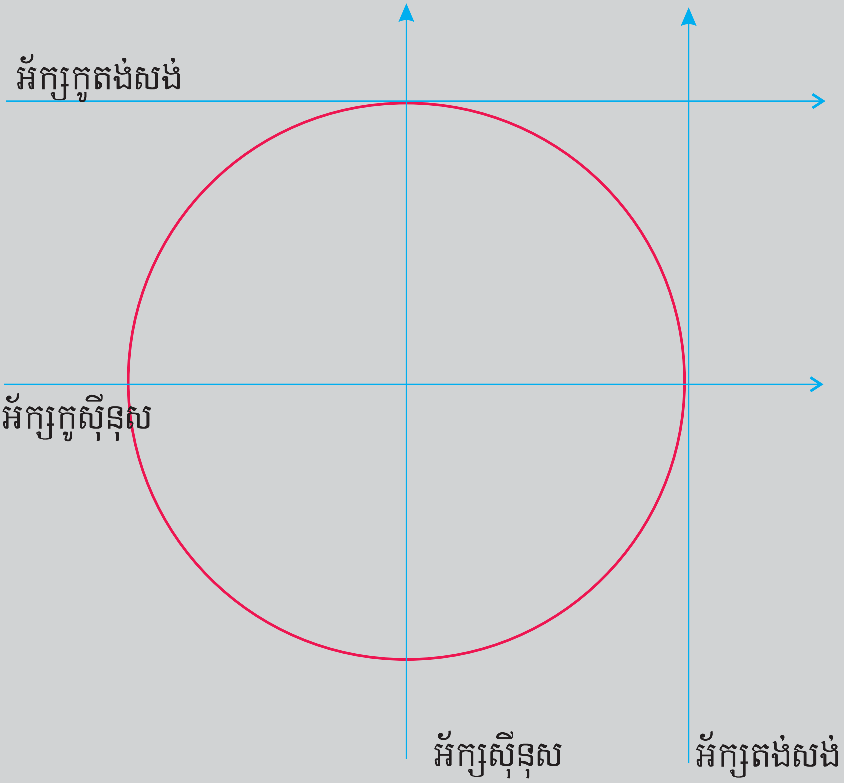
លំហាត់ត្រីកោណមាត្រ

Training For Mathematical Olympiad

ភាគ១



រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

មាតិកា

ជំពូក ១

មេរៀន និង ទ្រឹស្តី……………………………………………………………………….. 1

ជំពូក ២

ប្រធានលំហាត់ ………………………………………………………………………. 12

ជំពូក ៣

ដំណោះស្រាយ……………………………………………………………………….. 33

ជំពូក 1

មេរៀន និង គ្រឹស្តី

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

1. សមភាពត្រីកោណមាត្រ

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} = \sec^2 a$$

$$1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a} = \csc^2 a$$

2. រូបមន្តផលបូក និង ផលដកមុំ

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

$$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cot b \mp 1}{\cot a \pm \cot b}$$

3. រូបមន្តមុំឌុប

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a = \frac{2\tan a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$$

4. រូបមន្តមុំទ្រីប (មុំ $3a$)

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

5. រូបមន្តកន្លះមុំ

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2}$$

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}$$

$$\tan \frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1+\cos a}$$

$$\cot \frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1-\cos a}$$

6. បំលែងពីផលបូកទៅផលគុណ

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

7. បំលែងពីផលដកទៅផលគុណ

$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

8. បំលែងពីផលគុណទៅផលបូក

$$2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

$$2\cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$

$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

9. រូបមន្តពហុធា

$$\sin na = C_n^1 \cos^{n-1} a \sin a - C_n^3 \cos^{n-3} a \sin^3 a + C_n^5 \cos^{n-5} a \sin^5 a - \dots$$

$$\cos na = C_n^0 \cos^n a - C_n^2 \cos^{n-2} a \sin^2 a + C_n^4 \cos^{n-4} a \sin^4 a - \dots$$

ទ្រឹស្តីបទ និង រូបមន្ត(ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់)

1. **ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស**

បើ R ជាប្រវែងកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC គេបាន

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$ ។

2. **ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស**

បើ ABC មានប្រវែងជ្រុង $AB=c$, $BC=a$, $AB=b$ គេបាន

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$ ។

3. **ទ្រឹស្តីបទ** Stewart

ចំពោះ ABC ជាត្រីកោណមួយ និង D នៅលើជ្រុង BC គេបាន

$d^2a+man=c^2n+b^2m$ ក្នុងនោះ $m=BD$, $n=DC$ និង

$d=AD$ ។

រូបមន្តនេះ អាចបង្ហាញប្រវែងនៃកម្ពស់ និង កន្លះបន្ទាត់មុំនៃត្រីកោណ ABC ជាអនុគមន៍នៃជ្រុងរបស់វា ។

4. **ទ្រឹស្តីបទ** Ptolemy

បើ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ គេបានសមភាព

$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$ ។

5. **ទ្រឹស្តីបទ** Céva

យក D , E , F ជាបីចំណុចនៅលើជ្រុង BC , CA និង AB រៀងគ្នានៃ

ត្រីកោណ ABC គេបាន លក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោមសមមូលគ្នា

(i). AD, BE, CF ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច

(ii). $\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle DAB}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle FCA}=1$

(iii). $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$ ។

6. **ទ្រឹស្តីបទ** Menelaus

យក F, G, H ជាចំណុចនៅលើជ្រុង BC, CA និង AB នៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ គេបាន F, G, H ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ លុះត្រាតែ $\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}=1$ ។

7. **រូបមន្ត** Euler

យក O, I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង ក្នុងរៀងគ្នានៃត្រីកោណ ABC ។ គេបាន $OI^2=R^2-2rR$ ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង ។

8. **រូបមន្ត** Brahmagupta

បើ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ និង មាន $AB=a$, $BC=b$, $CA=c$, $DA=d$ និង $s=\frac{a+b+c+d}{2}$ (កន្លះបរិមាត្រ)

គេបាន $[ABCD]=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ ។

9. **រូបមន្ត ហេរុង** (Heron)

បើ ABC ជាត្រីកោណដែលមានប្រវែងជ្រុង a, b, c គេបាន

$[ABC]=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ដែល $s=\frac{a+b+c}{2}$

ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។

10. រូបមន្តមេដ្យាន

បើ AM ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ ABC គេបាន

$$AM^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$$ ។

វិសមភាព

1. វិសមភាពនៃមធ្យម

បើ a_1, a_2, … , a_n ជា n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន គេកំណត់យក

$AM = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ ហៅថា មធ្យមព្វន្ត (Arithmetic Mean)

$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ ហៅថា មធ្យមធរណីមាត្រ (Geometric Mean)

$QM = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$ ហៅថា មធ្យមរឺសការេ (Quadratic Mean)

និង $HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$ ហៅថា មធ្យមអាម៉ូនិច (Harmonic Mean) ។

យើងបាន វិសមភាព $QM \geq AM \geq GM \geq HM$

សមភាពកើតឡើងពេល $a_1 = a_2 = ... = a_n$ ។

សម្គាល់

វិសមភាព $AM \geq GM$ មានអ្នកខ្លះហៅថា វិសមភាព Cauchy ។

2. វិសមភាព Cauchy-Schwarz

ចំពោះ $2n$ ចំនួនពិត a_1, a_2, … , a_n និង b_1, b_2, … , b_n គេបាន

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

សមភាពពេល $\vec{u} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា។

3. មធ្យមស្វ័យគុណ

យក a_1, a_2, … , a_n ជា n ចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ ។

ចំពោះ x_1, x_2, … , x_n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន គេកំណត់យក

$M_{-\infty} = \min\{x_1, x_2, ..., x_k\}$

$M_{\infty} = \max\{x_1, x_2, ..., x_k\}$

$M_0 = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$

$M_t = \left(a_1 x_1^t + a_2 x_2^t + \dots + a_k x_k^t\right)^{\frac{1}{t}}$ ចំពោះ t ជាចំនួនពិតមិនសូន្យ ។

គេបាន $M_{-\infty} \le M_s \le M_t \le M_\infty$ ចំពោះ $s \le t$ ។

4. វិសមភាពតម្រៀប (Rearrangement)

បើ $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ និង $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$ ជាចំនួនពិត និង c_1 , c_2 , … , c_n ជាចម្លាស់នៃ $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$ គេបាន វិសមភាព

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \le a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n$$
$$\le a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

សមភាពពេល $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ រឺ $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ ។

5. វិសមភាព Chebyshev

គេមាន a_1 , a_2 ,…, a_n និង b_1 , b_2 , … , b_n ជាពីរស្វ៊ីតចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

បើ $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ និង $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$ គេបាន

$$\frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \dots + x_n\right)\left(y_1 + y_2 + \dots + y_n\right) \le x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$ ។

បើ $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ និង $b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n$ គេបាន

$$\frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \dots + x_n\right)\left(y_1 + y_2 + \dots + y_n\right) \ge x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$ ។

6. វិសមភាព Schur

ចំពោះគ្រប់ x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន យើងបាន វិសមភាព

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \ge 0$$

សមភាពពេល $x = y = z$ រឺ ពីរក្នុងចំណោម x , y , z ស្មើគ្នា ហើយចំនួនមួយទៀតស្មើនឹង 0 ។

7. វិសមភាព Jensen

បើ f ផតលើ $[a,b]$ និង t_1 , t_2 , … , $t_n \in [0,1]$ ដែល $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ គេបាន

$$f\left(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n\right) \le t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n)$$

ចំពោះគ្រប់ x_1 , x_2 , … , $x_n \in [a,b]$ ។

- បើ $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = \frac{1}{n}$ យើងបាន

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

សម្គាល់

បើ f ប៉ោងលើ $[a,b]$ នោះវិសមភាពប្តូរទិសដៅ ។

ពហុធា

1. ផលបូកស៊ីក្លីក (Cyclic Sum)

បើ f គឺជាអនុគមន៍ n អថេរ គេកំណត់ផលបូកស៊ីគ្លីកនៃអថេរ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ដោយ $\sum_{cyc} f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + f(x_2, x_3, ..., x_n, x_1)$

$+ f(x_n, x_1, ..., x_{n-1})$ ។

2. Gauss's Lemma

យក $p(x) = a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ ជាពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។ រឹសសនិទានទាំងអស់(បើមាន) នៃពហុធា $p(x)$អាចសរសេរជារាង $\frac{m}{n}$ ដែល $m|a_0$ និង $n|a_n$ ។

3. រូបមន្តអាំងទែប៉ូឡាស្យុង Lagrange

យក x_0, x_1, … , x_n ជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា និង y_0, y_1, … , y_n ជាចំនួនពិត។ គេបាន មានតែមួយគត់ពហុធា $P(x)$ ដែលមានដឺក្រេធំបំផុត n ផ្ទៀងផ្ទាត់ $P(x_i) = y_i$ ចំពោះ $i = \overline{0, n}$ កំណត់ដោយ

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i (x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$ ។

4. ទ្រឹស្តីបទ Viéte

បើ x_1, x_2, … , x_n ជារឹសនៃពហុធា $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ ដែល $a_n \neq 0$ និង a_0, a_1, … , $a_n \in \mathbb{C}$ យើងបាន

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 + ... + x_i x_j + ... + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

…………………………………………………………

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

5. រឺសកុំផ្លិច

បើ $z = a + bi$ ចំពោះ a, b ជាចំនួនពិត ជារឺសមួយនៃពហុធា $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ដែល $a_n \neq 0$ និង a_0, a_1, … , $a_n \in \mathbb{C}$ នោះ $\bar{z} = a - bi$ ក៏ជារឺសនៃពហុធានេះដែរ ។

6. ពហុធា Minimal

គេហៅពហុធា $p(x)$ ថាជា ពហុធា មិនអាចសម្រួលបាន (Irreducible) បើ $p(x)$ មិនអាចសរសេរជាផលគុណនៃពីរពហុធា(មិនថេរ) ដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។

យក α ជារឺសមួយនៃពហុធា $q(x)$ ដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។ ក្នុងចំណោមពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ និង មេគុណនាំមុខស្មើនឹង 1 ដែលមាន α ជារឺសមួយ មានមួយមានដឺក្រេតូចបំផុត ។ ពហុធានេះ ហៅថា ពហុធា Minimal នៃ α ។

ឧបមាថា $p(x)$ ជាពហុធា Minimal នៃ $\alpha \Rightarrow p(x)$ មិនអាចសម្រួលបាន

បើ $q(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់បំពេញលក្ខខណ្ឌ $q(\alpha) = 0$

គេបាន $p(x)$ ចែកដាច់ $q(x)$ គឺ $q(x) = p(x)h(x)$ ដែល $h(x)$ ជាពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។

សម្គាល់

ពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ និង មេគុណនាំមុខស្មើនឹង 1 ហៅថា ពហុធាម៉ូនិច (Monic Polynomials) ។

ជំពូក 2

ប្រជាលំហាត់

លំហាត់ ១

គេឲ្យ $\sec x - \tan x = 2$ ។ គណនា $\sec x + \tan x$ ។

លំហាត់ ២

គេឲ្យ $0° < \theta < 45°$ ។ តម្រៀប $t_1 = (\tan\theta)^{\tan\theta}$, $t_2 = (\tan\theta)^{\cot\theta}$, $t_3 = (\cot\theta)^{\tan\theta}$, $t_4 = (\cot\theta)^{\cot\theta}$ តាមលំដាប់ចុះ ។

លំហាត់ ៣

គណនា

(a) $\sin\dfrac{\pi}{12}$, $\cos\dfrac{\pi}{12}$ និង $\tan\dfrac{\pi}{12}$

(b) $\cos^4\dfrac{\pi}{24} - \sin^4\dfrac{\pi}{24}$

(c) $\cos 36° - \cos 72°$

(d) $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$ ។

លំហាត់ ៤

សម្រួលកន្សោម $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$ ។

លំហាត់ ៥

បង្ហាញថា $1 - \cot 23° = \dfrac{2}{1 - \cot 22°}$ ។

លំហាត់ ៦

កំណត់ $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ បើគេដឹងថា $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ ៧

យក $\Re$ ជាសំណុំនៃគូ (x, y)បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^2 + y^2 \le 100$ និង $\sin(x+y) \ge 0$ ។ គណនាផ្ទៃតំណាង $\Re$ ។

លំហាត់ ៨

ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{b+c}$ ។

លំហាត់ ៩

គេឲ្យ $I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ និង f ជាអនុវត្តន៍កំណត់លើ $[-1,1]$ដោយ $f(\sin 2x) = \sin x + \cos x$ ។ កំណត់ f រួច ទាញរក $f(\tan^2 x)$ ចំពោះ $\forall x \in I$ ។

លំហាត់ ១០

យក $f_k(x) = \frac{1}{k}(\sin^k x + \cos^k x)$ចំពោះ $k = 1, 2, \dots, n$ ។

បង្ហាញថា $f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{12}$, $\forall x \in \mathrm{IR}$ ។

លំហាត់ ១១

(AIME,2004)

រង្វង់មួយមានកាំ 1 ឯកតា ត្រូវបានគេយកទៅដាក់ក្នុងចតុកោណកែង $ABCD$ មួយដែលមានទំហំ 15×36 (គ្មានផ្នែកណានៃរង្វង់ស្ថិតនៅក្រៅចតុកោណ) ។ កំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេដែលរង្វង់មិនកាត់អង្កត់ទ្រូង AC ។

លំហាត់ ១២

(AMC 12,1999)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយបំពេញលក្ខខណ្ឌ $3\sin A + 4\cos B = 6$

និង $4\sin B + 3\cos A = 1$ ។ គណនាមុំ C ។

លំហាត់ ១៣

បង្ហាញថា $\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a \tan 2a \tan a$

ចំពោះ $\forall a \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ ១៤

គេឲ្យ a , b , c , $d \in [0, \pi]$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d)$ និង

$\cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d)$ ។

បង្ហាញថា $2\cos(a - d) = 7\cos(b - c)$ ។

លំហាត់ ១៥

សរសេរ $\sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z - x)$ ជាផលគុណកត្តា ។

លំហាត់ ១៦

បង្ហាញថា $(4\cos^2 9^\circ - 3)(4\cos^2 27^\circ - 3) = \tan 9^\circ$ ។

លំហាត់ ១៧

បង្ហាញថា $\left(1 + \frac{a}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{b}{\cos x}\right) \geq \left(1 + \sqrt{2ab}\right)^2$ ចំពោះ $\forall a, b \geq 0$

និង $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ ១៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sin A + \sin B + \sin C \leq 1$ ។

បង្ហាញថា $\min\{A + B, B + C, C + A\} < 30^\circ$ ។

លំហាត់ ១៩

ចំពោះត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា

(a) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

(b) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$ ។

លំហាត់ ២០

យក ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច ។ បង្ហាញថា

(a) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

(b) $\tan A\tan B\tan C\ge 3\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ ២១

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។

បង្ហាញថា $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ ។

ច្រាសមកវិញ បើ x, y, z ជាចំនួនពិត បំពេញលក្ខខណ្ឌ $xy+yz+zx=1$ បង្ហាញថា មានត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\cot A=x$, $\cot B=y$ និង $\cot C=z$ ។

លំហាត់ ២២

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។

បង្ហាញថា $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$ ។

ច្រាសមកវិញ បើ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ បង្ហាញថា មានត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x=\sin\frac{A}{2}$, $y=\sin\frac{B}{2}$ និង $z=\sin\frac{C}{2}$ ។

លំហាត់ ២៣

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

(a) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

(b) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3}{4}$

(c) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$

(d) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

(e) $\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}\ge 6$

លំហាត់ ២៤

ក្នុងត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា

(a) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

(b) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$

(c) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

(d) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$ ។

ប្រាសមកវិញ បើ x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ បង្ហាញថា មានត្រីកោណមុំស្រួច ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x=\cos A,\ y=\cos B$ និង $z=\cos C$ ។

លំហាត់ ២៥

ក្នុងត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា

(a) $4R=\frac{abc}{[ABC]}$

(b) $2R^2\sin A\sin B\sin C=[ABC]$

(c) $2R\sin A\sin B\sin C=r(\sin A+\sin B+\sin C)$

(d) $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(e) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2}$ ។

លំហាត់ ២៦

តាង s ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា

(a) $s = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(b) $s \le \frac{3\sqrt{3}}{2}R$ ។

លំហាត់ ២៧

ក្នុងត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា

(a) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(b) $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ ២៨

ក្នុងត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា

(a) $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$

(b) $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

(c) $\sin A\sin B\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

(d) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \ge \frac{3}{4}$

(e) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$

(f) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$

(g) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

លំហាត់ ២៩

បង្ហាញថា $\frac{\tan 3x}{\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ ចំពោះ $\forall x \neq \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ ៣០

គេឲ្យ $(1+\tan 1°)(1+\tan 2°)\ldots(1+\tan 45°) = 2^n$ ។ គណនា n ។

លំហាត់ ៣១

ក្នុងតម្រុយអរតូណារមេគេមានចំណុច $A(0,0)$ និង $B(b,2)$ ។ យក $ABCDEF$ ជាឆកោណនិយ័តប៉ោងបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\angle FAB = 120°$, $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$ និង អរដោនេ y នៃកំពូលនីមួយៗរបស់វាខុសពីធាតុនៃសំណុំ $\{0,2,4,6,8,10\}$ ។ ក្រឡាផ្ទៃនៃឆកោណនេះអាចត្រូវបានសរសេរជារាង $m\sqrt{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ n ចែកមិនដាច់នឹងការេនៃចំនួនបឋម ។ គណនា $m+n$ ។

លំហាត់ ៣២

បើសិនជា Casio របស់អ្នកខូចប៊ូតុងសម្រាប់គណនាចម្រាសនៃចំនួនមួយ បញ្ជាក់ថាអ្នកនៅតែអាចគណនាចម្រាសនៃចំនួនមួយដោយប្រើតែបណ្ដាក់នៃប៊ូតុងត្រីកោណមាត្រ ដូចជា $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ និង $\tan^{-1}$ ។

លំហាត់ ៣៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $A - B = 120°$ និង $R = 8r$ ។ គណនា $\cos C$ ។

លំហាត់ ៣៤

ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា $\frac{a-b}{a+b}=\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)\tan\frac{C}{2}$ ។

លំហាត់ ៣៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{a}{b}=2+\sqrt{3}$ និង $\angle C=60^\circ$ ។

គណនា $\angle A$ និង $\angle B$ ។

លំហាត់ ៣៦

គេឲ្យ a , b , $c\neq -1$ និង 1 បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=abc$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$ ។

លំហាត់ ៣៧

បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត លុះត្រាតែ

$a\cos B+b\cos C+c\cos A=\frac{a+b+c}{2}$ ។

លំហាត់ ៣៨

គណនា $\cos a\cos 2a\cos 3a\ldots\cos 999a$ ចំពោះ $a=\frac{2\pi}{1999}$ ។

លំហាត់ ៣៩

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\frac{\sec^4\alpha}{\tan^2\beta}+\frac{\sec^4\beta}{\tan^2\alpha}$ ចំពោះ $\forall\alpha$, $\beta\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in \mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ ៤០

រកគ្រប់គូ $(x,y)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)^2$ បើគេដឹងថា $\frac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{\frac{y^2}{2}}}+\frac{(\cos x)^{2y}}{(\sin x)^{\frac{y^2}{2}}}=\sin 2x$ ។

លំហាត់ ៤១

បង្ហាញថា $\cos 1^\circ$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

លំហាត់ ៤២

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $S=(1-x_1)(1-y_1)+(1-x_2)(1-y_2)$ បើគេដឹងថា៖ $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2=c^2$ ។

លំហាត់ ៤៣

បង្ហញថា $\frac{\sin^3 a}{\sin b}+\frac{\cos^3 a}{\cos b}\geq \sec(a-b)$ ចំពោះ $0<a\,,\ b<\frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ ៤៤

គេឲ្យ $\sin\alpha\cos\beta=-\frac{1}{2}$ ។ គណនា $\cos\alpha\sin\beta$ ។

លំហាត់ ៤៥

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា
$(ab+bc+ca-1)^2\leq (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ ។

លំហាត់ ៤៦

បង្ហាញថា $(\sin x+a\cos x)(\sin x+b\cos x)\leq 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (*)។

លំហាត់ ៤៧

បង្ហាញថា $\sum_{i=1}^{n}|\sin a_i| + \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\right| \geq 1$ ចំពោះ $\forall n \in \mathrm{IN}$ ។

លំហាត់ ៤៨

(Russia 2003, By Nazar Agakhanov)

រកគ្រប់មុំ α ដើម្បីឲ្យសំណុំមានបីធាតុ $S = \{\sin\alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}$ ស្មើនឹងសំណុំ $T = \{\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\}$ ។

លំហាត់ ៤៩

យក $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ជាស្វ៊ីតនៃពហុធាបំពេញលក្ខខណ្ឌ៖ $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$
និង $T_{i+1} = 2xT_i(x) - T_{i-1}(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន i ។
ពហុធា $T_n(x)$ ហៅថា ពហុធា *Chebyshev* ទី n ។
ក/ បង្ហាញថា៖ $T_{2n+1}(x)$ និង $T_{2n}(x)$ ជាអនុគមន៍សេស និង គូរៀងគ្នា
ខ/ បង្ហាញថា៖ $T_{n+1}(x) > T_n(x) > 1$ ចំពោះចំនួនពិត $x > 1$
គ/ បង្ហាញថា៖ $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ ចំពោះចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n
ឃ/ រកគ្រប់រឹសនៃពហុធា $T_n(x)$
ង/ រកគ្រប់រឹសនៃពហុធា $P_n(x) = T_n(x) - 1$ ។

លំហាត់ ៥០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\angle BAC = 40°$ និង $\angle ABC = 60°$ ។
D , E ស្ថិតនៅលើជ្រុង AB , AC រៀងគ្នាដែល $\angle CBD = 40°$ និង $\angle BCE = 70°$ ។ អង្កត់ $[BD]$ និង $[CE]$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ F ។ បង្ហាញថា $AF \perp BC$ ។

លំហាត់ ៥១

(IMO,1991)

យក S ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា យ៉ាងហោចណាស់មួយក្នុងចំណោមមុំ $\angle SAB$, $\angle SBC$ និង $\angle SCA \le 30^\circ$ ។

លំហាត់ ៥២

គេឲ្យ $a = \frac{\pi}{7}$ ។

(a) បង្ហាញថា $\sin^2 3a - \sin^2 a = \sin 2a \sin 3a$

(b) បង្ហាញថា $\csc a = \csc 2a + \csc 4a$

(c) គណនា $\cos a - \cos 2a + \cos 3a$

(d) បង្ហាញថា $\cos a$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

(e) បង្ហាញថា $\cos a$ ជាចំនួនអសនិទាន

(f) គណនា $\tan a \tan 2a \tan 3a$

(g) គណនា $\tan^2 a + \tan^2 2a + \tan^2 3a$

(h) គណនា $\tan^2 a \tan^2 2a + \tan^2 2a \tan^2 3a + \tan^2 3a \tan^2 a$

(i) គណនា $\cot^2 a + \cot^2 2a + \cot^2 3a$

លំហាត់ ៥៣

ក/ រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តូចបំផុតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$\frac{1}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ} + \frac{1}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ} + \dots + \frac{1}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ} = \frac{1}{\sin n^\circ}$$ ។

ខ/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{\sin 1^\circ \sin 2^\circ} + \frac{1}{\sin 2^\circ \sin 3^\circ} + \dots + \frac{1}{\sin 89^\circ \sin 90^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$$ ។

លំហាត់ ៥៤

(China,2001)

យក ABC ជាត្រីកោណដែលមានរង្វាស់ជ្រុង $AB = c$, $AC = b$ និង $BC = a$ ។ ចំពោះ x ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$a^x\cos A+b^x\cos B+c^x\cos C\ge\frac{1}{2}\left(a^x+b^x+c^x\right)$ ។

លំហាត់ ៥៥

គេឲ្យ x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

(a) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(b) $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$ បើគេដឹងថា $0<x\,,\ y\,,\ z<1$ និង $x+y+z=xyz$ ។

លំហាត់ ៥៦

(China,1997)

គេឲ្យ x , y , z បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x\ge y\ge z\ge\frac{\pi}{12}$ និង $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ ។ កំណត់តម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ $\cos x\sin y\cos z$ ។

លំហាត់ ៥៧

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច ។ ចំពោះ $n=1,\ 2\ ,\ 3$ គេតាង

$x_n=2^{n-3}\left(\cos^n A+\cos^n B+\cos^n C\right)+\cos A\cos B\cos C$ ។

បង្ហាញថា $x_1+x_2+x_3\ge\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ ៥៨

រកផលបូកនៃគ្រប់តម្លៃ x លើ $[0,2\pi]$ បើគេដឹងថា $3\cot^2 x+8\cot x+3=0$ ។

លំហាត់ ៥៩

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួចមានក្រឡាផ្ទៃ K ។ បង្ហាញថា

$$\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$ ។

លំហាត់ ៦០

គណនា $S_n = C_n^1 \sin a + C_n^2 \sin 2a + ... + C_n^n \sin na$

និង $T_n = C_n^1 \cos a + C_n^2 \cos 2a + ... + C_n^n \cos na$ ។

លំហាត់ ៦១

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

លំហាត់ ៦២

(Belarus,1999)

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតពីរ គឺ x_1, x_2, … , x_n និង y_1, y_2, … , y_n ផ្ទៀងផ្ទាត់

លក្ខខណ្ឌ $x_1 = y_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2}$ និង $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{\sqrt{1+y_n^2}}$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។ បង្ហាញថា $2 < x_n y_n < 3$ ។

លំហាត់ ៦៣

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sin a + \sin b + \sin c \geq \dfrac{3}{2}$ ។

បង្ហាញថា $\sin\left(a-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(b-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(c-\dfrac{\pi}{6}\right)\geq 0$ ។

លំហាត់ ៦៤

ឧបមថា បួនចំនួនត្រូវបានជ្រើសចេញពីចន្លោះ $\left[\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right]$ ។

បង្ហាញថា មានពីរក្នុងចំណោមបួនចំនួននោះ(សន្មតថា a, b) បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$\left|a\sqrt{4-b^2}-b\sqrt{4-a^2}\right|\le 2$$ ។

លំហាត់ ៦៥

គេឲ្យ a , b ជាចំនួនពិតក្នុងចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ។ បង្ហាញថា

$\sin^6 a+3\sin^2 a\cos^2 b+\cos^6 b=1$ លុះត្រាតែ $a=b$ ។

លំហាត់ ៦៦

គេឲ្យ x , y , z ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$ ។

បង្ហាញថា $\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z\ge \sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$ ។

លំហាត់ ៦៧

គេឲ្យ $ABCDE$ ជាពហុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ បង្ហាញថា បើ $r_{ABC}=r_{AED}$, $r_{ABD}=r_{AEC}$ នោះ គេបាន ABC និង AED ជាត្រីកោណប៉ុនគ្នា ។

លំហាត់ ៦៨

គ្មានមុំណាមួយនៃត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់ធំជាង $120°$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{\cos A+\cos B-\cos C}{\cos A+\sin B-\sin C}>-\frac{\sqrt{3}}{2}$$ ។

លំហាត់ ៦៩

(USAMO,2002)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\left(\cot\frac{A}{2}\right)^2+\left(\cot\frac{B}{2}\right)^2+\left(\cot\frac{C}{2}\right)^2=\left(\frac{6s}{7r}\right)^2$ (*) ដែល s និង r តាងឲ្យកន្លះ

បរិមាត្រ និង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ដូចត្រីកោណ T ដែលមានរង្វាស់ជ្រុងទាំងអស់ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង ជាបីចំនួនបឋមរវាងគ្នា ដែលចំនួនគត់វិជ្ជមានទាំងបីនេះត្រូវកំណត់ ។

លំហាត់ ៧០

(USAMO,1996)

បង្ហាញថា មធ្យមនៃចំនួន $2\sin 2^\circ$, $4\sin 4^\circ$, … , $180\sin 180^\circ$ ស្មើនឹង $\cot 1^\circ$ ។

លំហាត់ ៧១

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច ។ បង្ហាញថា

$$\cot^3 A+\cot^3 B+\cot^3 C+6\cot A\cot B\cot C \geq \cot A+\cot B+\cot C \quad (*)$$ ។

លំហាត់ ៧២

(Turkey,1998)

គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំណត់ដោយ $a_1=t$, $a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$ ចំពោះ $n\geq 1$ ។ តើមានតម្លៃ t ផ្សេងគ្នាចំនួនប៉ុន្មានផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $a_{1998}=0$ ។

លំហាត់ ៧៣

យក P ជាចំណុចក្នុងមួយនៃត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\angle PAB=10^\circ$, $\angle PBA=20^\circ$, $\angle PCA=30^\circ$ និង $\angle PAC=40^\circ$ ។ បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

លំហាត់ ៧៤

គេឲ្យ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2-5}{2(a_n+2)}$ ចំពោះគ្រប់ $n>0$ ។

បង្ហាញថា $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

លំហាត់ ៧៥

(APMC,1982)

ចំពោះ $n \in \mathrm{IN} - \{0,1\}$ បង្ហាញថា

$$\prod_{k=1}^{n} \tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n} \cot\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right] \quad (*)$$ ។

លំហាត់ ៧៦

(China,1999)

គេឲ្យពហុធា $P_2(x) = x^2 - 2$ ។ កំណត់គ្រប់ស្វ៊ីតពហុធា $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ បើ $P_k(x)$ ជាពហុធាម៉ូនិច (Monic) មានដឺក្រេ k និង $P_i(P_j(x)) = P_j(P_i(x))$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន i , j ។

លំហាត់ ៧៧

(China,2000)

ក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន $a \le b \le c$ ។ កំណត់លក្ខខណ្ឌនៃមុំ C ដើម្បីកន្សោម $a+b-2R-2r$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន អវិជ្ជមាន និង សូន្យ ។

លំហាត់ ៧៨

យក D , E , F ជាចំណុចនៅលើជ្រុង BC , CA , AB នៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ បើគេដឹងថា $DC+CE = EA+AF = FB+BD$ បង្ហាញថា

$$DE+EF+FD \ge \frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$ ។

លំហាត់ ៧៩

ចំពោះ a , b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បង្ហាញថា $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \ge \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$

បើ (a) $0 < a,b \le 1$ រឺ (b) $ab \ge 3$ ។

លំហាត់ ៨០

(China,1998)

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមិនមានមុំទាល បំពេញលក្ខខណ្ឌ $AB > AC$, $\angle B = 45^\circ$ ។ យក O និង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង ចារឹកក្នុងរៀងគ្នានៃត្រីកោណនេះ ។ឧបមាថា $\sqrt{2}OI = AB - AC$ ។ គណនា $\sin A$ ។

លំហាត់ ៨១

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ កំណត់ចំនួនពិត a_0 និង $a_{k,l}$, $1 \le l < k \le n$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} = a_0 + \sum\limits_{1\le l<k\le n} a_{l,k}\cos 2(k-l)x$ (*) ។

លំហាត់ ៨២

(USAMO,2000)

យក S ជាសំណុំនៃត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$5\left(\dfrac{1}{AP}+\dfrac{1}{BQ}+\dfrac{1}{CR}\right)-\dfrac{3}{\min\{AP,BQ,CR\}}=\dfrac{6}{r}$ ដែល r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC និង P , Q , R ជាចំណុចប៉ះរវាងរង្វង់ចារឹកក្នុងនឹងជ្រុង AB , BC , CA នៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា ត្រីកោណទាំងអស់នៃសំណុំ S ជាត្រីកោណសមបាត និង ដូចគ្នា ។

លំហាត់ ៨៣

(TST,2003)

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{\sin a\sin(a-b)\sin(a-c)}{\sin(b+c)}+\frac{\sin b\sin(b-c)\sin(b-a)}{\sin(c+a)}$$
$$+\frac{\sin c\sin(c-a)\sin(c-b)}{\sin(a+b)}\ge 0 \quad (\ *\ )។$$

លំហាត់ ៨៤

(TST,2002)

ចំពោះ គ្រប់ត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា $\sin\frac{3A}{2}+\sin\frac{3B}{2}+\sin\frac{3C}{2}$
$\le\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)+\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)$ (*)។

លំហាត់ ៨៥

គេឲ្យ $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n,\ n\ge 2$ ជា n ចំនួនផ្សេងគ្នានៃចន្លោះ $[-1,1]$។
បង្ហាញថា $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\dots+\frac{1}{t_n}\ge 2^{n-2}$ ដែល $t_i=\prod_{j\ne i}\left|x_j-x_i\right|$ ។

លំហាត់ ៨៦

(St.Petersburg, 2001)

គេឲ្យ $x_1,\ x_2,\dots,x_{10}$ ជាចំនួនពិតក្នុងចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ
$\sin^2 x_1+\sin^2 x_2+\dots+\sin^2 x_{10}=1$ ។ បង្ហាញថា
$3(\sin x_1+\sin x_2+\dots+\sin x_{10})\le\cos x_1+\cos x_2+\dots+\cos x_{10}$ ។

លំហាត់ ៨៧

(IMO Shortlist,2001)

គេឲ្យ $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា
$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\dots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2\dots+x_n^2}<\sqrt{n}$$ ។

លំហាត់ ៨៨

(USAMO,1998)

គេឲ្យ a_0, a_1, … , a_n ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\tan\left(a_0-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(a_1-\frac{\pi}{4}\right)+\ldots+\tan\left(a_n-\frac{\pi}{4}\right)\geq n-1$ ។

បង្ហាញថា $\tan a_0 \tan a_1 \ldots \tan a_n \geq n^{n+1}$ ។

លំហាត់ ៨៩

(MOSP,2001)

កំណត់គ្រប់ត្រីធាតុ (a,b,c)ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $a^2-2b^2=1$, $2b^2-3c^2=1$និង $ab+bc+ca=1$ ។

លំហាត់ ៩០

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង $0<\theta_i<90^\circ$, $i=\overline{1,n}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\ldots+\cos^2\theta_n=1$ ។ បង្ហាញថា

$\tan\theta_1+\tan\theta_2+\ldots+\tan\theta_n\geq(n-1)(\cot\theta_1+\cot\theta_2+\ldots+\cot\theta_n)$ ។

លំហាត់ ៩១

មួយក្នុងចំណោមវិសមភាព $(\sin x)^{\sin x}<(\cos x)^{\cos x}$

និង $(\sin x)^{\sin x}>(\cos x)^{\cos x}$ ពិត ចំពោះ $\forall x:\ 0<x<\frac{\pi}{4}$ ។

បញ្ជាក់ចម្លើយរបស់អ្នកដោយការស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ ៩២

គេឲ្យ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ មិនមែនជាផ្នែកពិតនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z^n=1$, $n\in \mathrm{IN}$ ។

លំហាត់ ៩៣

យក $A_1A_2A_3$ ជាត្រីកោណមុំស្រួច និង B_1, B_2, B_3 ជាចំណុចនៅលើជ្រុង A_2A_3,

A_3A_1 , A_1A_2 រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $2(b_1\cos A_1 + b_2\cos A_2 + b_3\cos A_3)$
$\geq a_1\cos A_1 + a_2\cos A_2 + a_3\cos A_3$ (*) ដែល $a_i = A_{i+1}A_{i+2}$ និង
$b_i = B_{i+1}B_{i+2}$ ចំពោះ $i = 1$, 2 , 3 (ក្នុងនោះ $x_{i+3} = x_i$) ។

លំហាត់ ៩៤

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ, x , y , z ជាចំនួនពិត និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។
បង្ហាញថា

(a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yz\cos A + 2zx\cos B + 2xy\cos C$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(-1)^n(yz\cos nA + zx\cos nB + xy\cos nC)$

(c) $yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \leq R^2(x+y+z)^2$

(d) $xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4[ABC]\sqrt{xy + yz + zx}$ ។

លំហាត់ ៩៥

(USAMO,2004)

គេឲ្យ ω ជារង្វង់ចារឹកក្នុងចតុកោណ $ABCD$ ។ យក I ជាផ្ចិតនៃ ω ។
ឧបមថា $(AI + DI)^2 + (BI + CI)^2 = (AB + CD)^2$ ។
បង្ហាញថា $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយសមបាត ។

លំហាត់ ៩៦

(USAMO,2001)

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ ។
បង្ហាញថា $0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2$ ។

លំហាត់ ៩៧

គេឲ្យ s , t , u , v ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានក្នុងចន្លោះ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ
$s + t + u + v = \pi$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{\sqrt{2}\sin s-1}{\cos s}+\frac{\sqrt{2}\sin t-1}{\cos t}+\frac{\sqrt{2}\sin u-1}{\cos u}+\frac{\sqrt{2}\sin v-1}{\cos v}\geq 0$$ ។

លំហាត់ ៩៨

(USAMO,1995)

ឧបមាថា ម៉ាស៊ីនគិតលេខមួយខូច ហើយប៊ូតុងដែលអាចប្រើប្រាស់បានមានតែប៊ូតុង $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ និង $\tan^{-1}$ ។ អេក្រង់ដំបូងបង្ហាញលេខ 0 ។ យក q ជាចំនួនសនិទានវិជ្ជមានណាមួយ ។ បង្ហាញថា គេអាចបង្ហាញចំនួន q នេះលើអេក្រង់ដោយប្រើតែប៊ូតុងខាងលើ បើគេសន្មតថាម៉ាស៊ីនគិតលេខនេះមានសមត្ថភាពគិតលេខបានច្រើនខ្ទង់ក្រោយក្បៀស(មិនកំណត់) និង តួលេខទាំងអស់គិតជារ៉ាដ្យង់។

លំហាត់ ៩៩

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច ។ បង្ហាញថា

$$(\sin 2B+\sin 2C)^2\sin A+(\sin 2C+\sin 2A)^2\sin B$$
$$+(\sin 2A+\sin 2B)^2\sin C\leq 12\sin A\sin B\sin C \quad (*)$$ ។

លំហាត់ ១០០

(MOSP,2000)

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច ។ បង្ហាញថា

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+8\cos A\cos B\cos C\geq 4 \ (*)$$ ។

លំហាត់ ១០១

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n បង្ហាញថា $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{x}\right|\leq 2\sqrt{\pi}$ ។

ជំពូក 3

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ១

គេឲ្យ $\sec x - \tan x = 2$ ។ គណនា $\sec x + \tan x$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $1 + \tan^2 x = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x - \tan^2 x = 1$

$$\Rightarrow (\sec x - \tan x)(\sec x + \tan x) = 1$$

$$\Rightarrow \sec x + \tan x = \frac{1}{\sec x + \tan x} = \frac{1}{2}$$

លំហាត់ ២

គេឲ្យ $0° < \theta < 45°$ ។ តម្រៀប $t_1 = (\tan\theta)^{\tan\theta}$, $t_2 = (\tan\theta)^{\cot\theta}$, $t_3 = (\cot\theta)^{\tan\theta}$, $t_4 = (\cot\theta)^{\cot\theta}$ តាមលំដាប់ចុះ ។

ចម្លើយ

ចំពោះ $0° < \theta < 45°$ គេបាន $0 < \tan\theta < 1 < \cot\theta$

$y = a^x$ ជាអនុគមន៍ចុះចំពោះ $0 < a < 1$ និង ជាអនុគមន៍កើនចំពោះ $a > 1$

គេបាន $t_1 = (\tan\theta)^{\tan\theta} > t_2 = (\tan\theta)^{\cot\theta}$

និង $t_4 = (\cot\theta)^{\cot\theta} > t_3 = (\cot\theta)^{\tan\theta}$

ម៉្យាងទៀត $t_1 = (\tan\theta)^{\tan\theta} < 1$ និង $t_3 = (\cot\theta)^{\tan\theta} > 1 \Rightarrow t_1 < t_3$

ហេតុនេះ $t_4 > t_3 > t_1 > t_2$

លំហាត់ ៣

គណនា

(a) $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\tan\frac{\pi}{12}$

(b) $\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24}$

(c) $\cos 36° - \cos 72°$

(d) $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$ ។

ចម្លើយ

(a) យើងមាន $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

ដូចគ្នា គេបាន $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

យើងបាន $\tan\frac{\pi}{12}=\dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}=2-\sqrt{3}$

(b) $\cos^4\frac{\pi}{24}-\sin^4\frac{\pi}{24}=\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{24}+\sin^2\frac{\pi}{24}\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

(c) $\cos 36^\circ-\cos 72^\circ=\frac{(\cos 36^\circ-\cos 72^\circ)(\cos 36^\circ+\cos 72^\circ)}{\cos 36^\circ+\cos 72^\circ}$

$$=\frac{\cos^2 36^\circ-\cos^2 72^\circ}{\cos 36^\circ+\cos 72^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1+\cos 72^\circ}{2}-\frac{1+\cos 144^\circ}{2}}{\cos 36^\circ+\cos 72^\circ}$$

$$=\frac{\cos 72^\circ+\cos 36^\circ}{2(\cos 36^\circ+\cos 72^\circ)}=\frac{1}{2}$$

(d) $\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$

តាម $\sin 2x=2\sin x\cos x\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\sin x}$

យើងបាន $\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$

$$=\left(\frac{1}{2}\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\sin 160^\circ}{\sin 80^\circ}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}$$

លំហាត់ ៤

សម្រួលកន្សោម $\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}-\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$ ។

ចម្លើយ

$$\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}-\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$$
$$=\sqrt{\sin^4 x+4(1-\sin^2 x)}-\sqrt{\cos^4 x+4(1-\cos^2 x)}$$
$$=\sqrt{(2-\sin^2 x)^2}-\sqrt{(2-\cos^2 x)^2}$$
$$=2-\sin^2 x-2+\cos^2 x=\cos 2x$$

លំហាត់ ៥

បង្ហាញថា $1-\cot 23^\circ=\dfrac{2}{1-\cot 22^\circ}$ ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១

យើងមាន $(1-\cot 23^\circ)(1-\cot 22^\circ)=\left(1-\dfrac{\cos 23^\circ}{\sin 23^\circ}\right)\left(1-\dfrac{\cos 22^\circ}{\sin 22^\circ}\right)$

$$=\frac{(\sin 23^\circ-\cos 23^\circ)(\sin 22^\circ-\cos 22^\circ)}{\sin 23^\circ\sin 22^\circ}$$
$$=\frac{2(\sin 23^\circ\cos 45^\circ-\sin 45^\circ\cos 23^\circ)(\sin 22^\circ\cos 45^\circ-\sin 45^\circ\cos 22^\circ)}{\sin 22^\circ\sin 23^\circ}$$
$$=\frac{2\sin(23^\circ-45^\circ)\sin(22^\circ-45^\circ)}{\sin 22^\circ\sin 23^\circ}$$
$$=\frac{2\sin 22^\circ\sin 23^\circ}{\sin 22^\circ\sin 23^\circ}=2$$

ហេតុនេះ $1-\cot 23^\circ=\dfrac{2}{1-\cot 22^\circ}$

របៀបទី ២

យើងមាន $\cot 45^\circ=\cot(22^\circ+23^\circ)=\dfrac{\cot 22^\circ\cot 23^\circ-1}{\cot 22^\circ+\cot 23^\circ}$

$$\Rightarrow \frac{\cot 22^\circ \cot 23^\circ - 1}{\cot 22^\circ + \cot 23^\circ} = 1$$

$$\Rightarrow \cot 22^\circ \cot 23^\circ - \cot 22^\circ - \cot 23^\circ - 1 = 2$$

$$\Rightarrow (\cot 23^\circ - 1)\cot 22^\circ - (\cot 23^\circ - 1) = 2$$

$$\Rightarrow (\cot 23^\circ - 1)(\cot 22^\circ - 1) = 2$$

ហេតុនេះ $1 - \cot 23^\circ = \dfrac{2}{1 - \cot 22^\circ}$

លំហាត់ ៦

កំណត់ $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ បើគេដឹងថា $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}\sin x} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}\cos x} = 2$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4\sin x} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4\cos x} = 2 \qquad (*)$$

តាម លំហាត់ ៤ (a) $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$(*) \Rightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x} + \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\cos x} = 2$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{12}\cos x + \sin x\cos\frac{\pi}{12} = 2\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin 2x$$

យើងបាន $\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{12} = 2x + 2k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{12} = \pi - 2x + 2k\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} - 2k\pi \\ x = \dfrac{11\pi}{36} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{array}\right.$

ដោយ $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

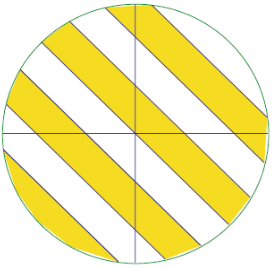
គេបាន $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{11\pi}{36}$

លំហាត់ ៧

យក $\Re$ ជាសំណុំនៃគូ (x, y)បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^2 + y^2 \le 100$ និង $\sin(x+y) \ge 0$ ។ គណនាផ្ទៃតំណាង $\Re$ ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១



សំណុំចំណុច (x, y)បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^2 + y^2 \le 100$ ជាផ្ទៃកខាងក្នុងនៃរង្វង់ ដែល (C)មានកាំផ្ចិត $O(0,0)$ និង កាំ $R = 10$

បើ $\sin(x+y) = 0 \Rightarrow x + y = k\pi$, $k \in Z$

សមីការអាប់ស៊ីសរវាងរង្វង់ (C)និង បន្ទាត់ $(l): x + y = k\pi$ រឺ $y = -x + k\pi$

កំណត់ដោយ $x^2 + (-x + k\pi)^2 = 100$

$$2x^2 - 2k\pi x + k^2\pi^2 - 100 = 0$$

មាន $\Delta' = k^2\pi^2 - 2k^2\pi^2 + 200 = -k^2\pi^2 + 200$

បើ (C)ប្រសព្វ (l)គេបាន $-k^2\pi^2 + 200 \ge 0 \Rightarrow k^2 \le \frac{200}{\pi^2} < \frac{200}{9}$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{200}}{3} < k < \frac{\sqrt{200}}{3}$$

$$\Rightarrow -5 < k < 5$$

$$\Rightarrow -4 \le k \le 4$$

គេបាន រង្វង់ (C)ត្រូវបានចែកជា 10 តំបន់ផ្សេងគ្នាដូចរូប (ដោយបន្ទាត់ចំនួន 9)

ហើយ រាល់តំបន់នីមួយៗផ្ទុករាល់គូ (x, y)បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sin(x+y) > 0$

រឺ $\sin(x-y)<0$ ។ សិក្សាលើតម្លៃ k គេបាន ចំនួនគូ (x,y)ដែល $\sin(x+y)>0$ និង ចំនួនគូ (x,y)មានចំនួនស្មើគ្នា ។

យើងបាន ក្រឡាផ្ទៃតាង ℜ កំណត់ដោយ $S=\frac{10^2\pi}{2}=50\pi$

របៀបទី ២

យក (C)ជាថាសដែលកើតចេញពីចំណុច (x,y)បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2\le 100$

យើងមាន $\sin(x+y)=0 \Leftrightarrow x+y=k\pi$, $k\in Z$

ថាស (C)ត្រូវបានកាត់ដោយបន្ទាត់ $(D_k): x+y=k\pi$ (គ្រប់តម្លៃ k គេបាន $(D_k): x+y=k\pi$ ជាបន្ទាត់ស្របគ្នា)

គេបាន តំបន់ដូចរូប ។ ក្នុងតំបន់នោះមានចំណុច (x,y)បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sin(x+y)\ge 0$រឺ $\sin(x+y)<0$

ចំពោះ $\forall(x,y)\in(C)$ គេបាន $\sin(-x-y)=-\sin(x+y)$

មានន័យថា ចំណុច (x,y)បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sin(x,y)>0$ និង ចំណុច (x,y) បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sin(x,y)<0$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់ O ។

យើងបាន ចំនួនគូ (x,y)ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sin(x+y)\ge 0$ មានចំនួនស្មើគ្នានឹងចំនួនគូ (x,y)ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sin(x,y)<0$

យើងបាន ក្រឡាផ្ទៃតាង ℜ កំណត់ដោយ $S=\frac{10^2\pi}{2}=50\pi$

លំហាត់ ៨

ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{b+c}$ ។

ចម្លើយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសយើងបាន $\frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}$

$$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

ដោយ $0 < \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \le 1$ ព្រោះ $0 \le |B-C| < \pi$

ហេតុនេះ $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{b+c}$

សម្គាល់ ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $\sin\frac{B}{2} \le \frac{b}{c+a}$, $\sin\frac{C}{2} \le \frac{c}{a+b}$

លំហាត់ ៩

គេឲ្យ $I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ និង f ជាអនុវត្តន៍កំណត់លើ $[-1,1]$ ដោយ $f(\sin 2x) = \sin x + \cos x$ ។ កំណត់ f រួច ទាញរក $f(\tan^2 x)$ ចំពោះ $\forall x \in I$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $[f(\sin 2x)]^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$

ដោយ $f : I \to [-1,1]$

$x \mapsto \sin 2x$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ

មានន័យថា $\forall t \in [-1,1],\ \exists! x \in I : t = \sin 2x$

យើងបាន $[f(t)]^2 = 1 + t$ ចំពោះ $t \in [-1,1] \Rightarrow f(t) = \sqrt{1+t}$

ព្រោះ $f(t) = f(\sin 2x) = \sin x + \cos x \ge 0$, $\forall x \in I$

ដូចនេះ $f(t) = \sqrt{1+t}$, $\forall t \in [-1,1]$

ចំពោះ $x \in I \Rightarrow -1 \le \tan x \le 1 \Rightarrow 0 \le \tan^2 x \le 1$

យើងបាន $f(\tan^2 x) = \sqrt{1+\tan^2 x} = \sec x$

លំហាត់ ១០

យក $f_k(x) = \frac{1}{k}(\sin^k x + \cos^k x)$ ចំពោះ $k = 1, 2, \dots, n$ ។

បង្ហាញថា $f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{12}$, $\forall x \in IR$ ។

ចម្លើយ

ដើម្បីបង្ហាញថា $f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{12}$ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$

យើងមាន $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$

$$
\begin{aligned}
&= 3\left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right] \\
&\quad - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) \\
&= 3 - 6\sin^2 x\cos^2 x - 2\left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x\right] \\
&= 3 - 6\sin^2 x\cos^2 x - 2 + 6\sin^2 x\cos^2 x \\
&= 1
\end{aligned}
$$

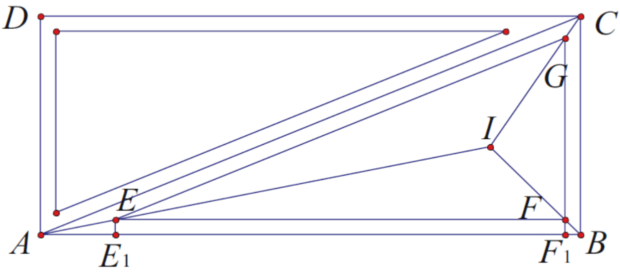
ហេតុនេះ $f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{12}$, $\forall x \in IR$

លំហាត់ ១១

(AIME,2004)

រង្វង់មួយមានកាំ 1 ឯកតា ត្រូវបានគេយកទៅដាក់ក្នុងចតុកោណកែង $ABCD$ មួយដែលមានទំហំ 15×36 (គ្មានផ្នែកណានៃរង្វង់ស្ថិតនៅក្រៅចតុកោណ) ។ កំណត់ប្រូបាប៊ីលីតេដែលរង្វង់មិនកាត់អង្កត់ទ្រូង AC ។

ចម្លើយ



ដើម្បីឲ្យរង្វង់នៅក្នុងចតុកោណកែង $ABCD$ កាលណាផ្ចិត O នៃរង្វង់នោះស្ថិតនៅក្នុងចតុកោណទំហំ $(15-2)\times(36-2)=13\times 34$

ព្រឹត្តិការណ៍រង្វង់មិនប៉ះអង្កត់ទ្រូង AC ដូចគ្នានឹងព្រឹត្តិការណ៍ចម្ងាយពីផ្ចិត O ទៅជ្រុង AC ធំជាង 1 រឺ ដូចគ្នានឹងព្រឹត្តិការណ៍ចម្ងាយពីផ្ចិត O ទៅជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC និង ត្រីកោណ CDA ធំជាង 1។

យើងគូសអង្កត់បីស្របគ្នានឹងជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC និង CDA

(គម្លាតពីអង្កត់ទាំងនោះនឹងជ្រុងនៃត្រីកោណស្មើនឹង 1 ដូចរូប)

ដោយជ្រុងត្រូវគ្នានៃត្រីកោណ EFG និង ត្រីកោណ ABC ស្របគ្នា

យើងបាន ត្រីកោណ EFG និង ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណដូចគ្នា

$$\Rightarrow \frac{[EFG]}{[ABC]}=\left(\frac{EF}{AB}\right)^2 \Rightarrow [EFG]=[ABC]\left(\frac{EF}{AB}\right)^2=15\times 36\left(\frac{EF}{AB}\right)^2$$

បើ A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលរង្វង់មិនកាត់អង្កត់ទ្រូង AC

យើងបាន $P(A)=\dfrac{2[EFG]}{13\times 34}=\dfrac{15\times 36}{13\times 34}\left(\dfrac{EF}{AB}\right)^2=\dfrac{270}{221}\left(\dfrac{EF}{AB}\right)^2$

ដោយចម្ងាយពី E ទៅជ្រុង AB និង AC មានប្រវែងស្មើគ្នា គឺ 1ឯកតា

$\Rightarrow E$ ស្ថិតលើកន្លះបន្ទាត់ពុះ $\angle BAC$

ដូចគ្នាដែរ F , G ស្ថិតនៅលើកន្លះបន្ទាត់ពុះ $\angle ABC$, $\angle BCA$

យើងបាន AE , BF និង CG ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច I ដែលជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC

របៀបទី ១

យក E_1, F_1 ជាចំណោលកែងនៃ E , F លើជ្រុង AB

$\Rightarrow EE_1F_1F$ ជាចតុកោណកែង

យើងបាន $EF = E_1F_1$ និង $BF_1 = FF_1 = EE_1 = 1$

បើ $\angle EAB = \theta \Rightarrow \angle CAB = 2\theta$

យើងបាន $\sin 2\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{15}{39} = \dfrac{5}{13}$, $\cos 2\theta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{36}{39} = \dfrac{12}{13}$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1-\frac{12}{13}}{1-\frac{5}{13}} = \frac{1}{5} \Rightarrow AE_1 = \frac{EE_1}{\tan\theta} = 5$$

$\Rightarrow EF = E_1F_1 = AB - BF_1 - AE_1 = 36 - 1 - 5 = 30$

ហេតុនេះ $\dfrac{m}{n} = \left(\dfrac{30}{36}\right)^2\left(\dfrac{270}{221}\right) = \dfrac{375}{442} \Rightarrow m+n = 817$

របៀបទី ២

តាង $A(0,0)$, $B(36,0)$និង $C(36,15)$

ដោយ E ស្ថិតនៅលើកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃ $\angle CAB$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}$ មានមេគុណប្រាប់ទិសដូចគ្នានឹង $\left|\overrightarrow{AB}\right|\overrightarrow{AC} + \left|\overrightarrow{AC}\right|\overrightarrow{AB}$

ដោយ $\left|\overrightarrow{AB}\right|\overrightarrow{AC} + \left|\overrightarrow{AC}\right|\overrightarrow{AB} = 36(36,15) + 39(36,0) = 36\cdot 15(5,1)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{5}$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ $AE \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{1}{5}$ (យក $\theta = \angle EAB$)

យើងបាន $AE_1 = \dfrac{EE_1}{\tan\theta} = 5$

$\Rightarrow EF = E_1F_1 = AB - BF_1 - AE_1 = 36 - 1 - 5 = 30$

ហេតុនេះ $\dfrac{m}{n} = \left(\dfrac{30}{36}\right)^2\left(\dfrac{270}{221}\right) = \dfrac{375}{442} \Rightarrow m+n = 817$

របៀបទី ៣

ដោយ គ្រប់ជ្រុងត្រូវគ្នានៃត្រីកោណ ABC និង EFG សុទ្ធតែស្របគ្នា

$\Rightarrow I$ ក៏ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ EFG

បើ r ជាប្រវែងកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC

$\Rightarrow r' = r - BF_1 = r - 1$ (r' ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC)

យើងបាន $\dfrac{EFG}{ABC} = \left(\dfrac{r-1}{r}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{m}{n} = \left(\dfrac{r-1}{r}\right)^2 \left(\dfrac{270}{221}\right)$

តែ $r(AB + BC + CA) = 2([AIB] + [BIC] + [CIA])$

$$= 2[ABC] = AB \cdot BC$$

$$\Rightarrow r = \frac{AB \cdot BC}{AB + BC + CA} = \frac{36 \cdot 15}{36 + 15 + 39} = 6$$

គេបាន $\dfrac{m}{n} = \left(\dfrac{6-1}{6}\right)^2 \left(\dfrac{270}{221}\right) = \dfrac{375}{442}$

ហេតុនេះ $\qquad m + n = 812$

លំហាត់ ១២

(AMC 12,1999)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយបំពេញលក្ខខណ្ឌ $3\sin A + 4\cos B = 6$ និង $4\sin B + 3\cos A = 1$ ។ គណនាមុំ C ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\qquad 3\sin A + 4\cos B = 6 \quad (1)$

$\qquad\qquad 4\sin B + 3\cos A = 1 \quad (2)$

តាម (1) $\Rightarrow 9\sin^2 A + 24\sin A\cos B + 16\cos^2 B = 36 \qquad (3)$

តាម (1) $\Rightarrow 16\sin^2 B + 24\sin B\cos A + 9\cos^2 A = 1 \qquad (4)$

បូក (3),(4) យើងបាន $25 + 24\sin(A + B) = 37 \Rightarrow \sin(A + B) = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{6} \text{ រឺ } \frac{5\pi}{6}$$

បើ $C = \dfrac{5\pi}{6} \Rightarrow A < \dfrac{\pi}{6}$ គេបាន $3\sin A + 4\cos B < \dfrac{3}{2} + 4 < 6$ មិនពិត

ហេតុនេះ $\qquad C = \dfrac{\pi}{6}$

លំហាត់ ១៣

បង្ហាញថា $\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a \tan 2a \tan a$

ចំពោះ $\forall a \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\tan 3a = \tan(2a + a) = \frac{\tan a + \tan 2a}{1 - \tan a \tan 2a}$

$\Rightarrow \tan 3a - \tan a \tan 2a \tan 3a = \tan a + \tan 2a$

ហេតុនេះ $\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a \tan 2a \tan a$

សម្គាល់ បើ a_1, a_2, $a_3 \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k \in Z$) បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1 + a_2 + a_3 = 0$

គេបាន $\tan a_1 + \tan a_2 + \tan a_3 = \tan a_1 \tan a_2 \tan a_3$ ។

លំហាត់ ១៤

គេឲ្យ a, b, c, $d \in [0, \pi]$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d)$ និង

$\cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d)$ ។

បង្ហាញថា $2\cos(a - d) = 7\cos(b - c)$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d) \quad (1)$

$\cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d) \quad (2)$

តាម (1): $\sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d)$

$\Rightarrow \sin a - 8\sin d = 4\sin c - 7\sin b$

$\Rightarrow \sin^2 a - 16\sin a \sin d + 64\sin^2 d$

$= 16\sin^2 c - 56\sin b \sin c + 49\sin^2 b \quad (3)$

តាម (1): $\cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d)$

$\Rightarrow \cos a - 8\cos d = 4\cos c - 7\cos b$

$\Rightarrow \cos^2 a - 16\cos a \cos d + 64\cos^2 d$

$$=16\cos^2 c-56\cos b\cos c+49\cos^2 b \qquad (4)$$

បូក (3),(4) យើងបាន $1-16\cos(a-d)+64=16-56\cos(b-c)+49$

$$\Rightarrow 2\cos(a-d)=7\cos(b-c)$$

ហេតុនេះ $2\cos(a-d)=7\cos(b-c)$

លំហាត់ ១៥

សរសេរ $\sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x)$ ជាផលគុណកត្តា ។

ចម្លើយ

$$\sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x)$$

$$=2\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)\cos\left(\frac{x+z-2y}{2}\right)+2\sin\left(\frac{z-x}{2}\right)\cos\left(\frac{z-x}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x+z-2y}{2}\right)-\cos\left(\frac{z-x}{2}\right)\right]$$

$$=-4\sin\left(\frac{x-z}{2}\right)\sin\left(\frac{z-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$=-4\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-z}{2}\right)\sin\left(\frac{z-x}{2}\right)$$

សម្គាល់

បើ $a+b+c=0$ គេបាន $\sin a+\sin b+\sin c=-4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$ ។

លំហាត់ ១៦

បង្ហាញថា $(4\cos^2 9^\circ-3)(4\cos^2 27^\circ-3)=\tan 9^\circ$ ។

ចម្លើយ

$$\cos 3x=3\cos x-4\cos^3 x\Rightarrow 4\cos^2 x-3=\frac{\cos 3x}{\cos x},\forall x\neq\frac{k\pi}{2},k\in Z$$

យើងបាន $(4\cos^2 9^\circ-3)(4\cos^2 27^\circ-3)=\left(\frac{\cos 27^\circ}{\cos 9^\circ}\right)\left(\frac{\cos 81^\circ}{\cos 27^\circ}\right)$

$$= \frac{\cos 81^\circ}{\cos 9^\circ} = \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ}$$
$$= \tan 9^\circ$$

លំហាត់ ១៧

បង្ហាញថា $\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right) \geq \left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$ ចំពោះ $\forall a,b \geq 0$

និង $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right) \geq \left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{ab}{\sin x\cos x} \geq 1+2\sqrt{2ab}+2ab$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{ab}{\sin x\cos x} \geq 2\sqrt{2ab}+2ab$$

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x\cos x}}$ (*)

ដោយ $\sin 2x = 2\sin x\cos x \Rightarrow 2\sin x\cos x \leq 1$

$$\Rightarrow \sin x\cos x \leq \frac{1}{2}$$

(*) $\Rightarrow \frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x} \geq 2\sqrt{2ab}$ (1)

និង $\frac{ab}{\sin x\cos x} \geq 2ab$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{ab}{\sin x\cos x} \geq 2\sqrt{2ab}+2ab$

ហេតុនេះ $\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right) \geq \left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$

លំហាត់ ១៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sin A+\sin B+\sin C \leq 1$ ។

បង្ហាញថា $\min\{A+B, B+C, C+A\} < 30°$ ។

ចម្លើយ

WLOG ឧបមាថា $A \geq B \geq C$ គេបាន $A+B \geq C+A \geq B+C$

ហេតុនេះ ដើម្បីបង្ហាញថា $\min\{A+B, B+C, C+A\} < 30°$

យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $B+C < 30°$

យើងមាន $b+c > a \Rightarrow \sin B + \sin C > \sin A$ (ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស)

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C > 2\sin A$$

ដោយ $\sin A + \sin B + \sin C \leq 1$

យើងបាន $1 > 2\sin A \Rightarrow \sin A < \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 < A < 30°$ រឺ $150° < A < 180°$

បើ $A < 30° \Rightarrow A+B+C < 30°+30°+30° = 90°$ មិនពិត

ព្រោះ A, B, C ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ

$\Rightarrow A > 150° \Rightarrow B+C = 180° - A < 30°$

សរុបមក $\min\{A+B, B+C, C+A\} < 30°$

លំហាត់ ១៩

ចំពោះត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា

(a) $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} = 1$

(b) $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{\sqrt{3}}{9}$ ។

ចម្លើយ

(a)

យើងមាន $\dfrac{A+B+C}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

(b) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$

ដោយ A , B , $C\in(0,\pi)\Rightarrow \frac{A}{2},\ \frac{B}{2},\ \frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \tan\frac{A}{2},\ \tan\frac{B}{2},\ \tan\frac{C}{2}>0$

តាម AM-GM យើងបាន $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$

$$\ge 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{27}\ge\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2$$

ហេតុនេះ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$

លំហាត់ ២០

យក ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច ។ បង្ហាញថា

(a) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

(b) $\tan A\tan B\tan C\ge 3\sqrt{3}$ ។

ចម្លើយ

(a)

យើងមាន $A+B+C=\pi\Rightarrow A+B=\pi-C$

$\Rightarrow \tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$\Rightarrow \dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

$\Rightarrow \tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

ហេតុនេះ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

(b)

ដោយ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច គេបាន $\tan A$, $\tan B$, $\tan C>0$

តាម AM-GM យើងបាន $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$

$\Rightarrow \tan A\tan B\tan C\geq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$

យក $x=\tan A\tan B\tan C\Rightarrow x\geq 3\sqrt[3]{x}\Rightarrow \sqrt[3]{x^2}\geq 3\Rightarrow x\geq 3\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\tan A\tan B\tan C\geq 3\sqrt{3}$

លំហាត់ ២១

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។

បង្ហាញថា $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ ។

ច្រាសមកវិញ បើ x, y, z ជាចំនួនពិត បំពេញលក្ខខណ្ឌ $xy+yz+zx=1$

បង្ហាញថា មានត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\cot A=x$,

$\cot B=y$ និង $\cot C=z$ ។

ចម្លើយ

បើ ABC ជាត្រីកោណកែង

WLOG ឧបមថា $A=90^\circ\Rightarrow B+C=90^\circ$

យើងបាន $\cot(B+C)=0\Rightarrow \dfrac{\cot B\cot C-1}{\cot B+\cot C}=0\Rightarrow \cot B+\cot C=1$

ហេតុនេះ $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

បើ ABC មិនមែនជាត្រីកោណកែង

គេបាន $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ កំណត់

តាម លំហាត់ ២០ (a) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

$$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \tan B \tan C} = 1$$

$$\Rightarrow \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

ដោយ អនុវត្តន៍ $f : (0°,180°) \to (-\infty,+\infty)$

$x \mapsto y = \cot x$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ

ហេតុនេះបើ x, y, z ជាចំនួនពិត បំពេញលក្ខខណ្ឌ $xy + yz + zx = 1$

នោះ មានត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\cot A = x$,

$\cot B = y$ និង $\cot C = z$

លំហាត់ ២២

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។

បង្ហាញថា $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1$ ។

ច្រាសមកវិញ បើ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ បង្ហាញថា មានត្រីកោណ ABC បំពេញ

លក្ខខណ្ឌ $x = \sin\frac{A}{2}$, $y = \sin\frac{B}{2}$ និង $z = \sin\frac{C}{2}$ ។

ចម្លើយ

A, B, C ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ គេបាន $A + B + C = \pi$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= -\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \sqrt{\left(1 - \sin^2\frac{B}{2}\right)\left(1 - \sin^2\frac{C}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\left(1 - \sin^2\frac{B}{2}\right)\left(1 - \sin^2\frac{C}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1-\sin^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$$

ហេតុនេះ $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$

ដើម្បីបង្ហាញថា មានត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x=\sin\frac{A}{2}$, $y=\sin\frac{B}{2}$

និង $z=\sin\frac{C}{2}$ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា មានមុំ A, B, C បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$0<A$, B, $C<\pi$ និង $A+B+C=\pi$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$

យើងមាន $x^2+y^2+z^2+2xyz=1 \Rightarrow x=-yz+\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}$

ព្រោះ $x>0$

ដោយ $x>0 \Rightarrow \sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}>yz \Rightarrow 0<y^2+z^2<1$

$\Rightarrow 0<y$, $z<1$

គេបាន $y=\sin\frac{B}{2}$, $z=\sin\frac{C}{2}$ ដែល $0<B$, $C<\pi$

$$\Rightarrow x=-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \qquad (*)$$

បើ $x=\sin\frac{A}{2}$ ដែល $A+B+C=\pi \Rightarrow (*)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ម្យ៉ាងទៀត $y^2+z^2=\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}<1=\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{B}{2}>\sin^2\frac{C}{2} \Rightarrow \cos\frac{B}{2}>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$\Rightarrow \frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$ ព្រោះ $\cos x$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow B+C<\pi$ ហេតុនេះ $0<A<\pi$

សរុបមក មានត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x=\sin\frac{A}{2},\ y=\sin\frac{B}{2}$ និង $z=\sin\frac{C}{2}$

លំហាត់ ២៣

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

(a) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

(b) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3}{4}$

(c) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$

(d) $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

(e) $\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}\ge 6$

ចម្លើយ

(a) តាមលំហាត់ ៨ យើងបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

តាម AM-GM យើងមាន $(a+b)(b+c)(c+a)\ge\left(2\sqrt{ab}\right)\left(2\sqrt{bc}\right)\left(2\sqrt{ca}\right)$

$$=8abc$$

$$\Rightarrow\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\le\frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

(b) តាម លំហាត់ ២២ យើងមាន

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$$

$$\Rightarrow\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ដោយ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

យើងបាន $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\le 1-2\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{4}$

(c) ដោយ $1-\sin^2 x=\cos^2 x$

យើងបាន $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le 3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

(d) តាម AM-GM យើងបាន $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$

$$\ge 3\sqrt[3]{\left(\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\right)}$$

តាម (c) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$

យើងបាន $\frac{9}{4}\ge 3\sqrt[3]{\left(\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\right)}$

$$\Rightarrow\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2\le\frac{27}{64}$$

$$\Rightarrow\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

(e) តាម លំហាត់ ៨ យើងបាន $\csc\frac{A}{2}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\ge\frac{b+c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$

ដូចគ្នាដែរ យើងបាន $\csc\frac{B}{2}\ge\frac{c}{b}+\frac{a}{b}$, $\csc\frac{C}{2}\ge\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

ហេតុនេះ $\csc\frac{A}{2}+\csc\frac{B}{2}+\csc\frac{C}{2}\ge\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

$$\ge 6\sqrt[6]{\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{c}\right)}$$

$$= 6$$

លំហាត់ ២៤

ក្នុងត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា

(a) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$

(b) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cos B\cos C$

(c) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

(d) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$ ។

ច្រាសមកវិញ បើ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ បង្ហាញថា មានត្រីកោណមុំស្រួច ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x = \cos A$, $y = \cos B$ និង $z = \cos C$ ។

ចម្លើយ

(a) យើងមាន $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$$= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$$

$$= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= 2\sin C[-2\sin A\sin(-B)] = 4\sin A\sin B\sin C$$

(b) យើងមាន $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$

$$= 2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1$$

$$= -2\cos C\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1$$

$$= 2\cos C[\cos C - \cos(A-B)] - 1$$

$$= -4\cos C\sin\left(\frac{C+A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{C-A+B}{2}\right) - 1$$

$$= -4\cos C\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right) - 1$$

$$= -1 - 4\cos A\cos B\cos C$$

(c) យើងមាន $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

$$= \frac{1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C}{2}$$

$$= \frac{3-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)}{2}$$

$$= \frac{3-(-1-4\cos A\cos B\cos C)}{2}$$

$$= 2+2\cos A\cos B\cos C$$

(d) យើងមាន $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$$= \frac{1+\cos 2A+1+\cos 2B+1+\cos 2C}{2}$$

$$= \frac{3+(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)}{2}$$

$$= \frac{3-1-4\cos A\cos B\cos C}{2}$$

$$= 1-2\cos A\cos B\cos C$$

ហេតុនេះ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$

ដើម្បីបង្ហាញថា មានត្រីកោណមុំស្រួច ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x=\cos A$, $y=\cos B$ និង $z=\cos C$ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា មាន A, B, C ដែល

$A+B+C=\pi$ និង $0<A,\ B,\ C\le \frac{\pi}{2}$

យើងមាន $x^2+y^2+z^2+2xyz=1 \Rightarrow 0\le x^2,\ y^2<1 \Rightarrow 0\le x,\ y<1$

$\Rightarrow x=\cos A,\ y=\cos B$ ដែល $0<A,\ B\le \frac{\pi}{2}$

អនុគមន៍ $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xyz$ មាន $f_z{}'(x,y,z)=2z+2xy>0$

ចំពោះ $\forall x,\ y,\ z>0$

គេបាន សមីការ $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ មានរឹសយ៉ាងច្រើនមួយ

ដោយ $z=\cos C$ ដែល $A+B+C=\pi$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$\Rightarrow$ សមីការមានរឹសតែមួយគត់ គឺ $z=\cos C$

ម៉្យាងទៀត $x^2+y^2=\cos^2 A+\cos^2 B<1=\sin^2 A+\cos^2 A$

$$\Rightarrow \cos^2 B<\sin^2 A \Rightarrow \cos B<\sin A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$$

ព្រោះ $0 < A,\ B \le \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow B > \frac{\pi}{2} - A \Rightarrow A + B > \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < C \le \frac{\pi}{2}$$

ហេតុនេះ មាន A, B, C ដែល $A + B + C = \pi$ និង $0 < A,\ B,\ C \le \dfrac{\pi}{2}$

លំហាត់ ២៥

ក្នុងត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា

(a) $4R = \dfrac{abc}{[ABC]}$

(b) $2R^2 \sin A \sin B \sin C = [ABC]$

(c) $2R \sin A \sin B \sin C = r(\sin A + \sin B + \sin C)$

(d) $r = 4R \sin\dfrac{A}{2} \sin\dfrac{B}{2} \sin\dfrac{C}{2}$

(e) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \dfrac{abc}{2R^2}$ ។

ចម្លើយ

(a) តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស គេបាន $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

$$\Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{abc}{bc\sin A} = \frac{abc}{2[ABC]}$$

ដូចនេះ $4R = \dfrac{abc}{[ABC]}$

(b) យើងមាន $2R^2 \sin A \sin B \sin C = \dfrac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)\sin C$

$$= \frac{1}{2} ab\sin C = [ABC]$$

(c) យើងមាន $2[ABC] = bc\sin A = (a + b + c)r$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$

យើងបាន $4R^2 \sin A \sin B \sin C = (2R\sin A + 2R\sin B + 2R\sin C)r$

$$\Rightarrow 2R\sin A\sin B\sin C = (\sin A + \sin B + \sin C)r$$

(d) តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

យើងបាន $\sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1-\cos A}{2} = \dfrac{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)}{4bc}$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$$

$$= \frac{(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)}{4bc}$$

$$= \frac{(2s-2b)(2s-2c)}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $\sin\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

ហេតុនេះ $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

$$= \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{sabc} = \frac{[ABC]^2}{sabc}$$

$$= \frac{[ABC]}{s} \times \frac{[ABC]}{abc} = r\left(\frac{1}{4R}\right)$$

ដូចនេះ $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

(e) តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស យើងបាន

$a = 2R\sin A \Rightarrow a\cos A = 2R\sin A\cos A = R\sin 2A$

ស្រាយដូចគ្នា $b = R\sin 2B$, $c = R\sin 2C$

$\Rightarrow a\cos A + b\cos B + c\cos C = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

តាម លំហាត់ ២៤ $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

តាម (a),(b) យើងបាន $4R\sin A\sin B\sin C=\dfrac{abc}{2R^2}$

$$\Rightarrow \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{abc}{2R^3}$$

ហេតុនេះ $a\cos A+b\cos B+c\cos C=R\left(\dfrac{abc}{2R^3}\right)=\dfrac{abc}{2R^2}$

លំហាត់ ២៦

តាង s ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា

(a) $s=4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

(b) $s\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$ ។

ចម្លើយ

(a) យើងមាន $sr=[ABC]\Rightarrow s=\dfrac{[ABC]}{r}$

ដោយ $[ABC]=2R^2\sin A\sin B\sin C$

និង $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ (លំហាត់ ២៥)

យើងបាន $s=\dfrac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

(b) យើងមាន $s=4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

ដោយ $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\le\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ (លំហាត់ ២៣(d))

យើងបាន $s\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$

លំហាត់ ២៧

ក្នុងត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា

(a) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(b) $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$ ។

ចម្លើយ

(a) យើងមាន $\cos A+\cos B+\cos C$

$$=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$=1-4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(b)

យើងមាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

តាម លំហាត់ ២៥(c) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

យើងមាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$ (*)

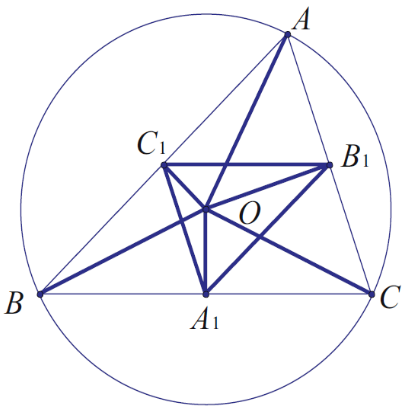
តាមរូបមន្ត Euler $OI^2=R^2-2Rr$ ដែល O និង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង ក្នុងរៀងគ្នានៃត្រីកោណ

ដោយ $OI^2\geq 0\Rightarrow R^2-2Rr\geq 0\Rightarrow\frac{r}{R}\leq\frac{1}{2}$

ហេតុនេះ $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$

សម្គាល់

(*) អាចត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ដូចខាងក្រោម



យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC

A_1 , B_1 , C_1 ជាចំណោលកែងនៃ O លើ BC , CA , AB រៀងគ្នា

$\Rightarrow A_1$, B_1 , C_1 ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ BC , CA , AB រៀងគ្នា

យើងមាន $\angle AOB = 2C$ (មុំផ្ចិត និង មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)

ត្រីកោណ AOB ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល $C \Rightarrow \angle ABO = \dfrac{\pi}{2} - C$

យើងបាន $\sin \angle ABO = \cos C$ ដោយ $OC_1 = R \sin \angle ABO$

$\Rightarrow OC_1 = R\cos C$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $OA_1 = R\cos A$, $OB_1 = R\cos B$

$\Rightarrow OA_1 + OB_1 + OC_1 = R(\cos A + \cos B + \cos C)$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C = \frac{OA_1 + OB_1 + OC_1}{R} \qquad (i)$$

អនុវត្តន៍ទ្រឹស្ដីបទ Ptolemy ចំពោះចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ OA_1CB_1 , OB_1AC_1 និង OC_1BA_1 យើងបាន

$$A_1B_1 \cdot OC = A_1C \cdot OB_1 + CB_1 \cdot OA_1 \qquad (1)$$

$$B_1C_1 \cdot OA = B_1A \cdot OC_1 + AC_1 \cdot OB_1 \qquad (2)$$

$$C_1A_1 \cdot OB = C_1B \cdot OA_1 + BA_1 \cdot OC_1 \qquad (3)$$

ដោយ $OA=OB=OC=R$, $BA_1=A_1C$, $CB_1=B_1A$, $AC_1=C_1B$, $AB=2A_1B_1$, $BC=2B_1C_1$ និង $CA=2C_1A_1$

តាង s ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ $ABC \Rightarrow s=A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1$

បូក (1),(2),(3) យើងបាន

$$Rs=OA_1(s-A_1B)+OB_1(s-B_1C)+OC_1(s-C_1A)$$
$$=s(OA_1+OB_1+OC_1)-[ABC]$$
$$=s(OA_1+OB_1+OC_1)-rs$$
$$\Rightarrow OA_1+OB_1+OC_1=R+r$$

តាម (i) យើងបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

លំហាត់ ២៨

ក្នុងត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា

(a) $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

(b) $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

(c) $\sin A\sin B\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

(d) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge\frac{3}{4}$

(e) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$

(f) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\ge-\frac{3}{2}$

(g) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

ចម្លើយ

(a) បើ ABC មិនមែនជាត្រីកោណមុំស្រួច គេបាន $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

ព្រោះ $\cos A\cos B\cos C < 0$

បើ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច គេបាន $\cos A$, $\cos B$, $\cos C > 0$

តាម AM-GM យើងបាន $\cos A\cos B\cos C \le \left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3$

ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2}$ (លំហាត់ ២៧(b))

យើងបាន $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$

(b) តាង $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x \Rightarrow f''(x)=-\sin x<0$

ចំពោះគ្រប់ $x\in(0,\pi)\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $(0,\pi)$

តាមវិសមភាព Jensen យើងបាន

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \le f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \sin A+\sin B+\sin C \le 3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(c) ដោយ $\sin x>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(0,\pi)$

តាម AM-GM យើងបាន $\sin A\sin B\sin C \le \left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3$

ដោយ $\sin A+\sin B+\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

យើងបាន $\sin A\sin B\sin C \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

(d) តាម លំហាត់ ២៤(d) យើងមាន

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

$$\Rightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$$

ដោយ $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C \ge 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

(e) យើងមាន $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

លំហាត់ ២៤ (c)

ដោយ $\cos A\cos B\cos C\le \frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\ge 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

(f) យើងមាន $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C$

$$=2\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right)-3$$

ដោយ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge \frac{3}{4}$

ហេតុនេះ $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\ge \frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

(g) តាម លំហាត់ ២៤(a) យើងមាន $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$$=4\sin A\sin B\sin C$$

ដោយ $\sin A\sin B\sin C\le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

$$\Rightarrow \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\le \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

លំហាត់ ២៩

បង្ហាញថា $\frac{\tan 3x}{\tan x}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ ចំពោះ $\forall x\ne \frac{k\pi}{6}$, $k\in \mathbb{Z}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\tan 3x=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\frac{\tan x\left(\sqrt{3}^2-\tan^2 x\right)}{1-\left(\sqrt{3}\tan x\right)^2}$

$$=\frac{\tan x\left(\sqrt{3}-\tan x\right)\left(\sqrt{3}+\tan x\right)}{\left(1-\sqrt{3}\tan x\right)\left(1+\sqrt{3}\tan x\right)}$$

$$= \tan x\left(\frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan x}\right)\left(\frac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{3}\tan x}\right)$$

$$= \tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$ ចំពោះ $\forall x \neq \frac{k\pi}{6}$

ដូចនេះ $\frac{\tan 3x}{\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

លំហាត់ ៣០

គេឲ្យ $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\ldots(1+\tan 45^\circ) = 2^n$ ។ គណនា n ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១

យើងមាន $1+\tan k^\circ = 1 + \frac{\sin k^\circ}{\cos k^\circ} = \frac{\cos k^\circ + \sin k^\circ}{\cos k^\circ} = \frac{\sqrt{2}\cos(45^\circ - k^\circ)}{\cos k^\circ}$

គេបាន $(1+\tan k^\circ)[1+\tan(45^\circ - k^\circ)]$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}\cos(45^\circ - k^\circ)}{\cos k^\circ}\right]\left[\frac{\sqrt{2}\cos k^\circ}{\cos(45^\circ - k^\circ)}\right]$$

$$= 2$$

យើងបាន $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\ldots(1+\tan 45^\circ)$

$$= (1+\tan 1^\circ)(1+\tan 44^\circ)\ldots(1+\tan 22^\circ)(1+\tan 23^\circ)(1+\tan 45^\circ)$$

$$= 2^{23}$$

ដូចនេះ $n = 23$

របៀបទី ២

យើងមាន $(1+\tan k^\circ)[1+\tan(45-k)^\circ]$

$$= 1 + \tan(45-k)^\circ + \tan k^\circ + \tan k^\circ \tan(45-k)^\circ$$

ដោយ $1 = \tan 45^\circ = \tan[k^\circ + (45-k)^\circ] = \frac{\tan k^\circ + \tan(45-k)^\circ}{1 - \tan k^\circ \tan(45-k)^\circ}$

$\Rightarrow \tan k^\circ + \tan(45-k)^\circ = 1 - \tan k^\circ \tan(45-k)^\circ$

យើងបាន $(1+\tan k^\circ)[1+\tan(45-k)^\circ]$

$= 1 + 1 - \tan k^\circ \tan(45-k)^\circ + \tan k^\circ \tan(45-k)^\circ$

$= 2$

ហេតុនេះ $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)\ldots(1+\tan 45^\circ)$

$= (1+\tan 1^\circ)(1+\tan 44^\circ)\ldots(1+\tan 22^\circ)(1+\tan 23^\circ)(1+\tan 45^\circ)$

$= 2^{23}$

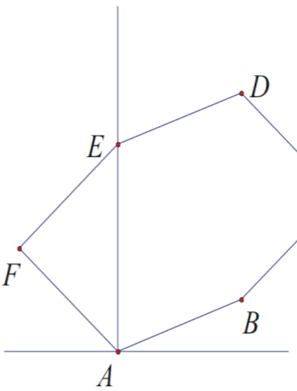
សរុបមក $n = 23$

លំហាត់ ៣១

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេគេមានចំណុច $A(0,0)$ និង $B(b,2)$ ។ យក $ABCDEF$ ជាឆកោណនិយ័តប៉ោងបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\angle FAB = 120^\circ$, $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$ និង អរដោនេ y នៃកំពូលនីមួយៗរបស់វាខុសពីធាតុនៃសំណុំ $\{0,2,4,6,8,10\}$ ។ ក្រឡាផ្ទៃនៃឆកោណនេះអាចត្រូវបានសរសេរជារាង $m\sqrt{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ n ចែកមិនដាច់នឹងការេនៃចំនួនបឋម ។ គណនា $m+n$ ។

ចម្លើយ

WLOG ឧបមថា $b > 0$ (ករណីផ្សេងពីនេះ
យើងធ្វើបំលែងឆ្លុះកំពូលទាំងអស់របស់ឆកោណនិយ័តនឹងអ័ក្សអរដោនេ)



យក $C(c,c')$, $D(d,d')$, $E(e,e')$, $F(f,f')$

បើ $c'=4 \Rightarrow AB=BC \Rightarrow b^2+4=(b-c')^2+4 \Rightarrow c'(c'-2b)=0$

កាលណា $c'=0$ រឺ $c'=2b$

បើ $c'=0 \Rightarrow$ $ABCDEF$ ជាឆកោណផត

បើ $c'=2b \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=(b,2) \Rightarrow A$, B, C រត់ត្រង់ជួរ

$\Rightarrow$ $ABCDEF$ ជាឆកោណផត

យើងបាន $c'\neq 4$ $\Rightarrow f'=4$

ដោយ $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow (f,4)=(d-c,d'-c') \Rightarrow d'-c'=4$

$\Rightarrow d'=10$, $c'=6$ ព្រោះ c', $d'\in\{6,8,10\}$

គេបាន $C(c,6)$, $D(d,10) \Rightarrow E(e,8)$

ម្យ៉ាងទៀត $BC=CD \Rightarrow (c-b)^2+4^2=(c-d)^2+4^2$

$$\Rightarrow b^2-d^2-2bc+2cd=0$$
$$\Rightarrow (b-d)(b+d-2c)=0$$
$$\Rightarrow b=d$$

ព្រោះ បើ $b=-d+2c \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow B$, C, D រត់ត្រង់ជួរ

$\Rightarrow$ $ABCDEF$ ជាឆកោណផត

តាម $b=d$ និង $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED} \Rightarrow (b,2)=(b-e,2) \Rightarrow e=0$

គេបាន $f<0$

ហេតុនេះ $[ABCDEF]=[ABDE]+[AEF]+[BCD]$

$$=[ABDE]+2[AEF]=bAE-fAE=8(b-f)$$

របៀបទី ១

តាមទ្រឹស្តីបទពិតាគ័រ គេបាន $f^2+16=AF^2=a^2=AB^2=b^2+4$ (1)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស ចំពោះត្រីកោណ FAB យើងបាន

$$BF^2=AF^2+AB^2-2AF\cdot AB\cos\angle BAF$$

$$\Rightarrow (b-f)^2+4=a^2+a^2-2a^2\cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow 3a^2=(b-f)^2+4 \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a^2 = f^2 + 16 \\ a^2 = b^2 + 4 \\ 3a^2 = (b - f)^2 + 4 \end{cases}$

យើងបាន $a = 4\sqrt{\frac{7}{3}}$, $b = \frac{10}{\sqrt{3}}$ និង $f = -\frac{8}{\sqrt{3}}$

ហេតុនេះ $[ABCDEF] = 8\left(\frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}}\right) = 48\sqrt{3} \Rightarrow m + n = 51$

របៀបទី ២

តាង α ជាមុំផ្គុំដោយ AB នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

$\Rightarrow \alpha + 120°$ ជាមុំផ្គុំដោយ AF នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

យើងមាន $4 = a\sin(120° + \alpha) = \frac{a\sqrt{3}\cos\alpha}{2} - \frac{a\sin\alpha}{2}$ ដោយ $a\sin\alpha = 2$

$$\Rightarrow \frac{a\sqrt{3}\cos\alpha}{2} - 1 = 4 \Rightarrow a\cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

យើងបាន $b = a\cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{3}}$

និង $f = a\cos(120° + \alpha) = -\frac{a\cos\alpha}{2} - \frac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{2} = -\frac{8}{\sqrt{3}}$

ហេតុនេះ $[ABCDEF] = 8\left(\frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}}\right) = 48\sqrt{3} \Rightarrow m + n = 51$

សម្គាល់

កំពូលនៃឆកោណ គឺ $A(0,0)$, $B\left(\frac{10}{\sqrt{3}},2\right)$, $C(6\sqrt{3},6)$, $D\left(\frac{10}{\sqrt{3}},10\right)$,

$E(0,8)$ និង $F\left(-\frac{8}{\sqrt{3}},4\right)$

លំហាត់ ៣២

បើសិនជា Casio របស់អ្នកខូចប៊ូតុងសម្រាប់គណនាចម្រាសនៃចំនួនមួយ បញ្ជាក់ថា

អ្នកនៅតែអាចគណនាចម្រាសនៃចំនួនមួយដោយប្រើតែបណ្ដាក់នៃប៊ូតុងត្រីកោណមាត្រ ដូចជា $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ និង $\tan^{-1}$ ។

ចម្លើយ

ចំពោះ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ យើងបាន $\cos^{-1}\sin\theta=\frac{\pi}{2}-\theta$ និង $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

ហេតុនេះ $\forall x>0$ គេបាន $\tan\cos^{-1}\sin\tan^{-1}x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{x}$

លំហាត់ ៣៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $A-B=120°$ និង $R=8r$ ។

គណនា $\cos C$ ។

ចម្លើយ

តាម លំហាត់ ២៥ (d) យើងបាន $2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{16}$

$$\Leftrightarrow\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow\sin^2\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{16}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{4}\right)^2=0$$

កាលណា $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{4}$

ហេតុនេះ $\cos C=1-\sin^2\frac{C}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

លំហាត់ ៣៤

ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា $\frac{a-b}{a+b}=\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)\tan\frac{C}{2}$ ។

ចម្លើយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស យើងបាន $a = R\sin A$, $b = R\sin B$ និង $C = R\sin C$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{R\sin A - R\sin B}{R\sin A + R\sin B} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} = \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)\cot\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)\tan\frac{C}{2}$$

លំហាត់ ៣៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{a}{b} = 2+\sqrt{3}$ និង $\angle C = 60°$ ។

គណនា $\angle A$ និង $\angle B$ ។

ចម្លើយ

តាមលំហាត់ ៣៤ យើងមាន $\frac{a-b}{a+b} = \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)\tan\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1} = \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)\tan\frac{C}{2}$$

ដោយ $\frac{a}{b} = 2+\sqrt{3}$ និង $\angle C = 60°$

យើងបាន $\sqrt{3}\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow A - B = 90°$ (1)

តែ $A + B = 180° - C = 120°$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $A = 105°$ និង $B = 15°$

លំហាត់ ៣៦

គេឲ្យ a , b , $c \neq -1$ និង 1 បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=abc$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$ ។

ចម្លើយ

តាង $a=\tan x$, $b=\tan y$ និង $c=\tan z$ ដែល x , y , $z \neq \pm\frac{\pi}{4}+k\pi$

ដោយ $a+b+c=abc \Rightarrow \tan(x+y+z)=0$ (សម្គាល់នៃលំហាត់ ២០ (a))

យើងបាន $\tan(2x+2y+2z)=\frac{2\tan(x+y+z)}{1-\tan^2(x+y+z)}=0$

$$\Rightarrow \tan 2x+\tan 2y+\tan 2z=\tan 2x\tan 2y\tan 2z$$

$$\Rightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}+\frac{2\tan y}{1-\tan^2 y}+\frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$$

$$=\frac{8\tan x\tan y\tan z}{(1-\tan^2 x)(1-\tan^2 y)(1-\tan^2 z)}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x}{1-\tan^2 x}+\frac{\tan y}{1-\tan^2 y}+\frac{\tan z}{1-\tan^2 z}$$

$$=\frac{4\tan x\tan y\tan z}{(1-\tan^2 x)(1-\tan^2 y)(1-\tan^2 z)}$$

ហេតុនេះ $\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$

លំហាត់ ៣៧

បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត លុះត្រាតែ

$a\cos B+b\cos C+c\cos A=\frac{a+b+c}{2}$ ។

ចម្លើយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$ និង $c=2R\sin C$

យើងបាន $a\cos B+b\cos C+c\cos A=\frac{a+b+c}{2}$

$$\Leftrightarrow 2R\sin A\cos B+2R\sin B\cos C+2R\sin C\cos A$$

$$= R(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin A\cos B + 2\sin B\cos C + 2\sin C\cos A = \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A+B) + \sin(A-B) + \sin(B+C) + \sin(B-C) + \sin(C+A)$$

$$+ \sin(C-A) = \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin C + \sin(A-B) + \sin B + \sin(B-C) + \sin B + \sin(C-A)$$

$$= \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B) + \sin(B-C) + \sin(C-A) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\sin\left(\frac{C-A}{2}\right) = 0$$ (តាម លំហាត់ ១៥)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{B-C}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{C-A}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A-B=0 \\ B-C=0 \\ C-A=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B \\ B=C \\ C=A \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow ABC$ ជាត្រីកោណសមបាត

លំហាត់ ៣៨

គណនា $\cos a\cos 2a\cos 3a\ldots\cos 999a$ ចំពោះ $a = \frac{2\pi}{1999}$ ។

ចម្លើយ

តាង $P = \cos a\cos 2a\cos 3a\ldots\cos 999a$

$$Q = \sin a\sin 2a\sin 3a\ldots\sin 999a$$

$$\Rightarrow 2^{999}PQ = (2\sin a\cos a)(2\sin 2a\cos 2a)\ldots(2\sin 999a\cos 999a)$$

$$= \sin 2a\sin 4a\ldots\sin 1998a$$

$$= (\sin 2a\sin 4a\ldots\sin 998a)[-\sin(2\pi - 1000a)]\ldots$$

$$[-\sin(2\pi - 1998a)]$$

$$= \sin 2a\sin 4a\ldots\sin 998a\sin 999a.\sin 997a\ldots\sin a = Q$$

ដោយ $Q \neq 0$

ហេតុនេះ $P = \dfrac{1}{2^{999}}$

លំហាត់ ៣៩

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\dfrac{\sec^4\alpha}{\tan^2\beta} + \dfrac{\sec^4\beta}{\tan^2\alpha}$ ចំពោះ $\forall\alpha\ ,\ \beta \neq \dfrac{k\pi}{2}\ ,\ k \in \mathrm{Z}$ ។

ចម្លើយ

តាង $a = \tan^2\alpha$ និង $b = \tan^2\beta$

យើងបាន $\dfrac{\sec^4\alpha}{\tan^2\beta} + \dfrac{\sec^4\beta}{\tan^2\alpha} = \dfrac{(1+a)^2}{b} + \dfrac{(1+b)^2}{a}$

$$= \frac{1+2a+a^2}{b} + \frac{1+2b+b^2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{2a}{b} + \frac{a^2}{b} + \frac{1}{a} + \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a}$$

$$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

តាម AM-GM យើងបាន

$$\frac{\sec^4\alpha}{\tan^2\beta} + \frac{\sec^4\beta}{\tan^2\alpha} \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{a^2}{b}\right)\left(\frac{b^2}{a}\right)} + 4\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)} = 4+4=8$$

សមភាពពេល $a = b = 1 \Rightarrow \tan^2\alpha = \tan^2\beta = 1$

$$\Rightarrow a = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ និង } b = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$$

លំហាត់ ៤០

រកគ្រប់គូ $(x, y) \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)^2$ បើគេដឹងថា $\dfrac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{\frac{y^2}{2}}} + \dfrac{(\cos x)^{2y}}{(\sin x)^{\frac{y^2}{2}}} = \sin 2x$ ។

ចម្លើយ

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{\frac{y^2}{2}}}+\frac{(\cos x)^{2y}}{(\sin x)^{\frac{y^2}{2}}}\geq 2(\sin x\cos x)^{y-\frac{y^2}{4}}$ (*)

ដោយ $\frac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{\frac{y^2}{2}}}+\frac{(\cos x)^{2y}}{(\sin x)^{\frac{y^2}{2}}}=\sin 2x$

$\Rightarrow \sin 2x\geq 2(\sin x\cos x)^{y-\frac{y^2}{4}}$

$\Rightarrow \sin x\cos x\geq (\sin x\cos x)^{y-\frac{y^2}{4}}$ តែ $\sin x\cos x<1$

យើងបាន $1\leq y-\frac{y^2}{4}\Rightarrow (y-2)^2\leq 0\Rightarrow y-2=0\Rightarrow y=2$

ចំពោះ $y=2$ យើងបាន (*)ក្លាយជាសមភាព

ហេតុនេះ $\frac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{\frac{y^2}{2}}}=\frac{(\cos x)^{2y}}{(\sin x)^{\frac{y^2}{2}}}\Rightarrow (\sin x)^{2y-\frac{y^2}{2}}=(\cos x)^{2y-\frac{y^2}{2}}$

$\Rightarrow \sin x=\cos x$

$x=\frac{\pi}{4}$ ព្រោះ $0<x<\frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $x=\frac{\pi}{4}$, $y=2$

លំហាត់ ៤១

បង្ហាញថា $\cos 1^\circ$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

សម្រាយ

សន្មតថា $\cos 1^\circ$ ជាចំនួនសនិទាន $\Rightarrow \cos 2^\circ=2\cos^2 1^\circ-1$ ជាចំនួនសនិទាន

ឧបមថា ពិតដល់ k , $k\leq n$ គឺ $\cos k^\circ$ ជាចំនួនសនិទាន

បង្ហាញថា $\cos(n+1)^\circ$ ជាចំនួនសនិទាន

យើងមាន $\cos(n+1)^\circ+\cos(n-1)^\circ=2\cos 1^\circ\cos n^\circ$

$\Rightarrow \cos(n+1)^\circ=2\cos 1^\circ\cos n^\circ-\cos(n-1)^\circ$ ជាចំនួនសនិទាន

ព្រោះ $\cos 1^\circ$, $\cos(n-1)^\circ$ និង $\cos n^\circ$ ជាចំនួនសនិទាន

គេបាន $\cos n^\circ$ ជាចំនួនសនិទាន ចំពោះ $\forall n \in \mathrm{IN}$ $\quad(*)$

ដោយ $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន

$\Rightarrow (*)$ ជាសំណើមិនពិត មានន័យថា ការសន្មតមិនពិត

ដូចនេះ $\cos 1^\circ$ ជាចំនួនអសនិទាន

ពន្យល់បន្ថែមលើ Strong Induction

តាមការសន្មតថា $\cos 1^\circ$ និង $\cos 2^\circ$ ជាចំនួនសនិទាន

តាម $(*)$ គេបាន $\cos 3^\circ$ ជាចំនួនសនិទាន

បើ $\cos 2^\circ$ និង $\cos 3^\circ$ ជាចំនួនសនិទាន

តាម $(*)$ គេបាន $\cos 4^\circ$ ជាចំនួនសនិទាន

ដំណើរការបែបនេះ ធ្វើឲ្យយើងអាចទាញបានសេចក្តីសន្និដ្ឋានថា $\cos n^\circ$ ជាចំនួនសនិទាន ។

លំហាត់ ៤២

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $S = (1-x_1)(1-y_1)+(1-x_2)(1-y_2)$ បើគេដឹងថា៖ $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = c^2$ ។

ចម្លើយ

រកតម្លៃអតិបរមានៃ S

ឧបមាថា x_1, x_2 ជាកូអរដោនេនៃចំណុច $P(x_1, x_2)$ ដែលស្ថិតនៅលើរង្វង់ផ្ចិត O កាំ c

យើងតាង $x_1 = c\cos\theta$ និង $x_2 = c\sin\theta$

ដូចគ្នាដែរ $y_1 = c\cos\phi$ និង $y_2 = c\sin\phi$

យើងបាន៖ $S = (1-x_1)(1-y_1)+(1-x_2)(1-y_2)$

$= 1 - y_1 - x_1 + x_1y_1 + 1 - y_2 - x_2 + x_2y_2$

$= 2 - (x_1 + y_1 + x_2 + y_2) + (x_1y_1 + x_2y_2)$

$= 2 - (\cos\theta + \sin\theta + \cos\phi + \sin\phi) + c^2(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)$

$$= 2 - \sqrt{2}c\left[\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right)\right] + c^2$$

$$\leq 2 - c\sqrt{2} + c^2 = \left(\sqrt{2} - c\right)^2$$

សមភាពពេល $\theta = \phi = \frac{5\pi}{4}$ គឺ $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = -\frac{c\sqrt{2}}{2}$

សរុបមក $S_{\max} = \left(\sqrt{2} - c\right)^2$

លំហាត់ ៤៣

បង្ហាញថា $\frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b} \geq \sec(a - b)$ ចំពោះ $0 < a\,,\ b < \frac{\pi}{2}$ ។

សម្រាយ

តាមទម្រង់ Engel នៃវិសមភាព Cauchy-Schwarz

យើងបាន $\frac{\sin^3 a}{\sin b} + \frac{\cos^3 a}{\cos b} = \frac{\sin^4 a}{\sin a \sin b} + \frac{\cos^4 a}{\cos a \cos b}$

$$\geq \frac{\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)^2}{\cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

លំហាត់ ៤៤

គេឲ្យ $\sin\alpha\cos\beta = -\frac{1}{2}$ ។ គណនា $\cos\alpha\sin\beta$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = -\frac{1}{2} + \sin\beta\cos\alpha$

ដោយ $-1 \leq \sin(\alpha + \beta) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin\beta\cos\alpha \leq \frac{3}{2}$

គេបាន $-\frac{1}{2} \leq \cos\alpha\sin\beta \leq \frac{1}{2}$ វិសមភាពនេះគ្រាន់តែបញ្ជាក់ពីដែនកំណត់នៃ $\cos\alpha\sin\beta$ តែប៉ុណ្ណោះ តែមិនអាចបញ្ជាក់បានថា $\cos\alpha\sin\beta$ យកតម្លៃទាំងអស់ រឺ យ៉ាងណានោះទេក្នុងចន្លោះ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

ពិនិត្យ $(\cos\alpha\sin\beta)^2 = (1-\sin^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$

$$= 1-(\sin^2\alpha+\cos^2\beta)+\sin^2\alpha\cos^2\beta$$

$$= \frac{5}{4}-(\sin\alpha+\cos\beta)^2+2\sin\alpha\cos\beta$$

$$= \frac{1}{4}-(\sin\alpha+\cos\beta)^2$$

តាង $x=\sin\alpha$, $y=\cos\beta \Rightarrow -1\le x,\ y\le 1$ និង $xy=-\frac{1}{2}$

$s=\sin\alpha+\cos\beta = x+y$

យើងបាន x, y ជាឫសនៃសមីការ $X^2-sX-\frac{1}{2}=0$ (*)

$\Rightarrow \{x,y\}=\left\{\frac{s+\sqrt{s^2+2}}{2},\frac{s-\sqrt{s^2+2}}{2}\right\}$ យើងបាន $\begin{cases}\frac{s-\sqrt{s^2+2}}{2}\ge -1\\ \frac{s+\sqrt{s^2+2}}{2}\le 1\end{cases}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\le s\le\frac{1}{2}$

ហេតុនេះ សមីការ (*) មានឫសចំពោះគ្រប់ $s\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

ដោយ $\sin x$, $\cos x$ ជាអនុវត្តន៍ពេញពី $\mathrm{IR}\to[-1,1]$

$\Rightarrow$ រ៉ង់នៃ s គឺ $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ ចំពោះ $xy=-\frac{1}{2}\Rightarrow$ រ៉ង់នៃ s^2 ស្មើនឹង $\left[0,\frac{1}{4}\right]$

$\Rightarrow$ រ៉ង់នៃ $(\cos\alpha\sin\beta)^2$ ស្មើនឹង $\left[0,\frac{1}{4}\right]$

ដូចនេះ តម្លៃដែលអាចមាន រឺ រ៉ង់នៃ $\cos\alpha\sin\beta$ គឺ $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

លំហាត់ ៤៥

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា

$(ab+bc+ca-1)^2 \le (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ ។

សម្រាយ

តាង $a=\tan x$, $b=\tan y$ និង $c=\tan z$ ចំពោះ $-\frac{\pi}{2}\le x\ ,\ y\ ,\ z\le\frac{\pi}{2}$

យើងបាន $(ab+bc+ca-1)^2 \le (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$

$\Leftrightarrow (\tan x\tan y+\tan y\tan z+\tan z\tan x-1)^2$

$\quad \le (1+\tan^2 x)(1+\tan^2 y)(1+\tan^2 z)$

$\Leftrightarrow (\tan x\tan y+\tan y\tan z+\tan z\tan x-1)^2$

$\quad \le \dfrac{1}{\cos^2 x\cos^2 y\cos^2 z}$

$\Leftrightarrow [\cos x\cos y\cos z(\tan x\tan y+\tan y\tan z+\tan z\tan x-1)]^2 \le 1$

$\Leftrightarrow (\cos z\sin x\sin y+\cos x\sin y\sin z+\cos y\sin z\sin x-\cos x\cos y\cos z)^2$

$\quad \le 1$

$\Leftrightarrow [\sin z\sin(x+y)-\cos z\cos(x+y)]^2 \le 1$

$\Leftrightarrow [\cos(x+y+z)]^2 \le 1$ ពិត

ដូចនេះ $(ab+bc+ca-1)^2 \le (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$

លំហាត់ ៤៦

បង្ហាញថា $(\sin x+a\cos x)(\sin x+b\cos x)\le 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (*)។

សម្រាយ

បើ $\cos x=0$ គេបាន (*) $\Leftrightarrow \sin^2 x\le 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ពិត

បើ $\cos x\ne 0$ តាង $t=\tan x$

គេបាន $(\sin x+a\cos x)(\sin x+b\cos x)\le 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$\quad \Leftrightarrow (\tan x+a)(\tan x+b)\le \left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\sec^2 x$

$$\Leftrightarrow (t+a)(t+b) \le \left[1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right](1+t^2)$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t(a+b) + ab \le 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + t^2 + t^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2 - (a+b)t + 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)t - 1\right]^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \ge 0$$ ពិត

លំហាត់ ៤៧

បង្ហាញថា $\sum_{i=1}^{n}|\sin a_i| + \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\right| \ge 1$ ចំពោះ $\forall n \in \mathrm{IN}$ ។

សម្រាយ

បើ $n=1$ វិសមភាពសមមូលនឹង $|\sin a_1| + |\cos a_1| \ge 1$ ពិត

ព្រោះ $|\sin a_1| + |\cos a_1| \ge \sin^2 a_1 + \cos^2 a_1 = 1$

ឧបមាថា ពិតដល់ $n = k$ គឺ $\sum_{i=1}^{k}|\sin a_i| + \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\right| \ge 1$

បង្ហាញថា $\sum_{i=1}^{k+1}|\sin a_i| + \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)\right| \ge 1$

យើងមាន $\sum_{i=1}^{k}|\sin a_i| + \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\right| \ge 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1}|\sin a_i| + \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)\right| \ge 1 + |\sin a_{k+1}| + \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)\right| - \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\right|$$

តាង $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_k \Rightarrow s_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} a_k \Rightarrow s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1}|\sin a_i| + \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)\right| \geq 1 + |\sin a_{k+1}| + |\cos s_{k+1}| - |\cos s_k|$$

យើងបាន $|\cos s_k| = |\cos(s_{k+1} - a_{k+1})| = |\cos s_{k+1}\cos a_{k+1} + \sin s_{k+1} s_k|$

$$\leq |\cos s_{k+1}||\cos a_{k+1}| + |\sin s_{k+1}||\sin a_{k+1}|$$

$$\leq |\cos s_{k+1}| + |\sin a_{k+1}|$$

$$\Rightarrow |\cos s_{k+1}| + |\sin a_{k+1}| - |\cos s_k| \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1}|\sin a_i| + \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)\right| \geq 1$$

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{n}|\sin a_i| + \left|\cos\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\right| \geq 1$

លំហាត់ ៤៨

(Russia 2003, By Nazar Agakhanov)

រកគ្រប់មុំ α ដើម្បីឲ្យសំណុំមានបីធាតុ $S = \{\sin\alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}$ ស្មើនឹងសំណុំ $T = \{\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\}$ ។

ចម្លើយ

S , T ជាសំណុំដែលមានបីធាតុ $\Rightarrow \sin\alpha$, $\sin 2\alpha$ និង $\sin 3\alpha$ ខុសគ្នាពីរៗ

និង $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$ និង $\cos 3\alpha$ ខុសគ្នាពីរៗ

យើងមាន $T = S$

$$\Rightarrow \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha(2\cos\alpha + 1) = \cos 2\alpha(2\cos\alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow (2\cos\alpha + 1)(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) = 0$$

យើងបាន $\left[\begin{array}{l} 2\cos\alpha + 1 = 0 \\ \cos 2\alpha - \sin 2\alpha = 0 \end{array}\right.$

បើ $2\cos\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

ចំពោះ $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ គេបាន S និង T មិនមែនជាសំណុំមានបីធាតុ

បើ $\cos 2\alpha = \sin 2\alpha \Rightarrow \tan 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

ចំពោះ $k \in \mathrm{Z}$ គេបាន $k = 4k_1, 4k_1 + 1, 4k_1 + 2$ និង $4k_1 + 3$

ករណីទាំងអស់ យើងបាន $S = T$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

លំហាត់ ៤៩

យក $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ជាស្វ៊ីតនៃពហុធាបំពេញលក្ខខណ្ឌ៖ $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ និង $T_{i+1} = 2xT_i(x) - T_{i-1}(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន i ។

ពហុធា $T_n(x)$ ហៅថា ពហុធា *Chebyshev* ទី *n* ។

ក/ បង្ហាញថា៖ $T_{2n+1}(x)$ និង $T_{2n}(x)$ ជាអនុគមន៍សេស និង គូរៀងគ្នា

ខ/ បង្ហាញថា៖ $T_{n+1}(x) > T_n(x) > 1$ ចំពោះចំនួនពិត $x > 1$

គ/ បង្ហាញថា៖ $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ ចំពោះចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n

ឃ/ រកគ្រប់រឹសនៃពហុធា $T_n(x)$

ង/ រកគ្រប់រឹសនៃពហុធា $P_n(x) = T_n(x) - 1$ ។

សម្រាយ

ក/ ប្រើវិចារកំណើនបែប Strong Induction

យើងមាន៖ $T_0 = 1$ និង $T_1 = x$ ជាអនុគមន៍គូ និង សេសរៀងគ្នា

ឧបមាថា៖ T_{2n-1} និង T_{2n} ជាអនុគមន៍សេស និង គូរៀងគ្នា

គេបាន៖

១/ $T_{2n+1} = 2xT_{2n} - T_{2n-1}$ ជាអនុគមន៍សេស ព្រោះ T_{2n} គូ $\Rightarrow 2xT_{2n}$ គូ

២/ $T_{2n+2} = 2xT_{2n+1} - T_{2n}$ ជាអនុគមន៍គូ ព្រោះ T_{2n+1} សេស $\Rightarrow 2xT_{2n+1}$ សេស

ខ/ ប្រើវិចារកំណើនបែប Strong Induction

ចំពោះ $n = 0 : T_1(x) = x > 1 = T_0(x)$ ករណី $x > 1$

ឧបមាថា៖ $T_{n+1}(x) > T_n(x) > 1$ ចំពោះ $x > 1$ និង $n \le k$ ដែល k ជាចំនួនគត់ណាមួយមិនអវិជ្ជមាន ចំពោះ $n = k + 1$ យើងបាន៖

$$T_{k+2}(x) = 2xT_{k+1}(x) - T_k(x) > 2T_{k+1}(x) - T_k(x)$$
$$= T_{k+1}(x) + T_{k+1}(x) - T_k(x) > T_{k+1}(x) \text{ ពិត}$$

គ/ ប្រើវិចារកំណើនបែប Strong Induction

$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ ពិតចំពោះ $n=0$ និង $n=1$

ឧបមាថា៖ $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ ចំពោះ $n\le k$ ដែល k ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានណាមួយ

ចំពោះ $n=k+1$ យើងបាន៖

$$T_{k+1}(\cos\theta)=2\cos\theta T_k(\cos\theta)-T_{k-1}(\cos\theta)$$
$$=2\cos\theta\cos k\theta-\cos[(k-1)\theta]$$

ដោយ $2\cos\theta\cos k\theta=\cos[(k+1)\theta]+\cos[(k-1)\theta]$

នាំអោយ $T_{k+1}(\cos\theta)=\cos[(k+1)\theta]$ ពិត

ឃ/ ដោយ T_n ជាពហុធាដឺក្រេទី $n\Rightarrow$ វាមានរឺស n ច្រើនបំផុត

តែ $y=\cos x$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយលើចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

តាម គ យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា T_n មាន n រឺសផ្សេងគ្នា

ដែលសំណុំនៃរឺសនោះកំណត់ដោយ $S=\left\{\cos\frac{k\pi}{2n}, k=1,3,\dots,2n-1\right\}$

ង/ តាម ក T_n ជាអនុគមន៍គូ រឺ សេស ហេតុនេះតាម ខ គេបាន៖

$|T_n(x)|>1$ ចំពោះ $x<-1$

ជាហេតុនាំអោយរឺសនៃ P_n ត្រូវយកចេញពីចន្លោះ $[-1,1]$

យើងសិក្សាលើពីរករណី៖

១/ បើ n គូ ចំនួនពិតមួយអាចជារឺសនៃ P_n កាលណា វាជាធាតុនៃសំណុំ

$$S_e=\left\{\cos\frac{k\pi}{n}, k=0,2,\dots,n\right\}$$

២/ បើ n សេស ចំនួនពិតមួយអាចជារឺសនៃ P_n កាលណា វាជាធាតុនៃសំណុំ

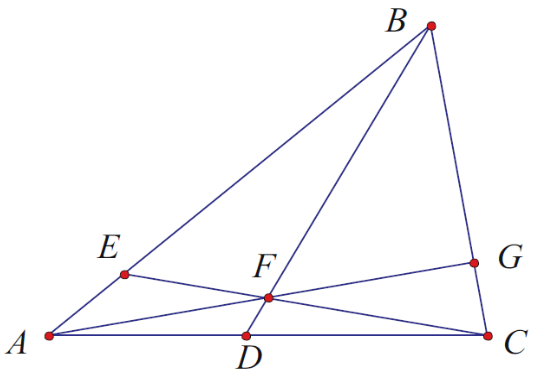
$$S_e=\left\{\cos\frac{k\pi}{n}, k=0,2,\dots,n-1\right\}$$

លំហាត់ ៥០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\angle BAC=40^\circ$ និង $\angle ABC=60^\circ$ ។

D, E ស្ថិតនៅលើជ្រុង AB , AC រៀងគ្នាដែល $\angle CBD = 40°$ និង $\angle BCE = 70°$ ។ អង្កត់ $[BD]$និង $[CE]$ប្រសព្វគ្នាត្រង់ F ។ បង្ហាញថា $AF \perp BC$ ។

ចម្លើយ



យើងមាន $\angle ABD = 20°$, $\angle BCA = 80°$ និង $\angle ACE = 10°$

យក G ជាចំណោលកែងនៃ A លើ BC

$\Rightarrow \angle BAG = 90° - \angle ABC = 30°$ និង $\angle CAG = 90° - \angle BCA = 10°$

យើងបាន $\dfrac{\sin\angle BAG \sin\angle ACE \sin\angle CBD}{\sin\angle CAG \sin\angle BCE \sin\angle ABD} = \dfrac{\sin 30° \sin 10° \sin 40°}{\sin 10° \cos 20° \sin 20°}$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin 10°)(2\sin 20° \cos 20°)}{\sin 10° \cos 20° \sin 20°} = 1$$

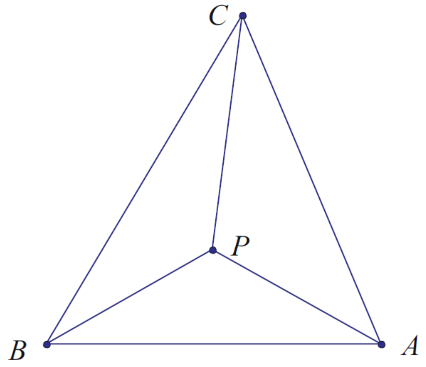
លំហាត់ ៥១

(IMO,1991)

យក S ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា យ៉ាងហោចណាស់មួយក្នុងចំណោមមុំ $\angle SAB$, $\angle SBC$ និង $\angle SCA \le 30°$ ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១



យក P ជាចំណុចនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ដែល $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \alpha$

ដោយ S ជាចំណុចមួយដែលនៅក្នុងមួយក្នុងចំណោមត្រីកោណ PAB, PBC,

$PCA \Rightarrow$ យ៉ាងហោចណាស់មួយក្នុងចំណោម $\angle SAB$, $\angle SBC$ និង $\angle SCA \le \alpha$

យើងមាន $\csc^2\alpha = \csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C$

តាម លំហាត់ ២៨(e) និង AM-GM យើងបាន

$$\frac{9}{4}\csc^2\alpha \ge \left(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C\right)\left(\csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C\right)$$

$$\ge 9 \Rightarrow \csc\alpha \ge 2 \Rightarrow \sin\alpha \le \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \le 30^\circ$$

ហេតុនេះ យ៉ាងហោចណាស់មួយក្នុងចំណោម $\angle SAB$, $\angle SBC$ និង

$\angle SCA \le 30^\circ$

របៀបទី ២

តាង $x = \angle SAB$, $y = \angle SBC$ និង $z = SCA$

d_a, d_b និង d_c ជាចម្ងាយពី S ទៅជ្រុង BC, CA និង AB រៀងគ្នា

យើងបាន $d_c = SA\sin x = SB\sin(B-y)$

$$d_a = SB\sin y = SC\sin(C-z)$$

$$d_b = SC\sin z = SA\sin(A-x)$$

គុណអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$\sin x \sin y \sin z = \sin(A-x)\sin(B-y)\sin(C-z)$$

បើ $x+y+z \le \frac{\pi}{2}$

WLOG ឧបមាថា $x \le y \le z \Rightarrow 3z \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow z \le \frac{\pi}{6}$ ពិត

បើ $x+y+z > \frac{\pi}{2} \Rightarrow (A-x)+(B-y)+(C-z) < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 0 < A-x,\ B-y,\ C-z < \frac{\pi}{2}$$

អនុគមន៍ $f(x) = \ln \sin x \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

$\Rightarrow f''(x) = -\csc^2 x < 0$ ចំពោះ $0 < x < \frac{\pi}{2}$

គេថា f ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

តាម វិសមភាព Jensen យើងបាន

$$\frac{1}{3}\left[\ln\sin(A-x)+\ln\sin(B-y)+\ln\sin(C-z)\right]$$

$$\le \ln\sin\left[\frac{(A-x)+(B-y)+(C-z)}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \ln\left[\sin(A-x)\sin(B-y)\sin(C-z)\right]^{\frac{1}{3}} \le \ln\sin\frac{\pi}{6} = \ln\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(A-x)\sin(B-y)\sin(C-z) \le \frac{1}{8} \Rightarrow \sin x \sin y \sin z \le \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \sin x,\ \sin y,\ \sin z \le \frac{1}{2} \Rightarrow x,\ y \text{ រឺ } z \le \frac{\pi}{6}$$

ហេតុនេះ យ៉ាងហោចណាស់មួយក្នុងចំណោម $\angle SAB$, $\angle SBC$ និង

$\angle SCA \le 30°$

របៀបទី ៣

តាង $x = \angle SAB$, $y = \angle SBC$ និង $z = SCA$

d_a , d_b និង d_c ជាចម្ងាយពី S ទៅជ្រុង BC , CA និង AB រៀងគ្នា

យើងបាន $d_c = SA\sin x = SB\sin(B-y)$

$$d_a = SB\sin y = SC\sin(C-z)$$

$$d_b = SC\sin z = SA\sin(A-x)$$

គុណអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$\sin x\sin y\sin z = \sin(A-x)\sin(B-y)\sin(C-z)$$

$$\Rightarrow (\sin x\sin y\sin z)^2 = \sin x\sin(A-x)\sin y\sin(B-y)\sin z\sin(C-z)$$

យើងមាន $\sin x\sin(A-x) = \frac{1}{2}[\cos(A-2x) - \cos A]$

$$\le \frac{1-\cos A}{2} = \sin^2\frac{A}{2}$$

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $\sin y\sin(B-y) \le \sin^2\frac{B}{2}$

$$\sin z\sin(C-z) \le \sin^2\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow (\sin x\sin y\sin z)^2 \le \left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin x\sin y\sin z \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

ព្រោះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$ (លំហាត់ ២៣(a))

$\Rightarrow \sin x$, $\sin y$, $\sin z \le \frac{1}{2} \Rightarrow x$, y រឺ $z \le \frac{\pi}{6}$

ហេតុនេះ យ៉ាងហោចណាស់មួយក្នុងចំណោម $\angle SAB$, $\angle SBC$ និង $\angle SCA \le 30^\circ$

លំហាត់ ៥២

គេឲ្យ $a = \frac{\pi}{7}$ ។

(a) បង្ហាញថា $\sin^2 3a - \sin^2 a = \sin 2a\sin 3a$

(b) បង្ហាញថា $\csc a = \csc 2a + \csc 4a$

(c) គណនា $\cos a - \cos 2a + \cos 3a$

(d) បង្ហាញថា $\cos a$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

(e) បង្ហាញថា $\cos a$ ជាចំនួនអសនិទាន

(f) គណនា $\tan a \tan 2a \tan 3a$

(g) គណនា $\tan^2 a + \tan^2 2a + \tan^2 3a$

(h) គណនា $\tan^2 a \tan^2 2a + \tan^2 2a \tan^2 3a + \tan^2 3a \tan^2 a$

(i) គណនា $\cot^2 a + \cot^2 2a + \cot^2 3a$

ចម្លើយ

(a) យើងមាន $\sin^2 3a - \sin^2 a = (\sin 3a - \sin a)(\sin 3a + \sin a)$

$$= (2\sin a \cos 2a)(2\sin 2a \cos a)$$

$$= \sin 2a \sin 4a$$

ដោយ $3a + 4a = \pi \Rightarrow \sin 4a = \sin 3a$

ដូចនេះ $\sin^2 3a - \sin^2 a = \sin 2a \sin 3a$ ៗ

(b) យើងមាន $\csc a = \csc 2a + \csc 4a$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin a} = \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 4a}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2a \sin 4a = \sin a \sin 4a + \sin a \sin 2a$$

$$\Leftrightarrow 2\sin a \cos a \sin 4a = \sin a(2\sin 3a \cos a)$$

$\Leftrightarrow \sin 4a = \sin 3a$ ពិត

(c) យើងមាន $\cos a - \cos 2a + \cos 3a = -(\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a)$

តាង $S = \cos a - \cos 2a + \cos 3a$

$$\Rightarrow 2S \sin a = 2\sin a \cos 2a + 2\sin a \cos 4a + 2\sin a \cos 6a$$

ដោយ $2\sin \alpha \cos \beta = \sin(\beta + \alpha) - \sin(\beta - \alpha)$

យើងបាន $2S \sin a = \sin 3a - \sin a + \sin 5a - \sin 3a + \sin 7a$

$$-\sin 5a = \sin 7a - \sin a = -\sin a$$

ព្រោះ $\sin 7a = \sin \pi = 0$

$\Rightarrow S = -\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\cos a - \cos 2a + \cos 3a = \frac{1}{2}$

សម្គាល់ ចំពោះ $x = \frac{\pi}{2n+1}$

យើងបាន $\cos 2x + \cos 4x + ... + \cos 2nx = -\frac{1}{2}$

(សម្រាយដូច c)

(d) យើងមាន $\sin 3a = \sin 4a$

ដោយ $\sin 3a = 4\sin^3 a - 3\sin a = \sin a\left(4\sin^2 - 3\right)$

$= \sin a\left(1 - 4\cos^2 a\right)$

$\sin 4a = 2\sin 2a \cos 2a = 4\sin a \cos a\left(2\cos^2 a - 1\right)$

$= \sin a\left(8\cos^3 - 4\cos a\right)$

យើងបាន $\sin a\left(1 - 4\cos^2 a\right) = \sin a\left(8\cos^3 a - 4\cos a\right)$

$\Rightarrow 8\cos^3 a + 4\cos^2 a - 4\cos a - 1 = 0$ សមភាពនេះ

បញ្ជាក់ថា $\cos a$ ជាឬសនៃសមីការ $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

(e) ដោយ $\cos a$ ជាឬសនៃសមីការ $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

$\Rightarrow u = 2\cos a$ ជាឬសនៃសមីការ $u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0$ (*)

តាម ទ្រឹស្តីបទឬសសនិទាន គេបាន $x \in \{-1, 1\}$

តែ -1 និង 1 មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ (*) មានន័យថា សមីការគ្មានឬសជាចំនួនសនិទាន

យើងបាន $u = 2\cos a$ ជាចំនួនអសនិទាន

ដូចនេះ $\cos a$ ជាចំនួនអសនិទាន

(f) ,(g) ,(h) និង (i)

យើងមាន $3a + 4a = \pi \Rightarrow \tan 3a + \tan 4a = 0$

$\Rightarrow \frac{\tan a + \tan 2a}{1 - \tan a \tan 2a} + \frac{2\tan 2a}{1 - \tan^2 2a} = 0$

$\Rightarrow \tan a + 3\tan 2a - 3\tan a \tan^2 2a - \tan^3 2a = 0$

តាង $x = \tan a$ យើងបាន $\tan 2a = \dfrac{2x}{1-x^2}$

$$\Rightarrow x + \frac{6}{1-x^2} - \frac{12x^3}{(1-x^2)^2} - \frac{8x^3}{(1-x^2)^3} = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2) + 6(1-x^2)^2 - 12x^2(1-x^2) - 8x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7 = 0 \quad (\ *\ )$$

$\tan a$ ជាឫសមួយនៃសមីការ (*)

ម្យ៉ាងទៀត $6a + 8a = 2\pi \Rightarrow \tan[3(2a)] + \tan[4(2a)] = 0$

និង $9a + 12a = 3\pi \Rightarrow \tan[3(3a)] + \tan[4(3a)] = 0$

គេបាន $\tan 2a$ និង $\tan 3a$ ជាឫសនៃសមីការ (*)

ហេតុនេះ $\tan^2 ka$ ជាឫសបីផ្សេងគ្នានៃសមីការ $x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$

ចំពោះ $k = 1,\ 2,\ 3$

តាមទ្រឹស្តីបទ Viéte គេបាន

$$\begin{cases} \tan^2 a + \tan^2 2a + \tan^2 3a = 21 \\ \tan^2 a \tan^2 2a + \tan^2 2a \tan^2 3a + \tan^2 3a \tan^2 a = 35 \\ \tan^2 a \tan^2 2a \tan^2 3a = 7 \end{cases}$$

យើងបាន $\cot^2 a + \cot^2 2a + \cot^2 3a$

$$= \frac{\tan^2 a \tan^2 2a + \tan^2 2a \tan^2 3a + \tan^2 3a \tan^2 a}{\tan^2 a \tan^2 2a \tan^2 3a}$$

$$= \frac{35}{7} = 5$$

សម្គាល់

ដោយ $\tan^2 ka$ ជាឫសបីផ្សេងគ្នានៃសមីការ $x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$

ចំពោះ $k = 1,\ 2,\ 3$

$\Rightarrow \tan\dfrac{\pi}{7},\ \tan\dfrac{2\pi}{7},\ \dots,\ \tan\dfrac{6\pi}{7}$ ជាឫសនៃសមីការ (*)

មេគុណនៃសមីការ (*) គឺ $1,\ -21,\ 35$ និង -7 រឺ អាចសរសេរជារាង

$C_7^0\ ,\ -C_7^2\ ,\ C_7^4$ និង $-C_7^6$ ។

ជាទូទៅ បើ $a_n = \dfrac{\pi}{2n+1}$ ចំពោះ $n \in \mathrm{IN}$ យើងបាន $\sin(2n+1)a = 0$

$$\Rightarrow C_{2n+1}^{1}\cos^{2n} a_n \sin a_n - C_{2n+1}^{3}\cos^{2n-2}\sin^{3} a_n$$
$$+ C_{2n+1}^{5}\cos^{2n-4} a_n \sin^{5} a_n - \ldots = 0$$

$$\Rightarrow \cos^{2n+1} a_n \left(C_{2n+1}^{1}\tan a_n - C_{2n+1}^{3}\tan^{3} a_n + C_{2n+1}^{5}\tan^{5} a_n - \ldots\right) = 0$$

ដោយ $\cos a_n \neq 0$ គេបាន

$$C_{2n+1}^{1}\tan a_n - C_{2n+1}^{3}\tan^{3} a_n + C_{2n+1}^{5}\tan^{5} a_n - \ldots = 0$$

ហេតុនេះ $\tan a_n$ ជាឫសមួយនៃសមីការ

$$C_{2n+1}^{1}x - C_{2n+1}^{3}x^{3} + C_{2n+1}^{5}x^{5} - \ldots + (-1)^{n} C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1} = 0$$

$$C_{2n+1}^{0}x^{2n} - C_{2n+1}^{2}x^{2n-2} + \ldots + (-1)^{n} C_{2n+1}^{2n} = 0 \quad (*)$$

ដូចគ្នាដែរ $\tan\dfrac{2\pi}{2n+1}, \tan\dfrac{3\pi}{2n+1}, \ldots, \tan\dfrac{2n\pi}{2n+1}$

យើងបាន $\tan^{2}\dfrac{\pi}{2n+1}, \tan^{2}\dfrac{2\pi}{2n+1}, \ldots, \tan^{2}\dfrac{2n\pi}{2n+1}$ ជាឫសនៃសមីការ

$$C_{2n+1}^{0}x^{n} - C_{2n+1}^{2}x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n} C_{2n+1}^{2n} = 0$$

តាម ទ្រឹស្តីបទ Viéte យើងបាន $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cot^{2}\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{C_{2n+1}^{2n-2}}{C_{2n+1}^{2n}} = \frac{n(2n-1)}{3}$

លំហាត់ ៥៣

ក/ រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តូចបំផុតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$\frac{1}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ}+\frac{1}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ}+\ldots+\frac{1}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ}=\frac{1}{\sin n^\circ}$$ ។

ខ/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{\sin 1^\circ \sin 2^\circ}+\frac{1}{\sin 2^\circ \sin 3^\circ}+\ldots+\frac{1}{\sin 89^\circ \sin 90^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\sin 1^\circ = \sin\left[(x+1)^\circ - x^\circ\right]$

$$= \sin(x+1)^\circ \cos x^\circ - \cos(x+1)^\circ \sin x^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 1^\circ}{\sin x^\circ \sin(x+1)^\circ}=\frac{\cos x^\circ \sin(x+1)^\circ - \sin x^\circ \cos(x+1)^\circ}{\sin x^\circ \sin(x+1)^\circ}$$

$$= \cot x^\circ - \cot(x+1)^\circ$$

ក/ យើងបាន $\frac{\sin 1^\circ}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ}+\frac{\sin 1^\circ}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ}+\ldots+\frac{\sin 1^\circ}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ}$

$$= (\cot 45^\circ - \cot 46^\circ) + (\cot 47^\circ - \cot 48^\circ) + \ldots + (\cot 133^\circ - \cot 134^\circ)$$

$$= \cot 45^\circ - (\cot 46^\circ + \cot 134^\circ) + (\cot 47^\circ + \cot 133^\circ) - \ldots +$$

$$(\cot 89^\circ + \cot 91^\circ) - \cot 90^\circ = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin 45^\circ \sin 46^\circ}+\frac{1}{\sin 47^\circ \sin 48^\circ}+\ldots+\frac{1}{\sin 133^\circ \sin 134^\circ}=\frac{1}{\sin 1^\circ}$$

ហេតុនេះ $\frac{1}{\sin n^\circ}=\frac{1}{\sin 1^\circ} \Rightarrow \sin n^\circ = \sin 1^\circ \Rightarrow n_{\min} = 1$

ខ/ យើងមាន $\frac{1}{\sin 1^\circ \sin 2^\circ}+\frac{1}{\sin 2^\circ \sin 3^\circ}+\ldots+\frac{1}{\sin 89^\circ \sin 90^\circ}$

$$= \sum_{k=1}^{89}\frac{1}{\sin k^\circ \sin(k+1)^\circ} = \frac{1}{\sin 1^\circ}\sum_{k=1}^{89}\frac{\sin 1^\circ}{\sin k^\circ \sin(k+1)^\circ}$$

$$= \frac{1}{\sin 1^\circ}\sum_{k=1}^{89}\left[\cot k^\circ - \cot(k+1)^\circ\right] = \frac{\cot 1^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$$

លំហាត់ ៥៤

(China,2001)

យក ABC ជាត្រីកោណដែលមានរង្វាស់ជ្រុង $AB=c$, $AC=b$ និង $BC=a$ ។ ចំពោះ x ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^x\cos A+b^x\cos B+c^x\cos C\geq\frac{1}{2}\left(a^x+b^x+c^x\right)$$ ។

សម្រាយ

របៀបទី ១

WLOG ឧបមាថា $a\geq b\geq c\Rightarrow A\geq B\geq C\Rightarrow\cos A\leq\cos B\leq\cos C$

យើងបាន $\left(a^x-b^x\right)(\cos A-\cos B)\leq 0$

$\Rightarrow a^x\cos A+b^x\cos B\leq a^x\cos B+b^x\cos A$ (1)

ស្រាយដូចគ្នា $b^x\cos B+c^x\cos C\leq b^x\cos C+c^x\cos B$ (2)

$c^x\cos C+a^x\cos A\leq c^x\cos A+a^x\cos C$ (3)

បូក (1),(2)និង (3) យើងបាន $2\left(a^x\cos A+b^x\cos B+c^x\cos C\right)$

$\leq\left(b^x+c^x\right)\cos A+\left(a^x+c^x\right)\cos B+\left(a^x+b^x\right)\cos C$

$\Rightarrow 3\left(a^x\cos A+b^x\cos B+c^x\cos C\right)$

$\leq\left(a^x+b^x+c^x\right)(\cos A+\cos B+\cos C)$

តាម លំហាត់ ២៧(b) $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$

ហេតុនេះ $a^x\cos A+b^x\cos B+c^x\cos C\geq\frac{1}{2}\left(a^x+b^x+c^x\right)$

របៀបទី ២

WLOG ឧបមាថា $a\geq b\geq c\Rightarrow A\geq B\geq C\Rightarrow\cos A\leq\cos B\leq\cos C$

តាម វិសមភាពតម្រៀប (Rearrangement's Inequality) យើងបាន

$$a^x\cos A+b^x\cos B+c^x\cos C\leq a^x\cos B+b^x\cos C+c^x\cos A$$

$$a^x\cos A+b^x\cos B+c^x\cos C\leq c^x\cos B+a^x\cos C+b^x\cos A$$

បូកអង្គ និង អង្គ យើងបាន $2\left(a^x\cos A+b^x\cos B+c^x\cos C\right)$

$\leq\left(b^x+c^x\right)\cos A+\left(a^x+c^x\right)\cos B+\left(a^x+b^x\right)\cos C$

$$\Rightarrow 3\left(a^x\cos A+b^x\cos B+c^x\cos C\right)$$
$$\leq \left(a^x+b^x+c^x\right)\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)$$

តាម លំហាត់ ២៧(b) $\cos A+\cos B+\cos C\leq \frac{3}{2}$

ហេតុនេះ $a^x\cos A+b^x\cos B+c^x\cos C\geq \frac{1}{2}\left(a^x+b^x+c^x\right)$

លំហាត់ ៥៥

គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

(a) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(b) $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ បើគេដឹងថា $0<x$, y, $z<1$ និង $x+y+z=xyz$ ។

សម្រាយ

(a) តាម លំហាត់ ១៧(a) ចំពោះ x, y, z មានត្រីកោណមុំស្រួច ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x=\tan A$, $y=\tan B$ និង $z=\tan C$

យើងបាន $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$

$$=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}+\frac{\tan B}{\sqrt{1+\tan^2 B}}+\frac{\tan C}{\sqrt{1+\tan^2 C}}$$
$$=\frac{\tan A}{\sec A}+\frac{\tan B}{\sec B}+\frac{\tan C}{\sec C}=\sin A+\sin B+\sin C$$

តាម លំហាត់ ២៨(a) $\sin A+\sin B+\sin C\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

ហេតុនេះ $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(b) ដោយ $0<x$, y, $z<1$ និង $x+y+z=xyz$

$\Rightarrow$ មានត្រីកោណមុំស្រួច ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x=\tan\frac{A}{2}$, $y=\tan\frac{B}{2}$

និង $z=\tan\frac{C}{2}$

យើងបាន $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}$

$$=\frac{\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{\tan\frac{B}{2}}{1-\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{\tan\frac{C}{2}}{1-\tan^2\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{2}$$

តាម លំហាត់ ២០(b) $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$

ហេតុនេះ $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

លំហាត់ ៥៦

(China,1997)

គេឲ្យ x, y, z បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x\geq y\geq z\geq\frac{\pi}{12}$ និង $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ ។

កំណត់តម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ $\cos x\sin y\cos z$ ។

ចម្លើយ

តាង $p=\cos x\sin y\cos z=\frac{1}{2}\cos x\left[\sin(y+z)+\sin(y-z)\right]$

ដោយ $x\geq y\geq z\geq\frac{\pi}{12}$ និង $x+y+z=\frac{\pi}{2}$

យើងបាន $\sin(y-z)\geq 0$ និង $\sin(y+z)=\cos x\Rightarrow p\geq\frac{1}{2}\cos^2 x$

តែ $x=\frac{\pi}{2}-y-z\leq\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow p\geq\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{1}{8}$

ដូចនេះ $\cos x\sin y\cos z$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើនឹង $\frac{1}{8}$ ពេល $x=\frac{\pi}{3}$

$, \; y=z=\frac{\pi}{12}$

ម៉្យាងទៀត $p=\frac{1}{2}\cos z[\sin(x+y)-\sin(x-y)]\le\frac{1}{2}\cos^2 z$

$$=\frac{1}{4}(1+\cos 2z)\le\frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{8}$$

ដូចនេះ $\cos x\sin y\cos z$ មានតម្លៃអតិបរមាស្មើនឹង $\frac{2+\sqrt{3}}{8}$

ពេល $x=y=\frac{5\pi}{24}$ និង $z=\frac{\pi}{12}$

លំហាត់ ៥៧

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច ។ ចំពោះ $n=1,\ 2,\ 3$ គេតាង

$x_n=2^{n-3}(\cos^n A+\cos^n B+\cos^n C)+\cos A\cos B\cos C$ ។

បង្ហាញថា $x_1+x_2+x_3\ge\frac{3}{2}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $x_n=2^{n-3}(\cos^n A+\cos^n B+\cos^n C)+\cos A\cos B\cos C$

$$\Rightarrow x_1=\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{4}+\cos A\cos B\cos C$$

$$x_2=\frac{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C}{2}+\cos A\cos B\cos C$$

$$x_3=\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C+\cos A\cos B\cos C$$

តាម AM-GM គេបាន $\cos^3 A+\frac{\cos A}{4}\ge\cos^2 A$

$$\cos^3 B+\frac{\cos B}{4}\ge\cos^2 B$$

$$\cos^3 C+\frac{\cos C}{4}\ge\cos^2 C$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $x_1 + x_3 \ge 2x_2$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \ge 3x_2$

$$= \frac{3}{2}\left(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C\right)$$

$$= \frac{3}{2}$$ ព្រោះ តាម លំហាត់២៤(d)

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$$

ហេតុនេះ $x_1 + x_2 + x_3 \ge \frac{3}{2}$

លំហាត់ ៥៨

រកផលបូកនៃគ្រប់តម្លៃ x លើ $[0,2\pi]$ បើគេដឹងថា $3\cot^2 x + 8\cot x + 3 = 0$ ។

ចម្លើយ

សមីការ $3u^2 + 8u + 3 = 0$ មានរឹស $u_1 = \frac{-4+\sqrt{7}}{2}$, $u_2 = \frac{-4-\sqrt{7}}{2}$

និង $u_1 u_2 = 1$ (ទ្រឹស្តីបទ Viéte)

អនុវត្តន៍ $f : (0,\pi) \to \mathrm{IR}$

$x \mapsto y = \cot x$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ

$\Rightarrow \forall y \in \mathrm{IR}$, $\exists! x \in (0,\pi)$ ដែល $y = \cot x$

$\Rightarrow \exists!(x_1, x_2) \in (0,\pi)^2$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\cot x_1 = u_1$, $\cot x_2 = u_2$

ដោយ $u_1, u_2 < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x_1, x_2 < 2\pi \Rightarrow \pi < x_1 + x_2 < 2\pi$

យើងមាន $1 = \cot x \tan x = \cot x \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$$= \cot x_1 \cot x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{3\pi}{2}$$

ដូចគ្នាដែរ ចំពោះចន្លោះ $(\pi, 2\pi)$ គឺ $\exists!(x_3, x_4) \in (\pi, 2\pi)^2$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\cot x_3 = u_1$, $\cot x_4 = u_2 \Rightarrow x_3 + x_4 = \frac{7\pi}{2}$

ហេតុនេះ $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{7\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 5\pi$

លំហាត់ ៥៩

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួចមានក្រឡាផ្ទៃ K ។ បង្ហាញថា

$$\sqrt{a^2b^2 - 4K^2} + \sqrt{b^2c^2 - 4K^2} + \sqrt{c^2a^2 - 4K^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \text{ ។}$$

សម្រាយ

តាម ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស យើងបាន $2K = ab\sin C = bc\sin A = ca\sin B$

$$\sqrt{a^2b^2 - 4K^2} + \sqrt{b^2c^2 - 4K^2} + \sqrt{c^2a^2 - 4K^2}$$

$$= \sqrt{a^2b^2 - a^2b^2\sin^2 C} + \sqrt{b^2c^2 - b^2c^2\sin^2 A} + \sqrt{c^2a^2 - c^2a^2\sin^2 B}$$

$$= ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B$$

$$= \frac{a}{2}(b\cos C + c\cos B) + \frac{b}{2}(c\cos A + a\cos C) + \frac{c}{2}(a\cos B + b\cos A)$$

$$= \frac{a}{2}(a) + \frac{b}{2}(b) + \frac{c}{2}(c) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

លំហាត់ ៦០

គណនា $S_n = C_n^1 \sin a + C_n^2 \sin 2a + \ldots + C_n^n \sin na$

និង $T_n = C_n^1 \cos a + C_n^2 \cos 2a + \ldots + C_n^n \cos na$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $1 + T_n + iS_n = 1 + C_n^1(\cos a + i\sin a) + C_n^2(\cos 2a + i\sin 2a)$
$+ \ldots + C_n^n(\cos na + i\sin na)$

$$1 + C_n^1(\cos a + i\sin a) + C_n^2(\cos a + i\sin a)^2 + \ldots +$$
$$+ C_n^n(\cos a + i\sin a)^n = (1 + \cos a + i\sin a)^n \qquad (1)$$

ដោយ $1 + \cos a + i\sin a = 2\cos^2\frac{a}{2} + 2i\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$

$$= 2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2} + i\sin\frac{a}{2}\right)$$

តាម រូបមន្តដឺម័រ យើងបាន

$$(1+\cos a + i\sin a)^n = 2^n \cos^n \frac{a}{2}\left(\cos\frac{na}{2} + i\sin\frac{na}{2}\right)$$

$$= 2^n \cos^n \frac{a}{2}\cos\frac{na}{2} + 2^n i\cos^n\frac{a}{2}\sin\frac{na}{2} \quad (2)$$

តាម (1),(2) យើងបាន $1 + T_n = 2^n \cos^n \frac{a}{2}\cos\frac{na}{2}$

$$S_n = 2^n \cos^n \frac{a}{2}\sin\frac{na}{2}$$

ហេតុនេះ $S_n = 2^n \cos^n \frac{a}{2}\sin\frac{na}{2}$, $T_n = 2^n \cos^n \frac{a}{2}\cos\frac{na}{2} - 1$

លំហាត់ ៦១

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ចម្លើយ

យើងមាន $|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$

$$= \left|\sin x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}\right|$$

$$= \left|\frac{(\sin x + \cos x)\sin x\cos x + 1 + \sin x + \cos x}{\sin x\cos x}\right|$$

តាង $t = \sin x + \cos x \Rightarrow t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

និង $t = \sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

យើងបាន $T=\left|\dfrac{t\left(\dfrac{t^2-1}{2}\right)+1+t}{\dfrac{t^2-1}{2}}\right|=\left|t+\dfrac{2}{t-1}\right|=\left|t-1+\dfrac{2}{t-1}+1\right|$

តាម AM-GM

បើ $t-1>0$ គេបាន $t-1+\dfrac{2}{t-1}>2\sqrt{2}$ $T>1+2\sqrt{2}$

បើ $t-1<0$ យើងបាន $t-1+\dfrac{2}{t-1}=-\left(1-t+\dfrac{2}{1-t}\right)\le -2\sqrt{2}$

សមភាពពេល $1-c=\dfrac{2}{1-c}\Rightarrow c=1-\sqrt{2}$

ហេតុនេះ $T\ge\left|-2\sqrt{2}+1\right|=2\sqrt{2}-1\Rightarrow T_{\min}=2\sqrt{2}-1$

លំហាត់ ៦២

(Belarus,1999)

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិតពីរ គឺ $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ និង $y_1,\ y_2,\dots,y_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

លក្ខខណ្ឌ $x_1=y_1=\sqrt{3}$, $x_{n+1}=x_n+\sqrt{1+x_n^2}$ និង $y_{n+1}=\dfrac{y_n}{\sqrt{1+y_n^2}}$

ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$។ បង្ហាញថា $2<x_ny_n<3$ ។

សម្រាយ

ដោយ $x_1=\sqrt{3}=\tan 60^\circ$, $x_{n+1}=x_n+\sqrt{1+x_n^2}\Rightarrow x_n>0$, $\forall n\in \mathrm{IN}$

យក $x_n=\tan a_n$ ដែល $0<a_n<90^\circ$, $a_1=60^\circ$

យើងបាន $x_{n+1}=\tan a_n+\sqrt{1+\tan^2 a_n}=\tan a_n+\sec a_n$

$$=\frac{1+\sin a_n}{\cos a_n}=\frac{1-\cos(90^\circ+a_n)}{\sin(90^\circ+a_n)}=\tan\left(\frac{90^\circ+a_n}{2}\right)$$

$\Rightarrow a_2=75^\circ=90^\circ-\dfrac{30^\circ}{2}$, $\Rightarrow a_2=82.5^\circ=90^\circ-\dfrac{30^\circ}{2^2}$

គេបាន $a_n = 90° - \frac{30°}{2^{n-1}}$ ចំពោះ $n = 1,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots$

$$\Rightarrow x_n = \tan\left(90° - \frac{30°}{2^{n-1}}\right) = \cot\frac{30°}{2^{n-1}} = \cot\theta_n$$ ដែល $\theta_n = \frac{30°}{2^{n-1}}$

ស្រាយដូចគ្នា ចំពោះស្វ៊ីត (y_n)យើងបាន $y_n = \tan 2\theta_n = \frac{2\tan\theta_n}{1-\tan^2\theta_n}$

ហេតុនេះ $x_n y_n = \frac{2}{1-\tan^2\theta_n}$

ចំពោះគ្រប់ $n > 1 \Rightarrow\ 0 < \theta_n < 30° \Rightarrow 0 < \tan^2\theta_n < \frac{1}{3}$

ដូចនេះ $2 < x_n y_n < 3$

លំហាត់ ៦៣

គេឲ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c$ ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sin a + \sin b + \sin c \geq \frac{3}{2}$ ។

បង្ហាញថា $\sin\left(a - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(b - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(c - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$ ។

សម្រាយ

ឧបមាថា $\sin\left(a - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(b - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(c - \frac{\pi}{6}\right) < 0$

$$\Rightarrow \sin a\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos a + \sin b\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos b$$
$$+ \sin c\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos c < 0$$

$$\Rightarrow \cos a + \cos b + \cos c > \sqrt{3}(\sin a + \sin b + \sin c)$$

$$\Rightarrow \cos a + \cos b + \cos c > \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

យើងបាន $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(b + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(c + \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{1}{2}(\cos a + \cos b + \cos c) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin a + \sin b + \sin c)$$

$$> \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3+9}{4} = 3 \text{ មិនពិត}$$

ព្រោះ $\sin x > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathrm{IR}$

លំហាត់ ៦៤

ឧបមថា បួនចំនួនត្រូវបានជ្រើសចេញពីចន្លោះ $\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right]$។

បង្ហាញថា មានពីរក្នុងចំណោមបួនចំនួននោះ(សន្មតថា a , b) បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$\left|a\sqrt{4-b^2} - b\sqrt{4-a^2}\right| \le 2 \text{ ។}$$

សម្រាយ

យើងមាន $\left|a\sqrt{4-b^2} - b\sqrt{4-a^2}\right| \le 2$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{a}{2}\sqrt{1-\left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right| \le \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sin x \cos y - \sin y \cos x\right| \le \frac{1}{2} \text{ យក } \frac{a}{2} = \sin x \text{ , } \frac{b}{2} = \sin y$$

$$\Leftrightarrow \left|\sin(x-y)\right| \le \sin\frac{\pi}{6}$$

កំណត់ t_1, t_2 បើ $\sin t_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\sin t_2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

យើងមាន $\cos 2t_1 = 1 - 2\sin^2 t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$

$$\cos 2t_2 = 1 - 2\sin^2 t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\pm\frac{5\pi}{6}\right)$$

ដោយ $t_1 < 0$ និង $t_2 > 0 \Rightarrow 2t_1 = -\frac{\pi}{6}$, $2t_2 = \frac{5\pi}{6}$

$$\Rightarrow t_1 = -\frac{\pi}{12}\,,\ t_2 = \frac{5\pi}{12}$$

ចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$ ជាចន្លោះដែលមានប្រវែង $\frac{\pi}{2}$

ហេតុនេះ យើងអាចចែកចន្លោះនេះជាបីចន្លោះដាច់គ្នា គឺ $I_1 = \left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right)$

, $I_2 = \left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)$ និង $I_3 = \left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}\right]$

អនុវត្តន៍ $y = 2\sin x$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពីចន្លោះ $I_1 = \left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right)$

, $I_2 = \left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)$ និង $I_3 = \left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}\right]$ ទៅ $I_1' = \left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2},2\sin\frac{\pi}{12}\right)$,

$I_2' = \left[2\sin\frac{\pi}{12},\sqrt{2}\right)$ និង $I_3' = \left[\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right]$ រៀងគ្នា

តាម គោលការណ៍ទ្រូងព្រាប (Pegeonhole Principle) គេបាន

មួយក្នុងចំណោម I_1', I_2' រឺ I_3' ផ្ទុកនូវពីរចំនួន a និង b

$\Rightarrow$ មួយក្នុងចំណោម I_1, I_2 រឺ I_3 ផ្ទុកនូវពីរចំនួន x, y ដែល $a = 2\sin x$

និង $b = 2\sin y$

ដោយ I_1, I_2 និង I_3 សុទ្ធតែជាចន្លោះដែលមានប្រវែង $\frac{\pi}{6}$

ហេតុនេះ (*) ផ្ទៀងផ្ទាត់

លំហាត់ ៦៥

គេឲ្យ a, b ជាចំនួនពិតក្នុងចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ។ បង្ហាញថា

$\sin^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 b + \cos^6 b = 1$ លុះត្រាតែ $a = b$ ។

សម្រាយ

$\Rightarrow$?

យើងមាន $\sin^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 b + \cos^6 b = 1$

$\Rightarrow (\sin^2 a)^3 + (\cos^2 b)^3 + (-1)^3 - 3(\sin^2 a)(\cos^2 b)(-1) = 0$

យក $x = \sin^2 a$, $y = \cos^2 b$ និង $z = -1$

គេបាន $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

ដោយ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right]$

$\Rightarrow (x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] = 0$

$\Rightarrow x + y + z = 0$ ព្រោះ $x = y = z$ ជាករណីមិនអាច

$\Rightarrow \sin^2 a + \cos^2 b - 1 = 0$

$\Rightarrow \sin^2 a = \sin^2 b$ ដោយ a , $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow a = b$

$\Rightarrow$? បើ $a = b$

យើងបាន $\sin^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 b + \cos^6 b$

$$= \sin^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 a + \cos^6 a$$
$$= (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a - \sin^2 a\cos^2 a + \cos^4 a)$$
$$+ 3\sin^2 a\cos^2 a$$
$$= (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 3\sin^2 a\cos^2 a + 3\sin^2 a\cos^2 a = 1$$

លំហាត់ ៦៦

គេឲ្យ x , y , z ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $0 < x < y < z < \frac{\pi}{2}$ ។

បង្ហាញថា $\frac{\pi}{2} + 2\sin x\cos y + 2\sin y\cos z \geq \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{\pi}{2} + 2\sin x\cos y + 2\sin y\cos z \geq \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} > 2\sin x(\cos x - \cos y) + 2\sin y(\cos y - \cos z) + 2\sin z\cos z$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} > \sin x(\cos x - \cos y) + \sin y(\cos y - \cos z) + \sin z \cos z \quad (*)$$

ក្នុងតម្រុយអរគ្គូណរមេ

តាង $A(\cos x, \sin x), B = (\cos y, \sin y),\ C(\cos z, \sin z),\ D(0, \sin z)$

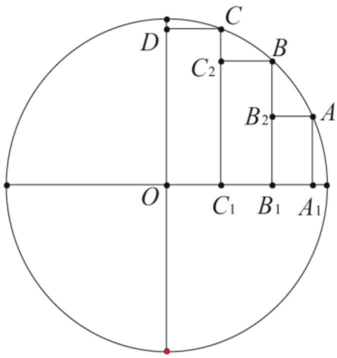
យក A_1, B_1, C_1 ជាចំណោលកែងនៃ A, B, C លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស(ដូចរូប)

និង B_2, C_2 ជាចំណោលកែងនៃ A និង B លើ BB_1 និង CC_1 រៀងគ្នា

យើងបាន $A_1(\cos x, 0),\ B_1(\cos y, 0),\ C_1(\cos z, 0),\ B_2(\cos y, \sin x)$

និង $D(0, \sin z)$

យក S ជាក្រឡាផ្ទៃនៃកាដ្រង់ទី I



គេបាន $S > AA_1B_1B_2 + BB_1C_1C_2 + CC_1OD$

ដោយ $AA_1B_1B_2 = \sin x(\cos x - \cos y)$

$BB_1C_1C_2 = \sin y(\cos y - \cos z)$

$CC_1OD = \sin z \cos z$

$S = \dfrac{\pi}{4}$

ហេតុនេះ (*) ផ្ទៀងផ្ទាត់

លំហាត់ ៦៧

គេឲ្យ $ABCDE$ ជាពហុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ បង្ហាញថា បើ $r_{ABC} = r_{AED}$, $r_{ABD} = r_{AEC}$ នោះ គេបាន ABC និង AED ជាត្រីកោណប៉ុនគ្នា ។

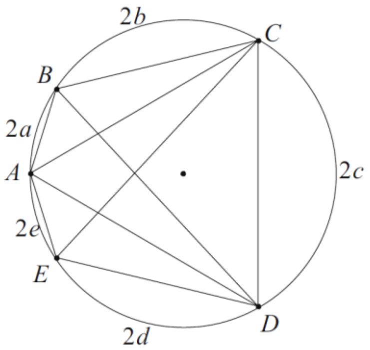
សម្គាល់

តាង r_{XYZ} ជាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ XYZ ។

សម្រាយ

តាម លំហាត់ ២៧(a) $1+\dfrac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$

$$= \cos A - \cos(A+C) + \cos C$$



តាង $2a$, $2b$, $2c$, $2d$ និង $2e$ ជាប្រវែងធ្នូ AB , BC , CD , DE និង EA

$\Rightarrow a+b+c+d+e = 180^\circ$ ដោយ $r_{ABC} = r_{AED}$, $r_{ABD} = r_{AEC}$

យើងបាន $\cos a - \cos(a+b) + \cos b = \cos d + \cos e - \cos(d+e)$ (*)

និង $\cos a + \cos(b+c) + \cos(d+e) = \cos e + \cos(c+d) + \cos(a+b)$

$\Rightarrow \cos b + \cos(c+d) = \cos d + \cos(b+c)$

$$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{b+c+d}{2}\right)\cos\left(\frac{b-c-d}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{b+c+d}{2}\right)\cos\left(\frac{d-b-c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{b-c-d}{2}\right) = \cos\left(\frac{d-b-c}{2}\right) \Rightarrow b = d$$

តាម (*) យើងបាន

$$\cos a - \cos(a+b) + \cos b = \cos b + \cos e - \cos(b+e)$$

$$\Rightarrow \cos a + \cos(b+e) = \cos e + \cos(a+b)$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{a+b+e}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b-e}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{a+b+e}{2}\right)\cos\left(\frac{e-a-b}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{a-b-e}{2}\right) = \cos\left(\frac{e-a-b}{2}\right) \Rightarrow a = e$$

ដោយ $a = e$ និង $b = d$ នោះ ត្រីកោណ ABC និង AED ប៉ុនគ្នា

លំហាត់ ៦៨

គ្មានមុំណាមួយនៃត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់ធំជាង $120°$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{\cos A + \cos B - \cos C}{\cos A + \sin B - \sin C} > -\frac{\sqrt{3}}{2}$$ ។

សម្រាយ

ឧបមាថា $A_1B_1C_1$ ជាត្រីកោណបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\angle A_1 = 120° - \angle A$,
$\angle B_1 = 120° - \angle B$ និង $\angle C_1 = 120° - \angle C$

តាម វិសមភាពត្រីកោណ យើងបាន $B_1C_1 + C_1A_1 > A_1B_1$

$$\Rightarrow \sin A_1 + \sin B_1 > \sin C_1$$

$$\Rightarrow \sin(120° - A) + \sin(120° - B) + \sin(120° - C) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos A + \cos B - \cos C) + \frac{1}{2}(\sin A + \sin B - \sin C) > 0$$

ដោយ $a + b > c \Rightarrow \sin A + \sin B - \sin C > 0$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\cos A + \cos B - \cos C}{\sin A + \sin B - \sin C} + \frac{1}{2} > 0$$

ហេតុនេះ $\dfrac{\cos A + \cos B - \cos C}{\cos A + \sin B - \sin C} > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

លំហាត់ ៦៩

(USAMO,2002)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\left(\cot\frac{A}{2}\right)^2+\left(\cot\frac{B}{2}\right)^2+\left(\cot\frac{C}{2}\right)^2$

$=\left(\frac{6s}{7r}\right)^2$ (*)ដែល s និង r តាងឲ្យកន្លះ

បរិមាត្រ និង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ដូចត្រីកោណ T ដែលមានរង្វាស់ជ្រុងទាំងអស់ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង ជាបីចំនួនបឋមរវាងគ្នា ដែលចំនួនគត់វិជ្ជមានទាំងបីនេះត្រូវកំណត់ ។

សម្រាយ

តាង $u=\cot\frac{A}{2}$, $v=\cot\frac{B}{2}$ និង $w=\cot\frac{C}{2}$

យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC, D, E, F ជាចំណុចប៉ះរវាងជ្រុង BC, CA និង AB រៀងគ្នា (ដូចរូប)

យើងបាន $EI=r$ និង $AE=s-a \Rightarrow u=\cot\frac{A}{2}=\frac{AE}{EI}=\frac{s-a}{r}$

ដូចគ្នាដែរ $v=\frac{s-b}{r}$, $w=\frac{s-c}{r}$

$$\Rightarrow \frac{s}{r}=\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{r}=u+v+w$$

យើងបាន (*) $\Leftrightarrow 49\left(u^2+4v^2+9w^2\right)=36(u+v+w)^2$

$$\Leftrightarrow 13u^2+160v^2+405w^2-72(uv+vw+wu)=0$$

$$\Leftrightarrow (3u-12v)^2+(4v-9w)^2+(18w-2u)^2=0$$

$$\Rightarrow u=4v=9w \Rightarrow \frac{u}{36}=\frac{v}{9}=\frac{w}{4} \ (*)$$

$$\Rightarrow \frac{s-a}{36}=\frac{s-b}{9}=\frac{s-c}{4}=\frac{2s-b-c}{9+4}=\frac{2s-c-a}{4+36}=\frac{2s-a-b}{36+9}$$

$$=\frac{a}{13}=\frac{b}{40}=\frac{c}{45}$$

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC ដូចត្រីកោណ T ដែលមានរង្វាស់ជ្រុង 13 , 40 និង 45

របៀបទី ២

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $u=4v=9w$

តាម លំហាត់ ១៩(a) $u+v+w=uvw \Rightarrow u=7\,,\ v=\dfrac{7}{4}\,,\ w=\dfrac{7}{9}$

យើងបាន $\sin A=\dfrac{7}{25}=\dfrac{13}{\frac{325}{7}}\,,\ \sin B=\dfrac{56}{65}=\dfrac{40}{\frac{325}{7}}$

និង $\sin C=\dfrac{63}{65}=\dfrac{45}{\frac{325}{7}}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស យើងបាន $\dfrac{a}{13}=\dfrac{b}{40}=\dfrac{c}{45}$

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC ដូចត្រីកោណ T ដែលមានរង្វាស់ជ្រុង 13 , 40 និង 45

សម្គាល់

(*) អាចបានដោយប្រើវិសមភាព Cauchy-Schwarz គឺ

$$(6\cdot u+3\cdot 2v+2\cdot 3w)^2 \le \left(6^2+3^2+2^2\right)\left[u^2+(2v)^2+(3w)^2\right]$$

រឺ $49\left(u^2+4v^2+9w^2\right)\le 36(u+v+w)^2$ សមភាពកើតឡើងពេល

$$u=4v=9w$$

លំហាត់ ៧០

(USAMO,1996)

បង្ហាញថា មធ្យមនៃចំនួន $2\sin 2^\circ\,,\ 4\sin 4^\circ\,,\ \dots\,,\ 180\sin 180^\circ$ ស្មើនឹង $\cot 1^\circ$ ។

សម្រាយ

របៀបទី ១

ដើម្បីបង្ហាញថា មធ្យមនៃចំនួន $2\sin 2^\circ\,,\ 4\sin 4^\circ\,,\ \dots\,,\ 180\sin 180^\circ$ ស្មើនឹង $\cot 1^\circ$ យើងគ្រាន់តែ បង្ហាញថា

$$2\sin 2^\circ+4\sin 4^\circ+\dots+178\sin 178^\circ=90\cot 1^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2^\circ\sin 1^\circ+2(2\sin 4^\circ\sin 1^\circ)+\dots+89(2\sin 178^\circ\sin 1^\circ)$$
$$=90\cos 1^\circ$$

យើងមាន $2\sin 2k^\circ\sin 1^\circ=\cos(2k-1)^\circ-\cos(2k+1)^\circ$

$$\Rightarrow 2\sin 2^\circ\sin 1^\circ+2(2\sin 4^\circ\sin 1^\circ)+\dots+89(2\sin 178^\circ\sin 1^\circ)$$

$= (\cos 1° - \cos 3°) + 2(\cos 3° - \cos 5°) + \ldots + 89(\cos 177° - \cos 179°)$

$= \cos 1° + \cos 2° + \ldots + \cos 177° - 89\cos 179°$

$= \cos 1° + (\cos 3° + \cos 177°) + \ldots + (\cos 89° + \cos 91°) + 89\cos 1°$

$= 90\cos 1°$ ពិត

ហេតុនេះ មធ្យមនៃចំនួន $2\sin 2°$, $4\sin 4°$, … , $180\sin 180°$ ស្មើនឹង $\cot 1°$

របៀបទី ២

តាង $z = \cos 2° + i\sin 2° \Rightarrow z^n = \cos 2n° + i\sin 2n°$

យក a , $b \in \mathrm{IR}$ ដែល $z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + 89z^{89} = a + bi$

$\Rightarrow b = \frac{1}{2}(2\sin 2° + 4\sin 4° + \ldots + 178\sin 178°)$

ដើម្បីបង្ហាញថា មធ្យមនៃចំនួន $2\sin 2°$, $4\sin 4°$, … , $180\sin 180°$ ស្មើនឹង $\cot 1°$ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $b = 45\cot 1°$

បើ $p(z) = z + 2z^2 + \ldots + 89z^{89} \Rightarrow zp(z) = z^2 + 2z^3 + \ldots + 89z^{90}$

$\Rightarrow (1 - z)p(z) = z + z^2 + \ldots + z^{89} - 89z^{90} = \frac{z^{90} - z}{z - 1} - 89z^{90}$

$\Rightarrow p(z) = \frac{z - z^{90}}{(z-1)^2} + \frac{89z^{90}}{z - 1}$

ដោយ $z^{90} = \cos 180° + i\sin 180° = -1 \Rightarrow a + bi = \frac{z+1}{(z-1)^2} - \frac{89}{z-1}$

ម៉្យាទៀត $z + 1 = cis2° + cis0° = 2\cos 1° cis1°$

$z - 1 = cis2° - cis0° = 2\sin 1° cis91°$

$\Rightarrow a + bi = \frac{2\cos 1° cis1°}{(2\sin 1° cis91°)^2} - \frac{89}{2\sin 1° cis91°}$

$= \frac{2\cos 1° cis1°}{4\sin^2 1° cis182°} - \frac{89cis(-91°)}{2\sin 1°}$

$= \frac{\cos 1° cis(-181°)}{2\sin^2 1°} - \frac{89cis(-91°)}{2\sin 1°}$

យើងបាន $b = \frac{\cos 1° \sin(-181°)}{2\sin^2 1°} - \frac{89\sin(-91°)}{2\sin 1°}$

$$= \frac{\cos 1^\circ \sin 1^\circ}{2\sin^2 1^\circ} + \frac{89\cos 1^\circ}{2\sin 1^\circ}$$
$$= \frac{\cos 1^\circ}{2\sin 1^\circ} + \frac{89\cos 1^\circ}{2\sin 1^\circ} = 45\cot 1^\circ$$

លំហាត់ ៧១

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច ។ បង្ហាញថា

$$\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C + 6\cot A\cot B\cot C$$
$$\geq \cot A + \cot B + \cot C \quad (*)$$ ។

សម្រាយ

តាង $\cot A = x$, $\cot B = y$ និង $\cot C = z$

គេបាន $xy + yz + zx = 1$ (លំហាត់ ២១)

យើងបាន (*) $\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq (x+y+z)(xy+yz+zx)$

$$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0$$

ជា វិសមភាព Schur

ហេតុនេះ $\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C + 6\cot A\cot B\cot C$

$$\geq \cot A + \cot B + \cot C$$

លំហាត់ ៧២

(Turkey,1998)

គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំណត់ដោយ $a_1 = t$, $a_{n+1} = 4a_n(1-a_n)$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។ តើមានតម្លៃ t ផ្សេងគ្នាចំនួនប៉ុន្មានផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $a_{1998} = 0$ ។

ចម្លើយ

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x) = 4x(1-x) = 1-(2x-1)^2$

បើ $0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

យើងបាន បើ $a_{1998} = 0 \Rightarrow \exists t : 0 \leq t \leq 1$

$\Rightarrow \exists \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sin\theta = \sqrt{t} \Rightarrow \sin^2\theta = t$

ចំពោះ $\forall \phi \in \mathrm{IR}$ គេបាន $f(\sin^2\phi) = 4\sin^2\phi(1-\sin^2\phi)$

$$= 4\sin^2\phi\cos^2\phi = \sin^2 2\phi$$

ដោយ $a_1 = \sin^2\theta \Rightarrow a_2 = \sin^2 2\theta$, $a_3 = \sin^2 3\theta$, ... ,

$$a_{1998} = \sin^2 2^{1997}\theta$$

បើ $a_{1998} = 0 \Rightarrow \sin^2 2^{1997}\theta = 0 \Rightarrow \sin 2^{1997}\theta = 0 \Rightarrow 2^{1997}\theta = k\pi$

$$\Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2^{1997}}$$

ចំនួនតម្លៃ t ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $a_{1998} = 0$ មានចំនួនស្មើគ្នាទៅនឹងតម្លៃ

នៃ $\sin^2\frac{k\pi}{2^{1997}}$ ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$ និង $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ដោយ $\sin^2\frac{k\pi}{2^{1997}}$ ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$ និង $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ មានចំនួន $2^{1996}+1$ តម្លៃ

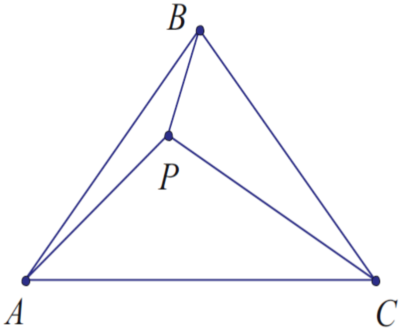
គឺ ត្រូវគ្នានឹងតម្លៃ $k = 0, 1, \ldots, 2^{1996}+1$

ហេតុនេះ ចំនួនតម្លៃ t ផ្សេងគ្នាដែរផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $a_{1998} = 0$ គឺ $2^{1996}+1$

លំហាត់ ៧៣

យក P ជាចំណុចក្នុងមួយនៃត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\angle PAB = 10°$, $\angle PBA = 20°$, $\angle PCA = 30°$ និង $\angle PAC = 40°$ ។ បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

សម្រាយ



តាង $x = \angle PCB \Rightarrow \angle PBC = 80° - x$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

យើងបាន $1=\frac{PA}{PB}\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{PC}{PA}=\frac{\sin\angle PBA\sin\angle PCB\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB\sin\angle PBC\sin\angle PCA}$

$$=\frac{\sin 20^\circ\sin x\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ\sin(80^\circ-x)\sin 30^\circ}=\frac{4\sin x\sin 40^\circ\cos 10^\circ}{\sin(80^\circ-x)}$$

$$=\frac{2\sin x(\sin 30^\circ+\sin 50^\circ)}{\sin(80^\circ-x)}=\frac{\sin x(1+2\cos 40^\circ)}{\sin(80^\circ-x)}$$

$\Rightarrow 2\sin x\cos 40^\circ=\sin(80^\circ-x)-\sin x=2\sin(40^\circ-x)\cos 40^\circ$

$\Rightarrow \sin x=\sin(40^\circ-x)$

យើងបាន $x=40^\circ-x\Rightarrow x=20^\circ\Rightarrow\angle ACB=50^\circ=\angle BAC$

ហេតុនេះ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត

លំហាត់ ៧៤

គេឲ្យ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1}=\frac{a_n^2-5}{2(a_n+2)}$ ចំពោះគ្រប់ $n>0$ ។

បង្ហាញថា $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

សម្រាយ

ដើម្បីឲ្យសំណើពិតយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $b_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)$ ដែល $b_n=a_n+2$

ចំពោះ $n\geq 1$

យើងបាន $b_{n+1}-2=\frac{(b_n-2)^2-5}{2b_n}\Rightarrow b_{n+1}=\frac{b_n^2-1}{2b_n}$

យើងមាន $\cot\frac{\pi}{24}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$

$$=\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

ឧបមាថា ពិតដល់ $n=k$ គឺ $b_k=\cot c_k$ ដែល $c_k=\frac{2^{k-3}\pi}{3}$

សិក្សាករណី $n=k+1$

យើងមាន $b_{k+1}=\frac{b_k^2-1}{2b_k}=\frac{\cot^2 c_k-1}{2\cot c_k}=\cot 2c_k=\cot c_{k+1}$ ពិត

ហេតុនេះ $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$

លំហាត់ ៧៥

(APMC,1982)

ចំពោះ $n\in \mathrm{IN}-\{0,1\}$បង្ហាញថា

$$\prod_{k=1}^{n}\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]=\prod_{k=1}^{n}\cot\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]\quad (*)។$$

សម្រាយ

តាង $u_k=\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$, $v_k=\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$

យើងបាន $(*)\Leftrightarrow\prod_{i=1}^{k}u_kv_k=1$

តាង $t_k=\tan\frac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}$

យើងបាន $u_k = \tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right] = \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}\right) = \frac{\sqrt{3}+t_k}{1-\sqrt{3}t_k}$

$$v_k = \frac{\sqrt{3}-t_k}{1+\sqrt{3}t_k}$$

ដោយ $t_{k+1} = \frac{3t_k - t_k^3}{1-3t_k^2}$ គេបាន $\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{3-t_k^2}{1-3t_k^2} = u_k v_k$

ហេតុនេះ $\prod_{i=1}^{k} u_k v_k = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)\left(\frac{t_3}{t_2}\right)\ldots\left(\frac{t_{n+1}}{t_n}\right) = \frac{\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3^n-1}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{3^n-1}\right)} = 1$

លំហាត់ ៧៦

(China,1999)

គេឲ្យពហុធា $P_2(x) = x^2 - 2$ ។ កំណត់គ្រប់ស្វ៊ីតពហុធា $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ បើ $P_k(x)$ ជាពហុធាម៉ូនិច (Monic) មានដឺក្រេ k និង $P_i(P_j(x)) = P_j(P_i(x))$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន i , j ។

សម្គាល់

ពហុធាម៉ូនិច ជាពហុធាដែលមានមេគុណនាំមុខស្មើនឹង 1 គឺ ពហុធាដែលមានរាង $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ។

ចម្លើយ

បង្ហាញថា បើស្វ៊ីតនៃពហុធាមាន នោះវាមានតែមួយគត់

ដោយ $P_i(P_j(x)) = P_j(P_i(x))$ ចំពោះ $\forall i$, $j \in \mathrm{IN}$

យើងបាន $P_n(P_2(x)) = P_2(P_n(x))$

តាង $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$$\Rightarrow (x^2-2)^n + a_{n-1}(x^2-2)^{n-1} + \ldots + a_1(x^2-2) + a_0$$
$$= (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) - 2$$

ពិនិត្យ

អង្គខាងឆ្វេង៖ x^{2i} ជាស្វ័យគុណនៃ x ធំបំផុតដែលមាន a_i

អង្គខាងស្តាំ៖ x^{n+i} ជាស្វ័យគុណនៃ x ធំបំផុតដែលមាន $2a_i$ ជាមេគុណ

ដោយស្វ័យគុណគោល x មាន a_i នៃអង្គខាងស្តាំធំជាងអង្គខាងឆ្វេងជានិច្ច

នាំឲ្យ គេអាចរកតម្លៃបានតម្លៃ a_{n-1} , a_{n-2} , … , a_0 ជាបន្តបន្ទាប់ ដោយធ្វើការប្រៀបធៀបមេគុណនៃស្វ័យគុណគោល x

ម្យ៉ាងទៀត ដោយប្រព័ន្ធសមីការដែលទទួលបានពីការប្រៀបធៀបមេគុណនៃស្វ័យគុណ គោល x ជាប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$\Rightarrow P_n(x)$ មានតែមួយគត់

តាមលក្ខខណៈនៃពហុធា Chebyshev យើងសន្មតថា $P_n(x)=T_n\left(\frac{x}{2}\right)$

T_n ជាពហុធា Chebyshev ទី n (មើលលំហាត់ ៤៩)

យើងបាន $P_1(x)=x$, $P_2(x)=x^2-2$ និង $P_{n+1}(x)=xP_n(x)-P_{n-1}(x)$

ដោយ $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta \Rightarrow P_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$

ចំពោះ $\forall\theta$ គេបាន $P_m(P_n(2\cos\theta))=P_m(2\cos n\theta)=2\cos mn\theta$

$$=P_n(2\cos m\theta)=P_n(P_m(2\cos\theta))$$

$\Rightarrow P_m(P_n(x))=P_n(P_m(x))$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-2,2]$

ដោយ $P_m(P_n(x))$, $P_n(P_m(x))$ ជាពហុធា

គេបាន $P_m(P_n(x))=P_n(P_m(x))$ ចំពោះគ្រប់ $x\in \mathrm{IR}$

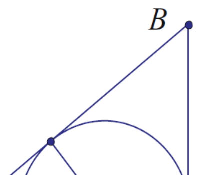
ហេតុនេះ ស៊ីតពហុធា $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ កំណត់ដោយ $P_1(x)=x$, $P_2(x)=x^2-2$ និង $P_{n+1}(x)=xP_n(x)-P_{n-1}(x)$

លំហាត់ ៧៧

(China,2000)

ក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន $a\le b\le c$ ។ កំណត់លក្ខខណ្ឌនៃមុំ C ដើម្បីកន្សោម $a+b-2R-2r$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន អវិជ្ជមាន និង សូន្យ ។

ចម្លើយ



យក $\angle A = 2x$, $\angle B = 2y$ និង $\angle C = 2z$

ដោយ $a \le b \le c$ $A \le B \le C \Rightarrow x \le y \le z$ និង $x + y + z = \dfrac{\pi}{2}$

តាង $s = a + b - 2R - 2r$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស និង លំហាត់ ២៥(d) យើងបាន

$$s = 2R(\sin 2x + \sin 2y - 1 - 4\sin x \sin y \sin z)$$

$$\Rightarrow \frac{s}{2R} = 2\sin(x+y)\cos(x-y) - 1 + 2[\cos(x+y) - \cos(x-y)]\sin z$$

$$= 2\cos z \cos(x-y) - 1 + 2[\sin z - \cos(x-y)]\sin z$$

$$= 2\cos(x-y)(\cos z - \sin z) - \cos 2z$$

$$= 2\cos(y-x)\cdot\frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z + \sin z} - \cos 2z$$

$$= \frac{2\cos(y-x)\cos z}{\cos z + \sin z} - \cos 2z$$

$$= \left[\frac{2\cos(y-x)}{\cos z + \sin z} - 1\right]\cos 2z$$

យើងមាន $0 \le y - x < \min\{y, x+y\} \le \min\left\{z, \dfrac{\pi}{2} - z\right\}$

ដោយ $z \le \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} - z \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(y-x) > \max\left\{\cos z, \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right)\right\}$

$$= \max\{\cos z, \sin z\}$$

$$\Rightarrow 2\cos(y-x) > \cos z + \sin z \Rightarrow \frac{2\cos(y-x)}{\cos z + \sin z} - 1 > 0$$

$\Rightarrow s = p\cos 2z = p\cos C$ ដែល $p > 0$

ហេតុនេះ $s > 0$ បើ C ជាមុំស្រួច, $s < 0$ បើ C ជាមុំទាល

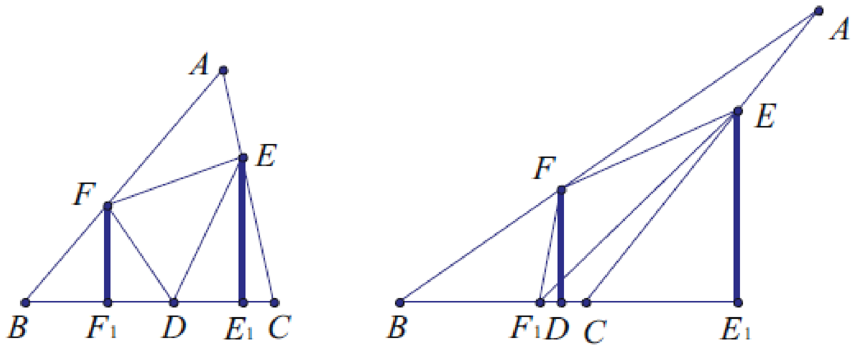
និង $s = 0$ បើ C ជាមុំកែង

លំហាត់ ៧៨

យក D, E, F ជាចំណុចនៅលើជ្រុង BC, CA, AB នៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ បើគេដឹងថា $DC + CE = EA + AF = FB + BD$ បង្ហាញថា

$DE + EF + FD \geq \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$ ។

សម្រាយ



យក E_1, F_1 ជាចំណោលកែងនៃ E, F លើ BC (ដូចរូប)

យើងបាន $EF \geq E_1F_1 = a - (BF\cos B + CE\cos C)$ (1)

(បន្ទាត់កែង និង បន្ទាត់ទ្រេត)

ដូចគ្នា $DE \geq c - (AE\cos A + BD\cos B)$ (2)

$FD \geq b - (CD\cos C + AF\cos A)$ (3)

ដោយ $DC + CE = EA + AF = FB + BD = \frac{a+b+c}{3}$

បូក (1),(2) និង (3) យើងបាន

$DE+EF+FD \geq a+b+c-\frac{1}{3}(a+b+c)(\cos A+\cos B+\cos C)$

តាម លំហាត់ ២៧(b) $\cos A+\cos B+\cos C \leq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow DE+EF+FD \geq \frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$

សមភាពកើតឡើងពេល អង្កត់ដែលជាចំណោលកែងនៃ EF (DE , FD លើ BC (AB , CA) និង EF (DE , FD)មានប្រវែងស្មើគ្នា

ហើយ $A=B=C=60^\circ$

ហេតុនេះ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស និង D , E , F ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ BC , CA , AB រៀងគ្នា

លំហាត់ ៧៩

ចំពោះ a , b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បង្ហាញថា $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$

បើ (a) $0<a,b \leq 1$ រឺ (b) $ab \geq 3$ ។

សម្រាយ

ដោយ a , b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$\Rightarrow a=\tan x$, $b=\tan y$ ដែល $0<x$, $y<90^\circ$

យើងបាន $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\cos x$

$$\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}}=\cos y$$

$$\frac{2}{\sqrt{1+ab}}=\frac{2}{\sqrt{1+\tan x\tan y}}=2\sqrt{\frac{\cos(x-y)}{\cos x\cos y}}$$

វិសមភាព ត្រូវបង្ហាញសមមូលនឹង $\cos x+\cos y \geq 2\sqrt{\frac{\cos(x-y)}{\cos x\cos y}}$ (*)

(a) បើ $x=y \Leftrightarrow a=b \Rightarrow$ វិសមភាពត្រូវបង្ហាញផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $x \neq y \Leftrightarrow a \neq b$ យើងបាន

$$(*) \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x \cos y \geq \frac{4\cos(x-y)}{\cos x \cos y} \quad (**)$$

ដោយ $0 < a\,,\ b \leq 1 \Rightarrow 0 < x\,,\ y \leq 45^\circ \Rightarrow 0 \leq |x-y| < 90^\circ$

$$\Rightarrow \cos(x-y) \leq 1 \Rightarrow 2\cos x \cos y \leq \frac{2\cos x \cos y}{\cos(x-y)}$$

ដើម្បីបង្ហាញថា (**) ពិត យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\cos(x-y)\left(\cos^2 x + \cos^2 y\right) \leq 2\cos x \cos y$$

$$\Leftrightarrow \cos(x-y)\left(\cos 2x + \cos 2y + 2\right) \leq 4\cos x \cos y$$

$$\Leftrightarrow \cos(x-y)\left[2\cos(x+y)\cos(x-y) + 2\right] \leq 2\cos(x+y)\cos(x-y)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(x-y)\cos(x+y) \leq \cos(x+y)$$

$\Leftrightarrow \cos^2(x-y) \leq 1$ ពិត

ព្រោះ $0^\circ < x + y \leq 90^\circ \Rightarrow \cos(x+y) > 0$

(b) $(*) \Leftrightarrow 2\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]}{\cos(x-y)}}$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos(x-y) \geq 2\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[1 + \cos(x+y)\right]\left[1 + \cos(x-y)\right]\cos(x-y) \geq 2\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right] \quad (***)$$

តាង $s = \cos(x+y),\ t = \cos(x-y)$

យើងបាន $(***) \Leftrightarrow (1+s)(1+t)t \geq 2(s+t)$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (1+s)t^2 + (s-1)t - 2s = (t-1)\left[(1+s)t + 2s\right]$$

$\Leftrightarrow (1+s)t + 2s \leq 0$ ព្រោះ $t \leq 1 \Rightarrow t - 1 \leq 0$

ដោយ $ab \geq 3 \Rightarrow \tan x \tan y \geq 3 \Rightarrow \sin x \sin y \geq 3\cos x \cos y$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] \geq \frac{3}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

$\Rightarrow t \geq -2s \Rightarrow (1+s)t \geq -2s(1+s)$ ព្រោះ $1 + s \geq 0$

$$\Rightarrow (1+s)t+2s \le -2s(1+s)+2s = -2s^2 \le 0$$ ពិត

លំហាត់ ៨០

(China,1998)

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមិនមានមុំទាល បំពេញលក្ខខណ្ឌ $AB > AC$, $\angle B = 45^\circ$ ។ យក O និង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង ចារឹកក្នុងរៀងគ្នានៃត្រីកោណនេះ ។ឧបមាថា $\sqrt{2}OI = AB - AC$ ។ គណនា $\sin A$ ។

ចម្លើយ

ឧបមថា រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ប៉ះជ្រុង BC , CA , AB ត្រង់ D , E , F រៀងគ្នា

យើងបាន $BD = \dfrac{a-b+c}{2}$, $r = ID = BD\tan\dfrac{B}{2}$

ដោយ $\tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{1-\cos B}{\sin B} = \dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1$

និង $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ (ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស)

$\Rightarrow r = R(\sqrt{2}-1)(\sin A - \sin B + \sin C)$

តាម រូបមន្ត Euler

$$\begin{aligned} OI^2 &= R^2 - 2Rr \\ &= R^2 - 2R^2(\sqrt{2}-1)(\sin A - \sin B + \sin C) \\ &= R^2\left[1 - 2(\sqrt{2}-1)(\sin A - \sin B + \sin C)\right] \end{aligned}$$

ម៉្យាងទៀត $\sqrt{2}OI = AB - AC = c - b$

$$\Rightarrow OI^2 = \frac{(c-b)^2}{2} = 2R^2(\sin C - \sin B)^2$$

$$\Rightarrow 2(\sin C - \sin B)^2 = 1 - 2(\sin A + \sin C - \sin B)(\sqrt{2}-1)$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\left(\sin C - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\left(\sin A + \sin C - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{2}-1) \quad (*)$$

តែ $\sin C = \sin(180^\circ - A - B) = \sin(135^\circ - A)$

$$= \sin 135^\circ \cos A - \sin A \cos 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A + \cos A)$$

$$\Rightarrow \sin C - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A + \cos A - 1)$$

ជំនួសក្នុង (*) យើងបាន

$$1-(\sin A+\cos A-1)^2 = 2(\sqrt{2}-1)\left[\sin A + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A+\cos A-1)\right]$$

$$\Leftrightarrow 1-(\sin A+\cos A)^2 + 2(\sin A+\cos A)-1$$
$$= (\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})\sin A + (2-\sqrt{2})(\cos A - 1)$$

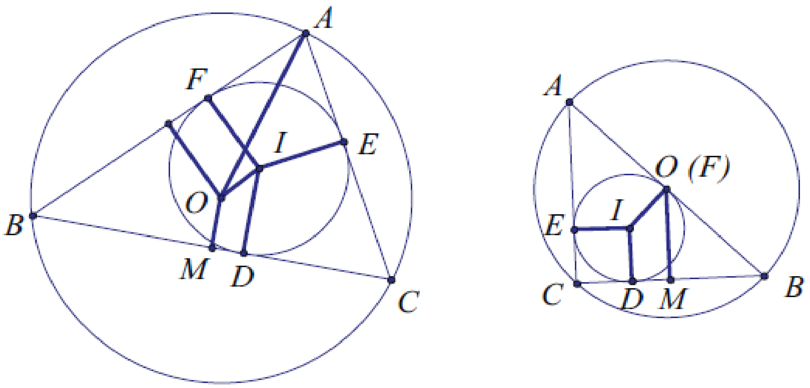
$$\Leftrightarrow \sin^2 A+\cos^2 A + 2\sin A\cos A = (2-\sqrt{2})\sin A + \sqrt{2}\cos A$$
$$+2-\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin A\cos A - (2-\sqrt{2})\sin A - \sqrt{2}\cos A + \sqrt{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin A - 1)(\sqrt{2}\cos A - \sqrt{2}+1) = 0$$

លុះត្រាតែ $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos A = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

ហេតុនេះ $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ រឺ $\sin A = \frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$



របៀបទី ២

ឧបមថា រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ប៉ះជ្រុង BC , CA , AB ត្រង់ D , E , F រៀងគ្នា $\Rightarrow AF = AE$, $BD = BF$ និង $CD = CE$

យក M ជាចំណោលកែងនៃ O លើ BC

$\Rightarrow M$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $BC \Rightarrow BM = CM$

ដោយ $c > b \Rightarrow M$ នៅលើ BD

យើងបាន $\sqrt{2}OI = c - b = (AF + FB) - (AE + EC)$

$$= FB - EC = BD - DC$$

តែ $BD = BM + MD$, $CM - DM$

$\Rightarrow \sqrt{2}OI = 2DM \Rightarrow OI = \sqrt{2}DM$

$\Rightarrow OI$ និង DM ផ្គុំបានមុំ 45°

$\Rightarrow OI \perp AB$ រឺ $OI \| AB$

បើ $OI \perp AB \Rightarrow O$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ AB

គេបាន កន្លះបន្ទាត់ពុះនៃមុំ $\angle C$ ជាមេដ្យានគូសចេញពីកំពូល C

$\Rightarrow ABC$ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល C គឺ $BC = CA$

ហេតុនេះ $A = 45^\circ \Rightarrow \sin A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

បើ $OI \| AB$

យក N ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $AB \Rightarrow OIFN$ ជាចតុកោណកែង

ដោយ $\angle AON = \angle C$

យើងបាន $R\cos\angle AON = R\cos C = ON = IF = r$

តាម លំហាត់ ២៧ $\Rightarrow \cos C = \dfrac{R}{r} = \cos A + \cos B + \cos C - 1$

$\Rightarrow \cos A = 1 - \cos B = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ហេតុនេះ $\sin A = \dfrac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2}$

លំហាត់ ៨១

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ កំណត់ចំនួនពិត a_0 និង $a_{k,l}$, $1 \le l < k \le n$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} = a_0 + \sum_{1 \le l < k \le n} a_{l,k} \cos 2(k-l)x$ (*) ។

ចម្លើយ

តាង $S = \sin 2x + \sin 4x + ... + \sin 2nx$

$C = \cos 2x + \cos 4x + ... + \cos 2nx$

យើងមាន $2\sin 2kx \sin x = \cos(2k-1)x - \cos(2k+1)x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2S\sin x &= 2\sin 2x \sin x + 2\sin 4x \sin x + ... + 2\sin 2nx \sin x \\ &= (\cos x - \cos 3x) + (\cos 3x - \cos 5x) + ... \\ &\qquad + [\cos(2n-1)x - \cos(2n+1)x] \\ &= \cos x - \cos(2n+1)x = 2\sin nx \sin(n+1)x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sin nx \sin(n+1)x}{\sin x}$$

ម្យ៉ាងទៀត $2\cos 2kx \sin x = \sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2C\sin x &= 2\cos 2x \sin x + 2\cos 4x \sin x + ... + 2\cos 2nx \sin x \\ &= (\sin 3x - \sin x) + (\sin 5x - \sin 3x) + ... \\ &\qquad + [\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x] \\ &= \sin(2n+1)x - \sin x = 2\sin nx \cos(n+1)x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{\sin x}$$

យើងបាន $\left(\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\right)^2 = \left[\frac{\sin nx \sin(n+1)x}{\sin x}\right]^2 + \left[\frac{\sin nx \cos(n+1)x}{\sin x}\right]^2$

$$= S^2 + C^2$$

ដោយ $S^2 + C^2 = (\sin 2x + \sin 4x + ... + \sin 2nx)^2$

$$\begin{aligned} &+ (\cos 2x + \cos 4x + ... + \cos 2nx)^2 \\ &= n + \sum_{1 \le l < k \le n} (2\sin 2lx \cos 2kx + 2\cos 2lx \cos 2kx) \\ &= n + 2\sum_{1 \le l < k \le n} \cos 2(k-l)x \end{aligned}$$

កំណត់ យក $a_0 = n$ និង $a_{l,k} = 2 \Rightarrow (*)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ហេតុនេះ $a_0 = n$, $a_{l,k} = 2$

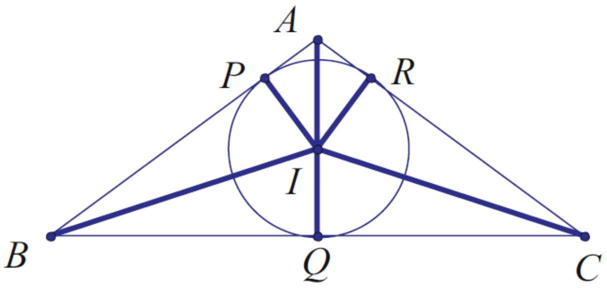
លំហាត់ ៨២

(USAMO,2000)

យក S ជាសំណុំនៃត្រីកោណ ABC បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$5\left(\frac{1}{AP}+\frac{1}{BQ}+\frac{1}{CR}\right)-\frac{3}{\min\{AP,BQ,CR\}}=\frac{6}{r}$ ដែល r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC និង P , Q , R ជាចំណុចប៉ះរវាងរង្វង់ចារឹកក្នុងនឹងជ្រុង AB , BC , CA នៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា ត្រីកោណទាំងអស់នៃសំណុំ S ជាត្រីកោណសមបាត និង ដូចគ្នា ។

សម្រាយ



យក I ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ $ABC \Rightarrow IP = IQ = IR = r$

WLOG សន្មតថា $\min\{AP,BQ,CR\} = AP$ (ដូចរូប)

តាង $x = \tan\frac{A}{2}$, $y = \tan\frac{B}{2}$ និង $z = \tan\frac{C}{2}$

តាម លំហាត់ ១៩(a) យើងបាន $xy + yz + zx = 1$ (1)

ដោយ $AP = \frac{x}{r}$, $BQ = \frac{r}{y}$ និង $CR = \frac{r}{z}$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{1}{AP}+\frac{1}{BQ}+\frac{1}{CR}\right)-\frac{3}{\min\{AP,BQ,CR\}}=\frac{6}{r}$$

$\Leftrightarrow 2x+5y+5z=6$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $5y^2+5z^2+8yz-6y-6z+2=0$

$\Leftrightarrow (3y-1)^2+(3z-1)^2=4(y-z)^2$ (*)

តាង $3y-1=u$, $3z-1=v \Rightarrow y-z=\frac{u-v}{3}$

គេបាន (*) $\Leftrightarrow 5u^2+8uv+5v^2=0$ មាន $\Delta'=16v^2-25v^2=-9v^2\le 0$

សមីការមានរឹស កាលណា $v=0\Rightarrow u=0\Rightarrow y=z=\frac{1}{3}$ និង $x=\frac{1}{4}$

នេះ បញ្ជាក់ថា ត្រីកោណទាំងអស់នៃសំណុំ S សុទ្ធតែជាត្រីកោណសមបាត

ហើយ សុទ្ធតែជាត្រីកោណដូចគ្នា

លំហាត់ ៨៣

(TST,2003)

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{\sin a\sin(a-b)\sin(a-c)}{\sin(b+c)}+\frac{\sin b\sin(b-c)\sin(b-a)}{\sin(c+a)}$$
$$+\frac{\sin c\sin(c-a)\sin(c-b)}{\sin(a+b)}\ge 0 \text{ (*)។}$$

សម្រាយ

យើងមាន $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)$

$$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

$$\Rightarrow \sin a\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(a+b)\sin(a+c)$$
$$=\sin a(\sin^2 a-\sin^2 b)(\sin^2 a-\sin^2 c)$$

ហេតុនេះ ដើម្បីបង្ហាញថា (*) ពិត គេគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$x(x^2-y^2)(x^2-z^2)+y(y^2-z^2)(y^2-x^2)$$

$$+z\left(z^2-x^2\right)\left(z^2-y^2\right)\geq 0$$

ដែល $x=\sin a$, $y=\sin b$, $z=\sin c \Rightarrow x$, y , $z>0$

WLOG ឧបមាថា $x\leq y\leq z$

យើងបាន $x\left(x^2-y^2\right)\left(x^2-z^2\right)\geq 0$ (1)

និង $z\left(z^2-x^2\right)\left(z^2-y^2\right)\geq z\left(y^2-x^2\right)\left(z^2-y^2\right)\geq y\left(y^2-x^2\right)\left(z^2-y^2\right)$

$\Rightarrow y\left(y^2-x^2\right)\left(y^2-z^2\right)+z\left(z^2-x^2\right)\left(z^2-y^2\right)\geq 0$ (2)

បូក (1),(2) យើងបាន $x\left(x^2-y^2\right)\left(x^2-z^2\right)+y\left(y^2-z^2\right)\left(y^2-x^2\right)$

$+z\left(z^2-x^2\right)\left(z^2-y^2\right)\geq 0$

លំហាត់ ៨៤

(TST,2002)

ចំពោះ គ្រប់ត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា $\sin\frac{3A}{2}+\sin\frac{3B}{2}+\sin\frac{3C}{2}$

$\leq\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)+\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)$ (*)។

សម្រាយ

របៀបទី ១

តាង $\alpha=\frac{A}{2}$, $\beta=\frac{B}{2}$, $\gamma=\frac{C}{2}\Rightarrow 0<\alpha$, β , $\gamma<90°$

យើងបាន $\sin\frac{3A}{2}-\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)=\sin 3\alpha-\cos(\beta-\gamma)$

$$=\sin 3\alpha-\sin(\alpha+2\gamma)$$
$$=2\cos(2\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)$$
$$=-2\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)$$

ស្រាយដូចគ្នា $\sin\frac{3B}{2}-\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)=-2\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)$

$$\sin\frac{3C}{2}-\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=-2\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)$$

យើងបាន (*) $\Leftrightarrow\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)$

$$+\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\ge 0$$

WLOG ឧបមថា $\alpha\le\beta\le\gamma$

យើងបាន $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)$

$$+\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)$$

$$=\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\gamma-\beta)[\sin(\gamma-\alpha)-\sin(\beta-\alpha)]\ge 0$$

ព្រោះ $y=\sin x$ ជាអនុគមន៍កើន ចំពោះ $0<x<90^\circ$

របៀបទី ២

តាង $\alpha=\frac{A}{2}$, $\beta=\frac{B}{2}$, $\gamma=\frac{C}{2}\Rightarrow 0<\alpha$, β , $\gamma<90^\circ$

WLOG ឧបមាថា $A\le B\le C\Rightarrow\alpha\le\beta\le\gamma$

យើងមាន $\sin 3\alpha=\sin\alpha\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha$

$\cos(\beta-\alpha)=\sin(2\alpha+\gamma)=\sin 2\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos 2\alpha$

$\cos(\beta-\gamma)=\sin(2\gamma+\alpha)=\sin 2\gamma\cos\alpha+\sin\alpha\cos 2\gamma$

$\sin 3\gamma=\sin\gamma\cos 2\gamma+\sin 2\gamma\cos\gamma$

$\Rightarrow\sin 3\alpha+\sin 3\beta-\cos(\beta-\alpha)-\cos(\beta-\gamma)$

$$=(\sin\alpha-\sin\gamma)(\cos 2\alpha-\cos 2\gamma)$$

$$+(\cos\alpha-\cos\gamma)(\sin 2\alpha-\sin 2\gamma)$$

$$=(\sin\alpha-\sin\gamma)(\cos 2\alpha-\cos 2\gamma)$$

$$+2(\cos\alpha-\cos\gamma)\cos(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)$$

$\sin x$ ជាអនុគមន៍កើន $\cos x$, $\cos 2x$ ជាអនុគមន៍ចុះចំពោះ $0^\circ<x<90^\circ$

ដោយ $0^\circ<\alpha$, γ , $\alpha+\gamma<90^\circ$ យើងបាន

$(\sin\alpha-\sin\gamma)(\cos 2\alpha-\cos 2\gamma)\le 0$

$2(\cos\alpha-\cos\gamma)\cos(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)\le 0$

$\Rightarrow\sin 3\alpha+\sin 3\beta-\cos(\beta-\alpha)-\cos(\beta-\gamma)\le 0$

$\Rightarrow\sin 3\alpha+\sin 3\beta\le\cos(\beta-\alpha)+\cos(\beta-\gamma)$ (1)

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $\sin 3\beta+\sin 3\alpha\le\cos(\gamma-\beta)+\cos(\gamma-\alpha)$ (2)

$$\sin 3\gamma+\sin 3\beta\le\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\alpha-\beta)\ (3)$$

បូក (1),(2),(3) យើងបាន

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma \le \cos(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\gamma) + \cos(\gamma-\alpha)$$

ហេតុនេះ $\sin\frac{3A}{2} + \sin\frac{3B}{2} + \sin\frac{3C}{2}$

$$\le \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) + \cos\left(\frac{C-A}{2}\right)$$

លំហាត់ ៨៥

គេឲ្យ $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ n \ge 2$ ជា n ចំនួនផ្សេងគ្នានៃចន្លោះ $[-1,1]$។

បង្ហាញថា $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \ge 2^{n-2}$ ដែល $t_i = \prod_{j \ne i} \left| x_j - x_i \right|$ ។

សម្រាយ

យក T_n ជាពហុធា Chebyshev ទី n (ដូចលំហាត់ ៤៩) កំណត់ដោយ $T_n(\cos x) = \cos nx$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $T_0(x) = 1$ និង $T_1(x) = x$

$\Rightarrow$ មេគុណនាំមុខនៃ T_n គឺ 2^{n-1} ចំពោះ $n \ge 1$

តាម រូបមន្តអាំទែប៉ូឡាស្យុង Lagrange (Lagrange's Interpolation)

យើងបាន $T_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{n-1}(x_k)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$

$$\Rightarrow 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{n-1}(x_k)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

ដោយ $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \in [-1,1] \Rightarrow x_k = \cos\theta_k$

$$\Rightarrow \left|T_{n-1}(x_k)\right| \le \left|\cos(n-1)\theta_k\right| \le 1$$

$$\Rightarrow 2^{n-1} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|T_{n-1}(x_k)\right|}{\left|(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)\right|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k}$$

ហេតុនេះ $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \ge 2^{n-2}$

លំហាត់ ៨៦

(St.Petersburg, 2001)

គេឲ្យ $x_1,\ x_2,\dots,x_{10}$ ជាចំនួនពិតក្នុងចន្លោះ $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\sin^2 x_1+\sin^2 x_2+\ldots+\sin^2 x_{10}=1$ ។ បង្ហាញថា

$3(\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_{10})\le\cos x_1+\cos x_2+\ldots+\cos x_{10}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\sin^2 x_1+\sin^2 x_2+\ldots+\sin^2 x_{10}=1\Rightarrow\cos x_i=\sqrt{\sum_{j\ne i}\sin^2 x_j}$

តាម QM-AM យើងបាន $\cos x_i=\sqrt{\sum_{j\ne i}\sin^2 x_j}\ge\dfrac{\sum_{j\ne i}\sin x_j}{3}$, $i=\overline{1,10}$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{10}\cos x_i\ge\sum_{i=1}^{10}\sum_{j\ne i}\sin x_j=\sum_{i=1}^{10}\frac{9\sin x_i}{3}=3\sum_{i=1}^{10}\sin x_i$$

ហេតុនេះ $3(\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_{10})\le\cos x_1+\cos x_2+\ldots+\cos x_{10}$

លំហាត់ ៨៧

(IMO Shortlist,2001)

គេឲ្យ $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\ldots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2\ldots+x_n^2}<\sqrt{n}\ ។$$

សម្រាយ

ចំពោះ $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow$ រ៉ង់នៃ $\tan\alpha=\mathrm{IR}$ និង $\sec\alpha\ne0$

ហេតុនេះ បើ $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ ជាចំនួនពិត គេបាន $x_1=\tan\alpha_1$,

$x_2=\sec\alpha_1\tan\alpha_2,\ \dots,\ x_n=\sec\alpha_1\sec\alpha_2\ldots\sec\alpha_{k-1}\tan\alpha_n$

យើងបាន $\dfrac{x_k}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2}$

$$=\frac{\sec\alpha_1\sec\alpha_2\ldots\sec\alpha_{k-1}\tan\alpha_k}{1+\tan^2\alpha_1+\ldots+\sec^2\alpha_1\sec^2\alpha_2\ldots\sec^2\alpha_{k-1}\tan^2\alpha_k}$$

ដោយ $1+\tan^2\alpha_1+\sec^2\alpha_1\tan^2\alpha_2+\dots$

$$+\sec^2\alpha_1\sec^2\alpha_2\dots\sec^2\alpha_{k-1}\tan^2\alpha_k$$

$$=\sec^2\alpha_1+\sec^2\alpha_1\tan^2\alpha_2+\dots$$

$$+\sec^2\alpha_1\sec^2\alpha_2\dots\sec^2\alpha_{k-1}\tan^2\alpha_k$$

$$=\sec^2\alpha_1\sec^2\alpha_2+\sec^2\alpha_1\sec^2\alpha_2\tan^2\alpha_3+\dots+$$

$$\sec^2\alpha_1\sec^2\alpha_2\dots\sec^2\alpha_{k-1}\tan^2\alpha_k$$

…………………………………………………………………….

$$=\sec^2\alpha_1\sec^2\alpha_2\dots\sec^2\alpha_k$$

$$\Rightarrow\frac{x_k}{1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_k^2}=\frac{\sec\alpha_1\sec\alpha_2\dots\sec\alpha_{k-1}\tan\alpha_k}{\sec^2\alpha_1\sec^2\alpha_2\dots\sec^2\alpha_k}$$

$$=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\dots\cos\alpha_k\sin\alpha_k$$

គេបាន $\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\dots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2\dots+x_n^2}$

$$=\cos\alpha_1\sin\alpha_1+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_2+\dots$$

$$+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\dots\cos\alpha_n\sin\alpha_n$$

(*) $\Leftrightarrow\cos\alpha_1\sin\alpha_1+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_2+\dots$

$$+\cos\alpha_1\cos\alpha_2\dots\cos\alpha_n\sin\alpha_n<\sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow c_1s_1+c_1c_2s_2+\dots+c_1c_2\dots c_ns_n<\sqrt{n}$$

ដែល $c_i=\cos\alpha_i,\ s_i=\sin\alpha_i,\ i=\overline{1,n}$

ចំពោះ $i=\overline{2,n}$ យើងបាន $c_i^2+s_i^2=\cos^2\alpha_i+\sin^2\alpha_i=1$

$$\Rightarrow c_1^2c_2^2\dots c_{i-1}^2s_i^2+c_1^2c_2^2\dots c_i^2=c_1^2c_2^2\dots c_{i-1}^2$$

$$\Rightarrow s_1^2+c_1^2s_2^2+\dots+c_1^2c_2^2\dots c_{n-2}^2s_{n-1}^2+c_1^2c_2^2\dots c_{n-1}^2=1\quad (*)$$

តាម (*) និង វិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$c_1s_1+c_1c_2s_2+\dots+c_1c_2\dots c_ns_n$$

$$\le\sqrt{s_1^2+c_1^2s_2^2+\dots+c_1^2c_2^2\dots c_{n-2}^2s_{n-1}^2+c_1^2c_2^2\dots c_{n-1}^2}$$

$$\times\sqrt{c_1^2+c_2^2+\dots+c_{n-1}^2+c_n^2s_n^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_{n-1} + \cos^2\alpha_n \sin^2\alpha_n}$$

$\leq \sqrt{n}$

សមភាពកើតឡើងពេល $\cos\alpha_1 = \ldots = \cos\alpha_{n-1} = \cos\alpha_n \sin\alpha_n = 1$

មិនអាច ព្រោះ $\cos\alpha_n \sin\alpha_n = \frac{1}{2}\sin 2\alpha_n < 1$

$\Rightarrow c_1 s_1 + c_1 c_2 s_2 + \ldots + c_1 c_2 \ldots c_n s_n < \sqrt{n}$

ហេតុនេះ $\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2\ldots+x_n^2} < \sqrt{n}$

លំហាត់ ៨៨

(USAMO,1998)

គេឲ្យ a_0 , a_1 , … , a_n ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\tan\left(a_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(a_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots + \tan\left(a_n - \frac{\pi}{4}\right) \geq n-1$ ។

បង្ហាញថា $\tan a_0 \tan a_1 \ldots \tan a_n \geq n^{n+1}$ ។

សម្រាយ

តាង $b_k = \tan\left(a_k - \frac{\pi}{4}\right)$ ចំពោះ $k = \overline{0,n}$

ដោយ a_0 , a_1 , … , a_n ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\tan\left(a_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(a_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots + \tan\left(a_n - \frac{\pi}{4}\right) \geq n-1$

គេបាន $-1 < b_k < 1,\ k = \overline{0,n}$ និង $1 + b_k \geq \sum_{0\leq l\neq k\leq n}(1-b_l)$ (*)

អនុវត្តន៍ វិសមភាព AM-GM ចំពោះ $1-b_l$, $l = 0$, 1, … , $k-1$, $k+1$, …n

យើងបាន $\sum_{0\leq l\neq k\leq n}(1-b_l) \geq n\left[\prod_{0\leq l\neq k\leq n}(1-b_l)\right]^{\frac{1}{n}}$ (* *)

តាម (*),(* *) យើងបាន $\prod_{k=0}^{n}(1-b_k) \ge n^{n+1}\left[\prod_{l=0}^{n}(1-b_l)^n\right]^{\frac{1}{n}}$

$$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1+b_k}{1-b_k}\right) \ge n^{n+1}$$

ដោយ $\frac{1+b_k}{1-b_k} = \frac{1+\tan\left(a_k - \frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(a_k - \frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left[\left(a_k - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = \tan a_k$

ហេតុនេះ $\tan a_0 \tan a_1 \ldots \tan a_n \ge n^{n+1}$

លំហាត់ ៨៩

(MOSP,2001)

កំណត់គ្រប់ត្រីធាតុ (a,b,c)ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $a^2 - 2b^2 = 1$, $2b^2 - 3c^2 = 1$ និង $ab + bc + ca = 1$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $a^2 - 2b^2 = 1 \Rightarrow a \ne 0$

$2b^2 - 3c^2 = 1 \Rightarrow b \ne 0$

បើ $c = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a = \sqrt{2} \Rightarrow ab + bc + ca = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$ ពិត

ហេតុនេះ $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ជារឹសនៃប្រព័ន្ធសមីការ

យើងនឹងបង្ហាញថា គ្មានត្រីធាតុផ្សេងទៀតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ

ឧបមាថា មានត្រីធាតុ (a,b,c)ដែល $abc \ne 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ

យើងសង្កេតឃើញថា បើ (a,b,c)ជារឹសនៃប្រព័ន្ធសមីការ នោះ $(-a,-b,-c)$ ក៏ជារឹសនៃប្រព័ន្ធសមីការដែរ ហេតុនេះ WLOG ឧបមាថាពីរក្នុងចំណោម a , b , c ជាចំនួនវិជ្ជមាន (សន្មតថា a , b)

ដោយ $ab + bc + ca = 1$

តាម លំហាត់ ២១ យើងបាន $a=\cot A$, $b=\cot B$, $c=\cot C$
ដែល $0^\circ < A$, $B<90^\circ$ និង A, B, C ជាមុំនៃត្រីកោណតែមួយ
ហេតុនេះ $a^2+1=2(b^2+1)=3(c^2+1)$

$$\Rightarrow \csc^2 A = 2\csc^2 B = 3\csc^2 C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 A}=\frac{2}{\sin^2 B}=\frac{3}{\sin^2 C}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}$$

តាម ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស គេបាន $a'=k$, $b'=\sqrt{2}k$, $c'=\sqrt{3}k$, $k>0$
(a', b', c' ជារង្វាស់ជ្រុងផ្ទុយនឹងមុំ A, B, C រៀងគ្នា)
ដោយ $c'^2=a'^2+b'^2=3k^2 \Rightarrow ABC$ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

$\Rightarrow c=\cot C=\cot\frac{\pi}{2}=0$ (ផ្ទុយពីការឧបមា)

ហេតុនេះ $\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ ជាចម្លើយតែមួយគត់នៃប្រព័ន្ធសមីការ

លំហាត់ ៩០

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង $0<\theta_i<90^\circ$, $i=\overline{1,n}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់
$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\ldots+\cos^2\theta_n=1$ ។ បង្ហាញថា
$\tan\theta_1+\tan\theta_2+\ldots+\tan\theta_n \ge (n-1)(\cot\theta_1+\cot\theta_2+\ldots+\cot\theta_n)$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $1\le i\le n$ តាង $\cos\theta_i=a_i$

តាម QM-AM យើងបាន $\tan\theta_i=\frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta_i}}{\cos\theta_i}$

$$=\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{i-1}^2+a_i^2+\ldots+a_n^2}}{a_i}$$

$$\ge\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{i-1}+a_i+\ldots+a_n}{a_i\sqrt{n-1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \tan\theta_i \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \frac{a_j}{a_i} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{a_j}{a_i} \qquad (*)$$

តាម QM-HM យើងបាន

$$\cot\theta_i = \frac{\cos\theta_i}{\sin\theta_i} = \frac{\cos\theta_i}{\sqrt{1-\cos^2\theta_i}}$$

$$= \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + \ldots + a_n^2}}$$

$$\leq \frac{a_i\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{i-1}} + \frac{1}{a_i} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)}{(n-1)\sqrt{n-1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \cot\theta_i \leq \frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \frac{a_i}{a_j} = \frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{a_j}{a_i} \quad (**)$$

តាម (*),(**) យើងបាន $\sqrt{n-1}\sum_{i=1}^{n} \tan\theta_i \geq \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \frac{a_j}{a_i} \geq (n-1)^{\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^{n} \cot\theta_i$

ហេតុនេះ

$$\tan\theta_1 + \tan\theta_2 + \ldots + \tan\theta_n \geq (n-1)(\cot\theta_1 + \cot\theta_2 + \ldots + \cot\theta_n)$$

លំហាត់ ៩១

មួយក្នុងចំណោមវិសមភាព $(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$

និង $(\sin x)^{\sin x} > (\cos x)^{\cos x}$ ពិត ចំពោះ $\forall x:\ 0 < x < \frac{\pi}{4}$ ។

បញ្ជាក់ចម្លើយរបស់អ្នកដោយការស្រាយបញ្ជាក់ ។

សម្រាយ

វិសមភាពដែលពិតចំពោះ $\forall x:\ 0 < x < \frac{\pi}{4}$ គឺ $(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$

បើ $f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(0,1)$

$\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $(0,1)$

ចំពោះ $0<x<\frac{\pi}{4} \Rightarrow 0<\tan x<1 \Rightarrow 1-\tan x>0$

តាម វិសមភាព Jensen យើងបាន

$$\ln\cos x=\ln[\tan x\sin x+(1-\tan x)(\sin x+\cos x)]$$
$$\geq \tan x\ln\sin x+(1-\tan x)\ln(\sin x+\cos x) \quad (*)$$

ដោយ $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)>1 \Rightarrow \ln(\sin x+\cos x)>0$

តាម (*) យើងបាន $\ln\cos x>\tan x\ln\sin x$

$$\Rightarrow \cos x\ln\cos x>\sin x\ln\sin x$$

ហេតុនេះ $(\sin x)^{\sin x}<(\cos x)^{\cos x}$

លំហាត់ ៩២

គេឲ្យ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ មិនមែនជាផ្នែកពិត នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z^n=1,\ n\in \mathrm{IN}$ ។

សម្រាយ

ឧបមាថា $\alpha=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ ជាផ្នែកពិតនៃចំនួនកុំផ្លិច z

ដោយ $z^n=1 \Rightarrow z=\cos\frac{2j\pi}{n}+i\sin\frac{2j\pi}{n}$ ចំពោះ $j=\overline{0,n-1}$

$$\Rightarrow \alpha=\cos\frac{2k\pi}{n}$$

យក $T_n(x)$ ជាពហុធាChebyshev គឺ $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$,
$T_n(\cos n\theta)=\cos n\theta$ និង $T_{i+1}(x)=2xT_i(x)-T_{i-1}(x)$

យើងបាន $T_n(\alpha)=\cos(2\pi j)=1 \Rightarrow T_n(\alpha)-1=0$

$\Rightarrow \alpha$ ជាឫសនៃសមីការ $T_n(x)-1=0$

តាង $\beta=\sqrt{k+1}+\sqrt{k} \Rightarrow \alpha\beta=1,\ \alpha+\beta=2\sqrt{k+1}$

$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4(k+1)-2=4k+2$$

និង $\alpha^2\beta^2 = 1$

គេបាន α , $-\alpha$, β , $-\beta$ ជាឫសនៃពហុធា $P(x) = x^4 - (4k+2)x^2 + 1$

យក $Q(x)$ ជាពហុធា Minimal នៃ $\alpha \Rightarrow Q(x)$ មានដឺក្រេតូចជាង រឺ ស្មើ 4

បើ β , $-\beta$ មិនមែនជាឫសនៃពហុធា $Q(x) \Rightarrow Q(x)$ ចែកដាច់

$(x-\alpha)(x+\alpha) = x^2 - \left[2k+1-2\sqrt{k(k+1)}\right]$

$\Rightarrow k(k+1)$ ជាការេប្រាកដ មិនអាច ព្រោះ $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2$

$\Rightarrow \beta$, $-\beta$ ជាឫសនៃពហុធា $Q(x)$ មានន័យថា $Q(\beta') = 0$ ចំពោះ $\beta' = \beta$ រឺ

$\beta' = -\beta$

ដោយ α ជាឫសនៃពហុធា $T_n(x) - 1 \Rightarrow Q(x)$ ចែកដាច់ $T_n(x) - 1$

$\Rightarrow \beta'$ ជាឫសនៃពហុធា $T_n(x) - 1$ (*)

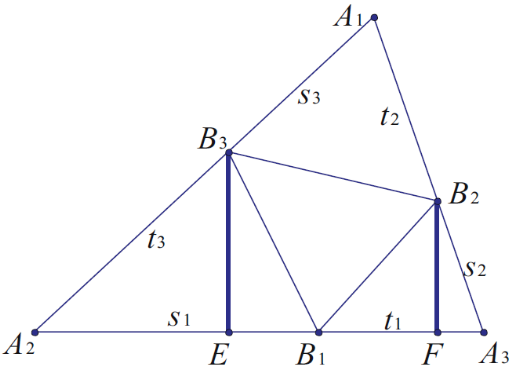
តែ $T_n(x) - 1$ មានឫសតែក្នុងចន្លោះ $[-1,1]$

$\Rightarrow$ (*) មិនពិត ព្រោះ $|\beta'| = \sqrt{k+1} + \sqrt{k} > 1$ ចំពោះ $k \geq 1$

លំហាត់ ៩៣

យក $A_1A_2A_3$ ជាត្រីកោណមុំស្រួច និង B_1 , B_2 , B_3 ជាចំណុចនៅលើជ្រុង A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $2(b_1\cos A_1 + b_2\cos A_2 + b_3\cos A_3)$ $\geq a_1\cos A_1 + a_2\cos A_2 + a_3\cos A_3$ (*) ដែល $a_i = A_{i+1}A_{i+2}$ និង $b_i = B_{i+1}B_{i+2}$ ចំពោះ $i = 1$, 2 , 3 (ក្នុងនោះ $x_{i+3} = x_i$) ។

សម្រាយ



តាង $B_iA_{i+1}=s_i$, $B_iA_{i+2}=t_i$ ចំពោះ $i=1,2,3$ (ដូចរូប) $\Rightarrow a_i=s_i+t_i$

យក E , F ជាចំណោលកែងនៃ B_2B_3 លើ A_2A_3

$\Rightarrow EF=a_1-t_3\cos A_2-s_2\cos A_3$

$\Rightarrow B_2B_3=b_1\ge a_1-t_1\cos A_2-s_2\cos A_3$

ដោយ $0^\circ<A<90^\circ\Rightarrow\cos A_1>0$

យើងបាន $b_1\cos A_1\ge a_1\cos A_1-t_1\cos A_2\cos A_1-s_2\cos A_3\cos A_1$

ស្រាយដូចគ្នា $b_2\cos A_2\ge a_2\cos A_2-t_1\cos A_3\cos A_2-s_3\cos A_1\cos A_2$

$b_3\cos A_3\ge a_3\cos A_3-t_2\cos A_1\cos A_3-s_1\cos A_2\cos A_3$

បូកអង្គ និង អង្គ គេបាន

$$\sum_{i=1}^{3}b_i\cos A_i\ge\sum_{i=1}^{3}a_i\left(\cos A_i-\cos A_{i+1}\cos A_{i+2}\right)$$

ដើម្បីបង្ហាញ (*) យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$2\sum_{i=1}^{3}a_i\left(\cos A_i-\cos A_{i+1}\cos A_{i+2}\right)\ge\sum_{i=1}^{3}a_i\cos A_i$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{3}a_i\left(\cos A_i-2\cos A_{i+1}\cos A_{i+2}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{3}\sin A_i\left(\cos A_i-2\cos A_{i+1}\cos A_{i+2}\right)\ge 0$$

ពិត តាម Lemma ខាងក្រោម

Lemma:

ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC គេបាន $\sum_{cyc}\sin A(\cos A-2\cos B\cos C)=0$ ។

សម្រាយ

តាម $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ យើងបាន

$$\sum_{cyc}\sin A(\cos A-2\cos B\cos C)=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\sin 2A = 2\sum_{cyc}\sin A\cos A = 4\sum_{cyc}\sin A\cos B\cos C$$

យើងមាន $4\sum_{cyc}\sin A\cos B\cos C$

$$= 2\sum_{cyc}(\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A)$$

$$= 2\sum_{cyc}\cos C(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$$

$$= 2\sum_{cyc}\cos C\sin(A+B)$$

$$= 2\sum_{cyc}\sin C\cos C = \sum_{cyc}\sin 2C = \sum_{cyc}\sin 2A$$

លំហាត់ ៩៤

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ, x , y , z ជាចំនួនពិត និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

(a) $x^2+y^2+z^2 \ge 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$

(b) $x^2+y^2+z^2 \ge 2(-1)^n(yz\cos nA+zx\cos nB+xy\cos nC)$

(c) $yza^2+zxb^2+xyc^2 \le R^2(x+y+z)^2$

(d) $xa^2+yb^2+zc^2 \ge 4[ABC]\sqrt{xy+yz+zx}$ ។

សម្រាយ

(a)

យើងមាន $x^2+y^2+z^2 \ge 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$

$$\Leftrightarrow x^2-2x(z\cos B+y\cos C)+y^2+z^2-2yz\cos A \ge 0$$

យក $f(x)=x^2-2x(z\cos B+y\cos C)+y^2+z^2-2yz\cos A$

$f(x)$ មានឌីសគ្រីមីណង់

$$\Delta' = (z\cos B + y\cos C)^2 - (y^2 + z^2 - 2yz\cos A)$$
$$= z^2\cos^2 B - z^2 + 2yz(\cos A + \cos B\cos C) + y^2\cos^2 C - y^2$$
$$= -z^2\sin^2 B + 2yz[-\cos(B+C) + \cos B\cos C] - y^2\sin^2 C$$
$$= -z^2\sin^2 B + 2yz\sin B\sin C - y^2\sin^2 C$$
$$= -(z\sin B - y\sin C)^2 \le 0 \Rightarrow f(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathrm{IR}$$

ហេតុនេះ $x^2 + y^2 + z^2 \ge 2yz\cos A + 2zx\cos B + 2xy\cos C$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 \ge 2(-1)^n(yz\cos nA + zx\cos nB + xy\cos nC)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x(-1)^n(z\cos nB + y\cos nC) + y^2 + z^2 + 2(-1)^n yz\cos nA \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2 + (-1)^n(z\cos nB + y\cos nC)\right]^2 + y^2 + z^2 + 2(-1)^n yz\cos nA$$
$$\ge (z\cos nB + y\cos nC)^2$$
$$= z^2\cos^2 nB + y^2\cos^2 nC + 2yz\cos nB\cos nC$$

ដោយ $\left[x^2 + (-1)^n(z\cos nB + y\cos nC)\right]^2 \ge 0$

ដូចនេះ គេគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$y^2 + z^2 + 2(-1)^n yz\cos nA \ge z^2\cos^2 nB + y^2\cos^2 nC + 2yz\cos nB\cos nC$$

$$\Leftrightarrow y^2\sin^2 nC + z^2\sin^2 nB + 2yz\left[(-1)^n\cos nA - \cos nB\cos nC\right] \ge 0 \quad (*)$$

បើ $n = 2k$ (គូ) $\Rightarrow nA + nB + nC = 2k\pi$

$$\Rightarrow \cos nA = \cos(nB + nC) = \cos nB\cos nC - \sin nB\sin nC$$

យើងបាន $(*) \Leftrightarrow y^2\sin^2 nC + z^2\sin^2 nB - 2yz\sin nB\sin nC$

$$= (y\sin nC - z\sin nB)^2 \ge 0$$ ពិត

បើ $n = 2k+1$ (សេស) $\Rightarrow nA + nB + nC = (2k+1)\pi$

$$\Rightarrow \cos nA = -\cos(nB + nC) = -\cos nB\cos nC + \sin nB\sin nC$$

យើងបាន $(*) \Leftrightarrow y^2\sin^2 nC + z^2\sin^2 nB - 2yz\sin nB\sin nC$

$$= (y\sin nC - z\sin nB)^2 \ge 0$$ ពិត

សមភាពកើតឡើងពេល $y\sin nC = z\sin nB \Rightarrow \dfrac{y}{\sin nB} = \dfrac{z}{\sin nC}$

ដោយ វិសមភាពស៊ីមេទ្រី គេបានសមភាពកើតឡើង បើ

$$\frac{x}{\sin nA} = \frac{y}{\sin nB} = \frac{z}{\sin nB}$$

ម្យ៉ាងទៀត

$\dfrac{x}{\sin nA} = \dfrac{y}{\sin nB} = \dfrac{z}{\sin nB}$ ជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់នៃសមភាពនៃវិសមភាព

ហេតុនេះ សមភាពកើតឡើង កាលណា $\dfrac{x}{\sin nA} = \dfrac{y}{\sin nB} = \dfrac{z}{\sin nB}$

(c) តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

យើងបាន $\dfrac{a}{R} = 2\sin A$, $\dfrac{b}{R} = 2\sin B$ និង $\dfrac{c}{R} = 2\sin C$

យើងបាន $yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \le R^2(x+y+z)^2$

$$\Leftrightarrow 4\left(yz\sin^2 A + zx\sin^2 B + xy\sin^2 C\right) \le x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge 2\left[yz\left(2\sin^2 A - 1\right) + zx\left(2\sin^2 B - 1\right) + xy\left(2\sin^2 C - 1\right)\right]$$

$$= -2\left(yz\cos 2A + zx\cos 2B + xy\cos 2C\right)$$

ពិត តាម(b) ករណី $n = 2$

សមភាពកើតឡើងពេល $\dfrac{x}{\sin 2A} = \dfrac{y}{\sin 2B} = \dfrac{z}{\sin 2C}$

(d) ជំនួស x, y, z ដោយ xa^2, yb^2, zc^2 រៀងគ្នាក្នុង (c) យើងបាន

$$a^2b^2c^2(xy+yz+zx) \le R^2\left(xa^2 + yb^2 + zc^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 16R^2[ABC](xy+yz+zx) \le R^2\left(xa^2 + yb^2 + zc^2\right)^2$$

តាម លំហាត់ ២៥(a)

ហេតុនេះ $xa^2 + yb^2 + zc^2 \ge 4[ABC]\sqrt{xy+yz+zx}$

សមភាពកើតឡើងពេល $\dfrac{xa^2}{\sin 2A} = \dfrac{yb^2}{\sin 2B} = \dfrac{zc^2}{\sin 2C}$

$$\Leftrightarrow \frac{xa}{\cos A} = \frac{yb}{\cos B} = \frac{zc}{\cos C}$$

ដោយ $\frac{a}{\cos A}=\frac{2abc}{b^2+c^2-a^2}$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស)

$\frac{b}{\cos b}=\frac{2abc}{c^2+a^2-b^2}$

$\frac{c}{\cos C}=\frac{2abc}{a^2+b^2-c^2}$

$\Rightarrow \frac{x}{b^2+c^2-a^2}=\frac{y}{c^2+a^2-b^2}=\frac{z}{a^2+b^2-c^2}$

លំហាត់ ៩៥

(USAMO,2004)

គេឲ្យ ω ជារង្វង់ចារឹកក្នុងចតុកោណ $ABCD$ ។ យក I ជាផ្ចិតនៃ ω ។

ឧបមថា $(AI+DI)^2+(BI+CI)^2=(AB+CD)^2$ ។

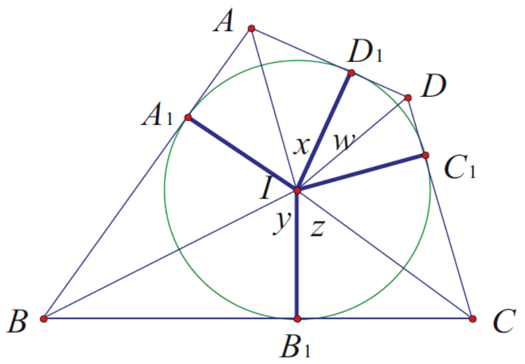
បង្ហាញថា $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយសមបាត ។

សម្រាយ

យើងនឹងបង្ហាញថា $(AI+DI)^2+(BI+CI)^2\le(AB+CD)^2$ (*)

សមភាពកើតឡើងពេល $AD\|BC$ និង $AB=CD$

WLOG សន្មតថា ប្រវែងកាំ ω ស្មើនឹង 1



របៀបទី ១

យក A_1, B_1, C_1, D_1 ជាចំណុចប៉ះរវាង ω និង ជ្រុង AB , BC , CD , DA

រៀងគ្នា $\Rightarrow \angle D_1IA = \angle AIA_1 = x$, $\angle A_1IB = \angle BIB_1 = y$

$\angle B_1IC = \angle CIC_1 = z$, $\angle C_1ID = \angle DID_1 = w$

$\Rightarrow 2x + 2y + 2z + 2w = 360° \Rightarrow x + w = 180° - (y + z)$

ដែល $0° < x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ w < 90°$

យើងបាន $AI = \sec x\ ,\ BI = \sec y\ ,\ CI = \sec z\ ,\ DI = \sec w$

$AD = AD_1 + D_1D = \tan x + \tan w$

$BC = BB_1 + B_1C = \tan y + \tan z$

$$\Rightarrow (\ *\ ) \Leftrightarrow (\sec x + \sec w)^2 + (\sec y + \sec z)^2 \le (\tan x + \tan y + \tan z + \tan w)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 + 2(\sec x \sec w + \sec y \sec z) \le 2\tan x \tan y + 2\tan x \tan z + 2\tan x \tan w + 2\tan y \tan z + 2\tan y \tan w + 2\tan z \tan w$$

$$\Leftrightarrow 2 + \sec x \sec w + \sec y \sec z \le \tan x \tan w + \tan y \tan z + (\tan x + \tan w)(\tan y + \tan z)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \tan x \tan w + \sec x \sec w + 1 - \tan y \tan z + \sec y \sec z \le (\tan x + \tan w)(\tan y + \tan z)$$

ដោយ $1 - \tan x \tan w + \sec x \sec w = \dfrac{1 + \cos(x + w)}{\cos x \cos w}$

$$1 - \tan y \tan z + \sec y \sec z = \frac{1 + \cos(y + z)}{\cos y \cos z}$$

$$(\tan x + \tan w)(\tan y + \tan z) = \frac{\sin(x + w)\sin(y + z)}{\cos x \cos y \cos w \cos z}$$

$$= \frac{\sin(x + w)\sin[180° - (x + w)]}{\cos x \cos y \cos w \cos z} = \frac{\sin^2(x + w)}{\cos x \cos y \cos w \cos z}$$

$$= \left[\frac{1 + \cos(x + w)}{\cos x \cos w}\right]\left[\frac{1 - \cos(x + w)}{\cos y \cos z}\right]$$

$$= \left[\frac{1 + \cos(x + w)}{\cos x \cos w}\right]\left[\frac{1 + \cos(y + z)}{\cos y \cos z}\right]$$

យើងបាន វិសមភាពត្រូវស្រាយសមមូលនឹង $s+t\le st$

ដែល $s=\dfrac{1+\cos(x+w)}{\cos x\cos w}$, $t=\dfrac{1+\cos(y+z)}{\cos y\cos z}$

$\Leftrightarrow (1-s)(1-t)\ge 1 \qquad (\text{I})$

បង្ហាញថា $1-s\le -1$

យើងមាន $1-s\le -1 \Leftrightarrow s\ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{1+\cos(x+w)}{\cos x\cos w}\ge 2$

$$\Leftrightarrow 1+\cos x\cos w-\sin x\sin w\ge 2\cos x\cos w$$

$$\Leftrightarrow 1\ge \cos(x-w)$$ ពិត

ស្រាយដូចគ្នា $1-t\le -1$

យើងបាន (I) ពិត សមភាពពេល $x=w$, $y=z \Leftrightarrow AD\parallel BC$ និង $AB=CD$

ហេតុនេះ $ABCD$ ជាចតុកោណញាយសមបាត

របៀបទី ២

ប្រើការតាងដូចរបៀបទី ១

អនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសចំពោះត្រីកោណ ADI និង BCI យើងបាន

$$AI^2+DI^2=2\cos(x+w)AI\cdot ID+AD^2$$

$$BI^2+CI^2=2\cos(y+z)BI\cdot CI+BC^2$$

បូកអង្គ និង អង្គគេបាន

$$(AI+DI)^2+(BI+CI)^2+2AD\cdot BC$$

$$=2\cos(x+w)AI\cdot DI+2\cos(y+z)BI\cdot CI$$

$$+2AI\cdot DI+2BI\cdot CI+(AD+BC)^2$$

$$\Rightarrow (*)\Leftrightarrow [1+\cos(x+w)]AI\cdot DI+[1+\cos(y+z)]BI\cdot CI\le AD\cdot BC \qquad (**)$$

ដោយ $2[ADI]=AD\cdot ID_1=AI\cdot DI\sin(x+w)$

$$\Rightarrow AI\cdot DI=\frac{AD}{\sin(x+w)}$$

ដូចគ្នាដែរ $BI\cdot CI=\dfrac{BC}{\sin(y+z)}$

តាម $x+w=180^\circ-(y+z)\Rightarrow \sin(x+w)=\sin(y+z)$,

$$\cos(x+w)=-\cos(y+z)$$

យើងបាន (* *) $\Leftrightarrow \dfrac{1+\cos(x+w)}{\sin(x+w)}AD+\dfrac{1-\cos(x+w)}{\sin(x+w)}BC\le AD\cdot BC$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos(x+w)}{BC}+\frac{1-\cos(x+w)}{AD}\le \sin(x+w) \quad (***)$$

ម៉្យាងទៀត

$$AD=AD_1+D_1D=\tan x+\tan w=\frac{\sin(x+w)}{\cos x\cos w}$$

$$=\frac{2\sin(x+w)}{2\cos x\cos w}=\frac{4\sin\left(\frac{x+w}{2}\right)\cos\left(\frac{x+w}{2}\right)}{\cos(x+w)+\cos(x-w)}$$

$$\ge\frac{4\sin\left(\frac{x+w}{2}\right)\cos\left(\frac{x+w}{2}\right)}{\cos(x+w)+1}$$

$$=\frac{4\sin\left(\frac{x+w}{2}\right)\cos\left(\frac{x+w}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x+w}{2}\right)}=2\tan\left(\frac{x+w}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1-\cos(x+w)}{AD}\le\frac{2\sin^2\left(\frac{x+w}{2}\right)}{2\tan\left(\frac{x+w}{2}\right)}=\sin\left(\frac{x+w}{2}\right)\cos\left(\frac{x+w}{2}\right)$$

$$=\frac{\sin(x+w)}{2} \qquad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $\dfrac{1+\cos(x+w)}{BC}=\dfrac{1-\cos(y+z)}{BC}$

$$\le\frac{\sin(y+z)}{2}=\frac{\sin(x+w)}{2} \qquad (2)$$

បូក (1) និង (2) យើងបាន (* * *) ពិត

សមភាពពេល $x = w$, $y = z \Leftrightarrow AD \| BC$ និង $AB = CD$

ហេតុនេះ $ABCD$ ជាចតុកោណញាយសមបាត

របៀបទី ៣

ដោយ ω ជារង្វង់ចារឹកក្នុងចតុកោណ $ABCD$

យើងបាន $\angle DAI = \angle IAB = a$, $\angle ABI = \angle IBC = b$

$$\angle BCI = \angle ICD = c , \angle CDI = \angle IDA = d$$

$$\Rightarrow a + b + c + d = 180^\circ$$

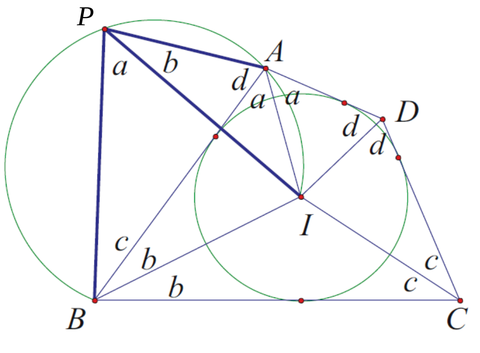
ក្នុងរបៀបទី ៣ នេះយើងនឹងធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើ Lemma ខាងក្រោម

Lemma

បើ ω ជារង្វង់ផ្ចិត I ចារឹកក្នុងចតុកោណ $ABCD$ គេបាន

$$BI^2 + \frac{BI}{DI} \cdot AI \cdot CI = AB \cdot BC \qquad (1) \quad ។$$

សម្រាយ



យក P ជាចំណុចមួយនៅក្រៅចតុកោណ $ABCD$ ដែលត្រីកោណ ABP និង

DCI

ជាត្រីកោណដូចគ្នា

យើងបាន $\angle PAI + \angle PBI = \angle PAB + \angle BAI + \angle PBA + \angle ABI$

$$= \angle IDC + a + \angle ICD + b$$

$$= a + b + c + d = 180^\circ$$

$\Rightarrow PAIB$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

តាមទ្រឹស្តីបទ Ptolemy យើងបាន

$$AI \cdot BP + BI \cdot AP = AB \cdot IP \Leftrightarrow BP \cdot \frac{AI}{IP} + BI \cdot \frac{AP}{IP} = AB \qquad (2)$$

ដោយ $PAIB$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

$\Rightarrow \angle IPB = \angle IAB = a$, $\angle API = \angle ABI = b$, $\angle AIP = \angle ABP = c$

, $\angle PIB = \angle PAB = d$

យើងបាន ត្រីកោណ AIP ដូចត្រីកោណ ICB

$\Rightarrow \frac{AI}{IB} = \frac{IC}{CB}$ និង $\frac{AP}{IP} = \frac{IB}{CB}$

គេបាន (*) $\Leftrightarrow BP \cdot \frac{CI}{BC} + \frac{BI^2}{BC} = AB$ (3)

$\Leftrightarrow BP \cdot CI + BI^2 = AB \cdot BC$

ម៉្យាងទៀត ត្រីកោណ BIP ដូចត្រីកោណ IDA

$\Rightarrow \frac{BP}{BI} = \frac{IA}{ID} \Rightarrow BP = \frac{AI}{ID} \cdot BI$

តាម (3) យើងបាន $BI^2 + \frac{BI}{DI} \cdot AI \cdot CI = AB \cdot BC$

តាម Lemma និង លក្ខណៈស៊ីមេទ្រីយើងបាន

$$BI^2 + \frac{BI}{DI} \cdot AI \cdot CI = AB \cdot BC$$

$$CI^2 + \frac{DI}{AI} \cdot BI \cdot CI = CD \cdot BC$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$BI^2 + CI^2 + \left(\frac{AI}{DI} + \frac{DI}{AI}\right) BI \cdot CI = BC(AB + CD)$$

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{AI}{DI} + \frac{DI}{AI} \geq 2$

$\Rightarrow BC(AB + CD) \geq IB^2 + IC^2 + 2IB \cdot IC = (BI + CI)^2$

ដូចគ្នាដែរ $AD(AB + CD) \geq (AI + DI)^2$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន (*) ពិត

សមភាពពេល $AI = DI$, $BI = CI \Rightarrow a = d$, $b = c$

$\Rightarrow \angle DAB + \angle ABC = 2a + 2b = 180° \Rightarrow AD \| BC$

ដោយ ត្រីកោណ AIB ប៉ុនគ្នានឹងត្រីកោណ DIC

$\Rightarrow ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយសមបាត

លំហាត់ ៩៦

(USAMO,2001)

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ ។

បង្ហាញថា $0 \le ab + bc + ca - abc \le 2$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $0 \le ab + bc + ca - abc$

យើងមាន a, b, c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$

$\Rightarrow$ មួយក្នុងចំណោម a, b, $c \le 1$ (សន្មតថា a)

យើងបាន $ab + bc + ca - abc = a(b + c) + bc(1 - a) \ge 0$

សមភាពពេល $a(b + c) = bc(1 - a) = 0$ កាលណា $1 - a = 0$, $bc = 0$

បើ $1 - a = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b + c = 0 \Rightarrow b = c = 0$

គេបាន $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 1$ ផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ

បើ $bc = 0 \Rightarrow$ មួយក្នុងចំណោម b , c ស្មើនឹង 0

WLOG ឧបមាថា $b = 0 \Rightarrow b + c > 0$ និង $a = 0$

ចំពោះ $a = 0$, $b = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$

$\Leftrightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$

ហេតុនេះ សមភាពពេល $(a,b,c) = (0,0,2)$, $(0,2,0)$ និង $(2,0,0)$

ចំពោះ $ab + bc + ca - abc \le 2$

ដោយ $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$

តាម លំហាត់ ២២ យើងបាន $a = 2\sin\frac{A}{2}$, $b = 2\sin\frac{B}{2}$, $c = 2\sin\frac{C}{2}$

ដែល A, B , C ជាមុំនៃ ABC ជាត្រីកោណ

យើងបាន $ab = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\sqrt{\sin A\tan\frac{A}{2}\sin B\tan\frac{B}{2}}$

$$= 2\sqrt{\sin A\tan\frac{B}{2}\sin B\tan\frac{A}{2}}$$

$$\le \sin A\tan\frac{B}{2} + \sin B\tan\frac{A}{2}$$

$$= \sin A\cot\left(\frac{A+C}{2}\right) + \sin B\cot\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $bc \le \sin B\cot\left(\frac{B+A}{2}\right) + \sin C\cot\left(\frac{C+A}{2}\right)$

$$ca \le \sin C\cot\left(\frac{C+B}{2}\right) + \sin A\cot\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$ab + bc + ca \le (\sin A + \sin B)\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) + (\sin B + \sin C)\cot\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$+ 2\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)\cos\left(\frac{C+A}{2}\right)$$

$$= 2(\cos A + \cos B + \cos C) = 6 - 4\left(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$= 6 - (a^2 + b^2 + c^2) = 6 - (4 - abc) = 2 + abc$$

ហេតុនេះ $0 \le ab + bc + ca - abc \le 2$

របៀបទី ២

ដោយ $0 \le a, b, c \le 2$

តាម លំហាត់ ២៤(d) យើងបាន $a = 2\cos A$, $b = 2\cos B$ និង $c = 2\cos C$

ដែល A, B, C ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមុំស្រួចមួយ

$\Rightarrow$ ពីរក្នុងចំណោម A, B, C ត្រូវតូចជាង $60°$ រឺ ធំជាង(រឺស្មើ) $60°$

WLOG យើងឧបមាថា A, B ជាមុំបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងលើ

យើងបាន $ab+bc+ca-abc\le 2$

$\Leftrightarrow 2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$

$\le 1+4\cos A\cos B\cos C$

$\Leftrightarrow 2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$

$\le 3-2(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)$

$\Leftrightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C$

$+2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)\le 0$ (1)

ដោយ $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=4\cos(A+B)\cos A\cos B-1$

និង $2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$

$=2\cos A\cos B+2\cos C(\cos A+\cos B)$

$=\cos(A+B)+\cos(A-B)-2\cos(A+B)(\cos A+\cos B)$

យើងបាន (1)

$\Leftrightarrow \cos(A+B)[4\cos A\cos B+1-2\cos A-2\cos B]+\cos(A-B)\le 1$

$\Leftrightarrow -\cos C(1-2\cos A)(1-2\cos B)+\cos(A-B)\le 1$ (*)

យើងសិក្សាពីរករណី

ចំពោះត្រីកោណ ABC មានមុំមួយយ៉ាងតិចស្មើនឹង 60°

បើ A រឺ B ស្មើនឹង 60° WLOG សន្មតថា $A=60^\circ$

- បើ $C=60^\circ \Rightarrow A=B=60^\circ$ ព្រោះ $A,\ B\ge 60^\circ$ រឺ $A,\ B\le 60^\circ$

  $\Rightarrow$ (*) ក្លាយជាសមភាព

- បើ $A=60^\circ \Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow \cos(A-B)\le 1$ ពិត

  សមភាពពេល $A=B=C=60^\circ \Leftrightarrow a=b=c=1$

ចំពោះត្រីកោណ ABC គ្មានរង្វាស់មុំណាមួយស្មើនឹង 60°

ដោយ $A,\ B\ge 60^\circ$ រឺ $A,\ B\le 60^\circ$

គេបាន $(1-2\cos A)(1-2\cos B)>0$

តែ $\cos C\ge 0,\ \cos(A-B)\le 1$

គេបាន (*) ពិត

សមភាពពេល $\cos C=0,\ \cos(A-B)=1 \Leftrightarrow A=B=45^\circ$ និង $C=90^\circ$

$$\Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}\,,\ c = 0$$

របៀបទី ៣

ពីរក្នុងចំណោម a , b , c តូចជាង 1រឺ ធំជាង(រឺស្មើ)1

សន្មតថា ពីរចំនួននោះ គឺ b , c

យើងបាន $b + c - bc = 1 - (1-b)(1-c) \le 1$ (1)

តាម $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$

$$\Rightarrow a = \frac{-bc + \sqrt{b^2c^2 - 4(b^2 + c^2) + 16}}{2}$$

តែ $b^2c^2 - 4(b^2 + c^2) + 16 \le b^2c^2 - 8bc + 16 = (4 - bc)^2$

ដោយ $b\,,\ c \le 2 \Rightarrow 4 - bc \ge 0$

យើងបាន $a \le \frac{-bc + |4 - bc|}{2} = \frac{-2bc + 4}{2} = -bc + 2$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន

$$2 - bc = (2 - bc)\cdot 1 \ge a(b + c - bc) = ab + ac - abc$$

ហេតុនេះ $ab + bc + ca - abc \le 2$

លំហាត់ ៩៧

គេឲ្យ s , t , u , v ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានក្នុងចន្លោះ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $s + t + u + v = \pi$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{\sqrt{2}\sin s - 1}{\cos s} + \frac{\sqrt{2}\sin t - 1}{\cos t} + \frac{\sqrt{2}\sin u - 1}{\cos u} + \frac{\sqrt{2}\sin v - 1}{\cos v} \ge 0$$ ។

សម្រាយ

តាង $a = \tan s\,,\ b = \tan t\,,\ c = \tan u\,,\ d = \tan v \Rightarrow a\,,\ b\,,\ c\,,\ d > 0$

ដោយ $s + t + u + v = \pi \Rightarrow \tan(s + t) + \tan(u + v) = 0$

$$\Rightarrow \frac{a + b}{1 - ab} + \frac{c + d}{1 - cd} = 0$$

$$\Rightarrow (a + b)(1 - cd) + (c + d)(1 - cd) = 0$$

$$\Rightarrow a+b+c+d = abc+bcd+cda+dab$$

យើងបាន

$$(a+b)(a+c)(a+d) = a^2(a+b+c+d)+abc+bcd+cda+dab$$
$$= (a^2+1)(a+b+c+d)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+1}{a+b} = \frac{(a+c)(a+d)}{a+b+c+d}$$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}$

$$= \frac{(a+c)(a+d)+(b+d)(b+a)+(c+a)(c+b)+(d+b)(d+c)}{a+b+c+d}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{a+b+c+d}$$

តាម វិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$2(a+b+c+d)^2 = 2(a+b+c+d)\left(\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}\right)$$

$$= [(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)]$$

$$\times\left(\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}\right)$$

$$\geq \left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}+\sqrt{d^2+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}+\sqrt{d^2+1} \leq \sqrt{2}(a+b+c+d)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos s}+\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\cos u}+\frac{1}{\cos v} \leq \sqrt{2}\left(\frac{\sin s}{\cos s}+\frac{\sin t}{\cos t}+\frac{\sin u}{\cos u}+\frac{\sin v}{\cos v}\right)$$

សរុបមក $\frac{\sqrt{2}\sin s-1}{\cos s}+\frac{\sqrt{2}\sin t-1}{\cos t}+\frac{\sqrt{2}\sin u-1}{\cos u}+\frac{\sqrt{2}\sin v-1}{\cos v} \geq 0$

លំហាត់ ៩៧

(USAMO,1995)

ឧបមាថា ម៉ាស៊ីនគិតលេខមួយខូច ហើយប៊ូតុងដែលអាចប្រើប្រាស់បានមានតែប៊ូតុង $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ និង $\tan^{-1}$ ។ អេក្រង់ដំបូងបង្ហាញលេខ 0 ។ យក q ជាចំនួនសនិទានវិជ្ជមានណាមួយ ។ បង្ហាញថា គេអាចបង្ហាញចំនួន q នេះលើអេក្រង់ដោយប្រើតែប៊ូតុងខាងលើ បើគេសន្មតថាម៉ាស៊ីនគិតលេខនេះមានសមត្ថភាពគិតលេខបានច្រើនខ្ទង់ក្រោយក្បៀស(មិនកំណត់) និង តួលេខទាំងអស់គិតជារ៉ាដ្យង់។

សម្រាយ

យើងមាន $\cos^{-1}\sin\theta = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta} \text{ ចំពោះ } 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\cos^{-1}\sin\tan^{-1}x = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right) = \frac{1}{x} \ , \forall x>0 \ \ (\ *\ )$$

ដោយ $\cos\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $\forall x \ge 0$

យើងបាន (*) $\Leftrightarrow \tan\cos^{-1}\sin\tan^{-1}\sqrt{x} = \sqrt{x+1}$ (* *)

តាម (*) និង (* *) យើងបានបញ្ជារពីរ គឺ $\sqrt{x} \mapsto \sqrt{x+1}$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

តាម វិចារកំណើននៃភាគបែង (n) នៃចំនួនចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន r យើងនឹងបង្ហាញថា យើងអាចបង្ហាញ $\sqrt{r}$ លើអេក្រង់ម៉ាស៊ីនគិតលេខចំពោះគ្រប់ r ជាចំនួនវិជ្ជមានសនិទាន

ករណី $n=1$ គេបាន សំណើរដែលត្រូវបង្ហាញពិត

ព្រោះ បើ $n=1 \Rightarrow r$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

គេអាចបង្ហាញគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានទាំងអស់ដោយប្រើបញ្ជារ $\sqrt{x} \mapsto \sqrt{x+1}$

ឧបមាថា ពិតដល់ k ដែល $1 \le k \le n$

តាម ការឧបមា យើងបាន $\sqrt{\frac{n+1}{1}}\,,\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,,\ldots,\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ អាចបង្ហាញលើ
អេក្រង់នៃម៉ាស៊ីនគិតលេខ
$\Rightarrow\sqrt{\frac{1}{n+1}}\,,\sqrt{\frac{2}{n+1}}\,,\ldots,\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ (1) ក៏អាចបង្ហាញលើអេក្រង់នៃម៉ាស៊ីន
គិតលេខដែរ ដោយប្រើបញ្ជារ $x\mapsto\frac{1}{x}$
ដោយ អនុវត្តន៍ជាបន្តបន្ទាប់នៃបញ្ជារ $\sqrt{x}\mapsto\sqrt{x+1}$ លើ (1)
គេបាន សំណើរដែលត្រូវបង្ហាញពិត ចំពោះករណី $n+1$
មានន័យថា គេអាចបង្ហាញ $\sqrt{r}$ លើអេក្រង់ម៉ាស៊ីនគិតលេខចំពោះ r ជាចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន
បើ q ជាចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន $\Rightarrow q^2$ ក៏ជាចំនួនសនិទានវិជ្ជមានដែរ
ហេតុនេះ គេអាចបង្ហាញ $\sqrt{r}=\sqrt{q^2}=q$ លើអេក្រង់នៃម៉ាស៊ីនគិតលេខ

លំហាត់ ៩៨

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច ។ បង្ហាញថា

$$(\sin 2B+\sin 2C)^2\sin A+(\sin 2C+\sin 2A)^2\sin B$$
$$+(\sin 2A+\sin 2B)^2\sin C\le 12\sin A\sin B\sin C\quad(*)$$ ។

សម្រាយ

របៀបទី១

យើងមាន $(\sin 2B+\sin 2C)^2\sin A=4\sin^2(B+C)\cos^2(B-C)\sin A$
$$=4\sin^3A\cos^2(B-C)$$
$$\le 4\sin^3A\cos(B-C)$$
ស្រាយដូចគ្នា $(\sin 2C+\sin 2A)^2\sin B\le 4\sin^3B\cos(C-A)$
$$(\sin 2A+\sin 2B)^2\sin C\le 4\sin^3C\cos(A-B)$$
បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន
$$(\sin 2B+\sin 2C)^2\sin A+(\sin 2C+\sin 2A)^2\sin B$$

$$+(\sin 2A+\sin 2B)^2\sin C \le 4\sum_{cyc}\sin^3 A\cos(B-C)$$

$$=12\sin A\sin B\sin C$$

ព្រោះ $\sin^3 A\cos(B-C)=4\sin^2 A\sin(B+C)\cos(B-C)$

$$=2\sin^2 A(\sin 2B+\sin 2C)$$

$$=(1-\cos 2A)(\sin 2B+\sin 2C)$$

$$=\sin 2B+\sin 2C-\sin 2B\cos 2A-\sin 2C\cos 2A$$

យើងបាន $\sum_{cyc}\sin^3 A\cos(B-C)$

$$=\sum_{cyc}(\sin 2B+\sin 2C)-\sum_{cyc}\sin 2B\cos 2A-\sum_{cyc}\sin 2C\cos 2A$$

$$=2\sum_{cyc}\sin 2A-\sum_{cyc}\sin 2B\cos 2A-\sum_{cyc}\sin 2A\cos 2B$$

$$=2\sum_{cyc}\sin 2A-\sum_{cyc}\sin(2A+2B)$$

$$=2\sum_{cyc}\sin 2A+\sum_{cyc}\sin 2C=3\sum_{cyc}\sin 2A$$

$$=3(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$

$=12\sin A\sin B\sin C$ (តាម លំហាត់ ២៤(a))

សមភាពពេល $\cos(A-B)=\cos(B-C)=\cos(C-A)=1$

$\Leftrightarrow A=B=C$

$\Leftrightarrow ABC$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស

របៀបទី ២

យើងមាន (*) $\Leftrightarrow \sum_{cyc}(\sin 2A+\sin 2B)^2\sin A\le 12\sin A\sin B\sin C$ (1)

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស យើងបាន $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

$\Rightarrow 12R^2\sin A\sin B\sin C=3ab\sin C=6[ABC]$

$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow R^2\sum_{cyc}(\sin 2B+\sin 2C)^2\sin A\le 6[ABC]$ (2)

Lemma

បើ AD, BE, CF ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណមុំស្រួច ABC យើងបាន

$DE + DF \le BC$ សមភាពពេល $AB = AC$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\angle CFA = \angle CDA = 90° \Rightarrow AFDC$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

ដោយ $\angle FDB = \angle BAC$ និង $\angle BFD = \angle BCA$

$\Rightarrow$ ត្រីកោណ BDF ដូចត្រីកោណ BAC

$$\Rightarrow \frac{DF}{AC} = \frac{BF}{BC} = \cos B \Rightarrow DF = b\cos B = 2R\sin B\cos B = R\sin 2B$$

ដូចគ្នាដែរ $DE = c\cos C = R\sin 2C$

$$\Rightarrow DE + DF = R(\sin 2B + \sin 2C) \qquad (1)$$

ដោយ $0° < A,\ B,\ C < 90°$ (ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច)

យើងបាន $BC - (DE + DF) = R(2\sin A - \sin 2B - \sin 2C)$

$$= R[2\sin A - 2\sin(B+C)\cos(B-C)]$$

$$= 2R\sin A[1 - \cos(B-C)] \ge 0$$

ហេតុនេះ $DE + DF \le BC$ សមភាពពេល $B = C \Leftrightarrow AB = AC$

ដោយ $ABDE$, $ACDF$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

$\Rightarrow \angle BDF = \angle CDE = \angle CAB$

តាម Lemma យើងបាន

$$2([BFC] + [BEC]) = DF \cdot BC\sin \angle BDF + DE \cdot BC\sin \angle EDC$$

$$= BC(DE + DF)\sin A \ge (DE + DF)^2 \sin A$$

តាម (1) យើងបាន

$$R^2(\sin 2B + \sin 2C)^2 \sin A \le 2[BFC] + 2[BEC] \qquad (i)$$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន

$$R^2(\sin 2C + \sin 2A)^2 \sin B \le 2[CDA] + 2[CFA] \qquad (ii)$$

$$R^2(\sin 2A + \sin 2B)^2 \sin C \le 2[AEB] + 2[ADB] \qquad (iii)$$

បូក (i),(ii),(iii) យើងបាន (*) ពិត

សមភាពពេល ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

លំហាត់ ៩៩

(MOSP,2000)

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច ។ បង្ហាញថា

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+8\cos A\cos B\cos C\geq 4\ (\,*\,)$$ ។

សម្រាយ

តាម លំហាត់ ២៤(d)

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

$$\Rightarrow 8\cos A\cos B\cos C=4-4\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C$$

យើងបាន $(\,*\,)\Leftrightarrow \left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2$

$$\geq 4\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right)\ (\,**\,)$$

របៀបទី ១

តាម AM-GM យើងបាន $2\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2$

$$=\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{\cos^4 A}{\cos^2 B\cos^2 C}}=\frac{3\cos^2 A}{\sqrt[3]{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}}$$

$$\geq 12\cos^2 A \qquad (1)$$

ព្រោះ តាម លំហាត់ ២៨(a)

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $2\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2\geq 12\cos^2 B\ (2)$

$$2\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2\geq 12\cos^2 C\ (3)$$

បូក (1),(2),(3) យើងបាន $(\,**\,)$ ពិត

របៀបទី ២

តាង $x=\frac{\cos B}{\cos C}$, $y=\frac{\cos C}{\cos A}$ និង $z=\frac{\cos A}{\cos B}$

តាម លំហាត់ ៤២(a) យើងបាន

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2=x^2+y^2+z^2$$

$$\geq 2(yz\cos A+zx\cos B+xy\cos C)$$

$$=2\left(\frac{\cos C}{\cos B}\cdot\cos A+\frac{\cos A}{\cos C}\cdot\cos B+\frac{\cos B}{\cos A}\cdot\cos C\right)$$

$$=2\left(x'^2+y'^2+z'^2\right) \qquad (1)$$

ដែល $x'=\sqrt{\frac{\cos C\cos A}{\cos B}}$, $y'=\sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos C}}$ និង $z'=\sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos A}}$

អនុវត្ត លំហាត់ ៤២(a) ម្តងទៀតចំពោះបីចំនួន x' , y' , z'

យើងបាន $x'^2+y'^2+z'^2\geq 2(y'z'\cos A+z'x'\cos B+x'y'\cos C)$

$$=2\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right)$$

តាម (1) យើងបាន $(**)$ ពិត

របៀបទី ៣

Lemma

ចំពោះ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc\leq 1$

គេបាន $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c$ (1)។

សម្រាយ

បើយើងជំនួស a , b , c ដោយ ta , tb , tc រៀងគ្នា

យើងបាន $(1)\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq t(a+b+c)$ ដែល $t=\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

ដោយ $t(a+b+c)\geq a+b+c$

ហេតុនេះ ដើម្បីស្រាយថា (1) ពិត គេគ្រាន់តែស្រាយថា

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq t(a+b+c)$$

ម៉្យាងទៀត $(ta)(tb)(tc)=abct^3=\frac{abc}{abc}=1$

$\Rightarrow$ WLOG យើងអាចស្រាយ (1) ដោយឧបមាថា $abc=1$

$\Rightarrow$ មានចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y, z បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$

តាម វិសមភាពតម្រៀប (Rearrangement's Inequality) យើងបាន

$x^3+y^3+z^3\geq x^2z+y^2x+z^2y$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}$$

$$\geq \frac{x^2z+y^2x+z^2y}{xyz}=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=a+b+c$$

បើ យក $a=4\cos^2 A,\ b=4\cos^2 B,\ c=4\cos^2 C$

$\Rightarrow abc=(8\cos A\cos B\cos C)^2\leq 1$ ព្រោះ

តាម លំហាត់ ២៨(a) $\cos A\cos B\cos C\leq \frac{1}{8}$

តាម Lemma យើងបាន $\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2$

$$\geq 4\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right)$$

លំហាត់ ១០០

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n បង្ហាញថា $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{x}\right|\leq 2\sqrt{\pi}$ ។

សម្រាយ

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ សំណើខាងលើដោយប្រើ Lemma បីខាងក្រោម

Lemma 1

ចំពោះស្វីតនៃចំនួនពិត a_1, a_2, ... , a_n និង b_1, b_2, ... , b_n គេបាន

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=S_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}S_k\left(b_k-b_{k+1}\right)$$ ដែល $S_k=a_1+a_2+...+a_k$

ចំពោះ $k=\overline{1,n}$ ។

សម្រាយ

យក $S_0=0$ គេបាន $a_k=S_{k+1}-S_k$ ចំពោះ $k=\overline{1,n}$

យើងបាន $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}(S_k-S_{k-1})b_k=\sum_{k=1}^{n}S_kb_k-\sum_{k=1}^{n}S_{k-1}b_k$

$$=S_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}S_kb_k-\sum_{k=2}^{n}S_{k-1}b_k+S_0b_1$$

$$=S_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}S_kb_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_kb_{k+1}$$

ហេតុនេះ $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=S_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})$

Lemma 2

(Abel′s Inequality)

បើគេមានស្ទីតនៃចំនួនពិតពីរ គឺ a_1 , a_2 , … , a_n និង b_1 , b_2 , … , b_n ដែល

$b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n\ge 0$ គេបាន $mb_1\le\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\le Mb_1$ ក្នុងនោះ

$S_k=a_1+a_2+\ldots+a_k$ ចំពោះ $k=\overline{1,n}$ និង M , n ជាតម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ $\{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$ ។

សម្រាយ

ដោយ $b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n\ge 0\Rightarrow b_k-b_{k+1}\ge 0$ ចំពោះ $k=\overline{1,n-1}$

តាម Lemma 1 យើងបាន $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=S_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})$

$$\le Mb_n+M\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})=Mb_1$$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $mb_1\le\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$

សរុបមក $mb_1\le\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\le Mb_1$

Lemma 3

ចំពោះចំនួនពិត x ដែល $x \neq 2k\pi$ គេបាន $\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq \frac{1}{(m+1)\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$

ក្នុងនោះ m , n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $m < n$ ។

សម្រាយ

តាង $a_k = \sin(k+m)x \sin \frac{x}{2}$, $b_k = \frac{1}{m+k}$ ចំពោះ $k = \overline{1, n-m}$

តាម Lemma 2 យើងបាន

$$\frac{s}{m+1} = sb_1 \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx \sin \frac{x}{2}}{k} = \sum_{k=1}^{n-m} a_k b_k \leq Sb_1 = \frac{S}{m+1}$$

ដែល $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, $S = \max\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ និង

$s = \min\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$

យើងមាន $2a_i = 2\sin(i+m)\sin \frac{x}{2}$

$$= \cos\left(i + m - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(i + m + \frac{1}{2}\right)x$$

$$\Rightarrow 2S_k = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_k = \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + m + \frac{1}{2}\right)x$$

$\Rightarrow -2 \leq 2S_k \leq 2 \Rightarrow -1 \leq S_k \leq 1$ ចំពោះ $k = \overline{1, n}$

$$\Rightarrow -1 \leq s \leq S \leq 1$$

ហេតុនេះ $-\frac{1}{m+1} = -b_1 \leq sb_1 \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx \sin \frac{x}{2}}{k} \leq Sb_1 \leq b_1 = \frac{1}{m+1}$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leq \frac{1}{(m+1)\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

ដោយ $y = |\sin x|$ ជាអនុគមន៍ដែលមានខួប π ដូចនេះដើម្បីបង្ហាញថា សំណើរ

ខាងលើពិត យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា សំណើរខាងលើពិតក្នុងករណី $x \in (0,\pi)$

ព្រោះ ចំពោះ $x = 0 \Rightarrow$ សំណើរខាងលើពិត

ចំពោះ ចំនួនថេរ x ណាមួយ យើងយក $m \le \frac{\sqrt{\pi}}{x} < m+1$, m ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន (m ហៅថា ផ្នែកគត់នៃ $\frac{\sqrt{\pi}}{x}$)

យើងបាន $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \le \left|\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kx}{k}\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right|$

យើងនឹងបង្ហាញថា $\left|\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kx}{k}\right| \le \pi$ និង $\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \le \pi$

ដោយ $|\sin x| < x$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0 \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kx}{k}\right| \le \sum_{k=1}^{m} \frac{kx}{k} = mx \le \sqrt{\pi}$

ម៉្យាងទៀត តាម Lemma 3 យើងមាន $\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \le \frac{1}{(m+1)\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$

ពិនិត្យ $y = \sin x$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ ក្រាបនៃអនុគមន៍នេះស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ដែលភ្ជាប់ពីចំណុច $(0,0)$ ទៅ $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

$\Rightarrow \sin x > \frac{2x}{\pi}$

យើងបាន $\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$ ចំពោះ $0 < x < \pi$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \le \frac{1}{(m+1)\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \le \left(\frac{1}{m+1}\right)\left(\frac{x}{\pi}\right) \le \left(\frac{\sqrt{\pi}}{x}\right)\left(\frac{x}{\pi}\right) = \sqrt{\pi}$$

សរុបមក $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{x}\right| \le 2\sqrt{\pi}$