គណិតវិទ្យា និង វិទ្យាសាស្ត្រ
MATHEMATICS & SCIENCE

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

សម្រាប់សិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២

សិក្សាបន្ថែមនៅផ្ទះក្នុងអំឡុងពេលពិភពលោក

រងគ្រោះដោយជំងឺ COVID-19

រៀបរៀងដោយ ៖ ពុធ ឫទ្ធី

ខែមិថុនា ឆ្នាំ ២០២០

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ និងអនុវត្តន៍

១. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=\dfrac{2x-1}{3x+1}$

ខ. $y=\dfrac{2x^2+3x-1}{3x^2-2x+5}$

គ. $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$

ឃ. $y=\sqrt[3]{3x^2+1}$

ង. $y=\dfrac{1+\sin x}{\sqrt{1+\tan x}}$

ច. $y=\ln\dfrac{x+1}{2x-5}$

ឆ. $y=\dfrac{e^{2x+1}-1}{xe^{-x^2}+1}$

ជ. $y=\tan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

<u>ចម្លើយ</u>

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $y=\dfrac{2x-1}{3x+1}$

តាមរូបមន្ត $y=\dfrac{u}{v}\Rightarrow y'=\dfrac{u'v+uv'}{v^2}$

គេបាន $y'=\dfrac{(2x-1)'(3x+1)-(2x-1)(3x+1)'}{(3x+1)^2}$

$$=\frac{2(3x+1)-3(2x-1)}{(3x+1)^2}$$

$$=\frac{6x+2-6x+3}{(3x+1)^2}$$

$$=\frac{5}{(3x+1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\frac{5}{(3x+1)^2}}$ ។

ខ. $y=\frac{2x^2+3x-1}{3x^2-2x+5}$

តាមរូបមន្ត $y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'v+uv'}{v^2}$

គេបាន

$$y'=\frac{(2x^2+3x-1)'(3x^2-2x+5)-(2x^2+3x-1)(3x^2-2x+5)'}{(3x^2-2x+5)^2}$$

$$=\frac{(4x+3)(3x^2-2x+5)-(2x^2+3x-1)(6x-2)}{(3x^2-2x+5)^2}$$

$$=\frac{(12x^3+x^2+14x+15)-(12x^3+14x^2-12x+2)}{(3x^2-2x+5)^2}$$

$$=\frac{-13x^2+26x+13}{(3x^2-2x+5)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\frac{-13x^2+26x+13}{(3x^2-2x+5)^2}}$ ។

គ. $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$

តាមរូបមន្ត $y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

គេបាន $y'=\dfrac{\left(1+\sin^2 x\right)'}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$

$=\dfrac{2\cos x\sin x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$

$=\dfrac{\cos x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\dfrac{\cos x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}$ ។

ឃ. $y=\sqrt[3]{3x^2+1}=\left(3x^2+1\right)^{1/3}$

តាមរូបមន្ត $y=u^n \Rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

គេបាន $y'=\dfrac{1}{3}\left(3x^2+1\right)'\left(3x^2+1\right)^{\frac{1}{3}-1}$

$=\dfrac{6x\left(3x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}}{3}$

$=\dfrac{6x}{3\sqrt[3]{\left(3x^2+1\right)^2}}$

$=\dfrac{2x}{\sqrt[3]{\left(3x^2+1\right)^2}}$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\dfrac{2x}{\sqrt[3]{\left(3x^2+1\right)^2}}}$ ។

ង. $y=\dfrac{1+\sin x}{\sqrt{1+\tan x}}$

តាមរូបមន្ត $y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'v+uv'}{v^2}$

និង $y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

គេបាន $y'=\frac{(1+\sin x)'\sqrt{1+\tan x}-(1+\sin x)\left(\sqrt{1+\tan x}\right)'}{\left(\sqrt{1+\tan x}\right)^2}$

$$=\frac{\sqrt{1+\tan x}\cdot\cos x-(1+\sin x)\cdot\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{1+\tan x}}}{1+\tan x}$$

$$=\frac{\frac{2\cos x(1+\tan x)-(1+\sin x)(1+\tan^2 x)}{2\sqrt{1+\tan x}}}{1+\tan x}$$

$$=\frac{2\cos x(1+\tan x)-(1+\sin x)(1+\tan^2 x)}{2(1+\tan x)\sqrt{1+\tan x}}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\frac{2\cos x(1+\tan x)-(1+\sin x)(1+\tan^2 x)}{2(1+\tan x)\sqrt{1+\tan x}}}$ ។

ច. $y=\ln\frac{x+1}{2x-5}=\ln(x+1)-\ln(2x-5)$

តាមរូបមន្ត $y=\ln u\Rightarrow y'=\frac{u'}{u}$

គេបាន $y'=\frac{(x+1)'}{x+1}-\frac{(2x-5)'}{2x-5}$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{2x-5}$$

$$=\frac{2x-5-2(x+1)}{(x+1)(2x-5)}$$

$$=\frac{2x-5-2x-2}{(x+1)(2x-5)}$$

$$=\frac{-7}{(x+1)(2x-5)}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\frac{-7}{(x+1)(2x-5)}}$ ។

ឆ. $y=\frac{e^{2x+1}-1}{xe^{-x^2}+1}$

តាមរូបមន្ត $y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'v+uv'}{v^2}, y=uv\Rightarrow y'=u'v+uv'$

និង $y=e^u\Rightarrow y'=u'e^u$

គេបាន $y'=\frac{\left(e^{2x+1}-1\right)'\left(xe^{-x^2}+1\right)-\left(e^{2x+1}-1\right)\left(xe^{-x^2}+1\right)'}{\left(xe^{-x^2}+1\right)^2}$

$$=\frac{2e^{2x+1}\left(xe^{-x^2}+1\right)-\left(e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}\right)\left(e^{2x+1}-1\right)}{\left(xe^{-x^2}+1\right)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x+1}\left(xe^{-x^2}+1\right)-e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)\left(e^{2x+1}-1\right)}{\left(xe^{-x^2}+1\right)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\dfrac{2e^{2x+1}\left(xe^{-x^2}+1\right)-e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)\left(e^{2x+1}-1\right)}{\left(xe^{-x^2}+1\right)^2}}$ ។

ជ. $y=\tan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

តាមរូបមន្ត $y=\tan u \Rightarrow y'=u'\left(1+\tan^2 u\right)$

ដែល $u=\dfrac{1-x}{1+x}\Rightarrow u'=\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\dfrac{-2}{(1+x)^2}$

គេបាន $y'=\dfrac{-2}{(1+x)^2}\left[1+\tan^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right]$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\dfrac{-2}{(1+x)^2}\left[1+\tan^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right]}$ ។

២. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y=\dfrac{(3x-1)^3(2x-1)^2}{(5x-1)^3(6x+3)^5}$

ខ. $y=\dfrac{(x+1)^{2019}(x+2)^{2020}}{(x-1)^{2021}(x-2)^{2022}}$

គ. $y=\dfrac{(x-1)^3\cdot\sqrt[3]{x^3-1}}{(2x+1)\sqrt[5]{(3x-1)^2}}$

ឃ. $y=\left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)^{2020}$

ង. $y=x^{x^2}$

ច. $y=\sqrt[x]{x}$

<u>ចម្លើយ</u>

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $y=\dfrac{(3x-1)^3(2x-1)^2}{(5x-1)^3(6x+3)^5}$

បំពាក់ ln លើអង្គសងខាងគេបាន

$$\ln y=\ln\frac{(3x-1)^3(2x-1)^2}{(5x-1)^3(6x+3)^5}$$

$$=\ln\left[(3x-1)^3(2x-1)^2\right]-\ln\left[(5x-1)^3(6x+3)^5\right]$$

$$=3\ln(3x-1)+2\ln(2x-1)-3\ln(5x-1)-5\ln(6x+3)$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x គេបាន

$$\frac{y'}{y}=\frac{3(3x-1)'}{3x-1}+\frac{2(2x-1)'}{2x-1}-\frac{3(5x-1)'}{5x-1}-\frac{5(6x+3)'}{6x+3}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{9}{3x-1}+\frac{4}{2x-1}-\frac{15}{5x-1}-\frac{30}{6x+3}$$

$$y'=\left(\frac{9}{3x-1}+\frac{4}{2x-1}-\frac{15}{5x-1}-\frac{30}{6x+3}\right)y$$

$$y'=\left(\frac{9}{3x-1}+\frac{4}{2x-1}-\frac{15}{5x-1}-\frac{30}{6x+3}\right)\frac{(3x-1)^3(2x-1)^2}{(5x-1)^3(6x+3)^5}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{y'=\left(\frac{9}{3x-1}+\frac{4}{2x-1}-\frac{15}{5x-1}-\frac{30}{6x+3}\right)\frac{(3x-1)^3(2x-1)^2}{(5x-1)^3(6x+3)^5}}$$ ។

ខ. $y=\dfrac{(x+1)^{2019}(x+2)^{2020}}{(x-1)^{2021}(x-2)^{2022}}$

បំពាក់ ln លើអង្គសងខាងគេបាន

$$\ln y=\ln\frac{(x+1)^{2019}(x+2)^{2020}}{(x-1)^{2021}(x-2)^{2022}}$$

$$=2019\ln(x+1)+2020\ln(x+2)-2021\ln(x-1)-2022\ln(x-2)$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x គេបាន

$$\frac{y'}{y}=\frac{2019(x+1)'}{x+1}+\frac{2020(x+2)'}{x+2}-\frac{2021(x-1)'}{x-1}-\frac{2022(x-2)'}{x-2}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2019}{x+1}+\frac{2020}{x+2}-\frac{2021}{x-1}-\frac{2022}{x-2}$$

$$y'=\left(\frac{2019}{x+1}+\frac{2020}{x+2}-\frac{2021}{x-1}-\frac{2022}{x-2}\right)y$$

$$y'=\left(\frac{2019}{x+1}+\frac{2020}{x+2}-\frac{2021}{x-1}-\frac{2022}{x-2}\right)\frac{(x+1)^{2019}(x+2)^{2020}}{(x-1)^{2021}(x-2)^{2022}}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{y'=\left(\frac{2019}{x+1}+\frac{2020}{x+2}-\frac{2021}{x-1}-\frac{2022}{x-2}\right)\frac{(x+1)^{2019}(x+2)^{2020}}{(x-1)^{2021}(x-2)^{2022}}}$$ ។

គ. $y=\dfrac{(x-1)^3\cdot\sqrt[3]{x^3-1}}{(2x+1)\sqrt[5]{(3x-1)^2}}=\dfrac{(x-1)^3(x^3-1)^{1/3}}{(2x+1)(3x-1)^{2/5}}$

បំពាក់ ln លើអង្គសងខាងគេបាន

$$\ln y = \ln\frac{(x-1)^3(x^3-1)^{1/3}}{(2x+1)(3x-1)^{2/5}}$$

$$= 3\ln(x-1)+\frac{1}{3}\ln(x^3-1)-\ln(2x+1)-\frac{2}{5}\ln(3x-1)$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x គេបាន

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x-1}+\frac{1}{3}\times\frac{3x^2}{x^3-1}-\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{5}\times\frac{3}{3x-1}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x-1}+\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{2}{2x+1}-\frac{6}{15x-5}$$

$$y'=\left(\frac{3}{x-1}+\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{2}{2x+1}-\frac{6}{15x-5}\right)y$$

$$y'=\left(\frac{3}{x-1}+\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{2}{2x+1}-\frac{6}{15x-5}\right)\frac{(x-1)^3\cdot\sqrt[3]{x^3-1}}{(2x+1)\sqrt[5]{(3x-1)^2}}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{y'=\left(\frac{3}{x-1}+\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{2}{2x+1}-\frac{6}{15x-5}\right)\frac{(x-1)^3\cdot\sqrt[3]{x^3-1}}{(2x+1)\sqrt[5]{(3x-1)^2}}}$$ ។

ឃ. $y=\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{2020}$

បំពាក់ ln លើអង្គសងខាងគេបាន

$$\ln y=\ln\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{2020}$$

$$\ln y = 2020\left[\ln(2x+3)-\ln(x-1)\right]$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x គេបាន

$$\frac{y'}{y}=2020\left(\frac{2}{2x+3}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\frac{y'}{y}=2020\frac{2(x-1)-(2x++3)}{(x-1)(2x+3)}$$

$$\frac{y'}{y}=2020\frac{2x-2-2x-3}{(x-1)(2x+3)}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{-2020\times 5}{(x-1)(2x+3)}$$

$$y'=\frac{-10100}{(x-1)(2x+3)}\times\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{2020}$$

$$y'=-\frac{10100(2x+3)^{2019}}{(x-1)^{2021}}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=-\frac{10100(2x+3)^{2019}}{(x-1)^{2021}}}$ ។

ង. $y=x^{x^2}$

បំពាក់ $\ln$ លើអង្គសងខាងគេបាន $\ln y=\ln x^{x^2}$

$$\ln y=x^2\ln x$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x គេបាន

$$\frac{y'}{y}=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y}=2x\ln x+x$$

$$\frac{y'}{y} = x(2\ln x + 1)$$

$$y' = xy(2\ln x + 1)$$

$$y' = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)}$ ។

ច. $y = \sqrt[x]{x} = x^{1/x}$

បំពាក់ ln លើអង្គសងខាងគេបាន $\ln y = \ln x^{1/x}$

$$\ln y = \frac{\ln x}{x}$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x គេបាន

$$\frac{y'}{y} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} y$$

$$y' = \frac{(1 - \ln x)\sqrt[x]{x}}{x^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = \frac{(1 - \ln x)\sqrt[x]{x}}{x^2}}$ ។

៣. គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = \ln x$ ខ. $y = \cos(2x + 3)$

គ. $y=\dfrac{5}{x-1}$

ឃ. $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$

ចម្លើយ

គណនាដេរីវេទី n

ក. $y=\ln x$

គេមាន $y'=\dfrac{1}{x}=(-1)^{1-1}\dfrac{(1-1)!}{x}$

$$y''=-\frac{1}{x^2}=(-1)^{2-1}\frac{(2-1)!}{x^2}$$

$$y'''=\frac{2}{x^3}=(-1)^{3-1}\frac{(3-1)!}{x^3}$$

....

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេទី n គេបាន $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

ស្រាយថាវានឹងពិតដែរចំពោះដេរីវេទី $n+1$

គេមាន $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

គេបាន $y^{(n+1)}=-(-1)^{n-1}\dfrac{nx^{n-1}(n-1)!}{(x^n)^2}$

$$y^{(n+1)}=(-1)^{n-1+1}\frac{x^{n-1}\times n(n-1)!}{x^{2n}}$$

$$y^{(n+1)}=(-1)^{n}\frac{n!}{x^{n+1}}$$

ដូចនេះ $\boxed{y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}}$ ។

ខ. $y=\cos(2x+3)$

គេមាន $y'=-2\sin(2x+3)=2^1\cos\left(2x+3+\frac{\pi}{2}\right)$

$$y''=-4\cos(2x+3)=2^2\cos\left(2x+3+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y'''=8\sin(2x+3)=2^3\cos\left(2x+3+\frac{3\pi}{2}\right)$$

....

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេទី n គេបាន

$$y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+3+\frac{n\pi}{2}\right)$$

ស្រាយថាវានឹងពិតដែរចំពោះដេរីវេទី $n+1$

គេមាន $y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+3+\frac{n\pi}{2}\right)$

គេបាន $y^{(n+1)}=-2\times 2^n\sin\left(2x+3+\frac{n\pi}{2}\right)$

$$=2^{n+1}\cos\left[\left(2x+3+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=2^{n+1}\cos\left(2x+3+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+3+\frac{n\pi}{2}\right)}$ ។

ឃ. $y=\dfrac{5}{x-1}$

គេមាន $y'=-\dfrac{5}{(x-1)^2}=(-1)^1\dfrac{5\times 1!}{(x-1)^{1+1}}$

$$y''=\frac{5\times 2\times(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{10}{(x-1)^3}=(-1)^2\frac{5\times 2!}{(x-1)^{2+1}}$$

$$y'''=-\frac{5\times 2\times 3\times(x-1)^2}{(x-1)^6}=-\frac{30}{(x-1)^4}=(-1)^3\frac{5\times 3!}{(x-1)^{3+1}}$$

....

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេទី n គេបាន $y^{(n)}=(-1)^n\dfrac{5\times n!}{(x-1)^{n+1}}$

ស្រាយថាវានឹងពិតដែរចំពោះដេរីវេទី $n+1$

គេមាន $y^{(n+1)}=-(-1)^n\dfrac{5\times(n+1)\times n!\times(x-1)^n}{(x-1)^{2(n+1)}}$

$$=(-1)^{n+1}\frac{5\times(n+1)!}{(x-1)^{2n+2-n}}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{5\times(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{y^{(n)}=(-1)^n\dfrac{5\times n!}{(x-1)^{n+1}}}$ ។

ង. $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$

ដោយ $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$

$$=\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{(x-1)+(x+2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}$$

$$=\varphi(x)+\psi(x)$$

ដែល $\varphi(x)=\frac{1}{x-1},\psi(x)=\frac{1}{x+2}$

នាំឱ្យ $y^{(n)}=\varphi^{(n)}(x)+\psi^{(n)}(x)$ (តាមរូបមន្តដេរីវេនៃផលបូក)

តាង $u(x)=\frac{a}{bx+c}$ ដែល $a,b,c\in\mathbb{R},x\neq-\frac{c}{b}$

- គណនា $u^{(n)}(x)$

គេមាន $u'(x)=-\frac{ab}{(bx+c)^2}=(-1)^1\frac{ab^1\times1!}{(bx+c)^{1+1}}$

$$u''(x)=\frac{ab\times2b(bx+c)}{(bx+c)^4}=\frac{2ab^2}{(bx+c)^3}=(-1)^2\frac{ab^2\times2!}{(bx+c)^{2+1}}$$

$$u'''(x)=-\frac{ab^3\times2\times3(bx+c)^2}{(bx+c)^6}=-\frac{6ab^3}{(bx+c)^4}=(-1)^3\frac{ab^3\times3!}{(bx+c)^{3+1}}$$

....

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេទី n គេបាន

$$u^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{ab^n\times n!}{(bx+c)^{n+1}}$$

ស្រាយថាវានឹងពិតដែរចំពោះដេរីវេទី $n+1$

គេមាន $u^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{ab^n\times n!}{(bx+c)^{n+1}}$

នាំឱ្យ $u^{(n+1)}(x)=-(-1)^n\dfrac{ab^{n+1}\times(n+1)\times n!\times(bx+c)^n}{(bx+c)^{2(n+1)}}$

$$=(-1)^{n+1}\frac{ab^{n+1}\times(n+1)!}{(bx+c)^{2n+2-n}}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{ab^{n+1}\times(n+1)!}{(bx+c)^{n+2}}$$ ពិត

នាំឱ្យ $u^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{ab^n\times n!}{(bx+c)^{n+1}}$ (1) ពិត

តាម (1) គេបាន $\varphi^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{(x-1)^{n+1}}$

និង $\psi^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{(x+2)^{n+1}}$

នាំឱ្យ $y^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(x-1)^{n+1}}+(-1)^n\dfrac{n!}{(x+2)^{n+1}}$

ដូចនេះ $\boxed{y^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(x-1)^{n+1}}+(-1)^n\dfrac{n!}{(x+2)^{n+1}}}$ ។

<u>ចំណេះដឹងបន្ថែម</u>

<u>រូបមន្តឡេបនិច (Leibniz Rule)៖</u> គេមានអនុគមន៍ $f(x)=uv$ ដែល u និង v ជាអនុគមន៍នៃ x និងមានដេរីវេលំដាប់ n គេបានដេរីវេលំដាប់ n នៃ $f(x)$ កំណត់ដោយ៖

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}(n,k)\cdot u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}$$ ។

៤. ដោយប្រើនិយមន័យនៃដេរីវេនៃអនុគមន៍ ចូរបង្ហាញថា

$f'(x)=2\cos 2x$ បើ $f(x)=\sin 2x+5$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

បង្ហាញថា $f'(x)=2\cos 2x$

តាមនិយមន័យគេបាន $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

ដោយ $f(x)=\sin 2x+5$

នាំឱ្យ $f(x+h)=\sin\left[2(x+h)\right]+5$

គេបាន $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sin\left[2(x+h)\right]+5\right)-(\sin 2x+5)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+2h)-\sin 2x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2x\cos 2h+\sin 2h\cos 2x-\sin 2x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2x(\cos 2h-1)+\sin 2h\cos 2x}{h}$$

$$=\sin 2x\lim_{h\to 0}\frac{\cos 2h-1}{h}+2\cos 2x\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}$$

$=\sin 2x\times 0+2\cos 2x\times 1$ (ព្រោះ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos 2h-1}{h}=0$)

$$=2\cos 2x$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=2\cos 2x}$ ។

៥. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{8}{x^2}$ ។

ក. សង់ក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ខាងលើ ។

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប(C) ត្រង់ $x=a$ ។

គ. បើបន្ទាត់ (T) កាត់អ័ក្សអរដោនេ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច A និង B រៀងគ្នា ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ។

ឃ. រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ OAB នៅពេល $a\to\infty$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. សង់ក្រាប (C)

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

អនុគមន៍ $f(x)$ មានដែនកំណត់ $\mathrm{D}=\mathbb{R}-\{0\}$

ដេរីវេ និងអថេរភាពនៃក្រាប

ចំពោះ $\forall\in\mathrm{D},\ f'(x)=-\dfrac{16}{x^3}$

បើ $x>0$ គេបាន $x^3>0\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{16}{x^3}<0$ នោះក្រាប (C) ចុះជានិច្ចចំពោះ $\forall x\in(0,+\infty)$

បើ $x<0$ គេបាន $x^3<0\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{16}{x^3}>0$ នោះក្រាប (C) កើនជានិច្ចចំពោះ $\forall x\in(-\infty,0)$

លីមីតចុងដែន

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{8}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{8}{x^2} = +\infty$$

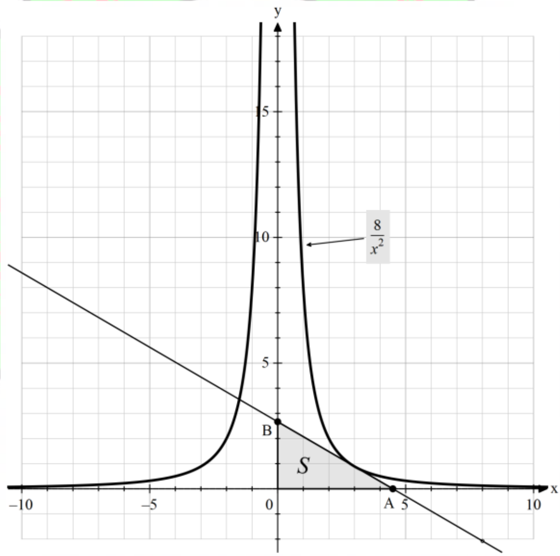
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{8}{x^2} = 0$$

គេបានចំពោះ $\forall x \in (-\infty, 0)$ ក្រាប (C) កើនពី 0 ទៅ $+\infty$

និងចំពោះ $\forall x \in (0, +\infty)$ ក្រាប (C) ចុះពី $+\infty$ ទៅ 0

គេបានក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$

សង់ក្រាប



ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ $x = a$

សមីការបន្ទាត់បន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ $x = a$

គេបាន $(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$

ដែល $f'(a) = -\frac{16}{a^3}, f(a) = \frac{8}{a^2}$

នាំឱ្យ $(T): y=-\frac{16}{a^3}(x-a)+\frac{8}{a^2}=-\frac{16}{a^3}x+\frac{24}{a^2}$

ដូចនេះ $\boxed{(T): y=-\frac{16}{a^3}x+\frac{24}{a^2}}$ ។

គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច A និង B

ដោយបន្ទាត់ (T) កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ A

គេបាន $y_A=\frac{24}{a^2}$ (ព្រោះ $x_A=0$)

បន្ទាត់ (T) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ B

គេបាន $-\frac{16}{a^3}x_B+\frac{24}{a^2}=0 \Rightarrow x_B=\frac{3a}{2}$ (ព្រោះ $y_B=0$)

ដូចនេះ $\boxed{A\left(0,\frac{24}{a^2}\right), B\left(\frac{3a}{2},0\right)}$ ។

ឃ. រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ OAB នៅពេល $a\to\infty$

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ OAB

ដោយ OAB ជាត្រីកោណកែង

គេបាន $S=\frac{1}{2}|x_B||y_A|=\frac{1}{2}\times\left|\frac{3a}{2}\right|\times\left|\frac{24}{a^2}\right|=\frac{18}{|a|}$

ពេល $a\to\infty \Rightarrow |a|\to+\infty$ គេបាន $\frac{18}{|a|}\to 0$

ដូចនេះ $\boxed{S=0}$ បើ $a\to\infty$ ។

៦. បង្ហាញថាខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ មិនមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេកនោះទេ ។

ចម្លើយ

បង្ហាញថាខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ y មិនមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេកនោះទេ

អនុគមន៍ $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ មានដែនកំណត់

$$\mathrm{D}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\};k\in\mathbb{Z}$$

ឧបមាថាអនុគមន៍ $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ មានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេកត្រង់ $x=a\,;a\in\mathbb{R}$

គេបាន $y'(a)=0$ ដែល $y'=\dfrac{-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$

$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-1-\sin x}{(1+\sin x)^2}$$

បើ $y'(a)=0\Leftrightarrow -1-\sin a=0\Rightarrow a=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\notin\mathrm{D}$

មានន័យថាគ្មានតម្លៃ a ណាមួយធ្វើឱ្យសមីការ $y'=0$ ទេ

នោះអនុគមន៍ $f(x)$ មិនមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេកនោះឡើយ

ដូចនេះ អនុគមន៍ $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$ មិនមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេកនោះទេ ។

<u>ចំណាំ៖</u> យើងអាចបង្ហាញថាអនុគមន៍គ្មានតម្លៃបរមាធៀបនោះទេ (បន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចបរមាធៀប ជាបន្ទាត់ដេកស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស) ។

៧. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+1}$ និងចំនួនថេរ p មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(p)=0$ ។ បង្ហាញថា $f'(p)=\frac{2p+a}{p^2+1}$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

បង្ហាញថា $f'(p)=\frac{2p+a}{p^2+1}$

គេមាន $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+1}$

នាំឱ្យ $f'(x)=\frac{(2x+a)(x^2+1)-2x(x^2+ax+b)}{(x^2+1)^2}$

បើ $x=p$ គេបាន

$$f'(p)=\frac{(2p+a)(p^2+1)-2p(p^2+ap+b)}{(p^2+1)^2}$$

$$=\frac{(2p+a)(p^2+1)}{(p^2+1)^2}-2p\times\frac{p^2+ap+b}{p^2+1}$$

$$= \frac{2p+a}{p^2+1} - 2p \times \frac{p^2+ap+b}{p^2+1}$$

តែ $f(p)=0$ (សម្មតិកម្ម) គេបាន $\dfrac{p^2+ap+b}{p^2+1}=0$

នាំឱ្យ $f'(p)=\dfrac{2p+a}{p^2+1}-2p\times 0=\dfrac{2p+a}{p^2+1}$

ដូចនេះ $\boxed{f'(p)=\dfrac{2p+a}{p^2+1}}$ ។

៨. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $tx'+2x=e^{-t^2}+\dfrac{1}{2t}$ បើ $x=\dfrac{t-e^{-t^2}}{2t^2}$ ។

ចម្លើយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $tx'+2x=e^{-t^2}+\dfrac{1}{2t}$

គេមាន $x=\dfrac{t-e^{-t^2}}{2t^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{e^{-t^2}}{t^2}\right)$

នាំឱ្យ $x'=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{-2t^3e^{-t^2}-2te^{-t^2}}{t^4}\right)$

$$x'=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{2t^2e^{-t^2}+2e^{-t^2}}{t^3}\right)$$

នាំឱ្យ $tx'=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{t}+\dfrac{2t^2e^{-t^2}+2e^{-t^2}}{t^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{t}-\frac{2t^2e^{-t^2}+2e^{-t^2}}{t^2}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-2e^{-t^2}-\frac{e^{-t^2}}{t^2}-\frac{e^{-t^2}}{t^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{-t^2}}{t^2}\right)-2e^{-t^2}-\frac{e^{-t^2}}{t^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{-t^2}}{t^2}\right)+e^{-t^2}+\frac{e^{-t^2}}{2t^2}$$

$$=-x+e^{-t^2}+\frac{e^{-t^2}}{2t^2}$$

$$=-2x+x+e^{-t^2}+\frac{e^{-t^2}}{2t^2}$$

គេបាន $tx'+2x=x+e^{-t^2}+\frac{e^{-t^2}}{2t^2}$

$$=\frac{1}{2t}-\frac{e^{-t^2}}{2t^2}+e^{-t^2}+\frac{e^{-t^2}}{2t^2}$$

$$=e^{-t^2}+\frac{1}{2t}$$

ដូចនេះ $\boxed{tx'+2x=e^{-t^2}+\frac{1}{2t}}$ ពិតតាមសម្រាយបញ្ជាក់ ។

៩. គេឱ្យអនុគមន៍ $F(x)=f(x)\cdot w(x)$ និង $f'(w)\cdot w'(x)=c$

ដែល c ជាចំនួនថេរ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{F''}{F}=\frac{f''}{f}+\frac{w''}{w}+\frac{2c}{f\cdot w}$

និង $\frac{F'''}{F}=\frac{f'''}{f}+\frac{w'''}{w}$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{F''}{F}=\frac{f''}{f}+\frac{w''}{w}+\frac{2c}{f\cdot w}$

គេមាន $F(x)=f(x)\cdot w(x)$

នាំឱ្យ $F'(x)=f'(x)\cdot w(x)+f(x)\cdot w'(x)$

$F''(x)=f''(x)\cdot w(x)+2f'(x)\cdot w'(x)+f(x)\cdot w''(x)$

តែ $f'(w)\cdot w'(x)=c$

គេបាន $F''(x)=f''(x)\cdot w(x)+f(x)\cdot w''(x)+2c$

$$\frac{F''(x)}{f(x)\cdot w(x)}=\frac{f''(x)}{f(x)}+\frac{w''(x)}{w(x)}+\frac{2c}{f(x)\cdot w(x)}$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)}=\frac{f''(x)}{f(x)}+\frac{w''(x)}{w(x)}+\frac{2c}{f(x)\cdot w(x)}$$ ពិត

ដូចនេះ: $\boxed{\frac{F''(x)}{F(x)}=\frac{f''(x)}{f(x)}+\frac{w''(x)}{w(x)}+\frac{2c}{f(x)\cdot w(x)}}$ ។

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{F'''}{F}=\frac{f'''}{f}+\frac{w'''}{w}$

គេមាន $F''(x)=f''(x)\cdot w(x)+f(x)\cdot w''(x)+2c$

នាំឱ្យ $F'''(x)=f'''(x)\cdot w(x)+f''(x)\cdot w'(x)+f'(x)\cdot w''(x)$
$+f(x)\cdot w'''(x)+0$

$=f'''(x)\cdot w(x)+f(x)\cdot w'''(x)+\left[f'(x)\cdot w'(x)\right]'$

$=f'''(x)\cdot w(x)+f(x)\cdot w'''(x)+c'$

$=f'''(x)\cdot w(x)+f(x)\cdot w'''(x)$

ឬ $\dfrac{F'''}{f(x)\cdot w(x)}=\dfrac{f'''(x)}{f(x)}+\dfrac{w'''(x)}{w(x)}$

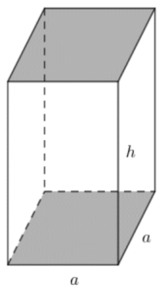
ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{F''}{F}=\dfrac{f''}{f}+\dfrac{w''}{w}+\dfrac{2c}{f\cdot w}}$ និង $\boxed{\dfrac{F'''}{F}=\dfrac{f'''}{f}+\dfrac{w'''}{w}}$ ។

១០. ប្រអប់ត្រង់មួយមានគម្របលើ និងគម្របក្រោមមានរាងជាការេមានមាឌ 50 cm^3 ។ គេចង់ធ្វើគម្របលើ និងគម្របក្រោមពីស័ង្កសីដែលមានតម្លៃ 1$ ក្នុងមួយសង់ទីម៉ែតការ៉េ និងផ្ទៃសងខាងធ្វើពីអាលុយមីញ៉ូមដែលមានតម្លៃ 2$ ក្នុងមួយសង់ទីម៉ែតការ៉េ ។ តើគេត្រូវកំណត់ប្រវែងទ្រនុងប៉ុន្មានដើម្បីឱ្យ ប្រាក់ចំណាយអស់តិចបំផុត ។

<u>ចម្លើយ</u>

កំណត់ប្រវែងទ្រនុងដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយការផលិតប្រអប់អស់ប្រាក់តិចបំផុត

តាង a,h ជាប្រវែងជ្រុងបាតមានរាងការេ និងកម្ពស់របស់ប្រអប់ $a,h>0$



ដោយប្រអប់មានមាឌ $V=a^2h=50\Rightarrow h=\dfrac{50}{a^2}$

គេបានក្រឡាផ្ទៃសរុបនៃប្រអប់កំណត់ដោយ $S(a)=S_l+2S_b$

ដែល S_l ជាក្រឡាផ្ទៃខាងនៃប្រអប់ $S_l=4ah=\dfrac{100a}{a^2}=\dfrac{100}{a}$ និង $S_b=a^2$

គេបាន $S(a)=\dfrac{100}{a}+2a^2=\dfrac{2a^3+100}{a}$

នាំឱ្យ $S'(a)=\dfrac{6a^3-(2a^3+100)}{a^2}=\dfrac{4a^3-100}{a^2}$

ចំពោះ $\forall a>0\Rightarrow a^2>0$ នោះ $S'(a)$ យកសញ្ញាតាម $4a^3-100$

បើ $S'(a)=0\Leftrightarrow 4a^3-100=0\Rightarrow a=\sqrt[3]{25}$

គេបានតារាងសញ្ញានៃ $S'(a)$

a	0	$\sqrt[3]{25}$	$+\infty$
$S'(a)$	$-$	0	$+$

តាមតារាងសញ្ញា $S(a)$ មានអប្បបរមាត្រង់

$$a=\sqrt[3]{25}\Rightarrow h=\frac{50}{a^2}=\frac{50}{\sqrt[3]{25^2}}=\frac{50\sqrt[3]{25}}{25}=2\sqrt[3]{25}$$

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យធ្វើប្រអប់អស់ប្រាក់តិចបំផុតកាលណាប្រអប់មានកម្ពស់ $h=2\sqrt[3]{25}\ cm$ និងជ្រុងបាត $a=\sqrt[3]{25}\ cm$ ។

❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋