i\cos\frac{3\pi}{5}$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{5}\right)$$

$$=\cos\frac{11\pi}{10}+i\sin\frac{11\pi}{10}$$

ដូចនេះ $\boxed{z_6=\cos\frac{11\pi}{10}+i\sin\frac{11\pi}{10}}$ ។

ឆ. $z_7=2019$

$$=2019+0i$$

$$=2019(1+0i)$$

$$=2019(\cos 0+i\sin 0)$$

ដូចនេះ $\boxed{z_2 = 2019(\cos 0 + i\sin 0)}$ ។

ជ. $z = 2020i$

$$= 0 + 2020i$$

$$= 2020(0 + i)$$

$$= 2020\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z_8 = 2020\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$ ។

៥. គេឱ្យពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a + bi$ និង $z_2 = c + di$ ដែល $|z_1| = 3$ និង $|z_2| = 2$ ។ គណនា៖

ក. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ ខ. $\left|\frac{z_1 \overline{z_2}}{z_1}\right|$ គ. $\left|\frac{z_1 \overline{z_2}^2}{z_2}\right|$

ចម្លើយ

គណនា៖

ក. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \boxed{\frac{3}{2}}$

ខ. $\left|\frac{z_1 \overline{z_2}}{z_1}\right| = \frac{|z_1 \overline{z_2}|}{|\overline{z_1}|} = \frac{|z_1||\overline{z_2}|}{|z_1|} = |z_2| = \boxed{2}$

គ. $\left|\frac{z_1 \overline{z_2}^2}{z_2}\right| = \frac{|z_1||\overline{z_2}^2|}{|z_2|} = \frac{|z_1||z_2|^2}{|z_2|} = |z_1||z_2| = 3 \times 2 = \boxed{6}$

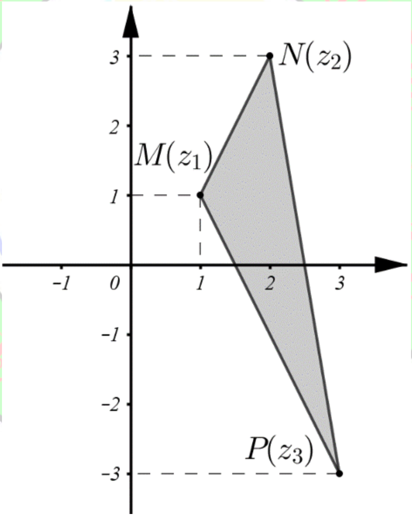
៦. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1+i; z_2 = 2+3i$ និង $z_3 = 3-3i$ ដែលមានចំណុច $M;N$ និង P ជារូបភាពរៀងគ្នានៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។

ក. គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ MNP ។

ខ. ដោយប្រើរូបមន្តហេរ៉ុង $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ចូរគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ MNP ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ MNP



ដោយ M, N និង P ជារូបភាពរៀងគ្នានៃ z_1, z_2 និង z_3

គេបាន

$$MN = |z_1 - z_2| = |(1+i)-(2+3i)| = |-1-2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$NP = |z_2 - z_3| = |(2+3i)-(3-3i)| = |-1+6i| = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$MP = |z_1 - z_3| = |(1+i)-(3-3i)| = |-2+4i| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

ដូចនេះ $\boxed{MN = \sqrt{5}\ ;\ NP = \sqrt{37}\ ;\ MP = 2\sqrt{5}}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ខ. គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ MNP

តាមរូបមន្តហេរុង $S_{MNP} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

ដែល $a = MN = \sqrt{5}$, $b = NP = \sqrt{37}$, $c = MP = 2\sqrt{5}$

និង $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{37}}{2}$

នាំឱ្យ $p-a = \dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{37}}{2} - \sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{37}}{2}$

$p-b = \dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{37}}{2} - \sqrt{37} = \dfrac{3\sqrt{5}-\sqrt{37}}{2}$

$p-c = \dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{37}}{2} - 2\sqrt{5} = \dfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{37}}{2}$

គេបាន

$$S_{MNP} = \sqrt{\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{37}}{2} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{37}}{2} \times \frac{3\sqrt{5}-\sqrt{37}}{2} \times \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{37}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}\left(3\sqrt{5}+\sqrt{37}\right)\left(3\sqrt{5}-\sqrt{37}\right)\left(\sqrt{37}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{37}-\sqrt{5}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}(45-37)(37-5)}$$

$$= \sqrt{\frac{256}{16}} = \sqrt{16} = 4$$

ដូចនេះ ត្រីកោណ MNP មានក្រឡាផ្ទៃ $\boxed{S_{MNP}=4}$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

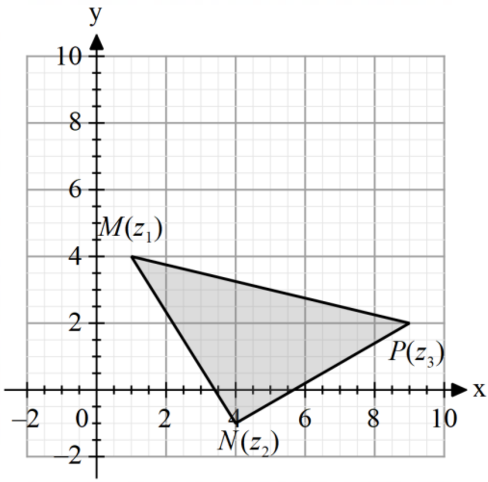
៧. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+4i, z_2=4-i$ និង $z_3=9+2i$ ដែលមានចំណុច $M;N$ និង P ជារូបភាពរៀងគ្នានៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ MNP ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

ខ. គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ MNP ។

ចម្លើយ

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ MNP ជាត្រីកោណកែងសមបាត



គេមាន

$$MN=|z_1-z_2|=|(1+4i)-(4-i)|=|-3+5i|=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

$$NP=|z_2-z_3|=|(4-i)-(9+2i)|=|-5-3i|=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$$

$$MP=|z_1-z_3|=|(1+4i)-(9+2i)|=|-8+2i|=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}$$

ដោយ $MN=NP$ នោះត្រីកោណ MNP ជាត្រីកោណសមបាត

ម្យ៉ាងទៀត $MN^2+NP^2=34+34=68=MP^2$

នាំឱ្យត្រីកោណ MNP ជាត្រីកោណកែង

ដូចនេះ ត្រីកោណ MNP ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

ខ. គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ MNP

គេមាន $S_{MNP}=\dfrac{MN\times NP}{2}=\dfrac{\sqrt{34}\times\sqrt{34}}{2}=\dfrac{34}{2}=17$

ដូចនេះ $\boxed{S_{MNP}=17}$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

៨. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=6+6i\sqrt{3}$ និង $z_2=6\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ ។

ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. គណនា z_1^{2020} ។

គ. សរសេរផលគុណ $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ចម្លើយ

ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_1=6+6i\sqrt{3}$

$$=12\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=12\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

និង $z_2=6\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$=6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=6\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ

$$\boxed{z_1=12\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right), z_2=6\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}$$ ។

ខ. គណនា z_1^{2020}

គេមាន $z_1=12\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន

$$z_1^{2020}=12^{2020}\left(\cos\frac{2020\pi}{3}+i\sin\frac{2020\pi}{3}\right)$$

$$=12^{2020}\left(\cos\frac{2016\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{2016\pi+4\pi}{3}\right)$$

$$=12^{2020}\left[\cos\left(672\pi+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(672\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$=12^{2020}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=12^{2020}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=-\frac{12^{2020}}{2}-\frac{12^{2020}\times\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1^{2020} = -\dfrac{12^{2020}}{2} - \dfrac{12^{2020} \times \sqrt{3}}{2}}$ ។

គ. សរសេរផលគុណ $z_1 \times z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $z_1 = 6 + 6i\sqrt{3}$

និង $z_2 = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 6\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$

តាមគេបាន $z_1 \times z_2 = \left(6 + 6i\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}\right)$

$$= 18\sqrt{2} - 18i\sqrt{2} + 18i\sqrt{6} + 18\sqrt{6}$$

$$= \left(18\sqrt{6} + 18\sqrt{2}\right) + \left(18\sqrt{6} - 18\sqrt{2}\right)i$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 \times z_2 = \left(18\sqrt{6} + 18\sqrt{2}\right) + \left(18\sqrt{6} - 18\sqrt{2}\right)i}$ ។

៩. គេមានសមីការ $z^2 - 2z + 4 = 0$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការនេះដោយយក z_1 មានផ្នែកនិម្មិតជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ខ. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. រកម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $Z = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2020}$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. ដោះស្រាយសមីការ

សមីការ $z^2 - 2z + 4 = 0$ មាន $\Delta' = 1 - 4 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$

គេបាន $z_1 = 1 - i\sqrt{3}, z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $z_1 = 1 - i\sqrt{3}, z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ ។

ខ. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_1 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$$z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right), z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ ។

គ. រកម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $Z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2020}$

គេមាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2020} = \cos\frac{2020\times 4\pi}{3} + i\sin\frac{2020\times 4\pi}{3}$$

$$= \cos\frac{8080\pi}{3} + i\sin\frac{8080\pi}{3}$$

$$= \cos\frac{8076\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{8076\pi + 4\pi}{3}$$

$$=\cos\left(2692\pi+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(2692\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2020}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ ។

១០. x និង y ជាឫសនៃសមីការ $z^2+z+1=0$ ដែល x មានផ្នែកនិម្មិតជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ក. គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$ ។

ខ. សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយបង្ហាញថា $C=x^{2022}+y^{2022}$ ជាចំនួនពិត ។

ចម្លើយ

ក. គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$

សមីការ $z^2+z+1=0$ មាន $\Delta=1-4=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$

គេបាន $x=z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, y=z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

នាំឱ្យ

$$x^2=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$y^2=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

គេបាន $A=x-y^2$

$$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{-1+1+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{2i\sqrt{3}}{2}$$

$$=i\sqrt{3}$$

និង $B=x^2+x+1$

$$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}+1$$

$$=\frac{-1-1+i\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2}+1$$

$$=\frac{-2}{2}+1$$

$$=-1+1=0$$

ដូចនេះ $\boxed{A=i\sqrt{3}, B=0}$ ។

ខ. សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

និង $y=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}, y=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$ ។

- បង្ហាញថា $C=x^{2022}+y^{2022}$ ជាចំនួនពិត

គេមាន $x=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}, y=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $x^{2022}=\cos\frac{2022\times 4\pi}{3}+i\sin\frac{2022\times 4}{3}$

$=\cos\frac{8088\pi}{3}+i\sin\frac{8088}{3}$

$=\cos 2696\pi+i\sin 2696$

$=\cos 0+i\sin 0$

$=1$

និង $y^{2022}=\cos\frac{2022\times 2\pi}{3}+i\sin\frac{2022\times 2\pi}{3}$

$=\cos\frac{4044\pi}{3}+i\sin\frac{4044\pi}{3}$

$=\cos 1348\pi+i\sin 1348\pi$

$=\cos 0+i\sin 0$

$=1$

គេបាន $x^{2022}+y^{2022}=1+1=2$ ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ៖ កន្សោម $\boxed{C=x^{2022}+y^{2022}=2}$ ជាចំនួនពិត ។

១១. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}}{-3+3i\sqrt{3}}$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{7\pi}{12}$ និង $\sin\frac{7\pi}{12}$ ។

ខ. សរសេរ $\left(z+\frac{1}{6}\right)^{2020}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $z=\dfrac{\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}}{-3+3i\sqrt{3}}$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}{-3+3i\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(-3-3i\sqrt{3}\right)}{\left(-3+3i\sqrt{3}\right)\left(-3-3i\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{6}}{2}i+\frac{3\sqrt{2}}{2}i-\frac{3\sqrt{6}}{2}}{9+27}$$

$$=\frac{\frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}i}{36}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{2\times36}+\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2\times36}i$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{24}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{24}i$$

ដូចនេះ $\boxed{z=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{24}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{24}i}$ ។

- សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=\dfrac{\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}}{-3+3i\sqrt{3}}$

$$=\frac{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{6\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{6}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z=\frac{1}{6}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}$ ។

- ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{7\pi}{12}$ និង $\sin\frac{7\pi}{12}$

តាមនិយមន័យនៃអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចគេបាន

$$\begin{cases} \cos\frac{7\pi}{12}=\frac{a}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{24}}{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{24}\times\frac{6}{1}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{b}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{24}}{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{24}\times\frac{6}{1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}}$ ។

ខ. សរសេរ $\left(z+\frac{1}{6}\right)^{2020}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

រំឭក

- $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$
- $\sin\alpha=2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$

គេមាន $z=\frac{1}{6}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

នាំឱ្យ $z+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)+\frac{1}{6}$

$$=\frac{1}{6}\left[\left(\cos\frac{7\pi}{12}+1\right)+i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left(2\cos^2\frac{7\pi}{24}+i2\sin\frac{7\pi}{24}\cos\frac{7\pi}{24}\right)$$

$$=\frac{1}{6}2\cos\frac{7\pi}{24}\left(\cos\frac{7\pi}{24}+i\sin\frac{7\pi}{24}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cos\frac{7\pi}{24}\left(\cos\frac{7\pi}{24}+i\sin\frac{7\pi}{24}\right)$$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន

$$\left(z+\frac{1}{6}\right)^{2020}=\frac{1}{3^{2020}}\cos^{2020}\frac{7\pi}{24}\left(\cos\frac{2020\times7\pi}{24}+i\sin\frac{2020\times7\pi}{24}\right)$$

$$=\frac{1}{3^{2020}}\cos^{2020}\frac{7\pi}{24}\left(\cos\frac{14140\pi}{24}+i\sin\frac{14140\pi}{24}\right)$$

$$=\frac{1}{3^{2020}}\cos^{2020}\frac{7\pi}{24}\left(\cos\frac{14112\pi+28\pi}{24}+i\sin\frac{14112\pi+28\pi}{24}\right)$$

$$=\frac{1}{3^{2020}}\cos^{2020}\frac{7\pi}{24}\left[\cos\left(588\pi+\frac{28\pi}{24}\right)+i\sin\left(588\pi+\frac{28\pi}{24}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3^{2020}}\cos^{2020}\frac{7\pi}{24}\left(\cos\frac{28\pi}{24}+i\sin\frac{28\pi}{24}\right)$$

ដូចនេះ

$$\boxed{\left(z+\frac{1}{6}\right)^{2020}=\frac{1}{3^{2020}}\cos^{2020}\frac{7\pi}{24}\left(\cos\frac{28\pi}{24}+i\sin\frac{28\pi}{24}\right)}$$ ។

១២. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$ និង $z_2=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}i$ ។

ក. កំណត់ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z_1 និង z_2 ។

ខ. សរសេរ $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត និងជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{11\pi}{12}$ ។

គ. រកចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត n ដែលធ្វើឱ្យ Z^n ជាចំនួនពិត ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. កំណត់ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z_1 និង z_2

តាង α និង β ជាអាគុយម៉ង់រៀងគ្នានៃ z_1 និង z_2

គេមាន $z_1=-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$

$$=6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

និង $z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3}i=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{2}{3}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$

គេបាន $|z_1|=\dfrac{3}{2},|z_2|=\dfrac{2}{3},\alpha=\dfrac{3\pi}{4},\beta=\dfrac{11\pi}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{|z_1|=6,|z_2|=\dfrac{2}{3},\alpha=\dfrac{3\pi}{4},\beta=\dfrac{11\pi}{6}}$ ។

ខ. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $z_1=-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$ និង $z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3}i$

គេបាន $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$

$$=\frac{-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}i}$$

$$=\frac{\left(-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i\right)}$$

$$=\frac{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\frac{3}{9}+\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{\left(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)i}{\frac{4}{9}}$$

$$=\frac{-9\sqrt{2}-9\sqrt{6}}{4}+\frac{-9\sqrt{2}+9\sqrt{6}}{4}i$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\frac{-9\sqrt{2}-9\sqrt{6}}{4}+\frac{-9\sqrt{2}+9\sqrt{6}}{4}i}$

- សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_1=6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$$z_2=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

គេបាន $Z=\frac{z_1}{z_2}$

$$=\frac{6}{\frac{2}{3}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{11\pi}{6}\right)\right]$$

$$=9\left[\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right]$$

$$=9\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=9\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)}$ ។

- ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{11\pi}{12}$ និង $\sin\frac{11\pi}{12}$

តាមនិយមន័យនៃអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចគេបាន

$$\begin{cases}\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{a}{r}=\frac{\frac{-9\sqrt{2}-9\sqrt{6}}{4}}{9}=\frac{-9\sqrt{2}-9\sqrt{6}}{4}\times\frac{1}{9}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{11\pi}{12}=\frac{b}{r}=\frac{\frac{-9\sqrt{2}+9\sqrt{6}}{4}}{9}=\frac{-9\sqrt{2}+9\sqrt{6}}{4}\times\frac{1}{9}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ ។

គ. រកចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត n ដែលធ្វើឱ្យ Z^n ជាចំនួនពិត

គេមាន $Z=9\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $Z^n=9^n\left(\cos\frac{11n\pi}{12}+i\sin\frac{11n\pi}{12}\right)$

Z^n ជាចំនួនពិតកាលណាផ្នែកនិម្មិតស្មើ 0

គេបាន $\sin\frac{11n\pi}{12}=0 \Rightarrow \frac{11n\pi}{12}=k\pi \Rightarrow n=\frac{12k}{11}, k\in\mathbb{Z}$

n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតកាលណា $12k$ ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតចែកដាច់នឹង 11

គេបាន $k=11 \Rightarrow n=\frac{12\times 11}{11}=12$

ដូចនេះ $\boxed{n=12}$ ។

១៣. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=2+\sqrt{3}+i$ ។

ក. បង្ហាញថា $|z|=\sqrt{2}+\sqrt{6}$ ។

ខ. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. បង្ហាញថា $|z|=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

គេមាន $z=\left(2+\sqrt{3}\right)+i$

$$\Rightarrow |z|=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1^2}$$

$$=\sqrt{4+4\sqrt{3}+3+1}$$

$$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{8+\sqrt{12}}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$=\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}$

$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{|z|=\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ ។

ខ. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $|z|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

គេបាន $z=2+\sqrt{3}+i$

$$=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$=2\left[\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=2\left(2\cos^2\frac{\pi}{12}+i2\sin\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z=4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$ ។

- ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$

តាមសម្រាយក្នុងសំណួរ "ក" គេមាន $|z|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

តែក្នុងសំណួរ "ខ" គេមាន $|z|=4\cos\frac{\pi}{12}$

នាំឱ្យ $4\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{6}+\sqrt{2}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ ។

១៤. ក. តាង z ជាចំនួនកុំផ្លិចហើយជាឫសរបស់សមីការ $x^2-x+1=0$ ។ គណនា $Z^{12}+6Z^{10}+15Z^8+20Z^6+15Z^4+6Z^2+1$ ។

ខ. តាង α និង β ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយ $\left(\frac{\sqrt{\beta}}{1+\alpha i}\right)^4=-1$ (i ជាចំនួនកុំផ្លិច) ។ ចូរគណនា α និង β ។

(ប្រឡងអាហារូបករណ៍ទៅប្រទេសចិន)

<u>ចម្លើយ</u>

ក. គណនា $Z^{12}+6Z^{10}+15Z^8+20Z^6+15Z^4+6Z^2+1$

គេមាន Z ជាឫសនៃសមីការ $x^2-x+1=0$

គេបាន $Z^2-Z+1=0$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $Z+1$

គេបាន $(Z+1)(Z^2-Z+1)=0$

$$Z^3+1=0$$

$$Z^3=-1$$

ដោយ $Z^{12}+6Z^{10}+15Z^8+20Z^6+15Z^4+6Z^2+1$

$$=(Z^3)^4+6Z(Z^3)^3+15Z^2(Z^3)^2+20(Z^3)^2+15ZZ^3+6Z^2+1$$

$$=1-6Z+15Z^2+20-15Z+6Z^2+1$$

$$=21Z^2-21Z+21+1$$

$=21\left(Z^2-Z+1\right)+1$

$=21\times0+1$

$=1$

ដូចនេះ $\boxed{Z^{12}+6Z^{10}+15Z^{8}+20Z^{6}+15Z^{4}+6Z^{2}+1=1}$ ។

ខ. គណនា α និង β

គេមាន $\left(\dfrac{\sqrt{\beta}}{1+\alpha i}\right)^4=-1$

គេបាន $\left(\sqrt{\beta}\right)^4=-(1+\alpha i)^4$

$$\beta^2=i^2(1+\alpha i)^2$$

$$\beta=\pm i(1+\alpha i)^2$$

$$\beta=\pm i\left(1+2\alpha i-\alpha^2\right)$$

$$\beta=\pm\left[-2\alpha+\left(1-\alpha^2\right)i\right]$$

បើ $\beta=-2\alpha+\left(1-\alpha^2\right)i$

ដោយ β ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន

$1-\alpha^2=0\Rightarrow\alpha^2=1\Rightarrow\alpha=1$ (α ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន)

ដោយ $\alpha=1\Rightarrow\beta=-2$ មិនយក

បើ $\beta=-\left[-2\alpha+\left(1-\alpha^2\right)i\right]=2\alpha-\left(1-\alpha^2\right)i$

ដោយ β ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន

$1-\alpha^2=0\Rightarrow\alpha^2=1\Rightarrow\alpha=1$ (α ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន)

ដោយ $\alpha=1\Rightarrow\beta=2$ យក

ដូចនេះ $\boxed{\alpha = 1, \beta = 2}$ ។

១៥. គេឱ្យពីរផលបូក $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{\cos^k \theta}$; $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{\cos^k \theta}$ និងចំនួនកុំផ្លិច $Z_n = A_n + iB_n$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_n = (1 + i\tan\theta)\frac{1-(1+i\tan\theta)^n}{-i\tan\theta}$ ។

ខ. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z_n ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

គ. ទាញរកតម្លៃនៃផលបូក A_n និង B_n ។

ចម្លើយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_n = (1 + i\tan\theta)\frac{1-(1+i\tan\theta)^n}{-i\tan\theta}$

គេមាន $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{\cos^k \theta}$; $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{\cos^k \theta}$

គេបាន $Z_n = A_n + iB_n$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{\cos^k \theta} + i\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{\cos^k \theta}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\cos(k\theta)}{\cos^k \theta} + i\frac{\sin(k\theta)}{\cos^k \theta} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)}{\cos^k \theta} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^k}{\cos^k \theta}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}\right)^{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(1+i\tan\theta)^{k}$$ ជាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេបាន $Z_n=(1+i\tan\theta)\dfrac{1-(1+i\tan\theta)^{n}}{1-(1+i\tan\theta)}$

$$=(1+i\tan\theta)\frac{1-(1+i\tan\theta)^{n}}{-i\tan\theta}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{Z_n=(1+i\tan\theta)\dfrac{1-(1+i\tan\theta)^{n}}{-i\tan\theta}}$ ។

ខ. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z_n ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $Z_n=(1+i\tan\theta)\dfrac{1-(1+i\tan\theta)^{n}}{i\tan\theta}$

$$=\frac{1+i\tan\theta}{-i\tan\theta}\left[1-\left(1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^{n}\right]$$

$$=\frac{i-\tan\theta}{\tan\theta}\left[1-\left(\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}\right)^{n}\right]$$

$$=\left(\frac{i}{\tan\theta}-1\right)\left(1-\frac{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}{\cos^{n}\theta}\right)$$

$$=(i\cot\theta-1)\times\frac{\left(\cos^{n}\theta-\cos(n\theta)\right)-i\sin(n\theta)}{\cos^{n}\theta}$$

$$=\frac{\left[\cot\theta\sin(n\theta)-\cos^n\theta+\cos n\theta\right]}{\cos^n\theta}+\frac{\left[\cot\theta\left(\cos^n\theta-\cos(n\theta)\right)+\sin(n\theta)\right]}{\cos^n\theta}i$$

ជាទម្រង់ពីជគណិតនៃ Z_n

ដូចនេះ ទម្រង់ពីជគណិតនៃ Z_n ត្រូវបានកំណត់ ។

គ. ទាញរកតម្លៃនៃផលបូក A_n និង B_n

គេមាន $Z_n=\frac{\left[\cot\theta\sin(n\theta)-\cos^n\theta+\cos n\theta\right]}{\cos^n\theta}+\frac{\left[\cot\theta\left(\cos^n\theta-\cos(n\theta)\right)+\sin(n\theta)\right]}{\cos^n\theta}i$

និង $Z_n=A_n+iB_n$

តាមលក្ខណៈនៃចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នាគេបាន

$$\begin{cases}A_n=\frac{\left[\cot\theta\sin(n\theta)-\cos^n\theta+\cos n\theta\right]}{\cos^n\theta}\\ B_n=\frac{\left[\cot\theta\left(\cos^n\theta-\cos(n\theta)\right)+\sin(n\theta)\right]}{\cos^n\theta}\end{cases}$$

ដូចនេះ ផលបូក A_n និង B_n ត្រូវបានគណនា ។

✵✵✵✵✵✵✵✵

ប្រុងប្រយ័ត្នចំពោះចំណេះដឹងក្លែងក្លាយ

ព្រោះវាមានគ្រោះថ្នាក់ជាងភាពល្ងង់ខ្លៅ