ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់

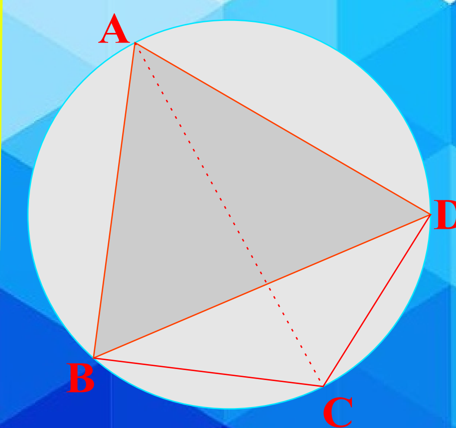
ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់

៣២ ទ្រឹស្តីបទ

៣៣ លំហាត់

សម្រាប់

- អ្នកសិក្សាទូទៅ
- ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែ



រៀបរៀងដោយ ងា ពិសិដ្ឋ

ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់

ដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយមិត្តអ្នកអានដែលកំពុងតែកាន់សៀវភៅធរណីមាត្រក្នុងប្លង់មួយក្បាលនេះ ។ សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំណងផ្តល់ជាឯកសារពិគ្រោះសម្រាប់ធ្វើការសិក្សាស្រាវជ្រាវបន្ថែមលើផ្នែកធរណីមាត្រក្នុងប្លង់ ។ បុព្វហេតុដែលធ្វើឲ្យសៀវភៅមួយក្បាលនេះលេចរូបរាងឡើងគឺដោយសារពួកយើងសង្កេតឃើញថាក្នុងស្រុកយើងមិនសូវមានអ្នកសរសេរចំណេះដឹងផ្នែកធរណីមាត្រនេះផ្សព្វផ្សាយឲ្យបានទូលំទូលាយនៅឡើយទេ ។ មួយវិញទៀតសិស្សភាគច្រើនយល់ឃើញថា ធរណីមាត្រជាផ្នែកមួយដ៏ពិបាកក្នុងគណិតវិទ្យា ។ ក្រោយពីការសិក្សាស្វែងយល់មួយចំនួនមកយើងបានរកឃើញថាផ្នែកមួយដែលធ្វើឲ្យការពិបាកនេះកើតមានឡើង គឺកង្វះឯកសារក្នុងការស្រាវជ្រាវបន្ថែម ។

សៀវភៅនេះត្រូវបានចែកចេញជាបីជំពូក គឺ **ជំពូក I (ទ្រឹស្តីបទ-សម្រាយបញ្ជាក់) ជំពូក II (ប្រធានលំហាត់) និងជំពូក III (លំហាត់-ដំណោះស្រាយ)**។ ក្នុងជំពូក I ពួកយើងបានចងក្រងនូវទ្រឹស្តីបទចំនួន ៣២ ទ្រឹស្តីបទព្រមទាំងមានការស្រាយបញ្ជាក់យ៉ាងក្បោះក្បាយដើម្បីឲ្យមិត្តអ្នកអានកាន់តែមានការអភិវឌ្ឍបន្ថែមក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់នូវបញ្ហា។ លើសពីនេះទៅទៀតពួកយើងបានលើកយកឧទាហរណ៍មួយចំនួនមកបកស្រាយពីអត្ថន័យនៃទ្រឹស្តីបទបន្ថែមក្នុងគោលបំណងឲ្យមិត្តអ្នកអានកាន់តែយល់ស៊ីជម្រៅទៅលើទ្រឹស្តីបទទាំងនោះ។ ចំណែកឯក្នុងជំពូក II វិញយើងបានដកស្រង់នូវបញ្ហាធរណីមាត្រចេញពីបណ្តាការប្រឡងនានាដើម្បីដាក់ជាបញ្ហាឲ្យមិត្តអ្នកអានសាកល្បងដោះស្រាយតាមរយៈចំណេះដឹងដែលបានរៀនក្នុងជំពូកទ្រឹស្តីបទ-សម្រាយបញ្ជាក់។ ក្នុងជំពូកនេះ មិត្តអ្នកអានគួរតែសាកល្បងគិតលំហាត់ទាំងនោះឲ្យបានច្រើនជាមុនសិនមុននឹងសិក្សាជំពូក ៣ នៃសៀវភៅនេះ។ ផ្នែកចុងក្រោយនៃសៀវភៅនេះគឺ ជំពូក III ដែលផ្តោតទៅលើលំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ ។ ក្នុងផ្នែកនេះយើងបានលើកយកលំហាត់ដែលបានដាក់ឲ្យមិត្តអ្នកអានដោះស្រាយក្នុងជំពូក II មកធ្វើការបកស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយសម្រាប់ជាទុនដល់មិត្តអ្នកអានក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាធរណីមាត្រក្នុងប្លង់ ។ សូមចងចាំថាទោះបីជាអ្នកមិនអាចដោះស្រាយ រឺស្រាយបញ្ជាក់នូវបញ្ហាមួយចំនួនបានក៏ដោយក៏អ្នកនៅតែទទួលបានចំណេះដឹងដែរ

នៅពេលដែលអ្នកព្យាយាមគិតលំហាត់ទាំងនោះ ។
ពួកយើងគិតថាមានមនុស្សតិចអ្នកណាស់ដែលអាចដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងសៀវភៅនេះបានទាំងអស់ដោយមិនមើលចម្លើយសោះ។ ហេតុនេះទោះបីជាអ្នកមិនអាចដោះស្រាយបញ្ហាបានទាំងអស់ក៏ដោយ សូមកុំអស់សង្ឃឹម ។ សូមព្យាយាមប្រឹងប្រែងបន្ថែម ។
សូមយកសៀវភៅមួយក្បាលនេះធ្វើជាមិត្តរបស់អ្នកចុះ ។

ជាចុងក្រោយពួកយើងមានតែការជូនពរដល់មិត្តអ្នកអានឲ្យជួបប្រទះតែសំណាងល្អ សុខភាពល្អ និង ទទួលបានជោគជ័យលើការសិក្សា និង ការងារ ។
ក្នុងនាមជាអ្នករៀបរៀងសៀវភៅមួយក្បាលនេះពួកយើងក៏សូមអភ័យទោសផងដែរសម្រាប់កំហុសឆ្គងបច្ចេកទេសដែលកើតមានដោយអចេតនា ។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី ០១ ខែកក្កដា ឆ្នាំ ២០១៧

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

សៀវភៅនេះអាចលេចចេញជារូបរាងបានក៏ដោយសារតែមានការជួយគាំទ្រពីមជ្ឈដ្ឋានជុំវិញខ្លួនរបស់ពួកយើងទាំងអស់គ្នា។ ពួកយើងគ្មានអ្វីក្រៅពីការអរគុណដោយទឹកចិត្តស្មោះសរចំពោះលោកទាំងអស់ឡើយ។ ជាដំបូងពួកយើងសូមអរគុណដល់លោកឪពុក អ្នកម្ដាយដែលបានផ្តល់កំណើតដល់ពួកយើងព្រមទាំងចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សាទាំងរូបរាងកាយ និងផ្លូវចិត្ត។ ពួកយើងអាចទទួលបានចំណេះដឹងមកសរសេរសៀវភៅមួយក្បាលនេះ ក៏ដោយសារតែពួកគាត់បានខិតខំប្រឹងប្រែងរកប្រាក់ដើម្បីឲ្យពួកយើងបានសិក្សារៀនសូត្រ ។ ពាក្យម៉ែមួយឃ្លាដែលធ្វើឲ្យកូនចងចាំជានិច្ចគឺ ម៉ែមិនពូកែដូចគេទេតែម៉ែនឹងព្យាយាមចិញ្ចឹមកូនឲ្យបានរស់ដូចគេដូចឯង។ ពាក្យនេះបានអង្រួនចិត្តពួកកូនខ្លាំងណាស់។ ពាក្យនេះធ្វើឲ្យកូនមានចិត្តអាណិតម៉ែខ្លាំងណាស់។ វាគឺជាឃ្លាដែលបង្កប់ដោយអត្ថន័យយ៉ាងជ្រាលជ្រៅពីការស្រលាញ់របស់ម៉ែមកលើកូន។ កូនក៏សូមអភ័យទោសរាល់ទង្វើ រឺ ពាក្យសំដីលើសលួសទាំងអស់លើអ្នកមានគុណ ។

លើសពីនេះពួកយើងក៏សូមអរគុណផងដែរ ចំពោះលោកគ្រូអ្នកគ្រូដែលបានបង្ហាត់បង្រៀនពួកយើងតាំងពីបឋមសិក្សារហូតដល់ការសិក្សានៅវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំជាពិសេសគឺលោកគ្រូ ថៃ ហេង លោកគ្រូ ចាន់ រ៉ាដា លោកគ្រូ ហួត សុខលឿន លោកគ្រូ ឃី មឿយ និង លោកគ្រូស៊ឹម វិសុទ្ធ។ លោកគ្រូបានបង្ហាត់បង្រៀនដល់ពួកយើងអស់ពីកម្លាំងកាយចិត្តដោយមិនខ្លាចនឿយហត់ ។

ជាចុងបញ្ចប់ពួកយើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀងសៀវភៅមួយក្បាលនេះសូមជូនពរឲ្យលោកជួបប្រទះតែសំណាងល្អ សុខភាពល្អ និង ជោគជ័យក្នុងការងារ។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី០១ ខែកក្កដា ឆ្នាំ ២០១៧

ពីអ្នករៀបរៀង ជា ពិសិដ្ឋ

មាតិកា

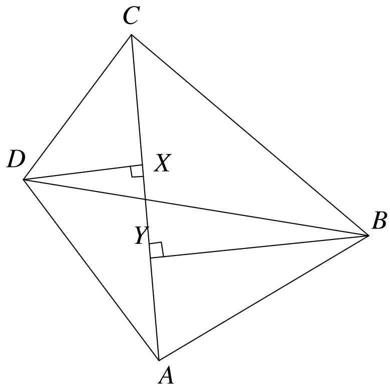
ជំពូក I

ទ្រឹស្តីបទ និង សម្រាយបញ្ជាក់

1 ច្បាប់អង្កត់ទ្រូងកែងគ្នា

គេឲ្យអង្កត់ពីរ $[AC]$ និង $[BD]$ ។ យើងបាន $[AC]$ កែងនឹង $[BD]$ លុះត្រាតែ $AB^2 + CD^2 = DA^2 + BC^2$ ។

សម្រាយ



យក X និង Y ជាចំណោលកែងនៃ D និង B លើអង្កត់ទ្រូង $[AC]$ រៀងគ្នា

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រយើងបាន

$$\begin{aligned}
AB^2 &= BY^2 + AY^2 \\
BC^2 &= BY^2 + CY^2 \\
CD^2 &= DX^2 + CX^2 \\
DA^2 &= AX^2 + DX^2
\end{aligned}$$

នោះ

$$\begin{aligned}
BC^2 + DA^2 - AB^2 - CD^2 &= BY^2 + CY^2 + AX^2 + DX^2 - BY^2 - AY^2 - DX^2 - CX^2 \\
&= AX^2 - CX^2 + CY^2 - YA^2 \\
&= (AX^2 - YA^2) + (CY^2 - CX^2) \\
&= (AX - AY)(AX + AY) + (CY - CX)(CY + CX) \\
&= XY(AX + AY) + XY(CX + CY) \\
&= XY(AX + CX + AY + CY) \\
&= 2AC \times XY
\end{aligned}$$

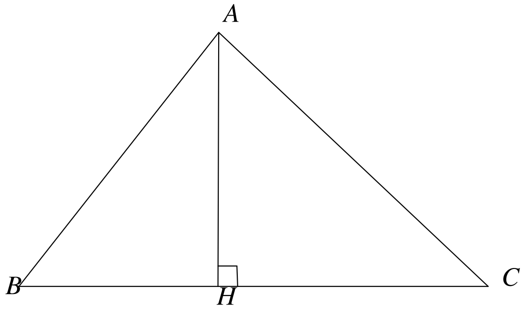
ហេតុនេះ $[AC] \perp [BD]$ លុះត្រាតែ $XY = 0 \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = DA^2 + BC^2$

2 ទ្រឹស្តីបទចំណោលកែង

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង $BC = a, CA = b$ និង $AB = c$ ។ គេបាន

$$\begin{aligned}
a &= b\cos C + c\cos B \\
b &= c\cos A + a\cos C \\
c &= a\cos B + b\cos A
\end{aligned}$$

សម្រាយ



យើងមាន $a = BC = BH + HC$ ដោយ $\cos B = \dfrac{BH}{c} \Rightarrow BH = c\cos B$
ដូចគ្នាដែរ $HC = b\cos C$ នោះ $a = b\cos C + c\cos B$
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $b = c\cos A + a\cos C$ និង $c = a\cos B + b\cos A$

3 ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេបាន

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

សម្រាយ

របៀបទី ១
តាមទ្រឹស្តីបទចំណោលកែង $a = b\cos C + c\cos B$
នោះ $a^2 = ab\cos C + ac\cos B$ (1)
ដូចគ្នាដែរ $-b^2 = -bc\cos A - ab\cos C$ (2)
និង $-c^2 = -ac\cos B - bc\ \cos A$ (3)
បូក (1),(2) និង (3) យើងបាន $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A$
ដូចនេះ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ និង $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

របៀបទី ២
យើងមាន $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$
នោះ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2\\ &= \overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}^2\\ \Rightarrow a^2 &= c^2-2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}+b^2\\ &= b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$

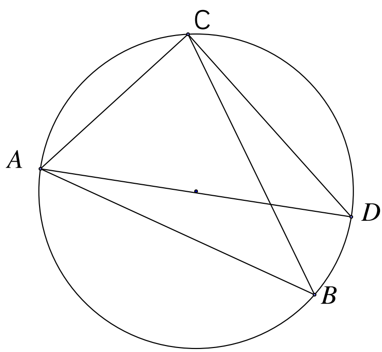
ដូចនេះ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ និង $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
សម្គាល់

សូមមិត្តអ្នកអានសាកល្បងស្រាយតាមរបៀបផ្សេងទៀត ។

4 ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ហើយ R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណនេះ ។
គេបាន $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ ។

សម្រាយ

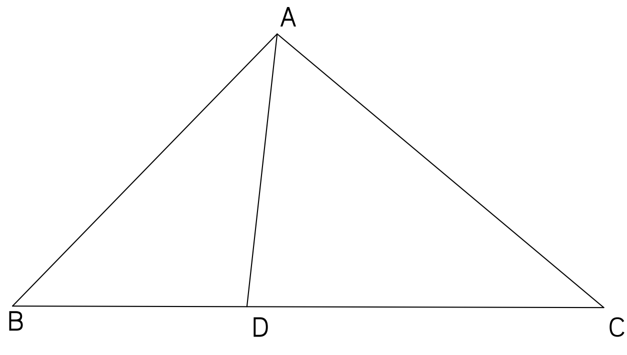


យក $[AD]$ ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ នោះ $\triangle ACD$ ជាត្រីកោណចារឹកកន្លះរង្វង់
$\Rightarrow \triangle ACD$ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C
យើងបាន $\sin\angle ADC = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{b}{2R}$ ដោយ $\angle ADC = \angle ABC$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)
នោះ $\sin B = \dfrac{b}{2R} \Rightarrow \dfrac{b}{\sin B} = 2R$
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ និង $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$
ដូចនេះ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

5 ទ្រឹស្តីបទ Stewart

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ និង D ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង $[BC]$ ។ តាង $BC = a, CA = b, AB = c, AD = d, BD = n$ និង $CD = m$ ។ គេបាន $b^2n + c^2m = a(d^2 + mn)$ ។

សម្រាយ



បង្ហាញថា $b^2n + c^2m = a(d^2 + mn)$
តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសយើងបាន $c^2 = d^2 + n^2 - 2nd\cos\angle ADB$
នោះ $c^2m = d^2m + mn^2 - 2mnd\cos\angle ADB$ (i)
និង $b^2 = d^2 + m^2 - 2md\cos\angle ADC$

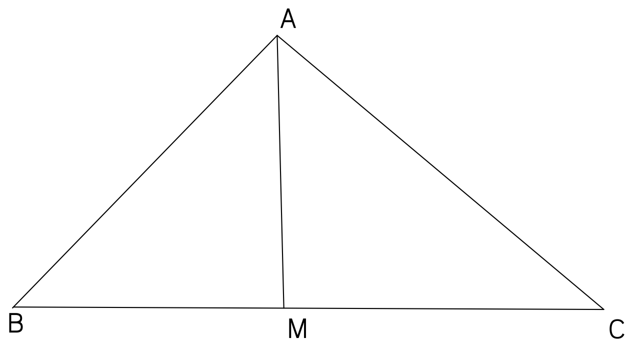
ដោយ $\angle ADC + \angle ADB = \pi$ នោះ

$$\angle ADC = \pi - \angle ADB$$
$$\Rightarrow \cos\angle ADC = -\cos\angle ADB$$

គេបាន $b^2 = d^2 + m^2 + 2md\cos\angle ADB$
នោះ $b^2 n = d^2 n + m^2 n + 2mnd\cos\angle ADB$(ii)
បូក (i) និង (ii) យើងបាន

$$\begin{aligned} c^2 m + b^2 n &= d^2 m + mn^2 + d^2 n + m^2 n \\ &= (m+n)d^2 + mn(m+n) \\ &= ad^2 + amn \end{aligned}$$

ដូចនេះ $b^2 n + c^2 m = a(d^2 + mn)$
ឧទាហរណ៍ ១
(រូបមន្តមេដ្យាន)
គេឲ្យ m_a ជារង្វាស់មេដ្យានដែលគូសចេញពីកំពូល A នៃត្រីកោណ ABC ។
បង្ហាញថា $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ ។
សម្រាយ

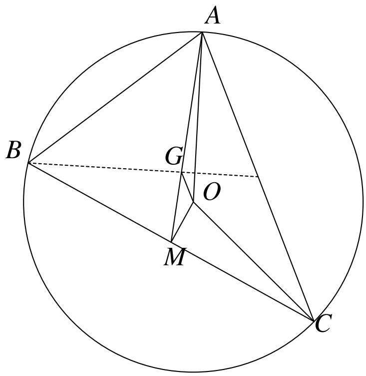


តាមទ្រឹស្តីបទ Stewart យើងបាន

$$AB^2 \times MC + AC^2 \times BM = BC(AM^2 + BM \times MC)$$
$$\Rightarrow c^2\left(\frac{a}{2}\right) + b^2\left(\frac{a}{2}\right) = a\left[m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{2} = m_a^2 + \frac{a^2}{4}$$

ដូចនេះ $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$
ឧទាហរណ៍ ២
(រូបមន្ត Leibniz)
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O និង កាំ R ។ យក G ជាទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណនេះ ។ បង្ហាញថា $OG^2=R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$ ។

សម្រាយ



បង្ហាញថា $OG^2=R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$
អនុវត្តទ្រឹស្តីបទ Stewart ចំពោះត្រីកោណ AOM
យើងបាន $OA^2\times GM+OM^2\times GA=AM(OG^2+GA\times GM)$
ដោយ $GM=\dfrac{1}{3}AM, GA=\dfrac{2}{3}AM, OM^2=OC^2-MC^2=R^2-\dfrac{a^2}{4}$
យើងបាន

$$R^2\left(\frac{1}{3}AM\right)+\frac{2}{3}AM\left(R^2-\frac{a^2}{4}\right)=AM\left[OG^2+\left(\frac{1}{3}AM\right)\left(\frac{2}{3}AM\right)\right]$$
$$\frac{R^2}{3}+\frac{2}{3}\left(R^2-\frac{a^2}{4}\right)=OG^2+\frac{2}{9}AM^2$$
$$\Rightarrow R^2-\frac{a^2}{6}=OG^2+\frac{2}{9}AM^2$$

ម្យ៉ាងទៀត $AM^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$ (រូបមន្តមេដ្យាន)

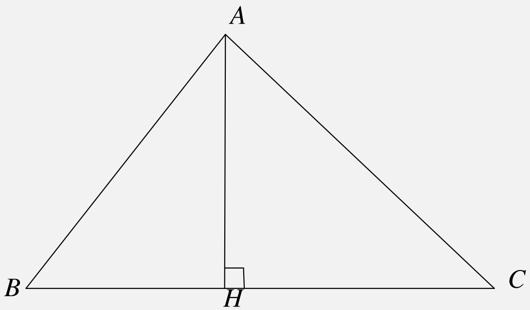
នោះ

$$
\begin{aligned}
R^2-\frac{a^2}{6} &= OG^2+\frac{2}{9}\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\\
\Rightarrow OG^2 &= R^2-\frac{a^2}{6}-\frac{b^2+c^2}{9}+\frac{a^2}{18}\\
&= R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $OG^2=R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$

6 រូបមន្តក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណទី ១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ហើយ $[AH]$ ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណនេះ ។ ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC កំណត់ ដោយ $[ABC]=\dfrac{1}{2}AH\times BC$ ។



7 រូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណទី ២

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC កំណត់ដោយ $[ABC]=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $[ABC]=\frac{1}{2}AH\times BC$
ដោយ $\sin B=\frac{AH}{AB}$ នោះ $AH=AB\sin B=c\sin B$
យើងបាន $[ABC]=\frac{1}{2}c\sin Ba=\frac{1}{2}ca\sin B$
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $[ABC]=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

8 រូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណទី ៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមានប្រវែងកាំស្មើនឹង R ។ ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC កំណត់ ដោយ $[ABC]=\frac{abc}{4R}$ ។

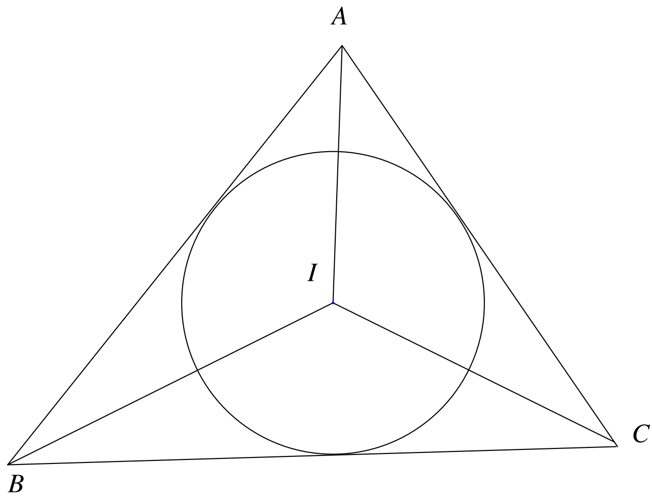
សម្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសគេបាន $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ នោះ $\sin A=\frac{a}{2R}$
ដោយ $[ABC]=\frac{1}{2}bc\sin A$
$\Rightarrow [ABC]=\frac{1}{2}bc\left(\frac{a}{2R}\right)=\frac{abc}{4R}$
ដូចនេះ $[ABC]=\frac{abc}{4R}$

9 រូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណទី ៤

យក r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ គេបាន $[ABC]=pr$ ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ នៃត្រីកោណ ABC ។

សម្រាយ

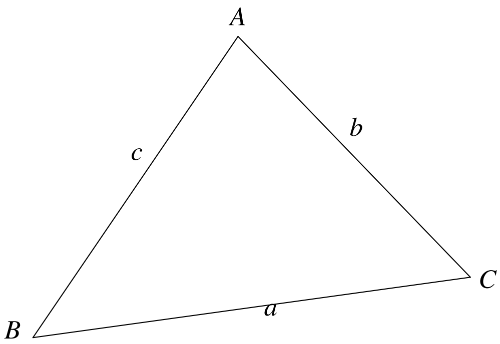


យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC យើងបាន

$$\begin{aligned}[ABC] &= [ABI]+[IBC]+[AIC]\\ &= \frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc\\ &= r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)=pr\end{aligned}$$

10 រូបមន្តក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណទី ៥ (រូបមន្តហេរុង)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានប្រវែងជ្រុង $BC=a, CA=b$ និង $AB=c$ ហើយ $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណនេះ ។ ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC កំណត់ដោយ $[ABC]=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ។



សម្រាយ

យើងមាន $[ABC]=\dfrac{1}{2}bc\sin A$
ដោយ

$$\begin{aligned}
\sin^2 A &= 1-\cos^2 A\\
&= 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\\
&= \frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}\\
&= \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{(2bc)^2}\\
&= \frac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}{(2bc)^2}\\
&= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{(2bc)^2}\\
&= \frac{16\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{4(bc)^2}
\end{aligned}$$

តាមបម្រាប់ $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ នោះ $p-a=\dfrac{-a+b+c}{2}, p-b=\dfrac{a-b+c}{2}$ និង $p-c=\dfrac{a+b-c}{2}$
យើងបាន $\sin^2 A=\dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}$

ម៉្យាងទៀត A ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណ នោះ $0 < A < \pi \Rightarrow \sin A > 0$

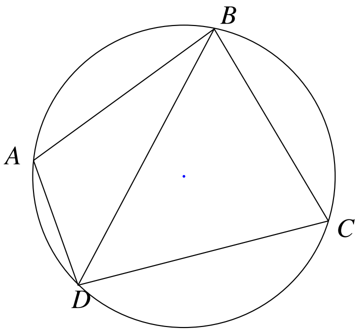
នោះ $\sin A = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$

យើងបាន $[ABC] = \dfrac{1}{2}bc \times \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$

ដូចនេះ $[ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

11 រូបមន្ត Brahmagupta

គេឲ្យចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ $ABCD$ មួយមានរង្វាស់ជ្រុង $AB = a, BC = b, CD = c$ និង $DA = d$ ហើយ $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃចតុកោណនេះ ។ ក្រឡាផ្ទៃនៃចតុកោណ $ABCD$ កំណត់ ដោយរូបមន្ត $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។



សម្រាយ

បង្ហាញថា $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$
យើងមាន $S=[ABD]+[BCD]=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C$
ដោយ $A+C=\pi$ ព្រោះ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់
នោះ $C=\pi-A\Rightarrow \sin C=\sin A$ និង $\cos C=-\cos A$
យើងបាន $S=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A$
តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A$
និង $BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C=b^2+c^2+2bc\cos A$
គេបាន

$$\begin{aligned}a^2+d^2-2ad\cos A&=b^2+c^2+2bc\cos A\\ \Rightarrow 2bc\cos A+2ad\cos A&=a^2+d^2-b^2-c^2\\ \Rightarrow 2(ad+bc)\cos A&=a^2+d^2-b^2-c^2\\ \Rightarrow \cos A&=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\end{aligned}$$

តាមរូបមន្ត $\sin^2 A+\cos^2 A=1\Rightarrow \sin^2 A=1-\cos^2 A$

នោះ

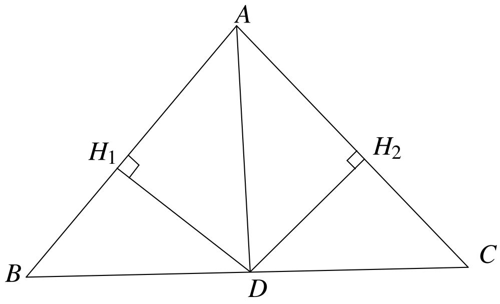
$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1-\left[\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\right]^2\\ &= \frac{[2(ad+bc)]^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{[2(ad+bc)]^2}\\ &= \frac{[2(ad+bc)+a^2+d^2-b^2-c^2][2(ad+bc)-a^2-d^2+b^2+c^2]}{[2(ad+bc)]^2}\\ &= \frac{[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]}{[2(ad+bc)]^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{(a+b-c+d)(a-b+c+d)(a+b+c-d)(-a+b+c+d)}{[2(ad+bc)]^2}\\ &= \frac{16\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)}{4(ad+bc)^2}\end{aligned}$$

ម៉្យាងទៀត $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}\Rightarrow p-a=\dfrac{-a+b+c+d}{2}, p-b=\dfrac{a-b+c+d}{2}$
$, p-c=\dfrac{a+b-c+d}{2}$ និង $p-d=\dfrac{a+b+c-d}{2}$
យើងបាន $\sin^2 A=\dfrac{4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ad+bc)^2}$
តែ $A+C=\pi$ នោះ $0<A<\pi\Rightarrow \sin A>0$
គេបាន $\sin A=\dfrac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad+bc}$
នោះ $S=\dfrac{1}{2}(ad+bc)\times\dfrac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad+bc}$
ដូចនេះ $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

12 ទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ

យក $[AD]$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃ $\angle A$ នៃត្រីកោណ ABC ។ គេបាន $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CD}$ ។
សម្រាយ



របៀបទី ១

យក H_1 និង H_2 ជាចំណោលកែងនៃ D លើ $[AB]$ និង $[AC]$ ដូចរូប

នោះ $DH_1 = DH_2$

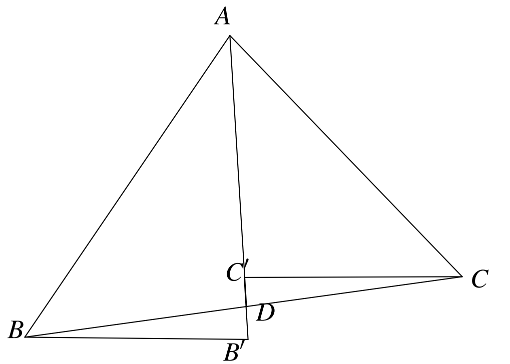
យើងបាន $[ABD] = \frac{1}{2}DH_1 \times AB$ និង $[ACD] = \frac{1}{2}DH_2 \times AC = \frac{1}{2}DH_1 \times AC$

នោះ $\frac{[ABD]}{[ACD]} = \frac{\frac{1}{2}DH_1 \times AB}{\frac{1}{2}DH_1 \times AC} = \frac{AB}{AC}$ (1)

ម៉្យាងទៀត ត្រីកោណ ABD និង ACD មានកម្ពស់រួម

នោះ $\frac{[ABD]}{[ACD]} = \frac{BD}{CD}$ (2)

តាម (1)និង (2) យើងបាន $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$



របៀបទី ២

យក B' និង C' ជាចំណោលកែងនៃ B និង C លើ $[AD]$ រៀងគ្នា យើងបាន

+ត្រីកោណកែង ABB' ដូចត្រីកោណកែង ACC'

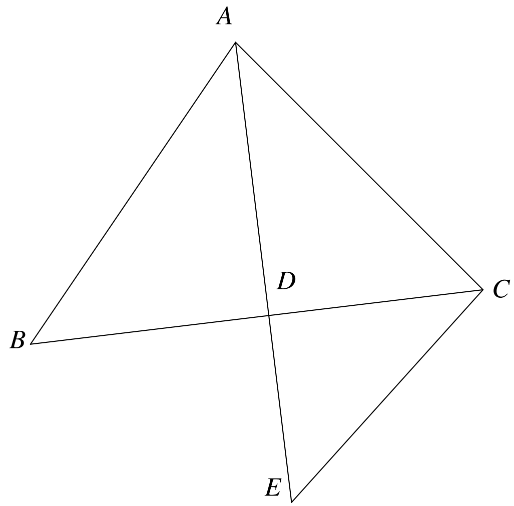
នោះ $\frac{AB}{AC} = \frac{BB'}{CC'}$ (1)

+ត្រីកោណកែង $BB'D$ ដូចត្រីកោណកែង $CC'D$

នោះ $\frac{BB'}{CC'} = \frac{BD}{CD}$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

ដូចនេះ $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$



របៀបទី ៣

យក E ជាចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់កាត់តាម C ស្របនឹង (AB) និង កន្លះបន្ទាត់ $[AD)$

នោះ $\angle AEC = \angle EAB$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)

ដោយ $\angle EAB = \angle CAE \Rightarrow \angle AEC = \angle CAE$

នោះ ត្រីកោណ ACE ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល C

វិបាក $AC = CE$

ម៉្យាងទៀត ត្រីកោណ ABD ដូចត្រីកោណ ECD នោះ $\frac{AB}{CE} = \frac{BD}{CD}$

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

ដូចនេះ $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$

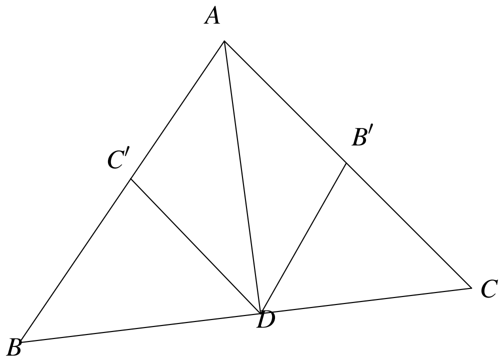
របៀបទី ៤

Lemma

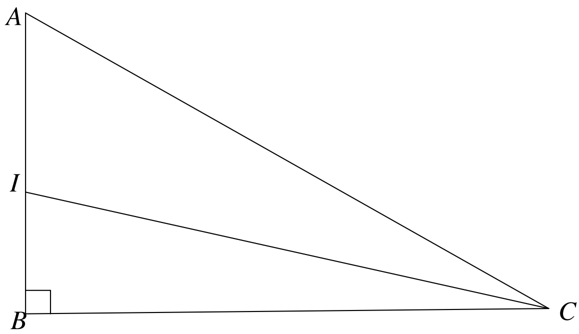
យក B' និង C' ជាចំណុចនៅលើជ្រុង $[AC]$ និង $[AB]$ ដែល $[B'D]//[AB]$ និង $[C'D]//[AC]$

គេបាន $AB'DC'$ ជាចតុកោណស្មើ ។

សម្រាយ



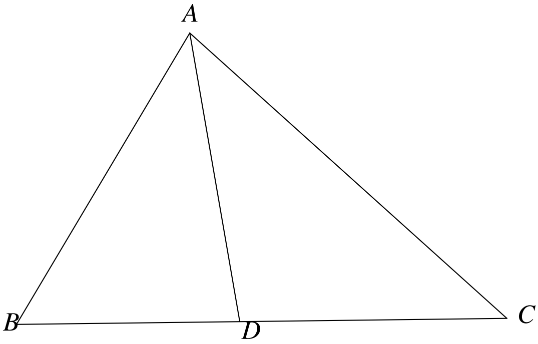
យើងមាន $[B'D]//[AC']$ និង $[C'D]//[AB']$ នោះ $AB'DC'$ ជាប្រលេឡូក្រាម
ពិនិត្យក្នុងត្រីកោណ $AB'D$ និង $AC'D$ មាន
$\angle ADB' = \angle C'DA = \angle C'AD = \angle B'AD$
និង $[AD]$ ជាជ្រុងរួម
នោះ $\triangle AB'D \cong \triangle AC'D \Rightarrow B'D = DC'$
ហេតុនេះ $AB'DC'$ ជាចតុកោណស្មើ
តាមទ្រឹស្តីបទ $Thales$ យើងបាន
$\dfrac{B'D}{AB} = \dfrac{CD}{BC}$ (1)
$\dfrac{C'D}{AC} = \dfrac{BD}{BC}$ (2)
ធ្វើផលធៀបរវាង (2) និង (1) យើងបាន $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$
ឧទាហរណ៍
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ B ដែលមាន $[CI)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ C ។ បើ $IB = 1, BC = 3$ ហើយ គេតាង $AI = x$ និង $AC = y$ ។ គណនា x និង y ។



ចម្លើយ
ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B
តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រយើងបាន
$AB^2+BC^2=AC^2$
$(x+1)^2+3^2=y^2$
$x^2+2x+1+9=y^2$
$x^2-y^2+2x+10=0$ (1)
ម្យ៉ាងទៀត តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំយើងបាន $\dfrac{AC}{AI}=\dfrac{BC}{BI}\Rightarrow\dfrac{y}{x}=3\Rightarrow y=3x$
តាម (1) យើងបាន
$x^2-9x^2+2x+10=0$
$-8x^2+2x+10=0$
ដោយ $a+c=-8+10=2=b$ គេបាន $x=-1,x=-\dfrac{10}{-8}=\dfrac{5}{4}$
ដូចនេះ $x=\dfrac{5}{4}$ និង $y=\dfrac{15}{4}$

13 ប្រវែងអង្កត់ដែលចែកដោយកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ

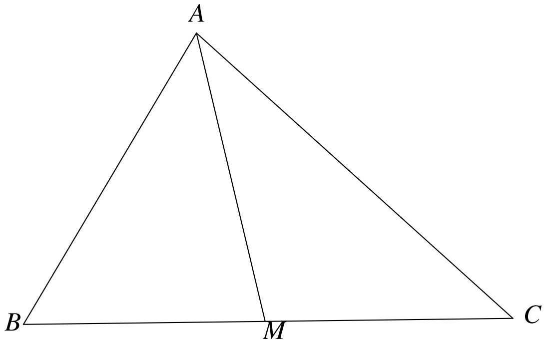
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន $BC=a,CA=b$ និង $AB=c$ ហើយ $[AD)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងនៃ $\angle A$ ។ គណនា BD និង DC ។
សម្រាយ



គណនា BD និង DC
តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំយើងបាន $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}$
នោះ $\frac{c}{BD}=\frac{b}{CD}=\frac{b+c}{BD+CD}=\frac{b+c}{BC}=\frac{b+c}{a}$
ចំពោះ $\frac{c}{BD}=\frac{b+c}{a}\Rightarrow BD=\frac{ca}{b+c}$
ចំពោះ $\frac{b}{CD}=\frac{b+c}{a}\Rightarrow CD=\frac{ab}{b+c}$
ដូចនេះ $BD=\frac{ca}{b+c}$ និង $CD=\frac{ab}{b+c}$

14 រូបមន្តមេដ្យាន

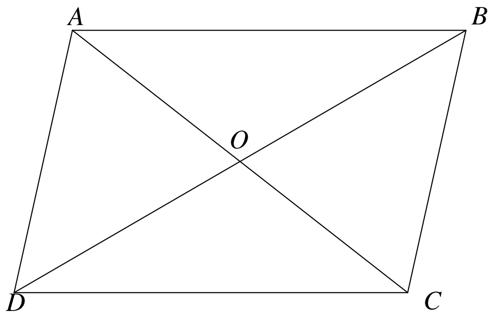
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់ជ្រុង a,b និង c ។ យក m_a,m_b និង m_c ជាប្រវែងមេដ្យានដែលគូសចេញពីកំពូល A,B និងC រៀងគ្នា ។ គេបានរូបមន្ត
$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$
$m_b^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}$
$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$ ។
សម្រាយ



បង្ហាញថា $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$
យើងមាន $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$
នោះ

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2 = (2\overrightarrow{AM})^2$$
$$\Rightarrow AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = 4AM^2$$
$$\Rightarrow AB^2+AC^2+2AB\times AC\cos A = 4AM^2$$

គេបាន $b^2+c^2+2bc\cos A = 4m_a^2$ ដោយ $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
យើងបាន $b^2+c^2+2bc\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = 4m_a^2$
នោះ $b^2+c^2+b^2+c^2-a^2 = 4m_a^2$
$\Rightarrow 4m_a^2 = 2(b^2+c^2)-a^2$
$\Rightarrow m_a^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)}{4} - \dfrac{a^2}{4}$
ដូចនេះ $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$
ឧទាហរណ៍ ១
(ច្បាប់ប្រលេឡូក្រាម)
គេឲ្យ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។ បង្ហាញថា $AC^2+BD^2 = 2(AB^2+AD^2)$ ។
សម្រាយ



យក O ជាចំណុចប្រសព្វនៃអង្កត់ទ្រូង $[AC]$ និង $[BD]$
គេបាន O ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BD]$
នោះ $[OA]$ ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ ABD
តាមរូបមន្តមេដ្យានយើងបាន $OA^2 = \frac{AB^2+AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$
ដោយ $OA = \frac{AC}{2}$ នោះ $\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{AB^2+AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$
គេបាន $\frac{AC^2}{4} = \frac{AB^2+AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Rightarrow AC^2 = 2(AB^2+AD^2) - BD^2$
ដូចនេះ $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2+AD^2)$
ឧទាហរណ៍ ២
គេឲ្យ m_a, m_b, m_c និង h_a, h_b, h_c ជារង្វាស់មេដ្យាន និង កម្ពស់នៃត្រីកោណ ABC មួយ ។ បង្ហាញថា $(m_a^2+m_b^2+m_c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2) \geq 27S^2$ ។

សម្រាយ

តាមរូបមន្តមេដ្យាន $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, m_b^2 = \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ និង $m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$
យើងបាន $m_a^2+m_b^2+m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$
តាមវិសមភាព *Cauchy* យើងបាន $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \geq \frac{3}{4}\left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)$ (1)
ដោយ $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$
ដូចគ្នាដែរ $h_b = \frac{2S}{b}$ និង $h_c = \frac{2S}{c}$
យើងបាន $h_a^2+h_b^2+h_c^2 = \frac{4S^2}{a^2} + \frac{4S^2}{b^2} + \frac{4S^2}{c^2} = 4S^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$
តាមវិសមភាព *Cauchy* យើងបាន $h_a^2+h_b^2+h_c^2 \geq 4S^2\left(\frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\right) = \frac{12S^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$ (2)

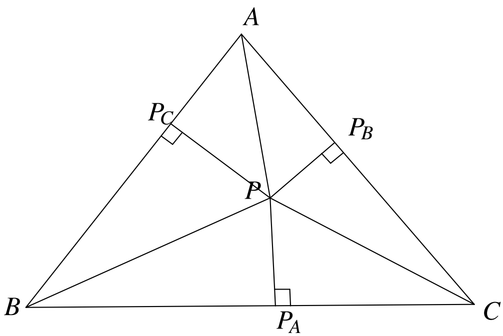
គុណ (1) និង (2) យើងបាន

$$(m_a^2+m_b^2+m_c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2) \geq \frac{3}{4}\left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)\left(\frac{12S^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\right) = 27S^2$$

ដូចនេះ $(m_a^2+m_b^2+m_c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2) \geq 27S^2$

15 ទ្រឹស្តីបទ Viviani

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស និង P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ ។ យក P_A, P_B និង P_C ជាចំណោលកែងនៃ P លើជ្រុង $[BC], [CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា ។
គេបាន $PP_A + PP_B + PP_C = h$ ដែល h ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ ABC ។
សម្រាយ



ភ្ជាប់ពី P ទៅកំពូល A, B និង C យើងបាន $[APB]+[BPC]+[APC]=[ABC]$

ដោយ $[APB] = \frac{1}{2}PP_C \times AB$

$[BPC] = \frac{1}{2}PP_A \times BC = \frac{1}{2}PP_A \times AB$

$[APC] = \frac{1}{2}PP_B \times CA = \frac{1}{2}PP_B \times AB$

$[ABC] = \frac{1}{2}h \times AB$ ព្រោះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

នោះ $\frac{1}{2}PP_A \times AB + \frac{1}{2}PP_B \times AB + \frac{1}{2}PP_C \times AB = \frac{1}{2}h \times AB$

$\frac{1}{2}AB(PP_A + PP_B + PP_C) = \frac{1}{2}h \times AB$

ដូចនេះ $PP_A + PP_B + PP_C = h$

16 ទ្រឹស្តីបទ Steiner

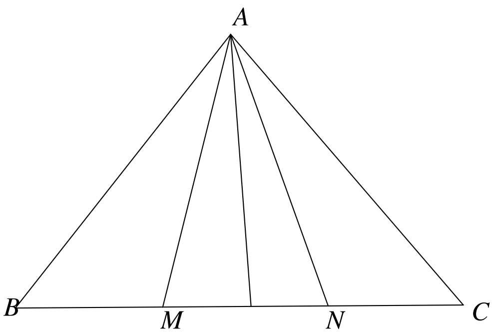
ទ្រឹស្តីបទ

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ហើយ M និង N ជាពីរចំណុចនៅលើអង្កត់ $[BC]$ ដែល $[AM]$ និង $[AN]$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងនៃ $\angle BAC$ ។ គេបាន $\dfrac{CM\times CN}{BM\times BN}=\dfrac{AC^2}{AB^2}$ ។

សម្គាល់

$[AM]$ និង $[AN]$ ហៅថា Isogonal Cevian ។

សម្រាយ



អនុវត្តទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

ចំពោះត្រីកោណ ABM យើងបាន $\dfrac{AB}{\sin\angle AMB}=\dfrac{BM}{\sin\angle BAM}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BM}=\dfrac{\sin\angle AMB}{\sin\angle BAM}$

ដូចគ្នាដែរ ចំពោះត្រីកោណ AMC យើងបាន $\dfrac{CM}{AC}=\dfrac{\sin\angle MAC}{\sin\angle AMC}$

ដោយ $\angle AMC=\pi-\angle AMB \Rightarrow \sin\angle AMC=\sin\angle AMB$

នោះ $\dfrac{CM}{AC}=\dfrac{\sin\angle MAC}{\sin\angle AMB}$

យើងបាន $\dfrac{AB}{BM}\times\dfrac{CM}{AC}=\dfrac{\sin\angle AMB}{\sin\angle BAM}\times\dfrac{\sin\angle MAC}{\sin\angle AMB}$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BM}\times\dfrac{CM}{AC}=\dfrac{\sin\angle MAC}{\sin\angle BAM}\ (1)$

ស្រាយដូចគ្នាចំពោះត្រីកោណ ACN និង ត្រីកោណ ANB

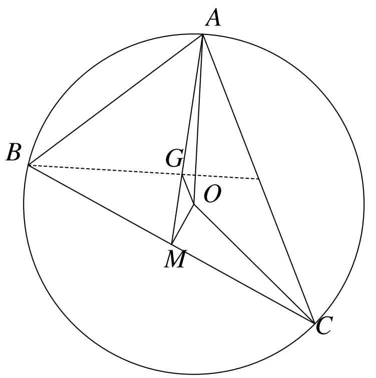
យើងបាន $\dfrac{AC}{CN}\times\dfrac{BN}{AB}=\dfrac{\sin\angle NAB}{\sin\angle CAN}$

រឺ $\dfrac{AB}{BN}\times\dfrac{CN}{AC}=\dfrac{\sin\angle CAN}{\sin\angle NAB}$

ម៉្យាងទៀត $[AM]$ និង $[AN]$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងនៃ $\angle A$
នោះ $\angle CAN = \angle BAM$ និង $\angle NAB = \angle MAC$
នោះ $\dfrac{AB}{BN} \times \dfrac{CN}{AC} = \dfrac{\sin\angle BAM}{\sin\angle MAC}$ (2)
គុណ (1) និង (2) យើងបាន $\dfrac{AB^2}{AC^2} \times \dfrac{CM \times CN}{BM \times BN} = 1$
ដូចនេះ $\dfrac{CM \times CN}{BM \times BN} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$

17 រូបមន្ត Leibniz

រូបមន្ត ១
គេឲ្យ G ជាទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណ ABC និង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា $OG^2 = R^2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$ ។
សម្រាយ



ក្នុងត្រីកោណ AGO មាន $\cos\angle AGO = \dfrac{OG^2 + AG^2 - OA^2}{2OG \times GA}$ (1)
ក្នុងត្រីកោណ OGM មាន $\cos\angle OGM = \dfrac{OG^2 + GM^2 - OM^2}{2OG \times GM}$
ដោយ $\angle AGO + \angle OGM = \pi$
$\Rightarrow \angle OGM = \pi - \angle AGO$
$\Rightarrow \cos\angle OGM = -\cos\angle AGO$
$\Rightarrow -\cos AGO = \dfrac{OG^2 + GM^2 - OM^2}{2OG \times GM}$

$\Rightarrow \cos\angle AGO = -\dfrac{OG^2+GM^2-OM^2}{2OG\times GM}$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\dfrac{OG^2+AG^2-OA^2}{2OG\times AG} = -\dfrac{OG^2+GM^2-OM^2}{2OG\times GM}$

$\Rightarrow \dfrac{OG^2+AG^2-OA^2}{AG} = -\dfrac{OG^2+GM^2-OM^2}{GM}$

ដោយ $AG = \dfrac{2}{3}AM, GM = \dfrac{1}{3}AM, OM^2 = R^2 - \dfrac{a^2}{4}$ និង $AG = 2GM$

នោះ

$$\frac{OG^2+\frac{4}{9}AM^2-R^2}{2} = -OG^2-\frac{1}{9}AM^2+\left(R^2-\frac{a^2}{4}\right)$$

$$OG^2+\frac{4}{9}AM^2-R^2 = -2OG^2-\frac{2}{9}AM^2+2R^2-\frac{a^2}{2}$$

យើងបាន $3OG^2 = 3R^2-\dfrac{2}{3}AM^2-\dfrac{a^2}{2}$

ម៉្យាងទៀត $AM^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$ (រូបមន្តមេដ្យាន)

នោះ

$$\begin{aligned}3OG^2 &= 3R^2-\frac{2}{3}\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)-\frac{a^2}{2}\\ &= 3R^2-\frac{b^2+c^2}{3}+\frac{a^2}{6}-\frac{a^2}{2}\\ &= 3R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $OG^2 = R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$

រូបមន្ត ២ (Generalization)

គេឲ្យ G ជាទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណ ABC និង P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងប្លង់ ។

បង្ហាញថា $PA^2+PB^2+PC^2 = \dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+3PG^2$ ។

សម្រាយ

បង្ហាញថា $PA^2+PB^2+PC^2 = \dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+3PG^2$

ដោយ G ជាទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណ ABC នោះ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

យើងមាន $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GA}$

$\Rightarrow PA^2 = PG^2+GA^2+2\overrightarrow{PG}\overrightarrow{GA}$

ដូចគ្នាដែរ $PB^2 = PG^2+GB^2+2\overrightarrow{PG}\overrightarrow{GB}$

និង $PC^2 = PG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{PG}\overrightarrow{GC}$
បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$\begin{aligned}PA^2 + PB^2 + PC^2 &= 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{PG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})\\ &= 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2\end{aligned}$$

ម៉្យាងទៀត $GA = \dfrac{2}{3}m_a \Rightarrow GA^2 = \dfrac{4}{9}m_a^2$
ដោយ $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$
$\Rightarrow GA^2 = \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}\right) = \dfrac{2(b^2 + c^2)}{9} - \dfrac{a^2}{9}$
ដូចគ្នាដែរ $GB^2 = \dfrac{2(c^2 + a^2)}{9} - \dfrac{b^2}{9}$ និង $GC^2 = \dfrac{2(a^2 + b^2)}{9} - \dfrac{c^2}{9}$
នោះ

$$\begin{aligned}GA^2 + GB^2 + GC^2 &= \frac{4(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2)}{9}\\ &= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{9}\\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\end{aligned}$$

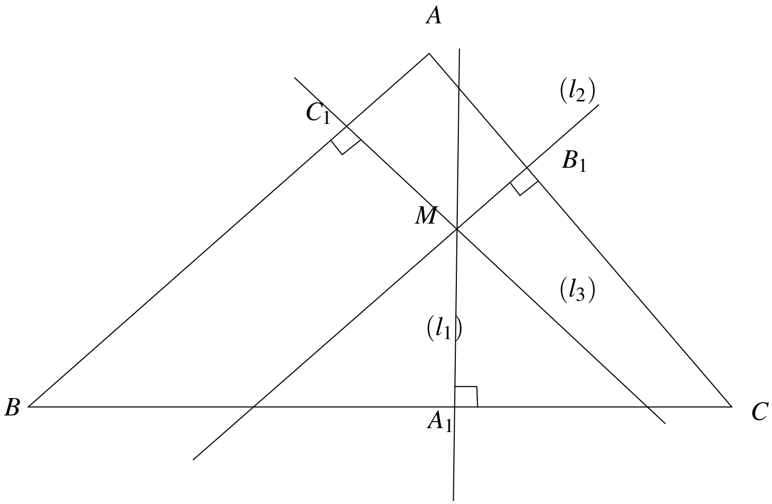
ដូចនេះ $PA^2 + PB^2 + PC^2 = \dfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3PG^2$

សម្គាល់

សូមមិត្តអ្នកអានសាកល្បងស្រាយរូបមន្ត ១ តាមវ៉ិចទ័រ ។

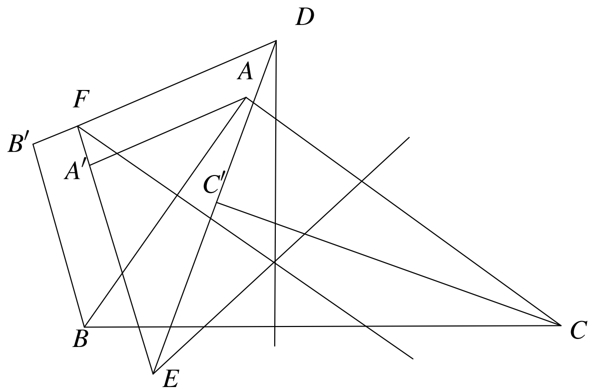
18 ទ្រឹស្តីបទ Carnot I

ទ្រឹស្តីបទ
គេមានត្រីកោណ ABC មួយ ហើយ $(l_1), (l_2)$ និង (l_3) កែងទៅនឹងជ្រុង $[BC], [CA]$ និង $[AB]$ ត្រង់ចំណុច A_1, B_1 និង C_1 រៀងគ្នា ។ គេបាន $(l_1), (l_2)$ និង (l_3) ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច លុះត្រាតែ $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = A_1C^2 + C_1B^2 + B_1A^2$ ។
សម្រាយ



$\Rightarrow$ ឧបមាថាបន្ទាត់ $(l_1),(l_2)$ និង (l_3)ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច M តែមួយ
យើងបាន
$A_1B^2 = BM^2 - MA_1^2$
$C_1A^2 = AM^2 - MC_1^2$
$B_1C^2 = CM^2 - MB_1^2$
នោះ $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 - MA_1^2 - MB_1^2 - MC_1^2$ (i)
ម៉្យាងទៀត
$A_1C^2 = MC^2 - MA_1^2$
$C_1B^2 = MB^2 - MC_1^2$
$B_1A^2 = AM^2 - MB_1^2$
យើងបាន $A_1C^2 + C_1B^2 + B_1A^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 - MA_1^2 - MB_1^2 - MC_1^2$ (ii)
តាម (i) និង (ii) យើងបាន $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = A_1C^2 + C_1B^2 + B_1A^2$
$\Leftarrow$ ឧបមាថា $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = A_1C^2 + C_1B^2 + B_1A^2$ (iii)
យក N ជាចំណុចប្រសព្វនៃ (l_1) និង (l_2) ហើយ C_2 ជាចំណោលកែងនៃ N លើ $[AB]$
តាមសម្រាយខាងលើយើងបាន $A_1B^2 + C_2A^2 + B_1C^2 = A_1C^2 + C_2B^2 + B_1A^2$ (iv)
ដកអង្គ និង អង្គរវាង (iv) និង (iii) យើងបាន
$C_2A^2 - C_1A^2 = C_2B^2 - C_1B^2$
$C_1A^2 - BC_1^2 = C_2A^2 - BC_2^2$
$(C_1A + C_1B)(C_1A - C_1B) = (C_2A + C_2B)(C_2A - C_2B)$

$AB(C_1A - C_1B) = AB(C_2A - C_2B)$
$C_1A - C_1B = C_2A - C_2B$ នោះ C_1 និង C_2 ត្រួតស៊ីគ្នា
ដូចនេះ ទ្រឹស្តីបទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់
ឧទាហរណ៍
(USAMO 1997)
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ហើយ D, E និង F ជាចំណុចនៅលើមេដ្យាទ័រនៃជ្រុង $[BC], [CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា បន្ទាត់ដែលកាត់តាមកំពូល A, B និង C ហើយកែងទៅនឹង $[EF], [FD]$ និង $[DE]$ រៀងគ្នាប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច ។
សម្រាយ



យក A', B' និង C' ជាចំណោលកែងនៃ A, B និង C លើ $(FE), (FD)$ និង (DE) រៀងគ្នា
តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រយើងបាន

$$\begin{aligned} FA'^2 &= AF^2 - AA'^2 \\ &= AF^2 - (AE^2 - EA'^2) \\ \Rightarrow FA'^2 - EA'^2 &= AF^2 - AE^2 \end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរ $EC'^2 - DC'^2 = CE^2 - CD^2$ និង $DB'^2 - FB'^2 = BD^2 - BF^2$

យើងបាន

$$
\begin{aligned}
FA'^2 - EA'^2 + EC'^2 - DC'^2 + DB'^2 - FB'^2 &= AF^2 - AE^2 + CE^2 - CD^2 + BD^2 - BF^2 \\
&= (AF^2 - BF^2) + (CE^2 - AE^2) + (BD^2 - CD^2) \\
&= (AF^2 - AF^2) + (AE^2 - AE^2) + (CD^2 - CD^2)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow FA'^2 + EC'^2 + DB'^2 = EA'^2 + DC'^2 + FB'^2$
តាមទ្រឹស្តីបទ $CarnotI$ បន្ទាត់ដែលកាត់តាមកំពូល A,B និង C ហើយកែងទៅនឹង $[EF],[FD]$ និង $[DE]$ រៀងគ្នាប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច ។

19 កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណមួយ

យើងមាន $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
ដោយ $S = pr$
នោះ

$$
\begin{aligned}
pr &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\
\Rightarrow r &= \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}
\end{aligned}
$$

ម៉្យាងទៀត $S = \dfrac{abc}{4R}$
យើងបាន $\dfrac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
$\Rightarrow R = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$
ជាទូទៅ
បើ a, b និង c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ R,r ជាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណរៀងគ្នា យើងបាន $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ និង $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ ។

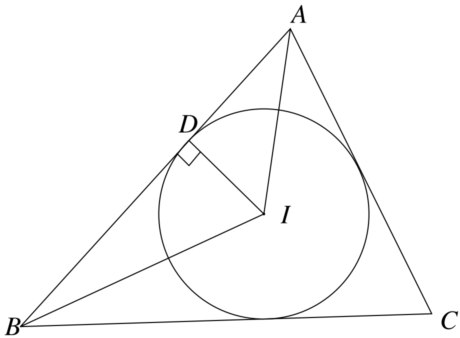
20 ចម្ងាយពីផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណទៅកំពូលនៃត្រីកោណ

ទ្រឹស្តីបទ

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលមានរង្វាស់ជ្រុង $BC = a, CA = b$ និង $AB = c$ ។ យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។

គេបាន $IA = \sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}}, IB = \sqrt{\frac{(p-b)ca}{p}}$ និង $IC = \sqrt{\frac{(p-c)ab}{p}}$ ។

សម្រាយ



បង្ហាញថា $IA = \sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}}$

ក្នុងត្រីកោណកែង ADI មាន

$$\begin{aligned} AI^2 &= ID^2 + DA^2 \\ &= r^2 + (p-a)^2 \end{aligned}$$

ដោយ $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

យើងបាន

$$\begin{aligned} AI^2 &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}^2 + (p-a)^2 \\ &= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} + (p-a)^2 \\ &= \left(\frac{p-a}{p}\right)[(p-b)(p-c)+p(p-a)] \end{aligned}$$

ដោយ

$$\begin{aligned} (p-b)(p-c) &= \left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right) \\ &= \frac{a^2-(b-c)^2}{4} \end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned} p(p-a) &= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right) \\ &= \frac{(b+c)^2-a^2}{4} \end{aligned}$$

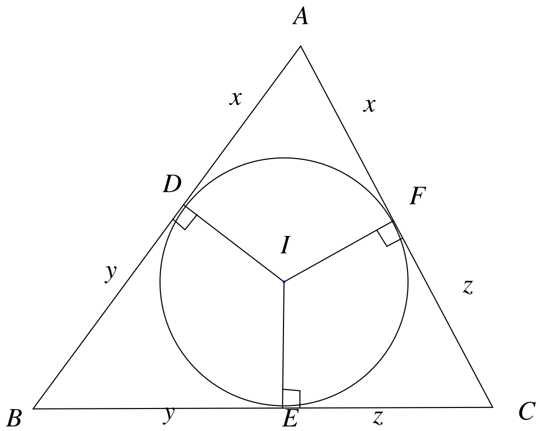
នោះ

$$\begin{aligned} AI^2 &= \left(\frac{p-a}{p}\right)\left[\frac{a^2-(b-c)^2+(b+c)^2-a^2}{4}\right] \\ &= \left(\frac{p-a}{p}\right)bc \end{aligned}$$

ដូចនេះ $IA = \sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}}$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $IB = \sqrt{\frac{(p-b)ca}{p}}$ និង $IC = \sqrt{\frac{(p-c)ab}{p}}$

សម្គាល់



ឧបមាថារង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ប៉ះទៅនឹងជ្រុង [AB], [BC] និង [CA] ត្រង់ចំណុច D, E និង
F រៀងគ្នា ។ គេបាន

$$\begin{aligned} & x+y+y+z+z+x=2p \\ \Rightarrow & 2(x+y+z)=2p \\ \Rightarrow & x+y+z=p \\ \Rightarrow & x+a=p \\ \Rightarrow & x=p-a \end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរ គេបាន $y=p-b$ និង $z=p-c$

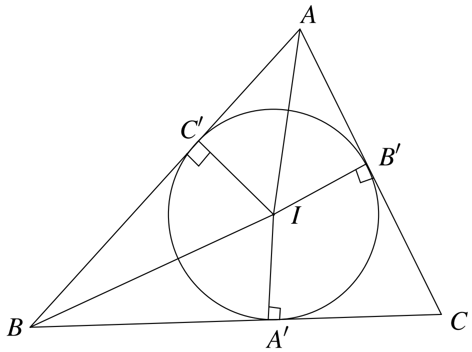
21 កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ

ទ្រឹស្តីបទ

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់ជ្រុង $BC=a, CA=b, AB=c, p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។

គេបាន $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}$ ។

សម្រាយ



បង្ហាញថា $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}$

ក្នុងត្រីកោណកែង $AC'I$ មាន $\tan\frac{A}{2}=\frac{IC'}{AC'}$

នោះ $IC'=AC'\tan\frac{A}{2}\Rightarrow r=AC'\tan\frac{A}{2}$

ដោយ

$$\begin{aligned}AC'&=c-BC'\\&=c-BA'\\&=c-(a-A'C)\\&=c-a+A'C\\&=c-a+CB'\\&=c-a+b-AB'\\&=c-a+b-AC'\end{aligned}$$

នោះ $AC'=\frac{b+c-a}{2}=p-a$

ដូចនេះ $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}$

តាមរបៀបដូចគ្នាយើងបាន $r=(p-b)\tan\frac{B}{2}$ និង $r=(p-c)\tan\frac{C}{2}$

សម្គាល់

មិត្តអ្នកអានអាចស្រាយ $AC' = p - a$ តាមរបៀបមួយទៀតដូចសម្គាល់នៃចំណុច 20 ។
ឧទាហរណ៍
គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

1. $abc = 4prR$
2. $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4rR$
3. $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8rR$
4. $a^3 + b^3 + c^3 = 2(p^3 - 3pr^2 - 6prR)$
5. $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \frac{4R + r}{p}$
6. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

សម្រាយ

1. $abc = 4prR$
   យើងមាន $\frac{abc}{4R} = S \Rightarrow abc = 4RS$
   ដោយ $S = pr \Rightarrow abc = 4Rpr$
   ដូចនេះ $abc = 4prR$
2. $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4rR$
   តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
   នោះ $pr = \sqrt{p^4 - (a+b+c)p^3 + (ab+bc+ca)p^2 - abcp}$
   $\Rightarrow p^2r^2 = p^4 - (a+b+c)p^3 + (ab+bc+ca)p^2 - abcp$
   ដោយ $a + b + c = 2p$ និង $abc = 4prR$
   យើងបាន $p^2r^2 = p^4 - 2p^4 + (ab+bc+ca)p^2 - 4p^2rR$
   $\Rightarrow r^2 = -p^2 + ab + bc + ca - 4rR$
   ដូចនេះ $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4rR$
3. $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8rR$
   យើងមាន $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$
   នោះ $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$
   ដោយ $a + b + c = 2p$ និង $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 + r^2 + 4rR$
   យើងបាន
   $$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (2p)^2 - 2(p^2 + r^2 + 4rR) \\ &= 4p^2 - 2p^2 - 2r^2 - 8rR \\ &= 2p^2 - 2r^2 - 8rR \end{aligned}$$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR$

4. $a^3+b^3+c^3=2(p^3-3pr^2-6prR)$
យើងមាន

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ \Rightarrow a^3+b^3+c^3-12prR &= 2p(2p^2-2r^2-8rR-p^2-r^2-4rR) \\ \Rightarrow a^3+b^3+c^3 &= 2p(p^2-3r^2-12rR)+12prR \\ &= 2p(p^2-3r^2-6rR) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $a^3+b^3+c^3=2(p^3-3pr^2-6prR)$

5. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$
យើងមាន $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}$ នោះ $\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$
ដូចគ្នាដែរយើងបាន $\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}$ និង $\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$
យើងបាន

$$\begin{aligned} \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} &= \frac{r}{p-a}+\frac{r}{p-b}+\frac{r}{p-c} \\ &= r\left[\frac{(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)}\right] \\ &= pr\left[\frac{3p^2-2(a+b+c)p+ab+bc+ca}{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right] \\ &= S\left(\frac{3p^2-4p^2+p^2+r^2+4rR}{S^2}\right) \\ &= \frac{r^2+4rR}{pr}=\frac{r+4R}{p} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$

6. $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសយើងបាន

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ &= \frac{ab^2+ac^2-a^3+bc^2+a^2b-b^3+a^2c+b^2c-c^3}{2abc}\\ &= \frac{a^2(a+b+c)+b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)-2(a^3+b^3+c^3)}{2abc}\\ &= \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-2(a^3+b^3+c^3)}{2abc}\end{aligned}$$

ដោយ $a+b+c=2p, a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR, a^3+b^3+c^3=2(p^3-3pr^2-6prR)$ និង $abc=4prR$
យើងបាន

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C &= \frac{2p(2p^2-2r^2-8rR)-4(p^3-3pr^2-6prR)}{8prR}\\ &= \frac{2p^2-2r^2-8rR-2p^2+6r^2+12rR}{4rR}\\ &= \frac{4rR+4r^2}{4rR}\\ &= 1+\frac{r}{R}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$

22 ទ្រឹស្តីបទតង់សង់

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង $BC=a, AC=b$ និង $AB=c$ ។
គេបាន $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$, $\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$ និង $\dfrac{C-A}{C+A}=\dfrac{\tan\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{C+A}{2}\right)}$ ។

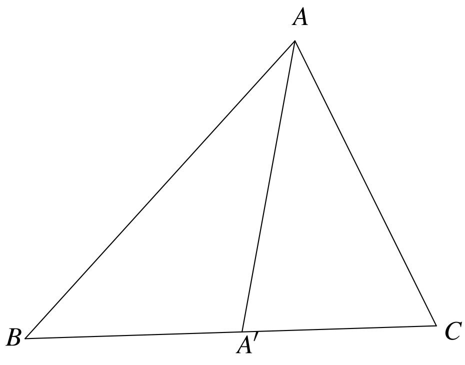
សម្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសយើងបាន $a=2R\sin A$ និង $b=2R\sin B$
យើងបាន $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin A+2R\sin B}$
$=\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$

$= \dfrac{2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$
$= \dfrac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$ និង $\dfrac{C-A}{C+A} = \dfrac{\tan\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{C+A}{2}\right)}$

23 ប្រវែងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ l_a, l_b និង l_c

ទ្រឹស្តីបទ
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a, CA = b$ និង $AB = c$ ។ យក $[AA'), [BB')$ និង $[CC')$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងនៃ A, B និង C រៀងគ្នា ហើយ $AA' = l_a, BB' = l_b$ និង $CC' = l_c$ ។ គេបាន $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$, $l_b = \dfrac{2ca}{c+a}\cos\dfrac{B}{2}$ និង $l_c = \dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{C}{2}$ ។
សម្រាយ



យើងមាន $[ABC] = [ABA'] + [AA'C]$
$\Rightarrow \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}cl_a\sin\dfrac{A}{2} + \dfrac{1}{2}bl_a\sin\dfrac{A}{2}$
$\Rightarrow 2bc\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2} = l_a(b+c)\sin\dfrac{A}{2}$
យើងបាន $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$

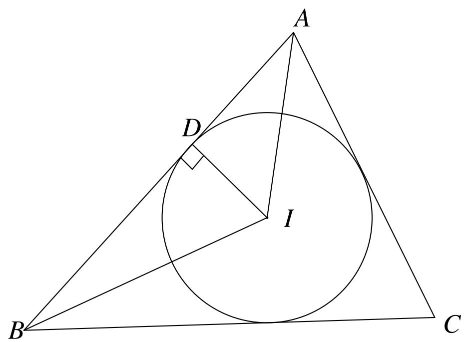
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $l_b=\dfrac{2ca}{c+a}\cos\dfrac{B}{2}$ និង $l_c=\dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{C}{2}$

24 កន្សោម $\sin\dfrac{A}{2},\cos\dfrac{A}{2}$ និង $\tan\dfrac{A}{2}$

ទ្រឹស្តីបទ

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង $BC=a,CA=b,AB=c$ ហើយ $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណនេះ ។ គេបាន $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}},\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$ និង $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ ។

សម្រាយ



បង្ហាញថា $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

របៀបទី ១

យើងមាន $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{ID}{IA}=\dfrac{r}{IA}$

ដោយ $r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ និង $IA=\sqrt{\left(\dfrac{p-a}{p}\right)bc}$

យើងបាន $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}{\sqrt{\left(\frac{p-a}{p}\right)bc}}$

$=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\times\dfrac{p}{(p-a)bc}}$

$=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ដូចនេះ $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

របៀបទី ២

យើងមាន $\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{2}$ ដោយ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

នោះ

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2}&=\frac{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{2}\\&=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}\\&=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\\&=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}\\&=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

បង្ហាញថា $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$

របៀបទី ១

យើងមាន $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{AD}{IA}$ ដោយ $AD=p-a$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\cos\frac{A}{2} &= \frac{p-a}{\sqrt{\left(\frac{p-a}{p}\right)bc}}\\ &= (p-a)\sqrt{\frac{p}{(p-a)bc}}\\ &= \sqrt{(p-a)^2\times\frac{p}{(p-a)bc}} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

របៀបទី ២

យើងមាន

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{A}{2} &= \frac{1+\cos A}{2}\\ &= \frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}\\ &= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}\\ &= \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}\\ &= \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}\\ &= \frac{p(p-a)}{bc}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

បង្ហាញថា $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

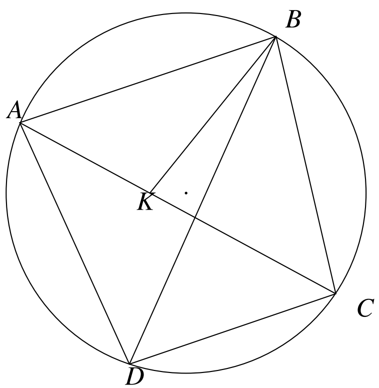
យើងមាន

$$\begin{aligned}\tan\frac{A}{2} &= \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\\ &= \frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}\\ &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\times\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}\\ &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

25 ទ្រឹស្តីបទ Ptolemy

គេឲ្យ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ គេបាន $AB\times CD+AD\times BC=AC\times BD$ ។
សម្រាយ



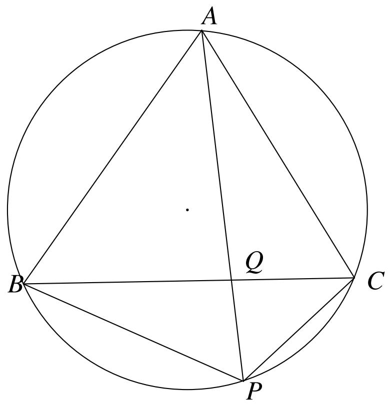
យក K ជាចំណុចមួយនៅលើ $[AC]$ ដែល $\angle ABK=\angle DBC$
ដោយ $\angle KAB=\angle BDC$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)
គេបាន $\triangle ABK\sim\triangle DBC$

នោះ $\frac{AB}{BD}=\frac{AK}{CD}\Rightarrow AB\times CD=BD\times AK$ (1)
ម្យ៉ាងទៀត $\triangle KBC$ និង $\triangle ABD$ មាន
$\angle KCB=\angle ADB$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម) និង $\angle KBC=\angle ABD$ ព្រោះ $\angle ABK=\angle DBC$
នោះ $\triangle ABD\sim\triangle KBC$
យើងបាន $\frac{BD}{BC}=\frac{AD}{KC}\Rightarrow AD\times BC=BD\times KC$ (2)
បូក (1) និង (2) យើងបាន

$$\begin{aligned} AB\times CD+AD\times BC &= BD\times AK+BD\times KC \\ &= BD(AK+KC)=BD\times AC \end{aligned}$$

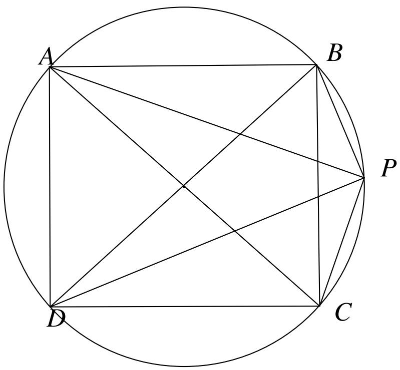
ដូចនេះ $AB\times CD+AD\times BC=AC\times BD$
ឧទាហរណ៍ ១
គេមានត្រីកោណសម័ង្ស ABC មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ យក P ជាចំណុចមួយនៅលើធ្នូតូច BC ហើយ $[AP]$ និង $[BC]$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច Q ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{PQ}=\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}$ ។

សម្រាយ



បង្ហាញថា $\frac{1}{PQ}=\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}$
ដោយ $ABPC$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ តាមទ្រឹស្តីបទ Ptolemy យើងបាន
$AB\times PC+AC\times BP=AP\times BC$
ដោយ $AB=BC=CA$ ព្រោះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស
យើងបាន $PC+PB=PA$ (1)
ត្រីកោណ PBQ និង APC មាន

$\angle PBQ = \angle PAC$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)
ម្យ៉ាងទៀត $\angle QPB = \angle ACB$ និង $\angle APC = \angle ABC = \angle ACB$
$\Rightarrow \angle QPB = \angle APC$
យើងបាន $\triangle PBQ \sim \triangle PAC$
វិបាក $\frac{PB}{PA} = \frac{PQ}{PC}$ នោះ $\frac{1}{PQ} = \frac{PA}{PB \times PC}$ (2)
តាម (1) និង (2) យើងបាន $\frac{1}{PQ} = \frac{PB+PC}{PB \times PC} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$
ដូចនេះ $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$
ឧទាហរណ៍ ២
គេឲ្យការេ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ។ យក P ជាចំណុចមួយនៅលើធ្នូតូច BC ។
បង្ហាញថា $\frac{PA+PC}{PB+PD} = \frac{PD}{PA}$ ។
សម្រាយ



បង្ហាញថា $\frac{PA+PB}{PC+PD} = \frac{PD}{PA}$
យើងមាន $ABPD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ តាមទ្រឹស្តីបទ Ptolemy យើងបាន
$AD \times PB + AB \times PD = PA \times BD$ ដោយ $AD = AB$ (ជ្រុងការេ)
នោះ $AD(PB+PD) = PA \times BD$
$\Rightarrow \frac{PA}{PB+PD} = \frac{AD}{BD}$ (1)
ម្យ៉ាងទៀត $APCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ តាមទ្រឹស្តីបទ Ptolemy យើងបាន
$PA \times DC + AD \times PC = PD \times AC$
ដោយ $AC = BD$ និង $DC = AD$ នោះ $PA \times AD + AD \times PC = PD \times BD$
$\Rightarrow AD(PA+PC) = PD \times BD$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{PD}{PA+PC}$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\dfrac{PA}{PB+PD} = \dfrac{PD}{PA+PC}$

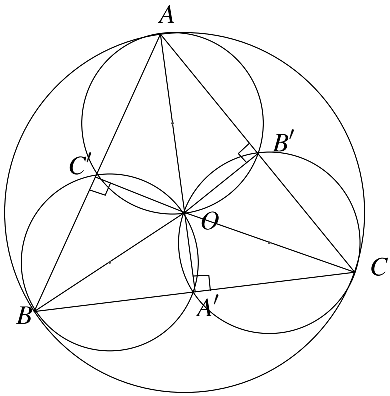
ដូចនេះ $\dfrac{PA+PC}{PB+PD} = \dfrac{PD}{PA}$

26 ទ្រឹស្តីបទ Carnot II

ទ្រឹស្តីបទ

គេមានត្រីកោណមុំស្រួច ABC មួយ ហើយ d_a, d_b និង d_c ជាចម្ងាយពីផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណនេះទៅកាន់ជ្រុង $[BC], [CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $d_a + d_b + d_c = R + r$ ។

សម្រាយ



យក A', B' និង C' ជាចំណោលកែងនៃ O លើ $[BC], [CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា

នោះ A', B' និង C' ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង $[BC], [CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា

យើងបាន $[A'B'], [B'C']$ និង $[C'A']$ ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ ABC

នោះ $A'B' = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{c}{2}, B'C' = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$ និង $C'A' = \dfrac{CA}{2} = \dfrac{b}{2}$

ហើយ $AC'OB', OC'BA'$ និង $OA'CB'$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

ចំពោះចតុកោណ $AC'OB'$

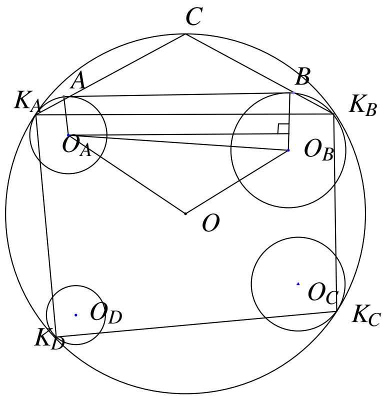
តាមទ្រឹស្តីបទ Ptolemy យើងបាន $AC' \times OB' + OC' \times AB' = OA \times B'C'$

$\dfrac{1}{2}cd_b + \dfrac{1}{2}bd_c = \dfrac{1}{2}aR$

$cd_b+bd_c=aR(1)$
ស្រាយដូចគ្នាចំពោះចតុកោណ $OC'BA'$ និង $OA'CB'$ យើងបាន
$cd_a+ad_c=bR$ (2)
$bd_a+ad_b=cR$ (3)
ម៉្យាងទៀត $[ABC]=[AOB]+[BOC]+[COA]$
$\Rightarrow pr=\frac{1}{2}ad_a+\frac{1}{2}bd_b+\frac{1}{2}cd_c$
$\Rightarrow ad_a+bd_b+cd_c=(a+b+c)r$ (4)
បូក (1),(2),(3) និង (4) យើងបាន $(a+b+c)(d_a+d_b+d_c)=(R+r)(a+b+c)$
ដូចនេះ $d_a+d_b+d_c=R+r$

27 ទ្រឹស្តីបទ Casey

ទ្រឹស្តីបទ
យក O ជាផ្ចិត និង កាំនៃរង្វង់មួយ ហើយ O_A,O_B,O_C និង O_D ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ប៉ះក្នុងនៃរង្វង់ផ្ចិត O (រង្វង់ទាំងបួនគ្មានចំណុចប្រសព្វរួម) ។ តាង ij ជាប្រវែងនៃអង្កត់ប៉ះក្រៅនៃរង្វង់ផ្ចិត O_i និង O_j ។ គេបាន $AB\times CD+BD\times AC=AD\times BC$ ។
សម្រាយ



យក K_A,K_B,K_C និង K_D ជាចំណុចប៉ះរង្វង់ O_A,O_B,O_C និង O_D ទៅនឹងរង្វង់ផ្ចិត O រៀងគ្នា
ចំពោះរង្វង់ផ្ចិត O_A និង O_B
តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រយើងបាន $AB^2=O_AO_B^2-(R_B-R_A)^2$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$$\begin{aligned} O_AO_B^2 &= OO_A^2 + OO_B^2 - 2OO_A \times OO_B \cos\angle O_AOO_B \\ &= (R-R_A)^2 + (R-R_B)^2 - 2(R-R_A)(R-R_B)\cos\angle O_AOO_B \\ &= (R-R_A)^2 + (R-R_B)^2 - 2(R-R_A)(R-R_B)\cos\angle K_AOK_B \end{aligned}$$

យក C ជាចំណុចមួយនៅលើរង្វង់ផ្ចិត O
អនុវត្តទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ K_ACK_B យើងបាន
$K_AK_B = 2R\sin\angle K_ACK_B$ ដោយ $\angle K_ACK_B = \pi - \dfrac{\angle K_AOK_B}{2}$

$$\begin{aligned} \sin\angle K_ACK_B &= \sin\left(\pi - \frac{\angle K_AOK_B}{2}\right) \\ &= \sin\frac{\angle K_AOK_B}{2} \end{aligned}$$

យើងបាន $K_AK_B = 2R\sin\dfrac{\angle K_AOK_B}{2} \Rightarrow \sin\dfrac{\angle K_AOK_B}{2} = \dfrac{K_AK_B}{2R}$
នោះ

$$\begin{aligned} \cos\angle K_AOK_B &= 1 - 2\sin^2\frac{\angle K_AOK_B}{2} \\ &= 1 - 2\left(\frac{K_AK_B}{2R}\right)^2 = 1 - \frac{K_AK_B^2}{2R^2} \end{aligned}$$

នោះ $O_AO_B^2 = (R-R_A)^2 + (R-R_B)^2 - 2(R-R_A)(R-R_B)\left(1 - \dfrac{K_AK_B^2}{2R^2}\right)$
$= [(R-R_A)-(R-R_B)]^2 + \dfrac{(R-R_A)(R-R_B)K_AK_B^2}{R^2}$
គេបាន

$$\begin{aligned} AB^2 &= (R_B-R_A)^2 + \frac{(R-R_A)(R-R_B)K_AK_B^2}{R^2} - (R_B-R_A)^2 \\ &= \frac{(R-R_A)(R-R_B)K_AK_B^2}{R^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow AB = \dfrac{K_AK_B\sqrt{(R-R_A)(R-R_B)}}{R}$
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន
$AC = \dfrac{K_AK_C\sqrt{(R-R_A)(R-R_C)}}{R}$

$$CD = \frac{K_C K_D \sqrt{(R-R_C)(R-R_D)}}{R}$$
$$BD = \frac{K_B K_D \sqrt{(R-R_B)(R-R_D)}}{R}$$
$$BC = \frac{K_B K_C \sqrt{(R-R_B)(R-R_C)}}{R}$$
$$AD = \frac{K_A K_D \sqrt{(R-R_A)(R-R_D)}}{R}$$
យើងបាន $AB \times CD + BC \times AD$
$$= \frac{K_A K_B \times K_C K_D \sqrt{(R-R_A)(R-R_B)(R-R_C)(R-R_D)}}{R}$$
$$+ \frac{K_B K_C \times K_A K_D \sqrt{(R-R_A)(R-R_B)(R-R_C)(R-R_D)}}{R}$$
$$= \frac{(K_A K_B \times K_C K_D + K_B K_C \times K_A K_D)\sqrt{(R-R_A)(R-R_B)(R-R_C)(R-R_D)}}{R}$$
ម្យ៉ាងទៀត $K_A K_B K_C K_D$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

នោះ $K_A K_B \times K_C K_D + K_B K_C \times K_A K_D = K_A K_C \times K_B K_D$ (ទ្រឹស្តីបទ Ptolemy)

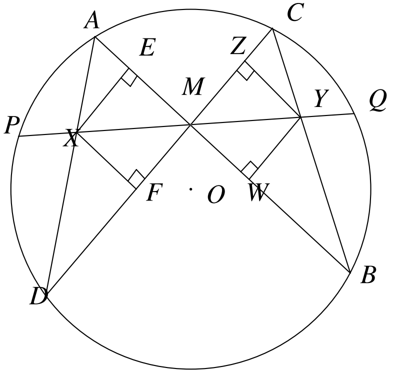
យើងបាន $AB \times CD + BC \times AD = \frac{K_A K_C \times K_B K_D \sqrt{(R-R_A)(R-R_B)(R-R_C)(R-R_D)}}{R}$

ដូចនេះ $AB \times CD + BC \times AD = AD \times BC$

28 ទ្រឹស្តីបទមេអំបៅ

គេឲ្យរង្វង់មួយ និង អង្កត់ធ្នូ $[PQ]$ ។ គេគូសអង្កត់ធ្នូ $[AB]$ និង $[CD]$ ឲ្យកាត់អង្កត់ធ្នូ $[PQ]$ តាមចំណុចកណ្តាល M ហើយ $[AD]$ និង $[BC]$ ប្រសព្វ $[PQ]$ ត្រង់ចំណុច X និង Y រៀងគ្នា ។ គេបាន M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[XY]$ ។

សម្រាយ



យក E,F ជាចំណោលកែងនៃ X លើ $[AB]$ និង $[CD]$ រៀងគ្នា និង W,Z ជាចំណោលកែងនៃ Y លើ $[AB]$ និង $[CD]$ រៀងគ្នា
នោះ $[EX]//[YW]$
តាមទ្រឹស្តីបទ Thales យើងបាន $\dfrac{XM}{YM}=\dfrac{XE}{YW}$ (1)
ហើយ $[XF]//[ZY]$
តាមទ្រឹស្តីបទ Thales យើងបាន $\dfrac{XM}{YM}=\dfrac{XF}{YZ}$ (2)
តាម (1) និង (2) យើងបាន $\left(\dfrac{XM}{XY}\right)^2=\dfrac{XE\times XF}{YW\times YZ}$ (3)
ត្រីកោណកែង AXE និង ត្រីកោណកែង CZY
មាន $\angle XAE=\angle ZCY$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)
គេបាន $\triangle AXE\sim\triangle CYZ$
វិបាក $\dfrac{AX}{CY}=\dfrac{XE}{YZ}$ (4)
ត្រីកោណកែង XDF និង ត្រីកោណកែង YBW
មាន $\angle XDF=\angle WBY$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម) នោះ $\triangle XDF\sim\triangle YBW\Rightarrow\dfrac{XD}{YB}=\dfrac{XF}{YW}$ (5)
តាម (4) និង (5) យើងបាន $\dfrac{AX\times XD}{CY\times YB}=\dfrac{XE\times XF}{YW\times YZ}$ (6)
តាម (3) និង (6) យើងបាន $\left(\dfrac{XM}{YM}\right)^2=\dfrac{AX\times XD}{CY\times YB}$
ម្យ៉ាងទៀត តាមស្វ័យគុណចំណុច
$CY\times YB=PY\times YQ$
$=(PM+YM)(MQ-YM)$

$= (PM+YM)(PM-YM)$
$= PM^2 - YM^2$ (i)
ដូចគ្នាដែរ $AX \times XD$
$= PX \times XQ$
$= PM^2 - YM^2$ (ii)
តាម (i) និង (ii) យើងបាន $CY \times YB = AX \times XD$
នោះ $\left(\frac{XM}{YM}\right)^2 = \frac{AX \times XD}{AX \times XD} = 1 \Rightarrow XM^2 = YM^2 \Rightarrow XM = YM$
ដូចនេះ M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[XY]$

29 ទ្រឹស្ដីបទ Euler

Lemma (បទគន្លឹះ)
យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែលមាន $BC = a, AC = b$ និង $AB = c$ ។ គេបាន
ក) $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$
ខ) $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$ ។

សម្រាយ

ក) បង្ហាញថា $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$
យើងមាន $IA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \Rightarrow IA^2 = \frac{r^2}{\sin^2\frac{A}{2}}$
ដោយ

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2} &= \frac{1-\cos A}{2}\\ &= \frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}\\ &= \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}\\ &= \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}\\ &= \frac{(p-b)(p-c)}{bc}\end{aligned}$$

និង $pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\Rightarrow r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

នោះ $IA^2=\frac{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\left(\frac{p-a}{p}\right)bc$

$\Rightarrow \frac{IA^2}{bc}=\frac{p-a}{p}$

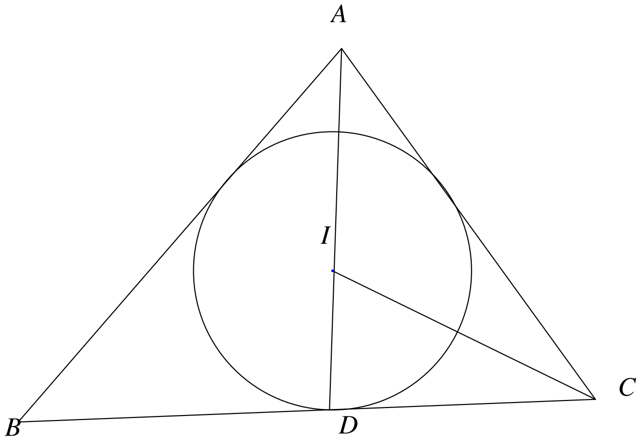
ដូចគ្នាដែរ $\frac{IB^2}{ca}=\frac{p-b}{p}$ និង $\frac{IC^2}{ab}=\frac{p-c}{p}$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}&=\frac{p-a}{p}+\frac{p-b}{p}+\frac{p-c}{p}\\&=\frac{3p-(a+b+c)}{p}\\&=\frac{3p-2p}{p}\\&=\frac{p}{p}\\&=1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1$

ខ) $\frac{AI}{ID}=\frac{b+c}{a}$



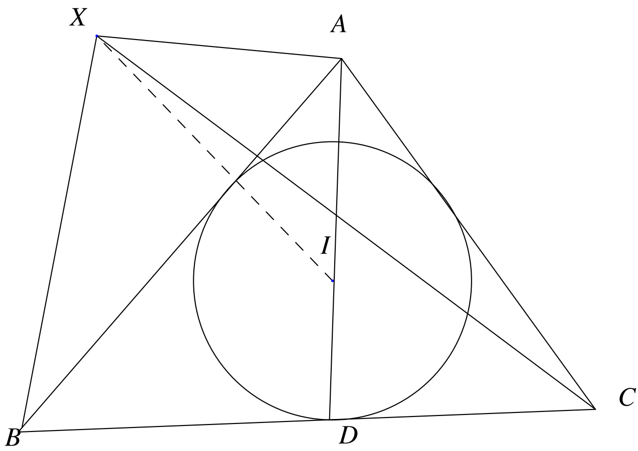
អនុវត្តទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងត្រីកោណ ACD យើងបាន $\frac{AC}{AI} = \frac{CD}{DI} \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{AC}{CD} = \frac{b}{CD}$

ដោយ $CD = \frac{ab}{b+c} \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$

ទ្រឹស្តីបទ

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានប្រវែងជ្រុង $BC = a, CA = b$ និង $AB = c$ ។ យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង ត្រីកោណនេះ ហើយ X ជាចំណុចមួយនៅក្នុងប្លង់ ។

គេបាន $aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 = (a+b+c)XI^2 + abc$ ។



សម្រាយ

យើងមាន $\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{XI}+\overrightarrow{IA}$ នោះ $XA^2=XI^2+2\overrightarrow{XI}\overrightarrow{IA}+IA^2$
គេបាន $aXA^2=aXI^2+2a\overrightarrow{XI}\overrightarrow{IA}+aIA^2$
ដូចគ្នាដែរ $bXB^2=bXI^2+2b\overrightarrow{XI}\overrightarrow{IB}+bIB^2$
និង $cXA^2=cXI^2+2c\overrightarrow{XI}\overrightarrow{IC}+cIC^2$
យើងបាន
$aXA^2+bXB^2+cXC^2=(a+b+c)XI^2+aIA^2+bIB^2+cIC^2+2\overrightarrow{XI}(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC})$
(i)
ដោយ $\dfrac{IA^2}{bc}+\dfrac{IB^2}{ca}+\dfrac{IC^2}{ab}=1$ នោះ $aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$ (ii)
ម៉្យាងទៀត

$$\begin{aligned}&\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}\\ \Rightarrow&\frac{c}{BD}=\frac{b}{CD}\\ \Rightarrow& bBD=cDC\\ \Rightarrow& b\overrightarrow{BD}=c\overrightarrow{DC}\\ \Rightarrow& b(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{ID})=c(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IC})\\ \Rightarrow& b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=(b+c)\overrightarrow{ID}(1)\end{aligned}$$

មួយវិញទៀត

$$\begin{aligned}&\frac{AI}{ID}=\frac{b+c}{a}\\&\Rightarrow aAI=(b+c)ID\\&\Rightarrow a\overrightarrow{IA}=-(b+c)\overrightarrow{ID}\\&\Rightarrow a\overrightarrow{IA}+(b+c)\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{0}\,(2)\end{aligned}$$

តាម (1) និង (2)យើងបាន $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$ (iii)
តាម (i),(ii) និង (iii) យើងបាន $aXA^2+bXB^2+cXC^2=(a+b+c)XI^2+abc$
ឧទាហរណ៍
(ចម្ងាយ Euler)
គេឲ្យ O និង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ហើយ R និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះរៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $OI^2=R^2-2Rr$ ។

សម្រាយ

តាមរូបមន្ត Euler យើងបាន $aOA^2+bOB^2+cOC^2=(a+b+c)OI^2+abc$
ដោយ $OA=OB=OC=R$
នោះ

$$\begin{aligned}aR^2+bR^2+cR^2&=(a+b+c)OI^2+abc\\\Rightarrow (a+b+c)OI^2&=(a+b+c)R^2-abc\\\Rightarrow 2pOI^2&=2pR^2-abc\\\Rightarrow OI^2&=R^2-\frac{abc}{2p}\end{aligned}$$

តាម $pr=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow\dfrac{abc}{2p}=2Rr$
យើងបាន $OI^2=R^2-2Rr$

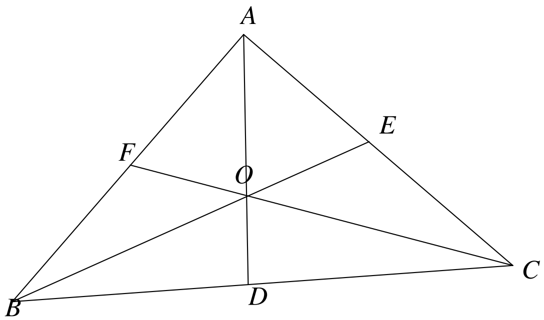
សម្គាល់

តាមឧទាហរណ៍យើងមាន $OI^2=R^2-2Rr\Rightarrow R^2=2Rr+OI^2$
ដោយ $OI^2\geq 0$
$\Rightarrow R^2\geq 2Rr\Rightarrow R\geq 2r$
វិសមភាព $R\geq 2r$ នេះហៅថាវិសមភាព Euler ។

30 ទ្រឹស្តីបទ Ceva

គេមានត្រីកោណ ABC មួយ ហើយ $[AD],[BE]$ និង $[CF]$ កាត់ជ្រុង $[BC],[CA]$ និង $[AB]$ ត្រង់ D,E និង F រៀងគ្នា នោះ $[AD],[BE]$ និង $[CF]$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច លុះត្រាតែ $\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$។

សម្រាយ



$\Rightarrow$ ឧបមាថា $[AD],[BE]$ និង $[CF]$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច

បង្ហាញថា $\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$

យើងមាន $\frac{[BOD]}{[ODC]}=\frac{\frac{1}{2}h\times BD}{\frac{1}{2}h\times CD}=\frac{BD}{CD}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{[ABD]}{[ACD]}=\frac{BD}{CD}$

យើងបាន $\frac{[BOD]}{[ODC]}=\frac{[ABD]}{[ACD]}=\frac{BD}{CD}=\frac{[ABD]-[BOD]}{[ACD]-[ODC]}=\frac{[AOB]}{[AOC]}$

$\Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{[AOB]}{[AOC]}$

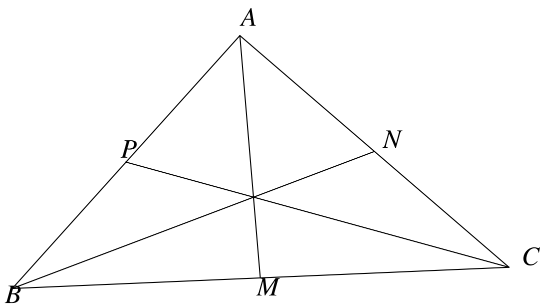
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\frac{AF}{BF}=\frac{[AOC]}{[BOC]}$ និង $\frac{CE}{EA}=\frac{[BOC]}{[AOB]}$

យើងបាន $\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=\frac{[AOC]}{[BOC]}\times\frac{[AOB]}{[AOC]}\times\frac{[BOC]}{[AOB]}=1$

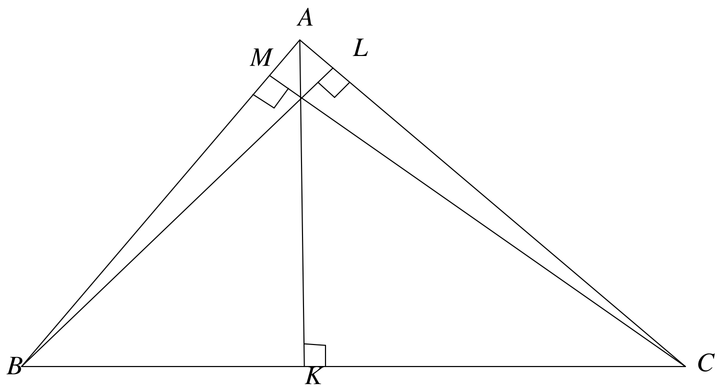
ដូចនេះ $\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$

$\Leftarrow$ ឧបមាថា $\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$

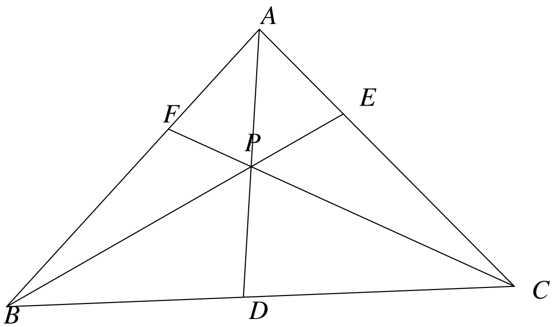
បង្ហាញថា $[AD]$, $[BE]$ និង $[CF]$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច
យក O ជាចំណុចប្រសព្វនៃ $[AD]$ និង $[BE]$ ហើយ $[CK]$ ជាអង្កត់មួយទៀតដែលកាត់តាមចំណុច O
តាមសម្រាយខាងលើយើងបាន $\frac{AK}{KB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$
ដោយ $\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$
យើងបាន $\frac{AF}{FB} = \frac{AK}{KB} \Rightarrow F$ និង K ត្រួតស៊ីគ្នា
ហេតុនេះ $[AD],[BE]$ និង $[CF]$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច
ឧទាហរណ៍ ១
បង្ហាញថា មេដ្យានទាំងបីនៃត្រីកោណមួយប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច ។
សម្រាយ



ឧបមាថាយើងមានត្រីកោណ ABC មួយ ហើយ $[AM],[BN]$ និង $[CP]$ ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណនេះ
នោះ $BM = MC, CN = NA, AP = PB$ យើងបាន $\frac{BM}{MC} \times \frac{CN}{NA} \times \frac{AP}{PB} = 1$
នោះ $[AM],[BN]$ និង $[CP]$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច
ឧទាហរណ៍ ២
បង្ហាញថា កម្ពស់ទាំងបីនៃត្រីកោណមួយប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច ។
សម្រាយ



យក ABC ជាត្រីកោណដែលឲ្យ ហើយ $[AK],[BL]$ និ $[CM]$ ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណនេះ
ពិនិត្យ $\triangle BLC \sim \triangle AKC$
យើងបាន $\dfrac{CL}{KC} = \dfrac{BL}{AK}$
$\triangle AMC \sim \triangle ALB$
យើងបាន $\dfrac{AM}{AL} = \dfrac{MC}{BL}$
$\triangle ABK \sim \triangle CBM$
យើងបាន $\dfrac{BK}{BM} = \dfrac{AK}{MC}$
នោះ $\dfrac{CL}{KC} \times \dfrac{AM}{AL} \times \dfrac{BK}{BM} = \dfrac{BL}{AK} \times \dfrac{MC}{BL} \times \dfrac{AK}{MC} = 1$
រឺ $\dfrac{AM}{MB} \times \dfrac{BK}{KC} \times \dfrac{CL}{LA} = 1$
គេបាន $[AK],[BL]$ និង $[CM]$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច
ដូចនេះ កម្ពស់ទាំងបីនៃត្រីកោណមួយប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច
ឧទាហរណ៍ ៣
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ អង្កត់ $[AD],[BE]$ និង $[CF]$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច P ។ បើគេដឹងថា $2BD = 3DC, 3AE = 4EC$ និង $[APF] = 72$ ។ គណនា $[BPF]$ ។
សម្រាយ



ដោយ $[AD]$, $[BE]$ និង $[CF]$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច P

តាមទ្រឹស្តីបទ Ceva យើងបាន $\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$

តាមបម្រាប់ $2BD=3DC$ និង $3AE=4EC$

នោះ $\frac{BD}{DC}=\frac{3}{2}$ និង $\frac{CE}{EA}=\frac{3}{4}$

យើងបាន $\frac{AF}{FB}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}=1$ នោះ $\frac{AF}{FB}=\frac{8}{9}$

ម៉្យាងទៀត $\frac{AF}{FB}=\frac{[APF]}{[BPF]}\Rightarrow\frac{[APF]}{[BPF]}=\frac{8}{9}\Rightarrow[BPF]=\frac{9}{8}[APF]$

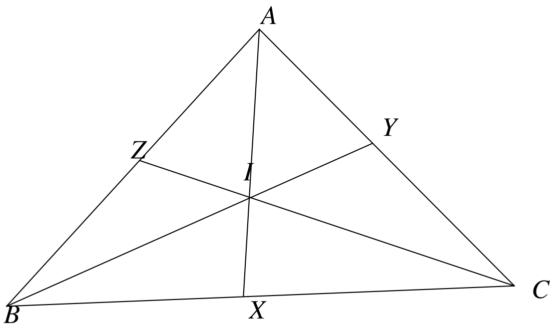
ដោយ $[APF]=72$

ហេតុនេះ $[BPF]=\frac{9}{8}\times72=81$

ឧទាហរណ៍ ៤

បង្ហាញថា កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំទាំងបីនៃត្រីកោណមួយប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច ។

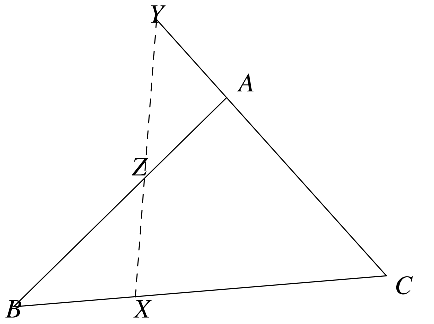
សម្រាយ



យក $[AX),[BY)$ និង $[CZ)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A,B និង C រៀងគ្នា
តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំយើងបាន
$\frac{AZ}{ZB}=\frac{CA}{BC},\frac{BX}{XC}=\frac{AB}{CA}$ និង $\frac{CY}{YA}=\frac{BC}{AB}$
នោះ $\frac{AZ}{ZB}\times\frac{BX}{XC}\times\frac{CY}{YA}=\frac{CA}{BC}\times\frac{AB}{CA}\times\frac{BC}{AB}=1$
នេះបញ្ជាក់ថា $[AX),[BY)$ និង $[CZ)$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច

31 ទ្រឹស្តីបទ Menelaus

ទ្រឹស្តីបទ
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ យក X,Y និង Z ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់ដែលកើតឡើងដោយជ្រុង $[BC]$,
$[CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា បើ X,Y និង Z រត់ត្រង់គ្នា នោះ $\frac{AZ}{ZB}\times\frac{BX}{XC}\times\frac{CY}{YZ}=1$ ។
សម្រាយ



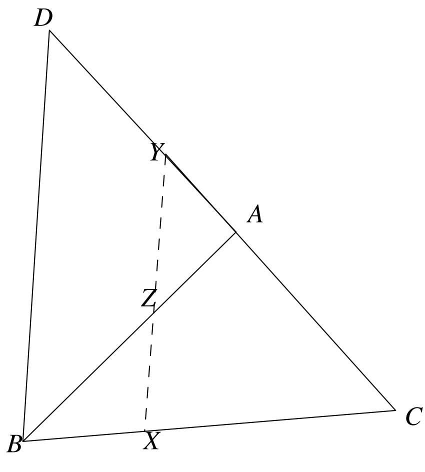
របៀបទី ១

យើងមាន $\frac{AZ}{ZB}=\frac{[YZA]}{[YBZ]}$ និង $\frac{CY}{YA}=\frac{[YZC]}{[YZA]}$

ម៉្យាងទៀត $\frac{BX}{XC}=\frac{[YBX]}{[YXC]}=\frac{[ZBX]}{[ZXC]}=\frac{[YBX]-[ZBX]}{[YXC]-[ZXC]}=\frac{[YBZ]}{[YZC]}$

នោះ $\frac{AZ}{ZB}\times\frac{BX}{XC}\times\frac{CY}{YA}=\frac{[YZA]}{[YZB]}\times\frac{[YBZ]}{[YZC]}\times\frac{[YZC]}{[YZA]}=1$

ដូចនេះ $\frac{AZ}{ZB}\times\frac{BX}{XC}\times\frac{CY}{YZ}=1$



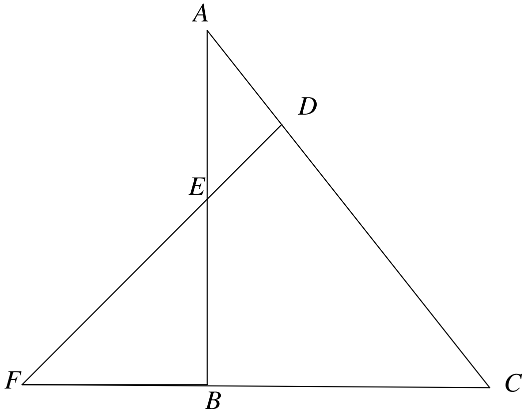
របៀបទី ២

យក D ជាចំណុចមួយនៅលើ (CA) ដែល $[BD]//[XY]$

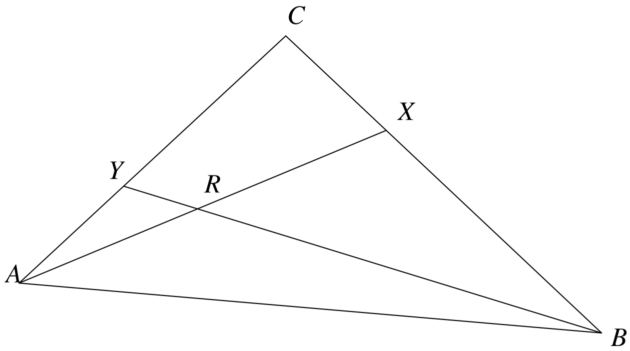
តាមទ្រឹស្តីបទ Thales យើងបាន $\frac{AZ}{ZB}=\frac{AY}{YD}$ និង $\frac{BX}{XC}=\frac{DY}{YC}$

គេបាន $\frac{AZ}{ZB}\times\frac{BX}{XC}\times\frac{CY}{YA}=\frac{AY}{YD}\times\frac{YD}{YC}\times\frac{CY}{YA}=1$

ដូចនេះ $\frac{AZ}{ZB}\times\frac{BX}{XC}\times\frac{CY}{YZ}=1$
ឧទាហរណ៍ ១
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន $\angle B=90^{\circ}, BC=3cm$ និង $AB=4cm$ (ដូចរូប) ។ យក D ជាចំណុច មួយនៅលើ $[AC]$ ដែល $AD=1cm$ ហើយ E ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ ។ បន្ទាត់ (DE) ជួប (BC) ត្រង់ F ។ គណនា BF ។
សម្រាយ



តាមបម្រាប់ D,E និង F ស្ថិតនៅលើជ្រុង $[CA],[AB][CB)$ នៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ហើយចំណុចទាំងបីរត់ត្រង់គ្នា តាមទ្រឹស្តីបទ Menelaus យើងបាន $\frac{AE}{EB}\times\frac{BF}{FC}\times\frac{CD}{DA}=1$
ដោយ $AE=EB=2, DA=1$ និង $FC=FB+BC=BF+3$
ហើយ $CD=AC-AD=\sqrt{BC^2+AB^2}-AD=\sqrt{3^2+4^2}-1=4$
យើងបាន $\frac{BF}{BF+3}\times\frac{4}{1}=1\Rightarrow 4BF=BF+3$
ដូចនេះ $BF=3$
ឧទាហរណ៍ ២
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ហើយ X និង Y ជាចំណុចនៅលើជ្រុង $[BC]$ និង $[CA]$ រៀងគ្នា ។ យក R ជាចំណុចប្រសព្វនៃ $[AX]$ និង $[BY]$ ។ គេឲ្យ $\frac{AY}{YC}=p$ និង $\frac{AR}{RX}=q$ ដែល $0<p<q$ ។ គណនា $\frac{BX}{XC}$ ជាអនុគមន៍នៃ p និង q ។
សម្រាយ



ពិនិត្យត្រីកោណ AXC និង ខ្នាត់ (BRY)

តាមទ្រឹស្តីបទ Menelaus យើងបាន $\dfrac{AR}{RX}\times\dfrac{XB}{BC}\times\dfrac{CY}{YA}=1$

នោះ $\dfrac{BC}{XB}=\dfrac{AR}{RX}\times\dfrac{CY}{YA}=\dfrac{q}{p}\Rightarrow\dfrac{BX+XC}{BX}=\dfrac{q}{p}$

$\Rightarrow 1+\dfrac{XC}{BX}=\dfrac{q}{p}$

$\Rightarrow \dfrac{XC}{BX}=\dfrac{q-p}{p}$

ដូចនេះ $\dfrac{BX}{XC}=\dfrac{p}{q-p}$

ទ្រឹស្តីបទច្រាស

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន X,Y និង Z ស្ថិតនៅលើ $(BC),(CA)$ និង (AB) រៀងគ្នា ។
បើ $\dfrac{AZ}{ZB}\times\dfrac{BX}{XC}\times\dfrac{CY}{YA}=1$ នោះ X,Y និង Z ជាបីចំណុចរត់ត្រង់គ្នា ។

សម្រាយ

ឧបមាថា Z' ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង (AB) ដែល X,Y និង Z' រត់ត្រង់គ្នា

តាមទ្រឹស្តីបទ Menelaus យើងបាន $\dfrac{AZ'}{Z'B}\times\dfrac{BX}{XC}\times\dfrac{CY}{YA}=1$ (1)

ដោយ $\dfrac{AZ}{ZB}\times\dfrac{BX}{XC}\times\dfrac{CY}{YA}=1$ (2)

ធ្វើផលធៀបរវាង (1) និង (2) យើងបាន $\dfrac{AZ'}{Z'B}\times\dfrac{ZB}{AZ}=1$

$\Rightarrow \dfrac{AZ'}{Z'B}=\dfrac{AZ}{BZ}$

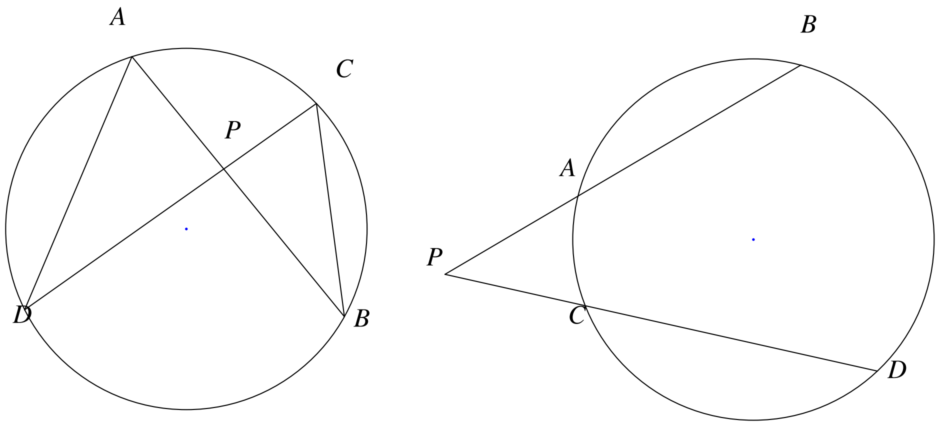
នេះបញ្ជាក់ថា Z' ត្រួតលើ Z
ដូចនេះ X, Y និង Z រត់ត្រង់គ្នា

32 ស្វ័យគុណចំណុច

32.1 ស្វ័យគុណចំណុច

គេឲ្យរង្វង់ (C) និង ចំណុច P មួយនៅក្នុងប្លង់ (P មិនមែនជាចំណុចនៅលើរង្វង់) ។ បន្ទាត់កាត់តាម P ប្រសព្វរង្វង់ (C) ត្រង់ចំណុច A និង B ហើយបន្ទាត់មួយទៀតកាត់តាម P ដូចគ្នាប្រសព្វរង្វង់ (C) ត្រង់ C និង D ។ គេបានសមភាពមួយកំណត់ដោយ $PA \times PB = PC \times PD$ ។
សម្រាយ

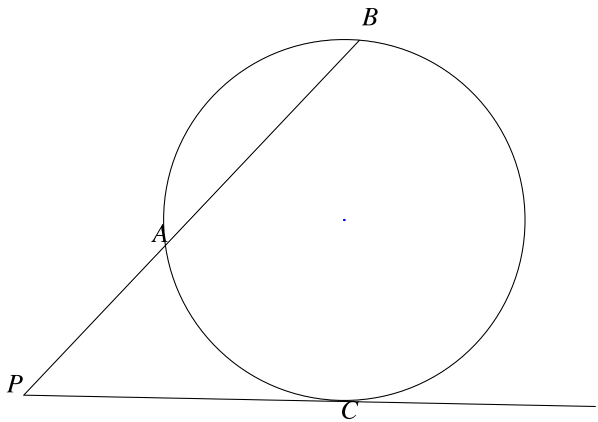
បង្ហាញថា $PA \times PB = PC \times PD$



តាមលក្ខខណ្ឌខាងលើ យើងបានករណីសិក្សាចំនួនពីរដូចខាងក្រោម
+ ករណី P នៅក្នុងរង្វង់
ដោយ $\angle DAP = \angle PCB$ និង $\angle ADP = \angle PBC$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)
នោះ $\triangle ADP \sim \triangle CBP$

យើងបាន $\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}$
ដូចនេះ $PA\times PB=PC\times PD$
+ ករណី P នៅក្រៅរង្វង់
យើងមាន $\angle APD=\angle BPC$ (មុំរួម)
និង $\angle PBC=\angle ADP$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)
នោះ $\triangle ADP\sim\triangle CBP$ យើងបាន $\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}$
ដូចនេះ $PA\times PB=PC\times PD$

សម្គាល់



បើ (PC) ជាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច C គេបាន $PC^2=PA\times PB$ ។

ទ្រឹស្តីបទច្រាស

ឧបមាថា A,B,C និង D ជាបួនចំណុចផ្សេងគ្នា ហើយ (AB) និង (CD) ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច P ។ បើ $PA\times PB=PC\times PD$ គេបាន A,B,C និង D ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ ។

សម្រាយ

យើងមាន $PA\times PB=PC\times PD$ នោះ $\frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PB}$
ដោយ $\angle APD=\angle CPB$
យើងបាន $\triangle APD\sim\triangle CPB$
វិបាក $\angle PAD=\angle PCB$ និង $\angle ADP=\angle PBC$
ហេតុនេះ A,B,C និង D ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ
តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើយើងសង្កេតឃើញថាផលគុណ $PA\times PB$ មិនអាស្រ័យលើទីតាំងនៃចំណុច

A និង B ទេ គឺវាអាស្រ័យតែទៅលើទីតាំងនៃចំណុច P តែប៉ុណ្ណោះ ។ ម៉្យាងទៀត បើយើងយក $[AB]$ ជាអង្កត់ផ្ចិត នៃរង្វង់គេបាន
+ករណី P នៅក្នុងរង្វង់ យើងបាន $PA\times PB=(r-OP)(r+OP)=r^2-OP^2$
+ករណី P នៅក្រៅរង្វង់ យើងបាន $PA\times PB=(OP+r)(OP-r)=OP^2-r^2$
តាមលក្ខណៈនេះគេកំណត់និយមន័យនៃស្វ័យគុណចំណុចដូចខាងក្រោម
និយមន័យ
ឧបមាថារង្វង់ (ω) មានផ្ចិត O និង កាំ r ។ គេកំណត់ស្វ័យគុណនៃចំណុច P ធៀបនឹង (ω) ដោយ $Pow_\omega(P)=OP^2-r^2$ ។

32.2 អ័ក្សរ៉ាឌីកាល់

គេមានរង្វង់ពីរខុសគ្នា $(\omega_1),(\omega_2)$ មានផ្ចិត O_1,O_2 និង កាំ r_1,r_2 រៀងគ្នា ។
សំណុំចំណុច P ដែលមានស្វ័យគុណស្មើគ្នាធៀបទៅនឹង (ω_1) និង (ω_2) គឺជាបន្ទាត់ (Δ) មួយដែលកែង ទៅនឹង (O_1O_2) ។ បន្ទាត់ (Δ) ហៅថាអ័ក្សរ៉ាឌីកាល់នៃរង្វង់ទាំងពីរ ។
សម្រាយ

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេយើងយក $O_1(a,0),O_2(b,0)$ និង $P(x,y)$
គេបាន $Pow_{\omega_1}(P)=O_1P^2-{r_1}^2=(x-a)^2+y^2-{r_1}^2$
ដូចគ្នាដែរ $Pow_{\omega_2}(P)=(x-b)^2+y^2-{r_2}^2$
ដោយ $Pow_{\omega_1}(P)=Pow_{\omega_2}(P)$
$\Rightarrow (x-a)^2+y^2-{r_1}^2=(x-b)^2+y^2-{r_2}^2$
$\Rightarrow (x-a)^2-(x-b)^2={r_1}^2-{r_2}^2$
$\Rightarrow x^2-2ax+a^2-x^2+2bx-b^2={r_1}^2-{r_2}^2$
$\Rightarrow 2(b-a)x={r_1}^2-{r_2}^2+b^2-a^2$
$\Rightarrow (\Delta):x=\frac{1}{2}\left(\frac{{r_1}^2-{r_2}^2}{b-a}\right)+\frac{a+b}{2}$
ជាបន្ទាត់កែងទៅនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស
ដូចនេះ (Δ) កែងទៅនឹង (O_1O_2)
សម្គាល់

បើ (ω_1) និង (ω_2) កាត់គ្នាត្រង់ពីរចំណុច A និង B យើងបាន $(\Delta)=(AB)$ ។
បើ (ω_1) និង (ω_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ចំណុច A នោះ (Δ) ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមនៃរង្វង់ទាំងពីរត្រង់ចំណុច A ។

32.3 ផ្ចិតរ៉ាឌីកាល់

គេមាន $(\omega_1),(\omega_2)$ និង (ω_3) ជារង្វង់បីផ្សេងគ្នាមានផ្ចិត O_1,O_2 និង O_3 មិនរត់ត្រង់គ្នា ។ យក (Δ_1) ជាអ័ក្សរ៉ាឌីកាល់នៃ (ω_1) និង (ω_2), (Δ_2) ជាអ័ក្សរ៉ាឌីកាល់នៃ (ω_2) និង (ω_3)ហើយ (Δ_3) ជាអ័ក្សរ៉ាឌីកាល់នៃ (ω_3) និង (ω_1) ។ គេបាន $(\Delta_1),(\Delta_2)$ និង (Δ_3) ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច ។

សម្រាយ

យក I ជាចំណុចប្រសព្វនៃ (Δ_1) និង (Δ_2) ដើម្បីបង្ហាញថា $(\Delta_1),(\Delta_2)$ និង (Δ_3) ប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា (Δ_3) កាត់តាម I

ដោយ $I \in (\Delta_1) \Rightarrow Pow_{\omega_1}(I) = Pow_{\omega_2}(I)$

$I \in (\Delta_2) \Rightarrow Pow_{\omega_2}(I) = Pow_{\omega_3}(I)$

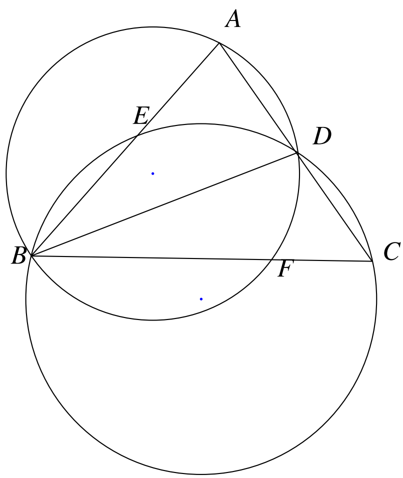
នោះ $Pow_{\omega_1}(I) = Pow_{\omega_3}(I)$

យើងបាន $I \in (\Delta_3)$

ឧទាហរណ៍ ១

គេឲ្យ $[BD)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ B នៃត្រីកោណ ABC ។ រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ BCD និងត្រីកោណ ABD កាត់ជ្រុង $[AB]$ និង $[BC]$ ត្រង់ចំណុច E និង F រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $AE = CF$ ។

សម្រាយ



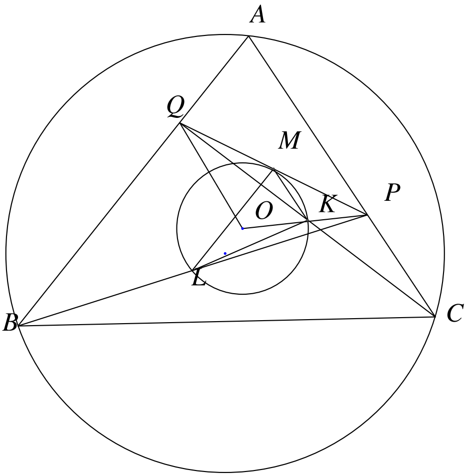
តាមស្វ័យគុណចំណុចយើងបាន $AE \times EB = AD \times AC$

និង $CF \times CB = CD \times CA$

នោះ $\dfrac{AE \times AB}{CF \times CB} = \dfrac{AD}{CD} \Rightarrow \dfrac{AE}{CF} = \dfrac{AD}{CD} \times \dfrac{CB}{AB}$

តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំយើងបាន $\frac{AB}{AD}=\frac{CB}{CD}\Rightarrow\frac{AB}{CB}=\frac{AD}{CD}$
នោះ $\frac{AE}{CF}=\frac{AB}{CB}\times\frac{CB}{AB}=1$
ដូចនេះ $AE=CF$
ឧទាហរណ៍ ២
(IMO 2009)
យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ហើយ P និង Q ជាចំណុចនៅលើជ្រុង $[CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា ។ រង្វង់ (Γ) កាត់តាមចំណុចកណ្តាលនៃ $[BP],[CQ]$ ហើយប៉ះទៅនឹង $[PQ]$ ត្រង់ចំណុចកណ្តាល L,K និង M រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $OP=OQ$។

សម្រាយ



បង្ហាញថា $OP=OQ$
ដោយ M និង K ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[PQ]$ និង $[QC]$ រៀងគ្នា
នោះ $[MK]$ ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ PQC
គេបាន $[MK]//[PC]\Rightarrow[MK]//[AC]$
នោះ $\angle APQ=\angle KMP$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)
តែ $\angle KMP=\angle KLM$ (មុំចារឹក និង ចារឹកពិសេសស្កាត់ធ្នូរួម)
នោះ $\angle APQ=\angle KLM$
ដូចគ្នាដែរ $[AB]//[LM]$ នោះ $\angle AQP=\angle LKM$
យើងបាន $\triangle APQ\sim\triangle MLK$
វិបាក $\frac{AP}{ML}=\frac{AQ}{MK}\Rightarrow\frac{AP}{AQ}=\frac{ML}{MK}$

ម៉្យាងទៀត$ML = \dfrac{BQ}{2}$ និង $MK = \dfrac{PC}{2}$

យើងបាន $\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{\frac{BQ}{2}}{\frac{PC}{2}} = \dfrac{BQ}{PC} \Rightarrow PA \times PC = QA \times QB$

$\Rightarrow Pow_O(P) = Pow_O(Q) \Rightarrow OP^2 - R^2 = OQ^2 - R^2 \Rightarrow OP^2 = OQ^2$

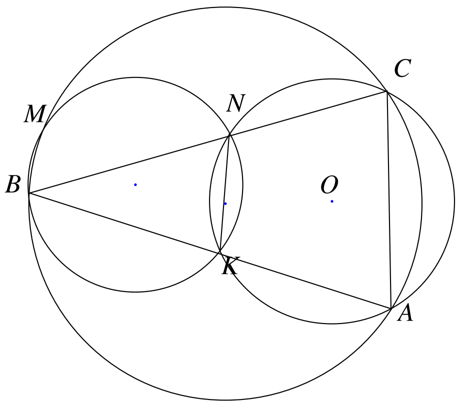
ដូចនេះ $OP = OQ$

ឧទាហរណ៍ ៣

(IMO 1985)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ និង រង្វង់ផ្ចិត O មួយកាត់តាមកំពូល A និង C ហើយកាត់ជ្រុង $[AB]$ និង $[BC]$ ត្រង់ K និង N រៀងគ្នា ។ ឧបមាថារង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC និង KBN ជួបគ្នាត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា គឺ B និង M ។ បង្ហាញថា $\angle OMB = 90^\circ$ ។

សម្រាយ



យក I ជាផ្ចិតរ៉ាឌីកាល់នៃរង្វង់ទាំងបី និង r ជាកាំរង្វង់ផ្ចិត O

ដោយ រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC និង ត្រីកោណ KBN ប្រសព្វគ្នាត្រង់ B និង M

នោះ (BM) ជាអ័ក្សរ៉ាឌីកាល់នៃរង្វង់ទាំងពីរ $\Rightarrow I \in (BM)$

ដូចគ្នាដែរ $I \in (NK)$ និង $I \in (CA)$ ពោលគឺ (BM), (NK) និង (CA) ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច I

យើងបាន $IM \times IB = IK \times IN = OI^2 - r^2$ (1)

ម៉្យាងទៀត $\angle IMN = 180^\circ - \angle BMN = 180^\circ - \angle NKA = 180^\circ - \angle NCI$

ព្រោះ $MBKN$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

នោះ $\angle IMN + \angle NCI = 180^\circ$

នោះ $IMNC$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

យើងបាន $BM \times BI = BN \times NC = OB^2 - r^2$ (2)

ដក (1) និង (2) យើងបាន $IM \times IB - BM \times BI = OI^2 - OB^2$
$\Rightarrow IB(IM - BM) = OI^2 - OB^2$
$\Rightarrow (IM + BM)(IM - BM) = OI^2 - OB^2$
$\Rightarrow IM^2 - BM^2 = OI^2 - OB^2$
$\Rightarrow IM^2 + OB^2 = OI^2 + BM^2$
តាមច្បាប់អង្កត់ទ្រូងកែងគ្នាយើងបាន $\angle OMB = 90^\circ$

វិសមភាពសំខាន់ៗ

1. វិសមភាពនៃមធ្យម

បើ $a_1, a_2, ..., a_n$ ជា n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន គេកំណត់យក

$AM = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ ហៅថា មធ្យមនព្វន្ត (Arithmetic Mean)

$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ ហៅថា មធ្យមធរណីមាត្រ (Geometric Mean)

$QM = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$ ហៅថា មធ្យមរឹសការេ (Quadratic Mean)

និង $HM = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$ ហៅថា មធ្យមអាម៉ូនិច (Harmonic Mean)។

យើងបាន $QM \geq AM \geq GM \geq HM$ សមភាពកើតឡើងពេល $a_1 = a_2 = ... = a_n$ ។

សម្គាល់

វិសមភាព $AM \geq GM$ មានអ្នកខ្លះហៅថា វិសមភាព Cauchy ។

2. វិសមភាព Cauchy-Schwarz

ចំពោះ $2n$ ចំនួនពិត $a_1, a_2, ..., a_n$ និង $b_1, b_2, ..., b_n$ គេបាន

$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right)$

សមភាពពេល $\vec{u} = (a_1, a_2, ..., a_n),\ \ \vec{v} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា។

3. មធ្យមស្វ័យគុណ

យក $a_1, a_2, ..., a_n$ ជា n ចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ ។

ចំពោះ $x_1, x_2, ..., x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន គេកំណត់យក

$M_{-\infty} = \min\{x_1, x_2, ..., x_k\}$

$M_{\infty} = \max\{x_1, x_2, ..., x_k\}$

$M_0 = x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n}$

$M_t = \left(a_1 x_1^t + a_2 x_2^t + ... + a_k x_k^t\right)^{\frac{1}{t}}$ ចំពោះ t ជាចំនួនពិតមិនសូន្យ ។

គេបាន $M_{-\infty} \leq M_s \leq M_t \leq M_{\infty}$ ចំពោះ $s \leq t$។

4. វិសមភាពតម្រៀប (Rearrangement)

បើ $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ និង $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ ជាចំនួនពិត និង $c_1, c_2, ..., c_n$ ជាចម្លាស់នៃ $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ គេបាន វិសមភាព

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1 \le a_1c_1+a_2c_2+...+a_nc_n$$
$$\le a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$$

សមភាពពេល $a_1=a_2=...=a_n$ រឺ $b_1=b_2=...=b_n$ ។

5. **វិសមភាព** Chebyshev
   គេមាន $a_1,a_2,...,a_n$ និង $b_1,b_2,...,b_n$ ជាពីរស្វ៊ីតចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។
   + បើ $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ និង $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ គេបាន
   $\frac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)(y_1+y_2+...+y_n) \le x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ ។
   + បើ $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ និង $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$ គេបាន
   $\frac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)(y_1+y_2+...+y_n) \ge x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ ។

6. **វិសមភាព** Schur
   ចំពោះគ្រប់ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន យើងបាន វិសមភាព
   $x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y) \ge 0$
   សមភាពពេល $x=y=z$ រឺ ពីរក្នុងចំណោម $x,\ y,\ z$ ស្មើគ្នា ហើយមួយចំនួនទៀតស្មើនឹង 0។

7. **វិសមភាព** Jensen
   បើ f ផតលើ $[a,b]$ និង$t_1,t_2,...,t_n \in [0,1]$ ដែល $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ គេបាន
   $f(t_1x_1+t_2x_2+...+t_nx_n) \le t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+...+t_nf(x_n)$
   ចំពោះគ្រប់ $x_1,x_2,...,x_n \in [a,b]$ ។
   • ករណី $t_1=t_2=...=t_n=\frac{1}{n}$ យើងបាន
   $f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}$

   សម្គាល់

   បើ f ប៉ោងលើ $[a,b]$ នោះវិសមភាពប្តូរទិសដៅ ។

ជំពូក II

ប្រធានលំហាត់

លំហាត់ ១
គេឲ្យ A, B និង C ជាមុំក្នុងត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

1. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
2. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$
3. $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$
4. $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4\sin 2A\sin 2B\sin 2C$
5. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$
6. $\cos A + \cos B + \cos C = -1 - 4\cos A\cos B\cos C$
7. $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 - 4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$
8. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$
9. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$
10. $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$
11. $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ ។

លំហាត់ ២
គេឲ្យ A, B និង C ជាមុំក្នុងត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

1. $\sin A+\sin B+\sin C\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
2. $1<\cos A+\cos B+\cos C\leq \frac{3}{2}$
3. $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$ (A,B និង C ជាមុំស្រួច)
4. $\cot A+\cot B+\cot C\geq \sqrt{3}$
5. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq \frac{9}{2}$
6. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geq \frac{3}{4}$
7. $\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C\geq 9$ (A,B និង C ជាមុំស្រួច)
8. $1<\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq \frac{3}{2}$
9. $2<\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
10. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq \sqrt{3}$
11. $\frac{3}{4}\leq \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}<1$
12. $2<\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\leq \frac{9}{4}$
13. $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geq 1$
14. $\sin A\sin B\sin C\leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$
15. $\cos A\cos B\cos C\leq \frac{1}{8}$
16. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq \frac{1}{8}$
17. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$
18. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$

លំហាត់ ៣

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ ។ បង្ហាញថា

1. $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{1}{8}abc$
2. $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$
3. $a^2(p-b)(p-c)+b^2(p-c)(p-a)+c^2(p-a)(p-b) \geq 4S^2$
4. $p^2 \geq 3\sqrt{3}S$
5. $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3$
6. $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$
7. $a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2) \leq 3abc$
8. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc > a^3+b^3+c^3$
9. $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2) \leq 2(a^3+b^3+c^3)$
10. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} < 2$
11. $ab+bc+ca \leq 9R^2$
12. $ab+bc+ca \geq 36r^2$
13. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \sqrt{\frac{3}{2Rr}}$
14. $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b} \geq \frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}$
15. $a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca)-4\sqrt{3}S$
16. $a^2+b^2+c^2 \geq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4\sqrt{3}S$
17. $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right)$
18. $a^4+b^4+c^4 \geq 16S^2$
19. $r \leq \frac{R}{2}$

20. $\frac{1}{a}(l_a+l_b)+\frac{1}{b}(l_b+l_c)\frac{1}{c}(l_c+l_a)\leq 3\sqrt{3}$

21. $l_a+l_b+l_c\leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$

22. $2\sqrt{3}l_a\leq \frac{2(b+c)-a}{2\sqrt{3}}$

23. $m_a+m_b+m_c\leq r+4R$

24. $m_a+m_b+m_c\leq \frac{9R}{2}$

25. $m_a^2+m_b^2+m_c^2\geq 3\sqrt{3}S$

26. $\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2}+\frac{1}{(m_b+m_c-m_a)^2}+\frac{1}{(m_c+m_a-m_b)^2}\geq \frac{4}{3R^2}$

27. $\frac{4}{5}(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a)<ab+ab+ca$
. $<\frac{20}{9}(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a)$

28. $\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\leq 1+\frac{R}{r}$

29. $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}\geq \frac{h_b}{h_a}+\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_a}{h_c}$ ករណី $A\geq B\geq C$

30. $\frac{h_a^2}{bc}+\frac{h_b^2}{ca}+\frac{h_c^2}{ab}\geq \frac{9r^2}{R^2}$

លំហាត់ ៤

គេអោយត្រីកោណ ABC មួយ។ បង្ហាញថា

1. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)l_c+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)l_a+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)l_b=2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$
2. $r=p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$
3. $r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$
4. $\frac{r}{4R}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

5. $R=\dfrac{p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

6. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{2pr}{R}$

7. $\dfrac{r+4R}{p}=\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}$

8. $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(r+R)$

លំហាត់ ៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់ជ្រុង $BC=a, CA=b$ និង $AB=c$។

បង្ហាញថា $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$។

លំហាត់ ៦

គេឲ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មានក្រលាផ្ទៃ S និងកន្លះបរិមាត្រស្មើនឹង 2។
បង្ហាញថា $S\leq 1$ ។

លំហាត់ ៧

យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ R និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និងចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា

ក) $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

ខ) $IA\times IB\times IC=4Rr^2$ ។

លំហាត់ ៨

តាមចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណមួយ គេគូសបន្ទាត់ស្របទៅនឹងជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណនោះ។ បន្ទាត់ ទាំងនេះចែកត្រីកោណជា ៦ ចំណែក ក្នុងនោះមានបីចំណែកជាត្រីកោណមានក្រលាផ្ទៃតាង ដោយ S_1,S_2 និង S_3។ គណនាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណជាអនុគមន៍នៃ S_1,S_2 និង S_3។

លំហាត់ ៩

គេឲ្យ $ABCD$ ជាការេមួយហើយ P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងការេនេះដែល $\angle PAB=\angle PBA=15^\circ$។
បង្ហាញថា PCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

លំហាត់ ១០

ត្រីកោណ ABC មានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច។ យក $[AM],[BN]$ និង $[CL]$ ជាកម្ពស់ ហើយ H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណនេះ។ បង្ហាញថា

ក) $\dfrac{HM}{AM}+\dfrac{HN}{BN}+\dfrac{HL}{CL}=1$

ខ) $\dfrac{AM}{HM}+\dfrac{BN}{HN}+\dfrac{CL}{HL}\geq 9$

គ) $AM \times HM \le \frac{BC^2}{4}$ ។

លំហាត់ ១១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ហើយ O ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ។ បន្ទាត់ $(OA),(OB)$ និង (OC) កាត់ជ្រុង $[BC],[CA]$ និង $[AB]$ ត្រង់ P,Q និង R រៀងគ្នា។ បង្ហាញថា

ក) $\frac{OP}{AP}+\frac{OQ}{BQ}+\frac{OR}{CR}=1$

ខ) $\frac{AP}{OP}+\frac{BQ}{OQ}+\frac{CR}{OR}\ge 9$ ។

លំហាត់ ១២

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមេដ្យាន m_a,m_b និង m_c គូសចេញពីកំពូល A,B និងC រៀងគ្នា។ បង្ហាញថា $m_a m_b m_c \le \frac{27R^3}{8}$ ។

លំហាត់ ១៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច ។ បង្ហាញថា

ក) $h_a+h_b+h_c \ge 9r$

ខ) $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\ge\frac{2}{R}$ ។

លំហាត់ ១៤

គេឲ្យត្រីកោណមួយមានរង្វាស់ជ្រុង a,b,c ហើយ l_a,l_b,l_c ជាប្រវែងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងទាំងបីនៃត្រីកោណនេះ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}$ ។

លំហាត់ ១៥

(វិសមភាព Ptolemy)

គេឲ្យ $ABCD$ ជាចតុកោណប៉ោង។ បង្ហាញថា $AB\times CD+AD\times BC\ge AC\times BD$។

លំហាត់ ១៦

(IMO, 1991)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ។

កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងនៃមុំ A,B និង C កាត់ជ្រុង $[BC],[CA],[AB]$ ត្រង់ A',B' និង C'រៀងគ្នា។ បង្ហាញថា $\frac{1}{4}<\frac{AI\times BI\times CI}{AA'\times BB'\times CC'}\le\frac{8}{27}$។

លំហាត់ ១៧

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច និង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណនេះ។ បើ K ជាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណនេះ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$ ។

លំហាត់ ១៨

គេឲ្យ P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC។យក D,E និង F ជាចំណោលកែងនៃ P លើជ្រុង $[BC],[CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា។ កំណត់ទីតាំងនៃ P ដើម្បីឲ្យផលបូក $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

លំហាត់ ១៩

គេឲ្យ p និងR ជាកន្លះបរិមាត្រ និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា។ កំណត់ប្រភេទត្រីកោណ ABC ដើម្បីឲ្យផលធៀប $\frac{p}{R}$ មានតម្លៃធំបំផុត។

លំហាត់ ២០

គេឲ្យត្រីកោណកែង ABC មួយកែងត្រង់ C មាន $AC=1$ និង $\angle BAC=x^\circ$ ។
យក D ជាចំណុចមួយនៅលើអ៊ីប៉ូតេនុស $[AB]$ ដែល$AD=1$ និង E ជាចំណុចមួយនៅលើ $[BC]$ ដែល $\angle EDC=x^\circ$ ។ បន្ទាត់ (EF) កែងនឹង $[BC]$ ត្រង់ E ហើយជួប $[AB]$ ត្រង់ F ។
គណនា $\lim\limits_{x\to 0} EF$ ។

លំហាត់ ២១

បង្ហាញថារង្វាស់ជ្រុង a,b និង c នៃត្រីកោណមួយជាឫសនៃសមីការដឺក្រេទី ៣
$X^3-2pX^2+\left(r^2+p^2+4rR\right)X-4prR=0$ ក្នុងនោះ $p,\ r$ និង R ជាកន្លះបរិមាត្រ កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅរៀងគ្នានៃត្រីកោណ ABC។

លំហាត់ ២២

(IMO Shortlist, 1988)
គេឲ្យ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ក្រៅនៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា។
បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$ ។

លំហាត់ ២៣

(IMO Shortlist, 1997)
គេឲ្យឆកោណ $ABCDEF$ មួយកំណត់ដោយ $AB=BC,CD=DE$ និង $EF=FA$។ បង្ហាញថា $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ ២៤

ត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង a,b និងc។
បង្ហាញថា $\frac{\cos A}{b\cos C+c\cos B}+\frac{\cos B}{a\cos C+c\cos A}+\frac{\cos C}{b\cos A+a\cos B}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$។

លំហាត់ ២៥

យក M ជាចំណុចប្រសព្វនៃអង្កត់ទ្រូង $[AC]$ និង $[BD]$ នៃចតុកោណប៉ោង $ABCD$ ។កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle ACD$ កាត់ $[BA]$ ត្រង់K។
បើ $MA\times MC+MA\times CD=MB\times MD$ បង្ហាញថា $\angle BKC=\angle CDB$។

លំហាត់ ២៦

ត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង a,b និង c ហើយ ចារឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត O មួយ។ គេសង់បន្ទាត់បី ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ផ្ចិត O ហើយស្របរៀងគ្នានឹងជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។ បន្ទាត់ប៉ះនីមួយៗ និង ជ្រុងពីរផ្សេងទៀតនៃត្រីកោណ ABC ដែលមិនស្របនឹងវា ផ្គុំបានត្រីកោណថ្មី។ ត្រីកោណថ្មីទាំង បីនោះ ចារឹកក្រៅរង្វង់ទាំងបីរៀងគ្នា ។បង្ហាញថា រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណទាំងបួននោះមានផលបូក ក្រឡាផ្ទៃស្មើ នឹង $\left(\frac{\pi S^2}{p^4}\right)\left[p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2\right]$ ដែលS ជាក្រឡាផ្ទៃ និង p ជាកន្លះ បរិមាត្រនៃត្រី- កោណ ABC។

លំហាត់ ២៧

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយបង្ហាញថា

ក) $\frac{h_b}{l_b} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$

ខ) $r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c \leq p^2$

គ) $m_a l_a + m_b l_b + m_c l_c \geq p^2$

ឃ) $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{4R^2}{r(a+b+c)abc}}$

ង) $\frac{a^3}{r_a}+\frac{b^3}{r_b}+\frac{c^3}{r_c} \leq \frac{abc}{r}$

ច) $\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c} \leq \frac{9R}{p}$

ឆ) $r_a^2+r_b^2+r_c^2 \geq l_a^2+l_b^2+l_c^2$

ជ) $\frac{a^2}{r_a-r}+\frac{b^2}{r_b-r}+\frac{c^2}{r_c-r} \leq 9R$

ឈ) $\frac{3S}{R} \leq a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{3S}{2r}$

ញ) $\sqrt{a+b+c} < \sqrt{r_a \sin A}+\sqrt{r_b \sin B}+\sqrt{r_c \sin C} \leq \frac{3}{2}\sqrt{a+b+c}$

ដ) $\frac{\sqrt{p}abc\sin C}{ab\sin^2 C+pc} \leq \frac{1}{2}\sqrt{abc} < \frac{ab\sin^2 C+pc}{4\sqrt{p}\sin C}$

ឋ) $\frac{8}{3}\left(\frac{S}{R}\right)^2 \leq \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{bc\sqrt{bc}}{b+c}+\frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \leq \frac{8}{3}\left(\frac{S}{2R}\right)^2$

លំហាត់ ២៨

(ភ្នំពេញ, 2015)

ក្នុងរូប $ABCD$ ជាការេដែលមានប្រវែងជ្រុងស្មើនឹង 1។អង្កត់ $[PQ]$ បង្កើតបានមុំ 45° ជាមួយជ្រុង $[AB]$ ហើយ ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃកន្លះរង្វង់ដូចរូប។ កន្លះរង្វង់នេះប៉ះនឹងជ្រុងការេត្រង់ចំណុច X និងY ។រកផ្ទៃក្រឡា កន្លះរង្វង់។

លំហាត់ ២៩

រង្វង់ពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំណុចA និង B ។ បន្ទាត់ចល័ត (MN) កាត់តាម A ហើយជួបរង្វង់ធំត្រង់ M និង រង្វង់តូចត្រង់ N ។ បង្ហាញថា $\dfrac{BM}{BN}$ មានតម្លៃថេរ កាលណា (MN) វិលជុំវិញចំណុច A។

លំហាត់ ៣០

ត្រីកោណ ABC មួយមានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle BAC$ ជួបជ្រុង $[BC]$ ត្រង់ D ហើយ ជួបរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ E ។ តាមចំណុច Dគេគូសបន្ទាត់កែងនឹងជ្រុង $[AB]$ និង $[AC]$ រៀងគ្នាត្រង់ចំណុចM និងN។
បង្ហាញថា $S_{AMEN} = S_{\triangle ABC}$។

លំហាត់ ៣១

ចំណុច M,K,L ត្រូវគេដៅរៀងគ្នាលើជ្រុង $[AB],[BC],[CA]$ នៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា យ៉ាង តិចក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណមួយក្នុងចំណោមត្រីកោណ MAL, KBM និង LCK តិចជាង រឺ ស្មើនឹង $\dfrac{1}{4}$ នៃត្រីកោណ ABC។

លំហាត់ ៣២

(កម្ពុជា, 2017)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច ហើយ $[AD],[BE]$ និង $[CF]$ ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណនេះ ។ បង្ហាញថា $DE+EF+FD \leq \dfrac{1}{2}(a+b+c)$ ។

លំហាត់ ៣៣

(កម្ពុជា, 2017)

គេមានរង្វង់មួយដែលមានផ្ចិត O និង P ជាចំណុចមួយនៅក្រៅរង្វង់ ។ PA និង PB ជាបន្ទាត់ប៉ះគូសចេញពី P ទៅប៉ះរង្វង់ផ្ចិត O ត្រង់ A និង B ។ PD ជាបន្ទាត់កាត់គូសចេញពី P ដែលកាត់រង្វង់ត្រង់ C និង D ។ BF ជាបន្ទាត់ស្របនឹង PA ហើយកាត់បន្ទាត់ AC និង AD រៀងគ្នាត្រង់ E និង F ។ ស្រាយបំភ្លឺថា $BE = BF$ ។

ជំពូក III

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ១
គេឲ្យ A,B និង C ជាមុំក្នុងត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

1. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
2. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$
3. $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$
4. $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C$
5. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$
6. $\cos A+\cos B+\cos C=-1-4\cos A\cos B\cos C$
7. $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1-4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$
8. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$
9. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$
10. $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$
11. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ ។

សម្រាយ
ដោយ A,B និង C ជាមុំក្នុងត្រីកោណមួយ នោះ $A+B+C=\pi$

1. យើងមាន $\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$
$$=2\sin\left(\frac{\pi-C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\left[\frac{\pi-(A+B)}{2}\right]\cos\frac{C}{2}$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$
$$=2\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]\cos\frac{C}{2}$$
$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
ដូចនេះ $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2. យើងមាន

$$\begin{aligned}\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C &= 2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C\\ &= 2\sin(\pi-C)\cos(A-B)+2\sin C\cos[\pi-(A+B)]\\ &= 2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)\\ &= 2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\\ &= -4\sin C\sin A\sin(-B)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

3. យើងមាន

$$\begin{aligned}\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C &= 2\sin\left(\frac{3A+3B}{2}\right)\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)+2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3C}{2}\\ &= 2\sin\left(\frac{3\pi-3C}{2}\right)\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)+2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3C}{2}\\ &= -2\cos\frac{3C}{2}\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)+2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3C}{2}\\ &= -2\left[\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)-\sin\frac{3C}{2}\right]\cos\frac{3C}{2}\\ &= -2\left[\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)+\cos\left(\frac{3A+3B}{2}\right)\right]\cos\frac{3C}{2}\\ &= -4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$

4. យើងមាន

$$\begin{aligned}\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C &= 2\sin(2A+2B)\cos(2A-2B)+2\sin 2C\cos 2C\\ &= 2\sin(2\pi-2C)\cos(2A-2B)+2\sin 2C\cos 2C\\ &= -2\sin 2C\cos(2A-2B)+2\sin 2C\cos 2C\\ &= -2\sin 2C[\cos(2A-2B)-\cos 2C]\\ &= -2\sin 2C[\cos(2A-2B)-\cos(2A+2B)]\\ &= 4\sin 2C\sin 2A\sin(-2B)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C$

5. យើងមាន

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+1-2\sin^2\frac{C}{2}\\ &= 1+2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-2\sin^2\frac{C}{2}\\ &= 1+2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\sin\frac{C}{2}\right]\\ &= 1+2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]\\ &= 1-4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{-B}{2}\right)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C = 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

6. យើងមាន

$$\begin{aligned}\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C &= 2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1\\ &= -1-2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C\\ &= -1-2\cos C[\cos(A-B)-\cos C]\\ &= -1-2\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]\\ &= -1-4\cos A\cos B\cos C\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C = -1-4\cos A\cos B\cos C$

7. យើងមាន

$$\begin{aligned}\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C &= 2\cos\left(\frac{3A+3B}{2}\right)\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)+1-2\sin^2\frac{3C}{2}\\ &= 2\cos\left(\frac{3\pi-3C}{2}\right)\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)+1-2\sin^2\frac{3C}{2}\\ &= 1-2\sin\frac{3C}{2}\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)-2\sin^2\frac{3C}{2}\\ &= 1-2\sin\frac{3C}{2}\left[\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right)-\cos\left(\frac{3A+3B}{2}\right)\right]\\ &= 1-4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C = 1-4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$

8. យើងមាន $A+B+C=\pi \Rightarrow B+C=\pi-A$
នោះ $\tan(B+C)=\tan(\pi-A)$
$\Rightarrow \dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\tan A$
$\Rightarrow \tan B+\tan C=-\tan A+\tan A\tan B\tan C$
ដូចនេះ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

9. យើងមាន $\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{2}$
$\Rightarrow \dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$
នោះ $\tan\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)$
$\Rightarrow \dfrac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}$
$\Rightarrow \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$
ដូចនេះ $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$

10. ដោយ $A+B+C=\pi \Rightarrow B+C=\pi-A$
នោះ $\cot(B+C)=\cot(\pi-A)$
$\Rightarrow \dfrac{\cot B\cot C-1}{\cot B+\cot C}=-\cot A$
$\Rightarrow \cot B\cot C-1=-\cot A\cot B-\cot A\cot C$
ដូចនេះ $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

11. យើងមាន $\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$
នោះ $\cot\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}\right)=\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)$
$\Rightarrow \dfrac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}-1}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}}=\dfrac{1}{\cot\frac{C}{2}}$
$\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}-\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}$
ដូចនេះ $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$

លំហាត់ ២

គេឲ្យ A,B និង C ជាមុំក្នុងត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

1. $\sin A+\sin B+\sin C\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

2. $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

3. $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$ (A, B និង C ជាមុំស្រួច)

4. $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

5. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{2}$

6. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$

7. $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9$ (A, B និង C ជាមុំស្រួច)

8. $1 < \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$

9. $2 < \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

10. $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

11. $\frac{3}{4} \leq \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} < 1$

12. $2 < \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$

13. $\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} \geq 1$

14. $\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

15. $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$

16. $\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

17. $\cos\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

18. $\tan\frac{A}{2} \tan\frac{B}{2} \tan\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$

សម្រាយ

1. Lemma:

ចំពោះ x, y និង z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $0 < x, y, z < \pi$ គេបាន

i- $\dfrac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

ii-$\dfrac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \leq \sin\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)$

សម្រាយ

i- យើងមាន $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

ដោយ $0 < x, y < \pi \Rightarrow 0 < \dfrac{x+y}{2} < \pi$ និង $0 \leq \left|\dfrac{x-y}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right) > 0$ និង $0 < \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \leq 1$

នោះ $\dfrac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

ii-យើងមាន

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right) &= \sin\left(\frac{\frac{4x+4y+4z}{3}}{4}\right) \\
&= \sin\left(\frac{x+y+z+\frac{x+y+z}{3}}{4}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{z+\frac{x+y+z}{3}}{2}}{2}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)+\sin\left(\frac{z+\frac{x+y+z}{3}}{2}\right)\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x+\sin y}{2}+\frac{\sin z+\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right)}{2}\right] \\
&\geq \frac{1}{4}\left[\sin x+\sin y+\sin z+\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right] \\
\Rightarrow 4\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right) &\geq \sin x+\sin y+\sin z+\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \\
\Rightarrow 3\sin\frac{x+y+z}{3} &\geq \sin x+\sin y+\sin z
\end{aligned}$$

ហេតុនេះ $\dfrac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \leq \sin\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)$

យើងបាន $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \leq \sin\left(\dfrac{A+B+C}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $1 < \cos A+\cos B+\cos C \leq \dfrac{3}{2}$
ដោយ A, B និង C ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ
យើងបាន $\cos A+\cos B+\cos C \ = 1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ (1)
ហើយ $\sin\dfrac{A}{2}, \sin\dfrac{B}{2}$ និង $\sin\dfrac{C}{2} > 0$
ម៉្យាងទៀត

$$\begin{aligned}
&\cos A+\cos B+\cos C+\cos\frac{\pi}{3}\\
&= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\\
&\leq 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)+2\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)+\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]
\end{aligned}$$

ព្រោះ $0 < \cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$ និង $\cos\left(\dfrac{C}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right) \leq 1$
យើងបាន

$$\begin{aligned}
\cos A+\cos B+\cos C+\cos\frac{\pi}{3} &\leq 4\cos\left(\frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{4}\right)\cos\left(\frac{A+B-C-\frac{\pi}{3}}{4}\right)\\
&\leq 4\cos\left(\frac{\pi+\frac{\pi}{3}}{4}\right) = 4\cos\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

ព្រោះ $0 < \cos\left(\dfrac{A+B-C-\frac{\pi}{3}}{4}\right) \leq 1$
យើងបាន $\cos A+\cos B+\cos C \leq 3\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$ (2)
តាម (1) និង (2) យើងបាន $1 < \cos A+\cos B+\cos C \leq \dfrac{3}{2}$

3. $\tan A+\tan B+\tan C \geq 3\sqrt{3}$
ដោយ A, B និង C ជាមុំស្រួច នោះ $\tan A, \tan B$ និង $\tan C > 0$
តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន
$\tan A+\tan B+\tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$
$\Rightarrow (\tan A+\tan B+\tan C)^3 \geq 27(\tan A+\tan B+\tan C)$
$\Rightarrow (\tan A+\tan B+\tan C)^2 \geq 27$
ដូចនេះ $\tan A+\tan B+\tan C \geq 3\sqrt{3}$

4. $\cot A+\cot B+\cot C\geq 3\sqrt{3}$
ដោយ $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$
យើងបាន

$$\begin{aligned}(\cot A+\cot B+\cot C)^2 &\geq 3(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)\\ &=3\end{aligned}$$

ព្រោះ $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$
ដូចនេះ $\cot A+\cot B+\cot C\geq 3\sqrt{3}$

5. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq \dfrac{9}{4}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}&\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\\ &=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2 C\\ &=2-\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}-\cos^2 C\\ &=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2 C\\ &=2-\cos^2 C+\cos C\cos(A-B)\\ &=2-\cos^2 C+\cos C\cos(A-B)-\frac{1}{4}\cos^2(A-B)+\frac{1}{4}\cos^2(A-B)\\ &=-\left[\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2+\frac{1}{4}[1-\sin^2(A-B)]+2\\ &=-\left[\cos C-\frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2-\frac{1}{4}\sin^2(A-B)+\frac{9}{4}\end{aligned}$$

ព្រោះ $\left[\cos C-\dfrac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2\geq 0$ និង $\sin^2(A-B)\geq 0$
ដូចនេះ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq \dfrac{9}{4}$

6. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geq \dfrac{3}{4}$
យើងមាន $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq \dfrac{9}{4}$
ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \sin^2 x=1-\cos^2 x$
យើងបាន $1-\cos^2 A+1-\cos^2 B+1-\cos^2 C\leq \dfrac{9}{4}$

នោះ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C \geq \ 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$
ដូចនេះ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C \geq \frac{3}{4}$

7. $\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C \geq 9$
តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C \geq 3\sqrt[3]{(\tan A\tan B\tan C)^2}$
តាម 3 យើងមាន $\tan A\tan B\tan C \geq 3\sqrt{3}$
នោះ $\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C \geq 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^2}=9$
ដូចនេះ $\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C \geq 9$

8. $1<\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$
យើងមាន $0<\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2}<1$
នោះ

$$\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2} &> \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\\ &=\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\\ &=\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}&\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\\ &\qquad > \sin\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\\ &\qquad =\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{C}{2}\right)\\ &\qquad > \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1\end{aligned}$$

នោះ $1<\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$ (1)

ម៉្យាងទៀត

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{\pi}{6}\\
&=2\sin\left(\frac{A+B}{4}\right)\cos\left(\frac{A-B}{4}\right)+2\sin\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{C}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\\
&\le \sin\left(\frac{A+B}{4}\right)+2\sin\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\\
&=2\left[\sin\left(\frac{A+B}{4}\right)+\sin\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right]\\
&=4\sin\left(\frac{A+B+C+\frac{\pi}{3}}{8}\right)\cos\left(\frac{A+B-C-\frac{\pi}{3}}{8}\right)\\
&\le 4\sin\left(\frac{\pi+\frac{\pi}{3}}{8}\right)\\
&=4\sin\frac{\pi}{6}=2
\end{aligned}$$

ព្រោះ $0<\cos\left(\frac{A-B}{4}\right),\cos\left(\frac{C}{4}-\frac{\pi}{12}\right)$ និង $\cos\left(\frac{A+B-C-\frac{\pi}{3}}{8}\right)\le 1$

យើងបាន $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \quad (2)$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $1<\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$

9. $2<\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

យើងមាន $0<\cos\frac{A}{2}<1\Rightarrow\cos\frac{A}{2}>\cos^2\frac{A}{2}$

ដូចគ្នាដែរ $\cos\frac{B}{2}>\cos^2\frac{B}{2}$ និង $\cos\frac{C}{2}>\cos^2\frac{C}{2}$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}&>\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\\
&=\frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos B}{2}+\frac{1+\cos C}{2}\\
&=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)\\
&>\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\\
&=2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} > 2$ (1)

ស្រាយដូច 8 យើងបាន $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $2 < \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

10. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

    យើងមាន $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$

    ហេតុនេះ $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2} \geq \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

    ម៉្យាងទៀត $\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2 = \tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+2$

    $\Rightarrow \left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2 \geq 1+2=3$

    ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

11. $\frac{3}{4} \leq \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} < 1$

    យើងមាន

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} &= \frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}\\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)\end{aligned}$$

    ដោយ $1 < \cos A+\cos B+\cos C \leq \frac{3}{2}$

    យើងបាន $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) \leq \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} < \frac{3}{2}-\frac{1}{2}$

    ដូចនេះ $\frac{3}{4} \leq \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} < 1$

12. $2 < \cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$

    យើងមាន

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2} &= 1-\sin^2\frac{A}{2}+1-\sin^2\frac{B}{2}+1-\sin^2\frac{C}{2}\\ &= 3-\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\end{aligned}$$

ដោយ $\frac{3}{4} \leq \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{A}{C} < 1$
យើងបាន $3 - 1 < \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leq \ 3 - \frac{3}{4}$
ដូចនេះ $2 < \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$

13. $\sin A\sin B\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $\sin A\sin B\sin C \leq \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3$
ដោយ $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
គេបាន $\sin A\sin B\sin C \leq \left(\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$
ដូចនេះ $\sin A\sin B\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

14. $\cos A\cos B\cos C \leq \frac{1}{8}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\cos A\cos B\cos C &= \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]\cos C \\
&= \frac{1}{2}[-\cos C + \cos(A-B)]\cos C \\
&= \frac{1}{2}\left[-\cos^2 C + \cos C\cos(A-B) - \frac{1}{4}\cos^2(A-B) + \frac{1}{4}\cos^2(A-B)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\cos C - \frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2 + \frac{1}{8}\cos^2(A-B) \\
&= -\frac{1}{2}\left[\cos C - \frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2 - \frac{1}{8}\sin^2(A-B) + \frac{1}{8} \leq \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\cos A\cos B\cos C \leq \frac{1}{8}$

15. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \left(\frac{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3$

ដោយ $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

យើងបាន $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leq\left(\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

ដូចនេះ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$

16. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}$

    តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\leq\left(\frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}{3}\right)^3$

    ដោយ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ (តាម លំហាត់ ១-11)

    គេបាន $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\leq\frac{\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)^3}{27}$

    នោះ $\left(\frac{1}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}\right)^2\leq\frac{1}{27}$

    $\Rightarrow\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leq\frac{1}{3\sqrt{3}}$

លំហាត់ ៣

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ ។ បង្ហាញថា

1. $(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{1}{8}abc$
2. $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$
3. $a^2(p-b)(p-c)+b^2(p-c)(p-a)+c^2(p-a)(p-b)\geq 4S^2$
4. $p^2\geq 3\sqrt{3}S$
5. $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$
6. $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$
7. $a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)\leq 3abc$
8. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$
9. $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\leq 2(a^3+b^3+c^3)$

10. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}<2$

11. $ab+bc+ca \le 9R^2$

12. $ab+bc+ca \ge 36r^2$

13. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge \sqrt{\dfrac{3}{2Rr}}$

14. $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b} \ge \dfrac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}$

15. $a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+bc+ca)-4\sqrt{3}S$

16. $a^2+b^2+c^2 \ge (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4\sqrt{3}S$

17. $a^2+b^2+c^2 \ge \dfrac{36}{35}\left(p^2+\dfrac{abc}{p}\right)$

18. $a^4+b^4+c^4 \ge 16S^2$

19. $r \le \dfrac{R}{2}$

20. $\dfrac{1}{a}(l_a+l_b)+\dfrac{1}{b}(l_b+l_c)\dfrac{1}{c}(l_c+l_a) \le 3\sqrt{3}$

21. $l_a+l_b+l_c \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$

22. $2\sqrt{3}l_a \le \dfrac{2(b+c)-a}{2\sqrt{3}}$

23. $m_a+m_b+m_c \le r+4R$

24. $m_a+m_b+m_c \le \dfrac{9R}{2}$

25. $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \ge 3\sqrt{3}S$

26. $\dfrac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2}+\dfrac{1}{(m_b+m_c-m_a)^2}+\dfrac{1}{(m_c+m_a-m_b)^2} \ge \dfrac{4}{3R^2}$

27. $\dfrac{4}{5}(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a) < ab+bc+ca$

. $< \dfrac{20}{9}(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a)$

28. $\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\leq 1+\frac{R}{r}$

29. $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}\geq\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_a}{h_c}$ ករណី $A\geq B\geq C$

30. $\frac{h_a^2}{bc}+\frac{h_b^2}{ca}+\frac{h_c^2}{ab}\geq\frac{9r^2}{R^2}$

សម្រាយ

1. បង្ហាញថា $(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{1}{8}abc$
   តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន

$$\begin{aligned}(p-a)(p-b) &\leq \left(\frac{p-a+p-b}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{2p-a-b}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{a+b+c-a-b}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{c}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}\end{aligned}$$

   ដូចគ្នាដែរ $(p-b)(p-c)\leq\frac{a^2}{4}$ និង $(p-c)(p-a)\leq\frac{b^2}{4}$
   គេបាន $[(p-a)(p-b)(p-c)]^2\leq\frac{a^2b^2c^2}{64}$
   ដូចនេះ $(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{1}{8}abc$

2. បង្ហាញថា $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\right)$
   តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\geq\frac{2}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}$ (i)

ដោយ

$$\begin{aligned}(p-a)(p-b) &\le \left(\frac{p-a+p-b}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{2p-a-b}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{a+b+c-a-b}{2}\right)^2\\ &= \left(\frac{c}{2}\right)^2\\ &= \frac{c^2}{4}\\ \Rightarrow \sqrt{(p-a)(p-b)} &\le \frac{c}{2} \quad (ii)\end{aligned}$$

តាម (i) និង (ii) យើងបាន $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \ge \frac{2}{\frac{c}{2}} = \frac{4}{c}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge \frac{4}{a}$ និង $\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a} \ge \frac{4}{b}$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $2\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-b}\right) \ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

ដូចនេះ $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

3. $a^2(p-b)(p-c)+b^2(p-c)(p-a)+c^2(p-a)(p-b) \ge 4S^2$
តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{p-a}+\frac{b^2}{p-b} &\ge \frac{2ab}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}\\ &\ge \frac{2ab}{\frac{p-a+p-b}{2}}\\ &= \frac{4ab}{2p-a-b}\end{aligned}$$

នោះ $\frac{a^2}{p-a}+\frac{b^2}{p-b} \ge \frac{4ab}{c}$

ស្រាយដូចគ្នា $\frac{b^2}{p-b}+\frac{c^2}{p-c} \ge \frac{4bc}{a}$ និង $\frac{c^2}{p-c}+\frac{a^2}{p-a} \ge \frac{4ca}{b}$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $2\left(\frac{a^2}{p-a}+\frac{b^2}{p-b}+\frac{c^2}{p-c}\right) \ge 4\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)$

នោះ

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{p-a}+\frac{b^2}{p-b}+\frac{c^2}{p-c} &\geq 2\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\\ &\geq \left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\\ &\geq 2b+2c+2a=2(a+b+c)=4p\end{aligned}$$

យើងបាន
$a^2(p-b)(p-c)+b^2(p-c)(p-a)+c^2(p-a)(p-b)\geq 4p(p-a)(p-b)(p-c)=4S^2$

ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

4. $p^2\geq 3\sqrt{3}S$
តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន

$$\begin{aligned}(p-a)(p-b)(p-c) &\leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3\\ &=\left(\frac{p}{3}\right)^3\\ &=\frac{p^3}{27}\end{aligned}$$

នោះ $p^3\geq 27(p-a)(p-b)(p-c)$
$\Rightarrow p^4\geq 27p(p-a)(p-b)(p-c)$
គេបាន $p^4\geq 27S^2$
ដូចនេះ $p^2\geq 3\sqrt{3}S$

5. $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\geq 3$
តាង $x=b+c-a,\ \ y=c+a-b$ និង $z=a+b-c\Rightarrow x,y,z>0$
នោះ $a=\dfrac{y+z}{2}, b=\dfrac{z+x}{2}$ និង $c=\dfrac{x+y}{2}$
យើងបាន

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} &= \frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z+x}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{z}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\right]\\ &\geq \frac{1}{2}(2+2+2)=3\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$

6. $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$
យើងមាន $(b-c)^2(b+c-a)\geq 0$
នោះ

$$\begin{aligned}&(b^2-2bc+c^2)(b+c-a)\geq 0\\ \Rightarrow\ &b^3+b^2c-ab^2-2b^2c-2bc^2+2abc+bc^2+c^3-ac^2\geq 0\\ \Rightarrow\ &b^3+c^3-b^2c-bc^2-ab^2-ac^2+2abc\geq 0 \quad (1)\end{aligned}$$

ស្រាយដូចគ្នា

$$\begin{aligned}&c^3+a^3-ac^2-a^2c-bc^2-a^2b+2abc\geq 0 \quad (2)\\ &a^3+b^3-ab^2-a^2b-a^2c-b^2c+2abc\geq 0 \quad (3)\end{aligned}$$

បូក (1), (2) និង (3) យើងបាន

$$\begin{aligned}&2a^3+2b^3+2c^3-2ab^2-2a^2b-2ac^2-2a^2c-2bc^2-2b^2c+6abc\geq 0\\ &a^3+b^3+c^3-ab^2-a^2b-ac^2-a^2c-bc^2-b^2c+3abc\geq 0\\ &a^2(a-b-c)+b^2(b-a-c)+c^2(c-a-b)\geq -3abc\end{aligned}$$

ដូចនេះ $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$

7. $a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)\leq 3abc$
តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសយើងបាន $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$
ដូចគ្នាដែរ $c^2+a^2-b^2=2ca\cos B$ និង $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$
យើងបាន

$$\begin{aligned}a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)&=2abc\cos A+2abc\cos B+2abc\cos C\\ &=2abc(\cos A+\cos B+\cos C)\\ &\leq 2abc\left(\frac{3}{2}\right)=3abc\end{aligned}$$

ព្រោះ $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$
ដូចនេះ $a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)\leq 3abc$

8. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$
យើងមាន

$$\begin{aligned}&a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc-a^3-b^3-c^3\\&=a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)-2abc\\&=2abc\cos A+2abc\cos B+2abc\cos C-2abc\\&=2abc(\cos A+\cos B+\cos C-1)>0\end{aligned}$$

ព្រោះ $\cos A+\cos B+\cos C>1$
ដូចនេះ $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$

9. $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\leq 2(a^3+b^3+c^3)$
យើងមាន $(a-b)^2(a+b)\geq 0$
$\Rightarrow (a^2-2ab+b^2)(a+b)\geq 0$
$\Rightarrow a^3+a^2b-2a^2b-2ab^2+ab^2+b^3\geq 0$
$\Rightarrow a^3+b^3\geq a^2b+ab^2$ (1)
ដូចគ្នាដែរ $b^3+c^3\geq b^2c+bc^2$ (2)
និង $c^3+a^3\geq a^2c+ac^2$ (3)
បូក (1), (2) និង (3) យើងបាន
$2(a^3+b^3+c^3)\geq a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$

10. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}<2$
យើងមាន $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}<2$
$\Leftrightarrow \dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}-2<0$
$\Leftrightarrow a(a+b)(c+a)+b(a+b)(b+c)+c(b+c)(c+a)+3abc-2(a+b)(b+c)(c+a)<0$
ដោយ $a(a+b)(c+a)+b(a+b)(b+c)+c(b+c)(c+a)+3abc-2(a+b)(b+c)(c+a)$
$=a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6abc-2a^2(b+c)-2b^2(c+a)-2c^2(a+b)-4abc$
$=a^3+b^3+c^3-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)+2abc$
$=a^2\left[a-(b+c)\right]+b^2\left[b-(c+a)\right]+c^2\left[c-(a+b)\right]+2abc$
$=a^2\left[a-(b+c)\right]+b^2\left[(b+c-a)-2c\right]+c^2\left[(b+c-a)-2b\right]+2abc$
$=-a^2(b+c-a)+b^2(b+c-a)-2b^2c+c^2(b+c-a)-2bc^2+2abc$
$=-a^2(b+c-a)+b^2(b+c-a)+c^2(b+c-a)-2bc(b+c-a)$
$=(b+c-a)[b^2+c^2-2bc-a^2]$
$=(b+c-a)[(b-c)^2-a^2]$

$= (b+c-a)(b-c-a)(a+b-c) < 0$

ដូចនេះ $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} < 2$

11. $ab+bc+ca \leq 9R^2$

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន

$$a^2+b^2 \geq 2ab$$
$$b^2+c^2 \geq 2bc$$
$$c^2+a^2 \geq 2ca$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca)$

នោះ $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $a = 2R\sin A,\ \ b = 2R\sin B$ និង $c = 2R\sin C$

នោះ $ab+bc+ca \leq 4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$

ដោយ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \leq \dfrac{9}{4}$

ដូចនេះ $ab+bc+ca \leq 9R^2$

12. $ab+bc+ca \geq 36r^2$

យើងមាន $S = pr \Rightarrow r = \dfrac{S}{p}$

នោះ

$$\begin{aligned} 36r^2 &= 36\left(\frac{S}{p}\right)^2 \\ &= \frac{36p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} \\ &= \frac{36(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \end{aligned}$$

ដោយ $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \dfrac{1}{8}abc$ (លំហាត់ ៣-1)

នោះ $36r^2 \leq \dfrac{36abc}{8p} = \dfrac{9abc}{2p}$

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ និង $\dfrac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{(abc)^2}$

នោះ $abc \leq \dfrac{1}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca) = \dfrac{2p(ab+bc+ca)}{9}$

យើងបាន $36r^2 \leq \left(\dfrac{9}{2p}\right)\left[\dfrac{2p(ab+bc+ca)}{9}\right] = ab+bc+ca$

ដូចនេះ $ab+bc+ca \geq 36r^2$

13. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\sqrt{\frac{3}{2Rr}}$

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$

នោះ $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$

គេបាន $(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)$

នោះ $\frac{(ab+bc+ca)^2}{(abc)^2}\geq\frac{3(a+b+c)}{abc}$

នោះ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\geq\frac{6p}{abc}$

$\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\sqrt{\frac{6p}{abc}}$

ដោយ $S=pr=\frac{abc}{4R}\Rightarrow\frac{p}{abc}=\frac{1}{4Rr}$

យើងបាន $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\sqrt{\frac{6}{4Rr}}=\sqrt{\frac{3}{2Rr}}$

14. $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\geq\frac{3\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}}$

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន

$\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)[(p-a)+(p-b)+(p-c)]\geq 9$

$\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)p\geq 9$

$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq\frac{9}{p}$

$4\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)\geq 3\left(\frac{3}{p}+\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)$

$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq\frac{3}{4}\left(\frac{3}{p}+\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)$

ម៉្យាងទៀត $\frac{3}{p}+\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 4\sqrt[4]{\frac{3}{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=4\sqrt[4]{\frac{3}{S^2}}=\frac{4\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}}$

យើងបាន $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq\frac{3}{4}\times\frac{4\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}}$

$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq\frac{3\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}}$

ដូចនេះ $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\geq\frac{3\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}}$

15. $a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+bc+ca)-4\sqrt{3}S$

យើងមាន $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

នោះ $ab=\frac{2S}{\sin C}, bc=\frac{2S}{\sin A}$ និង $ca=\frac{2S}{\sin B}$

ហើយ $a^2+b^2+c^2=4S(\cot A+\cot B+\cot C)$

យើងបាន $a^2+b^2+c^2-[2(ab+bc+ca)-4\sqrt{3}S]$

$=4S(\cot A+\cot B+\cot C)-4S\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)+4\sqrt{3}S$

$=4S\left[\left(\cot A-\frac{1}{\sin A}\right)+\left(\cot B-\frac{1}{\sin B}\right)+\left(\cot C-\frac{1}{\sin C}\right)+\sqrt{3}\right]$

$=4S\left[\frac{\cos A-1}{\sin A}+\frac{\cos B-1}{\sin B}+\frac{\cos C-1}{\sin C}+\sqrt{3}\right]$

$=4S\left(-\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}+\sqrt{3}\right)\le 0$

ព្រោះ $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-4\sqrt{3}S$

16. $a^2+b^2+c^2 \ge (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4\sqrt{3}S$

តាមលំហាត់ ៣-15 យើងមាន $a^2+b^2+c^2\le 2(ab+bc+ca)-4\sqrt{3}S$

នោះ $-a^2-b^2-c^2\ge -2(ab+bc+ca)+4\sqrt{3}S$

បូកអង្គសងខាងនឹង $2a^2+2b^2+2c^2$ យើងបាន

$a^2+b^2+c^2\ge 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca+4\sqrt{3}S$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2\ge (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4\sqrt{3}S$

17. $a^2+b^2+c^2\ge\frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right)$

យើងមាន $a^2+b^2+c^2\ge\frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{36}{35}\left[\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2+\frac{2abc}{a+b+c}\right]$

$\Leftrightarrow 35(a^2+b^2+c^2)\ge 9(a+b+c)^2+\frac{72abc}{a+b+c}$ (i)

ដើម្បីបង្ហាញវិសមភាពខាងលើ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថាវិសមភាព (i) ពិត

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$9(a+b+c)^2=(3a+3b+3c)^2\le(3^2+3^2+3^2)(a^2+b^2+c^2)$

នោះ $27(a^2+b^2+c^2)\ge 9(a+b+c)^2$ (1)

ម៉្យាងទៀត តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន

$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\times 3\sqrt[3]{abc}=9abc$

នោះ $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{9abc}{a+b+c}$

$\Rightarrow 8(a^2+b^2+c^2) \geq \dfrac{72abc}{a+b+c}$ (2)

បូក (1) និង (2) យើងបាន $35(a^2+b^2+c^2) \geq 9(a+b+c)^2 + \dfrac{72abc}{a+b+c}$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{36}{35}\left(p^2+\dfrac{abc}{p}\right)$

18. $a^4+b^4+c^4 \geq 16S^2$

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

ដោយ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$

នោះ $ab=\dfrac{2S}{\sin C},\ \ bc=\dfrac{2S}{\sin A}$ និង $ca=\dfrac{2S}{\sin B}$

យើងបាន

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &\geq \frac{4S^2}{\sin^2 A}+\frac{4S^2}{\sin^2 B}+\frac{4S^2}{\sin^2 C} \\ &= 4S^2\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\right) \\ &\geq 4S^2\left[\frac{3}{\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}}\right] \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត $\sin A\sin B\sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

យើងបាន $a^4+b^4+c^4 \geqslant 4S^2\left[\dfrac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2}}\right]$

ដូចនេះ $a^4+b^4+c^4 \geq 16S^2$

19. $r \leq \dfrac{R}{2}$

យើងមាន $S=pr \Rightarrow r=\dfrac{S}{p}$ និង $S=\dfrac{abc}{4R} \Rightarrow\ R=\dfrac{abc}{4S}$

យើងបាន

$$\begin{aligned} \frac{r}{R}=\frac{\frac{S}{p}}{\frac{abc}{4S}}=\frac{4S^2}{pabc} &= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} \\ &= \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \end{aligned}$$

ដោយ $(p-a)(p-b)(p-c)\le \frac{1}{8}abc$ (លំហាត់ ៣-1)

នោះ $\frac{r}{R}\le \frac{4\left(\frac{1}{8}abc\right)}{abc}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $r\le \frac{R}{2}$

20. $\frac{1}{a}(l_b+l_c)+\frac{1}{b}(l_c+l_a)+\frac{1}{c}(l_a+l_b)\le 3\sqrt{3}$

យើងមាន $\frac{1}{a}(l_b+l_c)+\frac{1}{b}(l_c+l_a)+\frac{1}{c}(l_a+l_b)$

$=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)l_a+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)l_b+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)l_c$

$=\left(\frac{b+c}{bc}\right)l_a+\left(\frac{c+a}{ca}\right)l_b+\left(\frac{a+b}{ab}\right)l_c$

តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ

$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2},\ \ l_b=\frac{2ca}{c+a}\cos\frac{B}{2}$ និង $l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$

នោះ $\frac{1}{a}(l_b+l_c)+\frac{1}{b}(l_c+l_a)+\frac{1}{c}(l_a+l_b)$

$=\left(\frac{b+c}{bc}\right)\left(\frac{2bc}{b+c}\right)\cos\frac{A}{2}+\left(\frac{c+a}{ca}\right)\left(\frac{2ca}{c+a}\right)\cos\frac{B}{2}+\left(\frac{a+b}{ab}\right)\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\cos\frac{C}{2}$

$=2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$

ដោយ $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le 3\sqrt{3}$

យើងបាន $\frac{1}{a}(l_b+l_c)+\frac{1}{b}(l_c+l_a)+\frac{1}{c}(l_a+l_b)\le 3\sqrt{3}$

21. $l_a+l_b+l_c\le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$

យើងមាន $l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$

ដោយ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

នោះ $l_a=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=\frac{2\sqrt{bc}\sqrt{p(p-a)}}{b+c}$

ម្យ៉ាងទៀត តាមវិសមភាព Cauchy $b+c\ge 2\sqrt{bc}\Rightarrow \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\le 1$

យើងបាន $l_a\le\sqrt{p(p-a)}$

ដូចគ្នាដែរ $l_b\le\sqrt{p(p-b)}$ និង $l_c\le\sqrt{p(p-c)}$

គេបាន

$$\begin{aligned} l_a+l_b+l_c &\le \sqrt{p(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}+\sqrt{p(p-c)} \\ &= \sqrt{p}(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}) \end{aligned}$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c} \le \sqrt{3}\sqrt{p-a+p-b+p-c} = \sqrt{3p}$

នោះ $l_a+l_b+l_c \le \sqrt{p}(\sqrt{3p}) = p\sqrt{3} = \left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)\sqrt{3}$

ដូចនេះ $l_a+l_b+l_c \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$

22. $l_a \le \dfrac{2(b+c)-a}{2\sqrt{3}}$

តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$

គេបាន $l_a^2 = \dfrac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\cos^2\dfrac{A}{2}$

ដោយ $\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{p(p-a)}{bc}$

នោះ $l_a^2 = \dfrac{4b^2c^2}{(b+c)^2}\left[\dfrac{p(p-a)}{bc}\right] = \dfrac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} = \dfrac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}$

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន

$bc(b+c-a) \le \left(\dfrac{b+c+b+c-a}{3}\right)^3 = \dfrac{(2b+2c-a)^3}{27}$ នោះ

$$\begin{aligned} l_a^2 &\le \frac{(a+b+c)(2b+2c-a)^3}{27(b+c)^2} \\ &= \frac{(a+b+c)(2b+2c-a)(2b+2c-a)^2}{27(b+c)^2} \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត

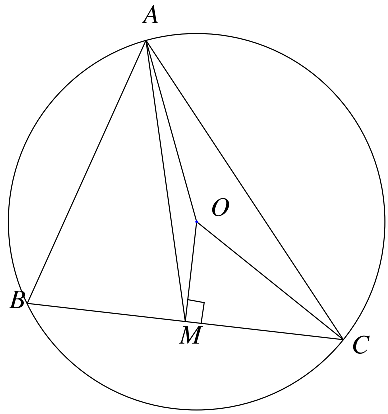
$$\begin{aligned} (a+b+c)(2b+2c-a) &\le \left(\frac{a+b+c+2b+2c-a}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{3b+3c}{2}\right)^2 = \frac{9(b+c)^2}{4} \end{aligned}$$

នោះ $l_a^2 \le \frac{9(b+c)^2}{4}\left[\frac{(2b+2c-a)^2}{27(b+c)^2}\right] = \frac{(2b+2c-a)^2}{4\times 3}$

$\Rightarrow l_a \le \frac{2b+2c-a}{2\sqrt{3}}$

ដូចនេះ $l_a \le \frac{2(b+c)-a}{2\sqrt{3}}$

23. $m_a+m_b+m_c \le r+4R$



យក M ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ នោះ $\angle MOC = \angle A$
អនុវត្តវិសមភាពត្រីកោណចំពោះត្រីកោណ AOM យើងបាន

$$AM \le OM + OA = R\cos\angle MOC + R$$
$$\Rightarrow m_a \le R + R\cos A$$

ដូចគ្នាដែរ $m_b = R+R\cos B$ និង $m_c = R + R\cos C$
យើងបាន $m_a+m_b+m_c \le 3R + R(\cos A+\cos B+\cos C)$
ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C = 1+\frac{r}{R}$
គេបាន $m_a+m_b+m_c \le 3R+R(1+\frac{r}{R})$
ដូចនេះ $m_a+m_b+m_c \le r+4R$

24. $m_a+m_b+m_c \le \frac{9R}{2}$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\begin{aligned}(m_a+m_b+m_c)^2 &\leq (1^2+1^2+1^2)(m_a^2+m_b^2+m_c^2)\\ &= 3(m_a^2+m_b^2+m_c^2)\end{aligned}$$

ដោយ

$$\begin{aligned}m_a^2+m_b^2+m_c^2 &= \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\\ &= \frac{3}{4}\left[(2R\sin A)^2+(2R\sin B)^2+(2R\sin C)^2\right]\\ &= \frac{3}{4}(4R^2\sin^2 A+4R^2\sin^2 B+4R^2\sin^2 C)\\ &= 3R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\end{aligned}$$

យើងបាន $(m_a+m_b+m_c)^2 \leq 9R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$
ម្យ៉ាងទៀត $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \leq \frac{9}{4}$
គេបាន $(m_a+m_b+m_c)^2 \leq 9R^2\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{9R}{2}\right)^2$
ដូចនេះ $m_a+m_b+m_c \leq \frac{9R}{2}$

25. $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \geq 3\sqrt{3}S$
យើងមាន $a^2+b^2+c^2 = 4S(\cot A+\cot B+\cot C)$
ដោយ $\cot A+\cot B+\cot C \geq \sqrt{3}$
គេបាន $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$
ហេតុនេះ

$$\begin{aligned}m_a^2+m_b^2+m_c^2 &= \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\\ &\geq \frac{3}{4}(4\sqrt{3}S) = 3\sqrt{3}S\end{aligned}$$

ដូចនេះ $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \geq 3\sqrt{3}S$

26. $\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2}+\frac{1}{(m_b+m_c-m_a)^2}+\frac{1}{(m_c+m_a-m_b)^2} \geq \frac{4}{3R^2}$
ដោយមេដ្យានទាំងបីនៃត្រីកោណមួយផ្គុំបានត្រីកោណមួយ
យើងបាន $(m_a+m_b-m_c)(m_b+m_c-m_a)(m_c+m_a-m_b) \leq m_am_bm_c$

ម្យ៉ាងទៀត តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2}+\frac{1}{(m_b+m_c-m_a)^2}+\frac{1}{(m_c+m_a-m_b)^2}\\
&\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{[(m_a+m_b-m_c)(m_b+m_c-m_a)(m_c+m_a-m_b)]^2}}\\
&\geq \frac{3}{\sqrt[3]{(m_am_bm_c)^2}}=\frac{3}{\sqrt[3]{m_a^2m_b^2m_c^2}}\\
&\geq \frac{3}{\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{3}}=\frac{9}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}
\end{aligned}
$$

ដោយ

$$
\begin{aligned}
m_a^2+m_b^2+m_c^2 &= \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\\
&= 3R(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\\
&\leq 3R^2\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{27R^2}{4}
\end{aligned}
$$

ព្រោះ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq \frac{9}{4}$

យើងបាន $\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2}+\frac{1}{(m_b+m_c-m_a)^2}+\frac{1}{(m_c+m_a-m_b)^2}\geq \frac{9}{\frac{27R^2}{4}}=\frac{4}{3R^2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{(m_a+m_b-m_c)^2}+\frac{1}{(m_b+m_c-m_a)^2}+\frac{1}{(m_c+m_a-m_b)^2}\geq \frac{4}{3R^2}$

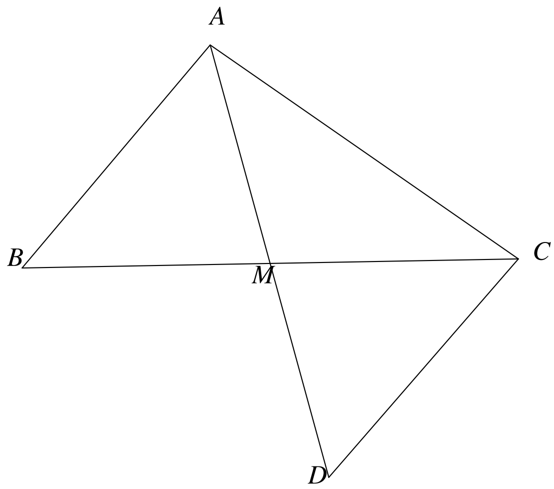
27.

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{5}(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a) &< ab+bc+ca\\
&< \frac{20}{9}(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a)
\end{aligned}
$$

Lemma:

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ គេបាន $m_a<\frac{b+c}{2}$។

សម្រាយ



បន្លាយ $[AM)$ ឲ្យបាន $AM = MD$ ដូចរូប
ដោយ $BM = MC$ (M ជាចំនុចកណ្ដាលនៃ $[BC]$)
និង $\angle BMA = \angle DMC$ (មុំទល់កំពូល)
គេបាន $\triangle AMD$ ប៉ុន $\triangle DMC$
វិបាក $CD = AB = c$
តាមវិសមភាពត្រីកោណ $AD < AC + CD \Rightarrow 2m_a < b + c$
ហេតុនេះ $m_a < \dfrac{b+c}{2}$
យើងមាន $m_a < \dfrac{b+c}{2},\ \ m_b < \dfrac{c+a}{2}$ និង $m_c < \dfrac{a+b}{2}$
នោះ

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c$$

$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + 2m_am_b + 2m_bm_c + 2m_cm_a < a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

ដោយ $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$
នោះ

$$\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + 2m_am_b + 2m_bm_c + 2m_cm_a < a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

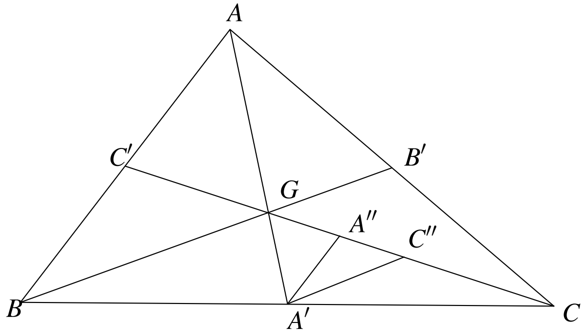
$$\Rightarrow 2m_am_b + 2m_bm_c + 2m_cm_a < \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + 2ab + 2bc + 2ca$$

ម្យ៉ាងទៀត $a > |b - c|,\ \ b > |c - a|$ និង $c > |a - b|$
នោះ $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

យើងបាន

$$\begin{aligned}2m_am_b+2m_bm_c+2m_cm_a &< \frac{2(ab+bc+ca)}{4}+2ab+2bc+2ca\\ m_am_b+m_bm_c+m_cm_a &< \frac{(ab+bc+ca)}{4}+ab+bc+ca\\ &= \frac{5}{4}(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

យើងបាន $\frac{4}{5}(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a)<ab+bc+ca$ (i)



យក C'' ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[GC]$

យើងមាន $A'G=\frac{1}{3}m_a,\quad A'C''=\frac{BG}{2}=\frac{\frac{2}{3}m_b}{2}=\frac{1}{3}m_b$

និង $GC''=\frac{GC}{2}=\frac{\frac{2}{3}m_c}{2}=\frac{1}{3}m_c$

យក $[A'A'']$ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ $GA'C''$

នោះ A'' ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[GC''] \Rightarrow A''$ ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $[CC']$

យើងបាន $[A'A'']$ ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ $CC'B$

នោះ $m'_a=A'A''=\frac{1}{2}BC'=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{1}{4}c$

ដូចគ្នាដែរ $m_g=\frac{1}{4}b$ និង $m''_c=\frac{1}{4}a$

តាម (i) យើងបាន

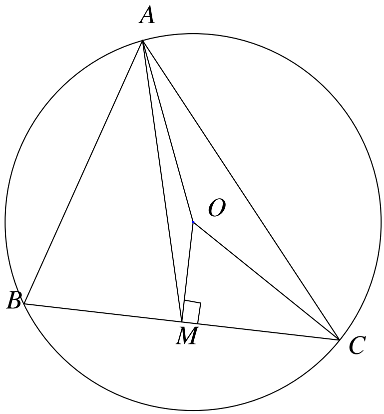
$$\left(\frac{1}{3}m_a\right)\left(\frac{1}{3}m_b\right)+\left(\frac{1}{3}m_b\right)\left(\frac{1}{3}m_c\right)+\left(\frac{1}{3}m_c\right)\left(\frac{1}{3}m_a\right)$$
$$>\frac{4}{5}\left[\left(\frac{1}{4}a\right)\left(\frac{1}{4}b\right)+\left(\frac{1}{4}b\right)\left(\frac{1}{4}c\right)+\left(\frac{1}{4}c\right)\left(\frac{1}{4}a\right)\right]$$

នោះ $\frac{1}{9}(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a) > \frac{1}{20}(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a > \frac{9}{20}(ab + bc + ca) \quad (ii)$

តាម (i) និង (ii) សំណើត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

28. $\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\leq 1+\frac{R}{r}$



យើងមាន $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$

$\Rightarrow \frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S},\quad \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S}$ និង $\frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$

នោះ $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2pr}=\frac{1}{r}$

$\Rightarrow \frac{R}{h_a}+\frac{R}{h_b}+\frac{R}{h_c}=\frac{R}{r}\qquad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត

$$\frac{[BOC]}{S}+\frac{[COA]}{S}+\frac{[AOB]}{S}=\frac{d_a}{h_a}+\frac{d_b}{h_b}+\frac{d_c}{h_c}$$
$$\Rightarrow \frac{S}{S}=\frac{d_a}{h_a}+\frac{d_b}{h_b}+\frac{d_c}{h_c}$$
$$\Rightarrow \frac{d_a}{h_a}+\frac{d_b}{h_b}+\frac{d_c}{h_c}=1\qquad (2)$$

បូក (1) និង (2) យើងបាន $\frac{R+d_a}{h_a}+\frac{R+d_b}{h_b}+\frac{R+d_c}{h_c}=1+\frac{R}{r}$

តាមវិសមភាពត្រីកោណ $OA+OM\geq AM\Rightarrow R+d_a\geq m_a$

ដូចគ្នាដែរ $R+d_b\geq m_b$ និង $R+d_c\geq m_c$

នោះ $\frac{R+d_a}{h_a}+\frac{R+d_b}{h_b}+\frac{R+d_c}{h_c}\geq\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}$

ដូចនេះ $\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\le 1+\frac{R}{r}$

សម្គាល់

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\ge 9$

ដោយ $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}\Rightarrow \frac{h_a+h_b+h_c}{r}\ge 9$

នោះ $h_a+h_b+h_c\ge 9r$

29. $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}\ge \frac{h_b}{h_a}+\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_a}{h_c}$

យើងមាន $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$

$\Rightarrow h_a=\frac{2S}{a}, h_b=\frac{2S}{b}$ និង $h_c=\frac{2S}{c}$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
&\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}\ge \frac{h_b}{h_a}+\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_a}{h_c}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\\
\Leftrightarrow\ &b^2c+ac^2+a^2b\ge a^2c+ab^2+bc^2\\
\Leftrightarrow\ &b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2\ge 0\\
\Leftrightarrow\ &bc(b-c)-a(b^2-c^2)+a^2(b-c)\ge 0\\
\Leftrightarrow\ &(b-c)(bc-ab-ac+a^2)\ge 0\\
\Leftrightarrow\ &(b-c)[b(c-a)-a(c-a)]\ge 0\\
\Leftrightarrow\ &(b-c)(b-a)(c-a)\ge 0
\end{aligned}$$

ពិត ព្រោះ $A\ge B\ge C\Rightarrow a\ge b\ge c$

30. $\frac{h_a^2}{bc}+\frac{h_b^2}{ca}+\frac{h_c^2}{ab}\ge \frac{9r^2}{R^2}$

យើងមាន

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah_a$$
$$\Rightarrow \frac{h_a}{bc}=\frac{\sin A}{a}=\frac{1}{2R}$$

នោះ $\frac{h_a^2}{bc}=\frac{h_a}{2R}$

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{h_b^2}{ca}=\dfrac{h_b}{2R}$ និង $\dfrac{h_c^2}{ab}=\dfrac{h_c}{2R}$

យើងបាន $\dfrac{h_a^2}{bc}+\dfrac{h_b^2}{ca}+\dfrac{h_c^2}{ab}=\dfrac{1}{2R}(h_a+h_b+h_c)$

ដោយ $h_a+h_b+h_c\geq 9r$

គេបាន $\dfrac{h_a^2}{bc}+\dfrac{h_b^2}{ca}+\dfrac{h_c^2}{ab}\geq\dfrac{9r}{2R}=9\left(\dfrac{r}{2R}\right)$

ម្យ៉ាងទៀត $R\geq 2r\Rightarrow 1\geq\dfrac{2r}{R}\Rightarrow\dfrac{r}{2R}\geq\dfrac{r^2}{R^2}$

ដូចនេះ $\dfrac{h_a^2}{bc}+\dfrac{h_b^2}{ca}+\dfrac{h_c^2}{ab}\geq\dfrac{9r^2}{R^2}$

លំហាត់ ៤

គេអោយត្រីកោណ ABC មួយ។ បង្ហាញថា

1. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)l_c+\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)l_a+\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)l_b=2\left(\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}\right)$

2. $r=p\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$

3. $r=\dfrac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

4. $\dfrac{r}{4R}=\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

5. $R=\dfrac{p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

6. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{2pr}{R}$

7. $\dfrac{r+4R}{p}=\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}$

8. $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(r+R)$

សម្រាយ

1. តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំយើងបាន

$$\begin{aligned} l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) l_a &= \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{2bc}{b+c}\right)\cos\frac{A}{2} \\ &= \left(\frac{b+c}{bc}\right)\left(\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\right) \\ &= 2\cos\frac{A}{2} \end{aligned}$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) l_b = 2\cos\frac{B}{2}$ និង $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) l_b = 2\cos\frac{C}{2}$ ហេតុនេះ

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) l_c + \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) l_a + \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) l_b &= 2\cos\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B}{2} + 2\cos\frac{C}{2} \\ &= 2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right) \end{aligned}$$

2. យើងមាន

$$\begin{aligned} r &= (p-a)\tan\frac{A}{2} \\ r &= (p-b)\tan\frac{B}{2} \\ r &= (p-c)\tan\frac{C}{2} \end{aligned}$$

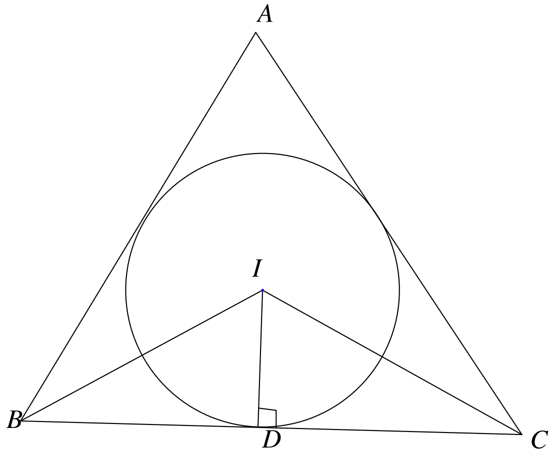
នោះ $r^3 = (p-a)(p-b)(p-c)\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

ដោយ $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) = pr^2$

យើងបាន $r^3 = pr^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

ដូចនេះ $r = p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

3. .



យើងមាន $BC = BD + DC = r\cot\dfrac{B}{2} + r\cot\dfrac{C}{2}$

$\Rightarrow a = r\left(\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}\right) = \dfrac{r\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \dfrac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

ដូចនេះ $\quad r = \dfrac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

4. តាម 3) យើងមាន $r = \dfrac{a\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ នោះ $a = \dfrac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

ដោយ $\quad a = 2R\sin A = 4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$

នោះ $4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{r\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

ដូចនេះ $\dfrac{r}{4R} = \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

សម្គាល់

របៀបទី២ សូមមិត្តអ្នកអានមើលលំហាត់ ៧(ក)

5. តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \\ &= \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} \end{aligned}$$

ដោយ $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
នោះ $2R=\dfrac{2p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$
ដូចនេះ $R=\dfrac{p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

6. តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $a=2R\sin A, b=2R\sin B$ និង $c=2R\sin C$
នោះ

$$
\begin{aligned}
a\cos A+b\cos B+c\cos C &= 2R\sin A\cos A+2R\sin B\cos B+2\sin C\cos C\\
&= R\sin 2A+R\sin 2B+R\sin 2C\\
&= R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)
\end{aligned}
$$

ដោយ $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$
យើងបាន

$$
\begin{aligned}
a\cos A+b\cos B+c\cos C &= 4R\sin A\sin B\sin C\\
&= 4R\left(\frac{a}{2R}\right)\left(\frac{b}{2R}\right)\left(\frac{c}{2R}\right)\\
&= \frac{2}{R}\left(\frac{abc}{4R}\right)\\
&= \frac{2S}{R}\\
&= \frac{2pr}{R}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{2pr}{R}$

7. តាមលំហាត់ ៤-4 យើងមាន

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{4R} &= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\\
\Rightarrow r &= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}
\end{aligned}
$$

និង

$$
\begin{aligned}
2p=a+b+c &= 2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C\\
&= 2R(\sin A+\sin B+\sin C)
\end{aligned}
$$

យើងបាន $p=R(\sin A+\sin B+\sin C)$
នោះ

$$\begin{aligned}\frac{r+4R}{p}&=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+4R}{R(\sin A+\sin B+\sin C)}\\&=\frac{1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+3}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\\&=\frac{\cos A+\cos B+\cos C+3}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1+\cos A+1+\cos B+1+\cos C}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\\&=\frac{2\cos^2\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{B}{2}+2\cos^2\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right]\\&=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(2\tan\frac{A}{2}+2\tan\frac{B}{2}+2\tan\frac{C}{2}\right)\\&=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\frac{r+4R}{p}=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$

8. តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស
យើងបាន $a=2R\sin A,\ \ b=2R\sin B$ និង $c=2R\sin C$
នោះ

$$\begin{aligned}a\cot A+b\cot B+c\cot C&=2R\sin A\cot A+2R\sin B\cot B+2R\sin C\cot C\\&=2R(\cos A+\cos B+\cos C)\end{aligned}$$

ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$
យើងបាន $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2R\left(1+\frac{r}{R}\right)=2(R+r)$

ដូចនេះ $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(R+r)$ ។

លំហាត់ ៥
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់ជ្រុង $BC=a, CA=b$ និង $AB=c$។
បង្ហាញថា $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$។
សម្រាយ
បង្ហាញថា $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$
តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ &= b^2+c^2-2bc\sin A\times\frac{\cos A}{\sin A} \end{aligned}$$

ដោយ $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A \quad \Rightarrow bc\sin A=2S$
នោះ

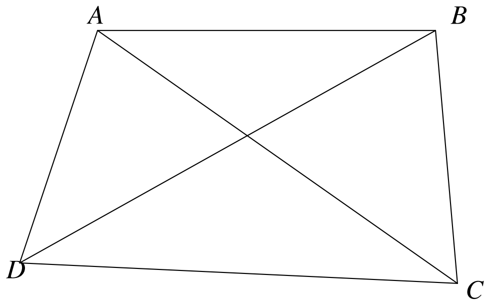
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2\times 2S\cot A \\ \Rightarrow a^2 &= b^2+c^2-4S\cot A \qquad (1) \end{aligned}$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន
$b^2=c^2+a^2-4S\cot B$ (2)
និង $c^2=a^2+b^2-4S\cot C$ (3)
បូក (1),(2) និង (3) យើងបាន

$$a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+c^2)-4S(\cot A+\cot B+\cot C)$$
$$\Rightarrow 4S(\cot A+\cot B+\cot C)=a^2+b^2+c^2$$

ដូចនេះ $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$
លំហាត់ ៦
គេឲ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មានក្រលាផ្ទៃ S និងកន្លះបរិមាត្រស្មើនឹង 2។
បង្ហាញថា $S\le 1$ ។

សម្រាយ



បង្ហាញថា $S \leq 1$

យក $AB = a, BC = b, CD = c$ និង $DA = d$

យើងមាន $S = [ABD] + [BCD] = \frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bc\sin C$

ដោយ $\sin A,\ \sin C \leq 1$

នោះ $S \leq \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}bc$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $S = [ABC] + [ADC] = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D$

នោះ $S \leq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd$ (2)

បូក (1) និង (2) យើងបាន

$$\begin{aligned} 2S &\leq \frac{1}{2}a(b+d) + \frac{1}{2}c(b+d) \\ &= \frac{1}{2}(a+c)(b+d) \\ \Rightarrow S &\leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d) \end{aligned}$$

តាមវិសមភាព Cauchy $(a+c)(b+d) \leq \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 = 2^2 = 4$

នោះ $S \leq \frac{1}{4} \times 4 = 1$

ដូចនេះ $S \leq 1$

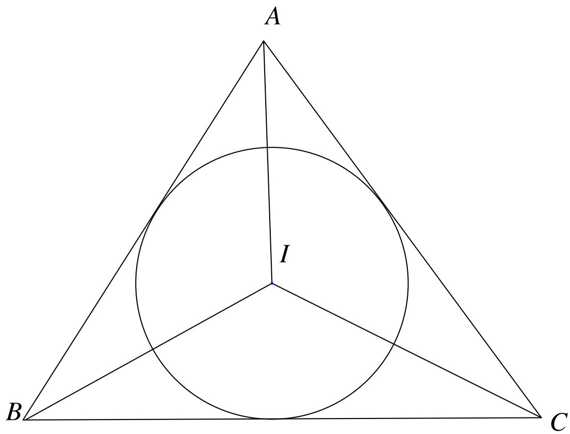
លំហាត់ ៧

យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ R និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និងចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា

ក) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

ខ) $IA\times IB\times IC=4Rr^2$ ។

សម្រាយ



បង្ហាញថា

ក) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

យើងមាន $S=pr=\frac{abc}{4R}\quad\Rightarrow r=\frac{abc}{4Rp}=\frac{abc}{2R(a+b+c)}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $a=2R\sin A,\ \ b=2R\sin B$ និង $c=2R\sin C$

យើងបាន $r=\frac{8R^3\sin A\sin B\sin C}{4R^2(\sin A+\sin B+\sin C)}=2R\left(\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}\right)$

ម្យ៉ាងទៀត

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C &= 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\ &= 2\cos\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\ &= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]\\ &= 4\cos\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B+\pi-C}{4}\right)\cos\left(\frac{A-B-\pi+C}{4}\right)\\ &= 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}\sin A\sin B\sin C &= \left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\left(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\\ &= 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$

យើងបាន $r=2R\left(\dfrac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

ដូចនេះ $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

ខ) $IA\times IB\times IC=4Rr^2$

យើងបាន $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{IA}$ នោះ $r=IA\sin\dfrac{A}{2}$

ដូចគ្នាដែរ $r=IB\sin\dfrac{B}{2}$ និង $r=IC\sin\dfrac{C}{2}$

នោះ $r^3=IA\times IB\times\ IC\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

ដោយ $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ នោះ $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{4R}$

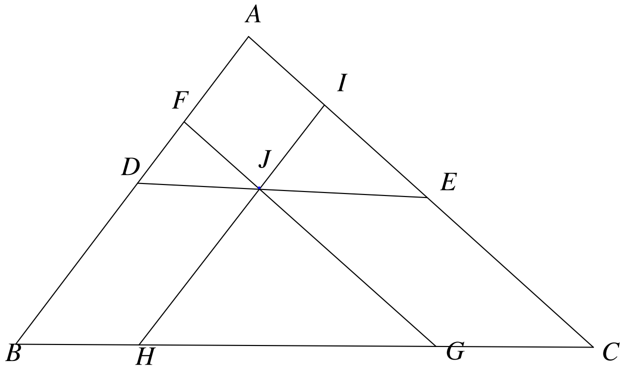
យើងបាន $\dfrac{r}{4R}\times IA\times IB\times IC=r^3$

ដូចនេះ $IA\times IB\times IC=4Rr^2$

លំហាត់ ៨

តាមចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណមួយ គេគូសបន្ទាត់ស្របទៅនឹងជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណនោះ។ បន្ទាត់ ទាំងនេះចែកត្រីកោណជា ៦ ចំណែក ក្នុងនោះមានបីចំណែកជាត្រីកោណមានក្រលាផ្ទៃ

តាង ដោយ S_1, S_2 និង S_3។ គណនាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណជាអនុគមន៍នៃ S_1, S_2 និង S_3។
សម្រាយ



គូស $[DE],[GF]$ និង $[IH]$ ស្របទៅនឹងជ្រុង $[BC],[CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា
យើងបាន $AFJI, DBHJ$ និង $JGCE$ ជាប្រលេឡូក្រាម
ហើយត្រីកោណ FDJ, IJE, JHG និង ABC សុទ្ធតែជាត្រីកោណដូចគ្នា
ចំពោះត្រីកោណ FDJ និងត្រីកោណ ABC

$$\frac{S_3}{S} = \left(\frac{DJ}{BC}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{DJ}{BC}$$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{EJ}{BC}$ និង $\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{HG}{BC}$

យើងបាន

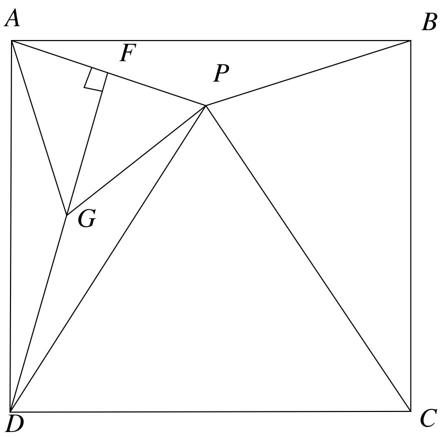
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} &= \frac{HG+EJ+DJ}{BC} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} &= \frac{HG+GC+BH}{BC} \\ &= \frac{BC}{BC} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$$

ដូចនេះ $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$

លំហាត់ ៩

គេឲ្យ $ABCD$ ជាការេមួយហើយ P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងការេនេះដែល $\angle PAB = \angle PBA = 15^\circ$។
បង្ហាញថា PCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស។
សម្រាយ



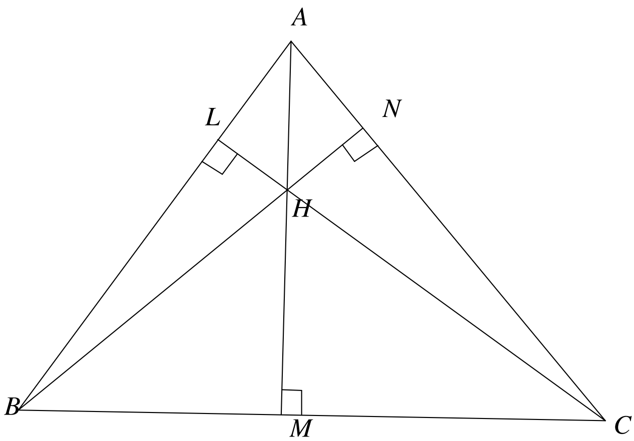
យក F ជាចំណោលកែងនៃ D លើ $[AP]$
និង G ជាចំណុចមួយនៅលើ $[FD]$ ដែល $\angle FAG = 60^\circ$
យើងបាន $\angle AGD = 150^\circ$
ក្នុងត្រីកោណ AGD និង APB មាន
$\angle AGD = \angle APB = 150^\circ$
$\angle ADG = \angle PAB = 15^\circ$ (មុំមានជ្រុងត្រូវគ្នាកែងរៀងគ្នា)
និង $AD = AB$ (ជ្រុងការេ $ABCD$)
នោះត្រីកោណ AGD ប៉ុនត្រីកោណ APB
វិបាក $AP = AG$
តែ $AF = \dfrac{AG}{2} \Rightarrow AF = \dfrac{AP}{2} \Rightarrow F$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AP]$
គេបានកម្ពស់ $[DF]$ ក្លាយជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ ADP
នោះ ADP ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល D
យើងបាន $PD = AD = DC$
ដូចគ្នាដែរ $PC = BC = DC$ ហេតុនេះ $PD = PC = CD$
ដូចនេះ PCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស

លំហាត់ ១០
ត្រីកោណ ABC មានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច។ យក $[AM],[BN]$ និង $[CL]$ ជាកម្ពស់ ហើយ H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណនេះ។ បង្ហាញថា

ក) $\dfrac{HM}{AM}+\dfrac{HN}{BN}+\dfrac{HL}{CL}=1$

ខ) $\dfrac{AM}{HM}+\dfrac{BN}{HN}+\dfrac{CL}{HL}\geq 9$

គ) $AM\times HM\leq\dfrac{BC^2}{4}$ ។



សម្រាយ

បង្ហាញថា

ក) $\dfrac{HM}{AM}+\dfrac{HN}{BN}+\dfrac{HL}{CL}=1$

យើងមាន $[ABC]=\dfrac{1}{2}CL\times AB$ និង $[ABH]=\dfrac{1}{2}HL\times AB$

$\Rightarrow \dfrac{[ABH]}{[ABC]}=\dfrac{HL}{CL}$

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{[BHC]}{[ABC]}=\dfrac{HM}{AM}$ និង $\dfrac{[CHA]}{[ABC]}=\dfrac{HN}{BN}$

យើងបាន $\dfrac{HM}{AM}+\dfrac{HN}{BN}+\dfrac{HL}{CL}=\dfrac{[ABH]}{[ABC]}+\dfrac{[BHC]}{[ABC]}+\dfrac{[CHA]}{[ABC]}=\dfrac{[ABC]}{[ABC]}=1$

ដូចនេះ $\dfrac{HM}{AM}+\dfrac{HN}{BN}+\dfrac{HL}{CL}=1$

ខ) $\frac{AM}{HM}+\frac{BN}{HN}+\frac{CL}{HL}\geq 9$

តាមវិសមភាព $AM-HM$ យើងបាន

$$\frac{\frac{AM}{HM}+\frac{BN}{HN}+\frac{CL}{HL}}{3}\geq \frac{3}{\frac{HM}{AM}+\frac{HN}{BN}+\frac{HL}{CL}}=3 \text{ ព្រោះ } \frac{HM}{AM}+\frac{HN}{BN}+\frac{HL}{CL}=1$$

ដូចនេះ $\frac{AM}{HM}+\frac{BN}{HN}+\frac{CL}{HL}\geq 9$

គ) $AM\times HM\leq \frac{BC^2}{4}$

ត្រីកោណកែង ABM និង HMC មាន

$\angle BAM=\angle HCM$ (មុំមានជ្រុងត្រូវគ្នាកែងរៀងគ្នា)

យើងបាន $\triangle ABM\sim\triangle CHM$

វិបាក $\frac{AM}{MC}=\frac{BM}{HM}\Rightarrow AM\times HM=BM\times MC$

ដោយ $BM\times MC\leq\left(\frac{BM+MC}{2}\right)^2=\frac{BC^2}{4}$

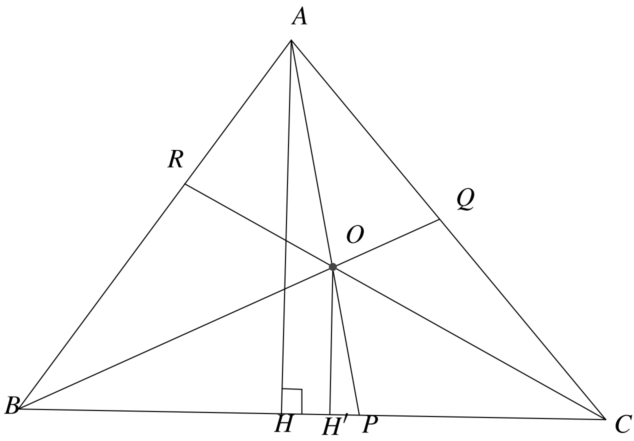
ដូចនេះ $AM\times HM\leq\frac{BC^2}{4}$

លំហាត់ ១១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ហើយ O ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ។ បន្ទាត់ $(OA),(OB)$ និង (OC) កាត់ជ្រុង $[BC],[CA]$ និង $[AB]$ ត្រង់ P,Q និង R រៀងគ្នា។ បង្ហាញថា

ក) $\frac{OP}{AP}+\frac{OQ}{BQ}+\frac{OR}{CR}=1$

ខ) $\frac{AP}{OP}+\frac{BQ}{OQ}+\frac{CR}{OR}\geq 9$ ។



សម្រាយ

បង្ហាញថា

ក) $\dfrac{OP}{AP}+\dfrac{OQ}{BQ}+\dfrac{OR}{CR}=1$

យក $[AH]$ ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ ABC

និង $[OH']$ ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ BOC

នោះ $[AH]//[OH']$

តាមទ្រឹស្តីបទ Thales យើងបាន $\dfrac{OH'}{AH}=\dfrac{OP}{AP}$

ដោយ $\dfrac{[BOC]}{[ABC]}=\dfrac{OH'}{AH}\Rightarrow\dfrac{[BOC]}{[ABC]}=\dfrac{OP}{AP}$

ដូចគ្នាដែរយើងបាន $\dfrac{[AOC]}{[ABC]}=\dfrac{OQ}{BQ}$ និង $\dfrac{[AOB]}{[ABC]}=\dfrac{OR}{CR}$

នោះ $\dfrac{OP}{AP}+\dfrac{OQ}{BQ}+\dfrac{OR}{CR}=\dfrac{[BOC]+[AOC]+[AOB]}{[ABC]}=\dfrac{[ABC]}{[ABC]}=1$

ដូចនេះ $\dfrac{OP}{AP}+\dfrac{OQ}{BQ}+\dfrac{OR}{CR}=1$

ខ) $\dfrac{AP}{OP}+\dfrac{BQ}{OQ}+\dfrac{CR}{OR}\geq 9$

តាមវិសមភាព $AM-HM$ យើងបាន

$$\frac{\frac{AP}{OP}+\frac{BQ}{OQ}+\frac{CR}{OR}}{3}\geq\frac{3}{\frac{OP}{AP}+\frac{OQ}{BQ}+\frac{OR}{CR}}=3$$

ដូចនេះ $\frac{AP}{OP}+\frac{BQ}{OQ}+\frac{CR}{OR}\geq 9$

លំហាត់ ១២

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមេដ្យាន m_a, m_b និង m_c គូសចេញពីកំពូល A, B និងC រៀងគ្នា។ បង្ហាញថា $m_am_bm_c \leq \frac{27R^3}{8}$ ។

សម្រាយ

បង្ហាញថា $m_am_bm_c \leq \frac{27R^3}{8}$

តាមរូបមន្តមេដ្យាន $m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$

$m_b^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}$

និង $m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$

យើងបាន $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $a=2R\sin A, b=2R\sin B$ និង$c=2R\sin C$

គេបាន

$$\begin{aligned} m_a^2+m_b^2+m_c^2 &= \frac{3}{4}(4R^2\sin^2 A+4R^2\sin^2 B+4R^2\sin^C) \\ &= 3R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C) \end{aligned}$$

ដោយ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq \frac{9}{2}$

យើងបាន $m_a^2+m_b^2+m_c^2\leq 3R^2\left(\frac{9}{4}\right)$ នោះ $m_a^2+m_b^2+m_c^2\leq \frac{27R^2}{4}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត តាមវិសមភាព $Cauchy$ យើងបាន

$m_a^2+m_b^2+m_c^2\geq 3\sqrt[3]{(m_am_bm_c)^2}$

$\Rightarrow m_am_bm_c\leq \sqrt{\left(\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{3}\right)^3}$

តាម (1) យើងបាន $m_am_bm_c\leq \sqrt{\left(\frac{\frac{27R^2}{4}}{3}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{9R^2}{4}\right)^3}=\frac{27R^3}{8}$

ដូចនេះ $m_am_bm_c\leq \frac{27R^3}{8}$

លំហាត់ ១៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច ។ បង្ហាញថា

ក) $h_a+h_b+h_c\geq 9r$

ខ) $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\geq\frac{2}{R}$ ។

សម្រាយ

បង្ហាញថា

ក) $h_a+h_b+h_c\geq 9r$

យើងមាន $S=\frac{1}{2}ah_a\Rightarrow h_a=\frac{2S}{a}$

ដូចគ្នាដែរ $h_b=\frac{2S}{b}$ និង $h_c=\frac{2S}{c}$

នោះ $h_a+h_b+h_c=\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}=2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

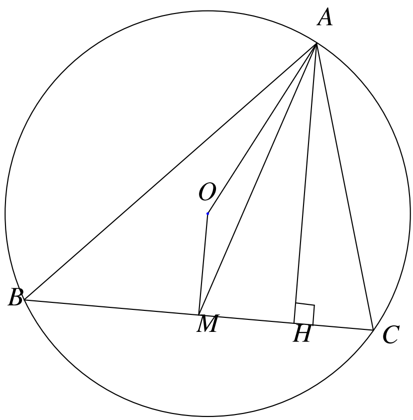
ដោយ $S=pr\Rightarrow h_a+h_b+h_c=2pr\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=r(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

តាមវិសមភាព $AM-HM$ យើងបាន $\frac{1+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

$\Rightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$

ដូចនេះ $h_a+h_b+h_c\geq 9r$

ខ) $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\geq\frac{2}{R}$



ត្រីកោណ AOM មាន $AM\leq OA+OM$

នោះ $OA\geq AM-OM$

$\Rightarrow\frac{OA}{AM}\leq 1-\frac{OM}{AM}$ ដោយ $AH\geq AM\Rightarrow\frac{1}{AM}\leq\frac{1}{AH}$

នោះ $\frac{OA}{AM} \geq 1 - \frac{OM}{AH} = 1 - \frac{[BOC]}{[ABC]}$

រឺ $\frac{R}{m_a} \geq 1 - \frac{[BOC]}{[ABC]}$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\frac{R}{m_b} = 1 - \frac{[AOC]}{[ABC]}$ និង $\frac{R}{m_c} = 1 - \frac{[AOB]}{[ABC]}$

នោះ $\frac{R}{m_a} + \frac{R}{m_b} + \frac{R}{m_c} \geq 3 - \frac{[BOC]}{[ABC]} - \frac{[AOC]}{[ABC]} - \frac{[AOB]}{[ABC]}$

$= 3 - \frac{[ABC]}{[ABC]} = 3 - 1 = 2$

ដូចនេះ $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{2}{R}$

លំហាត់ ១៤

គេឲ្យត្រីកោណមួយមានរង្វាស់ជ្រុង a, b, c ហើយ l_a, l_b, l_c ជាប្រវែងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងទាំងបី នៃត្រីកោណនេះ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$ ។

សម្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$

<u>របៀបទី ១</u>

តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{b+c}{bc} \right) \frac{1}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \frac{1}{\cos \frac{A}{2}}$$

ដោយ $0 < \cos \frac{A}{2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} > 1$

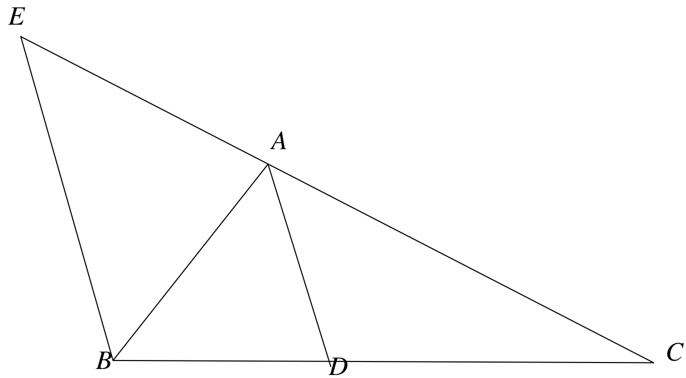
នោះ $\frac{1}{l_a} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $\frac{1}{l_b} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$ និង $\frac{1}{l_c} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

ហេតុនេះ $\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

ដូចនេះ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$

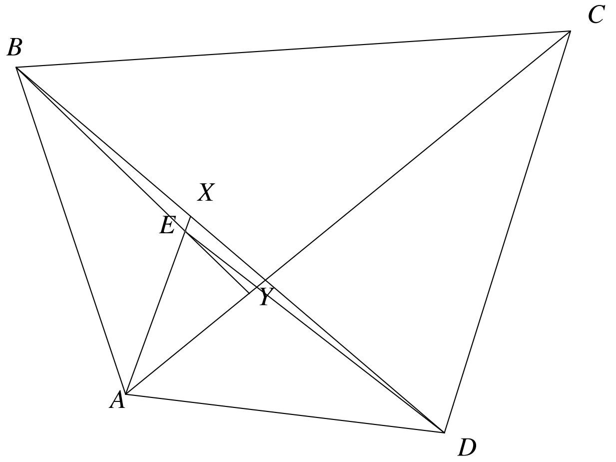
<u>របៀបទី ២</u>



យក $[AD)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃ$\angle A$
និង E ជាចំណុចមួយនៅលើ $(AC]$ ដែល $[BE]//[AD]$
យើងបាន $\angle AEB = \angle DAC$ (មុំត្រូវគ្នា)
$\angle EBA = \angle BAD = \angle DAC$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)
នោះ $\angle AEB = \angle EBA$
នោះ ABE ជាត្រីកោណសមបាត
គេបាន $EA = AB$
ម្យ៉ាងទៀត តាមទ្រឹស្តីបទ Thales យើងបាន $\dfrac{AC}{CE} = \dfrac{AD}{BE}$
នោះ $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{CE}{AC \times BE} = \dfrac{AE + AC}{AC \times BE} = \dfrac{AB + AC}{AC \times BE}$
តែ $BE < AE + AB = 2AB$
យើងបាន $\dfrac{1}{AD} > \dfrac{AB + AC}{2AB \times AC} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}\right)$
នោះ $\dfrac{1}{l_a} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$
ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $\dfrac{1}{l_b} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}\right)$ និង $\dfrac{1}{l_c} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$
ហេតុនេះ $\dfrac{1}{l_a} + \dfrac{1}{l_b} + \dfrac{1}{l_c} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$
ដូចនេះ $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{l_a} + \dfrac{1}{l_b} + \dfrac{1}{l_c}$

លំហាត់ ១៥

(វិសមភាព Ptolemy)
គេឲ្យ $ABCD$ ជាចតុកោណប៉ោង។ បង្ហាញថា $AB \times CD + AD \times BC \geq AC \times BD$។



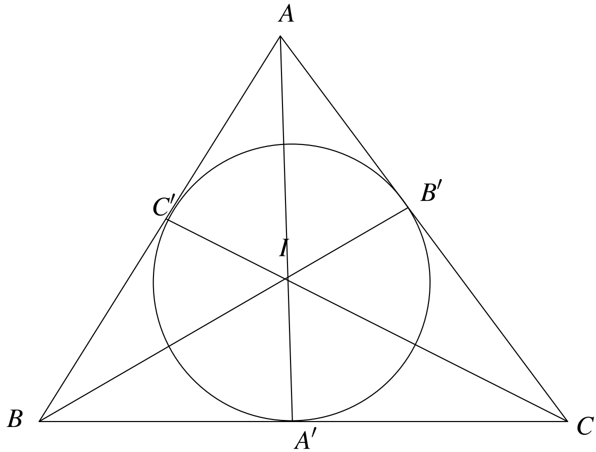
សម្រាយ

យក X ជាចំណុចមួយនៅលើ $[BD]$ ដែល $\angle BAX = \angle CAD$
Y ជាចំណុចមួយនៅលើ $[AC]$ ដែល $\angle ACD = \angle ABY$
និង E ជាចំណុចប្រសព្វនៃ (AX)និង(BY)
យើងបានត្រីកោណ ABE ដូចត្រីកោណ ACD
នោះ $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{BE}{CD}$
តាម $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{CD} \Rightarrow AB \times CD = AC \times BE$ (1)
ម្យ៉ាងទៀត $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AD} \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AD}$ និង $\angle EAD = \angle BAC$
នោះត្រីកោណ AED ដូចត្រីកោណ ABC
នោះ $\dfrac{ED}{BC} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AD \times BC = AC \times ED$ (2)
បូក (1) និង(2) យើងបាន $AB \times CD + AD \times BC = AC(BE + ED)$
ដោយ $BE + ED \geq BD$ (វិសមភាពត្រីកោណ)
ដូចនេះ $AB \times CD + AD \times BC \geq AC \times BD$

លំហាត់ ១៦

(IMO, 1991)
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ។

កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងនៃមុំ A,B និង C កាត់ជ្រុង $[BC],[CA],[AB]$ ត្រង់ A',B' និង C'រៀងគ្នា។ បង្ហាញថា $\frac{1}{4} < \frac{AI\times BI\times CI}{AA'\times BB'\times CC'} \le \frac{8}{27}$។



សម្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ

ចំពោះ $\angle A$ ក្នុងត្រីកោណ ABC យើងបាន $\frac{AB}{BA'} = \frac{AC}{A'C}$

$\Rightarrow \frac{c}{BA'} = \frac{b}{A'C} = \frac{b+c}{BA'+A'C} = \frac{b+c}{a}$

នោះ $BA' = \frac{ac}{b+c}$ និង $A'C = \frac{ab}{b+c}$

ចំពោះ $\angle C$ ក្នុងត្រីកោណ ACA' យើងបាន $\frac{A'C}{IA'} = \frac{AC}{IA}$

$\Rightarrow \frac{A'I}{IA} = \frac{A'C}{AC} = \frac{\frac{ab}{b+c}}{b} = \frac{a}{b+c}$

$\Rightarrow \frac{IA}{b+c} = \frac{A'I}{a} = \frac{IA+A'I}{a+b+c} = \frac{AA'}{a+b+c}$

នោះ $\frac{IA}{AA'} = \frac{b+c}{a+b+c}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរយើងបាន $\frac{IB}{BB'} = \frac{c+a}{a+b+c}$ និង $\frac{IC}{CC'} = \frac{a+b}{a+b+c}$

នោះ $\frac{IA\times IB\times IC}{AA'\times BB'\times CC'} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}$

បង្ហាញថា $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \le \dfrac{8}{27}$

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន

$(a+b)(b+c)(c+a) \le \left(\dfrac{a+b+b+c+c+a}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}(a+b+c)^3$

នោះ $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \le \dfrac{8}{27}$

បង្ហាញថា $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} > \dfrac{1}{4}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} > \frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow 4(a+b)(b+c)(c+a) > (a+b+c)^3\\
&\Leftrightarrow 4(a+b)(b+c)(c+a) > a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\\
&\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-(a+b)(b+c)(c+a) < 0\\
&\Leftrightarrow (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)+4abc > 0
\end{aligned}$$

ពិតតាមវិសមភាពត្រីកោណ

ដូចនេះ $\dfrac{1}{4} < \dfrac{AI \times BI \times CI}{AA' \times BB' \times CC'} \le \dfrac{8}{27}$

លំហាត់ ១៧

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច និង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណនេះ។ បើ K ជាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណនេះ ចូរបង្ហាញថា

$\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $K = \dfrac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow K^2 = \dfrac{a^2b^2\sin^2 C}{4} \Rightarrow 4K^2 = a^2b^2\sin^2 C$

នោះ

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2b^2-4K^2} &= \sqrt{a^2b^2-a^2b^2\sin^2 C}\\
&= \sqrt{a^2b^2(1-\sin^2 C)}\\
&= \sqrt{a^2b^2\cos^2 C}\\
&= ab\cos C
\end{aligned}$$

ដោយ $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

នោះ $\sqrt{a^2b^2-4K^2} = ab\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$

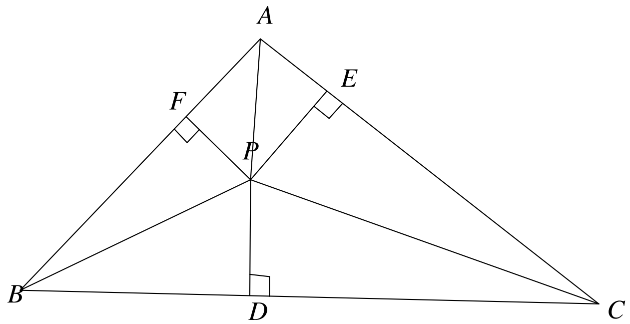
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\sqrt{b^2c^2-4K^2}=\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2}$ និង $\sqrt{c^2a^2-4K^2}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}$

ដូចនេះ $\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$

លំហាត់ ១៨

គេឲ្យ P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC។យក D,E និង F ជាចំណោលកែងនៃ P លើជ្រុង $[BC],[CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា។ កំណត់ទីតាំងនៃ P ដើម្បីឲ្យផលបូក $\dfrac{BC}{PD}+\dfrac{CA}{PE}+\dfrac{AB}{PF}$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

សម្រាយ



យើងមាន

$$\begin{aligned} S &= [PBC]+[PCA]+[PAB] \\ &= \frac{1}{2}PD\times BC+\frac{1}{2}PE\times CA+\frac{1}{2}PF\times AB \end{aligned}$$

ឬ $PD\times BC+PE\times CA+PF\times AB=2S$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$\left(\dfrac{BC}{PD}+\dfrac{CA}{PE}+\dfrac{AB}{PF}\right)(PD\times BC+PE\times CA+PF\times AB)\geq(BC+CA+AB)^2$

នោះ

$$\begin{aligned} 2S\left(\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\right) &\geq (AB+BC+CA)^2 \\ \Rightarrow \frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF} &\geq \frac{(AB+BC+CA)^2}{2S} \end{aligned}$$

សមភាពពេល

$$\frac{\frac{BC}{PD}}{PD\times BC}=\frac{\frac{CA}{PE}}{PE\times CA}=\frac{\frac{AB}{PF}}{PF\times AB}$$
$$\Rightarrow PD=PE=PF$$

នោះ P ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។

លំហាត់ ១៩

គេឲ្យ p និងR ជាកន្លះបរិមាត្រ និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា។ កំណត់ប្រភេទត្រីកោណ ABC ដើម្បីឲ្យផលធៀប $\frac{p}{R}$ មានតម្លៃធំបំផុត។

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន
$(2p)^2=(AB+BC+CA)^2\le 3(AB^2+BC^2+CA^2)$
ម្យ៉ាងទៀត

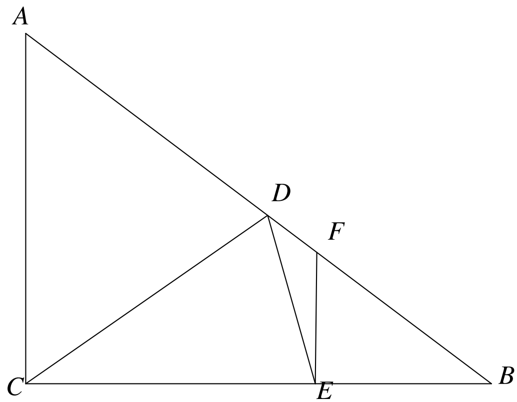
$$\begin{aligned}AB^2+BC^2+CA^2&=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})^2\\&=2(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2)-2(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\cdot\vec{O}B+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})\\&=3(\overrightarrow{OA}^2+\vec{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2)-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2\\&=3(3R^2)-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2\\&=9R^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2\le 9R^2\end{aligned}$$

នោះ $4p^2\le 3(9R^2)\Rightarrow \frac{p^2}{R^2}\le 3\left(\frac{3}{2}\right)^2\Rightarrow \frac{p}{R}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$
សមភាពពេល $AB=BC=CA$ និង $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$
ដូចនេះ $\max\left(\frac{p}{R}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ហើយតម្លៃ នេះកើតឡើងនៅពេលត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

លំហាត់ ២០

គេឲ្យត្រីកោណកែង ABC មួយកែងត្រង់ C មាន $AC=1$ និង $\angle BAC=x^\circ$ ។
យក D ជាចំណុចមួយនៅលើអ៊ីប៉ូតេនុស $[AB]$ ដែល$AD=1$ និង E ជាចំណុចមួយនៅលើ $[BC]$ ដែល $\angle EDC=x^\circ$ ។ បន្ទាត់ (EF) កែងនឹង $[BC]$ ត្រង់ E ហើយជួប $[AB]$ ត្រង់ F ។
គណនា $\lim_{x\to 0} EF$ ។

សម្រាយ



គណនា $\lim_{x\to 0} EF$

<u>របៀបទី ១</u>

ដោយ $[AC]\perp[BC]$ និង $[EF]\perp[BC]$

នោះ $[AC]//[EF]$ គេបាន $\dfrac{EF}{AC}=\dfrac{BE}{BC}\Rightarrow EF=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{1}{1+\frac{CE}{BE}}$

យើងមាន $AC=AD=1$ នោះ ACD ជាត្រីកោណសមបាត

មាន $\angle ACD=\angle ADC=\dfrac{1}{2}(180^\circ-x)=90^\circ-\dfrac{x}{2}$

នោះ $\angle DCE=90^\circ-\angle ACD=90^\circ-\left(90^\circ-\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{x}{2}$

$\angle DBC=90^\circ-x$ និង

$$\begin{aligned}\angle EDB&=180^\circ-\angle ADC-\angle CDE\\&=180^\circ-x-\left(90^\circ-\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

អនុវត្តទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

ចំពោះត្រីកោណ CDE គេបាន $\dfrac{CE}{\sin x}=\dfrac{DE}{\sin\frac{x}{2}}\Rightarrow CE=\dfrac{DE\times\sin x}{\sin\frac{x}{2}}$

ចំពោះត្រីកោណ BDE គេបាន $\dfrac{BE}{\sin\left(90^\circ-\frac{x}{2}\right)}=\dfrac{DE}{\sin(90^\circ-x)}$

$\Rightarrow BE=\dfrac{DE\times\cos\frac{x}{2}}{\cos x}$

យើងបាន $EF=\dfrac{1}{1+\frac{DE\times\sin x}{\sin\frac{x}{2}}\times\frac{\cos x}{DE\times\cos\frac{x}{2}}}=\dfrac{1}{1+2\cos x}$

ព្រោះ $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}EF=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+2\cos x}\right)=\dfrac{1}{3}$

របៀបទី ២

អនុវត្តទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសចំពោះ

+ ត្រីកោណ DEF

យើងបាន $\dfrac{EF}{\sin\angle EDF}=\dfrac{DE}{\sin\angle EFD}$

នោះ $EF=\dfrac{DE}{\sin\angle EFD}\times\sin\angle EDF$

ដោយ $\angle EFD=180^\circ-\angle EFB=180^\circ-\angle CAF=180^\circ-x$

ព្រោះ $\angle EFB=\angle CAF$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)

និង

$$\begin{aligned}\angle EDF&=180^\circ-\angle EDC-\angle ADC\\&=180^\circ-x-\frac{1}{2}(180^\circ-x)\\&=\frac{1}{2}(180^\circ-x)\\&=90^\circ-\frac{x}{2}\end{aligned}$$

ព្រោះ $AC=AD=1\Rightarrow\triangle ACD$ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A

នោះ $\angle ADC=\angle ACD=\dfrac{1}{2}(180^\circ-x)$

យើងបាន $EF=\dfrac{DE}{\sin(180^\circ-x)}\times\sin\left(90^\circ-\dfrac{x}{2}\right)$

$\dfrac{DE}{\sin x}\times\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{DE}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{DE}{2\sin\frac{x}{2}}$ (1)

+ ត្រីកោណ DCE

គេបាន $\dfrac{DE}{\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{CD}{\sin\left(180^\circ-\frac{3x}{2}\right)}$

$\Rightarrow DE=\dfrac{CD\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}$ តែ $CD=\dfrac{\sin x\times AC}{\sin\left(90^\circ-\frac{x}{2}\right)}=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=2\sin\dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow DE=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}$

តាម (1) យើងបាន $EF=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{3x}{2}}\times\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}$

នោះ $\lim\limits_{x\to0}EF=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\dfrac{\frac{3x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}EF=\dfrac{1}{3}$

លំហាត់ ២១

បង្ហាញថារង្វាស់ជ្រុង a,b និង c នៃត្រីកោណមួយជាឫសនៃសមីការដឺក្រេទី ៣ $X^3-2pX^2+\left(r^2+p^2+4rR\right)X-4prR=0$ ក្នុងនោះ $p,\ \ r$ និង R ជាកន្លះបរិមាត្រ កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅរៀងគ្នានៃត្រីកោណ ABC។

សម្រាយ

យក $f(X)=X^3-2pX^2+(r^2+p^2+4rR)X-4prR$

ដើម្បីបង្ហាញថា a,b និង c ជាឫសនៃ $f(X)=0$ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $f(a)=f(b)=f(c)=0$

យើងមាន

$$\begin{aligned}f(a)&=a^3-2pa^2+(r^2+p^2+4rR)a-4prR\\&=a^3-2pa^2+ap^2+ar^2+4rRa-4prR\\&=a(a^2-2ap+p^2)+a\left[(p-a)\tan\frac{A}{2}\right]^2-4rR(p-a)\\&=a(p-a)^2+a(p-a)^2\tan^2\frac{A}{2}-4R(p-a)^2\tan\frac{A}{2}\\&=a(p-a)^2\left(1+\tan^2\frac{A}{2}-\frac{4R}{a}\tan\frac{A}{2}\right)\end{aligned}$$

ដោយ $\dfrac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow\dfrac{2R}{a}=\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{1}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$

យើងបាន

$$\begin{aligned}f(a)&=a(p-a)^2\left(1+\tan^2\frac{A}{2}-\frac{2\tan\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\right)\\&=a(p-a)^2\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}-\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}\right)=0\end{aligned}$$

ស្រាយដូចគ្នាចំពោះ $f(b)=f(c)=0$

លំហាត់ ២២

(IMO Shortlist, 1988)
គេឲ្យ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ក្រៅនៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា។
បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad (1)$

តាមកន្សោមកន្លះមុំ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}$ និង $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\times\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\times\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\\&=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\end{aligned}$$

ដោយ $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\Rightarrow(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2$

និង $\frac{abc}{2pr}=2R\Rightarrow abc=4prR$

នោះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{pr^2}{4prR}=\frac{r}{4R}$

តាម (1) យើងបាន

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C&=1+\frac{r}{R}\\\Rightarrow 1-2\sin^2\frac{A}{2}+1-2\sin^2\frac{B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}&=1+\frac{r}{R}\\\Rightarrow\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}&=1-\frac{r}{2R}\end{aligned}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\Rightarrow\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2&=\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\\&\quad+2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\\&=1-\frac{r}{2R}+2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq\frac{3}{2}$
នោះ

$$1-\frac{r}{2R}+2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\leq\frac{9}{4}$$
$$\Rightarrow 2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\leq\frac{5}{4}+\frac{r}{2R}$$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leq\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$

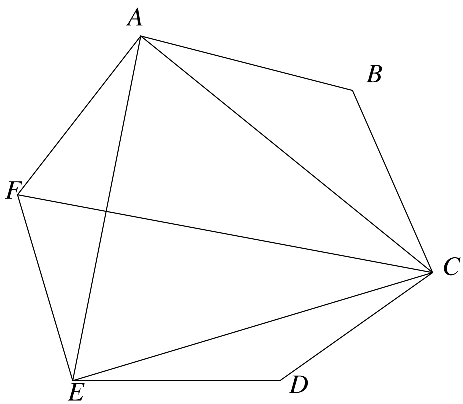
លំហាត់ ២៣

(IMO Shortlist, 1997)

គេឲ្យឆកោណ $ABCDEF$ មួយកំណត់ដោយ $AB=BC, CD=DE$ និង $EF=FA$។

បង្ហាញថា $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}$ ។

សម្រាយ



អនុវត្តវិសមភាព Ptolemy ចំពោះចតុកោណ $ACEF$ យើងបាន

$FA\times CE+AC\times EF\geq AE\times FC$

ដោយ $EF=FA$

នោះ

$$FA \times CE + AC \times FA \geq AE \times FC$$
$$\Rightarrow FA(CE + AC) \geq AE \times FC$$
$$\Rightarrow \frac{FA}{FC} \geq \frac{AE}{CE + AC}$$

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $\frac{DE}{DA} \geq \frac{EC}{AC+AE}$ និង $\frac{BC}{BE} \geq \frac{AC}{AE+EC}$
នោះ

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{AC}{AE+EC} + \frac{AE}{EC+AC} + \frac{EC}{AC+AE}$$
$$\geq \frac{3}{2}$$

ពិតតាមវិសមភាព Nesbitt

ដូចនេះ $\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}$

សម្គាល់

(វិសមភាព Nesbitt)

ចំពោះ a, b និង $c > 0$ គេបាន $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

លំហាត់ ២៤

ត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង a, b និងc។

បង្ហាញថា $\frac{\cos A}{b\cos C + c\cos B} + \frac{\cos B}{a\cos C + c\cos A} + \frac{\cos C}{b\cos A + a\cos B} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$។

សម្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទចំណោល $a = b\cos C + c\cos B$

នោះ $\frac{\cos A}{b\cos C + c\cos B} = \frac{\cos A}{a}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{\cos B}{a\cos C + c\cos A} = \frac{\cos B}{b}$ និង $\frac{\cos C}{b\cos A + a\cos B} = \frac{\cos C}{c}$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
\frac{\cos B}{b\cos C+c\cos A}+\frac{\cos B}{a\cos C+c\cos A}+\frac{\cos C}{b\cos A+a\cos B} &= \frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}\\
&= \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a}+\frac{\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{b}+\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{c}\\
&= \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2abc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}\\
&= \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}
\end{aligned}$$

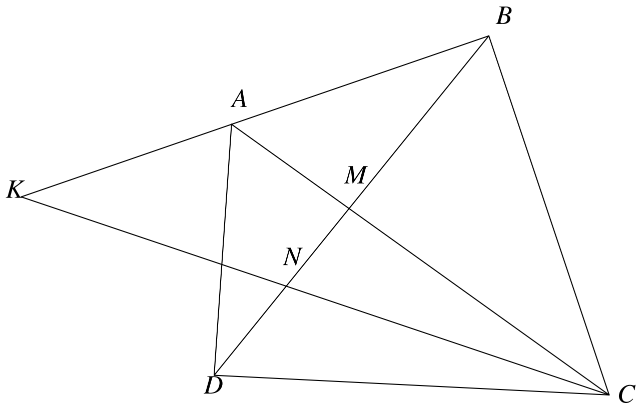
ដូចនេះ $\dfrac{\cos A}{b\cos C+c\cos B}+\dfrac{\cos B}{a\cos C+c\cos A}+\dfrac{\cos C}{b\cos A+a\cos B}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

លំហាត់ ២៥

យក M ជាចំណុចប្រសព្វនៃអង្កត់ទ្រូង $[AC]$ និង $[BD]$ នៃចតុកោណប៉ោង $ABCD$ ។កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle ACD$ កាត់ $[BA]$ ត្រង់K។

បើ $MA\times MC+MA\times CD=MB\times MD$ បង្ហាញថា $\angle BKC=\angle CDB$។

សម្រាយ



យក N ជាចំណុចប្រសព្វនៃ (CK) និង (BD)

តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំយើងបាន $\dfrac{CD}{DN}=\dfrac{MC}{MN}\Rightarrow CD=\dfrac{MC\times DN}{MN}$

ដោយ $MB\times MD=MA\times MC+MA\times CD$

នោះ

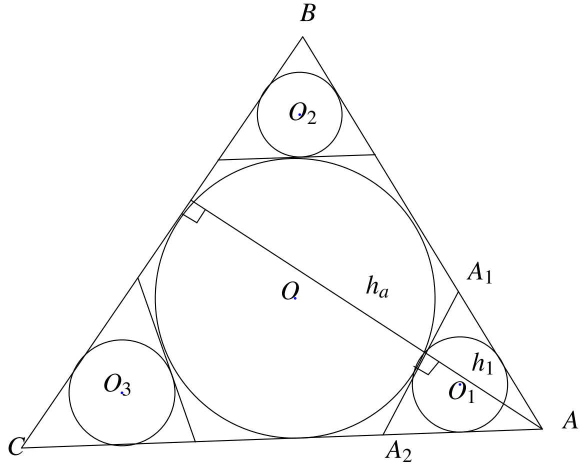
$$\begin{aligned} MB\times MD &= MA\times MC + MA\times\frac{MC\times DN}{MN}\\ &= MA\times MC\times\left(1+\frac{DN}{MN}\right)\\ &= MA\times MC\times\frac{MD}{MN}\\ \Rightarrow MB\times MN &= MA\times MC \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត M ជាចំណុចប្រសព្វនៃ $[AC]$ និង $[BN]$
តាមស្វ័យគុណចំណុចយើងបាន A,B,C និង N ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ
នោះ $\angle KBD=\angle ABN=\angle ACN=\angle NCD=\angle KCD$
យើងបាន K,B,C និង D ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ
ដូចនេះ $\angle BKC=\angle CDB$

លំហាត់ ២៦

ត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង a,b និង c ហើយ ចារឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត O មួយ។ គេសង់បន្ទាត់បី ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ផ្ចិត O ហើយស្របរៀងគ្នានឹងជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។ បន្ទាត់ប៉ះនីមួយៗ និង ជ្រុងពីរផ្សេងទៀតនៃត្រីកោណ ABC ដែលមិនស្របនឹងវា ផ្តុំបានត្រីកោណថ្មី។ ត្រីកោណថ្មីទាំង បីនោះ ចារឹកក្រៅរង្វង់ទាំងបីរៀងគ្នា ។បង្ហាញថា រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណទាំងបួននោះមានផលបូក ក្រឡាផ្ទៃស្មើ នឹង $\left(\frac{\pi S^2}{p^4}\right)\left[p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2\right]$ ដែលS ជាក្រឡាផ្ទៃ និង p ជាកន្លះ បរិមាត្រនៃ ត្រីកោណ ABC។

សម្រាយ



យក r ជាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC

r_1, r_2, r_3 ជាកាំនៃរង្វង់ថ្មីផ្ចិត O_1, O_2 និង O_3 រៀងគ្នា

h_1, h_2, h_3 ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណថ្មីគូសចេញពីកំពូល A, B, C រៀងគ្នា

ផលបូកក្រឡាផ្ទៃនៃរង្វង់ទាំងបួនកំណត់ដោយ $T = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_3^2 + \pi r_4^2$

យើងមាន $[A_1A_2]//[BC]$ នោះ ត្រីកោណ AA_1A_2 ដូចត្រីកោណ ABC

យើងបាន $\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{h_1}{h_a}$ តែ $h_1 = h_a - 2r$

នោះ $\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \dfrac{2r}{h_a} \Rightarrow r_1 = r\left(1 - \dfrac{2r}{h_a}\right)$

ដោយ $S = pr \Rightarrow r = \dfrac{S}{p}$ និង $S = \dfrac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \dfrac{2S}{a}$

យើងបាន $r_1 = \dfrac{S}{p}\left(1 - \dfrac{\frac{2S}{p}}{\frac{2S}{a}}\right) = \dfrac{S}{p}\left(1 - \dfrac{a}{p}\right) = \dfrac{S(p-a)}{p^2}$

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន $r_2 = \dfrac{S(p-b)^2}{p^2}$ និង $r_3 = \dfrac{S(p-c)^2}{p^2}$

$$\Rightarrow T = \pi\left(\frac{S}{p}\right)^2 + \pi\left[\frac{S(p-a)}{p^2}\right]^2 + \pi\left[\frac{S(p-b)}{p^2}\right]^2 + \pi\left[\frac{S(p-c)}{p^2}\right]^2$$

$$= \left(\frac{\pi S^2}{p^4}\right)[p^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2]$$

លំហាត់ ២៧

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយបង្ហាញថា

ក) $\dfrac{h_b}{l_b} \geq \sqrt{\dfrac{2r}{R}}$

ខ) $r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c \leq p^2$

គ) $m_a l_a + m_b l_b + m_c l_c \geq p^2$

ឃ) $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{4R^2}{r(a+b+c)abc}}$

ង) $\dfrac{a^3}{r_a} + \dfrac{b^3}{r_b} + \dfrac{c^3}{r_c} \leq \dfrac{abc}{r}$

ច) $\dfrac{a}{r_a} + \dfrac{b}{r_b} + \dfrac{c}{r_c} \leq \dfrac{9R}{p}$

ឆ) $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq l_a^2 + l_b^2 + l_c^2$

ជ) $\dfrac{a^2}{r_a - r} + \dfrac{b^2}{r_b - r} + \dfrac{c^2}{r_c - r} \leq 9R$

ឈ) $\dfrac{3S}{R} \leq a\cos^2\dfrac{A}{2} + b\cos^2\dfrac{B}{2} + c\cos^2\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{3S}{2r}$

ញ) $\sqrt{a+b+c} < \sqrt{r_a \sin A} + \sqrt{r_b \sin B} + \sqrt{r_c \sin C} \leq \dfrac{3}{2}\sqrt{a+b+c}$

ដ) $\dfrac{\sqrt{p}abc\sin C}{ab\sin^2 C + pc} \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{abc} < \dfrac{ab\sin^2 C + pc}{4\sqrt{p}\sin C}$

ឋ) $\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{S}{R}\right)^2 \leq \dfrac{ab\sqrt{ab}}{a+b} + \dfrac{bc\sqrt{bc}}{b+c} + \dfrac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \leq \dfrac{8}{3}\left(\dfrac{S}{2R}\right)^2$

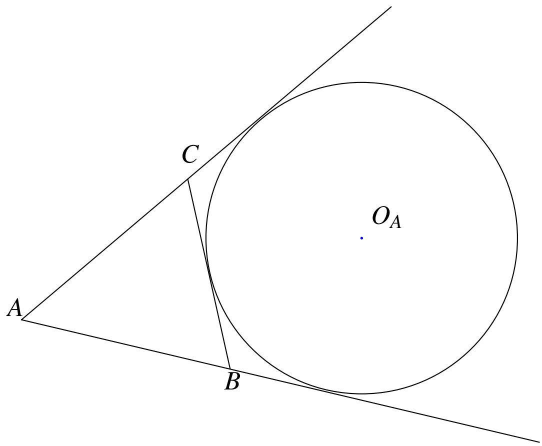
សម្គាល់

r_a តាងឲ្យកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ A នៃត្រីកោណ ABC (ដូចរូប)។

i- $r_a = p\tan\dfrac{A}{2}$; $r_b = p\tan\dfrac{B}{2}$ និង $r_c = p\tan\dfrac{C}{2}$

ii- $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

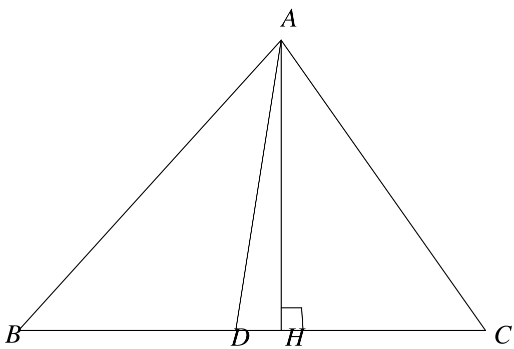
(សូមមិត្តអ្នកអានសាកល្បងស្រាយបញ្ជាក់ដោយខ្លួនឯង)



សម្រាយ

បង្ហាញថា

ក) $\dfrac{h_b}{l_b} \geq \sqrt{\dfrac{2r}{R}}$



យើងមាន $\sin\angle BDH = \dfrac{h_b}{l_b}$ ដោយ$\angle BDH = 180^\circ - \left(\dfrac{B}{2}+C\right)$

នោះ $\dfrac{h_b}{l_b} \geq \sin\left(\dfrac{B}{2}+C\right)$

ដើម្បីបង្ហាញថា $\dfrac{h_b}{l_b} \geq \sqrt{\dfrac{2r}{R}}$ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $\sin^2\left(\dfrac{B}{2}+C\right) \geq \dfrac{2r}{R}$

ពិនិត្យ $\sin\left(\dfrac{B}{2}+C\right) = \sin\left(\dfrac{\pi - A - C}{2}+C\right) = \sin\left[\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{A-C}{2}\right)\right] = \cos\left(\dfrac{A-C}{2}\right)$

និង $\dfrac{r}{R} = 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

ហេតុនេះ

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{B}{2}+C\right) &\geq \frac{2r}{R} \\
\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{A-C}{2}\right) &\geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \\
\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{A-C}{2}\right) - 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{A-C}{2}\right) - 4\sin\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\right] &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{A-C}{2}\right) - 4\sin\frac{B}{2}\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) + 4\sin^2\frac{B}{2} &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \left[\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) - 2\sin\frac{B}{2}\right]^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\dfrac{h_b}{l_b} \geq \sqrt{\dfrac{2r}{R}}$

ខ) $r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c \leq p^2$

យើងមាន $S = (p-a)r_a$

$\Rightarrow r_a = \dfrac{S}{p-a} = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = \sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$

និង $l_a = \dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$

នោះ

$$\begin{aligned}
r_a l_a &= \left[\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}\right]\left[\frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}\right] \\
&= p\sqrt{(p-b)(p-c)} \times \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \\
&\leq p\sqrt{(p-b)(p-c)} \qquad (b+c \geq 2\sqrt{bc}) \\
&\leq p\left(\frac{p-b+p-c}{2}\right) = \frac{pa}{2}
\end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរ $r_b l_b \leq \dfrac{pb}{2} \quad r_c l_c \leq \dfrac{pc}{2}$
យើងបាន $r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c \leq \dfrac{pa+pb+pc}{2} = p\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right) = p^2$
ដូចនេះ $r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c \leq p^2$
គ) $m_a l_a + m_b l_b + m_c l_c \geq p^2$
យើងមាន $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$
និង $l_a^2 = \dfrac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$
នោះ $m_a^2 l_a^2 = \left(\dfrac{2b^2+2b^2-a^2}{4}\right)\left[\dfrac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}\right] = \dfrac{bc(2b^2+2c^2-a^2)}{(b+c)^2} \times p(p-a)$
តាមវិសមភាពត្រីកោណ

$$\begin{aligned}
|b-c| &\leq a \\
\Rightarrow (b-c)^2 &\leq a^2 \\
\Rightarrow (b-c)^4 - a^2(b-c)^2 &\leq 0
\end{aligned}$$

ដោយ $(b-c)^4 = (b+c)^4 - 8bc(b^2+c^2)$
និង $(b-c)^2 = (b+c)^2 - 4bc$
យើងបាន

$$\begin{aligned}
(b+c)^4 - 8bc(b^2+c^2) - a^2[(b-c)^2 - 4bc] &\leq 0 \\
(b+c)^4 - a^2(b+c)^2 - 4bc(2b^2+2c^2-a^2) &\leq 0 \\
\Rightarrow bc(2b^2+2c^2-a^2) &\geq \frac{(b+c)^4 - a^2(b+c)^2}{4}
\end{aligned}$$

នោះ

$$m_a^2 l_a^2 \geq \frac{(b+c)^4 - a^2(b+c)^2}{4(b+c)^2} \times p(p-a) = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} \times p(p-a)$$
$$= \frac{(b+c-a)(a+b+c)p(p-a)}{4}$$
$$= p^2(p-a)^2$$

នោះ $m_a l_a \geq p(p-a)$
ដូចគ្នាដែរ $m_b l_b \geq p(p-b)$ និង $m_c l_c \geq p(p-c)$
យើងបាន

$$m_a l_a + m_b l_b + m_c l_c \geq p(p-a) + p(p-b) + p(p-c) = p(p-a+p-b+p-c)$$
$$= p(3p-2p)$$
$$= p^2$$

ដូចនេះ $m_a l_a + m_b l_b + m_c l_c \geq p^2$
ឃ) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{4R^2}{r(a+b+c)abc}}$
យើងមាន $S = (p-a)r_a \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}$
ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S}$ និង $\frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S}$

នោះ

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}-3\sqrt[3]{\frac{4R^2}{r(a+b+c)abc}}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}-3\sqrt[3]{\frac{R}{2pr\times\frac{abc}{4R}}}$$
$$=\frac{p}{S}-3\sqrt[3]{\frac{R}{2S\times S}}$$
$$=\frac{p}{S}-3\sqrt[3]{\frac{R}{3S^2}}$$
$$=\frac{p}{S}-3\sqrt[3]{\frac{\frac{abc}{4S}}{2S^2}}$$
$$=\frac{p}{S}-3\sqrt[3]{\frac{abc}{8S^3}}$$
$$=\frac{p}{S}-\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2S}$$
$$=\frac{2p-3\sqrt[3]{abc}}{2S}$$
$$=\frac{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}{2S}\geq 0$$

ព្រោះ $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$

ដូចនេះ $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{4R^2}{r(a+b+c)abc}}$

ង) $\frac{a^3}{r_a}+\frac{b^3}{r_b}+\frac{c^3}{r_c}\leq\frac{abc}{r}$

ដោយ $S=(p-a)r_a\Rightarrow\frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{r_b}=\frac{p-b}{S},\frac{1}{r_c}=\frac{p-c}{S}$ និង $r=\frac{S}{p}$

នោះ $\frac{a^3}{r_a}+\frac{b^3}{r_b}+\frac{c^3}{r_c}-\frac{abc}{r}$

$=\frac{a^3(p-a)}{S}+\frac{b^3(p-b)}{S}+\frac{c^3(p-c)}{S}-\frac{abcp}{S}$

$=\frac{a^3(b+c-a)+b^3(c+a-b)+c^3(a+b-c)-abc(a+b+c)}{2S}$

ដើម្បីបង្ហាញថាសំណើនេះពិត យើងគ្រាន់តែបង្ហាញឲ្យបាន

$a^3(b+c-a)+b^3(c+a-b)+c^3(a+b-c)-abc(a+b+c)\leq 0$

WLOG សន្មតថា $a\geq b\geq c$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&a^3(b+c-a)+b^3(c+a-b)+c^3(a+b-c)-abc(a+b+c)\\
&=a^3b+a^3c-a^4+b^3c+b^3a-b^4+c^3a+c^3b-c^4-a^2bc-ab^2c-abc^2\\
&=-a^2(a^2-ab-ac+bc)-b^2(b^2-ab-bc+ac)-c^2(c^2-ac-bc+ab)\\
&=-a^2(a-b)(a-c)-b^2(b-c)(b-a)-c^2(c-a)(c-b)
\end{aligned}$$

មាន $-c^2(c-a)(c-b)\leq 0$
បង្ហាញថា $-a^2(a-b)(a-c)-b^2(b-c)(b-a)\geq 0$
យើងមាន

$$\begin{aligned}
-a^2(a-b)(a-c)-b^2(b-c)(b-a) &= -(a-b)[a^2(a-c)-b^2(b-c)]\\
&=-(a-b)(a^3-b^3-a^2c+b^2c)\\
&=-(a-b)[(a-b)(a^2+ab+b^2)-c(a-b)(a+b)]\\
&=-(a-b)^2(a^2+ab+b^2-ac-bc)\\
&=-(a-b)^2[a(a+b-c)+b(b-c)]\leq 0
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\dfrac{a^3}{r_a}+\dfrac{b^3}{r_b}+\dfrac{c^3}{r_c}\leq\dfrac{abc}{r}$

សម្គាល់

WLOG: Without Loss of Generality (ដោយមិនបាត់បង់លក្ខណៈទូទៅ)

ឃ) $\dfrac{a}{r_a}+\dfrac{b}{r_b}+\dfrac{c}{r_c}\leq\dfrac{9R}{p}$

យើងមាន $r_a=p\tan\dfrac{A}{2},\quad r_b=p\tan\dfrac{B}{2}$ និង $\quad r_c=p\tan\dfrac{C}{2}$

នោះ

$$\begin{aligned}
\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}-\frac{9R}{p} &= \frac{a}{p\tan\frac{A}{2}}+\frac{b}{p\tan\frac{B}{2}}+\frac{c}{p\tan\frac{C}{2}}-\frac{9R}{p}\\
&=\frac{1}{p}\left(\frac{a}{\tan\frac{A}{2}}+\frac{b}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{c}{\tan\frac{C}{2}}-9R\right)\\
&=\frac{1}{p}\left(a\cot\frac{A}{2}+b\cot\frac{B}{2}+c\cot\frac{C}{2}-9R\right)\\
&=\frac{1}{p}\left(2R\sin A\cot\frac{A}{2}+2R\sin B\cot\frac{B}{2}+2R\sin C\cot\frac{C}{2}-9R\right)\\
&=\frac{R}{4p}\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-\frac{9}{4}\right)\leq 0
\end{aligned}$$

ព្រោះ $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\leq\frac{9}{4}$

ដូចនេះ $\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}\leq\frac{9R}{p}$

ឆ) $r_a^2+r_b^2+r_c^2\geq l_a^2+l_b^2+l_c^2$

យើងមាន $S=(p-a)r_a\Rightarrow r_a=\frac{S}{p-a}$

ដូចគ្នាដែរ $r_b=\frac{S}{p-b}$ និង $r_c=\frac{S}{p-c}$

នោះ

$$\begin{aligned}
r_a^2+r_b^2+r_c^2 &= \frac{S^2}{(p-a)^2}+\frac{S^2}{(p-b)^2}+\frac{S^2}{(p-c)^2}\\
&= S^2\left[\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\right]\\
&= p(p-a)(p-b)(p-c)\left[\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\right]\\
&= p\left[\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}+\frac{(p-c)(p-a)}{p-b}+\frac{(p-a)(p-b)}{p-c}\right] \quad (1)
\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត $l_a^2=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}=\frac{4bc}{(b+c)^2}\times p(p-a)\leq p(p-a)$ ព្រោះ $(b+c)^2\geq 4bc$

ដូចគ្នាដែរ $l_b^2\leq p(p-b)$ និង $l_c^2=p(p-c)$

នោះ

$$\begin{aligned}
l_a^2+l_b^2+l_c^2\leq p(p-a)+p(p-b)+p(p-c) &= p(p-a+p-b+p-c)\\
&= p^2 \quad (2)
\end{aligned}$$

តាម (1) និង(2) ដើម្បីបង្ហាញថាវិសមភាពពិតយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}+\frac{(p-c)(p-a)}{p-b}+\frac{(p-a)(p-b)}{p-c}\geq p$$

តាមវិសមភាព Cauchy

$$\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}+\frac{(p-c)(p-a)}{p-b}\geq 2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}\times\frac{(p-c)(p-a)}{p-b}}=2(p-c) \qquad (i)$$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{(p-c)(p-a)}{p-b}+\frac{(p-a)(p-b)}{p-c}\geq 2(p-a) \qquad (ii)$

និង $\frac{(p-a)(p-b)}{p-c}+\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}\geq 2(p-b) \qquad (iii)$

បូក (i) , (ii) និង(iii) យើងបាន

$$2\left[\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}+\frac{(p-c)(p-a)}{p-b}+\frac{(p-a)(p-b)}{p-c}\right]\geq 2(p-a+p-b+p-c)$$

$$\Rightarrow \frac{(p-b)(p-c)}{p-a}+\frac{(p-c)(p-a)}{p-b}+\frac{(p-a)(p-b)}{p-c} \geq 3p-2p=p$$

ដូចនេះ $\quad r_a^2+r_b^2+r_c^2 \geq l_a^2+l_b^2+l_c^2$ ។

ជ) $\dfrac{a^2}{r_a-r}+\dfrac{b^2}{r_b-r}+\dfrac{c^2}{r_c-r} \leq 9R$

យើងមាន $r_a=p\tan\dfrac{A}{2}$ និង $r=(p-a)\tan\dfrac{A}{2}$

នោះ $r_a-r=p\tan\dfrac{A}{2}-(p-a)\tan\dfrac{A}{2}=(p-p+a)\tan\dfrac{A}{2}=a\tan\dfrac{A}{2}$

ដូចគ្នាដែរ $r_b-r=b\tan\dfrac{B}{2}$ និង $\quad r_c-r=c\tan\dfrac{C}{2}$

គេបាន

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{r_a-r}+\frac{b^2}{r_b-r}+\frac{c^2}{r_c-r}-9R &= \frac{a^2}{a\tan\frac{A}{2}}+\frac{b^2}{b\tan\frac{B}{2}}+\frac{c^2}{c\tan\frac{C}{2}}-9R \\
&= \frac{a}{\tan\frac{A}{2}}+\frac{b}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{c}{\tan\frac{C}{2}}-9R \\
&= p\left(\frac{a}{p\tan\frac{A}{2}}+\frac{b}{p\tan\frac{B}{2}}+\frac{c}{p\tan\frac{C}{2}}-\frac{9R}{p}\right) \\
&= p\left(\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}-\frac{9R}{p}\right) \geq 0
\end{aligned}$$

ព្រោះតាមលំហាត់ ២៧- ច យើងមាន $\dfrac{a}{r_a}+\dfrac{b}{r_b}+\dfrac{c}{r_c} \geq \dfrac{9R}{p}$

ឈ) $\dfrac{3S}{R} \leq a\cos^2\dfrac{A}{2}+b\cos^2\dfrac{B}{2}+c\cos^2\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{3S}{2r}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2} &= a\left(\frac{1+\cos A}{2}\right)+b\left(\frac{1+\cos B}{2}\right)+c\left(\frac{1+\cos C}{2}\right) \\
&= \frac{a+b+c}{2}+\frac{1}{2}(a\cos A+b\cos B+c\cos C) \\
&= p+\frac{1}{2}(2R\sin A\cos A+2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C) \\
&= p+\frac{R}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)
\end{aligned}$$

ដោយ $\quad \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

នោះ

$$\begin{aligned} a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2} &= p+2R\sin A\sin B\sin C \\ &= \frac{S}{r}+\frac{1}{2R}(2R\sin A)(2R\sin B)\sin C \\ &= \frac{S}{r}+\frac{1}{2R}ab\sin C=\frac{S}{r}+\frac{S}{R} \end{aligned}$$

ដោយ $R\geq 2r \quad \Rightarrow \frac{1}{r}\geq\frac{2}{R} \quad \Rightarrow \frac{S}{r}\geq\frac{2S}{R} \quad \Rightarrow \frac{S}{r}+\frac{S}{R}\geq\frac{3S}{R}$ (1)
និង $\frac{S}{R}\leq\frac{S}{2r} \quad \Rightarrow \frac{S}{r}+\frac{S}{R}\leq\frac{S}{2r}+\frac{S}{r}=\frac{3S}{2r}$ (2)
តាម (1) និង(2) យើងបាន $\frac{3S}{R}\leq\frac{S}{R}+\frac{S}{r}\leq\frac{3S}{2r}$
ដូចនេះ $\frac{3S}{R}\leq 1\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}\leq\frac{3S}{2r}$
ញ) $\sqrt{a+b+c}<\sqrt{r_a\sin A}+\sqrt{r_b\sin B}+\sqrt{r_c\sin C}\leq\frac{3}{2}\sqrt{a+b+c}$
យើងមាន

$$\begin{aligned} \sqrt{r_a\sin A}+\sqrt{r_b\sin B}+\sqrt{r_c\sin C} &= \sqrt{p\tan\frac{A}{2}\sin A}+\sqrt{p\tan\frac{B}{2}\sin B}+\sqrt{p\tan\frac{C}{2}\sin C} \\ &= \sqrt{2p\sin^2\frac{A}{2}}+\sqrt{2p\sin^2\frac{B}{2}}+\sqrt{2p\sin^2\frac{C}{2}} \\ &= \sqrt{2p}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right) \end{aligned}$$

ដោយ $1<\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq\frac{3}{2}$
នោះ $\sqrt{2p}<\sqrt{r_a\sin A}+\sqrt{r_b\sin B}+\sqrt{r_c\sin C}\leq\frac{3}{2}\sqrt{2p}$
ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់
ដ) $\frac{\sqrt{p}abc\sin C}{ab\sin^2 C+pc}\leq\frac{1}{2}\sqrt{abc}<\frac{ab\sin^2 C+pc}{4\sqrt{p}\sin C}$
តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $\frac{r+R}{2}>\sqrt{Rr}$ ព្រោះ $r\neq R$
នោះ $\frac{1}{\sqrt{Rr}}>\frac{2}{r+R}\Rightarrow\sqrt{Rr}>\frac{2Rr}{r+R}$
គេបាន $\frac{2Rr}{r+R}<\sqrt{Rr}<\frac{R+r}{2}$ (1)
ដោយ $r=\frac{S}{p}$ និង $R=\frac{abc}{4S}$

យើងបាន (1) សមមូលនឹង

$$\frac{2\left(\frac{abc}{4S}\right)\left(\frac{S}{p}\right)}{\frac{S}{p}+\frac{abc}{4S}} < \sqrt{\left(\frac{abc}{4S}\right)\left(\frac{S}{p}\right)} < \frac{\frac{abc}{4S}+\frac{S}{p}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{abc}{2p}}{\frac{ab\sin C}{2p}+\frac{abc}{2ab\sin C}} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{abc}{p}} < \frac{\frac{abc}{2ab\sin C}+\frac{ab\sin C}{2p}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{abc\sin C}{ab\sin^2 C+pc} < \frac{1}{2}\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{p}} < \frac{ab\sin^2 C+pc}{4p\sin C}$$

ដូចនេះ $\dfrac{\sqrt{p}abc\sin C}{ab\sin^2 C+pc} \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{abc} < \dfrac{ab\sin^2 C+pc}{4\sqrt{p}\sin C}$

ឋ) $\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{S}{R}\right)^2 \leq \dfrac{ab\sqrt{ab}}{a+b}+\dfrac{bc\sqrt{bc}}{b+c}+\dfrac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \leq \dfrac{8}{3}\left(\dfrac{S}{2r}\right)^2$

យើងមាន $a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad \Rightarrow \dfrac{\sqrt{ab}}{a+b} \leq \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \dfrac{ab\sqrt{ab}}{a+b} \leq \dfrac{ab}{2}$

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{bc\sqrt{bc}}{b+c} \leq \dfrac{bc}{2}$ និង $\dfrac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \leq \dfrac{ca}{2}$

នោះ

$$\begin{aligned}\frac{ab\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{bc\sqrt{bc}}{b+c}+\frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} &\leq \frac{1}{2}(ab+bc+ca)\\ &\leq \frac{1}{6}(a+b+c)^2 = \frac{(2p)^2}{6}\end{aligned}$$

ព្រោះ $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

យើងបាន $\dfrac{ab\sqrt{ab}}{a+b}+\dfrac{bc\sqrt{bc}}{b+c}+\dfrac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \leq \dfrac{2\left(\frac{S}{r}\right)^2}{3} = \dfrac{8}{3}\left(\dfrac{S}{2r}\right)^2$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត

$$\begin{aligned}S^2 &= p\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)}\\ &\leq p\left(\frac{p-a+p-b}{2}\right)\left(\frac{p-b+p-c}{2}\right)\left(\frac{p-c+p-a}{2}\right) = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{abc}{8}\right)\end{aligned}$$

និង $\dfrac{a+b+c}{2} = R(\sin A+\sin B+\sin C) \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$

ព្រោះ $\sin A+\sin B+\sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

យើងបាន $R \geq \dfrac{a+b+c}{3\sqrt{3}}$

យើងបាន

$$
\begin{aligned}
\frac{8}{3}\left(\frac{S}{R}\right)^2 &\leq \frac{8}{3}\frac{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{abc}{8}\right)}{\left(\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}}\right)^2} \\
&= \frac{9abc}{2(a+b+c)} \\
&= \frac{9abc}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} \\
&\leq \frac{9abc}{3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \\
&= \frac{3abc}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \\
&\leq \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{bc\sqrt{bc}}{b+c}+\frac{ca\sqrt{ca}}{c+a}
\end{aligned}
$$

គេបាន $\frac{8}{3}\left(\frac{S}{R}\right)^2 \leq \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{bc\sqrt{bc}}{b+c}+\frac{ca\sqrt{ca}}{c+a}$ (2)

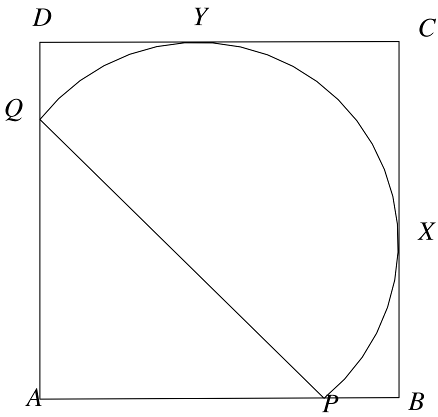
តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\frac{8}{3}\left(\frac{S}{R}\right)^2 \leq \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{bc\sqrt{bc}}{b+c}+\frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \leq \frac{8}{3}\left(\frac{S}{2r}\right)^2$$

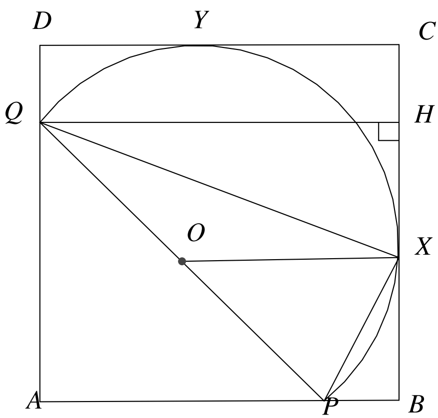
លំហាត់ ២៨

(ភ្នំពេញ, 2015)

ក្នុងរូប $ABCD$ ជាការេដែលមានប្រវែងជ្រុងស្មើនឹង 1។អង្កត់ $[PQ]$ បង្កើតបានមុំ 45° ជាមួយជ្រុង $[AB]$ ហើយ ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃកន្លះរង្វង់ដូចរូប។ កន្លះរង្វង់នេះប៉ះនឹងជ្រុងការេត្រង់ចំណុច X និងY ។រកផ្ទៃក្រឡា កន្លះរង្វង់។



សម្រាយ



យក H ជាចំណោលកែងនៃ Q លើ $[BC]$ និង O ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[PQ]$
យើងបាន $DCHQ$ ជាចតុកោណកែង $\Rightarrow QH = DC = 1$
ម្យ៉ាងទៀត $[QH]//[PB] \Rightarrow QHBP$ ជាចតុកោណព្នាយ
ដោយ $[OX]\perp[BC] \Rightarrow [OX]//[PB]//[QH]$

យើងបាន $[OX]$ ជាបាតមធ្យមនៃចតុកោណញ្ញយ $QHBP$
រំបាក $r = OX = \dfrac{QH+PB}{2} = \dfrac{1+PB}{2}$ (1)
ត្រីកោណ APQ ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A
មាន

$$
\begin{aligned}
AQ^2+AP^2 &= PQ^2\\
\Rightarrow 2AP^2 &= 4OP^2\\
\Rightarrow OP &= \frac{AP}{\sqrt{2}} = \frac{1-PB}{\sqrt{2}}\\
\Rightarrow r &= \frac{1-PB}{\sqrt{2}} \quad (2)
\end{aligned}
$$

តាម (1) និង(2) យើងបាន

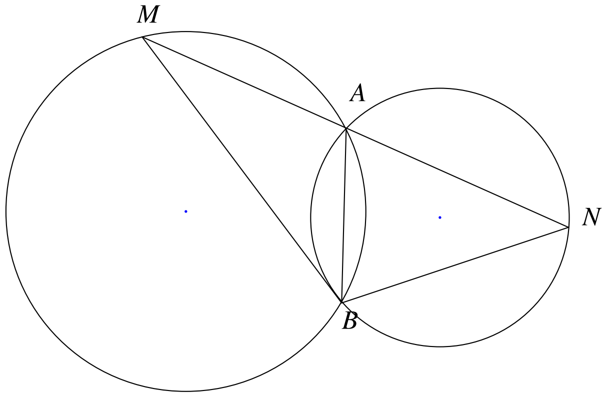
$$
\begin{aligned}
&\frac{1+PB}{2} = \frac{1-PB}{2}\\
&\Rightarrow \sqrt{2}+PB\sqrt{2} = 2-2PB\\
&\Rightarrow PB(2+\sqrt{2}) = 2-\sqrt{2}\\
&\Rightarrow PB = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{4-4\sqrt{2}+2}{2} = 3-2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

នោះ $r = \dfrac{1+3-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}$
ហេតុនេះ $S = \dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{\pi(2-\sqrt{2})^2}{2} = \dfrac{\pi(4-2\sqrt{2}+2)}{2} = \pi(3-\sqrt{2})$
សរុបមក $S = \pi(3-\sqrt{2})$

លំហាត់ ២៩

រង្វង់ពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំណុចA និង B ។ បន្ទាត់ចល័ត (MN) កាត់តាម A ហើយជួបរង្វង់ធំត្រង់ M និង រង្វង់តូចត្រង់ N ។ បង្ហាញថា $\dfrac{BM}{BN}$ មានតម្លៃថេរ កាលណា (MN) វិលជុំវិញចំណុច A។

សម្រាយ

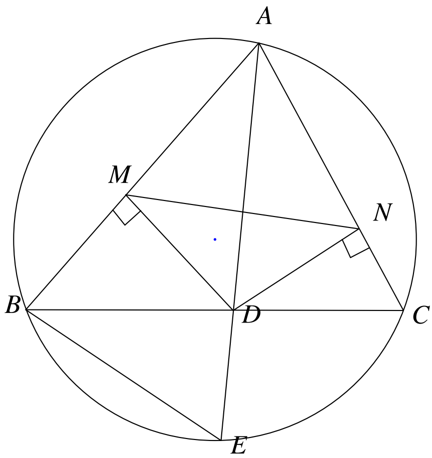


ក្នុងរង្វង់ធំ $\angle AMB = \dfrac{\frown AB}{2}$
ក្នុងរង្វង់តូច $\angle ANB = \dfrac{\frown AB}{2}$
ដោយ $\frown AB$ ថេរ នោះ $\angle AMB$ និង $\angle ANB$ ថេរ
យើងបាន $\sin\angle AMB$ និង $\sin\angle ANB$ ថេរ
តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\dfrac{BM}{\sin\angle ANB} = \dfrac{BN}{\sin\angle AMB}$
នោះ $\dfrac{BM}{BN} = \dfrac{\sin\angle ANB}{\sin\angle AMB}$ ថេរ
ដូចនេះ $\dfrac{BM}{BN}$ មានតម្លៃថេរ

លំហាត់ ៣០

ត្រីកោណ ABC មួយមានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle BAC$ ជួបជ្រុង $[BC]$ ត្រង់ D ហើយ ជួបរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ E ។ តាមចំណុច Dគេគូសបន្ទាត់កែង នឹងជ្រុង $[AB]$ និង $[AC]$ រៀងគ្នាត្រង់ចំណុចM និងN។
បង្ហាញថា $S_{AMEN} = S_{\triangle ABC}$។

សម្រាយ



ត្រីកោណកែង AMD និង AND មាន

$[AD]$ ជាអ៊ីប៉ូតេនុសរួម និង $\angle MAD = \angle NAD$ ($[AD)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះ $\angle A$)

នោះ $\triangle AMD \cong \angle AND$ (ករណី អ.ម)

វិបាក $AM = AN$

គេបាន $\triangle AMN$ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A

នោះ $[AD] \perp [MN]$

យើងបាន $S_{AMEN} = \dfrac{1}{2} \times AE \times MN$ (1)

ត្រីកោណ ACD និង AEB មាន

$\angle ACD = \angle AEB$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)

$\angle CAD = \angle EAB$

នោះ $\triangle ACD \sim \triangle AEB$

វិបាក $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AC}{AE} \Rightarrow AB \times AC = AE \times AD$

ម្យ៉ាងវិញទៀត $AMDN$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត $[AD]$

ព្រោះ $\angle AMD = \angle AND = 90^\circ$

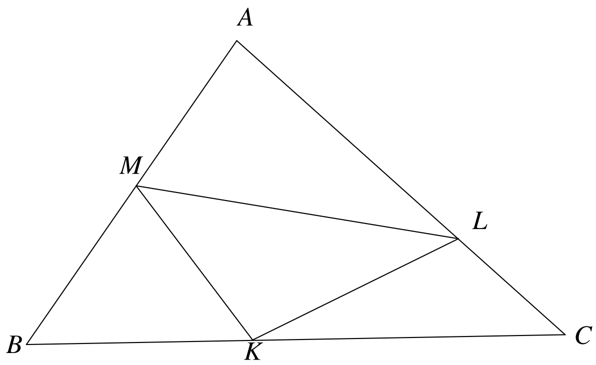
តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសយើងបាន $\dfrac{MN}{\sin \angle BAC} = AD$

នោះ $AB \times AC = \dfrac{AE \times MN}{\sin \angle BAC} \Rightarrow AE \times MN = \sin \angle BAC \times AB \times AC$

តាម (1) យើងបាន $S_{AMEN} = \dfrac{1}{2} \times \sin \angle BAC \times AB \times AC = S_{\triangle ABC}$

ដូចនេះ $S_{AMEN} = S_{\triangle ABC}$

លំហាត់ ៣១
ចំណុច M,K,L ត្រូវគេដៅរៀងគ្នាលើជ្រុង $[AB],[BC],[CA]$ នៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា យ៉ាង តិចក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណមួយក្នុងចំណោមត្រីកោណ MAL, KBM និង LCK តិចជាង រឺ ស្មើនឹង $\frac{1}{4}$ នៃត្រីកោណ ABC។
សម្រាយ



យើងមាន $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\angle BAC$
និង

$$\begin{aligned} S_{\triangle MAL} &= \frac{1}{2}AM \times AL \times \sin\angle MAL \\ &= \frac{1}{2}AM \times AL \times \sin\angle BAC \end{aligned}$$

យើងបាន $\dfrac{S_{\triangle MAL}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}AM \times AL \times \sin\angle BAC}{\frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\angle BAC} = \dfrac{AM}{AB} \times \dfrac{AL}{AC}$
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\dfrac{S_{\triangle KBM}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{BM}{AB} \times \dfrac{BK}{BC}$ និង $\dfrac{S_{\triangle KCL}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{CK}{BC} \times \dfrac{CL}{AC}$

នោះ

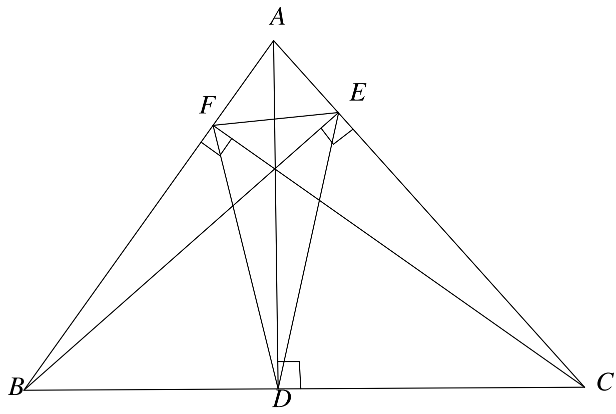
$$\left(\frac{S_{\triangle MAL}}{S_{\triangle ABC}}\right)\left(\frac{S_{\triangle KBM}}{S_{\triangle ABC}}\right)\left(\frac{S_{\triangle LCK}}{S_{\triangle ABC}}\right)=\frac{AM}{AB}\times\frac{AL}{AC}\times\frac{BM}{AB}\times\frac{BK}{BC}\times\frac{CK}{BC}\times\frac{CL}{AC}$$
$$=\left(\frac{AM}{AB}\times\frac{BM}{AB}\right)\left(\frac{AL}{AC}\times\frac{CL}{AC}\right)\left(\frac{BK}{BC}\times\frac{CK}{BC}\right)$$

តាមវិសមភាព Cauchy $\frac{AM}{AB}\times\frac{BM}{AB}\leq\left(\frac{AM+BM}{2AB}\right)^2=\frac{AB^2}{4AB^2}=\frac{1}{4}$
ដូចគ្នាដែរ $\frac{AL}{AC}\times\frac{CL}{AC}\leq\frac{1}{4}$ និង $\frac{BK}{BC}\times\frac{CK}{BC}\leq\frac{1}{4}$
យើងបាន $\left(\frac{S_{\triangle MAL}}{S_{\triangle ABC}}\right)\left(\frac{S_{\triangle KBM}}{S_{\triangle ABC}}\right)\left(\frac{S_{\triangle LCK}}{S_{\triangle ABC}}\right)\leq\frac{1}{64}$
ឧបមាថា $\frac{S_{\triangle MAL}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{1}{4},\ \frac{S_{\triangle KBM}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{1}{4}$ និង $\frac{S_{\triangle LCK}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{1}{4}$
នោះ $\left(\frac{S_{\triangle MAL}}{S_{\triangle ABC}}\right)\left(\frac{S_{\triangle KBM}}{S_{\triangle ABC}}\right)\left(\frac{S_{\triangle LCK}}{S_{\triangle ABC}}\right)>\frac{1}{64}$ ផ្ទុយពីការពិត
ដូចនេះ យ៉ាងតិចក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណមួយក្នុងចំណោមត្រីកោណ $MAL,\ KBM$ និង LCK តិចជាង រឺ ស្មើនឹង $\frac{1}{4}$ នៃត្រីកោណ ABC ។

លំហាត់ ៣២

(កម្ពុជា, 2017)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណមុំស្រួច ហើយ $[AD],[BE]$ និង $[CF]$ ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណនេះ ។ បង្ហាញថា $DE+EF+FD\leq\frac{1}{2}(a+b+c)$ ។



សម្រាយ

ដោយ $[AD]$ និង $[BE]$ ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ ABC
នោះ $\angle AEB = 90^\circ$ និង $\angle ADB = 90^\circ$
គេបាន $ABDE$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់
តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសយើងបាន $\dfrac{DE}{\sin\angle DAE} = AB = c$
នោះ $DE = c\sin\angle DAE$
ម្យ៉ាងទៀត $\angle DAE + \angle C = 90^\circ \Rightarrow \sin\angle DAE = \cos C$
នោះ $DE = c\cos C$
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $DF = b\cos B$ និង $EF = a\cos A$
ហេតុនេះ

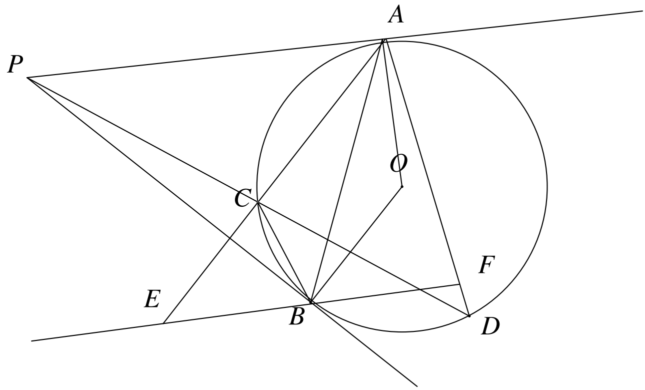
$$\begin{aligned}
DE + FD &= c\cos C + b\cos B \\
&= 2R\sin C\cos C + 2R\sin B\cos B \\
&= R(\sin 2B + \sin 2C) \\
&= 2R\sin(B+C)\cos(B-C) \\
&= 2R\sin A\cos(B-C) \\
&= a\cos(B-C) \le a
\end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរ $EF + FD \le c$ និង $DE + EF \le b$
បូកអង្គ និង អង្គនៃវិសមភាពយើងបាន $2(DE+EF+FD) \le a+b+c$
ដូចនេះ $DE + EF + FD \le \dfrac{1}{2}(a+b+c)$

លំហាត់ ៣៣

(កម្ពុជា, 2017)

គេមានរង្វង់មួយដែលមានផ្ចិត O និង P ជាចំណុចមួយនៅក្រៅរង្វង់ ។ PA និង PB ជាបន្ទាត់ប៉ះគូសចេញពី P ទៅប៉ះរង្វង់ផ្ចិត O ត្រង់ A និង B ។ PD ជាបន្ទាត់កាត់គូសចេញពី P ដែលកាត់រង្វង់ត្រង់ C និង D ។ BF ជាបន្ទាត់ស្របនឹង PA ហើយកាត់បន្ទាត់ AC និង AD រៀងគ្នាត្រង់ E និង F ។ ស្រាយបំភ្លឺថា $BE = BF$ ។



សម្រាយ

ត្រីកោណ ABC និង ត្រីកោណ AEB មាន

$\angle BAC = \angle EAB$ (មុំរួម)

ដោយ $\angle ABC = \angle PAC$ (មុំចារឹក និង ចារឹកពិសេសស្កាត់ធ្នូរួម)

និង $\angle AEB = \angle PAC$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)

យើងបាន $\angle ABC = \angle AEB$

នោះ $\triangle ABC \sim \triangle AEB$

វិបាក $\dfrac{BC}{BE} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow BE = \dfrac{AB \times BC}{AC}$ (1)

ត្រីកោណ ABF និង ត្រីកោណ ADB មាន

$\angle BAF = \angle BAD$ (មុំរួម)

ដោយ $\angle ADB = \angle PAB$ (មុំចារឹក និង ចារឹកពិសេសស្កាត់ធ្នូរួម)

និង $\angle PAB = \angle ABF$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)

យើងបាន $\angle ADB = \angle ABF$

នោះ $\triangle ADB \sim \triangle ABF$

វិបាក $\dfrac{BF}{DB} = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow BF = \dfrac{AB \times BD}{AD}$ (2)

ម៉្យាងទៀត

$\triangle PBC \sim \triangle PDB \Rightarrow \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{PC}{PB}$

$\triangle PCA \sim PAD \Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{PC}{PA}$

ដោយ $PA = PB$ (ព្រោះ PA និង PB ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ត្រង់ A និង B រៀងគ្នា)

យើងបាន $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{AC}{AD} \Rightarrow \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BC}{CA}$

តាម (2) យើងបាន $BF = \dfrac{AB \times BC}{AC}$ (3)

តាម (1) និង (3) យើងបាន $BE = BF$

ដូចនេះ $BE = BF$

ឯកសារយោង

1. Evan Chen, Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads, MAA Books, 2016.
2. Viktor Prasolov, PROBLEMS IN PLANE AND SOLID GEOMETRY, V.1 Plane Geometry.
3. Titu Andreescu and Zuming Feng, 103 Trigonometry Olympiad, Birkhauser.
4. វេបសាយ www.cut-the-knot.org
5. វេបសាយ artofproblemsolving.com
6. រួមទាំងឯកសារខ្មែរ និង បរទេសជាច្រើនទៀត