លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

ស្វ៊ីតចំនួនពិត និង ស៊េរី

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១១

រួមមាន

- មេរៀនសង្ខេប
- លំហាត់គំរូ
- លំហាត់អនុវត្តន៍

ស៊ីតនៃចំនួនពិត និង ស៊េរី

រៀបរៀងដោយ ៈ

លឹម ផល្លុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១១

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក ឧន់ សុខណា

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ឧិត្យ ម៉េង

លោក អ៊ឹង សំណាង

លោកស្រី ឧុយ វីណា

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាកា

លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សៀវភៅ ស៊ីតចំនួនពិត និង ស៊េរីថ្នាក់ទី១១ ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ រួមមានមេរៀនសង្ខេប លំហាត់គំរូ និង លំហាត់អនុវត្តន៍ ។

គោលបំណងនៃការរៀបរៀងចងក្រងគឺដើម្បីទុកជាឯកសារជំនួយសម្រាប់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន និង ម្យ៉ាងទៀតដើម្បីចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យាក្នុងប្រទេសកម្ពុជាយើងឱ្យកាន់តែរីកចម្រើនឆាប់រហ័ស្រេបតាមសម័យវិទ្យាសាស្ត្រទំនើប ។

សៀវភៅនេះមិនល្អហួសគេហួសឯងនោះទេ ។ កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ ហេតុនេះយើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធ រងចាំជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីអ្នកសិក្សាគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្តីរីករាយដើម្បីកែលំអសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាពប្រសើរឡើងថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទអ្នកនិពន្ធសូមគោរពជូនពរអ្នកសិក្សាទាំងអស់មានសុខភាពល្អមានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យជានិច្ចក្នុងការសិក្សា ។

បាត់ដំបង ថ្ងៃទី ៣០ ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០១១

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ **លឹម ផល្គុន**
Tel : 017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

មេរៀនទី១

ស៊ីតនៃចំនួនពិត

១.សញ្ញាណនៃស៊ីតចំនួនពិត

ស៊ីតនៃចំនួនពិត គឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពីសំណុំ **IN** ទៅ **IR** ។

ឧទាហរណ៍ :

គេមានអនុគមន៍ $\mathbf{f : IN \to IR}$ ដែល $\mathbf{f(n) = n^2 + n + 1}$

ចំពោះ $\mathbf{n = 1}$ នោះ $\mathbf{f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3}$

ចំពោះ $\mathbf{n = 2}$ នោះ $\mathbf{f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7}$

ចំពោះ $\mathbf{n = 3}$ នោះ $\mathbf{f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 13}$

ចំពោះ $\mathbf{n = 4}$ នោះ $\mathbf{f(4) = 4^2 + 4 + 1 = 21}$

ចំពោះ $\mathbf{n = 5}$ នោះ $\mathbf{f(5) = 5^2 + 5 + 1 = 31}$

....

....

គេបានចំនួនរៀបតាមលំដាប់ $\mathbf{3, 7, 13, 21, 31, ...}$ បង្កើតបានជាស៊ីតនៃចំនួនពិតមួយ ។ចំនួននីមួយៗនៃស៊ីតហៅថាតួ ។

ចំនួន **3** ហៅថាតួទីមួយ ចំនួន **7** ហៅថាតួទីពីរ ចំនួន **13** ហៅថាតួទីបី

ចំនួន 21 ហៅថាតួទីបួន ...... រៀងគ្នា ។

គេកំណត់ប្រើអក្សរ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ សម្រាប់តាងឱ្យតួនៃស៊ីត ។

a_1 តាងឱ្យតួទីមួយ a_2 តាងឱ្យតួទីពីរ ..... និង a_n តាងឱ្យតួទី n ។

គេតាងស៊ីតដោយនិម្មិតសញ្ញ (a_n) ដែល $n \in IN$ ។

បើ $n = 0, 1, 2, \ldots$ នោះស៊ីត (a_n) ផ្តើមដោយតួ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ។

ឧទាហរណ៍: គេឱ្យស៊ីត $a_n = 2^n + 1$ ដែល $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។

ចូរសរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស៊ីត (a_n) ?

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $a_1 = 2^1 + 1 = 3$

ចំពោះ $n = 2$ នោះ $a_2 = 2^2 + 1 = 5$

ចំពោះ $n = 3$ នោះ $a_3 = 2^3 + 1 = 9$

ចំពោះ $n = 4$ នោះ $a_4 = 2^4 + 1 = 17$

ចំពោះ $n = 5$ នោះ $a_5 = 2^5 + 1 = 33$

ដូចនេះ $3, 5, 9, 17, 33$ ជាប្រាំតួដំបូងនៃស៊ីត (a_n) ។

២.តួទី n នៃស៊ីតចំនួនពិត

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) មានតួ $f(1), f(2), f(3), \ldots$ ។

តួទី n នៃស៊ីតនេះគឺ $a_n = f(n)$ ។

ឧទាហរណ៍១ : គេឱ្យស្វ៊ីត $(a_n): 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...$

គេមាន $a_1 = 1 = 2\times 1 - 1$

$a_2 = 3 = 2\times 2 - 1$

$a_3 = 5 = 2\times 3 - 1$

$a_4 = 7 = 2\times 4 - 1$

$-------------$

$-------------$

តួទី n នៃស្វ៊ីតនេះគឺ $a_n = 2n - 1$ ដែល $n = 1, 2, 3, ...$ ។

ឧទាហរណ៍២ : គេឱ្យស្វ៊ីត $(a_n): 2, 5, 10, 17, 26, ...$ ។

រកតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ ?

គេមាន $a_1 = 2 = 1^2 + 1$

$a_2 = 5 = 2^2 + 1$

$a_3 = 10 = 3^2 + 1$

$a_4 = 17 = 4^2 + 1$

$a_5 = 26 = 5^2 + 1$

$----------$

$----------$

ដូចនេះ $a_n = n^2 + 1$ ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ឧទាហរណ៍៣ : គេឱ្យស្វ៊ីត $(a_n): 3, 5, 9, 17, 33, ...$ ។

រកតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ ?

គេមាន $a_1 = 3 = 2^1 + 1$

$a_2 = 5 = 2^2 + 1$

$a_3 = 9 = 2^3 + 1$

$a_4 = 17 = 2^4 + 1$

$a_5 = 33 = 2^5 + 1$

$----------$

ដូចនេះ $a_n = 2^n + 1$ ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

៣.អថេរភាពនៃស្វ៊ីតចំនួនពិត

ក.ស្វ៊ីតកើន និង ស្វ៊ីតចុះ

និយមន័យ :

-ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតកើនលុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in IN : a_{n+1} > a_n$ ។

-ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះលុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in IN : a_{n+1} < a_n$ ។

ឧទាហរណ៍១: ស្រាយថា $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ ជាស្វ៊ីតកើន ?

គេមាន $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$

នាំឱ្យ $a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+1} = \frac{2n+3}{n+2}$

គេបាន $a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1}$

$$= \frac{(2n+3)(n+1) - (2n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2n^2 + 5n + 3 - 2n^2 - 5n - 2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

គេទាញ $a_{n+1} > a_n$ នាំឱ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

ឧទាហរណ៍២: ស្រាយថា $a_n = \frac{n}{2n-1}$ ជាស្វ៊ីតចុះ ?

គេមាន $a_n = \frac{n}{2n-1}$ នាំឱ្យ $a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)-1} = \frac{n+1}{2n+1}$

គេបាន $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2n+1} - \frac{n}{2n-1}$

$$= \frac{(n+1)(2n-1) - n(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{2n^2 + n - 1 - 2n^2 - n}{4n^2 - 1}$$

$$= \frac{-1}{4n^2 - 1} < 0$$

គេទាញ $a_{n+1} < a_n$ នាំឱ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ.ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

និយមន័យ :

ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនលុះត្រាតែ (a_n) ជាស្វ៊ីតកើនជានិច្ច ឬ (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច ។

បានន័យថា $a_1 < a_2 < a_3 < ..... < a_n < a_{n+1} < ....$

ឬ $a_1 > a_2 > a_3 > ..... > a_n > a_{n+1} > .....$ ។

ឧទាហរណ៍ : បង្ហាញថា $a_n = 3^n + 1$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ?

គេមាន $a_{n+1} - a_n = (3^{n+1} + 1) - (3^n + 1) = 2 \times 3^n > 0$

នោះ $a_{n+1} > a_n$ នាំឱ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ។

៤.ស្វ៊ីតទាល់

ក.ស្វ៊ីតទាល់លើ

និយមន័យ :

ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើលុះត្រាតែមានចំនួនពិត M មួយដែលចំពោះ $\forall n \in IN$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \le M$ ។ ចំនួន M ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត (a_n)

ខ.ស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

និយមន័យ :

ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមលុះត្រាតែមានចំនួនពិត m មួយដែលចំពោះ $\forall n \in IN$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \ge m$ ។ចំនួន m ហៅថាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

គ_ស្វ៊ីតទាល់

និយមន័យ :

ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លុះត្រាតែមានចំនួនពិត m និង M ដែលចំពោះ $\forall n \in IN$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $m \le a_n \le M$ ។

ចំនួន m ហៅថាគោលក្រោម និង M ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

បានន័យថា (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើផង និង ទាល់ក្រោមផង ។

ឧទាហរណ៍១ : គេឱ្យស្វ៊ីត $a_n = \dfrac{9}{n^2+n+1}$ ដែល $n = 1, 2, 3, ...$

ចូរស្រាយថា (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ ?

គ្រប់ $n = 1, 2, 3, ...$ គេមាន $n^2+n+1 \ge 3$

គេបាន $\dfrac{1}{n^2+n+1} \le \dfrac{1}{3}$ នាំឱ្យ$a_n = \dfrac{9}{n^2+n+1} \le \dfrac{9}{3} = 3$ ។

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ ដែល 3 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត ។

ឧទាហរណ៍២ : គេឱ្យស្វ៊ីត $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$

ដែល $n = 0, 1, 2, 3, ...$ ។

ចូរស្រាយថា (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ?

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រ $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

គេបាន $a_n \geq 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n} = 2$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្ទីតទាល់ក្រោម ដែល 2 ជាគោលក្រោមនៃស្ទីត ។

ឧទាហរណ៍៣ :គេឱ្យស្ទីត $a_n = \frac{2n^2-5n+4}{n^2-3n+3}$ ដែល $n = 1, 2, 3, ...$

គណនា $a_n - 1$ និង $a_n - \frac{7}{3}$ រួចទាញថា (a_n) ជាស្ទីតទាល់ដែលគេនិងបញ្ជាក់គោលលើ និង គោលក្រោមរបស់វា ។

គណនា $a_n - 1$ និង $a_n - \frac{7}{3}$:

គេបាន $a_n - 1 = \frac{2n^2-5n+4}{n^2-3n+3} - 1 = \frac{n^2-2n+1}{n^2-3n+3}$

ដូចនេះ $a_n - 1 = \frac{(n-1)^2}{n^2-3n+3}$ ។

ហើយ $a_n - \frac{7}{3} = \frac{2n^2-5n+4}{n^2-3n+3} - \frac{7}{3} = \frac{-n^2+6n-9}{n^2-3n+3}$

ដូចនេះ $a_n - \frac{7}{3} = -\frac{(n-3)^2}{n^2-3n+3}$ ។

ទាញថា (a_n) ជាស្ទីតទាល់ :

គេមាន $n^2 - 3n + 3 = (n - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$

តាមសម្រាយខាងលើគេបាន $a_n - 1 = \dfrac{(n-1)^2}{n^2 - 3n + 3} \geq 0$

នាំឱ្យ $a_n \geq 1$ ហើយ $a_n - \dfrac{7}{3} = -\dfrac{(n-3)^2}{n^2 - 3n + 3} \leq 0$

នាំឱ្យ $a_n \leq \dfrac{7}{3}$ ។

ដូចនេះ $1 \leq a_n \leq \dfrac{7}{3}$ នាំឱ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ដែល 1 ជាគោលក្រោម

និង $\dfrac{7}{3}$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត ។

មេរៀនទី២

ស៊ីតនព្វន្ត

១-និយមន័យ

ស៊ីតនព្វន្ត គឺជាស៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ(ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកចំនួនថេរ $\mathbf{d}$ មួយហៅថាផលសងរួមនៃស៊ីត ។

បើ $(\mathbf{u_n})$ ជាស៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $\mathbf{d}$ នោះ $\mathbf{d}$ កំណត់ដោយ :

$\mathbf{d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = ... = u_{n+1} - u_n}$ ។

ឧទាហរណ៍ : $\mathbf{(u_n) : 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...}$ ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $\mathbf{d = 7 - 4 = 3}$ ។

២-តួទី n នៃស៊ីតនព្វន្ត

-បើ $(\mathbf{u_n})$ ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទីមួយ $\mathbf{u_1}$ និង ផលសងរួម $\mathbf{d}$ នោះ តួទី $\mathbf{n}$ របស់វាកំណត់ដោយ $\mathbf{u_n = u_1 + (n-1)d}$ ។

-បើ $(\mathbf{u_n})$ ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទីមួយ $\mathbf{u_0}$ និង ផលសងរួម $\mathbf{d}$ នោះ តួទី $\mathbf{n}$ របស់វាកំណត់ដោយ $\mathbf{u_n = u_0 + n.d}$ ។

ឧទាហរណ៍១ : គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួ $u_1 = 5$ និងផលសងរួម $d = 4$ ។ គណនាតួ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ?

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$ ដោយ $u_1 = 5, d = 4$

គេបាន $u_n = 5 + (n-1)(4) = 4n+1$ ។

ឧទាហរណ៍២ : គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួ $u_0 = 7$ និងផលសងរួម $d = 9$ ។ គណនាតួ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ?

តាមរូបមន្ត $u_n = u_0 + nd$ ដោយ $u_0 = 7, d = 9$

គេបាន $u_n = 7 + 9n$ ។

ឧទាហរណ៍៣ : គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ :

$u_1 = 2$ និង $u_{n+1} = \sqrt[3]{{u_n}^3 + 5}$ ដែល $n = 1, 2, 3, ...$

ក-តាង $V_n = {u_n}^3$ ។ បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ខ-គណនា V_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមាន $V_n = {u_n}^3$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = {u_{n+1}}^3$

ដោយ $u_{n+1} = \sqrt[3]{{u_n}^3 + 5}$ នោះ $V_{n+1} = {u_n}^3 + 5$

គេបាន $V_{n+1} - V_n = ({u_n}^3 + 5) - {u_n}^3 = 5$ ថេរ ។

ដូចនេះ(V_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 5$ ។

ខ-គណនា V_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $V_n = V_1 + (n-1)d$ ដោយ $V_1 = u_1{}^3 = 8$

ដូចនេះ $V_n = 8 + 5(n-1) = 5n + 3$ ។

ហើយ $V_n = u_n{}^3$ នោះ $u_n = \sqrt[3]{V_n} = \sqrt[3]{5n+3}$ ។

គ-ផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន u_1 ជាតួទីមួយ និង u_n ជាតួទី n

កំណត់ដោយ $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

គេមាន $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

និង $S_n = u_n + u_{n-1} + ... + u_1$

គេបាន $2S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + ... + (u_n + u_1)$

ដោយ $u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = ... = u_k + u_{n-k}$

គេបាន $2S_n = \underbrace{(u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + ... + (u_1 + u_n)}_{(n \text{ តួ})}$

$$2S_n = n(u_1 + u_n) \text{ នាំឱ្យ } S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \text{ ។}$$

ដូចនេះ $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍១: គណនាផលបូក $S_n = 1+2+3+....+n$

គេមាន $1,2,3,.....,n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួ $u_1 = 1$ និង $u_n = n$

គេបាន $S_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2} = \dfrac{n(1+n)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍២: គណនាផលបូក $S_n = 1+3+5+....+(2n-1)$

គេមាន $1,3,5,...,2n-1$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមាន $u_1 = 1$ និង $u_n = 2n-1$

គេបាន $S_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2} = \dfrac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. គេឱ្យ a,b,c,d ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។
   ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $abcd+(b-a)^4$ ជាការេប្រាកដ ។
2. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។
   បើ $\dfrac{1}{a+b},\dfrac{1}{a+c},\dfrac{1}{b+c}$ ជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយនោះចូរស្រាយ
   បញ្ជាក់ថា a^2,b^2,c^2 ក៏ជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។
3. ចូរកំណត់ចំនួនពិត x ដើម្បីឱ្យចំនួនខាងក្រោមជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត
   ក. $x-2; 2(x-1)^2; x+8$
   ខ. $(2-x)^2; 2x; x+2$
   គ. $(x+1)^2; (x+3)^2; (x+9)^2$

4. គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានតួទីមួយ $u_1 = \frac{5\pi}{3}$ និងផលសងរួម $d = \frac{\pi}{6}$

ក. គណនាតួទី 168 នៃស្វ៊ីតនេះ ។

ខ. តើតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតនេះដែលមានតម្លៃស្មើនឹង $\frac{8\pi}{3}$?

5. តើមានត្រីកោណកែងណាដែលមានរង្វាស់នៃជ្រុងទាំងបីរបស់វាបង្កើតបានជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ?

6. គេឱ្យសមីការ $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ ។

កំណត់តម្លៃ α និង β ដើម្បីឱ្យផលបូកការេនៃឫសរបស់សមីការនេះស្មើនឹង 14 ហើយ $1, \alpha, \beta$ ជាបីតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលចុះដាច់ខាត ។

7. តើមានត្រីកោណដែលជ្រុងរបស់វា និង បរិមាត្របង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តឬទេ?

8. គេឱ្យត្រីកោណមួយដែលរង្វាស់មុំក្នុងបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។
ចូរគណនាតួទីពីរនៃស្វ៊ីតនេះ ?

9. គេឱ្យ $g : n \mapsto IR$ ដែល $\begin{cases} g(0) = 8 \\ g(n) - g(n-1) = \frac{1}{2} g(n-1) \end{cases}$

ដែល $n \in IN$ ។

ក. គណនាតម្លៃ $g(1), g(2), g(3), g(4)$ រួចកំណត់កន្សោមទូទៅ $g(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. ស្រាយថា $g(n)$ ជាអនុគមន៍កើន ។

10. គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+168u_n^2}} \end{cases}$; $n \in IN$

ក. តាង $V_n = \dfrac{1}{{u_n}^2}$ ។ បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

ខ. គណនា V_n ,u_n និង $S_n = \sum_{k=1}^{n}(V_n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

11. គេឱ្យអនុគមន៍ពហុធា $f(x) = px^2 + qx$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឱ្យ $f(x) = f(x-1) + x$ គ្រប់ x ។

ខ. ទាញរកផលបូក $\sum_{k=1}^{n}(k) = 1 + 2 + 3 + ... + n$ ។

12.គេមានពហុធា $f(x) = px^3 + qx^2 + rx$ ។

ក.កំណត់ p, q, r ដើម្បីឱ្យ $f(x) = f(x-1) + x^2$ គ្រប់ $x \in IR$

ខ.ទាញបញ្ជាក់ថា :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

13. គេមានពហុធា $f(x) = px^4 + qx^3 + rx^2 + sx$ ។

ក.កំណត់ p, q, r, s ដើម្បីឱ្យ $f(x) = f(x-1) + x^3$ គ្រប់ $x \in IR$

ខ.ទាញបញ្ជាក់ថា :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

14. កំណត់ផលសងរួម d និងតួទីមួយ u_1 នៃស៊្វីតនព្វន្តកើន $(u_n)_{,n\in IN}$

បើគេដឹងថា $\begin{cases} u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2 = 98 \\ u_1 - u_2 + u_3 = 4 \end{cases}$

គណនា u_{10} និង ផលបូក 10 តួដំបូងនៃស៊្វីតនេះ ។

15. ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊្វីតមួយស្មើ $S_n = n^2 + n$ ។ ចូរគណនាតួទី5 រួចបង្ហាញថាស៊្វីតនេះជាស៊្វីតនព្វន្ត ។

16. គេឱ្យស៊្វីត $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{5a_n - 1}{a_n + 3} \end{cases}$

ក-តាង $b_n = \dfrac{1}{a_n - 1}$ ។ បង្ហាញថា (b_n) ជាស៊្វីតនព្វន្ត ។

ខ-គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

17. គេមានស៊្វីតនព្វន្តពីរ :

$(a_n): 1, 6, 11, 16, 21, ...$ និង $(b_n): 7, 11, 15, 19, 23, ...$

ក. សរសេរ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. តើក្នុងចំណោម 2012 តួដំបូងនៃស៊្វីត (a_n) & (b_n) មានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

មេរៀនទី៣

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១~និយមន័យ

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q ដែល $q \neq 0$ ។ ចំនួនថេរ q នេះ ហៅថាផលរួមរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ឬហៅថារេសុងនៃស្វ៊ីត ។

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម q នោះគេបាន :

$$q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = ... = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$ ។

ជាទូទៅគ្រប់ $n \in IN : u_{n+1} = q.u_n$ នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានផលធៀបរួម q ។

២~តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

~បើ (u_n) ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានតួទីមួយ u_1 និងមានផលធៀបរួម q នោះ តួទី n របស់វាកំណត់ដោយ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ។

~បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានតួទីមួយ u_0 និងមានផលធៀបរួម q នោះតួទី n របស់វាកំណត់ដោយ $u_n = u_0 \times q^n$ ។

គ-ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើ (u_n) ស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានតួទីមួយ u_1 និងផលធៀបរួម $q \neq 1$ នោះ

គេបាន $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ ។

ឧទាហរណ៍១ : គណនាផលបូក $S_n = 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n$

គេមាន $10, 10^2, 10^3, ..., 10^n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 10$ និងតួទីមួយ $u_1 = 10$ ។

គេបាន $S_n = 10 \times \dfrac{1-10^n}{1-10} = \dfrac{10}{9}(10^n - 1)$ ។

ឧទាហរណ៍២ : គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ :

$u_1 = 2$ និង $u_{n+1} = \sqrt[3]{2 + 3(u_n)^3}$ ដែល $n = 1, 2, 3, ...$

ក. ស្រាយថា $V_n = 1 + u_n{}^3$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា V_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គណនាផលបូក $S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $V_n = 1 + u_n{}^3$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេបាន $V_{n+1} = 1 + u_{n+1}^3$ ដោយ $u_{n+1} = \sqrt[3]{2 + 3u_n^3}$

$$V_{n+1} = 1 + 2 + 3u_n^3 = 3(1 + u_n^3) = 3V_n$$

ដូចនេះ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$ ។

ខ. គណនា V_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $V_n = V_1 . q^{n-1}$ តែ $V_1 = 1 + {u_1}^3 = 1 + 2^3 = 9$

ដូចនេះ $V_n = 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$ ។

តាម $V_n = 1 + {u_n}^3$ គេទាញបាន $u_n = \sqrt[3]{V_n - 1}$

ដូចនេះ $u_n = \sqrt[3]{3^{n+1} - 1}$ ។

គ. គណនាផលបូក $S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

គេបាន $S_n = V_1 \times \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 9 \times \dfrac{3^n - 1}{3 - 1} = \dfrac{9}{2}(3^n - 1)$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{9}{2}(3^n - 1)$ ។

ឧទាហរណ៍៣ :

គណនាផលបូក $S_n = 3 + 33 + 333 + ... + \underbrace{333....333}_{(n)}$

គេបាន $3S_n = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{999...999}_{(n)}$

$$3S_n = (10 - 1) + (10^2 - 1) + ... + (10^n - 1)$$

$$3S_n = (10 + 10^2 + ... + 10^n) - (1 + 1 + ... + 1)$$

$$3S_n = 10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{10^{n+1} - (9n + 10)}{27}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. គេឱ្យស៊ីតធរណីមាត្រមួយមាន 7 តួ ដែលផលបូកបីតួដំបូងស្មើ 7 និង ផលបូកបីតួចុងក្រោយស្មើនឹង 112 ។ ចូរកំណត់ស៊ីតធរណីមាត្រនេះ ?

2. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $|a|\neq|b|\neq 0$ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{(a+b)^2}\ ;\ \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2};(a^2+ab+b^2)^2$$ ជាតួតគ្នានៃស៊ីតធរណីមាត្រ ។

3. គេឱ្យការេមួយមានជ្រុងស្មើ a ។

គេសង់ការេមួយទៀតដែលមានកំពូលទាំងបួនជាចំនុចកណ្តាលនៃជ្រុងការេមុន រួចហើយគេសង់ការេមួយទៀតចារឹកក្នុងការេទីពីរ ដែលមានកពូលជាចំនុចកណ្តាលនៃការេទីពីរ ។ គេសង់ការេតាមរបៀបនេះរហូតដល់ការេទី n ។

ក. ចូរគណនាផលបូកនៃផ្ទៃក្រឡារបស់ការេទាំងអស់ ។

ខ. គណនាផលបូកនៃបរិមាត្ររបស់ការេទាំងអស់ ។

4.គេមានបីចំនួនពិត a,b,c ខុសពីសូន្យ ។

គេដឹងថា a,b,c ជាតួតគ្នានៃស៊ីតធរណីមាត្រ ហើយ $a,2b,3c$ ជាតួតគ្នានៃស៊ីតនព្វន្ត ។ ចូររករេសុងនៃស៊ីតធរណីមាត្រ ?

5. បង្ហាញថាបើ $\frac{2}{y-x},\frac{1}{y},\frac{2}{y-z}$ ជាតួតគ្នានៃស៊ីតនព្វន្តនោះ x,y,z ជាតួតគ្នានៃស៊ីតធរណីមាត្រ ។

6. កំណត់ពីរចំនួនពិត $\mathbf{x,y}$ បើ $\mathbf{1;x;y}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត និង $\mathbf{1;x^2;y^2}$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

7. គណនាផលបូក

$$S_n = \frac{13}{10} + \frac{303}{100} + \frac{5003}{1000} + ... + \frac{(2n-1)00...003}{1000....000}$$

8. គេឱ្យ $S_n(a) = a + aa + aaa + ... + \underbrace{aaa.....aaa}_{(n)}$

ដែល $a \in IN$ និង $1 \le a \le 9$ ។ ចូរគណនាផលបូក $S = \sum_{a=1}^{9} S_n(a)$

9. គេមានកន្សោម $T_n = 3 + 33 + 333 + ... + \underbrace{333....333}_{(n)}$

ក. ស្រាយថា $3T_n = T'_n - n$ ដែល T_n' ជាផលបូកនៃស្ទីតធរណីមាត្រ មួយដែលគេនឹងកំណត់តួទីមួយ និង ផលធៀបរួមរបស់វា ។

ខ. គណនា T_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

10. គេមានស្ទីត $u_n = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2.....\sqrt{2\sqrt{2}}}}}}$ មាន n ឫសការេ ។

ក. ចូរគណនា u_n ដោយសរសេរលទ្ធផលជារាង 2^{V_n} ដែល V_n ជាស្ទីតនៃចំនួនពិតមួយត្រូវរក ។

ខ. សិក្សាភាពកើន ឬ ចុះនៃស្ទីត (u_n) ។

គ. ចូរកំណត់លីមីតនៃស្ទីត u_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

11. គេឱ្យ $a \neq 1$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ គេពិនិត្យស៊ីត $u_0; u_1; u_2; ...; u_n$
ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង $u_0 = 1$, $u_n = a.u_{n-1}^2$ ។
ក. គេតាង $u_n = a^{V_n + b}$ ។ បង្ហាញថាគេអាចកំណត់ចំនួនពិត b បាន
ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។
ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

12. គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = a\ ; u_2 = b \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n-2}}{2} \end{cases}$

ក. ចូរស្រាយថា $V_n = u_n - u_{n-1}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។
ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ a, b, n ។

13. គេឱ្យស៊ីតចំនួនពិត : $\begin{cases} a_0 = 2\ ,\ b_0 = 4 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{4}(a_n + 3b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{4}(3a_n + b_n) \quad , n \in IN \end{cases}$

ក. កំនត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឱ្យ $C_n = a_n + \lambda.b_n$ ជាស៊ីតថេរ ។
ខ. បង្ហាញថា $U_n = a_n - b_n$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។
គ. ទាញរក a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចបញ្ជាក់លីមីតវា ។

14. គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីបីអញ្ញាតពិត

$$(E): x^3 - mx^2 + (m^2 - 9m - 14)x - m^3 + 30m^2 - 300m + 1000 = 0$$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក.កំនត់តម្លៃរបស់ m ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឬសបីបង្កើតជាស៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ m រកឃើញខាងលើ ។

15. គេឱ្យស៊ីតនព្វន្ត $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ ដែលមានផលសងរួម d ហើយ $d \neq 0$ ។

គេពិនិត្យស៊ីត (V_n) មួយកំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ :

$$V_n = a^{U_n} \ , \ a > 0 \ , \ a \neq 1$$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1, d និង n ។

ខ. ចូរស្រាយថា $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = a^{U_1} . \dfrac{1 - a^{nd}}{1 - a^d}$ ។

គ. ចូរគណនាផលគុណ $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ..... \times V_n$ ។

16. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ កំនត់ពីសំណុំ IN^* ទៅ IR ដោយ

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) = n^2 . f(n) \end{cases}$$

ក. គណនាតម្លៃនៃ $f(2)$ និង $f(3)$ ។

ខ. ចូរគណនា $f(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

17. គេឱ្យស្ទីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់លើ IN^* ដោយ $\begin{cases} u_1 = 5 + 3\sqrt{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) \end{cases}$

ក. គេតាង $\forall n \in IN^* : v_n = \frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$ ។

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង v_{n+1} និង v_n ។

ខ. គណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គេតាង $w_n = 1 + v_n$ ចំពោះ $\forall n \in IN^*$ ។

គណនាផលគុណ $P_n = w_1.w_2.w_3.....w_n$ ។

18. គេឱ្យស្ទីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់គ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ $\begin{cases} u_1 = \sqrt{5} \\ u_{n+1} = u_n^{\ 2} - 2 \end{cases}$

ក. ចូរបង្ហាញថា $\forall n \in IN : u_n > 2$ ។

ខ. គេតាង $v_n = u_n + \sqrt{u_n^{\ 2} - 4}$ គ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង v_{n+1} និង v_n ។

គ. គណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

19. គេឱ្យ a, b, c, d ជាបួនតួតគ្នានៃស្ទីតនព្វន្តមួយ ហើយ m ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់

$m \geq \left|\frac{ad - bc}{2}\right|$ ។

បង្ហាញថា $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) + m^2 \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

20. គេឱ្យកន្សោម $S_n = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + ... + \frac{n-1}{7^{n-1}} + \frac{n}{7^n}$ ។

ចូរគណនាផលដក $S_n - \frac{1}{7}.S_n$ រួចទាញរក S_n ។

21. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\in IN^*}$ កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{2} \quad ,\forall n \in IN^* \end{cases}$

ក. គេតាង $\forall n \in IN^* : v_n = 2u_n + 3$ ។

ចូរបង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់រេសុង ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ចូរគណនាតួ v_n រួចទាញរក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

22. គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in IN^*}$ កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3} \quad ,\forall n \in IN^* \end{cases}$

ក. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ $v_n = 3u_n + k$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ខ. ចូរគណនា v_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ រួចទាញរក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

23. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\in IN^*}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2(2n+\frac{5}{3}) \quad ,\forall n \in IN^* \end{cases}$$

ក. គេតាង $v_n = \frac{1}{2}u_n + 3n - 2$ ។

ចូរបង្ហាញថាស្វ៊ីត $(v_n)_{n\in IN^*}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$ ជាអនុគមន៏នៃ n

គ. ចូរគណនាតួ v_n រួចទាញរក u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

24. គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $u_1 = -1 \ , u_2 = 1$

និង $\forall n \in IN^* : u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ ។

គេតាង $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ និង $w_n = u_{n+1} - 3u_n$ គ្រប់ $n \in IN^*$

ក. ចូរបង្ហាញថា (v_n) និង (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

រួចគណនា v_n និង w_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ខ. ទាញរកតួ u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

មេរៀនទី៤

ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតផ្សេងៗ

១_និមិ្មតសញ្ញា $\sum$ សម្រាប់ផលបូកនៃស្វ៊ីត

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ កំនត់តាងដោយ :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$$

២_លក្ខណៈផលបូកតួនៃស្វ៊ីត

១. $\sum_{k=1}^{n} (\lambda) = \lambda + \lambda + \lambda + ... + \lambda = n\lambda$

២. $\sum_{k=1}^{n} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} (u_k)$ (λ ជាចំនួនថេរ)

៣. $\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k - w_k) = \sum_{k=1}^{n} (u_k) + \sum_{k=1}^{n} (v_k) - \sum_{k=1}^{n} (w_k)$

៤. $\sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (u_k{}^2) + 2\sum_{k=1}^{n} (u_k v_k) + \sum_{k=1}^{n} (v_k{}^2)$

៣_របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$\mathbf{S_n = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p}$ ដែល $\mathbf{p = 1 ; 2 ; 3 ; ...}$

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវអនុវត្តន៏តាមជំហានខាងក្រោម :

☞ គណនា $\mathbf{(k+1)^{p+1} - k^p}$

☞ ឱ្យតម្លៃ $k = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ....;n$

☞ ធ្វើវិធីបូក ។

ឧទាហរណ៍ : គណនាផលបូក $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

គេមាន $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}(3k+1)$

$$(n+1)^3 - 1 = 3S_n + \frac{n(4+3n+1)}{2}$$

$$3S_n = (n+1)^3 - 1 - \frac{3(3n+5)}{2}$$

$$3S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ។

៤_របៀបគណនាផលបូកស៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + ... + \frac{1}{a_na_{n+1}}$$

ដែល $a_{n+1} - a_n = d$ ថេរ ហើយ $d \neq 0$ ។

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវ :

☞ បម្លែងតួ $\dfrac{1}{a_ka_{k+1}} = \dfrac{1}{d}.\dfrac{a_{k+1} - a_k}{a_ka_{k+1}} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$

☞ ឱ្យតម្លៃ $k = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ....;n$ រួចធ្វើវិធីបូក ។

ឧទាហរណ៍ : គណនាផលបូក

$$S_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

មាន $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1})$

គេបាន $S_n = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3n+1})$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n}{3n+1}$ ។

៥_របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = \frac{1}{a_1a_2a_3} + \frac{1}{a_2a_3a_4} + \frac{1}{a_3a_4a_5} + ... + \frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$$

ដែល $a_{n+2} - a_n = d$ ថេរ ហើយ $d \neq 0$ ។

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវ :

☞ បម្លែងតួ $\frac{1}{a_ka_{k+1}a_{k+2}} = \frac{1}{d}.\frac{a_{k+2} - a_k}{a_ka_{k+1}a_{k+2}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_ka_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}\right)$

☞ ឱ្យតម្លៃ $k = 1 ; 2 ; 3 ; ....; n$

☞ ធ្វើវិធីបូក

ឧទាហរណ៍ : គណនាផលបូក

$$S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$ ។

៦_របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n$

ដែល (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម d និង (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានរេសុង q ។

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវគណនា $S_n - q\,S_n$ រួចទាញរក S_n ។

ឧទាហរណ៍១ : គណនាផលបូក $S_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + ... + \frac{n}{5^n}$?

គេមាន $S_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + ... + \frac{n}{5^n}$ (1)

និង $\frac{1}{5}S_n = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + ... + \frac{n-1}{5^n} + \frac{n}{5^{n+1}}$ (2)

ធ្វើផលដកសមីការ $(1) \,\&\, (2)$ អង្គនិងអង្គគេបាន :

$$S_n - \frac{1}{5}S_n = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + ... + \frac{1}{5^n}\right) - \frac{n}{5^{n+1}}$$

$$\frac{4}{5}S_n = \frac{1}{5} \times \frac{1-\frac{1}{5^n}}{1-\frac{1}{5}} - \frac{n}{5^{n+1}} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right) - \frac{n}{5^{n+1}}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{5}{16}\left(1-\frac{1}{5^n}\right) - \frac{n}{4\times 5^n}$ ។

ឧទាហរណ៍២ ៖

គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 1}$ កំនត់ដោយ ៖

$u_1=\frac{1}{3}$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\ \forall n\geq 1$

ក.គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.តាង $S_n=u_1+u_2+u_3+....+u_n$ ។

ដោយប្រើផលសង $S_n-\frac{1}{3}S_n$ ចូរគណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\ \forall n\geq 1$

គេទាញ $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}.\frac{n+1}{n}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}.\frac{k+1}{k}\right)$

$$\frac{u_2}{u_1}.\frac{u_3}{u_2}...\frac{u_n}{u_{n-1}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.\frac{2}{1}.\frac{3}{2}.....\frac{n}{n-1}$$

$$\frac{u_n}{u_1}=\frac{n}{3^{n-1}}$$

គេទាញ $u_n = \dfrac{n}{3^{n-1}}.u_1$ ដោយ $u_1 = \dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{n}{3^n}$ ។

ខ. គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(u_k\right) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + ... + \dfrac{n-1}{3^{n-1}} + \dfrac{n}{3^n}$

ហើយ $\dfrac{1}{3}S_n = \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{2}{3^3} + \dfrac{3}{3^4} + ... + \dfrac{n-1}{3^n} + \dfrac{n}{3^{n+1}}$

គេបាន $S_n - \dfrac{1}{3}S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + ... + \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{n}{3^{n+1}}$

$$\frac{2}{3}S_n = \frac{1}{3}.\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2}{3}S_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^{n+1}}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{3}{4}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right) - \dfrac{n}{2.3^{n+1}}$ ។

៧-សំគាល់ គេឱ្យ $S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$

ដើម្បីគណនាផលបូកខាងលើនេះគេត្រូវ :

☞ សរសេរតួ u_k ជារាង $\mathbf{u_k = t_{k+1} - t_k}$ ឬ $\mathbf{u_k = t_k - t_{k+1}}$ (បើអាច)

☞ ករណីគេអាចសរសេរ $\mathbf{u_k = t_{k+1} - t_k}$ នោះគេបាន :

$$\mathbf{S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = \sum_{k=1}^{n}(t_{k+1} - t_k) = t_{n+1} - t_1}$$

☞ ករណីគេអាចសរសេរ $\mathbf{u_k = t_k - t_{k+1}}$ នោះគេបាន :

$$\mathbf{S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k+1}) = t_1 - t_{n+1}}$$ ។

ឧទាហរណ៍១ :

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$$u_n = \frac{2n+1}{(n^2+1)\sqrt{n^2+2n+2} + (n^2+2n+2)\sqrt{n^2+1}}$$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; ....$ ។

ក. ចូរសរសេរ u_n ជារាង $\dfrac{A}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{B}{\sqrt{n^2+2n+2}}$

ដែល A និង B ជាពីរចំនួនពិតត្រូវកំនត់ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ u_n ជារាង $\frac{A}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{B}{\sqrt{n^2+2n+2}}$

យើងបាន :

$$u_n=\frac{2n+1}{(n^2+1)\sqrt{n^2+2n+2}+(n^2+2n+2)\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{n^2+2n+2}(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2n+2})}$$

$$=\frac{(2n+1)(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{n^2+2n+2}\,(2n+1)}$$

$$u_n=\frac{\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{n^2+2n+2}}$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{n^2+2n+2}}-\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{n^2+2n+2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}}$$

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}}$ ដែល $A=1;B=-1$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(u_k\right)=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

គេមាន $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}}$ (សម្រាយខាងលើ)

គេបាន : $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{k^2+2k+2}}\right)$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) + ...$$

$$... + \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+2}} = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}-1}{\sqrt{n^2+2n+2}}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{\sqrt{n^2+2n+2}-1}{\sqrt{n^2+2n+2}}$ និង $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$u_n = \frac{6^n}{(2^n+3^n)(2^{n+1}+3^{n+1})}$ ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ....$

ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព :

$$u_n = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}} - \frac{3^n}{2^n+3^n}$$

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}} - \dfrac{3^n}{2^n+3^n}$

គេបាន $u_n = \dfrac{3^{n+1}(2^n+3^n) - 3^n(2^{n+1}+3^{n+1})}{(2^n+3^n)(2^{n+1}+3^{n+1})}$

$$= \frac{3.6^n + 3^{2n+1} - 2.6^n - 3^{2n+1}}{(2^n+3^n)(2^{n+1}+3^{n+1})}$$

$$= \frac{6^n}{(2^n+3^n)(2^{n+1}+3^{n+1})}$$ ពិត

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}} - \dfrac{3^n}{2^n+3^n}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

គេមាន $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}} - \dfrac{3^n}{2^n+3^n}$

គេបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{3^{k+1}}{2^{k+1}+3^{k+1}} - \dfrac{3^k}{2^k+3^k} \right)$

$$=\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{9}{13}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{27}{35}-\frac{9}{13}\right)+\left(\frac{81}{97}-\frac{27}{35}\right)+$$

$$......+\left(\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}}-\frac{3^n}{2^n+3^n}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\frac{-2^{n+1}-3^{n+1}+2.3^{n+1}}{2(2^{n+1}+3^{n+1})}$$

$$=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{2(3^{n+1}+2^{n+1})}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{2}.\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^{n+1}+2^{n+1}}$ ហើយ $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍៣ :

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$$u_n=\log_2\left(1+\frac{1}{n}\right).\log_2\left(n^2+n\right)$$

ដែល $n=1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ....$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា $u_n>0$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

ខ.គណនាផលបូក $S_n=u_1+u_2+u_3+....+u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

គ.កំនត់ n ដើម្បីឱ្យ $S_n=100$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $u_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

គេមាន $u_n = \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) . \log_2\left(n^2+n\right)$

ដោយ $\log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log_2(n+1) - \log_2(n)$

និង $\log_2\left(n^2+n\right) = \log_2[n(n+1)] = \log_2(n) + \log_2(n+1)$

គេបាន $u_n = [\log_2(n+1)]^2 - [\log_2(n)]^2$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេមាន $\log_2(n+1) > \log_2(n)$

ដូចនេះ $u_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$

គេមាន $u_n = [\log_2(n+1)]^2 - [\log_2(n)]^2$

-បើ $n = 1$: $u_1 = [\log_2 2]^2 - [\log_2 1]^2$

-បើ $n = 2$: $u_2 = [\log_2 3]^2 - [\log_2 2]^2$

-បើ $n = 3$: $u_3 = [\log_2 4]^2 - [\log_2 3]^2$

-បើ $n = n$: $u_n = [\log_2(n+1)]^2 - [\log_2(n)]^2$

ធ្វើវិធីបូកអង្គ និង អង្គនៃសមភាពទាំងនេះគេបាន :

ដូចនេះ $S_n = [\log_2(n+1)]^2$ ។

គ.កំនត់ n ដើម្បីឱ្យ $S_n = 100$

យើងបាន $[\log_2(n+1)]^2 = 100$

$$\log_2(n+1) = 10$$

$$n + 1 = 2^{10} = 1024$$

ដូចនេះ $n = 1023$ ។

៨_របៀបរកតួទី n តាមផលសងតួនៃស្វ៊ីត

ក_ផលសងតួលំដាប់ទីមួយ ៖

☞ គេមានស្វ៊ីត $(a_n): a_1 \; ; \; a_2 \; ; a_3 \; ; \; ..... \; ; \; a_n$

ហើយ $b_1 = a_2 - a_1 \, ; \, b_2 = a_3 - a_2 \, ; b_3 = a_4 - a_3 \, ; .....$ នោះគេថាស្វ៊ីត $(b_n): b_1 \, ; b_2 \, ; b_3 \, ; \, ... \, ; \, b_n$ ជាផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

☞ រូបមន្តគណនាតួ a_n

គេមាន $b_n = a_{n+1} - a_n$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1} (b_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$

ដោយ $\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_n - a_{n-1})$

$$= a_n - a_1$$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k) = a_n - a_1$

ដូចនេះ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k)$ ។

ខ_ផលសងតួលំដាប់ទីពីរ ៖

☞ គេមានស្វ៊ីត $(a_n): a_1 \ ; \ a_2 \ ; a_3 \ ; \ ..... \ ; \ a_n$ ហើយ

$b_1 = a_2 - a_1 \ ; \ b_2 = a_3 - a_2 \ ; b_3 = a_4 - a_3 \ ; .....; b_n = a_{n+1} - a_n$

$(b_n): b_1 \ ; b_2 \ ; b_3 \ ; \ .... \ ; \ b_n$ ជាផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (a_n)

☞ រូបមន្តគណនាតួ a_n គឺ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k)$ ។

☞ ស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់ទីពីរនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺជាផលសង

លំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (b_n) ដែល $c_n = b_{n+1} - b_n \ ; n = 1 \ , 2 \ , 3 \ , ...$

រូបមន្តគណនាតួទី n គឺ $b_n = c_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(c_i) \ ; \ n \geq 2$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$

ដែល $(u_n)_{n\geq 1}$ ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ខ. $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2(2n+1)}$

គ. $u_n = (-1)^n . \dfrac{6n-1}{(3n-2)(3n+1)}$

ឃ. $u_n = \dfrac{n}{(2n^2-2n+1)(2n^2+2n+1)}$

ង. $u_n = \dfrac{6^n}{(3^n-2^n)(3^{n+1}-2^{n+1})}$

ច. $u_n = \dfrac{2^n}{(2^n+1)\sqrt{2^{n+1}+1}+(2^{n+1}+1)\sqrt{2^n+1}}$

ឆ. $u_n = \dfrac{n^2-n+1}{2^n}$

ជ. $u_n = \dfrac{2^n}{1+x^{2^n}}$ ដែល $x \neq \pm 1$

មេរៀនទី៥

ទំនាក់ទំនងតួនៃស្វ៊ីត

១-កំណត់តួទី n ដោយប្រើស្វ៊ីតជំនួយ :

ក. ទំនាក់ទំនងកំណើនទម្រង់ $a_{n+1} = pa_n + q$

វិធាន

ចំពោះស្វ៊ីត (a_n) លស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើនទម្រង់ $a_{n+1} = pa_n + q$ ដើម្បីគណនាតួ a_n គេត្រូវអនុវត្តន៏ដូចខាងក្រោម :

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $r_n = \alpha n + \beta$ ដែល α, β ជាចំនួនថេរត្រូវរក

☞ ជំនួស r_n ក្នុងទំនាក់ទំនងនៃស្វ៊ីត $a_{n+1} = pa_n + q$

គេបាន $r_{n+1} = pr_n + q$ ដោយ $r_n = \alpha n + \beta$ នោះ $r_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta$

នាំឱ្យ $\alpha(n+1) + \beta = p(\alpha n + \beta) + q$

$$\alpha n + (\alpha + \beta) = \alpha p n + (p\beta + q)$$

គេទាញ $\begin{cases} \alpha = p\alpha \\ \alpha + \beta = p\beta + q \end{cases}$ នាំឱ្យ $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{q}{1-p}$ ។

☞ គណនាផលសង $a_{n+1} - r_{n+1}$ ជាអនុគមន៏នៃ $a_n - r_n$

☞ តាងស្វ៊ីត $b_n = a_n - r_n$ ។ គណនា b_n រួចទាញរក a_n ។

ឧទាហរណ៍

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$a_1 = 11$ និង $a_{n+1} = 4a_n - 9$ ដែល $n = 1, 2, 3, \ldots$

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $r_n = \alpha n + \beta$ ជំនួសក្នុងទំនាក់ទំនង $a_{n+1} = 4a_n - 9$

គេបាន $r_{n+1} = 4r_n - 9$

$$\alpha(n+1) + \beta = 4(\alpha n + \beta) - 9$$

$$\alpha n + (\alpha + \beta) = 4\alpha n + (4\beta - 9)$$

គេទាញ $\begin{cases} \alpha = 4\alpha \\ \alpha + \beta = 4\beta - 9 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\alpha = 0, \beta = 3$ ហើយ $r_n = 3$

គណនា $a_{n+1} - 3 = (4a_n - 9) - 3 = 4(a_n - 3)$

តាង $b_n = a_n - 3$ នោះ $b_{n+1} = a_{n+1} - 3 = 4(a_n - 3) = 4b_n$

នាំឱ្យ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 4$ និង $b_1 = a_1 - 3 = 11 - 3 = 8$

គេបាន $b_n = b_1 \times q^{n-1} = 8 \times 4^{n-1} = 2^{2n+1}$

ដូចនេះ $a_n = b_n + 3 = 2^{2n+1} + 3$ ។

ខ.ទំនាក់ទំនងកំណើនទម្រង់ $a_{n+1} = pa_n + qn + r$

ចំពោះស្វ៊ីត (a_n) ដែលស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើនទម្រង់ $a_{n+1} = pa_n + qn + r$ ដើម្បីគណនាតួ a_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $r_n = \alpha n + \beta$ ដែល α, β ជាចំនួនថេរត្រូវរក

☞ ជំនួស r_n ក្នុងទំនាក់ទំនងនៃស្វ៊ីត $a_{n+1} = pa_n + qn + r$

គេបាន $r_{n+1} = pr_n + qn + r$

ដោយ $r_n = \alpha n + \beta$ នោះ $r_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta$

នាំឱ្យ $\alpha(n+1) + \beta = p(\alpha n + \beta) + qn + r$

$$\alpha n + (\alpha + \beta) = (\alpha p + q)n + (p\beta + r)$$

គេទាញ $\begin{cases} \alpha = p\alpha + q \\ \alpha + \beta = p\beta + r \end{cases}$ (ត្រូវដោះស្រាយរក α និង β)

☞ គណនាផលសង $a_{n+1} - r_{n+1}$ ជាអនុគមន៏នៃ $a_n - r_n$

☞ តាងស្វ៊ីត $b_n = a_n - r_n$ ។ គណនា b_n រួចទាញរក a_n ។

ឧទាហរណ៍

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$a_1 = 10$ និង $a_{n+1} = 3a_n + 4n - 9$ ដែល $n = 1, 2, 3, \ldots$

គណនា a_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $r_n = \alpha n + \beta$ ជំនួសក្នុងទំនាក់ទំនង $a_{n+1} = 3a_n + 4n - 8$

គេបាន $r_{n+1} = 3r_n + 4n - 8$

$$\alpha(n+1) + \beta = 3(\alpha n + \beta) + 4n - 8$$

$$\alpha n + (\alpha + \beta) = (3\alpha + 4)n + (3\beta - 8)$$

គេទាញ $\begin{cases} \alpha = 3\alpha + 4 \\ \alpha + \beta = 3\beta - 8 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\alpha = -2, \beta = 3$ ហើយ $r_n = -2n + 3$

គណនា $a_{n+1} - r_{n+1}$ ដែល $r_{n+1} = -2(n+1) + 3 = -2n + 1$

គេបាន $a_{n+1} - (-2n+1) = 3a_n + 4n - 8 + 2n - 1$

$$a_{n+1} + 2n - 1 = 3[a_n + 2(n-1) - 1]$$

តាង $b_n = a_n + 2(n-1) - 1$

នោះ $b_{n+1} = a_{n+1} + 2n - 1 = 3b_n$

នាំឱ្យ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$ និង $b_1 = a_1 - 1 = 10 - 1 = 9$

គេបាន $b_n = b_1 \times q^{n-1} = 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$

ដូចនេះ $a_n = b_n - 2n + 3 = 3^{n+1} - 2n + 3$ ។

គ. ទំនាក់ទំនងកំណើនទម្រង់ $\mathbf{a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0}$

ចំពោះស្វ៊ីត $(\mathbf{a_n})$ ដែលស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើនទម្រង់ $\mathbf{a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0}$

ដើម្បីគណនា $\mathbf{a_n}$ គេត្រូវកំណត់ចំនួនពីរ α និង β ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\alpha+\beta=-\mathbf{p}$ និង $\alpha\beta=\mathbf{q}$ ដែលជាឫសរបស់សមីការ $\mathbf{x^2+px+q=0}$ ។

សមីការ $\mathbf{x^2+px+q=0}$ ហៅថាសមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត ។

ទំនាក់ទំនង $\mathbf{a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0}$ ក្លាយទៅជា :

$\mathbf{a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0}$ ដែលអាចបំលែងតាមពីររបៀបគឺ :

$$\mathbf{a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)} \quad \mathbf{(1)}$$

$$\mathbf{a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)} \quad \mathbf{(2)}$$

ទំនាក់ទំនងខាងលើនេះ គឺជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលអាចដោះស្រាយរក $\mathbf{a_n}$ បាន ។

ឧទាហរណ៍១ :

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq1}$ កំនត់ដោយ :

$u_1=5$; $u_2=13$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$

ដែល $n=1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ...$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n :

គេមាន $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$ សមមូល $u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n=0$

មានសមីការសំគាល់ $r^2 - 5r + 6 = 0$

ឬ $(r-2)(r-3) = 0$ គេទាញ $r_1 = 2 \vee r_2 = 3$

ទំនាក់ទំនង $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ អាចសរសេរជាពីររបៀបគឺ :

$$\begin{cases} u_{n+2} - 2u_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2u_n) & (i) \\ u_{n+2} - 3u_{n+1} = 2(u_{n+1} - 3u_n) & (ii) \end{cases}$$

តាងស្វ៊ីតជំនួយពីរ $(a_n)_{n\geq 1}$ និង $(b_n)_{n\geq 1}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} a_n = u_{n+1} - 2u_n \\ b_n = u_{n+1} - 3u_n \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} a_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} \\ b_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1} \end{cases}$$

ដោយយោងតាមសមីការ (i) និង (ii) គេទាញ $a_{n+1} = 3a_n$ និង $b_{n+1} = 2b_n$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា(a_n) និង (b_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដែលមានផលធៀបរួមរៀងគ្នា $q_1 = 3$ និង $q_2 = 2$ ហើយមានតួទី១

រៀងគ្នា $a_1 = u_2 - 2u_1 = 3$ និង $b_1 = u_2 - 3u_1 = -2$

គេបាន $\begin{cases} a_n = a_1 . {q_1}^{n-1} = 3.3^{n-1} = 3^n \\ b_n = b_1 . {q_2}^{n-1} = -2.2^{n-1} = -2^n \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} u_{n+1} - 2u_n = 3^n & (1) \\ u_{n+1} - 3u_n = -2^n & (2) \end{cases}$

ធ្វើផលសង (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គគេបាន $u_n = 3^n + 2^n$

ដូចនេះ $u_n = 2^n + 3^n$ ។

ឧទាហរណ៍២:

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 1}$ កំនត់ដោយ :

$u_1 = 6\ ;\ u_2 = 27$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$

ដែល $n = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \dots$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n :

ទំនាក់ទំនង $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ អាចសរសេរជា :

$u_{n+2} - 3u_{n+1} = 3(u_{n+1} - 3u_n)\ \ (i)$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_{n+1} - 3u_n$ គេបាន $v_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}$

តាមទំនាក់ទំនង(i)គេបាន $v_{n+1} = 3v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដែលមានផលធៀបរួម $q = 3$ និងតួ $v_1 = u_2 - 3u_1 = 27 - 18 = 9$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$

គេទាញ $u_{n+1} - 3u_n = 3^{n+1}\ \ (ii)$

តាងស្វ៊ីត $w_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ នោះ $w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{3^{n+1}}$

គេបាន $w_{n+1} - w_n = \dfrac{u_{n+1}}{3^{n+1}} - \dfrac{u_n}{3^n}$

$$w_{n+1}-w_n=\frac{u_{n+1}-3u_n}{3^{n+1}}\ (iii)$$

យក (ii) ជួសក្នុង (iii) គេបាន $w_{n+1}-w_n=1$ ថេរ

នាំឱ្យ (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d=1$ និង $w_1=\frac{u_1}{3}=2$

តាមរូបមន្ត $w_n=w_1+(n-1)d=2+n-1=n+1$

ដោយ $w_n=\frac{u_n}{3^n}$ នោះគេទាញ $u_n=3^n w_n=3^n(n+1)$

ដូចនេះ $u_n=3^n(n+1)$ ។

ឧទាហរណ៍៣

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 1}$ កំនត់ដោយ :

$u_1=1$; $u_2=2$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+2}=2u_{n+1}-4u_n$

ដែល $n=1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $u_{n+2}=2u_{n+1}-4u_n$ សមមូល $u_{n+2}-2u_{n+1}+4u_n=0$

មានសមីការសំគាល់ $r^2-2r+4=0$ $\Delta'=1-4=-=3i^2$

មានឫស $r_1=1+i\sqrt{3}$; $r_2=1-i\sqrt{3}$

តាងស្វ៊ីត $Z_n = u_{n+1} - (1 - i\sqrt{3})u_n \quad \forall n \geq 1$

គេបាន $Z_{n+1} = u_{n+2} - (1 - i\sqrt{3})u_{n+1}$

$$Z_{n+1} = 2u_{n+1} - 4u_n - (1 - i\sqrt{3})u_{n+1}$$
$$Z_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})u_{n+1} - 4u_n$$
$$Z_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})[\ u_{n+1} - (1 - i\sqrt{3})u_n]$$

គេទាញ $\dfrac{Z_{n+1}}{Z_n} = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{Z_{k+1}}{Z_k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$

$\dfrac{Z_2}{Z_1} \cdot \dfrac{Z_3}{Z_2} \cdots \dfrac{Z_n}{Z_{n-1}} = 2^{n-1}.e^{i\frac{(n-1)\pi}{3}}$ ឬ $\dfrac{Z_n}{Z_1} = 2^{n-1}.e^{i\frac{(n-1)\pi}{3}}$

ដោយ $Z_1 = u_2 - (1 - i\sqrt{3})u_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

គេទាញ $Z_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{3} + i.\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)$

ដោយ $Z_n = u_{n+1} - (1 - i\sqrt{3})u_n \quad \forall n \geq 1$

ឬ $Z_n = (u_{n+1} - u_n) + i\sqrt{3}\,u_n$ គេទាញ $\sqrt{3}u_n = 2^n \sin\dfrac{n\pi}{3}$

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{n\pi}{3}$ ។

ឃ. ទំនាក់ទំនងកំណើនទម្រង់ $\mathbf{a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}}$

ចំពោះស្វ៊ីត $\mathbf{(a_n)}$ ដែលស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើនទម្រង់ $\mathbf{a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}}$

ដើម្បីគណនាតួ $\mathbf{a_n}$ គេត្រូវ :

☞ ដោះស្រាយសមីការសម្គាល់ $\mathbf{x=\dfrac{px+q}{rx+s}}$ ឬ $\mathbf{rx^2+(s-p)x-q=0}$ **(*)**

☞ បើសមីការ **(*)** មានឫសពីរផ្សេងគ្នា α និង β នោះគេត្រូវតាងស្វ៊ីតជំនួយ

$\mathbf{b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}}$ រួចត្រូវស្រាយថា $\mathbf{(b_n)}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

☞ បើសមីការ **(*)** មានឫសឌុប $\mathbf{x_1=x_2=\lambda}$ នោះគេត្រូវតាងស្វ៊ីតជំនួយ

$\mathbf{b_n=\dfrac{1}{a_n-\lambda}}$ រួចត្រូវស្រាយថា $\mathbf{(b_n)}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

ឧទាហរណ៍១:

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 1}$ កំនត់ដោយ :

$u_1=4$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+8}{u_n+5}$

ដែល $n=$ 1 ; 2 ; 3 ; ... ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $r=\dfrac{3r+8}{r+5}$

ដោយតាង r_1 និង r_2 ជាឫស ហើយ $r_1>r_2$ ។

ខ. គេពិនិត្យស្វ៊ីត $v_n = \frac{u_n - r_1}{u_n - r_2}$ ដែល $n = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ .....$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចគណនា v_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

គ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោះស្រាយសមីការ $r = \frac{3r+8}{r+5}$

បើ $r \neq -5$ នោះសមីការអាចសរសេរ $r^2 + 2r - 8 = 0$

ឬ $(r+1)^2 - 9 = (r-2)(r+4) = 0$

គេទាញ $r_1 = 2\ ;\ r_2 = -4$ ។

ខ. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ :

គេមាន $v_n = \frac{u_n - r_1}{u_n - r_2} = \frac{u_n - 2}{u_n + 4}$ ហើយ $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 4}$

ដោយ $u_{n+1} = \frac{3u_n + 8}{u_n + 5}$ គេបាន :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{3u_n+8}{u_n+5} - 2}{\frac{3u_n+8}{u_n+5} + 4} = \frac{u_n - 2}{7u_n + 28} = \frac{1}{7} v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \frac{1}{7}$ ។

គណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

តាមរូបមន្ត $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $v_1 = \frac{u_1 - 2}{u_1 + 4} = \frac{4-2}{4+4} = \frac{1}{4}$

ដូចនេះ $v_n = \frac{1}{4} \times \frac{1}{7^{n-1}}$ ។

គ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 4}$ នាំឱ្យ $u_n = \frac{4v_n + 2}{1 - v_n}$ ដោយ $v_n = \frac{1}{4} \times \frac{1}{7^{n-1}}$

ដូចនេះ $u_n = \frac{4\left(1 + 2.7^{n-1}\right)}{4.7^{n-1} - 1}$ ។

ឧទាហរណ៍២:

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 1}$ កំនត់ដោយ :

$u_1 = 3$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \frac{5u_n - 8}{2u_n - 3}$

ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $r = \frac{5r - 8}{2r - 3}$ (តាង r_0 ជាឫស)

ខ. គេពិនិត្យស្វ៊ីត $v_n = \frac{1}{u_n - r_0}$ ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\ldots$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តរួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោះស្រាយសមីការ

បើ $r \neq \frac{3}{2}$ នោះសមីការ $r = \frac{5r-8}{2r-3}$ អាចសរសេរ :

$2r^2 - 8r + 8 = 0$ ឬ $2(r-2)^2 = 0$

ដូចនេះ $r_0 = 2$ ជាឫសឌុប ។

ខ.បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត :

គេមាន $v_n = \frac{1}{u_n - r_0} = \frac{1}{u_n - 2}$ ហើយ $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 2}$

ដោយ $u_{n+1} = \frac{5u_n - 8}{2u_n - 3}$

គេបាន $v_{n+1} = \frac{1}{\frac{5u_n - 8}{2u_n - 3} - 2} = \frac{2u_n - 3}{u_n - 2} = 2 + \frac{1}{u_n - 2} = 2 + v_n$

ដោយ $v_{n+1} = v_n + 2$ ឬ $v_{n+1} - v_n = 2$ ថេរ

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត មានផលសងរួម $d = 2$ ។

គណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

តាមរូបមន្ត $v_n = v_1 + (n-1)d$ ដោយ $v_1 = \frac{1}{u_1 - 2} = 1$

ដូចនេះ $v_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$ ។

គ.គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

ដោយ $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ គេទាញ $u_n = \dfrac{1 + 2v_n}{v_n} = \dfrac{1 + 2(2n-1)}{2n-1}$

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{4n-1}{2n-1}$ ។

២~ទំនាក់ទំនងរវាង a_n និង S_n

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ គេបាន $S_n - S_{n-1} = a_n$ និង $S_1 = a_1$

ដែល $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ ។

ឧទាហរណ៍ :

គេមានផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) មួយកំណត់ដោយ $S_n = n^3 + 2n$

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

តាមរូបមន្ត $a_n = S_n - S_{n-1}$

ដោយ $S_n = n^3 + 2n$ នាំឱ្យ $S_{n-1} = (n-1)^3 + 2(n-1)$

គេបាន $a_n = n^3 + 2n - (n-1)^3 - 2(n-1) = 3n^2 - 3n + 3$

ដូចនេះ $a_n = 3(n^2 - n + 1)$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. ចូរកំនត់តួ u_n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\ge 1}$ ដោយស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2 \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} u_1 = \dfrac{13}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

គ. $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})u_n + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 \end{cases}$

2. ចូរកំនត់តួ u_n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\ge 1}$ ដោយស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $\begin{cases} u_1 = 1 \ ; \ u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} u_1 = 1 \ ; \ u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$

គ. $\begin{cases} u_1 = 0 \ ; \ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = \sqrt{3}\,u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

ឃ. $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \ ; \ u_3 = 4 \\ u_{n+3} = 9u_{n+2} - 26u_{n+1} + 24u_n \end{cases}$

3. ចូរកំនត់តួ u_n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\geq 1}$ ដោយស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 5}{u_n - 2} \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3(u_n - 3)}{4u_n - 9} \end{cases}$

4. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} , U_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \forall n \in IN : U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \end{cases}$$

ក. $\forall n \in IN^*$ គេយក $V_n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}U_n + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}U_{n-1}$ ។

ចូរស្រាយថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចសរសេរ V_n អនុគមន៏n ។

ខ. ចូរស្រាយថា $U_n{}^2 + U_{n+1}{}^2 = U_nU_{n+2} + U_{n-1}U_{n+1}$, $\forall n \geq 1$

រួចទាញបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $U_n{}^2 - U_{n-1}U_{n+1} = 0$ ។

គ. រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (U_n) រួចសរសេរ U_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ឃ. គេយក $W_n = \ln U_n$ ហើយគេមាន :

$S_n = W_0 + W_1 + ... + W_n$ & $P_n = U_0.U_1.U_2....U_n$ ។

គណនា S_n រួចទាញរក P_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

5. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង :

$$Z_0 = 0 \ , \ Z_1 = 1$$

និង $\forall n \in IN : Z_{n+2} = \frac{1+\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}} Z_{n+1} + \frac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n$

ក. តាង $\forall n \in IN : U_n = Z_{n+1} - Z_n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $U_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$ ។

គ. តាង $S_n = \sum_{k=0}^{n}(U_k)$ ។

ចូរស្រាយថា $Z_{n+1} = S_n$ រួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

6. គេមាន (U_n) ជាស្វ៊ីតមួយកំនត់ដោយ $\forall n \in IN : U_n = \frac{a+n}{a-n-1}$

ក. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $V_n = \frac{1}{U_n - U_{n-1}} - \frac{1}{U_{n-1} - U_{n-2}}, \forall n \geq 2$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ខ. គណនា $S_n = \sum_{k=2}^{n}(V_k)$ ក្នុងករណីដែល $a = \frac{1}{4}$ ។

7. គេឱ្យ $S_n = 1 + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^4} + \frac{4}{3^6} + \dots\dots\dots + \frac{n+1}{3^{2n}}$

ចូរគណនា S_n និងលីមីតរបស់វា ។

៨. គេឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួ $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$

និងផលសងរួម $d \neq 4k\pi \ , k \in Z$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត :

$$\sum_{k=1}^{n}(SinU_k) = SinU_1 + SinU_2 + ... + SinU_n = \frac{Sin\frac{nd}{2} . Sin\frac{U_1 + U_n}{2}}{\sin\frac{d}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(CosU_k) = CosU_1 + CosU_2 + ... + CosU_n = \frac{Sin\frac{nd}{2} . Cos\frac{U_1 + U_n}{2}}{\sin\frac{d}{2}}$$

9. គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $(U_n), n \in IN^*$ ដែលមានតួសុទ្ធតែវិជ្ជមាន

និងរេសុង q ។ គេឧបមាថា $(V_n), n \in IN^*$ ជាស្វ៊ីតកំនត់ដោយ

$V_n = \log_a(U_n) \ , a > 0 \ , a \neq 1$

ក. ចូរស្រាយថា $(V_n), n \in IN^*$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ខ. គេតាង $S_n = \sum_{k=1}^{n}(V_k)$ ។ ចូរស្រាយថា $S_n = \frac{n}{2} . \log_a(U_1 . U_n)$

គ. តាង $P_n = \prod_{k=1}^{n}(U_n)$ ។ ចូរបង្ហាញថា $P_n = a^{S_n}$

ឃ. ទាញថា $P_n = \sqrt{(U_1 U_n)^n}$ ។

10. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \, , U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 2U_{n+1} - 4U_n \, , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក.គេតាង $\forall n \in IN : \; Z_{n+1} = U_{n+1} - (1 - i\sqrt{3})U_n$ ។

បង្ហាញថា $Z_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})Z_n$ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថា $Z_n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3})$ ។

គ. ទាញរកតួតូទៅ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

11. គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} Z_0 = 2 \\ Z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2} Z_n + \dfrac{2 - \sqrt{3} - i}{2} \, , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក. គេតាង $\forall n \in IN : U_n = Z_n - 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_{n+1} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} . U_n$ រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i.\sin\frac{n\pi}{12})$ ។

មេរៀនទី៦

វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

១.គោលការណ៍នៃវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

និយមន័យ

$P(n)$ ជាសំណើដែលទាក់ទងនឹងចំនួនគត់ n

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេត្រូវ :

1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះ $n = 1$

2. ឧបមាថា $P(n)$ ពិតចំពោះតម្លៃ n

3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតនាំឱ្យបាន $P(n+1)$ ពិត

២.ច្បាប់ទ្វេធា

ទ្រឹស្តីបទ :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k} y^k$$

ដែល $C(n,k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ។

ឧទាហរណ៍១

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = \sqrt{5}+1 \\ u_{n+1} = u_n{}^2 - 2u_n \end{cases}$

ដែល $n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ .....$ ។

ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា :

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n} + 1$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា :

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n} + 1$$

- ចំពោះ $n = 0$

គេបាន $u_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \sqrt{5}+1$ ពិត ។

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ :

$$u_k = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^k} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^k} + 1$$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ គឺ :

$$u_{k+1} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^{k+1}} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^{k+1}} + 1$$ ពិត

គេមាន $u_{k+1} = u_k^{\ 2} - 2u_k = (u_k - 1)^2 - 1$

ដោយ $u_k = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^k} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^k} + 1$

គេបាន :

$$u_{k+1} = \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^k} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^k}\right]^2 - 1$$

$$u_{k+1} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^{k+1}} + 2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^{k+1}} - 1$$

$$u_{k+1} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^{k+1}} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^{k+1}} + 1$$ ពិត

ដូចនេះ $u_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n} + 1$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=5x^3-9x^2+15x-3$

ក. ស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំនត់របស់វា ។

ខ. គេពិនិត្យស៊ីត (a_n) និង (b_n) កំនត់ដោយ $a_0=\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(1)}}$ និងចំពោះ

គ្រប់ $n\in IN$: $a_{n+1}=\dfrac{f(a_n)}{a_n^{\ 3}\, f\left(\dfrac{1}{a_n}\right)}$ និង $b_n=2\dfrac{1-a_n}{1+a_n}$ ។

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង b_{n+1} និង b_n ។

គ.ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា $b_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^n}$ ។

ឃ. ទាញរក a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច :

$f(x)=5x^3-9x^2+15x-3$ មានដែនកំនត់ $D=IR$

ដេរីវេ $f'(x)=15x^2-18x+15>0 \ \ \forall x\in D$

ព្រោះ $a=15>0$ និង $\Delta'=81-225=-144<0$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំនត់របស់វា ។

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង b_{n+1} និង b_n :

គេមាន $b_n = 2\,\dfrac{1-a_n}{1+a_n}$ នោះ $b_{n+1} = 2\,\dfrac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}}$

ដោយ $a_{n+1} = \dfrac{f(a_n)}{a_n^{\,3}\, f\left(\dfrac{1}{a_n}\right)}$

តែ $f(a_n) = 5a_n^{\,3} - 9a_n^{\,2} + 15a_n - 3$

ហើយ $f\left(\dfrac{1}{a_n}\right) = \dfrac{5}{a_n^{\,3}} - \dfrac{9}{a_n^{\,2}} + \dfrac{15}{a_n} - 3$

ឬ $a_n^{\,3}\, f\left(\dfrac{1}{a_n}\right) = 5 - 9a_n + 15a_n^{\,2} - 3a_n^{\,3}$

នាំឱ្យ $a_{n+1} = \dfrac{5a_n^{\,3} - 9a_n^{\,2} + 15a_n - 3}{5 - 9a_n + 15a_n^{\,2} - 3a_n^{\,3}}$

គេមាន $1 - a_{n+1} = \dfrac{8(1-a_n)^3}{5 - 9a_n + 15a_n^{\,2} - 3a_n^{\,3}}$

ហើយ $1 + a_{n+1} = \dfrac{2(1+a_n)^3}{5 - 9a_n + 15a_n^{\,2} - 3a_n^{\,3}}$

គេទាញ $b_{n+1} = \dfrac{8(1-a_n)^3}{(1+a_n)^3} = b_n^{\,3}$

ដូចនេះ $b_{n+1} = b_n^{\,3}$ ។

គ.ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{3^n}$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $b_0 = 2\ \frac{1 - a_0}{1 + a_0}$

ដោយ $a_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{f(1)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5 - 9 + 15 - 3}} = \frac{1}{2}$

គេបាន $b_0 = 2\ \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3^0}$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $b_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{3^k}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា វាពិតចំពោះ $n = k + 1$ គឺ $b_{k+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3^{k+1}}$

គេមាន $b_{k+1} = {b_k}^3$ (តាមសម្រាយក្នុងសំនួ ខ)

តែតាមការឧបមា $b_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{3^k}$

គេបាន $b_{k+1} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3^k}\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3^{k+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{3^n}$ ។

ឃ. ទាញរក a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $b_n = 2\,\dfrac{1-a_n}{1+a_n}$ គេបាន $b_n + a_n b_n = 2 - 2a_n$

នាំឱ្យ $a_n = \dfrac{2-b_n}{2+b_n}$ ដោយ $b_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^n}$

ដូចនេះ $a_n = \dfrac{2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^n}}{2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^n}} = \dfrac{2(3)^{3^n} - (2)^{3^n}}{2(3)^{3^n} + (2)^{3^n}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. គេឱ្យស្វ៊ីត $\begin{cases} u_0 = \tan\dfrac{\pi}{11} \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - u_n^{\,3}}{1-3u_n^{\,2}} \ ; n \in IN \end{cases}$

ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា $u_n = \tan\dfrac{3^n\pi}{11}$ ។

2. គេឱ្យស្វ៊ីត $\begin{cases} u_0 = \sqrt{5} \\ u_{n+1} = u_n^{\,2} - 2 \ ; n = 0,1,2,\dots \end{cases}$

ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា ៖

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{2^n}$$ ។

មេរៀនទី៧

លីមីតនៃស្វ៊ីត និង ស៊េរី

១.លីមីតនៃស្វ៊ីត

ក.ស្វ៊ីតអនន្ត

ស្វ៊ីត $a_1, a_2, ...a_n, ...$ ដែលមានតួច្រើនអនន្តហៅថាស្វ៊ីតអនន្ត ។

ខ.ស្វ៊ីតរួម

ស្វ៊ីត $a_1, a_2, ...a_n, ...$ ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរកចំនួនពិត λ បើ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lambda$ ។

គ.ស្វ៊ីតរីក

☞ ស្វ៊ីត $a_1, a_2, ...a_n, ...$ ជាស្វ៊ីតរីកខិតទៅរក $+\infty$ បើ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ ។

☞ ស្វ៊ីត $a_1, a_2, ...a_n, ...$ ជាស្វ៊ីតរីកខិតទៅរក $-\infty$ បើ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ ។

ឃ.ប្រមាណវិធីលើលីមីត

គេមានស្វ៊ីត (a_n) និង (b_n) ដែលមាន $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = M$

និង $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = N$ គេបាន

១. $\lim\limits_{n\to+\infty} ka_n = k.M$

២. $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = M + N$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = M - N$

៣. $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n b_n) = M.N$

បើ $N \neq 0$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{M}{N}$

ខ.លីមីតស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត

☞ បើ $r > 1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = +\infty$ ហើយ r^n ជាស្វ៊ីតរីកទៅរក $+\infty$

☞ បើ $r = 1$ នោះ (r^n) ជាស្វ៊ីតថេរហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 1$ ។

☞ បើ $r = 0$ នោះ (r^n) ជាស្វ៊ីតថេរហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ ។

☞ បើ $r \leq -1$ នោះស្វ៊ី (r^n) ជាស្វ៊ីតឆ្លាស់ហើយកាលណា $n \to +\infty$

គេមិនអាចកំណត់លីមីតនៃ (r^n) បានទេ ។

☞ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តដែលរួម : ស្វ៊ីត (r^n) សមមូល $-1 \leq r \leq 1$

២.លីមីតនៃស្វ៊ីត

ក.ស៊េរីអនន្ត

☞ ស៊េរីអនន្ត $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

គឺជាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតអនន្ត(a_n) ។

☞ កន្សោម $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ ហៅថាផលបូកដោយផ្នែកនៃស៊េរីអនន្ត

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \text{ ។}$$

ខ.ស៊េរីរួម និង ស៊េរីរីក :

☞ បើផលបូកដោយផ្នែក $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ រួមខិតទៅរកចំនួនពិត S

នោះគេថា $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ ជាស៊េរីរួមខិតទៅរក S ។

☞ បើស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ ជាស៊េរីរួមនោះ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

☞ បើស្វ៊ីត (a_n) មិនរួមរក 0 ទេនោះ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ ជាស៊េរីរីក ។

គ.ភាពរួមនិងរីកនៃស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត :

គ្រប់ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត $a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ...$

ដែល $a \neq 0$ ជាស៊េរីរួម ឬ រីកទៅតាមករណីដូចខាងក្រោម :

☞ បើ $|r| < 1$ នោះស៊េរីរួមទៅរក $\dfrac{a}{1-r}$ ។

☞ បើ $|r| \geq 1$ នោះស៊េរីរីក ។

ឃ.លក្ខណៈនៃស៊េរីអនន្ត

បើស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ និង $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ ជាស៊េរីរួមនោះគេបាន :

១. $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = k\alpha$ ដែល k ជាចំនួនថេរ ។

២. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha \pm \beta$ ។

ឧទាហរណ៍ ១

ចូរសិក្សាភាពរួម ឬ រីកនៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ :

$$u_n = \frac{8n^3 + 3n + 1}{(2n+1)\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពរួមឬរីកនៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8n^3 + 3n + 1}{(2n+1)\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(8 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3})}{n(2+\frac{1}{n}).n^2\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{8 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{(2+\frac{1}{n})\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}} = \frac{8}{2} = 4$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរក **4** ។

ឧទាហរណ៍ ២

ចូរសិក្សាភាពរួម ឬ រីកនៃស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ :

$$u_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n+1}}$$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពរួមឬរីកនៃស្វ៊ីត (u_n) :

គេបាន $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n+1})}{(n^2+n+1)-(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n+1})}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n+1}) = +\infty$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតរីកខិតទៅរក $+\infty$ ។

កំណត់ចំណាំ

✍ ស្វ៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរកចំនួនពិត λ បើ a_n មានលីមីតស្មើ λ កាលណា $n \to +\infty$ ។

✍ ស្វ៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ ជាស្វ៊ីតរីកខិតទៅរក $+\infty$ ឬ $-\infty$ បើ a_n មានលីមីត $+\infty$ ឬ $-\infty$ កាលណា $n \to +\infty$ ។

ឧទាហរណ៍៣

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់គ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ $a_1 = \frac{5}{2}$

និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ ។

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញថា (a_n) ជាស្វ៊ីតរួម ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

សមីការសម្គាល់របស់ស្វ៊ីត $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ គឺ $c = \frac{1}{2}c + 1$

គេទាញ $2c = c + 2$ ឬ $c = 2$ ។

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $b_n = a_n - c = a_n - 2$

គេបាន $b_{n+1} = a_{n+1} - 2$

$$= (\frac{1}{2}a_n + 1) - 2$$

$$= \frac{1}{2}a_n - 1$$

$$= \frac{1}{2}(a_n - 2) = \frac{1}{2}b_n$$

ដោយ $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ នាំឱ្យ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្ត $b_n = b_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $b_1 = a_1 - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

ហេតុនេះ $b_n = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{2^n}$ ។

ដោយ $b_n = a_n - 2$ នាំឱ្យ $a_n = b_n + 2$

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{2^n} + 2$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2^n} + 2) = 2$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ ។

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរក 2 ។

កំណត់ចំណាំ

ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n) : a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_{n+1} = p\,a_n + q$ គេត្រូវអនុវត្តន៏ដូចខាងក្រោម :

1. ដោះស្រាយសមីការសម្គាល់ $c = p.c + q$
2. តាងស្វ៊ីតជំនួយ $b_n = a_n - c$
3. ស្រាយថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា b_n ។
4. ទាញរកតួ a_n ពីទំនាក់ទំនង $b_n = a_n - c$ គឺ $a_n = b_n + c$ ។

ឧទាហរណ៍៤

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 4$

និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$ ។

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញថា (a_n) ជាស្វ៊ីតរួម ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត $a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$ គឺ $x^2 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

ឬ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ មានឫស $x_1 = 1\,;\, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $\begin{cases} b_n = a_{n+1} - x_1 a_n \\ c_n = a_{n+1} - x_2 a_n \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} b_n = a_{n+1} - a_n \\ c_n = a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n \end{cases}$

គេមាន
$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+2} - a_{n+1} \\ &= \left(\frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n\right) - a_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \\ &= \frac{1}{2}b_n \end{aligned}$$

នាំឱ្យ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$ និងតួ $b_1 = a_2 - a_1 = 2$

គេបាន $b_n = b_1 \times q^{n-1} = 2 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$ ។

គេទាញ $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n-2}}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $c_{n+1} = a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1}$

$$= (\frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n) - \frac{1}{2}a_n$$

$$= a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$$

$$= c_n$$

នាំឱ្យ (c_n) ជាស្វ៊ីតថេរគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

គេបាន $c_n = c_1$ តែ $c_1 = a_2 - \frac{1}{2}a_1 = 4 - 1 = 3$ ហេតុនេះ $c_n = 3$ ។

គេទាញ $a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = 3$ (2)

ធ្វើផលដករវាងសមីការ (1) និង (2) គេបាន :

$$(a_{n+1} - a_n) - (a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n) = \frac{1}{2^{n-2}} - 3$$

$$-\frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2^{n-2}} - 3$$

ដូចនេះ $a_n = -\frac{1}{2^{n-3}} + 6$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty}(-\frac{1}{2^{n-3}} + 6) = 6$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរក 6 ។

ឧទាហរណ៍៥

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 0$

និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $a_{n+1} = \dfrac{2}{3-a_n}$ ដែល $n = 1, 2, 3, ...$ ។

គណនា a_n ជាអនុគមន៏នៃ n រួចទាញថា (a_n) ជាស្វ៊ីតរួម ។

Solution :

គណនា a_n ជាអនុគមន៏នៃ n

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត $a_{n+1} = \dfrac{2}{3-a_n}$ គឺ $x = \dfrac{2}{3-x}$

ឬ $-x^2 + 3x - 2 = 0$ មានឫស $x_1 = 1 \,;\, x_2 = 2$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $b_n = \dfrac{a_n - x_1}{a_n - x_2} = \dfrac{a_n - 1}{a_n - 2}$

គេបាន $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} - 2}$ ដោយ $a_{n+1} = \dfrac{2}{3-a_n}$

$$b_{n+1} = \frac{\dfrac{2}{3-a_n} - 1}{\dfrac{2}{3-a_n} - 2} = \frac{a_n - 1}{2a_n - 4}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}.\frac{a_n - 1}{a_n - 2} = \frac{1}{2} b_n$$

នាំឱ្យ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \dfrac{1}{2}$ និងតួ $b_1 = \dfrac{a_1 - 1}{a_1 - 2} = \dfrac{1}{2}$

តាមរូបមន្ត $b_n = b_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$

តាមទំនាក់ទំនង $b_n = \frac{a_n - 1}{a_n - 2}$

គេទាញ $a_n b_n - 2b_n = a_n - 1$ នាំឱ្យ $a_n = \frac{2b_n - 1}{a_n - 1} = \frac{\frac{2}{2^n} - 1}{\frac{1}{2^n} - 1}$

ដូចនេះ $a_n = \frac{2 - 2^n}{1 - 2^n}$ ។ ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{2 - 2^n}{1 - 2^n}) = 1$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរក 1 ។

ឧទាហរណ៍៦

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 3$

និង ទំនាក់ទំនងកំណើន ដែល $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញថា (a_n) ជាស្វ៊ីតរួម ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត $a_{n+1} = \frac{3a_n - 4}{a_n - 1}$ គឺ $x = \frac{3x - 4}{x - 1}$

ឬ $x^2 - 4x + 4 = 0$ មានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 2$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $b_n = \frac{1}{a_n - 2}$

គេបាន $b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}-2}=\dfrac{1}{\dfrac{3a_n-4}{a_n-1}-2}=\dfrac{a_n-1}{a_n-2}$

គេទាញ $b_{n+1}-b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n-2}-\dfrac{1}{a_n-2}=\dfrac{a_n-2}{a_n-2}=1$ ថេរ

ដូចនេះ (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d=1$ និងតួ $b_1=\dfrac{1}{a_1-2}=1$

តាមរូបមន្ត $b_n=b_1+(n-1)d=1+(n-1)=n$

តាម $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ គេទាញ $a_n=2+\dfrac{1}{b_n}=2+\dfrac{1}{n}$

ដូចនេះ $a_n=2+\dfrac{1}{n}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(2+\dfrac{1}{n})=2$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរក 2 ។

ឧទាហរណ៍៧

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$$a_n = (1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})....(1+\frac{1}{2^{2^n}})$$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

យក $q = \frac{1}{2}$ គេបាន :

$$a_n = (1+q)(1+q^2)......(1+q^{2^n})$$

ដោយប្រើសមភាព $x + y = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$ គេបាន :

$$a_n = \frac{1-q^2}{1-q}.\frac{1-q^4}{1-q^2}....\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q^{2^n}}$$

$$a_n = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right]$$

កាលណា $n \to +\infty$ នោះ $\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$ ខិតជិតសូន្យ

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$ ។

ឧទាហរណ៍៨

គណនាលីមីត

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+....+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$$

Solution :

គណនាលីមីត

តាង $S_n=\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+....+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$

ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ និង $k\in IN^*$ គេយក $1\le k\le n$

គេបាន $n^4+1\le n^4+k\le n^4+n$

ឬ $\frac{1}{\sqrt{n^4+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^4+k}}\le\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$

ឬ $\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\le\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}\right)$

ឬ $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}\le S_n\le\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}=1$ និង $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}=1$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+....+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)=1$ ។

ឧទាហរណ៍៩

គណនាលីមីត

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{2^3-1}{2^3+1}\times\frac{3^3-1}{3^3+1}\times\frac{4^3-1}{4^3+1}\times....\times\frac{n^3-1}{n^3+1} \right]$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត

តាង $P_n = \frac{2^3-1}{2^3+1}\times\frac{3^3-1}{3^3+1}\times\frac{4^3-1}{4^3+1}\times....\times\frac{n^3-1}{n^3+1}$

គេពិនិត្យ $\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$

គេបាន $P_n = \prod_{k=2}^{n}[\frac{k^3-1}{k^3+1}] = \prod_{k=2}^{n}[\frac{k-1}{k+1}]\times\prod_{k=2}^{n}[\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}]$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n^2+n+1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{2}{3}$ ។

ឧទាហរណ៍១០

គេឱ្យផលបូក

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right]$$

ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

គេពិនិត្យ $1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}$

$$= \frac{k^2(k+1)^2+k^2+2k+1+k^2}{k^2(k+1)^2}$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2+2k(k+1)+1}{k^2(k+1)^2}$$

$$= \frac{\left[k(k+1)+1\right]^2}{k^2(k+1)^2} = \left[1+\frac{1}{k(k+1)}\right]^2$$

$$= \left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)^2$$

គេបាន $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n}(n+1-\frac{1}{n+1}) = 1+\frac{1}{n+1}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1$ ។

ឧទាហរណ៍១១

គេមានស៊េរីអនន្តមួយ :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+....$$

ចូរសិក្សាភាពរួម ឬ រីកនៃស៊េរីខាងលើនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពរួម ឬ រីកនៃស៊េរី

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+....$$

ស៊េរីនេះមានផលបូកដោយផ្នែក $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$

គេសម្គាល់ឃើញថា $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

គេបាន $S_n=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$

ដូចនេះស៊េរីអនន្តនេះជាស៊េរីរួមទៅរក 1 ។

ឧទាហរណ៍១២

គេមានស៊េរីអនន្តមួយ :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\right]=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+....$$

ចូរសិក្សាភាពរួម ឬ រីកនៃស៊េរីខាងលើនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពរួម ឬ រីកនៃស៊េរី

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\right]=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+....$$

ស៊េរីនេះមានផលបូកដោយផ្នែក

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

គេសម្គាល់ឃើញថា $\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2}$

គេបានផលបូកដោយផ្នែក :

$$S_n=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+....+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}=+\infty$

ដូចនេះស៊េរីអនន្តនេះជាស៊េរី រីកទៅរក $+\infty$ ។

ឧទាហរណ៍ ១៣

គេមានស៊េរីអនន្តមួយ :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+....+\frac{n}{n+1}+....$$

ចូរសិក្សាភាពរួម ឬ រីកនៃស៊េរីខាងលើនេះ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពរួម ឬ រីកនៃស៊េរី

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+....+\frac{n}{n+1}+....$$

គេមានតួទី n នៃស្វ៊ីត $a_n=\dfrac{n}{n+1}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=1\neq 0$

ដូចនេះ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+....+\dfrac{n}{n+1}+....$ ជាស៊េរីរីក ។

កំណត់ចំណាំ

ចំពោះស៊េរីអនន្ត $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)$ មានផលបូកដោយផ្នែក $S_n=a_1+a_2+...+a_n$

✍ បើ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=S$ នោះវាជាស៊េរីរួម ។

✍ បើ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$ នោះវាជាស៊េរី រីក ។

✍ បើ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\neq 0$ នោះវាជាស៊េរី រីក ។

ឧទាហរណ៍ ១៤

គេមានស៊េរីអនន្តមួយ :

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n}{(n+1)!}]=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+.....+\frac{n}{(n+1)!}+...$$

ចូរស្រាយថាស៊េរីខាងលើនេះជាស៊េរីបង្រួម ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពរួមនៃស៊េរី

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n}{(n+1)!}]=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+.....+\frac{n}{(n+1)!}+...$$

ផលបូកដោយផ្នែករបស់ស៊េរីនេះគឺ $S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+.....+\frac{n}{(n+1)!}$

គេពិនិត្យ $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$

គេបាន $S_n=(1-\frac{1}{2!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+....+(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!})$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1$

ដូចនេះ $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n}{(n+1)!}]=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+.....+\frac{n}{(n+1)!}+...$ ជាស៊េរីរួម ។

ឧទាហរណ៍ ១៥

គេមានស៊េរីអនន្តមួយ :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n-1}{2^n})=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+.....+\frac{2n-1}{2^n}+....$$

ចូរស្រាយថាស៊េរីខាងលើនេះជាស៊េរីបង្រួម ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាជាស៊េរីបង្រួម

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n-1}{2^n})=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+.....+\frac{2n-1}{2^n}+....$$

ផលបូកដោយផ្នែករបស់ស៊េរីនេះគឺ $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(k)=ak+b$ ដែលគ្រប់ $k\in IN^*$ គេមាន :

$$\frac{2k-1}{2^k}=\frac{f(k)}{2^k}-\frac{f(k+1)}{2^{k+1}} \text{ ឬ } \frac{2k-1}{2^k}=\frac{ak+b}{2^k}-\frac{a(k+1)+b}{2^{k+1}}$$

ឬ $4k-2=2ak+2b-ak-a-b=ak+(b-a)$

គេទាញ $a=4$ និង $b-a=-2\Rightarrow b=2$

ហេតុនេះ $\frac{2k-1}{2^k}=\frac{4k+2}{2^k}-\frac{4k+6}{2^{k+1}}$

គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{4k+2}{2^k}-\frac{4k+6}{2^{k+1}})=3-\frac{2n+3}{2^n}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right)=3$

ដូចនេះស៊េរីអនន្តខាងលើជាស៊េរីបង្រួម ។

ឧទាហរណ៍ ១៦

គេមានស៊េរីអនន្តមួយ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2}{2^n})=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+.....+\frac{n^2}{2^n}+....$

ចូរស្រាយថាស៊េរីខាងលើនេះជាស៊េរីបង្រួម ។

ដំណោះស្រាយ

ផលបូកដោយផ្នែករបស់ស៊េរីនេះគឺ $S_n=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+...+\frac{n^2}{2^n}$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(k)=ak^2+bk+c$ ដែលគ្រប់ $k\in IN^*$ គេមាន :

$$\frac{k^2}{2^k}=\frac{f(k)}{2^k}-\frac{f(k+1)}{2^{k+1}}$$

ឬ $\frac{k^2}{2^k}=\frac{ak^2+bk+c}{2^k}-\frac{a(k+1)^2+b(k+1)+c}{2^{k+1}}$

ឬ $2k^2=2ak^2+2bk+2c-ak^2-2ak-a-bk-b-c$

$$2k^2=ak^2+(b-2a)k+c-a-b$$

គេទាញ $a=2$ ហើយ $b-2a=0\Rightarrow b=4$ និង $c=a+b=6$

ហេតុនេះ $\frac{k^2}{2^k}=\frac{2k^2+4k+6}{2^k}-\frac{2k^2+8k+12}{2^{k+1}}$

គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{2k^2+4k+6}{2^k}-\frac{2k^2+8k+12}{2^{k+1}})=6-\frac{n^2+4n+6}{2^n}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(6-\frac{n^2+4n+6}{2^n}\right)=6$

ដូចនេះស៊េរីអនន្តខាងលើជាស៊េរីបង្រួម ។

ឧទាហរណ៍ ១៧

ចូរសិក្សាភាពរួម ឬ រីកនៃស៊េរីអនន្តខាងក្រោម :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3}{2^n}\right)=\frac{1^3}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+....+\frac{n^3}{2^n}+....$$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពរួមឬរីកនៃស៊េរីអនន្ត

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3}{2^n}\right)=\frac{1^3}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+....+\frac{n^3}{2^n}+....$$

ផលបូកដោយផ្នែករបស់ស៊េរីនេះគឺ $S_n=\frac{1^3}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+...+\frac{n^3}{2^n}$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(k)=ak^3+bk^2+ck+d$ ដែលគ្រប់ $k\in IN^*$

គេមាន :

$$\frac{k^3}{2^k}=\frac{f(k)}{2^k}-\frac{f(k+1)}{2^{k+1}}$$

$$\frac{k^3}{2^k}=\frac{ak^3+bk^2+ck+d}{2^k}-\frac{a(k+1)^3+b(k+1)^2+c(k+1)+d}{2^{k+1}}$$

$$2k^3=ak^3+(b-3a)k^2+(c-3a-2b)k+d-a-b-c$$

គេទាញ $a=2$ ហើយ $b-3a=0\Rightarrow b=6$ និង $c=3a+2b=18$

និង $d=a+b+c=26$ ហើយ $f(n)=2n^3+6n^2+18n+26$

គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f(k)}{2^k}-\frac{f(k+1)}{2^{k+1}}\right)=\frac{f(1)}{2}-\frac{f(n+1)}{2^{n+1}}$

ដោយ $f(1)=2+6+18+26=52$

និង $f(n+1) = 2(n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 18(n+1) + 26$

$$= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 + 6n^2 + 12n + 6 + 18n + 18 + 26$$

$$= 2n^3 + 12n^2 + 36n + 52$$

គេបាន $S_n = 26 - \dfrac{2n^3 + 12n^2 + 36n + 52}{2^{n+1}}$

ឬ $S_n = 26 - \dfrac{n^3 + 6n^2 + 18n + 26}{2^n}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(26 - \dfrac{n^3 + 6n^2 + 18n + 26}{2^n}\right) = 26$

ដូចនេះ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^3}{2^n}\right) = \dfrac{1^3}{2} + \dfrac{2^3}{2^2} + \dfrac{3^3}{2^3} + ... + \dfrac{n^3}{2^n} + ...$ ជាស៊េរីបង្រួម ។

កំណត់ចំណាំ

របៀបគណនាផលបូករាង $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left[q^k . P_m(k)\right]$

ដែល $P_m(k) = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + ... + c_m k^m$ ជាពហុធាដឺក្រេទី m

គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

✍ តាងអនុគមន៍ពហុធា $f_m(k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + ... + a_m k^m$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $q^k P_m(k) = q^k f_m(k) - q^{k+1} f_m(k+1)$

✍ រកអនុគមន៍ $f_m(k)$ ឱ្យឃើញ

✍ គណនាផលបូក $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left[q^k f_m(k) - q^{k+1} f_m(k+1)\right]$ ។

ឧទាហរណ៍ ១៨

ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n \in IN^*}$ គេមានផលបូក :

$$\mathbf{S_n = \frac{5}{1.3.2^2} + \frac{7}{3.5.2^3} + \frac{9}{5.7.2^4} + ... + \frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}}}$$

ក. កំណត់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ដើម្បីឱ្យគេបានសមភាព

$$\mathbf{\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}} = \frac{a}{(2n-1).2^n} + \frac{b}{(2n+1).2^{n+1}}}$$

ខ. គណនា $\mathbf{S_n}$ និង $\mathbf{\lim_{n\to+\infty} S_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ដើម្បីឱ្យគេបានសមភាព

$$\mathbf{\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}} = \frac{a}{(2n-1).2^n} + \frac{b}{(2n+1).2^{n+1}}}$$

គេបាន $\mathbf{2n+3 = 2a(2n+1) + b(2n-1)}$

$$\mathbf{2n+3 = (4a+2b)n + 2a - b}$$

គេទាញ $\mathbf{\begin{cases} 4a+2b=2 \\ 2a-b=3 \end{cases}}$ នាំឱ្យ $\mathbf{a = 1\ ,\ b = -1}$

ដូចនេះ $\mathbf{a = 1}$ និង $\mathbf{b = -1}$ ។

ខ. គណនា $\mathbf{S_n}$ និង $\mathbf{\lim_{n\to+\infty} S_n}$

តាមសម្រាយខាងលើនេះចំពោះ $\mathbf{a = 1}$ និង $\mathbf{b = -1}$ គេបាន :

$$\mathbf{\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}} = \frac{1}{(2n-1).2^n} - \frac{1}{(2n+1).2^{n+1}}}$$

ឬ $\dfrac{2p+3}{(2p-1)(2p+1)2^{p+1}} = \dfrac{1}{(2p-1)2^p} - \dfrac{1}{(2p+1)2^{p+1}}$

គេបាន $S_n = \sum_{p=1}^{n}\left[\dfrac{2p+3}{(2p-1)(2p+1).2^{p+1}}\right]$

$$= \sum_{p=1}^{n}\left[\frac{1}{(2p-1)2^p} - \frac{1}{(2p+1)2^{p+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(2n+1).2^{n+1}}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{1}{2}\left[\,1 - \dfrac{1}{(2n+1).2^n}\right]$ ។

ហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 - \dfrac{1}{(2n+1).2^n}\right] = \dfrac{1}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១៩

ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n \in IN^*}$ គេមានផលបូក :

$$S_n = \frac{2}{3.5} + \frac{4}{5.9} + ... + \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$$

ក. កំណត់ចំនួនពិត **a** និង **b** ដើម្បីឱ្យគេបានសមភាព

$$\frac{2^k}{(2^k+1)(2^{k+1}+1)} = \frac{a}{2^k+1} + \frac{b}{2^{k+1}+1}$$

ខ. គណនា S_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ចំនួនពិត **a** និង **b**

គេបាន $$\frac{2^k}{(2^k+1)(2^{k+1}+1)} = \frac{a}{2^k+1} + \frac{b}{2^{k+1}+1}$$

ឬ $$2^k = a(2^{k+1}+1) + b(2^k+1)$$

$$2^k = (2a+b).2^k + a + b$$

គេទាញ $\begin{cases} 2a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a = 1\ ,\ b = -1$

ដូចនេះ $a = 1 , b = -1$ ។

ខ. គណនា S_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

ចំពោះ $a = 1 , b = -1$ គេមានសមភាព

$$\frac{2^k}{(2^k+1)(2^{k+1}+1)}=\frac{1}{2^k+1}-\frac{1}{2^{k+1}+1}$$

គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2^k}{(2^k+1)(2^{k+1}+1)}\right]$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k+1}-\frac{1}{2^{k+1}+1}\right)$$

$$=(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{9})+...+(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1})$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$ និង $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{3}$ ។

ឧទាហរណ៍ ២០

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$a_0 = 3$ និង $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right) a_n - \frac{1}{3^{2^n}}$

ក. គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $a_{n+1} = (1 + \frac{1}{3^{2^n}})\, a_n - \frac{1}{3^{2^n}}$

$$a_{n+1} - 1 = (1 + \frac{1}{3^{2^n}})a_n - (1 + \frac{1}{3^{2^n}})$$

$$a_{n+1} - 1 = (1 + \frac{1}{3^{2^n}})(a_n - 1)$$

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = 1 + \frac{1}{3^{2^n}}$$

គេបាន $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1} - 1}{a_k - 1}\right) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3^{2^k}}\right)$

តាមសមភាព $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

ឬ $$\alpha + \beta = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$$

ដោយយក $\alpha = 1$ និង $\beta = 3^{2^k}$

គេបាន $1 + \dfrac{1}{3^{2^k}} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{3^{2^{k+1}}}}{1 - \dfrac{1}{3^{2^k}}}$

ហេតុនេះ $\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \dfrac{1}{3^{2^k}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{1 - \dfrac{1}{3^{2^{k+1}}}}{1 - \dfrac{1}{3^{2^k}}}\right)$

$$= \frac{1 - \dfrac{1}{3^{2^n}}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{2^n}}\right)$$

ហើយដោយ $\prod_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{a_{k+1} - 1}{a_k - 1}\right) = \dfrac{a_n - 1}{a_0 - 1} = \dfrac{a_n - 1}{2}$

គេទាញ $\dfrac{a_n - 1}{2} = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^{2^n}}\right)$ ឬ $a_n = 4 - \dfrac{3}{3^{2^n}}$

ដូចនេះ $a_n = 4 - \dfrac{3}{3^{2^n}}$

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(4 - \dfrac{3}{3^{2^n}}\right) = 4$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{3^{2^n}} = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 4$ ។

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសមានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឱ្យ a^2 , b^2 , c^2 បង្កើតបានជាកំណើនស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

ចូរបង្ហាញថាបរិមាណ $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ ក៏បង្កើតបានជា កំណើន

នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

បើ a^2 , b^2 , c^2 បង្កើតបានជាកំណើនស្វ៊ីតនព្វន្តមួយនោះគេបាន :

$b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$ (1) (មធ្យមនព្វន្ត)

គេមាន $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)} = \frac{a+2b+c}{b^2+(a+c)b+ac}$ (2)

យកសមីការ (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន :

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{a+2b+c}{\frac{a^2+c^2}{2}+(a+c)b+ac}$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{2(a+2b+c)}{(a+c)^2+2(a+c)b}=\frac{2(a+2b+c)}{(a+c)(a+c+2b)}$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{2}{a+c}$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាបរិមាណ $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$

ក៏បង្កើតបានជា កំណើននៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែរ ។

លំហាត់ទី២

បង្ហាញថាបើ a , b , c តាងរៀងគ្នាជាតួទី p , q , r នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

មួយនោះគេបានសមភាព $(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

បើ a , b , c តាងរៀងគ្នាជាតួទី p , q , r នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) នោះគេបាន

$a=u_p=u_1+(p-1)d$, $b=u_q=u_1+(q-1)d$, $c=u_r=u_1+(r-1)d$

គេមាន $(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$

ឬ $aq-ar+br-bp+cp-cq=0$

ឬ $p(c-b)+q(a-c)+r(b-a)=0$ ដោយ $\begin{cases} c-b=(r-q)d \\ a-c=(p-r)d \\ b-a=(q-p)d \end{cases}$

នោះ $pd(r-q)+qd(p-r)+rd(q-p)=0$

ឬ $d(pr-pq+pq-qr+qr-pr)=0$

$0=0$ ពិត

លំហាត់ទី៣

គេមានសមីការ $x^3+3mx^2+2(6m-7)x+10m-16=0$

កំណត់ m ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឫសបី x_1, x_2, x_3 បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ m

បើ x_1, x_2, x_3 ជាឫសរបស់សមីការនោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត

គេមានទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-3m & (1) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=2(6m-7) & (2) \\ x_1x_2x_3=-10m+16 & (3) \end{cases}$$

បើ x_1, x_2, x_3 បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះ $x_1+x_3=2x_2$ (4)

យកសមីការ (4) ជួសក្នុង (1) គេបាន $3x_2 = -3m$ ឬ $x_2 = -m$

តាមសមីការ (3) គេបាន $x_1x_3 = -\frac{10m-16}{x_2} = \frac{10m-16}{m}$

តាមសមីការ (2) គេបាន $(x_1 + x_3)x_2 + x_1x_3 = 12m - 14$

ឬ $-2m(-m) + \frac{10m-16}{m} = 12m - 14$

ឬ $2m^3 - 12m^2 + 24m - 16 = 0$

ឬ $2(m-2)^3 = 0$ នាំឱ្យ $m = 2$ ។

ដូចនេះ $m = 2$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 5$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+1} = \frac{2}{5}(u_n + 6)$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; ...$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n :

គេមាន $u_{n+1} = \frac{2}{5}(u_n + 6)$ នោះ $5u_{n+1} - 2u_n - 12 = 0$

សមីការសំគាល់ $5r - 2r - 12 = 0$ នាំឱ្យ $r = 4$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_n - r = u_n - 4$

គេបាន $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{2}{5}(u_n + 6) - 4 = \frac{2}{5}(u_n - 4) = \frac{2}{5}v_n$

នាំឱ្យ v_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \frac{2}{5}$ និង $v_0 = 1$

គេបាន $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ដោយ $v_n = u_n - 4$

ដូចនេះ $u_n = 4 + \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 4a_n + 1 + \sqrt{4a_n + 1} \quad ; \forall n \in IN \end{cases}$$

ចូរគណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $a_{n+1} = 4a_n + 1 + \sqrt{4a_n + 1}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង 4 គេបាន :

$$4a_{n+1} = 4(4a_n + 1) + 4\sqrt{4a_n + 1}$$

$$4a_{n+1} + 1 = 4(4a_n + 1) + 4\sqrt{4a_n + 1} + 1$$

$$4a_{n+1} + 1 = \left(2\sqrt{4a_n + 1} + 1\right)^2$$

$$\sqrt{4a_{n+1} + 1} = 2\sqrt{4a_n + 1} + 1$$

$$\sqrt{4a_{n+1} + 1} + 1 = 2\left(\sqrt{4a_n + 1} + 1\right) \quad (i)$$

តាង $v_n = \sqrt{4a_n + 1} + 1$

តាម (i) គេបាន $v_{n+1} = 2v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

ផលធៀបរួម $q = 2$ និងតួ $v_0 = \sqrt{4a_0 + 1} + 1 = 3 + 1 = 4$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n = 2^{n+2}$

គេទាញ $\sqrt{4a_n + 1} + 1 = 2^{n+2}$

$$\sqrt{4a_n + 1} = 2^{n+2} - 1$$

$$4a_n + 1 = 4^{n+2} - 2^{n+3} + 1$$

$$a_n = \frac{4^{n+2} - 2^{n+3}}{4} = 4^{n+1} - 2^{n+1}$$

ដូចនេះ $a_n = 4^{n+1} - 2^{n+1}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = \sin\dfrac{\pi}{11} \\ u_{n+1} = 3u_n - 4u_n^{\ 3} \ ; n \in IN \end{cases}$$

ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា $u_n = \sin\dfrac{3^n\pi}{11}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $u_n = \sin\dfrac{3^n\pi}{11}$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $u_0 = \sin\dfrac{3^0\pi}{11} = \sin\dfrac{\pi}{11}$ ពិត

ឧបមាថាសមភាពពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k = \sin\dfrac{3^k\pi}{11}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ គឺ $u_{k+1} = \sin\dfrac{3^{k+1}\pi}{11}$ ពិត

គេមាន $u_{k+1} = 3u_k - 4u_k^{\ 3}$ ដោយ $u_k = \sin\dfrac{3^k\pi}{11}$

គេបាន $u_{k+1} = 3\sin\dfrac{3^k\pi}{11} - 4\sin^3\dfrac{3^k\pi}{11} = \sin\dfrac{3^{k+1}\pi}{11}$ ពិត

ដូចនេះ $u_n = \sin\dfrac{3^n\pi}{11}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \; ; \; u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_{n+1} - \dfrac{n+2}{2} \;\; ; \;\; n = 0 \; ; 1 \; ; 2 \; ; ... \end{cases}$$

ក.តាង $v_n = u_{n+1} - u_n + n$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $v_n = u_{n+1} - u_n + n$

គេបាន $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} + n + 1$

ដោយ $u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{n+2}{2}$

នោះ $v_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{n+2}{2} - u_{n+1} + n + 1$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n + \frac{n}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n + n) = \frac{1}{2}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \dfrac{1}{2}$ ។

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $v_0 = u_1 - u_0 = 1$

ដូចនេះ $v_n = \frac{1}{2^n}$ ។

ដោយ $v_n = u_{n+1} - u_n + n$

គេទាញ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n} - n$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2^k} - k\right)$$

$$u_n - u_0 = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$u_n - 1 = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 3 - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{(n+2)(n-3)}{2}$$

ដូចនេះ $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{(n+2)(n-3)}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in N$ ដោយ :

$u_0 = -1$ និង $u_{n+1} = \dfrac{(2n-1)(u_n-1)}{4u_n+6n-1}$ ។

ក.តាង $v_n = \dfrac{2u_n+1}{u_n+n}$ ចំពោះ $n = 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $v_n = \dfrac{2u_n+1}{u_n+n}$ នោះ $v_{n+1} = \dfrac{2u_{n+1}+1}{u_{n+1}+n+1}$

ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{(2n-1)(u_n-1)}{4u_n+6n-1}$ គេបាន :

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{2(2n-1)(u_n-1)}{4u_n+6n-1}+1}{\dfrac{(2n-1)(u_n-1)}{4u_n+6n-1}+n+1}$$

$$v_{n+1}=\frac{2(2n-1)u_n-4n+2+4u_n+6n-1}{(2n-1)u_n-2n+1+4(n+1)u_n+(n+1)(6n-1)}$$

$$v_{n+1}=\frac{(4n+2)u_n+2n+1}{(6n+3)u_n+6n^2+3n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(2n+1)(2u_n+1)}{(2n+1)(u_n+n)}$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2u_n+1}{u_n+n}=\frac{1}{3}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួមស្មើ $q=\frac{1}{3}$ ។

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

តាមរូបមន្ត $v_n=v_0\times q^n$ ដោយ $v_0=\frac{2u_0+1}{u_0}=1$

ដូចនេះ $v_n=\frac{1}{3^n}$ ។

ហើយដោយ $v_n=\frac{2u_n+1}{u_n+n}$ នោះ $u_n=\frac{nv_n-1}{2-v_n}$

ដូចនេះ $u_n=\frac{n-3^n}{2\times 3^n-1}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 2$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2}{2} + 2n + \frac{7}{2}$ ដែល $n = 0;1;2;...$

គេតាង $v_n = u_n - (n^2+1)$ ។

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ :

គេមាន $v_n = u_n - (n^2+1)$

គេបាន $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)^2 - 1 = u_{n+1} - n^2 - 2n - 2$

ដោយ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2}{2} + 2n + \frac{3}{2}$

គេបាន $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2}{2} + 2n + \frac{3}{2} - n^2 - 2n - 2$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[u_n - (n^2+1)\right] = \frac{1}{2}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \frac{1}{2}$ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \dfrac{1}{2}$ និងមាន

តួដំបូង $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

តាមរូបមន្តគេបាន $v_n = v_0 \times q^n$

ដូចនេះ $v_n = \dfrac{1}{2^n}$ ហើយ $u_n = v_n + n^2 + 1 = \dfrac{1}{2^n} + n^2 + 1$

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$u_n = \dfrac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$ ដែល $n = 0 \; ; 1 \; ; 2 \; ; ....$

ក. ចូរសរសេរ u_n ជារាង $\dfrac{A}{n^2+1} + \dfrac{B}{n^2+2n+2}$ ដែល A និង B

ជាពីរចំនួនពិតត្រូវកំនត់ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

ជាអនុគមន៏នៃ n រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេរ u_n ជារាង $\dfrac{A}{n^2+1} + \dfrac{B}{n^2+2n+2}$

គេមាន $u_n = \dfrac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$

គេបាន $\frac{A}{n^2+1}+\frac{B}{n^2+2n+2}=\frac{(2n+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$

$$A(n^2+2n+2)+B(n^2+1)=2n+1$$

$$(A+B)n^2+2An+(2A+B)=2n+1$$

សមីការក្រោយនេះពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 0$ លុះត្រាតែ :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A=2 \\ 2A+B=1 \end{cases}$$ នាំឱ្យ $A=1\ ;\ B=-1$

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{n^2+2n+2}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(u_k\right)=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $u_n=\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{n^2+2n+2}$

គេបាន $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k^2+1}-\frac{1}{k^2+2k+2}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{n^2+2n+2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n^2+2n+2}=\frac{n^2+2n+2-1}{n^2+2n+2}$$

$$=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+2}=\frac{(n+1)^2}{n^2+2n+2}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{(n+1)^2}{n^2+2n+2}$ ។

រកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$

គេមាន $S_n = 1 - \dfrac{1}{n^2+2n+2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+2n+2} = 0$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 2$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = u_n{}^2 + 4u_n + 2$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$ ។

ក. គេតាង $v_n = \ln(u_n + 2)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃn

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ.គណនា $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} (u_k + 3)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ និង គណនា $_n$:

គេមាន $v_n = \ln(u_n + 2)$ នោះ $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} + 2)$

ដោយ $u_{n+1} = u_n^{\ 2} + 4u_n + 2$

គេបាន $v_{n+1} = \ln\left(u_n^{\ 2} + 4u_n + 4\right) = \ln(u_n + 2)^2$

$$v_{n+1} = 2\ln(u_n + 2) = 2v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 2$

និងតួដំបូង $v_0 = \ln 4$ ។ តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n = 2^n \ln 4$ ។

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $v_n = 2^n \ln 4 = \ln\left(4^{2^n}\right)$ និង $v_n = \ln(u_n + 2)$

គេទាញ $u_n + 2 = 4^{2^n}$ នាំឱ្យ $u_n = 4^{2^n} - 2$

ដូចនេះ $u_n = 4^{2^n} - 2$ ។

គ.គណនា $P_n = \prod_{k=0}^{n}(u_k + 3)$ ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $u_k + 3 = 4^{2^k} - 2 + 3 = 4^{2^k} + 1$

តាមសមភាព $a + 1 = \dfrac{a^2 - 1}{a - 1}$

ដោយជំនួស $a = 4^{2^k}$ គេបាន $u_k + 3 = \dfrac{4^{2^{k+1}} - 1}{4^{2^k} - 1}$

គេទាញ $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(\dfrac{4^{2^{k+1}} - 1}{4^{2^k} - 1}\right)$

$$= \frac{4^2-1}{4-1} \times \frac{4^4-1}{4^2-1} \times \frac{4^8-1}{4^4-1} \times \ldots \times \frac{4^{2^{n+1}}-1}{4^{2^n}-1}$$

$$= \frac{4^{2^{n+1}}-1}{4-1} = \frac{1}{3}\left(4^{2^{n+1}}-1\right)$$

ដូចនេះ $P_n = \frac{1}{3}\left(4^{2^{n+1}}-1\right)$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 2$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = 4u_n{}^3 - 6u_n{}^2 + 3u_n$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$ ។

ក. គេតាង $v_n = \ln(2u_n - 1)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ :

គេមាន $v_n = \ln(2u_n - 1)$ នោះ $v_{n+1} = \ln(2u_{n+1} - 1)$

ដោយ $u_{n+1} = 4u_n{}^3 - 6u_n{}^2 + 3u_n$

គេបាន $v_{n+1} = \ln\left(8u_n^{\ 3} - 12u_n^{\ 2} + 6u_n - 1\right)$

$$v_{n+1} = \ln(2u_n - 1)^3$$

$$v_{n+1} = 3\ln(2u_n - 1)$$

$$v_{n+1} = 3v_n$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម

ស្មើ $q = 3$ និង តួ $v_0 = \ln(2u_0 - 1) = \ln 3$ ។

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដូចនេះ $v_n = 3^n \ln 3$ ។

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $v_n = \ln(2u_n - 1)$

ដោយ $v_n = 3^n \ln 3 = \ln\left(3^{3^n}\right)$

គេទាញ $2u_n - 1 = 3^{3^n}$ នាំឱ្យ $u_n = \dfrac{1 + 3^{3^n}}{2}$

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{1 + 3^{3^n}}{2}$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(\mathrm{u}_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 2$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,2}+3}{2u_n+2}$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $u_n > 1$ ជានិច្ចគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. គេតាង $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃn

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $u_n > 1$ ជានិច្ចគ្រប់ $n \geq 0$

គេមាន $u_0 = 2 > 1$ ពិត

$$u_1 = \frac{u_0^{\,2}+3}{2u_0+2} = \frac{7}{6} > 1 \text{ ពិត}$$

ឧបមាថា វាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k > 1$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា វាពិតចំពោះ $n = k+1$ គឺ $u_{k+1} > 1$

គេមាន $u_{k+1}-1=\dfrac{u_k^{\ 2}+3}{2u_k+2}-1=\dfrac{(u_k-1)^2}{2u_k+2}$

ដោយ $u_k>1$ នោះ $u_{k+1}-1>0$ នាំឱ្យ $u_{K+1}>1$

ដូចនេះ $u_n>1$ ជានិច្ចគ្រប់ $n\geq 0$

ខ.បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃn

មាន $v_n=\ln\left(\dfrac{u_n-1}{u_n+3}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

គេបាន $v_{n+1}=\ln\left(\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3}\right)$ ដោយ $u_{n+1}=\dfrac{u_n^{\ 2}+3}{2u_n+2}$

$$\text{នោះ } v_{n+1}=\ln\left(\frac{\frac{u_n^{\ 2}+3}{2u_n+2}-1}{\frac{u_n^{\ 2}+3}{2u_n+2}+3}\right)=\ln\left(\frac{u_n-1}{u_n+3}\right)^2$$

$$v_{n+1}=2\ln\left(\frac{u_n-1}{u_n+3}\right)=2v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=2$ ។

តាមរូបមន្ត $v_n=v_0\times q^n$ ដោយ $v_0=\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

ដូចនេះ $v_n=2^n\ln(0,2)$ ។

គ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}\right)$

ដោយ $v_n = 2^n \ln\left(\dfrac{1}{5}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{5^{2^n}}\right)$

គេទាញ $\dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} = \dfrac{1}{5^{2^n}}$

ឬ $5^{2^n} u_n - 5^{2^n} = u_n + 3$

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{5^{2^n} + 3}{5^{2^n} - 1}$ ។

គណនាលីមីត :

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^{2^n} + 3}{5^{2^n} - 1}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \dfrac{3}{5^{2^n}}}{1 - \dfrac{1}{5^{2^n}}} = 1$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{5^{2^n}} = 0$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 2$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 6u_n + 2}{3(u_n^2 + u_n + 1)}$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $u_n > 1$ ជានិច្ចគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. គេតាង $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃn

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $u_n > 1$

គេមាន $u_0 = 2 > 1$ ពិត

$$u_1 = \frac{u_0^3 + 6u_0 + 2}{3(u_0^2 + u_0 + 1)} = \frac{22}{21} > 1 \text{ ពិត}$$

ឧបមាថា វាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k > 1$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា វាពិតចំពោះ $n = k + 1$ គឺ $u_{k+1} > 1$

គេមាន $u_{k+1}-1=\dfrac{u_k^{\ 3}+6u_k+2}{3(u_k^{\ 2}+u_k+1)}-1=\dfrac{\left(u_k-1\right)^3}{3(u_k^{\ 2}+u_k+1)}>0$

នាំឱ្យ $u_{k+1}>1$ ពិត (ព្រោះ $u_k>1$)

ដូចនេះ $u_n>1$ ជានិច្ចគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ខ.បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃn

មាន $v_n=\ln\left(\dfrac{u_n-1}{u_n+2}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$

គេបាន $v_{n+1}=\ln\left(\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}\right)$ ដោយ $u_{n+1}=\dfrac{u_n^{\ 3}+6u_n+2}{3(u_n^{\ 2}+u_n+1)}$

$$v_{n+1}=\ln\left(\dfrac{\dfrac{u_n^{\ 3}+6u_n+2}{3(u_n^{\ 2}+u_n+1)}-1}{\dfrac{u_n^{\ 3}+6u_n+2}{3(u_n^{\ 2}+u_n+1)}+2}\right)=\ln\left(\dfrac{u_n-1}{u_n+2}\right)^3$$

$$v_{n+1}=3\,\ln\left(\dfrac{u_n-1}{u_n+2}\right)=3v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=3$ ។

តាមរូបមន្ត $v_n=v_0\times q^n$ ដោយ $v_0=\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$

ដូចនេះ $v_n=3^n\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ ។

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

គេមាន $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}\right)$

ដោយ $v_n = 3^n \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{4^{3^n}}\right)$

គេបាន $\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} = \dfrac{1}{4^{3^n}}$

នាំឱ្យ $4^{3^n} u_n - 4^{3^n} = u_n + 2$

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{4^{3^n} + 2}{4^{3^n} - 1}$ ហើយ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \ ; \ v_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{13u_n - 3v_n}{5} \\ v_{n+1} = \dfrac{12v_n - 2u_n}{5} \end{cases}$$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$ ។

ក. គេតាង $x_n = u_n - v_n$ និង $y_n = 2u_n + 3v_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$

បង្ហាញថា (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

គណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ខ. ចូរគណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $x_n = u_n - v_n$ នាំឱ្យ $x_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$

ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{13u_n - 3v_n}{5}$ និង $v_{n+1} = \dfrac{12v_n - 2u_n}{5}$

គេបាន $x_{n+1} = \dfrac{13u_n - 3v_n}{5} - \dfrac{12v_n - 2u_n}{5}$

$$x_{n+1} = 3(u_n - v_n) = 3\,x_n$$

ដូចនេះ (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 3$

និងតួ $x_0 = u_0 - v_0 = 4 + 1 = 5$ ដូចនេះ $x_n = 5 \times 3^n$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $y_n = 2u_n + 3v_n$ នាំឱ្យ $y_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1}$

$$y_{n+1} = 2\left(\frac{13u_n - 3v_n}{5}\right) + 3\left(\frac{12v_n - 2u_n}{5}\right)$$

$$y_{n+1} = \frac{26u_n - 6v_n + 36v_n - 6u_n}{5}$$

$$y_{n+1} = 4u_n + 6v_n = 2\,y_n$$

ដូចនេះ (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 2$

និងតួ $y_0 = 2u_0 + 3v_0 = 4 - 3 = 1$ ដូចនេះ $y_n = 2^n$ ។

ខ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើគេទាញ $\begin{cases} u_n - v_n = 5 \times 3^n \\ 2u_n + 3v_n = 2^n \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រពន្ធ័នេះគេទទួលបាន :

$$u_n = \frac{5 \times 3^{n+1} + 2^n}{5} \quad ; \quad v_n = \frac{2^n - 10 \times 3^n}{5}$$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \ \ ; \ \ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{8}{3}u_n + \dfrac{2}{3}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{7}{3}v_n \end{cases}$$

ដែល $n = 0 \ ; 1 \ ; 2 \ ; 3 \ ; \ldots$ ។

ក. ចូរកំនត់គ្រប់គូ $(r \, ; \theta)$ ដើម្បីឱ្យ $u_{n+1} + \theta v_{n+1} = r\,(u_n + \theta v_n)$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់គ្រប់គូ $(r \, ; \theta)$:

គេមាន $u_{n+1} + \theta v_{n+1} = r\,(u_n + \theta v_n) \ (*)$

ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{8}{3}u_n + \dfrac{2}{3}v_n$ និង $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{7}{3}v_n$

គេបានសមីការ :

$$\frac{8}{3}u_n+\frac{2}{3}v_n+\theta\left(\frac{1}{3}u_n+\frac{7}{3}v_n\right)=r\ (u_n+\theta v_n)$$

$$\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\theta\right)u_n+\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\theta\right)v_n=r\,u_n+r\,\theta\ v_n$$

សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ $n\geq 0$ លុះត្រាតែ :

$$\begin{cases}\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\theta=r & (1)\\ \frac{2}{3}+\frac{7}{3}\theta=r\,\theta & (2)\end{cases}$$

យកសមីការ (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន :

$\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\theta=\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\theta\right)\theta$ ឬ $2+7\theta=8\theta+\theta^2$

ឬ $\theta^2+\theta-2=0$ គេទាញ $\theta_1=\ 1\ \vee\ \theta_2=-2$

ចំពោះ $\theta=1$ នោះ $r=3$

ចំពោះ $\theta=-2$ នោះ $r=2$

ដូចនេះ $(r\ ;\ \theta)=\{\ (3\ ;1)\ ;\ (2\ ;-2)\ \}$

ខ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

ដោយយក $(r\ ;\ \theta)=\{\ (3\ ;1)\ ;\ (2\ ;-2)\ \}$ ជួសក្នុង $(*)$

គេបាន $\begin{cases}u_{n+1}+v_{n+1}=3(u_n+v_n) & (i)\\ u_{n+1}-2v_{n+1}=2(u_n-2v_n) & (ii)\end{cases}$

តាងស្វ៊ីត $\begin{cases} x_n = u_n + v_n \\ y_n = u_n - 2v_n \end{cases}$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $\begin{cases} x_{n+1} = 3\ x_n \\ y_{n+1} = 2\ y_n \end{cases}$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានផលធៀបរួមរៀងគ្នា $q_1 = 3$ និង $q_2 = 2$ និងតួដំបូង

$x_0 = u_0 + v_0 = 4$ និង $y_0 = u_0 - 2v_0 = 1$

តាមរូបមន្តគេបាន $x_n = 4 \times 3^n$ និង $y_n = 2^n$

គេទាញបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} u_n + v_n = 4 \times 3^n \\ u_n - 2v_n = 2^n \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបាន ៖

$u_n = \dfrac{8 \times 3^n + 2^n}{3}$ និង $v_n = \dfrac{4 \times 3^n - 2^n}{3}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \quad ; \quad v_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n{}^2 + 2v_n{}^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n + v_n{}^2 \end{cases}$$

ដែល $n = 0 \,;\, 1 \,;\, 2 \,;\, 3 \,;\, \ldots$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $u_n > v_n$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន :

$$u_{n+1} + r\,v_{n+1} = \left(u_n + r\,v_n\right)^2$$

គ. ចូរគណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $u_n > v_n$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$

យើងមាន $u_0 = 4 > v_0 = 2$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k > v_k$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k+1$

គឺ $u_{k+1} > v_{k+1}$ ពិត

គេមាន $u_{k+1} - v_{k+1} = \left(u_k{}^2 + 2v_k{}^2\right) - \left(2u_k v_k + v_k{}^2\right)$

$$u_{k+1}-v_{k+1}=\left(u_k-v_k\right)^2>0$$ ព្រោះ $u_k>v_k$

គេទាញ $u_{k+1}>v_{k+1}$ ពិត

ដូចនេះ $u_n>v_n$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ខ. កំនត់ចំនួនពិត r :

គេមាន $u_{n+1}+r\,v_{n+1}=\left(u_n+r\,v_n\right)^2$ (*)

ដោយ $u_{n+1}=u_n{}^2+2v_n{}^2$ និង $v_{n+1}=2u_nv_n+v_n{}^2$

គេបាន $\left(u_n{}^2+2v_n{}^2\right)+r\left(2u_nv_n+v_n{}^2\right)=\left(u_n+r\,v_n\right)^2$

$$u_n{}^2+2r\,u_nv_n+(2+r)v_n{}^2=u_n{}^2+2ru_nv_n+r^2v_n{}^2$$

គេទាញ $2+r=r^2$ ឬ $r^2-r-2=0$

ដូចនេះ $r_1=-1$ ឬ $r_2=2$ ។

គ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

យកតម្លៃ $r=-1$; $r=2$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន :

$$\begin{cases} u_{n+1}-v_{n+1}=\left(u_n-v_n\right)^2 \\ u_{n+1}+2v_{n+1}=\left(u_n+2v_n\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(u_{n+1}-v_{n+1})=2\ln\left(u_n-v_n\right) & (i) \\ \ln(u_{n+1}+2v_{n+1})=2\ln\left(u_n+2v_n\right) & (ii) \end{cases}$$

តាង $x_n=\ln(u_n-v_n)$ និង $v_n=\ln\left(u_n+2v_n\right)$

តាម (i) & (ii) គេបាន $x_{n+1} = 2x_n$ និង $y_{n+1} = 2y_n$

នាំឱ្យ (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុងរៀងគ្នា $q_1 = 2$

និង $q_2 = 2$ និងតួ $x_0 = \ln 2$ និង $y_0 = \ln 8$

គេបាន $x_n = 2^n \ln 2$ និង $y_n = 2^n \ln 8$

ដោយ $x_n = \ln(u_n - v_n)$ និង $v_n = \ln(u_n + 2v_n)$

គេទាញ $\begin{cases} \ln(u_n - v_n) = 2^n \ln 2 \\ \ln(u_n + 2v_n) = 2^n \ln 8 \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} u_n - v_n = 2^{2^n} \\ u_n + 2v_n = 8^{2^n} \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបាន :

$$u_n = \frac{2^{2^n+1} + 8^{2^n}}{3} \quad \text{និង} \quad v_n \frac{8^{2^n} - 2^{2^n}}{3}$$

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ v_0 = 2 \end{cases} \text{ និង } \begin{cases} u_{n+1} = u_n^{\ 3} - 6u_n v_n^{\ 2} - 6v_n^{\ 3} \\ v_{n+1} = 3u_n^{\ 2} v_n + 9u_n v_n^{\ 2} + 7v_n^{\ 3} \end{cases}$$

ដែល $n = 0 \ ; 1 \ ; 2 \ ; 3 \ ; \ldots$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ចូរស្រាយថា $u_n + v_n > 0$ និង $u_n + 2v_n > 0$

ខ. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន :

$$u_{n+1} + r\, v_{n+1} = (u_n + r\, v_n)^3$$

គ. ចូរគណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ស្រាយថា $u_n + v_n > 0$

គេមាន $u_0 + v_0 = 4 + 2 = 6 > 0$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $u_k + v_k > 0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k + 1$ គឺ $u_{k+1} + v_{k+1} > 0$ ពិត

គេមាន $u_{k+1} + v_{k+1} = u_n^{\ 3} + 3u_n^{\ 2} v_n + 3u_n v_n^{\ 2} + v_n^{\ 3}$

$$u_{k+1} + v_{k+1} > (u_k + v_k)^3 > 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $u_n + v_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ស្រាយថា $u_n+2v_n>0$:

គេមាន $u_0+2v_0=4+4=8>0$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $u_k+2v_k>0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n=k+1$ គឺ $u_{k+1}+2v_{k+1}>0$ ពិត

គេមាន $u_{k+1}+2v_{k+1}=u_n{}^3+6u_n{}^2v_n+12u_nv_n{}^2+8v_n{}^3$

$$u_{k+1}+2v_{k+1}>\left(u_k+2v_k\right)^3>0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $u_n+2v_n>0$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ខ. កំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន :

$$u_{n+1}+r\,v_{n+1}=\left(u_n+r\,v_n\right)^3 \quad (*)$$

ដោយ $\begin{cases} u_{n+1}=u_n{}^3-6u_nv_n{}^2-6v_n{}^3 \\ v_{n+1}=3u_n{}^2v_n+9u_nv_n{}^2+7v_n{}^3 \end{cases}$ គេបាន :

$$u_{n+1}+r\,v_{n+1}=u_n{}^3+3ru_n{}^2v_n+(9r-6)u_nv_n{}^2+(7r-6)v_n{}^3 (i)$$

ហើយ $\left(u_n+r\,v_n\right)^3=u_n{}^3+3ru_n{}^2v_n+3r^2u_nv_n{}^2+r^3v_n{}^3 \ (ii)$

ដោយប្រៀបធៀបទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន :

$$\begin{cases} 3r^2=9r-6 \\ r^3=7r-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2-3r+2=0 \\ r^3-7r+6=0 \end{cases}$$

ដូចនេះ $r_1=1$; $r_2=2$ ។

គ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

យកតម្លៃ $r_1 = 1$; $r_2 = 2$ ជួសក្នុង (*) គេបាន :

$$\begin{cases} u_{n+1} + v_{n+1} = (u_n + v_n)^3 \\ u_{n+1} + 2v_{n+1} = (u_n + 2v_n)^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(u_{n+1} + v_{n+1}) = 3\ln(u_n + v_n) \\ \ln(u_{n+1} + 2v_{n+1}) = 3\ln(u_n + 2v_n) \end{cases}$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(u_n + v_n)\}$ និង $\{\ln(u_n + 2v_n)\}$

សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q = 3$ ដូចគ្នា ។

គេបាន $\begin{cases} \ln(u_n + v_n) = 3^n \ln(u_0 + v_0) = 3^n \ln 6 \\ \ln(u_n + 2v_n) = 3^n \ln(u_0 + 2v_0) = 3^n \ln 8) \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} u_n + v_n = 6^{3^n} \\ u_n + 2v_n = 8^{3^n} \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រពន្ធ័នេះគេទទួលបាន :

$u_n = 2 \times 6^{3^n} - 8^{3^n}$ និង $v_n = 8^{3^n} - 6^{3^n}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យស្វ៊ីត $S_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ ដែល $n\in IN^*$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $S_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ។

ខ-គណនាផលបូក

$$\Sigma_n=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+.....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $S_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

យើងមាន $S_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ (ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$)

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក :

គេបាន

$$\Sigma_n = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+.....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} = \sum_{k=1}^{n}(S_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = n+1-\frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)^2-1}{n(n+1)} = \frac{n(n+2)}{n+1}$$

ដូចនេះ $\Sigma_n = \dfrac{n(n+2)}{n+1}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$$u_n = \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$$ ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; ....$

ក. ចូរសរសេរ u_n ជារាង $\frac{A}{2^n+1} + \frac{B}{2^{n+1}+1}$ ដែល A និង B ជាពីរចំនួនពិតត្រូវកំនត់ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេរ u_n ជារាង $\frac{A}{2^n+1} + \frac{B}{2^{n+1}+1}$

គេមាន $u_n = \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$

$$= \frac{(2-1)2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = \frac{2^{n+1}-2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$$

$$= \frac{(2^{n+1}+1)-(2^n+1)}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = \frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1}$$

ដូចនេះ $u_n = \frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1}$ ហើយ $A = 1 ; B = -1$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

គេមាន $u_n = \dfrac{1}{2^n + 1} - \dfrac{1}{2^{n+1} + 1}$ ។

គេបាន :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k + 1} - \frac{1}{2^{k+1} + 1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + ... + \left(\frac{1}{2^n + 1} - \frac{1}{2^{n+1} + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1} + 1}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1} + 1}$ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$:

យើងបាន $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1} + 1} \right)$

ដោយ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2^{n+1} + 1} \right) = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$u_n = \dfrac{2(n-1)^2}{n^4+n^2+1}$ ដែល $n = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ; ....$

ក. ចូរសរសេរ u_n ជារាង $\dfrac{A}{n^2+n+1}+\dfrac{B}{n^2-n+1}$ ដែល A និង B

ជាពីរចំនួនពិតត្រូវកំនត់ ។

ខ. គណនាផលបូក :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(3^{k-1}u_k\right) = u_1 + 3u_2 + 3^2u_3 + ... + 3^{n-1}u_n$$

ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ u_n ជារាង $\dfrac{A}{n^2+n+1}+\dfrac{B}{n^2-n+1}$

គេមាន $u_n = \dfrac{2(n-1)^2}{n^4+n^2+1}$

គេបាន $\dfrac{A}{n^2+n+1}+\dfrac{B}{n^2-n+1} = \dfrac{2(n-1)^2}{n^4+n^2+1}$

$$A(n^2-n+1)+B(n^2+n+1) = 2(n-1)^2$$

$$(A+B)n^2+(-A+B)n+(A+B) = 2n^2-4n+2$$

គេទាញបាន $\begin{cases} A+B=2 \\ -A+B=-4 \end{cases}$ គេទាញ $A=3\ ;\ B=-1$

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{3}{n^2+n+1}-\dfrac{1}{n^2-n+1}$ ហើយ $A=3\ ;\ B=-1$ ។

ខ. គណនាផលបូក :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(3^{k-1}u_k\right)=u_1+3u_2+3^2u_3+\dots+3^{n-1}u_n$$

គេមាន $u_n=\dfrac{3}{n^2+n+1}-\dfrac{1}{n^2-n+1}$

គេបាន :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3^k}{k^2+k+1}-\frac{3^{k-1}}{k^2-k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{3}-1\right)+\left(\frac{9}{7}-\frac{3}{3}\right)+\left(\frac{27}{13}-\frac{9}{7}\right)+\left(\frac{81}{21}-\frac{27}{13}\right)+\dots.+$$

$$+\left(\frac{3^n}{n^2+n+1}-\frac{3^{n-1}}{n^2-n+1}\right)$$

$$=-1+\frac{3^n}{n^2+n+1}=\frac{3^n-n^2-n-1}{n^2+n+1}$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{3^n-n^2-n-1}{n^2+n+1}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$u_n = \dfrac{1}{2^{2^n}+1}$ ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; ....$

ក. ចូរសរសេរ u_n ជារាង $\dfrac{A}{2^{2^n}-1} + \dfrac{B}{2^{2^{n+1}}-1}$ ដែល A និង B

ជាពីរចំនួនពិតត្រូវកំនត់ ។

ខ. គណនាផលបូក :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(2^k u_k\right) = u_0 + 2u_1 + 4u_2 + ... + 2^n u_n$$

ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ u_n ជារាង $\dfrac{A}{2^{2^n}-1} + \dfrac{B}{2^{2^{n+1}}-1}$

គេមាន $u_n = \dfrac{1}{2^{2^n}+1}$ ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; ....$

គេបាន $\dfrac{A}{2^{2^n}-1} + \dfrac{B}{2^{2^{n+1}}-1} = \dfrac{1}{2^{2^n}+1}$

បើ $n = 0$ នោះ $A + \dfrac{B}{3} = \dfrac{1}{3}$ (1)

បើ $n = 1$ នោះ $\dfrac{A}{3} + \dfrac{B}{15} = \dfrac{1}{5}$ (2)

តាម **(1)** និង **(2)** គេបានប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} A+\dfrac{B}{3}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{A}{3}+\dfrac{B}{15}=\dfrac{1}{5} \end{cases} \quad \text{សមមូល} \begin{cases} 3A+B=1 \\ 5A+B=3 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $A=1\ ;\ B=-2$ ។

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{1}{2^{2^n}-1}-\dfrac{2}{2^{2^{n+1}}-1}$ ។

ខ. គណនាផលបូក :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(2^k u_k\right)=u_0+2u_1+4u_2+...+2^n u_n$$

គេមាន $u_n=\dfrac{1}{2^{2^n}-1}-\dfrac{2}{2^{2^{n+1}}-1}$

គេបាន $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{2^k}{2^{2^k}-1}-\dfrac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1}\right)=1-\dfrac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{2^{2^{n+1}}-2^{n+1}-1}{2^{2^{n+1}}-1}$ ។

គណនាលីមីត :

ដោយ $S_n=1-\dfrac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}$ ដែល $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}=0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$$u_n = \frac{\frac{2}{3}n^2 + 2n + 1}{n^2(n+1)^2} \quad \text{ដែល } n = 1\ ;\ 2\ ;\ 3;\ ....$$

ក. ចូរសរសេរ u_n ជារាង $\frac{A}{n^2} + \frac{B}{(n+1)^2}$ ដែល A និង B

ជាពីរចំនួនពិតត្រូវកំនត់ ។

ខ. គណនាផលបូក :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{u_k}{3^k}\right) = \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3^2}u_2 + \frac{1}{3^3}u_3 + ... + \frac{1}{3^n}u_n$$

ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេរ u_n ជារាង $\frac{A}{n^2} + \frac{B}{(n+1)^2}$

គេបាន $\frac{A}{n^2} + \frac{B}{(n+1)^2} = \frac{\frac{2}{3}n^2 + 2n + 1}{n^2(n+1)^2}$

$$A(n+1)^2 + Bn^2 = \frac{2}{3}n^2 + 2n + 1$$

$$(3A + 3B)n^2 + 6An + 3A = 2n^2 + 6n + 3$$

គេទាញ $\begin{cases} 3A+3B=2 \\ 6A=6 \\ 3A=3 \end{cases}$ នាំឱ្យ $A=1\ ;\ B=-\dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{3(n+1)^2}$ ។

ខ. គណនាផលបូក :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{u_k}{3^k}\right)=\frac{1}{3}u_1+\frac{1}{3^2}u_2+\frac{1}{3^3}u_3+\ldots+\frac{1}{3^n}u_n$$

ដោយ $u_n=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{3(n+1)^2}$

គេបាន $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\ \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{3^k}-\frac{1}{(k+1)^2}\cdot\frac{1}{3^{k+1}}\right]$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{(n+1)^2 3^{n+1}}$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{(n+1)^2 3^{n+1}}$ ។

ដោយ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)^2.3^{n+1}}=0$

ដូចនេះ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$u_n = \dfrac{(n-1)(3n+1)}{4^n}$ ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....$

ក. ចូរសរសេរ u_n ជារាង $\dfrac{An^2}{4^n} + \dfrac{B(n+1)^2}{4^{n+1}}$ ដែល A និង B

ជាពីរចំនួនពិតត្រូវកំនត់ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(u_k\right) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

ជាអនុគមន៏នៃ n រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ u_n ជារាង $\dfrac{An^2}{4^n} + \dfrac{B(n+1)^2}{4^{n+1}}$

គេបាន $\dfrac{An^2}{4^n} + \dfrac{B(n+1)^2}{4^{n+1}} = \dfrac{(n-1)(3n+1)}{4^n}$

$$4An^2 + B(n+1)^2 = 4(3n^2 - 2n - 1)$$

$$(4A + B)n^2 + 2Bn + B = 12n^2 - 8n - 4$$

គេទាញ $\begin{cases} 4A + B = 12 \\ 2B = -8 \\ B = -4 \end{cases}$ នាំឱ្យ $A = 4 \; ; \; B = -4$ ។

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{4n^2}{4^n} - \dfrac{4(n+1)^2}{4^{n+1}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(u_k\right)=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

គេមាន $u_n=\frac{4n^2}{4^n}-\frac{4(n+1)^2}{4^{n+1}}=\frac{n^2}{4^{n-1}}-\frac{(n+1)^2}{4^n}$

គេបាន $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{k^2}{4^{k-1}}-\frac{(k+1)^2}{4^k}\right]$

$$=\left(0-1\right)+\left(1-\frac{4}{4}\right)+\left(\frac{4}{4}-\frac{9}{16}\right)+\left(\frac{9}{16}-\frac{16}{64}\right)+...$$

$$....+\left(\frac{n^2}{4^{n-1}}-\frac{(n+1)^2}{4^n}\right)$$

$$=-\frac{(n+1)^2}{4^n}$$

ដូចនេះ $S_n=-\frac{(n+1)^2}{4^n}$ ហើយ $\lim_{n\to+\infty}S_n=0$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$u_n = \log_{(n+1)}(n+2)$ ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

ខ.គណនាផលបូក $S_n = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3 + ... + \ln u_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

គេមាន $u_n = \log_{(n+1)}(n+2)$ និង $u_{n+1} = \log_{(n+2)}(n+3)$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេមាន $(n+2)^2 > (n+2)^2 - 1$

ឬ $(n+2)^2 > (n+2-1)(n+2+1) = (n+1)(n+3)$

គេបាន $\log_{(n+2)}(n+2)^2 > \log_{(n+2)}\left[(n+1)(n+3)\right]$

ឬ $2 > \log_{(n+2)}(n+1) + \log_{(n+2)}(n+3) \quad (1)$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន :

$$\log_{(n+2)}(n+1) + \log_{(n+1)}(n+2) \geq 2\sqrt{\log_{(n+2)}(n+1)\log_{(n+1)}(n+2)}$$

ឬ $\log_{(n+2)}(n+1) + \log_{(n+1)}(n+2) \geq 2 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន :

$$\log_{(n+2)}(n+1)+\log_{(n+1)}(n+2) > \log_{(n+2)}(n+1)+\log_{(n+2)}(n+3)$$

$$\log_{(n+1)}(n+2) > \log_{(n+2)}(n+3)$$

$$u_n \quad > \quad u_{n+1}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3 + ... + \ln u_n$

គេមាន $u_n = \log_{(n+1)}(n+2) = \dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}(\ln u_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(u_k)\right)$

ដោយ $\prod_{k=1}^{n}(u_k) = \prod_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\right]$

$$= \frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\frac{\ln 4}{\ln 3}\cdot\frac{\ln 5}{\ln 4}.....\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$$

$$= \frac{\ln(n+2)}{\ln 2} = \log_2(n+2)$$

ដូចនេះ $S_n = \ln[\log_2(n+2\ )]$ ។

លំហាត់ទី២៦

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ គេមាន $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(n)=an^3+bn^2+cn+d \\ f(n+1)-f(n)=n^2 \end{cases}$

ក.គណនាតម្លៃលេខនៃ $a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងលើ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ $S_n=1^2+2^2+3^2+....+n^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនាតម្លៃលេខនៃ $a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d$

គេមាន $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(n)=an^3+bn^2+cn+d \\ f(n+1)-f(n)=n^2 \end{cases}$

ដោយ $f(n)=an^3+bn^2+cn+d$

នោះ $f(n+1)=a(n+1)^3+b(n+1)^2+c(n+1)+d$

គេបាន $f(n+1)-f(n)=3an^2+(3a+2b)n+a+b+c$

គេទាញ $3an^2+(3a+2b)n+a+b+c=n^2$

នាំឱ្យ $a=\dfrac{1}{3}\ ;\ b=-\dfrac{1}{2}\ ;\ c=\dfrac{1}{6}$

ហើយ $f(1)=a+b+c+d=1$ **នោះ** $d=1$

ដូចនេះ $a=\frac{1}{3}\ ;\ b=-\frac{1}{2}\ ;\ c=\frac{1}{6}\ ;\ d=1$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ $S_n = 1^2+2^2+3^2+....+n^2$

តាមសម្រាយខាងលើគេបាន ៖

$$f(n)=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+1$$

ដោយ $f(n+1)-f(n)=n^2$

គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}\left[f(k+1)-f(k)\right]$

$$=f(n+1)-f(1)$$

ដោយ $f(n)=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+1$

នោះ $f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+1=1$

ហើយ $f(n+1)=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)+1$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+1$$

$$=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+1$$

ដូចនេះ $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឱ្យ $$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2\times 3}\right)$$

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\times 4}\right)$$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅនិងស្រាយរូបមន្តនោះផង ។

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ

គេមាន $$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2\times 3}\right)$$

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\times 4}\right)$$

តាមឧទាហរណ៍ខាងលើនេះយើងបានរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម :

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}\times......\times\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n\times(n+1)}\right)$$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត

តាង $\mathbf{P_n}=\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}\times......\times\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{1-\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{k^3}}\right)$

យើងមាន :

$$\frac{1-\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{k^3}}=\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\times\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$=\frac{k-1}{k}\times\frac{k}{k+1}\times\frac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}$$

គេបាន $\mathbf{P_n}=\prod_{k=2}^{n}\left[\frac{k-1}{k}\times\frac{k}{k+1}\times\frac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}\right]$

$$=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right)\prod_{k=2}^{n}\left[\frac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)+1}{1.2+1}=\frac{2}{3}\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right)\prod_{k=2}^{n}\left[\frac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{n}.\frac{2}{n+1}.\frac{n(n+1)+1}{1.2+1}=\frac{2}{3}\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\dfrac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}\times......\times\dfrac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n\times(n+1)}\right)}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$u_0=1$ និង $u_{n+1}=\frac{1}{8}(\frac{1}{4}+2u_n+\sqrt{1+8u_n})$

ក. តាង $v_n=\sqrt{1+8u_n}$ ។ បង្ហាញថា $v_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+2)$

ខ.បង្ហាញថាស្វ៊ីត $w_n=v_n-2$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា w_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកតួ u_n នៃស្វ៊ីត ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $\mathbf{v_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+2)}$

គេមាន $\mathbf{v_n=\sqrt{1+8u_n}}$

នាំឱ្យ$\mathbf{v_{n+1}=\sqrt{1+8u_{n+1}}}$ តែ $\mathbf{u_{n+1}=\frac{1}{8}(\frac{1}{4}+2u_n+\sqrt{1+8u_n})}$

$$\mathbf{v_{n+1}=\sqrt{1+\frac{1}{4}+2u_n+\sqrt{1+8u_n}}}$$

$$\mathbf{v_{n+1}=\sqrt{1+2.\frac{\sqrt{1+8u_n}}{2}+\frac{1+8u_n}{4}}}$$

$$\mathbf{v_{n+1}=\sqrt{(1+\frac{\sqrt{1+8u_n}}{2})^2}=1+\frac{\sqrt{1+8u_n}}{2}=1+\frac{1}{2}v_n}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{v_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+2)}}$ ។

ខ.បង្ហាញថាស្វ៊ីត $\mathbf{w_n=v_n-2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ :

យើងមាន $\mathbf{w_n=v_n-2}$ នាំឱ្យ $\mathbf{w_{n+1}=v_{n+1}-2}$

តែ $\mathbf{v_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+2)}$

គេបាន $\mathbf{w_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+2)-2=\frac{1}{2}(v_n-2)=\frac{1}{2}w_n}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{(w_n)}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $\mathbf{q=\frac{1}{2}}$ ។

តាមរូបមន្ត $w_n = w_0 \times q^n$ តែ $w_0 = v_0 - 2 = \sqrt{1+8u_0} - 2 = 1$

ដូចនេះ $\boxed{w_n = \dfrac{1}{2^n}}$ និង $\boxed{v_n = 2 + \dfrac{1}{2^n}}$ ។

គ. ទាញរកតួ u_n នៃស្វ៊ីត

យើងមាន $v_n = \sqrt{1+8u_n}$ នាំឱ្យ $u_n = \dfrac{{v_n}^2 - 1}{8}$

$$u_n = \frac{(2+\frac{1}{2^n})^2 - 1}{8}$$

$$= \frac{4 + 4.\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} - 1}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+3}}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^{2n+3}}}$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 4 \;\; ; u_1 = 7 \;\; ; \;\; u_2 = 5$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន

$u_{n+3} = 10u_{n+2} - 31u_{n+1} + 30u_n$

ដែល $n = 0 \; ; 1 \; ; 2 \; ; 3 \; ; \ldots$ ។

ក.ចូរកំនត់គ្រប់គូចំនួនពិត $(r \;\; ; \;\; \alpha \;\; ; \;\; \beta)$ ដើម្បីឱ្យចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$

គេបាន $u_{n+3} + \alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} = r\left(u_{n+2} + \alpha\, u_{n+1} + \beta\, u_n\right)$

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំនត់គ្រប់គូចំនួនពិត $(r \;\; ; \;\; \alpha \;\; ; \;\; \beta)$:

គេមាន $u_{n+3} + \alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} = r\left(u_{n+2} + \alpha\, u_{n+1} + \beta\, u_n\right)$ (*)

តាមទំនាក់ទំនង (*) គេអាចសរសេរ :

$u_{n+3} = (r-\alpha)u_{n+2} + (\alpha\, r - \beta)\, u_{n+1} + \beta\, r \;\; (i)$

តាមបំរាប់ $u_{n+3} = 10u_{n+2} - 31u_{n+1} + 30u_n \;\; (ii)$

ដោយប្រៀបធៀប (i) និង (ii) គេបាន :

$$\begin{cases} r-\alpha=10 \\ \alpha\, r-\beta=-31 \\ \beta r\ =30 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} \alpha=r-10 & (1) \\ \alpha\, r-\beta=-31 & (2) \\ \beta=\dfrac{30}{r} & (3) \end{cases}$$

យកសមីការ $(1)\&(3)$ ជំនួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$$r(r-10)-\frac{30}{r}=-31$$

$$r^3-10r^2+31r-30=0$$

$$(r-2)(r-3)(r-5)=0$$

គេទាញឫស $r=\{\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ \}$ ។

យក $r=\{\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ \}$ ជំនួសក្នុងសមីការ $(1)\&(3)$ គេបាន ៖

$\alpha=\{\ -8\ ;\ -7\ ;\ -5\ \}$ និង $\beta=\{\ 15\ ;\ 10\ ;\ 6\ \}$ ។

ដូចនេះ $(r\,;\alpha\,;\beta\ )=\{\ (2;-8;15);(3;-7;10);(5;-5;6)\}$

ខ.គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យក $(r\,;\alpha\,;\beta\ )=\{\ (2;-8;15);(3;-7;10);(5;-5;6)\}$

ជួសក្នុទំនាក់ទំនង $(*)$ គេបាន ៖

$$\begin{cases} u_{n+3}-8u_{n+2}+15u_{n+1}=2(u_{n+2}-8u_{n+1}+15u_n) & (a) \\ u_{n+3}-7u_{n+2}+10u_{n+1}=3(u_{n+2}-7u_{n+1}+10u_n) & (b) \\ u_{n+3}-5u_{n+2}+6u_{n+1}=5(u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n) & (c) \end{cases}$$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $\begin{cases} x_n = u_{n+2} - 8u_{n+1} + 15u_n \\ y_n = u_{n+2} - 7u_{n+1} + 10u_n \\ z_n = u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

យោងតាមសមីការ (a) ; (b) & (c) គេបាន :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ y_{n+1} = 3y_n \\ z_{n+1} = 5z_n \end{cases}$$

នាំឱ្យ (x_n) ; (y_n) ; (z_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន

ផលធៀបរួមរៀងគ្នា $q_x = 2$; $q_y = 3$; $q_z = 5$

និងតួ $\begin{cases} x_0 = u_2 - 8u_1 + 15u_0 = 5 - 56 + 60 = 9 \\ y_0 = u_2 - 7u_1 + 10u_0 = 5 - 49 + 40 = -4 \\ z_0 = u_2 - 5u_1 + 6u_0 = 5 - 35 + 24 = -6 \end{cases}$

តាមរូបមន្តគេបាន $\begin{cases} x_n = x_0 \times q_x{}^n = 9 \times 2^n \\ y_n = y_0 \times q_y{}^n = -4 \times 3^n \\ z_n = z_0 \times q_z{}^x = -6 \times 5^n \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} u_{n+2} - 8u_{n+1} + 15u_n = 9 \times 2^n \\ u_{n+2} - 7u_{n+1} + 10u_n = -4 \times 3^n \\ z_n = u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 6 \times 5^n \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $u_n = 3.2^n + 2.3^n - 5^n$

លំហាត់ទី៣O

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = u_1 = 1$; $u_2 = 2$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 12u_{n+1} + 8u_n$$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n :

ទំនាក់ទំនង $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 12u_{n+1} + 8u_n$ អាចសរសេរ :

$$u_{n+3} - 4u_{n+2} + 4u_{n+1} = 2(u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n) \quad (i)$$

តាង $v_n = u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n$

គេបាន $v_{n+1} = u_{n+3} - 4u_{n+2} + 4u_{n+1}$

តាម (i) គេទាញ $v_{n+1} = 2v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

ផលធៀបរួម $q = 2$ និង តួ $v_0 = u_2 - 4u_1 + 4u_0 = 2$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n = 2^{n+1}$

គេទាញ $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 2^{n+1}$

ឬ $(u_{n+2}-2u_{n+1})-2(u_{n+1}-2u_n)=2^{n+1}$

ឬ $\frac{u_{n+2}-2u_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{u_{n+1}-2u_n}{2^n}=1 \quad (ii)$

តាង $w_n=\frac{u_{n+1}-2u_n}{2^n}$ នោះ $w_{n+1}=\frac{u_{n+2}-2u_{n+1}}{2^{n+1}}$

តាម (ii) គេទាញ $w_{n+1}-w_n=1$ ថេរ នោះ (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

មានផលសងរួម $d=1$ និងតួ $w_0=\frac{u_1-2u_0}{2^0}=1-2=-1$

គេបាន $w_n=w_o+nd=n-1$

គេទាញ $\frac{u_{n+1}-2u_n}{2^n}=n-1$

ឬ $\frac{u_{n+1}}{2^n}-\frac{u_n}{2^{n-1}}=n-1$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{u_{k+1}}{2^k}-\frac{u_k}{2^{k-1}}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}(k-1)$

$$\frac{u_n}{2^{n-1}}-2u_0=-1+\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$\frac{u_n}{2^{n-1}}-2=\frac{n^2-3n}{2}$$

ដូចនេះ $u_n=(n^2-3n+4).2^{n-2}$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ v_0 = 2 \end{cases} \text{ និង } \begin{cases} u_{n+1} = u_n{}^3 - 6u_n v_n{}^2 - 6v_n{}^3 \\ v_{n+1} = 3u_n{}^2 v_n + 9u_n v_n{}^2 + 7v_n{}^3 \end{cases}$$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ចូរស្រាយថា $u_n + v_n > 0$ និង $u_n + 2v_n > 0$

ខ. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន :

$$u_{n+1} + r\,v_{n+1} = (u_n + r\,v_n)^3$$

គ. ចូរគណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ស្រាយថា $u_n + v_n > 0$

គេមាន $u_0 + v_0 = 4 + 2 = 6 > 0$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $u_k + v_k > 0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ គឺ $u_{k+1} + v_{k+1} > 0$ ពិត

គេមាន $u_{k+1} + v_{k+1} = u_n{}^3 + 3u_n{}^2 v_n + 3u_n v_n{}^2 + v_n{}^3$

$$u_{k+1} + v_{k+1} > (u_k + v_k)^3 > 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $u_n + v_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ស្រាយថា $u_n + 2v_n > 0$:

គេមាន $u_0 + 2v_0 = 4 + 4 = 8 > 0$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $u_k + 2v_k > 0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k + 1$ គឺ $u_{k+1} + 2v_{k+1} > 0$ ពិត

គេមាន $u_{k+1} + 2v_{k+1} = u_n{}^3 + 6u_n{}^2v_n + 12u_nv_n{}^2 + 8v_n{}^3$

$$u_{k+1} + 2v_{k+1} > \left(u_k + 2v_k\right)^3 > 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $u_n + 2v_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. កំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន :

$$u_{n+1} + r\,v_{n+1} = \left(u_n + r\,v_n\right)^3 \quad (*)$$

ដោយ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n{}^3 - 6u_nv_n{}^2 - 6v_n{}^3 \\ v_{n+1} = 3u_n{}^2v_n + 9u_nv_n{}^2 + 7v_n{}^3 \end{cases}$ គេបាន :

$$u_{n+1} + r\,v_{n+1} = u_n{}^3 + 3ru_n{}^2v_n + (9r-6)u_nv_n{}^2 + (7r-6)v_n{}^3 (i)$$

ហើយ $\left(u_n + r\,v_n\right)^3 = u_n{}^3 + 3ru_n{}^2v_n + 3r^2u_nv_n{}^2 + r^3v_n{}^3 \ (ii)$

ដោយប្រៀបធៀបទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន :

$$\begin{cases} 3r^2 = 9r - 6 \\ r^3 = 7r - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 - 3r + 2 = 0 \\ r^3 - 7r + 6 = 0 \end{cases}$$

ដូចនេះ $r_1 = 1$; $r_2 = 2$ ។

គ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

យកតម្លៃ $r_1 = 1$; $r_2 = 2$ ជួសក្នុង (*) គេបាន :

$$\begin{cases} u_{n+1} + v_{n+1} = (u_n + v_n)^3 \\ u_{n+1} + 2v_{n+1} = (u_n + 2v_n)^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(u_{n+1} + v_{n+1}) = 3\ln(u_n + v_n) \\ \ln(u_{n+1} + 2v_{n+1}) = 3\ln(u_n + 2v_n) \end{cases}$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(u_n + v_n)\}$ និង $\{\ln(u_n + 2v_n)\}$

សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q = 3$ ដូចគ្នា ។

គេបាន $\begin{cases} \ln(u_n + v_n) = 3^n \ln(u_0 + v_0) = 3^n \ln 6 \\ \ln(u_n + 2v_n) = 3^n \ln(u_0 + 2v_0) = 3^n \ln 8 \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} u_n + v_n = 6^{3^n} \\ u_n + 2v_n = 8^{3^n} \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបាន :

$u_n = 2\times 6^{3^n} - 8^{3^n}$ និង $v_n = 8^{3^n} - 6^{3^n}$ ។

លំហាត់ទី៣២

ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = \frac{21}{16}$ និងចំពោះ $n \ge 2 : 2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}$

គេយក m ជាចំនួនគត់មួយដែល $m \ge 2$ ។ ចូរបង្ហាញថាចំពោះ $n \le m$

យើងបាន $\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2 - 1}{m - n + 1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2 - 1}{m - n + 1}$

គេមាន $2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}$

នាំឱ្យ $2^n a_n - 3.2^{n-1} a_{n-1} = \frac{3}{4}$

ឬ $\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} a_{n-1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3^n}$

គេបាន $\sum_{k=2}^{n} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^k a_k - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} a_{k-1}\right] = \frac{3}{4} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{3^k}\right)$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n - \frac{2}{3}a_1 = \frac{3}{4}\times\frac{1}{3^2}.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n - \frac{2}{3}.\frac{21}{16} = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

គេទាញបាន $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2^{n+3}}$ ឬ $a_n + \frac{3}{2^{n+3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

តាង $P = \left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)$

គេបាន $P = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)$

គេមាន $\frac{m^2-1}{m-n+1} = \frac{(m+1)(m-1)}{(m+1)-n} = \frac{m-1}{1-\frac{n}{m+1}}$

ដើម្បីស្រាយឱ្យឃើញថា $P < \frac{m^2-1}{m-n+1}$

យើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថា $(1-\frac{n}{m+1})P < m-1$

តាមវិសមភាព **Bernoully** គេមាន

$$1-\frac{n}{m+1}<(1-\frac{1}{m+1})^{n}=\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right)^{n}$$

នាំឱ្យ $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^{m}<\left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right)^{mn}=\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{m})^{m}}\right]^{n}$

ចំពោះគ្រប់ $m\geq 2$ តាមទ្វេធាញូតុន គេមាន :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=1+\frac{1}{m}C_{m}^{1}+\frac{1}{m^{2}}C_{m}^{2}+....+\frac{1}{m^{m}}C_{m}^{m}$$

នោះ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\geq 1+\frac{1}{m}C_{m}^{1}+\frac{1}{m^{2}}C_{m}^{2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2m}\geq\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$

គេទាញបាន $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^{m}<\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$ ឬ $1-\frac{n}{m+1}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}$

គេទាញ $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)P<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}P$

តែ $P=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)$

គេបាន $(1-\frac{n}{m+1})P<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}(m-1)}\right)$

ឧបមាថា $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}(m-1)}\right)<m-1$ ពិត

ដោយតាង $u=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}$ នោះ $u(m-u^{m-1})<m-1$

សមមូល $mu-u^{m}-m+1<0$

$$m(u-1)-(u^{m}-1)<0$$

$$(u-1)[m-(u^{m-1}+....+u+1)]<0$$

ដោយ $m\geq n$ & $m\geq 2$ នោះ $0<u=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}<1$

នាំឱ្យ $(u-1)[m-(u^{m-1}+....+u+1)]<0$ ពិត

ដូចនេះ $\left(a_n+\frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<\frac{m^2-1}{m-n+1}$

លំហាត់ទី៣៣

គេកំណត់ចំនួន $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ដូចខាងក្រោម :

$$a_0 = \frac{1}{2}; a_{k+1} = a_k + \frac{{a_k}^2}{n} \quad (n > 1, k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

ចូរបង្ហាញថា $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$

គេមាន $a_{k+1} = a_k + \frac{{a_k}^2}{n} = \frac{a_k(n + a_k)}{n}$

គេបាន $\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{n}{a_k(a_k + n)} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + n}$

ឬ $\frac{1}{a_k + n} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}$

ហេតុនេះ $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{a_n}$ (*)

គេមាន $a_0 = \frac{1}{2} > 0$ ពិត ។ ឧបមាថា $a_k > 0$ ពិត

តាម $a_{k+1} = a_k + \frac{{a_k}^2}{n}$ គេទាញបាន $a_{k+1} > 0$ ពិត

ដូចនេះ $a_k > 0$ នោះ $a_k + n > n$ ឬ $\frac{1}{a_k + n} < \frac{1}{n}$ $, \forall n > 1$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{(n)}=\frac{n}{n}=1$

តាម $(*)$ គេទាញបាន $2-\frac{1}{a_n}<1$ នាំឱ្យ $a_n<1$ (i)

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $a_n<1$ នោះ $a_k<1$ ឬ $a_k+n<n+1$

ឬ $\frac{1}{a_k+n}>\frac{1}{n+1}$ គ្រប់ $k=0,1,2,....,n-1$ ។

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

ដោយពិនិត្យឃើញថាគ្រប់ $n>1$ គេមាន $\frac{n}{n+1}-\frac{n-2}{n-1}=\frac{2}{n^2-1}>0$

នោះគេទាញបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}>\frac{n}{n+1}>\frac{n-2}{n-1}$

តាម $(*)$ គេទាញបាន $2-\frac{1}{a_n}>\frac{n-2}{n-1}$

ឬ $\frac{1}{a_n}<2-\frac{n-2}{n-1}=\frac{n}{n-1}$ នោះ $a_n>\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}$ (ii)

តាម (i) & (ii) គេទាញបាន $1-\frac{1}{n}<a_n<1$ ។

ដូចនេះ $1-\frac{1}{n}<a_n<1$

លំហាត់ទី៣៤

គេឱ្យម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}$ និង $\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

បង្ហាញថាមានស្វ៊ីតចំនួនពិតពីរ $(\mathbf{u_n})$ និង $(\mathbf{v_n})$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$\forall \mathbf{n}\in \mathbf{IN}:\ \mathbf{A^n=u_n.I+v_n.A}$ ដែលគេនឹងបញ្ជាក់តួទូទៅ $\mathbf{u_n}$ និង $\mathbf{v_n}$

ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\forall \mathbf{n}\in \mathbf{IN}:\ \mathbf{A^n=u_n.I+v_n.A}$

គេមាន $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}=0.\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+1.\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}$$

គេបាន $\mathbf{A^1=u_1.I+v_1.A}$ ពិតចំពោះ $\mathbf{n=1}$ ដែល $\mathbf{u_1=0\ ,\ v_1=1}$ ។

$$\mathbf{A^2=A.A}=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&7&7\\7&11&7\\7&7&11\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^2}=\begin{bmatrix}-10&0&0\\0&-10&0\\0&0&-10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}21&7&7\\7&21&7\\7&7&21\end{bmatrix}=\mathbf{-10.I+7.A}$$

គេបាន $\mathbf{A^2=u_2.I+v_2.A}$ ពិតចំពោះ $\mathbf{n=2}$ ។

ឧបមាថាវាពិតចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n \in IN}$ គឺ $\mathbf{A^n = u_n.I + v_n.A}$

យើងនឹងស្រាយថា $\mathbf{A^{n+1} = u_{n+1}.I + v_{n+1}.A}$ ពិត ។

គេមាន $\mathbf{A^{n+1} = A.A^n = A.(u_n.I + v_n.A) = u_n.A.I + v_n.A^2}$

ដោយ $\mathbf{A.I = A}$ និង $\mathbf{A^2 = u_2.I + v_2.A}$

គេបាន $\mathbf{A^{n+1} = u_n.A + v_n(u_2.I + v_2.A)}$

$$\mathbf{A^{n+1} = u_2 v_n.I + (u_n + v_2 v_n).A}$$

$\mathbf{A^{n+1} = u_{n+1}.I + v_{n+1}.A}$ ពិត

ដែល $\mathbf{u_{n+1} = u_2 v_n = -10.v_n}$ និង $\mathbf{v_{n+1} = u_n + v_2 v_n = u_n + 7v_n}$

ដូចនេះ $\mathbf{\forall n \in IN :\ A^n = u_n.I + v_n.A}$

ដែល (u_n) និង (v_n) ជាស៊ីតចំនួនពិតពីរកំណត់ដោយ $u_1 = 0$, $v_1 = 1$

និង $u_{n+1} = -10.v_n$, $v_{n+1} = u_n + 7v_n$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

បញ្ជាក់តួទូទៅ $\mathbf{u_n}$ *និង* $\mathbf{v_n}$ *ជាអនុគមន៍នៃ* $\mathbf{n}$ *:*

គេមាន $\mathbf{u_{n+1} = -10.v_n}$, $\mathbf{v_{n+1} = u_n + 7v_n}$ គ្រប់ $\mathbf{n \in IN}$

តាម $\mathbf{v_{n+1} = u_n + 7v_n}$ គេបាន $\mathbf{v_{n+2} = u_{n+1} + 7v_{n+1}}$

តែ $\mathbf{u_{n+1} = -10v_n}$ នោះ $\mathbf{v_{n+2} = 7v_{n+1} - 10v_n}$

សមីការសម្គាល់នៃ $\mathbf{v_{n+2} = 7v_{n+1} - 10v_n}$ គឺ $\mathbf{r^2 = 7r - 10}$

ឬ $\mathbf{r^2 - 7r + 10 = 0}$ មានឫស $\mathbf{r_1 = 2}$, $\mathbf{r_2 = 5}$ ។

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $\begin{cases} a_n = v_{n+1} - 2v_n \\ b_n = v_{n+1} - 5v_n \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} \mathbf{a_{n+1} = v_{n+2} - 2v_{n+1} = 7v_{n+1} - 10v_n - 2v_{n+1} = 5a_n} \\ \mathbf{b_{n+1} = v_{n+2} - 5v_{n+1} = 7v_{n+1} - 10v_n - 5v_{n+1} = 2b_n} \end{cases}$

នាំឱ្យ $\mathbf{(a_n)}$ និង $\mathbf{(b_n)}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង **5** និង **2** រៀងគ្នា ។

គេបាន $\mathbf{a_n = a_1.5^{n-1}}$ និង $\mathbf{b_n = b_1.2^{n-1}}$ ។

ដោយ $\mathbf{a_1 = v_2 - 2v_1 = 7 - 2 = 5}$ និង $\mathbf{b_1 = v_2 - 5v_1 = 7 - 2 = 2}$

គេទាញ $\mathbf{a_n = 5.5^{n-1} = 5^n}$ និង $\mathbf{b_n = 2.2^{n-1} = 2^n}$ ។

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} \mathbf{v_{n+1} - 2v_n = 5^n} \\ \mathbf{v_{n+1} - 5v_n = 2^n} \end{cases}$

ដកសមីការពីរនេះគេបាន $\mathbf{3v_n = 5^n - 2^n}$ នាំឱ្យ $\mathbf{v_n = \dfrac{5^n - 2^n}{3}}$

ហើយ $\mathbf{u_{n+1} = -10v_n = -\dfrac{10}{3}(5^n - 2^n)}$

នាំឱ្យ $\mathbf{u_n = -\dfrac{10}{3}(5^{n-1} - 2^{n-1})}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{u_n = -\dfrac{10}{3}(5^{n-1} - 2^{n-1})}$ និង $\mathbf{v_n = \dfrac{5^n - 2^n}{3}}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស៊ីតដែលកំណត់ដោយ :

$x_0 = 3, x_1 = 4$ និង $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតួទូទៅ x_n :

គេមាន

$$x_0 = 3 = 0 + 3$$

$$x_1 = 4 = 1 + 3$$

$$x_2 = {x_0}^2 - x_1 = 9 - 4 = 5 = 2 + 3$$

ឧបមាថា $x_{n-1} = n + 2$, $x_n = n + 3$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $x_{n+1} = n + 4$

គេមាន $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$

$$= (n+2)^2 - n(n+3)$$

$$= n^2 + 4n + 4 - n^2 - 3n$$

$$= n + 4$$

ដូចនេះ $x_n = n + 3$ ។

លំហាត់ទី៣៦

ចូរគណនាផលបូក :

$$S_n = \frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + ... + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក S_n :

គេមាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+)!}$

តាង $a_k = \frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$

$$= \frac{k+2}{k![1+(k+1)+(k+1)(k+2)]}$$

$$= \frac{k+2}{k!(1+k+1+k^2+3k+2)}$$

$$= \frac{k+2}{k!(k+2)^2} = \frac{1}{k!(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+2)-1}{(k+2)!}$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}$$

ដូចនេះ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}$

លំហាត់ទី៣៧

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ គេឱ្យ :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

$$T_n = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n$$

$$U_n = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{3} + \frac{T_3}{4} + ... + \frac{T_n}{n+1}$$

ចូរកំណត់ដោយធ្វើដំណោះស្រាយ នូវចំនួនគត់ $0 < a, b, c, d < 1000\,000$

ដោយដឹងថា $T_{1988} = aS_{1989} - b$ និង $U_{1988} = cS_{1989} - d$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់ a , b , c , d

យើងនឹងស្រាយតាមកំណើនថាគ្រប់ $n \geq 2 : T_{n-1} = nS_n - n$

-ចំពោះ $n = 2 :\ T_1 = 2S_2 - 2 = 2(1 + \frac{1}{2}) - 2 = 1 = S_1$ ពិត

-ឧបមាថា $T_{n-1} = nS_n - n$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $T_n = (n+1)S_{n+1} - (n+1)$ ពិត

គេមាន $T_n = S_1 + S_2 + ... + S_{n-1} + S_n = T_{n-1} + S_n$

$$T_n = nS_n - n + S_n = (n+1)S_n - n$$

ដោយ $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{n+1}$ នោះ $S_n = S_{n+1} + \dfrac{1}{n+1}$

គេបាន $T_n=(n+1)(S_{n+1}+\frac{1}{n+1})-n=(n+1)S_{n+1}-(n+1)$ ពិត

ដូចនេះ $n\geq 2: T_{n-1}=nS_n-n$

យក $n=1989$ គេបាន $T_{1988}=1989\,S_{1989}-1989$

ដោយ $T_{1988}=aS_{1989}-b$ នោះគេទាញ $a=1989$, $b=1989$ ។

ហើយ $U_n=\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{3}+\frac{T_3}{4}+...+\frac{T_n}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{T_k}{k+1})$

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)S_{k+1}-(k+1)}{k+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(S_{k+1}-1)$$

$$=S_2+S_3+....+S_{n+1}-n$$

$$=T_{n+1}-S_1-n$$

$$=(n+1)S_{n+1}-(n+1)-1-n$$

$$=(n+1)S_{n+1}-2(n+1)$$

យក $n=1988$ គេបាន $U_{1988}=1989S_{1989}-3978$

ដោយ $U_{1988}=cS_{1989}-d$ នោះ $c=1989$, $d=3978$

ដូចនេះ $a=1989$, $b=1989$, $c=1989$, $d=3978$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1 = 1, a_2 = 5$ និង $a_{n+1} = \dfrac{a_n a_{n-1}}{\sqrt{a_n^{\ 2} + a_{n-1}^2 + 1}}\ \forall n \geq 2$

ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $a_{n+1} = \dfrac{a_n a_{n-1}}{\sqrt{a_n^{\ 2} + a_{n-1}^2 + 1}}\ \forall n \geq 2$

គេបាន

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{a_n^{\ 2} + a_{n-1}^2 + 1}{a_n^{\ 2} a_{n-1}^2}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{1}{a_n^{\ 2}} + \frac{1}{a_{n-1}^2} + \frac{1}{a_n^{\ 2} a_{n-1}^2}$$

$$1 + \frac{1}{a_{n+1}^2} = (1 + \frac{1}{a_n^{\ 2}}) + \frac{1}{a_{n-1}^2}(1 + \frac{1}{a_n^{\ 2}})$$

$$1 + \frac{1}{a_{n+1}^2} = (1 + \frac{1}{a_n^2})(1 + \frac{1}{a_{n-1}^2})$$

ឬ $1 + \dfrac{1}{a_{n+2}^2} = (1 + \dfrac{1}{a_n^2})(1 + \dfrac{1}{a_{n+1}^2})$ (*)

តាង $b_n = \ln(1 + \dfrac{1}{a_n^{\ 2}})$ នោះ $b_{n+1} = \ln(1 + \dfrac{1}{a_{n+1}^2})$

ហើយ $b_{n+2}=\ln(1+\frac{1}{a_{n+2}^2})$ (**)

យក (*) ជំនួសក្នុង (**) គេទទួលបាន $b_{n+2}=b_{n+1}+b_n$

សមីការសម្គាល់ $q^2-q-1=0$ មានឫស $q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

គេបាន $b_n=\alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+\beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ ដែល α,β កំណត់ដូចខាងក្រោម :

ចំពោះ $n=1$ $b_1=\alpha.\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\beta.\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ចំពោះ $n=2: b_2=\alpha\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\beta\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

ដោយ $b_1=\ln(1+\frac{1}{a_1^2})=\ln 2$ និង $b_2=\ln(1+\frac{1}{a_2^2})=\ln\frac{26}{25}$

គេបាន $\begin{cases}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta=\ln 2\\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\beta=\ln\frac{26}{25}\end{cases}$

គេទាញ $\alpha=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2\sqrt{13}}{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{100}{3}\right)$

និង $\beta=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2\sqrt{13}}{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{100}{3}\right)$

ហើយ $b_n=\ln(1+\frac{1}{a_n^2})$ គេទាញ $a_n=\frac{1}{\sqrt{e^{b_n}-1}}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{1+2^{1-2x}}$

ចូរគណនា $S=f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+...+f(\frac{n-1}{n})$

ដំណោះស្រាយ

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយថា បើ $p+q=1$ នោះ $f(p)+f(q)=1$

គេមាន $f(p)=\frac{1}{1+2^{1-2p}}$; $f(q)=\frac{1}{1+2^{1-2q}}$

$$f(p)+f(q)=\frac{1}{1+2^{1-2p}}+\frac{1}{1+2^{1-2q}}$$

$$=\frac{2+2^{1-2p}+2^{1-2q}}{(1+2^{1-2p})(1+2^{1-2q})}$$

$$=\frac{2+2^{1-2p}+2^{1-2q}}{1+2^{1-2p}+2^{1-2q}+2^{2-2p-2q}}$$

បើ $p+q=1$ នោះ $2-2p-2q=2-2(p+q)=0$

$$f(p)+f(q)=\frac{2+2^{1-2p}+2^{1-2q}}{2+2^{1-2p}+2^{1-2q}}=1$$

គេមាន $S=f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+...+f(\frac{n-1}{n})\quad(1)$

ឬ $S=f(\frac{n-1}{n})+f(\frac{n-2}{n})+...+f(\frac{1}{n})\quad(2)$

បូកសមីការ **(1)** និង **(2)** គេបាន :

$$2S = [f(\frac{1}{n}) + f(\frac{n-1}{n})] + ... + [f(\frac{n-1}{n}) + f(\frac{1}{n})]$$

$$2S = \underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{(n-1)} = n - 1$$

ដូចនេះ $S = \dfrac{n-1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេមានស្ទីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$$a_n=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})....(1+\frac{1}{2^{2^n}})$$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

យក $q=\frac{1}{2}$ គេបាន :

$$a_n=(1+q)(1+q^2)......(1+q^{2^n})$$

ដោយប្រើសមភាព $x+y=\frac{x^2-y^2}{x-y}$ គេបាន :

$$a_n=\frac{1-q^2}{1-q}.\frac{1-q^4}{1-q^2}....\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q^{2^n}}$$

$$a_n=\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right]$$

កាលណា $n\to+\infty$ នោះ $\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$ ខិតជិតសូន្យ

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=2$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេមានស៊េរីអនន្តមួយ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2}{2^n}) = \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + ... + \frac{n^2}{2^n} + ...$

ចូរស្រាយថាស៊េរីខាងលើនេះជាស៊េរីបង្រួម ។

ដំណោះស្រាយ

ផលបូកដោយផ្នែករបស់ស៊េរីនេះគឺ $S_n = \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + ... + \frac{n^2}{2^n}$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(k) = ak^2 + bk + c$ ដែលគ្រប់ $k \in IN^*$ គេមាន :

$$\frac{k^2}{2^k} = \frac{f(k)}{2^k} - \frac{f(k+1)}{2^{k+1}}$$

ឬ $\frac{k^2}{2^k} = \frac{ak^2 + bk + c}{2^k} - \frac{a(k+1)^2 + b(k+1) + c}{2^{k+1}}$

ឬ $2k^2 = 2ak^2 + 2bk + 2c - ak^2 - 2ak - a - bk - b - c$

$$2k^2 = ak^2 + (b-2a)k + c - a - b$$

គេទាញ $a = 2$ ហើយ $b - 2a = 0 \Rightarrow b = 4$ និង $c = a + b = 6$

ហេតុនេះ $\frac{k^2}{2^k} = \frac{2k^2 + 4k + 6}{2^k} - \frac{2k^2 + 8k + 12}{2^{k+1}}$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{2k^2 + 4k + 6}{2^k} - \frac{2k^2 + 8k + 12}{2^{k+1}}) = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}\right) = 6$

ដូចនេះស៊េរីអនន្តខាងលើជាស៊េរីបង្រួម ។

លំហាត់ទី៤២

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេមានផលបូក :

$$S_n = \frac{5}{1.3.2^2} + \frac{7}{3.5.2^3} + \frac{9}{5.7.2^4} + ... + \frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}}$$

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យគេបានសមភាព

$$\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}} = \frac{a}{(2n-1).2^n} + \frac{b}{(2n+1).2^{n+1}}$$

ខ. គណនា S_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យគេបានសមភាព

$$\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}} = \frac{a}{(2n-1).2^n} + \frac{b}{(2n+1).2^{n+1}}$$

គេបាន $2n+3 = 2a(2n+1) + b(2n-1)$

$$2n+3 = (4a+2b)n + 2a - b$$

គេទាញ $\begin{cases} 4a+2b=2 \\ 2a-b=3 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a = 1\ ,\ b = -1$

ដូចនេះ $a = 1$ និង $b = -1$ ។

ខ. គណនា S_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

តាមសម្រាយខាងលើនេះចំពោះ $a = 1$ និង $b = -1$ គេបាន :

$$\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}}=\frac{1}{(2n-1).2^{n}}-\frac{1}{(2n+1).2^{n+1}}$$

ឬ $\dfrac{2p+3}{(2p-1)(2p+1)2^{p+1}}=\dfrac{1}{(2p-1)2^{p}}-\dfrac{1}{(2p+1)2^{p+1}}$

គេបាន $S_n=\sum_{p=1}^{n}\left[\dfrac{2p+3}{(2p-1)(2p+1).2^{p+1}}\right]$

$$=\sum_{p=1}^{n}\left[\frac{1}{(2p-1)2^{p}}-\frac{1}{(2p+1)2^{p+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(2n+1).2^{n+1}}$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{(2n+1).2^{n}}\right]$ ។

ហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\dfrac{1}{(2n+1).2^{n}}\right]=\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$$a_0 = 3 \text{ និង } a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right) a_n - \frac{1}{3^{2^n}}$$

ក. គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $a_{n+1} = (1 + \frac{1}{3^{2^n}})\, a_n - \frac{1}{3^{2^n}}$

$$a_{n+1} - 1 = (1 + \frac{1}{3^{2^n}})a_n - (1 + \frac{1}{3^{2^n}})$$

$$a_{n+1} - 1 = (1 + \frac{1}{3^{2^n}})(a_n - 1)$$

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = 1 + \frac{1}{3^{2^n}}$$

គេបាន $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1} - 1}{a_k - 1}\right) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3^{2^k}}\right)$

តាមសមភាព $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

ឬ $\alpha + \beta = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$

ដោយយក $\alpha = 1$ និង $\beta = 3^{2^k}$

គេបាន $1 + \dfrac{1}{3^{2^k}} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{3^{2^{k+1}}}}{1 - \dfrac{1}{3^{2^k}}}$

ហេតុនេះ $\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \dfrac{1}{3^{2^k}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{1 - \dfrac{1}{3^{2^{k+1}}}}{1 - \dfrac{1}{3^{2^k}}}\right)$

$$= \frac{1 - \dfrac{1}{3^{2^n}}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{2^n}}\right)$$

ហើយដោយ $\prod_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{a_{k+1} - 1}{a_k - 1}\right) = \dfrac{a_n - 1}{a_0 - 1} = \dfrac{a_n - 1}{2}$

គេទាញ $\dfrac{a_n - 1}{2} = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^{2^n}}\right)$ ឬ $a_n = 4 - \dfrac{3}{3^{2^n}}$

ដូចនេះ $a_n = 4 - \dfrac{3}{3^{2^n}}$

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

គេបាន $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(4 - \dfrac{3}{3^{2^n}}\right) = 4$ ព្រោះ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{3^{2^n}} = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 4$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គណនាផលបូក :

$$S_n = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + ... + n^2C_n^n$$ ដែល $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក :

$$S_n = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + ... + n^2C_n^n$$

តាមទ្វេធាញូតុន $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះគេបាន :

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + ... + nC_n^n x^{n-1}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង x គេបាន :

$$nx(1+x)^{n-1} = C_n^1 x + 2C_n^2 x^2 + 3C_n^3 x^3 + ... + nC_n^n x^n$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះគេបាន :

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = C_n^1 + 4C_n^2 x + ... + n^2C_n^n x^{n-1}$$

យក $x = 1$ ជួសក្នុងសមភាពនេះគេបាន :

$$n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2} = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + ... + n^2C_n^n$$

$$[2n + n(n-1)]2^{n-2} = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + ... + n^2C_n^n$$

ដូចនេះ $S_n = n(n+1).2^{n-2}$

លំហាត់ទី៤៦

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x+4}{x+1}$ ដែល $x \neq -1$ ។

គណនា $f_n[f[...f[f(x)]...]]$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $f_n[f[...f[f(x)]...]]$

តាង $a_1 = f(x)$

$$a_2 = f[f(x)] = f(a_1)$$

$$a_3 = f[f[f(x)]] = f(a_2)$$

$$----------------$$

$$----------------$$

$$a_n = f_n[f[....f[f(x)]....]] = f(a_{n-1})$$

គេបាន $a_{n+1} = f(a_n) = \dfrac{a_n+4}{a_n+1}$

ដូចនេះការគណនា $f_n[f[...f[f(x)]...]]$ គឺត្រូវកំណត់តួ a_n

នៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1 = f(x) = \dfrac{x+4}{x+1} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+4}{a_n+1}, n \geq 1 \end{cases}$

សមីការសម្គាល់នៃស្ទីតគឺ $r = \frac{r+4}{r+1}$

គេបាន $r^2 + r = r + 4$ នាំឱ្យ $r_1 = -2$, $r_2 = 2$

តាងស្ទីតជំនួយ $b_n = \frac{a_n - r_1}{a_n - r_2} = \frac{a_n + 2}{a_n - 2}$

គេបាន $b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + 2}{a_{n+1} - 2} = \frac{\frac{a_n + 4}{a_n + 1} + 2}{\frac{a_n + 4}{a_n + 1} - 2}$

$$b_{n+1} = \frac{3a_n + 6}{-a_n + 2} = -3.\frac{a_n + 2}{a_n - 2} = -3b_n$$

នាំឱ្យ (b_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = -3$

និងតួ $b_1 = \frac{a_1 + 2}{a_1 - 2} = \frac{x + 4 + 2x + 2}{x + 4 - 2x - 2} = -3.\frac{x+2}{x-2}$

តាមរូបមន្ត $b_n = b_1 \times q^{n-1} = \frac{x+2}{x-2} \times (-3)^n$

ដោយ $b_n = \frac{a_n + 2}{a_n - 2}$ គេទាញ $a_n = \frac{2(b+1)}{b-1}$

ដូចនេះ $a_n = \frac{2[(x+2)(-3)^n + x - 2]}{(x+2)(-3)^n - x + 2}$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេមានស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ និង

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x_n + \frac{1}{2}\sin a(1 - \tan a)y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\cos a(\cot a - 1)x_n + \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)y_n \end{cases}$$

ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ និង $n = 0, 1, 2, ...$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ តាង $u_n = x_n \cos a + y_n \sin a$ និង

$v_n = x_n \cos a - y_n \sin a$ ។

ចូរស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x_n + \frac{1}{2}\sin a(1 - \tan a)y_n$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos a$ គេបាន :

$$x_{n+1}\cos a=\frac{\cos a(\sin a+\cos a)}{2}x_n+\frac{\sin a(\cos a-\sin a)}{2}y_n \quad (1)$$

គេមាន :

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}\cos a(\cot a-1)x_n+\frac{1}{2}(\sin a+\cos a)y_n$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\sin a$ គេបាន :

$$y_{n+1}\sin a=\frac{\cos a(\cos a-\sin a)}{2}x_n+\frac{\sin a(\sin a+\cos a)}{2}y_n \quad (2)$$

បូកសមីការ (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$x_{n+1}\cos a+y_{n+1}\sin a=\cos a(x_n\cos a+y_n\sin a)$$

ដោយ $u_n=x_n\cos a+y_n\sin a$

គេទាញបាន $u_{n+1}=\cos a.u_n$ នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q_u=\cos a$ ។

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$x_{n+1}\cos a-y_{n+1}\sin a=\sin a(x_n\cos a-y_n\sin a)$$

ដោយ $v_n=x_n\cos a-y_n\sin a$

គេទាញបាន $v_{n+1}=\sin a.v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $q_v = \sin a$ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a

គេមាន $u_0 = x_0 \cos a + y_0 \sin a = \cos a$

គេបាន $u_n = u_0 \times {q_u}^n = \cos a.\cos^n a = \cos^{n+1} a$

ហើយ $v_0 = x_0 \cos a - y_0 \sin a = \cos a$

គេបាន $v_n = v_0 \times {q_v}^n = \cos a.\sin^n a$

ដូចនេះ $u_n = \cos^{n+1} a$, $v_n = \cos a \sin^n a$ ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a

ដោយ $u_n = x_n \cos a + y_n \sin a$

និង $v_n = x_n \cos a - y_n \sin a$

គេបាន $u_n + v_n = 2x_n \cos a$

គេទាញ $x_n = \dfrac{\cos^{n+1} a + \cos a \sin^n a}{2\cos a}$

$$x_n = \frac{\cos^n a + \sin^n a}{2} \quad ។$$

ហើយ $u_n - v_n = 2y_n \sin a$

គេទាញ $y_n = \dfrac{\cos^{n+1} a - \cos a \sin^n a}{2\sin a}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ :

$u_1 = \frac{7}{2}$ និង $u_{n+1} = {u_n}^2 + u_n - \frac{1}{4}$ គ្រប់ $n \geq 1$

បង្ហាញថាគេអាចកំណត់ចំនួនពិត a ដែល $u_{n+1} + a = (u_n + a)^2$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a

គេមាន $u_{n+1} = {u_n}^2 + u_n - \frac{1}{4}$ (1)

ហើយ $u_{n+1} + a = (u_n + a)^2$ (2)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន :

$${u_n}^2 + u_n - \frac{1}{4} + a = (u_n + a)^2$$

$${u_n}^2 + u_n - \frac{1}{4} + a = {u_n}^2 + 2au_n + a^2$$

$$(1 - 2a)u_n = a^2 - a + \frac{1}{4}$$

សមីការនេះពិតជានិច្ចចំពោះគ្រប់តម្លៃ n លុះត្រាតែ :

$$\begin{cases} 1-2a=0 \\ a^2-a+\frac{1}{4}=0 \end{cases}$$ នាំឱ្យ $a=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $a=\frac{1}{2}$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

ចំពោះ $a=\frac{1}{2}$ គេបាន $u_{n+1}+\frac{1}{2}=(u_n+\frac{1}{2})^2$

គេទាញ $\ln(u_{n+1}+\frac{1}{2})=2\ln(u_n+\frac{1}{2})$ (3)

តាង $v_n=\ln(u_n+\frac{1}{2})\Rightarrow v_{n+1}=\ln(u_{n+1}+\frac{1}{2})$

តាម (3) គេបាន $v_{n+1}=2v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានផលធៀបរួម $q=2$ និង $v_1=\ln(u_1+\frac{1}{2})=\ln 4$

គេបាន $v_n=v_1\times q^{n-1}=2^{n-1}\ln 4=2^n\ln 2=\ln 2^{2^n}$

ដោយ $v_n=\ln(u_n+\frac{1}{2})$ គេទាញ $u_n+\frac{1}{2}=2^{2^n}$

ដូចនេះ $v_n=2^{2^n}-\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \text{ , } a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \text{ , } n = 1 \text{ , } 2 \text{ , } 3 \text{ ,...} \end{cases}$$

គេតាងស្វ៊ីតចំនួនកុំផ្លិច $z_n = a_{n+1} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។

ខ. ចូរដាក់ $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក z_n ជាអនុគមន៍

នៃ n ។

គ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត a_n ។ តើ (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$

គេមាន $z_n = a_{n+1} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n$

គេបាន $z_{n+1} = a_{n+2} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_{n+1}$

ដោយ $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

គេបាន $z_{n+1} = a_{n+1} - a_n - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_{n+1}$

$$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}a_{n+1} - a_n$$

$$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a_{n+1} - \frac{2}{1+i\sqrt{3}}a_n)$$

$$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a_{n+1} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_n)$$

ដូចនេះ $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n$ ។

ខ. ដាក់ $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

គេបាន $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

ទាញរក z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

ដោយ $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n$ នោះ (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួន

កុំផ្លិចដែលមានរេសុង $q = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

និងតួ $z_1 = a_2 - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

តាមរូបមន្ត $z_n = z_1 \times q^{n-1} = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^n$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $z_n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$ ។

គ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត a_n

គេមាន $z_n = a_{n+1} - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_n$

គេបាន $z_n = (a_{n+1} - \frac{a_n}{2}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}a_n \quad (1)$

ដោយ $z_n = \cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3} \quad (2)$

តាមទំនាក់ទំនង $(1) \& (2)$ គេបាន $\frac{\sqrt{3}}{2}a_n = \sin\frac{n\pi}{3}$

ដូចនេះ $a_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$ ។

ហើយ (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបដែលមានខួប $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (z_n) កំណត់ដោយ :

$$z_1=\frac{2+\sqrt{3}+i}{2} \text{ និង } z_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}z_n+\frac{2-\sqrt{3}-i}{2}$$

ដែល $n=1\ ,\ 2\ ,3\ ,...$ ។

ក. តាង $w_n=z_n-1$ ។ បង្ហាញថា (w_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n=2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (w_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច :

គេបាន $w_{n+1}=z_{n+1}-1$

$$=\frac{\sqrt{3}+i}{2}z_n+\frac{2-\sqrt{3}-i}{2}-1$$

$$=\frac{\sqrt{3}+i}{2}(z_n-1)=\frac{\sqrt{3}+i}{2}w_n$$

ដូចនេះ (w_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

គណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេបាន $w_n = w_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $w_1 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

និង $q = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$

គេបាន $w_n = (\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6})^n$

ដូចនេះ $w_n = \cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}$ (រូបមន្តដឺម័រ)

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n = 2\cos\dfrac{n\pi}{12}(\cos\dfrac{n\pi}{12} + i\sin\dfrac{n\pi}{12})$

គេមាន $w_n = z_n - 1$ នោះ $z_n = 1 + w_n$

$$z_n = 1 + \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$$

$$= 2\cos^2\frac{n\pi}{12} + 2i.\sin\frac{n\pi}{12}\cos\frac{n\pi}{12}$$

$$= 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$$

ដូចនេះ $z_n = 2\cos\dfrac{n\pi}{12}(\cos\dfrac{n\pi}{12} + i\sin\dfrac{n\pi}{12})$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ដែល } n \geq 1$$

ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច :

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

គេបាន $z_{n+1} = u_{n+1} + i.v_{n+1}$

$$= \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} + i.\frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}(u_n + iv_n) = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1} z_n$$

ដូចនេះ(z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

គណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេបាន $z_n = z_1 \times q^{n-1}$

តែ $z_1 = u_1 + iv_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$

និង $q = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$

គេបាន $z_n = (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^n$

ដូចនេះ $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$ (រូបមន្តដឺម័រ)

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

ដោយ $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$

ដូចនេះ $u_n = \cos\frac{n\pi}{4}$ និង $v_n = \sin\frac{n\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី៥០

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{និង} \begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 - v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases} \quad \text{ដែល } n \geq 0$$

ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = z_n^2$ រួចទាញថា $z_n = z_0^{2^n}$ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $z_{n+1} = z_n^2$ រួចទាញថា $z_n = z_0^{2^n}$:

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

គេបាន $z_{n+1} = u_{n+1} + iv_{n+1}$

$$= u_n^2 - v_n^2 + 2iu_n v_n$$

$$= u_n^2 + 2iu_n v_n + (iv_n)^2$$

$$= (u_n + iv_n)^2$$

ដូចនេះ $z_{n+1} = z_n^2$ ។

ម្យ៉ាងទៀតបើ $n=0$ នោះ $z_1 = z_0^{\ 2}$

បើ $n=1$ នោះ $z_2 = z_1^{\ 2} = z_0^{\ 4}$

បើ $n=2$ នោះ $z_3 = z_2^{\ 2} = z_0^{\ 8}$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $z_k = z_0^{\ 2^k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $z_{k+1} = z_0^{\ 2^{k+1}}$

គេមាន $z_{k+1} = z_k^{\ 2}$ តែតាមការឧបមា $z_k = z_0^{\ 2^k}$

គេបាន $z_{k+1} = (z_0^{\ 2^k})^2 = z_0^{\ 2^{k+1}}$ ពិត ។

ដូចនេះ $z_n = z_0^{\ 2^n}$ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n = z_0^{\ 2^n}$ ដោយ $z_0 = u_0 + iv_0 = 1 + i\sqrt{3}$

$$= 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

គេបាន $Z_n = 2^{2^n}(\cos\frac{2^n\pi}{3} + i\sin\frac{2^n\pi}{3})$

ដូចនេះ $u_n = 2^{2^n}\cos\frac{2^n\pi}{3}$; $v_n = 2^{2^n}\sin\frac{2^n\pi}{3}$ ។

លំហាត់ទី៥១

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,4}}{4u_n^{\,3} + 6u_n^{\,2} + 4u_n + 1}$ គ្រប់ $n \in IN$

ចូរបង្ហាញថា $1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)^4$ គ្រប់ $n \in IN$

រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)^4$

យើងមាន $1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{4u_n^{\,3} + 6u_n^{\,2} + 4u_n + 1}{u_n^{\,4}}$

$$= \frac{u_n^{\,4} + 4u_n^{\,3} + 6u_n^{\,2} + 4u_n + 1}{u_n^{\,4}}$$

$$= \frac{(u_n + 1)^4}{u_n^{\,4}} = \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^4$$

ដូចនេះ $1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)^4$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$

គេបាន $\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=4\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$

តាង $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$ នាំឲ្យ $v_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

គេបាន $v_{n+1}=4v_n$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=4$

និងតួ $v_0=\ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)=\ln 2$ (ព្រោះ $u_0=1$) ។

តាមរូបមន្ត $v_n=v_0.q^n=4^n\ln 2$ ។

ដោយ $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$

គេទាញ $\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)=4^n\ln 2$ នាំឲ្យ $1+\frac{1}{u_n}=2^{4^n}$

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{2^{4^n}-1}$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2\ ,\forall n \geq 1 \end{cases}$

ចូរស្រាយថា $a_{n^2+1} = a_n \times a_{n+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a_{n^2+1} = a_n \times a_{n+1}$

គេមាន $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$

តាង $c_n = a_n - a_{n-1}$ គ្រប់ $n \geq 1$

គេបាន $c_{n+1} = a_{n+1} - a_n$

$$c_{n+1} = (2a_n - a_{n-1} + 2) - a_n = c_n + 2$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 2$

និងតួ $c_1 = a_1 - a_0 = 1 - 1 = 0$ ។

គេបាន $c_n = c_1 + (n-1)d = 2(n-1) = 2n - 2$

គេទាញ $a_n - a_{n-1} = 2n - 2$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_{k-1}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\left(k-1\right)$$

$$a_n - a_0 = 2\,\frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_n - 1 = n(n-1)$$

គេទាញ $a_n = n^2 - n + 1$ និង $a_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1$

ឬ $a_{n+1} = n^2 + n + 1$ និង $a_{n^2+1} = n^4 + n^2 + 1$

ដោយ $a_n a_{n+1} = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) = (n^2 + 1)^2 - n^2$

ឬ $a_n a_{n+1} = n^4 + n^2 + 1$ ។

ដូចនេះ $a_{n^2+1} = a_n \times a_{n+1}$ ។

លំហាត់ទី៥៣

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដោយ ÷

$a_0 = 1$ និង $a_{n+1} = a_0.a_1....a_n + 4$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$

យើងសង្កេតឃើញថាគ្រប់ $k \in IN$ គេមាន $a_k > 0$ ។

គេមាន $a_{n+1} = a_0.a_1....a_n + 4$

គេបាន $a_{n+2} = a_0.a_1.....a_{n+1} + 4$

$$a_{n+2} = (a_0.a_1.....a_n)(a_0.a_1.....a_n + 4) + 4$$

$$a_{n+2} = (a_0a_1.....a_n)^2 + 4(a_0.a_1....a_n) + 4$$

$$a_{n+2} = (a_0a_1.....a_n + 2)^2$$

គេទាញ $\sqrt{a_{n+2}} = a_0a_1.....a_n + 2$

$\sqrt{a_{n+2}} = (a_{n+1} - 4) + 2$ ឬ $a_{n+1} - \sqrt{a_{n+2}} = 2$

ដូចនេះ $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$ ។

លំហាត់ទី៥៤

ក.គណនា $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....+\frac{1}{(n-1)n}$ ដែល $n>2$

ខ.ដោយប្រើវិសមភាព $AM-GM$ នៃ $(n-1)$ ចំនួនខាងក្រោម ៖

$\frac{1}{1.2}\,;\,\frac{1}{2.3}\,;\,\frac{1}{3.4}\,;\,\frac{1}{(n-1)n}$ ចូរបង្ហាញថា $n^n<(n!)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....+\frac{1}{(n-1)n}=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)k}\right]$

គេមាន $\frac{1}{(k-1)\,k}=\frac{k-(k-1)}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

គេបាន $\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)k}\right]=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=1-\frac{1}{n}$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $n^n<(n!)^2$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ ៖

$$a_1+a_2+a_3+.....+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3......a_n}\quad;\forall a_k\ge 0$$

គេបាន ៖

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{(n-1)n}>(n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{1}{1.2}.\frac{1}{2.3}......\frac{1}{(n-1)n}}$$

$$1-\frac{1}{n} > (n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{1}{n!(n-1)!}}$$

$$\frac{n-1}{n} > (n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{1}{n!\,(n-1)!}}$$

$$\frac{1}{n} > \sqrt[(n-1)]{\frac{n}{(n!)^2}}$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} > \frac{n}{(n!)^2} \Rightarrow n^n < (n!)^2$$

ដូចនេះ $n^n < (n!)^2$ ។

លំហាត់ទី៥៥

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \quad , \ n \in IN^* \end{cases}$$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

គេបាន $\ln u_{n+1} = \frac{1}{2} \ln u_n$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $(\ln u_n)$ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្ត $\ln u_n = \ln u_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \ln 4 = \ln(4)^{\frac{1}{2^{n-1}}}$

ដូចនេះ $u_n = (4)^{\frac{1}{2^{n-1}}}$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n)កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \quad , n \in IN \end{cases}$$

ក.ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.គណនាផលគុណ $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times .... \times U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $U_0 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$

$$U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}} = 2\cos\frac{\pi}{8}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

យើងមាន $U_{p+1} = \sqrt{2+U_p}$ តែតាមការឧបមា $U_p = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+3}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{U_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times .... \times U_n$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ នាំឲ្យ $2\cos a = \frac{\sin 2a}{\sin a}$

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}(U_k) = \prod_{k=0}^{n}(2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}) = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

ដូចនេះ $P_n = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$$U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ និង } U_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_n^{\ 2}}}{2}} \quad , \forall n \in IN$$

គណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n ៖

យើងមាន $U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$U_1 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_0^{\ 2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}}}{2}} = \sin\frac{\pi}{8}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1} = \sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

យើងមាន $U_{p+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_p^{\ 2}}}{2}}$ ការឧបមា $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{p+2}}}}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2^{p+3}}}{2}} = \sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n{}^2 - 2 \quad , \forall n \in IN \quad , a > 2 \end{cases}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

បើ $n=0$ គេបាន $u_0 = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2} = a$ ពិត

ឧបមាវាពិតដល់តួទី k គឺ $u_k = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k} + \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ

$$u_{k+1}=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}$$

យើងមាន $u_{k+1}=u_k{}^2-2$

តែតាមការឧបមា $u_k=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k}+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k}$

យើងបាន $u_{k+1}=\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k}+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^k}\right]^2-2$

$$u_{k+1}=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}+2\times\frac{a^2-a^2+4}{4}-2$$

$$u_{k+1}=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^{k+1}}$$ ពិត

ដូចនេះ $u_n=\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2^n}$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេមាន

$6^2 - 5^2 = 11$, $56^2 - 45^2 = 1111$, $556^2 - 445^2 = 111111$

$5556^2 - 4445^2 = 11111111$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះផង

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ និងស្រាយបញ្ជាក់ ៖

គេមាន

$6^2 - 5^2 = 11$

$56^2 - 45^2 = 1111$

$556^2 - 445^2 = 111111$

$5556^2 - 4445^2 = 11111111$

តាមលំនាំដែលគេឲ្យយើងអាចសរសេររូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\boxed{\underbrace{555....556}_{(n)}{}^2 - \underbrace{444.....445}_{(n)}{}^2 = \underbrace{111.......111}_{(2n)}}$$

សម្រាយផ្ទៀងផ្ទាត់រូបមន្តនេះ ៖

តាង $T_n = \underbrace{555....556}_{(n)}{}^2 - \underbrace{444.....445}_{(n)}{}^2$

$$=\left(555.....555+1\right)^2-(444......444+1)^2$$

$$=\left(\frac{5}{9}(10^n-1)+1\right)^2-\left(\frac{4}{9}(10^n-1)+1\right)^2$$

$$=\left[\frac{5}{9}(10^n-1)+1+\frac{4}{9}(10^n-1)+1\right]\left[\ \frac{5}{9}(10^n-1)+1-\frac{4}{9}(10^n-1)-1\ \right]$$

$$=\left(\ 10^n+1\ \right)\left(\ \frac{10^n-1}{9}\ \right)=\frac{10^{2n}-1}{9}=\frac{\underbrace{999.........999}_{(2n)}}{9}$$

$T_n=\underbrace{111..........111}_{(2n)}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\boxed{\underbrace{555....556}_{(n)}{}^2-\underbrace{444.....445}_{(n)}{}^2=\underbrace{111.......111}_{(2n)}}$ ។

លំហាត់ទី៦០

គេឲ្យ (a_n)ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល $a_1 = \frac{1}{2}$

និងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n យើងមាន $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n យើងមាន ៖

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_n < 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_n < 1$

យើងមាន $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$

តាង $b_n = \frac{1}{a_n}$ នោះទំនាក់ទំនងដែលឲ្យក្លាយទៅជា ៖

$$b_{n+1} = b_n^2 - b_n + 1$$

គេទាញ $b_{n+1} - 1 = b_n^2 - b_n$

$$b_{n+1} - 1 = b_n\,(b_n - 1)$$

$$\frac{1}{b_{n+1} - 1} = \frac{1}{b_n(b_n - 1)} = \frac{1}{b_n - 1} - \frac{1}{b_n}$$

គេទាញ $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_n - 1} - \frac{1}{b_{n+1} - 1}$

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + ... + \frac{1}{b_n}$$

$$= (\frac{1}{b_1 - 1} - \frac{1}{b_2 - 1}) + (\frac{1}{b_2 - 1} - \frac{1}{b_3 - 1}) + ... + (\frac{1}{b_n - 1} - \frac{1}{b_{n+1} - 1})$$

$$= \frac{1}{b_1 - 1} - \frac{1}{b_{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{b_{n+1} - 1} < 1$$

ពីព្រោះ $b_1 = \frac{1}{a_1} = 2$ ។

ដូចនេះ $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n < 1$ ។

លំហាត់ទី៦១

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ $U_n = \sqrt{2}^n.\sin\frac{n\pi}{4}$

ដែល $n \in IN^*$ ។

ក_ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

ខ_ទាញឲ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គ_គណនាផលបូក ៖

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots\dots + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

តាមរូបមន្ត $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

យើងបាន ៖

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \sqrt{2}\cos(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}(\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{n\pi}{4}) = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}}$ ។

ខ_ទាញឲ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

យើងមាន $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

នាំឲ្យ $\sin\frac{n\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\sqrt{2})^n$

គេបាន $(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4} = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

គ_គណនាផលបូក $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots\dots + U_n$

យើងបាន

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{2})^k \cos\frac{k\pi}{4} - (\sqrt{2})^{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1 - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេឲ្យ (x_n) និង (y_n) ជាស៊្វីតចំនួនពិតកំនត់លើ IN

ដោយ $x_0 = 5 , y_0 = 1$ និងទំនាក់ទំនងកំនើន ៖

$x_{n+1} = x_n^{\,3} + 3x_n y_n^{\,2}$ និង $y_{n+1} = 3x_n^{\,2} y_n + y_n^{\,3}$ គ្រប់ $n \in IN$

ចូរគណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $x_{n+1} = x_n^{\,3} + 3x_n y_n^{\,2}$ (1)

និង $y_{n+1} = 3x_n^{\,2} y_n + y_n^{\,3}$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$x_{n+1} + y_{n+1} = (x_n + y_n)^3$$

$$\ln(x_{n+1} + y_{n+1}) = 3.\ln(x_n + y_n)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{ \ln(x_n + y_n) \}$ ជាស៊្វីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q = 3$ និងតួដំបូង $\ln(x_0 + y_0) = \ln 6$ ។

គេបាន $\ln(x_n + y_n) = 3^n \ln 6$

គេទាញ $x_n + y_n = 6^{3^n}$ (3)

ដកកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$x_{n+1} - y_{n+1} = (x_n - y_n)^3$$
$$\ln(x_{n+1} - y_{n+1}) = 3.\ln(x_n - y_n)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{ \ln(x_n - y_n) \}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q = 3$ និងតួដំបូង $\ln(x_0 - y_0) = \ln 4$ ។

គេបាន $\ln(x_n - y_n) = 3^n \ln 4$

គេទាញ $x_n - y_n = 4^{3^n}$ (4)

បូកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $2x_n = 6^{3^n} + 4^{3^n}$

គេទាញ $x_n = \dfrac{6^{3^n} + 4^{3^n}}{2}$ ។

ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $2y_n = 6^{3^n} - 4^{3^n}$

គេទាញ $y_n = \dfrac{6^{3^n} - 4^{3^n}}{2}$ ។

ដូចនេះ $x_n = \dfrac{6^{3^n} + 4^{3^n}}{2}$ និង $y_n = \dfrac{6^{3^n} - 4^{3^n}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គណនាផលបូក $S=\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^{\,3}}{1-3x_i+3x_i^{\,2}}$ ដែល $x_i=\frac{i}{101}$; $i=1,2,3,...$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S=\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^{\,3}}{1-3x_i+3x_i^{\,2}}$

យើងមាន $1-3x+3x^2=x^3+(1-x)^3=x^3-(x-1)^3$

តាង $f(x)=\frac{x^3}{1-3x+3x^2}=\frac{x^3}{x^3+(1-x)^3}$

គេបាន $f(x_i)=\frac{x_i^{\,3}}{x_i^{\,3}+(1-x_i)^3}$

ហើយ $f(1-x_i)=\frac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3+x_i^{\,3}}$

គេបាន $f(x_i)+f(1-x_i)=\frac{x_i^{\,3}}{x_i^{\,3}+(1-x_i)^3}+\frac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3+x_i^{\,3}}=1$

គេទាញ $f(x_i)=1-f(1-x_i)$

ដោយ $x_i=\frac{i}{101}$ នោះ $1-x_i=1-\frac{i}{101}=\frac{101-i}{101}$

គេបាន $S=\sum_{i=0}^{101}f(x_i)=\sum_{i=0}^{101}f\left(\frac{i}{101}\right)=\sum_{i=0}^{101}\left[1-f(\frac{101-i}{101})\right]$

$S=102-\sum_{i=0}^{101}f\left(\frac{101-i}{101}\right)=102-S$ គេទាញ $S=\frac{102}{2}=51$ ។

លំហាត់ទី៦៤

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន :

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}$$

តាង $T=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.4}+.....+\frac{1}{(2n-1)2n}$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+....+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n})$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{2n}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{2n})$$

$$T=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{2n}-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n})$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....+\frac{1}{2n}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}$

លំហាត់ទី៦៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត :

$$a_n = \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \ ; n \geq 1$$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+....+\frac{1}{a_{20}}$ ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+....+\frac{1}{a_{20}}$ ជាចំនួនគត់

យើងមាន $a_n = \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \ ; n \geq 1$

គេបាន $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}}$

$$= \frac{n}{4}\left[\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} - \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{2n^2+2n+1} - \sqrt{2n^2-2n+1}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{20}\left(\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt{2n^2-2n+1}\ \right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{13}-\sqrt{5})+....+(29-\sqrt{761})\right]$$

$$=\frac{1}{4}(-1+29)=7$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+....+\frac{1}{a_{20}}=7$ ជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី៦៦

គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1 ; a_2 ; ....; a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$a_1 = 0 ; |a_2| = |a_1 + 1| ; ...$ និង $|a_n| = |a_{n-1} + 1|$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$

យើងមាន $|a_n| = |a_{n-1} + 1|$

នាំឱ្យ $a_n{}^2 = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 1$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n+1}(a_k{}^2) = \sum_{k=1}^{n+1}(a_{k-1}^2 + 2a_{k-1} + 1) = \sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2 + 2a_k + 1)$

$$a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2) = \sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2) + 2\sum_{k=1}^{n}(a_k) + n$$

គេទាញ $\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\right) = \dfrac{a_{n+1}^2 - n}{2} \geq -\dfrac{n}{2}$

ដូចនេះ $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦៧

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(v_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ :

$v_0 = \sqrt{5}$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $v_{n+1} = 2v_n^{\ 2} - 1$; $\forall n \geq 0$

បង្ហាញថា $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{v_n^{\ 2} - 1}\ )^2$

រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{v_n^{\ 2} - 1}\ )^2$

តាង $w_n = v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1}$ ដោយ $v_{n+1} = 2v_n^{\ 2} - 1$; $\forall n \geq 0$

គេបាន
$$\begin{aligned} w_n &= 2v_n^{\ 2} - 1 + \sqrt{(2v_n^{\ 2} - 1)^2 - 1} \\ &= 2v_n^{\ 2} - 1 + \sqrt{4v_n^{\ 4} - 4v_n^{\ 2}} \\ &= v_n^{\ 2} + 2v_n\sqrt{v_n^{\ 2} - 1} + (v_n^{\ 2} - 1) \\ &= (v_n + \sqrt{v_n^{\ 2} - 1})^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{v_n^{\ 2} - 1}\ )^2$

គណនា v_n ជាអនុគមន៏នៃ n :

តាង $t_n = \ln(v_n + \sqrt{v_n^{\ 2} - 1})$

គេបាន $t_{n+1} = \ln(v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1})$

ដោយ $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{v_n^{\ 2} - 1}\ )^2$

គេទាញ $t_{n+1} = 2\ln(v_n + \sqrt{v_n^{\ 2} - 1}) = 2t_n$

នាំឱ្យ (t_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$

និងតួ $t_0 = \ln(\sqrt{5} + 2)$ ។

តាមរូបមន្ត $t_n = t_0 \times q^n = 2^n \ln(\sqrt{5} + 2) = \ln(\sqrt{5} + 2)^{2^n}$

ដោយ $t_n = \ln(v_n + \sqrt{v_n^{\ 2} - 1})$

គេទាញបាន $v_n + \sqrt{v_n^{\ 2} - 1} = (\sqrt{5} + 2)^{2^n}$ (1)

ដោយ $(v_n + \sqrt{v_n^{\ 2} - 1})(v_n - \sqrt{v_n^{\ 2} - 1}) = 1$

គេទាញ $v_n - \sqrt{v_n^{\ 2} - 1} = \dfrac{1}{v_n + \sqrt{v_n^{\ 2} - 1}}$

$$v_n - \sqrt{v_n^{\ 2} - 1} = \frac{1}{(\sqrt{5} + 2)^{2^n}} = (\sqrt{5} - 2)^{2^n} \quad (2)$$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$2v_n = (\sqrt{5} + 2)^{2^n} + (\sqrt{5} - 2)^{2^n}$$

ដូចនេះ $v_n = \dfrac{(\sqrt{5} + 2)^{2^n} + (\sqrt{5} - 2)^{2^n}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_k)_{k\in IN}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 9$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{k+1} = \sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p u_k{}^p\right)$

ដែល $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ។

ចូរគណនា u_k ជាអនុគមន៍នៃ k និង n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_k ជាអនុគមន៍នៃ k និង n :

យើងមាន $u_{k+1} = \sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p u_k{}^p\right)$

ដោយ $\sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p u_k{}^p\right) = -1 + \sum_{p=0}^{n}\left(C_n^p u_k{}^p\right) = -1 + (1+u_k)^p$

គេបាន $u_{k+1} = -1 + (1+u_k)^p$

គេទាញ $\ln(1+u_{k+1}) = p\ln(1+u_k)$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(1+u_k)\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

ផលធៀបរួម p និងតួដំបូង $\ln(1+u_o) = \ln 10$

គេបាន $\ln(1+u_k) = p^k \ln 10$ នាំឱ្យ $u_k = 10^{p^k} - 1$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 1$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+1} = 2u_n^{\ 2} + 4u_n + 1$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $u_{n+1} = 2u_n^{\ 2} + 4u_n + 1$

គុណអង្គទាំងពីរ នឹង 2 គេបាន :

$$2u_{n+1} = 4u_n^{\ 2} + 8u_n + 2$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង 2 គេបាន :

$$2(u_{n+1} + 1) = 4(u_n + 1)^2$$

តាង $v_n = \ln[2(u_n + 1)]$

គេបាន $v_{n+1} = \ln\left[2(u_{n+1} + 1)\right]$

$$v_{n+1} = \ln\left[4(u_n + 1)^2\right]$$

$$v_{n+1} = 2\ln\left[2(u_n + 1)\right]$$

នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 2$

និងតួ $v_0 = \ln\left[2(u_0 + 1)\right] = \ln(4)$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n = 2^n \ln 4 = \ln 2^{2^{n+1}}$

ដោយ $v_n = \ln\left[2(u_n + 1)\right]$

គេទាញ $2(u_n + 1) = 2^{2^{n+1}}$

ដូចនេះ $u_n = 2^{2^{n+1}-1} - 1$ ។

លំហាត់ទី៧០

គេឱ្យ $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3^k}\right) = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{3^3} + ... + \frac{n^2}{3^n}$

គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} S_n$

ដំណោះស្រាយ

គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3^k}\right) = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{3^3} + ... + \frac{n^2}{3^n}$$

តាង $t_k = \frac{k^2}{3^k}$ ចំពោះគ្រប់ $k \geq 1$

គេបាន $3t_{k+1} - t_k = \frac{(k+1)^2}{3^k} - \frac{k^2}{3^k} = \frac{2k+1}{3^k}$

យក $T_k = 3t_{k+1} - t_k = \frac{2k+1}{3^k}$

គេបាន $3T_{k+1} - T_k = \frac{2k+3}{3^k} - \frac{2k+1}{3^k} = \frac{2}{3^k}$

ឬ $3(3t_{k+2} - t_{k+1}) - (3t_{k+1} - t_k) = \frac{2}{3^k}$

ឬ $9t_{k+2} - 6t_{k+1} + t_k = \frac{2}{3^k}$

ដោយគេមាន :

$$9t_{k+2} - 6t_{k+1} + t_k = 9(t_{k+2} - t_{k+1}) + 3(t_{k+1} - t_k) + 4t_k$$

គេទាញ $t_k = \frac{1}{2}.\frac{1}{3^k} - \frac{9}{4}(t_{k+2} - t_{k+1}) - \frac{3}{4}(t_{k+1} - t_k)$

គេបាន $S_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\right) - \frac{9}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(t_{k+2} - t_{k+1}\right) - \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(t_{k+1} - t_k\right)$

$$= \frac{1}{6}.\frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{9}{4}(t_{n+2} - t_2) - \frac{3}{4}(t_{n+1} - t_1)$$

$$= \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{3^n}) - \frac{9}{4}t_{n+2} - \frac{3}{4}t_{n+1} + \frac{9}{4}t_2 + \frac{3}{4}t_1$$

ដោយ $t_k = \frac{k^2}{3^k}$

គេបាន $t_1 = \frac{1}{3}$; $t_2 = \frac{4}{9}$; $t_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$; $t_{n+2} = \frac{(n+2)^2}{3^{n+2}}$

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4.3^n} - \frac{9}{4}.\frac{(n+2)^2}{3^{n+2}} - \frac{3}{4}.\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} + \frac{9}{4}.\frac{4}{9} + \frac{3}{4}.\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}.\frac{n^2 + 3n + 3}{3^n}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 3n + 3}{3^n} = 0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៧១

គេឲ្យ $a_0 = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1} = \dfrac{a_n{}^2 - 5}{2(a_n+2)}$

ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n = \cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n = \cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $a_0 = \cot\dfrac{\pi}{24} - 2$

$$\cot\frac{\pi}{24} = \frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{24}} = \frac{2\cos^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

$$= \frac{1+\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \frac{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}$$
$$=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+8+4\sqrt{3}}{4}$$
$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

គេទាញ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

ហេតុនេះ $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិតចំពោះ $n=0$ ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$a_{k+1}=\cot\left(\frac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។

យើងមាន $a_{k+1}=\frac{a_k{}^2-5}{2(a_k+2)}$ ដោយ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$

នោះ $$a_{k+1}=\frac{\left[\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2\right]^2-5}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$$

$$a_{k+1}=\frac{\cot^2\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-4\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{\cot^2\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{2}\right)}-2$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\cot 2a=\frac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

គេបាន $a_{k+1}=\cot\left(\frac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។

ដូចនេះ $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ។

លំហាត់ទី៧២

គេឲ្យ $x_n = 2^{2^n} + 1$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1\ ,\ 2, 3, \dots$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{2^2}{x_3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{x_n} < \frac{1}{3}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{2^2}{x_3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{x_n} < \frac{1}{3}$

តាង $y_n = 2^{2^n} - 1$ គ្រប់ $n \ge 1$

គេបាន $y_{n+1} = 2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1)$

ឬ $y_{n+1} = y_n x_n$ ។

គេមាន $\frac{1}{y_n} - \frac{2}{y_{n+1}} = \frac{1}{y_n} - \frac{2}{x_n y_n} = \frac{x_n - 2}{x_n y_n}$

ដោយ $x_n - 2 = 2^{2^n} + 1 - 2 = 2^{2^n} - 1 = y_n$

គេទាញ $\frac{1}{y_n} - \frac{2}{y_{n+1}} = \frac{1}{x_n}$

នាំឲ្យ $\frac{2^{n-1}}{x_n} = \frac{2^n}{y_n} - \frac{2^{n+1}}{y_{n+1}}$

ចំពោះ $n = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \dots$ គេបាន ៖

$$\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{2^2}{x_3}+....+\frac{2^{n-1}}{x_n}=\frac{1}{y_1}-\frac{2^{n+1}}{y_{n+1}}<\frac{1}{y_1}$$

ដោយ $y_1 = 2^2 - 1 = 3$

ដូចនេះ $\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{2^2}{x_3}+....+\frac{2^{n-1}}{x_n}<\frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៧៣

គេឲ្យស្វ៊ីត $U_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ក_ចូរកំនត់ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ_ចូរបង្ហាញថា $U_1 \times U_2 \times U_3 \times ...... \times U_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\dfrac{\pi}{3.2^n}}$ ។

គ_គេពិនិត្យស្វ៊ីត $V_n = 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$ ។

ចូរគណនា V_n និង លីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_កំនត់ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $U_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$

យើងបាន $U_1 = \sqrt{3} = 2\cos\dfrac{\pi}{6}$

$$U_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2+U_1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{12}$$

$$U_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2+U_2} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{12}} = 2\cos\frac{\pi}{24}$$

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី $U_k = 2\cos\frac{\pi}{3.2^k}$ ។

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតដល់តួទី $(k+1)$គឺ ៖

$U_{k+1} = 2\cos\frac{\pi}{3.2^{k+1}}$ ពិត

យើងមាន ៖

$$U_{k+1} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}} = \sqrt{2+U_k}$$

ដោយតាមការសន្មតគេមាន $U_k = 2\cos\frac{\pi}{3.2^k}$

យើងបាន ៖

$U_{k+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{3.2^k}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{3.2^{k+1}}} = 2\cos\frac{\pi}{3.2^{k+1}}$ ពិត ។

ដូចនេះ $U_n = 2\cos\frac{\pi}{3.2^n}$ ។

ខ_បង្ហាញថា $U_1 \times U_2 \times U_3 \times ...... \times U_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\pi}{3.2^n}}$

យើងមាន $U_n = 2\cos\frac{\pi}{3.2^n} = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{3.2^n}}{\sin\frac{\pi}{3.2^n}}$

(រូបមន្ត $\sin 2a = 2\sin a\cos a$)

យើងបាន ៖

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}} \\ U_2 = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{12}} \\ ---------------- \\ U_n = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{3.2^n}}{\sin\frac{\pi}{3.2^n}} \end{cases}$$

ដូចនេះ $$U_1 \times U_2 \times U_3 \times \dots\dots \times U_n = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3.2^n}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\pi}{3.2^n}}$$ ។

គ_គណនា V_n និង លីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

យើងមាន $$V_n = 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\dots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$$

$$V_n = 2^n \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\dots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{(n-1)}}$$

$$V_n = 2^n \sqrt{2-U_{n-1}}$$

ដោយ $U_n = 2\cos\frac{\pi}{3.2^n}$ នោះ $U_{n-1} = 2\cos\frac{\pi}{3.2^{n-1}}$

យើងបាន ៖

$$V_n = 2^n\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{3.2^{n-1}}}$$

$$= 2^n\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{3.2^n}} = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3.2^n}$$

ដូចនេះ $V_n = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3.2^n}$ ។

ហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3.2^n} = \frac{2\pi}{3}$ ។

លំហាត់ទី៧៤

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 2$ ដែល $x \in IR$

ក_គេយក $U_1 = f(x)$ និង $U_{n+1} = f(U_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_n = f_n[\,f[.......f[f(x)].......]\,]$ ។

ខ_ស្រាយថាបើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$ ។

គ_គេតាង $V_n = U_n - \sqrt{{U_n}^2 - 4}$ គ្រប់ $n \in IN^*$ និង $x > 2$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $2V_{n+1} = {V_n}^2$ ។

ឃ_សន្មតថា $W_n = \ln V_n - \ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត W_n ។

ង_ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកអនុគមន៍ ៖

$F_n(x) = f_n[\,f[........f[\,f(x)\,].........]]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_បង្ហាញថា $U_n = f_n[\,f[.......f[f(x)].......]\,]$

យើងមាន $U_1 = f(x)$ ពិត (តាមសម្មតិកម្ម)

$$U_2 = f(U_1) = f[f(x)]$$ ពិត (ព្រោះ $U_{n+1} = f(U_n)$)

$$U_3 = f(U_2) = f[f[f(x)]]$$ ពិត

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ ៖

$U_k = f_k[f[.......f[f(x)].......]]$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$U_{k+1} = f_{k+1}[f[.......f[f(x)].......]]$ ពិត

យើងមាន

$$U_{k+1} = f(U_k) = f[\ f_k[f[........f[f(x)]......]]\ ]$$
$$= f_{k+1}[f[.......f[f(x)].......]]$$

ដូចនេះ $U_n = f_n[\ f[.......f[f(x)].......]\ ]$ ។

ខ-ស្រាយថាបើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$

យើងមាន $U_{n+1} = f(U_n) = U_n^{\,2} - 2$

បើ $x > 2$ នោះ $U_1 = f(x) = x^2 - 2 > 2$ ឬ $U_1 > 2$ ពិត

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k > 2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $U_{k+1} > 2$ ពិត

យើងមាន $U_{k+1} = U_k^{\,2} - 2$

ដោយ $U_k > 2$ នាំឲ្យ $U_k^{\,2} > 4$ ឬ $U_k^{\,2} - 2 > 4 - 2 = 2$

គេទាញ $U_{k+1} = U_k^{\,2} - 2 > 2$ ពិត ។

ដូចនេះ បើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$ ។

គ-បង្ហាញថា $2V_{n+1} = V_n^{\,2}$

យើងមាន $V_n = U_n - \sqrt{U_n^{\,2} - 4}$

យើងបាន $V_{n+1}=U_{n+1}-\sqrt{{U_{n+1}}^2-4}$ តែ $U_{n+1}={U_n}^2-2$

$$V_{n+1}={U_n}^2-\sqrt{({U_n}^2-2)^2-4}$$

$$V_{n+1}={U_n}^2-\sqrt{{U_n}^4-4{U_n}^2}$$

$$V_{n+1}={U_n}^2-U_n\sqrt{{U_n}^2-4}$$

$$2V_{n+1}=2{U_n}^2-2U_n\sqrt{{U_n}^2-4}$$

$$2V_{n+1}={U_n}^2-2U_n\sqrt{{U_n}^2-4}+(\sqrt{{U_n}^2-4})^2$$

$$2V_{n+1}=\left(U_n-\sqrt{{U_n}^2-4}\right)^2={V_n}^2$$

ដូចនេះ $2V_{n+1}={V_n}^2$ ។

ឃ_រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត W_n ។

គេមាន $W_n=\ln V_n-\ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

គេបាន $W_{n+1}=\ln V_{n+1}-\ln 2$ ដោយ $2V_{n+1}={V_n}^2$

$$W_{n+1}=\ln\frac{{V_n}^2}{2}-\ln 2=2\ln V_n-2\ln 2=2W_n$$

ដូចនេះ (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ ។

ង_រកអនុគមន៍ $F_n(x)=f_n\left[f\left[........f\left[f(x)\right]........\right]\right]$

ដោយ $U_n=f_n\left[f\left[.......f\left[f(x)\right].......\right]\right]$

គេទាញបាន $F_n(x)=U_n$ ។

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q=2$ ។

តាមរូបមន្ត $W_n = W_1 \times q^{n-1} = 2^{n-1}.W_1$

ដោយ $W_1 = \ln V_1 - \ln 2 = \ln\left(\frac{V_1}{2}\right)$

តែ $V_1 = U_1 - \sqrt{U_1^{\,2} - 4} = f(x) - \sqrt{f^2(x) - 4}$

$$V_1 = x^2 - 2 + \sqrt{(x^2-2)^2 - 4}$$

$$V_1 = x^2 - 2 - \sqrt{x^4 - 4x^2}$$

$$= x^2 - 2 - x\sqrt{x^2-4} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2-4})^2$$

គេបាន $W_1 = \ln\left[\frac{(x-\sqrt{x^2-4})^2}{4}\right] = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^2$

ហេតុនេះ $W_n = 2^{n-1}.\ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^2 = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ដោយ $W_n = \ln V_n - \ln 2 = \ln\left(\frac{V_n}{2}\right)$

គេទាញ $\ln\left(\frac{V_n}{2}\right) = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ឬ $V_n = 2\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $V_n = U_n - \sqrt{U_n^{\,2} - 4}$

$$U_n - V_n = \sqrt{U_n^{\ 2} - 4}$$

$$U_n^{\ 2} - 2U_nV_n + V_n^{\ 2} = U_n^{\ 2} - 4$$

$$2U_nV_n = V_n^{\ 2} + 4$$

$$U_n = \frac{V_n^{\ 2} + 4}{2V_n} = \frac{1}{2}V_n + \frac{2}{V_n}$$

ដោយ $V_n = 2\left(\dfrac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^{2^n}$

គេបាន $U_n = \left(\dfrac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^{2^n} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^{2^n}}$

គុណនឹងកន្សោម $\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^{2^n}$ គេបាន ៖

$$U_n=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}{\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}$$

$$U_n=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}{\left(\frac{x^2-x^2+4}{4}\right)^{2^n}}$$

$$U_n=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$$

ដូចនេះ $F_n(x)=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$ ។

លំហាត់ទី៧៥

ស៊ីតនៃចំនួនពិត $(a_n)_{n\geq 1}$ កំណត់ដោយ $a_1=1$, $a_2=3$

និង $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$,$\forall n\in IN$

ចូរកំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11

គេមាន $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$,$\forall n\in IN$

ឬ $a_{n+2}-a_{n+1}=(n+2)(a_{n+1}-a_n)$

ឬ $\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=n+2$

គេបាន $\prod_{k=1}^{(n-2)}\left(\frac{a_{k+2}-a_{k+1}}{a_{k+1}-a_k}\right)=\prod_{k=1}^{(n-2)}(k+2)$

$$\frac{a_n-a_{n-1}}{a_2-a_1}=3.4.5......n$$ ដោយ $a_2-a_1=2$

គេទាញបាន $a_n-a_{n-1}=n!$

ហើយ $\sum_{k=2}^{n}\left(a_k-a_{k-1}\right)=\sum_{k=2}^{n}\left(k!\right)$

$$a_n-a_1=2!+3!+....+n!$$ ដោយ $a_1=1=1!$

គេបាន $a_n=1!+2!+3!+.....+n!$ ។

-ករណីទី១ : ចំពោះ $n < 11$ គេមាន

$a_1 = 1$

$a_2 = 3$

$a_3 = 1! + 2! + 3! = 9$

$a_4 = 1! + 2! + 3! + 4! = 33 = 3 \times 11$

$a_5 = a_4 + 5! = 153$

$a_6 = a_5 + 6! = 873$

$a_7 = a_6 + 7! = 5913$

$a_8 = a_7 + 8! = 46233 = 4203 \times 11$

$a_9 = a_8 + 9! = 409113$

$a_{10} = a_9 + 10! = 4037913$

គេបាន $n = 4$, $n = 8$ ។

-ករណីទី២: ចំពោះ $n \ge 11$

គេបាន $a_n = a_{10} + \sum_{k=11}^{n} (k!)$

ដោយ $\sum_{k=11}^{n} (k!)$ ចែកដាច់នឹង 11 ហើយ a_{10} ចែកមិនដាច់នឹង 11

នោះចំពោះ $n \ge 11$ គេបាន a_n ចែកមិនដាច់នឹង 11 ។

ដូចនេះតម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 មានតែពីរគត់គឺ ៖

$n = 4$ ឬ $n = 8$ ។

លំហាត់ទី៧៦

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ :

$u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = u_n({u_{n-1}}^2 - 2) - u_1$ ចំពោះ $n = 1, 2, ...$

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន $[\, u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$

(ដែល $[x]$ តាងជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចជាង x)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $[\, u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$

ជាដំបូងយើងគណនាតួ u_2, u_3, u_4 , u_5 គេបានលំនាំដូចខាងក្រោម :

$u_0 = 2 = 2^0 + \frac{1}{2^0}$, $u_1 = \frac{5}{2} = 2^1 + \frac{1}{2^1}$

$u_2 = \frac{5}{2} = 2^1 + \frac{1}{2^1}$, $u_3 = 2^3 + \frac{1}{2^3}$

$u_4 = 2^5 + \frac{1}{2^5}$, $u_5 = 2^{11} + \frac{1}{2^{11}}$

យើងសង្កេតឃើញថាកន្សោម u_n មានរាងទូទៅ $u_n = 2^{V_n} + \frac{1}{2^{V_n}}$

ដែល (V_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $(V_n) : 0, 1, 1, 3, 5, 11, ...$

តាងស្វ៊ីត (w_n) ដែល $w_n = V_n + V_{n+1}$ គ្រប់ $n \ge 0$

គេបាន : $(W_n) : 1\ ,\ 2\ ,\ 4 , 8 , 16 , ...$ នាំឱ្យ (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានតួ $W_0 = 1$ និង រេសុង $q = 2$ ។

គេបាន $W_n = 2^n$ នោះ $V_{n+1} + V_n = 2^n$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(-1)^{n+1}$ គេបាន :

$(-1)^{n+1} V_{n+1} - (-1)^n V_n = (-1)^{n+1} 2^n$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1} \left[(-1)^{k+1} V_{k+1} - (-1)^k V_k \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[(-1)^{k+1} 2^k \right]$

$$(-1)^n V_n - V_0 = \frac{(-1)^n 2^n - 1}{3}$$

ដោយ $V_0 = 0$ នោះ $V_n = \dfrac{(-1)^n 2^n - 1}{(-1)^n .3} = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$

ដូចនេះ $[\ u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}} + 2^{-\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$

ដោយ $2^n \equiv (-1)^n \pmod{3}$ នោះ $3 | 2^n - (-1)^n$

ហើយ $2^{-\frac{2^n - (-1)^n}{3}} < 1$ ដូចនេះ $[\ u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$ ។