រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

គណិតវិទ្យា

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{បើ } x\neq 0 \\ 1 & \text{បើ } x=0 \end{cases}$$

អ្នកសហការណ៍ត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក **លឹម ឆុន**

លោក **សែន ពិសិដ្ឋ**

លោក **និត្យ ម៉េង**

លោកស្រី **ទុយ រីណា**

លោក **ព្រឹម សុខនិត**

លោក **ផល ប៊ុនឆាយ**

អ្នករចនាក្រប និង បច្ចេកទេសកំព្យូទ័រ

កញ្ញា **លី គុណ្ណាកា**

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក **លឹម មិត្តសិរ**

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **ដំណោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យា** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះខ្ញុំបាទបានខិតខំស្រាវជ្រាវ និងនិពន្ធឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារស្រាវជ្រាវសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំណងចង់ចេះចង់ដឹងអំពីមេរៀននេះឱ្យកាន់តែច្បាស់ ។

នៅក្នុងសៀវភៅ នេះបានប្រមូលផ្តុំនូវប្រធានលំហាត់យ៉ាងច្រើននិងមានលក្ខណះខុសប្លែកៗគ្នា ។ប្រធានលំហាត់នីមួយៗខ្ញុំបាទបានខិតខំជ្រើសរើសយ៉ាងសម្រិតសម្រាំងបំផុតព្រមទាំងធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដែលអាចឱ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់និងឆាប់ចងចាំអំពីវិធីសាស្ត្រធ្វើដំណោះស្រាយលំហាត់នីមួយៗ ។ ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កង្វះខាតបច្ចេកទេសគរុកោសល្យ និង កំហុសអក្ខរាវិរុទ្ធប្រាកដជាកើតមានឡើងដោយអចេតនាជាពុំខានឡើយ ។ អាស្រ័យហេតុនេះខ្ញុំបាទជាអ្នកនិពន្ធ រង់ចាំទទួលនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្តីសោមនស្សរីករាយជានិច្ចដើម្បីកែលំអសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាពថែមទៀត ។

ខ្ញុំបាទជាអ្នកនិពន្ធសង្ឃឹមថាសៀវភៅសិក្សាអនុគមន៍មួយក្បាលនេះនឹងចូលរួមនាំលោកអ្នកឆ្ពោះទៅរកជ័យជំនះក្នុងការសិក្សា និង ការប្រឡងប្រជែងនានាជាពុំខានឡើយ ។

សូមឱ្យអ្នកសិក្សាទាំងអស់មានសុខភាពល្អមានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និងមានសំណាងល្អក្នុងឆាកជីវិត និង ការសិក្សា !

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ២២ ខែ កុម្ភះ ឆ្នាំ ២០០៨

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ លឹម ផល្គុន

មេរៀនទី១

ចំនួនកុំផ្លិច

១_និយមន័យ

ចំនួនដែលមានទម្រង់ $z = a + i.b$ ដែល a និងb ជាចំនួនពិត ហៅថាចំនួនកុំផ្លិច ។

☞ ទម្រង់ $z = a + i.b$ ហៅថាទម្រង់ពីជគណិតនៃចំនួនកុំផ្លិច។

☞ a ហៅថាផ្នែកពិតដែលគេកំនត់សរសេរ $Re(z) = a$ ។

☞ b ហៅថាផ្នែកពិតដែលគេកំនត់សរសេរ $Im(z) = b$ ។

☞ i ហៅថាឯកតានិម្មិតដែល $i^2 = -1$ រឺ $i = \sqrt{-1}$

☞ គេតាងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចដោយ $\mathbb{C}$ ។

២_ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច ៖

សន្មតថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ និង $z' = a' + i.b'$ ដែល $a; b; a'; b'$ ជាចំនួនពិត ។

- ផលបូក $z + z' = (a + a') + i.(b + b')$

- ផលដក $z - z' = (a - a') + i(b - b')$

- ផលគុណ $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

- ចំរាស់ $\frac{1}{z}=\frac{a-i.b}{a^2+b^2}$

- ផលចែក $\frac{z'}{z}=\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}+i.\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}$

៣_ឯកលក្ខណៈភាពគួរកត់សំគាល់

បើ z និង z' ជាពីរចំនួនកុំផ្លិចនោះគេមាន ៖

$(z+z')^2=z^2+2zz'+z'^2$; $(z-z')^2=z^2-2zz'+z'^2$

$z^2-z'^2=(z+z')(z-z')$

$1+z+z^2+...+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$; $z\neq 1$, $n\in IN^*$

$(z+z')^n=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k z^k z'^{n-k} \right)$; $n\in IN^*$

៤_ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

ក_ បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។

ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z តាងដោយ $\bar{z}=a-i.b$ ។

ខ_ លក្ខណៈ

បើ z និង z' ជាពីរចំនួនកុំផ្លិចនោះគេមាន ៖

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$; $\overline{z-z'}=\bar{z}-\overline{z'}$

$\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\overline{z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

គ_ សំគាល់

បើ $z = a + i.b$ នោះ $\bar{z} = a - i.b$

គេបាន $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ និង $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ។

៥_ស្វ័យគុណនៃ i

ចំពោះគ្រប់ $k \in IN^*$ គេមាន ៖

$$i^{4k} = 1 \; ; \; i^{4k+1} = i \; ; \; i^{4k+2} = -1 \; ; \; i^{4k+3} = -i$$

៦_ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរ

គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $az^2 + bz + c = 0 \; ; a \neq 0 , a;b;c \in IR$

_ បើ $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតកំនត់ដោយ

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \; ; \; z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$ ។

_ បើ $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

សមីការមានឫសឌុបមួយជាចំនួនពិតកំនត់ដោយ

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$ ។

_ បើ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

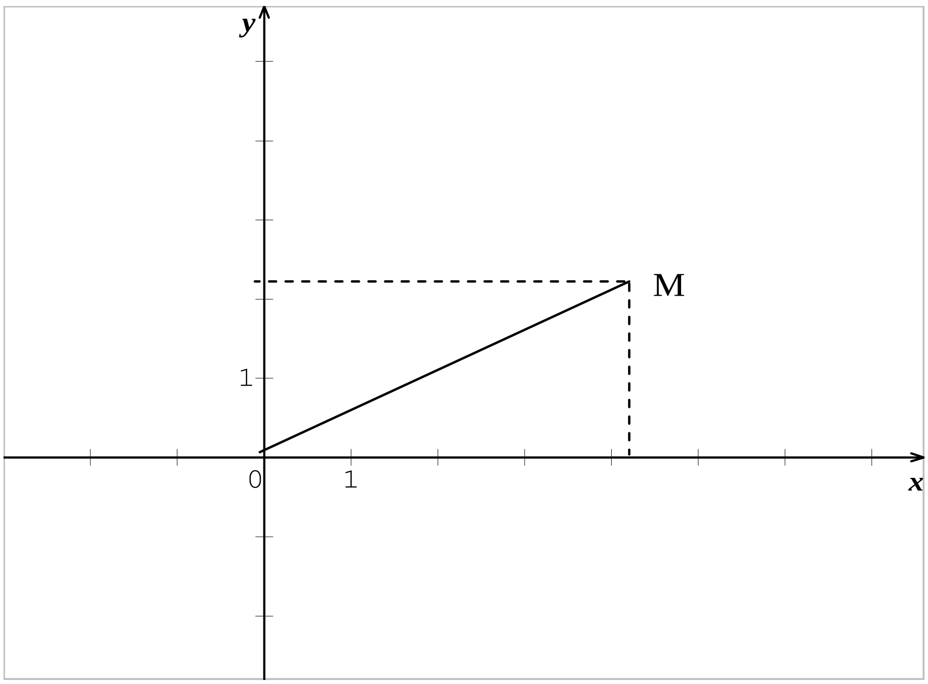
សមីការមានឫពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាកំនត់ដោយ

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \; ; \; z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$ ។

៧_ការតាងចំនួនកុំផ្លិចតាមបែបធរណីមាត្រ

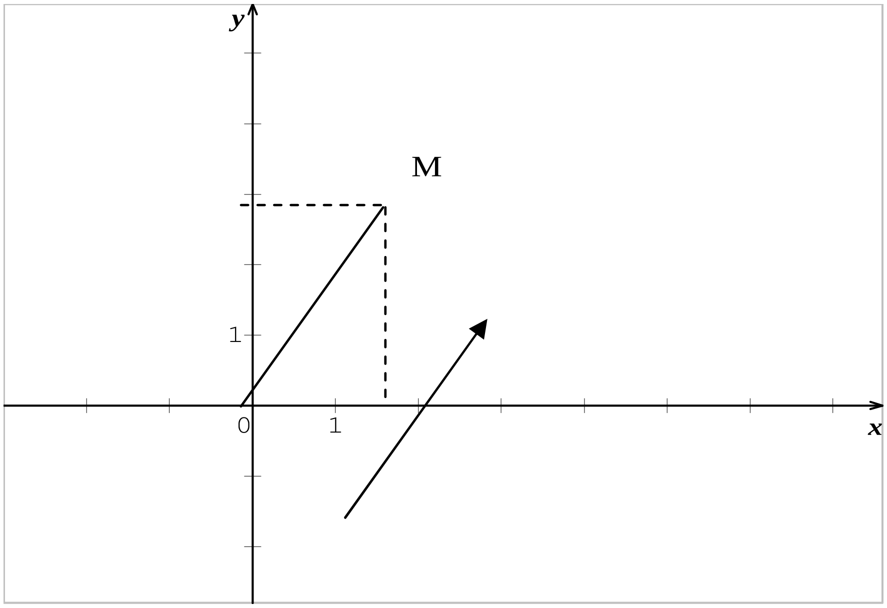
ក_ ចំនុច M នៃប្លង់ប្រកបដោយតម្រុយអរត្ូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ដែលមាន កូអរដោនេ $(a;b)$ ហៅថាចំនុចរូបភាពនៃ ចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b$ ។

ចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b$ ហៅថាអាហ្វិកនៃចំនុច $M(a;b)$ ។

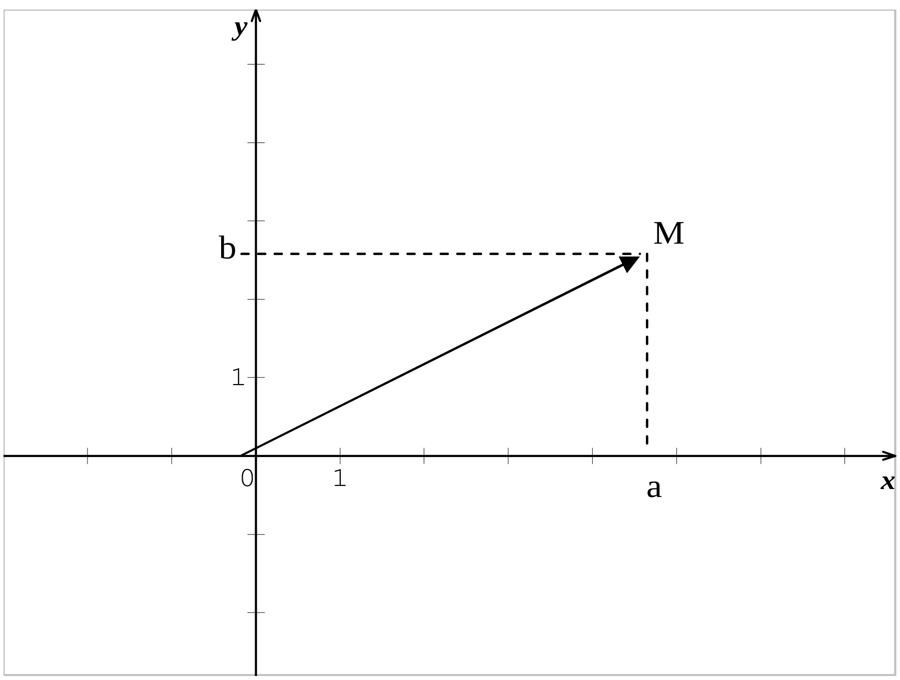


ខ_វ៉ិចទ័រ $\vec{w}$ នៃប្លង់ប្រកបដោយតម្រុយអរត្ូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ដែលមាន កូអរដោនេ $(a;b)$ ហៅថាវិចទ័ររូបភាពនៃ ចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b$ ។

ចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b$ ហៅថាអាហ្វិកនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{W}(a;b)$ ។



៨_ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចមួយ



ក_ បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិតម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចនេះគឺជាចម្ងាយOM កំនត់ដោយ ៖

$|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ ។

ខ_ លក្ខណះ

$$|z| = \sqrt{z\times\bar{z}} \quad ; \quad |z\times z'| = |z|\times|z'| \quad ; \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$ ។

គ_ វិសមភាពត្រីកោណ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច z និង z' គេមាន ៖

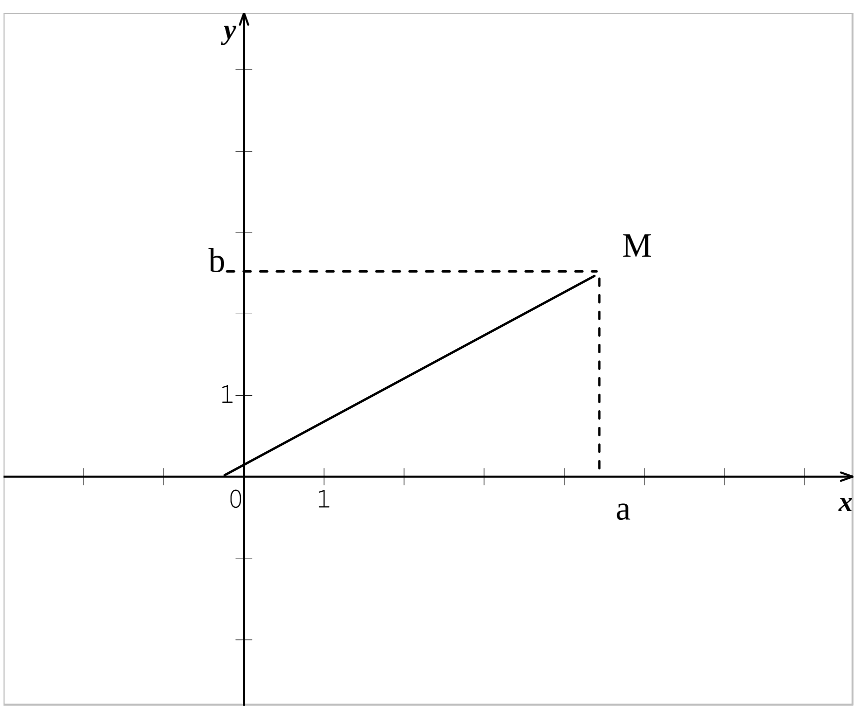
$|z+z'| \le |z|+|z'|$ ។

ឃ_ ចម្ងាយរវាងពីរចំនុចក្នុងប្លង់

បើ A និង B ជាពីរចំនុចមានអាហ្វិករៀងគ្នា z_A និង z_B នៃប្លង់ប្រកបដោយតម្រុយអរត្តូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$

គេបាន $d(AB) = |z_B - z_A|$ ។

៩ _ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចមួយ



គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិត ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z កំនត់ដោយ

$$z = r\ (\cos\theta + i.\sin\theta)$$

ដែល $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ និង $\cos\theta = \frac{a}{r}$; $\sin\theta = \frac{b}{r}$ ។

១០_ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

សន្មតថាគេមានចំនួនកុំផ្លិចត្រីកោណមាត្រពីរ ៖

$z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ និង $z' = r'(\cos\theta' + i.\sin\theta')$

_ផលគុណ $z \times z' = r.r'\left[\cos(\theta + \theta') + i.\sin(\theta + \theta')\right]$

_ផលចែក $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\left[\cos(\theta - \theta') + i.\sin(\theta - \theta')\right]$

១១_ស្វ័យគុណទី n

សន្មតថាគេមានចំនួនកុំផ្លិចត្រីកោណមាត្រ $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិចនេះកំនត់ដោយ ៖

$z^n = \left[r\ (\cos\theta + i.\sin\theta)\right]^n = r^n\left[\cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)\right]$ គ្រប់ $n \in Z$

១២_រូបមន្តដឺម័រ

ចំពោះគ្រប់ $\theta \in IR$; $n \in Z$ គេមាន ៖

$(\cos\theta + i.\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)$ (ហៅថារូបមន្តដឺម័រ)

១៣_ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិចមួយ

បើគេមាន $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ

និង $n \in IN$ ។ឬសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិចនេះកំណត់ដោយ ៖

$$W_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i.\sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})\right] ;\ k = 0, 1, 2, ..., (n-1).$$

១៤_ទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃចំនួនកុំផ្លិចមួយ

បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិចមានម៉ូឌុល r និងអាគុយម៉ង់ θ

នោះទម្រង់អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃ z កំនត់ដោយ $z = r.e^{i.\theta}$

១៥_រូបមន្តអឺលែ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត θ គេមានទំនាក់ទំនង ៖

$\cos\theta = \frac{e^{i.\theta} + e^{-i.\theta}}{2}$ និង $\sin\theta = \frac{e^{i.\theta} - e^{-i.\theta}}{2i}$ ។

១៦_ទំនាក់ទំនងរវាងទម្រង់ពីជគណិត_ត្រីកោណមាត្រ និង

អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ៖

$$z = a + i.b = r(\cos\theta + i.\sin\theta) = r.e^{i.\theta}$$

ដែល $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos\theta = \frac{a}{r}$; $\sin\theta = \frac{b}{r}$ ។

✍ ✍ ✍ ✍ ✍

លំហាត់ទី១

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=2+3i$; $b=-3+i$ និង $c=1-4i$

ក_ ចូរសរសេរ $a^3+b^3+c^3$ និង $a\times b\times c$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ_ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឱ្យ

$a^3+b^3+c^3=k.abc$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ $a^3+b^3+c^3$ និង $a\times b\times c$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ៖

យើងមាន $a^3=(2+3i)^3=8+36i-54-27i=-46+9i$

$b^3=(-3+i)^3=-27+27i+9-i=-18+26i$

$c^3=(1-4i)^3=1-12i-48+64i=-47+52i$

យើងបាន $a^3+b^3+c^3=-46+9i-18+26i-47+52i=-111+87i$

ដូចនេះ $\boxed{a^3+b^3+c^3=-111+87i}$ ។

យើងមាន $a\times b\times c=(2+3i)(-3+i)(1-4i)$

$=(-6+2i-9i-3)(1-4i)$

$=(-9-7i)(1-4i)$

$=-9+36i-7i-28$

$=-37+29i$

ដូចនេះ $\boxed{a\times b\times c=-37+29i}$ ។

ខ.កំនត់ចំនួនពិត k

យើងមាន $a^3+b^3+c^3=k.abc$

គេទាញ $$k=\frac{a^3+b^3+c^3}{a.b.c}=\frac{-111+87i}{-37+29i}=3$$

ដូចនេះ $k=3$ ។

លំហាត់ទី២

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=3+i$; $u=(x-1)+i.(y+2)$ និង $b=2-16i$

ដែល x និង y ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យ $au+b=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃនៃ x និង y

យើងបាន $au+b=0$

$$u=-\frac{b}{a}$$

ដោយ $a=3+i$; $u=(x-1)+i.(y+2)$ និង $b=2-16i$

គេបាន $(x-1)+i.(y+2)=-\dfrac{2-16i}{3+i}$

$$(x-1)+i(y+2)=-\frac{2(1-8i)(3-i)}{3^2-i^2}$$

$$(x-1)+i(y+2)=-\frac{2(3-i-24i-8)}{10}$$

$$(x-1)+i(y+2)=-\frac{2(-5-25i)}{10}$$

$$(x-1)+i(y+2)=1+5i$$

គេទាញបាន $\begin{cases} x-1=1 \\ y+2=5 \end{cases}$ នាំឱ្យ $x=2\ ;\ y=3$

ដូចនេះ $\boxed{x=2\ ;\ y=3}$ ។

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\log_3(\frac{x+y}{2})+i\left(\log_2 x+\log_2 y\right)$

និង $W=\frac{13+i}{1-2i}$ ដែល $x\in IR_+^*$; $y\in IR_+^*$ ។

ក_ ចូរសរសេរ W ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ_ កំនត់ x និង y ដើម្បីឱ្យ $Z=W$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_សរសេរ W ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងបាន $W=\frac{12+i}{1-2i}=\frac{(12+i)(1+2i)}{1+4}=\frac{12+24i+i-2}{5}=2+5i$

ដូចនេះ $\boxed{W=2+5i}$ ។

ខ_កំនត់ x និង y ដើម្បីឲ្យ $Z=W$

យើងបាន $Z=W$ សមមូល $\begin{cases}\log_2(\frac{x+y}{3})=2\\ \log_2 x+\log_2 y=5\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}\log_2(\frac{x+y}{3})=2\\ \log_2(x.y)=5\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}x+y=12\\ x.y\ \ =32\end{cases}$

គេទាញ x ; y ជាឬសសមីការ $u^2-12u+32=0$

ដោយ $\Delta'=36-32=4$ គេទាញឬស $\left[\begin{array}{l}u_1=6-2=4\\ u_2=6+2=8\end{array}\right.$

ដូចនេះ $x=4$; $y=8$ ឬ $x=8$; $y=4$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យសមីការ $(E): z^2 + az + b = 0$ ដែល $a;b \in IR$

ចូរកំនត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$

ជាឬសរបស់សមីការ (E) រួចទាញរកឬស z_2 មួយទៀត

របស់សមីការ ។

តើអ្នកពិនិត្យឃើញដូចម្តេចចំពោះចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ a និង b

ដើម្បីឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $2 + i\sqrt{3}$ ជាឬសរបស់សមីការលុះត្រាតែ

វាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ។

គេបាន $(2 + i\sqrt{3})^2 + a(2 + i\sqrt{3}) + b = 0$

$$4 + 4i\sqrt{3} - 3 + 2a + ai\sqrt{3} + b = 0$$

$$(1 + 2a + b) + i(4\sqrt{3} + a\sqrt{3}) = 0$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 4\sqrt{3} + a\sqrt{3} = 0 \\ 1 + 2a + b = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a = -4\,;\ b = 7}$ ។

គណនាឬសមួយទៀតរបស់សមីការ ៖

បើ z_1 ; z_2 ជាឬសរបស់សមីការនោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន

$z_1 + z_2 = -a = 4$ ដោយ $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$

គេទាញ $z_2 = 4-(2+i\sqrt{3}) = 2-i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $z_2 = 2-i\sqrt{3}$ ។

យើងពិនិត្យឃើញថា $z_1 = 2+i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 2-i\sqrt{3}$

ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរឆ្លាស់គ្នា ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z ដែលមាន $\bar{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់របស់វា

ដោះស្រាយសមីការ $\log_5|z| + \dfrac{z+i\,\bar{z}}{7} = 3+i$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log_5|z| + \frac{z+i\bar{z}}{7} = 3+i$$

តាង $z = x+i.y$ នាំឲ្យ $\bar{z} = x-iy$ ដែល $x\,;\,y \in IR$

សមីការអាចសរសេរ ៖

$$\log_5|x+iy| + \frac{(x+iy)+i(x-iy)}{7} = 3+i$$

$$\log_5\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x+iy+ix+y}{7} = 3+i$$

$$\left(\frac{x+y}{7} + \log_5\sqrt{x^2+y^2}\right) + i\,\frac{x+y}{7} = 3+i$$

គេទាញបាន $\begin{cases} \dfrac{x+y}{7}=1 \\ \dfrac{x+y}{7}+\log_5\sqrt{x^2+y^2}=3 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x+y=7 \\ 1+\log_5\sqrt{x^2+y^2}=3 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ ដោយ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ នាំឲ្យ $xy=12$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} x+y=7=3+4 \\ x.y=12=3\times 4 \end{cases}$

គេទាញចម្លើយ $x=3\ ,\ y=4$ ឬ $x=4\ ,\ y=3$

ដូចនេះ $z_1=3+4i\ \ ;\ z_2=4+3i$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ ៖

$z=3x-i\,(2x-y)$ និង $W=-1+y+i\,[\ 1+2^{\log_5(x+3)}\ ]$

ដែល x និង y ជាចំនួនពិត ។

កំនត់ x និង y ដើម្បីឱ្យ $W=z$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ x និង y

ដើម្បីឱ្យ $W=z$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} \mathrm{Re}(W)=\mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(W)=\mathrm{Im}(z) \end{cases}$

គេទាញបាន $\begin{cases} -1+y=3x & (1) \\ 1+2^{\log_5(x+3)}=-2x+y & (2) \end{cases}$

តាម (1) គេទាញ $y=3x+1$ (3) យកជំនួសក្នុងសមីការ (2)

គេបាន $1+2^{\log_5(x+3)}=-2x+3x+1$

$2^{\log_5(x+3)}=x$ លក្ខខ័ណ្ឌ $x+3>0$ ឬ $x>-3$

តាង $t=\log_5(x+3)$ នាំឱ្យ $x+3=5^t$ ឬ $x=5^t-3$

គេបានសមីការ $2^t=5^t-3$ ឬ $5^t-2^t=3$

ដោយអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការជាអនុគមន៍កើន និង អង្គខាងឆ្វេង ជាអនុគមន៍ថេរនោះយើងបានសមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $t=1$

ចំពោះ $t=1$ គេបាន $x=5-3=2$ និង $y=3(2)+1=7$

ដូចនេះ $\boxed{x=2\ ;\ y=7}$ ។

លំហាត់ទី៧

ដោះស្រាយសមីការ $2z-|z|=\frac{9-7i}{1+i}$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$2z-|z|=\frac{9-7i}{1+i}$ តាង $z=x+i.y\ ,\ x;y\in IR$

គេបាន $2(x+iy)-|x+iy|=\frac{(9-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$$2x+2iy-\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9-9i-7i-7}{2}$$

$$(2x-\sqrt{x^2+y^2})+2iy=1-8i$$

គេទាញ $\begin{cases} 2x-\sqrt{x^2+y^2}=1 & (1) \\ 2y=-8 & (2) \end{cases}$

តាម (2) គេទាញ $y=-4$ យកទៅជួសក្នុង (1) គេបាន

$2x-\sqrt{x^2+16}=1$

$$2x-1=\sqrt{x^2+16}\quad ,\ x>-\frac{1}{2}$$

$$(2x-1)^2=x^2+16$$

$$4x^2-4x+1=x^2+16$$

$$3x^2-4x-15=0\quad ;\ \Delta'=4+45=7^2$$

គេទាញឬស $x_1=\frac{2+7}{3}=3\ ;\ x_2=\frac{2-7}{3}=-\frac{5}{3}<-\frac{1}{2}$ (មិនយក)

គេបាន $x=3\ ;\ y=-4$ ។

ដូចនេះ $\boxed{z=3-4i}$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ដែល $Z_2 \neq 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

យើងតាង $Z_1 = a + i.b$ និង $Z_2 = c + i.d$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

យើងបាន $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+i.b}{c+i.d} = \frac{(a+i.b)(c-i.d)}{(c+i.d)(c-i.d)} = \frac{ac - i.ad + i.bc - i^2.bd}{c^2 - i^2.d^2}$ តែ $i^2 = -1$

គេបាន $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

នាំឱ្យ $$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2}}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2c^2 + a^2d^2) + (b^2c^2 + b^2d^2)}}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)}}{c^2+d^2} = \frac{\sqrt{(c^2+d^2)(a^2+b^2)}}{c^2+d^2}$$

គេទាញ $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$ ដោយគេមាន $\begin{cases} |Z_1| = \sqrt{a^2+b^2} \\ |Z_2| = \sqrt{c^2+d^2} \end{cases}$

ដូច្នេះ $\boxed{\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \times |Z_2|$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \times |Z_2|$

យើងតាង $Z_1 = a + i.b$ និង $Z_2 = c + i.d$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

យើងមាន $Z_1 \times Z_2 = (a+i.b)(c+i.d) = ac + i.ad + i.bc + i^2.bd$ តែ $i^2 = -1$

នាំឱ្យ $Z_1 \times Z_2 = (ac - bd) + i.(ad + bc)$

គេបាន
$$|Z_1 \times Z_2| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2}$$
$$= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2}$$
$$= \sqrt{(a^2c^2 + b^2c^2) + (a^2d^2 + b^2d^2)}$$
$$= \sqrt{c^2(a^2+b^2) + d^2(a^2+b^2)}$$
$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

គេទាញ $|Z_1 \times Z_2| = \sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{c^2+d^2}$

ដោយគេមាន $\begin{cases} |Z_1| = \sqrt{a^2+b^2} \\ |Z_2| = \sqrt{c^2+d^2} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{|Z_1 \times Z_2| = |Z_1| \times |Z_2|}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

ចំពោះគ្រប់ a,b,c,d ជាចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (XOY) យើងជ្រើសរើសវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{U}$ និង $\vec{V}$ មានអាហ្វិករៀងគ្នា Z_1 និង Z_2 នាំឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{U}+\vec{V}$ មានអាហ្វិក Z_1+Z_2 ។

តាមលក្ខណៈជ្រុងរបស់ត្រីកោណគេបាន $\|\vec{U}+\vec{V}\| \le \|\vec{U}\|+\|\vec{V}\|$

ដោយ :

$\|\vec{U}\| = |Z_1|$, $\|\vec{V}\| = |Z_2|$

$\|\vec{U}+\vec{V}\| = |Z_1+Z_2|$

ដូចនេះ $\boxed{|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|}$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

យើងតាង $Z_1 = a+i.b$ និង $Z_2 = c+i.d$ ដែល a,b,c,d ជាចំនួនពិត ។

មាន $Z_1+Z_2 = (a+c)+i.(b+d)$ នាំឱ្យ $|Z_1+Z_2| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

ហើយ $|Z_1| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|Z_2| = \sqrt{c^2+d^2}$ ។

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច :

$Z_1 = 3+4i$, $Z_2 = 12+5i$, $Z_3 = -8+15i$

ក. ចូរគណនា $|Z_1|, |Z_2|, |Z_3|$ និង $|Z_1+Z_2+Z_3|$

ខ. ទាញបង្ហាញថា $|Z_1+Z_2+Z_3| < |Z_1|+|Z_2|+|Z_3|$

និង $|Z_1|+|Z_1+Z_2+Z_3| = |Z_2|+|Z_3|$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $|Z_1|, |Z_2|, |Z_3|$ និង $|Z_1+Z_2+Z_3|$

យើងបាន $|Z_1| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$|Z_2| = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

$|Z_3| = \sqrt{(-8)^2+(15)^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$

ហើយ $Z_1+Z_2+Z_3 = (3+4i)+(12+5i)+(-8+15i) = 7+24i$

គេបាន $|Z_1+Z_2+Z_3| = \sqrt{7^2+24^2} = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} = 25$

ដូចនេះ $|Z_1| = 5$, $|Z_2| = 13$, $|Z_3| = 17$ និង $|Z_1+Z_2+Z_3| = 25$ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា ៖

$$|Z_1+Z_2+Z_3| < |Z_1|+|Z_2|+|Z_3|$$

និង $|Z_1|+|Z_1+Z_2+Z_3| = |Z_2|+|Z_3|$

យើងមាន $|Z_1+Z_2+Z_3| = 25$

ហើយ $|Z_1|+|Z_2|+|Z_3| = 5+13+17=35$

ដូចនេះ $|Z_1+Z_2+Z_3| < |Z_1|+|Z_2|+|Z_3|$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $|Z_1|+|Z_1+Z_2+Z_3| = 5+25=30$

និង $|Z_2|+|Z_3| = 13+17=30$

ដូចនេះ $|Z_1|+|Z_1+Z_2+Z_3| = |Z_2|+|Z_3|$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យសមីការ $(E): z^2+az+b=0$, $a, b \in IR$

ចូរកំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=3+2i$ ជាឬសរបស់សមីការរួចគណនាឬសមួយទៀតរបស់សមីការ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត a និង b ៖

ដើម្បីឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=3+2i$ ជាឬសរបស់សមីការលុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ ។

យើងបាន $(3+2i)^2+a(3+2i)+b=0$

$$9+12i+4i^2+3a+2ia+b=0 \quad , \ i^2=-1$$

$$9+12i-4+3a+2ia+b=0$$

$$(5+3a+b)+i(12+2a)=0$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 12+2a=0 \\ 5+3a+b=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a=-6 \ , \ b=13$

ដូចនេះ $\boxed{a=-6 \ , \ b=13}$ ។

គណនាឬសមួយទៀតរបស់សមីការ :

ចំពោះ $a=-6 \ , \ b=13$ សមីការក្លាយជា $Z^2-6Z+13=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតយើងមាន $Z_1+Z_2=6$ ដោយគេស្គាល់ $Z_1=3+2i$

គេបាន $Z_2=6-Z_1=6-(3+2i)=3-2i$

ដូចនេះឬសមួយទៀតនៃសមីការគឺ $Z_2=3-2i$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ។

ក.ចូរសរសេរ z^2 ជាទំរង់ពិជគណិត ។

ខ.ចូរសរសេរ z^2 និង z ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរ z^2 ជាទំរង់ពិជគណិត

យើងបាន $z^2=(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}})^2$

$$=(\sqrt{2+\sqrt{2}})^2+2(\sqrt{2+\sqrt{2}})(i.\sqrt{2-\sqrt{2}})+(i.\sqrt{2-\sqrt{2}})^2$$

$$=2+\sqrt{2}+2\sqrt{2^2-2}.i-2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{z^2=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}.i}$

ខ-ចូរសរសេរ z^2 និង z ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z^2=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}.i=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $z^2=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$ និង $z=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i.\sin\frac{\pi}{8}\right)$

គ-ទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$

តាមសំរាយខាងលើគេទាញ $2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i.\sin\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{និង} \quad \sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8}}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេអោយចំនួនកុំផ្លិច : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i.\sqrt{2}}{2}$ និង $z_2 = 1-i$

ក.ចូរសរសេរ z_1 ,z_2 និង $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.ចូរសរសេរ $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត ។

គ.ទាញអោយបានថា $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ z_1 ,z_2 និង $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ:

គេមាន $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i.\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i.\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\left[\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + i.\sin(-\dfrac{\pi}{6})\right]}$ ។

គេមាន $z_2 = 1-i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i.\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_2 = \sqrt{2}\left[\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i.\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right]}$ ។

គេមាន $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}) + i.\sin(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4})\right]$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \cos\dfrac{\pi}{12} + i.\sin\dfrac{\pi}{12}}$ ។

ខ. សរសេរ $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត

គេបាន $Z = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \dfrac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ ។

គ. ទាញអោយបានថា ៖

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន ៖

$$Z = \cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12} \quad (1)$$

និង $Z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad (2)$

ផ្ទឹមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ និង $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

ក-ចូរបង្ហាញថា $z=2(\cos\frac{\pi}{24}+i.\sin\frac{\pi}{24})$ ។

ខ-ចូរសរសេរ $Z=\frac{z^2}{2+z}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ-ចូរគណនាតម្លៃនៃ $S_n=z^n+\bar{z}^n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $z=2(\cos\frac{\pi}{24}+i.\sin\frac{\pi}{24})$

គេមាន $z=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

តាង $a=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ និង $b=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

យើងបាន $a=\sqrt{2+\sqrt{2+2.\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{6}}}=\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{6})}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{12}}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{12}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{24}}=2\cos\frac{\pi}{24}$$

ម្យ៉ាងទៀត $b=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$$=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{12}}=\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{24}}=2\sin\frac{\pi}{24}$$

គេបាន $z=2\cos\frac{\pi}{24}+2i.\sin\frac{\pi}{24}=2(\cos\frac{\pi}{24}+i.\sin\frac{\pi}{24})$

ដូចនេះ $\boxed{z=2\left(\cos\frac{\pi}{24}+i.\sin\frac{\pi}{24}\right)}$ ។

ខ-សរសេរ $Z=\dfrac{z^2}{2+z}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងមាន $z=2(\cos\frac{\pi}{24}+i.\sin\frac{\pi}{24})$

យើងបាន $$Z=\frac{[2(\cos\frac{\pi}{24}+i.\sin\frac{\pi}{24})]^2}{2+2(\cos\frac{\pi}{24}+i.\sin\frac{\pi}{24})}$$

$$=\frac{4(\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12})}{2(1+\cos\frac{\pi}{24}+i.\sin\frac{\pi}{24})}=\frac{2(\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12})}{2\cos^2\frac{\pi}{48}+2i.\sin\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{48}}$$

$$=\frac{2(\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12})}{2\cos\frac{\pi}{48}(\cos\frac{\pi}{48}+i.\sin\frac{\pi}{48})}$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{48}}\left[\cos(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{48})+i.\sin(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{48})\right]$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{48}}\left(\cos\frac{3\pi}{48}+i.\sin\frac{3\pi}{48}\right)=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{48}}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i.\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{48}}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i.\sin\frac{\pi}{16}\right)}$ ។

គ-គណនាតម្លៃនៃ $S_n=z^n+\overline{z}^n$

តាមរូបមន្តដឺម័រយើងមាន ៖

$z^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{24}+i.\sin\frac{n\pi}{24}\right)$ និង $\overline{z}^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{24}-i.\sin\frac{n\pi}{24}\right)$

យើងបាន $S_n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{24}+i.\sin\frac{n\pi}{24}\right)+2^n\left(\cos\frac{n\pi}{24}-i.\sin\frac{n\pi}{24}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=2^{n+1}.\cos\frac{n\pi}{24}}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\cos\frac{4\pi}{5}+i.\sin\frac{4\pi}{5}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+Z)^3=8\cos^3\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{6\pi}{5}+i.\sin\frac{6\pi}{5})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$(1+Z)^3=8\cos^3\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{6\pi}{5}+i.\sin\frac{6\pi}{5})$$

យើងមាន $1+Z=1+\cos\frac{4\pi}{5}+i.\sin\frac{4\pi}{5}$

តាមរូបមន្ត $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$ និង $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

យើងបាន $1+Z=2\cos^2\frac{2\pi}{5}+2i\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$

ឬ $1+Z=2\cos\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{2\pi}{5}+i.\sin\frac{2\pi}{5})$

តាមរូបមន្តដឺម័រយើងបាន :

$$(1+Z)^3=\left[2\cos\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{2\pi}{5}+i.\sin\frac{2\pi}{5})\right]^3$$

$$=8\cos^3\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{6\pi}{5}+i.\sin\frac{6\pi}{5})$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+Z)^3=8\cos^3\frac{2\pi}{5}(\cos\frac{6\pi}{5}+i.\sin\frac{6\pi}{5})}$ ។

លំហាត់ទី១៧ គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=4\sqrt{2}(-1+i)$

ក-ចូរសរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ-គណនាឫសទី3 នៃ Z ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

យើងបាន $Z=4\sqrt{2}(-1+i)$

$$=8(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2})=8(-\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$$

$$=8\left[\cos(\pi-\frac{\pi}{4})+i.\sin(\pi-\frac{\pi}{4})\right]=8(\cos\frac{3\pi}{4}+i.\sin\frac{3\pi}{4})$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=8\,(\cos\frac{3\pi}{4}+i.\sin\frac{3\pi}{4})}$ ។

ខ-គណនាឫសទី3 នៃ Z

យើងតាង W_k ជាឫសទី3 នៃ $Z=8\,(\cos\frac{3\pi}{4}+i.\sin\frac{3\pi}{4})$

តាមរូបមន្តឫសទី n : $W_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n})+i.\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\right]$

យើងបាន $W_k=\sqrt[3]{8}\left[\cos(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3})+i.\sin(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3})\right]$

-បើ $k=0$: $W_0=2(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$

-បើ $k=1$: $W_1=2(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12})$

-បើ $k=2$: $W_2=2\,(\cos\frac{19\pi}{12}+i.\sin\frac{19\pi}{12})$ ។

លំហាត់ទី១៨

ចូរគណនាឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច $Z=-1$

ចំពោះ $n=2\ ,\ 3\ ,4\ ,5\ ,6$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច $Z=-1$

ចំពោះ $n=2\ ,\ 3\ ,4\ ,5\ ,6$

យើងមាន $Z=-1=\cos(\pi+2k\pi)+i.\sin(\pi+2k\pi)$

តាង W_k ជាឫសទី n នៃ Z យើងបាន :

$$W_k=\cos\frac{(1+2k)\pi}{n}+i.\sin\frac{(1+2k)\pi}{n}$$

ក. ចំពោះ $n=2$ គេបាន $W_k=\cos\frac{(1+2k)\pi}{2}+i.\sin\frac{(1+2k)\pi}{2}$

-បើ $k=0:\ W_0=\cos\frac{\pi}{2}+i.\sin\frac{\pi}{2}=i$

-បើ $k=1:\ W_1=\cos\frac{3\pi}{2}+i.\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

ខ. ចំពោះ $n=3$ គេបាន $W_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}+i.\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}$

-បើ $k=0\ :W_0=\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}$

-បើ $k=1:\ W_1=\cos\pi+i.\sin\pi=-1$

-បើ $k=2\ :W_2=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i.\frac{\sqrt{3}}{2}$

គ. ចំពោះ $n=4$ គេបាន $W_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{4}+i.\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}$

-បើ $k=0\ :W_0=\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}$

-បើ $k=1\ : W_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i.\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

-បើ $k=2\ : W_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i.\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

-បើ $k=3 : W_3=\cos\frac{7\pi}{4}+i.\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i.\frac{\sqrt{2}}{2}$

ឃ. ចំពោះ $n=5$ គេបាន $W_k=\cos\frac{(1+2k)\pi}{5}+i.\sin\frac{(1+2k)\pi}{5}$

-បើ $k=0\ : W_0=\cos\frac{\pi}{5}+i.\sin\frac{\pi}{5}$

-បើ $k=1\ : W_1=\cos\frac{3\pi}{5}+i.\sin\frac{3\pi}{5}$

-បើ $k=2 : W_2=\cos\pi+i.\sin\pi=-1$

-បើ $k=3\ : W_3=\cos\frac{7\pi}{5}+i.\sin\frac{7\pi}{5}$

-បើ $k=4 : W_4=\cos\frac{9\pi}{5}+i.\sin\frac{9\pi}{5}$

ង. ចំពោះ $n=6$ គេបាន $W_k=\cos\frac{(1+2k)\pi}{6}+i.\sin\frac{(1+2k)\pi}{6}$

-បើ $k=0 : W_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$

-បើ $k=1 : W_1=\cos\frac{\pi}{2}+i.\sin\frac{\pi}{2}=i$

-បើ $k=2 : W_2=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$

-បើ $k=3 : W_3=\cos\frac{7\pi}{6}+i.\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$

-បើ $k=4 : W_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i.\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

-បើ $k=5\ : W_5=\cos\frac{11\pi}{6}+i.\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គណនាឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច $Z=i$

ចំពោះ $n=2\,,\ 3\ ,4\ ,5\ ,6$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច $Z=i$

ចំពោះ $n=2\,,\ 3\ ,4\ ,5\ ,6$

យើងមាន: $Z=i=\cos(\frac{\pi}{2}+2k\pi)+i.\sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$

តាង W_k ជាឫសទី n នៃ $Z=i=\cos(\frac{\pi}{2}+2k\pi)+i.\sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi)$

តាមរូបមន្តគេបាន $W_k=\cos\frac{(1+4k)\pi}{2n}+i.\sin\frac{(1+4k)\pi}{2n}$

ក. ចំពោះ $n=2$ គេបាន $W_k=\cos\frac{(1+4k)\pi}{4}+i.\sin\frac{(1+4k)\pi}{4}$

-បើ $k=0:\ W_0=\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

-បើ $k=1:\ W_1=\cos\frac{5\pi}{4}+i.\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

ខ. ចំពោះ $n=3$

គេបាន $W_k=\cos\frac{(4k+1)\pi}{6}+i.\sin\frac{(4k+1)\pi}{6}$

-បើ $k=0:\ W_0=\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6}=.\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$

-បើ $k=1:W_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i.\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$

-បើ $k=2 : W_2=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

គ. ចំពោះ $n=4$ គេបាន $W_k=\cos\frac{(4k+1)\pi}{8}+i.\sin\frac{(4k+1)\pi}{8}$

-បើ $k=0 : W_0=\cos\frac{\pi}{8}+i.\sin\frac{\pi}{8}$

-បើ $k=1 : W_1=\cos\frac{5\pi}{8}+i.\sin\frac{5\pi}{8}$

-បើ $k=2 : W_2=\cos\frac{9\pi}{8}+i.\sin\frac{9\pi}{8}$

-បើ $k=3 : W_3=\cos\frac{13\pi}{8}+i.\sin\frac{13\pi}{8}$

ឃ. ចំពោះ $n=5$ គេបាន $W_k=\cos\frac{(1+4k)\pi}{10}+i.\sin\frac{(1+4k)\pi}{10}$

-បើ $k=0 \quad W_0=\cos\frac{\pi}{10}+i.\sin\frac{\pi}{10}$

-បើ $k=1 \quad W_1=\cos\frac{\pi}{2}+i.\sin\frac{\pi}{2}=i$

-បើ $k=2 \quad W_2=\cos\frac{9}{10}\pi+i.\sin\frac{9}{10}\pi$

-បើ $k=3 \quad W_3=\cos\frac{13\pi}{10}+i.\sin\frac{13\pi}{10}$

-បើ $k=4 \quad W_4=\cos\frac{17\pi}{10}+i.\sin\frac{17\pi}{10}$

ង. ចំពោះ $n=6$ គេបាន $W_k=\cos\frac{(1+4k)\pi}{12}+i.\sin\frac{(1+4k)\pi}{12}$

-បើ $k=0 \quad W_0=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$

-បើ $k=1 \quad W_1=\cos\frac{5\pi}{12}+i.\sin\frac{5\pi}{12}$

-បើ $k=2 \quad W_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

-បើ $k=3 \quad W_3=\cos\frac{13\pi}{12}+i.\sin\frac{13\pi}{12}$

-បើ $k=4$ $\quad W_4=\cos\frac{17\pi}{12}+i.\sin\frac{17\pi}{12}$

-បើ $k=5$ $\quad W_5=\cos\frac{7\pi}{4}+i.\sin\frac{7\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

✍✍✍✍✍

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត $Z=a+i.b$ ៖

ក. $a/Z=(2-5i)(3+i)$ $\quad$ $b/Z=(1+i)(1-2i)(1+3i)$

ខ. $a/Z=(2+3i)^2+(1+2i)^2$ $\quad$ $b/Z=(3-2i)^2+(1-2i)^2$

គ. $a/Z=(1+2i)^3+(1+i)^3$ $\quad$ $b/Z=(1-2i)^3+(2-i)^3$

ឃ. $a/Z=\dfrac{4+7i}{2+i}$ $\quad$ $b/Z=\dfrac{9+7i}{3-2i}$

ង. $a/Z=\dfrac{1+2i}{(2+i)(2-\sqrt{3}i)}$ $\quad$ $b/Z=\left(\dfrac{1-\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}+i}\right)^2$

2. ចូរកំនត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=2+3i$ ជាឬសមួយរបស់សមីការ (E): $z^2+az+b=0$ ។

3. ចូរកំនត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=1+2i$ ជាឬសមួយរបស់សមីការ (E): $z^3+az+b=0$ ។

4. គេមានសមីការ (E): $z^2-3z+4+6i=0$

ក-កំនត់ចំនួនពិត b ដើម្បីឱ្យ $z_0=b.i$ ជាឬសរបស់សមីការ (E) ។

ខ-ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

5. គេមានសមីការ (E): $z^2-5(1+i)z-3(4-3i)=0$

ក-ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $48+14i=(7+i)^2$

ខ-ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

6. គេមានសមីការ $(E): z^2-(a+i.b)z+a-3+5i=0$ ដែល $a,b\in IR$ ។

កំនត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $z_1=3+2i$ ជាឬសមួយរបស់សមីការ (E)

រួចចូរកំនត់រកឬស z_2 មួយទៀតចំពោះតម្លៃ a និង b ដែលបានរកឃើញ ។

7. គេមានសមីការ $(E): z^3-(5+i)z^2+(10+9i)z-2(1+8i)=0$ ។

ក-កំនត់ចំនួនពិត b ដើម្បីឱ្យ $z_0=b.i$ ជាឬសរបស់សមីការ (E) ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការ (E) ជារាង $(z-z_0)(z^2+pz+q)=0$ ដែល p និង q

ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរដែលគេត្រូវរក ។

គ-ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $-8+6i=(1+3i)^2$

រួចដោះស្រាយ សមីការ(E) ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

8. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ៖

a/ $iz^2+(2-3i)z-(1-5i)=0$

b/ $(2-i)z^2-5(1+i)z-2(3+4i)=0$

c/ $(1+i)z^2-(1+7i)z-2(2-3i)=0$

9. ចូរបង្កើតសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមាន α និង β ជាឬសក្នុងករណីនីមួយៗ

ខាងក្រោម ៖

ក. a/ $\alpha=2+11i$, $\beta=2-11i$ b/ $\alpha=-2-3i$, $\beta=-2+3i$

ខ. a/ $\alpha=3+2i$, $\beta=1-3i$ b/ $\alpha=2+3i$, $\beta=3-2i$

គ. a/ $\alpha=-1+2i$, $\beta=3-2i$ b/ $\alpha=-\sqrt{3}-i$, $\beta=1+i\sqrt{3}$

10. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\alpha=1+3i$ និង $\beta=1-2i$ ។

ចូរសរសេរសមីការដឺក្រេទីពីរមួយដែលមាន $Z_1=\alpha^2+\beta^2$

និង $Z_2 = \alpha^2.\beta^2$ ជាឫស.

11. ចូរកំនត់រកចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 8 ហើយការេរបស់វា ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ។

12. ចូរកំនត់ពីរចំនួនពិត x និង y បើគេដឹងថា :

$$(1+i)(x+iy)+(3-2i)(x-iy)=\frac{8-9i}{1+2i}$$ ។

13. ចូរកំនត់ពីរចំនួនពិត x និង y បើគេដឹងថា :

$$(3+2i)(x+y)+(1-2i)(x-y)=\frac{5-13i}{1-i}$$ ។

14. គេមានសមីការ $(E): \; az^2+bz+c=0 \; , a\neq 0 \, , a,b,c\in IR$ ។

ចូរបង្ហាញថាបើ z_0 ជាឫសសមីការ (E) នោះ $\bar{z}_0$ ក៏ជាឫសរបស់ (E) ដែរ ។

15. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\alpha=\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$ និង $\beta=\frac{1-i\sqrt{5}}{2}$ ។

ក-ចូរបង្កើតសមីការដឺក្រេទីពីរមួយដែលមាន α និង β ជាឫស ។

ខ-គេតាង $S_n=\alpha^n+\beta^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $S_{n+2}-S_{n+1}+\frac{3}{2}S_n=0$?

គ-ដោយមិនបាច់ពន្លាតចូរគណនា $N=\left(\frac{1+i\sqrt{5}}{2}\right)^{10}+\left(\frac{1-i\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$ ។

16. គេមានសមីការ $(E)\; : z^2-(\alpha+\beta)iz-\alpha\beta=0 \; , \; \alpha,\beta\in IR^*$

ចូរបង្ហាញថាសមីការ (E) ឫសពីរសុទ្ធតែជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធដែលគេនឹងបញ្ជាក់

17. គេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E): \; Az^2+Bz+C=0$

ដែល $A\neq 0$ ហើយ A,B,C ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

ក. បង្ហាញថាបើ $A-C=i.B$ នោះសមីការ (E) មានឫសពីរកំនត់ដោយ :

$z_1=i\ ,\ z_2=-i.\dfrac{C}{A}$ ។

ខ. បង្ហាញថាបើ $A-C=-i.B$ នោះសមីការ (E) មានឫសពីរកំនត់ដោយ :

$z_1=-i\ ,\ z_2=i.\dfrac{C}{A}$ ។

គ. អនុវត្តន៏ : ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច :

a/ $(1+i)z^2-(2+3i)z-2+3i=0$

b/ $(1-2i)z^2+(1+2i)z-(1+i)=0$

18. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1=1+2i$ និង $Z_2=3-i$ ។

ចូរកំនត់រកផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតនៃចំនួនកុំផ្លិច W

បើគេដឹងថា $\dfrac{1}{W}=\dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2}$ ។

19. គេមានចំនួនកុំផ្លិច α និង β ដែល $\alpha+\beta=3-2i$ និង $\alpha.\beta=5(1-i)$ ។

ចូរកំនត់ផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតនៃ $Z=\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ ។

20. គេមានសមីការ $(E): i.Z^2-(2+3i)Z+5(1+i)=0$

ក. កំនត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឱ្យ $Z_1=a+i$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ (E)

រួចគណនាឫស Z_2 មួយទៀតរបស់សមីការ ។

ខ. ចូរកំនត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{p}{Z_1}+\dfrac{q}{Z_2}=\dfrac{p+q-2}{Z_1+Z_2}$ ។

21. គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ដែល $Z_1+Z_2=3+i$ និង $Z_1.Z_2=4+3i$

ក. ចូរបង្ហាញថា $(Z_1)^2+(Z_2)^2=0$ ។

ខ. ចូរកំនត់រកផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិត នៃ $Z=Z_1^4+Z_2^4$ ។

គ. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $(Z_1+Z_2)^2-4Z_1.Z_2=-(Z_1+Z_2)^2$ រួចកំនត់រក Z_1 និង Z_2 ។

22. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1=x^2+ixy$ និង $Z_2=y^2-ixy$ ដែល $x,y\in IR$ ។

ចូរកំនត់ x និង y ដើម្បីឱ្យ $Z_1-Z_2=(\sqrt{2006}+i\sqrt{2007})^2$ ។

23. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច ៖

$Z_1=(a-b)+i(b-c)$, $Z_2=(b-c)+i(c-a)$ និង $Z_2=(c-a)+i(a-b)$

ដែល a , b , c ជាបីចំនួនពិតខុសគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $Z_1^{\ 3}+Z_2^{\ 3}+Z_3^{\ 3}=3Z_1.Z_2.Z_3$

24. ចូរគណនាឬសការេនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ៖

ក. a/ $Z=48+14i$ b/ $Z=-24-10i$

ខ. a/ $Z=-40+42i$ b/ $Z=77-36i$

គ. a/ $Z=55-48i$ b/ $Z=1+i\sqrt{6}$

25. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

ក. a/ $Z=1+i\sqrt{3}$ b/ $Z=-2\sqrt{3}+2i$

ខ. a/ $Z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ b/ $Z=-\sqrt{3}-3i$

គ. a/ $Z=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ b/ $Z=2+2i$

ឃ. a/ $Z=-1-\frac{i}{\sqrt{3}}$ b/ $Z=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

ង. a/ $Z=1+\sqrt{2}+i$ b/ $Z=2-\sqrt{3}+i$

26. ចូរសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ៖

ក. $a / Z=1+\cos\frac{4\pi}{9}+i.\sin\frac{4\pi}{9}$ $\qquad$ $b / Z=1+\sin\frac{\pi}{10}+i.\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. $a / Z=\sin\frac{2\pi}{7}+i(1-\cos\frac{2\pi}{7})$ $\qquad$ $b / Z=1-\cos\frac{4\pi}{5}-i\sin\frac{4\pi}{5}$

គ. $a / Z=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{5}}+i.\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{5}}$ $\qquad$ $b / Z=1+i\tan\frac{\pi}{7}$

ឃ. $a / Z=-\sin\frac{\pi}{10}-i.\cos\frac{\pi}{10}$ $\qquad$ $b / Z=(\sqrt{3}-2)(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$

ង. $Z=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}}$ ។

27. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមរួចសរសេរឫសនីមួយៗ

ជារាងត្រីកោណមាត្រ ៖

ក. $a / z^{2}-2z+4=0$ $\qquad$ $b / 2z^{2}-2z+1=0$

ខ. $a / z^{2}+\sqrt{3}.z+1=0$ $\qquad$ $b / z^{2}+z+1=0$

28. ចូរសរសេរ $Z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i.\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

29. ចូរសរសេរ $Z=\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

30. ក-គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}, \cos\frac{\pi}{10}$ និង $\tan\frac{\pi}{10}$ ។

ខ-ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $Z=1+i.\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ ។

31. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_{1}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}$ និង $z_{2}=1+i$

ក. ចូរសរសេរ $Z=\frac{z_{1}}{z_{2}}$ ជាទម្រង់ $a+b.i$ ។

ខ. ចូរសរសេរ z_{1}, z_{2} និង $Z=\frac{z_{1}}{z_{2}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

32. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ និង $z_2=2\sqrt{3}+2i$ ។

ក. ចូរសរសេរ $Z=z_1.z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. ចូរសរសេរ z_1 , z_2 និង $Z=z_1.z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

33. គេឱ្យ $z=-1-i$ ។ ចូរសរសេរ z និង z^{2007} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

34. គេឱ្យ $z=-\sqrt{3}+i$ ។ ចូរសរសេរ z និង z^{2007} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

35. គេឱ្យ $z=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ ។ ចូរសរសេរ z និង z^{2007} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

36. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=2+\sqrt{3}+i$

ក-ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាម៉ូឌុល $|Z|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ។

ខ-បង្ហាញថា $Z=2(1+\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6})$ រួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z ។

គ-ទាញបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

37. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\sqrt{2}+1+i$

ក-ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាម៉ូឌុល $|Z|=\sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ។

ខ-បង្ហាញថា $Z=\sqrt{2}(1+\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$ រួចទាញទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z

គ-ទាញបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ។

38. គេមានចំនួនកុំផ្លិច ៖

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \text{ និង } Z_2 = (\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1) \text{ ។}$$

ក. ចូរសរសេរ $U = Z_1.Z_2$ ជារាងពីជគណិត ។

ខ. ចូរសរសេរ U និង Z_1 ជារាងត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល

និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច Z_2 ។

គ.ចូរទាញបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

39. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ។

ចូររកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $U = \frac{z^{2007}}{1+z^2}$ ។

40. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_n = \frac{n^2+n-1-i(2n+1)}{(n^2+n-1)^2+(2n+1)^2}$

ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

ក. បង្ហាញថា $Z_n = \frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+1+i}$ ។

ខ. គណនា $S_n = Z_0 + Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$ ដោយសរសេរ

លទ្ធផលដែលបានជារាងពីជគណិត ។

41. គមានស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ ៖

$$Z_0 = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \text{ និង } Z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z_n - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

ដែល $n \in IN$ ។

ក. គេតាង $U_n = Z_n - 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}.U_n \ , \forall n\in IN$

ខ. ចូរសរសេរ U_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$Z_n=2\cos\frac{(n+1)\pi}{6}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{6}+i.\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\right]$$

ឃ. ចូរកំនត់ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z_n ។

42. បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង :

$z^{2n}=(1+z)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ នោះចូរស្រាយបញ្ជាក់

ថាចំនួនកុំផ្លិច z និង $1+\dfrac{1}{z}$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា ។

43. ដោះស្រាយសមីការ $z^3+\overline{z}^3+i|z|^2=1+i$ ។

44. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$ និង $\beta=\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}$

ក. សរសេរសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមាន $\alpha\ ,\beta$ ជាឬស ។

ខ. តាង $\forall n\in Z: S_n=\alpha^n+\beta^n$ ។

ចូរស្រាយថា $S_{n+2}-S_{n+1}+2S_n=0$?

45. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច : $\begin{cases} Z_1=a_1+i.b_1 \\ Z_2=a_2+i.b_2 \\ Z_3=a_3+i.b_3 \end{cases}$

ដែល a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 ជាចំនួនពិត ។

ក្នុងលំហប្រកបដោយតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយដែល $\overrightarrow{AB}(a_1, a_2, a_3)$ និង $\overrightarrow{AC}(b_1, b_2, b_3)$ ។

ក.ចូរកំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC កាលណាគេមាន

ទំនាក់ទំនង $Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0$ ។

ខ. ចូរស្រាយថាបើ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាទកំពូលA

នោះគេបាន $(Z_1.Z_2.Z_3)^2 = \dfrac{Z_1^6 + Z_2^6 + Z_3^6}{3}$ ។

46. គេឱ្យចំនួនពិត x ដែល $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \, , k \in Z$

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$1 - 3\tan^2 x + i.(3\tan x - \tan^3 x) = \frac{\cos 3x + i\sin 3x}{\cos^3 x}$$

ខ.ប្រើទំនាក់ទំនងខាងលើចូរទាញបង្ហាញថា ៖

$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

គ. ចូរសរសេរ $\tan(\dfrac{\pi}{3} - x)$ និង $\tan(\dfrac{\pi}{3} + x)$ ជាអនុគមន៍

នៃ $\tan x$ ។

ឃ. ទាញឱ្យបានថា $\tan(\dfrac{\pi}{3} - x)\tan(\dfrac{\pi}{3} + x) = \dfrac{\tan 3x}{\tan x}$ ។

ង.ចូរគណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=0}^{n} [\tan(\dfrac{\pi}{3} - 3^n a).\tan(\dfrac{\pi}{3} + 3^n a)]$ ។

47-ដោះស្រាយសមីការ $|z| - i.z = 1 - 3i$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

48-ដោះស្រាយសមីការ $\log_5(z.\bar{z}) + z = 3\,(1 + 2i)$ ។

49-ដោះស្រាយសមីការ $|z-1+i|+iz=22+4i$ ។

50-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ ៖

$Z_0=1$ និង $Z_{n+1}=\frac{1}{2}(Z_n+|Z_n|)$ ដែល $n\in IN$

គណនា Z_n ដោយសរសេរលទ្ធផលក្រោមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

✍✍✍✍✍

មេរៀនទី២

លីមីតនៃអនុគមន៍

១_និយមន័យ

អនុគមន៍ $f(x)$ មានលីមីតស្មើ L កាលណា x ខិតជិត x_0 មានន័យថាចំពោះគ្រប់ចំនួន $\varepsilon>0$ គេមានចំនួន $\alpha>0$ ដែល $0<|x-x_0|<\alpha$ គេបាន $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។

គេកំនត់សរសេរ ៖ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ ។

២_ទ្រឹស្តីបទលីមីត

$1/\ \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

$2/\ \lim\limits_{x\to x_0}[k.f(x)]=k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ ;\ k\in IR$

$3/\ \lim\limits_{x\to x_0}[f(x).g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\times\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

$4/\ \lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\ ;\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

$5/\ \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n\ ;\ n\in IN^*$

៣_ទ្រឹស្តីបទលីមីតអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

$1/\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

$2/\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$

៤_លីមីតឆ្វេង_ស្តាំ

បើគេមាន $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$ & $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ នោះ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$

ដែល $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ តាងរៀងគ្នាជាលីមីតឆ្វេងនិងស្តាំ

៥_ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ក_ភាពជាប់ត្រង់ចំនុចមួយ

អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x=x_0$ លុះត្រាតែ

f បំពេញល័ក្ខខ័ណ្ឌបីដូចខាងក្រោម ៖

១, $f(x_0)$ មានន័យលីមីត ($f(a)$ ជាចំនួនពិត)

២, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ មាន (លីមីតជាចំនួនពិត)

៣, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

(លីមីតស្មើនឹងតម្លៃនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនុច x_0)

ខ_ភាពជាប់លើចន្លោះមួយ

_អនុគមន៍ $f(x)$ លើចន្លោះបើក $]a;b[$ លុះត្រាតែ

$f(x)$ ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួននៅក្នុងចន្លោះបើកនោះ ។

_អនុគមន៍ $f(x)$ លើចន្លោះបើក $[a\,;b]$ លុះត្រាតែ $f(x)$

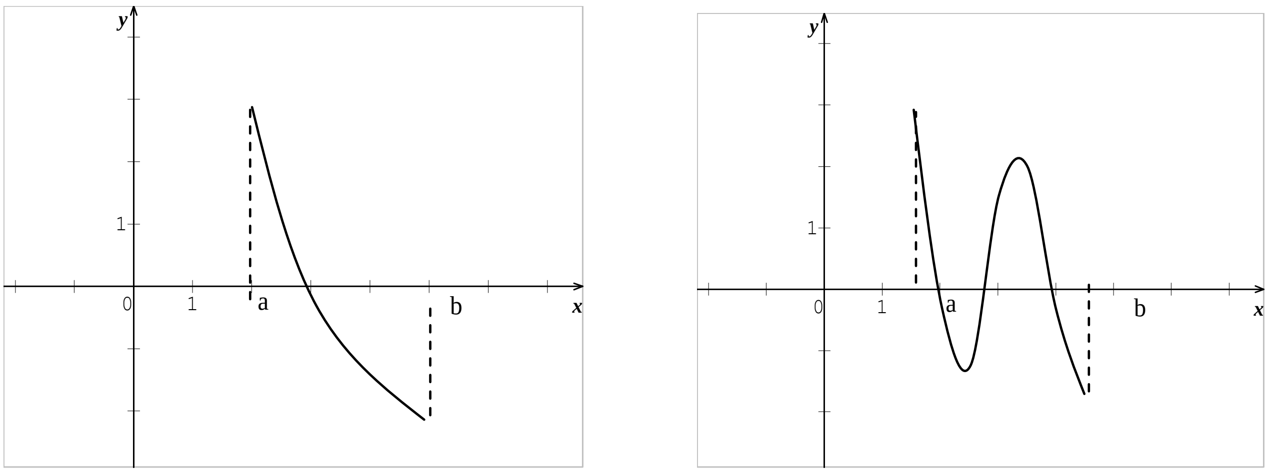
ជាប់លើ $]a;b[$ និងមាន $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ ។

៦_ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a; b]$

ហើយ $f(a).f(b) < 0$ នោះយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួន x_0

មួយនៅចន្លោះ a និង b ដែល $f(x_0) = 0$ ។



៧_លីមីតត្រង់អនន្ត

បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍មួយ និង L ជាចំនួនពិត

. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ មានន័យថាចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ គេមានចំនួន

$M > 0$ ដែល $|f(x) - L| < \varepsilon$ កាលណា $x > M$ ។

. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ មានន័យថាចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ គេមានចំនួន

$N < 0$ ដែល $|f(x) - L| < \varepsilon$ កាលណា $x < N$ ។

៨_ លក្ខណះលីមីតត្រង់អនន្ត

$1/ \lim_{x\to+\infty}[k\, f(x)] = k \lim_{x\to+\infty} f(x)$; $2/ \lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x)$

$3/ \lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to-\infty} f(x) - \lim_{x\to-\infty} g(x)$

$4/ \lim_{x\to+\infty}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \times \lim_{x\to+\infty} g(x)$

$5/ \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)}$; $\lim_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$

(លក្ខណះលីមីតត្រង់ $-\infty$ ដូចគ្នានឹងលីមីតត្រង់ $+\infty$ ដែរ)

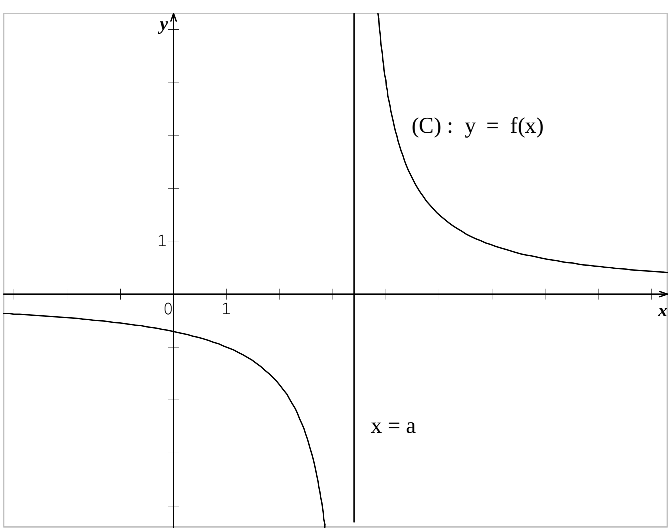
៩_អាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង

ក, អាស៊ីមតូតឈរ

អនុគមន៍ $y=f(x)$ បើ $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ឬ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

នោះគេថាបន្ទាត់មានសមីការ $x=a$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

នៃក្រាបតាង $f(x)$ ។

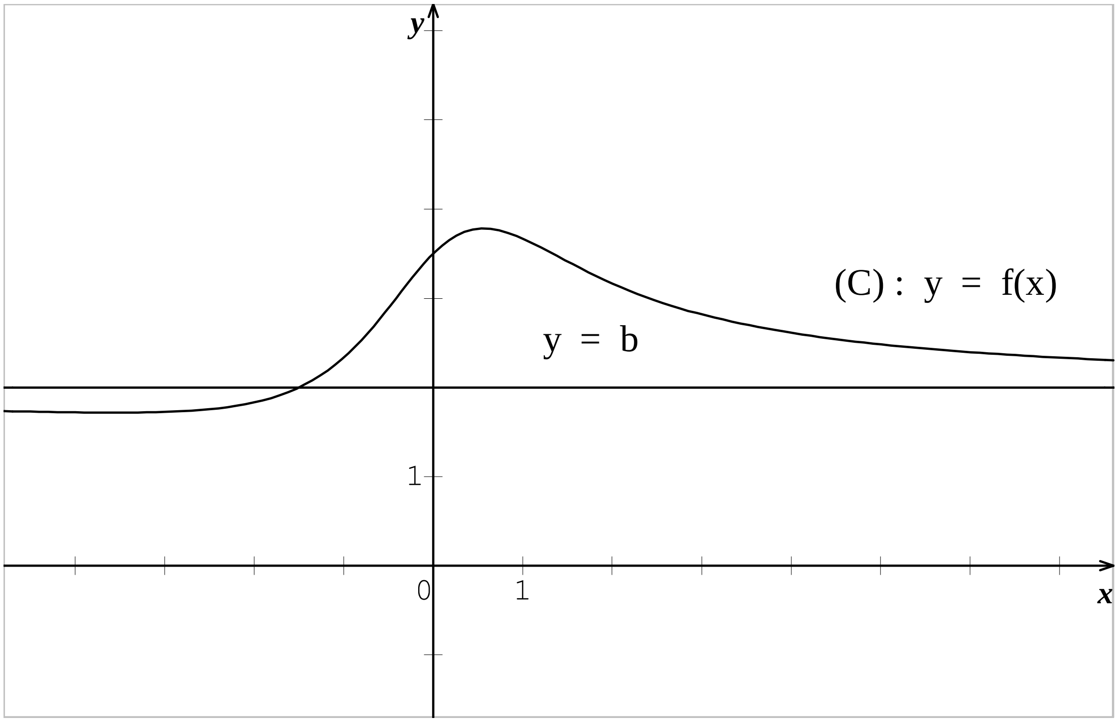


ខ, អាស៊ីមតូតដេក

អនុគមន៍ $y=f(x)$ បើ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ ឬ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

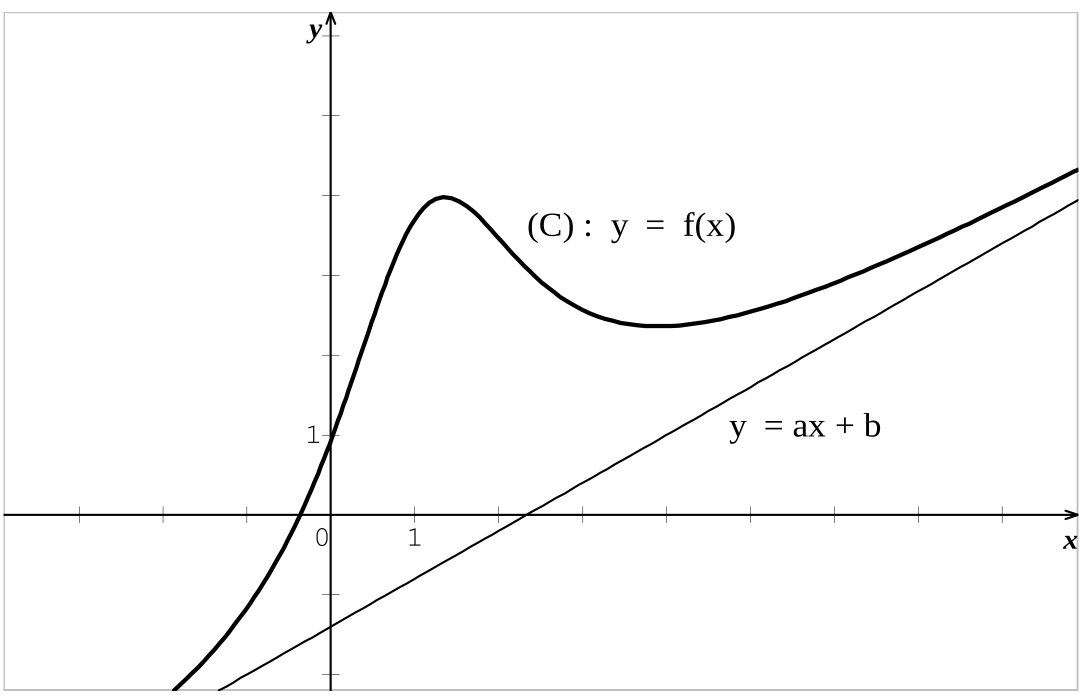
នោះគេថាបន្ទាត់មានសមីការ $y=b$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

នៃក្រាបតាង $f(x)$ ។



គ, អាស៊ីមតូតទ្រេត

អនុគមន៍ $y=f(x)$ បើគេអាចសរសេរ $f(x)=ax+b+g(x)$ ដែលលីមីត $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0$ នោះគេថាបន្ទាត់មានសមីការ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាង $f(x)$ ។



លំហាត់ទី១

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3+.......+x^n-3}{x-1}$, $n\in IN^*$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)+(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[1+(x+1)+(x^2+x+1)\right]=1+2+3=6$$

ដូចនេះ . $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3-3}{x-1}=6}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3+.......+x^n-3}{x-1}$, $n\in IN^*$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+.....+(x^n-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)+(x-1)(x^2+x+1)+...+(x-1)(x^{n-1}+...+x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[1+(x+1)+(x^2+x+1)+...+(x^{n-1}+...+x+1)\right]$$

$$=1+2+3+.......+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3+......+x^n-n}{x-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}}$ ។

លំហាត់ទី២

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

ខ. $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n})$, $n\in IN^*$

គ. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$, $m,n\in IN^*$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(1+x+x^2)-3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)}{-(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+(x+1)}{-(x^2+x+1)}=\frac{1+2}{-3}=-1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=-1}$ ។

ខ. $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n})$, $n\in IN^*$

$$= \lim_{x\to1}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{n}{(1-x)(1+x+...+x^{n-1})}\right]$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(1+x+...+x^{n-1})-n}{(1-x)(1+x+....+x^{n-1})}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)+....+(x^{n-1}-1)}{-(x-1)(1+x+...+x^{n-1})}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)+......+(x-1)(x^{n-2}+....+x+1)}{-(x-1)(1+x+.....+x^{n-1})}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{1+.....+(x^{n-2}+....+x+1)}{-(1+x+.....+x^{n-1})} = \frac{1+2+.....+(n-1)}{-n} = -\frac{n-1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{n}{1-x^n}\right) = -\frac{n-1}{2}}$ ។

គ. $\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$, $m, n \in IN*$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{n}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} + \frac{m}{1-x^m}\right)$$

$$= \lim_{x\to1}\left[\left(\frac{1}{1-x} - \frac{n}{1-x^n}\right) - \left(\frac{1}{1-x} - \frac{m}{1-x^m}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{n}{1-x^n}\right) - \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{m}{1-x^m}\right)$$

$$= \left(-\frac{n-1}{2}\right) - \left(-\frac{m-1}{2}\right) = \frac{-n+1+m-1}{2} = \frac{m-n}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right) = \frac{m-n}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៣

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1+x)(1+2x)(1+3x)}{x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1+x)(1+2x)(1+3x)......(1+nx)}{x}, n\in IN^*$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1+x)(1+2x)(1+3x)}{x}$

$$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1+x)+(1+x)[1-(1+2x)]+(1+x)(1+2x)[1-(1+3x)]}{x}$$

$$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x-2x(1+x)-3x(1+x)(1+2x)}{x}$$

$$=-\lim\limits_{x\to0}\left[1+2(1+x)+3(1+x)(1+2x)\right]=-(1+2+3)=-6$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1+x)(1+2x)(1+3x)}{x}=-6}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1+x)(1+2x)(1+3x)......(1+nx)}{x}, n\in IN^*$

$$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1+x)+(1+x)[1-(1+2x)]+...+(1+x)(1+2x)...(1+(n-1)x)[1-(1+nx)]}{x}$$

$$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x-2x(1+x)-.....-nx(1+x)(1+2x)....(1+(n-1)x)}{x}$$

$$=-\lim\limits_{x\to0}\left[1+2(1+x)+3(1+x)(1+2x)+....+n(1+x)(1+2x)...(1+(n-1)x\right]$$

$$=-(1+2+3+.....+n)=-\frac{n(n+1)}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\frac{1-(1+x)(1+2x)(1+3x)....(1+nx)}{x}=-\frac{n(n+1)}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៤

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(3x+1)}{x^2}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-(nx+1)}{x^2}\ ,\ n\in IN^*$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(3x+1)}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{1+3x+3x^2+x^3-3x-1}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}(3+x)=3$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(3x+1)}{x^2}=3}$ ។

ខ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-(nx+1)}{x^2}\ ,\ n\in IN^*$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុន $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots+C_n^nx^n$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2+C_n^3x^3+\ldots.+C_n^nx^n-nx-1}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{n(n-1)}{2}x^2+C_n^3x^3+\ldots.+C_n^nx^n}{x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{n(n-1)}{2}+C_n^3x+\ldots.+C_n^nx^{n-2}\right]=\dfrac{n(n-1)}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-(nx+1)}{x^2}=\dfrac{n(n-1)}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៥

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, $n\in IN^*$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(3x^4-3x^3)-(x^3-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^3(x-1)-(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-x^2-x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-x^2)+(x^3-x)+(x^3-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)+x(x-1)(x+1)+(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[x^2+x(x+1)+(x^2+x+1)\right]=1+2+3=6$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}=6}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$, $n\in IN^*$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{nx^n(x-1)-(x-1)(x^{n-1}+....+x^2+x+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^n-x^{n-1})+....+(x^n-x)+(x^n-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-1}(x-1)+...+x(x-1)(x^{n-2}+...+x+1)+(x-1)(x^{n-1}+...+x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[x^{n-1}+....+x(x^{n-2}+...+x+1)+...(x^{n-1}+...+x+1)\right]$$

$$=1+2+....+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

លំហាត់ទី៦

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-4x+3}{x^3-x^2-x+1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x^{p+1}-x^p-x+1}$, $n,p\in IN^*$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-4x+3}{x^3-x^2-x+1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^4-x)-3(x-1)}{x^2(x-1)-(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)}{(x-1)(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)+(x^2-1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)+(x+1)+1}{x+1}=\frac{3+2+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-4x+3}{x^3-x^2-x+1}=3}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x^{p+1}-x^p-x+1}$, $n,p\in IN^*$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{n+1}-x)-n(x-1)}{x^p(x-1)-(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x^{n-1}+...+x+1)-n(x-1)}{(x-1)(x^p-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^n+....+x^2+x-n}{x^p-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^n-1)+....+(x^2-1)+(x-1)}{x^p-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+...+x+1)+...+(x-1)(x+1)+(x-1)}{(x-1)(x^{p-1}+....+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{n-1}+.....+x+1)+....+(x+1)+1}{x^{p-1}+....+x+1}=\frac{n+....+2+1}{p}=\frac{n(n+1)}{2p}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x^{p+1}-x^p-x+1}=\dfrac{n(n+1)}{2p}}$ ។

លំហាត់ទី៧

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^n-1}{x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^n-(1+bx)^p}{x}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^n(1+bx)^p-1}{x}$ $\;, n, p\in IN^*, a, b\in IR$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^n-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+ax)-1\right]\left[(1+ax)^{n-1}+....+(1+ax)+1\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}a\left[(1+ax)^{n-1}+....+(1+ax)+1\right]=a\left(1+1+.....+1\right)=n.a$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^n-1}{x}=na}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^n-(1+bx)^p}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+ax)^n-1\right]-\left[(1+bx)^p-1\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^n-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+bx)^p-1}{x}=an-bp$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^n-(1+bx)^p}{x}=an-bp}$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^n(1+bx)^p-1}{x}$ $\;, n, p\in IN^*, a, b\in IR$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^n\left[(1+bx)^p-1\right]+(1+ax)^n-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+ax)^n\frac{(1+bx)^p-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^n-1}{x}=bp+an$$

លំហាត់ទី៨

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2-5}-\sqrt{3}}{x-2}$

ខ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x^3+1}-3}$

គ. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}$

ឃ. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+16}-x-2}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$

ង. $\lim_{x\to 1}\frac{x+1-\sqrt{3x+1}}{2x-1-\sqrt{x}}$

ច. $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

ឆ. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

ជ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-\sqrt{x^2+60}}{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}$

ឈ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{x}$

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2-5}-\sqrt{3}}{x-2}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5-3}{(x-2)(\sqrt{2x^2-5}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{2x^2-5}+\sqrt{3})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x+2)}{\sqrt{2x^2-5}+\sqrt{3}}=\frac{8}{2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2-5}-\sqrt{3}}{x-2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}}$ ។

ខ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x^3+1}-3}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x^3+1}+3)}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x^3+1}+3)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(\sqrt{x^3+1}+3)}{x^2+2x+4}=\frac{4.6}{12}=2$$

គ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2+3x-3x-1\right)}{x-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{3x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{3x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{3x+1}}=\dfrac{2.2}{2+2}=1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}=1}$ ។

ឃ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-x-2}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+16-x^2-4x-4}{2x+3-x-6}\cdot\dfrac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2+16}+x+2}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-4(x-3)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{(x-3)(\sqrt{x^2+16}+x+2)}$

$=-\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6})}{\sqrt{x^2+16}+x+2}=-\dfrac{4.6}{10}=-\dfrac{12}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-x-2}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}=-\dfrac{12}{5}}$ ។

ង. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1-\sqrt{3x+1}}{2x-1-\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+1-3x-1}{4x^2-4x+1-x}\cdot\dfrac{2x-1+\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{3x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)(2x-1+\sqrt{x})}{(x-1)(4x-1)(x+1+\sqrt{3x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(2x-1+\sqrt{x})}{(4x-1)(x+1+\sqrt{3x+1})}=\dfrac{2}{3.4}=\dfrac{1}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1-\sqrt{3x+1}}{2x-1-\sqrt{x}}=\dfrac{1}{6}}$ ។

ច. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-8}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}}$ ។

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2[\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1]}{1+x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right]=1+1+1=3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=3}$ ។

ជ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-\sqrt{x^2+60}}{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^6-x^2-60}{x^6-x^2-60}\cdot\frac{x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2}}{x^3+\sqrt{x^2+60}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2}}{x^3+\sqrt{x^2+60}}=\frac{16+16+16}{8+8}=\frac{48}{16}=3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-\sqrt{x^2+60}}{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}=3}$ ។

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)+(1+\sqrt[3]{x-1})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}+\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(1-\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

លំហាត់ទី៩

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម :

$$A=\lim_{x\to2}\left(\sqrt[6]{\frac{6x^4-12x^3-x+2}{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}}\right)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$$A=\lim_{x\to2}\left(\sqrt[6]{\frac{6x^4-12x^3-x+2}{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}}\right)$$

តាង $U=6x^4-12x^3-x+2=6x^3(x-2)-(x-2)=(x-2)(6x^3-1)$

$$V=x^3-\sqrt{x^2+60}=\frac{x^6-x^2-60}{x^3+\sqrt{x^2+60}}=\frac{W}{x^3+\sqrt{x^2+60}}$$

ដែល $W=x^6-x^2-60=(x^6-64)-(x^2-4)$

$$=(x^2-4)(x^4+4x^2+16)-(x^2-4)$$

$$=(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+15)$$

តាង $T=x^2-\sqrt[3]{x^2+60}=\dfrac{x^6-x^2-60}{x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2}}$

$$=\frac{W}{x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2}}$$ ។

$$A=\lim_{x\to2}\left(\sqrt[6]{\frac{U}{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt{T}}\right)$$

$$=\lim_{x\to2}\left(\sqrt[6]{\frac{U}{x+2}\cdot\frac{V^2}{T^3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{(x-2)(6x^3-1)}{x+2}\cdot\frac{W^2}{(x^3+\sqrt{x^2+60})^2}\,\frac{(x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2})^3}{W^3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{(x-2)(6x^3-1)(x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2})^3}{(x+2)(x^3+\sqrt{x^2+60})^2(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+15)}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{(6x^3-1)(x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2})^3}{(x+2)^2(x^3+\sqrt{x^2+60})^2(x^4+4x^2+15)}}\right)=\sqrt[6]{\frac{47.48^3}{16.16^2.47}}=\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $A=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{6x^4-12x^3-x+2}{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}}\right)=\sqrt{3}$

✍ ✍ ✍ ✍ ✍

លំហាត់ទី១០

គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមនេះ

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^4+1}}{x-1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត :

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^4+1}}{x-1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)+\dfrac{x^3+1-x^4-1}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}}{(x-1)+\dfrac{x+1-x^2-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)-\dfrac{x^3(x-1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}}{(x-1)-\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[x+1-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}]}{(x-1)(1-\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}}{1-\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}}}=\frac{2-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{4\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{(4\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{2}$$

$$=\frac{8+4\sqrt{2}-\sqrt{2}-1}{2}=\frac{7+3\sqrt{2}}{2}$$

លំហាត់ទី១១

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 2x}{x\sin x}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{3\sin x-\sin 3x}$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{1-\cos 2x\cos 4x}$

ង. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

ច. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ឆ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

ជ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x.\tan x}$

ឈ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2}-\cos x}{\sqrt{\cos x-\sqrt{\cos 3x}}}$

ញ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 2x}{x\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x+\cos^2 2x)}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x(1+\cos 2x+\cos^2 2x)}{x\sin x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}(1+\cos 2x+\cos^2 2x)=2.1.3=6$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 2x}{x\sin x}=6}$ ។

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

ដោយ $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow \sin x=\cos x.\tan x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\cos x.\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2.1.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}}$ ។

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{3\sin x-\sin 3x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{3\sin x-(3\sin x-4\sin^3 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(1-\cos x)}{4\sin^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2.\frac{1}{4}.\frac{x^2}{\sin^2 x}\right]=1^2.\frac{1}{4}.1^2=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{3\sin x-\sin 3x}=\frac{1}{4}}$ ។

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{1-\cos 2x\cos 4x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 4x)-(1-\cos 2x)}{(1-\cos 2x)+\cos 2x(1-\cos 4x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x-2\sin^2 x}{2\sin^2 x+2\cos 2x\sin^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos 2x\sin^2 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 2x}{x^2}-\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}+\cos 2x.\frac{\sin^2 2x}{x^2}}=\frac{4-1}{1+4}=\frac{3}{5}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{1-\cos 2x\cos 4x}=\frac{3}{5}}$

ង. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\sin^2\frac{x}{2})}{x^4}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\sin^2\frac{x}{2})}{(\sin^2\frac{x}{2})^2}.\frac{\sin^4\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^4}.\frac{1}{16}=2.\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\frac{1}{8}}$ ។

ច. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin^2 x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.\frac{1}{4}+2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}.\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}$$

$$=2.\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2}=2$$

ដូចនេះ . $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=2}$ ។

ឆ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}.\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2 x}.\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.\frac{x^2}{\sin^2 x}.\frac{1}{4}.\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}=\frac{1}{4}}$ ។

ជ. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x.\tan x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2-1-\cos x}{x\tan x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\tan x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.\frac{x}{\tan x}.\frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x.\tan x}=\frac{\sqrt{2}}{8}}$ ។

ឈ. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin^2}-\cos x}{\sqrt{\cos x-\sqrt{\cos 3x}}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x-\cos 3x}.\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x+(1-\cos^2 x)}{2\sin\frac{x+3x}{2}\sin\frac{x-3x}{2}}.\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin 2x.\sin(-x)}.\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\frac{2x}{\sin 2x}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}=-\frac{1}{2}$$

លំហាត់ទី១២

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម :

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x.......\cos nx}{x^2}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos x\sin^2 x+2\cos x\cos 2x\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\cos x\frac{\sin^2 x}{x^2}+\cos x\cos 2x.\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}\right)=2\left(\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}\right)=7$$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x.......\cos nx}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\cos 2x)+...+\cos x\cos 2x...\cos(n-1)x(1-\cos nx)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos x\sin^2 x+...+2\cos x\cos 2x...\cos(n-1)x.\sin^2\frac{nx}{2}}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\cos x.\frac{\sin^2 x}{x^2}+....+\cos x\cos 2x...\cos(n-1)x.\frac{\sin^2\frac{nx}{x}}{x^2}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{4}+1+.....+\frac{n^2}{4}\right)=2.\frac{1^2+2^2+.....+n^2}{4}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

លំហាត់ទី១៣

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$$A_n = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x}{x^2}$$

$$B_n = \lim_{x\to 0}\frac{n-\cos x-\cos^2 x-\cos^3 x-......-\cos^n x}{x^2}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត

$$A_n = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x+....+\cos^{n-1} x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}(1+\cos x+\cos^2 x+....+\cos^{n-1} x)}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.\frac{1}{4}(1+\cos x+\cos^2 x+.....+\cos^{n-1} x)$$

$$= 2.\frac{1}{4}.(1+1+1+...+1) = \frac{n}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{A_n = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x}{x^2} = \frac{n}{2}}$ ។

$$B_n = \lim_{x\to 0}\frac{n-\cos x-\cos^2 x-\cos^3 x-......-\cos^n x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+(1-\cos^2 x)+(1-\cos^3 x)+.....+(1-\cos^n x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1-\cos^n x}{x^2}\right)=\sum_{n=1}^{n}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x}{x^2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{n}(\frac{n}{2})=\frac{1+2+3+....+n}{2}=\frac{n(n+1)}{4}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{B_n=\lim_{x\to 0}\frac{n-\cos x-\cos^2 x-\cos^3 x-......-\cos^n x}{x^2}=\frac{n(n+1)}{4}}$$

លំហាត់ទី១៤

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

ខ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi^2-4x^2}$

គ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$

ឃ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}$

ង. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1+\tan\pi x}{1-x^2}$

ច. $\lim_{x\to 2}(4-x^2)\tan\frac{\pi x}{4}$

ឆ. $\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\frac{x}{2}$

ជ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\sqrt{2}\sin x}$

ឈ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\pi-3x}{\sqrt{3}-2\sin x}$

ញ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\cos\frac{\pi}{x}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

តាង $z=1-x$ នាំឱ្យ $x=1-z$ កាលណា $x\to 1$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-\sin(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi z}{2})}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos\dfrac{\pi z}{2}}{z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{\pi z}{4}}{z^2}=2\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{\pi z}{4}}{(\dfrac{\pi z}{4})^2}.\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}}$ ។

ខ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi^2-4x^2}$

តាង $z=\dfrac{\pi}{2}-x$ នាំឱ្យ $x=\dfrac{\pi}{2}-z$ កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{2}$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos(\dfrac{\pi}{2}-z)}{\pi^2-4(\dfrac{\pi}{2}-z)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\pi^2-\pi^2+4\pi z-4z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{4\pi z-4z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}.\frac{1}{4\pi-4z}=\frac{1}{4\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi^2-4x^2}=\frac{1}{4\pi}}$ ។

គ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$

តាង $z=\frac{\pi}{4}-x$ នាំឱ្យ $x=\frac{\pi}{4}-z$ កាលណា $x\to\frac{\pi}{4}$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-z)-\cos(\frac{\pi}{4}-z)}{\pi-4(\frac{\pi}{4}-z)}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin z)-(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin z)}{4z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{-\sqrt{2}\sin z}{4z}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=-\frac{\sqrt{2}}{4}}$

ឃ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}$

តាង $z=\frac{\pi}{2}-x$ នាំឱ្យ $x=\frac{\pi}{2}-z$ កាលណា $x\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin(\frac{\pi}{2}-z)}}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-z)}=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos z}}{\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{2-1-\cos z}{\sin^2 z.(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}=\lim_{z\to0}\frac{1-\cos z}{\sin^2 z(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{\sin^2 z.(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}$$

$$=2\lim_{z\to0}\frac{\sin^2\frac{z}{2}}{(\frac{z}{2})^2}.\frac{z^2}{\sin^2 z}.\frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z}}=2.\frac{1}{4}.\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{8}}$ ។

ង. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1+\tan\pi x}{1-x^2}$

តាង $z=1-x$ នាំឱ្យ $x=1-z$ កាលណា $x\to1$ នោះ $z\to0$

$$=\lim_{z\to0}\frac{(1-z)^3-1+\tan(\pi-\pi z)}{1-(1-z)^2}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{1-3z+3z^2-z^3-1-\tan\pi z}{1-1+2z-z^2}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{-3z+3z^2-z^3-\tan\pi z}{2z-z^2}$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{z(-3+3z-z^2-\frac{\tan\pi z}{z})}{z(2-z)}=\frac{-3-\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to1}\frac{x^3-1+\tan\pi x}{1-x^2}=-\frac{3+\pi}{2}}$

ច. $\lim_{x\to2}(4-x^2)\tan\frac{\pi x}{4}$

តាង $z=2-x$ នាំឱ្យ $x=2-z$ កាលណា $x\to2$ នោះ $z\to0$

$$=\lim_{z\to 0}\left[4-(2-z)^2\right]\tan\frac{\pi}{4}(2-z)$$

$$=\lim_{z\to 0}(4z-z^2)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{4}\right)=\lim_{z\to 0}(4-z)\frac{\frac{\pi z}{4}}{\tan\frac{\pi z}{4}}.\frac{4}{\pi}=\frac{16}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 2}(4-x^2)\tan\frac{\pi x}{4}=\frac{16}{\pi}}$ ។

ឆ. $\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\frac{x}{2}$

តាង $z=\pi-x$ នាំឱ្យ $x=\pi-z$ កាលណា, $x\to\pi$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}z\tan\frac{\pi-z}{2}=\lim_{z\to 0}z\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}\right)=\lim_{z\to 0}z\cot z=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\tan z}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\frac{x}{2}=1}$ ។

ជ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\sqrt{2}\sin x}$

តាង $z=\frac{\pi}{4}-x$ នាំឱ្យ $x=\frac{\pi}{4}-z$ កាលណា, $x\to\frac{\pi}{4}$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-z\right)}{1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-z\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\frac{1-\tan z}{1+\tan z}}{1-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin z\right)}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\tan z}{(1-\cos z+\sin z)(1+\tan z)}$$

$$=2\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\tan z}{z}}{\left(\frac{1-\cos z}{z}+\frac{\sin z}{z}\right)(1+\tan z)}=2.\frac{1}{(0+1)(1+0)}=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\sqrt{2}\sin x}=2}$ ។

ឈ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\pi-3x}{\sqrt{3}-2\sin x}$

តាង $z=\frac{\pi}{3}-x$ នាំឱ្យ $x=\frac{\pi}{3}-z$ កាលណា, $x\to\frac{\pi}{3}$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\pi-3(\frac{\pi}{3}-z)}{\sqrt{3}-2\sin(\frac{\pi}{3}-z)}=\lim_{z\to 0}\frac{3z}{\sqrt{3}-2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z-\frac{1}{2}\sin z)}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{3z}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos z-\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{3}{\sqrt{3}\frac{1-\cos z}{z}-\frac{\sin z}{z}}=\frac{3}{0-1}=-3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\pi-3x}{\sqrt{3}-2\sin x}=-3}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim_{x\to 2}(x^2-x-2)\tan\frac{\pi}{x}$

ខ. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

គ. $\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)^2}{1-\sin\frac{\pi}{x}}$

ឃ. $\lim_{x\to \pi}\frac{\cos\frac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}$

ង. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\cos\frac{\pi x}{x+3}}$

ច. $\lim_{x\to 1}\frac{\tan\frac{\pi}{x}}{1-x^2}$

ឆ. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{2\pi}{x+3}}{(1-x)^2}$

ជ. $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sin\frac{2\pi}{x}}$

ឈ. $\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{x+1}$

ញ. $\lim_{x\to 2}(2x-x^2)\cot\frac{2\pi}{x}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim_{x\to 2}(x^2-x-2)\tan\frac{\pi}{x}$

តាង $z=\frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x=\frac{1}{z}$ កាលណា, $x\to 2$ នោះ $z\to\frac{1}{2}$

$$=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-2\right)\tan\pi z$$

តាង $u=\frac{1}{2}-z$ នាំឱ្យ $z=\frac{1}{2}-u$ កាលណា, $z\to\frac{1}{2}$ នោះ $u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{(\frac{1}{2}-u)^2}-\frac{1}{\frac{1}{2}-u}-2\right]\tan\pi(\frac{1}{2}-u)$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}+u-2(\frac{1}{2}-u)^2}{(\frac{1}{2}-u)^2}\tan(\frac{\pi}{2}-\pi u)=\lim_{u\to 0}\frac{3u-2u^2}{(\frac{1}{2}-u)^2}\cot(\pi u)$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{3-2u}{(0.5-u)^2}.\frac{\pi u}{\tan\pi u}.\frac{1}{\pi}=\frac{12}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 2}(x^2-x-2)\tan\frac{\pi}{x}=\frac{12}{\pi}}$ ។

ខ. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

តាង $z=\frac{1}{x+1}$ នាំឱ្យ $x=\frac{1}{z}-1$ កាលណា, $x\to 1$ នោះ $z\to\frac{1}{2}$

$$=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{1-(\frac{1}{z}-1)^3}{\cos\pi z}$$

តាង $u=\frac{1}{2}-z$ នាំឱ្យ $z=\frac{1}{2}-u$ កាលណា, $z\to\frac{1}{2}$ នោះ $u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1-\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-u}-1\right)^3}{\cos(\frac{\pi}{2}-\pi u)}=\lim_{u\to 0}\frac{(\frac{1}{2}-u)^3-(1-\frac{1}{2}+u)^3}{(\frac{1}{2}-u)^3\sin\pi u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{8}-\frac{3}{4}u+\frac{3}{2}u^2-u^3-\frac{1}{8}-\frac{3}{4}u-\frac{3}{2}u^2-u^3}{(\frac{1}{2}-u)^3\sin\pi u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{-\frac{3}{2}u-2u^3}{(\frac{1}{2}-u)^3\sin\pi u}=\lim_{u\to 0}\frac{-\frac{3}{2}-2u^2}{(\frac{1}{2}-u)^3}.\frac{\pi u}{\sin\pi u}.\frac{1}{\pi}=-\frac{12}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{\cos\frac{\pi}{x+1}}=-\frac{12}{\pi}}$ ។

គ. $\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)^2}{1-\sin\frac{\pi}{x}}$

តាង $z=\frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x=\frac{1}{z}$ កាលណា, $x\to 2$ នោះ $z\to\frac{1}{2}$

$$=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{(2-\frac{1}{z})^2}{1-\sin\pi z}$$

តាង $u=\frac{1}{2}-z$ នាំឱ្យ $z=\frac{1}{2}-u$ កាលណា, $z\to\frac{1}{2}$ នោះ $u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(2-\frac{1}{0.5-u})^2}{1-\sin(\frac{\pi}{2}-\pi u)}=\lim_{u\to 0}\frac{(1-2u-1)^2}{(0.5-u)^2(1-\cos\pi u)}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{4u^2}{(0.5-u)^2 2\sin^2\frac{\pi u}{2}}=2\lim_{u\to 0}\frac{1}{(0.5-u)^2}.\frac{(\frac{\pi u}{2})^2}{\sin^2\frac{\pi u}{2}}.\frac{4}{\pi^2}=\frac{8}{\pi^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)^2}{1-\sin\frac{\pi}{x}}=\frac{8}{\pi^2}}$ ។

ឃ. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}$

តាង $t=\dfrac{\pi x}{x+\pi}\Rightarrow x=\dfrac{\pi t}{\pi-t}$ បើ $x\to\pi\ \Rightarrow t\to\dfrac{\pi}{2}$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\pi-\dfrac{\pi t}{\pi-t}}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\cos t}{\pi(\pi-2t)}$$

តាង $u=\dfrac{\pi}{2}-t\ \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}-u$ បើ $t\to\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow u\to 0$

$$=\lim_{u\to0}\frac{(\pi-\frac{\pi}{2}+u)\cos(\frac{\pi}{2}-u)}{\pi(\pi-\pi+2u)}=\lim_{u\to0}\frac{\frac{\pi}{2}+u}{2\pi}.\frac{\sin u}{u}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}=\dfrac{1}{4}}$ ។

ង. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\cos\dfrac{\pi x}{x+3}}$

តាង $z=\dfrac{\pi x}{x+3}$ នាំឱ្យ $x=\dfrac{3z}{\pi-z}$ កាលណា, $x\to 3$ នោះ $z\to\dfrac{\pi}{2}$

$$=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{3z}{\pi-z}-3}{\cos z}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{3(2z-\pi)}{(\pi-z)\cos z}$$

តាង $u=\dfrac{\pi}{2}-z\ \Rightarrow z=\dfrac{\pi}{2}-u$ បើ $z\to\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow u\to 0$

$$=\lim_{u\to0}\frac{3(\pi-2u-\pi)}{(\pi-\frac{\pi}{2}+u)\cos(\frac{\pi}{2}-u)}=\lim_{u\to0}\frac{-6u}{(\frac{\pi}{2}+u)\sin u}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{-6}{\frac{\pi}{2}+u}.\frac{u}{\sin u}=-\frac{12}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\cos\frac{\pi x}{x+3}}=-\frac{12}{\pi}}$ ។

ច. $\lim_{x\to 1}\frac{\tan\frac{\pi}{x}}{1-x^2}$

តាង $z=\frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x=\frac{1}{z}$ កាលណា, $x\to 1$ នោះ $z\to 1$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{\tan\pi z}{1-\frac{1}{z^2}}=\lim_{z\to 1}\frac{z^2\tan\pi z}{z^2-1}$$

តាង $u=1-z$ នាំឱ្យ $z=1-u$ កាលណា, $z\to 1$ នោះ $u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(1-u)^2\tan(\pi-\pi u)}{(1-u)^2-1}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(1-u)^2(-\tan\pi u)}{2u-u^2}=\lim_{u\to 0}\frac{-(1-u)^2}{2-u}.\frac{\tan\pi u}{\pi u}.\pi=-\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\tan\frac{\pi}{x}}{1-x^2}=-\frac{\pi}{2}}$ ។

ឆ. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{2\pi}{x+3}}{(1-x)^2}$

តាង $z=\frac{1}{x+3}$ នាំឱ្យ $x=\frac{1}{z}-3$

កាលណា, $x\to 1$ នោះ $z\to\frac{1}{4}$

$$=\lim_{z\to\frac{1}{4}}\frac{1-\sin 2\pi z}{(1-\frac{1}{z}+3)^2}=\lim_{z\to\frac{1}{4}}\frac{z^2(1-\sin 2\pi z)}{(4z-1)^2}$$

តាង $u=\frac{1}{4}-z$ នាំឱ្យ $z=\frac{1}{4}-u$

កាលណា, $z\to\frac{1}{4}$ នោះ $u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(0.25-u)^2[1-\sin(\frac{\pi}{2}-\pi u)]}{(1-4u-1)^2}=\lim_{u\to 0}\frac{(0.25-u)^2(1-\cos\pi u)}{16u^2}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(0.25-u)^2.2\sin^2\frac{\pi u}{2}}{16u^2}$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{u\to 0}(0.25-u)^2.\frac{\sin^2\frac{\pi u}{2}}{(\frac{\pi u}{2})^2}.\frac{\pi^2}{4}=\frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{512}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{2\pi}{x+3}}{(1-x)^2}=\frac{\pi^2}{512}}$ ។

ជ. $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sin\frac{2\pi}{x}}$

តាង $z=\frac{2}{x}$ នាំឱ្យ $x=\frac{2}{z}$ កាលណា, $x\to 2$ នោះ $z\to 1$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{2-\frac{2}{z}}{\sin\pi z}=2\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z.\sin\pi z}$$

តាង $u=1-z$ នាំឱ្យ $z=1-u$ កាលណា, $z\to 1$ នោះ $u\to 0$

$$=2\lim_{u\to 0}\frac{-u}{(1-u)\sin(\pi-\pi u)}$$

$$=-2\lim_{u\to 0}\frac{1}{1-u}.\frac{\pi u}{\sin\pi u}.\frac{1}{\pi}=-\frac{2}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sin\frac{2\pi}{x}}=-\frac{2}{\pi}}$ ។

ឈ. $\boxed{\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{x+1}=\frac{8}{\pi}}$

ញ. $\boxed{\lim_{x\to 2}(2x-x^2)\cot\frac{2\pi}{x}=\frac{4}{\pi}}$

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+4}{x-2}$

ចូរកំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=20$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត a និង b ៖

យើងមាន $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+4}{x-2}$

$$=\frac{a(x^3-8)+b(x^2-4)+(8a+4b+4)}{(x-2)}$$

$$=\frac{a(x-2)(x^2+2x+4)+b(x-2)(x+2)+(8a-4b+4)}{x-2}$$

$$=a(x^2+2x+4)+b(x+2)+\frac{8a+4b+4}{x-2}$$

ដើម្បីឱ្យ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=20$ លុះត្រាតែ និង គ្រាន់តែ $8a+4b+4=0$

និង $\lim\limits_{x\to 2}\left[a(x^2+2x+4)+b(x+2)\right]=20$ ឬ $12a+4b=20$

យើងបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 8a+4b=-4 & (1) \\ 12a+4b=20 & (2) \end{cases}$

ដកសមីការពីរនេះអង្គនិងអង្គគេបាន $4a=24$ នាំឱ្យ $a=6$

យកតម្លៃ $a=6$ ជួសក្នុងសមីការ (1) គេបាន $48+4b=-4$

នាំឱ្យ $b=-13$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a=6\ ,\ b=-13}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^5+ax^2+bx+2}{x-1}$

ក. ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ ចំពោះ $a=-1\ ,\ b=-2$ ។

ខ. កំនត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=10$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to1} f(x)$:

ចំពោះ $a=-1\ ,\ b=-2$ យើងបាន :

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^5-x^2-2x+2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)(x^2+x+1)-2(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left[x^2(x^2+x+1)-2\right]=3-2=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-x^2-2x+2}{x-1}=1}$ ។

ខ. កំនត់តម្លៃ a និង b

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^5+ax^2+bx+2}{x-1}$

$$=\frac{(x^5-1)+a(x^2-1)+b(x-1)+(a+b+3)}{x-1}$$

$$=x^4+x^3+x^2+x+1+a(x+1)+b+\frac{a+b+3}{x-1}$$

ដើម្បីឱ្យ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=10$ លុះត្រាតែ $a+b+3=0$ ឬ $a+b=-3$ (1)

និង $\lim\limits_{x\to1}\left[x^4+x^3+x^2+x+1+a(x+1)+b\right]=10$ ឬ $5+2a+b=10$

នាំឱ្យ $2a+b=5 \quad (2)$ ។

ដកសមីការ (1) និង (2) គេបាន $-a=-8$ នាំឱ្យ $a=8$

និង $b=-3-a=-11$ ។

ដូចនេះ $a=8 \ ; \ b=-11$ ។

លំហាត់ទី១៨

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3+1)^4}{(4x^5+1)(x^7+1)}$

ខ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+\dfrac{2}{x})^2-(x-\dfrac{2}{x})^2\right]$

គ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt[3]{x^3+4x}+\sqrt[3]{8x^3+1}}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{27x^3+4}+3\sqrt[3]{8x^3+1}}{x+\sqrt[5]{32x^5+1}}$

ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}-\sqrt{4x^2-5x}\right)$

ច. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{10}+(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+...+(x+10)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)...(1+10x)}{1+x^{10}}$

ជ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\sqrt[5]{x^5+1}}{3x-\sqrt[5]{x^5+1}}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

ញ. $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt[3]{x^3+6x^2}-\sqrt[3]{x^3-6x^2}]$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3+1)^4}{(4x^5+1)(x^7+1)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{12}(2+\frac{1}{x^3})^4}{x^5(4+\frac{1}{x^5})x^7(1+\frac{1}{x^7})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2+\frac{1}{x^3})^4}{(4+\frac{1}{x^5})(1+\frac{1}{x^7})}=\frac{2^4}{4.1}=4$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^3+1)^4}{(4x^5+1)(x^7+1)}=4}$ ។

ខ. $\lim_{x\to\infty}\left[(x+\frac{2}{x})^2-(x-\frac{2}{x})^2\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x^2+4+\frac{4}{x^2}-x^2+4-\frac{4}{x^2}\right)=8$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left[(x+\frac{2}{x})^2-(x-\frac{2}{x})^2\right]=8}$ ។

គ. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{\sqrt[3]{x^3+4x}+\sqrt[3]{8x^3+1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(2+\frac{3}{x})}{x\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^2}}+x\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^3}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x^2}}+\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^3}}}=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{\sqrt[3]{x^3+4x}+\sqrt[3]{8x^3+1}}=\frac{2}{3}}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{27x^3+4}+3\sqrt[3]{8x^3+1}}{x+\sqrt[5]{32x^5+1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{27+\frac{4}{x^3}}+3x\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^3}}}{x+x\sqrt[5]{32+\frac{1}{x^5}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27+\frac{4}{x^3}}+3\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^3}}}{1+\sqrt[5]{32+\frac{1}{x^5}}}=\frac{3+6}{1+2}=3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{27x^3+4}+3\sqrt[3]{8x^3+1}}{x+\sqrt[5]{32x^5+1}}=3}$ ។

ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}-\sqrt{4x^2-5x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+7x-4x^2+5x}{\sqrt{4x^2+7x}+\sqrt{4x^2-5x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x}{x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+x\sqrt{4-\frac{5}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{12}{\sqrt{4+\frac{7}{x}}+\sqrt{4-\frac{5}{x}}}=\frac{12}{2+2}=3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}-\sqrt{4x^2-5x}\right)=3}$

ច. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{10}+(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+10)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}+x^{10}(1+\frac{1}{x})^{10}+x^{10}(1+\frac{2}{x})^{10}+....+x^{10}(1+\frac{10}{x})^{10}}{x^{10}(1+\frac{10^{10}}{x^{10}})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+(1+\frac{1}{x})^{10}+(1+\frac{2}{x})^{10}+......+(1+\frac{10}{x})^{10}}{1+\frac{10^{10}}{x^{10}}}=1+1+1+...+1=11$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}+(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+...+(x+10)^{10}}{x^{10}+10^{10}}=11}$

ឆ. $\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)...(1+10x)}{1+x^{10}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\frac{1}{x}+1)x(\frac{1}{x}+2)x(\frac{1}{x}+3).....x(\frac{1}{x}+10)}{x^{10}(\frac{1}{x^{10}}+1)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{1}{x}+1)(\frac{1}{x}+2)(\frac{1}{x}+3)......(\frac{1}{x}+10)}{\frac{1}{x^{10}}+1}=1.2.3....10=10!$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)...(1+10x)}{1+x^{10}}=10!}$

ជ. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sqrt[5]{x^5+1}}{3x-\sqrt[5]{x^5+1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+x\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^5}}}{3x-x\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^5}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\,(3+\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^5}})}{x\,(3-\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^5}})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^5}}}{3-\sqrt[5]{1+\frac{1}{x^5}}}=\frac{3+1}{3-1}=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sqrt[5]{x^5+1}}{3x-\sqrt[5]{x^5+1}}=2}$ ។

ឈ. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}}{\sqrt{x(1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x})}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}}$ ។

ញ. $\lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{x^3+6x^2}-\sqrt[3]{x^3-6x^2}]$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6x^2-x^3+6x^2}{\sqrt[3]{(x^3+6x^2)^2}+\sqrt[3]{(x^3+6x^2)(x^3-6x^2)}+\sqrt[3]{(x^3-6x^2)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{\sqrt[3]{x^6(1+\frac{6}{x})^2}+\sqrt[3]{x^6(1+\frac{6}{x})(1-\frac{6}{x})}+\sqrt[3]{x^6(1-\frac{6}{x})^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{x^2[\sqrt[3]{(1+\frac{6}{x})^2}+\sqrt[3]{(1+\frac{6}{x})(1-\frac{6}{x})}+\sqrt[3]{(1-\frac{6}{x})^2}]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{\sqrt[3]{(1+\frac{6}{x})^2}+\sqrt[3]{(1+\frac{6}{x})(1-\frac{6}{x})}+\sqrt[3]{(1-\frac{6}{x})^2}}=\frac{12}{1+1+1}=4$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{x^3+6x^2}-\sqrt[3]{x^3-6x^2}]=4}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2nx+1}-x\right)$

ខ. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+1}+........+\sqrt{x^2+2nx+1}-nx\right)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2nx+1}-x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2nx+1-x^2}{\sqrt{x^2+2nx+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2nx+1}{\sqrt{x^2(1+\frac{2n}{x}+\frac{1}{x^2})}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2n+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{2n}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2n+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2n}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{2n}{1+1}=n$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2nx+1}-x\right)=n}$

ខ. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+1}+........+\sqrt{x^2+2nx+1}-nx\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[(\sqrt{x^2+2x+1}-x)+(\sqrt{x^2+4x+1}-x)+....+(\sqrt{x^2+2nx+1}-x)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{n=1}^{n}(\sqrt{x^2+2nx+1}-x)\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{n}\left[\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2nx+1}-x)\right]=\sum_{n=1}^{n}(n)=1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

លំហាត់ទី២០

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3nx^2+1}-x\right)$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+6x^2+1}+......+\sqrt[3]{x^3+3nx^2+1}-nx\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3nx^2+1}-x\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3nx^2+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+3nx^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3nx^2+1}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3nx^2+1}{\sqrt[3]{x^6(1+\frac{3n}{x}+\frac{1}{x^3})^2}+x\sqrt[3]{x^3(1+\frac{3n}{x}+\frac{1}{x^3})}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3n+\frac{1}{x^2})}{x^2[\sqrt[3]{(1+\frac{3n}{x}+\frac{1}{x^3})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3n}{x}+\frac{1}{x^3}}+1]}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3n+\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{(1+\frac{3n}{x}+\frac{1}{x^3})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3n}{x}+\frac{1}{x^3}}+1}=\frac{3n}{1+1+1}=n$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3nx^2+1}-x\right)=n$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+6x^2+1}+......+\sqrt[3]{x^3+3nx^2+1}-nx\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-x)+(\sqrt[3]{x^3+6x^2+1}-x)+...+(\sqrt[3]{x^3+3nx^2+1}-x)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{n}(\sqrt[3]{x^3+3nx^2+1}-x)\right]=\sum_{n=1}^{n}\left[\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+3nx^2+1}-x)\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{n}(n)=1+2+3+......+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

លំហាត់ទី២១

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+......+n^2}{n^3}$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+3^3+......+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$

គ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{27}+..........+(\dfrac{2}{3})^n\right]$

ឃ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1.5}+\dfrac{1}{5.9}+\dfrac{1}{9.13}+......+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right]$

ង. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1.4.7}+\dfrac{1}{4.7.10}+\dfrac{1}{7.10.13}+........+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}\right]$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+......+n^2}{n^3}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}=\dfrac{1.2}{6}=\dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+......+n^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}}$ ។

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+3^3+......+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{n^2(n+1)^2}{4n^3}-\dfrac{n}{4}\right]$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{(n+1)^2}{4n}-\dfrac{n}{4}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+2n+1-n^2}{4n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{4n}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^3+2^3+3^3+......+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)=\frac{1}{2}}$ ។

គ. $\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{2}{3}+\frac{8}{27}+..........+(\frac{2}{3})^n\right]$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3 \text{ ព្រោះ } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{2}{3}+\frac{8}{27}+..........+(\frac{2}{3})^n\right]=3}$

ឃ. $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+......+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right]$

តាង $S_n=\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+.....+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}\right]$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4}(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1})\right]=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1})$$

$$=\frac{1}{4}\left[(1-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{9})+(\frac{1}{9}-\frac{1}{13})+...+(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1})\right]=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}}$ ។

ង. $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1.4.7}+\frac{1}{4.7.10}+\frac{1}{7.10.13}+........+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}\right]$

តាង $S_n=\frac{1}{1.4.7}+\frac{1}{4.7.10}+.................+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(3k-2)(3k+1)(3k+4)}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}-\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[(\frac{1}{1.4}-\frac{1}{4.7})+(\frac{1}{4.7}-\frac{1}{7.10})+...+\left(\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}-\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{6}[\frac{1}{4}-\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}]=\frac{1}{24}}$ ។

លំហាត់ទី២២

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+.........+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n.\sqrt{n+1}}\right)$

ខ. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\right)$

គ. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+11+111+........+\underbrace{111......111}_{n}}{10^n}$

ឃ. $\lim_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)..........(1+x^{2^n})\quad ,|x|<1$

ង. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}.......\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

ច. $\lim_{n\to+\infty} n\left[\prod_{p=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k(k+1)}\right)\right]$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+.........+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n.\sqrt{n+1}}\right)$

យើងតាង

$$S_n=\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{k}.\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}.\sqrt{k+1}}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right]=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+.....+(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1}$ ។

ខ. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\right)$

យើងតាង :

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+.....+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2k+1-2k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+..........+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}})$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ។

គ. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+11+111+........+\underbrace{111......111}_{n}}{10^n}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{9+99+999+.........+999....999}{9.10^n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+...........+(10^n-1)}{9.10^n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(10+10^2+10^3+.........+10^n-n)}{9.10^n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{10.\frac{10^n-1}{10-1}-n}{9.10^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{10^{n+1}-10-9n}{81.10^n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{10}{81}-\frac{10+9n}{81.10^n}\right)=\frac{10}{81}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1+11+111+........+\underbrace{111......111}_{n}}{10^n}=\frac{10}{81}}$ ។

ឃ. $\lim_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)..........(1+x^{2^n})\quad ,|x|<1$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1-x^2}{1-x}.\frac{1-x^4}{1-x^2}.\frac{1-x^8}{1-x^4}.............\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}\qquad ,\ (\lim_{n\to+\infty}x^{2^{n+1}}=0\ \ \forall|x|<1\ )$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)..........(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}\ ,|x|<1}$ ។

ង. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}.......\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

តាង $P_n=\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}......\frac{n^3-1}{n^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^3-1}{k^3+1}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}\right)$

$$=\prod_{k=2}^{n}\left[\frac{k-1}{k}.\frac{k}{k+1}.\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right]$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\times\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right)\times\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n}.\frac{2}{n+1}.\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} = \frac{2}{3}}$ ។

ច. $\lim_{n\to+\infty} n\left[\prod_{p=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k(k+1)}\right)\right]$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left[\prod_{p=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left[\prod_{p=1}^{n}\left((1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+......+(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1})\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left[\prod_{p=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p+1}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} n\left[\prod_{p=1}^{n}\left(\frac{p}{p+1}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}....\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\left[\prod_{p=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k(k+1)}\right)\right] = 1}$ ។

លំហាត់ទី២៣

ចូរគណនាលីមីត :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}.\tan(\frac{\pi x+4}{2x+3})$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}.\tan(\frac{\pi x+4}{2x+3})$$

គេមាន $\dfrac{\pi x+4}{2x+3}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2\pi x+8}{2x+3}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi(2x+3)+(8-3\pi)}{2x+3}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{8-3\pi}{2(2x+3)}$

គេបាន $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}.\tan(\dfrac{\pi x+4}{2x+3})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}\tan\left[\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{8-3\pi}{2(2x+3)}\right]$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}.\cot\frac{8-3\pi}{2(2x+3)}$$

ពីព្រោះ $\tan\left[\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{8-3\pi}{2(2x+3)}\right]=-\cot\dfrac{8-3\pi}{2(2x+3)}$ ។

តាង $y=\dfrac{8-3\pi}{2(2x+3)}$ **កាលណា $x\to\infty$ នោះ $y\to 0$** គេបាន

$$L=-\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to0}}\frac{2x}{1+x^2}.\cot y=-\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to0}}\frac{2x}{(1+x^2)}.\frac{1}{y}.\frac{y}{\tan y}=-\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to0}}\frac{2x}{1+x^2}.\frac{2(2x+3)}{8-3\pi}.\frac{y}{\tan y}$$

$$=-\frac{4}{8-3\pi}\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to0}}\frac{2x^2+3x}{1+x^2}.\frac{y}{\tan y}=-\frac{8}{8-3\pi}=\frac{8}{3\pi-8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}.\tan(\dfrac{\pi x+4}{2x+3})=\dfrac{8}{3\pi-8}}$ ។

ꕥꕥꕥ❀ꕤꕤꕤ

លំហាត់ទី២៤

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin 2x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}\ ,a,b\in IR^{*}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x}+3e^{2x}-5}{e^{3x}-1}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{2x}+...+e^{nx}-n}{x}$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x}-1)(e^{2x}-1)...(e^{nx}-1)}{x^{n}}$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^{2}}-\cos 2x}{x^{2}}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2\sin x}-e^{\tan 3x}}{x^{3}+x}$

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{-2x^{2}}+\sin x-\tan x-x}{x^{3}}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3\sin^{2}x}-\cos x\cos 3x}{-e^{2x^{2}}+\cos 2x}$

ញ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{e^{x^{2}}+3}-2\cos 4x}{x\sin x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-\dfrac{1}{e^{x}}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{x}\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}.\frac{2x}{\sin 2x}.\frac{1}{e^{x}}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin 2x}=1}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}\ ,a,b\in IR^{*}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{ax}-1)-(e^{bx}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{ax}.a-\lim_{x\to0}\frac{e^{bx}-1}{bx}.b=a-b$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=a-b}$

គ. $\lim_{x\to0}\frac{2e^{x}+3e^{2x}-5}{e^{3x}-1}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(e^{x}-1)+3(e^{2x}-1)}{(e^{3x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2.\frac{e^{x}-1}{x}+6.\frac{e^{2x}-1}{2x}}{3.\frac{e^{3x}-1}{3x}}=\frac{2+6}{3}=\frac{8}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{2e^{x}+3e^{2x}-5}{e^{3x}-1}=\frac{8}{3}}$ ។

ឃ. $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}+e^{2x}+...+e^{nx}-n}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{x}-1)+(e^{2x}-1)+........+(e^{nx}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{e^{x}-1}{x}+2.\frac{e^{2x}-1}{2x}+.....+n.\frac{e^{nx}-1}{nx}\right]$$

$$=1+2+..........+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{e^{x}+e^{2x}+...+e^{nx}-n}{x}=\frac{n(n+1)}{2}}$ ។

ង. $\lim_{x\to0}\frac{(e^{x}-1)(e^{2x}-1)...(e^{nx}-1)}{x^{n}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}.2\frac{e^{2x}-1}{2x}......n\frac{e^{nx}-1}{nx}=1.2.3......n=n!$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)(e^{2x}-1)...(e^{nx}-1)}{x^{n}}=\frac{n(n+1)}{2}}$ ។

ច. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-\cos 2x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-(1-2\sin^2 x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1+2\sin^2 x}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}+2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=-1+2=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-\cos 2x}{x^2}=1}$ ។

ឆ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2\sin x}-e^{\tan 3x}}{x^3+x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{-2\sin x}-1)-(e^{\tan 3x}-1)}{x(x^2+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2\sin x}-1}{-2\sin x}.\frac{\sin x}{x}.\frac{-2}{x^2+1}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan 3x}-1}{\tan 3x}.\frac{\tan 3x}{3x}.\frac{3}{x^2+1}=-2-3=-5$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2\sin x}-e^{\tan 3x}}{x^3+x}=-5}$ ។

ជ. $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x^2}+\sin x-\tan x-x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{-2x^2}-1)+\cos x\tan x-\tan x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}-2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-2-2(\frac{1}{2})^2=-\frac{5}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x^2}+\sin x-\tan x-x}{x^3}=-\frac{5}{2}}$ ។

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3\sin^2 x}-\cos x\cos 3x}{-e^{2x^2}+\cos 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\sin^2 x}-(1-2\sin^2\frac{x}{2})(1-2\sin^2\frac{3x}{2})}{-e^{2x^2}+1-2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\sin^2 x}-1+2\sin^2\frac{3x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{3x}{2}}{-(e^{2x^2}-1+2\sin^2 x)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{3.\frac{e^{3\sin^2 x}-1}{3\sin^2 x}.\frac{\sin^2 x}{x^2}+2\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}+2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}-4\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}.\sin^2\frac{3x}{2}}{2.\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}+2.\frac{\sin^2 x}{x^2}}$$

$$=-\frac{3+2.\frac{9}{4}-2.\frac{1}{4}-0}{2+2}=\frac{3+4}{4}=\frac{7}{4}$$

លំហាត់ទី២៥

ចូរគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(\frac{2x^3+1}{6x^5+4})+\ln(\frac{9x^5+5}{4x^3+x}\right]$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6e^x+5}{2e^x+3}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^{-2x}+9e^{2x}}{2e^{-2x}+3e^{2x}}$

ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2x+3)(e^{\frac{2}{x+1}}-1)\right]$

ច. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+4^x}{2^x+4^x}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x-5^x}{3^{x+1}+5^{x+1}}$

ជ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x+1-2\ln(2e^x+1)\right]$

ឈ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(12x^6+1)-3\ln(2x^2+5)\right]$

ញ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+1-\ln(2e^x+1)\right]$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)\right]=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2}\right]=\ln 2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]=2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(\frac{2x^3+1}{6x^5+4})+\ln(\frac{9x^5+5}{4x^3+x}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{2x^3+1}{6x^5+4}.\frac{9x^5+5}{4x^3+x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{x^3(2+\frac{1}{x^3})}{x^5(6+\frac{4}{x^5})}.\frac{x^5(9+\frac{5}{x^5})}{x^3(4+\frac{1}{x^2})}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{2+\frac{1}{x^3}}{6+\frac{4}{x^5}}.\frac{9+\frac{5}{x^5}}{4+\frac{1}{x^2}}\right]=\ln\left(\frac{2}{6}.\frac{9}{4}\right)=\ln\frac{3}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(\frac{2x^3+1}{6x^5+4})+\ln(\frac{9x^5+5}{4x^3+x}\right]=\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6e^x+5}{2e^x+3}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(6+\frac{5}{e^x})}{e^x(2+\frac{3}{e^x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{5}{e^x}}{2+\frac{3}{e^x}}=\frac{6}{2}=3$$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6e^x+5}{2e^x+3}=3}$ ។

ឃ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^{-2x}+9e^{2x}}{2e^{-2x}+3e^{2x}}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{e^{2x}}+9e^{2x}}{\frac{2}{e^{2x}}+3e^{2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+9e^{4x}}{2+3e^{4}x}=\frac{4}{2}=2$$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{4x}=0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^{-2x}+9e^{2x}}{2e^{-2x}+3e^{2x}}=2}$ ។

ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2x+3)(e^{\frac{2}{x+1}}-1)\right]$

តាង $y=\frac{2}{x+1}$ បើ $x\to+\infty$ នោះ $y\to0$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to0}}\left[(2x+3)(e^{y}-1)\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to0}}\left[(2x+3).y.\frac{e^{y}-1}{y}\right]=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to0}}\left[(2x+3)\frac{2}{x+1}.\frac{e^{y}-1}{y}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+6}{x+1}.\lim_{y\to0}\frac{e^{y}-1}{y}=4.1=4$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2x+3)(e^{\frac{2}{x+1}}-1)\right]=4}$ ។

ច. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{x}+4^{x}}{2^{x}+4^{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4^{x}(\frac{3^{x}}{4^{x}}+1)}{4^{x}(\frac{2^{x}}{4^{x}}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{3}{4})^{x}+1}{(\frac{1}{2})^{x}+1}=1$$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{3}{4})^{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{2})^{x}=0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{x}+4^{x}}{2^{x}+4^{x}}=1}$ ។

ឆ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{x}-5^{x}}{3^{x+1}+5^{x+1}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^{x}(\frac{3^{x}}{5^{x}}-1)}{5^{x+1}(\frac{3^{x+1}}{5^{x+1}}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5}.\frac{(\frac{3}{5})^{x}-1}{(\frac{3}{5})^{x+1}-1}=\frac{1}{5}$$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{x}-5^{x}}{3^{x+1}+5^{x+1}}=\frac{1}{5}}$ ។

ជ. $\lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-2\ln(2e^x+1)\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln e^{2x+1}-\ln(2e^x+1)^2\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{e^{2x+1}}{(2e^x+1)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{e^{2x}.e}{e^{2x}(2+\frac{1}{e^x})^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{e}{(2+\frac{1}{e^x})^2}\right]=\ln(\frac{e}{4})$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[2x+1-2\ln(2e^x+1)\right]=\ln(\frac{e}{4})}$ ។

ឈ. $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(12x^6+1)-3\ln(2x^2+5)\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(12x^6+1)-\ln(2x^2+5)^3\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{12x^6+1}{(2x^2+5)^3}\right]=\lim_{x\to+\infty}[\ln\frac{x^6(12+\frac{1}{x^6})}{x^6(2+\frac{5}{x^2})^3}]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln(\frac{12+\frac{1}{x^6}}{(2+\frac{5}{x^2})^3}]=\ln(\frac{12}{2})=\ln 6$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(12x^6+1)-3\ln(2x^2+5)\right]=\ln 6}$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់គ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $f(x)=x^5+x-4$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឬសជាចំនួនពិតមួយស្ថិតនៅចន្លោះ

1 និង 2 ។

ខ-ចូរបង្ហាថាគ្រប់ចំនួនពិត x គេមាន

$f(x)+2=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+2)$

គ-គណនាលីមីត $A=\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x^3-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ការបង្ហាញ

គេមាន $f(x)=x^5+x-4$

គេបាន $f(1)=1^5+1-4=-2$ និង $f(2)=2^5+2-4=30$

ដោយ $f(1).f(2)=-60<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នោះមានចំនួន c

មួយនៅចន្លោះចំនួន 1 និង 2 ដែល $f(c)=0$ ។

ដូចនេះ សមីការ $f(x)=0$ មានឬសជាចំនួនពិតមួយស្ថិតនៅចន្លោះ 1 និង 2 ។

ខ-បង្ហាថា $f(x)+2=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+2)$

គេមាន $f(x)+2=x^5+x-2$

$$=(x^5-1)+(x-1)$$
$$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)+(x-1)$$
$$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+2)$$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)+2=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+2)}$ ។

គ-គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x^3-1}$

ដោយ $f(x)+2=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+2)$

យើងបាន

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3+x^2+x+2}{x^2+x+1}=\frac{6}{3}=2$$

ដូចនេះ $\boxed{A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x^3-1}=2}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{(\frac{\pi}{4}-x)^2} & \text{បើ } x\neq\frac{\pi}{4}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{បើ } x=\frac{\pi}{4}\end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំនុច $x_0=\frac{\pi}{4}$?

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំនុច $x_0=\frac{\pi}{4}$

គេមាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{(\frac{\pi}{4}-x)^2}$

តាង $t=\frac{\pi}{4}-x$ នាំឱ្យ $x=\frac{\pi}{4}-t$ ។ កាលណា $x\to\frac{\pi}{4}$ នោះ $t\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-t)+\cos(\frac{\pi}{4}-t)-\sqrt{2}}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos t-\sin t\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cos t+\sin\frac{\pi}{4}\sin t-\sqrt{2}}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t-\sqrt{2}}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}\cos t-\sqrt{2}}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}(\cos t-1)}{t^2}=\frac{-2\sqrt{2}\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{(\frac{t}{2})^2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=f(\frac{\pi}{4})$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=f(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x_0=\frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\sin(\pi x)}{1-x^3}$ កំនត់គ្រប់ $x\neq 1$ ។

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ f ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=1$ បានឬទេ ?បើអាច

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំនុច $x_0=1$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

គេមាន $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\sin(\pi x)}{1-x^3}$

តាង $t = 1-x$ នាំឱ្យ $x = 1-t$ ។ កាលណា $x\to1$ នោះ $t\to0$

គេបាន $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{t\to0} \frac{\sin(\pi-\pi t)}{1-(1-t)^3}$

$$= \lim_{t\to0} \frac{\sin(\pi t)}{1-1+3t-3t^2+t^3}$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{\sin(\pi t)}{t(3-3t+t^2)}$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} . \frac{\pi}{3-3t+t^2} = \frac{\pi}{3}$$

ដោយ $\lim_{x\to1} f(x) = \frac{\pi}{3}$ កំនត់ នោះគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f(x)$

ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ ។

បើយើងតាង $g(x)$ ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ នោះគេអាចសរសេរ ៖

ដូចនេះ $g(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-x^3} & \text{បើ } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{\pi}{3} & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$

លំហាត់ទី២៩

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^3+x+4}{x^2-2x+4}$ ។

ក. ចូរកំនត់ចំនួនពិត a,b,c,d ដើម្បីឱ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2-2x+4}$ ។

ខ. ចូរទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់ខ្សែកោង (c)

តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់ចំនួនពិត a,b,c,d ដើម្បីឱ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2-2x+4}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{2x^3+x+4}{x^2-2x+4}$

$$=\frac{(2x^3+16)+x-12}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{2(x^3+8)+x-12}{x^2-2x+4}$$

$$=\frac{2(x+2)(x^2-2x+4)+x-12}{x^2-2x+4}$$

$$=2x+4+\frac{x-12}{x^2-2x+4}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=2,b=4,c=1,d=-12}$ ។

ខ. ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

គេមាន $f(x)=2x+4+\dfrac{x-12}{x^2-2x+4}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-12}{x^2-2x+4}\right)=0$

ដូចនេះបន្ទាត់ $(d): y=2x+4$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) តាង f

លំហាត់ទី៣០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+4}{x-2}$ ។

ក-ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈររបស់ក្រាប (c) តាងឱ្យអនុគមន៍ f ។

ខ-កំនត់បីចំនួនពិត A,B,C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=Ax+B+\dfrac{C}{x-2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 2$

គ-ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) តាង f ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^2-7x+4}{x-2}=+\infty$

និង $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x^2-7x+4}{x-2}=-\infty$ ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$ នាំឱ្យគេទាញថាបន្ទាត់មានសមីការ $x=2$ អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ខ-កំនត់បីចំនួនពិត A,B,C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=Ax+B+\dfrac{C}{x-2}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+4}{x-2}$

$$=\frac{2x^2-4x-3x+6-2}{x-2}=\frac{2x(x-2)-3(x-2)-2}{x-2}$$

$$=2x-3+\frac{-2}{x-2}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=2,B=-3,C=-2}$ ។

គ-ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) តាង f

គេមាន $f(x)=2x-3+\frac{-2}{x-2}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2}{x-2}=0$

ដូចនេះបន្ទាត់សមីការ $y=2x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) តាង f

លំហាត់ទី៣១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^3+px^2+q}{x^2-2x+2}$

ក. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ f កំនត់បានជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ខ. កំនត់ចំនួនពិត p និង q បើគេដឹងថាខ្សែកោង (c) តាងអនុគមន៍ f

មានបន្ទាត់ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ហើយកាត់តាមចំនុច A(2,4) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f កំនត់បានជានិច្ច ៖

គេមាន $f(x)=\frac{x^3+px+q}{x^2-2x+2}$

ដោយ $x^2-2x+2=(x^2-2x+1)+1=(x-1)^2+1>0,\forall x\in IR$

ដូចនេះ អនុគមន៍f កំនត់បានជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ខ. កំនត់ចំនួនពិត p និង q

ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) តាង f លុះត្រាតែ ៖

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(x+2)]=0$ ។

ដោយ $f(x)-(x+2)=\frac{x^3+px^2+q}{x^2-2x+2}-(x+1)=\frac{(p+1)x^2+(q-2)}{x^2-2x+2}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(p+1)x^2+(q-2)}{x^2-2x+2}=p+1=0$

នាំឱ្យ $p=-1$ ។

អនុគមន៍ អាចសរសេរ $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+q}{x^2-2x+2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ ខ្សែកោង (c) តាងអនុគមន៍ f កាត់តាមចំនុច

A(2,4) នោះកូអរដោនេនៃចំនុច A ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (c) ។

គេបាន $f(2)=\dfrac{8-4+q}{4-4+2}=\dfrac{4+q}{2}=4$ នាំឱ្យ $q=4$ ។

ដូចនេះ $\boxed{p=-1, q=4}$ ។

✍ ✍ ✍ ✍ ✍

លំហាត់អនុវត្តន៍

1-ដោយប្រើនិយមន័យចូរស្រាយថា :

1. $\lim_{x\to 2}(2x+3)=7$
2. $\lim_{x\to 2}(x^3+x^2-2)=10$
3. $\lim_{x\to 1}\frac{3x+1}{x+1}=2$
4. $\lim_{x\to 3}(2^x-x)=5$
5. $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}(\sin x)=\frac{1}{2}$
6. $\lim_{x\to 2}(\frac{x^3}{2}-x)=2$
7. $\lim_{x\to -3}(2x+7)=1$
8. $\lim_{x\to 4}(x^3-4x^2+2x-3)=5$
9. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x}{x^2+1}=3$
10. $\lim_{x\to -1}(0.25)^x=4$

2-ប្រើនិយមន័យចូរស្រាយថា $\lim_{x\to 1}\ln(1+x)=\ln 2$ ។

3-គណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ :

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$
2. $\lim_{x\to 0}\left[(2x+\frac{3}{x})^2-(x-\frac{3}{x})^2\right]$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(3x+1)}{x^2}$
4. $\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$
5. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x-12}{x^2-4}$
6. $\lim_{x\to 2}\frac{4^x-16}{2^x-4}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{7^x-7^{-x}}{7^x-1}$
8. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-3.2^x+2}{2^x-1}$
9. $\lim_{x\to 1}\frac{2^{2^{x+1}}-16}{2^{2^x}-4}$
10. $\lim_{x\to 2}\frac{4^x-4-x^2-4x}{x.2^x-2x-x^2}$

4- គណនាលីមីតខាងក្រោម :

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$, $n\in IN$
6. $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n})$

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)^n-(nx+1)}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x^{p+1}-x^p-x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n})$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-(1+x)(1+2x).....(1+nx)}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2x^2+...+nx^n-\dfrac{n(n+1)}{2}}{x-1}$

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)(x+2)....(x+n)-n!}{(x+1)(x+2)......(x+p)-p!}$

5-កំនត់តម្លៃ $m\in IR$ ដើម្បីឱ្យ : $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+mx+4}{x-2}=0$?

6-កំនត់ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{ax^3+bx+6}{x-3}=5$

7-កំនត់ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+ax^2+bx+4}{x-2}=8$

8-គណនាលីមីតខាងក្រោម :

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2}}{x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x+3}-2}$

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{2-\sqrt{x+2}}$

5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^3-\sqrt{x+60}}$

9- គណនាលីមីតខាងក្រោម :

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}-2}{\sqrt{2+x}-2}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-1)$

3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-6+\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}}{x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x+1}}}-1}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt[4]{3x^2+18}-\sqrt{3x+4}}$

7. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^3-\sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x-2}}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{2-\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-\sqrt{x^2+60}+\sqrt[3]{x^2+60}}{x-2}$

10-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+x}}}}-2}{x-2}$

11-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x+2}}}}-2}{x-2}$

12-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})}{(1-x)^3}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-\sqrt[3]{3x+1}}{x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x-\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[4]{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{x-1}}{x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-\sqrt{x^2+60}}{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x-\sqrt[3]{3x-2}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt[n]{(1+x)(1+2x)...(1+nx)}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x+1-\sqrt[n]{nx+1}}$, $n\geq 2$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\sqrt[n]{1+x}-\sqrt[n]{1-x})$

13-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-3}{x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x-\sqrt[3]{3x-2}}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x^2+1}-2}{x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^n-(nx+1)}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}, n\in IN*$

14-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{x-1}}{x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x-1}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x+1-\sqrt[4]{4x+1}}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x-\sqrt[3]{3x-2}}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt[3]{x^2+4}-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^4+1}}$

8. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x-4}-\dfrac{x}{2}}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-2}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-\sqrt{x^2+60}}{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[4]{x-1}}$

15-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x^2+4}}{x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+4}-\sqrt{2x+2}}{x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{4x^2+4}}{x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt[6]{x^2+60}}{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[3]{x^2+8}}$

16-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\tan^3 x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 x+\sin^3 x}$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{3-4\sin^2 x}{2\cos x-1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^2-\sin^2 x}{\cos x-x+1}$

3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x-\sin 2x}{4\cos^2 x-3}$

4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x+\cot^4 x-2}{1-2\sin 2x}$

5. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{1-8\sin^3 x}{4\cos^2 x-3}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sin^2 x}$

9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-\sqrt[3]{\tan x}}$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-\sin^4 x}{\sqrt{x^2+1}-\cos x}$

17-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម :

1. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{2^x+4}-2}{4^x-16}$

2. $\lim_{x\to 1} \frac{2^x-\sqrt{2x+2}}{4^{2x-1}-x^2-2x-1}$

3. $\lim_{x\to 1} \frac{2^x-\sqrt{1+3^x}}{\sqrt{4^x-1}-3^{\frac{x}{2}}}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{e^{2x}-2xe^x+x^2-1}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{e^{3x}-1}$

6. $\lim_{x\to 1} \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x}-n}{x-1}$

7 . $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}+\sqrt[n]{x}-2}{x-1}$

8 . $\lim_{x\to 1} \frac{(1+\sqrt[m]{x})(1+\sqrt[n]{x})-4}{x-1}$

9 . $\lim_{x\to 1} \frac{(1+x^m)^n(1+x^n)^m-2^{m+n}}{x-1}$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x^n}-\sqrt[m]{1-x^n}}{x^n}$

18-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម :

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt[n+1]{(n+1)x-n}}{(x-1)^2}$

2. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}\left[x-\sqrt[n]{\frac{nx^{n+1}+1}{n+1}}\right]$

3. $\lim_{x\to 1} \frac{\left[x-\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)x^n-1}{n}}\right]}{(x-1)^2}$

4. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[n]{x}}{x-1}$

19- ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x.\sin 4x.\sin 8x}{x^3}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{x}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x}{x^3}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x\sin^3 2x}{x^5}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\left(\sin^2 4x\right)}{x^6}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\sin 2x^3)}{x^6}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3 2x.\sin^2 3x}{\sin x^5}$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x\sin 3x.....\sin nx}{x^n}$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan 2x)+\tan(\sin 4x)}{x}$

20- គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 2x}{\sin^2 4x}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 3x}{x^2}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+\cos 2x-3}{x^2}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{1-3\cos 2x+2\cos 3x}{x^2}$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x...\cos nx}{x^2}$

21- គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\cos x}-\sqrt{3}}{x^2}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x}{x\sin x}$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3\cos x}-2}{1-\cos^3 2x}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3-\cos 2x}}{x^2}$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}{x^2}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx-n}{x^2}$

22- គណនាលីមីតខាងក្រោម :

1. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x^2}$

6. $\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x^3}$

2. $\lim_{x\to \pi}\frac{1-\cos 2x}{(\pi-x)^2}$

7. $\lim_{x\to 1}\left(1-x^2\right).\tan\frac{\pi x}{2}$

3. $\lim_{x\to \pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4})^2}$

8. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$

9. $\lim_{x\to 2}(4-x^2)\tan\frac{\pi}{x}$

5. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8+\tan \pi x}{2-x}$

10. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

23-គណនាលីមីតខាងក្រោម :

1. $\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos \pi x}{(1-x)^2}$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\frac{\pi}{x}}$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3+\tan \pi x}{1-x}$

4. $\lim_{x\to \pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}$

24-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{2\sin x-\sin 2x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 3x}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{1-\cos\sqrt{x}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{1-\cos(1-\cos\sqrt{x})}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{\tan x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{x\sin x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x\tan x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x}-3\cos x+1\right)\right]$

25-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\cos x}-\sqrt{(1+x)\cos x}}{\sin 3x-3\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x+\cos\sqrt{x}}}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}-2}{x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-\sqrt{1+x^2-2x\cos 2x}}{x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x+\tan x}{x-\sin x-\tan x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1+\cos 5x}}{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos 2x\sqrt{\cos x}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{2n}{1-\cos^n 2x}\right]$

26-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

1. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan \pi x}{1-x}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-2)\tan\dfrac{\pi}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{\sin(x-a)}$

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin^3 2x}{\tan x-\cos tx}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{\pi}{4}-\arctan x}{1-x}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}\dfrac{\arcsin x-\arccos x}{1-x\sqrt{2}}$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{(\pi - x)^2}$

27-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^3)\tan\frac{\pi}{1+x}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cot\frac{\pi}{x}}{4-x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}}{\pi - x}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\text{tna}\frac{\pi x}{3x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8+\sin\pi x}{2-x}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1-\sin\frac{\pi}{x}}{x^2-4x+4}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)^2}{1-\sin\frac{\pi}{x+1}}$

10. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{x+1}$

28-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}\tan\left(\frac{\pi x+4}{2x+3}\right)$

7.. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\sin\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-3)\cos\left(\frac{\pi x+2}{2x+1}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}\cot(\frac{\pi x+1}{2x-3})$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\tan\left(\frac{\pi x}{x+1}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^2+1}\cos\left(\frac{\pi x+1}{2x+3}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+4}\tan\left(\frac{3\pi x+4}{6x-5}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\right)$

29-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

30-ចូរគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+7}-\sqrt{x^2-9x+4})$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+3x+1}-\sqrt{4x^2+9x})$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}})$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-4x})$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+7x+3}+\sqrt{x^2+5x+1}-\sqrt{9x^2+4x+5})$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+3-\sqrt{4x^2-6x+1}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+4x^2+1}-x+2)$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+8x+1}-\sqrt[3]{8x^3+12x^2-x+5})$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^4+4x^3}+\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt{x^2+2x}-3x+2)$

31-ចូរគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ដូចតទៅ ៖

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{9x^2-8x})$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{8x^3-4x^2+3x+5}-\sqrt[3]{8x^3+6x^2-2x+1})$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4-\sqrt[3]{x^3-6x^2+4})$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}+\sqrt[3]{x^3+6x^2}+\sqrt[3]{x^3+9x^2}-\sqrt{9x^2-4x+3})$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4-8x^3+1}-\sqrt[3]{x^3-9x^2+4x+1}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

8. $\mathrm{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x}+\dots\dots\dots\dots+\sqrt{x^2+nx}-n\sqrt{x^2+8x+1}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2+4x+1}+\dots\dots\dots+\sqrt[3]{x^2+nx+1}-\sqrt[3]{n^3x^3+1}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{(x+2)(x+4)(x+6)}-x\right]$ ។

32-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\dots\dots\dots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1+3+5+7+\dots\dots\dots\dots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dots\dots\dots\dots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots\dots+n^3}{n^4}$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\dfrac{1}{7.10}+\dots\dots\dots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{3.5}+\dots\dots\dots\dots\dots+\dfrac{1}{n(n+2)}\right]$

8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2^3-1}+\dfrac{1}{3^3-1}+\dfrac{1}{4^3-1}+\dots\dots\dots\dots+\dfrac{1}{n^3-n}\right]$

9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$

10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4+44+444+\dots\dots\dots\dots+\underbrace{444\dots\dots444}_{(n)}}{10^n}$

33-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

1. $\lim_{n\to+\infty}\left[(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{16})................(1+\frac{1}{2^{2^n}})\right]$

2. $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2^2}.....................\cos\frac{x}{2^n}\right)$

3. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+.........+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}\right)$ $,|x|<1$

4. $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n^2})(1-\frac{2}{n^2})(1-\frac{3}{n^2}).................(1-\frac{n}{n^2})$

5. $\lim_{n\to+\infty}(\frac{2^3+1}{2^3-1}.\frac{3^3+1}{3^3-1}.\frac{4^3+1}{4^3-1}............\frac{n^3+1}{n^3-1})$

34-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

1. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+.............+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

2. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}}+...........+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$

3. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+.................+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

4. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+..........+\frac{1}{n+kn}\right)$

5. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{a}{n}+\cos\frac{2a}{n}+\cos\frac{3a}{n}+.............+\cos\frac{(na)}{n}\right]$

35-គណនាលីមីតខាងក្រោម :

1. $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+............+\frac{n}{(n+1)!}\right]$

2. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1.1!+2.2!+3.3!+..............+n.n!}{(n+1)!}$

3. $\lim_{n\to+\infty}\frac{C_n^0+C_n^1+C_n^2+........+C_n^n}{1+2+4+8+..........+2^n}$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{k^4+k^2+1}\right)$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

36- គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$, $x>0$

ក. ចូរស្រាយថា $x-\frac{x^2}{2}\le f(x) \le x$

ខ. គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+f(\frac{3}{n^2})+\dots\dots\dots+f(\frac{n}{n^2})\right]$ ។

37-ក. ចូរស្រាយថា $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$, $\forall x\ge 0$

ខ. តាង $P_n=\ln\left[(1+\frac{1}{n^3})(1+\frac{4}{n^3})(1+\frac{9}{n^3})\dots\dots\dots(1+\frac{n^2}{n^3})\right]$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$ ។

38-គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (U_n) និង (V_n) កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases}U_0=1,\ V_0=4\\ U_{n+1}=-\frac{1}{2}U_n-\frac{3}{2}V_n\\ V_{n+1}=U_n+2V_n \qquad , n\in IN\end{cases}$$

ក.ចូរបង្ហាញថា $W_n=U_n+V_n$ ជាស្វីតធរណីមាត្រ រួចគណនា W_n

ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ-ចូរបង្ហាញថា $t_n=2U_n+3V_n$ ជាស្វីតថេរត្រូវកំនត់ ។

គ-ទាញរក U_n និង V_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចបញ្ជាក់លីមីតវាកាលណា

$n\to+\infty$ ។

39-គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ :

$U_0 = 1 , U_1 = 4$ និង $\forall n \in IN: U_{n+2} = \sqrt{U_{n+1}.U_n}$

ក-គេតាង $\forall n \in IN : V_n = \ln(\frac{U_{n+1}}{U_n})$ ។

ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

រួចគណនាតួ V_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ ។

ខ-ចូរបង្ហាញថា $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(V_k) = \ln\left(\frac{U_n}{U_0}\right)$ រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

40-គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ :

$U_0 = -1 , U_1 = 1$ និង $U_{n+2} = \frac{11}{10}U_{n+1} - \frac{1}{10}U_n$ ។

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$?

41. គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ

$U_0 = 1 , U_1 = 2$ និង $U_{n+2}^3 = \frac{U_{n+1}^4}{U_n}$

ក-គេតាង $V_n = \ln(\frac{U_{n+1}}{U_n}) , \forall n \in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

រួចគណនាតួ V_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ ។

ខ-គេតាង $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n$ ។

បង្ហាញថា $U_n = U_0.e^{S_{n-1}}$ រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

និងស្រាយលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

42-គេឱ្យអនុគមន៍ $f_n(x)$ កំនត់ដោយ ៖

$$f_1(x)=\sqrt{6+x}-3\ ,f_2(x)=\sqrt{6+\sqrt{6+x}}-3\ ,f_3(x)=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}-3,.....$$

$$f_n(x)=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+.......+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}}}-3$$ ដែល $n\in IN^*$ ។

ចូរគណនាលីមីត $L_1=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f_1(x)}{x-3}$ និង $L_n=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f_n(x)}{x-3}$ ។

43-គេឱ្យអនុគមន៍ $f_n(x)$ កំនត់ដោយ ៖

$$f_1(x)=\sqrt{2x+3}-3\ ,f_2(x)=\sqrt{2x+\sqrt{2x+3}}-3$$

$$,f_3(x)=\sqrt{2x+\sqrt{2x+\sqrt{2x+3}}}-3,.....$$

$$f_n(x)=\sqrt{2x+\sqrt{2x+\sqrt{2x+.......+\sqrt{2x+\sqrt{2x+3}}}}}-3$$ ដែល $n\in IN^*$

ចូរគណនាលីមីត $L_1=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f_1(x)}{x-3}$ និង $L_n=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f_n(x)}{x-3}$ ។

44-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ ៖

$f(1+x)+f(4-2x)=(1+x)(4-2x)$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ ។

45-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលកំនត់ដោយ $f(x^2+1)+f(3x-1)=\dfrac{3x-2}{x^2+1}$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$ ។

46-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^n}$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃ $n\in IN^*$ ដើម្បីឱ្យលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ជាចំនួនពិត ។

47-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0,a,b,c\in IR$

និង $a+b+c=1$ ។ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f[f(x)]-x}{f(x)-x}$ ។

48-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\tan x-\cot x}{x^n}$ ដែល $n\in IN^*$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យលីមីត $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ កំនត់ ។

49-គណនា $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sin\left(\dfrac{\pi x+4}{x-1}\right)\tan\left(\dfrac{\pi x+2}{2x+1}\right)\right]$

50-គេឱ្យស៊ីត $a_n=\dfrac{4}{(n+1)^2-1}$ ដែល $n\in IN^*$

ក. គណនា $S_n=a_1+a_2+a_3+....+a_n$ ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

✍ ✍ ✍ ✍ ✍

មេរៀនទី៣

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១_ចំនួនដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនុចមួយ ៖

សន្មតថាអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើចន្លោះ I ហើយ x_0 ជាចំនួនពិតនៅក្នុង ចន្លោះ I និង h ជាចំនួនពិតមិនសូន្យ ដែល x_0+h ជារបស់ I ។

ចំនួនដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំនុច x_0 (បើមាន) ជាលីមីតរបស់អត្រា កំណើននៃអនុគមន៍ f រវាង x_0 និង x_0+h កាលណា h ខិតទៅរកសូន្យដែលគេកំនត់សរសេរ ៖

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

២_ភាពមានដេរីវេ និង ភាពជាប់ ៖

សន្មតថាអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើចន្លោះ I ហើយ x_0 ជាចំនួនពិតនៅក្នុងចន្លោះ I និង h ជាចំនួនពិតមិនសូន្យ ដែល x_0+h ជារបស់ I ។

_ចំនួនដេរីវេឆ្វេងត្រង់ចំនួន x_0 នៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់តាងដោយ

$$f'_{-}(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ ។

_ចំនួនដេរីវេស្តាំត្រង់ចំនួន x_0 នៃអនុគមន៍ $f(x)$

កំនត់តាងដោយ $f'_{+}(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ។

_ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ x_0 (បើមាន)

កំនត់តាងដោយ ៖

$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$ ហើយ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

មានកាលណា $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ។

៣_អនុគមន៍ដេរីវេ ៖

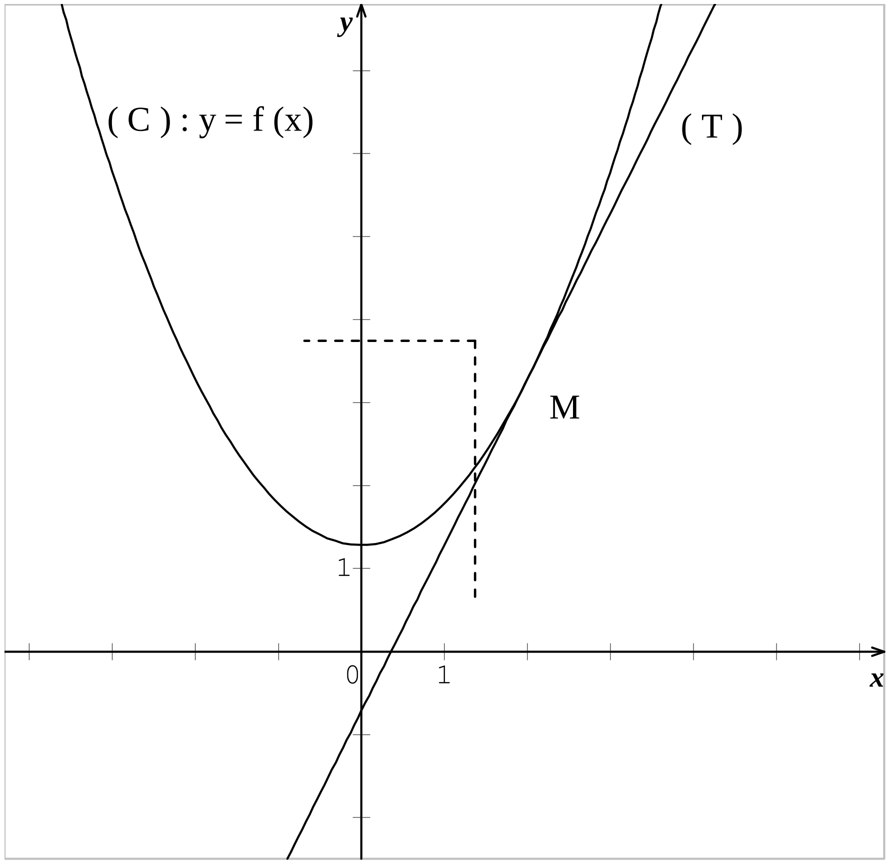
ក.<u>និយមន័យ</u>

_បើ f ជាអនុគមន៍មួយកំនត់លើចន្លោះ I និងមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំនុច នៅក្នុងចន្លោះ I នោះគេថាអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ I ។

_អនុគមន៍ដែលគ្រប់ $x\in I$ ផ្សំបានចំនួនដេរីវេនៃ f ត្រង់ x ហៅថា

អនុគមន៍ដេរីវេនៃ f ដែលគេកំនត់សរសេរ $f:x\mapsto f'(x)$ ។

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ



ចំនួនដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំនុច x_0 គឺជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $(c): y = f(x)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x = x_0$ ហើយសមីការបន្ទាត់ប៉ះនោះកំនត់ដោយ៖

$$\boxed{(T): y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$ ។

ខ.រូបមន្តនៃអនុគមន៍ដេរីវេមួយចំនួន

អនុគមន៍	ដេរីវេ
1. $y = k$	$y' = 0$
2. $y = x^n$	$y' = n x^{n-1}$

3. $y=\frac{1}{x}$ $\qquad$ $y'=-\frac{1}{x^2}$

4. $y=\sqrt{x}$ $\qquad$ $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $y=e^x$ $\qquad$ $y'=e^x$

6. $y=a^x$ $\qquad$ $y'=a^x \ln a$

7. $y=\ln x$ $\qquad$ $y'=\frac{1}{x}$

8. $y=\sin x$ $\qquad$ $y=\cos x$

9. $y=\cos x$ $\qquad$ $y'=-\sin x$

10. $y=\tan x$ $\qquad$ $y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

11. $y=\cot x$ $\qquad$ $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$

12. $y=\arcsin x$ $\qquad$ $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $y=\arccos x$ $\qquad$ $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $y=\arctan x$ $\qquad$ $y'=\frac{1}{1+x^2}$

គ-រូបមន្តគ្រឹះនៃដេរីវេអនុគមន៍

អនុគមន៍	ដេរីវេ
1. $y=u^n$	$y'=n.u'.u^{n-1}$
2. $y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
3. $y=u.v$	$y'=u'v+v'u$
4. $y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

5. $y=\ln u$ $\qquad y'=\dfrac{u'}{u}$

6. $y=\sin u$ $\qquad y'=u'.\cos u$

7. $y=\cos u$ $\qquad y'=-u'\sin u$

8. $y=e^{u}$ $\qquad y'=u'.e^{u}$

9. $y=\tan u$ $\qquad y'=u'(1+\tan^{2}u)$

10. $y=\arcsin u$ $\qquad y'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$

11. $y=\arccos u$ $\qquad y'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$

12. $y=\arctan u$ $\qquad y'=\dfrac{u'}{1+u^{2}}$

13. $y=u^{V}$ $\qquad y'=u^{V}\left(v'\ln u+v\dfrac{u'}{u}\right)$

៤_ដេរីវេបន្តបន្ទាប់ ៖

ឧបមាថាគេមាន $f(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទីn លើចន្លោះ I
គេកំនត់ដេរីវេបន្តបន្ទាប់នៃអនុគមន៍នេះដូចតទៅ៖

_អនុគមន៍ដេរីវេទីមួយកំនត់តាងដោយ $f'(x)$

_អនុគមន៍ដេរីវេទីពីរកំនត់តាងដោយ $f''(x)$

_អនុគមន៍ដេរីវេទីបីកំនត់តាងដោយ $f'''(x)$

_អនុគមន៍ដេរីវេទីបួនកំនត់តាងដោយ $f^{(4)}(x)$

_អនុគមន៍ដេរីវេទី n កំនត់តាងដោយ $f^{(n)}(x)$ ។

៥_វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ ៖

ទ្រឹស្តីបទ ៖ គេឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើចន្លោះ I បើមានពីរចំនួនពិត m និង M ដែល $\forall x \in I \;\; m \le f'(x) \le M$ នោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ជាធាតុពីរក្នុងចន្លោះ I ដែល $a < b$ គេបាន ៖

$$\boxed{m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)}$$ ។

ឧបមាថា $a \in I \, , \forall x \in I$ គេមាន ៖

_បើ $a < x$ គេបាន $m(x-a) \le f(x) - f(a) \le M(x-a)$ ។

_បើ $x < a$ គេបាន $m(a-x) \le f(a) - f(x) \le M(a-x)$ ។

លំហាត់ទី១

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ដោយ $f(x) = x^3 - 3x + 1$

ក-ដោយប្រើនិយមន័យចូរគណនាចំនួនដេរីវេ $f'(2)$ ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់(T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង(c) ត្រង់ចំនុចM_0 មានអាប់ស៊ីស$x_0 = 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ដោយប្រើនិយមន័យគណនាចំនួនដេរីវេ $f'(2)$

តាមនិយមន័យយើងអាចសរសេរ :

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \quad \text{ដោយ} \quad f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(2+h)^3 - 3(2+h)+1\right]-\left[2^3 - 3(2)+1\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{8+12h+6h^2+h^3-6-3h+1-8+6-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^3+6h^2+9h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h^2+6h+9\right) = 9$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(2) = 9}$ ។

ខ-សរសេរសមីការបន្ទាត់(T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ត្រង់ចំនុចM_0

តាមរូបមន្ត $(T): y - y_0 = y'_0(x - x_0)$

ដោយ $x_0 = 2$ គេបាន $y_0 = f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$ និង $y'_0 = f'(2) = 9$

គេបាន $(T): y - 3 = 9(x-2)$

ឬ $(T): y-3=9x-18$ នាំឱ្យ $(T): y=9x-15$ ។

ដូចនេះ $\boxed{(T): y=9x-15}$ ។

លំហាត់ទី២

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=1+x^2-\frac{\sin \pi x}{\pi}$

ក-ដោយប្រើនិយមន័យចូរគណនាចំនួនដេរីវេ $f'(1)$ ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់(T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង(c) ត្រង់ចំនុចM_0 មានអាប់ស៊ីស$x_0=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ដោយប្រើនិយមន័យគណនាចំនួនដេរីវេ $f'(1)$

តាមនិយមន័យយើងអាចសរសេរ :

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \text{ដោយ} \quad f(x)=1+x^2-\frac{\sin \pi x}{\pi}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[1+(1+h)^2-\frac{\sin(\pi-\pi h)}{\pi}\right]-(1+1^2-\frac{\sin\pi}{\pi})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+1+2h+h^2-\frac{\sin \pi h}{\pi}-1-1+0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2-\frac{\sin \pi h}{\pi}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2+h-\frac{\sin \pi h}{\pi h}\right)=2+0-1=1$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(1)=1}$ ។

ខ-សរសេរសមីការបន្ទាត់(T) ៖

តាមរូបមន្ត $(T): y - y_0 = y'_0(x - x_0)$

ដោយ $x_0 = 1$ នាំឱ្យ $y_0 = f(1) = 2$ និង $y'_0 = f'(1) = 1$

ដូចនេះ $(T): y - 2 = 1.(x-1)$ ឬ $(T): y = x + 1$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x-2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq 2$ ។

ក-ដោយប្រើនិយមន័យចូរគណនាចំនួនដេរីវេ $f'(3)$ ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់(T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ត្រង់ចំនុចM_0 មានអាប់ស៊ីស$x_0 = 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ដោយប្រើនិយមន័យគណនាចំនួនដេរីវេ $f'(3)$

តាមនិយមន័យយើងអាចសរសេរ ៖

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\dfrac{2(3+h-1)}{(3+h)-2}\right] - \dfrac{2(3-1)}{3-2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{4+2h}{1+h} - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4+2h-4-4h}{h(1+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-2}{1+h} = -2$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(3) = -2}$ ។

ខ-សរសេរសមីការបន្ទាត់(T) ៖

តាមរូបមន្ត $(T): y - y_0 = y'_0(x - x_0)$

ដោយ $x_0 = 3$ នាំឱ្យ $y_0 = f(3) = \frac{2(3-1)}{3-2} = 4$ និង $y'_0 = f'(3) = -2$

គេបាន $(T): y - 4 = -2(x - 3)$

ដូចនេះ $\boxed{(T): y = -2x + 10}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ និង មានដេរីវេត្រង់ចំនុច $x = c$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{h\to 0}\frac{f^2(c+h) - f^2(c-h)}{h} = 4f'(c).f(c)$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{h\to 0}\frac{f^2(c+h) - f^2(c-h)}{h} = 4f'(c).f(c)$

តាង $L = \lim_{h\to 0}\frac{f^2(c+h) - f^2(c-h)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(c+h) - f(c-h)].[f(c+h) + f(c-h)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h) - f(c-h)}{h} \times \lim_{h\to 0}[f(c+h) + f(c-h)]$$

ដោយ $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h) - f(c-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[f(c+h) - f(c)] - [f(c-h) - f(c)]}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h) - f(c)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(c-h) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h) - f(c)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(c+(-h)) - f(c)}{(-h)}$$

$$= f'(c) + f'(c) = 2f'(c)$$

និង $\lim_{h\to 0}[f(c+h) + f(c-h)] = f(c) + f(c) = 2f(c)$

នាំឱ្យ $L = 2f'(c)\times 2f(c) = 4f'(c).f(c)$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f^2(c+h)-f^2(c-h)}{h} = 4f'(c).f(c)}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់លើ IR ដោយ $f(x) = \frac{2x^2-5x+4}{x^2-3x+3}$

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។

ខ-កំនត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f'(x)=0$ រួចគណនាតម្លៃលេខនៃ $f(x)$ ចំពោះ តម្លៃ x ដែលបាន ។

គ-ចូររកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) តាង f ត្រង់ចំនុច $x=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x) = \frac{2x^2-5x+4}{x^2-3x+3}$ តាមរូបមន្ត $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$

គេបាន$f'(x) = \frac{(2x^2-5x+4)'(x^2-3x+3)-(x^2-3x+3)'(2x^2-5x+4)}{(x^2-3x+3)^2}$

$$= \frac{(4x-5)(x^2-3x+3)-(2x-3)(2x^2-5x+4)}{(x^2-3x+3)^2}$$

$$= \frac{4x^3-12x^2+12x-5x^2+15x-15-4x^3+10x^2-8x+6x^2-15x+12}{(x^2-3x+3)^2}$$

$$= \frac{-x^2+4x-3}{(x^2-3x+3)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = -\frac{x^2-4x+3}{(x^2-3x+3)^2}}$ ។

ខ-កំនត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f'(x)=0$

គេបាន $f'(x)=-\frac{x^2-4x+3}{(x^2-3x+3)^2}=0$ នាំឱ្យ $x^2-4x+3=0$

ដោយ $a+b+c=0$ គេទាញឫស $x_1=1\ ,x_2=\frac{c}{a}=3$ ។

ដូចនេះ $\boxed{x_1=1\ ,x_2=3}$ ។

គណនាតម្លៃលេខនៃ $f(x)$:

គេមាន $f(x)=\frac{2x^2-5x+4}{x^2-3x+3}$

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $f(1)=\frac{2.1^2-5.1+4}{1^2-3.1+3}=\frac{2-5+4}{1-3+3}=1$

ចំពោះ $x=3$ គេបាន $f(3)=\frac{2.3^2-5.3+4}{3^2-3.3+3}=\frac{18-15+4}{9-9+3}=\frac{7}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{f(1)=1\ ,f(3)=\frac{7}{3}}$ ។

គ-រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c)

ចំពោះ $x=2$ នាំឱ្យ $y=f(2)=\frac{2.2^2-5.2+4}{2^2-3.2+3}=\frac{8-10+4}{4-6+3}=2$

កូអរដោនេនៃចំនុចប៉ះគឺ $M_0(2,2)$ ។

តាមរូបមន្ត $(T):y-y_0=y'_0(x-x_0)$

ចំពោះ $x=2$ គេបាន $y'_0=f'(2)=-\frac{2^2-4.2+3}{(2^2-3.2+3)^2}=1$

គេបាន $(T):y-2=1.(x-2)$ ឬ $y=x$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) គឺ $\boxed{(T):y=x}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+px+q}{x^2+1}$

គេឧបមាថាមានចំនួនពិត a ដែល $f(a)=0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $f'(a)=\dfrac{2a+p}{a^2+1}$?

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $f'(a)=\dfrac{2a+p}{a^2+1}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+px+q}{x^2+1}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(x^2+px+q)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x^2+px+q)}{(x^2+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{(2x+p)(x^2+1)-2x(x^2+px+q)}{(x^2+1)^2}$$

ចំពោះ $x=a$ គេបាន $f'(a)=\dfrac{(2a+p)(a^2+1)-2a(a^2+ap+q)}{(a^2+1)^2}$ (1)

តាមបំរាប់គេមាន $f(a)=\dfrac{a^2+ap+q}{a^2+1}=0$

នាំឱ្យ $a^2+ap+q=0$ (2)

យក (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន៖

$$f'(a)=\frac{(2a+p)(a^2+1)-2a(0)}{(a^2+1)^2}$$

$$=\frac{(2a+p)(a^2+1)}{(a^2+1)^2}=\frac{2a+p}{a^2+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(a)=\dfrac{2a+p}{a^2+1}}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^n$

ដែល $x\in IR$ និង $n\in IN^*$ ។

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$ ។

ខ-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $(1+x^2).f''(x)+x.f'(x)=n^2.f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^n$

គេបាន $f'(x)=n.(x+\sqrt{1+x^2})'.(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$

$$=n.\left(1+\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}\right).(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$$

$$=n.\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right).(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$$

$$=n.\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}.(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})^n$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.(x+\sqrt{1+x^2})^n}$ ។

គេមាន $f'(x)=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.(x+\sqrt{1+x^2})^n$ ដោយ $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^n$

គេបាន $f'(x)=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.f(x)$ នាំឱ្យ $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)}$ ។

ខ-ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង :

$$(1+x^2).f''(x)+x.f'(x)=n^2.f(x)$$

គេមាន $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$ នាំឱ្យ $f'(x)=n.\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

គេបាន $f''(x)=n.\dfrac{f'(x)\sqrt{1+x^2}-(\sqrt{1+x^2})'f(x)}{(\sqrt{1+x^2})^2}$

$$f''(x)=n\frac{f'(x).\sqrt{1+x^2}-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}.f(x)}{1+x^2}$$

$$f''(x)=n.\frac{\sqrt{1+x^2}.f'(x)-x.\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \quad (1)$$

គេមាន $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$ (2) និង $\dfrac{1}{n}.f'(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ (3)

យក (2) និង (3) ជួសក្នុងទំនាក់ទំនង (1) គេបាន :

$$f''(x)=n.\frac{n.f(x)-x.\dfrac{1}{n}f'(x)}{1+x^2}$$

នាំឱ្យ $(1+x^2).f''(x)=n^2.f(x)-x.f'(x)$

ដូចនេះ $\boxed{(1+x^2).f''(x)+x.f'(x)=n^2.f(x)}$ ។

ꕤꕤꕤ✡ꕤꕤꕤ

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=\sqrt{4x+\sqrt{16x^2+9}}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $(16x^2+9).f''(x)+16x.f'(x)=4f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា : $(16x^2+9).f''(x)+16x.f'(x)=4f(x)$

គេមាន $f(x)=\sqrt{4x+\sqrt{16x^2+9}}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(4x+\sqrt{16x^2+9})'}{2\sqrt{4x+\sqrt{16x^2+9}}}$

$$=\frac{4+\dfrac{32x}{2\sqrt{16x^2+9}}}{2\sqrt{4x+\sqrt{16x^2+9}}}=\frac{4+\dfrac{16x}{\sqrt{16x^2+9}}}{2\sqrt{4x+\sqrt{16x^2+9}}}$$

$$=\frac{4(\sqrt{16x^2+9}+4x)}{2\sqrt{4x+\sqrt{16x^2+9}}.\sqrt{16x^2+9}}=\frac{2(\sqrt{4x+\sqrt{16x^2+9}})}{\sqrt{16x^2+9}}$$

គេទាញ $f'(x)=\dfrac{2f(x)}{\sqrt{16x^2+9}}$ ព្រោះ $f(x)=\sqrt{4x+\sqrt{16x^2+9}}$

គេបាន $f''(x)=2\dfrac{f'(x).\sqrt{16x^2+9}-\dfrac{32x}{2\sqrt{16x^2+9}}.f(x)}{16x^2+9}$

$$(16x^2+9).f''(x)=2.\sqrt{16x^2+9}.f'(x)-16x.\frac{2f(x)}{\sqrt{16x^2+9}}\quad(1)$$

ដោយ $f'(x)=\dfrac{2f(x)}{\sqrt{16x^2+9}}$ (2) នាំឱ្យ $\sqrt{16x^2+9}.f'(x)=2f(x)$ (3)

យកទំនាក់ទំនង (2) និង (3) ជួសក្នុង (1) គេបាន :

ដូចនេះ $\boxed{(16x^2+9).f''(x)+16x.f'(x)=4f(x)}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{2+\sin x-\cos x}$

កំនត់គ្រប់ $x\in IR$ ។

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។

ខ-គណនាតម្លៃ $f'(0)$ និង $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{2+\sin x-\cos x}$ គេបាន ៖

$$f'(x)=\frac{(1+\sin x)'(2+\sin x-\cos x)-(2+\sin x-\cos x)'(1+\sin x)}{(2+\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x.(2+\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x)(1+\sin x)}{(2+\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{2\cos x+\sin x\cos x-\cos^2 x-\cos x-\sin x\cos x-\sin x-\sin^2 x}{(2+\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x-\sin x-(\cos^2 x+\sin^2 x)}{(2+\sin x-\cos x)^2}=\frac{\cos x-\sin x-1}{(2+\sin x-\cos x)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x-1}{(2+\sin x-\cos x)^2}}$ ។

ខ-គណនាតម្លៃ $f'(0)$ និង $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

គេបាន $f'(0)=\dfrac{\cos 0-\sin 0-1}{(2+\sin 0-\cos 0)^2}=\dfrac{1-0-1}{(2+0-1)^2}=0$

និង $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}-\sin\dfrac{\pi}{2}-1}{(2+\sin\dfrac{\pi}{2}-\cos\dfrac{\pi}{2})^2}=\dfrac{0-1-1}{(2+1-0)^2}=-\dfrac{2}{9}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

ខ-គណនាតម្លៃ $f'(0)$ និង $f''(0)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

គេមាន $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(\cos x)'(1+\sin x)-(1+\sin x)'(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$

$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=-\frac{\sin x+(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=-\frac{\sin x+1}{(1+\sin x)^2}=-\frac{1}{1+\sin x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=-\dfrac{1}{1+\sin x}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $f''(x)=(-\dfrac{1}{1+\sin x})'=\dfrac{(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}=\dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=\dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}}$

ខ-គណនាតម្លៃ $f'(0)$ និង $f''(0)$

គេបាន $f'(0)=-\dfrac{1}{1+\sin 0}=-\dfrac{1}{1+0}=-1$

និង $f''(0)=\dfrac{\cos 0}{(1+\sin 0)^2}=\dfrac{1}{(1+0)^2}=1$ ។

ដូចនេះ $f'(0)=-1$ និង $f''(0)=1$ ។

លំហាត់ទី១១

ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ៖

$f(x)=\sin^{n+1}x.\sin(n+1)x$ និង $g(x)=\cos^{n+1}x.\cos(n+1)x$

ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ៖

គេមាន $f(x)=\sin^{n+1}x.\sin(n+1)x$

គេបាន $f'(x)=(\sin^{n+1}x)'.\sin(n+1)x+(\sin(n+1)x)'.\sin^{n+1}x$

$$=(n+1)\cos x.\sin^{n}x.\sin(n+1)x+(n+1).\cos(n+1)x.\sin^{n+1}x$$

$$=(n+1).\sin^{n}x.\left[\sin(n+1)x.\cos x+\sin x.\cos(n+1)x\right]$$

$$=(n+1).\sin^{n}x.\sin\left((n+1)x+x\right)=(n+1).\sin^{n}x.\sin(n+2)x$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=(n+1).\sin^{n}x.\sin(n+2)x}$ ។

គេមាន $g(x)=\cos^{n+1}x.\cos(n+1)x$

គេបាន $g'(x)=(\cos^{n+1}x)'.\cos(n+1)x+(\cos(n+1)x)'.\cos^{n+1}x$

$$=-(n+1)\sin x.\cos^{n}x.\cos(n+1)x-(n+1).\sin(n+1)x.\cos^{n+1}x$$

$$=-(n+1).\cos^{n}x.\left[\sin x.\cos(n+1)x+\sin(n+1)x.\cos x\right]$$

$$-(n+1).\cos^{n}x.\sin\left(x+(n+1)x\right)=-(n+1).\cos^{n}x.\sin(n+2)x$$

ដូចនេះ $\boxed{g'(x)=-(n+1).\cos^{n}x.\sin(n+2)x}$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+mx+4}{x^2+1}$

ដែល x ជាចំនួនពិត និង m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក-ចូរកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាត្រង់ចំនុច $x=2$

ខ-ចូរកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាតែមួយគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់តម្លៃ m

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាត្រង់ចំនុច $x=2$ លុះត្រាតែ $f'(2)=0$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+mx+4}{x^2+1}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(x^2+mx+4)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x^2+mx+4)}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{(2x+m)(x^2+1)-2x(x^2+mx+4)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x^3+2x+mx^2+m-2x^3-2mx^2-8x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-mx^2-6x+m}{(x^2+1)^2}$$

ចំពោះ $x=2$ គេបាន $f'(2)=\dfrac{-4m+12+m}{(4+1)^2}=\dfrac{12-3m}{25}=0$

នាំឱ្យ $\boxed{m=4}$ ។

ខ-កំនត់តម្លៃ m

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាតែមួយគត់លុះត្រាតែសមីការ $f'(x)=0$ សមមូល $-mx^2+6x+m=0$ មានឫសតែមួយគត់ ពោលគឺត្រូវឱ្យ $m=0$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+3}{x^2+4}$

ចូរកំនត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f មានចំនុចបរមាតែមួយគត់ ហើយខ្សែកោងរបស់វាមានបន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b

គេមាន $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+3}{x^2+4}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(2ax+b)(x^2+4)-2x(ax^2+bx+3)}{\left(x^2+4\right)^2}$

$$\frac{2ax^3+8ax+bx^2+4b-2ax^3-2bx^2-6x}{(x^2+4)^2}$$

$$=\frac{-bx^2+(8a-6)x+4b}{(x^2+4)^2}$$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាតែមួយគត់លុះត្រាតែសមីការ $f'(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ ។

ដោយ $f'(x)=\dfrac{-bx^2+(8a-6)x+4b}{(x^2+4)^2}=0$

នាំឱ្យ $-bx^2+(8a-6)x+4b=0$ មានឫសទោលតែមួយគត់លុះត្រាតែ $b=0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតខ្សែកោងរបស់វាមានបន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកលុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$ ។

គេបាន $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+3}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2}{x^2}=a=2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a=2\ ,b=0}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+px+q}{x}$ ដែល x ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

ខ-ចូរកំនត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ 1 ចំពោះ $x=-2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+px+q}{x}=x+p+\dfrac{q}{x}$ គ្រប់ $x\neq 0$ ។

គេបាន $f'(x)=(x+p+\dfrac{q}{x})'=1-\dfrac{q}{x^2}$ និង $f''(x)=(1-\dfrac{q}{x^2})'=\dfrac{2q}{x^3}$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=1-\dfrac{q}{x^2}\quad ,f''(x)=\dfrac{2q}{x^3}}$ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត p និង q

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ 1 ចំពោះ $x=-2$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f(-2)=1 \\ f''(-2)<0 \end{cases}$

គេទាញបាន $\begin{cases} f'(-2)=1-\dfrac{q}{4}=0 \\ f(-2)=\dfrac{4-2p+q}{-2}=1 \\ f''(-2)=\dfrac{2q}{-8} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} q=4 \\ p=5 \\ f''(-2)=-\dfrac{q}{4}=-\dfrac{4}{4}=-1<0 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{p=5\quad ,q=4}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+1+\dfrac{b}{x}$ ដែល x ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

ខ-ចូរកំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 5 ចំពោះ $x=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

គេមាន $f(x)=ax+1+\frac{b}{x}$

គេបាន $f'(x)=(ax+1+\frac{b}{x})'=a-\frac{b}{x^2}$ និង $f''(x)=(a-\frac{b}{x^2})'=\frac{2b}{x^3}$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=a-\frac{b}{x^2}\ ,f''(x)=\frac{2b}{x^3}}$ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 5 ចំពោះ $x=1$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=5 \\ f''(1)>0 \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} f'(1)=a-b=0 \\ f(1)=a+1+b=5 \\ f''(1)=2b \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=4 \\ f''(1)=2b \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ f''(1)=4>0 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=2\ ,b=2}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ មានក្រាបតំនាង (c) ក្នុងតម្រុយអរតូនរមេមួយ ។

ក-ខ្សែកោង (c) កាត់អក្ស័អាប់ស៊ីស $(x'0x)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x = \alpha$ ។

បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ $x = \alpha$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $k = \dfrac{2\alpha + a}{\alpha^2 + 1}$ ។

ខ-ចូរកំនត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (c) កាត់អក្ស័អាប់ស៊ីស បានពីរចំនុច M និង N ដែលបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ M និង N កែងនឹងគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ $x = \alpha$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $k = \dfrac{2\alpha + a}{\alpha^2 + 1}$

គេមាន $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

គេបាន $f'(x) = \dfrac{(x^2 + ax + b)'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)'(x^2 + ax + b)}{(x^2 + 1)^2}$

$$= \frac{(2x + a)(x^2 + 1) - 2x(x^2 + ax + b)}{(x^2 + 1)^2}$$

បើ k ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ បន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ $x = \alpha$ គេបាន $k = f'(\alpha)$

គេបាន $k = \dfrac{(2\alpha + a)(x^2 + 1) - 2\alpha.(\alpha^2 + a\alpha + b)}{(\alpha^2 + 1)^2}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតខ្សែកោង (c) កាត់អក្ស័អាប់ស៊ីស $(x'0x)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x = \alpha$ គេបាន $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 + a\alpha + b}{\alpha^2 + 1} = 0$ នាំឱ្យ $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ (2)

យកសមីការ (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន $k = \dfrac{(2\alpha + a)(\alpha^2 + 1)}{(\alpha^2 + 1)^2} = \dfrac{2\alpha + a}{\alpha^2 + 1}$

ដូចនេះ $\boxed{k = \dfrac{2\alpha + a}{\alpha^2 + 1}}$ ។

ខ-កំនត់តម្លៃ a និង b

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វ M និង N រវាងខ្សែកោង (c) ជាមួយ(x'0x) :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{ឬ} \quad x^2 + ax + b = 0 \quad (E)$$

តាង k_1 និង k_2 ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ M និង N គេបាន

$$k_1 = f'(x_M) = \frac{2x_M + a}{x_M^2 + 1} \text{ និង } k_2 = f'(x_N) = \frac{2x_N + a}{x_N^2 + 1}$$

(តាមសម្រាយខាងលើ) ។

ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ប៉ះនេះកែងគ្នាលុះត្រាតែ

$$k_1.k_2 = \left(\frac{2x_M + a}{x_M^2 + 1}\right).\left(\frac{2x_N + a}{x_N^2 + 1}\right) = -1$$

នាំឱ្យ $(2x_M + a)(2x_N + a) = -(x_M^2 + 1)(x_N^2 + 1)$

$$(2x_M + a).(2x_N + a) + (x_M^2 + 1)(x_N^2 + 1) = 0$$

$$4x_M x_N + 2a(x_M + x_N) + a^2 + x_M^2 x_N^2 + \left(x_M^2 + x_N^2\right) + 1 = 0$$

$$4x_M x_N + 2a(x_M + x_N) + a^2 + x_M^2 x_N^2 + \left[(x_M + x_N)^2 - 2x_M x_N\right] + 1 = 0$$

$$(x_M + x_N)^2 + x_M^2 x_N^2 + 2a(x_M + x_N) + 2x_M x_N + a^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

ដោយ x_M និង x_N ជាឫសសមីការ (E) នោះគេមាន $\begin{cases} x_M + x_N = -a \\ x_M x_N = b \end{cases}$

ទំនាក់ទំនង (3) អាចសរសេរ :

$$a^2 + b^2 - 2a^2 + 2b + a^2 + 1 = 0$$

$$b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2 = 0 \quad \text{នាំឱ្យ} \quad b = -1$$

ម្យ៉ាងទៀតដើម្បីឱ្យ (c) កាត់អក្ស័ (x'0x) បានពីរចំនុចM និង N លុះត្រាតែ

សមីការ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ពោលគឺគេត្រូវឱ្យ $\Delta = a^2 - 4b > 0$

ដោយ $b = -1$ គេទាញបាន $\Delta = a^2 + 4 > 0$ ពិតជានិច្ចគ្រប់ចំនួនពិត a ។

ដូចនេះ $\boxed{a \in IR \ , b = -1}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = (ax+b).e^x$ ដែល $a \neq 0, a, b \in IR$

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ $2e$

ចំពោះ $x = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

គេបាន $f'(x) = (ax+b)'e^x + (e^x)'(ax+b)$

$$= ae^x + e^x(ax+b)$$

$$= (ax+a+b).e^x$$

និង $f''(x) = (ax+a+b)'e^x + (e^x)'(ax+a+b)$

$$= a.e^x + e^x(ax+a+b)$$

$$= (ax+2a+b).e^x$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = (ax+a+b)e^x \ , f''(x) = (ax+2a+b)e^x}$ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ $2e$ ចំពោះ $x=1$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=2e \\ f''(1)<0 \end{cases}$ គេបាន $\begin{cases} f'(1)=(2a+b)e=0 \\ f(1)=(a+b)e=2e \\ f''(1)<0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} 2a+b=0 \\ a+b=2 \\ f''(1)=(3a+b)e \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a=-2 \\ b=4 \\ f''(1)=-2e<0 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=-2\ ,b=4}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^x}{ax+b}$ ដែល $a\neq 0, a, b\in IR$

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ e ចំពោះ $x=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(e^x)'(ax+b)-(ax+b)'e^x}{(ax+b)^2}$

$$=\frac{e^x(ax+b)-ae^x}{(ax+b)^2}=\frac{(ax+b-a).e^x}{(ax+b)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{(ax+b-a).e^x}{(ax+b)^2}}$ ។

$$f''(x)=\frac{[(ax+b-a)e^x]'(ax+b)^2-[(ax+b)^2]'(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^4}$$

$$=\frac{[ae^x+e^x(ax+b-a)](ax+b)^2-2a(ax+b)(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^4}$$

$$=\frac{(ax+b)^2.e^x-2a(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^3}=\frac{\left[(ax+b)^2-2a(ax+b-a)\right].e^x}{(ax+b)^3}$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=\dfrac{\left[(ax+b)^2-2a(ax+b-a)\right]e^x}{(ax+b)^3}}$ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ e ចំពោះ $x=1$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=e \\ f''(1)>0 \end{cases}$ បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $\boxed{a=1\ ,b=0}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=(x-2)(e^x+1)$

ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលស្របនឹងបន្ទាត់ $(d): y=x-2$

ហើយប៉ះនឹងក្រាប (c) តំនាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) :

តាង $M_0(x_0, y_0)$ ជាចំនុចប៉ះរវាងបន្ទាត់ (T) ទៅនឹងខ្សែកោង (c) ។

តាមរូបមន្ត $(T): y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

ដោយគេមាន $(T)//(d): y = x - 2$ នាំឱ្យគេទាញបាន $f'(x_0) = 1$

(មេគុណប្រាប់ទិសស្មើគ្នា) ។

គេមាន $f(x) = (x-2)(e^x + 1)$

គេបាន
$$f'(x) = (x-2)'(e^x + 1) + (e^x + 1)'(x-2)$$
$$= e^x + 1 + e^x(x-2)$$
$$= 1 + (x-1).e^x$$

គេទាញ $f'(x_0) = 1 + (x_0 - 1).e^{x_0} = 1$ ឬ $(x_0 - 1).e^{x_0} = 0$ នាំឱ្យ $x_0 = 1$

ចំពោះ $x_0 = 1$ គេបាន $y_0 = f(1) = (1-2).e = -e$ ។

សមីការបន្ទាត់ (T) អាចសរសេរ $(T): y + e = 1.(x-1)$ ឬ $y = x - 1 - e$

ដូចនេះ $\boxed{(T): y = x - 1 - e}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x+k.\sin^2 x.\cos^2 x$

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។

ខ-ចូរកំនត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ថេរជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 6.(\sin x)'\sin^5 x+6.(\cos x)'\cos^5 x+k(\sin^2 x)'\cos^2 x+k(\cos^2 x)'\sin^2 x \\
&= 6\cos x\sin^5 x-6\sin x\cos^5 x+2k\sin x\cos^3 x-2k\cos x\sin^3 x \\
&= 6\cos x\sin x(\sin^4 x-\cos^4 x)+2k\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x) \\
&= 3\sin 2x(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)+k\sin 2x.\cos 2x \\
&= 3\sin 2x(-\cos 2x)+k\sin 2x\cos 2x \\
&= -3\sin 2x\cos 2x+k.\sin 2x\cos 2x \\
&= (-3+k).\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}(k-3)\sin 4x
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{1}{2}(k-3).\sin 4x}$ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត k

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ថេរជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ លុះត្រាតែ

$f'(x)=0$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

ដោយ $f'(x)=\frac{1}{2}(k-3).\sin 4x$ គេទាញ $k-3=0$ នាំឱ្យ $k=3$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឱ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}}$ ដែល $x>0$ ហើយ a និង b ជាចំនួនពិត ។

ក-បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $a \neq 0$ ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតមួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់សមីការ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T): y=x+4$ ត្រង់ចំនុច $A(1,5)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថាខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតមួយ

គេមាន $\mathbf{f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}}$ ដែល $x>0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ។

ដូចនេះ ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=ax+b$ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}$

គេបាន $f'(x) = (ax+b)' - \frac{(\ln x)'.x - (x)'.\ln x}{x^2} = a - \frac{1-\ln x}{x^2}$ ។

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់

$(T): y = x + 4$

ត្រង់ចំនុច $A(1,5)$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(x_A) = a_T \\ f(x_A) = y_A \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a - \frac{1-\ln 1}{1^2} = 1 \\ a.1 + b - \frac{\ln 1}{1} = 5 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} a - 1 = 1 \\ a + b = 5 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a = 2 \ , b = 3}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{x^2 + px + q}{x - 2}$ ដែល $x \neq 2$ ។

ក-ចូរគណនាដើរវេ $f'(x)$ ។

ខ-ចូរកំនត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឱ្យ $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$ និង $f(3) = 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដើរវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x) = \frac{x^2 + px + q}{x - 2}$ ដែល $x \neq 2$

គេបាន $f'(x) = \frac{(x^2 + px + q)'(x-2) - (x-2)'(x^2 + px + q)}{(x-2)^2}$

$$=\frac{(2x+p)(x-2)-(x^2+px+q)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-4x+px-2p-x^2-px-q}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-2p-q}{(x-2)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{x^2-4x-2p-q}{(x-2)^2}}$ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត p និង q

ដោយ $f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ និង $f'(x)=\frac{x^2-4x-2p-q}{(x-2)^2}$

គេទាញ $\frac{x^2-4x-2p-q}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ នាំឱ្យ $-2p-q=3$ (1)

និង $f(3)=\frac{9+3p+q}{3-2}=3$ នាំឱ្យ $3p+q=-6$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន $p=-3$

បន្ទាប់មក $q=-6-3p=-6+9=3$ ។

ដូចនេះ $\boxed{p=-3\ ,q=3}$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=\sin x$

ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$?

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

គេមាន $f(x)=\sin x$

គេបាន $f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ (ព្រោះ $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sin\theta$)

$$f''(x)=(x+\frac{\pi}{2})'\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\pi)$$

$$f'''(x)=(x+\pi)'\cos(x+\pi)=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$$

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី n គឺ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី $(n+1)$ គឺ

$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$ ពិត

យើងមាន $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'$ ដោយ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ គេបាន :

$f^{(n+1)}(x)=(x+\frac{n\pi}{2})'\cos(x+\frac{n\pi}{2})=\sin(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})}$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{2x-3}$ ដែល $x\neq\dfrac{3}{2}$

ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!.2^n}{(2x-3)^{n+1}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!.2^n}{(2x-3)^{n+1}}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{1}{2x-3}$ តាមរូបមន្ត $(\dfrac{1}{v})'=-\dfrac{v'}{v^2}$

គេបាន $f'(x)=-\dfrac{(2x-3)'}{(2x-3)^2}=-\dfrac{2}{(2x-3)^2}=(-1)^1\dfrac{1!.2^1}{(2x-3)^2}$

$$f''(x)=\frac{2[(2x-3)^2]'}{(2x-3)^4}=\frac{8}{(2x-3)^3}=(-1)^2\frac{2!.2^2}{(2x-3)^3}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី n គឺ $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!.2^n}{(2x-3)^{n+1}}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី $(n+1)$ គឺ

$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)!.2^{n+1}}{(2x-3)^{n+2}}$ ពិត

យើងមាន $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'$ ដោយ $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!.2^n}{(2x-3)^{n+1}}$

គេបាន $f^{(n+1)}(x)=-(-1)^n.\dfrac{n!.2^n[(2x-3)^{n+1}]'}{(2x-3)^{2n+2}}$

$=(-1)^{n+1}\dfrac{n!.2^n.(n+1).2}{(2x-3)^{n+2}}=(-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)!.2^{n+1}}{(2x-3)^{n+2}}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\boxed{f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!.2^n}{(2x-3)^{n+1}}}$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=(x+1).e^{2x}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ក. ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$,$f''(x)$,$f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x)=(a_n x+b_n).e^{2x}$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង :

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \\ b_{n+1}=a_n+2b_n \quad ,\forall n\in IN^* \end{cases}$$

គ. ចូរកំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$,$f''(x)$,$f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$

គេមាន $f(x)=(x+1).e^{2x}$

$$f'(x)=(x+1)'e^{2x}+(e^{2x})'(x+1)$$

$$=e^{2x}+2e^{2x}(x+1)=e^{2x}(1+2x+2)=(2x+3)e^{2x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=(2x+3)e^{2x}}$

គេបាន $f''(x)=(2x+3)'e^{2x}+(e^{2x})'(2x+3)$

$$=2e^{2x}+2e^{2x}(2x+3)=e^{2x}(2+4x+6)=(4x+8)e^{2x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=(4x+8)e^{2x}}$

គេបាន $f'''(x)=(4x+8)'e^{2x}+(e^{2x})'(4x+8)$

$= 4e^{2x} + 2e^{2x}(4x+8) = e^{2x}(4+8x+16) = (8x+20).e^{2x}$

ដូចនេះ $\boxed{f'''(x) = (8x+20)e^{2x}}$

គេបាន $f^{(4)}(x) = (8x+20)'e^{2x} + (e^{2x})'(8x+20)$

$= 8e^{2x} + 2e^{2x}(8x+20) = e^{2x}(8+16x+40) = (16x+48)e^{2x}$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(4)}(x) = (16x+48)e^{2x}}$ ។

ខ.បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n).e^{2x}$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន :

$f'(x) = (2x+3)e^{2x} = (a_1 x + b_1)e^{2x}$ ដែល $a_1 = 2$, $b_1 = 3$

$f''(x) = (4x+8)e^{2x} = (a_2 x + b_2)e^{2x}$ ដែល $a_2 = 4$, $b_2 = 8$

$f'''(x) = (8x+20)e^{2x} = (a_3 x + b_3)e^{2x}$ ដែល $a_3 = 8$, $b_3 = 20$

$f^{(4)}(x) = (16x+48)e^{2x} = (a_4 x + b_4)e^{2x}$ ដែល $a_4 = 16$, $b_4 = 48$

....

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី n គឺ : $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{2x}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយឱ្យឃើញថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី $(n+1)$ គឺ :

$f^{(n+1)}(x) = (a_{n+1} x + b_{n+1})e^{2x}$

យើងមាន $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$ ដោយ $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{2x}$

គេបាន $f^{(n+1)}(x) = (a_n x + b_n)'e^{2x} + (e^{2x})'(a_n x + b_n)$

$f^{(n+1)}(x) = a_n e^{2x} + 2e^{2x}(a_n x + b_n)$

$f^{(n+1)}(x) = e^{2x}(a_n + 2a_n x + 2b_n)$

$f^{(n+1)}(x) = (2a_n x + a_n + 2b_n)e^{2x}$

គេទាញ $f^{(n+1)}(x)=(a_{n+1}x+b_{n+1})e^{2x}$ ពិត

ដែល $a_{n+1}=2a_n$ និង $b_{n+1}=a_n+2b_n$ ។

ដូចនេះ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x)=(a_nx+b_n).e^{2x}$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $a_{n+1}=2a_n$

និង $b_{n+1}=a_n+2b_n$ ។

គ.កំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $a_{n+1}=2a_n$ និង $b_{n+1}=a_n+2b_n$

ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $a_{n+1}=2a_n$ នាំឱ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$

និងតួ $a_1=2$

តាមរូបមន្ត $a_n=a_1.q^{n-1}=2.2^{n-1}=2^n$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $b_{n+1}=a_n+2b_n$

នាំឱ្យគេទាញ $b_{n+1}-2b_n=a_n=2^n$ ឬ $\frac{1}{2^n}b_{n+1}-\frac{1}{2^{n-1}}b_n=1$

បើគេតាង $c_n=\frac{1}{2^{n-1}}b_n$

គេបាន $c_{n+1}-c_n=1$ ថេរ នាំឱ្យ (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d=2$

និងតួ $c_1=b_1=3$

តាមរូបមន្ត $c_n=c_1+(n-1)d=3+2(n-1)=2n+1$

ដោយ $c_n=\frac{1}{2^{n-1}}b_n$ នាំឱ្យ $b_n=2^{n-1}.c_n=(2n+1).2^{n-1}$

ដូចនេះ $\boxed{a_n=2^n\ ,\ b_n=(2n+1).2^{n-1}}$ ។

ទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$ ៖

គេមាន $f^{(n)}(x)=(a_n x+b_n).e^{2x}$ ដោយ $a_n=2^n$ និង $b_n=(2n+1)2^{n-1}$

គេបាន $f^{(n)}(x)=[2^n x+(2n+1)2^{n-1}].e^{2x}=2^n(x+\frac{2n+1}{2}).e^{2x}$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(n)}(x)=2^n(x+\frac{2n+1}{2}).e^{2x}}$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=e^x.\sin x$

ក. ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$,$f''(x)$,$f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ ៖

$$f^{(n)}(x)=(a_n\sin x+b_n\cos x).e^x$$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n-b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \quad ,\forall n\in IN^* \end{cases}$$

គ. គេតាង $z_n=a_n+i.b_n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $z_{n+1}=(1+i).z_n$ រួចសរសេរ z_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ឃ. ចូរកំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$

គេមាន $f(x) = e^x.\sin x$

គេបាន $f'(x) = (e^x)'\sin x + (\sin x)'e^x$

$$= e^x \sin x + \cos x.e^x = e^x(\sin x + \cos x)$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)}$ ។

គេបាន $f''(x) = (e^x)'(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)'e^x$

$$= e^x(\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)e^x$$

$$= e^x(\sin x + \cos x + \cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x) = 2e^x \cos x}$ ។

គេបាន $f'''(x) = 2(e^x)'\cos x + 2(\cos x)'e^x$

$$= 2e^x \cos x - 2\sin x.e^x = 2e^x(\cos x - \sin x)$$

ដូចនេះ $\boxed{f'''(x) = 2e^x(\cos x - \sin x)}$ ។

គេបាន $f^{(4)}(x) = 2(e^x)'(\cos x - \sin x) + 2(\cos x - \sin x)'e^x$

$$= 2e^x(\cos x - \sin x) + 2(-\sin x - \cos x)e^x$$

$$= 2e^x(\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) = -4e^x \sin x$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x}$ ។

ខ. បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x) = (a_n \sin x + b_n \cos x).e^x$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន :

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)e^x = (a_1 \sin x + b_1 \cos x)e^x$$

ដែល $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases}$

$$f''(x) = 2e^x \cos x = (0.\sin x + 2\cos x)e^x = (a_2 \sin x + b_2 \cos x)e^x$$

ដែល $\begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = 2 \end{cases}$

$$f'''(x) = 2e^x(\cos x - \sin x) = (-2\sin x + 2\cos x)e^x = (a_3 \sin x + b_3 \cos x)e^x$$

ដែល$\begin{cases} a_3 = -2 \\ b_3 = 2 \end{cases}$

$$f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x = (-4\sin x + 0.\cos x)e^x = (a_4 \sin x + b_4 \cos x)e^x$$

ដែល $\begin{cases} a_4 = -4 \\ b_4 = 0 \end{cases}$

....

....

ឧបមាថាវាពិតដល់ដើរវេលំដាប់ទី n គឺ $f^{(n)}(x) = (a_n \sin x + b_n \cos x).e^x$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ដើរវេលំដាប់ទី $(n+1)$ គឺ

$$f^{(n+1)}(x) = (a_{n+1} \sin x + b_{n+1} \cos x)e^x$$

យើងមាន $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$

$$= (a_n \sin x + b_n \cos x)'e^x + (e^x)'(a_n \sin x + b_n \cos x)$$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (a_n \cos x - b_n \sin x)e^x + e^x(a_n \sin x + b_n \cos x) \\ &= (a_n \cos x - b_n \sin x + a_n \sin x + b_n \cos x)e^x \\ &= \left[(a_n - b_n)\sin x + (a_n + b_n)\cos x\right].e^x \end{aligned}$$

$f^{(n+1)}(x) = (a_{n+1} \sin x + b_{n+1} \cos x).e^x$ ពិត

(ព្រោះ $a_{n+1} = a_n - b_n$ និង $b_{n+1} = a_n + b_n$)

ដូចនេះ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x)=(a_n \sin x+b_n \cos x).e^x$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n-b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \quad ,\forall n\in IN^* \end{cases}$$

គ. បង្ហាញថា $z_{n+1}=(1+i).z_n$ សរសេរ z_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

គេមាន $z_n=a_n+i.b_n$ នាំឱ្យ $z_{n+1}=a_{n+1}+i.b_{n+1}$ ដោយ ៖

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n-b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \quad ,\forall n\in IN^* \end{cases}$$

គេបាន $z_{n+1}=(a_n-b_n)+i.(a_n+b_n)$

$$=a_n-b_n+i.a_n+i.b_n=(1+i)a_n-(1-i)b_n$$

$$=(1+i)(a_n-\frac{1-i}{1+i}b_n)=(1+i)(a_n+i.b_n)=(1+i)z_n$$

ដូចនេះ $\boxed{z_{n+1}=(1+i)z_n}$ ។

ដោយគេមាន $z_{n+1}=(1+i).z_n$ នាំឱ្យ (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

ដែលមានរេសុង ៖

$$q=1+i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$$ និងតួ $z_1=a_1+ib_1$

តែ $a_1=1, b_1=1$ នាំឱ្យ $z_1=1+i=q=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$ ។

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគេអាចសរសេរ ៖

$$z_n=z_1\times q^{n-1}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}).\left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})\right]^{n-1}$$

$$=(\sqrt{2})^n(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})^n$$

ដូចនេះ $\boxed{z_n=\sqrt{2}^n(\cos\frac{n\pi}{4}+i.\sin\frac{n\pi}{4})}$ (តាមរូបមន្តដឺម័រ) ។

ឃ. កំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n = a_n + i.b_n$ ដោយ $z_n = \sqrt{2^n}(\cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4})$

គេទាញ $a_n + i.b_n = \sqrt{2^n}(\cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4})$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a_n = \sqrt{2^n}.\cos\frac{n\pi}{4} \\ b_n = \sqrt{2^n}.\sin\frac{n\pi}{4} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \sqrt{2^n}.\cos\frac{n\pi}{4} \ , b_n = \sqrt{2^n}.\sin\frac{n\pi}{4}}$ ។

ទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$ ៖

$f^{(n)}(x) = (a_n \sin x + b_n \cos x)e^x$ **ដោយ**

$a_n = \sqrt{2^n}.\cos\frac{n\pi}{4} \ , b_n = \sqrt{2^n}.\sin\frac{n\pi}{4}$

គេបាន $f^{(n)}(x) = (\sqrt{2^n}.\cos\frac{n\pi}{4}.\sin x + \sqrt{2^n}\cos x.\sin\frac{n\pi}{4}).e^x$

$$= \sqrt{2^n}(\cos\frac{n\pi}{4}\sin x + \sin\frac{n\pi}{4}\cos x).e^x = \sqrt{2^n}.\sin(x + \frac{n\pi}{4}).e^x$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(n)}(x) = \sqrt{2^n}.e^x \sin(x + \frac{n\pi}{4})}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{3x+1}$ កំនត់លើ $\left[-\frac{1}{3},+\infty\right]$

ក. ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$ ។

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពកំណើនមានកំនត់ទៅនឹងអនុគមន៍ f ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ បង្ហាញថា $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$

គេមាន $f(x)=\sqrt{3x+1}$ នាំឱ្យ $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ គេមាន $1\le x\le 5$ ឬ $4\le 3x+1\le 16$

$$\frac{1}{4}\le\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\le\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8}\le\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\le\frac{3}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ គេមាន $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$

ចំពោះ $x\ge 1$ គេមាន $\frac{3}{8}(x-1)\le f(x)-f(1)\le\frac{3}{4}(x-1)$ តែ $f(x)=\sqrt{3x+1}$

គេបាន $\frac{3}{8}x-\frac{3}{8}\le\sqrt{3x+1}-2\le\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{2-x}$

ក. ចូរកំនត់បីចំនួនពិត a,b និង b ដើម្បីឱ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{2-x}$

ចំពោះគ្រប់ $x\neq 2$ ។

ខ. ចូរកំនត់សមីការអាសុីមតូតឈរ និងអាសុីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c)

តំនាងអនុគមន៍ f ។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ឃ. ស្រាយថាចំនុច $I(2\ ,\ -1)$ ជាផ្ចិតបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប (c) ។

ង. ចូរសង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ មួយ

ដំណោះស្រាយ

ក.កំនត់បីចំនួនពិត a,b និង b ដើម្បីឱ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{2-x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 2$

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{2-x}$

$$=\frac{(x^2-2x)-(x-2)+1}{2-x}$$

$$=\frac{x(x-2)-(x-2)+1}{2-x}=-x+1+\frac{1}{2-x}$$

គេបាន $y=f(x)=-x+1+\dfrac{1}{2-x}$ ដោយ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{2-x}$

ដូចនេះ $\boxed{a=-1,b=1,c=1}$ ។

ខ. កំនត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

គេមាន $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{2-x}$

ជាអនុគមន៍កំនត់លើ $D_f=IR-\{2\}$ ។

ដោយ $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3x+3}{2-x}=+\infty$

និង $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3x+3}{2-x}=-\infty$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=2$ សមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (c) ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $f(x)=-x+1+\frac{1}{2-x}$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2-x}=0$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=-x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) ។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=-\frac{x^2-3x+3}{x-2}$ ជាអនុគមន៍កំនត់លើ $D_f=IR-\{2\}$

គេបាន $f'(x)=-\frac{(2x-3)(x-2)-(x^2-3x+3)}{(x-2)^2}$

$$=-\frac{2x^2-4x-3x+6-x^2+3x-3}{(x-2)^2}$$

$$=-\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=-\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}}$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

បើ $f'(x)=-\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0$ គេបាន $x^2-4x+3=0$

នាំឱ្យ $x_1 = 1 \ , x_2 = \frac{c}{a} = 3$

ចំពោះ $x_1 = 1$ គេបាន $f(1) = \frac{1^2 - 3 + 3}{2 - 1} = 1$

ចំពោះ $x_2 = 3$ គេបាន $f(3) = \frac{9 - 9 + 3}{2 - 3} = -3$

ដោយ $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{2 - x}$

គេបាន $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (-x + 1 + \frac{1}{2 - x}) = \mp\infty$

គេអាចគូសតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$					$\Vert$				
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

ឃ.ស្រាយថាចំនុច $I(2 \ , \ -1)$ ជាផ្ចិតបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប (c)

គេមាន $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{2 - x}$

តាមរូបមន្ត $f(2a - x_0) + f(x_0) = 2b$

ដើម្បីស្រាយថាចំនុច $I(2 \ , \ -1)$ ជាផ្ចិតបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប (c) គេត្រូវស្រាយ

ឱ្យឃើញថា $f(4 - x_0) + f(x_0) = -2$ ។

$$f(4-x_0)=-(4-x_0)+1+\frac{1}{2-(4-x_0)}$$

$$=x_0-3-\frac{1}{2-x_0}=x_0-3-\frac{1}{2-x_0}$$

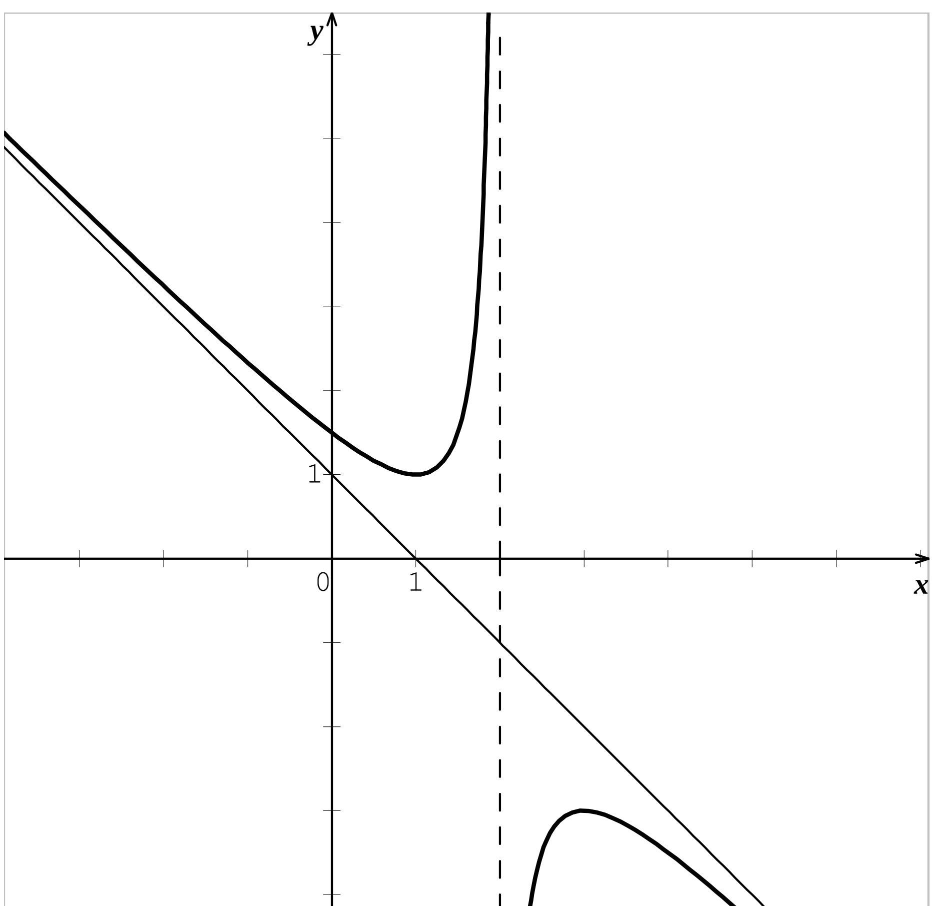
និង $f(x_0)=-x_0+1+\frac{1}{2-x}$ ។

គេបាន $f(4-x_0)+f(x_0)=\left(x_0-3-\frac{1}{2-x_0}\right)+\left(-x_0+1+\frac{1}{2-x_0}\right)$

ឬ $f(4-x_0)+f(x_0)=-2$ ពិត ។

ដូចនេះ ចំនុច $I(2\ ,\ -1)$ ជាផ្ចិតបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប (c) ។

ង. សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៏ $f(x)$ ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$



លំហាត់ទី២៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{3(x-2)^2}{x^2-4x+3}$

ក. ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to1} f(x)$,$\lim\limits_{x\to3} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការ

អាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃក្រាប(c) តាងអនុគមន៍ f ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $x=2$ ជាអក្ស័ឆ្លុះនៃក្រាប (c) ។

ឃ. ចូរសង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to1} f(x)$,$\lim\limits_{x\to3} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{3(x-2)^2}{x^2-4x+3}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3(x-2)^2}{x^2-4x+3}=+\infty$

និង $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3(x-2)^2}{x^2-4x+3}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3(x-2)^2}{x^2-4x+3}=-\infty$

និង $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{3(x-2)^2}{x^2-4x+3}=+\infty$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់ :

ដោយគេមាន :

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=3$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=\dfrac{3(x-2)^2}{x^2-4x+3}$ កំនត់លើ $D_f = IR-\{1,3\}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{6(x-2)(x^2-4x+3)-3(2x-4)(x-2)^2}{(x^2-4x+3)^2}$

$$=\frac{6(x-2)(x^2-4x+3)-6(x-2)(x-2)^2}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$=\frac{6(x-2)\left[(x^2-4x+3)-(x-2)^2\right]}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{-6(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{-6x+12}{(x^2-4x+3)^2}}$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f :

បើ $f'(x)=0$ គេបាន $-6x+12=0$ នាំឱ្យ $x=2$ ។

ចំពោះ $x=2$ គេបាន $f(2)=\dfrac{3(2-2)^2}{4-8+3}=0$ (ជាចំនុចបរមា)។

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$			‖				‖		
$f(x)$		↗	‖	↗		↘	‖	↘	

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $x = 2$ ជាអក្ស័ឆ្លុះនៃក្រាប (c)

តាមរូបមន្ត $f(2a - x_0) = f(x_0)$ ដើម្បីស្រាយថាបន្ទាត់ $x = 2$

ជាអក្ស័ឆ្លុះនៃក្រាប (c) យើងគ្រាន់តែស្រាយឱ្យឃើញថា :

$f(4 - x_0) = f(x_0)$ គ្រប់ $x_0 \in D_f$ ។

គេមាន $f(x) = \dfrac{3(x-2)^2}{x^2 - 4x + 3}$ កំនត់លើ $D_f = IR - \{1,3\}$ ។

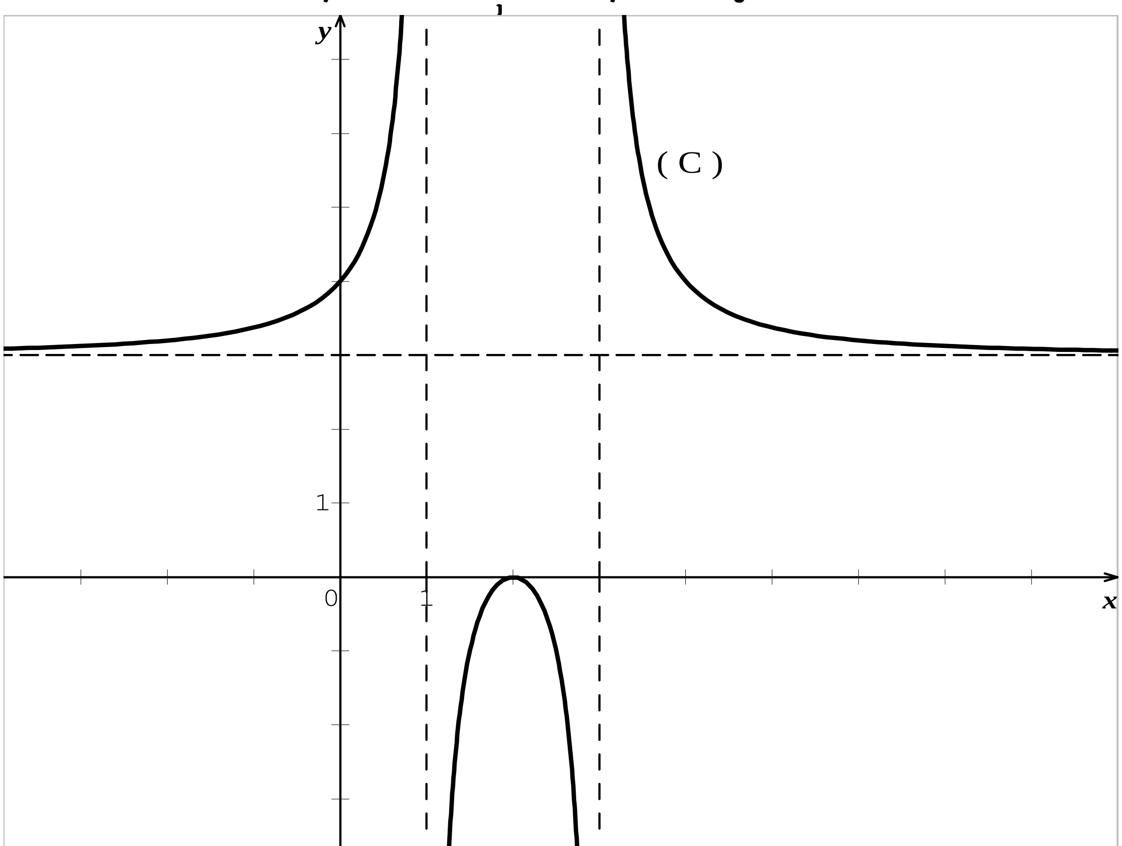
គេបាន $$f(4 - x_0) = \frac{3(4 - x_0 - 2)^2}{(4 - x_0)^2 - 4(4 - x_0) + 3}$$

$$f(4 - x_0) = \frac{3(2 - x_0)^2}{16 - 8x_0 + x_0^2 - 16 + 4x_0 + 3}$$

$$f(4 - x_0) = \frac{3(x_0 - 2)^2}{x_0^2 - 4x_0 + 3} = f(x_0)$$ ពិត ។

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = 2$ ជាអក្ស័ឆ្លុះនៃក្រាប (c) ។

ឃ. សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$



លំហាត់ទី៣០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x+1-e^{x}$ កំនត់លើ IR ។

ក-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កាលណា $x\to-\infty$ និង $x\to+\infty$ ។

ខ-បង្ហាញថាខ្សែកោង (c) តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$

មានអាស៊ីមតូតទ្រេតមួយកាលណា$x\to-\infty$ ។

គ-គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាលីមីត

គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1-e^{x})=-\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ ។

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1-e^{x})=\lim_{x\to+\infty}\left[e^{x}.\left(\frac{x+1}{e^{x}}-1\right)\right]=-\infty$$

ព្រោះ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{e^{x}}=0\end{cases}$

ខ-បង្ហាញថាខ្សែកោង (c) តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតមួយះ

គេមាន $f(x)=x+1-e^{x}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=x+1$

ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) ។

គ-គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$

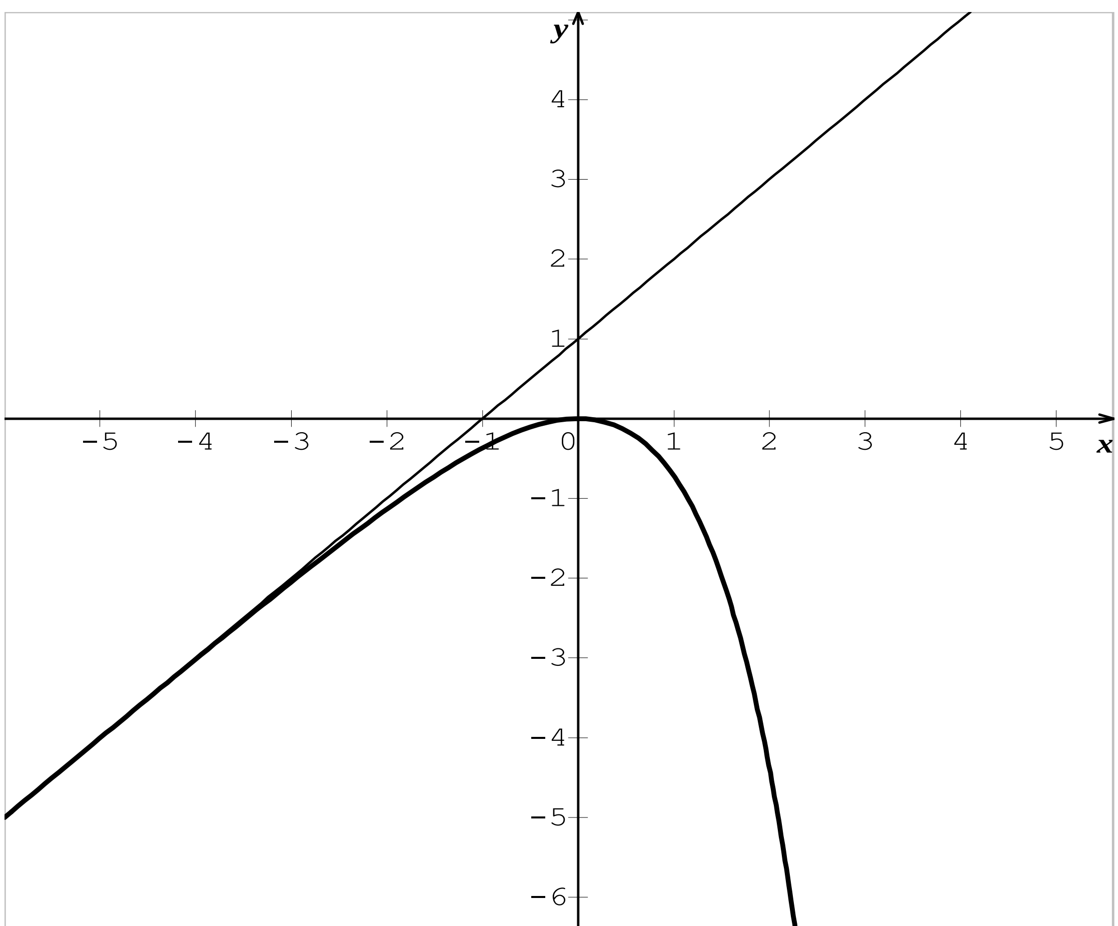
គេមាន $f(x)=x+1-e^{x}$ នាំឱ្យ $f'(x)=1-e^{x}$

បើ $f'(0)=0$ គេបាន $e^{x}=1$ នាំឱ្យ $x=0$

ហើយ $f(0)=0+1-e^{0}=1-1=0$ ។

យើងអាចគូសតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$					
$f(x)$		↗		↘	



លំហាត់ទី៣១

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ $]0,+\infty[$ ដោយ $f(x)=x-1-\ln x$

ក-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ខ-គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

គ-ចូរសង់ក្រាប (c) តំនាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់

ឃ-គណនាក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង (c) ជាមួយអក្ស័អាប់ស៊ីស ក្នុងចន្លោះ $[1,e]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(x-1-\ln x)=+\infty$$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ ។

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)\right]=+\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=1$ ។

ខ-គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$

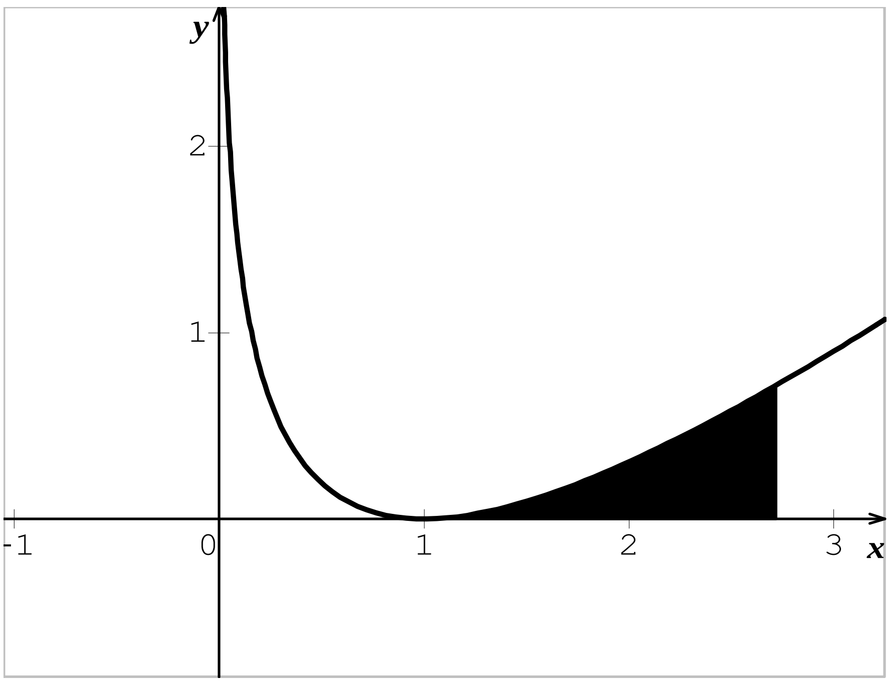
គេមាន $f(x)=x-1-\ln x$ មានដែនកំនត់ $D=]0,+\infty[$

គេបាន $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ បើ $f'(x)=\frac{x-1}{x}=0$ នាំឱ្យ $x=1$

និង $f(1)=0$ ។

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

គ-សង់ក្រាប (c) តំនាងអនុគមន៏ $y=f(x)$ ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់



ឃ-គណនាក្រឡាផ្ទៃ

តាង S ជាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង (c) ជាមួយអក្ស័អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[1,e]$

គេបាន $S=\int_1^e (x-1-\ln x).dx=\int_1^e (x-1).dx-\int_1^e \ln x.dx$

$$\int_1^e (x-1).dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^e=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}=\frac{(e-1)^2}{2}$$

$$\int_1^e \ln x.dx=[x\ln x-x]_1^e=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)=e-e+1=1$$

ដូចនេះ $S=\frac{(e-1)^2}{2}-1=\frac{e^2-2e-1}{2}$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x+1}{e^{2x}}$ មានក្រាបតំនាង (c) ។

ក-គណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការអាសុីមតូតដេកមួយនៃក្រាប (c) ។

ខ-គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

គ-ចូរសង់ក្រាប (c) ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ ។

ឃ-គណនាក្រឡាផ្ទៃ $S(\lambda)$ នៃប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប ជាមួយអក្ស័អាប់សុីសក្នុងចន្លោះ $[-1,\lambda]$,$(\lambda>-1)$ រួចទាញរក $\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ៖

គេបាន $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{e^{2x}}\right)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{-2x}=-\infty$

ព្រោះ $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty\\ \lim_{x\to-\infty} e^{-2x}=+\infty\end{cases}$

និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{e^{2x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-2x}=0$

ព្រោះ $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty} e^{-2x}=0\end{cases}$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=0$ ជាសមីការអាសុីមតូតដេកមួយនៃក្រាប (c) ។

ខ-គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=\frac{x+1}{e^{2x}}=(x+1).e^{-2x}$ កំនត់លើ IR

គេបាន $f'(x)=e^{-2x}-2(x+1).e^{-2x}$

$$=(-2x-1).e^{-2x}$$

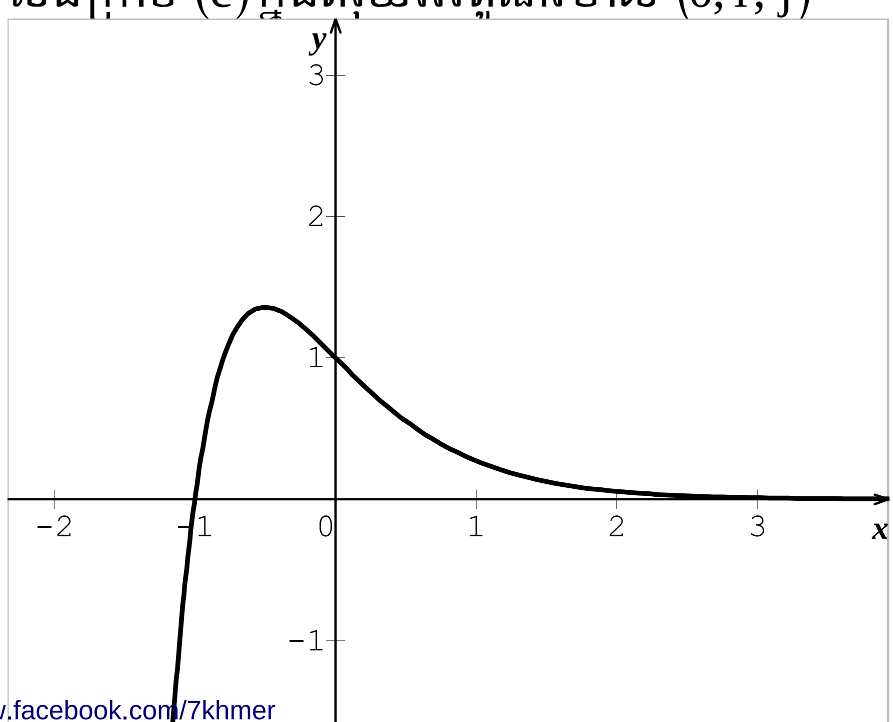
បើ $f'(x)=(-2x-1).e^{-2x}=0$ នាំឱ្យ $x=-\frac{1}{2}$

ចំពោះ $x=-\frac{1}{2}$ នាំឱ្យ $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{2}$ ។

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	↗		↘

គ-សង់ក្រាប (c) ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$



ឃ-គណនាក្រឡាផ្ទៃ $S(\lambda)$:

យើងបាន $S(\lambda)=\int_{-1}^{\lambda} f(x).dx=\int_{1}^{\lambda}(x+1).e^{-2x}.dx$

តាង $\begin{cases} u=x+1 \\ dv=e^{-2x}.dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=dx \\ v=-\dfrac{1}{2}.e^{-2x} \end{cases}$

$$S(\lambda)=\left[-\frac{1}{2}(x+1).e^{-2x}\right]_{-1}^{\lambda}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{\lambda} e^{-2x}.dx$$

$$=-\frac{1}{2}(\lambda+1).e^{-2\lambda}-\frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_{-1}^{\lambda}$$

$$=-\frac{1}{2}(\lambda+1).e^{-2\lambda}-\frac{1}{4}\left(e^{-2\lambda}-e^{2}\right)$$

$$=-\frac{\lambda}{2}e^{-2\lambda}-\frac{1}{2}e^{-2\lambda}-\frac{1}{4}e^{-2\lambda}+\frac{e^{2}}{4}$$

$$=\frac{e^{2}}{4}-\frac{1}{4}(2\lambda+3).e^{-2\lambda}$$

ដូចនេះ $\boxed{S(\lambda)=\dfrac{e^{2}}{4}-\dfrac{1}{4}(2\lambda+3).e^{-2\lambda}}$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

និង $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\dfrac{e^{2}}{4}-\dfrac{1}{4}(2\lambda+3).e^{-2\lambda}\right]=\dfrac{e^{2}}{4}$ ។

(ព្រោះ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{4}(2\lambda+3).e^{-2\lambda}=0$) ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=(1-x).e^{x}-1$ កំនត់លើ IR ។

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

ទាញបញ្ជាក់សញ្ញានៃអនុគន៍ $f(x)$ ។

ខ. គេឱ្យ g ជាអនុគមន៍ កំនត់លើ IR ដោយ $g(x)=(2-x).e^{x}+2-x$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ។

គ. គណនាដេរីវេ $g'(x)$ រួចបញ្ជាក់សញ្ញារបស់ $g'(x)$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(d): y=2-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

តាងអនុគមន៍ g កាលណា $x\to-\infty$ ។

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (d) ។

ង.សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (d)

ច. កំនត់កូអរដោនេចំនុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង (C) ។

ឆ. ចូរសង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ (T) និង (d) ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f

គេមាន $f'(x)=(1-x)'.e^{x}+(e^{x})'.(1-x)$

$$= -e^x + e^x(1-x)$$
$$= -e^x + e^x - x.e^x$$
$$= -x.e^x$$

បើ $f'(x) = -x.e^x = 0$ នាំអោយ $x = 0$ ។

ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $f(0) = (1-0).e^0 - 1 = 0$ ។

គណនាលីមីតៈ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[(1-x).e^x - 1\right] = -1$$

និង $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(1-x).e^x - 1\right] = -\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	↗		↘

ទាញបញ្ជាក់សញ្ញានៃអនុគមន៍ $f(x)$:

តាមតារាងខាងលើគេទាញបាន $\forall x \in IR : f(x) \le 0$ ។

ខ គណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} g(x)$:

គេបាន $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[(2-x).e^x + (2-x)\right] = +\infty$

ព្រោះ $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty}(2-x) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty}(e^x) = 0 \end{cases}$

គេបាន $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(2-x).e^x + (2-x)\right] = -\infty$

ព្រោះ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(2-x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x) = +\infty \end{cases}$

គ. គណនាដេរីវេ $g'(x)$ រួចបញ្ជាក់សញ្ញារបស់ $g'(x)$៖

គេមាន $g(x) = (2-x).e^x + 2 - x = (2-x)(e^x+1)$

គេបាន
$$\begin{aligned} g'(x) &= (2-x)'(e^x+1) + (e^x+1)'(2-x) \\ &= -(e^x+1) + e^x.(2-x) \\ &= -e^x - 1 + 2e^x - x.e^x = e^x - x.e^x - 1 \\ &= (1-x).e^x - 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{g'(x) = (1-x).e^x - 1}$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $g'(x) = (1-x).e^x - 1 = f(x)$

ហើយគេមាន $\forall x \in IR : f(x) \le 0$

ដូចនេះ $\forall x \in IR : g'(x) \le 0$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$៖

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$			
$g(x)$		$\searrow$	

ចំពោះ $x = 0$ នាំអោយ $g(0) = 4$

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(d): y = 2 - x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

គេមាន $\begin{cases} (C): g(x) = (2-x).e^{x} + 2 - x \\ (d): y = 2 - x \end{cases}$

គេបាន $g(x) - y = (2-x).e^{x}$

ដោយគេមាន $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x) - y] = \lim\limits_{x\to-\infty}[(2-x).e^{x}] = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(d): y = 2 - x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (d) ៖

គេមាន $g(x) - y = (2-x).e^{x}$ មានសញ្ញាដូច $2 - x$

ព្រោះ $\forall x \in IR : e^{x} > 0$

តារាងសញ្ញានៃ $g(x) - y = (2-x).e^{x}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x) - y$	$+$		$-$

-ចំពោះ $x \in]-\infty, 2[$ ខ្សែកោង (C) នៅពីលើបន្ទាត់ (d) ។

-ចំពោះ $x = 2$ ខ្សែកោង (C) ប្រសព្វបន្ទាត់ (d) ត្រង់ចំនុច $A(2,0)$ ។

-ចំពោះ $x \in]2, +\infty[$ ខ្សែកោង (C) នៅពីក្រោមបន្ទាត់ (d) ។

ង. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (d) ៖

តាង $M_0(x_0, y_0)$ ជាចំនុចប៉ះរវាងបន្ទាត់ (T) ជាមួយ (C)

តាមរូបមន្ត $(T): y - y_0 = y'_0.(x - x_0)$

ដោយ $(T)//(d): y = 2 - x$ នាំឱ្យ $y'_0 = -1$

តែ $y'_0 = g'(x_0) = (1 - x_0)e^{x_0} - 1$

គេទាញបាន $(1 - x_0)e^{x_0} - 1 = -1$ នាំឱ្យ $x_0 = 1$

ហើយ $y_0 = g(x_0) = e + 1$

គេបាន $(T): y - (e + 1) = -1.(x - 1)$

ដូចនេះ $(T): y = -x + e + 2$ ។

ច. កំនត់កូអរដោនេចំនុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង (C) ៖

គេមាន $g'(x) = (1 - x).e^x - 1 = f(x)$

គេបាន $g''(x) = f'(x) = -x.e^x$ មានឫស $x = 0$ ។

ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $g(0) = 4$ ។

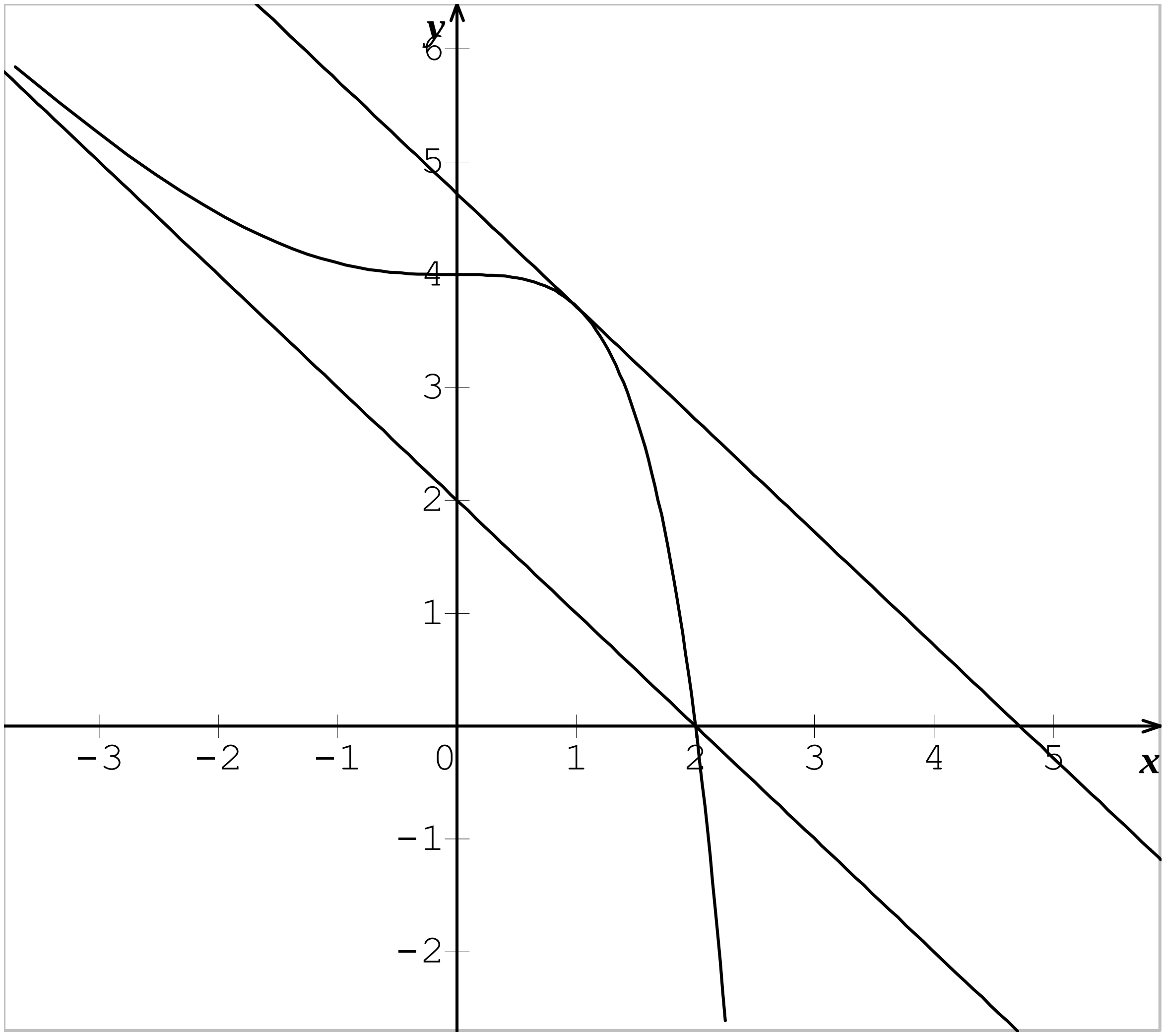
តារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $g''(x) = -x.e^x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$			
$g(x)$			

ដោយត្រង់ចំនុច $x = 0$ កន្សោម $g''(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

នាំឱ្យ $I(0,4)$ ជាចំនុចរបត់នៃក្រាប ។

ឆ. សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ (T) និង (d)ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ ៖



✍✍✍✍✍