ក្នុងនាមជាអ្នករៀបរៀងខ្ញុំបាទ សូមអរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅ ចំពោះមិត្តអ្នកអានដែលបានជាវសៀវភៅមួយក្បាលនេះ ។

ទំនាក់ទំនងជាវដុំ និង រាយ

086 24 19 23

ISBN 9781979694100 90000 >

9 781979 694100

MATH

1500 លំហាត់គណិតវិទ្យា

ភាគ ២

OLYMPIAD

ត្រៀមប្រឡង

សិស្សពូកែ

អាហារូបករណ៍

និង ការប្រឡងផ្សេងៗទៀត

រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

សេចក្តីផ្តើម

សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបរៀងឡើងដោយប្រមូលផ្តុំទៅដោយលំហាត់ពិបាកៗ សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែ និង អាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅបរទេស ។ ការប្រមូលផ្តុំលំហាត់បែបនេះហើយ ទើបធ្វើឲ្យសៀវភៅមួយក្បាលនេះពិបាកក្នុងការយល់ភ្លាមៗនូវគំនិតមួយចំនួនដែលបង្កប់នៅក្នុងសៀវភៅនេះ ។ និយាយបែបនេះមិនមែនមានន័យថាសៀវភៅនេះពិបាកមើល ពិបាកយល់មិនគួរឲ្យចង់អាននោះទេ ។ ក្នុងនាមជាអ្នករៀបរៀងខ្ញុំបានសម្រួល និង បន្ថែមគំនិតជាច្រើនទៅលើលំហាត់នីមួយៗដើម្បីឲ្យមិត្តអ្នកអានងាយស្រួលយល់ ។ ក្នុងការអាន មិត្តអ្នកអានគួរតែមានប៊ិច ខ្មៅដៃ និង សៀវភៅនៅជាមួយដើម្បីគូសវាសនូវគំនិតមួយចំនួនឲ្យលេចជារូបរាងឡើង ។ ធ្វើបែបនេះមិត្តអ្នកអាននឹងទទួលបានភាពច្បាស់លាស់ក្នុងការគិត ។ មួយវិញទៀតសៀវភៅនេះជាប្រភេទសៀវភៅលំហាត់សុទ្ធ ហេតុនេះដើម្បីទទួលបានប្រសិទ្ធិភាពខ្ពស់ក្នុងការអានសៀវភៅនេះ មិត្តអ្នកអានគួរមានមូលដ្ឋានគ្រឹះក្នុងមេរៀនមួយចំនួនសិនដូចជា ទ្រឹស្តីចំនួន ទ្រឹស្តីនៃធរណីមាត្រក្នុងប្លង់ វិសមភាព និង គណិតវិភាគជាដើម ។ ក្នុងនាមជាអ្នកសរសេរសៀវភៅមួយក្បាលនេះឲ្យលេចចេញជារូបរាងឡើង ខ្ញុំបាទសុំស្នើឲ្យមិត្តអ្នកអានរកអានសៀវភៅទាំងអស់នោះជាមុនសិន មុននឹងចាប់ផ្តើមជាមួយកូនសៀវភៅតូចនេះ ។

ក្នុងការធ្វើលំហាត់ រឺ មើលចម្លើយនៃលំហាត់ក្នុងសៀវភៅនេះ រឺ សៀវភៅណាក៏ដោយសំខាន់បំផុតមិត្តអ្នកអានត្រូវយល់ពីហេតុ និង ផលឲ្យបានច្បាស់លាស់ ។ (ហេតុអីគេទាញបានបែបនេះ ហេតុអីទើបគេមានគំនិតដោះស្រាយបែបនេះ?) ការសិក្សារបៀបនេះនឹងធ្វើឲ្យមិត្តអ្នកអានទទួលបានចំណេះដឹងដ៏ត្រចះត្រចង់មិនត្រឹមតែផ្នែកគណិតវិទ្យាទេ គឺចំណេះដឹងសម្រាប់ជីវិត ។

អារម្ភកថា

អរគុណមិត្តអ្នកអានដែលចំណាយពេលក្នុងការអានសៀវភៅមួយក្បាលនេះ ។ កូនសៀវភៅនេះមានកម្រាស់ប្រមាណជា 136 ទំព័រ ។ វាជាប្រភេទសៀវភៅស្តើងមួយ ដែលប្រមូលផ្តុំទៅដោយលំហាត់ជាច្រើនសម្រាប់បង្វឹកមិត្តអ្នកអានឲ្យមានជំនាញក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាគណិតវិទ្យា ។ សៀវភៅនេះមិនមែនមាន 1500 លំហាត់ទេ ចំណងជើង 1500 លំហាត់នេះ គឺមានន័យថាខ្ញុំបាទនឹងសរសេរសៀវភៅប្រភេទនេះជាភាគរហូតដល់បាន 1500 លំហាត់ទើបបញ្ចប់ ។ សៀវភៅនេះលេចរូបរាងជាផ្លូវការណ៍ឡើងក៏ដោយសារតែជំនួយពីឯកសារជាច្រើនទាំងភាសាខ្មែរ និង បរទេស ។ សៀវភៅនេះត្រូវបានចែកចេញជាពីរផ្នែក គឺផ្នែកប្រធានលំហាត់ និង ផ្នែកដំណោះស្រាយ ។ ក្នុងផ្នែកប្រធានលំហាត់ខ្ញុំបាទបានដកស្រង់យកលំហាត់ដែលបានចេញប្រឡងសិស្សពូកែនានា មកដាក់ជាលំហាត់ដើម្បីឲ្យមិត្តអ្នកអានត្រិះរិះពិចារណា ។ ធ្វើបែបនេះខ្ញុំបាទចង់ឲ្យមិត្តអ្នកអានសាកល្បងដោះស្រាយលំហាត់ទាំងនោះជាមុនសិនចាំមើលចម្លើយ ។ ក្នុងការរៀនគណិតវិទ្យាទោះបីជាយើងដោះស្រាយលំហាត់មិនចេញក៏ដោយ ក៏យើងទទួលបាននូវគំនិតថ្មីមួយចំនួនដែលកើតចេញពីការគិតរបស់យើងដែរ ។ ចំណែកក្នុងផ្នែកដំណោះស្រាយវិញ ខ្ញុំបាទបានលើកយកនូវដំណោះស្រាយដោយបន្ថែមនូវគំនិតខ្លះ និង ដំណោះស្រាយដែលជាគំនិតរបស់ខ្ញុំបាទផ្ទាល់មកធ្វើការបកស្រាយយ៉ាងផ្ចិតផ្ចង់ដើម្បីឲ្យមិត្តអ្នកអានងាយស្រួលយល់ ។

ជាចុងក្រោយខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណដល់មិត្តអ្នកអានដែលបានជាវសៀវភៅមួយក្បាលនេះ ។ ការជាវនេះបានផ្តល់ជាកម្លាំងចិត្តសម្រាប់ខ្ញុំបាទដែលជាអ្នករៀបរៀងដើម្បីស្រាវជ្រាវបន្ថែម និង រៀបរៀងសៀវភៅឲ្យបានច្រើនប្រកបដោយគុណភាពតាមដែលអាចធ្វើបាន ។

ប្រសិនបើមិត្តអ្នកអានរកឃើញកំហុសឆ្គងក្នុងសៀវភៅនេះទាំងផ្នែកគំនិត ក៏ដូចជាអក្ខរាវិរុទ្ធ ។ មិត្តអ្នកអានអាចចូលរួមជាយោបល់តាមរយៈ

Facebook Account: PISETH CHEA

Facebook Page: CHEA PISETH

Email: Pisethchea720@gmail.com

Phone: 086 24 19 23

ដោយការគោរពយ៉ាងជ្រាលជ្រៅពីខ្ញុំបាទ!

ភ្នំពេញ, ថ្ងៃទី ០១ ខែមករា ឆ្នាំ ២០១៨

ជា ពិសិដ្ឋ

ប្រធានលំហាត់

1. គេឲ្យ x, y និង z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ
   $x+xy+xyz=12 \qquad (1)$
   $y+yz+xyz=21 \qquad (2)$
   $z+zx+xyz=30 \qquad (3)$ ។
   គណនា $x+y+z$ ។

2. ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន បង្ហាញថា $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$ ។

3. គេឲ្យ a, b និង c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។
   បង្ហាញថា $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ ។

4. គេឲ្យស្វ៊ីត Fibonacci (f_n) កំណត់ដោយ $f_1=f_2=1$ និង $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$ ។ យក $Q=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ ។
   ក) បង្ហាញថា $Q^n=\begin{bmatrix}f_{n+1} & f_n\\ f_n & f_{n-1}\end{bmatrix}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។
   ខ) ទាញថា $f_{3n}=f_{n+1}^3+f_n^3-f_{n-1}^3$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

5. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន p, q, r និង s បង្ហាញថា
   $(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1) \geq 81pqrs$ ។

6. ចំពោះ a, b, c និង d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បង្ហាញថា
   $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+\dfrac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d}+\dfrac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a}+\dfrac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} \geq a+b+c+d$ ។

7. គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=1$ និង $a_{n+1}=1+a_1a_2...a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។
   បង្ហាញថា $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{a_n}=2$ ។

8. ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេកំណត់យក $f(n) = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + (n-1)^2 + n$ ។ រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ ។

9. គណនា $S_n = \left[1^{\frac{1}{2}}\right] + \left[2^{\frac{1}{2}}\right] + \left[3^{\frac{1}{2}}\right] + \ldots + \left[(n^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]$
និង $T_n = \left[1^{\frac{1}{3}}\right] + \left[2^{\frac{1}{3}}\right] + \left[3^{\frac{1}{3}}\right] + \ldots + \left[(n^3-1)^{\frac{1}{3}}\right]$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$។

10. គេឲ្យ a, b និង c ជាឫសនៃសមីការ $x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = 0$ ។ យក $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី ៣ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $P(a) = b + c, P(b) = c + a, P(c) = a + b$ និង $P(a+b+c) = -16$ ។ គណនា $P(0)$ ។

11. គេឲ្យ p, q និង r ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\dfrac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr} = 24$ និង $\dfrac{(p-2q)(q-2r)(r-2p)}{pqr} = 10$ ។ ឧបមាថា $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{r} + \dfrac{r}{p}$ អាចសរសេរជារាង $\dfrac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។ គណនា $m+n$ ។

12. គណនា $A = [2013\sin 0^\circ] + [2013\sin 1^\circ] + \ldots + [2013\sin 359^\circ]$ ដែល $[x]$ តាងឲ្យផ្នែកគត់នៃ x ។

13. គេឲ្យប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ មួយ ហើយ M និង N ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង $[AD]$ និង $[BC]$ រៀងគ្នា ។ យក O ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង $[MN]$ ។
បង្ហាញថា $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2AB^2 + AD^2 - 4OM \times ON$ ។

14. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ និង D ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង $[BC]$ ។ តាង $BC = a, CA = b, AB = c, AD = d, BD = n$ និង $CD = m$។
បង្ហាញថា $b^2 n + c^2 m = a(d^2 + mn)$ ។
អនុវត្តន៍
ក) គេឲ្យ m_a ជារង្វាស់មេដ្យានដែលគូសចេញពីកំពូល A នៃត្រីកោណ ABC ។
បង្ហាញថា $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ ។
ខ) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ។ យក G ជាទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណនេះ ។ បង្ហាញថា $OG^2 = R^2 - \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ ។
គ) យក $[AD)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃ $\angle A$ នៃត្រីកោណ ABC មួយ ។
បង្ហាញថា $AD = \dfrac{\sqrt{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}}{b+c}$។

15. យក K ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ កន្លះបន្ទាត់ $[AK),[BK)$ និង $[CK)$ កាត់ជ្រុង $[BC],[CA]$ និង $[AB]$ ត្រង់ចំណុច A_1,B_1 និង C_1 រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា
ក) $\dfrac{KA_1}{AA_1}+\dfrac{KB_1}{BB_1}+\dfrac{KC_1}{CC_1}=1$
ខ) $\dfrac{AK}{AA_1}+\dfrac{BK}{BB_1}+\dfrac{CK}{CC_1}=2$ ។

16. គេឲ្យ a,b និង c ជាឫសនៃពហុធា $P(x)=x^3-2007x+2002$ ។
គណនា $\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)\left(\dfrac{b-1}{b+1}\right)\left(\dfrac{c-1}{c+1}\right)$ ។

17. គេឲ្យ x_1,x_2 និង x_3 ជាឫសនៃសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0, a\neq 0$ ។
តាង $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$ ចំពោះ $n\geq 0$ ។ បង្ហាញថា $aS_{n+3}+bS_{n+2}+cS_{n+1}+dS_n=0$ ។
អនុវត្តន៍
គេឲ្យ a,b និង c ជាបីចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=3, a^2+b^2+c^2=5$ និង $a^3+b^3+c^3=7$ ។ គណនា $a^4+b^4+c^4$ ។

18. គេឲ្យ a,b និង c ជាចំនួនគត់ និង បំពេញលក្ខខណ្ឌ $ab+bc+ca=1$ ។
បង្ហាញថា $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ ជាការេប្រាកដ ។

19. គេឲ្យ a,b និង c ជាចំនួនគត់ ហើយ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$ ។
បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2$ ជាការេប្រាកដ ។

20. គេឲ្យ $\omega\neq 1$ និង ជាឫសទី n ឯកតាកំណត់ដោយ $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ ។
ក) បង្ហាញថា $(1-\omega)(1-\omega^2)...(1-\omega^{n-1})=n$ ។
ខ) គណនា $\dfrac{1}{1-\omega}+\dfrac{1}{1-\omega^2}+...+\dfrac{1}{1-\omega^{n-1}}$ ។

21. គេឲ្យ ω ជាឫសគូបឯកតាខុសពី 1 និង $a,b,c\in\mathbb{C}$ ។ បង្ហាញថា
ក)$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ ។
ខ) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ ។

22. គេឲ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មានរង្វាស់ជ្រុង a,b,c,d និង p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃចតុកោណនេះ ។ បង្ហាញថា $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\dfrac{A+C}{2}\right)}$ ។

23. គេឲ្យ a,b និង c ជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=42$ និង $a^3+b^3+c^3=105$ ។ បង្ហាញថា $(a-b)(b-c)(c-a)=\pm 63$ ។

24. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ យក L,M និង N ជាចំណុចនៅលើជ្រុង $[BC],[CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា ហើយ P,Q និង R ជាចំណុចប្រសព្វនៃ $[AL)$, $[BM)$ និង $[CN)$ នឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR}\geq 9$ ។

25. គេឲ្យ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ក្រៅត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។
បង្ហាញថា $a+b+c\geq 2\sqrt{3r(r+4R)}$ ។

26. បង្ហាញថា $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ មិនមែនជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ។

27. គេឲ្យ $s_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$ ។ បង្ហាញថា $2\sqrt{n+1}-2<s_n<2\sqrt{n}-1$ ។

28. គេឲ្យ $h(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ ។ ឧទាហរណ៏ $h(1)=1,h(2)=1+\frac{1}{2},h(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},...$ ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ គេបាន $n+h(1)+h(2)+...+h(n-1)=nh(n)$ ។

29. គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n កំណត់ដោយ $P(k)=\frac{1}{k}$ ចំពោះ $k=\overline{1,n+1}$ ។
គណនា $P(n+2)$ ។

30. គេឲ្យ $P(x),Q(x)$ និង $R(x)$ ជាពហុធាដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)$ ចែកដាច់នឹង $x^4+x^3+x^2+x+1$ ។ បង្ហាញថា $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-1$ ។

31. គេឲ្យ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ក្រៅនៃត្រីកោណ ABC ។
បង្ហាញថា $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$ ។

32. គេឲ្យ M ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ យក x,y និង z ជាចម្ងាយពីចំណុច M ទៅជ្រុង $[BC],[CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា ។ កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $x^2+y^2+z^2$ ។

33. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន h_a,h_b និង h_c ជាកម្ពស់ដែលគូសចេញពីកំពូល A,B និង C រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស បើគេដឹងថា
$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{\sqrt{p(p-a)}}+\frac{1}{\sqrt{p(p-b)}}+\frac{1}{\sqrt{p(p-c)}}$ ។

34. បង្ហាញថា $E=2903^n-803^n-464^n+261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897 ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។

35. គេឲ្យពហុធា $p(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{Z}$ ។ បើ $p(a)=p(b)=p(c)=-1$ ចំពោះ a,b និង $c\in\mathbb{Z}$ ។ បង្ហាញថា សមីការ $p(x)=0$ គ្មានរឹសគត់ ។

36. គេឲ្យ a,b និង $c\neq 0$ ។ ពហុធា $Q(x)$ ចែកនឹង $(x-a)(x-b),(x-b)(x-c)$ និង $(x-c)(x-a)$ សល់សំណល់ $px+l,qx+m$ និង $rx+n$ រៀងគ្នា ។
បង្ហាញថា $l\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+m\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+n\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=0$ ។

37. គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+1$ ។ ឧបមាថាមេគុណនៃពហុធានេះសុទ្ធតែវិជ្ជមានហើយសមីការ $P(x)=0$ មានរឹសទាំងអស់ជាចំនួនពិត ។
បង្ហាញថា $P(2016)\geq 2017^n$ ។

38. គេឲ្យ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ ឧបមាថាអង្កត់ទ្រូង $[AC]$ និង $[BD]$ កាត់កែងគ្នាត្រង់ E ។ បង្ហាញថា $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=4R^2$ ។

39. (ទ្រឹស្តីបទ Van Aubel)
គេឲ្យ P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ $[AP),[BP)$ និង $[CP)$ កាត់ជ្រុង $[BC],[CA]$ និង $[AB]$ ត្រង់ D,E និង F រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AP}{PD}$ ។
អនុវត្តន៍
គេឲ្យ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ហើយ $[AD)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃ $\angle A$ ។ បង្ហាញថា $\frac{AI}{ID}=\frac{b+c}{a}$ ។

40. ចំពោះ $a\in\mathbb{R}$ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{[k^2a]}{n^3}$ ។

41. គេឲ្យ (x_n) ជាស្ទីតនៃចំនួនពិតដែល x_n ជារឹសពិតនៃសមីការ $x^3+nx-n=0$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។ បង្ហាញថា (x_n) ជាស្ទីតរួម រួចគណនាលីមីតរបស់វា ។

42. គេឲ្យ (x_n) ជាស្ទីតនៃចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x_1=a>0$ និង $x_{n+1}=\frac{x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n}{n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។ គណនាលីមីតនៃ (x_n) ។

43. ឧបមាថា $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ យក x,y និង z ជាចម្ងាយពីកំពូល A ទៅកាន់ជ្រុង $[BD],[BC]$ និង $[CD]$ រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $\frac{BD}{x}=\frac{BC}{y}+\frac{CD}{z}$ ។

44. គេឲ្យ a,b និង c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=3$។
កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $A=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}$ ។

45. គេឲ្យ x,y និងz ជាចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=0$ និង $x^2+y^2+z^2=6$។
កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ $|(x-y)(y-z)(z-x)|$ ។

46. គេឲ្យការេ $ABCD$ មួយ ។ តាមកំពូល A គេគូសបន្ទាត់ (l) កាត់ (CD) ត្រង់ E និង (BC) ត្រង់ F ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AB^2}$ ។

47. គេឲ្យរង្វង់មួយចារឹកក្នុងចតុកោណព្នាយ $ABCD([BC]//[AD])$ ។ រង្វង់នេះប៉ះទៅនឹងជ្រុង $[AB]$ និង $[CD]$ ត្រង់ K និង L ហើយប៉ះទៅនឹងបាត $[AD]$ និង $[BC]$ ត្រង់ M និង N រៀងគ្នា ។
ក) យក Q ជាចំណុចប្រសព្វនៃ $[BM]$ និង $[AN]$ ។ បង្ហាញថា $[KQ]//[AD]$ ។
ខ) បង្ហាញថា $AK\times KB=CL\times LD$ ។

48. គេឲ្យបន្ទាត់ (l) កាត់ជ្រុង $[AB]$ និង $[AD]$ នៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ត្រង់ E និងF រៀងគ្នា ហើយG ជាចំណុចប្រសព្វនៃ (l) និងអង្កត់ទ្រូង $[AC]$ ។ បង្ហាញថា $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=\frac{AC}{AG}$ ។

49. គណនាតម្លៃនៃ $P=\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{(abc)^2}$
បើគេដឹងថា $\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}=2$។

50. គេឲ្យ a និង b ជាពីរចំនួនផ្សេងគ្នា ។ បង្ហាញថា សមីការ $(a-b)x^n+(a^2-b^2)x^{n-1}+\ldots+(a^n-b^n)x+a^{n+1}-b^{n+1}=0$ មានរឹសយ៉ាងច្រើនមួយ ។

51. ចំពោះ $-1\leq x\leq 1$ ចូររកកំណត់តម្លៃនៃ
$\sqrt[3]{4-3x+\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}+\sqrt[3]{4-3x-\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}$ ។

52. គេឲ្យ m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}>1$ ។

53. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យពហុធា $P(x,y,z)$ កំណត់ដោយ $P(x,y,z)=x^5+y^5+z^5+k(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)$ ចែកដាច់នឹង $x+y+z$ ។ ចំពោះតម្លៃ k ដែលរកឃើញទាញថា $(x+y+z)^2$ ជាកត្តានៃ $P(x,y,z)$ ។

54. ចំពោះ $n=1,2,3,\ldots$ បង្ហាញថា $\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+4}{8}\right]+\left[\frac{n+8}{16}\right]+..=n$។

55. ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបង្ហាញថា $\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{6}\right]+\left[\frac{n+4}{6}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+3}{6}\right]$ ។

56. គេឲ្យ a,b និង c ជាចំនួនគត់ខុសពីសូន្យ និង $a\neq c$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ ។ បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

57. គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់គូ ហើយ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។ គណនា a និង b បើគេដឹងថា $a+b$ ចែកដាច់ a^n+b^n ។

58. គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា បើ n ជាគូបប្រាកដ នោះ n^2+3n+3 មិនអាចជាគូបប្រាកដទេ ។

59. គេឲ្យ $(a_n)_{n\geq 0}$ ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $a_0=0, a_1=1$ និង $\frac{a_{n+1}-3a_n+a_{n-1}}{2}=(-1)^n$ ចំពោះ $n>0$ ។ បង្ហាញថា a_n ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

60. គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_0=0, a_1=1, a_2=2, a_3=6$ និង
$a_{n+4}=2a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។
បង្ហាញថា a_n ចែកដាច់នឹង n ចំពោះគ្រប់ $n>0$ ។

61. គេឲ្យ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}$ ។

62. កំណត់គ្រប់តម្លៃ p ដើម្បីឲ្យសមីការ $x^3-2p(p+1)x^2+(p^4+4p^3-1)x-3p^3=0$ មានរឹសបីផ្សេងគ្នា និង ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែងមួយ ។

63. គេឲ្យសមីការ $ax^2+(c-b)x+(e-d)=0$ មានរឹសជាចំនួនពិតធំជាង 1 ។ បង្ហាញថា សមីការ $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ មានរឹសជាចំនួនពិតយ៉ាងហោចណាស់មួយ ។

64. រកចំនួនគត់ x វិជ្ជមានតូចជាងគេដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ
x ចែកនឹង 3 មានសំណល់ 1
x ចែកនឹង 4 មានសំណល់ 2
x ចែកនឹង 5 មានសំណល់ 3
x ចែកនឹង 6 មានសំណល់ 4 ។

65. គណនា $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ ចំពោះ $a,b,c>0$ ។

66. កំណត់ x, y, z និង w ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ
$$\begin{cases} x+y+z+w=10 \\ w^2+2x^2+2y^2+3z^2=55 \\ w^3-x^3+y-z=28 \\ wxyz=24 \end{cases}$$ ។

67. គេឲ្យ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 និង b_3 ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ និង $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ ។ បង្ហាញថា
ក) $(a_1+a_2)(b_1+b_2) \leq 2(a_1b_1+a_2b_2)$
ខ) $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3) \leq 3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$ ។

68. ក) បង្ហាញថា បើ $g(x)$ ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែល និង ជាអនុគមន៍សេស នោះ $g'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ ។
ខ) បង្ហាញថា បើ $g'(x)$ ជាអនុគមន៍សេស នោះ $g(x)$ ជាអនុគមន៍គូ ។

69. គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $GCD(a,b) \times LCM(a,b) = ab$ ។

70. បង្ហាញថា $n(n+1)(n+2)$ ចែកដាច់នឹង 6 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

71. គេឲ្យ x, y និង z ជាចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sin x+\sin y+\sin z=0$ និង $\cos x+\cos y+\cos z=0$ ។ បង្ហាញថា
ក) $\cos(x-y)=-\dfrac{1}{2}$
ខ) $\cos(\theta-x)+\cos(\theta-y)+\cos(\theta-z)=0$ ចំពោះគ្រប់ $\theta \in \mathbb{R}$
គ) $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=\dfrac{3}{2}$ ។

72. គណនា $S=\dfrac{1}{\cos a\cos 2a}+\dfrac{1}{\cos 2a\cos 3a}+\dots+\dfrac{1}{\cos(n-1)a\cos na}$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

73. គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ និង ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ
$f(x+y)=f(x)\sqrt{1+[f((y)]^2}+f(y)\sqrt{1+[f(x)]^2}$ និង $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ ។
បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ $\mathbb{R}$ ។

74. កំណត់ត្រីធាតុ (x, y, z) ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន បើគេដឹងថា $35x+21y+60z=665$ ។

75. បើ n មិនមែនជាពហុគុណនៃ 5 បង្ហាញថា n^4-1 ជាពហុគុណនៃ 5 ។

76. គណនាផលបូក $S=\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7^2}+\dfrac{1}{7^3}+\dfrac{2}{7^4}+\dots$ ។

77. គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍មានតម្លៃពិតដែល $f(x,y) = f(x,z) - 2f(y,z) - 2z$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y និង z ។ រកតម្លៃនៃ $f(4017,1000)$ ។

78. ចំពោះ $-1 < r < 1$ តាង $S(r)$ ជាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $S(r) = 12 + 12r + 12r^2 + 12r^3 + ...$។ តាង $-1 < a < 1$ បំពេញទំនាក់ទំនង $S(a) \times S(-a) = 2016$។ គណនា $S(a) + S(-a)$ ។

79. តាង $P(x)$ ជាពហុធាមិនសូន្យដែល $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង $P^2(2) = P(3)$ ។ រកតម្លៃលេខនៃ $P(2017)$ ។

80. រក $GCD(a,b)$ ដែល $a = 12345678987654321$ និង $b = 12345654321$ ។

81. តើមានចំនួនគត់ប៉ុន្មានចាប់ពី 123 ដល់321 ដែលមានពីរខ្ទង់ជាលេខ 2 យ៉ាងពិតប្រាកដ។

82. ក) យក $n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា សមីការ $x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1 = 0$ មានរឹសតែមួយគត់ក្នុងសំណុំចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ តាងរឹសនោះដោយ a_n ។
ខ) បង្ហាញថា ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ ទាញថាវាជាស្វ៊ីតរួម ។
គ) ទាញថា $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ គេបាន $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_n^{n+1}}{2}$ ។
ឃ) រក $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{n+1}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ ។

83. គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណដែលមានក្រឡាផ្ទៃស្មើនឹង 5 និង $BC = 10$ ។ តាង E និង F ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង AC និង AB រៀងគ្នា ហើយតាង BE និង CF កាត់គ្នាត្រង់ G ។ ឧបមាថា ចតុកោណ $AEGF$ អាចចារឹកក្នុងរង្វង់ រកតម្លៃនៃ $AB^2 + AC^2$ ។

84. គណនា $A = \sqrt{C(8,2) + C(9,2) + C(15,2) + C(16,2)}$ ។

85. គេកំណត់អនុគមន៍ f លើសំណុំនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានតាមទំនាក់ទំនងកំណើនដោយ
$f(1) = 2, f(n) = f(n-1) + 2$ បើ n គូ និង
$f(n) = f(n-2) + 2$ បើ n សេស ហើយធំជាង 1 ។ គណនា $f(2017)$ ។

86. តាង $f(n) = 1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)$ ។ រកសំណល់នៃវិធីចែក $f(1) + f(2) + ... + f(2016)$ នឹង 100 ។

87. គេឲ្យស្វ៊ីត a_n កំណត់ដូចខាងក្រោម
$a_0 = 0, a_1 = 1$ និង $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។
រកតម្លៃនៃ a_{2017} ។

88. រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តូចបំផុតដែល $0<\sqrt[4]{n}-[\sqrt[4]{n}]<\frac{1}{2017}$

89. តាង a,b,c និង d ជា 4 ចំនួនពិតដែល $\begin{cases} a+b+c+d=20 \\ ab+bc+cd+da=16 \end{cases}$ ។ រកតម្លៃធំបំផុត នៃ $A=abc+bcd+cda+dab$ ។

90. តាង a,b,c ជាឫសផ្សេងគ្នានៃពហុធា $P(x)=x^3-10x^2+x-2017$ ។
ពហុធាដឺក្រេទីបី $Q(x)$ មានមេគុណនៃ x^3 ស្មើនឹង 1 ហើយមានឫសបីផ្សេងគ្នា គឺ $bc-a^2, ca-b^2, ab-c^2$ ។ រកផលបូកលេខមេគុណនៃ $Q(x)$ ។

91. ក្នុងចតុកោណ $ABCD$ មាន $AB=7, BC=24, CD=15, DA=20$ និង $AC=25$ ។ តាងអង្កត់ទ្រូង AC និង BD កាត់គ្នាត្រង់ E ។ រកប្រវែង EC ។

92. គេឲ្យស្វីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=1$ និង $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+na_n}\forall n\in\mathbb{N}$ ។ កំណត់ a_n ។

93. បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{2n}\frac{(2n)!}{k}$ ជាចំនួនគត់ និង $\sum_{k=1}^{2n}\frac{(2n)!}{k}\equiv 0(\mod 2n+1)$ ។

94. បង្ហាញថា $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^0)^2=C_{2n}^n$ ។

95. គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិត និង λ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលពហុធា $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ មានឫស x_1,x_2 និង x_3 ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ
ក) $x_2-x_1=\lambda$
ខ) $x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ ។
រកតម្លៃអតិបរមានៃ $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ ។

96. គេឲ្យ a,b,c,x,y និង z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $cy+bz=a, az+cx=b$ និង $bx+ay=c$ ។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$ ។

97. សរសេរផលបូក $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k^3+9k^2+26k+24}C_n^k$ ជារាង $\frac{p(n)}{q(n)}$ ដែល p និង q ជាពហុធា ដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។

98. ត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង a,b,c ហើយ h_a,h_b និង h_c ជារង្វាស់កម្ពស់គូស ចេញពីកំពូល A,B និង C រៀងគ្នា ។ យក d_a,d_b និង d_c ជាចម្ងាយពីអរតូសង់ទៅកាន់ កំពូល A,B និង C រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $h_ad_a+h_bd_b+h_cd_c=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$ ។

99. គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c\geq abc$ ។
បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2\geq abc$ ។

100. កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a,b និង c ដើម្បីឲ្យសមីការ
$x^2-2ax+b=0$
$x^2-2bx+c=0$
$x^2-2cx+a=0$ មានរឹសជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

101. គេឲ្យស្វ៊ីត $Fibonacci(f_n)$ កំណត់ដោយ $f_0=0,f_1=1$ និង $f_{n+1}=f_{n-1}+f_n$ ចំពោះ គ្រប់ $n\geq 1$ ។ បង្ហាញថា

(a) $f_1+f_2+...+f_n=f_{n+2}+1$

(b) $f_1+f_3+f_5+...+f_{2n-1}=f_{2n}$

(c) $f_1^2+f_2^2+...+f_n^2=f_nf_{n+1}$

(d) $f_{n-1}f_{n+1}-f_n^2=(-1)^n$ (សមភាព Cassini)

(e) $x^n=f_nx+f_{n-1}$ ចំពោះ x ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^2=x+1$

(f) $f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ (រូបមន្ត Binet)

(g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^kf_k=f_{3n}$

(h) $f_{s+t}=f_{s-1}f_t+f_sf_{t+1}$ ចំពោះ $s\geq 1$ និង $t\geq 0$ ។

102. គេឲ្យ $x_1,x_2,...,x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង $S=x_1+x_2+...+x_n$ ។
បង្ហាញថា $(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\leq 1+S+\dfrac{S^2}{2}+...+\dfrac{S^n}{n!}$ ។

103. ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេយក R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា $r\leq\dfrac{p}{3\sqrt{3}}\leq\dfrac{R}{2}$ ដែល $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។

104. គេឲ្យ a,b និង $c>0$ ហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc\leq 1$ ។
បង្ហាញថា $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\geq a+b+c$ ។

105. គេឲ្យ n ចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នា $a_1, a_2, ..., a_n$ ។
ដោយប្រើសមភាព $1^3+2^3+...+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
បង្ហាញថា $(a_1^7+a_2^7+...+a_n^7)+(a_1^5+a_2^5+...+a_n^5) \geq 2(a_1^3+a_2^3+...+a_n^3)^2$ ។

106. គេឲ្យ $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$ និង $a+b+c+d+e=1$ ។
បង្ហាញថា $ad+dc+cb+be+ea \leq \frac{1}{5}$ ។

107. គេឲ្យ $a, b, c > 0$ និង m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។
បង្ហាញថា $\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m-1}$ ។

108. គេឲ្យ $a, b, c > 0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ ។

109. គេឲ្យ $a_1, a_2, ..., a_n$ ជា n ចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នា។
បង្ហាញថា $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{8}+...+\frac{a_n}{n2^n} \geq 1-\frac{1}{2^n}$ ។

110. ក) កំណត់សំណល់ពេល n^2 ចែកនឹង 7 ។
ខ) គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា បើ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់ នោះវាជាការេប្រាកដ ។

111. កំណត់ x, y និង $z \in \mathbb{N}$ ដែល $x \leq y \leq z$ ហើយ $x^y+y^z=z^x$ ។

112. ដោះស្រាយសមីការ $3^x+4^y=5^z$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

113. ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេយក $l_a = \frac{m_a}{M_a}, l_b = \frac{m_b}{M_b}$ និង $l_c = \frac{m_c}{M_c}$ ដែល m_a, m_b, m_c ជាប្រវែងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំដែលគូសចេញពីកំពូល A, B, C ហើយ M_a, M_b, M_c ជាប្រវែងអង្កត់ដែលជាប្រសព្វរវាងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A, B, C នឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

114. កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំទាំងបីនៃមុំ A, B, C នៃត្រីកោណ ABC កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ចំណុច P, Q និង R រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $AP+BQ+CR > AB+BC+CA$ ។

115. គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃ $\angle BAC$ និង $\angle ABC$ កាត់ $[BC]$ និង $[CA]$ ត្រង់ P និង Q រៀងគ្នា ។ យក M និង N ជាចំណោលកែងនៃ P និង Q លើ $[AB]$ រៀងគ្នា ។ គណនា $\angle MCN$ ។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ១
គេឲ្យ x, y និង z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ
$x+xy+xyz=12 \qquad (1)$
$y+yz+xyz=21 \qquad (2)$
$z+zx+xyz=30 \qquad (3)$ ។
គណនា $x+y+z$ ។

ចម្លើយ
គណនា $x+y+z$
យក $z\times(1)-(3)$ យើងបាន

$$\begin{aligned} &xyz^2-z=12z-30\\ \Rightarrow &xyz^2-13z=-30\\ \Rightarrow &z(xyz-13)=-30 \qquad (4)\end{aligned}$$

យក $y\times(3)-(2)$ យើងបាន $xy^2z-y=30y-21\Rightarrow y(xyz-31)=-21 \qquad (5)$
យក $x\times(2)-(1)$ យើងបាន $x^2yz-x=21x-12\Rightarrow x(xyz-22)=-12 \qquad (6)$
គុណ $(4),(5)$ និង (6) យើងបាន $xyz(xyz-13)(xyz-22)(xyz-31)=-30\times12\times21$
នោះ $t(t-13)(t-22)(t-31)=-7560$ ដែល $t=xyz$
ដោះស្រាយសមីការគេបាន $t\in\{1,10,27,28\}$ មានន័យថា $xyz\in\{1,10,27,28\}$
តាម $(1): x+xy+xyz=12$ នោះ $xyz\leq 12$ ព្រោះ x,y និង z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន
គេបាន $xyz=1\in\{1,10\}$

លក្ខខណ្ឌដែលឲ្យអាចសរសេរ

$$\begin{aligned}x+xy+t&=12\\y+yz+t&=21\\z+zx+t&=30\end{aligned}$$

គេបាន

$$\begin{aligned}xz+t+tz&=12z\\xy+t+tx&=21x\\yz+t+ty&=30y\end{aligned}$$

នោះ

$$\begin{aligned}xz&=12z-tz-t\\xy&=21x-tx-t\\yz&=30y-ty-t\end{aligned}$$

ជំនួសចូលក្នុងលក្ខខណ្ឌដើមយើងបាន

$$\begin{aligned}x+21x-tx-t+t&=12\\y+30y-ty-t+t&=21\\z+12z-tz-t+t&=30\end{aligned}$$

សមមូលនឹង

$$\begin{aligned}x(22-t)&=12\\y(31-t)&=21\\z(13-t)&=30\end{aligned}$$

+ ចំពោះ $t=1$ គេបាន $x=\dfrac{4}{7},y=\dfrac{7}{10}$ និង $z=\dfrac{4}{10}$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ
+ ចំពោះ $t=10$ យើងបាន $x=1,y=1$ និង $z=10$
ដូចនេះ $x+y+z=12$

លំហាត់ ២
ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន បង្ហាញថា $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$

នោះ $[\sqrt{4n+1}] \le [\sqrt{n}+\sqrt{n+1}] \le [\sqrt{4n+2}] \qquad (1)$

ដោយ $4n+2$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ហើយ $4n+1$ និង $4n+2$ ជាចំនួនគត់តគ្នា

យើងបាន $[\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$

តាម (1) យើងបាន $[\sqrt{4n+2}] \le [\sqrt{n}+\sqrt{n+1}] \le [\sqrt{4n+2}]$

ដូចនេះ $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$

សម្គាល់

ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន $n^2 \equiv 0$ រឺ $1(mod4)$ ។ នេះបញ្ជាក់ថាគ្រប់ការេប្រាកដទាំងអស់ចែកនឹង 4 អាចមានសំណល់តែពីរគត់គឺ 0 រឺ 1 ។

ក្នុងលំហាត់ខាងលើ $4n+2$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ព្រោះថា $4n+2$ចែកនឹង 4 មានសំណល់2។

លំហាត់ ៣

គេឲ្យ a,b និង c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

បង្ហាញថា $abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ ។

សម្រាយ

យក $x=a+b-c, y=b+c-a$ និង $z=c+a-b$

នោះ x,y និង $z>0$ ព្រោះ a,b និង c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ

ហើយ $a=\dfrac{x+z}{2}, b=\dfrac{x+y}{2}$ និង $c=\dfrac{y+z}{2}$

គេបាន $abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ សមមូលនឹង

$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\left(\dfrac{y+z}{2}\right)\left(\dfrac{z+x}{2}\right) \ge xyz$ ពិត

ព្រោះតាមវិសមភាព Cauchy

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$$
$$\frac{y+z}{2} \ge \sqrt{yz}$$
$$\text{និង}\ \frac{z+x}{2} \ge \sqrt{zx}$$

នោះ $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\left(\dfrac{y+z}{2}\right)\left(\dfrac{z+x}{2}\right) \ge \sqrt{(xyz)^2} = xyz$

ដូចនេះ $abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

លំហាត់ ៤
គេឲ្យស្ទីត Fibonacci (f_n) កំណត់ដោយ $f_1 = f_2 = 1$ និង $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$ ។ យក $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ។

ក) បង្ហាញថា $Q^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។

ខ) ទាញថា $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

សម្រាយ

ក) បង្ហាញថា $Q^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

យើងមាន

$$\begin{aligned} Q^2 = Q \times Q &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ឧបមាថាសំណើពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $Q^k = \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{bmatrix}$

បង្ហាញថា $Q^{k+1} = \begin{bmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{bmatrix}$

ដោយ $Q^k = \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{bmatrix}$ និង $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

នោះ

$$\begin{aligned} Q^{k+1} = Q^k \times Q &= \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{k+1} + f_k & f_{k+1} \\ f_k + f_{k-1} & f_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $Q^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

ខ) ទាញថា $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

ដោយ $Q^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$

នោះ $Q^{3n} = \begin{bmatrix} f_{3n+1} & f_{3n} \\ f_{3n} & f_{3n-1} \end{bmatrix}$

ម្យ៉ាងទៀត

$$\begin{aligned} Q^{3n} &= Q^n \times Q^n \times Q^n \\ &= \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_{n+1}^3 + 2f_{n+1}f_n^2 + f_n^2 f_{n-1} & f_{n+1}^2 f_n + f_{n+1}f_n f_{n-1} + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 \\ f_{n+1}^2 f_n + f_{n+1}f_n f_{n-1} & f_{n-1}f_n^2 + 2f_n^2 f_{n-1} + f_{n-1}^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ប្រៀបធៀបធាតុនៅជួរដេកទី ១ និង ជួរឈរទី ២នៃម៉ាទ្រីស Q^{3n}
យើងបាន

$$\begin{aligned} f_{3n} &= f_{n+1}^2 f_n + f_{n+1}f_n f_{n-1} + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}f_n(f_{n+1} + f_{n-1}) + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}(f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n+1} + f_{n-1}) + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}(f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2) + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}^3 f_{n+1} - f_{n-1}^2 + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^2(f_{n+1} - f_n) \\ &= f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

លំហាត់ ៥
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន p, q, r និង s បង្ហាញថា
$(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1) \geq 81pqrs$ ។

សម្រាយ
បង្ហាញថា $(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1) \geq 81pqrs$
ចំពោះ p ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $p^2+p+1 \geq \sqrt[3]{p^3} = p$

ដូចគ្នាដែរ

$$\begin{aligned} & q^2+q+1 \geq 3q \\ & r^2+r+1 \geq 3r \\ \text{និង}\quad & s^2+s+1 \geq 3s \end{aligned}$$

យើងបាន $(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1) \geq (3p)(3q)(3r)(3s) = 81pqrs$
ដូចនេះ $(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1) \geq 81pqrs$

លំហាត់ ៦
ចំពោះ a, b, c និង d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បង្ហាញថា
$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+\dfrac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d}+\dfrac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a}+\dfrac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} \geq a+b+c+d$ ។

សម្រាយ
បង្ហាញថា $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+\dfrac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d}+\dfrac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a}+\dfrac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} \geq a+b+c+d$
តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន
$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ នោះ $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq \dfrac{a+b+c}{3}$
ដូចគ្នាដែរ

$$\begin{aligned} & \frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d} \geq \frac{b+c+d}{3} \\ & \frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a} \geq \frac{c+d+a}{3} \\ \text{និង}\quad & \frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} \geq \frac{d+a+b}{3} \end{aligned}$$

នោះ $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+\dfrac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d}+\dfrac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a}+\dfrac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b}$
$\geq \dfrac{a+b+c}{3}+\dfrac{b+c+d}{3}+\dfrac{c+d+a}{3}+\dfrac{d+a+b}{3}$
$= a+b+c+d$
ដូចនេះ $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+\dfrac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d}+\dfrac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a}+\dfrac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} \geq a+b+c+d$

លំហាត់ ៧
គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 1$ និង $a_{n+1} = 1 + a_1a_2...a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។
បង្ហាញថា $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 2$ ។

ចម្លើយ

បង្ហាញថា $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 2$

យើងមាន $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$

ដោយ $a_1 = 1$ និង $a_{n+1} = 1 + a_1a_2...a_n$ នោះ $a_2 = 1 + a_1 = 1 + 1 = 2$

ឧបមាថា $a_k \geq k$ ចំពោះ $k = \overline{1,n}$

យើងបាន $a_{n+1} = 1 + a_1a_2...a_n \geq 1 + 1 \times 2 \times ... \times n \geq n$

នោះ $a_n \geq n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

ម៉្យាងទៀត $a_{n+2} = 1 + a_1a_2...a_{n+1} = 1 + a_{n+1}(a_{n+1} - 1)$

នោះ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+2} - 1} &= \frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1} - 1)} \\
&= \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_{n+1}} \\
\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_{n+2} - 1}
\end{aligned}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_{k+1} - 1} - \frac{1}{a_{k+2} - 1} \right) \\
&= \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_{n+2} - 1} = 1 - \frac{1}{a_{n+2} - 1}
\end{aligned}$$

យើងបាន $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{k+1}} = 1 + \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{a_{n+2} - 1}\right) = 1 + 1 = 2$

ដូចនេះ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 2$

លំហាត់ ៨
ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេកំណត់យក $f(n) = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + (n-1)^2 + n$ ។
រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ ។

ចម្លើយ

ពិនិត្យ

n	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	1	3	8	22	65	209
$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$	3	$\dfrac{8}{3}$	$\dfrac{22}{8}$	$\dfrac{65}{22}$	$\dfrac{209}{65}$	$\dfrac{742}{209}$

យើងសង្កេតឃើញថាចំពោះ $n = \overline{1,6}$ គេបាន $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ មានតម្លៃតូចបំផុតស្មើនឹង $\dfrac{8}{3}$
យើងនឹងបង្ហាញថា $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ មានតម្លៃតូចបំផុតស្មើនឹង $\dfrac{8}{3}$ គឺបង្ហាញថា $\dfrac{f(n+1)}{f(n)} > 3$ ចំពោះគ្រប់ $n > 6$
យើងមាន $f(n) = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + (n-1)^2 + n$
នោះ

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + \dots + n^2 + (n+1) \\
&> 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 6^{n-4} + \dots + (n-1)^3 + n^2 \\
&> 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 3\left[6^{n-5} + 7^{n-4} + \dots + (n-1)^2 + n\right] \\
&> 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 3\left[f(n) - 1^n - 2^{n-1} - 3^{n-2} - 4^{n-3} - 5^{n-4}\right] \\
&= 3f(n) + 2(5^{n-4} - 1) + 2^{n-1}(2^{n-5} - 1) \\
&> 3f(n)
\end{aligned}$$

នោះ $\dfrac{f(n+1)}{f(n)} > 3$
ដូចនេះ $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ មានតម្លៃតូចបំផុតស្មើនឹង $\dfrac{8}{3}$

លំហាត់ ៩
គណនា $S_n = \left[1^{\frac{1}{2}}\right] + \left[2^{\frac{1}{2}}\right] + \left[3^{\frac{1}{2}}\right] + \dots + \left[(n^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]$
និង $T_n = \left[1^{\frac{1}{3}}\right] + \left[2^{\frac{1}{3}}\right] + \left[3^{\frac{1}{3}}\right] + \dots + \left[(n^3-1)^{\frac{1}{3}}\right]$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$។

ចម្លើយ

គណនា $S_n = \left[1^{\frac{1}{2}}\right] + \left[2^{\frac{1}{2}}\right] + \left[3^{\frac{1}{2}}\right] + \dots + \left[(n^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]$

ពិនិត្យ $[\sqrt{k}]=n$ បើ $n^2\leq k\leq (n+1)^2-1$
យើងបាន

$$\begin{aligned} S_n &= 1(2^2-1^2)+2(3^2-2^2)+...+(n-1)[n^2-(n-1)^2] \\ &= -[1^2+2^2+...+(n-1)^2]+(n-1)n^2 \\ &= (n-1)n^2-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= (n-1)n\left(n-\frac{2n-1}{6}\right) \\ &= \frac{n(n-1)(4n+1)}{6} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{n(n-1)(4n+1)}{6}$
គណនា $T_n=\left[1^{\frac{1}{3}}\right]+\left[2^{\frac{1}{3}}\right]+\left[3^{\frac{1}{3}}\right]+...+\left[(n^3-1)^{\frac{1}{3}}\right]$
ពិនិត្យ $[\sqrt[3]{k}]=n$ បើ $n^3\leq k\leq (n+1)^3-1$
យើងបាន

$$\begin{aligned} T_n &= 1(2^3-1^3)+2(3^3-2^3)+...+(n-1)[n^3-(n-1)^3] \\ &= -[1^3+2^3+...+(n-1)^3]+(n-1)n^3 \\ &= -\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2+(n-1)n^3 \\ &= n^2(n-1)\left(-\frac{n-1}{4}+n\right) \\ &= \frac{n^2(n-1)(3n+1)}{4} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $T_n=\dfrac{n^2(n-1)(3n+1)}{4}$

លំហាត់ ១០
គេឲ្យ a,b និង c ជាឫសនៃសមីការ $x^3+3x^2+5x+7=0$ ។ យក $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី ៣ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $P(a)=b+c, P(b)=c+a, P(c)=a+b$ និង $P(a+b+c)=-16$ ។ គណនា $P(0)$ ។

ចម្លើយ
ដោយ a,b និង c ជាឫសនៃសមីការ $x^3+3x^2+5x+7=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត $\begin{cases} a+b+c=-3 \\ ab+bc+ca=5 \\ abc=-7 \end{cases}$

យក $Q(x)=P(x)+x+3$

ដោយ $P(a)=b+c, P(b)=c+a$ និង $P(c)=a+b$

គេបាន $Q(a)=P(a)+a+3=b+c+a+3=3-3=0$

ដូចគ្នាដែរ $Q(b)=Q(c)=0$

នោះ a,b និង c ជារឹសនៃពហុធា $Q(x)$

យើងបាន

$$\begin{aligned} Q(x) &= k(x^3+3x^2+5x+7) \\ \Rightarrow P(x)+3 &= k(x^3+3x^2+5x+7) \end{aligned}$$

នោះ

$$\begin{aligned} P(-3)-3+3 &= k(-27+27-15+7) \\ \Rightarrow P(-3) &= k(-27+27-15+7) \end{aligned}$$

ម៉្យាងទៀត $P(a+b+c)=-16 \Rightarrow P(-3)=-16$

យើងបាន $-8k=-16 \Rightarrow k=2$

ហេតុនេះ $Q(x)=2(x^3+3x^2+5x+7) \Rightarrow Q(0)=14 \Rightarrow P(0)+3=14$

ដូចនេះ $P(0)=11$

លំហាត់ ១១

គេឲ្យ p,q និង r ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\dfrac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr}=24$ និង $\dfrac{(p-2q)(q-2r)(r-2p)}{pqr}=10$ ។ ឧបមាថា $\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{r}+\dfrac{r}{p}$ អាចសរសេរជារាង $\dfrac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។ គណនា $m+n$ ។

សម្រាយ

តាង $u=\dfrac{p}{q}, v=\dfrac{q}{r}$ និង $w=\dfrac{r}{p}$ នោះ $uvw=1$

ដោយ

$$\begin{aligned}
&\frac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr}=24\\
\Rightarrow&\left(1+\frac{p}{q}\right)\left(1+\frac{q}{r}\right)\left(1+\frac{r}{p}\right)=24\\
\Rightarrow&(1+u)(1+v)(1+w)=24\\
\Rightarrow&1+(u+v+w)+(uv+vw+wu)+uvw=24\\
\Rightarrow&(u+v+w)+(uv+vw+wu)=22(1)
\end{aligned}$$

ម៉្យាងទៀត $\dfrac{(p-2q)(q-2r)(r-2p)}{pqr}=10$
នោះ

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{p}{q}-2\right)\left(\frac{q}{r}-2\right)\left(\frac{r}{p}-2\right)=10\\
\Rightarrow&(u-2)(v-2)(w-2)=10\\
\Rightarrow&(2-u)(2-v)(2-w)=-10\\
\Rightarrow&8-4(u+v+w)+2(uv+vw+wu)-uvw=-10\\
\Rightarrow&-4(u+v+w)+2(uv+vw+wu)=-17\\
\Rightarrow&2(u+v+w)-(uv+vw+wu)=\frac{17}{2}(2)
\end{aligned}$$

បូក (1) និង (2) យើងបាន $3(u+v+w)=22+\dfrac{17}{2}=\dfrac{61}{2}$
នោះ $u+v+w=\dfrac{61}{6}$ រឺ $\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{r}+\dfrac{r}{p}=\dfrac{61}{6}$
គេបាន $m=61$ និង $n=6$
ហេតុនេះ $m+n=61+6=67$

លំហាត់ ១២
គណនា $A=[2013\sin 0^\circ]+[2013\sin 1^\circ]+...+[2013\sin 359^\circ]$ ដែល $[x]$ តាងឲ្យផ្នែកគត់នៃ x ។

ចម្លើយ
Lemma
បើ $x\in\mathbb{Z}$ គេបាន $[x]+[-x]=0$
បើ $x\notin\mathbb{Z}$ គេបាន $[x]+[-x]=-1$ ។
សម្រាយ

បើ $x \in \mathbb{Z}$ នោះ $[x]+[-x]=x-x=0$
បើ $x \notin \mathbb{Z}$ តាង $k=[x]$ នោះ $k<x<k+1 \Rightarrow -k-1<-x<-k$
គេបាន $[-x]=-k-1$
ហេតុនេះ $[x]+[-x]=k-k-1=-1$
យើងមាន $A=[2013\sin 0^\circ]+[2013\sin 1^\circ]+\ldots+[2013\sin 359^\circ]$
យក

$$\begin{aligned} B &= [2013\sin 0^\circ]+[2013\sin 1^\circ]+\ldots+[2013\sin 179^\circ] \\ &= [2013\sin 1^\circ]+[2013\sin 1^\circ]+\ldots+[2013\sin 179^\circ] \end{aligned}$$

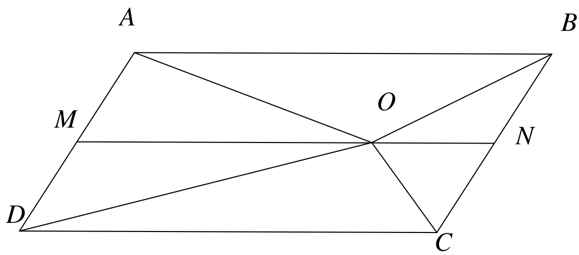
និង

$$\begin{aligned} C &= [2013\sin 180^\circ]+[2013\sin 181^\circ]+\ldots+[2013\sin 359^\circ] \\ &= [-2013\sin 1^\circ]+[-2013\sin 1^\circ]+\ldots+[-2013\sin 179^\circ] \end{aligned}$$

ហេតុនេះ $A=B+C=\underbrace{-1-1-\ldots-1}_{178 \text{ តួ}}=-178$

លំហាត់ ១៣
គេឲ្យប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ មួយ ហើយ M និង N ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង $[AD]$ និង $[BC]$ រៀងគ្នា ។ យក O ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង $[MN]$ ។
បង្ហាញថា $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=2AB^2+AD^2-4OM\times ON$ ។

សម្រាយ



ដោយ M និង N ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង $[AD]$ និង $[BC]$ រៀងគ្នា
នោះ $[OM]$ និង $[ON]$ ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ AOD និង BOC រៀងគ្នា
តាមរូបមន្តមេដ្យាន

$$OM^2 = \frac{OA^2 + OD^2}{2} - \frac{AD^2}{4}$$
$$\Rightarrow OA^2 + OD^2 = 2OM^2 + \frac{AD^2}{2} (1)$$

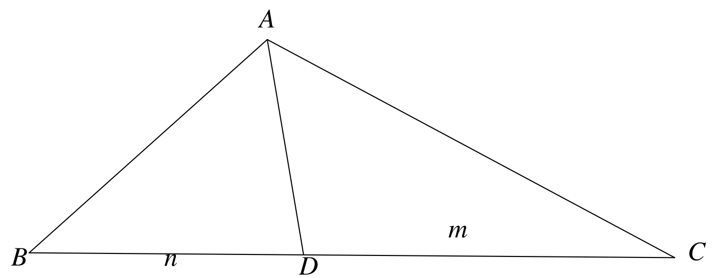
ដូចគ្នាដែរ $OB^2 + OC^2 = 2ON^2 + \frac{BC^2}{2} = 2ON^2 + \frac{AD^2}{2}$ (2)
បូក (1) និង (2) យើងបាន

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 &= AD^2 + 2(OM^2 + ON^2) \\ &= AD^2 + 2\left[(OM + ON)^2 - 2OM \times ON\right] \\ &= AD^2 + 2(MN^2 - 2OM \times ON) \\ &= AD^2 + 2(AB^2 - 2OM \times ON) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=2AB^2+AD^2-4OM\times ON$

លំហាត់ ១៤
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ និង D ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង $[BC]$ ។ តាង $BC=a,CA=b,AB=c,AD=d,BD=n$ និង $CD=m$។
បង្ហាញថា $b^2n+c^2m=a(d^2+mn)$ ។
អនុវត្តន៍
ក) គេឲ្យ m_a ជារង្វាស់មេដ្យានដែលគូសចេញពីកំពូល A នៃត្រីកោណ ABC ។
បង្ហាញថា $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$ ។
ខ) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ។ យក G ជាទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណនេះ ។ បង្ហាញថា $OG^2=R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$ ។
គ) យក $[AD)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃ $\angle A$ នៃត្រីកោណ ABC មួយ ។
បង្ហាញថា $AD=\dfrac{\sqrt{bc\left[(b+c)^2-a^2\right]}}{b+c}$។

សម្រាយ

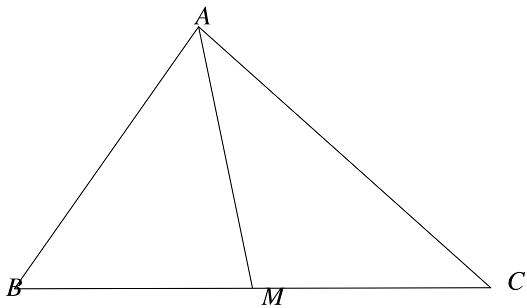


បង្ហាញថា $b^2n+c^2m=a(d^2+mn)$
តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសយើងបាន
$c^2=d^2+n^2-2nd\cos\angle ADB$
នោះ $c^2m=d^2m+mn^2-2mnd\cos\angle ADB$ (i)

និង $b^2 = d^2 + m^2 - 2md\cos\angle ADC$
ដោយ $\angle ADC + \angle ADB = \pi \Rightarrow \angle ADC = \pi - \angle ADB$
គេបាន $\cos\angle ADC = -\cos\angle ADB$
នោះ $b^2 = d^2 + m^2 - 2md\cos\angle ADB$
$\Rightarrow b^2n = d^2n + m^2n - 2mnd\cos\angle ADB$ (ii)
បូក (i) និង (ii) យើងបាន

$$\begin{aligned} c^2m + b^2n &= d^2m + mn^2 + d^2n + m^2n \\ &= (m+n)d^2 + mn(m+n) \\ &= ad^2 + amn \end{aligned}$$

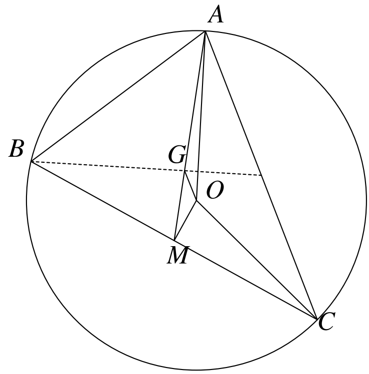
ដូចនេះ $b^2n + c^2m = a(d^2 + mn)$
អនុវត្តន៍
ក) បង្ហាញថា $m_a = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$



តាមទ្រឹស្តីបទ *Stewart* យើងបាន

$$AB^2 \times MC + AC^2 \times BM = BC(AM^2 + BM \times MC)$$
$$c^2\left(\frac{a}{2}\right) + b^2\left(\frac{a}{2}\right) = a\left[m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\right]$$
$$\frac{b^2+c^2}{2} = m_a^2 + \frac{a^2}{4}$$

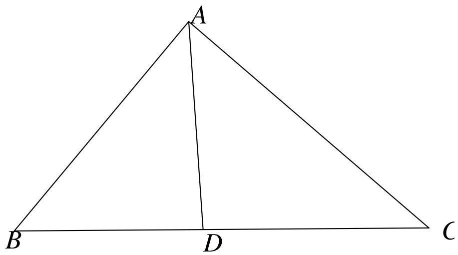
ដូចនេះ $m_a = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$



ខ) បង្ហាញថា $OG^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$
អនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទ *Stewart* ចំពោះត្រីកោណ AOM យើងបាន
$OA^2 \times GM + OM^2 \times GA = AM(OG^2 + GA \times GM)$
ដោយ $GM = \frac{1}{3}AM; GA = \frac{2}{3}AM; OM^2 = OC^2 - MC^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$
គេបាន

$$R^2\left(\frac{1}{3}AM\right) + \frac{2}{3}AM\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) = AM\left[OG^2 + \left(\frac{1}{3}AM\right)\left(\frac{2}{3}AM\right)\right]$$
$$\frac{R^2}{3} + \frac{2}{3}\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) = OG^2 + \frac{2}{9}AM^2$$
$$R^2 - \frac{a^2}{6} = OG^2 + \frac{2}{9}AM^2$$

ម៉្យាងទៀត $AM^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ (រូបមន្តមេដ្យាន)
នោះ $R^2 - \frac{a^2}{6} = OG^2 + \frac{2}{9}\left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)$
យើងបាន $OG^2 = R^2 - \frac{b^2+c^2}{9} + \frac{a^2}{18} - \frac{a^2}{6} = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$
ដូចនេះ $OG^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$
គ) បង្ហាញថា $AD = \frac{\sqrt{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}}{b+c}$



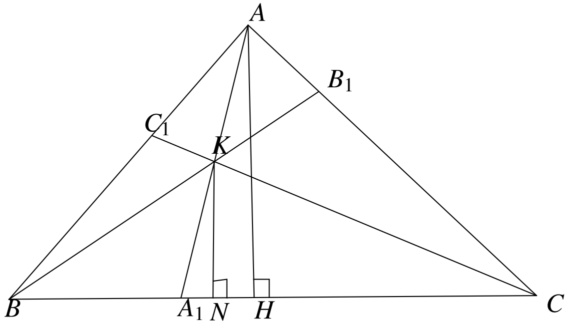
តាមទ្រឹស្តីបទ *Stewart* យើងបាន $AB^2 \times CD + AC^2 \times BD = BC(AD^2 + BD \times CD)$
ដោយ $[AD)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃ $\angle A$ គេបាន $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{b+c}{a}$
គេបាន $BD = \dfrac{ca}{b+c}$ និង $CD = \dfrac{ab}{b+c}$
យើងបាន

$$\begin{aligned} \frac{abc^2}{b+c} + \frac{ab^2c}{b+c} &= aAD^2 + a\left(\frac{ca}{b+c}\right)\left(\frac{ab}{b+c}\right) \\ \Rightarrow AD^2 &= \frac{bc^2+b^2c}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \\ &= \frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $AD = \dfrac{\sqrt{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}}{b+c}$

លំហាត់ ១៥
យក K ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ កន្លះបន្ទាត់ $[AK), [BK)$ និង $[CK)$ កាត់ជ្រុង $[BC], [CA]$ និង $[AB]$ ត្រង់ចំណុច A_1, B_1 និង C_1 រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា
ក) $\dfrac{KA_1}{AA_1} + \dfrac{KB_1}{BB_1} + \dfrac{KC_1}{CC_1} = 1$
ខ) $\dfrac{AK}{AA_1} + \dfrac{BK}{BB_1} + \dfrac{CK}{CC_1} = 2$ ។

សម្រាយ



បង្ហាញថា ក) $\dfrac{KA_1}{AA_1}+\dfrac{KB_1}{BB_1}+\dfrac{KC_1}{CC_1}=1$

យក $[AH]$ និង $[KN]$ ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ ABC និង BKC រៀងគ្នា
យើងបាន

$$\frac{[BKC]}{[ABC]}=\frac{\frac{1}{2}BC\times KN}{\frac{1}{2}BC\times AH}=\frac{KN}{AH}$$

ម៉្យាងទៀត $[AH]//[KN]$ នោះ $\dfrac{KN}{AH}=\dfrac{KA_1}{AA_1}$

គេបាន $\dfrac{[BKC]}{[ABC]}=\dfrac{KA_1}{AA_1}$

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{[AKC]}{[ABC]}=\dfrac{KB_1}{BB_1}$ និង $\dfrac{[AKB]}{[ABC]}=\dfrac{KC_1}{CC_1}$

ហេតុនេះ

$$\frac{KA_1}{AA_1}+\frac{KB_1}{BB_1}+\frac{KC_1}{CC_1}=\frac{[BKC]+[AKC]+[AKB]}{[ABC]}=\frac{[ABC]}{[ABC]}=1$$

ដូចនេះ $\dfrac{KA_1}{AA_1}+\dfrac{KB_1}{BB_1}+\dfrac{KC_1}{CC_1}=1$

ខ) $\dfrac{AK}{AA_1}+\dfrac{BK}{BB_1}+\dfrac{CK}{CC_1}=2$

យើងមាន $\dfrac{KA_1}{AA_1}+\dfrac{KB_1}{BB_1}+\dfrac{KC_1}{CC_1}=1$

នោះ $\frac{AA_1-AK}{AA_1}+\frac{BB_1-BK}{BB_1}+\frac{CC_1-CK}{CC_1}=1$
គេបាន $1-\frac{AK}{AA_1}+1-\frac{BK}{BB_1}+1-\frac{CK}{CC_1}=1$
ដូចនេះ $\frac{AK}{AA_1}+\frac{BK}{BB_1}+\frac{CK}{CC_1}=3-1=2$

លំហាត់ ១៦
គេឲ្យ a,b និង c ជាឫសនៃពហុធា $P(x)=x^3-2007x+2002$ ។
គណនា $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)\left(\frac{b-1}{b+1}\right)\left(\frac{c-1}{c+1}\right)$ ។

ចម្លើយ
ដោយ a,b និង c ជាឫសនៃពហុធា $P(x)=x^3-2007x+2002$
តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតយើងបាន $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ca=-2007 \\ abc=-2002 \end{cases}$
យើងបាន

$$\begin{aligned}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)\left(\frac{b-1}{b+1}\right)\left(\frac{c-1}{c+1}\right) &= \frac{-1+(a+b+c)-(ab+bc+ca)+abc}{1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc} \\ &= \frac{-1+2007-2002}{1-2007-2002} \\ &= -\frac{4}{4008} \\ &= -\frac{1}{1002}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)\left(\frac{b-1}{b+1}\right)\left(\frac{c-1}{c+1}\right)=-\frac{1}{1002}$

លំហាត់ ១៧
គេឲ្យ x_1,x_2 និង x_3 ជាឫសនៃសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0, a\neq 0$ ។
តាង $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$ ចំពោះ $n\geq 0$។ បង្ហាញថា $aS_{n+3}+bS_{n+2}+cS_{n+1}+dS_n=0$។
អនុវត្តន៍
គេឲ្យ a,b និង c ជាបីចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=3, a^2+b^2+c^2=5$ និង $a^3+b^3+c^3=7$ ។ គណនា $a^4+b^4+c^4$ ។

សម្រាយ

ដោយ x_1, x_2 និង x_3 ជាឫសនៃសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0$
គេបាន $ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d=0 \Rightarrow ax_1^{n+3}+bx_1^{n+2}+cx_1^{n+1}+dx_1^n=0$
ដូចគ្នាដែរ $ax_2^{n+3}+bx_2^{n+2}+cx_2^{n+1}+dx_2^n=0$
និង $ax_3^{n+3}+bx_3^{n+2}+cx_3^{n+1}+dx_3^n=0$
យើងបាន $a(x_1^{n+3}+x_2^{n+3}+x_3^{n+3})+b(x_1^{n+2}+x_2^{n+2}+x_3^{n+2})+c(x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+x_3^{n+1})+d(x_1^n+x_2^n+x_3^n)=0$
ដូចនេះ $aS_{n+3}+bS_{n+2}+cS_{n+1}+dS_n=0$
អនុវត្តន៍
គណនា $a^4+b^4+c^4$
ដោយ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
នោះ

$$\begin{aligned} 3^2 &= 5+2(ab+bc+ca) \\ \Rightarrow ab+bc+ca &= 2 \end{aligned}$$

តាម $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$
នោះ $3^3=7+3(3-a)(3-b)(3-c)$
យើងបាន $\frac{20}{3}=27-9(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-abc$
នោះ $\frac{20}{3}=27-9(3)+3(2)-abc \Rightarrow abc=6-\frac{20}{3}=-\frac{2}{3}$
គេបាន a,b និង c ជាឫសនៃសមីការ $x^3-3x^2+2X+\frac{2}{3}=0$
តាមសម្រាយខាងលើយើងបាន $S_{n+3}-3S_{n+2}+2S_{n+1}+\frac{2}{3}S_n=0$
នោះ $S_{n+3}=3S_{n+2}-2S_{n+1}-\frac{2}{3}S_n$
យើងបាន

$$\begin{aligned} S_4 &= 3S_3-2S_2-\frac{2}{3}S_1 \\ &= 3(7)-2(5)-\frac{2}{3}(3) \\ &= 21 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $a^4+b^4+c^4=21$

លំហាត់ ១៨
គេឲ្យ a,b និង c ជាចំនួនគត់ និង បំពេញលក្ខខណ្ឌ $ab+bc+ca=1$ ។
បង្ហាញថា $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ ជាការេប្រាកដ ។

សម្រាយ
ដោយ $ab+bc+ca=1$
នោះ

$$\begin{aligned} a^2+1 &= a^2+ab+bc+ca \\ &= a(a+b)+c(a+b) \\ &= (a+b)(c+a) \end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរ $b^2+1=(b+c)(a+b)$ និង $c^2+1=(c+a)(b+c)$
គេបាន $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$ ជាការេប្រាកដ

លំហាត់ ១៩
គេឲ្យ a,b និង c ជាចំនួនគត់ ហើយ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ ។
បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2$ ជាការេប្រាកដ ។

សម្រាយ
ដោយ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ នោះ $ab+bc+ca=0$
យើងបាន

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &= (a+b+c)^2-2(0) \\ &= (a+b+c)^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2$ ជាការេប្រាកដ

លំហាត់ ២០
គេឲ្យ $\omega \neq 1$ និង ជាឫសទី n ឯកតាកំណត់ដោយ $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ ។
ក) បង្ហាញថា $(1-\omega)(1-\omega^2)...(1-\omega^{n-1})=n$ ។
ខ) គណនា $\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\omega^2}+...+\frac{1}{1-\omega^{n-1}}$ ។

សម្រាយ
ក) បង្ហាញថា $(1-\omega)(1-\omega^2)...(1-\omega^{n-1})=n$
តាមបម្រាប់ $\omega \neq 1$ និង ជាឫសទី n ឯកតាកំណត់ដោយ $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$
នោះ $\omega,\omega^2,...,\omega^{n-1}$ ជាឫសនៃពហុធា z^n-1

យើងបាន $z^n-1=(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)...(z-\omega^{n-1})$
ដោយ $z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+...+z+1)$
គេបាន $z^{n-1}+z^{n-2}+...+z+1=(z-\omega)(z-\omega^2)...(z-\omega^{n-1})$
យក $z=1$ យើងបាន $(1-\omega)(1-\omega^2)...(1-\omega^{n-1})=n$
ដូចនេះ $(1-\omega)(1-\omega^2)...(1-\omega^{n-1})=n$
ខ) គណនា $\dfrac{1}{1-\omega}+\dfrac{1}{1-\omega^2}+...+\dfrac{1}{1-\omega^{n-1}}$
យក $P(z)=(z-\omega)(z-\omega^2)...(z-\omega^{n-1})$
យើងបាន

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{z-\omega^2}+...+\frac{1}{z-\omega^{n-1}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\omega^2}+...+\frac{1}{1-\omega^{n-1}}=\frac{P'(1)}{P(1)}$$

ម្យ៉ាងទៀត $z^n-1=(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)...(z-\omega^{n-1})$
នោះ

$$\begin{aligned}(z-\omega)(z-\omega^2)...(z-\omega^{n-1})&=\frac{z^n-1}{z-1}\\&=z^{n-1}+z^{n-2}+...+z+1\end{aligned}$$

គេបាន $P(z)=z^{n-1}+z^{n-2}+...+z+1\Rightarrow P(1)=n$
និង $P'(1)=(n-1)+(n-2)+...+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$
ហេតុនេះ $\dfrac{1}{1-\omega}+\dfrac{1}{1-\omega^2}+...+\dfrac{1}{1-\omega^{n-1}}=\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{n}=\dfrac{n-1}{2}$

លំហាត់ ២១
គេឲ្យ ω ជាឫសគូបឯកតាខុសពី 1 និង $a,b,c\in\mathbb{C}$ ។ បង្ហាញថា
ក)$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ ។
ខ) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ ។

សម្រាយ

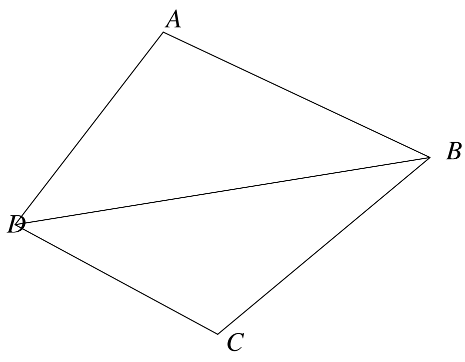
ក) បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$
ដោយ ω ជាឫសគូបឯកតាខុសពី 1 នោះ $\omega^3=1$ និង $\omega^2+\omega+1=0$

យើងបាន

$$
\begin{aligned}
&(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)\\
&=a^2+ab\omega^2+ac\omega+ab\omega+b^2\omega^3+bc\omega^2+ac\omega^2+bc\omega^4+c^2\omega^3\\
&=a^2+b^2+c^2+(ab+bc+ca)(\omega^2+\omega)\\
&=a^2+b^2+c^2+(ab+bc+ca)(-1)
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$
ខ) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$
យើងមាន $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
ដោយ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$ (តាម ក)
យើងបាន $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$

លំហាត់ ២២
គេឲ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មានរង្វាស់ជ្រុង a,b,c,d និង p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃចតុកោណនេះ ។
បង្ហាញថា $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\dfrac{A+C}{2}\right)}$ ។



សម្រាយ

យើងមាន

$$\begin{aligned} S &= [ABD]+[BCD] \\ &= \frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C \\ \Rightarrow 2S &= ad\sin A+bc\sin C \\ \Rightarrow 4S^2 &= a^2d^2\sin^2 A+2abcd\sin A\sin C+b^2c^2\sin^2 C \qquad (1) \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស
$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A$ និង $BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C$
នោះ

$$\begin{aligned} a^2+d^2-2ad\cos A &= b^2+c^2-2bc\cos C \\ \Rightarrow ad\cos A-bc\cos C &= \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2} \\ \Rightarrow \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4} &= a^2d^2\cos^2 A+b^2c^2\cos^2 C-2abcd\cos A\cos C \qquad (2) \end{aligned}$$

បូក (1) និង (2) យើងបាន

$$\begin{aligned} 4S^2+\frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4} &= a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(A+C) \\ &= a^2d^2+b^2c^2-2abcd\left[2\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)-1\right] \\ &= (ad+bc)^2-4abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right) \end{aligned}$$

នោះ $S^2=\dfrac{(ad+bc)^2}{4}-\dfrac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{16}-abcd\cos^2\left(\dfrac{A+C}{2}\right)$

ដោយ

$$\begin{aligned}
&\frac{(ad+bc)^2}{4}-\frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{16}\\
&=\frac{(2ad+2bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{16}\\
&=\frac{(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2)(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2)}{16}\\
&=\frac{[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]}{16}\\
&=\frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{16}\\
&=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)
\end{aligned}$$

គេបាន $S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$

ដូចនេះ $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)}$

លំហាត់ ២៣
គេឲ្យ a,b និង c ជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=42$ និង $a^3+b^3+c^3=105$ ។ បង្ហាញថា $(a-b)(b-c)(c-a)=\pm 63$ ។

សម្រាយ

របៀបទី ១

យើងមាន $a+b+c=0 \qquad (1)$

ដោយ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

នោះ $0=42+2(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca=-21 \qquad (2)$

និង $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

នោះ $0=105+3(-c)(-a)(-b)\Rightarrow abc=35 \qquad (3)$

តាម (1), (2) និង (3) យើងបាន a,b និង c ជាឫសនៃសមីការ $X^3-21X-35=0$

គេបាន $a^3-21a-35=0$ និង $b^3-21b-35=0$

នោះ

$$\begin{aligned}
a^3-b^3-21(a-b)&=0\\
\Rightarrow a^2+ab+b^2-21&=0\\
\Rightarrow (a-b)^2&=21-3ab\\
&=3(7-ab)
\end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរ$(b-c)^2=3(7-bc)$ និង $(c-a)^2=3(7-ca)$
ហេតុនេះ $[(a-b)(b-c)(c-a)]^2=27(7-ab)(7-bc)(7-ca)$
ម្យ៉ាងទៀត

$$\begin{aligned}(7-ab)(7-bc)(7-ca)&=7^3-(ab+bc+ca)7^2+abc(a+b+c)7-(abc)^2\\&=343-49(-21)-35^2\\&=147\\\Rightarrow[(a-b)(b-c)(c-a)]^2&=27\times 247\\&=63^3\end{aligned}$$

ដូចនេះ $(a-b)(b-c)(c-a)=\pm 63$
របៀបទី ២
យើងមាន $a+b+c=0$ (1)
ដោយ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
នោះ $0=42+2(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca=-21 \qquad (2)$
និង $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$
នោះ $0=105+3(-c)(-a)(-b)\Rightarrow abc=35 \qquad (3)$
តាម (1), (2) និង (3) យើងបាន a,b និង c ជាឫសនៃសមីការ $X^3-21X-35=0$
$\Rightarrow X^3=21X+35$ ចំពោះ $X=a,b,c$
យក $A=(a-b)(b-c)(c-a)$
នោះ $A^2=[(a-b)(b-c)][(b-c)(c-a)][(c-a)(a-b)]$
ម្យ៉ាងទៀត

$$\begin{aligned}(a-b)(b-c)&=ab-ac-b^2+bc=b(a+c)-b^2-ac\\&=-b^2-b^2-\frac{35}{b}\\&=-\frac{2b^3+35}{b}\\&=-\frac{42b+105}{b}\\&=-\frac{21(2b+5)}{b}\end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរ $(b-c)(c-a)=-\dfrac{21(2c+5)}{c}$ និង $(c-a)(a-b)=-\dfrac{21(2a+5)}{a}$

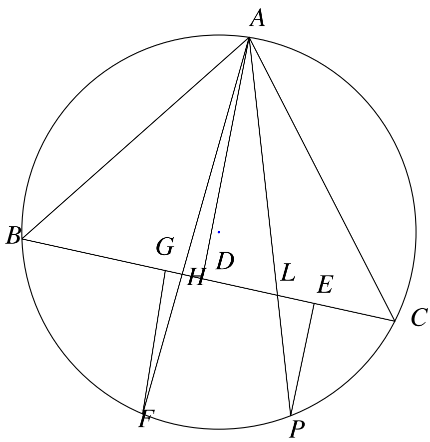
នោះ

$$
\begin{aligned}
A^2 &= -\frac{21^3(2a+5)(2b+5)(2c+5)}{abc}\\
&= -\frac{21^3[125+50(a+b+c)+20(ab+bc+ca)+8abc]}{abc}\\
&= -\frac{21^3[125+50\times 0+20(-21)+8\times 35]}{35}\\
&= \frac{21^3\times 15}{35}\\
&= \frac{21^2\times 21\times 3}{7}\\
&= 21^2\times 3^2\\
&= 63^2
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $(a-b)(b-c)(c-a)=\pm 63$

លំហាត់ ២៤

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ យក L,M និង N ជាចំណុចនៅលើជ្រុង $[BC],[CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា ហើយ P,Q និង R ជាចំណុចប្រសព្វនៃ $[AL)$, $[BM)$ និង $[CN)$ នឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $\dfrac{AL}{LP}+\dfrac{BM}{MQ}+\dfrac{CN}{NR}\geq 9$ ។



សម្រាយ

យក F ជាចំណុចកណ្ដាលនៃធ្នូ BC ហើយ D,E និង G ជាចំណោលកែងនៃ A,P និង F លើ $[BC]$

យើងបាន $[AD]//[PE]$ នោះ $\frac{AL}{LP}=\frac{AD}{PE}$ (ទ្រឹស្ដីបទតាលែស)

ដោយ $PE\leq FG\Rightarrow \frac{AL}{LP}\geq\frac{AD}{FG}$

ម៉្យាងទៀត $[AD]//[FG]\Rightarrow \frac{AD}{FG}=\frac{AH}{FH}$

នោះ $\frac{AL}{LP}\geq\frac{AH}{FH}$ (i)

តាមស្វ័យគុណចំណុច $BH\times HC=AH\times HF$ (ii)

ដោយ $\angle BAF=\frac{\frown BF}{2}=\frac{\frown CF}{2}=\angle FAC\Rightarrow [AF)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃ $\angle A$

នោះ $AH=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$

ហើយ

$$\begin{aligned}\frac{AB}{BH}&=\frac{AC}{CH}\\&=\frac{AB+AC}{BC}\\&=\frac{b+c}{a}\end{aligned}$$

យើងបាន $BH=\frac{ac}{b+c}$ និង $CH=\frac{ab}{b+c}$

តាម (ii) យើងបាន $\left(\frac{ac}{b+c}\right)\left(\frac{ab}{b+c}\right)=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}HF$

នោះ $HF=\frac{a^2}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}$

គេបាន

$$\begin{aligned}\frac{AH}{FH}&=\frac{\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}}{\frac{a^2}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}}\\&=\left(\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\right)\left[\frac{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}{a^2}\right]\\&=\frac{4bc\cos^2\frac{A}{2}}{a^2}\end{aligned}$$

ពិនិត្យ

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{A}{2} &= \frac{1+\cos A}{2}\\
&= \frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}\\
&= \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}\\
\Rightarrow 4bc\cos\frac{A}{2} &= (b+c)^2-a^2
\end{aligned}$$

នោះ

$$\begin{aligned}
\frac{AH}{FH} &= \frac{(b+c)^2-a^2}{a^2}\\
&= \frac{(b+c)^2}{a^2}-1
\end{aligned}$$

តាម (i) យើងបាន $\frac{AL}{LP} \geq \frac{(b+c)^2}{a^2}-1 \geq \frac{4bc}{a^2}-1$ ព្រោះ $(b+c)^2 \geq 4bc$
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\frac{BM}{MQ} \geq \frac{4ca}{b^2}-1$ និង $\frac{CN}{NR} \geq \frac{4ab}{c^2}-1$
ហេតុនេះ

$$\begin{aligned}
\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR} &\geq 4\left(\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}\right)-3\\
&\geq 12\sqrt[3]{\frac{(bc)(ca)(ab)}{a^2b^2c^2}}-13\\
&= 12-3\\
&= 9
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR} \geq 9$

លំហាត់ ២៥
គេឲ្យ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ក្រៅត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។
បង្ហាញថា $a+b+c \geq 2\sqrt{3r(r+4R)}$ ។

សម្រាយ
យើងមាន $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ (i)
ម្យ៉ាងទៀត

$$\begin{aligned} S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ \Rightarrow pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c) \\ \Rightarrow pr^2 = p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc \\ \Rightarrow pr^2 = p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-4prR \\ \Rightarrow r^2 = -p^2+ab+bc+ca-4rR \end{aligned}$$

នោះ $ab+bc+ca = p^2+r^2+4rR$
តាម (i) យើងបាន $(a+b+c) \geq 3(p^2+r^2+4rR)$
នោះ $4p^2 \geq 3p^2+3r(r+4R) \Rightarrow p^2 \geq 3r(r+4R)$
យើងបាន $p \geq \sqrt{3r(r+4R)}$
ដូចនេះ $a+b+c \geq 2\sqrt{3r(r+4R)}$

លំហាត់ ២៦
បង្ហាញថា $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ មិនមែនជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។

សម្រាយ
ឧបមាថា $A = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ ជាចំនួនគត់
យក 2^s ជាស្វ័យគុណនៃ 2 ធំបំផុតដែលជាតួចែកនៃ $1,2,3,...,n$
នោះ $2^sA = 2^s+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_r}{b_r}+...+\frac{a_n}{b_n}$
ដែល a_r សេស និង $a_i, i=\overline{1,n}, i \neq r$ គូ , $b_i, i=\overline{1,n}$ សេស
នោះ $2^sA-2^s-\frac{a_r}{b_r} = \frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}$
$\Rightarrow \frac{2^sb_r(A-1)-a_r}{b_r} = \frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n}$ (i)
សមភាព (i) អាចសរសេរជារាង

$$\frac{2m+1}{2k+1} = \frac{2q}{2p+1}$$

$$\Rightarrow (2m+1)(2p+1) = 2q(2k+1) \text{មិនពិត}$$

ព្រោះ $(2m+1)(2p+1)$ ជាចំនួនគត់សេស ហើយ $2q(2k+1)$ ជាចំនួនគត់គូ

ហេតុនេះការឧបមាមិនពិត

ដូចនេះ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ មិនមែនជាចំនួនគត់

លំហាត់ ២៧

គេឲ្យ $s_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$។ បង្ហាញថា $2\sqrt{n+1}-2<s_n<2\sqrt{n}-1$។

សម្រាយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{k}}&=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}\\&>\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\\&=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\end{aligned}$$

នោះ

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{k}}&>2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}&>2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=2(\sqrt{n+1}-1)\\\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}&=2\sqrt{n+1}-2(1)\end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{k}}&=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}\\&<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\\&=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\\\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{k}}&<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})\\\Rightarrow\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}&<\sum_{k=2}^{n}2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})\\&=2\sqrt{n}-2\end{aligned}$$

នោះ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1$ (2)
តាម (1) និង (2) យើងបាន $2\sqrt{n+1}-2<s_n<2\sqrt{n}-1$

លំហាត់ ២៨
គេឲ្យ $h(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ ។ ឧទាហរណ៍ $h(1)=1, h(2)=1+\frac{1}{2}, h(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},...$ ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ គេបាន $n+h(1)+h(2)+...+h(n-1)=nh(n)$ ។

សម្រាយ
យើងមាន

$$\begin{aligned}
&h(1)=1\\
&h(2)=1+\frac{1}{2}\\
&h(3)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\\
&................\\
&h(n-1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}
\end{aligned}$$

គេបាន

$$\begin{aligned}
h(1)+h(2)+...+h(n-1)&=(n-1)+\left(\frac{n-2}{2}\right)+\left(\frac{n-3}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}\right)\\
&=(n-1)+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{3}-1\right)+...+\left(\frac{n}{n-1}-1\right)\\
&=n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)-n\\
&=nh(n)-n
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $n+h(1)+h(2)+...+h(n-1)=nh(n)$

លំហាត់ ២៩
គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n កំណត់ដោយ $P(k)=\frac{1}{k}$ ចំពោះ $k=\overline{1,n+1}$ ។
គណនា $P(n+2)$ ។

សម្រាយ
យក $Q(x) = xP(x) - 1$ ដោយ $deg(P(x)) = n \Rightarrow deg(Q(x)) = n+1$
តាមបម្រាប់ $P(k) = \dfrac{1}{k}$ ចំពោះ $k = \overline{1, n+1}$
នោះ $Q(k) = kP(k) - 1 = k\left(\dfrac{1}{k}\right) - 1 = 0$ ចំពោះ $k = \overline{1, n+1}$
យើងបាន

$$\begin{aligned} Q(x) &= a(x-1)(x-2)...(x-n)(x-n-1) \\ \Rightarrow Q(0) &= a(-1)(-2)...(-n-1) \\ &= a(-1)^{n+1}(n+1)! \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត $Q(0) = 0P(0) - 1 = -1$
នោះ $a(-1)^{n+1}(n+1)! = -1$
គេបាន $a = \dfrac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$
នោះ

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{(x-1)(x-2)...(x-n)(x-n-1)}{(-1)^n(n+1)!} \\ \Rightarrow Q(n+2) &= \frac{(n+1)\times n \times ... \times 2 \times 1}{(-1)^n(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(-1)^n(n+1)!} \\ &= \frac{1}{(-1)^n} \\ \Rightarrow (n+2)P(n+2) - 1 &= \frac{1}{(-1)^n} \end{aligned}$$

យើងបាន $P(n+2) = \dfrac{1+(-1)^n}{(-1)^n(n+2)}$
បើ n សេស នោះ $P(n+2) = 0$
បើ n គូ នោះ $P(n+2) = \dfrac{2}{n+2}$

លំហាត់ ៣០
គេឲ្យ $P(x), Q(x)$ និង $R(x)$ ជាពហុធាដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $P(x^5) + xQ(x^5 + x^2R(x^5)$ ចែកដាច់នឹង $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$។ បង្ហាញថា $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x - 1$។

សម្រាយ

តាមបម្រាប់ $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)$ ចែកដាច់នឹង $x^4+x^3+x^2+x+1$
នោះ $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)h(x)$ (1)
ពិនិត្យសមីការ $x^5=1$ មានរឹស $1,\omega,\omega^2,\omega^3$ និង ω^4
ក្នុងនោះ $\omega,\omega^2,\omega^3\omega^4$ ជារឹសនៃ $x^4+x^3+x^2+x+1$
តាម (1) យើងបាន $P(\omega^5)+\omega Q(\omega^5)+\omega^2R(\omega^5)=0$
នោះ $P(1)+\omega Q(1)+\omega^2R(1)=0 \qquad (1)$
ដូចគ្នាដែរ

$$P(1)+\omega^2Q(1)+\omega^4R(1)=0 \qquad (2)$$
$$P(1)+\omega^3Q(1)+\omega R(1)=0 \qquad (3)$$
$$P(1)+\omega^4Q(1)+\omega^3R(1)=0 \qquad (4)$$

គុណសមីការ (1),(2), (3) និង (4) ដោយ $-\omega,-\omega^2,-\omega^3$ និង $-\omega^4$ រៀងគ្នាគេបាន
$-\omega P(1)-\omega^2Q(1)-\omega^3R(1)=0 \qquad (5)$
$-\omega^2P(1)-\omega^4Q(1)-\omega R(1)=0 \qquad (6)$
$-\omega^3P(1)-\omega Q(1)-\omega^4R(1)=0 \qquad (7)$
$-\omega^4P(1)-\omega^3Q(1)-\omega^2R(1)=0 \qquad (8)$
បូកសមីការទាំងប្រាំបីបញ្ចូលគ្នាយើងបាន
$4P(1)+(-\omega-\omega^2-\omega^3-\omega^4)P(1)=0$
នោះ $4P(1)+P(1)=0\Rightarrow P(1)=0$
ដូចនេះ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-1$

លំហាត់ ៣១
គេឲ្យ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ក្រៅនៃត្រីកោណ ABC ។
បង្ហាញថា $\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\dfrac{R}{r}}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2}&=\frac{1-\cos A}{2}\\&=\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}\\&=\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}\\&=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\\&=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}\\&=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\end{aligned}$$

នោះ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$
ដូចគ្នាដែរ $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}$ និង $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$
យើងបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$
ដោយ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
$\Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=\frac{prS}{p}=rS$
និង $\frac{abc}{4R}=S\Rightarrow abc=4RS$
នោះ

$$\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}&=\frac{rS}{4RS}\\&=\frac{r}{4R}\\&=\frac{r}{4R}\\\Rightarrow\frac{R}{r}&=\frac{1}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\end{aligned}$$

យើងបាន

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{1}{4\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}}\geq 2(1)$$

ដើម្បីបង្ហាញថាវិសមភាពពិត យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា (1) ពិត
យើងមាន

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$
$$=\left(\frac{p-a}{a}\right)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$
$$=\left(\frac{p-a}{a}\right)\sin\frac{A}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{p-a}{a}$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{p-b}{b}$ និង $\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{p-c}{c}$
នោះ $\sqrt{\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}}=\sqrt{\frac{p-a}{a}}+\sqrt{\frac{p-b}{b}}+\sqrt{\frac{p-c}{c}}$
ម៉្យាងទៀត

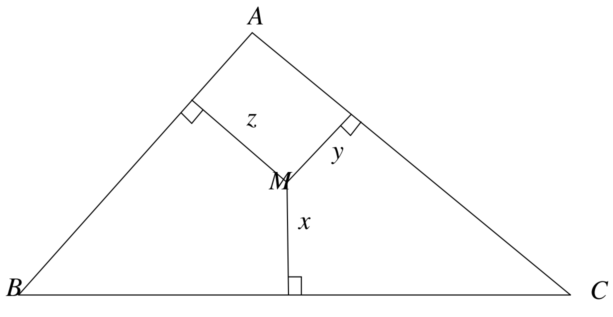
$$\sqrt{(p-a)a}\leq\frac{p-a+a}{2}$$
$$=\frac{p}{2}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)\left(\frac{2}{p}\sqrt{\frac{p-a}{a}}\right)\geq\sqrt{(p-a)a}\left(\frac{2}{p}\sqrt{\frac{p-a}{a}}\right)$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{p-a}{a}}\geq 2\left(\frac{p-a}{a}\right)$$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt{\frac{p-b}{b}} \geq 2\left(\frac{p-b}{p}\right)$ និង $\sqrt{\frac{p-c}{c}} \geq 2\left(\frac{p-c}{p}\right)$
ហេតុនេះ

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}} &\geq 2\left(\frac{p-a}{p}+\frac{p-b}{p}+\frac{p-c}{p}\right)\\ &= 2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$

លំហាត់ ៣២
គេឲ្យ M ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ យក x, y និង z ជាចម្ងាយពីចំណុច M ទៅជ្រុង $[BC], [CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា ។ កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $x^2+y^2+z^2$ ។



សម្រាយ
យើងមាន $[BMC]=\frac{1}{2}ax \Rightarrow x=\frac{2[BMC]}{a} \Rightarrow x^2=\frac{4[BMC]^2}{a^2}$
ដូចគ្នាដែរ $y^2=\frac{4[AMC]^2}{b^2}$ និង $z^2=\frac{4[AMB]^2}{c^2}$
យើងបាន $x^2+y^2+z^2=4\left(\frac{[BMC]^2}{a^2}+\frac{[AMC]^2}{b^2}+\frac{[AMB]^2}{c^2}\right)$

តាមទម្រង់ Engel នៃវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &\geq \frac{4([BMC]+[AMC]+[AMB])^2}{a^2+b^2+c^2} \\ &= \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $min(x^2+y^2+z^2) = \dfrac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$

លំហាត់ ៣៣
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន h_a, h_b និង h_c ជាកម្ពស់ដែលគូសចេញពីកំពូល A, B និង C រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស បើគេដឹងថា
$\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{\sqrt{p(p-a)}}+\dfrac{1}{\sqrt{p(p-b)}}+\dfrac{1}{\sqrt{p(p-c)}}$ ។

សម្រាយ
ដោយ $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c \Rightarrow \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{2S}; \dfrac{1}{h_b} = \dfrac{b}{2S}$ និង $\dfrac{1}{h_c} = \dfrac{c}{2S}$
គេបាន

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} &= \frac{1}{\sqrt{p(p-a)}}+\frac{1}{\sqrt{p(p-b)}}+\frac{1}{\sqrt{p(p-c)}} \\ \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2S} &= \frac{1}{\sqrt{p(p-a)}}+\frac{1}{\sqrt{p(p-b)}}+\frac{1}{\sqrt{p(p-c)}} \\ \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2} &= \frac{S}{\sqrt{p(p-a)}}+\frac{S}{\sqrt{p(p-b)}}+\frac{S}{\sqrt{p(p-c)}} \\ \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2} &= \sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{(p-c)(p-a)}(1) \end{aligned}$$

ព្រោះ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
តាមវិសមភាព Cauchy

$$\begin{aligned} \sqrt{(p-a)(p-b)} &\leq \frac{p-a+p-b}{2} \\ &= \frac{2p-a-b}{2} \\ &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt{(p-b)(p-c)} \le \frac{a}{2}$ និង $\sqrt{(p-c)(p-a)} \le \frac{b}{2}$
ហេតុនេះ $\sqrt{(p-a)(p-b)}+\sqrt{(p-b)(p-c)}+\sqrt{(p-c)(p-a)} \ge \frac{a+b+c}{2}$
សមភាពពេល $a=b=c$
គេបាន (1) កើតឡើងពេល $a=b=c$
ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

លំហាត់ ៣៤
បង្ហាញថា $E=2903^n-803^n-464^n+261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897 ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$។

សម្រាយ
យើងមាន

$$\begin{aligned}
E &= 2903^n-803^n-464^n+261^n \\
&= (2903^n-803^n)-(464^n-261^n) \\
&= (2903-803)k_1-(464-261)k_2 \\
&= 2100k_1-203k_2 \\
&= 7(300k_1-29k_2)
\end{aligned}$$

នោះ $7|E$ (1)
ម្យ៉ាងទៀត

$$\begin{aligned}
E &= (2903^n-464^n)-(803^n-261^n) \\
&= 2439k_3-542k_2 \\
&= 271(9k_3-2k_2)
\end{aligned}$$

នោះ $271|E$ (2)
ដោយ $GCD(7,271)=1$
តាម (1) និង (2) យើងបាន $7\times 271|E$
ដូចនេះ E ចែកដាច់នឹង 1897

លំហាត់ ៣៥
គេឲ្យពហុធា $p(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{Z}$ ។ បើ $p(a)=p(b)=p(c)=-1$ ចំពោះ a,b និង $c\in\mathbb{Z}$ ។ បង្ហាញថា សមីការ $p(x)=0$ គ្មានឫសគត់ ។

សម្រាយ
យក $Q(x) = p(x) + 1$
ដោយ $p(a) = p(b) = p(c) = -1$
នោះ $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$
យើងបាន a,b និង c ជាឫសនៃពហុធា $Q(x)$
នោះ $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)k(x)$
$\Rightarrow p(x) + 1 = (x-a)(x-b)(x-c)k(x)$
ឧបមាថា មាន $x \in \mathbb{Z}$ ដែល $p(x) = 0$
គេបាន $(x-a)(x-b)(x-c)k(x) = 1$
នោះ ពីរយ៉ាងហោចក្នុងចំណោម $x-a, x-b$ និង $x-c$ ត្រូវយកតម្លៃស្មើគ្នាគឺ

$$x-a = x-b$$
$$x-b = x-c$$
$$x-c = x-a$$

$\Rightarrow$

$$a = b$$
$$b = c$$
$$c = a$$

ផ្ទុយពីការពិត ព្រោះ a,b និង c សុទ្ធតែខុសគ្នា

លំហាត់ ៣៦
គេឲ្យ a,b និង $c \neq 0$ ។ ពហុធា $Q(x)$ ចែកនឹង $(x-a)(x-b), (x-b)(x-c)$ និង $(x-c)(x-a)$ សល់សំណល់ $px+l, qx+m$ និង $rx+n$ រៀងគ្នា ។
បង្ហាញថា $l\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+m\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+n\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=0$ ។

សម្រាយ
តាមបម្រាប់យើងបាន

$$Q(x) = (x-a)(x-b)h_1(x) + px + l$$
$$Q(x) = (x-b)(x-c)h_2(x) = qx + m$$
$$\text{និង} Q(x) = (x-c)(x-a)h_3(x) + rx + n$$

នោះ $\begin{cases} Q(a) = pa + l = ra + n \\ Q(b) = pb + l = qb + m \\ Q(c) = qc + m = rc + n \end{cases}$

តាម $pa+l=ra+n \Rightarrow \frac{1}{a}(l-n)=r-p$
តាម $pb+l=qb+m \Rightarrow \frac{1}{b}(m-l)=p-q$
តាម $qc+m=rc+n \Rightarrow \frac{1}{c}(n-m)=q-r$
ហេតុនេះ

$$\begin{aligned} l\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+m\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+n\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right) &= \frac{l}{a}-\frac{l}{b}+\frac{m}{b}-\frac{m}{c}+\frac{n}{c}-\frac{n}{a} \\ &= \frac{1}{a}(l-n)+\frac{1}{b}(m-l)+\frac{1}{c}(n-m) \\ &= r-p+p-q+q-r \\ &= 0 \end{aligned}$$

លំហាត់ ៣៧
គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+1$ ។ ឧបមាថាមេគុណនៃពហុធានេះសុទ្ធតែវិជ្ជមានហើយសមីការ $P(x)=0$ មានរឹសទាំងអស់ជាចំនួនពិត ។
បង្ហាញថា $P(2016)\geq 2017^n$ ។

សម្រាយ

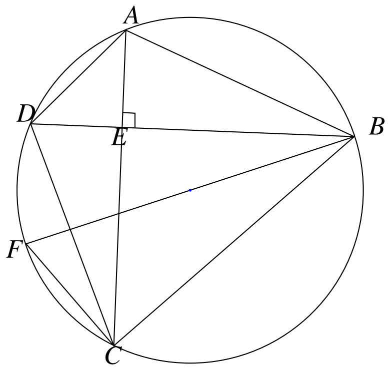
ដោយ $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+1$ មានមេគុណទាំងអស់សុទ្ធតែជាចំនួនវិជ្ជមានហើយមានរឹសទាំងអស់ជាចំនួនពិត
នោះ រឹសទាំងអស់នៃ $P(x)$ សុទ្ធតែជាចំនួនអវិជ្ជមាន
ឧបមាថា $x_i, i=\overline{1,n}$ ជារឹសនៃពហុធា $P(x)$
យើងបាន $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$
នោះ $P(2016)=(2016-x_1)(2016-x_2)\dots(2016-x_n)$
ម្យ៉ាងទៀត តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន
$2016-x_i=1+1+\dots+1-x_i\geq 2017\sqrt[2017]{-x_i}$
នោះ

$$\begin{aligned} P(2016) &\geq (2017\sqrt[2017]{-x_1})(2017\sqrt[2017]{-x_2})\dots(2017\sqrt[2017]{-x_n}) \\ &= 2017^n\sqrt[2017]{(-1)^n x_1x_2\dots x_n} \end{aligned}$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត $x_1x_2\dots x_n=(-1)^n$
ហេតុនេះ $P(2016)\geq 2017^n\sqrt[2017]{(-1)^n(-1)^n}=2017^n$

លំហាត់ ៣៨

គេឲ្យ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ ឧបមាថាអង្កត់ទ្រូង $[AC]$ និង $[BD]$ កាត់កែងគ្នាត្រង់ E ។ បង្ហាញថា $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=4R^2$ ។



សម្រាយ

អនុវត្តទ្រឹស្តីបទពិតាគ័រ

ចំពោះត្រីកោណកែង AED គេបាន $EA^2+ED^2=AD^2$

ចំពោះត្រីកោណកែង BEC គេបាន $EB^2+EC^2=BC^2$

នោះ $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=AD^2+BC^2$ (1)

សង់អង្កត់ផ្ចិត $[BF]$ នោះ BFC ជាត្រីកោណចារឹកកន្លះរង្វង់

$\Rightarrow BFC$ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

យើងបាន $BC^2=BF^2-FC^2=4R^2-FC^2$

តាម (1) គេបាន $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=4R^2+AD^2-FC^2$

ពិនិត្យត្រីកោណកែង AEB និង BFC មាន

$\angle EAB=\angle CFB$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)

នោះ $\triangle AEB\sim\triangle FCB$

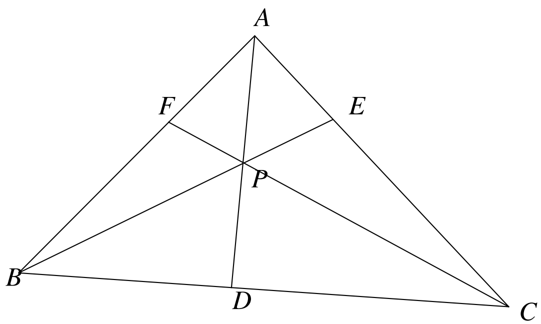
វិបាក $\angle DBA=\angle BFC$

នោះ $AD=FC$

ដូចនេះ $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=4R^2$

លំហាត់ ៣៩
(ទ្រឹស្តីបទ Van Aubel)
គេឲ្យ P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ $[AP),[BP)$ និង $[CP)$ កាត់ជ្រុង $[BC],[CA]$ និង $[AB]$ ត្រង់ D,E និង F រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AP}{PD}$ ។
អនុវត្តន៍
គេឲ្យ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ហើយ $[AD)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃ $\angle A$ ។ បង្ហាញថា $\frac{AI}{ID}=\frac{b+c}{a}$ ។

សម្រាយ



យើងមាន

$$\begin{aligned}\frac{AF}{BF} &= \frac{[APF]}{[BPF]}\\ &= \frac{[ACF]}{[BCF]}\\ &= \frac{[ACF]-[APF]}{[BCF]-[BPF]}\\ &= \frac{[APC]}{[BPC]}\end{aligned}$$

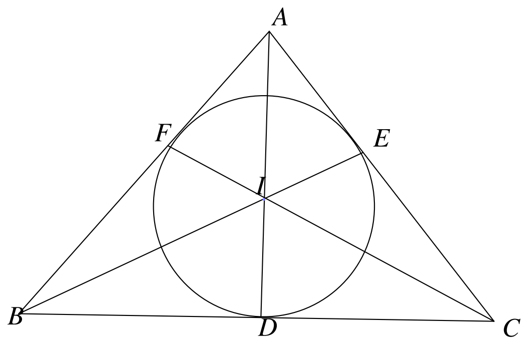
ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{[APB]}{[BPC]}$
នោះ

$$\begin{aligned}\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}&=\frac{[APC]}{[BPC]}+\frac{[APB]}{[BPC]}\\&=\frac{[APC]+[APB]}{[BPC]}(1)\end{aligned}$$

ម៉្យាងទៀត

$$\begin{aligned}\frac{AP}{PD}&=\frac{[APB]}{[BPD]}=\frac{[APC]}{[PCD]}\\&=\frac{[APB]+[APC]}{[BPC]}(2)\end{aligned}$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\dfrac{AF}{FB}+\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AP}{PD}$
អនុវត្តន៍
បង្ហាញថា $\dfrac{AI}{ID}=\dfrac{b+c}{a}$



តាមទ្រឹស្តីបទ Van Aubel គេបាន $\dfrac{AF}{BE}+\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AI}{ID}$
ម៉្យាងទៀតតាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំគេបាន $\dfrac{CA}{AF}=\dfrac{BC}{BF}\Rightarrow\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{b}{a}$
ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{c}{a}$

ហេតុនេះ

$$\begin{aligned}\frac{AI}{ID} &= \frac{b}{a}+\frac{c}{a}\\ &= \frac{b+c}{a}\end{aligned}$$

លំហាត់ ៤០
ចំពោះ $a \in \mathbb{R}$ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{[k^2a]}{n^3}$ ។

សម្រាយ

តាមនិយមន័យផ្នែកគត់ $x-1<[x]\leq x$
យើងបាន $k^2a-1<[k^2a]\leq k^2a$
នោះ

$$\begin{aligned}&\frac{k^2a-1}{n^3}<\frac{[k^2a]}{n^3}\leq\frac{k^2a}{n^3}\\ \Rightarrow &\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a-1}{n^3}<\sum_{k=1}^{n}\frac{[k^2a]}{n^3}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a}{n^3}\end{aligned}$$

ដោយ

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a-1}{n^3} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}1}{n^3}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{an(n+1)(2n+1)}{6}-n}{n^3}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n^2}}{6}\\ &= \frac{a}{3}\end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a}{n^3} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{an(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\\ &= \frac{a}{3}\end{aligned}$$

ហេតុនេះ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{[k^2a]}{n^3}=\frac{a}{3}$

លំហាត់ ៤១
គេឲ្យ (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល x_n ជាឫសពិតនៃសមីការ $x^3+nx-n=0$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។ បង្ហាញថា (x_n) ជាស្វ៊ីតរួម រួចគណនាលីមីតរបស់វា ។

សម្រាយ
ពិនិត្យ $f(x)=x^3+nx-n$ នោះ $f'(x)=3x^2+n>0$
យើងបាន f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច
ម្យ៉ាងទៀត $f(0)=-n$ និង $f(1)=1+n-n=1$
នោះ $f(0)\times f(1)<0$
តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល សមីការ $x^3+nx-n=0$ មានឫសតែមួយគត់គឺ x_n
ដែល $x_n\in(0,1)\Rightarrow(x_n)$ ជាស្វ៊ីតទាល់ (i)
ដោយ $x_n^3+nx_n-n=0$ និង $x_{n+1}^3+(n+1)x_{n+1}-n-1=0$
យើងបាន

$$\begin{aligned}x_{n+1}^3-x_n^3+nx_{n+1}-nx_n+x_{n+1}-1=0\\ \Rightarrow(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}^2+x_nx_{n+1}+x_n^2)+n(x_{n+1}-x_n)=1-x_{n+1}\\ \Rightarrow(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}^2+x_nx_{n+1}+x_n^2+n)=1-x_{n+1}\\ \Rightarrow x_{n+1}-x_n=\frac{1-x_{n+1}}{x_{n+1}^2+x_nx_{n+1}+x_n^2+n}>0\end{aligned}$$

នោះ (x_n) ជាស្វ៊ីតកើនជានិច្ច (2)
តាម (1) និង (2) យើងបាន (x_n) ជាស្វ៊ីតរួម

ដោយ $x_n^3+nx_n-n=0$ នោះ $x_n=1-\dfrac{x_n^3}{n}$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=1$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n^3}{n}=0$

លំហាត់ ៤២

គេឲ្យ (x_n) ជាស៊ីតនៃចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x_1=a>0$ និង $x_{n+1}=\dfrac{x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n}{n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។ គណនាលីមីតនៃ (x_n) ។

សម្រាយ

យើងមាន $x_{n+1}=\dfrac{x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n}{n}$

នោះ

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= \frac{x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n}{n}-x_n \\ &= \frac{x_1+2x_2+\ldots+(n-1)x_{n-1}}{n}>0 \end{aligned}$$

យើងបាន x_n ជាស៊ីតកើន

នោះ $a<x_1<x_2<\ldots<x_n$

គេបាន

$$\begin{aligned} x_n &> \frac{a+2a+3a+\ldots+na}{n} \\ &= \frac{n(n+1)a}{2n} \\ &= \frac{(n+1)a}{2} \end{aligned}$$

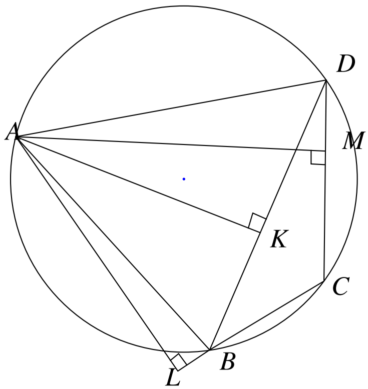
ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)a}{2}=+\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$

លំហាត់ ៤៣

ឧបមាថា $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ យក x,y និង z ជាចម្ងាយពីកំពូល A ទៅកាន់ជ្រុង $[BD],[BC]$ និង $[CD]$ រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $\dfrac{BD}{x}=\dfrac{BC}{y}+\dfrac{CD}{z}$ ។

សម្រាយ



យក K,L និង M ជាចំណោលកែងនៃ A លើ $[BD],[BC]$ និង $[CD]$ រៀងគ្នា
យើងបាន

$$\begin{aligned}\frac{BC}{y}+\frac{CD}{z}&=\frac{CL-BL}{y}+\frac{CM+MD}{z}\\&=\frac{CL}{y}-\frac{BL}{y}+\frac{CM}{z}+\frac{MD}{z}\\&=\cot\angle ACB-\cot\angle ABL+\cot\angle ACM+\cot\angle ADM\end{aligned}$$

ដោយ $\angle ABL+\angle ABC=180^\circ$ (មុំជាប់បន្ថែម)
និង $\angle ABC+\angle ADM=180^\circ$ ($ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់)
នោះ $\angle ABL=\angle ADM$
យើងបាន $\dfrac{BC}{y}+\dfrac{CD}{z}=\cot\angle ACB+\cot\angle ACM$
ម្យ៉ាងទៀត $\angle ACB=\angle KDA$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)
នោះ $\cot\angle ACB=\cot\angle KDA=\dfrac{DK}{x}$
ហើយ $\angle ACM=\angle ABK$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)
នោះ $\cot\angle ACB=\cot\angle ABK=\dfrac{BK}{x}$
ហេតុនេះ $\dfrac{BC}{y}+\dfrac{CD}{z}=\dfrac{BK}{x}+\dfrac{DK}{x}=\dfrac{BD}{x}$

លំហាត់ ៤៤
គេឲ្យ a,b និង c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=3$។
កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $A=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}A&=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}\\&=\left(\frac{2}{a}-a^2\right)+\left(\frac{2}{b}-b^2\right)+\left(\frac{2}{c}-c^2\right)\\&=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

ដោយ

$$\begin{aligned}a+b+c=3&\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=9\\&\Rightarrow a^2+b^2+c^2=9-2(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

នោះ

$$\begin{aligned}A&=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+ab+bc+ca\right)-9\\&=2\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}+ab+bc+ca\right)-9\end{aligned}$$

តាម

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2&\geq 3(xy+yz+zx)\\\Rightarrow (ab+bc+ca)^2&\geq 3abc(a+b+c)=9abc\\\Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{abc}&\geq\frac{9}{ab+bc+ca}\\\Rightarrow A&\geq 2\left(\frac{9}{ab+bc+ca}+ab+bc+ca\right)-9\\&\geq 2\left[2\sqrt{\frac{9(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}}\right]-9=12-9=2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $minA = 3$ ពេល $a = b = c = 1$

លំហាត់ ៤៥
គេឲ្យ x, y និង z ជាចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=0$ និង $x^2+y^2+z^2=6$។
កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ $|(x-y)(y-z)(z-x)|$ ។

សម្រាយ
ដោយ $x+y+z=0$ នោះ $z=-(x+y) \Rightarrow z^2 = x^2+2xy+y^2$
នោះ $x^2+y^2+z^2=6$ សមមូលនឹង $x^2+y^2+x^2+y^2+2xy=6 \Rightarrow x^2+xy+y^2=3$
ដូចគ្នាដែរ $y^2+yz+z^2=3$ និង $z^2+zx+x^2=3$
យើងបាន

$$\begin{aligned}
|(x-y)(y-z)(z-x)|^2 &= (x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 \\
&= (x^2-2xy+y^2)(y^2-2yz+z^2)(z^2-2zx+x^2) \\
&= (3-3xy)(3-3yz)(3-3zx) \\
&= 27(1-xy)(1-yz)(1-zx) \\
&= 27[1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2] \\
&= 27[1-(xy+yz+zx)-(xyz)^2]
\end{aligned}$$

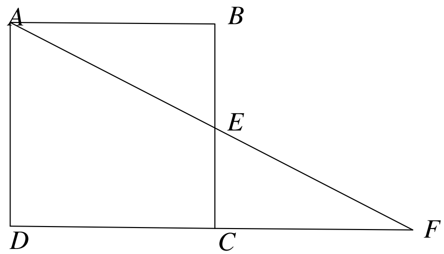
ម្យ៉ាងទៀត

$$\begin{aligned}
xy+yz+zx &= \frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)] \\
&= \frac{1}{2}(0-6) \\
&= -3
\end{aligned}$$

នោះ $|(x-y)(y-z)(z-x)|^2 = 27[1+3-(xyz)^2] \le 27\times 4$
យើងបាន $|(x-y)(y-z)(z-x)| \le 6\sqrt{3}$
ដូចនេះ $max|(x-y)(y-z)(z-x)| = 6\sqrt{3}$ ពេលមួយយ៉ាងតិចក្នុងចំណោម x, y, z យកតម្លៃសូន្យ

លំហាត់ ៤៦
គេឲ្យការេ $ABCD$ មួយ ។ តាមកំពូល A គេគូសបន្ទាត់ (l) កាត់ (CD) ត្រង់ E និង (BC) ត្រង់ F ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AB^2}$ ។

សម្រាយ



ក្នុងត្រីកោណកែង ADF មាន $\cos\angle FAD=\frac{AD}{AF}=\frac{AB}{AF}$
$\Rightarrow \frac{1}{AF}=\frac{\cos\angle FAD}{AB}$
ក្នុងត្រីកោណកែង AEB មាន

$$\begin{aligned}\sin\angle AEB &= \frac{AB}{AE}\\ \Rightarrow \frac{1}{AE} &= \frac{\sin\angle AEB}{AB}\\ &= \frac{\sin\angle FAD}{AB^2}\end{aligned}$$

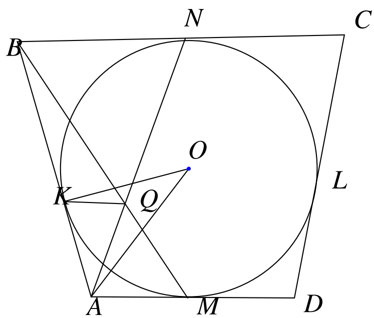
ព្រោះ $\angle AEB=\angle CEF=\angle FAD$
យើងបាន

$$\begin{aligned}\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AF^2} &= \frac{\sin^2\angle FAD}{AB^2}+\frac{\cos^2\angle FAD}{AB^2}\\ &= \frac{1}{AB^2}\end{aligned}$$

ព្រោះ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
ដូចនេះ $\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AB^2}$

លំហាត់ ៤៧
គេឲ្យរង្វង់មួយចារឹកក្នុងចតុកោណព្នាយ $ABCD([BC]//[AD])$ ។ រង្វង់នេះប៉ះទៅនឹងជ្រុង $[AB]$ និង $[CD]$ ត្រង់ K និង L ហើយប៉ះទៅនឹងបាត $[AD]$ និង $[BC]$ ត្រង់ M និង N រៀងគ្នា ។
ក) យក Q ជាចំណុចប្រសព្វនៃ $[BM]$ និង $[AN]$ ។ បង្ហាញថា $[KQ]//[AD]$ ។
ខ) បង្ហាញថា $AK \times KB = CL \times LD$ ។

សម្រាយ

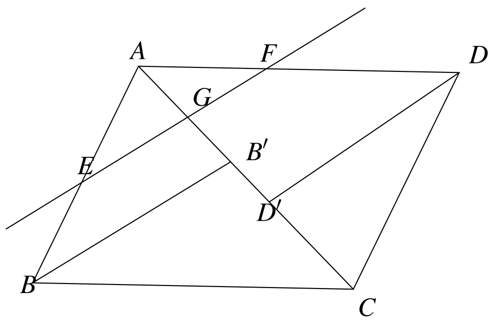


ក) បង្ហាញថា $[KQ]//[AD]$
ដោយ $[BC]//[AD] \Rightarrow [BN]//[AM]$
តាមទ្រឹស្តីបទតាលែសយើងបាន $\dfrac{BQ}{QM} = \dfrac{BN}{AM}$
ម្យ៉ាងទៀត $BN = BK, AM = AK$ (លក្ខណៈនៃបន្ទាត់ប៉ះគូសចេញពីចំណុចក្រៅរង្វង់រួម)
នោះ $\dfrac{BQ}{QM} = \dfrac{BK}{KA}$
ដូចនេះ $[KQ]//[AD]$
ខ) បង្ហាញថា $AK \times KB = CL \times LD$
យើងមាន $\angle CBA + \angle BAD = 180^\circ$ ($ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយ)
ដោយ $\angle CBA = 2\angle OBK$ និង $\angle BAD = 2\angle OAK$
នោះ $2\angle OBK + 2\angle OAK = 180^\circ \Rightarrow \angle OBK + \angle OAK = 90^\circ$ (1)
ម្យ៉ាងទៀត BOK ជាត្រីកោណកែងត្រង់ K

នោះ $\angle OBK + \angle BOK = 90^\circ$ (2)
តាម (1) និង (2) យើងបាន $\angle BOK = \angle OAK$
ហេតុនេះត្រីកោណកែង BOK និង OAK ដូចគ្នា
វិបាក $\dfrac{BK}{OK} = \dfrac{OK}{AK} \Rightarrow AK \times BK = OK^2 = r^2$
ស្រាយដូចគ្នាគេបាន $CL \times LD = r^2$
ដូចនេះ $AK \times BK = CL \times LD$

លំហាត់ ៤៨
គេឲ្យបន្ទាត់ (l) កាត់ជ្រុង $[AB]$ និង $[AD]$ នៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ត្រង់ E និង F រៀងគ្នា ហើយ G ជាចំណុចប្រសព្វនៃ (l) និង អង្កត់ទ្រូង $[AC]$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{AB}{AE} + \dfrac{AD}{AF} = \dfrac{AC}{AG}$ ។

សម្រាយ



យក B' និង D' ជាចំណុចនៅលើអង្កត់ទ្រូង $[AC]$ ដែល $[BB']//(l)$ និង $[DD']//(l)$
តាមទ្រឹស្តីបទតាលែសយើងបាន $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AB'}{AG}$ និង $\dfrac{AD}{AF} = \dfrac{AD'}{AG}$
នោះ $\dfrac{AB}{AE} + \dfrac{AD}{AF} = \dfrac{AB' + AD'}{AG}$
ម្យ៉ាងទៀត $\triangle ABB'$ និង $\triangle CDD'$ មាន
$AB = CD$ (ជ្រុងឈមនៃប្រលេឡូក្រាម)
$\angle BAB' = \angle DCD'$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)
$\angle BB'A = \angle CD'D$ (មុំឆ្លាស់ក្រៅ)
យើងបាន $\triangle ABB'$ និង $\triangle CDD'$ ជាត្រីកោណប៉ុនគ្នា

វិបាក $AB' = CD'$
នោះ

$$\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{CD' + AD'}{AG} = \frac{AC}{AG}$$

ដូចនេះ $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AG}$

លំហាត់ ៤៩
គណនាតម្លៃនៃ $P = \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{(abc)^2}$
បើគេដឹងថា $\frac{b^2+c^2-a^2}{bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{ab} = 2$។

សម្រាយ
យើងមាន $\frac{b^2+c^2-a^2}{bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{ab} = 2$
នោះ

$$\begin{aligned}
& ab^2+ac^2-a^3+bc^2+a^2b-b^3+a^2c+b^2c-c^3 = 2abc \\
\Rightarrow & (-a^3+a^2b+a^2c)+(b^2c+bc^2-abc)-b^3-c^3+(ab^2+ac^2-abc) = 0 \\
\Rightarrow & a^2(b+c-a)+bc(b+c-a)-(b+c)(b^2+c^2-bc)+a(b^2+c^2-bc) = 0 \\
\Rightarrow & (b+c-a)(a^2+bc)-(b+c-a)(b^2+c^2-bc) = 0 \\
\Rightarrow & (b+c-a)(a^2+bc-b^2-c^2+bc) = 0 \\
\Rightarrow & (b+c-a)[a^2-(b-c)^2] = 0 \\
\Rightarrow & (b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) = 0
\end{aligned}$$

នោះ

$$\begin{aligned}
b+c-a &= 0 \\
a+b-c &= 0 \\
a-b+c &= 0
\end{aligned}$$

ចំពោះ $b+c-a=0$ នោះ $b^2+c^2-a^2 = -2bc$
$c^2+a^2-b^2 = 2ac$

និង $a^2+b^2-c^2=2ab$
គេបាន $P=\dfrac{(-2bc)(2ca)(2ab)}{a^2b^2c^2}=-8$
ដូចគ្នាដែរ ចំពោះ $a+b-c=0$ និង $a-b+c=0$ គេបាន $P=-8$
ដូចនេះ $P=-8$

លំហាត់ ៥០
គេឲ្យ a និង b ជាពីរចំនួនផ្សេងគ្នា ។
បង្ហាញថា សមីការ $(a-b)x^n+(a^2-b^2)x^{n-1}+...+(a^n-b^n)x+a^{n+1}-b^{n+1}=0$ មានរឹសយ៉ាងច្រើនមួយ ។

សម្រាយ

យើងមាន $(a-b)x^n+(a^2-b^2)x^{n-1}+...+(a^n-b^n)x+a^{n+1}-b^{n+1}=(a^{n+1}+a^nx+...+ax^n)-(b^{n+1}+b^nx+...+bx^n)$ (1)
ដោយ $a^{n+1}+a^nx+...+ax^n$ ជាផលបូកស្ទីតធរណីមាត្រមាន $u_1=a^{n+1}$ និង $q=\dfrac{x}{a}$
នោះ

$$\begin{aligned}a^{n+1}+a^nx+...+ax^n&=\frac{a^{n+1}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}-1\right]}{\frac{x}{a}-1}\\&=\frac{x^{n+1}-a^{n+1}}{\frac{x-a}{a}}\\&=\frac{ax^{n+1}-a^{n+2}}{x-a}\end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរ $b^{n+1}+b^nx+...+bx^n=\dfrac{bx^{n+1}-b^{n+2}}{x-b}$
យើងបាន (1) សមមូលនឹង $\dfrac{ax^{n+1}-a^{n+2}}{x-a}-\dfrac{bx^{n+1}-b^{n+2}}{x-b}=0$
គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(x-a)(x-b)$ យើងបាន $(a-b)x^{n+2}-(a^{n+2}-b^{n+2})x+ab(a^{n+1}-b^{n+1})=0$
WLOG ឧបមាថា $a>b$
· ករណី n គូ និង $a>b\geq 0$ សមីការដែលឲ្យគ្មានរឹសជាចំនួនវិជ្ជមានទេ ព្រោះសមីការមានការប្តូរសញ្ញាចំនួនពីរដងគឺ + - + មានន័យថាសមីការមានរឹសវិជ្ជមានយ៉ាងច្រើនពីរ គឺ a និង b ដែលជារឹសនៃកន្សោមគុណបន្ថែម ។ បើយើងជំនួស x ដោយ $-x,x>0$ យើងឃើញថាសមីការមិនមានប្តូរសញ្ញាទេ នេះបញ្ជាក់ថាសមីការគ្មានរឹសជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។
សរុបមក ករណីនេះសមីការគ្មានរឹស
· ករណី n គូ និង $a\geq 0>b$

ចំពោះ $a^2 > b^2$ គេបានដូចករណីខាងលើ
ចំពោះ $a^2 < b^2$
យើងសង្កេតឃើញថាសមីការប្តូរសញ្ញាចំនួនម្តង គឺ $++-$
នេះបញ្ជាក់ថាសមីការមានរឹសជាចំនួនវិជ្ជមានមួយយ៉ាងច្រើន ។ បើយើងប្តូរ x ដោយ $-x, x > 0$
យើងសង្កេតឃើញថាសមីការប្តូរសញ្ញាម្តងដូចគ្នា គឺ $+--$ នេះបញ្ជាក់ថាសមីការមានរឹសជាចំនួនអវិជ្ជមានយ៉ាងហោចណាស់មួយ
រឹសដែលរៀបរាប់ខាងលើគឺ a និង b
សរុបមក សមីការគ្មានរឹស
· ករណី n គូ និង $0 > a > b$
នោះសមីការគ្មានការប្តូរសញ្ញាគឺ + + + នេះបញ្ជាក់ថាសមីការគ្មានរឹសជាចំនួនវិជ្ជមានទេ ។ បើយើងជំនួស x ដោយ $-x$ សមីការមានការប្តូរសញ្ញាពីរដងគឺ + - + នេះបញ្ជាក់ថាសមីការមានរឹសអវិជ្ជមានយ៉ាងច្រើនពីរ គឺ a និង b នេះឯង ។ ក្នុងករណីនេះសមីការគ្មានរឹស ។
សិក្សាដូចបីករណីខាងលើចំពោះ n ជាចំនួនសេស យើងទទួលបានសមីការមានរឹសជាចំនួនពិតយ៉ាងច្រើនមួយ
ដូចនេះ សំណើត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

លំហាត់ ៥១
ចំពោះ $-1 \le x \le 1$ ចូរកំណត់តម្លៃនៃ
$\sqrt[3]{4-3x+\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}+\sqrt[3]{4-3x-\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}$ ។

សម្រាយ

តាង $A = \sqrt[3]{4-3x+\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}+\sqrt[3]{4-3x-\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}$
យើងមាន $16-24x+9x^2-x^3 = (4-3x)^2-x^3 > 0$ ចំពោះគ្រប់ $-1 \le x \le 1$
នោះ A កំណត់ចំពោះគ្រប់ $-1 \le x \le 1$
យក $m = \sqrt[3]{4-3x+\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}$ និង $n = \sqrt[3]{4-3x-\sqrt{16-24x+9x^2-x^3}}$
គេបាន $m^3+n^3 = 8-6x$
ហើយ $mn = \sqrt[3]{(4-3x)^2-[(4-3x)^2-x^3]} = \sqrt[3]{x^3} = x$

យើងបាន $A=m+n$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A^3 &= (m+n)^3\\ &= m^3+n^3+3mn(m+n)\\ &= 8-6x+3xA\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A^3-3xA+6x-8 &= 0\\ \Rightarrow (A-2)(A^2+2A+4-3x) &= 0\\ \Rightarrow A &= 2\end{aligned}$$

ព្រោះ $A^2+2A+4-3x=0$ គ្មានរឹសចំពោះ $-1\le x<1$
ចំពោះ $x=1$ នោះ $A=2$
ដូចនេះ $A=2$

លំហាត់ ៥២
គេឲ្យ m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{\sqrt[n]{m}}+\dfrac{1}{\sqrt[m]{n}}>1$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $m=1$ រឺ $n=1$ គេបានវិសមភាពដែលឲ្យពិត
ចំពោះ m និង $n>1$
យក $\sqrt[n]{m}=1+u$ និង $\sqrt[m]{n}=1+v$ ដែល $u,v>0$
តាមវិសមភាព Bernoulli យើងបាន
$m=(1+u)^n>1+nu$ និង $n=(1+v)^m>1+mv$
នោះ $u<\dfrac{m-1}{n}$ និង $v<\dfrac{n-1}{m}$
យើងបាន

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}} &= \frac{1}{1+u}+\frac{1}{1+v}\\ &> \frac{1}{1+\frac{m-1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{n-1}{m}}\\ &= \frac{n}{m+n-1}+\frac{m}{m+n-1}=\frac{m+n}{m+n-1}\\ &= 1+\frac{1}{m+n-1}>1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\sqrt[n]{m}}+\dfrac{1}{\sqrt[m]{n}}>1$

លំហាត់ ៥៣
កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យពហុធា $P(x,y,z)$ កំណត់ដោយ $P(x,y,z) = x^5+y^5+z^5+k(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)$ ចែកដាច់នឹង $x+y+z$ ។ ចំពោះតម្លៃ k ដែលរកឃើញ ទាញថា $(x+y+z)^2$ ជាកត្តានៃ $P(x,y,z)$ ។

សម្រាយ

យើងចាត់ទុក y និង z ដូចចំនួនថេរ ហើយ x ជាអថេរ
នោះ $P(x,y,z)$ ចែកដាច់នឹង $x+y+z$ លុះត្រាតែ $P(-y-z,y,z)=0$
យើងបាន

$$\begin{aligned}
&(-y-z)^5+y^5+z^5+k[(-y-z)^3+y^3+z^3][(-y-z)^2+y^2+z^2]=0\\
\Rightarrow &-y^5-5y^4z-10y^3z^2-10y^2z^3-5yz^4-z^5+y^5+z^5\\
&+k(-y^3-3y^2z-3yz^2-z^3+y^3+z^3)(y^2+2yz+z^2+y^2+z^2)=0\\
\Rightarrow &-5yz(y^3+2y^2z+2yz^2+z^3)-6kyz(y+z)(y^2+yz+z^2)=0\\
\Rightarrow &-5yz[(y^3+z^3)+2yz(y+z)]-6kyz(y+z)(y^2+yz+z^2)=0\\
\Rightarrow &-5yz(y+z)(y^2+yz+z^2)-6kyz(y+z)(y^2+yz+z^2)=0\\
\Rightarrow &-(5+6k)yz(y+z)(y^2+yz+z^2)=0
\end{aligned}$$

នោះ $5+6k=0 \Rightarrow k=-\dfrac{5}{6}$
ដូចនេះ $k=-\dfrac{5}{6}$
យក x,y និង z ជាឫសនៃសមីការ $t^3-at^2+bt-c=0$
ដែល $a=x+y+z, b=xy+yz+zx$ និង $c=xyz$
តាង $S_n=x^n+y^n+z^n$
គេបាន $S_0=3, S_1=a$ និង $S_2=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=a^2-2b$
ម៉្យាងទៀត $x^3-ax^2+bx-c=0 \Rightarrow x^{n+3}-ax^{n+2}+bx^{n+1}-cx^n=0$
នោះ

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}(x^{n+3}-ax^{n+2}+bx^{n+1}-cx^n)=0\\
\Rightarrow &S_{n+3}-aS_{n+2}+bS_{n+1}-cS_n=0\\
\Rightarrow &S_{n+3}=aS_{n+2}-bS_{n+1}+cS_n
\end{aligned}$$

យើងបាន $S_3=aS_2-bS_1+cS_0=a(a^2-2b)-ab+3c=a^3-3ab+3c$

ដូចគ្នាដែរ $S_4 = a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$
និង $S_5 = a^5 - 5a^3b + 5a^2c + 5ab^2 - 5b$
នោះ

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= x^5 + y^5 + z^5 - \frac{5}{6}(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2) \\ &= \frac{1}{6}[6(x^5+y^5+z^5) - 5(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)] \\ &= \frac{1}{6}(6S_5 - 5S_3S_2) = a^2(a^3 - 5ab + 15c) \end{aligned}$$

នោះ $P(x,y,z)$ ចែកដាច់នឹង a^2
ដូចនេះ $(x+y+z)^2$ ជាកត្តានៃ $P(x,y,z)$

លំហាត់ ៥៤
ចំពោះ $n = 1,2,3,\ldots$ បង្ហាញថា $\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \left[\frac{n+8}{16}\right] + \ldots = n$។

សម្រាយ

ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់យើងបំបែក n ទៅជាផលបូកស្វ័យគុណគោល 2 គឺ
$n = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + \ldots$
យើងបាន

$$\begin{aligned} \left[\frac{n+1}{2}\right] &= a_0 + a_1 + a_2 2 + a_3 2^2 + a_4 2^3 + a_5 2^4 + a_6 2^5 + \ldots \\ \left[\frac{n+2}{4}\right] &= a_1 + a_2 + a_3 2 + a_4 2^2 + a_5 2^3 + a_5 2^3 + a_6 2^4 + \ldots \\ \left[\frac{n+4}{8}\right] &= a_2 + a_3 + a_4 2 + a_5 2^2 + a_6 2^3 + \ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន
$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \left[\frac{n+8}{16}\right] + ..$
$= a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 + a_5 2^5 + a_6 2^6 + \ldots = n$

លំហាត់ ៥៥
ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបង្ហាញថា $\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{6}\right]+\left[\frac{n+4}{6}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+3}{6}\right]$ ។

សម្រាយ

យក $n=6m+r$ ដែល $0\le r\le 5$

n	$\left[\frac{n}{3}\right]$	$\left[\frac{n+2}{6}\right]$	$\left[\frac{n+4}{6}\right]$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{n+3}{6}\right]$
$6m$	$2m$	m	m	$3m$	m
$6m+1$	$2m$	m	m	$3m$	m
$6m+2$	$2m$	m	$m+1$	$3m+1$	m
$6m+3$	$2m+1$	m	$m+1$	$3m+1$	$m+1$
$6m+4$	$2m+1$	$m+1$	$m+1$	$3m+2$	$m+1$
$6m+4$	$2m+1$	$m+1$	$m+1$	$3m+2$	$m+1$

តាមតារាងខាងលើគេបាន $\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{6}\right]+\left[\frac{n+4}{6}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+3}{6}\right]$

លំហាត់ ៥៦
គេឲ្យ a,b និង c ជាចំនួនគត់ខុសពីសូន្យ និង $a\neq c$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ ។ បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

សម្រាយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}\\
\Rightarrow &ac^2+ab^2=a^2c+b^2c\\
\Rightarrow &ac^2-a^2c+ab^2-b^2c=0\\
\Rightarrow &ac(c-a)-b^2(c-a)=0\\
\Rightarrow &(c-a)(ac-b^2)=0
\end{aligned}$$

ដោយ $a\neq c$ នោះ $ac-b^2=0\Rightarrow ac=b^2$

យើងបាន

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= a^2+ac+c^2 \\ &= (a+c)^2-ac \\ &= (a+c)^2-b^2 \\ &= (a+b+c)(a-b+c) \end{aligned}$$

ឧបមាថា $a^2+b^2+c^2$ ជាចំនួនបឋម នោះគេបានបួនករណីដូចខាងក្រោម
ក) $a-b+c=1$ និង $a+b+c=a^2+b^2+c^2$
ខ) $a+b+c=1$ និង $a-b+c=a^2+b^2+c^2$
គ) $a-b+c=-1$ និង $a+b+c=-(a^2+b^2+c^2)$
ឃ) $a+b+c=-1$ និង $a-b+c=-(a^2+b^2+c^2)$
ចំពោះករណី ក និង ខ យើងបាន $a^2+b^2+c^2-2(a+c)+1=0$
$\Rightarrow (a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1 \Rightarrow a=c=1$ ផ្ទុយពីការពិត
ចំពោះករណី គ និង ឃ យើងបាន $(a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1 \Rightarrow a=c=-1$ ផ្ទុយពីការពិត
ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2$ មិនមែនជាចំនួនបឋម

លំហាត់ ៥៧
គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់គូ ហើយ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។ គណនា a និង b បើគេដឹងថា $a+b$ ចែកដាច់ a^n+b^n ។

សម្រាយ
យើងមាន

$$\begin{aligned} a^n-b^n &= (a^2-b^2)(a^{n-2}+a^{n-4}b^2+...+b^{n-2}) \\ &= (a+b)(a-b)(a^{n-2}+a^{n-4}b^2+...+b^{n-2}) \end{aligned}$$

នោះ $a+b$ ចែកដាច់នឹង a^n-b^n
ដោយ $a+b$ ចែកដាច់ a^n+b^n
យើងបាន $2a^n=(a^n+b^n)+(a^n-b^n)$ ចែកដាច់នឹង $a+b$
ហើយ $2b^n=(a^n+b^n)-(a^n-b^n)$ ចែកដាច់នឹង $a+b$
នោះ $a+b|GCD(2a^n,2b^n)$
តាមបម្រាប់ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា នោះ $GCD(2a^n,2b^n)=2GCD(a^n,b^n)=2$
យើងបាន $a+b=2 \Rightarrow a=b=1$
ដូចនេះ $a=b=1$

លំហាត់ ៥៨
គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា បើ n ជាគូបប្រាកដ នោះ n^2+3n+3 មិនអាចជាគូបប្រាកដទេ ។

សម្រាយ
ឧបមាថា n^2+3n+3 ជាគូបប្រាកដ
ដោយ n ជាគូបប្រាកដ នោះ $n(n^2+3n+3)$ ក៏ជាគូបប្រាកដដែរ
ពិនិត្យ

$$\begin{aligned} n(n^2+3n+3) &= n^3+3n^2+3n \\ &= (n+1)^3-1 \end{aligned}$$

មិនអាចជាគូបប្រាកដ
ហេតុនេះ ការឧបមាមិនពិត
ដូចនេះ n^2+3n+3 មិនអាចជាគូបប្រាកដទេ

លំហាត់ ៥៩
គេឲ្យ $(a_n)_{n\geq 0}$ ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $a_0=0, a_1=1$ និង $\dfrac{a_{n+1}-3a_n+a_{n-1}}{2}=(-1)^n$ ចំពោះ $n>0$ ។ បង្ហាញថា a_n ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

សម្រាយ
យើងមាន $a_0=0, a_1=1$ និង $\dfrac{a_{n+1}-3a_n+a_{n-1}}{2}=(-1)^n$ ចំពោះ $n>0$
នោះ $a_2=1, a_3=4, a_4=9$ និង $a_5=25$
ពិនិត្យ

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 = F_0^2 \\ a_1 &= 1 = F_1^2 \\ a_2 &= 1 = F_2^2 \\ a_3 &= 4 = F_3^2 \\ a_4 &= 9 = F_4^2 \end{aligned}$$

និង $a_5=25=F_5^2$ ដែល $(F_n)_{n\geq 0}$ ជាស្វ៊ីត Fibonacci
យើងនឹងបង្ហាញថា $a_n=F_n^2$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$
ឧបមាថា $a_k=F_k^2$ ចំពោះគ្រប់ $k\leq n$ យើងនឹងបង្ហាញថា $a_{n+1}=F_{n+1}^2$

យើងមាន $\dfrac{a_{n+1}-3a_n+a_{n-1}}{2}=(-1)^n$
$\Rightarrow a_{n+1}-3a_n+a_{n-1}=2(-1)^n$
$\Rightarrow a_n-3a_{n-1}+a_{n-2}=-2(-1)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$
បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $a_{n+1}-2a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0$
នោះ

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2a_n+2a_{n-1}-a_{n-2}\\
&= 2F_n^2+2F_{n-1}^2-F_{n-2}^2\\
&= (F_n+F_{n-1})^2+(F_n-F_{n-1})^2-F_{n-2}^2\\
&= F_{n+1}^2+F_{n-2}^2-F_{n-2}^2\\
&= F_{n+1}^2 \text{ ពិត}
\end{aligned}$$

យើងបាន $a_n=F_n^2$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$
ដូចនេះ a_n ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$

លំហាត់ ៦០
គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_0=0, a_1=1, a_2=2, a_3=6$ និង $a_{n+4}=2a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។
បង្ហាញថា a_n ចែកដាច់នឹង n ចំពោះគ្រប់ $n>0$ ។

សម្រាយ

តាមបម្រាប់គេបាន $a_4=12, a_5=25, a_6=48$
ពិនិត្យ

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1\times 1=1\times F_1\\
a_2 &= 2\times 1=2\times F_2\\
a_3 &= 6=3\times 2=3\times F_3\\
a_4 &= 12=4\times 3=4\times F_4\\
a_5 &= 25=5\times 5=5\times F_5
\end{aligned}$$

និង $a_6=48=6\times 8=6\times F_6$ ដែល $(F_n)_{n\geq 0}$ ជាស្វ៊ីត Fibonacci
យើងនឹងបង្ហាញថា $a_n=nF_n$
ឧបមាថា $a_k=kF_k$ ចំពោះគ្រប់ $k\leq n+3$
បង្ហាញថា $a_{n+4}=(n+4)F_{n+4}$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
a_{n+4} &= 2a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n \\
&= 2(n+3)F_{n+3}+(n+2)F_{n+2}-2(n+1)F_{n+1}-nF_n \\
&= 2(n+3)F_{n+3}+(n+2)F_{n+2}-2(n+1)F_{n+1}-n(F_{n+2}-F_{n+1}) \\
&= 2(n+3)F_{n+3}+2F_{n+2}-(n+2)F_{n+1} \\
&= 2(n+3)F_{n+3}+2F_{n+2}-(n+2)(F_{n+3}-F_{n+2}) \\
&= (n+4)(F_{n+3}+F_{n+2}) = (n+4)F_{n+4}
\end{aligned}$$

នោះ $a_n = nF_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$
ដូចនេះ a_n ចែកដាច់នឹង n ចំពោះគ្រប់ $n > 0$

លំហាត់ ៦១
គេឲ្យ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}$ ។

សម្រាយ
យើងមាន

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2}-\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \\
&= \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{24} \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi}{8}$

លំហាត់ ៦២
កំណត់គ្រប់តម្លៃ p ដើម្បីឲ្យសមីការ $x^3-2p(p+1)x^2+(p^4+4p^3-1)x-3p^3=0$ មានរឹសបីផ្សេងគ្នា និង ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែងមួយ ។

សម្រាយ
ឧបមាថា a,b និង c ជារឹសនៃសមីការ និង $0<a<b<c$

បើ a,b និង c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែងមួយ គេបាន $c^2=a^2+b^2$
អនុវត្តទ្រឹស្តីបទវ្យែតចំពោះសមីការ
$x^3-2p(p+1)x^2+(p^4+4p^3-1)x-3p^3=0$
គេបាន

$$a+b+c=2p(p+1)$$
$$ab+bc+ca=p^4+4p^3-1$$
$$abc=3p^3$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}2c^2&=a^2+b^2+c^2\\&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=4p^2(p+1)^2-2(p^4+4p^3-1)\\&=2(p^2+1)^2\end{aligned}$$

នោះ $c=p^2+1\Rightarrow a+b=2p(p+1)-c=2p(p+1)-(p^2+1)=p^2+2p-1$
ហើយ $ab=p^4+4p^3-1-c(a+b)=p^4+4p^3-1-(p^2+1)(p^2-p+1)=2p^3-2p$
យើងបាន a និង b ជាឫសនៃសមីការដឺក្រេទី ២ $X^2-(p^2+2p-1)X+(2p^3-2p)=0$
ដោះស្រាយសមីការគេបាន $X_1=2p$ និង $X_2=p^2-1$
$\Rightarrow\begin{cases}2p>0\\p^2-1>0\end{cases}$ នោះ $p>1$
ហេតុនេះ

$$\begin{aligned}3p^3&=abc\\&=2p(p^2-1)(p^2+1)\\\Rightarrow 3p^2&=2p^4-2\\\Rightarrow 2p^4-3p^2-2&=0\end{aligned}$$

នោះ $p=\sqrt{2}$
ដូចនេះ $p=\sqrt{2}$

លំហាត់ ៦៣
គេឲ្យសមីការ $ax^2+(c-b)x+(e-d)=0$ មានឫសជាចំនួនពិតធំជាង 1 ។ បង្ហាញថា សមីការ $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ មានឫសជាចំនួនពិតយ៉ាងហោចណាស់មួយ ។

សម្រាយ

WLOG យក $a>0$

ឧបមាថា $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ គ្មានរឹសជាចំនួនពិត រឺ $P(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

យើងមាន $P(x)=ax^4+(c-b)x^2+(e-d)+(x-1)(bx^2+d)$

យក y ជារឹសនៃសមីការ $ay^2+(c-b)y+(e-d)=0$ និង $x=\sqrt{y}$

តាមបម្រាប់ $y>1$ នោះ $x>1$

យើងបាន $P(x)=(x-1)(bx^2+d)\Rightarrow bx^2+d>0$

ម៉្យាងទៀត $P(-x)=(-x-1)(bx^2+d)$ នោះ $(-x-1)(bx^2+d)<0\Rightarrow bx^2+d<0$ ផ្ទុយពីការពិត

ដូចនេះ សមីការ $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ មានរឹសជាចំនួនពិតយ៉ាងហោចណាស់មួយ

លំហាត់ ៦៤

រកចំនួនគត់ x វិជ្ជមានតូចជាងគេដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

x ចែកនឹង 3 មានសំណល់ 1

x ចែកនឹង 4 មានសំណល់ 2

x ចែកនឹង 5 មានសំណល់ 3

x ចែកនឹង 6 មានសំណល់ 4 ។

សម្រាយ

តាមបម្រាប់យើងបាន $x=3k_1+1, x=4k_2+2, x=5k_3+3$ និង $x=6k_4+4, k_i\in\mathbb{N}$

នោះ $\begin{cases}3k_1-4k_2=1\\4k_2-5k_3=1\\5k_3-6k_4=1\end{cases}$

គេបាន

$$\begin{aligned}k_3&=\frac{6k_4+1}{5}=k_4+\frac{k_4+1}{5}\\k_2&=\frac{6k_4+2}{4}=\frac{3k_4+1}{2}=k_4+\frac{k_4+1}{2}\\k_1&=2k_4+1\end{aligned}$$

តែ $k_i\in\mathbb{N}$ នោះ $k_4+1=5m_1$ និង $k_4+1=2m_2$

យើងបាន $5m_1=2m_2\Rightarrow m_2=5t$

គេបាន $k_4+1=10t\Rightarrow k_1=2(10t-1)+1=20t-1$

នោះ $x=3(20t-1)+1=60t-2$ ដែល $t\in\mathbb{N}$

ដោយ x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត នោះ $x=58$

ដូចនេះ $x=58$

លំហាត់ ៦៥
គណនា $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ ចំពោះ $a,b,c>0$។

សម្រាយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} \text{ រាង} 1^{\infty}\\
&=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)^{\frac{1}{x}}\\
&=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\\
&=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\right]^{\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}\\
&=e^{\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)}\\
&=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=e^{\frac{1}{3}\ln abc}\\
&=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{abc}$

លំហាត់ ៦៦
កំណត់ x,y,z និង w ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$\begin{cases}x+y+z+w=10\\ w^2+2x^2+2y^2+3z^2=55\\ w^3-x^3+y-z=28\\ wxyz=24\end{cases}$$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $w+x+y+z=10$ និង $wxyz=24$
នោះ $w,x,y,z\in\{1,2,3,4\}$
+បើ $w=1\Rightarrow 1+2x^2+2y^2+3z^2=55$

$\Rightarrow 2x^2+2y^2+3z^2=54$
ដោយ $2x^2+2y^2$ និង 54 ជាចំនួនគត់គូ នោះ $3z^2$ ក៏ជាចំនួនគត់គូដែរ
គេបាន $z\in\{2,4\}$
· ចំពោះ $z=2$ នោះ $2x^2+2y^2+12=54\Rightarrow x^2+y^2=21$ មិនអាច ព្រោះ $x,y\in\{3,4\}$
· ចំពោះ $z=4\Rightarrow 2x^2+2y^2+48=56\Rightarrow x^2+y^2=3$ មិនអាចព្រោះ $x,y\in\{2,3\}$
+បើ $w=2$ នោះ $4+2x^2+2y^2+3z^2=55$
$\Rightarrow 2x^2+2y^2+3z^2=51$
គេបាន $3z^2$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់សេស នោះ $z\in\{1,3\}$
·ចំពោះ $z=1$ យើងបាន $2x^2+2y^2+3=51\Rightarrow 2x^2+2y^2=48$
$\Rightarrow x^2+y^2=24$ មិនអាច ព្រោះ $x,y\in\{3,4\}$
·ចំពោះ $z=3$ យើងបាន $2x^2+2y^2+27=51$
$2x^2+2y^2=24$
$x^2+y^2=12$ មិនអាច ព្រោះ $x,y\in\{1,4\}$
+បើ $w=3$ យើងបាន $9+2x^2+2y^2+3z^2=55$
$2x^2+2y^2+3z^2=46$
នោះ $3z^2$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់គូ $\Rightarrow z\in\{2,4\}$
·ចំពោះ $z=2$ យើងបាន $2x^2+2y^2+12=46\Rightarrow x^2+y^2=17$
នោះ $(w,x,y,z)=(3,1,4,2)$ រឺ $(3,4,1,2)$
តាម (3) យើងបាន $(w,x,y,z)=(3,1,4,2)$ ជាចម្លើយ
·ចំពោះ $z=4$ យើងបាន $2x^2+2y^2+48=46$ មិនអាច
+បើ $w=4$ យើងបាន $16+2x^2+2y^2+3z^2=55$
$\Rightarrow 2x^2+2y^2+3z^2=39$ នោះ $3z^2$ ជាចំនួនគត់សេស
គេបាន $z\in\{1,3\}$
·ចំពោះ $z=1$ នោះ $2x^2+2y^2+3=39$
$\Rightarrow x^2+y^2=18$ មិនអាច ព្រោះ $\{x,y\}=\{1,2\}$
·ចំពោះ $z=3$ នោះ $2x^2+2y^2+27=39\Rightarrow 2x^2+2y^2=6$ មិនអាច ព្រោះ $x,y\in\{1,2\}$
ដូចនេះ $(w,x,y,z)=(3,1,4,2)$ ជាចម្លើយ

លំហាត់ ៦៧

គេឲ្យ a_1,a_2,a_3,b_1,b_2 និង b_3 ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1\geq a_2\geq a_3$
និង $b_1\geq b_2\geq b_3$ ។ បង្ហាញថា
ក) $(a_1+a_2)(b_1+b_2)\leq 2(a_1b_1+a_2b_2)$
ខ) $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)\leq 3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$

សម្រាយ

បង្ហាញថា
ក) $(a_1+a_2)(b_1+b_2)\leq 2(a_1b_1+a_2b_2)$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&(a_1+a_2)(b_1+b_2)-2(a_1b_1+a_2b_2)\\
&=a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2-2a_1b_1-2a_2b_2\\
&=a_1b_2-a_1b_1+a_2b_1-a_2b_2\\
&=a_1(b_2-b_1)-a_2(b_2-b_1)\\
&=(b_2-b_1)(a_1-a_2)\leq 0
\end{aligned}$$

ព្រោះ $b_1\geq b_2$ និង $a_1\geq a_2$
ដូចនេះ $(a_1+a_2)(b_1+b_2)\leq 2(a_1b_1+a_2b_2)$
ខ) $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)\leq 3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$
យើងមាន $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)-3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$
$=a_1b_1+a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_2+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2+a_3b_3-3a_1b_1-3a_2b_2-3a_3b_3$
$=a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2-2a_1b_1-2a_2b_2-2a_3b_3$
$=(a_1b_2-a_1b_1+a_2b_1-a_2b_2)+(a_2b_3-a_2b_2+a_3b_2-a_3b_3)+(a_1b_3-a_1b_1+a_3b_1-a_3b_3)$
$=(b_2-b_1)(a_1-a_2)+(b_3-b_2)(a_2-a_3)+(b_3-b_1)(a_1-a_3)\leq 0$
ព្រោះ $a_1\geq a_2\geq a_3$ និង $b_1\geq b_2\geq b_3$
ដូចនេះ $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)\leq 3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$

លំហាត់ ៦៨
ក) បង្ហាញថា បើ $g(x)$ ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែល និង ជាអនុគមន៍សេស នោះ $g'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ ។
ខ) បង្ហាញថា បើ $g'(x)$ ជាអនុគមន៍សេស នោះ $g(x)$ ជាអនុគមន៍គូ ។

សម្រាយ
ក) បង្ហាញថា $g'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ
របៀបទី ១
តាមនិយមន័យ $g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$
នោះ $g'(-x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(-x+h)-g(-x)}{h}$
ដោយ g ជាអនុគមន៍សេស នោះ $g(-x)=-g(x)$

យើងបាន

$$\begin{aligned} g'(-x) &= \lim_{h\to 0}\frac{-g(x-h)+g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= g'(x) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $g'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ
របៀបទី ២
ដោយ g ជាអនុគមន៍សេស នោះ $g(-x)=-g(x)$
$\Rightarrow [g(-x)]'=-g'(x)\Rightarrow -g'(-x)=-g'(x)$
យើងបាន $g'(-x)=g'(x)$
ដូចនេះ $g'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ
ខ) បង្ហាញថា $g(x)$ ជាអនុគមន៍គូ
យក $h(x)=\int_0^x g'(t)dt=g(x)-g(0)$
តាង $u=-t\Rightarrow du=-dt\Rightarrow dt=-du$
បើ $t=x\Rightarrow u=-x, t=0\Rightarrow u=0$
យើងបាន $h(x)=\int_0^{-x} g'(-u)d(-u)=\int_0^{-x} g'(u)du=\int_0^{-x} g'(t)dt$
ព្រោះ $g'(x)$ ជាអនុគមន៍សេស
នោះ $h(x)=h(-x)\Rightarrow g(x)-g(0)=g(-x)-g(0)$
$\Rightarrow g(x)=g(-x)$
ដូចនេះ $g(x)$ ជាអនុគមន៍គូ

លំហាត់ ៦៩
គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $GCD(a,b)\times LCM(a,b)=ab$ ។

សម្រាយ

Lemma ចំពោះ x,y ជាចំនួនពិត យើងបាន $min(x,y)+max(x,y)=x+y$ ។
Proof:
បើ $x\geq y$ យើងបាន $min(x,y)=y$ និង $max(x,y)=x$
នោះ $min(x,y)+max(x,y)=x+y$
បើ $x<y$ យើងបាន $min(x,y)=x$ និង $max(x,y)=y$
នោះ $min(x,y)+max(x,y)=x+y$

ដូចនេះ $min(x,y)+max(x,y)=x+y$
ចំពោះ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន គេបាន $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ និង $b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_n^{\beta_n}$ ក្នុងនោះ p_i ជាចំនួនបឋម និង $0\le\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{N}$ ចំពោះ $i=\overline{1,n}$
យើងបាន $GCD(a,b)=p^{min(\alpha_1,\beta_1)}p^{min(\alpha_2,\beta_2)}...p^{min(\alpha_n,\beta_n)}$
និង $LCM(a,b)=p^{max(\alpha_1,\beta_1)}p^{max(\alpha_2,\beta_2)}...p^{max(\alpha_n,\beta_n)}$
យើងបាន

$$\begin{aligned}
&GCD(a,b)\times LCM(a,b)\\
&=p_1^{min(\alpha_1,\beta_1)+max(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{min(\alpha_2,\beta_2)+max(\alpha_2,\beta_2)}...p_n^{min(\alpha_n,\beta_n)+max(\alpha_n,\beta_n)}\\
&=p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_2^{\alpha_2+\beta_2}...p_n^{\alpha_n+\beta_n}\\
&=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}\times p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_n^{\beta_n}\\
&=ab
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $GCD(a,b)\times LCM(a,b)=ab$

លំហាត់ ៧០
បង្ហាញថា $n(n+1)(n+2)$ ចែកដាច់នឹង 6 ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

សម្រាយ
ដោយ $n,n+1$ ជាពីរចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា នោះមួយក្នុងចំណោម $n,n+1$ ត្រូវចែកដាច់នឹង 2 នោះ $n(n+1)(n+2)$ ត្រូវចែកដាច់នឹង 2 (1)
ម៉្យាងទៀត $n,n+1$ និង $n+2$ ជាបីចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា នោះមួយក្នុងចំណោម $n,n+1$ និង $n+2$ ត្រូវចែកដាច់នឹង 3 (2)
តាម (1) និង (2) គេបាន $n(n+1)(n+2)$ ចែកដាច់នឹង 6 ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

លំហាត់ ៧១
គេឲ្យ x,y និង z ជាចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sin x+\sin y+\sin z=0$ និង $\cos x+\cos y+\cos z=0$ ។ បង្ហាញថា
ក) $\cos(x-y)=-\frac{1}{2}$
ខ) $\cos(\theta-x)+\cos(\theta-y)+\cos(\theta-z)=0$ ចំពោះគ្រប់ $\theta\in\mathbb{R}$
គ) $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=\frac{3}{2}$ ។

សម្រាយ
បង្ហាញថា

ក) $\cos(x-y)=-\dfrac{1}{2}$
ដោយ $\sin x+\sin y+\sin z=0$ និង $\cos x+\cos y+\cos z=0$
នោះ $\sin x+\sin y=-\sin z$ និង $\cos x+\cos y=-\cos z$
គេបាន $(\sin x+\sin y)^2+(\cos x+\cos y)^2=\sin^2 z+\cos^2 z$
នោះ $\sin^2 x+2\sin x\sin y+\sin^2 y+\cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y=1$
$\Rightarrow 2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)+2=1$
ដូចនេះ $\cos(x-y)=-\dfrac{1}{2}$
ខ) $\cos(\theta-x)+\cos(\theta-y)+\cos(\theta-z)=0$
យើងមាន

$$\begin{aligned}\cos(\theta-x)&=\cos\theta\cos x+\sin\theta\sin x\\ \cos(\theta-y)&=\cos\theta\cos y+\sin\theta\sin y\\ \cos(\theta-z)&=\cos\theta\cos z+\sin\theta\sin z\end{aligned}$$

បូកអង្គ និង អង្គគេបាន

$$\begin{aligned}&\cos(\theta-x)+\cos(\theta-y)+\cos(\theta-z)\\ &=\cos\theta(\cos x+\cos y+\cos z)+\sin\theta(\sin x+\sin y+\sin z)\\ &=0\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\cos(\theta-x)+\cos(\theta-y)+\cos(\theta-z)=0$
គ) $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=\dfrac{3}{2}$
ដោយ $\cos(\theta-x)+\cos(\theta-y)+\cos(\theta-z)=0$ ចំពោះគ្រប់ $\theta\in\mathbb{R}$
យក $\theta=x+y+z$
នោះ $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=0$
$\Rightarrow \cos x\cos y+\cos y\cos z+\cos z\cos x=\sin x\sin y+\sin y\sin z+\sin z\sin x$
ម៉្យាងទៀត $\sin x+\sin y+\sin z=0$ និង $\cos x+\cos y+\cos z=0$
នោះ $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z+2(\sin x\sin y+\sin y\sin z+\sin z\sin x)=0$
និង $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z+2(\cos x\cos y+\cos y\cos z+\cos z\cos x)=0$
នោះ $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z$
$\Rightarrow \sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=1-\sin^2 x-\sin^2 y-\sin^2 z$
ដូចនេះ $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=\dfrac{3}{2}$

លំហាត់ ៧២
គណនា $S=\dfrac{1}{\cos a\cos 2a}+\dfrac{1}{\cos 2a\cos 3a}+...+\dfrac{1}{\cos(n-1)a\cos na}$ ចំពោះ $n\geq 2$។

សម្រាយ
យើងមាន $\sin a=\sin(2a-a)=\sin 2a\cos a-\sin a\cos 2a$
នោះ

$$\begin{aligned}\frac{\sin a}{\cos a\cos 2a}&=\frac{\sin 2a\cos a-\sin a\cos 2a}{\cos a\cos 2a}\\&=\frac{\sin 2a}{\cos 2a}-\frac{\sin a}{\cos a}\\&=\tan 2a-\tan a\end{aligned}$$

គេបាន $\dfrac{1}{\cos a\cos 2a}=\dfrac{1}{\sin a}(\tan 2a-\tan a)$
ដូចគ្នាដែរ

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\cos 2a\cos 3a}=\frac{1}{\sin a}(\tan 3a-\tan 2a)\\&\ldots\\&\frac{1}{\cos(n-1)a\cos na}=\frac{1}{\sin a}(\tan na-\tan(n-1)a)\end{aligned}$$

បូកអង្គ និង អង្គគេបាន $S=\dfrac{1}{\sin a}(\tan na-\tan a)$
ដូចនេះ $S=\dfrac{1}{\sin a}(\tan na-\tan a)$

លំហាត់ ៧៣
គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ និង ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ
$f(x+y)=f(x)\sqrt{1+[f((y)]^2}+f(y)\sqrt{1+[f(x)]^2}$ និង $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ ។
បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ $\mathbb{R}$ ។

សម្រាយ
យើងមាន $f(x+y)=f(x)\sqrt{1+[f(y)]^2}+f(y)\sqrt{1+[f(x)]^2}$
យក $x=y=0$ គេបាន $f(0)=2f(0)\sqrt{1+[f(0)]^2}$
នោះ $f(0)-2f(0)\sqrt{1+[f(0)]^2}=0$
$\Rightarrow f(0)\left(1-2\sqrt{1+[f(0)]^2}\right)=0$
តែ $\sqrt{1+[f(0)]^2}\geq 1\Rightarrow 1-2\sqrt{1+[f(0)]^2}<0$

គេបាន $f(0)=0$
យើងបាន

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\sqrt{1+[f(h)]^2}+f(h)\sqrt{1+[f(x)]^2}-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\left(\sqrt{1+[f(h)]^2}-1\right)+f(h)\sqrt{1+[f(x)]^2}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\times[f(h)]^2}{h\left(\sqrt{1+[f(h)^2]}+1\right)}+\frac{f(h)\sqrt{1+[f(x)]^2}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\times f(h)\times\frac{f(h)}{h}}{\sqrt{1+[f(h)]^2}+1}+\frac{f(h)}{h}\sqrt{1+[f(x)]^2}\\
&=\sqrt{1+[f(x)]^2}
\end{aligned}$$

ដោយ f មានន័យចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះ $\sqrt{1+[f(x)]^2}$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$
ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែលលើ $\mathbb{R}$

លំហាត់ ៧៤ កំណត់ត្រីធាតុ (x,y,z) ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន បើគេដឹងថា $35x+21y+60z=665$ ។

សម្រាយ

ដោយ $7|35x, 7|21y$ និង $7|665$ នោះ $7|60z\Rightarrow 7|z$ ព្រោះ $GCD(7,60)=1$
តែ

$$\begin{aligned}
z&=\frac{665-35x-21y}{60}\\
&\le\frac{665-35-21}{60}\\
&=\frac{609}{60}\\
&<\frac{660}{60}\\
&=11
\end{aligned}$$

នោះ $z=7$

បើ $z=7 \Rightarrow 35x+21y+60(7)=665$
នោះ $5x+3y+60=95 \Rightarrow 5x=35-3y$
$\Rightarrow x=7-\frac{3}{5}y \Rightarrow y$ ជាពហុគុណនៃ 5
ម្យ៉ាងទៀត $y=\frac{35-5x}{3} \leq \frac{35-5}{3}=10 \Rightarrow y \in \{5,10\}$
ចំពោះ $y=5 \Rightarrow x=4$
ចំពោះ $y=10 \Rightarrow x=1$
ដូចនេះ $(1,10,7)$ និង $(4,5,7)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ

លំហាត់ ៧៥
បើ n មិនមែនជាពហុគុណនៃ 5 បង្ហាញថា n^4-1 ជាពហុគុណនៃ 5 ។

សម្រាយ
យើងមាន

$$\begin{aligned} n^4-1 &= (n^2-1)(n^2+1) \\ &= (n-1)(n+1)(n^2-4+5) \\ &= (n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5(n-1)(n+1) \end{aligned}$$

ដោយ $5(n-1)(n+1)$ ជាពហុគុណនៃ 5 ដើម្បីបង្ហាញថា n^4-1 ជាពហុគុណនៃ 5 យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ ជាពហុគុណនៃ 5
ដោយ n មិនមែនជាពហុគុណនៃ 5 នោះ $n=5k\pm1, 5k\pm2$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$
ចំពោះ $n=5k-1 \Rightarrow n+1=5k$
ចំពោះ $n=5k+1 \Rightarrow n-1=5k$
ចំពោះ $n=5k-2 \Rightarrow n+2=5k$
ចំពោះ $n=5k+2 \Rightarrow n-2=5k$
គ្រប់ករណីទាំងអស់យើងបាន $(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ ជាពហុគុណនៃ 5
ដូចនេះ n^4-1 ជាពហុគុណនៃ 5

លំហាត់ ៧៦
គណនាផលបូក $S=\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\ldots$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\dots\\
&= \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^5}+\dots\right)+2\left(\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{7^6}+\dots\right)\\
&= \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7^2}}+2\times\frac{\frac{1}{7^2}}{1-\frac{1}{7^2}}\\
&= \frac{\frac{1}{7}}{\frac{48}{7^2}}+2\times\frac{\frac{1}{7^2}}{\frac{48}{7^2}}\\
&= \frac{7}{48}+\frac{2}{48}\\
&= \frac{9}{48}\\
&= \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $S=\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\dots=\frac{3}{16}$

លំហាត់ ៧៧
គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍មានតម្លៃពិតដែល $f(x,y)=f(x,z)-2f(y,z)-2z$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y និង z ។ រកតម្លៃនៃ $f(4017,1000)$ ។

សម្រាយ
យើងមាន $f(x,y)=f(x,z)-2f(y,z)-2z$
យក $y=z=x$ យើងបាន $f(x,x)=f(x,x)-2f(x,x)-2x$
នោះ $f(x,x)=-x$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$
ម្យ៉ាងទៀត យក $x=y$ យើងបាន
$f(y,y)=f(y,z)-2f(y,z)-2z$
នោះ $-y=-f(y,z)-2z\Rightarrow f(y,z)=y-2z$
ហេតុនេះ $f(4017,1000)=4017-2\times1000=2017$
ដូចនេះ $f(4017,1000)=2017$

លំហាត់ ៧៨
ចំពោះ $-1<r<1$ តាង $S(r)$ ជាផលបូកតួនៃស៊្វីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $S(r)=12+12r+12r^2+12r^3+\ldots$ ។ តាង $-1<a<1$ បំពេញទំនាក់ទំនង $S(a)\times S(-a)=2016$ ។ គណនា $S(a)+S(-a)$ ។

ចម្លើយ
យើងមាន

$$\begin{aligned} S(r)&=12+12r+12r^2+12r^3+\ldots\\ &=12(1+r+r^2+r^3+\ldots)\\ &=12\times\frac{1}{1-r}\end{aligned}$$

នោះ $S(a)=12\times\dfrac{1}{1-a}$ និង $S(-a)=12\times\dfrac{1}{1+a}$
គេបាន $S(a)\times S(-a)=12^2\times\dfrac{1}{1-a^2}\Rightarrow\dfrac{1}{1-a^2}=\dfrac{S(a)\times S(-a)}{12^2}=\dfrac{2016}{12^2}$
ព្រោះ $S(a)\times S(-a)=2016$
យើងបាន $S(a)+S(-a)=12\left(\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}\right)=\dfrac{24}{1-a^2}=\dfrac{24\times 2016}{12^2}=336$
ដូចនេះ $S(a)+S(-a)=336$

លំហាត់ ៧៩
តាង $P(x)$ ជាពហុធាមិនសូន្យដែល $(x-1)P(x+1)=(x+2)P(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង $P^2(2)=P(3)$ ។ រកតម្លៃលេខនៃ $P(2017)$ ។

ចម្លើយ
រកតម្លៃលេខនៃ $P(2017)$
យើងមាន $(x-1)P(x+1)=(x+2)P(x)$ (1)
ចំពោះ $x=2$ យើងបាន $P(3)=4P(2)$
ដោយ $P(3)=P^2(2)$ នោះ $P^2(2)=4P(2)\Rightarrow P(2)\in\{0,2\}$
បើ $P(2)=0\Rightarrow P(3)=0$
តាម (1) គេបាន $P(2)=P(3)=\ldots=P(deg(P))=\ldots=0$
នេះបញ្ជាក់ថា $P(x)$ ជាពហុធាសូន្យ
ម៉្យាងទៀតតាមសម្មតិកម្ម $P(x)$ មិនមែនជាពហុធាសូន្យ
នោះ $P(2)=2$
តាមបម្រាប់ $(x-1)P(x+1)=(x+2)P(x)$

នោះ $\dfrac{P(x+1)}{P(x)}=\dfrac{x+2}{x-1}$
យើងបាន $\dfrac{P(3)}{P(2)}\times\dfrac{P(4)}{P(3)}\times\dfrac{P(5)}{P(4)}\times\ldots\times\dfrac{P(2017)}{P(2016)}=\dfrac{4}{1}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{6}{3}\times\ldots\times\dfrac{2017}{2015}$
នោះ $\dfrac{P(2017)}{P(2)}=\dfrac{2016\times2017\times2018}{3}$
$\Rightarrow P(2017)=\dfrac{P(2)\times2016\times2017\times2018}{3}$
ដូចនេះ $P(2017)=\dfrac{2\times2016\times2017\times2018}{3}$

លំហាត់ ៨០
រក $GCD(a,b)$ ដែល $a=12345678987654321$ និង $b=12345654321$ ។

សម្រាយ
ពិនិត្យ $11^2=121, 111^2=12321$
យើងបាន $a=12345678987654321=111111111^2$
និង $b=12345654321=111111^2$
នោះ

$$\begin{aligned}GCD(a,b)&=GCD(111111111^2,111111^2)\\&=[GCD(111111111,111111)]^2\end{aligned}$$

ដោយ

$$\begin{aligned}111111111&=111111000+111\\&=111111\times1000+111\end{aligned}$$

នោះ $GCD(111111111,111111)=GCD(111111111,111)=111$
ដូចនេះ $GCD(a,b)=111^2=12321$

លំហាត់ ៨១
តើមានចំនួនគត់ប៉ុន្មានចាប់ពី 123 ដល់ 321 ដែលមានពីរខ្ទង់ជាលេខ 2 យ៉ាងពិតប្រាកដ ។

ចម្លើយ
ចំនួនគត់ចាប់ពី 123 ដល់ 321 ដែលមានលេខពីរខ្ទង់ជាលេខ 2 យ៉ាងប្រាកដ ជាចំនួនដែលមានរាង 2...2 រឺ 22... (... ជាលេខផ្សេងពីលេខ 2)

ដោយ 2...2 មាន 9 ចំនួន និង 22... មាន 9 ចំនួន
ដូចនេះ $N = 9 + 9 = 18$ ចំនួន

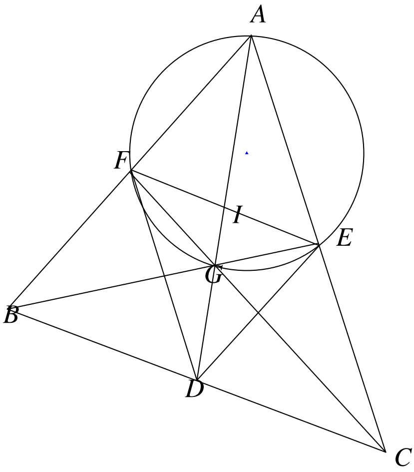
លំហាត់ ៨២
ក) យក $n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា សមីការ $x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1 = 0$ មានរឹសតែមួយគត់ក្នុងសំណុំចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ តាងរឹសនោះដោយ a_n ។
ខ) បង្ហាញថា ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ ទាញថាវាជាស្វ៊ីតរួម ។
គ) ទាញថា $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ គេបាន $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_n^{n+1}}{2}$ ។
ឃ) រក $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n^{n+1}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ ។

សម្រាយ
ក) បង្ហាញថា សមីការ $x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1 = 0$ មានរឹសតែមួយគត់ក្នុងសំណុំចំនួនពិតវិជ្ជមាន
យក $f(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1$
នោះ $f'(x) = x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + ... + 2x \geq 0$ ចំពោះ $x \in \mathbb{R}_+$
នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}_+$
ម៉្យាងទៀត $f(0) = -1$ និង $f(1) \geq 0 \Rightarrow f(0) \times f(1) \leq 0$
នោះ $f(x) = 0$ មានរឹសតែមួយគត់លើ $[0,1]$
ដូចនេះ សមីការ $f(x) = 0$ មានរឹសតែមួយគត់លើ $\mathbb{R}_+$
ខ) បង្ហាញថា ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ
យើងមាន a_n ជារឹសនៃសមីការ $x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - 1 = 0$
នោះ a_{n+1} ជារឹសនៃសមីការ $x^{n+1} + x^n + ... + x^2 + x - 1 = 0$
យើងបាន $a_n^n + a_n^{n-1} + ... + a_n^2 + a_n + 1 = 0$ (1)
និង $a_{n+1}^{n+1} + a_{n+1}^n + ... + a_{n+1}^2 + a_{n+1} + 1 = 0$ (2)
យក (2) ដក (1) យើងបាន $a_{n+1}^{n+1} + (a_{n+1}^n - a_n^n) + ... + (a_{n+1}^2 - a_n^2) + (a_{n+1} - a_n) = 0$
$\Rightarrow (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1}^{n-1} + a_{n+1}^{n-2}a_n + ... + a_n^{n-1}) + ... + (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) + (a_{n+1} - a_n) = -a_{n+1}^{n+1}$
$\Rightarrow (a_{n+1} - a_n)[(a_{n+1}^{n-1} + a_{n+1}^{n-2}a_n + ... + a_n^{n-1}) + ... + (a_{n+1} + a_n) + 1] = -a_{n+1}^{n+1}$
ដោយ a_n និង $a_{n+1} > 0$ យើងបាន $a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$
ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ
ទាញថា (a_n) ជាស្វ៊ីតរួម
យើងមាន (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

ម្យ៉ាងទៀត $a_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម
ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតរួម
គ) ទាញថា $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ គេបាន $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_n^{n+1}}{2}$
យើងមាន $a_n^n + a_n^{n-1} + \ldots + a_n^2 + a_n - 1 = 0$
រឺ $a_n + a_n^2 + \ldots + a_n^n - 1 = 0$
$\Rightarrow \dfrac{a_n(a_n^n - 1)}{a_n - 1} = 1 \Rightarrow a_n^{n+1} - a_n = a_n - 1$
ដូចនេះ $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_n^{n+1}}{2}$
ឃ) រក $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{n+1}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$
ដោយ $n \to +\infty$ និង $0 < a_n < 1$
ហេតុនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{n+1} = 0$
ទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$
យើងមាន $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_n^{n+1}}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{a_n^{n+1}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$
ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$

លំហាត់ ៨៣
គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណដែលមានក្រឡាផ្ទៃស្មើនឹង 5 និង $BC = 10$ ។ តាង E និង F ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង AC និង AB រៀងគ្នា ហើយតាង BE និង CF កាត់គ្នាត្រង់ G ។ ឧបមាថា ចតុកោណ $AEGF$ អាចចារឹកក្នុងរង្វង់ រកតម្លៃនៃ $AB^2 + AC^2$ ។

សម្រាយ



យើងមាន E និង F ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AC]$ និង $[AB]$
នោះ $[BE]$ និង $[CF]$ ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ ABC
ដោយ G ជាចំណុចប្រសព្វនៃ $[BE]$ និង $[CF]$
$\Rightarrow G$ ជាទីប្រជុំទំងន់នៃត្រីកោណ ABC
យក $[AD]$ ជាមេដ្យានទី ៣ នៃត្រីកោណនេះ គេបាន D ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$
នោះ $[DE]$ ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ $\Rightarrow [DE]//[AF]$
ដូចគ្នាដែរ $[DF]//[AE]$
គេបាន $AEDF$ ជាប្រលេឡូក្រាម
តាង I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[EF]$
នោះ I ក៏ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AD]$ ដែរ
គេបាន $AI = ID = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{m_a}{2}$
ហើយ $AG = \dfrac{2m_a}{3} \Rightarrow IG = AG - AI = \dfrac{2m_a}{3} - \dfrac{m_a}{2} = \dfrac{m_a}{6}$
ពិនិត្យត្រីកោណ AIF និង GIE
មាន $\angle AIF = \angle GIE$ (មុំទល់កំពូល)
$\angle FAI = \angle IEG$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)
គេបាន $\triangle AIF \sim \triangle EIG$
វិបាក $\dfrac{AI}{IE} = \dfrac{AF}{EG} = \dfrac{IF}{IG}$
តាម $\dfrac{AI}{IE} = \dfrac{IF}{IG} \Rightarrow AI \times IG = IE \times IF$

ដោយ $IE = IF = \frac{EF}{2} = \frac{\frac{BC}{2}}{2} = \frac{BC}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$
យើងបាន $\left(\frac{m_a}{2}\right)\left(\frac{m_a}{6}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$
$\Rightarrow m_a^2 = 75$
ម្យ៉ាងទៀត តាមរូបមន្តមេដ្យាន $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{b^2+c^2}{2} = m_a^2 + \frac{a^2}{4}$
$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = 2\times 75 + \frac{10^2}{2} = 150 + 50 = 200$
ដូចនេះ $AB^2 + AC^2 = 200$

លំហាត់ ៨៤
គណនា $A = \sqrt{C(8,2)+C(9,2)+C(15,2)+C(16,2)}$ ។

ចម្លើយ
យើងមាន

$$\begin{aligned} C(8,2)+C(9,2) &= \frac{8!}{6!2!} + \frac{9!}{2!7!} \\ &= \frac{8\times 7}{2} + \frac{9\times 8}{2} \\ &= 4\times 16 = 4\times(15+1) = 4\times 15 + 4 \end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned} C(15,2)+C(16,2) &= \frac{15!}{13!2!} + \frac{16!}{14!2!} \\ &= \frac{15\times 14}{2} + \frac{16\times 15}{2} \\ &= 15(7+8) = 15^2 \end{aligned}$$

យើងបាន $A = \sqrt{15^2 + 4\times 15 + 4} = \sqrt{(15+2)^2} = 17$

លំហាត់ ៨៥
គេកំណត់អនុគមន៍ f លើសំណុំនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានតាមទំនាក់ទំនងកំណើនដោយ
$f(1) = 2, f(n) = f(n-1)+2$ បើ n គូ និង
$f(n) = f(n-2)+2$ បើ n សេស ហើយធំជាង 1 ។ គណនា $f(2017)$ ។

ចម្លើយ
តាមបម្រាប់យើងបាន

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1)+2 = 2+2 = 4 \\ f(3) &= f(1)+2 = 2+2 = 4 \\ f(4) &= f(3)+2 = 4+2 = 6 \\ f(5) &= f(3)+2 = 4+2 = 6 \\ f(6) &= f(5)+2 = 6+2 = 8 \\ f(7) &= f(5)+2 = 6+2 = 8 \end{aligned}$$

ឧបមាថា $f(n) = n+2$ បើ n គូ និង $f(n+1) = n+1$ បើ n សេស
យើងនឹងបង្ហាញថា $f(n+1)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់គំរូខាងលើនេះ
បើ $n+1$ គូ នោះ $f(n+1) = f(n)+2 = (n+1)+2$ ពិត
បើ $n+1$ សេស នោះ $f(n+1) = f(n-1)+2 = n-1+1+2 = (n+1)+1$ ពិត
ហេតុនេះ $f(2017) = 2017+1 = 2018$

លំហាត់ ៨៦
គាង $f(n) = 1\times 3\times 5\times \ldots\times(2n-1)$ ។ រកសំណល់នៃវិធីចែក $f(1)+f(2)+\ldots+f(2016)$ នឹង 100 ។

ចម្លើយ
ពិនិត្យ

$$\begin{aligned} &f(1) = 1 \equiv 1(\mod 4) \\ &f(2) = 1\times 3 \equiv -1(\mod 4) \\ &f(3) = 1\times 3\times 5 \equiv -1(\mod 4) \\ &f(4) = 1\times 3\times 5\times 7 \equiv 1(\mod 4) \\ &f(5) = 1\times 3\times 5\times 7\times 9 \equiv 1(\mod 4) \\ &; f(6) \equiv -1(\mod 4); f(7) \equiv -1(\mod 4); f(8) \equiv 1(\mod 4) \end{aligned}$$

នោះ $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2016) \equiv 504(1-1+1-1) \equiv 0(\mod 4)$
ហេតុនេះ សំណល់នៃប្រមាណវិធីចែកខាងលើជាសំណល់នៃប្រមាណវិធីចែកនៃ $f(1)+f(2)+\ldots+f(2016)$ នឹង 25
ដោយ $f(n)$ ចែកដាច់នឹង 25 ចំពោះគ្រប់ $n\geq 8$
នោះ សំណល់នៃប្រមាណវិធីចែកដូចគ្នានឹងសំណល់ពេល $f(1)+f(2)+\ldots+f(7)$ ចែកនឹង

25
ដោយ $f(1)+f(2)+\ldots+f(7)\equiv 1+3+15+5+20+20+10\equiv 24(\mod 25)$
ដូចនេះ សំណល់នៃប្រមាណវិធីចែក គឺ 24

លំហាត់ ៨៧
គេឲ្យស្វីត a_n កំណត់ដូចខាងក្រោម
$a_0=0, a_1=1$ និង $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ ។
រកតម្លៃនៃ a_{2017} ។

ចម្លើយ
យើងមាន $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$
នោះ $a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}+2$
យក $b_n=a_n-a_{n-1}\Rightarrow b_n=b_{n-1}+2$
គេបាន (b_n) ជាស្វីតនព្វន្តមាន $b_1=a_1-a_0=1-0=1$ និង $d=2$
នោះ $b_n=b_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$
យើងបាន $a_n-a_{n-1}=2n-1\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$
$\Rightarrow a_n-a_0=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=2\times\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]-n$
$\Rightarrow a_n=n(n+1)-n=n^2$
$\Rightarrow a_n=n^2$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$
ហេតុនេះ $a_{2017}=2017^2$

លំហាត់ ៨៨
រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តូចបំផុតដែល $0<\sqrt[4]{n}-[\sqrt[4]{n}]<\frac{1}{2017}$ ។

សម្រាយ
បើ $n=k^4\Rightarrow \sqrt[4]{n}-[\sqrt[4]{n}]=0$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់
ចំពោះ $n\in\mathbb{N}, \exists k\in\mathbb{N}$ ដែល $k^4<n<(k+1)^4$ នោះ $[\sqrt[4]{n}]=k$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
&\sqrt[4]{n}-[\sqrt[4]{n}] > \sqrt[4]{k^4+1}-k \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{(k^4+1)^3}+k\sqrt[4]{(k^4+1)^2}+k^2\sqrt[4]{(k^4+1)}+k^3} \\
&> \frac{1}{\sqrt[4]{(k^4+1)^3}+\sqrt[4]{(k^4+1)^3}+\sqrt[4]{(k^4+1)^3}+\sqrt[4]{(k^4+1)^3}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt[4]{(k^4+1)^3}}
\end{aligned}$$

ដោយ $\sqrt[4]{n}-[\sqrt[4]{n}] < \frac{1}{2017}$ នោះ

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\sqrt[4]{(k^4+1)^3}} < \frac{1}{2017} \\
&\Rightarrow (k^4+1)^3 > \left(\frac{2017}{4}\right)^4 \\
&\Rightarrow k^4 > \sqrt[3]{\left(\frac{2017}{4}\right)^4}-1 > \sqrt[3]{\left(\frac{2017}{4}\right)^4} \\
&\Rightarrow k > \sqrt[3]{\frac{2017}{4}} = \sqrt[3]{504+\frac{1}{7}} \\
&\Rightarrow k \geq \sqrt[3]{512} = 8 \qquad \text{ព្រោះ} k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

ហេតុនេះ $8^4 < n < (8+1)^4$
ដូចនេះ $min(n) = 8^4+1 = 4097$

លំហាត់ ៨៩

តាង a,b,c និង d ជា 4 ចំនួនពិតដែល $\begin{cases} a+b+c+d=20 \\ ab+bc+cd+da=16 \end{cases}$ ។ រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $A = abc+bcd+cda+dab$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $(x+y)^2 \geq 4xy$ ចំពោះគ្រប់ $x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$

នោះ

$$\begin{aligned} A &= abc+bcd+cda+dab = ac(b+d)+bd(c+a) \\ &\le \frac{(a+c)^2(b+d)}{4}+\frac{(b+d)^2(c+a)}{4} \\ &= \frac{1}{4}(a+c)(b+d)(a+c+b+d) \\ &= \frac{1}{4}(ab+bc+cd+da)(a+b+c+d) \end{aligned}$$

ដោយ $\begin{cases} a+b+c+d=20 \\ ab+bc+cd+da=16 \end{cases}$

យើងបាន $A \le \frac{1}{4}(16)(20)=80$

ដូចនេះ $maxA = 80$

លំហាត់ ៩០

តាង a,b,c ជាឫសផ្សេងគ្នានៃពហុធា $P(x)=x^3-10x^2+x-2017$ ។

ពហុធាដឺក្រេទីបី $Q(x)$ មានមេគុណនៃ x^3 ស្មើនឹង 1 ហើយមានឫសបីផ្សេងគ្នា គឺ $bc-a^2, ca-b^2, ab-c^2$ ។ រកផលបូកលេខមេគុណនៃ $Q(x)$ ។

ចម្លើយ

ដោយ a,b,c ជាឫសបីផ្សេងគ្នានៃពហុធា $P(x)=x^3-10x^2+x-2017$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀែតយើងបាន $\begin{cases} a+b+c=10 \\ ab+bc+ca=1 \\ abc=2017 \end{cases}$

ដោយ $Q(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី ៣ មានមេគុណនៃ x^3 ស្មើនឹង 1 ហើយមានឫស $bc-a^2, ca-b^2, ab-c^2$

នោះ $Q(x)=(x-bc+a^2)(x-ca+b^2)(x-ab+c^2)$

នោះ ផលបូកលេខមេគុណនៃ $Q(x)$ កំណត់ដោយ

$$\begin{aligned} S = Q(1) &= (1-bc+a^2)(1-ca+b^2)(1-ab+c^2) \\ &= (ab+bc+ca-bc+a^2)(ab+bc+ca-ca+b^2)(ab+bc+ca-ab+c^2) \\ &= (ab+ac+a^2)(ab+bc+b^2)(bc+ca+a^2) \\ &= abc(a+b+c)^3 = 2017\times 10^3 = 2017000 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $S = 2017000$

សម្គាល់

ក) បើ $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ មានរឹស x_1,x_2 និង x_3 យើងបាន

$$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

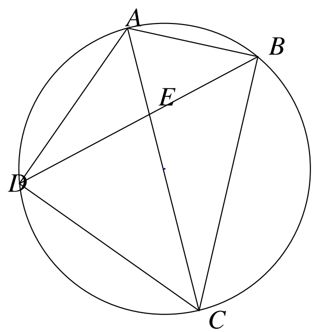
ខ) ផលបូកលេខមេគុណនៃ $P(x)$ គឺ

$$S=a+b+c+d=P(1)=a(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$$

លំហាត់ ៩១

ក្នុងចតុកោណ $ABCD$ មាន $AB=7,BC=24,CD=15,DA=20$ និង $AC=25$ ។ តាងអង្កត់ទ្រូង AC និង BD កាត់គ្នាត្រង់ E ។ រកប្រវែង EC ។

សម្រាយ



របៀបទី ១

យើងមាន $CD^2+DA^2=15^2+20^2=625=25^2=AC^2$

នោះ $\triangle ACD$ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D

ដូចគ្នាដែរ $AB^2+BC^2=7^2+24^2=625=AC^2$

នោះ $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B

យើងបាន $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ $\Rightarrow \triangle AEB\sim\triangle DEC$

វិបាក $\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{7}{15}$

ចំពោះ $\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{7}{15}\Rightarrow DE=\dfrac{15}{7}AE$

ចំពោះ $\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{7}{15}\Rightarrow BE=\dfrac{7}{15}CE$

យើងបាន

$$
\begin{aligned}
BD &= BE + DE \\
&= \frac{15}{7}AE + \frac{7}{15}CE \\
&= \frac{15}{7}(AC - CE) + \frac{7}{15}CE \\
&= \frac{15}{7}(25 - CE) + \frac{7}{15}CE \\
&= \frac{375}{7} - \frac{176}{105}CE
\end{aligned}
$$

រកប្រវែង BD
ក្នុងត្រីកោណ ABD មាន $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos A$
ដោយ $\cos A = \cos(\pi - C) = -\cos C = -\frac{15^2 + 24^2 - BD^2}{2 \times 15 \times 24}$
នោះ

$$
\begin{aligned}
BD^2 &= 7^2 + 20^2 + 2 \times 7 \times 20 \times \frac{15^2 + 24^2 - BD^2}{2 \times 15 \times 24} \\
&= 449 + 7 \times \frac{801 - BD^2}{18} \\
&\Rightarrow BD^2 - \frac{5607 - 7BD^2}{18} = 449 \\
&\Rightarrow 25BD^2 = 13689 \\
&\Rightarrow BD = \sqrt{\frac{13689}{25}} = \frac{117}{5}
\end{aligned}
$$

យើងបាន $\frac{375}{7} - \frac{176}{105}CE = \frac{117}{5} \Rightarrow \frac{176}{105}CE = \frac{375}{7} - \frac{117}{5} = \frac{1056}{35}$
នោះ $CE = \frac{1056}{35} \times \frac{105}{176} = 18$
ដូចនេះ $CE = 18$
របៀបទី ២
យើងមាន $25^2 = 20^2 + 15^2$ និង $25^2 = 7^2 + 24^2$
នោះ $AC^2 = AD^2 + DC^2 = AB^2 + BC^2$
គេបាន ADC និង ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D និង B រៀងគ្នា
នោះ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់
យើងបាន $\triangle ABE \sim \triangle DCE$

វិបាក $\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{AE}{DE}\Rightarrow AE=\dfrac{7}{15}DE$ (1)
ហើយ $\triangle AED\sim\triangle BEC$
វិបាក $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{DE}{EC}\Rightarrow DE=\dfrac{20}{24}EC$ (2)
គុណ (1) និង (2) យើងបាន $AE=\dfrac{7}{15}\times\dfrac{20}{24}EC=\dfrac{7}{18}EC$
ដោយ $AE=AC-EC=25-EC$
នោះ $25-EC=\dfrac{7}{18}EC\Rightarrow\dfrac{25}{18}EC=25\Rightarrow EC=18$
ដូចនេះ $EC=18$

លំហាត់ ៩២
គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=1$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+na_n}$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។ កំណត់ a_n ។

ចម្លើយ
យើងមាន $a_1=1$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+na_n}$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$
ដោយ $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+na_n}$ នោះ $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1+na_n}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}+n$
គេបាន

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_2}&=\frac{1}{a_1}+1\\ \frac{1}{a_3}&=\frac{1}{a_2}+1\\ &\dots\\ \frac{1}{a_n}&=\frac{1}{a_{n-1}}+1\end{aligned}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+1+2+\dots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}+1$
នោះ $a_n=\dfrac{1}{\frac{n(n-1)}{2}+1}=\dfrac{2}{n^2-n+2}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

លំហាត់ ៩៣
បង្ហាញថា $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(2n)!}{k}$ ជាចំនួនគត់ និង $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(2n)!}{k}\equiv 0(\mod 2n+1)$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $(2n)! = 2n \times (2n-1) \times ... \times 2 \times 1$
នោះ $k|(2n)!$ ចំពោះគ្រប់ $k = \overline{1,2n}$
នោះ $\frac{(2n)!}{k}$ ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ $k = \overline{1,2n}$
ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$ ជាចំនួនគត់
បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n)!}{k} \equiv 0 (mod 2n+1)$
ពិនិត្យ

$$\begin{aligned}\frac{(2n)!}{k} + \frac{(2n)!}{2n-(k-1)} &= (2n)!\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{2n-(k-1)}\right] \\ &= (2n)! \times \frac{2n-(k-1)+k}{k[2n-(k-1)]} \\ &= (2n)! \times \frac{2n+1}{k[2n-(k-1)]} \\ &= (2n+1) \times \frac{(2n)!}{k[2n-(k-1)]} \\ &= (2n+1) \times \frac{k[2n-(k-1)]m}{k[2n-(k-1)} \\ &= (2n+1)m \qquad \text{ដែល} m \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

នោះ $\frac{(2n)!}{k} + \frac{(2n)!}{2n-(k-1)}$ ចែកដាច់នឹង $2n+1$
គេបាន

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k} + \frac{(2n)!}{2n-(k-1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{2n-(k-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n)!}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n)!}{k} \text{ចែកដាច់នឹង} 2n+1\end{aligned}$$

ហេតុនេះ $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n)!}{k} \equiv 0 (\mod 2n+1)$
សម្គាល់
ផលគុណនៃ m ចំនួនគត់តគ្នាចែកដាច់នឹង m ។

លំហាត់ ៩៤
បង្ហាញថា $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^0)^2=C_{2n}^n$ ។

សម្រាយ
ឧបមាថាក្នុងថង់មួយមានឃ្លីចំនួន $2n$ ក្នុងនោះមានឃ្លីសចំនួន n និង ឃ្លីខ្មៅចំនួន n
បើគេជ្រើសរើសយក n ឃ្លីចេញពីក្នុងថង់ នោះចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសរើសគឺ C_{2n}^n (1)
មួយវិញទៀត ការជ្រើសរើសនេះអាចចែកចេញជាករណីដូចខាងក្រោម
ស 0 និង ខ្មៅ n មាន $C_n^0\times C_n^n=C_n^0\times C_n^0=(C_n^0)^2$
ស 1 និង ខ្មៅ $n-1$ មាន $C_n^1\times C_n^{n-1}=C_n^1\times C_n^1=(C_n^1)^2$
...
ស n និង ខ្មៅ 0 មាន $C_n^n\times C_n^0=C_n^n\times C_n^n=(C_n^n)^2$
យើងបានចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសរើសគឺ $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2$ (2)
តាម (1) និង (2) យើងបាន $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$

លំហាត់ ៩៥
គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិត និង λ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលពហុធា $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ មានរឹស x_1,x_2 និង x_3 ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ
ក) $x_2-x_1=\lambda$
ខ) $x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ ។
រកតម្លៃអតិបរមានៃ $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ ។

សម្រាយ
តាង $S=\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$
យើងមាន $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$
នោះ

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{1}{3}a\right)&=-\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{ab}{3}+c\\&=\frac{2a^3+27c-9ab}{27}\end{aligned}$$

ដោយ x_1,x_2 និង x_3 ជារឹសនៃ $f(x)\Rightarrow f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

នោះ

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{3}a\right) &= \left(-\frac{1}{3}a-x_1\right)\left(-\frac{1}{3}a-x_2\right)\left(-\frac{1}{3}a-x_3\right)\\ &= -\left(\frac{1}{3}a+x_1\right)\left(\frac{1}{3}a+x_2\right)\left(\frac{1}{3}a+x_3\right) \end{aligned}$$

នោះ $-\left(\frac{1}{3}a+x_1\right)\left(\frac{1}{3}a+x_2\right)\left(\frac{1}{3}a+x_3\right) = \frac{2a^3+27c-9ab}{27}$
គេបាន

$$\begin{aligned} \frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3} &= -\frac{27\left(\frac{1}{3}a+x_1\right)\left(\frac{1}{3}a+x_2\right)\left(\frac{1}{3}a+x_3\right)}{\lambda^3}\\ \Rightarrow S &= -\frac{27\left(\frac{1}{3}a+x_1\right)\left(\frac{1}{3}a+x_2\right)\left(\frac{1}{3}a+x_3\right)}{\lambda^3} \end{aligned}$$

តាង $u_i = \frac{1}{3}+x_i$ នោះ u_i នៅតែផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ក និង ខ ដដែល
ដោយ $u_2-u_1=\lambda>0 \Rightarrow u_2>u_1$
និង

$$\begin{aligned} u_1+u_2+u_3 &= \frac{a}{3}+x_1+\frac{a}{3}+x_2+\frac{a}{3}+x_3\\ &= a+x_1+x_2+x_3 = a-a=0\\ \Rightarrow u_1+u_2 &= -u_3 \end{aligned}$$

ម៉្យាងទៀត $u_3 > \frac{1}{2}(u_1+u_2) \Rightarrow u_3 > -\frac{1}{2}u_3 \Rightarrow u_3>0 \Rightarrow u_1+u_2<0$
នោះយ៉ាងហោចណាស់មួយក្នុងចំណោម u_1 និង u_2 ជាចំនួនអវិជ្ជមាន
គេបាន $u_1<0<u_2$ រឺ $u_1<u_2<0$
យើងបាន

$$\begin{aligned} S &= -\frac{27u_1u_2u_3}{\lambda^3}\\ &= \frac{27u_1u_2(u_1+u_2)}{(u_2-u_1)^3}\\ &= 27\left(-\frac{u_1}{u_2-u_1}\right)\left(\frac{u_2}{u_2-u_1}\right)\left(-\frac{u_1+u_2}{u_2-u_1}\right) \end{aligned}$$

បើ $u_1<u_2<0$ គេបាន S ជាចំនួនអវិជ្ជមាន

បើ $u_1<0<u_2$ យក $v_1=-\frac{u_1}{u_2-u_1}, v_2=\frac{u_2}{u_2-u_1}\Rightarrow v_1-v_2=-\frac{u_2+u_1}{u_2-u_1}$
និង $v_1+v_2=1$ យើងបាន

$$\begin{aligned}S&=27v_1v_2(v_1-v_2)=27v_2(1-v_2)(1-2v_2)\\&=27(v_2-v_2^2)(1-2v_2)=27\sqrt{(v_2-v_2^2)(v_2-v_2^2)(1-2v_2)^2}\\&=27\sqrt{(v_2-v_2^2)(v_2-v_2^2)(1-4v_2+4v_2^2)}\\&=27\sqrt{\frac{1}{2}(v_2-v_2^2)(v_2-v_2^2)\left(\frac{1}{2}-2v_2+2v_2^2\right)}\\&\leq 27\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{v_2-v_2^2+v_2-v_2^2+\frac{1}{2}-2v_2+2v_2^2}{3}\right)^3}\\&=27\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $max(S)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

លំហាត់ ៩៦
គេឲ្យ a,b,c,x,y និង z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $cy+bz=a, az+cx=b$ និង $bx+ay=c$ ។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$ ។

ចម្លើយ
តាមបម្រាប់ $cy+bz=a, az+cx=b$ និង $bx+ay=c$
យើងបាន

$$\begin{aligned}b(az+cx-b)+c(bx+ay-c)-a(cy+bz-a)&=0\\ \Rightarrow 2bcx+a^2-b^2-c^2&=0\\ \Rightarrow x&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\end{aligned}$$

ដូចគ្នាដែរយើងបាន $y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ និង $z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
ដោយ a,b,c,x,y និង z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដាច់ខាត

នោះ $a^2+b^2>c^2, b^2+c^2>a^2$ និង $c^2+a^2>b^2$
យើងបាន $a+b>c, b+c>a$ និង $c+a>b$
នេះមានន័យថាយើងអាចរកបានត្រីកោណមុំស្រួចដែលមានរង្វាស់ជ្រុង a,b និង c ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$\cos A = x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos B = y = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$\cos C = z = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

គេបាន $f(x,y,z) = \dfrac{\cos^2 A}{\cos A+1} + \dfrac{\cos^2 B}{\cos B+1} + \dfrac{\cos^2 C}{\cos C+1}$
យក $u=\cot A, v=\cot B$ និង $w=\cot C$ នោះ $u,v,w>0$
គេបាន $uv+vw+wu=1$
នោះ $u^2+1=u^2+uv+vw+wu=(u+v)(u+w)$
ដូចគ្នាដែរ $v^2+1=(u+v)(v+w)$ និង $w^2+1=(u+w)(v+w)$
ម្យ៉ាងទៀត $\cos^2 A = \dfrac{1}{1+\tan^2 A} = \dfrac{\frac{1}{\tan^2 A}}{\frac{1}{\tan^2 A}+1} = \dfrac{u^2}{u^2+1}$
ដូចគ្នាដែរ $\cos^2 B = \dfrac{v^2}{v^2+1}$ និង $\cos^2 C = \dfrac{w^2}{w^2+1}$
ពិនិត្យ

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2 A}{\cos A+1} &= \frac{\frac{u^2}{u^2+1}}{\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}+1}\\ &= \frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}(\sqrt{u^2+1}+u)}\\ &= \frac{u^2(\sqrt{u^2+1}-u)}{\sqrt{u^2+1}}\\ &= u^2\left(1-\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right)\\ &= u^2-\frac{u^3}{\sqrt{(u+v)(u+w)}}\\ &\geq u^2-\frac{u^3}{2}\left(\frac{1}{u+v}+\frac{1}{u+w}\right)(1)\end{aligned}$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\dfrac{\cos^2 B}{1+\cos B} \geq v^2 - \dfrac{v^3}{2}\left(\dfrac{1}{u+v}+\dfrac{1}{v+w}\right)$ (2)
និង $\dfrac{\cos^2 C}{1+\cos C} \geq w^2 - \dfrac{w^3}{2}\left(\dfrac{1}{u+w}+\dfrac{1}{v+w}\right)$ (3)
បូក (1), (2) និង (3) យើងបាន

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &\geq u^2+v^2+w^2-\frac{1}{2}\left(\frac{u^3+v^3}{u+v}+\frac{v^3+w^3}{v+w}+\frac{w^3+u^3}{w+u}\right) \\ &= \frac{1}{2}(uv+vw+wu) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

សមភាពកើតឡើងពេល $u=v=w$ សមមូលនឹង $a=b=c, x=y=z=\dfrac{1}{2}$
ដូចនេះ $min[f(x,y,z)] = \dfrac{1}{2}$

លំហាត់ ៩៧
សរសេរផលបូក $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k^3+9k^2+26k+24}C_n^k$ ជារាង $\dfrac{p(n)}{q(n)}$ ដែល p និង q ជាពហុធា ដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។

សម្រាយ

យើងមាន

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k^3+9k^2+26k+24}C_n^k &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+2)(k+3)(k+4)}C_n^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{k+1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}C_{n+4}^{k+4} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\sum_{k=4}^{n+4}(-1)^k(k-3)C_{n+4}^k \end{aligned}$$

ដោយ

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+4}(-1)^k(k-3)C_{n+4}^k &= \sum_{k=0}^{n+4}(-1)^k kC_{n+4}^k - 3\sum_{k=0}^{n+4}(-1)^k C_{n+4}^k\\ &= \sum_{k=1}^{n+4}(-1)^k kC_{n+4}^k - 3(1-1)^{n+4}\\ &= (n+4)\sum_{k=1}^{n+4}(-1)^k C_{n+3}^{k-1}\\ &= (n+4)(1-1)^{n+3} = 0\end{aligned}$$

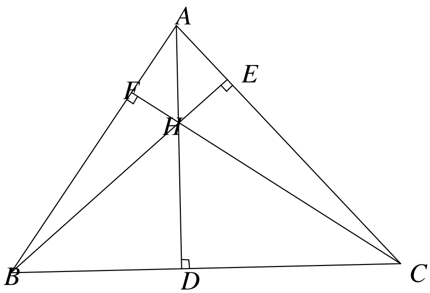
នោះ

$$\begin{aligned}&\sum_{k=4}^{n+4}(-1)^k(k-3)C_{n+4}^k\\ &= -\sum_{k=0}^{3}(-1)^k(k-3)C_{n+4}^k\\ &= 3C_{n+4}^0 - 2C_{n+4}^1 + C_{n+4}^2\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k^3+9k^2+26k+24}C_n^k = \frac{1}{2(n+3)(n+4)}$

លំហាត់ ៩៨
ត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង a,b,c ហើយ h_a,h_b និង h_c ជារង្វាស់កម្ពស់គូស ចេញពីកំពូល A,B និង C រៀងគ្នា ។ យក d_a,d_b និង d_c ជាចម្ងាយពីអរតូសង់ទៅកាន់ កំពូល A,B និង C រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $h_ad_a+h_bd_b+h_cd_c=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ ។

ចម្លើយ



យក D,E,F ជាចំណោលកែងនៃ A,B,C លើជ្រុង $[BC],[CA],[AB]$ រៀងគ្នា
ហើយ H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណនេះ
យើងបាន $\triangle ACD \sim \triangle AHE$
វិបាក $\dfrac{AC}{AH} = \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{CD}{HE}$
$\Rightarrow AD \times AH = AE \times AC = b \times AE$
$\Rightarrow h_a d_a = b \times AE$
ដូចគ្នាដែរ $\triangle ABD \sim \triangle AHF$
វិបាក $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{AD}{AF} = \dfrac{BD}{HF}$
$\Rightarrow AD \times AH = AF \times AB = c \times AF$
$\Rightarrow h_a d_a = c \times AF \qquad (2)$
បូក (1) និង (2) គេបាន $h_a d_a = \dfrac{AE \times b + AF \times c}{2}$
ស្រាយដូចគ្នាគេបាន $h_b d_b = \dfrac{BF \times c + BD \times a}{2}$ និង $h_c d_c = \dfrac{CD \times a + CE \times b}{2}$
យើងបាន

$$
\begin{aligned}
h_a d_a + h_b d_b + h_c d_c = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}(AE \times b + AF \times c + BF \times c + BD \times a + CD \times a + CE \times b) \\
&= \frac{1}{2}[(BD+CD)a + (CE+AE)b + (AF+BF)c] \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2}{2}
\end{aligned}
$$

លំហាត់ ៩៩
គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c \geq abc$ ។
បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2 \geq abc$ ។

សម្រាយ

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើការស្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត
ឧបមាថា $a^2+b^2+c^2 < abc$
នោះ $a^2 < abc$ ដោយ $a,b,c > 0 \Rightarrow a < bc$
ដូចគ្នាដែរ $b < ca$ និង $c < ab$
យើងបាន $a+b+c < ab+bc+ca$ ផ្ទុយពីការពិត
ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2 \geq abc$

លំហាត់ ១០០
កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a,b និង c ដើម្បីឲ្យសមីការ
$x^2-2ax+b=0$
$x^2-2bx+c=0$
$x^2-2cx+a=0$ មានរឹសជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

សម្រាយ

សមីការ
$x^2-2ax+b=0$
$x^2-2bx+c=0$
$x^2-2cx+a=0$ មានឌីសគ្រីមីណង់ a^2-b, b^2-c និង c^2-a រៀងគ្នា
ដោយសមីការទាំងបីមានរឹសជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ a^2-b, b^2-c និង c^2-a សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ
គេបាន $a^2-b \leq (a-1)^2$ នោះ $b \geq 2a-1 \qquad (1)$
ស្រាយដូចគ្នាគេបាន $c \geq 2b-1 \qquad (2)$
និង $a \geq 2c-1 \qquad (3)$
តាម (1), (2) និង (3) យើងបាន $a \geq 8a-7 \Rightarrow a \leq 1$
ដូចនេះ $(a,b,c) = (1,1,1)$

លំហាត់ ១០១
គេឲ្យស្វ៊ីត $Fibonacci(f_n)$ កំណត់ដោយ $f_0 = 0, f_1 = 1$ និង $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។ បង្ហាញថា

1. $f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} + 1$
2. $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$
3. $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$
4. $f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$ (សមភាព Cassini)
5. $x^n = f_n x + f_{n-1}$ ចំពោះ x ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^2 = x + 1$
6. $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ (រូបមន្ត Binet)
7. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k f_k = f_{3n}$
8. $f_{s+t} = f_{s-1} f_t + f_s f_{t+1}$ ចំពោះ $s \geq 1$ និង $t \geq 0$ ។

សម្រាយ

1. $f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} + 1$
   យើងមាន $f_0 = 0, f_1 = 1$ និង $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$
   នោះ $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$ និង $f_2 = f_0 + f_1 = 0 + 1 = 1$
   គេបាន

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3 - f_2 \\ f_2 &= f_4 - f_3 \\ f_3 &= f_5 - f_4 \\ &... \\ f_n &= f_{n+2} - f_{n+1} \end{aligned}$$

   បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1$

2. $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$
   យើងមាន $f_0 = 0, f_1 = 1$ និង $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$
   នោះ $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$

គេបាន

$$
\begin{aligned}
f_1 &= f_2 - f_0 \\
f_3 &= f_4 - f_2 \\
f_5 &= f_6 - f_4 \\
&\dots \\
f_{2n-1} &= f_{2n} - f_{2n-2}
\end{aligned}
$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n} - f_0 = f_{2n}$

3. $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$
យើងមាន $f_{n-1} f_{n+1} = (f_{n+1} - f_n)(f_n + f_{n-1}) = f_{n+1} f_n - f_n^2 + f_{n+1} f_{n-1} - f_n f_{n-1}$
នោះ $f_n^2 = f_{n+1} f_n - f_n f_{n-1}$
គេបាន

$$
\begin{aligned}
f_1^2 &= f_2 f_1 - f_1 f_0 \\
f_2^2 &= f_3 f_2 - f_2 f_1 \\
f_3^2 &= f_4 f_3 - f_3 f_2 \\
&\dots \\
f_n^2 &= f_{n+1} f_n - f_n f_{n-1}
\end{aligned}
$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1} - f_0 = f_n f_{n+1}$

4. $f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$
យើងមាន

$$
\begin{aligned}
f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 &= (f_n - f_{n-2})(f_n + f_{n-1}) - f_n^2 \\
&= f_n^2 + f_n f_{n-1} - f_{n-2} f_n - f_{n-2} f_{n-1} - f_n^2 \\
&= -f_{n-2} f_n + f_{n-1}(f_n - f_{n-2}) \\
&= -f_{n-2} f_n + f_{n-1}^2 \\
&= -(f_{n-2} f_n - f_{n-1}^2)
\end{aligned}
$$

យក $v_n = f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2$ យើងបាន $v_n = -v_{n-1}$ នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល
មាន $v_1 = f_0 f_2 - f_1^2 = -1$ និង រេស៊ុង $q = -1$
គេបាន $v_n = v_1 q^{n-1} = (-1)(-1)^{n-1} = (-1)^n$
ដូចនេះ $f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$

5. $x^n = f_n x + f_{n-1}$ ចំពោះ $n \geq 2$ និង x ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^2 = x+1$
យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់សំណើនេះដោយប្រើវិចារកំណើន
ចំពោះ $n=2$ គេបាន $x^n = f_n x + f_{n-1} \Leftrightarrow x^2 = f_2 x + f_1 = x^2+1$ ពិត
ឧបមាថាសំណើពិតចំពោះ n គឺ $x^n = f_n x + f_{n-1}$
យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថាសំណើពិតចំពោះ $n+1$ គឺ $x^{n+1} = f_{n+1}x + f_n$
យើងមាន

$$\begin{aligned}
x^{n+1} = x^n x &= (f_n x + f_{n-1})x \\
&= f_n x^2 + f_{n-1}x = f_n(x+1) + f_{n-1}x \\
&= x(f_n + f_{n-1}) + f_n \\
&= x f_{n+1} + f_n \text{ ពិត}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $x^n = f_n x + f_{n-1}$

6. $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$
សមីការ $x^2 = x+1$ មានរឹស $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $1-x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
តាមសម្រាយខាងលើ $x^n = x f_n + f_{n-1}$
និង $(1-x)^n = (1-x)f_n + f_{n-1}$
យើងបាន $x^n - (1-x)^n = \sqrt{5} f_n$
ដូចនេះ $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

7. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k f_k = f_{3n}$
តាមរូបមន្ត Binet យើងបាន

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k f_k &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k \left[\frac{x^k - (1-x)^k}{\sqrt{5}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{n} 2^k x^k C_n^k - \sum_{k=0}^{n} 2^k (1-x)^k C_n^k\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(1+2x)^n - (1+2(1-x)^n)\right]
\end{aligned}$$

ដោយ $x^2 = x+1$ នោះ $1+2x = x^3$

ដូចគ្នាដែរ $1+2(1-x)=(1-x)^3$
ហេតុនេះ $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[x^{3n}-(1-x)^{3n}\right] = f_{3n}$

8. $f_{s+t}=f_{s-1}f_t+f_sf_{t+1}$ ចំពោះ $s\geq 1$ និង $t\geq 0$
យើងចាត់ទុក t ថេរ ហើយយើងនឹងស្រាយសំណើខាងលើដោយប្រើវិចារកំណើនលើ s
ចំពោះ $s=1$ គេបាន $f_{s+t}=f_{s-1}f_t+f_sf_{t+1}$ សមមូលនឹង $f_{t+1}=f_0f_t+f_1f_{t+1}$ ពិត ព្រោះ $f_0=0, f_1=1$
ចំពោះ $s>1$ និង $1\leq k\leq s-1$ យើងឧបមាថា $f_{s-k+t}=f_{s-k-1}f_t+f_{s-k}f_{t+1}$
យើងបាន

$$\begin{aligned} f_{s+t} &= f_{s+t-1}+f_{s+t-2} \\ &= f_{s-1+t}+f_{s-2+t} \\ &= f_{s-2}f_t+f_{s-1}f_{t+1}+f_{s-3}f_t+f_{s-2}f_{t+1} \\ &= f_t(f_{s-2}+f_{s-3})+f_{t+1}(f_{s-1}+f_{s-2}) \\ &= f_tf_{s-1}+f_{t+1}f_s \text{ពិត} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f_{s+t}=f_{s-1}f_t+f_sf_{t+1}$ ចំពោះ $s\geq 1$ និង $t\geq 0$

លំហាត់ ១០២
គេឲ្យ $x_1,x_2,...,x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង $S=x_1+x_2+...+x_n$ ។ បង្ហាញថា $(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\leq 1+S+\frac{S^2}{2}+...+\frac{S^n}{n!}$ ។

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន

$$\begin{aligned} (1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) &\leq \left[\frac{(1+x_1)+(1+x_2)+...+(1+x_n)}{n}\right]^n \\ &= \left(1+\frac{S}{n}\right)^n \end{aligned}$$

ហេតុនេះដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពខាងលើ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា
$\left(1+\frac{S}{n}\right)^n \leq 1+S+\frac{S^2}{2!}+...+\frac{S^n}{n!}$ (*)
ដោយ $\left(1+\frac{S}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}S^k$

នោះ (*) សមមូលនឹង $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right)S^k\geq 0$ ពិត

ព្រោះ

$$\begin{aligned} n^k-k!C_n^k &= n^k-k!\times\frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= n^k-\frac{n!}{(n-k)!} \\ &= n^k-[n-(k+1)]...n\geq n^k-\underbrace{n\times n...\times n}_{k \text{ ដង}}=0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\left(1+\frac{S}{n}\right)^n\leq 1+S+\frac{S^2}{2!}+...+\frac{S^n}{n!}$

លំហាត់ ១០៣
ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេយក R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា $r\leq\frac{p}{3\sqrt{3}}\leq\frac{R}{2}$ ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $2p=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$

ដោយ $[ABC]=\frac{abc}{4R}=pr$ នោះ $abc=4prR$

យើងបាន

$$\begin{aligned} &2p\geq 3\sqrt[3]{4prR} \\ \Rightarrow &8p^3\geq 27(4prR)\geq 27(8pr^2) \text{ ព្រោះ} R\geq 2r \end{aligned}$$

គេបាន $p\geq 3\sqrt{3}r\Rightarrow r\leq\frac{p}{3\sqrt{3}}$ (1)

ម៉្យាងទៀត $\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

នោះ $\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

យើងបាន $a+b+c\leq 3\sqrt{3}R$

នោះ $2p\leq 3\sqrt{3}R\Rightarrow\frac{p}{3\sqrt{3}}\leq\frac{R}{2}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $r\leq\frac{p}{3\sqrt{3}}\leq\frac{R}{2}$

លំហាត់ ១០៤
គេឲ្យ a,b និង $c>0$ ហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc \le 1$ ។
បង្ហាញថា $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ge a+b+c$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a,b,c>0$ និង $abc \le 1 \Rightarrow \frac{1}{ab} \ge c, \frac{1}{bc} \ge a$ និង $\frac{1}{ca} \ge b$
តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន $\frac{2a}{c}+\frac{c}{b}=\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b} \ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} \ge 3\sqrt[3]{a^2a}=3a$
ដូចគ្នាដែរ $\frac{2b}{a}+\frac{a}{c} \ge 3b$ និង $\frac{2c}{b}+\frac{b}{a} \ge 3c$
បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $3\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \ge 3(a+b+c)$
ដូចនេះ $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ge a+b+c$

លំហាត់ ១០៥
គេឲ្យ n ចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នា $a_1,a_2,...,a_n$ ។
ដោយប្រើសមភាព $1^3+2^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
បង្ហាញថា $(a_1^7+a_2^7+...+a_n^7)+(a_1^5+a_2^5+...+a_n^5) \ge 2(a_1^3+a_2^3+...+a_n^3)^2$ ។

សម្រាយ

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពនេះដោយប្រើវិចារកំណើន
បើ $n=1$ វិសមភាពដែលត្រូវស្រាយសមមូលនឹង $a_1^7+a_1^5 \ge 2a_1^6 \Leftrightarrow a_1^2+1 \ge a_1^2 \Leftrightarrow (a_1-1)^2 \ge 0$ ពិត
ឧបមាថាសំណើពិតចំពោះ $n=k$ គឺ
$(a_1^7+a_2^7+...+a_k^7)+(a_1^5+a_2^5+...+a_k^5) \ge 2(a_1^3+a_2^3+...+a_k^3)^2$
យើងនឹងបង្ហាញថាសំណើពិតចំពោះ $n=k+1$ គឺ
$(a_1^7+a_2^7+...+a_{k+1}^7)+(a_1^5+a_2^5+...+a_{k+1}^5) \ge 2(a_1^3+a_2^3+...+a_{k+1}^3)^2$
ដោយវិសមភាពមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី WLOG ឧបមាថា $a_1<a_2<...<a_{k+1}$

ពិនិត្យ

$$\begin{aligned}
&2(a_1^3+a_2^3+...+a_{k+1}^3)^2-2(a_1^3+a_2^3+...+a_k^3)^2\\
&=2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3(a_1^3+a_2^3+...+a_k^3)\\
&\leq 2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3[1^3+2^3+...+a_1^3+...+a_k^3+...+(a_{k+1}-1)^3]\\
&=2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3\times\frac{(a_{k+1}-1)^2a_{k+1}^2}{4}=2a_{k+1}^6+a_{k+1}^5(a_{k+1}-1)^2\\
&=2a_{k+1}^6+a_{k+1}^7-2a_{k+1}^6+a_{k+1}^5=a_{k+1}^7+a_{k+1}^5
\end{aligned}$$

យើងបាន

$$\begin{aligned}
&a_2^7+a_2^5\geq 2(a_1^3+a_2^3)^2-2(a_1^3)^2\\
&a_3^7+a_3^5\geq 2(a_1^3+a_2^3+a_3^3)^2-2(a_1^3+a_2^3)^2\\
&...\\
&a_{k+1}^7+a_{k+1}^5\geq 2(a_1^3+a_2^3+...+a_{k+1}^3)^2-2(a_1^3+a_2^3+...+a_k^3)^2
\end{aligned}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន
$(a_2^7+a_3^7+...+a_{k+1}^7)+(a_2^5+a_3^5+...+a_{k+1}^5)\geq 2(a_1^3+a_2^3+...+a_{k+1}^3)^2-2(a_1^3)^2$
នោះ

$$\begin{aligned}
&(a_1^7+a_2^7+...+a_{k+1}^7)+(a_1^5+a_2^5+...+a_{k+1}^5)\\
&\geq 2(a_1^3+a_2^3+...+a_{k+1}^3)^2+a_1^7+a_1^5-2(a_1^3)^2\\
&\geq 2(a_1^3+a_2^3+...+a_{k+1}^3)^2
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $(a_1^7+a_2^7+...+a_n^7)+(a_1^5+a_2^5+...+a_n^5)\geq 2(a_1^3+a_2^3+...+a_n^3)^2$

លំហាត់ ១០៦
គេឲ្យ $0\leq a\leq b\leq c\leq d\leq e$ និង $a+b+c+d+e=1$ ។
បង្ហាញថា $ad+dc+cb+be+ea\leq\frac{1}{5}$ ។

សម្រាយ
ដោយ $0\leq a\leq b\leq c\leq d\leq e$ នោះ $d+e\geq c+e\geq b+d\geq a+c\geq a+b$

តាមវិសមភាព Chebyshev យើងបាន

$$\begin{aligned}
&ad+dc+cb+be+ea\\
&=\frac{a(d+e)+b(c+e)+c(b+d)+d(a+c)+e(a+b)}{2}\\
&\leq \frac{1}{2}\frac{(a+b+c+d+e)([(d+e)+(c+e)+(b+d)+(a+c)+(a+b)]}{5}\\
&=\frac{(a+b+c+d+e)(2a+2b+2c+2d+2e)}{10}\\
&=\frac{1}{5}(a+b+c+d+e)^2=\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $ad+dc+cb+be+ea\leq\frac{1}{5}$

លំហាត់ ១០៧
គេឲ្យ $a,b,c>0$ និង m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។
បង្ហាញថា $\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b}\geq\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m-1}$ ។

សម្រាយ

WLOG ឧបមាថា $a\geq b\geq c$ នោះ $\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+b}$
និង $a^m\geq b^m\geq c^m$
តាមវិសមភាព Chebyshev យើងបាន
$\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b}\geq\frac{1}{3}(a^m+b^m+c^m)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$ (1)
តាមទម្រង់ Engel នៃវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}&\geq\frac{(1+1+1)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}\\
&=\frac{9}{2(a+b+c)}
\end{aligned}$$

និង $\frac{a^m+b^m+c^m}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^m$ (មធ្យមស្វ័យគុណ)
តាម (1) យើងបាន $\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^m\times\frac{9}{2(a+b+c)}$
ដូចនេះ $\frac{a^m}{b+c}+\frac{b^m}{c+a}+\frac{c^m}{a+b}\geq\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{m-1}$

លំហាត់ ១០៨
គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ ។

សម្រាយ
តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី WLOG សន្មតថា $a\leq b\leq c\Rightarrow a^3\leq b^3\leq c^3$
ហើយ $a+b\leq c+a\leq b+c\Rightarrow\frac{1}{b+c}\leq\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{a+b}$
តាមវិសមភាព Rearrangement យើងបាន

$$\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}\leq\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}$$
$$\frac{a^3}{c+a}+\frac{b^3}{a+b}+\frac{c^3}{b+c}\leq\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $\frac{a^3+b^3}{a+b}+\frac{b^3+c^3}{b+c}+\frac{c^3+a^3}{c+a}\leq 2\left(\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\right)$ (1)
ម៉្យាងទៀត

$$\begin{aligned}\frac{x^3+y^3}{x+y}&=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}\\&=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1}{2}(x-y)^2\\&\geq\frac{x^2+y^2}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow\frac{a^3+b^3}{a+b}+\frac{b^3+c^3}{b+c}+\frac{c^3+a^3}{c+a}\geq\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2$ (2)
តាម (1) និង (2) យើងបាន $2\left(\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\right)\geq a^2+b^2+c^2$
ដូចនេះ $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

លំហាត់ ១០៩
គេឲ្យ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ជា n ចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នា។
បង្ហាញថា $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{8}+\ldots+\frac{a_n}{n2^n}\geq 1-\frac{1}{2^n}$ ។

សម្រាយ
យើងតម្រៀប $a_1,a_2,\ldots,a_n$ តាមលំដាប់កើនគឺ $b_1,b_2,\ldots,b_n$ ដែល $b_1,b_2,\ldots,b_n$ ជាចម្លាស់នៃ

$a_1, a_2, ..., a_n$ ហើយ $b_1 < b_2 < ... < b_n$
នោះ $b_n \geq n$ ព្រោះ $b_1, b_2, ..., b_n$ ជា n ចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នា
តាមវិសមភាព Rearrangement យើងបាន

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{8}+...+\frac{a_n}{n2^n} &\geq \frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{8}+...+\frac{b_n}{n2^n}\\ &\geq \frac{1}{2}+\frac{2}{8}+...+\frac{n}{n2^n}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}\\ &= 1-\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{8}+...+\frac{a_n}{n2^n} \geq 1-\frac{1}{2^n}$

លំហាត់ ១១០
ក) កំណត់សំណល់ពេល n^2 ចែកនឹង 7 ។
ខ) គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា បើ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់ នោះវាជាការេប្រាកដ ។

សម្រាយ
ក) កំណត់សំណល់ពេល n^2 ចែកនឹង 7
ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន $n = 7k \pm 1, 7k \pm 2$ និង $7k \pm 3$
បើ $n = 7k \pm 1$ នោះ $n^2 = (7k \pm 1)^2 \equiv 1 (mod 7)$
បើ $n = 7k \pm 2$ នោះ $n^2 = (7k \pm 2)^2 \equiv 4 (mod 7)$
បើ $n = 7k \pm 3$ នោះ $n^2 = (7k \pm 3)^2 \equiv 9 \equiv 2 (mod 7)$
ដូចនេះ n^2 ចែកនឹង 7 មានសំណល់ $1, 2$ រឺ 4
ខ) បង្ហាញថា បើ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់ នោះវាជាការេប្រាកដ
តាង

$$\begin{aligned}2+2\sqrt{28n^2+1} = m &\Rightarrow 2\sqrt{28n^2+1} = m-2\\ &\Rightarrow 4(28n^2+1) = (m-2)^2\end{aligned}$$

គេបាន m ជាចំនួនគត់គូ នោះ $m = 2k, k \in \mathbb{N}$
យើងបាន

$$\begin{aligned}4(28n^2+1) = (2k-2)^2 &\Rightarrow 28n^2+1 = (k-1)^2\\ &\Rightarrow 28n^2 = k^2-2k\end{aligned}$$

$\Rightarrow k$ ជាចំនួនគត់គូ នោះ $k = 2l, l \in \mathbb{N}$
យើងបាន $28n^2 = 4l^2 - 4l \Rightarrow 7n^2 = l^2 - l = l(l-1)$
ដោយ $GCD(l, l-1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} l = 7x^2 \\ l-1 = y^2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} l = y^2 \\ l-1 = 7x^2 \end{cases}$
ចំពោះ $\begin{cases} l = 7x^2 \\ l-1 = y^2 \end{cases}$ នោះ $7x^2 - 1 = y^2 \Rightarrow y^2 \equiv -1 \equiv 3(mod7)$ មិនពិត
ចំពោះ $\begin{cases} l = y^2 \\ l-1 = 7x^2 \end{cases}$ គេបាន $m = 2k = 2(2l) = 4l = 4y^2 = (2y)^2$ ជាការេប្រាកដ
ដូចនេះ បើ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់ នោះវាជាការេប្រាកដ

លំហាត់ ១១១
កំណត់ x, y និង $z \in \mathbb{N}$ ដែល $x \le y \le z$ ហើយ $x^y + y^z = z^x$ ។

សម្រាយ

ពិនិត្យអនុគមន៍

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln x}{x} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(\ln x)' x - (x)' \ln x}{x^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{x}\right) x - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

នោះ $f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 3$
នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះចំពោះគ្រប់ $x \ge 3$
គេបាន $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1} \Rightarrow n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$
ដោយ $x \le y \le z \Rightarrow y^z > z^y > z^x$ ចំពោះ $y \ge 3$
ករណីនេះសមីការគ្មានរឹស
យើងបាន $y < 3 \Rightarrow y \in \{1, 2\}$
បើ $y = 1 \Rightarrow x = 1$ នោះ $1 + 1 = z^1 \Rightarrow z = 2$
បើ $y = 2 \Rightarrow x \in \{1, 2\}$
ចំពោះ $x = 1 \Rightarrow 1 + 2^z = z$ មិនអាច ព្រោះ $2^z > z$
ចំពោះ $x = 2 \Rightarrow 4 + 2^z = z^2$ មិនអាច ព្រោះ $2^z \ge z^2, \forall z \ge 4$ ហើយ $z \in \{2, 3\}$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $(x,y,z)=(1,1,2)$

លំហាត់ ១១២
ដោះស្រាយសមីការ $3^x+4^y=5^z$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

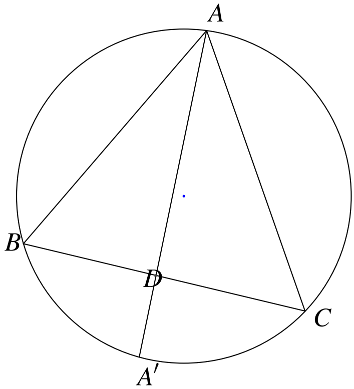
សម្រាយ
យើងនឹងបង្ហាញថា $x=y=z=2$ ជាចម្លើយតែមួយគត់នៃសមីការ
យើងមាន $3^x+4^y\equiv 1(mod3)$ និង $5^z\equiv(-1)^z(mod3)$
យើងបាន $(-1)^z\equiv 1(mod3)$
នោះ z ជាចំនួនគត់គូ $\Rightarrow z=2k, k\in\mathbb{N}$
ហេតុនេះ $3^x+4^y=5^z$ សមមូលនឹង

$$\begin{aligned}&3^x+4^y=5^{2k}\\ \Rightarrow&5^{2k}-2^{2y}=3^x\\ \Rightarrow&(5^k-2^y)(5^k+2^y)=3^x\end{aligned}$$

ដោយ 5^k-2^y និង 5^k+2^y ចែកមិនដាច់នឹង 3 ព្រមគ្នា មានន័យថាមានតែមួយគត់ក្នុងចំណោម 5^k-2^y និង 5^k+2^y ចែកដាច់នឹង 3 ព្រោះ $(5^k-2^y)+(5^k+2^y)=2\times 5^k$ ចែកមិនដាច់នឹង 3
យើងបាន $5^k+2^y=3^x$ និង $5^k-2^y=1$
$\Rightarrow(-1)^k+(-1)^y\equiv 0(mod3)$ និង $(-1)^k-(-1)^y\equiv 1(mod3)$
នោះ $2(-1)^k\equiv 1(mod3)$ និង $2(-1)^y\equiv -1(mod3)$
យើងបាន k ជាចំនួនគត់សេស និង y ជាចំនួនគត់គូ
បើ $y>2$ នោះ $2^y\equiv 0(mod8)$ និង $5^k\equiv 5(mod8)$ ចំពោះ k ជាចំនួនគត់សេស
យើងបាន $5^k+2^y\equiv 5(mod8)$
$\Rightarrow 3^x\equiv 5(mod8)$ មិនពិត ព្រោះ $3^x\equiv 1$ រឺ $3(mod8)$
នោះ $y=2\Rightarrow 5^k-2^y=1$ សមមូលនឹង $5^k-2^2=1\Rightarrow 5^k=5\Rightarrow k=1$
គេបាន $z=2$
នោះ $3^x+4^2=5^2\Rightarrow x=2$
ដូចនេះ $(x,y,z)=(2,2,2)$ ជាចម្លើយ

លំហាត់ ១១៣
ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេយក $l_a = \frac{m_a}{M_a}, l_b = \frac{m_b}{M_b}$ និង $l_c = \frac{m_c}{M_c}$ ដែល m_a, m_b, m_c ជាប្រវែងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំដែលគូសចេញពីកំពូល A, B, C ហើយ M_a, M_b, M_c ជាប្រវែងអង្កត់ដែលជាប្រសព្វរវាងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A, B, C នឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។
បង្ហាញថា $\frac{l_a}{\sin^2 A} + \frac{l_b}{\sin^2 B} + \frac{l_c}{\sin^2 C} \geq 3$ ។

សម្រាយ



យក $[AD)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃ $\angle A$ ហើយ $[AD)$ ប្រសព្វរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ A'
អនុវត្តទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ABA'
យើងបាន $\frac{AB}{\sin \angle BA'A} = \frac{AA'}{\sin \angle ABA'}$
ដោយ $\angle AA'B = \angle C$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)
$\angle ABA' = \pi - \frac{A}{2} - \angle AA'B = \pi - \frac{A}{2} - C = B + A - \frac{A}{2} = B + \frac{A}{2}$
នោះ $\frac{AB}{\sin C} = \frac{M_A}{\sin\left(B + \frac{A}{2}\right)} \Rightarrow M_A = \frac{AB \sin\left(B + \frac{A}{2}\right)}{\sin C}$
អនុវត្តទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ABD
យើងបាន $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AD}{\sin B}$
ដោយ $\angle ADB = \pi - \left(\frac{A}{2} + B\right) \Rightarrow \sin \angle ADB = \sin\left(B + \frac{A}{2}\right)$

នោះ $\dfrac{AB}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}=\dfrac{m_a}{\sin B}\Rightarrow m_a=\dfrac{AB\sin B}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}$
យើងបាន

$$\begin{aligned} l_a=\frac{m_a}{M_a}&=\frac{\frac{AB\sin B}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}}{\frac{AB\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}{\sin C}}\\ &=\frac{AB\sin B}{\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}\times\frac{\sin C}{AB\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)}\\ &=\frac{\sin B\sin C}{\sin^2\left(B+\frac{A}{2}\right)}\end{aligned}$$

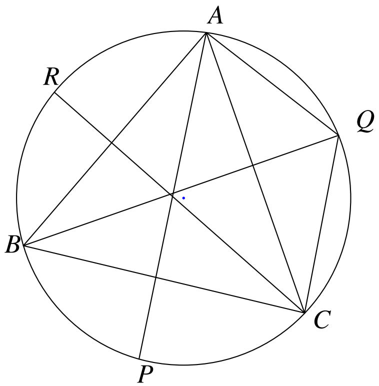
នោះ $l_a\geq\sin B\sin C$ ព្រោះ $\sin^2\left(B+\dfrac{A}{2}\right)\leq 1$
ស្រាយដូចគ្នា $l_b\geq\sin C\sin A$ និង $l_c\geq\sin A\sin B$
យើងបាន

$$\begin{aligned}\frac{l_a}{\sin^2 A}+\frac{l_b}{\sin^2 B}+\frac{l_c}{\sin^2 C}&\geq\frac{\sin B\sin C}{\sin^2 A}+\frac{\sin C\sin A}{\sin^2 B}+\frac{\sin A\sin B}{\sin^2 C}\\ &\geq\sqrt[3]{\left(\frac{\sin B\sin C}{\sin^2 A}\right)\left(\frac{\sin C\sin A}{\sin^2 B}\right)\left(\frac{\sin A\sin B}{\sin^2 C}\right)}=3\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\dfrac{l_a}{\sin^2 A}+\dfrac{l_b}{\sin^2 B}+\dfrac{l_c}{\sin^2 C}\geq 3$

លំហាត់ ១១៤
កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំទាំងបីនៃមុំ A,B,C នៃត្រីកោណ ABC កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ចំណុច P,Q និងR រៀងគ្នា។ បង្ហាញថា $AP+BQ+CR>AB+BC+CA$។

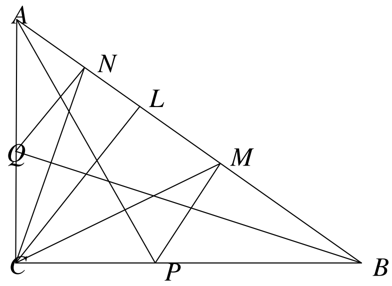
សម្រាយ



ដោយ $\angle ABQ = \angle QBC$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម)
នោះ $AQ = QC$
តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសយើងបាន $AQ^2 = AB^2 + BQ^2 - 2AB \times BQ \times \cos\angle ABQ$
និង $CQ^2 = BC^2 + BQ^2 - 2CQ \times BQ \times \cos\angle CBQ$
ដក (1) និង (2) យើងបាន $0 = AB^2 - BC^2 - 2BQ \times (AB - BC)\cos\angle ABQ$
នោះ $(AB - BC)(AB + BC - 2BQ\cos\angle ABQ) = 0$
បើ $AB \neq BC$ គេបាន $AB + BC - 2BQ\cos\angle ABQ = 0$
នោះ $AB + BC = 2BQ\cos\angle ABQ < 2BQ$ ព្រោះ $\cos\angle ABQ < 1$
បើ $AB = BC$ នោះ $[BQ]$ ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC
យើងបាន $AB + BC = 2AB < 2BQ$
សរុបមក $AB + BC < 2BQ$
ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $BC + CA < 2CR$ និង $CA + AB < 2AP$
បូកវិសមភាពទាំងបីយើងបាន $2(AB + BC + CA) < 2(AP + BQ + CR)$
ដូចនេះ $AP + BQ + CR > AB + BC + CA$

លំហាត់ ១១៥
គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃ $\angle BAC$ និង $\angle ABC$ កាត់ $[BC]$ និង $[CA]$ ត្រង់ P និង Q រៀងគ្នា ។ យក M និង N ជាចំណោលកែងនៃ P និង Q លើ $[AB]$ រៀងគ្នា ។ គណនា $\angle MCN$ ។

សម្រាយ



ដោយ $[AP)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃ $\angle BAC$ នោះ $PC = PM$
គេបាន $\triangle PCM$ ជាត្រីកោណសមបាត
វិបាក $\angle PCM = \angle PMC$ (1)
យក $[CL]$ ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ ACB
នោះ $[PM]//[CL]$
$\Rightarrow \angle MCL = \angle PMC$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង) (2)
តាម(1) និង (2) យើងបាន $\angle PCM = \angle PMC = \angle MCL$
ដូចគ្នាដែរ $\angle QCN = \angle NCL$
យើងបាន

$$\begin{aligned}\angle ACB &= \angle MCN + \angle ACN + \angle MCB \\ &= \angle MCN + \angle NCL + \angle MCL \\ &= \angle MCN + \angle MCN \\ &= 2\angle MCN\end{aligned}$$

គេបាន $\angle MCN = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}90^\circ = 45^\circ$
ដូចនេះ $\angle MCN = 45^\circ$

ឯកសារយោង

1. Five Hundred Mathematical Challenges, Edward J.Barbeau, Murrayl S.Klam Kin and William O.J. Moser.
2. Number Theory, Titu Andreescu and Dorin Andrica.
3. ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់, ជា ពិសិដ្ឋ និង ឯកសារជាច្រើនទៀត