រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

Tel: 017 250 290

111 លំហាត់ជ្រើស

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

$$\cos 36^o = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos 9^o = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$$

១១១ លំហាត់ជ្រើសរើស

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

Tel: 017 250 290

លំហាត់ទី០១

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(\tan x+\cot x)^2=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(\tan x+\cot x)^2=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$

គេមាន $(\tan x+\cot x)^2=\tan^2 x+2\tan x\,\mathrm{cotx}+\cot^2 x$

ដោយ $\tan x.\cot x=1$ *នោះគេបាន* $(\tan x+\cot x)^2=\tan^2 x+2+\cot^2 x$

$$=(1+\tan^2 x)+(1+\cot^2 x)$$

ដោយ $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ *និង* $1+\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

ដូចនេះ $(\tan x+\cot x)^2=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$ *ពិត* ។

លំហាត់ទី០២

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$

តាមរូបមន្ត $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+bc+ca$

គេបាន៖

$$\begin{aligned}(1+\sin x+\cos x)^2&=1+\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+2\sin x+2\cos x+2\sin x\cos x\\&=2+2\sin x+2\cos x+2\sin x\cos x\\&=2(1+\sin x)+2\cos x(1+\sin x)\\&=(1+\sin x)(2+2\cos x)\\&=2(1+\sin x)(1+\cos x)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$ ។

លំហាត់ទី០៣

ចូរបង្ហាញថា ៖

$(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)-(1-\mathrm{sinxcosx})^2=(\sin x+\cos x)^2$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)-(1-\mathrm{sinxcosx})^2=(\sin x+\cos x)^2$

តាង $\mathrm{A}=(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)$; $\mathrm{B}=(1-\mathrm{sinxcosx})^2$

គេមាន $A=1+\cos^2 x+\sin^2 x+\sin^2 x\cos^2 x$

$=1+1+\sin^2 x\cos^2 x=2+\sin^2 x\cos^2 x$

និង $B=(1-\sin x\cos x)^2=1-2\sin x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x$

គេបាន $A-B=(2+\sin^2 x\cos^2 x)-(1-2\sin x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x)$

$=2+\sin^2 x\cos^2 x-1+2\sin x\cos x-\sin^2 x\cos^2 x$

$=1+2\sin x\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=(\sin x+\cos x)^2$

ដូចនេះ $(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)-(1-\mathrm{sinxcosx})^2=(\sin x+\cos x)^2$ ។

លំហាត់ទី០៤

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

តាង $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

$=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$=(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1})(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$

$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=(\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)-3\sin^2 x\cos^2 x$

$=(\sin^2\mathrm{x}+\cos^2\mathrm{x})^2-3\sin^2 x\cos^2 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

ដូចនេះ $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$ ។

លំហាត់ទី០៥

គេដឹងថា $0<x<90^o$ ។ *ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា* $\sqrt{(1+\tan x)(1+\cot x)}=\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{(1+\tan x)(1+\cot x)}=\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}$

គេមាន $(1+\tan x)(1+\cot x)=1+\cot x+\tan x+\tan x\cot x$

$=1+\cot x+\tan x+1=2+\tan x+\cot x$

$=(\sqrt{\tan x})^2+2(\sqrt{\tan x})(\sqrt{\cot x})+(\sqrt{\cot x})^2=(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x})^2$

ដូចនេះ $\sqrt{(1+\tan x)(1+\cot x)}=\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}$ ។

លំហាត់ទី០៦

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+\tan x)^2+(1-\tan x)^2=\dfrac{2}{\cos^2 x}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+\tan x)^2+(1-\tan x)^2=\dfrac{2}{\cos^2 x}$

គេមាន $(1+\tan x)^2=1+2\tan x+\tan^2 x \quad (1)$ និង $(1-\tan x)^2=1-2\tan x+\tan^2 x \quad (2)$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន $(1+\tan x)^2+(1-\tan x)^2=2(1+\tan^2 x)$ ដោយ $1+\tan^2 \mathrm{x}=\dfrac{1}{\cos^2 \mathrm{x}}$

ដូចនេះ $(1+\tan x)^2+(1-\tan x)^2=\dfrac{2}{\cos^2 x}$ ។

លំហាត់ទី០៧

គណនា $Y=(2+\sin^2 x\cos^2 x)\left(\dfrac{1}{1+\sin^2 x}+\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\right)$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $Y=(2+\sin^2 x\cos^2 x)\left(\dfrac{1}{1+\sin^2 x}+\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\right)$

គេមាន
$$\frac{1}{1+\sin^2 x}+\frac{1}{1+\cos^2 x}=\frac{1+\cos^2 x+1+\sin^2 x}{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}$$
$$=\frac{2+(\sin^2 x+\cos^2 x)}{1+\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x\cos^2 x}$$
$$=\frac{2+1}{1+1+\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{3}{2+\sin^2 x\cos^2 x}$$

គេបាន $Y=(2+\sin^2 x\cos^2 x)\left(\dfrac{1}{1+\sin^2 x}+\dfrac{1}{1+\cos^2 x}\right)=(2+\sin^2 x\cos^2 x)\times\dfrac{3}{2+\sin^2 x\cos^2 x}=3$

ដូចនេះ $Y=3$ ។

លំហាត់ទី០៨

សម្រួលកន្សោម $Y=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\tan^{16} x+\cot^{16} x}}}$

ដំណោះស្រាយ

សម្រួលកន្សោម $Y=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\tan^{16} x+\cot^{16} x}}}$

យើងដឹងថា $\tan x\cot x=1$

គេបាន
$$Y=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\tan^{16} x+\cot^{16} x}}}$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{(\tan^8 x)^2+2\tan^8 x\cot^8 x+(\cot^8 x)^2}}}$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{(\tan^8 x+\cot^8 x)^2}}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\tan^8 x+\cot^8 x}}$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{(\tan^4 x)^2+2\tan^4 x\cot^4 x+(\cot^4 x)^2}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{(\tan^4 x+\cot^4 x)^2}}=\sqrt{2+\tan^4 x+\cot^4 x}$$

$$=\sqrt{(\tan^2 x)^2+2\tan^2 x\cot^4 x+(\cot^2 x)^2}=\sqrt{(\tan^2 x+\cot^2 x)^2}=\tan^2 x+\cot^2 x$$

ដូច្នេះ $Y=\tan^2 x+\cot^2 x$ ។

លំហាត់ទី០៩

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(\tan\alpha+\tan\beta)^2+(1-\tan\alpha\tan\beta)^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(\tan\alpha+\tan\beta)^2+(1-\tan\alpha\tan\beta)^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$

គេមាន $(\tan\alpha+\tan\beta)^2=\tan^2\alpha+2\tan\alpha\tan\beta+\tan^2\beta \quad (1)$

និង $(1-\tan\alpha\tan\beta)^2=1-2\tan\alpha\tan\beta+\tan^2\alpha\tan^2\beta \quad (2)$

បូកសមភាព (1) និង (2)គេបាន ៖

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2+(1-\tan\alpha\tan\beta)^2=1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\alpha\tan^2\beta$$

$$=(1+\tan^2\alpha)+(\tan^2\beta+\tan^2\alpha\tan^2\beta)$$

$$=(1+\tan^2\alpha)+\tan^2\beta(1+\tan^2\alpha)$$

$$=(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)=\frac{1}{\cos^2\alpha}\times\frac{1}{\cos^2\beta}$$

ដូចនេះ $(\tan\alpha+\tan\beta)^2+(1-\tan\alpha\tan\beta)^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$ ។

លំហាត់ទី១០

សម្រួលកន្សោម $Y=\sqrt{4\sin^2 x+\cos^4 x}+\sqrt{4\cos^2 x+\sin^4 x}$

ដំណោះស្រាយ

សម្រួលកន្សោម $Y=\sqrt{4\sin^2 x+\cos^4 x}+\sqrt{4\cos^2 x+\sin^4 x}$

តាមទំនាក់ទំនងពីតាគ័រ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

គេទាញ $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ និង $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

គេបាន $Y=\sqrt{4(1-\cos^2 x)+\cos^4 x}+\sqrt{4(1-\sin^2 x)+\sin^4 x}$

$$=\sqrt{4-4\cos^2 x+\cos^4 x}+\sqrt{4-4\sin^2 x+\sin^4 x}$$

$$=\sqrt{(2-\cos^2 x)^2}+\sqrt{(2-\sin^2 x)^2}$$

$$=|2-\cos^2 x|+|2-\sin^2 x|$$

ដោយ $-1\le\sin x\le 1$ និង $-1\le\cos x\le 1$ នោះ $0\le\sin^2 x\le 1$ និង $0\le\cos^2 x\le 1$

ហេតុនេះ $Y=2-\cos^2 x+2-\sin^2 x=4-(\cos^2 x+\sin^2 x)=4-1=3$

ដូចនេះ $Y=3$ ។

លំហាត់ទី១១

ដោយដឹងថា $\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$ និង $0^o < \alpha < 90^o$ ។ ចូរគណនាតម្លៃនៃ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ និង $\cot\alpha$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ និង $\cot\alpha$

គេមាន $\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$ និង $0^o < \alpha < 90^o$ តាមទំនាក់ទំនង $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

គេទាញ $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{5}{12}\right)^2} = \dfrac{144}{169}$ ដោយ $0^o < \alpha < 90^o$ នោះ $\cos\alpha > 0$

ដូចនេះ $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ ។

ហើយតាមទំនាក់ទំនង $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ គេទាញ $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \dfrac{5}{12}.\dfrac{12}{13} = \dfrac{5}{13}$ រួច $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{12}{5}$ ។

ដូចនេះ $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$; $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$; $\cot\alpha = \dfrac{12}{5}$ ។

លំហាត់ទី១២

គេដឹងថា $\sin x + \cos x = \dfrac{41}{29}$ ។ចូរគណនាផលគុណ $\sin x.\cos x$ រួចទាញរក $\sin x$ និង $\cos x$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $\sin x.\cos x$

គេមាន $(\sin x+\cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x$

ដោយ $\sin x + \cos x = \dfrac{41}{29}$ និង $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

គេបាន $\left(\dfrac{41}{29}\right)^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ ឬ $2\sin x\cos x = \dfrac{41^2 - 29^2}{29^2} = \dfrac{840}{841}$

ដូចនេះ $\sin x.\cos x = \dfrac{420}{841}$ ។

ទាញរក $\sin x$ និង $\cos x$:

ដោយគេមាន $\sin x + \cos x = \dfrac{41}{29}$

និង $\sin x.\cos x = \dfrac{420}{841}$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទវៀត $\sin x$ និង $\cos x$

ជាឫសសមីការ $X^2 - \dfrac{41}{29}X + \dfrac{420}{841} = 0$ ។

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយសមីការនេះគេបាន $X_1 = \dfrac{20}{29}$; $X_2 = \dfrac{21}{29}$

ដូចនេះ $\sin x = \dfrac{20}{29}$; $\cos x = \dfrac{21}{29}$ ឬ $\sin x = \dfrac{21}{29}$; $\cos x = \dfrac{20}{29}$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេដឹងថា $\tan x+\cot x=a$ ដែល $0<x<90^{o}$ និង $a\ge 2$ ។

ចូរគណនា $\tan^3 x+\cot^3 x$ ជាអនុគមន៍នៃ a ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\tan^3 x+\cot^3 x$ ជាអនុគមន៍នៃ a

គេមាន $\tan x+\cot x=a$ គេបាន $(\tan x+\cot x)^2=a^2$

$$\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x=a^2$$

ដោយ $\tan x\cot x=1$ គេទាញ $\tan^2 x+\cot^2 x=a^2-2$

តាមសមភាព $A^3+B^3=(A+B)(A^2-A.B+B^2)$

គេបាន $\tan^3 x+\cot^3 x=(\tan x+\cot x)(\tan^2 x-\tan x\cot x+\cot^2 x)$

$$=a(a^2-2-1)=a(a^2-3)$$

ដូចនេះ $\tan^3 x+\cot^3 x=a^3-3a$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេដឹងថា $\cos a=\dfrac{m}{n+p}$, $\cos b=\dfrac{n}{p+m}$, $\cos c=\dfrac{p}{m+n}$

ចូរគណនាកន្សោម ៖

$$M=\frac{\sin^2 a}{2+2\cos a-\sin^2 a}+\frac{\sin^2 b}{2+2\cos b-\sin^2 b}+\frac{\sin^2 c}{2+2\cos c-\sin^2 c}$$

ដំណោះស្រាយ

$$M=\frac{\sin^2 a}{2+2\cos a-\sin^2 a}+\frac{\sin^2 b}{2+2\cos b-\sin^2 b}+\frac{\sin^2 c}{2+2\cos c-\sin^2 c}$$

គេមាន $\sin^2 a=1-\cos^2 a=(1-\cos a)(1+\cos a)$ និង $2+2\cos a-\sin^2 a=1+2\cos a+\cos^2 a=(1+\cos a)^2$

គេបាន $\dfrac{\sin^2 a}{2+2\cos a-\sin^2 a}=\dfrac{(1-\cos a)(1+\cos a)}{(1+\cos a)^2}=\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}$

ហើយ $\dfrac{\sin^2 b}{2+2\cos b-\sin^2 b}=\dfrac{1-\cos b}{1+\cos b}$

និង $\dfrac{\sin^2 c}{2+2\cos c-\sin^2 c}=\dfrac{1-\cos c}{1+\cos c}$

គេបាន $E=\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}+\dfrac{1-\cos b}{1+\cos b}+\dfrac{1-\cos c}{1+\cos c}$

$$=\frac{1-\frac{m}{n+p}}{1+\frac{m}{n+p}}+\frac{1-\frac{n}{p+m}}{1+\frac{n}{p+m}}+\frac{1-\frac{p}{m+n}}{1+\frac{p}{m+n}}=\frac{n+p-m+p+m-n+m+n-p}{m+n+p}=1$$

ដូចនេះ $E=1$ ។

លំហាត់ទី១៥

ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព $\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព $\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$

គេមាន $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ឬ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

ដូចគ្នាដែរ $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

ឬ $a^4+b^4=\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2$

ដោយយក $a=\sin^2 x$ និង $b=\cos^2 x$ គេបានសមភាព

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$=1-2\sin^2 x\cos^2 x$$

ហើយគេមាន ៖

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right]^2-2\sin^4 x\cos^4 x$$
$$=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$$
$$=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x$$

តាងអនុគមន៍

$$f(x)=\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}(1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x)-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x\cos^2 x)+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x-2+4\sin^2 x\cos^2 x+1}{4}$$
$$=\frac{2\sin^4 x\cos^4 x}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$$

ដូចនេះ $\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេដឹងថា $\tan^3\varphi=\frac{b}{a}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}+\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}+\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$

គេមាន $\tan^3\varphi=\frac{b}{a}$ នាំឱ្យ $\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ គេទាញ $\frac{\cos\varphi}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sin\varphi}{\sqrt[3]{b}}$

ឬ $\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$

គេទាញ $\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$ និង $\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$

គេទាញ $\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2}$ និង $\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2}$

បូកសមីការពីនេះគេទទួលបាន $\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}+\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}+\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យ $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ ដែល $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a+b\neq 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{1}{(a+b)^4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$

យើងបាន $(a+b)(b\cos^4 x+a\sin^4 x)=ab$

$$ab\cos^4 x+a^2\sin^4 x+b^2\cos^4 x+ab\sin^4 x-ab=0$$

$$a^2\sin^4 x+b^2\cos^4 x+ab\,(\sin^4 x+\cos^4 x-1)=0$$

$$a^2\sin^2 x+b^2\cos^4 x-2ab\sin^2 x\cos^2 x=0$$

$$(a\sin^2 x-b\cos^2 x)=0$$

គេទាញ $\frac{\cos^2 x}{a}=\frac{\sin^2 x}{b}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{a+b}=\frac{1}{a+b}$

គេបាន $\frac{\cos^2 x}{a}=\frac{1}{a+b}$ នាំឲ្យ $\frac{\cos^{10} x}{a^4}=\frac{a}{(a+b)^5}$ (1)

ហើយ $\frac{\sin^2 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ នាំឲ្យ $\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{a}{(a+b)^5}$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន $\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{a+b}{(a+b)^5}=\frac{1}{(a+b)^4}$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{1}{(a+b)^4}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យ $\cos\alpha=\frac{a}{b+c}$, $\cos\beta=\frac{b}{c+a}$, $\cos\gamma=\frac{c}{a+b}$ ។ ចូរស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\gamma}{2}=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\gamma}{2}=1$

យើងមាន $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ គេបាន $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}}=\frac{b+c-a}{b+c+a}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\tan^2\frac{\beta}{2}=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}=\frac{1-\frac{b}{c+a}}{1+\frac{b}{c+a}}=\frac{c+a-b}{c+a+b}$ និង $\tan^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}=\frac{1-\frac{c}{a+b}}{1+\frac{c}{a+b}}=\frac{a+b-c}{a+b+c}$

យើងបាន $\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\gamma}{2}=\frac{b+c-a}{a+b+c}+\frac{c+a-b}{a+b+c}+\frac{a+b-c}{a+b+c}$

$\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\gamma}{2}=\frac{b+c-a+c+a-b+a+b-c}{a+b+c}$

$\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\gamma}{2}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$ ពិត

ដូចនេះ $\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\gamma}{2}=1$ ។

លំហាត់ទី១៩

ចូរបង្ហាញថា $\tan 3a-\tan 2a-\tan a=\tan 3a\tan 2a\tan a$ ដែល $a\neq\frac{k\pi}{2}$ គ្រប់ចំនួនគត់រឺឡាទីហ្វ k ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\tan 3a-\tan 2a-\tan a=\tan 3a\tan 2a\tan a$

គេមាន $\tan 3a=\tan(2a+a)$

111 Trigonometry
by phalkun Lim

$\tan 3a=\frac{\tan 2a+\tan a}{1-\tan 2a\tan a}$

$\tan 3a(1-\tan 2a\tan a)=\tan 2a+\tan a$

$\tan 3a-\tan 3a\tan 2a\tan a=\tan 2a+\tan a$

ដូចនេះ $\tan 3a-\tan 2a-\tan a=\tan 3a\tan 2a\tan a$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឱ្យ $f_k(x)=\frac{1}{k}(\sin^k x+\cos^k x)$ ដែល $k=1\,;\,2\,;\,3\,;\ldots$ ។ ចូរបង្ហាញថា $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{12}$

គេមាន $f_4(x)=\frac{1}{4}(\sin^4 x+\cos^4 x)=\frac{1}{4}[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]=\frac{1}{4}\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right)$

ហើយ $f_6(x)=\frac{1}{6}(\sin^6 x+\cos^6 x)=\frac{1}{6}\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)\right]$

$=\frac{1}{6}\left(1-3\sin^2 x\cos^2 x\right)$

គេបាន $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$ ។ ដូចនេះ $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{12}$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឱ្យ a , b , c , d ជាចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $[\ 0 ; \pi\ ]$ ដោយដឹងថា $\begin{cases} \sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d) \\ \cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d) \end{cases}$

ចូរបង្ហាញថា $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$

គេមាន $\begin{cases} \sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d) \\ \cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d) \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} \sin a - 8\sin d = 4\sin c - 7\sin b \\ \cos a - 8\cos d = 4\cos c - 7\cos b \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} (\sin a - 8\sin d)^2 = (4\sin c - 7\sin b)^2 \quad (i) \\ (\cos a - 8\cos d)^2 = (4\cos c - 7\cos b)^2 \quad (ii) \end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$65 - 16\cos(a-d) = 65 - 56\cos(b-c)$$

$$-16\cos(a-d) = -56\cos(b-c)$$

ដូចនេះ $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យ $a ; b ; c ; d$ និង x ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin 2x}{b} = \frac{\sin 3x}{c} = \frac{\sin 4x}{d}$ ដែល $x \neq k\pi\ ;\ k \in Z$

ចូរបង្ហាញថា $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$

តាង $\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin 2x}{b} = \frac{\sin 3x}{c} = \frac{\sin 4x}{d} = t$ គេទាញ $\begin{cases} \sin x = at \\ \sin 2x = bt \\ \sin 3x = ct \\ \sin 4x = dt \end{cases}$

គេមាន $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$

$$\sin^2 4x = 4\sin^2 2x \cos^2 2x$$

$$\sin^2 4x = 4\sin^2 2x(1 - \sin^2 2x)$$

$$d^2t^2 = 4b^2t^2(1 - b^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{d^2}{4b^2}\right) \quad (1)$

ម៉្យាងទៀត $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$$

$$ct = at(3 - 4a^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{4a^2}(3 - \frac{c}{a}) \quad (2)$

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន $\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{d^2}{4b^2}\right)=\frac{1}{4a^2}\left(3-\frac{c}{a}\right)\Leftrightarrow\frac{4b^2-d^2}{4b^4}=\frac{3a-c}{4a^3}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង a^3b^4 គេបាន $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$ ពិត

ដូចនេះ $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2-71x+21<0$ ។ចូរបង្ហាញថា $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$

តាង $f(x)=60x^2-71x+21$ ។ $\Delta=(-71)^2-4(60)(21)=5041-5040=1$

គេទាញឫស $x_1=\frac{71-1}{120}=\frac{7}{12}$, $x_2=\frac{71+39}{120}=\frac{3}{5}$

យើងបាន $f(x)=60x^2-71x+21<0$ នាំឲ្យ $\frac{7}{12}<x<\frac{3}{5}$ ឬ $\frac{7}{4}<3x<\frac{9}{5}$

ឬ $\frac{3}{4}<3x-1<\frac{4}{5}$ នាំឲ្យ $\frac{4}{5}<\frac{1}{3x-1}<\frac{4}{3}$

គេទាញ $\frac{4\pi}{5}<\frac{\pi}{3x-1}<\frac{4\pi}{3}$ នាំឲ្យ $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$ ។

ដូចនេះ បើ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2-71x+21<0$ នោះគេបាន $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$ ។

លំហាត់ទី២៤

ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$ គ្រប់ចំនួន $x,y\in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}$ នោះគេបាន $\sin\frac{2\pi}{10}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10})=\cos\frac{3\pi}{10}$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ $\sin 2a=2\sin a\cos a$ និង $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=3\cos\frac{\pi}{10}-4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4(1-\sin^2\frac{\pi}{10})$$

ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10}-2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$ តាង $t=\sin\frac{\pi}{10}>0$

គេបាន $4t^2-2t-1=0$, $\Delta'=1+4=5>0$ គេទាញឫស $t_1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$, $t_2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។ ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}=1$ នាំឲ្យ $\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ. ស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y)=x^2+(x-y)^2-4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គេបាន $f(x;y)=x^2+x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2$

$$=2x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$=2x^2-2xy+y^2-(x^2+y^2)\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x^2-2xy-\frac{1+\sqrt{5}}{2}y^2$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}x^2+2xy+\frac{\sqrt{5}+1}{2}y^2\right)$$

$$=-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,x+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\,y\right)^2\le 0 \quad , \forall x,y\in IR$$

ដូចនេះ $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេដឹងថា $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$ និង $\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{c}{d}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos(\alpha-\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos(\alpha-\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}$

គេមាន $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$ (1) និង $\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{c}{d}$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}+\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)+\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\beta)}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{\sin(2\theta-\alpha-\beta)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\beta)}=\frac{ad+bc}{bd} \quad (3)$$

តាម (2) គេទាញ $\dfrac{\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}=\dfrac{d}{c}$ (4)

បូកសមីការ (1) និង (4) អង្គ និង អង្គគេបាន $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}+\dfrac{\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{d}{c}$

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)+\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\beta)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)}=\frac{ac+bd}{bc}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\sin(2\theta-2\alpha)+\frac{1}{2}\sin(2\theta-2\beta)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)}=\frac{ac+bd}{bc}$$

$$\frac{\sin(2\theta-\alpha-\beta)\cos(-\alpha+\beta)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)}=\frac{ac+bd}{bc} \quad (5)$$

ធ្វើផលធៀបរវាង (5) និង (3) គេបាន $\dfrac{\cos(-\alpha+\beta)\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}=\dfrac{d}{c}\times\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$

ឬ $\dfrac{\cos(-\alpha+\beta)\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}.\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$

យក (2) ជួសក្នុង(6)គេបាន $\dfrac{\cos(-\alpha+\beta)\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}.\dfrac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}\Leftrightarrow\cos(-\alpha+\beta)=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$

ដូចនេះ $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$ ។

លំហាត់ទី២៦

ចូរស្រាយថាបើគេមានសមភាព $\dfrac{\cos x}{a}=\dfrac{\cos(x+\theta)}{b}=\dfrac{\cos(x+2\theta)}{c}=\dfrac{\cos(x+3\theta)}{d}$

នោះគេបាន $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\dfrac{\cos x}{a}=\dfrac{\cos(x+\theta)}{b}=\dfrac{\cos(x+2\theta)}{c}=\dfrac{\cos(x+3\theta)}{d}=\dfrac{1}{t}$ គេទាញ $\begin{cases}a=t\cos x\\ b=t\cos(x+\theta)\\ c=t\cos(x+2\theta)\\ d=t\cos(x+3\theta)\end{cases}$

គេបាន $a+c=t\left[\cos x+\cos(x+2\theta)\right]=2t\cos\theta\cos(x+\theta)=2b\cos\theta$

$b+d=t\left[\cos(x+\theta)+\cos(x+3\theta)\right]=2t\cos\theta\cos(x+2\theta)=2c\cos\theta$

គេទាញ $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2b\cos\theta}{2c\cos\theta}=\dfrac{b}{c}$ សមមូល $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$ ។

ដូចនេះ $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$ ។

លំហាត់ទី២៧

ចូរស្រាយថាបើ $\cos(\theta-\alpha)=a$ និង $\sin(\theta-\beta)=b$ នោះគេបាន $a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\begin{cases}\cos(\theta-\alpha)=a\\ \sin(\theta-\beta)=b\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=a & (1)\\ \sin\theta\cos\beta-\sin\beta\cos\theta=b & (2)\end{cases}$

គុណសមីការ (1) នឹង $\sin\beta$ ហើយសមីការ (2) នឹង $\cos\alpha$ រួចធ្វើផលបូកគេបាន

$\sin\theta\cos(\alpha-\beta)=a\sin\beta+b\cos\alpha$ នាំឲ្យ $\sin^2\theta\cos^2(\alpha-\beta)=(a\sin\beta+b\cos\alpha)^2$ (3)

គុណសមីការ (1) នឹង $\cos\beta$ ហើយសមីការ (2) នឹង $-\sin\alpha$ រួចធ្វើផលបូកគេបាន

$\cos\theta\cos(\alpha-\beta)=a\cos\beta-b\sin\alpha$ នាំឲ្យ $\cos^2\theta\cos^2(\alpha-\beta)=(a\cos\beta-b\sin\alpha)^2$ (4)

បូកសមីការ (3) និង (4) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\cos^2(\alpha-\beta)=(a\sin\beta+b\cos\alpha)^2+(a\cos\beta-b\sin\alpha)^2$$

$$\cos^2(\alpha-\beta)=a^2+b^2-2ab(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)$$

$$\cos^2(\alpha-\beta)=a^2+b^2-2ab\sin(\alpha-\beta)$$

ដូចនេះ $a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta)$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេដឹងថា $\cos\alpha=\cos\beta\cos\varphi=\cos\gamma\cos\theta$ និង $\sin\alpha=2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$ ។

ចូរស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$

តាមបម្រាប់គេមាន $\sin\alpha=2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$ នាំឲ្យ $\sin^2\alpha=4\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}=(1-\cos\varphi)(1-\cos\theta)$

ដោយ $\cos\alpha=\cos\beta\cos\varphi=\cos\gamma\cos\theta$ នោះ $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\\[2mm]\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\end{cases}$

គេបាន $\sin^2\alpha=(1-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta})(1-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma})$

$$1-\cos^2\alpha=1-\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}\cos\alpha+\frac{1}{\cos\beta\cos\gamma}\cos^2\alpha$$

$$\left(1+\frac{1}{\cos\gamma\cos\beta}\right)\cos^2\alpha=\frac{\cos\gamma+\cos\beta}{\cos\gamma\cos\beta}\cos\alpha$$

ដោយសន្មតថា $\cos\alpha\neq 0$ នោះគេទាញបាន $\cos\alpha=\dfrac{\cos\gamma+\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta}$ (1)

គេមាន $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ (2)

យកទំនាក់ទំនង (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\dfrac{\cos\gamma+\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta}}{1+\dfrac{\cos\gamma+\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta}}=\frac{1+\cos\gamma\cos\beta-\cos\gamma-\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta+\cos\gamma+\cos\beta}$$

$$=\frac{(1-\cos\gamma)-\cos\beta(1-\cos\gamma)}{(1+\cos\gamma)+\cos\beta(1+\cos\gamma)}=\frac{(1-\cos\gamma)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\gamma)(1+\cos\beta)}$$

$$=\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}\times\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}=\tan^2\frac{\gamma}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$$

ដូចនេះ $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៩

ដោយដឹងថា $\frac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\frac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\frac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$

គេមាន $\frac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\frac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\frac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$ គេបាន $\frac{x+y}{x-y}=\frac{\tan(\theta+\alpha)+\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\alpha)-\tan(\theta+\beta)}$

តាមរូបមន្ត $\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$ និង $\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$ នោះគេបាន ៖

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)=\sin(2\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\Leftrightarrow\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)=\frac{\cos(2\theta+2\beta)-\cos(2\theta+2\alpha)}{2}\quad(1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន ៖ $\begin{cases}\dfrac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)=\dfrac{\cos(2\theta+2\gamma)-\cos(2\theta+2\beta)}{2} & (2)\\ \dfrac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=\dfrac{\cos(2\theta+2\alpha)-\cos(2\theta+2\gamma)}{2} & (3)\end{cases}$

ធ្វើផលបូក (1) , (2) និង (3) អង្គនិងអង្គ $\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$ ពិត

លំហាត់ទី៣០

គេដឹងថា $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$ ។ ចូរស្រាយថា $\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$, $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$, $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេត្រូវស្រាយឲ្យឃើញថា $\tan^2\frac{\beta}{2}=\tan\frac{\theta+\alpha}{2}.\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$ ។

គេមាន $\tan\dfrac{\theta+\alpha}{2}=\dfrac{\tan\dfrac{\theta}{2}+\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\alpha}{2}}$ និង $\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}=\dfrac{\tan\dfrac{\theta}{2}-\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\alpha}{2}}$

គេបាន $\tan\dfrac{\theta+\alpha}{2}\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}=\dfrac{\tan^2\dfrac{\theta}{2}-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$ ដោយ $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

នោះ $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ (ព្រោះ $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$)

គេបាន $\tan\dfrac{\theta+\alpha}{2}\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}=\dfrac{\dfrac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{1-\dfrac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}\times\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ ។ តាង $a=\cos\alpha$ និង $b=\cos\beta$ គេបាន ៖

$$\tan\frac{\theta+\alpha}{2}\tan\frac{\theta-\alpha}{2}=\frac{\dfrac{1-ab}{1+ab}-\dfrac{1-a}{1+a}}{1-\dfrac{1-ab}{1+ab}\times\dfrac{1-a}{1+a}}$$

$$=\frac{(1-ab)(1+a)-(1+ab)(1-a)}{(1+ab)(1+a)-(1-ab)(1-a)}$$

$$=\frac{1+a-ab-a^2b-1+a-ab+a^2b}{1+a+ab+a^2b-1+a+ab-a^2b}$$

$$=\frac{2a-2ab}{2a+2ab}=\frac{1-b}{1+b}=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}=\tan^2\frac{\beta}{2}$$

ដូចនេះ $\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\dfrac{\beta}{2}$, $\tan\dfrac{\theta+\alpha}{2}$ ជាស្វីតធរណីមាត្រ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យ $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ និង $0<b<\dfrac{\pi}{2}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $\left(\dfrac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2+\left(\dfrac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2=1$ លុះត្រាតែ $a=b$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\left(\dfrac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2+\left(\dfrac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2=1$ សមមូល $(\sin^2 b+\cos^2 b)\left(\dfrac{\sin^4 a}{\sin^2 b}+\dfrac{\cos^4 a}{\cos^2 b}\right)=1$

$$\sin^4 a+\cos^4 a+\frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}\sin^4 a+\frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}\cos^4 a=1$$

$$1-2\sin^2 a\cos^2 a+\frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}\sin^4 a+\frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}\cos^4 a=1$$

$$\left(\frac{\cos b}{\sin b}\sin^2 a-\frac{\sin b}{\cos b}\cos^2 a)\right)^2=0$$

គេទាញ $\dfrac{\cos b}{\sin b}\sin^2 a=\dfrac{\sin b}{\cos b}\cos^2 a$ សមមូល $\dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a}=\dfrac{\sin^2 b}{\cos^2 b}$ សមមូល $\tan^2 a=\tan^2 b$

ដោយ $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ និង $0<b<\dfrac{\pi}{2}$ នោះគេទាញ $a=b$ ។

លំហាត់ទី៣២

ចូរបង្ហាញថា ៖ $\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដំណោះស្រាយ

$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$

តាង $E_n(x)=\cos^n x+\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})$ (i)

តាមរូបមន្ត $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ គេទាញ $\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n-3} x$ គេបាន $\cos^n x=\frac{3}{4}\cos^{n-2} x+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3} x$ (1)

ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន $\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})=\frac{3}{4}\cos^{n-2}(x+\frac{2\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3}(x+\frac{2\pi}{3})$ (2)

$\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{3}{4}\cos^{n-2}(x+\frac{4\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3}(x+\frac{4\pi}{3})$ (3)

ដោយបូកសមីការ (1); (2) និង (3) គេបាន $E_n(x)=\frac{3}{4}E_{n-2}(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_{n-3}(x)$ (ii)

តាម (i) ចំពោះ $n=0$; $n=1$, $n=2$ គេបាន ៖

$$E_0(x)=3$$

$$E_1(x)=\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x+\frac{4\pi}{3})$$

$$E_1(x)=\cos x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=0$$

$$E_2(x)=\cos^2 x+(-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2+(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2$$

$$E_2(x)=\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{3}{2}\sin^2 x=\frac{3}{2}$$

តាម (ii) ចំពោះ $n=3$; $n=4$, $n=5$; $n=7$ គេបាន

$$E_3(x)=\frac{3}{4}E_1(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_0(x)=\frac{3}{4}\cos 3x$$

$$E_4(x)=\frac{3}{4}E_2(x)+\frac{1}{4}\cos 3xE_1(x)=\frac{9}{8}$$

$$E_5(x)=\frac{3}{4}E_3(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_2(x)=\frac{9}{16}\cos 3x+\frac{3}{8}\cos 3x=\frac{15}{16}\cos 3x$$

$$E_7(x)=\frac{3}{4}E_5(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_4(x)=\frac{45}{64}\cos 3x+\frac{9}{32}\cos 3x=\frac{63}{64}\cos 3x$$

ដូចនេះ $\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n^{\ 2}-5}{2(a_n+2)}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$

ចំពោះ $n=0$ គេបាន $a_0=\cot\dfrac{\pi}{24}-2$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{24}}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{1+\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\frac{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$=\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+8+4\sqrt{3}}{4}=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

គេទាញ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ ។

ហេតុនេះ $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិតចំពោះ $n=0$ ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_k=\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។ យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ៖

$a_{k+1}=\cot\left(\dfrac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។ យើងមាន $a_{k+1}=\dfrac{a_k^{\ 2}-5}{2(a_k+2)}$ ដោយ $a_k=\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$

នោះ $$a_{k+1}=\frac{\left[\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2\right]^2-5}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}=\frac{\cot^2\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-4\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}=\frac{\cot^2\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{2}\right)}-2$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\cot 2a=\dfrac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$ គេបាន $a_{k+1}=\cot\left(\dfrac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។

ដូចនេះ $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ $U_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ និង $U_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-U_n^{\ 2}}}{2}}$, $\forall n\in IN$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$U_1 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_0^{\,2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}}}{2}} = \sin\frac{\pi}{8}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ។យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1} = \sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

យើងមាន $U_{p+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_p^{\,2}}}{2}}$ តែតាមការឧបមា $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{p+2}}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2^{p+3}}}{2}} = \sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

ដូចនេះ $U_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឲ្យ $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^4}$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និង ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនោះផង ។

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ ៖

គេមាន $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$,

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

តាមលំនាំឧទាហរណ៍យើងអាចទាញរករូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.........+\sqrt{2}}}}}_{(n)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះ ៖

យើងតាង $A_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......+\sqrt{2}}}}}_{(n)}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

យើងមាន $A_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$ ពិត ។ យើងឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ ៖

$$A_p = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......+\sqrt{2}}}}}_{(p)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $p+1$ គឺ $A_{p+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

យើងមាន $A_{p+1} = \sqrt{2+A_p}$

ដោយតាមការឧបមា $A_p = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$

យើងបាន $A_{p+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

ដូចនេះ $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.........+\sqrt{2}}}}}_{(n)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៣៦

ក) ចូរស្រាយថា $1+\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}\,\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$

ខ) គណនា $P = (1+\tan 1^o)(1+\tan 2^o)(1+\tan 3^o)...(1+\tan 45^o)$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $1+\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}\,\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$

គេមាន ៖

$$\cos(45^o-\alpha) = \cos 45^o\cos\alpha + \sin 45^o\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha(1+\tan\alpha)$$

នាំឲ្យ $\frac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha} = 1+\tan\alpha$ ពិត ។ ដូចនេះ $1+\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}\,\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$ ។

ខ) គណនា $P = (1+\tan 1^o)(1+\tan 2^o)(1+\tan 3^o)...(1+\tan 45^o)$

តាមសមភាព $1+\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}\,\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$ នោះគេបាន

$$\begin{cases} 1+\tan 1^o = \frac{\sqrt{2}\cos 44^0}{\cos 1^o} \\ 1+\tan 2^o = \frac{\sqrt{2}\cos 43^o}{\cos 2^o} \\ 1+\tan 3^o = \frac{\sqrt{2}\cos 42^o}{\cos 3^o} \\ ------------- \\ 1+\tan 45^o = \frac{\sqrt{2}\cos 0^o}{\cos 45^o} \end{cases}$$

គុណសមភាពនេះអង្គ និង អង្គគេបាន $P = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{45}\cos 0^o}{\cos 45^o} = \left(\sqrt{2}\right)^{46} = 2^{23}$ (ព្រោះ $\cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

ដូចនេះ $P = 2^{23} = 8388608$ ។

លំហាត់ទី៣៧

ក) ចូរស្រាយថា $1+\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\,\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$

ខ) គណនា $P=(1+\cot 1^o)(1+\cot 2^o)(1+\cot 3^o)\dots(1+\cot 134^o)$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $1+\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\,\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$

គេមាន $1+\cot\alpha = 1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ដោយ $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(45^o+\alpha)=\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)$

ដូចនេះ $1+\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\,\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$ ។

ខ) គណនា $P=(1+\cot 1^o)(1+\cot 2^o)(1+\cot 3^o)\dots(1+\cot 134^o)$

ដោយប្រើសមភាព $1+\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\,\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$ គេបាន $P=\left(\sqrt{2}\right)^{134}=2^{67}=147573952589676412928$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\frac{1}{16}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

តាង $P=(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\prod_{n=0}^{3}\left[\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{3^n\pi}{20}\right)\right]$

គេមាន $\frac{1}{2}+\cos a=\frac{1}{2}+1-2\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(3-4\sin^2\frac{a}{2})$

ហើយ $\sin\frac{3a}{2}=3\sin\frac{a}{2}-4\sin^2\frac{a}{2}=\sin\frac{a}{2}(3-4\sin^2\frac{a}{2})$ នាំឱ្យ $3-4\sin^2\frac{a}{2}=\dfrac{\sin\frac{3a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$

ហេតុនេះ $\dfrac{1}{2}+\cos a=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\frac{3a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$ យក $a=\dfrac{3^n\pi}{20}$ គេបាន $\dfrac{1}{2}+\cos\left(\dfrac{3^n\pi}{20}\right)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sin\frac{3^{n+1}\pi}{40}}{\sin\frac{3^n\pi}{40}}$

គេបាន $P=\prod_{n=0}^{3}\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sin\frac{3^{n+1}\pi}{40}}{\sin\frac{3^n\pi}{40}}\right)=\dfrac{1}{16}.\dfrac{\sin\frac{81\pi}{40}}{\sin\frac{\pi}{40}}=\dfrac{1}{16}$ ព្រោះ $\sin\frac{81\pi}{40}=\sin(2\pi+\frac{\pi}{40})=\sin\frac{\pi}{40}$ ។

ដូចនេះ $(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\frac{1}{16}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

ចូរស្រាយថា $\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}=\frac{3}{8}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}$

តាមរូបមន្ត $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$ ឬ $\cos^3 a=\frac{3}{4}\cos a+\frac{1}{4}\cos 3a$

កន្សោមដែលឲ្យអាចសរសេរជា $S=\frac{3}{4}(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9})+\frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{7\pi}{3})$

តាង $A=\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{7\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ហើយ $B=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}$

ដោយ $-\cos\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{13\pi}{9}$ នោះ $B=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}$

គុណនឹង $2\sin\frac{\pi}{3}$ គេបាន

$$2B.\sin\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{7\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{13\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$2\ B.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{4\pi}{9}-\sin(-\frac{2\pi}{9})+\sin\frac{10\pi}{9}-\sin\frac{4\pi}{9}+\sin\frac{16\pi}{9}-\sin\frac{10\pi}{9}$$

$$B\sqrt{3}=\sin\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{16\pi}{9}=2\ \sin\pi\ \cos(-\frac{7\pi}{9})=0$$

គេទាញបាន $B=0$ ហើយ $S=\frac{3}{4}B+\frac{1}{4}A=0+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$ ។

ដូចនេះ $\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}=\frac{3}{8}$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ $U_n=\sqrt{2}^n.\sin\frac{n\pi}{4}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គ-គណនាផលបូក $S_n=U_1+U_2+U_3+.........+U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$

តាមរូបមន្ត $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\sqrt{2}\cos(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{n\pi}{4})=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$ ។

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

យើងមាន $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$ នាំឲ្យ $\sin\frac{n\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\sqrt{2})^n$ គេបាន $(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

ដូចនេះ $U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$ ។

គ-គណនាផលបូក $S_n=U_1+U_2+U_3+.........+U_n$

យើងបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{2})^k\cos\frac{k\pi}{4}-(\sqrt{2})^{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

ដូចនេះ $S_n=1-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេមានអនុគមន៍លេខ f កំនត់ពីសំណុំ IN ទៅសំណុំ IR ដោយ $f(0)=0$ និង

$f(n+1)=2f(n)+\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ។ ចូរកំនត់រក $f(n)$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រក $f(n)$

គេមាន $f(n+1)=2f(n)+\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2^n គេបាន $\frac{1}{2^n}f(n)=\frac{1}{2^{n-1}}f(n)+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$ (1)

គេមាន $\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}=\frac{2\tan a}{\tan a\cot a-\tan^2 a}=\frac{2}{\cot a-\tan a}$

គេទាញ $\tan a=\cot a-2\cot 2a$ ដោយយក $a=\frac{\pi}{2^{n+2}}$ គេបាន $\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}=\cot\frac{\pi}{2^{n+2}}-2\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (2)

យក (២) ជួសក្នុង (១) គេបាន $\frac{1}{2^n}f(n+1)-\frac{1}{2^{n-1}}f(n)=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\pi}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$

នាំឲ្យ $\sum_{k=0}^{n-1}[\frac{1}{2^k}f(k+1)-\frac{1}{2^{k-1}}f(k)]=\sum_{k=0}^{n-1}[\frac{1}{2^k}\cot\frac{\pi}{2^{k+2}}-\frac{1}{2^{k-1}}\cot\frac{\pi}{2^{k+1}}]$

$$\frac{1}{2^{n-1}}f(n)-2f(0)=\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}\Rightarrow f(n)=\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

ដូចនេះ $f(n)=\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៤២

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\Re$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$

ឧបមាថា $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$ ពិត

សមមូល $(a\cos x+b\sin x)^2\le a^2+b^2$ ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ នោះគេបាន ៖

$(a\cos x+b\sin x)^2\le(a^2+b^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)$

$a^2\cos^2 x+2ab\sin x\cos x+b^2\sin^2 x\le a^2\sin^2 x+a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x$

ឬ $a^2\sin^2 x-2ab\sin x\cos x+b^2\cos^2 x\ge 0$ ឬ $(a\sin x-b\cos x)^2\ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៤៣

ចូរបង្ហាញថា $(\sin x+a\cos x)(\sin x+b\cos x)\le 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $(\sin x+a\cos x)(\sin x+b\cos x)\le 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (1)$

-បើ $\cos x=0$ នោះ $\sin^2 x\le 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ពិត

-បើ $\cos x\ne 0$ យើងចែកអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង $\cos^2 x$

$(\tan x+a)(\tan x+b)\le\left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\cos^2 x}$ តាង $t=\tan x$ នោះ $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=1+t^2$

គេបាន $(t+a)(t+b)=\left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left(1+t^2\right)$

$t^2+(a+b)t+ab\le 1+t^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2$

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2-(a+b)t+1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab\ge 0\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{2}t-1\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $(\sin x+a\cos x)(\sin x+b\cos x)\le 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ។

លំហាត់ទី៤៤

ចូរបង្ហាញថា $\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right)\ge\left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$ ចំពោះគ្រប់ $a>0$, $b>0$, $0<x<\frac{\pi}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right)\ge\left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$

គេមាន $(1+\frac{a}{\sin x})(1+\frac{b}{\cos x})=1+\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{ab}{\sin x\cos x}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}\ge\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x\cos x}}$

នោះគេបាន ៖$(1+\frac{a}{\sin x})(1+\frac{b}{\cos x})\ge 1+\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x\cos x}}+\frac{ab}{\sin x\cos x}$

$$(1+\frac{a}{\sin x})(1+\frac{b}{\cos x})\ge(1+\sqrt{\frac{ab}{\sin x\cos x}})^2$$

$$(1+\frac{a}{\sin x})(1+\frac{b}{\cos x})\ge(1+\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{\sin 2x}})^2\ge(1+\sqrt{2ab})^2$$

ពីព្រោះគ្រប់ $0<x<\frac{\pi}{2}$ គេមាន $\sin 2x\le 1$ ។

ដូចនេះ$\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right)\ge\left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$ ។

លំហាត់ទី៤៥

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\ge\frac{1}{a+b}$; $(a>0\ ,\ b>0)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\ge\frac{1}{a+b}$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{(\sin^2 x)^2}{a}+\frac{(\cos^2 x)^2}{b}\ge\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{a+b}$

ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ។ ដូចនេះ $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\ge\frac{1}{a+b}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឲ្យ $x\ ,\ y\ ,\ z$ ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ $\cos x+\cos y+\cos z=0$ និង $\cos 3x+\cos 3y+\cos 3z=0$ ។ចូរបង្ហាញថា $\cos 2x\cos 2y\cos 2z\le 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cos 2x\cos 2y\cos 2z\le 0$

តាមរូបមន្ត $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$ គេទាញ $4\cos^3 x=3\cos x+\cos 3x$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ

$4\cos^3 y=3\cos y+\cos 3y$ (2) & $4\cos^3 z=3\cos z+\cos 3z$ (3)

បូកទំនាក់ទំនង (1) , (2) , (3) គេបាន $4\cos^3 x+4\cos^3 y+4\cos^3 z=0$

ឬ $\cos^3 x+\cos^3 y+\cos^3 z=0$ (ព្រោះ $\cos x+\cos y+\cos z=0$ និង $\cos 3x+\cos 3y+\cos 3z=0$)

គេមាន $\cos x+\cos y+\cos z=0$ គេបាន $\cos x+\cos y=-\cos z$ លើកជាគូបគេបាន ៖

$(\cos x+\cos y)^3=-\cos^3 z$

$\cos^3 x+3\cos x\cos y(\cos x+\cos y)+\cos^3 y=-\cos^3 z$

$\cos^3 x-3\cos x\cos y\cos z+\cos^3 y=-\cos^3 z$

$\cos^3 x+\cos^3 y+\cos^3 x=3\cos x\cos y\cos z$

ដោយ $\cos^3 x+\cos^3 y+\cos^3 z=0$ គេទាញ $3\cos x\cos y\cos z=0$ នាំឲ្យ $\cos x=0$ ឬ $\cos y=0$ ឬ $\cos z=0$ ។ ដោយសន្មតយក $\cos x=0$ នោះ $\cos y=-\cos z$

គេបាន $\cos 2x\cos 2y\cos 2z=(2\cos^2 x-1)(2\cos^2 y-1)(2\cos^2 z-1)=-(2\cos^2 z-1)^2\le 0$

ដូចនេះបញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}+\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}$

ដែល a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}\le f(x)\le 2\sqrt{\frac{a+b}{2}+c}$

រួចបញ្ជាក់តម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}\le f(x)\le 2\sqrt{\frac{a+b}{2}+c}$

យើងមាន ៖ $f(x)=\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}+\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}$ (1)

ដោយ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះ $\forall x\in IR: f(x)>0$

លើកអង្គទាំងពីរនៃ (1) ជាការេគេបាន ៖

$$f^2(x)=\left(\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}+\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}\right)^2$$

$$f^2(x)=a+b+2c+2\sqrt{(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c)(a\cos^2 x+b\sin^2 x+c)}\quad (2)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីគ្រប់ចំនួនពិត $A,\ B\ge 0$ គេមាន $A+B\ge 2\sqrt{A.B}$ ឬ $2\sqrt{A.B}\le A+B$

គេបាន ៖ $2\sqrt{(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c)(a\cos^2 x+b\sin^2 x+c)}\le a+b+2c$

តាមទំនាក់ទំនង (2) គេទាញបាន $f^2(x)\le a+b+2c+a+b+2c=4(\frac{a+b}{2}+c)$

នាំឲ្យ $f(x)\le 2\sqrt{\frac{a+b}{2}+c}$ (3)

ម្យ៉ាងទៀតយើងតាង ៖ $P(x)=(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c)(a\cos^2 x+b\sin^2 x+c)$

$P(x)=[\,a(1-\cos^2 x)+b\cos^2 x+c]\,[a\cos^2 x+b(1-\cos^2 x)+c]$

$P(x)=[(a+c)+(b-a)\cos^2 x]\,[\,(b+c)-(b-a)\cos^2 x]$

$P(x)=(a+c)(b+c)+(b-a)^2\cos^2 x-(b-a)^2\cos^4 x$

$P(x)=(a+c)(b+c)+(b-a)^2\cos^2 x\sin^2 x$

យើងមាន $(b-a)^2\sin^2 x\cos^2 x\ge 0$, $\forall x\in IR$

គេទាញបាន $P(x) \ge (a+c)(b+c)$, $\forall x \in IR$

ទំនាក់ទំនង (2) គេអាចសរសេរ ៖

$$f^2(x) = a+b+2c+2\sqrt{P(x)} \ge a+b+2c+2\sqrt{(a+c)(b+c)}$$

$$f^2(x) \ge (a+c)+(b+c)+2\sqrt{(a+c)(b+c)}$$

$$f^2(x) \ge (\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c})^2$$

គេទាញ $f(x) \ge \sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$ (4)

តាមទំនាក់ទំនង (3) និង (4) គេទាញបាន ៖

$$\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c} \le f(x) \le 2\sqrt{\frac{a+b}{2}+c}$$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

លំហាត់ទី៤៨

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2}$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍នេះ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x})^2 + (\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x})^2}$$

$$= \sqrt{\cos^4 x + 2 + \frac{1}{\cos^4 x} + \sin^4 x + 2 + \frac{1}{\sin^4 x}} = \sqrt{4 + (\cos^4 x + \sin^4 x) + (\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x})}$$

$$= \sqrt{4 + (\cos^4 x + \sin^4 x)(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x})} = \sqrt{4 + \left[(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x\right](1 + \frac{16}{\sin^4 2x})}$$

$$= \sqrt{4 + (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)(1 + \frac{16}{\sin^4 2x})}$$

ដោយគេមាន $\sin^2 2x \le 1$ នាំឲ្យ $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \ge \frac{1}{2}$ និង $1 + \frac{16}{\sin^4 2x} \ge 17$ ។

គេទាញ $4 + (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}) \ge 4 + \frac{17}{2} = \frac{25}{2}$

យើងបាន $f(x) = \sqrt{4 + (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)(1 + \frac{16}{\sin^4 2x})} \ge \frac{5\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍គឺ $m = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឲ្យអនុគមន៍ ៖

$f(x;y) = (a\cos x + b\cos y)^2 + (a\sin x + b\sin y)^2$ (ដែល $a > 0$, $b > 0$) ។

ចំពោះគ្រប់ $x;\ y \in IR$ បង្ហាញថា $f(x;y) \le (a+b)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $f(x;y) \le (a+b)^2$

$$f(x;y) = \left(a\cos x + b\cos y\right)^2 + \left(a\sin x + b\sin y\right)^2$$
$$= a^2(\cos^2 x + \sin^2 x) + b^2(\cos^2 y + \sin^2 y) + 2ab(\cos x\cos y + \sin x\sin y)$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab\cos(x-y)$$

គេបាន $f(x;y) = a^2 + b^2 + 2ab\cos(x-y)$ ដោយគេមាន $\forall\ x;y \in IR:\ \cos(x-y) \le 1$

យើងបាន $f(x) \le a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$

ដូចនេះ $f(x;y) \le (a+b)^2$ ។

លំហាត់ទី៤០

ចូរគណនា $S = \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S = \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7}$

យើងបាន $S = \dfrac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2} + \dfrac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2} + \dfrac{1-\cos\frac{8\pi}{7}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\right)$

តាង $T = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}$

$$= \cos(\pi - \frac{5\pi}{7}) + \cos(\pi - \frac{3\pi}{7}) + \cos(\pi + \frac{\pi}{7}) = -\cos\frac{5\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន $2T\sin\frac{\pi}{7} = -2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$

$$2T\sin\frac{\pi}{7} = -2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7} = -\left(\sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7}\right) - \left(\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\frac{2\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{6\pi}{7} = -\sin(\pi - \frac{\pi}{7}) = -\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញ $T = -\frac{1}{2}$ នាំឲ្យ $S = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$

ដូចនេះ $S = \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7} = \frac{7}{4}$ ។

លំហាត់ទី៤១

ចូរគណនា $S=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{5\pi}{7}$, $\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{7}$, $\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$ ហើយ $\sin\frac{2\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{8\pi}{7}$

និង $\sin\frac{4\pi}{7}>0$ គេបាន $S=\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\ >0$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$S^2=\sin^2\frac{5\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}-2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$ តាង

$$M=\sin^2\frac{5\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[\ \cos(\pi+\frac{3\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{5\pi}{7})\ \right]$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{5\pi}{7}\right)$$

យក $T=-\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}$ គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$2T\ \sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$

$$2T\ \sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-(\ \sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7})-(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7})-\sin\frac{2\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{6\pi}{7}=-\sin(\pi-\frac{\pi}{7})=-\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញ $T=-\frac{1}{2}$ នាំឲ្យ $M=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$ ។

តាង $N=2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}-2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$

$$=\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{8\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$=\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{8\pi}{7}=-2\sin\pi.\sin(-\frac{\pi}{7})=0$$

គេបាន $S^2=M+N=\frac{7}{4}+0=\frac{7}{4}$ ដោយ $S>0$ នោះ $S=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

ដូចនេះ $S=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤២

គេឲ្យកន្សោម $S=\cos^3\frac{\pi}{7}+\cos^3\frac{3\pi}{7}+\cos^3\frac{5\pi}{7}$ និង $T=\cos^4\frac{\pi}{7}+\cos^4\frac{3\pi}{7}+\cos^4\frac{5\pi}{7}$

ក.ចូរស្រាយថាបីចំនួន $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) : $8x^3-4x^2-4x+1=0$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ $M=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$; $N=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$

និង $P=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$ ។

គ.គណនា $Q=\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{5\pi}{7}$ រួចទាញរកតម្លៃ S និង T ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថាបីចំនួន $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) : $8x^3-4x^2-4x+1=0$

តាង $x_n=\cos\frac{2n-1}{7}\pi$, $n=1\,,\,2\,,\,3$ ជាឫសមីការ (E) គេបាន

$$8\cos^3\frac{(2n-1)\pi}{7}-4\cos^2\frac{(2n-1)\pi}{7}-4\cos\frac{(2n-1)\pi}{7}+1=0$$

$$4\cos\frac{(2n-1)\pi}{7}\left(2\cos^2\frac{(2n-1)\pi}{7}-1\right)+1-4\left(1-\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{4}\right)=0$$

$$4\cos\frac{(2n-1)\pi}{7}\cos\frac{2(2n-1)\pi}{7}-\left(3-4\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{7}\right)=0$$

$$4\,.\,\frac{\sin\frac{2(2n-1)\pi}{7}}{2\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}}\times\frac{\sin\frac{4(2n-1)\pi}{7}}{2\sin\frac{2(2n-1)\pi}{7}}-\frac{3\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}-4\sin^3\frac{(2n-1)\pi}{7}}{\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}}=0$$

$$\frac{\sin\frac{4(2n-1)\pi}{7}}{\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}}-\frac{\sin\frac{3(2n-1)\pi}{7}}{\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}}=0\quad(*)$$

ដោយ $\forall n\in\mathbb{N}:\ \sin\frac{(2n-1)\pi}{7}\neq 0$ ហេតុសមីការ $(*)$ សមមូល ៖

$$\sin\frac{4(2n-1)\pi}{7}-\sin\frac{3(2n-1)\pi}{7}=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}=0$$

$0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ M , N , P

សន្មតថា $x_1=\cos\frac{\pi}{7}$, $x_2=\cos\frac{3\pi}{7}$, $x_3=\cos\frac{5\pi}{7}$ តាមទ្រឹស្តីបទវៀតអនុវត្តន៍ក្នុងសមីការ

$8x^3-4x^2-4x+1=0$ គេបាន $M=x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=+\frac{1}{2}$; $N=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$

និង $P=x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=-\frac{1}{8}$ ។

ដូចនេះ $M=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$; $N=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

និង $P=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=-\frac{1}{8}$ ។

គ.គណនា $Q=\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{5\pi}{7}$

យើងបាន $Q={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$$

$$=M^2-2N=\frac{1}{4}-2\,(-\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$$

ដូចនេះ $Q=\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{5\pi}{7}=\frac{5}{4}$ ។

ទាញរកតម្លៃ S និង T

យើងបាន $S=\cos^3\frac{\pi}{7}+\cos^3\frac{3\pi}{7}+\cos^3\frac{5\pi}{7}$ ឬ $S={x_1}^3+{x_2}^3+{x_3}^3$

ដោយ $x_1=\cos\frac{\pi}{7}$, $x_2=\cos\frac{3\pi}{7}$, $x_3=\cos\frac{5\pi}{7}$ ជាឬសរបស់ (E) នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} 8{x_1}^3-4{x_1}^2-4x_1+1=0 & (1)\\ 8{x_2}^3-4{x_2}^2-4x_2+1=0 & (2)\\ 8{x_3}^3-4{x_3}^2-4x_3+1=0 & (3)\end{cases}$$

បូកសមីការ (1) , (2) , (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$8\,({x_1}^3+{x_2}^3+{x_3}^3)-4({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)-4(x_1+x_2+x_3)+3=0$$

$$8\,S-4Q-4\,M+3=0$$

គេទាញ $S=\frac{Q+M}{2}-\frac{3}{8}=\frac{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}}{2}-\frac{3}{8}=\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $S=\cos^3\frac{\pi}{7}+\cos^3\frac{3\pi}{7}+\cos^3\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $T=\cos^4\frac{\pi}{7}+\cos^4\frac{3\pi}{7}+\cos^4\frac{5\pi}{7}={x_1}^4+{x_2}^4+{x_3}^4$

ដោយគុណសមីការ (1) , (2) , (3) រៀងគ្នានឹង x_1 , x_2 , x_3

គេបាន $\begin{cases} 8{x_1}^4-4{x_1}^3-4{x_1}^2+x_1=0 & (1')\\ 8{x_2}^4-4{x_2}^3-4{x_2}^2+x_2=0 & (2')\\ 8{x_3}^4-4{x_3}^3-4{x_3}^2+x_2=0 & (3')\end{cases}$

បូកសមីការ (1') , (2') , (3') អង្គនឹងអង្គគេបាន $8\,T-4\,S-4\,Q+M=0$

គេទាញ $T=\frac{S+Q}{2}-\frac{M}{8}=\frac{7}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$ ។ដូចនេះ $T=\cos^4\frac{\pi}{7}+\cos^4\frac{3\pi}{7}+\cos^4\frac{5\pi}{7}=\frac{3}{4}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$

តាង $x_1=\cos\frac{2\pi}{7}$, $x_2=\cos\frac{4\pi}{7}$, $x_3=\cos\frac{8\pi}{7}$

$A=x_1+x_2+x_3$, $B=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$, $C=x_1x_2x_3$

$S=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_3}$, $T=\sqrt[3]{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_2x_3}+\sqrt[3]{x_1x_3}$

ជាដំបូងយើងត្រូវគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ A,B,C ។

គណនា $A=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}$

តាមរូបមន្តបម្លែងមុំ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ គេមាន $\begin{cases}\cos\frac{2\pi}{7}=\cos(\pi-\frac{5\pi}{7})=-\cos\frac{5\pi}{7}\\ \cos\frac{4\pi}{7}=\cos(\pi-\frac{3\pi}{7})=-\cos\frac{3\pi}{7}\\ \cos\frac{8\pi}{7}=\cos(\pi+\frac{\pi}{7})=-\cos\frac{\pi}{7}\end{cases}$

គេបាន $A=-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{5\pi}{7}$ ។ គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$2A\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$ គេបាន ៖

$$2A\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}$$

$$2A\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{6\pi}{7}=-\sin(\pi-\frac{\pi}{7})=-\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញបាន $A=-\frac{1}{2}$

គណនា $B=\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$

តាមរូបមន្ត $\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a+b)\right]$

$$B=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{12\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

ដោយ $\begin{cases} \cos\frac{6\pi}{7} = \cos(2\pi - \frac{8\pi}{7}) = \cos\frac{8\pi}{7} \\ \cos\frac{12\pi}{7} = \cos(2\pi - \frac{2\pi}{7}) = \cos\frac{2\pi}{7} \\ \cos\frac{10\pi}{7} = \cos(2\pi - \frac{4\pi}{7}) = \cos\frac{4\pi}{7} \end{cases}$

$B = \frac{1}{2}(\cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}) + \frac{1}{2}(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}) + \frac{1}{2}(\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7})$

$B = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = A = -\frac{1}{2}$

គណនា $C = \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ នោះ $\cos a = \frac{\sin 2a}{2\sin a}$

គេបាន $C = \frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}} \times \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{4\pi}{7}} \times \frac{\sin\frac{16\pi}{7}}{2\sin\frac{8\pi}{7}} = \frac{1}{8}.\frac{\sin\frac{16\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}$

ដោយ $\sin\frac{16\pi}{7} = \sin(2\pi + \frac{2\pi}{7}) = \sin\frac{2\pi}{7}$ នោះ $C = \frac{1}{8}$

ហេតុនេះគេបាន $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{8}$ ។

ដោយប្រើឯកលក្ខណៈភាព ៖

$(a+b+c)^3 = (a^3+b^3+c^3) + 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc$

តាម $S = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3}$, $T = \sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_2x_3} + \sqrt[3]{x_1x_3}$

គេបាន $S^3 = A + 3S.T - 3\sqrt[3]{C} = -\frac{1}{2} + 3ST - \frac{3}{2} = 3ST - 2$

$T^3 = B + 3T(\sqrt[3]{x_1^2x_2x_3} + \sqrt[3]{x_1x_2^2x_3} + \sqrt[3]{x_1x_2x_3^2}) - 3\sqrt[3]{C^2}$

$T^3 = -\frac{1}{2} + 3T\sqrt[3]{x_1x_2x_3}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3}) - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}ST - \frac{5}{4}$

គេបាន $S^3T^3 = (3ST-2)(\frac{3}{2}ST - \frac{3}{4}) = \frac{(3ST-2)(6ST-5)}{4}$

ឬ $4S^3T^3 - 18S^2T^2 + 27ST - 10 = 0$ តាង $u = S.T$

គេបាន $4u^3 - 18u^2 + 27u - 10 = 0$ ឬ $8u^3 - 36u^2 + 54u - 20 = 0$

ឬ $(2u-3)^3 + 7 = 0$ នាំឲ្យគេទាញ $u = S.T = \frac{3-\sqrt[3]{7}}{2}$

ហើយ $S^3 = 3S.T - 2 = 3\times\frac{3-\sqrt[3]{7}}{2} - 2 = \frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}$

ដូចនេះ $S = \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៥៤

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖ $P=\tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{6\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}\tan\frac{12\pi}{27}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P=\tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{6\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}\tan\frac{12\pi}{27}$

គេមាន $\tan\frac{8\pi}{27}=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{27})=\dfrac{\sqrt{3}-\tan\frac{\pi}{27}}{1+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{27}}$

$$\tan\frac{10\pi}{27}=\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{27})=\dfrac{\sqrt{3}+\tan\frac{\pi}{27}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{27}}$$

គេទាញ $\tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}=\dfrac{3\tan\frac{\pi}{27}-\tan^3\frac{\pi}{27}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{27}}=\tan\frac{\pi}{9}$

គេបាន $P=\tan\frac{\pi}{9}\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}$

គេមាន $\tan\frac{2\pi}{9}=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9})=\dfrac{\sqrt{3}-\tan\frac{\pi}{9}}{1+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{9}}$

$$\tan\frac{4\pi}{9}=\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9})=\dfrac{\sqrt{3}+\tan\frac{\pi}{9}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{9}}$$

គេទាញ $\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}=\dfrac{3-\tan^2\frac{\pi}{9}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{9}}$

គេបាន $P=\dfrac{3\tan\frac{\pi}{9}-\tan^3\frac{\pi}{9}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{9}}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

ដូចនេះ $P=\tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{6\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}\tan\frac{12\pi}{27}=\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៥៥

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30}=\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30}=\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$

គេមាន $\tan\frac{7\pi}{30}=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{30})=\frac{\sqrt{3}-\tan\frac{\pi}{30}}{1+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{30}}$

ហើយ $\tan\frac{11\pi}{30}=\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{30})=\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{\pi}{30}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{30}}$

គេបាន $\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30}=\frac{3\tan\frac{\pi}{30}-\tan^3\frac{\pi}{30}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{30}}=\tan\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{5}=\pi-\frac{3\pi}{5}$ នោះ $\tan\frac{2\pi}{5}=\tan(\pi-\frac{3\pi}{5})=-\tan\frac{3\pi}{5}$

ដោយ $\tan\frac{2\pi}{5}=\frac{2\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}$ និង $\tan\frac{3\pi}{5}=\frac{3\tan\frac{\pi}{5}-\tan^3\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$

គេបាន $\frac{2\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}=-\frac{3\tan\frac{\pi}{5}-\tan^3\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$ ឬ $\frac{2}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}=-\frac{3-\tan^2\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$ តាង $t=\tan^2\frac{\pi}{5}$

ដោយ $\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{4}$ នោះ $\frac{1}{3}<t<1$ គេបាន $\frac{2}{1-t}=-\frac{3-t}{1-3t}$ នាំឲ្យ $t^2-10t+5=0$

$\Delta'=25-5=20$ គេទាញឫស $t_1=5-2\sqrt{5}$, $t_2=5+2\sqrt{5}$ ដោយ $\frac{1}{3}<t<1$ នោះ $t=5-2\sqrt{5}$

គេបាន $\tan^2\frac{\pi}{5}=5-2\sqrt{5}$ នោះ $\tan\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

តាមរូបមន្ត $\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ គេបាន $\tan\frac{\pi}{5}=\frac{2\tan\frac{\pi}{10}}{1-\tan^2\frac{\pi}{10}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ តាង $u=\tan\frac{\pi}{10}>0$

គេបាន $\frac{2u}{1-u^2}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ឬ $u^2+\frac{2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}u-1=0$ ។ $\Delta'=\frac{1}{5-2\sqrt{5}}+1=\frac{6-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-2\sqrt{5}}$

គេទាញ $\left[\begin{array}{l} t_1=-\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \\ t_2=-\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}=\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}} \end{array}\right.$

ដោយ $t>0$ នោះ $\tan\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$

ដូចនេះ $\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30}=\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (t_n) កំណត់ដោយ $t_1=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ និង $t_{n+1}=\dfrac{3t_n-t_n^3}{1-3t_n^2}$ ដែល $n\in IN$

ក) ចូរស្រាយថា $t_1=\tan\dfrac{\pi}{5}$ ។

ខ) គេតាង $t_n=\tan u_n$ ដែល $0<u_n<\dfrac{\pi}{2}$ គ្រប់ $n\in IN$ ។ចូរស្រាយថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

គ)គណនា u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $t_1=\tan\dfrac{\pi}{5}$

គេមាន $\dfrac{2\pi}{5}=\pi-\dfrac{3\pi}{5}$ នោះ $\tan\dfrac{2\pi}{5}=\tan(\pi-\dfrac{3\pi}{5})=-\tan\dfrac{3\pi}{5}$

ដោយ $\tan\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}$ និង $\tan\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{3\tan\frac{\pi}{5}-\tan^3\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$ គេបាន $\dfrac{2\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}=-\dfrac{3\tan\frac{\pi}{5}-\tan^3\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$

ឬ $\dfrac{2}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}=-\dfrac{3-\tan^2\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$ តាង $t=\tan^2\dfrac{\pi}{5}$ ដោយ $\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{5}<\dfrac{\pi}{4}$ នោះ $\dfrac{1}{3}<t<1$

គេបាន $\dfrac{2}{1-t}=-\dfrac{3-t}{1-3t}$ នាំឲ្យ $t^2-10t+5=0$ ។ $\Delta'=25-5=20$ គេទាញឬស $t_1=5-2\sqrt{5}$, $t_2=5+2\sqrt{5}$

ដោយ $\dfrac{1}{3}<t<1$ នោះ $t=5-2\sqrt{5}$

គេបាន $\tan^2\dfrac{\pi}{5}=5-2\sqrt{5}$ នោះ $\tan\dfrac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ។ ដូចនេះ $t_1=\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\tan\dfrac{\pi}{5}$ ។

ខ) ស្រាយថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ

គេមាន $t_n=\tan u_n$ ដែល $0<u_n<\dfrac{\pi}{2}$ គ្រប់ $n\in IN$

គេបាន $t_{n+1}=\tan u_{n+1}$ ដោយ $t_{n+1}=\dfrac{3t_n-t_n^3}{1-3t_n^2}$ នោះ $\tan u_{n+1}=\dfrac{3\tan u_n-\tan^3 u_n}{1-3\tan^2 u_n}=\tan 3u_n$

គេទាញ $u_{n+1}=3u_n$ គ្រប់ $n\in IN$ ។

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=3$ ។

គ)គណនា u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

ដោយ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=3$ នោះគេបាន $u_n=u_1\times q^{n-1}$ ដោយ $t_1=\tan u_1=\tan\dfrac{\pi}{5}$

នោះ $u_1=\dfrac{\pi}{5}$ ។ ដូចនេះ $u_n=\dfrac{\pi}{5}\times 3^{n-1}$ និង $t_n=\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\times 3^{n-1}\right)$ ។

លំហាត់ទី៤៧

ក) ចូរស្រាយថា $\sin 3a - \sin a = 2\sin a \cos 2a$

ខ)គណនាផលបូក $S = \sin x \cos 2x + \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} + ... + \sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n}$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\sin 3a - \sin a = 2\sin a \cos 2a$

តាមរូបមន្ត $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

គេបាន $\sin 3a - \sin a = 2\sin\frac{3a-a}{2}\cos\frac{3a+a}{2} = 2\sin a\cos 2a$

ដូចនេះ $\sin 3a - \sin a = 2\sin a \cos 2a$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖$S = \sin x \cos 2x + \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} + ... + \sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\sin 3a - \sin a = 2\sin a\cos 2a$

យក $a = \frac{x}{2^k}$ គេបាន $\sin\frac{x}{3^{k-1}} - \sin\frac{x}{3^k} = 2\sin\frac{x}{3^k}\cos\frac{2x}{3^k}$ ឬ $\sin\frac{x}{3^k}\cos\frac{2x}{3^k} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{3^{k-1}} - \sin\frac{x}{3^k}\right)$

ចំពោះ $k = 0, 1, 2, 3, ..., n$ គេបាន
$$\begin{cases} \sin x\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) \\ \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} = \frac{1}{2}(\sin x - \sin\frac{x}{3}) \\ ------------------ \\ \sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n} = \frac{1}{2}(\sin\frac{x}{3^{n-1}} - \sin\frac{x}{3^n}) \end{cases}$$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គគេបាន $S = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin\frac{x}{3^n})$ ។

លំហាត់ទី៤៨

ក) ចូរស្រាយថា $\sin a\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1}{4}(2\sin a - \sin 2a)$

ខ)គណនាផលបូក $S = \sin a\sin^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\sin^2\frac{a}{4} + ... + 2^n\sin\frac{a}{2^n}\sin^2\frac{a}{2^{n+1}}$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\sin a\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1}{4}(2\sin a - \sin 2a)$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ គេបាន $2\sin a - \sin 2a = 2\sin a - 2\sin a\cos a$

$$= 2\sin a(1 - \cos a)$$

$$= 2\sin a(2\sin^2\frac{a}{2})$$

$$= 4\sin a\sin^2\frac{a}{2}$$

ដូចនេះ $\sin a\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{4}(2\sin a-\sin 2a)$ ។

ខ)គណនាផលបូក $S=\sin a\cos^2\frac{a}{2}+2\sin\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{4}+....+2^n\sin\frac{a}{2^n}\cos^2\frac{a}{2^{n+1}}$

គេបាន $S=\sum_{k=0}^{n}\left(2^k\sin\frac{a}{2^k}\sin^2\frac{a}{2^{k+1}}\right)$ ។ គេមាន $\sin a\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{4}(2\sin a-\sin 2a)$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{2^k}$ គេបាន $\sin\frac{a}{2^k}\sin^2\frac{a}{2^{k+1}}=\frac{1}{4}\left(2\sin\frac{a}{2^k}-\sin\frac{a}{2^{k-1}}\right)$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង 2^k គេបាន $2^k\sin\frac{a}{2^k}\sin^2\frac{a}{2^{k+1}}=\frac{1}{4}(2^{k+1}\sin\frac{a}{2^k}-2^k\sin\frac{a}{2^{k-1}})$

ហេតុនេះ $S=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(2^{k+1}\sin\frac{a}{2^k}-2^k\sin\frac{a}{2^{k-1}})=\frac{1}{4}(2^{n+1}\sin\frac{a}{2^n}-\sin 2a)$ ។ដូចនេះ $S=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{a}{2^{n+1}}-\sin 2a\right)$ ។

លំហាត់ទី៥៩

ក) ចូរស្រាយថា $\cos a-\cos 3a=2\sin a\sin 2a$

ខ)គណនាផលបូក $S=\sin a\sin 2a+\sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3}+....+\sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}$

ដំណោះស្រាយ

ក) ចូរស្រាយថា $\cos a-\cos 3a=2\sin a\sin 2a$

តាមរូបមន្ត $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$

គេបាន $\cos a-\cos 3a=-2\sin\frac{a-3a}{2}\sin\frac{a+3a}{2}=-2\sin(-a)\sin 2a=2\sin a\sin 2a$

ដូចនេះ $\cos a-\cos 3a=2\sin a\sin 2a$

ខ)គណនាផលបូក $S=\sin a\sin 2a+\sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3}+....+\sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\cos a-\cos 3a=2\sin a\sin 2a$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{3^k}$ គេបាន $\cos\frac{a}{3^k}-\cos\frac{a}{3^{k-1}}=2\sin\frac{a}{3^k}\sin\frac{2a}{3^k}$

គេទាញ $\sin\frac{a}{3^k}\sin\frac{2a}{3^k}=\frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3^k}-\cos\frac{a}{3^{k-1}})$

បើ $k=0:\sin a\sin 2a=\frac{1}{2}(\cos a-\cos 3a)$

បើ $k=1:\sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3}=\frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3}-\cos a)$

បើ $k=2:\sin\frac{a}{3^2}\sin\frac{2a}{3^2}=\frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3^2}-\cos\frac{a}{3})$

បើ $k=n:\ \sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}=\frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3^n}-\cos\frac{a}{3^{n-1}})$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គគេបាន $S=\frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3^n}-\cos 3a)$ ។

លំហាត់ទី៦០

ក) ចូរស្រាយថា $\cos^2 a-\cos^2 2a=\sin a\sin 3a$

ខ) គណនាផលបូក $S=\sin a\sin 3a+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2}+....+\sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n}$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\cos^2 a-\cos^2 2a=\sin a\sin 3a$

គេមាន $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ និង $\cos^2 2a=\frac{1+\cos 4a}{2}$

$$\cos^2 a-\cos^2 2a=\frac{1+\cos 2a}{2}-\frac{1+\cos 4a}{2}$$

$$=\frac{\cos 2a-\cos 4a}{2}=-\sin\frac{2a-4a}{2}\sin\frac{2a+4a}{2}=\sin a\sin 3a$$

ដូចនេះ $\cos^2 a-\cos^2 2a=\sin a\sin 3a$ ។

ខ) គណនាផលបូក ៖ $S=\sin a\sin 3a+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2}+....+\sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\cos^2 a-\cos^2 2a=\sin a\sin 3a$ ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{2^k}$ គេបាន

$$\cos^2\frac{a}{2^k}-\cos^2\frac{a}{2^{k-1}}=\sin\frac{a}{2^k}\sin\frac{3a}{2^k}$$

ចំពោះ $k=0:\sin a\sin 3a=\cos^2 a-\cos^2 2a$

ចំពោះ $k=1:\sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2}=\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2 a$

ចំពោះ $k=3:\sin\frac{a}{2^2}\sin\frac{3a}{2^2}=\cos^2\frac{a}{2^2}-\cos^2\frac{a}{2}$

ចំពោះ $k=n:\sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n}=\cos^2\frac{a}{2^n}-\cos^2\frac{a}{2^{n-1}}$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន $S=\cos\frac{a}{2^n}-\cos 2a$ ។ដូចនេះ $S=\cos\frac{a}{2^n}-\cos 2a$ ។

លំហាត់ទី៦១

ក) ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sin 2a}-\frac{1}{\sin a}\right)$

ខ) គណនាផលបូក $S=\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}+\frac{2\sin^2 a}{\sin 2^2a}+\frac{2^2\sin^2 2a}{\sin 2^3a}+....+\frac{2^n\sin^2 2^{n-1}a}{\sin 2^{n+1}a}$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sin 2a}-\frac{1}{\sin a}\right)$

គេមាន $\dfrac{2}{\sin 2a}-\dfrac{1}{\sin a}=\dfrac{2-2\cos a}{\sin 2a}=\dfrac{2(1-\cos a)}{\sin 2a}=\dfrac{4\sin^2\dfrac{a}{2}}{\sin 2a}$

ដូចនេះ $\dfrac{\sin^2\dfrac{a}{2}}{\sin 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{\sin 2a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$ ។

ខ)គណនា $S=\dfrac{\sin^2\dfrac{a}{2}}{\sin 2a}+\dfrac{2\sin^2 a}{\sin 2^2 a}+\dfrac{2^2\sin^2 2a}{\sin 2^3 a}+....+\dfrac{2^n\sin^2 2^{n-1}a}{\sin 2^{n+1}a}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\dfrac{\sin^2\dfrac{a}{2}}{\sin 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{\sin 2a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$

ជំនួស a ដោយ $2^k a$ គេបាន $\dfrac{\sin^2 2^{k-1}a}{\sin 2^{k+1}a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{\sin 2^{k+1}a}-\dfrac{1}{\sin 2^k a}\right)$

ហេតុនេះ $\dfrac{2^k\sin^2 2^{k-1}a}{\sin 2^{k+1}a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2^{k+1}}{\sin 2^{k+1}a}-\dfrac{2^k}{\sin 2^k a}\right)$

ចំពោះ $k=0:\dfrac{\sin^2\dfrac{a}{2}}{\sin 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{\sin 2a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$

ចំពោះ $k=1:\dfrac{\sin^2 a}{\sin 2^2 a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2^2}{\sin 2^2 a}-\dfrac{2}{\sin 2a}\right)$

$\cdots$

ចំពោះ $k=n:\dfrac{\sin^2 2^{n-1}a}{\sin 2^{n+1}a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2^{n+1}}{\sin 2^{n+1}a}-\dfrac{2^n}{\sin 2^n a}\right)$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន $S=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2^{n+1}}{\sin 2^{n+1}a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$ ។

លំហាត់ទី៦២

ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\cos 2a}{\sin 3a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin 3a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក $S_n=\dfrac{\cos 2a}{\sin 3a}+\dfrac{\cos\dfrac{2a}{3}}{\sin a}+\dfrac{\cos\dfrac{2a}{3^2}}{\sin\dfrac{a}{3}}+...+\dfrac{\cos\dfrac{2a}{3^n}}{\sin\dfrac{a}{3^{n-1}}}$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\dfrac{\cos 2a}{\sin 3a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin 3a}\right)$

គេមាន $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a=\sin a(3-4\sin^2 a)$

គេបាន $\dfrac{1}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin 3a}=\dfrac{(3-4\sin^2 a)-1}{\sin 3a}=\dfrac{2(1-2\sin^2 a)}{\sin 3a}$

ដោយ $\cos 2a=1-2\sin^2 a$ ។ ដូចនេះ $\dfrac{\cos 2a}{\sin 3a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin 3a}\right)$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\cos 2a}{\sin 3a}+\frac{\cos\frac{2a}{3}}{\sin a}+\frac{\cos\frac{2a}{3^2}}{\sin\frac{a}{3}}+\dots+\frac{\cos\frac{2a}{3^n}}{\sin\frac{a}{3^{n-1}}}$$

តាមសម្រាខាងលើគេមាន $\dfrac{\cos 2a}{\sin 3a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin 3a}\right)$

ជំនួស a ដោយ $\dfrac{a}{3^k}$ គេបាន $\dfrac{\cos\frac{2a}{3^k}}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{a}{3^k}}-\dfrac{1}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}}\right)$

គេបាន $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\frac{2a}{3^k}}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sin\frac{a}{3^k}}-\frac{1}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}}\right)$

ដូចនេះ៖ $S_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{a}{3^n}}-\dfrac{1}{\sin 3a}\right)$ ។

លំហាត់ទី៦៣

ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}+\frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a}+\frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a}+\dots+\frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1} a}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\dfrac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}\right)$

គេមាន $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a=\cos a(4\cos^2 a-3)$

គេបាន $\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}=\dfrac{1-(4\cos^2 a-3)}{\cos 3a}=\dfrac{4(1-\cos^2 a)}{\cos 3a}$

ដោយ $1-\cos^2 a=\sin^2 a$ នោះ៖ $\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}=\dfrac{4\sin^2 a}{\cos 3a}$

ដូចនេះ៖ $\dfrac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}\right)$ ។

ខ)គណនាផលបូក

$$S_n=\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}+\frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a}+\frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a}+\dots+\frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1} a}$$

គេមាន $\dfrac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}\right)$ ជំនួស a ដោយ $3^k a$

គេបាន $\dfrac{\sin^2 3^k a}{\cos 3^{k+1} a} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3^{k+1} a} - \dfrac{1}{\cos 3^k a}\right)$

$$S_n = \frac{\sin^2 a}{\cos 3a} + \frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a} + \frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a} + ... + \frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1} a}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\cos 3^{k+1} a} - \frac{1}{\cos 3^k a}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3^{n+1} a} - \frac{1}{\cos a}\right)$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3^{n+1} a} - \dfrac{1}{\cos a}\right)$ ។

លំហាត់ទី៦៤

ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin a}{1+2\cos 2a} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{\sin 3a} - \dfrac{1}{\sin a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក $S_n = \dfrac{\sin a}{1+2\cos 2a} + \dfrac{\frac{1}{3}\sin\frac{a}{3}}{1+2\cos\frac{2a}{3}} + ...\dfrac{\frac{1}{3^n}\sin\frac{a}{3^n}}{1+2\cos\frac{2a}{3^n}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\dfrac{\sin a}{1+2\cos 2a} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{\sin 3a} - \dfrac{1}{\sin a}\right)$

គេបាន $\dfrac{3}{\sin 3a} - \dfrac{1}{\sin a} = \dfrac{3-(3-4\sin^2 a)}{\sin 3a} = \dfrac{4\sin^2 a}{\sin 3a}$

ដោយ $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a = \sin a(3-4\sin^2 a)$

$$= \sin a\left[1+2(1-2\sin^2 a)\right] = \sin a(1+2\cos a)$$

ដូចនេះ $\dfrac{\sin a}{1+2\cos 2a} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{\sin 3a} - \dfrac{1}{\sin a}\right)$ ។

ខ)គណនាផលបូក $S_n = \dfrac{\sin a}{1+2\cos 2a} + \dfrac{\frac{1}{3}\sin\frac{a}{3}}{1+2\cos\frac{2a}{3}} + ...\dfrac{\frac{1}{3^n}\sin\frac{a}{3^n}}{1+2\cos\frac{2a}{3^n}}$

គេមាន $\dfrac{\sin a}{1+2\cos 2a} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{\sin 3a} - \dfrac{1}{\sin a}\right)$ ជំនួស a ដោយ $\dfrac{a}{3^k}$

រួចគុណអង្គទាំងពីរនឹង $\dfrac{1}{3^k}$ គេបាន $\dfrac{\frac{1}{3^k}\sin\frac{a}{3^k}}{1+2\cos\frac{2a}{3^k}} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3^{k-1}}.\dfrac{1}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}} - \dfrac{1}{3^k}.\dfrac{1}{\sin\frac{a}{3^k}}\right)$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{1}{3^k}\sin\frac{a}{3^k}}{1+2\cos\frac{2a}{3^k}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^{k-1}}.\frac{1}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}} - \frac{1}{3^k}.\frac{1}{\sin\frac{a}{3^k}}\right)$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{\sin 3a} - \dfrac{1}{3^n \sin\frac{a}{3^n}}\right)$ ។

លំហាត់ទី៦៥

គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right) = \sin^3 a + \frac{1}{3}\sin^3 3a + ... + \frac{1}{3^n}\sin^3 3^n a$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right) = \sin^3 a + \frac{1}{3}\sin^3 3a + ... + \frac{1}{3^n}\sin^3 3^n a$

តាមរូបមន្ត $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ នោះគេទាញ $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

គេបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^{k-1}}\sin 3^k a - \frac{1}{3^k}\sin 3^{k+1} a\right)$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{4}\left(3\sin a - \frac{1}{3^n}\sin 3^{n+1} a\right)$ ។

លំហាត់ទី៦៦

ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left((-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}\right) = \cos^3 a - 3\cos^3\frac{a}{3} + ... + (-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left((-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}\right) = \cos^3 a - 3\cos^3\frac{a}{3} + ... + (-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}$

តាមរូបមន្ត $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ នោះគេទាញ $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left((-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left[(-3)^k\cos\frac{a}{3^{k-1}} - (-3)^{k+1}\cos\frac{a}{3^k}\right]$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{4}\left[\cos 3a - (-3)^{n+1}\cos\frac{a}{3^n}\right]$ ។

លំហាត់ទី៦៧

គណនា $P = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $P = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o$

តាង $z = \cos 20^o + i\sin 20^o$ ហើយ $z^9 = \cos 180^o + i\sin 180^o = -1$

គេបាន $\cos 20^o = \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$ (ព្រោះ $\overline{z} = \frac{1}{z}$)

$\cos 40^o = \frac{z^2+\overline{z}^2}{2} = \frac{z^4+1}{2z^2}$; $\cos 80^o = \frac{z^4+\overline{z}^4}{2} = \frac{z^8+1}{2z^4}$

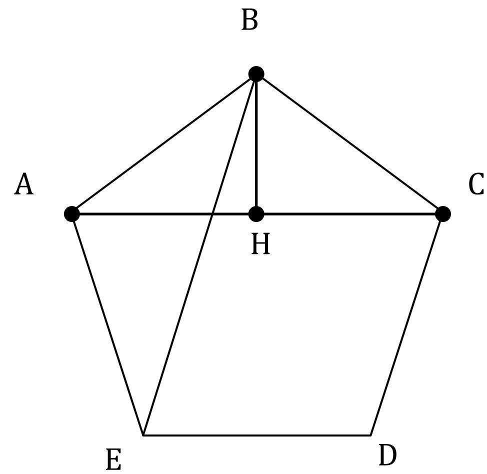
$P = \frac{(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)}{8z^7} = \frac{(z^2-1)(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)}{8z^7(z^2-1)} = \frac{z^{16}-1}{8(z^9-z^7)} = \frac{-z^7-1}{8(-1-z^7)} = \frac{1}{8}$

ដូចនេះ $P = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o = \frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៦៨

ចូរស្រាយថា $4\cos 9^o = \sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}$ ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយបញ្ជាក់ថា $4\cos 9^o = \sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}$

យក $ABCDE$ ជាបញ្ចតុកោណនិយ័តមានជ្រុង

$AB=BC=CD=DE=EA=a$ និងអង្កត់ទ្រូង $AC=d$ ។

ដោយចតុកោណ $ABCE$ ចារឹកក្នុងរង្វង់នោះតាមទ្រឹស្តីបទ

Ptolemy គេបាន $AC.BE = AB.CE + BC.EA$

នោះ $d^2 = ad + a^2$ ឬ $\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \left(\frac{d}{a}\right) - 1 = 0$

តាង $g = \frac{d}{a} > 0$ នោះ $g^2 - g - 1 = 0$, $\Delta = 1+4 = 5$

គេទាញ $g_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $g_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ដោយ $g > 0$

គេបាន $g = \frac{d}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ។ គេមាន $BA = BC$ នោះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល B

និងមុំបាត $\angle A = \angle C = 36^o$ នោះក្នុង $\Delta \perp ABH$ គេបាន $\cos 36^0 = \frac{AH}{AB} = \frac{d}{2a} = \frac{g}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ។

គេមាន $4\cos 9^o = 4\cos(45^o - 36^o)$

$$= 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 36^o + \sin 36^o) = 2\sqrt{2}\left(\cos 36^o + \sqrt{1-\cos^2 36^o}\right)$$

ដោយ $\cos 36^o = \frac{g}{2}$ និង $g^2 - g - 1 = 0$ គេបាន $4\cos 9^o = 2\sqrt{2}\left(\frac{g}{2} + \sqrt{1-\frac{g^2}{4}}\right)$

$$= \sqrt{2}(g + \sqrt{4-g^2}) = \sqrt{2}\left(\sqrt{1+g} + \sqrt{3-g}\right)$$

$$= \sqrt{2+2g} + \sqrt{6-2g}$$

ដោយគេមាន $g = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ នោះ $2+2g = 3+\sqrt{5}$ និង $6-2g = 5-\sqrt{5}$

ដូចនេះ $4\cos 9^o = \sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេដឹងថា $\dfrac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

ចូរស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

តាង $u=e^{ix}$, $v=e^{iy}$, $w=e^{iz}$ គេបាន៖$u+v+w=\left(\cos x+\cos y+\cos z\right)+i\left(\sin x+\sin y+\sin z\right)$

ហើយ $uvw=e^{i(x+y+z)}=\cos(x+y+z)+i\sin(x+y+z)$

គេមាន $\dfrac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

នាំឲ្យ $\dfrac{(\cos x+\cos y+\cos z)+i(\sin x+\sin y+\sin z)}{\cos(x+y+z)+i\cos(x+y+z)}=a$

$$\frac{u+v+w}{uvw}=a$$

$$\frac{1}{vw}+\frac{1}{uw}+\frac{1}{uv}=a$$

$$e^{-i(y+z)}+e^{-i(x+z)}+e^{-i(x+y)}=a$$

តាមសមភាពនេះគេទាញបាន ៖

$\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$ និង $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(z+x)=0$

ដូចនេះ $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$ ។

លំហាត់ទី៧០

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} Z_0=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ Z_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(\ Z_n+|Z_n|\ \right)\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$ ($|Z_n|$ ជាម៉ូឌុលនៃ Z_n)

សន្មតថា $Z_n=\rho_n(\cos\theta_n+i.\sin\theta_n)$, $\forall n\in IN$ ដែល $\rho_n>0$, $\rho_n\,;\,\theta_n\in IR$ ។

ក-ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1} ។

ខ-រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n) រួចគណនា θ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ចូរបង្ហាញថា $\rho_n=\rho_0\cos\theta_0\cos\dfrac{\theta_1}{2}\cos\dfrac{\theta_2}{2}....\cos\dfrac{\theta_{n-1}}{2}$ រួចបញ្ចាក់ ρ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក-រកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1}

យើងមាន $Z_n=\rho_n(\cos\theta_n+i.\sin\theta_n)$ នាំឲ្យ $Z_{n+1}=\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1}+i\sin\theta_{n+1})$

ដោយ $Z_{n+1}=\dfrac{1}{2}(\ Z_n+|Z_n|\ )$ ហើយ $|Z_n|=\rho_n$

គេបាន $\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1}+i\sin\theta_{n+1})=\frac{1}{2}\left[\rho_n(\cos\theta_n+i.\sin\theta_n)+\rho_n\right]$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1}+i.\sin\theta_{n+1})=\frac{1}{2}\rho_n(1+\cos\theta_n+i.\sin\theta_n)$$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1}+i.\sin\theta_{n+1})=\rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}(\cos\frac{\theta_n}{2}+i.\sin\frac{\theta_n}{2})$$

គេទាញបាន $\rho_{n+1}=\rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}$ និង $\theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2}$

ដូចនេះ $\theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2}$ និង $\rho_{n+1}=\rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}$ ។

ខ-ប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n) និង គណនា θ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\theta_{n+1}=\frac{1}{2}\theta_n$ នាំឲ្យ (θ_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុងស្មើ $q=\frac{1}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត $\theta_n=\theta_0\times q^n$ ដោយ $Z_0=\rho_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}$

គេទាញបាន $\rho_0=1$; $\theta_0=\frac{\pi}{3}$ ដូចនេះ $\theta_n=\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n}$ ។

គ-បង្ហាញថា $\rho_n=\rho_0\cos\theta_0\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_n}{2}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\rho_{n+1}=\rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}$ ឬ $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}=\cos\frac{\theta_n}{2}$

គេបាន $\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right)=\prod_{k=0}^{k=n-1}\left[\cos(\frac{\theta_k}{2})\right]$

$$\frac{\rho_n}{\rho_0}=\cos\theta_0.\cos\frac{\theta_1}{2}.\cos\frac{\theta_2}{2}.........\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}$$

ដូចនេះ $\rho_n=\rho_0\cos\theta_0\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន $\sin\theta_n=2\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_n}{2}=2\sin\theta_{n+1}\cos\frac{\theta_n}{2}$ (ព្រោះ $\theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2}$)

គេទាញ $\cos\frac{\theta_n}{2}=\frac{1}{2}.\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_{n+1}}$ ។ ហេតុនេះ $\rho_n=\frac{1}{2^n}.\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1}.\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}.....\frac{\sin\theta_{n-1}}{\sin\theta_n}=\frac{1}{2^n}.\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_n}$

ដូចនេះ $\rho_n=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n})}=\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}.\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n})}$ ។

លំហាត់ទី៧១

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ $\mathbb{N}\cup\{0\}$ ដោយ $\begin{cases} U_0=\sqrt{2} \\ U_{n+1}=\sqrt{2+U_n} \quad , n\in IN \end{cases}$

ក.ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.គណនាផលគុណ $P_n=U_0\times U_1\times U_2\times....\times U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $U_0=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$ និង $U_1=\sqrt{2+U_0}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}=2\cos\frac{\pi}{8}$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p=2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+3}}$

យើងមាន $U_{p+1}=\sqrt{2+U_p}$ តែតាមការឧបមា $U_p=2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+3}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

ដូចនេះ $U_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ។

ខ. គណនាផលគុណ $P_n=U_0\times U_1\times U_2\times....\times U_n$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a=2\sin a\cos a$ នាំឲ្យ $2\cos a=\frac{\sin 2a}{\sin a}$

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}(U_k)=\prod_{k=0}^{n}(2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}})=\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$ ។

ដូចនេះ $P_n=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

លំហាត់ទី៧២

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ n ដោយ $U_0=1$ និង $\forall n\in IN: U_{n+1}=U_n\cos a+\sin a$

ដែល $0<a<\frac{\pi}{2}$ ។

ក.តាង $V_n=U_n-\cot\frac{a}{2}$ ។ បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(V_0+V_1+....+V_n)$ និង $\lim_{n\to+\infty}U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ

មាន $V_n=U_n-\cot\frac{a}{2}$ នាំឲ្យ $V_{n+1}=U_{n+1}-\cot\frac{a}{2}$ តែ $U_{n+1}=U_n\cos a+\sin a$

គេបាន $V_{n+1}=U_n\cos a+\sin a-\cot\frac{a}{2}$

$$=U_n\cos a+2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}-\cot\frac{a}{2}$$

$$=U_n\cos a+\cot\frac{a}{2}(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\tan\frac{a}{2}-1)$$

$$=U_n\cos a+\cot\frac{a}{2}(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}-1)$$

$$=U_n\cos a+\cot\frac{a}{2}(2\sin^2\frac{a}{2}-1)\qquad;\quad \cos a=1-2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$=U_n\cos a-\cot\frac{a}{2}\cos a=(U_n-\cot\frac{a}{2})\cos a=V_n\cos a$$

ដោយ $V_{n+1}=V_n\cos a$ នាំឲ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយមានរេសុង $\cos a$ និង តួ ដំបូង

$V_0=U_0-\cot\frac{a}{2}=1-\cot\frac{a}{2}$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0+V_1+....+V_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

យើងមាន $V_0+V_1+...+V_n=V_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=(1-\cot\frac{a}{2}).\frac{1-\cos^{n+1}a}{1-\cos a}$

យើងបាន ៖ $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0+V_1+....+V_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1-\cot\frac{a}{2})\frac{1-\cos^{n+1}a}{1-\cos a}\right]$

ដោយ $0<a<\frac{\pi}{2}$ នោះ ៖ $0<\cos a<1$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{n+1}a=0$

ដូចនេះ ៖ $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0+V_1+....+V_n)=\frac{1-\cot\frac{a}{2}}{1-\cos a}$ ។

ម៉្យាងទៀត $V_n=U_n-\cot\frac{a}{2}$ នាំឲ្យ $U_n=V_n+\cot\frac{a}{2}$ ដោយ $V_n=V_0\times q^n=(1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a$

គេបាន $U_n=(1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a+\cot\frac{a}{2}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a+\cot\frac{a}{2}\right]=\cot\frac{a}{2}$

ព្រោះ ៖ $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^n a=0$ ។ ដូចនេះ ៖ $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\cot\frac{a}{2}$ ។

លំហាត់ទី៧៣

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ ៖

$U_0=0\ ;\ U_1=1$ និង $\forall n\in IN:\ U_{n+2}=2U_{n+1}\cos a-U_n$ ដែល $a\in IR$ ។

ក. តាង $Z_n=U_{n+1}-(\cos a-i\sin a)\,U_n\ ,\ \forall n\in IN\cup\{0\}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $Z_{n+1}=(\cos a+i\sin a)\,Z_n$ រួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $Z_{n+1}=(\cos a+i\sin a)\;Z_n$

យើងមាន $Z_n=U_{n+1}-(\cos a-i\sin a)U_n$

យើងបាន $Z_{n+1}=U_{n+2}-(\cos a-i\sin a)U_{n+1}$

$$
\begin{aligned}
&=2U_{n+1}\cos a-U_n-(\cos a-i\sin a)U_{n+1}\\
&=(\cos a+i\sin a)U_{n+1}-U_n\\
&=(\cos a+i\sin a)(U_{n+1}-\frac{U_n}{\cos a+i\sin a})\\
&=(\cos a+i\sin a)\left[U_{n+1}-(\cos a-i\sin a)U_n\right]\\
&=(\cos a+i\sin a)\;U_n
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ៖ $Z_{n+1}=(\cos a+i\sin a)\;Z_n$ ។

គណនា Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ៖

ដោយ $Z_{n+1}=(\cos a+i\sin a)\;Z_n$ នាំឲ្យ (Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេសុង $q=\cos a+i\sin a$ និង តួ $Z_0=U_1-(\cos a-i\sin a)U_0=1$ ។

តាមរូបមន្ត $Z_n=Z_0\times q^n=(\cos a+i\sin a)^n=\cos(na)+i\sin(na)$

ដូចនេះ៖ $Z_n=\cos(na)+i.\sin(na)$ ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $Z_n=U_{n+1}-(\cos a-i\sin a)U_n$ (1) និង $\bar{Z}_n=U_{n+1}-(\cos a+i\sin a)U_n$ (2)

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$Z_n-\bar{Z}_n=2i\sin a\;U_n$ នាំឲ្យ $U_n=\dfrac{Z_n-\bar{Z}_n}{2i\sin a}$ ដែល $\sin a\neq 0$

ដោយ $Z_n=\cos(na)+i\sin(na)$ និង $\bar{Z}_n=\cos(na)-i\sin(na)$ ។ ដូចនេះ៖ $U_n=\dfrac{\sin(na)}{\sin a}$ ។

លំហាត់ទី៧៤

គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d ។

គេតាង $S_n=\dfrac{\cos a_1}{\cos d}+\dfrac{\cos a_2}{\cos^2 d}+\dfrac{\cos a_3}{\cos^3 d}+...+\dfrac{\cos a_n}{\cos^n d}$ ចំពោះ $n=1,2,3,...$ ។

ចូរស្រាយថា $S_n=\dfrac{\sin a_n}{\cos^n d\sin d}-\dfrac{\sin a_1}{\sin d}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $S_n=\dfrac{\sin a_n}{\cos^n d\sin d}-\dfrac{\sin a_1}{\sin d}$

ដោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d នោះ $a_{n+1}=a_n+d$ ។

គេបាន $\sin a_{n+1}=\sin(a_n+d)=\sin a_n\cos d+\sin d\cos a_n$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n+1} d \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} = \frac{\sin a_n \cos d + \sin d \cos a_n}{\cos^{n+1} d}$$

គេទាញ $\dfrac{\cos a_n}{\cos^n d} = \dfrac{\cos d}{\sin d}\left(\dfrac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} - \dfrac{\sin a_n}{\cos^n d}\right)$

$$S_n = \sum_{p=1}^{n}\left[\frac{\cos d}{\sin d}\left(\frac{\sin a_{p+1}}{\cos^{p+1} d} - \frac{\sin a_p}{\cos^p d}\right)\right]$$

$$S_n = \frac{\cos d}{\sin d}\left(\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} - \frac{\sin a_1}{\cos d}\right) = \frac{\sin a_{n+1}}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$$

ដូចនេះ៖ $S_n = \dfrac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \dfrac{\sin a_1}{\sin d}$ ។

លំហាត់ទី៧៥

ចូរគណនាផលបូក $S_n = \dfrac{\tan\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}} + \dfrac{\tan\frac{\pi}{16}}{\cos\frac{\pi}{8}} + \dfrac{\tan\frac{\pi}{32}}{\cos\frac{\pi}{16}} + ... + \dfrac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ គេបាន $\tan 2x - \tan x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - \tan x = \dfrac{\tan x + \tan^2 x}{1-\tan^2 x}$

$\tan 2x - \tan x = \tan x.\dfrac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$ ដោយ $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

នោះ៖ $\tan 2x - \tan x = \dfrac{\tan x}{\cos 2x}$ (*)

ដោយជ្រើសរើស $x = \dfrac{\pi}{2^{k+2}}$ ជួសក្នុង (*) គេបាន $\tan\dfrac{\pi}{2^{k+1}} - \tan\dfrac{\pi}{2^{k+2}} = \dfrac{\tan\frac{\pi}{2^{k+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$

យើងបាន $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\tan\frac{\pi}{2^{k+1}} - \tan\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$

$$= (\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{8}) + (\tan\frac{\pi}{8} - \tan\frac{\pi}{16}) + ... + (\tan\frac{\pi}{2^{n+1}} - \tan\frac{\pi}{2^{n+2}})$$

$$= \tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{2^{n+2}} = 1 - \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

ដូចនេះ៖ $S_n = 1 - \tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ ។ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}} = 0$ ដូចនេះ៖ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$ ។

លំហាត់ទី៧៦

ក.ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{2+\sin(2n-1)x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}=\frac{2\sin x\cos(2nx)}{[2+\sin(2n-1)x\ ][2+\sin(2n+1)x\ ]}$

ខ.គណនា $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(2kx)}{\left(2+\sin(2k-1)x\right)\left(2+\sin(2k+1)x\right)}\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ការបង្ហាញ

តាង $f(x)=\frac{1}{2+\sin(2n-1)x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}$

$=\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\left(2+\sin(2n-1)x\right)\left(2+\sin(2n+1)x\right)}=\frac{2\sin x\ \cos(2nx)}{\left(2+\sin(2n-1)x\right)\left(2+\sin(2n+1)x\right)}$

ខ.គណនា $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(2kx)}{\left(2+\sin(2k-1)x\right)\left(2+\sin(2k+1)x\right)}\right]$

យើងបាន $S_n=\frac{1}{2\sin x}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2+\sin(2n-1)x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}\right]$

$=\frac{1}{2\sin x}\left[\frac{1}{2+\sin x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}\right]=\frac{1}{2\sin x}.\frac{\sin(2n+1)x-\sin x}{\left(2+\sin x\right)\left(2+\sin(2n+1)x\right)}$

$=\frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x\left(2+\sin x\right)(2+\sin(2n+1)x)}$

ដូចនេះ $S_n=\frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x\left(2+\sin x\right)(2+\sin(2n+1)x)}$ ។

លំហាត់ទី៧៧

ក.ចូរស្រាយថា $\cos(2nx)=\frac{1}{2\sin x}[\ \sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\ ]$

ខ.គណនាផលបូក $S_n=\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+.....+\cos(2nx)$

គ.ទាញរកផលបូក $T_n=\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+.....+\cos^2(nx)$

ឃ.គណនាផលបូក $U_n=\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+.....+\sin^2(nx)$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\cos(2nx)=\frac{1}{2\sin x}[\ \sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\ ]$

តាមរូបមន្ត $\sin p-\sin q=2\sin(\frac{p-q}{2})\ \cos(\frac{p+q}{2})$ ដោយយក $p=(2n+1)x$, $q=(2n-1)x$

និង $p-q=2x$, $p+q=4nx$ គេបាន $\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x=2\sin x\ \cos(2nx)$

ដូចនេះ $\cos(2nx)=\frac{1}{2\sin x}[\ \sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\ ]$ ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n=\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+.....+\cos(2nx)$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}[\cos(2kx)]$

$$= \frac{1}{2\sin x}\sum_{k=1}^{n}[\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x]$$

$$= \frac{1}{2\sin x}[\sin(2n+1)x - \sin x]$$

$$= \frac{1}{2\sin x}[2\sin(nx)\cos(n+1)x] = \frac{\sin(nx)\ \cos(n+1)x}{\sin x}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x}$ ។

គ.ទាញរកផលបូក $T_n = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + ... + \cos^2(nx)$

យើងបាន $T_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos^2(kx)\right]$ តាមរូបមន្ត $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$

គេបាន $T_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1+\cos(2kx)}{2}\right] = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}S_n$ ដោយ $S_n = \dfrac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x}$

ដូចនេះ $T_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{2\sin x}$ ។

ឃ.គណនាផលបូក

$U_n = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + ... + \sin^2(nx)$

យើងបាន $U_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\sin^2(kx)\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[1-\cos^2(kx)\right] = n - T_n$ ដោយ $T_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{2\sin x}$

ដូចនេះ $U_n = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{2\sin x}$ ។

លំហាត់ទី៧៨

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

ខ. ចូរគណនាផលបូក $S_n = \tan a + \dfrac{1}{2}\tan\dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{2^2}\tan\dfrac{a}{2^2} + ... + \dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{a}{2^n}$

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

តាង $A = \cot x - 2\cot 2x$

ដោយ $\begin{cases} \cot x = \dfrac{1}{\tan x} \\ \cot 2x = \dfrac{1}{\tan 2x} = \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x} \end{cases}$

គេបាន $A = \dfrac{1}{\tan x} - 2\left(\dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}\right) = \dfrac{1-1+\tan^2 x}{\tan x} = \tan x$

ដូចនេះ $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ ។

ខ. គណនាផលបូក

$$S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\tan\frac{a}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2^k}(\cot\frac{a}{2^k} - 2\cot\frac{a}{2^{k-1}})\right] = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{a}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}}\cot\frac{a}{2^{k-1}}\right) = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - 2\cot 2a$$

ដូចនេះ $S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - 2\cot 2a$

លំហាត់ទី៧៩

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right) = \tan x.\tan^2\frac{x}{2}.\tan^4\frac{x}{4}.....\tan^{2^n}\frac{x}{2^n} \quad \lim_{x\to\infty}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ P_n

គេមាន $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{2\sin^2 a}{2\sin a\cos a} = \frac{2\sin^2 a}{\sin 2a}$ យក $a = \frac{x}{2^k}$ គេបាន $\tan\frac{x}{2^k} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2^k}}{\sin\frac{2x}{2^k}}$

គេទាញ $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(2^{2^k}.\frac{\sin^{2^{k+1}}\frac{x}{2^k}}{\sin^{2^k}\frac{2x}{2^k}}\right) = 2^{2^{n+1}-1}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$

ដូចនេះ $P_n = 2^{2^{n+1}-1}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$ ។

លំហាត់ទី៨០

គណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$

យើងមាន $1-\tan^2\frac{x}{2^k} = \frac{\cos^2\frac{x}{2^k} - \sin^2\frac{x}{2^k}}{\cos^2\frac{x}{2^k}} = \frac{\cos\frac{2x}{2^k}}{\cos^2\frac{x}{2^k}}$

គេបាន $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[\frac{\cos^{2^k}\frac{x}{2^{k-1}}}{\cos^{2^{k+1}}\frac{x}{2^k}}\right] = \frac{\cos 2x}{\cos^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}$

ដូចនេះ $P_n = \frac{\cos 2x}{\cos^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៨១

គណនាផលគុណ ៖

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right] \quad \text{ដែល } |x|<\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $\cos 2a=\dfrac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$ គេបាន $\cos 2^{k+1}x=\dfrac{1-\tan^2 2^k x}{1+\tan^2 2^k x}$

ហើយ $1-\tan^2 2^k=\dfrac{\cos^2 2^k-\sin^2 2^k}{\cos^2 2^k x}=\dfrac{\cos 2^{k+1}x}{\cos^2 2^k x}$

គេបាន $\dfrac{1+\tan^2 2^k x}{(1-\tan^2 2^k x)^2}=\dfrac{\cos^2 2^k x}{\cos^2 2^{k+1}x}$

ដូចនេះ $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\cos^2 2^k x}{\cos^2 2^{k+1}x}\right)=\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 2^{n+1}x}$ ។

លំហាត់ទី៨២

ក.ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x$

ខ.ចូរគណនា $S_n=\dfrac{1}{\sin a}+\dfrac{1}{\sin\frac{a}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{a}{2^2}}+....+\dfrac{1}{\sin\frac{a}{2^n}}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\dfrac{1}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x$

តាង $f(x)=\cot x-\cot 2x$

$$=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{2\cos^2 x-1}{2\sin x\cos x}$$

$$=\frac{2\cos^2 x-2\cos^2 x+1}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin 2x}$$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x$ ។

ខ.គណនា $S_n=\dfrac{1}{\sin a}+\dfrac{1}{\sin\frac{a}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{a}{2^2}}+....+\dfrac{1}{\sin\frac{a}{2^n}}$

យើងបាន $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{a}{2^k}}\right)$ ដោយ $\dfrac{1}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\cot\frac{a}{2^{k+1}}-\cot\frac{a}{2^k}\right)=\cot\frac{a}{2^{n+1}}-\cot a$$

ដូចនេះ $S_n=\cot\dfrac{a}{2^{n+1}}-\cot a$ ។

លំហាត់ទី៨៣

ក.ចូរស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

ខ.គណនា $P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

យើងតាង $A(x)=1+\frac{1}{\cos x}$

$$=\frac{\cos x+1}{\cos x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos x\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}\sin x}{\cos x\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{\sin x}{\cos x}=\tan\frac{x}{2}\ \tan x=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$$

ដូចនេះ $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$ ។

ខ.គណនាផលគុណ

$$P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$$

$$=\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^k}}\right)=\prod_{k=0}^{n}[\frac{\cot\frac{a}{2^{k+1}}}{\cot\frac{a}{2^k}}]$$

ដូចនេះ $P_n=\tan\frac{a}{2^{n+1}}.\cot a$ ។

លំហាត់ទី៨៤

ក.ចូរស្រាយថា $\sin^3 x=\frac{1}{4}(\ 3\sin x-\sin 3x)$

ខ.ចូរគណនា

$$S_n=\sin^3\frac{a}{3}+3\sin^3\frac{a}{3^2}+3^2\sin^3\frac{a}{3^3}+....+3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\sin^3 x = \frac{1}{4}\left(3\sin x - \sin 3x\right)$

យើងមាន $\sin 3x = \sin(x+2x)$

តាមរូបមន្ត $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

$$= \sin x\cos 2x + \sin 2x\cos x$$

$$= \sin x(1-2\sin^2 x) + 2\sin x\cos^2 x = \sin x(1-2\sin^2 x) + 2\sin x(1-\sin^2 x)$$

$$= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

ដោយ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

ដូចនេះ $\sin^3 x = \frac{1}{4}\left(3\sin x - \sin 3x\right)$ ។

ខ. គណនា $S_n = \sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{a}{3^3} + \dots + 3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(3^{k-1}\sin^3\frac{a}{3^k}\right)$

ដោយ $\sin^3 x = \frac{1}{4}\left(3\sin x - \sin 3x\right)$

$$S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(3^k\sin\frac{a}{3^k} - 3^{k-1}\sin\frac{a}{3^{k-1}}\right) = \frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{a}{3^n} - \sin a\right)$$ ។

លំហាត់ទី៨៥

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

ខ.ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k\tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right]$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

តាង $f(x) = \tan 2x - 2\tan x$ ដោយ $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

គេបាន $f(x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - 2\tan x$

$$= \frac{2\tan x - 2\tan x(1-\tan^2 x)}{1-\tan^2 x} = \frac{2\tan x - 2\tan x + 2\tan^3 x}{1-\tan^2 x}$$

$$= \frac{2\tan^3 x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.\tan^2 x = \tan 2x.\tan^2 x$$

ដូចនេះ $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$ ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k\tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right]$

យើងមាន $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$ ដោយយក $x = \frac{a}{2^{k+1}}$

គេបាន $\tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}} = \tan\frac{a}{2^k} - 2\tan\frac{a}{2^{k+1}}$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(2^k\tan\frac{a}{2^k}-2^{k+1}\tan\frac{a}{2^{k+1}}\right)=\tan a-2^{n+1}\tan\frac{a}{2^{n+1}}$$

ដូចនេះ $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[2^k\tan\frac{a}{2^k}\,\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right]=\tan a-2^{n+1}\tan\frac{a}{2^{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៨៦

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1-\cos A\le\frac{a^2}{2bc}$ ដែល a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណ ABC ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\le\frac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1-\cos A\le\frac{a^2}{2bc}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន $b^2+c^2\ge 2bc$

គេទាញ $a^2\ge 2bc-2bc\cos A=2bc(1-\cos A)$

ដូចនេះ $1-\cos A\le\frac{a^2}{2bc}$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\le\frac{1}{8}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $1-\cos A\le\frac{a^2}{2bc}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $1-\cos B\le\frac{b^2}{2ac}$ (2) និង $1-\cos C\le\frac{c^2}{2ab}$ (3)

គុណវិសមភាព (1) , (2) , (3) អង្គ និង អង្គគេទទួលបាន ៖

$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\le\frac{1}{8}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៨៧

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$

តាង a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណ ABC និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

គេទាញ $\begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2r\sin B \quad (1) \\ c=2R\sin C \end{cases}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad (2)$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$4R^2\sin^2 A=4R^2(\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A)$

សម្រួល $4R^2$ ក្នុងអង្គទាំងពីរនៃសមភាពគេបាន $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$ ពិត

ដូចនេះ $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$

គេទាញ $\cos A=\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$ ដោយ $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$

គេបាន $\cot A=\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin A\sin B\sin C} \quad (i)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេទទួលបាន $\cot B=\frac{\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B}{2\sin A\sin B\sin C} \quad (ii)$

និង $\cot C=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C} \quad (iii)$

ធ្វើផលបូកសមភាព (i) , (ii) & (iii) គេបាន ៖

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$ ពិត

ដូចនេះ $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$ ។

លំហាត់ទី៨៨

ក.ចូរស្រាយថា $\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

ខ.ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k\tan^3\frac{a}{2^n}}{1-\tan^2\frac{a}{2^n}}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

យើងបាន $\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x=\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}-\tan x=\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}$

ដូចនេះ $\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x$ ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k\tan^3\frac{a}{2^k}}{1-\tan^2\frac{a}{2^k}}\right)$

គេមាន $\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x$ យក $x=\frac{a}{2^k}$ គេបាន $\frac{\tan^3\frac{a}{2^k}}{1-\tan^2\frac{a}{2^k}}=\frac{1}{2}\tan\frac{a}{2^{k-1}}-\tan\frac{a}{2^k}$

យើងបាន $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(2^{k-1}\tan\frac{a}{2^{k-1}}-2^k\tan\frac{a}{2^k}\right)=\frac{1}{2}\tan 2a-2^n\tan\frac{a}{2^n}$ ។

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{2}\tan 2a-2^n\tan\frac{a}{2^n}$ ។

លំហាត់ទី៨៩

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។ ចូរស្រាយថា $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

ដោយ $b^2+c^2\ge 2bc$ នោះ $a^2\ge 2bc-2bc\cos A=4bc\sin^2\frac{A}{2}$ គេទាញ $\frac{a^2}{bc}\ge 4\sin^2\frac{A}{2}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នា $\frac{b^2}{ac}\ge 4\sin^2\frac{B}{2}$ (2) និង $\frac{c^2}{ab}\ge 4\sin^2\frac{C}{2}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) អង្គ និងអង្គគេបាន $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$ ។

លំហាត់ទី៩០

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\ge\frac{3}{2abc}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\ge\frac{3}{2abc}$ ។ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេទាញបាន $\frac{2bc\cos A}{a^2}+1=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{2bc}{a^2}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{2ac\cos B}{b^2}+1\ge\frac{2ac}{b^2}$ (2) និង $\frac{2ab\cos C}{c^2}+1\ge\frac{2ab}{c^2}$ (3)

បូក (1),(2)និង(3)គេបាន ៖

$$\frac{2bc\cos A}{a^2}+\frac{2ca\cos B}{b^2}+\frac{2ab\cos C}{c^2}+3\geq 2\left(\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}\right)\geq 6$$

គេទាញ $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\geq \frac{3}{2abc}$ ។

លំហាត់ទី៩១

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

គេបាន $\frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$

ដោយ $\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$ និង $\cos\frac{B-C}{2}\leq 1$ គេទាញបាន $\frac{a}{b+c}\geq \sin\frac{A}{2}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{b}{c+a}\geq \sin\frac{B}{2}$ និង $\frac{c}{a+b}\geq \sin\frac{C}{2}$ ។

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ ពិត

លំហាត់ទី៩២

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$ រួចសរសេររូបមន្តពីរ ទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

គេបាន $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$ ដោយ $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$ និង $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

ដូចនេះ $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$ ។

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b-c}{b+c}=\tan\frac{B-C}{2}\tan\frac{A}{2}$ និង $\frac{c-a}{c+a}=\tan\frac{C-A}{2}\tan\frac{B}{2}$ ។

លំហាត់ទី៩៣

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\sin\frac{A}{2}\leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ រួចទាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

ដោយ $b^2+c^2\ge 2bc$ នោះ $a^2\ge 2bc-2bc\cos A=4bc\sin^2\frac{A}{2}$ ឬ $\sin^2\frac{A}{2}\le\frac{a^2}{4bc}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\sin\frac{B}{2}\le\frac{b}{2\sqrt{ac}}$ និង $\sin\frac{C}{2}\le\frac{c}{2\sqrt{ab}}$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}.\frac{b}{2\sqrt{ac}}.\frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{1}{8}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៩៤

គេឲ្យ α,β,γ ជាបីចំនួនពិតដែល $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\ge\frac{3}{2}$

ចូរស្រាយថា $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6})\ge 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6})\ge 0$

យើងឧបមាថា $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6})<0$ ពិត

សមមូល $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$ ដោយ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\ge\frac{3}{2}$

នោះ $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{2}>\frac{3\sqrt{3}}{4}$ គេទាញ $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma>\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

ពិនិត្យ $T=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin(\beta+\frac{\pi}{3})+\sin(\gamma+\frac{\pi}{3})$

$$=\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{2}+\frac{\sqrt{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}{2}$$

ដោយ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\ge\frac{3}{2}$ និង $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma>\frac{3\sqrt{3}}{2}$

គេទាញ $T>\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=3$ មិនពិត ព្រោះគ្រប់ចំនួនពិត α,β,γ

គេមាន $T=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin(\beta+\frac{\pi}{3})+\sin(\gamma+\frac{\pi}{3})\le 1+1+1=3$ នាំឲ្យការឧបមាខាងលើខុស ។

ដូចនេះ $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6})\ge 0$ ។

លំហាត់ទី៩៥

គេឲ្យ α និង β ជាពីរចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$ លុះត្រាតែ $\alpha=\beta$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាងសំណើ p : $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$

$q:\alpha=\beta$ ។ ដើម្បីស្រាយថា $p\Leftrightarrow q$ ពិត

យើងត្រូវស្រាយថា $p\Rightarrow q$ ពិត និង $q\Rightarrow p$ ពិត ។

យើងស្រាយថា $p\Rightarrow q$ ពិត ៖

តាម $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$ គេអាចសរសេរ ៖

$$\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\beta\right)^3+(-1)^3-3\left(\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\beta\right)(-1)=0$$

ដោយប្រើសមភាព $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

បើគេយក $a=\sin^2\alpha$, $b=\cos^2\beta$, $c=-1$ នោះគេបាន ៖

$$\left[\begin{array}{ll} a+b+c=0 & (1)\\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 & (2)\end{array}\right.$$

តាម (2) គេទាញ $a=b=c$ ឬ $\sin^2\alpha=\cos^2\beta=-1$ (មិនអាច)

តាម(1)គេបាន$\sin^2\alpha+\cos^2\beta-1=0$

ឬ$\sin^2\alpha=1-\cos^2\beta=\sin^2\beta$ ដោយ $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ នោះ $\alpha=\beta$ ។

យើងស្រាយថា $q\Rightarrow p$ ពិត ៖

បើ $\alpha=\beta$ នោះយើងត្រូវស្រាយថា $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^6\alpha=1$ ពិតគ្រប់ $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

តាម $a^3+3ab(a+b)+b^3=(a+b)^3$ យក $a=\sin^2\alpha$, $b=\cos^2\alpha$

គេបាន $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^6\alpha=1$ ពិត

ដូចនេះ$\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$ លុះត្រាតែ $\alpha=\beta$

លំហាត់ទី៩៦(APMC 1982)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\prod_{k=1}^{n}\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]=\prod_{k=1}^{n}\cot\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$

ដំណោះស្រាយ

តាង $a_k=\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$ និង $b_k=\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$

ដើម្បីស្រាយថា $\prod_{k=1}^{n}(a_k)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}\right)$ ពិតយើងគ្រាន់តែស្រាយថា $\prod_{k=1}^{n}(a_kb_k)=1$ ពិត

យក $t_k=\tan\frac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}$ នោះគេបាន $a_k=\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}\right)=\frac{\sqrt{3}+t_k}{1-\sqrt{3}t_k}$

និង $b_k=\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}\right)=\frac{\sqrt{3}-t_k}{1+\sqrt{3}t_k}$

គេបាន $a_kb_k=\frac{3-t_k{}^2}{1-3t_k{}^2}=\frac{1}{t_k}\times\frac{3t_k-t_k^3}{1-3t_k{}^2}=\frac{t_{k+1}}{t_k}$ ព្រោះតាមរូបមន្ត $\tan 3\varphi=\frac{3\tan\varphi-\tan^3\varphi}{1-3\tan^2\varphi}$

គេបាន $\frac{3t_k-t_k^3}{1-3t_k{}^2}=t_{k+1}$ ហេតុនេះ $\prod_{k=1}^{n}(a_kb_k)=\prod_{k=1}^{n}\frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{t_2}{t_1}.\frac{t_3}{t_2}...\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{t_{n+1}}{t_1}$

ដោយ $t_k=\tan\frac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}$ នោះ $t_1=\tan\frac{\pi}{3^n-1}$ ហើយ $t_{n+1}=\tan\frac{3^n\pi}{3^n-1}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3^n-1}\right)=\tan\frac{\pi}{3^n-1}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{n}(a_kb_k)=\frac{\tan\frac{\pi}{3^n-1}}{\tan\frac{\pi}{3^n-1}}=1$ ពិត

ដូចនេះ $\prod_{k=1}^{n}\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]=\prod_{k=1}^{n}\cot\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$ ។

លំហាត់ទី៩៧(MOSP 2000)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។

ចូរបង្ហាញថា $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$ រួចទាញថាបើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ គេបាន $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C>2$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$

គេមាន $\cos^2A=\frac{1+\cos 2A}{2}$ និង $\cos^2B=\frac{1+\cos 2B}{2}$

គេបាន $\cos^2A+\cos^2B=1+\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}$

ដោយ $\cos 2A+\cos 2B=2\cos(A+B)\cos(A-B)=2\cos(\pi-C)\cos(A-B)=-2\cos C\cos(A-B)$

នោះ $\cos^2A+\cos^2B=1-\cos C\cos(A-B)$

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2C$$

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-\cos C\left[\cos(A-B)-\cos C\right]$$

$$=1-\cos C\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]=1-2\cos A\cos B\cos C$$

ដូចនេះ $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$

ទាញថាបើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C>2$

គេមាន $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$

តាមរូបមន្ត $\cos^2\varphi = 1-\sin^2\varphi$ នោះគេបាន $3-(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)=1-2\cos A\cos B\cos C$

គេទាញ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C = 2+2\cos A\cos B\cos C$

បើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ $\begin{cases}\cos A>0\\ \cos B>0\\ \cos C>0\end{cases}$ នាំឲ្យ $2+2\cos A\cos B\cos C>2$ ។

ដូចនេះបើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$ ។

លំហាត់ទី៩៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។

ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 2$

$$\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

ដោយ $\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$ និង $\cos\frac{B-C}{2}\le 1$

គេបាន $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}$

ដោយ $1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}=2-2\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\le 2$

ដូច្នេះ $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 2$ ។

លំហាត់ទី៩៩

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។ ចូរបង្ហាញថា $\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\cot A+\cot B=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\frac{2\sin C}{\cos(A-B)+\cos C}$ ដោយ $\cos(A-B)\le 1$

នោះ $\cot A+\cot B\ge\frac{2\sin C}{1+\cos C}=2\tan\frac{C}{2}$

$$\cot A+\cot B+\cot C\ge 2\tan\frac{C}{2}+\cot C=2\tan\frac{C}{2}+\frac{\cot^2\frac{C}{2}-1}{2\cot\frac{C}{2}}$$

$\cot A+\cot B+\cot C\ge\frac{\cot^2\frac{C}{2}+3}{2\cot\frac{C}{2}}=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{C}{2}+3\tan\frac{C}{2}\right)$ ដោយ $\cot\frac{C}{2}+3\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$ (តាម $AM-GM$) ។

ដូចនេះ $\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី១០០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច និងមានជ្រុង $BC=a\,,AC=b\,,AB=c$ ។

បើ $a<\dfrac{b+c}{2}$ នោះបង្ហាញថាមុំ $A<\dfrac{B+C}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រស្តីបទស៊ីនូស $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ នោះ $\begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases}$

វិសមមភាព $a<\dfrac{b+c}{2}$ សមមូល $2R\sin A<R\sin B+R\sin C$

ឬ $\sin A<\dfrac{\sin B+\sin C}{2}=\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}\le\sin\dfrac{B+C}{2}$ ដោយ A និង $\dfrac{B+C}{2}$ ជាមុំស្រួចនោះ $A<\dfrac{B+C}{2}$ ។

ដូចនេះ បើ $a<\dfrac{b+c}{2}$ នោះ $A<\dfrac{B+C}{2}$ ។

លំហាត់ទី១០១

ត្រីកោណ ABC មួយមានមានជ្រុង $BC=a\,,AC=b\,,AB=c$ ។ តាង S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ ។

ក) ចូរស្រាយថា $\cos(\dfrac{\pi}{3}-A)=\dfrac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\cos(\dfrac{\pi}{3}-A)=\dfrac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ គេទាញបាន $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$ ហើយ $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

គេបាន $b^2+c^2-a^2+4\sqrt{3}S=2bc\cos A+2\sqrt{3}bc\sin A\ =4bc(\dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A)=4bc\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)$

ដូចនេះ $\cos(\dfrac{\pi}{3}-A)=\dfrac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$ ។

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$

គេមាន $\cos(\dfrac{\pi}{3}-A)=\dfrac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$ ដោយ $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)\le 1$ នោះ $\dfrac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}\le 1$

គេទាញ $4bc\ge b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}$ សមមូល $a^2+b^2+c^2\ge 2(b-c)^2+4\sqrt{3}S$ ដោយ $(b-c)^2\ge 0$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$ ។

លំហាត់ទី១០២

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A ។ តាងជ្រុង $BC=a, AC=b$ និង $AB=c$ ។

ចូរស្រាយថា $\cos^2\frac{B-C}{2}\ge\frac{2bc}{a^2}$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos^2\frac{B-C}{2}\ge\frac{2bc}{a^2}$

សន្មតថា $B\neq C$ នោះតាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\frac{\sin B+\sin C}{2}\ge\sqrt{\sin B\sin C}$

ឬ $\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\ge\sqrt{\sin B\sin C}$ ដោយ $\sin\frac{B+C}{2}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\sin B=\frac{b}{a}$, $\sin C=\frac{c}{a}$

គេបាន $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{B-C}{2}\ge\sqrt{\frac{bc}{a^2}}$ សមមូល $\cos^2\frac{B-C}{2}\ge\frac{2bc}{a^2}$ ពិត។

លំហាត់ទី១០៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ $A>\frac{\pi}{2}$ ។ តាងជ្រុង $BC=a, AC=b$ និង $AB=c$ ។

ចូរស្រាយថា $|\cos A|\le\frac{a^6}{54b^3c^3}$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|\cos A|\le\frac{a^6}{54b^3c^3}$

111 Trigonometry

by phalkun Lim

បើ $A>\frac{\pi}{2}$ នោះ $\cos A=-|\cos A|$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេបាន $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+2bc|\cos A|$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន $a^2=b^2+c^2+2bc|\cos A|\ge 3\sqrt[3]{2b^3c^3.|\cos A|}$

គេទាញ $|\cos A|\le\frac{a^6}{54b^3c^3}$ ពិត ។

លំហាត់ទី១០៤

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ P ជាចំណុចនៅក្នុង ΔABC ដែល $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\omega$ ។

ក) ចូរស្រាយថា $\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C$ ។

ខ) ទាញឲ្យបានថា $\omega\le\frac{\pi}{6}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C$

តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $PA=x$, $PB=y$, $PC=z$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុង ΔPAB ,ΔPBC ,ΔPCA គេបាន $\begin{cases} x^2 = z^2 + b^2 - 2bz\cos\omega \\ y^2 = x^2 + c^2 - 2cx\cos\omega \\ z^2 = y^2 + a^2 - 2ay\cos\omega \end{cases}$

បូកសមីការបីនេះអង្គ និង អង្គគេបាន $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2(ay + bz + cx)\cos\omega$

គេទាញ $\cos\omega = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2(ay + bz + cx)}$ (1)

គេមាន $S_{ABC} = S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PCA}$ ដោយ $\begin{cases} S_{PAB} = \dfrac{1}{2}cx\sin\omega \\ S_{PBC} = \dfrac{1}{2}ay\sin\omega \\ S_{PCA} = \dfrac{1}{2}bz\sin\omega \end{cases}$

គេបាន $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}(cx + ay + bz)\sin\omega$ គេទាញ $\sin\omega = \dfrac{2S_{ABC}}{cx + ay + bz}$ (2)

ធ្វើផលចែករវាង (1) និង (2) គេបាន $\cot\omega = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}$ (3)

ម្យ៉ាងទៀតតាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

គេទាញ $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ហើយ $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A$

គេទាញ $\sin A = \dfrac{2S_{ABC}}{bc}$ ។ ហេតុនេះ $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

ដូចគ្នាដែរ $\cot B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

គេបាន $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}$ (4)

តាម (3) និង (4) គេបាន $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$ ពិត

ខ) ទាញឲ្យបានថា $\omega \le \dfrac{\pi}{6}$

គេមាន $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$

ដោយ $\cot A + \cot B + \cot C \ge \sqrt{3}$ (មើលលំហាត់ទី៩៩)

គេបាន $\cot\omega \ge \sqrt{3} = \cot\dfrac{\pi}{6}$ នាំឲ្យ $\omega \le \dfrac{\pi}{6}$ ។

លំហាត់ទី១០៥(IMO1966)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a , AC = b , AB = c$ ។

ចូរបង្ហាញថាបើ $a + b = \tan\dfrac{C}{2}\left(a\tan A + b\tan B\right)$ នោះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u=\tan\frac{A}{2}$ និង $v=\tan\frac{C}{2}$

គេបាន $\tan\frac{C}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{A+B}{2}=\frac{1-uv}{u+v}$ ហើយ $\tan A=\frac{2u}{1-u^2}$, $\tan B=\frac{2v}{1-v^2}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a=2R\sin A=2R\frac{2u}{1+u^2}$, $b=2R\frac{2v}{1+v^2}$ ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

សមភាព $a+b=\tan\frac{C}{2}(a\tan A+b\tan B)$ សមមូល ៖

$$4R\left(\frac{u}{1+u^2}+\frac{v}{1+v^2}\right)=4R\frac{1-uv}{u+v}\left(\frac{u^2}{(1+u^2)(1-u^2)}+\frac{v^2}{(1+v^2)(1-v^2)}\right)$$

បន្ទាប់ពីបង្រួមគេបាន $(u+v)^2(1-u^2)(1-v^2)=2(1-uv)^2(u^2+v^2)$

គេមាន $(u+v)^2\le 2(u^2+v^2)$ (1) (វិសមភាព $Cauchy-Schwarz$)

$(1-u^2)(1-v^2)=(1-uv)^2-(u-v)^2\le(1-uv)^2$ (2)

គុណវិសមភាព(1)និង(2) អង្គ និង អង្គគេបាន $(u+v)^2(1-u^2)(1-v^2)\le 2(1-uv)^2(u^2+v^2)$

ដើម្បីឲ្យវិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ (1) និង (2) ក្លាយជាសមភាពពោលគឺគេត្រូវឲ្យ $u=v$

នោះ $\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}$ សមមូល $A=B$ សមមូល $a=b$ ។

ដូចនេះបើ $a+b=\tan\frac{C}{2}(a\tan A+b\tan B)$ នោះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

លំហាត់ទី១០៦

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ក) ចូរស្រាយថា $1+\cos A\cos B\cos C=\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$ ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $1+\cos A\cos B\cos C=\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

គេបាន $a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 c)$

គេទាញ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$ (1)

យើងនឹងស្រាយថា $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

គេមាន $\sin^2 A=\frac{1-\cos 2A}{2}$ និង $\sin^2 B=\frac{1-\cos 2B}{2}$

គេបាន $\sin^2 A+\sin^2 B=1-\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}$

$$=1-\cos(A+B)\cos(A-B)$$
$$=1-\cos(\pi-C)\cos(A-B)$$
$$=1+\cos C\cos(A-B)$$

ហើយ $\sin^2 C=1-\cos^2 C$ នោះគេបាន $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2 C$

$$=2+\cos C\left[\cos(A-B)-\cos C\right]$$
$$=2+\cos C\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$$
$$=2+2\cos A\cos B\cos C$$

ដូចនេះ $1+\cos A\cos B\cos C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$ ។

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ និង $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ។

គេបាន $\cos A\cos B\cos C=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8a^2b^2c^2}$

តាង $\begin{cases}x=b^2+c^2-a^2\\ y=c^2+a^2-b^2\\ z=a^2+b^2-c^2\end{cases}$ នោះ $\begin{cases}x+y=2c^2\\ y+z=2a^2\\ z+x=2b^2\end{cases}$

គេបាន $\cos A\cos B\cos C=\dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\begin{cases}x+y\ge 2\sqrt{xy}\\ y+z\ge 2\sqrt{yz}\\ z+x\ge 2\sqrt{zx}\end{cases}$

នាំឲ្យ $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}=8xyz$

គេទាញ $\cos A\cos B\cos C=\dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\le\dfrac{1}{8}$

គេទាញ $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}=1+\cos A\cos B\cos C\le 1+\dfrac{1}{8}=\dfrac{9}{8}$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$ ។

លំហាត់ទី១០៧(IMO 1977)

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$

ដែល a,b,A,B ជាចំនួនពិត ។ចូរស្រាយថាបើគ្រប់ $x\in IR:\ f(x)\ge 0$ នោះ $a^2+b^2\le 2$

និង $A^2+B^2\le 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $r=\sqrt{a^2+b^2}$ និង $R=\sqrt{A^2+B^2}$ ហើយយក α និង β ដែល $\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$, $\sin\alpha=\dfrac{b}{r}$

និង $\cos 2\beta=\dfrac{A}{R}$,$\sin 2\beta=\dfrac{B}{R}$ ។

គេបាន $f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$

$=1-r\cos(x-\alpha)-R\cos(2x-2\beta)$

គេមាន $f(\beta)=1-r\cos(\beta-\alpha)-R$ និង $f(\pi+\beta)=1-r\cos(\pi+\beta-\alpha)-R=1+r\cos(\beta-\alpha)-R$

គេបាន $f(\beta)+f(\pi+\beta)=2-2R\geq 0$ នោះ $R\leq 1$

សមមូល $\sqrt{A^2+B^2}\leq 1$ ឬ $A^2+B^2\leq 1$ ។

គេមាន $f(\alpha+\frac{\pi}{4})=1-r\frac{\sqrt{2}}{2}+R\sin(2\alpha-2\beta)$ និង $f(\alpha-\frac{\pi}{4})=1-r\frac{\sqrt{2}}{2}R\sin(2\alpha-2\beta)$

គេបាន $f(\alpha+\frac{\pi}{4})+f(\alpha-\frac{\pi}{4})=2-\sqrt{2}r\geq 0$ នោះ $r\leq\sqrt{2}$

សមមូល $\sqrt{a^2+b^2}\leq 2$ ឬ $a^2+b^2\leq 2$ ។

ដូចនេះបើគ្រប់ $x\in IR$: $f(x)\geq 0$ នោះ $a^2+b^2\leq 2$ និង $A^2+B^2\leq 1$ ។

លំហាត់ទី១០៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ចូរស្រាយថា $A\leq\frac{\pi}{3}$ លុះត្រាតែ $(p-b)(p-c)\leq\frac{bc}{4}$

ដែល a,b,c ជាជ្រុង និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $A\leq\frac{\pi}{3}$ សមមូល $\sin\frac{A}{2}\leq\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ សមមូល $\sin^2\frac{A}{2}\leq\frac{1}{4}$ ដោយ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$

សមមូល $\frac{1-\cos A}{2}\leq\frac{1}{4}$ សមមូល $\cos A\geq\frac{1}{2}$ ដោយ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស)

គេបាន $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geq\frac{1}{2}$ សមមូល $b^2+c^2-a^2\geq bc$ សមមូល $a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c)\leq bc$

សមមូល $4(p-b)(p-c)\leq bc$ ឬ $(p-b)(p-c)\leq\frac{bc}{4}$ ពិត ។

លំហាត់ទី១០៩

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។ ចូររកប្រភេទនៃត្រីកោណនេះដោយដឹងថា $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកប្រភេទនៃត្រីកោណនេះ

គេមាន $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ នោះ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2}{4bc}$ ដោយ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$ និង $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

គេបាន $\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{a^2}{4bc}$ សមមូល $\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2}{2bc}$

$-(b-c)^2=0$ នាំឲ្យ $b=c$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A ។

លំហាត់ទី១១០

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\dfrac{\sin C}{\sin^2\frac{B}{2}}\ge\dfrac{4\cos\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\dfrac{\sin C}{\sin^2\frac{B}{2}}\ge\dfrac{4\cos\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$

តាង a,b,c ជាជ្រុងនៃ ΔABC និង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

គេមាន $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ (S ជាផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ)

គេបាន $\sin B=\dfrac{2S}{ac}$ និង $\sin C=\dfrac{2S}{ab}$ ។ ហើយ $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, $\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}$

$\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ និង $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$ ។

វិសមភាពសមមូល ៖

$$\frac{\frac{2S}{ac}}{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}+\frac{\frac{2S}{ab}}{\frac{(p-c)(p-a)}{ac}}\ge 4\,\frac{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}{1-\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}$$

$$\frac{2S}{p-a}\left[\frac{b}{c(p-b)}+\frac{c}{b(p-c)}\right]\ge\frac{\sqrt{p(p-a)}}{\sqrt{bc}-\sqrt{(p-b)(p-c)}}$$

ដោយ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ នោះគេបាន ៖

$$\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{p-a}\left[\frac{b}{c(p-b)}+\frac{c}{b(p-c)}\right]\ge 2\,\frac{\sqrt{bc}+\sqrt{(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}$$

$$p\sqrt{(p-b)(p-c)}\left[\frac{b}{c(p-b)}+\frac{c}{b(p-c)}\right]\ge 2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{(p-b)(p-c)}\right)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\sqrt{(p-b)(p-c)}\left[\dfrac{b}{c(p-b)}+\dfrac{c}{b(p-c)}\right]\ge 2$

និង $p\ge\sqrt{bc}+\sqrt{(p-b)(p-c)}$ នោះគេបានវិសមភាពខាងលើពិត ។

លំហាត់ទី១១១

គេតាង r និង R រៀងគ្នាជារង្វាស់កាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ ΔABC មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B}+\dfrac{1}{\sin^2 C}\le \dfrac{R^2}{r^2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B}+\dfrac{1}{\sin^2 C}\le \dfrac{R^2}{r^2}$

តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណនិង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ គេទាញ $\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{2R}{a}$, $\dfrac{1}{\sin B}=\dfrac{2R}{b}$, $\dfrac{1}{\sin C}=\dfrac{2R}{c}$

វិសមភាពសមមូល $4R^2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\le\dfrac{R^2}{r^2}$ សមមូល $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\le\dfrac{1}{4r^2}$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

គេទាញ $r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

គេបាន $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\le\dfrac{p}{4(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*)

តាង $a=y+z$, $b=x+z$, $c=x+y$ គេបាន $a+b+c=2(x+y+z)=2p$

នោះ $x+y+z=p$ ហើយ $\begin{cases} p-a=x \\ p-b=y \\ p-c=z \end{cases}$

វិសមភាព (*) សមមូល $\dfrac{1}{(y+z)^2}+\dfrac{1}{(x+z)^2}+\dfrac{1}{(x+y)^2}\le\dfrac{x+y+z}{4xyz}$ (**)

តាមវិសមភាព AM-GM គេមាន $(y+z)^2\ge 4yz$ នោះ $\dfrac{1}{(y+z)^2}\le\dfrac{1}{4yz}=\dfrac{x}{4xyz}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{1}{(z+x)^2}\le\dfrac{y}{4xyz}$ (2) ; $\dfrac{1}{(x+y)^2}\le\dfrac{z}{4xyz}$ (3)

បូកវិសមភាព(1),(2) និង (3) នោះ (**) ពិត