វិទ្យាស្ថានជាតិពហុបច្ចេកទេសកម្ពុជា

National Polytechnic Institute of Cambodia

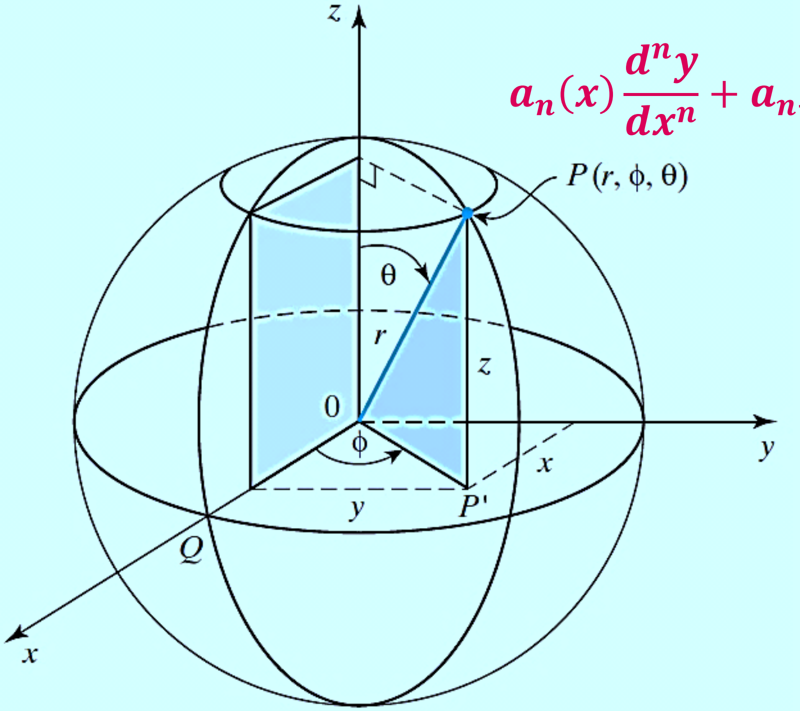
មហាវិទ្យាល័យអគ្គិសនី

Faculty of Electricity

សង្ខេបវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_o(x)y = f(x)$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$



រៀបរៀងដោយនិស្សិត : ស៊ាន សារឿខ

ឆ្នាំសិក្សា ២០១២ - ២០១៣

អារម្ភកថា

សៀវភៅវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលលោកអ្នកកំពុងមើលនេះគឺជាសៀវភៅមួយដែលកើតចេញពីការខិតខំស្រាវជ្រាវរបស់ខ្ញុំអស់ពីកំលាំងចិត្ត និង កាយរបស់ខ្ញុំបាទផ្ទាល់ដើម្បីរិះរកនូវវិធីសាស្ត្រល្អៗសំរាប់សំរួលដល់ការសិក្សារបស់លោកអ្នកអោយកាន់តែយល់ច្បាស់ ។

ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះអាចធ្វើជាមាគាដ៏ល្អមួយដល់លោកអ្នកក្នុងការដោះស្រាយនូវបញ្ហារាល់លំហាត់ដែលទាក់ទងនឹង ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល បានយ៉ាងឆាប់រហ័ស ។

ទោះជាយ៉ាងណាក្តី រាល់ពាក្យពេចន៍ និង ការសរសេរអាចនឹងឆ្គាំឆ្គង ឬ មានកំហុសខ្លះដោយអចេតនាអោយខ្ញុំសូមអភ័យទោសទុកជាមុនផងចុះ ។

ខ្ញុំបាទរីករាយទទួលយករាល់មតិយោបល់រិះគន់របស់លោកអ្នកក្នុងន័យស្ថាបនារាល់កំហុសឆ្គងដែលកើតមាននៅក្នុងសៀវភៅមួយនេះជានិច្ច ។

ខ្ញុំបាទសូមអរគុណដល់ ព្រះមាតាបិតា ជីដូនជីតា ដែលបានផ្តត់ផ្គង់អោយខ្ញុំបាទបានរៀនសូត្ររហូតដល់មានថ្ងៃនេះ និង សូមអគុណដល់សាស្ត្រាចារ្យទាំងអស់ដែលបានបង្ហាត់បង្រៀនខ្ញុំអោយមានចំនេះដឹងដើម្បីក្លាយជាពលរដ្ឋល្អមួយរូបនៅក្នុងសង្គម ។

ជាចុងក្រោយខ្ញុំបាទសូមប្រសិទ្ធពរជ័យដល់អ្នកមានគុណទាំងអស់អោយជួបតែសេចក្តីសុខ សេចក្តីចំរើន និងជួបនូវពុទ្ធពរបួនប្រការគឺ អាយុ វណ្ណៈ សុខៈ និង ពលៈ កុំបីឃ្លាងឃ្លាតឡើយ ៕

មាតិកានៃមេរៀន

I. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល *Differenttial Equation (DE)*

1. *Introduction to DE*

2. និយមន័យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

a. *Ordinary differential equations*

- សមីការ *Linear DE*
- សមីការ *Non-linear DE*

b. *Partial differential equations*

- *Order of Differential Equations*
- *Degree of Differential Equations*

3. ចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល និង *Initial Value Problem IVP*

មាតិកានៃមេរៀន

II. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 1

1. ទំរង់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 1

2. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 1

   a. *Seperable DE*

   b. *The First-Order Homogeneous DE*

   c. *The Exact DE*

   d. *The Integrating Factor DE*

   e. *The First-Order Linear DE*

   f. *The Bernoulli DE*

   g. *The Ricatti DE*

3. *Applications of The First-Order Differenttial Equation*

មាតិកានៃមេរៀន

III. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 2

1. ***Form of Second Order DE***

2. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 2

a. ***Linear Differential Equation with Constant Coefficients***

- Linear Homogeneous DE with Constant Coefficients

- Linear Non-homogeneous DE with Constant Coefficients

b. ***Euler Differential Equation***

c. ***Linear Differential Equation with Variable Coefficients***

- Linear Homogeneous DE with Variable Coefficients

- Linear Non-homogeneous DE with Variable Coefficients

3. *Applications of The Second-Order Differenttial Equation*

មាតិកានៃមេរៀន

IV. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ខ្ពស់

1. ***Form of n-th Order DE***
2. ចំលើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ ***n***
   a. ***Linear Homogeneous DE with Variable Coefficients***
   b. ***Linear Non-homogeneous DE with Variable Coefficients***
   c. ***Linear Homogeneous DE with Constant Coefficients***
   d. ***Linear Non-homogeneous DE with Constant Coefficients***

I. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល *Differenttial Equation (DE)*

1. Introduction to DE

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាសាខាដ៏សំខាន់មួយនៃគណិតវិទ្យា ដែលបានអនុវត្តចាប់តាំងពីបើកសម្ពោធដំបូងនៅពាក់កណ្ដាលសតវត្សទី 17 ។ ប្រវត្តិសាស្ត្ររបស់វាត្រូវបានគេសិក្សាយ៉ាងច្បាស់ដោយកិច្ចប្រជុំមួយនៅសតវត្សទី 20 ។ កិច្ចប្រជុំនេះត្រូវបានគេរកឃើញថា ផ្នែកដ៏សំខាន់នៃសមីកាឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវបានរកឃើញដោយលោក **Newton** និង **Leibniz** នៅកំលុងឆ្នាំ 1950 ។

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើរតួនាទីយ៉ាងសំខាន់នៅក្នុងវិស័យ វិស្វកម្ម រូបវិទ្យា សេដ្ឋកិច្ច និងប្រព័ន្ធទូគមនាគមន៍ផ្សេងៗ ។ សមីការនេះត្រូវបានគេយកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងការវិភាគប្រព័ន្ធដំណើរការផ្សេងៗជាច្រើនដូចជា ៖

- សៀគ្វីអគ្គិសនី
- សៀគ្វីអេឡិចត្រូនិក
- ប្រព័ន្ធមេកានិច
- បញ្ហាកំណើន និង ការបំបែក
- បញ្ហាពន្លឺ
- បញ្ហាសីតុណ្ហភាព
- គន្លង **Orthogonal**
- ចលនាទន្លាក់ជុំអង្គធាតុ -លល- ។

2. និយមន័យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

Definition :

A differential equation is a mathematical equation for an unknown function of one or several variables that relates the values of the function itself and its derivatives.

For examples :

1. $$\frac{dy}{dx} = -2xy + Cos(3x)$$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = Sin(\omega x)$$

3. $$\frac{d^2\theta}{dx^2} + ksin(\theta) = 0$$

4. $$\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{dy^2} = 0$$

I. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល *Differenttial Equation (DE)*

សមីកាឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវបានគេចែកជាពីរផ្នែកគឺ **Ordinary differential equations (ODE)** និង **Partial differential equations** ។

a. Ordinary Differential Equations

Definition :

An **ordinary differential equation (ODE)** is an equation that relates a function $y(x)$ to some of its derivatives $y^{(r)}(x) = d^r y/dx^r$. It is usual to call x the **independent** variable and y the **dependent variable.**

For examples :

1. $\frac{dy}{dx} = -2xy + x^3$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = y^3 Sin(6x)$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + ksin(x)y = x^2$

I. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល *Differenttial Equation (DE)*

Ordinary DE ចែកចេញជាពីរទៀតគឺ Linear DE and Non-linear DE

ជាទូទៅ :

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_o(x)y = f(x)$$

ដែល $a_n;\ a_{n-1};\ \cdots;\ a_o(x)$ និង f ជាអនុគន៍យ៉ាងច្រើននៃអថេរ x តែមួយ ហៅថា Linear DE ។ ក្រៅពីនេះជា Non-linear DE ។

For examples :

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^3\dfrac{dy}{dx} - \sin(2x)\,y = e^{3x}$; 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^2\sin\left(\dfrac{dy}{dx}\right) - xy = 0$

3. $yx'' + 5x^2y' - \dfrac{2}{1+x^2}y = \ln(3x)$; 4. $y'' + 4xy' - \ln(x)y^2 = 0$

Example 1 and 3 are Linear DEs and example 2 and 4 are Non-linear DEs.

b. Partial Differential Equations

u is dependent variable and ***x*** *and* ***y*** are independent variables, this is partial differential equation.

For examples :

1 . $$\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{dy^2} = 0$$

2 . $$\frac{\partial^4 u}{dx^4} + \frac{\partial^4 u}{dt^4} = 0$$

- Order of Differential Equations

The order of the differential equation is order of the highest derivative in the differential equation.

Differential Equations	Order
$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$	1
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 9y = 0$	2
$\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\frac{dy}{dx} + y^4 - \ln(x) = 0$	3

I. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល *Differenttial Equation (DE)*

- Degree of Differential Equations

The degree of a differential equation is power of the highest order derivative term in the differential equation.

For Examples

Differential Equations	**Degree**
$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + 5y = 0$	1
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 9xy = 0$	1
$\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^5 + y^4 - \ln(x) = 0$	5

3. ចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល និង Initial Value Problem (IVP)

+ ចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

y=f(x) ជាចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលុះត្រាតែ *y* ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការនោះ។

ឧទាហរណ៏ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(x) = c_1\, sin(x) + c_2 Cos(x)$ ជាចំលើយនៃសមីការ $y'' + y = 0$

យើងបាន

$$f'(x) = c_1\, Cos(x) - c_2 Sin(x)$$

$$f''(x) = -c_1\, Sin(x) - c_2 Cos(x)$$

$$f''(x) + f(x) = c_1\, sin(x) + c_2 Cos(x) + \left(-c_1\, Sin(x) - c_2 Cos(x)\right)$$

$$f''(x) + f(x)=0$$

ដូច្នេះ $f(x) = c_1\, sin(x) + c_2 Cos(x)$ ពិតជាចំលើយនៃសមីការ $y'' + y = 0$

I. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល *Differenttial Equation (DE)*

+ Initial Value Problem (IVP)

DE លំដាប់ ***n*** មាន ***n*** ***auxiliary conditions*** មានទំរង់

$y(x_o) = y_o;\ y'(x_o) = y_1;\ \cdots;\ y^{(n-1)}(x_o) = y_{n-1}$ ដែល $y_o; y_1; \cdots; y_{n-1}$ ជាចំនួនថេរ ហៅថា Initial Value Problem (IVP) ។

Example Solve the IVP $y'' = e^{-3x};\ y'(0) = -{}^{1}/_{3};\ \ y(0) = 1$

យើងបាន

$$y'' = e^{-3x} \Rightarrow y' = \int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c_1$$

$$\Rightarrow y = \int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x} + c_1\right)dx = \frac{1}{9}e^{-3x} + c_1x + c_2$$

យើងមាន

$$y(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = \frac{8}{9}$$

$$y'(0) = -\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} + c_1 = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow c_1 = 0$$

ដូច្នេះ $y = \frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{8}{9}$ ជាចំលើយនៃសមីការ

II. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 1 *(First-Order Differenttial Equation)*

1. ទំរង់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 1 *First-order DE form*

. Derivative form :

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_o(x)y = f(x)$$

. Differential form :

$$M(x)dy + N(x)ydx + P(x)dx = 0$$

. General form :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad or \quad f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ក្រៅពីនេះនៅមានទំរង់ផ្សេងៗទៀតដែលយើងនឹងលើកយកមកសិក្សា និង ធ្វើការដោះស្រាយវា ។

II. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 1 *(First Order Differenttial Equation)*

1. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 1

a. *The Seperable DE*

សមីការ ***Seperable DE*** មានទំរង់ : $P(y)\dfrac{dy}{dx} = F(x)$

ដើម្បីដោះស្រាយគេត្រូវ ៖

$$\int P(y)dy = \int F(x)\,dx$$

Ex : ដោះស្រាយសមីការ *DE:* $-x^2y^4dx + (y^2+2)e^{3x}dy = 0$

គុណសមីការនឹង $e^{-3x}y^{-4}$ យើងបាន:

$$-x^2e^{-3x}dx + (y^2+2)y^{-4}dy = 0$$

$$\Rightarrow \int (y^{-2} + 2y^{-4})dy = \int x^2e^{-3x}dx$$

$$\Rightarrow -y^{-1} - \frac{2}{3}y^{-3} = \int x^2e^{-3x}dx$$

ដេរីវេបន្តបន្ទាប់នៃ		អាំងតេក្រាលបន្តបន្ទាប់នៃ
x^2		e^{-3x}
	$+$	
$2x$		$-\frac{1}{3}e^{-3x}$
	$-$	
2		$\frac{1}{9}e^{-3x}$
	$+$	
0		$-\frac{1}{27}e^{-3x}$

$$\int x^2e^{-3x}dx = \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}\right)e^{-3x} + c$$

ដូច្នេះ

$$\frac{9}{y} + \frac{6}{y^3} = \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}\right)e^{-3x} + c$$

Ex: ដោះស្រាយសមីការ

1. $3y' + 6y = 0$
2. $2y^2dx + (y^2 + 2)e^{2x}dy = 0$
3. $(y^2 - 1)dx + 2xdy = 0$

ចំលើយ

1. $y = e^{-2x}$
2. $y + y^{-1} = e^{-2x} + c$
3. $\left|\frac{y+1}{y+1}\right| = e^c|x|$

b. *The First-Order Homogeneous DE*

☞ បើ $f(x, y)$ ជាអនុគមន៍ *Function Homogeneous Of dergee n* ដែល $n \in IR$ លុះត្រាតែ $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ ។

Ex: គេមាន $f(x, y) = \sqrt{x^6 + y^6} \Rightarrow f(tx, ty) = \sqrt{(tx)^6 + (ty)^6} = t^3\sqrt{x^6 + y^6}$

$\Rightarrow f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$ ជាសមីការ *Homogeneous Of dergee 3*

☞ សមីការ *The First-Order Homogeneous DE* មានរាង

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ដែល M និង N ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេទី n ដូចគ្នា ។

ដើម្បីរកចំលើយគេត្រូវ៖

របៀបទី១ ៖

តាង $y = ux$ ដែល u ជាអថេរអាស្រ័យថ្មី

ជំនួសចូលសមីការដើម្បីអោយសមីការក្លាយជាទំរង់ *Separable DE* ។

$$y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$$

$$M(x, xu)dx + N(x, xu)(udx + xdu) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^n M(1, u)dx + x^n N(1, u)(udx + xdu) = 0$$

$$\Leftrightarrow [M(1, u) + uN(1, u)]dx + xN(1, u)du = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)}du = -\frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)}du = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)}du = -ln|x| + c$$

ជាសមីការអាចរកចំលើយបានតាមទំរង់ *Separable DE* ។

របៀបទី២ ៖

ទាញសមីការ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ជាទំរង់

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$$

ជាសមីការ *The First-Order Homogeneous DE* ដែល f ជាអនុគមន៍ *Homogeneous degree zero* ។

បំលែងសមីការ $dy/dx = f(x,y)$ ទៅជាទំរង់

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

តាង $V = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = V + x\frac{dV}{dx}$

$$V + x\frac{dV}{dx} = F(V) \Leftrightarrow \frac{dV}{F(V) - V} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dV}{F(V) - V} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dV}{F(V) - V} = ln|x| + c$$

ជាសមីការអាចដោះស្រាយបានតាមទំរង់ សមីការ *Seperable DE* ។

Ex: ដោះស្រាយសមីការ $(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0$

របៀបទី១

គេមាន $M=x^2+y^2$ និង $N=x^2-xy$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូហ្សែនដឺក្រេទី 2 ដូចគ្នា ។

តាង $y=ux \Rightarrow dy=udx+xdu \Leftrightarrow (x^2+x^2u^2)dx+(x^2-x^2u)(udx+xdu)=0$

$$\Rightarrow x^2(1+u^2)dx+x^2(1-u)(udx+xdu)=0$$

$$\Rightarrow (1+u^2)dx+(1-u)(udx+xdu)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1-u}{1+u}du+\frac{1}{x}dx=0 \Leftrightarrow \int\frac{u-1}{1+u}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int du+\int\frac{-2}{1+u}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow u-2ln|1+u|=ln|x|+c$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}-2ln\left|1+\frac{y}{x}\right|-ln|x|=c \Leftrightarrow ln\left|\left(1+\frac{y}{x}\right)(\sqrt{x})\right|^2=\frac{y}{x}-c$$

$$\Rightarrow (x+y)^2=e^{-c}.xe^{y/x}$$

របៀបទី២

គេមាន

$(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy-x^2}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1} \quad (*)$$

តាង

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow dy=x\frac{du}{dx}+u$$

ជំនួសក្នុង $(*)$ គេបាន

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u-1}\Leftrightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u-1}-u$$

$$\Leftrightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{u-1}\Leftrightarrow \int\frac{u-1}{u+1}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \int du-2\int\frac{1}{u+1}du=\int\frac{1}{x}dx\Leftrightarrow u-2ln|1+u|=ln|x|+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x}-2ln\left|1+\frac{y}{x}\right|-ln|x|=c\Leftrightarrow ln\left|\left(1+\frac{y}{x}\right)(\sqrt{x})\right|^2=\frac{y}{x}-c$$

$$\Rightarrow (x+y)^2=e^{-c}.xe^{y/x}$$

c. *The Exact DE*

- និយមន័យ ៖ បើសមីការមួយ ជា សមីការ *The Exact DE* កាលណាវា

មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលពិតនៃអនុគមន៍ $U(x, y)$ ដែល

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0$$

- ទ្រឹស្តីបទ ៖ បើសមីការមួយ ជាសមីការ *The Exact DE* លុះត្រាតែ

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \& \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាមនិយមន័យសមីការ *The Exact DE*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y) \quad \& \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ដើម្បីរកចំលើយគេត្រូវ:

- ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

- តាមនិយមន័យ

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dU = 0$$

$$\Leftrightarrow U(x,y) = c$$

នោះគេបាន:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \ : \ (1) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) \ : \ (2) \end{cases}$$

តាម (2) នាំឱ្យ $\partial U = N(x,y)\partial y$ ឬ គេអាចសរសេរ $\partial U = N\partial y$

$$\Rightarrow U = \int N\partial y + h(x) \ : (*)$$

យក (*) ជួសចូល (1) នោះគេអាចរកចំលើយសមីការបាន ។

រឺក៏ តាម(1) នាំឱ្យ $\partial U = M(x,y)\partial x$ ឬ គេអាចសរសេរ $\partial U = M\partial x$

$$\Rightarrow U = \int M\partial x + h(y) \ : (**)$$

យក (**) ជួសចូល (2) នោះគេអាចរកចំលើយសមីការបាន ។

Ex : ដោះស្រាយសមីការ *DE:* $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$

យើងបាន:

$$\begin{cases} M = 2xy \\ N = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ *DE:* ជា សមីការ *The Exact DE*

នោះគេបាន:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = M = 2xy \quad : (1) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = N = (x^2 - 1) \quad : (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \int \partial U = \int 2xy\,\partial x = x^2 y + g(y)$$

$$\Rightarrow U = x^2 y + g(y) \quad : (*)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + g'(y)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1) = x^2 + g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = -1$$

$\Rightarrow g(y) = -y$ យកជំនួស $(*)$: $U = x^2 y - y = c$

$$\Rightarrow y = \frac{c}{x^2 - 1}$$

d. *The Integrating Factor DE*

- បើសមីការ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ & $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ នោះវាមិនមែនជាសមីការ *The Exact DE* ទេ។ ដើម្បីរកចំលើយគេត្រូវៈ
  - គុណសមីការ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ នឹងកត្តាអាំងតេក្រាល $I(x,y)$ ដើម្បីក្លាយជាសមីការ *The Exact DE* ។

  នោះគេបាន $IMdx + INdy = 0$ ជាសមីការ *The Exact DE*

$$\Rightarrow \frac{\partial IM}{\partial y} = \frac{\partial IN}{\partial x}$$

$$\Rightarrow M\frac{\partial I}{\partial y} + I\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial I}{\partial x} + I\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial I}{\partial x} - M\frac{\partial I}{\partial y}$$

$$\Rightarrow I(M_y - N_x) = NI_x - MI_y$$

ក្នុងនេះមាន 3 ករណីដែលអាចកើតមាន ៖

១. កត្តាអាំងតេក្រាល I អាស្រ័យនឹង x : (គេបាន $I_y = 0$ និង $I_x = \frac{dI}{dx}$)

$$I(M_y - N_x) = NI_x = N\frac{dI}{dx} \Leftrightarrow \frac{dI}{I} = \left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)dx$$

យក $f(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$

$$\Rightarrow I = e^{\int f(x)dx}$$

២. កត្តាអាំងតេក្រាល I អាស្រ័យនឹង y : (គេបាន $I_x = 0$ និង $I_y = \frac{dI}{dy}$)

$$I(M_y - N_x) = -MI_y = M\frac{dI}{dy} \Leftrightarrow \frac{dI}{I} = -\left(\frac{M_y - N_x}{M}\right)dy$$

យក $g(y) = \frac{M_y - N_x}{M}$

$$\Rightarrow I = e^{-\int g(y)dy}$$

៣. បើកត្តាអាំងតេក្រាល $I(x,y)$ អាស្រ័យនឹង x, y មានន័យថា ៖

$$\begin{cases} \dfrac{M_y - N_x}{N} = f(x,y) \\ \dfrac{M_y - N_x}{M} = g(x,y) \end{cases}$$

ដើម្បីរកចំលើយគេត្រូវការដឹងថា $I(x,y)$ មានរាងយ៉ាងណាសិន ។

- បន្ទាប់មកអនុវត្តន៍ ***The Exact DE*** តាម

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = IM \;:\; (1) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = IN \;:\; (2) \end{cases}$$

Ex : Solve the Differential Equations below

1. $DE: (2x - y^2)dx + xydy = 0$
2. $DE: x^2y^2dx + x^3ydy = 0$
3. $DE: (2y^2 - 9xy)dx + (3xy - 6y^2)dy = 0$

Answers

1. $y = \pm|x|\sqrt{\left(2c + 4\frac{1}{x}\right)}$
2. $y^3x^3 = 3c$
3. $x^2y^3 - 3x^3y^2 = c$

e. *The First-Order Linear DE*

ជាសមីការមានទំរង់

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = f(x)$$

ដើម្បីរកចំលើយគេត្រូវចែកសមីការនឹង $a(x)$ យើងបាន:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{f(x)}{a(x)}$$

តាង $P(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ និង $Q(x) = \frac{f(x)}{a(x)}$ យើងបាន:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

គុណសមីការនឹង $I(x) = e^{\int P(x)dx}$

យើងបានសមីការទៅជា:

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y=e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$\Rightarrow e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx}+\frac{d\left(e^{\int P(x)dx}\right)}{dx}y=e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(e^{\int P(x)dx}.y\right)}{dx}=e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$\Rightarrow \int d\left(e^{\int P(x)dx}.y\right)=\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$$

$$\Rightarrow e^{\int P(x)dx}.y=\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+c$$

$$\Rightarrow y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+c\right)$$

Ex : Solve the Differential Equations

1. $\frac{dy}{dx}+xy=xe^{x^2/2}$, $y(0)=1$
2. $Cosx\,\frac{dy}{dx}-ySinx=2x\,, y(0)=5$

Answers :

1. $y=\frac{e^{x^2}+1}{2e^{x^2/2}}$
2. $y=\frac{x^2+5}{Cosx}$

f. *The Bernoulli DE*

ជាសមីការដែលមានទំរង់

$$a(x)\,\frac{dy}{dx}+b(x)y=f(x)y^{n}$$

ដើម្បីរកចំលើយគេត្រូវៈ

គុណសមីការនឹង $\frac{1}{a(x)}y^{-n}$ យើងបានសមីការទៅជាៈ

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+\frac{b(x)}{a(x)}y^{1-n}=\frac{f(x)}{a(x)}$$

តាង $P(x)=\frac{b(x)}{a(x)}$ និង $Q(x)=\frac{f(x)}{a(x)}$ យើងបានៈ

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

តាង $u=y^{1-n}\Rightarrow\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}\Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}\cdot\frac{du}{dx}$

យើងបានៈ

$$\frac{1}{1-n}\cdot\frac{du}{dx}+P(x)u=Q(x)$$

$$\Rightarrow\ \frac{du}{dx}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)$$

ជាសមីការដែលអាចដោះស្រាយបានតាម សមីការ *The First-Order Linear DE*

Ex : Solve the Differential Equations

1. $x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{y^2}$

2. $x^2\frac{dy}{dx}+y^2=xy$

3. $\frac{dy}{dx}=y(xy^3-1)$

Answers

1. $y=\sqrt[3]{1+\frac{c}{x^3}}$

2. $y=\frac{-x}{ln|x|+c}$

3. $y=\sqrt[3]{\frac{e^{-3x}}{\left(\frac{1}{3}-x\right)e^{-3x}+c}}$

g. *The Ricatti DE*

មានទំរង់

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

របៀបទី១ ៖

- រកចំលើយពិសេសមួយ តាងដោយ $S(x)$ (បានពីការជំនួសតម្លៃ y ដោយចៃដន្យ) ។

- តាង $y = S(x) + \frac{1}{V}$ នាំឱ្យ $\frac{dy}{dx} = \frac{dS}{dx} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{dV}{dx}$ យើងបាន:

$$\frac{dS}{dx} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{dV}{dx} = P(x)\left(S(x) + \frac{1}{V}\right)^2 + Q(x)\left(S(x) + \frac{1}{V}\right) + R(x)$$

- ត្រូវទាញរក $\frac{dV}{dx}$ ឱ្យមានទំរង់ *The First-Order Linear DE* :

$$\frac{dV}{dx} + a(x)V = b(x)$$

- គុណសមីការនឹងកត្តាអាំងតេក្រាល $I(x) = e^{\int a(x)dx}$ រួចដោះស្រាយតាមរបៀបទំរង់ *The First-Order Linear DE* ។

របៀបទី២ ៖

គេមាន $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ សមីការ *The Ricatti DE*

- ឧបមាថាសមីការមានចំលើយទូទៅ តាងដោយ $y = y_1 + u$ ដែល y_1 ជាចំលើយពិសេសមួយនៃសមីការ *The Ricatti Equation DE*

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dy_1}{dx} = Py^2 + Qy + R$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} + \frac{dy_1}{dx} = P(u + y_1)^2 + Q(u + y_1) + R$$

ដោយហេតុថា y_1 ជាចំលើយពិសេសមួយនៃ សមីការ *The Ricatti DE*

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} + Py_1^2 + Qy_1 + R = P(u+y_1)^2 + Q(u+y_1) + R$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} - (Q + 2Py_1)u = Pu^2 \ : (*)$$

- តាង $u = \frac{1}{w} \Rightarrow du = -\frac{1}{w^2}dw$ យកជំនួសក្នុង $(*)$ គេបាន ៖

$$\Rightarrow \frac{dw}{w^2 dx} + (Q + 2Py_1)\frac{1}{w} = -P\left(\frac{1}{w}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dx} + (Q + 2Py_1)w = -P$$

ជាសមីការអាចដោះស្រាយបានតាម *The Linear DE* ។

Ex : Solve the Differential Equations

1. $\frac{dy}{dx} = -e^{-x}y^2 + y + e^x$

2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$

Answers

1. $y = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}e^{-x} + ce^x} + e^x$

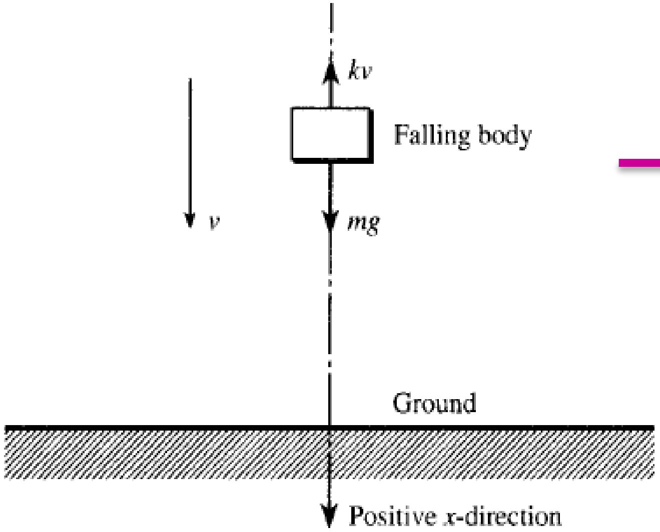
2. $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{cx^{-3} - \frac{1}{4}x}$

3. *Applications of The First-Order Differenttial Equation*

- ✔ *Growth and Decay Problems*
- ✔ *Temperature Problems*
- ✔ *Falling Body Problems*
- ✔ *Dilution Problems*
- ✔ *Electrical Circuits*
- ✔ *Orthogonal Trajectories*
- ✔ *Solved Problems*

Example :

Practical to Falling Body



Newton's second law of motion :

$$\mathbf{F = m\frac{dv}{dt}}$$

តាមរូបនេះគេបាន

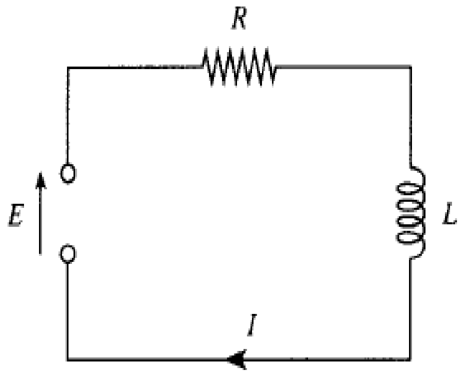
$$F = mg - kv$$

$$m\frac{dv}{dt} + kv = mg$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

Practical to First-order Circuit

First-order Circuit RL

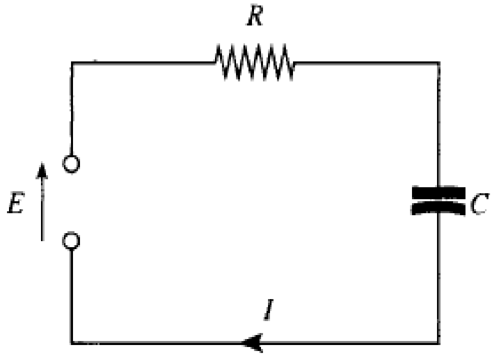


Practice KVL

$$RI + L\frac{dI}{dt} - E = 0$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$$

First-order Circuit RC



Practice KVL

$$RI + \frac{q}{c} - E = 0$$

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$$

III. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 2 *Second-order DE*

1. *Form of Second Order DE*

Derivative form

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(x, y, \frac{dy}{dx})$$

Differential linear with constant coefficients form

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_oy = f(x)$$

Differential linear with variable coefficients form

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_o(x)y = f(x)$$

These forms and other forms we will be study and solve them.

2. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 2

a. *Linear Differential Equation with Constant Coefficients*

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_oy=f(x)$$

*** 2nd-order linear Homogenoues**

$$ay''+by'+cy=0 \quad ;(a,b\,,c)\epsilon IR$$

ដើម្បីដោះស្រាយគេត្រូវ ៖

ដោះស្រាយសមីការសំគាល់ $ar^2+br+c=0$

-បើ $\Delta= b^2-4ac=0$ នោះសមីការមានរឹសឌុប $r_o=-b/2a$

នោះគេបាន ចំលើយទូទៅគឺ $y=(A+Bx)e^{r_ox}$

-បើ $\Delta= b^2-4ac>0$ នោះសមីការមានរឹសពីរផ្សេងគ្នា r_1 និង r_2

នោះគេបាន ចំលើយទូទៅគឺ $y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$

-បើ $\Delta= b^2-4ac<0$ នោះសមីការមានរឹសពីរជាចំនួនកំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាដែល

មានទំរង់ $r_1=\alpha+j\beta$ និង $r_2=\alpha-j\beta$

នោះគេបាន ចំលើយទូទៅគឺ $y=Ae^{(\alpha+j\beta)x}+Be^{(\alpha-j\beta)x}$ ឬ $y=(C_1Cos\beta x+C_2Sin\beta x)e^{\alpha x}$

Ex: ដោះស្រាយសមីការ

1. $y'' + 2y' + y = 0$

2. $y'' - 4y' + y = 0$

3. $y'' - \sqrt{3}y' + 3y = 0$

ចម្លើយ

1. $y = (A + Bx)e^{-x}$

2. $y = Ae^{x} + Be^{3x}$

3. $y = \left(C_1 Cos\frac{3}{2}x + C_2 Sin\frac{3}{2}x\right)e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}$

***2nd-order linear non-Homogenoues**

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad ;(a, b, c)\epsilon IR$$

ដើម្បីដោះស្រាយគេត្រូវ ៖

- រកចំលើយពិសេសមួយនៃ $ay'' + by' + cy = f(x)$ តាងដោយ y_p
- រកចំលើយនៃ $y'' + by' + cy = 0$ តាងដោយ y_h
- ចំលើយទូទៅតាងដោយ $y = y_h + y_p$

Ex: ដោះស្រាយសមីការ

1. $y'' + 2y' + y = 4e^{x}$

2. $y'' - 4y' + 3y = 2sinx - 4cosx$

3. $y'' - \sqrt{3}y' + 3y = 3x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 2$

ចម្លើយ

1. $y = (A + Bx)e^{-x} + e^{x}$

2. $y = Ae^{x} + Be^{3x} + sinx$

3. $y = \left(C_1 Cos\frac{3}{2}x + C_2 Sin\frac{3}{2}x\right)e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x} + x^2 + 2$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 2

តារាង ជំនួយដល់ការដោះស្រាយលំហាត់ **2nd-order linear non-Homogenoues**

$f(x)$	r and Δ	ចំលើយពិសេសស y_p មានទំរង់
ke^{ax}	$r \neq a$ $r = a; (\Delta \neq 0)$ $r = a; (\Delta = 0)$	Ae^{ax} Axe^{ax} Ax^2e^{ax}
$kCos(ax)$ or $kSin(ax)$	$r \neq ja$ $r = ja$	$ACos(ax) + BSin(ax)$ $x[ACos(ax) + BSin(ax)]$
kx^n	$r \neq 0$ $r = 0; (\Delta \neq 0)$ $r = 0; (\Delta = 0)$	$A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_o$ $x(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_o)$ $x^2(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_o)$
kx^ne^{ax}	$r \neq a$ $r = a; (\Delta \neq 0)$ $r = a; (\Delta = 0)$	$e^{ax}(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_o)$ $xe^{ax}(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_o)$ $x^2e^{ax}(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_o)$
$ke^{\alpha x}Cos(\beta x)$ or $ke^{\alpha x}Sin(\beta x)$	$r \neq \alpha \pm j\beta$ $r = \alpha \pm j\beta$	$e^{\alpha x}(ACos\beta x + BSin\beta x)$ $xe^{\alpha x}(ACos\beta x + BSin\beta x)$
$kx^ne^{\alpha x}Cos(\beta x)$ or $kx^ne^{\alpha x}Sin(\beta x)$	$r \neq \alpha \pm j\beta$ $r = \alpha \pm j\beta$	$e^{\alpha x}[(A_nx^n + \cdots + A_o)Cos\beta x + (A_nx^n + \cdots + A_o)Sin\beta x]$ $xe^{\alpha x}[(A_nx^n + \cdots + A_o)Cos\beta x + (A_nx^n + \cdots + A_o)Sin\beta x]$

b. *Euler Differential Equation*

មានទំរង់ $ax^2y'' + bxy' + cy = 0 : (*)$

ដើម្បីដោះស្រាយគេត្រូវ

តាង $y = x^m$; $y' = mx^{m-1}$; $y'' = (m^2 - m)x^{m-2}$ ជំនួសចូល $(*)$ ។

គេបាន $ax^2(m^2 - m)x^{m-2} + bmxx^{m-1} + cx^m = 0$

$(am^2 - am + bm + c)x^m = 0$

$am^2 + (b - a)m + c = 0$ ជាសមីការសំគាល់ ។

-បើ $\Delta = 0$ នោះសមីការមានរឺសឌុប $m_o = -(b - a)/2a$

នោះគេបាន ចំលើយទូទៅគឺ $y = (A + Blnx)x^{m_o}$

-បើ $\Delta > 0$ នោះសមីការមានរឺសពីរផ្សេងគ្នា m_1 និង m_2

នោះគេបាន ចំលើយទូទៅគឺ $y = Ax^{m_1} + Bx^{m_2}$

-បើ $\Delta < 0$ នោះសមីការមានរឺសពីរជាចំនួនកំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាដែល

មានទំរង់ $m_1 = \alpha + j\beta$ និង $m_2 = \alpha - j\beta$

នោះគេបាន ចំលើយទូទៅគឺ $y = Ax^{(\alpha+j\beta)} + Bx^{(\alpha-j\beta)}$

ឬ $y = [C_1Cos(\beta lnx) + C_2Sin(\beta lnx)]x^{\alpha}$

Ex: ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

1. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$
2. $x^2y'' - 5xy' - 9y = 0$
3. $x^2y'' - xy + 10 = 0$

ចំលើយ

1. $y = Ax^2 + Bx^{-3}$
2. $y = (A + Blnx)x^3$
3. $y = Ax^{(1+j3)} + Bx^{(1-j3)}$

ដំណោះស្រាយគំរូ ៖

1. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$

$m^2 + (2-1)m - 6 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0$ ជាសមីការសំគាល់

គេបាន

$$\begin{cases} S = m_1 + m_2 = -1 = 2 + (-3) \\ P = m_1.m_2 = -6 = 2(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = -3 \end{cases}$$

ចំលើយទូទៅនៃសមីការគឺ :

$$y = Ax^2 + Bx^{-3}$$

c. *Linear Differential Equation with Variable Coefficients*

* *Linear Homogeneous with Variable Coefficients*

មានទំរង់ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \ : (*)$

មានចំលើយទូទៅ $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

ឧបមាថា គេមាន $y_1 \neq 0$ ជាចំលើយទី១នៃ $(*)$ នោះគេនឹងអាចរកចំលើយទី២ បាន ដោយតាង $y_2 = u y_1$

$$(*) \Rightarrow (uy_1)'' + p(uy_1)' + quy_1 = 0$$

$$u(y_1'' + py_1' + qy_1) + u''y_1 + 2u'y_1' + pu'y_1 = 0$$

$$\Rightarrow u''y_1 + 2u'y_1' + pu'y_1 = 0$$

$$\Rightarrow u'' + \frac{(2y_1{}' + py_1)}{y_1}u' = 0$$

តាង

$$g(x) = \frac{(2y_1{}' + py_1)}{y_1}$$

$$\Rightarrow u'' + g(x)u' = 0$$

តាង $v = u' \ ; \ v' = u''$

$$\Rightarrow u'' + g(x)u' = 0$$

$$v' + g(x)v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -g(x)v$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int g(x)dx$$

$$|v| = e^{-\int g(x)dx} \Leftrightarrow u' = e^{-\int g(x)dx}$$

$$u = \int e^{-\int g(x)dx}\, dx \Rightarrow y_2 = uy_1 = y_1 \int e^{-\int g(x)dx}\, dx$$

ដូច្នេះ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1y_1 + y_1 \int e^{-\int g(x)dx}\, dx \quad \text{ដែល} \quad g(x) = \frac{2y_1' + py_1}{y_1}$$

Ex: ដោះស្រាយសមីការ $y'' + 4y' + 4y = 0$ បើ $y_1 = e^{-2x}$

$$g(x) = \frac{2y_1' + py_1}{y_1} = \frac{2(-2e^{-2x}) + 4e^{-2x}}{e^{-2x}} = 0$$

$$y_2 = uy_1 = y_1 \int e^{-\int g(x)dx}\, dx = e^{-2x} \int e^{-\int 0dx}\, dx = xe^{-2x}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (e^{-2x} + 2xe^{-2x}) \end{vmatrix} = e^{-4x} \neq 0$$

មានន័យថា ចំលើយនៃសមីការ ជា linear independent

$$\Rightarrow y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$$

ដូច្នេះ $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x}$

Note : Wronskians

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

- បើ $W(x) = 0$ នោះ y_1 និង y_2 ជា linear dependent មានចំលើយ $y = c_i y_1 \;\; or \;\; y = c_j y_2$
- បើ $W(x) \neq 0$ នោះ y_1 និង y_2 ជា linear independent មានចំលើយ $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

Practice : Solve the differential equations

1. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0\,; if \;\; y_1 = x^2$
2. $x^2 y'' - 7xy' - 16y = 0\,; if \;\; y_1 = x^4$

Answer

1. $y = (c_1 + c_2 lnx)x^2$
2. $y = (c_1 + c_2 lnx)x^4$

1. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 2

***** *Linear Non-homogeneous DE with Variable Coefficients*

មានទំរង់ $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$: (*)

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ (*) គេត្រូវ ៖

- ចំលើយទូទៅរបស់វាគឺ $y = y_h + y_p$ ដែល $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ ជាចំលើយអូម៉ូហ្សែននៃសមីការ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ និង $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ ជាចំលើយពិសេសមួយសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ ។

- រកចំលើយ y_h តាមរបៀបរបស់សមីការអូម៉ូហ្សែន ។

- រកចំលើយ y_p តាមទំនាក់ទំនងប្រព័ន្ធសមីការដោយដោះស្រាយរក u_1 និង u_2

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1y_1' + u_2y_2' = f(x) \end{cases} ; W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} ; W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} ; W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

នោះគេបាន

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{-y_2f(x)}{W(x)} \\ u_2' = \dfrac{y_1f(x)}{W(x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \displaystyle\int \dfrac{-y_2f(x)}{W(x)}dx \\ u_2 = \displaystyle\int \dfrac{y_1f(x)}{W(x)}dx \end{cases}$$

Practice : Solve the differential equations

1. $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$
2. $x^2y'' - 3xy' + 3y = x^2e^x;\ if\ \ y_1 = x$

Answers

1. $y = (c_1 + c_2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{x^2}{2})e^{2x}$
2. $y = e^x(x^2 - x) + c_1x + c_2x^3$

ដំណោះស្រាយគំរូ ៖

1. $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$

សមីការ $y'' - 4y' + 4y = 0$ មានសមីការសំគាល់ $r^2 - 4r + 4 = 0$

មានរឺស $r_o = 2$ គេបានចំលើយ $y_h = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$

ដោយ $y_h = c_1y_1 + c_2y_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = e^{2x} \\ y_2 = xe^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = 2e^{2x} \\ y_2' = e^{2x} + 2xe^{2x} \end{cases}$

យើងបាន

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{2x} & 2e^{2x} \\ xe^{2x} & e^{2x}+2xe^{2x} \end{vmatrix}=e^{4x}$$

$$\begin{cases} u_1=\int \frac{-y_2 f(x)}{W(x)}dx=\int \frac{-xe^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}}dx=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2} \\ u_2=\int \frac{y_1 f(x)}{W(x)}dx=\int \frac{e^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}}dx=\frac{x^2}{2}+x \end{cases}$$

នោះ $y_p=u_1y_1+u_2y_2=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)e^{2x}+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)xe^{2x}$

$$\Rightarrow\ y_p=\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{2x}$$

ដូច្នេះ

$$y=\left(c_1+c_2x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)e^{2x}$$

3. *Applications of The Second-Order Differenttial Equation*

- ✔ *Spring Problems*
- ✔ *Electrical Circuit Problems*
- ✔ *Buoyancy Problems*
- ✔ *Classifying Solutions*
- ✔ *Solved Problems*

Examples:

Practical to Spring Problems

follows from Newton’s second law

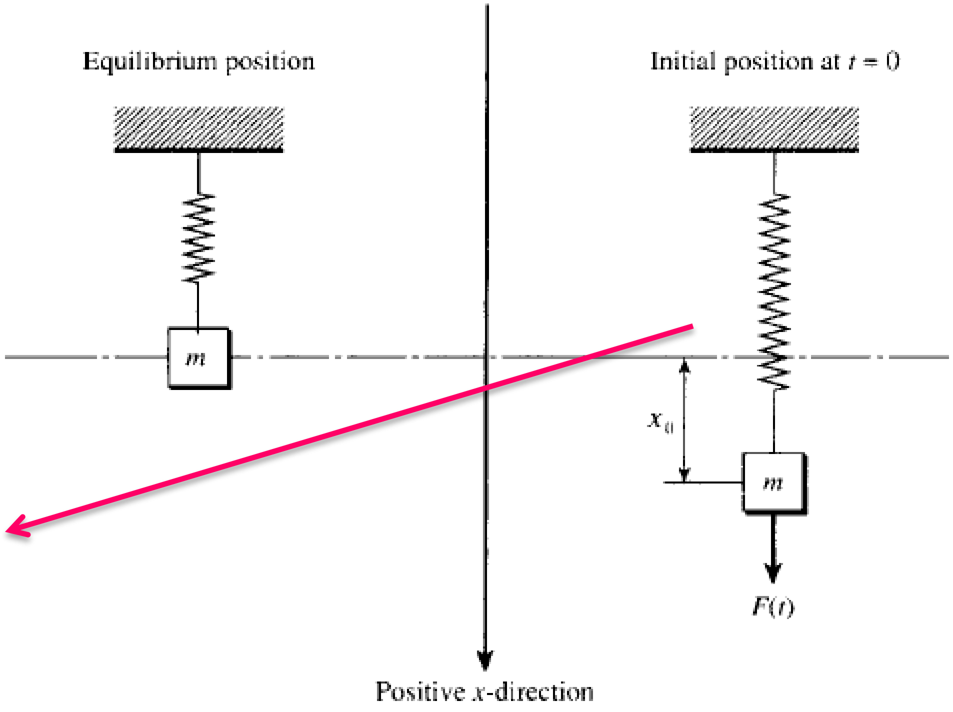
$$F(t) - kx - ax' = mx''$$

where a is the constant of proportionality

k ជាថេរកំរាញ

m ម៉ាស់អង្គធាតុ

$$x''(t) + \frac{a}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F(t)}{m}$$



1. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ 2

Practical Electrical Circuit Analysis

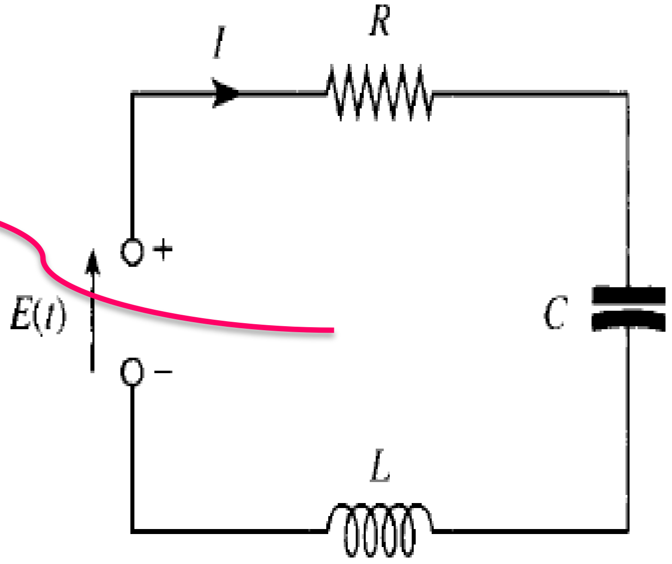
follows KVL law

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}q - E(t) = 0$$

$$R\left(\frac{dq}{dt}\right) + L\frac{d\left(\frac{dq}{dt}\right)}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

$$R\left(\frac{dq}{dt}\right) + L\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right) + \frac{1}{C}q = E(t)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)q = \frac{1}{L}E(t)$$



IV. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ខ្ពស់

1. *Form of n-th order differential equation*

ទំរង់ទូទៅនៃសមីការឌីរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី n គឺ ៖

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_o(x)y = f(x)$$

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_o(x)y = f(x)$$

2. ចំលើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ *n*

a. *Linear Homogeneous DE Variable Coefficients*

ទំរង់ទូទៅ

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_o(x)y = 0$$

ចំលើយទូទៅនៃសមីការគឺ ៖

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_iy_i(x)$$

ដែល $y_1(x)\,;y_2(x)\,;\cdots y_n(x)$ ជាសំនុំគ្រឹះនៃចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ n linear homogeneous.

b. ***Linear Non-Homogeneous DE Variable Coefficients***

ទំរង់ទូទៅ

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_o(x)y = f(x)$$

ចំលើយទូទៅនៃសមីការគឺ ៖

$y = y_h + y_p$ ដែល y_p ជាចំលើយពិសេសសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ n linear non-homogeneous និង

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_iy_i(x)$$

ជាចំលើយសមីការ linear homogeneous $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_o(x)y = 0$

ដូច្នេះ ចំលើយទូទៅគឺ

$$y = y_h + y_p = \sum_{i=1}^{n} c_iy_i(x) + y_p$$

c. *Linear Homogeneous DE Constant Coefficients*

ទំរង់ទូទៅ $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_o y = 0$

ដើម្បីរកចំលើយទូទៅនៃសមីការនេះគេត្រូវ ៖

ដោះស្រាយសមីការសំគាល់ $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_o = 0$

- បើសមីការសំគាល់មានរឹស n ផ្សេងៗពីគ្នា នោះចំលើយទូទៅកំនត់ដោយ

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i e^{r_i x}\right)$$

- បើសមីការសំគាល់មានរឹស p ផ្សេងៗពីគ្នា និងរឹសឌុប r_o ចំនួន q ដែលចំនួនរឹស $n = p + q$

នោះចំលើយទូទៅកំនត់ដោយ

$$y = c_{1p} e^{r_1 x} + c_{2p} e^{r_2 x} + \cdots + c_{pp} e^{r_p x} + \left(c_{1q} x^0 + x c_{2q} + x^2 c_{3q} + \cdots + c_{qq} x^{q-1}\right) e^{r_o x}$$

$$y = \sum_{i=1}^{p} \left(c_{ip} e^{r_i x}\right) + e^{r_o x} \sum_{i=1}^{q} \left(c_{iq} x^{i-1}\right)$$

- បើសមីការសំគាល់មានរឹសឌុប r_o ដូចៗគ្នា នោះចំលើយទូទៅកំនត់ដោយ

$$y = \left(c_1 x^0 + x c_2 + x^2 c_3 + \cdots + c_n x^{n-1}\right) e^{r_o x} = e^{r_o x} \sum_{i=1}^{n} \left(c_i x^{i-1}\right)$$

ចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ខ្ពស់

- បើសមីការសំគាល់មានរឹសឌុប r_{o1} ចំនួន p ដូចៗគ្នា និងរឹសឌុប r_{o2} ចំនួន q ដូចៗគ្នាផ្សេងទៀត ដែល $n = p + q$ នោះចំលើយទូទៅកំនត់ដោយ

$$y = \left(c_{1p}x^0 + xc_{2p} + x^2c_{3p} + \cdots + c_{pp}x^{p-1}\right)e^{r_{o1}x} + \left(c_{1q}x^0 + xc_{2q} + x^2c_{3q} + \cdots + c_{qq}x^{q-1}\right)e^{r_{o2}x}$$

$$y = e^{r_{o1}x}\sum_{i=1}^{p}\left(c_{ip}x^{i-1}\right) + e^{r_{o2}x}\sum_{i=1}^{q}\left(c_{iq}x^{i-1}\right)$$

Ex ដោះស្រាយសសមីការខាងក្រោម ៖

1. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
2. $y''' + 3y'' - 4 = 0$
3. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
4. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

ចំលើយ

1. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$
2. $y = c_1e^x + (c_2 + c_3x)e^{-2x}$
3. $y = (c_1 + c_2x)e^{jx} + (c_3 + c_4x)e^{-jx}$
4. $y = e^x\sum_{i=1}^{4}\left(c_ix^{i-1}\right)$

d. *Linear Non-homogeneous DE Constant Coefficients*

ទំរង់ទូទៅ $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_o y = f(x)$

ដើម្បីរកចំលើយទូទៅនៃសមីការនេះគេត្រូវ ៖

- រកចំលើយពិសេសមួយនៃសមីការ linear non-homogeneous DE

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_o y = f(x)$ តាងដោយ y_p ដែលអាចរកបានតាមតារាងជំនួយពីមុន ។

- រកចំលើយអូម៉ូហ្សែន នៃសមីការ $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_o y = 0$

តាងដោយ y_h ។

ចំលើយទូទៅកំនត់ដោយ :

$$y = y_h + y_p$$

Ex ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖

1. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = -12x^2 + 44x - 42$
2. $y''' + 3y'' - 4 = 0$
3. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
4. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

ចំលើយ

1. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + 2x^2 + 3$
2. $y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x) e^{-2x} + 16 e^{2x}$
3. $y = \frac{9}{8} Sin2x + (c_1 + c_2 x) e^{jx} + (c_3 + c_4 x) e^{-jx}$
4. $y = e^x (c_1 + x c_2 + x^2 c_3 + x^3 c_4) + 16 e^{-x}$

Reference form books

1. *Ordinary and Partial Differential Equation*
2. *Advanced Engineering Mathematic*
3. *Differential Equations for Engineers*
4. *Schaum's Easy Outlines Differential Equation*
5. *គណិតវិទ្យា ឆ្នាំមូលដ្ឋាន NPIC*
6. *ដេរីវេ អាំងតេក្រាល សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល និង ម៉ាទ្រីស របស់សាស្ត្រាចារ្យ លឹម ផល្គុន*
7. *សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល របស់សកលវិទ្យាល័យខេមរៈ*

Reference form internet

1. *http://faculty.ksu.edu.sa/khawaja/Math/02%20Ch%201%20Intro%20DE.ppt*
2. *http://www.alfordacademy.aberdeenshire.sch.uk/subjects/documents/math/advanced%20higher/unit3/Chapter%204%20First%20Order%20Linear%20Differential%20Equations.ppt*
3. *http://seltzermath.pbworks.com/f/47+Solving+Differential+Equations.ppt*

ជីវប្រវត្តិរបស់ខ្ញុំ

ខ្ញុំបាទ ឈ្មោះ ស៊ាន សារឿង

កើតថ្ងៃទី ១៤ ខែ មេសា ឆ្នាំ ១៩៩០

ស្រុកកំណើត ភូមិ ពពាលខែ ឃុំ អូរតាគី ស្រុក ថ្មគោល ខេត្ត បាត់ដំបង ។

ទីលំនៅបច្ចុប្បន្ន ស្នាក់នៅ អន្តេវាសិកដ្ឋាន នៃវិទ្យាស្ថានជាតិពហុបច្ចេកទេសកម្ពុជា ។

ទូរស័ព្ទលេខ 0887443166 , 0884076677 ។

ការសិក្សា

- ថ្នាក់ទី១ ដល់ ថ្នាក់ទី៦ បានសិក្សានៅសាលាបឋមសិក្សាពពាលខែ ។
- ថ្នាក់ទី៧ ដល់ ថ្នាកទ៩ បានសិក្សានៅអនុវិទ្យាល័យអូរតាគី ។
- ថ្នាក់ទី១០ ដល់ ថ្នាក់ទី១២ បានសិក្សានៅវិទ្យាល័យព្រះមុនីវង្ស ។
- សព្វថ្ងៃជានិស្សិតឆ្នាំទី២ ថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រវិស្វកម្មអគ្គិសនីនៃវិទ្យាស្ថានជាតិពហុបច្ចេកទេសកម្ពុជា ។

ស្នាដៃរបស់ខ្ញុំ

- ថ្នាក់ទី១២ បានសរសេរទ្រឹស្តីសង្ខេបពីវិធីសាស្ត្រសិក្សាអនុគមន៍ និងមេរៀន សង្ខេបគីមីវ៉ែ និងសរីរាង្គ ។
- នៅដើមឆ្នាំទី១ បានរៀបរៀងពី វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ និង រូបមន្តសង្ខេប ដេរីវេ និង អាំងតេក្រាល ។
- នៅពាក់កណ្តាលឆ្នាំទី១ បានរៀបរៀងពីវិធីសាស្ត្រវិភាគសៀគ្វីអគ្គិសនី និង បានបង្កើតគេហទំព័រមួយមាន ឈ្មោះថា និស្សិតវិស្វកម្មអគ្គិសនី ស៊ាន សារឿង *http://eebookforengineer.wordpress.com* ។
- នៅឆ្នាំទី២ បានរៀបរៀងពី វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។