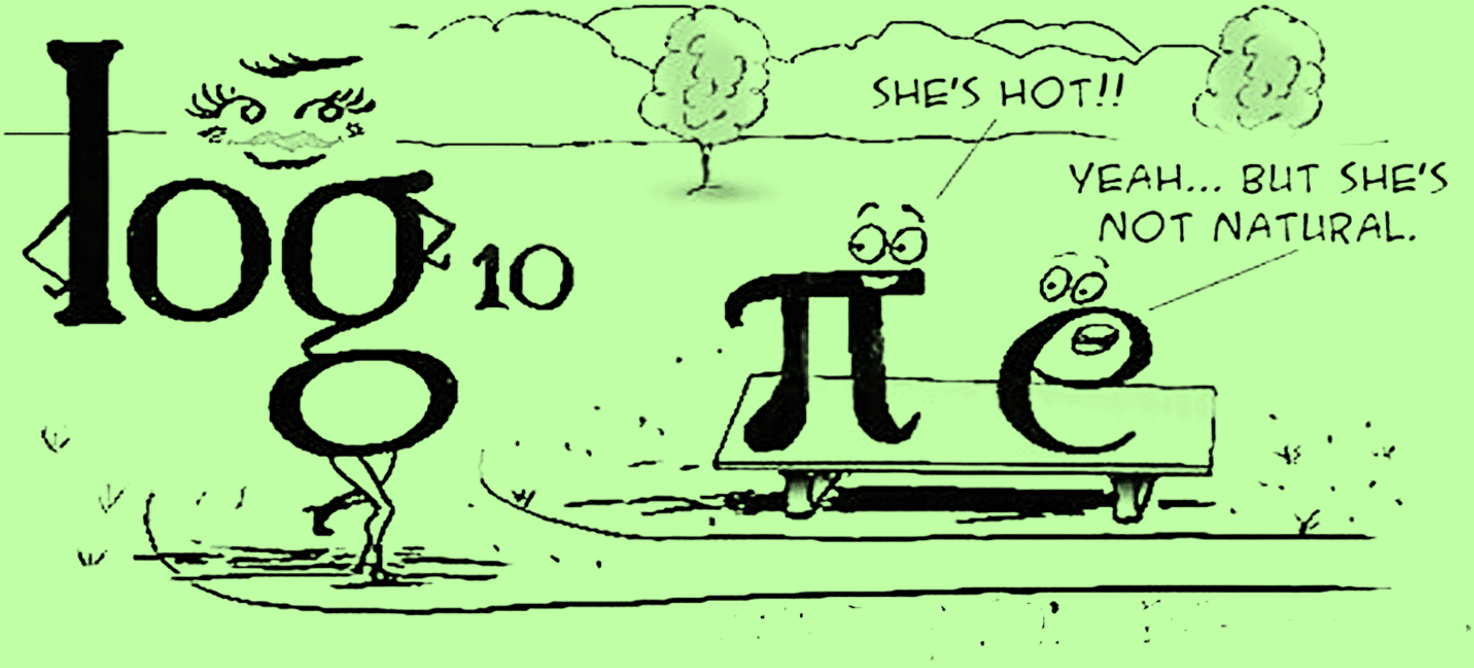
ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ
National Institute of Education

អនុគមន៍លោការីត



Loga
Rithm

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

National Institute of Education

អនុគមន៍លោការីត

ស្រាវជ្រាវ និងចងក្រងដោយ

គរុនិស្សិត

សោម ចំរើន

សុន សាវុឌ្ឍី

នាង សុវិសាល

ចេង ចាន់ធឿន

សូ សារី

ឆាំ កុម្ភៈ

សាស្ត្រាចារ្យត្រួតពិនិត្យ

ឃី មឿយ

រួមមាន៖

- មេរៀនសង្ខេប
- ឧទាហរណ៍ងាយយល់
- លំហាត់ និងចម្លើយ
- លំហាត់អនុវត្តន៍

អារម្ភកថា

សៀវភៅអនុគមន៍លោការីត ដែលអ្នកកំពុងតែកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ត្រូវបានសម្រិតសម្រាំងចេញពីឯកសារជាតិ បរទេស និងឯកសារផ្សេងៗដែលបាន ទាញយកពីបណ្ដាញអ៊ីនធ័រណេត ព្រមទាំងការច្នៃប្រឌិតរបស់ក្រុមយើងខ្ញុំផង ដើម្បីឱ្យខ្លឹមសារងាយយល់ ព្រមទាំងមានគន្លឹះងាយៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់សមីការ វិសមីការអនុគមន៍លោការីតដើម្បីជំនួយស្មារតីប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ ឱ្យងាយយល់ និងអាចអនុវត្តដោះស្រាយដោយខ្លួនឯងបាន។

ទោះបីជាយ៉ាងនេះក្ដី យើងខ្ញុំជឿជាក់ថា សៀវភៅមួយនេះពិតជា មានភាពខ្វះចន្លោះ ទាំងខ្លឹមសារ និងអក្ខរាវិរុទ្ធជាមិនខានឡើយពីព្រោះនេះជាស្នាដៃដំបូងនៃក្រុមយើងខ្ញុំ។ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា ប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ និងយោគយល់អធ្យាស្រ័យនូវរាល់កំហុសឆ្គងនានាដែលកើតឡើងដោយអចេតនា ហើយយើងខ្ញុំសូមទទួល នូវរាល់ការរិះគន់នានារបស់លោកអ្នកដើម្បីឱ្យសៀវភៅមួយនេះ រឹងរឹតតែមានភាពល្អប្រសើរឡើង។

ជាចុងក្រោយសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ ដែលបានជាវសៀវភៅមួយនេះទុកជាឯកសារស្រាវជ្រាវ និងសូមគោរពជូនពរដល់លោកអ្នកឱ្យទទួលបានជោគជ័យគ្រប់ភារកិច្ចការងារ។

សូមទទួលនូវសេចក្ដីគោរពស្រឡាញ់រាប់អានដ៏ខ្ពង់ខ្ពស់ពីក្រុមយើងខ្ញុំ។

ធ្វើនៅ ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី ០១ ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០១៦

គណិតវិទ្យាក្រុមទី៥

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

យើងខ្ញុំទាំងអស់ជាគរុនិស្សិតបរិញ្ញាបត្រ+១ ឯកទេសគណិតវិទ្យា ក្រុមទី៥ ជំនាន់ទី២១ នៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំឆ្នាំសិក្សា២០១៥-២០១៦។

សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះ

១. អ្នកមានគុណ និងក្រុមគ្រួសាររបស់យើងខ្ញុំទាំងអស់។ កូនមិនដែលបំភ្លេចគុណណូបការៈដែលលោកបានផ្តល់កំណើតព្រមទាំងចិញ្ចឹមបីបាច់ ថែរក្សាទាំងពីតូចរហូតដល់ធំទំនុកបម្រុងសព្វបែបយ៉ាងរហូតទទួលបានចំណេះដឹងដូចសព្វថ្ងៃ។ កូនចងចាំជានិច្ចនូវគុណដ៏សែនធ្ងន់មិនអាចកាត់ថ្លៃបានរបស់លោកទាំងពីរ។

២. ឯកឧត្តមបណ្ឌិត **សៀង សុវណ្ណា** នាយកវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ដែលបានផ្តល់ឱកាសឱ្យយើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាប្រឡង និងបន្តការសិក្សារហូតដល់ចប់ប្រកបដោយជោគជ័យ។

៣. លោក-លោកស្រីសាស្ត្រាចារ្យទាំងអស់ដែលបានបង្ហាត់បង្រៀនយើងខ្ញុំនាពេលកន្លងមក សូមលោកជួបតែសំណាងល្អ និងសុខភាពល្អជានិច្ច។

៤. លោកសាស្ត្រាចារ្យ **ឃី មឿយ** ដឹកនាំធ្វើរបាយការណ៍ស្រាវជ្រាវលើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាលើប្រធានបទ "អនុគមន៏លោការីត" លោកបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រល្អៗដល់រូបយើងខ្ញុំ។

ជាទីបញ្ចប់យើងខ្ញុំសូមប្រសិទ្ធិពរជ័យជូនដល់អ្នកមានគុណ ឯកឧត្តមបណ្ឌិតថ្នាក់ដឹកនាំរាជរដ្ឋាភិបាល ព្រមទាំងសាស្ត្រចារ្យទាំងអស់ឱ្យជួបប្រទះតែពុទ្ធពរទាំងបួនប្រការគឺ អាយុ វណ្ណៈ សុខៈ ពលៈកុំបីឃ្លាងឃ្លាតឡើយ។

មាតិកា

ចំណងជើងមេរៀន ទំព័រ

រំលឹកទ្រឹស្តី

ផ្នែកលំហាត់

ផ្នែកចម្លើយ

ផ្នែកលំហាត់អនុវត្តន៍

រំលឹកទ្រឹស្តី

1. អនុគមន៍ច្រាស

1.1. និយមន័យ

បើ (a,b) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $y=f(x)$ ហើយ (b,a) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $y=f^{-1}(x)$ នោះ f^{-1} ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ f ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមានអនុគមន៍ពីរ f និង g ។ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ និង $g(x)=\dfrac{x+1}{2-x}$ ដែល $x\neq -1, x\neq 2$ ។

ក. គណនាតម្លៃ $f(0), f(1), f(2)$ និង $g(-1), g(\frac{1}{2}), g(1)$ ។

ខ. តើ g ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ f ឬទេ?

ចម្លើយ៖

ក. គណនាតម្លៃ $f(0), f(1), f(2)$ និង $g(-1), g(\frac{1}{2}), g(1)$

គេមាន $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}, x\neq 1$

គេបាន $f(0)=-1, f(1)=\dfrac{1}{2}, f(2)=1$

រួច $g(x)=\dfrac{x+1}{2-x}, x\neq 2$

គេបាន $g(-1)=0, g(\frac{1}{2})=1, g(1)=2$ ។

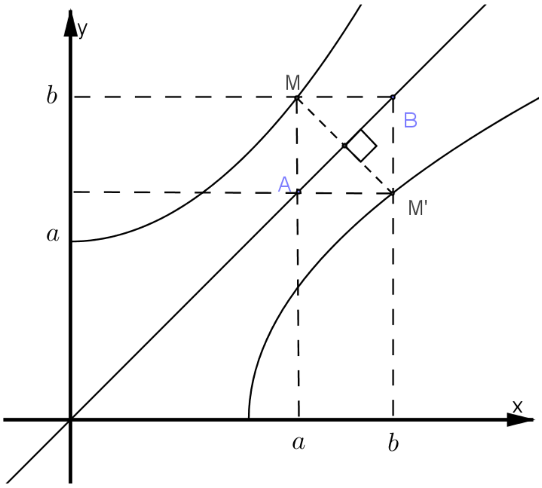
ខ. ដោយ $(0,-1), (1,\frac{1}{2})$ និង $(2,1)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x)$ ហើយ $(-1,0), (\frac{1}{2},1)$ និង $(1,2)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $g(x)$ នោះយើងទាញបាន g ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ f ។

1.2. ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាស

- បើអនុគមន៍ពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ ច្រាសគ្នានោះក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

f និង f^{-1} ជាអនុគមន៍ច្រាសគ្នា បើ $M(a,b)\in f$ និង $M'(b,a)\in f^{-1}$ សង់ចំណុច $A(a,a)$ និង $B(b,b)$ គេបានការេ $AMBM'$ ។ (AB) ជាបន្ទាត់មានសមីការ $y=x$ ព្រោះវាកាត់តាមចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស ស្មើនឹងកូអរដោនេ។ $M(a,b)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹង $M'(b,a)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ (AB) ។ ដូច្នេះក្រាបនៃអនុគមន៍ f^{-1} ត្រូវឆ្លុះនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ f ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។



❖ របៀបរកអនុគមន៍ច្រាស

- ជំនួស $f(x)$ ដោយ y ។
- ប្តូរ x ជា y និង y ជា x គេបានសមីការថ្មីមួយ រួចទាញរកតម្លៃ y (បើសមីការថ្មីនេះមិនតាង y ជាអនុគមន៍នៃ x ទេនោះអនុគមន៍ f គ្មានអនុគមន៍ច្រាសទេ)។
- ជំនួស y ដោយ $f^{-1}(x)$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x-2}$ ដែល $x\geq 2$។

ក. កំណត់អនុគមន៍ច្រាសនៃ f ។

ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង f^{-1}ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ចម្លើយ

ក. កំណត់អនុគមន៍ច្រាសនៃ f

យើងមាន $f(x)=\sqrt{x-2}$ $,x\geq 2$

-ជំនួស $f(x)$ ដោយ y យើងបាន $y=\sqrt{x-2}$

-ប្តូរ $x\to y$ និង $y\to x$ យើងបាន $x=\sqrt{y-2}\Leftrightarrow x^2=y-2\Rightarrow y=x^2+2$

-ជំនួស y ដោយ $f^{-1}(x)$ យើងទាញបាន $f^{-1}(x)=x^2+2$

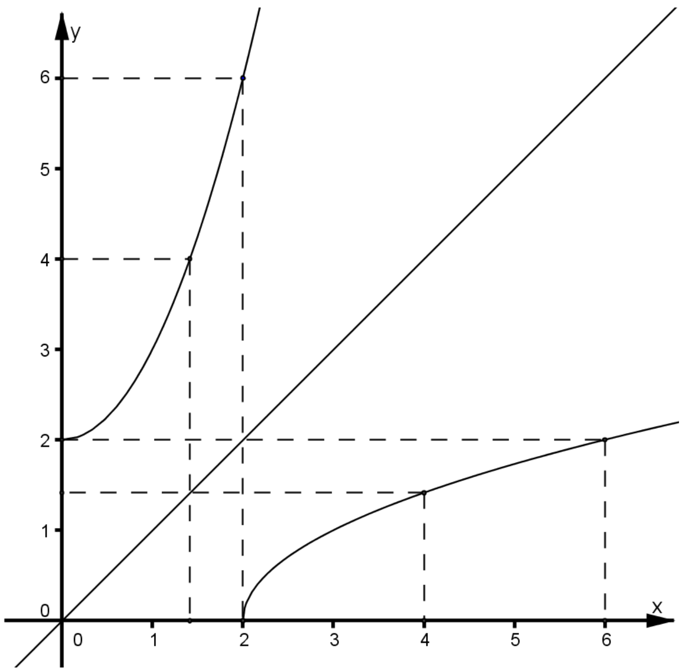
ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x), f^{-1}(x)$

$f(x)=\sqrt{x-2}$

x	$f(x)$
2	0
4	$\sqrt{2}$
6	2

$f^{-1}(x)=x^2+2$

x	$f(x)$
0	2
$\sqrt{2}$	4
2	6



2. អនុគមន៍លោការីត

2.1. សញ្ញាណនៃអនុគមន៍លោការីត

- បើគេមានសមីការ $a^x=y$ ដែល $y>0, a>0, a\neq 1$ នោះ $x=\log_a y$ ($\log_a y$ អានថា លោការីតគោល a នៃ y)។

ឧទាហរណ៍៖ ដោះស្រាយសមីការ $3^x=5$

ចម្លើយ៖

គេមាន $3^x=5$ នោះ $x=\log_3 5$ (លោការីតគោល 3 នៃ 5)។

ឧទាហរណ៍៖ រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)=a^x$ ដែល $a>0, a\neq 1$។

ចម្លើយ៖

រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)=a^x$

- ជំនួស $f(x)$ ដោយ y គេបាន $y=a^x$, $y>0$
- ប្តូរ $x\to y$ និង $y\to x$ យើងបាន $a^y=x,(x>0)$ នោះ $y=\log_a x$
- ជំនួស y ដោយ $f^{-1}(x)$ យើងទាញបាន $f^{-1}(x)=\log_a x$។

ជាទូទៅ

បើគេមានអនុគមន៍ $f(x)=a^x$ ដែល $a>0, a\neq 1$ នោះអនុគមន៍ច្រាសនៃ f គឺ $f^{-1}(x)=\log_a x$ ជាអនុគមន៍លោការីតគោល a នៃ x ដែល $x>0$។

- ករណី $a=10, \log_{10} x$ ហៅថាលោការីតទសភាគ គេអាចសរសេរដោយងាយ $\log x$ ឬ $\lg x$។
- ករណី $a=e$ ដែល $(e\approx 2.7182), \log_e x$ ហៅថាលោការីតនេពៃ គេតាងដោយ $\ln x=\log_e x$។

សម្គាល់៖

$\ln$ មកពីអក្សរឡាតាំង *Logarithmus naturali* ជួនកាលយើងអានថា *Logarithm napier* តាមឈ្មោះគណិតវិទូ *Juhn Napier* ដែលជាអ្នករកឃើញលោការីតនៅឆ្នាំ 1614។ នៅក្នុងឆ្នាំ 1730 អ្នកគណិតវិទូ *Euler* គឺជាអ្នកចងក្រងទំនាក់ទំនងអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e ហើយនឹង $\ln$។ គេតាងដោយ $\ln x=\log_e x$

$\ln x=y\Rightarrow e^y=x$។

2.2. លក្ខណៈនៃលោការីត

ចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន x, y និង a ដែល $a\neq 1$ គេបាន:

1. $\log_a 1=0$
2. $\log_a a=1$
3. $\log_a a^\alpha=\alpha$
4. $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$
5. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$
6. $\log_a x^n=n\log_a x$
7. $\log_a x=\dfrac{1}{\log_x a}$
8. $(a)^{\log_a x}=x$
9. $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a},(a,b>0,a,b\neq 1,x>0)$
10. $\log_{a^\alpha} x^\beta=\dfrac{\beta}{\alpha}\log_a x$

សម្រាយ៖

1. តាង $A=\log_a 1\Leftrightarrow a^A=1$ ឬ $a^A=a^0\Rightarrow A=0$

ដូច្នេះ $\log_a 1=0$

2. តាង $B=\log_a a \Leftrightarrow a^B = a$ ឬ $a^B = a^1 \Rightarrow B=1$

ដូច្នេះ $\log_a a = 1$

3. តាង $C=\log_a a^\alpha \Leftrightarrow a^C = a^\alpha \Rightarrow C=\alpha$

ដូច្នេះ $\log_a a^\alpha = \alpha$

4. តាង $m=\log_a x \Leftrightarrow a^m = x$, $n=\log_a y \Leftrightarrow a^n = y$

គេបាន $x\times y = a^m \times a^n = a^{m+n}$

នោះ $m+n=\log_a(xy)$

ដូច្នេះ $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$

5. តាង $m=\log_a x \Leftrightarrow a^m = x, n=\log_a y \Leftrightarrow a^n = y$

គេបាន $\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{x}{y}$ ឬ $a^{m-n}=\dfrac{x}{y}\Rightarrow m-n=\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)$

ដូច្នេះ $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

6. $\log_a x^n = \log_a(\underbrace{x\cdot x\cdot \ldots \cdot x}_{n\text{ កត្តា}}) = \log_a x+\log_a x+\ldots+\log_a x = n\log_a x$

ដូច្នេះ $\log_a x^n = n\log_a x$

7. តាង $m=\log_a x \Leftrightarrow x=a^m, n=\log_x a \Leftrightarrow a=x^n$

គេបាន $(x^n)^m = x \Leftrightarrow x^{n\times m}=x^1 \Leftrightarrow m\times n=1 \Rightarrow m=\dfrac{1}{n}$

ដូច្នេះ $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$

8. តាង $A=a^{\log_a x} \Leftrightarrow \log_a x = \log_a A$

$$\Leftrightarrow \log_a x - \log_a A = 0$$

$$\log_a\left(\frac{x}{A}\right)=0$$

គេបាន $\dfrac{x}{A}=1\Rightarrow x=A$

ដូច្នេះ $a^{\log_a x}=x$

9. តាង $y=\log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ លើកលោការីតគោល b លើអង្គទាំងពីរ

គេបាន $\log_b a^y = \log_b x$

$$y=\log_b a = \log_b x \Rightarrow y=\frac{\log_b x}{\log_b a}$$

ដូច្នេះ $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ ជារូបមន្តប្តូរគោល

10. $\log_{a^\alpha} x^\beta = \dfrac{\log_b x^\beta}{\log_b a^\alpha} = \dfrac{\beta\log_b x}{\alpha\log_b a} = \dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\dfrac{\log_b x}{\log_b a} = \dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\log_a x$

ដូច្នេះ $\log_{a^\alpha} x^\beta = \dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\log_a x$

❖ **សម្គាល់៖**

1. $\ln x = y \Rightarrow e^y = x$
2. $\ln e^x = x \ , \ x \in \mathbb{R}$
3. $e^{\ln x} = x \ , \ x > 0$
4. $\ln e = 1$
5. $\ln 1 = 0$
6. $\ln(xy) = \ln x + \ln y , (x, y > 0)$
7. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y , (x, y > 0)$
8. $\ln e^k = k \ln e$

ឧទាហរណ៍៖រកតម្លៃប្រាកដនៃកន្សោមខាងក្រោម៖

ក. $\log 1000$

ខ. $\log_{16} 4$

គ. $\log_3 81$

ឃ. $\ln e^{-100}$

ង. $\log_5 \dfrac{1}{25}$

ច. $e^{\ln 15}$

ឆ. $\log_{10} 0.1$

ជ. $\log_8 320 - \log_8 5$

ឈ. $\log_2 3 + \log_2 48$

ញ. $\log_2 5 - \log_2 90 + 2\log_2 3$

ដ. $2^{(\log_2 3 + \log_2 5)}$

ឋ. $e^{3\ln 2}$

ឌ. $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{4}$

ឍ. $\log_7 \log_5 \log_3 243$

ណ. $\log_2 \sin\dfrac{\pi}{12} + \log_2 \cos\dfrac{\pi}{12}$

ចម្លើយ៖

ក. $\log 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$

ខ. $\log_{16} 4 = \log_{2^4} 2^2 = \dfrac{2}{4}\log_2 2 = \dfrac{1}{2}$

គ. $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

ង. $\ln e^{-100} = -100$

ច. $e^{\ln 15} = 15$

ឆ. $\log_{10} 0.1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

ជ. $\log_8 320 - \log_8 5 = \log_8\left(\dfrac{320}{5}\right) = \log_8 64 = \log_8 8^2 = 2$

ឈ. $\log_{12} 3 + \log_{12} 48 = \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = 2$

ញ. $\log_2 5 - \log_2 90 + 2\log_2 3 = \log_2 5 + \log_2 3^2 - \log_2 90 = \log_2\left(\dfrac{45}{90}\right) = \log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

ដ. $2^{(\log_2 3 + \log_2 5)} = 2^{\log_2 15} = 15$

ឋ. $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8$

ឌ. $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{4} = \dfrac{\ln \sqrt[3]{4}}{\ln \sqrt{2}} = \dfrac{\ln 2^{\frac{2}{3}}}{\ln 2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\frac{2}{3}\ln 2}{\frac{1}{2}\ln 2} = \dfrac{4}{3}$

ឍ. $\log_7 \log_5 \log_3 243 = \log_7 \log_5 \log_3 3^5 = \log_7 \log_5 5 = \log_7 1 = 0$

ណ. $\log_2 \sin\dfrac{\pi}{12} + \log_2 \cos\dfrac{\pi}{12} = \log_2(\sin\dfrac{\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{\pi}{12})$

$$= \log_2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{2}\right)$$

$$= \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$$

2.3. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍លោការីត

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺ $D = \{x \in \mathbb{R} / f(x)$ កំណត់ $\}$
ដែនកំណត់នៃអនុគន៍ច្រាស f^{-1} ស្មើនឹងសំណុំរូបភាពនៃអនុគន៍ f ។
ដោយអនុគមន៍ $f(x) = a^x$ មានអនុគមន៍ច្រាស $f(x) = \log_a x$

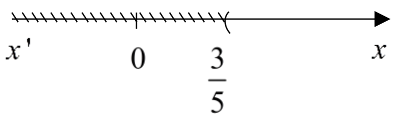
ដូច្នេះដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y = \log_a x$ គឺ $\begin{cases} x, a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

- ចំពោះអនុគមន៍ $y = \log_a A(x)$ មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} a, A(x) > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

ឧទាហរណ៍៖ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

1. $f(x) = \log_2(5x-3)$

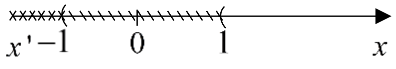
ចម្លើយ៖ អនុគមន៍មានន័យកាលណា $5x - 3 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{3}{5}$



ដូច្នេះ ដែនកំណត់នៃ f គឺ $D = (\dfrac{3}{5}, +\infty)$

2. $f(x) = \ln(e^t - 2)$

ចម្លើយ៖ អនុគមន៍មានន័យកាលណា $e^t - 2 > 0$



$$e^t > 2 \Rightarrow t > \ln 2$$

ដូច្នេះ ដែនកំណត់នៃ f គឺ $D = (\ln 2, +\infty)$

3. $f(x)=\log_{x+1}(e^x-e)$

ចម្លើយ៖ អនុគមន៍មានន័យកាលណា $\begin{cases} e^x-e>0 \\ x+1>0 \\ x+1\neq 1 \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x>1 \\ x>-1 \\ x\neq 0 \end{cases}$

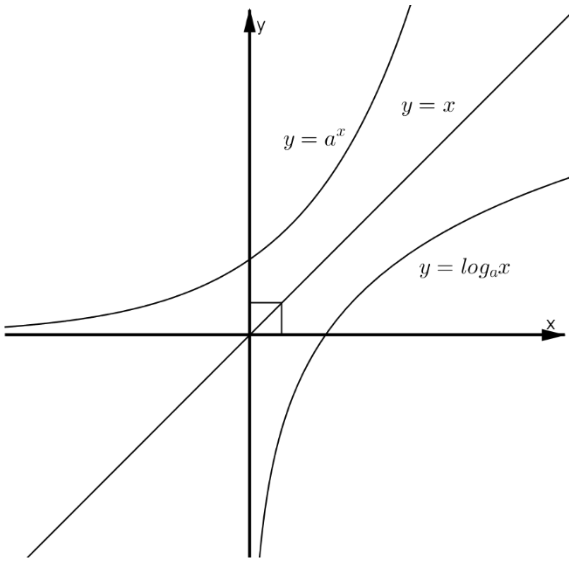
ដូច្នេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D=(1,+\infty)$

2.4. ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត

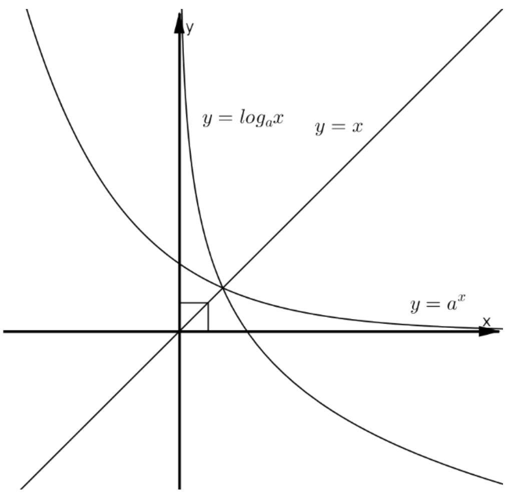
អនុគន៍លោការីតជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។

រូបភាពនៃខ្សែកោង $y=\log_a x$ ជារូបឆ្លុះនឹងអុគមន៍ $y=a^x$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ដែល $a>0, x>0$ និង $a\neq 1$។

- ករណី $a>1$



- ករណី $0<a<1$



ឧទាហរណ៍៖ ចូរសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x): y=5^x$ និងក្រាបនៃអនុគមន៍ $g(x): y=\log_5 x$

+អនុគមន៍ $f(x): y=5^x$

-ដែនកំណត់ $D_f=\mathbb{R}$

-តារាងតម្លៃលេខ

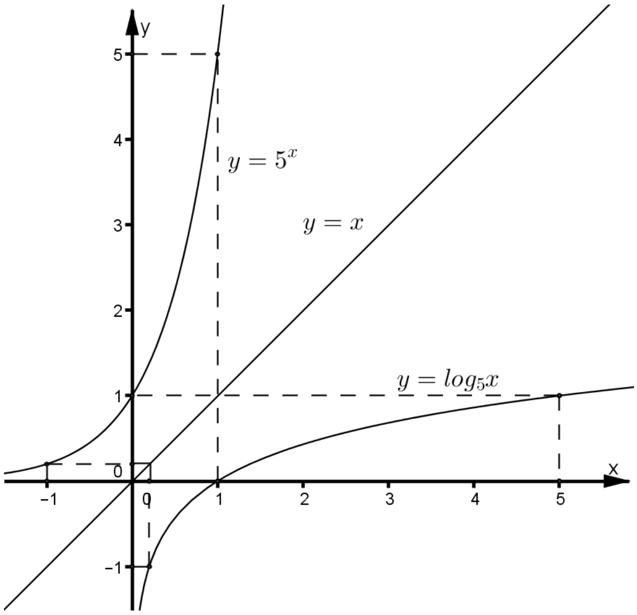
x	y
-1	$\frac{1}{5}$
0	1
1	5

+អនុគមន៍ $g(x): y=\log_5 x$

-ដែនកំណត់ $D_g=(0,+\infty)$

-តារាងតម្លៃលេខ

x	y
$\frac{1}{5}$	-1
1	0
5	1



- ចំណាំ

ជាទូទៅ៖ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_a x, x>0$

- ○ បើ $0<a<1$ ជាអនុគមន៍ចុះ។
- ○ បើ $a>1$ ជាអនុគមន៍កើន។

➢ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=q+\log_a x$ ដែល $a>0, x>0, a\neq 1$ និង $q\in\mathbb{R}$ បានមកពីការរំកិលក្រាប $y=\log_a x$ ស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ q ឯកតា។

- ○ បើ $q>0$ រំកិលឡើងលើ q ឯកតា
- ○ បើ $q<0$ រំកិលចុះក្រោម q ឯកតា

➢ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_a(x-p)$ បានមកពីការរំកិលក្រាប $y=\log_a x$ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស p ឯកតា។

- ○ បើ $p>0$ គឺរំកិលទៅស្តាំ p ឯកតា

- ○ បើ $p<0$ គឺរំកិលទៅឆ្វេង p ឯកតា

➢ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=q+\log_a(x-p)$ បានមកពីការរំកិលក្រាប $y=\log_a x$ ចំនួន p ឯកតា ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស រួច q ឯកតា ស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ។

➢ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=-\log_a x$ ជារូបឆ្លុះនៃក្រាប $y=\log_a x$ ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ឧទាហរណ៍៖ ចូរសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\log_4 x$។ ដោយប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ f ចូរសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

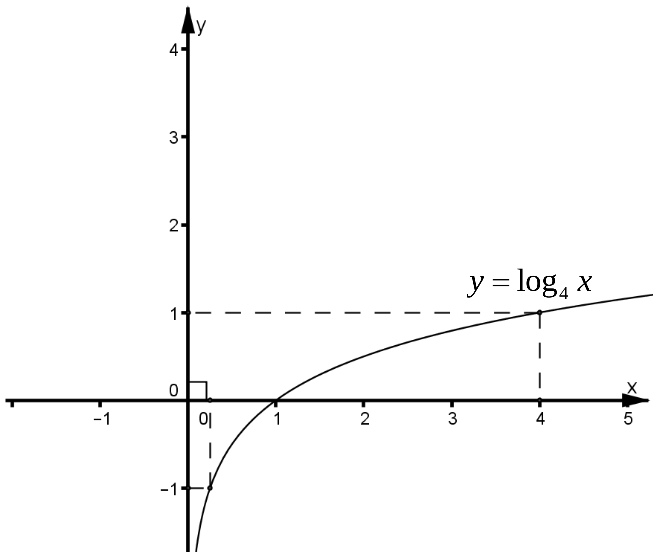
1. $y=\log_4 x+2$
2. $y=\log_4(x-3)$
3. $y=\log_4(x-3)+2$
4. $y=\log_{\frac{1}{4}} x$

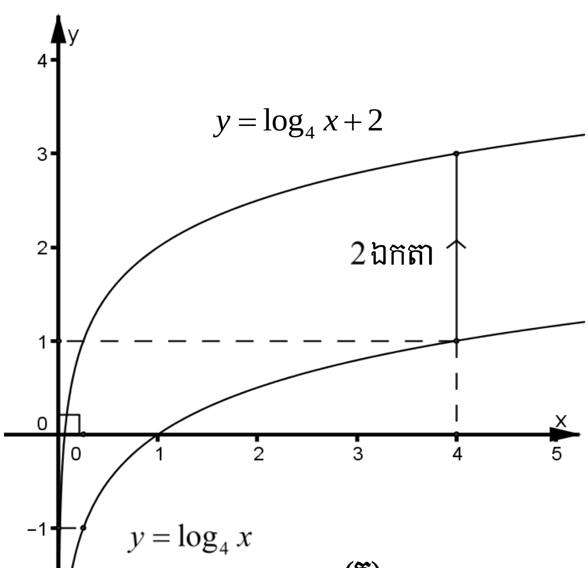
ចម្លើយ៖

-ដែនកំណត់នៃអនុគន៍ f គឺ $D_f=(0,+\infty)$

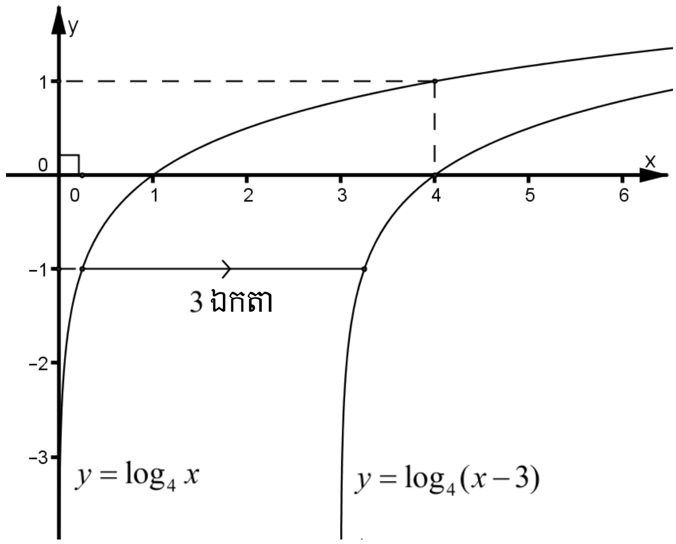
-តារាងតម្លៃលេខ

x	$f(x)$
$\frac{1}{4}$	-1
1	0
4	1

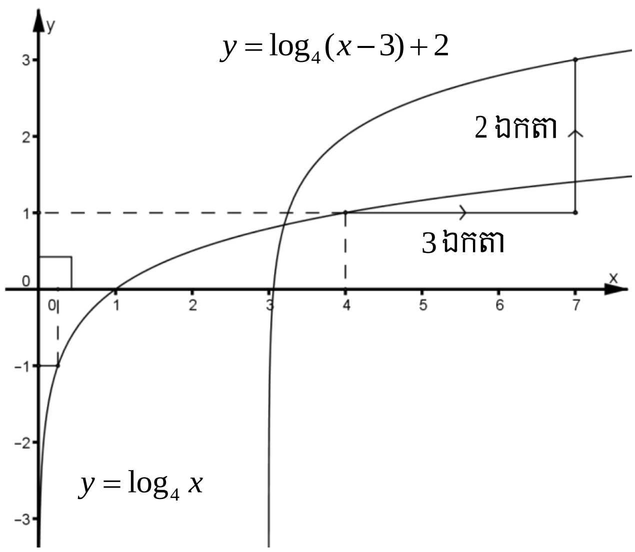




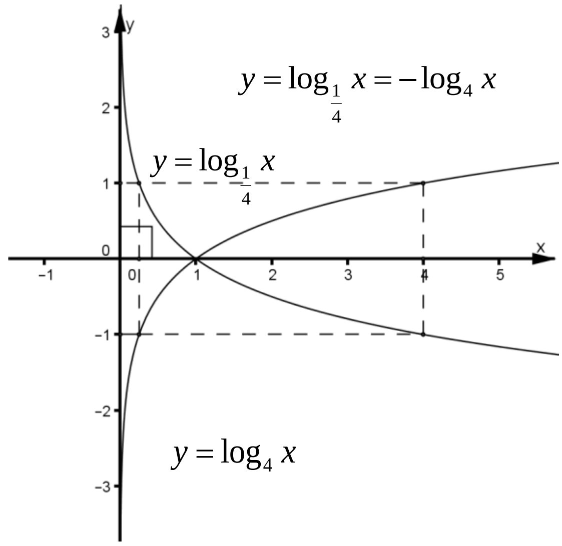
(ក)



(ខ)



(គ)



(ឃ)

1. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_4 x+2$ បានដោយការរំកិលក្រាប $y=\log_4 x$ ឡើងលើចំនួន 2 ឯកតាស្របអ័ក្សអរដោនេ ដូចរូប(ក)។
2. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_4(x-3)$ បានពីការរំកិលក្រាប $y=\log_4 x$ ទៅស្តាំចំនួន 3 ឯកតាស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស ដូចរូប(ខ)។
3. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_4(x-3)+2$ បានដោយការរំកិលក្រាប $y=\log_4 x$ ទៅស្តាំចំនួន 3 ឯកតាស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស រួចរំកិលឡើងលើចំនួន 2 ឯកតាស្របអ័ក្សអរដោនេ ដូចរូប(គ)។
4. ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ ឬ $y=-\log_4 x$ បានដោយការធ្វើបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប $y=\log_4 x$ ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ដូចរូប(ឃ)។

2.5. សមីការ និងវិសមីការលោការីត

2.5.1. សមីការលោការីត

បើ $a>0, a\neq 1$ នោះសមីការ $\log_a x=\log_a y$ គេបាន $x=y$។

សម្រាយ៖

យើងមាន $\log_a x=\log_a y$, $x,y>0$

$$\log_a x-\log_a y=0$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=0$$

ដោយ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $1\ \forall a>1$ និង $0<a<1$ នោះគេបាន $\frac{x}{y}=1\Rightarrow x=y$។

➢ **សម្គាល់៖** ចំពោះ $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ គេបាន $f(x)=g(x)$។

ឧទាហរណ៍៖ ដោះស្រាយសមីការ

1. $10e^{-x}=5$
2. $2\ln x=1$
3. $5^{x-3}=10$
4. $\log_{10}(x+1)=4$
5. $\ln(5-2x)=-3$

6. $e^{3x+1}=k$
7. $\ln(2x+1)=2-\ln x$
8. $2\ln x=\ln 2+\ln(3x-4)$
9. $e^{e^x}=2$
10. $7e^x-e^{2x}=12$
11. $\ln(e^x-2)=3$
12. $\ln(1+\sqrt{x})=2$
13. $\ln(\ln x)=1$
14. $3(\log x)^2+14\log x-5=0$
15. $\log_3(1-x)-\log_3(1+x)=\dfrac{1}{2}$
16. $\log_3\left(\dfrac{3x}{x+8}\right)+\log_3(x-3)=0$
17. $2\lg 5x-\dfrac{1}{\lg 5x}+1=0$
18. $2(\lg x)^3-15(\lg x)^2-2\lg x+15=0$

<u>ចម្លើយ៖</u>

1. $10e^{-x}=5$

នោះ $e^{-x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \ln e^{-x}=\ln\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\ln 2$

ដូច្នេះ $x=\ln 2$ ជាឫសរបស់សមីការ។

2. $2\ln x=1$

នោះ $\ln x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \ln x=\ln e^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$ (សមីការមានន័យកាលណា $x>0$)

ដូច្នេះ $x=\sqrt{e}$ ជាឫសរបស់សមីការ។

3. $5^{x-3}=10$

នោះ $\log_5 5^{x-3}=\log_5 10\Leftrightarrow x-3=\log_5 10\Rightarrow x=\log_5 10+3$

ដូច្នេះ $x=\log_5 10+3$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ។

4. $\log_{10}(x+1)=4$

សមីការមានន័យកាលណា $x+1>0\Rightarrow x>-1$

គេបាន $\log_{10}(x+1)=\log_{10}10^4\Leftrightarrow x+1=10^4\Rightarrow x=10000-1=9999$

ដូច្នេះ $x=9999$ ជាឫសរបស់សមីការ។

5. $\ln(5-2x)=-3$

សមីការមានន័យកាលណា $5-2x>0\Rightarrow x<\dfrac{5}{2}$

គេបាន $\ln(5-2x)=\ln e^{-3}\Leftrightarrow 5-2x=e^{-3}\Rightarrow x=\dfrac{5-e^{-3}}{2}$

ដូច្នេះ $x=\dfrac{5-e^{-3}}{2}$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ។

6. $e^{3x+1}=k$ (*)

- ករណី $k\le 0$ គេបានសមីការ (*) គ្មានឫស។
- ករណី $k>0$ គេបាន : $e^{3x+1}=k$

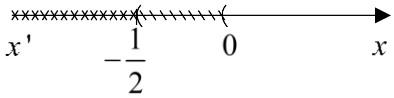
$$\ln e^{3x+1}=\ln k$$

$$3x+1=\ln k\Rightarrow x=\frac{\ln k-1}{3}$$

ដូច្នេះ $x=\dfrac{\ln k-1}{3}$ ជាឫសរបស់សមីការ។

7. $\ln(2x+1)=2-\ln x$

សមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases}2x+1>0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\ x>0\end{cases}$



គេបាន $x>0$

យើងមាន $\ln(2x+1)=2-\ln x$

$\ln(2x+1)+\ln x=2$

$\ln(2x^2+x)=\ln e^2$

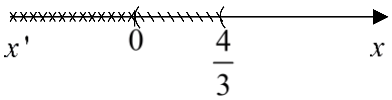
$2x^2+x-e^2=0$

$\Delta=1^2+8e^2>0$ នោះ $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1+8e^2}}{4}<0$ មិនយក, $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1+8e^2}}{2}>0$

ដូច្នេះ $x=\dfrac{-1+\sqrt{1+8e^2}}{2}$ ជាឫសរបស់សមីការ។

8. $2\ln x=\ln 2+\ln(3x-4)$

សមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases}x>0\\ 3x-4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x>\dfrac{4}{3}\end{cases}$



គេបាន $2\ln x=\ln 2+\ln(3x-4)$

$\ln x^2=\ln(6x-8)$

$x^2-6x+8=0$

$\Delta=9-8=1$ នោះ $x_1=4, x_2=2$

ដូច្នេះ $x=2, x=4$ ជាឫសរបស់សមីការ។

9. $e^{e^x}=2$

យើងបាន $e^2=\ln 2 \Rightarrow x=\ln(\ln 2)$

ដូច្នេះ $x=\ln(\ln 2)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ។

10. $7e^x-e^{2x}=12$

តាង $e^x=t,(t>0)$ គេបាន $7t-t^2=12 \Leftrightarrow -t^2+7t-12=0$

$\Delta=49-48=1$ គេបាន $t_1=\dfrac{-7+1}{-2}=3$, $t_2=\dfrac{-7-1}{-2}=4$

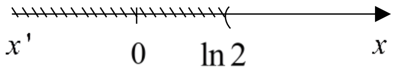
-ចំពោះ $t=3$ គេបាន $e^x=3 \Rightarrow x=\ln 3$

-ចំពោះ $t=4$ គេបាន $e^x=4 \Rightarrow x=\ln 4$

ដូច្នេះ $x=\ln 3, x=\ln 4$ ជាឫសរបស់សមីការ។

11. $\ln(e^x-2)=3$

សមីការមានន័យកាលណា $e^x-2>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Rightarrow x>\ln 2$



យើងមាន $\ln(e^x-2)=3$

$$\ln(e^x-2)=\ln e^3$$

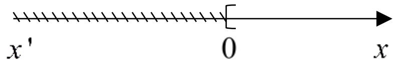
$$e^x-2=e^3$$

$$e^x=e^3+2 \Rightarrow x=\ln(e^3+2)$$

ដូច្នេះ $x=\ln(e^3+2)$ ជាឫសរបស់សមីការ។

12. $\ln(1+\sqrt{x})=2$

សមីការមានន័យកាលណា $x\ge 0$



គេបាន $\ln(1+\sqrt{x})=\ln e^2 \Leftrightarrow 1+\sqrt{x}=e^2$

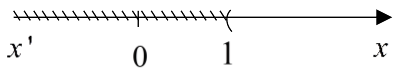
$\sqrt{x}=e^2-1$ លើកអង្គទាំងពីរជាការេ យើងបាន

យើងបាន $x=(e^2-1)^2$

ដូច្នេះ $x=(e^2-1)^2$ ជាឫសរបស់សមីការ

13. $\ln(\ln x)=1$

សមីការមានន័យកាលណា $\ln x>0 \Rightarrow x>1$



យើងបាន $\ln(\ln x)=\ln 1$

$$\ln(\ln x)=\ln e$$

$$\ln x=e$$

$$\ln x=\ln e^e \Rightarrow x=e^e$$

ដូច្នេះ $x=e^e$ ជាឫសរបស់សមីការ។

14. $3(\log x)^2+14\log x-5=0$

សមីការមានន័យកាលណា $x>0$

តាង $t=\log x$

គេបាន $3t^2+14t-5=0$

$\Delta'=49+15=64$ នោះ $t_1=\dfrac{-7-8}{3}=-5, t_2=\dfrac{-7+8}{3}=\dfrac{1}{3}$

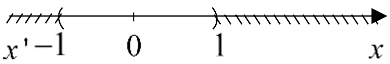
-ចំពោះ $t=\dfrac{1}{3}$ គេបាន $\log x=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=10^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{10}$

-ចំពោះ $t=-5$ គេបាន $\log x=-5\Rightarrow x=10^{-5}=\dfrac{1}{100000}$

ដូច្នេះ $x=\sqrt[3]{10}, x=\dfrac{1}{100000}$ ជាឬសរបស់សមីការ។

15. $\log_3(1-x)-\log_3(1+x)=\dfrac{1}{2}$

សមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases}1-x>0\\1+x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\\x>-1\end{cases}$



គេបាន $-1<x<1$

យើងមាន $\log_3(1-x)-\log_3(1+x)=\dfrac{1}{2}$

$$\log_3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\log_3 3^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\frac{1-x}{1+x}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 1-x=\sqrt{3}+\sqrt{3}x\Leftrightarrow\sqrt{3}x+x=1-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}=-2+\sqrt{3}$$

ដូច្នេះ $x=-2+\sqrt{3}$ ជាឬសរបស់សមីការ។

16. $\log_3\left(\dfrac{3x}{x+8}\right)+\log_3(x-3)=0$

សមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases}\dfrac{3x}{x+8}>0 & (1)\\ x-3>0 & (2)\end{cases}$

(1) $\dfrac{3x}{x+8}>0$ វិសមីការមានន័យកាលណា $x+8\neq 0\Rightarrow x\neq -8$

បើ $3x=0\Rightarrow x=0$

x	$-\infty$	-8		0		$+\infty$
$3x$	-		-	0	+	
$x+8$	-	0	+		+	
$\dfrac{3x}{x+8}>0$	+		-	0	+	

នោះ $x\in(-\infty,-8)\cup(0,+\infty)$ $\quad(*)$

(2) $x-3>0\Rightarrow x>3$ $\quad(**)$

យក $(*)\cap(**)$ គេទាញបានសមីការមានន័យកាលណា $x>3$។

គេមាន $\log_3\left(\dfrac{3x}{x+8}\right)+\log_3(x-3)=0$

គេបាន $\log_3\left(\dfrac{3x^2-9x}{x+8}\right)=\log_3 1$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-9}{x+8}=1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-9x=x+8$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-10x-8=0$$

$\Delta'=25+24=49$ នោះ $x_1=\frac{5-7}{3}=-\frac{2}{3}$ មិនយក , $x_2=\frac{5+7}{3}=4$

ដូច្នេះ $x=4$ ជាឫសរបស់សមីការ។

17. $2\lg 5x-\frac{1}{\lg 5x}+1=0$

សមីការមានន័យកាលណា $x>0$

តាង $\lg 5x=t$ $,(t\neq 0)$

គេបាន $2t-\frac{1}{t}+1=0 \Leftrightarrow 2t^2+t-1=0$

តាមករណី $a-b+c=0$ នោះ $t_1=-1, t_2=-\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

-ចំពោះ $t=-1$ គេបាន $\lg 5x=-1 \Leftrightarrow \lg 5x=\lg 10^{-1} \Leftrightarrow 5x=\frac{1}{10} \Rightarrow x=\frac{1}{50}$

-ចំពោះ $t=\frac{1}{2}$ គេបាន $\lg 5x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lg 5x=\lg 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 5x=\sqrt{10} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{10}}{5}$

ដូច្នេះ $x=\frac{1}{50}, x=\frac{\sqrt{10}}{5}$ ជាឫសរបស់សមីការ។

18. $2(\lg x)^3-15(\lg x)^2-2\lg x+15=0$

សមីការមានន័យកាលណា $x>0$

តាង $\lg x=t$

គេបាន $2t^3-15t^2-2t+15=0$

$$t^2(2t-15)-(2t-15)=0$$

$$(2t-15)(t^2-1)=0$$

យើងទាញបាន $2t-15=0 \Rightarrow t=\frac{15}{2}$

$$t^2-1=0 \Rightarrow t=\pm 1$$

-ចំពោះ $t=\frac{15}{2}$ គេបាន $\lg x=\frac{15}{2} \Leftrightarrow \lg x=\lg 10^{\frac{15}{2}} \Rightarrow x=\sqrt{10^{15}}=10^7\sqrt{10}$

-ចំពោះ $t=-1$ គេបាន $\lg x=-1 \Leftrightarrow \lg x=\lg 10^{-1} \Rightarrow x=10^{-1}=\frac{1}{10}$

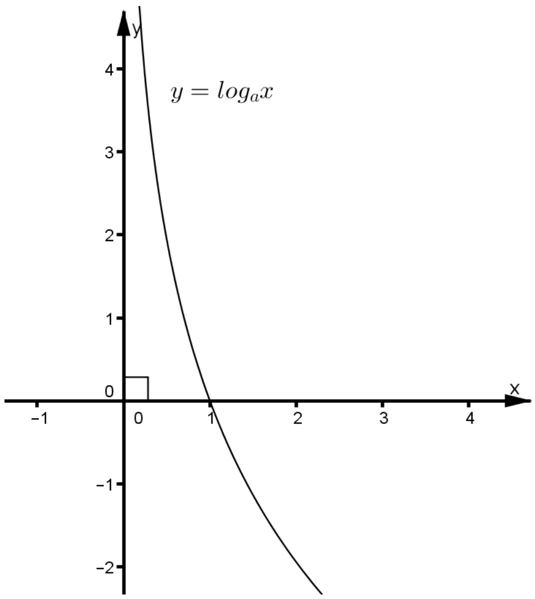
-ចំពោះ $t=1$ គេបាន $\lg x=1 \Leftrightarrow \lg x=\lg 10 \Rightarrow x=10$

ដូច្នេះ $x=10^7\sqrt{10}, x=\frac{1}{10}, x=10$ ជាឫសរបស់សមីការ។

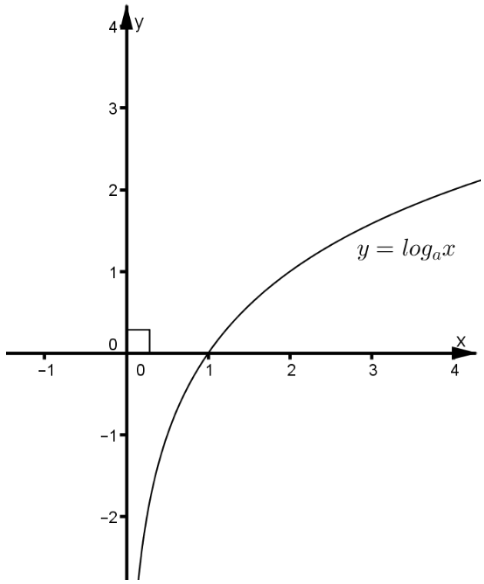
2.5.2. វិសមីការលោការីត

គេមានក្រាននៃអនុគមន៍លោការីត

- ករណី $0<a<1$



- ករណី $a>1$



តាមក្រាបខាងលើ យើងសង្កេតឃើញថា

1. បើ $0<a<1$ នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_a x$ ចុះពីឆ្វេងទៅស្តាំ មានន័យថា កាលណាតម្លៃ x កើន តម្លៃនៃអនុគមន៍ $y=\log_a x$ ចុះ។

ដូច្នេះ បើ $\log_a x_1 < \log_a x_2$ គេបាន $x_1 > x_2$

បើ $\log_a x_1 > \log_a x_2$ គេបាន $x_1 < x_2$

2. បើ $a>1$ នោះកក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_a x$ កើនពីឆ្វេងទៅស្តាំ មានន័យថា កាលណាតម្លៃ x កើន តម្លៃនៃអនុគមន៍ $y=\log_a x$ កើន។

ដូច្នេះ បើ $\log_a x_1 < \log_a x_2$ គេបាន $x_1 < x_2$

បើ $\log_a x_1 > \log_a x_2$ គេបាន $x_1 > x_2$ ។

<u>ជាទូទៅ៖</u>

-បើ $a>1$ វិសមីការ $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ សមមូល $\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$

-បើ $0<a<1$ វិសមីការ $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ សមមូល $\begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$

<u>ឧទាហរណ៍៖</u> ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

1. $e^x < 10$
2. $e^{2-3x} > 4$
3. $\ln x > -1$
4. $2 < \ln x < 9$
5. $\log_{0.25}(3x-5) > -1$
6. $\ln(x^2-2x-2) \le 0$
7. $\log_2(2x+3) < \log_2(5x-1)$
8. $\log_{\frac{1}{2}} 2x^2 < \log_{\frac{1}{2}}(7x-3)$
9. $\log_3(x+1) + \log_3 x < \log_3 2$

10. $\log_{0.4}\left(\dfrac{x^2+5x+6}{2x^2+10}\right)<0$

11. $9(\lg x)^2-18\lg x-7\geq 0$

12. $\log_5 x-\log_x\dfrac{1}{5}\geq 2$

13. $\log_2 x>\log_8(3x-2)$

14. $\lg(2^x-\dfrac{1}{4})-\lg\dfrac{3}{4}\leq 0$

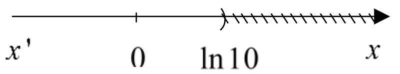
15. $\log_{x-2}(x^2-4x+3)<0$

16. $\log_2(\cos x+\sin x+1)<1$

ចម្លើយ៖

1. $e^x<10$

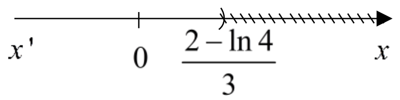
$e^x<10\Leftrightarrow \ln e^x<\ln 10\Leftrightarrow x<\ln 10$



ដូច្នេះ $x<\ln 10$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

2. $e^{2-3x}>4$

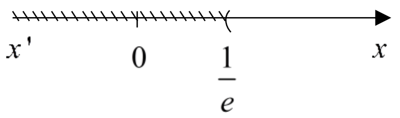
យើងមាន $e^{2-3x}>4\Leftrightarrow \ln e^{2-3x}>\ln 4\Leftrightarrow 2-3x>\ln 4\Rightarrow x<\dfrac{2-\ln 4}{3}$



ដូច្នេះ $x<\dfrac{2-\ln 4}{3}$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

3. $\ln x>-1$

វិសមីការមានន័យកាលណា $x>0$

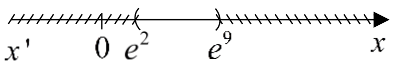


យើងមាន $\ln x>-1\Leftrightarrow \ln x<\ln e^{-1}\Rightarrow x>e^{-1}$ ឬ $x>\dfrac{1}{e}$

ដូច្នេះ $x>\dfrac{1}{e}$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

4. $2<\ln x<9$

វិសមីការមានន័យកាលណា $x>0$



យើងមាន $2<\ln x<9$

$\Leftrightarrow \ln e^2<\ln x<\ln e^9$

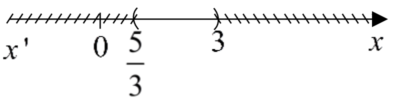
$\Leftrightarrow e^2<x<e^9$

ដូច្នេះ $e^2<x<e^9$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

5. $\log_{0.25}(3x-5)>-1$

យើងមាន $\log_{0.25}(3x-5) > -1 \Leftrightarrow \log_{0.25}(3x-5) > \log_{0.25}(0.25)^{-1}$

យើងបាន $\begin{cases} 3x-5>0 \\ 3x-5<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{5}{3} \\ 3x-5<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\dfrac{5}{3} \\ x<3 \end{cases}$



ដូច្នេះ $\dfrac{5}{3}<x<3$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

6. $\ln(x^2-2x-2)\le 0$

យើងមាន $\ln(x^2-2x-2)\le 0 \Leftrightarrow \ln(x^2-2x-2)\le \ln 1$

យើងបាន $\begin{cases} x^2-2x-2>0 \\ x^2-2x-2\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-2>0 & (1) \\ x^2-2x-3\le 0 & (2) \end{cases}$

$(1): x^2-2x-2>0$ មាន $\Delta = 4-4(1)(-2)=12$

នោះ $x_1=\dfrac{2-2\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}, x_2=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2-2x-2>0$	+	0 -	0	+

នោះ $x\in(-\infty,1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3},+\infty)$ (*)

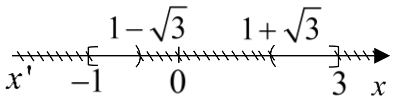
$(2): x^2-2x-3\le 0$

តាមករណី $a-b+c=0$ នោះ $x_1=-1, x_2=\dfrac{-c}{a}=3$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x^2-2x-3\le 0$	+	0 -	0	+

នោះ $x\in[-1,3]$ (**)

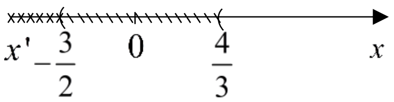
យក $(*)\cap(**)$ គេបាន



ដូច្នេះ $x\in[-1,1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3},3)$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

7. $\log_2(2x+3)<\log_2(5x-1)$

គេបាន $\begin{cases}2x+3>0\\ 2x+3<5x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2}\\ x>\dfrac{4}{3}\end{cases}$



ដូច្នេះ $x>\dfrac{4}{3}$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

8. $\log_{\frac{1}{2}}2x^2<\log_{\frac{1}{2}}(7x-3)$

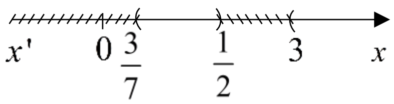
គេបាន $\begin{cases}7x-3>0\\ 2x^2>7x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{3}{7} & (1)\\ 2x^2-7x+3>0 & (2)\end{cases}$

$(2): 2x^2-7x+3>0$ មាន $\Delta=25$ នោះ $x_1=\dfrac{7-5}{4}=\dfrac{1}{2}, x_2=\dfrac{7+5}{4}=3$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x^2-7x+3>0$		+	0	-	0	+	

នោះ $x\in(-\infty,\dfrac{1}{2})\cup(3,+\infty)$ (3)

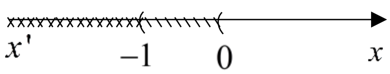
យក $(1)\cap(3)$ គេបាន



ដូច្នេះ $\dfrac{3}{7}<x<\dfrac{1}{2}$ ឬ $x>3$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

9. $\log_3(x+1)+\log_3 x<\log_3 2$

វិសមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases}x>0\\ x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>-1\end{cases}\Rightarrow x>0$ (1)



យើងមាន $\log_3(x+1)+\log_3 x<\log_3 2$

$\Leftrightarrow \log_3[x(x+1)]<\log_3 2$

$\Leftrightarrow x^2+x<2$

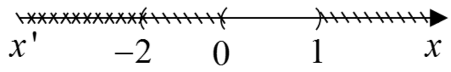
$\Leftrightarrow x^2+x-2<0$

តាមករណី $a+b+c=0$ នោះ $x_1=1, x_2=\frac{c}{a}=-2$

x	$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$x^2+x-2<0$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

នោះ $x\in(-2,1)$ $\quad$ (2)

យក $(1)\cap(2)$ គេបាន



ដូច្នេះ $0<x<1$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

10. $\log_{0.4}\left(\frac{x^2+5x+6}{2x^2+10}\right)<0$

យើងមាន $\log_{0.4}\left(\frac{x^2+5x+6}{2x^2+10}\right)<0 \Leftrightarrow \log_{0.4}\left(\frac{x^2+5x+6}{2x^2+10}\right)<\log_{0.4}1$

យើងបាន $\frac{x^2+5x+6}{2x^2+10}>1 \Leftrightarrow \frac{x^2+5x+6}{2x^2+10}-1>0$

$\frac{x^2+5x+6-2x^2-10}{2x^2+10}>0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+5x-4}{2x^2+10}>0$

ដោយ $2x^2+10>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $\frac{-x^2+5x-4}{2x^2+10}$ មានសញ្ញាដូចភាគយក

បើ $-x^2+5x-4=0$ តាមករណីពិសេស $a+b+c=0$ នោះ $x_1=1, x_2=\frac{c}{a}=4$

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ 4 $\quad$ $+\infty$
$\frac{-x^2+5x-4}{2x^2+10}>0$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

ដូច្នេះ $1<x<4$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

11. $9(\log x)^2-18\log x-7\geq 0$

វិសមីការមានន័យកាលណា $x>0$

តាង $t=\log x$ គេបាន $9t^2-18t-7\geq 0$ មាន $\Delta'=144$ នោះ $x_1=\frac{9-12}{9}=-\frac{1}{3}$ និង $x_2=\frac{9+12}{9}=\frac{7}{3}$

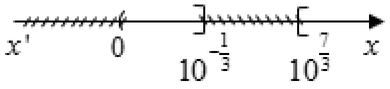
t	$-\infty$ $\quad$ $-\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{7}{3}$ $\quad$ $+\infty$
$9t^2-18t-7\geq 0$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

គេបាន $t\leq -\frac{1}{3}$ ឬ $t\geq \frac{7}{3}$

គេទាញបាន $\log x\leq -\frac{1}{3} \Rightarrow x\leq 10^{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x\leq \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$

ឬ $\log x\geq \frac{7}{3} \Rightarrow x\geq 10^{\frac{7}{3}} \Leftrightarrow x\geq \sqrt[3]{10^7}$

តែ $x>0$ យើងបាន



ដូច្នេះ $0<x\le 10^{-\frac{1}{3}}$ ឬ $x\ge 10^{\frac{7}{3}}$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

12. $\log_5 x-\log_x \frac{1}{5}\ge 2$

វិសមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases} x>0 \\ x\ne 1 \end{cases}$

យើងមាន $\log_5 x-\log_x \frac{1}{5}\ge 2$

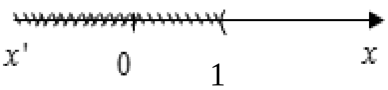
$$\Leftrightarrow \log_5 x-\log_x 5^{-1}-2\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \log_5 x+\log_x 5-2\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \log_5 x+\frac{1}{\log_5 x}-2\ge 0$$

តាង $t=\log_5 x\ ,t\ne 0$

គេបាន $t+\frac{1}{t}-2\ge 0\Leftrightarrow \frac{t^2-2t+1}{t}\ge 0\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t}\ge 0$

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(t-1)^2$	$+$	$+$	0	$+$
t	$-$	0 $+$		$+$
$\frac{(t-1)^2}{t}\ge 0$	$-$	$+$	0	$+$

គេបាន $t>0\Leftrightarrow \log_5 x>0,\log_5 x>\log_5 1\Rightarrow x>1$



តែ $\begin{cases} x>0 \\ x\ne 1 \end{cases}$ នោះគេបាន

ដូច្នេះ $x>1$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

13. $\log_2 x>\log_8(3x-2)$

យើងមាន $\log_2 x>\log_8(3x-2)$

$$\Leftrightarrow \log_2 x>\frac{1}{3}\log_2(3x-2)$$
$$\Leftrightarrow 3\log_2 x>\log_2(3x-2)$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x^3>\log_2(3x-2)$$

គេបាន $\begin{cases} 3x-2>0 \\ x^3>3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{2}{3} & (1) \\ x^3-3x+2>0 & (2) \end{cases}$

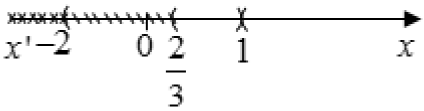
$(2): x^3-3x+2>0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)>0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)>0$

បើ $(x-1)^2(x+2)=0 \Rightarrow x=1, x=-2$

x	$-\infty$ $\quad$ -2	$\quad$ 1	$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$	$+$ $\quad$ 0	$+$
$x+2$	$-$ $\quad$ 0	$+$	$+$
$(x-1)^2(x+2)>0$	$-$	$+$	$+$

នោះ $-2<x<1$ ឬ $x>1$

យក $(1)\cup(*)$ គេទាញបាន



ដូច្នេះ $\dfrac{2}{3}<x<1$ ឬ $x>1$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។

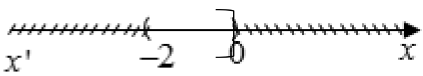
14. $\lg(2^x-\dfrac{1}{4})-\lg\dfrac{3}{4}\le 0$

វិសមីការមានន័យកាលណា $2^x-\dfrac{1}{4}>0 \Leftrightarrow 2^x>2^{-2} \Rightarrow x>-2$

គេបាន $\lg(2^x-\dfrac{1}{4})\le\lg\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 2^x-\dfrac{1}{4}\le\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 2^x\le 1 \Leftrightarrow 2^x\le 2^0 \Rightarrow x\le 0$

តែ $x>-2$ គេទាញបាន

ដូច្នេះ $-2<x\le 0$ ជាចម្លើយនៃវិសមីការ។



15. $\log_{x-2}(x^2-4x+3)<0$

❖ **សម្គាល់: បើ** $\log_{A(x)} f(x)<\log_{A(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x)>1 \\ f(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0<A(x)<1 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

វិសមីការខាងលើអាចសរសេរជា $\log_{x-2}(x^2-4x+3)<\log_{x-2}1$

គេទាញបាន $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2>1 \\ x^2-4x+3>0 \\ x^2-4x+3<1 \end{cases} \quad (*) \\ \begin{cases} 0<x-2<1 \\ x^2-4x+3>1 \end{cases} \quad (**) \end{array}\right.$

$(*):\begin{cases} x-2>1 & (1) \\ x^2-4x+3>0 & (2) \\ x^2-4x+2<0 & (3) \end{cases}$

$(1): x-2>1 \Rightarrow x>3$

$(2): x^2-4x+3>0$

តាមករណីពិសេស $a+b+c=0$ នោះ $x_1=1, x_2=\dfrac{c}{a}=3$

x	$-\infty$ 1 3 $+\infty$
$x^2-4x+3>0$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

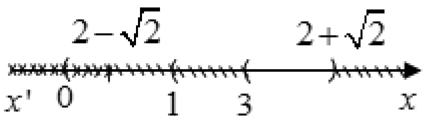
នោះ $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

$(3): x^2-4x+2<0$ មាន $\Delta=8$ នោះ $x_1=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}, x_2=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$

x	$-\infty$ $2-\sqrt{2}$ $2+\sqrt{2}$ $+\infty$
$x^2-4x+2<0$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

នោះ $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$

យក $(1)\cap(2)\cap(3)$ គេបាន



គេទាញបាន $3<x<2+\sqrt{2} \quad (i)$

$(**):\begin{cases} 0<x-2<1 & (4) \\ x^2-4x+2>0 & (5) \end{cases}$

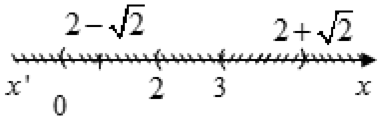
$(4): 0<x-2<1 \Rightarrow 2<x<3$

$(5): x^2-4x+2>0$

x	$-\infty$ $2-\sqrt{2}$ $2+\sqrt{2}$ $+\infty$
$x^2-4x+2>0$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

នោះ $x\in(-\infty,2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2},+\infty)$

យក $(4)\cap(5)$ គេទាញបាន



នោះ $(**)$ គ្មានចម្លើយ។

ចម្លើយនៃវិសមីការជាប្រជុំនៃ $(*)$ និង $(**)$ ដូច្នេះយើងទាញបានចម្លើយនៃវិសមីការគឺ $3<x<2+\sqrt{2}$ ។

16. $\log_2(\cos x+\sin x+1)<1$

យើងមាន $\log_2(\cos x+\sin x+1)<1$

$$\Leftrightarrow \log_2(\cos x+\sin x+1)<\log_2 2$$

គេទាញបាន $\begin{cases}\cos x+\sin x+1>0\\ \cos x+\sin x+1<2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow 0<\cos x+\sin x+1<2$$

$$\Leftrightarrow -1<\cos x+\sin x<1$$

$$\Leftrightarrow -1<\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})<1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos(x-\frac{\pi}{4})<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{3\pi}{4}<\cos(x-\frac{\pi}{4})<\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}+k\pi<x-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+k\pi \quad ,k\in\mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\pi+k\pi \quad ,k\in\mathbb{Z}$$

ដូច្នេះ $\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\pi+k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$ ជាចម្លើយរបស់វិសមីការ។

2.6. ប្រព័ន្ធសមីការ និងវិសមីការលោការីត

2.6.1. ប្រព័ន្ធសមីការលោការីត

ឧទាហរណ៍៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម

1. $\begin{cases}\log_2 x+\log_3 y=4\\ \log_2 x-\log_3 y=2\end{cases}$

2. $\begin{cases}2\ln x+3\ln y=8\\ 5\ln x-2\ln y=1\end{cases}$

3. $\begin{cases}x+y=65\\ \lg x+\lg y=3\end{cases}$

4. $\begin{cases}\log_5 x+\log_5 y=1+\log_5 3\\ \log_{32}(x+y)=\frac{3}{5}\end{cases}$

5. $\begin{cases}x+y^2=12\\ \log_3 x+2\log_3 y=3\end{cases}$

6. $\begin{cases}\log x+\log y=\log 3\\ 5^x\times 5^y=25^2\end{cases}$

7. $\begin{cases}x^2+y^2=25\\ \log_2 x+\log_2 y=2+\log_2 3\end{cases}$

8. $\begin{cases}\ln x+\ln y=5\\ x^{\ln y}=e^6\end{cases}$

9. $\begin{cases}xy=256\\ 7(\log_y x+\log_x y)=50\end{cases}$

10. $\begin{cases}\log_x e+\log_y e=\dfrac{13}{15}\\ \ln xy=\dfrac{13}{2}\end{cases}$

ចម្លើយៈ

1. $\begin{cases}\log_2 x+\log_3 y=4\\ \log_2 x-\log_3 y=2\end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា $x>0, y>0$

តាង $A=\log_2 x, B=\log_3 y$

គេបាន $\begin{cases}A+B=4 & (1)\\ A-B=2 & (2)\end{cases}$

បូក (1) និង (2) យើងទាញបាន $2A=6\Rightarrow A=3$

ជំនួស $A=3$ ក្នុងសមីការ (1) គេបាន $3+B=4\Rightarrow B=1$

ដោយ $\log_2 x=A$ យើងបាន $\log_2 x=3\Rightarrow x=2^3=8$

រួច $\log_3 y=B$ យើងបាន $\log_3 y=1\Rightarrow y=3^1=3$

ដូច្នេះ $(x=8, y=3)$ជាគូចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ។

2. $\begin{cases}2\ln x+3\ln y=8\\ 5\ln x-2\ln y=1\end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា $x>0, y>0$

តាង $A=\ln x, B=\ln y$

គេបាន $\begin{cases}2A+3B=8 & (1)\\ 5A-2B=1 & (2)\end{cases}$

គុណ (1) នឹង 2 រួច (2) នឹង 3 ហើយយក $(1)+(2)$ យើងបាន

$19A=19\Rightarrow A=1$ ជំនួស $A=1$ ក្នុង (1) គេបាន $2+3B=8\Rightarrow B=2$

ដោយ $\begin{cases}\ln x=A\\ \ln y=B\end{cases}$ យើងបាន $\begin{cases}\ln x=1\\ \ln y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e\\ y=e^2\end{cases}$

ដូច្នេះ($x=e, y=e^2$)ជាចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ។

3. $\begin{cases}x+y=65\\ \lg x+\lg y=3\end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា $x>0, y>0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=65\\ \lg(x\cdot y)=\lg 10^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=65\\ x\cdot y=1000\end{cases}$

តាង $x+y=S=65, x\cdot y=P=1000$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេបានសមីការរាង $X^2-SX+P=0$

យើងទាញបានសមីការ $X^2-65X+1000=0$ មាន $\Delta=225$ នោះ $X=\dfrac{65\pm15}{2(1)}=\left[\begin{array}{l}40\\ 25\end{array}\right.$

ដូច្នេះគូចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការគឺ $(x=40, y=25)$ ឬ $(x=25, y=40)$

4. $\begin{cases}\log_5 x+\log_5 y=1+\log_5 3\\ \log_{32}(x+y)=\dfrac{3}{5}\end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា $x>0, y>0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5(x\cdot y)=\log_5 5+\log_5 3\\ \log_{32}(x+y)=\log_{32}(32)^{\frac{3}{5}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\cdot y=15\\ x+y=(2^5)^{\frac{3}{5}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\cdot y=15\\ x+y=8\end{cases}$$

តាង $S=x+y=8$ $P=x\cdot y=15$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេបានសមីការមានរាង $X^2-8X+15=0$ មាន $\Delta'=1$ នោះ $X=\dfrac{4\pm 1}{1}=\left[\begin{array}{l}5\\3\end{array}\right.$

ដូច្នេះ $(x=5, y=3)$ ឬ $(x=3, y=5)$ ជាគូរចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការត។

5. $\begin{cases}x+y^2=12\\ \log_3 x+2\log_3 y=3\end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា $x>0, y>0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y^2=12\\ \log_3 x+\log_3 y^2=\log_3 3^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y^2=12\\ x\cdot y^2=27\end{cases}$$

តាង $S=x+y^2=12, P=x\cdot y^2=27$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត យើងបានសមីការ $X^2-12X+27=0$ មាន $\Delta'=9$ នោះ $X_1=9, X_2=3$

គេទាញបាន $x=9, y^2=3\Rightarrow y=\sqrt{3}$

$x=3, y^2=9\Rightarrow y=3$

ដូច្នេះ $(x=9, y=\sqrt{3})$ ឬ $(x=3, y=3)$ ជាគូចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ។

6. $\begin{cases}\log x+\log y=\log 3\\ 5^x\times 5^y=25^2\end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា $x>0, y>0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log(xy)=\log 3\\ 5^{x+y}=5^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=3\\ x+y=4\end{cases}$$

តាង $S=x+y=4, P=xy=3$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត យើងបានសមីការ $X^2-4X+3=0$

តាមករណីពិសេស $a+b+c=0$ នោះ $X_1=1, X_2=\dfrac{c}{a}=3$

ដូច្នេះ $(x=1, y=3)$ ឬ $(x=3, y=1)$ ជាគូចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ។

7. $\begin{cases}x^2+y^2=25\\ \log_2 x+\log_2 y=2+\log_2 3\end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា $x>0, y>0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=25\\ \log_x(xy)=\log_2 4+\log_2 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=25\\ xy=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=25 & (1)\\ 2xy=24 & (2)\end{cases}$$

បូក (1) និង (2) គេបាន $x^2+y^2+2xy=49\Leftrightarrow(x+y)^2=49\Rightarrow x+y=\sqrt{49}=7$ ព្រោះ $x+y>0$

ដក (1) និង (2) គេបាន $x^2+y^2-2xy=1 \Leftrightarrow (x-y)^2=1 \Leftrightarrow x-y=\pm 1$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការដូចខាងក្រោម

$$(*)\quad \begin{cases} x+y=7 & (3) \\ x-y=1 & (4) \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad (**)\quad \begin{cases} x+y=7 & (5) \\ x-y=-1 & (6) \end{cases}$$

តាម (*) បូក (3) និង (4) គេបាន $2x=8 \Rightarrow x=4$ ជួសក្នុង (3) គេបាន $4+y=7 \Rightarrow y=3$

តាម (**) បូក (5) និង (6) គេបាន $2x=6 \Rightarrow x=3$ ជួសក្នុង (5) គេបាន $3+y=7 \Rightarrow y=4$

ដូច្នេះ $(x=3, y=4)$ ឬ $(x=4, y=3)$ ជាគូរចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ។

8. $\begin{cases} \ln x+\ln y=5 \\ x^{\ln y}=e^6 \end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា $x>0, y>0$

តាង $A=\ln x \Rightarrow x=e^A$ និង $B=\ln y$ គេបាន

$$\begin{cases} A+B=5 \\ (e^A)^B=e^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ e^{AB}=e^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ AB=6 \end{cases}$$

តាង $S=A+B=5, P=AB=6$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេបានសមីការ $X^2-5X+6=0$ មាន $\Delta=1$ នោះ $X_1=3, X_2=2$

គេបាន $(A=2, B=3)$ ឬ $(A=3, B=2)$

-ចំពោះ $\begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}$ គេបាន $\begin{cases} \ln x=2 \\ \ln y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=e^2 \\ y=e^3 \end{cases}$

-ចំពោះ $\begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases}$ គេបាន $\begin{cases} \ln x=3 \\ \ln y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=e^3 \\ y=e^2 \end{cases}$

ដូច្នេះ $(x=e^2, y=e^3)$ ឬ $(x=e^3, y=e^2)$ ជាគូចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ។

9. $\begin{cases} xy=256 & (*) \\ 7(\log_y x+\log_x y)=50 & (**) \end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases} x>0, x\neq 1 \\ y>0, y\neq 1 \end{cases}$

$(**): 7(\log_y x+\log_x y)=50$

$\Leftrightarrow 7(\dfrac{1}{\log_x y}+\log_x y)=50$

តាង $t=\log_x y \qquad t\neq 0$

គេបាន $7(\dfrac{1}{t}+t)=50 \Leftrightarrow 7t^2-50t+7=0$ មាន $\Delta'=576$ នោះ $t_1=7, t_2=\dfrac{1}{7}$

-ចំពោះ $t=7$ គេបាន $\log_x y=7 \Rightarrow y=x^7$

ជំនួស $y=x^7$ ក្នុងសមីការ (*) យើងបាន $x\cdot x^7=256 \Rightarrow x=\sqrt[8]{256}=2$ ហើយ $y=2^7=128$

-ចំពោះ $t=\dfrac{1}{7}$ គេបាន $\log_x y=\dfrac{1}{7} \Rightarrow y=x^{\frac{1}{7}}$

ជំនួស $y=x^{\frac{1}{7}}$ ក្នុងសមីការ (*) យើងបាន $x\cdot x^{\frac{1}{7}}=256 \Rightarrow x=(\sqrt[8]{256})^7=2^7=128$

ហើយ $y=(2^7)^{\frac{1}{7}}=2$

ដូច្នេះ $(x=2, y=128)$ ឬ $(x=128, y=2)$ ជាគូចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ។

10. $\begin{cases}\log_x e+\log_y e=\dfrac{13}{15}\\ \ln xy=\dfrac{13}{2}\end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases}x>0\ ,x\neq 1\\ y>0\ ,y\neq 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{1}{\ln y}=\dfrac{13}{15}\\ \ln x+\ln y=\dfrac{13}{2}\end{cases}$

តាង $A=\ln x, B=\ln y$ ដែល $\begin{cases}A\neq 0\\ B\neq 0\end{cases}$

គេបាន $\begin{cases}\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=\dfrac{13}{15}\\ A+B=\dfrac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{A+B}{AB}=\dfrac{13}{15}\\ A+B=\dfrac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AB=\dfrac{15}{13}(A+B)\\ A+B=\dfrac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AB=\dfrac{15}{2}\\ A+B=\dfrac{13}{2}\end{cases}$

តាង $S=A+B=\dfrac{13}{2}\ ,P=AB=\dfrac{15}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទដែ្យត គេបានសមីការ $X^2-\dfrac{13}{2}X+\dfrac{15}{2}=0\Leftrightarrow 2X^2-13X+15=0$

មាន $\Delta=49$ នោះ $X_1=5, X_2=\dfrac{3}{2}$

គេបាន $(A=5, B=\dfrac{3}{2})$ ឬ $(A=\dfrac{3}{2}, B=5)$

-ចំពោះ $\begin{cases}A=5\\ B=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ គេទាញបាន $\begin{cases}\ln x=5\\ \ln y=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=e^5\\ y=e^{\frac{3}{2}}\end{cases}$

-ចំពោះ $\begin{cases}A=\dfrac{3}{2}\\ B=5\end{cases}$ គេទាញបាន $\begin{cases}\ln x=\dfrac{3}{2}\\ \ln y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=e^{\frac{3}{2}}\\ y=e^5\end{cases}$

ដូច្នេះ $(x=e^5, y=e^{\frac{3}{2}})$ ឬ $(x=e^{\frac{3}{2}}, y=e^5)$ ជាគូចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ។

2.6.2. ប្រព័ន្ធវិសមីការលោការីត

ឧទាហរណ៍៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការខាងក្រោម:

1. $\begin{cases} \log_5(x^2-11x+43)<2 \\ x^2+x+3>5x \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_3(6x+5)\le \dfrac{1}{3} \\ \log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x<6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4^{x+1}-4^x<2\log_4 8 \\ \log_{0.5}(-x^2+4x+5)+3\ge 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 8^x\le 4(4-2^x) \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1)\le \log_2(2-x) \end{cases}$

5. $\begin{cases} \log_{2-x}(2-y)>0 \\ \log_{4-y}(2x-2)>0 \end{cases}$

ចម្លើយ៖

1. $\begin{cases} \log_5(x^2-11x+43)<2 & (*) \\ x^2+x+3>5x & (**) \end{cases}$

$(*): \log_5(x^2-11x+43)<2 \Leftrightarrow \log_5(x^2-11x+43)<\log_5 25$

គេបាន $\begin{cases} x^2-11x+43>0 \\ x^2-11x+43<25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-11x+43>0 & (1) \\ x^2-11x+18<0 & (2) \end{cases}$

តាម $(1): x^2-11x+43>0$ មាន $\Delta=-51<0$ មានសញ្ញាដូច a ជានិច្ច

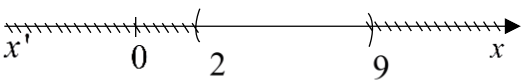
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$x^2-11x+43>0$	+

យើងទាញបានវិសមីការ $x^2-11x+43>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

តាម $(2): x^2-11x+18<0$ មាន $\Delta=49$ នោះ $x_1=2, x_2=9$

x	$-\infty$	2		9		$+\infty$
$x^2-11x+18<0$	+	0	-	0	+	

យក $(1)\cap(2)$ គេបាន $(*)\quad 2<x<9$



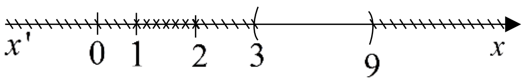
$(**): x^2+x+3>5x \Leftrightarrow x^2-4x+3>0$

តាមករណីពិសេស $a+b+c=0$ នោះ $x_1=1, x_2=\dfrac{c}{a}=3$

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
$x^2-4x+3>0$	+	0	-	0	+	

នោះ $x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$

យក $(*)\cap(**)$ យើងបាន

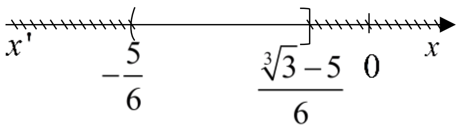


ដូច្នេះ សំណុំចម្លើយនៃប្រព័ន្ធវិសមីការគឺ $3<x<9$។

2. $\begin{cases} \log_3(6x+5)\le\dfrac{1}{3} & (*) \\ \log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x<6 & (**) \end{cases}$

$(*): \log_3(6x+5)\le\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \log_3(6x+5)\le\log_3 3^{\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+5>0 \\ 6x+5\le\sqrt[3]{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{5}{6} \\ x\le\dfrac{\sqrt[3]{3}-5}{6} \end{cases}$



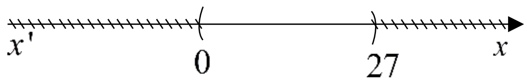
$(**): \log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x<6$

$\log_3 x+2\log_3 x-\log_3 x<6$

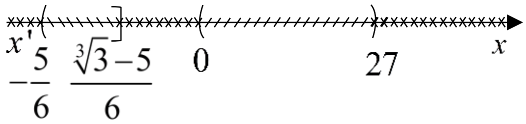
$\log_3 x<3$

$\log_3 x<\log_3 3^3$

នោះ $\begin{cases} x>0 \\ x<27 \end{cases}$



យក $(*)\cap(**)$ យើងទាញបាន



ដូច្នេះយើងបាន ប្រព័ន្ធវិសមីការគ្មានចម្លើយ។

3. $\begin{cases} 4^{x+1} - 4^x < 2\log_4 8 & (*) \\ \log_{0.5}(-x^2+4x+5)+3 \geq 0 & (**) \end{cases}$

$(*): 4^{x+1} - 4^x < 2\log_4 8 \Leftrightarrow 4^x(4-1) < \log_4 8^2$

$3\times 4^x < \log_4 4^3 \Leftrightarrow 3\times 4^x < 3$

$4^x < 1 \Leftrightarrow 4^x < 4^0$

$\Rightarrow x < 0$

$(**): \log_{0.5}(-x^2+4x+5)+3 \geq 0 \Leftrightarrow \log_{0.5}(-x^2+4x+5)+\log_{0.5}(0.5)^3 \geq 0$

$\log_{0.5}(-x^2+4x+5) \geq \log_{0.5}(0.5)^{-3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x+5>0 & (1) \\ -x^2+4x+5 \leq 8 & (2) \end{cases}$

$(1): -x^2+4x+5>0$ តាមករណីពិសេស $a-b+c=0$ នោះ $x_1=-1, x_2=-\frac{c}{a}=5$

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$-x^2+4x+5>0$		-	0	+	0	-	

នោះ $(1): x\in(-1,5)$

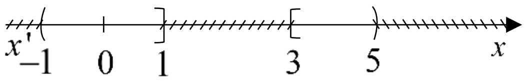
$(2): -x^2+4x+5 \leq 8 \Leftrightarrow -x^2+4x-3 \leq 0$ តាមករណីពិសេស $a+b+c=0$ នោះ $x_1=1, x_2=\frac{c}{a}=3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x^2+4x-3\leq 0$		-	0	+	0	-	

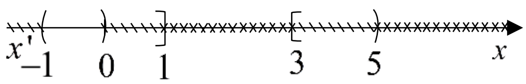
នោះ $(2): x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

យក $(1)\cap(2)$ គេបានចម្លើយនៃ $(**)$ គឺ

នោះ $x\in(-1,0]\cup[3,5)$



យក $(*)\cap(**)$ គេបានចម្លើយនៃប្រព័ន្ធវិសមីការ



ដូច្នេះ $-1<x<0$ ជាចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធវិសមីការ។

4. $\begin{cases} 8^x \leq 4(4-2^x) & (*) \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \leq \log_2(2-x) & (**) \end{cases}$

$(*): 8^x \leq 16 - 4\times 2^x \Leftrightarrow 2^{3x} + 4\times 2^x - 16 \leq 0$

តាង $2^x = t$ ដែល $t>0$ គេបាន

$t^3+4t-16 \leq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+8) \leq 0$

ដោយ $t^2+2t+8>0, \forall t\in\mathbb{R}$ នោះគេបាន

$t-2\le 0 \Rightarrow t\le 2$

តែ $t=2^x$ គេបាន $2^x\le 2 \Rightarrow x\le 1 \quad (*)$

ចំពោះ $(**): \log_{\frac{1}{2}}(x+1)\le \log_2(2-x)$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)^{-1}\le \log_2(2-x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^{-1}>0\\(x+1)^{-1}\le 2-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x+1}>0 & (1)\\[2mm] \dfrac{1}{x+1}\le 2-x & (2)\end{cases}$$

$(1): \dfrac{1}{x+1}>0$

វិសមីការមានន័យកាលណា $x+1\ne 0 \Rightarrow x\ne -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{1}{x+1}>0$	-		+

នោះ $(1): x\in(1,+\infty)$

$(2): \dfrac{1}{x+1}\le 2-x \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}+x-2\le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+x^2-2x+x-2}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-1}{x+1}\le 0$

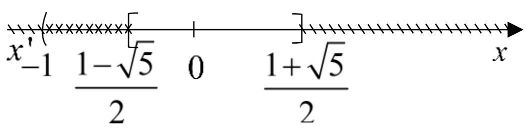
វិសមីការមានន័យកាលណា $x+1\ne 0 \Rightarrow x\ne -1$

បើ $x^2-x-1=0$ មាន $\Delta=5$ នោះ $x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

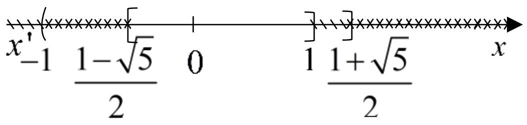
x	$-\infty$	-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
x^2-x-1	+		+	0	-	0	+
$x+1$	-	0	+		+		+
$\frac{x^2-x-1}{x+1}\le 0$	-	0	+	0	-	0	+

នោះ $(2): x\in(-\infty,-1)\cup[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}]$

យក $(1)\cap(2)$ យើងបានចម្លើយនៃវិសមីការ $(**)$ គឺ



យក $(*)\cap(**)$ យើងបានចម្លើយនៃប្រព័ន្ធវិសមីការ



ដូច្នេះ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\le x\le 1$ ជាចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធវិសមីការ។

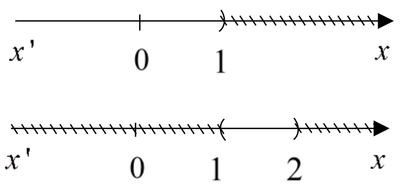
5. $\begin{cases}\log_{2-x}(2-y)>0\\ \log_{4-y}(2x-2)>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{2-x}(2-y)>\log_{2-x}1\\ \log_{4-y}(2x-2)>\log_{4-y}1\end{cases}$

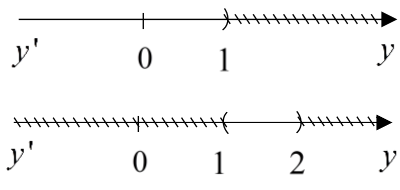
គេបាន

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-x>1\\ 2-y>1\end{cases}\\ \begin{cases}0<2-x<1\\ 2-y>0\\ 2-y<1\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-y>1\\ 2x-2>1\end{cases}\\ \begin{cases}0<4-y<1\\ 2x-2>0\\ 2x-2<1\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1\\ y<1\end{cases}\\ \begin{cases}1<x<2\\ y<2\\ y>1\end{cases}\end{array}\right. & (*)\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y<3\\ x>\frac{3}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}3<y<4\\ x>1\\ x<\frac{3}{2}\end{cases}\end{array}\right. & (**)\end{cases}$$

ចំពោះ $(*)$



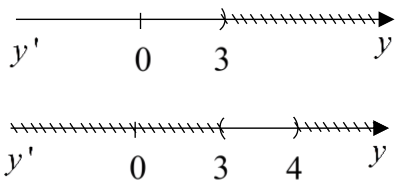
និង



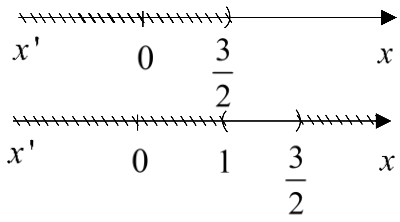
នោះ $x<2$ និង $y<2$

យើងបាន $(*)$ គឺ $\begin{cases}x<2\\ y<2\end{cases}$

ចំពោះ $(**)$



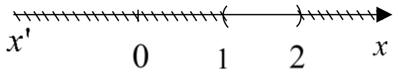
និង



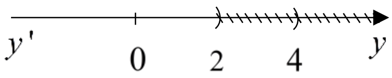
នោះ $y<4$ និង $x>1$

យើងបាន $(**)$ គឺ $\begin{cases} x>1 \\ y<4 \end{cases}$

យក $(*)\cap(**)$ គេបាន



$1<x<2$ និង $y<2$



ដូច្នេះ យើងទាញបានចម្លើយនៃប្រព័ន្ធវិសមីការគឺ $1<x<2$ និង $y<2$

3. អនុវត្តលើអនុគមន៍លោការីត

3.1. តម្លៃកើនតាមឆ្នាំ

ឧទាហរណ៍១៖ ពូសៅបានយកប្រាក់ចំនួន $2,000,000$ ៛ ទៅផ្ញើនៅធនាគា ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 6% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើរយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំ ទើបការប្រាក់របស់គាត់កើនស្មើនឹងពីរដង?

ចម្លើយ៖

រករយៈពេលដែលប្រាក់ពូសៅកើនបានពីរដង

$A=P(1+r)^t$

ដោយ $P=2,000,000 \quad , r=6\%=\dfrac{6}{100}=0.06 \quad , A=2P=4,000,000 \quad ,t=?$

គេបាន $2P=P(1+0.06)^t \Leftrightarrow (1.06)^t=2 \Rightarrow t=\log_{1.06}2\approx 11.8956$

ដូច្នេះ ប្រហែលជា 11.8956 ឆ្នាំក្រោយទើបប្រាក់គាត់កើនឡើងស្មើនឹងពីរដង។

ឧទាហរណ៍២៖ បុរសម្នាក់យកប្រាក់ចំនួន $10,000$ ៛ ទៅផ្ញើនៅធនាគាមួយ ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 9% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ ធនាគាទូទាត់អត្រាការប្រាក់ឱ្យគាត់ក្នុងមួយត្រីមាសម្តង។ តើរយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំទើបប្រាក់របស់គាត់កើនស្មើនឹងពីរដងនៃប្រាក់ដើមរបស់គាត់?

ចម្លើយ៖

រករយៈពេលដែលប្រាក់របស់គាត់កើនស្មើនឹងពីរដង

តាមរូបមន្ត $A=P(1+\dfrac{r}{n})^{nt}$

ដោយ $P=10,000$ ៛ $\quad ,r=9\%=\dfrac{9}{100}=0.09 \quad ,A=2P=20,000$ ៛

គេបាន $20000=10000(1+\dfrac{0.09}{4})^{4t}$

$$2=(1.0225)^{4t}$$
$$4t=\log_{1.0225}2$$
$$4t=\frac{\log 2}{\log(1.0225)}\Rightarrow t=\frac{\log 2}{4\log(1.0225)}\approx 7.78$$

ដូច្នេះ រយៈពេល 7.78ឆ្នាំក្រោយ ទើបចំនួនប្រាក់របស់គាត់កើនស្មើនឹងពីរដងនៃប្រាក់ដើម។

ឧទាហរណ៍៣៖ ស្ត្រីម្នាក់យកប្រាក់ 1000$ ទៅផ្ញើនៅធនាគាមួយ ដោយទទួលបានការប្រាក់ 5% ក្នុងមួយឆ្នាំ ហើយធនាគាទូទាត់ការប្រាក់ជាបន្តបន្ទាប់។

ក. រយៈពេល 10ឆ្នាំក្រោយ តើស្ត្រីនោះមានប្រាក់សរុបទាំងអស់ប៉ុន្មានក្នុងធនាគា?

ខ. តើស្ត្រីនោះផ្ញើប្រាក់នៅធនាគាររយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំ ទើបប្រាក់របស់គាត់កើនយ៉ាងតិចបំផុតដល់ 1500$?

ចម្លើយ៖

ក. រកប្រាក់សរុបរយៈពេល 10ឆ្នាំ

តាមរូបមន្តអត្រាការប្រាក់សមាស $A=Pe^{rt}$

ដោយ $P=1000\$\quad, r=5\%=\frac{5}{100}=0.05\quad, t=10$

គេបាន $A=1000\times e^{0.05\times 10}=1000\times e^{0.5}=1648.72$

ដូច្នេះ 10ឆ្នាំក្រោយស្ត្រីម្នាក់នោះមានប្រាក់សរុប 1648.72$

ខ. ររយៈពេលដើម្បីឱ្យប្រាក់កើនយ៉ាងតិច 1500$

យើងដឹងថា $A\geq 1500$

នោះ $$1000\times e^{0.05t}\geq 1500$$
$$e^{0.05t}\geq 1.5$$
$$\ln e^{0.05t}\geq \ln 1.5$$
$$0.05t=\ln 1.5$$
$$\Rightarrow t\geq\frac{\ln 1.5}{0.05}$$
$$t\geq 8.11$$

ដូច្នេះ ដើម្បីឱ្យប្រាក់របស់គាត់កើនយ៉ាងតិចដល់ 1500$ គាត់ត្រូវប្រើរយៈពេលយ៉ាងតិច 8.11ឆ្នាំ។

3.2. តម្លៃថយតាមឆ្នាំ

ឧទាហរណ៍១៖ គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ព និងចែកផ្សាយបានទិញកុំព្យូទ័រមួយគ្រឿងថ្លៃ 300$។ បើគេគិតប្រាក់រំលោះ 20% ជារៀងរាល់ឆ្នាំ។ រកតម្លៃកុំព្យូទ័រក្នុងរយៈពេល3ឆ្នាំក្រោយ។

ចម្លើយ៖

រកតម្លៃកុំព្យូទ័រក្នុងរយៈពេល 3ឆ្នាំក្រោយ

តាមរូបមន្ត $y=a(1-r)^t$

ដោយ $a=300\quad, r=20\%=0.2\quad, t=3$

គេបាន $y=300(1-0.2)^3$

$$=300(0.8)^3=153.6\$$$

ដូច្នេះ 3ឆ្នាំក្រោយមកកុំព្យូទ័រនៅសល់តម្លៃ 1536$

ឧទាហរណ៍២៖ មីងសុខាបានទិញរថយន្តថ្មីមួយគ្រឿងថ្លៃ 38500$។ បើបើរថយន្តចុះថ្លៃក្នុងអត្រា 15% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើរយៈពេល 7ឆ្នាំក្រោយមក រថយន្តគាត់នៅសល់ថ្លៃប៉ុន្មាន?

ចម្លើយ៖

រកថ្លៃរថយន្តក្នុងរយៈពេល 7ឆ្នាំក្រោយ

តាមរូបមន្ត $y = a(1-r)^t$

ដោយ $a = 38500$ $, r = 15\% = 0.15$ $, t = 7$

គេបាន $y = 38500(1-0.15)^7$

$y = 38500(0.085)^7 = 12342$

ដូច្នេះ 7ឆ្នាំក្រោយមករថយន្តមានតម្លៃ 12342$។

ឧទាហរណ៍៣៖ អង្គការក្រៅរដ្ឋាភិបាលមួយ បានទិញម៉ាស៊ីនហ្វាក់មួយគ្រឿងតម្លៃ 250$។ អត្រកាត់រំលោះម៉ាស៊ីនហ្វាក់គឺ 20% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើ3ឆ្នាំក្រោយមកម៉ាស៊ីនហ្វាក់មានតម្លៃនៅសល់ប៉ុន្មាន?

ចម្លើយ៖

រកតម្លៃម៉ាស៊ីនហ្វាក់ក្នុងរយៈពេល3ឆ្នាំកក្រោយ

តាមរូបមន្តតំហាយអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y = ae^{-kt}$

ដែល $a = 250$ $, k = 25\% = 0.25$ $, t = 3$

គេបាន $y = 250 \times e^{-0.25\times 3} = 118.1$

ដូច្នេះ បីឆ្នាំក្រោយមកម៉ាស៊ីនហ្វាក់នៅសល់តម្លៃ 118.1$។

ផ្នែកលំហាត់

លំហាត់

1. ចូរប្តូរទម្រង់ពីអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលទៅជាលោការីត

ក. $8^b = a$ ខ. $6^y = x$ គ. $b^a = 123$ ឃ. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = y$

ង. $(0.9)^y = x$

2. ចូរប្តូរពីទម្រង់លោការីតទៅជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. $\log_2 4 = 2$ ខ. $\log_2 32 = x$ គ. $\log_2 x = y$ ឃ. $\log_a x = y$

ង. $\log_a x = -32$

3. គណនាតម្លៃលោការីតខាងក្រោម

ក. $\log(0.1)$

ខ. $\log_3\left(\frac{1}{243}\right)$

គ. $\log 7$

ឃ. $\log_{\frac{2}{3}}\frac{27}{8}$

ង. $\log_5(0.2)$

ច. $\log\sqrt{10}$

ឆ. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

ជ. $e^{\ln\pi}$

ឈ. $e^{\ln\sqrt{5}}$

ញ. $\left(\ln e^4\right)^{\log_4 2016}$

ដ. $\log_2 106 - \log_2 5$

ឋ. $\log 4 + \log 25$

ឌ. $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$

ឍ. $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

ណ. $\log_2 8^{33}$

ត. $\log_5(5^{2015})^{2016}$

ថ. $\log_{2015}(\log_{2016} 2016)^{2017}$

ទ. $\log(\log 10^{10000})$

ធ. $\ln(\ln e^{e^{200}})$

ន. $\log_2(\tan 2016^\circ) + \log_2(\cot 2016^\circ)$

4. ចូរពន្លាតលោការីតខាងក្រោម

ក. $\log_2(2x)$ ខ. $\log_2\left[x(x-1)\right]$ គ. $\log\frac{x^3}{100}$

ឃ. $\ln(\sqrt[3]{z})$ ង. $\log_2(AB^2)$ ច. $\log_3(x\sqrt{y})$

ឆ. $\ln(\sqrt{ab})$ ជ. $\log_5\sqrt[3]{x^2+1}$ ឈ. $\log_a\left(\frac{x^2}{yz^3}\right)$

ញ. $\log\sqrt{z\sqrt{y\sqrt{x}}}$

5. ចូរបង្រួមលោការីតខាងក្រោម

ក. $\log_3 5 + 5\log_3 2$

ខ. $3\log x + \frac{1}{2}\log(x+1)$

គ. $3\ln s + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(x^2+1)$

ឃ. $\log 12 + \frac{1}{2}\log 7 - \log 2$

ង. $\log_2 A + \log_2 B - 2\log_2 C$

ច. $\log_5(x^2-1) - \log_5(x-1)$

ឆ. $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$

ជ. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2\ln c$

ឈ. $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^2+5)$

ញ. $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_5 z)$

6. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y=\sqrt{x^2-5x+6}+\log_3(2x-5)$

ខ. $y=\sqrt{\log_x(x^3+1)\times\log_{x+1}x-2}$

គ. $y=\log_2(x^2-7x+12)$

ឃ. $y=\log_{x-1}(x^2-x-6)$

ង. $y=\ln\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)$

ច. $y=\ln\left(\dfrac{x^2-x-6}{x-1}\right)$

ឆ. $y=\sqrt{\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}}$

ជ. $y=\sqrt{\log_{0.8}\dfrac{2x+1}{x+5}-2}$

ឈ. $y=\log_2(2\sin x-\sqrt{3})$

ញ. $y=\log_3\left[\log_2(4^x-7\cdot 2^x+12)\right]^{0.8}$

7. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

ក. $\log_2\dfrac{x-2}{x-1}-1=\log_2\dfrac{3x-7}{3x-1}$

ខ. $\log_2 x^4+\log_a x^2=1$

គ. $|x-1|^{\log^2 x-\log x^2}=|x-1|^3$

ឃ. $2\log_9 x+9\log_x 3=10$

ង. $\log_x(125x)\log_{25}^2 x=1$

ច. $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)=4-\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)$

ឆ. $(x^2\log_x 27)\log_9 x=x+4$

ជ. $\sqrt{2-\log_x 9}=-\dfrac{\sqrt{12}}{\log_3 x}$

ឈ. $\log(6.5^x+25.20^x)=x+\log 5$

ញ. $(x+1)^{\log(x+1)}=100(x+1)$

ដ. $2^{2\log 4x-1}-7^{\log 4x}=7^{\log 4x-1}-3.4^{\log 4x}$

ឋ. $4^{\ln x+1}-6^{\ln x}-2.3^{2\ln x+2}=0$

ឌ. $\left(2015^{\log_{2016}x}\right)^2-5x^{\log_{2016}2015}+6=0$

ឍ. $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2$

ណ. $\log_3\log_4\log_3^2(x-3)=0$

ត. $2016\cdot 2017^{2(\log_{2016}x-1)}=x^{1+\log_{2016}2017}-x^2$

ថ. $\dfrac{1}{2^x}=\log(x-2)+\dfrac{1}{8}$

ទ. $3(\log_2\sin x)^2+\log_2(1-\cos 2x)=2$

ធ. $2^{\log_5(x+3)}=x$

ន. កំណត់ឫសវិជ្ជមានរបស់សមីការ

$$x^x=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad,(x>0)$$

8. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម:

ក. $\log_7 x-\log_7(2x-5)\le\log_7 2-\log_7(x-3)$

ខ. $\log_{3x-5}\left(9x^2+8x+2\right)>2$

គ. $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_3 x>1$

ឃ. $\dfrac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)}<2$

ង. $\dfrac{\log^2 x-3\log x+3}{\log x-1}<1$

ច. $\log_{\log_2(0.5x)}\left(x^2-10x+21\right)>0$

ឆ. $\log^4 x-13\log^2 x+36>0$

ជ. $\log_2 x^2+\log_{\sqrt{2}}(x-1)<\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}2$

ឈ. $\dfrac{x^2-4}{\log_{0.5}\left(x^2-1\right)}<0$

ញ. $\dfrac{\log_{0.3}x-1}{\log_{0.3}x+2}\le\dfrac{\log_{0.3}x-3}{\log_{0.3}x-4}$

ដ. $\log_{tg\frac{\pi}{8}}(2x+1)\ge\log_{tg\frac{\pi}{8}}\left(x^2-1\right)$

ឋ. $\log_{0.5\sin\frac{\pi}{4}}\left(4x^2-16x+15\right)\ge -2$

ឌ. $\left|\log_{\frac{1}{3}}(x-2)\right|>1$

ឍ. $\log\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right|<0$

ណ. $\log_2\left(2^x-1\right).\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-2\right)>-2$

ត. $\log_x\left[\log_9\left(3^x-9\right)\right]<1$

9. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម

ក. $\begin{cases}\log_3\left(\log_2 x\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{2}} y\right)=1 & (1)\\ xy^2=4 & (2)\end{cases}$

ខ. $\begin{cases}y-\log_3 x=1 & (1)\\ x^y=3^{12} & (2)\end{cases}$

គ. $\begin{cases}2\log_2 x-3^y=15 & (1)\\ 3^y.\log_2 x=2\log_2 x+3^{y+1} & (2)\end{cases}$

ឃ. $\begin{cases}x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4 & (1)\\ \log_4-\log_4 y=1 & (2)\end{cases}$

ង. $\begin{cases}3^{-x}.2^y=1152 & (1)\\ \log_{\sqrt{5}}\left(x+y\right)=2 & (2)\end{cases}$

ច. $\begin{cases}10^{1+\log(x+y)}=50\\ \log\left(x-y\right)+\log\left(x+y\right)=2-\log 5\end{cases}$

ផ្នែកចម្លើយ

ចម្លើយ

1. ប្តូរទម្រង់ពីអិចស្ប៉ូណង់ស្យែលទៅជាលោការីត:

ក. $8^b = a$ គេបាន $\log_8 a = b$ ។

ខ. $6^y = x$ គេបាន $\log_6 x = y$ ។

គ. $b^a = 123$ គេបាន $\log_b 123 = a$ ។

ឃ. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = y$ គេបាន $\log_{\frac{1}{2}} y = x$ ។

ង. $(0.9)^y = x$ គេបាន $\log_{0.9} x = y$ ។

2. ប្តូរពីទម្រង់លោការីតទៅជាអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. $\log_2 4 = 2$ គេបាន $2^2 = 4$ ។

ខ. $\log_2 32 = x$ គេបាន $2^x = 32$ ។

គ. $\log_2 x = y$ គេបាន $2^y = x$ ។

ឃ. $\log_a x = y$ គេបាន $a^y = x$ ។

ង. $\log_a x = 32$ គេបាន $a^{32} = x$ ។

3. គណនាតម្លៃលោការីតខាងក្រោម

ក. $\log(0.1) = \log 10^{-1} = -1$ ។

ខ. $\log_3 \frac{1}{243} = \log_3 \frac{1}{3^5} = \log_3 3^{-5} = -5$ ។

គ. $\log_{343} 7 = \log_{7^3} 7 = \frac{1}{3}\log_7 7 = \frac{1}{3}$ ។

ឃ. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = -3$ ។

ង. $\log_5(0.2) = \log_5\left(\frac{1}{5}\right) = -1$ ។

ច. $\log\sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ ។

ឆ. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ ។

ជ. $e^{\ln\pi} = \pi$ ។

ឈ. $e^{\ln\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ ។

ញ. $\left(\ln e^4\right)^{\log_4 2016} = (4)^{\log_4 2016} = 2016$ ។

ដ. $\log_2 106 - \log_2 5 = \log_2 \frac{106}{5}$ ។

ឋ. $\log 4 + \log 25 = \log(4\times 25) = \log 100 = 2$ ។

ឌ. $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20 = \log_2 \frac{6}{15} + \log_2 20 = \log_2 \frac{6}{15}\times 20 = \log_2 8 = 3$ ។

ឍ. $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50 = \log_3 100 - \log_3 50 - \log_3 18$

$= \log_3 2 - \log_3 18$

$$= \log_3 \frac{2}{18} = \log_3 \frac{1}{9} = -2$$ ។

ណ. $\log_2 8^{33} = 33\log_2 8 = 33\times 3 = 99$ ។

ត. $\log_5 (5^{2015})^{2016} = 2016\times \log_5 5^{2015} = 2016\times 2105 = 4062240$ ។

ថ. $\log_{2015} (\log_{2016} 2016)^{2017} = \log_{2015} (1)^{2017} = \log_{2015} 1 = 0$ ។

ទ. $\log(\log 10^{1000}) = \log(1000\times \log 10) = \log 10^3 = 3$ ។

ធ. $\ln(\ln e^{e^{200}}) = \ln(e^{200}) = 200$ ។

ន. $\log_2 (\tan 2016^\circ) + \log_2 (\cot 2016^\circ) = \log_2 (\tan 2016^\circ \times \cot 2016^\circ) = \log_2 1 = 0$ ។

4. ពន្លាតលោការីតខាងក្រោម:

ក. $\log_2 (2x) = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$ ។

ខ. $\log_2 \left(x(x-1) \right) = \log_2 x + \log_2 (x-1)$ ។

គ. $\log_3 \frac{x^3}{100} = \log_3 x^3 - \log_3 100 = 3\log_3 x - \log_3 100$ ។

ឃ. $\ln(\sqrt[3]{z}) = \ln z^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \ln z$ ។

ង. $\log_2 (AB^2) = \log_2 A + \log_2 B^2 = \log_2 A + 2\log_2 B$ ។

ច. $\log_3 (x\sqrt{y}) = \log_3 x + \log_3 \sqrt{y} = \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 y$ ។

ឆ. $\ln(\sqrt{ab}) = \ln(ab)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(ab) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$ ។

ជ. $\log_5 \sqrt{x^2+1} = \log_5 (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_5 (x^2+1)$ ។

ឈ. $\log_a \left(\frac{x^2}{yz^3} \right) = \log_a x^2 - \log_a (yz^3) = \log_a x^2 - \log_a y - 3\log_a z$ ។

ញ.
$$\log \sqrt{z\sqrt{y\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}\log(z\sqrt{y\sqrt{x}})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\log z + \log(y\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} \right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\log z + \frac{1}{2}\left(\log y + \frac{1}{2}\log x \right) \right)$$
$$= \frac{1}{2}\log z + \frac{1}{4}\log y + \frac{1}{8}\log x$$

5. បង្រួមលោការីតខាងក្រោម:

ក.
$$\log_3 5 + 5\log_3 2 = \log_3 5 + \log_3 2^5$$
$$= \log_3 (5\times 2^5)$$
$$= \log_3 160$$

ខ. $3\log x + \frac{1}{2}\log(x+1) = \log x^3 + \log\sqrt{x+1}$

$$= \log(x^3\sqrt{x+1})$$

គ. $3\ln 5 + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(x^2+1) = \ln 5^3 + \ln(t)^{\frac{1}{2}} - \ln(x^2+1)^4$

$$= \ln 125 + \ln\sqrt{t} - \ln\sqrt[4]{x^2+1}$$

$$= \ln(125\sqrt{t}) - \ln\sqrt[4]{x^2+1}$$

$$= \ln\left(\frac{125\sqrt{t}}{\sqrt[4]{x^2+1}}\right)$$

ឃ. $\log 12 + \frac{1}{2}\log 7 - \log 2 = \log(12\times 7) - \log 2$

$$= \log 84 - \log 2$$

$$= \log\frac{84}{2}$$

$$= \log 42$$

ង. $\log_2 A + \log_2 B - 2\log_2 C = \log_2 AB - \log_2 C^2$

$$= \log_2\frac{AB}{C^2}$$

ច. $\log_5(x^2-1) - \log_5(x-1) = \log_5\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$

$$= \log_5(x+1)$$

ឆ. $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1) = \log x^4 - \log\sqrt[3]{x^2+1} + \log(x-1)^2$

$$= \log\frac{x^4}{\sqrt[3]{x^2+1}} + \log(x-1)^2$$

$$= \log\frac{x^4(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

ជ. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2\ln c = \ln\big((a+b)(a-b)\big) - \ln c^2$

$$= \ln(a^2-b^2) - \ln c^2$$

$$= \ln\frac{a^2-b^2}{c^2}$$

ឈ. $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^2+5) = \ln 5 + \ln x^2 + \ln(x^2+5)^3$

$$= \ln\left(5x^2(x^2+5)^3\right)$$

ញ. $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_5 z) = 2(\log_5 xy - \log_5 z^3)$

$$= 2\log_5\frac{xy}{z^3}$$

$$= \log_5\left(\frac{xy}{z^3}\right)^2$$

6. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

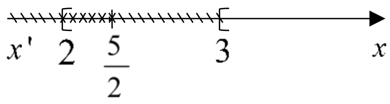
ក. $y=\sqrt{x^2-5x+6}+\log_3(2x-5)$

អនុគមន៍កំណត់បានកាលណា

$$\begin{cases} x^2-5x+6\ge 0 & (1)\\ 2x-5>0 & (2)\end{cases}$$

- $x^2-5x+6\ge 0 \quad \Rightarrow x\le 2$ ឬ $x\ge 3$
- $2x-5>0 \quad \Rightarrow x>\dfrac{5}{2}$

យើងបានតម្លៃនៃដែនកំណត់ជាប្រសព្វចម្លើយនៃ (1) និង (2) គឺ $x\ge 3$។



ដូច្នេះ $D=[3,+\infty)$

ខ. $y=\sqrt{\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1}(x)-2}$

អនុគមន៍មានន័យកាលណា:

$$\begin{cases} x>0 \wedge x\ne 1 & (1)\\ \log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1}(x)-2\ge 0 & (2)\end{cases}$$

តាម (2) គេបាន:

$\log_{x+1}(x^3+1)\ge 2$

ចំពោះ $x+1>1 \quad \vee\ x>0$ គេបាន $x^3+1\ge(x+1)^2$

$$\Leftrightarrow x^3+1\ge x^2+2x+1$$
$$x^3-x^2-2x\ge 0$$
$$x(x^2-x-2)\ge 0$$

- $x^2-x-2=0$ មានឫស $x=-1,\ x=2$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$x(x^2-x-2)\ge 0$	$-$ 0	$+$ 0	$-$ 0	$+$	

ចម្លើយវិសមីការគឺ $-1\le x\le 0 \ \vee\ x\ge 2$

យើងបាន ប្រសព្វនៃចម្លើយ (1) និង (2) គឺ $x\ge 2$

ដូច្នេះ $D=[2,+\infty)$

គ. $y=\log_2(x^2-7x+12)$

អនុគមន៍ន័យកាលណា $x^2-7x+12>0$

បើ $x^2-7x+12=0$ នោះ $x=3, x=4$

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$x^2-7x+12>0$	$+$	$-$	$+$	

ដូច្នេះ $D=(-\infty,3)\cup(4,+\infty)$

ឃ. $y=\log_{x-1}(x^2-x-6)$

អនុគមន៍មានន័យកាលណា

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \\ x^2-x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \wedge x\neq 2 \ \ (1) \\ x^2-x-6>0 \ \ (2) \end{cases}$$

តាម (2) គេបាន $x^2-x-6>0$ បើ $x^2-x-6=0 \Rightarrow x=-2, x=3$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x^2-x-6>0$	$+$	$-$	$+$	

គេបាន $x<-2$ ឬ $x>3$

-ប្រសព្វរវាងចម្លើយ (1) និង (2) គឺ $x>3$

ដូច្នេះ $D=(3,+\infty)$។

ង. $y=\ln\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)$

-អនុគមន៍មានន័យកាលណា

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+3}>0 \\ x+3\neq 0 \ \vee \ x\neq -3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$\dfrac{x-2}{x+3}>0$	$+$	$\|\|$	$-$ 0	$+$

ដូច្នេះ $D=(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$

ច. $y=\ln\left(\dfrac{x^2-x-6}{x-1}\right)$

អនុគមន៍មានន័យកាលណា

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-1}>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

- $x^2-x-6=0$ នោះ $x=-2, x=3$

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
x^2-x-6	$+$	0 $-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
$\dfrac{x^2-x-6}{x-1}>0$	$-$	$+$	$\|\|$ $-$	0	$+$

ដូច្នេះ $D=(-2,1)\cup(3,+\infty)$។

ឆ. $y=\sqrt{\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}}$

-អនុគមន៏មានន័យកាលណា

$$\begin{cases}\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}>0\\ 1-\ln x\neq 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}>0\\ x>0,x\neq e\end{cases}$$

- $1+\ln x>0\Rightarrow x>\dfrac{1}{e}$
- $1+\ln x<0\Rightarrow x<\dfrac{1}{e}$
- $1-\ln x>0\Rightarrow x<e$
- $1-\ln x<0\Rightarrow x>e$

x	0	$\frac{1}{e}$		e	$+\infty$
$1+\ln x$	-	0	+		+
$1-\ln x$	+		+	0	-
$\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}>0$	-	0	+	‖	-

ដូច្នេះ $D=(\frac{1}{e},e)$ ។

ជ. $y=\sqrt{\log_{0.8}\dfrac{2x+1}{x+5}-2}$

-អនុគមន៏មានន័យកាលណា

$$\begin{cases}\log_{0.8}\dfrac{2x+1}{x+5}>2 & (1)\\ \dfrac{2x+1}{x+5}>0 & (2)\\ x\neq -5 & (3)\end{cases}$$

តាម (1) គេបាន

- $\dfrac{2x+1}{x+5}>\left(\dfrac{4}{5}\right)^2$

$\dfrac{2x+1}{x+5}-\dfrac{16}{25}>0$

$\dfrac{34x-55}{25(x+5)}>0$

- $34x-55=0$ នោះ $x=\dfrac{55}{34}=1.62$
- $x+5=0$ នោះ $x=-5$

x	$-\infty$	-5	$\frac{55}{34}$	$+\infty$
$\frac{34x-55}{x+5}>0$	$+$	$-$	0	$+$

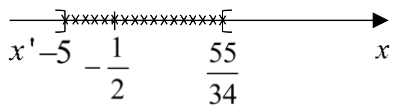
គេបាន $x\in(-\infty,-5)\cup(\frac{55}{34},+\infty)$

តាម (2) គេបាន

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\frac{2x+1}{x+5}>0$	$+$	$-$	0	$+$

គេបាន $x\in(-\infty,-5)\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$

-ប្រសព្វរវាងចម្លើយ (1) និង (2) គេបាន



ដូច្នេះ $D=(-\infty,-5)\cup(\frac{55}{34},+\infty)$

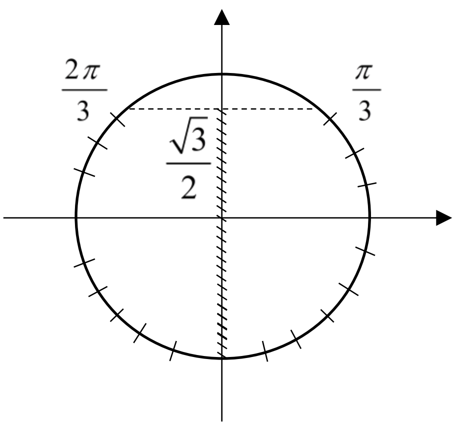
ឈ. $y=\log_2(2\sin x-\sqrt{3})$

អនុគមន៍មានន័យកាលណា

$$2\sin x-\sqrt{3}>0$$

$$\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដោយ $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$



គេបាន $\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

ដូច្នេះ $D=(\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi)$ ។

ញ. $y=\log_3\left(\log_2(4^x-7\cdot 2^x+12)\right)$

អនុគមន៍មានន័យកាលណា

$$\begin{cases}\log_2(4^x-7\cdot 2^x+12)>0 & (1)\\ 4^x-7\cdot 2^x+11>0 & (2)\end{cases}$$

- តាម (1) គេបាន

$$4^x-7\cdot 2^x+12>1$$

$$(2^x)^2-7\cdot 2^x+11>0$$

តាង $t=2^x \Rightarrow t^2=(2^x)^2 \quad ,t>0$ គេបាន

$$t^2-7t+11>0 \text{ នោះ } t<\frac{7-\sqrt{5}}{2} \text{ ឬ } t>\frac{7+\sqrt{5}}{2}$$

យើងបាន $x<\log_2\left(\frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)$ ឬ $x>\log_2\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$

- តាម (2) គេបាន

$$4^x-7\cdot 2^x+12>0$$

តាង $k=2^x \quad ,k>0$ គេបាន

$$k^2-7k+12>0 \text{ នោះ } k<3 \text{ ឬ } k>4$$

យើងបាន $x<\log_2 3$ ឬ $x>2$

ប្រសព្វរវាងចម្លើយ (1) និង (2) គឺ

$$x<\log_2\left(\frac{7-\sqrt{5}}{2}\right) \text{ ឬ } x>\log_2\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$$

ដូច្នេះ $D=(-\infty,\log_2\frac{7-\sqrt{5}}{2})\cup(\log_2\frac{7+\sqrt{5}}{2},+\infty)$

7. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

ក. $\log_2\frac{x-2}{x-1}-1=\log_2\frac{3x-7}{3x-1}$

សមីការមានន័យកាលណា

$$\begin{cases}\frac{x-2}{x-1}>0 & (1)\\ \frac{3x-7}{3x-1}>0 & (2)\end{cases}$$

● តាម (1) $\frac{x-2}{x-1}>0$

បើ $\frac{x-2}{x-1}=0$ នោះ $x=2, x\neq 1$

x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
$x-1$	$-$ 0	$+$	$+$
$\frac{x-2}{x-1}>0$	$+$	$-$ 0	$+$

នោះ $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

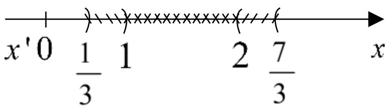
● តាម (2) $\frac{3x-7}{3x-1}>0$

បើ $\frac{3x-7}{3x-1}=0$ នោះ $x=\frac{7}{3}, x\neq\frac{1}{3}$

x	$-\infty$ $\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$3x-7$	$-$	$-$ 0	$+$
$3x-1$	$-$ 0	$+$	$+$
$\frac{3x-7}{3x-1}>0$	$+$	$-$ 0	$+$

នោះ $x\in(-\infty,\frac{1}{3})\cup(\frac{7}{3},+\infty)$

ប្រសព្វរវាង (1) និង (2) យើងបាន



នោះយើងបានវិសមីការមានន័យកាលណា $x<\frac{1}{3}$ ឬ $x>\frac{7}{3}$ ។

ខ. $\log_2 x^4+\log_a x^2=1$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x\neq 0 \\ a>0, a\neq 1 \end{cases}$

យើងបាន $\log_2 x^4+\log_a x^2=1$

$$2\log_2 x^2+\log_a x^2=1$$

$$2\log_2 x^2+\frac{\log_2 x^2}{\log_2 a}=1$$

$$2\log_2 x^2\cdot\log_2 a+\log_2 x^2=\log_2 a$$

$$(2\log_2 a+1)\log_2 x^2=\log_2 a$$

● បើ $2\log_2 a+1=0$

$$\Leftrightarrow \log_2 a = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

នោះគេបានសមីការគ្មានឫស។

● បើ $2\log_2 a + 1 \neq 0$ នោះ $a \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$

យើងទាញបាន

$$\log_2 x^2 = \frac{\log_2 a}{2\log_2 a + 1}$$

$$\log_2 x^2 = \frac{\log_2 a}{\log_2(2a^2)}$$

$$\log_2 x^2 = \log_{2a^2} a$$

$$\log_2 x^2 = \frac{1}{\log_a(2a^2)}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2^{\frac{1}{\log_a(2a^2)}}$$

$$x = \pm\sqrt{2^{\frac{1}{\log_a(2a^2)}}} = \pm 2^{\frac{1}{\log_a 4a^4}}$$

ដូច្នេះសមីការមានឫស $x = \pm 2^{\frac{1}{\log_a 4a^4}}$ ចំពោះ $a \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$

គ. $|x-1|^{\log^2 x - \log x^2} = |x-1|^3$

សមីការមានន័យកាលណា $x > 0$ ឬ $x \in (0, +\infty)$

យើងមាន $|x-1|^{\log^2 x - \log x^2} = |x-1|^3$

គេបាន $\log|x-1|^{\log^2 x - \log x^2} = \log|x-1|^3$

$$(\log^2 x - \log x^2) \cdot \log|x-1| = 3\log|x-1|$$

$$(\log^2 x - 2\log x) \cdot \log|x-1| - 3\log|x-1| = 0$$

$$(\log^2 x - 2\log x - 3)\log|x-1| = 0$$

យើងទាញបាន

● $\log|x-1| = 0 \Leftrightarrow \log|x-1| = \log 1$

$$|x-1| = 1$$

បើ $x-1=1 \Rightarrow x=2$

បើ $x-1=-1 \Rightarrow x=0$ (មិនយក)

● $\log^2 x - 2\log x - 3 = 0$ តាង $t = \log x$

គេបាន $t^2 - 2t - 3 = 0$ នោះ $t_1 = -1, t_2 = 3$

បើ $t = -1$ គេបាន $\log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

បើ $t = 3$ គេបាន $\log x = 3 \Rightarrow x = 10^3 = 1000$

ដូច្នេះ $x=\frac{1}{10}, x=2, x=1000$ ជាឫសរបស់សមីការ។

ឃ. $2\log_9 x+9\log_x 3=10$

សមីការមានន័យកាលណា $x>0, x\neq 1$

យើងបាន $2\log_9 x+9\log_x 3=10$

$$\frac{2\log_3 x}{\log_3 9}+\frac{9}{\log_3 x}=10$$

$$\frac{2\log_3 x}{2}+\frac{9}{\log_3 x}=10$$

$$\log_3 x+\frac{9}{\log_3 x}=10$$

$$\log_3^2 x-10\log_3 x+9=0$$

តាង $k=\log_3 x$ នោះ $k^2-10k+9=0$ យើងបាន $k_1=1, k_2=9$

- បើ $k=1 \Leftrightarrow \log_3 x=1 \Rightarrow x=3$
- បើ $k=9 \Leftrightarrow \log_3 x=9 \Rightarrow x=3^9$

ដូច្នេះ $x=3, x=3^9$ ជាឫសសមីការ។

ង. $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1$

សមីការមានន័យកាលណា $x>0, x\neq 1$

យើងបាន $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1$

$$\frac{\log_5(125x)}{\log_5 x}\times\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)^2=1$$

$$\frac{(\log_5 5^3+\log_5 x)\cdot\log_5^2 x}{4\log_5 x}=1$$

$$\frac{(3+\log_5 x)\cdot\log_5^2 x}{4\log_5 x}=1$$

តាង $t=\log_5 x$ យើងបាន

$$\frac{(3+t)t^2}{4t}=1$$

$$t^3+3t^2=4t$$

$$t^3+3t^2-4t=0$$

$$t(t^2+3t-4)=0$$

បើ $t=0$

បើ $t^2+3t-4=0$ នោះ $t_1=1, t_2=-4$

- ចំពោះ $t=0$ គេបាន $\log_5 x=0 \Rightarrow x=1$ (មិនយក)
- ចំពោះ $t=1$ គេបាន $\log_5 x=1 \Rightarrow x=5$
- ចំពោះ $t=-4$ គេបាន $\log_5 x=-4 \Rightarrow x=5^{-4}=\frac{1}{625}$

ដូច្នេះ $x=5, x=\frac{1}{625}$ ជាឫសរបស់សមីការ។

ច. $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)=4-\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)$

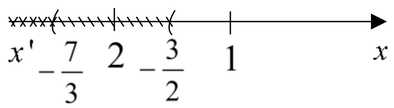
សមីការមានន័យកាលណា

$$\begin{cases} 3x+7>0 \\ 3x+7\neq 1 \\ 9+12x+4x^2\neq 0 \\ 2x+3>0 \\ 2x+3\neq 1 \\ 6x^2+23x+21>0 \end{cases}$$

- $3x+7>0 \Rightarrow x>-\frac{7}{3}$
- $3x+7\neq 1 \Rightarrow x\neq -2$
- $9+12x+4x^2\neq 0 \Rightarrow x\neq -\frac{3}{2}$
- $2x+3>0 \Rightarrow x>-\frac{3}{2}$
- $2x+3\neq 1 \Rightarrow x\neq -1$
- $6x^2+23x+21>0$

បើ $6x^2+23x+21=0$ គេបាន $x_1=-\frac{3}{2}, x_2=-\frac{7}{3}$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{7}{3}$	$\quad -\frac{3}{2}$	$+\infty$
$6x^2+23x+21>0$	+	-	+



នោះសមីការមានន័យកាលណា $x\in(-\frac{3}{2},+\infty)\setminus\{-1\}$

យើងបាន $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)=4-\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)$

$$\log_{3x+7}(2x+3)^2=4-\log_{2x+3}(2x+3)(3x+7)$$

$$2\log_{3x+7}(2x+3)=4-\left(\log_{2x+3}(2x+3)+\log_{2x+3}(3x+7)\right)$$

$$2\log_{3x+7}(2x+3)=3-\log_{2x+3}(3x+7)$$

$$2\log_{3x+7}(2x+3)=3-\frac{1}{\log_{3x+7}(2x+3)}$$

តាង $t=\log_{3x+7}(2x+3)$ យើងបាន

$$2t=3-\frac{1}{t}$$

$2t^2-3t+1=0$ នោះ $t_1=1, t_2=\frac{1}{2}$

● ចំពោះ $t=1$ គេបាន $\log_{3x+7}(2x+3)=1$

$$\log_{3x+7}(2x+3)=\log_{3x+7}(3x+7)$$

$$2x+3=3x+7\Rightarrow x=-4 \text{ (មិនយក)}$$

● ចំពោះ $t=\frac{1}{2}$ គេបាន $\log_{3x+7}(2x+3)=\frac{1}{2}$

$$(2x+3)=(3x+7)^{\frac{1}{2}}$$

$$(2x+3)^2=3x+7$$

$$4x^2+12x+9-3x-7=0$$

$$4x^2+9x+2=0\Rightarrow x_1=-\frac{1}{4} \text{ និង } x_2=-2 \text{ (មិនយក)}$$

ដូច្នេះ $x=-\frac{1}{4}$ ជាឬសរបស់សមីការ។

ឆ. $(x^2\log_x 27)\cdot\log_9 x=x+4$

សមីការមានន័យកាលណា

$$\begin{cases}x>0\\x\neq 1\end{cases}$$

យើងបាន $x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$

យើងមាន $(x^2\log_x 27)\cdot\log_9 x=x+4$

$$\left(x^2\cdot\frac{\log_3 27}{\log_3 x}\right)\left(\frac{\log_3 x}{\log_3 9}\right)=x+4$$

$$\left(\frac{3x^2}{\log_3 x}\right)\left(\frac{\log_3 x}{2}\right)=x+4$$

$$3x^2\cdot\log_3 x=(x+4)(2\log_3 x)$$

$$3x^2\cdot\log_3 x-(2\log_3 x)(x+4)=0$$

$$(3x^2-2x-8)\cdot\log_3 x=0$$

● បើ $\log_3 x=0\Rightarrow x=1$ (មិនយក)

● បើ $3x^2-2x-8=0$ នោះ $x_1=2$ និង $x_2=-\frac{4}{3}$ (មិនយក)

ដូច្នេះ $x=2$ ជាឬសរបស់សមីការ។

ជ. $\sqrt{2-\log_x 9}=-\frac{\sqrt{12}}{\log_3 x}$

សមីការមានន័យកាលណា

$$\begin{cases}x>0\\x\neq 1\\2-\log_x 9>0\\\log_3 x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\neq 1\\\log_x 9<2 & (1)\\\log_3 x<0 & (2)\end{cases}$$

តាម (1) $\log_x 9\le 2$

$$\log_x 9\le\log_x x^2$$

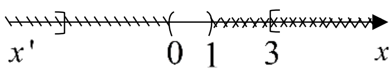
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1 \\ 9\ge x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ 9\le x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1 \\ -3\le x\le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ x<-3 \vee x>3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ x>3 \end{array}\right.$$

នោះ $x\in(0,1)\cup(3,+\infty)$ (1)

តាម (2) $\log_3 x<0 \Rightarrow x<1$

យើងបាន $\begin{cases} x>0,\ x\neq 1 \\ 0<x<1 \vee x>3 \\ x<1 \end{cases}$

អ័ក្សចំនួន



ដូច្នេះ សមីការមានន័យកាលណា $x\in(0,1)$

យើងបាន $$\sqrt{2-\log_x 9} = -\frac{\sqrt{12}}{\log_3 x}$$

$$2-\log_x 9 = \frac{12}{\log_3^2 x}$$

$$2-\frac{2}{\log_3 x} = \frac{12}{\log_3^2 x}$$

$$2\log_3^2 x - 2\log_3 x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$$

តាង $k=\log_3 x$ នោះ $k^2-k-6=0$ មាន $k_1=3, k=-2$

បើ $k=3 \Rightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x=3^3=27$ (មិនយក)

បើ $k=-2 \Rightarrow \log_3 x=-2 \Leftrightarrow x=3^{-2}=\frac{1}{9}$

ដូច្នេះ $x=\frac{1}{9}$ ជាឫសសមីការ។

ឈ. $\log(6\cdot 5^x + 25\cdot 20^x) = x+\log 5$

សមីការមានន័យ $\forall x\in\mathbb{R}$

យើងបាន $$\log(6\cdot 5^x + 5^2\cdot 2^{2x}\cdot 5^x) = \log(5\cdot 10^x)$$

$$\Rightarrow 6\cdot 5^x + 5^2\cdot 2^{2x}\cdot 5^x = 5\cdot 2^x\cdot 5^x$$

$$6+5^2\cdot 2^{2x} = 5\cdot 2^x$$

$$25\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x + 6 = 0$$

តាង $t=2^x$ នោះ $25t^2-5t+6=0$ មាន $\Delta<0$ សមីការគ្មានឫស

ដូច្នេះ សមីការគ្មានឫស។

ញ. $(x+1)^{\log(x+1)}=100(x+1)$

សមីការមានន័យកាលណា $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

នោះ $x\in(-1,+\infty)$

យើងបាន $(x+1)^{\log(x+1)}=100(x+1)$

$$\log(x+1)^{\log(x+1)}=\log(100(x+1))$$

$$\log(x+1)\cdot\log(x+1)=\log 100+\log(x+1)$$

$$\log^2(x+1)-\log(x+1)-2=0$$

តាង $k=\log(x+1)$ យើងបាន $k^2-k-2=0$ មាន $k_1=2, k=-1$

បើ $k=2 \Rightarrow \log(x+1)=2 \Leftrightarrow x=99$

បើ $k=-1 \Rightarrow \log(x+1)=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{9}{10}$

ដូច្នេះ $x=99, x=-\frac{9}{10}$ ជាឫសសមីការ។

ដ. $2^{2\log 4x-1}-7^{\log 4x}=7^{\log 4x-1}-3\cdot 4^{\log 4x}$

សមីការមានន័យកាលណា $x>0$ យើងបាន

$$2^{2\log 4x-1}-7^{\log 4x}=7^{\log 4x-1}-3\cdot 4^{\log 4x}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 4^{\log 4x}-7^{\log 4x}=\frac{1}{7}\cdot 7^{\log 4x}-3\cdot 4^{\log 4x}$$

$$\frac{7}{2}\cdot 4^{\log 4x}=\frac{8}{7}\cdot 7^{\log 4x}$$

$$\frac{1}{16}\cdot 4^{\log 4x}=\frac{1}{49}\cdot 7^{\log 4x}$$

$$4^{\log 4x-2}=7^{\log 4x-2}$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{\log 4x-2}=1$$

គេបាន $\log 4x-2=0$

$$\log 4x=2$$

$$4x=10^2$$

$$\Rightarrow x=\frac{100}{4}=25$$

ដូច្នេះ $x=25$ ជាឫសរបស់សមីការ។

ឋ. $4^{\ln x+1}-6^{\ln x}-2\cdot 3^{2\ln x+2}=0$

សមីការមានន័យកាលណា $x>0$ យើងបាន

$$4^{\ln x+1}-6^{\ln x}-2\cdot 3^{2\ln x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot 4^{\ln x}-6^{\ln x}-18\cdot 9^{\ln x}=0 \quad (*)$$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ $(*)$ នឹង $4^{\ln x}$ យើងបាន

$$4-\left(\frac{3}{2}\right)^{\ln x}-18\left(\frac{9}{4}\right)^{\ln x}=0$$

តាង $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\ln x}$ $,t>0$ យើងបាន $18t^2+t-4=0$ មាន $t_1=-\frac{1}{2}$ (មិនយក) និង $t_2=\frac{4}{9}$។

ចំពោះ $t=\frac{4}{9}$ យើងបាន

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\ln x}=\frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\ln x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$$

$$\ln x=-2$$

$$\Rightarrow x=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

ដូច្នេះ $x=\frac{1}{e^2}$ ជាឫសរបស់សមីការ។

ឌ. $\left(2015^{\log_{2016}x}\right)^2-5x^{\log_{2016}2015}+6=0$

សមីការមានន័យកាលណា $x>0$

តាង $A=2015^{\log_{2016}2015}\Leftrightarrow \log_{2016}A=\log_{2016}2015^{\log_{2016}x}$

$$\Leftrightarrow \log_{2016}A=\log_{2016}x\cdot\log_{2016}2015 \quad (1)$$

តាង $B=x^{\log_{2016}2015}\Leftrightarrow \log_{2016}B=\log_{2016}x^{\log_{2016}2015}$

$$\Leftrightarrow \log_{2016}B=\log_{2016}2015\cdot\log_{2016}x \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងទាញបាន

$$\log_{2016}A=\log_{2016}B\Rightarrow A=B$$

សមីការខាងលើអាចសរសេរជា

$$A^2-5A+6=0 \text{ មាន } A_1=2, A_2=3$$

ចំពោះ $A=2$ គេបាន $2015^{\log_{2016}x}=2\Leftrightarrow \log_{2016}x=\log_{2015}2\Rightarrow x=(2016)^{\log_{2015}2}$

ចំពោះ $A=3$ គេបាន $2015^{\log_{2016}x}=3\Leftrightarrow \log_{2016}x=\log_{2015}3\Rightarrow x=(2016)^{\log_{2015}3}$

ដូច្នេះ $x=(2016)^{\log_{2015}2}\vee x=(2016)^{\log_{2015}3}$ ជាឫសរបស់សមីការ។

ឍ. $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2$

សមីការមានន័យកាលណា

$$\begin{cases}x>0\\ \log_2 x>0\\ \log_4 x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x>1\\ x>1\end{cases}\Rightarrow x>1$$

យើងមាន $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2\log_2 x+\log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2\log_2 x-1+\log_2\log_2 x=2$$

$$\frac{3}{2}\log_2\log_2 x = 3$$

$$\log_2\log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 2^2$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x = 4$$
$$\Rightarrow x = 2^4 = 16$$

ដូច្នេះ $x=16$ ជាឫសរបស់សមីការ។

ណ. $\log_3\log_4\log_3^2(x-3)=0$

សមីការមានន័យកាលណា

$$\begin{cases} x-3>0 & (1) \\ \log_4\log_3^2(x-3)>0 & (2) \end{cases}$$

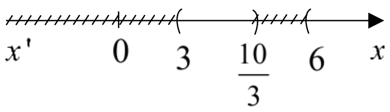
តាម (1) $x-3>0 \Rightarrow x>3$

តាម (2): $\log_4\log_3^2(x-3)>0 \Leftrightarrow \log_4\log_3^2(x-3)>\log_4 1$

$$\log_3^2(x-1)>1$$

គេបាន $\left[\begin{array}{l}\log_3(x-3)<-1\\ \log_3(x-3)>1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3<3^{-1}\\ x-3>3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x<\dfrac{10}{3}\\ x>6\end{array}\right.$

យក $(1)\cap(2)$ គេបាន



$\Rightarrow x\in(3,\frac{10}{3})\cup(6,+\infty)$

យើងមាន $\log_3\log_4\log_3^2(x-3)=0$

$$\Leftrightarrow \log_3\log_4\log_3^2(x-3)=\log_3 1$$
$$\Leftrightarrow \log_4\log_3^2(x-3)=1$$
$$\log_4\log_3^2(x-3)=\log_4 4$$
$$\log_3^2(x-3)=4$$
$$\log_3(x-3)=\pm 2$$

បើ $\log_3(x-3)=2 \Leftrightarrow x-3=3^2 \Rightarrow x=12$

បើ $\log_3(x-3)=-2 \Leftrightarrow x-3=3^{-2} \Rightarrow x=\frac{28}{9}$

ដូច្នេះ $x=\frac{28}{9}, x=12$ ជាឫសរបស់សមីការ។

ត. $2016\cdot 2017^{2(\log_{2016}x-1)}=x^{1+\log_{2016}2017}-x^2$

តាង $a=2016, b=2017$ នោះ សមីការអាចសរសេរជា

$$ab^{2(\log_a x-1)}=x^{1+\log_a b}-x^2$$

សមីការមានន័យកាលណា $x>0$

- យើងឃើញថា $x=1$ មិនមែនជាឫសនៃសមីការនេះទេ។
- ចំពោះ $x\neq 1$ យើងទាញបាន

$$a\cdot b^{2\log_a x}\cdot b^{-2}=x^{\log_a x\cdot\log_x(ab)}-a^{\log_a x^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b^2}\left(b^2\right)^{\log_a x}=\left(ab\right)^{\log_a x}-\left(a^2\right)^{\log_a x}$$
ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $(a^2)^{\log_a x}$ គេបាន
$$\frac{a}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{\log_a x}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\log_a x}-1$$
តាង $k=\left(\frac{b}{a}\right)^{\log_a x}$ $,k>0$ យើងទាញបាន $\frac{a}{b^2}k^2-k+1=0$

មាន $\Delta=(-1)^2-4\left(\frac{a}{b^2}\right)$
$$=\frac{b^2-4a}{b^2}=\frac{(a+1)^2-4a}{b^2}$$
$$=\frac{a^2-2a+1}{b^2}=\frac{\left(a-1\right)^2}{b^2}$$
$$=\frac{\left(b-2\right)^2}{b^2}$$
$$k_1=\frac{1-\frac{b-2}{b}}{2\left(\frac{a}{b^2}\right)}=\frac{\frac{b-b+2}{b}}{\frac{2a}{b^2}}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$$
$$k_2=\frac{1+\frac{b-2}{b}}{2\left(\frac{a}{b^2}\right)}=\frac{\frac{2b-2}{b}}{\frac{2a}{b^2}}=\frac{\frac{2}{b}(b-1)}{\frac{2a}{b^2}}=\frac{a}{\frac{a}{b}}=b$$

- ចំពោះ $k=\frac{b}{a}$ គេបាន $\left(\frac{b}{a}\right)^{\log_a x}=\frac{b}{a}\Leftrightarrow \log_a x=1\Rightarrow x=a=2016$
- ចំពោះ $k=b$ គេបាន $\left(\frac{b}{a}\right)^{\log_a x}=b\Leftrightarrow \log_a x=\log_{\frac{b}{a}} b=\frac{1}{\log_b \frac{b}{a}}$

$$\Leftrightarrow \log_a x=\frac{1}{1-\log_b a}\Rightarrow x=a^{\frac{1}{1-\log_b a}}=2016^{\frac{1}{1-\log_{2017}2016}}$$

ដូច្នេះ $x=2016, x=2016^{\frac{1}{1-\log_{2017}2016}}$ ជាឫសរបស់សមីការ។

ថ. $\frac{1}{2^x}=\log(x-2)+\frac{1}{8}$

សមីការមានន័យកាលណា $x-2>0\Rightarrow x>2$

យើងបាន $\frac{1}{2^x}=\log(x-2)+\frac{1}{8}$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^x}-\frac{1}{8}=\log(x-2) \quad (*)$$

- បើ $x\ge 3\Leftrightarrow 2^x\ge 2^3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^x} \le \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{2^x} - \frac{1}{8} \le 0 \quad (1)$$

ម៉្យាងទៀត $x \ge 3 \Leftrightarrow x-2 \ge 1 \Rightarrow \log(x-2) \ge 0 \quad (2)$

- បើ $2 < x < 3$ គេបាន $2^x < 2^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2^x} > \frac{1}{2^3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^x} - \frac{1}{8} > 0$$

ម៉្យាងទៀត $x < 3 \Leftrightarrow (x-2) < 1 \Rightarrow \log(x-1) < 0$

ដូច្នេះ សមីការ (*) មានឬសកាលណាអង្គទាំងពីរស្មើសូន្យ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} \frac{1}{2^x} - \frac{1}{8} = 0 \\ \log(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 8 \\ x-2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3$$

ដូច្នេះ $x = 3$ ជាឬសរបស់សមីការ។

ទ. $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1-\cos 2x) = 2$

ដោយ $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$ នោះ សមីការមានន័យកាលណា $0 < \sin x \le 1$

យើងមាន $3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1-\cos 2x) = 2$

$$\Leftrightarrow 3(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(2\sin^2 x) = 2$$

$$3(\log_2 \sin x)^2 + 1 + 2\log_2 \sin x = 2$$

$$3(\log_2 \sin x)^2 + 2\log_2 \sin x - 1 = 0$$

តាង $t = \log_2 \sin x$ នោះ $\log_2 \sin x \le 0$ ឬ $t \le 0$

យើងបាន $3t^2 + 2t - 1 = 0$ មាន $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{1}{3}$ (មិនយក)

ចំពោះ $t = -1$ យើងទាញបាន $\log_2 \sin x = -1$

$$\Leftrightarrow \sin x = 2^{-1}$$

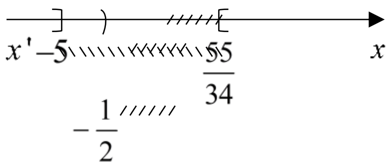
$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$$

ដូច្នេះ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ជាឬសរបស់សមីការ $(k \in \mathbb{Z})$

ធ. $2^{\log_5(x+3)} = x \quad (*)$

សមីការមានន័យកាលណា



$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

តាង $t = \log_5(x+3) \Leftrightarrow 5^t = x+3 \Rightarrow x = 5^t - 3$

យើងបានសមីការ (*) អាចសរសេរជា $2^t = 5^t - 3$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង 5^t យើងបាន

$$\left(\frac{2}{5}\right)^t = 1 - \frac{3}{5^t} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^t + \frac{3}{5^t} = 1$$

យើងឃើញថាសមីការមានឫស $t = 1$

- បើ $t > 1$ នោះ $\left(\frac{2}{5}\right)^t < \left(\frac{2}{5}\right)^1$

  ហើយ $\frac{3}{5^t} < \frac{3}{5}$

  នោះ $\left(\frac{2}{5}\right)^t + \frac{3}{5^t} < \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

- បើ $t < 1$ នោះ $\left(\frac{2}{5}\right)^t > \left(\frac{2}{5}\right)^1$

  ហើយ $\frac{3}{5^t} > \frac{3}{5}$

  នោះ $\left(\frac{2}{5}\right)^t + \frac{3}{5^t} > \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

ហេតុនេះយើងទាញបាន $t > 1$ ឬ $t < 1$ សមីការគ្មានឫសទេ។ ដូច្នេះមានតែ $t = 1$ តែមួយគត់ដែលជាឫសរបស់សមីការ។ ដោយ $x = 5^t - 3 = 5^1 - 3 = 2$ ។

ដូច្នេះ $x = 2$ ជាឫសរបស់សមីការ (*)។

ន. កំណត់ឫសវិជ្ជមានរបស់សមីការ $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x > 0$

យើងមាន $x^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \ln x^x = \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$x\ln x = \ln 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$x\ln x = -\frac{\ln 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x\ln x + \frac{\ln 2}{2} = 0$$

តាង $f(x) = x\ln x + \frac{\ln 2}{2}$

$$f'(x) = (x\ln x)' = \ln x + 1$$

- បើ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0$

$$\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

- បើ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{e}$
- បើ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{e}$

ចំពោះ $x = \frac{1}{e} \Rightarrow f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}\ln e^{-1} + \frac{\ln 2}{2} = -\frac{1}{e} + \frac{\ln 2}{2}$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(x\ln x) = +\infty$

គេបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម

x	0^+ $\qquad \frac{1}{e} \qquad$ $+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$0 \searrow -\frac{1}{e}+\frac{\ln 2}{2}$	$\nearrow +\infty$

សមីការ $f(x)=0$ កាលណា $x_1=\frac{1}{2}, x_e=\frac{1}{4}$ អនុគមន៍ f ចុះលើចន្លោះ $(0,\frac{1}{e})$ និង កើនលើចន្លោះ $(\frac{1}{e},+\infty)$

8. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម:

ក. $\log_7 x-\log_7(2x-5)\le \log_7 2-\log_7(x-3)$

- វិសមីការមានន័យកាលណា :

$$\begin{cases} x>0 \\ 2x-5>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>\frac{5}{2} \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow \quad x>3 \quad (*)$$

យើងបាន

$$\log_7 x-\log_7(x-3)\le \log_7 2+\log_7(2x-5)$$

$$\log_7\left[x(x-3)\right]\le \log_7\left[2(2x-5)\right]$$

$$x^2-3x \le 4x-10$$

$$x^2-7x+10\le 0$$

បើ $x^2-7x+10=0 \Rightarrow x=5; x=2$

x	$-\infty$	2		5	$+\infty$
$x^2-7x+10\le 0$	+	0	-	0	+

$\Rightarrow 2\le x\le 5$

តាម $(*)$ យើងបាន : $3<x\le 5$

ដូចនេះវិសមីការមានចម្លើយ $3<x\le 5$ ។

ខ. $\log_{3x+5}(9x^2+8x+2)>2$

វិសមីការមានន័យកាលណា :

$$\begin{cases} 3x+5>0 \\ 3x+5\ne 1 \\ 9x^2+8x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{5}{3} \\ x\ne -\frac{4}{3} \\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x>-\frac{5}{3} \text{ និង } x\ne -\frac{4}{3}$$

យើងបាន

$$\log_{3x+5}\left(9x^2+8x+2\right)>\log_{3x+5}\left(3x+1\right)^2$$

$$(*)\begin{cases}3x+5>1\\9x^2+8x+2>\left(3x+5\right)^2\end{cases} \quad \text{ឬ} \quad (**)\begin{cases}0<3x+5<1\\9x^2+8x+2<\left(3x+5\right)^2\end{cases}$$

-ចំពោះ $(*)$ យើងបាន :

$$\begin{cases}3x+5>1\\9x^2+8x+2>9x^2+30x+25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{4}{3}\\22x+23<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>-\dfrac{4}{3}\\x<-\dfrac{23}{22}\end{cases}$$

នាំឱ្យ $-\dfrac{4}{3}<x<-\dfrac{23}{22}$

-ចំពោះ $(**)$ យើងបាន :

$$\begin{cases}0<3x+5<1\\9x^2+8x+2<9x^2+30x+25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5<3x<-4\\22x+23>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\dfrac{5}{3}<x<-\dfrac{4}{3}\\x>-\dfrac{23}{22}\end{cases}$$

នាំឱ្យ x គ្មានតម្លៃប្រសព្វ ។

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ : $-\dfrac{4}{3}<x<-\dfrac{23}{22}$ ។

គ. $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_3 x>1$

- វិសមីការមានន័យកាលណា : $x>0$ $(*)$

$$\log_{2^{-1}}x+\log_3 x>1$$

$$-\log_2 x+\log_3 x>1$$

$$-\frac{\log_3 x}{\log_3 2}+\log_3 x>1$$

$$-\log_3 x+\log_3 2.\log_3 x>\log_3 2$$

$$\log_3 x\left(\log_3 2-1\right)>\log_3 2$$

$$\log_3\frac{2}{3}.\log_3 x>\log_3 2$$

$$\log_3 x<\frac{\log_3 2}{\log_3\frac{2}{3}}$$

$$\log_3 x<\log_{\frac{2}{3}}2$$

នាំឱ្យ $x < 3^{\log_{\frac{2}{3}} 2}$

តាម $(*)$ យើងបាន $0 < x < 3^{\log_{\frac{2}{3}} 2}$

ដូចនេះវិសមីការមានចម្លើយ $0 < x < 3^{\log_{\frac{2}{3}} 2}$ ។

ឃ. $\dfrac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)} < 2$

- វិសមីការមានន័យកាលណា :

$$\begin{cases} 5x+1>0 \\ 7x-1>0 \\ 7x-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{5} \\ x > \dfrac{1}{7} \\ x \neq \dfrac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow x > \dfrac{1}{7} \ , \ x \neq \dfrac{2}{7} \quad (*)$$

$$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{7x-1}(5x+1) < 2 \Leftrightarrow \log_{7x-1}(5x+1) < \log_{7x-1}(7x-1)^2$$

យើងបាន :

$$\begin{cases} 7x-1>1 \\ 5x+1<(7x-1)^2 \end{cases} (i) \qquad \text{ឬ} \qquad \begin{cases} 0<7x-1<1 \\ 5x+1>(7x-1)^2 \end{cases} (ii)$$

- ចំពោះ (i) យើងបាន :

$$\begin{cases} 7x-1>1 \\ 5x+1<49x^2-14x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{2}{7} \\ 49x^2-19x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \dfrac{2}{7} \\ x<0 \vee x>\dfrac{19}{49} \end{cases} \qquad \text{តែ } x<0 \text{ (មិនយក)}$$

នាំឱ្យ $x > \dfrac{19}{49}$

- ចំពោះ (ii) យើងបាន :

$$\begin{cases} 0<7x-1<1 \\ 5x+1>49x^2-14x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<7x<2 \\ 49x^2-19x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{7}<x<\dfrac{2}{7} \\ 0<x<\dfrac{19}{49} \end{cases}$$

នាំឱ្យ $\dfrac{1}{7}<x<\dfrac{2}{7}$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\dfrac{1}{7}<x<\dfrac{2}{7}$ ឬ $x>\dfrac{19}{49}$ ។

ង. $\dfrac{\log^2 x-3\log x+3}{\log x-1}<1$

- វិសមីការមានន័យកាលណា :

$$\begin{cases} x>0 \\ \log x-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 10 \end{cases}$$

តាង $y=\log x$, $y\neq 1$

យើងបាន

$$\frac{y^2-3y+3}{y-1}<1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2-3y+3}{y-1}-1<0$$

$$\frac{y^2-4y+4}{y-1}<0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(y-2)^2}{y-1}<0$$

y	$-\infty$ 1 2 $+\infty$		
$(y-2)^2$	+	+	0 +
$y-1$	− 0	+	+
$\dfrac{(y-2)^2}{y-1}<0$	−	+	+

តាមតារាងគេបាន $y<1$ ឬ $\log x<1$ នាំឱ្យ $x<10$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $0<x<10$ ។

ច. $\log_{\log_2(0.5x)}\left(x^2-10x+21\right)>0$

- វិសមីការមានន័យកាលណា :

$$\begin{cases} x^2-10x+21>0 \\ \log_2(0.5x)>0 \\ \log_2(0.5x)\neq 1 \\ 0.5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \vee x>7 \\ x>2 \\ x\neq 4 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow 2<x<3 \text{ ឬ } x>7 \qquad (I)$$

$$\log_{\log_2(0.5x)}\left(x^2-10x+21\right)>0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{\log_2(0.5x)}\left(x^2-10x+21\right)>\log_{\log_2(0.5x)}1$$

គេបាន

$$\begin{cases} \log_2(0.5x)>1 \\ x^2-10x+21>1 \end{cases} (*) \qquad \text{ឬ} \qquad \begin{cases} 0<\log_2(0.5x)<1 \\ x^2-10x+21<1 \end{cases} (**)$$

- ចំពោះ $(*)$ យើងបាន $\begin{cases} \log_2(0.5x)>\log_2 2 & (1) \\ x^2-10x+20>0 & (2) \end{cases}$

តាម (1) : $\log_2(0.5x)>\log_2 2 \quad \Rightarrow x>4$

តាម (2) : $x^2-10x+20>0 \quad \Rightarrow x<5-\sqrt{5}$ ឬ $x>5+\sqrt{5}$

យកចម្លើយ $(1)\cap(2)\cap(I)$ គេបាន $x>5+\sqrt{5}$

-ចំពោះ (**) យើងបាន $\begin{cases} 0<\log_2(0.5x)<1 & (i) \\ x^2-10x+20<0 & (ii) \end{cases}$

តាម (i) : $0<\log_2(0.5x)<1 \;\Leftrightarrow\; 1<0.5x<2 \;\Rightarrow\; 2<x<4$

តាម (ii): $x^2-10x+20<0 \quad\Rightarrow 5-\sqrt{5}<x<5+\sqrt{5}$

យកចម្លើយ $(i)\cap(ii)\cap(I)$ គេបាន $5-\sqrt{5}<x<3$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $5-\sqrt{5}<x<3$ ឬ $x>5+\sqrt{5}$ ។

ឆ. $\log^4 x-13\log^2 x+36>0$

- វិសមីការមានន័យកាលណា : $x>0$

តាង $y=\log^2 x$, $y>0$ គេបាន:

$y^2-13y+36>0$

បើ $y^2-13y+36=0$ នោះ $y=4$, $y=9$

$y^2-13y+36>0$ នោះ $y<4$ ឬ $y>9$

+ចំពោះ $y<4$ ឬ $\log^2 x<4 \;\Leftrightarrow\; -2<\log x<2$

នាំឱ្យ $10^{-2}<x<10^2$

+ចំពោះ $y>9$ ឬ $\log^2 x>9 \;\Leftrightarrow\; -3<\log x<3$

នាំឱ្យ $x<10^{-3}$ ឬ $x>10^3$

តែតាមលក្ខខណ្ឌ $x>0$ នោះគេបាន $0<x<10^{-3}$ ឬ $x>10^3$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ : $0<x<10^{-3}$ ឬ $10^{-2}<x<10^2$ ឬ $x>10^3$ ។

ជ. $\log_2 x^2+\log_{\sqrt{2}}(x-1)<\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}} 2$

- វិសមីការមានន័យកាលណា : $x-1>0$ ឬ $x>1$ $(*)$

គេបាន

$\log_2 x^2+\log_{2^{\frac{1}{2}}}(x-1)<\log_{2^{\frac{1}{2}}}\log_{2^{\frac{1}{2}}} 2$

$\log_2 x^2+2\log_2(x+1)<2\log_2(2\log_2 2)$

$\log_2 x^2+\log_2(x+1)^2<2$

$\log_2 x^2(x+1)^2<2$

$x^2(x+1)^2<4$

$\left[x(x+1)-2\right]\left[x(x+1+2)\right]<0$

$\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+x+2\right)<0$

+ចំពោះ $x^2+x-2=0 \;\Rightarrow x=1, x=-2$

+ចំពោះ $x^2+x+2=0$; សមីការគ្មានឫស នាំឱ្យ $x^2+x+2>0 \;\; \forall x\in\mathbb{R}$

នាំឱ្យ $\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+x+2\right)<0$ កាលណា $-2<x<1$

តាម$(*)$ យើងបាន $1<x<2$

ដូចនេះ វិសមីការគ្មានសំណុំចម្លើយ ។

ឈ. $\dfrac{x^2-4}{\log_{0.5}\left(x^2-1\right)}<0$

-វិសមីការមានលក្ខខណ្ឌ :$\begin{cases} x^2-1>0 \\ \log_{0.5}\left(x^2-1\right)\neq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x<-1$ ឬ $x>1$ និង $x\neq\pm\sqrt{2}$ (i)

គេបាន $\dfrac{x^2-4}{\log_{0.5}\left(x^2-1\right)}<0$ កាលណា :

$\begin{cases} x^2-4>0 \\ \log_{0.5}\left(x^2-1\right)<0 \end{cases}$ $(*)$ ឬ $\begin{cases} x^2-4<0 \\ \log_{0.5}\left(x^2-1\right)>0 \end{cases}$ $(**)$

-ចំពោះ$(*)$ យើងបាន $\begin{cases} x^2-4>0 & (1) \\ \log_{0.5}\left(x^2-1\right)<\log_{0.5}1 & (2) \end{cases}$

តាម(1):បើ $x^2-4=0$ $\Rightarrow x=-2$, $x=2$ នោះ $x^2-4>0$ នាំឱ្យ $x<-2$ ឬ $x>2$

តាម(2): $x^2-1>1$ ឬ $x^2>2$ នាំឱ្យ $x<-\sqrt{2}$ ឬ $x>\sqrt{2}$

យក $(1)\cap(2)$ គេបាន $x<-2$ ឬ $x>2$

-ចំពោះ $(**)$ យើងបាន $\begin{cases} x^2-4<0 & (3) \\ \log_{0.5}\left(x^2-1\right)<\log_{0.5}1 & (4) \end{cases}$

តាម(3) : $x^2-4<0\Rightarrow -2<x<2$

តាម(4) : $x^2-1<1$ ឬ $x^2-2<0$ $\Rightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

យក $(3)\cap(4)\cap(i)$ គេបាន $-\sqrt{2}<x<-1$ ឬ $1<x<\sqrt{2}$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ : $x<-2$ ឬ $-\sqrt{2}<x<-1$ ឬ $1<x<\sqrt{2}$ ។

ញ. $\dfrac{\log_{0.3}x-1}{\log_{0.3}x+2}\leq\dfrac{\log_{0.3}x-3}{\log_{0.3}x-4}$

- វិសមីការមានន័យកាលណា : $x>0$

- តាង $y=\log_{0.3}x$ ដែល $y\neq -2$, $y\neq 4$

គេបាន: $\dfrac{y-1}{y+2}\leq\dfrac{y-3}{y-4}$

$$\frac{y-1}{y+2}-\frac{y-3}{y-4}\leq 0$$

$$\frac{(y-1)(y-4)-(y-3)(y+2)}{(y+2)(y-4)}\leq 0$$

$$\frac{-4y+10}{(y+2)(y-4)}\leq 0$$

- $-4y+10=0\Rightarrow y=\dfrac{5}{2}$
- $(y+2)(y-4)=0\Rightarrow y=-2$, $y=4$

y	$-\infty$		-2		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$-4y+10$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(y+2)(y-4)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-4y+10}{(y+2)(y-4)} \le 0$		$+$		$-$	0	$+$		$-$	

តាមតារាងយើងបាន : $-2 < y \le \frac{5}{2}$ ឬ $y > 4$

+ចំពោះ $-2 < y \le \frac{5}{2}$ យើងបាន :

$$-2 < \log_{0.3} x \le \frac{5}{2}$$

$$(0.3)^{\frac{5}{2}} \le x < (0.3)^{-2}$$

$$\sqrt{(0.3)^5} \le x < \frac{1}{(0.3)^2}$$

+ចំពោះ $y > 4$ យើងបាន : $\log_{0.3} x > 4 \Rightarrow x < (0.3)^4$

តែលក្ខខណ្ឌ $x > 0$ នាំឱ្យ $0 < x < (0.3)^4$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $0 < x < (0.3)^4$ ឬ $\sqrt{(0.3)^5} \le x < \frac{1}{(0.3)^2}$ ។

ដ. $\log_{tg\frac{\pi}{8}}(2x+1) \ge \log_{tg\frac{\pi}{8}}(x^2-1)$

- វិសមីការមានន័យកាលណា : $\begin{cases} 2x+1>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x<-1 \vee x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1 \quad (*)$

- $tg\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}-1 < 1$

គេបាន

$$\log_{tg\frac{\pi}{8}}(2x+1) \ge \log_{tg\frac{\pi}{8}}(x^2-1)$$

$$2x+1 \le x^2-1$$

$$x^2-2x-2 \ge 0$$

បើ $x^2-2x-2=0 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{3}$

នោះ $x^2-2x-2 \ge 0 \Rightarrow x \le 1-\sqrt{3}$ ឬ $x \ge 1+\sqrt{3}$

តាម $(*)$ យើងបាន $x \ge 1+\sqrt{3}$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $x \ge 1+\sqrt{3}$ ។

ឋ. $\log_{0.5\sin\frac{\pi}{4}}\left(4x^2-16x+15\right)\geq -2$

- វិសមីការមានលក្ខខណ្ឌ : $4x^2-16x+15>0$ នាំឱ្យ $x<\dfrac{3}{2}$ ឬ $x>\dfrac{5}{2}$ (1)

ដឹងថា : $0.5\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}<1$

គេបាន

$$\log_{0.5\sin\frac{\pi}{4}}\left(4x^2-16x+15\right)\geq \log_{0.5\sin\frac{\pi}{4}}\left(0.5\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-2}$$

$$\log_{\frac{\sqrt{2}}{4}}\left(4x^2-16x+15\right)\geq \log_{\frac{\sqrt{2}}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-2}$$

$$4x^2-16x+15\leq\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^{2}$$

$$4x^2-16x+7\leq 0$$

នាំឱ្យ $\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{7}{2}$ (2)

យក $(1)\cap(2)$ យើងបាន $\dfrac{1}{2}\leq x<\dfrac{3}{2}$ ឬ $\dfrac{5}{2}<x\leq\dfrac{7}{2}$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\dfrac{1}{2}\leq x<\dfrac{3}{2}$ ឬ $\dfrac{5}{2}<x\leq\dfrac{7}{2}$ ។

ឌ. $\left|\log_{\frac{1}{3}}\left(x-2\right)\right|>1$

- វិសមីការមានលក្ខខណ្ឌ : $x-2>0$ នាំឱ្យ $x>2$ $(*)$

គេបាន : $\log_{\frac{1}{3}}\left(x-2\right)<-1$ (1) ឬ $\log_{\frac{1}{3}}\left(x-2\right)>1$ (2)

+ ចំពោះ (1) : $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)<\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

$$x-2>3 \quad\Rightarrow\quad x>5$$

+ចំពោះ (2) : $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)<\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$$x-2<\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad x<\frac{7}{3}$$

យក $(*)\cap(2)$ នាំឱ្យយើងបាន $2<x<\dfrac{7}{3}$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $2<x<\dfrac{7}{3}$ ឬ $x>5$ ។

ឍ. $\log\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right|<0$

- វិសមីការមានន័យកាលណា : $\begin{cases}x-1\neq 0\\ 2x+1\neq 0\end{cases}\Rightarrow x\neq 1\,,\ x\neq -\dfrac{1}{2}$

គេបាន

$$\log\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<\log 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<1$$

នាំឱ្យ $-1<\frac{x-1}{2x+1}<1$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2x+1}>-1\\ \frac{x-1}{2x+1}<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x-1}{2x+1}+1>0\\ \frac{x-1}{2x+1}-1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3x}{2x+1}>0\\ \frac{x+2}{2x+1}>0\end{cases}$$

-តារាងសញ្ញា :

x	$-\infty$ $-\frac{1}{2}$ 0 $+\infty$		
$\frac{3x}{2x+1}>0$	$+$	$-$ 0	$+$

x	$-\infty$ -2 $-\frac{1}{2}$ $+\infty$		
$\frac{x+2}{2x+1}>0$	$+$ 0	$-$	$+$

នាំឱ្យ $x<-\frac{1}{2}$ ឬ $x>0$ (1) $\qquad x<-2$ ឬ $x>-\frac{1}{2}$ (2)

យក$(1)\cap(2)$ យើងបាន : $x<-2$ ឬ $x>0$ តែ $x\neq 1$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $x<-2$ ឬ $x>0$, $x\neq 1$ ។

ណ. $\log_2\left(2^x-1\right).\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x+1}-2\right)>-2$

- វិសមីការមានលក្ខខណ្ឌ : $\begin{cases}2^x-1>0\\ 2^{x+1}-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^x>2^0\\ 2^{x+1}>2\end{cases} \Rightarrow x>0$

គេបាន

$$\log_2\left(2^x-1\right).\log_{\frac{1}{2}}\left[2\left(2^x-1\right)\right]>-2$$

$$\log_2\left(2^x-1\right)\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(2^x-1\right)+\log_{\frac{1}{2}}2\right]>-2$$

$$-\log_2\left(2^x-1\right)\left[-\log_2\left(2^x-1\right)-\log_2 2\right]>-2$$

$$-\log_2{}^2\left(2^x-1\right)-\log_2\left(2^x-1\right)+2<0$$

$$\log_2{}^2\left(2^x-1\right)+\log_2\left(2^x-1\right)-2<0$$

តាង $u=\log_2\left(2^x-1\right)$ យើងបាន :

$u^2+2u-2<0$

បើ $u^2+2u-2=0 \Rightarrow u=-2\,,\,u=1$

នោះ $u^2+2u-2<0 \Rightarrow -2<u<1$ ឬ $-2<\log_2\left(2^x-1\right)<1$

$2^{-2}<2^x-1<2$

$\frac{5}{4}<2^x<3 \Rightarrow \log_2\frac{5}{2}<x<\log_2 3$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\log_2 \frac{5}{2} < x < \log_2 3$ ។

គ. $\log_x \left[\log_9 \left(3^x - 9\right)\right] < 1$

- វិសមីការមានន័យកាលណា : $\begin{cases} x > 0 \ , \ x \neq 1 \\ \log_9\left(3^x - 9\right) > 0 \\ 3^x - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \ , \ x \neq 1 \\ x > \log_3 10 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > \log_3 10 \ (*)$

គេបាន $\log_x \left[\log_9 \left(3^x - 9\right)\right] < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_x \left[\log_9 \left(3^x - 9\right)\right] < \log_x x$

+ ករណី $x > 1$ យើងបាន :

$\log_9\left(3^x - 9\right) < x$

$3^x - 9 < 9^x$

$9^x - 3^x + 9 > 0$

+ តាង $u = 3^x$ យើងបាន

$u^2 - u + 9 > 0$

$\Delta = -35 < 0$

$\Rightarrow \quad u^2 - u + 9 > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad 9^x - 3^x + 9 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

តាម $(*)$ នាំឱ្យយើងបាន $x > \log_3 10$

+ ចំពោះករណី $0 < x < 1$ វិសមីការគ្មានចម្លើយ (ព្រោះលក្ខខណ្ឌ $x > \log_3 10$)

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $x > \log_3 10$ ។

9. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម

ក. $\begin{cases} \log_3\left(\log_2 x\right) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{2}} y\right) = 1 & (1) \\ xy^2 = 4 & (2) \end{cases}$

- ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា :

$$\begin{cases} \log_2 x > 0 \\ x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} y > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \\ y < 1 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ o < y < 1 \end{cases}$$

តាមសមីការ (1):

$$\log_3\left(\log_2 x\right) - \log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} y\right) = \log_3 3$$

$$\log_3\left(\log_2 x\right) = \log_3 3 + \log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} y\right)$$

$$\log_3\left(\log_2 x\right) = \log_3\left(3\log_{\frac{1}{2}} y\right)$$

$$\log_2 x = 3\log_{\frac{1}{2}} y$$
$$\log_2 x = \log_2 y^{-3}$$
$$x = y^{-3} = \frac{1}{y^3} \qquad (*)$$

ជំនួស $x = \frac{1}{y^3}$ ក្នុង (2) យើងបាន

$$\frac{1}{y^3} \cdot y^2 = 4$$
$$\frac{1}{y} = 4 \;\Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

ជំនួស $y = \frac{1}{4}$ ក្នុង (*) យើងបាន : $x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 64$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ $\left(x = 64, y = \frac{1}{4}\right)$ ។

ខ. $\begin{cases} y - \log_3 x = 1 & (1) \\ x^y = 3^{12} & (2) \end{cases}$

- ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា : $x > 0$

តាមសមីការ (1) : $y - 1 = \log_3 x \quad \Rightarrow \quad x = 3^{y-1}$

ជំនួស $x = 3^{y-1}$ ក្នុង (2) យើងបាន

$$3^{y(y-1)} = 3^{12}$$
$$y(y-1) = 12$$
$$y^2 - y - 12 = 0$$
$$\Rightarrow \quad y_1 = -3 \,,\; y_2 = 4$$

- ចំពោះ $y = -3$ គេបាន $x = 3^{-3-1} = \frac{1}{81}$
- ចំពោះ $y = 4$ គេបាន $x = 3^3 = 27$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ $(x = 27 \,,\; y = 4)$ ឬ $\left(x = \frac{1}{81} \,,\; y = -3\right)$ ។

គ. $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15 \\ 3^y.\log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1} \end{cases}$

- ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា : $x > 0$

តាង $u = 3^y$, $u > 0$ និង $v = \log_2 x$ យើងបាន :

$$\begin{cases} 2v - u = 15 & (1) \\ u.v = 2v + 3u & (2) \end{cases}$$

តាមសមីការ (1) គេបាន $u = 2v - 15$ រួចជំនួស u ក្នុង (2) :

$$v(2v - 15) = 2v + 3(2v - 15)$$
$$2v^2 - 15v = 2v + 6v - 45$$

$$2v^2-23v+45=0$$

$$\Rightarrow \quad v_1=\frac{5}{2}\ ,\ v_2=9$$

+ បើ $v=\frac{5}{2}$ នោះ $u=2\cdot\frac{5}{2}-15=-10$ (មិនយក)

+ បើ $v=9$ នោះ $u=18-15=3$

យើងបាន

- ចំពោះ $u=3$ ឬ $3^y=3 \Rightarrow y=1$
- ចំពោះ $v=9$ ឬ $\log_2 x=9 \Rightarrow x=2^9$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ $\left(x=2^9\ ,\ y=1\right)$ ។

ឃ. $\begin{cases} x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4 & (1) \\ \log_4 x-\log_4 y=1 & (2) \end{cases}$

- ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា : $x>0\ ,\ y>0$

សមីការ(1)ដោយប្រើរូបមន្ត $A^{\log_a B}=B^{\log_a A}$ គេបាន $2y^{\log_8 x}=4$

យើងបាន

$$\begin{cases} 2y^{\log_8 x}=4 \\ \log_4 x=\log_4 4+\log_4 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{\log_8 x}=2 \\ \log_4 x=\log_4 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{\log_8 x}=2 \\ x=4y \end{cases}$$

តាមសមីការ $y^{\log_8 x}=2 \quad \Rightarrow \quad \log_8 x=\log_y 2 \quad (*)$

ជំនួស $x=4y$ ក្នុង (*) គេបាន

$$\log_8(4y)=\log_y 2$$

$$\log_8 4+\log_8 y=\log_y 2$$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\log_2 y=\frac{1}{\log_2 y}$$

តាង $t=\log_2 y \quad , \quad t\neq 0$ គេបាន

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t=\frac{1}{t}$$

$$t^2+2t-3=0$$

$$\Rightarrow \quad t=1\ ,\ t=-3$$

- ចំពោះ $t=1$, $\log_2 y=1 \Rightarrow y=2$ ហើយ $x=4\times 2=8$
- ចំពោះ $t=-3$, $\log_2 y=-3 \Rightarrow y=2^{-3}=\frac{1}{8}$ ហើយ $x=4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ $(x=8\ ,\ y=2)$ ឬ $\left(x=\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{1}{8}\right)$ ។

ង. $\begin{cases} 3^{-x}.2^{y}=1152 & (1) \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y)=2 & (2) \end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា :

$x+y>0$ ឬ $y>-x$

-តាមសមីការ (2) :

$$\log_{\sqrt{5}}(x+y)=2$$
$$2\log_5(x+y)=2$$
$$\log_5(x+y)=1$$
$$x+y=5$$
$$\Rightarrow\ y=5-x$$

ជំនួស $y=5-x$ ក្នុង (1) :

$$3^{-x}\times 2^{5-x}=1152$$
$$3^{-x}\times 2^{5}\times 2^{-x}=1152$$
$$(3\times 2)^{-x}=\frac{1152}{32}$$
$$6^{-x}=36$$
$$6^{-x}=6^{2}$$
$$\Rightarrow x=-2$$

នាំឱ្យ $y=5-(-2)=7$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ $(x=-2\ ,\ y=7)$ ។

ច. $\begin{cases} 10^{1+\log(x+y)}=50 \\ \log(x-y)+\log(x+y)=2-\log 5 \end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការមានន័យកាលណា :

$$\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>-x \\ y<x \end{cases} \Rightarrow -x<y<x$$

យើងបាន

$$\begin{cases} 10\times 10^{\log(x+y)}=50 \\ \log\left[(x-y)(x+y)\right]=\log 10^{2}-\log 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 10^{\log(x+y)}=5 \\ \log\left(x^{2}-y^{2}\right)=\log 20 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x+y=5 \\ (x-y)(x+y)=20 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x+y=5 \\ 5(x-y)=20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{9}{2}\ ,\ y=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ $\left(x=\frac{9}{2}\ ,\ y=\frac{1}{2}\right)$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់អនុវត្តន៍

១.ដោះស្រាយសមីការ ៖

1) $\log_4\left[2\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\log_3 x\right)\right)\right]=\dfrac{1}{2}$ (ចម្លើយ $x=3$)

2) $\log^2 x-\log x^6=\log^2 3-9$ (ចម្លើយ $x=\dfrac{1000}{3}$; $x=3000$)

3) $\log_{1-x} 3-\log_{1-x} 2-0.5=0$ (ចម្លើយ $x=-\dfrac{5}{4}$)

4) $\dfrac{\log_2\left(x^3+3x^2+2x-1\right)}{\log_2\left(x^3+2x^2-3x+5\right)}=\log_{2x} x+\log_{2x} 2$ (ចម្លើយ $x=1$)

5) $3\log_2{}^2\left(x+1\right)+\dfrac{1}{2}\log_2\left(x+1\right)^2=4$ (ចម្លើយ $x=1$)

6) $2\log_4\left(4-x\right)=4-\log_2\left(-2-x\right)$ (ចម្លើយ $x=-4$)

7) $\log_x 2+\log_2 x=2.5$ (ចម្លើយ $x=\sqrt{2}$; $x=4$)

8) $\log_2\left(9-2^x\right)=10^{\log(3-x)}$ (ចម្លើយ $x=0$)

9) $\log_2\left(4^x+4\right)=x+\log_2\left(2^{x+1}-3\right)$ (ចម្លើយ $x=2$)

10) $\log_5\left(3^x+10\right)+\left(7.1\right)^0=\log_5\left(9^x+56\right)$ (ចម្លើយ $x=1$; $x=\log_3 2$) ។

២. ដោះស្រាយវិសមីការ ៖

1) $\log_{1/2}\left(x^2-5x+6\right)>-1$ (ចម្លើយ $1<x<2$ ឬ $3<x<4$)

2) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x<6$ (ចម្លើយ $0<x<27$)

3) $\log_7\dfrac{2x-6}{2x-1}>0$ (ចម្លើយ $x<\dfrac{1}{2}$)

4) $\log_{0.5}\left(x+5\right)^2>\log_{\frac{1}{2}}\left(3x-1\right)^2$ (ចម្លើយ $x<-1, x\neq-5$ ឬ $x>3$)

5) $\log_{4x+1}\left(x^2-4\right)>1$ (ចម្លើយ $x>5$)

6) $\log_x\dfrac{4x+1}{6\left(x-1\right)}\le 0$ (ចម្លើយ $x\ge\dfrac{7}{2}$)

7) $\log_3{}^2\left(2-x\right)\le\dfrac{1}{4}$ (ចម្លើយ $2-\sqrt{3}\le x\le\dfrac{6-\sqrt{3}}{3}$)

8) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+5x+8\right)}\le\dfrac{5}{2}$ (ចម្លើយ $-4\le x\le-1$)

9) $\log_4\left(3^x-1\right).\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3^x-1}{16}\le\dfrac{3}{4}$ (ចម្លើយ $0<x\le 1$ ឬ $x\ge 2$)

10) $3^{(\log_3 x)^2}+x^{\log_3 x}\le 6$ (ចម្លើយ $\dfrac{1}{3}\le x\le 3$) ។

៣. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ និងប្រព័ន្ធវិសមីការខាងក្រោម ៖

1) $\begin{cases}\log_2\left(x^2+y^2\right)=5\\ 2\log_4 x+\log_2 y=4\end{cases}$ (ចម្លើយ $x=4$; $y=4$)

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{15} \\ \log_3 x+\log_3 y=1+\log_3 5 \end{cases}$ (ចម្លើយ $x=3$, $y=5$)

3) $\begin{cases} \log_4 x-\log_2 y=0 \\ x^2-2y^2=8 \end{cases}$ (ចម្លើយ $x=4$, $y=2$)

4) $\begin{cases} \log_3(2-x)>1 \\ 2x+3\ge 0 \end{cases}$ (ចម្លើយ $-\dfrac{3}{2}\le x<-1$)

5) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(-x+1)\le -1 \\ x+3>0 \end{cases}$ (ចម្លើយ $-3<x\le -1$)

6) $\begin{cases} x^2+x-2>0 \\ \log_5(3x-1)<1 \end{cases}$ (ចម្លើយ $1<x<2$) ។

៤. ចំនួនប្រជាជនពិភពលោកបានកើនក្នុងអត្រា2%ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ ឧបមាថាបើកំណើនប្រជាជនជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនោះចំនួនប្រជាជនក្នុងរយៈពេល t ឆ្នាំគិតពីពេលបច្ចុប្បន្នទៅនឹងតាងដោយអនុគមន៍ $P(t)=P_0e^{0.02t}$ ដែល P_0 ជាចំនួនប្រជាជនបច្ចុប្បន្ន ។ ឧបមាម៉្ងៃដែលនៃកំណើនប្រជាជននេះពិតតើត្រូវចំណាយរយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំទើបកំណើនប្រជាជនពិភពលោកកើនឡើងទ្វេដង ?

៥. សម្ពាធខ្យល់ $f(s)$ ឋិតនៅត្រង់កម្ពស់ s ម៉ែត្រពីលើកម្រិតទឹកសមុទ្រ ដោយ $f(s)=e^{-0.000125s}$ ។

ក) សម្ពាធនៃបរិយាកាសនៅខាងក្រៅយន្តហោះមួយគឺ0.25 atmospheres ។ តើយន្តហោះនោះឋិតនៅកម្ពស់ប៉ុន្មាន ?

ខ) អ្នកឡើងភ្នំម្នាក់បានសម្រេចចិត្តថានាងនឹងពាក់ម៉ាសអុកស៊ីសែននៅពេលដែលនាងមកដល់រយៈកម្ពស់ 7000ម៉ែត្រ ។ តើសម្ពាធនៃបរិយាកាសត្រូវជាប៉ុន្មាននៅត្រង់រយៈកម្ពស់នេះ ?

ឯកសារយោង

- សៀវភៅសិក្សាគោលថ្នាក់ទី១១ (កម្រិតមូលដ្ឋាន និងកម្រិតខ្ពស់)
- www.rodwell.in
- Math121 Calculus II D Joyce, spring 2013
- សៀវភៅអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងអនុគមន៍លោការីតរបស់សាស្ត្រាចារ្យ ង៉ុយ ហេង
- សៀវភៅវៀតណាម: 2287 Bài Toán.
- សៀវភៅ mathématiques Terminales F, Bernard BLANC, Denise Blanc, Pal SEBAM
- សៀវភៅ Applied Calculus