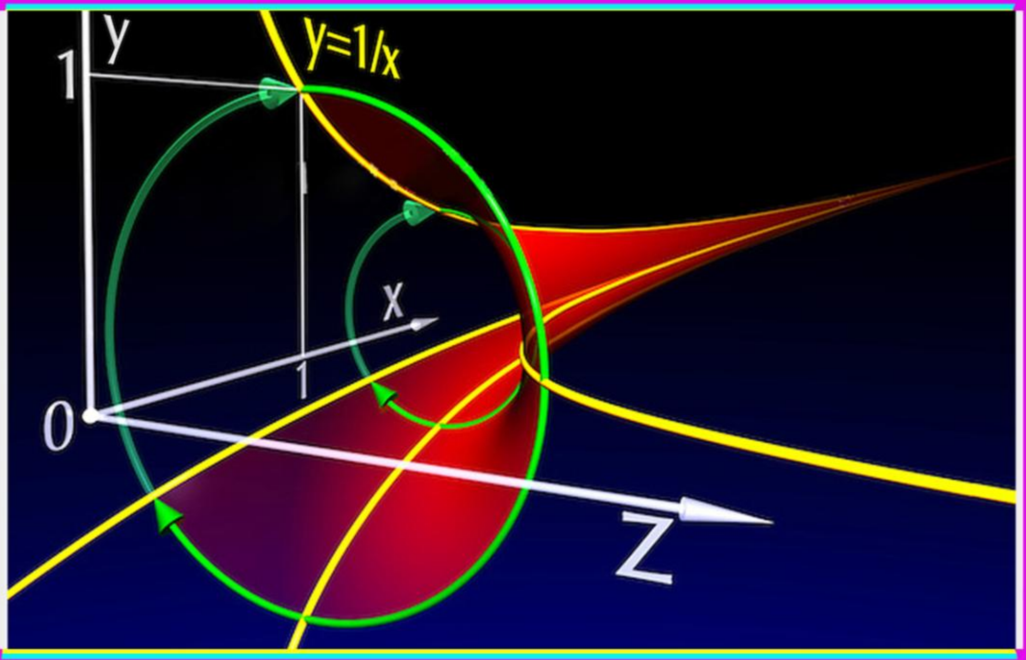
អ៊ុច ប៊ុនថន

កម្រងវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

2002-2012



ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

ត្រៀមប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យម~គ្រូបឋមសិក្សា

ត្រៀមប្រឡងយកអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅបរទេស

ត្រៀមប្រឡងចូលថ្នាក់ឆ្នាំសិក្សាមូលដ្ឋានសម្រាប់វិស័យសុខាភិបាល

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មីរបស់ក្រសួងអប់រំ

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

កម្រងវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ 2002-2012

សម្រាប់ត្រៀមៈ

- ប្រឡងយកសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
- ប្រឡងឆមាសលើកទី១-២
- ប្រឡងយកអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅបរទេស
- ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូមធ្យមសិក្សា និងបឋមសិក្សា
- ប្រឡងចូលថ្នាក់ឆ្នាំសិក្សាមូលដ្ឋានសម្រាប់វិស័យសុខាភិបាល

© រក្សាសិទ្ធិគ្រប់យ៉ាង ២០១៣
ភ្នំពេញ,កម្ពុជា

អារម្ភកថា

សួរស្តីប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកអានជាទីរាប់អាន !

សៀវភៅ"**កម្រងវិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ**" នេះបានរៀបចំឡើងដោយជ្រើសរើសយកតែវិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិដែលធ្លាប់ប្រឡងរួចហើយចាប់ពីឆ្នាំ 2002 ដល់ 2012 ដើម្បីទុជាឯកសារស្រាវជ្រាវសំរាប់សិស្សានុសិស្ស និងមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ដែលមានចំនាប់អារម្មណ៍លើផ្នែកនេះ។

ខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងអាចជួយសម្រួលការសិក្សាបានំយយចំនួនធំដល់អ្នកសិស្សានុសិស្ស និងមិត្តអ្នកអានទាំងឡាយ។

បើទោះជាខ្ញុំខិតខំត្រួតពិនិត្យ និងកែសម្រួលកំហុសម្តងហើយម្តងទៀតយ៉ាងណាក៏ដោយ ខ្ញុំជឿជាក់ថា កង្វះខាតដោយអចេតនានៅតែកើតមាន អាស្រ័យហេតុនេះខ្ញុំរង់ចាំទទួលនូវរាល់ការរិះគន់ក្នុងន័យស្ថាបនាពីសំណាក់មិត្តអ្នកអានពីគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន។

ជាទីបញ្ចប់សូមជូនពរឲ្យមានសុខភាពល្អ សំណាងល្អ ការសិក្សាទទួលបានជោគជ័យគ្រប់ៗគ្នា ។

ភ្នំពេញ.ថ្ងៃទី13 ខែមេសា ឆ្នាំ2013

អ្នករៀបរៀង

អ៊ុច ប៊ុនថន

វិញ្ញាសាទី 1

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណេះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា

សម័យប្រឡង: 22 **កក្កដា** 2002

រយៈពេល ១៥០នាទី ពិន្ទុ១២៥

I.(**៥ពិន្ទុ**) f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $\begin{cases} f(x) = x - 2 + \dfrac{e}{\ln x} & \text{បើ } x > 0 \text{ និង } x \neq 1 \\ f(0) = m \end{cases}$

គណនា $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ។ ទាញរកតម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x = 0$ ។

II.(**១០ពិន្ទុ**) គណនា:

ក. $A = (1+i)(2-i)$

ខ. $B = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{x+4}}{x}$

គ. $C = \ln e^{x-2} + e^{\ln 2}$

ឃ. $D = \int (2x + \cos x)dx$

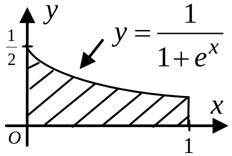
III.(**១០ពិន្ទុ**) ១.គេឲ្យ $Z = 1 - i\sqrt{3}$ ។ ចូរសរសេរ Z និង Z^{2002} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

២.គេឲ្យ $U = x + iy$ និង $Z_1 = a + bi$ ។ ចូរគណនា x និង y ជាអនុគមន៍នៃ a និង b បើគេដឹងថា $U = Z_1^2 + iZ_1 - \dfrac{1}{2}$ ។

IV.(**១០ពិន្ទុ**) ១.កំណត់តម្លៃនៃ α និង β ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន:

$$\frac{1}{1+e^x} = \alpha + \frac{\beta e^x}{1+e^x}$$ ។

២.គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដែលគូសឆូត
នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (xoy) ។



V.(**១៥ពិន្ទុ**) ១.ដោះស្រាយសមីការ $2y''-3y'+y=0$ (E)

២.កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយរបស់សមីការ (E) ដើម្បីឲ្យក្រាបតាងអនុគមន៍ g ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d) សមីការ $y=-\frac{1}{2}x$ នៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ ។

VI. (**៤០ពិន្ទុ**) ១.អនុគមន៍ h កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $h(x)=e^{2x}-2x-1$ ហើយមានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោមៈ

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

ដោយប្រើតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ h ចូរបញ្ជាក់ថា $e^{2x}\geq 2x+1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

២. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=(x+1)(e^{-2x}+1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និងមានក្រាប (C) ។

ក.គណនា $f'(x)$ និង $f'(0)$ ។ បញ្ជាក់ថាដេរីវេ $f'(x)$ និងអនុគមន៍ $h(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ ។

ខ.គណនា $f(0)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ f ។

គ.បង្ហាញថា $f(x)=x+1+\left(\frac{x}{e^x}\right)\left(\frac{1}{e^x}\right)+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (D) មានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) នៅខាង $+\infty$ ។

ឃ.សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (D) ។

ង.បន្ទាត់ (Δ) មួយស្របនឹងបន្ទាត់ (D) ហើយប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ M ។

កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M និងសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (Δ) ។

ច.សង់បន្ទាត់ $(D),(\Delta)$ និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ តែមួយ។ (គេឲ្យ $e=2.7$)

VII. (**៣៥ពិន្ទុ**) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឲ្យចំណុច $A(3,0,1), B(2,4,0)$ និង $C(0,3,3)$ ។

(បេក្ខជនមិនបាច់គូររូបទេ)។

ក.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D) ដែលកាត់តាម O និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(1,1,1)$ ។

ខ.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{AB}\times\vec{AC}$ ។ ទាញថាចំណុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា។

គ.រកសមីការប្លង់ (ABC) ដោយយកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}$ ។

ឃ.គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

ង.រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (D) និងប្លង់ (ABC) ។

អត្រាកំណែ

I. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $\begin{cases} f(x)=x-2+\dfrac{e}{\ln x} & \text{បើ } x>0 \text{ និង } x\neq 1 \\ f(0)=m \end{cases}$

• គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-2+\dfrac{e}{\ln x}\right)=-2$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e}{\ln x}=0$)

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2}$

• ទាញរកតម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=0$

ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

តែ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$ និង $f(0)=m$ នាំឲ្យ $m=-2$

ដូចនេះ $\boxed{m=-2}$

II. គណនា:

ក. $A=(1+i)(2-i)=2-i+2i+1=3+i$

ដូចនេះ $\boxed{A=3+i}$

ខ. $B=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$ មានរាង $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-(x+4)}{x(2+\sqrt{x+4})}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(2+\sqrt{x+4})}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{(2+\sqrt{x+4})}=-\frac{1}{2+\sqrt{4}}=-\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{B=-\frac{1}{4}}$

គ. $C=\ln e^{x-2}+e^{\ln 2}=(x-2)\ln e+2=x-2+2=x$

ដូចនេះ $\boxed{C=x}$

ឃ. $D=\int(2x+\cos x)dx=x^2+\sin x+C, (C$ ជាចំនួនពិត $)$

ដូចនេះ $\boxed{D=x^2+\sin x+C, (C\in\mathbb{R})}$

III. ១. សរសេរ Z និង Z^{2002} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z=1-i\sqrt{3}$ នាំឲ្យ $|Z|=\sqrt{1+3}=2$

$\cos\alpha=\frac{1}{2}$ និង $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ គេទាញបាន $\alpha=-\frac{\pi}{3}$

គេបាន $Z=2[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]$

ដូចនេះ $\boxed{Z=2[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})]}$

ដោយប្រើរូបមន្ត $Z^n=|Z|^n[\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)]$

គេបាន $Z^{2002}=2^{2002}[\cos(-\frac{2002\pi}{3})+i\sin(-\frac{2002\pi}{3})]$

ដូចនេះ $\boxed{Z^{2002}=2^{2002}[\cos(-\frac{2002\pi}{3})+i\sin(-\frac{2002\pi}{3})]}$

២. គណនា x និង y ជាអនុគមន៍នៃ a និង b បើគេដឹងថា $U=Z_1^2+iZ_1-\frac{1}{2}$

គេមាន $U=x+iy$ និង $Z_1=a+bi$

គេបាន $U=(a+bi)^2+i(a+bi)-\frac{1}{2}$

$$=a^2+2abi-b^2+ai-b-\frac{1}{2}$$

$$=(a^2-b^2-b-\frac{1}{2})+(2ab+a)i$$

តែ $U=x+iy$ នាំឲ្យ $x+iy=(a^2-b^2-b-\frac{1}{2})+(2ab+a)i$

នាំឲ្យ $\begin{cases} x=a^2-b^2-b-\frac{1}{2} \\ y=2ab+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a^2-b^2-b-\frac{1}{2} \\ y=a+2ab \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{x=a^2-b^2-b-\frac{1}{2}\ ,\ y=a+2ab}$

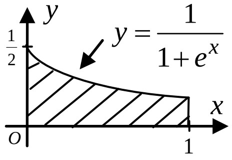
IV. ១.កំណត់តម្លៃនៃ α និង β ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

គេមាន $\frac{1}{1+e^x}=\alpha+\frac{\beta e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^x}=\frac{\alpha(1+e^x)+\beta e^x}{1+e^x}$

ឬ $\dfrac{1}{1+e^x}=\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)e^x}{1+e^x}$ គេទាញបាន $\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha+\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-\alpha=-1\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha=1\,,\,\beta=-1}$

២.គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដែលគូសឆូត



តាង A ជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដែលគូសឆូត

គេបាន $A=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx$

ដោយ $\dfrac{1}{1+e^x}=1-\dfrac{e^x}{1+e^x}$ នាំឲ្យ $A=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$

$$A=\int_0^1 dx-\int_0^1\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=x\Big|_0^1-\Big[\ln(1+e^x)\Big]_0^1$$

$$=1-[\ln(1+e)-\ln 2]=1+\ln 2-\ln(1+e)=1+\ln\frac{2}{1+e}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=1+\ln\dfrac{2}{1+e}\text{(ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)}}$

V.១.ដោះស្រាយសមីការ $2y''-3y'+y=0\ (E)$

មានសមីការសម្គាល់: $2r^2-3r+1=0$

សមីការមានរាង $a+b+c=0$ គឺ $2-3+1=0$

នាំឲ្យ $r_1=1\,,\,r_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយ $y=\lambda e^x+\mu e^{\frac{1}{2}x}$ ដែល λ,μ ជាចំនួនពិត។

២.កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយរបស់សមីការ (E)

គេមាន $g(x)=\lambda e^x+\mu e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow g'(x)=\lambda e^x+\dfrac{1}{2}\mu e^{\frac{1}{2}x}$

ដើម្បីឲ្យក្រាបតាងអនុគមន៍ g ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d) សមីការ $y=-\frac{1}{2}x$ នៅត្រង់

ចំណុច $O(0,0)$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} g'(0)=-\frac{1}{2} \\ g(0)=0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} \lambda e^{0}+\frac{1}{2}\mu e^{\frac{1}{2}\cdot 0}=-\frac{1}{2} \\ \lambda e^{0}+\mu e^{\frac{1}{2}\cdot 0}=0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} \lambda+\frac{1}{2}\mu=-\frac{1}{2} \\ \lambda+\mu=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-1 \\ \mu=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=-e^{x}+e^{\frac{1}{2}x}}$

VI. ១.អនុគមន៍ h កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ

$h(x)=e^{2x}-2x-1$ ហើយមានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

បញ្ជាក់ថា $e^{2x}\geq 2x+1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

តាមរាងអថេរភាព h មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 0

គេបាន $h(x)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\in\mathbb{R}$

តែ $h(x)=e^{2x}-2x-1$

នាំឲ្យ $e^{2x}-2x-1\geq 0$ ឬ $e^{2x}\geq 2x+1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $e^{2x}\geq 2x+1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

២. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=(x+1)(e^{-2x}+1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួន

ពិត x និងមានក្រាប (C) ។

ក.គណនា $f'(x)$ និង $f'(0)$

$$f'(x)=(e^{-2x}+1)+(x+1)(-2e^{-2x})=e^{-2x}+1-2xe^{-2x}-2e^{-2x}$$

$$=1-2xe^{-2x}-e^{-2x}=1-(2x+1)e^{-2x}=\frac{e^{2x}-(2x+1)}{e^{2x}}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{e^{2x}-(2x+1)}{e^{2x}}}$

$$f'(0)=\frac{e^{2\times 0}-(2\times 0+1)}{e^{2\times 0}}=\frac{1-1}{1}=0$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(0)=0}$

• បញ្ជាក់ថាដេរីវេ $f'(x)$ និងអនុគមន៍ $h(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះ $x\neq 0$

ដោយ $f'(x)=\frac{1}{e^{2x}}\times h(x)$ ហើយ $\frac{1}{e^{2x}}>0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

ដូចនេះ ដេរីវេ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ ។

ខ.គណនា $f(0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

គេមាន $f(x)=(x+1)(e^{-2x}+1)$ នោះ

$$f(0)=(0+1)(e^{-2\times 0}+1)=1+1=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)(e^{-2x}+1)=(-\infty)(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)(e^{-2x}+1)=+\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-2x}+1)=0+1=1$

ដូចនេះ $\boxed{f(0)=2,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

• សង់តារាងអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ f

$f'(x)\geq 0$, $f(0)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

គ.បង្ហាញថា $f(x)=x+1+\left(\frac{x}{e^x}\right)\left(\frac{1}{e^x}\right)+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2$

$$f(x)=(x+1)(e^{-2x}+1)=(x+1)e^{-2x}+x+1$$

$$=\frac{x+1}{e^{2x}}+x+1=x+1+\frac{x}{e^x\cdot e^x}+\frac{1}{e^{2x}}=x+1+\left(\frac{x}{e^x}\right)\left(\frac{1}{e^x}\right)+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2$$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=x+1+\left(\frac{x}{e^x}\right)\left(\frac{1}{e^x}\right)+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2}$

• បង្ហាញថាបន្ទាត់ (D) មានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C)

ដោយ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)=0,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)^2=0$

នាំឲ្យ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)\left(\frac{1}{e^x}\right)+\left(\frac{1}{e^x}\right)^2=0\cdot0+0=0$

នាំឲ្យបន្ទាត់ $(D):y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) នៅខាង $+\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(D):y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) នៅខាង $+\infty$ ។

ឃ.សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (D)

$f(x)-(x+1)=\frac{x+1}{e^{2x}}$ មានសញ្ញាតាម $x+1$ (ព្រោះ $e^{2x}>0$)

បើ $x+1=0$ នោះ $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

ចំពោះ $x<-1$ នោះ $f(x)<x+1$ ហើយ (D) ស្ថិតនៅខាងលើក្រាប (C) ។

ចំពោះ $x=-1$ នោះ $f(x)=x+1$ ហើយ (D) ប្រសព្វ (C) ត្រង់ $(-1,0)$ ។

ចំពោះ $x>-1$ នោះ $f(x)>x+1$ ហើយ (D) ស្ថិតនៅខាងក្រោម (C) ។

ង.បន្ទាត់ (Δ) មួយស្របនឹងបន្ទាត់ (D) ហើយប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ M

• កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M

តាង (x_o, y_o) ជាកូអរដោនេនៃចំណុច M

ដោយ (Δ) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ $M(x_o, y_o)$ ហើយស្របនឹង $(D): y=x+1$

នោះគេបាន $f'(x_o)=1$ នាំឲ្យ $\dfrac{e^{2x_0}-(2x_o+1)}{e^{2x_0}}=1$

$$e^{2x_0}-(2x_o+1)=e^{2x_0} \Leftrightarrow 2x_o+1=0 \Leftrightarrow x_o=-\frac{1}{2}$$

គេបាន $y_o = f(-\frac{1}{2}) = \left(-\frac{1}{2}+1\right)(e+1)=\dfrac{e+1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{M\left(-\frac{1}{2}, \frac{e+1}{2}\right)}$

• សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (Δ)

សមីការបន្ទាត់ $(\Delta): y=ax+b$

ដោយ $(\Delta)//(D)$ នាំឲ្យ $a=1$ នាំឲ្យ $(\Delta): y=x+b$

ហើយ (Δ) កាត់តាម M នោះ $\dfrac{e+1}{2}=-\dfrac{1}{2}+b \Rightarrow b=\dfrac{e+1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{e+2}{2}$

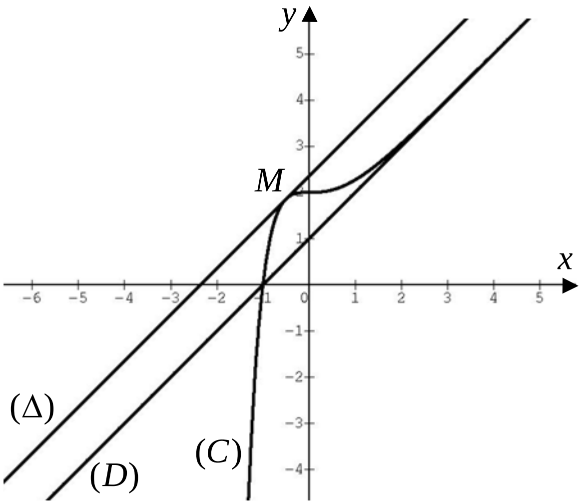
ដូចនេះ $\boxed{(\Delta): y=x+\frac{e+2}{2}}$

ច.សង់បន្ទាត់ $(D),(\Delta)$ និងក្រាប (C)

x	0	-1
(D)	1	0

x	$-\frac{1}{2}$	0
(Δ)	1.85	2.35

x	-1	0
$f(x)$	0	2



VII. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឲ្យ
ចំណុច $A(3,0,1), B(2,4,0)$ និង $C(0,3,3)$

ក.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D)

បន្ទាត់ (D) កាត់តាម $O(0,0,0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(1,1,1)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃ (D) គឺ

$$(D):\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases} \Rightarrow (D):\begin{cases} x = 0+t \\ y = 0+t \\ z = 0+t \end{cases} \Rightarrow (D):\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, (t\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ $\boxed{(D): x=t, y=t, z=t, (t\in\mathbb{R})}$

ខ.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{AB}\times\vec{AC}$

$\vec{AB}(2-3,4-0,0-1)$ ឬ $\vec{AB}(-1,4,-1)$

$\vec{AC}(0-3,3-0,3-1)$ ឬ $\vec{AC}(-3,3,2)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 4 & -1\\ -3 & 3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -3 & 3\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=11\vec{i}+5\vec{j}+9\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=11\vec{i}+5\vec{j}+9\vec{k}}$

• ទាញថាចំណុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=11\vec{i}+5\vec{j}+9\vec{k}\neq 0$ នោះ $\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែរ

នាំឲ្យចំណុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា

ដូចនេះ ចំណុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

គ.រកសមីការប្លង់ (ABC) ដោយយកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, $\vec{n}(11,5,9)$

នាំឲ្យសមីការប្លង់ (ABC) មានរាង $11x+5y+9z+d=0$

ដោយ (ABC) កាត់តាម $A(3,0,1)$ នោះ $11\cdot 3+5\cdot 0+9\cdot 1+d=0$

ឬ $33+9+d=0\Rightarrow d=-42$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (ABC) គឺ $\boxed{(ABC):11x+5y+9z-42=0}$

ឃ.គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{11^2+5^2+9^2}=\frac{1}{2}\sqrt{227}$$

$$\approx 7.5(\text{ឯកតាផ្ទៃក្រឡា})$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC គឺ $S_{\Delta ABC}=7.5$(ឯកតាផ្ទៃក្រឡា) ។

ង.រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (D) និងប្លង់ (ABC)

ប្លង់ $(ABC): 11x+5y+9z-42=0$

បន្ទាត់ $(D): x=y=z=t\ ,\ t\in\mathbb{R}$

បើ $M(x,y,z)$ ជាចំណុចរួមនៃបន្ទាត់ (D) និង (ABC)

នោះ x,y,z ផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នាប្រព័ន្ធសមីការៈ

$$\begin{cases}11x+5y+9z-42=0\\ x=y=z=t\end{cases}$$

គេបាន $11t+5t+9t-42=0 \Leftrightarrow 25t=42 \Rightarrow t=\dfrac{42}{25}$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{M\left(x=\dfrac{42}{25}\ ,\ y=\dfrac{42}{25}\ ,\ z=\dfrac{42}{25}\right)}$

វិញ្ញាសាទី 2

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណេះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា

សម័យប្រឡង: 05 **សីហា** 2003

រយៈពេល ១៥០នាទី ពិន្ទុ១២៥

I.(**១០ពិន្ទុ**) គេឲ្យ $f(x)=\dfrac{e^x}{ax+b}$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។

១.គណនា $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

២.កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានអប្បបរមាស្មើ e ត្រង់ $x=1$ ។

II.(**១៥ពិន្ទុ**) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\dfrac{2(-1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$

១.សរសេរ Z ជាទម្រង់ពិជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

២.សរសេរ $Z'=1+i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\dfrac{Z'}{Z}$ ។

III.(**១៥ពិន្ទុ**) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$

១.សរសេរ $f(x)$ ជារាង $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$ ដែល A,B និង C ជាចំនួនថេរដែលត្រូវកំណត់។

២.គណនា $\displaystyle\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$

IV.(**២០ពិន្ទុ**) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$

និងមានខ្សែកោង (C) ។

១.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។ បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃអតិបរមានោះ។

២.គណនាលីមីត $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការនៃអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃខ្សែកោង (C) ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

V.(**៣៥ពិន្ទុ**)

១. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(1-x)e^x-1$ ។
គណនា $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f (ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីតត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$)។ ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$ ។

២. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=(2-x)e^x+2-x$ ។

ក.គណនា $\lim_{x\to -\infty} g(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ ។ គណនា $g'(x)$ ។ ដោយប្រើលទ្ធផលដែលបាននៅសំណួរ(១) ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។

ខ.បង្ហាញថាខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ g មានបន្ទាត់ $(D): y=2-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតកាលណា x ខិតទៅ $-\infty$ ។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃខ្សែកោង (C) ធៀបនឹង (D) ។

គ.កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ដែលស្របនឹង (D) ។

ឃ.រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោង (C) ។

ង.សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ (ឯកាតាលើអ័ក្សស្មើ $1cm$) ។

VI. (**៣៥ពិន្ទុ**)

១.នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន

(ឯកាតាលើអ័ក្សស្មើ $1cm$) ចូរដៅចំណុច $A(2,0,2), B(1,2,0)$ និង $C(0,2,3)$

២.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាម A ហើយស្របនឹង $\overrightarrow{BC}$ ។

៣.គណនា $\|\overrightarrow{AB}\|$ និង $\|\overrightarrow{AC}\|$ ។ ប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

៤.គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ ទាញថាចំណុច A, B, C មិនឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ រកសមីការប្លង់ (ABC) ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

៥.រកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$ ។ ទាញរកចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ (ABC) ។

អត្រាកំណែ

I. ១.គណនា $f'(x)$ និង $f''(x)$

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^x}{ax+b}$ ដែល $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{e^x(ax+b)-ae^x}{(ax+b)^2}=\frac{(ax-a+b)e^x}{(ax+b)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{(ax-a+b)e^x}{(ax+b)^2}}$

តាង $U=(ax-a+b)e^x$ នោះ $U'=ae^x+(ax-a+b)e^x=(ax+b)e^x$

$V=(ax+b)^2$ នោះ $V'=2a(ax+b)$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{U}{V}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{U'V-V'U}{V^2}$

នាំឲ្យ $f''(x)=\dfrac{(ax+b)e^x(ax+b)^2-2a(ax+b)(ax-a+b)e^x}{(ax+b)^4}$

$$=\frac{e^x(ax+b)^2-2a(ax-a+b)e^x}{(ax+b)^3}$$

$$=\frac{(a^2x^2+2abx+b^2-2a^2x+2a^2-2ab)e^x}{(ax+b)^3}$$

$$=\frac{[a^2x^2+2a(b-a)x+b^2+2a^2-2ab]e^x}{(ax+b)^3}$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=\frac{[a^2x^2+2a(b-a)x+b^2+2a^2-2ab]e^x}{(ax+b)^3}}$

២.កំណត់តម្លៃ a និង b

f មានអប្បបរមាត្រង់ $A(1,e)$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=e \\ f''(1)>0 \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} eb=0 \\ a+b=1 \\ \dfrac{e(a^2+b^2)}{(a+b)^2}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

ហើយ $\frac{e(1+0)}{(1+0)^2}=e>0$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់)

ដូចនេះ $\boxed{a=1\,,\,b=0}$

II.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\frac{2(-1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$

១.សរសេរ Z ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$Z=\frac{2(-1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}=\frac{2(-1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}=\frac{-2(1-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{1^2-(i\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{-2(1-2i\sqrt{3}-3)}{1-(-3)}=\frac{-2(-2-2i\sqrt{3})}{1+3}=\frac{4(1+i\sqrt{3})}{4}=1+i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=1+i\sqrt{3}}$

- សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$Z=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}$

២.សរសេរ $Z'=1+i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$Z'=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

ដូចនេះ $\boxed{Z'=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})}$

- ទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\frac{Z'}{Z}$ ។

$$\frac{Z'}{Z}=\frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})}{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}=\frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12})]$$

មានរាង $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ដែល r ជាម៉ូឌុល និង θ ជាអាគុយម៉ង់

គេទាញបាន $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta=-\frac{\pi}{12}+2k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

ដូចនេះ $\boxed{r=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \theta=-\frac{\pi}{12}+2k\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})}$

III.គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$

១.សរសេរ $f(x)$ ជារាង $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ ដែល A,B និង C ជាចំនួនថេរ

គេមាន $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$

$$=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x^2+2x+1)}=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x^3+2x^2+x}$$

តែ $f(x)=\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$

គេទាញបាន $\begin{cases}A+B=5\\2A+B+C=20\\A=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=6\\B=-1\\C=9\end{cases}$

ដូចនេះ: $\boxed{f(x)=\dfrac{6}{x}+\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{9}{(x+1)^2}}$

២.គណនា $\int\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$

គេបាន $\int\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx=\int\dfrac{6}{x}+\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{9}{(x+1)^2}dx$

$$=6\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x+1}dx+9\int\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$=6\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{9}{x+1}+C\ ,\ (C\in\mathbb{R})$$

$$=\ln\frac{x^6}{|x+1|}-\frac{9}{x+1}+C\ ,\ (C\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ: $\boxed{\int\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx=\ln\dfrac{x^6}{|x+1|}-\dfrac{9}{x+1}+C\ ,\ (C\in\mathbb{R})}$

IV. គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$ ដែល $x>0$ និងមានខ្សែកោង (C)

១.គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(1+\frac{1}{x})x-(x+\ln x)}{x^2}=\frac{x+1-x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}}$

• បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ

$f'(x)$ មានសញ្ញាដូចសញ្ញានៃ $1-\ln x$ ព្រោះ $x^2>0$

$1-\ln x<0$ នោះ $\ln x>1$ ហើយ $x>e$

$1-\ln x=0$ នោះ $\ln x=1$ ហើយ $x=e$

$1-\ln x>0$ នោះ $\ln x<1$ ហើយ $x<e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

ដោយ $f'(x)=0$ ត្រង់ $x=e$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ នោះគេបាន

f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=e$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាមួយត្រង់ $x=e$ ។

• គណនាតម្លៃអតិបរមា

បើ $x=e$ នោះ $f(e)=\dfrac{e+\ln e}{e}=\dfrac{e+1}{e}=1+\dfrac{1}{e}=1+0.4=1.4$

ដូចនេះ $\boxed{f(e)=1.4}$

២.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\ln x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=1$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1}$

• កំណត់សមីការនៃអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃខ្សែកោង (C)

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

នាំឲ្យ $x = 0$ ជាបន្ទាត់អាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង (C) ។

ដោយ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

នាំឲ្យ $y = 1$ ជាបន្ទាត់អាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C) ។

• សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1.4	$\searrow$	1

V.១. គណនា $f'(x)$

គេមាន $f(x) = (1-x)e^x - 1$

$$f'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = -xe^x}$

• សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

បើ $f'(x) = 0$ នោះ $-xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$

បើ $f'(x) < 0$ នោះ $-xe^x < 0 \Rightarrow x > 0$

បើ $f'(x) > 0$ នោះ $-xe^x > 0 \Rightarrow x < 0$

បើ $x = 0$ នោះ $f(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

• ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$ ។

តាមតារាងអថេរភាព f មានអតិបរមាស្មើនឹង 0 ត្រង់ $x=0$

ដូចនេះ $f(x)\le 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

២. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=(2-x)e^{x}+2-x$

ក.គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}[(2-x)e^{x}+2-x]=\lim_{x\to-\infty}[(2-x)(e^{x}+1)=+\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x}+1)=1$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}[(2-x)e^{x}+2-x]=\lim_{x\to+\infty}[(2-x)(e^{x}+1)=-\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}+1)=+\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty}$

• គណនា $g'(x)$

$$g'(x)=-e^{x}+(2-x)e^{x}-1=(1-x)e^{x}-1$$

ដូចនេះ $\boxed{g'(x)=(1-x)e^{x}-1}$

• សិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$

ដោយ $g'(x)=f(x)$

តាមសំណួរ(១)គេបាន $f(x)\le 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

នាំឲ្យ $g'(x)\le 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $g'(x)\le 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

• សង់តារាងអថេរភាពនៃ g

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 4 ↘ $-\infty$

ខ.បង្ហាញថាខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ g មានបន្ទាត់ $(D): y=2-x$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតកាលណា x ខិតទៅ $-\infty$

តាង $h(x)=g(x)-(2-x)$

$$h(x)=(2-x)e^{x}+2-x-(2-x)$$

$$h(x)=(2-x)e^{x}=2e^{x}-xe^{x}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{x})=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x})=0$

គេទាញបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$

ដូចនេះ $(D): y=2-x$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតកាលណា x ខិតទៅ $-\infty$ ។

• បញ្ជាក់ទីតាំងនៃខ្សែកោង (C) ធៀបនឹង (D)

ដោយ $e^{x}>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះ $h(x)$ មានសញ្ញាដូច $2-x$

បើ $x<0$, $h(x)>0$ ដូចនេះ (C) ឋិតនៅខាងលើ (D) ។

បើ $x=2$, $h(2)=0$ ដូចនេះ (C) និង (D) កាត់គ្នាត្រង់ $(2,0)$ ។

បើ $x>0$, $h(x)<0$ ដូចនេះ (C) ឋិតនៅខាងក្រោម (D) ។

គ.កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ដែលស្របនឹង (D)

តាង x_o ជាអាប់សុីសចំណុចប៉ះ

$$g'(x_o)=-1$$

$$(1-x_o)e^{x_o}-1=-1\Leftrightarrow(1-x_o)e^{x_o}=0$$

ដោយ $e^{x_o} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ នោះ $1 - x_o = 0 \Rightarrow x_o = 1$

គេបាន $y_o = (2-1)e^1 + 2 - 1 = e + 1$

បន្ទាត់ប៉ះនឹង (C) ដែលស្របនឹង (D) មានសមីការ

$y = g'(1)(x-1) + y_o$

$y = -(x-1) + e + 1 = -x + e + 2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{y = -x + e + 2}$

ឃ.រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោង (C)

$g'(x) = (1-x)e^x - 1$

ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$

បើ $g''(x) = 0$ នោះ $-xe^x = 0$

ដោយ $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ នាំឲ្យ $x = 0$

ចំពោះ $x = 0$ នាំឲ្យ $g(0) = (2-0)e^0 + 2 - 0 = 4$

ត្រង់ $x = 0$, $g''(x) = 0$ ហើយ $g''(x)$ ប្តូរសញ្ញា ។

ដូចនេះ $(0\ ,\ 4)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង (C) ។

ង.សង់ខ្សែកោង (C) ដោយយកឯកតាលើអ័ក្សស្មើ $1cm$

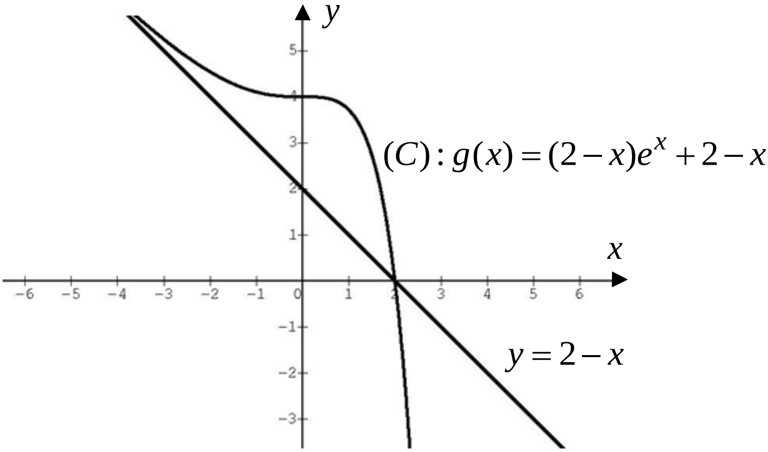
ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអ័ក្សកូអរដោនេ

x	0	2
$g(x)$	4	0

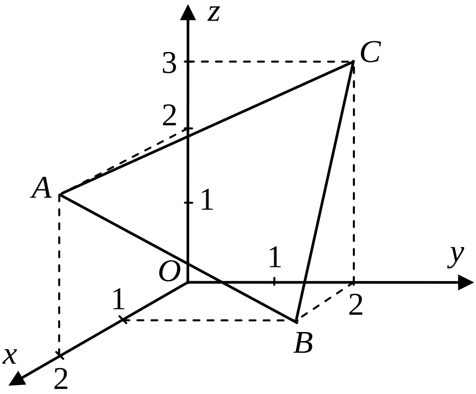
តារាងតម្លៃលេខនៃ $y = 2 - x$

x	0	1
$y = 2 - x$	2	1

សង់ខ្សែកោង (C)



VI. ១. ដៅចំណុច $A(2,0,2), B(1,2,0)$ និង $C(0,2,3)$



២.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាម A ហើយស្របនឹង $\overrightarrow{BC}$ ។

$\overrightarrow{BC}(-1,0,3)$, $A(2,0,2)$

តាមរូបមន្ត $(L):\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \ , (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$

គេបាន $(L):\begin{cases} x=2-t \\ y=0+0\cdot t \\ z=2+3t\ ,\ (t\in\mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow (L):\begin{cases} x=2-t \\ y=0 \\ z=2+3t\ ,\ (t\in\mathbb{R}) \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{(L): x=2-t\ ,\ y=0\ ,\ z=2+3t\ ,\ (t\in\mathbb{R})}$

៣.គណនា $\|\overrightarrow{AB}\|$ និង $\|\overrightarrow{AC}\|$

គេមាន $A(2,0,2), B(1,2,0)$ និង $C(0,2,3)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}(-1,2,-2)$, $\overrightarrow{AC}(-2,2,1)$

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$

$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=\sqrt{9}=3$

ដូចនេះ $\boxed{\|\overrightarrow{AB}\|=3\ ,\ \|\overrightarrow{AC}\|=3}$

• ប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

ដោយ $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{AC}\|=3$

នាំឲ្យ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A

ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត។

៤.គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=6\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=6\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}}$

• ទាញថាចំណុច A,B,C មិនឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=6\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}\neq 0$

នាំឲ្យ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា

នាំឲ្យចំណុច A,B,C មិនឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដូចនេះ ចំណុច A,B,C មិនឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

• រកសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$

នោះប្លង់ (ABC) មានរាង $6x+5y+2z+d=0$

ហើយប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច $A(2,0,2)$

គេបាន $6\cdot2+5\cdot0+2\cdot2+d=0\Leftrightarrow12+4+d=0\Leftrightarrow d=-16$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (ABC) គឺ $\boxed{6x+5y+2z-16=0}$

• គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+5^2+2^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{36+25+4}=\frac{1}{2}\sqrt{65}\,cm^2$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{65}\,cm^2}$

៥.រកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $OABC$ ។

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}|$$

ដោយ $\overrightarrow{OA}(2,0,2),\overrightarrow{OB}(1,2,0)$ និង $\overrightarrow{OC}(0,2,3)$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\2&0&2\\1&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}2&2\\1&0\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$

$= -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

$(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC} = (-1)0 + 2\cdot 2 + 4\cdot 3 = 4 + 12 = 16$

គេបាន $V_{OABC} = \frac{1}{6}|16| = \frac{8}{3}cm^3$

ដូចនេះ $\boxed{V_{OABC} = \frac{8}{3}cm^3}$

• ទាញរកចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ (ABC)

តាង h ជាចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ (ABC)

$V_{OABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \times h$ នាំឲ្យ $h = \frac{3V_{OABC}}{S_{\Delta ABC}}$

ដោយ $V_{OABC} = \frac{8}{3}cm^3$ និង $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{65}\,cm^2$

គេបាន $h = \frac{3\cdot\frac{8}{3}}{\frac{\sqrt{65}}{2}} = 8\times\frac{2}{\sqrt{65}} = \frac{16}{\sqrt{65}} = \frac{16\sqrt{65}}{65}cm$

ដូចនេះ $\boxed{h = \frac{16\sqrt{65}}{65}cm}$

វិញ្ញាសាទី 3

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណេះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា

សម័យប្រឡង: 06 សីហា 2004

រយៈពេល ១៥០នាទី ពិន្ទុ១២៥

I.(**១០ពិន្ទុ**) កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $y=\frac{ax^2+bx}{x^2+1}$ មានបរមាតែមួយគត់ និងខ្សែកោងនៃអនុគមន៍នោះមានបន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។

II.(**១០ពិន្ទុ**) ដោះស្រាយសមីការ $y''+4y=0$ បើ $y(0)=1$, $y'(0)=-1$ ។

III.(**១០ពិន្ទុ**) រកកំពូល S និងកំណុំ F របស់ប៉ារ៉ាបូល $x^2-4x-12y+16=0$

IV.(**១០ពិន្ទុ**) គេចង់ជ្រើសរើសយកសិស្ស 3 នាក់ក្នុងចំណោមសិស្ស 10នាក់ ដែលក្នុងនោះមានសិស្សប្រុស 6នាក់ និងសិស្សស្រី 4នាក់។ រកប្រូបាបដែលគេជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស 2នាក់ និងសិស្សស្រី 1នាក់។

V.(**១៥ពិន្ទុ**) 1.កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $2xi-y=\frac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$

2.គេឲ្យ $Z=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$ ។ សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

VI.(**១៥ពិន្ទុ**) គេឲ្យ $g(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$ ។

1.កំណត់ចំនួនពិត m,n និង p ដើម្បីឲ្យបាន $g(x)=m+\frac{n}{x+1}+\frac{p}{x-3}$ ចំ

ពោះគ្រប់ $x\in]-1,3[$ ។

2. គណនា $I=\int_0^2 g(x)dx$ ។

VII. (**២៥ពិន្ទុ**) ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់វិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យចំណុច $A(3,2,0)$ និង $K(0,-1,3)$ ។

1. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (AK) ។

2. គេឲ្យចំណុច $B(5,0,0),C(0,5,0)$ និង $D(0,0,-5)$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុច B,C និង D ជាចំណុចរបស់ប្លង់ (P) ។

3. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ BCD ។

4. គណនាប្រវែង AK រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែដ $KBCD$ ។

VIII. (**៣០ពិន្ទុ**) f ជាអនុគមន៍ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាប (C) ។

2. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

3. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ $(D): y=1$ កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ A ។

4. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ។ សង់បន្ទាត់ (L) អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។ (គេយក $e=2.7$, $\frac{2}{e}=0.7$, $\ln 2=0.7$)

អត្រាកំណែ

I. កំណត់ចំនួនពិត a និង b

គេមានអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+bx}{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{a+0}{1+0}=a$$

ក្រាបនៃអនុគមន៍មានបន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក នាំឲ្យ $a=2$

គេបាន $y=\dfrac{2x^2+bx}{x^2+1}$

$$y'=\frac{(24x+b)(x^2+1)-2x(2x^2+bx)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{4x^3+4x+bx^2+b-4x^3-2bx^2}{(x^2+1)^2}=\frac{4x+b-bx^2}{(x^2+1)^2}$$

អនុគមន៍មានបរមាតែមួយគត់ នោះ y' មានឫសតែមួយគត់នាំឲ្យ $b=0$

ដូចនេះ $\boxed{a=2\ ,\ b=0}$

II. ដោះស្រាយសមីការ $y''+4y=0$ បើ $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

សមីការសម្គាល់ $r^2+4=0$ ឬ $r^2=-4=(2i)^2$ នាំឲ្យ $r=\pm 2i$

គេបានចម្លើយទូទៅ $y=A\cos 2x+B\sin 2x$ ដែល A,B ជាចំនួនថេរ

ដេរីវេ $y=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$

បើ $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} A=1 \\ 2B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺ $\boxed{y=\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x}$

III. រកកំពូល S និងកំណុំ F របស់ប៉ារ៉ាបូល $x^2-4x-12y+16=0$

គេមាន $x^2-4x-12y+16=0$

$$x^2-4x+4-12y+12=0$$

$$(x-2)^2=12(y-1)$$

ទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការនេះគឺ $(x-h)^2=4p(y-k)$

គេទាញបាន $h=2$, $k=1$, $4p=12\Rightarrow p=3$

កំពូល $S(h,k)$ ឬ $S(2,1)$

កំណុំ $F(h,k+p)$ ឬ $F(2,1+3)=F(2,4)$

ដូចនេះ $\boxed{S(2,1)\ ,\ F(2,4)}$

IV. រកប្រូបាបដែលគេជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស 2នាក់ និងសិស្សស្រី 1នាក់

តាង E ជា "ព្រឹត្តិការណ៍ជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស2នាក់ និងស្រី1នាក់"

ចំនួនករណីអាច:

$$n(S)=C(10,3)=\frac{10!}{7!3!}=\frac{8\times 9\times 10}{2\times 3}=120$$

ចំនួនករណីស្រប:

- ចំនួនករណីជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស2នាក់

$$C(6,2)=\frac{6!}{4!2!}=\frac{5\times 6}{2}=15$$

- ចំនួនករណីជ្រើសរើសបានសិស្សស្រី1នាក់

$$C(4,1)=\frac{4!}{3!1!}=4$$

- ចំនួនករណីជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស2នាក់និងស្រី1នាក់

$$n(E)=C(6,2)\times C(4,1)=15\times 4=60$$

គេបានប្រូបាប $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}=0.5$

ដូចនេះ ប្រូបាប $\boxed{P(E)=0.5}$

V.1.កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $2xi-y=\frac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$

$$2xi-y=\frac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$$

$$2xi-y=\frac{(3+3i-2i+2)}{i-2}=\frac{(5+i)}{-2+i}=\frac{(5+i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}$$

$$2xi-y=\frac{-10-5i-2i+1}{4+1}=\frac{-9-7i}{5}=-\frac{7}{5}i-\frac{9}{5}$$

គេបាន $\begin{cases}2x=-\frac{7}{5}\\ y=\frac{9}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{7}{10}\\ y=\frac{9}{5}\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{x=-\frac{7}{10}\ ,\ y=\frac{9}{5}}$

2. សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$ នោះ $1+Z=1+\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$

$$1+Z=2\cos^2\frac{\pi}{9}+2i\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}=2\cos\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

ដោយ $0<\frac{\pi}{9}<\frac{\pi}{2}$ នោះ $\cos\frac{\pi}{9}>0$

គេបាន $(1+Z)^4=\left[2\cos\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)\right]^4$

$$(1+Z)^4=(2\cos\frac{\pi}{9})^4\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+Z)^4 = 16\cos^4\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right)}$

VI. 1.កំណត់ចំនួនពិត m,n និង p

គេមាន $g(x) = m+\frac{n}{x+1}+\frac{p}{x-3} = \frac{m(x+1)(x-3)+n(x-3)+p(x+1)}{(x+1)(x-3)}$

$$= \frac{m(x^2-2x-3)+n(x-3)+p(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{mx^2+(-2m+n+p)x+(-3m-3n+p)}{x^2-2x+3}$$

តែ $g(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in]-1,3[$ គេទាញបាន:

$$\begin{cases} m=1 & (1) \\ -2m+n+p=1 & (2) \\ -3m-3n+p=-6 & (3) \end{cases}$$

តាម (1): $m=1$ ជំនួសក្នុង (2) និង (3) គេបាន

$$\begin{cases} -2+n+p=1 \\ -3-3n+p=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+p=3 & (4) \\ -3n+p=-3 & (5) \end{cases}$$

យក (4) ដក (5) គេបាន $n+3n=3+3 \Leftrightarrow 4n=6 \Rightarrow n=\frac{3}{2}$

តាម (4) នាំឲ្យ $p=3-n=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{m=1\,,\, n=\frac{3}{2}\,,\, p=\frac{3}{2}}$

2. គណនា $I=\int_0^2 g(x)dx$

$$I=\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2\left(1+\frac{3/2}{x+1}+\frac{3/2}{x-3}\right)dx$$

$$=\int_0^2\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{(x+1)'}{x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{(x-3)'}{x-3}\right]dx$$

$$=\left[x+\frac{3}{2}\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-3|\right]_0^2$$

$$=(2+\frac{3}{2}\ln 3+\frac{3}{2}\ln 1)-(0+\frac{3}{2}\ln 1+\frac{3}{2}\ln 3)$$

$$=2+\frac{3}{2}\ln 3-\frac{3}{2}\ln 3=2$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^2 g(x)dx=2}$

VII. គេឲ្យចំណុច $A(3,2,0)$ និង $K(0,-1,3)$

1. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (AK)

$\vec{AK}(0-3,-1-2,3-0)$

$\vec{AK}(-3,-3,3)$

ប្លង់ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{AK}(-3,-3,3)$

ប្លង់ (P) មានសមីការ $-3x-3y+3z+d=0$

ប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A(3,2,0)$ នោះ $-3\cdot 3-3\cdot 2+3\cdot 0+d=0$

ឬ $-9-6+d=0\Rightarrow d=15$

នាំឲ្យ $(P):-3x-3y+3z+15=0$ ឬ $(P):-x-y+z+5=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):-x-y+z+5=0}$

2. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុច B,C និង D ជាចំណុចរបស់ប្លង់ (P)

គេមានចំណុច $B(5,0,0),C(0,5,0)$ និង $D(0,0,-5)$

$B(5,0,0)$ $:-5-0+0+5=0$

$0=0$

$C(0,5,0): 0-5-0+5=0$

$$0=0$$

$D(0,0,-5): -0-0-5+5=0$

$$0=0$$

ដូចនេះ ចំណុច B, C និង D ជាចំណុចរបស់ប្លង់ (P) ។

3. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ BCD

$$S_{BCD}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\|$$

ដោយ $\overrightarrow{BC}(0-5,5-0,0-0)$, $\overrightarrow{BC}(-5,5,0)$

$\overrightarrow{BD}(0-5,0-0,-5-0)$, $\overrightarrow{BD}(-5,0,-5)$

គេបាន $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}5 & 0\\ 0 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-5 & 0\\ -5 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-5 & 5\\ -5 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=-25\,\vec{i}-25\,\vec{j}+25\,\vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\|=\sqrt{(-25)^2+(-25)^2+(25)^2}=25\sqrt{3}$$

នាំឲ្យ $S_{BCD}=\frac{1}{2}\times 25\sqrt{3}=\frac{25\sqrt{3}}{3}$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)

ដូចនេះ $\boxed{S_{BCD}=\frac{25\sqrt{3}}{3}\text{ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)}}$

4. គណនាប្រវែង AK

គេមាន $\overrightarrow{AK}(-3,-3,3)$

គេបាន $AK=\|\overrightarrow{AK}\|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+3^2}=3\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{AK=3\sqrt{3}\text{ (ឯកតាប្រវែង)}}$

• ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែដ $KBCD$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AK}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (BCD) នោះ $AK \perp (BCD)$

មាឌតេត្រាអែដ $KBCD$ គឺ $V_{KBCD} = \frac{1}{3} AK \times S_{BCD}$

ដោយ $AK = 3\sqrt{3}$, $S_{BCD} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$

គេបាន $V_{KBCD} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \times \frac{25\sqrt{3}}{2} = \frac{25 \times 3}{2} = \frac{75}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{V_{KBCD} = \frac{75}{2} \text{(ឯកតាមាឌ)}}$

VIII. គេមាន $f(x) = 1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ហើយមានក្រាប (C)

1. គណនា $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right] = -\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ និង $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right] = 1$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \, , \, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$

• កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ នោះ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ដូចនេះ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ដោយ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ នោះ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដូចនេះ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

2. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$

$$f'(x)=2\left[\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-\ln x}{x^2}\right]=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}}$ ចំពោះ $x>0$

- សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

ដោយ $x^2>0$, $\forall x>0$ ដូច្នេះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $1-\ln x$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $1-\ln x=0$ នាំឲ្យ $x=e$

បើ $f'(x)<0$ នោះ $1-\ln x<0$ នាំឲ្យ $x>e$

បើ $f'(x)>0$ នោះ $1-\ln x>0$ នាំឲ្យ $x<e$

ហើយ $f(e)=1+2\left(\frac{\ln e}{e}\right)=1+\frac{2}{e}=1+0.7=1.7$

- សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1.7	↘	1

3. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ $(D): y=1$

សមីការអាប់ស៊ីស: $1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=0$

ដោយ $x>0$ នោះ $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុច A គឺ $\boxed{A(1,1)}$

• កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ A

តាមរូបមន្ត $(L): y = f'(x_o)(x - x_o) + y_o$

គេមាន $f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}$, $x_o = 1$, $y_o = 1$

នាំឲ្យ $f'(x_o) = f(1) = \dfrac{2(1-\ln 1)}{1^2} = 2$

គេបាន $(L): y = 2(x-1)+1$ ឬ $(L): y = 2x-1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{(L): y = 2x-1}$

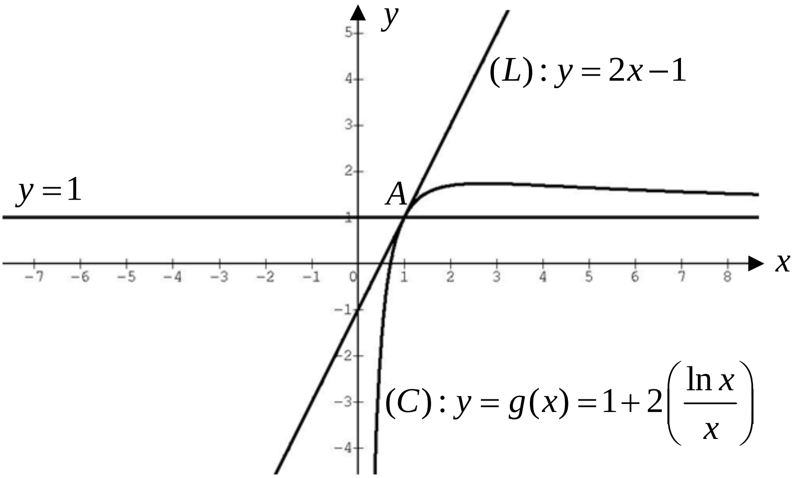
4. គណនា $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2\left(\frac{\ln(1/2)}{(1/2)}\right) = 1 - 4\ln 2 = 1 - 4\times 0.7 = -1.8$$

ដូចនេះ $\boxed{f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1.8}$

• សង់បន្ទាត់ (L) អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ

x	0	1
$y = 2x-1$	-1	1



វិញ្ញាសាទី 4

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណេះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា

សម័យប្រឡង: 08 សីហា 2005

រយៈពេល ១៥០នាទី ពិន្ទុ១២៥

I. (**១០ពិន្ទុ**) គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $Z_1 = \dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2}{1 + i\sqrt{3}}$ និង

$Z_2 = (1-i)x + (1-y)(1+i)$ ។

១.សរសេរ Z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត។

២.កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យបាន $2\overline{Z}_1-(Z_2+y-1)=0$ ($\overline{Z}_1$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ Z_1)។

II.(**១៥ពិន្ទុ**)១.ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''+5y'+6y=0$ ។

២.កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាបន្ទាត់ $(D): y=x-1$ ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់ $x=0$ ។

III.(**១៥ពិន្ទុ**) ប្រធានវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យានៃការប្រឡងមួយ មានលំហាត់ពីជគណិត 6 និងលំហាត់ធរណីមាត្រ 4 ។ បេក្ខជនម្នាក់ៗត្រូវធ្វើលំហាត់ 2 ក្នុងចំណោមលំហាត់ទាំង 10 នេះ ទៅតាមការជ្រើសរើសរបស់ខ្លួន។

១.រកចំនួនករណីអាច ។

២.រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចតទៅ:

A: សិស្ស X ម្នាក់ជ្រើសរើសយកលំហាត់ពីជគណិតទាំងពីរ។

B: សិស្ស Y ម្នាក់ជ្រើសរើសយកលំហាត់ធរណីមាត្រទាំងពីរ។

C: សិស្ស Z ម្នាក់ជ្រើសរើសយកលំហាត់ពីជគណិតមួយ និងលំហាត់ធរណីមាត្រមួយ។

IV.(**១៥ពិន្ទុ**) គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-5x-2}{x(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0, x\neq 1$

១.កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0, x\neq 1$ ។

២.គណនា $I=\int_2^3 f(x)dx$ ។

V.(**១៥ពិន្ទុ**) គេឲ្យ $f(x)=e^x$ និង $g(x)=\ln(x+1)+1$ ។

១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាខ្សែកោង $(C_1): y=f(x)$ និង $(C_2): y=g(x)$ មានចំណុចរួម $A(0,1)$ ។

២.គណនា $f'(0)$ និង $g'(0)$ រួចទាញថា (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A ។

៣.សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមរវាង (C_1) និង (C_2) ។

VI. (**២០ពិន្ទុ**) នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅ វិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យចំណុច $A(0,2,2)$ និងបន្ទាត់ (D) ដែលមាន

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \ , (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$

១.បង្ហាញថាប្លង់ $(P): x - y - z + 4 = 0$ កាត់ A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (D)

២.ប្លង់ (P) កាត់អ័ក្ស $\vec{OX}$ ត្រង់ M , $\vec{OY}$ ត្រង់ N , $\vec{OZ}$ ត្រង់ P ។ រកកូអរដោនេ នៃចំណុច M, N និង P រួចសង់ចំណុច A, M, N, P នៅក្នុងតម្រុយ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

៣.បង្ហាញថាត្រីកោណ MNP ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

៤.គណនា $\vec{MP} \times \vec{MN}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MNP ។

VII. (**៣៥ពិន្ទុ**) f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $f(x) = 2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

១.គណនា $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ កំណត់តម្លៃបរមានៃ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M រវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M ។

៤.សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ(យក $e=2.7$, $\frac{2}{e}=0.7$)

៥.កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត k ដោយប្រើក្រាប (C) ដើម្បីឲ្យសមីការ

$2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឬស ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដែលកំណត់ដោយ

ក្រាប (C) អ័ក្ស $(x'ox)$ បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

អត្រាកំណែ

I. ១.សរសេរ Z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$Z_1=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2}{1+i\sqrt{3}}=\frac{2\left(\cos\frac{2\pi}{12}+i\sin\frac{2\pi}{12}\right)}{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

• សរសេរ Z_1 ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$Z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$

២.កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យបាន $2\overline{Z_1}-(Z_2+y-1)=0$

គេមាន $Z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ នាំឲ្យ $\overline{Z_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ និង

$$Z_2=(1-i)x+(1-y)(1+i)=x-ix+(1-y)+(1-y)i$$

$$=(1+x-y)+(1-x-y)i$$

គេបាន $2\overline{Z}_1-(Z_2+y-1)=0$ សមមូល

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)-[(1+x-y)+(1-x-y)i+y-1]=0$$

$\sqrt{3}+i=x+(1-x-y)i$ នាំឲ្យ $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\1-x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{x=\sqrt{3}\ ,\ y=-\sqrt{3}}$

II. ១.ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''+5y'+6y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2+5r+6=0$

$\Delta=5^2-4\times6=25-24=1$

នាំឲ្យ $r_1=\dfrac{-5-\sqrt{1}}{2}=-3\ ,\ r_2=\dfrac{-5+\sqrt{1}}{2}=-2$

គេបានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^{-3x}+Be^{-2x}$ ដែល A,B ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{-3x}+Be^{-2x}\quad(A,B\in\mathbb{R})$

២.កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)

គេមាន $y=Ae^{-3x}+Be^{-2x}$ នាំឲ្យ $y'=-3Ae^{-3x}-2Be^{-2x}$

បើបន្ទាត់ $(D): y=x-1$ ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់ $x=0$

នោះគេបាន $\begin{cases}y'(0)=1\\y(0)=0-1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3Ae^0-2Be^0=1\\Ae^0+Be^0=-1\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}-3A-2B=1\\A+B=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3A-2B=1 & (1)\\2A+2B=-2 & (2)\end{cases}$

យក (1) បូក (2) គេបាន $-A=-1\Rightarrow A=1$

តាម $A+B=-1\Rightarrow B=-1-A=-1-1=-2$

ដូចនេះ $\boxed{y=e^{-3x}-2e^{-2x}}$

III. ប្រធានវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យានៃការប្រឡងមួយ មានលំហាត់ពីជ

គណិត 6 និងលំហាត់ធរណីមាត្រ 4 ។ បេក្ខជនម្នាក់ៗត្រូវធ្វើលំហាត់ 2 ក្នុងចំណោមលំហាត់ទាំង 10 នេះ ទៅតាមការជ្រើសរើសរបស់ខ្លួន។

១.រកចំនួនករណីអាច

ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10,2)=\frac{10!}{8!2!}=\frac{9\times10}{2}=45$

ដូចនេះ $\boxed{n(S)=45}$

២.រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចតទៅៈ

A : សិស្ស X ម្នាក់ជ្រើសរើសយកលំហាត់ពីជគណិតទាំងពីរ

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(6,2)=\frac{6!}{4!2!}=\frac{5\times6}{2}=15$

គេបានប្រូបាប $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\frac{1}{3}}$

B : សិស្ស Y ម្នាក់ជ្រើសរើសយកលំហាត់ធរណីមាត្រទាំងពីរ

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(4,2)=\frac{4!}{2!2!}=\frac{3\times4}{2}=6$

គេបានប្រូបាប $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{2}{15}}$

C : សិស្ស Z ម្នាក់ជ្រើសរើសយកលំហាត់ពីជគណិត1និងធរណីមាត្រ1

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(6,1)\times C(4,1)=6\times4=24$

គេបានប្រូបាប $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{8}{15}}$

IV. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-5x-2}{x(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0, x\neq 1$

១.កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

$$f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2+bx(x-1)+cx}{x(x-1)^2}$$

$$=\frac{a(x^2-2x+1)+b(x^2-x)+cx}{x(x-1)^2}=\frac{(a+b)x^2+(-2a-b+c)x+a}{x(x-1)^2}$$

តែ $f(x)=\dfrac{3x^2-5x-2}{x(x-1)^2}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}a+b=3\\-2a-b+c=-5\\a=-2\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}a+b=3\\-2a-b+c=-5\\a=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=5\\c=-4\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=-2\,,\,b=5\,,\,c=-4}$

២.គណនា $I=\int_2^3 f(x)dx$

$$I=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left[\frac{-2}{x}+\frac{5}{x-1}+\frac{-4}{(x-1)^2}\right]dx$$

$$=\left[-2\ln|x|+5\ln|x-1|+\frac{4}{x-1}\right]_2^3$$

$$=(-2\ln 3+5\ln 2+2)-(-2\ln 2+5\ln 1+4)$$

$$=-2\ln 3+7\ln 2-2=-2-2\ln 3+7\ln 2$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_2^3 f(x)dx=-2-2\ln 3+7\ln 2}$

V.គេឲ្យ $f(x)=e^x$ និង $g(x)=\ln(x+1)+1$

១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) មានចំណុចរួម $A(0,1)$

គេមាន $(C_1): y = f(x) = e^x$, $(C_2): y = g(x) = \ln(x+1)+1$

យកកូអរដោនេ A ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការនៃ (C_1) និង (C_2)

$f(0) = e^0 = 1$ នោះ $A \in (C_1)$

$g(0) = \ln(0+1)+1 = 0+1 = 1$ នោះ $A \in (C_2)$

ដូចនេះ (C_1) និង (C_2) មានចំណុចរួម $A(0,1)$ ។

២.គណនា $f'(0)$ និង $g'(0)$

ដោយ $f'(x) = e^x$ និង $g'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

គេបាន $f'(0) = e^0 = 1$ និង $g'(0) = \dfrac{1}{0+1} = 1$

ដូចនេះ $\boxed{f'(0) = 1 \,,\, g'(0) = 1}$

• ទាញថា (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A

ដោយ $f'(0) = g'(0) = 1$

ហើយ (C_1) និង (C_2) មានចំណុចរួម $A(0,1)$

នាំឲ្យ (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A

ដូចនេះ (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A ។

៣.សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមរវាង (C_1) និង (C_2)

$y - y_o = y_o(x - x_0)$

$y - 1 = 1(x - 0)$

$y = x + 1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមរវាង (C_1) និង (C_2) គឺ $y = x + 1$ ។

VI. នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន

$(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យចំណុច $A(0,2,2)$ និងបន្ទាត់ (D) ដែលមាន

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2-t \text{ , } (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$

១.បង្ហាញថាប្លង់ $(P): x-y-z+4=0$ កាត់តាម A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (D)

$(P): x-y-z+4=0$, $A(0,2,2)$

យើងបាន $0-2-2+4=0$

$0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ នោះនាំឲ្យ $A \in (P)$

ដូចនេះ ប្លង់ $(P): x-y-z+4=0$ កាត់តាម A ។

បន្ទាត់ (D) មានសមីការ $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2-t \text{ , } (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$

ដោយ $\left. \begin{array}{l} (D) \parallel \vec{U}(1,-1,-1) \\ (P) \perp \vec{n}(1,-1,-1) \\ \vec{n} = \vec{U} \end{array} \right| \Rightarrow (P) \perp \vec{U}$

នាំឲ្យ $(P) \perp (D)$

ដូចនេះ ប្លង់ (P) កែងនឹងបន្ទាត់ (D) ។

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុច M, N និង P

$M \in \overrightarrow{OX}$ នាំឲ្យ $y = z = 0$

ជំនួសក្នុងសមីការ (P) គេបាន $x = -4$

ដូចនេះ $\boxed{M(-4,0,0)}$

$N \in \overrightarrow{OY}$ នាំឲ្យ $x = z = 0$

ជំនួសក្នុងសមីការ (P) គេបាន $y = 4$

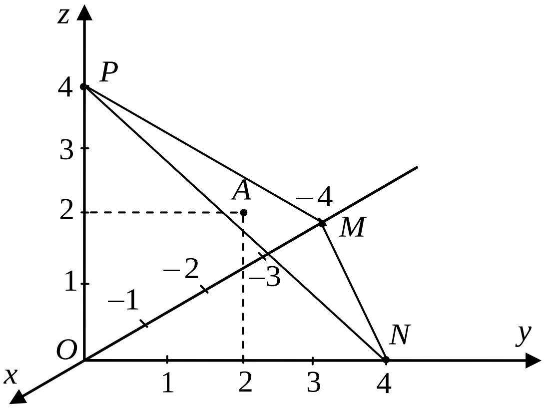
ដូចនេះ $\boxed{N(0,4,0)}$

$P\in \overrightarrow{OZ}$ នាំឲ្យ $x=y=0$

ជំនួសក្នុងសមីការ (P) គេបាន $z=4$

ដូចនេះ $\boxed{P(0,0,4)}$

• សង់ចំណុច A,M,N,P នៅក្នុងតម្រុយ $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$



៣.បង្ហាញថាត្រីកោណ MNP ជាត្រីកោណសម័ង្ស

គេមាន $M(-4,0,0)$, $N(0,4,0)$, $P(0,0,4)$

$\overrightarrow{MN}(4,4,0)$, $\overrightarrow{MP}(4,0,4)$, $\overrightarrow{NP}(0,-4,4)$, $\overrightarrow{MP}(4,0,4)$

គេបាន $MN=\sqrt{(0+4)^2+(4-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

$$MP=\sqrt{(0+4)^2+(0-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

$$NP=\sqrt{(0-0)^2+(0-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

ដោយ $MN=MP=NP=4\sqrt{2}$ នោះ MNP ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ដូចនេះ ត្រីកោណ MNP ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

៤.គណនា $\overrightarrow{MP}\times\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MP}\times\overrightarrow{MN}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 0 & 4\\ 4 & 4 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ 4 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 4\\ 4 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{MP}\times\overrightarrow{MN}=-16\,\vec{i}+16\,\vec{j}+16\,\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{MP}\times\overrightarrow{MN}=-16\,\vec{i}+16\,\vec{j}+16\,\vec{k}}$

• ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MNP ។

$$S_{MNP}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{MP}\times\overrightarrow{MN}\|$$

$$S_{MNP}=\frac{1}{2}\sqrt{(-16)^2+16^2+16^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16^2+16^2+16^2}=\frac{16}{2}\sqrt{3}$$

$S_{MNP}=\frac{16}{2}\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)

ដូចនេះ $\boxed{S_{MNP}=8\sqrt{3}}$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)

VII. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$

ហើយមានក្រាប (C)

១.គណនា $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

ព្រោះ $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ និង $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=2$$

ព្រោះ $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=2}$

• កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ នាំឲ្យ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ដោយ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ នាំឲ្យ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$

គេបាន $f'(x)=2\left[-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-\ln x}{x^2}\right]=2\left(\frac{-1+\ln x}{x^2}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=2\left(\frac{-1+\ln x}{x^2}\right)}$

• សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

ដោយ $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-1+\ln x$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $-1+\ln x=0\Rightarrow x=e$

បើ $f'(x)<0$ នោះ $-1+\ln x<0\Rightarrow x<e$

បើ $f'(x)>0$ នោះ $-1+\ln x>0\Rightarrow x>e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

• កំណត់តម្លៃបរមានៃ f

តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)=0$ ត្រង់ $x=e$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

នោះ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=e$ ។

តម្លៃអប្បបរមាគឺ $f(e)=2\left(1-\dfrac{\ln e}{e}\right)=2-\dfrac{2}{e}=2-0.7=1.3$

ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមានៃ f គឺ $\boxed{f(e)=1.3}$

• សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1.3	$\nearrow$	2

៣.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M រវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា

គេមាន $(C): y=f(x)=2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$ និងបន្ទាត់ $y=2$

សមីការអាប់ស៊ីសៈ $2\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=2$ ឬ $1-\dfrac{\ln x}{x}=1$

ឬ $-\dfrac{\ln x}{x}=0$ ដោយ $x>0$ នាំឲ្យ $\ln x=0 \Rightarrow x=1$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុច M គឺ $\boxed{M(1,2)}$

• កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ M

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $M(1,2)$ មានរាង $(L): y=f(1)(x-1)+f(1)$

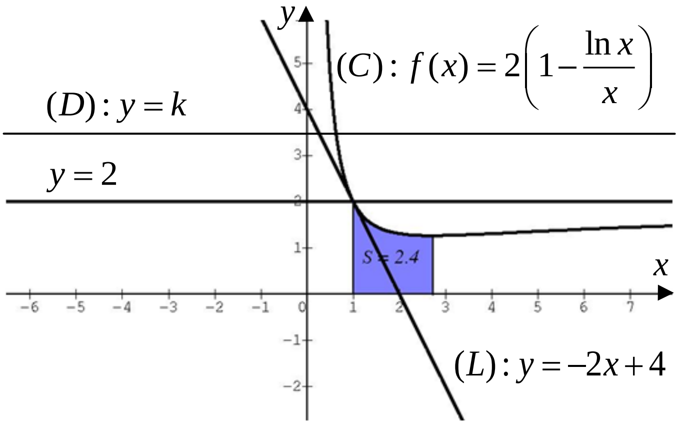
ដោយ $f'(x)=2\left(\dfrac{-1+\ln x}{x^2}\right)$ នោះ $f'(1)=2\left(\dfrac{-1+\ln 1}{1^2}\right)=-2$

និង $f(1)=2$ គេបានៈ

$(L): y=-2(x-1)+2$ ឬ $(L): y=-2x+4$

ដូចនេះ $\boxed{(L): y=-2x+4}$

៤.សង់បន្ទាត់ (L) និងក្រាប (C) នៅក្នុតម្រុយតែមួយ



៥.កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត k ដើម្បីឲ្យសមីការ $2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស

$2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=k$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C)

និងបន្ទាត់ចល័ត $(D): y=k$

តាមក្រាភិច បន្ទាត់ (D) ជួបខ្សែកោង (C) កាលណា $k\geq 2-\frac{2}{e}=1.3$

ដូចនេះ ដើម្បីឲ្យសមីការ $2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស $\boxed{k\geq 1.3}$

• គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដែលកំណត់ដោយក្រាប (C) អ័ក្ស $(x'ox)$

បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$

$$S=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)dx=2\int_1^e(1-(\ln x)'\ln x)dx$$

$$=2\left[x-(\ln x)^2\right]_1^e=2[(e-(\ln e)^2)-(1-(\ln 1)^2)]$$

$$=2[(e-1)-1]=2e-3=2(2.7)-3=2.4(\text{ឯកតាផ្ទៃក្រឡា})$$

ដូចនេះ $\boxed{S=2.4(\text{ឯកតាផ្ទៃក្រឡា})}$

វិញ្ញាសាទី 5

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណេះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា

សម័យប្រឡង: 07 សីហា 2006

រយៈពេល ១៥០នាទី ពិន្ទុ១២៥

I.(**១០ពិន្ទុ**) ១.(**៤ពិន្ទុ**) កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^2 + ax + b = 0$ ។

២.(**៦ពិន្ទុ**) រកឫស x_2 មួយទៀតនៃសមីការ។ សរសេរ $Z = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

II.(**១០ពិន្ទុ**) គណនាលីមីត:

១.(**៥ពិន្ទុ**) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x}$ ២.(**៥ពិន្ទុ**) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 2}{x + 1}$

III.(**១០ពិន្ទុ**) គេប្រើលេខពី 0 ដល់ 9 ដើម្បីសរសេរចំនួនដែលមានលេខ 4ខ្ទង់ ដោយខ្ទង់ដើមដំបូងមិនប្រើលេខ 0 ទេ។

១.(**៤ពិន្ទុ**) តើគេអាចសរសេរបានប៉ុន្មានចំនួនខុសៗគ្នាតាមរបៀបខាងលើ?

២.(**៤ពិន្ទុ**) តើមានប៉ុន្មានចំនួនដែលមានលេខទាំង 4 ខ្ទង់ខុសៗគ្នា?

៣.(**២ពិន្ទុ**) តើមានប៉ុន្មានចំនួនដែលមានលេខទាំង 4 ខ្ទង់ដូចគ្នា?

IV.(**១៥ពិន្ទុ**) ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 2y' + 5y = 0$ ដោយដឹងថា $y(0) = -1$ និង $y'(0) = 1$ ។

V.(**១៥ពិន្ទុ**) ១.(**៧ពិន្ទុ**) កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យ

$\frac{2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x+1}$ ចំពោះគ្រប់ x ដែល $x\neq 0$, $x\neq -1$ ។

២.(៨ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលៈ $I=\int_1^2\left(\frac{2x+1}{x^2(x+1)}\right)dx$ ។

VI. (**៣០ពិន្ទុ**) f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\frac{\ln x}{x^3}$

ហើយមានកខ្សែកោង (C) ។

១.(**៦ពិន្ទុ**) គណនា $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីម

តូតឈរ និងដេកនៃ (C) ។

២.(**៨ពិន្ទុ**) បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=\sqrt[3]{e}$ ។ គណនា $f(\sqrt[3]{e})$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣.(**៦ពិន្ទុ**) កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីម

តូតដេក។ សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច M

៤.(**១០ពិន្ទុ**) សង់បន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់

មួយ។ $(e=2.7$, $\sqrt[3]{e}=1.4$, $\frac{1}{3e}=0.12)$

កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យវិសមីការ $1-\frac{\ln x}{x^3}>k$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $x>0$

ដោយប្រើខ្សែកោង (C) ។

VII. (**៣៥ពិន្ទុ**) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យចំណុច

$A(1,0,1)$ និងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}(-1,2,1)$ ។

១.(**៨ពិន្ទុ**) គណនាកូអរដោនេចំណុច B ។ រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម

A ហើយកែងនឹង $\overrightarrow{AB}$ ។

២.(៩ពិន្ទុ) គេឲ្យចំណុច $C(2,1,0)$ និង $D(1,3,1)$ ។ រកកូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ។ គណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថា $ABDC$ ជាចតុកោណកែង។

៣.(៩ពិន្ទុ) គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ABDC$ ។

៤.(៩ពិន្ទុ) រកមាឌចតុមុខ $OABC$ ។ ទាញរកចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ (ABC) ។

អត្រាកំណែ

I. ១.កំណត់ចំនួនពិត a និង b

បើ $x_1 = 1+i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^2+ax+b=0$

គេបាន $(1+i\sqrt{3})^2 + a(1+i\sqrt{3}) + b = 0$

$$1+2i\sqrt{3}-3+a+ia\sqrt{3}+b=0$$

$$(-2+a+b)+(2\sqrt{3}+a\sqrt{3})i=0$$

នាំឲ្យ $\begin{cases}-2+a+b=0\\ 2\sqrt{3}+a\sqrt{3}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=2-a\\ a=-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=4\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=-2\,,\, b=4}$

២. រកឫស x_2 មួយទៀតនៃសមីការ

បើ x_2 មួយទៀតនៃសមីការ $x^2-2x+4=0$

$\Delta' = (-1)^2 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

នាំឲ្យ $x = 1\pm i\sqrt{3}$

ដោយ $x_1 = 1+i\sqrt{3}$ ដូច្នេះ $x_2 = 1-i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x_2 = 1-i\sqrt{3}}$

• សរសេរ $Z = \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $x_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$x_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$$

នាំឲ្យ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)} = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3})$

ឬ $\frac{x_1}{x_2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

គេបាន $Z = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}}$

II. គណនាលីមីត:

១. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x}$ មានរាង $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2 + x} + \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x^2 + x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x+1}\right) + \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= (1 \times \frac{1}{0+1}) + (\ln e \times \frac{1}{0+1}) = 1 + 1 = 2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x} = 2}$

២. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+2}{x+1}$ មានរាង $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+2}{x+1}=0}$

III.គេប្រើលេខពី 0 ដល់ 9 ដើម្បីសរសេរចំនួនដែលមានលេខ 4ខ្ទង់ដោយខ្ទង់ដើមដំបូងមិនប្រើលេខ 0 ទេ

១.រកចំនួនមាន 4 លេខខុសគ្នា

ខ្ទង់ទី1 អាចមាន $m_1=9$របៀប

ខ្ទង់ទី2 អាចមាន $m_2=10$របៀប

ខ្ទង់ទី3 អាចមាន $m_3=10$របៀប

ខ្ទង់ទី4 អាចមាន $m_4=10$របៀប

តាមគោលការណ៍របាប់គេបាន

$m_1\times m_2\times m_3\times m_4=9\times10\times10\times10=9000$ ចំនួន

ដូចនេះ គេអាចសរសេរចំនួនមាន 4 លេខខុសគ្នាបាន 9000 ចំនួន។

២.តើមានប៉ុន្មានចំនួនដែលមានលេខទាំង 4 ខ្ទង់ខុសៗគ្នា?

ខ្ទង់ទី1 មាន $m_1=9$របៀប

ខ្ទង់ទី2 មាន $m_2=9$របៀប

ខ្ទង់ទី3 មាន $m_3=8$របៀប

ខ្ទង់ទី4 មាន $m_4=7$របៀប

តាមគោលការណ៍របាប់គេបាន

$m_1\times m_2\times m_3\times m_4=9\times9\times8\times7=4536$ ចំនួន

ដូចនេះ ចំនួនដែលមានលេខទាំង 4 ខ្ទង់ខុសៗគ្នាមាន 4536 ចំនួន។

៣.តើមានប៉ុន្មានចំនួនដែលមានលេខទាំង 4 ខ្ទង់ដូចគ្នា?

ខ្ទង់ទី1 មាន $m_1 = 9$ របៀប

ខ្ទង់ទី2 មាន $m_2 = 1$ របៀប

ខ្ទង់ទី3 មាន $m_3 = 1$ របៀប

ខ្ទង់ទី4 មាន $m_4 = 1$ របៀប

តាមគោលការណ៍របាប់គេបាន

$m_1 \times m_2 \times m_3 \times m_4 = 9\times1\times1\times1 = 9$ ចំនួន

ដូចនេះ ចំនួនដែលមានលេខទាំង 4 ខ្ទង់ដូចគ្នាមាន 9 ចំនួន។

IV. ដោះស្រាយសមីការ $y''-2y'+5y=0$ បើ $y(0)=-1$ និង $y'(0)=1$

សមីការសម្គាល់ $r^2-2r+5=0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times5 = 4-20 = -16 = (4i)^2$

នាំឲ្យ $r_1 = \dfrac{2-4i}{2} = 1-2i$, $r_2 = \dfrac{2+4i}{2} = 1+2i$

គេបានចម្លើយទូទៅ $y = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^x$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

នាំឲ្យ $y' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)e^x + (A\cos 2x + B\sin 2x)e^x$

បើ $y(0) = -1$ នោះ $(A\cos 2\cdot 0 + B\sin 2\cdot 0)e^0 = -1$ នាំឲ្យ $A=-1$

បើ $y'(0)=1$ នោះ $(-2A\sin 0 + 2B\cos 0)e^0 + (A\cos 0 + B\sin 0)e^0 = 1$

ឬ $2B + A = 1 \Leftrightarrow 2B - 1 = 1 \Rightarrow B = 1$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺ $\boxed{y = (-\cos 2x + \sin 2x)e^x}$

V. ១.កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c

គេមាន $\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x+1} = \dfrac{ax(x+1)+b(x+1)+cx^2}{x^2(x+1)}$

$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{a(x^2+x)+b(x+1)+cx^2}{x^2(x+1)}=\frac{(a+c)x^2+(a+b)x+b}{x^2(x+1)}$$

ចំពោះគ្រប់ x ដែល $x\neq 0$, $x\neq -1$ គេបាន $\begin{cases}a+c=0\\a+b=2\\b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-1\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=b=1\,,\,c=-1}$

២. គណនាអាំងតេក្រាលៈ $I=\int_1^2\left(\frac{2x+1}{x^2(x+1)}\right)dx$

$$I=\int_1^2\left(\frac{2x+1}{x^2(x+1)}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}\right)dx+\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}\right)dx-\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[\ln|x|-\frac{1}{x}-\ln|x+1|\right]_1^2$$

$$=(\ln 2-\frac{1}{2}-\ln 3)-(\ln 1-1-\ln 2)$$

$$=\ln 2-\ln 3+\ln 2+1-\frac{1}{2}=2\ln 2-\ln 3+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\ln\frac{4}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_1^2\left(\frac{2x+1}{x^2(x+1)}\right)dx=\frac{1}{2}+\ln\frac{4}{3}}$

VI. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\frac{\ln x}{x^3}$

ហើយមានកខ្សែកោង (C)

១.គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x^3}\right)=1$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=0$)

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(1-\frac{\ln x}{x^3}\right)=+\infty$$

ព្រោះ $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ និង $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^3} = -\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1\,,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$

• កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃ (C)

ដោយ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$ នោះបន្ទាត់ $y = 1$ជាអស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = 1$ជាអស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ នោះបន្ទាត់ $x = 0$ ជាអស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

២.បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = \sqrt[3]{e}$

គេមាន $y = f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x^3}$

គេបាន $f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}\cdot x^3 - 3x^2 \ln x}{x^6} = -\frac{x^2(1-3\ln x)}{x^6} = \frac{-1+3\ln x}{x^4}$

ដោយ $x^4 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-1+3\ln x$

បើ $f'(x) = 0$ នោះ $-1+3\ln x = 0$ នាំឲ្យ $x = \sqrt[3]{e}$

បើ $f'(x) < 0$ នោះ $-1+3\ln x < 0$ នាំឲ្យ $x < \sqrt[3]{e}$

បើ $f'(x) > 0$ នោះ $-1+3\ln x > 0$ នាំឲ្យ $x > \sqrt[3]{e}$

x	0		$\sqrt[3]{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើ f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = \sqrt[3]{e}$

• គណនា $f(\sqrt[3]{e})$

$$f(\sqrt[3]{e}) = 1 - \frac{\ln(\sqrt[3]{e})}{(\sqrt[3]{e})^3} = 1 - \frac{1/3}{e} = 1 - \frac{1}{3e} = 1 - 0.12 = 0.88$$

ដូចនេះ $\boxed{f(\sqrt[3]{e})=0.88}$

• សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	0		$\sqrt[3]{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0.88	$\nearrow$	1

៣. កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីមតូតដេក

គេមាន $(C): y=f(x)=1-\dfrac{\ln x}{x^3}$ និងអាស៊ីមតូតដេក $y=1$

សមីការអាប់ស៊ីស: $1-\dfrac{\ln x}{x^3}=1$ ដោយ $x>0$

នាំឲ្យ $-\dfrac{\ln x}{x^3}=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=1$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុច M គឺ $\boxed{M(1,1)}$

• សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច M

សមីការ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ $M(1,1)$ គឺ $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

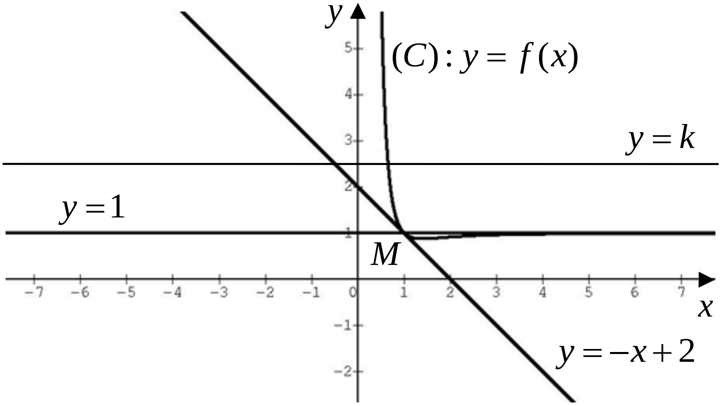
ដោយ $f'(1)=\dfrac{-1+3\ln 1}{1^4}=-1$ និង $f(1)=1$

គេបាន $(T): y=-(x-1)+1$ ឬ $(T): y=-x+2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{(T): y=-x+2}$

៤.សង់បន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ

x	0	1
$y=-x+2$	2	1



• កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យវិសមីការ $1-\frac{\ln x}{x^3} > k$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

តាមខ្សែកោង (C) ដើម្បីឲ្យ $1-\frac{\ln x}{x^3} > k$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ លុះត្រាតែ

$k < 1-\frac{1}{3e}$ ឬ $k < 0.88$

ដូចនេះ ដើម្បីឲ្យ $1-\frac{\ln x}{x^3} > k$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ កាលណា $k < 0.88$ ។

VII. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យចំណុច $A(1,0,1)$

និងវ៉ិចទ័រ $\vec{AB}(-1,2,1)$ ។

១. គណនាកូអរដោនេចំណុច B

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}(-1,2,1)\\ \vec{AB}(x_B-1, y_B-0, z_B-1)\end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} x_B - 1 = -1 \\ y_B = 2 \\ z_B - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 0 \\ y_B = 2 \\ z_B = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{B(0,2,2)}$

• រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម A ហើយកែងនឹង $\vec{AB}$ ។

ប្លង់ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{AB}(-1,2,1)$

នាំឲ្យសមីការប្លង់ (P) មានរាង $-x+2y+z+d=0$

ដោយ (P) កាត់តាម $A(1,0,1)$ នោះ $-1+2\cdot 0+1+d=0 \Rightarrow d=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P): -x+2y+z=0}$

២. រកកូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\vec{AC}$ និង $\vec{CD}$

គេមានចំណុច $C(2,1,0)$ និង $D(1,3,1)$

គេបាន $\vec{AC}(2-1,1-0,0-1)$ ឬ $\vec{AC}(1,1,-1)$

$\vec{CD}(1-2,3-1,1-0)$ ឬ $\vec{CD}(-1,2,1)$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{AC}(1,1,-1)\ ,\ \vec{CD}(-1,2,1)}$

• គណនា $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$

$\vec{AC}(1,1,-1)$ និង $\vec{AB}(-1,2,1)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=(-1)(1)+(2)(1)+(1)(-1)=-1+2-1=0$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0}$

• បង្ហាញថា $ABDC$ ជាចតុកោណកែង

ដោយ $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$ នាំឲ្យ $\vec{AB}\perp\vec{AC}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}\perp\vec{AC}\\ \vec{AB}=\vec{CD}\end{array}\right| \Rightarrow ABDC \text{ ជាចតុកោណកែង}$$

ដូចនេះ $ABDC$ ជាចតុកោណកែង ។

៣. គណនា $\vec{AB}\times\vec{AC}$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+0\vec{j}-3\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{AB}\times\vec{AC}=-3\vec{i}+0\vec{j}-3\vec{k}}$

• ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ABDC$

$$S_{ABDC}=\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|=\sqrt{(-3)^2+0^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABDC}=3\sqrt{2}\text{ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)}}$

៤. រកមាឌចតុមុខ $OABC$

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\|(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AO}\|$$

$\vec{AB}\times\vec{AC}(-3,0,-3)$ និង $\vec{AO}(-1,0,-1)$

នាំឲ្យ $(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AO}=(-3)(-1)+0\cdot 0+(-3)(-1)=6$

គេបាន $V_{OABC}=\frac{1}{6}\|(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AO}\|=\frac{6}{6}=1$

ដូចនេះ $\boxed{V_{OABC}=1\text{(ឯកតាមាឌ)}}$

• ទាញរកចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ (ABC)

តាង h ជាចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ (ABC)

$V_{OABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times h$ នាំឲ្យ $h=\frac{3V_{OABC}}{S_{ABC}}$ តែ $V_{OABC}=1$ និង

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+0^2+(-3)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $h=\frac{3\times 2}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ (ឯកតាប្រវែង)

វិញ្ញាសាទី 6

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណេះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា

សម័យប្រឡង: 06 **សីហា** 2007

រយៈពេល ១៥០នាទី ពិន្ទុ១២៥

I.(**១០ពិន្ទុ**) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $A=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$ និង $B=\dfrac{x+iy}{1+i}$ ដែល x,y ជាចំនួនពិត។

១.សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់ធរណីមាត្រ។

២.សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត។ រក x និង y គេដឹងថា $2\overline{B}-A^2=0$ ($\overline{B}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B)។

II.(**១៥ពិន្ទុ**) យើងមានសមីការ $(E): y'-y\ln 3=0$ ។

១.រកសំណុំចម្លើយនៃ (E) ។

២.កំណត់ f ដែលជាចម្លើយនៃ (E) ដោយដឹងថា $f(1)=2$ ។

៣.បង្ហាញថា $g(x)=3^{x-1}$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។ (សម្គាល់: $U(x)=a^x$ នោះ $U'(x)=a^x\ln a$)

III.(**១៥ពិន្ទុ**) ១.កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យបាន

$$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+2}$$ ចំពោះ x ដែល $x\neq -2, x\neq 1$

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}\right)dx$ ។

IV. (**១៥ពិន្ទុ**) ១.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\ln x+1}{x^2}$, $x>0$ ។

២.គណនាដេរីវេ $y=e^x\ln(x+1)$, $x>1$ ។ ទាញរកព្រីមីទីវនៃ

$f(x)=e^x\ln(x+1)+\dfrac{e^x+1}{x+1}$ ដោយដឹងថាព្រីមីទីវនោះស្មើ 1 ចំពោះ $x=0$

V.(**៣៥ពិន្ទុ**) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

គេឲ្យចំណុច $S(0,0,3)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{U}(1,1,1)$ ។

១.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D) ដែលកាត់តាមចំណុច S ហើយស្រប

នឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{U}$ ។

២. $M(x,y,z)$ ជាចំណុចមួយនៅក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ គណនាផល

គុណស្កាលែ $\vec{U}\cdot\vec{SM}$ ។ កំណត់សមីការមួយដែលជាប់ទាក់ទងនឹង

x,y,z ដើម្បីឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{SM}$ អរតូកូណាល់នឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{U}$ ។ តើសំណុំចំណុច M

ជាអ្វី?

៣.គេឲ្យចំណុច $A(3,0,0)$ និង $B(0,3,0)$ ។ បង្ហាញថាត្រីកោណ SAB ជាត្រី

កោណសម័ង្ស។

៤.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{SA}\times\vec{SB}$ ។ ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ SAB ។

៥.រកសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត O ហើយកាត់តាមចំណុច S,A និង B ។

VI. (**៣៥ពិន្ទុ**) f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x\in D=]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ ដោយ

$y=f(x)=-\dfrac{x}{2}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូ

ណរម៉ាល់មួយ។

១.គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ ។

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃខ្សែកោង (C) ។

២.គណនា និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ បើគេដឹងថា $x(x-1)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ ។ គណនាតម្លៃអប្បបរមា និងអតិបរមានៃ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣.បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(L): y=-\dfrac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ។

៤.សង់អាស៊ីមតូតទាំងអស់ និងខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ (គេយក $\ln 2 = 0.7$, $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln 2=-0.7$) ។

រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការ $-\dfrac{x}{2}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=a$ មានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា ដោយប្រើខ្សែកោង (C) ។

អត្រាកំណែ

I. ១.សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $A=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$

$$A^2=[(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)]^2$$

$$=(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)i-(\sqrt{3}+1)^2$$

$$=(3-2\sqrt{3}+1)+2(3-1)i-(3+2\sqrt{3}+1)$$

$$=4-2\sqrt{3}+4i-4-2\sqrt{3}=-4\sqrt{3}+4i$$

ដូចនេះ $\boxed{A^2=-4\sqrt{3}+4i}$

• សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$A^2=-4\sqrt{3}+4i=8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=8\left[\cos(\pi-\frac{\pi}{6})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{6})\right]$$

$$A^2=8\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{A^2 = 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$

២.សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $B = \frac{x+iy}{1+i}$ ដែល x, y ជាចំនួនពិត

$$B = \frac{x+iy}{1+i} = \frac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{x-ix+iy+y}{1+1} = \frac{x+y}{2} + \frac{-x+y}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{B = \frac{x+y}{2} + \frac{-x+y}{2}i}$

• រក x និង y គេដឹងថា $2\overline{B} - A^2 = 0$ ($\overline{B}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B)

ដោយ $B = \frac{x+y}{2} + \frac{-x+y}{2}i$ នោះ $\overline{B} = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}i$

គេបាន $2\overline{B} - A^2 = 0$

សមមូល $2\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}i\right) - (-4\sqrt{3} + 4i) = 0$

$$(x+y) + (x-y)i = -4\sqrt{3} + 4i$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} x+y = -4\sqrt{3} & (1) \\ x-y = 4 & (2) \end{cases}$

បូក $(1) \& (2)$ គេបាន $2x = 4 - 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 2 - 2\sqrt{3}$

តាម $(2) \Rightarrow y = x - 4 = 2 - 2\sqrt{3} - 4 = -2 - 2\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x = 2 - 2\sqrt{3}\ ,\ y = -2 - 2\sqrt{3}}$

II.យើងមានសមីការ $(E): y' - y\ln 3 = 0$

១.រកសំណុំចម្លើយនៃ (E)

សំណុំចម្លើយទូទៅ $y = ke^{(\ln 3)x} = k \cdot 3^x$ ដែល k ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ សំណុំចម្លើយនៃ (E) គឺ $y = k \cdot 3^x$ ដែល k ជាចំនួនថេរ។

២.កំណត់ f ដែលជាចម្លើយនៃ (E) ដោយដឹងថា $f(1) = 2$ ។

គេមាន $f(x)=k\cdot 3^x$ ហើយ $f(1)=2$

នាំឲ្យ $f(1)=k\cdot 3^1=2$ នាំឲ្យ $k=\dfrac{2}{3}$

គេបាន $f(x)=\dfrac{2}{3}\cdot 3^x=2\cdot 3^{x-1}$ ជាចម្លើយនៃ (E)

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=2\cdot 3^{x-1}}$

៣.បង្ហាញថា $g(x)=3^{x-1}$ ជាចម្លើយនៃ (E)

$g'(x)=(x-1)'3^{x-1}\ln 3=3^{x-1}\ln 3$

យក $g'(x)$ និង $g(x)$ ជំនួសក្នុងសមីការ (E) គេបាន:

$3^{x-1}\ln 3-3^{x-1}\ln 3=0$ ឬ $0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $g(x)=3^{x-1}$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

III. ១.កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c

គេមាន $\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{c}{x+2}$

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+2}=\frac{a(x-1)(x+2)+b(x+2)+c(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\frac{a(x^2+x-2)+b(x+2)+c(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\frac{(a+c)x^2+(a+b-2c)x+(-2a+2b+c)}{(x-1)^2(x+2)}$$

ចំពោះគ្រប់ $x\neq -2, x\neq 1$ គេទាញបាន $\begin{cases} a+c=1 & (1)\\ a+b-2c=-2 & (2)\\ -2a+2b+c=-2 & (3)\end{cases}$

តាម $(1)\Rightarrow c=1-a$ ជំនួសក្នុង (2) និង (3) គេបាន

$$\begin{cases} a+b-2(1-a)=-2\\ -2a+2b+(1-a)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3a+b=0 & (3)\\ -3a+2b=-3 & (4)\end{cases}$$

បូក (3) & (4) គេបាន $3b=-3\Rightarrow b=-1$

តាម (3) $\Rightarrow a=-\frac{b}{3}=-\frac{-1}{3}=\frac{1}{3}$

តាម (1) $\Rightarrow c=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{1}{3}\,,\,b=-1\,,\,c=\frac{2}{3}}$

២.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}\right)dx$

ដោយ $\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{1/3}{x-1}+\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{2/3}{x+2}$

គេបាន $I=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1/3}{x-1}+\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{2/3}{x+2}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3}\ln|x+2|\right]_{-1}^{0}$

$=\left(\frac{1}{3}\ln 1-1+\frac{2}{3}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 1\right)$

$=-1+\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$

ដូចនេះ $\boxed{I=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2}$

IV. ១.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\ln x+1}{x^2}\,,\,x>0$ មានរាង $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\ln x+1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}(\ln x+\frac{1}{e^x})=+\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty\,,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\,,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\ln x+1}{x^2}=+\infty}$

២.គណនាដេរីវេ $y=e^x\ln(x+1)$, $x>1$

គេបាន $y'=e^x\ln(x+1)+\frac{e^x}{x+1}$

ដូចនេះ $\boxed{y'=e^x\ln(x+1)+\frac{e^x}{x+1}}$

• ទាញរកព្រីមីទីវនៃ $f(x)=e^x\ln(x+1)+\frac{e^x+1}{x+1}$

ដោយ $f(x)=e^x\ln(x+1)+\frac{e^x+1}{x+1}=e^x\ln(x+1)+\frac{e^x}{x+1}+\frac{1}{x+1}$

គេបានព្រីមីទីវនៃ f គឺ $F(x)=\int f(x)dx$

$$F(x)=\int\left(e^x\ln(x+1)+\frac{e^x}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\int\left(e^x\ln(x+1)+\frac{e^x}{x+1}\right)dx+\int\frac{1}{x+1}dx$$

$=\int y'dx+\int\frac{1}{x+1}dx=e^x\ln(x+1)+\ln|x+1|+C$ ដែល $C\in\mathbb{R}$

ដោយដឹងថាព្រីមីទីវនោះស្មើ1ចំពោះ $x=0$

គេបាន $F(0)=1$ សមមូល $e^0\ln(0+1)+\ln|0+1|+C=1\Rightarrow C=1$

ដូចនេះ $\boxed{F(x)=e^x\ln(x+1)+\ln|x+1|+1}$, $x>0$

V.១. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D)

បន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំណុច $S(0\,,0\,,3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រ

ប្រាប់ទិស $\vec{U}(1\,,1\,,1)$ កំណត់ដោយៈ

$$(D):\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct\ ,\ (t \in \mathbb{R}) \end{cases} \Rightarrow (D):\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 3 + t\ ,(t \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{(D): x = t\ , y = t\ , z = 3 + t\ ,(t \in \mathbb{R})}$

២. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{SM}$

$\overrightarrow{U}(1\ ,1\ ,1)\ ,\ \overrightarrow{SM}(x, y, z-3)$

គេបាន $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{SM} = x + y + z - 3$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{SM} = x + y + z - 3}$

• កំណត់សមីការមួយដែលជាប់ទាក់ទងនឹង x, y, z ដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{SM}$ អរតូកូណាល់នឹង $\overrightarrow{U}$ កាលណា $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{SM} = 0$

$\Rightarrow x + y + z - 3 = 0$

ដូចនេះ $\boxed{x + y + z - 3 = 0}$ នាំឱ្យសំណុំចំណុច M ជាប្លង់មួយ

៣. បង្ហាញថាត្រីកោណ SAB ជាត្រីកោណសម័ង្ស

$S(0,0,3)\ ,\ A(3,0,0), B(0,3,0)$

$SA = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2}$

$SB = \sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2}$

$AB = \sqrt{(0-3)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = 3\sqrt{2}$

ដោយ $SA = SB = AB = 3\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\Delta SAB \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

៤. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{SA} \times \overrightarrow{SB}$

គេមាន $\overrightarrow{SA}(3,0,-3)$, $\overrightarrow{SB}(0,3,-3)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 9\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} + 9\overrightarrow{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB} = 9\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} + 9\overrightarrow{k}}$

• ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ SAB

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB}\|$$

ដោយ $\|\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB}\| = \sqrt{9^2+9^2+9^2} = 9\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{SAB} = \frac{9\sqrt{3}}{2}\text{(ឯកតាផ្ទៃ)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{SAB} = \frac{9\sqrt{3}}{2}\text{(ឯកតាផ្ទៃ)}}$

៥. រកសមីការស្វ៊ែ

សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែគឺ :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

ដោយស្វ៊ែមានផ្ចិត O នោះ $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

គេបាន $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

ម្យ៉ាងទៀតស្វ៊ែនេះកាត់តាមចំណុច S, A និង B គេបានៈ

$$\left.\begin{array}{l}0+0+3^2=R^2\\ 3^2+0+0=R^2\\ 0+3^2+0=R^2\end{array}\right|\Rightarrow R^2=9$$

ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែគឺ $\boxed{x^2+y^2+z^2=9}$

VI. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x\in D=]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ ដោយ

$y=f(x)=-\dfrac{x}{2}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ ហើយមានខ្សែកោង (C)

១.គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$$

$=+\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{x}{2}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\ln1=0$)

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$$

$=-\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{2}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\ln1=0$)

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]=+\infty$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^-}\left(-\dfrac{x}{2}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to0^-}\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\ln(+\infty)=+\infty$)

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty}$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right] = -\infty$$

(ព្រោះ $\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \ln(0^+) = -\infty$)

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty}$

• រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃខ្សែកោង (C)

ដោយ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ និង $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=0$ និង $x=1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង (C) ។

២.គណនា $f'(x)$

គេមាន $f(x) = -\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

គេបាន $f'(x) = -\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x}\right)} = -\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{x-x+1}{x^2}\right)}{\left(\frac{x-1}{x}\right)} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)}$

$$= \frac{-x(x-1)+2}{2x(x-1)} = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}}$

• សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ បើគេដឹងថា $x(x-1)>0$ ចំពោះ $\forall x\in D$

$$f'(x) = \frac{-x^2+x+1}{2x(x-1)}$$

ដោយ $x(x-1)>0$ ចំពោះ $\forall x\in D$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-x^2+x+2$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $-x^2+x+2=0$

$\Delta = 1^2-4(-1)(2) = 1+8 = 9 = 3^2$

នាំឲ្យ $x_1 = \dfrac{-1+3}{-2} = -1$, $x_2 = \dfrac{-1-3}{-2} = 2$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	////	‖	$+$	0	$-$	

$f'(x) < 0$ ចំពោះ $x < -1$ ឬ $x > 2$

$f'(x) > 0$ ចំពោះ $-1 < x < 0$ ឬ $1 < x < 2$

$f'(x) = 0$ ចំពោះ $x = -1$, $x = 2$

• គណនាតម្លៃអប្បបរមា និងអតិបរមានៃ f ។

តាមតារាងសញ្ញា f មានអប្បបរមាត្រង់ $x = -1$ គឺ $f(-1) = 1.2$

ហើយ f មានអតិបរមាត្រង់ $x = 2$ គឺ $f(2) = -1.7$

• សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	////	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1.2	↗	$+\infty$ ‖	////	‖ $-\infty$	↗	-1.7	↘	$-\infty$

៣.បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(L): y = -\dfrac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ។

បើ $(L): y = -\dfrac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - y] = 0$$

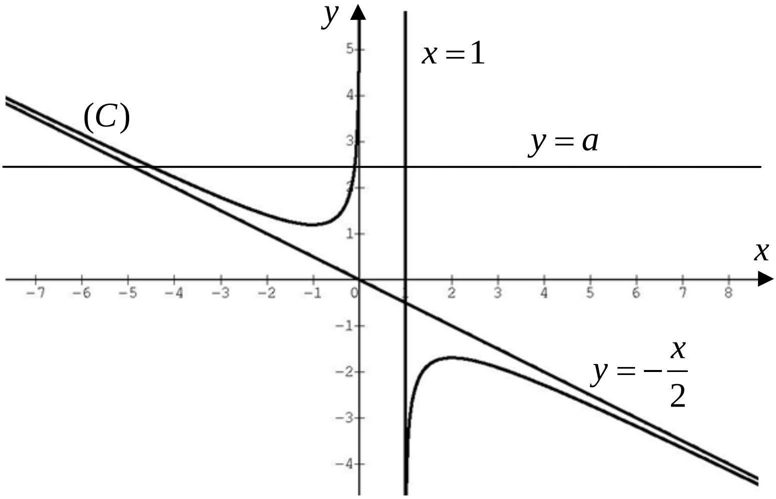
គណនា $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \left(-\frac{x}{2}\right)\right]$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0 \quad \text{(ពិត)}$$

ដូចនេះ $(L): y = -\dfrac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ។

៤.សង់អាស៊ីមតូតទាំងអស់ និងខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ

x	0	2
$y=-\dfrac{x}{2}$	0	-1



• រកតម្លៃ a

$-\dfrac{x}{2}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=a$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាង (C) និងបន្ទាត់ចល័ត $y=a$

តាមខ្សែកោង (C) ដើម្បីឲ្យសមីការ $-\dfrac{x}{2}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=a$ មានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នាលុះត្រាតែ $a\in]1.2\ ,+\infty[$

ដូចនេះ $\boxed{a\in]1.2\ ,+\infty[}$

វិញ្ញាសាទី 7

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណេះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា

សម័យប្រឡង: 04 **សីហា** 2008

រយៈពេល ១៥០នាទី ពិន្ទុ១២៥

I.(**១៥ពិន្ទុ**) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = x + iy$ និង $W = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ដែល x និង y ខុសពី 0 ហើយ α ជាចំនួនពិត ។

១.កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឲ្យ $|Z| = |W|$ ។

២.ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|Z| = |W|$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{Z} = \overline{Z}$ ។

៣.រក x និង y រួចរក α ដើម្បីឲ្យ $Z = 1, W = 1$ ។

II.(**១៥ពិន្ទុ**) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ គេឲ្យខ្សែកោង

$(E): \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ។

១.បញ្ជាក់ប្រភេទនៃខ្សែកោង (E) រួចបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃផ្ចិត កំណុំ កំពូល និងចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្សតូច។

២.សង់ (E) ។

III.(**១៥ពិន្ទុ**) ក្រូចត្លុង 20ផ្លែដែលដាក់លក់មាន 16ផ្លែមានរសជាតិផ្អែម និង4ផ្លែទៀតមានរសជាតិជូរ។ អ្នកទិញម្នាក់ជ្រើសរើសយកក្រូច 3ផ្លែដោយចៃដន្យ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

១. A:ក្រូចទាំង3ផ្លែសុទ្ធតែជូរ។

២. B:ក្រូចទាំង3ផ្លែសុទ្ធតែផ្អែម។

៣. C : យ៉ាងតិចមានក្រូច1ផ្លែមានរសជាតិផ្អែម។

IV. (**១៥ពិន្ទុ**) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $f''+2f'=0$ ។

១.គេតាង $g=f'$។ បង្ហាញថា g ជាចម្លើយនៃសមីការ $g'+2g=0$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការ $g'+2g=0$ រួចទាញរកចម្លើយនៃ $f''+2f'=0$ ។

៣.ផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយនៅសំណួរ ២ ដោយដោះស្រាយសមីការ $f''+2f'=0$ តាមសមីការសម្គាល់។

V.(**៣០ពិន្ទុ**) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ គេឲ្យចំណុច $A(-1,1,0), B(2,0,1), C(1,2,2), D(0,1,-2)$ និង $M(x,y,z)$ ។

១.រកទំនាក់ទំនងរវាង x,y និង z ដើម្បីឲ្យ $\vec{AM}$ កែងនឹង $\vec{BM}$ ។ តើសំណុំចំណុចនៃចំណុច M ជាអ្វី?

២.គណនា $\vec{n}=\vec{BC}\times\vec{BD}$ ។ រកចំនួនពិត m ដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡា S នៃ ΔBCD ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $S=\sqrt[3]{e^m}$ ។

៣.រកសមីការប្លង់ (BCD) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ N រវាងប្លង់ (BCD) និងបន្ទាត់ $(L):\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$ ។

៤.គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (BCD) រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $ABCD$ ។

VI. (**៣៥ពិន្ទុ**) f ជាអនុគមន៍ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $y=f(x)=-x-2+\frac{4e^x}{e^x+1}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ មួយដែលមានឯកតា $1cm$ ។

១.គណនា $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) កាលណា $x\to-\infty$ ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយបង្ហាញថា $f'(x)\le 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ គណនា $f'(0)$, $f(0)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣.បង្ហាញថាគល់កូអរដោនេ O ជាចំណុចរបត់ និងជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ក្រាប (C)

៤.គណនា $f(3)$ ហើយសង់ខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ (គេយក $e^3=20$)

ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{4e^x}{e^x+1}\ge x+2$ ដោយប្រើខ្សែកោង (C) ។

អត្រាកំណែ

I.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=x+iy$ និង $W=\cos\alpha+i\sin\alpha$ ដែល x និង y ខុសពី 0 ហើយ α ជាចំនួនពិត

១.កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y

គេមាន $|Z|=\sqrt{x^2+y^2}$ និង $|W|=|\cos\alpha+i\sin\alpha|=1$

ដើម្បីឲ្យ $|Z|=|W|$ លុះត្រាតែ $\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow x^2+y^2=1$

ដូចនេះ $\boxed{x^2+y^2=1}$

២.បង្ហាញថា $\frac{1}{Z}=\overline{Z}$

ដោយ $Z\cdot\overline{Z}=|Z|^2$

តែ $|Z|=|W|=1$

នាំឲ្យ $Z\cdot\overline{Z}=1^2=1\Rightarrow\frac{1}{Z}=\overline{Z}$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{Z}=\overline{Z}}$

៣.រក x និង y រួចរក α ដើម្បីឲ្យ $Z=1 , W=1$

$$\left.\begin{array}{l} Z=x+iy \\ Z=1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} W=\cos\alpha+i\sin\alpha \\ W=1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=1 \\ \sin\alpha=0 \end{cases}$$

នាំឲ្យ $\alpha=0+2k\pi=2k\pi \ ,k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\boxed{x=1 , \ y=0 , \ \alpha=2k\pi \ ,k\in\mathbb{Z}}$

II. ១.បញ្ជាក់ប្រភេទនៃខ្សែកោង (E)

ខ្សែកោង (E) តាង $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ជាអេលីបដែលមានសមីការ

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ អ័ក្សធំជាបន្ទាត់ដេក ហើយ $c^2=a^2-b^2$

ដែល $a^2=25 \ , b^2=9$ នោះ $c^2=25-9=16\Rightarrow c=4$

• បញ្ជាក់កូអរដោនេនៃផ្ចិត កំណុំ កំពូលនិងចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្សតូច

ផ្ចិត $I(h,k)=I(4,0)$

កំណុំ $F_1(h-c,k)=F_1(0,0)$

$F_2(h+c,k)=F_2(8,0)$

កំពូល $S_1(h-a,k)=S_1(-1,0)$

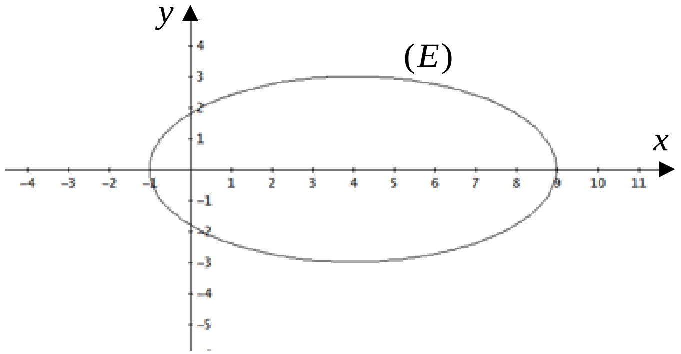
$S_2(h+a,k)=S_1(9,0)$

ចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្សតូច

$B_1(h,k-b)=B_1(4,-3)$

$B_2(h,k+b)=B_2(4,3)$

២.សង់ (E)



III.រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

១. A:ក្រូចទាំង3ផ្លែសុទ្ធតែជូរ

ករណីអាច $n(S)=C(20,3)=\dfrac{20!}{17!3!}=\dfrac{18\times 19\times 20}{2\times 3}=1140$

ករណីស្រប $n(A)=C(4,3)=\dfrac{4!}{1!3!}=\dfrac{3!4}{3!}=4$

គេបានប្រូបាប $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{4}{1140}=\dfrac{1}{285}=0.0035$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=0.0035}$

២. B:ក្រូចទាំង3ផ្លែសុទ្ធតែផ្អែម

ករណីស្រប $n(B)=C(16,3)=\dfrac{16!}{13!3!}=\dfrac{14\times 15\times 16}{2\times 3}=560$

គេបានប្រូបាប $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{560}{1140}=\dfrac{28}{57}=0.4912$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=0.4912}$

៣. C:យ៉ាងតិចមានក្រូច1ផ្លែមានរសជាតិផ្អែម

ព្រឹត្តិការណ៍ C:យ៉ាងតិចមានក្រូច1ផ្លែមានរសជាតិផ្អែម ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គេបាន $P(C)=1-P(A)$

$P(C)=1-0.0035=0.9965$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=0.9965}$

IV. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $f''+2f'=0$

១. បង្ហាញថា g ជាចម្លើយនៃសមីការ $g'+2g=0$

$f''+2f'=0 \Leftrightarrow (f')'+2f'=0$

ដោយ $f'=g$

យើងបាន $g'+2g=0$ បញ្ជាក់ថាជាចម្លើយរបស់ $g'+2g=0$

ដូចនេះ g ជាចម្លើយនៃសមីការ $g'+2g=0$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ $g'+2g=0$

គេបានចម្លើយទូទៅ $g(x)=ke^{-2x}$ ដែល k ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ $g(x)=ke^{-2x}$ ដែល $k\in\mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ $g'+2g=0$ ។

- ទាញរកចម្លើយនៃ $f''+2f'=0$ ។

ដោយយ $f'(x)=g(x)$

នាំឲ្យ $f(x)=\int g(x)dx=\int ke^{-2x}dx=-\frac{k}{2}e^{-2x}+C$ ដែល $k,C\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=-\frac{k}{2}e^{-2x}+C\ ,(k,C\in\mathbb{R})}$

៣. ផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយនៅសំណួរ ២ ដោយដោះស្រាយសមីការ $f''+2f'=0$

តាមសមីការសម្គាល់

សមីការសម្គាល់ $r^2+2r=0\Leftrightarrow r(r+2)=0$

នាំឲ្យ $r=0\ ,r+2=0\Rightarrow r=-2$

គេបានចម្លើយទូទៅ $f(x)=Ae^{ox}+Be^{-2x}=Be^{-2x}+A$ ដែល $A,B\in\mathbb{R}$

បើ $A=C\ ,B=-\frac{k}{2}$ នាំឲ្យ $f(x)=-\frac{k}{2}e^{-2x}+C$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=-\frac{k}{2}e^{-2x}+C}\ ,(k,C\in\mathbb{R})$

V. គេឱ្យចំណុច $A(-1,1,0)$, $B(2,0,1), C(1,2,2), D(0,1,-2)$ និង $M(x,y,z)$

១. រកទំនាក់ទំនង x, y និង z

$\vec{AM}(x+1\,, y-1\,, z)$, $\vec{BM}(x-2, y, z-1)$

ដើម្បីឱ្យ $\vec{AM} \perp \vec{BM}$ លុះត្រាតែ $\vec{AM}\cdot\vec{BM} = 0$

រឺ $(x+1)(x-2)+(y-1)y+z(z-1)=0$

$$(x^2-x-2)+(y^2-y)+(z^2-z)=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{4} = 0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2$$

ដូចនេះ **សំណុំចំណុច M គឺជាស្វ៊ែមួយ**

២. គណនា $\vec{n} = \vec{BC}\times\vec{BD}$

ដោយ $\vec{BC}(-1,2,1)$, $\vec{BD}(-2,1,-3)$

$$\vec{n} = \vec{BC}\times\vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -7\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{n} = \vec{BC}\times\vec{BD} = -7\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k}}$

• រកចំនួនពិត m

$$S = \frac{1}{2}\|\vec{BC}\times\vec{BD}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2+(-5)^2+3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{83}$$

តែ $S=\sqrt[3]{e^m}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{e^m}=\frac{1}{2}\sqrt{83}\Leftrightarrow e^{\frac{m}{3}}=\left(\frac{83}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{\frac{m}{3}}=\ln\left(\frac{83}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow \frac{m}{3}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{83}{4}\right)$$

$$\Rightarrow m=\frac{3}{2}\ln\left(\frac{83}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{m=\frac{3}{2}\ln\left(\frac{83}{4}\right)}$

៣. រកសមីការប្លង់ (BCD)

ប្លង់ (BCD) កាត់តាម $B(2,0,1)$ ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ

$\vec{n}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=-7\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$ កំណត់ដោយៈ

$(BCD):-7(x-2)-5(y-0)+3(z-1)=0$

$(BCD):-7x-5y+3z+14-3=0$

$(BCD):7x+5y-3z-11=0$

ដូចនេះ $\boxed{(BCD):7x+5y-3z-11=0}$

• រកកូអរដោនេនៃចំណុច $N(x_0,y_0,z_0)$

$(BCD):7x+5y-3z-11=0$

$(L):\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$

រឺ $(L):\begin{cases}x=1+t\\ y=-1-t\\ z=t\ ,\ (t\in\mathbb{R})\end{cases}$

យក $x=1+t,y=-1-t,z=t$ ចំនួសក្នុងប្លង់ (BCD)

គេបាន៖ $7(1+t)+5(-1-t)-3t-11=0$

$$7t-5t-3t+7-5-11=0$$

$$-t-9=0 \Rightarrow t=-9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0=1-9=-8 \\ y_0=-1+9=8 \\ z_0=-9 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{N(-8,8,-9)}$

៤. គណនាចម្ងាយពី A ទៅប្លង់ (BCD)

$$d(A,(BCD))=\frac{|7(-1)+5\cdot 1-11|}{\sqrt{7^2+5^2+(-3)^2}}$$

$$=\frac{|-13|}{\sqrt{83}}=\frac{13}{\sqrt{83}}\text{(ឯកតាប្រវែង)}$$

ដូចនេះ $\boxed{d(A,(BCD))=\frac{13}{\sqrt{83}}\text{(ឯកតាប្រវែង)}}$

• ទាញរកមាឌតេត្រាអែដ $ABCD$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\cdot d$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{83}\cdot\frac{13}{\sqrt{83}}=\frac{13}{6}\text{(ឯកតាមាឌ)}$$

ដូចនេះ $\boxed{V_{ABCD}=\frac{13}{6}\text{(ឯកតាមាឌ)}}$

VI. f ជាអនុគមន៍ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $y=f(x)=-x-2+\frac{4e^x}{e^x+1}$

ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ មួយ

១.គណនា $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-2+\frac{4e^x}{e^x+1}\right)=+\infty$$

$$=+\infty \text{ (ព្រោះ } \lim_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{e^x+1}=\frac{4\times0}{0+1}=0\text{)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x-2+\frac{4e^x}{e^x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x-2+\frac{4}{1+\frac{1}{e^x}}\right)$$

$$=-\infty \text{ (ព្រោះ } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\text{)}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$

• រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) កាលណា $x\to-\infty$

គេមាន $y=f(x)=-x-2+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

ដោយ $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+1}=\dfrac{4\times0}{0+1}=0$

នាំឲ្យ $y=-x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=-x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ។

ម្យ៉ាងទៀត $y=f(x)=-x+2-4+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

$$\text{ហើយ } \lim_{x\to+\infty}\left(-4+\frac{4e^x}{e^x+1}=\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-4+\frac{4}{1+\frac{1}{e^x}}\right)=-4+4=0$$

នាំឲ្យ $y=-x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=-x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយបង្ហាញថា $f'(x)\le 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

$$f'(x)=-1+4\left(\frac{e^x(e^x+1)-e^xe^x}{(e^x+1)^2}\right)=-1+4\left(\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}\right)$$

$$=-1+\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{-(e^x+1)^2+4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{-e^{2x}-2e^x-1+4e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x+1)^2}=-\frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}=-\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=-\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}}$

ដោយ $(e^x-1)^2>0$, $(e^x+1)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

នាំឲ្យ $\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}>0$ នាំឲ្យ $-\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}<0$

នោះ $f'(x)\le 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $f'(x)\le 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\in\mathbb{R}$ ។

• គណនា $f'(0)$, $f(0)$

$$f'(0)=-\frac{(e^0-1)^2}{(e^0+1)^2}=0,\ f(0)=-0-2+\frac{4e^0}{e^0+1}=-2+\frac{4}{2}=-2+2=0$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(0)=f(0)=0}$

• សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$

៣.បង្ហាញថាគល់កូអរដោនេ O ជាចំណុចរបត់

$$f''(x)=\frac{2e^x(e^x-1)(e^x+1)^2-2e^x(e^x+1)(e^x-1)^2}{(e^x+1)^4}$$

$$=\frac{2e^x(e^x-1)(e^x+1)-2e^x(e^x-1)^2}{(e^x+1)^3}$$

$$=\frac{2e^x(e^x-1)(e^x+1-e^x+1)}{(e^x+1)^3}=\frac{4e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$$

ដោយ $e^x>0$, $(e^x+1)^3>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះ $f''(x)$ មានសញ្ញាដូច e^x-1

បើ $f''(x)=0$ នោះ $e^x-1=0\Rightarrow x=0$

បើ $f''(x)<0$ នោះ $e^x-1<0\Rightarrow x<0$

បើ $f''(x)>0$ នោះ $e^x-1>0\Rightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

ដោយ $f''(x)=0$ ត្រង់ $x=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាត្រង់ $O(0,0)$ ជាចំណុចរបត់

ដូចនេះ គល់កូអរដោនេ $O(0,0)$ ជាចំណុចរបត់។

• បង្ហាញថាគល់ $O(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោ (C)

បើ $O(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) កាលណាផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$f(2a-x)+f(x)=2b$

តែ $a=b=0$ នោះ $2b=0$ (1)

គណនា $f(2a-x)+f(x)=f(0-x)+f(x)=f(-x)+f(x)$

$$=\left(-(-x)-2+\frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)+\left(-x-2+\frac{4e^x}{e^x+1}\right)$$

$$=\left(x-2+\frac{4/e^x}{(e^x+1)/e^x}\right)+\left(-x-2+\frac{4e^x}{e^x+1}\right)$$

$$=\left(x-2+\frac{4}{e^x+1}\right)+\left(-x-2+\frac{4e^x}{e^x+1}\right)$$

$$=-4+\frac{4e^x+4}{e^x+1}=-4+4\left(\frac{e^x+1}{e^x+1}\right)=-4+4=0 \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) នាំឲ្យ $f(2a-x)+f(x)=2b$ ចំពោះ $a=b=0$

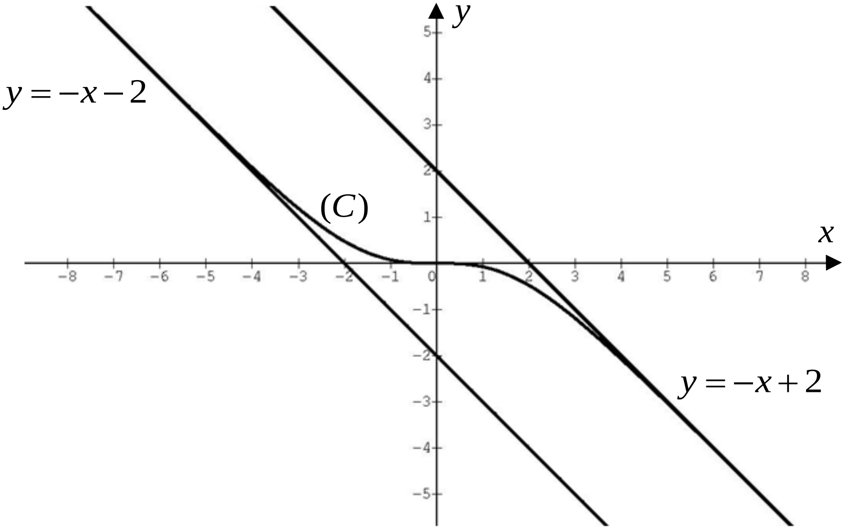
ដូចនេះ $O(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) ។

៤.គណនា $f(3)$ ហើយសង់ខ្សែកោង (C)

$$f(3)=-3-2+\frac{4e^3}{e^3+1}=-5+\frac{4\times 20}{20+1}=-1.19$$

បន្ទាត់ $y=-x-2$

x	-2	0
y	0	-2



• ដោះស្រាយវិសមីការ

$$\frac{4e^x}{e^x+1} \geq x+2 \Leftrightarrow -x-2+\frac{4e^x}{e^x+1} \geq 0$$

តាមក្រាបយើងឃើញថា ក្រាប (C) នៅលើអ័ក្ស $\overrightarrow{x'x}$ កាលណា $x \leq 0$

ដូចនេះ $x \leq 0$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ $\frac{4e^x}{e^x+1} \geq x+2$ ។

វិញ្ញាសាទី 8

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណេះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា

សម័យប្រឡង: 27 **កក្កដា** 2009

រយៈពេល ១៥០នាទី ពិន្ទុ១២៥

I. សរសេរ $A=\frac{2(1+i)}{1-i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចជាទម្រង់ពីជគណិត។

II. មេបញ្ជាការកងទ័ពការពារព្រំដែន បានបង្កើតចំនួនសម្ងាត់ដែលជាចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់ ហើយលេខទាំងបីខ្ទង់នោះខុសគ្នា ដោយប្រើលេខក្នុងចំណោមលេខពី 1 ដល់ 9 ។

១.តើមេបញ្ជាការអាចបង្កើតចំនួនសម្ងាត់បានទាំងអស់ប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា

២.មេបញ្ជាការបានជ្រើសរើសយកចំនួនសម្ងាត់មួយដោយចៃដន្យ ដើម្បីប្រើក្នុងពេលចេញធ្វើប្រតិបត្តិការសឹក។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A: "ចំនួនសម្ងាត់ជាចំនួនគត់គូ"

B: "ចំនួនសម្ងាត់ជាចំនួនគត់សេស" ។

III.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=2x+1$ ។

១.ដោះស្រាយសមីការ $(E_1): y''-3y'+2y=0$ ។ កំណត់ចម្លើយ f នៃ (E_1) ដែល $f(0)=3$ និង $f'(0)=4$ ។

២.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

IV. ១.រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំនៃអេលីប

$(E): 4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

២.រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយ ហើយសង់អេលីប (E) ដោយយក $\frac{4\sqrt{2}}{3}=1.9$ ។

V.ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ គេដៅចំណុច $A(2,2,0)$, $B(0,2,2)$ និង $C(1,0,1)$ ។

១.រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វទាំងពីររវាងស្វ៊ែ (S) និងបន្ទាត់ (d) ដែលមានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $x=1+t$, $y=2$ និង $z=1+t$ ដែល t ជាចំនួនពិត។

២.រកកូអរដោនេនៃផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\vec{CA}\times\vec{CB}$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ រកសមីការប្លង់ (ABC) ។

៣.ប្លង់ (ABC) ជួប (ox) ត្រង់ M និងជួប (oz) ត្រង់ N ។ រកកូអរដោនេនៃ M និង N ។ បង្ហាញថា $\vec{AB}=\vec{MN}$ និង $\vec{MA}\cdot\vec{MN}=0$ ។ ទាញបញ្ជាក់ថា $ABNM$ ជាចតុកោណកែង។

៤.រកចម្ងាយពីចំណុច $D(0,2,0)$ ទៅប្លង់ (ABC) ។ ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $DBCA$ ។

VI. f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x ដោយ

$y=f(x)=-x-\dfrac{4\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ មួយ។

១.គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

២.បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(L): y=-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។ សិក្សាទីតាំងរវាង (C) និង (L) ។

៣.បង្ហាញថាដេរីវេ $f'(x)<0$ បើគេដឹងថា $x^2+4-4\ln x>0$ ចំពោះ $x>0$ ។ សង់តារាងថេរភាពនៃ f ។ បន្ទាត់ (D) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (L) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និងសមីការនៃបន្ទាត់ (D) ។

៤.សង់ $(L),(D)$ និង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ដោយយក $e=2.7$, $\dfrac{4}{e}=1.5$ ។ គេយក $S(a)$ ជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតទ្រេត (L) ដែលត្រូវនឹង $1\le x\le a$ ។ រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $S(a)=2$ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ។

អត្រាកំណែ

I. សរសេរ $A=\dfrac{2(1+i)}{1-i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$A=\frac{2(1+i)}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{A=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}$

• សរសេរ A ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$A=\frac{2(1+i)}{1-i\sqrt{3}}=\frac{2(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}=\frac{2(1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3})}{1+3}$$

$$=\frac{2[(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})]}{4}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$

II.មេបញ្ជាការកងទ័ពការពារព្រំដែន បានបង្កើតចំនួនសម្ងាត់ដែលជាចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់ ហើយលេខទាំងបីខ្ទង់នោះខុសគ្នា ដោយប្រើលេខក្នុងចំណោមលេខពី 1 ដល់ 9 ។

១.រកចំនួនរបៀបនៃការបង្កើតចំនួនសម្ងាត់ដែលមានលេខបីខ្ទង់

លេខខ្ទង់រយមាន 9 របៀប

លេខខ្ទង់ដប់មាន 8 របៀប

លេខខ្ទង់រាយមាន 7 របៀប

តាមគោលការណ៍របាប់គេបាន $n(S)=9\times 8\times 7=504$

ដូចនេះ គេអាចបង្កើតចំនួនសម្ងាត់បាន 504 របៀប។

២.រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A: "ចំនួនសម្ងាត់ជាចំនួនគត់គូ"

លេខខ្ទង់រាយមាន 4 របៀប (ព្រោះលេខគូមានចំនួន4លេខ)

លេខខ្ទង់ដប់មាន 8 របៀប

លេខខ្ទង់រាយមាន 7 របៀប

តាមគោលការណ៍របាប់គេបាន $n(A)=4\times 8\times 7=224$

គេបានប្រូបាប $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{224}{504}=\dfrac{4}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{4}{9}}$

B: "ចំនួនសម្ងាត់ជាចំនួនគត់សេស"

លេខខ្ទង់រាយមាន 5 របៀប (ព្រោះលេខសេសមានចំនួន5លេខ)

លេខខ្ទង់ដប់មាន 8 របៀប

លេខខ្ទង់រាមាន 7 របៀប

តាមគោលការណ៍របាប់គេបាន $n(B)=5\times 8\times 7=280$

គេបានប្រូបាប $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{280}{504}=\dfrac{5}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{5}{9}}$

III.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=2x+1$

១.ដោះស្រាយសមីការ $(E_1): y''-3y'+2y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2-3r+2=0$ មានរាង $a+b+c=0$

គឺ $1-3+2=0$ គេបាន $r_1=1$, $r_2=\dfrac{c}{a}=2$

គេបានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^{x}+Be^{2x}$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ $y=Ae^{x}+Be^{2x}$ ដែល $A,B\in\mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E_1) ។

• កំណត់ចម្លើយ f នៃ (E_1) ដែល $f(0)=3$ និង $f'(0)=4$ ។

ដោយ $y=Ae^{x}+Be^{2x}\Rightarrow y'=Ae^{x}+2Be^{2x}$

បើ $y(0)=3$ នោះ $3=Ae^{0}+Be^{2\times 0}\Leftrightarrow A+B=3\ \ (1)$

បើ $y'(0)=4$ នោះ $4=Ae^{0}+2Be^{2\times 0}\Leftrightarrow A+2B=4\ \ (2)$

យក (2) ដក (1) គេបាន $B=1$

តាម $(1)\Rightarrow A=3-B=3-1=2$

ដូចនេះ $y=2e^{x}+e^{2x}$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E_1) ។

២.កំណត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $g(x)=ax+b\Rightarrow g'(x)=a$ និង $g''(x)=0$

យក $g(x), g'(x)$ និង $g''(x)$ គេបាន

$$g''(x)-3g'(x)+2g(x)=2x+1$$

$$0-3a+2(ax+b)=2x+1\Leftrightarrow 2ax+2b-3a=2x+1$$

គេទាញបាន $\begin{cases}2a=2\\ 2b-3a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=1\,,\,b=2}$

IV. ១.រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំនៃអេលីប (E)

$$4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$$

$$(4x^2-8x+4)+(9y^2+36y+36)-36=0$$

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2+4y+4)=36$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{2^2}$$

មានទម្រង់ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ដែលមានអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។ គេទាញបាន $h=1\,,\,k=-2\,,\,a=3\,,\,b=2$ ហើយ $c^2=a^2-b^2$

ឬ $c^2=9-4=5\Rightarrow c=\sqrt{5}$

គេបានផ្ចិត $I(h,k)=I(1,-2)$

កំពូល $S_1(h-a,k)=S_1(-2,-2)$ និង $S_2(h+a,k)=S_2(4,-2)$

កំណុំ $F_1(h-c,k)=F_1(1-\sqrt{5},-2)$ និង $F_2(h+c,k)=F_2(1+\sqrt{5},-2)$

២.រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយ

រក $(E)\cap(\overrightarrow{ox})$ គឺ $y=0$ នោះ $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(0+2)^2}{4}=1$

$$\frac{(x-1)^2}{9}=1-\frac{4}{4}=0\Rightarrow(x-1)^2=0\Rightarrow x=1$$

ដូចនេះ (E) កាត់អ័ក្ស $(\overrightarrow{ox})$ ត្រង់ $(x=1\,,\,y=0)$ ។

រក $(E)\cap(\overrightarrow{oy})$ គឺ $x=0$ នោះ $\dfrac{(0-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

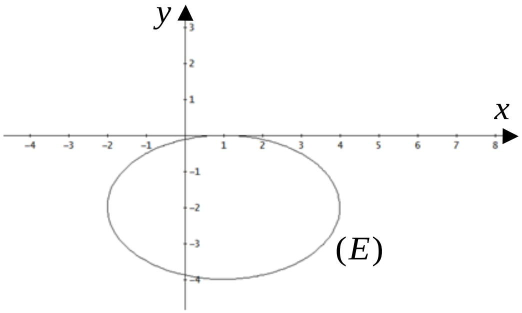
$$\frac{(y+2)^2}{4}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\Rightarrow(y+2)^2=\frac{32}{9}\Rightarrow y+2=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

ចំពោះ $y+2=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\Rightarrow y=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}-2=-1.9-2=-3.9$

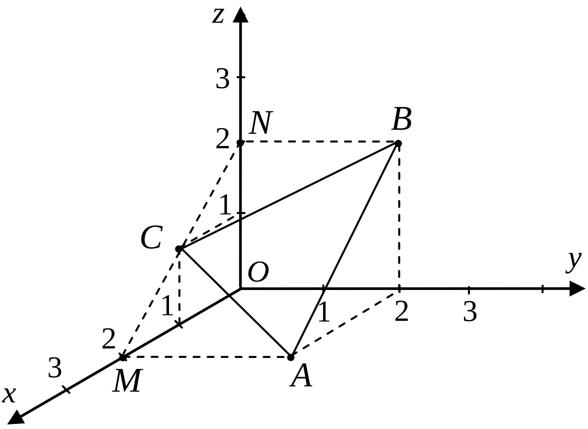
ចំពោះ $y+2=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}-2=1.9-2=-0.1$

ដូចនេះ (E) កាត់អ័ក្ស $(\overrightarrow{oy})$ ត្រង់ $(0,-3.9)$ និង $(0,-0.1)$ ។

• សង់អេលីប (E)



V.ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ គេដៅចំណុច $A(2,2,0)$, $B(0,2,2)$ និង $C(1,0,1)$ ។



១.រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$

គេមាន $A(2,2,0)$, $B(0,2,2)$ និង $C(1,0,1)$

$\overrightarrow{AB}(0-2,2-2,2-0)$ ឬ $\overrightarrow{AB}(-2,0,2)$

កាំស្វ៊ែ $R=\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2}=\dfrac{\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

ផ្ចិតស្វ៊ែ $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

ឬ $I\left(\dfrac{2+0}{2},\dfrac{2+2}{2},\dfrac{0+2}{2}\right)$ ឬ $I(1,2,1)$

តាមរូបមន្ត $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

គេបាន $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=(\sqrt{2})^2$

$$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$$

ដូចនេះ $\boxed{(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2}$

• រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វទាំងពីររវាងស្វ៊ែ (S) និងបន្ទាត់ (d)

យក $x=1+t$, $y=2$ និង $z=1+t$ ជំនួសក្នុងសមីការស្វ៊ែ (S)

គេបាន $(1+t-1)^2+(2-2)^2+(1+t-1)^2=2$

$$t^2+t^2=2 \Leftrightarrow 2t^2=2 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow t=\pm 1$$

ចំពោះ $t=-1$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x=1-1=0 \\ y=2 \\ z=1-1=0 \end{cases}$

ចំពោះ $t=1$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x=1+1=2 \\ y=2 \\ z=1+1=2 \end{cases}$

ដូចនេះ បន្ទាត់ (d) កាត់ស្វ៊ែ (S) ត្រង់ពីរចំណុចគឺ $(0,2,0)$ និង $(2,2,2)$ ។

២.រកកូអរដោនេនៃផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\vec{CA}\times\vec{CB}$

$\vec{CA}(2-1,2-0,0-1)$ ឬ $\vec{CA}(1,2,-1)$

$\vec{CB}(0-1,2-0,2-1)$ ឬ $\vec{CB}(-1,2,1)$

$$\vec{n}=\vec{CA}\times\vec{CB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i}$$

$$\vec{n}=\vec{CA}\times\vec{CB}=4\,\vec{i}+0\,\vec{j}+4\,\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{n}=\vec{CA}\times\vec{CB}=4\,\vec{i}+0\,\vec{j}+4\,\vec{k}}$

• គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\|\vec{CA}\times\vec{CB}\|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+0^2+4^2}=\frac{4}{2}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=2\sqrt{2}\,(\text{ឯកតាផ្ទៃក្រឡា})}$

• រកសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\vec{CA}\times\vec{CB}(4,0,4)$

គេបានសមីការ $(ABC):4x+0y+4z+d=0$

ដោយប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច $A(2,2,0)$

នាំឲ្យ $4\cdot 2+0\cdot 2+4\cdot 0+d=0\Rightarrow d=-8$

គេបាន $(ABC):4x+0y+4z-8=0$ ឬ $(ABC):x+z-2=0$

ដូចនេះ $\boxed{(ABC):x+z-2=0}$

៣.រកកូអរដោនេនៃ M និង N

ប្លង់ (ABC) ជួប (ox) គឺ $y=z=0$ នាំឲ្យ $x=2$

ដូចនេះ $\boxed{M(2,0,0)}$

ប្លង់ (ABC) ជួប (oz) គឺ $x=y=0$ នាំឲ្យ $z=2$

ដូចនេះ $\boxed{N(0,0,2)}$

• បង្ហាញថា $\vec{AB}=\vec{MN}$ និង $\vec{MA}\cdot\vec{MN}=0$

$\vec{MN}(0-2,0-0,2-0)$ ឬ $\vec{MN}(-2,0,2)$

តែ $\vec{AB}(-2,0,2)$ នាំឲ្យ $\vec{AB}=\vec{MN}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{AB}=\vec{MN}}$

$\vec{MA}(2-2,2-0,0-0)$ ឬ $\vec{MA}(0,2,0)$

នាំឲ្យ $\vec{MA}\cdot\vec{MN}=0(-2)+2\cdot 0+0\cdot 2=0+0+0=0$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{MA}\cdot\vec{MN}=0}$

• ទាញបញ្ជាក់ថា $ABNM$ ជាចតុកោណកែង។

ដោយ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ នាំឲ្យ $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MN}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MN}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}\end{array}\right|\Rightarrow ABNM \text{ ជាចតុកោណកែង}$$

ដូចនេះ $ABNM$ ជាចតុកោណកែង ។

៤.រកចម្ងាយពីចំណុច $D(0,2,0)$ ទៅប្លង់ (ABC) ។

ប្លង់ $(ABC): x+z-2=0$

តាង h ជាចម្ងាយពីចំណុច $D(0,2,0)$ ទៅប្លង់ (ABC)

គេបាន $h=\dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\boxed{h=\sqrt{2}\text{ (ឯកតាប្រវែង)}}$

• ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $DBCA$ ។

$$V_{DBCA}=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times h$$

ដោយ $h=\sqrt{2}$, $S_{ABC}=2\sqrt{2}$

គេបាន $V_{DBCA}=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\dfrac{4}{3}$ (ឯកតាមាឌ)

ដូចនេះ $\boxed{V_{DBCA}=\dfrac{4}{3}\text{ (ឯកតាមាឌ)}}$

VI. គេមាន $y=f(x)=-x-\dfrac{4\ln x}{x}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ហើយមានក្រាប (C)

១.គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-x-\frac{4\ln x}{x}\right)=+\infty$$

ព្រោះ $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ និង $\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{4\ln x}{x}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x-\frac{4\ln x}{x}\right) = -\infty$ ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

• ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = 0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

២.បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(L): y = -x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

គេមាន $f(x) = -x - \frac{4\ln x}{x}$

ដោយ $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4\ln x}{x}\right) = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(L): y = -x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• សិក្សាទីតាំងរវាង (C) និង (L)

$$f(x) - y = \left(-x - \frac{4\ln x}{x}\right) - (-x) = -\frac{4\ln x}{x}$$

ដោយ $x > 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$ នោះ $f(x) - y$ មានសញ្ញាដូច $-\ln x$

បើ $f(x) - y = 0$ នោះ $-\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

បើ $f(x) - y < 0$ នោះ $-\ln x < 0 \Rightarrow x > 1$

បើ $f(x) - y > 0$ នោះ $-\ln x > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

ចំពោះ $0 < x < 1$ ខ្សែកោង (C) នៅខាងលើបន្ទាត់ (L)

ចំពោះ $x=1$ ខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (L) ជួបគ្នាត្រង់ $(1\,,\,0)$

ចំពោះ $x>1$ ខ្សែកោង (C) នៅខាងក្រោមបន្ទាត់ (L) ។

៣.បង្ហាញថាដេរីវេ $f'(x)<0$ បើគេដឹងថា $x^2+4-4\ln x>0$ ចំពោះ $x>0$

$$f(x)=-x-\frac{4\ln x}{x}$$

$$f'(x)=-1-\frac{\frac{4}{x}x-4\ln x}{x^2}=-1-\frac{4-4\ln x}{x^2}=\frac{-(x^2+4-4\ln x)}{x^2}$$

ដោយ $x^2>0\,,\ \forall x>0$ និង $x^2+4-4\ln x>0$ ចំពោះ $x>0$

នាំឲ្យ $\dfrac{-(x^2+4-4\ln x)}{x^2}<0$ នោះ $f'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

ដូចនេះ $f'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

• សង់តារាងថេរភាពនៃ f

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

• រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និងសមីការនៃបន្ទាត់ (D)

$$f'(x)=\frac{-(x^2+4-4\ln x)}{x^2}$$ និង $(L):y=-x$

ដោយបន្ទាត់ (D) ស្របនឹងបន្ទាត់ $(L):y=-x$ នោះ $(D):y=-x+b$

បន្ទាត់ (D) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A នោះ $f'(x_o)=-1$

នាំឲ្យ $\dfrac{-(x_o^2+4-4\ln x_o)}{x_o^2}=-1$ ឬ $\dfrac{-4+4\ln x_o}{x_o^2}=0\,,\ x_o>0$

នាំឲ្យ $-4+4\ln x_o=0 \Rightarrow \ln x_o=1 \Rightarrow x_o=e$

គេបាន $y_o=f(e)=-e-\dfrac{4\ln e}{e}=-e-\dfrac{4}{e}$

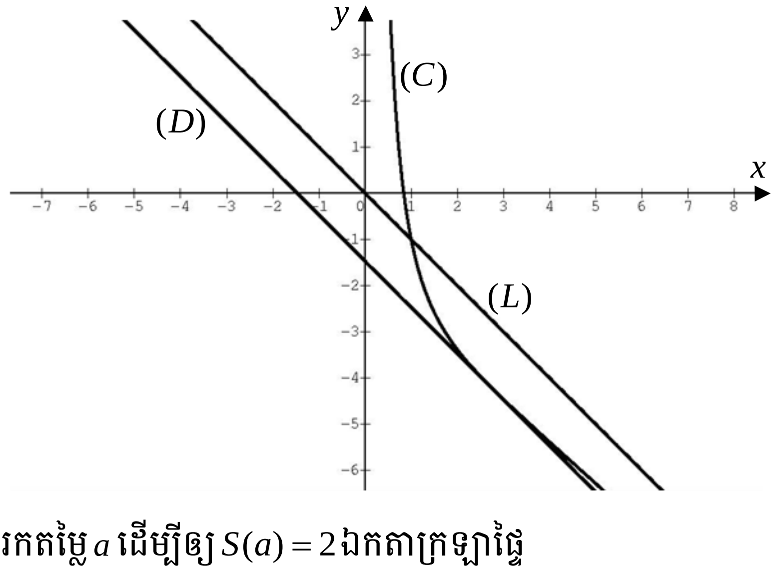
ដូចនេះ កូអរដោនេនៃ A គឺ $(e\,,-e-\dfrac{4}{e})$ ។

បន្ទាត់ $(D):y=-x+b$ កាត់តាម $A(e\,,-e-\dfrac{4}{e})$

គេបាន $-e-\dfrac{4}{e}=-e+b \Rightarrow b=-\dfrac{4}{e}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ $\boxed{(D):y=-x-\dfrac{4}{e}}$

៤.សង់ $(L),(D)$ និង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$



• រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $S(a)=2$ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ

$$S(a)=\int_1^a\left(-x-\left(-x-\frac{4\ln x}{x}\right)\right)=4\int_1^a\frac{\ln x}{x}dx=\left[\,2(\ln x)^2\,\right]_1^a$$

$$S(a)=2(\ln a)^2-2(\ln 1)^2=2(\ln a)^2-0=2(\ln a)^2$$

ដោយ $S(a)=2$ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ

នាំឲ្យ $2(\ln a)^2 = 2 \Leftrightarrow (\ln a)^2 = 1$ នាំឲ្យ $\left[\begin{array}{l}\ln a = 1 \\ \ln a = -1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = e \\ a = e^{-1} < 1\end{array}\right.$

ដូចនេះ ដើម្បីឲ្យ $S(a) = 2$ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃលុះត្រាតែ $a = e$ ។

វិញ្ញាសាទី 9

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណេះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា

សម័យប្រឡង: 26 កក្កដា 2010

រយៈពេល ១៥០នាទី ពិន្ទុ១២៥

I. គណនាលីមីត:

$$A = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{2\cos x} - 1}{2\cos 2x + 1} \qquad B = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{(a+x)^3} - \frac{1}{a^3}}{x}$$

II. ១.ដោះស្រាយសមីការ $Z^2 - 2\sqrt{2}Z + 4 = 0 \quad (1)$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច។

រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃឫសនីមួយៗរបស់សមីការ (1) ។

២.សរសេរ $W = \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

III. ១.ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 6y' + 8y = 0 \quad (\alpha)$ ។

២.រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (α) ដោយដឹងថាក្រាប (C) របស់វា

ប៉ះនឹងបន្ទាត់ដេកមួយនៅត្រង់ចំណុច $E(0,-1)$ ។

IV. ទេសចរមួយក្រុមមានបុរស 3 នាក់ និងស្ត្រី 5 នាក់បានឈរបន្តបន្ទាប់គ្នាជាជួរដោយចៃដន្យ ដើម្បីទិសសំបុត្រចូលទស្សនាប្រាសាទអង្គរវត្ត។

១.រកចំនួនរបៀបនៃការឈរបន្តបន្ទាប់គ្នាជាជួររបស់ក្រុមទេសចរនោះ។

២.រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗ :

A :ទេសចរដែលឈរនៅមុខគេបង្អស់ជាស្ត្រី

B :ទេសចរជាបុរសទាំងអស់ឈរនៅជាប់ៗគ្នា។

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យចំណុច $A(-1,2,1)$, $B(1,-6,-1)$ និង $C(2,2,2)$ ។

១.គណនា $\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}$ ។ កំណត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A,B និង C ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។ កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ (d) កាត់តាមចំណុច $J(-2,0,0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(3,0,1)$ ។

២.រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r នៃស្វ៊ែ (S) ដែលមានសមីការ $x^2+y^2+z^2-2y+2z-2=0$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង (S) និងបន្ទាត់ (d) ។

៣.គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។ គណនាចម្ងាយពីចំណុច $D(0,1,-1)$ ទៅប្លង់ (P) ។

VI. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\neq-2$ និងមានខ្សែកោង (C) ។

១.គណនា $f'(x)$ ។ រកតម្លៃបរមានៃ f ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (C) ។ គណនាលីមីតនៃ f កាលណា x ខិតទៅរក $+\infty$, $-\infty$ ។ សង់តារាងអថេរភាព

នៃ f ។

២.រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x_o=1$។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងសមីការបន្ទាត់ប៉ះនិងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

៣.សង់ខ្សែកោង (C) សមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃ (C) និងអាស៊ីតូតក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់តែមួយ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=1$, $x=2$ ។

អត្រាកំណែ

I. គណនាលីមីត:

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{2\cos x}-1}{2\cos 2x+1} \quad \text{មានរាង } \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{[2(2\cos^2 x-1)+1](\sqrt{2\cos x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{(4\cos^2-1)(\sqrt{2\cos x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{(2\cos x-1)(2\cos x+1)(\sqrt{2\cos x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(2\cos x+1)(\sqrt{2\cos x}+1)}=\frac{1}{(1+1)(1+1)}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{2\cos x}-1}{2\cos 2x+1}=\frac{1}{4}}$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(a+x)^3}-\frac{1}{a^3}}{x} \quad \text{មានរាង } \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{a+x} - \frac{1}{a}\right)\left[\left(\frac{1}{a+x}\right)^2 + \left(\frac{1}{a+x}\right)\left(\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right]}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{a-a-x}{a(a+x)}\right)\left[\left(\frac{1}{a+x}\right)^2 + \left(\frac{1}{a+x}\right)\left(\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right]}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{-x}{a(a+x)}\right)\left[\left(\frac{1}{a+x}\right)^2 + \left(\frac{1}{a+x}\right)\left(\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right]}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{-1}{a(a+x)}\right)\left[\left(\frac{1}{a+x}\right)^2 + \left(\frac{1}{a+x}\right)\left(\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right]$$

$$= \left(-\frac{1}{a^2}\right)\left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right] = -3\left(\frac{1}{a}\right)^2\left(\frac{1}{a}\right)^2 = -3\left(\frac{1}{a}\right)^4$$

ដូចនេះ $\boxed{B = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{(a+x)^3} - \frac{1}{a^3}}{x} = -3\left(\frac{1}{a}\right)^4}$

II. ១.ដោះស្រាយសមីការ $Z^2 - 2\sqrt{2}Z + 4 = 0$ (1) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច។

$\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 4 = 2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$

នាំឲ្យ $Z_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $Z_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\boxed{Z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \, , \, Z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

• រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃឫសនីមួយៗរបស់សមីការ (1)

ចំពោះ $Z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

ម៉ូឌុល $r_1 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = 2$

អាគុយម៉ង់ θ_1 ដែល $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{a}{r_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{b}{r_1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

នាំឲ្យ $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\boxed{r_1 = 2 \ , \ \theta_1 = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

ចំពោះ $Z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

ម៉ូឌុល $r_2 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = 2$

អាគុយម៉ង់ θ_2 ដែល $\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{a}{r_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{b}{r_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

នាំឲ្យ $\theta_2 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\boxed{r_2 = 2 \ , \ \theta_2 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

២.សរសេរ $W = \left(\dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} \right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $\dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \dfrac{Z_2}{Z_1} = \dfrac{2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} \right)}{2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4} \right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4} \right) \right]}$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

គេបាន $W=\left(\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^2=(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{4})^2=\cos\pi+i\sin\pi$

ដូចនេះ $\boxed{W=\cos\pi+i\sin\pi}$

III. ១.ដោះស្រាយសមីការ $y''-6y'+8y=0 \quad (\alpha)$

សមីការសម្គាល់ $r^2-6r+8=0$

$\Delta'=(-3)^2-8=9-8=1$

នាំឲ្យ $r_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=3-1=2$, $r_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=3+1=4$

គេបានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^{2x}+Be^{4x}$ ដែល A,B ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ $y=Ae^{2x}+Be^{4x}$ ដែល $A,B\in\mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (α) ។

២.រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (α)

គេមាន $g(x)=Ae^{2x}+Be^{4x}\Rightarrow g'(x)=2Ae^{2x}+4Be^{4x}$

ដោយក្រាប (C) នៃ g ប៉ះនឹងបន្ទាត់ដេកមួយនៅត្រង់ចំណុច $E(0,-1)$

គេបាន $\begin{cases}g'(0)=0\\ g(0)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2A+4B=0\\ A+B=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+2B=0\\ A+B=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\ B=1\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=-2e^{2x}+e^{4x}}$

IV. ទេសចរមួយក្រុមមានបុរស 3 នាក់ និងស្ត្រី 5 នាក់បានឈរបន្តបន្ទាប់គ្នាជាជួរដោយចៃដន្យ ដើម្បីទិសសំបុត្រចូលទស្សនាប្រាសាទអង្គរវត្ត។

១.រកចំនួនរបៀបនៃការឈរបន្តបន្ទាប់គ្នាជាជួររបស់ក្រុមទេសចរនោះ

ចំនួនរបៀបនៃការឈរបន្តបន្ទាប់គ្នាជាជួររបស់ក្រុមទេសចរគឺ $8!=40320$

ដូចនេះ គេអាចឈរបន្តបន្ទាប់គ្នាជាជួរបាន $n(S)=40320$ របៀប។

២.រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗ :

A:ទេសចរដែលឈរនៅមុខគេបង្អស់ជាស្ត្រី

ស្ត្រីមាន 5 នាក់ នោះគេបានចំនួនរបៀបដែលស្ត្រីឈរនៅមុខគេបង្អស់

ស្មើនឹង $n(A)=5\times 7!=25200$

គេបានប្រូបាប $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5\times 7!}{8!}=\frac{5\times 7!}{7!\times 8}=\frac{5}{8}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\frac{5}{8}}$

B:ទេសចរជាបុរសទាំងអស់ឈរនៅជាប់ៗគ្នា

បុរសមាន 3 នាក់ នោះចំនួនរបៀបដែលបុរសទាំងអស់ឈរនៅជាប់ៗគ្នា

ស្មើនឹង $n(B)=3!\cdot 6!=6\times 720=4320$

គេបានប្រូបាប $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3!6!}{8!}=\frac{6\cdot 6!}{8\cdot 7\cdot 6!}=\frac{6}{8\cdot 7}=\frac{3}{28}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{3}{28}}$

V.១.គណនា $\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}$

គេមាន $A(-1,2,1)$, $B(1,-6,-1)$ និង $C(2,2,2)$

$\vec{AB}(1+1,-6-2,-1-1)$ ឬ $\vec{AB}(2,-8,-2)$

$\vec{AC}(2+1,2-2,2-1)$ ឬ $\vec{AC}(3,0,1)$

$$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -8 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-8 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -8\\ 3 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=-8\vec{i}-8\vec{j}+24\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=-8\vec{i}-8\vec{j}+24\vec{k}}$

• កំណត់សមីការប្លង់ (P)

ប្លង់ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \vec{AB}\times\vec{AC}(-8,-8,24)$

គេបានសមីការ (P) គឺ $-8x-8y+24z+d=0$

ដោយ (P) កាត់តាម $C(2,2,2)$ នោះ $-8\cdot 2-8\cdot 2+24\cdot 2+d=0$

$-16-16+48+d=0$ ឬ $-32+48+d=0 \Rightarrow d=-48+32=-16$

គេបាន $(P):-8x-8y+24z-16=0$ ឬ $(P):-x-y+3z-2=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):-x-y+3z-2=0}$

• កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d)

ដោយ (d) កាត់តាម $J(-2,0,0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(3,0,1)$

តាមរូបមន្ត $(d):\begin{cases} x=x_o+at \\ y=y_o+bt \\ z=z_o+ct\ ,\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

គេបាន $(d):\begin{cases} x=-2+3t \\ y=0+0\cdot t \\ z=0+t\ ,\ t\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases} x=-2+3t \\ y=0 \\ z=t\quad ,\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{(d):x=-2+3t\ ,\ y=0\ ,\ z=t\ ,(t\in\mathbb{R})}$

២.រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r នៃស្វ៊ែ (S)

គេមានសមីការ $x^2+y^2+z^2-2y+2z-2=0$

$(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2-1-1-2=0$

$(x-0)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2^2$

មានទម្រង់ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

គេទាញបាន $a=0,b=1,c=-1,r=2$

ដូចនេះ ផ្ចិត $I(0,1,-1)$ និងកាំ $r=2$ ។

• រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង (S) និងបន្ទាត់ (d)

តាង $M(x_o, y_o, z_o)$ ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (S) និងបន្ទាត់ (d)

យក $x_o = -2+3t$, $y_o = 0$, $z_o = t$ ជំនួសក្នុងស្វ៊ែ (S)

គេបាន $(-2+3t-0)^2+(0-1)^2+(t+1)^2 = 2^2$

$$4-12t+9t^2+1+t^2+2t+1=4$$

$$10t^2-10t+2=0 \Leftrightarrow 5t^2-5t+1=0$$

$$\Delta = (-5)^2-4\times5\times1 = 25-20=5$$

នាំឲ្យ $t_1 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$, $t_2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$

ចំពោះ $t_1 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$ គេបាន $\begin{cases} x_o = -2+3\cdot\dfrac{5-\sqrt{5}}{10} = \dfrac{-5-3\sqrt{5}}{10} \\ y_o = 0 \\ z_o = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{M_1\left(\dfrac{-5-3\sqrt{5}}{10}, 0, \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$

ចំពោះ $t_2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ គេបាន $\begin{cases} x_o = -2+3\cdot\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} = \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{10} \\ y_o = 0 \\ z_o = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{M_2\left(\dfrac{-5+3\sqrt{5}}{10}, 0, \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}$

៣.គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2+(-8)^2+24^2}$$

$$=\frac{\sqrt{64+64+576}}{2}=\frac{\sqrt{704}}{2}=\frac{\sqrt{64\times 11}}{2}=\frac{8\sqrt{11}}{2}=4\sqrt{11}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=4\sqrt{11}\text{(ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)}}$

• គណនាចម្ងាយពីចំណុច $D(0,1,-1)$ ទៅប្លង់ (P) ។

តាង h ជាចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ $(P): -x-y+3z-2=0$

គេបាន $h=\frac{|-0-1+3(-1)-2|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{|-1-3-2|}{\sqrt{1+1+9}}=\frac{6}{\sqrt{11}}=\frac{6\sqrt{11}}{11}$

ដូចនេះ $\boxed{h=\frac{6\sqrt{11}}{11}\text{(ឯកតាប្រវែង)}}$

VI. ១.គណនា $f'(x)$

$$f(x)=\frac{x^2+3x+6}{x+2}\ ,\ x\neq -2$$

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x+2)-(x^2+3x+6)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+7x+6-x^2-3x-6}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}}$

• រកតម្លៃបរមានៃ f

ដោយ $(x+2)^2>0$, $\forall x\neq -2$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x(x+4)$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $x(x+4)=0\Rightarrow x=0$, $x=-4$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

អនុគមន៍ f មានអតិបរមាត្រង់ $x=-4$ គឺ $f(-4)=-5$

អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=3$ ។

• រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (C)

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+3x+6}{x+2}=\frac{4-6+6}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+3x+6}{x+2}=\frac{4-6+6}{0^+}=+\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to -2} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង (C) ។

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}=x+1+\dfrac{4}{x+2}$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x+2}=0$ នោះបន្ទាត់ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ។

• គណនាលីមីតនៃ f កាលណា x ខិតទៅរក $+\infty$, $-\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+3x+6}{x+2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to -\infty}(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x+6}{x+2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to +\infty}(x)=+\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty}$

• សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

២.រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x_o=1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

ដោយ $f'(1) = \frac{1(1+4)}{(1+2)^2} = \frac{5}{9}$ និង $f(1) = \frac{1^2+3+6}{1+2} = \frac{10}{3}$

គេបាន $(T): y = \frac{5}{9}(x-1) + \frac{10}{3}$ ឬ $(T): y = \frac{5}{9}x + \frac{25}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{(T): y = \frac{5}{9}x + \frac{25}{9}}$

• គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A

សមីការអាប់ស៊ីស $\frac{5}{9}x + \frac{25}{9} = x + 1 \Leftrightarrow \frac{5x+25}{9} = \frac{9(x+1)}{9}$

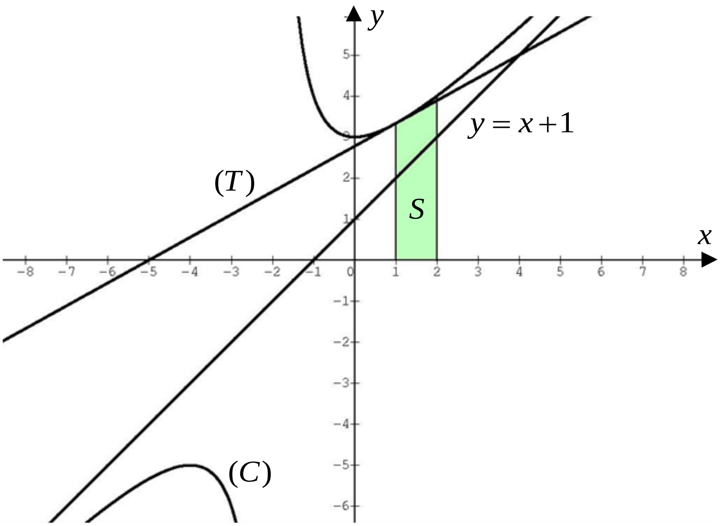
ឬ $5x + 25 = 9x + 9 \Leftrightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$

នាំឲ្យ $y = 4 + 1 = 5$ ដូចនេះ $\boxed{A(4\,,5)}$

៣.សង់ខ្សែកោង (C) សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) និងអាស៊ីមតូត

x	0	1
$y = x+1$	1	2

x	0	1
(T)	2.7	3.3



• គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ (C) អ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងបន្ទាត់ $x=1$, $x=2$

$$S=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(x+1+\frac{4}{x+2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+x+4\ln|x+2|\right]_1^2=(2+2+4\ln 4)-(\frac{1}{2}+1+4\ln 3)$$

$$=4+4\ln 4-\frac{3}{2}-4\ln 3=\frac{5}{2}+4\ln\frac{4}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{S=\left(\frac{5}{2}+4\ln\frac{4}{3}\right)\text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}}$

វិញ្ញាសាទី 10

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណោះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា

គណិតវិទ្យា(ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

សម័យប្រឡង: 25 កក្កដា 2011

រយ:ពេល ៩០នាទី ពិន្ទុ៧៥

I. គេឲ្យអនុគមន៍ $y=g(x)=\dfrac{2x-3}{(x-3)^2}$

១. រកចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $g(x)=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{(x-3)^2}$

២. គណនា $F(x)=\int g(x)\,dx$ ដោយដឹងថា $F(4)=0$ ។

II. គណនាលីមីត:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \qquad B=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}$$

III. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}3+x & \text{បើ } x\le a\\ x^2+1 & \text{បើ } x>a\end{cases}$

កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=a$ ។

IV. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល:

១. $y'+x^3-\cos x=0$

២. $y'+3y=2x+1$

V. គ្រូបន្ទុកថ្នាក់បានជ្រើសរើសប្រធានក្រុមវេនសំអាតថ្នាក់ប្រចាំថ្ងៃ ចំនួន 6 នាក់នៃថ្នាក់រៀនមួយ ដែលមានសិស្សប្រុសចំនួន 20 នាក់ និងស្រីចំនួន 15 នាក់ ។ គណនាប្រូបាបខាងក្រោម:

A "ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែប្រុស"

B "ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែស្រី"

C "ប្រធានក្រុមមានប្រុស 3 នាក់និងស្រី 3 នាក់" ។

អត្រាកំណែ

I. គេឲ្យអនុគមន៍ $y=g(x)=\dfrac{2x-3}{(x-3)^2}$

១. រកចំនួនពិត A និង B

គេមាន $g(x)=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{(x-3)^2}=\dfrac{A(x-3)+B}{(x-3)^2}$

$$= \frac{Ax + (-3A + B)}{(x-3)^2}$$

តែ $g(x) = \dfrac{2x-3}{(x-3)^2}$

នាំឲ្យ $\begin{cases} A = 2 \\ -3A + B = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{A = 2\ ,\ B = 3}$

២. គណនា $F(x) = \int g(x)\,dx$ ដោយដឹងថា $F(4) = 0$

$$F(x) = \int g(x)\,dx = \int \left(\frac{2}{(x-3)} + \frac{3}{(x-3)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{2}{(x-3)}\,dx + \int \frac{3}{(x-3)^2}\,dx$$

$$= 2\ell n\,|\,x-3| - \frac{3}{(x-3)} + C$$

ដោយ $F(4) = 0$

គេបាន $2\ell n\,|\,4-3| - \dfrac{3}{(4-3)} + C = 0$

$$2\ell n\,|\,4-3| - \frac{3}{(4-3)} + C = 0$$

$$2\ell n 1 - 3 + C = 0 \Rightarrow C = 3$$

ដូចនេះ $\boxed{F(x) = 2\ell n\,|\,x-3| - \dfrac{3}{(x-3)} + 3}$

II. គណនាលីមីត:

$A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$ មានរាង $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x+3)-3}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $\boxed{A = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}}$

$B = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}$ មានរាង $\left(\frac{0}{0}\right)$

តាង $u = x - \frac{\pi}{2}$ នោះ $x = \frac{\pi}{2} + u$

ពេល $x \to \frac{\pi}{2}$ នោះ $u \to 0$

គេបាន $B = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x} = \lim_{u\to 0}\frac{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2}+u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+u\right)}$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\pi-\pi-2u}{-\sin u} = 2\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u} = 2$$

ដូចនេះ $\boxed{B = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x} = 2}$

III. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \begin{cases} 3+x & \text{បើ } x \le a \\ x^2+1 & \text{បើ } x > a \end{cases}$

កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = a$

គេមាន $f(a) = 3 + a$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = 3 + a$ និង $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = a^2 + 1$

ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = a$ លុះត្រាតែ

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

$\Leftrightarrow 3 + a = a^2 + 1$

$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(-2) = 1 + 8 = 3^2$

នាំឲ្យ $a_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$, $a_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$

ដូចនេះ $\boxed{a \in \{-1\,,\,2\}}$

IV. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ

១. $y' + x^3 - \cos x = 0$

$y' = -x^3 + \cos x$

$y = \int (-x^3 + \cos x)\,dx$

$y = -\dfrac{x^4}{4} + \sin x + C$

ដូចនេះ $\boxed{y = -\dfrac{x^4}{4} + \sin x + C}$ ដែល C ជាចំនួនពិត

២. $y' + 3y = 2x + 1 \quad (E)$

យក $y_p = ax + b$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y' + 3y = 2x + 1$

គេបាន $y_p' + 3y_p = 2x + 1$

តែ $y_p = ax + b \Rightarrow y_p' = a$

គេបាន $a + 3(ax + b) = 2x + 1$

$a+3(ax+b)=2x+1$

$3ax+a+3b=2x+1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a=2 \\ a+3b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

ដូច្នេះ $y_p=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}$

ម្យ៉ាងទៀត $y'+3y=0$ មានរាង $y'-ay=0$

នោះចម្លើយទូទៅ $y_c=Ae^{ax}=Ae^{-3x}$ ដែល A ជាចំនួនពិត

គេបានចម្លើយសរុប $y=y_c+y_p$

ឬ $\boxed{y=Ae^{-3x}+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

V. គ្រូបន្ទុកថ្នាក់បានជ្រើសរើសប្រធានក្រុមវេនសំអាតថ្នាក់ប្រចាំថ្ងៃ ចំនួន 6 នាក់នៃថ្នាក់រៀនមួយ ដែលមានសិស្សប្រុសចំនួន 20 នាក់ និងស្រីចំនួន 15 នាក់ ។ គណនាប្រូបាបខាងក្រោមៈ

ករណីអាច $n(S)=C(35,6)=\dfrac{35!}{(35-6)!6!}$

$$=\frac{29!30\times31\times32\times33\times34\times35}{29!6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$=\frac{31\times32\times33\times34\times35}{24}=1623160$$

A "ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែប្រុស"

ករណីស្រប $n(A)=C(20,6)=\dfrac{20!}{(20-6)!6!}$

$$=\frac{15\times16\times17\times18\times19\times20}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=\frac{27907200}{720}=38760$$

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{38760}{1623160}=0.0238$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=0.0238}$

B "ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែស្រី"

ករណីស្រប $n(B)=C(15,6)=\frac{15!}{(15-6)!6!}$

$$=\frac{10\times11\times12\times13\times14\times15}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=5005$$

គេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{5005}{1623160}=0.0031$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=0.0031}$

C "ប្រធានក្រុមមានប្រុស 3 នាក់និងស្រី 3 នាក់"

ករណីស្រប $n(C)=C(20,3)\times C(15,3)=518700$

គេបាន $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{518700}{1623160}=0.3195$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=0.3195}$

វិញ្ញាសាទី 11

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណេះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា

គណិតវិទ្យា(ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

សម័យប្រឡង: 25 កក្កដា 2011

រយៈពេល ១៥០នាទី ពិន្ទុ១២៥

I. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$

ចំពោះ $x\neq 0$ ហើយមាន $f(0)=\ell n(\sqrt{a})$ ។ កំណត់តម្លៃ a

ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

II. ១. គេឲ្យ $g(x)=\dfrac{3x^2-10x-5}{(x-1)^2(x+2)}$ ។ រក a,b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍

$g(x)=\dfrac{a}{(x+2)}+\dfrac{b}{(x-1)^2}$ ចំពោះ $x\neq -2$ និង $x\neq 1$ ។

២. គណនា $I(x)=\int g(x)\,dx$ ដោយដឹងថា $I(0)=-4$ ។

III. ១. កំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ d ដែលប៉ះនឹងក្រាប C_1 នៃ

$y=1-x\ell nx$ នៅត្រង់ចំណុច $M(1\,,1)$ ។

២. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ N រវាងបន្ទាត់ d និងក្រាប C_2

នៃអនុគមន៍ $y=e^x+1-x$ ។

IV. គេឲ្យអនុគមន៍ h កំណត់ដោយ $h(x)=(x+m)e^{-x}$ ហើយមាន

ក្រាប H និង m ជាចំនួនពិត ។

១. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃ H កាលណា $x\to+\infty$ ។

២. គណនាដេរីវេទីមួយ $h'(x)$ និងដេរីវេទីពីរ $h''(x)$

៣. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ h មានអតិបរមាត្រង់ $x=0$ ។

V. គេឲ្យសមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូល $P: 2y^2+8y+3x-4=0$ ។

១. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃ P

២. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល P និងបន្ទាត់ $x=-2$

៣. សង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល P ។

VI. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$ និងមានក្រាប C ។

១. រកចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq1$ ។

២. រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃ f

៣. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប C ។ សិក្សាទីតាំងរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត និងក្រាប C ។

៤. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f និងសង់ក្រាប C ។

អត្រាកំណែ

I. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ $x\neq0$

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$

គេមាន $f(0)=\ell n(\sqrt{a})$ និង

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\dfrac{\sin x}{x}+1\right)}{x^2\left(x-\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\sin x}{x}+1\right)}{\left(x-\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)}=\frac{1+1}{0-1}=-2$$

ដើម្បីឲ្យ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ លុះត្រាតែ

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ ឬ $\ell n(\sqrt{a})=-2=\ell ne^{-2}$

នាំឲ្យ $\sqrt{a}=e^{-2}\Rightarrow a=e^{-4}$

ដូចនេះ $\boxed{a=e^{-4}}$

II. ១. គេឲ្យ $g(x)=\dfrac{3x^2-10x-5}{(x-1)^2(x+2)}$

រក a,b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{a}{(x+2)}+\dfrac{b}{(x-1)^2}$

$$g(x)=\frac{a}{(x+2)}+\frac{b}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{a(x-1)^2+b(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\frac{a(x^2-2x+1)+b(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\frac{ax^2+(-2a+b)x+(a+2b)}{(x-1)^2(x+2)}$$

ចំពោះ $x \neq 1$ និង $x \neq -2$ គេបាន

$$\begin{cases} a = 3 \\ -2a + b = -10 \\ a + 2b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ 3 - 8 = -5 \text{ (ពិត)} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a = 3 \, , \, b = -4}$

២. គណនា $I(x) = \int g(x)\,dx$

$$I(x) = \int g(x)\,dx = \int \frac{3}{(x+2)} + \frac{-4}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{3}{(x+2)}\,dx + \int \frac{-4}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= 3\ell n\,|x+2| + \frac{4}{(x-1)} + C$$

ដោយដឹងថា $I(0) = -4$

នោះ $3\ell n\,|0+2| + \frac{4}{(0-1)} + C = -4$

$$3\ell n2 - 4 + C = -4$$

$$3\ell n2 + C = 0 \Rightarrow C = -3\ell n2$$

នាំឲ្យ $I(x) = 3\ell n\,|x+2| + \frac{4}{(x-1)} - 3\ell n2$

ដូចនេះ $\boxed{I(x) = 3\ell n\,|x+2| + \frac{4}{(x-1)} - 3\ell n2}$

III. ១. កំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ d ដែលប៉ះនឹងក្រាប C_1

តាមរូបមន្ត $(d): y = f\,'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

$f(x)=1-x\ell nx$

$$\Rightarrow f'(x)=-\left(\ell nx+x\cdot\frac{1}{x}\right)=-1-\ell nx$$

នោះ $f'(x_o)=f'(1)=-1-\ell n1=-1$

$f(x_o)=f(1)=1$

នាំឲ្យ $(d):y=-(x-1)+1=-x+2$

ដូចនេះ $\boxed{(d):y=-x+2}$

២. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ N រវាងបន្ទាត់ d និងក្រាប C_2

តាង $N(x_o , y_o)$

គេមាន $(d):y=-x+2$ និង $(C_2):y=e^x+1-x$

សមីការអាប់ស៊ីសៈ $-x_o+2=e^{x_0}+1-x_o$

$2=e^{x_0}+1\Leftrightarrow e^{x_0}=1\Rightarrow x_o=0$

នាំឲ្យ $y_o=-0+2=2$

ដូចនេះ កូអរដោនេគឺ $\boxed{N(0\ ,\ 2)}$

IV. គេឲ្យអនុគមន៍ h កំណត់ដោយ $h(x)=(x+m)e^{-x}$ ហើយមានក្រាប H និង m ជាចំនួនពិត

១. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃ H កាលណា $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+m)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{m}{e^x}\right)=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប H ។

២. គណនាដេរីវេទីមួយ $h'(x)$ និងដេរីវេទីពីរ $h''(x)$

គេមាន $h(x)=(x+m)e^{-x}=\dfrac{x}{e^x}+\dfrac{m}{e^x}$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}-\frac{me^x}{e^{2x}}=\frac{1-x-m}{e^x}$$

$$\Rightarrow h''(x)=\frac{-e^x-e^x(1-x-m)}{e^{2x}}=\frac{-2+x+m}{e^x}$$

ដូចនេះ $\boxed{h'(x)=\frac{1-x-m}{e^x}\ ,\ h''(x)=\frac{-2+x+m}{e^x}}$

៣. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ h មានអតិបរមាត្រង់ $x=0$ ។

ដើម្បីឲ្យ h មានអតិបរមាត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} h'(0)=0 & (i) \\ h''(0)<0 & (ii) \end{cases}$

តាមសមីការ (i): $\frac{1-0-m}{e^0}=0 \Leftrightarrow 1-m=0 \Leftrightarrow m=1$

យក $m=1$ ជំនួសក្នុងសមីការ (ii) គេបាន:

$\frac{-2+0+1}{e^0}=-1<0$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់)

ដូចនេះ $\boxed{m=1}$

V. គេឲ្យសមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូល $P: 2y^2+8y+3x-4=0$

១. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃ P

គេមាន $P: 2y^2+8y+3x-4=0$

$$P: y^2+4y=-\frac{3}{2}x+2$$

$$P: (y+2)^2-4=-\frac{3}{2}x+2$$

$$P: (y+2)^2=-\frac{3}{2}x+2+4$$

$$P: (y+2)^2=-\frac{3}{2}(x-4)$$

មានទម្រង់ $P:(y-k)^2=4p(x-h)$

នាំឲ្យ $h=4$, $k=-2$ និង $4p=-\frac{3}{2}\Rightarrow p=-\frac{3}{8}$

គេបាន៖

កំពូល $S(h,k)$ ឬ $S(4\,,-2)$

កំណុំ $F(h+p,k)$ ឬ $F(4-\frac{3}{8},-2)=F\left(\frac{29}{8},-2\right)$

បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=h-p=4+\frac{3}{8}=\frac{35}{8}$

២. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល P និងបន្ទាត់ $x=-2$

គេមាន $P:2y^2+8y+3x-4=0$

យក $x=-2$ ជំនួសក្នុងសមីការប៉ារ៉ាបូល

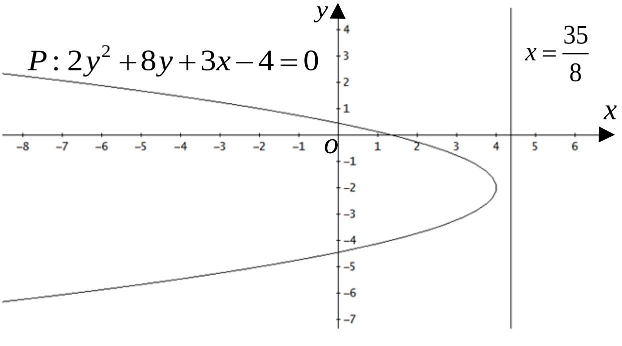
គេបាន៖ $2y^2+8y+3(-2)-4=0$

$2y^2+8y-10=0$ មានរាង $a+b+c=0$

គឺ $2+8-10=0$ នោះ $y_1=1$, $y_2=\frac{c}{a}=\frac{-10}{2}=-5$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល P និងបន្ទាត់ $x=-2$ មានពីរគឺ $(-2\,,1)$ និង $(-2\,,-5)$ ។

៣. សង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល P



VI. គេឲ្យ $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ និងមានក្រាប C

១. រកចំនួនពិត a, b និង c

គេមាន $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$

$$= \frac{ax(x-1) + b(x-1) + c}{x-1} = \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$$

$$= \frac{ax^2 + (-a+b)x + (-b+c)}{x-1}$$

គ្រប់ $x \neq 1$ គេបាន $\begin{cases} a = 1 \\ -a + b = -3 \\ -b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a = 1 , b = -2 , c = 4}$

២. រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃ f

គេមាន $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x-1}$ ចំពោះ $x \neq 1$

គេបាន $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

ដោយ $(x-1)^2 > 0 , \forall x \neq 1$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចពហុធា $x^2 - 2x - 3$

បើ $f'(x) = 0$ នោះ $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើ:

ត្រង់ $x=-1$ ធ្វើឲ្យ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ នោះ

f មានអតិបរមាត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=-5$ ។

ត្រង់ $x=3$ ធ្វើឲ្យ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ នោះ

f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=3$ គឺ $f(3)=3$ ។

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមាគឺ $f(-1)=-5$ និងអប្បបរមាគឺ $f(3)=3$

លីមីតចុងដែនកំណត់:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+6}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+6}{x-1}=+\infty$$

៣. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប C

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+6}{x-1}=\frac{4}{0}=\pm\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ C

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ C ។

ហើយគេមាន $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x-1}$

តែ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$

នោះបន្ទាត់ $d: y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ C

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d: y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ C ។

• សិក្សាទីតាំងរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត និងក្រាប C

គេមាន $C: f(x)=x-2+\dfrac{4}{x-1}$ និង $d: y=x-2$

តាង $g(x) = f(x) - y$

$$g(x) = x - 2 + \frac{4}{x-1} - (x-2) = \frac{4}{x-1}$$

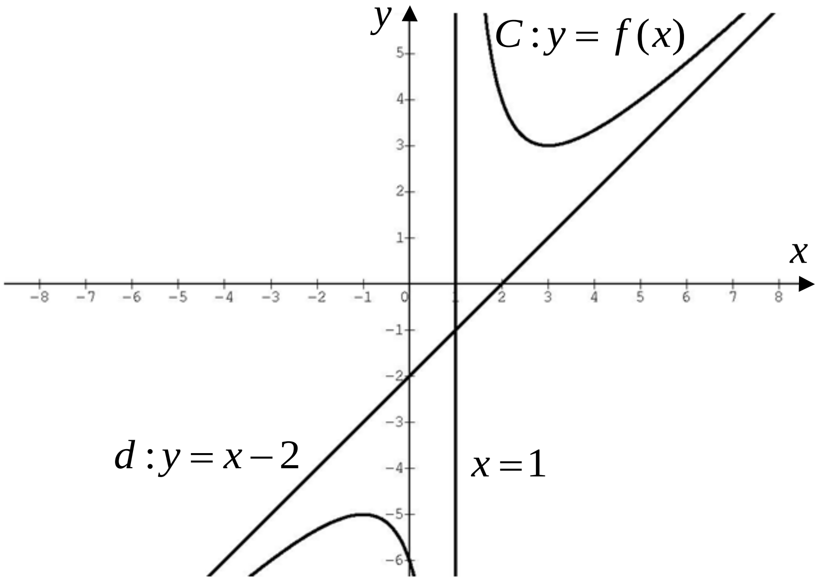
$+$ចំពោះ $x > 1$ នោះ $g(x) > 0$ នាំឲ្យក្រាប C នៅខាងលើបន្ទាត់ d

$+$ចំពោះ $x < 1$ នោះ $g(x) < 0$ នាំឲ្យក្រាប C នៅខាងក្រោម d ។

៤. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

សង់ក្រាប C តាងអនុគមន៍ f



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណេះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា

គណិតវិទ្យា(ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

សម័យប្រឡង: 06 **កក្កដា** 2012

រយៈពេល ៩០នាទី ពិន្ទុ៧៥

I. (**១០ពិន្ទុ**) ក្នុងថតតុមួយមានសៀវភៅគណិតវិទ្យា 7 ក្បាល និងសៀវភៅភាសាខ្មែរ 5 ក្បាល។ សិស្សម្នាក់បានយកសៀវភៅ 4 ក្បាលព្រមគ្នាចេញពីថតតុដោយចៃដន្យ។

១.រកប្រូបាបដែល "សិស្សយកបានសៀវភៅគណិតវិទ្យាទាំង 4 ក្បាល" ។

២.រកប្រូបាបដែល "សិស្សយកបានសៀវភៅភាសាខ្មែរ 1 ក្បាលយ៉ាងតិច" ។

II.(**១៥ពិន្ទុ**) អេលីប E មួយមានសមីការទូទៅ

$9x^2+4y^2+18x-24y+9=0$ ។

១.រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប E ។

២.រកប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូច ហើយរកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំនៃអេលីប E ។

III.(**២០ពិន្ទុ**) អនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះ $x\neq -1$ ដោយ $g(x)=\dfrac{4x-1}{(x+1)^2}$ ។

១.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq -1$ ។

២.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(x+1)^2y'=4x-1$ ចំពោះ $x\neq -1$ ដោយដឹងថា $y(0)=2012$ ។

IV.(**៣០ពិន្ទុ**) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$ ហើយមានក្រាប C ។

១.រកដែនកំណត់ និងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f ។

២.សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

៣.សង់តារាងអថេរភាព សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

អត្រាកំណែ

I. ១.រកប្រូបាបដែល "សិស្សយកបានសៀវភៅគណិតវិទ្យាទាំង 4 ក្បាល"

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍"សិស្សយកបានសៀវភៅគណិតវិទ្យាទាំង 4 ក្បាល"

ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(12,4)=\dfrac{12!}{8!4!}=\dfrac{9\times10\times11\times12}{2\times3\times4}=495$

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(7,4)=\dfrac{7!}{3!4!}=\dfrac{5\times6\times7}{2\times3}=35$

គេបានប្រូបាប $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{35}{495}=\dfrac{7}{99}=0.07$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=0.07}$

២.រកប្រូបាបដែល "សិស្សយកបានសៀវភៅភាសាខ្មែរ 1 ក្បាលយ៉ាងតិច"

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ "សិស្សយកបានសៀវភៅភាសាខ្មែរ 1 ក្បាលយ៉ាងតិច"

ដោយព្រឹត្តិការណ៍ B ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹងព្រឹត្តិការណ៍ A

គេបានប្រូបាប $P(B)=1-P(A)=1-0.07=0.93$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=0.93}$

II. អេលីប E មួយមានសមីការទូទៅ $9x^2+4y^2+18x-24y+9=0$

១.រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប E

$9x^2+18x+4y^2-24y+9=0$

$9(x^2+2x+1)+4(y^2-6y+9)-9-36+9=0$

$9(x+1)^2+4(y-3)^2=36$

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{2^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{(x+1)^2}{2^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1}$

២.រកប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូច ហើយរកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំ

អេលីប E មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែលអ័ក្សធំស្របនឹង $\vec{oy}$

គេទាញបាន $a=3$, $b=2$, $h=-1$, $k=3$

ហើយ $c^2=a^2-b^2=9-4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$ គេបាន:

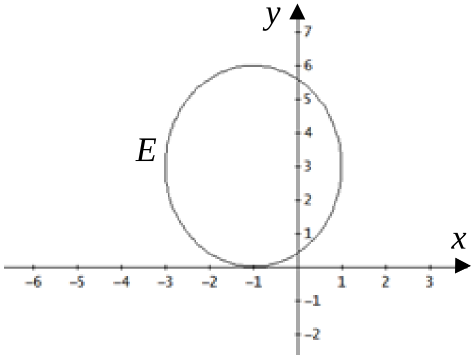
ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=2\times3=6$

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=2\times2=4$

ផ្ចិត $I(h,k)=I(-1,3)$

កំពូល $V_1(h,k-a)=V_1(-1,0)$ និង $V_2(h,k+a)=V_2(-1,6)$

កំណុំ $F_1(h,k-c)=F_1(-1,3-\sqrt{5})$ និង $F_2(h,k+c)=F_2(-1,3+\sqrt{5})$



III.អនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះ $x \neq -1$ ដោយ $g(x) = \frac{4x-1}{(x+1)^2}$

១.កំណត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $g(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2} = \frac{ax+(a+b)}{(x+1)^2}$

តែ $g(x) = \frac{4x-1}{(x+1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq -1$

គេបាន $\begin{cases} a = 4 \\ a+b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a = 4 , b = -5}$

២.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(x+1)^2 y' = 4x-1$ ចំពោះ $x \neq -1$

$(x+1)^2 y' = 4x-1 \Rightarrow y' = \frac{4x-1}{(x+1)^2} = \frac{4}{x+1} + \frac{-5}{(x+1)^2}$

គេបាន $y = \int y'dx = \int \left(\frac{4}{x+1} + \frac{-5}{(x+1)^2} \right) dx$

$= 4\ln|x+1| + \frac{5}{x+1} + k$ ដែល k ជាចំនួនពិត

ដោយដឹងថា $y(0) = 2012$ នោះ $4\ln|0+1| + \frac{5}{0+1} + k = 2012$

ឬ $5 + k = 2012 \Rightarrow k = 2012 - 5 = 2007$

ដូចនេះ $\boxed{y = 4\ln|x+1| + \frac{5}{x+1} + 2007}$

IV.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2+x+4}{x+1}$ ហើយមានក្រាប C

១.រកដែនកំណត់ និងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$

២.សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+x+4}{x+1}=\frac{1-1+4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+x+4}{x+1}=\frac{1-1+4}{0^+}=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\pm\infty$ នោះ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

• សរសេរសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

$$f(x)=\frac{x^2+x+4}{x+1}=x+\frac{4}{x+1}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x+1}=0$ នោះ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូទ្រេតនៃក្រាប C

ដូចនេះ សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C គឺ $y=x$ ។

៣.សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+4)}{(x+1)^2}=\frac{(2x^2+3x+1)-(x^2+x+4)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

ដោយ $(x+1)^2>0$, $\forall x\in D$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(x-1)(x+3)$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $(x-1)(x+3)=0\Rightarrow x=1\,,x=-3$

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$

អនុគមន៍ f មានអតិបរមាត្រង់ $x=-3$ គឺ $f(-3)=\frac{9-3+4}{-3+1}=\frac{10}{-2}=-5$

អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=\dfrac{1+1+4}{1+1}=\dfrac{6}{2}=3$

• លីមីតចុងដែន

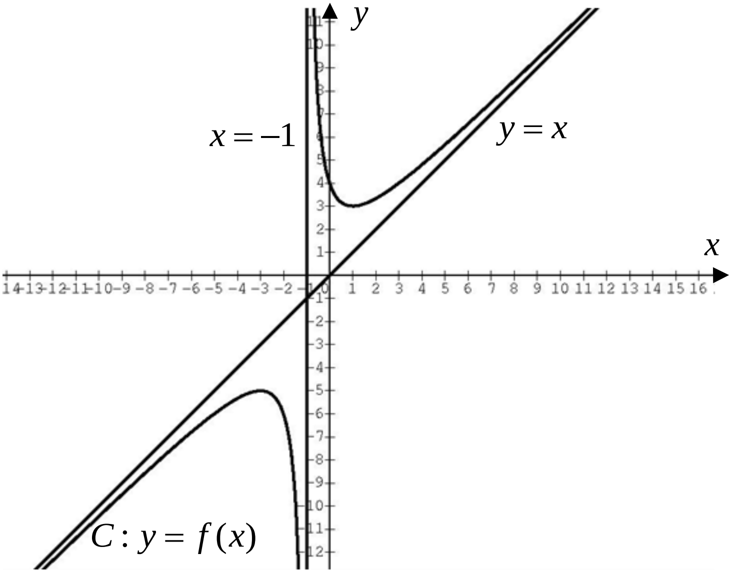
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+4}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+4}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

• សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប C នៃអនុគមន៍ f



វិញ្ញាសាទី 13

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិចំណេះទូទៅ និងបំពេញវិជ្ជា
គណិតវិទ្យា(ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
សម័យប្រឡង: 06 កក្កដា 2012
រយៈពេល ១៥០នាទី ពិន្ទុ១២៥

I.(**១០ពិន្ទុ**) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

១.គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$ ។

២.សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយបង្ហាញថា $C=x^{2013}+y^{2013}$ ជាចំនួនពិត ។

II.(**១៥ពិន្ទុ**) គេចង់បង្កើតចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់ទាំងបីមានលេខខុសៗគ្នា ដោយយកចេញពីលេខ 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ។

១.រកចំនួនករណីអាច។

២.រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាពហុគុណនៃ 5 ។

៣.រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាចំនួនគូ ។

III.(**១៥ពិន្ទុ**) គេឲ្យអនុគមន៍ $y=g(x)=xe^{2x}$ ។

១.រកដេរីវេ $g'(x)$ និង $g''(x)$។ ទាញបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x=-0.5$ ។

២.រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y=g(x)$ ត្រង់ $x=1$។

IV.(**២០ពិន្ទុ**) គេឲ្យសមីការ $y''-4y'+5y=0 \quad (E)$ ។

១.រកចម្លើយទូទៅ y_g នៃសមីការ (E) ។

២.គេដឹងថា $y_p = a\cos x + b\sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ

$y'' - 4y' + 5y = 4\cos x - 12\sin x \quad (F)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

រក a និង b ហើយទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F) ។

V.(**៣០ពិន្ទុ**)

១.អេលីប E មួយមានសមីការ $25x^2 + 16y^2 - 150x + 64y = 111$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំរបស់អេលីប E ។

ខ. សង់អេលីប E ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ។

២.ចំណុច $M(-1,0,1)$, $N(0,1,2)$ និង $P(1,2,-1)$ ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ។ ប្លង់ α មួយមានសមីការ $x - 2y + z - 4 = 0$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃ $\vec{n} = \vec{MN} \times \vec{MP}$ ហើយទាញរកសមីការប្លង់ β ដែលកាត់តាមចណុច M, N និង P ។

ខ. រកសមីការស្វ៊ែ S មួយដែលមានផ្ចិត M ហើយកាត់តាម N ។ តើប្លង់ α ជួបនឹងស្វ៊ែ S ឬទេ?

VI.(**៣៥ពិន្ទុ**) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $y = f(x) = 1 - \dfrac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប C ។

១.រក $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣.សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ។ គេឲ្យ $e = 2.7$, $\dfrac{2}{e} = 0.7$ ។

៤.គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយ ក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

អត្រាកំណែ

I.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

១.គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$ ។

$$A=x-y^2=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-2i\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

ដូចនេះ $\boxed{A=x-y^2=0}$

$$B=x^2+x+1=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1$$

$$=\left(\frac{1}{4}+2i\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=-1+1=0$$

ដូចនេះ $\boxed{B=x^2+x+1=0}$

២.សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{x=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}}$

$$y=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{y=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$

• បង្ហាញថា $C=x^{2013}+y^{2013}$ ជាចំនួនពិត

គេមាន $x=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$ និង $y=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

នោះនាំឲ្យ $x^{2013}=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{2013}$

$$=\left(\cos\frac{2013\cdot4\pi}{3}+i\sin\frac{2013\cdot4\pi}{3}\right)=\cos(671\times4\pi)+i\sin(671\times4\pi)$$

$$=\cos2(671\times2\pi)+i\sin2(671\times2\pi)=1+0i=1$$

$$y^{2013}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{2013}=\cos\frac{2013\cdot2\pi}{3}+i\sin\frac{2013\cdot2\pi}{3}$$

$$=\cos(671\cdot2\pi)+i\sin(671\cdot2\pi)$$

$$=\cos2(671\cdot\pi)+i\sin2(671\cdot\pi)=1+0i=1$$

គេបាន $C=x^{2013}+y^{2013}=1+1=2$ ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ $C=x^{2013}+y^{2013}$ ជាចំនួនពិត ។

II. គេចង់បង្កើតចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់ទាំងបីមានលេខខុសៗគ្នា ដោយយកចេញពីលេខ 1,2,3,4,5,6,7,8,9

១.រកចំនួនករណីអាច

លេខខ្ទង់រយមាន 9 របៀប

លេខខ្ទង់ដប់មាន 8 របៀប

លេខខ្ទង់រាយមាន 7 របៀប

តាមគោលការណ៍របាប់គេបាន $9\times 8\times 7=504$

ដូចនេះ ចំនួនករណីអាច $\boxed{n(S)=504}$

២.រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាពហុគុណនៃ 5

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ "ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាពហុគុណនៃ 5"

លេខខ្ទង់រយមាន 9 របៀប

លេខខ្ទង់ដប់មាន 8 របៀប

លេខខ្ទង់រាយមាន 1 របៀប

តាមគោលការណ៍របាប់គេបាន $9\times 8\times 1=72$

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=72$

គេបានប្រូបាប $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{72}{504}=\dfrac{1}{7}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{7}}$

៣.រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាចំនួនគូ

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ "ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាចំនួនគូ"

លេខខ្ទង់រយមាន 9 របៀប

លេខខ្ទង់ដប់មាន 8 របៀប

លេខខ្ទង់រាយមាន 4 របៀប

តាមគោលការណ៍របាប់គេបាន $9\times 8\times 4=288$

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=288$

គេបានប្រូបាប $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{288}{504}=\dfrac{4}{7}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{4}{7}}$

III.គេឲ្យអនុគមន៍ $y = g(x) = xe^{2x}$

១.រកដេរីវេ $g'(x)$ និង $g''(x)$

$$g'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (1+2x)e^{2x}$$

$$g''(x) = 2e^{2x} + 2(1+2x)e^{2x} = 2e^{2x} + (2+4x)e^{2x} = 4(x+1)e^{2x}$$

ដូចនេះ $\boxed{g'(x) = (1+2x)e^{2x}\ ,\ g''(x) = 4(x+1)e^{2x}}$

• ទាញបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x = -0.5$ ។

បើអនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x = -0.5$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} g'(-0.5) = 0 \\ g''(-0.5) > 0 \end{cases}$

$$g'(-0.5) = g'(-\frac{1}{2}) = \left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = (1-1)e^{-1} = 0 \text{ (ពិត)}$$

$$g''(-0.5) = g''(-\frac{1}{2}) = 4(-\frac{1}{2}+1)e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} > 0 \text{ (ពិត)}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x = -0.5$ ។

២.រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y = g(x)$ ត្រង់ $x = 1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ g ត្រង់ $x = 1$ គឺ $y = g'(1)(x-1) + g(1)$

ដោយ $g'(1) = (1+2)e^2 = 3e^2$ និង $g(1) = 1 \cdot e^2 = e^2$

គេបាន $y = 3e^2(x-1) + e^2 = 3e^2x - 3e^2 + e^2 = 3e^2x - 2e^2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{y = 3e^2x - 2e^2}$

IV.គេឲ្យសមីការ $y'' - 4y' + 5y = 0 \quad (E)$

១.រកចម្លើយទូទៅ y_g នៃសមីការ (E)

សមីការសម្គាល់ $r^2 - 4r + 5 = 0$

$$\Delta' = (-2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1 = i^2$$

នាំឲ្យ $r_1 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = 2 - i\ ,\ r_2 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = 2 + i$

គេបានចម្លើយទូទៅ $y_g=(A\cos x+B\sin x)e^{2x}$ ដែល $A,B\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ $\boxed{y_g=(A\cos x+B\sin x)e^{2x},(A,B\in\mathbb{R})}$

២. រក a និង b ហើយទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F)

គេមាន $y_p=a\cos x+b\sin x$

នោះ $y_p'=-a\sin x+b\cos x$ និង $y_p''=-a\cos x-b\sin x$

យក y_p,y_p' និង y_p'' ជំនួសក្នុង $y''-4y'+5y=4\cos x-12\sin x$

គេបាន

$-a\cos x-b\sin x+4a\sin x-4b\cos x$

$+5a\cos x+5b\sin x=4\cos x-12\sin x$

$(-a-4b+5a)\cos x+(-b+4a+5a)\sin x=4\cos x-12\sin x$

$(a-4b)\cos x+(9a-b)\sin x=4\cos x-12\sin x$

នាំឲ្យ $\begin{cases}a-4b=4 & (1)\\ 9a-b=-12 & (2)\end{cases}$

តាម $(1)\Rightarrow a=4+4b$ ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$9(4+4b)-b=-12\Leftrightarrow 36+36b-b=-12$

$35b=-12-36=-48\Rightarrow b=-\dfrac{48}{35}$

នាំឲ្យ $a=4+4\left(-\dfrac{48}{35}\right)=4-\dfrac{192}{35}=-\dfrac{52}{35}$

ដូចនេះ $\boxed{a=-\dfrac{52}{35}\,,\,b=-\dfrac{48}{35}}$

V. ១.អេលីប E មួយមានសមីការ $25x^2+16y^2-150x+64y=111$

ក. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំរបស់អេលីប E

$25x^2+16y^2-150x+64y=111$

$(25x^2-150x+225)+(16y^2+64y+64)-64-225=111$

$25(x^2-6x+9)+16(y^2+4y+4)-289=111$

$25(x-3)^2+16(y+2)^2=400$

$\frac{25}{400}(x-3)^2+\frac{16}{400}(y+2)^2=1$

$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$ មានទម្រង់ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែល

អ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ គេទាញបាន $h=3$, $k=-2, a=5, b=4$

ហើយ $c^2=a^2-b^2=25-16=9 \Rightarrow c=\sqrt{9}=3$

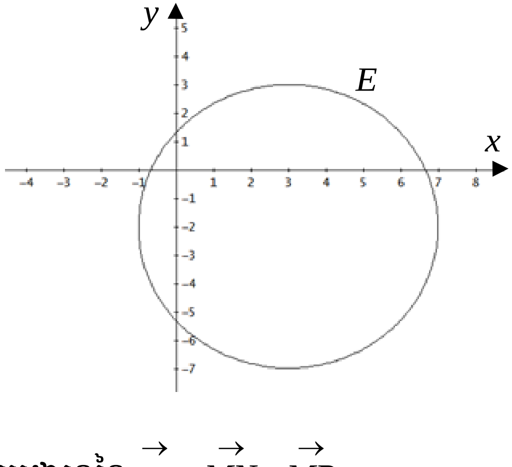
ដូចនេះ គេបានៈ

ផ្ចិត $I(h,k)=I(3,-2)$

កំពូល $V_1(h,k-a)=V_1(3,-7)$ និង $V_2(h,k+a)=V_2(3,3)$

កំពូល $F_1(h,k-c)=F_1(3,-5)$ និង $F_2(h,k+c)=F_2(3,1)$

ខ. សង់អេលីប E ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ



២.ក. រកកូអរដោនេនៃ $\vec{n}=\vec{MN}\times\vec{MP}$

គេមាន $M(-1,0,1)$, $N(0,1,2)$ និង $P(1,2,-1)$

$\vec{MN}(0+1,1-0,2-1)$ ឬ $\vec{MN}(1,1,1)$

$\overrightarrow{MP}(1+1,2-0,-1-1)$ ឬ $\overrightarrow{MP}(2,2,-2)$

$$\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=-4\,\vec{i}+4\,\vec{j}+0\,\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}(-4,4,0)}$

• ទាញរកសមីការប្លង់ β ដែលកាត់តាមចំណុច M , N និង P

ប្លង់ β មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}(-4,4,0)$

នោះសមីការប្លង់ β គឺ $-x+4y+0z+d=0$

ហើយប្លង់ β កាត់តាម $M(-1,0,1)$ នោះ $-(-1)+4\cdot0+0\cdot1+d=0$

ឬ $1+0+0+d=0\Rightarrow d=-1$

ដូចនេះ $\boxed{\beta:\ -x+4y-1=0}$

ខ. រកសមីការស្វ៊ែ S មួយដែលមានផ្ចិត M ហើយកាត់តាម N

តាមរូបមន្ត $S:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ដែល

(a,b,c) ជាផ្ចិត និង R ជាកាំស្វ៊ែ ។

ដោយ $M(-1,0,1)$ គេបាន $R=MN=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

គេបាន $S:(x+1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=(\sqrt{3})^2$

ឬ $S:(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$

ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែគឺ $\boxed{S:(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3}$

• តើប្លង់ α ជួបនឹងស្វ៊ែ S ឬទេ?

តាង h ជាចម្ងាយពីផ្ចិតស្វ៊ែ $M(-1,0,1)$ ទៅប្លង់ $\alpha:x-2y+z-4=0$

គេបាន $h=\frac{|-1-2\cdot 0+1-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ និងកាំស្វ៊ែ $R=\sqrt{3}$

ដោយ $h=\frac{2\sqrt{6}}{3}<R=\sqrt{3}$ នោះប្លង់ α ជួបនឹងស្វ៊ែ S

ដូចនេះ ប្លង់ α ជួបនឹងស្វ៊ែ S ។

VI. គេមាន $y=f(x)=1-\frac{2\ln x}{x}$ ដែល $x>0$ ហើយមានក្រាប C

១. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2\ln x}{x}\right)=1$ (ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$)

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{2\ln x}{x}\right)=+\infty$

(ព្រោះ $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ និង $\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$)

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=1,\ \lim_{x\to 0} f(x)=+\infty}$

• រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

ដោយ $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ដោយ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x)=-2\cdot\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-\ln x}{x^2}=\frac{-2(1-\ln x)}{x^2}=\frac{2(-1+\ln x)}{x^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{2(-1+\ln x)}{x^2}}$

ដោយ $x^2>0$, $\forall x>0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-1+\ln x$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $-1+\ln x=0 \Rightarrow x=e$

បើ $f'(x)<0$ នោះ $-1+\ln x<0 \Rightarrow x<e$

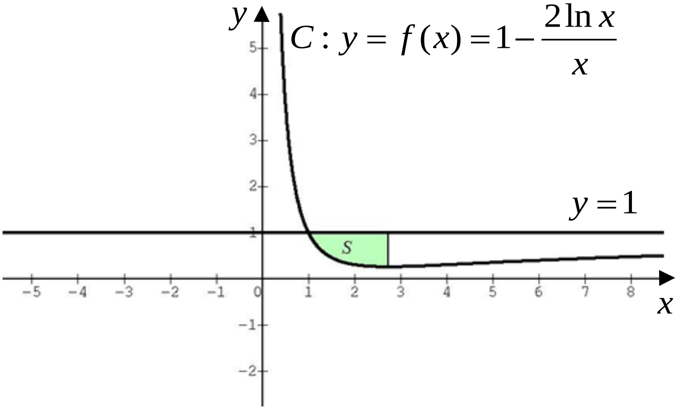
បើ $f'(x)>0$ នោះ $-1+\ln x>0 \Rightarrow x>e$

f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=e$ គឺ $f(e)=1-\dfrac{2\ln e}{e}=1-\dfrac{2}{e}=1-0.7=0.3$

• សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0.3	↗	1

៣.សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអររដោនេមួយ



៤.គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយ ក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$

$$S=\int_1^e\left[1-\left(1-\frac{2\ln x}{x}\right)\right]=\int_1^e\frac{2\ln x}{x}dx=\int_1^e 2(\ln x)'\ln x dx=\left[(\ln x)^2\right]_1^e$$

$$=(\ln e)^2-(\ln 1)^2=1-0=1 \text{ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S=1 \text{ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)}}$