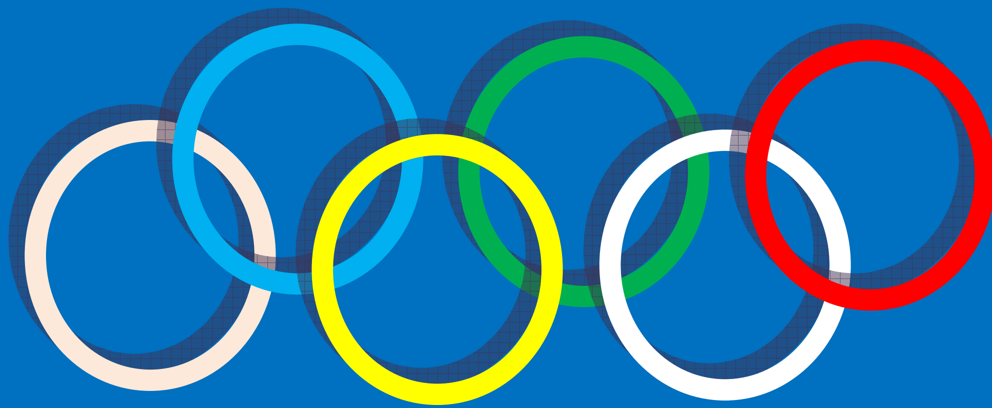
រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

Prepared by : LIM PHALKUN



គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

$$\mathbf{a^2 - ab + b^2 \geq \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{2}}}$$

Problem and Solution

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយ៍មិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !

សៀវភៅគណិតវិទ្យាអូឡាំពិច ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងតែកាន់អាននៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងចងក្រងឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំណងត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសថ្នាក់ជាតិ និង ដើម្បីត្រៀមទៅចូលរួមប្រឡងគណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ (IMO : International Mathematical Olympiad) និងជាពិសេសគឺដើម្បីចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យានៅក្នុងប្រទេសកម្ពុជាយើងក្នុងន័យបង្កើនធនធានមនុស្សអោយមានកាន់តែច្រើនបន្ថែមទៀតដើម្បីអភិវឌ្ឍន៍ប្រទេសជាតិយើង ។

នៅក្នុងសៀវភៅនេះរួមមានបីជំពូកគឺ ជំពូកទី១ ជាកម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសជុំវិញពិភពលោកចំនួន 168 លំហាត់ ជំពូកទី២ ជាផ្នែកដំណោះស្រាយ និង ជំពូកទី៣ ជាកម្រងលំហាត់អនុវត្តន៍សម្រាប់អ្នកសិក្សាហ្វឹកហាត់ធ្វើដំណោះស្រាយដោយខ្លួនឯង ។

សៀវភៅគណិតវិទ្យាអូឡាំពិចនេះ មិនមែនជាសៀវភៅ ដែលល្អហួសគេ ហួសឯងនោះទេ កំហុសឆ្គងដោយអចេតនា ប្រាកដជាកើតមានជៀសពុំរួច ទាំងបច្ចេកទេស និងអក្ខរាវិរុទ្ធ អាស្រ័យហេតុនេះ ខ្ញុំបាទជាអ្នករៀបរៀង រង់ចាំជានិច្ចនូវមតិ រិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បី កែលំអសៀវភៅនេះអោយកាន់តែមានសុក្រិត្យភាពបន្ថែមទៀត។

ជាទីបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទជាអ្នករៀបរៀង សូមគោរពជូនពរចំពោះ ប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន សូមមានសុខភាពល្អ មាន ប្រាជ្ញាឈ្លៀសវៃ និង មានជ័យជំនះក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបង ថ្ងៃទី ៣១ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ២០១១

អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង **លឹម ផល្កុន**

Tel : 017 768 246

គណៈកម្មការនិពន្ធ

លោក លឹម ផល្គុន　　　　លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោក អ៊ឹង សំណាង

អ្នកវាយអត្ថបទ

លោកស្រី លី គុណ្ណកា　　　　លោក អ៊ឹង សំណាង

អ្នករចនាទំព័រ និង ក្របសៀវភៅ

លោកស្រី លី គុណ្ណកា　　　　លោក អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការពិនិត្យ

លោក យ៉ង់ ធារី　　　　លោក អ៊ឹង សំណាង

អ្នកស្រី ទុយ រីណា　　　　លោក លឹម ធុន

អ្នករៀបរៀង លោក លឹម ផល្គុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

ត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធដោយ លោក លឹម មិគ្គសិរ

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

១-ចូរបង្ហាញថា $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897

២-គេយក x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = 1$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{yz+z} + \frac{1}{zx+x} + \frac{1}{xy+y} \geq \frac{3}{2}$

៣-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$ ដែល $x \neq -1$ ។

គណនា $f_n[f[...f[f(x)]...]]$

៤-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A} + \frac{\sin^2 B}{\cos^3 B} + \frac{\sin^2 C}{\cos^3 C} \geq 18$

៥-គេឱ្យ $a ; b ; c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា៖

$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$ ។

៦-គេតាង α,β,γ ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែលមាន

បរិមាត្រ $2p$ និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ R ។

$\mathbf{a}/$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geq 3\left(9.\frac{R^2}{p^2}-1\right)$

$\mathbf{b}/$ តើពេលណាទើបគេបានសមភាព ?

៧-ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព៖

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c ។

៨-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_0=a \\ u_{n+1}={u_n}^2-2 \quad , \forall n\in IN \quad , a>2 \end{cases}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

៩-ក.ចូរកំនត់លេខនៃអញ្ញាត a , b , c , d នៃចំនួន $\overline{abcd}$

បើគេដឹងថា $\overline{abcd} \times 9 = \overline{dcba}$

ខ.ចំពោះតម្លៃ a , b , c , d ដែលបានរកឃើញខាងលើចូរបញ្ជាក់ថា

ចំនួន $\overline{abcd}$ និង $\overline{dcba}$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

១០-ចំនួនមួយមានលេខបួនខ្ទង់ដែលលេខខ្ទង់វារៀបតាមលំដាប់

$$a ; a ; b ; b$$ ។

រកចំនួននោះបើគេដឹងថាវាជាការេប្រាកដ ។

១១-គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ និង } \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ដែល } n \geq 1$$

ក. គេពិនិត្យស្វីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា (z_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា z_n

ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សំដែង $\mathbf{u_n}$ និង $\mathbf{v_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ ។

១៣-ក-ប្រសិនបើ $\mathbf{p \geq -1}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n \in IN}$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$\mathbf{(1+p)^n \geq 1+np \quad (1)}$ ។

ខ-គេឲ្យ $\mathbf{a_1, a_2, a_3, ..., a_n}$ ជា $\mathbf{n}$ ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

គេតាង $\mathbf{A_n = \dfrac{a_1+a_2+a_3+....+a_n}{n}}$

និង $\mathbf{G_n = \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3......a_n}}$ ។

បង្ហាញថាប្រសិនបើ $\mathbf{G_k \leq A_k}$ ហើយ $\mathbf{A_k \neq 0}$

គេបាន $\mathbf{{G_k}^k.a_{k+1} \leq {A_k}^{k+1}(1+p)}$ ដែល $\mathbf{p = \dfrac{a_{k+1}}{A_k} - 1}$ ។

គ-ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$\mathbf{a_1+a_2+a_3+.....+a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2a_3....a_n}}$ ។

១៣-សមីការ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ មានឫសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

(មិនចាំបាច់ខុសគ្នា)។

ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\dfrac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \dfrac{c}{b}$ ។

១៤-គេឱ្យ $x, y, z > 0$ ដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{x^3}{(1-x)^2} + \dfrac{y^3}{(1-y)^2} + \dfrac{z^3}{(1-z)^2} \geq \dfrac{1}{4}$

១៥-គេកំណត់ចំនួន $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ដូចខាងក្រោម៖

$$a_0 = \frac{1}{2}; a_{k+1} = a_k + \frac{{a_k}^2}{n} \quad (\ n > 1, k = 0, 1, 2, ..., n-1\ )$$

ចូរបង្ហាញថា $1 - \dfrac{1}{n} < a_n < 1$ ។

១៦-គេយក a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab + bc + ca = abc$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \dfrac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \dfrac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geq 1$

១៧-គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right)=\tan x.\tan^2\frac{x}{2}.\tan^4\frac{x}{4}.....\tan^{2^n}\frac{x}{2^n}$$

១៨-ចំនួនពិត a, b, c, x, y, z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a\ge b\ge c>0$

និង $x\ge y\ge z>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\ge\frac{3}{4}$$

១៩-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\sqrt[6]{\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{8}}+\sqrt[3]{abc}$$

២០-ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge 4\sqrt{\frac{R}{r}}$$

ដែល r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

២១-ចូរស្រាយថា ៖

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ។

២២-ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1=\frac{21}{16}$

និងចំពោះ $n\ge 2 : 2a_n-3a_{n-1}=\frac{3}{2^{n+1}}$

គេយក m ជាចំនួនគត់មួយដែល $m\ge 2$ ។

ចូរបង្ហាញថាចំពោះ $n\le m$

យើងបាន $\left(a_n+\frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<\frac{m^2-1}{m-n+1}$

២៣-គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\sin^2 B+\sin^2 C=1+\sin B\sin C\cos A$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

២៤-គណនាផលបូក $S=\sum_{i=0}^{101}\frac{{x_i}^3}{1-3x_i+3{x_i}^2}$

ដែល $x_i=\frac{i}{101}$; $i=1,2,3,...$ ។

២៥-គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

២៦-បើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ r ជាកាំរង្វង់

ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនោះចូរស្រាយថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$ ។

២៧-គេឲ្យស្វ៊ីត $U_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$

ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

ក-ចូរកំនត់ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ-ចូរបង្ហាញថា $U_1\times U_2\times U_3\times......\times U_n=\frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\pi}{3.2^n}}$ ។

គ-គេពិនិត្យស្វីត $V_n = 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$ ។

ចូរគណនា V_n និង លីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ ។

២៨-គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x^4+y^4+z^4=1$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}$ ។

២៩-ចូរបង្ហាញថាបើ $abc=8$ និង $a, b, c>0$ នោះគេបាន ៖

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\geq\frac{4}{3}$$

៣០-គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយដឹងថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$

ជាចំនួនគត់។

ចូរស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ។

៣១-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

៣២-គេឲ្យ $a \geq 1$ និង $b \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

៣៣-គណនាផលគុណ ៖

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right]$$ ដែល $|x| < \frac{\pi}{2^{n+2}}$

៣៤-គេឱ្យចំនួនពិត $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 > 0, x_2 > 0$

$x_1y_1 - z_1^2 > 0$ និង $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ ។

ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$

៣៥-គេឱ្យ $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3^k}\right) = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{3^3} + ... + \frac{n^2}{3^n}$

គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} S_n$

៣៦-គេមាន

$$6^2-5^2=11\ ,\ 56^2-45^2=1111\ ,\ 556^2-445^2=111111$$

$$5556^2-4445^2=11111111$$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះផង

៣៧-គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលមានផលបូកស្មើ 6 ។

ចូរកំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$

៣៨-គេអោយបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{a^3}{(b+c)^3}+\frac{b^3}{(c+a)^3}+\frac{c^3}{(a+b)^3}\geq\frac{3}{8}$$

៣៩-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\ \geq\ f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

៤០-គណនាផលបូក ៖

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}\right]$$

រួចទាញរកតម្លៃ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

៤១-គេឲ្យ θ ជាចំនួនពិតដែល $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

៤២-ចូរកំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់ m , $n\geq 3$ បើគេដឹងថាចំពោះគ្រប់

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a គេមាន $\frac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}$ ជាចំនួនគត់ ។

៤៣-គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$

៤៤-គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដោយដឹងថា

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{3}{16}$$

៤៥-គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំនៃរង្វង់ចារិកក្នុង និង ចារិកក្រៅ

ប្រស់ត្រីកោណកែង ABC មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $R \ge (1+\sqrt{2})\,r$?

៤៦-គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1$ ។

ចូរបង្ហាញវិសមភាព ៖

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\ge x+y+z$$

៤៧-គេឱ្យ a, b, c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\ge ab+bc+ca$$

៤៨-គេឱ្យ a ; b ; c ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមាន

បរិមាត្រស្មើ 2 ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

៤៩-គណនាតម្លៃនៃផលគុណ

$$P = (1 - \cot 1^o)(1 - \cot 2^o)(1 - \cot 3^o).....(1 - \cot 44^o)$$

៥០-គេឱ្យ a, b , c, d ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព ៖

$$(a^2 + b^2 - 1)(c^2 + d^2 - 1) > (ac + bd - 1)^2$$

ចូរបង្ហាញថា $a^2 + b^2 > 1$ និង $c^2 + d^2 > 1$ ។

៥១-គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (y_n) កំនត់ដោយ

$y_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $y_{n+1} = \dfrac{{y_n}^2}{\sqrt[3]{{y_n}^6 - 2{y_n}^3 + 2}}$

ដែល $n = 0 , 1 , 2 , ...$ ។ ចូរគណនា y_n ជាអនុគមន៍នៃ n

៥២-គេមាន $99^2 = 9801$, $999^2 = 998001$, $9999^2 = 99980001$

$99999^2 = 9999800001$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅនិងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះផង

៥៣-គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ។

ចូរស្រាយថា $\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right) \le \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$ ។

៥៤-គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $4abc = a+b+c+1$

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} \ge 2(ab+bc+ca)$$

៥៥-គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{និង} \begin{cases} u_{n+1} = {u_n}^2 - {v_n}^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases} \quad \text{ដែល } n \ge 0$$

ក. គេពិនិត្យស្វីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = z_n^{\ 2}$ រួចទាញថា $z_n = z_0^{\ 2^n}$ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៥៦-គេឲ្យ x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = 1$,

ចូរបង្ហាញថា $$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

៥៧-ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ។

៥៨-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$$u_1 = \frac{7}{2} \text{ និង } u_{n+1} = u_n^{\ 2} + u_n - \frac{1}{4} \text{ គ្រប់ } n \geq 1$$

បង្ហាញថាគេអាចកំណត់ចំនួនពិត a ដែល $u_{n+1} + a = (u_n + a)^2$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៥៩-គេឱ្យ $x\,;\,y\,;\,z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$ ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$

៦០-ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x,y\in IR$ ។

៦១-ស្វីតនៃចំនួនពិត $(a_n)_{n\ge1}$ កំណត់ដោយ $a_1=1$, $a_2=3$

និង $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n\ ,\forall n\in IN$

ចូរកំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 ។

៦២-គេឲ្យអនុគមន៍ ៖

$$f(x,y)=\frac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}\ ,\ x\,;\ y\in IR$$

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$ គេបាន $|f(x;y)|\le\frac{1}{4}$

៦៣-គេឱ្យ $A ; B ; C$ ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C) \geq (1+\sqrt{3})^3$

៦៤-គេមាន $33^2 = 1089$, $333^2 = 110889$, $3333^2 = 11108889$

$33333^2 = 1111088889$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះផង

៦៥-គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 2(\frac{b+c}{2}-a)^3$ ។

៦៦-ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 1 ។

ចំនួន n នោះចែកនឹង 5 ឱ្យសំណល់ 2 ។

ក-បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ-រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3940 < n < 4000$ ។

៦៧-គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1, z_2, z_3 ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ និង $\frac{{z_1}^2}{z_2 z_3} + \frac{{z_2}^2}{z_1 z_3} + \frac{{z_3}^2}{z_1 z_2} + 1 = 0$

ចូរស្រាយថា $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1, 2\}$ ។

៦៨-គេឱ្យ $x; y; z$ ជាចំនួនពិតដែល $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + yz + zx = 3 \end{cases}$

ចូរបង្ហាញថា $-1 \le z \le \frac{13}{3}$

៦៩-ចូរកំនត់គ្រប់គូ $(m;n)$ នៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាមានបើគេដឹងថា ៖

$m^2 + n^2 = 13(m+n)$ ។

៧០-ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x, y) ដោយដឹងថា

$x^2y + x + y$ ចែកដាច់នឹង $xy^2 + y + 7$ ។

៧១-ក.គណនា $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n-1)n}$ ដែល $n > 2$

ខ.ដោយប្រើវិសមភាព $AM - GM$ នៃ $(n-1)$ ចំនួនខាងក្រោម ៖

$\frac{1}{1.2}\,;\,\frac{1}{2.3}\,;\,\frac{1}{3.4}\,;\,\frac{1}{(n-1)n}$ ចូរបង្ហាញថា $n^n < (n!)^2$ ។

៧២-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\in(0,\frac{\pi}{4})$

ចូរបង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$

៧៣-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

៧៤-គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ដែល $|z_1|=|z_2|=1$

ចូរស្រាយថា $|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+1|\ge 2$

៧៥-ចំពោះគ្រប់ $x;y\ge 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ៖

$$\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{y^2+y+1}\ge 2(x+y)$$

៧៦-គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$16(a+b+c)\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3}\le\frac{8}{9}$$

៧៧-ចូរគណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{2}{3+1}+\frac{2^2}{3^2+1}+.....+\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}$$

៧៨-គេឱ្យស្វីត $a_1=1, a_2=5$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n a_{n-1}}{\sqrt{a_n{}^2+a_{n-1}^2+1}}$ $\forall n\ge 2$

ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស្វីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៧៩-ប្រសិនបើ $xyx=(1-x)(1-y)(1-z)$ ដែល $0\le x;y;z\le 1$

ចូរបង្ហាញថា $x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)\ge\dfrac{3}{4}$

៨០-គេឱ្យ $a_1,a_2,...,a_n>0$ និង $x_1,x_2,...,x_n>0$ ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{a_1{}^2}{x_1}+\frac{a_2{}^2}{x_2}+...+\frac{a_n{}^2}{x_n}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{x_1+x_2+....+x_n}$$

៨១-គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

៨២-គេឱ្យ $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n\in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

៨៣-គេឱ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c$ ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន និង $x,\ y\ ,\ z$

ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដោយដឹងថា $a+b+c=x+y+z$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\ge a+b+c$ ។

៨៤-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (z_n) កំណត់ដោយ ៖

$$z_1=\frac{2+\sqrt{3}+i}{2}\ \text{និង}\ z_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}z_n+\frac{2-\sqrt{3}-i}{2}$$

ដែល $n=1\ ,\ 2\ ,3\ ,...$ ។

ក. តាង $w_n=z_n-1$ ។ បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួន

កុំផ្លិច រួចគណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផល

ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$ ។

៨៥-គេយក a , b , c ជាចំនួនវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \ge 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$

៨៦-គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត $(v_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ ៖

$v_0 = \sqrt{5}$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $v_{n+1} = 2v_n{}^2 - 1 \ ; \forall n \ge 0$

បង្ហាញថា $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{v_n{}^2 - 1}\ )^2$

រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៨៧-គណនាផលបូក $S_n = \frac{1^3}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + ... + \frac{n^3}{2^n}$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

៨៨-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត(U_n)កំនត់ដោយ$U_n = \sqrt{2}^n.\sin\frac{n\pi}{4}$

ដែល $n \in IN^*$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គ-គណនាផលបូក ៖

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៨៩-ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេឱ្យ ៖

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$
$$T_n = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n$$
$$U_n = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{3} + \frac{T_3}{4} + ... + \frac{T_n}{n+1}$$

ចូរកំណត់ដោយធ្វើដំណោះស្រាយ នូវចំនួនគត់

$0 < a, b, c, d < 1000000$ ដោយដឹងថា $T_{1988} = aS_{1989} - b$

និង $U_{1988} = cS_{1989} - d$ ។

៩០-គេឲ្យ x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

៩១-ចំពោះ a និង b ជាចំនួនពិត សមីការ

$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ មានឫសយ៉ាងតិច

មួយជាចំនួនពិត។

ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ $a^2 + b^2$?

៩២-គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល $a_1 = \frac{1}{2}$

និងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n យើងមាន $a_{n+1} = \frac{{a_n}^2}{{a_n}^2 - a_n + 1}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n យើងមាន ៖

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n < 1$ ។

៩៣-គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2+ab+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2b^2+bc+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{2c^2+ca+a^2}}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

៩៤-គេឱ្យ $x_1,x_2,...,x_n$ (ដែល $n\geq 2$)ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $$\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1}\geq 1998$ ។

៩៥-ចូរកំណត់គូនៃចំនួនគត់ (a,b) ដោយដឹងថា $ax^{17}+bx^{16}+1$

ចែកដាច់នឹង x^2-x-1 ។

៩៦-គេឲ្យ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-5}{2(a_n+2)}$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

៩៧-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$$U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ និង } U_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_n^{\ 2}}}{2}} \quad , \forall n \in IN$$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៩៨-គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតខុសគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$ ។

៩៩-គេឱ្យ $P(x) = x^5 + ax^2 + b$ មានឫសប្រាំ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 និង

$f(x) = x^2 - 3$ ។

រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)$ ។

១០០-គេយក a , b , c ជាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$

១០១-គេឱ្យ $a\,,b\,,c>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

១០២-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2-2$ ដែល $x\in IR$

ក-គេយក $U_1=f(x)$ និង $U_{n+1}=f(U_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_n=f_n[\,f[.......f[f(x)].......]\,]$ ។

ខ-ស្រាយថាបើ $x>2$ គេបាន $U_n>2$ គ្រប់ $n\in IN$ ។

គ-គេតាង $V_n=U_n-\sqrt{U_n{}^2-4}$ គ្រប់ $n\in IN$ និង $x>2$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ចូរបង្ហាញថា $2V_{n+1}=V_n{}^2$ ។

ឃ-សន្មតថា $W_n=\ln V_n-\ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត W_n ។

ង-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកអនុគមន៍ ៖

$F_n(x)=f_n[f[........f[f(x)].........]]$ ។

១០៣-គេឱ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{1+yz+zx}{(1+x+y)^2}+\frac{1+zx+xy}{(1+y+z)^2}+\frac{1+xy+yz}{(1+z+x)^2}\geq 1$$ ។

១០៤-គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}\geq\frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

១០៥-ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

១០៦-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_k)_{k\in IN}$ កំនត់ដោយ ៖

$u_0=9$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{k+1}=\sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p u_k{}^p\right)$

ដែល $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$ ។ចូរគណនា u_k ជាអនុគមន៍នៃ k និង n

១០៧-គេឲ្យ n ចំនួន $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in (0,1)$ ហើយគេតាង

$$t_n = n.\frac{a_1.a_2.a_3....a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}$$ ។

ចូរស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} t_n\right) \geq (n-1)n$ ។

១០៨-គេឱ្យ $a ; b ; c$ ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

១០៩-គណនាផលបូក ៖

$S_n = 9 + 99 + 999 + ... + 999....999$ (មានលេខ 9 ចំនួន n លេខ)

១១០-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់

ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា $R \geq (\sqrt{2} + 1)r$

១១១-គេឲ្យបួនចំនួនវិជ្ជមាន a , b , c , d ។

ចូរបង្ហាញថា

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

១១២-គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2}\le\frac{3}{8}$

១១៣-គេឱ្យស្វីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} a_1=1 , a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n \ , n=1 , 2 , 3 ,\dots \end{cases}$$

គេតាងស្វីតចំនួនកុំផ្លិច $z_n=a_{n+1}-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_n$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។

ខ. ចូរដាក់ $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក

z_n ជាអនុគមន៍ នៃ n ។

គ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត a_n ។ តើ (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបឬទេ ។

១១៤-គេឱ្យ $a\,;b\,;c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

១១៥-គេឲ្យ (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតកំនត់លើ IN

ដោយ $x_0=5\,,\,y_0=1$ និងទំនាក់ទំនងកំនើន ៖

$x_{n+1}=x_n{}^3+3x_ny_n{}^2$ និង $y_{n+1}=3x_n{}^2y_n+y_n{}^3$ គ្រប់ $n\in IN$

ចូរគណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១១៦-ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$a_1\,,a_2\,,....,a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1a_2a_3....a_n=1$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{a_i{}^4+3}}\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$ ។

១១៧-គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}+\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}\le 2$$

១១៨-ឲ្យពហុធា $P(x)=(x\sin a+\cos a)^n$ ដែល $n\in IN^*$

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2+1 ។

១១៩-គណនាតម្លៃ

$$A=(\sqrt{3}+\tan 1^o)(\sqrt{3}+\tan 2^o)(\sqrt{3}+\tan 3^o)...(\sqrt{3}+\tan 29^o)$$

១២០-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $[0,1]$ ដោយដឹងថា ៖

$f(0)=f(1)=1$ និង $|f(a)-f(b)|<|a-b|$

ចំពោះគ្រប់ $a\neq b$ ក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|f(a)-f(b)|<\frac{1}{2}$ ។

១២១-គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = x + y + z$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x+y}{1+z^2} + \frac{y+z}{1+x^2} + \frac{z+x}{1+y^2} \geq \frac{27}{2xyz}$ ។

១២២-ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

ហើយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a+b}{\cos C} + \frac{b+c}{\cos A} + \frac{c+a}{\cos B} \geq 4(a+b+c)$

១២៣-គេឲ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមានផ្ទៃក្រឡា

ស្មើនឹង S ។ ចូរស្រាយថា $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\, S$ ។

១២៤-គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង $u_{n+1} = \frac{u_n^{\ 4}}{4u_n^{\ 3} + 6u_n^{\ 2} + 4u_n + 1}$ គ្រប់ $n \in IN$

ចូរបង្ហាញថា $1 + \frac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^4$ គ្រប់ $n \in IN$

រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១២៥-ចូរកំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់វិជ្ជមាន (a , b) បើគេដឹងថាចំនួន ៖

$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែរ ។

១២៦-គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a + b + c = 3$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\frac{a^2}{a + b^2} + \frac{b^2}{b + c^2} + \frac{c^2}{c + a^2} \ge \frac{3}{2}$

១២៧-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c គេកំណត់តាង $A = \frac{a + b + c}{3}$

$G = \sqrt[3]{abc}$ និង $H = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\left(\frac{A}{G}\right)^3 \ge \frac{1}{4} + \frac{3}{4}.\frac{A}{H}$

១២៨-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases} 27^x + 3^{x+1} x^2 (\log_2 y)^2 = 36 \\ 3^{1+2x} x \log_2 y + x^3 (\log_2 y)^3 = 28 \end{cases}$$

១២៩-គេឱ្យស្វីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ ៖

$a_0 = 4$, $a_1 = 9$ និង $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3$

ដែល $n = 0 , 1 , 2 , ...$ ។

ចូរស្រាយថា a_n ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

១៣០-ចូរកំនត់លេខ a និង b ដើម្បីឲ្យចំនួន $\overline{abba}$ ជាគូបនៃចំនួនគត់ ។

១៣១-គេឲ្យចំនួន $A = \overline{a_n a_{n-1} ......a_2 a_1 a_0}$

ដែល $a_0 , a_1 , a_2 , ...,a_n$ ជាលេខ ។

ចូរស្រាយថាចំនួន A ចែកដាច់នឹង 6 កាលណា

$y = 4(a_1 + a_2 + ... + a_n) + a_0$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

១៣២-គេមានស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ និង

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x_n + \frac{1}{2}\sin a(1 - \tan a)y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\cos a(\cot a - 1)x_n + \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)y_n \end{cases}$$

ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ និង $n = 0,1,2,....$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ តាង $u_n = x_n \cos a + y_n \sin a$ និង

$v_n = x_n \cos a - y_n \sin a$ ។

ចូរស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

១៣៣-គេឱ្យ $x ; y ; z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x + y + z = 1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(\frac{1}{z} - 1\right) \ge 8$ ។

១៣៤-ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានខុសគ្នា x,y,z ។

១៣៥-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ ៖

$u_0=1$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+1}=2u_n{}^2+4u_n+1$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

១៣៦-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^3+9x+6}{3x^2+6x+7}$

ចូរគណនា $f_n(x)=\underbrace{f\circ f\circ f\circ .....\circ f}_{(n)}(x)$ ។

១៣៧-ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leq\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,d ។

១៣៨-គេឱ្យ z_1, z_2, z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_2 = 2 \\ {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 = 3 \\ z_1 z_2 z_3 = 4 \end{cases}$

ចូរគណនាតម្លៃ

$$S = \frac{1}{z_1 z_2 + z_3 - 1} + \frac{1}{z_2 z_3 + z_1 - 1} + \frac{1}{z_3 z_1 + z_2 - 1}$$

១៣៩-គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$ ។ ចូរកំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម

$$E = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$$ ។

១៤០-គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ដែល $a + b + c = 1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} \geq \frac{1}{ab + bc + ca}$$

១៤១-គេឲ្យ $a\,,\,b\,,\,c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2\geq 16$

១៤២-គេឲ្យ $A=\overline{a_n a_{n-1}.........a_1 a_0}$ និង $B=\overline{a_n a_{n-1}.........a_1}-2\times a_0$

ស្រាយថា A ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ B ចែកដាច់នឹង 7 ។

១៤៣-គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបី ។ គេដឹងថា $P(x)+2$ ចែកដាច់

នឹង $(x+1)^2$ ហើយ $P(x)-2$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^2$ ។

ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ។

១៤៤-គេឱ្យ $x\in[0,a]$ និងចំនួនគត់ $m,n>0$ ។

ចូរស្រាយថា $x^m(a-x)^n\leq\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$ ។

១៤៥-គេឱ្យ $x\,;\,y\,;\,z>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\geq\frac{1}{2}$$

១៤៦-គេឲ្យពីរចំនួន x និង y ខុសពីសូន្យ និង មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0$ ។

១៤៧-គេយក a , b , c ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(0,1)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

១៤៨-គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$$

១៤៩-គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$

១៥០-គេឱ្យ $a ; b ; c$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរស្រាយថា $a(b^2-\sqrt{b})+b(c^2-\sqrt{c})+c(a^2-\sqrt{a})\geq 0$

១៥១-គេឱ្យ $A\,;\,B\,;C$ ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$

១៥២-គេឱ្យ a,b,c,d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$ ។

បើគេដឹងថា $a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ នោះចូរបង្ហាញថា

$a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$ ។

១៥៣-គេឱ្យ $a\,;b\,;c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

១៥៤-គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល

$ab+bc+ca=\frac{1}{3}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}\leq 3$

១៥៥-ចូរគណនាតម្លៃផលគុណ ៖

$$P=(\sqrt{3}+\tan 1^{o})(\sqrt{3}+\tan 2^{o}).....(\sqrt{3}+\tan 29^{o})$$

១៥៦-គេឱ្យអនុគមន៍ $f:IR\to IR$ ដោយ $f(x)=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^6-x^3+1}$ ។

ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍នេះ ?

១៥៧-គេឱ្យបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a,b,c និងមិនសូន្យព្រមគ្នាពីរ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\ge\frac{9}{4}$$

១៥៨-ចូរបង្ហាញថា $\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right)\ge\left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$

ចំពោះគ្រប់ $a>0\ ,\ b>0\ ,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$

១៥៩-គេតាង I និង O រៀងគ្នាជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងផ្ចិតរង្វង់ចារឹក

ក្រៅនៃត្រីកោណ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\angle OIA = 90^0$ លុះត្រាតែ AB, BC, CA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

១៦០-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c ។

តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ

$\Delta\ ABC$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2pr}{R}$

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

ដែល $p = \frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ខ. ចូរទាញបញ្ជាក់ថា $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(R+r)^2$

(A, B, C ជាមុំស្រួច)។

១៦១-ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស្វីតដែលកំណត់ដោយ ៖

$\mathbf{x_0 = 3, x_1 = 4}$ និង $\mathbf{x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n \in \mathbb{N}}$ ។

១៦២-ចូរគណនាផលបូក ៖

$$\mathbf{S_n = \frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + ... + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}}$$

១៦៣-ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិតនៃសមីការ ៖

$\mathbf{x^3 - 3x = \sqrt{x+2}}$ ។

១៦៤-គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង

$\mathbf{BC = a \ , \ CA = b \ , \ AB = c}$ ហើយមុំក្នុង $\mathbf{A, B, C}$

ជាមុំស្រួចឬមុំកែង ។តាង $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃ $\mathbf{\Delta \ ABC}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{9}{16S^2}}$ ។

១៦៥-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ C ។D និង E ជាចំណុចពីរ

ជ្រើសរើសនៅលើអ៊ីប៉ូតេនូស ដែល$BC = BD$ និង $AC = AE$ ។

F និង G ជាចំណោលកែងនៃ D និង E លើជ្រុង AC និង BC

រៀងគ្នា ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $DE = DF + EG$ ។

១៦៦-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f :\ IR \to IR$ ដោយដឹងថាសមភាព

$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$ ពិតជានិច្ចគ្រប់ $x, y \in IR$ ។

($\lfloor a \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់នៃ a) ។

១៦៧-ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចំនួន $3^n + n^3$

ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ $3^n n^3 + 1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

១៦៨-ក្នុងតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ មួយមាន $\angle BDC = 90^o$ ហើយជើង

នៃចំណោលកែងពី D ទៅប្លង់ (ABC) ជាប្រសព្វនៃកម្ពស់នៃΔABC

ចូរស្រាយថា $(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$

តើពេលណាទើបយើងបានសមភាព ។

លំហាត់ទី១ (Eötvös Competition 1899)

ចូរបង្ហាញថា $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897

គេមាន $1897 = 271 \times 7$ ហើយ $GCD(271, 7) = 1$

តាមរូបមន្ត $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + ... + b^{p-1})$

គេបាន $2903^n - 803^n = (2903 - 803)N_1 = 7 \times 300N_1$

$$464^n - 261^n = (464 - 261)N_2 = 7 \times 29N_2$$

ដែល N_1, N_2 ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

នោះ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n = 7(300N_1 - 29N_2)$

នាំឱ្យ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដូចគ្នាដែរ $2903^n - 464^n = (2903 - 464)N_3 = 271 \times 9N_3$

$$803^n - 261^n = (803 - 261)N_4 = 271 \times 2N_4$$

នោះ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n = 271(9N_3 - 2N_4)$

នាំឱ្យ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 271 ។

ដូចនេះ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897 ។

លំហាត់ទី២ (Kazakhstan 2008)

គេយក x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = 1$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y}\ge\frac{3}{2}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y}\ge\frac{3}{2}$

តាង $x=\frac{a}{b}$; $y=\frac{b}{c}$; $z=\frac{c}{a}$ នោះ $xyz=1$

វិសមភាពសមមូល $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

តាង $T=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$

គេបាន $T\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$

តាមវិសមភាព $\text{AM}-\text{GM}$ គេមាន

$$\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}\geq ab+bc+ca$$

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$$

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$$

គេទាញបាន $T\geq\frac{3}{2}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y}\geq\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x+4}{x+1}$ ដែល $x\neq -1$ ។

គណនា $f_n[f[...f[f(x)]...]]$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $f_n[f[...f[f(x)]...]]$

តាង $a_1 = f(x)$

$$a_2 = f[f(x)] = f(a_1)$$
$$a_3 = f[f[f(x)]] = f(a_2)$$

$$-----------------$$

$$-----------------$$

$$a_n = f_n[f[....f[f(x)]....]] = f(a_{n-1})$$

គេបាន $a_{n+1} = f(a_n) = \dfrac{a_n+4}{a_n+1}$

ដូចនេះការគណនា $f_n[f[...f[f(x)]...]]$ គឺត្រូវកំណត់តួ a_n

នៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1 = f(x) = \dfrac{x+4}{x+1} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+4}{a_n+1}, n \geq 1 \end{cases}$

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីតគឺ $r = \dfrac{r+4}{r+1}$

គេបាន $r^2 + r = r + 4$ នាំឱ្យ $r_1 = -2$, $r_2 = 2$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $b_n = \dfrac{a_n - r_1}{a_n - r_2} = \dfrac{a_n + 2}{a_n - 2}$

គេបាន $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}+2}{a_{n+1}-2} = \dfrac{\dfrac{a_n+4}{a_n+1}+2}{\dfrac{a_n+4}{a_n+1}-2}$

$$b_{n+1} = \frac{3a_n+6}{-a_n+2} = -3.\frac{a_n+2}{a_n-2} = -3b_n$$

នាំឱ្យ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = -3$

និងតួ $b_1 = \dfrac{a_1+2}{a_1-2} = \dfrac{x+4+2x+2}{x+4-2x-2} = -3.\dfrac{x+2}{x-2}$

តាមរូបមន្ត $b_n = b_1 \times q^{n-1} = \dfrac{x+2}{x-2} \times (-3)^n$

ដោយ $b_n = \dfrac{a_n + 2}{a_n - 2}$ គេទាញ $a_n = \dfrac{2(b+1)}{b-1}$

ដូចនេះ៖ $a_n = \dfrac{2[(x+2)(-3)^n + x - 2]}{(x+2)(-3)^n - x + 2}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$

តាង $\sum=\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}$

$$=\frac{\tan^2 A}{\cos A}+\frac{\tan^2 B}{\cos B}+\frac{\tan^2 C}{\cos C}$$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេបាន៖

$$\sum\geq\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{\cos A+\cos B+\cos C}\quad(1)$$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

$$f''(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)>0$$

តាមវិសមភាព **Jensen** គេបាន៖

$$f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f(\frac{A+B+C}{3})$$

ឬ $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\tan(\frac{A+B+C}{3})=3\tan\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$

គេទាញ $(\tan A+\tan B+\tan C)^2\geq 27\ \ (2)$

តាងអនុគមន៍ $g(x)=\cos x$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន $g'(x)=-\sin x$

$$g''(x)=-\cos x<0\ ,\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

នាំឱ្យ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមវិសមភាព **Jensen** គេបាន៖

$$g(A)+g(B)+g(C)\leq 3g(\frac{A+B+C}{3})$$

$$\cos A+\cos B+\cos C\leq 3\cos(\frac{A+B+C}{3})=3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$$

គេទាញ $\frac{1}{\cos A+\cos B+\cos C}\geq\frac{2}{3}$ (3)

គុណវិសមភាព (2) & (3) អង្គ និង អង្គគេបាន៖

$$\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{\cos A+\cos B+\cos C}\geq\frac{27\times 2}{3}=18\ (4)$$

តាម (1) & (4) គេទាញបាន $\sum\geq 18$ ។

ដូចនេះ $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យ a ; b ; c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា៖

$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា៖

$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)\quad (1)$

ជ្រើសរើស $A\,,B\,,C\in\,]0\,;\frac{\pi}{2}[$ ដែល $\begin{cases} a=\sqrt{2}\tan A \\ b=\sqrt{2}\tan B \\ c=\sqrt{2}\tan C \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} a^2+2=2(1+\tan^2 A)=\dfrac{2}{\cos^2 A} \\ b^2+2=2(1+\tan^2 B)=\dfrac{2}{\cos^2 B} \\ c^2+2=2(1+\tan^2 C)=\dfrac{2}{\cos^2 C} \end{cases}$

នាំឱ្យ $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)=\dfrac{8}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$

តាង $T=ab+bc+ca$

$$T = 2(\tan A\tan B + \tan B\tan C + \tan C\tan A)$$

$$T = \frac{2(\sin A\sin B\cos C + \sin B\sin C\cos A + \sin C\sin A\cos B)}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$= \frac{2\,[\,\cos A\cos B\cos C - \cos(A+B+C)\,]}{\cos A\cos B\cos C}$$

វិសមភាព (1) សមមូលនឹង៖

$$\frac{8}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C} \geq \frac{18\,[\cos A\cos B\cos C - \cos(A+B+C)]}{\cos A\cos B\cos C}$$

គេទាញបាន៖

$$\cos A\cos B\cos C\left[\cos A\cos B\cos C - \cos(A+B+C)\right] \leq \frac{4}{9}$$

តាង $\theta = \dfrac{A+B+C}{3}$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ និង Jensen យើងបាន៖

$$\cos A\cos B\cos C \leq \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3 \leq \cos^3\theta$$

គេទាញ $\cos^3\theta\,(\cos^3\theta - \cos 3\theta) \leq \dfrac{4}{9}$

ដោយ $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

គេបាន $\cos^3\theta\,(3\cos\theta-3\cos^3\theta)\le\frac{4}{9}$

$$\cos^4\theta\,(1-\cos^2\theta)\le\frac{4}{27}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន៖

$$\frac{\cos^2\theta}{2}.\frac{\cos^2\theta}{2}.(1-\cos^2\theta)\le\left(\frac{\frac{\cos^2\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2}+1-\cos^2\theta}{3}\right)^3$$

នាំឱ្យ $\cos^4\theta\,(1-\cos^2\theta)\le\frac{4}{27}$ ពិត ។

ដូចនេះ $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$ ពិត។

លំហាត់ទី៦(**Morocco National Olympiad 2011**)

គេតាង α,β,γ ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយដែលមានបរិមាត្រ **2p** និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ **R** ។

a/ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\ge 3\left(9.\dfrac{R^2}{p^2}-1\right)$

b/ តើពេលណាទើបគេបានសមភាព ?

ដំណោះស្រាយ

a/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\ge 3\left(9.\dfrac{R^2}{p^2}-1\right)$

គេមាន $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\beta}+\dfrac{1}{\sin^2\gamma}=3+\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma$

យើងនឹងស្រាយថា $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\beta}+\dfrac{1}{\sin^2\gamma}\ge\dfrac{27R^2}{p^2}$

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេមាន៖

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\ge\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)^2 \quad (1)$$

ដោយប្រើ $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^{\ 2}}{b_2}+\frac{a_3^{\ 2}}{b_3}\ge\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}$

គេបាន $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\ge\frac{9}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុង ΔABC គេបាន៖

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=2R$$

គេទាញ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{p}{R}$

ហេតុនេះ $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\ge\frac{9}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{9R}{p}\ (2)$

តាម $(1)\,\&\,(2)$ គេទាញបាន៖

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\ge\frac{1}{3}\times\frac{81R^2}{p^2}=\frac{27R^2}{p^2}$$ ពិត

ដូចនេះ៖ $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\ge3\left(9.\frac{R^2}{p^2}-1\right)$ ។

b / វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\beta}=\frac{1}{\sin\gamma}$

គេទាញបាន $\alpha=\beta=\gamma$ នាំឱ្យ ΔABC ជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

លំហាត់ទី៧

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព៖

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព **Minkowsky** គេមាន៖

$$\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}+\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2}+\sqrt{x_3{}^2+y_3{}^2}\geq\sqrt{(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2}$$

យក $x_1=a\ ,\ x_2=b\ ,\ x_3=c$

និង $y_1=1-b\ ,\ y_2=1-c\ ,\ y_3=1-a$ និង $s=a+b+c$

គេបាន $(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2=s^2+(3-s)^2\geq\frac{9}{2}$

ព្រោះ $s^2+(3-s)^2=2s^2-6s+9=\frac{1}{2}[(2s-3)^2+9]\geq\frac{9}{2}$

ដូចនេះ $\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយៈ

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n{}^2 - 2 \quad , \forall n \in IN \quad , a > 2 \end{cases}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

បើ $n = 0$ គេបាន $u_0 = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2} = a$ ពិត

ឧបមាវាពិតដល់តួទី k គឺ $u_k = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k} + \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ

$$u_{k+1} = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}} + \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}$$

យើងមាន $u_{k+1} = u_k{}^2 - 2$

តែតាមការឧបមា $u_k = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k} + \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k}$

យើងបាន $u_{k+1} = \left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k} + \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k}\right]^2 - 2$

$$u_{k+1} = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}} + \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}} + 2\times\frac{a^2-a^2+4}{4} - 2$$

$u_{k+1} = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}} + \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $u_n = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}$ ។

លំហាត់ទី៩

ក.ចូរកំនត់លេខនៃអញ្ញាត a, b, c, d នៃចំនួន $\overline{abcd}$

បើគេដឹងថា ៖

$\overline{abcd} \times 9 = \overline{dcba}$

ខ.ចំពោះតម្លៃ a, b, c, d ដែលបានរកឃើញខាងលើចូរបញ្ជាក់ថា

ចំនួន $\overline{abcd}$ និង $\overline{dcba}$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំនត់លេខនៃអញ្ញាត a, b, c, d ៖

គេមាន $\overline{abcd} \times 9 = \overline{dcba} \quad (1)$

តាមទំនាក់ទំនង (1) គេទាញបានតម្លៃ a តែមួយគត់គឺ $a = 1$ ។

ចំពោះ $a = 1$ គេបាន $\overline{1bcd} \times 9 = \overline{dcb1} \quad (2)$

តាមទំនាក់ទំនង (2) គេទាញបាន $d = 9$ ព្រោះ $d \times 9 = 81$

មានលេខខាងចុងស្មើ 1 ។

ចំពោះ $d=9$ គេបាន $\overline{1bc9}\times 9=\overline{9cb1}$ (3)

តាមទំនាក់ទំនង (3) គេទាញបាន $b=0$

(ព្រោះ $b\times 9$ មិនអាចមានត្រាទុកទេ)

ចំពោះ $b=0$ គេបាន $\overline{10c9}\times 9=\overline{9c01}$ (3)

តាមទំនាក់ទំនង (3) គេទាញបាន $c=8$ ព្រោះ $c\times 9=8\times 9=72$

ថែម 8 ឲ្យលេខខាងចុងស្មើ 0 ។

ចំពោះ $c=8$ គេបាន $1089\times 9=9801$ ។

ដូចនេះ $a=1$, $b=0$, $c=8$, $d=9$ ។

ខ.បញ្ជាក់ថាចំនួន $\overline{abcd}$ និង $\overline{dcba}$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ៖

ចំពោះ $a=1$, $b=0$, $c=8$, $d=9$ គេបាន ៖

$\overline{abcd}=1089=33^2$ និង $\overline{dcba}=9801=99^2$

សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី១០

ចំនួនមួយមានលេខបួនខ្ទង់ដែលលេខខ្ទង់វារៀបតាមលំដាប់

a ; a ; b ; b ។

រកចំនួននោះបើគេដឹងថាវាជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនដែលជាការេប្រាកដ ៖

តាង $\mathbf{N}$ ជាចំនួនដែលត្រូវរក

យើងបាន $\mathbf{N = \overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b}$

$$\mathbf{N = 1100a + 11b}$$
$$\mathbf{N = 11\,(100a + b) = 11\,[99a + (a+b)]\ (1)}$$

ដោយ $\mathbf{0 < a \le 9}$ និង $\mathbf{0 \le b \le 9}$ នោះ $\mathbf{0 < a + b \le 18}$

តាមទំនាក់ទំនង $\mathbf{(1)}$ ដើម្បីឲ្យ $\mathbf{N}$ អាចជាការេប្រាកដលុះត្រាតែ

$\mathbf{a+b}$ ជាពហុគុណនៃ $\mathbf{11}$ ហើយ $\mathbf{0 < a + b \le 18}$ នោះគេត្រូវឲ្យ

$\mathbf{a + b = 11}$ តែមួយគត់ ។

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ $N = 11(99a+11) = 11^2(9a+1)$

ហេតុនេះ N ជាការេប្រាកដកាលណា $9a+1$ ជាការេប្រាកដ ។

ដោយ $1 \le a \le 9$ នាំឲ្យ $10 \le 9a+1 \le 81$ គេទាញ ៖

$9a+1=16$ (គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{N}$)

$9a+1=25$ (គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{N}$)

$9a+1=36$ (គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{N}$)

$9a+1=49$ (គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{N}$)

$9a+1=64$ នាំឲ្យ $a=7$ ហើយ $b=11-7=4$

$9a+1=81$ (គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{N}$) ។

ដូចនេះចំនួនដែលត្រូវកំនត់នោះគឺ $7744 = 88^2$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយៈ

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ និង } \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ដែល } n \geq 1$$

ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា z_n

ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចៈ

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

គេបាន $z_{n+1} = u_{n+1} + i.v_{n+1}$

$$= \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} + i.\frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}(u_n + iv_n) = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1} z_n$$

ដូចនេះ(z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

គណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេបាន $z_n = z_1 \times q^{n-1}$

តែ $z_1 = u_1 + iv_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$

និង $q = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$

គេបាន $z_n = (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^n$

ដូចនេះ $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$ (រូបមន្តដឺម័រ)

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

ដោយ $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$

ដូចនេះ $u_n = \cos\frac{n\pi}{4}$ និង $v_n = \sin\frac{n\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី១២

ក-ប្រសិនបើ $p \geq -1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$(1+p)^n \geq 1+np \quad (1)$ ។

ខ-គេឲ្យ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ជា n ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

គេតាង $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$

និង $G_n = \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3......a_n}$ ។

បង្ហាញថាប្រសិនបើ $G_k \leq A_k$ ហើយ $A_k \neq 0$

គេបាន $G_k{}^k.a_{k+1} \leq A_k{}^{k+1}(1+p)$ ដែល $p = \dfrac{a_{k+1}}{A_k} - 1$ ។

គ-ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ....a_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖ $(1+p)^n \ge 1+np \quad (1)$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេមាន ៖

$$(1+p)^n = C_n^0 + C_n^1 p + C_n^2 p^2 + \dots\dots + C_n^n p^n$$

ដោយ $C_n^0 = 1, C_n^1 = n, C_n^2 = \dfrac{(n-1)n}{2}$

គេបាន $(1+p)^n = 1 + np + \dfrac{(n-1)n}{2} p^2 + \dots\dots + p^n$

ដោយចំពោះគ្រប់ $p \ge -1$ គេមាន $\dfrac{(n-1)n}{2} p^2 + \dots\dots + p^n \ge 0$

ដូចនេះ $(1+p)^n \ge 1+np \quad (1)$ ។

ខ-បង្ហាញថា $G_k{}^k . a_{k+1} \le A_k{}^{k+1}(1+p)$

ប្រសិនបើ $G_k \le A_k$ នោះ $G_k^k a_{k+1} \le A_k^k a_{k+1}$

$$\begin{aligned} A_k^k a_{k+1} &= A_k^k [\, A_k + (a_{k+1} - A_k)] \\ &= A_k^{k+1} [\, 1 + (\frac{a_{k+1}}{A_k} - 1)] \\ &= A_k^{k+1} (1+p) \end{aligned}$$

ព្រោះ $p=\frac{a_{k+1}}{A_k}-1$ ។

ដូចនេះ $G_k{}^k.a_{k+1}\le A_k{}^{k+1}(1+p)$ ។

គ-ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$a_1+a_2+a_3+.....+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1a_2a_3....a_n}$$

យើងមាន $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2=a_1-2\sqrt{a_1a_2}+a_2\ge 0$

នាំឲ្យ $a_1+a_2\ge 2\sqrt{a_1a_2}$ ពិត ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ ៖

$a_1+a_2+.....+a_k\ge k\sqrt[k]{a_1a_2.....a_k}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$គ ឺ៖

$a_1+a_2+.....+a_{k+1}\ge k\sqrt[k]{a_1a_2.....a_{k+1}}$ ពិត

តាមការសន្មតយើងមាន $a_1+a_2+.....+a_k\ge k\sqrt[k]{a_1a_2.....a_k}$

សមមូល $\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_k}{k}\ge\sqrt[k]{a_1a_2a_3......a_k}$

ឬ $A_k\ge G_k$

ដែល $A_k=\dfrac{a_1+a_2+a_3+....+a_k}{k}$

និង $G_k=\sqrt[k]{a_1.a_2.a_3......a_k}$ ។

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $G_k{}^k.a_{k+1}\le A_k{}^{k+1}(1+p)$

ដោយ $G_k^k\,a_{k+1}=a_1.a_2.....a_k a_{k+1}=G_{k+1}{}^{k+1}$

គេទាញ $G_{k+1}^{k+1}\le A_k{}^{k+1}(1+p)$

ដែល $p=\dfrac{a_{k+1}}{A_k}-1\ge -1\ ,\ A_k\ne 0$ ។

តាមរូបមន្ត (1) គេបាន $(1+p)\le(1+\dfrac{p}{k+1})^{k+1}$

នាំឲ្យ $A_k{}^{k+1}(1+p)\le A_k{}^{k+1}(1+\dfrac{p}{k+1})^{k+1}$

គេទាញ $G_{k+1}{}^{k+1}\le A_k{}^{k+1}(1+\dfrac{p}{k+1})^{k+1}$

ឬ $G_{k+1}\le A_k(1+\dfrac{p}{k+1})$

ដោយ៖

$$A_k(1+\frac{p}{k+1}) = A_k\left[1+\frac{1}{k+1}(\frac{a_{k+1}}{A_k}-1)\right] = A_k + \frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}$$

$$= \frac{A_k k + A_k + a_{k+1} - A_k}{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1}}{k+1} = A_{k+1}$$

គេទាញ $G_{k+1} \le A_k{}^{k+1}(1+p) \le A_{k+1}$

ឬ $a_1 + a_2 + ... + a_{k+1} \ge k\sqrt[k]{a_1 a_2 .....a_{k+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ....a_n}$ ។

លំហាត់ទី១៣ (Turkey Team Selection Tests 2008)

សមីការ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ មានឫសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

(មិនចាំបាច់ខុសគ្នា)។

ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\dfrac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \dfrac{c}{b}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\dfrac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \dfrac{c}{b}$

តាង u, v, w ជាឫសរបស់សមីការ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ ។

គេបាន $\begin{cases} u+v+w=a \\ uv+vw+wu=b \\ uvw=c \end{cases}$

ដោយ $u>0, v>0, w>0$ នោះ $a>0, b>0, c>0$

គេមាន $\dfrac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{b^2+ab-2ac+b-3c}{b^2+2ab+3a}$

$$= \frac{3b^2 + 3ab - 6ac + 3b - 9c}{3(b^2 + 2ab + 3b)}$$

$$= \frac{(b^2 + 2ab + 3b) + (2b^2 + ab - 6ac - 9c)}{3(b^2 + 2ab + 3b)}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2b^2 + ab - 6ac - 9c}{3(b^2 + 2ab + 3b)}$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន៖

$a = u + v + w \geq 3\sqrt[3]{uvw}$

និង $b = uv + vw + wu \geq 3\sqrt[3]{u^2v^2w^2}$

គេបាន $ab \geq 9uvw = 9c$ ឬ $ab - 9c \geq 0 \quad (*)$

ម៉្យាងទៀតគេមាន៖

$$\frac{u^2v^2 + v^2w^2}{2} \geq uv^2w \quad (1)$$

$$\frac{v^2w^2 + u^2w^2}{2} \geq uvw^2 \quad (2)$$

$$\frac{u^2w^2 + u^2v^2}{2} \geq u^2vw \quad (3)$$

បូកវិសមភាព $(1),(2),(3)$ គេបាន៖

$$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 \ge uvw(u+v+w)$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2uvw(u+v+w)$ គេបាន

$$(uv+vw+wu)^2 \ge 3uvw(u+v+w)$$

ឬ $b^2 \ge 3ac$ ឬ $2b^2 - 6ac \ge 0 \quad (**)$

បូកវិសមភាព $(*)\,\&\,(**)$ គេបាន $2b^2 + ab - 6ac - 9c \ge 0$

ហេតុនេះ $\frac{1}{3} + \frac{2b^2 + ab - 6ac - 9c}{3(b^2 + 2ab + 3b)} \ge \frac{1}{3}$

ឬ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b} \ge \frac{1}{3}$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$ គឺ $\frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យ $x, y, z > 0$ ដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\geq\frac{1}{4}$

ដំណោះស្រាយ

គេពិនិត្យ $\frac{x^3}{(1-x)^2}=\frac{(x-2x^2+x^3)+(2x^2-x)}{(1-x)^2}$

$$=x+\frac{2x^2-x}{(1-x)^2}=x+\frac{(9x^2-6x+1)-(1-2x+x^2)}{4(1-x)^2}$$

$$=x+\frac{(3x-1)^2-(1-x)^2}{4(1-x)^2}=x-\frac{1}{4}+\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2}$$

ដោយ $\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2}\geq 0$ នោះ $\frac{x^3}{(1-x)^2}\geq x-\frac{1}{4}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{y^3}{(1-y)^2}\geq y-\frac{1}{4}$ (2) និង $\frac{z^3}{(1-z)^2}\geq z-\frac{1}{4}$ (3)

បូកវិសមភាព $(1), (2), (3)$ អង្គ និង អង្គគេបាន៖

$$\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\geq x+y+z-\frac{3}{4}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៥ (IMO Longlists 1980)

គេកំណត់ចំនួន $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ដូចខាងក្រោម៖

$$a_0 = \frac{1}{2}; a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^{\ 2}}{n} \quad (n > 1, k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

ចូរបង្ហាញថា $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$

គេមាន $a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^{\ 2}}{n} = \frac{a_k(n + a_k)}{n}$

គេបាន $\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{n}{a_k(a_k + n)} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + n}$

ឬ $\frac{1}{a_k + n} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}$

ហេតុនេះ $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{a_n}$ (*)

គេមាន $a_0 = \frac{1}{2} > 0$ ពិត ។ ឧបមាថា $a_k > 0$ ពិត

តាម $a_{k+1}=a_k+\frac{a_k^{\ 2}}{n}$ គេទាញបាន $a_{k+1}>0$ ពិត

ដូចនេះ $a_k>0$ នោះ $a_k+n>n$ ឬ $\frac{1}{a_k+n}<\frac{1}{n}$ $,\forall n>1$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{(n)}=\frac{n}{n}=1$

តាម (*) គេទាញបាន $2-\frac{1}{a_n}<1$ នាំឱ្យ $a_n<1$ (i)

ម៉្យាងទៀតដោយ $a_n<1$ នោះ $a_k<1$ ឬ $a_k+n<n+1$

ឬ $\frac{1}{a_k+n}>\frac{1}{n+1}$ គ្រប់ $k=0,1,2,\ldots,n-1$ ។

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

ដោយពិនិត្យឃើញថាគ្រប់ $n>1$ គេមាន $\frac{n}{n+1}-\frac{n-2}{n-1}=\frac{2}{n^2-1}>0$

នោះគេទាញបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}>\frac{n}{n+1}>\frac{n-2}{n-1}$

តាម (*) គេទាញបាន $2-\frac{1}{a_n}>\frac{n-2}{n-1}$

ឬ $\frac{1}{a_n}<2-\frac{n-2}{n-1}=\frac{n}{n-1}$ នោះ $a_n>\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ (ii)

តាម (i) & (ii) គេទាញបាន $1-\frac{1}{n}<a_n<1$ ។

ដូចនេះ $1-\frac{1}{n}<a_n<1$ ។

លំហាត់ទី១៦ (Poland 2006)

គេយក a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=abc$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\geq 1$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\geq 1$

គេមាន $ab+bc+ca=abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$

តាង $x=\frac{1}{a} , y=\frac{1}{b} , z=\frac{1}{c}$ នោះ $x+y+z=1$

ហើយវិសមភាពសមមូល

$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\geq 1$ ។

តាមវិសមភាព Tchebyshev គេមាន $\frac{x^4+y^4}{2}\geq\frac{x^3+y^3}{2}.\frac{x+y}{2}$

គេទាញ $\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}\geq\frac{x+y}{2}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3} \ge \frac{y+z}{2}$ (2)

និង $\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3} \ge \frac{z+x}{2}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន៖

$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3} \ge x+y+z=1$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៧

គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right)=\tan x.\tan^2\frac{x}{2}.\tan^4\frac{x}{4}.....\tan^{2^n}\frac{x}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right)$

គេមាន $\tan a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{2\sin^2 a}{2\sin a\cos a}=\frac{2\sin^2 a}{\sin 2a}$

យក $a=\frac{x}{2^k}$ គេបាន $\tan\frac{x}{2^k}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2^k}}{\sin\frac{2x}{2^k}}$

គេទាញ $P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(2^{2^k}.\frac{\sin^{2^{k+1}}\frac{x}{2^k}}{\sin^{2^k}\frac{2x}{2^k}}\right)=2^{2^{n+1}-1}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$

ដូចនេះ $P_n=2^{(2^{n+1}-1)}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$ ។

លំហាត់ទី១៨(Korea 2000)

ចំនួនពិត a, b, c, x, y, z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a \geq b \geq c > 0$

និង $x \geq y \geq z > 0$ ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}$$

ដោយ $a \geq b \geq c > 0$ និង $x \geq y \geq z > 0$

គេបាន $(b-c)((z-y) = bz+cy-by-cz \leq 0$ ឬ $bz+cy \leq by+cz$

គេទាញ $(by+cz)(bz+cy) \leq (by+cz)^2 \leq 2(b^2y^2+c^2z^2)$

ហេតុនេះ $\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} \geq \frac{a^2x^2}{2(b^2y^2+c^2z^2)} = \frac{1}{2}.\frac{X}{Y+Z}$ (1)

ដែល $X = a^2x^2$, $Y = b^2y^2$, $Z = c^2z^2$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន

$$\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} \geq \frac{1}{2}.\frac{Y}{Z+X} \ (2) \ , \ \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{1}{2}.\frac{Z}{X+Y} \ (3)$$

តាង $T = \dfrac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \dfrac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \dfrac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}$

គេបាន $T \geq \dfrac{1}{2}(\dfrac{X}{Y+Z} + \dfrac{Y}{Z+X} + \dfrac{Z}{X+Y})$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន៖

$$(X+Y)+(Y+Z)+(Z+X) \geq 3\sqrt[3]{(X+Y)(Y+Z)(Z+X)}$$

ឬ $X+Y+Z \geq \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(X+Y)(Y+Z)(Z+X)}$ (i)

ហើយ $\dfrac{1}{Y+Z} + \dfrac{1}{Z+X} + \dfrac{1}{X+Y} \geq \dfrac{3}{\sqrt[3]{(X+Y)(Y+Z)(Z+X)}}$ (ii)

គុណវិសមភាព (i) និង (ii) អង្គ និង អង្គ គេបាន៖

$$\frac{X+Y+Z}{Y+Z}+\frac{X+Y+Z}{Z+X}+\frac{X+Y+Z}{X+Y}\ge\frac{9}{2}$$

$$\frac{X}{Y+Z}+1+\frac{Y}{Z+X}+1+\frac{Z}{X+Y}+1\ge\frac{9}{2}$$

$$\frac{X}{Y+Z}+\frac{Y}{Z+X}+\frac{Z}{X+Y}\ge\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

គេទាញ $T\ge\frac{3}{4}$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\ge\frac{3}{4}$$ ។

លំហាត់ទី១៩

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge \sqrt[6]{\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{8}} + \sqrt[3]{abc}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge \sqrt[6]{\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{8}} + \sqrt[3]{abc}$$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយថាគ្រប់ $x,y \ge 0$ គេបាន

$$x+y \ge \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}$$

គេមាន $x+y \ge 2\sqrt{xy}$ នោះ $(x+y)^2 \ge 4xy$ ឬ $(x+y)^2 - 4xy \ge 0$

លើកជាការេ $[(x+y)^2 - 4xy]^2 \ge 0$

$$(x+y)^4 - 8xy(x+y)^2 + 16x^2y^2 \ge 0$$
$$(x+y)^4 \ge 8xy[(x+y)^2 - 2xy] = 8xy(x^2+y^2)$$

គេទាញ $(x+y)^2 \ge 4\sqrt{xy\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ ឬ $\dfrac{(x+y)^2}{2} \ge 2\sqrt{xy\dfrac{x^2+y^2}{2}}$

ដោយ $2\sqrt{xy.\dfrac{x^2+y^2}{2}} = (\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy})^2 - \dfrac{(x+y)^2}{2}$

គេបាន $\dfrac{(x+y)^2}{2} = (\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy})^2 - \dfrac{(x+y)^2}{2}$

នាំឱ្យ $x+y \ge \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}$ ។

តាមវិសមភាពខាងលើ គេទាញ $\begin{cases} a+b \ge \sqrt{p}+\sqrt{ab} \\ b+c \ge \sqrt{q}+\sqrt{bc} \\ a+c \ge \sqrt{r}+\sqrt{ac} \end{cases}$

ដែល $p=\dfrac{a^2+b^2}{2}$, $q=\dfrac{b^2+c^2}{2}$ និង $r=\dfrac{a^2+c^2}{2}$

គេបាន $(a+b)(b+c)(c+a) \ge (\sqrt{p}+\sqrt{ab})(\sqrt{q}+\sqrt{bc})(\sqrt{r}+\sqrt{ac})$

ឬ $(a+b)(b+c)(c+a) \ge \sqrt{pqr}+m+n+abc$

ដែល $m=\sqrt{acpq}+\sqrt{bcpr}+\sqrt{abqr} \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2p^2q^2r^2}$

និង $n=\sqrt{abc^2p}+\sqrt{a^2bcq}+\sqrt{ab^2cr} \ge 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4pqr}$

ដោយ $\sqrt{pqr}+m+n+abc\geq(\sqrt[6]{pqr}+\sqrt[3]{abc})^3$

គេទាញ $(a+b)(b+c)(c+a)\geq(\sqrt[6]{pqr}+\sqrt[3]{abc})^3$

ឬ $\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\sqrt[6]{pqr}+\sqrt[3]{abc}$

ដូចនេះ $\mathbf{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\sqrt[6]{\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{8}}+\sqrt[3]{abc}}$

លំហាត់ទី២០

ក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge 4\sqrt{\frac{R}{r}}$$

ដែល $\mathbf{r}$ និង $\mathbf{R}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge 4\sqrt{\frac{R}{r}}\quad (1)$

តាង $\mathbf{BC=a\ ,\ AC=b\ ,\ AB=c}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ គេមាន ៖

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ ដោយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

នោះ $a^2=b^2+c^2-2bc(1-2\sin^2\frac{A}{2})$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ (កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ)

គេបាន $a+b-c=2(p-c)$ និង $a-b+c=2(p-b)$

គេបាន $\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}$

នាំឲ្យ $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ។ ដូចគ្នាដែរគេទាញ ៖

$\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}$; $\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

គេបាន $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

គេមាន $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\dfrac{abc}{4R}$

គេទាញ $abc=4R.S$ និង $(p-a)(p-b)(p-c)=\dfrac{S^2}{p}=r.S$

គេបាន $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{r.S}{4R.S}=\dfrac{r}{4R}$ ។

វិសមភាព (1) សមមូលទៅនឹង ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge 4\sqrt{\frac{1}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}}\ge 2 \qquad (2)$$

ដោយ $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{a^2bc}}=\frac{p-a}{a}\sin\frac{A}{2}$

គេទាញ $\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{p-a}{a}$ ។ ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន ៖

$\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{p-b}{b}$ និង $\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{p-c}{c}$

វិសមភាព (2) សមមូលទៅនឹង ៖

$$\sqrt{\frac{p-a}{a}}+\sqrt{\frac{p-b}{b}}+\sqrt{\frac{p-c}{c}}\ge 2$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$p = (p-a) + a \geq 2\sqrt{(p-a)a}$ នាំឲ្យ $\sqrt{\dfrac{p-a}{a}} \geq \dfrac{2(p-a)}{p}$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt{\dfrac{p-b}{b}} \geq \dfrac{2(p-b)}{p}$ និង $\sqrt{\dfrac{p-c}{c}} \geq \dfrac{2(p-c)}{p}$

គេបាន

$$\sqrt{\frac{p-a}{a}} + \sqrt{\frac{p-b}{b}} + \sqrt{\frac{p-c}{c}} \geq 2\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{p}$$

$$\sqrt{\frac{p-a}{a}} + \sqrt{\frac{p-b}{b}} + \sqrt{\frac{p-c}{c}} \geq 2 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}} \geq 4\sqrt{\dfrac{R}{r}}$ ។

លំហាត់ទី២១ (Turkey TST 2010)

ចូរស្រាយថា៖

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})$$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេមាន៖

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{9}{2(a+b+c)}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$ គេបាន៖

$$\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\quad(1)$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន៖

$$\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+(a^2-ab+b^2)}{2}\geq\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}$$

ឬ $$\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}\geq\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}$$

គេបាន $$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\leq\sum_{Cyc}\frac{\sqrt{3a^2+3b^2-2ab}}{2}$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{Cauchy-Schwarz}$ គេបាន៖

$$\sum_{Cyc}\frac{\sqrt{3a^2+3b^2-2ab}}{2}\leq\frac{\sqrt{3(6a^2+6b^2+6c^2-2ab-2bc-2ca)}}{2}$$

គេទាញបាន៖

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\leq\frac{\sqrt{6[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}}{2}\quad(2)$$

យើងនឹងស្រាយថា៖

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\geq\frac{\sqrt{6[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}}{2}$$

សមមូល

$$a^2+b^2+c^2 \ge \sqrt{\frac{(a+b+c)^2[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}{6}}$$

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{\sqrt{2(a+b+c)^2[9(a^2+b^2+c^2)-3(ab+bc+ca)}}{6}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, $\forall x,y \ge 0$

$$x=2(a+b+c)^2 \ , \ y=9(a^2+b^2+c^2)-3(ab+bc+ca)$$

ហើយ $x+y=11(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca$ នោះគេបាន

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{11(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{12}$$

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

ឬ $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \ge 0$ ពិត

ហេតុនេះគេបាន

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c} \ge \frac{\sqrt{6[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}}{2} \quad (3)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) ,(2) និង (3) គេទាញបាន៖

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $a=b=c$ ។

លំហាត់ទី២២(China National Olympiad 2005)

ស្វីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = \frac{21}{16}$

និងចំពោះ $n \geq 2 : 2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}$

គេយក m ជាចំនួនគត់មួយដែល $m \geq 2$ ។

ចូរបង្ហាញថាចំពោះ $n \leq m$

យើងបាន $\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2 - 1}{m - n + 1}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2 - 1}{m - n + 1}$

គេមាន $2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}$

នាំឱ្យ $2^n a_n - 3.2^{n-1} a_{n-1} = \frac{3}{4}$

ឬ $\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} a_{n-1}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3^n}$

គេបាន $\sum_{k=2}^{n}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^k a_k-\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} a_{k-1}\right]=\frac{3}{4}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\right)$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n-\frac{2}{3}a_1=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n-\frac{2}{3}\cdot\frac{21}{16}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

គេទាញបាន $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n-\frac{3}{2^{n+3}}$ ឬ $a_n+\frac{3}{2^{n+3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^n$

តាង $P=\left(a_n+\frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)$

គេបាន $P=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)$

គេមាន $\frac{m^2-1}{m-n+1}=\frac{(m+1)(m-1)}{(m+1)-n}=\frac{m-1}{1-\frac{n}{m+1}}$

ដើម្បីស្រាយឱ្យឃើញថា $P<\frac{m^2-1}{m-n+1}$

យើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថា $(1-\frac{n}{m+1})P<m-1$

តាមវិសមភាព **Bernoully** គេមាន

$$1-\frac{n}{m+1}<(1-\frac{1}{m+1})^n=\left(\frac{m}{m+1}\right)^n=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right)^n$$

នាំឱ្យ $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m<\left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right)^{mn}=\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{m})^m}\right]^n$

ចំពោះគ្រប់ $m\geq 2$ តាមទ្វេធាញូតុន គេមាន៖

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{m}C_m^1+\frac{1}{m^2}C_m^2+....+\frac{1}{m^m}C_m^m$$

នោះ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \geq 1+\frac{1}{m}C_m^1+\frac{1}{m^2}C_m^2=\frac{5}{2}-\frac{1}{2m}\geq\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

គេទាញបាន $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m<\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$ ឬ $1-\frac{n}{m+1}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}$

គេទាញ $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)P<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}P$

តែ $P=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)$

គេបាន $(1-\frac{n}{m+1})P<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}(m-1)}\right)$

ឧបមាថា $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}(m-1)}\right)<m-1$ ពិត

ដោយតាង $u=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}$ នោះ $u(m-u^{m-1})<m-1$

សមមូល $mu-u^m-m+1<0$

$$m(u-1)-(u^m-1)<0$$

$$(u-1)[m-(u^{m-1}+....+u+1)]<0$$

ដោយ $m\geq n$ & $m\geq 2$ នោះ $0<u=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}<1$

នាំឱ្យ $(u-1)[m-(u^{m-1}+....+u+1)]<0$ ពិត

ដូចនេះ $$\left(a_n+\frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<\frac{m^2-1}{m-n+1}$$

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \sin B \sin C \cos A$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

គេទាញ $a = 2R\sin A , b = 2R\sin B , c = 2R\sin C$

ដោយ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស)

$4R^2 \sin^2 A = 4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A)$

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A \quad (1)$

តែ $\sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \sin B \sin C \cos A \quad (2)$

យកសមីការ (2) ជួសនៅក្នុង (1) គេទាញ $\sin^2 A = 1$

នាំឲ្យ $A = 90^0$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែង ។

លំហាត់ទី២៤

គណនាផលបូក $S=\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^{\ 3}}{1-3x_i+3x_i^{\ 2}}$

ដែល $x_i=\frac{i}{101}$; $i=1\,,2\,,3\,,...$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S=\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^{\ 3}}{1-3x_i+3x_i^{\ 2}}$

យើងមាន $1-3x+3x^2=x^3+(1-x)^3=x^3-(x-1)^3$

តាង $f(x)=\frac{x^3}{1-3x+3x^2}=\frac{x^3}{x^3+(1-x)^3}$

គេបាន $f(x_i)=\frac{x_i^{\ 3}}{x_i^{\ 3}+(1-x_i)^3}$

ហើយ $f(1-x_i)=\frac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3+x_i^{\ 3}}$

គេបាន $f(x_i)+f(1-x_i)=\frac{x_i^{\ 3}}{x_i^{\ 3}+(1-x_i)^3}+\frac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3+x_i^{\ 3}}=1$

គេទាញ $f(x_i)=1-f(1-x_i)$

ដោយ $x_i=\dfrac{i}{101}$ នោះ $1-x_i=1-\dfrac{i}{101}=\dfrac{101-i}{101}$

គេបាន $S=\sum\limits_{i=0}^{101}f(x_i)=\sum\limits_{i=0}^{101}f\left(\dfrac{i}{101}\right)=\sum\limits_{i=0}^{101}\left[1-f(\dfrac{101-i}{101})\right]$

$$S=102-\sum_{i=0}^{101}f\left(\frac{101-i}{101}\right)=102-S$$

គេទាញ $S=\dfrac{102}{2}=51$ (ព្រោះ $\sum\limits_{i=0}^{101}f\left(\dfrac{i}{101}\right)=\sum\limits_{i=0}^{101}f\left(\dfrac{101-i}{101}\right)$)

លំហាត់ទី២៥ (USAMO 2003)

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$

របៀបទី១

តាង $T=\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

យក $s=a+b+c$ នោះកន្សោម T អាចសរសេរ៖

$$T=\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}+\frac{(b+s)^2}{2b^2+(b-s)^2}+\frac{(c+s)^2}{2c^2+(c-s)^2}$$

គេមាន $\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}=\frac{a^2+2as+s^2}{3a^2-2as+s^2}$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2+6as+3s^2}{3a^2-2as+s^2}$$

$$=\frac{1}{3}(1+\frac{8as+2s^2}{3a^2-2as+s^2})$$

$$\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}=\frac{1}{3}+\frac{8as+2s^2}{9a^2-6as+3s^2}=\frac{1}{3}+\frac{8as+2s^2}{(3a-s)^2+2s^2}$$

ដោយ $(3a-s)^2\geq 0$ នោះ $(3a-s)^2+2s^2\geq 2s^2$

ឬ $\frac{8as+2s^2}{(3a-s)^2+2s^2}\leq\frac{8as+2s^2}{2s^2}=1+\frac{4a}{s}=1+\frac{4a}{a+b+c}$

គេទាញ $\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}\leq\frac{4}{3}+\frac{4a}{a+b+c}$ (1)

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាខាងលើដែរគេបាន៖

$$\frac{(b+s)^2}{2b^2+(b-s)^2}\leq\frac{4}{3}+\frac{4b}{a+b+c}\quad(2)$$

$$\frac{(c+s)^2}{2c^2+(c-s)^2}\leq\frac{4}{3}+\frac{4c}{a+b+c}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព (1),(2) និង (3) គេបាន៖

$$T \le \frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4a+4b+4c}{a+b+c}=4+4=8$$

ដូចនេះ $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$ ។

របៀបទី២

តាង $T=\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

យក $x=a+b$, $y=b+c$, $z=c+a$

គេបាន $\begin{cases} x+z=2a+b+c \\ x+y=2b+c+a \\ z+y=2c+a+b \end{cases}$ និង $\begin{cases} 2a=x+z-y \\ 2b=x+y-z \\ 2c=z+y-x \end{cases}$

កន្សោម T អាចសរសេរជា៖

$$T=\frac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2}+\frac{2(z+y)^2}{(z+y-x)^2+2x^2}+\frac{2(y+x)^2}{(y+x-z)^2+2z^2}$$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ ៖ $2(u^2+v^2)\ge(u+v)^2$

គេបាន $2(x+z-y)^2+2y^2\ge(x+z-y+y)^2=(x+z)^2$

$$2(x+z-y)^2+4y^2 \ge (x+z)^2+2y^2$$

$$(x+z-y)^2+2y^2 \ge \frac{1}{2}(x+z)^2+y^2$$

គេទាញ $\dfrac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2} \le \dfrac{2(x+z)^2}{\frac{1}{2}(x+z)^2+y^2} = \dfrac{4}{1+\dfrac{2y^2}{(x+z)^2}}$

ដោយ $(x+z)^2 \le 2(x^2+z^2)$ នាំឱ្យ $\dfrac{2y^2}{(x+z)^2} \ge \dfrac{y^2}{x^2+z^2}$

ឬ $1+\dfrac{2y^2}{(x+z)^2} \ge \dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+z^2}$

គេទាញបាន $\dfrac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2} \le \dfrac{4(x^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$ (1)

ស្រាយបំភ្លឺដូចខាងលើដែរគេបាន៖

$$\frac{2(z+y)^2}{(z+y-x)^2+2x^2} \le \frac{4(z^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2} \quad (2)$$

$$\frac{2(y+x)^2}{(y+x-z)^2+2z^2} \le \frac{4(y^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2} \quad (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) គេបាន៖

$$T \le \frac{4(x^2+z^2)+4(z^2+y^2)+4(y^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2}=8$$

ដូចនេះ $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$ ។

របៀបទី៣

តាង $T=\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

គេមានសមភាព $(2u+v)^2+2(u-v)^2=3(2u^2+v^2)$

ដោយយក $u=a$ និង $v=b+c$ នោះគេបាន៖

$$(2a+b+c)^2+2(a-b-c)^2=3\left(2a^2+(b+c)^2\right)$$

ឬ $(2a+b+c)^2=3\left(2a^2+(b+c)^2\right)-2(a-b-c)^2$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $2a^2+(b+c)^2$ គេបាន៖

យើងបាន $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=3-\frac{2(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}$

កន្សោម T អាចបំលែងជា៖

$$T=9-2\left[\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-a-c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\right]$$

ដើម្បីស្រាយថា $T\le 8$ យើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថា៖

$$S=\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-a-c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge\frac{1}{2}$$

គេមាន $2a^2+(b+c)^2=2a^2+b^2+c^2+2bc$

ដោយ $2bc\le b^2+c^2$ នោះ $2a^2+(b+c)^2\le 2(a^2+b^2+c^2)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $2b^2+(c+a)^2\le 2(a^2+b^2+c^2)$

ហើយ $2c^2+(a+b)^2\le 2(a^2+b^2+c^2)$

គេទាញ $S\ge\dfrac{(a-b-c)^2+(b-a-c)^2+(c-a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$

ដោយកន្សោម $(a-b-c)^2+(b-a-c)^2+(c-a-b)^2$

ស្មើនឹង $3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

នោះ $S \geq \frac{3}{2} - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

គេមាន $\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2} \geq ab+bc+ca$

ឬ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ នាំឱ្យ $S \geq \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ ពិត ។

របៀបទី៤

ស្រាយថា $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$

តាង $x = \frac{b+c}{a}$, $y = \frac{c+a}{b}$, $z = \frac{a+b}{c}$

ដែល $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$

វិសមភាពសមមូល $\frac{(2+x)^2}{2+x^2} + \frac{(2+y)^2}{2+y^2} + \frac{(2+z)^2}{2+z^2} \leq 8$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{(2+u)^2}{2+u^2} - \frac{8}{3} \leq \frac{1}{1+u} - \frac{1}{3}$ គ្រប់ $u > 0$

គេមាន $\frac{(2+u)^2}{2+u^2}-\frac{8}{3}-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{3}=-\frac{(u+5)(u-2)^2}{3(2+u^2)(1+u)}\leq 0$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{(2+u)^2}{2+u^2}\leq\frac{1}{1+u}-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}$ (*)

តាម (*) គេបាន៖

$$\frac{(2+x)^2}{2+x^2}+\frac{(2+y)^2}{2+y^2}+\frac{(2+z)^2}{2+z^2}\leq\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}-1+8$$

ដូចនេះ $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$

លំហាត់ទី២៦ (Turkey National Olympiad 2005)

បើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនោះចូរស្រាយថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$

តាង $\begin{cases} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} a=\frac{y+z}{2} \\ b=\frac{z+x}{2} \\ c=\frac{x+y}{2} \end{cases}$

គេបាន $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{4}{(y+z)^2}+\frac{4}{(z+x)^2}+\frac{4}{(x+y)^2}$ (1)

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងគេបាន៖

$S=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$

គេទាញ $r^2 = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

ឬ $r^2 = \dfrac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)} = \dfrac{xyz}{4(x+y+z)}$

គេទាញ $\dfrac{1}{4r^2} = \dfrac{x+y+z}{xyz} = \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} + \dfrac{1}{xy} \quad (2)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន៖

$y+z \geq 2\sqrt{yz}$ នាំឱ្យ $\dfrac{4}{(y+z)^2} \leq \dfrac{1}{yz}$

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{4}{(z+x)^2} \leq \dfrac{1}{zx}$ និង $\dfrac{4}{(x+y)^2} \leq \dfrac{1}{xy}$

គេបាន $\dfrac{4}{(y+z)^2} + \dfrac{4}{(z+x)^2} + \dfrac{4}{(x+y)^2} \leq \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx} + \dfrac{1}{xy} \quad (3)$

តាមទំនាក់ទំនង (1) , (2) & (3) គេទាញបាន

$\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \leq \dfrac{1}{4r^2}$ ពិត

ដូចនេះ៖ $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \leq \dfrac{1}{4r^2}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឲ្យស្វ៊ីត $U_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ក-ចូរកំនត់ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ-ចូរបង្ហាញថា $U_1 \times U_2 \times U_3 \times ...... \times U_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\dfrac{\pi}{3.2^n}}$ ។

គ-គេពិនិត្យស្វ៊ីត $V_n = 2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$ ។

ចូរគណនា V_n និង លីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $U_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$

យើងបាន $U_1=\sqrt{3}=2\cos\frac{\pi}{6}$

$$U_2=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2+U_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{6}}=2\cos\frac{\pi}{12}$$

$$U_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2+U_2}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{12}}=2\cos\frac{\pi}{24}$$

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី $U_k=2\cos\frac{\pi}{3.2^k}$ ។

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតដល់តួទី $(k+1)$ គឺ ៖

$U_{k+1}=2\cos\frac{\pi}{3.2^{k+1}}$ ពិត

យើងមាន ៖

$$U_{k+1}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}=\sqrt{2+U_k}$$

ដោយតាមការសន្មតគេមាន $U_k=2\cos\frac{\pi}{3.2^k}$

យើងបាន ៖

$$U_{k+1} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{3.2^k}}$$
$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{3.2^{k+1}}}$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{3.2^{k+1}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{U_n = 2\cos\frac{\pi}{3.2^n}}$ ។

ខ-បង្ហាញថា $\mathbf{U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots\ldots \times U_n = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\pi}{3.2^n}}}$

យើងមាន $\mathbf{U_n = 2\cos\frac{\pi}{3.2^n} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3.2^n}}{\sin\frac{\pi}{3.2^n}}}$

(រូបមន្ត $\mathbf{\sin 2a = 2\sin a\cos a}$)

យើងបាន ៖

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}} \\ U_2 = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{12}} \\ ------------- \\ U_n = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{3.2^n}}{\sin\frac{\pi}{3.2^n}} \end{cases}$$

ដូចនេះ $U_1 \times U_2 \times U_3 \times ......\times U_n = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3.2^n}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\pi}{3.2^n}}$ ។

គ-គណនា V_n និង លីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

យើងមាន $V_n = 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$

$$V_n = 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{(n-1)}}$$

$$V_n = 2^n \sqrt{2 - U_{n-1}}$$

ដោយ $U_n = 2\cos\frac{\pi}{3.2^n}$ នោះ $U_{n-1} = 2\cos\frac{\pi}{3.2^{n-1}}$

យើងបាន ៖

$$V_n = 2^n \sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{3.2^{n-1}}}$$

$$= 2^n \sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{3.2^n}} = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3.2^n}$$

ដូចនេះ $V_n = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3.2^n}$ ។

ហើយ $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3.2^n} = \frac{2\pi}{3}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឱ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x^4+y^4+z^4=1$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $S=\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}$

ដោយ $x,y,z>0$ និង $x^4+y^4+z^4=1$ នោះគេទាញ $0<x,y,z<1$

ចំពោះ $0<t<1$ តាង $f(t)=t(1-t^8)$

គេបាន $[f(t)]^8=t^8(1-t^8)^8$ ឬ $8[f(t)]^8=8t^8(1-t^8)^8$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន

$$8t^8(1-t^8)=8t^8.(1-t^8)(1-t^8)...(1-t^8)\le\left(\frac{8t^8+8-8t^8}{9}\right)^9$$

$$=\left(\frac{8}{9}\right)^9$$

គេទាញ $8[f(t)]^8 \ge \left(\frac{8}{9}\right)^9$ ឬ $f(t) \le \frac{8}{\sqrt[4]{3^9}}$ តែ $f(t) = t(1-t^8)$

នោះគេទាញបានថា $\frac{1}{t(1-t^8)} = \frac{1}{f(t)} \ge \frac{\sqrt[4]{3^9}}{8}$ (*)

គេមាន $S = \frac{x^3}{1-x^8} + \frac{y^3}{1-y^8} + \frac{z^3}{1-z^8}$

គេអាចសរសេរ $S = \frac{x^4}{x(1-x^8)} + \frac{y^4}{y(1-y^8)} + \frac{z^4}{z(1-z^8)}$

តាមវិសមភាព (*) គេទាញបាន៖

$S \ge \frac{\sqrt[4]{3^9}}{8}(x^4 + y^4 + z^4) = \frac{\sqrt[4]{3^9}}{8}$ ព្រោះ $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ $S = \frac{x^3}{1-x^8} + \frac{y^3}{1-y^8} + \frac{z^3}{1-z^8}$

គឺ $S_{min} = \frac{\sqrt[4]{3^9}}{8} = \frac{9\sqrt[4]{3}}{8}$ ។

លំហាត់ទី២៩

ចូរបង្ហាញថាបើ $abc=8$ និង $a,b,c>0$ នោះគេបាន៖

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\geq\frac{4}{3}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\geq\frac{4}{3}$

តាង $T=\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$1+a^3=(1+a)(1-a+a^2)\leq\left(\frac{1+a+1-a+a^2}{2}\right)^2=\left(\frac{2+a^2}{2}\right)^2$$

គេទាញ $\sqrt{1+a^3}\leq\frac{a^2+2}{2}$ ។

ហេតុនេះ $\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}\geq\frac{4a^2}{(a^2+2)(b^2+2)}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន៖

$$\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} \ge \frac{4b^2}{(b^2+2)(c^2+2)} \quad (2)$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \ge \frac{4c^2}{(c^2+2)(a^2+2)} \quad (3)$$

បូកវិសមភាព $(1),(2),(3)$ អង្គនឹងអង្គគេបាន៖

$$T = \frac{4a^2}{(a^2+2)(b^2+2)} + \frac{4b^2}{(b^2+2)(c^2+2)} + \frac{4c^2}{(c^2+2)(a^2+2)}$$

$$= \frac{4[a^2(c^2+2)+b^2(a^2+2)+c^2(b^2+2)]}{(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)}$$

$$= \frac{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2)}{a^2b^2c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2)+8}$$

ដោយ $abc = 8$ នោះគេបាន៖

$$T \ge \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2)}{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2)+36} = \frac{2t}{t+36}$$

ដែល $t = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន៖

$t \ge 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} + 6\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 72$ (ព្រោះ $abc = 8$)

គេបាន $1+\frac{36}{t}\le 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ឬ $\frac{t+36}{t}\le\frac{3}{2}$ នាំឱ្យ $\frac{t}{t+36}\ge\frac{2}{3}$

ហេតុនេះ $T\ge\frac{2t}{t+36}\ge\frac{4}{3}$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\ge\frac{4}{3}$$

លំហាត់ទី៣០

គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយដឹងថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$

ជាចំនួនគត់។

ចូរស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

ស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់

តាមបម្រាប់ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នាំឱ្យមាន $m\in IN$ ដែល

$28n^2+1=m^2$ ឬ $m^2-28n^2=1$ ជាសមីការ Pell ។

គូចម្លើយដំបូងនៃសមីការនេះគឺ $m=127$, $n=24$

ព្រោះ $127^2-28\times 24^2=1$។ ចំពោះគ្រប់ $k\geq 1$គេអាចសរសេរ៖

$$m^2-28n^2=127^2-28\times 24^2=(127-28\times 24^2)^k$$

$$(m-2\sqrt{7}n)(m+2\sqrt{7}n)=(127-48\sqrt{7})^k(127+48\sqrt{7})^k$$

គេទាញ $\begin{cases} m-2\sqrt{7}n=(127-48\sqrt{7})^k \\ m+2\sqrt{7}n=(127+48\sqrt{7})^k \end{cases}$

គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការៈ

$$m=\frac{(127-48\sqrt{7})^k+(127+48\sqrt{7})^k}{2}$$

$$n=\frac{(127+48\sqrt{7})^k-(127-48\sqrt{7})^k}{4\sqrt{7}}$$

ក្នុងករណីនេះគេបាន $2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2m$

$$2+2\sqrt{28n^2+1}=2+(127+48\sqrt{7})^k+(127-48\sqrt{7})^k$$

ដោយ $127\pm 48\sqrt{7}=(8\pm 3\sqrt{7})^2$

និង $(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7})=1$ នោះគេបាន

$$2+(127+48\sqrt{7})^k+(127-48\sqrt{7})^k=\left[(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k\right]^2$$

គេបាន $2+2\sqrt{28n^2+1}=[(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k]^2$

ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ព្រោះ $(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k$ ជាចំនួនគត់

ដូចនេះបើ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នោះ $2+2\sqrt{28n^2+1}$

ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ ។

របៀបទី២

ស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់

តាមបម្រាប់ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នាំឱ្យមាន $m\in IN$ ដែល

$28n^2+1=m^2$ ឬ $m^2-1=28n^2$

ឬ $\frac{m-1}{2}.\frac{m+1}{2}=7n^2$

តាមសមីការនេះគេទាញបាន $\begin{cases}\frac{m-1}{2}=p^2\\ \frac{m+1}{2}=7q^2\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}\frac{m-1}{2}=7p^2\\ \frac{m+1}{2}=q^2\end{cases}$

ដែល p និង q ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

គេទាញបាន

$m=2p^2+1$, $m=14q^2-1$ ឬ $m=14p^2+1, m=2q^2-1$

-ករណី $m=2p^2+1$, $m=14q^2-1$

គេបាន $2p^2+1=14q^2-1$ ឬ $p^2-7q^2=-1$ ជាសមីការគ្មាន

ចម្លើយក្នុង IN ព្រោះអង្គទីពីរសមីការចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ -1

តែអង្គទីពីរនៃសមីការចែកនឹង 7 មិនអាចឱ្យសំណល់ -1 ទេ ព្រោះគ្រប់

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន p ចំនួន p^2 ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ $1, 2, 4$ ។

-ករណី $m=14p^2+1, m=2q^2-1$

គេបាន $14p^2+1=2q^2-1$ ឬ $q^2-7p^2=1$ ជាសមីការមានចម្លើយ

ក្នុងសំណុំ IN ព្រោះ q^2-7p^2 ចែកនឹង 7 អាចឱ្យសំណល់ 1 ។

ហេតុនេះ មានគូ $p, q \in IN$ ដែល $m=14p^2+1, m=2q^2-1$

ក្នុងករណីនេះគេបាន $2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2m$

ចំពោះ $m=2q^2-1$ គេបាន

$2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2(2q^2-1)=4q^2$ ជាការេប្រាកដ ។

ឬគេអាចយក $m=14p^2+1$ គេបាន៖

$2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2(14p^2+1)=28p^2+4$

$=4(7p^2+1)=4q^2$ ជាការេប្រាកដ។

ព្រោះ $q^2-7p^2=1$ ឬ $7p^2+1=q^2$ ។

របៀបទី៣ ស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់

តាមបម្រាប់ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នាំឱ្យមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន p

ដែល $28n^2+1=(2p+1)^2=4p^2+4p+1$

គេបាន $p(p+1)=7n^2$ ដោយ $GCD(p,p+1)=1$

ព្រោះ $(p+1)-p=1$ (តាមទ្រឹស្តីបទ Bezout)

គេទាញបាន p ចែកដាច់នឹង 7 ឬ $p+1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

-ករណី p ចែកដាច់នឹង 7៖

តាម $p(p+1)=7n^2$ គេទាញបាន $p=7k^2, p+1=t^2$

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k និង t ហើយ $GCD(k,t)=1$ ។

គេមាន $7k^2+1=t^2$ ឬ $t^2-7k^2=1$ ជាសមីការមានឫសក្នុង IN

ព្រោះ t^2-7k^2 ចែកនឹង 7 មានសំណល់ $1, 2$ ឬ 4 ។

-ករណី $p+1$ ចែកដាច់នឹង 7៖

តាម $p(p+1)=7n^2$ គេទាញបាន $p=k^2, p+1=7t^2$

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k និង t ហើយ $GCD(k,t)=1$ ។

គេមាន $k^2+1=7t^2$ ឬ $k^2-7t^2=-1$ ជាសមីការគ្មានឬសក្នុង IN

ព្រោះ k^2-7t^2 ចែកនឹង 7 មិនអាចមានសំណល់ -1ទេ ។

ចំពោះ $p=7k^2, p+1=t^2$ ដែល $t^2-7k^2=1$ គេមាន

$2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2(2p+1)=4p+4=4t^2$ ជាការេ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា៖

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$ (R :កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ)

គេទាញ $\begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases}$ (I)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad \text{(II)}$$

យក (I) ជួសក្នុង (II) គេបាន៖

$$4R^2\sin^2 A=4R^2\sin^2 B+4R^2\sin^2 C-8R^2\sin B\sin C\cos A$$

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$$

គេទាញ $\cos A=\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$

ហេតុនេះ $\cot A=\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C\sin A}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\cot B=\dfrac{\sin^2 C+\sin^2 A-\sin^2 B}{2\sin C\sin A\sin B}$ (2)

ហើយនឹង $\cot C=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$ (3)

បូកទំនាក់ទំនង (1) ; (2) និង (3) គេទទួលបាន៖

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C} \quad (4)$$

ម៉្យាងទៀតគេមាន $A+B+C=\pi$ ឬ $A+B=\pi-C$

គេបាន $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

គេទាញ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot A\cot B\cot C$

គេបាន $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ ចំពោះគ្រប់ $x\,;\,y\,;z>0$

គេមាន $\begin{cases} x^2+y^2\ge 2xy \\ y^2+z^2\ge 2yz \\ z^2+x^2\ge 2zx \end{cases}$

គេបាន $2(x^2+y^2+z^2)\ge 2(xy+yz+zx)$

ឬ $x^2+y^2+z^2\ \ge xy+yz+zx$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2xy+2yz+2zx$ គេបាន៖

$(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$

ដោយយក $x=\cot A\,;\,y=\cot B\,;\,z=\cot C$

គេបាន $(\cot A+\cot B+\cot C)^2\ \ge 3$

នាំឱ្យ $\cot A+\cot B+\cot C\ \ge\sqrt{3}\quad (5)$

តាមទំនាក់ទំនង (4) និង (5) គេបាន

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}\ \ge\ \sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យ $a \ge 1$ និង $b \ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

ចំពោះ $a \ge 1$ និង $b \ge 1$

យើងមាន $a + b \ge 2\sqrt{a.b}$ (វិសមភាព $AM - GM$)

ឬ $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a.b}$

នាំឲ្យ $\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$

ឬ $\log_2 a + \log_2 b \le 2\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (1)$

ម៉្យាងទៀតគេមាន ៖

$$\log_2 a + \log_2 b \geq 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b}$$

$$2(\log_2 a + \log_2 b) \geq \log_2 a + 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b} + \log_2 b$$

$$2(\log_2 a + \log_2 b) \geq (\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2$$

$$\log_2 a + \log_2 b \geq \frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2 \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) យើងទាញ៖

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2 \leq 2\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2 \leq 4\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គណនាផលគុណ៖

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right] \text{ ដែល } |x| < \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right]$

តាមរូបមន្ត $\cos 2a = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

គេបាន $\cos 2^{k+1}x = \frac{1-\tan^2 2^k x}{1+\tan^2 2^k x}$

ហើយ $1-\tan^2 2^k = \frac{\cos^2 2^k - \sin^2 2^k}{\cos^2 2^k x} = \frac{\cos 2^{k+1}x}{\cos^2 2^k x}$

គេបាន $\frac{1+\tan^2 2^k x}{(1-\tan^2 2^k x)^2} = \frac{\cos^2 2^k x}{\cos^2 2^{k+1}x}$

ដូចនេះ $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos^2 2^k x}{\cos^2 2^{k+1}x}\right) = \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 2^{n+1}x}$ ។

លំហាត់ទី៣៤ (IMO 1969)

គេឱ្យចំនួនពិត $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 > 0, x_2 > 0$

$x_1 y_1 - z_1^2 > 0$ និង $x_2 y_2 - z_2^2 > 0$ ។

ចូរស្រាយថា៖

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \le \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា៖

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \le \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2} \quad (*)$$

តាង $a = x_1 y_1 - z_1^2 > 0$; $b = x_2 y_2 - z_2^2 > 0$

និង $c = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2$

ដោយ $x_1 > 0$ និង $x_2 > 0$ នោះ $y_1 = \dfrac{a + z_1^2}{x_1} > 0$ និង $y_2 > 0$

គេមាន៖

$$c=(x_1y_1-z_1{}^2)+(x_2y_2-z_2{}^2)+x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2$$

$$c=a+b+x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2$$

ដោយ $a=x_1y_1-z_1{}^2$ នោះ $x_1=\dfrac{a+z_1{}^2}{y_1}$

និង $b=x_2y_2-z_2{}^2$ នោះ $x_2=\dfrac{b+z_2{}^2}{y_2}$

គេបាន $c=a+b+y_2(\dfrac{a+z_1{}^2}{y_1})+y_1(\dfrac{b+z_2{}^2}{y_2})-2z_1z_2$

$$=a+b+\frac{y_2}{y_1}a+\frac{y_1}{y_2}b+\frac{y_2}{y_1}z_1{}^2-2z_1z_2+\frac{y_1}{y_2}z_2{}^2$$

$$=a+b+\frac{y_2}{y_1}a+\frac{y_1}{y_2}b+\left(\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}\,z_1-\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}\,z_2\right)^2$$

ដោយ $\left(\sqrt{\dfrac{y_2}{y_1}}z_1-\sqrt{\dfrac{y_1}{y_2}}z_2\right)^2\geq 0$ នោះគេទាញបាន៖

$c\geq a+b+\dfrac{y_2}{y_1}a+\dfrac{y_1}{y_2}b$ ដោយ $\dfrac{y_2}{y_1}a+\dfrac{y_1}{y_2}b\geq 2\sqrt{ab}$

នោះ $c\geq a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ (1)

យើងឧបមាថាវិសមភាព (*) ពិតពេលគឺ $\frac{8}{c}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ពិត

គេបាន $c\ge\frac{8ab}{a+b}$ ដោយ $c\ge(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ (តាមវិសមភាព (1))

យើងនឹងស្រាយថា $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\ge\frac{8ab}{a+b}$

សមមូល $(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\ge 8ab$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន៖

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ ហើយ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\ge 4\sqrt{ab}$

នោះ $(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})\ge 8ab$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\le\frac{1}{x_1y_1-{z_1}^2}+\frac{1}{x_2y_2-{z_2}^2}$$

វិសមភាពនេះក្លាយសមភាពលុះត្រាតែ៖

$z_1\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}=z_2\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}$ ឬ $z_1y_2=z_2y_1$ និង $\frac{y_2}{y_1}a=\frac{y_1}{y_2}b$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឱ្យ $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3^k}\right)=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{3^2}{3^3}+....+\frac{n^2}{3^n}$

គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} S_n$

ដំណោះស្រាយ

គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3^k}\right)=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{3^2}{3^3}+....+\frac{n^2}{3^n}$$

តាង $t_k=\frac{k^2}{3^k}$ ចំពោះគ្រប់ $k\ge 1$

គេបាន $3t_{k+1}-t_k=\frac{(k+1)^2}{3^k}-\frac{k^2}{3^k}=\frac{2k+1}{3^k}$

យក $T_k=3t_{k+1}-t_k=\frac{2k+1}{3^k}$

គេបាន $3T_{k+1}-T_k=\frac{2k+3}{3^k}-\frac{2k+1}{3^k}=\frac{2}{3^k}$

ឬ $3(3t_{k+2}-t_{k+1})-(3t_{k+1}-t_k)=\frac{2}{3^k}$

ឬ $9t_{k+2}-6t_{k+1}+t_k=\frac{2}{3^k}$

ដោយគេមាន ៖

$$9t_{k+2}-6t_{k+1}+t_k=9(t_{k+2}-t_{k+1})+3(t_{k+1}-t_k)+4t_k$$

គេទាញ $t_k=\frac{1}{2}.\frac{1}{3^k}-\frac{9}{4}(t_{k+2}-t_{k+1})-\frac{3}{4}(t_{k+1}-t_k)$

គេបាន $S_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\right)-\frac{9}{4}\sum_{k=1}^{n}(t_{k+2}-t_{k+1})-\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}(t_{k+1}-t_k)$

$$=\frac{1}{6}.\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{9}{4}(t_{n+2}-t_2)-\frac{3}{4}(t_{n+1}-t_1)$$

$$=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{3^n})-\frac{9}{4}t_{n+2}-\frac{3}{4}t_{n+1}+\frac{9}{4}t_2+\frac{3}{4}t_1$$

ដោយ $t_k=\frac{k^2}{3^k}$

គេបាន $t_1=\frac{1}{3}$; $t_2=\frac{4}{9}$; $t_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$; $t_{n+2}=\frac{(n+2)^2}{3^{n+2}}$

$$S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4.3^n}-\frac{9}{4}.\frac{(n+2)^2}{3^{n+2}}-\frac{3}{4}.\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}+\frac{9}{4}.\frac{4}{9}+\frac{3}{4}.\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} . \frac{n^2 + 3n + 3}{3^n}$

ដោយ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 3n + 3}{3^n} = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេមាន

$6^2-5^2=11$, $56^2-45^2=1111$, $556^2-445^2=111111$

$5556^2-4445^2=11111111$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះផង

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ និងស្រាយបញ្ជាក់ ៖

គេមាន

$6^2-5^2=11$

$56^2-45^2=1111$

$556^2-445^2=111111$

$5556^2-4445^2=11111111$

តាមលំនាំដែលគេឲ្យយើងអាចសរសេររូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\boxed{\underbrace{555....556}_{(n)}{}^2-\underbrace{444.....445}_{(n)}{}^2=\underbrace{111.......111}_{(2n)}}$$

សម្រាយផ្ទៀងផ្ទាត់រូបមន្តនេះ ៖

តាង $T_n = \underbrace{555....556}_{(n)}{}^2 - \underbrace{444.....445}_{(n)}{}^2$

$= (555.....555+1)^2 - (444......444+1)^2$

$= \left(\frac{5}{9}(10^n-1)+1\right)^2 - \left(\frac{4}{9}(10^n-1)+1\right)^2$

$= \left[\frac{5}{9}(10^n-1)+1+\frac{4}{9}(10^n-1)+1\right]\left[\frac{5}{9}(10^n-1)+1-\frac{4}{9}(10^n-1)-1\right]$

$= (10^n+1)\left(\frac{10^n-1}{9}\right) = \frac{10^{2n}-1}{9} = \frac{\underbrace{999.........999}_{(2n)}}{9}$

$T_n = \underbrace{111..........111}_{(2n)}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\boxed{\underbrace{555....556}_{(n)}{}^2 - \underbrace{444.....445}_{(n)}{}^2 = \underbrace{111.......111}_{(2n)}}$

លំហាត់ទី៣៧(**Greece National Olympiad 2011**)

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលមានផលបូកស្មើ 6 ។

ចូរកំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$

តាង $u=\sqrt[3]{a^2+2bc}$, $v=\sqrt[3]{b^2+2ca}$ និង $w=\sqrt[3]{c^2+2ab}$

គេមាន

$$u^3+v^3+w^3=a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab=(a+b+c)^2$$

តែតាមសម្មតិកម្ម $a+b+c=6$ នោះ $u^3+v^3+w^3=36$ (1)

ហើយ $S=u+v+w$ (2)

ចំពោះគ្រប់ $x>0$ យើងជ្រើសរើស $f(x)=x^3$

គេមាន $f'(x)=3x^2$ និង $f''(x)=6x>0$

នោះតាមវិសមភាព **Jensen** គេបាន

$$f(u)+f(v)+f(w)\geq 3f(\frac{u+v+w}{3})\ ,\ \forall u,v,w>0$$

គេបាន $u^3+v^3+w^3\geq 3\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3=\frac{1}{9}(u+v+w)^3$ (3)

តាមទំនាក់ទំនង $(1),(2)\ \&\ (3)$ គេបាន $36\geq\frac{S^3}{9}$ នាំឱ្យ $S\leq 3\sqrt[3]{12}$

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមានៃ $S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$

ស្មើនឹង $S_{max}=3\sqrt[3]{12}$ ដែលត្រូវនឹង $a=b=c=2$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេអោយបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយថា៖

$$\frac{a^3}{(b+c)^3}+\frac{b^3}{(c+a)^3}+\frac{c^3}{(a+b)^3}\geq\frac{3}{8}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{a^3}{(b+c)^3}+\frac{b^3}{(c+a)^3}+\frac{c^3}{(a+b)^3}\geq\frac{3}{8}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៈ

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{a^3}{(b+c)^3}\geq\frac{3a}{4(b+c)}$$

ឬ $\frac{a^3}{(b+c)^3}\geq\frac{3a}{4(b+c)}-\frac{1}{4}\quad(1)$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^3}{(c+a)^3}\geq\frac{3b}{4(c+a)}-\frac{1}{4}\quad(2)$

និង $\frac{c^3}{(a+b)^3}\geq\frac{3c}{4(a+b)}-\frac{1}{4}\quad(3)$

បូកវិសមភាព $(1),(2)\&(3)$ គេបាន៖

$$\frac{a^3}{(b+c)^3}+\frac{b^3}{(c+a)^3}+\frac{c^3}{(a+b)^3}\geq\frac{3}{4}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)-\frac{3}{4}$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{3}{4}(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})-\frac{3}{4}\geq\frac{3}{8}$

ឬ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

តាង $\begin{cases} b+c=m \\ c+a=n \\ a+b=p \end{cases}$

គេបាន $(b+c)+(c+a)+(a+b)=m+n+p$

នាំឱ្យ $a+b+c=\frac{m+n+p}{2}$

គេទាញ $\begin{cases} a=\frac{n+p-m}{2} \\ b=\frac{m-n+p}{2} \\ c=\frac{m+n-p}{2} \end{cases}$

គេបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{n+p-m}{2m}+\frac{m-n+p}{2n}+\frac{m+n-p}{2p}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{p}{m}+\frac{m}{p}\right)+\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)-3\right]$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន

$$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\geq 2\ ;\ \frac{p}{m}+\frac{m}{p}\geq 2\ ;\ \frac{n}{p}+\frac{p}{n}\geq 2$$

គេបាន $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ \geq\ \frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$ ពិត

លំហាត់ទី៣៩

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$

កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\ \geq\ f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\dfrac{1+a+b}{2}\right)\ \geq\ f\left(\dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x-3)(3x^2-3x+1)-(6x-3)(x^3+3x^2-3x+1)}{(3x^2-3x+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-6x^3+3x^2}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2}\ \geq 0\ ,\ \forall x\in IR$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតយើងសន្មតថា $\dfrac{1+a+b}{2} \geq \dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}$

គេបាន $\dfrac{2}{1+a+b} \leq \dfrac{2+a+b}{1+a+b+ab}$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$$

ដោយ $\dfrac{1}{1+a+b} \leq \dfrac{1}{1+a}$ និង $\dfrac{1}{1+a+b} \leq \dfrac{1}{1+b}$

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b។

គេទាញ $\dfrac{2}{1+a+b} \leq \dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}$

នាំឲ្យការសន្មត $\dfrac{1+a+b}{2} \geq \dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}$ ពិត។

ដូចនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេទាញបាន ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

លំហាត់ទី៤០

គណនាផលបូក៖

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}\right]$$

រួចទាញរកតម្លៃ $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}\right]$

គេមាន $\frac{3^k}{3^k-2^k} - \frac{3^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}} = \frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3^k}{3^k-2^k} - \frac{3^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}\right)$

ដូចនេះ $S_n = 3 - \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}$ ។

ហើយ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(3 - \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}\right) = 3 - 1 = 2$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេឲ្យ θ ជាចំនួនពិតដែល $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

តាមវិសមភាព **Bernoulli**

គេមាន $(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x\ ,\ \forall x>-1\ ,\ \alpha>0$

យើងមាន ៖

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}=\left(1+\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}<1+\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}<\frac{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}$$

ឬ $(\sin\theta)^{\cos\theta}>\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}\quad(1)$

ស្រាយដូចខាងលើនេះដែរយើងបាន៖

$$(\cos\theta)^{\sin\theta} > \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta} \quad (2)$$

បូកវិសមភាព (1) និង (2)ខាងលើនេះយើងបាន ៖

$$(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta} > \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}$$

ដោយគេមាន $\dfrac{\mathrm{son}\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}>1$

ដូចនេះ $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta} > 1$ ។

លំហាត់ទី៤២

ចូរកំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់ $m\ ,\ n \geq 3$ បើគេដឹងថាចំពោះគ្រប់

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a គេមាន $\dfrac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់វិជ្ជមាន (m, n) ៖

ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $a^n + a^2 - 1$

ជាកត្តារួមនៃ $a^m + a - 1$ ហើយ $m > n$ ។

យើងយក $m = n + k \ \ , k \in IN$ យើងបាន ៖

$$\begin{aligned} a^m + a - 1 &= a^{n+k} + a - 1 \\ &= a^k(a^n + a^2 - 1) + (1 - a)(a^{k+1} + a^k - 1) \end{aligned}$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះដើម្បីឲ្យ $a^n + a^2 - 1$ ជាកត្តារួមនៃ $a^m + a - 1$

លុះត្រាតែ $n = k + 1$ និង $k = 2$ ។

ដូចនេះ $(m\ , n\ ) = (\ 5\ ,\ 3\ \ )$ ។

លំហាត់ទី៤៣(BMO 2010)

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៈ

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$$

គេមាន

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}=\frac{a^2b^2-a^2bc}{a+b}=\frac{(a^2b^2+ab^2c)-(a^2bc+ab^2c)}{a+b}$$

$$=\frac{ab^2(a+c)-abc(a+b)}{a+b}=ab^2.\frac{a+c}{a+b}-abc$$

គេបាន $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}=ab^2.\frac{a+c}{a+b}-abc \quad (1)$

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{b^2c(c-a)}{b+c}=bc^2\frac{b+a}{b+c}-abc \quad (2)$

និង $\frac{c^2a(a-b)}{c+a}=ca^2\frac{c+b}{c+a}$ (3)

បូកសមភាព $(1),(2)$ និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន៖

$$T=ab^2\frac{c+b}{a+b}+bc^2\frac{b+a}{b+c}+ca^2\frac{c+b}{c+a}-3abc$$

ដែល $T=\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន៖

$$ab^2\frac{c+b}{a+b}+bc^2\frac{b+a}{b+c}+ca^2\frac{c+b}{c+a}\geq 3abc$$

ឬ $ab^2\frac{c+b}{a+b}+bc^2\frac{b+a}{b+c}+ca^2\frac{c+b}{c+a}-3abc\geq 0$

ដូចនេះ $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$ ។

លំហាត់ទី៤៤ (IMO Shortlist 2009)

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដោយដឹងថា

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{3}{16}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{3}{16}$

គេមាន $(2a+b+c)^2=4a^2+4a(b+c)+(b+c)^2$

$$=4a^2+4ab+4ac+4bc+(b-c)^2$$

$$=4(a+b)(a+c)+(b-c)^2$$

ដោយ $(b-c)^2\ge 0$ នោះ $(2a+b+c)^2\ge 4(a+b)(a+c)$

គេទាញ $\frac{1}{(2a+b+c)^2}\le\frac{1}{4(a+b)(a+c)}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{1}{(a+2b+c)^2}\le\frac{1}{4(a+b)(b+c)}$ (2)

និង $\frac{1}{(a+b+2c)^2} \le \frac{1}{4(b+c)(a+c)}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន៖

$$S \le \frac{1}{4(a+b)(a+c)} + \frac{1}{4(a+b)(b+c)} + \frac{1}{4(b+c)(a+c)}$$

$$S \le \frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

ពិនិត្យ $(a+b+c)(ab+bc+ca) - (a+b)(b+c)(c+a) = abc$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន៖

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 2\sqrt{ab}\,.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca} = 8abc$$

គេទាញបាន

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

តាមសម្មតិកម្មគេមាន $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a+b+c$

គេបាន $(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})(ab+bc+ca)$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc}$$

ដោយ $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$ នោះគេទាញ

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{3}(a+b+c)$ នោះ $S \leq \frac{1}{2}.\frac{3}{8} = \frac{3}{16}$

ដូចនេះ $\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{3}{16}$

លំហាត់ទី៤៥

គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំនៃរង្វង់ចារិកក្នុង និង ចារិកក្រៅ

ប្រស់ត្រីកោណកែង ABC មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $R \ge (1+\sqrt{2})r$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $R \ge (1+\sqrt{2})r$

តាង $T = \cos A + \cos B + \cos C$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2})$$

$$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B-C}{2})$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (1)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

ដោយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

គេបាន $a^2=b^2+c^2-2bc+4bc\sin^2\frac{A}{2}$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$

យក $p=\frac{a+b+c}{2}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}a-b+c=2(p-b)\\ a+b-c=2(p-c)\end{cases}$

គេបាន $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{4(p-b)(p-c)}{4bc}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$

គេទាញ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ដូចគ្នាដែរ $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$; $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$ (2)

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ៖

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} abc=4RS \\ (p-a)(p-b)(p-c)=\dfrac{S^2}{p}=\dfrac{S.p.r}{p}=S.r \end{cases}$

តាម (2) អាចសរសេរ ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R} \quad (3)$$

យកទំនាក់ទំនង (3) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R} \quad (4)$$

ដោយ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះគេអាចជ្រើសរើសយក $A=\frac{\pi}{2}$

ហើយ $B=\frac{\pi}{2}-C$ ជួសក្នុងទំនាក់ទំនង (4) គេបាន ៖

$$\cos\frac{\pi}{2}+\cos(\frac{\pi}{2}-C)+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

$$\sin C+\cos C=1+\frac{r}{R} \quad (5)$$

តាមទំនាក់ទំនង $\sin C+\cos C=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+C)\le\sqrt{2}$

នោះតាម (5) គេបាន $1+\frac{r}{R}\le\sqrt{2}$

នាំឲ្យ $R\ge\frac{r}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)r$

ដូចនេះ $R\ge(1+\sqrt{2})r$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពកាលណា ៖

$\sin C+\cos C=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+C)=\sqrt{2}$ នាំឲ្យ $C=\frac{\pi}{4}$ និង $B=\frac{\pi}{4}$

ពេលគឺត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz = 1$ ។

ចូរបង្ហាញវិសមភាព៖

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \ge x+y+z$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញវិសមភាព៖

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \ge x+y+z$$

របៀបទី១

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន៖

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + z \ge 2|x+y-1| \ge 2(x+y-1) \quad (1)$$

$$\frac{(y+z-1)^2}{x} + x \ge 2|y+z-1| \ge 2(y+z-1) \quad (2)$$

$$\frac{(z+x-1)^2}{y} + y \ge 2|z+x-1| \ge 2(z+x-1) \quad (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2), (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន៖

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\ge 3(x+y+z)-6$$

ដោយ $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$ ព្រោះ៖ $xyz=1$

គេបាន $2(x+y+z)\ge 6$

ឬ $2(x+y+z)-6\ge 0$

ឬ $3(x+y+z)-6\ge x+y+z$

ដូចនេះ៖ $\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\ge x+y+z$

របៀបទី២

គេតាង

$$T=\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}-(x+y+z)$$

ដោយប្រើវិសមភាព $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ គេបាន

$$T \geq \frac{[\,|x+y-1|+|y+z-1|+|z+x-1|\,]^2}{x+y+z} - (x+y+z)$$

$$T \geq \frac{(x+y-1+y+z-1+z+x-1)^2-(x+y+z)^2}{x+y+z}$$

$$T \geq \frac{(2x+2y+2z-3)^2-(x+y+z)^2}{x+y+z}$$

$$T \geq \frac{3(x+y+z-3)(x+y+z-1)}{x+y+z}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន៖

$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ (ព្រោះ $xyz=1$)

គេទាញបាន $x+y+z-3 \geq 0$ និង $x+y+z-1 \geq 2$

ហេតុនេះ $T = \dfrac{3(x+y+z-3)(x+y+z-1)}{x+y+z} \geq 0$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{(x+y-1)^2}{z}+\dfrac{(y+z-1)^2}{x}+\dfrac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z$ ។

លំហាត់ទី៤៧(Greece National Olympiad 2007)

គេឱ្យ a,b,c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយថា៖

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\geq ab+bc+ca$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា៖

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\geq ab+bc+ca$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន៖

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+a(a+b-c)\geq 2(c+a-b)^2$$

គេទាញ $\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}\geq 2(c+a-b)^2-a(a+b-c)$

ឬ $\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}\geq a^2+2b^2+2c^2+5ac-5ab-4bc \quad (1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន៖

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} \ge 2a^2+b^2+2c^2+5ab-5bc-4ac \quad (2)$$

$$\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} \ge 2a^2+2b^2+c^2+5bc-5ac-4ab \quad (3)$$

បូកវិសមភាព **(1) , (2) & (3)** គេបាន៖

$$S \ge 5(a^2+b^2+c^2)-4(ab+bc+ca) \ge ab+bc+ac$$ ពិត

ដូចនេះ $S=\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} \ge ab+bc+ca$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឱ្យ a ; b ; c ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមាន

បរិមាត្រស្មើ 2 ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$

ដោយបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណនេះស្មើ 2 នោះជ្រុងទាំងបី a ; b ; c

របស់ត្រីកោណសុទ្ធតែតូចជាង 1 ។

យើងបាន $S = \frac{1}{2}bc\sin A < \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្តហេរុង $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ដោយ $p = 1$

នោះ $S = \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \frac{1}{2}$

គេទាញ $0 < (1-a)(1-b)(1-c) < \frac{1}{4}$

ឬ $$0 < 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc < \frac{1}{4}$$

ឬ $$0 < 1-2+(ab+bc+ca)-abc < \frac{1}{4}$$

ឬ $1 < (ab+bc+ca)-abc < \frac{5}{4}$

ឬ $2 < 2(ab+bc+ca)-2abc < \frac{5}{2}$

គេមាន $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

គេទាញ ៖

$$a^2+b^2+c^2+2abc = (a+b+c)^2+2abc-2(ab+bc+ca)$$
$$a^2+b^2+c^2+2abc = 4-\left[2(ab+bc+ca)-2abc\right]$$

ដោយ $2 < 2(ab+bc+ca)-2abc < \frac{5}{2}$

គេបាន $4-\frac{5}{2} < a^2+b^2+c^2+2abc < 4-2$

ដូចនេះ $\frac{3}{2} < a^2+b^2+c^2+2abc < 2$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គណនាតម្លៃនៃផលគុណ

$$P=(1-\cot 1^{o})(1-\cot 2^{o})(1-\cot 3^{o}).....(1-\cot 44^{o})$$

ដំណោះស្រាយ

គណនា

$$P=(1-\cot 1^{o})(1-\cot 2^{o})(1-\cot 3^{o}).....(1-\cot 44^{o})$$

យើងពិនិត្យ $1-\cot a=1-\dfrac{\cos a}{\sin a}=\dfrac{\sin a-\cos a}{\sin a}$

ដោយ $\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin(45^{o}-a)$

ហេតុនេះ $1-\cot a=\sqrt{2}\dfrac{\sin(45^{o}-a)}{\sin a}$

យើងបាន $P=\prod\limits_{a=1^{o}}^{44^{o}}(1-\cot a)=\prod\limits_{a=1^{o}}^{44^{o}}\left[\sqrt{2}\,\dfrac{\sin(45^{o}-a)}{\sin a}\right]$

$$P=\left(\sqrt{2}\right)^{44}.\frac{\sin 44^{o}.\sin 43^{o}.....\sin 1^{o}}{\sin 1^{o}.\sin 2^{o}......\sin 44^{o}}=2^{22}$$

ដូចនេះ $P=(1-\cot 1^{o})(1-\cot 2^{o}).....(1-\cot 44^{o})=2^{22}$ ។

លំហាត់ទី៥០

គេឱ្យ a, b , c, d ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព៖

$(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$

តាង $x=1-a^2-b^2$ និង $y=1-c^2-d^2$

យើងឧបមាថា $x\geq 0$ និង $y\geq 0$

វិសមភាព $(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$

សមមូល $xy>(ac+bd-1)^2$

ឬ $4xy>(2ac+2bd-2)^2$

ដោយ $x+y=2-a^2-b^2-c^2-d^2$

នោះ $2ac+2bd-2=-a^2-b^2-c^2-d^2+2ac+2bd-x-y$

$$=-[(a-c)^2+(b-d)^2+x+y]$$

គេទាញ $4xy > [(a-c)^2 + (b-d)^2 + (x+y)]^2 \geq (x+y)^2$

ឬ $4xy > x^2 + 2xy + y^2$

ឬ $(x-y)^2 < 0$ មិនពិត ។ នាំឱ្យការឧបមាខាងលើផ្ទុយពីការពិត ។

ដូចនេះគេទាញ $x < 0$ និង $y < 0$ នាំឱ្យ $a^2 + b^2 > 1$ និង $c^2 + d^2 > 1$

លំហាត់ទី៥១

គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (y_n) កំនត់ដោយ

$y_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $y_{n+1} = \frac{y_n^{\ 2}}{\sqrt[3]{y_n^{\ 6} - 2y_n^{\ 3} + 2}}$

ដែល $n = 0 , 1 , 2 , ...$ ។ ចូរគណនា y_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

គណនា y_n ជាអនុគមន៍នៃ n

មាន $y_{n+1} = \frac{y_n^{\ 2}}{\sqrt[3]{y_n^{\ 6} - 2y_n^{\ 3} + 2}}$

$$\Rightarrow \ y_{n+1}^3 = \frac{y_n^{\ 6}}{y_n^{\ 6} - 2y_n^{\ 3} + 2}$$

$$\Rightarrow \ y_{n+1}^3 - 1 = \frac{y_n^{\ 6}}{y_n^{\ 6} - 2y_n^{\ 3} + 2} - 1$$

$$\Rightarrow \ y_{n+1}^3 - 1 = \frac{2(y_n^{\ 3} - 1)}{(y_n^{\ 3} - 1)^2 + 1}$$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $z_n = {y_n}^3 - 1$

គេបាន $z_{n+1} = \dfrac{2z_n}{{z_n}^2 + 1}$ មានសមីការសំគាល់ $r = \dfrac{2r}{r^2 + 1}$

សមមូល $r(r-1)(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0\ ,\ r_2 = 1\ ,\ r_3 = -1$

តាងស្វ៊ីជំនួយ $t_n = \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$

គេបាន $t_{n+1} = \dfrac{z_{n+1} - 1}{z_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{2z_n}{1 + {z_n}^2} - 1}{\dfrac{2z_n}{1 + {z_n}^2} + 1} = -\left(\dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}\right)^2$

$t_{n+1} = -{t_n}^2$ តាង $u_n = -t_n$

គេបាន $-u_{n+1} = -(-u_n)^2$ ឬ $u_{n+1} = {u_n}^2$

$\Rightarrow \ln(u_{n+1}) = 2\ln(u_n)$

គេទាញ $\{\ \ln(u_n)\ \}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម 2 ។

គេបាន $\ln(u_n) = 2^n \ln(u_0) \Rightarrow u_n = {u_0}^{2^n}$ ដោយ $u_n = -t_n$

នោះ $-t_n = (-t_0)^{2^n}$ ឬ $t_n = -(-t_0)^{2^n}$

តែ $t_0 = \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} = \frac{({y_0}^3 - 1) - 1}{({y_0}^3 - 1) + 1} = \frac{\frac{3}{2} - 2}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$

គេទាញ $t_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n} = -\frac{1}{3^{2^n}}$

ដោយ $t_n = \frac{z_n - 1}{z_n + 1} \Rightarrow z_n = \frac{1 + t_n}{1 - t_n} = \frac{3^{2^n} - 1}{3^{2^n} + 1}$

តាម $z_n = {y_n}^3 - 1 \Rightarrow y_n = \sqrt[3]{1 + z_n} = \sqrt[3]{1 + \frac{3^{2^n} - 1}{3^{2^n} + 1}}$

ដូចនេះ $y_n = \sqrt[3]{\frac{2 \times 3^{2^n}}{1 + 3^{2^n}}}$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេមាន $99^2 = 9801$, $999^2 = 998001$, $9999^2 = 99980001$

$99999^2 = 9999800001$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅនិងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះផង

ដំណោះស្រាយ

តាមបំរាប់គេមាន ៖

$99^2 = 9801$

$999^2 = 998001$

$9999^2 = 99980001$

$99999^2 = 9999800001$

តាមលំនាំនេះយើងអាចបង្កើតរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\boxed{\underbrace{999.....999}_{(n)}{}^2 = \underbrace{999.....999}_{(n-1)}8\underbrace{000.....000}_{(n-1)}1}$$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ៖

យើងតាង $A = \underbrace{999.........999}_{(n-1)}8\underbrace{000.........000}_{(n-1)}1$

$$= \underbrace{999.........999}_{(n-1)} \times 10^{n+1} + 8.10^{n} + 1$$

$$= (10^{n-1} - 1)10^{n+1} + 8.10^{n} + 1$$

$$= 10^{2n} - 10^{n+1} + 8.10^{n} + 1$$

$$= 10^{2n} - 2.10^{n} + 1$$

$$= (10^{n} - 1)^{2} = \underbrace{999............999}_{(n)}{}^{2}$$

ដូចនេះគេបានរូបមន្ត៖

$$\underbrace{999.....999}_{(n)}{}^{2} = \underbrace{999.....999}_{(n-1)}8\underbrace{000.....000}_{(n-1)}1 \quad ។$$

លំហាត់ទី៥៣ (China Team Selection Test 2006)

គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ។

ចូរស្រាយថា៖

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right) \le \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $1+x_i = y_i$ គេទាញ $x_i = y_i - 1$ និង $\sum_{i=1}^{n} y_i = n+1$ ដែល $y_i > 1$

វិសមភាព $\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right) \le \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$ សមមូល៖

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{y_i - 1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{y_i}}\right) \le \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy} - \text{Schwarz}$ ៖ $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} (a_i^2) . \sum_{i=1}^{n} (b_i^2)$

គេយក $a_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}, a_i = \sqrt{y_i - 1} \quad \forall i \ge 2$

ហើយ $b_1 = \sqrt{y_1 - 1}$, $b_i = \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall i \ge 2$ គេបាន៖

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}.\sqrt{y_i-1}\right)^2\le\left(\frac{1}{n}+\sum_{i=2}^{n}(y_i-1)\right)\left(y_1-1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n}\right)$$

ដោយ $\sum_{i=2}^{n}(y_i-1)=n+1-y_1-(n-1)=2-y_1$

ហើយ $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$ នោះគេបាន៖

$$\left(\frac{1}{n}+\sum_{i=2}^{n}(y_i-1)\right)\left(y_1-1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1+2n}{n}-y_i\right)\left(y_i-\frac{1}{n}\right)$$

$$=-y_1^{\,2}+\frac{2(n+1)}{n}y_1-\frac{2n+1}{n^2}$$

គេទាញ $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}.\sqrt{y_i-1}\right)^2\le-y_1^{\,2}+\frac{2(n+1)}{n}y_1-\frac{2n+1}{n^2}$

ឬ $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\le\sqrt{n}\sqrt{-y_1^{\,2}+\frac{2(n+1)}{n}y_1-\frac{2n+1}{n^2}}$

ឬ $\frac{1}{\sqrt{y_1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\le\sqrt{n}\sqrt{-y_1+\frac{2n+2}{n}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_1}}$

ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន៖

$$\frac{1}{\sqrt{y_2}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\le\sqrt{n}\sqrt{-y_2+\frac{2n+2}{n}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_2}}$$

$$-----------------------------$$

$$\frac{1}{\sqrt{y_n}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\le\sqrt{n}\sqrt{-y_n+\frac{2n+2}{n}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_n}}$$

ដោយធ្វើវិធីបូកអង្គ និង អង្គនៃបណ្តាវិសមភាពខាងលើគេបាន៖

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}.\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{y_i}}\le\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-y_i+\frac{2n+2}{n}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_i}}\ (*)$$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេមាន៖

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-y_i+\frac{2n+2}{2}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_i}}\le\sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(-y_i+\frac{2n+2}{n}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_i})}$$

ដោយ $\sum_{i=1}^{n}(-y_i+\frac{2n+2}{n})=-(n+1)+2n+2=n+1$

គេបាន $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-y_i+\frac{2n+2}{2}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_i}}\le\sqrt{n}\sqrt{n+1-\frac{2n+1}{n^2}.\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}}$

ហើយ $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}\ge\frac{(1+1+...+1)^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i}=\frac{n^2}{n+1}$

គេទាញ $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-y_i+\frac{2n+2}{2}-\frac{2n+1}{n^2}\cdot\frac{1}{y_i}}\le\sqrt{n}\sqrt{n+1-\frac{2n+1}{n^2}\cdot\frac{n^2}{n+1}}$

ឬ $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-y_i+\frac{2n+2}{2}-\frac{2n+1}{n^2}\cdot\frac{1}{y_i}}\le\sqrt{n}\cdot\frac{n}{\sqrt{n+1}}$ (**)

តាម (*) និង (**) គេទាញ $\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{y_i}}\right)\le\frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right)\le\frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $4abc = a + b + c + 1$

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq 2(ab + bc + ca)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ៖

$$\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq 2(ab + bc + ca)$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន ៖

$4abc = a + b + c + 1 \geq 4\sqrt[4]{abc}$ នាំឲ្យ $abc \geq 1$

គេទាញ $a + b + c = 4abc - 1 \geq 3abc$ (1) (ព្រោះ $abc \geq 1$)

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន ៖

$$\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq \frac{2bc}{a} + \frac{2ca}{b} + \frac{2ab}{c} \quad (2)$$

តាមវិសមភាព Cauchy - Schwarz គេមាន ៖

$$(ab+bc+ca)^2 \le 3\left[(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\right]$$

ដោយ $\dfrac{2bc}{a}+\dfrac{2ca}{b}+\dfrac{2ab}{c}=\dfrac{2}{abc}[(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2]$

គេទាញ $\dfrac{2bc}{a}+\dfrac{2ca}{b}+\dfrac{2ab}{c}\ge\dfrac{2}{3abc}(ab+bc+ca)^2 \ (3)$

តាម (2) និង (3) គេទាញបាន៖

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\ge\frac{2}{3abc}(ab+bc+ca)^2 \ (4)$$

យើងមាន $\begin{cases}(ab)^2+(bc)^2\ge 2ab^2c\\(bc)^2+(ca)^2\ge 2abc^2\\(ca)^2+(ab)^2\ge 2a^2bc\end{cases}$

គេបាន $2[\,(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\,]\ge 2abc(a+b+c)$

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\ge abc(a+b+c)$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2(ab)(bc)+2(ab)(ca)+2(bc)(ca)$

គេបាន $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$

គេមាន $a+b+c\ge 3abc$ (តាម (1))

គេទាញ $(ab+bc+ca)^2 \ge 9a^2b^2c^2$

ឬ $ab+bc+ca \ge 3abc$

នាំឲ្យ $\frac{2}{3abc}(ab+bc+ca)^2 \ge 2(ab+bc+ca) \quad (5)$

តាម (4) និង (5) គេទាញបាន ៖

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c} \ge 2(ab+bc+ca)$$ ។

លំហាត់ទី៥៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_{n+1} = {u_n}^2 - {v_n}^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases} \quad \text{ដែល } n \geq 0$$

ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = {z_n}^2$ រួចទាញថា $z_n = {z_0}^{2^n}$ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $z_{n+1} = {z_n}^2$ រួចទាញថា $z_n = {z_0}^{2^n}$ ៖

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

គេបាន $z_{n+1} = u_{n+1} + iv_{n+1}$

$$= {u_n}^2 - {v_n}^2 + 2iu_n v_n$$

$$= {u_n}^2 + 2iu_n v_n + (iv_n)^2$$

$$= (u_n + iv_n)^2$$

ដូចនេះ $z_{n+1}=z_n^{\ 2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតបើ $n=0$ នោះ $z_1=z_0^{\ 2}$

បើ $n=1$ នោះ $z_2=z_1^{\ 2}=z_0^{\ 4}$

បើ $n=2$ នោះ $z_3=z_2^{\ 2}=z_0^{\ 8}$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $z_k=z_0^{\ 2^k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $z_{k+1}=z_0^{\ 2^{k+1}}$

គេមាន $z_{k+1}=z_k^{\ 2}$ តែតាមការឧបមា $z_k=z_0^{\ 2^k}$

គេបាន $z_{k+1}=(z_0^{\ 2^k})^2=z_0^{\ 2^{k+1}}$ ពិត ។

ដូចនេះ $z_n=z_0^{\ 2^n}$ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n=z_0^{\ 2^n}$ ដោយ $z_0=u_0+iv_0=1+i\sqrt{3}$

$$= 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

គេបាន $z_n = 2^{2^n}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{2^n}$

$$= 2^{2^n}(\cos\frac{2^n\pi}{3} + i\sin\frac{2^n\pi}{3})$$

ដូចនេះ $u_n = 2^{2^n}\cos\frac{2^n\pi}{3}$; $v_n = 2^{2^n}\sin\frac{2^n\pi}{3}$ ។

លំហាត់ទី៥៦ (IMO Shortlist 1998)

គេឲ្យ $x\,,y\,,z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = 1$,

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\dfrac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\dfrac{z^3}{(1+x)(1+y)}\ge\dfrac{3}{4}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\dfrac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\dfrac{z^3}{(1+x)(1+y)}\ge\dfrac{3}{4}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ យើងមាន

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\ge\frac{3x}{4}\quad(1)$$

$$\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{1+z}{8}+\frac{1+x}{8}\ge\frac{3y}{4}\quad(2)$$

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{1+x}{8}+\frac{1+y}{8}\ge\frac{3z}{4}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\ge\frac{2(x+y+z)-3}{4}$$

ដោយ $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ ព្រោះ $xyz = 1$

ដូចនេះ $$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

លំហាត់ទី៥៧

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a\,,b\,\,,c$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយថា $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geq\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$

វិសមភាពនេះសមមូល $(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2\geq a^{\frac{4}{3}}(a^2+8bc)$

សមមូល $b^{\frac{8}{3}}+c^{\frac{8}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}+2b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}\geq 8a^{\frac{4}{3}}bc$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $b^{\frac{8}{3}}+c^{\frac{8}{3}}\geq 2b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}$

គេទាញ $b^{\frac{8}{3}}+c^{\frac{8}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}+2b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}\geq 8a^{\frac{4}{3}}bc$ ពិត

ហេតុនេះ $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$ (1)

ដូចគ្នាដែរគេទាញ $\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} \geq \dfrac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$ (2)

ហើយ $\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \dfrac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$ (3)

ដោយបូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) អង្គនិងអង្គគេបាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$$u_1 = \frac{7}{2} \text{ និង } u_{n+1} = u_n^{\ 2} + u_n - \frac{1}{4} \text{ គ្រប់ } n \geq 1$$

បង្ហាញថាគេអាចកំណត់ចំនួនពិត a ដែល $u_{n+1} + a = (u_n + a)^2$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a

គេមាន $u_{n+1} = u_n^{\ 2} + u_n - \dfrac{1}{4}$ (1)

ហើយ $u_{n+1} + a = (u_n + a)^2 \quad (2)$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន៖

$$u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} + a = (u_n + a)^2$$

$$u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} + a = u_n^2 + 2au_n + a^2$$

$$(1 - 2a)u_n = a^2 - a + \frac{1}{4}$$

សមីការនេះពិតជានិច្ចចំពោះគ្រប់តម្លៃ n លុះត្រាតែ៖

$$\begin{cases} 1 - 2a = 0 \\ a^2 - a + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$ នាំឱ្យ $a = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $a = \frac{1}{2}$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n៖

ចំពោះ $a = \frac{1}{2}$ គេបាន $u_{n+1} + \frac{1}{2} = (u_n + \frac{1}{2})^2$

គេទាញ $\ln(u_{n+1} + \frac{1}{2}) = 2\ln(u_n + \frac{1}{2})$ (3)

តាង $v_n = \ln(u_n + \frac{1}{2}) \Rightarrow v_{n+1} = \ln(u_{n+1} + \frac{1}{2})$

តាម (3) គេបាន $v_{n+1} = 2v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ

មានផលធៀបរួម $q = 2$ និង $v_1 = \ln(u_1 + \frac{1}{2}) = \ln 4$

គេបាន $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2^{n-1}\ln 4 = 2^n \ln 2 = \ln 2^{2^n}$

ដោយ $v_n = \ln(u_n + \frac{1}{2})$ គេទាញ $u_n + \frac{1}{2} = 2^{2^n}$

ដូចនេះ៖ $v_n = 2^{2^n} - \frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេឱ្យ $x\,;\,y\,;z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$ ។ ចូរស្រាយថា៖

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$

យើងមាន $(x+1)^2+y^2+1=x^2+y^2+2x+2$

ដោយ $x^2+y^2\ge 2xy$

គេទាញ $(x+1)^2+y^2+1\ge 2(xy+x+1)$

នាំឱ្យ $\dfrac{1}{(x+1)^2+y^2+1}\le\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{xy+x+1}$

គេមាន $xyz=1$ នោះគេអាចយក $x=\dfrac{b}{a}\,;\,y=\dfrac{c}{b}$, $z=\dfrac{a}{c}$

ដែល $a>0\,;\,b>0\,;\,c>0$ ។

គេបាន $xy+x+1=\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+1=\frac{a+b+c}{a}$

ហេតុនេះ $\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}\le\frac{1}{2}.\frac{a}{a+b+c}\quad(1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន៖

$$\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}\le\frac{1}{2}.\frac{b}{a+b+c}\quad(2)$$

$$\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}.\frac{c}{a+b+c}\quad(3)$$

ធ្វើផលបូកវិសមភាព (1) ; (2) និង (3) គេបាន៖

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$

លំហាត់ទី៦០

ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x, y \in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}$

គេបាន $\sin\frac{2\pi}{10}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10})=\cos\frac{3\pi}{10}$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ៖

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ និង $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=3\cos\frac{\pi}{10}-4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4(1-\sin^2\frac{\pi}{10})$$

ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10}-2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$ តាង $t=\sin\frac{\pi}{10}>0$

គេបាន $4t^2-2t-1=0$, $\Delta'=1+4=5>0$

គេទាញឫស $t_1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$ (មិនយក) , $t_2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។

ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}=1$

នាំឲ្យ $\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ. ស្រាយថា $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\dfrac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y)=x^2+(x-y)^2-4(x^2+y^2)\sin^2\dfrac{\pi}{10}$

គេបាន ៖

$$f(x;y)=x^2+x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

$$=2x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$=2x^2-2xy+y^2-(x^2+y^2)\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x^2-2xy-\frac{1+\sqrt{5}}{2}y^2$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}x^2+2xy+\frac{\sqrt{5}+1}{2}y^2\right)$$

$$=-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,x+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\,y\right)^2\le 0 \quad ,\forall x,y\in IR$$

ដូចនេះ: $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\dfrac{\pi}{10}$ ។

លំហាត់ទី៦១(Balkan MO 1990)

ស្វីតនៃចំនួនពិត $(a_n)_{n\geq 1}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 1$, $a_2 = 3$

និង $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n \ , \forall n \in IN$

ចូរកំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11

គេមាន $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n \ , \forall n \in IN$

ឬ $a_{n+2} - a_{n+1} = (n+2)(a_{n+1} - a_n)$

ឬ $\dfrac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = n+2$

គេបាន $\displaystyle\prod_{k=1}^{(n-2)} \left(\frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{a_{k+1} - a_k} \right) = \prod_{k=1}^{(n-2)} (k+2)$

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_2 - a_1} = 3.4.5......n$$ ដោយ $a_2 - a_1 = 2$

គេទាញបាន $a_n - a_{n-1} = n!$

ហើយ $\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n}(k!)$

$a_n - a_1 = 2!+3!+....+n!$ ដោយ $a_1 = 1 = 1!$

គេបាន $a_n = 1!+2!+3!+.....+n!$ ។

-ករណីទី១ ៖ ចំពោះ $n < 11$ គេមាន

$a_1 = 1$

$a_2 = 3$

$a_3 = 1!+2!+3! = 9$

$a_4 = 1!+2!+3!+4! = 33 = 3\times 11$

$a_5 = a_4 + 5! = 153$

$a_6 = a_5 + 6! = 873$

$a_7 = a_6 + 7! = 5913$

$a_8 = a_7 + 8! = 46233 = 4203\times 11$

$a_9 = a_8 + 9! = 409113$

$a_{10} = a_9 + 10! = 4037913$

គេបាន $n = 4$, $n = 8$ ។

-ករណីទី២ ះ ចំពោះ $n \geq 11$

គេបាន $a_n = a_{10} + \sum_{k=11}^{n}(k!)$

ដោយ $\sum_{k=11}^{n}(k!)$ ចែកដាច់នឹង 11 ហើយ a_{10} ចែកមិនដាច់នឹង 11

នោះចំពោះ $n \ge 11$ គេបាន a_n ចែកមិនដាច់នឹង 11 ។

ដូចនេះតម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 មានតែពីរគត់គឺ ៖

$n = 4$ ឬ $n = 8$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេឲ្យអនុគមន៍ ៖

$$f(x,y)=\frac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}\ ,\ x\ ;\ y\in IR$$

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$ គេបាន $|f(x;y)|\le\frac{1}{4}$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(x,y)=\frac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$

$$=\frac{x^2-x^4y^2-y^2+x^2y^4}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x^2y^2+x^2y^4-y^2-2x^2y^2-x^4y^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2(1+2y^2+y^4)-y^2(1+2x^2+x^4)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2(1+y^2)^2-y^2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}-\frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

យើងបាន៖

$$f(x,y)-\frac{1}{4}=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{4}-\frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{4x^2-(1+x^2)^2}{4(1+x^2)^2}-\frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

$$=-\frac{(1-x^2)^2}{4(1+x^2)^2}-\frac{y^2}{(1+y^2)^2}\leq 0 \quad , \ \forall x,y\in IR$$

គេទាញ $f(x,y)-\frac{1}{4}\leq 0$

នាំឲ្យ $f(x,y)\leq \frac{1}{4} \ , \ \forall x,y\in IR \qquad (1)$

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន ៖

$$f(x,y)+\frac{1}{4}=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{4}-\frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{(1+y^2)^2-4y^2}{4(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{(1-y^2)^2}{4(1+y^2)^2}\ \geq 0 \ , \ \forall x,y\in IR$$

គេទាញ $f(x,y)+\frac{1}{4}\geq 0$

នាំឲ្យ $f(x,y)\ \geq -\frac{1}{4}\ ,\ \forall x,y\in IR \qquad (2)$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន

$-\frac{1}{4}\leq\ f(x,y)\ \leq\frac{1}{4}\ ,\ \forall x,y\in IR$ ។

ដូចនេះ $|f(x;y)|\leq\frac{1}{4}$ ចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេឱ្យ $A\,;\,B\,;C$ ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\geq(1+\sqrt{3})^3$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\geq(1+\sqrt{3})^3$

ដោយ $A\,;\,B\,;C$ ជាមុំស្រួចនោះ $\tan A>0;\tan B>0;\tan C>0$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គ្រប់ $x>0\,;\ y>0\,;z>0$ គេមាន:

$$(1+x)(1+y)(1+z)=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz$$
$$(1+x)(1+y)(1+z)\geq 1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}+xyz$$
$$(1+x)(1+y)(1+z)\geq(1+\sqrt[3]{xyz})^3$$

យក $x=\tan A\,;\,y=\tan B\,;\,z=\tan C$ គេបាន៖

$$(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\geq(1+\sqrt{\tan A\tan B\tan C})^3$$

គេមាន $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

គេទាញ $\tan A+\tan B+\tan B=\tan A\tan B\tan C$

$$x+y+z=xyz$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន៖

$$x+y+z\ \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$
$$xyz\ \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

គេទាញ $xyz\geq 3\sqrt{3}$ ឬ $\tan A\tan B\tan C\geq 3\sqrt{3}$

គេបាន $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan B)\geq(1+\sqrt[3]{3\sqrt{3}})^3$

ដូចនេះ $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\geq(1+\sqrt{3})^3$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេមាន $33^2 = 1089$, $333^2 = 110889$, $3333^2 = 11108889$

$33333^2 = 1111088889$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះផង

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $33^2 = 1089$, $333^2 = 110889$, $3333^2 = 11108889$

$33333^2 = 1111088889$ ។

តាមលំនាំនេះយើងអាចបង្កើតរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\boxed{\underbrace{333.....333}_{(n)}{}^2 = \underbrace{111.....111}_{(n-1)}0\underbrace{888.....888}_{(n-1)}9} \text{ ។}$$

ការស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ៖

យើងតាង $A = \underbrace{111.........111}_{(n-1)}0\underbrace{888.........888}_{(n-1)}9$

$$= \underbrace{111.........111}_{(n-1)} \times 10^{n+1} + \underbrace{888.........888}_{(n-1)}.10 + 9$$

$$= \frac{1}{9}(10^{n-1} - 1)\,10^{n+1} + \frac{8}{9}(10^{n-1} - 1)\,10 + 9$$

$$= \frac{10^{2n} - 10^{n+1} + 8.10^{n} - 80 + 81}{9}$$

$$= \frac{10^{2n} - 2.10^{n} + 1}{9} = \frac{(10^{n} - 1)^2}{9} = \left(\frac{10^{n} - 1}{3}\right)^2$$

$$= \underbrace{333............333^2}_{(n)}$$

ដូចនេះគេបានរូបមន្ត ៖

$$\boxed{\underbrace{333\,.....\,333^{\,2}}_{(n)} = \underbrace{111\,.....\,111}_{(n-1)}\,0\,\underbrace{888\,.....\,888}_{(n-1)}\,9}$$ ។

លំហាត់ទី៦៥

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 2(\frac{b+c}{2} - a)^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

នោះ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$ ។

បើ $\frac{b+c}{2} - a \leq 0$ នោះវិសមភាពខាងលើពិតជានិច្ច ។

យើងឧបមាថា $\frac{b+c}{2} - a > 0$ ។

តាង $T = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc - 2(\frac{b+c}{2} - a)^3$

យក $b = a + 2x$ និង $c = a + 2y$ នោះ $b + c = 2a + 2x + 2y$

ដែល $x \geq 0$, $y \geq 0$ ។ គេបាន៖

$$T = a^3 + (a+2x)^3 + (a+2y)^3 - 3a(a+2x)(a+2y) - 2(x+y)^3$$

បន្ទាប់ពីបង្រួមរួចគេបាន៖

$$T = 12a(x^2 - xy + y^2) + 6(x+y)(x-y)^2 \geq 6(x+y)(x-y)^2$$

$$T = 6(\frac{b+c}{2} - a)(\frac{b-c}{2})^2 \geq 0$$ ពិត

ដូចនេះ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 2(\frac{b+c}{2} - a)^3$ ។

លំហាត់ទី៦៦

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 1 ។

ចំនួន n នោះចែកនឹង 5 ឱ្យសំណល់ 2 ។

ក-បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ-រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3940 < n < 4000$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ឧបមាថា n ចែកនឹង 8 ឱ្យផលចែក $q_1 \in IN$ និងសំណល់ 1

និង ចំនួន n នោះចែកនឹង 5 ឱ្យផលចែក $q_2 \in IN$ និងសំណល់ 2 ។

តាមអឺគ្លីត យើងបាន $\begin{cases} n = 8q_1 + 1 & (-15) \\ n = 5q_2 + 2 & (16) \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} -15n = -120q_1 - 15 & (1) \\ 16n = 80q_2 + 32 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការ (1) និង (2)

យើងបាន $n = 80q_2 - 120q_1 + 17 = 40q + 17$

ដែល $q = 2q_2 - 3q_1$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $n = 40q + 17$ បញ្ជាក់ថាបើចំនួន n នោះចែកនឹង 40

ឱ្យសំណល់ $r = 17$

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3940 < n < 4000$

យើងមាន $n = 40q + 17$ ដោយ $3940 < n < 4000$

គេទាញ $3940 < 40q + 17 < 4000$

ឬ $98 + \dfrac{3}{40} < n < 100 + \dfrac{17}{40}$

ដោយ $q \in IN$ នាំឱ្យគេទាញបាន $q = \{99 , 100\}$

ហើយ $n = \{3977 , 4017\}$ ។

លំហាត់ទី៦៧

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1, z_2, z_3 ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង៖

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ និង $\dfrac{z_1^2}{z_2 z_3} + \dfrac{z_2^2}{z_1 z_3} + \dfrac{z_3^2}{z_1 z_2} + 1 = 0$

ចូរស្រាយថា $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1, 2\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1, 2\}$

គេមាន $\dfrac{z_1^2}{z_2 z_3} + \dfrac{z_2^2}{z_1 z_3} + \dfrac{z_3^2}{z_1 z_2} + 1 = 0$

គេបាន $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_1 z_2 z_3 = 0$

ឬ $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3 = -4z_1 z_2 z_3$

តាង $z = z_1 + z_2 + z_3$ គេបាន៖

$$z^3 - 3z(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) = -4z_1z_2z_3$$

$$z^3 = z_1z_2z_3\left[3z\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) - 4\right]$$

$$z^3 = z_1z_2z_3\left[3z(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) - 4\right]$$

$$z^3 = z_1z_2z_3(3z.\overline{z} - 4) = z_1z_2z_3\left(3|z|^2 - 4\right)$$

គេបាន $|z|^3 = |z_1z_2z_3(3|z|^2 - 4)|$

ឬ $|z|^3 = |3|z|^2 - 4|$

-បើ $3|z|^2 - 4 \geq 0$ ឬ $|z| \geq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

គេបាន $|z|^3 = 3|z|^2 - 4$

$$|z|^3 - 3|z|^2 + 4 = 0$$

$$(|z|+1)(|z|-2)^2 = 0 \Rightarrow |z| = 2$$

-បើ $3|z|^2 - 4 < 0$ ឬ $|z| < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

គេបាន $|z|^3 = -(3|z|^2 - 4)$

$$|z|^3 + 3|z|^2 - 4 = 0$$

$$(|z|-1)(|z|+2)^2 = 0 \Rightarrow |z| = 1$$

ដូចនេះ $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1, 2\}$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឱ្យ $x; y; z$ ជាចំនួនពិតដែល $\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases}$

ចូរបង្ហាញថា $-1 \le z \le \frac{13}{3}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $-1 \le z \le \frac{13}{3}$

គេមាន $x+y+z=5$

យើងបាន $x+y=5-z$

$$(x+y)^2=(5-z)^2$$
$$(x+y)^2=25-10z+z^2$$

ដោយ $xy+yz+zx=3$

យើងបាន $xy=3-z(x+y)$

$$xy=3-z(5-z)$$
$$xy=3-5z+z^2$$

យើងមាន $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy \ge 0$

គេទាញ $(25-10z+z^2)-4(3-5z+z^2)\geq 0$

$$25-10z+z^2-12+20z-4z^2\geq 0$$
$$-3z^2+10z+13\geq 0$$
$$(-3z^2-3z)+(13z+13)\geq 0$$
$$-3z(z+1)+13(z+1)\geq 0$$
$$(z+1)(-3z+13)\geq 0$$

គេទាញ $-1\leq z\leq \frac{13}{3}$ ។

លំហាត់ទី៦៩

ចូរកំនត់គ្រប់គូ $(m;n)$ នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានបើគេដឹងថា ៖

$m^2+n^2=13(m+n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់គូ $(m;n)$ ៖

គេមាន $m^2+n^2=13(m+n)$ (1)

-ករណីទី១ $m=n$

គេបាន $2n^2=26n$ នាំឲ្យ $n=13$

ដូចនេះ $m=n=13$ ។

-ករណីទី២ $m\neq n$

យើងពិនិត្យឃើញថាបើ $(m;n)$ ជាគូចម្លើយរបស់ (1) នោះគេបាន

$(n;m)$ ក៏ជាគូចម្លើយរបស់ (1) ដែរ ។

សន្មតថា $m<n$ ។ តាមវិសមភាព Cauchy Schwarz

យើងមាន $(m+n)^2 < 2(m^2+n^2)$

$$(m+n)^2 < 26(m+n)$$
$$m+n < 26$$

ដោយ $m<n$ នោះគេបាន $2m < m+n < 26$ ឬ $m<13$

ដោយ $m \in IN^*$ នោះគេទាញ $1 \le m \le 12$ ។

ម្យ៉ាងទៀតសមីការ (1) អាចសរសេរ ៖

$$n^2 - 13n + m^2 - 13m = 0 \ (2)$$

ឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta = 169 - 4(m^2 - 13m)$

សមីការ (2) មានចម្លើយក្នុង IN^* កាលណា Δ ជាការេប្រាកដ

នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស ។

គេយក $169 - 4(m^2-13m) = (2k+1)^2 \quad \forall k \in IN$

គេបាន $168 - 4(m^2-13m) = (2k+1)^2 - 1 = 4k(k+1)$

គេទាញ $k(k+1) = 42 + m(13-m)$ ដោយ $1 \le m \le 12$

នោះតម្លៃដែលអាចរបស់ផលគុណ $k(k+1)$ គឺ ៖

$k(k+1)=\{\ 54\ ,64\ ,72\ ,78\ ,82\ ,84\ \}$ ។

ក្នុងតម្លៃទាំងប្រាំមួយនេះតម្លៃដែលជាផលគុណចំនួនគត់តគ្នាមានតែ

តម្លៃ $72=8\times 9$ មួយគត់ដែលត្រូវនឹង $m=\{\ 3\ ;\ 10\ \}$ ។

-ចំពោះ $m=3$ គេបាន $n^2-13n-30=(n-15)(n+2)=0$

នាំឲ្យ $n=15$ ។

-ចំពោះ $m=10$ គេបាន $n^2-13n-30=(n-15)(n+2)=0$

នាំឲ្យ $n=15$ ។

សរុបមកគេទទួលបានគូចម្លើយប្រាំគូគឺ ៖

$(m;n)=\{\ (3;15);(10;15);(13;13);(15;3);(15;10)\}$ ។

លំហាត់ទី៧០ (IMO 1998)

ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដោយដឹងថា x^2y+x+y ចែកដាច់នឹង xy^2+y+7 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y)

តាង $a=x^2y+x+y$ និង $b=xy^2+y+7$

បើ a ចែកដាច់នឹង b នោះគេបានដូចគ្នា $ay-bx$ ចែកដាច់នឹង b ។

គេមាន $ay-bx=y(x^2y+x+y)-x(xy^2+y+7)=y^2-7x$

ដោយ $x\geq 1$ នោះ $xy^2\geq y^2$

នាំឱ្យ $y^2-7x\leq xy^2-7x<xy^2+y+7=b$ ។

ដូចនេះ y^2-7x ចែកដាច់នឹង b លុះត្រាតែ $y^2-7x\leq 0$ ។

ក. ករណីទី១ ៖ $y^2-7x=0$ នោះ $y^2=7x$

ដោយ y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះលុះត្រាតែ $x=7k^2$ ហើយ $y=7k$

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ។

ខ.ករណីទី២ $y^2-7x<0$ នោះ $7x-y^2>0$

ដោយពិនិត្យឃើញថា $7x-y^2<7x$ ហេតុនេះដើម្បីឱ្យ $7x-y^2$ ចែក

ដាច់នឹង $b=xy^2+y+7$ លុះត្រាតែ $7x>7x-y^2\geq xy^2+y+7$

ហេតុនេះគេត្រូវឱ្យ $y^2<7$ នោះ $y=1$ ឬ $y=2$ ។

-ចំពោះ $y=1$ គេបាន $7x-y^2=7x-1$ ហើយ $b=x+8$

គេមាន $7x-1=7(x+8)-57$ ចែកដាច់នឹង $b=x+8$ លុះត្រាតែ

b ជាតួចែកនៃ 57 ។ ដោយ $b=x+8>8$ នោះ $b=19$ ឬ $b=57$

គេទាញបាន $x=11$ ឬ $x=49$ ។

ដូចនេះគេបាន $x=11\,,\,y=1$ ឬ $x=49\,,\,y=1$ ។

-ចំពោះ $y=2$ គេបាន $7x-y^2=7x-4$ ហើយ $b=4x+9$

ដោយ $\text{GCD}(4x+9;4)=1$ នោះ $7x-4$ ចែកដាច់នឹង $4x+9$

សមមូល $4(7x-4)$ ចែកដាច់នឹង $4x+9$ ។

គេមាន $4(7x-4)=7(4x+9)-79$ ។

ដោយ 79 ជាចំនួនបឋមនោះដើម្បីឱ្យ $4(7x-4)$ ចែកដាច់នឹង $4x+9$

លុះត្រាតែ $4x+9=79$ នោះ $x=\frac{35}{2}$ មិនមែនជាចំនួនគត់ ។

ដូចនេះក្នុងករណី $y=2$ គ្មានចម្លើយ ។

សរុបមកគេបានគូចម្លើយ៖

$$(x,y)\in\{\ (11,1\ ),(49,1\ ),(7k^2,7k)\ \},k=1,2,...$$

លំហាត់ទី៧១

ក.គណនា $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....+\frac{1}{(n-1)n}$ ដែល $n>2$

ខ.ដោយប្រើវិសមភាព $AM-GM$ នៃ $(n-1)$ ចំនួនខាងក្រោម ៖

$\frac{1}{1.2}\,;\,\frac{1}{2.3}\,;\,\frac{1}{3.4}\,;\,\frac{1}{(n-1)n}$ ចូរបង្ហាញថា $n^n < (n!)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....+\frac{1}{(n-1)n}=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)k}\right]$

គេមាន $\frac{1}{(k-1)\,k}=\frac{k-(k-1)}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

គេបាន $\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)k}\right]=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{n}$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $n^n < (n!)^2$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ ៖

$$a_1+a_2+a_3+.....+a_n \geq n\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3......a_n} \quad ;\forall a_k \geq 0$$

គេបាន ៖

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{(n-1)n} > (n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{1}{1.2}.\frac{1}{2.3}......\frac{1}{(n-1)n}}$$

$$1-\frac{1}{n} > (n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{1}{n!(n-1)!}}$$

$$\frac{n-1}{n} > (n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{1}{n!\,(n-1)!}}$$

$$\frac{1}{n} > \sqrt[(n-1)]{\frac{n}{(n!)^2}}$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} > \frac{n}{(n!)^2} \Rightarrow n^n < (n!)^2$$

ដូចនេះ $\boxed{n^n < (n!)^2}$ ។

លំហាត់ទី៧២

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \in (0, \frac{\pi}{4})$

ចូរបង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$

តាមវិសមភាព **Bernoulli** ចំពោះគ្រប់ចំនួន x និង a

ដែល $x > -1$ និង $a > 1$ យើងមាន $(1+x)^a \geq 1 + ax$ ។

ហេតុនេះចំពោះ $0 < x < \frac{\pi}{4}$ គេបាន៖

$$(\cos^2 x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} = (1-\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} . (1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

ដោយ $(1-\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > 1 - \cos x$ និង $(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > 1 + \cos x$

គេបាន $(\cos^2 x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > (1-\cos x)(1+\cos x) = \sin^2 x$

គេទាញ $(\cos x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > \sin x$

$$\ln(\cos x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > \ln(\sin x)$$

$$\frac{\cos x}{\sin x}\ln(\cos x) > \ln(\sin x)$$

$$\cos x\ln(\cos x) > \sin x\ln(\sin x)$$

$$\ln(\cos x)^{\cos x} > \ln(\sin x)^{\sin x}$$

ដូចនេះ $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$ ។

លំហាត់ទី៧៣

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

ដំណោះស្រាយ

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង $\sqrt[3]{ab}$ គេបាន៖

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\le\sqrt[3]{2(a+b)^2}$$

តាង $x=\sqrt[3]{a}$ និង $y=\sqrt[3]{b}$

គេបាន $x^2+y^2\le\sqrt[3]{2(x^3+y^3)}$ (*)

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន៖

$x^6+x^3y^3+x^3y^3\ge 3x^4y^2$ និង $y^6+x^3y^3+x^3y^3\ge 3x^2y^4$

បូកវិសមភាពទាំងពីរនេះអង្គនិងអង្គគេបាន៖

$$x^6+4x^3y^3+y^6\ge 3x^4y^2+3x^2y^4$$

ថែមអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង x^6+y^6 គេបាន

$$2(x^6+2x^3y^3+y^6)\geq x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6$$
$$2(x^3+y^3)^2\geq (x^2+y^2)^3$$

គេទាញ $x^2+y^2\leq \sqrt[3]{2(x^3+y^3)}$ នាំឱ្យ $(*)$ ពិត ។

ដូចនេះ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\leq \sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$ គ្រប់ $a>0\,;b>0$ ។

លំហាត់ទី៧៤

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ដែល $|z_1|=|z_2|=1$

ចូរស្រាយថា $|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+1|\geq 2$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+1|\geq 2$

តាមវិសមភាពត្រីកោណ $|a|+|b|\geq|a\pm b|$ គេបាន៖

$$|z_2+1|+|z_1z_2+1|\geq|z_2+1-z_1z_2-1|$$

$$|z_2+1|+|z_1z_2+1|\geq|z_2||1-z_1|=|1-z_1|$$

ហើយ $|z_1+1|+|1-z_1|\geq|(z_1+1+1-z_1)|=2$

ដូចនេះ $|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+1|\geq 2$ ។

លំហាត់ទី៧៥(Kazakhstan NMO 2010)

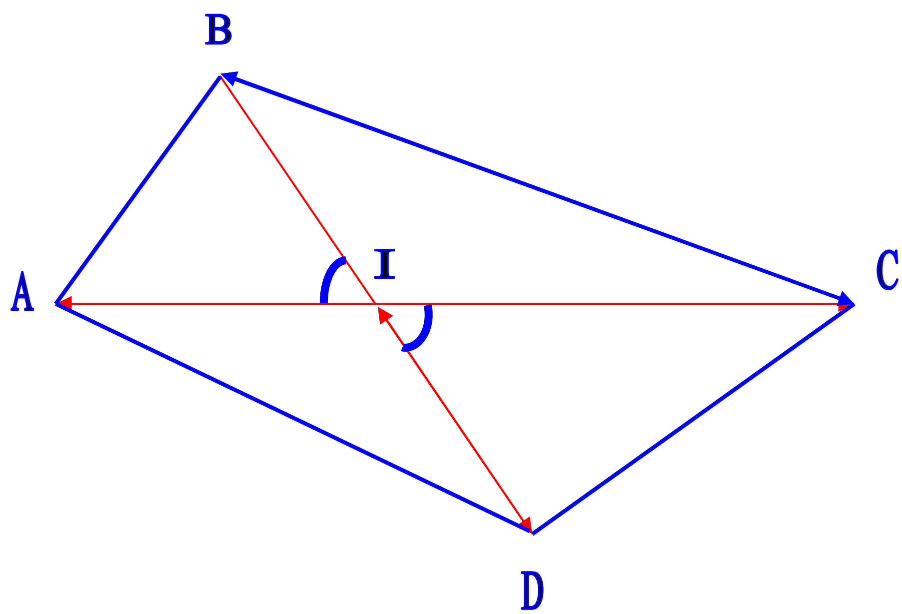
ចំពោះគ្រប់ $x;y\geq 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ៖

$$\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{y^2+y+1}\geq 2(x+y)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ៖

$$\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{y^2+y+1}\geq 2(x+y)$$



ជ្រើសរើសចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានអង្កត់ទ្រូង AC និង BD ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច I ដែល $IA=x$, $IC=y$, $IB=ID=1$

និង $\angle AIB = \angle CID = 60^{o}$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេបាន ៖

$AB = \sqrt{x^2 - x + 1}$, $CD = \sqrt{y^2 - y + 1}$

$AD = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $BC = \sqrt{y^2 + y + 1}$

តាមទ្រឹស្តីបទតូលីមេ $AC.BD \le AB.CD + AD.BC$

ដោយ $AC = AI + IB = x + y$, $BC = BI + IC = 2$

ដូចនេះ

$$\sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}\sqrt{y^2 + y + 1} \ge 2(x + y)$$

លំហាត់ទី៧៦(Vietnam Team Selection Tests 2010)

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$16(a+b+c)\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3}\leq\frac{8}{9}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3}\leq\frac{8}{9}$$

តាមសម្មតិកម្មគេមាន $16(a+b+c)\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

គេបាន $ab+bc+ca\leq 16abc(a+b+c)\ \ (1)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន៖

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2}+\frac{b^2c^2+c^2a^2}{2}+\frac{c^2a^2+a^2b^2}{2}\geq ab^2c+abc^2+a^2bc$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq ab^2c+abc^2+a^2bc=abc(a+b+c)$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2ab^2c+2abc^2+2a^2bc=2abc(a+b+c)$

គេបាន $(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)$ (2)

តាម (1) នឹង (2) គេទាញបាន

$$(ab+bc+ca)^2\geq \frac{3}{16}(ab+bc+ca)$$

ឬ $ab+bc+ca\geq \frac{3}{16}$ (3)

ម៉្យាងទៀតតាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន៖

$$(a+b)+\frac{1}{2}(\sqrt{2a+2c})+\frac{1}{2}(\sqrt{2a+2c})\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}}$$

ឬ $(a+b+\sqrt{2a+2c})^3\geq \frac{27}{2}(a+b)(a+c)$

គេទាញបាន $\dfrac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}\leq \dfrac{2}{27}\cdot\dfrac{1}{(a+b)(a+c)}$ (4)

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន៖

$$\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3} \le \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{(a+b)(b+c)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3} \le \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{(c+a)(b+c)} \quad (6)$$

តាង

$$T=\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3}$$

បូកវិសមភាព $(4),(5),(6)$ គេបាន

$$T \le \frac{2}{27}\cdot\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

គេមាន

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-(a+b)(b+c)(c+a)=abc \ (7)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន៖

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 2\sqrt{ab}\,.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}=8abc \quad (8)$$

តាម (7) និង (8)គេទាញបាន

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

នាំឱ្យ $\dfrac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq\dfrac{9}{8}.\dfrac{1}{ab+bc+ca}=\dfrac{9}{8}.\dfrac{16}{3}=6$

ព្រោះ៖ $ab+bc+ca\geq\dfrac{3}{16}$ ។

គេទាញបាន $T\leq\dfrac{2}{27}\times2\times6=\dfrac{8}{9}$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3}\leq\frac{8}{9}$$

លំហាត់ទី៧៧

ចូរគណនាផលបូក៖

$$S_n = \frac{2}{3+1} + \frac{2^2}{3^2+1} + ... + \frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក៖

គេមាន $S_n = \frac{2}{3+1} + \frac{2^2}{3^2+1} + ... + \frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $x \neq 1$ យើងមាន៖

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x^2-1}$$

គេទាញ $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$

យក $x = 3^{2^k}$ គេបាន $\frac{1}{3^{2^k}+1} = \frac{1}{3^{2^k}-1} - \frac{2}{3^{2^{k+1}}-1}$

គុណនឹង 2^{k+1} គេបាន $\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1} = \frac{2^{k+1}}{3^{2^k}-1} - \frac{2^{k+2}}{3^{2^{k+1}}-1}$

គេបាន៖

$$S_n=\left(\frac{2}{3-1}-\frac{2^2}{3^2-1}\right)+\left(\frac{2^2}{3^2-1}-\frac{2^3}{3^{2^2}-1}\right)+\dots+\left(\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}-1}-\frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}\right)$$

ដូចនេះ $S_n=1-\dfrac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}$ ។

លំហាត់ទី៧៨(China Team Selection Test 2002)

គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1 = 1, a_2 = 5$ និង $a_{n+1} = \dfrac{a_n a_{n-1}}{\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 1}}\ \forall n \geq 2$

ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $a_{n+1} = \dfrac{a_n a_{n-1}}{\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 1}}\ \forall n \geq 2$

គេបាន

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 1}{a_n^2 a_{n-1}^2}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{1}{a_n^2} + \frac{1}{a_{n-1}^2} + \frac{1}{a_n^2 a_{n-1}^2}$$

$$1 + \frac{1}{a_{n+1}^2} = (1 + \frac{1}{a_n^2}) + \frac{1}{a_{n-1}^2}(1 + \frac{1}{a_n^2})$$

$$1 + \frac{1}{a_{n+1}^2} = (1 + \frac{1}{a_n^2})(1 + \frac{1}{a_{n-1}^2})$$

ឬ $1+\frac{1}{a_{n+2}^2}=(1+\frac{1}{a_n^2})(1+\frac{1}{a_{n+1}^2})$ (*)

តាង $b_n=\ln(1+\frac{1}{a_n^2})$ នោះ $b_{n+1}=\ln(1+\frac{1}{a_{n+1}^2})$

ហើយ $b_{n+2}=\ln(1+\frac{1}{a_{n+2}^2})$ (**)

យក (*) ជំនួសក្នុង (**) គេទទួលបាន $b_{n+2}=b_{n+1}+b_n$

សមីការសម្គាល់ $q^2-q-1=0$

មានឫស $q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

គេបាន $b_n=\alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+\beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

ដែល α,β កំណត់ដូចខាងក្រោម៖

ចំពោះ $n=1$ $b_1=\alpha.\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\beta.\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ចំពោះ $n=2: b_2=\alpha\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\beta\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

ដោយ $b_1 = \ln(1+\frac{1}{a_1^{\ 2}}) = \ln 2$ និង $b_2 = \ln(1+\frac{1}{a_2^{\ 2}}) = \ln\frac{26}{25}$

គេបាន $\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta = \ln 2 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\beta = \ln\frac{26}{25} \end{cases}$

គេទាញ $\alpha = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2\sqrt{13}}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{100}{3}\right)$

និង $\beta = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2\sqrt{13}}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{100}{3}\right)$

ហើយ $b_n = \ln(1+\frac{1}{a_n^{\ 2}})$ គេទាញ $a_n = \frac{1}{\sqrt{e^{b_n}-1}}$ ។

លំហាត់ទី៧៩

ប្រសិនបើ $xyx=(1-x)(1-y)(1-z)$ ដែល $0\le x;y;z\le 1$

ចូរបង្ហាញថា $x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)\ge \frac{3}{4}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖

$x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)\ge \frac{3}{4}$

គេមាន $(x-\frac{1}{2})^2=x^2-x+\frac{1}{4}\ge 0$ ចំពោះគ្រប់ x

គេទាញ $x(1-x)\le \frac{1}{4}$ ដោយ $0\le x\le 1$ នោះគេទាញបាន ៖

$0\le x(1-x)\le \frac{1}{4}$ ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន ៖

$0\le y(1-y)\le \frac{1}{4}$ និង $0\le z(1-z)\le \frac{1}{4}$

យើងបាន $xyz(1-x)(1-y)(1-z)\le \frac{1}{64}$

ដោយ $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$ នោះគេទាញ ៖

$(xyz)^2 \le \frac{1}{64}$ នាំឱ្យ $xyz \le \frac{1}{8}$ ។

តាង $T = x(1-z) + y(1-x) + z(1-y)$

$= (x+y+z) - (xy+yz+xz)$

ដោយ $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$

ឬ $xyz = 1 - (x+y+z) + (xy+yz+zx) - xyz$

ឬ $(x+y+z) - (xy+yz+zx) = 1 - 2xyz$

គេទាញ $T = 1 - 2xyz \ge 1 - 2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$

ដូចនេះ $x(1-z) + y(1-x) + z(1-y) \ge \frac{3}{4}$

លំហាត់ទី៨០

គេឱ្យ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ និង $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ ។ ចូរស្រាយថា៖

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា៖

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$

តាង $T_n = \frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} - \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $T_1 = \frac{a_1^2}{x_1} - \frac{a_1^2}{x_1} = 0 \geq 0$ ពិត

ចំពោះ $n = 2$ គេបាន៖

$$T_2 = \frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} - \frac{(a_1 + a_2)^2}{x_1 + x_2}$$

$$= \frac{(x_1+x_2)(a_1{}^2x_2+a_2{}^2x_1)-x_1x_2(a_1+a_2)^2}{x_1x_2(x_1+x_2)}$$

$$= \frac{(a_1x_2-a_2x_1)^2}{x_1x_2(x_1+x_2)} \geq 0$$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $T_k \geq 0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $T_{k+1} \geq 0$ ពិត

គេមាន $T_k \geq 0$ (ការឧបមាខាងលើ)

គេបាន $\frac{a_1{}^2}{x_1}+\frac{a_2{}^2}{x_2}+...+\frac{a_k{}^2}{x_k}-\frac{(a_1+a_2+...+a_k)^2}{x_1+x_2+...+x_k} \geq 0$

គេទាញ $\frac{a_1{}^2}{x_1}+\frac{a_2{}^2}{x_2}+...+\frac{a_k{}^2}{x_k} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_k)^2}{x_1+x_2+...+x_k}$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}}$ គេបាន៖

$$\frac{a_1{}^2}{x_1}+\frac{a_2{}^2}{x_2}+...+\frac{a_k{}^2}{x_k}+\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_k)^2}{x_1+x_2+...+x_k}+\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}}$$

ដោយ $\frac{(a_1+a_2+...+a_k)^2}{x_1+x_2+...+x_k}+\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_{k+1})^2}{x_1+x_2+...+x_{k+1}}$

គេទាញបាន៖

$$\frac{a_1^{\ 2}}{x_1}+\frac{a_2^{\ 2}}{x_2}+\dots+\frac{a_k^{\ 2}}{x_k}+\frac{a_{k+1}^2}{x_k}\geq\frac{(a_1+a_2+\dots+a_k+a_{k+1})^2}{x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}}$$

នាំឱ្យ $T_{k+1}\geq 0$ ពិត ។

ដូចនេះ $\frac{a_1^{\ 2}}{x_1}+\frac{a_2^{\ 2}}{x_2}+\dots+\frac{a_n^{\ 2}}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{x_1+x_2+\dots.+x_n}$ ។

លំហាត់ទី៨១

គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$

$$T=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$T=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{a(b+c)}+\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{b(c+a)}+\frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{c(a+b)}\geq\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}$$

ដោយ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)^2=(ab+bc+ca)^2$

ហើយ $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=2(ab+bc+ca)$

គេទាញ $T\geq\frac{ab+bc+ca}{2}\geq\frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2}=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨២

គេឱ្យ $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n\in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n\in IN$

តាង $Z=\frac{1}{\sqrt{3}}+i=\frac{1+i.\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$

តាមរូបមន្តដឺមរ័គេបាន $Z^n=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

ហើយ $\overline{Z}^n=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

គេទាញ $A=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)-\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

$$=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}-\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}}$ ។

លំហាត់ទី៨៣(Indonesia Indonesia TST 2010)

គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន និង x, y, z

ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដោយដឹងថា $a+b+c=x+y+z$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\frac{a^3}{x^2}+x+x\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^2}.x.x}$

គេទាញ $\frac{a^3}{x^2}\geq 3a-2x \quad (1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{b^3}{y^2}\geq 3b-2y \quad (2)$ និង $\frac{c^3}{z^2}\geq 3c-2z \quad (3)$

បូកវិសមភាព $(1), (2)$ & (3) គេបាន៖

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\ge 3(a+b+c)-2(x+y+z)=a+b+c$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\ge a+b+c$ ។

លំហាត់ទី៨៤

គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (z_n) កំណត់ដោយ៖

$$z_1=\frac{2+\sqrt{3}+i}{2} \text{ និង } z_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}z_n+\frac{2-\sqrt{3}-i}{2}$$

ដែល $n=1\,,\,2\,,3\,,\ldots$ ។

ក. តាង $w_n=z_n-1$ ។ បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n=2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច៖

គេមាន $w_n=z_n-1$

គេបាន $w_{n+1}=z_{n+1}-1$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{2} z_n + \frac{2-\sqrt{3}-i}{2} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{2}(z_n - 1) = \frac{\sqrt{3}+i}{2} w_n$$

ដូចនេះ (w_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

គណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n៖

គេបាន $w_n = w_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $w_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

និង $q = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

គេបាន $w_n = (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^n$

ដូចនេះ $w_n = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$ (រូបមន្តដឺមរ័)

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$

គេមាន $w_n = z_n - 1$ នោះ $z_n = 1 + w_n$

$$z_n = 1 + \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$$

$$= 2\cos^2\frac{n\pi}{12} + 2i.\sin\frac{n\pi}{12}\cos\frac{n\pi}{12}$$

$$= 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$$

ដូចនេះ $z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$ ។

លំហាត់ទី៨៥(APMO 1998)

គេយក a , b , c ជាចំនួនវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \ge 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \ge 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$

វិសមភាពនេះសមមូល៖

$$1+(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a})+\frac{abc}{abc} \ge 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \ge \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

តាង $a = x^3 , b = y^3 , c = z^3$ គេបាន៖

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3} \ge \frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន៖

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^3}{z^3}+1\ge 3\frac{x^2}{yz}\ \ (1)$$

$$\frac{y^3}{z^3}+\frac{y^3}{x^3}+1\ge 3\frac{y^2}{zx}\ \ (2)$$

$$\frac{z^3}{x^3}+\frac{z^3}{y^3}+1\ge 3\frac{z^2}{xy}\ \ (3)$$

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\ge 6\sqrt[6]{\frac{x^3}{y^3}\cdot\frac{y^3}{z^3}\cdot\frac{z^3}{x^3}\cdot\frac{x^3}{z^3}\cdot\frac{z^3}{y^3}\cdot\frac{y^3}{x^3}}=6$$

ឬ $\frac{1}{2}(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3})\ge 3\ \ (4)$

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) និង (4) គេបាន៖

$$\frac{3}{2}(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3})\ge 3(\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy})=\frac{3(x^3+y^3+z^3)}{xyz}$$

គេទាញ $\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\ge\frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}$ ពិត

ដូចនេះ $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a})\ge 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$ ។

លំហាត់ទី៨៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(v_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ៖

$v_0 = \sqrt{5}$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $v_{n+1} = 2v_n{}^2 - 1$; $\forall n \geq 0$

បង្ហាញថា $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{v_n{}^2 - 1}\,)^2$

រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{v_n{}^2 - 1}\,)^2$

តាង $w_n = v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1}$ ដោយ $v_{n+1} = 2v_n{}^2 - 1$; $\forall n \geq 0$

គេបាន $w_n = 2v_n{}^2 - 1 + \sqrt{(2v_n{}^2 - 1)^2 - 1}$

$$= 2v_n{}^2 - 1 + \sqrt{4v_n{}^4 - 4v_n{}^2}$$
$$= v_n{}^2 + 2v_n\sqrt{v_n{}^2 - 1} + (v_n{}^2 - 1)$$
$$= (v_n + \sqrt{v_n{}^2 - 1})^2$$

ដូចនេះ $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{v_n{}^2 - 1}\,)^2$

គណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាង $t_n = \ln(v_n + \sqrt{v_n^2 - 1})$

គេបាន $t_{n+1} = \ln(v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1})$

ដោយ $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{v_n^2 - 1}\ )^2$

គេទាញ $t_{n+1} = 2\ln(v_n + \sqrt{v_n^2 - 1}) = 2t_n$

នាំឱ្យ (t_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$

និងតួ $t_0 = \ln(\sqrt{5} + 2)$ ។

តាមរូបមន្ត $t_n = t_0 \times q^n = 2^n \ln(\sqrt{5} + 2) = \ln(\sqrt{5} + 2)^{2^n}$

ដោយ $t_n = \ln(v_n + \sqrt{v_n^2 - 1})$

គេទាញបាន $v_n + \sqrt{v_n^2 - 1} = (\sqrt{5} + 2)^{2^n} \quad (1)$

ដោយ $(v_n + \sqrt{v_n^2 - 1})(v_n - \sqrt{v_n^2 - 1}) = 1$

គេទាញ $v_n - \sqrt{v_n^2 - 1} = \dfrac{1}{v_n + \sqrt{v_n^2 - 1}}$

$$\mathbf{v_n - \sqrt{v_n^{\ 2} - 1} = \frac{1}{(\sqrt{5}+2)^{2^n}} = (\sqrt{5}-2)^{2^n}} \quad \mathbf{(2)}$$

បូកសមីការ **(1)** និង **(2)** គេទាញបាន៖

$$\mathbf{2v_n = (\sqrt{5}+2)^{2^n} + (\sqrt{5}-2)^{2^n}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{v_n = \dfrac{(\sqrt{5}+2)^{2^n} + (\sqrt{5}-2)^{2^n}}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៨៧

គណនាផលបូក $S_n = \frac{1^3}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + ... + \frac{n^3}{2^n}$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក

គេមាន $S_n = \frac{1^3}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + ... + \frac{n^3}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^3}{2^k} \right)$

តាងអនុគមន៍ $f(k) = ak^3 + bk^2 + ck + d$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការៈ

$\frac{k^3}{2^k} = \frac{f(k)}{2^k} - \frac{f(k+1)}{2^{k+1}}$ ឬ $2k^3 = 2f(k) - f(k+1)$

$$2k^3 = 2(ak^3 + bk^2 + ck + d) - [a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) + d]$$

$$2k^3 = ak^3 + (b - 3a)k^2 + (c - 3a - 2b)k + d - a - b - c$$

គេទាញ $\begin{cases} a = 2 \\ b - 3a = 0 \\ c - 3a - 2b = 0 \\ d - a - b - c = 0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a = 2, b = 6, c = 18, d = 26$

ហេតុនេះ $f(k)=2k^3+6k^2+18k+26$

គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f(k)}{2^k}-\frac{f(k+1)}{2^{k+1}}\right]=\frac{f(1)}{2}-\frac{f(n+1)}{2^{n+1}}$

ដោយ $f(k)=2k^3+6k^2+18k+26$

គេបាន $f(1)=2+6+18+26=52$

ហើយ $f(n+1)=2(n+1)^3+6(n+1)^2+18(n+1)+26$

$=2n^3+12n^2+36n+50$

គេបាន $S_n=\frac{52}{2}-\frac{2n^3+12n^2+36n+52}{2^{n+1}}$

ដូចនេះ $S_n=26-\frac{n^3+6n^2+18n+26}{2^n}$ និង $\lim_{n\to+\infty}S_n=26$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត(U_n)កំនត់ដោយ$U_n = \sqrt{2}^n . \sin\frac{n\pi}{4}$

ដែល $n \in IN^*$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គ-គណនាផលបូក ៖

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots\dots + U_n$ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

តាមរូបមន្ត $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$

យើងបាន ៖

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\sqrt{2}\cos(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4})$$

$$=\sqrt{2}(\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{n\pi}{4})=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}}$ ។

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

យើងមាន $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$

នាំឲ្យ $\sin\frac{n\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\sqrt{2})^n$

គេបាន $(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

គ-គណនាផលបូក $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots\dots + U_n$

យើងបាន

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{2})^k \cos\frac{k\pi}{4} - (\sqrt{2})^{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដូចនេះ $S_n = 1 - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី៨៩(USAMO 1989)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេឱ្យ៖

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

$$T_n = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n$$

$$U_n = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{3} + \frac{T_3}{4} + ... + \frac{T_n}{n+1}$$

ចូរកំណត់ដោយធ្វើដំណោះស្រាយ នូវចំនួនគត់

$0 < a, b, c, d < 1000000$ ដោយដឹងថា $T_{1988} = aS_{1989} - b$

និង $U_{1988} = cS_{1989} - d$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់ a, b, c, d

យើងនឹងស្រាយតាមកំណើនថាគ្រប់ $n \geq 2 : T_{n-1} = nS_n - n$

-ចំពោះ $n = 2 :$ $T_1 = 2S_2 - 2 = 2(1 + \frac{1}{2}) - 2 = 1 = S_1$ ពិត

-ឧបមាថា $T_{n-1} = nS_n - n$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $T_n = (n+1)S_{n+1} - (n+1)$ ពិត

គេមាន $T_n = S_1 + S_2 + ... + S_{n-1} + S_n = T_{n-1} + S_n$

$$T_n = nS_n - n + S_n = (n+1)S_n - n$$

ដោយ $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$ នោះ $S_n = S_{n+1} + \frac{1}{n+1}$

គេបាន $T_n = (n+1)(S_{n+1} + \frac{1}{n+1}) - n = (n+1)S_{n+1} - (n+1)$ ពិត

ដូចនេះ $n \geq 2 : T_{n-1} = nS_n - n$

យក $n = 1989$ គេបាន $T_{1988} = 1989\,S_{1989} - 1989$

ដោយ $T_{1988} = aS_{1989} - b$

នោះគេទាញ $a = 1989$, $b = 1989$ ។

ហើយ $U_n = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{3} + \frac{T_3}{4} + ... + \frac{T_n}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{T_k}{k+1})$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)S_{k+1} - (k+1)}{k+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (S_{k+1} - 1)$$
$$= S_2 + S_3 + ... + S_{n+1} - n$$
$$= T_{n+1} - S_1 - n$$
$$= (n+1)S_{n+1} - (n+1) - 1 - n$$
$$= (n+1)S_{n+1} - 2(n+1)$$

យក $n = 1988$ គេបាន $U_{1988} = 1989S_{1989} - 3978$

ដោយ $U_{1988} = cS_{1989} - d$ នោះ $c = 1989$, $d = 3978$

ដូចនេះ $a = 1989$, $b = 1989$, $c = 1989$, $d = 3978$ ។

លំហាត់ទី៩០(APMO 1998)

គេឲ្យ x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

យើងមាន

$$(1+\frac{x}{y})(1+\frac{y}{z})(1+\frac{z}{x}) = 2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right) \quad (i)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} = \frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}} \quad \text{ឬ} \quad \frac{2x}{y}+\frac{y}{z} \geq \frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}} \quad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន

$$\frac{2y}{z}+\frac{z}{x}\ge\frac{3y}{\sqrt[3]{xyz}}\ (2)\quad \text{និង}\quad \frac{2z}{x}+\frac{x}{y}\ge\frac{3z}{\sqrt[3]{xyz}}\ (3)$$

បូកវិសមភាព **(1),(2)** និង **(3)** គេបាន

$$3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\ge\frac{3(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}\quad \text{ឬ}\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\ (4)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\ge\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$ **(5)**

បូកវិសមភាព (4) និង (5) គេបាន

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}\ (ii)$$

តាមទំនាក់ទំនង **(i)** និង **(ii)** គេទាញបាន

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\ge 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}\ ។$$

លំហាត់ទី៩១ (IMO 1973)

ចំពោះ a និង b ជាចំនួនពិត សមីការ

$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ មានឫសយ៉ាងតិច

មួយជាចំនួនពិត។

ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ a^2+b^2 ?

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ a^2+b^2

គេមាន $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះ នឹង $x^2\neq 0$ គេបាន៖

$$x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+a(x+\frac{1}{x})+b=0$$

$$(x+\frac{1}{x})^2+a(x+\frac{1}{x})+b-2=0$$

តាង $\mathbf{z = x + \frac{1}{x}}$ សមីការនេះអាចសរសេរ៖

$\mathbf{z^2 + az + b - 2 = 0}$ ឬ $\mathbf{az + b = 2 - z^2 \quad (1)}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{Cauchy - Schwarz}$ គេមាន៖

$\mathbf{(az+b)^2 \le (a^2+b^2)(z^2+1) \quad (2)}$

តាម $\mathbf{(1)\ \&\ (2)}$ គេបាន៖

$\mathbf{(a^2+b^2)(z^2+1) \ge (2-z^2)^2}$

$$\mathbf{a^2+b^2 \ge \frac{(2-z^2)^2}{z^2+1}}$$

$$\mathbf{a^2+b^2 \ge \frac{[3-(1+z^2)]^2}{z^2+1}}$$

$$\mathbf{a^2+b^2 \ge z^2 - 5 + \frac{9}{z^2+1}}$$

យក $\mathbf{t = z^2}$ ដោយ $\mathbf{z = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}}$

នោះ $\mathbf{|z| \ge \frac{|x^2+1|}{|x|} \ge \frac{|2x|}{|x|} = 2}$ ហើយ $\mathbf{t = z^2 = |z|^2 \ge 4}$

គេបាន $a^2+b^2\geq t-5+\dfrac{9}{t+1}$

តាងអនុគមន៍ $f(t)=t-5+\dfrac{9}{t+1}$

គេបាន $f'(t)=1-\dfrac{9}{(t+1)^2}=\dfrac{(t+4)(t-2)}{(t+1)^2}>0\,\forall t\geq 4$

គេទាញបាន $f(t)$ ជាអនុគមន៍កើនគ្រប់ $t\geq 4$ ។

តាមលក្ខណៈនៃអនុគមន៍កើនគេបាន $f(t)\geq f(4)$

តែ $f(4)=4-5+\dfrac{9}{4+1}=-1+\dfrac{9}{5}=\dfrac{4}{5}$ នោះ $f(t)\geq\dfrac{4}{5}$

គេទាញបាន $a^2+b^2\geq f(t)\geq\dfrac{4}{5}$

ដូចនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ a^2+b^2 ស្មើនឹង $\dfrac{4}{5}$ ។

លំហាត់ទី៩២

គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល $a_1 = \frac{1}{2}$

និងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n យើងមាន $a_{n+1} = \frac{{a_n}^2}{{a_n}^2 - a_n + 1}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n យើងមាន ៖

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_n < 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_n < 1$

យើងមាន $a_{n+1} = \frac{{a_n}^2}{{a_n}^2 - a_n + 1}$

តាង $b_n = \frac{1}{a_n}$ នោះទំនាក់ទំនងដែលឲ្យក្លាយទៅជា ៖

$b_{n+1} = {b_n}^2 - b_n + 1$

គេទាញ $b_{n+1} - 1 = {b_n}^2 - b_n$

$$b_{n+1}-1=b_n\,(b_n-1)$$

$$\frac{1}{b_{n+1}-1}=\frac{1}{b_n(b_n-1)}=\frac{1}{b_n-1}-\frac{1}{b_n}$$

គេទាញ $a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_n-1}-\frac{1}{b_{n+1}-1}$

$$a_1+a_2+....+a_n=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+......+\frac{1}{b_n}$$

$$=(\frac{1}{b_1-1}-\frac{1}{b_2-1})+(\frac{1}{b_2-1}-\frac{1}{b_3-1})+...+(\frac{1}{b_n-1}-\frac{1}{b_{n+1}-1})$$

$$=\frac{1}{b_1-1}-\frac{1}{b_{n+1}-1}=1-\frac{1}{b_{n+1}-1}<1$$

ពីព្រោះ $b_1=\frac{1}{a_1}=2$ ។

ដូចនេះ $a_1+a_2+a_3+.........+a_n<1$ ។

លំហាត់ទី៩៣

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2+ab+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2b^2+bc+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{2c^2+ca+a^2}}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

យើងពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}}$ គ្រប់ $x>0$

វិសមភាពខាងលើសមមូល $bf(\frac{a}{b})+cf(\frac{b}{c})+af(\frac{c}{a})\geq\frac{a+b+c}{2}$ ។

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពនេះយើងត្រូវកំណត់អនុគមន៍លីនេអ៊ែមួយ

ដែល $f(x)\geq\alpha x+\beta$ (*) ហើយ α និង β ជាពីរចំនួនពិតដែលបំពេញ

លក្ខខណ្ឌ (*) ពិតចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ដោយសារតែវិសមភាពពិតចំពោះ $a=b=c$ នោះយើងនឹងកំណត់រក

α និង β ដែលធ្វើឱ្យខ្សែកោង $(c):y=f(x)$ ប៉ះនឹង

$(d):y=\alpha x+\beta$ ត្រង់ $x=1$ ។

ពោលគឺត្រូវឱ្យ $f(1)=\alpha+\beta$ និង $f'(1)=\alpha$ ។

ដោយ $f(1)=\frac{1}{2}$ នោះ $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$

គេមាន $f'(x)=\dfrac{2x\sqrt{2x^2+2x+1}-\dfrac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+2x+1}}.x^2}{2x^2+2x+1}$

គេបាន $f'(1)=\dfrac{4-\frac{5}{4}}{4}=\dfrac{11}{16}$ នោះ $\alpha=\dfrac{11}{16}$ ហើយ $\beta=\dfrac{1}{2}-\alpha=-\dfrac{3}{16}$

ហេតុនេះ $f(x)\ge\dfrac{11x-3}{16}$ ឬ $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}}\ge\dfrac{11x-3}{16}$ (**)

-បើ $0<x<\dfrac{3}{11}$ នោះវិសមភាព (**) ពិតជានិច្ចព្រោះអង្គទី១

ជាកន្សោមវិជ្ជមានជានិច្ចគ្រប់ $x>0$ ហើយអង្គទីពីរអវិជ្ជមាន ។

-បើ $x\ge\dfrac{3}{11}$ នោះវិសមភាព (**) អាចសរសេរ៖

$$\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^2+2x+1}}\right)^2\ge\frac{(11x-3)^2}{256}\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2(14x^2+39x-9)}{256(2x^2+x+1)}\ge0$$

វាពិតចំពោះគ្រប់ $x \geq \frac{3}{11}$ ព្រោះ $14x^2 + 39x - 9 > 0$ ។

តាម (**) គេជំនួស x ដោយ $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ គេបាន៖

$$bf(\frac{a}{b}) + cf(\frac{b}{c}) + af(\frac{c}{a}) \geq \frac{11a - 3b + 11b - 3c + 11c - 3a}{16}$$

$$= \frac{8a + 8b + 8c}{16} = \frac{a + b + c}{2} \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ

លំហាត់ទី៩៤

គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ (ដែល $n \geq 2$)ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1} \geq 1998$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\dfrac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1} \geq 1998$

គេមាន $\dfrac{1}{x_1+1998}+\dfrac{1}{x_2+1998}+....+\dfrac{1}{x_n+1998}=\dfrac{1}{1998}$

ឬ $\dfrac{1998}{x_1+1998}+\dfrac{1998}{x_2+1998}+....+\dfrac{1998}{x_n+1998}=1$

តាង $y_i=\dfrac{1998}{x_i+1}$ គេបាន $y_1+y_2+....+y_n=1$

គេទាញ $1-y_i=\sum\limits_{j\neq i}(y_i)$ ដែល $1\leq i\leq n$ និង $1\leq j\leq n$

តាម $AM-GM$ គេមាន $\sum\limits_{j\neq i}(y_i)\geq (n-1)\sqrt[n-1]{\prod\limits_{j\neq i}(y_i)}$

គេបាន $1-y_i \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{j\neq i}(y_i)}$

គេទាញ $\prod_{i=1}^{n}(1-y_i) \geq (n-1)^n \prod_{i=1}^{n}(y_i)$ ឬ $\prod_{i=1}^{n}(\frac{1-y_i}{y_i}) \geq (n-1)^n$

តែ $\frac{1-y_i}{y_i} = \frac{x_i}{1998}$ នោះ $\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{1998^n} \geq (n-1)^n$ ឬ $\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2 \dots x_n}}{n-1} \geq 1998$ ។

លំហាត់ទី៩៥(AIME 1988)

ចូរកំណត់គូនៃចំនួនគត់ (a,b) ដោយដឹងថា $ax^{17}+bx^{16}+1$

ចែកដាច់នឹង x^2-x-1 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គូនៃចំនួនគត់ (a,b)៖

តាង p និង q ជាឫសរបស់សមីការ $x^2-x-1=0$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន $p+q=1$ និង $pq=-1$ ។

ដើម្បីឱ្យ$ax^{17}+bx^{16}+1$ ចែកដាច់នឹង x^2-x-1 លុះត្រាតែ p និង q

ជាឫសរបស់សមីការ $ax^{17}+bx^{16}+1=0$ ដែរ ។

គេបាន $ap^{17}+bp^{16}=-1$ និង $aq^{17}+bq^{16}=-1$

គេទាញបាន $q^{16}(ap^{17}+bp^{16})=-q^{16}$

ឬ $ap+b=-q^{16}$ (ព្រោះ $pq=-1$)

ហើយ $p^{16}(aq^{17}+bq^{16})=-p^{16}$ ឬ $aq+b=-p^{16}$

ហេតុនេះ $(ap+b)-(aq+b)=p^{16}-q^{16}$

គេទាញបាន $a=\frac{p^{16}-q^{16}}{p-q}=(p+q)(p^2+q^2)(p^4+q^4)(p^8+q^8)$

ដោយ $p+q=1$ នោះ $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=1+2=3$

$$p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2p^2q^2=9-2=7$$

$$p^8+q^8=(p^4+q^4)^2-2p^4q^4=49-2=47$$

ដូចនេះ $a=1.3.7.47=987$ ។

ម៉្យាងទៀតតាម $ap^{17}+bp^{16}=-1$ និង $aq^{17}+bq^{16}=-1$

គេបាន $ap^{17}+bp^{16}=aq^{17}+bq^{16}$

គេទាញបាន $b=-\frac{p^{17}-q^{17}}{p^{16}-q^{16}}.a$ តែ $a=\frac{p^{16}-q^{16}}{p-q}$

នោះ $b=-\frac{p^{17}-q^{17}}{p-q}=-(p^{16}+p^{15}q+p^{14}q^2+...+q^{16})$

$$=-[(p^{16}+q^{16})+pq(p^{14}+q^{14})+p^2q^2(p^{12}+q^{12})+....$$

$$...+p^7q^7(p^2+q^2)+p^8q^8]$$

$$=-[(p^{16}+q^{16})-(p^{14}+q^{14})+...-(p^2+q^2)+1]$$

តាង $S_{2n}=p^{2n}+q^{2n}$ គ្រប់ $n\ge 1$ នោះ $S_2=3,S_4=7,S_8=47$

គេមាន $S_{2n+4}=p^{2n+4}+q^{2n+4}$

$$=(p^2+q^2)(p^{2n+2}+q^{2n+2})-p^2q^2(p^{2n}+q^{2n})$$
$$=3S_{2n+2}-S_n$$

យកតម្លៃ $n=3,4,5,6,7,8$ ជំនួសក្នុង $S_{2n+4}=3S_{2n+2}-S_{2n}$

គេបាន $S_6=18\ ,S_8=47,S_{10}=123,S_{12}=322\ ,\ S_{14}=843$

និង $S_{16}=2207$ ។

គេបាន $b=-(2207-843+322-123+47-18+7-3+1)$

ឬ $b=-1597$ ។

ដូចនេះ $(a,b)=(987,-1597)$ ។

លំហាត់ទី៩៦

គេឲ្យ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2-5}{2(a_n+2)}$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$

ចំពោះ $n=0$ គេបាន $a_0=\cot\dfrac{\pi}{24}-2$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{24}}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

$$=\frac{1+\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\frac{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}$$

$$=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+8+4\sqrt{3}}{4}$$

$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

គេទាញ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

ហេតុនេះ $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិតចំពោះ $n=0$ ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$a_{k+1}=\cot\left(\frac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។

យើងមាន $a_{k+1}=\frac{a_k{}^2-5}{2(a_k+2)}$ ដោយ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$

នោះ $a_{k+1}=\dfrac{\left[\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2\right]^2-5}{2\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$

$$a_{k+1}=\frac{\cot^2\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-4\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{\cot^2\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{2}\right)}-2$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\cot 2a=\dfrac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

គេបាន $a_{k+1}=\cot\left(\dfrac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។

ដូចនេះ $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ។

លំហាត់ទី៩៧

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$$U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ និង } U_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_n^{\,2}}}{2}} \;,\; \forall n \in IN$$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$U_1 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_0^{\,2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}}}{2}} = \sin\frac{\pi}{8}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1} = \sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

យើងមាន $U_{p+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_p^{\,2}}}{2}}$ ការឧបមា $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\pi}{2^{p+2}}}}{2}}$

$$=\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{2^{p+2}}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi}{2^{p+3}}}{2}}=\sin\dfrac{\pi}{2^{p+3}}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{U_n=\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

លំហាត់ទី៩៨

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតខុសគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a^2}{(b-c)^2}+\dfrac{b^2}{(c-a)^2}+\dfrac{c^2}{(a-b)^2}\geq 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

ដោយ $(x+y+z)^2\geq 0$ គ្រប់ចំនួនពិត x,y,z នោះគេបាន៖

$x^2+y^2+z^2\geq -2(xy+yz+zx)$ (*)

យក $x=\dfrac{a}{b-c}$, $y=\dfrac{b}{c-a}$, $z=\dfrac{c}{a-b}$ នោះគេបាន៖

$$xy+yz+zx=\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(a-b)(c-a)}+\frac{ac}{(a-b)(b-c)}$$

$$=\frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{b(c-a)(b-c-a)+ac(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(c-a)(b-c)(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$$

តាមទំនាក់ទំនង (*) គេទាញបាន $x^2+y^2+z^2 \geq -2(-1)=2$

ដូចនេះ $\dfrac{a^2}{(b-c)^2}+\dfrac{b^2}{(c-a)^2}+\dfrac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$ ។

លំហាត់ទី៩៩

គេឱ្យ $P(x)=x^5+ax^2+b$ មានឫសប្រាំ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 និង

$f(x)=x^2-3$ ។

រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)$

បើ $P(x)=x^5+ax^2+b$ មានឫសប្រាំ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

នោះគេបាន $P(x)=\prod_{k=1}^{5}(x-x_k)$ ។

តាង $Q=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)=\prod_{k=1}^{5}f(x_k)$

តែ $f(x)=x^2-3$

គេបាន $Q=\prod_{k=1}^{5}({x_k}^2-3)=\prod_{k=1}^{5}(x_k-\sqrt{3})(x_k+\sqrt{3})$

$$= \prod_{k=1}^{5}(\sqrt{3}-x_k)(-\sqrt{3}-x_k)$$

$$= \prod_{k=1}^{5}(\sqrt{3}-x_k)\times\prod_{k=1}^{5}(-\sqrt{3}-x_k)$$

$$= P(\sqrt{3})\times P(-\sqrt{3})$$

តែ $P(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^5+3a+b=9\sqrt{3}+3a+b$

និង $P(-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^5+3a+b=-9\sqrt{3}+3a+b$

គេបាន

$$Q=(9\sqrt{3}+3a+b)(-9\sqrt{3}+3a+b)=(3a+b)^2-243$$

ដើម្បីឱ្យ Q មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ $3a+b=0$ ។

ដូចនេះ $Q_{min}=-243$ ។

លំហាត់ទី១០០ (Czech and Slovak Republics 2005)

គេយក a , b , c ជាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\ge\frac{3}{4}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\ge\frac{3}{4}$

តាង $T=\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}$

$$=\frac{a(c+1)+b(a+1)+c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

$$=\frac{a+b+c+ab+bc+ca}{1+a+b+c+ab+bc+ca+abc}$$

$$=\frac{a+b+c+ab+bc+ca}{2+a+b+c+ab+bc+ca}$$

$$=1-\frac{2}{2+a+b+c+ab+bc+ca}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន៖

$$1+1+a+b+c+ab+bc+ca \geq 8\sqrt[8]{a^3b^3c^3} = 8$$

គេទាញ $\dfrac{1}{2+a+b+c+ab+bc+ca} \leq \dfrac{1}{8}$

នាំឱ្យ $T \geq 1-\dfrac{2}{8} = \dfrac{3}{4}$

ដូចនេះ $\dfrac{a}{(a+1)(b+1)} + \dfrac{b}{(b+1)(c+1)} + \dfrac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \dfrac{3}{4}$ ។

លំហាត់ទី១០១

គេឱ្យ $a , b , c > 0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

គេមាន $\mathbf{b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន $\mathbf{b+c\geq 2\sqrt{bc}}$

គេទាញ $\mathbf{bc\leq\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}$ នាំឱ្យ $\mathbf{-3bc(b+c)\geq-\frac{3}{4}(b+c)^3}$

គេបាន $\mathbf{b^3+c^3\geq(b+c)^3-\frac{3}{4}(b+c)^3=\frac{1}{4}(b+c)^3}$

គេទាញ $\mathbf{b+c\leq\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}$ ឬ $\mathbf{a+b+c\leq a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}$

នាំឱ្យ $\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}\geq 1+\frac{a}{b+c}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}\geq 1+\frac{b}{c+a}$ (2)

និង $\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq 1+\frac{c}{a+b}$ (3)

ដោយបូកទំនាកខ្ញុំទំនង (1),(2),(3) គេបាន៖

$$T\geq 3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$ ដែល

$$T=\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

តាង $\begin{cases} b+c=m \\ c+a=n \\ a+b=p \end{cases}$

គេបាន $(b+c)+(c+a)+(a+b)=m+n+p$

នាំឱ្យ $a+b+c=\dfrac{m+n+p}{2}$

គេទាញ $\begin{cases} a=\dfrac{n+p-m}{2} \\ b=\dfrac{m-n+p}{2} \\ c=\dfrac{m+n-p}{2} \end{cases}$

គេបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{n+p-m}{2m}+\frac{m-n+p}{2n}+\frac{m+n-p}{2p}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{p}{m}+\frac{m}{p}\right)+\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)-3\right]$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន

$$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\geq 2\ ;\ \frac{p}{m}+\frac{m}{p}\geq 2\ ;\ \frac{n}{p}+\frac{p}{n}\geq 2$$

គេបាន $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ \geq\ \dfrac{1}{2}(2+2+2-3)=\dfrac{3}{2}$

គេទាញ $T \geq 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ ពិត ។

ដូចនេះ

$$\frac{a + \sqrt[3]{4(b^3 + c^3)}}{b + c} + \frac{b + \sqrt[3]{4(c^3 + a^3)}}{c + a} + \frac{c + \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)}}{a + b} \geq \frac{9}{2}$$ ។

លំហាត់ទី១០២

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2-2$ ដែល $x\in IR$

ក-គេយក $U_1=f(x)$ និង $U_{n+1}=f(U_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_n=f_n[\,f[.......f[f(x)].......]\,]$ ។

ខ-ស្រាយថាបើ $x>2$ គេបាន $U_n>2$ គ្រប់ $n\in IN$ ។

គ-គេតាង $V_n=U_n-\sqrt{U_n^{\ 2}-4}$ គ្រប់ $n\in IN$ និង $x>2$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ចូរបង្ហាញថា $2V_{n+1}=V_n^{\ 2}$ ។

ឃ-សន្មតថា $W_n=\ln V_n-\ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

ចូររកប្រភេទនៃស្វីត W_n ។

ង-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកអនុគមន៍ ៖

$F_n(x)=f_n[f\,[........f\,[\,f(x)\,]........]\,]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $U_n=f_n[\,f[.......f[f(x)].......]\,]$

យើងមាន $U_1 = f(x)$ ពិត (តាមសម្មតិកម្ម)

$U_2 = f(U_1) = f[f(x)]$ ពិត (ព្រោះ $U_{n+1} = f(U_n)$)

$U_3 = f(U_2) = f[f[f(x)]]$ ពិត

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ ៖

$U_k = f_k[f[.......f[f(x)].......]]$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$U_{k+1} = f_{k+1}[f[.......f[f(x)].......]]$ ពិត

យើងមាន

$$U_{k+1} = f(U_k) = f[\ f_k[f[........f[f(x)]......]]\ ]$$
$$= f_{k+1}[f[.......f[f(x)].......]]$$

ដូចនេះ $U_n = f_n[\ f[.......f[f(x)].......]\ ]$ ។

ខ-ស្រាយថាបើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$

យើងមាន $U_{n+1} = f(U_n) = {U_n}^2 - 2$

បើ $x > 2$ នោះ $U_1 = f(x) = x^2 - 2 > 2$ ឬ $U_1 > 2$ ពិត

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k > 2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $U_{k+1} > 2$ ពិត

យើងមាន $U_{k+1} = U_k{}^2 - 2$

ដោយ $U_k > 2$ នាំឲ្យ $U_k{}^2 > 4$ ឬ $U_k{}^2 - 2 > 4 - 2 = 2$

គេទាញ $U_{k+1} = U_k{}^2 - 2 > 2$ ពិត ។

ដូចនេះ បើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$ ។

គ-បង្ហាញថា $2V_{n+1} = V_n{}^2$

យើងមាន $V_n = U_n - \sqrt{U_n{}^2 - 4}$

យើងបាន $V_{n+1} = U_{n+1} - \sqrt{U_{n+1}{}^2 - 4}$ តែ $U_{n+1} = U_n{}^2 - 2$

$$V_{n+1}=U_n{}^2-\sqrt{(U_n{}^2-2)^2-4}$$
$$V_{n+1}=U_n{}^2-\sqrt{U_n{}^4-4U_n{}^2}$$
$$V_{n+1}=U_n{}^2-U_n\sqrt{U_n{}^2-4}$$
$$2V_{n+1}=2U_n{}^2-2U_n\sqrt{U_n{}^2-4}$$
$$2V_{n+1}=U_n{}^2-2U_n\sqrt{U_n{}^2-4}+(\sqrt{U_n{}^2-4})^2$$
$$2V_{n+1}=\left(U_n-\sqrt{U_n{}^2-4}\right)^2=V_n{}^2$$

ដូចនេះ $2V_{n+1}=V_n{}^2$ ។

ឃ-រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត W_n ។

គេមាន $W_n=\ln V_n-\ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

គេបាន $W_{n+1}=\ln V_{n+1}-\ln 2$ ដោយ $2V_{n+1}=V_n{}^2$

$$W_{n+1}=\ln\frac{V_n{}^2}{2}-\ln 2=2\ln V_n-2\ln 2=2W_n$$

ដូចនេះ (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ ។

ង-រកអនុគមន៍ $F_n(x)=f_n[f[........f[f(x)].........]]$

ដោយ $U_n=f_n[f[.......f[f(x)].......]]$

គេទាញបាន $F_n(x)=U_n$ ។

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន (W_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមាន

រេស៊ុង $q=2$ ។

តាមរូបមន្ត $W_n = W_1 \times q^{n-1} = 2^{n-1}.W_1$

ដោយ $W_1 = \ln V_1 - \ln 2 = \ln\left(\frac{V_1}{2}\right)$

តែ $V_1 = U_1 - \sqrt{U_1{}^2 - 4} = f(x) - \sqrt{f^2(x) - 4}$

$$V_1 = x^2 - 2 + \sqrt{(x^2-2)^2 - 4}$$
$$V_1 = x^2 - 2 - \sqrt{x^4 - 4x^2}$$
$$= x^2 - 2 - x\sqrt{x^2-4} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2-4})^2$$

គេបាន $W_1 = \ln\left[\frac{(x-\sqrt{x^2-4})^2}{4}\right] = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^2$

ហេតុនេះ $W_n = 2^{n-1}.\ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^2 = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ដោយ $W_n = \ln V_n - \ln 2 = \ln\left(\frac{V_n}{2}\right)$

គេទាញ $\ln\left(\frac{V_n}{2}\right) = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ឬ $V_n = 2\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $V_n = U_n - \sqrt{U_n^{\,2}-4}$

$$U_n - V_n = \sqrt{U_n^{\,2}-4}$$

$$U_n^{\,2} - 2U_nV_n + V_n^{\,2} = U_n^{\,2} - 4$$

$$2U_nV_n = V_n^{\,2} + 4$$

$$U_n = \frac{V_n^{\,2}+4}{2V_n} = \frac{1}{2}V_n + \frac{2}{V_n}$$

ដោយ $V_n = 2\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

គេបាន $U_n = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \frac{1}{\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}$

គុណនឹងកន្សោម $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$ គេបាន ៖

$$U_n=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}{\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}$$

$$U_n=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}{\left(\frac{x^2-x^2+4}{4}\right)^{2^n}}$$

$$U_n=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$$

ដូចនេះ $F_n(x)=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$ ។

លំហាត់ទី១០៣ (Japan Mathematical Olympiad Finals 2010)

គេឱ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា៖

$$\frac{1+yz+zx}{(1+x+y)^2}+\frac{1+zx+xy}{(1+y+z)^2}+\frac{1+xy+yz}{(1+z+x)^2}\geq 1 \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព $\textbf{Cauchy - Schwarz}$ ៖

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)$$

យក $a_1=b_1=1\ ,a_2=\sqrt{xz}\ ,b_2=\sqrt{\frac{x}{z}}\ ,a_3=\sqrt{yz}\ ,b_3=\sqrt{\frac{y}{z}}$

គេបាន $(1+x+y)^2\leq(1+xz+yz)(1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z})$

គេទាញបាន $\quad \frac{1+xz+yz}{(1+x+y)^2}\geq\frac{z}{x+y+z}\quad (1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\quad \frac{1+zx+xy}{(1+y+z)^2}\geq\frac{x}{x+y+z}\quad (2)$

និង $\quad \frac{1+xy+yz}{(1+z+x)^2}\geq\frac{y}{x+y+z}\quad (3)$

ធ្វើផលបូកវិសមភាព **(1), (2) & (3)** គេបាន៖

$$\frac{1+yz+zx}{(1+x+y)^2}+\frac{1+zx+xy}{(1+y+z)^2}+\frac{1+xy+yz}{(1+z+x)^2}\ge\frac{x+y+z}{x+y+z}=1$$

ដូចនេះ $\frac{1+yz+zx}{(1+x+y)^2}+\frac{1+zx+xy}{(1+y+z)^2}+\frac{1+xy+yz}{(1+z+x)^2}\ge 1$ ។

លំហាត់ទី១០៤

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា៖

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

ដំណោះស្រាយ

គេមានសមភាព៖

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^5+b^5+c^5=(a+b+c)^5-5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

គេបាន៖

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} = \frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$

ឬ $3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq 2(a+b+c)^2$

ឬ $$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមានៈ

$$ab+bc+ca\le\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2$$ ពិត

ដូចនេះ $$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}\ge\frac{10}{9}(a+b+c)^2$$ ។

លំហាត់ទី១០៥

ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

តាង $t=\log_3(2^x+1)$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$$t+\frac{6}{t}=1+2\sqrt{t+\frac{8}{t^2}} \quad ឬ \quad \frac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\frac{(t+2)(t^2-2t+4)}{t^2}}$$

ឬ $$\frac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\frac{t+2}{t}.\frac{t^2-2t+4}{t}} \quad (1)$$

តាង $u=\dfrac{t+2}{t}$ និង $v=\dfrac{t^2-2t+4}{t}$ គេបាន $u+v=\dfrac{t^2-t+6}{t}$

សមីការ (1) អាចសរសេរ $u+v=2\sqrt{uv} \Leftrightarrow (\sqrt{u}-\sqrt{v})^2=0$

គេទាញ $u=v$ ឬ $\frac{t+2}{t}=\frac{t^2-2t+4}{t}$ ($t\neq 0$)

ឬ $t+2=t^2-2t+4$

ឬ $t^2-3t+2=0$ មានឫស $t_1=1\,;\,t_2=2$ ។

-ចំពោះ $t=1\Rightarrow \log_3(2^x+1)=1$

$\Rightarrow 2^x+1=3$

$\Rightarrow \quad 2^x=2$

$\Rightarrow \quad x=1$

-ចំពោះ $t=2\Rightarrow \log_3(2^x+1)=2$

$\Rightarrow 2^x+1=9$

$\Rightarrow \quad 2^x=8$

$\Rightarrow \quad x=3$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x_1=1\,,\,x_2=3$ ។

លំហាត់ទី១០៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_k)_{k\in IN}$ កំនត់ដោយ៖

$u_0 = 9$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{k+1} = \sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p {u_k}^p\right)$

ដែល $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ។ចូរគណនា u_k ជាអនុគមន៍នៃ k និង n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_k ជាអនុគមន៍នៃ k និង n៖

យើងមាន $u_{k+1} = \sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p {u_k}^p\right)$

ដោយ $\sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p {u_k}^p\right) = -1 + \sum_{p=0}^{n}\left(C_n^p {u_k}^p\right) = -1 + (1+u_k)^p$

គេបាន $u_{k+1} = -1 + (1+u_k)^p$ គេទាញ $\ln(1+u_{k+1}) = p\ln(1+u_k)$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(1+u_k)\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

ផលធៀបរួម p និងតួដំបូង $\ln(1+u_o) = \ln 10$

គេបាន $\ln(1+u_k) = p^k \ln 10$ នាំឱ្យ $u_k = 10^{p^k} - 1$ ។

លំហាត់ទី១០៧

គេឲ្យ n ចំនួន $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in (0,1)$ ហើយគេតាង

$$t_n = n.\frac{a_1.a_2.a_3....a_n}{a_1+a_2+a_3+...+a_n}$$ ។

ចូរស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} t_n\right) \ge (n-1)n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} t_n\right) \ge (n-1)n$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គ្រប់ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in (0,1)$

គេមាន $$\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$$

គេទាញ $t_n \le (a_1.a_2.a_3....a_n)^{\frac{n-1}{n}}$ ដោយ $0 < a_k < 1$

គេទាញ $$\log_{a_k}(t_n) \ge \frac{n-1}{n}.\log_{a_k}(a_1.a_2...a_k)$$

ឬ $$\sum_{k=1}^{n}\left[\log_{a_k}(t_n)\right] \ge \frac{n-1}{n}.\sum_{k=1}^{n}\left[\log_{a_k}(a_1.a_2...a_k)\right] \quad (*)$$

តាង $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\log_{a_k}(a_1.a_2....a_k)\right]$

$$=n+(\log_{a_1}a_2+\log_{a_2}a_1)+...+(\log_{a_n}a_1+\log_{a_1}a_n)+...+$$
$$....+(\log_{a_{n-1}}a_n+\log_{a_n}a_{n-1})$$

តាមវិសមភាព $t+\frac{1}{t}\geq 2\ ,\ \forall t>0$ គេទាញបាន ៖

$$S_n\geq n+2(n-1)+2(n-2)+...+2\ ]=n^2$$

តាមទំនាក់ទំនង $(*)$ គេទាញបាន ៖

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k}t_n\right)\geq(n-1)n$$ ។

លំហាត់ទី១០៨

គេឱ្យ $a;b;c$ ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា៖

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

ដោយ $a;b;c$ ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណនោះគេបាន៖

$$a+b-c>0\,;b+c-a>0\,;c+a-b>0$$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwartz}$ គេបាន៖

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\le 2\sqrt{b}\quad(1)$$
$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{a}\quad(2)$$
$$\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{c}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព $(1);(2)$ និង (3) គេទទួលបាន៖

$$2(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b})\le 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

ដូចនេះ $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ។

លំហាត់ទី១០៩

គណនាផលបូក ៖

$S_n = 9 + 99 + 999 + ... + 999....999$ (មានលេខ 9 ចំនួន n លេខ)

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក ៖

$$S_n = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{999......999}_{(n \text{ លេខ} 9)}$$

$$= (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + ... + (10^n - 1)$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n) - (1 + 1 + 1 + ... + 1)$$

$$= 10.\frac{10^n - 1}{9} - n = \frac{10^{n+1} - (9n + 10)}{9}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{10^{n+2} - (9n + 10)}{9}$ ។

លំហាត់ទី១១០

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា $R\geq(\sqrt{2}+1)r$

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

គេមាន $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

ដោយ $\cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$

និង $\cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}$ គេបាន៖

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស៖

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ដោយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

$$a^2=b^2+c^2-2bc(1-2\sin^2\frac{A}{2})$$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

$$=\frac{(2p-2c)(2p-2b)}{4bc}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

នាំឱ្យ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ៖

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\ ;\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

គេបាន៖

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

ដោយ $S=pr=\frac{abc}{4R}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

គេទាញ $\begin{cases}(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=\frac{prS}{p}=Sr\\ abc=4SR\end{cases}$

នាំឱ្យ $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\frac{r}{4R}$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា $R\geq(\sqrt{2}+1)r$

ឧបមាថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A នោះ $A=\frac{\pi}{2};B=\frac{\pi}{2}-C$

ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

គេបាន $0+\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)+\cos C=1+\frac{r}{R}$

$$\sin C+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+C\right)=1+\frac{r}{R}$$

ដោយ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+C\right)\le 1$ នោះ $1+\frac{r}{R}\le\sqrt{2}$

នាំឱ្យ $R\ge\frac{r}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)r$

ដូចនេះ $R\ge(\sqrt{2}+1)r$ ។

លំហាត់ទី១១១

គេឲ្យបួនចំនួនវិជ្ជមាន $a\,,\,b\,,\,c\,,\,d$ ។

ចូរបង្ហាញថា $1<\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{b+c+d}+\dfrac{c}{c+d+a}+\dfrac{d}{d+a+b}<2$

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះគ្រប់ $a>0\,,b>0\,,\,c>0\,,d>0$

យើងមាន $\begin{cases} a+b+c+d>a+b+c>a+c \\ a+b+c+d>b+c+d>b+d \\ a+b+c+d>c+d+a>c+a \\ a+b+c+d>d+a+b>b+d \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} \dfrac{a}{a+b+c+d}<\dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{a}{a+c} \\ \dfrac{b}{a+b+c+d}<\dfrac{b}{b+c+d}<\dfrac{b}{b+d} \\ \dfrac{c}{a+b+c+d}<\dfrac{c}{c+d+a}<\dfrac{c}{a+c} \\ \dfrac{d}{a+b+c+d}<\dfrac{d}{d+a+b}<\dfrac{d}{b+d} \end{cases}$

ដោយបូកទំនាក់ទំនងទាំងនេះអង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

លំហាត់ទី១១២

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2}\le\frac{3}{8}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2}\le\frac{3}{8}$

ដោយ $a+b+c=1$

នោះ $1-c^2=(a+b+c)^2-c^2$

$$=(a+b)(a+b+2c)$$
$$=(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)$$

គេបាន $\frac{ab}{1-c^2}=\frac{ab}{(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)}$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេបាន៖

$$\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(a+b)(b+c)}\ge\frac{4}{(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)}$$

$$\frac{a+b+2c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{4}{(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)}$$

$$\frac{1+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{4}{(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)}$$

គេទាញ $\frac{ab}{1-c^2}\le\frac{ab(1+c)}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$ (1)

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{bc}{1-a^2}\le\frac{bc(1+a)}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$ (2)

និង $\frac{ac}{1-b^2}\le\frac{ac(1+b)}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) & (3) គេបាន៖

$$\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ac}{1-b^2}\le\frac{ab(1+c)+bc(1+a)+ac(1+b)}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ac}{1-b^2}\le\frac{ab+bc+ca+3abc}{4(a+b)(b+c)(c+a)}\quad(4)$$

គេមាន $(a+b)(b+c)(c+a)=(1-a)(1-b)(1-c)$

ព្រោះ $a+b+c=1$ ។

ដោយ

$$(1-a)(1-b)(1-c)=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$$

$$=ab+bc+ca-abc$$

គេបាន $(a+b)(b+c)(c+a)=ab+bc+ca-abc$

ឬ $(a+b)(b+c)(c+a)+4abc=ab+bc+ca+3abc$

ឬ $1+\dfrac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\dfrac{ab+bc+ca+3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

ដោយ $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

គេបាន $\dfrac{ab+bc+ca+3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq 1+\dfrac{4}{8}=\dfrac{3}{2}$ (5)

តាម $(4)\,\&\,(5)$ គេបាន $\dfrac{ab}{1-c^2}+\dfrac{bc}{1-a^2}+\dfrac{ca}{1-b^2}\leq\dfrac{3}{8}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\dfrac{ab}{1-c^2}+\dfrac{bc}{1-a^2}+\dfrac{ca}{1-b^2}\leq\dfrac{3}{8}$ ។

លំហាត់ទី១១៣

គេឱ្យស្វីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយៈ

$$\begin{cases} a_1 = 1 , a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \quad , n = 1 , 2 , 3 , ... \end{cases}$$

គេតាងស្វីតចំនួនកុំផ្លិច $z_n = a_{n+1} - \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ខ. ចូរដាក់ $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក z_n ជាអនុគមន៍

នៃ n ។

គ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វីត a_n ។ តើ (a_n) ជាស្វីតខួបឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $z_{n+1} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

គេមាន $z_n = a_{n+1} - \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n$

គេបាន $z_{n+1}=a_{n+2}-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_{n+1}$

ដោយ $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$

គេបាន $z_{n+1}=a_{n+1}-a_n-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_{n+1}$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}a_{n+1}-a_n$$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a_{n+1}-\frac{2}{1+i\sqrt{3}}a_n)$$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a_{n+1}-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_n)$$

ដូចនេះ $z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n$ ។

ខ. ដាក់ $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

គេបាន $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

ទាញរក z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

ដោយ $z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n$ នោះ (z_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួន

កុំផ្លិចដែលមានរេសុង $q=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

និងតួ $z_1=a_2-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

តាមរូបមន្ត $z_n=z_1\times q^{n-1}=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^n$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $z_n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$ ។

គ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វីត a_n

គេមាន $z_n=a_{n+1}-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_n$

គេបាន $z_n=(a_{n+1}-\frac{a_n}{2})+i\frac{\sqrt{3}}{2}a_n$ (1)

ដោយ $z_n=\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}$ (2)

តាមទំនាក់ទំនង $(1)\,\&\,(2)$ គេបាន $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n = \sin\dfrac{n\pi}{3}$

ដូចនេះ $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{n\pi}{3}$ ។

ហើយ (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបដែលមានខួប $p = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ ។

ក. បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច៖

គេមាន $w_n = z_n - 1$

គេបាន $w_{n+1} = z_{n+1} - 1$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{2} z_n + \frac{2-\sqrt{3}-i}{2} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{2}(z_n - 1) = \frac{\sqrt{3}+i}{2} w_n$$

ដូចនេះ (w_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

គណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេបាន $w_n = w_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $w_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

និង $q = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

គេបាន $w_n = (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^n$

ដូចនេះ $w_n = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$ (រូបមន្តដឺម័រ)

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$

គេមាន $w_n = z_n - 1$ នោះ $z_n = 1 + w_n$

$$z_n = 1 + \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$$

$$= 2\cos^2\frac{n\pi}{12} + 2i.\sin\frac{n\pi}{12}\cos\frac{n\pi}{12}$$

$$= 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$$

ដូចនេះ $z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$ ។

លំហាត់ទី១១៤

គេឱ្យ $a\,;b\,;c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

តាង $T=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3-2.\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

ដោយ $a^2+b^2+c^2=1$ នោះគេទាញ ៖

$$\frac{1}{a^2}=1+\frac{b^2+c^2}{a^2}\;;\;\frac{1}{b^2}=1+\frac{a^2+c^2}{b^2}\;\;;\;\frac{1}{c^2}=1+\frac{a^2+b^2}{c^2}$$

ធ្វើវិធីបូកសមភាពទាំងនេះគេបាន ៖

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

កន្សោម T អាចសរសេរ ៖

$$T=a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)$$

$$= a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 + b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2 + c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geq 0$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq 3 + \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$ ។

លំហាត់ទី១១៥

គេឲ្យ (x_n) និង (y_n) ជាស្វីតចំនួនពិតកំនត់លើ IN

ដោយ $x_0 = 5 , y_0 = 1$ និងទំនាក់ទំនងកំនើន ៖

$x_{n+1} = x_n^3 + 3x_n y_n^2$ និង $y_{n+1} = 3x_n^2 y_n + y_n^3$ គ្រប់ $n \in IN$

ចូរគណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $x_{n+1} = x_n^3 + 3x_n y_n^2 \ (1)$ និង $y_{n+1} = 3x_n^2 y_n + y_n^3 \ (2)$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$x_{n+1} + y_{n+1} = (x_n + y_n)^3$$
$$\ln(x_{n+1} + y_{n+1}) = 3.\ln(x_n + y_n)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{ \ln(x_n + y_n) \}$ ជាស្វីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q = 3$ និងតួដំបូង $\ln(x_0 + y_0) = \ln 6$ ។

គេបាន $\ln(x_n + y_n) = 3^n \ln 6$

គេទាញ $x_n + y_n = 6^{3^n}$ (3)

ដកកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$x_{n+1} - y_{n+1} = (x_n - y_n)^3$$
$$\ln(x_{n+1} - y_{n+1}) = 3.\ln(x_n - y_n)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(x_n - y_n)\}$ ជាស្វីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q = 3$ និងតួដំបូង $\ln(x_0 - y_0) = \ln 4$ ។

គេបាន $\ln(x_n - y_n) = 3^n \ln 4$

គេទាញ $x_n - y_n = 4^{3^n}$ (4)

បូកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $2x_n = 6^{3^n} + 4^{3^n}$

គេទាញ $x_n = \dfrac{6^{3^n} + 4^{3^n}}{2}$ ។

ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $2y_n = 6^{3^n} - 4^{3^n}$

គេទាញ $y_n = \dfrac{6^{3^n} - 4^{3^n}}{2}$ ។

ដូចនេះ $x_n = \dfrac{6^{3^n} + 4^{3^n}}{2}$ និង $y_n = \dfrac{6^{3^n} - 4^{3^n}}{2}$ ។

លំហាត់ទី១១៦(Turkey National Olympiad 2010)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$a_1, a_2, ..., a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1 a_2 a_3 .... a_n = 1$ ចូរបង្ហាញថា៖

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{{a_i}^4 + 3}} \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{{a_i}^4 + 3}} \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x > 0$ គេមាន

$$\frac{x}{x+1} \ge \frac{x}{\sqrt{x^4+3}} \Leftrightarrow x^4 + 3 \ge (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+2x+2) \ge 0$$

ដោយ $(x-1)^2 \ge 0$ និង $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$

នាំឱ្យ $(x-1)^2(x^2+2x+2) \ge 0$ ពិតគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ហេតុនេះ $$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i+1} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{{a_i}^4+3}} \quad (1)$$

ជាបន្តទៀតយើងនឹងស្រាយថា $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+1}$ ។

ឧបមាថា $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge 2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+1}$ ពិត

សមមូល $\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}-\frac{1}{2})+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i} \ge 2\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{a_i+1})$

សមមូល $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+1}{2a_i}-\frac{n}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i} \ge 2n-\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{a_i+1}$

សមមូល $\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}+\frac{2}{a_i+1})+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i} \ge \frac{5n}{2}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ ចំពោះ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ គេមាន៖

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}+\frac{2}{a_i+1}) \ge 2n\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}.\frac{2}{a_i+1})} = 2n$$

និង $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i} \ge \frac{n}{2}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} = \frac{n}{2}$ (ព្រោះ $a_1a_2a_3....a_n = 1$)

គេទាញបាន $\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}+\frac{2}{a_i+1})+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i} \ge 2n+\frac{n}{2} = \frac{5n}{2}$ ពិត

គេទាញបាន $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+1}$ (2)

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^4+3}}$

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^4+3}} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ ។

លំហាត់ទី១១៧

គេឲ្យ $a\,,b\,,c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}+\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}\le 2$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ៖

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}+\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}\le 2$$

គេមាន $b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $b+c\ge 2\sqrt{bc}$

គេទាញ $bc\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$ នាំឲ្យ $-3bc(b+c)\ge-\frac{3}{4}(b+c)^3$

គេបាន $b^3+c^3\ge(b+c)^3-\frac{3}{4}(b+c)^3=\frac{1}{4}(b+c)^3$

គេទាញ $b+c\le\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}$

ឬ $a+b+c\le a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}$

នាំឲ្យ $\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} \le \frac{b+c}{a+b+c}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}} \le \frac{c+a}{a+b+c}$ (2)

និង $\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}} \le \frac{a+b}{a+b+c}$ (3) ។

ដោយបូកទំនាក់ទំនង $(1),(2),(3)$ គេបាន ៖

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}} + \frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}} \le 2$$ ។

លំហាត់ទី១១៨

ឲ្យពហុធា $P(x)=(x\sin a+\cos a)^n$ ដែល $n\in IN^*$

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2+1 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $R(x)$ ជាសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2+1

-បើ $n=1$ នោះ $P(x)=x\sin a+\cos a$

ដូចនេះ $R(x)=x\sin a+\cos a$ ជាសំនល់នៃវិធីចែក ។

-បើ $n\geq 2$ គេបាន $P(x)=(x^2+1)Q(x)+R(x)$

ដែល $Q(x)$ ជាផលចែក នឹង $R(x)=Ax+B$

គេបាន $(x\sin a+\cos a)^n=(x^2+1)Q(x)+Ax+B$

បើ $x=i$ នោះ $(i\sin a+\cos a)^n=Ai+B$

ឬ $\cos(na)+i.\sin(na)=B+i.A$ គេទាញ $A=\sin(na)$

និង $B=\cos(na)$ ។ ដូចនេះ $R(x)=x\sin(na)+\cos(na)$ ។

លំហាត់ទី១១៩

គណនាតម្លៃ

$$A=(\sqrt{3}+\tan 1^{o})(\sqrt{3}+\tan 2^{o})(\sqrt{3}+\tan 3^{o})...(\sqrt{3}+\tan 29^{o})$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ A

$$A=(\sqrt{3}+\tan 1^{o})(\sqrt{3}+\tan 2^{o})(\sqrt{3}+\tan 3^{o})...(\sqrt{3}+\tan 29^{o})$$

គេមាន $\sqrt{3}+\tan 1^{0}=\tan 60^{o}+\tan 1^{o}=\dfrac{\sin 61^{o}}{\cos 60^{o}\cos 1^{o}}$

$$\sqrt{3}+\tan 2^{o}=\tan 60^{o}+\tan 2^{o}=\frac{\sin 62^{o}}{\cos 60^{o}\cos 2^{o}}$$

$$\sqrt{3}+\tan 3^{o}=\tan 60^{o}+\tan 3^{o}=\frac{\sin 63^{o}}{\cos 60^{o}\cos 3^{o}}$$

$$\sqrt{3}+\tan 29^{0}=\tan 60^{o}+\tan 29^{o}=\frac{\sin 89^{o}}{\cos 60^{o}\cos 29^{o}}$$

គេបាន $A=\dfrac{\sin 61^{o}.\sin 62^{o}.\sin 63^{o}....\sin 89^{o}}{(\cos 60^{o})^{29}\cos 1^{o}\cos 2^{o}\cos 3^{o}...\cos 29^{o}}=\dfrac{1}{(\cos 60^{o})^{29}}$

ដោយ $\cos 60^{o}=\dfrac{1}{2}$ ដូចនេះ $A=2^{29}=536870912$ ។

លំហាត់ទី១២០(China 1983)

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $[0,1]$ ដោយដឹងថា៖

$f(0)=f(1)=1$ និង $|f(a)-f(b)|<|a-b|$

ចំពោះគ្រប់ $a\neq b$ ក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|f(a)-f(b)|<\dfrac{1}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|f(a)-f(b)|<\dfrac{1}{2}$

-ករណីទី១៖

ចំពោះ $|a-b|\le\dfrac{1}{2}$ នោះគេបាន $|f(a)-f(b)|<|a-b|\le\dfrac{1}{2}$ ពិត

-ករណីទី២ ៖

ចំពោះ $|a-b|>\dfrac{1}{2}$ នោះតាមលក្ខណៈឆ្លុះគេអាចសន្មតថា $a>b$

គេមាន $|f(a)-f(b)|=|f(a)-f(1)+f(0)-f(b)|$

តាមវិសមភាពត្រីកោណគេបាន៖

$$|f(a)-f(b)|\le|f(a)-f(1)|+|f(0)-f(b)|$$

$$|f(a)-f(b)|<|a-1|+|0-b|=1-a+b=1-(a-b)<\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $|f(a)-f(b)|<\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី១២១

គេឱ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=x+y+z$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x+y}{1+z^2}+\frac{y+z}{1+x^2}+\frac{z+x}{1+y^2}\geq\frac{27}{2xyz}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{x+y}{1+z^2}+\frac{y+z}{1+x^2}+\frac{z+x}{1+y^2}\geq\frac{27}{2xyz}$

តាង $T=\frac{x+y}{1+z^2}+\frac{y+z}{1+x^2}+\frac{z+x}{1+y^2}$

ឬ $T=\frac{(x+y)^2}{x+y+z^2(x+y)}+\frac{(y+z)^2}{y+z+x^2(y+z)}+\frac{(z+x)^2}{z+x+y^2(z+x)}$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេមាន៖

$$\frac{{a_1}^2}{b_1}+\frac{{a_2}^2}{b_2}+\frac{{a_3}^2}{b_3}+....+\frac{{a_n}^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+a_3+...+a_n)^2}{b_1+b_2+b_3+...+b_n}$$

គេបាន៖

$$T \geq \frac{[(x+y)+(y+z)+(z+x)]^2}{2(x+y+z)+z^2(x+y)+x^2(y+z)+y^2(z+x)}$$

$$T \geq \frac{4(x+y+z)^2}{2xyz+z^2x+z^2y+x^2y+x^2z+y^2z+y^2x}$$

$$T \geq \frac{4(x+y+z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន៖

$$(x+y)+(y+z)+(z+x) \geq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$2(x+y+z) \geq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$8(x+y+z)^3 \geq 27(x+y)(y+z)(z+x)$$

គេទាញ $\dfrac{4(x+y+z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \dfrac{27}{2(x+y+z)} = \dfrac{27}{2xyz}$

នាំឱ្យ $T \geq \dfrac{27}{2xyz}$

ដូចនេះ $\dfrac{x+y}{1+z^2}+\dfrac{y+z}{1+x^2}+\dfrac{z+x}{1+y^2} \geq \dfrac{27}{2xyz}$ ។

លំហាត់ទី១២២

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$

ហើយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a+b}{\cos C}+\frac{b+c}{\cos A}+\frac{c+a}{\cos B}\ge 4(a+b+c)$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a+b}{\cos C}+\frac{b+c}{\cos A}+\frac{c+a}{\cos B}\ge 4(a+b+c)$

តាង $\Sigma=\frac{a+b}{\cos C}+\frac{b+c}{\cos A}+\frac{c+a}{\cos B}$

$$=\frac{(a+b)^2}{(a+b)\cos C}+\frac{(b+c)^2}{(b+c)\cos A}+\frac{(c+a)^2}{(c+a)\cos B}$$

តាមវិសមភាព $\frac{x_1^{\ 2}}{y_1}+\frac{x_2^{\ 2}}{y_2}+....+\frac{x_n^{\ 2}}{y_n}\ge\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{y_1+y_2+...+y_n}$

គេបាន $\Sigma\ge\frac{[(a+b)+(b+c)+(c+a)]^2}{(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(c+a)\cos B}$

$$\Sigma\ge\frac{4(a+b+c)^2}{(b\cos C+c\cos B)+(c\cos A+a\cos C)+(a\cos B+b\cos A)}$$

$$\sum \geq \frac{4(a+b+c)^2}{a+b+c} = 4(a+b+c)$$

ដូចនេះ $\frac{a+b}{\cos C} + \frac{b+c}{\cos A} + \frac{c+a}{\cos B} \geq 4(a+b+c)$ ។

លំហាត់ទី១២៣

គេឲ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមានផ្ទៃក្រឡា

ស្មើនឹង S ។ ចូរស្រាយថា $a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}\,S$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}\,S$

គេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ នាំឲ្យ $\sin A=\frac{2S}{bc}$

ហើយ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស)

គេបាន $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

ដូចគ្នាដែរ $\cot B=\frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$; $\cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

គេបាន $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

នាំឲ្យ $a^2+b^2+c^2=4S\,(\cot A+\cot B+\cot C)\quad(1)$

ជាបន្តទៅនេះយើងនឹងស្រាយថា $\cot A+\cot B+\cot C \ge \sqrt{3}$ ។

គេមាន $A+B+C=\pi$ នោះ $A=\pi-(B+C)$

គេបាន $\tan A=\tan(\pi-(B+C))=-\tan(B+C)$

$$\tan A=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B.\tan C}$$
$$-\tan A+\tan B\tan C=\tan B+\tan C$$

គេទាញ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot A\cot B\cot C$ គេបានសមភាព

$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$$

ដោយប្រើវិសមភាព $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$

គេទាញបាន $(\cot A+\cot B+\cot C)^2\geq 3$

នាំឲ្យ $\cot A+\cot B+\cot C\geq\sqrt{3}$ (A , B , C ជាមុំស្រួច)

តាមទំនាក់ទំនង (1) គេទាញបាន ៖

$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\,S$ ជាវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១២៤

គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង $u_{n+1} = \dfrac{u_n^4}{4u_n^3 + 6u_n^2 + 4u_n + 1}$ គ្រប់ $n \in IN$

ចូរបង្ហាញថា $1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)^4$ គ្រប់ $n \in IN$

រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)^4$

យើងមាន $1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{4u_n^3 + 6u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^4}$

$$= \frac{u_n^4 + 4u_n^3 + 6u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^4} = \frac{(u_n + 1)^4}{u_n^4} = \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^4$$

ដូចនេះ: $1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)^4$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$

គេបាន $\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=4\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$

តាង $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$ នាំឲ្យ $v_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

គេបាន $v_{n+1}=4v_n$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=4$

និងតួ $v_0=\ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)=\ln 2$ (ព្រោះ $u_0=1$) ។

តាមរូបមន្ត $v_n=v_0.q^n=4^n\ln 2$ ដោយ $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$

គេទាញ $\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)=4^n\ln 2$ នាំឲ្យ $1+\frac{1}{u_n}=2^{4^n}$

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{2^{4^n}-1}$ ។

លំហាត់ទី១២៥

ចូរកំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់វិជ្ជមាន $(a\,,b\,)$ បើគេដឹងថាចំនួន ៖

$\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់គូតម្លៃគត់វិជ្ជមាន $(a\,,b\,)$ ៖

យក $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}=k$ ដែល $k\in IN^*$

គេបាន $a^2-2kb^2a+k(b^3-1)=0 \quad (1)$

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ $\Delta=4k^2b^4-4k(b^3-1)$

$$\Delta=(2kb^2-b)^2+4k-b^2$$

សមីការ (1) មានចម្លើយក្នុង IN^* លុះត្រាតែ Δ ជាការេប្រាកដ

មានន័យថា $\Delta=(2kb^2-b)^2+4k-b^2=d^2$

ដែល d ជាចំនួនគត់។

-បើ $4k-b^2=0$ ឬ $k=\dfrac{b^2}{4}$

យើងទទួលបាន $a = 2b^2k - \frac{b}{2} = \frac{b^3 - b}{2}$ ឬ $a = \frac{b}{2}$

ដោយ a , b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហេតុនេះគេត្រូវឲ្យ ៖

$b = 2p \quad , \forall p \in IN$

គេទាញ $a = 2(2p)^2 \frac{(2p)^2}{4} - p = 8p^4 - p$

ហើយ $a = \frac{2p}{2} = p$ ។

ដូចនេះ $(a , b) = (8p^4 - p \ , \ 2p \ ) ; (p , 2p \ ) \ , \forall p \in IN^*$

-បើ $4k - b^2 > 0$

គេបាន $(2b^2k - b)^2 + 4k - b^2 = d^2 \geq (2b^2k - b + 1)^2 \ , \ \forall k \in IN^*$

ឬ $4k(b^2 - 1) + (b - 1)^2 \leq 0$ គេទាញបាន $b = 1$

ក្នុងករណីសមីការ $^{(1)}$ ក្លាយជា $a^2 - 2ka = 0$ នាំឲ្យ $a = 2k$

ដូចនេះ $(a , b \ ) = (2k \ , \ 1 \ )$ ចំពោះគ្រប់ $k \in IN^*$ ។

-បើ $4k - b^2 < 0$

គេបាន $(2b^2k-b)^2+4k-b^2=d^2<(2b^2k-b-1)^2$

សមមូល $(2b^2k-b)^2+4k-b^2-(2b^2k-b-1)^2<0$

ឬ $b^2(4k-3)+2b(b-1)+(4k-1)<0$ (មិនពិតក្នុង IN^*)

សរុបមកគេបានគូចម្លើយបីមានរាងដូចខាងក្រោម ៖

$(a, b)=(2k, 1)$; $(k, 2k)$; $(8k^4-k, 2k)$ $k\in IN^*$

លំហាត់ទី១២៦ **(Croatia Team Selection Tests 2011)**

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=3$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geq\frac{3}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geq\frac{3}{2}$

គេមាន $\frac{a^2}{a+b^2}=\frac{a(a+b^2)-ab^2}{a+b^2}=a-\frac{ab^2}{a+b^2}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^2}{b+c^2}=b-\frac{bc^2}{b+c^2}$ (2) ; $\frac{c^2}{c+a^2}=c-\frac{ca^2}{c+a^2}$ (3)

តាង $S=\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}$ ។ បូកវិសមភាព (1),(2) & (3)

គេបាន $S=3-(\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2})$

ដើម្បីស្រាយថា $S\geq\frac{3}{2}$ នោះយើងនឹងស្រាយថា ៈ

$$\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2}=3-S\le 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a+b^2\ge 2b\sqrt{a}=\frac{2ab^2}{b\sqrt{a}}$

គេទាញ $\frac{ab^2}{a+b^2}\le\frac{b\sqrt{a}}{2}$ ហើយ $\frac{bc^2}{b+c^2}\le\frac{c\sqrt{b}}{2}$, $\frac{ca^2}{c+a^2}\le\frac{a\sqrt{c}}{2}$

ហេតុនេះ $\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2}\le\frac{1}{2}(a\sqrt{c}+b\sqrt{a}+c\sqrt{b})$ (*)

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេមាន៖

$$(a\sqrt{c}+b\sqrt{a}+c\sqrt{b})^2\le(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$(a\sqrt{c}+b\sqrt{a}+c\sqrt{b})^2\le 3(ab+bc+ca)$$

ហើយ $(ab+bc+ca)^2\le(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)$

$$(ab+bc+ca)^2\le(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$$

$$ab+bc+ca\le(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2=9$$

គេទាញ $(a\sqrt{c}+b\sqrt{a}+c\sqrt{b})^2\le 3(ab+bc+ca)\le 9$

នាំឱ្យ $a\sqrt{c}+b\sqrt{a}+c\sqrt{b} \le 3 \quad (**)$

តាមវិសមភាព $(*)\,\&\,(**)$ គេទាញបាន៖

$$\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2} \le \frac{3}{2}$$ ពិត

ដូចនេះ $$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2} \ge \frac{3}{2}$$ ។

លំហាត់ទី១២៧(IMO LongList 1992)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c គេកំណត់តាង $A=\frac{a+b+c}{3}$

$G=\sqrt[3]{abc}$ និង $H=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ ។ ចូរស្រាយថា $\left(\frac{A}{G}\right)^3\ge\frac{1}{4}+\frac{3}{4}.\frac{A}{H}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖ $\left(\frac{A}{G}\right)^3\ge\frac{1}{4}+\frac{3}{4}.\frac{A}{H}$

ឧបមាថា $\left(\frac{A}{G}\right)^3\ge\frac{1}{4}+\frac{3}{4}.\frac{A}{H}$ ពិត

សមមូល $A^3\ge\frac{1}{4}G^3+\frac{3}{4}.\frac{A}{H}.G^3$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\ge\frac{1}{4}abc+\frac{3}{4}.\frac{\frac{a+b+c}{3}}{\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}.abc$$

$$(a+b+c)^3\ge\frac{27}{4}abc+\frac{9abc}{4}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

ឬ $4(a+b+c)^3 \geq 27abc + 9(a+b+c)(ab+bc+ca)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ យើងបាន

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ នាំឱ្យ $(a+b+c)^3 \geq 27abc \quad (1)$

$$\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2} \geq ab+bc+ca$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2ab+2bc+2ca$ គេបាន៖

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

$3(a+b+c)^3 \geq 9(ab+bc+ca) \quad (2)$

បូកវិសមភាព $(1)\,\&\,(2)$ គេបាន៖

$4(a+b+c)^3 \geq 27abc + 9(a+b+c)(ab+bc+ca)$ ពិត

ដូចនេះ $\left(\frac{A}{G}\right)^3 \geq \frac{1}{4}+\frac{3}{4}.\frac{A}{H}$ ។

លំហាត់ទី១២៨

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} 27^x + 3^{x+1}x^2(\log_2 y)^2 = 36 \\ 3^{1+2x}x\log_2 y + x^3(\log_2 y)^3 = 28 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} 27^x + 3^{x+1}x^2(\log_2 y)^2 = 36 \\ 3^{1+2x}x\log_2 y + x^3(\log_2 y)^3 = 28 \end{cases}$$

លក្ខខណ្ឌ $y > 0$ និង $x \in IR$

តាង $a = 3^x > 0$ និង $b = x\log_2 y$

ប្រព័ន្ធសមីការសមមូល $\begin{cases} a^3 + 3ab^2 = 36 & (i) \\ 3a^2b + b^3 = 28 & (ii) \end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) គេបាន $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 64$

ឬ $(a+b)^3 = 64$ នាំឲ្យ $a + b = 4$ (1)

ដកសមីការ (i) និង (2) គេបាន $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=8$

ឬ $(a-b)^3=8$ នាំឲ្យ $a-b=2$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=2 \end{cases}$

នាំឲ្យ $a=3$, $b=1$

ដោយ $a=3^x=3 \Rightarrow x=1$ ហើយ $b=x\log_2 y=1 \Rightarrow y=2$

ដូចនេះ $x=1$; $y=2$ ។

លំហាត់ទី១២៩

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយៈ

$a_0 = 4$, $a_1 = 9$ និង $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3$ ដែល $n = 0, 1, 2, ...$

ចូរស្រាយថា a_n ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា a_n ជាការេប្រាកដ

គេមាន $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3 \quad (1)$

តាងស្វ៊ីតចំនួនពិត $b_n = a_n + k$ ដែល k ជាចំនួនពិតថេរ ។

គេទាញ $a_n = b_n - k$, $a_{n+1} = b_{n+1} - k$, $a_{n+2} = b_{n+2} - k$

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរៈ

$$b_{n+2} - k = 6(b_{n+1} - k) - 8(b_n - k) + 3$$
$$b_{n+2} = 6b_{n+1} - 8b_n + 3k + 3 \qquad (2)$$

បើ $3k + 3 = 0 \Rightarrow k = -1$ នោះទំនាក់ទំនង (2) ក្លាយទៅជាៈ

$b_{n+2} = 6b_{n+1} - 8b_n$ មានសមីការសម្គាល់ $x^2 - 6x + 8 = 0$

មានឬស $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ ។

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $\begin{cases} x_n = b_{n+1} - 2b_n \\ y_n = b_{n+1} - 4b_n \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x_{n+1} = b_{n+2} - 2b_{n+1} \\ y_{n+1} = b_{n+2} - 4b_{n+1} \end{cases}$ ដោយ $b_{n+2} = 6b_{n+1} - 8b_n$

នោះ $\begin{cases} x_{n+1} = 4(b_{n+1} - 2b_n) \\ y_{n+1} = 2(b_{n+1} - 4b_n) \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n \\ y_{n+1} = 2y_n \end{cases}$

គេទាញបាន (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង រៀងគ្នា

$q_1 = 4$, $q_2 = 2$ ។

តាមរូបមន្ត $x_n = x_0 . q_1{}^n$ និង $y_n = y_0 . q_2{}^n$

ដោយ $x_0 = b_1 - 2b_0 = (a_1 + k) - 2(a_0 + k) = 2$

និង $y_0 = b_1 - 4b_0 = (a_1 + k) - 4(a_0 + k) = -4$

គេបាន $x_n = 2.4^n$ និង $y_n = -4.2^n$ ។

ដោយ $\begin{cases} x_n = b_{n+1} - 2b_n \\ y_n = b_{n+1} - 4b_n \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} b_{n+1} - 2b_n = 2.4^n \\ b_{n+1} - 4b_n = -4.2^n \end{cases}$

ធ្វើផលសងគេបាន $2b_n = 2.4^n + 4.2^n \Rightarrow b_n = 4^n + 2.2^n$

ដោយ $a_n = b_n - k = 4^n + 2.2^n + 1$ (ព្រោះ $k = -1$)

ដូចនេះ $a_n = (2^n + 1)^2$ ជាការេប្រាកដគ្រប់ $n \in IN$ ។

លំហាត់ទី១៣០

ចូរកំនត់លេខ a និង b ដើម្បីឲ្យចំនួន $\overline{abba}$ ជាគូបនៃចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់លេខ a និង b

តាង $N = \overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a$

$N = 1001a + 110b$

$N = 11(91a + 10b)$

ដើម្បីឲ្យ N ជាគូបនៃចំនួនគត់លុះត្រាតែ

$91a + 10b = 11^2 k^3 = 121k^3 \quad , k \in IN^*$

ដោយ $0 < a \le 9 \ , \ 0 \le b \le 9$ នោះ: $0 < 91a + 10b \le 909$

គេបាន $0 < 121k^3 \le 909$

សមមូល $0 < k^3 \le \dfrac{909}{121} = 7 + \dfrac{62}{121}$ នាំឲ្យ $k = 1$

គេទាញបាន $91a + 10b = 121$ នាំឲ្យ $b = \dfrac{121 - 91a}{10}$

ដោយ $b \geq 0$ នោះ $\frac{121-91a}{10} \geq 0$

ឬ $a \leq \frac{121}{91} = 1 + \frac{30}{91}$ នាំឲ្យ $a = 1$ ហើយ $b = \frac{121-91}{10} = 3$ ។

លំហាត់ទី១៣១

គេឲ្យចំនួន $A=\overline{a_n a_{n-1}......a_2 a_1 a_0}$ ដែល $a_0\,, a_1\,, a_2\,,.....,a_n$ ជាលេខ ។

ចូរស្រាយថាចំនួន A ចែកដាច់នឹង 6 កាលណា

$y=4(a_1+a_2+...+a_n)+a_0$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $A=\overline{a_n a_{n-1}......a_2 a_1 a_0}=a_0+10a_1+10^2 a_2+.....+10^n a_n$

យើងមាន $10\equiv 4 \pmod 6$

$$10^2\equiv 4 \pmod 6$$
$$10^3\equiv 4 \pmod 6$$
$$-----------$$
$$10^n\equiv 4 \pmod 6$$

យើងបាន $A\equiv a_0+4(a_1+a_2+.....+a_n) \pmod 6$

ដូចនេះចំនួន A ចែកដាច់នឹង 6 កាលណា

$y=4(a_1+a_2+...+a_n)+a_0$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

លំហាត់ទី១៣២

គេមានស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ និង

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x_n + \frac{1}{2}\sin a(1 - \tan a)y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\cos a(\cot a - 1)x_n + \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)y_n \end{cases}$$

ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ និង $n = 0, 1, 2, ...$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ តាង $u_n = x_n \cos a + y_n \sin a$ និង

$v_n = x_n \cos a - y_n \sin a$ ។

ចូរស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន៖

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x_n + \frac{1}{2}\sin a(1 - \tan a)y_n$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos a$ គេបាន៖

$$x_{n+1}\cos a = \frac{\cos a(\sin a + \cos a)}{2}x_n + \frac{\sin a(\cos a - \sin a)}{2}y_n \quad (1)$$

គេមាន៖

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\cos a(\cot a - 1)x_n + \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)y_n$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\sin a$ គេបាន៖

$$y_{n+1}\sin a = \frac{\cos a(\cos a - \sin a)}{2}x_n + \frac{\sin a(\sin a + \cos a)}{2}y_n \quad (2)$$

បូកសមីការ (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន៖

$$x_{n+1}\cos a + y_{n+1}\sin a = \cos a(x_n\cos a + y_n\sin a)$$

ដោយ $u_n = x_n \cos a + y_n \sin a$

គេទាញបាន $u_{n+1} = \cos a . u_n$ នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q_u = \cos a$ ។

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន៖

$$x_{n+1} \cos a - y_{n+1} \sin a = \sin a (x_n \cos a - y_n \sin a)$$

ដោយ $v_n = x_n \cos a - y_n \sin a$

គេទាញបាន $v_{n+1} = \sin a . v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q_v = \sin a$ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a

គេមាន $u_0 = x_0 \cos a + y_0 \sin a = \cos a$

គេបាន $u_n = u_0 \times q_u{}^n = \cos a . \cos^n a = \cos^{n+1} a$

ហើយ $v_0 = x_0 \cos a - y_0 \sin a = \cos a$

គេបាន $v_n = v_0 \times q_v{}^n = \cos a . \sin^n a$

ដូចនេះ $u_n = \cos^{n+1} a$, $v_n = \cos a \sin^n a$ ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a

ដោយ $u_n = x_n \cos a + y_n \sin a$

និង $v_n = x_n \cos a - y_n \sin a$

គេបាន $u_n + v_n = 2x_n \cos a$

គេទាញ $x_n = \dfrac{\cos^{n+1} a + \cos a \sin^n a}{2\cos a}$

$$x_n = \frac{\cos^n a + \sin^n a}{2} \text{ ។}$$

ហើយ $u_n - v_n = 2y_n \sin a$

គេទាញ $y_n = \dfrac{\cos^{n+1} a - \cos a \sin^n a}{2\sin a}$ ។

លំហាត់ទី១៣៣

គេឱ្យ $x\,;y\,;z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geq 8$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geq 8$

គេមាន $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz}$

ដោយ $x+y+z=1$ នាំឱ្យ $\begin{cases}1-x=y+z\\1-y=x+z\\1-z=x+y\end{cases}$

គេបាន $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$y+z\geq 2\sqrt{yz}\quad ;\quad z+x\geq 2\sqrt{zx}$ និង $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

គេបាន $(y+z)(z+x)(x+y)\geq 8xyz$

នាំឱ្យ $\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz} \geq 8$

ដូចនេះ $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right) \geq 8$ ។

លំហាត់ទី១៣៤(*វៀតណាម* 2008)

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge\frac{4}{xy+yz+zx}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានខុសគ្នា x,y,z ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge\frac{4}{xy+yz+zx}$

ដោយ x,y,z ជាចំនួនពិតខុសគ្នា និង មិនអវិជ្ជមាននោះគេអាចសន្មត

យក $z>y>x\ge 0$ ។

តាង $A=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$

និង $B=xy+yz+zx$ ។

យក $y=x+p\ ,\ z=x+p+q$ ដែល $p>0,q>0$

គេបាន $A=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{(p+q)^2}$

និង $B=x(x+p)+(x+p)(x+p+q)+x(x+p+q)$

$$= 3x^2 + 2(2p+q)x + p^2 + pq$$

ដោយសារតែ $x \ge 0$ នោះ $B \ge p^2 + pq = p(p+q)$

គេបាន $A \times B \ge \left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{(p+q)^2}\right] p(p+q)$

$$= \frac{p+q}{p} + \frac{p(p+q)}{q^2} + \frac{p}{p+q}$$

$$= 1 + \frac{q}{p} + \frac{p(p+q)}{q^2} + 1 - \frac{q}{p+q}$$

$$= 2 + \left(\frac{q}{p} - \frac{q}{p+q}\right) + \frac{p(p+q)}{q^2}$$

$$= 2 + \frac{q^2}{p(p+q)} + \frac{p(p+q)}{q^2}$$

ដោយ $\frac{q^2}{p(p+q)} + \frac{p(p+q)}{q^2} \ge 2\sqrt{\frac{q^2}{p(p+q)} \cdot \frac{p(p+q)}{q^2}} = 2$

គេទាញបាន $A \times B \ge 2 + 2 = 4$ នាំឱ្យ $A \ge \frac{4}{B}$

ដូចនេះ $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \ge \frac{4}{xy+yz+zx}$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $\begin{cases} 3x^2+2(2p+q)x=0 \\ p(p+q)=q^2 \end{cases}$

គេទាញបាន $x=0$ និង $p(p+q)=q^2$ ហើយ $y=p\,,z=p+q$

នោះ $z-y=q$ តាម $p(p+q)=q^2$ គេទាញបាន $yz=(z-y)^2$

នាំឱ្យ $z^2-3yz+y^2=0$ ដោយ $z>y$

នោះ $\frac{z}{y}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ ៕

លំហាត់ទី១៣៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ៖

$u_0 = 1$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+1} = 2u_n^{\ 2} + 4u_n + 1$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $u_{n+1} = 2u_n^{\ 2} + 4u_n + 1$

គុណអង្គទាំងពីរ នឹង 2 គេបាន៖

$$2u_{n+1} = 4u_n^{\ 2} + 8u_n + 2$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង 2 គេបាន៖

$$2(u_{n+1} + 1) = 4(u_n + 1)^2$$

តាង $v_n = \ln[2(u_n + 1)]$

គេបាន $v_{n+1} = \ln\,[2(u_{n+1} + 1)]$

$$v_{n+1} = \ln\left[4(u_n+1)^2\right]$$
$$v_{n+1} = 2\ln\left[2(u_n+1)\right]$$

នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=2$

និងតួ $v_0 = \ln[2(u_0+1)] = \ln(4)$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n = 2^n \ln 4 = \ln 2^{2^{n+1}}$

ដោយ $v_n = \ln[2(u_n+1)]$

គេទាញ $2(u_n+1) = 2^{2^{n+1}}$

ដូចនេះ $u_n = 2^{2^{n+1}-1} - 1$ ។

លំហាត់ទី១៣៦

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^3+9x+6}{3x^2+6x+7}$

ចូរគណនា $f_n(x)=\underbrace{f\circ f\circ f\circ.....\circ f}_{(n)}(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $f_n(x)=\underbrace{f\circ f\circ f\circ.....\circ f}_{(n)}(x)$

តាងស្វីតជំនួយ $a_1=f(x)$

$$a_2=f\circ f(x)=f(a_1)$$
$$a_3=f\circ f\circ f(x)=f(a_2)$$

តាមលំនាំគំរូនេះគេបាន $a_n=\underbrace{f\circ f\circ f\circ.....\circ f}_{(n)}(x)=f(a_{n-1})$

គេទាញ $a_{n+1}=f(a_n)=\frac{{a_n}^3+9a_n+6}{3{a_n}^2+6a_n+7}$

សមីការសម្គាល់របស់ស្វីតនេះមានរាង $r=\frac{r^3+9r+6}{3r^2+6r+7}$

ឬ $3r^3+6r^2+7r=r^3+9r+6$

ឬ $2r^3+6r^2-2r-6=0$

ឬ $2(r+3)(r-1)(r+1)=0$

មានឫស $r_1=-3$; $r_2=1$; $r_3=-1$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $b_n=\dfrac{a_n-r_1}{a_n-r_2}=\dfrac{a_n+3}{a_n-1}$

គេបាន $b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+3}{a_{n+1}-1}$ ដោយ $a_{n+1}=\dfrac{a_n^{\,3}+9a_n+6}{3a_n^{\,2}+6a_n+7}$

$$\Rightarrow b_{n+1}=\dfrac{\dfrac{a_n^{\,3}+9a_n+6}{3a_n^{\,2}+6a_n+7}+3}{\dfrac{a_n^{\,3}+9a_n+6}{3a_n^{\,2}+6a_n+7}-1}=\dfrac{a_n^{\,3}+9a_n^{\,2}+27a_n+27}{a_n^{\,3}-3a_n^{\,2}+3a_n-1}$$

$$\Rightarrow b_{n+1}=\dfrac{(a_n+3)^3}{(a_n-1)^3}$$

$$\Rightarrow b_{n+1}=b_n^{\,3}$$

-បើ $n=1$ នោះ $b_2=b_1^{\,3}$

-បើ $n=2$ នោះ $b_3=b_2^{\,3}=b_1^{\,9}$

-បើ $n=3$ នោះ $b_4={b_3}^3={b_1}^{27}$

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n=p$ គឺ $b_p={b_1}^{3^{p-1}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n=p+1$ គឺ $b_{p+1}={b_1}^{3^p}$

គេមាន $b_{p+1}={b_p}^3$ តែតាមការឧបមា $b_p={b_1}^{3^{p-1}}$

ហេតុនេះ $b_{p+1}=\left({b_p}^{3^{p-1}}\right)^3={b_p}^{3^p}$ ពិត

ដូចនេះ $b_n={b_1}^{3^{n-1}}$

ដោយ $b_1=\dfrac{a_1+3}{a_1-1}=\dfrac{\dfrac{x^3+9x+6}{3x^2+6x+7}+3}{\dfrac{x^3+9x+6}{3x^2+6x+7}-1}$

$$b_1=\frac{x^3+9x+6+9x^2+18x+21}{x^3+9x+6-3x^2-6x-7}$$

$$b_1=\frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^3-3x^2+3x-1}=\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3$$

គេទាញ $b_n=\left[\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^3\right]^{3^{n-1}}=\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{3^n}$

ដោយ $b_n=\dfrac{a_n+3}{a_n-1}\Rightarrow a_n=\dfrac{b_n+3}{b_n-1}$ ជំនួស $b_n=\dfrac{(x+3)^{3^n}}{(x-1)^{3^n}}$

គេបាន $a_n=\dfrac{(x+3)^{3^n}+3(x-1)^{3^n}}{(x+3)^{3^n}-(x-1)^{3^n}}$

ដូចនេះ $f_n(x)=\dfrac{(x+3)^{3^n}+3(x-1)^{3^n}}{(x+3)^{3^n}-(x-1)^{3^n}}$ ។

លំហាត់ទី១៣៧(*វៀតណាម* 1962)

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,d ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន៖

$$X=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}=\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}$$

និង $$Y=\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}=\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}$$

គេបាន $$Y-X=\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}$$

បន្ទាប់ពីតម្រូវភាគរួម រួចសម្រួលគេបាន៖

$$Y-X=\frac{(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+b+c+d)}\ge 0$$ នាំឱ្យ $Y\ge X$ ពិត។

លំហាត់ទី១៣៨

គេឱ្យ z_1, z_2, z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_2 = 2 \\ z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 = 3 \\ z_1 z_2 z_3 = 4 \end{cases}$

ចូរគណនាតម្លៃ $S = \dfrac{1}{z_1 z_2 + z_3 - 1} + \dfrac{1}{z_2 z_3 + z_1 - 1} + \dfrac{1}{z_3 z_1 + z_2 - 1}$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $z_1 z_2 + z_3 - 1 = z_1 z_2 + z_3 + 1 - (z_1 + z_2 + z_3)$

$$= z_1 z_2 + 1 - z_1 - z_2 = (z_1 - 1)(z_2 - 1)$$

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នានេះដែរគេបាន៖

$$z_2 z_3 + z_1 - 1 = (z_2 - 1)(z_3 - 1), z_3 z_1 + z_2 - 1 = (z_1 - 1)(z_3 - 1)$$

$$S = \sum_{cyc} \frac{1}{(z_1 - 1)(z_2 - 1)} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 - 3}{(z_1 - 1)(z_2 - 1)(z_3 - 1)}$$

$$= \frac{2 - 3}{z_1 z_2 z_3 - (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) + z_1 + z_2 + z_3 - 1}$$

$$= \frac{-2}{10 - 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)} = \frac{-2}{10 - (4 - 3)} = -\frac{2}{9}$$

លំហាត់ទី១៣៩

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $E=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម E

គេមាន $\frac{a^2}{a+b}=\frac{a^2+ab-ab}{a+b}=a-\frac{ab}{a+b}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a+b\ge 2\sqrt{ab}$

គេបាន $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{2\sqrt{ab}}$ ឬ $-\frac{ab}{a+b}\ge-\frac{\sqrt{ab}}{2}$

គេទាញ $\frac{a^2}{a+b}=a-\frac{ab}{a+b}\ge a-\frac{\sqrt{ab}}{2}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^2}{b+c}\ge b-\frac{\sqrt{bc}}{2}$ (2) ; $\frac{c^2}{c+a}\ge c-\frac{\sqrt{ca}}{2}$ (3)

បូកវិសមភាព $(1); (2) \& (3)$ គេទទួលបាន៖

$$E \geq a+b+c-\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2}=a+b+c-\frac{1}{2}$$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេមាន៖

$$a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$$

គេទាញ $E \geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ E គឺ $E_{min}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី១៤០(Turkey 2007)

គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

ដំណោះស្រាយ

ជាដំបូងយើងនឹងស្រាយថា $\dfrac{1}{ab+2c^2+2c}\geq\dfrac{ab}{(ab+bc+ca)^2}$

សមមូល $(ab+bc+ca)^2\geq ab(ab+2c^2+2c)$

សមមូល $b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\geq 2abc^2+2abc$

ដោយ $a+b+c=1$ នោះ $b^2c^2+c^2a^2+2abc\geq 2abc^2+2abc$

សមមូល $b^2c^2+c^2a^2-2abc^2=c^2(a-b)^2\geq 0$ ពិត

ហេតុនេះ $\dfrac{1}{ab+2c^2+2c}\geq\dfrac{ab}{(ab+bc+ca)^2}$ (1)

$$\frac{1}{bc+2a^2+2a} \geq \frac{bc}{(ab+bc+ca)^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{ca+2b^2+2b} \geq \frac{ca}{(ab+bc+ca)^2} \quad (3)$$

បូកវិសមភាព $(1),(2)\,\&\,(3)$ គេបាន៖

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b} \geq \frac{1}{ab+bc+ca}$$

លំហាត់ទី១៤១

គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2\ge 16$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2\ge 16$

តាង $A=(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2$

$$=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

យើងពិនិត្យ $\frac{1}{a^2}=\frac{ab+bc+ca}{a^2}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{bc}{a^2}$

$$\frac{1}{b^2}=\frac{ab+bc+ca}{b^2}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{ac}{b^2}$$

$$\frac{1}{c^2}=\frac{ab+bc+ca}{c^2}=\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{ab}{c^2}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\ ;\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2\ ,\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2\ ,\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}\ge 3$$

គេបាន $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 2+2+2+3=9$

ហើយ $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}=3$

ម៉្យាងទៀត $a^2+b^2\geq 2ab$, $b^2+c^2\geq 2bc$; $c^2+a^2\geq 2ca$

នាំឲ្យ $2a^2+2b^2+2c^2\geq 2ab+2bc+2ca$

នាំឲ្យ $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca=1$

គេបាន $A\geq 1+9+2(3)=16$ ។

ដូចនេះ $(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2\geq 16$ ។

លំហាត់ទី១៤២

គេឲ្យ $A=\overline{a_n a_{n-1}..........a_1 a_0}$ និង $B=\overline{a_n a_{n-1}.........a_1}-2\times a_0$

ស្រាយថា **A** ចែកដាច់នឹង **7** លុះត្រាតែ **B** ចែកដាច់នឹង **7** ។

ដំណោះស្រាយ

បើ **B** ចែកដាច់នឹង **7** នោះនាំឲ្យមាន $q\in IN$ ដែល $B=7q$

គេបាន $\overline{a_n a_{n-1}..........a_1}-2\times a_0=7q$

នាំឲ្យ $\overline{a_n a_{n-1}..........a_1}=7q+2\times a_0$ **(1)**

យើងមាន

$$A=\overline{a_n a_{n-1}.........a_1 a_0}=\overline{a_n a_{n-1}...........a_1}\times 10+a_0 \quad (2)$$

យក (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន

$$A=(7q+2a_0)\times 10+a_0$$

$$A=70q+20a_0+a_0=70q+21a_0=7\ (10q+3a_0)$$

នាំឲ្យ **A** ចែកដាច់នឹង **7** ។

ដូចនេះ **A** ចែកដាច់នឹង **7** លុះត្រាតែ **B** ចែកដាច់នឹង **7** ។

លំហាត់ទី១៤៣

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបី ។

គេដឹងថា $P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^2$

ហើយ $P(x)-2$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^2$ ។

ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកពហុធា $P(x)$ ៖

តាមបំរាប់គេអាចសរសេរ $\begin{cases} P(x)+2=(x+1)^2(ax+b) & (1) \\ P(x)-2=(x-1)^2(cx+d) & (2) \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} P(-1)+2=0 \\ P(1)-2=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} P(-1)=-2 \\ P(1)=2 \end{cases}$

ដោយធ្វើដេរីវេលើ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\begin{cases} P'(x)=2(x+1)(ax+b)+a(x+1)^2 \\ P'(x)=2(x-1)(cx+d)+c(x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'(x)=(x+1)[2(ax+b)+a(x+1)] & (3) \\ P'(x)=(x-1)[2(cx+d)+c(x-1) & (4) \end{cases}$$

តាម (3) នឹង (4) បញ្ជាក់ថា $P'(x)$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)(x-1)$

គេទាញ $P'(x)=k(x+1)(x-1)$

(ព្រោះ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី៣)

គេបាន $P(x)=k\int(x^2-1).dx=k(\frac{x^3}{3}-x)+r$

ចំពោះ $x=\pm1$ គេបាន $\begin{cases} P(-1)=\frac{2}{3}k+r=-2 \\ P(1)=-\frac{2}{3}k+r=2 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $k=3$, $r=0$

ដូចនេះ $P(x)=3(\frac{x^3}{3}-x)=x^3-3x$ ។

លំហាត់ទី១៤៤

គេឱ្យ $x \in [0,a]$ និងចំនួនគត់ $m,n>0$ ។

ចូរស្រាយថា $x^m(a-x)^n \le \dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x^m(a-x)^n \le \dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$

តាងអនុគមន៍ $g(x)=x^m(a-x)^n$ ដែល $x\in[0,a]$ និង $m,n>0$

គេបាន $g'(x)=mx^{m-1}(a-x)^n-n(a-x)^{n-1}x^m$

$$=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[m(a-x)-nx]$$
$$=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x]$$

ដោយ $x\in[0,a]$ និង $m,n>0$ នោះ $x^{m-1}(a-x)^{n-1}\ge 0$

ហេតុនេះ $g'(x)$ មានសញ្ញាដូច $ma-(m+n)x$ ។

បើ $ma-(m+n)x=0 \Rightarrow x=\dfrac{ma}{m+n}$ ។

ចំពោះ $x=\frac{ma}{m+n}\Rightarrow f(\frac{ma}{m+n})=(\frac{ma}{m+n})^m(a-\frac{ma}{m+n})^n$

$$=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$$

តារាងអថេរភាព

x	0	$\frac{ma}{m+n}$	a
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	$f(\frac{ma}{m+n})$	$\searrow 0$

តាមតារាងខាងលើគ្រប់ $x\in[0,a]$ គេបាន $f(x)\le f(\frac{ma}{m+n})$

ដូចនេះ $x^m(a-x)^n\le\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$ ។

សម្គាល់៖

វិសមភាពនេះអាចស្រាយមួយបែបទៀតដូចខាងក្រោម៖

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន៖

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_k \geq k \sqrt[k]{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_k}$$

គ្រប់ $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k \geq 0$

ឬ $a_1 . a_2 . a_3 \ldots\ldots a_k \leq \left(\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_k}{k} \right)^k$ ។

គេមាន $x^m = \dfrac{1}{m^n}(\underbrace{(mx)(mx)\ldots.(mx)}_{n})$

និង $(a-x)^n = \dfrac{1}{n^m}\left[\underbrace{(n(a-x)).(n(a-x))\ldots.(n(a-x))}_{m} \right]$

$$x^m(a-x)^n=\frac{1}{m^n}\cdot\frac{1}{n^m}(\underbrace{(mx)(mx)...(mx)}_{n}).\left[\underbrace{(n(n(a-x))....(n(a-x))}_{m}\right]$$

$$x^m(a-x)^n\le\frac{1}{m^n}\cdot\frac{1}{n^m}\left(\frac{mx+...+mx+n(a-x)+...+n(a-x)}{m+n}\right)^{m+n}$$

$$x^m(a-x)^n\le\frac{1}{m^n}\cdot\frac{1}{n^m}\cdot\left[\frac{mnx+mn(a-x)}{m+n}\right]^{m+n}$$

$$x^m(a-x)^n\le\frac{1}{m^n}\cdot\frac{1}{n^m}\cdot\frac{m^{m+n}n^{m+n}a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}=\frac{m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$$

ដូចនេះ $x^m(a-x)^n\le\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$ ។

លំហាត់ទី១៤៥

គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z > 0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\geq\frac{1}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{x}{x+2y+3z}+\dfrac{y}{y+2z+3x}+\dfrac{z}{z+2x+3y}\geq\dfrac{1}{2}$

តាង $T=\dfrac{x}{x+2y+3z}+\dfrac{y}{y+2z+3x}+\dfrac{z}{z+2x+3y}$

$$T=\frac{x^2}{x^2+2xy+3xz}+\frac{y^2}{y^2+2yz+3xy}+\frac{z^2}{z^2+2xz+3yz}$$

$$T\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}$$

គេបាន $T-\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}-\dfrac{1}{2}$

$$T-\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)^2}\geq 0$$ នាំអោយ $T\geq\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ៖ $\dfrac{x}{x+2y+3z}+\dfrac{y}{y+2z+3x}+\dfrac{z}{z+2x+3y}\geq\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី១៤៦

គេឲ្យពីរចំនួន x និង y ខុសពីសូន្យ និង មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0$

តាង $P=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ គេបាន $P^2=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2$

យក $M=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4$

គេបាន $M=P^2-2-3P+4=P^2-3P+2=(P-1)(P-2)$

ដោយ $P-2=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{(x-y)^2}{xy}\geq 0$ (x និង y មានសញ្ញាដូចគ្នា)

ហេតុនេះ $M=(P-2)(P-1)\geq 0$ ។

ដូចនេះ $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0$ ។

លំហាត់ទី១៤៧ (Romania 2002)

គេយក a , b , c ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(0,1)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , y , z នៃចន្លោះ $(0,\frac{\pi}{2})$

គេយក $a=\cos^2 x\ , b=\cos^2 y , c=\cos^2 z$

វិសមភាពសមមូល $\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<1$

ដោយ $\forall z\in(0,\frac{\pi}{2})$ គេមាន $\cos z<1$ និង $\sin z<1$

គេទាញ $\cos x\cos y\cos z<\cos x\cos y$ និង $\sin x\sin y\sin z<\sin x\sin y$

នាំឱ្យ $\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$$\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<\cos(x-y)$$

ដោយ $\cos(x-y)\le 1$ នោះ $\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<1$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$ ។

លំហាត់ទី១៤៨

គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$$

យើងមាន $1-\tan^2\frac{x}{2^k} = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2^k}-\sin^2\frac{x}{2^k}}{\cos^2\frac{x}{2^k}} = \dfrac{\cos\frac{2x}{2^k}}{\cos^2\frac{x}{2^k}}$

គេបាន $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[\dfrac{\cos^{2^k}\frac{x}{2^{k-1}}}{\cos^{2^{k+1}}\frac{x}{2^k}}\right] = \dfrac{\cos 2x}{\cos^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}$

ដូចនេះ $P_n = \dfrac{\cos 2x}{\cos^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី១៤៩ (USAMO 1998)

គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

យើងមាន $(a-b)(a^2-b^2)=a^3+b^3-ab(a+b)\ge 0$

ឬ $a^3+b^3\ge ab(a+b)$

ឬ $a^3+b^3+abc\ge ab(a+b)+abc=ab(a+b+c)$

គេទាញ $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}\le\dfrac{1}{ab(a+b+c)}=\dfrac{c}{abc(a+b+c)}\ (1)$

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{a}{abc(a+b+c)}\quad(2)$$

$$\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{b}{abc(a+b+c)}\quad(3)$$

ដោយបូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

លំហាត់ទី១៥០

គេឱ្យ $a\,;b\,;c$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយថា៖

$$a(b^2-\sqrt{b})+b(c^2-\sqrt{c})+c(a^2-\sqrt{a})\geq 0$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a(b^2-\sqrt{b})+b(c^2-\sqrt{c})+c(a^2-\sqrt{a})\geq 0$

ដោយ $abc=1$ នោះគេអាចតាង $a=\dfrac{x^2}{y^2}\,;b=\dfrac{y^2}{z^2}\,;c=\dfrac{z^2}{x^2}$

ដែល $x>0\,;y>0\,;z>0$ ។

វិសមភាពខាងលើសមមូល៖

$$\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{y^4}{z^4}-\frac{y}{z}\right)+\frac{y^2}{z^2}\left(\frac{z^4}{x^4}-\frac{z}{x}\right)+\frac{z^2}{x^2}\left(\frac{x^4}{y^4}-\frac{x}{y}\right)\geq 0$$

$$\frac{x^2y^2}{z^4}-\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2z^2}{x^4}-\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2x^2}{y^4}-\frac{z^2}{xy}\geq 0$$

$$\frac{2x^2y^2}{z^4}-\frac{2x^2}{yz}+\frac{2y^2z^2}{x^4}-\frac{2y^2}{zx}+\frac{2z^2x^2}{y^4}-\frac{2z^2}{xy}\geq 0$$

$$\left(\frac{xy}{z^2}-\frac{yz}{x^2}\right)^2+\left(\frac{yz}{x^2}-\frac{zx}{y^2}\right)^2+\left(\frac{zx}{y^2}-\frac{xy}{z^2}\right)^2\geq 0 \text{ ពិត}$$

លំហាត់ទី១៥១

គេឱ្យ $A\,;\,B\,;C$ ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$

គេមាន $A+B+C=\pi$ នាំឱ្យ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

គេបាន $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$ ឬ $\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ គេបាន៖

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

ដោយ $0<A\,;B\,;C<\pi$ នោះ $0<\frac{A}{2}\,;\frac{B}{2}\,;\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$

គេបាន $\cot\frac{A}{2}>0\ ;\cot\frac{B}{2}>0\,;\cot\frac{C}{2}>0$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន៖

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$$

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}$$

$$\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)^3\geq 27\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី១៥២

គេឱ្យ a,b,c,d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$ ។

បើគេដឹងថា $a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ នោះចូរបង្ហាញថា

$a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$

គេមាន $a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{cd}+\frac{d^2}{ad}$

$$a+b+c+d>\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+bc+cd+da}$$

នាំឱ្យ $ab+bc+cd+da>a+b+c \quad (1)$

ម៉្យាងទៀត $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}=\frac{(bc)^2}{abc^2}+\frac{(cd)^2}{bcd^2}+\frac{(ad)^2}{a^2cd}+\frac{(ab)^2}{ab^2d}$

$$= \frac{(bc)^2}{\frac{c}{d}} + \frac{(cd)^2}{\frac{d}{a}} + \frac{(ad)^2}{\frac{a}{b}} + \frac{(ab)^2}{\frac{b}{c}}$$

$$\geq \frac{(bc+cd+da+ab)^2}{\frac{c}{d}+\frac{d}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}} \qquad (*)$$

តាម (1) គេបាន $(bc+cd+da+ab)^2 > (a+b+c+d)^2$ (2)

តាមសម្មតិកម្ម $a+b+c+d > \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$

គេទាញ $\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}} > \frac{1}{a+b+c+d}$ (3)

គុណវិសមភាព (2) និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន

$$\frac{(bc+cd+da+ab)^2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}} > a+b+c+d \quad (**)$$

តាម (*) និង (**) គេបាន $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d} > a+b+c+d$

ដូចនេះ $a+b+c+d < \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$ ។

លំហាត់ទី១៥៣

គេឱ្យ $a\,;b\,;c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា៖

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$

តាង $T=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

$$=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}$$

$$=\left(\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\right)-1$$

$$\geq\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}-1$$

$$\geq\frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}-1=\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}-1$$

$$\geq\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}+3-1=2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$$

ដូចនេះ $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$ ។

លំហាត់ទី១៥៤(China Team Selection Test 2005)

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}\le 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $S=\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}$

និង $T=\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}$

គេមាន $S=\frac{a^2}{a^3-abc+a}+\frac{b^2}{b^3-cab+b}+\frac{c^2}{c^3-abc+c}$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេបាន៖

$$S\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc+a+b+c}$$

តែ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

គេបាន $S\ge\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+1}$ ដោយ $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$

នោះ $S \geq \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2cc} = \frac{1}{a+b+c}$ ។

ម៉្យាងទៀត $\frac{T}{3} = \frac{ab+bc+ca}{a^2-bc+1} + \frac{ab+bc+ca}{b^2-ca+1} + \frac{ab+bc+ca}{c^2-ab+1}$

ហើយ $\frac{ab+bc+ca}{a^2-bc+1} = \frac{a(a+b+c)}{a^2-bc+1} + \frac{1}{a^2-bc+1} - 1$

គេបាន

$$\begin{aligned}\frac{T}{3} &= \sum_{cyc} \frac{ab+bc+ca}{a^2-bc+1} \\ &= \sum_{cyc}\left[\frac{a(a+b+c)}{a^2-bc+1} + \frac{1}{a^2-bc+1} - 1\right] \\ &= (a+b+c)S + T - 3 \geq (a+b+c).\frac{1}{a+b+c} + T - 3\end{aligned}$$

ព្រោះ $S \geq \frac{1}{a+b+c}$ (សម្រាយខាងលើ)

គេទាញ $T - \frac{T}{3} \leq 2$ ឬ $T \leq 3$ ។

ដូចនេះ $\frac{1}{a^2-bc+1} + \frac{1}{b^2-ca+1} + \frac{1}{c^2-ab+1} \leq 3$ ។

លំហាត់ទី១៥៥

ចូរគណនាតម្លៃផលគុណ៖

$$P=(\sqrt{3}+\tan 1^{o})(\sqrt{3}+\tan 2^{o}).....(\sqrt{3}+\tan 29^{o})$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃផលគុណ៖

$$P=(\sqrt{3}+\tan 1^{o})(\sqrt{3}+\tan 2^{o}).....(\sqrt{3}+\tan 29^{o})$$

$$=\prod_{k=1}^{29}\left(\sqrt{3}+\tan k^{o}\right)$$

គេមាន $\sqrt{3}+\tan k^{o}=\sqrt{3}+\dfrac{\sin k^{o}}{\cos k^{o}}=\dfrac{\sqrt{3}\cos k^{o}+\sin k^{o}}{\cos k^{o}}$

$$=\frac{2\cos(30^{o}-k^{o})}{\cos k^{o}}$$

គេបាន $P=\prod_{k=1}^{29}\left[\dfrac{2\cos(30^{o}-k^{o})}{\cos k^{o}}\right]$

$$=\frac{2^{29}\cos 29^{o}\cos 28^{o}.....\cos 2^{o}\cos 1^{o}}{\cos 1^{o}\cos 2^{o}.....\cos 28^{o}\cos 29^{o}}=2^{29}$$

ដូចនេះ $(\sqrt{3}+\tan 1^{o})(\sqrt{3}+\tan 2^{o}).....(\sqrt{3}+\tan 29^{o})=2^{29}$ ។

លំហាត់ទី១៥៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f: IR \to IR$ ដោយ $f(x)=\dfrac{(x^2-x+1)^3}{x^6-x^3+1}$ ។

ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍នេះ ?

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $f(x)$

$$f(x)=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^6-x^3+1}$$

យើងសំគាល់ឃើញថា $f(o)=1$ កំនត់ ។ អនុគមន៍អាចសរសេរ៖

$$f(x)=\frac{(x+\frac{1}{x}-1)^3}{x^3+\frac{1}{x^3}-1}=\frac{(x+\frac{1}{x}-1)^3}{(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})-1}$$

តាង $t=x+\dfrac{1}{x}$ ដែល $|t|\geq 2$ ឬ $t\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

គេបាន $f(x)=g(t)=\dfrac{(t-1)^3}{t^3-3t-1}$ ។

យើងមាន $g'(x)=\dfrac{3(t-1)^2(t^3-3t-1)-3(t^2-1)(t-1)^3}{(t^3-3t-1)^2}$

$$g'(t)=\frac{3(t-1)^2(t^3-3t-1-t^3+t^2+t-1)}{(t^3-3t-1)^2}$$

$$=\frac{3(t-1)^2(t^2-2t-2)}{(t^3-3t-1)^2}$$

បើ $g'(t)=0$ គេបាន $t=1$ ឬ $t^2-2t-2=0$

សមមូល $t_1=1\,;\,t_2=1+\sqrt{3}\,;\,t_3=1-\sqrt{3}$

ដោយ $t\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$ នោះគេទាញ $t=1+\sqrt{3}$

ដោយ $\dfrac{3(t-1)^2}{(t^3-3t-1)^2}>0$ គ្រប់ $t\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

នោះ $g'(t)$ មានសញ្ញាដូច t^2-2t-2 ។

ត្រង់ចំនុច $t=1+\sqrt{3}$ អនុគមន៍ $g'(t)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

នាំឱ្យ $g(t)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $t=1+\sqrt{3}$

គឺ $g(1+\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}-3$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ f គឺ $2\sqrt{3}-3$ ។

លំហាត់ទី១៥៧ (Iran 1996)

គេឱ្យបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a,b,c និងមិនសូន្យព្រមគ្នាពីរ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}\quad (*)$$

តាង $x=a+b+c\ ,\ y=ab+bc+ca\ ,\ z=abc$

គេមានសមភាព៖

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

$$=xy-z$$

និង $\sum\limits_{cyc}(a+b)^2(a+c)^2=(x^2+y)^2-4x(xy-z)$

វិសមភាព (*) ខាងលើសមមូល $y\left[\frac{(x^2+y)^2-4x(xy-z)}{(xy-z)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$

សមមូល $4x^4y-17x^2y^2+4y^3+34xyz-9z^2\geq 0$

$xy(x^3-4xy+9z)+y(x^4-5x^2y+4y^2+6xz)+z(xy-9z)\geq 0$ (**)

តាមវិសមភាព Schur ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន x,y,z

គេមាន៖

$$\sum_{cyc} x(x-y)(x-z)\geq 0 \Leftrightarrow x^3-4xy+9z\geq 0 \quad (1)$$

$$\sum_{cyc} x^2(x-y)(x-z)\geq 0 \Leftrightarrow x^4-5x^2y+4y^2+6xz\geq 0 \quad (2)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន៖

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq 9abc \Leftrightarrow xy-9z\geq 0 \quad (3)$$

តាម $(1),(2)\,\&\,(3)$ គេទាញបាន (**) ពិត ។

ដូចនេះ $(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$ ។

លំហាត់ទី១៥៨

ចូរបង្ហាញថា $\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right) \geq \left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$

ចំពោះគ្រប់ $a>0\ ,\ b>0\ ,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $(1+\frac{a}{\sin x})(1+\frac{b}{\cos x}) = 1+\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{ab}{\sin x\cos x}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន ៖

$$\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x\cos x}}$$

គេបាន $(1+\frac{a}{\sin x})(1+\frac{b}{\cos x}) \geq 1+\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x\cos x}}+\frac{ab}{\sin x\cos x}$

$$(1+\frac{a}{\sin x})(1+\frac{b}{\cos x}) \geq (1+\sqrt{\frac{ab}{\sin x\cos x}})^2$$

$$(1+\frac{a}{\sin x})(1+\frac{b}{\cos x}) \geq (1+\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{\sin 2x}})^2 \geq (1+\sqrt{2ab})^2$$

ពីព្រោះគ្រប់ $0<x<\frac{\pi}{2}$ គេមាន $\sin 2x \leq 1$ ។

លំហាត់ទី១៥៩

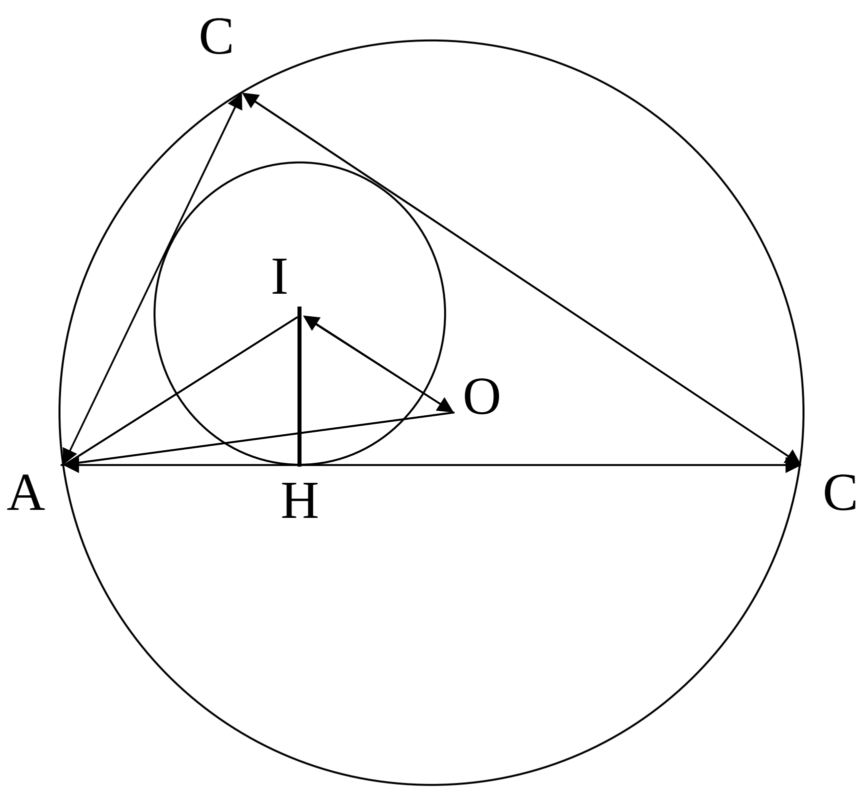
គេតាង I និង O រៀងគ្នាជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ

នៃត្រីកោណ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\angle OIA = 90^o$ លុះត្រាតែ AB, BC, CA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\angle OIA = 90^o$ លុះត្រាតែ AB, BC, CA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត



តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ និង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

ហើយ **r** និង **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

ABC ។

យក **H** ជាចំណោលនៃ **I** លើ **[AC]** នោះគេបាន៖

$\mathbf{IH = r}$ និង $\mathbf{AH = p - a}$ ។

-សន្មតថា $\mathbf{\angle OIA = 90^o}$ នោះ $\mathbf{OA^2 = OI^2 + IA^2}$

តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែគេមាន $\mathbf{OI^2 = R(R - 2r)}$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរ័ក្នុងត្រីកោណកែង $\mathbf{AHI : IA^2 = AH^2 + IH^2}$

គេបាន $\mathbf{R^2 = R(R - 2r) = r^2 + (p - a)^2}$

ឬ $\mathbf{2rR = r^2 + (p - a)^2}$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $\mathbf{S = pr = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \dfrac{abc}{4R}}$

គេទាញ $\mathbf{2rR = \dfrac{abc}{2p}}$ និង $\mathbf{r^2 = \dfrac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}$

គេបាន $\mathbf{\dfrac{abc}{2p} = \dfrac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p} + (p - a)^2}$

$$abc = 2(p-a)(p-b)(p-c) + 2p(p-a)^2$$
$$abc = 2(p-a)[(p-b)(p-c) + p(p-a)]$$
$$abc = (2p-2a)(p^2 - pb - pc + bc + p^2 - pa)$$
$$abc = (2p-2a)[2p^2 - p(a+b+c) + bc]$$
$$abc = (b+c-a)(2p^2 - 2p^2 + bc)$$
$$abc = bc(b+c-a)$$
$$a = b+c-a$$

គេទាញ $2a = b+c$ នោះ c, a, b ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

-សន្មតថា c, a, b ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះគេបាន $2a = b+c$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ OIA គេបាន៖

$$OA^2 = OI^2 + IA^2 - 2OI.IA\cos\angle OIA$$

គេទាញ $\cos\angle OIA = \dfrac{OI^2 + IA^2 - OA^2}{2OI.IA}$

$$= \frac{R(R-2r) + r^2 + (p-a)^2 - R^2}{2OI.IA}$$
$$= \frac{r^2 - 2rR + (p-a)^2}{2OI.IA}$$

ដោយ $b+c=2a$ នោះ $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{3a}{2}$

$$r^2=\frac{(\frac{3a}{2}-a)(\frac{3a}{2}-b)(\frac{3a}{2}-c)}{\frac{3a}{2}}=\frac{a(3a-2b)(3a-2c)}{12a}$$

$$=\frac{9a^2-6(b+c)a+4bc}{12}=\frac{4bc-3a^2}{12}$$

ហើយ $R=2rR=\dfrac{abc}{2(\frac{3a}{2})}=\dfrac{bc}{3}$

គេបាន $\cos\angle OIA=\dfrac{\frac{4bc-3a^2}{12}-\frac{bc}{3}+(\frac{3a}{2}-a)^2}{2OI.IA}=0$

គេបាន $\angle OIA=90^o$ ។

ដូចនេះ $\angle OIA=90^o$ លុះត្រាតែ AB, BC, CA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

លំហាត់ទី១៦០

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង **a,b,c** ។

តាង **r** និង **R** រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ

Δ **ABC** ។

ក. ចូរស្រាយថា $a\cos A + bosB + c\cos C = \frac{2pr}{R}$

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

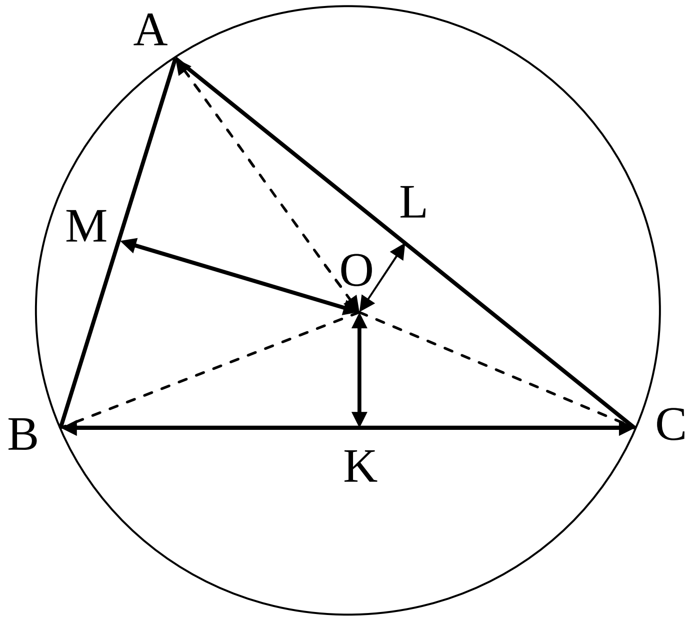
ដែល $p = \frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ខ. ចូរទាញបញ្ជាក់ថា $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(R+r)^2$

(**A,B,C** ជាមុំស្រួច)។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2pr}{R}$



គេមាន $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BOK$ (មុំផ្ចិត និង មុំចារឹកក្នុងរង្វង់)

ក្នុងត្រីកោណកែង OKB គេមាន $\cos\angle BOK = \frac{OK}{OB} = \frac{OK}{R}$

គេទាញ $OK = R\cos\angle BOK = R\cos A$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $OL = R\cos B$, $OM = R\cos C$

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC នោះគេបាន៖

$S = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}$

$$pr=\frac{1}{2}BC.OK+\frac{1}{2}CA.OL+\frac{1}{2}AB.OM$$

$$pr=\frac{1}{2}aR\cos A+\frac{1}{2}bR\cos B+\frac{1}{2}cR\cos C$$

$$pr=\frac{1}{2}R(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$$

ដូចនេះ $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{2pr}{R}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេទាញ $\frac{\cos A}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន៖

$\frac{\cos B}{b}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}$ និង $\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$

ដូចនេះ $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ ។

ម៉្យាងទៀតគេមាន៖

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$=\frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-(a^3+b^3+c^3)}{2abc}$$
$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-2(a^3+b^3+c^3)}{2abc}\quad (*)$$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងគេមាន $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន៖

$$p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$$
$$(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2$$
$$p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$$

ដោយ $a+b+c=2p$ ហើយ $S=\frac{abc}{4R}=pr$ នោះ $abc=4Rpr$

គេបាន $p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-4Rpr=pr^2$

គេទាញ $ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR$

ដោយ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

គេបាន $a^2+b^2+c^2=4p^2-2(p^2+r^2+4rR)$

ឬ $a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4rR)$

ហើយ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

គេទាញបាន $a^3+b^2+c^3=2(p^3-3pr^2-6Rpr)$

ទំនាក់ទំនង (*) អាចសរសេរ ៈ

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{4p(p^2-r^2-4Rr)-(p^3-3pr^2-6Rpr)}{8Rpr}$$

$$=\frac{p^2-r^2-4Rr-p^2+3r^2+6Rr}{2Rr}$$

$$=\frac{2r^2+2Rr}{2Rr}=\frac{r}{R}+1$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+c^2\geq 4(R+r)^2$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេមាន៖

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\leq(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)$$

យក $x_1=\sqrt{a\cos A}$, $x_2=\sqrt{b\cos B}$, $x_3=\sqrt{c\cos C}$

និង $y_1=\sqrt{\dfrac{\cos A}{a}}$, $y_2=\sqrt{\dfrac{\cos B}{b}}$, $z_2=\sqrt{\dfrac{\cos C}{c}}$ គេបាន៖

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2\le \frac{2pr}{R}.\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$(1+\frac{r}{R})^2\le \frac{2pr}{R}.\frac{a^2+b^2+c^2}{8Rpr}$$

$$\frac{(r+R)^2}{R^2}\le \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2\ge 4(R+r)^2$ ។

លំហាត់ទី១៦១

ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស្វីតដែលកំណត់ដោយៈ

$x_0 = 3, x_1 = 4$ និង $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន

$$x_0 = 3 = 0 + 3$$
$$x_1 = 4 = 1 + 3$$
$$x_2 = x_0^{\,2} - x_1 = 9 - 4 = 5 = 2 + 3$$

ឧបមាថា $x_{n-1} = n + 2 , x_n = n + 3$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $x_{n+1} = n + 4$

គេមាន $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$

$$= (n+2)^2 - n(n+3)$$
$$= n^2 + 4n + 4 - n^2 - 3n$$
$$= n + 4$$

ដូចនេះ $x_n = n + 3$ ។

លំហាត់ទី១៦២

ចូរគណនាផលបូក៖

$$S_n=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+...+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$$

ដំណោះស្រាយ

តាង $a_k=\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$

$$=\frac{k+2}{k![1+(k+1)+(k+1)(k+2)]}$$

$$=\frac{k+2}{k!(1+k+1+k^2+3k+2)}$$

$$=\frac{k+2}{k!(k+2)^2}=\frac{1}{k!(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{(k+2)-1}{(k+2)!}$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$$

ដូចនេះ $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}$ ។

លំហាត់ទី១៦៣

ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិតនៃសមីការៈ

$x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $x + 2 \geq 0$ ឬ $x \geq -2$ ។

-ចំពោះ $x > 2$ គេមាន $x^3 - 4x = x(x^2 - 2) > 0$ (i)

ហើយ $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) > 0$ ឬ $x > \sqrt{x+2}$ (ii)

បូកវិសមភាព (i) & (ii) គេបាន $x^3 - 3x > \sqrt{x+2}$

ដូចនេះសមីការ $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$ គ្មានឫសចំពោះ $x > 2$ ។

-ចំពោះ $-2 \leq x \leq 2$ យើងអាចតាង $x = 2\cos a$ ដែល $0 \leq a \leq \pi$

សមីការអាចសរសេរជា $8\cos^3 a - 6\cos a = \sqrt{2\cos a + 2}$

$$2(4\cos^3 - 3\cos a) = \sqrt{4\cos^2 \frac{a}{2}}$$

$$\cos 3a = |\cos\frac{a}{2}|$$

ដោយ $0 \le a \le \pi$ នោះ $\cos\frac{a}{2} \ge 0$

សមីការសមមូល $\cos 3a = \cos\frac{a}{2}$

គេទាញឫស $3a = \frac{a}{2} + 2k_1\pi$, $3a = -\frac{a}{2} + 2k_2\pi$

ឬ $a = \frac{4k_1\pi}{5}$, $a = \frac{4k_2\pi}{7}$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$

ដោយ $0 \le a \le \pi$ នោះគេទាញបាន $a \in \{ 0 , \frac{4\pi}{5}, \frac{4\pi}{7} \}$

ដូចនេះ $x = 2\cos 0 = 2$, $x = 2\cos\frac{4\pi}{5}, x = 2\cos\frac{4\pi}{7}$ ។

លំហាត់ទី១៦៤

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$

ហើយមុំក្នុង A,B,C ជាមុំស្រួចឬមុំកែង ។

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃ $\Delta\ ABC$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\ge\frac{9}{16S^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\ge\frac{9}{16S^2}$ ។

គេមាន $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$ ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$

តាង $x=b^2+c^2-a^2$, $y=c^2+a^2-b^2$, $z=a^2+b^2-c^2$

ដែល $x,y,z\ge 0$ និង មិនអាចមានពីរសូន្យព្រមគ្នា ។

គេបាន $x+y=2c^2$, $y+z=2a^2$, $z+x=2b^2$

ហើយ $16S^2=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

$$= (x + y)(z + x) - x^2 = xy + yz + zx$$

វិសមភាព $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{9}{16S^2}$ អាចបម្លែងទៅជា៖

$$\frac{4}{(x+y)^2} + \frac{4}{(y+z)^2} + \frac{4}{(z+x)^2} \geq \frac{9}{xy + yz + zx}$$

$$(xy + yz + zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right] \geq \frac{9}{4}$$

តាមលក្ខណៈអូម៉ូសែនគេអាចជ្រើសរើសយក $xy + yz + zx = 1$

នោះវិសមភាពខាងលើសមមូល ៖

$$4\sum_{cyc}(x+y)^2(x+z)^2 \geq 9(x+y)^2(y+z)^2(x+z)^2$$

ដោយ $(x+y)(x+z) = x^2 + xy + xz + yz = x^2 + 1$

ហើយ $(x+y)(y+z)(x+z) = (x^2+1)(y+z)$

$$= x^2(y+z)+y+z$$
$$= x(xy+xz)+y+z$$
$$= x(1-yz)+y+z$$
$$= x+y+z-xyz$$

គេបាន $4\sum_{cyc}(x^2+1)^2 \ge 9(x+y+z-xyz)^2$

$$4[(x^2+1)^2+(y^2+1)^2+(z^2+1)^2] \ge 9(x+y+z-xyz)^2$$

$$4[(x^4+y^4+z^4)+2(x^2+y^2+z^2)+3] \ge 9(x+y+z-xyz)^2 \quad (*)$$

តាង $S = x+y+z$ និង $P = xyz$

ដែល $S = a^2+b^2+c^2 > 0$ និង $P \ge 0$ ព្រោះ $x, y, z \ge 0$ ។

គេបាន $S^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2$

ហើយ $(S^2-2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+y^2z^2)$

ដោយ $xy+yz+xz=1$ នោះ $(xy+yz+xz)^2 = 1$

ឬ $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2xyz(x+y+z)=1$

ឬ $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2 = 1-2SP$

នោះ $(S^2-2)^2=x^4+y^4+z^4+2(1-2SP)$

នាំឱ្យ $x^4+y^4+z^4=S^4-4S^2+4SP+2$

វិសមភាព $(*)$ ខាងលើសមមូល៖

$$4(S^4-4S^2+4SP+2+2S^2-4+3)\geq 9(S-P)^2$$

$$4(S^4-2S^2+4SP+1)\geq 9(S-P)^2$$

$$4S^4-8S^2+16SP+4\geq 9(S-P)^2$$

$$9S^2+(4S^2-1)(S^2-4)+16SP\geq 9(S-P)^2 \quad (**)$$

-ចំពោះ $S\geq 2$ គេមាន $(4S^2-1)(S^2-4)+16SP\geq 0$

នាំឱ្យវិសមភាព $(**)$ ពិត

ព្រោះ $9S^2+(4S^2-1)(S^2-4)+16SP\geq 9S^2\geq 9(S-P)^2$ ។

-ចំពោះ $0<S<2$ វិសមភាព $(**)$ អាចសរសេរ៖

$$9S^2+(4S^2-1)(S^2-4)+16SP\geq 9S^2-18SP+9P^2$$

$$(4S^2-1)(S^2-4)+34SP-9P^2\geq 0$$

តាង $T=(4S^2-1)(S^2-4)+34SP-9P^2$

យើងនឹងស្រាយថា $T \ge 0$ ។

គេមាន $(x+y+z)(xy+yz+xz) \ge 9xyz$ (តាម $AM-GM$)

ដោយ $xy+yz+zx=1$ នោះ $S \ge 9P$

ហើយ $T=(4S^2-1)(S^2-4)+P(S-9P)+33SP$

គេបាន $T \ge (4S^2-1)(S^2-4)+33SP$

តាមវិសមភាព Schur គេមាន $\sum_{cyc} x^2(x-y)(x-z) \ge 0$

ដោយ $x^2(x-y)(x-z)=x^4+x^2yz-x^3(y+z)$

គេបាន $\sum_{cyc}(x^4)+xyz\sum_{cyc}(x) \ge \sum_{cyc} x^3(y+z)$

ដោយ $\sum_{cyx}(x^4)=S^4-4S^2+4SP+2$, $xyz\sum_{cyc} x = SP$

និង $\sum_{cyc} x^3(y+z)=\sum_{cyc} x^2(xy+xz)=\sum_{cyc} x^2(1-yz)$

$$=\sum_{cyc} x^2 - xyz\sum_{cyc} x = S^2-2-SP$$

គេបាន $S^4-4S^2+5SP+2\geq S^2-SP-2$

$$6SP\geq -S^4+5S^2-4$$

$$6SP\geq (4-S^2)(S^2-1)$$

ហេតុនេះ $T\geq (4S^2-1)(S^2-4)+\frac{11}{2}\times 6SP$

$$T\geq (4S^2-1)(S^2-4)+\frac{11}{2}(4-S^2)(S^2-1)$$

$$T\geq \frac{3}{2}(4-S^2)(S^2-3)$$

ដោយ $0<S\leq 2$ នោះ $4-S^2\geq 0$

ហើយ $S^2=(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)=3$ នោះ $S^2-3\geq 0$

គេទាញបាន $T\geq \frac{3}{2}(4-S^2)(S^2-3)\geq 0$ ពិត ។

សរុបមកគេបាន

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\geq \frac{9}{4}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\geq \frac{9}{16S^2}$ ។

លំហាត់ទី១៦៥

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយកែងត្រង់ **C**។

D និង **E** ជាចំណុចពីរជ្រើសរើស

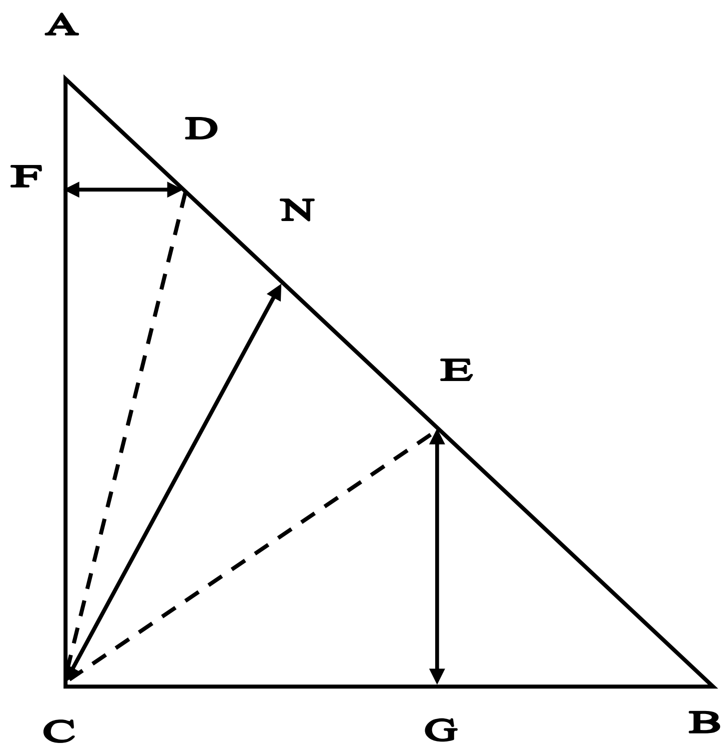
នៅលើអ៊ីប៉ូតេនូស ដែល$\mathbf{BC}=\mathbf{BD}$ និង $\mathbf{AC}=\mathbf{AE}$ ។

F និង **G** ជាចំណោលកែងនៃ **D** និង **E** លើជ្រុង **AC** និង **BC**

រៀងគ្នា ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{DE}=\mathbf{DF}+\mathbf{EG}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{DE}=\mathbf{DF}+\mathbf{EG}$



យើងសង់កម្ពស់ CN រួចភ្ជាប់ CD និង CE ។

គេមាន $BC = BD$ នោះ ΔBCD ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល B

គេបាន $\angle BCD = \angle BDC$ តែ $\angle BCD = \angle BCN + \angle NCD$

និង $\angle BDC = \angle DCA + \angle A$

ហេតុនេះ $\angle BCN + \angle NCD = \angle DCA + \angle A \ \ (1)$

ដោយ $CN \perp AB$ នោះ $\angle BCN = \angle A \ \ (2)$ (មុំបំពេញនៃមុំ $\angle NCA$)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $\angle NCD = \angle DCA$

ហើយ $\angle CND = \angle CFD = 90^{o}$ នោះគេទាញត្រីកោណ CND

និង CFD ជាត្រីកោណកែងប៉ុនគ្នា ។ គេទាញបាន $DN = DF$ ។

ស្រាយបំភ្លឺតាមរបៀបដូចគ្នាគេបាន $EN = EG$ ។

ដូចនេះ $DE = DN + NE = DF + EG$ ។

លំហាត់ទី១៦៦(IMO 2010)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f: IR \to IR}$ ដោយដឹងថាសមភាព

$\mathbf{f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor}$ ពិតជានិច្ចគ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ ។

($\lfloor \mathbf{a} \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់នៃ $\mathbf{a}$) ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f: IR \to IR}$

គ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ គេមានសមភាព

យក $\mathbf{x = 0}$ និង $\mathbf{y = 0}$ គេបាន $\mathbf{f(0) = f(0)\lfloor f(0) \rfloor}$

គេទាញ $\mathbf{f(0)\left(1 - \lfloor f(0) \rfloor\right) = 0}$ នោះ $\mathbf{f(0) = 0}$ ឬ $\mathbf{\lfloor f(0) \rfloor = 1}$

-ករណី $\mathbf{\lfloor f(0) \rfloor = 1}$

យក $\mathbf{y = 0}$ ជំនួសក្នុង **(*)** គេបាន $\mathbf{f(0) = f(x)\lfloor f(0) \rfloor}$

ឬ $\mathbf{f(x) = f(0)}$ នាំឱ្យ $\mathbf{f(x)}$ ជាអនុគមន៍ថេរ

តាង $\mathbf{f(x) = c}$ ជំនួសក្នុងសមីការ **(*)** គេបាន $\mathbf{c = c\lfloor c \rfloor}$

នោះ $\mathbf{c = 0}$, $\mathbf{\lfloor c \rfloor = 1}$ ។

ដូចនេះ $f(x)=0$ ឬ $f(x)=c$ ដែល $c\in[1,2)$ (ព្រោះ $\lfloor c\rfloor=1$)

-ករណី $f(0)=0$

យក $x=y=1$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន $f(1)=f(1)\lfloor f(1)\rfloor$

នោះ $f(1)=0$ ឬ $\lfloor f(1)\rfloor=1$

ក. ចំពោះ $f(1)=0$ នោះយើងយក $x=1$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន

$f(y)=f(1)\lfloor f(y)\rfloor=0\ \ \forall y\in IR$ ។

ខ. ចំពោះ $\lfloor f(1)\rfloor=1$ នោះយើងយក $y=1$ គេបាន $f(\lfloor x\rfloor)=f(x)\ \ (**)$

យក $x=2\ ,\ y=\frac{1}{2}$ ក្នុង (*) គេបាន $f(1)=f(2)\left\lfloor f(\frac{1}{2})\right\rfloor$

តែតាម (**) គេបាន $f(\frac{1}{2})=f(0)=0$ ហេតុនេះគេទាញបាន $f(1)=0$

មិនពិតព្រោះ $\lfloor f(1)\rfloor=1$ ។

សរុបមកគេបានចម្លើយ $f(x)=0\ ,\forall x\in IR$

ឬ $f(x)=c\ \ ,\forall x\in IR$ ដែល $1\le c<2$ ។

លំហាត់ទី១៦៧

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចំនួន 3^n+n^3 ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ $3^n n^3+1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដំណោះស្រាយ

-សន្មតថា 3^n+n^3 ចែកដាច់នឹង 7 នោះ n ត្រូវចែកមិនដាច់នឹង 7

តាមទ្រឹស្តីបទ Euler គេបាន $n^6\equiv 1\pmod 7$ ។

ចំនួន 3^n+n^3 ចែកដាច់នឹង 7 នោះគេបានដូចគ្នា $n^3(3^n+n^3)$

ចែកដាច់នឹង 7 ។

គេមាន $n^3(3^n+n^3)=(n^3 3^n+1)+(n^6-1)$

ដោយ $n^6\equiv 1\pmod 7$ នោះគេទាញបាន $n^3 3^n+1$ ចែកដាច់នឹង7

-សន្មតថា $n^3 3^n+1$ ចែកដាច់នឹង 7 នោះ n ត្រូវចែកមិនដាច់នឹង 7

តាមទ្រឹស្តីបទ Euler គេបាន $n^6\equiv 1\pmod 7$ ។

ចំនួន $n^3 3^n+1$ ចែកដាច់នឹង 7 នោះ $n^3(n^3 3^n+1)$ចែកដាច់នឹង 7 ។

គេមាន $n^3(n^3 3^n+1)=(n^6-1)3^n+n^3+3^n$

ដោយ $n^6\equiv 1 \pmod{7}$ នោះគេទាញបាន n^3+3^n ចែកដាច់នឹង 7

ដូចនេះ ចំនួន 3^n+n^3 ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ $3^n n^3+1$

ចែកដាច់នឹង 7 ។

លំហាត់ទី១៦៨ (IMO 1970)

ក្នុងតេត្រាអ៊ែត $\mathbf{ABCD}$ មួយមាន $\angle \mathbf{BDC} = \mathbf{90^o}$ ហើយជើង

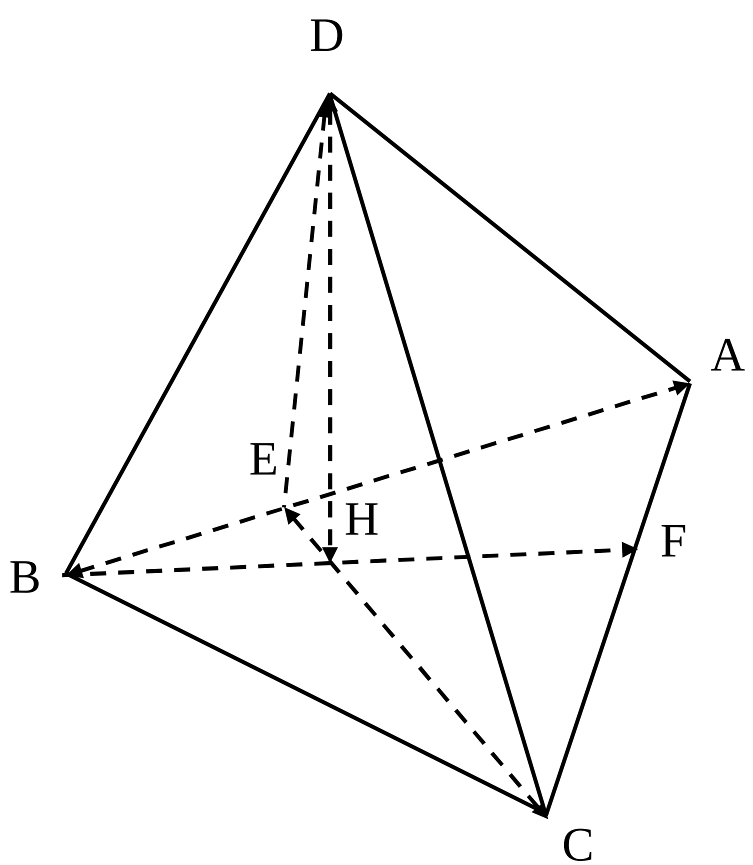
នៃចំណោលកែងពី $\mathbf{D}$ ទៅប្លង់ $\mathbf{(ABC)}$ ជាប្រសព្វនៃកម្ពស់នៃ $\Delta\mathbf{ABC}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{(AB+BC+CA)^2 \le 6(AD^2+BD^2+CD^2)}$

តើពេលណាទើបយើងបានសមភាព ?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{(AB+BC+CA)^2 \le 6(AD^2+BD^2+CD^2)}$



សង់កម្ពស់ $[CE]$ និង $[BF]$ នៃត្រីកោណ ABC ហើយតាង H

ជាប្រសព្វរវាងកម្ពស់នៃត្រីកោណនេះ ។

គេមាន $(CED)\perp(ABC)$ និង $(AB)\perp(CE)$ ដែល (CE)

ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (CED) និង (ABC) នោះគេទាញបាន

$(AB)\perp(CDE)$ ហើយដោយ $(DE)\subset(CDE)$ នោះគេបាន

$(AB)\perp(DE)$ នាំឱ្យ ΔBED ជាត្រីកោណកែងត្រង់ E ។

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរ័ $BD^2=DE^2+EB^2$ (1)

តាមសម្មតិកម្ម $\angle BDC=90^o$ នោះ ΔBDC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D

គេបាន $BC^2=BD^2+CD^2$ (2)

យក (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន $BC^2=DE^2+EB^2+CD^2$

តែ $BC^2=CE^2+EB^2$ នោះគេទាញបាន៖

$CE^2+EB^2=DE^2+EB^2+CD^2$ ឬ $CE^2=DE^2+CD^2$

នាំឱ្យ ΔCED ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D ។

គេបាន $(CD)\perp(ED)$ និង $(CD)\perp(BD)$ នោះ $(CD)\perp(ABD)$

ដោយ $(AD)\subset(ABD)$ នោះ $(CD)\perp(AD)$ នាំឱ្យ ΔCDA

ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $(AD)\perp(BD)$

នាំឱ្យ ΔADB ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D ។

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រគេបាន $\begin{cases} AB^2 = AD^2 + BD^2 \\ BC^2 = BD^2 + CD^2 \\ CA^2 = AD^2 + CD^2 \end{cases}$

គេទាញ $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2 + CD^2)$ (3)

តាមវិសមភាព $Cauchy - Schwarz$ គេមាន៖

$(AB + BC + CA)^2 \le 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ (4)

តាម $(3)\,\&\,(4)$ គេបាន :

$(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$ ពិត

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $AB = BC = CA$

ក្នុងករណីនោះគេបាន ABC ជាត្រីកោណសមង្ស ៕