គណិតវិទ្យា និង វិទ្យាសាស្ត្រ

MATHEMATICS & SCIENCE

វិចទ័រក្នុងលំហ

សម្រាប់សិស្សានុសិស្សថ្នាក់ទី១២

សិក្សាបន្ថែមនៅផ្ទះក្នុងអំឡុងពេលពិភពលោករងគ្រោះដោយជំងឺ COVID-19

រៀបរៀងដោយ ៖ **ពុធ បូរី**

ខែមិថុនា ឆ្នាំ ២០២០

វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

១. ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានបីចំណុច $A(-1,2,3), B(0,-1,1)$ និង $C(2,3,5)$ ។

ក. ដៅចំណុច A,B និង C ក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។ គណនា $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។

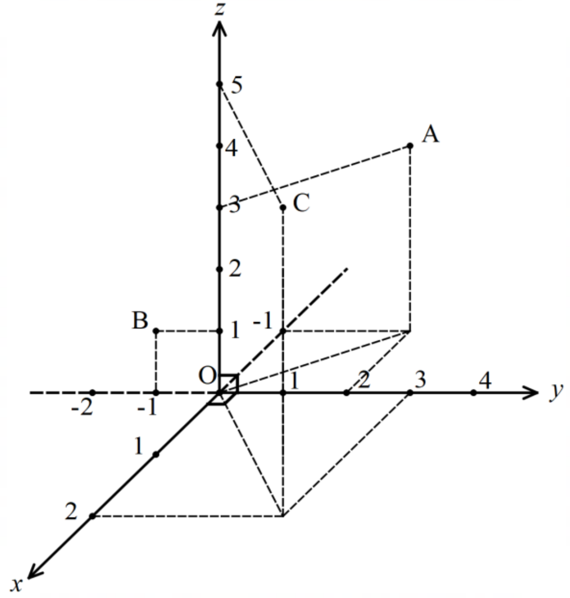
ខ. កំណត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ ។ កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (L) ដែលកាត់តាមពីរចំណុច B និង C ។

គ. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H រវាងបន្ទាត់ (L) នឹងប្លង់ (P) ។

ឃ. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

ចម្លើយ

ក. ដៅចំណុច A,B និង C



- គណនា $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AC}$

គេមាន $A(-1,2,3),B(0,-1,1)$ និង $C(2,3,5)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}(1,-3,-2),\overrightarrow{BC}(2,4,4),\overrightarrow{AC}(3,1,2)$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}(1,-3,-2),\overrightarrow{BC}(2,4,4),\overrightarrow{AC}(3,1,2)}$ ។

ខ. កំណត់សមីការប្លង់ (P)

គេមាន $\overrightarrow{BC}(2,4,4)$ និង $A(-1,2,3)$

ដោយប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$

គេបាន វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃប្លង់ (P)

គេបាន $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$(P): 2(x+1)+4(y-2)+4(z-3)=0$$

$$(P): 2x+2+4y-8+4z-12=0$$

$$(P): 2x+4y+4z-18=0$$

$$(P): x+2y+2z-9=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (P) គឺ $\boxed{(P): x+2y+2z-9=0}$ ។

- កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (L)

ដោយបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច B និង C

គេបាន បន្ទាត់ (L) មានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}(2,4,4)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

គេបាន $(L): \begin{cases} x = x_0 + at = 2t \\ y = y_0 + bt = -1+4t \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct = 1+4t \end{cases}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ (L) គឺ $\boxed{(L): \begin{cases} x = 2t \\ y = -1+4t \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = 1+4t \end{cases}}$ ។

គ. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H

គេមាន $(L): \begin{cases} x = 2t \\ y = -1+4t \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = 1+4t \end{cases}$

និង $(P): x+2y+2z-9=0$

យកសមីការបន្ទាត់ (L) ជួសចូលសមីការប្លង់ (P)

គេបាន $(2t)+2(-1+4t)+2(1+4t)-9=0$

$$2t-2+8t+2+8t-9=0$$

$18t-9=0$

$t=\frac{1}{2}$

យក $t=\frac{1}{2}$ ជួសចូលសមីការបន្ទាត់ (L)

គេបាន $\begin{cases} x=2\times\frac{1}{2}=1 \\ y=-1+4\times\frac{1}{2}=1 \\ z=1+4\times\frac{1}{2}=3 \end{cases}$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុច H គឺ $\boxed{H(1,1,3)}$ ។

ឃ. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត

គេមាន $\overrightarrow{AB}(1,-3,-2),\overrightarrow{AC}(3,1,2)$

នាំឱ្យ $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$

$AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$

ដោយ $AB=AC$ នាំឱ្យត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត កំពូល A

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A ។

- គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

គេបាន $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$

$=(-6+2)\vec{i}-(2+6)\vec{j}+(1+9)\vec{k}$

$=-4\vec{i}-8\vec{j}+10\vec{k}$

នាំឱ្យ $S=\frac{1}{2}\sqrt{16+64+100}=\frac{1}{2}\sqrt{180}=3\sqrt{5}$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $\boxed{S=3\sqrt{5}}$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

២. ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(-1,4,4), B(1,2,3)$ និង $C(3,2,4)$ ។

ក. ដៅចំណុច A,B និង C ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ គណនា $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។

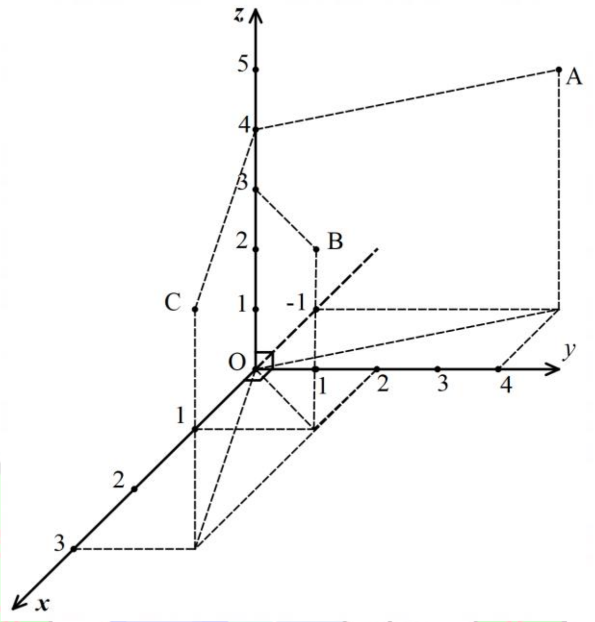
ខ. បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C មិនរត់ត្រង់គ្នា រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

គ. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។ គណនាចម្ងាយពីចំណុចគល់តម្រុយទៅប្លង់ (ABC) ។

ឃ. គណនា $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}$ រួចទាញរកមាឌចតុមុខ $OABC$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. ដៅចំណុច A,B និង C



- គណនា $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AC}$

គេមានចំណុច $A(-1,4,4), B(1,2,3)$ និង $C(3,2,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}(2,-2,-1), \overrightarrow{BC}(2,0,1), \overrightarrow{AC}(4,-2,0)$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}(2,-2,-1), \overrightarrow{BC}(2,0,1), \overrightarrow{AC}(4,-2,0)}$ ។

ខ. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C មិនរត់ត្រង់គ្នា

គេមាន $\overrightarrow{AB}(2,-2,-1), \overrightarrow{AC}(4,-2,0)$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

$$=(0-2)\vec{i}-(0+4)\vec{j}+(-4+8)\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{O}$

ដូចនេះ ចំណុច A,B និង C មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

- គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ

គេបាន $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$

គេបាន $S=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=\frac{\sqrt{36}}{2}=3$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $\boxed{S=3}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

គ. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) កាត់ចំណុច A,B និង C

គេបានប្លង់មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2,-4,4)$

និងកាត់តាមចំណុច $A(-1,4,4)$

គេបាន $(ABC):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$(ABC):-2(x+1)-4(y-4)+4(z-4)=0$$

$$(ABC):-2x-2-4y+16+4z-16=0$$

$$(ABC):-2x-4y+4z-2=0$$

$$(ABC):x+2y-2z+1=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (ABC) គឺ $\boxed{(ABC): x+2y-2z+1=0}$ ។

- គណនាចម្ងាយពីចំណុចគល់តម្រុយទៅប្លង់ (ABC)

គេមានចំណុច $O(0,0,0)$ និងប្លង់ $(ABC): x+2y-2z+1=0$

គេបាន $d(O,(ABC)) = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$= \frac{|0+0+0+1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីគល់តម្រុយទៅប្លង់ (ABC) គឺ

$$\boxed{d(O,(ABC)) = \frac{1}{3}} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ) ។}$$

ឃ. គណនា $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = -2\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$ និង $\overrightarrow{AO}(1,-4,-4)$

គេបាន

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO} = -2\times1+(-4)\times(-4)+4\times(-4) = -2$$

ដូចនេះ $\boxed{(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO} = -2}$ ។

- ទាញរកមាឌចតុមុខ $OABC$

តាង V ជាមាឌចតុកោណ $OABC$

គេបាន $V = \dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}\right| = \dfrac{1}{6}\times|-2| = \dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ មាឌនៃចតុកោណ $OABC$ គឺ $\boxed{V = \dfrac{1}{3}}$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

៣. ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបួនចំណុច $A(-1,3,2), B(4,0,-3), C(5,-1,4)$ និង $D(0,6,1)$ ។

ក. ដៅចំណុច A,B,C និង D ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ គណនា $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ។

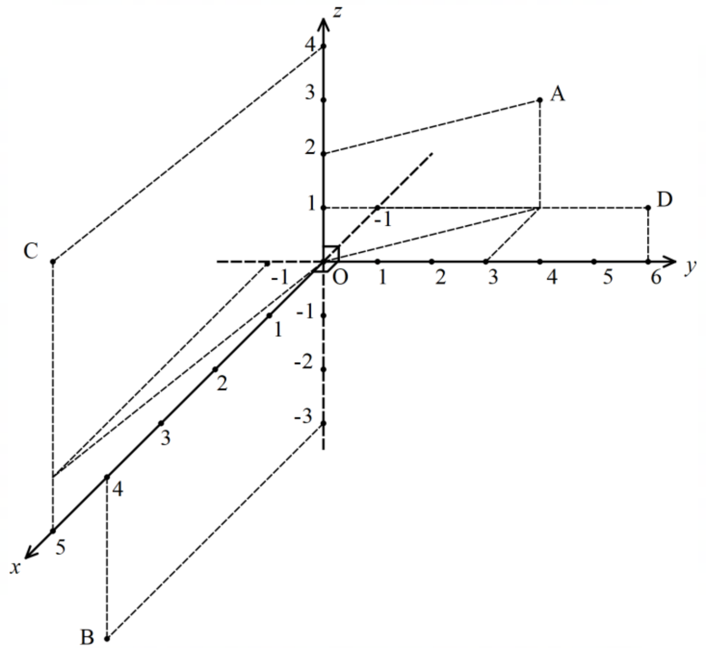
ខ. សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (BC) ។ H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច A លើបន្ទាត់ (BC) ។ រកកូអរដោនេចំណុច H រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ (AH) ។

គ. គណនា $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$ រួចសរសេរសមីការប្លង់ (DBC) ។

ឃ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (DBC) និងពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (BC) ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. ដៅចំណុច A,B,C និង D



- គណនា $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ និង $\overrightarrow{CD}$

គេមាន ចំណុច $A(-1,3,2), B(4,0,-3), C(5,-1,4)$

និង $D(0,6,1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}(5,-3,-5), \overrightarrow{AC}(6,-4,2), \overrightarrow{AD}(1,3,-1),$

$\overrightarrow{BC}(1,-1,7), \overrightarrow{BD}(-4,6,4), \overrightarrow{CD}(-5,7,-3)$

ដូចនេះ

$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(5,-3,-5), \overrightarrow{AC}(6,-4,2), \overrightarrow{AD}(1,3,-1), \\ \overrightarrow{BC}(1,-1,7), \overrightarrow{BD}(-4,6,4), \overrightarrow{CD}(-5,7,-3)\end{array}}$$ ។

ខ. សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (BC)

បន្ទាត់ (BC) មានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}(1,-1,7)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស ហើយកាត់តាមចំណុច $B(4,0,-3)$

គេបាន $(BC):\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

ឬ $(BC):\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+3}{7}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ (BC) គឺ $\boxed{(BC):\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+3}{7}}$ ។

- រកកូអរដោនេចំណុច H

ដោយ H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច A លើបន្ទាត់ (BC)

គេបាន $\begin{cases} H\in(BC) \\ \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC} \end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀត សមីការបន្ទាត់ (BC) អាចសរសេរ

$$\begin{cases} x=4+t \\ y=-t \qquad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-3+7t \end{cases} \qquad (1)$$

គេបាន កូអរដោនេចំណុច H មានទម្រង់ $H(4+t,-t,-3+7t)$ ដែលត្រូវកំណត់តម្លៃ t

គេបាន $\overrightarrow{AH}(5+t,-3-t,-5+7t)$

ដោយ $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ គេបាន $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

ឬ $1\times(5+t)-1\times(-3-t)+7\times(-5+7t)=0$

$$5+t+3+t-35+49t=0$$

$51t-27=0$

$t=\dfrac{27}{51}=\dfrac{9}{17}$

បើ $t=\dfrac{9}{17}$ គេបាន $\begin{cases} x=4+\dfrac{9}{17}=\dfrac{77}{17} \\ y=-\dfrac{9}{17} \\ z=-3+7\times\dfrac{9}{17}=\dfrac{12}{17} \end{cases}$

គេបាន $H\left(\dfrac{77}{17},-\dfrac{9}{17},\dfrac{12}{17}\right)$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុច H គឺ $\boxed{H\left(\dfrac{77}{17},-\dfrac{9}{17},\dfrac{12}{17}\right)}$ ។

- សរសេរសមីការបន្ទាត់ (AH)

បន្ទាត់ (AH) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AH}\left(\dfrac{94}{17},\dfrac{42}{17},-\dfrac{22}{17}\right)$ និង កាត់តាមចំណុច $A(-1,3,2)$

គេបាន $(AH):\begin{cases} x=x_0+at=-1+\dfrac{94}{17}t \\ y=y_0+bt=3+\dfrac{42}{17}t \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+ct=2-\dfrac{22}{17}t \end{cases}$

ឬ $(AH):\begin{cases}x=-1+94k\\ y=3+42t\\ z=2-22t\end{cases}$ ដែល $k=\dfrac{1}{17}t\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ (AH) គឺ $\boxed{(AH):\begin{cases}x=-1+94k\\ y=3+42t\\ z=2-22t\end{cases}}$ ។

គ. គណនា $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$

គេមាន $\overrightarrow{BC}(1,-1,7),\overrightarrow{BD}(-4,6,4)$

គេបាន $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 7\\ -4 & 6 & 4\end{vmatrix}$

$$=(-4-42)\vec{i}-(4+28)\vec{j}+(6-4)\vec{k}$$

$$=-46\vec{i}-32\vec{j}+2\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=-46\vec{i}-32\vec{j}+2\vec{k}}$ ។

- សរសេរសមីការប្លង់ (DBC)

ប្លង់ (DBC) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=-46\vec{i}-32\vec{j}+2\vec{k}$

និងកាត់ចំណុច $B(4,0,-3)$

គេបាន $(DBC):a(x-x_0)+b(y-y_0)+z(z-z_0)=0$

$$(DBC):-46(x-4)-32(y-0)+2(z+3)=0$$

$$(DBC):-46x+184-32y+2z+6=0$$

$$(DBC):-46x-32y+2z+190=0$$

$(DBC): 23x+16y-z-95=0$

ដូចនេះ ប្លង់ (DBC) មានសមីការ

$$\boxed{(DBC): 23x+16y-z-95=0}$$ ។

ឃ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (DBC)

គេមាន $A(-1,3,2)$ និង $(DBC): 23x+16y-z-95=0$

គេបាន $d\big(A,(DBC)\big)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ឬ $d\big(A,(DBC)\big)=\dfrac{|-23+48-2-95|}{\sqrt{529+256+1}}=\dfrac{|-72|}{\sqrt{786}}=\dfrac{12\sqrt{786}}{131}$

ដូចនេះ គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (DBC) គឺ

$$\boxed{d\big(A,(DBC)\big)=\frac{12\sqrt{786}}{131}}$$ ។

- គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (BC)

គេមាន បន្ទាត់ $\begin{cases} x=4+t \\ y=-t \\ z=-3+7t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$ និង $A(-1,3,2)$

យក $t=0$ គេបាន $x=4, y=0, z=-3$

គេបាន $P(4,0,-3)\in(BC)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AP}(5,-3,-5)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$

$$=(-21-5)\vec{i}-(35+5)\vec{j}+(-5+3)\vec{k}$$

$$=-26\vec{i}-40\vec{j}-2\vec{k}$$

គេបាន $d(A,(BC))=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$

$$=\frac{\sqrt{676+1600+4}}{\sqrt{1+1+49}}=\frac{\sqrt{2280}}{\sqrt{51}}=\frac{2\sqrt{570}}{\sqrt{51}}=\frac{2\sqrt{29070}}{51}$$

ដូចនេះ $\boxed{d(A,(BC))=\dfrac{2\sqrt{29070}}{51}}$ ។

៤. គេឱ្យប្លង់ពីរ $(P):2x-2y+z-1=0,(Q):-2x+2y-z-17=0$ និងចំណុច $A(1,2,3)$ ។

ក. បង្ហាញថា ប្លង់ (P) ស្របជាមួយនឹងប្លង់ (Q) រួចគណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ទាំងពីរនេះ ។

ខ. ពីចំណុច A គេគូសបន្ទាត់ $(AH)\perp(Q)$ ដែល $H\in(Q)$ ។

១. បង្ហាញថាចំណុច A ស្ថិតនៅលើប្លង់ (P) ។

២. រកកូអរដោនេចំណុច H រួចសរសេរសមីការប្លង់ដែលជាមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ AH ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. បង្ហាញថា ប្លង់ (P) ស្របជាមួយនឹងប្លង់ (Q)

ប្លង់ $(P):2x-2y+z-1=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $n_1(2,-2,1)$

ប្លង់ $(Q):-2x+2y-z-17=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $n_2(-2,2,-1)$

ដោយ $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$ គេបាន $(P)\parallel(Q)$

ដូចនេះ ប្លង់ (P) ស្របជាមួយនឹងប្លង់ (Q) ។

- គណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ទាំងពីរនេះ

យក $M(x_0, y_0, z_0)\in(P)$ គេបាន $2x_0-2y_0+z_0-1=0$

គេបាន $d\left((P),(Q)\right)=d\left(M,(Q)\right)=\dfrac{\left|-2x_0+2y_0-z_0-17\right|}{\sqrt{4+4+1}}$

ឬ $d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{\left|-2x_0+2y_0-z_0-17\right|}{3}$

តែ $2x_0-2y_0+z_0-1=0 \Leftrightarrow -2x_0+2y_0-z_0+1=0$

$\Rightarrow -2x_0+2y_0-z_0-17=-18$

គេបាន $d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{|-18|}{3}=\dfrac{18}{3}=6$

ដូចនេះ $\boxed{d\left((P),(Q)\right)=6}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ខ. ១. បង្ហាញថាចំណុច A ស្ថិតនៅលើប្លង់ (P)

គេមាន $(P): 2x-2y+z-1=0$ និង $A(1,2,3)$

យកកូអរដោនេចំណុច A ជួសចូលសមីការ (P)

គេបាន $2\times1-2\times2+3-1=0 \Leftrightarrow 0=0$ ពិត

ដូចនេះ ចំណុច A ស្ថិតនៅលើប្លង់ (P) ។

២. រកកូអរដោនេចំណុច H

តាង $H(x_1, y_1, z_1)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AH}(x_1-1, y_1-2, z_1-3)$

ដោយ $(AH)\perp(Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}\parallel\overrightarrow{n_2}(-2,2,1)$

គេបាន $\begin{cases} x_1 - 1 = -2t \\ y_1 - 2 = 2t \\ z_1 - 3 = -t \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ y_1 = 2 + 2t \\ z_1 = 3 - t \end{cases}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $H \in (Q)$ គេបាន $-2x_1 + 2y_1 - z_1 - 17 = 0 \quad (2)$

យក (1) ជួសចូល (2) គេបាន

$$-2(1-2t) + 2(2+2t) - (3-t) - 17 = 0$$

$$-2 + 4t + 4 + 4t - 3 + t - 17 = 0$$

$$9t - 18 = 0$$

$$t = 2$$

យក $t = 2$ ជួសចូល (1) គេបាន $\begin{cases} x_1 = 1 - 2\times 2 = -3 \\ y_1 = 2 + 2\times 2 = 6 \\ z_1 = 3 - 2 = 1 \end{cases}$

គេបាន $H(-3,6,1)$

ដូចនេះ $\boxed{H(-3,6,1)}$ ។

- សរសេរសមីការប្លង់ដែលជាមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ AH

តាង (R) ជាប្លង់ដែលជាមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $AH \Rightarrow \overrightarrow{AH} \perp (R)$

នោះគេបាន $\overrightarrow{AH}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (R)

ដោយ $H(-3,6,1) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(-4,4,-2)$

យក I ជាចំណុចកណ្តាលអង្កត់ AH

គេបាន $I\left(\dfrac{x_A + x_H}{2}, \dfrac{y_A + y_H}{2}, \dfrac{z_A + z_H}{2}\right)$

ឬ $I\left(\frac{1-3}{2},\frac{2+6}{2},\frac{3+1}{2}\right)\Leftrightarrow I(-1,4,2)$

គេបាន ប្លង់ (R) កាត់តាមចំណុច $I(-1,4,2)$

នាំឱ្យ $(R):-4(x+1)+4(y-4)-2(z-2)=0$

$(R):-4x-4+4y-16-2z+4=0$

$(R):-4x+4y-2z-16=0$

$(R):2x-2y+z+8=0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ជាមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ AH គឺ

$\boxed{(R):2x-2y+z+8=0}$ ។

៥. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មានឯកតា $1\,\text{cm}$ គេឱ្យប្លង់ $(P):x+2y+2z-6=0$ ។ ចំណុច A,B និង C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) ជាមួយអ័ក្ស Ox,Oy និង Oz រៀងគ្នា ។

ក. កំណត់កូអរដោនេចំណុច A,B និង C រួចសង់ប្លង់ (P) ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមគល់ O ហើយកាត់តាមគល់ (O) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

គ. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

ឃ. គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$ រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (P) ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. កំណត់កូអរដោនេចំណុច A,B និង C

គេមានសមីការប្លង់ $(P): x+2y+2z-6=0$

និងចំណុច A,B និង C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) ជាមួយអ័ក្ស Ox,Oy និង Oz រៀងគ្នា

គេបាន $A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0,c)$

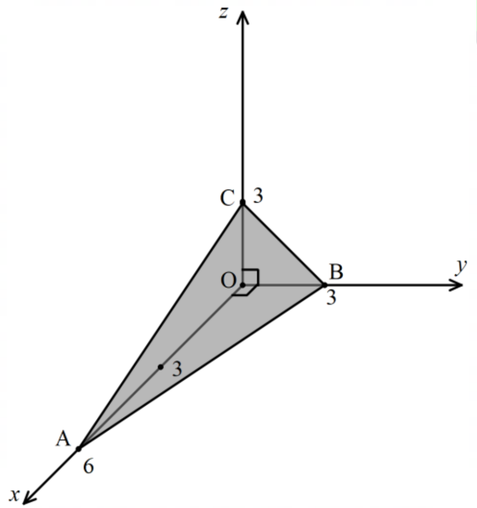
យកកូអរដោនេចំណុចទាំងបីជួសចូលសមីការ (P)

គេបាន $\begin{cases} a+0+0-6=0 \\ 0+2b+0-6=0 \\ 0+0+2c-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=3 \\ c=3 \end{cases}$

នាំឱ្យ $A(6,0,0),B(0,3,0),C(0,0,3)$

ដូចនេះ $\boxed{A(6,0,0),B(0,3,0),C(0,0,3)}$ ។

- សង់ប្លង់ (P)



ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L)

គេមាន $(L)\perp(P)$ នាំឱ្យវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L)

គេបាន វ៉ិចទ័រ $\vec{n}(1,2,2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L)

ម្យ៉ាងទៀតបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច $O(0,0,0)$

គេបាន $(L):\begin{cases} x = x_0 + at = t \\ y = y_0 + bt = 2t \, ; t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct = 2t \end{cases}$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតបន្ទាត់ (L) គឺ $\boxed{(L):\begin{cases} x = t \\ yt = 2t \, ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}}$ ។

គ. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

គេមាន $A(6,0,0), B(0,3,0), C(0,0,3)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}(-6,3,0), \overrightarrow{AC}(-6,0,3)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$= (9-0)\vec{i} - (-18+0)\vec{j} + (0+18)\vec{k}$

$= 9\vec{i} + 18\vec{j} + 18\vec{k}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = 9\vec{i} + 18\vec{j} + 18\vec{k}}$ ។

- គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

គេបាន $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{81+324+324}=\frac{27}{2}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC គឺ $\boxed{S=\frac{27}{2}\text{ cm}^2}$ ។

ឃ. គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$

តាង V ជាមាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$

គេបាន $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AO}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=9\vec{i}+18\vec{j}+18\vec{k},\overrightarrow{AO}(-6,0,0)$

គេបាន $V=\frac{1}{6}\left|9(-6)+0+0\right|=\frac{|-54|}{6}=9$

ដូចនេះ មាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$ គឺ $\boxed{V=9\text{ cm}^3}$ ។

- ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (P)

តាង OH ជាកម្ពស់នៃតេត្រាអ៊ែត $OABC$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{OH}\perp(ABC)$ ឬ $\overrightarrow{OH}\perp(P)$

គេបាន $d\left(O,(P)\right)=\left|\overrightarrow{OH}\right|$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $V=\frac{1}{3}\left(\left|\overrightarrow{OH}\right|\cdot S\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{OH}\right|=\frac{3V}{S}$

ដោយ $V=9\text{ cm}^3, S=\frac{27}{2}\text{ cm}^2$

គេបាន $d\left(O,(P)\right)=\left|\overrightarrow{OH}\right|=\frac{3\times 9}{\frac{27}{2}}=27\times\frac{2}{27}=2$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (P) គឺ $\boxed{d(O,(P))=2\text{ cm}}$ ។

សម្គាល់៖ យើងអាចគណនាចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (P) តាមរូបមន្ត $d(O,(P))=\dfrac{|0+0+0-6|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{6}{\sqrt{9}}=\dfrac{6}{3}=2\text{ cm}$ ។

៦. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ (P) មានសមីការ $(P):2x-2y+z-1=0$ និងស្វ៊ែរ (S) មានសមីការ $(S):x^2+y^2+z^2+2x-8y-4z+12=0$ ។

ក. បង្ហាញថាប្លង់ (P) ប៉ះស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច A រួចកំណត់កូអរដោនេចំណុច A នោះ ។

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់ (P) ត្រង់ចំណុច A ។

គ. B ជាចំណុចមួយផ្សេងទៀតដែលបន្ទាត់ (Δ) កាត់ស្វ៊ែរ (S) ។ កំណត់កូអរដោនេចំណុច B រួចសរសេរសមីការប្លង់ (Q) ដែលប៉ះស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ B ។ បង្ហាញថាប្លង់ (P) ស្របនឹងប្លង់ (Q) ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. បង្ហាញថាប្លង់ (P) ប៉ះស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច A

គេមាន ប្លង់ $(P):2x-2y+z-1=0$

និងស្វ៊ែរ $(S):x^2+y^2+z^2+2x-8y-4z+12=0$

សមីការស្វ៊ែរ (S) អាចសរសេរ

$$(S):(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=3^2$$

គេបានស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $I(-1,4,2)$ និង $R=3$ ឯកតា

ម្យ៉ាងទៀត $d\left((S),(P)\right)=d\left(I,(P)\right)$

$$=\frac{\left|2x_0-2y_0+x_0-1\right|}{\sqrt{4+4+1}}$$

$$=\frac{\left|-2-8+2-1\right|}{\sqrt{9}}=\frac{\left|-9\right|}{3}=\frac{9}{3}=3$$ ឯកតា

ដោយ $d\left((S),(P)\right)=R=3$

គេបានស្វ៊ែរ (S) ប៉ះប្លង់ (P) ត្រង់ A

ដូចនេះ ប្លង់ (P) ប៉ះស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច A ។

- កំណត់កូអរដោនេចំណុច A

ប្លង់ $(P): 2x-2y+z-1=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{n_1}(2,-2,1)$

តាង $A(x_1,y_1,z_1)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{IA}(x_1+1,y_1-4,z_1-2)$

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{IA}\parallel\overrightarrow{n_1}$ គេបាន $\begin{cases}x_1+1=2t\\ y_1-4=-2t\\ z_1-2=t\end{cases}$ ដែលត្រូវកំណត់តម្លៃ t

ឬ $\begin{cases}x_1=2t-1\\ y_1=-2t+4\\ z_1=t+2\end{cases}\quad(1)$

ដោយ $A\in(P)$ គេបាន $2x_1-2y_1+z_1-1=0 \quad (2)$

យក (1) ជួសចូល (2) គេបាន

$$2(2t-1)-2(-2t+4)+(t+2)-1=0$$

$$4t-2+4t-8+t+2-1=0$$

$$9t-9=0$$

$t=1$

យក $t=1$ ជួសចូល (1) គេបាន $\begin{cases} x_1 = 2\times1-1=1 \\ y_1 = -2\times1+4=2 \\ z_1 = 1+2=3 \end{cases}$

គេបាន $A(1,2,3)$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុច A គឺ $\boxed{A(1,2,3)}$ ។

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (Δ)

គេមាន $(\Delta)\perp(P)$ គេបានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{n_1}(2,-2,1)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (Δ)

ម្យ៉ាងទៀត បន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់ (P) ត្រង់ចំណុច A

គេបាន $(\Delta):\begin{cases} x = x_1+ak = 1+2k \\ y = y_1+bk = 2-2k\ ;\ k\in\mathbb{R} \\ z = z_1+ck = 3+k \end{cases}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ (Δ) គឺ $\boxed{(\Delta):\begin{cases} x = 1+2k \\ y = 2-2k\ ;\ k\in\mathbb{R} \\ z = 3+k \end{cases}}$ ។

គ. កំណត់កូអរដោនេចំណុច B

គេមានបន្ទាត់ (Δ) កាត់ស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ A និង B

តាង $B(x_2,y_2,z_2)$ គេបាន $\begin{cases} x_2 = 1+2k \\ y_2 = 2-2k \quad (3) \\ z_2 = 3+k \end{cases}$

ដែលត្រូវកំណត់តម្លៃ k

យក (3) ជួសចូល (S) គេបាន

$$(1+2k+1)^2+(2-2k-4)^2+(3+k-2)^2=9$$

$$(2k+2)^2+(-2k-2)^2+(k+1)^2=9$$

$$4k^2+8k+4+4k^2+8k+4+k^2+2k+1=9$$

$$9k^2+18k=0$$

$$9k(k+2)=0$$

គេបាន $k=0\,,k=-2$

បើ $k=0$ គេបាន $x_2=1,y_2=2,z_2=3$ មិនយក (ចំណុចតែមួយនឹងចំណុច A)

បើ $k=-2$ គេបាន $x_2=-3,y_2=6,z_2=1$

គេបាន $B(-3,6,1)$

ដូចនេះ $\boxed{B(-3,6,1)}$ ។

- សរសេរសមីការប្លង់ (Q)

ដោយប្លង់ (Q) ដែលប៉ះស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ B

គេបានប្លង់ (Q) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{IB}$ ហើយកាត់តាមចំណុច B

ដោយ $I(-1,4,2)$ និង $B(-3,6,1)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{IB}(-2,2,-1)$

គេបាន $(Q):a(x-x_2)+b(y-y_2)+c(z-z_2)=0$

$$(Q):-2(x+3)+2(y-6)-(z-1)=0$$

$(Q): -2x-6+2y-12-z+1=0$

$(Q): -2x+2y-z-17=0$

$(Q): 2x-2y+z+17=0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (Q) គឺ $\boxed{(Q): 2x-2y+z+17=0}$ ។

- បង្ហាញថាប្លង់ (P) ស្របនឹងប្លង់ (Q)

ប្លង់ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{n_1}(2,-2,1)$

ប្លង់ (Q) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{n_2}(-2,2,-1)$

ដោយ $\overrightarrow{n_1}=-\overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$ គេបាន $(P)\parallel(Q)$ ដែរ

ដូចនេះ $\boxed{(P)\parallel(Q)}$ ។

៧. ក្នុងតម្រុយអរតូណរណរម៉ាល់ទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ $(P): x+2y+2z-6=0$ និងបន្ទាត់ $(L): \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{2}$ ។

ក. តើបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) កាត់គ្នាដែរឬទេ? បើកាត់គ្នាគណនាចំណុចប្រសព្វនេះ បើមិនកាត់គ្នាគណនាចម្ងាយរវាងប្លង់បន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

ខ. ចំណុច A,B និង C ជាចំណុចប្រសព្វរៀងគ្នានៃប្លង់ (P) នឹងអ័ក្ស $(Ox),(Oy)$ និង (Oz) ។ កំណត់កូអរដោនេចំណុច A,B និង C ។

គ. គណនា $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ បើ $G(2,1,1)$ ។ តាមតម្លៃដែលគណនាឃើញគេអាចថាយ៉ាងដូចម្តេចចំពោះចំណុច G លើត្រីកោណ ABC ។

ឃ. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។
ង. S ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L) ដែលមានអាប់ស៊ីស $x_S=5$ ។ រកកូអរដោនេចំណុច S រួចគណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $SABC$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. តើបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) កាត់គ្នាដែរឬទេ?

គេមានប្លង់ $(P): x+2y+2z-6=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}(1,2,2)$

និងបន្ទាត់ $(L): \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{2}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(1,2,2)$

ដោយ $\vec{n}\cdot\vec{u}=1+4+4=9\neq 0$ គេបាន $\vec{n}$ មិនកែងនឹង $\vec{u}$

គេបាន បន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) កាត់គ្នាបានមួយចំណុច

បន្ទាត់ (L) អាចសរសេរ $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=-1+2t \end{cases} \quad (1)$

និងប្លង់ $(P): x+2y+2z-6=0 \qquad (2)$

យក (1) ជួសចូល (2)

គេបាន $(1+t)+2(-1+2t)+2(-1+2t)-6=0$

$$1+t-2+4t-2+4t-6=0$$

$$9t-9=0$$

$$t=1$$

យក $t=1$ ជួសចូល (1) គេបាន $x=2, y=1, z=1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $\boxed{(2,1,1)}$ ។

ខ. កំណត់កូអរដោនេចំណុច A, B និង C

គេមានប្លង់ $(P): x+2y+2z-6=0$

ចំណុច A ជាចំណុចប្រសព្វរវាងគ្នានៃប្លង់ (P) នឹងអ័ក្ស (Ox)

គេបាន $y=z=0$ នាំឱ្យ $x+2\times0+2\times0-6=0 \Rightarrow x=6$

គេបាន $A(6,0,0)$

ចំណុច B ជាចំណុចប្រសព្វរវាងគ្នានៃប្លង់ (P) នឹងអ័ក្ស (Oy)

គេបាន $x=z=0$ នាំឱ្យ $0+2y+2\times0-6=0 \Rightarrow y=3$

គេបាន $B(0,3,0)$

ចំណុច C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងគ្នានៃប្លង់ (P) នឹងអ័ក្ស (Oz)

គេបាន $x=y=0$ នាំឱ្យ $0+2\times0+2z-6=0 \Rightarrow z=3$

គេបាន $C(0,0,3)$

ដូចនេះ $\boxed{A(6,0,0), B(0,3,0), C(0,0,3)}$ ។

គ. គណនា $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

គេមាន $A(6,0,0), B(0,3,0), C(0,0,3)$ និង $G(2,1,1)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{GA}(4,-1,-1), \overrightarrow{GB}(-2,2,-1), \overrightarrow{GC}(-2,-1,2)$

គេបាន

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(4-2-2,-1+2-1,-1-1+2)=(0,0,0)$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(0,0,0)}$ ។

- គេអាចថាយ៉ាងដូចម្តេចចំពោះចំណុច G លើត្រីកោណ ABC ?

គេមាន $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(0,0,0)$

នោះ G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC

ដូចនេះ G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC ។

ឃ. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

គេមាន $A(6,0,0),B(0,3,0),C(0,0,3)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}(-6,3,0),\overrightarrow{AC}(-6,0,3)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & 3 & 0\\ -6 & 0 & 3\end{vmatrix}$

$$=(9-0)\vec{i}-(-18-0)\vec{j}+(0+18)\vec{k}$$

$$=9\vec{i}+18\vec{j}+18\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=9\vec{i}+18\vec{j}+18\vec{k}}$ ។

- គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=9\vec{i}+18\vec{j}+18\vec{k}$

គេបាន $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{\sqrt{9^2+18^2+18^2}}{2}=\frac{\sqrt{729}}{2}=\frac{27}{2}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាំត្រីកោណ ABC គឺ $\boxed{S=\frac{27}{2}}$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

ង. រកកូអរដោនេចំណុច S

តាង $S(5,y_S,z_S)$

ដោយ $S \in (L)$ គេបាន $\begin{cases} 1+t=5 & (i) \\ -1+2t=y_S & (ii) \\ -1+2t=z_S & (iii) \end{cases}$

តាម (i) គេបាន $t=4$ នាំឱ្យ $y_S=7, z_S=7$

ដូចនេះ $\boxed{S(5,7,7)}$ ។

- គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $SABC$

តាង V ជាមាឌតេត្រាអ៊ែត $SABC$

គេមាន $A(6,0,0), S(5,7,7), \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}(9,18,18)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AS}(-1,7,7)$

គេបាន $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AS} = -9+126+126=243$

នាំឱ្យ $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AS}\right| = \frac{243}{6}=\frac{81}{2}$

ដូចនេះ មាឌតេត្រាអ៊ែត $SABC$ គឺ $\boxed{V=\frac{81}{2}}$ (ឯកតាមាឌ) ។

៨. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មានទិសដៅវិជ្ជមានគេឱ្យចំណុច $A(2,1,-1)$ និងមានប្លង់ $(\alpha): x+2y+2z-11=0$ និង $(\beta): 3x+y-4z+7=0$ ។

ក. រកសមីការប្លង់ (γ) កាត់ចំណុច A ហើយកែងរួមគ្នានឹងប្លង់ (α) និង (β) ។

ខ. កំណត់កូអរដោនេចំណុច B ដែលជាចំណុចនៃប្រសព្វនៃប្លង់ទាំងបី $(\alpha),(\beta)$ និង (γ) ។

គ. C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (γ) ជាមួយអ័ក្សកូត ។ កំណត់ប្រភេទត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា ។

ឃ. កំណត់កូអរដោនេចំណុច D ដើម្បីឱ្យចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ង. យក E ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ AB និង F ជាកូអរដោនេនៃអង្កត់ CD ។ បង្ហាញថា $EAFC$ ជាការេ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក. រកសមីការ (γ)

គេមានចំណុច $A(2,1,1)$

ប្លង់ $(\alpha): x+2y+2z-11=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $n_1(1,2,2)$

ប្លង់ $(\beta): 3x+y-4z+7=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $n_2(3,1,-4)$

ដោយប្លង់ (γ) កែងរួមគ្នានឹងប្លង់ (α) និងប្លង់ (β)

គេបានប្លង់ (γ) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$

ដោយ $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -4\end{vmatrix}$

$=(-8-2)\vec{i}-(-4-6)\vec{j}+(1-6)\vec{k}$

$=-10\vec{i}+10\vec{j}-5\vec{k}$

ម្យ៉ាងទៀតប្លង់ (γ) កាត់ចំណុច $A(2,1,-1)$

គេបាន $(\gamma): -10(x-2)+10(y-1)-5(z+1)=0$

$(\gamma):-10x+20+10y-10-5z-5=0$

$(\gamma):-10x+10y-5z+5=0$

$(\gamma):2x-2y+z-1=0$

ខ. កំណត់កូអរដោនេចំណុច B

ដោយចំណុច B ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ $(\alpha),(\beta)$ និង (γ)

គេបានកូអរដោនេចំណុច B ជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x+2y+2x-11=0 & (1) \\ 3x+y-4z+7=0 & (2) \\ 2x-2y+z-1=0 & (3) \end{cases}$$

យក (2) គុណនឹង 2 គេបាន

$$\begin{cases} x+2y+2x-11=0 & (1) \\ 6x+2y-8z+14=0 & (4) \\ 2x-2y+z-1=0 & (3) \end{cases}$$

យក $(1)-(4)$ និង $(3)+(4)$ គេបាន

$$\begin{cases} -5x+10z-25=0 & (5) \\ 8x-7z+13=0 & (6) \end{cases}$$

យក (5) គុណនឹង 8 និង (6) គុណនឹង 5 គេបាន

$$\begin{cases} -40x+80z-200=0 & (7) \\ 40x-35z+65=0 & (8) \end{cases}$$

យក $(7)+(8)$ គេបាន $45z-135=0 \Rightarrow z=\dfrac{135}{45}=3$

យក $z=3$ ជួសចូល (5) គេបាន $-5x+30-25\Rightarrow x=1$

យក $x=1,z=3$ ជួសចូល (2)

គេបាន $3+y-12+7=0\Rightarrow y=2$

គេបាន $B(1,2,3)$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុច B គឺ $\boxed{B(1,2,3)}$ ។

គ. កំណត់ប្រភេទត្រីកោណ ABC

គេមាន $A(2,1,-1),B(1,2,3)$

និងចំណុច C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់

$(\gamma):2x-2y+z-1=0$ ជាមួយអ័ក្សកូត

គេបាន $x=y=0\Rightarrow 0+0+z-1=0\Rightarrow z=1$

គេបាន $C(0,0,1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}(-1,1,4),\overrightarrow{AC}(-2,-1,2),\overrightarrow{BC}(-1,-2,-2)$

នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18},\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4+1+4}=3,$

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$

ដោយ $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=3$ និង $AC^2+BC^2=9+9=18=AB^2$

គេបានត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតមានកំពូល C

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតមានកំពូល C ។

- គណនាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC

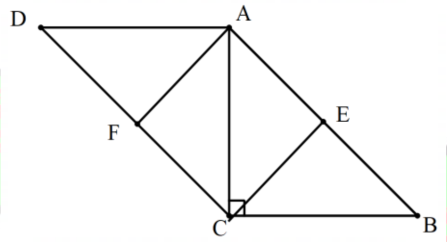
តាង S ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC

គេមានត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតមានកំពូល C

គេបាន $S=\frac{1}{2}(BC\times AC)=\frac{3\times 3}{2}=\frac{9}{2}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC គឺ $\boxed{S=\frac{9}{2}}$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

ឃ. កំណត់កូអរដោនេចំណុច D



តាង $D(x_D,y_D,z_D)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{DC}(-x_D,-y_D,1-y_D)$

ដើម្បីឱ្យ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមលុះត្រាតែ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}(-1,1,4)$ គេបាន $\begin{cases}-x_D=-1\\-y_D=1\\1-z_D=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=1\\y_D=-1\\z_D=-3\end{cases}$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុច D គឺ $\boxed{D(1,-1,-3)}$ ។

ង. បង្ហាញថា $EAFC$ ជាការេ

គេមាន E ជាចំណុចកណ្ដាល AB គេបាន $E\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1\right)$

និង F ជាចំណុចកណ្ដាល CD គេបាន $F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$

គេបាន $\overrightarrow{CE}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right),\overrightarrow{CF}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2\right),\overrightarrow{AE}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right),$

$\overrightarrow{AF}\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0\right)$

គេបាន $CE=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+0}=\frac{3\sqrt{2}}{2}, CF=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+4}=\frac{3\sqrt{2}}{2},$

$AE=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}, AF=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+0}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

ដោយ $CE=CF=AE=AF=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

គេបានចតុកោណ $EAFC$ ជាចតុកោណស្មើ

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+0=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CE}\perp\overrightarrow{CF}$

នាំឱ្យចតុកោណស្មើ $EAFC$ មានមុំកែងមួយ

ដូចនេះ ចតុកោណ $EAFC$ ជាការេ ។

៩. គេឱ្យគូបឯកតា $ABCD-EFGH$ ។ I,J,K និង L ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃជ្រុង AB,EH,BC និង CG ។ ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ ៖

ក. a. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{FD}$ អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ (IJK) ។

b. សរសេរសមីកាប្លង់ (IJK) ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (FD) ។

គ. M ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (IJK) និងបន្ទាត់ (FD) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច M ។

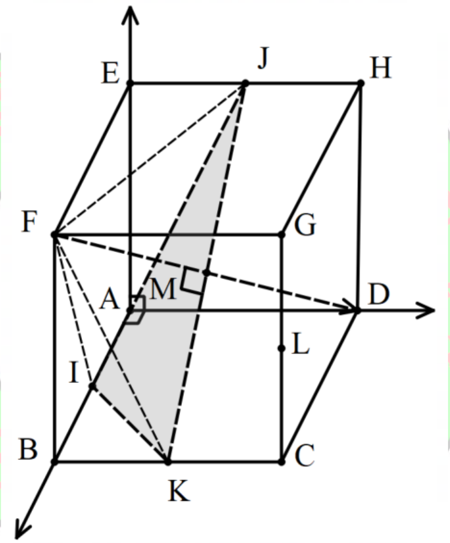
ឃ. កំណត់ប្រភេទត្រីកោណ IJK រួចគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា ។

ង. គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $FIJK$ ។

ច. តើបន្ទាត់ (IJ) និង (KL) ប្រសព្វគ្នាដែរឬទេ? បើបន្ទាត់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នាចូររកចំណុចប្រសព្វនោះ ។

ចម្លើយ

ក. a. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{FD}$ អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ (IJK)



ដោយគូប $ABCD-EFGH$ ជាគូបឯកតា

គេបានក្នុងតម្រុយ $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ មានចំណុច

$A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), F(1,0,1)$ និង $D(0,1,0)$

គេបាន $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$

ម្យ៉ាងទៀត I និង K ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃអង្កត់ AB និង BC

គេបាន $I\left(\frac{1}{2},0,0\right), K\left(1,\frac{1}{2},0\right)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ គេបាន $\overrightarrow{IK}\cdot\overrightarrow{FD}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0$

គេបាន $\overrightarrow{IK}\perp\overrightarrow{FD}$ ឬ $\overrightarrow{FD}\perp(IJK)$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{FD}$ អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ (IJK) ។

b. សរសេរសមីកាប្លង់ (IJK) ប្លង់ (IJK) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$

គេបាន $(IJK):-\left(x-\frac{1}{2}\right)+(y-0)-(z-0)=0$

$$(IJK):-x+\frac{1}{2}+y-z=0$$

$$(IJK):2x-2y+2z-1=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (IJK) គឺ $\boxed{(IJK):2x-2y+2z-1=0}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (FD)

បន្ទាត់ (FD) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{FD}(-1,1,-1)$ និងកាត់តាមចំណុច $F(1,0,1)$

គេបាន $(FD):\begin{cases}x=1-t\\ y=t \qquad ;t\in\mathbb{R}\\ z=1-t\end{cases}$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (FD) គឺ

$$(FD):\begin{cases} x=1-t \\ y=t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases}$$ ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច M

គេមាន M ជាចំណុចប្រសព្វនៃប្លង់ (IJK) នឹងបន្ទាត់ (FD)

យកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (FD) ជួសចូលសមីការប្លង់ (IJK)

គេបាន $2(1-t)-2t+2(1-t)-1=0$

$$2-2t-2t+2-2t-1=0$$

$$-6t+3=0$$

$$t=\frac{1}{2}$$

យក $t=\frac{1}{2}$ ជួសចូលសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (FD)

គេបាន $\begin{cases} x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \end{cases}$

គេបាន $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុច M គឺ $\boxed{M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$ ។

ឃ. កំណត់ប្រភេទត្រីកោណ IJK

គេមាន $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IK}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ចំណុច J ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ EH

ដោយ $E(0,0,1),H(0,1,1)$ គេបាន $J\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IJ}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{6}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\overrightarrow{JK}(-1,0,1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{JK}\right|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$

ដោយ $\left|\overrightarrow{IK}\right|^2+\left|\overrightarrow{IJ}\right|^2=\frac{2}{4}+\frac{6}{4}=\frac{8}{4}=2=\left|\overrightarrow{JK}\right|^2$

ឬ $IK^2+IJ^2=JK^2$ នោះត្រីកោណ IJK ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល I

ម្យ៉ាងទៀត $IK=\frac{JK}{2}$ (ជ្រុងជាប់មុំកែងស្មើពាក់កណ្ដាលអ៊ីប៉ូតេនុស)

នោះត្រីកោណ IJK ជាត្រីកោណកន្លះសម័ង្ស

ដូចនេះ ត្រីកោណ IJK ជាត្រីកោណកន្លះសម័ង្ស ។

- គណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ IJK

ដោយត្រីកោណ IJK ជាត្រីកោណកន្លះសម័ង្ស

គេបាន $S=\frac{1}{2}(IJ\times IK)$

ដោយ $IJ=\left|\overrightarrow{IJ}\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}, IK=\left|\overrightarrow{IK}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

គេបាន $S=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{8}=\frac{2\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ IJK គឺ $\boxed{S=\frac{\sqrt{3}}{4}}$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

ង. គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $FIJK$

តាង V ជាមាឌតេត្រាអ៊ែត $FIJK$

គេបាន $V=\frac{1}{3}(S\times FM)$

ដោយ $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$ និង

$$FM=\left|\overrightarrow{FM}\right|=\left|\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

គេបាន $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$

ដូចនេះ មាឌតេត្រាអ៊ែត $FIJK$ គឺ $\boxed{V=\frac{1}{8}}$ (ឯកតាមាឌ) ។

ច. សិក្សាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (IJ) និង (KL)

- សរសេរសមីការបន្ទាត់ (IJ)

គេមាន $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$

សមីការបន្ទាត់ (IJ) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{IJ}$ ហើយកាត់តាម I

គេបាន $\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k \\ y=\frac{1}{2}k \qquad ;k\in\mathbb{R} \quad (1) \\ z=k \end{cases}$

- សរសេរសមីការបន្ទាត់ (KL)

គេមាន $K\left(1,\frac{1}{2},0\right)$

ហើយ L ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង CG

ដោយ $C(1,1,0),G(1,1,1)$ នាំឱ្យ $L\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$

គេបាន $\overrightarrow{KL}\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

សមីការបន្ទាត់ (KL) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{KL}$ ហើយកាត់តាម K

គេបាន $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k';k'\in\mathbb{R} \quad (2) \\ z=\frac{1}{2}k' \end{cases}$

- សិក្សាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (IJ) និង (KL)

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន $\begin{cases} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}k=1 \\ \frac{1}{2}k=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k' \\ k=\frac{1}{2}k' \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} 1-k=2 & (i) \\ k=1+k' & (ii) \\ 2k=k' & (iii) \end{cases}$

តាម (i) គេបាន $k=-1$ យកជួសចូល (ii)

គេបាន $-1=1+k' \Rightarrow k'=-2$

យក $k=-1, k=-2$ ជួសចូល (iii)

គេបាន $-1=\frac{1}{2}(-2) \Leftrightarrow -1=-1$ ពិត

គេបាន បន្ទាត់ (IJ) និង (KL) ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច

យក $t=-1$ ជួសចូល (1) គេបាន $x=1, y=-\frac{1}{2}, z=-1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ (IJ) និង (KL) ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច ដែល

មានកូអរដោនេ $\boxed{\left(1,-\frac{1}{2},-1\right)}$ ។

១០. ក្នុងតម្រុយអរតូណារមេ $\left(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$ គេឱ្យគូបឯកតា $ABCD-EFGH$ ។

ផ្នែក A

ក. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{DF}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (EBG) ។

ខ. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (EBG) ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ (DF) និងប្លង់ (EBG) ។

ផ្នែក B

គេឱ្យ x ជាតម្លៃមួយដែរស្ថិតនៅចន្លោះ $[0,1]$ និងចំណុច M មួយចល័តលើអង្កត់ DF ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DF}$ ហើយ $\angle EMB=\theta,\ 0\le\theta\le\pi$ ។

ក. កំណត់តម្លៃមុំ θ បើចំណុច M ត្រួតលើចំណុច D? ត្រួតលើចំណុច F ។

ខ. a. បង្ហាញថាកូអរដោនេនៃចំណុច M គឺ $M(x,x,x)$ ។

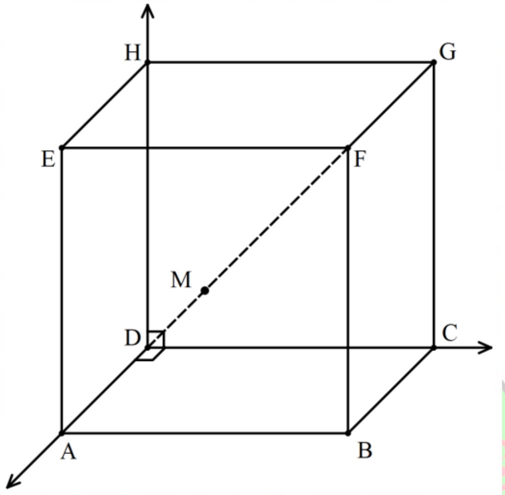
b. បង្ហាញថា $\cos\theta=\dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$ ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ $\cos\theta$ លើចន្លោះ $[0,1]$ រួចកំណត់កូអរដោនេចំណុច M ដើម្បីឱ្យ៖

a. ត្រីកោណ MEB ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M ។

b. មុំ θ មានតម្លៃអតិបរមា ។

ចម្លើយ



ផ្នែក A

ក. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{DF}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (EBG)

ដោយគូប $ABCD-EFGH$ ជាគូបឯកតា

គេបានក្នុងតម្រុយ $\left(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$ មានចំណុច

$B(1,1,0), D(0,0,0), E(1,0,1)$ និង $F(1,1,1)$

គេបាន $\overrightarrow{DF}(1,1,1), \overrightarrow{EB}(0,1,-1)$

ដោយ $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EB}=0+1-1=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{EB}$

គេបាន $\overrightarrow{DF}\perp(EBG)$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{DF}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (EBG) ។

ខ. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (EBG)

ប្លង់ (EBG) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{DF}(1,1,1)$ និងកាត់ចំណុច $E(1,0,1)$

គេបាន $(EBG):(x-1)+(y-0)+(z-1)=0$

$(EBG):x-1+y+z-1=0$

$(EBG):x+y+z-2=0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (EBG) គឺ $\boxed{(EBG):x+y+z-2=0}$ ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច I

គេមាន $(EBG):x+y+z-2=0 \quad (1)$

ហើយបន្ទាត់ (DF) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{DF}(1,1,1)$ និងកាត់តាមចំណុច $D(0,0,0)$

គេបាន $(DF):\begin{cases} x=t \\ y=t\,;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases} \quad (2)$

ដោយ I ចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ (DF) និងប្លង់ (EBG)

យក (2) ជួសចូល (1) គេបាន

$$t+t+t-2=0 \Leftrightarrow 3t=2 \Rightarrow t=\frac{2}{3}$$

យក $t=\frac{2}{3}$ ជួសចូល (2) គេបាន $x=\frac{2}{3}, y=\frac{2}{3}, z=\frac{2}{3}$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុច I គឺ $\boxed{I\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)}$ ។

ផ្នែក B

ក. កំណត់តម្លៃមុំ θ

- ករណីចំណុច M ត្រួតលើចំណុច D

គេមាន M ត្រួតលើចំណុច D គេបាន $M(0,0,0)$

គេបាន $\overrightarrow{ME}(1,0,1), \overrightarrow{MB}(1,1,0), \overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MB}=1+0+0=1$

និង $\left|\overrightarrow{ME}\right|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}, \left|\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MB}=\left|\overrightarrow{ME}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MB}\right|\cdot\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MB}}{\left|\overrightarrow{ME}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ME}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

ដោយ $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\theta=\frac{\pi}{3}}$ ។

- ករណីចំណុច M ត្រួតលើចំណុច F

គេមាន M ត្រួតលើចំណុច F

ដោយ $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{FB}$ (ជ្រុងគូប) គេបាន

$$\overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{MB}\Rightarrow\angle EMB=\theta=\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\theta=\frac{\pi}{2}}$ ។

ខ. a. បង្ហាញថាកូអរដោនេនៃចំណុច M គឺ $M(x,x,x)$

គេមាន $M \in DF$ នោះកូអរដោនេចំណុច M ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

បន្ទាត់ $(DF):\begin{cases} x = t \\ y = t\,;t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

យក $t = x$ គេបាន $M(x,x,x)$ ពិត

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុច M គឺ $\boxed{M(x,x,x)}$ ពិត ។

b. បង្ហាញថា $\cos\theta = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$

គេមាន $M(x,x,x), E(1,0,1), B(1,1,0)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{ME}(1-x,-x,1-x), \overrightarrow{MB}(1-x,1-x,-x)$,

$$\left|\overrightarrow{ME}\right| = \sqrt{(1-x)^2+(-x)^2+(1-x)^2} = \sqrt{2-4x+3x^2},$$

$$\left|\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(1-x)^2+(1-x)^2+(-x)^2} = \sqrt{2-4x+3x^2},$$

$$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MB} = (1-x)^2 - x(1-x) - x(1-x) = 3x^2-4x+1$$

ដោយ $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MB} = \left|\overrightarrow{ME}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MB}\right|\cdot\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MB}}{\left|\overrightarrow{ME}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ME}\right|}$

$$\cos\theta = \frac{3x^2-4x+1}{\sqrt{2-4x+3x^2}\times\sqrt{2-4x+3x^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2} \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\theta = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}}$ ពិត ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ $\cos\theta$ លើចន្លោះ $[0,1]$

តាង $y=\cos\theta=\dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$

នាំឱ្យ $y'=\dfrac{(6x-4)(3x^2-4x+2)-(6x-4)(3x^2-4x+1)}{(3x^2-4x+2)^2}$

$$=\frac{(18x^2-36x^2-4x-8)-(18x^2-36x^2-10x-4)}{(3x^2-4x+2)^2}$$

$$=\frac{6x-4}{(3x^2-4x+2)^2}$$

ចំពោះ $\forall x\in[0,1],(3x^2-4x+2)^2>0$ គេបាន y' យកសញ្ញាតាម $6x-4$

បើ $6x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$

គេបានតារាងអថេរភាពនៃ $y=\cos\theta$

x	0		$\frac{2}{3}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	0.5	↘	-0.5	↗	0

- កំណត់កូអរដោនេចំណុច M ដើម្បីឱ្យ

a. ត្រីកោណ MEB ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M

ត្រីកោណ MEB ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M កាលណា $\cos\theta=0$

គេបាន $\dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0$

គេបាន $x=1, x=\dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ ត្រីកោណ MEB ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M កាលណា ចំណុច M មានកូអរដោនេ $\boxed{M(1,1,1) \text{ ឬ } M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}$ ។

b. មុំ θ មានតម្លៃអតិបរមា

គេមាន $0\le\theta\le\pi$ គេបានមុំ θ មានតម្លៃកាន់តែធំកាលណា $\cos\theta$ មានតម្លៃកាន់តែតូច

តាមតារាងអថេរភាព គេបាន $\cos\theta$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=\dfrac{2}{3}$

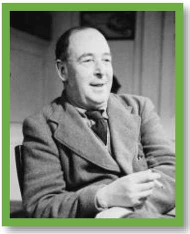
គេបាន $M\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

ដូចនេះ មុំ θ មានតម្លៃអតិបរមាកាលណាចំណុច M មានកូអរដោនេ $\boxed{M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)}$ ។

✲✲✲✲✲✲✲✲

យើងមិនអាចកែប្រែអតីតកាលបាន

ប៉ុន្តែយើងអាចចាប់ផ្តើមជាថ្មី

នៅពេលនេះដើម្បីផ្លាស់ប្តូរអនាគតបាន

(C.S. Lewis អ្នកនិពន្ធប្រលោមលោក)