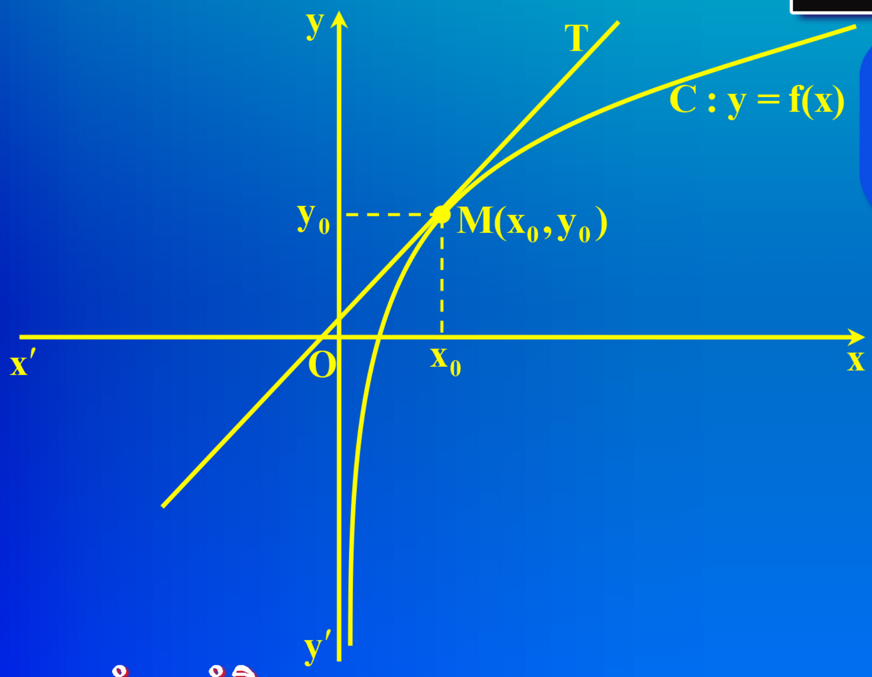
គន្លឹះដោះស្រាយលំហាត់

គណិតវិទ្យា



១២

ភាគ១

- ចំនួនកុំផ្លិច
- លីមីត
- ដេរីវេ

រៀបរៀងដោយ សុខ ពិសិដ្ឋ

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

រក្សាសិទ្ធិ

សុខ ពិសិដ្ឋ
គណិតវិទ្យា
១២

2014

អារម្ភកថា

សួស្តីលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ជាទីមេត្រី !

សៀវភៅ **គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ ភាគ១** ដែលលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និង ប្រិយមិត្តកំពុងអាននេះ ខ្ញុំបាទរៀបចំឡើងក្នុងគោលបំណង ជួយសម្រួលក្នុងការបង្រៀនសម្រាប់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ដែលមិនមានពេលវេលាគ្រប់គ្រាន់ក្នុងការរៀបចំមេរៀនដើម្បីបង្រៀនសិស្ស និងសម្រាប់ប្អូនៗសិស្សានុសិស្សដែលសិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង។

ក្នុងសៀវភៅភាគ១នេះ ខ្ញុំបានរៀបចំ ៣ជំពូកគឺ **ចំនួនកុំផ្លិច លីមីត** និង **ដេរីវេ** ដែលមាន ៖

- ☞ គន្លឹះដោះស្រាយ
- ☞ លំហាត់គំរូ
- ☞ លំហាត់អនុវត្តន៍ និង លំហាត់ជ្រើសរើសផ្សេងៗ

ខ្ញុំបាទសូមអភ័យទោស នូវរាល់កំហុសទាំងឡាយដែលកើតឡើងដោយអចេតនាក្តី ដោយការពិនិត្យមិនបានសព្វគ្រប់ជ្រុងជ្រោយក្តី ឬ ដោយបច្ចេកទេសកុំព្យូទ័រក្តី ខ្ញុំបាទរង់ចាំទទួលនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ដោយក្តីសោមនស្សរីករាយ។

សូមជូនពរ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកអានទទួលបានជោគជ័យគ្រប់ភារកិច្ច និង ការសិក្សា។

អ្នករៀបរៀង

សុខ ពិសិដ្ឋ

មាតិកា

ចំណងជើង	ទំព័រ
១. ចំនួនកុំផ្លិច	**១-៥៦**
២. លីមីត	**៥៧-១២៥**
មេរៀនទី១ : លីមីតនៃអនុគមន៍	៥៧
មេរៀនទី២ : ភាពជាប់នៃអនុគមន៍	១០៣
៣. ដេរីវេ	**១២៧-១៧៦**
មេរៀនទី១ : ដេរីវេនៃអនុគមន៍	១២៧
មេរៀនទី២ : អនុវត្តន៍ដេរីវេ	១៤៩

ចំនួនកុំផ្លិច

១. ចំនួននិមិត្ត

បើ $c>0$ នោះ ឫសការេនៃ $-c$ គឺ $\sqrt{-c}=\sqrt{c\cdot i^2}=\sqrt{c}\cdot i$ ដែល $i^2=-1$ ។ i ហៅថា **ឯកតានិមិត្ត** ។

ឧទាហរណ៍ : សរសេរឫសការេខាងក្រោមជាចំនួននិមិត្ត :

ក. $\sqrt{-12}$ ខ. $-\sqrt{-144}$ គ. $\sqrt{-17}$

ចម្លើយ

ក. $\sqrt{-12}=\sqrt{12\cdot i^2}=2\sqrt{3}\,i$

ខ. $-\sqrt{-144}=-\sqrt{144\cdot i^2}=-12i$

គ. $\sqrt{-17}=\sqrt{17\cdot i^2}=\sqrt{17}\,i$

២. ចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ពីជគណិត

ទម្រង់ពីជគណិតនៃចំនួនកុំផ្លិចគឺ $z=a+bi$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។ គេតាងសំណុំកុំផ្លិចដោយ $\mathbb{C}$ ។ a ហៅថា **ផ្នែកពិត** Re(z), b ហៅថា **ផ្នែកនិមិត្ត** Im(z) ។ bi ហៅថាចំនួននិមិត្ត ។

សម្គាល់ : **បើ $a=0$ នោះ $z=bi$ ជាចំនួននិមិត្តសុទ្ធ**

បើ $b=0$ នោះ $z=a$ ជាចំនួនពិត

ឧទាហរណ៍ : ចំនួនកុំផ្លិច $z=-1+\sqrt{3}i$ មាន $a=-1$ និង $b=\sqrt{3}$

ចំនួនកុំផ្លិច $z=-2i$ មាន $a=0$ និង $b=-2$

➢ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ និង ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយ

> បើ $z=a+bi$ នោះ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z តាងដោយ $\overline{z}=a-bi$
> ហើយចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃ z តាងដោយ $-z=-a-bi$

ឧទាហរណ៍: រកចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ និង ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម:

ក. $z=4+i$ ខ. $z=3-5i$ គ. $z=-12$ ឃ. $z=3i$

ចម្លើយ

ក. $z=4+i$ នោះ $\overline{z}=4-i$ និង $-z=-4-i$

ខ. $z=3-5i$ នោះ $\overline{z}=3+5i$ និង $-z=-3+5i$

គ. $z=-12$ នោះ $\overline{z}=-12$ និង $-z=12$

ឃ. $z=3i$ នោះ $\overline{z}=-3i$ និង $-z=-3i$

Note : $z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$

ដូចនេះ $$\mathbf{(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2}$$

➢ ចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា

> ចំនួនកុំផ្លិចពីរ z_1 និង z_2 ស្មើគ្នាលុះត្រាតែផ្នែកពិតស្មើគ្នា ($R(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$)
> និងផ្នែកនិមិត្តស្មើគ្នា ($\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$)
>
> - $a+bi=c+di$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

ឧទាហណ៍ : រកចំនួនពិត x និង y ដើម្បីបំពេញលក្ខខណ្ឌ :

$(x+y)+(2x-y)i=2-5i$

ចម្លើយ

យើងមាន $(x+y)+(2x-y)i=2-5i$

តាមកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នាយើងបាន $\begin{cases} x+y=2 & (1) \\ 2x-y=-5 & (2) \end{cases}$

យក $(1)+(2)$ យើងបាន $3x=-3 \Rightarrow x=-1$

តាម $(1) \Rightarrow y=2-x=2+1=3$

ដូចនេះ $\boxed{x=-1\,,\ y=3}$

សម្គាល់ : $\mathbf{a+bi=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}}$

៣. ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច

៣.១ វិធីបូកចំនួនកុំផ្លិច

$$\mathbf{(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i}$$

ឧទាហរណ៍ : $(5-2i)+(-3+5i)=(5-3)+(-2+5)i=2+3i$

៣.២ វិធីដកចំនួនកុំផ្លិច

$$\mathbf{(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i}$$

ឧទាហរណ៍ : $(3-6i)-(-4+2i)=(3+4)+(-6-2)i=7-8i$

៣.៣ វិធីគុណចំនួនកុំផ្លិច

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

ដូចនេះ $\mathbf{(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i}$

ឧទាហរណ៍ :

ក. $(3+i)(2+4i)=6+12i+2i+4i^2=6+14i-4=2+14i$

ខ. $(1-i)(2+3i)=2+3i-2i-3i^2=2+3i-2i+3=5+i$

៣.៤ វិធីចែកចំនួនកុំផ្លិច

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

ដូចនេះ $\mathbf{\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$

ឧទាហរណ៍១ : គណនា $\frac{4-3i}{1+5i}$

ចម្លើយ

$$\frac{4-3i}{1+5i}=\frac{(4-3i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)}=\frac{4-20i-3i+15i^2}{1^2+5^2}=-\frac{11}{26}-\frac{23}{26}i$$

ឧទាហរណ៍ ២ : យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = i$ និង $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ។

ចូរគណនា $z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$

ចម្លើយ

យើងមាន $z_1 = i$ និង $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

នោះ $z_1 + z_2 = i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1 + (\sqrt{3} + 2)i}{2}$

និង $1 + z_1 z_2 = 1 + i(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(2 - \sqrt{3}) + i}{2}$

យើងបាន $z = \dfrac{\frac{1 + (\sqrt{3} + 2)i}{2}}{\frac{(2 - \sqrt{3}) + i}{2}}$

$$= \frac{1 + (\sqrt{3} + 2)i}{(2 - \sqrt{3}) + i}$$

$$= \frac{\left[1 + (\sqrt{3} + 2)i\right]\left[(2 - \sqrt{3}) - i\right]}{\left[(2 - \sqrt{3}) + i\right]\left[(2 - \sqrt{3}) - i\right]}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{3} - i + (\sqrt{3} + 2)(2 - \sqrt{3})i - (\sqrt{3} + 2)i^2}{(2 - \sqrt{3})^2 + 1^2}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{3} - i + (4 - 3)i + \sqrt{3} + 2}{4 - 4\sqrt{3} + 3 + 1}$$

$$= \frac{4}{8 - 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{z = 2 + \sqrt{3}}$

ឧទាហរណ៍៣ : សរសេរ $z=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ចម្លើយ

$$z=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2$$
$$=\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4i^2}$$
$$=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{-4}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

៣.៥ លក្ខណៈនៃចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

បើយើងមានចំនួនកុំផ្លិច W និង Z នោះ យើងបាន :

ក. $\overline{W+Z}=\overline{W}+\overline{Z}$

ខ. $\overline{W-Z}=\overline{W}-\overline{Z}$

គ. $\overline{W\cdot Z}=\overline{W}\cdot\overline{Z}$

ឃ. $\overline{\left(\frac{W}{Z}\right)}=\frac{\overline{W}}{\overline{Z}}$

៤. ស្វ័យគុណនៃ i

- បើ $n=1\Rightarrow i^1=i$
- បើ $n=2\Rightarrow i^2=-1$
- បើ $n=3\Rightarrow i^3=i^2\cdot i=-i$
- បើ $n=4\Rightarrow i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$
- បើ $n=5\Rightarrow i^5=i\cdot i^4=i\cdot 1=i=i^1$

យើងបាន:

❖ បើ $n=4k \Rightarrow i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$

❖ បើ $n=4k+1 \Rightarrow i^n = i^{4k+1} = i^{4k}\cdot i^1 = 1\cdot i = i$

❖ បើ $n=4k+2 \Rightarrow i^n = i^{4k+2} = i^{4k}\cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$

❖ បើ $n=4k+3 \Rightarrow i^n = i^{4k+3} = i^{4k}\cdot i^3 = 1\cdot(-i) = -i$

ជាទូទៅ : បើ $k\in\mathbb{N}$ យើងបាន

➢ $\mathbf{i^{4k}=1}$	➢ $\mathbf{i^{4k+1}=i}$
➢ $\mathbf{i^{4k+2}=-1}$	➢ $\mathbf{i^{4k+3}=-i}$

ឧទាហរណ៏ : គណនា : i^{75}, i^{21} , i^{2012} i^{2013} , i^{2014}

ចម្លើយ

- $i^{75} = i^{4\times18+3} = -i$
- $i^{21} = i^{4\times5+1} = i$
- $i^{2012} = i^{4\times503} = 1$
- $i^{2013} = i^{4\times503+1} = i$
- $i^{2014} = i^{4\times503+2} = -1$

៥. អនុវត្តចំនួនកុំផ្លិចក្នុងដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២

សមីការដឺក្រេទី២ នៃអញ្ញាត x មានរាង $ax^2+bx+c=0$ ដែល a,b,c ជាចំនួនពិត $(a\neq0)$ ហើយមាន $\Delta=b^2-4ac$

ក. បើ $\Delta>0$ នោះសមីការមានឬសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា។

ខ. បើ $\Delta=0$ នោះសមីការមានឬសជាចំនួនពិតពីរស្មើគ្នា(ឬសឌុប)។

គ. បើ $\Delta<0$ នោះសមីការមានឬសជាចំនួនកុំផ្លិចពីរឆ្លាស់គ្នា។

ឧទាហរណ៍ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $x^2-4x+8=0$

ខ. $9x^2-30x+41=0$

ចម្លើយ

ក. $x^2-4x+8=0$

$\Delta'=4-8=-4=(2i)^2$

$\Rightarrow\ x_{1,2}=2\pm 2i$

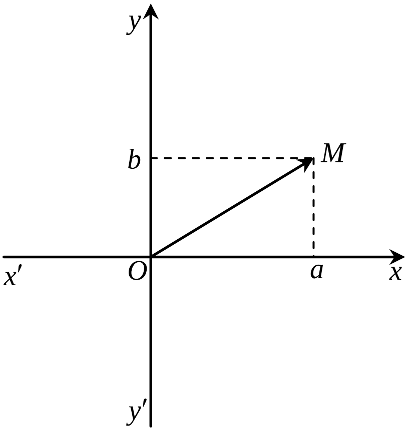
ខ. $9x^2-30x+41=0$

$\Delta'=15^2-9\times 41=-144=(12i)^2$

$$\Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{15\pm 12i}{9}=\frac{5}{3}\pm\frac{4}{3}i$$

៦. ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

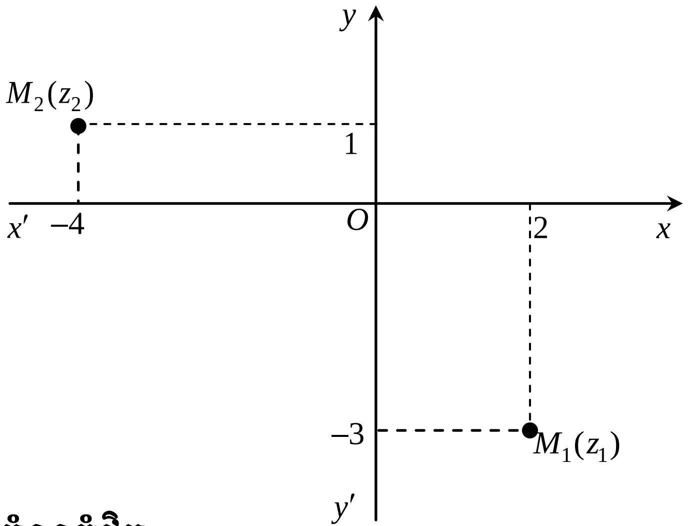
ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (xOy) គេអាចតាងចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ដោយចំណុច M ដែលមានកូអរ - ដោនេ $(a\ ,\ b)$ ។ ចំណុច M នេះ ហៅថា ចំណុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ។ គេអាចកំណត់សរសេរ $M(z)$ ។ ម៉្យាងទៀតចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ គេអាចតាងដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}(z)$ ។ តម្រុយនេះ ហៅថា **ប្លង់កុំផ្លិច** ។



សម្គាល់ :
- អ័ក្ស $x'ox$ ហៅថា អ័ក្សនៃផ្នែកពិត
- អ័ក្ស $y'oy$ ហៅថា អ័ក្សនៃផ្នែកនិមិត្ត

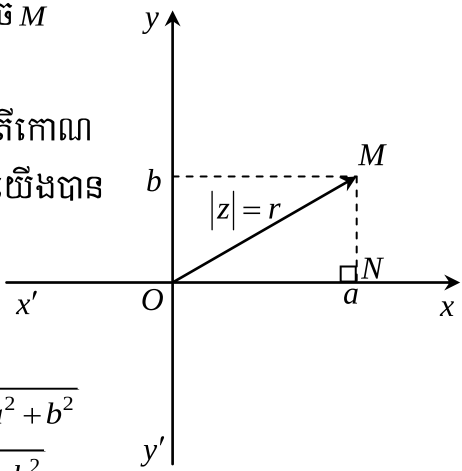
ឧទាហរណ៏: កំណត់រូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2-3i$ និង $z_2 = -4+i$

ចម្លើយ



៧. ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = a+bi$ និង ចំណុច M តាង z នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) តាមរូប យើងឃើញថា ΔOMN ជាត្រីកោណកែងត្រង់ N ។ តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រយើងបាន



$$OM^2 = ON^2 + NM^2$$
$$= a^2 + b^2$$
$$OM = \sqrt{a^2+b^2}$$

តាង $OM = r$ នោះ $r = \sqrt{a^2+b^2}$

គេកំណត់សរសេរ $|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$

ដូចនេះ

> បើ $z=a+bi$ នោះម៉ូឌុលនៃ z កំណត់ដោយ :
> $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

ឧទាហរណ៍ : គណនាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1=2+2i\sqrt{3}$ និង $z_2=-1-i$

ចម្លើយ

$$z_1=2+2i\sqrt{3} \quad \Rightarrow r_1=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=4$$
$$z_2=-1-i \quad \Rightarrow r_2=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

លក្ខណៈម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច : បើ z ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះយើងបាន :

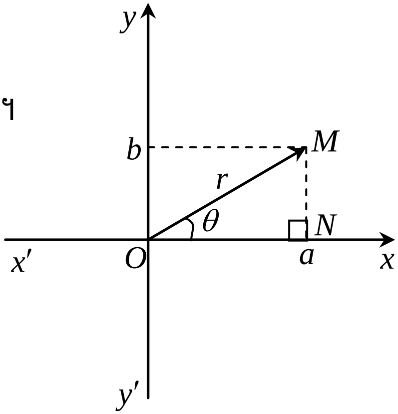
> ក. $|z|=|\overline{z}|$
> ខ. $|z|^2=z\cdot\overline{z}$
> គ. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
> ឃ. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$
> ង. $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

៨. អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច

យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។ តាង $\overrightarrow{OM}$ ជាវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃ z ។ មុំដែលផ្គុំដោយ $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$ ហៅថាអាគុយម៉ង់ នៃចំនួនកុំផ្លិច z ។

យើងតាង θ ឬ $\arg z$ ជាអាគុយម៉ង់នៃ z ។

$\arg z=\theta+2k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}$



ក្នុងត្រីកោណកែង OMN កែងត្រង់ N យើងបាន :

$$\cos\theta=\frac{ON}{OM}=\frac{a}{r} \text{ និង } \sin\theta=\frac{NM}{OM}=\frac{b}{r}$$

ដូចនេះ ដើម្បីរកអាគុយម៉ង់នៃ $z=a+bi$ យើងត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធ

សមីការ $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{r}\\ \sin\theta=\dfrac{b}{r}\end{cases}$ ដែល $r=\sqrt{a^2+b^2}$

ឧទាហរណ៍: គណនាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-1+i$ និង $z_2=2\sqrt{3}-2i$

ចម្លើយ

ក. $z_1=-1+i$

$$r_1=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_1&=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right| \Rightarrow \theta_1=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \ , k\in\mathbb{Z}$$

ខ. $z_2=2\sqrt{3}-2i$

$$r_2=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=4$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_2&=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_2&=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\end{aligned}\right| \Rightarrow \theta_2=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \ , k\in\mathbb{Z}$$

៩. ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $z=a+ib$

ដោយ $\cos\theta=\frac{a}{r}\Rightarrow a=r\cos\theta$

និង $\sin\theta=\frac{b}{r}\Rightarrow b=r\sin\theta$

យើងបាន $z=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

ជាទូទៅ	ចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ អាចសរសេរជាទម្រង់ ត្រីកោណមាត្រ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

ឧទាហរណ៍: បំប្លែងចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ:

ក. $z_1=1+i$ ខ. $z_2=\sqrt{3}+i$

គ. $z_3=-2$ ឃ. $z_4=2-2\sqrt{3}i$

ចម្លើយ

ក. $z_1=1+i$

$$r_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right|\Rightarrow\theta_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad,\ k\in\mathbb{Z}$$

យើងបាន $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

ខ. $z_2 = \sqrt{3} + i$

$$r_2 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right| \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$$

យើងបាន $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$

គ. $z_3 = -2$

$$= 2(-1 + 0i)$$

$$= 2(\cos\pi + i\sin\pi)$$

ឃ. $z_4 = 2 - 2\sqrt{3}i$

$$= 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

១០. ផលគុណនៃចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

បើយើងមាន $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

នោះយើងបាន $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

ឧទាហរណ៏ ១ : យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + i$ និង $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ ។ ដោយប្រើទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z_1 និង z_2 ចូរគណនា $z_1 \cdot z_2$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

និង $z_2 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

យើងបាន $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}\cdot 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

ឧទាហេណ៏២ : យើងមាន $z_1 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ និង $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ។ គណនា $z_1 \cdot z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ចម្លើយ

យើងមាន $z_1 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ និង $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

នោះ $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$

$$= 6\cdot 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$= 12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $z_1 \cdot z_2$ គឺ $\boxed{z_1 \cdot z_2 = 12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$

ជាទម្រង់ពីជគណិត : $z_1 \cdot z_2 = 12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 12(0+i) = 0+12i$

ដូចនេះ ទម្រង់ពីជគណិតនៃ $z_1 \cdot z_2$ គឺ $\boxed{z_1 \cdot z_2 = 0+12i}$

ឧទាហរណ៏៣ : យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $Z = 1-i$ និង $W = \sqrt{3}+i$ ។

ចូរគណនា $Z \cdot W$ ដោយឱ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $Z = 1-i$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

ហើយ $W = \sqrt{3}+i$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

យើងបាន : $Z \cdot W = \sqrt{2}\cdot 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{Z \cdot W = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]}$

១១. ផលចែកនៃចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

បើយើងមាន $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

នោះយើងបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$

- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

ឧទាហរណ៍១: យើងមាន $z_1 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ និង $z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$។ គណនា $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ចម្លើយ

យើងមាន $z_1 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ និង $z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

យើងបាន
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)}{5\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$$
$$= \frac{6}{5}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right)\right]$$
$$= \frac{6}{5}\left(\cos\frac{4\pi}{12} + i\sin\frac{4\pi}{12}\right)$$
$$= \frac{6}{5}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $\frac{z_1}{z_2}$ គឺ $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{5}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

ជាទម្រង់ពីជគណិត :

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{6}{5}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{5}+\frac{3\sqrt{3}}{5}i$$

ឧទាហរណ៍២ : សរសេរ $A=\frac{2(1+i)^2}{1-i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយជាទម្រង់ពីជគណិត។

ចម្លើយ

$$\begin{aligned}
A&=\frac{2(1+i)^2}{1-i\sqrt{3}}\\
&=\frac{2(1+2i+i^2)}{1-i\sqrt{3}}\\
&=\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}\\
&=\frac{4(0+i)}{2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})}\\
&=\frac{4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}\\
&=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right]\\
&=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ A គឺ $\boxed{A=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$

ជាទម្រង់ពីជគណិត :

$$A=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}+i$$

ដូចនេះ ទម្រង់ពីជគណិតនៃ A គឺ $\boxed{A=-\sqrt{3}+i}$

១២. ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

បើ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ នោះ

$z^n=\left[r(\cos\theta+i\sin\theta)\right]^n=r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

គេអាច ទាញបាន $\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

ហៅថា រូបមន្ត ដឺម័រ (DE MOIVRE)

ឧទាហរណ៍ : គណនា $(1+i)^{60}$

ចម្លើយ

របៀបទី១ :

តាង $z=1+i$

$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right|\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

នោះ $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

យើងបាន $z^{60}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{60}$

$$=\sqrt{2}^{60}\left(\cos\frac{60\times\pi}{4}+i\sin\frac{60\times\pi}{4}\right)$$

$$=2^{30}\left(\cos15\pi+i\sin15\pi\right)$$

$$=2^{30}(-1+0i)$$

$$=-2^{30}+0i$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+i)^{60}=-2^{30}}$

របៀបទី២ : $(1+i)^{60}=\left[(1+i)^2\right]^{30}$

$$=(1+2i+i^2)^{30}$$

$$=(2i)^{30}$$

$$=2^{30}\times i^{4\times7+2}$$

$$=2^{30}\times(-1)=-2^{30}$$

ឧទាហរណ៍២: ចូរសរសេរ $z=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{13}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ចម្លើយ

យើងមាន $-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$

យើងបាន $z=\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{13}$

$$=\cos\frac{13\times5\pi}{6}+i\sin\frac{13\times5\pi}{6}$$

$$=\cos\frac{65\pi}{6}+i\sin\frac{65\pi}{6}$$

$$=\cos\left(\frac{5\pi}{6}+10\pi\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}+10\pi\right)$$

$$= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$

ឧទាហរណ៍៣ : គណនា $(4\sqrt{3}+4i)^5$

ចម្លើយ

$$(4\sqrt{3}+4i)^5 = \left[8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right]^5$$

$$= 8^5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5$$

$$= 8^5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= 32768\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= -16384\sqrt{3} + 16384i$$

ដូចនេះ $\boxed{(4\sqrt{3}+4i)^5 = -16384\sqrt{3} + 16384i}$

១៣. ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច

បើ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ ហើយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ ឫសទី n នៃ z កំណត់ដោយ :

$$W_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$ ដែល $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

ឧទាហរណ៍១ : គណនាឫសទី៥ នៃ $-\sqrt{3}-i$ រួចតាងឫសទាំងនេះលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ចម្លើយ

តាង $z=-\sqrt{3}-i$ យើងបាន

$$r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right| \Rightarrow \theta=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

នោះ $z=2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$

តាមរូបមន្តឫសទី n: $w_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$

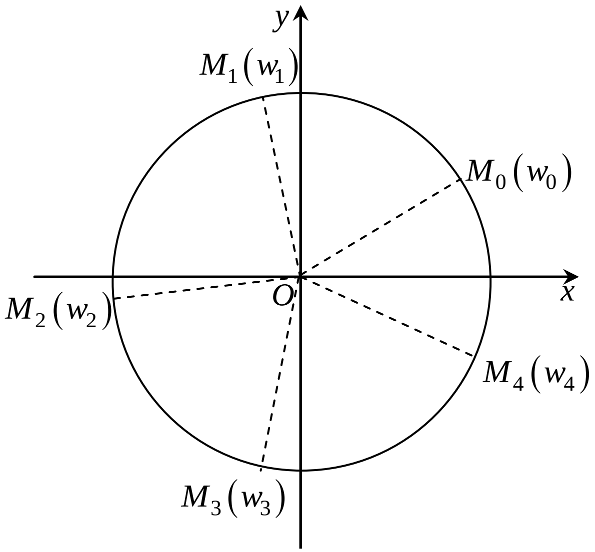
យើងបានឫសទី៥នៃ z គឺ $w_k=\sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\dfrac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\dfrac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{5}\right)\right]$

$$=\sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi+12k\pi}{30}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi+12k\pi}{30}\right)\right]$$

$$k=0\ ,1\ ,2\ ,3\ ,4$$

- បើ $k=0$ នោះ $w_0=\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{30}+i\sin\dfrac{7\pi}{30}\right)$
- បើ $k=1$ នោះ $w_1=\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{30}+i\sin\dfrac{19\pi}{30}\right)$
- បើ $k=2$ នោះ $w_2=\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{31\pi}{30}+i\sin\dfrac{31\pi}{30}\right)$
- បើ $k=3$ នោះ $w_3=\sqrt[5]{2}\left(\cos\dfrac{43\pi}{30}+i\sin\dfrac{43\pi}{30}\right)$

• បើ $k=4$ នោះ $w_4=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{55\pi}{30}+i\sin\frac{55\pi}{30}\right)$



ឧទាហរណ៍២ : គណនាឫសទី៤ នៃ $1-i$ រួចតាងឫសទាំងនេះលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ចម្លើយ

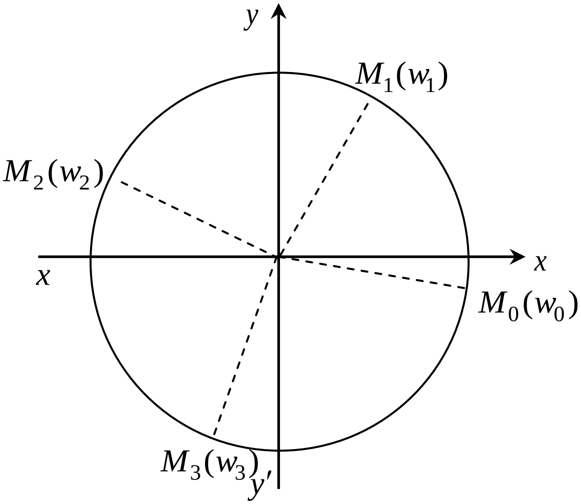
តាង $z=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

នោះឫសទី៤ នៃ z គឺ $w_k=\sqrt[4]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\right]$

$$=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi+8k\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi+8k\pi}{16}\right)\right]$$

• បើ $k=0$ នោះ $w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)$

- បើ $k=1$ នោះ $w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)$
- បើ $k=2$ នោះ $w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}\right)$
- បើ $k=3$ នោះ $w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16}+i\sin\frac{23\pi}{16}\right)$



ឧទាហរណ៍៣ : ដោះស្រាយសមីការ $z^6+1=0$

ចម្លើយ

យើងមាន $z^6+1=0 \Leftrightarrow z^6=-1 \Leftrightarrow z=\sqrt[6]{-1}$

តាង $z'=-1=\cos\pi+i\sin\pi$

ឫសទី៦ នៃ z' គឺ $z_k=\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\right]$

$$k=0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5$$

- បើ $k=0$ នោះ $z_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
- បើ $k=1$ នោះ $z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i=i$

• បើ $k=2$ នោះ $z_2=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

• បើ $k=3$ នោះ $z_3=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

• បើ $k=4$ នោះ $z_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=0-i=-i$

• បើ $k=5$ នោះ $z_5=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ដូចនេះ សមីការ $z^6+1=0$ មានឫស $\boxed{z=\pm i\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i\ ,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i}$

ឧទាហរណ៏៤ : គណនា $\sqrt[3]{-2+2i}$

ចម្លើយ

តាង $z=-2+2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

នោះ ឫសទី៣ នៃ z គឺ :

$$w_k=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right)\right]$$

• បើ $k=0$ នោះ $z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1+i$

• បើ $k=1$ នោះ $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

• បើ $k=2$ នោះ $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

១៤. របៀបគណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច x+yi

របៀបទី១

តាង $a+bi$ ជាឫសនៃចំនួនកុំផ្លិច $x+yi$ ($a\&b$ ជាចំនួនពិត)

យើងបាន $\sqrt{x+yi}=a+bi$

$$x+yi=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$$

តាមចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា យើងបាន $\begin{cases} a^2-b^2=x & (1) \\ 2ab=y & (2) \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងលើដើម្បីរកតម្លៃចំនួនពិត $a\&b$ ។

របៀបទី២ : $\sqrt{x+yi}=\sqrt{(a+bi)^2}=\pm(a+bi)$

របៀបទី៣ (បើ $x+yi$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$)

បើ $x+yi$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$

នោះឫសការេនៃ $x+yi$ គឺ

$$z_k=\sqrt{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+k\pi}{2}\right)$$

ដែល $k=0\,,1$

$$k=0\Rightarrow z_0=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$k=1\Rightarrow z_1=\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right]$$

លំហាត់គំរូ: រកឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $-2i$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១ :

តាង $a+bi$ (ដែល a និង b ជាចំនួនពិត)ជាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $-2i$

នោះយើងបាន $\sqrt{-2i}=a+bi \Leftrightarrow -2i=a^2-b^2+2abi$

តាមកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា យើងបាន $\begin{cases} a^2-b^2=0 & (1) \\ 2ab=-2 & (2) \end{cases}$

តាម $(2) \Rightarrow b=-\dfrac{1}{a}$ (3)

នោះ (1) យើងបាន $a^2-\left(\dfrac{1}{a}\right)^2=0$

$$a^4-1=0 \Rightarrow a=\pm 1$$

តាម $(3) \Rightarrow b=-\dfrac{1}{\pm 1}=\mp 1$

ដូចនេះ ឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $-2i$ គឺ $\boxed{1-i \text{ និង } -1+i}$

របៀបទី២ :

$$\sqrt{-2i}=\sqrt{1-2i+i^2}$$
$$=\sqrt{(1-i)^2}$$
$$=\pm(1-i)$$

របៀបទី៣

យើងមាន $-2i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ នោះឫសការេនៃ $-2i$ គឺ

$$z_k=\sqrt{2}\left[\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2)\right]$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi/2+2k\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi/2+2k\pi}{2}\right)$$

យក $k=0\,,1$ យើងបាន:

$k=0 \Rightarrow z_0=\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)\right)=1-i$

$k=1 \Rightarrow z_1=\sqrt{2}\left(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)\right)=-1+i$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនួនកុំផ្លិច } -2i \text{ មានឫសការេ } 1-i \text{ និង } -1+i}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរគណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម៖

ក. $3+4i$ ខ. $5-12i$

គ. $-7-24i$ ឃ. $-8+6i$

ង. $24+10i$ ច. $-35+12i$

ឆ. $-15+8i$ ជ. $9-40i$

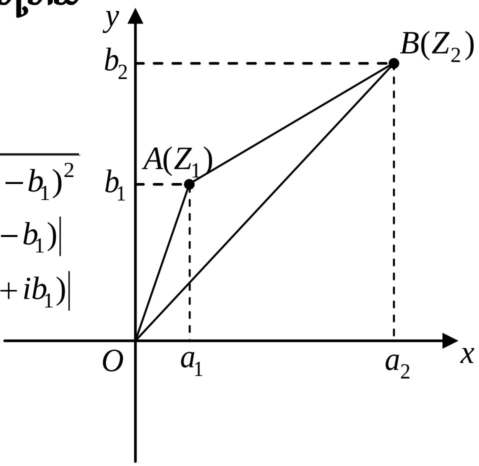
ឈ. $2-i2\sqrt{3}$ ញ. $1+4i\sqrt{3}$

១៥ .អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រ

១៥.១. ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច

បើ $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2
នោះចម្ងាយ $AB=|z_2-z_1|=|z_1-z_2|$ ។

សម្រាយ



តាង $z_1=a_1+ib_1$ និង $z_2=a_2+ib_2$

នោះ $A(a_1,b_1)$ និង $B(a_2,b_2)$

យើងបាន $AB=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$

$=|(a_2-a_1)+i(b_2-b_1)|$

$=|(a_2+ib_2)-(a_1+ib_1)|$

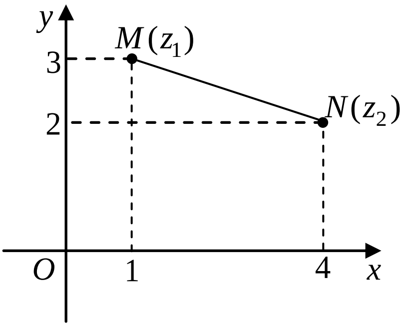
$=|z_2-z_1|$

ដូចនេះ $AB=|z_2-z_1|=|z_1-z_2|$

លំហាត់គំរូទី១: គណនាចម្ងាយរវាង M និង N តាងចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1+3i$ និង $z_2 = 4+2i$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាចម្ងាយ MN



យើងមាន $z_1 = 1+3i$ និង $z_2 = 4+2i$

យើងបាន $MN = |z_2 - z_1|$

$= |(4+2i)-(1+3i)|$

$= |3-i|$

$= \sqrt{3^2+(-1)^2}$

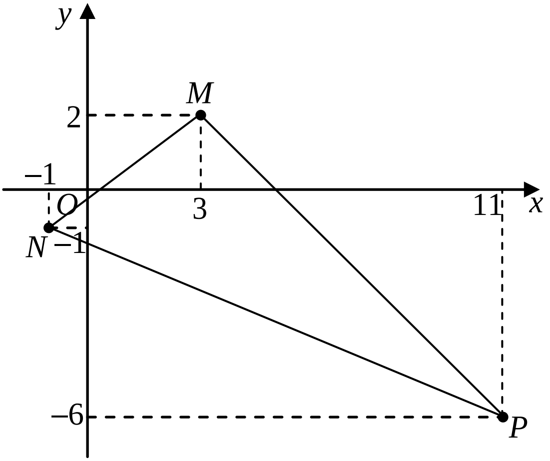
$= \sqrt{10}$

ដូចនេះ $MN = \sqrt{10}$ ឯកតា

លំហាត់គំរូទី២ : គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3+2i$, $z_2 = -1-i$ និង $z_3 = 11-6i$ ។ M , N , P ជារូបភាពនៃ z_1 , z_2 , z_3 នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។ គណនារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ MNP ។

ដំណោះស្រាយ

គណនារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ MNP



គណនារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ MNP

យើងមាន $z_1 = 3+2i$, $z_2 = -1-i$ និង $z_3 = 11-6i$

ដោយ M , N , P ជារូបភាពនៃ z_1 , z_2 , z_3 នោះយើងបាន៖

- $MN = |z_2 - z_1|$

$$= |(-1-i)-(3+2i)|$$
$$= |-4-3i|$$
$$= \sqrt{16+9} = 5 \text{ ឯកតា}$$

- $MP = |z_3 - z_1|$

$$= |(11-6i)-(3+2i)|$$
$$= |8-8i|$$
$$= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2} \text{ ឯកតា}$$

- $NP = |z_3 - z_2|$

$$= |(11-6i)-(-1-i)|$$
$$= |12-5i|$$
$$= \sqrt{144+25} = 13$$

ដូចនេះ រង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ MNP គឺ

$$\boxed{MN = 5 , MP = 8\sqrt{2} , NP = 13}$$ (ឯកតាប្រវែង)

១៥.២. សំណុំចំណុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ពិនិត្យមើលចំនួនកុំផ្លិច $z = x + yi$ និងរូបភាពនៃ z ដែលតាងដោយចំណុច $P(x, y)$ នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។ បើគេឱ្យលក្ខខណ្ឌដែល z ត្រូវតែបំពេញតាម នោះសំណុំនៃរូបភាព P ទាំងអស់ដែលអាចមានបង្កើតបានជាសំណុំចំណុច P ។

លំហាត់គំរូទី១ : រកសំណុំចំណុច P ជារូបភាពនៃ z ដែលបំពេញតាមលក្ខខណ្ឌ $|z-i|=1$

ដំណោះស្រាយ

រកសំណុំចំណុច P

តាងចំនួនកុំផ្លិច $z=x+yi$

យើងបាន $|z-i|=1$

$$\Leftrightarrow |x+yi-i|=1$$

$$\Leftrightarrow |x+(y-1)i|=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=1$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1^2$$

ដូចនេះ សំណុំចំណុច P គឺជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $(0,1)$ និងកាំស្មើនឹង 1

លំហាត់គំរូទី២ : រកសំណុំចំណុច M ជារូបភាពនៃ z ដែលបំពេញតាមលក្ខខណ្ឌ $\arg z=\frac{\pi}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកសំណុំចំណុច M

តាងចំនួនកុំផ្លិច $z=x+yi$

ដោយ $\arg z=\arg(x+yi)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

នោះយើងបាន $\arg z=\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x}=\tan\frac{\pi}{4}=1 \quad \Rightarrow y=x$$

ដូចនេះ សំណុំចំណុច M គឺជាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$

☞ **ចំណាំ** : បើ $z=a+bi$ នោះ $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ ដែល $\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \theta=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

តែ $\theta=\arg z$ យើងបាន $\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)=\arg z$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}=\tan(\arg z)$$

ដូចនេះ

បើ $z=a+bi$ នោះ $\dfrac{b}{a}=\tan(\arg z)$

លំហាត់គំរូទី៣ : គេឱ្យចំណុច M , M_1 និង M_2 ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច z , $z_1=-2i$ និង $z_2=2i$ ។ ចូរកំណត់ចំណុច M ដែល $\arg\left(\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $z=x+yi$

នោះ
$$\frac{z-z_1}{z-z_2}=\frac{(x+yi)+2i}{(x+yi)-2i}$$
$$=\frac{x+(y+2)i}{x+(y-2)i}$$
$$=\frac{\left[x+(y+2)i\right]\left[x-(y-2)i\right]}{\left[x+(y-2)i\right]\left[x-(y-2)i\right]}$$
$$=\frac{x^2-x(y-2)i+x(y+2)i-(y+2)(y-2)i^2}{x^2+(y-2)^2}$$
$$=\frac{x^2+\left(-xy+2x+xy+2x\right)i+(y^2-4)}{x^2+(y-2)^2}$$
$$=\frac{x^2+y^2-4}{x^2+(y-2)^2}+\frac{4x}{x^2+(y-2)^2}i$$

យើងបាន $\arg\left(\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right)=\arg\left(\dfrac{x^2+y^2-4}{x^2+(y-2)^2}+\dfrac{4x}{x^2+(y-2)^2}i\right)$

$$=\arctan\left(\dfrac{\dfrac{4x}{x^2+(y-2)^2}}{\dfrac{x^2+y^2-4}{x^2+(y-2)^2}}\right)$$

$$=\arctan\left(\dfrac{4x}{x^2+y^2-4}\right)$$

ដោយ $\arg\left(\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ យើងបាន $\arctan\left(\dfrac{4x}{x^2+y^2-4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{x^2+y^2-4}=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4=4x$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=8=(2\sqrt{2})^2$$

ដូចនេះ សំណុំចំណុច M ជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $(2,0)$ និងមានកាំស្មើនឹង $2\sqrt{2}$ ។

លំហាត់គំរូទី៤ : រកសំណុំចំណុច P ជារូបភាពនៃ z ដែលបំពេញតាមលក្ខខណ្ឌ $|z-18|=2|z+18i|$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកសំណុំចំណុច P

តាងចំនួនកុំផ្លិច $z=x+yi$

យើងបាន $|z-18|=2|z+18i|$

$$\Leftrightarrow |(x+yi)-18|=2|(x+yi)+18i|$$

$$\Leftrightarrow |(x-18)+yi|=2|x+(y+18)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-18)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+(y+18)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-18)^2+y^2=4\left[x^2+(y+18)^2\right]$$

$\Leftrightarrow x^2-36x+18^2+y^2=4x^2+4y^2+144y+4\cdot18^2$

$\Leftrightarrow 3x^2+36x+3y^2+144y=-3\cdot18^2$

$\Leftrightarrow x^2+12x+y^2+48y=-324$

$\Leftrightarrow (x^2+12x+6^2)+(y^2+48y+24^2)=-324+6^2+24^2$

$\Leftrightarrow (x+6)^2+(y+24)^2=288=(12\sqrt{2})^2$

ដូចនេះ សំណុំចំណុច P គឺជារង្វង់ដែល មានផ្ចិត $(-6,-24)$ និងកាំស្មើនឹង $12\sqrt{2}$

ចំណាំ :

- $1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ ➢ $1+\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$
- $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$
- $1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$
- $\cos k\pi=\begin{cases}1 & \text{បើ } k \text{ ជាចំនួនគត់គូ}\\ -1 & \text{បើ } k \text{ ជាចំនួនគត់សេស}\end{cases}\ ,(k\in\mathbb{Z})$
- $\sin k\pi=0\ ,\ \forall k\in\mathbb{Z}$
- $\sin(\theta+k\pi)=\begin{cases}\sin\theta & \text{បើ } k \text{ ជាចំនួនគត់គូ}\\ -\sin\theta & \text{បើ } k \text{ ជាចំនួនគត់សេស}\end{cases}\ ,(k\in\mathbb{Z})$
- $\cos(\theta+k\pi)=\begin{cases}\cos\theta & \text{បើ } k \text{ ជាចំនួនគត់គូ}\\ -\cos\theta & \text{បើ } k \text{ ជាចំនួនគត់សេស}\end{cases}\ ,(k\in\mathbb{Z})$

របៀបបម្លែងចំនួនកុំផ្លិចឱ្យទៅជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

១. បើ $Z=\cos\theta-i\sin\theta$

ដោយ $\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

យើងបាន $Z=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$

២. បើ $Z=-\cos\theta+i\sin\theta$

ដោយ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$, $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

យើងបាន $Z=\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)$

៣. បើ $Z=-\cos\theta-i\sin\theta$

ដោយ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

យើងបាន $Z=\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)$

៤. បើ $Z=\sin\theta+i\cos\theta$

ដោយ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

យើងបាន $Z=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

៥. បើ $Z=-\sin\theta+i\cos\theta$

ដោយ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

យើងបាន $Z=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

សង្ខេប

១. $\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$

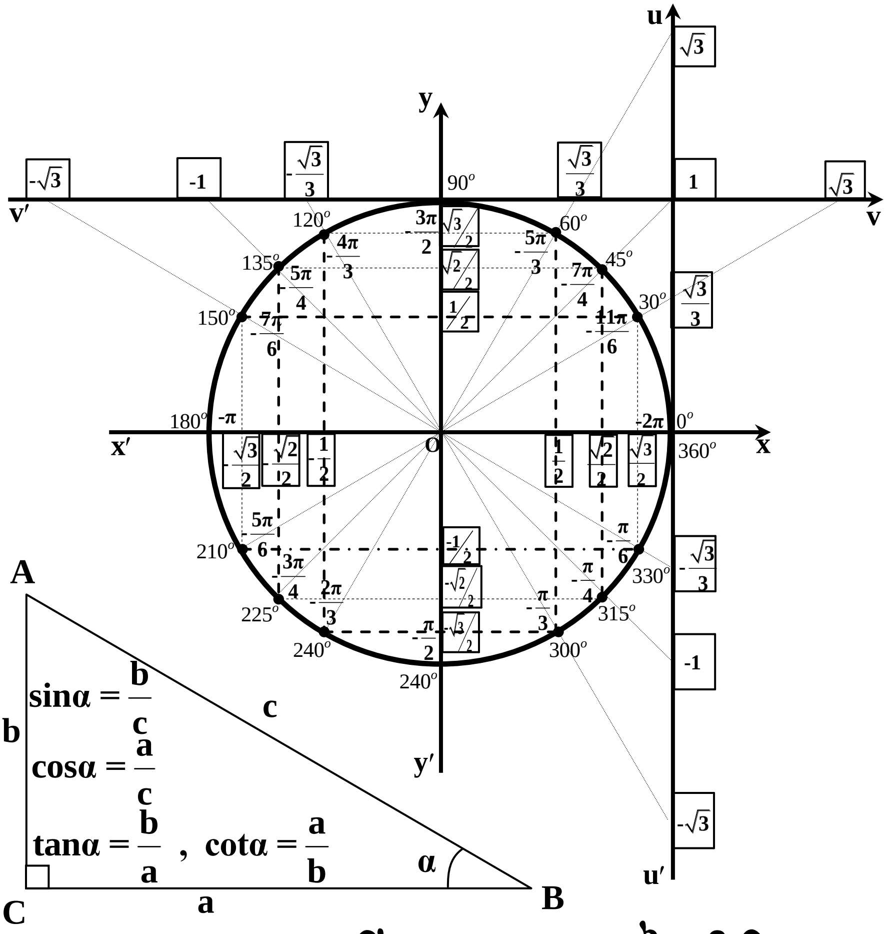
២. $-\cos\theta+i\sin\theta=\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)$

៣. $-\cos\theta-i\sin\theta=\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)$

៤. $\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

៥. $-\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

រង្វង់ត្រីកោណមាត្រ



តារាងផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេស

មុំ$(\alpha > 0)$		អនុគមន៍				មុំ$(\alpha < 0)$	
Deg	Rad	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	Rad	Deg
0°	0	0	1	0	||	-2π	-360^0

30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{11\pi}{6}$	-330°
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\frac{7\pi}{4}$	-315°
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{5\pi}{3}$	-300°
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\|\|$	0	$-\frac{3\pi}{2}$	-270°
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$	-240°
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\frac{5\pi}{4}$	-225°
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{7\pi}{6}$	-210°
180°	π	0	-1	0	$\|\|$	$-\pi$	-180°
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$	-150°
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\frac{3\pi}{4}$	-135°
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	-120°
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\|\|$	0	$-\frac{\pi}{2}$	-90°
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	-60°
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\frac{\pi}{4}$	-45°
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	-30°
360°	2π	0	1	0	$\|\|$	0	0°
Deg	**Rad**	**sinα**	**cosα**	**tanα**	**cotα**	**Rad**	**Deg**
មុំ$(\alpha > 0)$		អនុគមន៍				មុំ$(\alpha < 0)$	

រូបមន្តត្រីកោណមាត្រសំខាន់ៗ

១. ទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ៖ **cosθ** និង **sinθ** , **cosθ** និង **tanθ** , **sinθ** និង **cotθ** , **tanθ** និង **cotθ**

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1 \vee \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

២. មុំផ្ទុយគ្នា θ និង (-θ)

- $\cos(-\theta) = \cos\theta$
- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
- $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
- $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

៣. មុំបំពេញ $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ និង θ

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$

៤. មុំបន្ថែម $(\pi-\theta)$ និង θ

- $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$
- $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$
- $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
- $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$

៥. មុំដែលមានផលសងស្មើ π

- $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$
- $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$
- $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$
- $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$

៦. មុំដែលមានផលសងស្មើ $\frac{\pi}{2}$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$

៧. រូបមន្តផលបូកនិងផលដក

- $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$
- $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$
- $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$
- $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$
- $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

៨. រូបមន្តមុំឌុប

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
- $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

៩. រូបមន្តកន្លះមុំ

- $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$
- $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$
- $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$
- $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

១១. រូបមន្តកន្សោម $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ជាអនុគមន៍នៃ $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$

- $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$
- $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$

១២. កន្សោម $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\tan 3\alpha$

- $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
- $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
- $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

១៣. រូបមន្តបំលែងពីផលគុណទៅជាផលបូក

- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$
- $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$
- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$
- $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$

១៤.រូបមន្តបំលែងពីផលបូកទៅជាផលគុណ

- $\cos p+\cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
- $\cos p-\cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
- $\sin p+\sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
- $\sin p-\sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$
- $\tan p+\tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$
- $\tan p-\tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$
- $\cot p+\cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$
- $\cot p-\cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$

១៥. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំ α និង $(\alpha+k\pi)$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

- $\sin(\alpha+k\pi)=\begin{cases}\sin\alpha & \text{បើ k គូ}\\ -\sin\alpha & \text{បើ k សេស}\end{cases}$
- $\cos(\alpha+k\pi)=\begin{cases}\cos\alpha & \text{បើ k គូ}\\ -\cos\alpha & \text{បើ k សេស}\end{cases}$
- $\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha\ ,\ \forall k\in\mathbb{Z}$
- $\cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha\ ,\ \forall k\in\mathbb{Z}$

១៦. សមីការត្រីកោណមាត្រ

- $\sin x=\sin\alpha\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+2k\pi\\ x=\pi-\alpha+2k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$
- $\cos x=\cos\alpha\Rightarrow x=\pm\alpha+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$
- $\tan x=\tan\alpha\Rightarrow x=\alpha+k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$
- $\cot x=\cot\alpha\Rightarrow x=\alpha+k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$

ចំណាំ:

- $\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$
- $\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi=\frac{2k+1}{2}\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$
- $\{k\pi\}\cup\{2k\pi\}=\{k\pi\}\ ,k\in\mathbb{Z}$
- $\{k\pi\}\cap\{2k\pi\}=\{2k\pi\}\ ,k\in\mathbb{Z}$
- $\left\{2k\pi\right\}\cup\left\{(2k\pm1)\pi\right\}=\left\{k\pi\right\}\ ,k\in\mathbb{Z}$

លំហាត់

១. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=(\sqrt{3}+i\sqrt{3})\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ។

ក. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{7\pi}{12}$ និង $\sin\frac{7\pi}{12}$ ។

២. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2015}$ ។

ក. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួច ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សរសេរ $(Z+\sqrt{3})^2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត រួច ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៣. យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=x+yi$ និង $U=a+bi$ ។

ក. គណនា x និង y ជាអនុគមន៍នៃ a និង b បើ $Z=U^2+iU+1$។

ខ. ចំពោះ $a=1$, $b=1$ ចូរសរសេរ Z និង U ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៤. ក. ដោះស្រាយសមីការ $z^2+z+1=0$ ក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ ដោយយក z_1 ជាឫសដែលមានផ្នែកនិមិត្តអវិជ្ជមាននិង z_2 ជាឫសមួយទៀត។

ខ. គណនា $\frac{z_2+1}{z_1+1}$ ដោយឱ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត រួច ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៥. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=(1+i)^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{20}$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួច ជាទម្រង់ ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $xz+y\bar{z}=\sqrt{3}$ ។

៦. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{3}+i}$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត និង ជាទម្រង់ ត្រីកោណមាត្រ

រួចទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

ខ. សរសេរ $\left(z+\frac{1}{2}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៧. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{\sqrt{2}(1+i)^3}{2(1+\sqrt{3}\,i)^2}$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

៨. ក.គេឱ្យ $z=2+3i$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $\frac{a}{1+z}+\frac{b}{1-z}=2$ ។

ខ. សរសេរ $A=\frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់

ត្រីកោណមាត្រ រួចគណនាឫសការេនៃ A ។

៩. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$, $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ និង $z=\frac{z_1}{z_2}$ ។

ក. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z_1 និង z_2 ។

ខ. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និង ជាទម្រង់ពីជគណិត។

ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

គ. រកចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត n ដែល z^n ជាចំនួនពិត ។

១០. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i)$ ។

ក.សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

១១. គេឱ្យ z_1 និង z_2 ជាឫសនៃសមីការ $z^2+2z+2=0$ ។

ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សរសេរ z_1^{2013} និង z_2^{2013} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចបង្ហាញថា $w=z_1^{2013}+z_2^{2013}$ ជាចំនួនពិត ។

១២. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=2-2i$ និង $z=\frac{z_1^4}{z_2^3}$ ។

ក. សរសេរ z_1 , z_2 និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

១៣. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ។

ក. គណនា Z^2 ។ កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ Z^2 រួចសរសរ Z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. គណនាម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃ Z រួចសរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ. ទាញរកតម្លៃពិតប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$ ។

១៤. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}-\frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួច ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z^2 ។

១៥. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=(2\sqrt{3}+i)^3$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $w=-\frac{1}{2}\left[(-a-b)+(a-b)\sqrt{3}\,i\right]$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $w=z$ ។

១៦. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{(1+\sqrt{2})+i}{(1+\sqrt{2})-i}$ និង $w=x(y+i)+y(x-i)$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចជាទម្រង់ ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $w=(z-1)(\overline{z}-i)$ ។

១៧. គេឱ្យ z និង w ជាចំនួនកកុំផ្លិចពីរដែល $z=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)^2}{1+i\sqrt{3}}$

និង $w=(2+i)x+(2-i)y$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត និង ជាទម្រង់ ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

គ. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $w=z$ ។

១៨. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1=2\sqrt{6}(1+i)$, $Z_2=\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$ និង $Z=\frac{Z_1}{Z_2}$ ។

ក. សរសេរ Z_1 និង Z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត និង ជាទម្រង់ ត្រីកោណមាត្រ។

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

១៩. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1=\sqrt{3}+i$ និង $Z_2=\sqrt{3}-i$ និង $Z=\frac{Z_1}{Z_2}$ ។

ក. សរសេរ Z_1 និង Z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. បង្ហាញថា $A=Z_1^{2013}+Z_2^{2013}$ ជាចំនួនពិត ។

គ. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $Z=x+iy$ ។

ឃ. គណនា Z^{2013} ដោយឱ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២០. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1=\frac{a}{1+i}$ និង $Z_2=\frac{b}{1+2i}$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $Z_1+Z_2=1$ ។

ខ. តាង A ជារូបភាពនៃ Z_1 និង B ជារូបភាពនៃ Z_2 នៅក្នុងប្លង់
កុំផ្លិច ។ គណនាចម្ងាយពី A ទៅ B ។

២១. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = 2+\sqrt{3}+i$ ។

ក. សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត និង ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. ទាញរកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ Z រួច សរសេរ z ជាទម្រង់
ត្រីកោណមាត្រ។

២២. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $Z_2 = 1-i$ និង $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ ។

ក. សរសេរ Z_1 និង Z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត និង ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ
រួចទាញបញ្ជាក់ថា $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ ក្នុងសំណុំចំនួនពិត (សំណុំ $\mathbb{R}$)
$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$ ។

២៣. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = 5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i$ និង $W = -5+5\sqrt{3}i$ ។

ក. សរសេរ Z និង W ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. តាង U ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $Z\cdot U = W$ ។ សរសេរ U ជា
ទម្រង់ពីជគណិត រួច ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{19\pi}{12}$ និង $\sin\frac{19\pi}{12}$ ។

២៤. យើងមានសមីការក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}: 3z^2 + 4\sqrt{3}z + \frac{16}{3} = 0$ (1) ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ (1) ដោយយក z_1 ជាឫសដែលមានផ្នែកនិមិត្ត
វិជ្ជមាន និង z_2 ជាឫសមួយផ្សេងទៀត ។

ខ. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
បង្ហាញថា $A = z_1^n + z_2^n$ ជាចំនួនពិត គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

គ. តាង $z=\frac{z_1}{z_2}$ ។ គណនា $B=z+z^5$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២៥. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ។

ក. សរសេរ $1+z$ ជាទម្រង់ត្រកោណមាត្រ ។

ខ. រកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ $(1+z)^{2013}$ ។

២៦. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$:

ក. $z^2-2(1+ia^2)z+1-a^4=0$ (a ជាចំនួនពិត)

ខ. $z^2-2z\sin\alpha+2i+\sin^2\alpha=0$ (α ជាចំនួនពិត)

២៧. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-1-i$, $z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $z=\frac{z_1}{z_2}$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត និង ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{11\pi}{12}$ និង $\sin\frac{11\pi}{12}$ ។

គ. រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន តូចបំផុត n ដែល z^n ជាចំនួនពិត ។

២៨. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos2\alpha+i\sin2\alpha$, $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ ។

ក. សរសេរ $1+z, 1-z, 1-z^2$ និង $z'=\frac{(1-z)^2}{\bar{z}(1+z)}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត α ដើម្បីឱ្យ z' ជាចំនួនពិត។ គណនា z' ក្នុងករណីនេះ។

២៩. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1=2\sqrt{3}+2i$, $Z_2=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$ និង $Z=\frac{Z_1}{Z_2}$ ។

ក. សរសេរ Z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួច ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

ឃ. ដោះស្រាយសមីការ $(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=\sqrt{2}$

ក្នុង $\mathbb{R}$ រួចដៅចម្លើយលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៣០. ក. គេឱ្យ $z=1-i\sqrt{3}$ ។ សរសេរ z និង z^{2013} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. គេឱ្យ $u=x+iy$ និង $z_1=a+bi$ ។ចូរគណនា x និង y ជា

អនុគមន៍នៃ a និង b បើគេដឹងថា $u=z_1^2+iz_1-\frac{1}{2}$ ។

៣១. ក. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $Z=1+i$ និង $W=1+i\sqrt{3}$ ។

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $1-2i$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2-2x+5=0$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ សមីការ $x^2+6x+13=0$ ។

៣២. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\frac{2(-1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}$

ក. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សរសេរ $Z'=1+i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួច ទាញរកម៉ូឌុល

និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\frac{Z'}{Z}$ ។

៣៣. ក. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $(2-i)$ ជាឫសនៃសមីការ

$ax^2+bx-20=0$ ។

ខ. សរសេរ $Z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៣៤. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $(x-1)-(3-2y)i=\frac{3+2i}{2-i}$ ។

៣៥. ក. បង្ហាញថា $\left[(\sqrt{3}+1)i\right]^2=-4-2\sqrt{3}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E): $Z^2+(1+\sqrt{3})i+2+\sqrt{3}=0$

ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ។

គ. សរសេរឫស Z_1 និង Z_2 របស់សមីការ (E) ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៣៦. ក. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ $2xi-y=\dfrac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$ ។

ខ. គេឱ្យ $Z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ ។ សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៣៧. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$ ។

ក. សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ Z ។

គ. ទាញពីសំណួរខាងលើនូវ តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{5\pi}{12}$ ។

៣៨. យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$, $u=\sqrt{3}-i$ និង $v=2-2\sqrt{3}i$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យបាន $z=\dfrac{u}{v}$ ។

ក្នុងករណីនេះ ទាញបញ្ជាក់ថា $u=4\bar{z}$ ។

ខ. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

រកឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}$ ។

៣៩. យើងមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $Z_1=\dfrac{2\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^2}{1+i\sqrt{3}}$ និង

$Z_2=(1-i)x+(1-y)(1+i)$

ក. សរសេរ Z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីបាន $2\bar{Z}_1-(Z_2+y-1)=0$

($\bar{Z}_1$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ Z_1)។

៤០. Z និង W ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $Z=-2+2\sqrt{3}i$ និង

$W=x(x-i)+y(y+i)$ ដែល $x\,,\,y\in\mathbb{R}$ ។

ក. សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សរសេរ Z^3 ជាទម្រង់ $a+bi$ ។

គ. គណនា x និង y បើ $W=Z^3$ ។

៤១. ក.គេឱ្យ $Z=a+bi$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។

សរសេរ $A=\dfrac{Z|Z|^2}{\bar{Z}}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}: x^2-2\sqrt{3}x+4=0$ ។

សរសេរឫស x_1 និង x_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៤២. ក. កំណតចំនួនពិតំ a និង b ដើម្បីឱ្យ $(2-3i)$ ជាឫសនៃ សមីការ

$x^2+ax+b=0$ ។

ខ. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{10}$ ។

៤៣. ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $x_1=1+i\sqrt{3}$ ជាឫស មួយនៃ

សមីការ $x^2+ax+b=0$ ។

ខ. រកឫស x_2 មួយទៀតនៃសមីការ។សរសេរ $Z=\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2$

ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

៤៤. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ និង $W=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ក. បង្ហាញថា $Z^2=W$ រួចគណនា Z^2+Z+1 ។

ខ. គណនា $A=Z^2+Z+i$ ។ សរសេរ A ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ. បង្ហាញថា A^{20} ជាចំនួនពិត ។

៤៥. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $A=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$ និង $B=\dfrac{x+iy}{1+i}$ ដែល x,y ជាចំនួនពិត ។

ក.សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ រក x និង y ដោយដឹងថា $2\bar{B}-A^2=0$ ($\bar{B}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B)។

៤៦.គេឱ្យ Z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $Z=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$។

ក. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. សរសេរ Z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. គណនា $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{5\pi}{12}$ ។

៤៧. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=x+iy$ និង $W=\cos\alpha+i\sin\alpha$ ដែល x,y និង α ជាចំនួនពិត។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឱ្យ $|Z|=|W|$ ។

ខ. ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|Z|=|W|$ ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{Z}=\bar{Z}$ ។

គ. រក x , y រួចរក α ដើម្បីឱ្យ $Z=1$, $W=1$ ។

៤៨. យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=a+ib$ និង $A=i(1+Z)$ ។

ក. គណនា A ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ដោយឱ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

ខ. កំណត់ a និង b ដើម្បីបាន $A=Z$

គ. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $W=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចគណនា W^4 ដោយឱ្យលទ្ធផលជា ទម្រង់ពីជគណិត ។

៤៩. សរសេរ $A=\dfrac{2(1+i)^2}{1-i\sqrt{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយជាទម្រង់ពីជគណិត។

៥០.យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=1-i$ និង $W=\sqrt{3}+i$ ។

ក. គណនា ZW និង $\frac{Z}{W}$ ។

ខ. សរសេរ ZW និង $\frac{Z}{W}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៥១. ក. ដោះស្រាយសមីការ $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$ (1) ក្នុងសំណុំ ចំនួនកំផ្លិច។ រកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃឫសនីមួយៗរបស់សមីការ (1) ។

ខ. សរសេរ $w=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៥២.យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

១. គណនាកន្សោម $A=1+z_1+z_1^2$ ។

២. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ គណនា $z_1^{2013}+z_2^{2013}$

៥៣. Z ជាចំនួនកុំផ្លិច ដែល $Z=a+ib$ a , b ជាចំនួនពិត ។

ក. រកតម្លៃ a និង b ដោយដឹងថា $(a+ib)(1+i)=1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})$ គណនា Z^4 ចំពោះតម្លៃ a និង b ដែលរកឃើញ ។

ខ. សរសេរ $W=\frac{-8+i8\sqrt{3}}{-2+i2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត និង ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

៥៤. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=x+yi, \bar{z}=x-yi, a=\sqrt{3}-i$ និង $b=2-2\sqrt{3}i$

ក. រកចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យបាន $z=\frac{a}{b}$ ។ ក្នុងករណីនេះទាញបញ្ជាក់ថា $a=4\bar{z}$

២. សរសេរ $z=\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ទាញរកឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $\frac{\sqrt{3}+i}{4}$

៥៥. ក. រកឫស t_1 , t_2 នៃសមីការ $-t^2+2t-4=0$ ដោយយក t_1 ជាឫសដែលមានផ្នែកនិមិត្តអវិជ្ជមាន ។

ខ. សរសេរ $Z=\frac{4t_2}{t_1^3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៥៦. ក. ចូរកំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a ដើម្បីឱ្យសមីការ
$x^2+(1+2i)x+a+12i=0$ មានឫសពិតមួយ និងឫសមួយទៀត ជាចំនួនកុំផ្លិច រួចរកឫសនៃសមីការនេះ ។
ខ. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $Z=-1+i\sqrt{3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួច បង្ហាញថា Z^{2013} ជាចំនួនពិត ។

៥៧. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។
១. គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$ ។
២. សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយ បង្ហាញថា $C=x^{2013}+y^{2013}$ ជាចំនួនពិត ។

៥៨. យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $a=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ និង $b=2+2\sqrt{3}i$ ។
១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។
២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $a\,,b$ និង $\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៥៩. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=2\sqrt{3}-2i$ និង $b=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ។
១. សរសេរ $Z=a^2+b^2+4ai+\sqrt{2}b$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។
២. សរសេរ a,b និង $a\cdot b$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៦០. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=1-\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}$ ។
១. គណនាម៉ូឌុល នៃ Z ។
២.គណនា អាគុយម៉ង់នៃ Z ។
៣. ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z ។

៦១. គេឱ្យចំនួនពិត α មួយដែល $-\pi<\alpha<\pi$ ។
១. បង្ហាញថា $\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)=-4\cos^4\frac{\alpha}{2}$ ។
២. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច
$Z^2-2Z\sin\alpha+2(1+\cos\alpha)=0$ រួចសរសេរឫស $Z_1\,,Z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៦២. តាង α ជាឫសនៃសមីការ $x^2 - x + 1 = 0$ ។

ចូរគណនា $A = \alpha^{12} + 6\alpha^{10} + 15\alpha^8 + 20\alpha^6 + 15\alpha^4 + 6\alpha^2 + 1$

៦៣. យើងមាន $P(z) = 4z^3 + (4-8i)z^2 + (10-8i) - 20i$ ។

ក. កំណត់ $P(2i)$

ខ. កំណត់ត្រីធាដឺក្រេទី២ $Q(z)$ ដែល $P(z) = (z-2i)Q(z)$ ។

ទាញរកសំណុំឫសនៃ P ។

គ. សរសេរ $P(z)$ ជាផលគុណកត្តាដឺក្រេទីមួយ។

៦៤. ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{u},\vec{v})$ គេឱ្យ

ចំណុច B តាងកុំផ្លិច i និង M_1 តាងកុំផ្លិច $Z_1 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$ ។

ក. រកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ Z_1 ។

ខ. ចំណុច M_2 តាងចំនួនកុំផ្លិច $Z_2 = iZ_1$ ។ រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់

នៃ Z_2 រួចបង្ហាញថា M_2 នៅលើបន្ទាត់ $y = x$ ។

គ. M_3 ជាចំណុចតាងចំនួនកុំផ្លិច $Z_3 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$ ។

បង្ហាញថាចំណុច M_1 និង M_3 នៅលើរង្វង់ផ្ចិត B កាំ $\sqrt{2}$ ។

៦៥. ក. កំណត់ត្រីធាដឺក្រេទី២ $P(\mathrm{Z})$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = (z+1)P(\mathrm{Z})$$

ខ. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចសមីការ :

$$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) + 1 = 0$$

៦៦. នៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច គេមានសមីការ: $(E): Z^3 + 2Z^2 - 16 = 0$ ។

ក. បង្ហាញថា $Z = 2$ ជាឫសសមីការ (E) ។

ខ. សរសេរសមីការ (E) ជាទម្រង់ $(Z-2)(aZ^2 + bZ + c) = 0$

ដែល a, b, c ជាចំនួនពិតដែលត្រូវកំណត់។

គ. ដោះស្រាយសមីការ (E) ឱ្យចម្លើយជាទម្រង់ពីជគណិត
រួចឱ្យចម្លើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៦៧. គេមានសមីការ $2Z^4+3Z^2+3\sqrt{3}Z+9=0$ (E)

ក. បង្ហាញថាបើ Z_0 ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះ $\bar{Z}_0$ ក៏ ជាឫស
របស់សមីការ (E) ដែរ។

ខ. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការ (E) ដោយដឹងថា
ឫសវាមួយមានទម្រង់ $a(1+i)$, $a\in\mathbb{R}$ ។

៦៨. គេមានសមីការ : $z^2-z\left(\sqrt{3}-1+2i\right)-\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}-i=0$ (1)

ក. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ដែលជាឫសនៃសមីការ (1)

ខ. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z_1 , z_2 ដែល z_1 ជាឫសមានផ្នែក
ពិតជាចំនួនវិជ្ជមាន ។

៦៩. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $w=\dfrac{z-2i}{z-1}$ ដែល $z\neq 1$ ។

តាង $z=x+iy$ និង $w=a+ib$ ដែល a,b,x,y ជាចំនួនពិត។

ក. គណនា a,b ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ។

ខ. រកសំណុំចំណុច $M(x,y)$ ដើម្បីឱ្យ w ជាចំនួនពិតសុទ្ធ។

គ. រកសំណុំចំណុច $M(x,y)$ ដើម្បីឱ្យ w ជាចំនួននិមិត្តសុទ្ធ។

៧០. ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច Z គេមាន $P(Z)=Z^4-1$ ។

ក. ដាក់ $P(Z)$ ជាផលគុណកត្តា

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $P(Z)=0$

គ. ដោះស្រាយសមីការ $\left[\dfrac{2z+1}{z-1}\right]^4=1$

៧១. ក. នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (P) ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ទិសដៅ
វិជ្ជមាន (ឯកតា $5cm$)។ ដៅចំណុច A, B, C មានអាភិចរៀងគ្នា
$a=-2$, $b=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i$ និង $c=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$ ។

ខ. បង្ហាញថាចំណុច O, A, B, C នៅលើរង្វង់តែមួយដែលត្រូវកំណត់ផ្ចិត និង កាំរបស់វា ។

៧២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ក. $Z = 1 - \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$

ខ. $Z = 1 + \cos x - i\sin x \qquad x \in (0, \pi)$

គ. $Z = 2\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

៧៣. គណនាផលបូក

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx$$

$$T_n = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx$$

៧៤. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\cos x + \cos(x+\alpha) + \cdots + \cos(x+n\alpha) = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

និង $\sin x + \sin(x+\alpha) + \cdots + \sin(x+n\alpha) = \dfrac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

ខ. គណនា $S_n = \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cdots + \cos^2 n\alpha$

និង $T_n = \sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \cdots + \sin^2 n\alpha$

៧៥. ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \cdots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$$

៧៦. គណនា

ក. $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$

ខ. $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}$

មេរៀនទី ១

លីមីតនៃអនុគមន៍

១. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់ និង អនន្ត

១.១. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

និយមន័យ១

អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon>0$ មានចំនួន $\alpha>0$ ដែល $0<|x-a|<\alpha$ នាំឱ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។

គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0$ ដែល $0<|x-a|<\alpha$ $\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ (ε ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានតូចបំផុត) ។

ឧទាហរណ៍១ : ដោយប្រើនិយមន័យ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to 2}(2x+5)=9$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0$ $|f(x)-9|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow |(2x+5)-9|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2x-4|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2(x-2)|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{2}=\alpha$$

ដូច្នេះ $\exists\alpha=\frac{\varepsilon}{2}>0$ ដែល $|x-2|<\alpha \Rightarrow |f(x)-9|<\varepsilon$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to 2}(2x+5)=9$

ឧទាហរណ៍២ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to -4}(4x+10)=-6$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0\ ,\ \left|f(x)-(-6)\right|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|(4x+10)+6\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|4x+16\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|4(x+4)\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|x+4\right|<\frac{\varepsilon}{4}=\alpha$$

ដូច្នេះ $\exists\alpha=\dfrac{\varepsilon}{4}>0$ ដែល $\left|x+4\right|<\alpha \Rightarrow \left|f(x)+6\right|<\varepsilon$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to -4}(4x+10)=-6$

ឧទាហរណ៍៣ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+4x-7)=-1$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0\ ,\ \left|f(x)-(-1)\right|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|(2x^2+4x-7)+1\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|2x^2+4x-6\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|x^2+2x-3\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|(x-1)(x+3)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left|x-1\right|\cdot\left|x+3\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

តែ $x\to 1$ នោះ $0<x<2$

$$\left|x+3\right|<5$$

$$\left|x-1\right|\cdot\left|x+3\right|<5\left|x-1\right|$$

យើងឱ្យ $5|x-1|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{10}$

ដូច្នេះ $\exists\alpha=\frac{\varepsilon}{10}>0$ ដែល $|x-1|<\alpha \Rightarrow |f(x)+1|<\varepsilon$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to 1}(2x^2+4x-7)=-1$

ឧទាហរណ៍៤ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{x\to 2}(2x^2-3x+1)=3$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0 \quad , \quad |f(x)-3|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow |(2x^2-3x+1)-3|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2x^2-3x-2|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |(x-2)(2x+1)|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-2|\cdot|2x+1|<\varepsilon$$

ដោយ $x\to 2$ នោះ $1<x<3$

$$\Leftrightarrow 2<2x<6$$

$$\Leftrightarrow 3<2x+1<7$$

$$\Leftrightarrow 3<|2x+1|<7$$

$$\Leftrightarrow |x-2|\cdot|2x+1|<7|x-2|$$

យើងឱ្យ $7|x-2|<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{7}=\alpha$

ដូច្នេះ $\exists\alpha=\frac{\varepsilon}{7}>0$ ដែល $|x-2|<\alpha \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to 2}(2x^2-3x+1)=3$

លំហាត់អនុវត្តន៍ : ស្រាយបញ្ជាក់លីមីតខាងក្រោមដោយប្រើនិយមន័យ

១. $\lim_{x\to -1}(2x-3)=-5$ ២. $\lim_{x\to 5}(13-2x)=3$

៣. $\lim_{x\to -1}(x^2+2x-3)=-4$ ៤. $\lim_{x\to 5}(x^2-2x)=15$

និយមន័យ២

- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall B>0\ ,\ \exists\alpha>0$ ដែល $0<|x-a|<\alpha$

  $\Rightarrow f(x) < -B$

- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall B>0\ ,\ \exists\alpha>0$ ដែល $0<|x-a|<\alpha$

  $\Rightarrow f(x) > B$

ឧទាហរណ៍ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x-2}\right)^2 = +\infty$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $\forall B>0\ ,\quad f(x)>B$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{x-2}\right)^2 > B$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{4}\right)^2 < \frac{1}{B}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 < \frac{4^2}{B}$$

$$\Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{\frac{4^2}{B}} = \frac{4}{\sqrt{B}} = \alpha$$

ដូច្នេះ $\forall B>0\ \exists\alpha>0$ ដែល $|x-2|<\alpha \Rightarrow f(x)>B$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x-2}\right)^2 = +\infty$

ឧទាហរណ៍ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{x\to 2^+}\frac{3x+5}{2-x} = -\infty$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $\forall B>0\quad ,\quad f(x)<-B$

$$\Leftrightarrow\ \frac{3x+5}{2-x}<-B$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{3x+5}{x-2}>B$$

$$\Leftrightarrow\ 3+\frac{11}{x-2}>B$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{11}{x-2}>B-3$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x-2}{11}<\frac{1}{B-3}$$

$$\Leftrightarrow\ x-2<\frac{11}{B-3}=\alpha$$

ដូច្នេះ $\forall B>0\ \exists\alpha=\frac{11}{B-3}>0$ ដែល $x-2<\alpha\Rightarrow f(x)<-B$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{3x+5}{2-x}=-\infty$

ចម្លើយលំហាត់ប្រតិបត្តិក្នុងសៀវភៅសិស្សទំព័រ ៤

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0$, $\left|f(x)-\sqrt{2}<\varepsilon\right|$

$$\Leftrightarrow\ \left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\ -\varepsilon<\sqrt{x}-\sqrt{2}<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{2}-\varepsilon<\sqrt{x}<\sqrt{2}+\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\ 2-2\sqrt{2}\varepsilon+\varepsilon^2<x<2+2\sqrt{2}\varepsilon+\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow\ -2\sqrt{2}\varepsilon+\varepsilon^2<x-2<2\sqrt{2}\varepsilon+\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow\ \left|x-2\right|<2\sqrt{2}\varepsilon+\varepsilon^2=\alpha$$

ដូច្នេះ $\exists\alpha=2\sqrt{2}\varepsilon+\varepsilon^2>0$ ដែល $\left|x-2\right|<\alpha\ \Rightarrow\ \left|f(x)-\sqrt{2}\right|<\varepsilon$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$

ខ. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$

ចំពោះ $\forall B>0$, $f(x)<-B$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < -B$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x} < -B$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} > B$$

$$\Rightarrow x < \frac{1}{B} = \alpha$$

ដូច្នេះ $\forall B>0\ \exists \alpha = \frac{1}{B} > 0$ ដែល $x-2<\alpha \Rightarrow f(x)<-B$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$

១.២ លីមីតនៃអនុគមន៍នៅត្រង់អនន្ត

និយមន័យ៣

> ➢ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 , \exists A>0$ ដែល $x>A \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$
>
> ➢ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 , \exists A>0$ ដែល $x<-A \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

ឧទាហរណ៍១ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{x+2} = 3$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $\forall \varepsilon>0$, $|f(x)-3|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3x+5}{x+2}-3\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3x+5-3x-6}{x+2}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-1}{x+2}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|x+2|}<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x+2|>\frac{1}{\varepsilon}$$

ដោយ $x\to+\infty$ នោះ $x+2>0 \Rightarrow |x+2|=x+2$

គេបាន $x+2>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x>\frac{1}{\varepsilon}-2=A$

ដូច្នេះ $\forall\varepsilon>0$, $\exists A=\frac{1}{\varepsilon}-2>0$ ដែល $x>A \Rightarrow |f(x)-3|<\varepsilon$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x+2}=3$

ឧទាហរណ៍ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-3x}{x-1}=-3$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0$, $|f(x)-(-3)|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2-3x}{x-1}+3\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2-3x+3x-3}{x-1}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-1}{x-1}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|x-1|} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-1| > \frac{1}{\varepsilon}$$

ដោយ $x \to -\infty$ នោះ $x-1<0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1) = 1-x$

គេបាន $1-x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon} + 1 = -\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = -A$

ដូច្នេះ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A = \frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0$ ដែល $x < -A \Rightarrow |f(x)+3| < \varepsilon$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to-\infty} \frac{2-3x}{x-1} = -3$

និយមន័យ៤

☞ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0\,, \exists B > 0$ ដែល $x > A \Rightarrow f(x) > B$

☞ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0\,, \exists B > 0$ ដែល $x > A \Rightarrow f(x) < -B$

☞ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0\,, \exists B > 0$ ដែល $x < -A \Rightarrow f(x) > B$

☞ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0\,, \exists B > 0$ ដែល $x < -A \Rightarrow f(x) < -B$

ឧទាហរណ៍ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{x\to+\infty} (x^2+5) = +\infty$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $\forall B > 0$, $f(x) > B$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5 > B$$

$$\Leftrightarrow x^2 > B+5$$

$$\Leftrightarrow |x| > \sqrt{B+5}$$

ដោយ $x \to +\infty$ នោះ $|x| = x$

នោះ $x > \sqrt{B+5} = A$

ដូច្នេះ $\forall B>0\ ,\ \exists A=\sqrt{B+5}>0$ ដែល $x>A \Rightarrow f(x)>B$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+5)=+\infty$

ឧទាហរណ៍ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-3x)=-\infty$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $\forall B>0\ ,\ f(x)<-B$

$$\Leftrightarrow\ 4-3x<-B$$

$$\Leftrightarrow\ 3x-4>B$$

$$\Leftrightarrow\ 3x>B+4$$

$$\Rightarrow\ x>\frac{B+4}{3}=A$$

ដូច្នេះ $\forall B>0\ ,\ \exists A=\dfrac{B+4}{3}>0$ ដែល $x>A \Rightarrow f(x)<-B$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-3x)=-\infty$

ឧទាហរណ៍ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $\forall B>0\ ,\ f(x)>B$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{x^2+1}>B$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+1>B^2$$

$$\Leftrightarrow\ x^2>B^2-1$$

$$\Leftrightarrow\ |x|>B^2-1$$

ដោយ $x\to-\infty$ នោះ $x<0 \Rightarrow |x|=-x$

គេបាន $-x>B^2-1\ \Rightarrow\ x<-(B^2-1)=-A$

ដូច្នេះ $\forall B>0\ ,\ \exists A=B^2-1>0$ ដែល $x<-A \Rightarrow f(x)>B$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$

ឧទាហរណ៍ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+1}{x+2}=-\infty$

សម្រាយបញ្ជាក់

ចំពោះ $\forall B>0$, $f(x)<-B$

$$\frac{x^2+3x+1}{x+2}<-B$$

$$x+1-\frac{1}{x+2}<-B$$

ដោយ $x\to-\infty$ នោះ $\frac{1}{x+2}\to 0$

គេបាន $x+1<-B \Rightarrow x<-B-1=-(B+1)=-A$

ដូច្នេះ $\forall B>0$, $\exists A=B+1>0$ ដែល $x<-A \Rightarrow f(x)<-B$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+1}{x+2}=-\infty$

លំហាត់ប្រតិបត្តិក្នុងសៀវភៅសិស្សទំព័រ៧ : បង្ហាញថា

ក. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$ ខ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-x^2}{3x+5}=-\infty$

សម្រាយបញ្ជាក់

ក. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$

ចំពោះ $\forall\varepsilon>0$, $|f(x)-2|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2x+1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2x+1-2x+2}{x-1}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3}{x-1}\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-1|>\frac{3}{\varepsilon}$$

ដោយ $x\to+\infty$ នោះ $x-1>0 \Rightarrow |x-1|=x-1$

គេបាន $x-1>\dfrac{3}{\varepsilon} \Rightarrow x>\dfrac{3}{\varepsilon}+1=A$

ដូច្នេះ $\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists A=\dfrac{1}{\varepsilon}+1>0$ ដែល $x>A \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-x^2}{3x+5}=-\infty$

ចំពោះ $\forall A>0\ ,\ f(x)<-B$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-x^2}{3x+5}<-B$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{3}+\frac{11}{9}-\frac{55}{9(3x+5)}<-B$$

ដោយ $x\to-\infty$ នោះ $\dfrac{55}{9(3x+5)}\to 0$

គេបាន $-\dfrac{x}{3}+\dfrac{11}{9}<-B \Rightarrow x>B+\dfrac{11}{3}=A$

ដូច្នេះ $\forall B>0\ ,\ \exists A=B+\dfrac{11}{3}>0$ ដែល $x>A \Rightarrow f(x)<-B$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-x^2}{3x+5}=-\infty$

១.៣ ប្រមាណវិធីលើលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$

ខ. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\times\lim\limits_{x\to a}g(x)$

គ. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ ($\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$)

ឃ. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]^n$

ឧទាហរណ៍ : គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-9x+5)$ ខ. $\lim\limits_{x\to -3}(2x^3-20x-2)(4+2x-x^2)$

គ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-3x+4}{4x^2-26}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to -5}\left(\dfrac{x^3+3x^2-8x+1}{3x^2+8x-27}\right)^3$

ចម្លើយ

ក. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-9x+5)=(2^2-9\cdot 2+5)=-9$

ខ. $\lim\limits_{x\to -3}(2x^3-20x-2)(4+2x-x^2)=-44$

គ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-3x+4}{4x^2-26}=-\dfrac{7}{5}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to -5}\left(\dfrac{x^3+3x^2-8x+1}{3x^2+8x-27}\right)^3=-\dfrac{729}{512}$

២. លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ នោះ គេបាន

☞ $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt[2n]{L}$ បើ $L\geq 0$

☞ $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[2n+1]{f(x)}=\sqrt[2n+1]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\sqrt[2n+1]{L}$, $\forall L\in\mathbb{R}$

កំណត់សម្គាល់ : $n\in\mathbb{N}, 2n$ ជាចំនួនគត់គូ , $2n+1$ ជាចំនួនគត់សេស

ឧទាហរណ៍ : គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $A=\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{\dfrac{x^2-4x+5}{5x-15}}$ ខ. $B=\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[5]{\dfrac{x^4-5x-8}{1-6x+x^2}}$

គ. $C=\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[4]{x^2-5x+1}$ ឃ. $D=\lim\limits_{x\to -3}\sqrt[3]{\dfrac{x^3-8}{-2x-1}}$

ចម្លើយ

ក. $A=\lim_{x\to 4}\sqrt{\dfrac{x^2-4x+5}{5x-15}}=1$

ខ. $B=\lim_{x\to -2}\sqrt[5]{\dfrac{x^4-5x-8}{1-6x+x^2}}=\sqrt[5]{\dfrac{18}{17}}$

គ. $C=\lim_{x\to 4}\sqrt[4]{x^2-5x+1}$ គ្មានលីមីត ឃ. $D=-\sqrt[3]{7}$

៣. លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

៣.១. អនុគមន៍បណ្ដាក់

> បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ នោះគេបាន
>
> ➢ $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$
>
> ➢ $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$
>
> សញ្ញា $\circ$ អានថា មូល , $f\circ g$ អានថា f មូល g ។

ឧទាហរណ៍ : គេមាន $f(x)=3x+1$ និង $g(x)=x^2$ ។ គណនា $f\circ g(x)$ និង $g\circ f(x)$ ។ តើ $f\circ g(x)$ និង $g\circ f(x)$ ស្មើគ្នាឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x)=3x+1$ និង $g(x)=x^2$

គេបាន $f\circ g(x)=f[g(x)]$

$=3(x^2)+1=3x^2+1$

$g\circ f(x)=g[f(x)]$

$=(3x+1)^2$

$=9x^2+6x+1$

ដោយ $f\circ g(x)=3x^2+1$ និង $g\circ f(x)=9x^2+6x+1$

ដូច្នេះ $f\circ g(x)\neq g\circ f(x)$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេឱ្យ $f(x)=x^2-5$ និង $g(x)=\frac{1}{x}+1$ ។ គណនា $(f\circ g)(x)$ និង $(g\circ f)(x)$ ។

២. គេឱ្យ $f(x)=\frac{1}{x}+x^2$ និង $g(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}$ ។ គណនា $(f\circ g)(x)$ និង $(g\circ f)(x)$ ។

៣.គេឱ្យ $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x+2$ និង $h(x)=(x^2+1)^2$ ។ រក $f\circ g\circ h$ ។

៣.២ លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

> បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរមានលីមីត ហើយ $\lim_{x\to a} g(x)=L$ និង
>
> $\lim_{x\to L} f(x)=f(L)$ នោះ $\lim_{x\to a} f\left[g(x)\right]=f\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]=f(L)$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនា ក. $A=\lim_{x\to -4}\sqrt[3]{3x+4}$ ខ. $\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2}}$

ចម្លើយ

ក. $A=\lim_{x\to -4}\sqrt[3]{3x+4}=-2$ ខ. $\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2}}=\frac{1}{3}$

៣.៣ លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

> ១. បើ $f(x)\geq g(x)$ ហើយបើ $\lim_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$ នោះ $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$
>
> ២. បើ $f(x)\leq g(x)$ ហើយបើ $\lim_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$ នោះ $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$
>
> ៣. បើ $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ ហើយបើ $\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} h(x)=\ell$
>
> នោះ $\lim_{x\to\infty} f(x)=\ell$

៤. លីមីតរាងមិនកំណត់

៤.១. លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

វិធានគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

ដើម្បីគណនា $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ដែលមានរាងកំណត់ $\frac{0}{0}$ គេត្រូវ ៖

១. ករណី $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា

- បំបែកភាគយក និង ភាគបែងឱ្យបានកត្តា $(x-a)$ (យក $f(x)$ និង $g(x)$ ចែកនិង $(x-a)$ ឬ ប្រើរូបមន្ត a^n-b^n ។ ល ។)
- សម្រួល ប្រភាគ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ដោយកត្តា $(x-a)$ ចោល
- យកតម្លៃ $x=a$ ទៅជំនួសក្នុងប្រភាគដែលសម្រួលរួច ។

២. ករណី $f(x)$ ឬ $g(x)$ មានរ៉ាឌីកាល់: ត្រូវគុណ $f(x)$ និង $g(x)$ នឹងកន្សោមឆ្លាស់ ឬ កន្សោមបំពេញនៃរ៉ាឌីកាល់នោះ ។

☞ **គួរចងចាំ:**

- $(a+b)$ មានកន្សោមឆ្លាស់ $(a-b)$ នោះ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
- $(a+b)$ មានកន្សោមបំពេញ (a^2-ab+b^2) នោះ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
- $(a-b)$ មានកន្សោមបំពេញ (a^2+ab+b^2) នោះ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

ជាទូទៅ $(a-b)$ មានកន្សោមបំពេញគឺ $(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$

ហើយ $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$

- $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$ បើ n ជាចំនួនគត់សេស
- $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$ ឬ $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

លំហាត់គំរូទី១ : គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1} \qquad B=\lim_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^3+1}$$

$$C=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$$

ដំណោះស្រាយ

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{1+1}{1^2+1+1}=\frac{2}{3}$$

$$B=\lim_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1+1+1+1+1}{1+1+1}=\frac{5}{3}$$

$$C=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+2}{x+3}=\frac{-1+2}{-1+3}=\frac{1}{2}$$

លំហាត់គំរូទី២: គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$D=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-49}$$

$$E=\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$$

$$F=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+6}-2}$$

ដំណោះស្រាយ

$$D=\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-49}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x-3}-2)(\sqrt{x-3}+2)}{(x-7)(x+7)(\sqrt{x-3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x-3})^2-2^2}{(x-7)(x+7)(\sqrt{x-3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(x+7)(\sqrt{x-3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1}{(x+7)(\sqrt{x-3}+2)}$$

$$=\frac{1}{(7+7)(\sqrt{7-3}+2)}=\frac{1}{14\times 4}=\frac{1}{56}$$

ដូច្នេះ $\boxed{D=\frac{1}{56}}$

$$E=\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x})\times(1+\sqrt{5-x})}{(1-\sqrt{5-x})(1+\sqrt{5-x})\times(3+\sqrt{5+x})}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(9-5-x)\times(1+\sqrt{5-x})}{(1-5+x)\times(3+\sqrt{5+x})}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)(1+\sqrt{5-x})}{(x-4)(3+\sqrt{5+x})}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{-(1+\sqrt{5-x})}{3+\sqrt{5+x}}$$

$$=\frac{-(1+\sqrt{5-4})}{3+\sqrt{5+4}}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

ដូច្នេះ $\boxed{E=-\frac{1}{3}}$

$$F=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+6}-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)\left[\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+2^2\right]}{\left(\sqrt[3]{x+6}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+2^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)\left[\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+2^2\right]}{x+6-8}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2)\left[\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+2^2\right]$$

$$=(2+2)\left(\sqrt[3]{8}^2+2\sqrt[3]{8}+4)\right)$$

$$=4\cdot(4+4+4)=48$$

ដូច្នេះ $\boxed{F=48}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^3-x^2+2x-2}\qquad B=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-x^2-x-2}$$

$$C=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}\qquad D=\lim_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2-9}{2x^2+7x+3}}$$

$$E=\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}\qquad F=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$$

$$G=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-2x+1}\qquad H=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$$

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}\qquad J=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$$

$$K=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt[3]{1+x^2}}\qquad L=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(x+1)^3}-1}{x}$$

២. កំណត់តម្លៃ a និង b ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax-6}{2x^2+3x-2}=b$

៣. កំណត់ចំនួនថេរ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}=b$

៤.២. លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

ដើម្បីគណនា $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ ដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេនៅ ភាគយក និង ភាគបែងជាកត្តារួមសិនហើយ សម្រួលកត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

☞ ចំណាំ : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{k}{x^n}=\infty$, $n\in\mathbb{N}$, k ជាចំនួនពិតថេរ

លំហាត់គំរូ : គណនា $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^3-2x^2+5}{4-3x-2x^2+2x^3}$ $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

ដំណោះស្រាយ

$$A=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3-2x^2+5}{4-3x-2x^2+2x^3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(5-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}+2\right)}$$

$$=\frac{5-0+0}{0-0-0+2}=\frac{5}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{A=\frac{5}{2}}$

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\sqrt{\frac{x}{x^2}}\right)}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{x}}$$

$$=\sqrt{1+\sqrt{0}}=1$$

ដូច្នេះ $\boxed{B=1}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}\qquad B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x^4}$$

$$C=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}\qquad D=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}$$

$$E=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{2+x^2+x^4}}{\sqrt[3]{5+27x^3}}\qquad F=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

៤.៣ លីមីតមានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

> ➢ ដើម្បីគណនាលីមីតមានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេជាកត្តារួម ហើយគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។
>
> ➢ បើកន្សោមដែលត្រូវគណនាលីមីតមានជាប់ទាក់ទងនឹងរ៉ាឌីកាល់ គេត្រូវ គុណ និង ចែក កន្សោមនោះ ជាមួយនឹងកន្សោមឆ្លាស់ ឬ កន្សោមបំពេញរបស់វា។

លំហាត់គំរូ : គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$A=\lim_{x\to+\infty}(x^4-3x^2-2x+1)\qquad B=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2}+x+1)$$

$$C=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2}-x+1)\qquad D=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$$

ដំណោះស្រាយ

$$A=\lim_{x\to+\infty}(x^4-3x^2-2x+1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^4\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)$$

$$=+\infty\times1=+\infty$$

ដូច្នេះ $\boxed{A=+\infty}$

$$B=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2}+x+1)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{[\sqrt{x^2+2}+(x+1)][(\sqrt{x^2+2}-(x+1)]}{\sqrt{x^2+2}-(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}-x(1+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-x(1+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x(2-\frac{1}{x})}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{2-0}{\sqrt{1+0}+1+0}=1$$

ដូច្នេះ $\boxed{B=1}$

$$C=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2}-x+1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+2}-(x-1)\right]\left[\sqrt{x^2+2}+(x-1)\right]}{\sqrt{x^2+2}+(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-(x^2-2x+1)}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}+x(1-\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x(1-\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{2-0}{\sqrt{1+0}+1-0}=1$$

ដូច្នេះ $\boxed{C=1}$

$$D=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0}}+1}=\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{D=\frac{1}{2}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \qquad B=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$C=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x \qquad D=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+6x-1}-\sqrt{2x+1}\right)$$

$$E=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right) \qquad F=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)$$

$$G=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+5x^2}-\sqrt[3]{x^3+8x}\right)$$

$$H=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$$

៥. លីមីតនៃអនុគមន៍មិនពីជគណិត

៥.១ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot a=a$
- $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin ax}=\frac{1}{a}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^n ax}{x^n}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^n\cdot a^n=a^n\ ,\ n\in\mathbb{N}$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x}=0$

លំហាត់គំរូ : គណនាលីមីត

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+5x^2}{1-\cos 2x}$$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$$

ដំណោះស្រាយ

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+5x^2}{1-\cos 2x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+5x^2}{2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2\sin^2 x}+\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{2\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\cdot 1^2=3$$

ដូច្នេះ $\boxed{A=3}$

$$B=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin5x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\sin5x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+4-4}{\sin5x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin5x}\times\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$
$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$$

ដូច្នេះ $\boxed{B=\frac{1}{20}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim_{x\to0}\frac{\sin2x+\sin3x}{x^2+x}$

ខ. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{\sin^2x}$

គ. $\lim_{x\to0}\frac{\cos6x-\cos x}{\sin^2x}$

ឃ. $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

ង. $\lim_{t\to\pi}\frac{\sin(\sin t)}{\sin t}$

ច. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}$

ឆ. $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{1-\cos^4x}$

ជ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{2\cos x}-1}{2\cos2x+1}$

ឈ. $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin3x}{\sin5x-2x}$

ញ. $\lim_{x\to2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{2-x}$

៥.២ លីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
- $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$
- $\lim_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x\to0} [1+u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[1+\frac{1}{u(x)}\right]^{u(x)} = e$ បើ $\lim_{x\to0} u(x) = 0$

ចំណាំ :
- $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

លំហាត់គំរូទី១: គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$A = \lim_{x\to-\infty} (e^{-x} - 5)$ $\quad B = \lim_{x\to+\infty} (e^{-x} - 5)$

$C = \lim_{x\to+\infty} (e^x - 7x + 6)$ $\quad D = \lim_{x\to-\infty} (2e^x - x^2 + 1)$

ដំណោះស្រាយ:

$A = \lim_{x\to-\infty} (e^{-x} - 5) = +\infty$ (ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$)

$B = \lim_{x\to+\infty} (e^{-x} - 5) = 0 - 5 = -5$

$C = \lim_{x\to+\infty} (e^x - 7x + 6)$

$= \lim_{x\to+\infty} e^x \left(1 - 7\cdot\frac{x}{e^x} + \frac{6}{e^x}\right) = +\infty$ (ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = 0$)

$D=\lim_{x\to-\infty}(2e^x-x^2+1)$

$=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{2e^x}{x}-1+\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$ (ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x}{x^2}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$)

លំហាត់គំរូទី២: គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}$ $\qquad B=\lim_{x\to+\infty}(x-2+xe^x)$

$C=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x+2}{x^2-1}\right)$ $\qquad D=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+e^{2x}}{x^2+e^x}\right)$

ដំណោះស្រាយ

$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x(1-e^{-x})}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$

$=\frac{0}{1-0}=\boxed{0}$

$B=\lim_{x\to+\infty}(x-2+xe^x)$

$=\lim_{x\to+\infty}xe^x\left(\frac{1}{e^x}-\frac{2}{xe^x}+1\right)=\boxed{+\infty}$

(ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=0$)

$C=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x+2}{x^2-1}\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{2}{xe^x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\boxed{+\infty}$ (ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x^2}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{xe^x}=0$)

$$D=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+e^{2x}}{x^2+e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x+e^{2x}}{x^2}}{\dfrac{x^2+e^x}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{e^{2x}}{x^2}}{1+\dfrac{e^x}{x^2}}=\frac{0+0}{1+0}=\boxed{0}$$

លំហាត់គំរូទី៣ : គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$$A=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+\sin2x-1}{x}\qquad B=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$$

$$C=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\qquad D=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{4}\sin x\right)^{\frac{1}{\sin2x}}$$

ដំណោះស្រាយ

$$A=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+\sin2x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}\cdot\frac{\sin2x}{x}=2\cdot2=4$$

ដូច្នេះ $\boxed{A=4}$

$$B=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1+1-e^{-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{x}\right)=1-(-1)=2$$

ដូច្នេះ $\boxed{B=2}$

$$C=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

ដូច្នេះ $\boxed{C=\frac{1}{e}}$

$$D=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{4}\sin x\right)^{\frac{1}{\sin 2x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{4}\right)^{\frac{1}{2\sin x\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{4}\right)^{\frac{1}{\frac{\sin x}{4}}\times\frac{1}{8\cos x}}$$

$$=\left[\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{4}\right)^{\frac{1}{\frac{\sin x}{4}}}\right]^{\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{8\cos x}\right)}=e^{\frac{1}{8}}$$

ដូច្នេះ $\boxed{D=e^{\frac{1}{8}}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$A=\lim_{x\to\pm\infty}(x^2+xe^x)$ $\qquad$ $B=\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^x$

$C=\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}$ $\qquad$ $D=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{2e^x+1}$

$E=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{e^x+xe^{2x}+1}\right)$ $\qquad$ $F=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x+2}-xe^{-x}+3}{x^{2012}e^{-5x}+1}\right)$

$G=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}-2x^2e^{-x}+x^3\right)$ $\qquad$ $H=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3e^x+xe^{-3x}-x^5\right)$

២. គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-e^{3x}}{x}\qquad B=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{e^x+x-1}$$

$$C=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-2x}+e^{-3x}-e^{4x}+x}{x^2+x}$$

$$D=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{-3x+2}-e^2)\sin(\pi x)}{4x^2}$$

$$E=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}\qquad F=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$$

$$G=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}\qquad H=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+5}$$

៥.៣. លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$, $(n>0)$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\ln x=0$, $(n>0)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln x}=+\infty$, $(n>0)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}=1$
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$
- $\lim\limits_{x\to a}\left[\ln u(x)\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to a}u(x)\right]$

ចំណាំ:
- $\ln x^n=n\ln x$
- $e^{\ln x}=\ln e^x=x$
- $x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$
- $\left[u(x)\right]^{v(x)}=e^{\ln[u(x)]^{v(x)}}=e^{v(x)\cdot\ln u(x)}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left[u(x)\right]^{v(x)}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln[u(x)]^{v(x)}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{v(x)\cdot\ln u(x)}$

លំហាត់គំរូទី១ : គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$$A=\lim_{x\to+\infty} x^2\ln(x^2+1)+x \qquad B=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)$$

$$C=\lim_{x\to 0}(x^2+x+3+\ln x) \qquad D=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{x}$$

ដំណោះស្រាយ

$$A=\lim_{x\to+\infty} x^2\ln(x^2+1)+x=(+\infty)\cdot(+\infty)+\infty=\boxed{+\infty}$$

$$B=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)=0-(+\infty)=\boxed{-\infty}$$

$$C=\lim_{x\to 0}(x^2+x+3+\ln x)=0+0+3-\infty=\boxed{-\infty}$$

$$D=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)=0+0=\boxed{0}$$

លំហាត់គំរូទី២ : គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$$A=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad B=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]$$

$$C=\lim_{x\to 0}x^x \qquad D=\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$$

ដំណោះស្រាយ

$$A=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\ln x-\ln(x+1)\right]=-\infty-0=\boxed{-\infty}$$

$$B=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=-\infty+0=\boxed{-\infty}$$

$$C=\lim_{x\to 0}x^x=\lim_{x\to 0}e^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0}e^{x\ln x}=e^0=\boxed{1}$$

$$D=\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\ln e=\boxed{1}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2+x\ln x}{x^2}\qquad B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}+1}$$

$$C=\lim_{x\to0}\left(x^3\ln x+1\right)\qquad D=\lim_{x\to+\infty}x^{-2}\ln x$$

$$E=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\ln x+1}{x^2}\qquad F=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

$$G=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x+1}}{\ln x+1}\qquad H=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$$

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\ln x}{3x^2-1}\qquad J=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+3}{2x^2+1}$$

$$K=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+x}}\qquad L=\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{3}{2}}-\ln x+x\right)$$

$$M=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2x+1}{x^2+x+1}\qquad N=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3x}{(x+1)^2}$$

២. គណនាលីមីតខាងក្រោម :

$$P=\lim_{x\to0}\frac{\ln x+\sin x}{x}\qquad Q=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\ln(x+1)}$$

$$R=\lim_{x\to0}\frac{8^x-7^x}{6^x-5^x}\qquad S=\lim_{x\to0}\frac{x^x-1}{x\ln x}$$

$$T=\lim_{n\to+\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\ ,\ (a>1)\qquad U=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\tan x}$$

$$V=\lim_{x\to a}\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}\qquad W=\lim_{x\to 3}\frac{3\ln x-x\ln 3}{x-3}$$

$$X=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x+\cos 2x-2}{\ln(1+x)}\qquad Y=\lim_{x\to 0}\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x+1}$$

$$Z=\lim_{x\to 0}x^{x^x}$$

លំហាត់

I. គណនាលីមីតខាងក្រោមៈ

$$A=\lim_{x\to 1}(x^3-2x^2+3x-3)\qquad B=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$$

$$C=\lim_{x\to 3}\frac{4x-5}{5x-1}\qquad D=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$E=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+(m-1)x+3-3m}{x^2-2x-3}\qquad F=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}$$

$$G=\lim_{x\to +\infty}\frac{3e^x+1}{5e^x+2}\qquad H=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}\qquad J=\lim_{x\to 2}\frac{x\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{x-2}$$

$$K=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{4}{1-\sqrt{x}}-\frac{1}{1-x}\right)\qquad L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x+x\sin 10x}{\sin 5x-x\sin 10x}\right)$$

$$M=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2e^x-x}{1+e^x}\right)\qquad N=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sqrt{1+\cos x}}{\frac{\pi}{2}-x}\right)$$

$$O=\lim_{x\to -1}\left(\frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2}\right)\qquad P=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{(e^x+2)(e^x-1)}\right)$$

$$Q=\lim_{x\to 2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{2-x}\qquad R=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin 2x}$$

$S=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+5}$ $T=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+e^{x}-1}{x^{2}+x}$

$U=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+2}{x+1}$ $V=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1}$

$W=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}}{x}-\frac{1}{x}+\frac{\sin 2x}{x}\right)$ $X=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\ln x+1}{x^{2}}$

$Y=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{\sin 5x-2x}$ $Z=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{x}}{x-3}$

II. គណនាលីមីតខាងក្រោម:

$A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2}+\ln x}{3x^{2}-1}$ $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{3}-e^{x}}{2e^{x}+3x+1}$

$C=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{-3x+2}-e^{2})\sin(\pi x)}{4x^{2}}$ $D=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{2\cos x}-1}{2\cos 2x+1}$

$E=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(a+x)^{3}}-\frac{1}{a^{3}}}{x}$ $F=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5-2x}{x+3\ln x}$

$G=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2e^{x}-2)(1-\cos 2x)}{x^{3}}$ $H=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

$I=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}$ $J=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^{2}+2x+1}}$

$K=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{2}x}{1-\cos^{4}x}$ $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{2}\left(1+\cos\frac{1}{x}\right)\right)$

$M=\lim\limits_{t\to\pi}\frac{\sin(\sin t)}{\sin t}$ $N=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^{2}-1}$

$O=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2012x}-e^{-2014x}-2013x}{\sin x}$ $P=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\ln x+x^{2012}}{x^{2013}}$

$Q=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x^{2}+1}}{1-\cos x}$ $R=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\tan 2x\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$

$$S=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right] \quad T=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\cos x\right)\cdot\frac{1}{x-\frac{\pi}{3}}$$

$$U=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{2x^2+1}}{1-\cos 2x} \qquad V=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x^3}$$

$$X=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+2013x}{\sqrt{x^2+2012}} \qquad Y=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

III. គណនាលីមីតខាងក្រោម :

១) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$ $\quad Ans=4$

២) $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2+2x+1}$ $\quad Ans=\infty$

៣) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4}$ $\quad Ans=-\frac{8}{3}$

៤) $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3+12x^2+x+4}{6x^3+2x^2-7x-2}$ $\quad Ans=\frac{4}{3}$

៥) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{3x^3+4}$ $\quad Ans=\frac{1}{3}$

៦) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+5}{2x^3+2x-3}$ $\quad Ans=0$

៧) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x^2-x+5}$ $\quad Ans=3$

IV. ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម

១) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^4+4}-x)$ $\quad Ans=0$

២) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x})$ $\quad Ans=-1$

៣) $\lim_{x\to+\infty}\{x[\ln(x+1)-\ln x]\}$ $\quad Ans=1$

៤) $\lim_{x\to+\infty}[\log_a(x+1)-\log_a x]$ $\quad Ans=0$

៥) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+10x)}{x}$ $\quad Ans = 10\log e$

៦) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\log_2 x+\log_2 \sin\dfrac{2}{x}\right)$ $\quad Ans = 1$

V. ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម :

១) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-(x+1)}{x-1}$ $\quad Ans = -\dfrac{3}{4}$

២) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-x^2+x-1}{3x^2-2x+1}$ $\quad Ans = -\dfrac{1}{3}$

៣) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ $\quad Ans = -1$

៤) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$ $\quad Ans = 0$

៥) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^9-3x+2}{x^6+5x-6}$ $\quad Ans = \dfrac{6}{11}$

៦) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$ $\quad Ans = -1$

៧) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$ $\quad Ans = -\dfrac{1}{4}$

៨) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\log_2\left|x^2-3x+2\right|-\log_2\left|x^2-4x+3\right|\right]$ $\quad Ans = -1$

VI. គណនាលីមីតខាងក្រោម :

១) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ $\quad Ans = -1$

២) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}\right)$ $\quad Ans = +\infty$

៣) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-x\right)$ $\quad Ans = 0$

៤) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{x}\right]$ $\quad Ans = -1$

VII. គណនាលីមីតខាងក្រោម :

១) $\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-3x^2+2x-2}{(x-1)^3}$ $Ans=+\infty$

២) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2+2x-8}{x-2}$ $Ans=10$

៣) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x-12}{x-3}$ $Ans=22$

៤) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3-1}$ $Ans=3$

៥) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-8x+7}$ $Ans=0$

៦) $\lim_{x\to -3}\frac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$ $Ans=-\frac{36}{5}$

VIII. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

១) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ $Ans=\frac{1}{2}$

២) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2}}$ $Ans=\frac{\sqrt{2}}{2}$

៣) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$ $Ans=2$

៤) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$ $Ans=\frac{1}{4}$

៥) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $Ans=\frac{1}{2}$

៦) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ $Ans=4$

៧) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$ $Ans=-1$

៨) $\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ $Ans=\frac{9}{8}$

៩) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ $Ans=3$

១0) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}$ $Ans=\frac{\sqrt{a}}{2a}$

១១) $\lim_{x\to a}\frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ $Ans=3a$

IX. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

១) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ $Ans=\frac{2}{3}$

២) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ $Ans=\frac{1}{3}$

៣) $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}$ $Ans=\frac{9}{4}$

៤) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{3x-4}-2}{\sqrt{4x+9}-5}$ $Ans=\frac{5}{8}$

៥) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}+x^2-\sqrt[3]{1-x}+x^2}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ $Ans=\frac{2}{3}$

X. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

១) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{2p}-1}{x^{2q}-1}$, $p,q\in\mathbb{N}$ $Ans=\frac{p}{q}$

២) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[p]{x}-1}{\sqrt[q]{x}-1}$ $Ans=\frac{q}{p}$

៣) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[p]{1+ax}-1}{x}$ $Ans=\frac{a}{p}$

៤) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[p]{1+ax}-\sqrt[q]{1+bx}}{x}$ $Ans=\frac{aq-bp}{pq}$

៥) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[4]{1+3x}}{x}$ $Ans=-\dfrac{1}{12}$

៦) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}}{x^2}$ $Ans=\dfrac{7}{12}$

XI. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

១) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ $Ans=0$

២) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ $Ans=\dfrac{3}{5}$

៣) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ $Ans=\dfrac{1}{6}$

៤) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x+2}-1}{x-2}$ $Ans=\dfrac{13}{12}$

៥) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x^3+1}}$

$Ans=\dfrac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2\sqrt{2}+1}}{\sqrt{6}}$

៦) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}$ $Ans=-\dfrac{4}{5}$

XII. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

១) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$ $Ans=0$

២) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ $Ans=-\dfrac{1}{2}$

៣) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$ $Ans=-\dfrac{1}{2}$

៤) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$ $Ans=0$

៥) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$ $Ans=\dfrac{1}{4}$

៦) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ $Ans=0$

៧) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$ $Ans=+\infty$

៨) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^2-4x}\right)$ $Ans=0$

៩) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ $Ans=\begin{cases}+\infty & \text{បើ } x\to-\infty\\ \dfrac{1}{2} & \text{បើ } x\to+\infty\end{cases}$

១០) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x\right)$ $Ans=\begin{cases}-\infty & \text{បើ } x\to+\infty\\ +\infty & \text{បើ } x\to-\infty\end{cases}$

១១) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+3}$ $Ans=\begin{cases}0 & \text{បើ } x\to+\infty\\ -2 & \text{បើ } x\to-\infty\end{cases}$

១២) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2+2x}\right)$

$Ans=\begin{cases}-\infty\text{បើ}x\to+\infty\\ +\infty\text{បើ}x\to-\infty\end{cases}$

XIII. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

១) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+1}}$ $Ans=\begin{cases}-1 & \text{បើ } x\to-1^-\\ 1 & \text{បើ } x\to-1^+\end{cases}$

២) $\lim\limits_{x\to0}x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ $Ans=\begin{cases}-1 & \text{បើ}x\to0^-\\ 1 & \text{បើ}x\to0^+\end{cases}$

៣) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+|x|+x}{x^2-|x|+3x}$ $Ans=\begin{cases}0 & \text{បើ } x\to0^-\\ 1 & \text{បើ } x\to0^+\end{cases}$

XIV. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

១) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ $Ans=\frac{1}{2}$

២) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}$ $Ans=1$

៣) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x+1}$ $Ans=0$

៤) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x+\sqrt{2x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{5}x-7}}$ $Ans=\sqrt{15}$

៥) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+3x}{2\sqrt{x}-4x}$ $Ans=-\frac{3}{4}$

XV. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

១) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}-\frac{2}{n}+3$ $Ans=3$

២) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ $Ans=1$

៣) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$ $Ans=\frac{4}{3}$

៤) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$ $Ans=\frac{1}{3}$

៥) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4}\right)$ $Ans=\frac{1}{2}$

XVI. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

១) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$ $Ans=e^{3}$

២) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+1}$ $Ans=e^{2}$

៣) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{2x+1}$ $Ans=e^{3}$

៤) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{x}$ $Ans=e^{-5}$

XVII. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម :

១) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\cos x}{x}$ $Ans=1$

២) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$ $Ans=\frac{3}{4}$

៣) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan mx}{\tan nx}$ $Ans=\frac{m}{n}$

៤) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}$ $Ans=5$

៥) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin 3x}$ $Ans=\frac{1}{3}$

៦) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$ $Ans=0$

៧) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}$ $Ans=\frac{1}{2}$

៨) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos\left(\frac{x}{4}\right)}{x^{2}}$ $Ans=\frac{1}{32}$

៩) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^{2}x}{1+\cos x}$ $Ans=2$

១០) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{\sin 3x}$ $Ans=0$

១១) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+1-\cos x}{x}$ $\quad Ans=1$

១២) $\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ $\quad Ans=\begin{cases}\sqrt{2} & if \quad x\to0^+\\ -\sqrt{2} & if \quad x\to0^-\end{cases}$

១៣) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ $\quad Ans=\frac{1}{2}$

១៤) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}$ $\quad Ans=-1$

១៥) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\tan^2 x$ $\quad Ans=\frac{1}{2}$

១៦) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\tan x$ $\quad Ans=\frac{\sqrt{2}}{2}$

១៧) $\lim_{x\to\pi}(1+\cos x)\tan\frac{x}{2}$ $\quad Ans=0$

១៨) $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\tan^2 x$ $\quad Ans=\frac{1}{2}$

១៩) $\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ $\quad Ans=0$

២០) $\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{2(1-\cos x)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]$ $\quad Ans=-\frac{1}{4}$

២១) $\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x-2(1-\cos x)}{5x^2}$ $\quad Ans=\frac{1}{5}$

២២) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{2x\cdot\tan 2x}$ $\quad Ans=2$

២៣) $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}$ $\quad Ans=2$

២៤) $\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ $\quad Ans=+\infty$

២៥) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x}{2x-3\sin 2x}$ $Ans=-\dfrac{3}{2}$

២៦) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}+3\right)$ $Ans=\sqrt{2}+3$

២៧) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$ $Ans=\dfrac{a^2}{2}$

២៨) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x}$ $Ans=\dfrac{b^2-a^2}{2}$

២៨) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{\tan^3 x}$ $Ans=\dfrac{1}{2}$

២៩) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}$ $Ans=\infty$

៣០) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ $Ans=2$

៣១) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\tan x-\cot x}$ $Ans=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

៣២) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\tan^3 x}$ $Ans=+\infty$

៣៣) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ $Ans=-2$

៣៤) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$ $Ans=-1$

៣៥) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$ $Ans=-1$

៣៦) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{2\cos x}-1}{2\cos 2x+1}$ $Ans=\dfrac{1}{4}$

៣៧) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$ $Ans=\dfrac{1}{2}$

៣៨) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right)$ $Ans=1$

៣៩) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ $Ans=0$

៤០) $\lim_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$ $Ans=0$

៤១) $\lim_{x\to 0}x\left(\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$ $Ans=-1$

៤២) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)\sin x}{(x^2+2)}$ $Ans=0$

៤៣) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin 5x+\sin 3x}$ $Ans=0$

៤៤) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\cot x}$ $Ans=-1$

៤៥) $\lim_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\tan x-\tan a}$ $Ans=\cos^3 a$

៤៥) $\lim_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{\cos x-\cos a}$ $Ans=-\dfrac{1}{\cos^2 a\cdot\sin a}$

៤៦) $\lim_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{\sin x-\sin a}$ $Ans=-\tan a$

៤៧) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{\tan x-1}$ $Ans=\dfrac{1}{2}$

៤៨) $\lim_{x\to\pi}\dfrac{\tan x}{\sin x}$ $Ans=\dfrac{1}{2}$

៤៩) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$ $Ans=1$

៥០) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$ $Ans=-\dfrac{2}{3}$

៥១) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}$ $\quad Ans = \dfrac{1}{8}$

៥២) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cot x}{x-\frac{\pi}{2}}$ $\quad Ans = -1$

៥៣) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin 2x}{x-\frac{\pi}{3}}$ $\quad Ans = -2$

៥៤) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$ $\quad Ans = -\sqrt{3}$

៥៥) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\cos\frac{\pi}{4}-\cos x}$ $\quad Ans = -2\sqrt{2}$

៥៦) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ $\quad Ans = \dfrac{2}{\pi}$

៥៧) $\lim\limits_{x\to \pi}\tan x\cdot\tan\dfrac{x}{2}$ $\quad Ans = -2$

៥៨) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\sin 2x)\tan 2x$ $\quad Ans = 0$

៥៩) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\sin 2x)\dfrac{\tan 2x}{\tan 4x}$ $\quad Ans = -\dfrac{1}{4}$

៦០) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos 2x\cdot\tan 6x$ $\quad Ans = \dfrac{1}{3}$

៦១) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$ $\quad Ans = 2$

៦២) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\tan\dfrac{\pi}{x}$ $\quad Ans = \dfrac{4}{\pi}$

៦៣) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(4x\tan 2x-\dfrac{\pi}{\cos 2x}\right)$ $\quad Ans = -2$

៦៤) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$ $Ans=-1$

៦៥) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\tan x-\cot x}$ $Ans=\frac{\sqrt{2}}{4}$

៦៦) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}$ $Ans=\frac{1}{4}$

៦៧) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\sin x}$ $Ans=\frac{1}{2}$

៦៨) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ $Ans=\frac{1}{4}$

៦៩) $\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$ $Ans=\pi$

៧០) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{2(\frac{1}{2}-\cos x)}$ $Ans=\sqrt{3}$

៧១) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\pi x}{x-1}$ $Ans=0$

៧២) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ $Ans=-2$

មេរៀនទី ២

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១. ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច

អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = x_0$ កាលណាបំពេញលក្ខខណ្ឌ :

១. f កំណត់ចំពោះ $x = x_0$ ($f(x_0) = \ell$ ជាចំនួនកំណត់)

២. f មានលីមីតកាលណា $x \to x_0$ ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$)

៣. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \ell$ ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} = f(x_0)$)

សម្គាល់:

បើ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ នោះ គេថា f ជាប់ខាងឆ្វេង $x = x_0$

បើ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ នោះ គេថា f ជាប់ខាងស្តាំ $x = x_0$

បើ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ នោះគេថា f គ្មានលីមីតត្រង់ $x = x_0$

បើ $y = f(x)$ មិនជាប់ត្រង់ $x = x_0$ នោះ គេថា f ដាច់ត្រង់ $x = x_0$

លំហាត់គំរូទី១: គេឱ្យ $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{បើ } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + x & \text{បើ } x < 0 \end{cases}$ ។ សិក្សាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{បើ } x\geq 0\\ \frac{1}{2}x^2+x & \text{បើ } x<0\end{cases}$ ត្រង់ $x=0$ គេបាន :

- $f(0)=\sin 0=0$ នោះ f កំណត់ចំពោះ $x=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{1}{2}x^2+x)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$

ដូច្នេះ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

លំហាត់គំរូទី២: គេឱ្យ $f(x)=\begin{cases}3+x & \text{បើ } x\leq 1\\ 3-x & \text{បើ } 1<x\end{cases}$ ។ សិក្សាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x)=\begin{cases}3+x & \text{បើ } x\leq 1\\ 3-x & \text{បើ } 1<x\end{cases}$ ចំពោះ $x=1$ គេបាន :

- $f(1)=3+1=4$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3+x)=3+1=4$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)=3-1=2$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ នោះ f គ្មានលីមីតត្រង់ $x\to 1$

ដូច្នេះ f មិនជាប់(ដាច់)ត្រង់ $x=1$ ទេ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{បើ } x\geq -1 \\ 2x+5 & \text{បើ } x<-1 \end{cases}$

សិក្សាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=-1$ ។

២. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{បើ } x\neq 1 \\ 3 & \text{បើ } x=1 \end{cases}$ ។

បង្ហាញថា f ជាប់ត្រង់ $x=1$ ។

៣. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{បើ } x\neq 0 \\ 1 & \text{បើ } x=0 \end{cases}$ ។

សិក្សាភាពជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

២. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់

បើអនុគមន៍ f និង g ជាប់ត្រង់ $x=x_0$ នោះគេបាន

១. $f(x)+g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=x_0$

២. $f(x)-g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=x_0$

៣. $f(x)\cdot g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=x_0$

៤. $kf(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=x_0$ (ដែល k ជាចំនួនថេរ)

៥. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាប់ត្រង់ $x=x_0$ ដែល $g(x_0)\neq 0$ ។

លក្ខណៈភាពជាប់នៃអនុគមន៍ :

១. អនុគមន៍ ពហុធា $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n$ ដែល a_0,a_1 $a_2,...,a_n$ ជាចំនួនថេរ និង $a_0\neq 0$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។

២. អនុគមន៍សនិទាន $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ដែល $Q(x)\neq 0$

៣. អនុគមន៍ $f(x)=\sqrt[2n]{g(x)}$ ជាប់គ្រប់ x ដែល $g(x)\geq 0$

៤. អនុគមន៍ $f(x)=\sqrt[2n+1]{g(x)}$ ជាប់គ្រប់ x ដែល $g(x)$ ជាចំនួនពិត ។

៥. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ $y=\sin x$, $y=\cos x$ ជាប់ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$

៦. អនុគមន៍ $y=\tan x$ ជាប់គ្រប់ $x\neq\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

៧. អនុគមន៍ $y=\cot x$ ជាប់គ្រប់ $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

លំហាត់គំរូទី១ : កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ ។

ក. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ខ. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ គ. $f(x)=\left|x^2-1\right|$

ឃ. $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x-2}}$ ង. $f(x)=\cos 2x+2\sin x$ ច. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-81}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

អនុគមន៍ f ជាប់កាលណា $1-x^2\geq 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ដូច្នេះ $x\in[-1\,,1]$

ខ. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

អនុគមន៍ f ជាប់កាលណា $x^2-9\geq 0$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដូច្នេះ $x\in(-\infty\,,-3]\cup[3\,,+\infty)$

គ. $f(x)=\left|x^2-1\right|$ ជាប់គ្រប់ចំនួនពិត x $(x\in\mathbb{R}$ ឬ $x\in(-\infty\,,+\infty)$ $)$

ឃ. $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x-2}}$

អនុគមន៍ f ជាប់កាលណា $\dfrac{2x}{x-2}\geq 0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\dfrac{2x}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

ដូច្នេះ $x\in(-\infty\,,0]\cup(2\,,+\infty)$

ង. $f(x)=\cos 2x+2\sin x$ ជាប់គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ច. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-81}$ ជាប់គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

លំហាត់គំរូទី២:បង្ហាញថា $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{បើ } x\leq 1\\ 3 & \text{បើ } x>1\end{cases}$ ជាប់គ្រប់ចំនួនពិត x (ជាប់លើ $\mathbb{R}$)

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{បើ } x\leq 1\\ 3 & \text{បើ } x>1\end{cases}$

ដោយ $f(x)=2x+1$ ជាប់ $\forall x\in(-\infty,1)$ និង $f(x)=3$ ជាប់ $\forall x\in(1,+\infty)$

នោះ f ជាប់គ្រប់ចំនួនពិតកាលណា f ជាប់ត្រង់ $x=1$ ។

- $f(1)=2\cdot1+1=3$
- $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(2x+1)=2\cdot1+1=3$
- $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}3=3$

ដោយ $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow f$ ជាប់ត្រង់ $x=1$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់ចំនួនពិត x ។

លំហាត់គំរូទី៣ : កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ :

$$f(x)=\begin{cases}-x+a & \text{បើ } x<0\\ x^2-1 & \text{បើ } x\ge 0\end{cases}$$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x)=\begin{cases}-x+a & \text{បើ } x<0\\ x^2-1 & \text{បើ } x\ge 0\end{cases}$

- $f(0)=0^2-1=-1$
- $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(-x+a)=a$
- $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2-1)=0-1=-1$

អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ កាលណា $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

$$\Leftrightarrow\ a=-1$$

ដូច្នេះ $\boxed{a=-1}$

លំហាត់គំរូទី៤ : រកតម្លៃ A និង B ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ដែលកំណត់

ដោយ : $\begin{cases}Ax^2+5x-9 & \text{បើ } x<1\\ B & \text{បើ } x=1\\ (3-x)(A-2x) & \text{បើ } x>1\end{cases}$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\begin{cases} Ax^2+5x-9 & \text{បើ } x<1 \\ B & \text{បើ } x=1 \\ (3-x)(A-2x) & \text{បើ } x>1 \end{cases}$

- $f(1)=B$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(Ax^2+5x-9)=A+5-9=A-4$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)(A-2x)=(3-1)(A-2)=2A-4$

អនុគមន៍ f ជាប់គ្រប់តម្លៃ x កាលណា f ជាប់ត្រង់ $x=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$\Leftrightarrow A-4=2A-4=B$

- $A-4=2A-4 \Rightarrow A=0 \Rightarrow B=-4$

ដូច្នេះ $\boxed{A=0\ ,\ B=-4}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{បើ } x\ge 2 \\ 3x+a & \text{បើ } x<2 \end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

២. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{បើ } x\le 2 \\ kx+6 & \text{បើ } x>2 \end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

៣. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} 9-2x & \text{បើ } x\le 3 \\ x^2+m & \text{បើ } x>3 \end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=3$ ។

៤. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}3x+7 & \text{បើ } x\le 4\\ ax-1 & \text{បើ } 4<x\end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

៥. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}x & \text{បើ } x\le 1\\ ax+b & \text{បើ } 1<x<4\\ -2x & \text{បើ } x\ge 4\end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

៣. ភាពជាប់លើចន្លោះ

- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(a\,,b)$ លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់ តម្លៃ x នៃចន្លោះបើកនោះ ។
- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a\,,b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(a\,,b)$ និងមានលីមីត $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ និង $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ ។
  (អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ a ខាងស្ដាំ និង ជាប់ត្រង់ b ខាងឆ្វេង)

លំហាត់គំរូ : សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោមលើចន្លោះដែលឱ្យ :

ក. $f(x)=\dfrac{x-3}{4+x}$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[-4\,,1]$ ។

ខ. $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ លើចន្លោះ $(0\,,1)$ និង $[0\,,1]$ ។

គ. $f(x)=\begin{cases}x(x-1) & \text{បើ } x\le 3\\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x>3\end{cases}$ លើចន្លោះ $(0\,,3)$ និង $[0\,,3]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\dfrac{x-3}{4+x}$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[-4\,,1]$

អនុគមន៍ f ជាប់កាលណា $4+x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -4$

នោះ f ជាប់លើចន្លោះ $I=(-\infty\,,-4)\cup(-4\,,+\infty)$

ដោយ $(0\,,1)\in I$ ដូច្នេះ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(0\,,1)$

ចំពោះចន្លោះបិទ $[-4\,,1]$

តាមសម្រាយខាងលើ គេបាន f ជាប់លើចន្លោះបើក $(-4\,,1)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x-3}{x+4}=-\infty$ មិនកំណត់

ដូច្នេះ f មិនជាប់លើចន្លោះបិទ $[-4\,,1]$ទេ ។

ខ. $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ លើចន្លោះ $(0\,,1)$ និង $[0\,,1]$

អនុគមន៍ f ជាប់កាលណា $x\neq 0$

នោះ f ជាប់លើ $I=(-\infty\,,0)\cup(0\,,+\infty)$

ដូច្នេះ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(0\,,1)$

ចំពោះចន្លោះបិទ $[0\,,1]$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right]=+\infty$ មិនកំណត់

ដូច្នេះ f មិនជាប់លើចន្លោះបិទ $[0\,,1]$ទេ ។

គ. $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & \text{បើ } x\le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x>3 \end{cases}$ លើចន្លោះ $(0\,,3)$ និង $[0\,,3]$

តាមសម្បត្តិកម្មខាងលើគេបាន f ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty,3)\cup(3\,,+\infty)$

ដូច្នេះ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(0\,,3)$

ចំពោះចន្លោះបិទ $[0\,,3]$

ដោយ f ជាប់លើចន្លោះ $(-\infty,3)\cup(3\,,+\infty)$

នោះ f ជាប់លើ $[0\,,3]$ កាលណា f ជាប់ត្រង់ $x=3$

គេមាន $f(3)=3(3-1)=6$

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x(x-1)=6$ និង

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=3$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=6$ នោះ f ជាប់ត្រង់ $x=3$

ដូចនេះ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[0\,,3]$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{5+x}}$ លើចន្លោះបើក $(-5\,,2)$ និង ចន្លោះបិទ $[-5\,,2]$ ។

២. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} \sin x+\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & \text{បើ } x\ne 0 \\ \sqrt{2} & \text{បើ } x=0 \end{cases}$

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ។

៤. អនុគមន៍បន្លាយភាពជាប់

បើ f មិនកំណត់ត្រង់ $x=x_0$ និងមានលីមីត $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$

(ℓ ជាចំនួនកំណត់)

នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=x_0$ កំណត់ដោយ :

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{បើ } x\neq x_0 \\ \ell & \text{បើ } x=x_0 \end{cases}$$ ។

លំហាត់គំរូ : គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ ។

តើ f អាចមានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ $x=3$ ឬទេ ? បើមាន ចូរកំណត់អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នេះ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

ត្រង់ $x=3 \Rightarrow f(3)=\dfrac{3^2-9}{3-3}=\dfrac{0}{0}$ មិនកំណត់

ហើយ $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=6$

(ជាចំនួនកំណត់)

ដូច្នេះ f មានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ $x=3$

អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f គឺ ៖

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x\neq 3 \\ 6 & \text{បើ } x=3 \end{cases}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ ។ កំណត់អនុគមន៍ g ដែលជាបន្លាយ នៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

២. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-8x+16}$ ។ តើ f មានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ $x=4$ ឬទេ ? បើមាន ចូរកំណត់អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នេះ ។

៣. តើអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-3x+4}$ មានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ $x=4$ ឬទេ ? បើមាន ចូរកំណត់អនុគមន៍បន្លាយភាពជាប់នោះ ។

៥. ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a\,,b]$ និង k ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះ មានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a\,,b]$ ដែល $f(c)=k$ ។

លំហាត់គំរូទី១ : ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(x)=x^2+x-1$ មានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $[0\,,5]$ ដែល $f(c)=11$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x)=x^2+x-1$

$$f(0)=0^2+0-1=-1,\quad f(5)=5^2+5-1=29$$

ដោយ $f(c)=11$ នោះ $-1<11<29$ ឬ $f(0)<f(c)<f(5)$

ដូច្នេះ មានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចនៅចន្លោះ $[0,5]$ ដែល $f(c)=11$

លំហាត់គំរូទី២:គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=4+3x-x^2$ ដែល $2\le x\le 5$។ ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល រកតម្លៃ c បើ $k=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x)=4+3x-x^2$

នោះ $f(2)=4+3\cdot 2-2^2=6$ និង $f(5)=4+3\cdot 5-5^2=-6$

ដោយ $k=1\in[-6\,,6]$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល មានចំនួនពិត $c\in[2\,,5]$ ដែល $f(c)=k=1$

$$\Leftrightarrow 4+3c-c^2=1$$

$$\Leftrightarrow c^2-3c-3=0$$

$$\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 3=21$$

គេបាន $c_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{2}$

ដូច្នេះ $c_1=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$, $c_2=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$

វិបាក :

- បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,b]$ ហើយបើ $f(a)\cdot f(b)<0$ នោះមាន x_0 មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $(a\,,b)$ ដែល $f(x_0)=0$ ។
- បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង ម៉ូណូតូនលើចន្លោះ $[a\,,b]$ ហើយបើ $f(a)\cdot f(b)<0$ នោះមានចំនួនពិត x_0 តែមួយគត់ដែល $f(x_0)=0$។

លំហាត់គំរូទី១ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $x^5-3x-1=0$ មានឫស មួយយ៉ាតិចក្នុងចន្លោះ $(1\,,2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(x)=x^5-3x-1$

ដោយ f ជាអនុគមន៍ជាពហុធា នោះ f កំណត់ និង ជាប់លើ $(-\infty\,,+\infty)$

នោះ f កំណត់ និង ជាប់លើចន្លោះ $[1\,,2]$

ម្យ៉ាងទៀត ៖

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^5-3\cdot1-1=-3<0 \\ f(2)=2^5-3\cdot2-1=25>0 \end{array}\right| \Rightarrow f(1)\cdot f(2)=(-3)\cdot25=-75<0$$

នោះ មាន x_0 មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $(1\,,2)$ ដែល $f(x_0)=0$

ដូច្នេះ សមីការ $x^5-3x-1=0$ មានឫសមួយយ៉ាតិចក្នុងចន្លោះ $(1\,,2)$

លំហាត់គំរូទី២ :

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a+b>2\sqrt{ab}$ ចំពោះ $a>0,b>0\,,a\neq b$

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $x^5-x-2=0$ មានឫស $x_0\in(1\,,2)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_0>\sqrt[9]{8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a+b>2\sqrt{ab}$ ចំពោះ $a>0,b>0\,,a\neq b$

ចំពោះ $a>0,b>0\,,a\neq b$ គេបាន $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2>0$

$$\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b>0$$

$$\Leftrightarrow a+b>2\sqrt{ab}$$

ដូច្នេះ $a+b>2\sqrt{ab}$ ចំពោះ $a>0,b>0\,,a\neq b$

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $x^5-x-2=0$ មានឫស $x_0\in(1\,,2)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_0>\sqrt[9]{8}$

តាង $f(x)=x^5-x-2$ ជាអនុគមន៍ពហុធា នោះ f ជាប់លើចន្លោះ $[1\,,2]$

$f(1)=1^5-1-2=-2$

$f(2)=2^5-2-2=28$

នោះ $f(1)\cdot f(2)=-2\cdot 28=-56<0$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល មាន $x_0\in(1\,,\,2)$ ដែល $f(x_0)=0$

នោះ សមីការ $x^5-x-2=0$ មានឫស $x_0\in(1\,,\,2)$

គេបាន $x_0^5-x_0-2=0$

$x_0^5=x_0+2\quad(*)$

ដោយ $2>x_0>0$ តាមសម្រាយខាងលើ គេមាន $a+b>2\sqrt{ab}$

នោះគេបាន $x_0+2>2\sqrt{2x_0}$

តាម (*) គេបាន $x_0^5>2\sqrt{2x_0}$

$\Leftrightarrow\ x_0^{10}>2^2\cdot 2x_0=8x_0$

$\Leftrightarrow\ x_0^9>8$

$\Rightarrow\ x_0>\sqrt[9]{8}$

ដូច្នេះ សមីការ $x^5-x-2=0$ មានឫស $x_0\in(1\,,\,2)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$x_0>\sqrt[9]{8}$

លំហាត់អនុវត្តន៏

១. ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបង្ហាញថា អនុគមន៏ $f(x)=x^2-6x+8$ មានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $[0\,,\,3]$ ដែល $f(c)=0$ ។

២. ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបង្ហាញថា អនុគមន៏ $f(x)=x^3-x^2+x-2$ មានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $[0\,,\,3]$ ដែល $f(c)=4$ ។

៣. ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបង្ហាញថា អនុគមន៏ $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$ មានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $\left[\dfrac{5}{2}\,,\,4\right]$ ដែល $f(c)=6$ ។

៤. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=2+x-x^2$ ដែល $x\in[0\,,3]$។
ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល រកតម្លៃ c បើ $k=1$

៥. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x^5+x^3-1=0$ មានឫសមួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $(0\,,1)$ ។

៦. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $2x^3-6x+1=0$ មានឫសមួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $(-2\,,2)$

៧. ស្រាបញ្ជាក់ថាសមីការ $2^x+3^x=6^x$ មានឫសមួយយ៉ាចតិច ។

៨. បង្ហាញថាសមីការ $4-x-2e^{-x}=0$ មានឫសតែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $[-1;0]$ ។

៩. បង្ហាញថាសមីការ $x-5+\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x}=0$ មានឫសមួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $\left[\dfrac{1}{e}\,,4\right]$ ។

លំហាត់

១. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \text{បើ } x\neq 1\\ \dfrac{1}{3} & \text{បើ } x=1\end{cases}$ ។

សិក្សាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=1$ ។

២. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}3-x^2 & \text{បើ } x>1\\ x+1 & \text{បើ } x\leq 1\end{cases}$ ។

សិក្សាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=1$ ។

៣. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{បើ } x\leq 3\\ 2x+1 & \text{បើ } x>3\end{cases}$ ។

សិក្សាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=3$ ។

៤. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{បើ } x<a\\ b & \text{បើ } x=a\\ \dfrac{x}{2} & \text{បើ } x>a\end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

៥. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 2x}{ax^2} & \text{បើ } x\neq 0\\ a & \text{បើ } x=0\end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

៦. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin \pi x}{x-1} & \text{បើ } x\neq 1\\ a & \text{បើ } x=1\end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ ។

៧. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{\sqrt{(x-1)^4}}{x-1} & \text{បើ } x\neq 1 \\ a & \text{បើ } x=1 \end{cases}$

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ ។

៨. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{បើ } x<0 \\ x^2+a & \text{បើ } x\geq 0 \end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

៩. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} & \text{បើ } 0\neq x<1 \\ a & \text{បើ } x=0 \end{cases}$

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

១០. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{2x+4}-2}{x^2-4} & \text{បើ } x>2 \\ ax^2+1 & \text{បើ } x\leq 2 \end{cases}$

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

១១. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x} & \text{បើ } x\neq 0 \\ 0 & \text{បើ } x=0 \end{cases}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

១២. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+|x|}{x} & \text{បើ } x\neq 0 \\ a & \text{បើ } x=0 \end{cases}$

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

១៣. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ ចំពោះ $x\neq 0$

និង $f(0)=\ln(m-1)$ ។

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

១៤. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\sin x}{x-\ln x} & \text{បើ } x>0\\ \ln(\sqrt{a}-1) & \text{បើ } x=0\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=0$ ។

១៥. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ:

$$f(x)=\begin{cases}x-2+\dfrac{e}{\ln x} & \text{បើ } x>0 \text{ និង } x\neq 1\\ f(0)=m\end{cases}$$ ។

គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ។ ទាញរកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ខាងស្តាំ ត្រង់ $x=0$ ។

១៦. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}(ax+1)^2 & \text{បើ } x<2\\ -ax & \text{បើ } x\geq 2\end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

១៧. គេឱ្យ f អនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$ ចំពោះ $x\neq 0$ និង $f(0)=a^2+4a+9$ ដែល a ជាចំនួនពិត ។ គណនា $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

១៨. គេឱ្យ f អនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ និង $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

១៩. រកតម្លៃ a ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1} & \text{បើ } x\neq 1\\ a & \text{បើ } x=1\end{cases}$

ជាប់ត្រង់ $x=1$ ។

២០. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}3+x & \text{បើ } x\le a\\ x^2+1 & \text{បើ } x>a\end{cases}$ ។

រកតម្លៃ a ដោយដឹងថា f ជាប់ត្រង់ $x=a$ ។

២១. គេឱ្យ f អនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1+\sin x}}{1-e^x}$ ចំពោះ $x\neq 0$

និង $f(0)=\ln a$ ។ តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

២២. គេឱ្យ g ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $g(x)=\dfrac{4030x}{\sin 2x}$ ចំពោះ $x\neq 0$

និង h ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $h(x)=\begin{cases}g(x) & \text{បើ } x\neq 0\\ m & \text{បើ } x=0\end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ h ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ g ត្រង់ $x=0$ ។

២៣. គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}$ ចំពោះ $x\neq 1$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ ។

ខ. កំណត់អនុគមន៍ f ដែលជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ g ត្រង់ $x=1$ ។

២៤. គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{2-x}$ ចំពោះ $x\neq 2$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ ។

ខ. កំណត់អនុគមន៍ f ដែលជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ g ត្រង់ $x=2$ ។

២៥. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-1+\sin \pi x}{x-1}$ បើ $x\neq 0$ និង

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{បើ} \quad x\neq 1 \\ m & \text{បើ} \quad x=1 \end{cases}$$

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ g ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=1$ ។

២៦. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{-2x}}{\sqrt{x+6}-2}$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. g ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $g(x)=\begin{cases} f(x) & , x\in D_f \\ a & , x=-2 \end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ g ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=-2$ ។

២៧. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{(1-e^x)(1-\cos 2x)\cdot\sin 3x}{x^4}$

បើ $x\neq 0$ និង $f(0)=e^{2a}-5e^a$ ។ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

២៨. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1-\cos^4 x}{1-e^{\sin^2 x}}$ ចំពោះ $x\neq 0$ ។

កំណត់អនុគមន៍ g ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$ ។

២៩. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x(e^x-1)+\sin^2 x}{1-\sqrt{\cos 2x}}$ ចំពោះ $x\neq 0$ ។ កំណត់អនុគមន៍ g ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$ ។

៣០. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{e^x-\cos x}{x+\sin x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ ។

កំណត់អនុគមន៍ g ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$ ។

៣១. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-\ell n x} & \text{បើ} \quad x>0 \\ 1+\ell n a & \text{បើ} \quad x=0 \end{cases}$ ។

កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ខាងស្ដាំត្រង់ $x=0$ ។

៣២. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sin x} & \text{បើ } x\neq 0\\ \ell na-\dfrac{1}{6} & \text{បើ } x=0\end{cases}$ ។

កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

៣៣. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$ បើ $x\neq\dfrac{\pi}{2}$ និង

$f(\dfrac{\pi}{2})=3e^{2a}+e^{a}-9$ ។ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។

៣៤. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\sin x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ ។

g ជាអនុគមន៍មួយទៀតកំណត់ដោយ $\begin{cases}g(x)=f(x) & \text{បើ } x\neq 0\\ g(0)=\ell n(m-2014)\end{cases}$ ។

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ g ជាអនគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$ ។

៣៥. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x\tan x=\cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫស ពិតមួយ នៅចន្លោះ $\left[0\,,\dfrac{\pi}{4}\right]$ ។

៣៦. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $(x^{n}-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0\,,1)$ ។

៣៧. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការខាងក្រោមមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ ដែលឱ្យ :

ក. $\sin x=x-1$, $(0,\pi)$

ខ. $20\log_{10}x-x=0$, $(0\,,10)$

៣៨. គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ មានលេខមេគុណ a,b,c បំពេញលក្ខខណ្ឌ $2a+3b+6c=0$។ បង្ហាញថា សមីការនេះមានឫសយ៉ាងតិចមួយ នៅចន្លោះ $\left[0\,,\,\frac{2}{3}\right]$

៣៩. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $m(x-1)^{2014}\cdot(x+2)^{2015}+2x+3=0$ មានឫសជានិច្ច ។

៤០. គេឱ្យសមីការ $x^4-x-2=0$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការមានឫស $x_0\in(1,2)$ ហើយ $x_0>\sqrt[7]{8}$ ។

៤១. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{បើ } x\neq 2\\ ax+\dfrac{1}{4} & \text{បើ } x=2\end{cases}$

ជាប់លើ $\mathbb{R}$។

៤២. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$ បើ $x\neq 0$ និង $f(0)=a+\dfrac{1}{2}$។ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ ជាប់ត្រង់ $x=0$។

៤៣. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{8-8\cos x}{x(e^{2x}-1)}\ (x\neq 0)$

ហើយ $f(0)=\dfrac{1}{1006}(m-1)$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

មេរៀនទី ១

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១. និយមន័យដេរីវេ

ដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ ។

គេអាចតាង និមិត្តសញ្ញា y' ឬ $\frac{dy}{dx}$ ឬ $\frac{d}{dx}[f(x)]$ សម្រាប់ដេរីវេនៃ $y = f(x)$ ។

២. ដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ (ត្រង់ x_0)

អនុគមន៍មានដេរីវេលើដែនកំណត់ D ។ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x = x_0$ ($x_0 \in D$) កំណត់ដោយ

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ឬ

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

☞ **ដេរីវេឆ្វេង :**

$$f'_-(x_0) = f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

☞ **ដេរីវេស្តាំ**

$$f'_+(x_0) = f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

❖ អនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x = x_0$ កាលណា :

- ➢ f ជាប់ត្រង់ $x = x_0$
- ➢ $f'_-(x_0) = f'_+(x)$

៣. រូបមន្តដេរីវេ

ក. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ងាយ

- ➢ $y = C$ (ថេរ) នោះ $y' = 0$
- ➢ $y = x$ នោះ $y' = 1$
- ➢ $y = ax + b$ នោះ $y' = a$
- ➢ $y = x^n$ $(n \neq 0)$ នោះ $y' = nx^{n-1}$
- ➢ $y = \frac{1}{x}$ នោះ $y' = -\frac{1}{x^2}$
- ➢ $y = \sqrt{x}$ នោះ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- ➢ $y = kf(x)$ (k ថេរ) នោះ $y' = kf'(x)$

ខ. ដេរីវេនៃផលបូក និង ផលដកអនុគមន៍

- ➢ $y = f(x) \pm g(x)$ នោះ $y' = f'(x) \pm g'(x)$

ឬ $(u \pm v)' = u' \pm v'$

គ. ដេរីវេនៃផលគុណ និង ផលចែកអនុគមន៍

- ➢ $y = f(x) \cdot g(x)$ នោះ $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

ឬ $(u \cdot v)' = u'v + v'u$ ហើយ $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

➢ $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x)\neq 0$)នោះ $y'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

ឬ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

លំហាត់គំរូ : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=4x^5-5x^4+\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{7}{2}x^2-23x+1$

ខ. $f(x)=\dfrac{13}{x}+\dfrac{2}{x^5}$ គ. $f(x)=4x^3+\sqrt{x}$

ឃ. $f(x)=\sqrt{x}(2x^2+1)$ ង. $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{x+2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=4x^5-5x^4+\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{7}{2}x^2-23x+1$

គេបាន $f'(x)=4\cdot 5x^{5-1}-5\cdot 4x^{4-1}+\dfrac{2}{3}\cdot 3x^{3-1}-\dfrac{7}{2}\cdot 2x^{2-1}-23\cdot 1+0$

$=20x^4-20x^3+2x^2-7x-23$

ខ. $f(x)=\dfrac{13}{x}+\dfrac{2}{x^5}=\dfrac{13}{x}+2x^{-5}$

គេបាន $f'(x)=-\dfrac{13}{x^2}+2(-5)x^{-5-1}=-\dfrac{13}{x^2}-10x^{-6}=-\dfrac{13}{x^2}-\dfrac{10}{x^6}$

គ. $f(x)=4x^3+\sqrt{x}$

គេបាន $f'(x)=12x^2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ឃ. $f(x)=\sqrt{x}(2x^2+1)$

តាម $(u\cdot v)'=u'v+v'u$ គេបាន :

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'(2x^2+1)+(2x^2+1)'\sqrt{x}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x^2+1)+4x\cdot\sqrt{x}$$

$$=\frac{2x^2+1+8x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{10x^2+1}{2\sqrt{x}}$$

ង. $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{x+2}$

តាម $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ គេបាន :

$$f(x)=\frac{(3x^2-2x-1)'(x+2)-(x+2)'(3x^2-2x-1)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{(6x-2)(x+2)-1\cdot(3x^2-2x-1)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{6x^2+12x-2x-4-3x^2+2x+1}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{3x^2+12x-3}{(x+2)^2}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=3x^{10}-2x^8+12x^5+2x+9$

ខ. $f(x)=\sqrt{x}\left(4x^2+2x-1\right)$

គ. $f(x)=-\dfrac{2010}{x}+\dfrac{2011}{x^2}-\dfrac{2012}{x^3}+\dfrac{2013}{x^4}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$ ង. $f(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{2x^2+1}$

៤. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

$y=\sin x$	នោះ	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	នោះ	$y'=-\sin x$
$y=\tan x$	នោះ	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$y=\cot x$	នោះ	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$

លំហាត់គំរូទី១ : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=x\sin x-\cos x$

ខ. $f(x)=x^3\cos x+2\sin x$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=x\sin x-\cos x$

គេបាន $f'(x)=(x\sin x)'-(\cos x)'$

$=x'\cdot\sin x+(\sin x)'\cdot x-(-\sin x)$

$=\sin x+\cos x\cdot x+\sin x$

$=x\cos x+2\sin x$

ខ. $f(x)=x^3\cos x+2\sin x$

គេបាន $f'(x)=(x^3\cos x)'+(2\sin x)'$

$=(x^3)'\cdot\cos x+(\cos x)'\cdot x^3+2\cos x$

$=3x^2\cos x-\sin x\cdot x^3+2\cos x$

$=-x^3\sin x+3x^2\cos x+2\cos x=-x^3\sin x+(3x^2+2)\cos x$

លំហាត់គំរូទី២: គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y=3x\cot x$ ខ. $y=\dfrac{\tan x-1}{\sin x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y = 3x\cot x$

គេបាន $y' = (3x)'\cdot\cot x + (\cot x)'\cdot 3x$

$= 3\cot x - (1+\cot^2 x)\cdot 3x$

$= 3\cot x - 3x(1+\cot^2 x)$

ខ. $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sin x + 1}$

គេបាន $y' = \dfrac{(\tan x-1)'\cdot(\sin x+1) - (\sin x+1)'\cdot(\tan x-1)}{(\sin x+1)^2}$

$= \dfrac{(1+\tan^2 x)(\sin x+1) - \cos x\cdot(\tan x-1)}{(\sin x+1)^2}$

$= \dfrac{\sin x + 1 + \sin x\tan^2 x + \tan^2 x - \cos x\tan x + \cos x}{(\sin x+1)^2}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = 5\sin x - 2\cos x$

ខ. $y = 7\cos x - \cot x$

គ. $y = x\sin x + x^2\cos x$

ឃ. $y = \dfrac{\tan x}{\cos x}$

ង. $y = (2x+1)\cot x$

ច. $y = \dfrac{\sin x - 1}{\sin x}$

ឆ. $y = \dfrac{x}{\cos x}$

ជ. $y = \dfrac{\sin x}{\sin x - \cos x}$

៥. ដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង លោការីត

- $y = e^x$ នោះ $y' = e^x$
- $y = a^x$ នោះ $y' = a^x \ln a$
- $y = \ln x$ នោះ $y' = \dfrac{1}{x}$
- $y = \log_a x$ នោះ $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$

លំហាត់គំរូ : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = e^x - 2\ln x$ ខ. $y = 1 - 2\dfrac{\ln x}{x}$

គ. $y = e^x \cos x$ ឃ. $y = \dfrac{e^x}{x}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y = e^x - 2\ln x$

គេបាន $y = (e^x)' - (2\ln x)' = e^x - 2\cdot\dfrac{1}{x} = e^x - \dfrac{2}{x}$

ខ. $y = 1 - 2\dfrac{\ln x}{x}$

គេបាន $y' = 0 - 2\dfrac{(\ln x)'\cdot x - (x)'\cdot \ln x}{x^2}$

$$= -2\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = 2\frac{\ln x - 1}{x^2}$$

គ. $y = e^x \cos x$

គេបាន $y' = (e^x)'\cos x + (\cos x)' e^x$

$$= e^x \cos x - \sin x \cdot e^x$$
$$= e^x(\cos x - \sin x)$$

ឃ. $y = \dfrac{e^x}{x}$

គេបាន $y' = \dfrac{(e^x)' \cdot x - (x)' \cdot e^x}{x^2}$

$$y' = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = x - 1 - \ln x$ ខ. $y = e^x \ln x$

គ. $y = (x^2 - 3)e^x$ ឃ. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

ង. $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$ ច. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

ឆ. $y = x^2 \ln x - \dfrac{x^2}{2}$ ជ. $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

៦. ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = y'_u \cdot u'_x$

ឬ $\dfrac{d}{dx} f\left[u(x)\right] = f'(u) \cdot u'(x)$ ។

ដូចនេះ បើ $y = f(u)$ នោះ $y' = f'(u) \cdot u'$ ។

វិធាក : តាម $y = f(u)$ $(u = g(x)) \Rightarrow y' = f'(u)\cdot u'$ គេទាញបាន:

$$y = [g(x)]^n \Rightarrow y' = n\cdot[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x)$$

$$y = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow y' = -\frac{1}{[g(x)]^2}\cdot g'(x)$$

$$y = \sqrt{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\cdot g'(x)$$

$$y = \frac{1}{[g(x)]^n} \Rightarrow y' = -\frac{n}{[g(x)]^{n+1}}\cdot g'(x)$$

$$y = \sin[g(x)] \Rightarrow y' = \cos[g(x)]\cdot g'(x)$$

$$y = \cos[g(x)] \Rightarrow y' = -\sin[g(x)]\cdot g'(x)$$

$$y = \tan[g(x)] \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2[g(x)]}\cdot g'(x)$$

$$y = \cot[g(x)] \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2[g(x)]}\cdot g'(x)$$

$$y = e^{g(x)} \Rightarrow y' = e^{g(x)}\cdot g'(x)$$

$$y = a^{g(x)} \Rightarrow y' = a^{g(x)}\ln a\cdot g'(x)$$

$$y = \ln[g(x)] \Rightarrow y' = \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)$$

$$y = \log_a[g(x)] \Rightarrow y' = \frac{1}{g(x)\ln a}\cdot g'(x)$$

តារាងសង្ខេបដេរីវេនៃអនុគមន៍រវាង $y = f(x)$ និង $y = f[u(x)]$

ដេរីវេនៃ $y = f(x)$	ដេរីវេនៃ $y = f(u)$ ដែល $u = g(x)$
$(C)' = 0$ (C ថេរ)	$(C)' = 0$ (C ថេរ)
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u)^n = nu'u^{n-1}$

$\left(\frac{C}{x}\right)' = -\frac{C}{x^2}$ (C ថេរ)	$\left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{Cu'}{u^2}$ (C ថេរ)
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1+\tan^2 u)$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1+\cot^2 u)$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = u'e^u$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = u'a^u \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a}$

លំហាត់គំរូទី១ : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y=(2x^2+x-1)^4$ ខ. $y=\sqrt{2x^2+3x+1}$

គ. $y=\frac{3}{x^2-1}$ ឃ. $y=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=(2x^2+x-1)^4$

តាម $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$ គេបាន :

$$y' = 4(2x^2+x-1)'\cdot(2x^2+x-1)^{4-1} = 4(4x+1)(2x^2+x-1)$$

ខ. $y=\sqrt{2x^2+3x+1}$

តាម $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ គេបាន :

$$y = \frac{(2x^2+3x+1)'}{2\sqrt{2x^2+3x+1}} = \frac{4x+3}{2\sqrt{2x^2+3x+1}}$$

គ. $y=\dfrac{3}{x^2-1}$

តាម $\left(\dfrac{C}{u}\right)' = -\dfrac{Cu'}{u^2}$

គេបាន $\quad y' = -\dfrac{3(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{6x}{(x-1)^2}$

ឃ. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$

តាម $\left(\dfrac{C}{u}\right)' = \dfrac{Cu'}{u^2}$ និង $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

គេបាន $\quad y' = -\dfrac{\left(\sqrt{4-x}\right)'}{\left(\sqrt{4-x}\right)^2} = -\dfrac{\dfrac{(4-x)'}{2\sqrt{4-x}}}{4-x} = -\dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{4-x}}}{4-x} = \dfrac{1}{2\sqrt{(4-x)^3}}$

លំហាត់គំរូទី២ : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y=\tan(3x^2)$ ខ. $y=\sin^2(3x)$

គ. $y=\cos^3(2x+3)$ ឃ. $y=\sin(3x-1)^2$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=\tan(3x^2)$

តាម $\left(\tan u\right)'=u'(1+\tan^2 u)$

គេបាន $y'=(3x^2)'[1+\tan^2(3x^2)]=6x[1+\tan^2(3x^2)]$

ឬ $y'=\dfrac{6x}{\cos^2(3x^2)}$

ខ. $y=\sin^2(3x)$

តាម $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$ និង $(\sin u)'=u'\cos u$ គេបាន :

$$y'=2\left[\sin(3x)\right]'\cdot\left[\sin(3x)\right]^{2-1}=6\cos(3x)\cdot\sin 3x=3\sin(6x)$$

គ. $y=\cos^3(2x+3)$

តាម $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$ និង $\left(\cos u\right)'=-u'\sin u$ គេបាន :

$$y'=3\left[\cos(2x+3)\right]'\left[\cos(2x+3)\right]^{3-1}$$
$$=3\left[-(2x+3)'\sin(2x+3)\right]\cos^2(2x+3)$$
$$=-6\sin(2x+3)\cos^2(2x+3)$$

ឃ. $y=\sin(3x-1)^2$

តាម $\left(\sin u\right)'=u'\cos u$ និង $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$

គេបាន $y'=\left[(3x-1)^2\right]'\cdot\cos(3x-1)^2$

$$=2(3x-1)'(3x-1)\cdot\cos(3x-1)^2$$
$$=6(3x-1)\cos(3x-1)^2$$

លំហាត់គំរូទី៣ : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=\ln(x^2+3x)$ ខ. $f(x)=e^{x^2+2x-1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=\ln(x^2+3x)$

តាម $\left(\ln u\right)'=\dfrac{u'}{u}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(x^2+3x)'}{x^2+3x}=\dfrac{2x+3}{x^2+3x}$

ខ. $f(x)=e^{x^2+2x-1}$

តាម $\left(e^u\right)'=u'e^u$

គេបាន $f'(x)=(x^2+2x-1)'e^{x^2+2x-1}=(2x+2)e^{x^2+2x-1}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ ខ. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+3x+1)^2}$

គ. $f(x)=(x^3-3x^2+5)^4$ ឃ. $f(x)=\sqrt[4]{x^2+x+2}$

ង. $f(x)=(x^2+8x)^{10}$ ច. $f(x)=6\sqrt[3]{2x+5}$

ឆ. $f(x)=(3x^4-1)^5$ ជ. $f(x)=\cos(5x^4-3)+x\sin 2x$

ឈ. $f(x)=\tan(x^2+1)^2$ ញ. $f(x)=\cot^2(2x^2+3)+5x$

ដ. $f(x)=\ln(\cos x)$ ឋ. $f(x)=\ln(x^2-4)^3$

ឌ. $f(x)=e^{2x}\cos 3x$ ឍ. $f(x)=x^2e^{-2x}$ ណ. $f(x)=x^x$

ត. $f(x)=3x^2\tan^3 x$ ថ. $f(x)=(1+\tan x)^2$

ទ. $f(x)=x\tan(2x^2-3)$ ធ. $f(x)=\cot(x^4-3)$

ន. $f(x)=\ln\left|2x^2-3x-1\right|$

➢ NOTE : $\left(\ln|u|\right)'=\dfrac{u'}{u}$

៧. ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

៧.១ ដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍

ដេរីវេទី២ នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ កំណត់ដោយ y'' ឬ $f''(x)$ ឬ $\frac{d^2y}{dx^2}$

ដែល $y''=[f'(x)]'$ ។

លំហាត់គំរូទី១ : គណនាដេរីវេទី២ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=3x^2-\sin 2x$

ខ. $f(x)=-3x^4+2x^2$

គ. $f(x)=x+\frac{1}{x}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=3x^2-\sin 2x$

$f'(x)=6x-2\cos 2x \Rightarrow f''(x)=6+4\sin 2x$

ខ. $f(x)=-3x^4+2x^2$

$f'(x)=-12x^3+4x \Rightarrow f''(x)=-36x^2+4$

គ. $f(x)=x+\frac{1}{x}$

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x)=0-\left(-\frac{2x}{x^4}\right)=\frac{2}{x^3}$

លំហាត់គំរូទី២ : គណនា y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $2x^2+y^2=4$ ខ. $x^2+xy+y^2=-1$

ដំណោះស្រាយ

ក. $2x^2+y^2=4$ គេបាន :

$$(2x^2)' + (y^2)' = (4)'$$

$$4x + 2y'y = 0$$

$$2y'y = -4x \;\Rightarrow\; y' = -\frac{2x}{y}$$

$$\Rightarrow\; y'' = -\frac{(2x)'y - y'(2x)}{y^2}$$

$$= -\frac{2y - \left(-\frac{2x}{y}\right)\cdot 2x}{y^2} = -\frac{2(y^2 + 2x^2)}{y^3}$$

ដូចនេះ $y' = -\frac{2x}{y}$ និង $y'' = -\frac{2(y^2 + 2x^2)}{y^3}$

ខ. $x^2 + xy + y^2 = -1$ គេបាន :

$$(x^2)' + (xy)' + (y^2)' = (-1)'$$

$$2x + (y + xy') + 2y'y = 0$$

$$(x + 2y)y' = -2x - y$$

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

$$y'' = -\frac{(2 + y')(x + 2y) - (1 + 2y')(2x + y)}{(x + 2y)^2}$$

$$= -\frac{2x + 4y + xy' + 2yy' - 2x - y - 4xy' - 2yy'}{(x + 2y)^2}$$

$$= -\frac{3y - 3xy'}{(x + 2y)^2}$$

$$= -\frac{3y - 3x\left(-\frac{2x + y}{x + 2y}\right)}{(x + 2y)^2}$$

$$=-\frac{3xy+6y^2+6x^2+3xy}{(x+2y)^3}$$

$$=-\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3}$$

ដូចនេះ $y'=-\frac{2x+y}{x+2y}$ និង $y''=-\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គណនាដេរីវេទី២ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y=x^4-3x^2+x^{-2}$ ខ. $y=\sin(3x^2)+1$

គ. $y=\frac{x^2}{x+1}$ ឃ. $y=x\ln x-x$

២. គណនា y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $xy+yx^2=2$ ខ. $4xy=x^2+y^2$

គ. $xy=2x^2$ ឃ. $x^3-y^2=5$

៧.២ ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ អាចមានដេរីវេខ្លួនឯងទៀត គេហៅថា ដេរីវេបន្តបន្ទាប់ថា ដេរីវេទី1 , ទី 2 …,ទី n គេតាងដោយ $f', f'', f''', f^{(4)},\dots f^{(n)}$

☞ **សម្គាល់** : គេប្រើទម្រង់ $f^{(n)}$ ចាប់ពី $n=4$ តទៅ

លំហាត់គំរូ : គណនាដេរីវេទី 5 នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=x^6+3x^4+2x+2$ ខ. $f(x)=\sin 2x$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=x^6+3x^4+2x+2$

$f'(x)=6x^5+12x^3+2$

$f''(x)=30x^4+36x^2$

$f'''(x)=120x^3+72x$

$f^{(4)}(x)=360x^2+72$

$f^{(5)}(x)=720x$

ដូចនេះ $f^{(5)}=720x$

ខ. $f(x)=\sin 2x$

$f'(x)=2\cos 2x$

$f''(x)=-4\sin 2x$

$f'''(x)=-8\cos 2x$

$f^{(4)}(x)=16\sin 2x$

$f^{(5)}(x)=32\cos 2x$

ដូចនេះ $f^{(5)}(x)=32\cos 2x$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. គណនាដេរីវេទី៥ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=\cos 3x-x^7$ ខ. $f(x)=2x^4-\sin 4x$

២. គណនាដេរីវេទី១០ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=3x^{10}-x^9+5x-4$ ខ. $\cos x-4x^8$

៣. គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=x^n$ ខ. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

គ. $f(x)=\sin x$ ឃ. $f(x)=\cos x$

លំហាត់

១. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=x^8-2x^5+3x^2-4$ ខ. $f(x)=(2x+1)^4$

គ. $f(x)=(x^5-4x^2+8)^8$ ឃ. $f(x)=\dfrac{1}{5x^2-6x+2}$

ង. $f(x)=\dfrac{2}{(6x^2+5x+1)^2}$ ច. $f(x)=\sqrt{5x^6-12}$

២. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ ខ. $y=\dfrac{1}{\sqrt{5x^3+2}}$

គ. $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{2x-1}}$ ឃ. $y=\left(\dfrac{x+2}{2-x}\right)^3$

ង. $y=(x+2)^3(2x-1)^5$ ច. $y=2(3x+1)^4(5x-3)^2$

ឆ. $f(x)=\dfrac{3-2x-x^2}{x^2-1}$ ជ. $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x-1}$

ឈ. $f(x)=\dfrac{(x+1)}{(x+2)}(2x-5)$ ញ. $f(x)=(x-5)^2\sqrt{2x+4}$

ដ. $f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}}$ ឋ. $f(x)=\sqrt{9-\sqrt{9-x}}$

៣. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ ខ. $f(x)=5x^3-2\sin x\cos x$

គ. $f(x)=x^2-\tan^2 x$ ឃ. $f(x)=\dfrac{\sin x}{1-2\cos x}$

ង. $f(x)=3x\cot^2 x$ ច. $f(x)=\sin^2(x^2)$

ឆ. $f(x)=x^3-\cos^2 5x$ ជ. $f(x)=\tan(2x^3-5x)$

ឈ. $f(x)=\sqrt{4\sin^2 x+9\cos^2 x}$ ញ. $f(x)=\left[\cos(x^2+1)\right]^3$

៤. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y=e^{5x}$　　ខ. $y=x^2e^x$

គ. $y=xe^x-e^x$　　ឃ. $y=e^{\frac{1}{x}}$

ង. $y=(x^2+3x+5)e^{6x}$　　ច. $y=xe^{-x^2}$

ឆ. $y=(1-3e^x)^2$　　ជ. $y=e^{\sqrt{x}}$

ឈ. $y=e^{-2x+x^2}$　　ញ. $y=(1+x)e^{3x}$

ដ. $y=(e^{-x}+e^x)^2$　　ឋ. $y=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$

ឌ. $y=(e^{2x}-4)^2$　　ឍ. $y=x^2e^{-2x}$ ណ. $e^{\frac{x-1}{x+1}}$

៥. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=\ln x^2$　　ខ. $f(x)=\sqrt{x}\cdot\ln x$

គ. $f(x)=x\sqrt[3]{\ln x}$　　ឃ. $f(x)=\ln\sqrt{x^4-4x}$

ង. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$　　ច. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

ឆ. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$　　ឆ. $f(x)=e^{-x}\ln x$

ឈ. $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$　　ញ. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

ដ. $f(x)=\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}$　　ឋ. $f(x)=x^2\ln\dfrac{1}{x^2}$

ឌ. $f(x)=x\ln x-x$　ឍ. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ ណ. $f(x)=e^{e^{e^x}}$

៦. គណនាដេរីវេទី២ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $g(x)=(x^2+4)^3$　　ខ. $g(x)=2e^{3x}+3e^{-2x}$

គ. $g(x)=(1+2x)e^{4x}$ ឃ. $g(x)=\ln\sqrt{\frac{4+x^2}{x^2}}$

៧. គណនា y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x^3+2xy-y^2=3$ ខ. $x^3y+xy^3=3x^2$

៨. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=ax^2e^{-bx}$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។

ក. គណនា $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

ខ. គណនា a និង b ដោយដឹងថា $f(2)=\frac{4}{e^2}$ និង $f''(0)=2$ ។

៩. គេឱ្យ $f(x)=\frac{e^x}{ax+b}$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។

ក. គណនា $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ a និង b បើ $f(1)=e$ និង $f'(1)=0$ ។

១០. គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ក. គណនាដេរីវេទីមួយ $g'(x)$ និង ដេរីវេទីពីរ $g''(x)$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ a , b និង c បើ $g'(0)=0$ និង $g''(0)=3$ ។

១១. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$, $x\neq-2$, $x\neq-3$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+3}$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

១២. ក. គណនា $xy+x^2y'$ ដោយដឹងថា $y=\frac{e^x-\ln x}{x}$ ។

ខ. គេឱ្យ $y=e^{-x}\ln x$ ។ បង្ហាញថា $2014(y'+y)xe^x-2015$ មានតម្លៃមិនប្រែប្រួលចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

១៣. គេឱ្យ $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $y'=\dfrac{1-y^2}{2}$ ។

១៤. ក. ចំពោះអនុគមន៍ $y=\cos x$ ចូរបង្ហាញថា $y+y'+y''+y'''=0$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃ $f(x)=\sin(\sin x)+\cos(\sin x)$ ។

១៥. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត x ដើម្បីឱ្យ $y'=0$ ។

ខ. គណនា $y+y''$ ។ រកចំនួនពិត m ដើម្បីឱ្យ

$y+y''=\ln(m^2-4m+5)$ ។

១៦. ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=x^2+x+\sin(x^2+2x+1)$ និង

$y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$ ។

ខ. គណនាដេរីវេទីពីរនៃ $y=5x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x+1$ ។

១៧. គេឱ្យ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$f(x)=\sqrt{x^4+x^2+4x+3}$ និង $g(x)=2x^2+x+2$ ។

បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x^4+x^2+4x+3}}$ (ឬ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$) ។

១៨. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ ។

ក. បង្ហាញថា $2\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $4(1+x^2)f''(x)+4xf'(x)=f(x)$

១៩. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=\left(\dfrac{\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\right)^2$

ខ. $f(x)=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$

គ. $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}$ $(\ 0<x<\frac{\pi}{2}\ )$

២០. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៏mមួយមានដេរីវេត្រង់ចំនុច $x=a$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{x\to a}\frac{x\,f(a)-a\,f(x)}{x-a}=f(a)-a\,f'(a)$ ។

២១. គេឱ្យអនុគមន៏ $y=\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}$, $x\neq -1$, $x\neq -2$ ។

ក. កំណត់ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$

ចំពោះគ្រប់ x ដែល $x\neq -1$, $x\neq -2$ ។

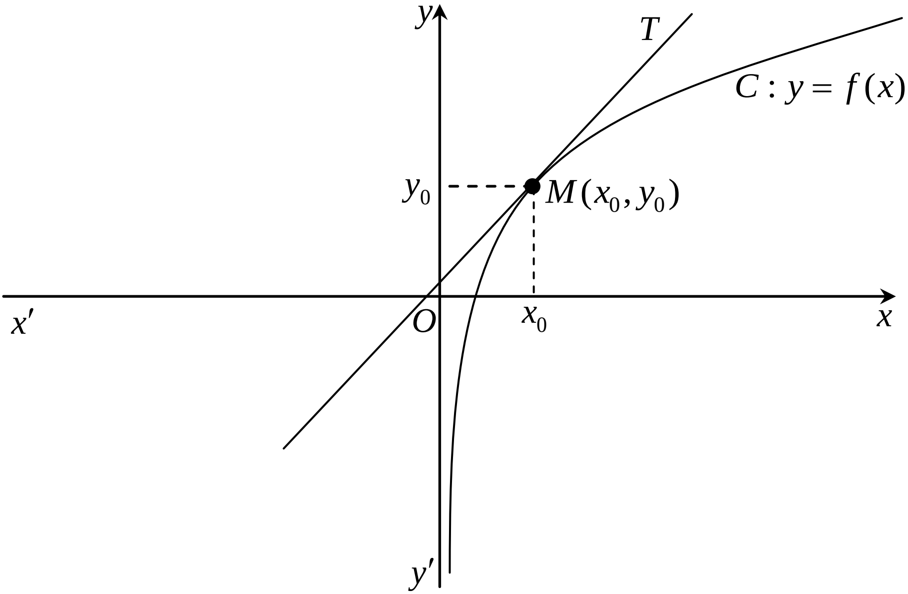
ខ. គណនាដេរីវេ y' , y'' និង y''' ។

មេរៀនទី ២

អនុវត្តន៍ដេរីវេ

១. បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍

ក. បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច M ($M \in C$)



- មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C តាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ នៅត្រង់ចំណុច (x_0 , y_0) គឺជាដេរីវេទី១ នៃ f នៅត្រង់ x_0 គឺ $m = f'(x_0)$ ។
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប C តាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ ត្រង់ចំណុច $M(x_0 , y_0)$ គឺ $y - y_0 = m(x - x_0)$ ឬ $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ដែល $m = f'(x_0) = y'_0$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ x_0 ។

លំហាត់គំរូទី១: រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹក្រាប

$C: y = f(x) = -x^2 + x + 3$ ត្រង់ $x = 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $C: y = f(x) = -x^2 + x + 3$

នោះ $f'(x) = -2x + 1$

ត្រង់ $x = 2$ គេបាន $f(2) = -2^2 + 2 + 3 = 1$

ហើយ $f'(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -3$

តាមរូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ គេបាន :

$y = -3(x-2) + 1 = -3x + 7$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = -3x + 7$

លំហាត់គំរូទី២ : រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប

$C: \ y = f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2}$ ត្រង់ចំណុច ដែលមានអាប់ស៊ីស $x = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2}$

នោះ $f'(x) = \dfrac{(x^2 + x + 1)'(x^2 - x - 2) - (x^2 - x - 2)'(x^2 + x + 1)}{(x^2 - x - 2)^2}$

$$= \frac{(2x+1)(x^2 - x - 2) - (2x-1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x^2 - 4x + x^2 - x - 2 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + x^2 + x + 1}{(x^2 - x - 2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 6x - 1}{(x^2 - x - 2)^2}$$

ត្រង់ $x=1$ គេបាន $f(1)=\frac{1^2+1+2}{1^2-1-2}=-\frac{3}{2}$

និង $f'(1)=\frac{-2\cdot 1^2-6\cdot 1-1}{(1^2-1-2)^2}=-\frac{9}{4}$

គេបាន សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $y-y_0=m(x-x)$

$$y+\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{9}{4}(x-1)-\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}x+\frac{3}{4}$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=-\frac{9}{4}x+\frac{3}{4}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. រកសមីការបន្ទាត់ Δ ដែលប៉ះទៅនឹងក្រាប $C:\ y=x^3-4x$ នៅត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ Δ និង ក្រាប C ។។

២. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y=-x^3+3x+4$ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=3x$

ខ. បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប C ដែលបន្ទាត់នេះគូសចេញពីចំណុច $M_1 \notin C$

❖ **របៀបរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ**

❖ **របៀបទី១** : គេមាន $C:\ y=f(x) \Rightarrow y_0'=f'(x_0)=m$ (1)

តាង $M_0(x_0,y_0)$ ជាចំណុចប៉ះ នោះ

គេបានសមីការ $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

ដោយបន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់តាមចំណុច $M_1(x_1,y_1)$ គេបាន :

$y_1-y_0=f'(x_0)(x_1-x_0)$

ដោះស្រាយសមីការរក x_0 និង y_0 ។

❖ **របៀបទី២** : គេមាន $C: y=f(x)$

តាង $d: y=ax+b$ ជាសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C

ដោយបន្ទាត់ d កាត់តាមចំណុច $M_1(x_1,y_1)$

គេបាន $y_1=ax_1+b \Leftrightarrow b=y_1-ax_1$

នោះ សមីការបន្ទាត់ d ទៅជា $y=ax+y_1-ax_1$

គេបានសមីការអាប់ស៊ីសរវាងក្រាប C និង បន្ទាត់ d គឺ :

$f(x)=ax+y_1-ax_1 \quad (*)$

បន្ទាត់ d ប៉ះនឹងក្រាប C កាលណាសមីការអាប់ស៊ីស $(*)$ មាន

ឫសពីរស្មើគ្នា (ឫសឌុប : $\Delta=0$ (ចំពោះសមីការដឺក្រេទី២))

នោះគេអាចរកតម្លៃ a បាន រួចហើយជំនួសរកតម្លៃ b ។

លំហាត់គំរូ : រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង C តាង

$f(x)=x^2+2x+5$ ដែល បន្ទាត់នេះគូសចេញពីចំណុច $A(0\,,1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១ : គេមាន $f(x)=x^2+2x+5$ នោះ $f'(x)=2x+2$

តាង $M(x_0,y_0)$ ជាចំណុចប៉ះ នោះ $y_0=f(x_0)=x_0^2+2x_0+5$

និង $f'(x_0)=2x_0+2$

គេបានសមីការ $y-y_0=m(x-x_0)$

$$\Leftrightarrow y-(x_0^2+2x_0+5)=(2x_0+2)(x-x_0)$$

ដោយបន្ទាត់ប៉ះនេះ កាត់តាមចំណុច $A(0\,,1)$ នោះគេបាន :

$1-(x_0^2+2x_0+5)=(2x_0+2)(0-x_0)$

$1-x_0^2-2x_0-5=-2x_0^2-2x_0$

$x_0^2-4=0 \Rightarrow x_0=\pm 2$

បើ $x_0=2$ នោះ $y_0=f(2)=2^2+2\cdot 2+5=13$

និង $f'(2)=2\cdot 2+2=6$

គេបាន សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y-13=6(x-2)\Rightarrow y=6x+1$

បើ $x=-2$ នោះ $y_0=f(-2)=(-2)^2+2(-2)+5=5$

និង $f'(-2)=-2$

គេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y-5=-2(x+2)\Rightarrow y=-2x+1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=6x+1$ និង $y=-2x+1$

របៀបទី២ :

តាង $d: y=ax+b$ ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C

ដោយបន្ទាត់ d កាត់តាមចំណុច $A(0,1)$

គេបាន $1=a\cdot 0+b\Rightarrow b=1$

នោះ $d:\ y=ax+1$

គេបានសមីការអាបស៊ីស $x^2+2x+5=ax+1$

$$x^2+(2-a)x+4=0$$

$$\Delta=(2-a)^2-16$$

បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C កាលណាសមីការអាប់ស៊ីសមានឫសឌុប

$\Leftrightarrow \Delta=0$

$\Leftrightarrow (2-a)^2-16=0$

$\Leftrightarrow (-2-a)(6-a)=0$

$\Leftrightarrow a=-2 \vee a=6$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=6x+1$ និង $y=-2x+1$

គ. បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងដោយដឹងមេគុណប្រាប់ទិស m

របៀបទី១ : គេមានអនុគមន៍ $C:\ y=f(x)$

តាង $M(x_0,y_0)$ ជាចំណុចប៉ះ នៃបន្ទាត់ Δ ទៅនឹងខ្សែកោង C

ដោយ m ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ Δ នោះ $f'(x_0)=m$ (*)

ដោះស្រាយសមីការ (*) ដើម្បីរក x_0 រួចទាញរក $y_0=f(x_0)$ ។

ជំនួស x_0 និង y_0 ទៅក្នុងសមីការ $y-y_0=m(x-x_0)$

គេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះដែលត្រូវរក ។

របៀបទី២ : គេមាន $C:\ y=f(x)$

តាង $\Delta: y=ax+b$ ជាបន្ទាតប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង C

ដោយបន្ទាត់ Δ មានមេគុណប្រាប់ទិស m

គេបាន $y=mx+b$ (1)

បន្ទាត់ Δ ប៉ះនឹងខ្សែកោង C កាលណាសមីការអាប់ស៊ីស $f(x)=mx+b$

មានឫសឌុប ។ ដោះស្រាយសមីការ នេះដើម្បីរកតម្លៃ b

រួចជំនួសក្នុង (1)

លំហាត់គំរូ : រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង $C:\ y=f(x)=-x^2+4x+3$ ដោយដឹងថា បន្ទាត់ប៉ះនេះមានមេគុណប្រាប់ទិស $m=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១ : គេមាន $C: y=f(x)=-x^2+4x-3$

នោះ $f'(x)=-2x+4$

តាង $M(x_0,y_0)$ ជាចំណុចប៉ះ នោះ $f'(x_0)=-2x_0+4$

ដោយបន្ទាត់ប៉ះនេះ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m=2$ គេបាន :

$f'(x_0)=m=2 \iff -2x_0+4=2 \Rightarrow x_0=1$

នោះ $y_0=f(x_0)=-1+4-3=0$

គេបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $y-y_0=m(x-x_0)$

$$y-0=2(x-1) \iff y=2x-2$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=2x-2$

របៀបទី២ : គេមាន $C:\ y=f(x)=-x^2+4x-3$

តាង $\Delta\ y=ax+b$ ជាបន្ទាត់ប៉ះ

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះនេះមានមេគុណប្រាប់ទិស $m=2$

នោះ $y=2x+b$

បន្ទាត់ Δ ប៉ះនឹងខ្សែកោង C កាលណាសមីកាអាប់ស៊ីស

$f(x)=2x+b$ មានឫសឌុប

គេបាន $:-x^2+4x-3=2x+b$ មានឫសឌុប

$-x^2+2x-3-b=0$ មានឫសឌុប

$\Delta'=(-1)^2+(-3-b)=-2-b$

សមីការមានឫសឌុបកាលណា $\Delta=0$

$\Leftrightarrow -2-b=0 \Rightarrow b=-2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=2x-2$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប $C: y=f(x)=x^2-3x+5$ ដោយដឹងថាបន្ទាត់នេះគូសចេញពីចំណុច $A(3\,,1)$ ។

២. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប $C:\ y=f(x)=3x^2-4x+1$ ដោយដឹងថា :

ក. បន្ទាត់ប៉ះនេះ ស្របនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x+5$ ។

ខ. បន្ទាត់ប៉ះនេះ កែងនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=-\dfrac{x}{5}+2$។

៣. កំណត់ចំណុចរបស់ $C: y=f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+20$ ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចនេះ ស្របទៅនឹងអ័ក្ស $x'Ox$ ។

៤. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប $C: y = x^2 - 7x + 3$ ដោយដឹងថា បន្ទាត់នេះស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $\Delta : 5x + y - 3 = 0$ ។

៥. រកមេគុណ b និង d ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប $C: y = x^2 + bx + d$ ត្រង់ចំណុច $A(1\,,1)$ មានសមីការ $y = x$ ។

២. ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

- អនុគមន៍ f កើនលើចន្លោះ (a,b) លុះត្រាតែ $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a,b)$ ។
- អនុគមន៍ f ចុះលើចន្លោះ (a,b) លុះត្រាតែ $f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a,b)$ ។
- អនុគមន៍ f ថេរលើចន្លោះ (a,b) លុះត្រាតែ $f'(x) = 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a,b)$ ។

លំហាត់គំរូ : កំណត់ចន្លោះកើន និង ចុះ នៃអនុគមន៍

$$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 22x + 1$$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 22x + 1$

នោះ $f'(x) = 12x^2 + 10x - 22$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 10x - 22 = 0$

$$\Rightarrow x_1 = 1\,,\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-22}{12} = -\frac{11}{6}$$

x	$-\infty$		$-11/6$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដូចនេះ $f(x)$ កើនលើចន្លោះ $(-\infty\,, -\frac{11}{6}) \cup (1, +\infty)$

$f(x)$ ចុះលើចន្លោះ $\left(-\frac{11}{6}\,, 1\right)$

លំហាត់គំរូ : កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $f(x)=(m-1)x^2+m^2+m+1$ ជាអនុគមន៍ចុះ ចំពោះ $x>0$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x)=(m-1)x^2+m^2+m+1$

នោះ $f'(x)=2(m-1)x$

$f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះចំពោះ $x>0$ ចុះកាលណា $f'(x)<0$ ចំពោះ $x>0$

គេបាន $2(m-1)x<0$

ដោយ $x>0$ នោះគេបាន $m-1<0 \Rightarrow m<1$

ដូចនេះ $m\in(-\infty\,,1)$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. កំណត់ចន្លោះដែល $f(x)=-x^3+x^2+5x-6$ កើន ឬ ចុះ ។

២. រកតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ $g(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{3}x-4$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ។

៣. សិក្សាភាពកើន ចុះ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$ ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+4x-2}{x^2+1}$

គ. $f(x)=x+e^x$ ឃ. $f(x)=\ell n(x+\sqrt{x^2+4})$

៣. អតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍

ក. រកតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ដោយប្រើដេរីវេទី១

- f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = x_0$ កាលណា

$$\begin{cases} f'(x_0) > 0 & \text{ចំពោះ } x < x_0 \\ f'(x_0) = 0 & \text{ចំពោះ } x = x_0 \\ f'(x_0) < 0 & \text{ចំពោះ } x > x_0 \end{cases}$$

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$

ឬ $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x = x_0$

- f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = x_0$ កាលណា

$$\begin{cases} f'(x_0) < 0 & \text{ចំពោះ } x < x_0 \\ f'(x_0) = 0 & \text{ចំពោះ } x = x_0 \\ f'(x_0) > 0 & \text{ចំពោះ } x > x_0 \end{cases}$$

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

ឬ $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x = x_0$

លំហាត់គំរូ : រកតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x) = -x^2 + 6x + 1$

ខ. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

គ. $f(x) = xe^x$

ឃ. $f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 1}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ មានដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = -2x + 6$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

ត្រង់ $x=3$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

ដូចនេះ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=3$

គឺ $f(3)=-3^2+6\cdot3+1=10$

ខ. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$

$$\Leftrightarrow x_1=-1\,,\, x_2=-\frac{c}{a}=2$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$(+)$ ទៅ$(-)$

ដូចនេះ f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=12$

ត្រង់ $x=2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$(-)$ ទៅ$(+)$

ដូចនេះ f មានអប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ $x=2$ គឺ $f(2)=-15$

គ. $f(x)=xe^x$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

$f'(x)=x'e^x+(e^x)'x=e^x(1+x)$

ដោយ $e^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(1+x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1+x=0 \Rightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

ដូចនេះ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$

$$f(-1)=-1\cdot e^{-1}=-\frac{1}{e}$$

ឃ. $f(x)=x+\sqrt{2x^2+1}$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

$$f(x)=1+\frac{(2x^2+1)'}{2\sqrt{2x^2+1}}=1+\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}=\frac{\sqrt{2x^2+1}+2x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

ដោយ $\sqrt{2x^2+1}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $\sqrt{2x^2+1}+2x$

បើ $x>0$ នោះ $\sqrt{2x^2+1}+2x>0 \Rightarrow f'(x)>0\ \forall x>0$

បើ $x<0$ គេបាន $f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}+2x=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=-2x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+1=4x^2$$

$$\Leftrightarrow -2x^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2=1 \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ (មិនយក)

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

ត្រង់ $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

ដូចនេះ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. រកតម្លៃអតិបរមាធៀប និងអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍នីមួយខាងក្រោម :

ក. $f(x)=x^3-3x^2-9x+6$

ខ. $f(x)=x^3-9x^2+15x+2$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$

២. រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{1}{3}x^3+kx^2+(2k+3)x$

គ្មានបរមាធៀប។

៩. រកតម្លៃបរមាធៀបដោយប្រើដេរីវេទី២

អនុគមន៍ f មានដេរីវេពីរដងលើចន្លោះមួយដែលមាន x_0 នោះគេបាន ៖

- អនុគមន៍ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ កាលណា $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$
- អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ កាលណា $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$

លំហាត់គំរូ : រកតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$

ខ. $f(x)=x^4-12x^2+27$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x_1=-1\,,\ x_2=2$

$f''(x)=6(2x-1)$

ត្រង់ $x=-1 \Rightarrow f''(-1)=6(-2-1)=-18<0$

នោះ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$, $f(-1)=12$

ត្រង់ $x=2 \Rightarrow f''(2)=6(4-1)=18>0$

នោះ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$, $f(2)=-15$

ដូចនេះ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=12$

f មានតម្លៃអប្បបមាធៀបត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(2)=-15$

ខ. $f(x)=x^4-12x^2+27$

$f'(x)=4x^3-24x \Rightarrow f''(x)=12x^2-24$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-24x=0$

$\Leftrightarrow 4x(x^2-6)=0$

$\Leftrightarrow x=0 , x=-\sqrt{6} , x=\sqrt{6}$

☞ ចំពោះ $x=0 \Rightarrow f''(0)=12\cdot 0^2-24=-24<0$

ដូចនេះ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=27$

☞ ចំពោះ $x=-\sqrt{6}$

$$\Rightarrow f''(-\sqrt{6})=12\left(-\sqrt{6}\right)^2-24=48>0$$

ដូចនេះ f មានតម្លៃអប្បរមាធៀបត្រង់ $x=-\sqrt{6}$ គឺ $f(-\sqrt{6})=-9$

☞ ចំពោះ $x=\sqrt{6} \Rightarrow f''(\sqrt{6})=12\left(\sqrt{6}\right)^2-24=48>0$

ដូចនេះ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=\sqrt{6}$ គឺ $f(\sqrt{6})=-9$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. រកតម្លៃអតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^4-4x^3+2$ ។

២. រកតម្លៃអតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ ក្នុងចន្លោះ $0\le x\le \pi$ ។

៣. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2+ax+b$ មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបស្មើ 3 ត្រង់ $x=1$ ។

៤. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ និង អតិបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ ។

៥. គេឱ្យអនុគន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ ។

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f មានតម្លៃបរមាធៀបត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$ ។

បញ្ជាក់ $f(x)$ ឱ្យបានច្បាស់លាស់ត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$ ។

៣. ចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង

ចំណុច $I(x_0, y_0)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង C តាអនុគមន៍ $y=f(x)$ កាលណា $f(x_0)=y_0$ និង $f''(x_0)=0$ ហើយ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាត្រង់ x_0 (ប្តូសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ឬ ប្តូសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$) ។

x		x_0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$

ឬ

x		x_0	
$f''(x)$	$+$	0	$-$

លំហាត់ :

រកកូអរដោនេចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍នីមួយខាងក្រោម :

ក. $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ ខ. $f(x)=8-27x+9x^2-x^3$

៤. អនុវត្តន៍ក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា

ប្លង់ដោះស្រាយចំណោទបរមា

១. តាងអថេរ (តាងឱ្យត្រូវតាមអ្វីដែលគេចង់រក) រួចដាក់លក្ខខណ្ឌឱ្យអថេរ

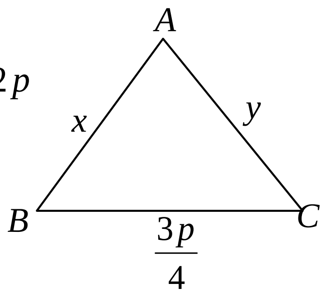
២. បង្កើតអនុគមន៍ (សរសេរតាមអ្វីដែលគេប្រាប់)យកផ្នែកដែលគេប្រាប់ថា មានតម្លៃអតិបរមា ឬ អប្បបរមាមកប្រើ រួច បង្រួមអនុគមន៍ឱ្យសល់តែអថេរតែមួយ ។

៣. គណនាដេរីវេទី១ រួចរកឫសនៃដេរីវេទី១ នោះ ។
៤. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍(ឬបញ្ជាក់សញ្ញានៃដេរីវេទី២ក៏បាន)

លំហាត់គំរូ : ត្រីកោណមួយមានបរិមាត្រស្មើនឹង $2p$ និង ជ្រុងមួយមាន រង្វាស់ $\frac{3p}{4}$ ។គណនារង្វាស់ជ្រុងពីរទៀត ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡារបស់ ត្រីកោណធំបំផុត រួចអនុវត្តជាលេខ កាលណា $p = 40m$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនារង្វាស់ជ្រុងពីរទៀត



តាង ABC ជាត្រីកោណដែលមានបរិមាត្រ $2p$

និងតាង $AB = x$, $AC = y$, $BC = \frac{3p}{4}$

($x > 0$, $y > 0$)

គេបានបរិមាត្រ $AB + AC + BC = 2p$

$$x + y + \frac{3p}{4} = 2p$$

$$x + y = \frac{5p}{4}$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{5p - 4x}{4} \qquad (1)$$

តាមរូបមន្តហេរុងគេបានផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ :

$$S(x) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-\frac{3p}{4})}$$

$$= \sqrt{p(p-x)\left(p - \frac{5p-4x}{4}\right)\left(\frac{p}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{p^2}{16}(p-x)(-p+4x)} = \frac{p}{4}\sqrt{-4x^2 + 5px - p^2}$$

លក្ខណ្ឌ $S(x)>0 \Leftrightarrow (p-x)(-p+4x)>0 \Rightarrow \frac{p}{4}<x<p$

គេបាន $S'(x)=\frac{p}{4}\cdot\frac{(-4x^2+5px-p^2)'}{2\sqrt{-4x^2+5px-p^2}}=\frac{p}{4}\cdot\frac{-8x+5p}{2\sqrt{-4x^2+5px-p^2}}$

ដោយ $2\sqrt{-4x^2+5px-p^2}>0$

នោះ $S'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-8x+5p$

$S'(x)=0 \Leftrightarrow -8x+5p=0 \Rightarrow x=\frac{5p}{8}$

x	$\frac{p}{4}$		$\frac{5p}{4}$		p
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	↗		អតិបរមា		↘

យកតម្លៃ $x=\frac{5p}{8}$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $y=\dfrac{5p-4\cdot\frac{5p}{8}}{4}=\frac{5p}{8}$

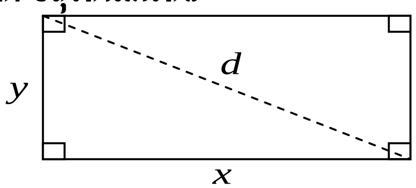
រង្វាស់ជ្រុងពីរទៀតមានប្រវែង $AB=AC=\frac{5p}{8}$ (គិតជា m)

បើ $p=40m$ នោះ $AB=AC=\frac{5\times 40}{8}=25m$

រូបមន្ត ពហុកោណ ពហុមុខ និង អង្គបូល សម្រាប់ដោះស្រាយចំណោទបរមា

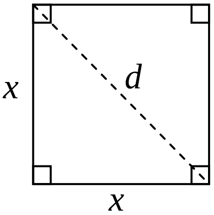
☞ រូបមន្តរបស់ពហុកោណ

ក. ចតុកោណកែង



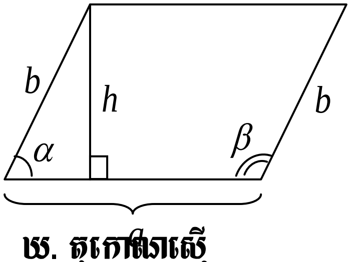
- ផ្ទៃក្រឡា $S = xy$
- បរិមាត្រ $P = 2(x+y)$
- អង្កត់ទ្រូង $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

ខ. ការេ



- ផ្ទៃក្រឡា $S = x \cdot x = x^2$
- បរិមាត្រ $P = 4x$
- អង្កត់ទ្រូង $d = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$

គ. ប្រលេឡូក្រាម



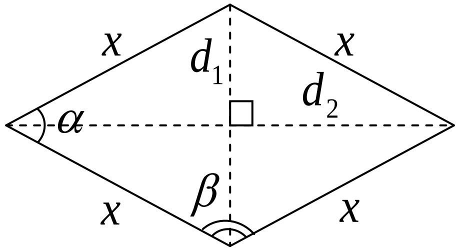
- ផ្ទៃក្រឡា $S = ah$

ឬ $S = ab\sin\alpha$

ឬ $S = ab\sin\beta$

- បរិមាត្រ $P = 2(a+b)$

ឃ. ចតុកោណស្មើ



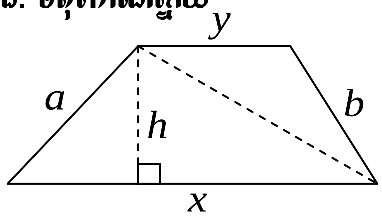
- ផ្ទៃក្រឡា

$$S = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$$

ឬ $S = x^2 \sin\alpha = x^2 \sin\beta$

- បរិមាត្រ $P = 4x$

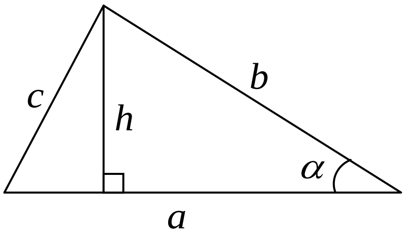
ង. ចតុកោណព្នាយ



➢ ផ្ទៃក្រឡា $S=\dfrac{h\left(x+y\right)}{2}$

➢ បរិមាត្រ $P=x+a+y+b$

ច. ត្រីកោណ



➢ ផ្ទៃក្រឡា

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{ah}{2}$$

ឬ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$

ឬ $S=\dfrac{abc}{4R}$ (R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ)

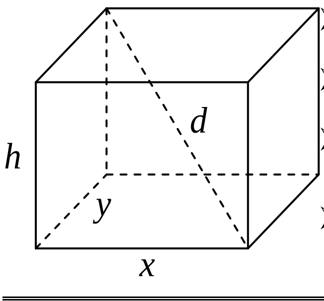
ឬ $S=\dfrac{\left(a+b+c\right)r}{2}$ (r កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង)

ឬ $S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$ ដែល $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

☞ **រូបមន្តរបស់ពហុមុខ**

ឆ. ប្រលេពីប៉ែតកែង

➢ ក្រឡាផ្ទៃបាត $S_b=xy$



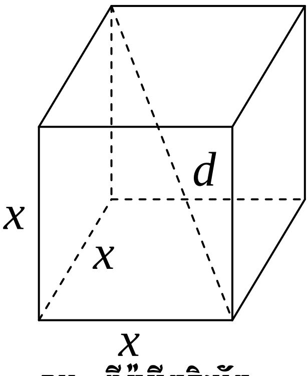
➢ ក្រឡាផ្ទៃខាង $S_\ell=P_bh=2\left(x+y\right)h$

➢ ក្រឡាផ្ទៃសរុប $S_t=2S_b+S_\ell$

➢ មាឌ $V=S_b\times h=xyh$

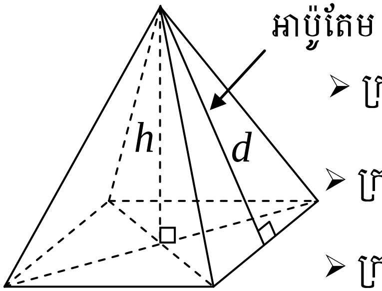
➢ អង្កត់ទ្រូង $d=\sqrt{x^2+y^2+h^2}$

ផ. គូប



- ក្រឡាផ្ទៃបាត $S_b = x \cdot x = x^2$
- ក្រឡាផ្ទៃខាង $S_\ell = P_b h = 4xx = 4x^2$
- ក្រឡាផ្ទៃសរុប $S_t = 2S_b + S_\ell = 6x^2$
- មាឌ $V = S_b \times h = x^2 \cdot x = x^3$
- អង្កត់ទ្រូង $d = \sqrt{x^2 + x^2 + x^2} = x\sqrt{3}$

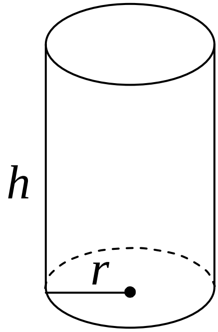
ឈ. ពីរ៉ាមីតនិយ័ត



- ក្រឡាផ្ទៃបាត S_b គិតតាមពហុកោណបាត
- ក្រឡាផ្ទៃខាង $S_\ell = \frac{1}{2} P_b d$
- ក្រឡាផ្ទៃសរុប $S_t = S_b + S_\ell$
- មាឌ $V = \frac{S_b \times h}{3} = \frac{1}{3} S_b h$

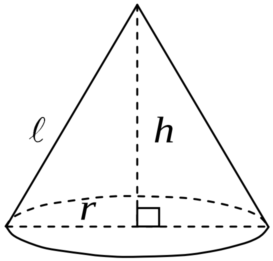
☞ រូបមន្តរបស់អង្គមូល

ញ. ស៊ីឡាំង



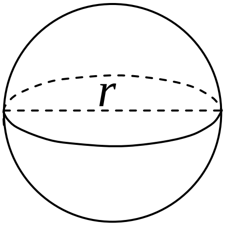
- ក្រឡាផ្ទៃបាត $S_b = \pi r^2$
- ក្រឡាផ្ទៃខាង $S_\ell = P_b h = 2\pi r h$
- ក្រឡាផ្ទៃសរុប $S_t = 2S_b + S_\ell$
- មាឌ $V = S_b \times h = \pi r^2 h$

ង. កោន



- ក្រឡាផ្ទៃបាត $S_b = \pi r^2$
- ក្រឡាផ្ទៃខាង $S_\ell = \frac{1}{2} P_b \ell$
- ក្រឡាផ្ទៃសរុប $S_t = S_b + S_\ell$
- មាឌ $V = \frac{S_b \times h}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

ច. ស្វ៊ែ ប៊ូល



- មាឌប៊ូល $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- ក្រឡាផ្ទៃស្វ៊ែ $S_\ell = V'(r) = 4\pi r^2$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១. ត្រីកោណកែងមួយមានអ៊ីប៉ូតេនុសប្រវែង $5cm$ ហើយជ្រុងពីរទៀត មានប្រវែងប្រែប្រួល x និង y ($0 < x < 5$, $0 < y < 5$) ។

ក. គណនា y ជាអនុគមន៍នៃ x រួចគណនាផ្ទៃក្រឡា S នៃ ត្រីកោណនេះ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ. គណនាតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ S មានតម្លៃអតិបរមា រួចគណនាតម្លៃ អតិបរមានោះ។

២. ចតុកោណកែងមួយមានផ្ទៃក្រឡា $2500m^2$ ។ រកប្រវែងជ្រុងដើម្បីឱ្យ ចតុកោណកែងមានបរិមាត្រតូចបំផុត ។

៣. គេសង់ត្រីកោណកែងមួយដោយ អ័ក្ស $\overrightarrow{ox}$ និង $\overrightarrow{oy}$ និងបន្ទាត់មួយ កាត់តាមចំណុច $M(2,3)$ នៅកាដ្រង់ទីមួយ ។ រកកំពូលនៃត្រីកោណ ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណមានតម្លៃអប្បបរមា ។

៤. រកចំនួនពីរវិជ្ជមាន កាលណាផលបូកនៃពីរចំនួននោះស្មើនឹង 110 និង ផលគុណមានតម្លៃអតិបរមា ។

៥. ផលបូកបរិមាត្ររង្វង់មួយ និង ការេមួយមានប្រវែង $16m$ ។ រកប្រវែង កាំរង្វង់ និង ជ្រុងការេដែលនាំឱ្យផ្ទៃក្រឡាសរុបមានតម្លៃអប្បបរមា ។

៦. ស៊ីឡាំងមួយចារឹកក្នុងស្វ៊ែកាំ R ។

ក. រកកម្ពស់នៃស៊ីឡាំងដើម្បីឱ្យស៊ីឡាំងនេះមានមាឌធំបំផុត ។

ខ. រកមាឌធំបំផុតនៃស៊ីឡាំង ។

៧. គេយកស័ង្កសីមួយផ្ទាំង មានរាងជាចតុកោណកែងមានបណ្ដោយ$180cm$ និង ទទឹង $120cm$ មកធ្វើជាហឹបមួយមានរាងជាចតុកោណកែងដែល គ្មានគម្រប ។ តើគេត្រូវធ្វើហឹបនោះ កម្ពស់ប៉ុន្មាន ដើម្បីឱ្យហឹបនោះមាន មាឌធំបំផុត ។

៨. ប្រអប់ត្រង់មួយមានគម្របលើ និង បាតក្រោមជាការេហើយមានមាឌ $250cm^3$ ។ សម្ភារសម្រាប់ធ្វើគម្របលើ និងបាតក្រោមតម្លៃ 2000៛$/cm^2$ ហើយសម្ភារសម្រាប់ធ្វើផ្ទៃខាងតម្លៃ 1000៛$/cm^2$ ។ កំណត់រង្វាស់ ទ្រនុងនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយលើសម្ភារមានតម្លៃអប្បបរមា រួច គណនាប្រាក់ចំណាយអប្បបរមានោះ ។

៩. ស័ង្កសីមួយបន្ទះរាងជាការេមានជ្រុងស្មើ $2m$ ។ គេកាត់ចេញពីបន្ទះ ស័ង្កសីនូវការេបួនប៉ុនៗគ្នា ដើម្បីឱ្យផ្នែកដែលនៅសល់ អាចបត់ធ្វើជា កេសគ្មានគម្របមួយ។ គណនាជ្រុងការេដែលត្រូវកាត់ចេញដើម្បីឱ្យកេស មានមាឌអតិបរមា ។

៥. ល្បឿន និង សំទុះនៃចលនា

៥.១ ល្បឿននៃចលនា

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $V(t)=S'(t)=\dfrac{dS}{dt}$ ដែល $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណៈ t ។

លំហាត់ : កីឡាករម្នាក់លោតទឹកពីកម្ពស់ $3.2m$ ។ ទីតាំងនៃកីឡាករនៅខណៈពេល t វិនាទីឱ្យតាមអនុគមន៍ $S(t)=-1.6t^2+1.6t+3.2$ (S គិតជា m) ។

ក. កំណត់រយៈពេលដែលកីឡាករធ្លាក់ដល់ទឹក ។

ខ. រកល្បឿនរបស់កីឡាករនៅខណៈពេលនោះ ។

ចម្លើយ : ក. $t=2s$ ខ. $V(2)=-4.8m/s$

៥.២ សំទុះនៃចលនា

សំទុះនៃចលនានៅខណៈ t គឺ $a(t)=\dfrac{dV}{dt}=V'(t)$ (ឬ $a(t)=\dfrac{d^2S}{dt^2}$) ដែល $V(t)$ ជាល្បឿននៃចលនានៅខណៈ t ។

លំហាត់: គេទម្លាក់វត្ថុមួយដោយសេរីពីយន្តហោះ ។ នៅខណៈពេល t វិនាទី វត្ថុនោះ ធ្លាក់បានចម្ងាយដោយអនុគមន៍ $S(t)=4.905t^2+30.94\ (m)$ ។ កំណត់ល្បឿន និង សំទុះនៃវត្ថុខណៈពេល $t=2(s)$ ។

ចម្លើយ : $V(2)=19.620m/s$ $a(2)=9.810m/s^2$

លំហាត់ : គេទម្លាក់ថ្មមួយដុំចូលក្នុងអណ្តូងមួយ ។ ចម្ងាយចរនៃដុំថ្មកំណត់ដោយ $S(t)=0.98t^3-23t+2$ (t គិតជា s និង $S(t)$ គិតជា m)។ រកល្បឿន និង សំទុះ នៃដុំថ្មនៅរយៈពេល $5s$ ក្រោយមក ។

ចម្លើយ : $V(5)=50.5m/s, a(5)=29.4m/s^2$

លំហាត់

១. គេឱ្យ $f(x)=\dfrac{e^x}{ax+b}$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។

ក. គណនា $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ e ត្រង់ $x=1$

២. អង្កត់ប្រែប្រួល MN មួយមានប្រវែង $h(x)=\cos^2 x+\sin x$ ដែល $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ។

ក. គណនាដេរីវេទីមួយ $h'(x)$ និង ដេរីវេទីពីរ $h''(x)$ ។

ខ. កំណត់ប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ MN ។

៣. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=ax+b-e^x$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ អនុគមន៍ f មានអតិបរមាស្មើ -1 ចំពោះ $x=0$ ។

៤. អនុគមន៍ $g(x)=ax+1+b\ln x$ ហើយមានក្រាប H ។ បន្ទាត់ D មានសមីការ $y=x-1$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ D ប៉ះនឹងក្រាប H ត្រង់ ចំណុច $A(1,0)$ ។

៥. ក. កំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ T ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=\dfrac{e^x}{1-\sin x}$ នៅត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=0$ ។

ខ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ T និងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=2x+1+\ln(x-1)$ ។

៦. គេឱ្យ $f(x)=e^x$ និង $g(x)=\ln(x+1)+1$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាខ្សែកោង $C_1: y=f(x)$ និង $C_2: y=g(x)$ មានចំណុចរួម $A(0,1)$ ។

ខ. គណនា $f'(0)$ និង $g'(0)$ រួចទាញថា C_1 និង C_2 ប៉ះគ្នាត្រង់ A ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមរវាង C_1 និង C_2 ។

៧. គេឱ្យ $g(x)=ax+a+\dfrac{b}{x+2}$ ចំពោះ $x\neq 2$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ g មានអប្បបរមា $g(0)=2$ ។

៨. ក. កំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង $C:\ y=x\ln x-1$ នៅត្រង់ចំណុច $A(1,-1)$ ។

ខ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ B រវាងបន្ទាត់ L និងខ្សែកោង H តាងអនុគមន៍ $y=x+e^x-3$ ។

៩. គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=xe^{-x}-ae^{-xx}$ ។

ក. គណនាដេរីវេទីមួយ $g'(x)$ និង ដេរីវេទីពីរ $g''(x)$ ។

២. កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ g មានអតិបរមាត្រង់ $x=1$ ។

១០. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=a\ln x+bx^2+x+2$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថាអនុគមន៍ f មានបរមាត្រង់ $x_1=1$ និង $x_2=2$ ។

១១. រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $S=6x-3x^2$ ។

១២. កំណត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឱ្យ $M(1,0)$ ជាចំណុចរបត់នៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=g(x)=px^3+qx^2+\dfrac{2}{3}$ ។

១៣. រកចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $L:\ y=mx+n$ ប៉ះនឹងក្រាប $H: g(x)=1+e^x$ ត្រង់ចំណុច $A(0,2)$ ។

១៤. ក. កំណត់សមីការបន្ទាត់ d ដែលប៉ះនឹងក្រាប C_1 នៃ $y=1-x\ln x$ នៅត្រង់ចំណុច $M(1,1)$ ។

ខ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ N រវាងបន្ទាត់ d និងក្រាប C_2 នៃ $y=e^x+1-x$ ។

១៥. កំណត់ចំនួនពិត m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $h(x)=(x+m)e^{-x}$ មាន អតិបរមាត្រង់ $x=0$ ។

១៦. ប្រអប់មួយមានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែងដែលមានវិមាត្រ x , y , 3 ហើយដែល $x+y=10$ ។ កំណត់ x និង y ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត ។

១៧. $ABCD$ ជាចតុកោណកែងមួយដែលមាន $AB=3cm$ និង $BC=4cm$ ។ ចំណុច M , N , P និង Q ជាចំណុចនៅលើអង្កត់ AB, BC , CD និង DA រៀងគ្នា ដែល $AM=BN=CP=DQ=x$ ។

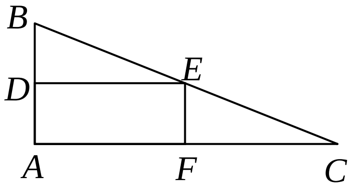
ក. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔAMQ , ΔBMN , ΔCNP , ΔDPQ និងផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $MNPQ$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យចតុកោណ $MNPQ$ មានផ្ទៃក្រឡាតូចបំផុត ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាតូចបំផុតនោះ ។

១៨. ប្រអប់មួយមានរាងប្រលេពីប៉ែតកែងដែលមានវិមាត្រ x ,$2x$ និង h គិតជាម៉ែត ហើយមានផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់ $S=1m^2$ ។

ក. គណនា h ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ. គណនាមាឌ V នៃប្រអប់ជាអនុគមន៍នៃ x ។ រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌ ធំបំផុត ។



១៩. ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ដែល $AB=5cm$ និង $AC=12cm$ ។ $ADEF$ ជាចតុកោណកែង ដែលមានវិមាត្រ x និង y $(0<x<y)$ ។ (ដូចរូប)

គណនារង្វាស់ x និង y ដើម្បីឱ្យ $ADEF$ មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត ។

២០. គេឱ្យស្វ៊ែមួយមានកាំប្រវែង $9dm$ ។ កោនមួយចារឹកក្នុងស្វ៊ែនោះ ។ រកកម្ពស់កោន ដើម្បីឱ្យកោននេះមានមាឌអតិបរមា ។

២១. ត្រីកោណសម័ង្ស ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង $AB = BC = AC = 4cm$ ។
M ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង AB ដែល $AM = x$ ។
គេសង់ចតុកោណកែង $MNPQ$ ចារឹកក្នុងត្រីកោណនេះ ។
កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យចតុកោណកែង នេះ មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា។

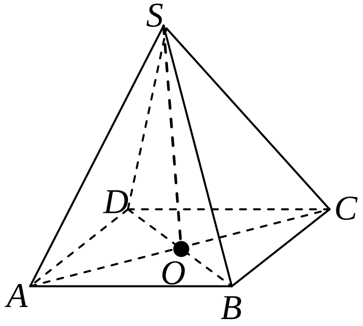
២២. កោនមួយមានកម្ពស់ $15cm$ និងកាំបាត $6cm$ ។ រកកម្ពស់ និង កាំថាសបាតនៃស៊ីឡាំងចារឹកក្នុងកោននេះ ដើម្បីឱ្យមាឌរបស់វាមានតម្លៃធំបំផុត ។

២៣. កោនមួយចារឹកក្នុងប៊ូលមួយមានផ្ចិត O កាំ R ។ កំណត់កម្ពស់ និង កាំថាសបាតដើម្បីឱ្យកោននេះមានមាឌអតិបរមា ។
រកមាឌអតិបរមានោះ ។

២៤. ស៊ីឡាំងមួយចារឹកក្នុងប៊ូលមួយដែលមានផ្ចិត O កាំ R ។ កំណត់កម្ពស់ និង កាំថាសបាតស៊ីឡាំង ដើម្បីឱ្យមាឌវាមានតម្លៃអតិបរមា។
រកមាឌអតិបរមានោះ ។

២៥. ផលបូកបរិមាត្រការេមួយ និង រង្វង់មួយមានប្រវែង ℓ ។ គណនាផលធៀបរវាង រង្វាស់កាំរង្វង់ និង ជ្រុងការេដើម្បីឱ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេ និង រង្វង់មានតម្លៃអប្បបរមា ។

២៦. ពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័ត $SABCD$ មានផ្ទៃក្រឡាខាង S_ℓ ។ គណនាផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់ SO និង ជ្រុងមួយនៃបាតដើម្បីឱ្យមាឌពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័តមានតម្លៃអតិបរមា ។



២៧. ត្រីកោណ ABC មួយមានបរិមាត្រ $2p$ វិលជុំវិញកម្ពស់ដែលគូសចេញពីកំពូល A កំណត់បានសូលីតមួយមានមាឌធំបំផុត ។
គណនារង្វាស់ជ្រុង និង កម្ពស់ នៃត្រីកោណសមបាតនោះ ។

២៨. គេឱ្យរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ចារឹកក្រៅត្រីកោណសមបាត ABC ។
 កំណត់រង្វាស់កម្ពស់នៃត្រីកោណនេះ ដើម្បីឱ្យបានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា។
 គណនាផ្ទៃក្រឡាអតិបរមានេះ ។

២៩. គេធ្វើប្រអប់មួយមានរាងប្រលេពីប៉ែតកែងដែលមានវិមាត្រ x, y និង $x+y$ ។គេចង់បានទ្រនុងវែងបំផុតនៃប្រអប់មានប្រវែង $20cm$ ។
 កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យប្រអប់នេះមានមាឌធំបំផុត ។

៣០. អនុគមន៍ h កំណត់ដោយ $y = h(x) = \sin(\cos^2 x)$ ។
 ក. បង្ហាញថា $h'(x) + \sin 2x \cdot \cos(\cos^2 x) = 0$ ។
 ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ h ត្រង់ $x = \dfrac{\pi}{4}$ ។