Mathematical Olympiad Series

មូលដ្ឋានគ្រឹះ គណិតវិភាគ

មេរៀន និង លំហាត់

សម្រាប់ប្រឡងសិស្សពូកែ

អាហារូបករណ៍ និង ការប្រឡងផ្សេងៗ

$\text{jim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\dots+\frac{(2009)(2010)\dots(2009+n-1)}{n!}$

$x_n = \int_1^n \frac{\cos t}{t^0} dt$

$x_1 + x_2 + \dots + x_{2001}$

រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

គណិតវិភាគជាមេរៀនមួយប្រភេទដែលពេញនិយមក្នុងការប្រឡងប្រជែងនានាក្នុងផ្នែកគណិតវិទ្យា ពិសេសនោះគឺ ការប្រឡងសិស្សពូកែមិនថាថ្នាក់ជាតិ រឺ អន្តរជាតិឡើយ ។ លើសពីនេះទៅទៀត គណិតវិភាគបានចូលរួមចំណែកយ៉ាងខ្លាំងក្លាក្នុងវិស័យវិស្វកម្ម(សំណង់ស៊ីវិល) ។ ទាំងនេះ គឺជាបុព្វហេតុដ៏ចម្បងដែលធ្វើឲ្យសៀវភៅមួយក្បាលនេះលេចរូបរាងឡើង ។

សៀវភៅ គណិតវិភាគ នេះត្រូវបានចែកចេញជាបីផ្នែកសំខាន់ គឺ

- មូលដ្ឋានគ្រឹះ
- ប្រធានលំហាត់
- ដំណោះស្រាយ ។

ក្នុងផ្នែកមូលដ្ឋានគ្រឹះខ្ញុំបាទបានដកស្រង់យកគន្លឹះ និង សង្ខេបជាមេរៀនលើផ្នែកគណិតវិភាគកម្រិតមូលដ្ឋានក្នុងគោលបំណងដើម្បីរំលឹក និង បន្ថែមនូវចំណេះដឹងថ្មីផ្សេងទៀតសម្រាប់មិត្តអ្នកអាន ។ ចំណែកផ្នែកប្រធានលំហាត់វិញ ខ្ញុំបាទបានប្រមូលផ្តុំនូវលំហាត់ល្អៗមួយចំនួននៅក្នុងសៀវភៅបរទេស សៀវភៅខ្មែរ (សៀវភៅលោកគ្រូ សួន សូវ៉ាន់) ព្រមទាំងលំហាត់ដែលចេញប្រឡងក្នុងប្រទេសកម្ពុជា និង បណ្តាប្រទេសផ្សេងៗមកដាក់ជាចំណោទបញ្ហាសម្រាប់ឲ្យមិត្តអ្នកអានសាកល្បងសមត្ថភាពរបស់ខ្លួនលើផ្នែកគណិតវិភាគ ។ ផ្នែកចុងក្រោយ គឺ ដំណោះស្រាយ ។ ក្នុងផ្នែកនេះយើងខ្ញុំបានលើកយកលំហាត់ទាំងអស់ដែលបានដាក់ជាចំណោទបញ្ហាមកដោះស្រាយជាគំរូសម្រាប់មិត្តអ្នកអានដើម្បីផ្តល់ជាគំនិត រឺ វិធីសាស្ត្រថ្មីសម្រាប់ដោះស្រាយលំហាត់ ។

សូមទុកសៀវភៅនេះជាមិត្តសម្លាញ់របស់អ្នកក្នុងផ្នែកគណិតវិទ្យាផងចុះ ដោយទាញយកចំណេះដឹងឲ្យអស់លទ្ធភាពពីសៀវភៅមួយក្បាលនេះ ។

រាល់គ្រប់ផ្នែកទាំងអស់នៃសៀវភៅនេះត្រូវបានប្រសូត្រឡើងដោយការផ្ចិតផ្ចង់ពី

ខ្ញុំបាទ ។ តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាលើផ្នែកបច្ចេកទេស កុំព្យូទ័ និង ដំណោះស្រាយប្រាកដជាកើតមានជាក់ជាមិនខាន ។ ហេតុនេះក្នុងនាមយើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀង យើងខ្ញុំសូមទទួលជានិច្ចចំពោះមតិរិះគន់ពីសំណាកមិត្តអ្នកអានគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ។

ភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី ២២ ខែ ១០ ឆ្នាំ ២០១៤

រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

ទូរស័ព្ទលេខ 086 24 19 23

Facebook: Piseth Chea

Wordpress: www.artofmaths.wordpress.com

មូលដ្ឋានគ្រឹះ

I. វិចារកំណើន (Mathematical Inductions)

ឧបមាថា $p(n)$ ជាសំណើទាក់ទងនឹងចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

1) ទម្រង់ខ្សោយ (Weak Inductions)

បើ ក/ $p(1)$ ពិត

ខ/ $p(n)$ ពិត នាំឲ្យ $p(n+1)$ ពិត ។

យើងបាន $p(n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យ $f(a,1) = \begin{cases} 1 \text{ បើ } a = 1 \\ 0 \text{ បើ } a > 1, a \in \mathrm{IN}^* \end{cases}$

និង $f(a, n+1) = \begin{cases} f(a,n) + 1 \text{ បើ } a = 1 \\ f(a,n) + f(a-1, n) \text{ បើ } a > 1, a \in \mathrm{IN}^* \end{cases}$ ។

បង្ហាញថា $f(a,n) = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-a+1)}{a!}$ ។

សម្រាយ

យក $P(n): f(a,n) = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-a+1)}{a!}$

ចំពោះ $n = 1$

បើ $a = 1$ យើងបាន $f(1,1) = \dfrac{1}{1!} = 1$ ពិត

បើ $a > 1$ យើងបាន $f(a,1) = \dfrac{1(1-1)\ldots(1-a+1)}{a!} = 0$ ពិត

ហេតុនេះ $P(1)$ ពិត

ឧបមាថា $P(k)$ ពិត គឺ $f(a,k) = \dfrac{k(k-1)\ldots(k-a+1)}{a!}$

ពិនិត្យ $P(k+1)$

បើ $a=1$ យើងបាន $f(a,k+1)=f(a,k)+1=\frac{k}{1!}+1=k+1=\frac{k+1}{1!}$

បើ $a>1$ យើងបាន $f(a,k+1)=f(a,k)+f(a-1,k)$

$$=\frac{k(k-1)\ldots(k-a+1)}{a!}+\frac{k(k-1)\ldots(k-a+2)}{(a-1)!}$$

$$=\frac{k(k-1)\ldots(k-a+2)}{a!}[(k-a+1)+a]$$

$$=\frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k+1-a+1)}{a!}$$

យើងបាន $P(k+1)$ ពិត $\Rightarrow P(n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$

ដូចនេះ $f(a,n)=\frac{n(n-1)\ldots(n-a+1)}{a!}$

2) ឧទ្រម្រង់ខ្លាំង (Strong Inductions)

បើ ក/ $p(1)$ ពិត

ខ/ $p(i)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $i=\overline{1,n}$ (មានន័យថា $p(1)\wedge p(2)\wedge \ldots \wedge p(k)$ ពិត) នាំឲ្យ $p(k+1)$ ពិត

យើងបាន $p(n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$ ។

3) ឧទ្រម្រង់គូ-សេស

បើ ក/ $p(1)\wedge p(2)$ ពិត

ខ/ $p(k)$ ពិត នាំឲ្យ $p(k+2)$ ពិត

យើងបាន $p(n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យ $x_1=1,\ x_2=2$ និង $x_{n+2}=x_n+1$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។

បង្ហាញថា $x_n = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}\left[1+(-1)^n\right]$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $n=1$ និង $n=2$ យើងបាន $x_1 = \frac{1}{2}(1+1) + \frac{1}{4}\left[1+(-1)^1\right] = 1$

និង $x_2 = \frac{1}{2}(2+1) + \frac{1}{4}\left[1+(-1)^2\right] = 2$ ពិត

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n=k$

ពិនិត្យករណី $n=k+2$

យើងមាន $x_k = \frac{1}{2}(k+1) + \frac{1}{4}\left[1+(-1)^k\right]$

$$\Rightarrow x_{k+2} = x_k + 1 = \frac{1}{2}(k+1) + \frac{1}{4}\left[1+(-1)^k\right] + 1$$

$$= \frac{1}{2}\left[(k+2)-1\right] + \frac{1}{4}\left[1+(-1)^{k+2}\right] + 1$$

$$= \frac{1}{2}(k+2) + \frac{1}{4}\left[1+(-1)^{k+2}\right]$$ ពិត

ដូចនេះ $x_n = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}\left[1+(-1)^n\right], \ \forall n \geq 1$

4) ឱស្រូវចុះ Backward I

បើ

ក/ $p(n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{A}$ ដែល A ជាសំណុំរងមានចំនួនធាតុមិនកំណត់នៃ IN^*

ខ/ បើ $p(k)$ ពិត នាំឲ្យ $p(k-1)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $k \geq 2$

យើងបាន $p(n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $[a,b]$ មានន័យថា

$f(x_1)+f(x_2)\le 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ចំពោះគ្រប់ $x_1,\ x_2\in[a,b]$ ។

យក $I(n)$:បើ $x_i\in[a,b]$ចំពោះ $i=\overline{1,n}$ គេបាន $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$

$$\le nf\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$$ ។

ក/ តាមវិចារកំណើន បង្ហាញថា $I(2^k)$ពិត ចំពោះគ្រប់ $k\in\mathrm{IN}^*$ ។

ខ/ បង្ហាញថា បើ $I(n)$ពិតចំពោះ $n\ge 2$យើងបាន $I(n-1)$ពិត ។

គ/ បង្ហាញថា $I(n)$ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*$ ។

សម្រាយ

ក/

ដោយ $I(n)$:បើ $x_i\in[a,b]$ចំពោះ $i=\overline{1,n}$ គេបាន $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$

$$\le nf\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$$

យើងបាន $I(2^1)=I(2)$ ពិត ព្រោះ f ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $[a,b]$

$\Rightarrow f(x_1)+f(x_2)\le 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ចំពោះគ្រប់ $x_1,\ x_2\in[a,b]$

ឧបមាថា $I(2^k)$ពិត គឺ $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^k})\le 2^k f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^k}}{2^k}\right)$

ពិនិត្យករណី $n=2^{k+1}$

យើងមាន $f(x_1)+...+f(x_{2^k})+...+f(x_{2^{k+1}})$

$$\le 2^k f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^k}}{2^k}\right)+2^k f\left(\frac{x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$$

$$= 2^k\left[f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^k}}{2^k}\right)+f\left(\frac{x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right]$$

$$\le 2^k\times 2\left[f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^k}+x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right)\right]$$

$$= 2^{k+1}\left[f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{2^k}+x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)\right]$$ ពិត

ដូចនេះ $I(2^k)$ ពិត

ខ/

ឧបមាថា $I(n)$ពិត ចំពោះ $n\ge 2$ យើងបាន

$$f(x_1)+\ldots+f(x_n)\le nf\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$$

$$= nf\left(\frac{n-1}{n}\left(\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}+\frac{x_n}{n-1}\right)\right)$$

យក $x_n=\dfrac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}$ យើងបាន $f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+f\left(\dfrac{x_1+..+x_{n-1}}{n-1}\right)$

$$\le nf(x_n)=nf\left(\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\le(n-1)f\left(\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{n-1}\right)$$

ដូចនេះ $I(n-1)$ ពិត

គ/ សំណើនេះពិត ព្រោះ $\forall n\in \mathrm{IN}^*$, $\exists k\in\mathrm{IN}$និង $r\in\mathrm{IN}^*$ដែល $n=2^k-r$

5) **ឧប្រូមង** Backward II

បើ ក/ $p(1)$ពិត

ខ/ $p(2^k)$ ពិត នាំឲ្យ $p(k-1)$ ពិត

យើងបាន $p(n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

6) **ចំណុចចាប់ខុសពី** 1

បើ ក/ $p(a)$ ពិត ដែល $a \in \mathrm{IN}^*$

ខ/ $p(k)$ ពិត ដែល $k \geq a$ នាំឲ្យ $p(k+1)$ ពិត

យើងបាន $p(n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ - $\{1,2,..., a-1\}$ ។

7) **ឧទ្រមខ** Spiral

បើ ក/ $p(1)$ ពិត

ខ/ $p(k)$ ពិត នាំឲ្យ $q(k)$ ពិត

$q(k)$ ពិត នាំឲ្យ $p(k+1)$ ពិត

យើងបាន $p(n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យ $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល $x_{2m-1} = 3m(m-1)+1$ និង $x_{2m} = 3m^2$, $m \in \mathrm{IN}^*$ ។ យក $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ បង្ហាញថា $S_{2m-1} = \frac{m(4m^2 - 3m + 1)}{4}$

និង $S_{2m} = \frac{m(4m^2 + 3m + 1)}{2}$ ។

សម្រាយ

យក $P(m): S_{2m-1} = \frac{m(4m^2 - 3m + 1)}{2}$ និង $Q(m): S_{2m} = \frac{m(4m^2 + 3m + 1)}{2}$

យើងមាន $P(1): S_1 = x_1 = 1$ ពិត

ឧបមាថា $P(k)$ ពិត គឺ $S_{2k-1} = \frac{k(4k^2 - 3k + 1)}{2}$

ដោយ $S_{2k}=S_{2k-1}+x_{2k}=\dfrac{k\left(4k^2-3k+1\right)}{2}+3k^2=\dfrac{k\left(4k^2+3k+1\right)}{2}$

យើងបាន $Q(k)$ ពិត

ម៉្យាងទៀត $S_{2k+1}=S_{2k}+x_{2k+1}=\dfrac{k\left(4k^2+3k+1\right)}{2}+\left[3(k+1)k+1\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(4k^3+12k^2+12k+4\right)-\left(3k^2+6k+3\right)+\left(k+1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[4(k+1)^3-3(k+1)^2+(k+1)\right]$$

$$=\frac{(k+1)\left[4(k+1)^2-3(k+1)+1\right]}{2}\Rightarrow P(k+1) \text{ ពិត}$$

តាមសម្រាយខាងលើយើងបាន

- $P(1)$ ពិត
- $P(k)$ ពិត $\Rightarrow Q(k)$ ពិត $\Rightarrow P(k+1)$ ពិត

យើងបាន $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$

ម៉្យាងទៀត

- $P(1)$ ពិត $\Rightarrow Q(1)$ ពិត
- $Q(k)$ ពិត $\Rightarrow P(k+1)$ ពិត $\Rightarrow Q(k+1)$ ពិត

យើងបាន $Q(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$

8) ទម្រង់ផ្សេងទៀត

A. បើ ក/ $p(1)\wedge p(2)$ ពិត

ខ/ $p(k)\wedge p(k+1)$ ពិត ចំពោះ $k\in \mathrm{IN}^*$ នាំឲ្យ $p(k+2)$ ពិត

យើងបាន $p(n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យ $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ និង $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។ បង្ហាញថា $x_n = 2^{n-1} + 1$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $n = 1,\ 2$ យើងបាន $x_1 = 2^{1-1} + 1 = 2$ និង $x_2 = 2^{2-1} + 1 = 3$ ពិត

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n = k$ និង $n = k+1$ គឺ $x_k = 2^{k-1} + 1$ និង $x_{k+1} = 2^k + 1$

យើងបាន $x_{k+2} = 3x_{k+1} - 2x_k = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1)$

$= 3 \times 2^k + 3 - 2^k - 2 = 2^{k+1} + 1$ ពិត

ដូចនេះ $x_n = 2^{n-1} + 1,\ \forall n \geq 1$

B. បើ ក/ $p(1) \wedge p(2) \wedge ... \wedge p(m)$ ពិត

ខ/ $p(k)$ ពិតចំពោះ $k \in \mathrm{IN}^*$ នាំឲ្យ $p(k+m)$ ពិត

យើងបាន $p(n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

9) ទម្រង់ Double

វិចារកំណើនទម្រង់ Double ត្រូវបានប្រើប្រាស់ដើម្បីបង្ហាញថា សំណើ $P(m,n)$ ។

បើ ក/ $p(m,1)$ និង $p(1,n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ m , $n \in \mathrm{IN}^*$

ខ/ បើ $p(m+1,n)$ និង $p(m,n+1)$ ពិត នាំឲ្យ $p(m+1,n+1)$ ពិត

យើងបាន $p(m,n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ m , $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

ឧទាហរណ៍

បង្ហាញថា ចំនួនចម្លើយគត់មិនអវិជ្ជមាននៃសមីការ $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$

ចំពោះ m , $n \in \mathrm{IN}^*$ កំណត់ដោយ $f(m,n) = \dfrac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$ ។

សម្រាយ

យក $P(m,n)$ ជាសំណើត្រូវបង្ហាញ

a- ចំពោះ $m=1$ យើងបាន $P(1,n)$: ចំនួនចម្លើយគត់មិនអវិជ្ជមាននៃសមីការ $x_1=n$

កំណត់ដោយ $f(1,n)=\frac{(n+1-1)!}{n!(1-1)!}=1$

ហេតុនេះ $P(1,n)$ ពិត

ចំពោះ $n=1$ យើបាន $P(m,1)$: ចំនួនចម្លើយគត់មិនអវិជ្ជមាននៃសមីការ

$x_1+x_2+...+x_m=1$ កំណត់ដោយ $f(m,1)=\frac{(1+m-1)!}{1!(m-1)!}=m$ ពិត

ព្រោះ $\{x_1,x_2,...,x_m\}=\{1,0,0,...,0\}\Rightarrow(x_1,x_2,...,x_n)$ មានចំនួន m

b- ឧបមាថា $P(m,n+1)$ និង $P(m+1,n)$ ពិត

មានន័យថា សមីការ $x_1+x_2+...+x_m=n+1$

និង $x_1+x_2+...+x_m+x_{m+1}=n$ មានចំនួនចម្លើយកំណត់ដោយ

$f(m,n+1)=\frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!}$ និង $f(m+1,n)=\frac{(n+m)!}{n!m!}$ រៀងគ្នា

ពិនិត្យ $P(m+1,n+1)$

ចំពោះសមីការ $x_1+x_2+...+x_m+x_{m+1}=n+1$ (*)

បើ $x_{m+1}=0$ យើងបាន $x_1+x_2+...+x_{m+1}=n+1$

$\Rightarrow$ចំនួនចម្លើយគត់មិនអវិជ្ជមាននៃសមីការ (*) មានចំនួន

$$f(m,n+1)=\frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!}$$

បើ $x_{m+1}>0$ ជំនួស x_{m+1} ដោយ $x_{m+1}+1$ យើងបាន

(*) $\Leftrightarrow x_1+x_2+...+x_m+x_{m+1}=n$ ជាសមីការដែលមានចម្លើយគត់មិន

អវិជ្ជមានចំនួន $f(m+1,n)=\frac{(n+m)!}{n!m!}$

ហេតុនេះ ចំនួនចម្លើយគត់មិនអវិជ្ជមានសរុបនៃសមីការ (*) គឺ

$$\frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!}+\frac{(n+m)!}{n!m!}=\frac{(n+m)!}{(n+1)!m!}[(n+1)+m]$$

$$=\frac{[(n+1)+(m+1)-1]}{(n+1)![(m+1)-1]!}$$

យើងបាន $p(m+1,n+1)$ ពិត

ដូចនេះ $P(m,n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ m , $n\in \mathrm{IN}^*$

II. វិសមភាព

1. វិសមភាពងាយៗ

ចំពោះ $\forall\ a,\ b,\ c > 0$ យើងបាន

- $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$
- $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ និង $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$
- $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(ab + bc + ca)$
- $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ (វិសមភាព Nesbitt) ។

ចំពោះ $\forall\ a,\ b,\ c$ ជាចំនួនពិត យើងបាន

- $|a| \geq a$
- $a + b \leq |a+b| \leq |a| + |b|$
- $|a-b| \geq ||a| - |b||$ ។

2. ត្រីធាយកសញ្ញាតាម a

យក $f(x) = ax^2 + bx + c$ ដែល $a \neq 0$ និង $\Delta = b^2 - 4ac$ ។

បើ $\Delta \leq 0$ នោះ $f(x)$ យកសញ្ញាតាម a (មានន័យថា បើ $a > 0$ ($a < 0$) នោះ $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$))។

3. អនុគមន៍កើន រឺ ចុះ

បើ f ជាអនុគមន៍កើន(ចុះ) លើចន្លោះ $[a,b]$ គេបាន $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$) ចំពោះ $a < x_1 < x_2 < b$ ។

4. វិសមភាពនៃមធ្យម

គេឲ្យ $a_1,\ a_2,\ \dots,a_n$ ជា n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ គេកំណត់យក

$$AM=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ ,\ GM=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

និង $HM=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$ គេបាន $AM\geq GM\geq HM$ សមភាព

កើតឡើងពេល $a_1=a_2=\ldots=a_n$ ។

5. **វិសមភាព** Cauchy-Schwarz

យក $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ និង $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ ជាចំនួនពិត គេបានវិសមភាព

$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$ សមភាពកើតឡើងពេល

$\vec{u}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ និង $\vec{v}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ កូលីនេអ៊ែគ្នា ។

III. ស្វ៊ីតចំនួនពិត

1. និយមន័យ

ស្វ៊ីតជាអនុគមន៍លេខពី INទៅ IR។

2. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតដោយស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន

ក/ $u_{n+1}=au_n+f(n)$ **ដែល** $a\neq1$ **និង** $f(n)\neq0$

ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ គេយក $\{r_n\}$ ជាស្វ៊ីតជំនួយនៃ $\{u_n\}$ ដែល r_n មានរាងដូចអនុគមន៍ $f(n)$។ គេអាចកំណត់ r_n ដោយទំនាក់ទំនង $r_{n+1}=ar_n+f(n)$។ តាង $v_n=u_n-r_n$ យើងបាន $\{v_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ហេតុនេះ គេអាចកំណត់ u_n ។

ខ/ $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$

ស្វ៊ីត $\{u_n\}$ មានសមីការសម្គាល់ $ax^2+bx+c=0$ (*) ។

បើ (*) មានរឹសពីរផ្សេងគ្នា តាងដោយ $x_1,\ x_2$ យើងបាន

$u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$ ដែល α , β អាចកំណត់បានតាម u_1, u_2 ។

បើ (*) មានរឹសឌុប តាងដោយ x_0 យើងបាន $u_n = (\alpha + n\beta)x_0^n$ ដែល α , β អាចកំណត់បានតាម u_1, u_2 ។

បើ (*) មានរឹសជាចំនួនកុំផ្លិច $r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ យើងបាន

$u_n = r^n(\alpha\cos n\theta + \beta\sin n\theta)$ ដែល α , β អាចកំណត់បានតាម u_1, u_2 ។

3. ប្រមាណវិធីលើស្វ៊ីត

យក $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត និង λ ជាចំនួនពិត ។ យើងបាន

- $\{u_n\} + \{v_n\} = \{u_n + v_n\}$
- $\{u_n\} \cdot \{v_n\} = \{u_n v_n\}$
- $\lambda\{u_n\} = \{\lambda u_n\}$

ការប្រៀបធៀបស្វ៊ីតពីរ

គេថា $\{u_n\} > \{v_n\}$ លុះត្រាតែ $u_n \geq v_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ ។

ក្នុងករណីនេះ គេថា $\{u_n\}$ ទាល់ក្រោមដោយ v_n រឺ $\{v_n\}$ ទាល់លើដោយ $\{u_n\}$ ។

4. ស្វ៊ីតទាល់

យក $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត ។ គេថា

- $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ លុះត្រាតែ $\exists M \in \mathrm{IR} : u_n \leq M$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ ។ M ហៅថា គោលលើនៃ $\{u_n\}$ ។
- $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម លុះត្រាតែ $\exists m \in \mathrm{IR} : u_n \geq m$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ ។ m ហៅថា គោលក្រោមនៃ $\{u_n\}$ ។
- $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ លុះត្រាតែវា ជាស្វ៊ីតទាល់លើផង និង ទាល់ក្រោមផង មានន័យថា $m \leq u_n \leq M$ រឺ $\exists A \in \mathrm{IR} : |u_n| \leq A$ ដែល $A = \max\{|m|, |M|\}$ ។

5. ស្វ៊ីតរួម

ក/ និយមន័យ

គេថា $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម លុះត្រាតែ $\{u_n\}$ មានលីមីតពេល $n \to \infty$ រឺ

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathrm{IN}, \forall n \geq \alpha : |u_n - l| < \varepsilon$ ។ គេកំណត់សរសេរ

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ ។

សម្គាល់

ស្វ៊ីតដែលមិនរួម ហៅថាស្វ៊ីតរីក ។

ខ/ ទ្រឹស្តីបទ

- បើ $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម នោះវាមានលីមីតតែមួយគត់ ។
- គ្រប់ស្វ៊ីតរួមទាំងអស់ សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតទាល់ ។

6. ស្វ៊ីតរង រឺ ស្វ៊ីតទាញចេញ

ក/ និយមន័យ

ស្វ៊ីត $\{v_n\}$ ត្រូវបានហៅថា ជាស្វ៊ីតរងនៃស្វ៊ីត $\{u_n\}$ លុះត្រាតែ $v_n = u_{n'}$ ដែល $n' = \varphi(n)$ (φ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតពី IN ទៅ IN) ។

ខ/ ទ្រឹស្តីបទ

បើ $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីត l នោះ គ្រប់ស្វ៊ីតរងនៃស្វ៊ីត $\{u_n\}$ សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីត l ។

7. ប្រមាណវិធី និង ទ្រឹស្តីបទនៃស្វ៊ីតរួម

- បើ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l'$ យើងបាន

  ក/ $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = l \pm l'$

  ខ/ $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = ll'$ ។

- បើ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ និង $\{v_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់ យើងបាន $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 0$ ។
- ឧបមាថា $\{u_n\}$, $\{v_n\}$និង $\{w_n\}$បំពេញលក្ខខណ្ឌ $u_n \le v_n \le w_n$ ។
  បើ $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = l$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty} v_n = l$ ។

(ទ្រឹស្តីបទ Sandwich)

- បើ $u_n \ne 0$, $\forall n \in \mathrm{IN}$ និង $\lim_{n\to\infty} u_n = l \ne 0$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$ ។

8. ស្វ៊ីតរីកមានលីមីតអនន្ត

ក/ និយមន័យ

- $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha \in \mathrm{IN}, \forall n \ge \alpha : u_n > A$
- $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha \in \mathrm{IN}, \forall n \ge \alpha : u_n < -A$ ។

ខ/ ទ្រឹស្តីបទ

- បើ $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតកើនមិនទាល់លើ រឺ ចុះមិនទាល់ក្រោមគេបាន
  $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ រឺ $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$រៀងគ្នា ។
- បើ $\lim_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$និង $\{v_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់ យើងបាន
  $\lim_{n\to\infty} (u_n \pm v_n) = \pm\infty$ ។
- បើ $\lim_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$, $\lim_{n\to\infty} v_n = \pm\infty$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty} (u_n \pm v_n) = \pm\infty$ ។
- បើ $\lim_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$ ។
- បើ $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់ និង $\lim_{n\to\infty} v_n = \pm\infty$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 0$ ។
- *ទ្រឹស្តីបទប្រៀបធៀប*

ឧបមាថា $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \ge n_0 : u_n \le v_n$ យើងបាន

- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ ។

9. ស្វ៊ីត Cauchy

ក/ និយមន័យ

ស្វ៊ីត $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីត Cauchy លុះត្រាតែ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \ge n_0$ គេបាន $|u_m - u_n| < \varepsilon$ រឺ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0, \forall p \in \mathbb{N}$ គេបាន $|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$ ។

ខ/ ទ្រឹស្តីបទ

$\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម លុះត្រាតែ $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីត Cauchy ។

10. ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

ក/ និយមន័យ

- គេថា $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន រឺ កើន (កើនដាច់ខាត) លុះត្រាតែ $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ បើ $n_1 < n_2 \Rightarrow u_{n_1} \le u_{n_2}$ ($u_{n_1} < u_{n_2}$) ។
  រឺ $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតកើន លុះត្រាតែ $u_n \le u_{n+1}$ ។
- គេថា $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនចុះ រឺ ចុះ (ចុះដាច់ខាត) លុះត្រាតែ $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ បើ $n_1 < n_2 \Rightarrow u_{n_2} \le u_{n_1}$ ($u_{n_2} < u_{n_1}$) ។
  រឺ $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតចុះ លុះត្រាតែ $u_{n+1} \le u_n$ ។

ខ/ ទ្រឹស្តីបទ

បើ $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតកើន និង ទាល់លើ នោះ $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម ។ ដូចគ្នាដែរ ចំពោះស្វ៊ីតចុះ និង ទាល់ក្រោម ។

11. ស្វ៊ីតជាប់គ្នា

ក/ និយមន័យ

ស្វ៊ីត $\{u_n\}$ និង $\{v_n\}$ ជាស្វ៊ីតជាប់គ្នា លុះត្រាតែ

i- $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន និង $\{v_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

ii- $u_n \le v_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$

iii- $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$ ។

ខ/ ទ្រឹស្តីបទ

បើ $\{u_n\}$ និង $\{v_n\}$ ជាស្វ៊ីតជាប់គ្នា នោះ ពួកវាសុទ្ធតែជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើគ្នា ។

12. សំណុំទាល់ គោលលើ និង គោលក្រោម

ក/ និយមន័យ

យក E ជាសំណុំរងនៃ IR គេថា

- ធាតុ b នៃ IR ជាម៉ាស្សូរ៉ង់នៃ E លុះត្រាតែ $\forall x \in E, x \le b$ ។ ក្នុងករណីនេះ គេថា E ជាសំណុំទាល់លើ ។
- ធាតុ a នៃ IR ជាមីណូរ៉ង់នៃ E លុះត្រាតែ $\forall x \in E, a \le x$ ។ ក្នុងករណីនេះ គេថា E ជាសំណុំទាល់ក្រោម។
- E ជាសំណុំទាល់ លុះត្រាតែវាទាល់លើផង និង ទាល់ក្រោមផង គឺ $\exists M > 0, \forall x \in E : |x| \le M$ ។

ខ/ ទ្រឹស្តីបទ

- គ្រប់សំណុំរង E នៃ IR ទាល់លើមានគោលលើតាងដោយ $M = \sup E$ ។ M ជាម៉ាស្សូរ៉ង់តូចជាងគេក្នុងចំណោមម៉ាស្សូរ៉ង់ទាំងអស់ ។
- គ្រប់សំណុំរង E នៃ IR ទាល់លើមានគោលក្រោមតាងដោយ $m = \inf E$ ។

m ជាមីណូរ៉ង់ធំជាងគេក្នុងចំណោមមីណូរ៉ង់ទាំងអស់ ។

សម្គាល់

sup មកពីពាក្យ Supremum មានន័យថាម៉ាស្សូរ៉ង់តូចបំផុត ។

inf មកពីពាក្យ Infimum មានន័យថាមីណូរ៉ង់ធំបំផុត ។

ប្រជាលំហាត់

1. ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\ldots+\frac{(2009)(2010)\ldots(2009+n-1)}{n!}$$
$$=\frac{(2010)(2011)\ldots(2009+n)}{n!}$$ ។

2. ចំពោះចំនួនគត់ n នីមួយៗមិនអវិជ្ជមាន គេបង្កើតចំនួនគត់ថ្មី $f(n)$ ។ ឧបមាថា $f(0)=0$, $f(1)=1$ និង
$f(n)-2f(n-1)+f(n-2)=(-1)^n(2n-4)$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ។
គណនា $f(2008)$ និង $f(2009)$ ។

3. សំណុំ E_n មួយមាន n ធាតុដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ តាង $P(E_n)$ ជាសំណុំនៃសំណុំរងរបស់ E_n ហើយ $Card\,(P(E_n))$ ជាចំនួនធាតុនៃ $P(E_n)$ ។ តាមវិចារកំណើន បង្ហាញថា $Card\,(P(E_n))=2^n$ ។

4. ស្វ៊ីតចំនួនពិត $\{x_n\}$ កំណត់ដោយ $x_1=\dfrac{4}{3}$ និង $(2n+1)x_n=2^n+2nx_{n-1}$ ចំពោះ $n=2, 3, \ldots$ ។

តាមវិចារកំណើន បង្ហាញថា $x_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i}{2i+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។

5. គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ រកឫសនៃពហុធា $p_n(x)$ កំណត់ដោយ

$$p_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x(x+1)}{2!}+\ldots+\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!}$$ ។

6. បង្ហាញថា $\left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^3}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)<3$ ។

7. គេឲ្យ p ជាចំនួនបឋម ។ បង្ហាញថា a^p-a ចែកដាច់នឹង p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a ។

8. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។ គណនា u_n ។

9. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_1 = \sqrt{3}$ និង $u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1-\sqrt{2})u_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។ គណនា u_n ។

10. បង្ហាញថា $(9+4\sqrt{5})^n + (9-4\sqrt{5})^n$ ជាចំនួនគត់ និង ចែកមិនដាច់នឹង 17 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ ។

11. បង្ហាញថា

$$\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{n \text{ រ៉ាឌីកាល់}} + \underbrace{\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots+\sqrt{30+\sqrt{30}}}}}_{n \text{ រ៉ាឌីកាល់}} < 9 \text{ ។}$$

12. គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់សេស និង $n \geq 3$ ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x \neq 0$ គេបាន

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots - \frac{x^n}{n!}\right) \leq 1 \text{ ។}$$

13. បង្ហាញថា $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ។

14. ប្រៀបធៀប A និង B ដែល $A = \frac{(2007.2007200720072007)^2 + 3}{2005.2007200720072007}$

និង $B = \frac{(2007.2007200720072008)^2 + 3}{2005.2007200720072008}$ ។

15. ប្រៀបធៀបពីរចំនួន $A = 4\tan 5^\circ \tan 9^\circ$ និង $B = 3\tan 6^\circ \tan 10^\circ$ ។

16. បង្ហាញថា $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ។

17. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$ បង្ហាញថា $n^{n+1} > (n+1)^n$ ។

18. បង្ហាញថា $\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \ldots \times \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$ ។

19. ក/ បង្ហាញថា $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \ldots \times \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$ ។

ខ/ ទាញបង្ហាញថា $\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < C_{100}^{50} < \frac{2^{100}}{10}$ ។

20. យក x_0 ជាឫសនៃសមីការ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ដែល $ad \neq 0$ ។

តាង $\alpha = \max\left\{\left|\frac{b}{a}\right|, \left|\frac{c}{a}\right|, \left|\frac{d}{a}\right|\right\}$ និង $\beta = \max\left\{\left|\frac{a}{d}\right|, \left|\frac{b}{d}\right|, \left|\frac{c}{d}\right|\right\}$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{1+\beta} < |x_0| < 1 + \alpha$ ។

21. គេឲ្យ $a_k > -1$ មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ $k = \overline{1, n}$ ។ បង្ហាញថា

$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ។

22. គេឲ្យ a_1, a_2, … , a_n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ ។

បង្ហាញថា $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$ ។

23. គេឲ្យ a_1, a_2, … , a_n ជា n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ គេកំណត់យក

$AM = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, $GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ និង

$HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ ។ បង្ហាញថា $AM \geq GM \geq HM$ ។

24. គេឲ្យ $a_k > 0$ ចំពោះ $k = \overline{1, n}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ ។

បង្ហាញថា $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geq 2^n$ ។

25. ចំពោះគ្រប់ $n \in \text{IN}$ បង្ហាញថា $n! \leq \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$ ។

26. គេឲ្យ $n \in \text{IN}$ ។ បង្ហាញថា បណ្តាវិសមភាពខាងក្រោម

ក/ $\frac{1}{2} < \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \ldots + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n+1} < \frac{2}{3}$

ខ/ $n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right)$, $n > 1$ ។

27. គេឲ្យ $x > 0$ និង $n \in \text{IN}$ ។ បង្ហាញថា $\frac{x^n}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}$ ។

28. គេឲ្យ $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទាំងអស់ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា $\sqrt{x_1 x_n} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_n}{2}$ ។

29. គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 3$$ ។

30. គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a + b + c = 3$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}$ ។

31. គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \geq \frac{a+b+c+d}{abcd}$$ ។

32. គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a + b + c = 1$ ។

បង្ហាញថា $a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1$ ។

33. គេឲ្យ a, b, $c \in [0,1]$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$ ។

34. គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។បង្ហាញថា $1+x^{n+1} \geq \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

35. គេឲ្យ $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in [0,1]$ និង $S = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \ldots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3}$$ ។

36. គេឲ្យ $x,\ y,\ z$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz + \frac{3}{4}\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|$$ ។

37. គេឲ្យ $a_k,\ k=\overline{1,n}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 1$ ។

បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq n^2$ ។

38. គេឲ្យ $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ និង $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ ជាចំនួនពិត ។

បង្ហាញថា $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$ ។

39. បង្ហាញថា $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n} b_k^2$ ចំពោះគ្រប់ $\alpha > 0$ ។

40. គេឲ្យ $a,\ b,\ c,\ d$ ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$c^2+d^2=(a^2+b^2)^3$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d} \geq 1$ ។

41. គេឲ្យ $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} + \frac{ef}{e+f} \leq \frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}$$ ។

42. គេឲ្យ x , y , z និង w ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{12}{x+y+z+w} \le \sum_{sym}\left(\frac{1}{x+y}\right) \le \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)$$ ។

43. គេឲ្យ $n \ge 2$ និង a_1 , a_2 , … , a_n , x_1 , x_2 , … , x_n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ និង $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ ។

បង្ហាញថា $2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \le \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1-a_i}$ ។

44. គេឲ្យ x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(xy+yz+zx\right)} \le \frac{3+\sqrt{3}}{9}$$ ។

45. គេឲ្យ a , b , $c \ge 1$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \le \sqrt{c(ab+1)}$ ។

46. គេឲ្យ x , y , $z > 1$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2$ ។ បង្ហាញថា

$$\sqrt{x+y+z} \ge \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$ ។

47. កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $F(x,y) = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}$ ។

48. ដោយប្រើនិយមន័យ បង្ហាញថា

1- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2+3} = 1$

2- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+2}{n^2-n+1} = 1$

3- $\lim_{n\to+\infty} \left(n+1-\sqrt{n^2+1}\right) = 1$

4- $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}=1$ ។

49. គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម

1- $u_n=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\ldots\cos\frac{\theta}{2^n}$ ចំពោះ $\theta\in(0,\pi)$

2- $u_n=\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}$ ចំពោះ $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

3- $u_1=1$ និង $u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+\frac{1}{2^n}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*$

4- $u_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}$ ។

50. គណនា $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{n^3}$ ។

51. គណនា $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}$ ។

52. គណនា $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$ ។

53. គណនា $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+5)!}$ ។

54. គណនា $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!}{(n+1)!}$ ។

55. គណនា $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2\times 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\times 4}\right)\ldots\left[1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right]$ ។

56. គណនា $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ ។

57. គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\ldots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)$ ។

58. ឧបមាថា $a_n \neq 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ និង $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n + a_n^2 + \ldots + a_n^k - k}{a_n - 1}$ ។

59. ចំពោះ $a \in \mathrm{IR}$ គណនា

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$ ។

60. គេឲ្យ $a \in \{1,2,\ldots,9\}$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{a}+\overline{aa}+\overline{aaa}+\ldots+\underbrace{\overline{aa\ldots aa}}_{n}}{10^n}$ ។

61. គេឲ្យស្វ៊ីត Fibonnaci $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = a_2 = 1$ និង $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។ បង្ហាញថា $a_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ដែល α , β ជាឫសនៃសមីការ $x^2 = x + 1$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ ។

62. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ និង $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_n}{2}$ ។ បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ។

63. គេឲ្យ a_1 , a_2 , … , a_p ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ គណនា

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n}{p}}$$ ។

64. គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2\dfrac{n^{1999}}{n+1}+\cos^2\dfrac{n^{1999}}{n+1}}$ ។

65. គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$ ។

66. គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[3]{1+\dfrac{k^2}{n^3}}-1\right)$ ។

67. គេឲ្យ $a_1,\ a_2,\dots,\ a_k$ និង $p_1,\ p_2,\dots,\ p_k$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1a_1^{n+1}+p_2a_2^{n+1}+\dots+p_ka_k^{n+1}}{p_1a_1^{n}+p_2a_2^{n}+\dots+p_ka_k^{n}}$ ។

68. គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)$ ។

69. គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+\dfrac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right)$ ។

70. គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+x^{3^k}+x^{2\times3^k}\right)$ ។

71. ក/ បង្ហាញថា $x-\dfrac{x^2}{2}<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}<x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ខ/ គេឲ្យ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ និង $S_n=f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+f\left(\dfrac{2}{n^2}\right)+\dots+f\left(\dfrac{n}{n^2}\right)$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ ។

72. បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$ ។

73. បង្ហាញថា ស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតរួម

ក/ $u_n=\dfrac{n!}{(2n+1)!!}$, $n\in\mathrm{IN}^*$

ខ/ $u_1>2$, $u_{n+1}=\dfrac{6+6u_n}{7+u_n}$, $n\in\mathrm{IN}^*$

គ/ $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$, $n \in \mathrm{IN}^*$

ឃ/ $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)2n}}$, $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

74. បង្ហាញថា ស្ទីតខាងក្រោមជាស្ទីតរួម

ក/ $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ ចំពោះ $n \in \mathrm{IN}^*$

ខ/ $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}$ ចំពោះ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

75. ក/ បង្ហាញថា $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ។

ខ/ គេឲ្យ $S_n = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)\right]$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ។

76. ក/ បង្ហាញថា $\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$ ចំពោះគ្រប់ $0 < x < 1$ ។

ខ/ គេឲ្យ $S_n = \frac{a}{n+a} + \frac{a}{n+2a} + \ldots + \frac{a}{n+na}$ ដែល $a > 0$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ។

77. ឧបមាថា $\{a_n\}$ ជាស្ទីតនៃចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$ ។ បង្ហាញថា

ក/ បើ $q < 1$ យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ។

ខ/ បើ $q > 1$ យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$ ។

78. យក $\{a_n\}$ ជាស្ទីតនៃចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$ ។ បង្ហាញថា

ក/ បើ $q < 1$ យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ។

ខ/ បើ $q>1$ យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$ ។

79. គេឲ្យ α ជាចំនួនពិត និង $x\in(0,1)$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}x^{n}$ ។

80. គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{n!}$ ចំពោះ $m\in \mathrm{IN}$ និង $|x|<1$ ។

81. បង្ហាញថា ស៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_n=\dfrac{\sin 1^\circ}{1^2}+\dfrac{\sin 2^\circ}{2^2}+\ldots+\dfrac{\sin n^\circ}{n^2}$ ជាស៊ីត Cauchy ។

82. បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)=+\infty$ ។

83. ចំពោះ $c>2$ គេកំណត់ស៊ីត $\{a_n\}$ ដោយ $a_1=c^2$ និង $a_{n+1}=(a_n-c)^2$, $n\geq 1$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស៊ីតកើនជានិច្ច ។

84. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $0<a_n<1$ និង $a_n(1-a_{n+1})>\dfrac{1}{4}$ ចំពោះ $\forall n\in \mathrm{IN}$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស៊ីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស៊ីតនេះ ។

85. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1=0$ និង $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស៊ីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស៊ីតនេះ ។

86. $\{a_n\}$ ជាស៊ីតនៃចំនួនពិតកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1=0$, $a_2=\dfrac{1}{2}$ និង $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(1+a_n+a_{n-1}^3\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n>1$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស៊ីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស៊ីតនេះ ។

87. ក/ បើ $\{a_n\}$ ជាស៊ីតម៉ូណូតូនកើន បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sup\{a_n : n\in \mathrm{IN}\}$ ។

ខ/ បើ $\{a_n\}$ ជាស៊ីតម៉ូណូតូនចុះ បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\inf\{a_n : n\in \mathrm{IN}\}$ ។

88. គេឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ និង ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a_{n+1} \geq a_n - \dfrac{1}{2^n}$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម ។

89. ក/ គេឲ្យ p , q ជាចំនួនពិត និង a_1, a_2, … , a_n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+q}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{p-q}\right)$ ។

ខ/ គេឲ្យ a_1, a_2, … , a_p ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ គេកំណត់យក

$s_n = \dfrac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n}{p}$ និង $x_n = \sqrt[n]{s_n}$ ។ បង្ហាញថា $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីត

ម៉ូណូតូនកើន ។

90. ក/ បង្ហាញថា $2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ ចំពោះគ្រប់

$n \in \mathrm{IN}^*$ ។

ខ/ បង្ហាញថា ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ

$a_n = -2\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ជាស្វ៊ីតរួម ។

91. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n > 1$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីត

ចុះដាច់ខាត រួចទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

92. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = \sqrt{2}$ និង $a_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{a_n}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

93. យក $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម បើគេដឹងថា $\{x_{2n}\}$,

$\{x_{2n+1}\}$ និង $\{x_{3n}\}$ ជាស្វ៊ីតរួម ។

94. គេឲ្យស្វីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 1$ និង $a_{n+1} = \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។
បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស្វីតនេះ ។

95. ចំពោះ $p \in \mathrm{IN}^*$, $a > 0$ និង $a_1 > 0$ គេកំណត់ស្វីត $\{a_n\}$ មួយដោយ
$a_{n+1} = \frac{1}{p}\left[(p-1)a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}}\right]$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។ គណនា $\lim_{n\to\infty} a_n$ ។

96. កំណត់គ្រប់តម្លៃ $c > 0$ ដើម្បីឲ្យស្វីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = \frac{c}{2}$
និង $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(c + a_n^2\right)$, $\forall n \in \mathrm{IN}^*$ ជាស្វីតរួម រួចទាញរក $\lim_{n\to\infty} a_n$ ។

97. គេឲ្យស្វីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 > 0$ និង $a_{n+1} = \left(\frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a}\right)a_n$ ចំពោះគ្រប់
$n \in \mathrm{IN}^*$ និង $a > 0$ ។ កំណត់ a_1 ដើម្បីឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស្វីតរួម រួចគណនា $\lim_{n\to\infty} a_n$ ។

98. គេឲ្យស្វីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 \in \mathrm{IR}$ និង $a_{n+1} = a_n^2 + (1-2a)a_n + a^2$,
$\forall n \in \mathrm{IN}^*$ ។ កំណត់ a_1 ដើម្បីឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស្វីតរួម រួចទាញរកលីមីត ។

99. ចំពោះ $c > 0$ និង $b > a > 0$ គេកំណត់ស្វីត $\{a_n\}$ ដោយ $a_1 = c$
និង $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + ab}{a + b}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។ កំណត់លក្ខខណ្ឌ a , b , c
ដើម្បីឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស្វីតរួម រួចគណនាលីមីតនៃស្វីតនេះ ។

100. គេឲ្យស្វីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 > 0$ និង $a_{n+1} = 6\left(\frac{1 + a_n}{7 + a_n}\right)$ ចំពោះគ្រប់
$n \in \mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វីតរួម និង ទាញរកលីមីតនៃស្វីតនេះ ។

101. ចំពោះ $c \geq 0$ គេកំណត់ស្វីត $\{a_n\}$ ដោយ $a_1 = 0$ និង $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$
ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស្វីតនេះ ។

102. សិក្សាភាពរួម និង រីកនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1=\sqrt{2}$ និង $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$ ។

103. គេឲ្យ $k\in \mathrm{IN}^*$ និង ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1=\sqrt[k]{5}$ និង $a_{n+1}=\sqrt[k]{5a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$ ។ សិក្សាភាពរួម រឺ រីកនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

104. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $1\le a_1\le 2$ និង $a_{n+1}^2=3a_n-2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$ ហើយ គ្រប់តួទាំងអស់នៃ $\{a_n\}$ សុទ្ធតែជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង ទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

105. ចំពោះ $c>1$ គេកំណត់ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ដោយ

1- $a_1=\sqrt{c(c-1)}$ និង $a_{n+1}=\sqrt{c(c-1)+a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$

2- $b_1=\sqrt{c}$ និង $b_{n+1}=\sqrt{cb_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួមទៅរក c ។

106. គេឲ្យ $a>0$, $b>0$ និង $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $0<a_1<b$ និង

$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{ab^2+a_n^2}{a+1}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ។

107. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1=2$ និង $a_{n+1}=2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{a_n}}$

ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចកំណត់រកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

108. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1=1$, $a_2=2$ និង $a_{n+1}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 2$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ និង កើនដាច់ខាត រួចទាញរកលីមីត ។

109. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1=9$, $a_2=6$ និង $a_{n+1}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ និង ចុះដាច់ខាត រួចទាញរកលីមីត ។

110. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ កំណត់ដោយ $0 < b_1 < a_1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ និង $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $\forall n \in \mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើគ្នា ។

111. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ កំណត់ដោយ $0 < b_1 < a_1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$ និង $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $\forall n \in \mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើគ្នា ។

112. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ កំណត់ដោយ $0 < b_1 < a_1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ និង $b_{n+1} = \dfrac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើគ្នា ។

113. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}\left(\dfrac{2}{1} + \dfrac{2^2}{2} + \ldots + \dfrac{2^n}{n}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

114. គេឲ្យ $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំណត់ដោយ $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ និង $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

ក/ បង្ហាញថា $a_n < b_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$

ខ/ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើនជានិច្ច

គ/ បង្ហាញថា $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច

ឃ/ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើគ្នាស្មើ e ដែលត្រូវបានហៅថាចំនួន Euler ។

115. គេឲ្យ $a_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

ក/ បើ $x > 0$ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ និង កើនជានិច្ច ។

ខ/ ចំពោះ x ជាចំនួនពិតដែល $n > -x$ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ និង កើនជានិច្ច ។

116. គេឲ្យ $x > 0$, $l \in \mathrm{IN}^*$ និង $l > x$ ។ យក $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតកំណត់ដោយ

$b_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n+l}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច ។

117. បង្ហាញថា $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន បើគេដឹងថា

$a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}-\ln n$ និង $b_n = 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}-\ln n$ ។

ទាញបង្ហាញថា $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើគ្នា ។

118. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_0 > 0$ និង $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$ ដែល $a > 0$ ។

បង្ហាញថា $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចគណនាលីមីត ។

119. គេឲ្យ $0 < a < b$ និង ស្វ៊ីត $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ កំណត់ដោយ $a_0 = a$, $b_0 = b$

, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n}$ និង $b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{a_n + b_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ក/ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចគណនាលីមីតរបស់វា ។

ខ/ ទាញរក $\lim_{n\to\infty} P_n$ ដែល $P_n = (1+k)(1+k^2)(1+k^{2^2})...(1+k^{2^n})$

ចំពោះ $0<k<1$ ។

120. បង្ហាញថា ស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីត Cauchy

ក/ $a_n = \frac{\arctan 1}{2} + \frac{\arctan 2}{2^2} + ... + \frac{\arctan n}{n^2}$

ខ/ $a_n = \frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{2\times 3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}$

គ/ $a_n = \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + ... + \alpha_n q_n$ ចំពោះ $|q|<1$ និង $|\alpha_k| \le M$ ។

121. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $|a_{n+1} - a_{n+2}| < \lambda |a_n - a_{n+1}|$ ចំពោះ $\lambda \in (0,1)$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម ។

122. បើ $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n} = l$ ។

123. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_n = x^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ ។

ក/ បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ បើ $-1 < x < 1$ ។

ខ/ បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ បើ $x>1$ ។

124. គណនា $\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^\alpha - n^\alpha\right]$ ចំពោះ $0<\alpha<1$ ។

125. គេឲ្យ s និង $p>0$ ។ បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{(1+p)^n} = 0$ ។

126. គណនា

ក/ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n}\right)$

ខ/ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3+1} + \frac{2n}{n^3+2} + ... + \frac{nn}{n^3+n}\right)$

គ/ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n^2+1}+\frac{2}{4n^2+4}+\ldots+\frac{n}{4n^2+n^2}\right)$ ។

127. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_n=\sin n$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ គ្មានលីមីត ។

128. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1=0$, $a_2=1$ និង $a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=2$ ។ កំណត់ a_n រួចគណនា $\lim_{n\to\infty}a_n$ ។

129. ចំពោះ a, $b>0$ គេកំណត់ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ដោយ $a_1=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ និង

$a_n=\frac{aa_{n-1}}{\sqrt{a^2+a_{n-1}^2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ។ កំណត់ a_n រួចគណនា $\lim_{n\to\infty}a_n$ ។

130. គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $\{x_n\}$ និង $\{y_n\}$ កំណត់ដោយ $x_1=0$,

$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$, $y_1=1$ និង $y_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+3y_n)$ ។

ក/ គណនាតួទី 2 ទី 3 និង ទី 4 នៃស្វ៊ីតនីមួយៗ

ខ/ គណនា $\lim_{n\to\infty}x_n$ និង $\lim_{n\to\infty}y_n$ ។

131. គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_0=5$ និង $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n}$ ចំពោះ

$n=0, 1, 2, \ldots$ ។ បង្ហាញថា $45<u_n<45.1$ ។

132. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ និង $\lim_{n\to\infty}b_n=b$ ។

បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty}\max\{a_n,b_n\}=\max\{a,b\}$ ។

133. គេឲ្យ $a_n\geq -1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}$ និង $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ។ តាមនិយមន័យ

គណនា $\lim_{n\to\infty}\sqrt[p]{1+a_n}$ ចំពោះ $p\in \mathrm{IN}$ ។

134. គេឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង រួមទៅរកសូន្យ ។ ចំពោះ p

ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $p \geq 2$ គណនា $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{1+a_n}-1}{a_n}$ ។

135. គេឲ្យ $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_p$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ គណនា

$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_p)}-n\right]$ ។

136. គេឲ្យ a_k ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានចំពោះ $k=\overline{1,\ p}$ ។ គណនា $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\sqrt[n]{a_k}\right)^p$ ។

137. គេឲ្យ $\alpha \in (0,1)$ គណនា $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)^k$ ។

138. គេឲ្យ $x \geq 1$ ។ បង្ហាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n = x^2$ ។

139. បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2\sqrt[n]{n}-1\right)^n}{n^2}=1$ ។

140. ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ គេហៅ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)dt$ ថាជាអាំងតេក្រាល Wallis ។

ក/ បង្ហាញថា $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ រួចទាញរក I_{2n} និង I_{2n+1} ។

ខ/ បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1$ ។

គ/ បង្ហាញថា $\{(n+1)I_nI_{n+1}\}$ ជាស្វ៊ីតថេរ រួចទាញថា $\lim_{n\to\infty}I_n\sqrt{2n}=\sqrt{\pi}$ ។

141. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_1=1,\ u_2=2$ និង $u_{n+1}=3u_n-u_{n-1}$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ និង $\{v_n\}$ ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $v_n=\sum_{k=1}^{n}\cot^{-1}u_i$ ចំពោះ

$n=1,\ 2,\ \dots$ ។ គណនា $\lim_{n\to\infty}v_n$ ។

142. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{x_n\}$ កំណត់ដោយ $x_0=a$ និង $x_n=\sqrt[3]{6\left(x_{n-1}-\sin x_{n-1}\right)}$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ និង a ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចទាញរកលីមីត ។

143. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{x_n\}$ កំណត់ដោយ $x_1 = \dfrac{2}{3}$ និង $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}$ ចំពោះ $\forall n \geq 1$ ។ គណនា $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2001}$ ។

144. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{x_n\}$ កំណត់ដោយ $x_1 = a$ និង $x_{n+1} = \dfrac{x_n\left(x_n^2 + 3\right)}{3x_n^2 + 1}$ ចំពោះ $\forall n \geq 1$ និង a ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចគណនាលីមីត ។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ១

(កម្ពុជា,2009)

ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\ldots+\frac{(2009)(2010)\ldots(2009+n-1)}{n!}$$

$$=\frac{(2010)(2011)\ldots(2009+n)}{n!}$$ ។

សម្រាយ

បើ $n=1$ យើងបាន $1+\frac{2009}{1!}=\frac{2010}{1!}\Leftrightarrow 2010=2010$ ពិត

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n=k$ គឺ

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\ldots+\frac{(2009)(2010)\ldots(2009+k-1)}{k!}$$

$$=\frac{(2010)(2011)\ldots(2009+k)}{k!}$$

ពិនិត្យចំពោះ $n=k+1$

យើងមាន $1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\ldots+\frac{(2009)(2010)\ldots(2009+k-1)}{k!}$

$$=\frac{(2010)(2011)\ldots(2009+k)}{k!}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\ldots+\frac{(2009)(2010)\ldots(2009+k)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{(2010)(2011)\ldots(2009+k)}{k!}+\frac{(2009)(2010)\ldots(2009+k)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{(2010)(2011)\ldots(2009+k)(k+1)+(2009)(2010)\ldots(2009+k)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{(2010)(2011)\ldots(2009+k)(k+1+2009)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{(2010)(2011)\ldots(2009+k)(2010+k)}{(k+1)!}$$ ពិត

ដូចនេះ សំណើត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

លំហាត់ ២

(ភ្នំពេញ,2008)

ចំពោះចំនួនគត់ n នីមួយៗមិនអវិជ្ជមាន គេបង្កើតចំនួនគត់ថ្មី $f(n)$។

ឧបមាថា $f(0)=0$, $f(1)=1$ និង $f(n)-2f(n-1)+f(n-2)=(-1)^n(2n-4)$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$។ គណនា $f(2008)$និង $f(2009)$។

សម្រាយ

យើងមាន $f(0)=0$, $f(1)=1$

និង $f(n)-2f(n-1)+f(n-2)=(-1)^n(2n-4)$ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$

$\Rightarrow f(n)=2f(n-1)-f(n-2)+(-1)^n(2n-4)$

បើ $n=2\Rightarrow f(2)=2f(1)-f(0)+(4-4)=2$

បើ $n=3\Rightarrow f(3)=2f(2)-f(1)-(6-4)=1$

បើ $n=4\Rightarrow f(4)=2f(3)-f(2)+(8-4)=4$

បើ $n=5\Rightarrow f(5)=2f(4)-f(3)-(10-4)=1$

តាមលំនាំគំរូខាងលើ យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា $f(n)=1$បើ n សេស

$f(n)=n$ បើ n គូ

ឧបមាថា សំណើពិតចំពោះ k ដែល $0\leq k\leq n$

ពិនិត្យករណី $n+1$

ដោយ $f(n+1)=2f(n)-f(n-1)+(-1)^{n+1}(2n-2)$

បើ $n+1$សេស $\Rightarrow f(n)=n$ និង $f(n-1)=1$

យើងបាន $f(n+1)=2n-1-(2n-2)=1$ ពិត

បើ $n+1$គូ $\Rightarrow f(n)=1$ និង $f(n-1)=n-1$

យើងបាន $f(n+1)=2-(n-1)+2n-2=n+1$ ពិត

ដូចនេះ $f(2008)=2008$ និង $f(2009)=1$

លំហាត់ ៣

(កម្ពុជា,2009)

សំណុំ E_n មួយមាន n ធាតុដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ តាង $P(E_n)$ ជាសំណុំនៃសំណុំរងរបស់ E_n ហើយ $Card\left(P(E_n)\right)$ ជាចំនួនធាតុនៃ $P(E_n)$។

តាមវិចារកំណើន បង្ហាញថា $Card\left(P(E_n)\right)=2^n$ ។

សម្រាយ

បើ $n=1$ យើងបាន $E_1=\{a_1\}\Rightarrow P(E_1)=\{\emptyset,\{a_1\}\}\Rightarrow Card\left(P(E_1)\right)=2$ ពិត

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $Card\left(P(E_k)\right)=2^k$

ពិនិត្យចំពោះ $n=k+1$

យើងមាន $E_{k+1}=\{a_1,a_2,\ldots,a_k,a_{k+1}\}=E_k\cup\{a_{k+1}\}$

ចំពោះ k ធាតុដំបូងគេអាចបង្កើតសំណុំរងបានចំនួន 2^k (សម្មតិកម្មកំណើន)

បើគេបញ្ចូល a_{k+1} ទៅក្នុងសំណុំរងទាំង 2^k នោះ គេនឹងទទួលបានសំណុំរងថ្មីផ្សេងទៀតនៃសំណុំ E_{k+1} ចំនួន 2^k

ហេតុនេះ $Card\left(P(E_{k+1})\right)=2^k+2^k=2^{k+1}$ ពិត

ដូចនេះ $Card\left(P(E_n)\right)=2^n$

លំហាត់ ៤

ស្វ៊ីតចំនួនពិត $\{x_n\}$ កំណត់ដោយ $x_1=\dfrac{4}{3}$ និង $(2n+1)x_n=2^n+2nx_{n-1}$

ចំពោះ $n=2\,,\ 3\,,\ \ldots$ ។

តាមវិចារកំណើន បង្ហាញថា $x_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i}{2i+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$។

សម្រាយ

បើ $n=1\Rightarrow x_1=\displaystyle\sum_{i=0}^{1}\frac{C_1^i}{2i+1}=C_1^0+\frac{C_1^1}{2+1}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ ពិត

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $x_k=\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{2i+1}$

ពិនិត្យចំពោះ $n=k+1$ គឺ $x_{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}\frac{C_{k+1}^i}{2i+1}$ រឺ ទេ ?

យើងមាន $(2k+3)x_{k+1}=2^{k+1}+2(k+1)x_k=\sum_{i=0}^{k+1}C_{k+1}^i+2(k+1)\sum_{i=0}^{k}\frac{C_k^i}{2i+1}$

ដោយ $C_k^i=\frac{k!}{(k-i)!i!}=\frac{(k+1-i)}{k+1}\cdot\frac{(k+1)!}{(k-i+1)!i!}=\frac{(k+1-i)C_{k+1}^i}{k+1}$

$\Rightarrow (k+1)C_k^i=(k+1-i)C_{k+1}^i$

យើងបាន $(2k+3)x_{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}C_{k+1}^i+2\sum_{i=0}^{k}\frac{(k+1-i)C_{k+1}^i}{2i+1}$

$$=\sum_{i=0}^{k+1}C_{k+1}^i+2\sum_{i=0}^{k+1}\frac{(k+1-i)C_{k+1}^i}{2i+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{k+1}\left(1+\frac{2k+2-2i}{2i+1}\right)C_{k+1}^i=(2k+3)\sum_{i=0}^{k+1}\frac{C_{k+1}^i}{2i+1}$$

$\Rightarrow x_{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}\frac{C_{k+1}^i}{2i+1}$ ពិត

ដូចនេះ $x_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i}{2i+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

លំហាត់ ៥

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ រកឫសនៃពហុធា $p_n(x)$ កំណត់ដោយ

$p_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x(x+1)}{2!}+\ldots+\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!}$ ។

ចម្លើយ

ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $p_1(x)=1+x$ មានឫស $x=-1$

ចំពោះ $n=2$ យើងបាន $p_2(x)=1+x+\frac{x(x+1)}{2!}$

$$= \frac{1}{2}(x+1)(x+2)$$ មានរឹស $x=-1,\ x=-2$

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n=k$ គឺ ពហុធា $p_k(x)$ មានរឹស $-1,\ -2,\ \dots,\ -k$

សិក្សាករណី $n=k+1$

ដោយ $p_k(x)$ មានរឹស $-1,\ -2,\ \dots,\ -k$

យើងបាន $p_k(x)=c(x+1)(x+2)\dots(x+k)$

តែ $p_k(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x(x+1)}{2!}+\dots+\frac{x(x+1)\dots(x+k-1)}{k!}$

ប្រៀបធៀបមេគុណនៃ x^k យើងបាន $c=\frac{1}{k!}$

$$\Rightarrow p_k(x)=\frac{1}{k!}(x+1)(x+2)\dots(x+k)$$

យើងបាន $p_{k+1}(x)=p_k(x)+\frac{x(x+1)\dots(x+k)}{(k+1)!}$

$$=\frac{1}{k!}(x+1)(x+2)\dots(x+k)+\frac{x(x+1)\dots(x+k)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}(x+1)(x+2)\dots(x+k)(x+k+1)$$

ហេតុនេះ $p_{k+1}(x)$ មានរឹស $-1,\ -2,\ \dots,\ -k-1$ ពិត

ដូចនេះ $p_n(x)$ មានរឹស $x=-1,\ -2,\ \dots,\ -n$

លំហាត់ ៦

បង្ហាញថា $\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)<3$ ។

សម្រាយ

យើងនឹងបង្ហាញថា $\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\le 3-\frac{1}{n}$

ដោយប្រើវិចារកំណើន

ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $1+\frac{1}{1^3}<3-\frac{1}{1}\Leftrightarrow 2\le 2$ ពិត

ឧបមាថា ពិតដល់ $n=k$ គឺ $\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\le 3-\frac{1}{k}$

សិក្សាករណី $n=k+1$

យើងមាន $\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\le 3-\frac{1}{k}$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\ldots\left[1+\frac{1}{(k+1)^3}\right]\le\left(3-\frac{1}{k}\right)\left[1+\frac{1}{(k+1)^3}\right]$$

តែ $\left(3-\frac{1}{k}\right)\left[1+\frac{1}{(k+1)^3}\right]\le 3-\frac{1}{k+1}$

$\Leftrightarrow\left(3-\frac{1}{k}\right)\left[1+\frac{1}{(k+1)^3}\right]-3+\frac{1}{k+1}\le 0\Leftrightarrow -\frac{k^2-k+2}{k(k+1)^3}\le 0$ ពិត

គេបាន $\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\ldots\left[1+\frac{1}{(k+1)^3}\right]\le 3-\frac{1}{k+1}$ ពិត

ហេតុនេះ $\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\le 3-\frac{1}{n}$

លំហាត់ ៧

(ទ្រឹស្តីបទ Fermat)

គេឲ្យ p ជាចំនួនបឋម ។ បង្ហាញថា a^p-a ចែកដាច់នឹង p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a ។

សម្រាយ

យើងនឹងស្រាយដោយប្រើវិចារកំណើនលើ a

ចំពោះ $a=1$ យើងបាន $a^p-a=1-1=0$ ចែកដាច់នឹង p

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $a=n$ គឺ n^p-n

ពិនិត្យករណី $a=n+1$ គឺ យើងនឹងបង្ហាញថា $(n+1)^p-(n+1)$ ចែកដាច់នឹង p

តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធាយើងបាន $(n+1)^p=\sum_{k=0}^{p}C_p^k n^{p-k}$

$$\Rightarrow (n+1)^p-(n+1)=n^p-n+\sum_{k=1}^{p-1}C_p^k n^{p-k} \quad (1)$$

ម៉្យាងទៀត

ចំពោះ $1\le k<p$ យើងបាន $C_p^k=\frac{p!}{k!(p-k)!}=\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$

$$\Rightarrow p(p-1)(p-k+1)=k!C_p^k$$

$$\Rightarrow p\,|\,k!C_p^k \text{ ដោយ } GCD(p,k!)=1$$

យើងបាន $p\,|\,C_p^k$

តាម (1) យើងបាន $(n+1)^p-(n+1)$ចែកដាច់នឹង p ពិត

ដូចនេះ a^p-aចែកដាច់នឹង p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a

លំហាត់ ៨

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$កំណត់ដោយ $u_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 0$ ។ គណនា u_n ។

សម្រាយ

យើងមាន $u_0=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{2^2}$

$$\Rightarrow u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2^2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2^3}}=\sin\frac{\pi}{2^3}$$

ឧបមាថា $u_k=\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}$ យើងបាន $u_{k+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2^{k+3}}}=\sin\frac{\pi}{2^{k+3}}$$ ពិត

ដូចនេះ $u_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 0$

លំហាត់ ៩

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_1=\sqrt{3}$ និង $u_{n+1}=\frac{u_n+\sqrt{2}-1}{1+(1-\sqrt{2})u_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។ គណនា u_n ។

សម្រាយ

យើងមាន $u_1=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$ និង $\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}-1=\frac{2}{1+\cos\frac{\pi}{4}}-1$

$$=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

$\Rightarrow \tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ ដោយ $u_{n+1}=\frac{u_n+\sqrt{2}-1}{1+(1-\sqrt{2})u_n}$

ចំពោះ $n=1\Rightarrow u_2=\frac{u_1+\tan\frac{\pi}{8}}{1-u_1\tan\frac{\pi}{8}}=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{8}}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8}\right)$

ឧបមាថា $u_k=\tan\left[\frac{\pi}{3}+\frac{(k-1)\pi}{8}\right]$

យើងបាន $u_{k+1}=\dfrac{u_k+(\sqrt{2}-1)}{1+(1-\sqrt{2})u_k}=\dfrac{\tan\left[\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{(k-1)\pi}{8}\right]+\tan\dfrac{\pi}{8}}{1-\tan\left[\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{(k-1)\pi}{8}\right]\tan\dfrac{\pi}{8}}$

$=\tan\left[\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{(k-1)\pi}{8}+\dfrac{\pi}{8}\right]=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{8}\right)$ ពិត

ដូចនេះ $u_n=\tan\left[\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{(n-1)\pi}{8}\right]$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

លំហាត់ ១០

បង្ហាញថា $(9+4\sqrt{5})^n+(9-4\sqrt{5})^n$ ជាចំនួនគត់ និង ចែកមិនដាច់នឹង 17 ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathbb{N}$ ។

សម្រាយ

យក $x_1=9+4\sqrt{5}$, $x_2=9-4\sqrt{5}$ និង $S_n=x_1^n+x_2^n$

យើងបាន $x_1+x_2=18$ និង $x_1x_2=(9+4\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})=81-80=1$

$\Rightarrow x_1,\ x_2$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2-18x+1=0$

ហេតុនេះ $\begin{cases}x_1^2-18x_1+1=0\\ x_2^2-18x_2+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^{n+1}-18x_1^n+x_1^{n-1}=0\\ x_2^{n+1}-18x_2^n+x_2^{n-1}=0\end{cases}$

យើងបាន $(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})-18(x_1^n+x_2^n)+(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})=0$

$\Rightarrow S_{n+1}-18S_n+S_{n-1}=0\Rightarrow S_{n+1}=18S_n-S_{n-1}$

- បង្ហាញថា S_n ជាចំនួនគត់

ដោយ $S_0=x_1^0+x_2^0=2$ ជាចំនួនគត់ និង $S_1=x_1+x_2=18$ ជាចំនួនគត់

ម្យ៉ាងទៀត បើ S_{k-1} , S_k ជាចំនួនគត់ យើងបាន $S_{k+1}=18S_k-S_{k-1}$ ជាចំនួនគត់

ដូចនេះ $S_n=(9+4\sqrt{5})^n+(9-4\sqrt{5})^n$ ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathbb{N}$

- បង្ហាញថា S_n ចែកមិនដាច់នឹង 17

យើងមាន $S_0=2$ និង $S_1=18$ ចែកមិនដាច់នឹង 17

បើ $S_0, \dots, S_{k-1}, S_k$ ចែកមិនដាច់នឹង 17

ដោយ $S_k = 18S_{k-1} - S_{k-2}$ យើងបាន

$$S_{k+1} = 18S_k - S_{k-1} = 17S_k + S_k - S_{k-1} = 17S_k + 18S_{k-1} - S_{k-2} - S_{k-1}$$

$$= 17(S_k + S_{k-1}) - S_{k-2}$$ ចែកមិនដាច់នឹង 17

លំហាត់ ១១

(ភ្នំពេញ,2003)

បង្ហាញថា $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{n\text{ រ៉ាឌីកាល់}}+\underbrace{\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots+\sqrt{30+\sqrt{30}}}}}_{n\text{ រ៉ាឌីកាល់}}<9$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{n\text{ រ៉ាឌីកាល់}}<\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}_{n\text{ រ៉ាឌីកាល់}}=3$

និង $\underbrace{\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots+\sqrt{30+\sqrt{30}}}}}_{n\text{ រ៉ាឌីកាល់}}<\underbrace{\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots+\sqrt{30+\sqrt{36}}}}}_{n\text{ រ៉ាឌីកាល់}}=6$

ដូចនេះ $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{n\text{ រ៉ាឌីកាល់}}+\underbrace{\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots+\sqrt{30+\sqrt{30}}}}}_{n\text{ រ៉ាឌីកាល់}}<9$

លំហាត់ ១២

(ភ្នំពេញ,2003)

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់សេស និង $n\geq 3$ ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ គេបាន

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots-\frac{x^n}{n!}\right)\leq 1 \text{ ។}$$

សម្រាយ

យក $F(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots-\frac{x^n}{n!}\right)$

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

និង $g(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots-\frac{x^n}{n!}$

យើងបាន $F(x)=f(x)g(x)\Rightarrow F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

ដោយ $f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\Rightarrow f'(x)=f(x)-\frac{x^n}{n!}$

និង $g'(x)=-1+x-\frac{x^2}{2!}+...-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\Rightarrow g'(x)=-g(x)-\frac{x^n}{n!}$

យើងបាន $F(x)=\left[f(x)-\frac{x^n}{n!}\right]g(x)-\left[g(x)+\frac{x^n}{n!}\right]f(x)$

$$=f(x)g(x)-\frac{x^n}{n!}g(x)-f(x)g(x)-\frac{x^n}{n!}f(x)$$

$$=-\frac{x^n}{n!}[f(x)+g(x)]$$

$$=-\frac{x^n}{n!}\left[2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right]$$

$\Rightarrow F(x)$ មានសញ្ញាដូច $-x^n$ រឺ $-x$ ព្រោះ n ជាចំនួនគត់សេស

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

តាមតារាង យើងបាន $F(x)<1$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$

ដូចនេះ $\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...-\frac{x^n}{n!}\right)\leq 1$

លំហាត់ ១៣

បង្ហាញថា $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

សម្រាយ

យក $f(x)=x-\sin x\Rightarrow f'(x)=1-\cos x>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in \mathrm{IR}$

$\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍កើន យើងបាន $f(x) > f(0)$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

$\Rightarrow x - \sin x > 0 \Rightarrow x > \sin x$ (1)

យក $g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} \Rightarrow g'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow g''(x) = x - \sin x$

តាម (1) យើងបាន $g''(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

$\Rightarrow g'$ ជាអនុគមន៍កើនចំពោះគ្រប់ $x > 0 \Rightarrow g'(x) > g'(0)$

$\Rightarrow \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

យើងបាន g ជាអនុគមន៍កើន $\Rightarrow g(x) > g(0)$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

$\Rightarrow \sin x - x + \dfrac{x^3}{6} > 0 \Rightarrow \sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

លំហាត់ ១៤

(កម្ពុជា,2007)

ប្រៀបធៀប A និង B ដែល $A = \dfrac{(2007.2007200720072007)^2 + 3}{2005.2007200720072007}$

និង $B = \dfrac{(2007.2007200720072008)^2 + 3}{2005.2007200720072008}$ ។

សម្រាយ

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 3}{(x-2)^2}$

$\Rightarrow f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $x^2 - 4x - 3$

បើ $x^2 - 4x - 3 = 0$ យើងបាន $x = 2 \pm \sqrt{7}$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \left(2 + \sqrt{7}, +\infty\right]$

$\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $\left(2 + \sqrt{7}, +\infty\right]$

ដោយ $2007.2007200720072007 < 2007.2007200720072008$

$\Rightarrow f(2007.2007200720072007) < f(2007.2007200720072008)$

ដូចនេះ $A < B$

លំហាត់ ១៥

(ភ្នំពេញ,2003)

ប្រៀបធៀបពីរចំនួន $A = 4\tan 5^\circ \tan 9^\circ$ និង $B = 3\tan 6^\circ \tan 10^\circ$ ។

សម្រាយ

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ ចំពោះ $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x} > 0$$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$

ព្រោះ $2x > \sin 2x$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ (តាម លំហាត់ ១៣)

យើងបាន f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$

ហេតុនេះ $\dfrac{\tan \frac{5\pi}{180}}{\frac{5\pi}{180}} < \dfrac{\tan \frac{6\pi}{180}}{\frac{6\pi}{180}} \Rightarrow \dfrac{\tan 5^\circ}{5} < \dfrac{\tan 6^\circ}{6}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នា $\dfrac{\tan 9^\circ}{9} < \dfrac{\tan 10^\circ}{10}$ (2)

គុណ (1),(2) យើងបាន $\dfrac{\tan 5^\circ \tan 9^\circ}{45} < \dfrac{\tan 6^\circ \tan 10^\circ}{60}$

$$\Rightarrow A = 4\tan 5^\circ \tan 9^\circ < 3\tan 6^\circ \tan 10^\circ = B$$

ដូចនេះ $A < B$

លំហាត់ ១៦

បង្ហាញថា $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!} \Leftrightarrow e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right) > 0$ (1)

យក $f(x)=e^x-1-x \Rightarrow f'(x)=e^x-1>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

យើងបាន f ជាអនុគមន៍កើន $\Rightarrow f(x)>f(0),\ \forall x>0$

$$\Rightarrow e^x - x - 1 > 0,\ \forall x>0$$

ហេតុនេះ (1) ពិតចំពោះ $n=1$

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^k}{k!}\right) > 0$ (2)

បង្ហាញថា $e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right) > 0$

យក $g(x)=e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)$

យើងបាន $g'(x)=e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^k}{k!}\right) > 0$ (តាម (2))

$\Rightarrow g$ ជាអនុគមន៍កើន $\Rightarrow g(x)>g(0)$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

យើងបាន $e^x - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right) > 0$ ពិត

ដូចនេះ $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

លំហាត់ ១៧

(Hanoi,2000)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$ បង្ហាញថា $n^{n+1} > (n+1)^n$ ។

សម្រាយ

របៀបទី ១

ចំពោះ $n = 3$ យើងបាន $3^4 > 4^3 \Leftrightarrow 81 > 64$ ពិត

ឧបមាថា ពិតដល់ $n = k$ គឺ $k^{k+1} > (k+1)^k$

បង្ហាញថា $(k+1)^{k+2} > (k+2)^{k+1}$

យើងមាន $k^{k+1} > (k+1)^k \Rightarrow (k+1)^{k+2} > \dfrac{(k+1)^k}{k^{k+1}} \times (k+1)^{k+2} = \dfrac{(k+1)^{2k+2}}{k^{k+1}}$

$$= \left(\frac{k^2+2k+1}{k}\right)^{k+1} = \left(k+2+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$$> (k+2)^{k+1} \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $n^{n+1} > (n+1)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$

របៀបទី ២

យក $f(x) = \dfrac{x}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq 3$

យើងបាន f ជាអនុគមន៍កើនលើ $[3, +\infty)$

ហេតុនេះ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$ យើងបាន $\dfrac{n+1}{\ln(n+1)} > \dfrac{n}{\ln n}$

$$\Leftrightarrow (n+1)\ln n > n\ln(n+1)$$

ដូចនេះ $n^{n+1} > (n+1)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$

លំហាត់ ១៨

(Canada,1997)

បង្ហាញថា $\dfrac{1}{1999} < \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{6} \times \ldots \times \dfrac{1997}{1998} < \dfrac{1}{44}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{1997}{1998}>\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\ldots\times\frac{1997}{1999}=\frac{1}{1999}$ (1)

ម៉្យាងទៀត $(n-1)(n+1)=n^2-1<n^2 \Rightarrow \frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}$

យើងបាន $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{1997}{1998}<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{1998}{1999}$

$$=\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{1998}{1997}\times\frac{1}{1999}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{1997}{1998}\right)^2<\frac{1}{1999}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{1997}{1998}<\frac{1}{\sqrt{1999}}<\frac{1}{\sqrt{1936}}=\frac{1}{44} \quad (2)$$

តាម (1),(2) យើងបាន $\frac{1}{1999}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}$

សម្គាល់

(លោកអ្នកអាចស្រាយដោយប្រើការតាងដូចលំហាត់ ១៩ (ក))

លំហាត់ ១៩

ក/ បង្ហាញថា $\frac{1}{10\sqrt{2}}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$ ។

ខ/ ទាញបង្ហាញថា $\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}}<C_{100}^{50}<\frac{2^{100}}{10}$ ។

សម្រាយ

ក/

តាង $A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{99}{100}$ និង $B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{98}{99}$

យើងបាន $AB=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{99}{100}\right)\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{98}{99}\right)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}=\frac{1}{100}$$

ដោយ $(n-1)(n+1)=n^2-1<n^2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}\Rightarrow\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$

និង $\frac{99}{100}<1\Rightarrow B>A$

យើងបាន $A^2<AB=\frac{1}{100}\Rightarrow A<\frac{1}{10}$ (1)

ម៉្យាងទៀត $B<2A=\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\ldots\times\frac{99}{100}\Rightarrow 2A^2>AB=\frac{1}{100}$

$\Rightarrow A>\frac{1}{10\sqrt{2}}$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\frac{1}{10\sqrt{2}}<A<\frac{1}{10}$

ដូចនេះ $\frac{1}{10\sqrt{2}}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$

ខ/

យើងមាន $\frac{C_{100}^{50}}{2^{100}}=\frac{1\times2\times3\times\ldots\times100}{2^{50}(1\times2\times3\times\ldots\times50)\times2^{50}(1\times2\times3\times\ldots\times50)}$

$$=\frac{1\times2\times3\times\ldots\times100}{(2\times4\times6\times\ldots\times100)(2\times4\times6\times\ldots\times100)}$$

$$=\frac{1\times3\times5\times\ldots\times99}{2\times4\times6\times\ldots\times100}$$

ដោយ $\frac{1}{10\sqrt{2}}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$ (តាម ក)

យើងបាន $\frac{1}{10\sqrt{2}}<\frac{C_{100}^{50}}{2^{100}}<\frac{1}{10}$

ដូចនេះ $\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}}<C_{100}^{50}<\frac{2^{100}}{10}$

លំហាត់ ២០

យក x_0 ជាឫសនៃសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ដែល $ad\neq 0$ ។

តាង $\alpha=\max\left\{\left|\frac{b}{a}\right|,\left|\frac{c}{a}\right|,\left|\frac{d}{a}\right|\right\}$ និង $\beta=\max\left\{\left|\frac{a}{d}\right|,\left|\frac{b}{d}\right|,\left|\frac{c}{d}\right|\right\}$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{1+\beta}<|x_0|<1+\alpha$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $ad\neq 0\Rightarrow a\neq 0$ និង $d\neq 0$

ដោយ x_0 ជាឫសនៃសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ យើងបាន

$$ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d=0$$

$$\Rightarrow x_0^3=-\frac{b}{a}x_0^2-\frac{c}{a}x_0-\frac{d}{a}\Rightarrow |x_0|^3=\left|-\frac{b}{a}x_0^2-\frac{c}{a}x_0-\frac{d}{a}\right|$$

$$\leq\left|\frac{b}{a}\right||x_0|^2+\left|\frac{c}{a}\right||x_0|+\left|\frac{d}{a}\right|$$

ដោយ $\alpha=\max\left\{\left|\frac{b}{a}\right|,\left|\frac{c}{a}\right|,\left|\frac{d}{a}\right|\right\}\Rightarrow\alpha\geq\left|\frac{b}{a}\right|,\ \left|\frac{c}{a}\right|,\ \left|\frac{d}{a}\right|$

យើងបាន $|x_0|^3\leq\alpha\left(|x_0|^2+|x_0|+1\right)\Rightarrow\alpha\geq\frac{|x_0|^3}{|x_0|^2+|x_0|+1}$

$$\Rightarrow 1+\alpha\geq\frac{|x_0|^3+|x_0|^2+|x_0|+1}{|x_0|^2+|x_0|+1}=|x_0|+\frac{1}{|x_0|^2+|x_0|+1}>|x_0| \qquad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d=0\Rightarrow 1=-\frac{a}{d}x_0^3-\frac{b}{d}x_0^2-\frac{c}{d}x_0$

$$\Rightarrow 1\leq\left|\frac{a}{d}\right||x_0|^3+\left|\frac{b}{d}\right||x_0|^2+\left|\frac{c}{d}\right||x_0|$$

ដោយ $\beta=\max\left\{\left|\frac{a}{d}\right|,\left|\frac{b}{d}\right|,\left|\frac{c}{d}\right|\right\}\Rightarrow\beta\geq\left|\frac{a}{d}\right|,\ \left|\frac{b}{d}\right|,\ \left|\frac{c}{d}\right|$

យើងបាន $1\le\beta\left(|x_0|^3+|x_0|^2+|x_0|\right)\Rightarrow\beta\ge\dfrac{1}{|x_0|^3+|x_0|^2+|x_0|}$

$$\Rightarrow 1+\beta\ge\frac{|x_0|^3+|x_0|^2+|x_0|+1}{|x_0|^3+|x_0|^2+|x_0|}\Rightarrow\frac{1}{1+\beta}\le\frac{|x_0|^3+|x_0|^2+|x_0|}{|x_0|^3+|x_0|^2+|x_0|+1}$$

តែ $d\ne 0\Rightarrow x_0\ne 0$ ហេតុនេះ $\dfrac{1}{1+\beta}<\dfrac{|x_0|^4+|x_0|^3+|x_0|^2+|x_0|}{|x_0|^3+|x_0|^2+|x_0|+1}=|x_0|$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\dfrac{1}{1+\beta}<|x_0|<1+\alpha$

លំហាត់ ២១

គេឲ្យ $a_k>-1$ មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ $k=\overline{1,n}$ ។ បង្ហាញថា

$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\ge 1+a_1+a_2+\ldots+a_n$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $1+a_1\ge 1+a_1$ ពិត

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)\ge 1+a_1+a_2+\ldots+a_k$

សិក្សាករណី $n=k+1$

យើងមាន $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)\ge 1+a_1+a_2+\ldots+a_k$

$$\Rightarrow(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1})\ge(1+a_1+a_2+\ldots+a_k)(1+a_{k+1})$$
$$=1+a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}+a_{k+1}(a_1+a_2+\ldots+a_k)$$
$$\ge 1+a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}$$ ពិត

ដូចនេះ $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\ge 1+a_1+a_2+\ldots+a_n$

សម្គាល់

ចំពោះ $a_1=a_2=\ldots=a_n=x>-1$ យើងបាន $(1+x)^n\ge 1+nx$ ហៅថា

វិសមភាព Bernoulli។

លំហាត់ ២២

គេឲ្យ a_1, a_2, … , a_n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1a_2\ldots a_n=1$ ។

បង្ហាញថា $a_1+a_2+\ldots+a_n\ge n$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $a_1\ge 1$ ពិត ព្រោះ $a_1=1$

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $a_1+a_2+\ldots+a_k\ge k$ ដែល $a_1a_2\ldots a_k=1\ (1)$

បង្ហាញថា $a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}\ge k+1\ (*)$ ចំពោះ $a_1a_2\ldots a_{k+1}=1$

យើងមាន $(*)$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{k+1}$

WLOG សន្មតថា $a_1\le a_2\le\ldots\le a_{k+1}$

ដោយ $a_1a_2\ldots a_{k+1}=1\Rightarrow a_1\le 1$ និង $a_{k+1}\ge 1$

យើងមាន $a_1a_2\ldots a_{k+1}=1\Leftrightarrow a_2a_3\ldots a_k\left(a_1a_{k+1}\right)=1$

តាម (1) យើងបាន $a_2+a_3+\ldots+a_k+a_1a_{k+1}\ge k$

$$\Rightarrow a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}\ge k-a_1a_{k+1}+a_1+a_{k+1}$$

$$=k+1-1-a_1a_{k+1}+a_1+a_{k+1}$$

$$=k+1+\left(1-a_1\right)\left(a_{k+1}-1\right)\ge k+1$$

ហេតុនេះ $a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}\ge k+1$ ពិត

ដូចនេះ $a_1+a_2+\ldots+a_n\ge n$ សមភាពលុះត្រាតែ $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$

លំហាត់ ២៣

គេឲ្យ $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n$ ជា n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ គេកំណត់យក

$$AM=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},\ GM=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\text{ និង }HM=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\text{ ។}$$

បង្ហាញថា $AM\ge GM\ge HM$ ។

សម្រាយ

បង្ហាញថា $AM\ge GM$

យើងមាន $AM\ge GM\Leftrightarrow\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\qquad(*)$

$(*)$ ជាវិសមភាពអ៊ូម៉ូសែន WLOG សន្មតថា $a_1a_2\ldots a_n=1$

ហេតុនេះ ដើម្បីបង្ហាញថា $AM \ge GM$ ពិត យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ge n$ ចំពោះ $a_1a_2\ldots a_n = 1$ (ពិតតាមលំហាត់ ២២)

បង្ហាញថា $GM \ge HM$

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \ge \frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

សរុបមក $AM \ge GM \ge HM$ សមភាពលុះត្រាតែ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

លំហាត់ ២៤

គេឲ្យ $a_k > 0$ ចំពោះ $k = \overline{1,n}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1a_2\ldots a_n = 1$។

បង្ហាញថា $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \ge 2^n$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន $1 + a_k \ge 2\sqrt{a_k}$ ចំពោះ $k = \overline{1,n}$

ហេតុនេះ $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \ge 2^n\sqrt{a_1a_2\ldots a_n} = 2^n$ ព្រោះ $a_1a_2\ldots a_n = 1$

ដូចនេះ $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \ge 2^n$

លំហាត់ ២៥

ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ បង្ហាញថា $n! \le \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន $1 + n \ge 2\sqrt{1 \times n}$

$$2 + (n-1) \ge 2\sqrt{2(n-1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n + 1 \ge 2\sqrt{n \times 1}$$

គុណអង្គ និង អង្គយើងបាន $(1+n)^n \ge 2^n\sqrt{(n!)^2} = 2^n n!$

ដូចនេះ $n!\le\left(\frac{1+n}{2}\right)^n$

លំហាត់ ២៦

គេឲ្យ $n\in\mathrm{IN}$ ។ បង្ហាញថា បណ្ដាវិសមភាពខាងក្រោម

ក/ $\frac{1}{2}<\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\ldots+\frac{1}{5n}+\frac{1}{5n+1}<\frac{2}{3}$

ខ/ $n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right),\ n>1$ ។

សម្រាយ

ក/

តាម AM-HM យើងបាន $\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\ldots+\frac{1}{5n}+\frac{1}{5n+1}$

$$>\frac{(2n+1)^2}{(3n+1)+(3n+2)+\ldots+(5n)+(5n+1)}$$

$$=\frac{(2n+1)^2}{(3n+1)+(3n+2)+\ldots+(3n+2n)+(3n+2n+1)}$$

$$=\frac{(2n+1)^2}{\frac{(2n+1)(3n+1+3n+2n+1)}{2}}$$

$$=\frac{2n+1}{4n+1}>\frac{2n}{4n}=\frac{1}{2}\qquad(1)$$

ម៉្យាងទៀត $\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\ldots+\frac{1}{5n}+\frac{1}{5n+1}$

$$<\frac{1}{3n+1}+\underbrace{\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+2}}_{2n}$$

$$=\frac{1}{3n+1}+\frac{2n}{3n+2}<\frac{1}{3n+1}+\frac{2}{3}<\frac{2}{3}\qquad(2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\frac{1}{2}<\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\ldots+\frac{1}{5n}+\frac{1}{5n+1}<\frac{2}{3}$

ខ/

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}>n\sqrt[n]{n+1}$

$$\Rightarrow 2+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)>n\sqrt[n]{n+1}$$

$$\Rightarrow n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>n\sqrt[n]{n+1}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) \qquad (1)$$

ម៉្យាងទៀត $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}>\frac{n}{\sqrt[n]{n+1}}$

$$\Rightarrow\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{n}{n+1}>\frac{n}{\sqrt[n]{n+1}}$$

$$\Rightarrow n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\frac{n}{n+1}>\frac{n}{\sqrt[n]{n+1}}$$

យើងបាន $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right) \qquad (2)$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right)$$

លំហាត់ ២៧

គេឲ្យ $x>0$ និង $n\in\mathrm{IN}$ ។ បង្ហាញថា $\frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}\le\frac{1}{2n+1}$ ។

សម្រាយ

ដោយ $x>0$ តាម AM-GM យើងបាន $1+x+x^2+\ldots+x^{2n}$

$$\ge(2n+1)\sqrt[2n+1]{x^{1+2+3+\ldots+2n}}$$

$$=(2n+1)\sqrt[2n+1]{x^{\frac{2n(2n+1)}{2}}}=(2n+1)x^n$$

ដូចនេះ $\frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}\le\frac{1}{2n+1}$

លំហាត់ ២៨

គេឲ្យ $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទាំងអស់ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា $\sqrt{x_1x_n}\le\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\le\frac{x_1+x_n}{2}$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន $x_1+x_2+\ldots+x_n\ge n\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$

ដោយ $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត $\Rightarrow x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{n(x_1+x_n)}{2}$

យើងបាន $\frac{n(x_1+x_n)}{2}\ge n\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\Rightarrow\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\le\frac{x_1+x_n}{2}\quad(1)$

បង្ហាញថា $\sqrt{x_1x_n}\le\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$

បើ $n=1$ យើងបាន $\sqrt{x_1^2}\le x_1$ ពិត

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $\sqrt{x_1x_k}\le\sqrt[k]{x_1x_2\ldots x_k}$

បង្ហាញថា សំណើពិតចំពោះ $n=k+1$ គឺ ស្រាយថា $\sqrt{x_1x_{k+1}}\le\sqrt[k+1]{x_1x_2\ldots x_{k+1}}$

$$\Leftrightarrow(x_1x_{k+1})^{k+1}\le(x_1x_2\ldots x_{k+1})^2$$

យើងមាន $\sqrt{x_1x_k}\le\sqrt[k]{x_1x_2\ldots x_k}\Leftrightarrow(x_1x_2\ldots x_k)^2\ge(x_1x_k)^k$

$$\Rightarrow(x_1x_2\ldots x_kx_{k+1})^2\ge(x_1x_k)^k x_{k+1}^2$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $(x_1x_k)^k x_{k+1}^2\ge(x_1x_{k+1})^{k+1}\Leftrightarrow x_1\left(\frac{x_{k+1}^{k+1}}{x_k^k}\right)\le x_{k+1}^2$

$$\Leftrightarrow x_1\left[1+\frac{d}{x_1+(k-1)d}\right]^{k-1}\le x_1+(k-1)d\qquad(*)$$

($d>0$ ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត $\{x_n\}$)

ចំពោះ $k=1$ យើងបាន (*) ពិត

បើ $x_1\left[1+\frac{d}{x_1+(k-1)d}\right]^{k-1}\le x_1+(k-1)d$

យើងបាន $x_1\left(1+\frac{d}{x_1+kd}\right)^{k}\le x_1\left[1+\frac{d}{x_1+(k-1)d}\right]^{k}$

$$=x_1\left[1+\frac{d}{x_1+(k-1)d}\right]^{k-1}\left[1+\frac{d}{x_1+(k-1)d}\right]$$

$$\le\left[x_1+(k-1)d\right]\left[1+\frac{d}{x_1+(k-1)d}\right]$$

$$=x_1+(k-1)d+d=x_1+dk$$ ពិត

យើងបាន (*) ពិតចំពោះគ្រប់ $k\in\mathrm{IN}\Rightarrow\sqrt{x_1x_{k+1}}\le\sqrt[k+1]{x_1x_2\ldots x_{k+1}}$ ពិត

ហេតុនេះ $\sqrt{x_1x_n}\le\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $\sqrt{x_1x_n}\le\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\le\frac{x_1+x_n}{2}$

សម្គាល់

បើ $x_n=n$ យើងបាន $\sqrt{n}\le\sqrt[n]{n!}\le\frac{1+n}{2}$ ។

លំហាត់ ២៩

(MOSP,2002)

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}\ge 3$$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន $\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{2a}{\sqrt[3]{2a(b+c)^2}}\ge\frac{6a}{2a+(b+c)+(b+c)}$

$$=\frac{3a}{a+b+c} \quad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នា $\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{3b}{a+b+c} \quad (2)$

និង $\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{3c}{a+b+c} \quad (3)$

បូក(1),(2) និង (3) យើងបាន $\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 3$

លំហាត់ ៣០

(Bulgaria,2003)

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=3$។

បង្ហាញថា $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{a}{b^2+1}=a-\frac{ab^2}{b^2+1} \geq a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$

ស្រាយដូចគ្នា $\frac{b}{c^2+1} \geq b-\frac{bc}{2}$ និង $\frac{c}{a^2+1} \geq c-\frac{ca}{2}$

បូកវិសមភាពទាំងបីយើងបាន $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}$

$$\geq a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\geq a+b+c-\frac{(a+b+c)^2}{6}=\frac{3}{2}$$

(វិសមភាព Cauchy-Schwarz)

ដូចនេះ $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}$

លំហាត់ ៣១

(Austria,2005)

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\ge\frac{a+b+c+d}{abcd}$$ ។

សម្រាយ

យក $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$ និង $t=\frac{1}{d}\Rightarrow x\,,\ y\,,\ z\,,\ t>0$

យើងបាន $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\ge\frac{a+b+c+d}{abcd}$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+t^3\ge xyz+yzt+ztx+txy$ (1) ពិត

ព្រោះ តាម AM-GM យើងបាន $x^3+y^3+z^3\ge 3xyz$

$$y^3+z^3+t^3\ge 3yzt$$

$$z^3+t^3+x^3\ge 3ztx$$

$$t^3+x^3+y^3\ge 3txy$$

បូកអង្គ និង អង្គគេបានវិសមភាព (1)

ដូចនេះ $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\ge\frac{a+b+c+d}{abcd}$

លំហាត់ ៣២

(Japan,2005)

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា $a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\le 1$ ។

សម្រាយ

ដោយ $a+b+c=1\Rightarrow 1+b-c>0$

តាម វិសមភាព AM-GM យើងបាន $a\sqrt[3]{1+b-c}=a\sqrt[3]{1\times 1\times(1+b-c)}$

$$\le a\left(\frac{1+1+1+b-c}{3}\right)=a+\frac{ab-ac}{3}$$

ស្រាយដូចគ្នា $b\sqrt[3]{1+c-a}\le b+\dfrac{bc-ab}{3}$ និង $c\sqrt[3]{1+a-b}\le c+\dfrac{ca-bc}{3}$

បូកអង្គ និង អង្គនៃវិសមភាពយើងបាន $a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}$

$$\le a+b+c=1$$

លំហាត់ ៣៣

(Poland,2005)

គេឲ្យ a , b , $c\in[0,1]$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ca+1}+\dfrac{c}{ab+1}\le 2$ ។

សម្រាយ

ដោយ a , b , $c\in[0,1]$ យើងបាន $(1-a)(1-b)+(1-ab)(1-c)\ge 0$

$$\Rightarrow 2+abc\ge a+b+c$$

ហេតុនេះ $\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ca+1}+\dfrac{c}{ab+1}\le\dfrac{a}{abc+1}+\dfrac{b}{abc+1}+\dfrac{c}{abc+1}$

$$=\frac{a+b+c}{1+abc}\le\frac{2+abc}{1+abc}\le\frac{2+2abc}{1+abc}=2$$

ដូចនេះ $\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ca+1}+\dfrac{c}{ab+1}\le 2$

លំហាត់ ៣៤

(Russia,2005)

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បង្ហាញថា $1+x^{n+1}\ge\dfrac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

សម្រាយ

តាម វិសមភាព AM-GM យើងបាន $1+x^{n+1}\ge 2\sqrt{x^{n+1}}=2x^{\frac{n+1}{2}}$

និង $1+x\ge 2\sqrt{x}=2x^{\frac{1}{2}}$

យើងបាន $\left(1+x^{n+1}\right)\left(1+x\right)^{n-1} \geq 2x^{\frac{n+1}{2}}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^{n-1} = \left(2x\right)^{n}$

ដូចនេះ $1+x^{n+1} \geq \dfrac{\left(2x\right)^{n}}{\left(1+x\right)^{n-1}}$

លំហាត់ ៣៥

(Moldova,2007)

គេឲ្យ a_1 , a_2 , … , $a_n \in [0,1]$ និង $S = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \ldots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \frac{1}{3}$$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $i = \overline{1,n}$ តាម វិសមភាព AM-GM យើងបាន

$$2n+1+S-a_i^3 = \sum_{j\neq i}\left(a_j^3+2\right)+3 \geq 3\sum_{j\neq i} a_j + 3 \geq 3\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a_i}{2n+1+S-a_i^3} \leq \frac{a_i}{3\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{2n+1+S-a_i^3}\right) \leq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)} = \frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\dfrac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \dfrac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \ldots + \dfrac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leq \dfrac{1}{3}$

លំហាត់ ៣៦

(Romania,2007)

គេឲ្យ x , y , z ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz + \frac{3}{4}\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|$$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $x^3+y^3+z^3-3xyz = \dfrac{1}{2}\left(x+y+z\right)\left[\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\right]$

ហេតុនេះ $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge xyz+\frac{3}{4}\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\ge \frac{3}{4}\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|$

តាម វិសមភាព AM-GM យើងបាន $2(x+y+z)=(x+y)+(y+z)+(z+x)$

$\ge |x-y|+|y-z|+|z-x|$

$\ge 3\sqrt[3]{\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|}$ (1)

និង $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 3\sqrt[3]{\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|^2}$ (2)

គុណ (1) និង (2) យើងបាន

$2(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\ge 9\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\ge \frac{3}{4}\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge xyz+\frac{3}{4}\left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|$

លំហាត់ ៣៧

គេឲ្យ a_k , $k=\overline{1,n}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sum_{k=1}^{n} a_k \le 1$ ។

បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \ge n^2$ ។

សម្រាយ

តាម វិសមភាព AM-GM យើងបាន $\sum_{k=1}^{n} a_k \ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$ និង $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \ge \frac{n}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}}$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \ge n^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \ge \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \ge n^2 \text{ ព្រោះ } \sum_{k=1}^{n} a_k \le 1$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \ge n^2$

លំហាត់ ៣៨

(វិសមភាព Cauchy-Schwarz)

គេឲ្យ a_1 , a_2 , … , a_n និង b_1 , b_2 , … , b_n ជាចំនួនពិត ។

បង្ហាញថា $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \sum_{k,j=1}^{n} a_k^2 b_j^2 - \sum_{k,j=1}^{n} a_k b_k a_j b_j$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n} \left(a_k b_j - a_j b_k\right)^2 \ge 0$$

ដូចនេះ $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$

លំហាត់ ៣៩

បង្ហាញថា $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n} b_k^2$ ចំពោះគ្រប់ $\alpha > 0$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n} b_k^2$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} b_k - 4\alpha\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| + 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \ge 0$$ ពិត

ព្រោះ បើយក $f(\alpha) = \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} b_k - 4\alpha\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| + 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2$

យើងបាន $\Delta' = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \le 0$ (វិសមភាព Cauchy-Schwarz)

ដោយ $\alpha^2 > 0 \Rightarrow f(\alpha) > 0$

ដូចនេះ $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n} b_k^2$

លំហាត់ ៤០

(Singapore,2000)

គេឲ្យ a , b , c , d ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $c^2 + d^2 = \left(a^2 + b^2\right)^3$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{d} \ge 1$ ។

សម្រាយ

ដោយ $c^2 + d^2 = \left(a^2 + b^2\right)^3$ តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\left(\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{d}\right)(ac + bd) = \left[\left(\sqrt{\frac{a^3}{c}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b^3}{d}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{ac}\right)^2 + \left(\sqrt{bd}\right)^2\right]$$

$$\geq\left(\sqrt{\frac{a^3}{c}}\times\sqrt{ac}+\sqrt{\frac{b^3}{d}}\times\sqrt{bd}\right)=\left(a^2+b^2\right)^2$$

$$=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)}\geq ac+bd$$

ដូចនេះ $\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\geq 1$

លំហាត់ ៤១

(United Kingdom,1983)

គេឲ្យ a , b , c , d , e , f ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\leq\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}$$ ។

សម្រាយ

របៀបទី ១

យើងមាន $\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\leq\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{4}-\frac{ab}{a+b}\right)+\left(\frac{c+d}{4}-\frac{cd}{c+d}\right)+\left(\frac{e+f}{4}-\frac{ef}{e+f}\right)$$

$$\geq\frac{a+c+e+b+d+f}{4}-\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{a+b}+\frac{(c-d)^2}{c+d}+\frac{(e-f)^2}{e+f}\geq\frac{(a+c+e-b-d-f)^2}{a+b+c+d+e+f}$$ ពិត

ព្រោះ តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\frac{(a-b)^2}{a+b}+\frac{(c-d)^2}{c+d}+\frac{(e-f)^2}{e+f}\geq\frac{[(a-b)+(c-d)+(e-f)]^2}{a+b+c+d+e+f}$$

$$=\frac{(a+c+e-b-d-f)^2}{a+b+c+d+e+f}$$

របៀបទី ២

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\left[(b+d+f)^2 a+(a+c+e)^2 b\right](b+a)\geq\left[(b+d+f)\sqrt{ab}+(a+c+e)\sqrt{ba}\right]^2$$
$$=ab(a+b+c+d+e+f)^2$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a+b}\leq\frac{(b+d+f)^2 a+(a+c+e)^2 b}{(a+b+c+d+e+f)^2} \qquad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $\frac{cd}{c+d}\leq\frac{(b+d+f)^2 c+(a+c+e)^2 d}{(a+b+c+d+e+f)^2}$ (2)

និង $\frac{ef}{e+f}\leq\frac{(b+d+f)^2 e+(a+c+e)^2 f}{(a+b+c+d+e+f)^2}$ (3)

បូក (1),(2) និង (3) យើងបាន

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\leq\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}$$

លំហាត់ ៤២

(United Kingdom,1992)

គេឲ្យ x, y, z និង w ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{12}{x+y+z+w}\leq\sum_{sym}\left(\frac{1}{x+y}\right)\leq\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)$$ ។

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sum_{sym}\left(\frac{1}{x+y}\right)\geq\frac{6^2}{\sum_{sym}(x+y)}=\frac{12}{x+y+z+w} \qquad (1)$$

ម៉្យាងទៀត $\sum_{sym}\left(\frac{1}{x+y}\right)\leq\sum_{sym}\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)$ (2)

តាម (1)និង (2) យើងបាន

$$\frac{12}{x+y+z+w} \le \sum_{sym}\left(\frac{1}{x+y}\right) \le \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right)$$

លំហាត់ ៤៣

(Poland,1996)

គេឲ្យ $n \ge 2$ និង $a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$ និង $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ ។

បង្ហាញថា $2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \le \frac{n-2}{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i x_i^2}{1-a_i}$ ។

សម្រាយ

ដោយ $x_1+x_2+\ldots+x_n=1 \Rightarrow 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j = 1-\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

យើងបាន $2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \le \frac{n-2}{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i x_i^2}{1-a_i} \Leftrightarrow \frac{1}{n-1} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{1-a_i}$ ពិត

ព្រោះ តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{1-a_i}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)\right] \ge \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 1 \text{ ដោយ } \sum_{i=1}^{n}(1-a_i)=n-1$$

យើងបាន $\frac{1}{n-1} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{1-a_i}$

ដូចនេះ $$2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \le \frac{n-2}{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i x_i^2}{1-a_i}$$

លំហាត់ ៤៤

(Hong Kong,1997)

គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)(xy+yz+zx)} \le \frac{3+\sqrt{3}}{9} \text{ ។}$$

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz និង AM-GM យើងបាន

$$\frac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(xy+yz+zx\right)} \le \frac{xyz\left(\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(xy+yz+zx\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(xy+yz+zx\right)}$$

$$\le \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)xyz}{\sqrt{3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}\times 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} = \frac{3+\sqrt{3}}{9}$$

ដូចនេះ $\dfrac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(xy+yz+zx\right)} \le \dfrac{3+\sqrt{3}}{9}$

លំហាត់ ៤៥

(Hong Kong,1998)

គេឲ្យ a , b , $c \ge 1$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \le \sqrt{c(ab+1)}$ ។

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \le \sqrt{(1+b-1)(a-1+1)}+\sqrt{c-1}$$

$$= \sqrt{ab}+\sqrt{c-1} \le \sqrt{(1+c-1)(ab+1)}$$

$$= \sqrt{c(ab+1)}$$

ដូចនេះ $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \le \sqrt{c(ab+1)}$

លំហាត់ ៤៦

(Iran,1998)

គេឲ្យ x , y , $z > 1$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$ ។ បង្ហាញថា

$\sqrt{x+y+z} \ge \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$ ។

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{\frac{y-1}{y}}\cdot\sqrt{y}+\sqrt{\frac{z-1}{z}}\cdot\sqrt{z}\right)^2$$

$$\le (x+y+z)\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)$$

$$=(x+y+z)\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)$$

$$=(x+y+z)(3-2)=x+y+z$$

ដូចនេះ $\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$

លំហាត់ ៤៧

(Vietnam,1998)

កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $F(x,y)=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$
$+\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}$ ។

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\frac{\sqrt{\left[\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2\right]\left[(1-y)^2+(x+1)^2\right]}}{2\sqrt{2}}$$

$$\ge\frac{(1-y)\left(\sqrt{3}+1\right)+(1+x)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}} \qquad (1)$$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}\ge\frac{(1-x)\left(\sqrt{3}+1\right)+(1+y)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}}$ (2)

ម៉្យាងទៀត តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}\ge\frac{(x+2)+(y+2)}{\sqrt{2}} \qquad (3)$$

បូក (1),(2),(3) យើងបាន $F(x,y)\ge\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

ដូចនេះ $F_{\min}(x,y)=\sqrt{6}+2\sqrt{2}$ ពេល $x=y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

លំហាត់ ៤៨

ដោយប្រើនិយមន័យ បង្ហាញថា

1- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2+3}=1$

2- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+3n+2}{n^2-n+1}=1$

3- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+1-\sqrt{n^2+1}\right)=1$

4- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}=1$ ។

សម្រាយ

1- យើងមាន $|u_n-l|=\left|\dfrac{n^2+1}{n^2+3}-1\right|=\left|\dfrac{-2}{n^2+3}\right|=\dfrac{2}{n^2+3}<\dfrac{2}{n}$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0$ ដើម្បីឲ្យ $|u_n-l|<\varepsilon$ យើងគ្រាន់តែយក $\dfrac{2}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\dfrac{2}{\varepsilon}$

យក $\delta=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$

យើងបាន $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1\in\mathrm{IN},\forall n\ge\delta\Rightarrow|u_n-l|<\varepsilon$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2+3}=1$

2- យើងមាន $|u_n-l|=\left|\dfrac{n^2+3n+2}{n^2-n+1}-1\right|=\left|\dfrac{4n+1}{n^2-n+1}\right|=\dfrac{4n+1}{n^2-n+1}$

$$\le\frac{4n+1}{n}=4+\frac{1}{n}\ \text{ព្រោះ}\ n^2+1\ge 2n$$

ហេតុនេះ $\forall\varepsilon>0$ ដើម្បីឲ្យ $|u_n-l|<\varepsilon$ យើងគ្រាន់តែយក $4+\dfrac{1}{n}<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow n>\frac{1}{4-\varepsilon}$$

យក $\delta = \left[\dfrac{1}{4-\varepsilon}\right] + 1$

យើងបាន $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \left[\dfrac{1}{4-\varepsilon}\right] + 1 \in \mathrm{IN}, \forall n \geq \delta \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+3n+2}{n^2-n+1} = 1$

3- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+1-\sqrt{n^2+1}\right) = 1$

យើងមាន $|u_n - l| = \left|n+1-\sqrt{n^2+1}-1\right| = \left|n-\sqrt{n^2+1}\right|$

$$= \left|\sqrt{n^2+1}-n\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{n}$$

ហេតុនេះ $\forall \varepsilon > 0$ ដើម្បីឲ្យ $|u_n - l| < \varepsilon$ យើងគ្រាន់តែយក $\dfrac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

យក $\delta = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

យើងបាន $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathrm{IN}, \forall n \geq \delta \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+1-\sqrt{n^2+1}\right) = 1$

4- យើងមាន $|u_n - l| = \left|\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}} - 1\right| = \left|\dfrac{n+1-\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}}\right|$

$$= \left|\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}\left(n+1+\sqrt{n^2+n+1}\right)}\right|$$

$< \dfrac{1}{n+1+\sqrt{n^2+n+1}}$ ព្រោះ $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} < 1$

$$< \frac{1}{n}$$

ហេតុនេះ $\forall\varepsilon>0$ ដើម្បីឲ្យ $|u_n-l|<\varepsilon$ យើងគ្រាន់តែយក $\frac{1}{n}<\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$

យក $\delta=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$

យើងបាន $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\in IN,\forall n\geq\delta\Rightarrow|u_n-l|<\varepsilon$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}=1$

លំហាត់ ៤៩

គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម

1- $u_n=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\ldots\cos\frac{\theta}{2^n}$ ចំពោះ $\theta\in(0,\pi)$

2- $u_n=\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}$ ចំពោះ $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

3- $u_1=1$ និង $u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+\frac{1}{2^n}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

4- $u_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}$ ។

សម្រាយ

1- តាម $\sin 2x=2\sin x\cos x\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\sin x}$

យើងបាន $u_n=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\ldots\cos\frac{\theta}{2^n}$

$$=\left(\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2^2}}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}}{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}}{\sin\frac{\theta}{2^n}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}}\times\frac{\sin\theta}{\theta}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{\sin\theta}{\theta}$

2- $u_n=\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}$

តាម $\cot 2x=\frac{\cot^2 x-1}{2\cot x}=\frac{1}{2}\cot x-\frac{1}{2}\tan x$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\tan x=\frac{1}{2}\cot x-\cot 2x\Rightarrow\frac{1}{2^k}\tan x=\frac{1}{2^k}\cot x-\frac{1}{2^{k-1}}\cot 2x$

យើងបាន $\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}-\cot\theta$

$$\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}=\frac{1}{2^2}\cot\frac{\theta}{2^2}-\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$$

…………………………………………………

$$\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\theta}{2^{n-1}}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$u_n=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n}-\cot\theta=\frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n}\right)-\cot\theta$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{\theta}-\cot\theta$

3- យើងមាន $u_1=1$ និង $u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+\frac{1}{2^n}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*$

$\Rightarrow u_n>0$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*$

យើងបាន $u_{n+1}^2-u_n^2=\frac{1}{2^n}$

ហេតុនេះ $u_n^2-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\Rightarrow u_n=\sqrt{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{2}$

4- យើងមាន $u_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

ដកអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$\frac{1}{2}u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow u_n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-\frac{2n-1}{2^n}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$

លំហាត់ ៥០

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{n^3}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}=\frac{1}{2n^3}\sum_{i=1}^{n}\left(i^2+i\right)$

$$=\frac{1}{2n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

ហេតុនេះ $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2}+\frac{n+1}{4n^2}\right]=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

លំហាត់ ៥១

គណនា $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{x^{2^{k-1}}\left(1-x^{2^{k-1}}\right)}{\left(1-x^{2^k}\right)\left(1-x^{2^{k-1}}\right)}=\frac{x^{2^{k-1}}-x^{2^k}}{\left(1-x^{2^k}\right)\left(1-x^{2^{k-1}}\right)}$

$$=\frac{\left(1-x^{2^k}\right)-\left(1-x^{2^{k-1}}\right)}{\left(1-x^{2^k}\right)\left(1-x^{2^{k-1}}\right)}$$

យើងបាន $\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{1}{1-x^{2^{k-1}}}-\frac{1}{1-x^{2^k}}$

ហេតុនេះ $\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x^{2^{k-1}}}-\frac{1}{1-x^{2^k}}\right)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^n}}$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{2^n}}\right)$$

បើ $|x|>1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{1}{1-x}$

បើ $|x|<1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$

លំហាត់ ៥២

(ផលគុណ Gram)

គណនា $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\frac{k-1}{k+1}\times\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}$

ចំពោះ $k=2\,,\,3\,,\,\ldots\,,\,n$ យើងបាន

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}=\frac{1}{3}\times\frac{3^2-3+1}{2^2-2+1}$$

$$\frac{3^3-1}{3^3+1}=\frac{2}{4}\times\frac{4^2-4+1}{3^2-3+1}$$

....

$$\frac{(n-1)^3-1}{(n-1)^3+1}=\frac{n-2}{n}\times\frac{n^2-n+1}{(n-1)^2-(n-1)+1}$$

$$\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{n-1}{n+1}\times\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}$$

គុណអង្គ និង អង្គយើងបាន $\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{3}$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}$

លំហាត់ ៥៣

គណនា $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+5)!}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $k^3+6k^2+11k+5=k^3+k^2+5k^2+5k+6k+6-1$

$$=k^2(k+1)+5k(k+1)+6(k+1)-1$$

$$=(k+1)(k^2+5k+6)-1$$

$$=(k+1)(k+2)(k+3)-1$$

យើងបាន $\dfrac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)-1}{(k+3)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+3)!}$

ហេតុនេះ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+3)!}\right]$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}$$

ដូចនេះ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+5)!}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

លំហាត់ ៥៤

គណនា $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!}{(n+1)!}$ ។

ចម្លើយ

ចំពោះ $k\in \mathrm{IN}$ យើងបាន $k\cdot k!=[(k+1)-1]k!=(k+1)k!-k!=(k+1)!-k!$

យើងបាន $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!]=(n+1)!-1$

ហេតុនេះ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1$$

លំហាត់ ៥៥

គណនា $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2\times 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\times 4}\right)\ldots\left[1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right]$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $1-\dfrac{2}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{(k+1)(k+2)-2}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k^2+3k}{(k+1)(k+2)}$

$$=\frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+3}{k+2}$$

ហេតុនេះ $\left(1-\dfrac{2}{2\times 3}\right)\left(1-\dfrac{2}{3\times 4}\right)\ldots\left[1-\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\right]=\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\left(\dfrac{n+3}{3}\right)$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{2\times 3}\right)\left(1-\dfrac{2}{3\times 4}\right)\ldots\left[1-\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\right]=\dfrac{1}{3}$

លំហាត់ ៥៦

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

……………………………………………

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\le\frac{n+1}{\sqrt{n^2}}$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}=1$ និង $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2}}=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$

លំហាត់ ៥៧

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\ldots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $0<\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}-1$

$0<\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}<\sqrt{2}-1$

………………………………..

$0<\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}<\sqrt{2}-1$

យើងបាន $0<\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\ldots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)<\left(\sqrt{2}-1\right)^n$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$ និង $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)^n=0$ ព្រោះ $\sqrt{2}-1<1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\ldots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)=0$

លំហាត់ ៥៨

ឧបមាថា $a_n\neq 1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}$ និង $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+a_n^2+\ldots+a_n^k-k}{a_n-1}$ ។

ចម្លើយ

ចំពោះ $l\in \mathrm{IN}$ យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^l-1}{a_n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a_n-1)\left(a_n^{l-1}+a_n^{l-2}+\ldots+1\right)}{a_n-1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{l-1}+a_n^{l-2}+\ldots+1\right)=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{l}=l$

ហេតុនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+a_n^2+\ldots+a_n^k-k}{a_n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a_n-1)+\left(a_n^2-1\right)+\ldots+\left(a_n^k-1\right)}{a_n-1}$

$=1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

លំហាត់ ៥៩

ចំពោះ $a\in IR$ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(n-1)a^2+\frac{2a(1+2+\ldots+(n-1))}{n}+\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^2}\right]$$

ដោយ $1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$

និង $1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)a^2+\frac{n(n-1)}{n^2}a+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\right]$$

$$=a^2+a+\frac{1}{3}$$

លំហាត់ ៦០

គេឲ្យ $a\in\{1,2,\ldots,9\}$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overline{a}+\overline{aa}+\overline{aaa}+\ldots+\overline{\underbrace{aa\ldots aa}_{n}}}{10^n}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\overline{a}+\overline{aa}+\overline{aaa}+\ldots+\overline{\underbrace{aa\ldots aa}_{n}}=a\left(1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots11}_{n}\right)$

$$=a\left(\frac{10^1-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}\right)$$

$$=a\left(\frac{10+10^2+\ldots+10^n-n}{9}\right)=\frac{a\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)}{9}$$

$$=a\left(\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}\right)$$

ហេតុនេះ $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{a}+\overline{aa}+\overline{aaa}+\ldots+\underbrace{\overline{aa\ldots aa}}_{n}}{10^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10a}{81}-\frac{9n+10}{81\times10^n}\right)=\frac{10a}{81}$

លំហាត់ ៦១

គេឲ្យស្វ៊ីត Fibonnaci $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1=a_2=1$ និង $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។ បង្ហាញថា $a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ ដែល α , β ជាឫសនៃសមីការ $x^2=x+1$ រួចទាញរក $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ ។

ចម្លើយ

ឧបមាថា α , β ជាឫសនៃសមីការ $x^2=x+1$ ដែល $\alpha>\beta$

យើងបាន $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\alpha-\beta=\sqrt{5}$

ហេតុនេះ ដើម្បីបង្ហាញថា $a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ យើងត្រូវបង្ហាញថា

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

បើ $n=1$ យើងបាន $a_1=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1$ ពិត

ឧបមាថា ពិតចំពោះគ្រប់ k ដែល $1\leq k\leq n+1$

គឺ $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ និង

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $a_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$

យើងមាន $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

ដោយ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$$

ហេតុនេះ $a_{n+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$ ពិត

ដូចនេះ $a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$

គណនា $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

យើងមាន $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\sqrt[n]{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}}{\sqrt[2n]{5}}=\alpha$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\alpha$

លំហាត់ ៦២

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1=a$, $b_1=b$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$

និង $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_n}{2}$ ។ បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $a_1=a$, $b_1=b$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ និង $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_n}{2}$

យើងបាន $b_{n+1}=\frac{a_n+3b_n}{4}\Rightarrow a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-b_n)$

$\Rightarrow\{a_n-b_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\{a_n-b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើនឹងសូន្យ (*)

ករណី $a\le b$

យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន និង $a_n\le b_n\le b$ (ស្រាយតាមកំណើន)

ហេតុនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

តាម (*) យើងបាន $\{b_n\}$ ក៏ជាស្វ៊ីតរួមដែរ

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

ស្រាយដូចគ្នា ចំពោះករណី $a > b$

លំហាត់ ៦៣

គេឲ្យ $a_1,\ a_2, \dots, a_p$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ គណនា $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n}{p}}$ ។

ចម្លើយ

យក $a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$

យើងបាន $\dfrac{a}{\sqrt[n]{p}} \le \sqrt[n]{\dfrac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n}{p}} \le a$ ដោយ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a}{\sqrt[n]{p}} = a$ និង $\lim_{n\to\infty} a = a$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n}{p}} = a$ ដែល $a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$

លំហាត់ ៦៤

គណនា $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2\dfrac{n^{1999}}{n+1} + \cos^2\dfrac{n^{1999}}{n+1}}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\sqrt[n]{2\sin^2\dfrac{n^{1999}}{n+1} + \cos^2\dfrac{n^{1999}}{n+1}} = \sqrt[n]{1 + \sin^2\dfrac{n^{1999}}{n+1}}$

យើងបាន $1 \le \sqrt[n]{2\sin^2\dfrac{n^{1999}}{n+1} + \cos^2\dfrac{n^{1999}}{n+1}} \le \sqrt[n]{2}$

ដោយ $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ និង $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2\dfrac{n^{1999}}{n+1} + \cos^2\dfrac{n^{1999}}{n+1}} = 1$

លំហាត់ ៦៥

គណនា $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}} - 1\right)$ ។

ចម្លើយ

តាម HM-GM-AM ចំពោះ $x>-1$ យើងបាន

$$1+\frac{x}{2+x}=\frac{2}{\frac{1}{1+x}+1}\le\sqrt{x+1}\le\frac{1+x+1}{2}=1+\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{2+x}\le\sqrt{x+1}-1\le\frac{x}{2}$$

យក $x=\frac{k}{n^2}$ យើងបាន $\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}\le\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\le\frac{k}{2n^2}$

$$\Rightarrow\frac{k}{2n^2+k}\le\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}\le\frac{k}{2n^2}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n^2+k}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n^2}\right)$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{4n^2}=\frac{1}{4}$

និង $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n^2+k}\right)\ge\frac{\sum_{k=1}^{n}k}{2n^2+n}=\frac{n(n+1)}{2(2n^2+n)}=\frac{n+1}{2(2n+1)}$

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(2n+1)}=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}$

លំហាត់ ៦៦

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right)$ ។

ចម្លើយ

តាម HM-GM-AM ចំពោះ $x > -1$ យើងបាន

$$1+\frac{x}{3+2x}=\frac{3}{\frac{1}{1+x}+1+1}\le\sqrt[3]{1+x}\le\frac{1+1+1+x}{3}=1+\frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3+2x}\le\sqrt[3]{1+x}-1\le\frac{x}{3}$$

យក $x=\frac{k^2}{n^3}$ យើងបាន $\frac{\frac{k^2}{n^3}}{3+\frac{2k^2}{n^3}}\le\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\le\frac{k^2}{3n^3}$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{3n^3+2k^2}\le\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\le\frac{k^2}{3n^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3n^3+2k^2}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3n^3}\right)$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{3n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{18n^3}=\frac{1}{9}$

និង $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3n^3+2k^2}\right)\ge\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{3n^3+2n}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(3n^3+2n^2)}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6(3n^2+2n)}$

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6(3n^2+2n)}=\frac{1}{9}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right)=\frac{1}{9}$

លំហាត់ ៦៧

គេឲ្យ $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k$ និង $p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_k$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

គណនា $\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1^{n+1}+p_2a_2^{n+1}+\ldots+p_ka_k^{n+1}}{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\ldots+p_ka_k^n}$ ។

ចម្លើយ

ឧបមាថា $a_l=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$

យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1^{n+1}+p_2a_2^{n+1}+\ldots+p_ka_k^{n+1}}{p_1a_1^n+p_2a_2^n+\ldots+p_ka_k^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}a_l\left[\frac{p_1\left(\frac{a_1}{a_l}\right)^{n+1}+p_2\left(\frac{a_2}{a_l}\right)^{n+1}+\ldots+p_l+\ldots+p_k\left(\frac{a_k}{a_l}\right)^{n+1}}{p_1\left(\frac{a_1}{a_l}\right)^{n}+p_2\left(\frac{a_2}{a_l}\right)^{n}+\ldots+p_l+\ldots+p_k\left(\frac{a_k}{a_l}\right)^{n}}\right]$$

$=a_l$

លំហាត់ ៦៨

គណនា $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)$ ។

ចម្លើយ

- បើ $x=1$ យើងបាន $\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=2^{n+1}$ ហេតុនេះ $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=+\infty$
- បើ $x=-1$ យើងបាន $\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=+\infty$
- បើ $x\neq-1,\ 1$ យើងបាន $\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=\frac{(1-x)\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)}{1-x}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$
  - ចំពោះ $|x|<1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=\frac{1}{1-x}$
  - ចំពោះ $x>1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=+\infty$

- ចំពោះ $x<-1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=-\infty$

លំហាត់ ៦៩

គណនា $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right)$ ។

ចម្លើយ

បើ $x=1$ យើងបាន $\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right)=2^{n+1}$

ហេតុនេះ $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right)=+\infty$

បើ $x=-1$ យើងបាន $\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right)=0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right)=0$$

បើ $x\neq-1,\ 1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right)=\prod_{k=0}^{n}\frac{\left(x^{2^k}+1\right)^2}{x^{2^{k+1}}+1}$

$$=\frac{(x+1)(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\ldots\left(x^{2^n}+1\right)}{(x-1)\left(x^{2^{n+1}}+1\right)}$$

$$=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x^{2^{n+1}}-1}{x^{2^{n+1}}+1}\right)$$

ចំពោះ $|x|<1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right)=\frac{1+x}{1-x}$

ចំពោះ $|x|>1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2}{x^{2^k}+x^{-2^k}}\right)=\frac{x+1}{x-1}$

លំហាត់ ៧០

គណនា $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{3^k}+x^{2\times 3^k}\right)$ ។

ចម្លើយ

បើ $x=1$ យើងបាន $\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{3^k}+x^{2\times 3^k}\right)=3^{n+1}$

ហេតុនេះ $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{3^k}+x^{2\times 3^k}\right)=+\infty$

បើ $x=-1$ យើងបាន $\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{3^k}+x^{2\times 3^k}\right)=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{3^k}+x^{2\times 3^k}\right)=1$

បើ $x\neq -1,\,1$

យើងបាន $1+x^{3^k}+x^{2\times 3^k}=\dfrac{\left(x^{3^k}-1\right)\left(1+x^{3^k}+x^{2\times 3^k}\right)}{x^{3^k}-1}=\dfrac{x^{3^{k+1}}-1}{x^{3^k}-1}$

ហេតុនេះ $\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{3^k}+x^{2\times 3^k}\right)=\dfrac{x^{3^{n+1}}-1}{x^3-1}$

ចំពោះ $|x|<1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{3^k}+x^{2\times 3^k}\right)=\dfrac{1}{1-x^3}$

ចំពោះ $|x|>1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{3^k}+x^{2\times 3^k}\right)=+\infty$

លំហាត់ ៧១

ក/ បង្ហាញថា $x-\dfrac{x^2}{2}<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}<x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ខ/ គេឲ្យ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ និង $S_n=f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+f\left(\dfrac{2}{n^2}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{n}{n^2}\right)$ ។

គណនា $\lim_{n\to\infty}S_n$ ។

ចម្លើយ

ក/ យើងមាន $x-\dfrac{x^2}{2}<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}<x\ \Leftrightarrow 1-\dfrac{x}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}<1$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

ដោយ $x>0\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}<1$ (1)

តាង $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{x}{2}-1$ ចំពោះ $x>0$

យើងបាន $g'(x)=\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^3}}\right]>0$ ចំពោះគ្រប់ >0

ហេតុនេះ g ជាអនុគមន៍កើន $\Rightarrow g(x)>g(0)$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

តែ $g(0)=\dfrac{1}{\sqrt{0+1}}+0-1=0$

$\Rightarrow g(x)>0\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{x}{2}-1>0\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}>1-\dfrac{x}{2}$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $1-\dfrac{x}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}<1$

ដូចនេះ $x-\dfrac{x^2}{2}<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}<x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

ខ/ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

យើងមាន $x-\dfrac{x^2}{2}<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}<x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

យក $x=\dfrac{k}{n^2}$, $k=\overline{1,n}$ យើងបាន $\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k^2}{n^4}\right)<f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)<\dfrac{k}{n^2}$

ហេតុនេះ $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k^2}{n^4}\right)\right]<S_n<\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$

ដោយ $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k^2}{n^4}\right)\right]=\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^4}\right)$

$$=\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}\right]\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right]=\frac{1}{2}$$

និង $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{n(n+1)}{2n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$

លំហាត់ ៧២

បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{2}{n}\le 2\times1\times1\times\ldots\times\frac{2}{n}=\frac{4}{n} \Rightarrow 0<\frac{2^n}{n!}\le\frac{4}{n}$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}0=0$ និង $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$

ដូចនេះ: $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

លំហាត់ ៧៣

បង្ហាញថា ស៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដូចខាងក្រោមជាស៊ីតរួម

ក/ $u_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!!}$, $n \in \mathrm{IN}^*$

ខ/ $u_1 > 2$, $u_{n+1} = \dfrac{6+6u_n}{7+u_n}$, $n \in \mathrm{IN}^*$

គ/ $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$, $n \in \mathrm{IN}^*$

ឃ/ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)2n}}$, $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

សម្រាយ

ក/

យើងមាន $u_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!!} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{(2n+3)!!} = \dfrac{n!(n+1)}{(2n+1)!!(2n+3)}$

$$= \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)u_n < u_n \text{ ព្រោះ } \frac{n+1}{2n+3} < 1$$

យើងបាន $\{u_n\}$ ជាស៊ីតចុះ (1)

ម៉្យាងទៀត $u_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^* \Rightarrow \{u_n\}$ ជាស៊ីតទាល់ក្រោម (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $\{u_n\}$ ជាស៊ីតរួម

ខ/

យើងមាន $u_1 > 2$, $u_{n+1} = \dfrac{6+6u_n}{7+u_n}$

យើងបាន $u_{n+1} - u_n = \dfrac{6+6u_n}{7+u_n} - u_n = \dfrac{(u_n+3)(2-u_n)}{u_n+7}$ (*)

បង្ហាញថា $u_n > 2$

យើងមាន $u_1 > 2$ មានន័យថា សំណើពិតចំពោះ $n = 1$

ឧបមាថា សំណើពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k > 2$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_{k+1} > 2$

យើងមាន $u_{k+1} = \dfrac{6+6u_k}{7+u_k} = 6\left(1-\dfrac{6}{u_k+7}\right) > 6\left(1-\dfrac{6}{9}\right) = 6\left(\dfrac{1}{3}\right) = 2$ ពិត

ព្រោះ $u_k > 2$

ហេតុនេះ $u_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^* \Rightarrow \{u_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

តាម (*) យើងបាន $u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow \{u_n\}$ជាស្វ៊ីតចុះ

ដូចនេះ $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម

គ/

យើងមាន $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$

យើងបាន $u_2 = \sqrt{3u_1 - 2} = \sqrt{3\left(\dfrac{3}{2}\right) - 2} = \sqrt{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2} > u_1 = \dfrac{3}{2}$

ឧបមាថា $u_{k+1} > u_k$ ចំពោះ $k \geq 1$

បង្ហាញថា $u_{k+2} > u_{k+1}$

ដោយ $u_{k+1} > u_k \Rightarrow \sqrt{3u_{k+1} - 2} > \sqrt{3u_k - 2} \Rightarrow u_{k+2} > u_{k+1}$ ពិត

ហេតុនេះ $u_{n+1} > u_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^* \Rightarrow \{u_n\}$ជាស្វ៊ីតកើន (1)

តាមវិចារកំណើន យើងនឹងបង្ហាញថា $u_n < 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$

យើងមាន $u_1 = \dfrac{3}{2} < 2$ ពិត

ឧបមាថា សំណើពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k < 2$

បង្ហាញថា $u_{k+1} < 2$

ដោយ $u_k < 2$ យើងបាន $\sqrt{3u_k - 2} < 2 \Rightarrow u_{k+1} < 2$ ពិត

ហេតុនេះ $u_n < 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^* \Rightarrow \{u_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់លើ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម

ឃ/

យើងមាន $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)2n}}$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}$$

យើងបាន $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} - \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} - \frac{2}{\sqrt{2n(2n+2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{2n+2} + \sqrt{2n} - 2\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n(2n+1)(2n+2)}} < 0$$

ព្រោះ $2\sqrt{2n+1} > \sqrt{2n} + \sqrt{2n+2}$

ហេតុនេះ $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតចុះ

ម៉្យាងទៀត $u_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$

ដូចនេះ $\{u_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម

លំហាត់ ៧៤

បង្ហាញថា ស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតរួម

ក/ $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ ចំពោះ $n \in \mathrm{IN}^*$

ខ/ $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}$ ចំពោះ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

សម្រាយ

ក/

យើងមាន $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

យើងបាន $a_{n+1} > a_n \Rightarrow \{a_n\}$ជាស្វ៊ីតកើន

ម្យ៉ាងទៀត $a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{(n-1)n}$

$$=1+1-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n} < 2$$

យើងបាន $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដូចនេះ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម

ខ/

យើងមាន $a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^n}$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^n}+\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = a_n + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

យើងបាន $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតកើន

និង $a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{n^n} < 1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{(n-1)n}$

$$=1+1-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n} < 2$$

យើងបាន $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដូចនេះ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម

លំហាត់ ៧៥

ក/ បង្ហាញថា $x-\frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ខ/ គេឲ្យ $S_n = \ln\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ។

សម្រាយ

ក/

យក $f(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ ចំពោះ $x>0\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x$

$$=\frac{x^2}{1+x}>0\,,\ \forall x>0$$

យើងបាន f ជាអនុគមន៍កើន $\Rightarrow f(x)>f(0)$ ចំពោះ $\forall x>0$

ហេតុនេះ $\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}>\ln 1-0+0=0\Rightarrow \ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$ (1)

យក $g(x)=x-\ln(1+x)\Rightarrow g'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{x+1}>0\,,\ \forall x>0$

យើងបាន g ជាអនុគមន៍កើន $\Rightarrow g(x)>g(0)$ ចំពោះ $\forall x>0$

ហេតុនេះ $x-\ln(1+x)>0-\ln 1=0\Rightarrow \ln(1+x)<x$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

ខ/

យើងមាន $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

យក $x=\dfrac{k}{n^2}$ យើងបាន $\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{k^2}{2n^4}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)<\dfrac{k}{n^2}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)<\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

ដោយ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)=\left(\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^4}\right)$

$$=\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}\right]$$

យើងបាន $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)=\frac{1}{2}$

និង $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{n(n+1)}{2n^2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$

លំហាត់ ៧៦

ក/ បង្ហាញថា $\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$ ចំពោះគ្រប់ $0 < x < 1$ ។

ខ/ គេឲ្យ $S_n = \frac{a}{n+a} + \frac{a}{n+2a} + \ldots + \frac{a}{n+na}$ ដែល $a > 0$ ។

គណនា $\lim_{n\to\infty} S_n$ ។

សម្រាយ

ក/

យក $f(x) = x - \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $0 < x < 1$

$\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍កើន យើងបាន $f(x) > f(0)$ ចំពោះគ្រប់ $0 < x < 1$

យើងបាន $x - \ln(1+x) > 0 - \ln 1 = 0 \Rightarrow x > \ln(1+x)$ $\quad (1)$

យក $g(x) = -x - \ln(1-x) \Rightarrow g'(x) = -1 + \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $0 < x < 1$

យើងបាន g ជាអនុគមន៍កើន $\Rightarrow g(x) > g(0)$ ចំពោះគ្រប់ $0 < x < 1$

យើងបាន $-x - \ln(1-x) > 0 \Rightarrow x < -\ln(1-x)$ $\quad (2)$

តាម $(1),(2)$ យើងបាន $\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$ ចំពោះគ្រប់ $0 < x < 1$

ខ/

យើងមាន $\ln(1+x) < x < -\ln(1-x)$ ចំពោះគ្រប់ $0 < x < 1$

ដោយ $0 < \frac{a}{n+ka} < 1$ ចំពោះ $a > 0$ និង $k \in \mathrm{IN}^*$

យក $x = \frac{a}{n+ka}$ យើងបាន $\ln\left(1 + \frac{a}{n+ka}\right) < \frac{a}{n+ka} < -\ln\left(1 - \frac{a}{n+ka}\right)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{a}{n+ka}\right) < S_n < \sum_{k=1}^{n}\left[-\ln\left(1 - \frac{a}{n+ka}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\ln\left[\frac{n+(k+1)a}{n+ka}\right] < S_n < -\sum_{k=1}^{n}\ln\left[\frac{n+(k-1)a}{n+ka}\right]$$

$$\Rightarrow \ln\left[\frac{n+(n+1)a}{n+a}\right] < S_n < -\ln\left(\frac{n}{n+na}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left[\frac{n+(n+1)a}{n+a}\right] < S_n < \ln(1+a)$$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n+(n+1)a}{n+a}\right] = \lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{(1+a)n+a}{n+a}\right] = \ln(1+a)$

និង $\lim_{n\to\infty}\ln(1+a) = \ln(1+a)$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} S_n = \ln(1+a)$

លំហាត់ ៧៧

ឧបមាថា $\{a_n\}$ ជាស៊ីតនៃចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$ ។ បង្ហាញថា

ក/ បើ $q<1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ។

ខ/ បើ $q>1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$ ។

សម្រាយ

ក/

យក $\varepsilon > 0$ ដែល $q+\varepsilon < 1$

យើងមាន $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$ តាមនិយមន័យលីមីតស៊ីត យើងបាន

មាន $n_0 \in \mathrm{IN}$ ដែល $n \ge n_0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon \Rightarrow q-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q+\varepsilon \Rightarrow |a_{n+1}| < (q+\varepsilon)|a_n| \Rightarrow |a_n| < (q+\varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}|$$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}(q+\varepsilon)^{n-n_0} = 0$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ខ/

យក $\varepsilon > 0$ ដែល $q-\varepsilon > 1$

ស្រាយដូច ក យើងបាន មាន $n_0 \in \mathrm{IN}$ ដែល $n \ge n_0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q-\varepsilon \Rightarrow |a_{n+1}| > (q-\varepsilon)|a_n| \Rightarrow |a_n| > (q-\varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}|$$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}(q-\varepsilon)^{n-n_0} = +\infty$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$

លំហាត់ ៧៨

យក $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$ ។ បង្ហាញថា

ក/ បើ $q<1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ។

ខ/ បើ $q>1$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$ ។

សម្រាយ

ក/

យក $\varepsilon > 0$ ដែល $q+\varepsilon < 1$

យើងមាន $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$ តាមនិយមន័យនៃលីមីតស្វ៊ីត យើងបាន

$\exists n_0 \in \mathrm{IN}, \forall n \ge n_0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|a_n| < (q+\varepsilon)^n$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}(q+\varepsilon)^n = 0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ខ/

យក $\varepsilon > 0$ ដែល $q-\varepsilon > 1$

ដូច ក ដែរ យើងបាន $\exists n_0 \in \mathrm{IN}, \forall n \ge n_0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|a_n| > (q-\varepsilon)^n$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}(q-\varepsilon)^n = +\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$

លំហាត់ ៧៩

គេឲ្យ α ជាចំនួនពិត និង $x\in(0,1)$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}x^{n}$ ។

សម្រាយ

យក $a_n = n^{\alpha}x^{n}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\alpha} x = x$

ដោយ $0<x<1$

តាម លំហាត់ ៧៧ យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}x^{n} = 0$

លំហាត់ ៨០

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{n!}$ ចំពោះ $m\in \mathrm{IN}$ និង $|x|<1$ ។

សម្រាយ

យក $a_n = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{n!}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(\dfrac{m-n}{n+1}\right)x\right| = |x|$ ដោយ $|x|<1$

តាម លំហាត់ ៧៧ យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{n!}$

លំហាត់ ៨១

បង្ហាញថា ស្ទីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_n = \dfrac{\sin 1^\circ}{1^2}+\dfrac{\sin 2^\circ}{2^2}+\ldots+\dfrac{\sin n^\circ}{n^2}$ ជាស្ទីត Cauchy ។

សម្រាយ

ចំពោះគ្រប់ $p \in \mathrm{IN}$ យើងបាន

$$u_{n+p} = u_n + \frac{\sin(n+1)^\circ}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n+2)^\circ}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{\sin(n+p)^\circ}{(n+p)^2}$$

$$\Rightarrow u_{n+p} - u_n = \frac{\sin(n+1)^\circ}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n+2)^\circ}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{\sin(n+p)^\circ}{(n+p)^2}$$

$$\Rightarrow \left|u_{n+p} - u_n\right| = \left|\frac{\sin(n+1)^\circ}{(n+1)^2} + \frac{\sin(n+2)^\circ}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{\sin(n+p)^\circ}{(n+p)^2}\right|$$

$$\le \frac{\left|\sin(n+1)^\circ\right|}{(n+1)^2} + \frac{\left|\sin(n+2)^\circ\right|}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{\left|\sin(n+p)^\circ\right|}{(n+p)^2}$$

$$< \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

ចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ ដើម្បីឲ្យ $\left|u_{n+p} - u_n\right| < \varepsilon$ យើងគ្រាន់តែយក $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

យក $\delta = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

យើងបាន $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in \mathrm{IN}$ ដែល $\forall n \ge \delta$, $p \in \mathrm{IN} \Rightarrow \left|u_{n+p} - u_n\right| < \varepsilon$

ដូចនេះ $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីត Cauchy

លំហាត់ ៨២

បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$ ។

សម្រាយ

យើងនឹងបង្ហាញថា ស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ ជាស្វ៊ីតរីក

គឺ បង្ហាញថា $\{u_n\}$ មិនមែនជាស្ទីត Cauchy

យើងមាន $u_{2n}-u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

ហេតុនេះ $\{u_n\}$ មិនមែនជាស្ទីត Cauchy គឺ $\{u_n\}$ ជាស្ទីតរីក

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$

លំហាត់ ៨៣

ចំពោះ $c>2$ គេកំណត់ស្ទីត $\{a_n\}$ ដោយ $a_1=c^2$ និង $a_{n+1}=(a_n-c)^2,\ n\geq 1$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្ទីតកើនជានិច្ច ។

សម្រាយ

តាមវិចារកំណើន យើងបាន $a_n>2c$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

យើងមាន $a_2=(a_1-c)^2=(c^2-c)^2=c^2(c-1)^2>c^2=a_1$

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $a_{k+1}>a_k$

បង្ហាញថា $a_{k+2}>a_{k+1}$

យើងមាន $a_{k+2}=(a_{k+1}-c)^2>(a_k-c)^2=a_{k+1}$ ពិត

ហេតុនេះ $a_{n+1}>a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្ទីតកើនជានិច្ច

លំហាត់ ៨៤

គេឲ្យស្ទីត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $0<a_n<1$ និង $a_n(1-a_{n+1})>\frac{1}{4}$ ចំពោះ $\forall n\in \mathrm{IN}$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្ទីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស្ទីតនេះ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_n(1-a_{n+1})>\frac{1}{4}$ ចំពោះ $\forall n\in \mathrm{IN}$ តាម AM-GM យើងបាន

$$\frac{a_n+(1-a_{n+1})}{2}>\sqrt{a_n(1-a_{n+1})}>\frac{1}{2}\Rightarrow a_{n+1}-a_n<0$$

យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

ម្យ៉ាងទៀត $0 < a_n \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

ឧបមាថា $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

ដោយ $a_n(1-a_{n+1}) > \frac{1}{4}$ យើងបាន $l(1-l) \le \frac{1}{4} \Rightarrow \left(l-\frac{1}{2}\right)^2 \le 0 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

លំហាត់ ៨៥

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 0$ និង $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_1 = 0$ និង $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$

យើងបាន $a_2 = \sqrt{6+a_1} = \sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $a_k < 3$

បង្ហាញថា $a_{k+1} > 3$

ដោយ $a_k < 3 \Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{6+a_k} < \sqrt{6+3} = 3$ ពិត

ហេតុនេះ $a_n < 3$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$

$\Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ម្យ៉ាងទៀត $a_{n+1}^2 - a_n^2 = -a_n^2 + a_n + 6 = -(a_n-3)(a_n+2) > 0$ ព្រោះ $a_n < 3$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ទាញរកលីមីតនៃ $\{a_n\}$

ឧបមាថា $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

ដោយ $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$ យើងបាន $l=\sqrt{6+l}\Rightarrow l^2-l-6=0\Rightarrow l=-2\,,\ l=3$

តែ $0\le a_n<3\Rightarrow l>0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$

លំហាត់ ៨៦

$\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1=0\,,\ a_2=\dfrac{1}{2}$

និង $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(1+a_n+a_{n-1}^3\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n>1$។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_1=0\,,\ a_2=\dfrac{1}{2}$ និង $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(1+a_n+a_{n-1}^3\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n>1$

$\Rightarrow a_n\ge 0$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$

ដោយ $a_1<1,\ a_2<1$ ឧបមាថា $a_k<1$ ចំពោះ $1\le k\le n$

បង្ហាញថា $a_{n+1}<1$

យើងមាន $a_{n-1}\,,\ a_n<1\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(1+a_n+a_{n-1}^3\right)<\dfrac{1}{3}(1+1+1)=1$

យើងបាន $0\le a_n<1\ \Rightarrow\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់

ម្យ៉ាងទៀត $a_1<a_2<a_3$

ឧបមាថា $a_k<a_{k+1}$ ចំពោះ $1\le k\le n$

បង្ហាញថា $a_{n+1}<a_{n+2}$

យើងមាន $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(a_{n+1}-a_n+a_n^3-a_{n-1}^3\right)>0$ ពិត

ព្រោះ $a_{n-1}<a_n<a_{n+1}$

ហេតុនេះ $a_{n+1}>a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$

យើងបាន $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតកើន

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

យក $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ ដោយ $a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 + a_n + a_{n-1}^3\right)$

យើងបាន $l = \frac{1}{3}\left(1 + l + l^3\right) \Rightarrow l = 1$, $l = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

តែ $0 < a_n < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (ស្រាយតាមកំណើន)

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

លំហាត់ ៨៧

ក/ បើ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \text{IN}\}$ ។

ខ/ បើ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនចុះ បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \text{IN}\}$ ។

សម្រាយ

ក/

បើ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន និង ទាល់លើ (យក A ជាគោលលើ, $A \neq +\infty$)

យើងបាន $\sup\{a_n : n \in \text{IN}\} = A$ និង $a_n \le A$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \text{IN}$

ចំពោះ $\varepsilon > 0 \Rightarrow A - \varepsilon$ មិនមែនជាគោលលើនៃសំណុំ $\{a_n : n \in \text{IN}\}$

ហេតុនេះ $\exists n_0 \in \text{IN}$ ដែល $a_{n_0} > A - \varepsilon$

ដោយ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន យើងបាន $A \ge a_n > A - \varepsilon$ ចំពោះ $\forall n \ge n_0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \text{IN}\}$

បើ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន តែមិនទាល់លើ យើងបាន

$\forall M > 0, \exists n_0 \in \text{IN}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_{n_0} > M$

ដោយ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន យើងបាន

$\forall M > 0, \exists n_0 \in \text{IN}$ ដែល $\forall n \geq n_0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n > M$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$

សរុបមក $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \text{IN}\}$

ខ/ ស្រាយដូច ក

លំហាត់ ៨៨

គេឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ និង ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a_{n+1} \geq a_n - \dfrac{1}{2^n}$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម ។

សម្រាយ

យក $b_n = a_n - \dfrac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \dfrac{1}{2^n} > 0$

$\Rightarrow \{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ដោយ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ យើងបាន $\{b_n\}$ ក៏ជាស្វ៊ីតទាល់ដែរ

ហេតុនេះ $\{b_n\} = \left\{a_n - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$ ជាស្វ៊ីតរួម តែ $\left\{\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

លំហាត់ ៨៩

ក/ គេឲ្យ p , q ជាចំនួនពិត និង a_1 , a_2 , ... , a_n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{p+q}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{p-q}\right)$ ។

ខ/ គេឲ្យ a_1 , a_2 , ... , a_p ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ គេកំណត់យក

$s_n = \dfrac{a_1^n + a_2^n + ... + a_p^n}{p}$ និង $x_n = \sqrt[n]{s_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

បង្ហាញថា $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន ។

សម្រាយ

ក/

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{p+q}{2}} a_k^{\frac{p-q}{2}}\right)^2 \le \left[\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^{\frac{p+q}{2}}\right)^2\right]\left[\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^{\frac{p-q}{2}}\right)^2\right]$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a^{p+q}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a^{p-q}\right)$$

ដូចនេះ $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+q}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{p-q}\right)$

ខ/

យើងមាន $x_1 = s_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{p}$ និង $x_2 = s_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2}{p}}$

តាម វិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន $\sum_{k=1}^{p} a_k \le p\sum_{k=1}^{p} a_k^2$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{p} a_k}{p} \le \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{p} a_k^2}{p}} \Rightarrow x_1 \le x_2$$

ឧបមាថា $x_{k-1} \le x_k$

បង្ហាញថា $x_k \le x_{k+1}$

តាម ក យើងបាន $\frac{s_k}{s_{k-1}} \le \frac{s_{k+1}}{s_k} \Rightarrow s_k^2 \le s_{k-1}s_{k+1}$ ចំពោះ $n \ge 2$

ដោយ $x_{k-1} \le x_k \Rightarrow s_{k-1} \le s_k^{\frac{k-1}{k}}$

ហេតុនេះ $x_{k+1} = \sqrt[k+1]{s_{k+1}} \ge \sqrt[k+1]{\frac{s_k^2}{s_{k-1}}} \ge \sqrt[k+1]{\frac{s_k^2}{s_k^{\frac{k-1}{k}}}} = x_k$ ពិត

យើងបាន $x_{n+1} \ge x_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$

ដូចនេះ $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន

លំហាត់ ៩០

ក/ បង្ហាញថា $2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

ខ/ បង្ហាញថា ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_n=-2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$

ជាស្វ៊ីតរួម ។

សម្រាយ

ក/

យើងមាន $\frac{1}{2\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}}>2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \qquad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{1}{2\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$

យើងបាន $\frac{1}{\sqrt{k}}<2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n} \qquad (2)$

តាម (1),(2) យើងបាន $2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$

ខ/

យើងមាន $a_n=-2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\Rightarrow a_{n+1}=-2\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

យើងបាន $a_{n+1}-a_n=-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=-\frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2}<0$

$\Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

ម្យ៉ាងទៀត តាម ក យើងបាន $a_n>-2\sqrt{n}+2\left(\sqrt{n+1}-1\right)>-2$

$\Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

ដូចនេះ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម

លំហាត់ ៩១

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$កំណត់ដោយ $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ ចំពោះ $n > 1$។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតចុះដាច់ខាត រួចទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_n = \dfrac{n}{2^n} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} = \dfrac{n+1}{2n} a_n < a_n$ ព្រោះ $\dfrac{n+1}{2n} < 1,\ \forall n > 1$

យើងបាន $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតចុះ

ម៉្យាងទៀត $a_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n > 1$ នោះ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

ហេតុនេះ$\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម មានន័យថា a_nមានលីមីត

ឧបមាថា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

ដោយ $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} a_n \Rightarrow l = \dfrac{1}{2} l \Rightarrow l = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

លំហាត់ ៩២

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$កំណត់ដោយ $a_1 = \sqrt{2}$ និង $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_1 = \sqrt{2}$ និង $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$

$\Rightarrow a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{a_1}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$

ឧបមាថា ពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $a_{k+1} > a_k$

បង្ហាញថា $a_{k+2} > a_{k+1}$

ដោយ $a_{k+1} > a_k \Rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{a_{k+1}}} > \sqrt{2 + \sqrt{a_k}} \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$ ពិត

យើងបាន $a_{n+1} > a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$

$\Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វីតកើន

ម៉្យាងទៀត $a_1 = \sqrt{2} < 2$

បើ $a_k < 2 \Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{2+\sqrt{a_k}} < \sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$ ពិត

យើងបាន $a_n < 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1 \Rightarrow a_n$ ជាស្វីតទាល់លើ

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វីតរួម

ឧបមាថា $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

ដោយ $a_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{a_n}}$ យើងបាន $l = \sqrt{2+\sqrt{l}}$ (*)

ដោះស្រាយសមីការ (*) ដោយប្រើរូបមន្ត Cardan យើងបាន

$$l = \frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(79+3\sqrt{249}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(79-3\sqrt{249}\right)} - 1\right]$$

លំហាត់ ៩៣

យក $\{x_n\}$ ជាស្វីតនៃចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $\{x_n\}$ ជាស្វីតរួម បើគេដឹងថា $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$ និង $\{x_{3n}\}$ ជាស្វីតរួម ។

សម្រាយ

បើ $\{x_n\}$ ជាស្វីតរួម នោះគ្រប់ស្វីតរង (រឺ ស្វីតទាញចេញ) នៃ $\{x_n\}$ សុទ្ធតែជាស្វីតរួម ហើយ មានលីមីតដូចគ្នា

ឧបមាថា $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \alpha_1$, $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \alpha_2$ និង $\lim_{n\to\infty} x_{3n} = \alpha_3$

ដោយ $\{x_{6n}\}$ ជាស្វីតរងនៃស្វីត $\{x_{2n}\}$ និង $\{x_{3n}\}$

យើងបាន $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{3n} = \lim_{n\to\infty} x_{6n} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_3$

ម៉្យាងទៀត $\{x_{6n+3}\}$ ជាស្វីតរងនៃស្វីត $\{x_{2n+1}\}$ និង $\{x_{3n}\}$

យើងបាន $\lim_{n\to\infty} x_{6n+3} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} x_{3n} \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3$

ហេតុនេះ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$

ឧបមាថា $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = l$ យើងនឹងបង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty} x_n = l$

ដោយ $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = l$ យើងបាន $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_0$, $N_1 \in \mathrm{IN}$ដែល

$|x_{2n} - l| < \varepsilon$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq N_0$ និង $|x_{2n+1} - l| < \varepsilon$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq N_1$

យក $N = \max\{2N_0, 2N_1 + 1\}$

ចំពោះ $\forall n \geq N$

បើ n ជាចំនួនគូ

យើងបាន $n = 2k \Rightarrow k \geq N_0$ ព្រោះ $n \geq N \geq 2N_0$

ហេតុនេះ $|x_{2k} - l| < \varepsilon \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$

ស្រាយដូចគ្នា ចំពោះ n ជាចំនួនសេស យើងបាន $|x_n - l| < \varepsilon$

យើងបាន $|x_n - l| < \varepsilon$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq N$

ដូចនេះ $\{x_n\}$ ជាស្វីតរួម

លំហាត់ ៩៤

គេឲ្យស្វីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 1$ និង $a_{n+1} = \dfrac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស្វីតនេះ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_1 = 1 < 2$

ដោយ $a_{n+1} = \dfrac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3} = 2\left(2 - \dfrac{5}{a_n + 3}\right)$

បើ $a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2\left(2 - \dfrac{5}{2 + 3}\right) = 2$

យើងបាន $a_n < 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1 \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វីតទាល់លើ

ម៉្យាងទៀត $a_{n+1} - a_n = \dfrac{4a_n + 2}{a_n + 3} - a_n = \dfrac{-a_n^2 + a_n + 2}{a_n + 3} = -\dfrac{(a_n + 1)(a_n - 2)}{a_n + 3} \geq 0$

ព្រោះ $0 < a_n < 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វីតរួម

ឧបមាថា $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ យើងបាន $l = \dfrac{2(2l+1)}{l+3} \Rightarrow l = -1,\ l = 2$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ ព្រោះ $0 < a_n < 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

លំហាត់ ៩៥

ចំពោះ $p \in \mathrm{IN}^*$, $a > 0$ និង $a_1 > 0$ គេកំណត់ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ មួយដោយ

$a_{n+1} = \dfrac{1}{p}\left[(p-1)a_n + \dfrac{a}{a_n^{p-1}}\right]$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។ គណនា $\lim_{n\to\infty} a_n$ ។

សម្រាយ

ដោយ $a_{n+1} = \dfrac{1}{p}\left[(p-1)a_n + \dfrac{a}{a_n^{p-1}}\right]$, $p \in \mathrm{IN}^*$, $a > 0$ និង $a_1 > 0$

យើងបាន $a_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$

តាម AM-GM យើងបាន $a_{n+1} \geq \sqrt[p]{\underbrace{a_n \times a_n \times \ldots \times a_n}_{p-1} \times \dfrac{a}{a_n^{p-1}}} = \sqrt[p]{a}$

$\Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម និង មាន $\sqrt[p]{a}$ ជាគោលក្រោម

ម៉្យាងទៀត $a_{n+1} - a_n = -\dfrac{a_n}{p} + \dfrac{a}{pa_n^{p-1}} = -\dfrac{a_n^p - a}{pa_n^{p-1}} \leq 0$

ហេតុនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើនឹង $\sqrt[p]{a}$

លំហាត់ ៩៦

កំណត់គ្រប់តម្លៃ $c > 0$ ដើម្បីឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = \dfrac{c}{2}$

និង $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(c + a_n^2\right)$, $\forall n \in \mathrm{IN}^*$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចទាញរក $\lim_{n\to\infty} a_n$ ។

សម្រាយ

ដោយ $a_1 = \dfrac{c}{2}$ និង $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(c + a_n^2\right)$, $\forall n \in \mathrm{IN}^*$

តាមវិចារកំណើន យើងបាន $a_{n+1} \geq a_n$ ចំពោះ $\forall n \in \mathrm{IN}^*$

$\Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្ទីតកើន

បើ $\{a_n\}$ ជាស្ទីតទាល់លើ $\Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្ទីតរួម សន្មតថាមានលីមីត l

យើងបាន $l = \frac{1}{2}\left(c + l^2\right) \Rightarrow l^2 - 2l + c = 0$

មាន l លុះត្រាតែ $\Delta' = 1 - c \geq 0 \Rightarrow 0 < c \leq 1$

- ចំពោះ $0 < c \leq 1$ យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្ទីតទាល់លើដោយ $1 - \sqrt{1-c}$
  ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-c}$
- ចំពោះ $c > 1$ យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្ទីតកើន និង មិនទាល់លើ
  គឺ $\{a_n\}$ ជាស្ទីតរីក ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$)

ដូចនេះ $0 < c \leq 1$

លំហាត់ ៩៧

គេឲ្យស្ទីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 > 0$ និង $a_{n+1} = \left(\frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a}\right) a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ និង $a > 0$ ។ កំណត់ a_1 ដើម្បីឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស្ទីតរួម រួចគណនា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_{n+1} = \left(\frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a}\right) a_n = a_n\left[1 - 2\left(\frac{a_n^2 - a}{3a_n^2 + a}\right)\right]$

ហេតុនេះ បើ $a_n > \sqrt{a} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

បើ $a_n < \sqrt{a} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

បើ $a_n = \sqrt{a} \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{a}$

ម្យ៉ាងទៀត $a_{n+1} = \left(\frac{3a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a}\right) a_n > \sqrt{a} \Leftrightarrow \left(a_n - \sqrt{a}\right)^3 > 0 \Leftrightarrow a_n > \sqrt{a}$

ចំពោះ $0 < a_1 < \sqrt{a} \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្ទីតកើន និង ទាល់លើដោយ $\sqrt{a}$

ចំពោះ $a_1 > \sqrt{a} \Rightarrow \{a_n\}$ជាស្វ៊ីតចុះ និង ទាល់ក្រោមដោយ $\sqrt{a}$

ចំពោះ $a_1 = \sqrt{a} \Rightarrow a_n = \sqrt{a}$ ថេរ

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $\{a_n\}$រួមចំពោះគ្រប់ $a_1 > 0$ និង $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$

លំហាត់ ៩៨

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$កំណត់ដោយ $a_1 \in \mathrm{IR}$ និង $a_{n+1} = a_n^2 + (1-2a)a_n + a^2$, $\forall n \in \mathrm{IN}^*$ ។ កំណត់ a_1 ដើម្បីឲ្យ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម រួចទាញរកលីមីត ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_{n+1} = a_n^2 + (1-2a)a_n + a^2 = (a_n - a)^2 + a_n \geq a_n$

$\Rightarrow \{a_n\}$ជាស្វ៊ីតកើន

ម្យ៉ាងទៀត បើ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីត l

យើងបាន $l = l^2 + (1-2a)l + a^2 \Rightarrow l = a$

- ចំពោះ $a_1 > a$ យើងបាន $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរីក
- ចំពោះ $a - 1 \leq a_1 \leq a \Rightarrow a - 1 \leq a_n \leq a$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$
  យើងបាន $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម
- ចំពោះ $a_1 < a - 1 \Rightarrow a_2 > a \Rightarrow \{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរីក

លំហាត់ ៩៩

ចំពោះ $c>0$ និង $b>a>0$ គេកំណត់ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ដោយ $a_1=c$
និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+ab}{a+b}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*$ ។ កំណត់លក្ខខណ្ឌ a , b , c ដើម្បីឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចគណនាលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_1=c$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+ab}{a+b}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*$

បើ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីត l យើងបាន

$$l=\frac{l^2+ab}{a+b}\Rightarrow l^2-(a+b)l+ab=0\Rightarrow l=a\ ,\ l=b$$

- ចំពោះ $c>b$ យើងបាន $a_2=\dfrac{c^2+ab}{a+b}>\dfrac{c^2+cb}{a+b}=\dfrac{c(c+b)}{a+b}>c=a_1$
  ស្រាយតាមវិចារកំណើន យើងបាន $a_{n+1}>a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*$
  ហេតុនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរីក និង $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$
- ចំពោះ $c=b\Rightarrow a_n=b$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*$
  យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$
- ចំពោះ $b>c$
  - បើ $a<c<b$
    ស្រាយតាមវិចារកំណើន យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ និង ទាល់ក្រោមដោយមាន a ជាគោលក្រោម
    ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$
  - បើ $c=a\Rightarrow a_n=a$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*$
    យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$
  - បើ $c<a<b$

តាមវិចារកំណើន យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន និង ទាល់លើដោយមាន a ជាគោលលើ

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

លំហាត់ ១០០

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 > 0$ និង $a_{n+1} = 6\left(\dfrac{1+a_n}{7+a_n}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង ទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_{n+1} = 6\left(\dfrac{1+a_n}{7+a_n}\right) = 6\left(1 - \dfrac{6}{a_n+7}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$

តាមវិចារកំណើន បើ $a_1 < 2 \Rightarrow a_n < 2$

បើ $a_1 > 2 \Rightarrow a_n > 2$

បើ $a_1 = 2 \Rightarrow a_n = 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$

ដោយ $a_{n+1} - a_n = -\dfrac{(a_n+3)(a_n-2)}{a_n+7}$

ហេតុនេះ

- បើ $0 < a_1 < 2 \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន និង ទាល់លើ

  ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$
- បើ $a_1 > 2 \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ និង ទាល់ក្រោម

  ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$
- បើ $a_1 = 2 \Rightarrow a_n = 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$

  ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

សរុបមក $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

លំហាត់ ១០១

ចំពោះ $c \geq 0$ គេកំណត់ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ដោយ $a_1 = 0$ និង $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \text{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_1 = 0$ និង $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \text{IN}^*$

យើងបាន $a_2 = \sqrt{c + a_1} = \sqrt{c} \geq a_1$

បើ $a_n \geq a_{n-1} \Rightarrow \sqrt{c + a_n} \geq \sqrt{c + a_{n-1}} \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$

ហេតុនេះ $a_{n+1} \geq a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \text{IN}$

យើងបាន $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតកើន

ម្យ៉ាងទៀត $a_n < \sqrt{1 + 4c}$ (ស្រាយតាមវិចារកំណើន)

យើងបាន $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដូចនេះ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម

ឧបមាថា $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$ យើងបាន $l = \sqrt{c + l} \Rightarrow l^2 - l - c = 0$

$$\Rightarrow l = \frac{1 - \sqrt{1 + 4c}}{2} < 0 \text{ មិនយក}$$

$$l = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} > 0 \text{ យក}$$

ដូចនេះ $l = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$

លំហាត់ ១០២

សិក្សាភាពរួម និង រីកនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$កំណត់ដោយ $a_1 = \sqrt{2}$ និង $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \text{IN}^*$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_1 = \sqrt{2}$ និង $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \text{IN}^*$

$\Rightarrow a_2 = \sqrt{2a_1} = \sqrt{2\sqrt{2}} > a_1$

បើ $a_n > a_{n-1} \Rightarrow \sqrt{2a_n} > \sqrt{2a_{n-1}} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

ហេតុនេះ $a_{n+1} > a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ $\Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ម៉្យាងទៀត $a_n < 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ (ស្រាយតាមវិចារកំណើន)

យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

លំហាត់ ១០៣

គេឲ្យ $k \in IN$ និង ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = \sqrt[k]{5}$ និង $a_{n+1} = \sqrt[k]{5a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។ សិក្សាភាពរួម រឺ រីកនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $k = 1$ យើងបាន $a_1 = 5$ និង $a_{n+1} = 5a_n \Rightarrow a_n = 5^n$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរីកទៅរក $+\infty$

ចំពោះ $k > 1$ យើងបាន $a_2 = \sqrt[k]{5a_1} = \sqrt[k]{5\sqrt[k]{5}} > \sqrt[k]{5} = a_1$

បើ $a_n > a_{n-1} \Rightarrow \sqrt[k]{5a_n} > \sqrt[k]{5a_{n-1}} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

ហេតុនេះ $a_{n+1} > a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ម៉្យាងទៀត ស្រាយតាមវិចារកំណើន យើងបាន $a_n < \sqrt[k-1]{5}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើនឹង $\sqrt[k-1]{5}$

លំហាត់ ១០៤

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $1 \le a_1 \le 2$ និង $a_{n+1}^2 = 3a_n - 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ហើយ គ្រប់តួទាំងអស់នៃ $\{a_n\}$ សុទ្ធតែជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង ទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

សម្រាយ

ដោយ $1 \le a_1 \le 2 \Rightarrow 1 \le a_n \le 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ (ស្រាយតាមវិចារកំណើន)

ចំពោះ $1 < a_1 < 2$

យើងបាន $a_2^2 = 3a_1 - 2 > a_1^2 \Leftrightarrow a_1^2 - 3a_1 + 2 < 0 \Leftrightarrow (a_1 - 1)(a_1 - 2) < 0$ ពិត

បើ $a_n > a_{n-1} \Rightarrow 3a_n - 2 > 3a_{n-1} - 2 \Rightarrow a_{n+1}^2 > a_n^2 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

យើងបាន $a_{n+1} > a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$

ហេតុនេះ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតកើន

ដូចនេះ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម

ឧបមាថា $\lim_{n\to\infty} a_n = l \Rightarrow l^2 = 3l - 2 \Rightarrow l^2 - 3l + 2 = 0 \Rightarrow l = 1$ មិនយក

$l = 2$ យក

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

ចំពោះ $a_1 = 1 \Rightarrow a_n = 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$

$\Rightarrow \{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើនឹង 1

ចំពោះ $a_1 = 2 \Rightarrow a_n = 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$

$\Rightarrow \{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើនឹង 2

លំហាត់ ១០៥

ចំពោះ $c > 1$ គេកំណត់ស្វ៊ីត $\{a_n\}$និង $\{b_n\}$ដោយ

1- $a_1 = \sqrt{c(c-1)}$ និង $a_{n+1} = \sqrt{c(c-1) + a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

2- $b_1 = \sqrt{c}$ និង $b_{n+1} = \sqrt{cb_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$និង $\{b_n\}$ជាស្វ៊ីតរួមទៅរក c ។

សម្រាយ

1- យើងមាន $a_1 = \sqrt{c(c-1)}$ និង $a_{n+1} = \sqrt{c(c-1) + a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

$\Rightarrow a_2 = \sqrt{c(c-1) + a_1} = \sqrt{2c(c-1)} > \sqrt{c(c-1)} = a_1$ ព្រោះ $c > 1$

បើ $a_n > a_{n-1} \Rightarrow \sqrt{c(c-1) + a_n} > \sqrt{c(c-1) + a_{n-1}} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

យើងបាន $a_{n+1} > a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1 \Rightarrow \{a_n\}$ជាស្វ៊ីតកើន

ម្យ៉ាងទៀត $a_1 = \sqrt{c(c-1)} < c$

បើ $a_n < c \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{c(c-1) + a_n} < \sqrt{c(c-1) + c} = c$

ហេតុនេះ $a_n < c$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1 \Rightarrow \{a_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ឧបមាថា $\{a_n\}$ មានលីមីតស្មើនឹង l

យើងបាន $l=\sqrt{c(c-1)+l} \Rightarrow l^2-l-c(c-1)=0 \Rightarrow l=1-c<0$ មិនយក

$l=c$ យក

2- យើងមាន $b_2=\sqrt{c\sqrt{c}}>\sqrt{c}=b_1$

បើ $b_n>b_{n-1} \Rightarrow \sqrt{cb_n}>\sqrt{cb_{n-1}} \Rightarrow b_{n+1}>b_n$

យើងបាន $b_{n+1}>b_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1 \Rightarrow \{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ម៉្យាងទៀត $b_1=\sqrt{c}<c$

បើ $b_n<c \Rightarrow b_{n+1}=\sqrt{cb_n}<\sqrt{c^2}=c$

ហេតុនេះ $b_n<c$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1 \Rightarrow \{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដូចនេះ $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ឧបមាថា $\{b_n\}$ មានលីមីតស្មើនឹង g យើងបាន $g=\sqrt{cg} \Rightarrow g=0$ មិនយក

$g=c$ យក

ដូចនេះ $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួមទៅរក c

លំហាត់ ១០៦

គេឲ្យ $a>0$, $b>0$ និង $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $0<a_1<b$ និង

$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{ab^2+a_n^2}{a+1}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_2=\sqrt{\dfrac{ab^2+a_1^2}{a+1}}>\sqrt{\dfrac{aa_1^2+a_1^2}{a+1}}=a_1$

បើ $a_n>a_{n-1} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{ab^2+a_n^2}{a+1}}>\sqrt{\dfrac{ab^2+a_{n-1}^2}{a+1}} \Rightarrow a_{n+1}>a_n$

យើងបាន $a_{n+1}>a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1 \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ម៉្យាងទៀត $a_1<b$

បើ $a_n < b \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{ab^2 + a_n^2}{a+1}} < \sqrt{\dfrac{ab^2 + b^2}{a+1}} = b$

ហេតុនេះ $a_n < b$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1 \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម សន្មតថាមានលីមីតស្មើនឹង l

យើងបាន $l = \sqrt{\dfrac{ab^2 + l^2}{a+1}} \Rightarrow l = 0$ មិនយក , $l = b$ យក

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$

លំហាត់ ១០៧

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 2$ និង $a_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{a_n}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចកំណត់រកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_2 = 2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{a_1}} > 2 = a_1$

បើ $a_n > a_{n-1} \Rightarrow 2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{a_n}} > 2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{a_{n-1}}} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

យើងបាន $a_{n+1} > a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1 \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ម៉្យាងទៀត $a_1 = 2 < 3$

បើ $a_n < 3 \Rightarrow a_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{a_n}} < 2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{3}} = 2 + \dfrac{3}{10} < 3$

យើងបាន $a_n < 3$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1 \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ឧបមាថា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ យើងបាន $l = 2 + \dfrac{1}{3+\dfrac{1}{l}} \Rightarrow 3l^2 - 6l - 2 = 0$

$$\Rightarrow l = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{3}$$ ដោយ $0 < a_n < 3$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3+\sqrt{15}}{3}$

លំហាត់ ១០៨

គេឲ្យស្វីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ និង $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វីតទាល់ និង កើនដាច់ខាត រួចទាញរកលីមីត ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ និង $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$

$\Rightarrow a_n > 0$, $\forall n \in \mathrm{IN}^*$

ដោយ $a_1 = 1 < 4$, $a_2 = 2 < 4$

បើ a_n, $a_{n-1} < 4$ យើងបាន $a_{n+1} < \sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4 \Rightarrow a_n < 4$,$\forall n \in \mathrm{IN}^*$

ហេតុនេះ $0 < a_n < 4 \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វីតទាល់

ម៉្យាងទៀត $a_3 = \sqrt{a_2} + \sqrt{a_1} = \sqrt{2} + 1 > a_2 > a_1$

បើ $a_{n+1} > a_n > a_{n-1}$ យើងបាន $\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n} > \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} \Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$

ហេតុនេះ $a_{n+1} > a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1 \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វីតកើនដាច់ខាត

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វីតរួម

ឧបមាថា $\{a_n\}$ មានលីមីតស្មើនឹង $l \Rightarrow l = \sqrt{l} + \sqrt{l} \Rightarrow l = 2\sqrt{l} \Rightarrow l = 0$ មិនយក

$l = 4$ យក

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$

លំហាត់ ១០៩

គេឲ្យស្វីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 9$, $a_2 = 6$ និង $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$ ចំពោះគ្រប់

$n \geq 2$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់ និង ចុះដាច់ខាត រួចទាញរកលីមីត ។

សម្រាយ

(សូមសាកល្បងស្រាយដោយខ្លួនឯងតាមលំហាត់ ១០៨)

លំហាត់ ១១០

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$និង $\{b_n\}$កំណត់ដោយ $0 < b_1 < a_1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ និង $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $\forall n \in \mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$, $\{b_n\}$សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើគ្នា ។

សម្រាយ

យើងមាន $0 < b_1 < a_1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ និង $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $\forall n \in \mathrm{IN}^*$

តាម AM-GM យើងបាន $a_n \geq b_n$ ចំពោះ $\forall n \in \mathrm{IN}^*$

យើងបាន $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \leq \dfrac{a_n + a_n}{2} = a_n \Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

និង $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n^2} = b_n \Rightarrow \{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ម្យ៉ាងទៀត ស្រាយតាមវិចារកំណើន យើងបាន $b_1 < a_n$ និង $b_n < a_1$

ហេតុនេះ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម និង $\{b_n\}$ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដូចនេះ $\{a_n\}$និង $\{b_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម

ឧបមាថា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ យើងបាន $\alpha = \dfrac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha = \beta$

ដូចនេះ $\{a_n\}$និង $\{b_n\}$មានលីមីតស្មើគ្នា

លំហាត់ ១១១

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$និង $\{b_n\}$កំណត់ដោយ $0 < b_1 < a_1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$ និង

$b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, $\forall n\in \mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតរួម និង
មានលីមីតស្មើគ្នា ។

សម្រាយ

យើងមាន $0<b_1<a_1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n}$ និង $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, $\forall n\in \mathrm{IN}^*$

តាម វិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន $2\left(a_n^2+b_n^2\right)\geq \left(a_n+b_n\right)^2$

$$\Rightarrow a_{n+1}=\frac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n}\geq \frac{\left(a_n+b_n\right)^2}{2\left(a_n+b_n\right)}=\frac{a_n+b_n}{2}=b_{n+1}\ ,\ \forall n\in \mathrm{IN}^*$$

ហេតុនេះ $a_n\geq b_n$, $\forall n\in \mathrm{IN}^*$

យើងបាន $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n}\leq \dfrac{a_n^2+a_nb_n}{a_n+b_n}=a_n\Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

និង $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\geq \dfrac{b_n+b_n}{2}=b_n\Rightarrow \{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ម៉្យាងទៀត ស្រាយតាមវិចារកំណើន យើងបាន $b_1<a_n$, $b_n<a_1$

យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដូចនេះ $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ឧបមាថា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$ និង $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ យើងបាន $\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Rightarrow \alpha=\beta$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ មានលីមីតស្មើគ្នា

លំហាត់ ១១២

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ កំណត់ដោយ $0<b_1<a_1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ និង

$b_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង
មានលីមីតស្មើគ្នា ។

សម្រាយ

យើងមាន $0<b_1<a_1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ និង $b_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{b_n}}$

តាម AM-HM យើងបាន $a_n\geq b_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$

យើងបាន $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\leq\dfrac{a_n+a_n}{2}=a_n\Rightarrow\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

និង $b_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=\dfrac{a_nb_n+a_nb_n}{a_n+b_n}\geq\dfrac{a_nb_n+b_n^2}{a_n+b_n}=b_n\Rightarrow\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ម៉្យាងទៀត ស្រាយតាមវិចារកំណើន យើងបាន $b_1<a_n$ និង $b_n<a_1$

យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

ដូចនេះ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ឧបមាថា $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ និង $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$ យើងបាន $\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Rightarrow\alpha=\beta$

ដោយ $a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n\Rightarrow\{a_nb_n\}$ ជាស្វ៊ីតថេរ $\Rightarrow a_nb_n=a_1b_1\Rightarrow\alpha=\beta=\sqrt{a_1b_1}$

លំហាត់ ១១៣

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_n=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\left(\dfrac{2}{1}+\dfrac{2^2}{2}+\ldots+\dfrac{2^n}{n}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចទាញរកលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_n=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\left(\dfrac{2}{1}+\dfrac{2^2}{2}+\ldots+\dfrac{2^n}{n}\right)\Rightarrow a_{n+1}=\left[\dfrac{n+2}{2(n+1)}\right](a_n+1)$

$$\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{-na_n+n+2}{2(n+1)}$$

ស្រាយតាមវិចារកំណើន យើងបាន $na_n>n+2$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 4$

$\Rightarrow a_{n+1}-a_n<0$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*\Rightarrow\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

ដោយ $a_n>1\Rightarrow\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

ដូចនេះ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម

ឧបមាថា $\{a_n\}$មានលីមីតស្មើនឹង l យើងបាន $l=\frac{1}{2}(l+1)\Rightarrow l=1$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

លំហាត់ ១១៤

គេឲ្យ $\{a_n\}$និង $\{b_n\}$ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំណត់ដោយ $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ និង

$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$ ។

ក/ បង្ហាញថា $a_n<b_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$

ខ/ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតកើនជានិច្ច

គ/ បង្ហាញថា $\{b_n\}$ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច

ឃ/ បង្ហាញថា $\{a_n\}$និង $\{b_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើគ្នាស្មើ e ដែលត្រូវបានហៅ
ថា ចំនួន Euler ។

សម្រាយ

ក/

យើងមាន $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n>a_n$ គ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$

ខ/

តាម AM-GM យើងមាន $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\geq \sqrt[n+1]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}}$

យក $a_1=1$, $a_2=a_3=\ldots=a_n=a_{n+1}=1+\frac{1}{n}$ យើងបាន

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<1+\frac{1}{n+1}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Rightarrow a_{n+1}>a_n$$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតកើនជានិច្ច

គ/

តាម GM-HM យើងមាន $\dfrac{n+1}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dots+\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}} \le \sqrt[n+1]{a_1a_2\dots a_na_{n+1}}$

យក $a_1=1,\ a_2=a_3=\dots=a_n=a_{n+1}=1+\dfrac{1}{n-1}$ យើងបាន

$1+\dfrac{1}{n} < \sqrt[n+1]{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n} \Rightarrow \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n \Rightarrow b_n < b_{n-1}$ ចំពោះ $\forall n \ge 2$

ហេតុនេះ $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច

ឃ/

យើងមាន $a_1 \le a_n < b_n \le b_1 \Rightarrow \{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់

ហេតុនេះ $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ឧបមាថា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ និង $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ ដោយ $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_n$

យើងបាន $\alpha = \beta$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$

លំហាត់ ១១៥

គេឲ្យ $a_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

ក/ បើ $x>0$ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ និង កើនដាច់ខាត ។

ខ/ ចំពោះ x ជាចំនួនពិតដែល $n>-x$ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ និង កើនដាច់ខាត។

សម្រាយ

ក/

តាម AM-GM យើងមាន $\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n+a_{n+1}}{n+1} \ge \sqrt[n+1]{a_1a_2\dots a_na_{n+1}}$

យក $a_1=1,\ a_2=a_3=\dots=a_n=a_{n+1}=1+\dfrac{x}{n}$

យើងបាន $1+\frac{x}{n+1}>\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\Rightarrow\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

$\Rightarrow a_{n+1}>a_n\Rightarrow\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើនដាច់ខាត

ម្យ៉ាងទៀត

ចំពោះ $0<x\le 1$ យើងបាន $0<a_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$

$\Rightarrow\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់

ចំពោះ $x>1\Rightarrow$ មាន $n_0\in\mathrm{IN}^*$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x\le n_0$

ដោយ $\left\{\left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n\right\}$ ជាស្វ៊ីតកើន យើងបាន

$0<a_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n<\left(1+\frac{n_0}{nn_0}\right)^{nn_0}<e^{n_0}\Rightarrow\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ និង កើនដាច់ខាត

ខ/

ស្រាយថា $\{a_n\}$ កើនដាច់ខាតដូច ក $\Rightarrow\{a_n\}$ ទាល់ក្រោមដោយ a_1

ម្យ៉ាងទៀត $a_n<1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ និង កើនដាច់ខាត

លំហាត់ ១១៦

គេឲ្យ $x>0$, $l\in\mathrm{IN}^*$ និង $l>x$ ។ យក $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតកំណត់ដោយ

$b_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+l}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច ។

សម្រាយ

តាម GM-HM យើងមាន $\sqrt[n+l+1]{a_1a_2\ldots a_{n+l+1}}>\dfrac{n+l+1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{n+l+1}}}$

យក $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+l+1} = 1+\dfrac{x}{n}$ យើងបាន

$$\sqrt[n+l+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+l}} > 1+\frac{x(n+l)}{n^2+nl+x+n} > 1+\frac{x(n+l)}{(n+1)(n+l)} = 1+\frac{x}{n+1}$$

$\Rightarrow \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n+l} > \left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+l+1} \Rightarrow b_n > b_{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^*$

ដូចនេះ $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច

លំហាត់ ១១៧

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន បើគេដឹងថា

$a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}-\ln n$ និង $b_n = 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}-\ln n$ ។

ទាញបង្ហាញថា $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើគ្នា ។

សម្រាយ

ដោយ $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \dfrac{1}{n} > \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > \dfrac{1}{n+1}$

យើងបាន $a_{n+1}-a_n = \dfrac{1}{n}-\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > 0$

និង $b_{n+1}-b_n = \dfrac{1}{n+1}-\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 0$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

ម៉្យាងទៀត $a_1 \le a_n < b_n \le b_1 \Rightarrow \{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់

យើងបាន $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ដោយ $b_n = a_n + \dfrac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើគ្នា

លំហាត់ ១១៨

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_0 > 0$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ ដែល $a > 0$ ។

បង្ហាញថា $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចគណនាលីមីត ។

សម្រាយ

យើងមាន $u_0 > 0$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ ដែល $a > 0$

តាម AM-GM យើងបាន $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1 \Rightarrow \{u_n\}_{n\geq 1}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

ម៉្យាងទៀត $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + \frac{a}{2u_n} - u_n = \frac{a - u_n^2}{2u_n} < 0$

ព្រោះ $u_n^2 \geq a$

យើងបាន $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

ដូចនេះ $\{u_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ឧបមាថា $\{u_n\}$ មានលីមីតស្មើនឹង l យើងបាន $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) \Rightarrow l = \pm\sqrt{a}$

ដោយ $u_n \geq \sqrt{a}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{a}$

លំហាត់ ១១៩

គេឲ្យ $0 < a < b$ និង ស្វ៊ីត $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ កំណត់ដោយ $a_0 = a$, $b_0 = b$

, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + b_n}$ និង $b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n + b_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ក/ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចគណនាលីមីតរបស់វា ។

ខ/ ទាញរក $\lim_{n\to\infty} P_n$ ដែល $P_n = (1+k)(1+k^2)(1+k^{2^2})\ldots(1+k^{2^n})$ ចំពោះ $0 < k < 1$ ។

សម្រាយ

ក/

ដោយ $0 < a < b$, $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n}$ និង $b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{a_n + b_n}$

យើងបាន a_n , $b_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0 \Rightarrow \{a_n\}$, $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

យើងមាន $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} = a_n - b_n$

$\Rightarrow \{a_n - b_n\}$ ជាស្វ៊ីតថេរ $\Rightarrow a_n - b_n = a_0 - b_0 = a - b \Rightarrow b_n = a_n - a + b$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - a + b)$$

ហេតុនេះ បើ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម នោះ $\{b_n\}$ ក៏ជាស្វ៊ីតរួមដែរ

យើងនឹងបង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

យើងមាន $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n} - a_n = \dfrac{a_n^2 - a_n^2 - a_n b_n}{a_n + b_n} = -\dfrac{a_n b_n}{a_n + b_n} < 0$

$\Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ $\Rightarrow \{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ដូចនេះ $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

ឧបមាថា $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty} b_n = l - a + b$

ដោយ $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n}$ យើងបាន $l = \dfrac{l^2}{l + l - a + b} = \dfrac{l^2}{2l - a + b}$

$$\Rightarrow 2l^2 - l^2 + bl - al = 0$$
$$\Rightarrow l(l + b - a) = 0$$
$$\Rightarrow l = 0 \text{ ព្រោះ } l + b - a > 0$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ និង $\lim_{n\to\infty} b_n = b - a$

ខ/

ដោយ $0 < k < 1 \Rightarrow k = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a_0}{b_0}$

យើងបាន $P_n = (1+k)(1+k^2)(1+k^{2^2})\ldots(1+k^{2^n})$

$$=\left(1+\frac{a_0}{b_0}\right)\left(1+\frac{a_0^2}{b_0^2}\right)\left(1+\frac{a_0^{2^2}}{b_0^{2^2}}\right)...\left(1+\frac{a_0^{2^n}}{b_0^{2^n}}\right)$$

ដោយ $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+b_n}$ និង $b_{n+1}=\frac{b_n^2}{a_n+b_n}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{a_n^2}{b_n^2}$

យើងបាន $P_n=\left(1+\frac{a_0}{b_0}\right)\left(1+\frac{a_1}{b_1}\right)\left(1+\frac{a_2}{b_2}\right)...\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right)$

$$=\left(\frac{a_0+b_0}{b_0}\right)\left(\frac{a_1+b_1}{b_1}\right)\left(\frac{a_2+b_2}{b_2}\right)...\left(\frac{a_n+b_n}{b_n}\right)$$

តែ $\frac{a_k+b_k}{b_k}=\frac{b_k}{b_{k+1}}$ ចំពោះ $k=\overline{0,n}$

ហេតុនេះ $P_n=\left(\frac{b_0}{b_1}\right)\left(\frac{b_1}{b_2}\right)\left(\frac{b_2}{b_3}\right)...\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)=\frac{b}{b_{n+1}}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{b}{b-a}=\frac{1}{1-k}$

លំហាត់ ១២០

បង្ហាញថា ស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីត Cauchy

ក/ $a_n=\frac{\arctan 1}{2}+\frac{\arctan 2}{2^2}+...+\frac{\arctan n}{n^2}$

ខ/ $a_n=\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}$

គ/ $a_n=\alpha_1 q+\alpha_2 q^2+...+\alpha_n q_n$ ចំពោះ $|q|<1$ និង $|\alpha_k|\le M$ ។

សម្រាយ

ក/

យើងមាន $a_n=\frac{\arctan 1}{2}+\frac{\arctan 2}{2^2}+...+\frac{\arctan n}{2^n}$

$$\Rightarrow|a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{\arctan(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\arctan(n+2)}{2^{n+2}}+...+\frac{\arctan(n+p)}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leq \frac{|\arctan(n+1)|}{2^{n+1}} + \frac{|\arctan(n+2)|}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{|\arctan(n+p)|}{2^{n+p}}$$

$$< \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}}\right) < \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

ដើម្បីឲ្យ $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ យើងគ្រាន់តែយក $\frac{\pi}{2^{n+2}} < \varepsilon \Leftrightarrow 2^{n+2} > \frac{\pi}{\varepsilon}$

$$\Leftrightarrow n+2 > \log_2 \frac{\pi}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \log_2 \frac{\pi}{\varepsilon} - 2$$

យក $n_0 = \left[\log_2 \frac{\pi}{\varepsilon} - 2\right] + 1$ យើងបាន

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq n$ ដែល $\forall n \geq n_0, p \in \mathrm{IN}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីត Cauchy

ខ/

យើងមាន $a_n = \frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{2\times 3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}$

$$\Rightarrow |a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n+p)(n+p+1)}\right|$$

$$< \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}$$

ដើម្បីឲ្យ $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ យើងគ្រាន់តែយក $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

យក $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$ យើងបាន

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq n$ ដែល $\forall n \geq n_0, p \in \mathrm{IN}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីត Cauchy

គ/

យើងមាន $a_n = \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \ldots + \alpha_n q^n$ ចំពោះ $|q| < 1$ និង $|\alpha_k| \le M$

$$\Rightarrow \left|a_{n+p} - a_n\right| = \left|\alpha_{n+1} q^{n+1} + \alpha_{n+2} q^{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p} q^{n+p}\right|$$

$$\le \left|\alpha_{n+1}\right| |q|^{n+1} + \left|\alpha_{n+2}\right| |q|^{n+2} + \ldots + \left|\alpha_{n+p}\right| |q|^{n+p}$$

$$\le M\left(|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \ldots + |q|^{n+p}\right) = M|q|^{n+1}\left(\frac{1-|q|^p}{1-|q|}\right)$$

$$< \frac{M|q|^{n+1}}{1-|q|}$$

ដើម្បីឲ្យ $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$ យើងគ្រាន់តែយក $\dfrac{M|q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow n+1 > \log_{|q|} \frac{\varepsilon(1-|q|)}{M}$$

$$\Leftrightarrow n > \log_{|q|} \frac{\varepsilon(1-|q|)}{M} - 1$$

យក $n_0 = \left[\log_{|q|} \dfrac{\varepsilon(1-|q|)}{M} - 1\right] + 1$ យើងបាន

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \ge n$ ដែល $\forall n \ge n_0, p \in \mathrm{IN}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីត Cauchy

លំហាត់ ១២១

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $|a_{n+1}-a_{n+2}|<\lambda|a_n-a_{n+1}|$ ចំពោះ $\lambda\in(0,1)$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម ។

សម្រាយ

យើងមាន $|a_{n+1}-a_{n+2}|<\lambda|a_n-a_{n+1}|$ ចំពោះ $\lambda\in(0,1)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |a_{n+p}-a_n| &= |a_{n+p}-a_{n+p-1}+a_{n-p+1}-a_{n+p-2}+\ldots+a_{n-1}-a_n|\\ &< \lambda\left(|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+|a_{n+p-2}-a_{n+p-3}|+\ldots+|a_n-a_{n-1}|\right)\\ &< \left(\lambda^p+\lambda^{p-1}+\ldots+\lambda^2+\lambda\right)|a_n-a_{n-1}|\\ &\le \left(\lambda^p+\lambda^{p-1}+\ldots+\lambda^2+\lambda\right)\lambda^{n-2}|a_2-a_1|\\ &= \frac{\lambda^{n-1}(1-\lambda^p)}{1-\lambda}|a_2-a_1| < \frac{\lambda^{n-1}|a_2-a_1|}{1-\lambda}\end{aligned}$$

ដើម្បីឲ្យ $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ យើងគ្រាន់តែយក $\frac{\lambda^{n-1}|a_2-a_1|}{1-\lambda}<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \lambda^{n-1}<\frac{\varepsilon(1-\lambda)}{|a_2-a_1|}$$

$$\Leftrightarrow n>\log_\lambda\frac{\varepsilon(1-\lambda)}{|a_2-a_1|}+1$$

យក $n_0=\left[\log_\lambda\frac{\varepsilon(1-\lambda)}{|a_2-a_1|}+1\right]+1$ យើងបាន

$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\ge n$ ដែល $\forall n\ge n_0, p\in \mathrm{IN}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|u_{n+p}-u_n|<\varepsilon$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីត Cauchy $\Rightarrow\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម

លំហាត់ ១២២

បើ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=l$ បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}=l$ ។

សម្រាយ

យក $u_n = v_n + l$ ដើម្បីបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+...+u_n}{n} = l$ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_1+v_2+...+v_n}{l} = 0$ ចំពោះ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$

យើងមាន $\frac{v_1+v_2+...+v_n}{n} = \frac{v_1+v_2+...+v_p}{n} + \frac{v_{p+1}+v_{p+2}+...+v_n}{n}$

$$\Rightarrow \left|\frac{v_1+v_2+...+v_n}{n}\right| \le \frac{|v_1+v_2+...+v_p|}{n} + \frac{|v_{p+1}|+|v_{p+2}|+...+|v_n|}{n}$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0 \Rightarrow \exists P \in \mathrm{IN}$ ដែល $|v_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge P$

ម៉្យាងទៀត $n \to +\infty \Rightarrow \exists N \in \mathrm{IN}$ ដែល $\frac{|v_1+v_2+...+v_p|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge N \ge P$

យើងបាន $\left|\frac{v_1+v_2+...+v_n}{n}\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1+u_2+...+u_n}{n} = l$

លំហាត់ ១២៣

គេឲ្យស្ទីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_n = x^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ ។

ក/ បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ បើ $-1 < x < 1$ ។

ខ/ បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ បើ $x > 1$ ។

សម្រាយ

ក/

របៀបទី ១

បើ $x = 0$ យើងបាន $u_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ពិត

បើ $x \ne 0$ ចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ យើងបាន $|u_n - 0| = |x^n| = |x|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{|x|}\varepsilon$

ព្រោះ $0<|x|<1$

យក $n_0=\lfloor \log_{|x|}\varepsilon \rfloor+1$ យើងបាន

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in IN$ ដែល $\forall n\geq n_0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|u_n|<\varepsilon$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$

របៀបទី ២

យើងមាន $-1<x<1\Rightarrow |x|<1\Rightarrow \exists p>0$ ដែល $|x|=\dfrac{1}{1+p}$

តាមវិសមភាព Bernoulli យើងបាន $u_n=x^n=\dfrac{1}{(1+p)^n}\leq \dfrac{1}{1+np}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+np}=0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$

ខ/

របៀបទី ១

ចំពោះ $\forall M>0$ យើងបាន $|u_n|=|x^n|=|x|^n>M \Leftrightarrow n>\log_{|x|}M$

យក $n_0=\lfloor \log_{|x|}M \rfloor+1$ យើងបាន

$\forall M>0, \exists n_0\in IN$ ដែល $\forall n\geq n_0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|u_n|>M$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=+\infty$

របៀបទី ២

ចំពោះ $x>1\Rightarrow \exists p>0$ ដែល $x=1+p$

យើងបាន $u_n=x^n=(1+p)^n\geq 1+np$ ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+np)=+\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=+\infty$

លំហាត់ ១២៤

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^\alpha-n^\alpha\right]$ ចំពោះ $0<\alpha<1$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $0<(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}=n^{\alpha}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right]<n^{\alpha}\left(1+\frac{1}{n}-1\right)=\frac{1}{n^{1-\alpha}}$

ព្រោះ $0<\alpha<1$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}=0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]$

លំហាត់ ១២៥

គេឲ្យ s និង $p>0$ ។ បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty}\frac{n^s}{(1+p)^n}=0$ ។

សម្រាយ

យក $a_n=\frac{n^s}{(1+p)^n}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^s\left(\frac{1}{1+p}\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{1+p}<1$

ហេតុនេះ $\exists n_0\in\mathrm{IN}$ ដែល $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះចំពោះគ្រប់ $n\ge n_0$

ដោយ $a_n=\frac{n^s}{(1+p)^n}>0$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{IN}\Rightarrow\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម សន្មតថាមានលីមីតស្មើនឹង $l\Rightarrow l=\frac{l}{1+p}\Rightarrow l=0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^s}{(1+p)^n}=0$

លំហាត់ ១២៦

គណនា

ក/ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

ខ/ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3+1}+\frac{2n}{n^3+2}+\dots+\frac{nn}{n^3+n}\right)$

គ/ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n^2+1}+\frac{2}{4n^2+4}+\ldots+\frac{n}{4n^2+n^2}\right)$ ។

សម្រាយ

ក/

យើងមាន $\frac{k}{n^2+n}\le\frac{k}{n^2+k}\le\frac{k}{n^2+1}$ ចំពោះគ្រប់ $k\in\mathrm{IN}^*$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}$$

ដោយ $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}=\frac{1}{2}$

និង $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+1}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$

ខ/

យើងមាន $\frac{kn}{n^3+n}\le\frac{kn}{n^3+k}\le\frac{kn}{n^3+1}$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+1}$$

ដោយ $\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+n}=\frac{n^2(n+1)}{2(n^3+n)}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+n}=\frac{1}{2}$

និង $\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+1}=\frac{n^2(n+1)}{2(n^3+1)}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+1}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^3+1}+\frac{2n}{n^3+2}+\ldots+\frac{nn}{n^3+n}\right)=\frac{1}{2}$

គ/

យើងមាន $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n^2+1}+\frac{2}{4n^2+4}+\ldots+\frac{n}{4n^2+n^2}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{4n^2+k^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\frac{k}{n}}{4+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{4+x^2}dx = \int_0^1 \frac{d\left(4+x^2\right)}{4+x^2} = \left[\frac{1}{2}\ln\left(4+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 4)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

លំហាត់ ១២៧

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_n = \sin n$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ គ្មានលីមីត ។

សម្រាយ

ឧបមាថា $\{a_n\}$ មានលីមីត

យើងបាន $\lim_{n\to\infty}[\sin(n+2)-\sin n] = 0 \Rightarrow 2\sin 1\lim_{n\to\infty}\cos(n+1) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\cos(n+1) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\cos n = 0$$

ហេតុនេះ $\lim_{n\to\infty}[\cos(n+2)-\cos n] = 0 \Rightarrow -2\sin 1\lim_{n\to\infty}\sin(n+1) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sin(n+1) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sin n = 0$$

យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\left(\sin^2 n+\cos^2 n\right) = 0$ ផ្ទុយពីការពិត ព្រោះ $\sin^2 n+\cos^2 n = 1$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ គ្មានលីមីត

លំហាត់ ១២៨

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ និង $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 2$ ។

កំណត់ a_n រួចគណនា $\lim_{n\to\infty} a_n$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ និង $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 2$

$$\Rightarrow a_3 = 2a_2 - a_1 + 2 = 4$$

ពិនិត្យលំនាំគំរូ $a_1 = 0 = (1-1)^2$

$a_2 = 1 = (2-1)^2$

$a_3 = 4 = (3-1)^2$

ឧបមាថា ពិតគ្រប់ k ដែល $1 \le k \le n$

បង្ហាញថា $a_{n+1} = n^2$

ដោយ $a_n = (n-1)^2$, $a_{n-1} = (n-2)^2$ យើងបាន

$$a_{n+2} = 2a_n - a_{n-1} + 2 = 2(n-1)^2 - (n-2)^2 + 2$$

$$= 2n^2 - 4n + 2 - n^2 + 4n - 4 + 2 = n^2 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $a_n = (n-1)^2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

លំហាត់ ១២៩

ចំពោះ a , $b > 0$ គេកំណត់ស្វីត $\{a_n\}$ ដោយ $a_1 = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ និង

$a_n = \dfrac{aa_{n-1}}{\sqrt{a^2 + a_{n-1}^2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$ ។ កំណត់ a_n រួចគណនា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_1 = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ និង $a_n = \dfrac{aa_{n-1}}{\sqrt{a^2 + a_{n-1}^2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{aa_1}{\sqrt{a^2 + a_1^2}} = \left(\frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2(a^2 + b^2) + a^2 b^2}}\right) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

ឧបមាថា ពិតដល់ $n = k$ គឺ $a_k = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + kb^2}}$

បង្ហាញថា $a_{k+1} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + (1+k)b^2}}$

យើងមាន $a_{k+1}=\dfrac{aa_k}{\sqrt{a^2+a_k^2}}=\left(\dfrac{a^2b}{\sqrt{a^2+kb^2}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a^2+kb^2}}{\sqrt{a^2\left(a^2+kb^2\right)+a^2b^2}}\right)$

$$=\frac{ab}{\sqrt{a^2+(1+k)b^2}}$$ ពិត

ដូចនេះ $a_n=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+nb^2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

លំហាត់ ១៣០

(កម្ពុជា,2014)

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $\{x_n\}$ និង $\{y_n\}$ កំណត់ដោយ $x_1=0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+y_n\right)$, $y_1=1$ និង $y_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(x_n+3y_n\right)$។

ក/ គណនាតួទី 2 ទី 3 និង ទី 4 នៃស្វ៊ីតនីមួយៗ

ខ/ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ និង $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ ។

សម្រាយ

ក/

ដោយ $x_1=0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+y_n\right)$, $y_1=1$ និង $y_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(x_n+3y_n\right)$

យើងបាន $x_2=\dfrac{1}{2}\left(x_1+y_1\right)=\dfrac{1}{2}(0+1)=\dfrac{1}{2}$

$$y_2=\frac{1}{4}\left(x_1+3y_1\right)=\frac{1}{4}(0+3)=\frac{3}{4}$$

$$x_3=\frac{1}{2}\left(x_2+y_2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{8}$$

$$y_3=\frac{1}{4}\left(x_2+3y_2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{4}\right)=\frac{11}{16}$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + y_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8} + \frac{11}{6}\right) = \frac{21}{32}$$

និង $y_4 = \frac{1}{4}(x_3 + 3y_3) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{8} + \frac{33}{16}\right) = \frac{43}{64}$

ខ/

យើងមាន $x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) - \frac{1}{4}(x_n + 3y_n) = \frac{1}{4}(x_n - y_n)$

$\Rightarrow \{x_n - y_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $x_1 - y_1 = -1$ និង រេសុង $q = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow x_n - y_n = -\frac{1}{4^{n-1}} \Rightarrow x_n = y_n - \frac{1}{4^{n-1}}$

យើងបាន $y_{n+1} = \frac{1}{4}\left(y_n - \frac{1}{4^{n-1}} + 3y_n\right) = y_n - \frac{1}{4^n} \Rightarrow y_{n+1} - y_n < 0$

ហេតុនេះ $\{y_n\}$ជាស្វ៊ីតចុះ និង ទាល់ក្រោម ព្រោះ $y_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

$\Rightarrow \{y_n\}$ជាស្វ៊ីតរួម យើងបាន $\{x_n\}$ក៏ជាស្វ៊ីតរួមដែរ និង មានលីមីតស្មើគ្នា

ឧបមាថា $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = L$ យើងបាន $L = \frac{1}{2}(L + L) \Rightarrow L = 0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

លំហាត់ ១៣១

(IMO,1975)

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $\{u_n\}$កំណត់ដោយ $u_0 = 5$ និង $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ ចំពោះ $n = 0$, $1, 2, \ldots$ ។ បង្ហាញថា $45 < u_n < 45.1$ ។

សម្រាយ

ដោយ $u_0 = 5$ និង $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \Rightarrow u_n > 0$

យើងបាន $u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{u_n^2} + 2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^2 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_k^2}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} 2$

$$\Rightarrow u_n^2 = u_0^2 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_k^2}\right) > 2n + 25 \qquad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{1}{u_k^2} < \frac{1}{u_0^2 + 2k} \Rightarrow \frac{1}{u_k^4} < \frac{1}{(u_0^2 + 2k)^2 - 1}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_0^2 + 2k - 1} - \frac{1}{u_0^2 + 2k + 1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^4} < \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_0^2 + 2k - 1} - \frac{1}{u_0^2 + 2k + 1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_0^2 - 1} - \frac{1}{u_0^2 + 2n - 1}\right)$$

$$< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_0^2 - 1}\right)$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}\right)^2 \le n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^4} \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}\right)^2 < \frac{n}{2(u_0^2 - 1)} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} < \sqrt{\frac{n}{2(u_0^2 - 1)}}$$

$$\Rightarrow u_n^2 < u_0^2 + 2n + \sqrt{\frac{n}{2(u_0^2 - 1)}} = 25 + 2n + \sqrt{\frac{n}{48}}$$

$$\Rightarrow u_n < \sqrt{2n + 25 + \sqrt{\frac{n}{48}}} \qquad (2)$$

តាម (1),(2) យើងបាន $\sqrt{2n + 25} < u_n < \sqrt{2n + 25 + \sqrt{\frac{n}{48}}}$

ចំពោះ $n = 1000 \Rightarrow \sqrt{2025} < u_{1000} < \sqrt{2025 + \sqrt{\frac{125}{6}}} < \sqrt{2034.01}$

ដូចនេះ $45 < u_{100} < 45.1$

លំហាត់ ១៣២

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ និង $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ។

បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}$ ។

សម្រាយ

WLOG សន្មតថា $a \le b$

ចំពោះ $a < b \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+\varepsilon < b-\varepsilon$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ និង $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

តាមនិយមន័យ យើងបាន $\exists n_0 \in \mathrm{IN}$ ដែល $a_n < a+\varepsilon < b-\varepsilon < b_n$ ចំពោះ $\forall n \ge n_0$

$$\Rightarrow \max\{a_n, b_n\} = b_n \text{ ចំពោះ } \forall n \ge n_0$$

ហេតុនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b = \max\{a,b\}$

ចំពោះ $a = b$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ និង $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{IN}$ ដែល $\forall n \ge n_0$ យើងបាន $|a_n - a| < \varepsilon$ និង $|b_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\max\{a_n, b_n\} - a\right| < \varepsilon$

ហេតុនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a,b\}$

លំហាត់ ១៣៣

គេឲ្យ $a_n \ge -1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ និង $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ។ តាមនិយមន័យ

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+a_n}$ ចំពោះ $p \in \mathrm{IN}$ ។

សម្រាយ

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{IN}$ ដែល $\forall n \ge n_0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|a_n| < \varepsilon$

យើងមាន $$\left|\sqrt[p]{1+a_n} - 1\right| = \left|\frac{1+a_n-1}{\sqrt[p]{(1+a_n)^{p-1}} + \sqrt[p]{(1+a_n)^{p-2}} + \dots + 1}\right| < |a_n| < \varepsilon$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+a_n} = 1$

លំហាត់ ១៣៤

គេឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង រួមទៅរកសូន្យ ។ ចំពោះ p ជាចំនួនគត់

វិជ្ជមានដែល $p\geq 2$ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[p]{1+a_n}-1}{a_n}$ ។

សម្រាយ

តាង $x_n=\sqrt[p]{1+a_n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ (តាមលំហាត់ ១៣៣)

យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[p]{1+a_n}-1}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-1}{x_n^p-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-1}{(x_n-1)\left(x_n^{p-1}+x_n^{p-2}+\ldots+x_n+1\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^{p-1}+x_n^{p-2}+\ldots+x+1}=\frac{1}{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p}}=\frac{1}{p}$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[p]{1+a_n}-1}{a_n}=\dfrac{1}{p}$

លំហាត់ ១៣៥

គេឲ្យ $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ គណនា

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_p)}-n\right]$ ។

សម្រាយ

តាម លំហាត់ ២១ យើងបាន $n\left(\sqrt[p]{1+\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{n}}-1\right)$

$$\leq n\left[\sqrt[p]{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\left(1+\frac{a_2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{a_p}{n}\right)}-1\right]$$

$$=\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_p)}-n\qquad(1)$$

ម្យ៉ាងទៀត តាមវិសមភាព Bernoulli យើងបាន

$$\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_p)}-n=n\left[\sqrt[p]{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\left(1+\frac{a_2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{a_p}{n}\right)}-1\right]$$

$$= n\left(\sqrt[p]{1+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{n}+\frac{\sum_{i<j}a_ia_j}{n^2}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_p}{n^p}}-1\right)$$

$$\leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{p}+\frac{\sum_{i<j}a_ia_j}{np}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_p}{pn^{p-1}} \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $n\left(\sqrt[p]{1+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{n}}-1\right)$

$$\leq \sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_p)}-n$$

$$\leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{p}+\frac{\sum_{i<j}a_ia_j}{np}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_p}{pn^{p-1}}$$

ដោយ $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[p]{1+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{n}}-1\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[p]{1+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{n}}-1}{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{n}}\right)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{p}\right)$$

$= \frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{p}$ (តាមលំហាត់ ១៣៤)

ម៉្យាងទៀត $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{p}+\frac{\sum_{i<j}a_ia_j}{np}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_p}{pn^{p-1}}\right)$

$$= \frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{p}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_p)}-n\right]=\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_p}{p}$

លំហាត់ ១៣៦

គេឲ្យ a_k ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានចំពោះ $k=\overline{1,p}$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{p}\sqrt[n]{a_k}\right)^p$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_k}=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{p}\sqrt[n]{a_k}\right)^p=1$

លំហាត់ ១៣៧

គេឲ្យ $\alpha\in(0,1)$ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\alpha+\dfrac{1}{n}\right)^k$ ។

សម្រាយ

ដោយ $\alpha\in(0,1)\Rightarrow\exists n_0\in\text{IN}$ ដែល $0<\alpha+\dfrac{1}{n}\le\alpha+\dfrac{1}{n_0}<1$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge n_0$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\alpha+\dfrac{1}{n}\right)^k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\alpha+\dfrac{1}{n}\right)^n}{1-\left(\alpha+\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{1}{1-\alpha}$

លំហាត់ ១៣៨

គេឲ្យ $x\ge1$ ។ បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n=x^2$ ។

សម្រាយ

បើ $x=1\Rightarrow2\sqrt[n]{x}-1=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n=1=x^2$ ពិត

បើ $x>1$ យើងបាន $\left(\sqrt[n]{x}-1\right)^2>0\Rightarrow2\sqrt[n]{x}-1<\sqrt[n]{x^2}\Rightarrow\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n<x^2$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n=x^2\left(\frac{2}{\sqrt[n]{x}}-\frac{1}{\sqrt[n]{x^2}}\right)^n=x^2\left[1+\left(\frac{2}{\sqrt[n]{x}}-\frac{1}{\sqrt[n]{x^2}}-1\right)\right]^n$

$$\geq x^2\left[1+n\left(\frac{2}{\sqrt[n]{x}}-\frac{1}{\sqrt[n]{x^2}}-1\right)\right] \text{ (វិសមភាព Bernoulli)}$$

$$=x^2\left[1-\frac{n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)^2}{\sqrt[n]{x^2}}\right]$$

តែ តាមវិសមភាព Bernoulli យើងមាន

$$x=\left(\sqrt[n]{x}-1+1\right)^n\geq 1+n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)>n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\Rightarrow\left(\sqrt[n]{x}-1\right)^2<\frac{x^2}{n^2}$$

យើងបាន $\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n>x^2\left(1-\frac{x^2}{n\sqrt[n]{x^2}}\right)$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $x^2\left(1-\frac{x^2}{n\sqrt[n]{x^2}}\right)<\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n<x^2$

តាមទ្រឹស្តីបទ Sandwich យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n=x^2$

លំហាត់ ១៣៩

បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(2\sqrt[n]{n}-1\right)^n}{n^2}=1$ ។

សម្រាយ

តាមលំហាត់ ១៣៨ យើងបាន

$x^2\left[1-\frac{n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)^2}{\sqrt[n]{x^2}}\right]<\left(2\sqrt[n]{x}-1\right)^n<x^2$ ចំពោះគ្រប់ $x>1$ និង $n\geq 1$

យក $x=n\Rightarrow n^2\left[1-\frac{n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)}{\sqrt[n]{n^2}}\right]\leq\left(2\sqrt[n]{n}-1\right)^n\leq n^2$

$$\Rightarrow 1-\frac{n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)}{\sqrt[n]{n^2}} \le \frac{\left(2\sqrt[n]{n}-1\right)^n}{n^2} \le 1$$

ហេតុនេះ ដើម្បីបង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2\sqrt[n]{n}-1\right)^n}{n^2}=1$ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)}{\sqrt[n]{n^2}}=0$$

ចំពោះ $x\in[0,1]$ យើងមាន $0\le e^x-1\le 3x \Rightarrow 0\le \sqrt[n]{n}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1\le \frac{3\ln n}{n}$

ព្រោះ $\ln n\le n$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$

យើងបាន $0\le n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2\le \frac{9n\ln^2 n}{n^2}=\frac{9\ln^2 n}{n}$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2}{\sqrt[n]{n^2}}=0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2\sqrt[n]{n}-1\right)^n}{n^2}=1$

លំហាត់ ១៤០

ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}$ គេហៅ $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)dt$ ថាជាអាំងតេក្រាល Wallis ។

ក/ បង្ហាញថា $(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$ រួចទាញរក I_{2n} និង I_{2n+1} ។

ខ/ បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1$ ។

គ/ បង្ហាញថា $\{(n+1)I_nI_{n+1}\}$ ជាស៊ីតថេរ រួចទាញថា $\lim_{n\to\infty} I_n\sqrt{2n}=\sqrt{\pi}$ ។

សម្រាយ

ក/

ដោយ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$ យើងបាន $I_0 = \frac{\pi}{2}$ និង $I_1 = 1$

ចំពោះ $n \geq 2$ តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក យើងបាន

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \cos t dt = \left[\cos^{n+1} t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t dt$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \Rightarrow I_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) I_n$$

ហេតុនេះ $I_{2n} = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right) I_0 = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$

$$= \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

និង $I_{2n+1} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)\cdots\left(\frac{2}{3}\right) I_1 = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)\cdots\left(\frac{2}{3}\right)$

$$= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

ខ/

យើងមាន $0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$ ចំពោះគ្រប់ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$

យើងបាន $\{I_n\}$ ជាស្វ៊ីតចុះ $\Rightarrow I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$

ហេតុនេះ $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

គ/

យើងមាន $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+1)I_n I_{n+1} \Rightarrow \{(n+1)I_n I_{n+1}\}$ ជាស្វ៊ីតថេរ

$$\Rightarrow (n+1)I_n I_{n+1} = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty} 2nI_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} 2(n+1)I_n I_{n+1} = \pi$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n\sqrt{2n} = \sqrt{\pi}$

លំហាត់ ១៤១

(Vietnam,1983)

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$កំណត់ដោយ $u_1 = 1,\ u_2 = 2$ និង $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$ និង $\{v_n\}$ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cot^{-1} u_k$ ចំពោះ $n = 1,\ 2,\ \ldots$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ ។

សម្រាយ

ដោយ $u_1 = 1,\ u_2 = 2$ និង $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$

$\Rightarrow \{u_n\}$ជាស្វ៊ីតដែលកើតឡើងពីតួទីសេសទាំងអស់នៃស្វ៊ីត Fibonnaci

($F_1 = F_2 = 1$ និង $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$)

យើងមាន $\cot(a-b) = \dfrac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a} \Rightarrow a - b = \cot^{-1}\left(\dfrac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a}\right)$

យើងបាន $\cot^{-1} F_{2k} - \cot^{-1} F_{2k+1} = \cot^{-1}\left(\dfrac{F_{2k}F_{2k+1} + 1}{F_{2k+1} - F_{2k}}\right)$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{F_{2k}F_{2k+1} + 1}{F_{2k-1}}\right)$$

ដោយ $F_{i+1}F_{i+2} - F_i F_{i+3} = (-1)^i \Rightarrow F_{2k}F_{2k+1} - F_{2k-1}F_{2k+2} = -1$

$$\Rightarrow F_{2k}F_{2k+1} + 1 = F_{2k-1}F_{2k+2}$$

យើងបាន $\cot^{-1} F_{2k} - \cot^{-1} F_{2k+1} = \cot^{-1} F_{2k+2}$

$$\Rightarrow \cot^{-1} F_{2k+1} = \cot^{-1} F_{2k} - \cot^{-1} F_{2k+2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \cot^{-1} F_{2k+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\cot^{-1} F_{2k} - \cot^{-1} F_{2k+2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \cot^{-1} u_k = \cot^{-1} F_2 - \cot^{-1} F_{2n+2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \cot^{-1} u_k = 2\cot^{-1} F_1 - \cot^{-1} F_{2n+2} = 2\cot^{-1} 1 - \cot^{-1} F_{2n+2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \cot^{-1} F_{2n+2}$$

ដោយ $\lim_{n\to\infty} F_{2n+2} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cot^{-1} F_{2n+2} = 0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \cot^{-1} u_k = \frac{\pi}{2}$

លំហាត់ ១៤២

(Vietnam,1994)

គេឲ្យស្វីត $\{x_n\}$ កំណត់ដោយ $x_0 = a$ និង $x_n = \sqrt[3]{6(x_{n-1} - \sin x_{n-1})}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ និង a ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $\{x_n\}$ ជាស្វីតរួម រួចទាញរកលីមីត ។

សម្រាយ

ករណី $a = 0$ យើងបាន $x_n = 0$, $\forall n \ge 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

ករណី $a > 0$

ដោយ $\sin x < x$ ចំពោះ $\forall x > 0 \Rightarrow x_n > 0$ ចំពោះ $\forall n \ge 1$ (1)

តាម វិសមភាព $\sin x \ge x - \frac{x^3}{6}$ ចំពោះ $\forall x \ge 0$ សមភាពពេល $x = 0$

យើងបាន $\sin x_{n-1} > x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3}{6} \Leftrightarrow 6(x_{n-1} - \sin x_{n-1}) < x_{n-1}^3$

$\Rightarrow \sqrt[3]{6(x_{n-1} - \sin x_{n-1})} < x_{n-1} \Rightarrow x_n < x_{n-1}$ ចំពោះ $\forall n \ge 1$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $\{x_n\}$ ជាស្វីតចុះ និង ទាល់ក្រោម $\Rightarrow \{x_n\}$ ជាស្វីតរួម

ឧបមាថា $\lim_{n\to\infty} x_n = L \ge 0$ យើងបាន $L = \sqrt[3]{6(L - \sin L)} \Leftrightarrow \sin L = L - \frac{L^3}{6}$

ហេតុនេះ $L = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

ករណី $a < 0$ ស្រាយដូចករណី $a > 0$ ដោយយក $y_n = -x_n$ យើងបាន $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

ដូចនេះ $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ចំពោះគ្រប់ $a \in \mathrm{IR}$

លំហាត់ ១៤៣

(Vietnam,2001)

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{x_n\}$ កំណត់ដោយ $x_1 = \frac{2}{3}$ និង $x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}$ ចំពោះ $\forall n \ge 1$ ។

គណនា $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2001}$ ។

សម្រាយ

ដោយ $x_1 = \frac{2}{3}$ និង $x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}$ ចំពោះ $\forall n \ge 1$

យក $y_n = \frac{2}{x_n}$ យើងបាន $y_1 = 3$ និង $y_{n+1} = 4(2n+1) + y_n$, $\forall n \ge 1$

តាមវិចារកំណើន យើងបាន $y_n = (2n-1)(2n+1)$

ហេតុនេះ $x_n = \frac{2}{y_n} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2001} x_i = \sum_{i=1}^{2001}\left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right) = 1 - \frac{1}{4003} = \frac{4002}{4003}$$

លំហាត់ ១៤៤

(Vietnam,1998)

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{x_n\}$ កំណត់ដោយ $x_1 = a$ និង $x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n^2 + 3\right)}{3x_n^2 + 1}$ ចំពោះ $\forall n \ge 1$

និង a ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម រួចគណនាលីមីត ។

សម្រាយ

- បើ $a = 0$ យើងបាន $x_n = 0$, $\forall n \in \mathrm{IN}^* \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

- បើ $a=1$ យើងបាន $x_n=1,\ \forall n\in \text{IN}^*\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$
- បើ $a>0$ និង $a\neq 1\Rightarrow x_{n+1}$ និង x_n មានសញ្ញាដូចគ្នា

ម្យ៉ាងទៀត $x_{n+1}-1=\dfrac{(x_n-1)^3}{3x_n^2+1}\Rightarrow x_{n+1}-1$ និង x_n-1 មានសញ្ញាដូចគ្នា

- ចំពោះ $a\in(0,1)\Rightarrow x_n<1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \text{IN}^*$
- ចំពោះ $a>1\Rightarrow x_n>1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \text{IN}^*$

យើងមាន $x_{n+1}-x_n=\dfrac{2x_n(1-x_n^2)}{3x_n^2+1}$

ហេតុនេះ $\{x_n\}$ ជាស្ទីតកើន និង ទាល់លើ (ជាស្ទីតចុះ និង ទាល់ក្រោម) ចំពោះ $a\in(0,1)$ និង $a>1$ រៀងគ្នា

$\Rightarrow\{x_n\}$ ជាស្ទីតរួម $\Rightarrow\{x_n\}$ មានលីមីត សន្មតថា L ដែល $L>0$

យើងបាន $L=\dfrac{L(L^2+3)}{3L^2+1}\Rightarrow L=1$

- បើ $a<0$ យក $\{y_n\}$ ជាស្ទីតកំណត់ដោយ $y_n=-x_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

សិក្សាដូចករណី $a>0$ និង $a\neq 1$ យើងបាន $\{y_n\}$ ជាស្ទីតរួម និង $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=1$

ហេតុនេះ $\{x_n\}$ ជាស្ទីតរួម និង $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-1$

ឯកសារយោង

1. លោកគ្រូ សួន សូវ៉ាន់,វិភាគចំនួនពិតភាគ ១,2007
2. Problems in Mathematical Analysis I, W.J. Kaczor and M.T. Nowak, 2000.
3. Selected Problems of the Vietnamese Mathematical Olympiad (1962-2009), Le Hai Chau and Le Hai Khoi, 2010.
4. A Problem Book in Real Analysis, Asuman G. Aksoy and Mohamed A. Khamsi, 2010.
5. Theory and Problems of Advanced Calculus Second Edition, Robert Wrede and Murray R. Spiegel.

រួមទាំងឯកសារខ្មែរ និង បរទេសជាច្រើនទៀត ។