គណិតវិភាគ II

ភាគ ២

មូលដ្ឋានគ្រឹះ

គណិតវិភាគ

- មេរៀន និង លំហាត់
- សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែ
- និស្សិតគណិតវិទ្យា វិស្វកម្មសំណង់

រៀបរៀងដោយ ងា ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបរៀងបន្តចេញពីសៀវភៅគណិតវិភាគ I ដែលត្រូវបានរៀបរៀងដោយខ្ញុំបាទនៅឆ្នាំ ២០១៤ ។ ខ្ញុំបាទរៀបរៀងសៀវភៅប្រភេទនេះបន្តក៏ព្រោះថាគណិតវិភាគជាផ្នែកមួយដ៏សំខាន់នៃវិទ្យាសាស្ត្រជាពិសេសគឺផ្នែកវិស្វកម្ម ។ មួយវិញទៀតគណិតវិភាគជាលំហាត់ដែលពេញនិយមបំផុតក្នុងការប្រឡងបាក់ឌុប និង អាហារូបករណ៍នានា ។

សៀវភៅនេះត្រូវបានចងក្រងឡើងដោយមានជំនួយពីឯកសារខ្មែរ និង បរទេសជាច្រើន ។ ក្នុងសៀវភៅនេះខ្ញុំបាទសង្កត់ធ្ងន់ទៅលើការគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ លីមីតស្វ៊ីត រួមទាំងទ្រឹស្តីបទមួយចំនួនទៀតទាក់ទងនឹងដេរីវេ ។ សៀវភៅនេះត្រូវបានចែកចេញជាបីជំពូកសំខាន់ គឺ ទ្រឹស្តី និង មេរៀន ប្រធានលំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ ។ ក្នុងផ្នែកទ្រឹស្តី និង មេរៀនខ្ញុំបាទបានលើកយកទ្រឹស្តីសំខាន់ៗមកបកស្រាយពន្យល់ដោយភ្ជាប់ជាមួយនឹងឧទាហរណ៍ដើម្បីឲ្យមិត្តអ្នកអានងាយស្រួលយល់ ។ ធ្វើបែបនេះគឺខ្ញុំបាទចង់ឲ្យមិត្តអ្នកអានយល់ច្បាស់ពីផ្នែកមេរៀនជាមុនសិនមុននឹងចាប់ផ្តើមធ្វើលំហាត់ ។ ក្នុងផ្នែកប្រធានលំហាត់វិញខ្ញុំបានដកស្រង់លំហាត់ចេញពីសៀវភៅនានា និង លំហាត់ធ្លាប់ប្រឡងចេញមួយចំនួនមកដាក់ជាបញ្ហាដើម្បីឲ្យមិត្តអ្នកអានធ្វើការត្រិះរិះពិចារណា ។ ក្នុងផ្នែកនេះសូមមិត្តអ្នកអានព្យាយាមគិតឲ្យអស់ពីសមត្ថភាពជាមុនសិន មុននឹងមើលដំណោះស្រាយលំហាត់ទាំងនោះ ។ រីឯផ្នែកដំណោះស្រាយវិញ ខ្ញុំបាទបានខិតខំបកស្រាយចម្លើយនៃលំហាត់ដោយផ្ចិតផ្ចង់ដើម្បីឲ្យមិត្តអ្នកអានងាយយល់ ងាយចាំពីគន្លឹះក្នុងការដោះស្រាយ ។

ក្នុងនាមជាអ្នករៀបរៀងសៀវភៅមួយក្បាលនេះ ខ្ញុំបាទសង្ឃឹមយ៉ាងមុតមាំថាសៀវភៅនេះនឹងក្លាយជាឯកសារដ៏ល្អមួយសម្រាប់មិត្តអ្នកអាន ជាពិសេសប្អូនៗដែលកំពុងតែត្រៀមប្រឡងបាក់ឌុប អាហារូបករណ៍ និង សិស្សពូកែជាដើម ។ ជាចុងក្រោយ យើងខ្ញុំមានតែសូមអរគុណដល់មិត្តអ្នកអានដែលតែងតែគាំទ្រស្នាដៃសៀវភៅដែលរៀបរៀងដោយខ្ញុំបាទកន្លងមក។ សូមអរគុណ!

ភ្នំពេញ ០១ ខែធ្នូ ឆ្នាំ ២០១៧

រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

មាតិកា

ជំពូក 1

ទ្រឹស្តីបទ និងគន្លឹះសំខាន់ៗ

1 លីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

1.1 ប្រភាគសនិទាន

ជាទូទៅ
ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ ចំពោះប្រភាគសនិទាន $\frac{f(x)}{g(x)}$ ពេល $x \to a$ គេត្រូវ
+ដាក់ភាគយក ($f(x)$) និង ភាគបែង($g(x)$) ជាកត្តា
+ សម្រួលកត្តារួមចោល ($x-a$ ជាកត្តារួម)
+ គណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

ឧទាហរណ៍ ១
គណនា $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-3x+1}{x^4+2x^3-3}$ ។
ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-3x+1}{x^4+2x^3-3} &= \lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+2x^2-2x-x+1}{x^4-x^3+3x^3-3}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)+2x(x-1)-(x-1)}{x^3(x-1)+3(x^3-1)}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+2x-1\right)}{x^3(x-1)+3(x-1)(x^2+x+1)}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+2x-1\right)}{(x-1)[x^3+3(x^2+x+1)]}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-1}{x^3+3(x^2+x+1)}=\frac{1+2-1}{1+9}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ ២

គណនា $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x^4-x^3+2x^2-2x}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x^4-x^3+2x^2-2} &= \lim_{x\to1}\frac{(1-x)(1+x)}{x^3(x-1)+2(x^2-1)}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x+1)}{x^3(x-1)+2(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)[x^3+2(x+1)]}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{-(x+1)}{x^3+2x+2}=-\frac{2}{5}\end{aligned}$$

1.2 ប្រភាគអសនិទាន

ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ ចំពោះប្រភាគអសនិទានគេត្រូវ

+បំបាត់រ៉ាឌីកាល់ (បើរ៉ាឌីកាល់នៅភាគយកបំបាត់នៅភាគយក បើរ៉ាឌីកាល់នៅភាគបែបបំបាត់នៅភាគបែង)

1. ចំពោះរឹសការេគេគុណនឹងកន្សោមឆ្លាស់ដើម្បីឲ្យចូលរូបមន្ត $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ + បើមាន $a-b$ គុណថែមនឹង $a+b$
   + បើមាន $a+b$ គុណថែមនឹង $a-b$

2. ចំពោះរឹសគូបគេគុណនឹងកន្សោមបំពេញដើម្បីឲ្យចូលរូបមន្ត
   $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
   រឺ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ។

+ក្រោយពីបំបាត់រ៉ាឌីកាល់រួច គេនឹងទទួលបានកត្តារួម ។ សម្រួលកត្តារួមនេះចោល
+គណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។
សម្គាល់
រូបមន្តទូទៅសម្រាប់បំបាត់រ៉ាឌីកាល់ $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$
រឺ $a^n+b^n=(a-b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1})$ ។

ឧទាហរណ៍ ១

គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ ២

គណនា $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-3x+2}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-3x+2}&=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-2)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}\\&=\frac{1}{(-1)(3)}=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

1.3 ត្រីកោណមាត្រ

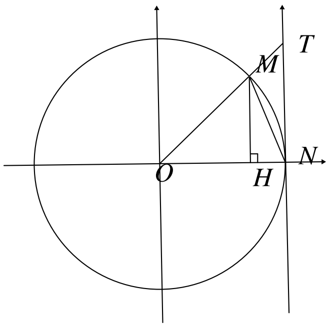
ជាទូទៅ

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

សម្រាយ

+បង្ហាញថា $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$



តាមរូបគេបាន $S_{\triangle OMN}\le S_{\text{ចម្រៀកថាស } OMN}\le S_{\triangle OTN}$

ដោយ $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\times ON\times MH=\frac{1}{2}\sin x$

$S_{\triangle OTN}=\frac{1}{2}\times ON\times TN=\frac{1}{2}\tan x$

តាមសមាមាត្រ

2π ត្រូវគ្នានឹងក្រឡាផ្ទៃ $\pi r^2=\pi$

x ត្រូវគ្នានឹងក្រឡាផ្ទៃ $S_{\text{ចម្រៀកថាស}OMN}$

គេបាន $S_{\text{ចម្រៀកថាស}OMN}=\frac{x\times\pi}{2\pi}=\frac{x}{2}$

យើងបាន $\frac{1}{2}\sin x\le\frac{x}{2}\le\frac{1}{2}\tan x\Rightarrow\sin x\le x\le\tan x$

+ចំពោះ $0<x<\frac{\pi}{2}$ យើងបាន $\sin x>0$ នោះ $1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}$

$\Rightarrow\cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1$

ដោយ $\lim_{x\to 0^+}\cos x=\cos 0=1$ និង $\lim_{x\to 0^+}1=1$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$
+ចំពោះ $-\frac{\pi}{2}<x<0$
យក $t=-x$ នោះ $0<t<\frac{\pi}{2}$ គេបាន

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(-x)}{-x}=1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{-x}=1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
+$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$
យើងមាន

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}2\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{x}{2}=0$$

+$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$
យើងមាន $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{\cos 0}\times 1=1$
+$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$
យើងមាន

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\left(\frac{x}{2}\right)^2\times\frac{1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}2\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

ឧទាហរណ៍ ១
គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{2x-\sin x}$ ។
ចម្លើយ
យើងមាន $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{2x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x+\sin x}{x}}{\frac{2x-\sin x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{\sin x}{x}}{2-\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{1+1}{2-1}=2$
ឧទាហរណ៍ ២
គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}$ ។
ចម្លើយ
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 2x}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sin 2x}\right)^2\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

1.4 អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

> **ជាទូទៅ** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ ។

សម្រាយ
តាង $t=e^x-1\Rightarrow e^x=1+t\Rightarrow x=\ln(1+t)$
ពេល $x\to 0$ នោះ $t\to 0$
គេបាន $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\dfrac{1}{\ln e}=1$
ឧទាហរណ៍ ១
គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}$ ។
ចម្លើយ
យើងមាន $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1+1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}+\dfrac{1-\cos x}{x}=1+0=1$
ឧទាហរណ៍ ២

គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}+e^{bx}+e^{cx}-3}{x}$ ចំពោះ a,b និង $c\neq 0$។
ចម្លើយ
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}+e^{bx}+e^{cx}-3}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1+e^{bx}-1+e^{cx}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{x}\right)+\left(\frac{e^{bx}-1}{x}\right)+\left(\frac{e^{cx}-1}{x}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\right)a+\left(\frac{e^{bx}-1}{bx}\right)b+\left(\frac{e^{cx}-1}{cx}\right)c=a+b+c\end{aligned}$$

1.5 អនុគមន៍លោការីតនេពែ

ជាទូទៅ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ ។

សម្រាយ
យើងមាន $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$
ឧទាហរណ៍
គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ ។
ចម្លើយ
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\times\frac{\cos x-1}{x^2}\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x-1}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\\&=-1\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2 លីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ នៃប្រភាគ $\frac{f(x)}{g(x)}$ គេត្រូវ
+ចាប់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់នៃភាគយក និង ភាគបែងជាកត្តា
+ សម្រួលកត្តារួមចោល
+គណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

ឧទាហរណ៍ ១
គណនា $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x-2}$ ។
ចម្លើយ
យើងមាន $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1+0+0}{1+0-0}=1$

ឧទាហរណ៍ ២
គណនា $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0}$ ។
ចម្លើយ
យើងមាន

$$\begin{aligned}A&=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m\left(a_m+\frac{a_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{m-1}}+\frac{a_0}{x^m}\right)}{x^n\left(b_n+\frac{b_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{n-1}}+\frac{b_0}{x^n}\right)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_mx^m}{b_nx^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}\end{aligned}$$

+ ចំពោះ $m>n$ គេបាន $A=+\infty$
+ ចំពោះ $m<n$ គេបាន $A=0$
+ ចំពោះ $m=n$ គេបាន $A=\frac{a_m}{b_n}$

3 លីមីតរាងមិនកំណត់ $\infty - \infty$

3.1 ចំពោះពហុធា

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\infty - \infty$ ចំពោះពហុធាយើងត្រូវចាប់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាកត្តា ។

ឧទាហរណ៍
គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x^2-2)$ ។

ចម្លើយ
យើងមាន $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x^2-2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right) = +\infty$

3.2 អនុគមន៍អសនិទាន

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\infty - \infty$ នៃអនុគមន៍អសនិទានគេត្រូវបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ ។ ក្រោយពីបំបាត់រ៉ាឌីកាល់រួច គេនឹងទទួលបានកន្សោមថ្មីដែលលីមីតរបស់វាមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ ។ អនុវត្តការគណនាលីមីតនេះតាមចំណុច 2 យើងនឹងទទួលបានលទ្ធផល ។

ឧទាហរណ៍ ១
គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$ ។

ចម្លើយ
យើងមាន

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ ២
គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x}-\sqrt{x^2+x}\right)$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x}-\sqrt{x^2+x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x}-x\right)-\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3-x\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x}+x^2}+\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt[3]{\left(x^3-x\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x}+x^2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{x^2\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x}+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{x^3-x}+x}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

4 លីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ជាទូទៅគេកំណត់យក $e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sim 2.7182$ ។

ទ្រឹស្តីបទ $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ ។

សម្រាយ

5 លីមីតរាងមិនកំណត់ 1^∞

ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ 1^∞ គេប្រើ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ ។

ឧទាហរណ៍

គណនា $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+x}\right)^{x^2}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2+x}\right)^{x^2+x}\right]^{\frac{x^2}{x^2+x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+x}}=e$

6 The Stolz-Cesaro

ទ្រឹស្តីបទ
គេឲ្យ (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត ។ បើ (b_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានកើនទៅរក $+\infty$ និង $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$ នោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$ ។

សម្រាយ
ដោយ $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$
តាមនិយមន័យលីមីតយើងបាន $\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall n\geq N_\varepsilon : l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<l+\varepsilon$
ដោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតកើនដាច់ខាត នោះ $b_{n+1}-b_n>0$
យើងបាន $(l-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(l+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)$
ឧបមាថា k ជាចំនួនគត់ដែល $k\geq N_\varepsilon$ យើងបាន

$$
\begin{aligned}
(l-\varepsilon)\sum_{n=N_\varepsilon}^{k}(b_{n+1}-b_n)<\sum_{n=N_\varepsilon}^{k}(a_{n+1}-a_n)<(l+\varepsilon)\sum_{k=n_\varepsilon}^{k}(b_{n+1}+b_n)\\
(l-\varepsilon)(b_{k+1}-b_{N_\varepsilon})<a_{k+1}-a_{N_\varepsilon}<(l+\varepsilon)(b_{k+1}-b_{N_\varepsilon})\\
(l-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_\varepsilon}}{b_{k+1}}\right)<\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}-\frac{a_{N_\varepsilon}}{b_{k+1}}<(l+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_\varepsilon}}{b_{k+1}}\right)\\
(l-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_\varepsilon}}{b_{k+1}}\right)+\frac{a_{N_\varepsilon}}{b_{k+1}}<\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}<(l+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_\varepsilon}}{b_{k+1}}\right)+\frac{a_{N_\varepsilon}}{b_{k+1}}
\end{aligned}
$$

ដោយ b_k កើនទៅរក $+\infty$ យើងបាន $\lim_{k\to+\infty}\frac{b_{N_\varepsilon}}{b_{k+1}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{N_\varepsilon}}{b_{k+1}}=0$
នោះ $\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=l=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$
ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$

វិបាក
គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានដាច់ខាតដែល $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ ។
យើងបាន $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ។

សម្រាយ
តាមទ្រឹស្តីបទ The Stolz-Cesaro យើងបាន

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln\sqrt[n]{a_n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln a_n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{(n+1)-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\ln l$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\ln\sqrt[n]{a_n}}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n]{a_n}}=e^{\ln l}=l$

ឧទាហរណ៍ ១

គេឲ្យ (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល $x_n>0$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។ បើគេដឹងថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=+\infty$

បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_k}}=0$ ។

សម្រាយ

បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_k}}=0$

តាមទ្រឹស្តីបទ The Stolz-Cesaro យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_k}}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_k}}}{\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x_k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_k}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x_{n+1}}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{x_n}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{x_n}}+\sqrt{\frac{n}{x_n}}\right)=0\end{aligned}$$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=+\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_k}}=0$

ឧទាហរណ៍ ២

គេឲ្យ (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំណត់ដោយ $x_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}kk!}{(n+1)!-1}$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ ។

ចម្លើយ

តាមទ្រឹស្តីបទ The Stolz-Cesaro យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} x_n &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} kk!}{(n+1)!-1}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1} kk!-\sum_{k=1}^{n} kk!}{(n+2)!-1-(n+1)!+1}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+1)!}{(n+1)(n+1)!}=1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$

ឧទាហរណ៍ ៣

គេឲ្យ (x_n) ជាស្វីតនៃចំនួនពិតដែល $x_1=1$ និង $x_{n+1}=\sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n}$ ។

គណនា $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $x_1=1$ និង $x_{n+1}=\sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n}$

នោះ (x_n) ជាស្វីតកើន និង វិជ្ជមានជានិច្ច ហើយ $x_{n+1}^2=x_n^2+x_n$

ឧបមាថា (x_n) ជាស្វីតទាល់ នោះ (x_n) មានលីមីតតាងដោយ l

យើងបាន $l^2=l^2+l\Rightarrow l=0$ មិនពិត ព្រោះ $x_n\geq 1$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

នេះបញ្ជាក់ថា (x_n) មិនមែនជាស្វីតទាល់ $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n=+\infty$

តាមទ្រឹស្តីបទ The Stolz-Cesaro យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{n+1-n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{x_{n+1}+x_n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}+x_n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{x_{n+1}}{x_n}+1}\end{aligned}$$

ម៉្យាងទៀត $x_{n+1}^2=x_n^2+x_n\Rightarrow\frac{x_{n+1}^2}{x_n}=1+\frac{1}{x_n}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}^2}{x_n^2}=1$

យើងបាន $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

ឧទាហរណ៍ ៤

គណនា $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n!-n\ln n}{n}$ ។

ចម្លើយ

តាមទ្រឹស្តីបទ The Stolz-Cesaro យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n!-n\ln n}{n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)!-(n+1)\ln(n+1)-\ln n!+n\ln n}{n+1-n}\\&=\lim_{n\to+\infty}[\ln(n+1)-(n+1)\ln(n+1)+n\ln n]\\&=\lim_{n\to+\infty}[-n\ln(n+1)+n\ln n]\\&=\lim_{n\to+\infty}-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=-1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n!-n\ln n}{n}=-1$

7 ទ្រឹស្តីបទ Rolle

ទ្រឹស្តីបទ

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង មានដេរីវេលើចន្លោះបើក (a,b) ដែល $f(a)=f(b)$ នោះមានចំនួនពិត $c\in(a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល $f'(c)=0$ ។

សម្រាយ

យក $f(a)=f(b)=d$

+ បើ $f(x)=d$ ថេរចំពោះគ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះ $f'(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[a,b]$

នេះបញ្ជាក់ថា មានចំនួនពិត $c\in(a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល $f'(c)=0$

+ បើ $f(x)>d$ ចំពោះ $x\in(a,b)$ នោះ $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាមួយយ៉ាងតិចត្រង់ $x=c\in(a,b)$

នេះបញ្ជាក់ថា មានចំនួនពិត $c\in(a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល $f'(c)=0$

+ បើ $f(x)<d$ ចំពោះ $x\in(a,b)$ នោះ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាយ៉ាងតិចត្រង់ $x=c\in(a,b)$

នេះបញ្ជាក់ថា មានចំនួនពិត $c\in(a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល $f'(c)=0$

ឧទាហរណ៍ ១

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=x^2-3x+2$ ។

ក) រកអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វតាងដោយ x_1,x_2 នៃក្រាបតាងអនុគមន៍ និង អ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ខ) បង្ហាញថាមានចំនួនពិត c មួយនៅចន្លោះ (x_1, x_2) ដែល $f'(c) = 0$ រួចគណនា c ។

ចម្លើយ

ក) រកអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វតាងដោយ x_1, x_2 នៃក្រាបតាងអនុគមន៍ និង អ័ក្សអាប់ស៊ីស

បើ $f(x) = 0$ យើងបាន $x^2 - 3x + 2 = 0$

ដោយ $a+b+c = 1-3+2 = 0$ នោះ $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$

ដូចនេះ $x_1 = 1$ និង $x_2 = 2$

ខ) បង្ហាញថាមានចំនួនពិត c មួយនៅចន្លោះ (x_1, x_2) ដែល $f'(c) = 0$ រួចគណនា c

ដោយ $f(x_1) = f(1) = 0 = f(2) = f(x_2)$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន c មួយយ៉ាងតិចនៅចន្លោះ (x_1, x_2) ដែល $f'(c) = 0$

+គណនា c

ដោយ $f(x) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3$

បើ $f'(c) = 0 \Rightarrow 2c - 3 = 0 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (1, 2)$

ដូចនេះ $c = \frac{3}{2}$

ឧទាហរណ៍ ២

ក) គេឲ្យ $f(x) = x^2 - 2x$ ។ បញ្ជាក់អត្ថិភាព និង រកគ្រប់ $c \in [0, 2]$ ដែល $f'(c) = 0$ ។

ខ) គេឲ្យ $f(x) = (x-3)(x+1)^2$។ បញ្ជាក់អត្ថិភាព និងរកគ្រប់ $c \in [-1, 3]$ដែល $f'(c) = 0$។

ចម្លើយ

ក) បញ្ជាក់អត្ថិភាព និង រកគ្រប់ $c \in [0, 2]$ ដែល $f'(c) = 0$

យើងមាន $f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f(0) = 0$ និង $f(2) = 2^2 - 2(2) = 0$

តាមទ្រឹស្តីបទ *Rolle* មាន $c \in [0, 2]$ ដែល $f'(c) = 0$

ម៉្យាងទៀត $f'(x) = 2x - 2$

ដោយ $f'(c) = 0 \Rightarrow 2c - 2 = 0 \Rightarrow c = 1 \in [0, 2]$

ដូចនេះ $c = 1$

ខ) បញ្ជាក់អត្ថិភាព និង រកគ្រប់ $c \in [-1, 3]$ ដែល $f'(c) = 0$

យើងមាន $f(x) = (x-3)(x+1)^2$

នោះ $f(-1) = (-1-3)(-1+1)^2 = 0$

នោះ $f(3) = (3-3)(3+1)^2 = 0$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $c \in [-1, 3]$ ដែល $f'(c) = 0$

ដោយ

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)^2 + 2(x+1)(x-3) \\ &= (x+1)[(x+1) + 2(x-3)] \\ &= (x+1)(3x-2) \end{aligned}$$

តាម $f'(c)=0$ គេបាន $(c+1)(3c-2)=0 \Rightarrow c=-1, c=\frac{3}{2}$
ដូចនេះ $c \in \{-1, \frac{3}{2}\}$

៨ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

ទ្រឹស្តីបទ
គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ និង មានដេរីវេលើ (a,b) ។ បង្ហាញថា មាន $c \in (a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

សម្រាយ
បន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(a,f(a))$ និង $B(b,f(b))$ កំណត់ដោយ
$(l): y=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)+f(a)$
យក $g(x)=f(x)-y=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)-f(a)$
ដោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ និង មានដេរីវេលើចន្លោះ (a,b)
យើងបាន g ក៏ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានដេរីវេលើ (a,b) ដែរ
ហើយ $g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
ម៉្យាងទៀត $g(a)=0=g(b)$
តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $x \in (a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $g'(c)=0$
$\Rightarrow f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$
ដូចនេះ $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ឧទាហរណ៍
បង្ហាញថា បន្ទាត់ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលតាងអនុគមន៍ $f(x)=x^2$ ត្រង់ $\frac{a+b}{2}$ ស្របទៅនឹងបន្ទាត់កាត់ប៉ារ៉ាបូលត្រង់ $A(a,a^2)$ និង $B(b^2,b)$ ។

ចម្លើយ
យើងមាន $f(x)=x^2$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$
តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមមាន $c \in (a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

គេបាន $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ $x=c$
ម៉្យាងទៀត $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ (AB)
នោះ (AB) ស្របនឹងបន្ទាត់ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ $x=c$
ដោយ $f'(x)=2x \Rightarrow f'(c)=2c$
យើងបាន $2c=\dfrac{b^2-a^2}{b-a} \Rightarrow c=\dfrac{a+b}{2}$
ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ $c=\dfrac{a+b}{2}$ ស្របនឹងបន្ទាត់ (AB)

9 ទ្រឹស្ដីបទ Cauchy

ទ្រឹស្ដីបទ បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និង មានដេរីវេលើ (a,b) ដែល $g'(x)\neq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(a,b)$ ហើយ $g(a)\neq g(b)$ នោះមាន $c\in(a,b)$ ដែល $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ ។

សម្រាយ

យក $h(x)=f(x)-kg(x)$ ដែល $h(a)=h(b)$
តាម $h(a)=h(b)$ យើងបាន $f(a)-kg(a)=f(b)-kg(b) \Rightarrow k=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
ម៉្យាងទៀត f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និង មានដេរីវេលើ (a,b) នោះ h ក៏ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និង មានដេរីវេលើ (a,b) ដែរ
តាមទ្រឹស្ដីបទ Rolle មាន $c\in(a,b)$ ដែល $h'(c)=0$
ដោយ $h'(x)=f'(x)-kg'(x) \Rightarrow h'(c)=f'(c)-kg'(c)$
យើងបាន $f'(c)-kg'(c)=0 \Rightarrow k=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$
ដូចនេះ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

10 វិធាន L'Hospital

ទ្រឹស្តីបទ បើ f និង g ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ voisinage នៃ a ដែល $f(a) = g(a) = 0$ និង $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ នោះ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = l$ ។

សម្រាយ

ដោយ $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

យើងបាន $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall\zeta \in (a-\eta, a+\eta), \left|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - l\right| < \varepsilon$

ចំពោះ $x \in (a-\eta, a+\eta)$ តាមទ្រឹស្តីបទ Cauchy

មាន $\zeta \in (a,x)$ ពោលគឺ $\zeta \in (a-\eta, a+\eta)$ ដែល $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$ ព្រោះ $f(x) = g(x) = 0$

គេបាន $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon$

ដូចនេះ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = l$

ឧទាហរណ៍

គណនា

ក) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}$

ខ) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ ។

ចម្លើយ

គណនា

ក) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាមទ្រឹស្តីបទ L′Hospital យើងបាន

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x-\tan x)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-1-\tan^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{-\tan^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(-\tan^2 x)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-2\tan x(1+\tan^2 x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{-2(1+\tan^2 x)}\\
&= \frac{\cos 0}{-2(1+\tan 0)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\tan x} = -\dfrac{1}{2}$

ខ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

តាមទ្រឹស្តីបទ L′Hospital យើងបាន

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$

ជំពូក 2

ប្រធានលំហាត់

កម្រិតមូលដ្ឋាន

លំហាត់ ១
គណនាលីមីតខាងក្រោម

1. $\lim_{x\to 1}(x^3-2x^2+3x-3)$
2. $\lim_{x\to 1}\frac{4x-5}{5x-1}$
3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$
4. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^2+2-3x}$
5. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-6x+8}$
6. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$
7. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$
8. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^3-1}$
9. $\lim_{x\to 1}\frac{2x-3+x^2}{x^3+2-x-2x^2}$
10. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{5x+5}$
11. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$
12. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2+4x-8}$
13. $\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$
14. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}}{x}$
15. $\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}$ ចំពោះ $a\neq 0$
16. $\lim_{x\to 1}\frac{x^5+6x^3-5x-2}{x^4-5x^2+4}$

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^7-1}$

19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x^2-1}$

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\cos x}{\sin x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+2\sin x}{x-3\sin x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2017\sin x-2018\tan x}{2019x-\sin x}$

26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-(x+1)}{x-1}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

29. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-x^2+x+1}{3x^2-2x+1}$

30. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$

31. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x+2)(3x+4)(5-6x)}{(3x^2+2)(2x+1)}$

32. $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x}{x+2}$

33. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x$

34. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1}$

35. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x+\frac{\pi}{2}}$

36. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin nx}{\sin x}$

37. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$

38. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{(x-1)^2}$

39. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{(2x-\pi)\cos 3x}{\cos^2 x}$

40. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

41. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\cos x\right)\times\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{3}}$

42. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x-2}$

43. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^2-x}$

44. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x^3+1}$

45. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+2}{x^2}$

46. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+5x-1}{x^2-3x+7}$

47. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+5x+2}{x-1}$

48. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2-3x+4}}$

49. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}{x}$

50. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

51. $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^2+1}$

52. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{e^x}$

53. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-3e^x+2}{e^x-1}$

54. $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x+\ln x)$

55. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x+x^2}{e^x+x^4}$

56. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\tan x}$

57. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$

58. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ ចំពោះ $a>0$ និង $b<0$

59. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x\sin x}{x^2-\sin^2 x}$

60. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\sin x}{\frac{1-\cos x}{x}}$

61. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

62. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)$

63. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\ln x)$

64. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x-1}$

65. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{xe^x+2}{x^2-2}\right)$

66. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$

67. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x^4}$

68. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^{100}+(x+2)^{100}+\ldots+(x+100)^{100}}{x^{100}-10^{100}}$

69. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

70. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

71. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x+1}{5e^x+2}$

72. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x-1}$

73. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

74. $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{4}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{1}{1-x}\right)$

75. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 5x+x\sin 10x}{\sin 5x-x\sin 10x}\right)$

76. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2e^x-x}{1+e^x}\right)$

77. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-\cos x}}{\frac{\pi}{2}-x}\right)$

78. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2}$

79. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+2}{(e^x+2)(e^x-1)}$

80. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+e^x-1}{x^2+x}$

81. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+2}{x+1}$

82. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\ln x+1}{x^2}$

83. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{2e^x+5}$

84. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{2\cos x}-1}{2\cos 2x+1}$

85. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(a+x)^3}-\frac{1}{a^3}}{x}$

86. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

87. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}$

88. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}-x}$

89. $\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}}$

90. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{-2x^2}$

91. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{|x|}$

92. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-1}{\sin x+1}$

93. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4+x^2}-x^2$

94. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x})\sin^2 x}{2x^2}$

95. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

96. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}$

97. $\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{x}$

98. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$

99. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

100. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}$

101. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{2x}$

102. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1}{\frac{\pi}{2}-x}$

103. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}$

104. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-1}{1-\sin x}$

105. $\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x+\sin x}{3x}$

106. $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

107. $\lim_{x\to-2^-}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

108. $\lim_{x\to-1^+}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

109. $\lim_{x\to 0^+}(x-1)\ln x$

110. $\lim_{x\to+\infty}(x-1)\ln x$

លំហាត់ ២

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to 0}\frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ ៣
កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$ ។
លំហាត់ ៤
កំណត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+px-6}{2x^2+3x-2}=q$ ។

កម្រិតមធ្យម

1. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$
2. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$
3. $\lim_{x\to1}\frac{x^{2017}+x-2}{x^2-1}$
4. $\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ ចំពោះ $m,n\in\mathbb{N}$
5. $\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2+x-3}{x^4+x^3+x^2+x-4}$
6. $\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^p-p}{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}$
   ចំពោះ $p,n\in\mathbb{N}$
7. $\lim_{x\to1}\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$
8. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$
9. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{\sqrt[p]{1+cx}-\sqrt[q]{1+dx}}$
10. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin2x+\ldots\sin nx}{x}$
11. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}$
12. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}$
13. $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$
14. $\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}$
15. $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{2x-\sin2x}$
16. $\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}+\sin ax-1}{e^{bx}+\sin bx-1}$
17. $\lim_{x\to1}\frac{\sin^2(x^2-1)}{x^3-1}$
18. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x\sin2x\sin3x\ldots\sin nx}{x^n}$
19. $\lim_{x\to0}\frac{\sin mx+\cos x-1}{\sin nx+\cos x-1}$
    ចំពោះ $m,n\in\mathbb{R}$
20. $\lim_{x\to0}\frac{(1+nx)^m-(1-mx)^n}{x^2}$
21. $\lim_{x\to0}\frac{\cos ax+\cos bx+\cos cx-3}{\cos dx+\cos ex+\cos fx-3}$
22. $\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-\cos2x}{x^3+4x^2}$
23. $\lim_{x\to+\infty}x(\ln(x+1)-\ln x)$
24. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+1}+\ldots+\sqrt{x^2+2nx+1}-\sqrt{n^2x^2+1})$

25. $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

26. $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

27. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$

28. $\lim_{x\to0}\frac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}$ ចំពោះ $a,b\neq 0$ និង $a\neq b$

29. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$

30. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1)$

31. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

32. $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin x}-\cos x}$

33. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}$

34. $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}$

35. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

36. $\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

37. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

38. $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$

39. $\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

40. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}$

41. $\lim_{x\to0^+}x^x$

កម្រិតខ្ពស់

លំហាត់ ១

គេមានពហុកោណនិយ័តមួយមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើនឹង n ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយដែលមានរង្វាស់កាំស្មើនឹង a ។ យក S_n ជាក្រឡាផ្ទៃនៃពហុកោណនេះ ។ គណនា S_n និង $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

លំហាត់ ២

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនវិជ្ជមាន ។ គណនា $\lim_{x\to+\infty}\frac{[P(x)]}{P([x])}$ ដែល $[x]$ តាងឲ្យផ្នែកគត់នៃ x ។

លំហាត់ ៣

គណនា

1. $\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}$

2. $\lim_{x\to0}x\left[\frac{1}{x}\right]$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]$ ចំពោះ $a,b>0$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{[x]}{x}$

5. $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^3+1})$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$

7. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^4+2x^2+2}-x\sqrt[3]{x^3+x+1})$

8. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{9x^2+10x+11}-\sqrt{16x^2+17x+18})$

9. $\lim_{x\to 0}x^2\left(1+2+3+\dots+\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)$

10. $\lim_{x\to 0^+}x\left(\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+\dots+\left[\frac{k}{x}\right]\right)$ ចំពោះ $k\in\mathbb{N}$

លំហាត់ ៤

1. ចំពោះ $a>b>0$ បង្ហាញថា $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$ ។

2. បង្ហាញថា $\ln(x+1)>x-\frac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

3. គណនា $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right]$ ។

លំហាត់ ៥

ឧបមាថា $f:(-a,a)-\{0\}\to\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា

ក) $\lim_{x\to 0}f(x)=l$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to 0}f(\sin x)=l$ ។

ខ) បើ $\lim_{x\to 0}f(x)=l$ នោះ $\lim_{x\to 0}f(|x|)=l$ ។ តើសំណើច្រាសនៃសំណើនេះពិតដែរ រឺទេ ?

លំហាត់ ៦

គេឲ្យអនុគមន៍ $f:(-a,a)-\{0\}\to(0,+\infty)$ និង បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim_{x\to 0}\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]=2$ ។ បង្ហាញថា $\lim_{x\to 0}f(x)=1$ ។

1. គេមាន f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,+\infty)$ដោយ $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។
2. គេមានស្ទីត u_n មួយកំណត់ដោយ $u_n=\frac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}\right]$ ។ បង្ហាញថា $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ រួចទាញថា $u_n=(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$ ។
3. តាមសំណួរ 2 ទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

លំហាត់ ៨

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-1})$ ។

លំហាត់ ៩

គណនា $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{\sqrt{3x+10}-2}$ ។

លំហាត់ ១០

គេឲ្យ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ ជាស្ទីតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=\frac{3n^2+9n}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{na_n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ។

លំហាត់ ១១

គេឲ្យស្ទីត a_n កំណត់ដោយ $a_1=a_2=0$ និង $a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+a_{n-1}^2+b)$ ដែល $0\leq b<1$ ។ បង្ហាញថា a_n ជាស្ទីតរួម និង គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ ។

លំហាត់ ១២

គេឲ្យស្ទីតចំនួនពិត $\{x_n\}$ កំណត់ដោយ $x_1=1$ និង $x_n=2x_{n-1}+\frac{1}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ។

លំហាត់ ១៣

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{4}{5}\right)^n+n^2\sin^n\frac{\pi}{6}+\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{n}\right)\right]$ ។

លំហាត់ ១៤

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k!k}{(n+1)!}$ ។

លំហាត់ ១៥

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$ ។

លំហាត់ ១៦

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\{x_n\}$ ដែល $(n+1)x_{n+1}-nx_n<0$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។ បង្ហាញថា $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង គណនាលីមីតរបស់វា ។

លំហាត់ ១៧

រកតម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b)=0$ ។

លំហាត់ ១៨

គេឲ្យ $p\in\mathbb{N}$ និង $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p$ ជា p ចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្សេងគ្នា ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha_1^n+\alpha_2^n+...+\alpha_p^n}$ ។

លំហាត់ ១៩

ចំពោះ $a\in\mathbb{R}^*$ គណនា $\lim\limits_{x\to-a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x^2-a^2}$ ។

លំហាត់ ២០

ចំពោះ $n\in\mathbb{N}^*$ គណនា $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2+...+x^n)}{nx}$ ។

លំហាត់ ២១

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+n-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k^3+8k^2+6k-1}{k^2+4k+3}\right)$ ។

លំហាត់ ២២

កំណត់ $a\in\mathbb{R}^*$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$ ។

លំហាត់ ២៣

គណនា $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}$ ។

លំហាត់ ២៤

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\lambda\sqrt{2n^2-n})$ ។

លំហាត់ ២៥

គេឲ្យ $a,b,c\in\mathbb{R}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}(a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x+2}+c\sqrt{x+3})$ ។

លំហាត់ ២៦

កំណត់សំណុំ A ដែល $A\subset\mathbb{R}$ ដើម្បីឲ្យ $ax^2+x+3\geq0$ ចំពោះ $\forall a\in A$ និង $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ចំពោះគ្រប់ $a\in A$ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-\sqrt{ax^2+x+3})$ ។

លំហាត់ ២៧

ចំពោះ $k\in\mathbb{R}$ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}n^k\left(\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}-\sqrt{\dfrac{n+2}{n+3}}\right)$ ។

លំហាត់ ២៨

គេឲ្យ $k\in\mathbb{N}$ និង $a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$ ។

គណនា $\lim_{n\to+\infty} n^k(a^{\frac{1}{n}}-1)\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)$ ។

លំហាត់ ២៩

គណនា $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ ។

លំហាត់ ៣០

គេឲ្យ $a>0, p\geq 2$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+ka}}$ ។

លំហាត់ ៣១

គណនា $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)...(1+n^2)}$ ។

លំហាត់ ៣២

គណនា $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}$ ។

លំហាត់ ៣៣

គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-\cos x}{1-\sqrt{1+\tan^2 x}}$ ។

លំហាត់ ៣៤

គណនា $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^x$ ។

លំហាត់ ៣៥

គណនា $\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ ។

លំហាត់ ៣៦

គណនា $\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ ។

លំហាត់ ៣៧

គេឲ្យ $a,b\in\mathbb{R}_+$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ ។

លំហាត់ ៣៨

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n=\begin{cases}1 \text{ បើ } n\leq k, k\in\mathbb{N}^* \\ \frac{(n+1)^k-n^k}{C_n^{k-1}} \text{ បើ } n>k\end{cases}$

ក) គណនា $\lim_{n\to+\infty} a_n$

ខ) បើ $b_n=1+\sum_{k=1}^{n} k\lim_{n\to+\infty} a_n$ គណនា $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b_n^2}{b_{n-1}b_{n+1}}\right)^n$ ។

លំហាត់ ៣៩

គេឲ្យ (x_n) ជាស៊ីតនៃចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$ ។ បើ $x_1\le x_2$
ក) បង្ហាញថា (x_{2n+1}) ជាស៊ីតកើន ហើយ (x_{2n}) ជាស៊ីតចុះ
ខ) បង្ហាញថា $|x_{n+2}-x_{n+1}|=\dfrac{x_2-x_1}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$
គ) បង្ហាញថា $2x_{n+2}+x_{n+1}=2x_2+x_1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$
ឃ) បង្ហាញថា (x_n) ជាស៊ីតរួម ហើយមានលីមីត $\dfrac{x_1+2x_2}{3}$ ។

លំហាត់ ៤០

គេឲ្យ $a_n,b_n\in\mathbb{Q}$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ ។

លំហាត់ ៤១

គេឲ្យ $a>0$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-1}{x}$ ។

លំហាត់ ៤២

គេឲ្យ $|a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots+a_n\sin nx|\le|\sin x|$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $|a_1+2a_2+\ldots+na_n|\le 1$ ។

លំហាត់ ៤៣

ឧបមាថា f និង g ជាអនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ $x=a$ ។ គណនា
ក) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$
ខ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$ ។

លំហាត់ ៤៤

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ $x=a$ ។ គណនា
ក) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^nf(x)-x^nf(a)}{x-a}$
ខ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)e^x-f(a)}{f(x)\cos x-f(a)}$ ចំពោះ $a=0$ និង $f'(0)\neq 0$
គ) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)-kf(a)\right]$
ឃ) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[f\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)+\ldots+f\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)-nf(a)\right]$ ។

លំហាត់ ៤៥

គេឲ្យស៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=\dfrac{3}{2}$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2-a_n+1}{a_n}$ ។ បង្ហាញថា (a_n) ជាស៊ីតរួម និង គណនាលីមីតរបស់វា ។

លំហាត់ ៤៦

គេឲ្យស្ទីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ $x_0 \in (0,1)$ និង $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។ បង្ហាញថា (x_n) គឺជាស្ទីតរួម និង គណនាលីមីតរបស់វា ។

លំហាត់ ៤៧

គេឲ្យ $a > 0$ និង $b \in (a,2a)$ ។ យក (x_n) ជាស្ទីតកំណត់ដោយ $x_0 = b$ និង $x_{n+1} = a + \sqrt{x_n(2a - x_n)}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។ សិក្សាភាពរួមនៃ (x_n) ។

លំហាត់ ៤៨

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{4k^4+1}$ ។

លំហាត់ ៤៩

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n+1 - \sum\limits_{i=2}^{n} \sum\limits_{k=2}^{i} \frac{k-1}{k!} \right)$ ។

លំហាត់ ៥០

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}{n^n}$ ។

លំហាត់ ៥១

គេឲ្យស្ទីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_0 = 1$ និង $a_{n-1} - a_n = \frac{n}{(n+1)!}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)! \ln a_n$ ។

លំហាត់ ៥២

គេឲ្យស្ទីតចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1 = a > 0$ និង $x_{n+1} = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n}{n}$ ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ។

លំហាត់ ៥៣

គេឲ្យ $n \in \mathbb{N}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \ldots \cos nx}{x^2}$ ។

លំហាត់ ៥៤

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(0) = 0$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ 0 ។ ចំពោះ $k \in \mathbb{N}$ គណនា $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x} \left[f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{3}\right) + \ldots + f\left(\frac{x}{k}\right) \right]$ ។

លំហាត់ ៥៥

គេឲ្យ $k,m \in \mathbb{N}$ ។ គណនា

ក) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^m + (n+2)^m + \ldots + (n+k)^m}{n^{m-1}} - kn$

ខ) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n \left(a+\frac{2}{n}\right)^n \ldots \left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}}$

គ) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)\ldots\left(1+\frac{na}{n^2}\right)$ ។

លំហាត់ ៥៦
ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ a ហើយ (x_n) និង (z_n) ជាស្ទីតរួមទៅរក a ដែល $x_n < a < z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។ បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n - z_n} = f'(a)$ ។

លំហាត់ ៥៧
គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក (a,b) ។ បើគេដឹងថា $f(a)=f(b)=0$ បង្ហាញថា មាន $\alpha \in (a,b)$ ដែល $\alpha f(x)+f'(x)=0$ ។

លំហាត់ ៥៨
គេឲ្យ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក (a,b) ។ បើគេដឹងថា $f(a)=f(b)=0$ បង្ហាញថា មាន $x\in(a,b)$ ដែល $g'(x)f(x)+f'(x)=0$ ។

លំហាត់ ៥៩
គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក (a,b) ។ ឧបមាថា $\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(b)}{b}$ បង្ហាញថា មាន $x\in(a,b)$ ដែល $xf'(x)=f(x)$ ។

លំហាត់ ៦០
គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក (a,b) ។ បើគេដឹងថា $f^2(b)-f^2(a)=b^2-a^2$ បង្ហាញថា សមីការ $f'(x)f(x)=x$ មានរឹសមួយយ៉ាងតិចនៅលើចន្លោះ (a,b) ។

លំហាត់ ៦១
គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មិនសូន្យលើ $[a,b]$ ហើយមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (a,b) ។ បើគេដឹងថា $f(a)g(b)=f(b)g(a)$ បង្ហាញថា មាន $x\in(a,b)$ ដែល $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ ។

លំហាត់ ៦២
គណនា

ក) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}\right)$

ខ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{n+n}\right)$

គ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+4}+\dfrac{n}{n^2+9}+\dots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$

លំហាត់ ៦៣
ឧបមាថា $a_0,a_1,\dots,a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\dots+\dfrac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$ ។ បង្ហាញថា ពហុធា $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ មានរឹសយ៉ាងហោចណាស់មួយលើចន្លោះ $(0,1)$ ។

លំហាត់ ៦៤
ចំពោះ $a_0,a_1,\dots,a_n$ ជាចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\frac{a_0}{1}+\frac{2a_1}{2}+\frac{2^2a_2}{3}+...+\frac{2^{n-1}a_{n-1}}{n}+\frac{2^na_n}{n+1}=0$ ។
បង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(x)=a_n\ln^n x+a_{n-1}\ln^{n-1}x+...+a_1\ln x+a_0$ មានរឹសយ៉ាងហោចណាស់មួយលើ $(1,e^2)$ ។

លំហាត់ ៦៥

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដែលមានដឺក្រេ $n,n\geq 2$ ។ បង្ហាញថា បើ $P(x)$ មានរឹសទាំងអស់ជាចំនួនពិត នោះ $P'(x)$ ក៏មានរឹសទាំងអស់ជាចំនួនពិតដែរ ។

លំហាត់ ៦៦

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ ២ លើ (a,b) ។ ឧបមាថា $f(a)=f'(a)=f(b)=0$ បង្ហាញថា មាន $x_1\in(a,b)$ ដែល $f'(x_1)=0$ ។

លំហាត់ ៦៧

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ ២ លើចន្លោះ (a,b) ។ ឧបមាថា $f(a)=f(b)$ និង $f'(a)=f'(b)=0$ បង្ហាញថា មាន $x_1,x_2\in(a,b)$ ដែល $x_1\neq x_2$ និង $f''(x_1)=f''(x_2)$ ។

លំហាត់ ៦៨

បង្ហាញថា សមីការ

ក) $x^{13}+7x^3-5=0$

ខ) $3^x+4^x=5^x$ មានរឹសជាចំនួនពិតតែមួយគត់ ។

លំហាត់ ៦៩

ចំពោះចំនួនពិតមិនសូន្យ $a_1,a_2,...,a_n$ និង n ចំនួនពិតផ្សេងគ្នា $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ បង្ហាញថា សមីការ $a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+...+a_nx^{\alpha_n}=0$ មានរឹសជាចំនួនពិតយ៉ាងច្រើន $n-1$ លើ $(0,+\infty)$ ។

លំហាត់ ៧០

ចំពោះ f,g និង h ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (a,b) គេកំណត់អនុគមន៍ F ដោយ $F(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x)\\ f(a) & g(a) & h(a)\\ f(b) & g(b) & h(b)\end{vmatrix}$ ចំពោះ $x\in[a,b]$។
បង្ហាញថា $\exists x_0\in(a,b)$ ដែល $f'(x_0)=0$ រួចទាញបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម និង ទ្រឹស្តីបទ Cauchy ។

លំហាត់ ៧១

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,2]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ $(0,2)$ ។ បើគេដឹងថា $f(0)=0, f(1)=1$ និង $f(2)=2$ បង្ហាញថា $\exists x_0\in(0,2)$ ដែល $f''(x_0)=0$ ។

លំហាត់ ៧២

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (a,b) ។ បើ f មិនមែនជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ បង្ហាញថា $\exists x_1,x_2\in(a,b)$ ដែល $f'(x_1)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(x_2)$ ។

លំហាត់ ៧៣

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ $(0,1)$ ។ ឧបមាថា $f(0)=f(1)=0$ និង មាន $x_0 \in (0,1)$ ដែល $f(x_0)=1$ បង្ហាញថា $\exists c \in (0,1)|f'(c)| > 2$ ។

ជំពូក 3

ដំណោះស្រាយ

កម្រិតមូលដ្ឋាន

លំហាត់ ១
គណនាលីមីតខាងក្រោម

1. $\lim_{x\to 1}(x^3-2x^2+3x-3)$
   យើងមាន $\lim_{x\to 1}(x^3-2x^2+3x-3) = 1^3-2(1^2)+3(1)-3 = 1-2+3-3 = -1$
   ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}(x^3-2x^2+3x-3) = -1$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{4x-5}{5x-1}$
   យើងមាន $\lim_{x\to 1}\frac{4x-5}{5x-1} = \frac{4(1)-5}{5(1)-1} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}$
   ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}\frac{4x-5}{5x-1} = -\frac{1}{4}$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-2}\\&=\frac{1+1}{1-2}=\frac{2}{-1}=-2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=-2$

4. $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x^2+2-3x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x^2+2-3x}&=\lim_{x\to1}\frac{-(x^2-1)}{x^2-3x+2}\\&=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{-(x+1)}{x-2}\end{aligned}$$

$$=\frac{-(1+1)}{1-2}=\frac{-2}{-1}=2$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x^2+2-3x}=2$

5. $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-6x+8}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-6x+8}&=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x-4)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-4}\\&=\frac{1}{2-4}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}\\ &= \frac{1-1}{(1)(1+1)} = \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x} = 0$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ មានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right) = \dfrac{1}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^3-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x^2+x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-4}{x^2+x+1}\\ &= \frac{1-4}{1^2+1+1} = -\frac{3}{3} = -1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^3-1}=-1$

9. $\lim_{x\to 1}\frac{2x-3+x^2}{x^3+2-x-2x^2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{2x-3+x^2}{x^3+2-x-2x^2}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^3-2x^2-x+2}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{x^2(x-2)-(x-2)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x^2-1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-1)(x+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{(x-2)(x+1)}\\&=\frac{1-3}{(1-2)(1+1)}\\&=\frac{-2}{(-1)(2)}=1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}\frac{2x-3+x^2}{x^3+2-x-2x^2}=1$

10. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{5x+5}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{5x+5}&=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-4)}{5(x+1)}\\&=\lim_{x\to -1}\frac{x-4}{5}\\&=\frac{-1-4}{5}=\frac{-5}{5}=-1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{5x+5}=-1$

11. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)\\ &= 2^2+2(2)+4 = 4+4+4 = 12\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = 12$

12. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2+4x-8}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2+4x-8} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x^2(x-2)+4(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2+4)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2+4}\\ &= \frac{2-3}{2^2+4} = -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2+4x-8} = -\frac{1}{8}$

13. $\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+3(x^2)(2)+3(x)(2^2)+2^3-8}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x^2+12x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}(x^2+6x+12) = 12\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x} = 12$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}}{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2-(x+2)}{2x(x+2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(2+x)}\\ &= \lim_{x\to 0}-\frac{1}{2(2+x)}\\ &= -\frac{1}{2(2)} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}}{x} = -\dfrac{1}{4}$

15. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}$ ចំពោះ $a\neq 0$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2) = a^2+a^2+a^2 = 3a^2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a} = 3a^2$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5+6x^3-5x-2}{x^4-5x^2+4}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^5+6x^3-5x-2}{x^4-5x^2+4} &= \lim_{x\to 1}\frac{x^5-x^4+x^4-x^3+7x^3-7x^2+7x^2-7x+2x-2}{(x^2-1)(x^2-4)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^4(x-1)+x^3(x-1)+7x^2(x-1)+7x(x-1)+2(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2-4)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+7x^2+7x+2)}{(x-1)(x+1)(x^2-4)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3+7x^2+7x+2}{(x+1)(x^2-4)}\\ &= \frac{1+1+7+7+2}{2(1-4)} = \frac{18}{-6} = -3\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5+6x^3-5x-2}{x^4-5x^2+4}=-3$

17. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)+(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}(x^2+1)=1+1=2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=2$

18. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^7-1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^7-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}\\&=\frac{1+1+1+1+1}{1+1+1+1+1+1+1}=\frac{5}{7}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^7-1}=\frac{5}{7}$

19. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

20. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\\ &= \frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{3}$

21. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x^2-1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{(x+1)(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2})}\\ &= \frac{3}{(2)(2\sqrt{2})}\\ &= \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x^2-1} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$

22. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\times\frac{1}{x-2}\\ &= 1\times\frac{1}{1-2} = -1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2} = -1$

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\cos x}{\sin x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\cos x}{\sin x}&=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\cos x)(\sqrt{1+x}+\cos x)}{(\sqrt{1+x}+\cos x)\sin x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1+x-\cos^2 x}{(\sqrt{1+x}+\cos x)\sin x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x+x}{(\sqrt{1+x}+\cos x)\sin x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos^2 x}{x}+1}{(\sqrt{1+x}+\cos x)\times\frac{\sin x}{x}}\\&=\frac{0+1}{\sqrt{1+0}+\cos 0}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\cos x}{\sin x}=\frac{1}{2}$

24. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x+2\sin x}{x-3\sin x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\tan x+2\sin x}{x-3\sin x}&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan x}{x}+\frac{2\sin x}{x}}{1-3\frac{\sin x}{x}}\\&=\frac{1+2}{1-3}=\frac{3}{-2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x+2\sin x}{x-3\sin x}=-\frac{3}{2}$

25. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2017\sin x-2018\tan x}{2019x-\sin x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{2017\sin x-2018\tan x}{2019x-\sin x}&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2017\sin x}{x}-\frac{2018\tan x}{x}}{2019-\frac{\sin x}{x}}\\&=\frac{2017-2018}{2019-1}=-\frac{1}{2018}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{2017\sin x-2018\tan x}{2019x-\sin x}=-\frac{1}{2018}$

26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x^3}-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\\ &= \frac{1-1}{1+1+1}=0\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{x-1}=0$

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-(x+1)}{x-1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-(x+1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{[\sqrt{x+3}-(x+1)][\sqrt{x+3}+(x+1)]}{(x-1)[\sqrt{x+3}+(x+1)]}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+3-(x+1)^2}{(x-1)[\sqrt{x+3}+(x+1)]}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x+3-x^2-2x-1}{(x-1)[\sqrt{x+3}+(x+1)]}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-x^2-x+2}{(x-1)[\sqrt{x+3}+(x+1)]}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-(x^2+x-2)}{(x-1)[\sqrt{x+3}+(x+1)]}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(x+2)}{(x-1)[\sqrt{x+3}+(x+1)]}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{\sqrt{x+3}+(x+1)}\\ &= \frac{-(1+2)}{2+2}=-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-(x+1)}{x-1}=-\dfrac{3}{4}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2+x+1}{3x^2-2x+1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{\infty}{\infty}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x+1}{3x^2-2x+1} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2+x+1}{3x^2-2x+1}=-\dfrac{1}{3}$

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$ មានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1}) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1})=0$

31. $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)(3x+4)(5-6x)}{(3x^2+2)(2x+1)}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)(3x+4)(5-6x)}{(3x^2+2)(2x+1)} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(3+\frac{4}{x}\right)\left(\frac{5}{x}-6\right)}{x^3\left(3+\frac{2}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(3+\frac{4}{x}\right)\left(\frac{5}{x}-6\right)}{\left(3+\frac{2}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}\\ &= \frac{(1)(3)(-6)}{(3)(2)}=-3\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)(3x+4)(5-6x)}{(3x^2+2)(2x+1)}=-3$

32. $\lim_{x\to-2^+}\frac{x}{x+2}=+\infty$

33. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$

34. $\lim_{x\to1^-}\frac{x}{x-1}=-\infty$

35. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{2}}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
តាង $t=x+\frac{\pi}{2}$ នោះ $x=t-\frac{\pi}{2}$
ពេល $x\to-\frac{\pi}{2}$ នោះ $t\to0$
យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{2}} &= \lim_{t\to0}\frac{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}{t}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{t}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{2}}=1$

36. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
តាង $t=\pi-x$ នោះ $x=\pi-t$

ពេល $x\to\pi$ នោះ $t\to 0$
យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin nx}{\sin x} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin n(\pi-t)}{\sin(\pi-t)}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(n\pi-nt)}{\sin t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin nt}{\sin t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin nt}{nt}\times\frac{t}{\sin t}\times\frac{nt}{t}\\ &= 1\times 1\times n = n\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin nx}{\sin x}=n$

37. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$
យក $t=\dfrac{\pi}{2}-x$ នោះ $x=\dfrac{\pi}{2}-t$
ពេល $x\to\dfrac{\pi}{2}$ នោះ $t\to 0$
យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x &= \lim_{t\to 0}\left[\pi-2(\frac{\pi}{2}-t)\right]\tan(\frac{\pi}{2}-t)\\ &= \lim_{t\to 0}2t\cot t\\ &= \lim_{t\to 0}2\times\frac{t}{\tan t}=2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x=2$

38. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{(x-1)^2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$
តាង $t=1-x$ នោះ $x=1-t$
ពេល $x\to 1$ នោះ $t\to 0$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{(x-1)^2} &= \lim_{t\to 0}\frac{1+\cos\pi(1-t)}{t^2}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1+\cos(\pi-\pi t)}{t^2}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\pi t}{(\pi t)^2}\times\pi^2\\ &= \frac{1}{2}\times\pi^2=\frac{1}{2}\pi^2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}\pi^2$

39. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)\cos 3x}{\cos^2 x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យក $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-t$
ពេល $x\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $t\to 0$
យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)\cos 3x}{\cos^2 x} &= \lim_{t\to 0}\frac{\left[2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\pi\right]\cos 3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\\ &= -\lim_{t\to 0}\frac{2t\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-3t\right)}{\sin^2 t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{2t\sin 3t}{\sin^2 t}\\ &= \lim_{t\to 0}2\times\frac{t^2}{\sin^2 t}\times\frac{\sin 3t}{3t}\times 3=6\end{aligned}$$

40. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យក $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-t$
ពេល $x\to\frac{\pi}{2}$ គេបាន $t\to 0$

យើងបាន

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=\lim_{t\to0}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cot t-\frac{\pi}{2\sin t}$$
$$=\lim_{t\to0}-t\cot t+\frac{\pi}{2}\cot t-\frac{\pi}{2\sin t}$$
$$=\lim_{t\to0}-t\cot t+\frac{\pi\cos t}{2\sin t}-\frac{\pi}{2\sin t}$$
$$=\lim_{t\to0}-t\cot t+\frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos t-1}{\sin t}\right)$$
$$=\lim_{t\to0}-\frac{t}{\tan t}+\frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)\times\frac{t}{\sin t}$$
$$=-1+\frac{\pi}{2}\times0\times1=-1$$

41. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\cos x\right)\times\frac{1}{x-\frac{\pi}{3}}$ រាងមិនកំណត់ $0\times\infty$

តាង $t=\frac{\pi}{3}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}-t$

ពេល $x\to\frac{\pi}{3}$ គេបាន $t\to0$

យើងបាន

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\cos x\right)\times\frac{1}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-t\right)-\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\right]\times\frac{1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left[\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos t+\sin\frac{\pi}{3}\sin t\right)\right]\times\frac{1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left[\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{3}\left(\frac{\cos t}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin t}{2}\right)\right]\times\frac{1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}-\frac{\pi\cos t}{6}-\frac{\sqrt{3}\pi\sin t}{6}\right)\times\frac{1}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\pi(1-\cos t)}{6t}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\times\frac{\sin t}{t}$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

42. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0$

43. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2(1-\frac{1}{x})}=0$

44. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+\frac{1}{x^2}}=0$

45. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{x}=0$

46. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+5x-1}{x^2-3x+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}=1$

47. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+5x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+5+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=+\infty$

48. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2-3x+4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}}=1$

49. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+\sqrt{x^2+1}}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^4}}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2}}}=1$

50. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1$

51. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2+1} = +\infty$

52. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\ln x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{x}{e^x}+\frac{\ln x}{x}}{\frac{e^x}{x}} = 0$

53. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-3e^x+2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)(e^x-2)}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}(e^x-2) = e^0-2 = 1-2 = -1$

54. $\lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x+\ln x) = -\infty$

55. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^x+x^2}{e^x+x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{x}{e^x}}{\frac{1}{x}+\frac{x^3}{e^x}} = +\infty$

56. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+\sin x-1}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1+\sin x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{e^x-1}{x}+\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x}} = \dfrac{1+1}{1} = 2$

57. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$
យើងមាន

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[n]{x}-1)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{x}+1\right)\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\ldots+\sqrt[m]{x}+1\right)}{(\sqrt[m]{x}-1)\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\ldots+\sqrt[m]{x}+1\right)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\ldots+\sqrt[m]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{x}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{x^{m-2}}+\ldots+\sqrt[m]{x}+1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{x}+1}$$

$$= \frac{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m}}{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}} = \frac{m}{n}$$

58. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ ចំពោះ $a>0$ និង $b<0$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2} &= \lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{(x-b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}}{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{x-b-(a-b)}{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{x-b-a+b}{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{1}{(x+a)\left(\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}\right)}\\
&= \frac{1}{2a\left(2\sqrt{a-b}\right)}\\
&= \frac{\sqrt{a-b}}{4a(a-b)}
\end{aligned}$$

59. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x\sin x}{x^2-\sin^2 x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x\sin x}{x^2-\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x(x-\sin x)}{(x-\sin x)(x+\sin x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\sin x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}}\\
&= \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

60. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{\frac{1-\cos x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\frac{\sin x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{2-1}{\frac{1}{2}} = 2$

61. $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln 1 = 0$

62. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=\ln 1=0$

63. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\ln x)=+\infty$

64. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}=0$

65. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x+2}{x^2-2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{xe^x}}{\frac{x}{e^x}-\frac{2}{xe^x}}\right)=\infty$

66. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-\frac{5}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=+\infty$

67. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{x}}{\frac{\sqrt[4]{x^3+x}-x^4}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-x^3}=0$

68. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{100}+(x+2)^{100}+...+(x+100)^{100}}{x^{100}-10^{100}}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{100}+(x+2)^{100}+...+(x+100)^{100}}{x^{100}-10^{100}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(x+1)^{100}+(x+2)^{100}+...+(x+100)^{100}}{x^{100}}}{1-\frac{10^{100}}{x^{100}}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{100}+\left(1+\frac{2}{x}\right)^{100}+...+\left(1+\frac{100}{x}\right)^{100}}{1-\frac{10^{100}}{x^{100}}}\\&=\frac{\underbrace{1+1+...+1}_{100}}{1}=100\end{aligned}$$

69.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{2^2}}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 2\times\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

71. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^x+1}{5e^x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\frac{1}{e^x}}{5+\frac{2}{e^x}} = \dfrac{3}{5}$

72. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\ln x}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 0$

73.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(2-\sqrt{x+4}\right)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2^2-\sqrt{(x+4)^2}}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4-(x+4)}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4-x-4}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2+\sqrt{x+4}}\\ &= -\frac{1}{2+2} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

74.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{4}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{1-x}\right) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{4\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}-\frac{1}{1-x}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{4\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-x}-\frac{1}{1-x}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{4+4\sqrt{x}-1}{1-x}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{3+4\sqrt{x}}{1-x} = -\infty\end{aligned}$$

75.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x+x\sin 10x}{\sin 5x-x\sin 10x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 5x+x\sin 10x}{x}}{\frac{\sin 5x-x\sin 10x}{x}}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 5x}{x}+\sin 10x}{\frac{\sin 5x}{x}-\sin 10x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{5\times\frac{\sin 5x}{5x}+\sin 10x}{5\times\frac{\sin 5x}{5x}-\sin 10x}\right)\\ &= \frac{5+0}{5+0} = 1\end{aligned}$$

76. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^x-x}{1+e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2-\frac{x}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}\right)$
$=\frac{2-0}{0+1}=2$

77. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-\cos x}}{\frac{\pi}{2}-x}\right)$
តាង $t=\frac{\pi}{2}-x$ នោះ $x=\frac{\pi}{2}-t$
ពេល $x\to\frac{\pi}{2}$ គេបាន $t\to 0$
យើងបាន

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-\cos x}}{\frac{\pi}{2}-x}\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-\sin t}}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-\sin t}\right)\left(1+\sqrt{1+\sin t}\right)}{t\left(1+\sqrt{1+\sin t}\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{(1-\sin t)^2}}{t\left(1+\sqrt{1+\sin t}\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1-(1-\sin t)}{t\left(1+\sqrt{1+\sin t}\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1-1+\sin t}{t\left(1+\sqrt{1+\sin t}\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t\left(1+\sqrt{1+\sin t}\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{1+\sqrt{1+\sin t}}\\
&= \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

78.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-1}\frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2} &= \lim_{x\to-1}\frac{(1+x)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\\
&= \lim_{x\to-1}\frac{(1+x)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\sqrt{\left(x^2+3\right)^2}-2^2}\\
&= \lim_{x\to-1}\frac{(1+x)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2+3-4}\\
&= \lim_{x\to-1}\frac{(1+x)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2-1}\\
&= \lim_{x\to-1}\frac{(1+x)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)(x+1)}\\
&= \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x-1}\\
&= \frac{\sqrt{1+3}+2}{-1-1}=\frac{4}{-2}=-2
\end{aligned}$$

79. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{(e^x+2)(e^x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{\left(\frac{e^x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)(e^x-1)}=0$

80. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x+e^x-1}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{e^x-1}{x}}{x+1}=\frac{1+1}{1}=2$

81. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{0}{1}=0$

82. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\ln x+1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{e^x\ln x}}{\frac{x^2}{e^x\ln x}}=+\infty$

83.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{\sin 5x-2x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}-2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin 3x}{3x}\times 3}{\frac{\sin 5x}{5x}\times 5-2}\\&=\frac{1-3}{5-2}=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

84. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-1}{2e^x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{e^x}}{2+\frac{5}{e^x}}=\dfrac{1}{2}$

85.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{2\cos x}-1}{2\cos 2x+1}&=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\left(\sqrt{2\cos x}-1\right)\left(\sqrt{2\cos x}+1\right)}{\left[2\left(2\cos^2 x-1\right)+1\right]\left(\sqrt{2\cos x}+1\right)}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{(2\cos x)^2}-1}{\left(4\cos^2 x-2+1\right)\left(\sqrt{2\cos x}+1\right)}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{\left(4\cos^2 x-1\right)\left(\sqrt{2\cos x}+1\right)}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{(2\cos x-1)(2\cos x+1)\left(\sqrt{2\cos x}+1\right)}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(2\cos x+1)\left(\sqrt{2\cos x}+1\right)}\\&=\frac{1}{\left(2\cos\frac{\pi}{3}+1\right)\left(\sqrt{2\cos\frac{\pi}{3}}+1\right)}=\frac{1}{(2)(2)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

86.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(a+x)^3}-\frac{1}{a^3}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{a^3-(a+x)^3}{(a+x)^3a^3}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{a^3-(a+x)^3}{(a+x)^3a^3}\times\frac{1}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{a^3-(a+x)^3}{(a+x)^3a^3x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{[a-(a+x)]\left[a^2+a(a+x)+(a+x)^2\right]}{(a+x)^3a^3x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-x\left(a^2+a^2+ax+a^2+2ax+x^2\right)}{(a+x)^3a^3x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\left(a^2+a^2+ax+a^2+2ax+x^2\right)}{(a+x)^3a^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\left(3a^2+3ax+x^2\right)}{(a+x)^3a^3}\\
&= \frac{-3a^2}{a^6}\\
&= -\frac{3}{a^4}
\end{aligned}
$$

87.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(x+3)^2}-\sqrt{3^2}}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x+3-3}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

88. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}$ យក $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-t$
ពេល $x\to\frac{\pi}{2}$ គេបាន $t\to 0$
យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x} &= \lim_{t\to 0}\frac{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\pi-\pi+2t}{\sin t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{2t}{\sin t}=2\end{aligned}$$

89. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}-x}=-2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=-2$

90.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}} &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)\sin 5x}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)\sin 5x}{\sqrt{5^2}-\sqrt{(x+5)^2}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)\sin 5x}{5-(x+5)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)\sin 5x}{-x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\times 5\times 2\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)\\
&= 10\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)\\
&= 20\sqrt{10}
\end{aligned}$$

91.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{-2x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{-2x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3x}{2}(1+\cos 3x)}{-2x^2}\\
&= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2\times(1+\cos 3x)\\
&= -\frac{9}{4}\times 2 = -\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

92. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{|x|}$

\+ ចំពោះ $x\to 0^+$ យើងបាន $x>0\Rightarrow |x|=x$

នោះ $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1$

\+ ចំពោះ $x\to 0^-$ យើងបាន $x<0\Rightarrow |x|=-x$

នោះ $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{-x}=\lim_{x\to 0^-}(-x+1)=1$

93.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-1}{\sin x+1} &= \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)(\sin x+1)}{\sin x+1}\\ &= \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)\\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-1=-1-1=-2\end{aligned}$$

94.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4+x^2}-x^2 &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+x^2}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+x^2}+x^2\right)}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2-x^4}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^4+x^2}+x^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\\ &= \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

95.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(e^x+e^{-x})\sin^2 x}{2x^2} &= \lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\\ &= \left(\frac{e^0+e^0}{2}\right)\times1^2\\ &= \frac{1+1}{2}=1\end{aligned}$$

96.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to0}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to0}\left(\sqrt{x}+1\right)=1\end{aligned}$$

97.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27} &= \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)(x^2+3x+9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-9}{(x-3)(x^2+3x+9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x^2+3x+9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{1}{(x^2+3x+9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\\
&= \frac{1}{(9+9+9)(3+3)} = \frac{1}{102}
\end{aligned}$$

98. $\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} 25\times\frac{\sin 5x}{5x} = 25$

99.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\sin x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\sin x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\sin x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\times\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1\times\frac{2}{2} = 1
\end{aligned}$$

100. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$

101.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{3}} &= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\sin x\cos\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}}\\ &= -2\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\frac{\pi}{3}-x}=-2\end{aligned}$$

102.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos 2x)}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{2x}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times x=0\end{aligned}$$

103. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1}{\frac{\pi}{2}-x}$

យក $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-t$

ពេល $x\to\frac{\pi}{2}$ គេបាន $t\to 0$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1}{\frac{\pi}{2}-x} &= \lim_{t\to 0}\frac{\cos(-t)-1}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}\\ &= -\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=0\end{aligned}$$

104.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0\end{aligned}$$

105.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-1}{1-\sin x} &= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)(\sin x+1)}{\sin x-1}\\ &= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x+1)\\ &= -\left(\sin\frac{\pi}{2}+1\right) = -2\end{aligned}$$

106. $\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x+\sin x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\left(\frac{\tan x}{x}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1$

107. $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right) = \ln 1 = 0$

108. $\lim_{x\to-2^-}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = +\infty$

109. $\lim_{x\to-1^+}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = -\infty$

110. $\lim_{x\to 0^+}(x-1)\ln x = \lim_{x\to 0^+} x\ln x - \ln x = +\infty$

111. $\lim_{x\to+\infty}(x-1)\ln x = +\infty$

លំហាត់ ២

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to 0}\frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x} = \frac{1}{8}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+ax-\sqrt{1+x})(1+ax+\sqrt{1+x})}{x(1+ax+\sqrt{1+x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^2-(1+x)}{x(1+ax+\sqrt{1+x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+2ax+a^2x^2-1-x}{x(1+ax+\sqrt{1+x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2ax+a^2x^2-x}{x\left(1+ax+\sqrt{1+x}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2a+a^2x-1}{1+ax+\sqrt{1+x}}\\ &= \frac{2a-1}{2}\end{aligned}$$

ដោយ $\lim_{x\to 0}\frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{8}$
យើងបាន $\frac{2a-1}{2}=\frac{1}{8}\Rightarrow 2a=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$
ដូចនេះ $a=\frac{5}{8}$

លំហាត់ ៣

កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b) &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+ax+b}{x-1}\right)\times(x-1)\\ &= \lim_{x\to 1}5\times 0=0\end{aligned}$$

យើងបាន $1+a+b=0\Rightarrow b=-a-1$ (1)
តាម $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$

យើងបាន

$$\begin{aligned}5 &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)+(ax-a)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)+a(x-1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}(x+1+a) = 2+a\\ \Rightarrow a &= 3\end{aligned}$$

តាម (1) យើងបាន $b=-a-1=-3-1=-4$
ដូចនេះ $a=3$ និង $b=-4$

លំហាត់ ៤

កំណត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+px-6}{2x^2+3x-2}=q$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\lim_{x\to -2}(x^2+px-6)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+px-6}{2x^2+3x-2}\times(2x^2+3x-2)=q\times 0=0$
នោះ $(-2)^2-2p-6=0\Rightarrow 4-2p-6=0\Rightarrow -2p=2\Rightarrow p=-1$
បំពោះ $p=-1$ គេបាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x^2+px-6}{2x^2+3x-2} &= \lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{2x^2+3x-2}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{(x-3)(x+2)}{(2x-1)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{x-3}{2x-1}=\frac{-2-3}{2(-2)-1}=\frac{-5}{-5}=1\end{aligned}$$

គេបាន $q=1$
ដូចនេះ $p=-1$ និង $q=1$

កម្រិតមធ្យម

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$
យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x^2+1}+1)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x^2+1}+1}\\
&=\frac{(0)(1+1)}{1+1}=0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^{2017}+x-2}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^{2017}-1+x-1}{(x-1)(x+1)}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^{2016}+x^{2015}+\ldots+x+1\right)+x-1}{(x-1)(x+1)}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^{2016}+x^{2015}+\ldots+x+2\right)}{(x-1)(x+1)}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{x^{2016}+x^{2015}+\ldots+x+2}{x+1}\\
&=\frac{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2016}+2}{1+1}\\
&=\frac{2018}{2}=1009
\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ ចំពោះ $m,n\in\mathbb{N}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}&=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(x^{m-1}+ax^{m-2}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}\right)}{(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{x^{m-1}+ax^{m-2}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}}{x^{n-1}+ax^{n-2}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1}}\\&=\frac{\underbrace{a^{m-1}+a^{m-1}+\ldots+a^{m-1}}_{m}}{\underbrace{a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a^{n-1}}_{n}}\\&=\frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}}\\&=\frac{m}{n}a^{m-n}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-3}{x^4+x^3+x^2+x-4}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1+x^2-1+x-1}{x^4-1+x^3-1+x^2-1+x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)+(x-1)(x+1)+x-1}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)+(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)+x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[\left(x^2+x+1\right)+(x+1)+1\right]}{(x-1)\left[(x^3+x^2+x+1)+(x^2+x+1)+(x+1)+1\right]}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x+1\right)+(x+1)+1}{(x^3+x^2+x+1)+(x^2+x+1)+(x+1)+1}\\&=\frac{3+2+1}{4+3+2+1}\\&=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

5. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3+\ldots+x^p-p}{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}$ ចំពោះ $p,n\in\mathbb{N}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^p-p}{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+\left(x^2-1\right)+\ldots+\left(x^p-1\right)}{(x-1)+\left(x^2-1\right)+\ldots+\left(x^n-1\right)}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)+\ldots+(x-1)\left(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1\right)}{(x-1)+(x-1)(x+1)+\ldots+(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[1+(x+1)+\ldots+\left(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1\right)\right]}{(x-1)\left[1+(x+1)+\ldots+\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)\right]}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{1+(x+1)+\ldots+\left(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1\right)}{1+(x+1)+\ldots+\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)}\\
&=\frac{1+2+\ldots+p}{1+2+\ldots+n}\\
&=\frac{\frac{p(p+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}}\\
&=\frac{p\left(p+1\right)}{n\left(n+1\right)}
\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n+1}-nx^n-x^n+1}{(x-1)^2}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{nx^n\left(x-1\right)-\left(x^n-1\right)}{(x-1)^2}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{nx^n\left(x-1\right)-(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)}{(x-1)^2}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[nx^n-\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)\right]}{(x-1)^2}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^n-x^{n-1}\right)+\left(x^n-x^{n-2}\right)+\ldots+\left(x^n-1\right)}{x-1}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-1}\left(x-1\right)+x^{n-2}\left(x^2-1\right)+\ldots+\left(x^n-1\right)}{x-1}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-1}\left(x-1\right)+x^{n-2}(x-1)(x+1)+\ldots+(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)}{x-1}\\
&=\lim_{x\to 1}\left[x^{n-1}+x^{n-2}\left(x+1\right)+\ldots+\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right)\right]\\
&=1+2+\ldots+n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}
\end{aligned}$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}\right)$

ដោយ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[m]{1+ax}-1\right)\left[\sqrt[m]{(1+ax)^{m-1}}+\sqrt[m]{(1+ax)^{m-2}}+...+1\right]}{x\left[\sqrt[m]{(1+ax)^{m-1}}+\sqrt[m]{(1+ax)^{m-2}}+...+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{(1+ax)^{m}}-1}{x\left[\sqrt[m]{(1+ax)^{m-1}}+\sqrt[m]{(1+ax)^{m-2}}+...+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+ax-1}{x\left[\sqrt[m]{(1+ax)^{m-1}}+\sqrt[m]{(1+ax)^{m-2}}+...+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt[m]{(1+ax)^{m-1}}+\sqrt[m]{(1+ax)^{m-2}}+...+1}$$

$$=\frac{a}{\underbrace{1+1+...+1}_{m}}=\frac{a}{m}$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}=\dfrac{b}{n}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}=\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}=\dfrac{an-bm}{mn}$

8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{\sqrt[p]{1+cx}-\sqrt[q]{1+dx}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}}{\frac{\sqrt[p]{1+cx}-\sqrt[q]{1+dx}}{x}}$$

$$=\frac{\frac{an-bm}{mn}}{\frac{cq-dp}{pq}}$$

$$=\left(\frac{an-bm}{mn}\right)\left(\frac{pq}{cq-dp}\right)$$

$$=\frac{pq\,(an-bm)}{mn\,(cq-dp)}$$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x+...\sin nx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}+2\times\dfrac{\sin 2x}{2x}+...+n\times\dfrac{\sin nx}{nx}\right)$

$=1+2+...+n=\dfrac{n\,(n+1)}{2}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\times\dfrac{x}{\tan x}$

$$= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

11. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

12. $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
យក $x = 3t$ ពេល $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$
យក $A = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ យើងបាន

$$\begin{aligned} A &= \lim_{t \to 0} \frac{3t - \sin 3t}{(3t)^3} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{3t - 3\sin t + 4\sin^3 t}{27t^3} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t - \sin t}{9t^3} + \frac{4}{27}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 \\ &= \frac{1}{9}A + \frac{4}{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A - \frac{1}{9}A &= \frac{4}{27} \\ \Rightarrow \frac{8}{9}A &= \frac{4}{27} \\ \Rightarrow A &= \frac{4}{27} \times \frac{9}{8} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} &= \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^4} \\ &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3}\right)\left(\frac{x + \sin x}{x}\right) \\ &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3}\right)\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) \\ &= \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

14.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2x-\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\times\frac{(2x)^3}{2x-\sin 2x}\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{1}{6}\times 6\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}+\sin ax-1}{e^{bx}+\sin bx-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1+\sin ax}{e^{bx}-1+\sin bx}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{ax}-1}{ax}+\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{e^{bx}-1}{bx}+\frac{\sin bx}{bx}}\times\frac{a}{b}$$
$$=\left(\frac{1+1}{1+1}\right)\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

16.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(x^2-1)}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\times\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\times\frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\times\frac{(x-1)\left(x+1\right)^2}{x^2+x+1}=0$$

17. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin 2x\sin 3x\ldots\sin nx}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin 2x}{2x}\times\ldots\times\frac{\sin nx}{nx}\times 1\times 2\times\ldots\times n=$ $n!$

18. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx+\cos x-1}{\sin nx+\cos x-1}$ ចំពោះ $m,n\in\mathbb{R}$
យើងមាន

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx+\cos x-1}{\sin nx+\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\sin mx}{1-\cos x-\sin nx}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}-\frac{\sin mx}{mx}\times m}{\frac{1-\cos x}{x}-\frac{\sin nx}{nx}\times n}=\frac{m}{n}$$

19. $\lim_{x\to 0}\frac{4x+x^2-\sin x}{5x+x^2-\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4+x-\frac{\sin x}{x}}{5+x-\frac{\sin 2x}{2x}\times 2}$
$=\frac{4+0-1}{5+0-2}=\frac{3}{3}=1$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^m-(1-mx)^n}{x^2}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^m-(1+mx)^n}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^m-1}{x^2}-\frac{(1+mx)^n-1}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1+nx-1)\left[(1+nx)^{m-1}+(1+nx)^{m-2}+\ldots+1\right]}{x^2}\\
&\quad-\frac{(1+mx-1)\left[(1+mx)^{n-1}+(1+mx)^{n-2}+\ldots+1\right]}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{nx\left[(1+nx)^{m-1}+(1+nx)^{m-2}+\ldots+1\right]}{x^2}\\
&\quad-\frac{mx\left[(1+mx)^{n-1}+(1+mx)^{n-2}+\ldots+1\right]}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{n\left[(1+nx)^{m-1}+(1+nx)^{m-2}+\ldots+1\right]}{x}\\
&\quad-\frac{m\left[(1+mx)^{n-1}+(1+mx)^{n-2}+\ldots+1\right]}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{n\left[(1+nx)^{m-1}+(1+nx)^{m-2}+\ldots+(1+nx)+1-m\right]}{x}\\
&\quad-\frac{m\left[(1+mx)^{n-1}+(1+mx)^{n-2}+\ldots+(1+mx)+1-n\right]}{x}
\end{aligned}$$

ដោយ

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{n\left[(1+nx)^{m-1}+(1+nx)^{m-2}+\dots+(1+nx)+1-m\right]}{x}\\
&=n\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{m-1}-1+(1+nx)^{m-2}-1+\dots+(1+nx)-1}{x}\\
&=n\lim_{x\to 0}\frac{(1+nx)^{m-1}-1}{x}+\frac{(1+nx)^{m-2}-1}{x}+\dots+\frac{(1+nx)-1}{x}\\
&=n\left[n(m-1)+n(m-2)+\dots+n\right]=n^2\left[(m-1)+(m-2)+\dots+1\right]\\
&=\frac{n^2m(m-1)}{2}
\end{aligned}$$

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន

$$\lim_{x\to 0}\frac{m\left[(1+mx)^{n-1}+(1+mx)^{n-2}+\dots+(1+mx)+1-n\right]}{x}=\frac{m^2n(n-1)}{2}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
A&=\frac{n^2m(m-1)}{2}-\frac{m^2n(n-1)}{2}\\
&=\frac{mn\left[n(m-1)-m(n-1)\right]}{2}\\
&=\frac{mn(m-n)}{2}
\end{aligned}$$

21.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax+\cos bx+\cos cx-3}{\cos dx+\cos ex+\cos fx-3}&=\lim_{x\to 0}\frac{3-\cos ax-\cos bx-\cos cx}{3-\cos dx-\cos ex-\cos fx}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax+1-\cos bx+1-\cos cx}{1-\cos dx+1-\cos ex+1-\cos fx}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos ax}{x^2}+\frac{1-\cos bx}{x^2}+\frac{1-\cos cx}{x^2}}{\frac{1-\cos dx}{x^2}+\frac{1-\cos ex}{x^2}+\frac{1-\cos fx}{x^2}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\times\frac{1-\cos ax}{(ax)^2}+b^2\times\frac{1-\cos bx}{(bx)^2}+c^2\times\frac{1-\cos cx}{(cx)^2}}{d^2\times\frac{1-\cos dx}{(dx)^2}+e^2\times\frac{1-\cos ex}{(ex)^2}+f^2\times\frac{1-\cos fx}{(fx)^2}}\\
&=\frac{a^2\left(\frac{1}{2}\right)+b^2\left(\frac{1}{2}\right)+c^2\left(\frac{1}{2}\right)}{d^2\left(\frac{1}{2}\right)+e^2\left(\frac{1}{2}\right)+f^2\left(\frac{1}{2}\right)}\\
&=\frac{a^2+b^2+c^2}{d^2+e^2+f^2}
\end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-\cos 2x}{x^3+4x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x-x^2}{x^3+4x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos 2x}{x^2}-1}{x+4}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4\times\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}-1}{x+4}\\ &= \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)-1}{4}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

23.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x(\ln(x+1)-\ln x) &= \lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\\ &= \ln e = 1\end{aligned}$$

24. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+1}+\ldots+\sqrt{x^2+2nx+1}-\sqrt{n^2x^2+1})$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-x\right)+\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)+\ldots+\left(\sqrt{x^2+2nx+1}-x\right)-\left(\sqrt{n^2x^2+1}-nx\right)$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1-x^2}{\sqrt{x^2+2x+1}+x}+\frac{x^2+4x+1-x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}+\ldots+\frac{x^2+2nx+1-x^2}{\sqrt{x^2+2nx+1}+x}-\frac{n^2x^2+1-n^2x^2}{\sqrt{n^2x^2+1}+nx}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+1}+x}+\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}+\ldots+\frac{2nx+1}{\sqrt{x^2+2nx+1}+x}-\frac{1}{\sqrt{n^2x^2+1}+nx}$

$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}+\frac{4+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}+\ldots+\frac{2n+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2n}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}-\frac{1}{\sqrt{n^2x^2+1}}$

$= \frac{2}{2}+\frac{4}{2}+\ldots+\frac{2n}{2}=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

25. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

យើងមាន $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\\
&1-\frac{1}{3^2}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\\
&1-\frac{1}{4^2}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\\
&\dots\\
&1-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

គុណអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\dots\times\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\dots\times\frac{n+1}{n}\right)\\
&=\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$

26.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}&=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\sin x}{x^3}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3\cos x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cos 2x}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{(1-\cos 2x)\cos x}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{(1-\cos 2x)\cos x}{(2x)^2}\times 4\\
&= \frac{1}{2}+4\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

28. $\lim_{x\to 0}\frac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}$ ចំពោះ $a,b\neq 0$ និង $a\neq b$

យើងមាន $\lim_{x\to 0}\frac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a-b}{\frac{\sin ax}{ax}\times a-\frac{\sin bx}{bx}\times b}=\frac{a-b}{a-b}=1$

29.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2\sin x-1)(\sin x-1)}{(2\sin x-1)(2\sin x+1)}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-1}{2\sin x+1}\\
&= \frac{\frac{1}{2}-1}{2\left(\frac{1}{2}\right)+1}\\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)-\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-1\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}-\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}-1\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}-1\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}-1\right)\\
&= \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

31.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\left(1-\sqrt{\cos 2x}\right)\cos x}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\left(\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right)\left(\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\left(\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\right)\left(\frac{4\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}\right)\\
&= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

32.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+\sin x}-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)\sin^2 x}{\left(\sqrt{1+\sin x}-\cos x\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)\sin^2 x}{1+\sin x-\cos^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)\sin^2 x}{\sin x+\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)\sin^2 x}{(1+\sin x)\sin x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}+\cos x\right)\sin x}{1+\sin x}=0
\end{aligned}$$

33. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right)=+\infty$

34. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$

35.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-x+1-1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{(1+x-1+x)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}\\
&= \frac{(-1)(2)}{2(2)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

36.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}-\sin^3 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\left(\frac{1}{\cos^3 x}-1\right)\sin^3 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\left(\frac{1-\cos^3 x}{\cos^3 x}\right)\sin^3 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2\cos^3 x}{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)\sin^3 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos^3 x}{\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)\sin^3 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{\cos^3 x}{1+\cos x+\cos^2 x}\times\frac{1}{\sin x}=\infty
\end{aligned}
$$

37.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2-1-\cos x}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}\right)\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}\\
&= \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

38. $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

យើងមាន $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$ ដោយ $\lim_{x\to 0}|x| = 0$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

39.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+x\sin x}{\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}+\frac{x\sin x}{\sin^2 x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x}+\frac{x}{\sin x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{x}{\sin x}\right) = 2+1 = 3\end{aligned}$$

40.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\times 3}{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}-\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\times 3}{\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}-\frac{x^2+1-1}{x\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right]}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\times 3}{\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}-\frac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}}$$

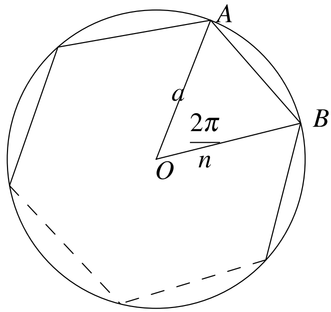
$$= \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

41. $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\ln x^x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$

កម្រិតខ្ពស់

លំហាត់ ១

គេមានពហុកោណនិយ័តមួយមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើនឹង n ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយដែលមានរង្វាស់កាំស្មើនឹង a ។ យក S_n ជាក្រឡាផ្ទៃនៃពហុកោណនេះ ។ គណនា S_n និង $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។



សម្រាយ

ដោយពហុកោណដែលឲ្យជាពហុកោណនិយ័តដែលមាន nជ្រុង នោះ $\angle AOB = \frac{2\pi}{n}$

នោះ

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &= \frac{1}{2}\times OA\times OB\times\sin\angle AOB \\ &= \frac{1}{2}\times a\times a\times\sin\frac{2\pi}{n} \\ &= \frac{1}{2}a^2\sin\frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

គេបាន $S_n = nS_{\triangle AOB} = n\times\frac{1}{2}a^2\sin\frac{2\pi}{n}$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{2}a^2 n\sin\frac{2\pi}{n}$

+ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

យើងមាន $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}a^2 n\sin\frac{2\pi}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\times\pi a^2 = \pi a^2$

ដូចនេះ $S_n = \pi a^2$

លំហាត់ ២

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនវិជ្ជមាន ។ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[P(x)]}{P([x])}$ ដែល $[x]$ តាងឲ្យផ្នែកគត់នៃ x ។

សម្រាយ

តាមនិយមន័យផ្នែកគត់ $x-1<[x]\le x$

ចំពោះ $x>1$ យើងបាន $P(x-1)<P([x])\le P(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{P(x)}\le\frac{1}{P([x])}<\frac{1}{P(x-1)}$ (1)

និង $P(x)-1<[P(x)]\le P(x)$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\frac{P(x)-1}{P(x)}<\frac{[P(x)]}{P([x])}<\frac{P(x)}{P(x-1)}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P(x)-1}{P(x)}=1$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{P(x-1)}=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[P(x)]}{P([x])}=1$

លំហាត់ ៣

គណនា

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]$ ចំពោះ $a,b>0$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[x]}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^3+1})$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^4+2x^2+2}-x\sqrt[3]{x^3+x+1})$

8. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{9x^2+10x+11}-\sqrt{16x^2+17x+18})$

9. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(1+2+3+...+\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)$

10. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left(\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+...+\left[\frac{k}{x}\right]\right)$ ចំពោះ $k\in\mathbb{N}$

ចម្លើយ

1. $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}$
   យើងមាន $\left|x\cos\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leq|x|$
   ដោយ $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$
   ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0$

2. $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$
   តាមនិយមន័យផ្នែកគត់យើងបាន $\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}$
   នោះ $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1$ ចំពោះ $x>0$ និង $1-x>x\left[\frac{1}{x}\right]\geq 1$ ចំពោះ $x<0$
   ដោយ $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1$ និង $\lim\limits_{x\to 0}1=1$
   ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]$ ចំពោះ $a,b>0$
តាមនិយមន័យផ្នែកគត់គេបាន $\frac{b}{x}-1<\left[\frac{b}{x}\right]\leq\frac{b}{x}$
នោះ $\frac{b}{a}-\frac{x}{a}<\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]\leq\frac{b}{a}$ ចំពោះ $x>0$
និង $\frac{b}{a}-\frac{x}{a}>\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]\geq\frac{b}{a}$ ចំពោះ $x<0$
ដោយ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{b}{a}-\frac{x}{a}\right)=\frac{b}{a}$ និង $\lim_{x\to 0}\frac{b}{a}=\frac{b}{a}$
ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]=\frac{b}{a}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{[x]}{x}$
ចំពោះ $x\to 0^+\Rightarrow 0<x<1\Rightarrow [x]=0$
នោះ $\frac{[x]}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=0$
ចំពោះ $x\to 0^-\Rightarrow -1<x<0\Rightarrow [x]=-1$
នោះ $\frac{[x]}{x}=-\frac{1}{x}\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$
ដោយ $\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}$
ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{[x]}{x}$ គ្មានលីមីត

5. $\lim_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+1})$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+1})\\
&=\lim_{x\to+\infty} x[(\sqrt{x^2+1}-x)-(\sqrt[3]{x^3+1}-x)]\\
&=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}-\frac{x^3+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}-\frac{1}{x^2\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2}+x^2\sqrt[3]{1+x^2\frac{1}{x^3}}+x^2}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}-\frac{1}{x\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2}+x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+x}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}&=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\pi\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\pi\sin^2\frac{x}{2}}\times\frac{\sin x}{\sin(\sin x)}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{\pi x}{4}=0
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}=0$

7. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^4+2x^2+2}-x\sqrt[3]{x^3+x+1})$ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2+2}-x\sqrt[3]{x^3+x+1}\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2+2}-x^2\right)-\left(x\sqrt[3]{x^3+x+1}-x^2\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+2x^2+2-x^4}{\sqrt{x^4+2x^2+2}+x^2}-x\left[\frac{x^3+x+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x+1}+x^2}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+2}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}-\frac{x^2+x}{\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x+1}+x^2}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}+1}-\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+1}\\
&=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

8. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{9x^2+10x+11}-\sqrt{16x^2+17x+18})$
យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{9x^2+10x+11}-\sqrt{16x^2+17x+18}\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)+\left(\sqrt{9x^2+10x+11}-3x\right)-\left(\sqrt{16x^2+17x+18}-4x\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}+\frac{9x^2+10x+11-9x^2}{\sqrt{9x^2+10x+11}+x}-\frac{16x^2+17x+18-16x^2}{\sqrt{16x^2+17x+18}+4x}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}+\frac{10x+11}{\sqrt{9x^2+10x+11}+3x}-\frac{17x+18}{\sqrt{16x^2+17x+18}+4x}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}+\frac{10+\frac{11}{x}}{\sqrt{9+\frac{10}{x}+\frac{11}{x^2}}+3}-\frac{17+\frac{18}{x}}{\sqrt{16+\frac{17}{x}+\frac{18}{x^2}}+4}\\
&=\frac{2}{2}+\frac{10}{6}-\frac{17}{8}\\
&=1+\frac{5}{3}-\frac{17}{8}\\
&=\frac{24+40-51}{24}=\frac{13}{24}
\end{aligned}$$

9. $\lim_{x\to0}x^2\left(1+2+3+...+\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)$

យើងមាន $1+2+3+...+\left[\frac{1}{|x|}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{|x|}\right]\left(\left[\frac{1}{|x|}\right]+1\right)$

នោះ $x^2\left(1+2+3+...+\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)=\frac{1}{2}x^2\left[\frac{1}{|x|}\right]\left(\left[\frac{1}{|x|}\right]+1\right)$

ដោយ $\frac{1}{|x|}-1<\left[\frac{1}{|x|}\right]\leq\frac{1}{|x|}(1)$

$\Rightarrow\frac{1}{|x|}<\left[\frac{1}{|x|}\right]+1\leq\frac{1}{|x|}+1(2)$

គុណ (1) និង (2) គេបាន

$\frac{1}{|x|}\left(\frac{1}{|x|}-1\right)<\left[\frac{1}{|x|}\right]\left(\left[\frac{1}{|x|}\right]+1\right)\leq\frac{1}{|x|}\left(\frac{1}{|x|}+1\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{x^2}{|x|}\left(\frac{1}{|x|}-1\right)<\frac{1}{2}x^2\left[\frac{1}{|x|}\right]\left(\left[\frac{1}{|x|}\right]+1\right)\leq\frac{1}{2}\frac{x^2}{|x|}\left(\frac{1}{|x|}+1\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{2}(1-|x|)<\frac{1}{2}x^2\left[\frac{1}{|x|}\right]\left(\left[\frac{1}{|x|}\right]+1\right)\leq\frac{1}{2}(1+|x|)$

ម៉្យាងទៀត $\lim_{x\to0}\frac{1}{2}(1-|x|)=\frac{1}{2}$ និង $\lim_{x\to0}\frac{1}{2}(1+|x|)=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}x^2\left(1+2+3+...+\left[\frac{1}{|x|}\right]\right)=\frac{1}{2}$

10. $\lim_{x\to0^+}x\left(\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+...+\left[\frac{k}{x}\right]\right)$ ចំពោះ $k\in\mathbb{N}$

យើងមាន $\frac{i}{x}-1<\left[\frac{i}{x}\right]\leq\frac{i}{x}$

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{i}{x}-1\right)<\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{i}{x}\right]\leq\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{x}$

$\Rightarrow\frac{1}{x}\frac{k(k+1)}{2}-k<\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{i}{x}\right]\leq\frac{1}{x}\frac{k(k+1)}{2}$

$\Rightarrow\frac{k(k+1)}{2}-kx<x\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{i}{x}\right]\leq\frac{k(k+1)}{2}$ ព្រោះ $x>0$

ដោយ $\lim_{x\to0^+}\frac{k(k+1)}{2}-kx=\frac{k(k+1)}{2}$ និង $\lim_{x\to0^+}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0^+}x\left(\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+...+\left[\frac{k}{x}\right]\right)=\frac{k(k+1)}{2}$

លំហាត់ ៤

1. ចំពោះ $a>b>0$ បង្ហាញថា $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$ ។
2. បង្ហាញថា $\ln(x+1)\geq x-\frac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$ ។
3. គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right]$ ។

សម្រាយ

1. យក $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$
   ចំពោះ $x\in(a,b)$ គេបាន $\frac{1}{b}<f'(x)<\frac{1}{a}$
   តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់យើងបាន $\frac{a-b}{a}<\ln a-\ln b<\frac{a-b}{b}$
   ដូចនេះ $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$

2. យក $g(x)=\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x+1}-1+x$
   $=\frac{1+x^2-1}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}\geq 0$ ចំពោះ $x\geq 0$
   នោះ g ជាអនុគមន៍កើន គេបាន $g(x)\geq g(0)$ ចំពោះ $x\geq 0$
   $\Rightarrow\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}\geq 0\Rightarrow\ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}$
   ដូចនេះ $\ln(x+1)\geq x-\frac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$

3. គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right]$
   យក $f(x)=2x-2\ln(x+1)-x\ln(x+1)$ ចំពោះ $x>-1$
   នោះ

$$\begin{aligned}f'(x)&=2-\frac{2}{x+1}-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\\&=\frac{2x+2-2-x}{x+1}-\ln(x+1)\\&=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\end{aligned}$$

   ចំពោះ $x+1>x>0$ គេបាន $\ln(x+1)>\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

យើងបាន $f'(x)>0 \Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍កើន
នោះ $f(x)>f(0), \forall x>0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow 2x-2\ln(x+1)-x\ln(x+1)>0\\&\Rightarrow 2[x-\ln(x+1)]>x\ln(x+1)\\&\Rightarrow \frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}>\frac{1}{2}(1)\end{aligned}$$

ម៉្យាងទៀត $\ln(x+1)>x-\dfrac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \ln(x+1)>x\left(1-\frac{x}{2}\right)\\&\Rightarrow \frac{1}{\ln(x+1)}<\frac{1}{x\left(1-\frac{x}{2}\right)}\\&\Rightarrow \frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{x\left(1-\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{x}=\frac{1-1+\frac{x}{2}}{x\left(1-\frac{x}{2}\right)}\\&\Rightarrow \frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}(2)\end{aligned}$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}=\dfrac{1}{2}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}\right]=\dfrac{1}{2}$

ស្រាយដូចគ្នាចំពោះ $-1<x<0$ គេបាន $\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ និង $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}=\dfrac{1}{2}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}\right]=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}\right]=\dfrac{1}{2}$

លំហាត់ ៥

ឧបមាថា $f:(-a,a)-\{0\}\to\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា

ក) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=l$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to 0}f(\sin x)=l$ ។

ខ) បើ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=l$ នោះ $\lim\limits_{x\to 0}f(|x|)=l$ ។ តើសំណើច្រាសនៃសំណើនេះពិតដែរ រឺទេ ?

សម្រាយ

ក) បង្ហាញថា $\lim_{x\to 0} f(x)=l$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to 0} f(\sin x)=l$

$\Rightarrow$ ឧបមាថា $\lim_{x\to 0} f(x)=l$ យើងនឹងបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0} f(\sin x)=l$

តាមនិយមន័យ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:|f(x)-l|<\varepsilon$ ចំពោះ $0<|x|<\delta$

ដោយ $0<|\sin x|<|x|<\delta$

យើងបាន $|f(\sin x)-l|<\varepsilon$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0} f(\sin x)=l$

$\Leftarrow$ ឧបមាថា $\lim_{x\to 0} f(\sin x)=l$ យើងនឹងបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0} f(x)=l$

តាមនិយមន័យ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:|f(\sin x)-l|<\varepsilon$ ចំពោះ $0<|x|<\delta$

ចំពោះ $0<|y|<\sin\delta<\delta\Rightarrow 0<|\arcsin y|<\delta$

យើងបាន $|f(\sin(\arcsin y))-l|<\varepsilon$

នោះ $|f(y)-l|<\varepsilon$ ចំពោះ $0<|y|<\delta$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0} f(x)=l$

លំហាត់ ៦

គេឲ្យអនុគមន៍ $f:(-a,a)-\{0\}\to(0,+\infty)$ និង បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim_{x\to 0}\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]=2$ ។ បង្ហាញថា $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ ។

សម្រាយ

បង្ហាញថា $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

យើងមាន $\lim_{x\to 0}\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]=2$

តាមនិយមន័យយើងបាន $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\left|f(x)+\frac{1}{f(x)}-2\right|<\varepsilon$ ចំពោះ $0<|x|<\delta$

ម៉្យាងទៀត តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2$

នោះ $0\leq f(x)+\frac{1}{f(x)}-2<\varepsilon$

$\Rightarrow 0\leq f(x)-1+\frac{1}{f(x)}-1<\varepsilon(1)$

$\Rightarrow 0\leq(f(x)-1)\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)<\varepsilon$ (2)

តាម (1) យើងបាន $[f(x)-1]^2+2[f(x)-1]\left[\frac{1}{f(x)}-1\right]+\left[1-\frac{1}{f(x)}\right]^2<\varepsilon^2$

$\Rightarrow[f(x)-1]^2+\left[1-\frac{1}{f(x)}\right]^2<\varepsilon^2+2[f(x)-1]\left[1-\frac{1}{f(x)}\right]$

តាម (2) យើងបាន $[f(x)-1]^2+\left[1-\frac{1}{f(x)}\right]^2<\varepsilon^2+2\varepsilon$
នោះ $[f(x)-1]^2\le\varepsilon^2+2\varepsilon \Rightarrow |f(x)-1|<\sqrt{\varepsilon^2+2\varepsilon}=\varepsilon'$
ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

លំហាត់ ៧

1. គេមាន f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,+\infty)$ដោយ $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។

2. គេមានស្វ៊ីត u_n មួយកំណត់ដោយ $u_n=\dfrac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}\right]$ ។ បង្ហាញថា $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=\dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ រួចទាញថា $u_n=(e-1)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ។

3. តាមសំណួរ 2 ទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ។

សម្រាយ

1. គណនា $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
   + គណនា $\lim\limits_{x\to0}f(x)$
   យើងមាន $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}=1$
   + គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
   យើងមាន $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}}=0$

2. បង្ហាញថា $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=\dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$
   $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}$ ជាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី 1 ស្មើនឹង 1 និង រេសុង $q=e^{\frac{1}{n}}$
   យើងបាន $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=\dfrac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$
   +ទាញថា $u_n=(e-1)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   យើងមាន $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)$

គេបាន

$$\begin{aligned}(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n}\left(\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\dots+e^{\frac{n-1}{n}}\right)=u_n\end{aligned}$$

ដូចនេះ $u_n=(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$

3. ទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

យើងមាន $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)=(e-1)\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=(e-1)(1)=e-1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e-1$

លំហាត់ ៨

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-1})$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-1})$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{(n^3+2n^2+1)^3}-\sqrt[3]{(n^3-1)^3}}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+2n^2+1)(n^3-1)}+\sqrt[3]{(n^3-1)^2}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+2n^2+1-n^3+1}{\sqrt[3]{(n^3)^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{(n^3)^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}+\sqrt[3]{(n^3)^2\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^2}\right]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^2}}$$

$$=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3+2n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-1})=\frac{2}{3}$

លំហាត់ ៩

គណនា $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{\sqrt{3x+10}-2}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{\sqrt{3x+10}-2}$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt[3]{5x+2}+2)(\sqrt[3]{(5x+2)^2}-2\sqrt[3]{5x+2}+4)(\sqrt{3x+10}+2)}{(\sqrt{3x+10}-2)(\sqrt{3x+10}+2)(\sqrt[3]{(5x+2)^2}-2\sqrt[3]{5x+2}+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(5x+2+8)(\sqrt{3x+10}+2)}{(3x+10-4)(\sqrt[3]{(5x+2)^2}-2\sqrt[3]{5x+2}+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(5x+10)(\sqrt{3x+10}+2)}{(3x+6)(\sqrt[3]{(5x+2)^2}-2\sqrt[3]{5x+2}+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{5(x+2)(\sqrt{3x+10}+2)}{3(x+2)(\sqrt[3]{(5x+2)^2}-2\sqrt[3]{5x+2}+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{5(\sqrt{3x+10}+2)}{3(\sqrt[3]{(5x+2)^2}-2\sqrt[3]{5x+2}+4)}$$

$$=\frac{5(\sqrt{-6+10}+2)}{3(\sqrt[3]{(-1)^2}-2\sqrt[3]{-1}+4)}$$

$$=\frac{5(4)}{3(7)}=\frac{20}{21}$$

លំហាត់ ១០

គេឲ្យ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ ជាស្វ៊ីតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{3n^2+9n}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត រួចគណនា $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{1}{na_n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{3n^2+9n}{2}$ រឺ $S_n=\dfrac{3n^2+9n}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

នោះ

$$\begin{aligned}S_{n-1}&=\frac{3(n-1)^2+9(n-1)}{2}\\&=\frac{3(n^2-2n+1)+9n-9}{2}\\&=\frac{3n^2-6n+3+9n-9}{2}\\&=\frac{3n^2+3n-6}{2}\text{ចំពោះគ្រប់ } n\geq 2\end{aligned}$$

ហេតុនេះ

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \frac{3n^2+9n}{2} - \frac{3n^2+3n-6}{2} \\ &= \frac{3n^2+9n-3n^2-3n+6}{2} \\ &= \frac{6n+6}{2} = 3n+3 \text{ចំពោះ } \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

គេបាន $a_n = 3n+3$ ចំពោះ $\forall n \geq 2$
ម៉្យាងទៀត $a_1 = S_1 = \dfrac{3+9}{2} = 6$
នោះ $a_n = 3n+3$ ចំពោះ $\forall n \geq 1$
យើងបាន $a_{n+1} - a_n = 3(n+1)+3-3n-3 = 3$
ដូចនេះ a_n ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត
+គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{na_n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$
ដោយ $a_n = 3n+3$ យើងបាន

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{na_n}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(3n+3)}\left(\frac{3n^2+9n}{2}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{3n^2(2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

លំហាត់ ១១

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = a_2 = 0$ និង $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + a_{n-1}^2 + b)$ ដែល $0 \leq b < 1$ ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម និង គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ ។

ចម្លើយ

+បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម
យើងមាន $a_1 = a_2 = 0$ និង $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + a_{n-1}^2 + b)$
នោះ $a_3 = \dfrac{1}{3}(a_2 + a_1^2 + b) = \dfrac{b}{3}$
គេបាន $a_2 \geq a_1$ និង $a_3 - a_2 = \dfrac{b}{3} \geq 0 \Rightarrow a_3 \geq a_2$
ឧបមាថា $a_n \geq a_{n-1}$ និង $a_{n+1} \geq a_n$
យើងនឹងបង្ហាញថា $a_{n+2} \geq a_{n+1}$
ដោយ $a_{n+2} = \dfrac{1}{3}(a_{n+1} + a_n^2 + b) \geq \dfrac{1}{3}(a_n + a_{n-1}^2 + b) = a_{n+1}$ ពិត

នោះ $a_{n+1} \geq a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$
គេបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន
ម៉្យាងទៀត $a_1 = a_2 = 0 \leq b$ ព្រោះ $0 \leq b < 1$
ឧបមាថា $a_{n-1} \leq b$ និង $a_n \leq b$
យើងនឹងបង្ហាញថា $a_{n+1} \leq b$
គេបាន $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + a_{n-1}^2 + b) \leq \frac{1}{3}(b + b^2 + b) \leq \frac{1}{3}(b + b + b) = b$ ពិត
យើងបាន $a_n \leq b$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$
នោះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ
ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម
គណនា $\lim_{n \to +\infty} a_n$
តាមសម្រាយខាងលើ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតរួម យើងឧបមាថា $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$
ដោយ $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + a_{n-1}^2 + b)$
$\Rightarrow l = \frac{1}{3}(l + l^2 + b)$
$\Rightarrow 3l = l + l^2 + b$
$\Rightarrow l^2 - 2l + b = 0$ មាន $\Delta' = 1 - b \geq 0$
នោះ $l_1 = 1 - \sqrt{1-b}$ និង $l_2 = 1 + \sqrt{1-b}$ តែ $a_n \in [0,1)$
ដូចនេះ $l = 1 - \sqrt{1-b}$ ព្រោះ $0 \leq l_1 \leq 1$ និង $l_2 > 1$

លំហាត់ ១២

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $\{x_n\}$ កំណត់ដោយ $x_1 = 1$ និង $x_n = 2x_{n-1} + \frac{1}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។ គណនា $\lim_{n \to +\infty} x_n$ ។

ចម្លើយ

គណនា $\lim_{n \to +\infty} x_n$
យក $\{r_n\}$ ដែល $r_n = r$ ជាស្វ៊ីតជំនួយនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$
នោះ $r_n = 2r_{n-1} + \frac{1}{2}$
យើងបាន $r = 2r + \frac{1}{2}$ នោះ $r = -\frac{1}{2} \Rightarrow r_n = -\frac{1}{2}$
ម៉្យាងទៀត $x_n = 2x_{n-1} + \frac{1}{2}$ និង $r_n = 2r_{n-1} + \frac{1}{2}$
គេបាន $x_n - r_n = 2(x_{n-1} - r_{n-1})$
$\Rightarrow \{x_n - r_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលសងរួមស្មើនឹង 2 និង តួទី ១ កំណត់ដោយ $x_1 - r_1 = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

យើងបាន $x_n = \frac{3}{2}(2^{n-1})$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

លំហាត់ ១៣

គណនា $\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{4}{5}\right)^n + n^2\sin^n\frac{\pi}{6} + \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{n}\right)\right]$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{4}{5}\right)^n + n^2\sin^n\frac{\pi}{6} + \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{n}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{n^2}{2^n} + \cos\frac{\pi}{n}\right]$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{4}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n}\times\left(\frac{4}{5e}\right)^n = 0$ និង $0 \le \frac{n^2}{2^n} \le \frac{1}{n}$ ចំពោះ $n \ge 10$

ព្រោះ $n^2 < 2^n$ ចំពោះ $n \ge 10$

នោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2^n} = 0$

ហេតុនេះ $\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{4}{5}\right)^n + n^2\sin^n\frac{\pi}{6} + \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{n}\right)\right] = \cos 0 = 1$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{4}{5}\right)^n + n^2\sin^n\frac{\pi}{6} + \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{n}\right)\right] = 1$

លំហាត់ ១៤

គណនា $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k!k}{(n+1)!}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $k!k = k!(k+1-1) = k!(k+1) - k! = (k+1)! - k!$

នោះ $\sum_{k=1}^{n} kk! = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - k! = (n+1)! - 1$

ហេតុនេះ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k!k}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)!} = 1$

លំហាត់ ១៥

គណនា $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3^{3(n+1)}[(n+1)!]^3}{[3(n+1)]!}}{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{3^{3(n+1)}[(n+1)!]^3}{[3(n+1)]!}\times\frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{27(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = 1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}} = 1$

លំហាត់ ១៦

គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\{x_n\}$ ដែល $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។ បង្ហាញថា $\{x_n\}$ ជាស្វីតរួម និង គណនាលីមីតរបស់វា ។

ចម្លើយ

យើងមាន $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$

នោះ $nx_n > (n+1)x_{n+1} \Rightarrow x_1 > 2x_2 > 3x_3 > \ldots > nx_n$

យើងបាន $0 < x_n < \frac{x_1}{n}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_1}{n} = 0$

តាមទ្រឹស្តីបទសាំងវិចគេបាន $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$

ដូចនេះ $\{x_n\}$ ជាស្វីតរួមដែល $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$

លំហាត់ ១៧

រកតម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{1-n^3} - an - b) = 0$ ។

ចម្លើយ ដោយ $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{1-n^3} - an - b) = 0$

យើងបាន

$$\begin{aligned} b &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1-n^3-a^3n^3}{\sqrt[3]{(1-n^3)^2}+\sqrt[3]{an(1-n^3)}+\sqrt[3]{a^2n^2}} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(-1-a^3\right)+\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^2}-1\right)^2}+\sqrt[3]{a\left(\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{n^4}}}(1) \end{aligned}$$

ចំពោះ $-1-a^3\neq 0$ គេមិនអាចរកតម្លៃ b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) បានទេ
ចំពោះ $-1-a^3=0\Rightarrow a=-1$ គេបាន $b=0$
ដូចនេះ $a=-1$ និង $b=0$

លំហាត់ ១៨

គេឲ្យ $p\in\mathbb{N}$ និង $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p$ ជា p ចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្សេងគ្នា ។
គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha_1^n+\alpha_2^n+...+\alpha_p^n}$ ។

ចម្លើយ

ឧបមាថា $\alpha_i=\max\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p\}$
នោះ

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha_1^n+\alpha_2^n+...+\alpha_p^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha_i^n\left[\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right)^n+\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_i}\right)^n+...+1+...+\left(\frac{\alpha_p}{\alpha_i}\right)^n\right]} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\alpha_i\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right)^n+\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_i}\right)^n+...+1+...+\left(\frac{\alpha_p}{\alpha_i}\right)^n} \\ &= \alpha_i\sqrt[n]{0+0+1+..+0}=\alpha_i \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha_1^n+\alpha_2^n+...+\alpha_p^n}=\max\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_p\}$

លំហាត់ ១៩

ចំពោះ $a\in\mathbb{R}^*$ គណនា $\lim\limits_{x\to-a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x^2-a^2}$ ។

ចម្លើយ

តាមរូបមន្ត $\cos p-\cos q=-2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -a}\frac{\cos x-\cos a}{x^2-a^2} &= \lim_{x\to -a}\frac{-2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}{(x-a)(x+a)}\\ &= \lim_{x\to -a}\frac{-\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}{(x-a)\left(\frac{x+a}{2}\right)}\\ &= -\frac{\sin(-a)}{-2a} = -\frac{\sin a}{2a}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x^2-a^2} = -\dfrac{\sin a}{2a}$

លំហាត់ ២០

ចំពោះ $n\in\mathbb{N}^*$ គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2+\ldots+x^n)}{nx}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2+\ldots+x^n)}{nx} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2+\ldots+x^n)}{x+x^2+\ldots+x^n}\times\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\ldots+x^n}{nx}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\ldots+x^n}{nx} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+\ldots+x^{n-1}}{n} = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+u)}{u} = 0$ ចំពោះ $\lim\limits_{x\to 0}u = 0$

លំហាត់ ២១

គណនា $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(n^2+n-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k^3+8k^2+6k-1}{k^2+4k+3}\right)$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\frac{2k^3+8k^2+6k-1}{k^2+4k+3} &= \frac{2k(k^2+4k+3)-1}{k^2+4k+3}\\ &= 2k-\frac{1}{(k+1)(k+3)}\\ &= 2k-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+1}\right)\end{aligned}$$

នោះ

$$\begin{aligned} n^2+n-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^3+8k^2+6k-1}{k^2+4k+3} &= n^2+n-\sum_{k=1}^{n}\left[2k-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\right] \\ &= n^2+n-2\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right) \\ &= n^2+n-2\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) \\ &= n^2+n-n^2-n+\frac{5}{12}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right) \\ &= \frac{5}{12}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right) \end{aligned}$$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+n-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^3+8k^2+6k-1}{k^2+4k+3}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{12}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5}{12}$

លំហាត់ ២២

កំណត់ $a\in\mathbb{R}^*$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$ ។

ចម្លើយ

ពិនិត្យ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^2}{2}\times\frac{\sin^2\frac{ax}{2}}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}a^2$

និង $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$

យើងបាន $\frac{a^2}{2}=1$ នោះ $a^2=2\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$

ដូចនេះ $a=\pm\sqrt{2}$

លំហាត់ ២៣

គណនា $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}\\
&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x^2+7}-2)-(\sqrt{x+3}-2)}{x^2-3x+2}\\
&=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-3x+2}-\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}\\
&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x^2+7}-2)[\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4]}{(x-1)(x-2)[\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4]}-\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+3}+2)}\\
&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+7-8}{(x-1)(x-2)[\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4]}-\lim_{x\to1}\frac{x+3-4}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+3}+2)}\\
&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)[\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4]}-\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+3}+2)}\\
&=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{(x-2)[\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4]}-\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-2)(\sqrt{x+3}+2)}\\
&=\frac{2}{(-1)(12)}-\frac{1}{(-1)(4)}\\
&=-\frac{2}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}=\frac{1}{12}$

លំហាត់ ២៤

គណនា $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\lambda\sqrt{2n^2-n})$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
A&=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\lambda\sqrt{2n^2-n})\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+n-\lambda^2(2n^2-n)}{\sqrt{2n^2+n}+\lambda\sqrt{2n^2-n}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2(1-\lambda^2)+n(1+\lambda^2)}{n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\lambda\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n(1-\lambda^2)+(1+\lambda^2)}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\lambda\sqrt{2-\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

+ចំពោះ $\lambda \in (-\infty, 1)$ គេបាន $A = +\infty$
+ចំពោះ $\lambda \in (1, +\infty)$ គេបាន $A = -\infty$
+ចំពោះ $\lambda = 1$ គេបាន $A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

លំហាត់ ២៥

គេឲ្យ $a, b, c \in \mathbb{R}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}(a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x+2}+c\sqrt{x+3})$ ។

ចម្លើយ

+ចំពោះ $a+b+c \neq 0$ គេបាន

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty}(a\sqrt{x+1}+b\sqrt{x+2}+c\sqrt{x+3})\\
&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(a\sqrt{1+\frac{1}{x}}+b\sqrt{1+\frac{2}{x}}+c\sqrt{1+\frac{3}{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(a+b+c)
\end{aligned}$$

· បើ $a+b+c > 0$ គេបាន $L = +\infty$
· បើ $a+b+c < 0$ គេបាន $L = -\infty$
+ចំពោះ $a+b+c = 0$ គេបាន

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty}(a\sqrt{x+1}-a+b\sqrt{x+2}-b+c\sqrt{x+3}-c)\\
&= \lim_{x\to+\infty} a\left(\sqrt{x+1}-1\right)+b\left(\sqrt{x+2}-1\right)+c\left(\sqrt{x+3}-1\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}+\frac{b+\frac{b}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\frac{1}{x}}+\frac{c+\frac{2c}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\frac{1}{x}}\right)=0
\end{aligned}$$

លំហាត់ ២៦

កំណត់សំណុំ A ដែល $A \subset \mathbb{R}$ ដើម្បីឲ្យ $ax^2+x+3 \geq 0$ ចំពោះ $\forall a \in A$ និង $\forall x \in \mathbb{R}$ ។
ចំពោះគ្រប់ $a \in A$ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-\sqrt{ax^2+x+3})$ ។

ចម្លើយ

ដើម្បីឲ្យ $ax^2+x+3 \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $a > 0$ និង $\Delta \leq 0$
ដោយ $\Delta = 1^2 - 4(a)(3) = 1 - 12a$
នោះ $\Delta \leq 0$ សមមូលនឹង $1 - 12a \leq 0 \Rightarrow a \geq \dfrac{1}{12}$
$\Rightarrow a \in \left[\dfrac{1}{12}, +\infty\right)$

ដូចនេះ $A=\left[\frac{1}{12},+\infty\right)$

គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-\sqrt{ax^2+x+3})$

យើងមាន

$$\begin{aligned}A&=\lim_{x\to+\infty}(x+1-\sqrt{ax^2+x+3})\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2-\left(ax^2+x+3\right)}{x+1+\sqrt{ax^2+x+3}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1-ax^2-x-3}{x+1+\sqrt{ax^2+x+3}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x^2+x-2}{x+1+\sqrt{ax^2+x+3}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x+1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{a+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}\end{aligned}$$

+បំពោះ $a\in\left[\frac{1}{12},1\right)$ គេបាន $A=+\infty$

+បំពោះ $a=1$ គេបាន $A=\frac{1}{2}$

+បំពោះ $a\in(1,+\infty)$ គេបាន $A=-\infty$

លំហាត់ ២៧

បំពោះ $k\in\mathbb{R}$ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}n^k\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to+\infty} n^k\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} n^k \times \frac{\frac{n}{n+1}-\frac{n+2}{n+3}}{\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}}\\
&= \lim_{n\to+\infty} n^k \times \frac{\frac{n^2+3n-n^2-3n-2}{(n+1)(n+3)}}{\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{(n+1)(n+3)} \times \lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^k}{(n+1)(n+3)} \times (-1)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^k}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}
\end{aligned}$$

+ចំពោះ $k<2$ យើងបាន $A=0$
+ចំពោះ $k=2$ យើងបាន $A=-1$
+ចំពោះ $k>2$ យើងបាន $A=-\infty$

លំហាត់ ២៨

គេឲ្យ $k\in\mathbb{N}$ និង $a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k(a^{\frac{1}{n}}-1)\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to+\infty} n^k(a^{\frac{1}{n}}-1)\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} n^k\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\times\frac{\frac{n-1}{n}-\frac{n+1}{n+2}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}+\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}\\
&= \lim_{n\to+\infty} n^k\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\times\frac{\frac{n^2+n-2-n^2-n}{n(n+2)}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}+\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^k(a^{\frac{1}{n}}-1)}{n(n+2)}\times\lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{\frac{n-1}{n}}+\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{-n^{k-1}}{n(n+2)}\times\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\\
&= \ln a\times\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^{k-2}}{n+2}
\end{aligned}$$

+ចំពោះ $k\in\{0,1,2\}$ គេបាន $A=0$
+ចំពោះ $k=3$ គេបាន $A=-\ln a$
+ចំពោះ $k\geq 4$ និង $a\in(0,1)$ យើងបាន $A=+\infty$
+ចំពោះ $k\geq 4$ និង $a>1$ យើងបាន $A=-\infty$

លំហាត់ ២៩

គណនា $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ចំពោះគ្រប់ $1\leq k\leq n$

យើងបាន $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ចំពោះគ្រប់ $1\leq k\leq n$

នោះ $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$ និង $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=1$

លំហាត់ ៣០

គេឲ្យ $a>0, p\geq 2$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+ka}}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+na}}\leq\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+ka}}\leq\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+a}}$ ចំពោះ $1\leq k\leq n$

យើងបាន $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+na}}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+ka}}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+a}}$

នោះ $\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+na}}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+ka}}\leq\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+a}}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+a}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[p]{1+\frac{a}{n^p}}}=1$

និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[p]{n^p+na}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[p]{1+\frac{a}{n^{p-1}}}}=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{n^p+ka}}=1$

លំហាត់ ៣១

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)...(1+n^2)}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}0\leq\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)...(1+n^2)}&<\frac{n!}{1^2\times 2^2\times...\times n^2}\\&=\frac{n!}{(1\times 2\times...\times n)(1\times 2\times...\times n)}\\&=\frac{n!}{(n!)(n!)}\\&=\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}=0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)...(1+n^2)}=0$

លំហាត់ ៣២

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n-4}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{n-4}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{2n^2-n+1}{n-4}}\right]^{\frac{(n-4)(n^2-1)}{2n^3-n^2+n}}\\
&= e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3-4n^2-n+4}{2n^3-n^2+n}}\\
&= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} = \sqrt{e}$

លំហាត់ ៣៣

គណនា $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-\cos x}{1-\sqrt{1+\tan^2 x}}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-\cos x}{1-\sqrt{1+\tan^2 x}}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{(1+\sin^2 x-\cos^2 x)(1+\sqrt{1+\tan^2 x})}{(1-1-\tan^2 x)(\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x(1+\sqrt{1+\tan^2 x})}{-\tan^2 x(\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{-2\cos^2 x(1+\sqrt{1+\tan^2 x})}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x} = -2
\end{aligned}$$

លំហាត់ ៣៤

គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{x}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{x} &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{\frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2x\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}\\ &= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}\\ &= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

លំហាត់ ៣៥

គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} &= \lim_{x\to0^+}\left[(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{\sin x}}\\ &= e^{\lim_{x\to0^+}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}\\ &= e^{\lim_{x\to0^+}-\tan\frac{x}{2}}\\ &= e^0=1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}=1$

លំហាត់ ៣៦

គណនា $\lim\limits_{x\to0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\left[e^x\left(1+\frac{\sin x}{e^x}\right)\right]^{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to 0}(e^x)^{\frac{1}{x}}\times\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{xe^x}}\\ &= e\times e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{e^x}} = e^2\end{aligned}$$

លំហាត់ ៣៧

គេឲ្យ $a,b\in\mathbb{R}_+$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ ។

សម្រាយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{a}\right)^{\frac{a}{\sqrt[n]{b}-1}}\right]^{\frac{n(\sqrt[n]{b}-1)}{a}}\\ &= e^{\frac{1}{a}\lim_{n\to+\infty}\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}\\ &= e^{\frac{\ln b}{a}} = b^{\frac{1}{a}}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n = b^{\frac{1}{a}}$

លំហាត់ ៣៨

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n=\begin{cases}1\text{បើ}n\le k, k\in\mathbb{N}^*\\ \dfrac{(n+1)^k-n^k}{C_n^{k-1}}\text{បើ}n>k\end{cases}$

ក) គណនា $\lim_{n\to+\infty}a_n$

ខ) បើ $b_n=1+\sum_{k=1}^{n}k\lim_{n\to+\infty}a_n$ គណនា $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b_n^2}{b_{n-1}b_{n+1}}\right)^n$ ។

ចម្លើយ

ក) គណនា $\lim_{n\to+\infty}a_n$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^k - n^k}{C_n^{k-1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k C_k^0 + n^{k-1}C_k^1 + ... + nC_k^{k-1} + 1 - n^k}{C_n^{k-1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k + n^{k-1}C_k^1 + ... + nC_k^{k-1} + 1 - n^k}{\frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{k-1}C_k^1 + ... + nC_k^{k-1} + 1}{\frac{n(n-1)(n-2)...[n-(k-2)]}{(k-1)!}} \\
&= (k-1)! \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{k-1}C_k^1 + ... + nC_k^{k-1} + 1}{n^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-2}{n}\right)} \\
&= (k-1)!C_k^1 \\
&= (k-1)! \times \frac{k!}{(k-1)!} = k!
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = k!$

ខ) យើងមាន

$$\begin{aligned}
b_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} k \lim_{n\to+\infty} a_n \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} kk! \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} [(k+1)! - k!] \\
&= 1 + (n+1)! - 1 = (n+1)!
\end{aligned}$$

នោះ

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b_n^2}{b_{n-1}b_{n+1}}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(n+1)!\,(n+1)!}{n!\,(n+2)!}\right]^n\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\right]^{-\frac{n}{n+2}}\\ &= e^{-1}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{b_n^2}{b_{n-1}b_{n+1}}\right)^n=\frac{1}{e}$

លំហាត់ ៣៩

គេឲ្យ (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$ ។ បើ $x_1\le x_2$

ក) បង្ហាញថា (x_{2n+1}) ជាស្វ៊ីតកើន ហើយ (x_{2n}) ជាស្វ៊ីតចុះ

ខ) បង្ហាញថា $|x_{n+2}-x_{n+1}|=\frac{x_2-x_1}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$

គ) បង្ហាញថា $2x_{n+2}+x_{n+1}=2x_2+x_1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$

ឃ) បង្ហាញថា (x_n) ជាស្វ៊ីតរួម ហើយមានលីមីត $\frac{x_1+2x_2}{3}$ ។

សម្រាយ

ក) បង្ហាញថា (x_{2n+1}) ជាស្វ៊ីតកើន ហើយ (x_{2n}) ជាស្វ៊ីតចុះ

យើងមាន $x_1\le x_2$

ឧបមាថា $x_{2n-1}\le x_{2n}$

យើងនឹងបង្ហាញថា $x_{2n+1}\le x_{2n+2}$

យើងមាន $x_{2n+2}=\frac{x_{2n+1}+x_{2n}}{2}\Rightarrow x_{2n+2}-x_{2n}=\frac{x_{2n+1}+x_{2n}}{2}-x_{2n}=\frac{x_{2n+1}-x_{2n}}{2}\le 0$

ព្រោះ $x_{2n+1}=\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{2}\le\frac{x_{2n}+x_{2n}}{2}=x_{2n}$

គេបាន $x_{2n-1}\le x_{2n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

យើងបាន $x_{2n+1}=\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{2}\ge\frac{x_{2n-1}+x_{2n-1}}{2}=x_{2n-1}$

ដូចនេះ (x_{2n+1}) ជាស្វ៊ីតកើន

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន (x_{2n}) ជាស្វ៊ីតចុះ

ខ) បង្ហាញថា $|x_{n+2}-x_{n+1}|=\frac{x_2-x_1}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$

យើងមាន $x_3 = \frac{x_2 + x_1}{2} \Rightarrow x_3 - x_2 = \frac{x_2 - x_1}{2} \Rightarrow |x_3 - x_2| = \frac{x_2 - x_1}{2}$
ឧបមាថា $|x_{k+2} - x_{k+1}| = \frac{x_2 - x_1}{2^k}$
យើងនឹងបង្ហាញថា $|x_{k+3} - x_{k+2}| = \frac{x_2 - x_1}{2^{k+1}}$
យើងមាន $|x_{k+3} - x_{k+2}| = \left|\frac{x_{k+2} + x_{k+1}}{2} - x_{k+2}\right| = \frac{|x_{k+2} - x_{k+1}|}{2} = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{k+1}}$
ដូចនេះ $|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{x_2 - x_1}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$
គ) បង្ហាញថា $2x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_2 + x_1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$
យើងមាន $2x_{n+2} + x_{n+1} = 2\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}\right) + x_{n+1} = x_{n+1} + x_n + x_{n+1} = 2x_{n+1} + x_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$
នេះបញ្ជាក់ថា $\{2x_{n+1} + x_n\}$ ជាស្វីតថេរ $\Rightarrow 2x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_2 + x_1$
ដូចនេះ $2x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_2 + x_1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$
ឃ) បង្ហាញថា (x_n) ជាស្វីតរួម ហើយមានលីមីត $\frac{x_1 + 2x_2}{3}$
តាម ក (x_{2n+1}) ជាស្វីតកើន ហើយ (x_{2n}) ជាស្វីតចុះ
ម៉្យាងទៀត $x_1 \le x_2$ នោះ (x_{2n+1}) និង (x_{2n})ជាស្វីតរួម និង មានលីមីតស្មើគ្នា
នោះ (x_n) ជាស្វីតរួម
យក l ជាលីមីត គឺ $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$
តាម គ យើងមាន $2x_{n+2} + x_{n+1} = 2x_2 + x_1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$
នោះ $2l + l = x_1 + 2x_2 \Rightarrow l = \frac{x_1 + 2x_2}{3}$
ដូចនេះ (x_n) ជាស្វីតរួម ហើយមានលីមីត $\frac{x_1 + 2x_2}{3}$

លំហាត់ ៤០

គេឲ្យ $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ នោះ $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$
គេបាន $a_n = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n]$
និង $b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n]$

គេបាន

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n]}{\frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n]}$$
$$= \sqrt{2} \times \frac{1+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}$$

នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2} \times \frac{1+0}{1-0}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$

លំហាត់ ៤១

គេឲ្យ $a > 0$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(a+x)^x - 1}{x}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(a+x)} - 1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(a+x)-1}}{x\ln(a+x)} \times \lim_{x\to 0} \ln(a+x)$$
$$= \ln a$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(a+x)^x - 1}{x} = \ln a$

លំហាត់ ៤២

គេឲ្យ $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leq 1$ ។

សម្រាយ

របៀបទី ១

យើងមាន $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

នោះ $\frac{|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx|}{|x|} \leq \frac{|\sin x|}{|x|} = \left|\frac{\sin x}{x}\right|$

$\Rightarrow \left|a_1 \frac{\sin x}{x} + a_2 \frac{\sin 2x}{x} + \ldots + \frac{\sin nx}{x}\right| \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right|$

នោះ $\lim\limits_{x\to 0} \left|a_1 \frac{\sin x}{x} + a_2 \frac{\sin 2x}{x} + \ldots + \frac{\sin nx}{x}\right| \leq \lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{\sin x}{x}\right|$

ដូចនេះ $|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leq 1$

របៀបទី ២
តាង $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots+a_n\sin nx$
នោះ

$$\begin{aligned}|a_1+2a_2+\ldots+na_n| &= |f'(0)|\\ &= \left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\\ &= \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\\ &= \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{\sin x}\right|\times\left|\frac{\sin x}{x}\right|\end{aligned}$$

ដោយ $|a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots+a_n\sin nx|\leq|\sin x|$
នោះ $|f(x)|\leq|\sin x|\Rightarrow\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leq 1$
ដូចនេះ $|a_1+2a_2+\ldots+na_n|\leq 1$

លំហាត់ ៤៣

ឧបមាថា f និង g ជាអនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ $x=a$ ។ គណនា

ក) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$

ខ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$ ។

ចម្លើយ

ដោយ f និង g ជាអនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ $x=a$ នោះ $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

និង $g'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$

គណនា

ក) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{xf(a)-xf(x)+xf(x)-af(x)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{-x(f(x)-f(a))}{x-a}+\frac{(x-a)f(x)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}f(x)-x\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= f(a)-af'(a)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$

ខ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-g(a)f(a)+g(a)f(a)-f(a)g(x)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{g(a)(f(x)-f(a))}{x-a}-\frac{f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\\&=g(a)f'(a)-f(a)g'(a)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}=g(a)f'(a)-f(a)g'(a)$

លំហាត់ ៤៤

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ $x=a$ ។ គណនា

ក) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^nf(x)-x^nf(a)}{x-a}$

ខ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)e^x-f(a)}{f(x)\cos x-f(a)}$ ចំពោះ $a=0$ និង $f'(0)\neq 0$

គ) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)-kf(a)\right]$

ឃ) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[f\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)+\ldots+f\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)-nf(a)\right]$ ។

ចម្លើយ

ក) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^nf(x)-x^nf(a)}{x-a}$

ដោយ f មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ $x=a$ នោះ $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{a^nf(x)-x^nf(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{a^nf(x)-a^nf(a)+a^nf(a)-x^nf(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}a^n\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{x^n-a^n}{x-a}\times f(a)\\&=a^nf'(a)-\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1})}{x-a}\times f(a)\\&=a^nf'(a)-\lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1})f(a)\\&=a^nf'(a)-(a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a^{n-1})f(a)\\&=a^nf'(a)-na^{n-1}f(a)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^n f(x)-x^n f(a)}{x-a}=a^n f'(a)-na^{n-1}f(a)$

ខ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)e^x-f(a)}{f(x)\cos x-f(a)}$ ចំពោះ $a=0$ និង $f'(0)\neq 0$

យើងមាន

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)e^x-f(a)}{f(x)\cos x-f(a)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)e^x-f(0)}{f(x)\cos x-f(0)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)e^x-f(0)}{x}\times\frac{x}{f(x)\cos x-f(0)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)e^x-f(0)e^x+f(0)e^x-f(0)}{x}\times\frac{x}{f(x)\cos x-f(0)\cos x+f(0)\cos x-f(0)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x[f(x)-f(0)]+f(0)e^x-f(0)}{x}\times\frac{x}{\cos x[f(x)-f(0)]+f(0)(\cos x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[e^x\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)+f(0)\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\right]\times\frac{1}{\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)\cos x+\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)f(0)}$$
$$=[f'(0)+f(0)]\times\frac{1}{f'(0)}$$
$$=1+\frac{f(0)}{f'(0)}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)e^x-f(a)}{f(x)\cos x-f(a)}=1+\dfrac{f(0)}{f'(0)}$

គ) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(a+\dfrac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(a+\dfrac{k}{n}\right)-kf(a)\right]$

យើងមាន

$$\lim_{n\to+\infty}n\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)+f\left(a+\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(a+\frac{k}{n}\right)-kf(a)\right]$$
$$=\lim_{n\to+\infty}n\sum_{i=1}^{k}f\left(a+\frac{i}{n}\right)-f(a)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}i\times\lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(a+\frac{i}{n}\right)-f(a)}{\frac{i}{n}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}if'(a)$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}f'(a)$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} n\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)+f\left(a+\frac{2}{n}\right)+...+f\left(a+\frac{k}{n}\right)-kf(a)\right]=\frac{k(k+1)}{2}f'(a)$

ឃ) $\lim_{n\to+\infty} f\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+f\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+...+f\left(1+\frac{n}{n^2}\right)-nf(a)$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} f\left(a+\frac{1}{n^2}\right)+f\left(a+\frac{2}{n^2}\right)+...+f\left(a+\frac{n}{n^2}\right)-nf(a)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n^2}\right)-f(a)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f\left(a+\frac{k}{n^2}\right)-f(a)}{\frac{k}{n^2}}\times\frac{k}{n^2}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'(a)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}f'(a)=\frac{1}{2}f'(a)
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} n\left[f\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+f\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+...+f\left(1+\frac{n}{n^2}\right)-nf(a)\right]=\frac{1}{2}f'(a)$

លំហាត់ ៤៥

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=\frac{3}{2}$ និង $a_{n+1}=\frac{a_n^2-a_n+1}{a_n}$ ។ បង្ហាញថា (a_n) ជាស្វ៊ីតរួម និង គណនាលីមីតរបស់វា ។

ចម្លើយ

យើងមាន $a_1>0$

ឧបមាថា $a_n>0$

កន្សោម $a_n^2-a_n+1$ មាន $\Delta=1-4=-3<0$

នោះ $a_n^2-a_n+1>0$ ចំពោះគ្រប់ $a_n\in\mathbb{R}$

យើងបាន $a_{n+1}=\frac{a_n^2-a_n+1}{a_n}>0$

ហេតុនេះ $a_n>0$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $a_{n+1}=\frac{a_n^2-a_n+1}{a_n}=a_n+\frac{1}{a_n}-1\geq 2-1=1$

នេះបញ្ជាក់ថា (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

ម្យ៉ាងទៀត $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}-1\leq 0$

នោះ (a_n) គឺជាស្វ៊ីតចុះ

យើងបាន (a_n) គឺជាស៊ីតរួម
ឧបមាថា l គឺជាលីមីតនៃស៊ីត (a_n)
ដោយ $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - a_n + 1}{a_n}$ យើងបាន $l = \dfrac{l^2 - l + 1}{l} \Rightarrow l = 1$
ដូចនេះ (a_n) ជាស៊ីតរួម និង មានលីមីតស្មើនឹង 1

លំហាត់ ៤៦

គេឲ្យស៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ $x_0 \in (0,1)$ និង $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។ បង្ហាញថា (x_n) គឺជាស៊ីតរួម និង គណនាលីមីតរបស់វា ។

ចម្លើយ

តាមបម្រាប់ $x_0 \in (0,1)$
ឧបមាថា $0 < x_n < 1$
យើងនឹងបង្ហាញថា $0 < x_{n+1} < 1$
យើងមាន

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4 \\ &= x_n(1 - x_n + x_n^2 - x_n^3) \\ &= x_n[(1 - x_n) + x_n^2(1 - x_n)] \\ &= x_n(1 - x_n)(1 + x_n^2) \\ &\leq \left(\frac{x_n + 1 - x_n + 1 + x_n^2}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{2 + x_n^2}{3}\right)^3 < \left(\frac{2+1}{3}\right)^3 = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_n < 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$
គេបាន $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)(1 + x_n^2) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ និង $x_0 \in (0,1) \Rightarrow x_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$
នេះបញ្ជាក់ថា (x_n) គឺជាស៊ីតទាល់ក្រោម
ម៉្យាងទៀត

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= -x_n^2 + x_n^3 - x_n^4 \\ &= -x_n^2(1 - x_n + x_n^2) < 0 \end{aligned}$$

នោះ (x_n) គឺជាស៊ីតចុះ
$\Rightarrow (x_n)$ គឺជាស៊ីតរួម

ឧបមាថា l គឺជាលីមីតនៃស៊ីត (x_n)
តាម $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4$ គេបាន $l = l - l^2 + l^3 - l^4 \Rightarrow l = 0$
ដូចនេះ (x_n) ជាស៊ីតរួម និង មានលីមីត 0

លំហាត់ ៤៧
គេឲ្យ $a > 0$ និង $b \in (a, 2a)$ ។ យក (x_n) ជាស៊ីតកំណត់ដោយ $x_0 = b$ និង $x_{n+1} = a + \sqrt{x_n(2a - x_n)}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។ សិក្សាភាពរួមនៃ (x_n) ។

សម្រាយ
យើងមាន $x_0 = b$ និង $x_{n+1} = a + \sqrt{x_n(2a - x_n)}$
នោះ

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \sqrt{x_0(2a - x_0)} \\ &= a + \sqrt{b(2a - b)} \end{aligned}$$

ហើយ

$$\begin{aligned} x_2 &= a + \sqrt{x_1(2a - x_1)} \\ &= a + \sqrt{[a + \sqrt{b(2a-b)}][a - \sqrt{b(2a-b)}]} \\ &= a + \sqrt{a^2 - b(2a - b)} \\ &= a + \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} \\ &= a + \sqrt{(b-a)^2} = a + b - a = b \end{aligned}$$

គេបាន (x_n) ជាស៊ីតខួប គឺ $x_{2k} = b$ និង $x_{2k-1} = a + \sqrt{b(2a - b)}$
ដើម្បីឲ្យ (x_n) ជាស៊ីតរួម លុះត្រាតែ $\lim_{k\to+\infty} x_{2k} = \lim_{k\to+\infty} x_{2k-1}$
ដោយ $\lim_{k\to+\infty} x_{2k} = b$ និង $\lim_{k\to+\infty} x_{2k} = a + \sqrt{b(2a - b)}$
នោះ $b = a + \sqrt{b(2a - b)}$
$\Rightarrow (b - a)^2 = b(2a - b) \Rightarrow b^2 - 2ab + a^2 = 2ab - b^2$
$\Rightarrow 2b^2 - 4ab + a^2 = 0$
មាន $\Delta' = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$
យើងបាន $b = \dfrac{2a \pm \sqrt{2a^2}}{2} = a \pm a\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a(1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2})$
តែ $b > a$ នោះ $b = a(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2})$
ដូចនេះ (x_n) ជាស៊ីតរួមចំពោះ $b = a(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ ហើយលីមីតរបស់វាស្មើនឹង b

លំហាត់ ៤៨

គណនា $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4k^4+1}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\frac{k}{4k^4+1} &= \frac{k}{4k^4+2(2k^2)+1-(2(2k^2))}\\ &= \frac{k}{(2k^2+1)^2-(2k)^2}\\ &= \frac{k}{(2k^2-2k+1)(2k^2+2k+1)}\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2k^2+2k+1}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2k(k-1)+1}-\frac{1}{2k(k+1)+1}\right]\end{aligned}$$

នោះ

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4k^4+1} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2k(k-1)+1}-\frac{1}{2k(k+1)+1}\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{2n(n+1)+1}\right]\end{aligned}$$

ហេតុនេះ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4k^4+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{2n(n+1)+1}\right] = \frac{1}{2}$

លំហាត់ ៤៩

គណនា $\lim_{n\to+\infty}\left(n+1-\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{i}\frac{k-1}{k!}\right)$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left(n+1-\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{i}\frac{k-1}{k!}\right)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left[n+1-\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{i}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left[n+1-\sum_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i!}\right)\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\right)=e
\end{aligned}$$

លំហាត់ ៥០

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}$ ។

ចម្លើយ

តាមទ្រឹស្តីបទ Cesaro-Stolz យើងបាន

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{1^1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}-n^n}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\frac{1}{n}}\\
&=\frac{e}{e-0}=1
\end{aligned}$$

លំហាត់ ៥១

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_0=2$ និង $a_{n-1}-a_n=\dfrac{n}{(n+1)!}$ ចំពោះ $n\geq 1$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)!\ln a_n$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $a_{k-1}-a_k=\dfrac{k}{(k+1)!}$ នោះ $a_k-a_{k-1}=-\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{k!}$ ចំពោះ $1\leq k\leq n$

នោះ $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-a_{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{k!}$

$\Rightarrow a_n-a_0=\dfrac{1}{(n+1)!}-1$

គេបាន $a_n=a_0+\dfrac{1}{(n+1)!}-1=2+\dfrac{1}{(n+1)!}-1=1+\dfrac{1}{(n+1)!}$

ហេតុនេះ

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(n+1)!\ln a_n &= \lim_{n\to+\infty}(n+1)!\ln\left[1+\frac{1}{(n+1)!}\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\ln\left[1+\frac{1}{(n+1)!}\right]^{(n+1)!}\\ &= \ln e = 1\end{aligned}$$

លំហាត់ ៥២

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1 = a > 0$ និង $x_{n+1} = \dfrac{x_1+2x_2+3x_3+...+nx_n}{n}$ ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $x_1 = a > 0$ និង $x_{n+1} = \dfrac{x_1+2x_2+3x_3+...+nx_n}{n}$

នោះ $x_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

គេបាន $x_{n+1}-x_n = \dfrac{x_1+2x_2+3x_3+...+nx_n}{n} - x_n = \dfrac{x_1+2x_2+...+(n-1)x_{n-1}}{n} > 0$

គេបាន (x_n) ជាស្វ៊ីតកើន$\Rightarrow x_n > a$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$

នោះ $x_{n+1} > \dfrac{a+2a+3a+...+na}{n} = \dfrac{n(n+1)a}{2n} = \dfrac{(n+1)a}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

លំហាត់ ៥៣

គេឲ្យ $n\in\mathbb{N}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x...\cos nx}{x^2}$ ។

ចម្លើយ

តាង $a_n = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x...\cos nx}{x^2}$

នោះ $a_0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-cos0}{x^2} = 0$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx\cos(n+1)x}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}\\
&+ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cos 2x\ldots\cos nx(1-\cos(n+1)x)}{x^2}\\
&= a_n + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(n+1)x}{x^2}\\
&= a_n + \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{(n+1)x}{2}}{x^2}\\
&= a_n + \frac{(n+1)^2}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)x}\right]^2\\
&= a_n + \frac{(n+1)^2}{2}\\
\Rightarrow a_{n+1}-a_n &= \frac{(n+1)^2}{2}
\end{aligned}$$

យើងបាន $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)^2}{2}$

នោះ $a_n - a_0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{12} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)(n+2}{12} + a_0$ ដោយ $a_0 = 0$

ដូចនេះ $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{12}$

លំហាត់ ៥៤

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(0)=0$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ 0 ។ ចំពោះ $k\in\mathbb{N}$ គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x)+f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{3}\right)+\ldots+f\left(\frac{x}{k}\right)\right]$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $f(0)=0$ និង f មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ $x=0$ គេបាន

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x)+f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{3}\right)+...+f\left(\frac{x}{k}\right)\right] &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{k} f\left(\frac{x}{n}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{k}\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\times\frac{1}{n}\\
&= \sum_{n=1}^{k}\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)}{\frac{x}{n}-0}\times\frac{1}{n}\\
&= \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\times f'(0)\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k}\right)f'(0)
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x)+f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{3}\right)+...+f\left(\frac{x}{k}\right)\right]=\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)f'(0)$

លំហាត់ ៥៥

គេឲ្យ $k,m\in\mathbb{N}$ ។ គណនា

ក) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^m+(n+2)^m+...+(n+k)^m}{n^{m-1}}-kn$

ខ) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n...\left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}}$

គ) $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n^2}\right)\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)...\left(1+\frac{na}{n^2}\right)$ ។

ចម្លើយ

គណនា

ក) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^m+(n+2)^m+...+(n+k)^m}{n^{m-1}}-kn$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^m+(n+2)^m+...+(n+k)^m}{n^{m-1}}-kn\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^m+(n+2)^m+...+(n+k)^m-kn^m}{n^{m-1}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{(n+i)^m-n^m}{n^{m-1}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{(1+\frac{i}{n})^m-1}{\frac{i}{n}}\times i\\
&=\sum_{i=1}^{k}if'(0)\\
&=\frac{k(k+1)}{2}f'(0)
\end{aligned}$$

ដែល $f(x)=(1+x)^m$
ដោយ $f'(x)=m(1+x)^{m-1}$ នោះ $f'(0)=m$
ហេតុនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^m+(n+2)^m+...+(n+k)^m}{n^{m-1}}-kn=\frac{mk(k+1)}{2}$

ខ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n...\left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}}$

យក $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n...\left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ln A&=\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n...\left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(a+\frac{1}{n}\right)+n\ln\left(a+\frac{2}{n}\right)+...+n\ln\left(a+\frac{k}{n}\right)-nk\ln a\\
&=\lim_{n\to+\infty}n\sum_{i=1}^{k}\ln\left(a+\frac{i}{n}\right)-\ln a\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{\ln\left(a+\frac{i}{n}\right)-\ln a}{\frac{i}{n}}\times i\\
&=\sum_{i=1}^{k}f'(0)\times i=\frac{k(k+1)}{2}\times f'(0)
\end{aligned}$$

ដែល $f(x)=\ln(a+x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{a+x}$ នោះ $f'(0)=\frac{1}{a}$
ហេតុនេះ $\ln A=\frac{k(k+1)}{2}\times\frac{1}{a}=\frac{k(k+1)}{2a}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n\left(a+\frac{2}{n}\right)^n\dots\left(a+\frac{k}{n}\right)^n}{a^{nk}}=e^{\frac{k(k+1)}{2a}}$

គ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2a}{n^2}\right)\dots\left(1+\dfrac{na}{n^2}\right)$

យើងមាន $A=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2a}{n^2}\right)\dots\left(1+\dfrac{na}{n^2}\right)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ln A &= \lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{a}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2a}{n^2}\right)+\dots+\ln\left(1+\frac{na}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{ka}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln a\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{n^2}\right)-\ln\frac{1}{a}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{n^2}\right)-\ln\frac{1}{a}}{\frac{k}{n^2}}\times\frac{k}{n^2}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f'(0)\times\frac{k}{n^2}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}f'(0)\end{aligned}$$

ដែល $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{a}+x\right)$ នោះ $f'(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+x}\Rightarrow f'(0)=a$

គេបាន $\ln A=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{an(n+1)}{2n^2}=\dfrac{a}{2}$

ដូចនេះ $A=e^{\frac{a}{2}}$

លំហាត់ ៥៦

ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រង់ a ហើយ (x_n) និង (z_n) ជាស្វ៊ីតរួមទៅរក a ដែល $x_n<a<z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។ បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=f'(a)$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\dfrac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\times\dfrac{x_n-a}{x_n-z_n}+\dfrac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a}\times\dfrac{a-z_n}{x_n-z_n}$

ដោយ $x_n<a<z_n$ នោះ $0<\dfrac{a-z_n}{x_n-z_n}<1$ និង $0<\dfrac{x_n-a}{x_n-z_n}<1$

ម្យ៉ាងទៀត $\dfrac{a-z_n}{x_n-z_n}+\dfrac{x_n-a}{x_n-z_n}=1$

គេបាន $\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}$ នៅចន្លោះពីរចំនួន $\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}$ និង $\frac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a}$

តាមបម្រាប់ (x_n) និង (z_n) រួមទៅរក $a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(z_n)-f(a)}{z_n-a}=f'(a)$

ហេតុនេះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=f'(a)$

លំហាត់ ៥៧

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក (a,b) ។ បើគេដឹងថា $f(a)=f(b)=0$ បង្ហាញថា មាន $\alpha\in(a,b)$ ដែល $\alpha f(x)+f'(x)=0$ ។

សម្រាយ

យក $h(x)=e^{\alpha x}f(x)$

នោះ $h(a)=e^{\alpha a}f(a)=0$ និង $h(b)=e^{\alpha b}f(b)=0$

$\Rightarrow h(a)=h(b)$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $x\in(a,b)$ ដែល $h'(x)=0$

ដោយ $h'(x)=\alpha e^{\alpha x}f(x)+e^{\alpha x}f'(x)=e^{\alpha x}(\alpha f(x)+f'(x))$

យើងបាន $e^{\alpha x}(\alpha f(x)+f'(x))=0$

ដូចនេះ $\alpha f(x)+f'(x)=0$

លំហាត់ ៥៨

គេឲ្យ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក (a,b) ។ បើគេដឹងថា $f(a)=f(b)=0$ បង្ហាញថា មាន $x\in(a,b)$ ដែល $g'(x)f(x)+f'(x)=0$ ។

ចម្លើយ

យក $h(x)=e^{g(x)}f(x)$ នោះ $h(a)=e^{g(a)}f(a)=0$ និង $h(b)=e^{g(b)}f(b)=0$

គេបាន $h(a)=h(b)$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $x\in(a,b)$ ដែល $h'(x)=0$

ដោយ $h'(x)=g'(x)e^{g(x)}f(x)+e^{g(x)}f'(x)=e^{g(x)}(g'(x)f(x)+f'(x))$

យើងបាន $e^{g(x)}(g'(x)f(x)+f'(x))=0$

ដូចនេះ $g'(x)f(x)+f'(x)=0$

លំហាត់ ៥៩

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក (a,b) ។ ឧបមាថា $\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}$ បង្ហាញថា មាន $x\in(a,b)$ ដែល $xf'(x)=f(x)$ ។

ចម្លើយ

យក $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ នោះ $h(a)=\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}=h(b)$ ព្រោះ $\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $x\in(a,b)$ ដែល $h'(x)=0$

ដោយ $h'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

យើងបាន $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0$

ដូចនេះ $xf'(x)=f(x)$

លំហាត់ ៦០

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះបើក (a,b) ។ បើគេដឹងថា $f^2(b)-f^2(a)=b^2-a^2$ បង្ហាញថា សមីការ $f'(x)f(x)=x$ មានរឹសមួយយ៉ាងតិចនៅលើចន្លោះ (a,b) ។

ចម្លើយ

យក $h(x)=f^2(x)-x^2$ នោះ $h(a)=f^2(a)-a^2$ និង $h(b)=f^2(b)-b^2$

យើងបាន

$$\begin{aligned} h(b)-h(a) &= [f^2(b)-b^2]-[f^2(a)-a^2] \\ &= [f^2(b)-f^2(a)]-(b^2-a^2)=0 \end{aligned}$$

ព្រោះ $f^2(b)-f^2(a)=b^2-a^2$

នោះ $h(a)=h(b)$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $x\in(a,b)$ ដែល $h'(x)=0$

ដោយ $h'(x)=2f'(x)f(x)-2x=2[f'(x)f(x)-x]$

គេបាន $2[f'(x)f(x)-x]=0$

ដូចនេះ សមីការ $f'(x)f(x)=x$ មានរឹសមួយយ៉ាងតិចនៅលើចន្លោះ (a,b)

លំហាត់ ៦១

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មិនសូន្យលើ $[a,b]$ ហើយមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (a,b) ។ បើគេដឹងថា $f(a)g(b)=f(b)g(a)$ បង្ហាញថា មាន $x\in(a,b)$ ដែល $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ ។

សម្រាយ

យក $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ដោយ $f(a)g(b)=f(b)g(a)\Rightarrow\dfrac{f(a)}{g(a)}=\dfrac{f(b)}{g(b)}$

នោះ $h(a)=\dfrac{f(a)}{g(a)}=\dfrac{f(b)}{g(b)}=h(b)$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $x\in(a,b)$ ដែល $h'(x)=0$

ដោយ $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

យើងបាន $\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0$

នោះ $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

ដូចនេះ មាន $x\in(a,b)$ ដែល $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$

លំហាត់ ៦២

គណនា

ក) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^k+2^k+...+n^k}{n^{k+1}}\right)$

ខ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{n+n}\right)$

គ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+4}+\dfrac{n}{n^2+9}+...+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$

ចម្លើយ

គណនា

ក) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^k+2^k+...+n^k}{n^{k+1}}\right)$

យើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^k+2^k+...+n^k}{n^{k+1}}\right)&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^k+\left(\frac{2}{n}\right)^k+...+\left(\frac{n}{n}\right)^k\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k\end{aligned}$$

ពិនិត្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x^k$

f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[0,1]$

បើយើងចែកអង្កត់ $[0,1]$ ជា n អង្កត់ស្មើៗគ្នាដោយស្មុីតកំណត់ដោយ (x_i) ដែល

$x_0=0, x_1=0+1\times\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{1}{n}, x_2=0+2\times\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{2}{n},...$ និង $x_n=0+n\times\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{n}{n}$

ហើយ $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{1}{n}$

តាមនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់យើងបាន

$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k$

ដោយ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^k dx=\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1=\frac{1}{k+1}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^k+2^k+...+n^k}{n^{k+1}}\right)=\dfrac{1}{k+1}$

ខ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{n+n}\right)$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\ldots+\frac{1}{n\left(1+\frac{n}{n}\right)}\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x f(x_i)\text{ដែល } f(x)=\frac{1}{1+x}\\
&=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\\
&=[\ln|x+1|]_0^1=\ln 2
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2$

គ) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\frac{n}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}+\ldots+\frac{n}{n^2\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\frac{1}{n\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}+\ldots+\frac{1}{n\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right]\\
&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x f(x_i)\text{ ដែល } f(x)=\frac{1}{1+x^2}\\
&=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=[\arctan x]_0^1=\arctan 1=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

លំហាត់ ៦៣

ឧបមាថា $a_0, a_1, ..., a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+...+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$ ។ បង្ហាញថា ពហុធា $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ មានរឹសយ៉ាងហោចណាស់មួយលើចន្លោះ $(0,1)$ ។

សម្រាយ

យក $h(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+...+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx$

យើងបាន $h(0)=0$

ហើយ $h(1)=\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+...+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$

នោះ $h(0)=h(1)$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $x\in(0,1)$ ដែល $h'(x)=0$

ដោយ $h'(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=P(x)$

គេបាន $P(x)=0$

ដូចនេះ ពហុធា $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ មានរឹសយ៉ាងហោចណាស់មួយលើចន្លោះ $(0,1)$

លំហាត់ ៦៤

ចំពោះ $a_0, a_1, ..., a_n$ ជាចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\frac{a_0}{1}+\frac{2a_1}{2}+\frac{2^2a_2}{3}+...+\frac{2^{n-1}a_{n-1}}{n}+\frac{2^na_n}{n+1}=0$ ។

បង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(x)=a_n\ln^n x+a_{n-1}\ln^{n-1}x+...+a_1\ln x+a_0$ មានរឹសយ៉ាងហោចណាស់មួយលើ $(1,e^2)$ ។

សម្រាយ

យក $h(x)=\frac{a_n\ln^{n+1}x}{n+1}+\frac{a_{n-1}\ln^n x}{n}+...+\frac{a_2\ln^2 x}{2}+a_0\ln x$

នោះ $h(1)=0$

ហើយ $h(e^2)=\frac{a_0}{1}+\frac{2a_1}{2}+\frac{2^2a_2}{3}+...+\frac{2^{n-1}a_{n-1}}{n}+\frac{2^na_n}{n+1}=0$

យើងបាន $h(1)=h(e^2)=0$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $x\in(1,e^2)$ ដែល $h'(x)=0$

ដោយ $h'(x)=\frac{a_n\ln^n x}{x}+\frac{a_{n-1}\ln^{n-1}x}{x}+...+\frac{a_1\ln x}{x}+\frac{a_0}{x}$

យើងបាន $\frac{a_n\ln^n x}{x}+\frac{a_{n-1}\ln^{n-1}x}{x}+...+\frac{a_1\ln x}{x}+\frac{a_0}{x}=0$

នោះ $a_n\ln^n x+a_{n-1}\ln^{n-1}x+...+a_1\ln x+a_0=0$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)=a_n\ln^n x+a_{n-1}\ln^{n-1}x+...+a_1\ln x+a_0$ មានរឹសយ៉ាងហោចណាស់មួយលើ $(1,e^2)$

លំហាត់ ៦៥

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដែលមានដឺក្រេ $n, n \geq 2$ ។ បង្ហាញថា បើ $P(x)$ មានរឹសទាំងអស់ជាចំនួនពិត នោះ $P'(x)$ ក៏មានរឹសទាំងអស់ជាចំនួនពិតដែរ ។

ចម្លើយ

ឧបមាថា $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ជារឹសពិតនៃពហុធា $P(x)$ ដែល $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

នោះ $P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_n)$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $y_k \in (x_k, x_{k+1}), k = \overline{1,n}, x_{k+1} = x_1$ ដែល $P'(y_k) = 0$

នេះបញ្ជាក់ថា $P'(x)$ ដែលមានដឺក្រេ $n-1$ មានរឹសជាចំនួនពិតចំនួន $n-1$

ដូចនេះ $P'(x)$ មានរឹសទាំងអស់ជាចំនួនពិត

លំហាត់ ៦៦

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ $[a,b]$ ហើយ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ ២ លើ (a,b) ។ ឧបមាថា $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$ បង្ហាញថា មាន $x_1 \in (a,b)$ ដែល $f'(x_1) = 0$ ។

សម្រាយ

ដោយ $f(a) = f(b)$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $x \in (a,b)$ ដែល $f'(x) = 0$

នោះ $f'(a) = f'(x) = 0$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $x_1 \in (a,x)$ ដែល $f''(x_1) = 0$

ដូចនេះ មាន $x_1 \in (a,b)$ ដែល $f'(x_1) = 0$

លំហាត់ ៦៧

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ ២ លើចន្លោះ (a,b) ។ ឧបមាថា $f(a) = f(b)$ និង $f'(a) = f'(b) = 0$ បង្ហាញថា មាន $x_1, x_2 \in (a,b)$ ដែល $x_1 \neq x_2$ និង $f''(x_1) = f''(x_2)$ ។

សម្រាយ

ដោយ $f(a) = f(b)$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $x \in (a,b)$ ដែល $f'(x) = 0$

តាមបម្រាប់ $f'(a) = f'(b) = 0$

គេបាន $f'(a) = f'(x) = f'(b) = 0$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទ Rolle មាន $x_1 \in (a,x)$ និង $x_2 \in (x,b)$ ដែល $f''(x_1) = 0$ និង $f''(x_2) = 0$

ដូចនេះ មាន $x_1, x_2 \in (a,b)$ ដែល $x_1 \neq x_2$ និង $f''(x_1) = f''(x_2)$

លំហាត់ ៦៨

បង្ហាញថា សមីការ

ក) $x^{13} + 7x^3 - 5 = 0$

ខ) $3^x + 4^x = 5^x$ មានរឹសជាចំនួនពិតតែមួយគត់ ។

ចម្លើយ

បង្ហាញថា សមីការមានរឹសជាចំនួនពិតតែមួយគត់

ក) $x^{13} + 7x^3 - 5 = 0$

យក $f(x)=x^{13}+7x^3-5$
នោះ $f'(x)=13x^{12}+21x^2\geq 0$
$\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច
ដោយ $f(0)=-5$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល សមីការ $f(x)=0$ មានរឹសតែមួយគត់លើ $(0,+\infty)$
ម្យ៉ាងទៀត ចំពោះ $x\leq 0$ គេបាន $x^{13}+7x^3-5<0$
នេះបញ្ជាក់ថាសមីការ $f(x)=0$ គ្មានរឹសចំពោះ $x\leq 0$
ដូចនេះ សមីការ $x^{13}+7x^3-5=0$ មានរឹសជាចំនួនពិតតែមួយគត់
ខ) $3^x+4^x=5^x$
ចំពោះ $x=2$ គេបាន $3^2+4^2=5^2\Leftrightarrow 25=25$ ពិត
នេះបញ្ជាក់ថា $x=2$ ជារឹសនៃសមីការ
យើងនឹងបង្ហាញថា $x=2$ ជារឹសនៃសមីការតែមួយគត់
យើងមាន $3^x+4^x=5^x\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=1$
ដោយ $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$ ជាអនុគមន៍ចុះ ហើយ $g(x)=1$ ជាអនុគមន៍ថេរ
នោះសមីការ $f(x)=g(x)$ រឺ $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=1$ មានចម្លើយតែមួយគត់
ដូចនេះ សមីការមានរឹសតែមួយគត់ គឺ $x=2$

លំហាត់ ៦៩

ចំពោះចំនួនពិតមិនសូន្យ $a_1,a_2,...,a_n$ និង n ចំនួនពិតផ្សេងគ្នា $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ បង្ហាញថា សមីការ $a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+...+a_nx^{\alpha_n}=0$ មានរឹសជាចំនួនពិតយ៉ាងច្រើន $n-1$ លើ $(0,+\infty)$ ។

សម្រាយ

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់សំណើខាងលើដោយប្រើវិចារកំណើន
ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $a_1x^{\alpha_1}=0\Rightarrow x^{\alpha_1}=0$ មិនអាច
នោះសមីការគ្មានរឹស
ក្នុងករណីនេះសំណើពិត
ឧបមាថាសំណើពិតចំពោះ n គឺ $a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+...+a_nx^{\alpha_n}=0$ មានរឹសជាចំនួនពិតយ៉ាងច្រើន $n-1$ លើ $(0,+\infty)$
យើងនឹងបង្ហាញថាសមីការ $a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+...+a_nx^{\alpha_n}+a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}}=0$ មានរឹសជាចំនួនពិតយ៉ាងច្រើន n លើ $(0,+\infty)$
យើងមាន $a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+...+a_nx^{\alpha_n}+a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}}=0$
សមមូលនឹង $a_1x^{\alpha_1-\alpha_{n+1}}+a_2x^{\alpha_2-\alpha_{n+1}}+...+a_nx^{\alpha_n-\alpha_{n+1}}+a_{n+1}=0$
តាង $f(x)=a_1x^{\alpha_1-\alpha_{n+1}}+a_2x^{\alpha_2-\alpha_{n+1}}+...+a_nx^{\alpha_n-\alpha_{n+1}}+a_{n+1}$
នោះ $f'(x)=a_1(\alpha_1-\alpha_{n+1})x^{\alpha_1-\alpha_{n+1}-1}+a_2(\alpha_2-\alpha_{n+1})x^{\alpha_2-\alpha_{n+1}-1}+...$
$+a_n(\alpha_n-\alpha_{n+1})x^{\alpha_n-\alpha_{n+1}-1}$

ឧបមាថា $a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+...+a_nx^{\alpha_n}+a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}}=0$ មានរឹសច្រើនជាង n លើ $(0,+\infty)$
តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle គេបាន $f'(x)=0$ មានរឹសយ៉ាងហោចណាស់ n ដែលផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម កំណើន
$\Rightarrow a_1x^{\alpha_1}+a_2x^{\alpha_2}+...+a_nx^{\alpha_n}+a_{n+1}x^{\alpha_{n+1}}=0$ មានរឹសជាចំនួនពិតយ៉ាងច្រើន n លើ $(0,+\infty)$
ដូចនេះ សំណើត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

លំហាត់ ៧០

ចំពោះ f,g និង h ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (a,b) គេកំណត់អនុគមន៍ F ដោយ $F(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$ ចំពោះ $x\in[a,b]$។
បង្ហាញថា $\exists x_0\in(a,b)$ ដែល $f'(x_0)=0$ រួចទាញបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម និង ទ្រឹស្តីបទ Cauchy ។

សម្រាយ

ដោយ $F(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$

នោះ $F(a)=\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}=0$

និង $F(b)=\begin{vmatrix} f(b) & g(b) & h(b) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}=0$

គេបាន $F(a)=F(b)$
ម៉្យាងទៀត f,g និង h ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (a,b)
នោះ $F(x)$ ក៏ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (a,b) ដែរ

គឺ $F'(x)=\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម $\exists x_0\in(a,b)$ ដែល $F'(x_0)=0$
+ ទាញបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

យក $g(x)=x$ និង $h(x)=1$ គេបាន $F'(x_0)=\begin{vmatrix} f'(x_0) & 1 & 0 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$
+ទាញបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ Cauchy

យក $h(x)=1$ គេបាន $F'(x_0)=\begin{vmatrix} f'(x_0) & g'(x_0) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

លំហាត់ ៧១

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,2]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ $(0,2)$ ។ បើគេដឹងថា $f(0) = 0, f(1) = 1$ និង $f(2) = 2$ បង្ហាញថា $\exists x_0 \in (0,2)$ ដែល $f''(x_0) = 0$ ។

សម្រាយ

ដោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,2]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ $(0,2)$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម $\exists x_1 \in (0,1)$ និង $x_2 \in (1,2)$ ដែល $f(1)-f(0) = f'(x_1)(1-0)$

$\Rightarrow f'(x_1) = 1-0 = 1$

ហើយ $f(2)-f(1) = f'(x_2)(2-1)$

$\Rightarrow f'(x_2) = 2-1 = 1$

គេបាន $f'(x_1) = f'(x_2) = 1$

តាមទ្រឹស្តីបទ Rolle $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ ដែល $f''(x_0) = 0$

ដូចនេះ $\exists x_0 \in (0,2)$ ដែល $f''(x_0) = 0$

លំហាត់ ៧២

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (a,b) ។ បើ f មិនមែនជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ បង្ហាញថា $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$ ដែល $f'(x_1) < \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(x_2)$ ។

សម្រាយ

ដោយ f មិនមែនជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ នោះ $\exists c \in (a,b)$

ដែល $f(c) < f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$ រឺ $f(c) > f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$

ចំពោះ $f(c) < f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$

យើងបាន $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} < \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

និង $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} > \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

យើងបាន $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} < \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមមាន $x_1, x_2 \in (a,b)$ ដែល $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(x_1)$

និង $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} = f'(x_2)$

ដូចនេះ $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$ ដែល $f'(x_1) < \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(x_2)$

លំហាត់ ៧៣

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ $(0,1)$ ។ ឧបមាថា $f(0) = f(1) = 0$ និង មាន $x_0 \in (0,1)$ ដែល $f(x_0) = 1$ បង្ហាញថា $\exists c \in (0,1)$ ដែល $|f'(c)| > 2$

។

សម្រាយ

+ ចំពោះ $x_0 \neq \frac{1}{2}$ នោះមួយក្នុងចំណោមចន្លោះ $[0,x_0]$ និង $[x_0,1]$ ត្រូវមានប្រវែងខ្លីជាង $\frac{1}{2}$

· បើ $[x_0,1]$ មានប្រវែងខ្លីជាង $\frac{1}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម $\exists c \in (x_0,1)$ ដែល $\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0} = f'(c)$

$\Rightarrow f'(c) = -\frac{1}{1-x_0}$

តែ $x_0 > \frac{1}{2} \Rightarrow 1-x_0 < 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

គេបាន $f'(c) < -2$

នោះ $|f'(c)| > 2$

ស្រាយដូចគ្នាករណី $[0,x_0]$ មានប្រវែងខ្លីជាង $\frac{1}{2}$

+ចំពោះ $x_0 = \frac{1}{2}$

-ករណី f ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរលើ $[0,\frac{1}{2}]$ គឺ $f(x) = ax+b$

តាម $f(0) = 0$ និង $f(x_0) = 1$

គេបាន $f(x) = 2x$ ចំពោះ $\forall x \in [0,\frac{1}{2}]$

ដោយ $f'(\frac{1}{2}) = 2$ នោះ $\exists x_1 > \frac{1}{2}$ ដែល $f(x_1) > 1$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមយើងបាន $\frac{f(1)-f(x_1)}{1-x_1} = f'(c) \Rightarrow -\frac{f(x_1)}{1-x_1} = f'(c)$

ដោយ $1-x_1 < 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{1-x_1} > 2$

$\Rightarrow -\frac{f(x_1}{1-x_1} < -2f(x_1) < -2$

$\Rightarrow f'(c) < -2 \Rightarrow |f'(c)| > 2$

-ករណីដែល f មិនមែនជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែលើ $[0,\frac{1}{2}]$

នោះ $\exists x_2 \in (0,\frac{1}{2})$ ដែល $f(x_2) > 2x_2$ រឺ $f(x_2) < 2x_2$

+$f(x_2) > 2x_2$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម $\exists c \in (0,x_2)$ ដែល $\frac{f(0)-f(x_2)}{0-x_2} = f'(c)$

$\frac{f(x_2)}{x_2} = f'(c) \Rightarrow f'(c) > 2$

នោះ $|f'(c)| > 2$

ស្រាយដូចគ្នាចំពោះ $f(x_2) < 2x_2$
សរុបមក $\exists c \in (0,1)$ ដែល $|f'(c)| > 2$

លំហាត់ ៧៤

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b], a > 0$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (a,b) ។ បង្ហាញថា $\exists x_1 \in (a,b)$ ដែល $\dfrac{bf(a) - af(b)}{b-a} = f(x_1) - x_1 f'(x_1)$ ។

សម្រាយ

ពិនិត្យ $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ និង $h(x) = \dfrac{1}{x}$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (a,b)
ព្រោះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b], a > 0$ និង មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (a,b)
តាមទ្រឹស្តីបទ Cauchy $\exists x_1 \in (a,b)$ ដែល $\dfrac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \dfrac{g'(x_1)}{h'(x_1)}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{x_1 f'(x_1) - f(x_1)}{x_1^2}}{-\frac{1}{x_1^2}} = f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

ដូចនេះ $\exists x_1 \in (a,b)$ ដែល $\dfrac{bf(a) - af(b)}{b-a} = f(x_1) - x_1 f'(x_1)$

លំហាត់ ៧៥

ឧបមាថា $f : [a,b] \to \mathbb{R}, b - a \geq 4$ មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ (a,b) ។ បង្ហាញថា $\exists x_0 \in (a,b)$ ដែល $f'(x_0) < 1 + f^2(x_0)$ ។

សម្រាយ

ពិនិត្យ $g(x) = \arctan x$
ចំពោះ x_1, x_2 ដែល $a < x_1 < x_2 < b$ និង $x_2 - x_1 > \pi$
តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមយើងបាន $g(x_2) - g(x_1) = g'(x_0)(x_2 - x_1)$ ចំពោះ $x_0 \in (x_1, x_2)$

$\Rightarrow \arctan x_2 - \arctan x_1 = \dfrac{f'(x_0)}{1 + f^2(x_0)}(x_2 - x_1)$ ព្រោះ $g'(x) = \dfrac{f(x)}{1 + f^2(x)}$

$$\Rightarrow |\arctan x_2 - \arctan x_1| = \left| \frac{f'(x_0)}{1 + f^2(x)}(x_2 - x_1) \right| = \frac{|f'(x_0)|}{1 + f^2(x)}(x_2 - x_1)$$

តែ $-\dfrac{\pi}{2} \leq \arctan x_2 - \arctan x_1 \leq \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow |\arctan x_2 - \arctan x_1| \leq \pi$$

$$\Rightarrow \frac{|f'(x_0)|}{1 + f^2(x_0)}(x_2 - x_1) \leq \pi$$

$$\Rightarrow \frac{|f'(x_0)|}{1 + f^2(x_0)} \leq \frac{\pi}{x_2 - x_1} < 1$$

$$\Rightarrow |f'(x_0)| < 1 + f^2(x_0)$$

ដូចនេះ $\exists x_0 \in (a,b)$ ដែល $f'(x_0) < 1 + f^2(x_0)$ ព្រោះ $f'(x_0) \leq |f'(x_0)|$

ឯកសារយោង

1. A Collection of Limits, Handout.
2. Problems in Mathematical Analysis II, Countinuity and Differential, W.J Kaczor and M.T.Nowak.
3. រួមទាំងឯកសារខ្មែរ និង បរទេសជាច្រើនទៀត