រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

1500 លំហាត់គណិតវិទ្យា Olympiad

ភាគ ១

1. កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathrm{IR}-\{0,1\}\to\mathrm{IR}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការអនុគមន៍

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2(1-2x)}{x(1-x)}$$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0\,,\,1$ ។

2. គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើសំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

i- $x-f(x)=19\left[\frac{x}{19}\right]-90\left[\frac{f(x)}{90}\right]$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x ។

ii- $1990<f(1990)<2000$ ។

គណនា $f(1990)$ ។

3. រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌសមីការ

$f[x(1+f(y))+f(y)]=x(1+y)+y$ ចំពោះគ្រប់ $x\,,\ y\in\mathrm{IR}$ ។

4. តាង f ជាអនុគមន៍ដែលមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម

i- $f(n)$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

ii- $f(n)$ ជាចំនួនគត់

iii- $f(2)=2$

iv- $f(mn)=f(m)f(n)$ ចំពោះគ្រប់ $m\,,\ n$

v- $f(m)>f(n)$ កាលណា $m>n$ ។

គណនា $f(2007)$ ។

5. កំណត់ពហុធា $P(x)$ ដឺក្រេទី ៤ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌពីរខាងក្រោម

i- $P(0)=0$

ii- $P(x)-P(x-1)=x(x+1)(2x+1)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathrm{IR}$ ។

6. កំណត់អនុគមន៍ $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\,,\ y$ គេបានសមីការ

$f[x-f(y)]=1-x-y$ ។

7. រកគ្រប់អនុគមន៍ f ដែលកំណត់ និង មានដេរីវេចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y ដែល $xy \neq 1$ ហើយ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ ។

8. គេឲ្យទំនាក់ទំនង D មួយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

   i- $D(1,0,0,1)=1$

   ii- $D(kw,x,ky,z)=kD(w,x,y,z)$

   iii- $D(w,x,y,z)=-D(x,w,z,y)$

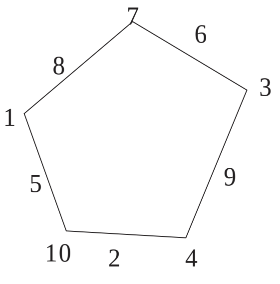
   iv- $D(w+u,x,y+v,z)=D(w,x,y,z)+F(u,x,v,z)$ ដែល k, u, v, w, x, y និង z ជាចំនួនពិត ។

កំណត់ $D(a,b,c,d)$ ជាអនុគមន៍នៃ a, b, c និង d ។

9. ធ្វើប្រមាណវិធីបូកខាងក្រោមដែលអក្សរនីមួយៗតាងលេខពី 0 ដល់ 9 ខុសៗគ្នា ។

$$\begin{array}{r} STILL \\ +STALL \\ STILT \\ \hline NITWIT \end{array}$$ ។

10. ចំនួនគត់ពី 1 ដល់ 10 ត្រូវបានគេរៀបលើកំពូល និង ជ្រុងនៃបញ្ចកោណមួយដែលផលបូកចំនួនទាំងបីតាមជ្រុងនីមួយៗស្មើគ្នា ។ រូបខាងក្រោមបង្ហាញពីតំរៀបមួយដែលមាន ផលបូកតាមជ្រុងនីមួយៗស្មើ 16 ។ ចូរបង្ហាញពីតំរៀបថ្មីមួយទៀតដែលមានតម្លៃផលបូកតូចបំផុត ។ ឲ្យឧទាហរណ៍បញ្ជាក់ពីតំរៀបនោះ ។



11. តាង $m*n=\dfrac{m+n}{mn+4}$ ។

គណនា $A=((\ldots((2009*2008)*2007)*\ldots*1)*0)$ ។

12. ប្រមាណវិធី $*$ ត្រូវបានកំណត់លើសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល បើ x និង y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $x*y$ ក៏ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែរ ។ ដោយសន្មតថា $*$ បំពេញលក្ខខណ្ឌបីខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y និង z ។

គណនា $5*6$ ។

$$\begin{cases} x*(y+z)=(x*y)(x*z) & (1) \\ (x+y)*1=(x*1)+(y*1) & (2) \\ (x+y)*z=(x*2)+4(xy*1)+(y*2) & (3) \end{cases}$$ ។

13. គេមានបីគូលំដាប់ (a_1,b_1), (a_2,b_2) និង (a_3,b_3) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a^3-3ab^2=2009$ និង $b^3-3a^2b=2008$ ។ គណនា

$P=\left(1-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(1-\dfrac{a_2}{b_2}\right)\left(1-\dfrac{a_3}{b_3}\right)$ ។

14. រកគ្រប់គូ (x,y) ជាឫសនៃសមីការ $2007^{\sin^2 x}+2007^{\cos^2 x}=2009+\cos 2y$ ។

15. គេឲ្យ a, b, c, x, y ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^3+ax+y=0$, $b^3+bx+y=0$ និង $c^3+cx+y=0$ ។ បើ a, b, c ជាបីចំនួនផ្សេងគ្នា បង្ហាញថា $a+b+c=0$ ។

16. បង្ហាញថា សមីការ $x^5+x=2009$ មានឫសវិជ្ជមានតែមួយគត់ ហើយឫសនោះជាចំនួនអសនិទាន ។ គេឲ្យ $4.5^5\approx 1845$ និង $4.6^5\approx 2059$ ។

17. គេឲ្យ α, β ជាឫសនៃសមីការ $x^2+px+1=0$ និង γ, δ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+qx+1=0$ ។ បង្ហាញថា $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)=q^2-p^2$ ។

18. គេឲ្យ α, β ជាឫសនៃសមីការ $x^2+px+q=0$ និង γ, δ ជាឫសនៃសមីការ

$x^2+Px+Q=0$ ។ គណនា $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)$ ជាអនុគមន៍នៃ p , q , P និង Q ។

19. គេឲ្យសមីការ $x^2+ax+1=0$ និង $x^2+x+a=0$ ។ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការទាំងពីរមានរឹសរួមយ៉ាងហោចមួយ ។

20. កំណត់ចំនួនគត់ a ដើម្បីឲ្យពហុធា $(x-a)(x-10)+1$ អាចសរសេរជារាង $(x+b)(x+c)$ ដែល b , c ជាចំនួនគត់ ។

21. កំណត់ចំនួនគត់មិនសូន្យខុសៗគ្នា a , b , c ដើម្បីឲ្យពហុធាដឺក្រេទី ៤ មានមេគុណជាចំនួនគត់ $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$ អាចសរសេរជាផលគុណនៃពីរពហុធាមិនថេរ និង មានមេគុណជាចំនួនគត់ ។

22. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យផលបូកការេនៃរឹសរបស់សមីការ $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ មានតម្លៃតូចបំផុត ។

23. ដោះស្រាយសមីការ ក/ $(x^2+x-2)^3+(2x^2-x-1)^3=27(x^2-1)^3$

ខ/ $x^4+2x^3+2x^2+x-2=0$ ។

24. គេឲ្យ x , y ជាពីរចំនួនបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$ ។ បង្ហាញថា $x+y=10$ ។

25. រកគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែលចំពោះគ្រប់ n មានមួយចំនួនគត់ x ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $999(1999^n+1)=2(x^2+x)$ ។

26. ឧបមាថា x_1, x_2 ជារឹសនៃសមីការ $2004x^2-(5t-4)x-2004=0$ ។

រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $H=(x_2-x_1)^2+4\left(\dfrac{x_1-x_2}{2}+\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)^2$ ។

27. គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទី ២ $p(x)=x^2+ax+b$ ដែល a , b ជាចំនួនគត់ ។ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{Z}$ បង្ហាញថាមាន $m\in\mathbb{Z}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $p(n)p(n+1)=p(m)$ ។

28. ដោះស្រាយសមីការ $\frac{1}{[x]}+\frac{1}{[2x]}=\{x\}+\frac{1}{3}$ ។

29. យក a, b ជាពីរចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌឲ្យសមីការ $x^3-ax+b=0$ មានរឹសទាំងបីជាចំនួនពិត ។ បើ α ជារឹសដែលមានតម្លៃដាច់ខាតតូចជាងគេ បង្ហាញថា $\frac{b}{a}<\alpha\le\frac{3b}{2a}$ ។

30. គេឲ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $1\ge a\ge b\ge c\ge 0$ ។ យក λ ជារឹសមួយនៃសមីការ $x^3+ax^2+bx+c=0$ ។ បង្ហាញថា $|\lambda|\le 1$ ដែល λ អាចជាចំនួនកុំផ្លិច រឺ ចំនួនពិត ។

31. បង្ហាញថា ពហុធា $f(x)=x^4+26x^3+52x^2+78x+1989$ មិនអាចសរសេរជារាង $f(x)=p(x)q(x)$ ដែល $p(x)$ និង $q(x)$ ជាពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ និង ដឺក្រេតូចជាង រឺ ស្មើនឹង 3 ។

32. គេឲ្យ α, β, γ ជារឹសនៃសមីការ $x^3-x-1=0$ ។
គណនា $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$ ។

33.

i- បង្ហាញថា $Arc\tan a+Arc\tan b=Arc\tan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$
បើគេដឹងថា $-\frac{\pi}{2}<Arc\tan a+Arc\tan b<\frac{\pi}{2}$ ។

ii- បង្ហាញថា $Arc\tan\frac{1}{2}+Arc\tan\frac{1}{5}+Arc\tan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$ ។

iii- ដោះស្រាយសមីការ $Arc\tan x+Arc\tan 2x=\frac{\pi}{4}$ ។

iv- សម្រួលកន្សោម

ក/ $Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ចំពោះ $0\le x\le 2\pi$ និង $x\ne\pi$

ខ/ $Arc\tan\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$ ចំពោះ $0<x<\frac{3\pi}{4}$ ។

34. គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនគត់សេស ។ បង្ហាញថា សមីការ $ax^2+bx+c=0$ មិនអាចមានរឹសជាចំនួនសនិទាន ។

35. គេឲ្យ a , b , c , d ជាបួនចំនួនគត់វិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\log_a b=\frac{3}{2}$, $\log_c d=\frac{5}{4}$ និង $a-c=9$ ។ គណនា $b-d$ ។

36. កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $|x|-|y|$ បើគេដឹងថា $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$ ។

37. គេឲ្យ p , q , r ជារឹសនៃសមីការដឺក្រេទី ៣ $x^3-3px^2+3q^2x-r^3=0$ ។ បង្ហាញថា $p=q=r$ ។

38. គេឲ្យ $a\ne b\ne c\ne 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\frac{1}{x+a}+\frac{1}{y+a}+\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}\\ \frac{1}{x+b}+\frac{1}{y+b}+\frac{1}{z+b}=\frac{1}{b}\\ \frac{1}{x+c}+\frac{1}{y+c}+\frac{1}{z+c}=\frac{1}{c}\end{cases}$$ មានចម្លើយ ។ គណនា $\sum=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។

39. គេឲ្យ a , b , $c>0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^n+b^n+c^n=3$ ចំពោះ $n\in\mathrm{IN}$ និង $n>2$ ។ កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $a^2+b^2+c^2$ ។

40. គេឲ្យ a , b , c , $d>0$ ។ បង្ហាញថា

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$ ។

41. គេឲ្យ a, b, $c>1$ ។ បង្ហាញថា $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab$

$$\geq 4\left(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b\right)$$ ។

42. បង្ហាញថា $1<\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\ldots+\frac{1}{3001}<\frac{4}{3}$ ។

43. បង្ហាញថា $\sqrt{7}+\sqrt[3]{7}+\sqrt[4]{7}<7$ និង $\sqrt{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{4}>4$ ។

44. បង្ហាញថា $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3$ ។

45. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $A=\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_{2010}$ បើគេដឹងថា

$\tan x_1 \tan x_2 \ldots \tan x_{2010}=1$ ។

46. គេឲ្យ a_1, a_2, … , a_n ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $[0,1]$ ។ បង្ហាញថា

$\left(1+a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^2\geq 4\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)$ ។

47. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n>1$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<2$ ។

48. ប្រៀបធៀបពីរចំនួន $A=\sqrt[3]{2008}+\sqrt[3]{2006}$ និង $B=2\sqrt[3]{2007}$ ។

49. គេឲ្យបីចំនួនគត់វិជ្ជមាន a, b, c មានផលគុណស្មើនឹង 1 ។ កំណត់តម្លៃអតិបរមា

នៃ $P=\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)$ ។

50. គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=2$ ។

បង្ហាញថា $a^3+b^3+c^3\geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$ ។

51. គេឲ្យ a, b, c, d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c+d\leq 1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\leq\frac{1}{64abcd}$ ។

52. គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 1$ ។

53. គេឲ្យ a, b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b=1$ ។

បង្ហាញថា $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$ ។

54. គេឲ្យ $0<a, b, c<1$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=2$ ។

បង្ហាញថា $\left(\frac{a}{1-a}\right)\left(\frac{b}{1-b}\right)\left(\frac{c}{1-c}\right)\geq 8$ ។

55. កំណត់ចំនួនធំបំផុតនៅក្នុងស្វ៊ីតមិនកំណត់ $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$ ។

56. គេឲ្យ x, y, z និង $n>1$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^n+y^n=z^n$ ។

បង្ហាញថា $\min\{x,y,z\}>n$ ។

57. ប្រអប់មួយមានបាតជាចតុកោណកែងដែលមានអង្កត់ទ្រូងប្រវែង

$D(a)=\frac{a^2-\sqrt{a^4+4}+2}{a}$ ដែល $a>0$ ។ រកប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូង របស់បាតប្រអប់នោះ ។

58. ក/ សរសេរ x^4+4y^4 ជាផលគុណនៃពីរពហុធាដឺក្រេទី ២ នៃ x និង y ។

ខ/ បង្ហាញថា n^4+4^n មិនមែនជាចំនួនបឋមទេចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n>1$ ។

59. គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនគត់ ។ បង្ហាញថា $abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$ ជាចំនួនចែកដាច់នឹង 7 ។

60. កំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p, q, r ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $15p+7pq+qr=pqr$ ។

61. កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុតដែលមាន 7 ជាលេខខ្ទង់រាយ ហើយចំនួននេះនឹងធំជាងមុន ៥ ដងបើគេប្តូរទីតាំងលេខខ្ទង់រាយនេះទៅដាក់នៅខាងមុខវិញ ។

62. គេឲ្យ $S_{p,t} = 1^t + 2^t + ... + p^t$ ដែល p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង t ជាចំនួនគត់សេស ។ បង្ហាញថា $2S_{p,t}$ ចែកដាច់ $p(p+1)$ ។

63. រកសំណល់នៃប្រមាណវិធីចែករវាង 2010^{2009} និង 13 ។

64. កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដើម្បីឲ្យ $n + S(n) = 2009$ ។ $S(n)$ ជាផលបូកនៃបណ្តាខ្ទង់ទាំងអស់នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

65. កំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p បើគេដឹងថាមានចំនួនគត់ x, y បំពេញលក្ខខណ្ឌ $p + 1 = 2x^2$ និង $p^2 + 1 = 2y^2$ ។

66. កំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p ដើម្បីឲ្យ $\frac{2^{p-1} - 1}{p}$ ជាការេប្រាកដ ។

67. បង្ហាញថា មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល $2A$, $3A$, $5A$ ជាការេ, គូប និង ស្វ័យគុណប្រាំនៃចំនួនគត់ ។

68. គេឲ្យ a_0, a_1, … , a_{50} ជាមេគុណនៃពន្លាតនៃកន្សោម $(1 + x + x^2)^{25}$ ។ បង្ហាញថា $a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{50}$ ជាចំនួនគត់គូ ។

69. បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ k អាចសរសេរជារាង $a^2 + b^2 - 5c^2$ ដែល a, b, c ជាចំនួនគត់ ។

70. កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n បំពេញលក្ខខណ្ឌ
   i- n មិនមែនជាការេប្រាកដ
   ii- $\left[\sqrt{n}\right]^3$ ចែកដាច់ n^2 ។

71. គេឲ្យផលបូក $S(a,b) = (a+1)^b + (a+2)^b + (a+3)^b + (a+4)^b + (a+5)^b$ ដែល a, b ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។
   បង្ហាញថា $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 ។

72. ចំនួនមានលេខពីរខ្ទង់ចាប់ពី 19 ដល់ 93 ត្រូវបានយកមកតម្រៀបជាបន្តបន្ទាប់

ដើម្បីបង្កើតបានចំនួន N មួយកំណត់ដោយ $N=1920\ldots9293$ ។

កំណត់ស្វ័យគុណនៃ 3 ធំបំផុតដែលចែកដាច់ N ។

73. កំណត់គ្រប់គូគត់វិជ្ជមាន (m,n) បើគេដឹងថា 2^m+3^n ជាការេប្រាកដ ។

74. កំណត់ចំនួន N មួយមានលេខបួនខ្ទង់ដោយដឹងថា

i- N ជាការេប្រាកដ

ii- លេខពីរខ្ទង់ខាងដើមនៃ N ជាលេខតែមួយ

iii- លេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ N ក៏ជាលេខតែមួយដែរ ។

75. គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានគ្មានតួចែករួមក្រៅពី 1 បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ ។ បង្ហាញថា $a+b$ ជាការេប្រាកដ ។

76. គេឲ្យ XYZ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ X និង មាន $XY=z$, $YZ=x$, $ZX=y$ ។

បង្ហាញថា $x^n>y^n+z^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 3$ ។

77. គេឲ្យចំនួនពិត u_1, u_2, ... បំពេញលក្ខខណ្ឌ $u_1=1$, $u_9=7$ និង

$u_{n+1}=\dfrac{u_n^2-u_{n-1}+2u_n}{u_{n-1}+1}$ ។ គណនា u_5 ។

78. គណនាផលបូក $\sum_{k=0}^{n} Arc\tan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)$ ។

79. ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1=1,\ x_2=1$ និង $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។

ក/ បង្ហាញថា $x_{k+1}x_{k+2}-x_kx_{k+3}=(-1)^k,\ \forall k\in \mathrm{IN}$ ។

ខ/ គេតាង $arc\cot$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $\cot$ ។

បង្ហាញថា $arc\cot x_1-arc\cot x_3-arc\cot x_5-\ldots-arc\cot x_{2011}$

$=arc\cot x_{2012}$ ។

80. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}_{n\geq 1}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ និង $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។ ចំពោះគ្រប់ m, បង្ហាញថា $a_{m+1}a_m$ គឺជាតួនៃស្វ៊ីត ។

81. គេឲ្យ $3^2 + 4^2 = 5^2$

$5^2 + 12^2 = 13^2$

$7^2 + 24^2 = 25^2$

$9^2 + 40^2 = 41^2$ ។

តាមឧទាហរណ៍នេះ ទាញរករូបមន្តទូទៅ និង ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះផង ។

82. គេមានសមភាព $14^2 = (6\times 1^2 + 6\times 1 + 2)^2$, $15^2 = (6\times 1^2 + 6\times 1 + 3)^2$

$38^2 = (6\times 2^2 + 6\times 2 + 2)^2$, $39^2 = (6\times 2^2 + 6\times 2 + 3)^2$

$74^2 = (6\times 3^2 + 6\times 3 + 2)^2$, $75^2 = (6\times 3^2 + 6\times 3 + 3)^2$

ដោយសង្កេតលើឧទាហរណ៍ខាងក្រោម ទាញរករូបមន្តទូទៅ ហើយស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តផង $2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2 = 15^2$

$4^2 + 5^2 + 6^2 + 38^2 = 39^2$

$6^2 + 7^2 + 8^2 + 74^2 = 75^2$ ។

83. សង្កេតសមភាព $6^2 - 5^2 = 11$

$56^2 - 45^2 = 1111$

$556^2 - 445^2 = 111111$

$5556^2 - 4445^2 = 11111111$ ។

ទាញរករូបមន្តទូទៅ រួចស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តផង ។

84. គេឲ្យ a_0, a_1, … , a_n, … ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_0 = 3$

និង $(3-a_{n+1})(6+a_n)=18$ ។ គណនា $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ ។

85. គេឲ្យ $P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$P_n(x)=-2xP_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ ។

ក/ បង្ហាញថា ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ ។

ខ/ ទាញបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$

និង $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$ ។

86. គេឲ្យចំនួនពិត $x=k+\sqrt{k^2-1}$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានធំជាង 1 ។ ចំពោះ $n=1,\ 2,\ \ldots$ គេតាង A_n ជាផ្នែកគត់នៃ x^n ។ គណនា A_{2n} ជាអនុគមន៍នៃ A_n ។

87. សំណុំរងមានបីធាតុ $\{a,b,c\}$ ត្រូវបានជ្រើសចេញពីសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,299,300\}$ ។ កំណត់ចំនួនសំណុំរងទាំងនេះ បើគេដឹងថាផលបូក $a+b+c$ ជាពហុគុណនៃ 3 ។

88. តើមានសំណុំដែលមានបីធាតុនៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,20\}$ ចំនួនប៉ុន្មាន បើដឹងថាផលគុណនៃធាតុទាំងបីរបស់សំណុំនោះចែកដាច់នឹង 4 ?

89. យក A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ $\{1,11,21,\ldots,541,551\}$ ហើយ គ្មានពីរធាតុណានៃ A មានផលបូកស្មើនឹង 552 ។ បង្ហាញថា A មិនអាចមានលើសពី 28 ធាតុ ។

90. គេមាន 17 ចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នាដែលគ្មានធាតុណាមួយមានតួចែកបឋមធំជាង 10 ។ បង្ហាញថា មានពីរចំនួនដែលមានផលគុណជាការេប្រាកដ ។

91. គេឲ្យ A ជាសំណុំរងដែលមាន $n+1$ ធាតុនៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,2n\}$ ។ បង្ហាញថា

i- A មានពីរធាតុជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

ii- A មានពីរធាតុផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌចែកដាច់ ។

92. គេមាន 7 ចំនួនពិតផ្សេងគ្នា ។ បង្ហាញថា មានពីរក្នុងចំណោមចំនួនទាំង 7 ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព $0<\dfrac{x-y}{1+xy}<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ។

93. នៅលើកោះមួយមានទីក្រុងចំនួន 6 ។ ទីក្រុងពីរៗអាចធ្វើដំណើរទៅវិញទៅមកដោយប្រើមធ្យមបាយណាមួយក្នុងចំណោមរថភ្លើង និង ឡានក្រុង ។បង្ហាញថាមានទីក្រុងបីដែលប្រើមធ្យោបាយក្នុងការធ្វើដំណើរដូចគ្នា ។

94. គេឲ្យប្រាំបីចំណុចនៅក្នុងលំហមួយដែលគ្មានបីចំណុចណារត់ត្រង់គ្នា ។ កំណត់ចំនួនត្រីកោណអតិបរមាដែលបង្កើតឡើងដោយចំណុចទាំងនោះ បើគេដឹងថាគ្មានត្រីកោណពីរណាមានកំពូលរួមលើសពីមួយ ។

95. តើមានបីចំនួនបង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកើនចំនួនប៉ុន្មានបើចំនួនទាំងនោះត្រូវបានយកចេញពីស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $1,\ 2\ ,\ 2^2,\ldots,\ 2^n$?

96. យក A ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ដែលចែកដាច់នឹង 3 ចាប់ពី 1ដល់ 700 និង B ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ដែលចែកដាច់នឹង 7 ចាប់ពី 1ដល់ 300 ។ កំណត់ចំនួនគូលំដាប់ (a,b)ដែល $a\in A$, $b\in B$, $a\neq b$ និង $a+b$ ជាចំនួនគូ ។

97. គេឲ្យ $A\subset\{1,2,3,\ldots,100\}$ និង $|A|=50$ ។ បើគេដឹងថា គ្មានពីរធាតុណានៃ A ដែលមានផលបូកស្មើនឹង 100 ។ បង្ហាញថា A មានធាតុជាការេប្រាកដ ។

98. កំណត់ចំនួនគូ $\{A,B\}$(មិនគិតលំដាប់) ដែល A, B ជាសំណុំរងនៃសំណុំ X ដែលមាន n ធាតុ និង បំពេញលក្ខខណ្ឌ

i- $A\neq B$

ii- $A\cup B=X$ ។

99. កំណត់ចំនួនពហុធាដឺក្រេទី ២ ax^2+bx+c ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

i- a , b , c ជាបីចំនួនផ្សេងគ្នា

ii- a , b , $c \in \{1,2,3,\ldots,1999\}$ និង

iii- $x+1$ ជាកត្តាមួយនៃ ax^2+bx+c ។

100. បង្ហាញថា ចំនួនសំណុំរងមានបីធាតុ $\{a,b,c\}$នៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,63\}$ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c<95$ មានចំនួនតិចជាងសំណុំរងមានបីធាតុ $\{a,b,c\}$នៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,63\}$ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c>95$ ។

101. គេមានម៉ាទ្រីសការេមួយទំហំ $2n\times 2n$ ដែលមានធាតុជាលេខ 0 និង លេខ 1។ លេខ 0 ទាំងអស់មានចំនួន $3n$ ។ បង្ហាញថា គេអាចលុបលេខសូន្យទាំងអស់ដោយលុបជួរដេកចំនួន n និង ជួរឈរចំនួន n ។

102. កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n បើគេដឹងថាសំណុំ $\{1,2,3,4,\ldots,4n\}$អាចញែកជា n សំណុំរងដែលមានបួនធាតុ $\{a,b,c,d\}$ ដាច់គ្នា និង បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$a=\frac{b+c+d}{3}$$ ។

103. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 3$ គេយក $f(n)$ តាងឲ្យចំនួនត្រីកោណដែលមានរង្វាស់ជ្រុងជាចំនួនគត់មានបរិមាត្រស្មើនឹង n ។ ឧទាហរណ៍ $f(3)=1$, $f(4)=0$ និង $f(7)=2$ ។ បង្ហាញថា

i- $f(1999)>f(1996)$

ii- $f(2000)=f(1997)$ ។

104. គណនា $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$ ។

105. គេឲ្យ $h(n)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា

$$n+h(1)+h(2)+\ldots+h(n-1)=nh(n)$$ ។

106. គណនា $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ ។

107. គេឲ្យបីចំណុច $A(1,0,1)$, $B(-2,1,3)$ និង $C(1,4,0)$ ។

ក/ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ខ/ យក H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC ។ កំណត់កូអរដោនេចំណុច H ។

108. កំណត់គ្រប់ត្រីធាតុគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$ ។

109. ចំពោះ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន គេតាង $S(n)$ ជាចំនួនគូគត់វិជ្ជមាន (x,y) បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ ។ ឧទាហរណ៍ $S(2)=3$ ។ កំណត់សំណុំនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន n បើគេដឹងថា $S(n)=5$ ។

110. ចំណុច $M(x,y,z)$ មានកូអរដោនេជាចំនួនគត់ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$ ។ បង្ហាញថា មានចំណុច M ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ ។

111. កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y, z ដើម្បីឲ្យ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ។

112. ដោះស្រាយសមីការ $a^3+b^3+c^3=2001$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

113. កំណត់គ្រប់ត្រីធាតុគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $xy+yz+zx-xyz=2$ ។

114. កំណត់តម្លៃ t តូចបំផុតដើម្បីឲ្យមាន x_1, x_2, … , x_t ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_t^3=2002^{2002}$ ។

115. កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន $(n_1,n_2,\ldots,n_{14})$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $n_1^4+n_2^4+\ldots+n_{14}^4=1599$ ។

116. ក/ កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a , b , c ដើម្បីឲ្យ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{4}$ ។

ខ/ កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដើម្បីឲ្យសមីការ

$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2}=1$ (*)មានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

117. កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x , y , z ដែល $z\geq 2$ នៃសមីការ

$(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+99)^2=y^z$ ។

118. កំណត់គ្រប់គូគត់វិជ្ជមាន (x, y)នៃសមីការ $x^y=y^{x-y}$ ។

119. តើសមីការ $x^3=2^y+15$ មានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់ដែរ រឺ ទេ ?

120. បង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ x , y , z បំពេញលក្ខខណ្ឌសមីការ

$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2=2000$ ។

121. ដោះស្រាយសមីការ $2^n+1=x^2$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

122. កំណត់គ្រប់ចម្លើយគត់នៃសមីការ

$(x+1)(x+2)(x+3)+x(x+2)(x+3)+x(x+1)(x+3)$

$+x(x+1)(x+2)=y^{2^x}$ ។

123. បង្ហាញថា សមីការ $x^2-5y^2=2$ គ្មានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

124. កំណត់ចម្លើយគត់នៃសមីការ

$(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy)$ ។

125. គេឲ្យ p , q ជាពីរចំនួនបឋម ។ ដោះស្រាយសមីការ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}$

ក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

126. កំណត់គ្រប់គូគត់មិនអវិជ្ជមាន (x, y)នៃសមីការ $(xy-7)^2=x^2+y^2$ ។

127. ដោះស្រាយសមីការ $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

128. កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីឲ្យសមីការ $x^3+y^3+z^3-3xyz=n$ មានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

129. កំណត់គ្រប់ត្រីធាតុគត់វិជ្ជមាន (x,y,z)នៃសមីការ $x^3+y^3+z^3-3xyz=p$ ចំពោះ p ជាចំនួនបឋមធំជាង 3 ។

130. កំណត់គ្រប់ត្រីធាតុជាចំនួនគត់(x,y,z)នៃសមីការ

$x^3+y^3+z^3=x+y+z=3$ ។

131. កំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p ដើម្បីឲ្យសមីការ $x^4+4=py^4$ មានចម្លើយជាចំនួនគត់ ។

132. កំណត់គ្រប់គូគត់ (x,y)នៃសមីការ $x^3+y^3=(x+y)^2$ ។

133. កំណត់គ្រប់ចម្លើយគត់វិជ្ជមាននៃសមីការ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}$ ។

134. កំណត់គ្រប់ចម្លើយគត់វិជ្ជមាននៃសមីការ

$x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z-1)+2y(z+1)=w^2$ ។

135. កំណត់ចម្លើយគត់នៃសមីការ $x^3+(x+1)^3+\ldots+(x+7)^3=y^3$ ។

136. កំណត់គ្រប់ត្រីធាតុគត់វិជ្ជមាននៃសមីការ $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=2$ ។

137. កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n, k_1, ..., k_n ដើម្បីឲ្យ

$k_1+k_2+\ldots+k_n=5n-4$ និង $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_n}=1$ ។

138. ដោះស្រាយសមីការ $9^x-3^x=y^4+2y^3+y^2+2y$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

លំហាត់ ១

កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : \mathrm{IR}-\{0,1\} \to \mathrm{IR}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការអនុគមន៍

$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2(1-2x)}{x(1-x)}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq 0\,,\,1$។

ចម្លើយ

យើងមាន $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2(1-2x)}{x(1-x)}$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq 0\,,\,1$

យក $y=\frac{1}{1-x}$ យើងបាន $f(x)+f(y)=2\left(\frac{1}{x-y}\right)$ (1)

យក $z=\frac{1}{1-y} \Rightarrow x=\frac{1}{1-z}$

យើងបាន $f(y)+f(z)=2\left(\frac{1}{y}-z\right)$ (2)

និង $f(z)+f(x)=2\left(\frac{1}{z}-x\right)$ (3)

បូក (1) និង (3) យើងបាន $2[f(x)+f(y)+f(z)]=2\left(\frac{1}{x}-x\right)-2y+\frac{2}{z}$

តាម (2) យើងបាន $2f(x)=2\left(\frac{1}{x}-x\right)-2\left(y+\frac{1}{y}\right)+2\left(z+\frac{1}{z}\right)$

ដោយ $y+\frac{1}{y}=\frac{1}{1-x}+1-x\,,\; z+\frac{1}{z}=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ ជាចម្លើយ

លំហាត់ ២

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើសំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

i- $x-f(x)=19\left[\frac{x}{19}\right]-90\left[\frac{f(x)}{90}\right]$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x ។

ii- $1990<f(1990)<2000$ ។

គណនា $f(1990)$ ។

ចម្លើយ

តាម (i) យើងបាន $f(1990)-90\left[\frac{f(1990)}{90}\right]=1990-19\left[\frac{1990}{19}\right]$

$$=1990-1976=14$$

តាម (ii) យើងបាន $\frac{1990}{19}<\frac{f(1990)}{90}<\frac{2000}{90}$

រឺ $21\frac{10}{90}<\frac{f(1990)}{90}<22\frac{20}{90}$

ហេតុនេះ $\left[\frac{f(1990)}{90}\right]=21$ រឺ 22

បើ $\left[\frac{f(1990)}{90}\right]=21\Rightarrow f(1990)=14+90\times21=1904$

បើ $\left[\frac{f(1990)}{90}\right]=22\Rightarrow f(1990)=14+90\times22=1994$

លំហាត់ ៣

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌសមីការ

$f[x(1+f(y))+f(y)]=x(1+y)+y$ ចំពោះគ្រប់ $x,\ y\in\mathrm{IR}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $f[x(1+f(y))+f(y)]=x(1+y)+y$ ចំពោះគ្រប់ $x,\ y\in\mathrm{IR}$

ចំពោះ $x=1$ និង $y_1=y_2$

យើងបាន $f[1\cdot(1+f(y_1))+f(y_1)]=f[1\cdot(1+f(y_2))+f(y_2)]$

$\Rightarrow 1+y_1+y_1=1+y_2+y_2$

$\Rightarrow y_1=y_2$

គេបាន f ប្រកាន់

ចំពោះ $x=0$ យើងបាន $f[0\times(1+f(y))+f(y)]=0\times(1+y)+y$

$\Rightarrow f[f(y)]=y$ ចំពោះគ្រប់ $y\in\mathrm{IR}$

រឺ $f[f(x)]=x$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathrm{IR}$

ចំពោះ $y=0$ យើងបាន $f[x(1+f(0))+f(0)]=x=f[f(x)]$

ដោយ f ប្រកាន់ $x(1+f(0))+f(0)=f(x)$

តាង $f(0)=a\Rightarrow x(1+a)+a=f(x)$

$\Rightarrow f[x(1+a)+a]=f[f(x)]$

$\Rightarrow f(x)(1+a)+a=x$

$\Rightarrow [x(1+a)+a](1+a)+a=x$

$\Rightarrow x(1+a)^2+a(1+a)+a=x$

$\Rightarrow (2a+a^2)(x+1)=0$ យើងបាន $a=0$, $a=-2$

ដូចនេះ $f(x)=x$, $f(x)=-x-2$

លំហាត់ ៤

តាង f ជាអនុគមន៍ដែលមានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម

i- $f(n)$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

ii- $f(n)$ ជាចំនួនគត់

iii- $f(2)=2$

iv- $f(mn)=f(m)f(n)$ ចំពោះគ្រប់ m , n

v- $f(m) > f(n)$ កាលណា $m > n$ ។

គណនា $f(2007)$ ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១

យើងមាន $2 = f(2) = f(1\times 2) = f(1)\times f(2) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 1$

យើងបាន $f(2^2) = f(2)f(2) = 2^2$

តាមវិចារកំណើនយើងបាន $f(2^k) = 2^k$ ចំពោះ $k = 0\,,\,1,\,\ldots$

ដោយ មានចំនួនគត់ m ចំនួន $2^k - 1$ ដែល $2^k < m < 2^{k+1}$

និង មានចំនួនគត់ m' ចំនួន $2^k - 1$ ដែល $2^k = f(2^k) < m' < f(2^{k+1}) = 2^{k+1}$

តែ f ជាអនុគមន៍កើន

យើងបាន $f(2^k + j) = 2^k + j$ ចំពោះ $j = 1,\,2\,,\,\ldots\,,\,2^k - 1$

ដូចនេះ $f(2007) = 2007$

របៀបទី ២

យើងមាន $2 = f(2) = f(1\times 2) = f(1)\times f(2) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 1$

ឧបមាថា $f(k) = k$ ចំពោះ $k = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n$

យើងនឹងបង្ហាញថា $f(n+1) = n+1$ ពិត

បើ $n+1 = 2j\,,\,1 \le j < n$

យើងបាន $f(n+1) = f(2j) = f(2)f(j) = 2j = n+1$

បើ $n+1 = 2j+1,\,1 \le j < n$

យើងបាន $f(2j) = 2j\,,\;f(2j+2) = f(2)f(j+1) = 2j+2$

ដោយ $2j = f(2j) < f(2j+1) < f(2j+2) = 2j+2$

ហេតុនេះ $f(n+1) = f(2j+1) = 2j+1 = n+1$ ពិត

ដូចនេះ $f(2007)=2007$

លំហាត់ ៥

កំណត់ពហុធា $P(x)$ដឺក្រេទី ៤ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌពីរខាងក្រោម

i- $P(0)=0$

ii- $P(x)-P(x-1)=x(x+1)(2x+1)$ចំពោះគ្រប់ $x\in \mathrm{IR}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $P(0)=0$ និង $P(x)-P(x-1)=x(x+1)(2x+1),\ \forall x\in \mathrm{IR}$

ចំពោះ $x=0\Rightarrow P(0)-P(-1)=0\Rightarrow P(-1)=0$

ចំពោះ $x=-1\Rightarrow P(-1)-P(-2)=0\Rightarrow P(-2)=0$

យើងបាន $x=-2,\ -1,\ 0$ ជាឫសនៃពហុធា $P(x)$

យើងបាន $P(x)=x(x+1)(x+2)(ax+b)$ ចំពោះ $a,\ b\in \mathrm{IR}$

$$\Rightarrow P(x-1)=(x-1)x(x+1)[a(x-1)+b]$$

$$\Rightarrow P(x)-P(x-1)=x(x+1)[(x+2)(ax+b)-(x-1)(a(x-1)+b)]$$

$$=x(x+1)(4ax+3b-a)$$

ដោយ $P(x)-P(x-1)=x(x+1)(2x+1)$

ហេតុនេះ $\begin{cases}4a=2\\ 3b-a=1\end{cases}\Rightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $P(x)=\dfrac{1}{2}x(x+1)^2(x+2)$

លំហាត់ ៦

កំណត់អនុគមន៍ $f:\mathrm{IR}\to \mathrm{IR}$ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x,\ y$ គេបានសមីការ $f[x-f(y)]=1-x-y$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $f[x-f(y)]=1-x-y$ ចំពោះគ្រប់ x, $y\in IR$ (1)

យក $x=a+f(0)$និង $y=0$

យើងបាន $f[a+f(0)-f(0)]=1-a-f(0)$

$$\Rightarrow f(a)=1-a-f(0) \quad (2)$$

យក $x=a$ និង $k=1-f(0)$ ថេរ

យើងបាន $f(x)=-x+k$

ចំពោះគ្រប់ x, $y\in IR$ យើងបាន $f[x-f(y)]=-[x-f(y)]+k$

$$=-x+(-y+k)+k$$

$$=-x-y+2k \quad (3)$$

តាម (1) និង (3) យើងបាន $1-x-y=-x-y+2k\Rightarrow k=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $f(x)=-x+\frac{1}{2}$

លំហាត់ ៧

រកគ្រប់អនុគមន៍ f ដែលកំណត់ និង មានដេរីវេចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y ដែល $xy\neq 1$ហើយ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $f'(x)=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ (1)

និង $f'(y)=\frac{1+x^2}{(1-xy)^2}f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\frac{f'(x)}{f'(y)}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$

$\Rightarrow f'(x)(1+x^2) = f'(y)(1+y^2)$

ហេតុនេះ អង្គទាំងពីរត្រូវតែស្មើនឹងចំនួនថេរណាមួយ សន្មតថា k

យើងបាន $f'(x)(1+x^2) = k \Rightarrow f'(x) = \dfrac{k}{1+x^2}$

$$\Rightarrow f(x) = \int \frac{k}{1+x^2}\,dx = k\arctan x + c$$

បើ $y=0$ យើងបាន $f(x) + f(0) = f\left(\dfrac{x+0}{1-0}\right) = f(x) \Rightarrow f(0) = 0$

ដោយ $f(0) = k\arctan 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

ដូចនេះ $f(x) = k\arctan x$ ដែល k ជាចំនួនថេរ

លំហាត់ ៨

គេឲ្យទំនាក់ទំនង D មួយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

i- $D(1,0,0,1) = 1$

ii- $D(kw,x,ky,z) = kD(w,x,y,z)$

iii- $D(w,x,y,z) = -D(x,w,z,y)$

iv- $D(w+u,x,y+v,z) = D(w,x,y,z) + F(u,x,v,z)$

ដែល k , u , v , w , x , y និង z ជាចំនួនពិត ។

កំណត់ $D(a,b,c,d)$ ជាអនុគមន៍នៃ a , b , c និង d ។

ចម្លើយ

តាម (iii) យើងបាន $D(1,1,0,0) = -D(1,1,0,0) \Rightarrow D(1,1,0,0)$

និង $D(0,0,1) = -D(0,0,1,1) \Rightarrow D(0,0,1,1) = 0$

តាម (i) និង (iii) យើងបាន $D(0,1,1,0) = -D(1,0,0,1) = -1$

យើងបាន $D(a,b,c,d) = D(a+0,b,0+c,d)$

$$= D(a,b,0,d) + D(0,b,c,d)$$

$$= aD(1,b,0,d) + cD(0,b,1,d)$$

$$= -aD(b,1,0,d) - cD(b,0,d,1)$$

$$= -a(D(b,1,0,0) + D(0,1,d,0)) - c(D(b,0,01) + D(0,0,d,1))$$

$$= -abD(1,1,0,0) - adD(0,1,10) - cbD(1,0,0,1) - cdD(0,0,1,1)$$

$$= -ab(0) - ad(-1) - bc(1) - cd(0) = ad - bc$$

ដូចនេះ $D(a,b,c,d) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

លំហាត់ ៩

ធ្វើប្រមាណវិធីបូកខាងក្រោមដែលអក្សរនីមួយៗតាងលេខពី 0 ដល់ 9 ខុសៗគ្នា ។

$$\begin{array}{r} STILL \\ +STALL \\ STILT \\ \hline NITWIT \end{array}$$ ។

ចម្លើយ

ពិនិត្យជួរឈរខាងស្តាំ $2L+T=T \Rightarrow L=0$ រឺ $L=5$

បើ $L=0$ ជួរឈរទី ២ ទៅជា $L=I=0$ មិនពិត

បើ $L=5$ ជួរឈរទី ២ ទៅជា $3L+1=10+I \Rightarrow I=6$

ពិនិត្យជួរឈរទី ៤ ពីខាងស្តាំ $3T+2=20+T$

ព្រោះ $T=\overline{1,9}$ បូកត្រាទុក 1មិនស្មើនឹងខ្លួនឯង

យើងបាន $T=9$

ពិនិត្យជួរឈរខាងឆ្វេង $3S+2=\overline{NI} \Rightarrow 3S+2=10N+6$

យើងបាន $N=2$, $S=8$

ពិនិត្យជួរឈរទី ២ ពីស្តាំ យើងបាន $2I+A+1=10+W \Rightarrow A+3=W$

តែ $2I+A\geq 20$ យើងបាន $A=7$, $W=0$

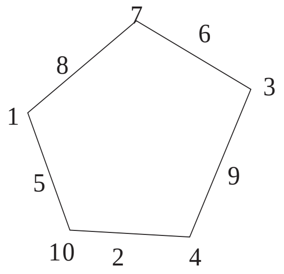
ដូចនេះ $A=7$, $I=6$, $L=5$, $N=2$, $S=8$, $T=9$ និង $W=0$

គេបានប្រមាណវិធីបូក

$$\begin{array}{r} 89655 \\ +89755 \\ 89659 \\ \hline 269069 \end{array}$$

លំហាត់ ១០

ចំនួនគត់ពី 1 ដល់ 10 ត្រូវបានគេរៀបលើកំពូល និង ជ្រុងនៃបញ្ចកោណមួយដែល ផលបូកចំនួនទាំងបីតាមជ្រុងនីមួយៗស្មើគ្នា ។ រូបខាងក្រោមបង្ហាញពីតំរៀបមួយ ដែលមាន ផលបូកតាមជ្រុងនីមួយៗស្មើ 16 ។ ចូរបង្ហាញពីតំរៀបថ្មីមួយទៀត ដែលមានតម្លៃផលបូកតូចបំផុត ។ ឲ្យឧទាហរណ៍បញ្ជាក់ពីតំរៀបនោះ ។



ចម្លើយ

តាងលេខលើកំពូល និង ជ្រុងនៃបញ្ចកោណដោយ a , b , c , d , e , f , g , h , i , j

ដោយ ផលបូកតាមជ្រុងនីមួយៗស្មើគ្នា (សន្មតថា x)

យើងបាន $a+b+c=x$

$c+d+e=x$

$e+f+g=x$

$g+h+i=x$

$i+j+a=x$

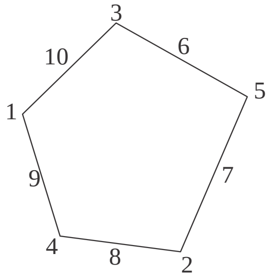
បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $(a+b+...+j)+(a+c+e+g+i)=5x$

$5x$ មានតម្លៃតូចបំផុតកាលណា $a+c+e+g+e=1+2+3+4+5=15$

ដូចនេះ $5x=15+(1+2+...+10) \Rightarrow x=14$

ហេតុនេះ ផលបូក ៣ ចំនួនតាមជ្រុងនីមួយៗមានតម្លៃតូចបំផុតស្មើនឹង 4

ឧទាហរណ៍



លំហាត់ ១១

តាង $m*n=\dfrac{m+n}{mn+4}$ ។ គណនា $A=((\ldots((2009*2008)*2007)*\ldots*1)*0)$ ។

ចម្លើយ

$m*n=\dfrac{m+n}{mn+4}\Rightarrow m*2=\dfrac{m+2}{2m+4}=\dfrac{1}{2}$ យើងបាន

$$A=((\ldots((2009*2008)*2007)*\ldots*1)*0)=\left(\frac{1}{2}*1\right)*0$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+4}\right)*0=\frac{1}{3}*0=\frac{\frac{1}{3}+0}{0+4}=\frac{1}{12}$$

ដូចនេះ $A=\dfrac{1}{12}$

លំហាត់ ១២

ប្រមាណវិធី $*$ ត្រូវបានកំណត់លើសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល បើ x និង y ជា ចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $x*y$ ក៏ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែរ ។ ដោយសន្មតថា $*$ បំពេញលក្ខខណ្ឌបីខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y និង z ។

គណនា $5*6$ ។

$$\begin{cases} x*(y+z)=(x*y)(x*z) & (1) \\ (x+y)*1=(x*1)+(y*1) & (2) \\ (x+y)*z=(x*2)+4(xy*1)+(y*2) & (3) \end{cases}$$

ចម្លើយ

តាម (2)

យក $x=y=1$ យើងបាន

$2*1=(1*1)+(1*1)=2(1*1)=2a$ (យក $a=1*1$)

យក $x=1, y=2$ យើងបាន

$3*1=(2*1)+(1*1)=2(1*1)+(1*1)=3a$

………………………………………………………………

$n*1=na$ ចំពោះ $\forall n\in \mathrm{IN}$

តាម (1)

យក $x=n, y=1, z=1$ យើងបាន

$n*2=(n*1)(n*1)=(n*1)^2=(na)^2$

យក $x=n, y=1, z=2$ យើងបាន

$n*3=(n*1)(n*2)=(n*1)^3=(na)^3$

………………………………………………………………

$n*m=(na)^m$ ចំពោះ $\forall n,m\in \mathrm{IN}$

ដោយ $2*2=(2a)^2=4a^2$ តែ តាម (3) យក $x=y=1$

យើងបាន៖ $2*2=(1*2)+4(1*1)+(1*2)\Leftrightarrow 4a^2=a^2+4a+a^2$

$\Rightarrow a=2$ ព្រោះ $a\neq 0$

គេបាន $n * m = (2n)^m$

ដូចនេះ $5 * 6 = (2 \times 5)^6 = 10^6$

លំហាត់ ១៣

គេមានបីគូលំដាប់ (a_1,b_1), (a_2,b_2) និង (a_3,b_3) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$a^3-3ab^2=2009$ និង $b^3-3a^2b=2008$ ។ គណនា

$$P=\left(1-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(1-\frac{a_2}{b_2}\right)\left(1-\frac{a_3}{b_3}\right)$$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\begin{cases}a^3-3ab^2=2009\\ b^3-3a^2b=2008\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a^3-3ab^2)2008=2008\times 2009\\ (b^3-3a^2b)2009=2008\times 2009\end{cases}$

ដកអង្គ និង អង្គយើងបាន $(a^3-3ab^2)2008-(b^3-3a^2b)2009=0$

ដោយ b មិនអាចស្មើសូន្យ ព្រោះ បើ $b=0\Rightarrow b^3-3a^2b=2008$ មិនពិត

យើងបាន $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}\right)\right]2008-\left[1-3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]2009=0$

តាង $t=\frac{a}{b}$ យើងបាន $2008(t^3-3t)-2009(1-3t^2)=0$ (*)

ជាសមីការដឺក្រេទី ៣ មានមេគុណនាំមុខស្មើនឹង 2008

ដោយ (a_1,b_1), (a_2,b_2) និង (a_3,b_3) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$a^3-3ab^2=2009$ និង $b^3-3a^2b=2008$

ហេតុនេះ $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ ជាឫសនៃសមីការ (*)

យើងបាន $2008(t^3-3t)-2009(1-3t^2)$

$$=2008\left(t-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(t-\frac{a_2}{b_2}\right)\left(t-\frac{a_3}{b_3}\right)$$

បើ $t=1$ យើងបាន $2008P=2008(1-3)-2009(1-3)=2$

ហេតុនេះ $P=\dfrac{1}{1004}$

លំហាត់ ១៤

រកគ្រប់គូ (x,y)ជារឹសនៃសមីការ $2007^{\sin^2 x}+2007^{\cos^2 x}=2009+\cos 2y$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $2007^{\sin^2 x}+2007^{\cos^2 x}=2009+\cos 2y$

$$\Rightarrow 2007^{\sin^2 x}+2007^{1-\sin^2 x}=2008+1+\cos 2y$$

$$\Rightarrow 2007^{\sin^2 x}+\frac{2007}{2007^{\sin^2 x}}-2008=2\cos^2 y \qquad (1)$$

តាង $u=2007^{\sin^2 x}$ ដោយ $-1\le \sin x\le 1 \Rightarrow 0\le \sin^2 x\le 1$

$$\Rightarrow 1\le u\le 2007$$

យើងបាន $(1)\Leftrightarrow u+\dfrac{2007}{u}-2008=2\cos^2 y$

$$\Rightarrow \frac{u^2-2008u+2007}{u}=2\cos^2 y$$

$$\Rightarrow \frac{(u-1)(u-2007)}{u}=2\cos^2 y \qquad (2)$$

ដោយ $\dfrac{(u-1)(u-2007)}{u}\le 0$ ព្រោះ $1\le u\le 2007$ និង $2\cos^2 y\ge 0$

ហេតុនេះ (2) ពិត លុះត្រាតែ $\begin{cases}(u-1)(u-2007)=0\\ \cos^2 y=0\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}u=1\\ u=2007\end{array}\right.\\ \cos y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}u=1\\ u=2007\end{array}\right.\\ y=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$$

បើ $u=1 \Rightarrow 2007^{\sin^2 x}=1 \Rightarrow \sin^2 x=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=k'\pi$

បើ $u=2007 \Rightarrow 2007^{\sin^2 x}=2007 \Rightarrow \sin^2 x=1 \Rightarrow \sin x=\pm 1$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k'\pi$$

ដូចនេះ $(x,y)=\left(k'\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\left(\frac{\pi}{2}+k'\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

លំហាត់ ១៥

គេឲ្យ a , b , c , x , y ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^3+ax+y=0$, $b^3+bx+y=0$ និង $c^3+cx+y=0$ ។ បើ a , b , c ជាបីចំនួនផ្សេងគ្នា បង្ហាញថា $a+b+c=0$ ។

(Junior Balkan,1999)

សម្រាយ

ដោយ $a^3+ax+y=0$, $b^3+bx+y=0$ និង $c^3+cx+y=0$

យើងបាន a , b , c ជាឫសនៃសមីការ $t^3+xt+y=0$

និង a , b , c ជាបីចំនួនផ្សេងគ្នា

តាមទ្រឹស្តីបទ Viéte យើងបាន $a+b+c=0$

លំហាត់ ១៦

បង្ហាញថា សមីការ $x^5+x=2009$ មានឫសពិជ្ជមានតែមួយគត់ ហើយឫសនោះជាចំនួនអសនិទាន ។ គេឲ្យ $4.5^5 \approx 1845$ និង $4.6^5 \approx 2059$ ។

សម្រាយ

យក $f(x)=x^5+x-2009 \Rightarrow f'(x)=5x^4+1>0$

យើងបាន f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង កើនជានិច្ចលើ IR

ដោយ $f(4.5)=4.5^5+4.5-2009=1845+4.5-2009<0$

និង $f(4.6)=4.6^5+4.6-2009=2059+4.6-2009>0$

យើងបាន $f(4.5)\times f(4.6)<0$

តាមទ្រឹស្តីបទកណ្តាល យើងបាន f មានរឹស x_0 វិជ្ជមានតែមួយគត់ដែល

$4.5<x_0<4.6$

ឧបមាថា x_0 ជាចំនួនសនិទាន

យើងបាន $x_0=\dfrac{p}{q}$ ដែល p , q ជាចំនួនគត់បឋមរវាងគ្នា និង $q\neq 1$

ហេតុនេះ $x_0^5+x_0-2009=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{p}{q}\right)^5+\left(\dfrac{p}{q}\right)-2009=0$

$\Rightarrow p^5+pq^4=2009q^5 \Rightarrow p^5=q^4(2009q-p)$

$\Rightarrow p^5$ ចែកដាច់នឹង $q \Rightarrow p$ ចែកដាច់នឹង q មិនពិត

ដូចនេះ សមីការមានរឹសវិជ្ជមានតែមួយគត់ ហើយរឹសនោះជាចំនួនអសនិទាន

លំហាត់ ១៧

គេឲ្យ α , β ជារឹសនៃសមីការ $x^2+px+1=0$ និង γ , δ ជារឹសនៃសមីការ $x^2+qx+1=0$ ។ បង្ហាញថា $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)=q^2-p^2$ ។

សម្រាយ

ដោយ α , β ជារឹសនៃសមីការ $x^2+px+1=0$

និង γ , δ ជារឹសនៃសមីការ $x^2+qx+1=0$

យើងបាន $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=1$ និង $\gamma+\delta=-q$, $\gamma\delta=1$

ហេតុនេះ $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$

$=[(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)][(\beta-\gamma)(\alpha+\gamma)]$

$$=(\alpha\beta+\alpha\delta-\beta\gamma-\gamma\delta)(\alpha\beta+\beta\delta-\alpha\gamma-\gamma\delta)$$
$$=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\beta\delta-\alpha\gamma)$$
$$=\alpha\beta\delta^2-\alpha^2\gamma\delta-\beta^2\gamma\delta+\alpha\beta\gamma^2=\delta^2-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2$$
$$=\left[(\delta+\gamma)^2+2\delta\gamma\right]-\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]$$
$$=(q^2-2)-(p^2-2)=q^2-p^2$$

លំហាត់ ១៨

គេឲ្យ α , β ជាឫសនៃសមីការ $x^2+px+q=0$ និង γ , δ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+Px+Q=0$ ។ គណនា $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)$ ជាអនុគមន៍នៃ p , q , P និង Q ។

ចម្លើយ

ដោយ α , β ជាឫសនៃសមីការ $x^2+px+q=0$

និង γ , δ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+Px+Q=0$

យើងបាន $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$ និង $\gamma+\delta=-P$, $\gamma\delta=Q$

ហេតុនេះ $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)$

$$=[(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)][(\delta-\alpha)(\delta-\beta)]$$
$$=(\gamma^2+p\lambda+q)(\delta^2+p\delta+q)$$
$$=\gamma^2\delta^2+p\gamma^2\delta+q\gamma^2+p\gamma\delta^2+p^2\gamma\delta+pq\gamma+q\delta^2$$
$$+pq\delta+q^2$$
$$=(\gamma\delta)^2+pr\delta(\gamma+\delta)+q\left[(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\right]+p^2\gamma\delta$$
$$+pq(\gamma+\delta)+q^2$$
$$=Q^2-pPQ+q(P^2-2Q)+p^2Q-pqP+q^2$$
$$=Q^2+q^2-pP(Q+q)+qP^2+p^2Q-2qQ$$

លំហាត់ ១៩

គេឲ្យសមីការ $x^2+ax+1=0$ និង $x^2+x+a=0$ ។ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការទាំងពីរមានរឹសរួមយ៉ាងហោចមួយ ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១

តាម $x^2+x+a=0 \Rightarrow a=-x^2-x$

យើងបាន $x^2+ax+1=0 \Leftrightarrow x^2+\left(-x^2-x\right)x+1=0$

$$\Rightarrow x^3-1=0$$
$$\Rightarrow (x-1)\left(x^2+x+1\right)=0$$

ហេតុនេះ $x=1$ រឺ $x^2+x+1=0$

បើ $x=1$ យើងបាន $a=-1-1=-2$

បើ $x^2+x+1=0$ យើងបាន $a=-\left(x^2+x\right)=-(-1)=1$

របៀបទី ២

តាម លំហាត់ ៨៩ ដើម្បីឲ្យសមីការទាំងពីរមានរឹសរួមយ៉ាងហោចមួយ

លុះត្រាតែ $Q^2+q^2-pP(Q+q)+qP^2+p^2Q-2qQ=0$

ដែល $p=a$, $q=1$, $P=1$ និង $Q=a$

យើងបាន $a^2+1-a(a+1)+a^3-2a=a^3-3a+2$

$$=(a-1)\left(a^2+a-2\right)$$
$$=(a-1)^2(a+2)=0$$

ហេតុនេះ $a=-2$ រឺ $a=1$

លំហាត់ ២០

កំណត់ចំនួនគត់ a ដើម្បីឲ្យពហុធា $(x-a)(x-10)+1$ អាចសរសេរជារាង

$(x+b)(x+c)$ ដែល b , c ជាចំនួនគត់ ។

ចម្លើយ

បើ $(x-a)(x-10)+1=(x+b)(x+c)$

យើងបាន $x=-b$ ជាឫសនៃពហុធា $(x-a)(x-10)+1$

ហេតុនេះ $(-b-a)(-b-10)+1=0 \Rightarrow (b+a)(b+10)=-1$ (*)

ដោយ a , b ជាចំនួនគត់ $\Rightarrow a+b$, $b+10$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ

តាម (*) យើងបាន $\begin{cases} b+a=1 \\ b+10=-1 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} b+a=-1 \\ b+10=1 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ គេបាន $(a,b)=(12,-11)$ ឬ $(8,-9)$

ចំពោះ $a=12$ យើងបាន $(x-a)(x-10)+1=(x-12)(x-10)+1$

$$=(x-11)^2$$

ចំពោះ $a=8$ យើងបាន $(x-a)(x-10)+1=(x-8)(x-10)+1$

$$=(x-9)^2$$

លំហាត់ ២១

កំណត់ចំនួនគត់មិនសូន្យខុសៗគ្នា a , b , c ដើម្បីឲ្យពហុធាដឺក្រេទី ៤ មានមេគុណជាចំនួនគត់ $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$ អាចសរសេរជាផលគុណនៃពីរពហុធាមិនថេរ និង មានមេគុណជាចំនួនគត់ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២២

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យផលបូកការេនៃឫសរបស់សមីការ

$x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ មានតម្លៃតូចបំផុត ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១

យក $x_1,\ x_2$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$

យើងបាន $\begin{cases} x_1^2+(m-2)x_1-(m+3)=0 \\ x_2^2+(m-2)x_2-(m+3)=0 \end{cases}$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $x_1^2+x_2^2+(m-2)(x_1+x_2)-2(m+3)=0$

ដោយ $x_1+x_2=-(m-2)$

យើងបាន $x_1^2+x_2^2-(m-2)^2-2(m-3)=0$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=(m-2)^2+2(m+3)=(m-1)^2+9\geq 9$$

ដូចនេះ $x_1^2+x_2^2$ មានតម្លៃតូចបំផុតស្មើនឹង 9 ពេល $m=1$

របៀបទី ២

យើងមាន $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

ដោយ $x_1+x_2=-(m-2),\ x_1x_2=-(m+3)$

យើងបាន $x_1^2+x_2^2=(m-2)^2+2(m+3)=(m-1)^2+9\geq 9$

ដូចនេះ $x_1^2+x_2^2$ មានតម្លៃតូចបំផុតស្មើនឹង 9 ពេល $m=1$

លំហាត់ ២៣

ដោះស្រាយសមីការ ក/ $(x^2+x-2)^3+(2x^2-x-1)^3=27(x^2-1)^3$

ខ/ $x^4+2x^3+2x^2+x-2=0$ ។

ចម្លើយ

ក/ យើងមាន $(x^2+x-2)^3+(2x^2-x-1)^3=27(x^2-1)^3$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^3+(2x^2-x-1)^3=(3x^2-3)^3 \quad (1)$$

តាង $a = x^2 + x - 2$, $b = 2x^2 - x - 1$

យើងបាន $a + b = 3x^2 - 3$

ហេតុនេះ $(1) \Leftrightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 \Rightarrow 3ab(a+b) = 0$

លុះត្រាតែ $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ a = -b \end{array}\right.$

- បើ $a = 0$ យើងបាន $x^2 + x - 2 = 0$ សមីការមានរឹស $x = 1,\ x = -2$
- បើ $b = 0$ យើងបាន $2x^2 - x - 1 = 0$ សមីការមានរឹស $x = 1,\ x = -\frac{1}{2}$
- បើ $a + b = 0$ យើងបាន $x^2 = 1$ សមីការមានរឹស $x = \pm 1$

ដូចនេះ សមីការមានរឹស $x \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$

ខ/ យើងមាន $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$

$$\Rightarrow (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + x) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + x)^2 + (x^2 + x) - 2 = 0$$

តាង $y = x^2 + x$ យើងបាន $y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$ រឺ $y = -2$

- បើ $y = 1$ យើងបាន $x^2 + x - 1 = 0$

  សមីការមានរឹស $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- បើ $y = -2$ យើងបាន $x^2 + x + 2 = 0$ សមីការគ្មានរឹស

ដូចនេះ សមីការមានរឹស $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

លំហាត់ ២៤

គេឲ្យ x, y ជាពីរចំនួនបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$ ។

បង្ហាញថា $x+y=10$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$

$\Rightarrow 2(x+y)^3-3x^2y-3xy^2+30xy-2000=0$

$\Rightarrow 2\left[(x+y)^3-1000\right]-3xy\left[(x+y)-10\right]=0$

$\Rightarrow 2(x+y-10)\left[(x+y)^2+10(x+y)+100\right]-3xy(x+y-10)=0$

$\Rightarrow (x+y-10)\left(2x^2+2y^2+20x+20y+xy+200\right)=0$ (*)

របៀបទី ១

ដោយ $2x^2+2y^2+20x+20y+xy+200$

$=\left(x^2+20x+100\right)+\left(y^2+20y+100\right)+x^2+xy+\frac{y^2}{4}+\frac{3y^2}{4}$

$=(x+10)^2+(y+10)^2+\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}>0$ ចំពោះគ្រប់ x , $y\in \mathrm{IR}$

យើងបាន (*) ពិត លុះត្រាតែ $x+y-10=0$

ដូចនេះ $x+y=10$

របៀបទី ២

យើងមាន $2x^2+2y^2+20x+20y+xy+200$

$=2x^2+(20+y)x+2y^2+20y+200$

ជាសមីការដឺក្រេទី ២ ធៀបនឹង x មាន

$\Delta=(20+y)^2-8\left(2y^2+20y+200\right)=-15y^2-120y-200$

$=-15\left[(y+4)^2+64\right]<0$ ចំពោះគ្រប់ $y\in \mathrm{IR}$

យើងបាន $\Delta<0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in \mathrm{IR}$ ព្រោះ $a=2>0$

យើងបាន (*) ពិត លុះត្រាតែ $x+y-10=0$

ដូចនេះ $x+y=10$

លំហាត់ ២៥

រកគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែលចំពោះគ្រប់ n មានមួយចំនួនគត់ x ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $999(1999^n+1)=2(x^2+x)$ ។

(ភ្នំពេញ,2005)

ចម្លើយ

យើងមាន $999(1999^n+1)=2(x^2+x)$

$$\Rightarrow 4x^2+4x=1998\cdot 1999^n+1998$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2=1998\cdot 1999^n+1999$$

បើ $n=1$ យើងបាន $(2x+1)^2=1999^2 \Rightarrow 2x+1=\pm 1999$

$\Rightarrow x=-1000$ រឺ $x=999$

បើ $n\geq 2$ យើងបាន $\Rightarrow (2x+1)^2=1998\cdot 1999^n+1999$

$=1999(1998\cdot 1999^{n-1}+1)$

យើងបាន $(2x+1)^2$ ចែកដាច់នឹង 1999

$\Rightarrow (2x+1)^2$ ចែកដាច់នឹង 1999^2

យើងបាន $1998\cdot 1999^{n-1}+1$ ចែកដាច់នឹង 1999 មិនពិត

ហេតុនេះ $n=1$ ជាចម្លើយតែមួយគត់

លំហាត់ ២៦

ឧបមាថា x_1, x_2 ជារឹសនៃសមីការ $2004x^2-(5t-4)x-2004=0$ ។

រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $H=(x_2-x_1)^2+4\left(\frac{x_1-x_2}{2}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)^2$ ។

(ភ្នំពេញ,2004)

ចម្លើយ

ដោយ x_1, x_2 ជាឫសនៃសមីការ $2004x^2-(5t-4)x-2004=0$

យើងបាន $x_1+x_2=\dfrac{5t-4}{2004}$, $x_1x_2=-1$

យើងបាន $H=(x_2-x_1)^2+4\left(\dfrac{x_1-x_2}{2}+\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)^2$

$$=(x_2-x_1)^2+4\left(\frac{x_1-x_2}{2}-\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right)^2$$

$$=(x_2-x_1)^2+4(x_2-x_1)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x_1x_2}\right)^2$$

$$=(x_2-x_1)^2\left[1+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x_1x_2}\right)^2\right]$$

$$=\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]\left[1+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x_1x_2}\right)^2\right]$$

$$=10\left[\left(\frac{5t-4}{2004}\right)^2+4\right]=10\left(\frac{5t-4}{2004}\right)^2+40\geq 40$$

ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមានៃ H គឺ $H_{\min}=40$ ពេល $t=\dfrac{4}{5}$

លំហាត់ ២៧

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទី ២ $p(x)=x^2+ax+b$ ដែល a, b ជាចំនួនគត់ ។

ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathrm{Z}$ បង្ហាញថាមាន $m\in\mathrm{Z}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $p(n)p(n+1)=p(m)$ ។

សម្រាយ

របៀបទី ១

ដើម្បីបង្ហាញសំណើខាងលើយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $p(n)p(n+1)$ អាចសរសេរ

ជារាង $p(m)$ ដែល m ជាចំនួនគត់ណាមួយ

យើងមាន $p(n)p(n+1)=(n^2+an+b)[(n+1)^2+a(n+1)+b]$

$$=n^2(n+1)^2+a[n(n+1)^2+n^2(n+1)]$$

$$+b[n^2+(n+1)^2]+a^2n(n+1)+b^2+ab(2n+1)$$

$$=n^2(n+1)^2+a^2n^2+b^2+2an^2(n+1)+2bn(b+1)$$

$$+2nab+a^2n+an(n+1)+ab+b$$

$$=[n(n+1)+an+b]^2+a[n(n+1)+an+b]+b$$

$$=p(n(n+1)+an+b)=p(m)$$ ដែល $m=n(n+1)+an+b$

របៀបទី ២

បើ $x_1,\ x_2$ ជាឫសនៃសមីការ $p(x)=0$

យើងបាន $p(x)=(x-x_1)(x-x_2)$

$$\Rightarrow p(n)p(n+1)=(n-x_1)(n-x_2)(n+1-x_1)(n+1-x_2)$$

$$=(n-x_1)(n+1-x_2)(n-x_2)(n+1-x_1)$$

$$=[n(n-x_2)+n-x_1(n-x_2)-x_1][n(n-x_1)+n-x_2(n-x_1)-x_2]$$

$$=(m-x_1)(m-x_2)=p(m)$$

ដែល $m=n^2-(x_1+x_2)n+x_1x_2+n=n^2+an+b+n$ ជាចំនួនគត់

របៀបទី ៣

បង្ហាញថា សមីការដឺក្រេទី ២ ធៀបនឹងអថេរ m គឺ

$m^2+am+b=(n^2+an+b)[(n+1)^2+a(n+1)+b]$ មានឫសជាចំនួនគត់

ដោយប្រើឌីសគ្រីមីណង់ (បង្ហាញថា Δ ជាការេប្រាកដ រួចទាញរកឫសទាំងនោះ)

សូមសាកល្បងស្រាយដោយខ្លួនឯង

លំហាត់ ២៨

ដោះស្រាយសមីការ $\frac{1}{[x]}+\frac{1}{[2x]}=\{x\}+\frac{1}{3}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $0\le\{x\}<1\Rightarrow\{x\}+\frac{1}{3}>0\Rightarrow x>0$

តាង $[x]=n$, $\{x\}=f$ យើងបាន $x=n+f$

ចំពោះ $f<\frac{1}{2}\Rightarrow 2f<1\Rightarrow[2x]=[2(n+f)]=[2n+2f]=2n$

យើងបាន $\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}=f+\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\ge\frac{1}{3}\Rightarrow n\ge\frac{9}{2}$

$\Rightarrow n=1,\ 2,\ 3,\ 4$

បើ $n=1$ យើងបាន $f>\frac{1}{2}$ មិនយក

បើ $n=2,\ 3,\ 4\Rightarrow f=\frac{5}{12},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24}$

យើងបាន $x=\frac{29}{12},\ \frac{19}{6},\ \frac{97}{24}$

ចំពោះ $\frac{1}{2}\le f<1$ យើងបាន $[2x]=2n+1$ ព្រោះ $1\le 2f<2$

យើងបាន $\frac{1}{n}+\frac{1}{2n+1}=f+\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{n}+\frac{1}{2n+1}\ge\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 10n^2-13n-6\le 0\Rightarrow n=1\Rightarrow f=1$ មិនពិត

ហេតុនេះ សមីការមានរឹស $x=\frac{29}{12},\ \frac{19}{6},\ \frac{97}{24}$

លំហាត់ ២៩

យក a , b ជាពីរចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌឲ្យសមីការ $x^3 - ax + b = 0$ មានរឹសទាំងបីជាចំនួនពិត ។ បើ α ជារឹសដែលមានតម្លៃដាច់ខាតតូចជាងគេ

បង្ហាញថា $\frac{b}{a} < \alpha \le \frac{3b}{2a}$ ។

សម្រាយ

យក α , β , γ ជារឹសនៃសមីការ $x^3 - ax + b = 0$

តាមទ្រឹស្តីបទ Viete យើងបាន $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (1)

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -a \qquad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma = -b \qquad (3)$$

តាម (3) យើងបាន α , β , γ សុទ្ធតែជាចំនួនអវិជ្ជមាន

រឺ ពីរចំនួនក្នុងចំណោម α , β , γ ជាចំនួនវិជ្ជមាន

តាម (2) បង្ហាញថា α , β , γ មិនអាចជាចំនួនអវិជ្ជមានទាំងបី

តាម (1) យើងសន្និដ្ឋានបានថា រឹសដែលជាចំនួនអវិជ្ជមានមានតម្លៃដាច់ខាតធំជាងរឹសពីរផ្សេងទៀតដែលជាចំនួនវិជ្ជមាន

ហេតុនេះ យើងអាចសន្មតថា $\lambda < 0 < \alpha \le \beta \Rightarrow |\alpha| \le |\beta| \le |\gamma|$

យើងមាន $b - \alpha a = -\alpha\beta\gamma + \alpha(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$$= \alpha^2(\beta + \gamma) = -\alpha^3 < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < \alpha \quad \text{ព្រោះ } a > 0$$

ម៉្យាងទៀត $3b - 2a\alpha = -3\alpha\beta\gamma + 2\alpha(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$$= -\alpha\beta\gamma + 2\alpha^2\beta + 2\alpha^2\gamma$$

$$= \alpha[2\alpha(\beta + \gamma) - \beta\gamma]$$

$$= \alpha[-2(\beta + \gamma)^2 - \beta\gamma] \quad \text{ព្រោះ } \alpha = -\beta - \gamma$$

$$= -\alpha\left(2\beta^2 + 5\beta\gamma + 2\gamma^2\right)$$

$$= -\alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq \frac{3b}{2a}$$

ហេតុនេះ $\frac{b}{a} < \alpha \leq \frac{3b}{2a}$

លំហាត់ ៣០

គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$ ។ យក λ ជាឬសមួយនៃសមីការ $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ។ បង្ហាញថា $|\lambda| \leq 1$ ដែល λ អាចជាចំនួនកុំផ្លិច ឬ ចំនួនពិត ។

សម្រាយ

λ ជាឬសមួយនៃសមីការ $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

យើងបាន $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow \lambda^3 = -a\lambda^2 - b\lambda - c$

$$\Rightarrow \lambda^4 = -a\lambda^3 - b\lambda^2 - c\lambda = (1-a)\lambda^3 + (a-b)\lambda^2 + (b-c)\lambda + c$$

បើ $|\lambda| \geq 1$ យើងបាន $|\lambda|^4 \leq (1-a)|\lambda|^3 + (a-b)|\lambda|^2 + (b-c)|\lambda| + c$

$$\leq (1-a)|\lambda|^3 + (a-b)|\lambda|^3 + (b-c)|\lambda|^3 + c|\lambda|^3$$

$$\leq |\lambda|^3 \Rightarrow |\lambda| \leq 1$$

ក្នុងករណីនេះ $\lambda = 1$ ជាចំនួនតែមួយគត់បំពេញលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ

ហេតុនេះ យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា $|\lambda| \leq 1$

លំហាត់ ៣១

បង្ហាញថា ពហុធា $f(x) = x^4 + 26x^3 + 52x^2 + 78x + 1989$ មិនអាចសរសេរជារាង $f(x) = p(x)q(x)$ ដែល $p(x)$ និង $q(x)$ ជាពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ និង ដឺក្រេតូចជាង ឬ ស្មើនឹង 3 ។

សម្រាយ

ឧបមាថា $f(x)$ អាចសរសេរជារាង $f(x)=p(x)q(x)$ ដែល $p(x)$ និង $q(x)$ ជាពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ និង ដឺក្រេតូចជាង រឺ ស្មើនឹង 3

យើងបាន $f(x)=(x+a)(x^3+bx^2+cx+d)$

រឺ $f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

ចំពោះ $f(x)=(x+a)(x^3+bx^2+cx+d)$

ដោយ $f(x)=x^4+26x^3+52x^2+78x+1989$

ប្រៀបធៀបមេគុណនៃ x^i, $i=\overline{0,4}$

យើងបាន $a+b=26$

$$ab+c=52$$

$$ac+d=78$$

$$ad=1989$$

ដោយ $1989=3^2\times 13\times 17$

យើងបាន 13 ចែកដាច់ a រឺ d តែមិនទាំងពីរព្រមគ្នា

បើ 13 ចែកដាច់ $a \Rightarrow$ 13 ចែកដាច់ $d=78-ac$ មិនពិត

បើ 13 ចែកដាច់ $d \Rightarrow$ 13 ចែកដាច់ $ac=78-d$

$\Rightarrow$ 13 ចែកដាច់ c ព្រោះ 13 ចែកមិនដាច់ a

យើងបាន 13 ចែកដាច់ $ab=52-c \Rightarrow$ 13 ចែកដាច់ b

ហេតុនេះ 13 ចែកដាច់ $a=26-b$ មិនពិត

ដូចនេះ $f(x)$ មិនអាចសរសេរជារាង $(x+a)(x^3+bx^2+cx+d)$

ចំពោះ $f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

ប្រៀបធៀបមេគុណ x^i, $i=\overline{0,4}$

យើងបាន $a=c=26$

$$b+ac+d=52$$

$$ad+bc=78$$

ស្រាយដូចករណី $f(x)=(x+a)(x^3+bx^2+cx+d)$ដែរ គឺ ប្រើភាពចែកដាច់នឹង 13 យើងឃើញថាគ្មាន a , b , c , d ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

ដូចនេះ $f(x)$ មិនអាចសរសេរជារាង $f(x)=p(x)q(x)$ ដែល $p(x)$ និង $q(x)$ ជាពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ និង ដឺក្រេតូចជាង រឺ ស្មើនឹង 3

លំហាត់ ៣២

គេឲ្យ α , β , γ ជារឹសនៃសមីការ $x^3-x-1=0$ ។

គណនា $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$ ។

ចម្លើយ

យក $f(x)=x^3-x-1$

យើងមាន $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+1+\frac{1-\beta}{1+\beta}+1+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}+1-3$

$$=2\left(\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}+\frac{1}{1+\gamma}\right)-3$$

ដោយ α , β , γ ជារឹសពហុធា $f(x)=x^3-x-1$

យើងបាន $\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1$ជារឹសនៃពហុធា $f(x+1)=x^3+3x^2+2x-1$

ហេតុនេះ $(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=-3$

$$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\alpha+1)(\gamma+1)=2$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=1$$

យើងបាន $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}=2\left(\frac{2}{1}\right)-3=1$

លំហាត់ ៣៣

i- បង្ហាញថា $Arc\tan a+Arc\tan b=Arc\tan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

បើគេដឹងថា $-\frac{\pi}{2}<Arc\tan a+Arc\tan b<\frac{\pi}{2}$ ។

ii- បង្ហាញថា $Arc\tan\frac{1}{2}+Arc\tan\frac{1}{5}+Arc\tan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$ ។

iii- ដោះស្រាយសមីការ $Arc\tan x+Arc\tan 2x=\frac{\pi}{4}$ ។

iv- សម្រួលកន្សោម

ក/ $Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ចំពោះ $0\le x\le 2\pi$ និង $x\ne\pi$

ខ/ $Arc\tan\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$ ចំពោះ $0<x<\frac{3\pi}{4}$ ។

សម្រាយ

i- យើងមាន $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$

យក $x=Arc\tan a$, $y=Arc\tan b$

យើងបាន $\tan(Arc\tan a+Arc\tan b)$

$$=\frac{\tan(Arc\tan a)+\tan(Arc\tan b)}{1-\tan(Arc\tan a)\tan(Arc\tan b)}=\frac{a+b}{1-ab}$$

ដោយ $-\frac{\pi}{2}<Arc\tan a+Arc\tan b<\frac{\pi}{2}$

ហេតុនេះ $Arc\tan a + Arc\tan b = Arc\tan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

ii- តាម (i) យើងបាន $Arc\tan\frac{1}{2} + Arc\tan\frac{1}{5} + Arc\tan\frac{1}{8}$

$$= Arc\tan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}\right) + Arc\tan\frac{1}{8} = Arc\tan\frac{7}{9} + Arc\tan\frac{1}{8}$$

$$= Arc\tan\left(\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{8}}\right) = Arc\tan 1 = Arc\tan\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $Arc\tan\frac{1}{2} + Arc\tan\frac{1}{5} + Arc\tan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

iii- យើងមាន $Ac\tan x + Ac\tan 2x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow Arc\tan\left(\frac{x+2x}{1-2x^2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \frac{3x}{1-2x^2} = 1 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0$$ ចំពោះ $x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ សមីការមានរឹស $x = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$

iv- ក/ យើងមាន $Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = Arc\tan\sqrt{\tan^2\frac{x}{2}} = Arc\tan\left(\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)$

បើ $0 \leq x < \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\frac{x}{2} > 0$

យើងបាន $Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = Arc\tan\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$

បើ $\pi < x \le 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} \le \pi \Rightarrow \tan\frac{x}{2} < 0$

យើងបាន $Arc\tan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = Arc\tan\left(-\tan\frac{x}{2}\right)$

$$= Arc\tan\left[\tan\left(\pi - \frac{x}{2}\right)\right] = \pi - \frac{x}{2}$$

ខ/ យើងមាន $Arc\tan\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right) = Arc\tan\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$

$$= Arc\tan\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}\right) = Arc\tan\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]$$

ដោយ $-\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$ ព្រោះ $0 < x < \frac{3\pi}{4}$

ហេតុនេះ $Arc\tan\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right) = \frac{\pi}{4} - x$

លំហាត់ ៣៤

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនគត់សេស ។ បង្ហាញថា សមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ មិនអាចមានរឹសជាចំនួនសនិទាន ។

សម្រាយ

ឧបមាថា សមីការមានរឹសជាចំនួនសនិទាន គឺ $x = \frac{p}{q}$ ដែល p , q បឋមនឹងគ្នា

យើងបាន $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$

$\Rightarrow qp^2 + bpq + cq^2 = 0 \Rightarrow p$ ចែកដាច់ c និង q ចែកដាច់ a

ដោយ a និង c ជាចំនួនគត់សេស$\Rightarrow p$, q ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ

យើងបាន ap^2 , bpq និង cq^2 ជាចំនួនគត់សេស

តែ ផលបូកចំនួនគត់សេសចំនួនសេសដងមិនអាចស្មើនឹងសូន្យ

ហេតុនេះ (*) មិនពិត

ដូចនេះ សមីការគ្មានរឹសជាចំនួនសនិទាន

លំហាត់ ៣៥

គេឲ្យ a , b , c , d ជាបួនចំនួនគត់វិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\log_a b = \frac{3}{2},\ \log_c d = \frac{5}{4}$ និង $a - c = 9$ ។ គណនា $b - d$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\log_a b = \frac{3}{2},\ \log_c d = \frac{5}{4} \Rightarrow b = a^{\frac{3}{2}},\ d = c^{\frac{5}{4}}$

ដោយ a , b , c , d ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

យើងបាន $a = x^2,\ c = y^4$ ដែល $x,\ y \in \mathrm{IN} \Rightarrow b = x^3,\ d = y^5$

តែ $a - c = 9 \Rightarrow x^2 - y^4 = 9 \Rightarrow (x - y^2)(x + y^2) = 9$

ដោយ $x + y^2 > 0 \Rightarrow x - y^2 > 0$ និង $x + y^2 > x - y^2$

យើងបាន $\begin{cases} x - y^2 = 1 \\ x + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 5,\ y = 2$

ដូចនេះ $b - d = 5^3 - 2^5 = 125 - 32 = 93$

លំហាត់ ៣៦

កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $|x| - |y|$ បើគេដឹងថា $\log_4(x + 2y) + \log_4(x - 2y) = 1$ ។

ចម្លើយ

មាន x , y បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} x+2y>0 \\ x-2y>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2y \\ x>2y \end{cases} \Rightarrow x>2|y|\geq 0$

តាង $a=|x|-|y|=x-|y| \Rightarrow |y|=x-a \qquad (1)$

យើងមាន $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$

$\Rightarrow x^2-4y^2=4 \qquad (2)$

តាម (1),(2) យើងបាន $x^2-4(x-a)^2=4$

$$\Rightarrow 3x^2 8ax+4a^2+4a=0 \quad (*)$$

មាន $\Delta'=(4a)^2-3(a^2+4)=4a^2-12$

(*) មានរឹសលុះត្រាតែ $\Delta'\geq 0 \Leftrightarrow 4a^2-12\geq 0 \Rightarrow a\geq\sqrt{3}$

សមភាពលុះត្រាតែ $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ និង $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ហេតុនេះ តម្លៃអប្បបរមានៃ $|x|-|y|$ គឺ $\sqrt{3}$

លំហាត់ ៣៧

គេឲ្យ p , q , r ជារឹសនៃសមីការដឺក្រេទី ៣ $x^3-3px^2+3q^2x-r^3=0$ ។

បង្ហាញថា $p=q=r$ ។

សម្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទ Viéte យើងបាន $\begin{cases} p+q+r=3p & (1) \\ pq+qr+rp=3q^2 & (2) \\ pqr=r^3 & (3) \end{cases}$

តាម (3) យើងបាន $r=0$ រឺ $r^2=pq$

បើ $r=0$ តាម(1) និង (2) យើងបាន $q=2p$ និង $pq=3q^2$

$$\Rightarrow 2p^2 = 3(2p)^2$$

$$\Rightarrow p = 0 \Rightarrow q = 0$$

យើងបាន $p = q = r = 0$

បើ $r^2 = pq$ តាម (1)និង (2) យើងបាន $q + r = 2p$

និង $r^2 + qr + rp = 3q^2$

គុណសមីការទីមួយនឹង r រួចយកសមីការទីពីរដកសមីការលទ្ធផល

យើងបាន $q^2 = pr \Rightarrow q^3 = r^3$ លុះត្រាតែ $q = r$ រឺ $q^2 + qr + r^2 = 0$

បើ $q = r$ យើងបាន $p + q + r = 3p \Leftrightarrow p = q \Rightarrow p = q = r$

បើ $q^2 + qr + r^2 = 0$ យើងបាន $0 = q^2 + qr + r^2 = pr + qr + pq = 3q^2$

$$\Rightarrow q = 0 \Rightarrow r = 0 \quad (\text{ព្រោះ } r^2 = pq)$$

និង $p = 0$

ក្នុងករណីនេះ យើងបាន $p = q = r = 0$

ដូចនេះ $p = q = r$

លំហាត់ ៣៨

គេឲ្យ $a \neq b \neq c \neq 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{y+a}+\dfrac{1}{z+a}=\dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{x+b}+\dfrac{1}{y+b}+\dfrac{1}{z+b}=\dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{x+c}+\dfrac{1}{y+c}+\dfrac{1}{z+c}=\dfrac{1}{c} \end{cases}$$

មានចម្លើយ ។ គណនា $\sum = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១

យើងមាន $\begin{cases} \dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{y+a}+\dfrac{1}{z+a}=\dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{x+b}+\dfrac{1}{y+b}+\dfrac{1}{z+b}=\dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{x+c}+\dfrac{1}{y+c}+\dfrac{1}{z+c}=\dfrac{1}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(x+y+z)=xyz-2a^3 \ (1) \\ b^2(x+y+z)=xyz-2b^3 \ (2) \\ c^2(x+y+z)=xyz-2c^3 \ (3) \end{cases}$

យក $(1)-(2)$ យើងបាន $(a^2-b^2)(x+y+z)=2(b^3-a^3)$

$$\Rightarrow (a+b)(x+y+z)=-2(a^2+ab+b^2) \qquad (4)$$

ដូចគ្នាដែរ យក $(2)-(3)$ យើងបាន $(b+c)(x+y+z)=-2(b^2+bc+c^2) \, (5)$

តាម $(4),(5)$ យើងបាន $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

$$\Rightarrow (a+b)(b^2+bc+c^2)=(b+c)(a^2+ab+b^2)$$

$$\Rightarrow ac(c-a)+b(c-a)(c+a)=0$$

$$\Rightarrow (a-c)(ab+bc+ca)=0 \Rightarrow ab+bc+ca=0$$

ព្រោះ $a \neq b \neq c \neq 0$

ហេតុនេះ $\sum \; = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$

របៀបទី ២

យក $p(t)=\frac{1}{x+t}+\frac{1}{y+t}+\frac{1}{z+t}-\frac{1}{t}$

ដោយ $\begin{cases}\frac{1}{x+a}+\frac{1}{y+a}+\frac{1}{z+a}=\frac{1}{a}\\ \frac{1}{x+b}+\frac{1}{y+b}+\frac{1}{z+b}=\frac{1}{b}\\ \frac{1}{x+c}+\frac{1}{y+c}+\frac{1}{z+c}=\frac{1}{c}\end{cases}$ យើងបាន a , b , c ជាឫសនៃ $p(t)$

យើងមាន $p(t)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+t}+\frac{1}{y+t}+\frac{1}{z+t}-\frac{1}{t}=0$

$$\Rightarrow t(y+t)(z+t)+t(x+t)(z+t)+t(x+t)(y+t)$$
$$-(x+t)(y+t)(z+t)=0 \qquad (\,*\,)$$

Lemma

ចំពោះ x_1, x_2, x_3 ជាឫសនៃសមីការ $c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0=0$ យើងបាន

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{c_1}{c_0}$ ។

សម្រាយ

ដោយ x_1, x_2, x_3 ជាឫសនៃសមីការ $c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀែត យើងបាន $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}$

$$= \frac{\frac{c_1}{c_3}}{-\frac{c_0}{c_3}} = -\frac{c_1}{c_0}$$

តាម (*) មេគុណនៃ t គឺ $c_1 = xy + yz + zx - xy - yz - zx = 0$

មេគុណថេរ គឺ $c_0 = -xyz$

ដូចនេះ $\sum = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

លំហាត់ ៣៩

គេឲ្យ a , b , $c > 0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^n + b^n + c^n = 3$ ចំពោះ $n \in \mathrm{IN}$ និង $n > 2$ ។

កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $a^2 + b^2 + c^2$ ។

ចម្លើយ

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{a^n + a^n + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a^n \times a^n} = a^2$

$$\Rightarrow a^2 \leq \frac{2a^n + n - 2}{n}$$

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $b^2 \leq \frac{2b^n + n - 2}{n}$

$$c^2 \leq \frac{2c^n + n - 2}{n}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{2\left(a^n + b^n + c^n\right) + 3n - 6}{n}$

ដោយ $a^n + b^n + c^n = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{6 + 3n - 6}{n} = 3$

ដូចនេះ $\max\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 3$ ពេល $a = b = c = 1$

លំហាត់ ៤០

គេឲ្យ $a\,,\ b\,,\ c\,,\ d>0$ ។ បង្ហាញថា

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2 \text{ ។}$$

សម្រាយ

ដោយ $a\,,\ b\,,\ c\,,\ d>0$ យើងបាន

$$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}$$

$$>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{b+c+d+a}+\frac{c}{c+d+a+b}+\frac{d}{d+a+b+c}$$

$$=\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}=1 \qquad (1)$$

Lemma

ចំពោះ $x\,,\ y\,,\ z>0$ យើងបាន $\frac{x}{y}<1\Leftrightarrow\frac{x}{y}<\frac{x+z}{y+z}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{x}{y}<\frac{x+z}{y+z}\Leftrightarrow xy+xz<xy+yz\Leftrightarrow x<y\Leftrightarrow\frac{x}{y}<1$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}$

$$<\frac{a+d}{a+b+c+d}+\frac{a+b}{a+b+c+d}+\frac{b+c}{a+b+c+d}+\frac{c+d}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=2 \qquad (2)$$

តាម (1),(2) យើងបាន $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

លំហាត់ ៤១

គេឲ្យ $a\,,\ b\,,\ c>1$ ។ បង្ហាញថា $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab$

$$\geq 4\left(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b\right)$$ ។

សម្រាយ

តាង $x=\log a\,,\ y=\log b\,,\ z=\log c \Rightarrow x\,,\ y\,,\ z>0$

ព្រោះ $a\,,\ b\,,\ c>1$

យើងបាន $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab \geq 4\left(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\log b+\log c}{\log a}+\frac{\log c+\log a}{\log b}+\frac{\log a+\log b}{\log c}$$

$$\geq 4\left(\frac{\log c}{\log a+\log b}+\frac{\log b}{\log b+\log c}+\frac{\log c}{\log c+\log a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\geq 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{z}{x}\right)\geq 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\ (*)$$

យើងមាន $\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\geq\frac{4x}{y+z}\Leftrightarrow (y+z)^2\geq 2yz\Leftrightarrow (y-z)^2\geq 0$ ពិត

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $\frac{y}{z}+\frac{y}{x}\geq\frac{4y}{z+x}$

$$\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\geq\frac{4z}{x+y}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន (*) ពិត

ហេតុនេះ $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab \geq 4\left(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b\right)$

សមភាពលុះត្រាតែ $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$

លំហាត់ ៤២

បង្ហាញថា $1 < \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \ldots + \frac{1}{3001} < \frac{4}{3}$ ។

សម្រាយ

តាម វិសមភាព AM-HM យើងបាន $\left(\sum_{k=1001}^{3001} k\right)\left(\sum_{k=1001}^{3001} \frac{1}{k}\right) > 2001^2$

ដោយ $\sum_{k=1}^{3001} k = \frac{2001(3001+1)}{2} = 2001^2$

យើងបាន $\sum_{k=1}^{2001} \frac{1}{k} > \frac{2001^2}{\sum_{k=1001}^{3001} k} = 2001$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត
$$\sum_{k=1001}^{3001} \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{1001} + \ldots + \frac{1}{1500}\right) + \left(\frac{1}{1006} + \ldots + \frac{1}{2000}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2001} + \ldots \frac{1}{2500}\right) + \left(\frac{1}{2501} + \ldots + \frac{1}{3000}\right) + \frac{1}{3001}$$
$$< \frac{500}{1000} + \frac{500}{1500} + \frac{500}{2500} + \frac{1}{3001}$$
$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3000} = \frac{3851}{3000} < \frac{4}{3}$$

លំហាត់ ៤៣

បង្ហាញថា $\sqrt{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{7} < 7$ និង $\sqrt{4} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{4} > 4$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[4]{7} < \sqrt[4]{16} = 2$

$$\Rightarrow \sqrt{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{7} < 3 + 2 + 2 = 7$$

ម្យ៉ាងទៀត $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[4]{4} > \sqrt[4]{1} = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{4} > 2+1+1=4$$

លំហាត់ ៤៤

បង្ហាញថា $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}<3$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{1}{\sqrt[3]{k}}-\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}=\frac{\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k(k+1)}}$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{k(k+1)}\left[\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}\right]}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{k}\sqrt[3]{k+1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{k(k+1)}\left[3\sqrt[3]{(k+1)^2}\right]}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}} < 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}-\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right)$$

ហេតុនេះ $S<\sum_{k=1}^{n}3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}-\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right)=3-\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}<3$

លំហាត់ ៤៥

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $A=\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_{2010}$ បើគេដឹងថា

$\tan x_1 \tan x_2 \ldots \tan x_{2010} = 1$ ។

ចម្លើយ

តាម AM-GM យើងបាន $1=\sin^2 x_1+\cos^2 x_1 \ge 2\sin x_1 \cos x_1$

ដូចគ្នាដែរ $1 \ge 2\sin x_2 \cos x_2$

……………………………

$$1 \geq 2\sin x_{2010} \cos x_{2010}$$

គុណអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$1 \geq 2^{2010} \sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_{2010} \cos x_1 \cos x_2 \ldots \cos x_{2010}$$

ដោយ $\tan x_1 \tan x_2 \ldots \tan x_{2010} = 1$

$$\Rightarrow \sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_{2010} = \cos x_1 \cos x_2 \ldots \cos x_{2010}$$

ហេតុនេះ $2^{2010}(\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_{2010}) \leq 1$

$$\Rightarrow \sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_{2010} \leq \frac{1}{2^{1005}}$$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ A គឺ $\frac{1}{2^{1005}}$ សមភាពពេល $x_i = \frac{\pi}{4}$, $i = \overline{1,2010}$

លំហាត់ ៤៦

គេឲ្យ a_1, a_2, … , a_n ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $[0,1]$។ បង្ហាញថា

$(1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$ ។

សម្រាយ

តាង $f(x) = x^2 - (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$

យើងបាន $f(0) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq 0$

និង $f(1) = 1 - (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$

$$= a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) + \ldots + a_n(a_n - 1) \leq 0$$

យើងបាន $f(0)f(1) \leq 0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយើងបាន $f(x) = 0$ មានរឹសយ៉ាងហោចណាស់មួយលើ $[0,1]$

យើងបាន សមីការ $x^2 - (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) = 0$

មាន $\Delta \geq 0 \Rightarrow (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$

ដូចនេះ $(1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$

លំហាត់ ៤៧

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n>1$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<2$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $n>1$ យើងបាន $0<\frac{\sqrt[n]{n}}{n}<1$

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{\underbrace{1+1+...+1}_{n-1}+\left(1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right)}{n}>\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}$ (1)

និង $\frac{\underbrace{1+1+...+1}_{n-1}+\left(1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right)}{n}>\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}$ (2)

បូក (1),(2) យើងបាន $\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<2$

លំហាត់ ៤៨

ប្រៀបធៀបពីរចំនួន $A=\sqrt[3]{2008}+\sqrt[3]{2006}$ និង $B=2\sqrt[3]{2007}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\sqrt[3]{2008}-\sqrt[3]{2007}=\frac{1}{\sqrt[3]{2008^2}+\sqrt[3]{2008\times 2007}+\sqrt[3]{2007^2}}$

និង $\sqrt[3]{2007}-\sqrt[3]{2006}=\frac{1}{\sqrt[3]{2007^2}+\sqrt[3]{2007\times 2006}+\sqrt[3]{2006^2}}$

ដោយ $\sqrt[3]{2008^2}+\sqrt[3]{2008\times 2007}+\sqrt[3]{2007^2}$

$>\sqrt[3]{2007^2}+\sqrt[3]{2007\times 2006}+\sqrt[3]{2006^2}$

យើងបាន $\sqrt[3]{2008}-\sqrt[3]{2007}<\sqrt[3]{2007}-\sqrt[3]{2006}$

ហេតុនេះ $\sqrt[3]{2008}+\sqrt[3]{2006}<2\sqrt[3]{2007}$

លំហាត់ ៤៩

គេឲ្យបីចំនួនគត់វិជ្ជមាន a , b , c មានផលគុណស្មើនឹង 1។ កំណត់តម្លៃអតិបរមា

នៃ $P=\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $abc=1\Rightarrow b-1+\frac{1}{c}=b\left(1-\frac{1}{b}+\frac{1}{bc}\right)=b\left(a+1-\frac{1}{b}\right)$

ហេតុនេះ $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)=b\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right)$

$$=b\left[a^2-\left(1-\frac{1}{b}\right)^2\right]\le a^2b$$

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le b^2c$

និង $\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\le c^2a$

គុណវិសមភាពទាំងបីយើងបាន $P^2\le(abc)^2=1$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ P គឺ $P_{\max}=1$ ពេល $a=b=c=1$

លំហាត់ ៥០

(JBMO Shortlist,2002)

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=2$ ។

បង្ហាញថា $a^3+b^3+c^3\ge a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$ ។

សម្រាយ

របៀបទី ១

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq (a+b+c)^2$$

និង $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \leq (a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)$

យើងបាន $a^3+b^3+c^3 \geq \dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)}{3}$

$$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]}{6}$$

$$\geq \frac{\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)}{6} \qquad (1)$$

តាម AM-GM យើងបាន $a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$

$$\geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{8abc}} = 3\sqrt[3]{8}=6 \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $a^3+b^3+c^3 \geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$

របៀបទី ២

យើងមាន $a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} \leq \sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)}$

តាម វិសមភាព Chebyshev យើងបាន

$$\sqrt{2\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)} \leq \sqrt{6\left(a^3+b^3+c^3\right)}$$

ដោយ $\sqrt{6\left(a^3+b^3+c^3\right)} = \sqrt{3abc\left(a^3+b^3+c^3\right)}$

$$\leq \sqrt{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2} = a^3+b^3+c^3$$

ដូចនេះ: $a^3+b^3+c^3 \geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$

លំហាត់ ៥១

គេឲ្យ a, b, c, d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c+d \le 1$។

បង្ហាញថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c} \le \frac{1}{64abcd}$ ។

សម្រាយ

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c} \le \frac{1}{64abcd} \Leftrightarrow a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab \le \frac{1}{64}$$

យើងមាន $a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab=(ac+bd)(ad+bc)$

តាម AM-GM យើងបាន $a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab$

$$\le \frac{(ac+bd+ad+bc)^2}{4}$$

$$=\frac{[(a+b)(c+d)]^2}{4}$$

$$\le \frac{(a+b+c+d)^2}{64}$$ តាម AM-GM

ដោយ $a+b+c+d \le 1 \Rightarrow a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab \le \frac{1}{64}$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c} \le \frac{1}{64abcd}$

លំហាត់ ៥២

គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$។

បង្ហាញថា $\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \ge 1$ ។

សម្រាយ

របៀបទី ១

យើងមាន $\dfrac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}=\dfrac{x^2-x(y+z)+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\dfrac{x(y+z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}$

$$=\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\sqrt{\frac{y+z}{2}}$$

$$\geq\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}$$ តាម QM-AM

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $\dfrac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\geq\dfrac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\dfrac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{2}$

$$\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$$

បូកវិសមភាពលទ្ធផលទាំងបី យើងបាន

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}$$

$$\geq\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+1$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $\dfrac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\dfrac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\dfrac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 0$ (*)

(*) ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x, y, z

WLOG[1] សន្មតថា $x\geq y\geq z$

យើងបាន $\dfrac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\geq 0$

[1] Without Loss of Generality

និង $\dfrac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\dfrac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}=\dfrac{(y-z)(x-z)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\dfrac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}$

$$\ge \frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{(y-z)(x-y)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}$$

$$=(y-z)(x-y)\left[\frac{1}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{1}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\right]$$ ពិត

ព្រោះ $y^2(z+x)=y^2z+y^2x\ge yz^2+xz^2=z^2(x+y)$

ដូចនេះ $\dfrac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\dfrac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\dfrac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\ge 1$

របៀបទី ២

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\left[\frac{x^2}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\right]$$

$$\times\left[\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}\right]\ge\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2=1 \quad (1)$$

និង $\left[\dfrac{yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\dfrac{zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\dfrac{xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\right]$

$$\times\left[\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}\right]\ge\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)^2 \quad (2)$$

បូក (1) និង (2) យើងបាន $\left[\dfrac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\dfrac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\dfrac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\right]$

$$\times\left[\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}\right]\ge 1+\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)^2$$

$$\geq 2\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)$$

បង្ហាញថា $2\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\geq\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}$

តាម AM-GM យើងបាន

$$\left[\sqrt{\frac{yz}{x}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\right]^2\geq 4\sqrt{\frac{yz}{x}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)=2(y+z)$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{yz}{x}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\geq\sqrt{2(y+z)} \qquad (3)$$

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $\sqrt{\frac{zx}{y}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{z}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{yz}{x}}\right)\geq\sqrt{2(z+x)}$ (4)

$$\sqrt{\frac{xy}{z}}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{yz}{x}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{zx}{y}}\right)\geq\sqrt{2(x+y)} \qquad (5)$$

បូក (3),(4),(5) យើងបាន

$$2\left(\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}\right)\geq\sqrt{2(y+z)}+\sqrt{2(z+x)}+\sqrt{2(x+y)}$$

ដូចនេះ $\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 1$

លំហាត់ ៥៣

គេឲ្យ a, b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b=1$ ។

បង្ហាញថា $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}+b^2+\frac{1}{b^2}+4$

$$=(a+b)^2-2ab+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2-\frac{2}{ab}+4$$

$$=1-2ab+\frac{1-2ab}{a^2b^2}+4$$ ព្រោះ $a+b=1$

តាម AM-GM យើងបាន $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge\left(1-\frac{1}{2}\right)(1+16)+4=\frac{25}{2}$

លំហាត់ ៥៤

គេឲ្យ $0<a\,,\,b\,,\,c<1$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=2$ ។

បង្ហាញថា $\left(\frac{a}{1-a}\right)\left(\frac{b}{1-b}\right)\left(\frac{c}{1-c}\right)\ge 8$ ។

សម្រាយ

តាង $x=1-a\,,\ y=1-b\,,\ z=1-c\Rightarrow x\,,\ y\,,\ z>0$

យើងបាន $x+y+z=3-(a+b+c)=3-2=1$

និង $a=1-x\,,\ b=1-y\,,\ c=1-z$

ហេតុនេះ $\left(\frac{a}{1-a}\right)\left(\frac{b}{1-b}\right)\left(\frac{c}{1-c}\right)\ge 8\Leftrightarrow\left(\frac{1-x}{x}\right)\left(\frac{1-y}{y}\right)\left(\frac{1-z}{z}\right)\ge 8$

$$\Leftrightarrow(1-x)(1-y)(1-z)\ge 8xyz\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge 9xyz$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$$ ពិត

ព្រោះ តាម AM-HM យើងបាន $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}=9$

ដូចនេះ $\left(\frac{a}{1-a}\right)\left(\frac{b}{1-b}\right)\left(\frac{c}{1-c}\right)\geq 8$ សមភាពលុះត្រាតែ $a=b=c=\frac{2}{3}$

លំហាត់ ៥៥

កំណត់ចំនួនធំបំផុតនៅក្នុងស្វ៊ីតមិនកំណត់ $1,\ \sqrt{2}\,,\ \sqrt[3]{3}\,,\ \dots\ ,\ \sqrt[n]{n}\,,\ \dots$ ។

ចម្លើយ

ចំនួនដែលធំជាងគេក្នុងស្វ៊ីត គឺ $\sqrt[3]{3}$ ព្រោះ $1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

យើងនឹងបង្ហាញថា $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 3$

យើងមាន $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<n$

តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា យើងបាន $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\frac{1}{n^2}+\ldots+C_n^n\frac{1}{n^n}$

ម៉្យាងទៀត $C_n^k\frac{1}{n^k}=\frac{n(n-1).(n-2)..(n-k+1)}{k!n^k}$

$$=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}$$

ចំពោះ $n\geq 3$ យើងបាន $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<1+2=3$$

ហេតុនេះ ចំពោះ $n \geq 3$ យើងបាន $\left(1+\frac{1}{n}\right) < 3 \leq n$ ពិត

លំហាត់ ៥៦

គេឲ្យ x, y, z និង $n > 1$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^n + y^n = z^n$ ។

បង្ហាញថា $\min\{x, y, z\} > n$ ។

សម្រាយ

ដោយ x, y, z ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^n + y^n = z^n$ $(*)$

យើងបាន $z > x$, $z > y$

$(*)$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x, y សន្មតថា $y \geq x$

ហេតុនេះ ដើម្បីបង្ហាញថា $\min\{x, y, z\} > n$ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $x > n$

យើងមាន $z > y \Rightarrow z \geq y + 1$

យើងបាន $x^n = z^n - y^n = (z-y)(z^{n-1} + yz^{n-2} + \ldots + y^{n-1})$

$$> \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{n} = nx^{n-1} \Rightarrow x > n$$

ដូចនេះ $\min\{x, y, z\} > n$

លំហាត់ ៥៧

ប្រអប់មួយមានបាតជាចតុកោណកែងដែលមានអង្កត់ទ្រូងប្រវែង

$D(a) = \dfrac{a^2 - \sqrt{a^4 + 4} + 2}{a}$ ដែល $a > 0$ ។ រកប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូង

របស់បាតប្រអប់នោះ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $D(a) = \dfrac{a^2 - \sqrt{a^4 + 4} + 2}{a} = \dfrac{(a^2 + 2)^2 - (a^4 + 4)}{a\left(a^2 + 2 + \sqrt{a^4 + 4}\right)}$

$$=\frac{4a^2}{a\left(a^2+2+\sqrt{a^4+4}\right)}=\frac{4}{a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}}$$

តាម AM-GM យើងបាន $a+\frac{2}{a}\geq 2\sqrt{2}$, $a^2+\frac{4}{a^2}\geq 4\Rightarrow\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}\geq 2$

ហេតុនេះ $D(a)\leq\frac{4}{2\sqrt{2}+2}=2\sqrt{2}-2$

ដូចនេះ $\max[D(a)]=2\sqrt{2}-2$ ពេល $a=\sqrt{2}$

លំហាត់ ៥៧

ក/ សរសេរ x^4+4y^4 ជាផលគុណនៃពីរពហុធាដឺក្រេទី ២ នៃ x និង y ។

ខ/ បង្ហាញថា n^4+4^n មិនមែនជាចំនួនបឋមទេចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n>1$ ។

ចម្លើយ

ក/ យើងមាន $x^4+4y^4=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2$

$$=\left(x^2+2y^2\right)^2-(2xy)^2$$

$$=\left(x^2-2xy+2y^2\right)\left(x^2+2xy+2y^2\right)$$

ខ/ ចំពោះ $n>1$ យើងបាន $n=2k$ រឺ $n=2k+1$ ចំពោះ $k=1,\ 2,\ \ldots$

បើ $n=2k$ យើងបាន $n^4+4^n=16\left(k^4+16^{k-1}\right)$ មិនមែនជាចំនួនបឋម

បើ $n=2k+1$ យើងបាន

$$n^4+4^n=n^4+4\left(2^k\right)^4$$

$$=\left(n^2+2^{2k+1}+n2^{k+1}\right)\left(n^2+2^{2k+1}-n2^{k+1}\right)$$ មិនមែនជាចំនួនបឋម

លំហាត់ ៥៨

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនគត់ ។ បង្ហាញថា $abc\left(a^3-b^3\right)\left(b^3-c^3\right)\left(c^3-a^3\right)$

ជាចំនួនចែកដាច់នឹង 7 ។

សម្រាយ

គ្រប់ $x\in \mathbb{Z}$ គេបាន $x\equiv 0,\ 1$ រឺ $6 \pmod 7$

បើ មួយក្នុងចំណោម a , b , c ចែកដាច់នឹង 7

យើងបាន $abc\left(a^3-b^3\right)\left(b^3-c^3\right)\left(c^3-a^3\right)$ ចែកដាច់នឹង 7

បើ គ្មានចំនួនណាមួយចែកដាច់នឹង 7

នោះ a^3 , b^3 , c^3 ចែកនឹង 7 បានសំណល់ជាធាតុនៃសំណុំ $\{1,6\}$

តាមគោលការណ៍ទ្រូងព្រាប គេបានយ៉ាងហោចណាស់ពីរក្នុងចំណោម a^3 , b^3 , c^3 មានសំណល់ដូចគ្នាពេលចែកនឹង 7

WLOG សន្មតថា a^3, b^3 ហេតុនេះ $a^3 - b^3$ចែកដាច់នឹង 7

យើងបាន $abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$ជាចំនួនចែកដាច់នឹង 7

លំហាត់ ៥៩

កំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p , q , r ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $15p + 7pq + qr = pqr$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $15p + 7pq + qr = pqr \Rightarrow p(qr - 7q - 15) = qr$

ដោយ p , q , r ជាចំនួនបឋម យើងបាន $p = q$ រឺ $p = r$

- បើ $p = q$ យើងបាន $pr - 7p - 15 = r \Rightarrow (p-1)(r-7) = 22$

ដោយ 4 ចែកមិនដាច់ $22 \Rightarrow$ មួយក្នុងចំណោម $p-1$, $r-7$ សេស

$\Rightarrow$ មួយក្នុងចំណោម p , r គូ

តែ r មិនអាចគូ ព្រោះ បើ r គូ យើងបាន $r = 2 \Rightarrow (p-1)(r-7) < 0$

យើងបាន $p = 2 \Rightarrow r = 29$

ក្នុងករណីនេះ $(p, q, r) = (2, 2, 29)$

- បើ $p = r$ យើងបាន $pq - 7q - 15 = q \Rightarrow q(p-8) = 15$

យើងបាន $q = 3$រឺ $q = 5$

ចំពោះ $q = 3 \Rightarrow p = 13$

ចំពោះ $q = 5 \Rightarrow p = 11$

ក្នុងករណីនេះ $(p, q, r) = (13, 3, 13), (11, 5, 11)$

Challenge

គេឲ្យ p , q , r ជាចំនួនបឋមបំពេញលក្ខខណ្ឌ $p > q > r$ និង $p - q$, $p - r$ និង $q - r$ សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម ។ កំណត់ p , q , r ។

លំហាត់ ៦០

កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុតដែលមាន 7 ជាលេខខ្ទង់រាយ ហើយចំនួននេះនឹងធំជាងមុន ៥ ដងបើគេប្តូរទីតាំងលេខខ្ទង់រាយនេះទៅដាក់នៅខាងមុខវិញ ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១

ឧបមាថា N ជាចំនួនបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងលើ

យក $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 7}$ និង $N' = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$

យើងបាន $\overline{7 a_n a_{n-1} \ldots a_1} = 5 \times N = 5 \times \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 7}$

$$\Rightarrow 7 \cdot 10^n + N' = 5(10N' + 7)$$

$$\Rightarrow N' = \frac{7(10^n - 5)}{49} = \frac{10^n - 5}{7} \quad (*)$$

ដើម្បីឲ្យ N មានតម្លៃតូចបំផុត លុះត្រាតែ N' មានតម្លៃតូចបំផុត

តាម (*) តូចបំផុត បើ $n = 5 \Rightarrow N' = \dfrac{10^5 - 5}{7} = 1428$

ដូចនេះ $N = 14287$

របៀបទី ២

ឧបមាថា $\ldots abc7$ ជាចំនួនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងលើ

យើងបាន $5(\ldots abc7) = 7\ldots abc \quad (*)$

$$\Rightarrow c = 5$$

តាម (*) $\Rightarrow 5(\ldots ab57) = 7\ldots ab5$ យើងបាន $b = 8$

ធ្វើរបៀបនេះជាបន្តបន្ទាប់រហូតបានលេខ ៧ លើកដំបូង

(ព្រោះ $...abc7$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតក្នុងចំណោមចំនួនគត់វិជ្ជមានទាំងអស់ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ)

យើងបាន $N = 14287$

លំហាត់ ៦១

គេឲ្យ $S_{p,t} = 1^t + 2^t + ... + p^t$ ដែល p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង t ជាចំនួនគត់សេស ។ បង្ហាញថា $2S_{p,t}$ ចែកដាច់ $p(p+1)$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ x, y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង n ជាចំនួនគត់សេស

យើងបាន $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + ... - xy^{n-2} + y^{n-1})$

$\Rightarrow x + y$ ចែកដាច់ $x^n + y^n$ គឺ $x^n + y^n = m(x+y)$ ដែល $m \in \mathrm{IN}$

យើងមាន $S_{p,t} = 1^t + 2^t + ... + p^t$

$$S_{p,t} = p^t + (p-1)^t + ... + 1^t$$

យើងបាន $2S_{p,t} = (1^t + p^t) + [2^t + (p-1)^t] + ... + (p^t + 1^t)$

$$= (p+1)k_1 + (p+1)k_2 + ... + (p+1)k_p$$

$$= (p+1)(k_1 + k_2 + ... + k_p)$$

$\Rightarrow 2S_{p,t}$ ចែកដាច់ $p+1$

ម្យ៉ាងទៀត $S_{p,t} = 1^t + 2^t + ... + (p-1)^t + p^t$

$$= (p-1)^t + (p-2)^t + ... + 1^t + p^t$$

$$= [1^t + (p-1)^t] + [2^t + (p-2)^t] + ... + [(p-1)^t + 1] + 2p^t$$

$$= pk'_1 + pk'_2 + ... + pk'_p = p(k'_1 + k'_2 + ... + k'_p)$$

$\Rightarrow 2S_{p,t}$ ចែកដាច់ p

ដោយ $p+1-p=1 \Rightarrow p$ និង $p+1$ បឋមនឹងគ្នា

ហេតុនេះ $2S_{p,t}$ ចែកដាច់ $p(p+1)$

លំហាត់ ៦២

រកសំណល់នៃប្រមាណវិធីចែករវាង 2010^{2009} និង 13 ។

ចម្លើយ

យើងមាន $2010 \equiv -5(\bmod 13) \Rightarrow 2010^2 \equiv 25 \equiv -1(\bmod 13)$

យើងបាន $2010^{2009} \equiv 2010 \equiv -5 \equiv 8(\bmod 13)$

លំហាត់ ៦៣

កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដើម្បីឲ្យ $n+S(n)=2009$ ។ $S(n)$ ជាផលបូកនៃបណ្តាខ្ទង់ទាំងអស់នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ចម្លើយ

យើងមាន $n+S(n)=2009 \Rightarrow n=2009-S(n)$ (1)

$\Rightarrow n \le 2008$ ព្រោះ $S(n) \ge 1$

បណ្តាចំនួនដែលតូចជាង រឺ ស្មើនឹង 2008 មានតែ 1999 តែមួយគត់ដែលមានផលបូកលេខខ្ទង់ធំជាងគេ យើងបាន $S(n) \le S(1999)=28$

តាម (1) យើងបាន $n \ge 2009-28=1981$ (2)

ហេតុនេះ $1981 \le n \le 2008$

ដោយ $S(2008)=10$, $S(2007)=9$, … , $S(2000)=2$

យើងបាន $n=\overline{2000,2008}$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $n+S(n)=2009$

យើងបាន $1981 \le n \le 1999$

តាង $n=\overline{19ab}$ ដែល a , $b \in \mathrm{IN}$ និង $0 \le a$, $b \le 9$

យើងបាន $n+S(n)=2009 \Leftrightarrow \overline{19ab}+1+9+a+b=2009$

$\Rightarrow 1900+10a+b+10+a+b=2009$

$\Rightarrow b=\dfrac{99-11a}{2}=49-5a+\dfrac{1-a}{2}$

ដោយ $b\in \mathrm{IN}$ យើងបាន 2 ចែកដាច់ $1-a \Rightarrow a=1-2t$, $t\in \mathrm{Z}$

យើងបាន $b=44+11t$

យើងបាន $\begin{cases}0\le 1-2t\le 9\\ 0\le 44+11t\le 9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4\le t\le \dfrac{1}{2}\\ -4\le t\le -\dfrac{35}{11}\end{cases} \Rightarrow -4\le t\le -\dfrac{35}{11}$

ហេតុនេះ $t=-4 \Rightarrow a=9$, $b=0$

យើងបាន $n=1990$

លំហាត់ ៦៤

កំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p បើគេដឹងថាមានចំនួនគត់ x, y បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$p+1=2x^2$ និង $p^2+1=2y^2$ ។

ចម្លើយ

សន្មតថា x, y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

ដោយ $p+1=2x^2$ និង $p^2+1=2y^2 \Rightarrow y\ge x$ និង p ជាចំនួនបឋមសេស

យើងបាន $p^2-p=2y^2-2x^2 \Rightarrow p(p-1)=2(y-x)(y+x)$

p ជាចំនួនបឋមសេស $\Rightarrow p$ ចែកដាច់ $y-x$ ឬ $y+x$

បើ p ចែកដាច់ $y-x \Rightarrow p\le y-x \Rightarrow p-1\ge 2x+2y$ មិនអាច

បើ p ចែកដាច់ $y+x \Rightarrow p\le x+y \Rightarrow p-1\ge 2y-2x$

យើងបាន $\begin{cases} 2p \le 2x+2y \\ 2y-2x \le p-1 \end{cases}$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $p+1 \le 4x \Rightarrow 2x^2 \le 4x \Rightarrow x \le 2$

ហេតុនេះ $x=1$ រឺ $x=2$

ចំពោះ $x=1 \Rightarrow p=1$ មិនបឋម

ចំពោះ $x=2 \Rightarrow p=7$ បឋម

ដូចនេះ $p=7$

លំហាត់ ៦៥

កំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ ជាការេប្រាកដ ។

ចម្លើយ

ចំពោះ $p=2$ យើងបាន $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$ មិនពិត

ហេតុនេះ p ជាចំនួនបឋមសេស គឺ $p>3$

តាមទ្រឹស្តីបទ Fermat យើងបាន $2^{p-1}-1$ ចែកដាច់នឹង p

យើងបាន $2^{p-1}-1=pa^2 \Rightarrow \left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)=pa^2$

$\Rightarrow p$ ចែកដាច់ $2^{\frac{p-1}{2}}-1$ រឺ $2^{\frac{p-1}{2}}+1$

បើ p ចែកដាច់ $2^{\frac{p-1}{2}}-1$ យើងបាន $2^{\frac{p-1}{2}}-1=px^2, 2^{\frac{p-1}{2}}+1=y^2$

$\Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}}=(y-1)(y+1) \Rightarrow y=3 \Rightarrow p=7$

យើងបាន $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}=\dfrac{2^6-1}{7}=9=3^2$ ជាការេប្រាកដ

បើ p ចែកដាច់ $2^{\frac{p-1}{2}}+1$ យើងបាន $2^{\frac{p-1}{2}}-1=x^2, 2^{\frac{p-1}{2}}+1=py^2$

ចំពោះ $p>3$ យើងបាន $2^{\frac{p-1}{2}}-1=x^2 \equiv 3 \pmod 4$ មិនអាច

ហេតុនេះ $p=3$

ចំពោះ $p=3$ យើងបាន $\frac{2^{p-1}-1}{p}=\frac{2^3-1}{3}=1=1^2$ ជាការប្រាកដ

ដូចនេះ $p=3$ រឺ $p=7$

លំហាត់ ៦៦

បង្ហាញថា មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល $2A$, $3A$, $5A$ ជាការេ, គូប និង ស្វ័យគុណប្រាំនៃចំនួនគត់ ។

សម្រាយ

ដោយ $2A$, $3A$, $5A$ ជាការេ, គូ និង ស្វ័យគុណប្រាំនៃចំនួនគត់

យើងបាន 2, 3, 5 ចែកដាច់ A

យើងយក $A=2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$

ហេតុនេះ $\alpha+1$, β, γ ចែកដាច់ 2

α, $\beta+1$, γ ចែកដាច់ 3

α, β, $\gamma+1$ ចែកដាច់ 5

យើងអាចកំណត់យក $\alpha=30n+15$, $\beta=30n+20$ និង $\gamma=30n+24$

ដោយ n មានច្រើនរាប់មិនអស់

នេះ បញ្ជាក់ថា A មានចំនួនច្រើនរាប់មិនអស់បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងលើ

លំហាត់ ៦៧

គេឲ្យ a_0, a_1, $\dots$, a_{50} ជាមេគុណនៃពន្លាតនៃកន្សោម $\left(1+x+x^2\right)^{25}$ ។

បង្ហាញថា $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{50}$ ជាចំនួនគត់គូ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\left(1+x+x^2\right)^{25} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{50} x^{50}$

ចំពោះ $x = 1$ និង $x = -1$ យើងបាន

$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{50} = 3^{25}$

$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + a_{50} = 1$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $2\left(a_0 + a_2 + \ldots + a_{50}\right) = 3^{25} + 1$

ដោយ $3^{25} + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 3^{25} + 1 = 4k$, $k \in \mathrm{IN}$

យើងបាន $a_0 + a_2 + \ldots + a_{50} = 2k$ ជាចំនួនគត់គូ

លំហាត់ ៦៨

បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ k អាចសរសេរជារាង $a^2 + b^2 - 5c^2$ ដែល a , b , c ជាចំនួនគត់ ។

សម្រាយ

ចំពោះ k ជាចំនួនគត់ យើងបាន $k = 2n$ រឺ $k = 2n+1$ ដែល $n \in \mathrm{Z}$

បើ $k = 2n+1$

យើងបាន $k = 2n+1 = n^2 + 4n^2 - 5n^2 + 2n + 1$

$$= n^2 + 2n + 1 + 4n^2 - 5n^2$$

$$= (n+1)^2 + (2n-1)^2 - 5(n-1)^2$$

បើ $k = 2n$

យើងបាន $k = 2n = n^2 + 4n^2 - 5n^2 - 8n + 10n$

$$= n^2 - 4n + 4 + 4n^2 - 4n + 1 - 5n^2 + 10n - 5$$

$$= (n-2)^2 + (2n-1)^2 - 5(n-1)^2$$

លំហាត់ ៦៩

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n បំពេញលក្ខខណ្ឌ

i- n មិនមែនជាការេប្រាកដ

ii- $\left[\sqrt{n}\right]^3$ ចែកដាច់ n^2 ។

សម្គាល់

$[x]$ តាងឲ្យចំនួនគត់ធំបំផុតតូចជាង រឺ ស្មើនឹង x ។

ចម្លើយ

យក $\left[\sqrt{n}\right]=k \Rightarrow k^2 < n < (k+1)^2$ ព្រោះ n មិនមែនជាការេប្រាកដ

ដោយ k^3 ចែកដាច់ $n^2 \Rightarrow k^2$ ចែកដាច់ $n^2 \Rightarrow k$ ចែកដាច់ n

យើងបាន $n=k^2+k$ រឺ k^2+2k

បើ $n=k^2+k \Rightarrow k^3$ ចែកដាច់ $\left(k^2+k\right)^2=k^4+2k^3+k^2$

$\Rightarrow k^3$ ចែកដាច់ k^2

$\Rightarrow k$ ចែកដាច់ $1 \Rightarrow k=1$

ចំពោះ $k=1$ យើងបាន $n=2$

បើ $n=k^2+2k \Rightarrow k^3$ ចែកដាច់ $\left(k^2+2k\right)^2=k^4+4k^3+4k^2$

$\Rightarrow k^3$ ចែកដាច់ $4k^2$

$\Rightarrow k$ ចែកដាច់ $4 \Rightarrow k=1,\ 2$ រឺ 4

យើងបាន $n=3,\ n=8$ រឺ $n=24$

ហេតុនេះ $n=2,\ 3,\ 8$ រឺ 24

លំហាត់ ៧០

គេឲ្យផលបូក $S(a,b)=(a+1)^b+(a+2)^b+(a+3)^b+(a+4)^b$

$+(a+5)^b$ ដែល a , b ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា $S(a,b)$ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 ។

សម្រាយ

ចំពោះ $a \geq 0$ គេបាន $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+5$ ចែកនឹង 5

បានសំណល់ 0 , 1, 2 , 3 រឺ 4

យើងបាន $S(a,b) \equiv 1^b + 2^b + 3^b + 4^b \pmod 5$

បើ b ចែកមិនដាច់នឹង 4 យើងបាន $b = 4m+1,\ 4m+2$ រឺ $4m+3$

យើងមាន $2^{4m} \equiv 1,\ 2^{4m+1} \equiv 2,\ 2^{4m+2} \equiv 4$ និង $2^{4m+3} \equiv 3 \pmod 5$

$3^{4m} \equiv 1,\ 3^{4m+1} \equiv 3,\ 3^{4m+2} \equiv 4$ និង $3^{4m+3} \equiv 2 \pmod 5$

$4^{4m} \equiv 1,\ 4^{4m+1} \equiv 4,\ 4^{4m+2} \equiv 1$ និង $4^{4m+3} \equiv 4 \pmod 5$

បើ $b = 4m+1$ យើងបាន $S(a,b) \equiv 1+2+3+4 \equiv 0 \pmod 5$

បើ $b = 4m+2$ យើងបាន $S(a,b) = 1+4+4+1 \equiv 0 \pmod 5$

បើ $b = 4m+3$ យើងបាន $S(a,b) = 1+3+2+4 \equiv 0 \pmod 5$

ហេតុនេះ $S(a,b)$ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4

លំហាត់ ៧១

ចំនួនមានលេខពីរខ្ទង់ចាប់ពី 19 ដល់ 93 ត្រូវបានយកមកតម្រៀបជាបន្តបន្ទាប់

ដើម្បីបង្កើតបានចំនួន N មួយកំណត់ដោយ $N = 1920\ldots9293$ ។

កំណត់ស្វ័យគុណនៃ 3 ធំបំផុតដែលចែកដាច់ N ។

សម្រាយ

របៀបទី ១

ភាពចែកដាច់នឹង 3 នៃចំនួនមួយអាស្រ័យលើផលបូកលេខខ្ទង់របស់វា បើផល

បូកលេខខ្ទង់ $S(N)$របស់វាចែកដាច់នឹង 3 គេថាចំនួននោះចែកដាច់នឹង 3 ។

ដូចគ្នាដែរ ចំពោះភាពចែកដាច់នឹង 9

$N = 1920...9293$ មានលេខ 1ចំនួន 9 ដង, លេខ 2 ចំនួន 18 ដង, លេខ 3 ,

4 , 5 , 6 , 7 , 8 ចំនួន 17 ដង និង លេខ 9 ចំនួន 12 ដង

យើងបាន $S(N) = 9 + 2\times 18 + 17\times(4+5+6+7+8) + 9\times 12$

$= 717$ ចែកដាច់នឹង 3 តែចែកមិនដាច់នឹង 9

ព្រោះ $7+1+7 = 15$

ហេតុនេះ ស្វ័យគុណនៃ 3 ធំបំផុតចែកដាច់ N គឺ 3

របៀបទី ២

ភាពចែកដាច់នៃ N នឹង 3 រឺ 9 អាស្រ័យលើភាពចែកដាច់នៃ

$S = 19 + 20 + ... + 93$ នឹង 3 រឺ 9

យើងមាន $S = \dfrac{75(19+93)}{2} = 4200$ ចែកដាច់នឹង 3 តែចែកមិនដាច់នឹង 9

ហេតុនេះ ស្វ័យគុណនៃ 3 ធំបំផុតចែកដាច់ N គឺ 3

លំហាត់ ៧២

កំណត់គ្រប់គូគត់វិជ្ជមាន (m,n)បើគេដឹងថា $2^m + 3^n$ ជាការេប្រាកដ ។

ចម្លើយ

យក $2^m + 3^n = a^2$ ដែល $a \in \mathrm{IN}$

ដោយគ្រប់ការេប្រាកដទាំងអស់ចែកនឹង 3 សល់សំណល់ 0 រឺ 1

យើងបាន m ជាចំនួនគត់គូ (ព្រោះគ្រប់ស្វ័យគុណសេសនៃ 2 ចែកនឹង 3 សល់

សំណល់ 2)

ដូចគ្នាដែរ គ្រប់ការេប្រាកដទាំងអស់ចែកនឹង 4 សល់សំណល់ 0 រឺ 1

យើងបាន n ក៏ជាចំនួនគូដែរ

យក $m=2r$, $n=2s$

យើងបាន $2^m+3^n=a^2 \Leftrightarrow 2^{2r}=a^2-3^{2s}=(a-3^s)(a+3^s)$

$\Rightarrow a-3^s=2^i$ និង $a+3^s=2^{2r-i}$

ហេតុនេះ $2\cdot 3^s=2^i\left(2^{2r-2i}-1\right)\Rightarrow i=1$

យើងបាន $3^s=2^{2r-2}-1$ (*)

ចំពោះ $s>1$ យើងបាន $2^{2r-2}-1>3\Rightarrow r\geq 3$

ក្នុងករណីនេះ (*) មិនពិត ព្រោះ 3^s សល់សំណល់ 1 រឺ 3 ពេលចែកនឹង 8

ចំណែកឯ $2^{2r-2}-1$ សល់សំណល់ 7 ពេលចែកនឹង 8

ហេតុនេះ សមីការគ្មានរឹសចំពោះ $s>1$

ចំពោះ $s=1$ យើងបាន $3=2^{2r-2}-1\Rightarrow r=2\Rightarrow n=2$, $m=4$

ក្នុងករណីនេះ យើងបាន $2^m+3^n=2^4+3^2=25=5^2$ ពិត

ហេតុនេះ $(m,n)=(2,4)$

លំហាត់ ៧៣

កំណត់ចំនួន N មួយមានលេខបួនខ្ទង់ដោយដឹងថា

i- N ជាការេប្រាកដ

ii- លេខពីរខ្ទង់ខាងដើមនៃ N ជាលេខតែមួយ

iii- លេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ N ក៏ជាលេខតែមួយដែរ ។

ចម្លើយ

យក $N=\overline{aabb}$ ដែល $1\leq a\leq 9$ និង $0\leq b\leq 9$

ដោយ N ជាការេប្រាកដ គេបាន $b=1$, 4 , 5 , 6 រឺ 9

តែ $\overline{aa11}$, $\overline{aa55}$ និង $\overline{aa99}$ ចែកនឹង 4 បានសំណល់ 3

និង $\overline{aa66}$ ចែកនឹង 4 បានសំណល់ 2

$\Rightarrow b = 4$ ព្រោះ ការេប្រាកដទាំងអស់ចែកនឹង 4 បានសំណល់ 0 រឺ 1

យើងបាន $N = \overline{aa44}$

យើងមាន $a - a + 4 - 4 = 0$ ចែកដាច់នឹង 11

យើងបាន N ចែកដាច់នឹង $11 \Rightarrow N$ ចែកដាច់នឹង 11^2

ព្រោះ 11 ជាចំនួនបឋម និង N ជាការេប្រាកដ

ដោយ $N = \overline{aa44} = 11 \times \overline{a04} \Rightarrow \overline{a04}$ ចែកដាច់នឹង 11

$\Rightarrow a + 4$ ចែកដាច់នឹង 11

តែ $5 \le a + 4 \le 13 \Rightarrow a + 4 = 11 \Rightarrow a = 7$

ចំពោះ $a = 7$ យើងបាន $N = 7744 = 88^2$

ហេតុនេះ $N = 7744$

លំហាត់ ៧៤

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានគ្មានតួចែករួមក្រៅពី 1 បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ ។ បង្ហាញថា $a + b$ ជាការេប្រាកដ ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១

យើងមាន $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow a > c$, $b > c$

$\Rightarrow m$, $n \in \mathrm{IN}$ ដែល $a = c + m$, $b = c + n$

យើងបាន $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{c+m} + \frac{1}{c+n} = \frac{1}{c} \Rightarrow c^2 = mn \qquad (*)$

m , n ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា ព្រោះ បើ m និង n មានតួចែករួម $d>1$

$\Rightarrow d$ ចែកដាច់ c គេបាន d ចែកដាច់ a និង d ចែកដាច់ b

$\Rightarrow d$ ជាតួចែករួមនៃ a , b , c មិនពិត ព្រោះ a , b , c គ្មានតួចែករួមក្រៅពី 1

ហេតុនេះ (*) ពិត លុះត្រាតែ m និង n ជាការេប្រាកដ គឺ $m=k^2$, $n=l^2$

ដែល k , $l \in \mathrm{IN}$

យើងបាន $a+b=c+m+c+n=m+n+2c$

$=k^2+l^2+2kl=(k+l)^2$ ជាការេប្រាកដ

របៀបទី ២

យក $d=GCD(a,b)\Rightarrow a=da_1$, $b=db_1$ ដែល $GCD(a_1,b_1)=1$

យើងបាន $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}\right)=\frac{1}{c}\Rightarrow\frac{a_1+b_1}{a_1b_1}=\frac{d}{c}$ (*)

ដោយ a , b , c គ្មានតួចែករួមក្រៅពី 1 យើងបាន $GCD(c,d)=1$

ម៉្យាងទៀត បើ $d'=GCD(a_1b_1,a_1+b_1)$

យើងបាន d' ចែកដាច់ $a_1(a_1+b_1)-a_1b_1=a_1^2$

និង d' ចែកដាច់ $b_1(a_1+b_1)-a_1b_1=b_1^2$

$\Rightarrow d'$ ចែកដាច់ $GCD(a_1^2,b_1^2)=[GCD(a_1,b_1)]^2=1$

យើងបាន $GCD(a_1b_1,a_1+b_1)=1$

ហេតុនេះ (*) ពិត លុះត្រាតែ $d=a_1+b_1$, $c=a_1b_1$

ដូចនេះ $a+b=d(a_1+b_1)=d^2$ ជាការេប្រាកដ

លំហាត់ ៧៥

គេឲ្យ XYZ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ X និង មាន $XY = z$, $YZ = x$, $ZX = y$ ។
បង្ហាញថា $x^n > y^n + z^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$ ។

សម្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទពិតាគ័រ យើងបាន $x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow x^3 = xy^2 + xz^2$

ដោយ $x > y$, $x > z \Rightarrow xy^2 > y^3$, $xz^2 > z^3$

យើងបាន $x^3 > y^3 + z^3$

សំណើពិតចំពោះ $n = 3$

ឧបមាថា ពិតដល់ $n = k$ គឺ $x^k > y^k + z^k$

សិក្សាករណី $n = k + 1$

យើងមាន $x^k > y^k + z^k \Rightarrow x^{k+1} > xy^k + xz^k$

ដោយ $x > y$, $x > z \Rightarrow xy^k > y^{k+1}$, $xz^k > z^{k+1}$

យើងបាន $x^{k+1} > y^{k+1} + z^{k+1}$ ពិត

ហេតុនេះ $x^n > y^n + z^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$

សម្គាល់

តាមលំហាត់ខាងលើ យើងអាចទាញបានថា

$$\cos^n x + \sin^n x < 1 \text{ ចំពោះ } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ ។}$$

លំហាត់ ៧៦

គេឲ្យចំនួនពិត $u_1, u_2, \dots$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $u_1 = 1,\ u_9 = 7$ និង

$u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - u_{n-1} + 2u_n}{u_{n-1} + 1}$ ។ គណនា u_5 ។

ចម្លើយ

យើងមាន $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - u_{n-1} + 2u_n}{u_{n-1} + 1} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(u_n + 1)^2}{u_{n-1} + 1}$

តាង $v_n = u_n + 1$ យើងបាន $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{v_{n-1}} \Rightarrow v_n^2 = v_{n-1}v_{n+1}$

ហេតុនេះ $\{v_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដោយ $v_1 = u_1 + 1 = 2,\ v_9 = u_9 + 1 = 8$

យើងបាន $v_5^2 = v_1 v_9 = 2 \times 8 = 16 \Rightarrow v_5 = \pm 4$

តែ $v_5 = v_1 q^4 \Rightarrow v_1$ និង v_5 មានសញ្ញាដូចគ្នា

ដូចនេះ $v_5 = 4 \Rightarrow u_5 = 3$

លំហាត់ ៧៧

គណនាផលបូក $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Arc\tan\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$ ។

ចម្លើយ

តាម $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \Rightarrow a - b = Arc\tan\left(\dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}\right)$

យក $a = Arc\tan u\ ,\ b = Arc\tan u$

យើងបាន $Arc\tan\left(\dfrac{u - v}{1 + uv}\right) = Arc\tan u - Arc\tan v$

ហេតុនេះ $Arc\tan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)=Arc\tan\left[\dfrac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}\right]$

$$=Arc\tan(k+1)-Arc\tan k$$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n}Arc\tan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left[Arc\tan(k+1)-Arc\tan k\right]$

$$=Arc\tan(n+1)-Arc\tan 0$$

$$=Arc\tan(n+1)$$

លំហាត់ ៧៨

ស្វ៊ីត (x_n)កំណត់ដោយ $x_1=1,\ x_2=1$ និង $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។

ក/ បង្ហាញថា $x_{k+1}x_{k+2}-x_kx_{k+3}=(-1)^k,\ \forall k\in \mathrm{IN}$ ។

ខ/ គេតាង $arc\cot$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $\cot$ ។

បង្ហាញថា $arc\cot x_1-arc\cot x_3-arc\cot x_5-...-arc\cot x_{2011}$

$=arc\cot x_{2012}$ ។

សម្រាយ

ក/ យើងមាន $x_1=1,\ x_2=1$ និង $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$

គេបាន $x_3=x_2+x_1=1+1=2$

$x_4=x_3+x_2=2+1=3$

បើ $k=1$ នោះ $x_2x_3-x_1x_4=(1)(2)-(1)(3)=-1$ ពិត

ឧបមាថា ពិតដល់ $k=p$ គឺ $x_{p+1}x_{p+2}-x_px_{p+3}=(-1)^p,p\geq 2$

សិក្សាករណី $k=p+1$

យើងមាន $x_{p+2}x_{p+3}-x_{p+1}x_{p+4}$

$$=x_{p+2}(x_{p+1}+x_{p+2})-x_{p+1}(x_{p+2}+x_{p+3})$$

$$= \left(x_{p+2}\right)^2 - x_{p+1}\left(x_{p+1} + x_{p+2}\right)$$

$$= \left(x_{p+2} + x_{p+1}\right)\left(x_{p+2} - x_{p+1}\right) - x_{p+1}x_{p+2}$$

$= x_{p+3}x_p - x_{p+1}x_{p+2} = -(-1)^p = (-1)^{p+1}$ ពិត

ហេតុនេះ $x_{k+1}x_{k+2} - x_k x_{k+3} = (-1)^k , \ \forall k \in \mathrm{IN}$

ខ/ យើងមាន $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot\alpha \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

$$\Rightarrow \cot(arc\cot a - arc\cot b) = \frac{\cot(arc\cot a)\cot(arc\cot b) + 1}{\cot(arc\cot b) - \cot(arc\cot a)}$$

$$= \frac{ab+1}{b-a}$$

$$\Rightarrow arc\cot a - arc\cot b = arc\cot\left(\frac{ab+1}{b-a}\right)$$

យើងបាន $arc\cot x_{2i} - arc\cot x_{2i+1} = arc\cot\left(\dfrac{x_{2i}x_{2i+1} + 1}{x_{2i+1} - x_{2i}}\right)$ (1)

តាម ក $x_{k+1}x_{k+2} - x_k x_{k+3} = (-1)^k$

$$\Rightarrow x_{2i}x_{2i+1} - x_{2k-1}x_{2i+2} = (-1)^{2i-1} = -1$$

$$\Rightarrow x_{2i}x_{2i+1} + 1 = x_{2i-1}x_{2i+2}$$

(1) $\quad \Leftrightarrow arc\cot x_{2i} - arc\cot x_{2i+1} = arc\cot\left(\dfrac{x_{2i-1}x_{2i+2}}{x_{2i-1}}\right)$

$$= arc\cot x_{2i+2}$$

យក $i = 1 , \ 2 , \ \dots ,1005$ យើងបាន

$$arc\cot x_2 - arc\cot x_3 = arc\cot x_4$$

$$arc\cot x_4 - arc\cot x_5 = arc\cot x_6$$

……………………………………………

$arc\cot x_{2010} - arc\cot x_{2011} = arc\cot x_{2012}$

បូកអង្គ និង អង្គ

$arc\cot x_2 - arc\cot x_3 - arc\cot x_5 - \ldots - arc\cot x_{2011}$

$= arc\cot x_{2012}$ ដោយ $x_1 = x_2 = 1$

ហេតុនេះ $arc\cot x_1 - arc\cot x_3 - arc\cot x_5 - \ldots - arc\cot x_{2011}$

$= arc\cot x_{2012}$

លំហាត់ ៧៩

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}_{n\ge 1}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ និង $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។ ចំពោះគ្រប់ m, បង្ហាញថា $a_{m+1}a_m$ គឺជាតួនៃស្វ៊ីត ។

សម្រាយ

សង្កេតលើតម្លៃនៃតួមួយចំនួននៃស្វ៊ីត $\{a_n\}_{n\ge 1}$ អាចឲ្យយើងសន្និដ្ឋានបានថា

$a_n = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$

ឧបមថាពិតគ្រប់ k ដែល $k \le n$

សិក្សាករណី $n+1$

យើងមាន $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1 = 2\left[(n-1)^2 + 1\right] - \left[(n-2)^2 + 1\right] + 2$

$= 2n^2 - 4n + 4 - \left(n^2 - 4n + 5\right) + 2$

$= n^2 + 1$ ពិត

ហេតុនេះ $a_n = (n-1)^2 + 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$

យើងបាន $a_m a_{m+1} = \left[(m-1)^2 + 1\right]\left(m^2 + 1\right)$

$= m^2(m-1)^2 + m^2 + (m-1)^2 + 1$

$$=[m(m-1)+1]^2+1=a_{m^2-m+2}$$

នេះ បញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $m\geq 1$ យើងបាន $a_m a_{m+1}$ ជាតួទី m^2-m+2 នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជានិច្ច

លំហាត់ ៨០

គេឲ្យ $3^2+4^2=5^2$

$5^2+12^2=13^2$

$7^2+24^2=25^2$

$9^2+40^2=41^2$ ។

តាមឧទាហរណ៍នេះ ទាញរករូបមន្តទូទៅ និង ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះផង ។

សម្រាយ

យើងមាន $3^2+4^2=5^2$

$5^2+12^2=13^2$

$7^2+24^2=25^2$

$9^2+40^2=41^2$

ស្វ៊ីត $3\,,\,5\,,\,7\,,\,9\,,\ldots$ មានរាង $2n+1$

ស្វ៊ីត $4\,,\,12\,,\,24\,,\,40\,,\ldots$ មានរាង $2n(n+1)$

ស្វ៊ីត $5\,,\,13\,,\,25\,,\,41\,,\ldots$ មានរាង $2n(n+1)+1$

ហេតុនេះ រូបមន្តទូទៅនៃឧទាហរណ៍ខាងលើ គឺ

$$(2n+1)^2+[2n(n+1)]^2=[2n(n+1)+1]^2$$

សម្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត

យើងមាន $(2n+1)^2+[2n(n+1)]^2=[2n(n+1)]^2+4n^2+4n+1$

$$=[2n(n+1)]^2+2[2n(n+1)]+1$$

$$=[2n(n+1)+1]^2 \text{ ពិត}$$

លំហាត់ ៨១

គេមានសមភាព $14^2=(6\times1^2+6\times1+2)^2,\ 15^2=(6\times1^2+6\times1+3)^2$

$38^2=(6\times2^2+6\times2+2)^2,\ 39^2=(6\times2^2+6\times2+3)^2$

$74^2=(6\times3^2+6\times3+2)^2,\ 75^2=(6\times3^2+6\times3+3)^2$

ដោយសង្កេតលើឧទាហរណ៍ខាងក្រោម ទាញរករូបមន្តទូទៅ ហើយស្រាយបញ្ជាក់

រូបមន្តផង $2^2+3^2+4^2+14^2=15^2$

$$4^2+5^2+6^2+38^2=39^2$$

$$6^2+7^2+8^2+74^2=75^2 \quad ។$$

ចម្លើយ

សង្កេត $2^2+3^2+4^2+14^2=(2\times1)^2+(2\times1+1)^2+(2\times1+2)^2$

$$+(6\times1^2+6\times1+2)^2=15^2$$

$$=(6\times1^2+6\times1+3)$$

$$4^2+5^2+6^2+38^2=(2\times2)^2+(2\times2+1)^2+(2\times2+2)^2$$

$$+(6\times2^2+6\times2+2)^2=39^2$$

$$=(6\times2^2+6\times2+3)$$

$$6^2+7^2+8^2+74^2=(2\times3)^2+(2\times3+1)^2+(2\times3+2)^2$$

$$+(6\times3^2+6\times3+2)^2=15^2$$

$$=(6\times3^2+6\times3+3)$$

យើងបាន $(2n)^2+(2n+1)^2+(2n+2)^2+(6n^2+6n+2)^2$

$$=\left(6n^2+6n+3\right)^2$$

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទូទៅ

យើងមាន $(2n)^2+(2n+1)^2+(2n+2)^2+\left(6n^2+6n+2\right)^2$

$$=\left(6n^2+6n+2\right)^2+2\left(6n^2+6n+2\right)+1$$

$$=\left(6n^2+6n+3\right)^2$$ ពិត

លំហាត់ ៨២

សង្កេតសមភាព $6^2-5^2=11$

$$56^2-45^2=1111$$

$$556^2-445^2=111111$$

$$5556^2-4445^2=11111111$$ ។

ទាញរករូបមន្តទូទៅ រួចស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តផង ។

ចម្លើយ

យើងមាន $6^2-5^2=11$

$$56^2-45^2=1111$$

$$556^2-445^2=111111$$

$$5556^2-4445^2=11111111$$

យើងបាន $\underbrace{55...55}_{n-1}6^2-\underbrace{44...44}_{n-1}5^2=\underbrace{11...11}_{2n}$

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទូទៅ

យើងមាន $\underbrace{55...55}_{n-1}6^2-\underbrace{44...44}_{n-1}5^2$

$$= \left[\underbrace{55\ldots55}_{n-1} \times 10 + 6 \right]^2 - \left[\underbrace{44\ldots44}_{n-1} \times 10 + 5 \right]^2$$

$$= \left[5 \times 10 \times \left(\frac{10^{n-1} - 1}{9} \right) + 6 \right]^2 - \left[4 \times 10 \times \left(\frac{10^{n-1} - 1}{9} \right) + 5 \right]^2$$

$$= \left[10 \left(\frac{10^{n-1} - 1}{9} \right) + 1 \right] \left[9 \times 10 \times \left(\frac{10^{n-1} - 1}{9} \right) + 11 \right]$$

លំហាត់ ៨៣

គេឲ្យ $a_0 ,\ a_1 , \ldots ,\ a_n , \ldots$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_0 = 3$ និង $(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$ ។ គណនា $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ ។

ចម្លើយ

តាង $\frac{1}{a_n} = b_n$ ចំពោះ $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$

យើងបាន $(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18 \Leftrightarrow \left(3 - \frac{1}{b_{n+1}} \right)\left(6 + \frac{1}{b_n} \right) = 18$

$$\Rightarrow 3b_{n+1} - 6b_n - 1 = 0 \Rightarrow b_{n+1} + \frac{1}{3} = 2\left(b_n + \frac{1}{3} \right)$$

ហេតុនេះ $\left\{ b_n + \frac{1}{3} \right\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $q = 2$ និង $b_0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

យើងបាន $b_n + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times 2^n = \frac{2^{n+1}}{3} \Rightarrow b_n = \frac{2^{n+1} - 1}{3}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^{k+1} - 1}{3} \right) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{2\left(2^{n+1}-1\right)}{2-1}\right]-\frac{1}{3}(n+1)=\frac{1}{3}\left(2^{n+2}-n-3\right)$$

ដូចនេះ $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{3}\left(2^{n+2}-n-3\right)$$

លំហាត់ ៨៤

គេឲ្យ $P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$P_n(x)=-2xP_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ ។

ក/ បង្ហាញថា ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$។

ខ/ ទាញបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$

និង $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$ ។

សម្រាយ

ក/

ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $y'=(-2x)e^{-x^2}=P_1(x)$

ឧបមាថា ពិតដល់ $n=k$ គឺ $y^{(k)}=e^{-x^2}P_k(x)$

សិក្សាករណី $n=k+1$

យើងមាន $y^{(k)}=e^{-x^2}P_k(x)\Rightarrow y^{k+1}=-2xe^{-x^2}P_k(x)+e^{-x^2}P'_k(x)$

$$=e^{-x^2}\left(-2xP_k(x)+P'_k(x)\right)$$

$$=e^{-x^2}P_{k+1}(x)$$

ខ/ បង្ហាញថា $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$

យើងមាន $y'=(-2x)e^{-x^2}=-2xy\Rightarrow y'+2xy=0$

ដេរីវេអង្គទាំងពីរចំនួន n ដង និង ប្រើរូបមន្ត Leibniz

គឺ $(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + \ldots + fg^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(n-i)} g^{(i)}$

យើងបាន $y^{(n+1)} + 2(xy)^{(n)} = y^{(n+1)} + 2xy^{(n)} + 2ny^{(n-1)} = 0$

$$\Rightarrow e^{-x^2}\left(P_{n+1}(x) + 2xP_n(x) + 2nP_{n-1}(x)\right) = 0$$

ហេតុនេះ $P_{n+1}(x) + 2xP_n(x) + 2nP_{n-1}(x) = 0$

បង្ហាញថា $P''_n(x) - 2xP'_n(x) + 2nP_n(x) = 0$

យើងមាន $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) + P'_n(x)$

ដោយ $P_{n+1}(x) + 2xP_n(x) + 2nP_{n-1}(x) = 0$

យើងបាន $-2xP_n(x) + P'_n(x) + 2xP_n(x) + 2nP_{n-1}(x) = 0$

$$\Rightarrow P'_n(x) + 2nP_{n-1}(x) = 0 \Rightarrow P'_n(x) = -2nP_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow P'_{n+1}(x) = -2(n+1)P_n(x) = -2nP_n(x) - 2P_n(x) \qquad (1)$$

តែ $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) + P'_n(x)$

$$\Rightarrow P'_{n+1}(x) = -2xP'(x) - 2P_n(x) + P''_n(x) \qquad (2)$$

តាម (1),(2) យើងបាន $P''_n(x) - 2xP'_n(x) + 2nP_n(x) = 0$

លំហាត់ ៨៥

គេឲ្យចំនួនពិត $x=k+\sqrt{k^2-1}$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានធំជាង 1 ។
ចំពោះ $n=1,\ 2,\ \dots$ គេតាង A_n ជាផ្នែកគត់នៃ x^n ។ គណនា A_{2n} ជាអនុគមន៍នៃ A_n ។

ចម្លើយ

យើងមាន $x=k+\sqrt{k^2-1}$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានធំជាង 1

តាង $y=k-\sqrt{k^2-1}\Rightarrow 0<y<1$

យើងបាន $x+y=2k$ និង $xy=1$

ហេតុនេះ x, y ជាឫសនៃសមីការ $t^2-2kt+1=0$

គឺ $\quad x^2-2kx+1=0 \quad \times x^{n-2}$

និង $\quad y^2-2ky+1=0 \quad \times y^{n-2}$

យើងបាន $x^n-2kx^{n-1}+x^{n-2}=0$ និង $y^n-2ky^{n-1}+y^{n-2}=0$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $(x^n+y^n)-2k(x^{n-1}+y^{n-1})+x^{n-2}+y^{n-2}=0$

តាង $S_n=x^n+y^n$ យើងបាន $S_n-2kS_{n-1}+S_{n-2}=0$ ចំពោះ $n\geq 2$

ដោយ $S_0=1+1=2$ ជាចំនួនគត់, $S_1=x+y=2k$ ជាចំនួនគត់

តាមវិចារកំណើនយើងបាន $S_n=x^n+y^n$ ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ n

ម៉្យាងទៀត $0<y<1\Rightarrow x^n<x^n+y^n<x^n+1$

យើងបាន $[x^n+1]=x^n+y^n\Rightarrow [x^n]+1=x^n+y^n\Rightarrow A_n+1=x^n+y^n$

យើងបាន $A_n^2+2A_n+1=x^{2n}+y^{2n}+2(xy)^n=A_{2n}+1+2$

ដូចនេះ $A_{2n}=A_n^2+2A_n-2$

លំហាត់ ៨៦

សំណុំរងមានបីធាតុ $\{a,b,c\}$ត្រូវបានជ្រើសចេញពីសំណុំ $\{1,2,3,...,299,300\}$ ។

កំណត់ចំនួនសំណុំរងទាំងនេះ បើគេដឹងថាផលបូក $a+b+c$ ជាពហុគុណនៃ 3 ។

ចម្លើយ

យក A_i ចំពោះ $i=\overline{0,2}$ ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ពី 1ដល់ 300 ដែលចែកនឹង 3

បានសំណល់ i យើងបាន $|A_i|=100$

ហេតុនេះ $a+b+c$ ជាពហុគុណនៃ 3 លុះត្រាតែមួយក្នុងចំណោមលក្ខខណ្ឌ

ខាងក្រោមផ្ទៀងផ្ទាត់

i- a , b , c ជាធាតុនៃសំណុំ A_i តែមួយ

ii- a ជាធាតុនៃ A_0 , b ជាធាតុនៃ A_1 និង c ជាធាតុនៃ A_2

ដោយ ចំនួនសំណុំរងមានបីធាតុនៃសំណុំ A_i មានចំនួន C_{100}^3

និង ចំនួនសំណុំរងមានបីធាតុ $\{a,b,c\}$បំពេញលក្ខខណ្ឌ (ii) មានចំនួន 100^3

ហេតុនេះ ចំនួនសំណុំរងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ គឺ $3C_{100}^3+100^3=1485100$

លំហាត់ ៨៧

តើមានសំណុំដែលមានបីធាតុនៃសំណុំ $\{1,2,3,...,20\}$ ចំនួនប៉ុន្មាន បើដឹងថាផលគុណ

នៃធាតុទាំងបីរបស់សំណុំនោះចែកដាច់នឹង 4 ?

ចម្លើយ

យើងនឹងកំណត់ចំនួនសំណុំរងមានបីធាតុ $\{a,b,c\}$ដែល abc ចែកមិនដាច់នឹង 4

abc ចែកមិនដាច់នឹង 4 លុះត្រាតែ a , b , c សុទ្ធតែជាចំនួនគត់សេស

រឺ ពីរក្នុងចំណោម a , b , c ជាចំនួនគត់សេស និង មួយទៀតជាចំនួនគត់គូតែចែកមិន

ដាច់នឹង 4

សំណុំ $\{1,2,3,\ldots,20\}$ មានចំនួនសេសចំនួន10 និង ចំនួនគូចែកមិនដាច់នឹង 4 ចំនួន 5

ហេតុនេះ ចំនួនសំណុំរងមានបីធាតុ $\{a,b,c\}$ ដែល abc ចែកមិនដាច់នឹង 4 មានចំនួន

$$C_{10}^{3}+C_{10}^{2}\times C_{5}^{1}=345$$

ដោយ ចំនួនសំណុំរងមានបីធាតុនៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,20\}$ មានចំនួន $C_{20}^{3}=1140$

ហេតុនេះ ចំនួនសំណុំរងត្រូវរក គឺ $1140-345=795$

លំហាត់ ៨៨

យក A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ $\{1,11,21,\ldots,541,551\}$ ហើយ គ្មានពីរធាតុណានៃ A មានផលបូកស្មើនឹង 552 ។ បង្ហាញថា A មិនអាចមានលើសពី 28 ធាតុ ។

សម្រាយ

សំណុំ $\{1,11,21,\ldots,541,551\}$ មានចំនួន 56 ធាតុ

យើងរៀបធាតុនៃសំណុំ $\{1,11,21,\ldots,541,551\}$ ជាគូៗដែលបង្កើតបានជាសំណុំ $\{(1,551),(11,541),\ldots,(271,281)\}$ ក្នុងនោះផលបូកនៃគូនីមួយៗស្មើនឹង 552 និង ចំនួនគូទាំងអស់មាន 28 គូ

ហេតុនេះ បើសំណុំរង A មានធាតុលើសពី 28 នោះយ៉ាងហោចណាស់មួយគូនៃ សំណុំខាងលើជាធាតុនៃ A

មានន័យថា មានពីរធាតុនៃ A ដែលមានផលបូកស្មើនឹង 552

ដូចនេះ A មិនអាចមានលើសពី 28 ធាតុ

លំហាត់ ៨៩

គេមាន17 ចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នាដែលគ្មានធាតុណាមួយមានតួចែកបឋមធំជាង10 ។

បង្ហាញថា មានពីរចំនួនដែលមានផលគុណជាការេប្រាកដ ។

សម្រាយ

ដោយ ចំនួនទាំង 17 មានតួចែកបឋមមិនលើសពី 10

ហេតុនេះ ចំនួនទាំងអស់មានរាង $2^a3^b5^c7^d$ ដែល a , b , c , d ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន

ឧបមាថា $2^a3^b5^c7^d$ និង $2^{a'}3^{b'}5^{c'}7^{d'}$ ជាពីរចំនួនក្នុងចំណោមចំនួនទាំងអស់

យើងបាន $\left(2^a3^b5^c7^d\right)\left(2^{a'}3^{b'}5^{c'}7^{d'}\right)=2^{a+a'}3^{b+b'}5^{c+c'}7^{d+d'}$

បើ $a+a'$, $b+b'$, $c+c'$, $d+d'$ ជាចំនួនគូ មានន័យថា (a,b,c,d) និង (a',b',c',d')មានភាពគូសេសដូចគ្នា

យើងបាន $\left(2^a3^b5^c7^d\right)\left(2^{a'}3^{b'}5^{c'}7^{d'}\right)$ជាការេប្រាកដ

ក្នុងចំណោមទាំង 17 ចំនួននោះយើងនឹងបង្ហាញថា មានគូចតុជាតុដែលជានិទស្សន្ត៍នៃពីរចំនួនក្នុងចំណោមចំនួនទាំងអស់មានភាពគូសេសដូចគ្នា

យើងសង្កេតឃើញថា (x,y,z,t)មានភាពគូសេស $2^4=16$របៀបផ្សេងគ្នា

ដោយ ចតុជាតុទាំងអស់មានចំនួន 17 ដែលត្រូវនឹងចំនួនផ្សេងគ្នាទាំង 17

តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប យើងបានចតុជាតុមួយគូដែលមានភាពគូសេសដូចគ្នា

នេះបញ្ជាក់ថា មានពីរចំនួនក្នុងចំណោម 17 ចំនួននោះមានផលគុណជាការេប្រាកដ

លំហាត់ ៩០

គេឲ្យ A ជាសំណុំរងដែលមាន $n+1$ ជាតុនៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,2n\}$។

បង្ហាញថា

i- A មានពីរធាតុជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

ii- A មានពីរធាតុផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌចែកដាច់ ។

សម្រាយ

i- ដោយ A ជារងដែលមាន $n+1$ ធាតុនៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,2n\}$

យើងបាន ពីរចំនួនយ៉ាងតិចក្នុងចំណោម $n+1$ ជាចំនួនគត់តគ្នា

ដោយ គ្រប់ចំនួនគត់តគ្នា ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

ហេតុនេះ A មានពីរធាតុជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

ii- យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប

សរសេរ $n+1$ ធាតុនៃ A ជារាង $q2^p$ ដែល q ជាចំនួនគត់សេស

និង p ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន

ដោយ A ជាសំណុំរងនៃ $\{1,2,3,\ldots,2n\} \Rightarrow q \in \{1,3,5,\ldots,2n-1\}$

ជាសំណុំដែលមាន n ធាតុ

ដោយ A មាន $n+1$ ធាតុ $\Rightarrow q$ ក៏មាន $n+1$ តម្លៃដែរ

តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា មាន a , $b \in A$

ដែល $a \neq b$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a = q2^{p_1}$, $b = q2^{p_2}$

បើ $p_1 > p_2$ យើងបាន b ចែកដាច់ a

បើ $p_1 < p_2$ យើងបាន a ចែកដាច់ b

លំហាត់ ៩១

គេមាន 7 ចំនួនពិតផ្សេងគ្នា ។ បង្ហាញថា មានពីរក្នុងចំណោមចំនួនទាំង 7 ផ្ទៀងផ្ទាត់

វិសមភាព $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ។

សម្រាយ

យើងអាចជំនួសចំនួនពិតមួយដោយ $\tan\alpha$ ដែល $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$

ឧបមាថា x_i, $i=\overline{1,7}$ ជា 7 ចំនួនផ្សេងគ្នានោះ

ហេតុនេះ យើងអាចយក $x_i = \tan\alpha_i$ ចំពោះ $i=\overline{1,7}$ ដែល $-90^\circ < \alpha_i < 90^\circ$

WLOG សន្មតថា $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_7$

យើងបាន $\alpha_7 - \alpha_1 < 180^\circ \Rightarrow \exists i$ ដែល $\alpha_{i+1} - \alpha_i < 30^\circ$

យើងបាន $0 < \tan(\alpha_{i+1} - \alpha_i) < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ដោយ $\tan(\alpha_{i+1} - \alpha_i) = \dfrac{\tan\alpha_{i+1} - \tan\alpha_i}{1+\tan\alpha_i \tan\alpha_{i+1}} = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{1+x_i x_{i+1}}$

ដូចនេះ មានពីរក្នុងចំណោមចំនួនទាំង 7 ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

លំហាត់ ៩២

នៅលើកោះមួយមានទីក្រុងចំនួន 6 ។ ទីក្រុងពីរៗអាចធ្វើដំណើរទៅវិញទៅមកដោយប្រើមធ្យមបាយណាមួយក្នុងចំណោមរថភ្លើង និង ឡានក្រុង ។បង្ហាញថា មានទីក្រុងបីដែលប្រើមធ្យោបាយក្នុងការធ្វើដំណើរដូចគ្នា ។

សម្រាយ

យក A, B, C, D, E និង F ជាទីក្រុងទាំង6 នោះ

r ជាមធ្យោបាយធ្វើដំណើរដោយរថភ្លើង

និង m ជាមធ្យោបាយធ្វើដំណើរដោយឡានក្រុង

ពិនិត្យលើមធ្យោបាយធ្វើដំណើរចេញពីទីក្រុង A ទៅកាន់ទីក្រុងផ្សេងទៀត

គឺ AB, AC, AD, AE និង AF

ដោយ មានមធ្យោបាយធ្វើដំណើរតែពីរ តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាបក្នុងការធ្វើដំណើរពីទីក្រុង A ទៅទីក្រុងប្រាំផ្សេងទៀតត្រូវមានមានបីទីក្រុងដែលមានមធ្យោបាយធ្វើដំណើរដូចគ្នា

WLOG សន្មតថា AB, AC, AD ប្រើរថភ្លើងជាមធ្យោបាយធ្វើដំណើរ(ដូចរូប)

បើពីរក្នុងចំណោមទីក្រុង B, C, D ធ្វើដំណើរដោយប្រើរថភ្លើង

នោះ មានទីក្រុងបីដែលប្រើមធ្យោបាយក្នុងការធ្វើដំណើរដូចគ្នា

បើទីក្រុងបី B, C, D ធ្វើដំណើរទៅវិញទៅមកដោយប្រើឡានក្រុង

នោះ សំណើនៃលំហាត់ពិត

សរុបមក មានទីក្រុងបីដែលប្រើមធ្យោបាយក្នុងការធ្វើដំណើរដូចគ្នា

លំហាត់ ៩៣

គេឲ្យប្រាំបីចំណុចនៅក្នុងលំហមួយដែលគ្មានបីចំណុចណារត់ត្រង់គ្នា ។

កំណត់ចំនួនត្រីកោណអតិបរមាដែលបង្កើតឡើងដោយចំណុចទាំងនោះ បើគេដឹងថាគ្មានត្រីកោណពីរណាមានកំពូលរួមលើសពីមួយ ។

ចម្លើយ

យើងសង្កេតឃើញថា ចំណុចមួយអាចកំណត់បានត្រីកោណយ៉ាងច្រើនបី

ព្រោះ បើយើងរើសយកមួយចំណុច នោះចំណុចដែលនៅសល់មានចំនួន 7

ក្នុងនោះមានតែបីគូប៉ុណ្ណោះដែលអាចជ្រើសរើសបាន

បើត្រីកោណមានចំនួនយ៉ាងតិច 9 នោះចំនួនកំពូលមានយ៉ាងតិច 27

(អាចមានច្រំដែល) ក្នុងករណីនេះចំណុចមួយអាចជាកំពូលនៃត្រីកោណយ៉ាងតិច

4 ផ្ទុយពីការពិត

ហេតុនេះ ចំនួនត្រីកោណអតិបរមាមានចំនួន 8

ឧទាហរណ៍ បើយើងយក 1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 តាងឲ្យចំណុចទាំងប្រាំបី

នោះ គេបានត្រីកោណចំនួន 8 បំពេញលក្ខខណ្ឌនៃលំហាត់ គឺ

123 , 145 , 167 , 248 , 368 , 578 , 256 និង 347 ។

លំហាត់ ៩៤

តើមានបីចំនួនបង្កើតបានជាស្ទីតធរណីមាត្រកើនចំនួនប៉ុន្មានបើចំនួនទាំងនោះត្រូវបានយកចេញពីស្ទីតធរណីមាត្រ $1,\ 2\ ,\ 2^2, \dots ,\ 2^n$?

ចម្លើយ

ស្ទីតធរណីមាត្រកើនបីតួដែលមានរេសុងស្មើនឹង 2 មានចំនួន $n-1$

គឺ $1,\ 2\ ,\ 2^2;\ 2\ ,\ 2^2,\ 2^3; \dots ;\ 2^{n-2},\ 2^{n-1},\ 2^n$

ស្ទីតធរណីមាត្រកើនបីតួដែលមានរេសុងស្មើនឹង 2^2 មានចំនួន $n-3$

គឺ $1,\ 2^2,\ 2^4;\ 2\ ,\ 2^3,\ 2^5; \dots ;\ 2^{n-4},\ 2^{n-2},\ 2^n$

ដូចគ្នាដែរ ស្ទីតធរណីមាត្រកើនបីតួដែលមានរេសុងស្មើនឹង 2^3 មានចំនួន $n-5$

ហេតុនេះ ចំនួនស្ទីតធរណីមាត្រកើនបីតួដែលបង្កើតដោយស្ទីត $1,\ 2\ ,\ 2^2, \dots ,\ 2^n$

មានចំនួន $S=(n-1)+(n-3)+(n-5)+\dots$

ដោយតួចុងក្រោយនៃផលបូកនេះជាលេខ 2 រឺ 1អាស្រ័យលើភាពគូសេសនៃ n

បើ n សេស យើងបាន $S=(n-1)+(n-3)+(n-5)+\dots+2$

$$= 2\left(2+2+3+\ldots+\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n^2-1}{4}$$

បើ n គូ យើងបាន $S = (n-1)+(n-3)+(n-5)+\ldots+1 = \frac{n^2}{4}$

លំហាត់ ៩៥

យក A ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ដែលចែកដាច់នឹង 3 ចាប់ពី 1 ដល់ 700 និង B ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ដែលចែកដាច់នឹង 7 ចាប់ពី 1 ដល់ 300 ។

កំណត់ចំនួនគូលំដាប់ (a,b) ដែល $a \in A$, $b \in B$, $a \neq b$ និង $a+b$ ជាចំនួនគូ ។

ចម្លើយ

A ជាសំណុំដែលមាន 233 ធាតុដែល 116 ធាតុជាចំនួនគូ និង 117 ធាតុទៀតជាចំនួនសេស និង B ជាសំណុំដែលមាន 42 ធាតុដែល 21 ធាតុជាចំនួនគូ និង 21 ធាតុទៀតជាចំនួនសេស ហេតុនេះចំនួនគូលំដាប់ (a,b) កំណត់ដោយ

$$n = \left|\{(a,b) : a \in A, b \in B, a+b \text{ ជាចំនួនគូ}\}\right| - \left|\{(a,b); a \in A, b \in B, a = b\}\right|$$

$$= \left|\{(a,b) : a \in A, b \in B, a,b \text{ ជាចំនួនគូ}\}\right|$$

$$+ \left|\{(a,b) : a \in A, b \in B, a,b \text{ ជាចំនួនសេស}\}\right|$$

$$- \left|\{(a,b); a \in A, b \in B, a = b\}\right|$$

$$= 116 \times 21 + 117 \times 21 - 14 = 4879$$

លំហាត់ ៩៦

គេឲ្យ $A \subset \{1,2,3,\ldots,100\}$ និង $|A| = 50$ ។ បើគេដឹងថា គ្មានពីរធាតុណានៃ A ដែលមានផលបូកស្មើនឹង 100 ។ បង្ហាញថា A មានធាតុជាការេប្រាកដ ។

សម្រាយ

បើ $100 \in A \Rightarrow A$ ជាសំណុំមានធាតុជាការេប្រាកដ

បើ $100 \notin A \Rightarrow A \subset \{1,2,3,\ldots,99\}$

យើងចែកចំនួន 1, 2, 3, $\ldots$, 99 ជាគូៗដែលមានផលបូកស្មើនឹង 100 និង 50 ជាចំនួនស្ថិតនៅតែឯង គឺ $\{1,99\}$, $\{2,98\}$, $\ldots$, $\{49,51\}$ និង $\{50\}$

សំណុំទាំង 50 នេះជាបំណែកនៃ $\{1,2,3,\ldots,99\}$ មានន័យថា $\{1,99\}$, $\{2,98\}$, $\ldots$, $\{49,51\}$ និង $\{50\}$ ជាសំណុំដាច់គ្នាពីរៗ និង មានប្រជុំស្មើនឹង $\{1,2,3,\ldots,99\}$

ហេតុនេះ A អាចផ្ទុកយ៉ាងច្រើនមួយនៃធាតុរបស់សំណុំទាំង 50 ខាងលើ

ដោយ A មានចំនួន 50 ធាតុ ដូចនេះ A ត្រូវតែយកធាតុចេញពីសំណុំទាំង 50 ចំនួនមួយធាតុគ្រប់សំណុំ

តែ $\{36,64\}$ ជាសំណុំមួយក្នុងចំណោមសំណុំទាំង 50 នោះ

យើងបាន A ផ្ទុកចំនួន 36 រឺ 64 ដែលសុទ្ធតែជាការេប្រាកដ

ដូចនេះ A មានធាតុជាការេប្រាកដ

លំហាត់ ៩៧

កំណត់ចំនួនគូ $\{A,B\}$ (មិនគិតលំដាប់) ដែល A, B ជាសំណុំរងនៃសំណុំ X ដែលមាន n ធាតុ និង បំពេញលក្ខខណ្ឌ

- i- $A \neq B$
- ii- $A \cup B = X$ ។

ចម្លើយ

ឧបមាថា A ជាសំណុំដែលមាន r ធាតុ, $0 \le r \le n$

$\Rightarrow A$ អាចជ្រើសរើសបាន C_n^r របៀប

តាមលក្ខខណ្ឌខាងលើ យើងបាន B ជាសំណុំដែលមាន $n-r$ ធាតុដែលនៅសល់

និង អាចមានខ្លះជាធាតុរបស់សំណុំ A

យើងបាន $B=(X-A)\cup C$ ដែល $C\subset A$

$\Rightarrow B$ អាចជ្រើសបាន 2^r របៀប

ហេតុនេះ ចំនួនរបៀបក្នុងការជ្រើសរើស A និង B ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

មានចំនួន $\sum_{r=0}^{n} 2^r C_n^r = (1+2)^n = 3^n$ របៀប

តែ មានមួយរបៀបដែល $A=B(=X)$

ដោយ មិនគិតពីលំដាប់នៃគូ $\{A,B\}$

ដូចនេះ គូ $\{A,B\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនៃលំហាត់មានចំនួន $\dfrac{3^n-1}{2}$

លំហាត់ ៩៨

កំណត់ចំនួនពហុធាដឺក្រេទី ២ ax^2+bx+c ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

- i- a , b , c ជាបីចំនួនផ្សេងគ្នា
- ii- a , b , $c\in\{1,2,3,\ldots,1999\}$ និង
- iii- $x+1$ ជាកត្តាមួយនៃ ax^2+bx+c ។

ចម្លើយ

ដោយ $x+1$ ជាកត្តាមួយនៃ ax^2+bx+c

យើងបាន $a-b+c=0 \Rightarrow b=a+c$

ហេតុនេះ លក្ខខណ្ឌខាងលើសមមូលនឹង a , b , $c\in\{1,2,3,\ldots,1999\}$

, $a \neq c$ និង $a + c = b$

ករណី $a < c$

ចំពោះគ្រប់ $1 \le a \le 999 \Rightarrow c$ អាចយកតម្លៃចាប់ពី $a+1$ ដល់ $1999 - a$

យើងបាន បើ $a = 1 \Rightarrow c$ អាចយកតម្លៃចាប់ពី 2 រហូតដល់ 1998

$\Rightarrow (a,c)$ មានចំនួន 1997 គូលំដាប់

បើ $a = 2 \Rightarrow c$ អាចយកតម្លៃចាប់ពី 3 រហូតដល់ 1997

$\Rightarrow (a,c)$ មានចំនួន 1995 គូលំដាប់

ស្រាយដូចគ្នាជាបន្តបន្ទាប់ យើងបាន ចំនួនគូ (a,c) ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

គឺ $1997 + 1995 + \ldots + 1 = 999^2$

ស្រាយដូចគ្នាចំពោះករណី $c < a$

យើងបាន ចំនួនគូ (a,c) ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌគឺ 999^2

ដូចនេះ ពហុធាដឺក្រេទី ២ $ax^2 + bx + c$ មានចំនួន 2×999^2

លំហាត់ ៩៩

បង្ហាញថា ចំនួនសំណុំរងមានបីធាតុ $\{a,b,c\}$ នៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,63\}$ ដែល បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a + b + c < 95$ មានចំនួនតិចជាងសំណុំរងមានបីធាតុ $\{a,b,c\}$ នៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,63\}$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a + b + c > 95$ ។

សម្រាយ

បើ $\{a,b,c\}$ ជាសំណុំរងនៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,63\}$ ដែល $a + b + c < 95$

យើងបាន $\{64 - a, 64 - b, 64 - c\}$ ជាសំណុំរងនៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,63\}$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $(64 - a) + (64 - b) + (64 - c) = 192 - (a + b + c) > 97$

ប្រាសមកវិញ បើ $\{a,b,c\}$ជាសំណុំរងនៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,63\}$ដែល $a+b+c>97$ យើងបាន $\{64-a,64-b,64-c\}$ជាសំណុំរងនៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,63\}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$(64-a)+(64-b)+(64-c)=192-(a+b+c)<95$$

ហេតុនេះ ចំនួនសំណុំរងមានបីធាតុ $\{a,b,c\}$នៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,63\}$ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c<95$ មានចំនួនស្មើនឹងសំណុំរងមានបីធាតុ $\{a,b,c\}$បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c>97$

ដូចនេះ យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា ចំនួនសំណុំរងមានបីធាតុ $\{a,b,c\}$នៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,63\}$ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c<95$ មានចំនួនតិចជាងសំណុំរងមានបីធាតុ$\{a,b,c\}$នៃសំណុំ $\{1,2,3,\ldots,63\}$ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c>95$

លំហាត់ ១០០

គេមានម៉ាទ្រីសការេមួយទំហំ $2n\times 2n$ ដែលមានធាតុជាលេខ 0 និង លេខ 1។ លេខ 0 ទាំងអស់មានចំនួន $3n$។ បង្ហាញថា គេអាចលុបលេខសូន្យទាំងអស់ដោយលុបជួរដេកចំនួន n និង ជួរឈរចំនួន n។

សម្រាយ

យើងលុប n ជួរដេកដែលមានលេខសូន្យច្រើនបំផុត

យើងបាន លេខសូន្យដែលនៅសល់មានយ៉ាងច្រើន n ក្នុង n ជួរដេកដែលនៅសល់

ព្រោះ បើសល់លេខសូន្យច្រើនជាង $n+1$ នៅក្នុង n ជួរដេកដែលនៅសល់

តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប យើងបាន យ៉ាងហោចណាស់មានជួរដេកដែលផ្ទុកលេខសូន្យយ៉ាងតិចពីរចំនួនមួយនៅក្នុង n ជួរដេកនៅសល់

ដោយ យើងលុបជួរដេកដែលមានលេខសូន្យច្រើនជាងគេបំផុត

នាំឲ្យ ជួរដេកនីមួយៗដែលបានលុបមានយ៉ាងហោចណាស់លេខសូន្យចំនួនពីរ

ហេតុនេះ n ជួរដេកដែលបានលុបមានលេខសូន្យយ៉ាងហោចណាស់ $2n$

សរុបមក លេខសូន្យទាំងអស់មានយ៉ាងតិចចំនួន $3n+1$ ផ្ទុយពីការពិត

ដោយ លេខសូន្យមានយ៉ាងច្រើន n នៅសល់ក្នុងម៉ាទ្រីស

ដូចនេះ យើងអាចលុបលេខសូន្យទាំងនោះអស់ដោយធ្វើការលុបជួរឈរនៃម៉ាទ្រីស

ចំនួន n

លំហាត់ ១០១

កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n បើគេដឹងថាសំណុំ $\{1,2,3,4,\ldots,4n\}$ អាចញែកជា n សំណុំរងដែលមានបួនធាតុ $\{a,b,c,d\}$ ដាច់គ្នា និង បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$a=\dfrac{b+c+d}{3}$ ។

ចម្លើយ

ចំពោះ $a=\dfrac{b+c+d}{3}$ យើងបាន $a+b+c+d=4a$

នេះបញ្ជាក់ថា បើ n បំពេញលក្ខខណ្ឌនៃលំហាត់

$\Rightarrow 1+2+3+\ldots+4n=\dfrac{4n(4n+1)}{2}=2n(4n+1)$ ចែកដាច់នឹង 4

$\Rightarrow n$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ

ច្រាសមកវិញ បើ n ជាចំនួនគូ គឺ $n=2k$, $k\in \text{IN}$

យើងបាន $\{1,2,3,4,\ldots,2n\}=\{1,2,3,4,\ldots,8k\}$ ជាសំណុំដែលអាចចែកជា

n សំណុំរងដែលមានបួនធាតុ $\{a,b,c,d\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a=\dfrac{b+c+d}{3}$

ព្រោះ $\{1,2,3,4,...,8k\}$ អាចចែកជា k សំណុំរងដែលមាន 8 ធាតុជាចំនួនគត់តគ្នា

គឺ $\{a+1,a+2,...,a+8\}$

ហើយ $\{a+1,a+2,...,a+8\}$ អាចចែកជាពីរសំណុំរងដែលមានបួនធាតុ

$\{a+1,a+3,a+4,a+8\}$ និង $\{a+2,a+5,a+6,a+7\}$

ដែលសំណុំនីមួយៗបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+4=\dfrac{a+1+a+3+a+8}{3}$

និង $a+5=\dfrac{a+2+a+6+a+7}{3}$ រៀងគ្នា

លំហាត់ ១០២

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 3$ គេយក $f(n)$ តាងឲ្យចំនួនត្រីកោណដែលមានរង្វាស់ជ្រុងជាចំនួនគត់មានបរិមាត្រស្មើនឹង n ។ ឧទាហរណ៍ $f(3)=1$, $f(4)=0$ និង $f(7)=2$ ។ បង្ហាញថា

i- $f(1999)>f(1996)$

ii- $f(2000)=f(1997)$ ។

សម្រាយ

i- យក a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណដែល $a+b+c=1996$

និង a, b, $c\in \mathrm{IN}$

យើងបាន $a<b+c\Rightarrow a+1<(b+1)+(c+1)$

(ដូចគ្នាដែរ ចំពោះពីរករណីផ្សេងទៀត)

$\Rightarrow a+1$, $b+1$, $c+1$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយដែលមានបរិមាត្រ

ស្មើនឹង $(a+1)+(b+1)+(c+1)=2000$

ម៉្យាងទៀត $(1,999,999)$ ជាត្រីជាតុដែលបង្កើតបានជាត្រីកោណមួយដែលមាន

បរិមាត្រស្មើនឹង 1999 តែ $(0,998,998)$ មិនអាចផ្គុំបានជាត្រីកោណដែល

មានបរិមាត្រស្មើនឹង 1996

ដូចនេះ $f(1999)>f(1996)$

ii- ស្រាយដូច (i) យើងបាន $f(2000)\geq f(1997)$ (1)

បើ x, y, z ជាចំនួនគត់ និង ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយដែល

$x+y+z=2000$

ឧបមាថា $x\geq y\geq z$ យើងបាន $x\geq y\geq z>1$ ព្រោះ $z=1$

$\Rightarrow x+y=1999\Rightarrow x,\ y$ មានភាពគូសេសខុសគ្នា

យើងបាន $x-y\geq 1=z\Rightarrow x\geq y+z$ មិនពិត

បើ $x\geq y\geq z>1$ យើងបាន $x-1\geq y-1\geq z-1>0$

ចំពោះ $x\geq y+z-1\Rightarrow y+z-1\leq x<y+z\Rightarrow x=y+z-1$

$\Rightarrow 2000=x+y+z=2x+1$ មិនអាច

ចំពោះ $x<y+z-1$ យើងបាន $x-1<(y-1)+(z-1)$

យើងបាន $x-1,\ y-1,\ z-1$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយដែលមាន

បរិមាត្រស្មើនឹង 1997

ហេតុនេះ $f(2000)\leq f(1997)$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $f(2000)=f(1997)$

លំហាត់ ១០៣

គណនា $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$ ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១

តាង $S=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$

យើងបាន $S\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$

ដោយ $\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(b+a)-\sin(b-a)\right]$

ហេតុនេះ $S\sin\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)\right]$

$$-\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$$

ដូចនេះ $S=\frac{1}{2}$

របៀបទី ២

អនុគមន៍ $f(x)=x^7-1$ មានរឹស $x_k=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$ ចំពោះ $k=\overline{0,6}$

ដោយ $\sum_{k=1}^{7}x_k=0$ យើងបាន $\sum_{k=0}^{6}\cos\frac{2k\pi}{7}=0$

$$\Rightarrow 1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0$$

$$\Rightarrow 1+\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)=1$$

ហេតុនេះ $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

របៀបទី ៣

យើងមាន $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}-\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{\sin\frac{14\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}-\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}-\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}-\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$=\frac{3}{2}-2\sin^2\frac{\pi}{7}-1+2\sin^2\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

ហេតុនេះ $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

លំហាត់ ១០៤

គេឲ្យ $h(n)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}^*$ ។ បង្ហាញថា $n+h(1)+h(2)+\ldots+h(n-1)=nh(n)$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $h(n)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow n+h(1)+h(2)+\ldots+h(n-1)$$

$$=n+1+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$=n+(n-1)+\frac{1}{2}(n-2)+\ldots+\frac{1}{n-1}[n-(n-1)]$$

$$=n+(n-1)+\left(\frac{1}{2}n-1\right)+\ldots+\left(\frac{n}{n-1}-1\right)$$

$$=n+n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+n\right)-n+1=n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=nh(n)$$

លំហាត់ ១០៥

គណនា $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}$

$$=\frac{k^2(k+1)^2+2k(k+1)+1}{k^2(k+1)^2}$$

$$=\left[\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)}\right]^2=\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = 1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

យើងបាន $S = \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = n+1-\frac{1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1}$

លំហាត់ ១០៦

គេឲ្យបីចំណុច $A(1,0,1),\ B(-2,1,3)$ និង $C(1,4,0)$ ។

ក/ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ខ/ យក H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC ។ កំណត់កូអរដោនេចំណុច H ។

ចម្លើយ

ក/ យើងមាន $A(1,0,1),\ B(-2,1,3)$ និង $C(1,4,0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-2-1,1-0,3-1)=(-3,1,2)$$

$$\overrightarrow{AC}=(1-1,4-0,0-1)=(0,4,-1)$$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & 2\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-9\vec{i}-3\vec{j}-12\vec{k}$$

ប្លង់ (ABC)មាន vector ណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-9,-3,-12)$

កាត់តាមចំណុច $A(1,0,1)$ កំណត់ដោយ

$$(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$-9(x-1)-3(y-0)+4(z-1)=0$$

$$3(x-1)+y-0+4(z-1)=0$$

$$3x+y+4z-7=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (ABC)កំណត់ដោយ $3x+y+4z-7=0$

ខ/ H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC យើងបាន $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$

និង $H \in (ABC)$

- ចំពោះ $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ យើងបាន $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

  ដោយ $\overrightarrow{AH} = (x-1, y, z-1)$ និង $\overrightarrow{BC} = (3,3-3)$

  យើងបាន $3(x-1)+3(y-0)-3(z-1)=0$

  $\Rightarrow x+y-z=0$ (1)

- ចំពោះ $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ យើងបាន $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

  ដោយ $\overrightarrow{BH} = (x+2, y-1, z-3)$ និង $\overrightarrow{AC} = (0,4-1)$

  យើងបាន $0(x+2)+4(y-1)-(z-3)=0$

  $\Rightarrow 4y-z=1$ (2)

- ចំពោះ $H \in (ABC)$ យើងបាន $3x+y+4z=7$ (3)

តាម (1),(2),(3) យើងបាន $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 4y-z=1 \\ 3x+y+4z=7 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ យើងបាន $x=\frac{8}{13}$, $y=\frac{7}{13}$ និង $z=\frac{15}{13}$

ដូចនេះ $H\left(\frac{8}{13}, \frac{7}{13}, \frac{15}{13}\right)$

លំហាត់ ១០៧

កំណត់គ្រប់ត្រីធាតុគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a , b , c

សន្មតថា $a\geq b\geq c$ យើងបាន $\left(1+\frac{1}{c}\right)^3\geq\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$

បើ $c\geq 3$ យើងបាន $\left(1+\frac{1}{c}\right)^3\leq\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}<3$ មិនពិត

ហេតុនេះ $c=1$ រឺ 2

ចំពោះ $c=1$ យើងបាន $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{3}{2}\Rightarrow(a-1)(b-1)=2$

$$\Rightarrow(a-1,b-1)=(2,1)\Rightarrow(a,b)=(3,2)$$

ចំពោះ $c=2$ យើងបាន $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=2\Rightarrow(a-2)(b-2)=6$

$$\Rightarrow(a-2,b-2)=(6,1) \text{ រឺ } (3,2)$$

$$\Rightarrow(a,b)=(8,3) \text{ រឺ } (5,4)$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(a,b,c)=(8,3,1)$, $(5,4,1)$, $(3,2,1)$

និង ចម្លាស់ផ្សេងទៀតនៃចម្លើយទាំងអស់

លំហាត់ ១០៨

ចំពោះ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន គេតាង $S(n)$ ជាចំនួនគូគត់វិជ្ជមាន (x,y) បំពេញ

លក្ខខណ្ឌ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ ។ ឧទាហរណ៍ $S(2)=3$ ។ កំណត់សំណុំនៃចំនួនគត់

វិជ្ជមាន n បើគេដឹងថា $S(n)=5$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ ចំពោះ x , y , n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

យើងបាន x , $y>n \Rightarrow x=n+a$, $y=n+b$ ដែល a , $b\in \mathrm{IN}$

ហេតុនេះ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}=\frac{1}{n} \Leftrightarrow n^2=ab$

នេះបញ្ជាក់ថា បើ n^2 អាចសរសេរជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន p និង q

គឺ $n^2=pq$ គេបាន $\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+q}=\frac{1}{n}$

ដូចនេះ ចំនួនចម្លើយនៃសមីការ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ គឺជាចំនួនតួចែកវិជ្ជមាននៃ n^2

គឺ $S(n)=d(n^2)$

បើ $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ ដែល p_i , $i=\overline{1,k}$ ជាចំនួនបឋម $\Rightarrow n^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_1}\ldots p_k^{2\alpha_k}$

$\Rightarrow S(n)=d(n^2)=(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\ldots(2\alpha_k+1)$ ដោយ $S(n)=5$

យើងបាន $n=p^2$ ដែល p ជាចំនួនបឋម

ដូចនេះ សំណុំនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន n នោះ គឺ $\{n | n=p^2\}$, p ជាចំនួនបឋម

លំហាត់ ១០៩

ចំណុច $M(x,y,z)$ មានកូអរដោនេជាចំនួនគត់ផ្ទៀងផ្ទាត់

$x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$ ។ បង្ហាញថា មានចំណុច M ច្រើនរាប់មិនអស់

នៅក្នុងលំហ ។

សម្រាយ

យើងមាន $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$

បើ $z=-x$ យើងបាន $2x^2+y^2=y^3 \Rightarrow x^2=\left(\dfrac{y-1}{2}\right)y^2$

សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់ លុះត្រាតែ $\dfrac{y-1}{2}$ ជាការេប្រាកដ គឺ $\dfrac{y-1}{2}=k^2,\ k\in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow y=2k^2+1$$

យើងបាន $x^2=k^2\left(2k^2+1\right)^2 \Rightarrow x=\pm k\left(2k^2+1\right) \Rightarrow z=\mp k\left(2k^2+1\right)$

ក្នុងករណីនេះ $x=\pm k\left(2k^2+1\right),\ y=2k^2+1,\ z=\mp k\left(2k^2+1\right)$

ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ

ហេតុនេះ មានចំណុច M ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ

លំហាត់ ១១០

កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x , y , z ដើម្បីឲ្យ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x , y , z

ឧបមាថា $x\le y\le z$

យើងបាន $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}\Rightarrow x\le 3$

$\Rightarrow x\in\{1,2,3\}$

- ចំពោះ $x=1\Rightarrow 1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Rightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ មិនពិត
- ចំពោះ $x=2\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Rightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

  ដោយ $\frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{2}{y}\Rightarrow y\le 4$

  តែ $2=x\le y\le 4\Rightarrow y=2$, 3 , 4

  បើ $y=2\Rightarrow z\notin \mathrm{IN}$

  បើ $y=3\Rightarrow z=6$

  បើ $y=4\Rightarrow z=4$

- ចំពោះ $x=3\Rightarrow\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Rightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$

  $$\Rightarrow\frac{2}{3}\le\frac{2}{y}\Rightarrow y\le 3$$

  ដោយ $3=x\le y\le 3\Rightarrow y=3$ យើងបាន $z=3$

ហេតុនេះ សមីការមានចម្លើយ $(x,y,z)=(2,3,6)$, $(2,4,4)$, $(3,3,3)$ និង គ្រប់
ចម្លាស់ផ្សេងទៀតនៃចម្លើយទាំងអស់

លំហាត់ ១១១

(JBMO,2001)

ដោះស្រាយសមីការ $a^3+b^3+c^3=2001$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចម្លើយ

ដោយ សមីការ $a^3+b^3+c^3=2001$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a , b , c

ឧបមាថា $a\le b\le c$

Lemma

ចំពោះគ្រប់ $x\in \mathrm{IN}$ គេបាន $x^3\equiv -1,\ 0\ ,\ 1(\mathrm{mod}\,9)$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $x\in \mathrm{IN}$ យើងបាន $x=3k$, $3k+1$, $3k+2$ ដែល $k\ge 0$

បើ $x=3k\Rightarrow x^3\equiv 0(\mathrm{mod}\,9)$

បើ $x=3k+1\Rightarrow x^3\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$

បើ $x=3k+2\Rightarrow x^3\equiv 8\equiv -1(\mathrm{mod}\,9)$

ហេតុនេះ $x^3\equiv -1,\ 0\ ,\ 1(\mathrm{mod}\,9)$

ដោយ $2001\equiv 3(\mathrm{mod}\,9)$ យើងបាន $a^3\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$, $b^3\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$
និង $c^3\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$

យើងបាន a , b , c ត្រូវតែមានរាង $3k+1$ គឺ a , b , $c\in\{1,4,7,10,\dots\}$

បើ $c\ge 13\Rightarrow c^3\ge 2197>2001\Rightarrow a^3+b^3+c^3=2001$
ជាសមីការគ្មានរឹស

បើ $c\le 7\Rightarrow 2001=a^3+b^3+c^3\le 3\times 7^3=1029$ មិនពិត

ក្នុងករណីនេះ សមីការក៏គ្មានរឹសដែរ

យើងបាន $c=10 \Rightarrow a^3+b^3=1001$

ករណី $b<c \Rightarrow a \le b \le 7 \Rightarrow 1001=a^3+b^3 \le 2\times 7^3=686$ មិនពិត

ហេតុនេះ គ្មាន a , b ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^3+b^3=1001$

យើងបាន $b=c=10 \Rightarrow a=1$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(a,b,c)=(1,10,10)$ និង ចម្លាស់ផ្សេងទៀតនៃ
ចម្លើយនេះ

លំហាត់ ១១២

(JBMO Shortlist,2000)

កំណត់គ្រប់ត្រីធាតុគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$xy+yz+zx-xyz=2$$ ។

ចម្លើយ

ដោយ សមីការ $xy+yz+zx-xyz=2$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x , y , z

ឧបមាថា $x \le y \le z$

ចពោះ $x=1$ យើងបាន $y+z=2 \Rightarrow y=z=1$

ចំពោះ $x=2$ យើងបាន $2y+yz+2z-2yz=2 \Rightarrow (y-2)(z-2)=2$

ហេតុនេះ $(y-2,z-2)=(1,2) \Rightarrow (y,z)=(3,4)$

ចំពោះ $x \ge 3 \Rightarrow z \ge y \ge 3$ យើងបាន $xyz \ge 3yz$, $xyz \ge 3zx$, $xyz \ge 3xy$

$\Rightarrow 3(xy+yz+zx) \le 3xyz$

$\Rightarrow xy+yz+zx-xyz \le 0$

គេបាន $xy+yz+zx-xyz=2$ គ្មានចម្លើយ

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(x,y,z)=(1,1,1)$, $(2,3,4)$ និង គ្រប់ចម្លាស់ផ្សេងទៀត

នៃចម្លើយទាំងនេះ

លំហាត់ ១១៣

(IMO Shortlist,2003)

កំណត់តម្លៃ t តូចបំផុតដើម្បីឲ្យមាន $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_t$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x_1^3+x_2^3+\dots+x_t^3=2002^{2002}$ (*)។

ចម្លើយ

យើងមាន $2002^{2002}=2002^{2001}\times 2002=\left(2002^{667}\right)^3\left(1^3+1^3+10^3+10^3\right)$

$$=\left(2002^{667}\right)^3+\left(2002^{667}\right)^3+\left(10\times 2002^{667}\right)^3+\left(10\times 2002^{667}\right)^3$$

មានន័យថា 2002^{2002} អាចសរសេរជាផលបូកគូបនៃបួនចំនួន

ម្យ៉ាងទៀត $2002^{2002}\equiv 4^{2002}\equiv 4^{6(333)+4}\equiv 4^4\equiv 4\pmod 9$

ព្រោះ $4^6\equiv 1\pmod 9$

តែ $\forall x\in \mathrm{IN}$ យើងបាន $x^3\equiv -1,\ 0,\ 1\pmod 9$

ហេតុនេះ (*) គ្មានរឹសចំពោះ $t=1,\ 2,\ 3$ ហើយ $t=4$ ជាតម្លៃតូចបំផុតដែល $x_1^3+x_2^3+\dots+x_t^3=2002^{2002}$ មានរឹសដែលរឹសទាំងនោះ គឺ

$\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\left(2002^{667},2002^{667},10\times 2002^{667},10\times 2002^{667}\right)$

និង គ្រប់ចម្លាស់ផ្សេងទៀត

ដូចនេះ $t_{\min}=4$

លំហាត់ ១១៤

(USAMO,1979)

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន $\left(n_1,n_2,\dots,n_{14}\right)$ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$n_1^4+n_2^4+\dots+n_{14}^4=1599$ ។

ចម្លើយ

ចំពោះគ្រប់ $x \in IN$ គេបាន $x^4 \equiv 0\ ,\ 1(\text{mod}16)$

(សូមសាកល្បងស្រាយដោយខ្លួនឯង)

យើងបាន $n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_{14}^4 \equiv 0\ ,\ 1,\ \ldots\ ,\ 14(\text{mod}16)$

តែ $1599 \equiv 15(\text{mod}16)$

ដូចនេះ សមីការ $n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_{14}^4 = 1599$ គ្មានរឹសជាចំនួនគត់ទេ

លំហាត់ ១១៥

ក/ កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $a\ ,\ b\ ,\ c$ ដើម្បីឲ្យ $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{4}$ ។

ខ/ កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដើម្បីឲ្យសមីការ

$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2} = 1\ (\ *\ )$មានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចម្លើយ

ក/

ដោយ សមីការ $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{4}$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង $a\ ,\ b\ ,\ c$

ឧបមាថា $a \le b \le c$

យើងបាន $\frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \le \frac{3}{a^2} \Rightarrow a^2 \le 12$

$\Rightarrow a = 1\ ,\ 2\ ,\ 3$

ចំពោះ $a = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = -\frac{3}{4}$ មិនអាច

ចំពោះ $a = 2 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0$ មិនអាច

ចំពោះ $a = 3$ យើងបាន $\frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \le \frac{2}{b^2} \Rightarrow b^2 \le \frac{72}{5}$

ហេតុនេះ $b=3\Rightarrow c=6$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(a,b,c)=(3,3,6)$ និង គ្រប់ចម្លាស់ផ្សេងទៀតនៃ

ចម្លើយទាំងនេះ

ខ/

ដោយ $\frac{1}{x_1^2}=\frac{4}{(2x_1)^2}+\frac{4}{(2x_1)^2}+\frac{4}{(2x_1)^2}+\frac{4}{(2x_1)^2}$

ហេតុនេះ បើ $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ ជាឫសនៃ (*) ចំពោះ $n=k$ នោះ

$(2x_1,2x_1,2x_1,2x_1,x_2,\ldots,x_k)$ ក៏ជាឫសនៃ (*) ចំពោះ $n=k+3$ ដែរ

មានន័យថា បើសមីការមានឫសចំពោះ k នោះសមីការក៏មានឫសចំពោះ $k+3$ ដែរ (1)

ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $\frac{1}{x_1^2}=1\Rightarrow x_1=1$

ចំពោះ $n=2$, 3 គេបានសមីការគ្មានឫស (ស្រាយដូចលំហាត់ ក)

ចំពោះ $n=4$ យើងបាន $x_1=x_2=x_3=x_4=2$ ជាចម្លើយនៃសមីការ

ព្រោះ $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=1$

ចំពោះ $n=5$

ដោយ $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}+\frac{1}{x_5^2}=1$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5$

ឧបមាថា $x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le x_5$ យើងបាន $1<x_1^2\le 5\Rightarrow x_1=2$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $x_1=x_2=x_3=x_4=2\Rightarrow \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=1$

ហេតុនេះ $\frac{1}{x_1^5}=0$ មិនអាច

យើងបាន សមីការគ្មានរឹសចំពោះ $n=5$

ម៉្យាងទៀត យើងសង្កេតឃើញថា $(2,2,2,3,3,6)$ និង $(2,2,2,3,3,9,9,18)$

ជារឹសនៃសមីការចំពោះ $n=6$ និង 8 រៀងគ្នា

គេបាន សមីការមានរឹសចំពោះ $n=4$, 6 , 8 (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន (*) មានរឹសចំពោះ $n \geq 6$

ដូចនេះ សមីការមានរឹសជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \notin \{2,3,5\}$

លំហាត់ ១១៦

(Hungary,1998)

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y, z ដែល $z \geq 2$ នៃសមីការ

$(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+99)^2=y^z$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+99)^2$

$$=99x^2+2x(1+2+\ldots+99)+\left(1^2+2^2+\ldots+99^2\right)$$

$$=99x^2+2x\left[\frac{99(99+1)}{2}\right]+\frac{99(99+1)(2\times 99+1)}{6}$$

$$=99x^2+99\times 100x+328350$$

ហេតុនេះ $(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+99)^2 \equiv 3(\text{mod}\,9)$ និង $\equiv 0(\text{mod}\,3)$

ដោយ $(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+99)^2=y^z$

យើងបាន $y^z \equiv 3(\text{mod}\,9)$ និង $y^z \equiv 0(\text{mod}\,3)$

យើងបាន $y^z=3p$ ដែល p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានចែកមិនដាច់នឹង 3

ដោយ $z \geq 2 \Rightarrow y^z=3p$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ សមីការគ្មានរឹស

លំហាត់ ១១៧

(JBMO,1998)

កំណត់គ្រប់គូគត់វិជ្ជមាន (x, y)នៃសមីការ $x^y = y^{x-y}$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $x^y \in \mathrm{IN}^* \Rightarrow y^{x-y} \geq 1 \Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow x \geq y$

បើ $x = y$ យើងបាន $x^x = 1 = 1^1 \Rightarrow x = y = 1$

បើ $x > y \Rightarrow x,\ y \neq 1 \Rightarrow x > y \geq 2$

យើងបាន x ត្រូវតែមានរាង $y^n,\ n > 1$

យើងបាន $y^{ny} = y^{y\left(y^{n-1}-1\right)} \Rightarrow n = y^{n-1} - 1 \Rightarrow y^{n-1} = n + 1$

ដោយ $y^{n-1} \geq 2^{n-1} \Rightarrow n + 1 \geq 2^{n+1}$

តែ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 4 \Rightarrow n + 1 < 2^{n-1}$

ហេតុនេះ $n < 4 \Rightarrow n \in \{2,3\}$

ចំពោះ $n = 2 \Rightarrow y = 3,\ x = 9$

ចំពោះ $n = 3 \Rightarrow y = 2,\ x = 8$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(x, y) = (1,1),\ (9,3),\ (8,2)$

លំហាត់ ១១៨

តើសមីការ $x^3 = 2^y + 15$ មានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់ដែរ រឺ ទេ ?

ចម្លើយ

ចំពោះ $\forall x \in \mathrm{Z}$ យើងបាន $x^3 \equiv 0,\ 1,\ 6 \pmod 7$

និង $2^k \equiv 1,\ 2,\ 4 \pmod 7$ ចំពោះ $\forall k \in \mathrm{IN}$

ដោយ $15 \equiv 1 \pmod 7$ យើងបាន $2^y + 15 \equiv 2,\ 3,\ 5 \pmod 7$

ហេតុនេះ សមីការគ្មានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់

លំហាត់ ១១៩

(JBMO,2000)

បង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ x, y, z បំពេញលក្ខខណ្ឌសមីការ

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 2000 \text{ ។}$$

ចម្លើយ

បើគេជំនួស x, y, z ដោយ $-x$, $-y$, $-z$ គេបានសមីការដដែល

ហេតុនេះ បើ (x, y, z)ជាចម្លើយនៃសមីការ នោះ $(-x, -y, -z)$ក៏ជាចម្លើយនៃ សមីការដែរ

ម៉្យាងទៀត សមីការ $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 2000$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x, y, z

ឧបមាថា $x \geq y \geq z \geq 0$

បើ $y = z$ យើងបាន $x^4 - 4x^2y^2 = 2000 \Rightarrow x$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ

យក $x = 2t$ ចំពោះ $t \in \mathrm{IN}$

យើងបាន $t^2(t^2 - y^2) = 125 \Rightarrow t^2 = 25$, $y^2 = 20$ មិនអាច

ស្រាយដូចគ្នា ករណី $x = y$, $x = z$

ហេតុនេះ $x \neq y \neq z$ គឺ $x > y > z$

យើងមាន $x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 2000$

$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4$ ជាចំនួនគូ

$\Rightarrow$ មួយក្នុងចំណោម x, y, z ជាចំនួនគូ ហើយពីរចំនួនផ្សេងទៀតមានលក្ខណៈ គូសេសដូចគ្នា $\quad (1)$

យើងមាន $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$

$$= (x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)z^2 + z^4 - 4y^2z^2$$

$$= \left(x^2 - y^2 - z^2 - 2yz\right)\left(x^2 - y^2 - z^2 + 2yz\right)$$
$$= \left[x^2 - (y+z)^2\right]\left[x^2 - (y-z)^2\right]$$
$$= (x+y+z)(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)$$

តាម (1) យើងបាន $x+y+z$, $x-y-z$, $x-y+z$, $x+y-z$ ជាចំនួនគូ

និង $2000 = 2^4 \times 5^3$

ហេតុនេះ $x+y+z$, $x-y-z$, $x-y+z$, $x+y-z$ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង

2 តែចែកមិនដាច់នឹង 4

ម្យ៉ាងទៀត $x+y+z > x+y-z > x-y+z > x-y-z$

យើងបាន $x+y+z$, $x-y-z$, $x-y+z$, $x+y-z$ ជាតួចែកគូផ្សេងគ្នា

នៃ $2000 = 2^4 \times 5^3$

តែ តួចែកជាចំនួនគូផ្សេងគ្នានៃ 2000 តូចបំផុត គឺ 2 , $2\times 5 = 10$, $2\times 5^2 = 50$

, $2\times 5^3 = 250$ ហើយ $2\times 10\times 50\times 250 = 250000 > 2000$

ហេតុនេះ សមីការគ្មានរឹស

លំហាត់ ១២០

ដោះស្រាយសមីការ $2^n + 1 = x^2$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $2^n + 1 = x^2 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 2^n$

$\Rightarrow x-1$ និង $x+1$ សុទ្ធតែជាស្វ័យគុណនៃ 2

ដោយ $x+1-(x-1)=2$

យើងបាន $x-1$ និង $x+1$ ជាស្វ័យគុណនៃ 2 ដែលខុសគ្នាពីរឯកតា

តែស្វ័យគុណនៃ 2 ដែលខុសគ្នាពីរឯកតាមានតែ 2 និង 2^2

ហេតុនេះ $\begin{cases} x-1=2 \\ x+1=4 \end{cases} \Rightarrow x=3 \Rightarrow n=3$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(x,n)=(3,3)$

លំហាត់ ១២១

(Romania,1998)

កំណត់គ្រប់ចម្លើយគត់នៃសមីការ

$(x+1)(x+2)(x+3)+x(x+2)(x+3)+x(x+1)(x+3)$

$+x(x+1)(x+2)=y^{2^x}$ (*) ។

ចម្លើយ

ដោយ x , $x+1$, $x+2$, $x+3$ ជាបួនចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា

$\Rightarrow$ ចំនួនទាំងបួនមានរាង $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$

យើងបាន បីតួក្នុងចំណោម $(x+1)(x+2)(x+3)$, $x(x+2)(x+3)$

, $x(x+1)(x+3)$, $x(x+1)(x+2)$ត្រូវចែកដាច់នឹង 4 និង មួយចំនួនទៀតចែក

មិនដាច់នឹង 4 ហើយ មានរាង $(4k+1)(4k+2)(4k+3)$

តែ $(4k+1)(4k+2)(4k+3)\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$

យើងបាន $(x+1)(x+2)(x+3)+x(x+2)(x+3)+x(x+1)(x+3)$

$+x(x+1)(x+2)\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$

ចំពោះ $x\geq 1$ យើងបាន y^{2^x} ជាការេប្រាកដ $\Rightarrow y^{2^x}\equiv 0\,,\,1(\mathrm{mod}\,4)$

យើងបាន (*) គ្មានចម្លើយចំពោះ $x\geq 1$

ចំពោះ $x\leq -4\Rightarrow y^{2^x}>0$ និង $(x+1)(x+2)(x+3)+x(x+2)(x+3)$

$+x(x+1)(x+3)+x(x+1)(x+2)<0$

ក្នុងករណីនេះ សមីការគ្មានរឹស

ហេតុនេះ $x=-3\,,\,-2\,,\,-1\,,\,0$

បើ $x=-3\Rightarrow(-3)(-2)(-1)=y^{2^{-3}}=\sqrt[8]{y}$ គ្មានរឹស

បើ $x=-2\Rightarrow(-2)(-1)(1)=y^{2^{-2}}=\sqrt[4]{y}\Rightarrow y=16$

បើ $x=-1\Rightarrow(-1)(1)(2)=y^{2^{-1}}=\sqrt{y}$ គ្មានរឹស

បើ $x=0\Rightarrow(1)(2)(3)=y^{2^0}\Rightarrow y=6$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(x,y)=(-2,16),\,(0,6)$

លំហាត់ ១២២

បង្ហាញថា សមីការ $x^2-5y^2=2$ គ្មានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $x^2-5y^2=2\Rightarrow x^2=5y^2+2\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$

ម្យ៉ាងទៀត ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{Z}$ យើងបាន $x=5k\,,\,5k\pm 1\,,\,5k\pm 2$

បើ $x=5k\Rightarrow x^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$

បើ $x=5k\pm 1\Rightarrow x^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$

បើ $x = 5k \pm 2 \Rightarrow x^2 \equiv 4 (\bmod 5)$

ហេតុនេះ ចំពោះ $\forall x \in Z$ យើងបាន $x^2 \equiv 0\ ,\ 1,\ 4 (\bmod 5)$

ដូចនេះ សមីការ $x^2 - 5y^2 = 2$ គ្មានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់

លំហាត់ ១២៣

កំណត់ចម្លើយគត់នៃសមីការ $(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy)$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy)$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 - 2xy + 1 + x^2 + y^2 - 2xy + 2(x-y)(1-xy) = 4$$

$$\Leftrightarrow (xy-1)^2 + (x-y)^2 - 2(x-y)(xy-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow (xy-1-x+y)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(y-1) = \pm 2$$

ចំពោះ $(x+1)(y-1)=2$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ

ក/ $\begin{cases} x+1=2 \\ y-1=1 \end{cases}$ ខ/ $\begin{cases} x+1=1 \\ y-1=2 \end{cases}$ គ/ $\begin{cases} x+1=-1 \\ y-1=-2 \end{cases}$

ឃ/ $\begin{cases} x+1=-2 \\ y-1=-1 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ គេបាន $(x,y)=(1,2)$, $(0,3)$, $(-2,-1)$ និង $(-3,0)$

ចំពោះ $(x+1)(y-1)=-2$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ

ក/ $\begin{cases} x+1=-2 \\ y-1=1 \end{cases}$ ខ/ $\begin{cases} x+1=1 \\ y-1=-2 \end{cases}$ គ/ $\begin{cases} x+1=-1 \\ y-1=2 \end{cases}$

ឃ/ $\begin{cases} x+1=2 \\ y-1=-1 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ គេបាន $(x,y)=(-3,2)$, $(0,-1)$, $(-2,-3)$ និង $(1,0)$

លំហាត់ ១២៤

គេឲ្យ p , q ជាពីរចំនួនបឋម ។ ដោះស្រាយសមីការ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq} \Leftrightarrow (x-pq)(y-pq)=p^2q^2$

ដោយ x , $y \in \mathrm{IN}^*$ យើងបាន $\frac{1}{x}<\frac{1}{pq} \Rightarrow x>pq \Rightarrow x-pq>0$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការដូចខាងក្រោម

ក/ $\begin{cases} x-pq=1 \\ y-pq=p^2q^2 \end{cases}$ ខ/ $\begin{cases} x-pq=p \\ y-pq=pq^2 \end{cases}$ គ/ $\begin{cases} x-pq=q \\ y-pq=p^2q \end{cases}$

ឃ/ $\begin{cases} x-pq=p^2 \\ y-pq=q^2 \end{cases}$ ង/ $\begin{cases} x-pq=pq \\ y-pq=pq \end{cases}$ ច/ $\begin{cases} x-pq=pq^2 \\ y-pq=p \end{cases}$

ឆ/ $\begin{cases} x-pq=p^2q \\ y-pq=q \end{cases}$ ជ/ $\begin{cases} x-pq=q^2 \\ y-pq=p^2 \end{cases}$ ឈ/ $\begin{cases} x-pq=p^2q^2 \\ y-pq=1 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ គេបាន $(x,y)=(1+pq, pq(1+pq))$;

$(p(1+q), pq(1+q))$; $(q(1+p), pq(1+p))$; $(p(p+q), q(p+q))$;

$(2pq, 2pq)$; $(pq(1+q), p(1+q))$; $(pq(1+p), q(1+p))$;

$(q(p+q), p(p+q))$ និង $(pq(1+pq), 1+pq)$

សម្គាល់

ចំពោះសមីការ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ ដែល $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ មានចំនួនចម្លើយចំនួន

$(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)...(2\alpha_k+1)$ ព្រោះ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}\Leftrightarrow(x-n)(y-n)=n^2$

និង $n^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}...p_k^{2\alpha_k}$ មានចំនួនតួចែកវិជ្ជមានទាំងអស់ចំនួន

$(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)...(2\alpha_k+1)$ ។

លំហាត់ ១២៥

កំណត់គ្រប់គូគត់មិនអវិជ្ជមាន (x,y)នៃសមីការ $(xy-7)^2=x^2+y^2$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $(xy-7)^2=x^2+y^2$

$$\Leftrightarrow(xy-6)^2+13=(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow(xy-6)^2-(x+y)^2=-13$$

$$\Leftrightarrow[xy-6-(x+y)][xy-6+(x+y)]=-13$$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}xy-6-(x+y)=-1\\xy-6+(x+y)=13\end{cases}$, $\begin{cases}xy-6-(x+y)=-13\\xy-6+(x+y)=1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=7\\xy=12\end{cases}, \begin{cases}x+y=7\\xy=0\end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការគេបាន $(x,y)=(3,4)$, $(4,3)$, $(0,7)$, $(7,0)$

លំហាត់ ១២៦

ដោះស្រាយសមីការ $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$ក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

ចម្លើយ

យក $x=u+1,\ y=v+1$

យើងបាន $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$

$$\Leftrightarrow (u+1)^2v+(v+1)^2u=1$$

$$\Leftrightarrow uv(u+v)+4uv+(u+v)=1$$

$$\Leftrightarrow uv(u+v+4)+(u+v+4)=5$$

$$\Leftrightarrow (u+v+4)(uv+1)=5$$

យើងបាន $\begin{cases}u+v+4=5\\uv+1=1\end{cases},\ \begin{cases}u+v+4=-5\\uv+1=-1\end{cases},\ \begin{cases}u+v+4=1\\uv+1=5\end{cases},$

$$\begin{cases}u+v+4=-1\\uv+1=-5\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}u+v=1\\uv=0\end{cases},\ \begin{cases}u+v=-9\\uv=-2\end{cases},\ \begin{cases}u+v=-3\\uv=4\end{cases},\ \begin{cases}u+v=-5\\uv=-6\end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការគេបាន $(u,v)=(0,1),\ (1,0),\ (-6,1),\ (1,-6)$

ហេតុនេះ $(x,y)=(u+1,v+1)=(1,2),\ (2,1),\ (-5,2),\ (2,-5)$

លំហាត់ ១២៧

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីឲ្យសមីការ $x^3+y^3+z^3-3xyz=n$ មានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចម្លើយ

យើងមាន $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \qquad (1)$$

និង $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)$ (2)

តាម (1) យើងបានសមីការមានរឹសចំពោះ $n = 3k+1$, $3k+2$ ដែល $k \ge 1$
ព្រោះ $(k+1, k, k)$ និង $(k+1, k+1, k)$ ជាចម្លើយរៀងគ្នានៃសមីការ
បើ $n = 3k$ តាម (2) យើងបាន $x+y+z$ ចែកដាច់នឹង 3
ហេតុនេះ $n = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ចែកដាច់នឹង 9
ច្រាសមកវិញសមីការមានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានចំពោះ $n = 9k$, $k \ge 2$
ព្រោះ $(k-1, k, k+1)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ
ម្យ៉ាងទៀត ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $x = y = z \Rightarrow$
សមីការមានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន
ដូចនេះ $n = 3k+1$, $3k+2$ ចំពោះ $k \ge 1$ និង $n = 9k$ ចំពោះ $k = 0$, 2 , 3 , …

លំហាត់ ១២៨

កំណត់គ្រប់ត្រីធាតុគត់វិជ្ជមាន (x, y, z) នៃសមីការ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$
ចំពោះ p ជាចំនួនបឋមធំជាង 3 ។

ចម្លើយ

យើងមាន $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = p$$

ដោយ $x+y+z > 1$ យើងបាន $x+y+z = p$ (1)
និង $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 1$ (2)
យើងមាន (2) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 1$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2$$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x , y , z

ឧបមាថា $x \ge y \ge z$
ចំពោះ $x > y > z$ យើងបាន $x - y \ge 1,\ y - z \ge 1$ និង $x - z \ge 2$

យើងបាន $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 6>2$ មិនពិត

ហេតុនេះ $x=y=z+1$ រឺ $x-1=y=z$

ដោយ p ជាចំនួនបឋមធំជាង $3\Rightarrow p$ មានរាង $3k+1$ រឺ $3k+2$

បើ $x-1=y=z$ យើងបាន $(x,y,z)=\left(\frac{p+2}{3},\frac{p-1}{3},\frac{p-1}{3}\right)$ និង

ចម្លាស់ផ្សេងនៃចម្លើយទាំងនេះ, $p=3k+1$

បើ $x=y=z+1$ យើងបាន $(x,y,z)=\left(\frac{p+1}{3},\frac{p+1}{3},\frac{p-2}{3}\right)$ និង

ចម្លាស់ផ្សេងទៀតនៃចម្លើយទាំងនេះ, $p=3k+2$

លំហាត់ ១២៩

កំណត់គ្រប់ត្រីធាតុជាចំនួនគត់ (x,y,z) នៃសមីការ

$x^3+y^3+z^3=x+y+z=3$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $x^3+y^3+z^3=x+y+z=3$

តាម $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)$

យើងបាន $(x+y)(y+z)(z+x)=8$

$$\Rightarrow(3-x)(3-y)(3-z)=8 \qquad (1)$$

ម៉្យាងទៀត $(3-x)+(3-y)+(3-z)=9-3=6$

យើងបាន $3-x$, $3-y$, $3-z$ សុទ្ធតែជាចំនួនគត់គូ រឺ មួយក្នុងចំណោមចំនួនទាំងបីជាចំនួនគត់គូ និង ពីរផ្សេងទៀតជាចំនួនគត់សេស

បើ $3-x$, $3-y$, $3-z$ ជាចំនួនគូ

តាម (1) យើងបាន $|3-x|=|3-y|=|3-z|=2$

$\Rightarrow x\,,\; y\,,\; z \in \{1,5\}$ តែ $x+y+z=3$

យើងបាន $x=y=z=1$

បើមួយក្នុងចំណោម $3-x$, $3-y$, $3-z$ ជាចំនួនគូ ហើយ ពីរផ្សេងទៀតជាចំនួនសេស

ដោយ $(3-x)(3-y)(3-z)=8$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង $x\,,\; y\,,\; z$

ឧបមាថា $x\le y\le z$ យើងបាន $3-x\ge 3-y\ge 3-z$

ហេតុនេះ $|3-x|=8$, $|3-y|=|3-z|=1 \Rightarrow x\in\{-5,11\}$ និង $y\,,z\in\{2,4\}$

តែ $x+y+z=3$ គេបាន $x=-5$, $y=z=4$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(1,1,1)$, $(-5,4,4)$, $(4,-5,4)$ និង $(4,4,-5)$

លំហាត់ ១៣០

កំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p ដើម្បីឲ្យសមីការ $x^4+4=py^4$ មានចម្លើយជាចំនួនគត់ ។

ចម្លើយ

ចំពោះ $p=2$ យើងបាន $x^4+4=2y^4 \Rightarrow x$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ

បើ x ជាចំនួនគូ យើងបាន $x^4+4\equiv 4(\text{mod}16)$ តែ $2y^4\equiv 0$ រឺ $2(\text{mod}16)$

ករណីនេះ សមីការគ្មានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់

ចំពោះ p ជាចំនួនបឋមសេស

ស្រាយដូចករណី $p=2$ យើងបាន x និង y ត្រូវតែជាចំនួនសេស

ម្យ៉ាងទៀត $x^4+4=py^4 \Leftrightarrow (x^2+2)^2-(2x)^2=py^4$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)=py^4$$

យក $d=PGCD(x^2-2x+2,x^2+2x+2)$

យើងបាន d ចែកដាច់ x^2-2x+2 និង x^2+2x+2

$\Rightarrow d$ ជាចំនួនសេស ព្រោះ x សេស $\Rightarrow x^2-2x+2$ និង x^2+2x+2

ក៏សេសដែរ

$\Rightarrow d$ ចែកដាច់ $x^2+2x+2-\left(x^2-2x+2\right)=4x$

$\Rightarrow d$ ចែកដាច់ $x \Rightarrow d$ ចែកដាច់ 2

ហេតុនេះ $d=1$

យើងបាន $x^2-2x+2=a^4$ និង $x^2+2x+2=pb^4$ ដែល $y=ab$

យើងបាន $(x-1)^2+1=a^4$ (1)

និង $(x+1)^2+1=pb^4$ (2)

តាម (1) យើងបាន $a^2=1$ និង $x=1$

តាម (2) យើងបាន $p=5$ និង $b^2=1$

ដូចនេះ សមីការមានរឹសក្នុងសំណុំចំនួនគត់ លុះត្រាតែ $p=5$ ហើយ រឹសទាំងនោះ

គឺ $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ និង $(-1,-1)$

លំហាត់ ១៣១

កំណត់គ្រប់គូគត់ (x,y)នៃសមីការ $x^3+y^3=(x+y)^2$ ។

ចម្លើយ

យើងសង្កេតឃើញថា $(x,y)=(k,-k)$, $k\in Z$ ជាចម្លើយនៃសមីការ

បើ $x+y\neq 0$ យើងបាន $x^2-xy+y^2=x+y$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

យើងបាន $(x-1)^2\leq 1$ និង $(y-1)^2\leq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases}-1\leq x-1\leq 1\\ -1\leq y-1\leq 1\end{cases}\Rightarrow x,\ y\in[0,2]$$

សមីការមានចម្លើយ $(0,1)$; $(1,0)$; $(1,2)$; $(2,1)$; $(2,2)$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(x,y)=(k,-k)$, $k\in Z$ និង $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$

លំហាត់ ១៣២

កំណត់គ្រប់ចម្លើយគត់វិជ្ជមាននៃសមីការ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x, y, z ហើយ ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងបីសុទ្ធតែមិនអាចស្មើនឹង 1

ឧបមាថា $2\leq x\leq y\leq z$

យើងបាន $\frac{3}{5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{3}{x}\Rightarrow x\leq 5\Rightarrow x\in\{2,3,4,5\}$

ចំពោះ $x=2$ យើងបាន $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}\Rightarrow y\in\{11,12,\ldots,20\}$ និង

$z=10+\frac{100}{y-10}\Rightarrow y-10$ ចែកដាច់ 100

សមីការមានចម្លើយ $(2,11,110)$, $(2,12,60)$, $(2,14,35)$, $(2,15,30)$ និង $(2,20,20)$

ចំពោះ $x=3\Rightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{15}\Rightarrow y\in\{3,4,5,6,7\}$

សមីការមានចម្លើយ $(3,4,60)$, $(3,5,15)$ និង $(3,6,10)$

ចំពោះ $x=4\Rightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{20}\Rightarrow y\in\{4,5\}$

សមីការមានចម្លើយ $(4,4,10)$

ចំពោះ $x=5\Rightarrow\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{5}\Rightarrow y=z=5$

សមីការមានចម្លើយ $(5,5,5)$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(2,11,110)$, $(2,12,60)$, $(2,14,35)$, $(2,15,30)$, $(2,20,20)$, $(3,4,60)$, $(3,5,15)$, $(3,6,10)$, $(4,4,10)$, $(5,5,5)$ និង គ្រប់ចម្លាស់ទាំងអស់នៃចម្លើយទាំងនេះ

លំហាត់ ១៣៣

កំណត់គ្រប់ចម្លើយគត់វិជ្ជមាននៃសមីការ

$x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z-1)+2y(z+1)=w^2$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $(x+y+z\pm1)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z\pm1)+2y(z\pm1)$

$\pm 2z+1$

ហេតុនេះ $(x+y+z-1)^2 < w^2 < (x+y+z+1)^2$

យើងបាន $x^2+y^2+z^2+2xy+2x(z-1)+2y(z+1)=(x+y+z)^2$

$\Rightarrow x=y$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(m,m,n,2m+n)$ចំពោះ m , $n\in \mathrm{IN}$

លំហាត់ ១៣៤

(Hungary,1997)

កំណត់ចម្លើយគត់នៃសមីការ $x^3+(x+1)^3+...+(x+7)^3=y^3$ ។

ចម្លើយ

តាង $P(x)=x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+...+(x+7)^3$

$=8x^3+84x^2+420x+784$

ចំពោះ $x\geq 0$ យើងបាន $(2x+7)^3=8x^3+84x^2+294x+343$

$< P(x) < 8x^3+120x^2+600x+1000=(2x+10)^3$

យើងបាន $2x+7<y<2x+10$

ហេតុនេះ $y=2x+8,\ 2x+9$

តែ សមីការ $P(x)-(2x+8)^3=-12x^2+36x+272$

$P(x)-(2x+9)^3=-24x^2-66+55=0$

សុទ្ធតែជាសមីការគ្មានរឹស

យើងបាន សមីការគ្មានរឹសចំពោះ $x\geq 0$

យើងមាន $P(-x-7)=-P(x)$ ហេតុនេះ បើ (x,y)ជារឹសនៃសមីការ នោះ

$(-x-7,-y)$ក៏ជារឹសនៃសមីការដែរ

ដោយ សមីការគ្មានរឹសចំពោះ $x \geq 0 \Rightarrow$ សមីការគ្មានរឹសចំពោះ $-x-7 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq -7$

គេបាន $x \in \{-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$

ដោយ $P(-1) = 440$ មិនមែនគូប, $P(-2) = 216 = 6^3, P(-3) = 64 = 4^3$

ហេតុនេះ សមីការមានចម្លើយ $(-2,6)$, $(-3,4)$ និង ចម្លើយផ្សេងទៀត

គឺ $(x = 2-7 = -5, y = -6)$, $(x = 3-7 = -4, y = -4)$

លំហាត់ ១៣៥

កំណត់គ្រប់ត្រីធាតុគត់វិជ្ជមាននៃសមីការ $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = 2$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = 2$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x, y, z

ឧបមាថា $x \geq y \geq z$

យើងបាន $2 = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \leq \left(1+\frac{1}{z}\right)^3 \Rightarrow z \leq 3$

ចំពោះ $z = 1$ យើងបាន $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = 1$ មិនអាច

ចំពោះ $z = 2$ យើងបាន $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} \leq \left(1+\frac{1}{y}\right)^2 \Rightarrow y < 7$

ដោយ $1+\frac{1}{x} > 1 \Rightarrow y > 3 \Rightarrow y \in \{4,5,6\}$

សមីការមានចម្លើយ $(7,6,2)$, $(9,5,2)$, $(15,4,2)$

ចំពោះ $z=3$ យើងបាន $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{3}{2}$

ស្រាយដូចករណីខាងលើ យើងបាន $y<5$ និង $y\geq z=3$

សមីការមានចម្លើយ $(8,3,3)$; $(5,4,3)$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(7,6,2)$, $(9,5,2)$, $(15,4,2)$, $(8,3,3)$, $(5,4,3)$

និង គ្រប់ចម្លាស់ផ្សេងទៀតនៃចម្លើយទាំងនេះ

លំហាត់ ១៣៦

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n, $k_1, \dots, k_n$ ដើម្បីឲ្យ $k_1+k_2+\ldots+k_n=5n-4$

និង $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_n}=1$ ។

ចម្លើយ

តាមវិសមភាព AM-GM យើងបាន $(k_1+k_2+\ldots+k_n)\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_n}\right)\geq n^2$

ដោយ $k_1+k_2+\ldots+k_n=5n-4$ និង $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_n}=1$

យើងបាន $5n-4\geq n^2 \Rightarrow (n-1)(n-4)\leq 0 \Rightarrow 1\leq n\leq 4$

ដោយ លក្ខខណ្ឌដែលឲ្យស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង $k_1, k_2, \dots, k_n$

ឧបមាថា $k_1\leq k_2\leq \ldots\leq k_n$

ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $k_1=1$

ចំពោះ $n=2 \Rightarrow (k_1,k_2)\in\{(2,4),(3,3)\}$ តែមិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

ចំពោះ $n=3 \Rightarrow k_1+k_2+k_3=11 \Rightarrow 2\leq k_1\leq 3$

យើងបាន $(k_1,k_2,k_3)\in\{(2,2,7),(2,3,6),(2,4,5),(3,3,5),(3,4,4)\}$

តែ មានតែ $(2,3,6)$ តែមួយគត់បំពេញលក្ខខណ្ឌ

ចំពោះ $n=4$ វិសមភាព AM-GM ក្លាយជាសមភាព គឺ $k_1=k_2=k_3=k_4=4$

ដូចនេះ $n=1,\ k_1=1$

$n=3,\ (k_1,k_2,k_3)=(2,3,6)$ និង គ្រប់ចម្លាស់ផ្សេងទៀត

$n=4,\ (k_1,k_2,k_3,k_4)=(4,4,4,4)$

លំហាត់ ១៣៧

(Romania,2000)

ដោះស្រាយសមីការ $9^x-3^x=y^4+2y^3+y^2+2y$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

ចម្លើយ

ដោយ y ជាចំនួនគត់ នោះ $y^4+2y^3+y^2+2y$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ

យើងបាន 9^x-3^x ជាចំនួនគត់ $\Rightarrow x\geq 0$

ហេតុនេះ $9^x-3^x\geq 0$

ដោយ $9^x-3^x=y^4+2y^3+y^2+2y=y(y+2)(y^2+1)$

យើងបាន $y(y+2)(y^2+1)\geq 0\Rightarrow y\geq 0$ រឺ $y\leq -2$

យើងមាន $9^x-3^x=y^4+2y^3+y^2+2y$

$$\Leftrightarrow 4\left[(3^x)^2-3^x\right]+1=4y^4+8y^3+4y^2+8y+1$$

$$\Rightarrow (2t-1)^2=4y^4+8y^3+4y^2+8y+1$$

ដែល $t=3^x\geq 1$

ចំពោះ $y\geq 0\Rightarrow 4y\leq 4y^2$

យើងបាន $4y^4+8y^3+4y^2+8y+1\leq 4y^4+4y^2+1+8y^3+4y^2+4y$

$$=(2y^2+2y+1)^2$$

និង $4y^4+8y^3+4y^2+8y+1>4y^4+8y^3+4y^2=(2y^2+2y)^2$

យើងបាន $(2y^2+2y)^2<(2t-1)^2=4y^4+8y^3+4y^2+8y+1$

$$\le(2y^2+2y+1)^2$$

យើងបាន $4y^4+8y^3+4y^2+8y+1=(2y^2+2y+1)^2$

$\Rightarrow 4y^2=4y\Rightarrow y=0$ ឬ 1

បើ $y=0\Rightarrow t=1\Rightarrow x=0$

បើ $y=1\Rightarrow t=3\Rightarrow x=1$

ចំពោះ $y\le -2$

យើងបាន $4y^4+8y^3+4y^2+8y+1<4y^4+8y^3+4y^2=(2y^2+2y)^2$

និង $4y^4+8y^3+4y^2+8y+1\ge 4y^4+4y^2+1+8y^3-4y^2-4y$

$$=(2y^2+2y-1)^2$$

ព្រោះ $4y(y+2)\ge 0$ ចំពោះ $y\ge -2$

យើងបាន $(2y^2+2y-1)^2\le(2t-1)^2=4y^4+8y^3+4y^2+8y+1$

$$<(2y^2+2y)^2$$

ហេតុនេះ $(2y^2+2y-1)^2=(2t-1)^2=4y^4+8y^3+4y^2+8y+1$

$\Rightarrow y=-3\Rightarrow t=6\Rightarrow 3^x=6$ មិនអាច ព្រោះ x ជាចំនួនគត់

ចំពោះ $y=-2$ យើងបាន $x=0$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $(x,y)=(0,0)$, $(0,-2)$ និង $(1,1)$