រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

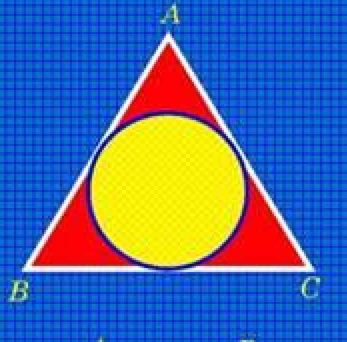
គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យាសាលាមហាសាស្ត្រា

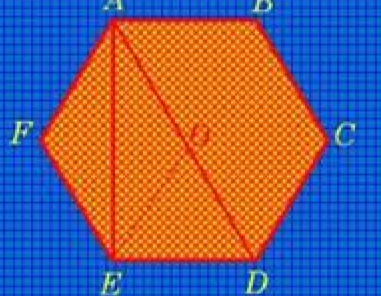
លំហាត់សិក្សាអនុគមន៍

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡង សញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ

រួមមាន៖

* កំណែលំហាត់ធ្លាប់ប្រឡងរួច
* កំណែលំហាត់ជ្រើសរើសថ្មី
* កម្រងលំហាត់អនុវត្តន៍
* សង្ខេបរូបមន្តសំខាន់ៗថ្នាក់ទី១២





2018

លំហាត់ទី០១

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x-\dfrac{3(e^x-1)}{e^x+2}$

តាង (C) ជាក្រាបតំណាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

១.ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

២.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ f អាចសរសេរជាពីរទម្រង់ដូចខាងក្រោម៖

$$f(x)=x-3+\frac{9}{e^x+2} \quad \text{និង} \quad f(x)=x+\frac{3}{2}-\frac{9e^x}{2(e^x+2)} \quad \text{គ្រប់ } x\in\mathbb{R}$$

៣.ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតទាំងពីររបស់ខ្សែកោង (C) រួចចូរបញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) ជាមួយនឹងអាស៊ីមតូតនីមួយៗរបស់វា។

៤.ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\dfrac{(e^x-1)(e^x-4)}{\left(e^x+2\right)^2}$ ។

៥.សិក្សាសញ្ញារបស់ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ f ។

៦.គណនា $f(-2)$ និង $f(3)$ រួចសង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់វា។

គេយក $\dfrac{9}{e^{-2}+2}=4.2$ និង $\dfrac{9}{e^3+2}=0.41$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

យើងមាន $f(x)=x-\dfrac{3(e^x-1)}{e^x+2}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x-\dfrac{3(e^x-1)}{e^x+1}\right]=-\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\dfrac{3(e^x-1)}{e^x+1}\right]=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3(e^x-1)}{e^x+1}=3$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

២.ស្រាយថាអនុគមន៍ f អាចសរសេរជាពីរទម្រង់ដូចខាងក្រោម៖

$$f(x)=x-3+\frac{9}{e^x+2} \text{ និង } f(x)=x+\frac{3}{2}-\frac{9e^x}{2(e^x+2)} \text{ គ្រប់ } x\in\mathbb{R}$$

យើងមាន $f(x)=x-\frac{3(e^x-1)}{e^x+2}=x-\frac{3(e^x+2)-9}{e^x+2}=x-3+\frac{9}{e^x+2}$ ពិត

ហើយ $f(x)=x-\frac{3(e^x-1)}{e^x+2}=x+\frac{3}{2}-\left[\frac{3(e^x-1)}{e^x+2}+\frac{3}{2}\right]=x+\frac{3}{2}-\frac{9e^x}{2(e^x+2)}$

ដូចនេះ $f(x)=x-3+\frac{9}{e^x+2}$ និង $f(x)=x+\frac{3}{2}-\frac{9e^x}{2(e^x+2)}$ ពិត ។

៣.ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតទាំងពីររបស់ខ្សែកោង (C)

យើងមាន $f(x)=x-3+\frac{9}{e^x+2}$ ដោយ $\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{e^x+2}=0$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $+\infty$ ។

ហើយ $f(x)=x+\frac{3}{2}-\frac{9e^x}{2(e^x+2)}$ ដោយ $\lim_{x\to-\infty}\frac{9e^x}{2(e^x+2)}=0$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ $y=x+\frac{3}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$ ។

បញ្ជាក់ ទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) ជាមួយនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត៖

យើងមាន $f(x)-(x-3)=\frac{9}{e^x+2}>0$ ជានិច្ចនោះខ្សែកោង (C) ស្ថិតនៅខាងលើនៃខ្សែកោង (C) ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)-(x+\frac{3}{2})=-\frac{9e^x}{2(e^x+2)}<0$ ជានិច្ចនោះខ្សែកោង (C) ស្ថិតនៅខាងក្រោមនៃខ្សែកោង (C) ។

៤.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\frac{(e^x-1)(e^x-4)}{(e^x+2)^2}$

យើងមាន $f(x)=x-3+\frac{9}{e^x+2}$

យើងបាន $f'(x)=1-\frac{9(e^x+2)'}{(e^x+2)^2}=\frac{(e^x+2)^2-9e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{e^{2x}-5e^x+4}{(e^x+2)^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\frac{(e^x-1)(e^x-4)}{(e^x+2)^2}$ ពិត។

ង.សិក្សាសញ្ញារបស់ $f'(x)$៖

យើងមាន $f'(x)=\frac{(e^x-1)(e^x-4)}{(e^x+2)^2}$ ដោយ $(e^x+2)^2>0$ ជានិច្ចនោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $(e^x-1)(e^x-4)$ ។

បើ $f'(x)=0 \Leftrightarrow (e^x-1)(e^x-4)=0$ នោះ $x=0$, $x=\ln 4=2\ln 2$ ។

គេបានតារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ដូចខាងក្រោម៖

x	$-\infty$		0		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

គូសតារាងអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ f ៖

គេមាន $f(0)=0$ និង $f(2\ln 2)=2\ln 2-3+\frac{9}{4+2}=-0.11$ ។

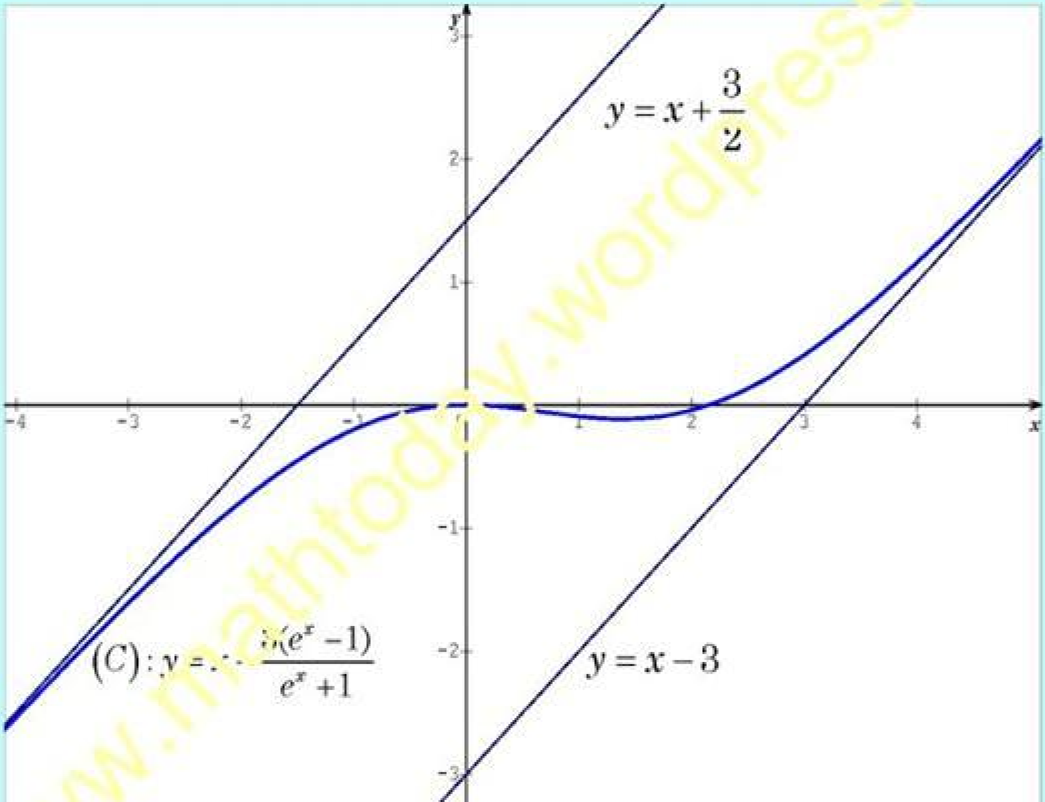
x	$-\infty$		0		$2\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-0.11	$\nearrow$	$+\infty$

៦.គណនា $f(-2)$ និង $f(3)$ រួចសង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់វា

ដោយគេមាន $\frac{9}{e^{-2}+2}=4.2$ និង $\frac{9}{e^{3}+2}=0.41$

គេបាន $f(-2)=-2-3+\frac{9}{e^{-2}+2}=-5+4.2=-0.8$ ។

និង $f(3)=3-3+\frac{9}{e^{3}+2}=0.41$ ។



លំហាត់ទី០២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}-1$

តាង (C) ជាក្រាបតំណាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

១.ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីម តូតដេករបស់ខ្សែកោង (C) ។

២.ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\frac{(x-1)^2e^x}{(x^2+1)^2}$ ។

បញ្ជាក់សញ្ញារបស់ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ f ។

៣.រកសមីការបន្ទាត់ (T_1) និង (T_2) ដែលប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (C) រៀងគ្នាត្រង់ ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $x=0$ និង $x=1$ ។

៤.គណនា $f(-1)$ និង $f(2)$ រួចសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T_1) និង (T_2) ។

គេយក $\frac{e^{-1}}{2}=0.19$ និង $\frac{e^2}{5}=1.48$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

យើងមាន $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}-1$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x}{x^2+1}-1\right]=-1$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ។

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{x^2+1}-1\right]=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=+\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

២.ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\frac{(x-1)^2e^x}{(x^2+1)^2}$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}-1$

យើងបាន $f'(x)=\dfrac{(e^x)'(x^2+1)-(x^2+1)'e^x}{\left(x^2+1\right)^2}$

$$=\frac{e^x(x^2+1)-2xe^x}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2-2x+1)e^x}{(x^2+1)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2e^x}{(x^2+1)^2}$ ។

បញ្ជាក់សញ្ញារបស់ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ f ៖

យើងមាន $\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2e^x}{(x^2+1)^2}\geq 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន។

បើ $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0$ នោះ $x=1$ ។

ចំពោះ $x=1$: $f(1)=\dfrac{e}{2}-1=0.35$ ។

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0.35	$\nearrow$	$+\infty$

៣.រកសមីការបន្ទាត់ (T_1) និង (T_2) ដែលប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (C) រៀងគ្នាត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $x=0$ និង $x=1$ ៖

គេមាន $f(0)=1-1=0$ និង $f(1)=0.35$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (T_1) និង (T_2) ដែលប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (C) រៀងគ្នាត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $x=0$ និង $x=1$ គឺ

$f'(0) = \frac{(0-1)^2 e^0}{(0+1)^2} = 1$ និង $f'(1) = \frac{(1-1)e^1}{(1+1)^2} = 0$

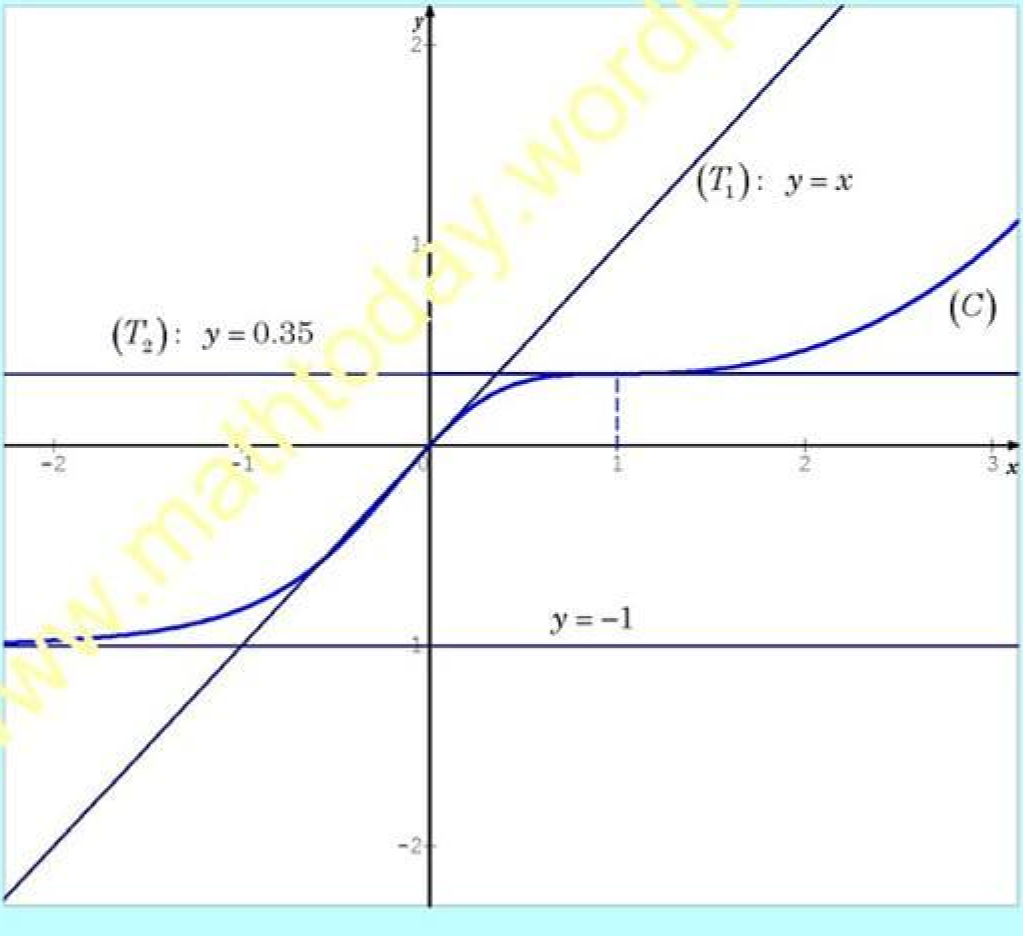
ដូចនេះ $(T_1): y = x$ និង $(T_2): y = 0.35$ ។

៤.គណនា $f(-1)$ និង $f(2)$ រួចសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T_1) និង (T_2)

គេមាន $\frac{e^{-1}}{2} = 0.19$ និង $\frac{e^2}{5} = 1.46$

គេបាន $f(-1) = \frac{e^{-1}}{2} - 1 = 0.19 - 1 = -0.81$ ។

និង $f(2) = \frac{e^2}{5} - 1 = 1.46 - 1 = 0.46$ ។



លំហាត់ទី៣

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{e^x-1}{x}$ ដែល $x\in\mathbb{R}^*$

តាង(C) ជាក្រាបតំណាងអនុគមន៍fក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

១.ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ។

២.ចូរស្រាយថាបន្ទាត់ $(d):y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង(C) កាលណា $x\to-\infty$ ។

២.ចំពោះគ្រប់$x\in\mathbb{R}^*$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+1-e^x)}{x^2}$ ។

៣.គេដឹងថា $e^x\ge x+1$ គ្រប់$x\in\mathbb{R}$ ។ ចូរបញ្ជាក់សញ្ញារបស់$f'(x)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពរបស់អនុគមន៍f ។

៤.គណនា$f(-2)$,$f(-1)$,$f(2)$ និង $f(3)$ បង្ហាញថាសមីការ$f(x)$ មានឫសពីរ α និង β ដែល $-2<\alpha<-1$ និង $2<\beta<3$ ។

៥.ចូរសង់ក្រាប(C)និងបន្ទាត់(d)។

គេយក $\dfrac{e^{-2}-1}{2}=-0.43$, $e^{-1}=0.37$, $\dfrac{e^2-1}{2}=3.15$ និង $\dfrac{e^3-1}{3}=6.23$

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **និង** $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2-\dfrac{e^x-1}{x}\right)=-\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=0$ ។

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)\right]=-\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ ។

និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x+2-\dfrac{e^x-1}{x}\right)=2-1=1$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ ។

២.ស្រាយថាបន្ទាត់ $(d): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$

យើងមាន $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=-\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=0$

ដូចនេះ $(d): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$ ។

២.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+1-e^x)}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=x+2-\dfrac{e^x-1}{x}$

យើងបាន $f'(x)=1-\dfrac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}=\dfrac{x^2-1-(x-1)e^x}{x^2}$

$$=\frac{(x-1)(x+1)-(x-1)e^x}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1-e^x)}{x^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+1-e^x)}{x^2}$ ។

៣.បញ្ជាក់សញ្ញារបស់ $f'(x)$

ដោយគេដឹងថា $e^x\geq x+1$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ (សម្មតិកម្ម) នោះ $f'(x)$ ត្រូវយក សញ្ញាដូច $-(x-1)$ ព្រោះ $e^x\geq x+1$ នោះ $x+1-e^x\leq 0$ ។

បើ $f'(x)=0$ នោះ $x-1=0$ ឬ $x=1$ និង $f(1)=3-e+1=1.3$ ។

គូសតារាងអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ f ៖

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1 || 1	↗	1.13	↘	$-\infty$

៤.គណនា $f(-2), f(-1)$, $f(2)$ និង $f(3)$ រួចទាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស

ពីរ α និង β ដែល $-2<\alpha<-1$ និង $2<\beta<3$ ៖

ដោយ $\dfrac{e^{-2}-1}{2}=-0.43$, $e^{-1}=0.37$, $\dfrac{e^{2}-1}{2}=3.15$ និង $\dfrac{e^{3}-1}{3}=6.23$

យើងបាន $f(-2)=-2+2-\dfrac{e^{-1}-1}{-2}=-0.43,\ f(-1)=-1+2+e^{-1}-1=0.37$

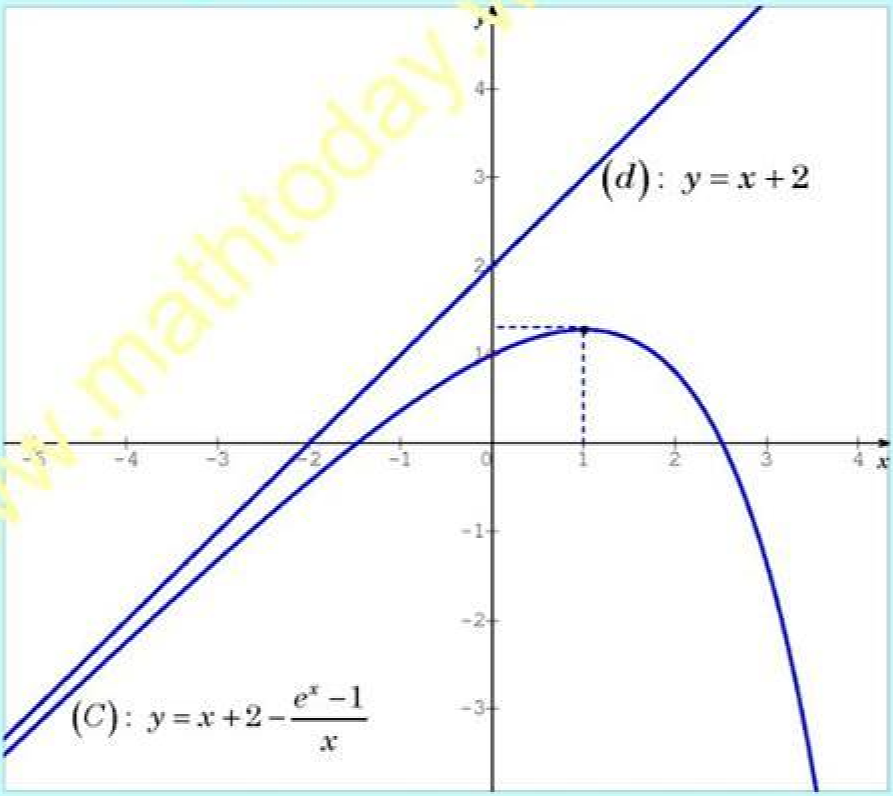
$f(2)=2+2-\dfrac{e^{2}-1}{2}=4-3.15=0.85$, $f(3)=3+2-\dfrac{e^{3}-1}{3}=5-6.23=-1.23$

ដោយ $f(-2)f(-1)=(-0.43)(0.37)<0$ និង $f(2)f(3)=(0.85)(-1.23)<0$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលមាន α និង β ដែល $-2<\alpha<-1$ និង

$2<\beta<3$ ដែល $f(\alpha)=0$ និង $f(\beta)=0$ ។

៥.សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (d)



លំហាត់ទី៤

អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=2+\frac{\ln x}{x^2}$

ហើយមានខ្សែកោង (C) ។

១.គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។

កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃ(C) ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) ជាមួយអាស៊ីមតូតដេករបស់វា ។ចូរសង់ (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$។

៤.គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង(C) ជាមួយអាស៊ីមតូតដេករបស់វា និងបន្ទាត់ឈរ $x=1$; $x=e^{0.5}$ ។($e=2.72$; $e^{0.5}=1.65$)

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាលីមីត

គេមាន $f(x)=2+\frac{\ln x}{x^2}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\frac{\ln x}{x^2})=2$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

ហើយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2+\frac{\ln x}{x^2}\right)=-\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2}=-\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ។

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

ដូចនេះបន្ទាត់ $y=2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង $x=0$ជាសមីការនៃ

អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

គេមាន $f(x)=2+\dfrac{\ln x}{x^2}$ គ្រប់ $x>0$ នោះគេបាន $f'(x)=(2+\dfrac{\ln x}{x^2})'$

$$f'(x)=\frac{(\ln x)'x^2-(x^2)'\ln x}{x^4}=\frac{\frac{1}{x}.x^2-2x.\ln x}{x^4}$$

$$f(x)=\frac{x(1-2\ln x)}{x^3}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ៖

គេមាន $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ ដោយ $x^3>0\ \forall x>0$ នោះ

f'មានសញ្ញាដូចភាគយក $1-2\ln x$ ។

-បើ $1-2\ln x=0$ នោះ $\ln x=\frac{1}{2}$ គេទាញ $x=e^{\frac{1}{2}}$ ឬ $x=\sqrt{e}$ ។

-បើ $1-2\ln x>0$ នោះ $0<x<\sqrt{e}$

-បើ$1-2\ln x<0$ នោះ $x>\sqrt{e}$

ចំពោះ $x=\sqrt{e}$ គេបាន $f(\sqrt{e})=2+\dfrac{\ln\sqrt{e}}{e}=2+\dfrac{1}{2e}=2.184$

តារាងអថេរភាព ៖

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2.184	$\searrow$	0

3)រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និងអាស៊ីមតូតដេក ៖

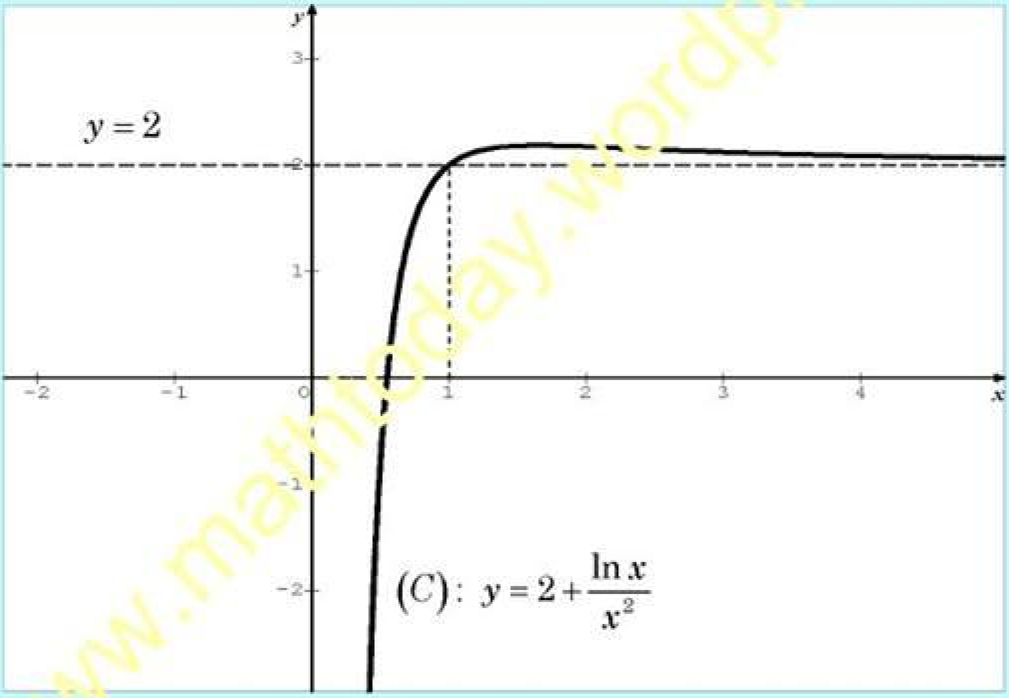
ប្រសព្វរវាងក្រាប និងអាស៊ីមតូតដេកជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} y = 2 + \dfrac{\ln x}{x^2} \\ y = 2 \end{cases}$$

សមីការអាប់ស៊ីស $2 + \dfrac{\ln x}{x^2} = 2$ ដោយ $x > 0$នោះសមីការសមមូល

$\ln x = 0$ នោះ $x = 1$ ហើយ $y = 2$ ។ដូចនេះ $A(1\ ,\ 2)$ ។

សង់ក្រាប $(c): y = 2 + \dfrac{\ln x}{x^2}$



គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប(c)និងអាស៊ីមតូតដេកក្នុង $[1,\sqrt{e}]$ ៖

$$S = \int_1^{\sqrt{e}} \left[(2 + \frac{\ln x}{x^2}) - 2 \right].dx = \int_1^{\sqrt{e}} \ln x . \frac{dx}{x^2}$$

តាង $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}.dx \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

គេបាន $S = \left[-\dfrac{\ln x}{x}\right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \dfrac{dx}{x^2} = \left[-\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{e}}$

$$= \left[-\frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e}}\right] - [0-1] = -\frac{3}{2\sqrt{e}} + 1 = \frac{2\sqrt{e}-3}{2\sqrt{e}}$$

ដូចនេះ $S = \dfrac{2\sqrt{e}-3}{2\sqrt{e}} = \dfrac{2(1.65)-3}{2(1.65)} = 0.08$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា) ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៥

អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\frac{2\ln x}{x}$ មានក្រាប C

១.រក $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣.សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ។ គេឲ្យ $e=2.7$, $\frac{2}{e}=0.7$

៤.គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេកនិងបន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាលីមីត $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ **និង** $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

គេបាន $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-\frac{2\ln x}{x})=+\infty$ ព្រោះ $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ ។

និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}(1-\frac{2\ln x}{x})=1$ ព្រោះ $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ។

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីតតូតដេកនៃក្រាប C ៖

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $x=0$

ជាអាស៊ីមតូតឈរ និង $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ **ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍** f

គេមាន $f(x)=1-\frac{2\ln x}{x}$, $x>0$

យើងបាន $f'(x)=-2.\frac{(\ln x)'x-(x)'\ln x}{x^2}=-2.\frac{1-\ln x}{x^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{x^2}$ ។

ចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{x^2}$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $\ln x-1$

-បើ $f'(x)>0$ គេបាន $\ln x-1>0$ ឬ $x>e$

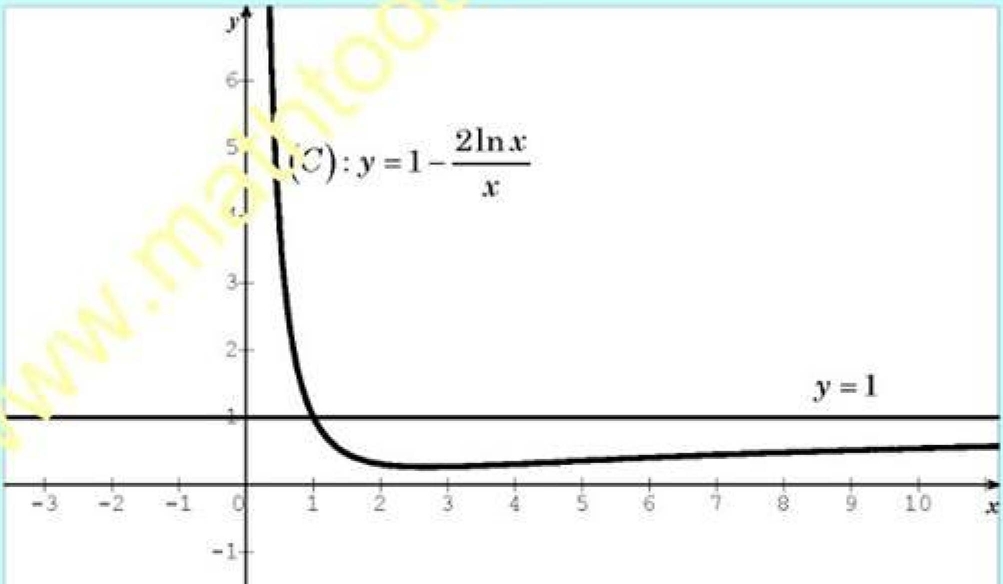
-បើ $f'(x)=0$ គេបាន $\ln x-1=0$ ឬ $x=e$

-បើ $f'(x)<0$ គេបាន $\ln x-1<0$ ឬ $x<e$

ចំពោះ $x=e$ គេបាន $f(e)=1-\dfrac{2\ln e}{e}=1-\dfrac{2}{e}=1-(0.7)=0.3$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0.3	$\nearrow$	1

៣.សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេដូចរូប ៖



៤-គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេកនិងបន្ទាត់ឈរ

$x=1$ និង $x=e$

តាង S ផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់ ដែលត្រូវរក ។

យើងបាន $S=\int_1^e\left[1-(1-\frac{2\ln x}{x})\right].dx$

$$=\int_1^e\frac{2\ln x}{x}.dx=\int_1^e 2\ln x.\frac{dx}{x}$$

តាង $u=\ln x$ នោះ $du=\frac{dx}{x}$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $u=0$ ហើយ $x=e$ នោះ $u=1$

គេបាន $S=\int_0^1 2u.du=\left[u^2\right]_0^1=1^2-0^2=1$

ដូចនេះ $S=1$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៦

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x+1-2\ln x$

មានក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

១.ចូររកលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ និងត្រង់ 0 ខាងស្តាំ។

ទាញបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

២.រកដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

ទាញរកតម្លៃអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ f រួចសង់តារាងអថេរភាព។

៣.គណនាតម្លៃ $f(1)$ រួចសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុច $x=1$ ។

៤.ចូរបង្ហាញថាគេមិនអាចគូសបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (T) បានទេ ។

៥.គណនា $f(e)$ និង $f(\frac{7}{2})$ រួចគូសក្រាប C ។

គេយក $e=2.7$, $\ln 2=0.7$, $\ln 7=1.95$ ។

៦.ចូរស្រាយថា $F(x)=\frac{x^2}{2}+3x-2x\ln x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f លើ $(0,+\infty)$

៧.ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡា S_a នៃផ្ទៃកប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប C និងបន្ទាត់ T និងបន្ទាត់ឈរ $x=a$, $x=1$ ដែល $0<a<1$ ។

គណនាលីមីតនៃ S_a កាលណា a ខិតជិតសូន្យខាងស្តាំ ។

ដំណោះស្រាយ

១.រកលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ និងត្រង់ 0 ខាងស្តាំ

យើងបាន $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-2\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x(1+\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x})\right]=+\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+1-2\ln x\right)=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ នៃក្រាប C ។

២.រកដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=x+1-2\ln x$

យើងបាន $f'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$ ។ គ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\frac{x-2}{x}$

មានសញ្ញាដូច $(x-2)$ ។ បើ $f'(x)=\frac{x-2}{x}=0$ នោះ $x=2$ ។

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ទាញរកតម្លៃអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ រួចសង់តារាងអថេរភាព ៖

តាមតារាងសិក្សាសញ្ញាខាងលើយើងឃើញថា $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

ត្រង់ចំណុច $x=2$ ដូចនេះ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ គឺ

$f(2)=2+1-2\ln 2=3-2(0.7)=1.6$ ។

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1.6	$\nearrow$	$+\infty$

៣.គណនាតម្លៃ $f(1)$ រួចសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (T)

គេមាន $f(x)=x+1-2\ln x$ ចំពោះ $x=1$ គេបាន

$f(1)=1+1-2\ln 1=2$ ។

រូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

ដោយ $f'(x)=\dfrac{x-2}{x}$ នោះ $f'(1)=\dfrac{1-2}{1}=-1$

គេបាន $(T): y=-1(x-1)+2=-x+3$ ។

៤.បង្ហាញថាគេមិនអាចគូសបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (T)

ឧបមាថា (T') ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុច x_0 ។

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (T') គឺ $f'(x_0)=\dfrac{x_0-2}{x_0}$ ។

បើ $(T')\perp(T)$ នោះ $(-1)f'(x_0)=-1$

ឬ $f'(x_0)=1$ ឬ $\dfrac{x_0-2}{x_0}$ ឬ $x_0-2=x_0$ (មិនអាច)

ដូចនេះគេមិនអាចគូសបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ហើយកែងនឹង (T) បានទេ។

៥.គណនា $f(e)$ និង $f(\frac{7}{2})$ រួចគូសក្រាប

គេមាន $f(x)=x+1-2\ln x$

ចំពោះ $x=e$ នោះ $f(e)=e+1-2\ln e=2.7+1-2=1.7$ ។

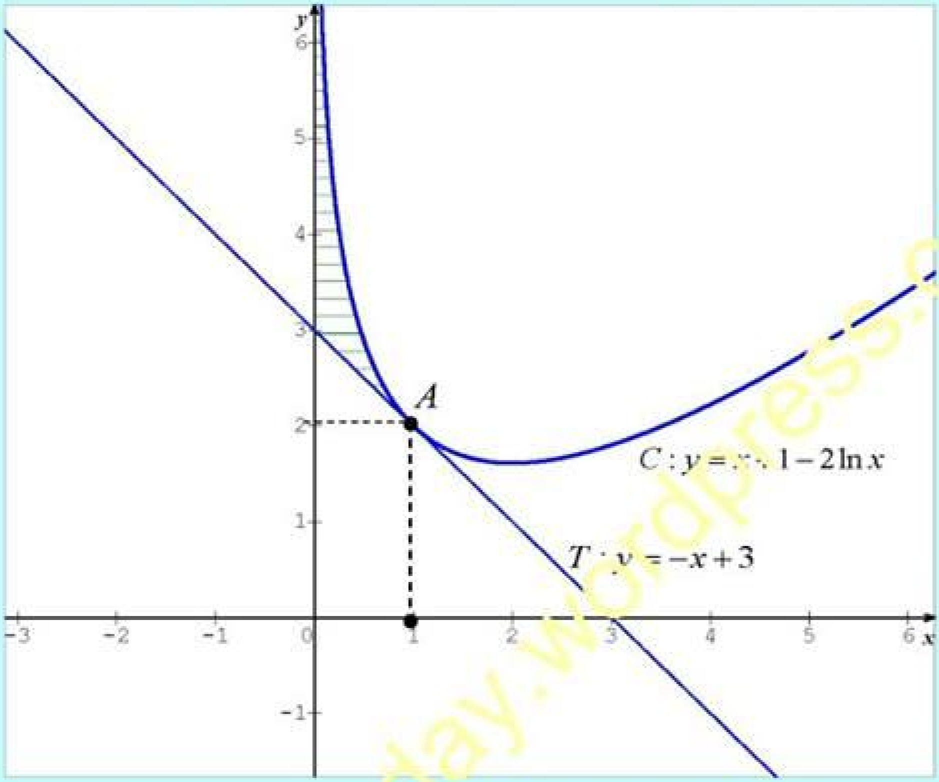
ចំពោះ $x=\dfrac{7}{2}$ នោះ $f(\dfrac{7}{2})=\dfrac{7}{2}+1-2\ln\dfrac{7}{2}=4.5-2(\ln 7-\ln 2)=2$

ដូចនេះ $f(e)=1.7$ និង $f(\dfrac{7}{2})=2$ ។

៦.ស្រាយថា $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+3x-2x\ln x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f

គេមាន $F'(x)=x+3-2(\ln x+1)=x+1-2\ln x=f(x)$ គ្រប់ $x>0$

ដូចនេះ $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+3x-2x\ln x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f លើ $(0,+\infty)$ ។



៧) គណនាផ្ទៃក្រឡា S_a

យើងបាន $S_a=\displaystyle\int_a^1\left[f(x)-(-x+3)\right]dx=\left[F(x)+\frac{x^2}{2}-3x\right]_a^1$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+3x-2x\ln x+\frac{x^2}{2}-3x\right]_a^1=\left[x^2-2x\ln x\right]_a^1$$

$$=(1-2\ln 1)-(a^2-2a\ln a)=1-a^2+2a\ln a$$

ដូចនេះ: $S_a=1-a^2+2a\ln a$ (ខ្នាតផ្ទៃ)

គណនាលីមីតនៃ S_a កាលណា a ខិតជិតសូន្យខាងស្តាំ ៖

យើងបាន $\lim\limits_{a\to 0^+}S_a=\lim\limits_{a\to 0^+}\left(1-a^2+2a\ln a\right)=1$ ព្រោះ $\lim\limits_{a\to 0^+}a\ln a=0$ ។

លំហាត់ទី០៧

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ

$f(x)=-1+2\ln x+\dfrac{1-2\ln x}{2x^2}=0$ (C) ជាក្រាបតំណាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

១.រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) ។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-1+\ln x\right)}{x^3}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

៣.គេតាង g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x^2-1+\ln x$ ។

   $a.$ គណនាដេរីវេ $g'(x)$ រួចទាញថា g ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $(0,+\infty)$ ។

   $b.$ គណនាតម្លៃ $g(1)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ g លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1,+\infty)$ ។

៤.ចូរគណនា $f(1)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៥.ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=0$ ។គណនា $f(2)$ រួចសង់ក្រាប (C) ។

(គេយក $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0.7$, $\sqrt{e}=1.6$, $e=2.7$ និង $\ln 2=0.7$)

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ រួចបញ្ជាក់អាស៊ីមតូតឈរនៃ (C)

យើងមាន $f(x)=-1+2\ln x+\dfrac{1-2\ln x}{2x^2}$ គ្រប់ $x>0$ ។

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+2\ln x+\dfrac{1-2\ln x}{2x^2}\right)=+\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2\ln x}{x^2}=0$

ហើយ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-1+2\ln x+\dfrac{1-2\ln x}{2x^2}\right)$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[-(1 - 2\ln x) + \frac{(1 - 2\ln x)}{2x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[(1 - 2\ln x)(-1 + \frac{1}{2x^2}) \right] = +\infty$$

ព្រោះ $\lim_{x \to 0^+} (1 - 2\ln x) = +\infty$ និង $\lim_{x \to 0^+} (-1 + \frac{1}{2x^2}) = +\infty$ ។

ដូចនេះ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ និង $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ ។

២.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x) = \frac{2\left(x^2 - 1 + \ln x\right)}{x^3}$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$

យើងមាន $f(x) = -1 + 2\ln x + \frac{1 - 2\ln x}{2x^2}$ គ្រប់ $x > 0$ ។

យើងបាន $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{-2x - 2x(1 - 2\ln x)}{2x^4} = \frac{2}{x} + \frac{-4x + 4x\ln x}{2x^4}$

$$= \frac{2}{x} - \frac{2 - 2\ln x}{x^3} = \frac{2x^2 - 2 + 2\ln x}{x^3}$$

ដូចនេះ $f'(x) = \frac{2\left(x^2 - 1 + \ln x\right)}{x^3}$ ពិត ។

៣.a. គណនាដេរីវេ $g'(x)$ រួចបញ្ជាក់ថា g ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $(0, +\infty)$

យើងមាន $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$

យើងបាន $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$ ។

ដោយគ្រប់ $x > 0$ គេមាន $\frac{2x^2 + 1}{x} > 0$ នោះ $g'(x) > 0$ ។

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $(0, +\infty)$ ។

b. គណនាតម្លៃ $g(1)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ g លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1, +\infty)$

ចំពោះ $x = 1$ យើងបាន $g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$

ដូចនេះ $g(1) = 0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ g ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $(0,+\infty)$ នោះយើងទាញបាន៖

ចំពោះ $x\in(0,1): g(x)<0$ និង $x\in(1,+\infty): g(x)>0$ ។

៤.គណនា $f(1)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f(x)=-1+2\ln x+\dfrac{1-2\ln x}{2x^2}$ គ្រប់ $x>0$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $f(1)=-1+2\ln 1+\dfrac{1-2\ln 1}{2(1)^2}=-1+0+\dfrac{1-0}{2}=-\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2-1+\ln x\right)}{x^3}=\dfrac{2g(x)}{x^3}$

មានសញ្ញាដូច $g(x)$ ។

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងបាន $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(0,1)$

ហើយ $f'(x)=0$ ចំពោះ $x=1$ និង $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(1,+\infty)$ ។

តារាងអថេរភាពនៃ f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

៥.ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=0$ និង គណនា $f(2)$ រួចសង់ក្រាប (C)

យើងមាន $f(x)=-1+2\ln x+\dfrac{1-2\ln x}{2x^2}=0$ ដែល $x>0$

សមមូល $-(1-2\ln x)+\dfrac{(1-2\ln x)}{2x^2}=0$

សមមូល $(1-2\ln x)\left(-1+\dfrac{1}{2x^2}\right)=0$

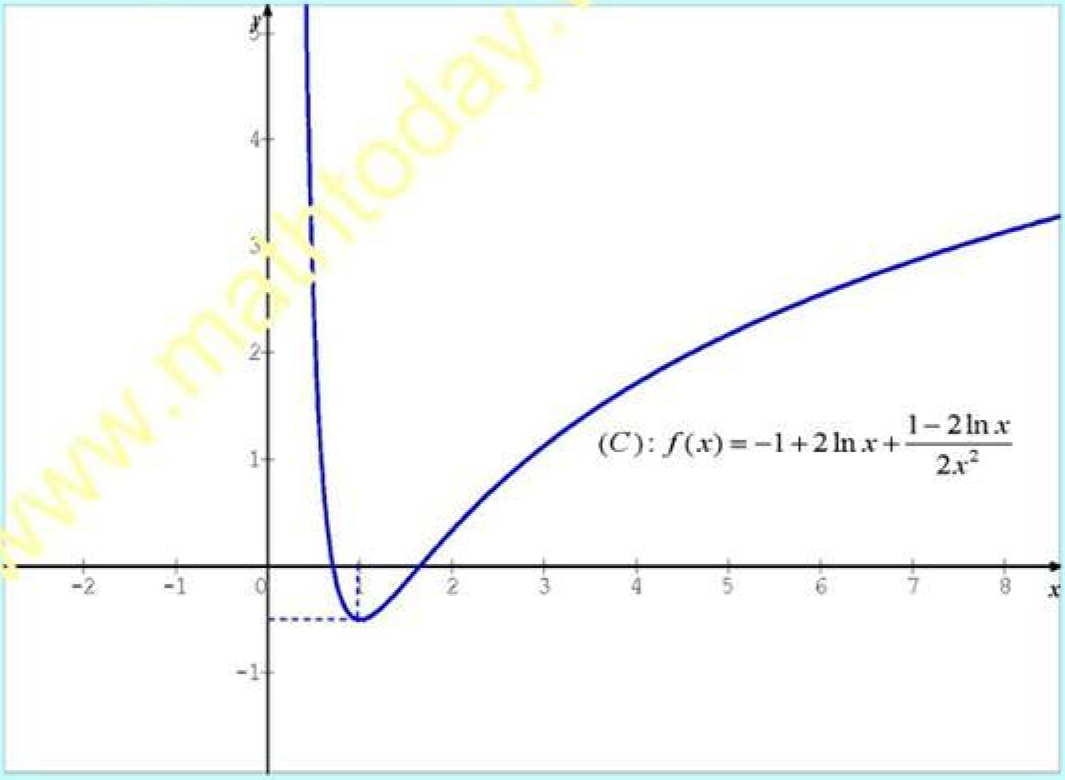
សមមូល $\dfrac{(1-2\ln x)(-2x^2+1)}{2x^2}=0$

សមមូល $\left[\begin{array}{l}\ln x=\dfrac{1}{2}\\ x^2=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ ឬ $\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{e}\\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

ដូចនេះសមីការមានឬសពីរគឺ $x=\sqrt{e}$, $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ចំពោះ $x=2$ នោះ $f(2)=\dfrac{(1-2\ln 2)(-8+1)}{8}=\dfrac{(1-1.4)(-7)}{8}=0.35$

ដូចនេះ $f(2)=0.35$ ។



លំហាត់ទី០៨

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $y=f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ។

(c) ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

១.រកលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិង

អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c) ។

២.គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣.ចូរសង់ក្រាប (c) ។ គេយក $e=2.7$, $\ln 2=0.7$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.រកលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$:

យើងមាន $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ នោះយើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

ហើយ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ ។

បញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c) :

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ឬអក្ស័ (oy)

ជាអាស៊ីមតូតឈរ និងបន្ទាត់ $y=0$ ឬអក្ស័ (ox) ជាអាស៊ីមតូតដេក។

២.គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ $D_f=(0,+\infty)$

ដេរីវេ $f'(x)=(\dfrac{\ln x}{x})'=\dfrac{(\ln x)'(x)-(x)'(\ln x)}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ ។

មានសញ្ញាដូច $(1-\ln x)$ គ្រប់ $x \in D_f$ ។

បើ $f'(x) > 0$ នោះ $1-\ln x > 0$ ឬ $\ln x < 1$ ឬ $0 < x < e$ ។

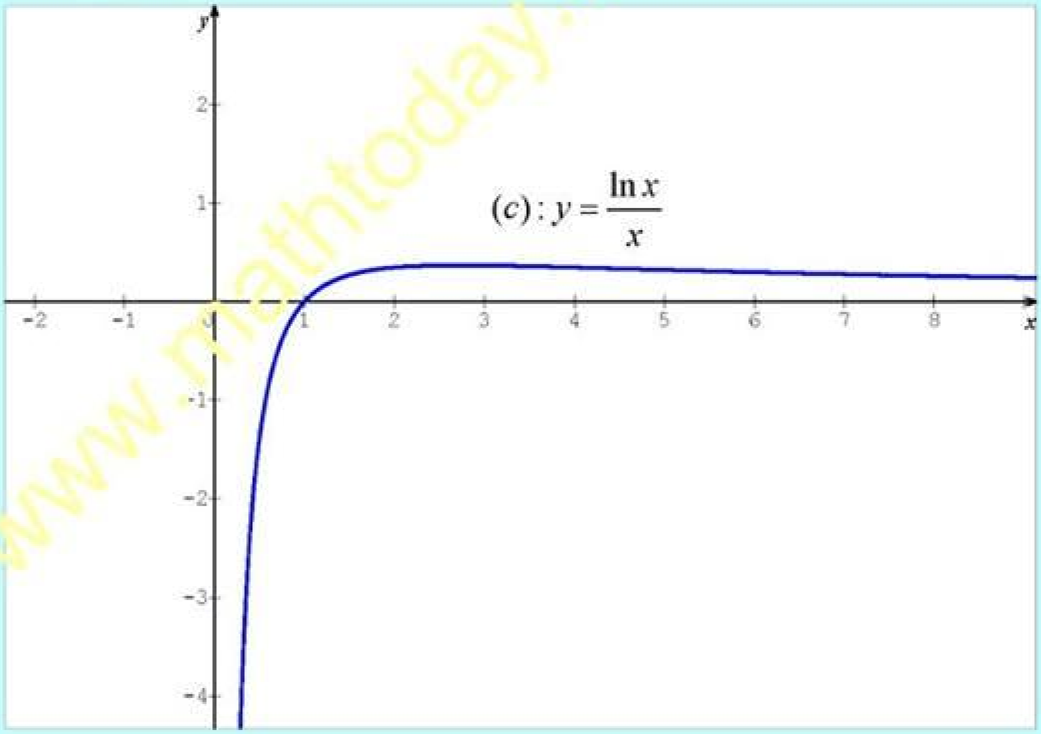
បើ $f'(x) = 0$ នោះ $1-\ln x = 0$ ឬ $\ln x = 1$ ឬ $x = e$ ។

បើ $f'(x) < 0$ នោះ $1-\ln x < 0$ ឬ $\ln x > 1$ ឬ $x > e$ ។

ចំពោះ $x = e$ នោះ $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} = 0.4$ ។

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0.4	$\searrow$	0

៣.សង់ក្រាប (c)



លំហាត់ទី០៩

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=-x+3-\dfrac{4\ln x}{x}$ ដែល $x>0$

តាង (C) ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

១.រកលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង ត្រង់ $+\infty$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ នៃក្រាប (C) ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចកំណត់សញ្ញារបស់វាដោយដឹងថាគ្រប់ $x>0$ គេមាន $x^2+4-4\ln x>0$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣. A ជាចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) ជាមួយអាស៊ីមតូតដេករបស់វាតាង (d) ជាបន្ទាត់កែងនឹងអាស៊ីមតូតដេកត្រង់ A និង (T) ជាបន្ទាត់ប៉ះ (C) ត្រង់ A ចូររកសមីការនៃបន្ទាត់ (d) និង (T) ។

៤.គណនា $f(\frac{1}{2}), f(2)$ និង $f(4)$ រួចសង់ $(C), (d)$ និង (T) ។

ដំណោះស្រាយ

១)រកលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង ត្រង់ $+\infty$

គេមាន $y=f(x)=-x+3-\dfrac{4\ln x}{x}$ ដែល $x>0$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x+3-\dfrac{4\ln x}{x}\right)=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

ហើយ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x+3-\dfrac{4\ln x}{x}\right)=-\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ។

កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរនៃក្រាប (C) ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ម្យ៉ាងទៀត $y=f(x)=-x+3-\dfrac{4\ln x}{x}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4\ln x}{x}=0$

ដូចនេះបន្ទាត់ $(\Delta): y=-x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

២)គណនាដេរីវេ

គេមាន $y=f(x)=-x+3-\dfrac{4\ln x}{x}$

គេបាន $f'(x)=-1-4\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{-x^2-4+4\ln x}{x^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=-\dfrac{x^2+4-4\ln x}{x^2}$ ។

កំណត់សញ្ញា $f'(x)$ ៖

ដោយដឹងថាគ្រប់ $x>0$ គេមាន $x^2+4-4\ln x>0$ នោះគេទាញ

$f'(x)=-\dfrac{x^2+4-4\ln x}{x^2}<0$ គ្រប់ $x<0$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

៣)រកសមីការនៃបន្ទាត់ (L) និង (T)

ដោយ A ជាចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) ជាមួយអាស៊ីមតូតដេក

របស់វានោះវាជាគូចម្លើយនៃប្រពន្ធ័ $\begin{cases} y=-x+3-\dfrac{4\ln x}{x} \\ y=-x+3 \end{cases}$

ផ្ទឹមសមីការពីនេះគេបាន $-x+3=-x+3-\dfrac{4\ln x}{x}$ សមមូល $\ln x=0$

ឬ $x=1$ ហើយ $y=-1+3=2$ ។គេបាន $A(1,2)$ ។

ដោយ (d)ជាបន្ទាត់កែងនឹងអាស៊ីមតូតដេក$(\Delta): y=-x+3$ ត្រង់ A នោះសមីការ(d)មានទម្រង់ $y=x+b$ ហើយ $A(1,2)\in(d)$ នោះ $2=1+b$

ឬ $b=1$ ។

ដូចនេះ $(d): y=x+1$ ។

ម្យ៉ាងទៀត (T)ជាបន្ទាត់ប៉ះ(C)ត្រង់ចំណុច A នោះសមីការ(T)សរសេរ
$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

ដោយ $f'(1)=-\dfrac{1+4-4\ln 1}{1^2}=-5\ ,f(1)=2$

គេបាន $(T): y=-5(x-1)+2=-5x+7$ ។

ដូចនេះ $(T): y=-5x+7$ ។

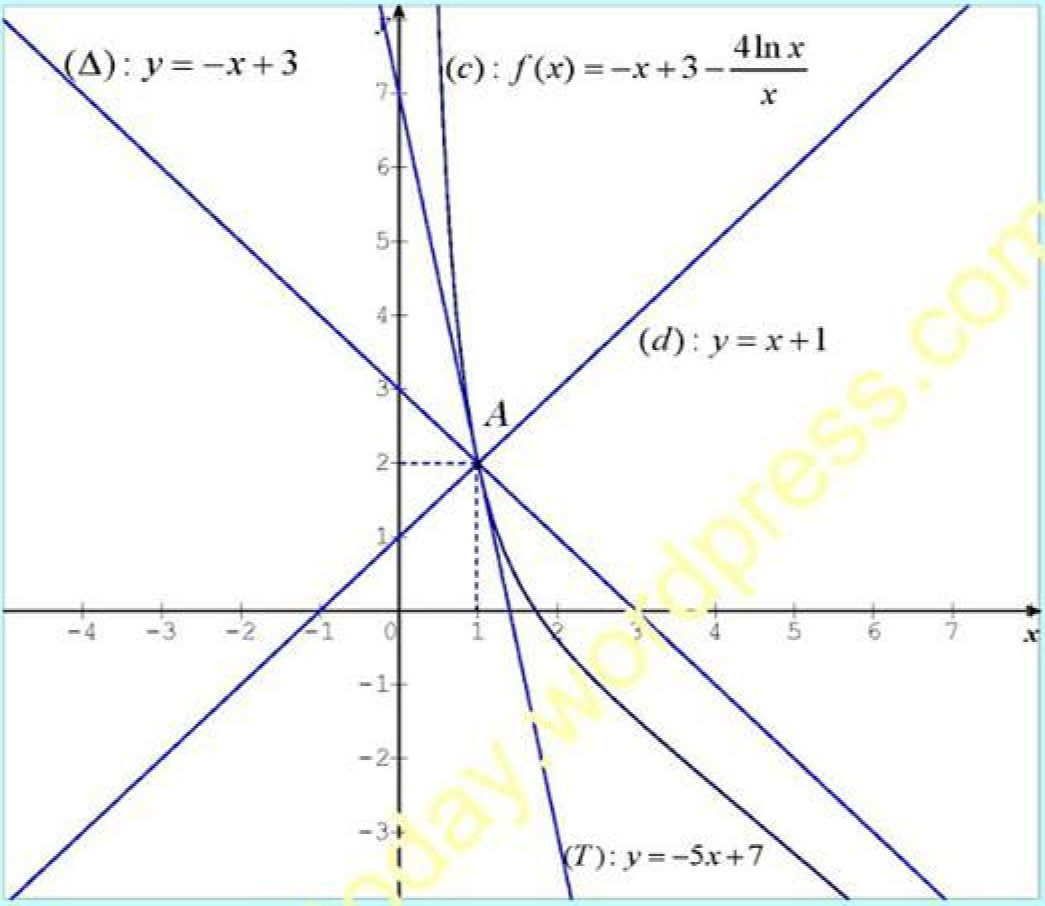
៤)គណនា $f(\frac{1}{2}),f(2)$ និង $f(4)$ រួចសង់$(C),(d)$ និង(T)

ដោយ $f(x)=-x+3-\dfrac{4\ln x}{x}$

គេបាន $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}+3-\dfrac{4\ln(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}=2.5+8(0.7)=8.1$ ។

$f(2)=-2+3-\dfrac{4\ln 2}{2}=1-2(0.7)=-0.4$ ។

$f(4)=-4+3-\dfrac{4\ln 4}{4}=-1-2\ln 2=-1-2(0.7)=-2.4$ ។



www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=-2x+3-\dfrac{1-\ln x}{x}$

មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអេតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ ។

១.រកលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

២.ស្រាយថាបន្ទាត់ $(\Delta): y=-2x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

បើ $x\to+\infty$ ។ ចូរសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ (Δ) ជាមួយខ្សែកោង (C) ។

៣.ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)-\ln x}{x^2}$ ។

៤.គេតាង $g(x)=2(1-x^2)-\ln x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ក)ចូរស្រាយថា $g'(x)<0$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ខ)គណនា $g(1)$ ។

ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ចំពោះ $x\in(0,1)$ និង $x\in(1,+\infty)$ ។

៥.ដោយប្រើលទ្ធផលសំណួរទី៣ ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$

រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៦.ចូរសង់ក្រាប (C) ។ គេឲ្យ $\ln 2=0.7$, $e^{-1}=0.4$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ រួចបញ្ជាក់អាស៊ីមតូតឈរ

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\left[-2x+3-\dfrac{1-\ln x}{x}\right]=-\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\ln x}{x}=0$

និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-2x+3-\dfrac{1-\ln x}{x}\right]=-\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\ln x}{x}=+\infty$ ។

ដូចនេះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប។

២.ស្រាយថាបន្ទាត់ $(\Delta): y=-2x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

មាន $f(x)-y=-\dfrac{1-\ln x}{x}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\ln x}{x}=0$

នោះបន្ទាត់ $(\Delta): y=-2x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) បើ $x\to+\infty$

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ (Δ) ជាមួយខ្សែកោង (C)៖

យើងមាន $f(x)-y=-\dfrac{1-\ln x}{x}$ មានសញ្ញាដូច $(\ln x-1)$ គ្រប់ $x>0$

ចំពោះ $\ln x-1=0 \Leftrightarrow x=e$ នោះ $f(x)-y=0$ នាំឲ្យបន្ទាត់ (Δ)
និងក្រាប (C) ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $A(e,-2e+3)$ ។

ចំពោះ $\ln x-1<0 \Leftrightarrow 0<x<e$ នោះ $f(x)-y<0$ នាំឲ្យបន្ទាត់ (Δ)

ស្ថិតនៅខាងលើ (C) ។ចំពោះ $\ln x-1>0 \Leftrightarrow x>e$ នោះ $f(x)-y>0$
នាំឲ្យបន្ទាត់ (Δ) ស្ថិតនៅពីលើខ្សែកោង (C)។

៣.ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)-\ln x}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=-2x+3-\dfrac{1-\ln x}{x}$

យើងបាន $f'(x)=-2-\dfrac{-1-(1-\ln x)}{x^2}=\dfrac{-2x^2+2-\ln x}{x^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)-\ln x}{x^2}$ ។

៤.ក)ស្រាយថា $g'(x)<0$ជានិច្ចចំពោះគ្រប់$x>0$

យើងមាន $g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\frac{2x^2+1}{x} < 0$ ចំពោះគ្រប់$x>0$

ដូចនេះស្រាយថា $g'(x)<0$ជានិច្ចចំពោះគ្រប់$x>0$។

ខ)គណនា $g(1)$

យើងបាន $g(1)=2(1-1)-\ln 1 = 2(1-1)+0=0$ ។ដូចនេះ $g(1)=0$ ។

សិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ចំពោះ$x\in(0,1)$និង$x\in(1,+\infty)$

ដោយ $g'(x)<0$ជានិច្ចចំពោះគ្រប់$x>0$ នោះ g ជាអនុគមន៍ចុះលើ$(0,+\infty)$

ហើយដោយយើងមាន $g(1)=0$ នោះយើងអាចសន្និដ្ឋានសញ្ញានៃ g

ដូចតទៅ៖

ចំពោះ $x\in(0,1)$នោះ$g(x)>0$ និងចំពោះ $x\in(1,+\infty)$នោះ$g(x)<0$ ។

៥.ដោយប្រើលទ្ធផលសំនួរទី៤បញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f'(x)$លើចន្លោះ$(0,+\infty)$

រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ៖

យើងមាន $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ នោះ$f(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$។

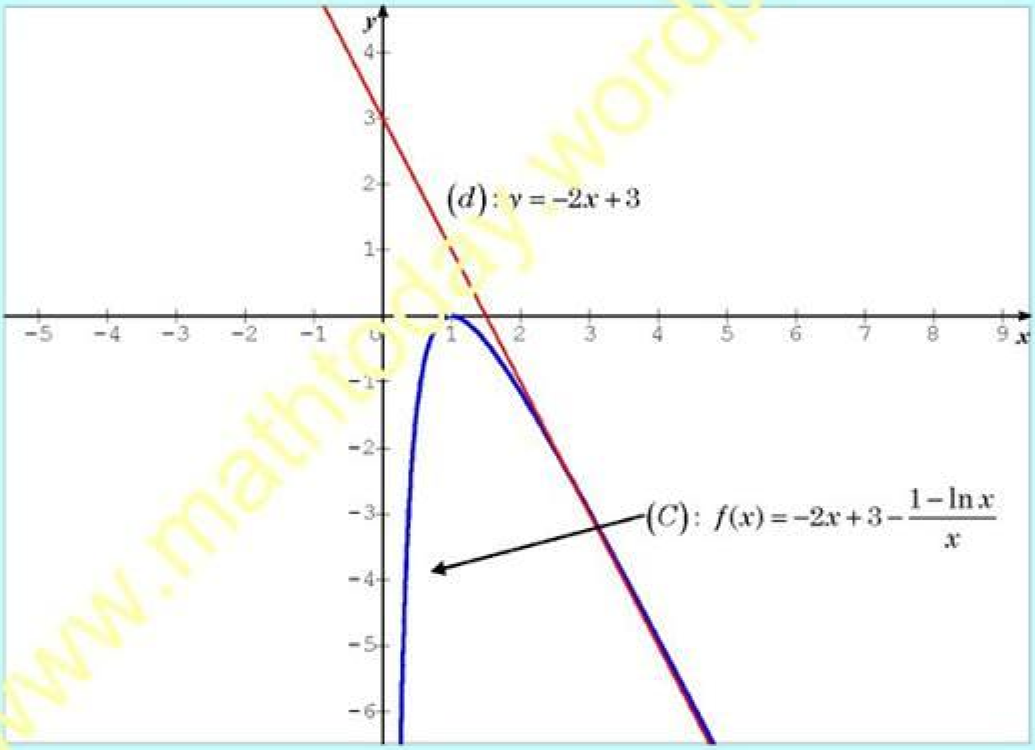
យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងបាន $f'(x)>0$ ចំពោះ$x\in(0,1)$

ហើយ $f'(x)=0$ ចំពោះ$x=1$ និង $f'(x)<0$ ចំពោះ$x\in(1,+\infty)$ ។

តារាងអថេរភាពនៃ f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

៦)សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$



www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=1-\ln x+\dfrac{\ln x}{x^2}$

មានក្រាប (C) ។

១)គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ រួចទាញបញ្ជាក់សមីការនៃ

អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

២)ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{-x^2+1-2\ln x}{x^3}$ ។

៣)គេតាង $g(x)=-x^2+1-2\ln x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ក)ចូរស្រាយថា $g'(x)<0$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ខ)គណនា $g(1)$ ។

ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ចំពោះ $x\in(0,1)$ និង $x\in(1,+\infty)$ ។

៤)ដោយប្រើលទ្ធផលសំណួរទី៣ចូរទាញបញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះ

$(0,+\infty)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៥)គណនាតម្លៃ $f(\frac{1}{e})$, $f(2)$ និង $f(4)$ ។

ចូរសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ គេឲ្យ $\ln 2=0.7$ ។

ដំណោះស្រាយ

១)រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ រួចទាញបញ្ជាក់អាស៊ីមតូតឈរនៃ (C)

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\ln x+\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=-\infty$ ព្រោះ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0\end{cases}$

និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-\ln x+\frac{\ln x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[1+\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)\ln x\right]=-\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ(C)។

២)ស្រាយថាចំពោះគ្រប់$x>0$ គេបាន $f'(x)=\frac{-x^2+1-2\ln x}{x^3}$

យើងមាន$f(x)=1-\ln x+\frac{\ln x}{x^2}$

យើងបាន $f'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{-x^2+1-2\ln x}{x^3}$ ពិត

ដូចនេះ$f'(x)=\frac{-x^2+1-2\ln x}{x^3}$។

៣.ក)ស្រាយថា $g'(x)<0$ជានិច្ចចំពោះគ្រប់$x>0$

យើងបាន $g'(x)=-2x-\frac{2}{x}=-\frac{2(x^2+1)}{x}<0$ ព្រោះ$\forall x>0:\frac{x^2+1}{x}>0$

ដូចនេះ$g'(x)<0$ជានិច្ចចំពោះគ្រប់$x>0$។

ខ)គណនា $g(1)$

យើងបាន $g(1)=-1+1-2\ln 1=0$ ។

សិក្សាសញ្ញានៃ$g(x)$ចំពោះ$x\in(0,1)$និង$x\in(1,+\infty)$៖

ដោយ$g'(x)<0$ជានិច្ចចំពោះគ្រប់$x>0$នោះg ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ច

លើ$(1,+\infty)$ យើងបាន $g(x)>0$ ចំពោះ$x\in(0,1)$និង$g(x)<0$

ចំពោះ$x\in(1,+\infty)$។

៤)ដោយប្រើលទ្ធផលសំណួរទី៣បញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$

ដោយ $f'(x)=\dfrac{-x^2+1-2\ln x}{x^3}=\dfrac{g(x)}{x^3}$

មានសញ្ញាដូច g លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។

តាមសម្រាយខាងលើយើងបាន ៖

$f(x)>0$ ចំពោះ $x\in(0,1)$ និង $f(x)<0$ ចំពោះ $x\in(1,+\infty)$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ៖

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

៥)គណនាតម្លៃ $f(\frac{1}{2})$, $f(2)$ និង $f(4)$

ដោយ $f(x)=1-\ln x+\dfrac{\ln x}{x^2}$

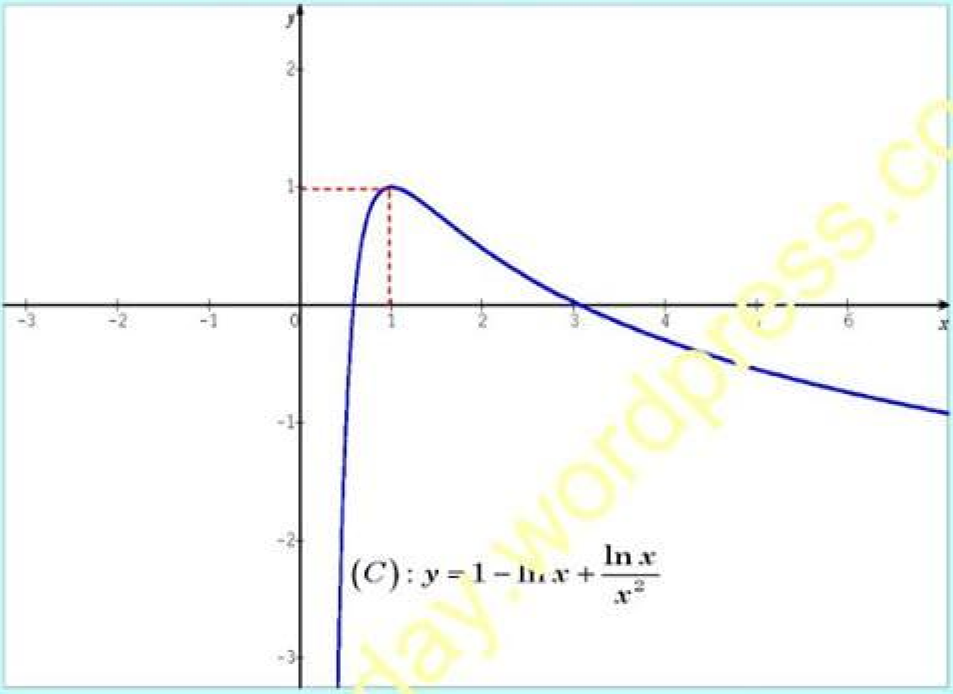
យើងបាន $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\ln\dfrac{1}{2}+4\ln\dfrac{1}{2}=1-3\ln 2=1-3(0.7)=-1.1$

$$f(2)=1-\ln 2+\frac{\ln 2}{4}=1-0.7+\frac{0.7}{4}=0.475$$

$$f(4)=1-\ln 4+\frac{\ln 4}{16}=1-2\ln 2+\frac{\ln 2}{8}=-0.3125$$

ដូចនេះ $f(\frac{1}{2}) = -1.1$, $f(2) = 0.475$, $f(4) = -0.3125$ ។

សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ៖



www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=2(x-2)+\dfrac{1-\ln x}{x}$

មានក្រាប (C) ។

១) គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ រួចបញ្ជាក់អាស៊ីមតូតឈរ។

២) ស្រាយថាបន្ទាត់ $(\Delta): y=2x-4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) បើ $x\to+\infty$ ។សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ (Δ) ជាមួយខ្សែកោង (C) ។

៣) ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)+\ln x}{x^2}$ ។

៤) គេតាង $g(x)=2(x^2-1)+\ln x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ក) ចូរស្រាយថា $g'(x)>0$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ខ) គណនា $g(1)$ ។

ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ចំពោះ $x\in(0,1)$ និង $x\in(1,+\infty)$ ។

៥) ដោយប្រើលទ្ធផលសំណួរទី៣ និង៤ ចូរបញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៦) គណនាតម្លៃ $f(\frac{1}{e})$ និង $f(2)$ រួចទាញបញ្ជាក់សមីការ $f(x)=0$ មានឫសពីរ α និង β ដែល $\frac{1}{e}<\alpha<1<\beta<2$ ។ ចូរសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ គេយក $\ln 2=0.7$, $e^{-1}=0.4$ ។

ដំណោះស្រាយ

១) គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ រួចបញ្ជាក់អាស៊ីមតូតឈរ

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\left[2(x-2)+\dfrac{1-\ln x}{x}\right]=+\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\ln x}{x}=0$ ។

និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[2(x-2)+\dfrac{1-\ln x}{x}\right]=+\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\ln x}{x}=+\infty$ ។

ដូចនេះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប។

២)ស្រាយថា $(\Delta): y=2x-4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) បើ $x\to+\infty$

មាន $f(x)-y=\dfrac{1-\ln x}{x}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\ln x}{x}=0$

នោះបន្ទាត់ $(\Delta): y=2x-4$ ជាអាស៊ីមតូត

ទ្រេតនៃក្រាប (C) បើ $x\to+\infty$ ។

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ (Δ) ជាមួយខ្សែកោង (C)៖

យើងមាន $f(x)-y=\dfrac{1-\ln x}{x}$ មានសញ្ញាដូច $(1-\ln x)$ គ្រប់ $x>0$

ចំពោះ $1-\ln x=0\Leftrightarrow x=e$ នោះ $f(x)-y=0$ នាំឲ្យបន្ទាត់ (Δ)

និងក្រាប (C) ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $A(e,2e-4)$ ។

ចំពោះ $1-\ln x<0\Leftrightarrow x>e$ នោះ $f(x)-y<0$

នាំឲ្យបន្ទាត់ (Δ) ស្ថិតនៅខាងលើ (C) ។

ចំពោះ $1-\ln x>0\Leftrightarrow 0<x<e$ នោះ $f(x)-y>0$

នាំឲ្យបន្ទាត់ (Δ) ស្ថិតនៅពីលើខ្សែកោង (C)។

៣)ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)+\ln x}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=2(x-2)+\dfrac{1-\ln x}{x}$

យើងបាន

$$f'(x)=2+\frac{-1-(1-\ln x)}{x^2}=\frac{2x^2-2+\ln x}{x^2}=\frac{2\left(x^2-1\right)+\ln x}{x^2}$$

ដូចនេះចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)+\ln x}{x^2}$ ។

៤.ក)ស្រាយថា $g'(x)>0$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x>0$

យើងមាន $g'(x)=4x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4x^2+1}{x}>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

ដូចនេះស្រាយថា $g'(x)>0$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ខ)គណនា $g(1)$

យើងបាន $g(1)=2(1^2-1)+\ln 1=2(1-1)+0=0$

ដូចនេះ $g(1)=0$ ។

សិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ចំពោះ $x\in(0,1)$ និង $x\in(1,+\infty)$

ដោយ $g'(x)>0$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x>0$ នោះ g ជាអនុគមន៍កើន

លើ $(0,+\infty)$ ហើយដោយយើងមាន $g(1)=0$ នោះយើងអាចសន្និដ្ឋាន

សញ្ញានៃ g ដូចនេះទៅ៖

ចំពោះ $x\in(0,1)$ នោះ $g(x)<0$

និងចំពោះ $x\in(1,+\infty)$ នោះ $g(x)>0$ ។

គ)ដោយប្រើលទ្ធផលសំណួរទី៣បញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$

រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ៖

យើងមាន $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ នោះ $f(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$ ។

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងបាន $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(0,1)$

ហើយ $f'(x)=0$ ចំពោះ $x=1$ និង $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(1,+\infty)$ ។

តារាងអថេរភាពនៃ f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

៦)គណនាតម្លៃ $f(\frac{1}{e})$ និង $f(2)$

យើងបាន $f\left(\frac{1}{e}\right)=f\left(e^{-1}\right)=2\left(e^{-1}-2\right)+\frac{1-\ln e^{-1}}{e^{-1}}=2(0.4-2)+\frac{2}{0.4}=1.8$

ហើយ $f(2)=0+\frac{1-\ln 2}{2}=\frac{1-0.7}{2}=0.15$ ។

ដូចនេះ $f(\frac{1}{e})=1.8$ និង $f(2)=0.15$ ។

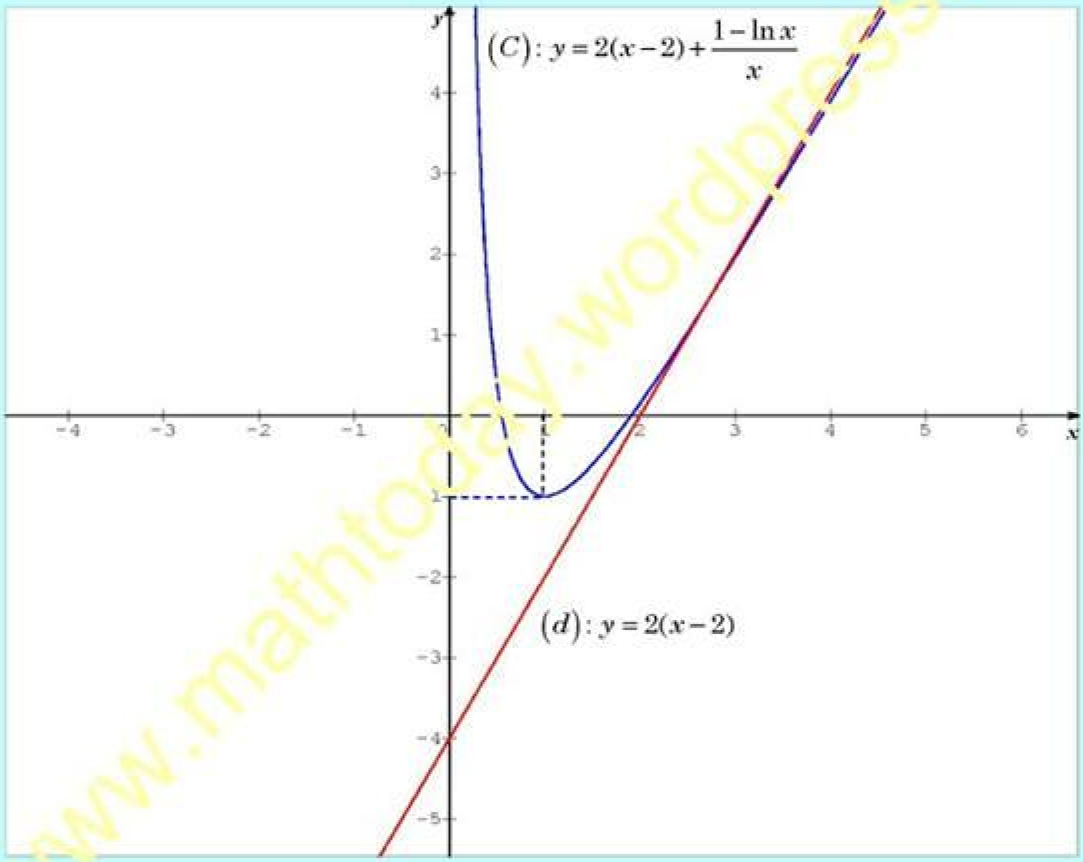
ទាញបញ្ជាក់សមីការ $f(x)=0$ មានឬសពីរ α និង β ដែល $\frac{1}{e}<\alpha<1<\beta<2$

យើងមាន $f(1)=2(1-2)+\frac{1-\ln 1}{1}=-1$ ។

ដោយ $f\left(\frac{1}{e}\right)f(1)=-1.8<0$ និង $f(1)f(2)=-0.15<0$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលមានពីរចំនួនពិត α និង β ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{e} < \alpha < 1 < \beta < 2$ ធ្វើឲ្យកន្សោម $f(x) = 0$ មានន័យថាសមីការ $f(x) = 0$ មានឫសពីរ α និង β ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{e} < \alpha < 1 < \beta < 2$ ។

សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអេតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$



លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x^2-2-2\ln x+(\ln x)^2$

(C) ជាក្រាបតំណាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

១.ចូរគណនាលីមីតនៃ $f(x)$ កាលណា $x\to 0^+$ និង $x\to+\infty$ ។

២.ចូរស្រាយថាគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{2}{x}\left(x^2-1+\ln x\right)$ ។

៣.គេយក $g(x)=x^2-1+\ln x$ គ្រប់ $x>0$ ។

ក)គណនា $g'(x)$ រួចទាញថា g ជាអនុគមន៍កើនលើ $(0,+\infty)$ ។

ខ)គណនា $g(1)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1,+\infty)$ ។

៤.ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរបញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។

រក $f(1)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

៥.គណនា $f\left(\dfrac{1}{e}\right)$ និង $f(2)$ រួចចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $f(x)=0$

មានឫសពីរ α និង β ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\dfrac{1}{e}<\alpha<1<\beta<2$ ។

ចូរសង់ក្រាប (C) ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ កាលណា $x\to 0^+$ និង $x\to+\infty$

យើងមាន $f(x)=x^2-2-2\ln x+(\ln x)^2$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x^2-2-2\ln x+(\ln x)^2\right]=+\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2-2-2\ln x+(\ln x)^2\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-\frac{2}{x^2}-\frac{2\ln x}{x^2}+\frac{(\ln x)^2}{x^2}\right)\right]=+\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ។

២.ស្រាយថាគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\frac{2}{x}\left(x^2-1+\ln x\right)$

យើងមាន $f(x)=x^2-2-2\ln x+(\ln x)^2$

យើងបាន $f'(x)=2x-\frac{2}{x}+\frac{2\ln x}{x}=\frac{2}{x}\left(x^2-1+\ln x\right)$ ពិត

ដូចនេះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\frac{2}{x}\left(x^2-1+\ln x\right)$ ។

៣. ក)គណនា $g'(x)$ រួចទាញថា g ជាអនុគមន៍កើនលើ $(0,+\infty)$

យើងមាន $g(x)=x^2-1+\ln x$ គ្រប់ $x>0$

យើងបាន $g'(x)=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$ ។

ដោយគ្រប់ $x>0$ យើងមាន $g'(x)=\frac{2x^2+1}{x}>0$ នោះ g ជាអនុគមន៍កើន

ជានិច្ចលើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។

ខ)គណនា $g(1)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1,+\infty)$

យើងបាន $g(1)=1-1+\ln 1=0$ ។

ដោយ g ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើចន្លោះ $(0,+\infty)$ នោះយើងអាចសន្និដ្ឋាន

សញ្ញានៃ $g(x)$ ដូចតទៅ៖

ចំពោះគ្រប់ $x\in(0,1)$: $g(x)<0$ ។

ចំពោះគ្រប់ $x\in(1,+\infty)$: $g(x)>0$ ។

៤.បញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$

$f'(x)=\frac{2}{x}\left(x^2-1+\ln x\right)=\frac{2g(x)}{x}$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$ ។

ដូចនេះយើងអាចសន្និដ្ឋានដូចតទៅ៖

ចំពោះគ្រប់ $x\in(0,1): f'(x)<0$

និងគ្រប់ $x\in(1,+\infty): f'(x)>0$ ។

រក $f(1)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ៖

យើងបាន $f(1)=1^2-2-2\ln 1+(\ln 1)^2=1-2=-1$ ។

ដូចនេះ $f(1)=-1$ ។

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

៥.គណនា $f\left(\frac{1}{e}\right)$ និង $f(2)$ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសពីរ

α និង β ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{e}<\alpha<1<\beta<2$ ៖

យើងមាន $f(x)=x^2-2-2\ln x+(\ln x)^2$

យើងបាន $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}-2-2\ln\frac{1}{e}+\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2=0.2-2+2+1=1.2$

និង $f(2)=2^2-2-2\ln 2+(\ln 2)^2=4-2-2(0.7)+(0.7)^2=1.09$ ។

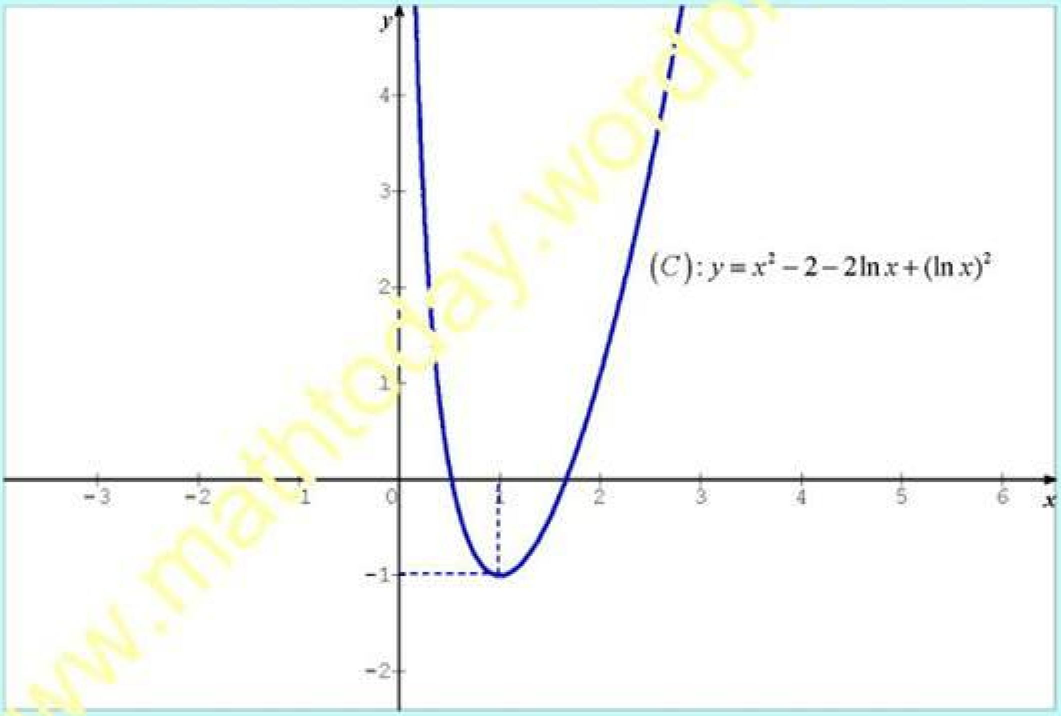
ដូចនេះ $f\left(\frac{1}{e}\right)=1.2$ និង $f(2)=1.09$ ។

គេមាន $f(1)=-1$ ហើយ $f\left(\frac{1}{e}\right)=1.2$ និង $f(2)=1.09$

ដោយ $f\left(\frac{1}{e}\right)f(1)=-1.2<0$ និង $f(1)f(2)=-1.09<0$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន $\alpha\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ និង $\beta\in(1,2)$ ដែល $f(\alpha)=0$ និង $f(\beta)=0$ ។ដូចនេះសមីការ $f(x)=0$ មានឬសពីរ α និង β ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{e}<\alpha<1<\beta<2$ ។

សង់ក្រាប (C) ៖



លំហាត់ទី១៤

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+4-e^x$ មានក្រាប (C)។

១.រកលីមីតនៃ $f(x)$ កាលណា $x\to-\infty$ និង $x\to+\infty$។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(d): y=x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) កាលណា $x\to-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) និង (d)។

៣.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

៤.គណនា $f(-2), f(-1)$, $f(1)$ និង $f(2)$ រួចសង់ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

៥.គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) និងអក្ស (ox) និងបន្ទាត់ឈរ $x=-3$ និង $x=1$។(គេឲ្យ $e=2.7$, $e^{-1}=0.4$, $e^{-2}=0.2$)

ដំណោះស្រាយ

១.រកលីមីតនៃ $f(x)$ កាលណា $x\to-\infty$ និង $x\to+\infty$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+4-e^x\right)=-\infty$

និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+4-e^x\right)=+\infty$ ។

២.ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(d): y=x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) កាលណា $x\to-\infty$

យើងមាន $f(x)-y=-e^x$ ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right]=-\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)=0$

ដូចនេះ $(d): y=x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែ (C) កាលណា $x\to-\infty$ ។

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) និង (d)៖

យើងមាន $f(x)-y=-e^x<0\ \forall x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះខ្សែកោង (C) ស្ថិតនៅពីក្រោមបន្ទាត់ (d) ជានិច្ច។

៣.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f(x)=x+4-e^x$

យើងបាន $f(x)=1-e^x$ ។

បើ $f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-e^x<0 \Leftrightarrow x>0$

បើ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-e^x=0 \Leftrightarrow x=0$

បើ $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-e^x>0 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

៤.គណនា $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ និង $f(2)$

យើងមាន $f(x)=x+4-e^x$

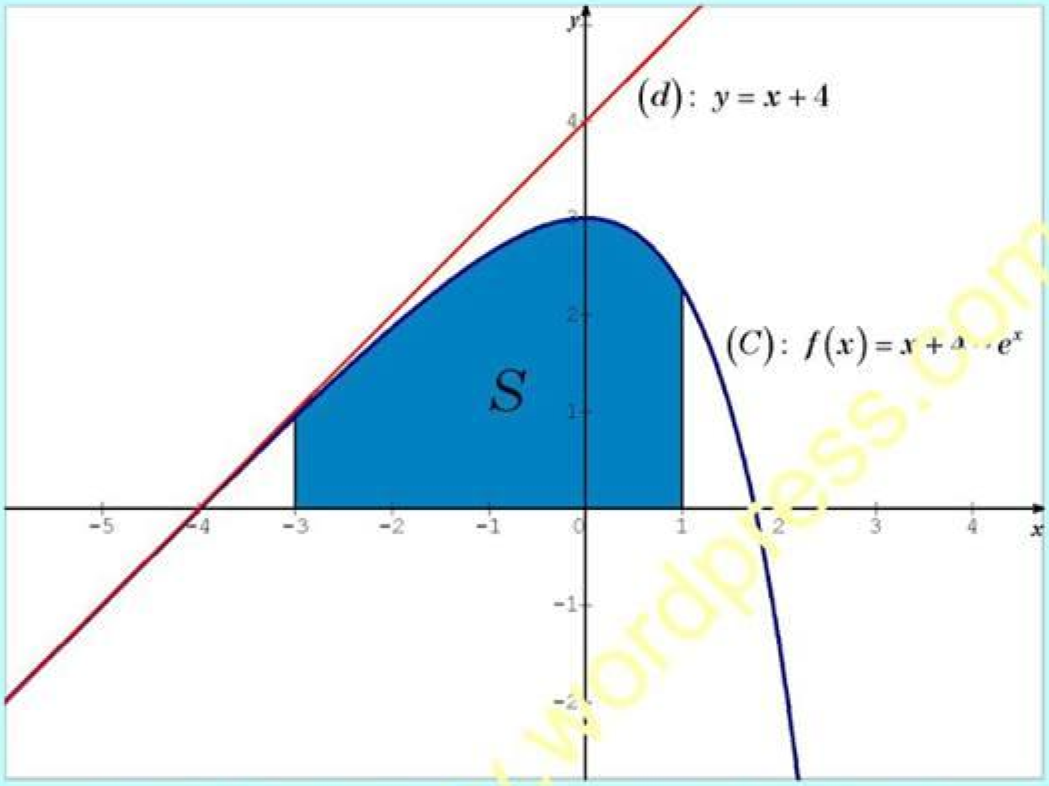
យើងបាន $f(-2)=-2+4-e^{-2}=2-0.2=1.8$

$f(-1)=-1+4-e^{-1}=3-0.4=2.6$

$f(1)=1+4-e=5-2.7=2.3$

$f(2)=2+4-e^2=6-7.3=-1.3$

សង់ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$



៥.គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង(C)និងអក្ស័(ox)និងបន្ទាត់ឈរ

$x=-3$ និង $x=1$ ៖

យើងបាន$S=\int_{-3}^{1} f(x)dx=\int_{-3}^{1}\left(x+4-e^x\right)dx$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+4x-e^x\right]_{-3}^{1}=\left(\frac{1}{2}+4-e\right)-\left(\frac{9}{2}-12-e^{-3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+4-e-\frac{9}{2}+12+e^{-3}=12-e-\frac{1}{e^3}$$

ដូចនេះ$S=12-e-\frac{1}{e^3}$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$, $x\neq 0$ មានក្រាប (C)

១)ចូររកលីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង ត្រង់ $\pm\infty$ ។

បញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់របស់ក្រាប (C) ។

២)ចូរសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣)គណនា $f(-1)$, $f(1)$ និង $f(3)$ រួចសង់ក្រាប (C) ។

(គេយក $e^{-1}=0.4$, $e=2.7, e^2=7.3$, $\dfrac{e^3}{27}=0.7$)។

ដំណោះស្រាយ

១)រកលីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង ត្រង់ $\pm\infty$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=0$ & $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$

បញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតទាំងអស់របស់ក្រាប (C) ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C)

ហើយ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ នោះបន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃ (C) ។

២)សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

គេបាន $f'(x)=\dfrac{e^x x^2-2xe^x}{x^4}=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$

ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ កន្សោម $f'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$ មានសញ្ញាដូច $\dfrac{x-2}{x}$ ។

បើ $f'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}=0$ នោះ $x=2$ ។

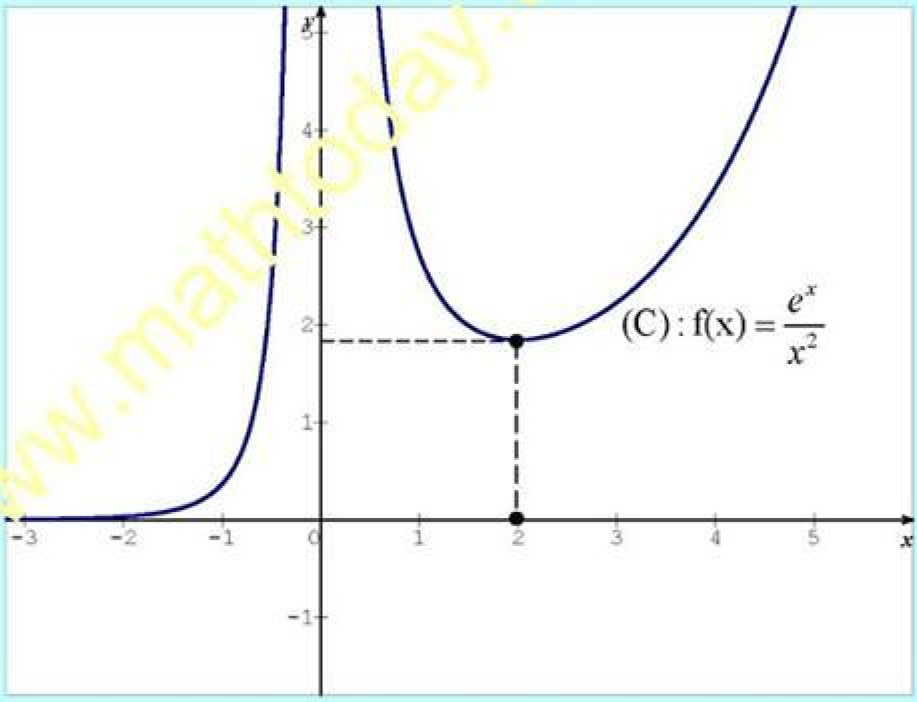
ចំពោះ $x = 2$ នោះ $f(2) = \dfrac{e^2}{4} = \dfrac{7.3}{4} = 1.8$ ។

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1.8	$\nearrow$	$+\infty$

៣)គណនា $f(-1)$, $f(1)$ និង $f(3)$ រួចសង់ក្រាប(C)

យើងបាន $f(-1) = e^{-1} = 0.4$, $f(1) = e = 2.7$, $f(3) = \dfrac{e^3}{27} = 0.7$

ដូចនេះ $f(-1) = 0.4$, $f(1) = 2.7$, $f(3) = 0.7$



លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=e^x(-x^2+2x-1)$ ហើយមានក្រាប (C)។

១.គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក នៃក្រាប C ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣.គណនា $f(-2), f(0)$ និង $f(2)$ ។ សង់ក្រាប C ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

៤.គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាប C , អក្សអាប់ស៊ីស និងអក្សអរដោនេ ។

ដំណោះស្រាយ

១)គណនាលីមីត រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក ៖

គេមាន $f(x)=e^x(-x^2+2x-1)=-(x-1)^2e^x$

គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-(x-1)^2e^x\right]=0$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-(x-1)^2e^x\right]=-\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ហើយបន្ទាត់ $y=0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c) ។

២)គណនាដេរីវេ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា ៖

គេមាន $f(x)=-(x-1)^2e^x$ ដោយប្រើរូបមន្ត $(uv)'=u'v+uv'$

គេបាន $f'(x)=-2(x-1)e^x-(x-1)^2e^x=-(x-1)e^x[2+(x-1)]$

ដូចនេះ $f'(x)=-(x-1)(x+1)e^x$ ។ ដោយគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$: $e^x>0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)=-(x-1)(x+1)$។

បើ $g(x)=0 \Leftrightarrow -(x-1)(x+1)=0$ គេទាញ $x_1=-1$, $x_2=1$ ។

តារាងសញ្ញានៃ $g(x) = -(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

តាមតារាងខាងលើយើងអាចសន្និដ្ឋានសញ្ញានៃ $f'(x) = -(x-1)(x+1)e^x$

-ចំពោះ $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ គេបាន $f'(x) < 0$

-ចំពោះ $x \in \{-1\ ,\ 1\}$ គេបាន $f'(x) = 0$

-ចំពោះ $x \in (-1, 1)$ គេបាន $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{e}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$f(-1) = -(-1-1)^2 e^{-1} = -\frac{4}{e}$; $f(1) = 0$ ។

៣)គណនា $f(-2)$, $f(0)$ និង $f(2)$

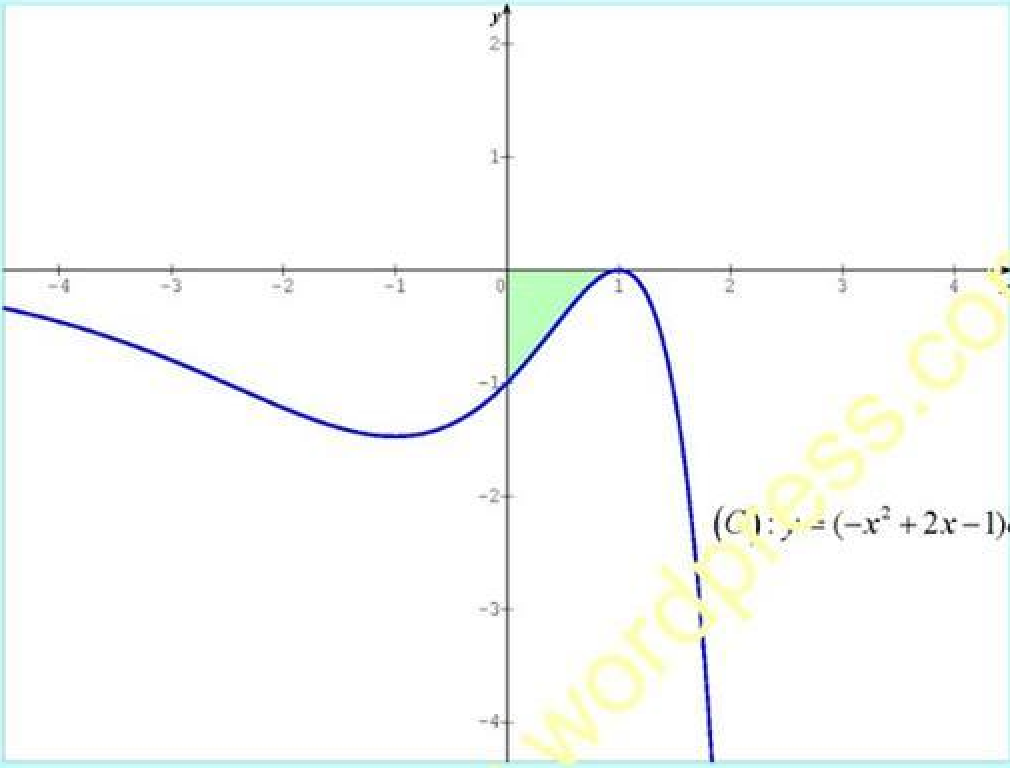
បើ $x = -2$ នោះ $f(-2) = -(-2-1)^2 e^{-2} = -\frac{9}{e^2} = -9(0.13) = -1.17$

បើ $x = 0$ នោះ $f(0) = -(0-1)^2 e^0 = -1$

បើ $x = 2$ នោះ $f(2) = -(2-1)^2 e^2 = -e^2 = -7.4$

ដូចនេះ $f(-2) = -\frac{9}{e} = -1.17$, $f(0) = -1$ និង $f(2) = -e^2 = -7.4$ ។

សង់ក្រាប $(c): y = f(x) = e^x(-x^2 + 2x - 1) = -(x-1)^2 e^x$ ៖



៤)គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ (c) ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង អ័ក្សអរដោនេ ៖

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃមណ្ឌលប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (c) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស និង អ័ក្សអរដោនេ៖

គេបាន $S = \int_0^1 (x-1)^2 e^x .dx$

តាង $\begin{cases} u = (x-1)^2 \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = 2(x-1)dx \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $S = \left[(x-1)^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2(x-1)e^x = 0 - 1 - 2\int_0^1 (x-1)e^x .dx$

តាង $\begin{cases} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $S = -1 - 2\left(\left[(x-1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right)$

$= -1 - 2\left(0 + 1 - \left[e^x \right]_0^1 \right) = -1 - 2 + 2(e-1)$

$= 2e - 5 = 2(2.718) - 5 = 0.436$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

ដូចនេះ $S = 0.436$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=(x-1)(e^{2x}+1)$ ដែល $x\in\Re$ ។

១.ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ $f'(x)$

(មិនបាច់រកលីមីតនៃ $f'(x)$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$) ។

៣.កំណត់សញ្ញារបស់ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

៤.ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (d): $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c)

នៃ $y=f(x)$ កាលណា $x\to-\infty$ ។

បញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (d)

៥.រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ហើយស្របជាមួយនឹង (d) ។

៦.គូសក្រាប (c) និងបន្ទាត់ $(d),(T)$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

១)គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

យើងមាន $f(x)=(x-1)(e^{2x}+1)$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)(e^{2x}+1)\right]=-\infty$

ព្រោះ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}+1)=1\end{cases}$

និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)(e^{2x}+1)\right]=+\infty$

ព្រោះ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}+1)=+\infty\end{cases}$

២)គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

យើងមាន $f(x)=(x-1)(e^{2x}+1)$ កំណត់លើ $D=\mathbb{R}$

យើងបាន $f'(x)=(x-1)'(e^{2x}+1)+(e^{2x}+1)'(x-1)$

$$=e^{2x}+1+2e^{2x}(x-1)$$

$$=1+(2x-1)e^{2x}$$

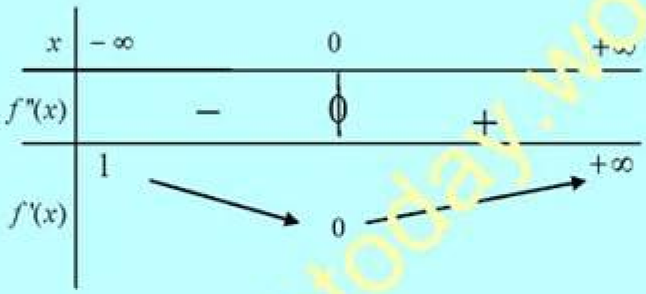
និង $f''(x)=(2x-1)'e^{2x}+(e^{2x})'(2x-1)=4xe^{2x}$

ដូចនេះ $f'(x)=1+(2x-1)e^{2x}$, $f''(x)=4xe^{2x}$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f'(x)$

យើងមាន $f''(x)=4xe^{x}$ មានឫស $x=0$

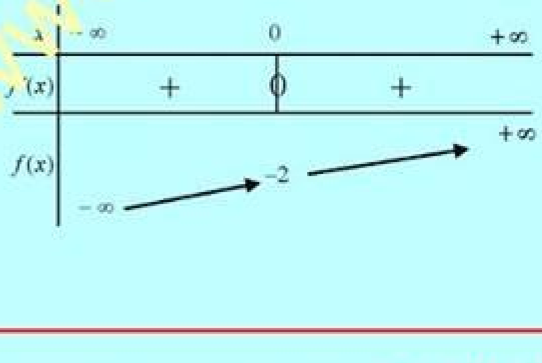
ចំពោះ $x=0$ នោះ $f'(0)=1-1=0$ ។



៣)កំណត់សញ្ញារបស់ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

តាមតារាងអថេរភាពខាងលើយើងទាញបាន $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)\ge 0$

ដូចនេះ $f'(x)$ មានសញ្ញាវិជ្ជមាន ។



ង)ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(d): y = x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

យើងមាន $f(x) = (x-1)(e^{2x}+1) = x-1+(x-1)e^{2x}$

ដោយ $\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{2x} = 0$ ។

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(d): y = x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) ។

-បញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (d)

គេមាន $f(x) - y = (x-1)\, e^{2x}$ មានសញ្ញាដូច $x-1$

-បើ $x-1>0$ ឬ $x>1$ នោះខ្សែកោង (c) នៅលើបន្ទាត់ (d) ។

-បើ $x-1<0$ ឬ $x<1$ នោះខ្សែកោង (c) នៅក្រោមបន្ទាត់ (d) ។

-បើ $x-1=0$ ឬ $x=1$ នោះខ្សែកោងកាត់បន្ទាត់ត្រង់ $A(1\,,\,0\,)$ ។

ច)កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ៖

តាង $M_0(\,x_0\,,y_0\,)$ ជាចំណុចប៉ះរវាងបន្ទាត់ (T) និងក្រាប (c)

តាមរូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះសរសេរ $(T): y-y_0 = f'(x_0)\,(x-x_0)$

ដោយ $(T)//(d): y = x-1$ នាំឱ្យ $f'(x_0) = 1$

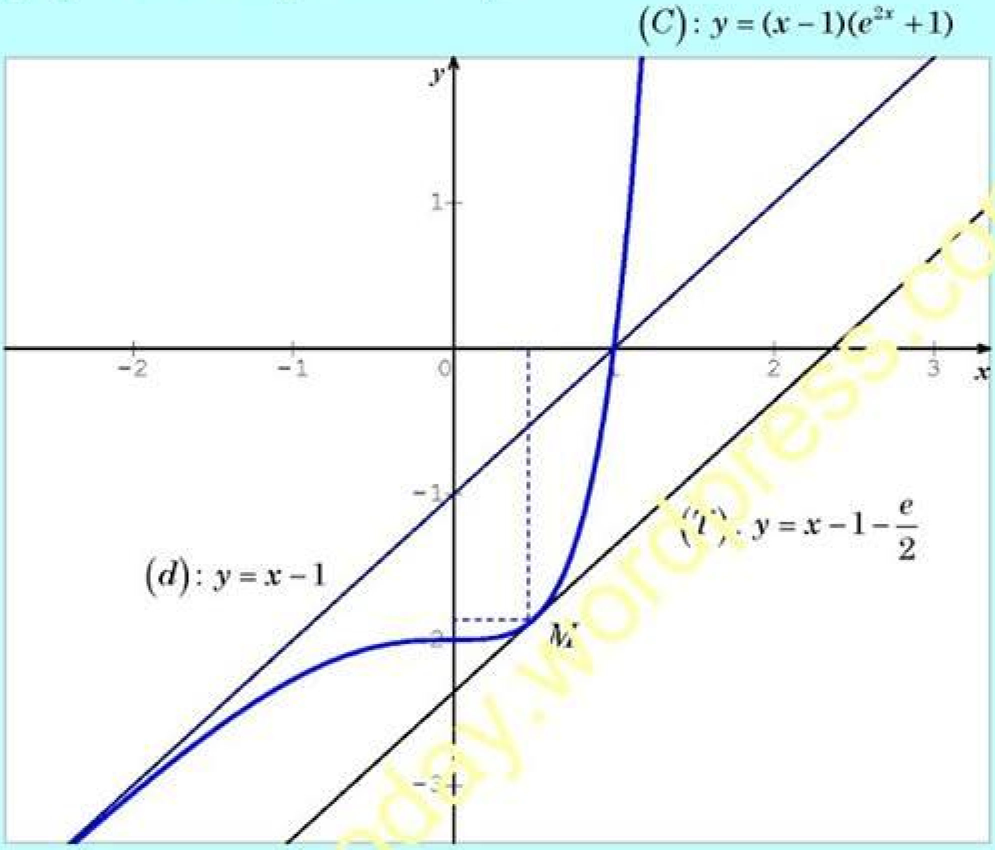
តែ $f'(x_0) = 1+(2x_0-1)e^{2x_0}$ គេបាន $1+(2x_0-1)e^{2x_0} = 1$

នាំឱ្យ $x_0 = \frac{1}{2}$ ហើយ $y_0 = f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}-1)(e+1) = -\frac{1}{2}(e+1)$

គេបាន $(T): y+\frac{1}{2}(e+1) = 1(x-\frac{1}{2})$ នាំឱ្យ $y = x-1-\frac{e}{2}$ ។

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ប៉ះដែលត្រូវរកគឺ $(T): y = x-1-\frac{e}{2}$ ។

ង)គូសក្រាប (c) និងបន្ទាត់ $(d),(T)$ ៖



www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៨

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$ ។

គេតាងដោយ C ក្រាបរបស់អនុគមន៍ នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយ

អរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

១) $a.$ គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

$b.$ សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមាន សមីការ $y=x+2$ ។

២) $a.$ ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ។

$b.$ សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣) $a.$ តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln 3$ ។

$b.$ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។

៤) $a.$ បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចមាន អាប់ស៊ីសផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $y=\dfrac{1}{4}x+1$ ។

$b.$ ដោយបង្ហាញថាចំណុច I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C និងក្នុងតម្លៃ ប្រហែលនៃ $\ln 3$ ចូរសង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ប៉ះ d_1, d_2, d_3 ។

(នៅលើតម្រុយនេះមួយឯកតាស្មើ $2cm$)

ដំណោះស្រាយ

១) $a.$ គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

យើងបាន $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}\right) = -\infty$

ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ ។

ហើយ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}\right) = +\infty$

ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^x}{e^x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4e^x}{e^x} = 4$ ។

b. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប C ធៀបនឹង d_1 សមីការ $y = x+2$

យកសមីការ C ដកសមីការ d_1 គេបាន $f(x) - y = -\frac{4e^x}{e^x+3} < 0$

គ្រប់ $x \in \Re$ ព្រោះ $e^x > 0\ \forall x \in \Re$

ដូចនេះក្រាប C ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x+2$

២) a. ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, $f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

គេមាន $f(x) = x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}$

គេអាចសរសេរដូចតទៅ៖

$$f(x) = x+2-\frac{4e^x}{e^x+3} = x+2-\frac{4(e^x+3)-12}{e^x+3}$$

$$= x+2-4+\frac{12}{e^x+3} = x-2+\frac{12}{e^x+3}$$

យើងបាន $f'(x) = (x-2)' - \frac{12(e^x+3)'}{(e^x+3)^2}$

$$= 1-\frac{12e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{(e^x+3)^2-12e^x}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}+6e^x+9-12e^x}{\left(e^x+3\right)^2} = \frac{e^{2x}-6e^x+9}{\left(e^x+3\right)^2} = \frac{\left(e^x-3\right)^2}{\left(e^x+3\right)^2}$$

ដូចនេះចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x, f'(x)=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ។

$b.$ **សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f**

ដោយគេមានគ្រប់ចំនួនពិត $x, f'(x)=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2 \geq 0$

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ ។

បើ $f'(x)=0 \Leftrightarrow (e^x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=\ln 3$

ហើយ $f(\ln 3)=\ln 3+2-\frac{4e^{\ln 3}}{e^{\ln 3}+3}=\ln 3+2-\frac{12}{6}=\ln 3$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

៣) $a.$ តើគេអាចច [illegible] យ៉ាងណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln 3$

ចំពោះ $x=\ln 3$ នោះ $f'(\ln 3)=\left(\frac{e^{\ln 3}-3}{e^{\ln 3}+3}\right)^2=\left(\frac{3-3}{3+3}\right)^2=0$

ដូចនេះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln 3$ ជាបន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្ស ox ដែលមានសមីការ $y=\ln 3$ ។

$b.$ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$
ហើយបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ជាបន្ទាត់ស្របនឹង ox
នោះយើងអាចសន្និដ្ឋានទីតាំងរវាងក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ដូចតទៅ ៖

ចំពោះ $x \in (-\infty, \ln 3)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។

ចំពោះ $x = \ln 3$ ក្រាប C និងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ប៉ះគ្នាត្រង់ចំណុច $I(\ln 3, \ln 3)$

ចំពោះ $x \in (\ln 3, +\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅពីលើបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។

៤) $a.$ បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស
សូន្យមានសមីការ $y = \frac{1}{4}x + 1$

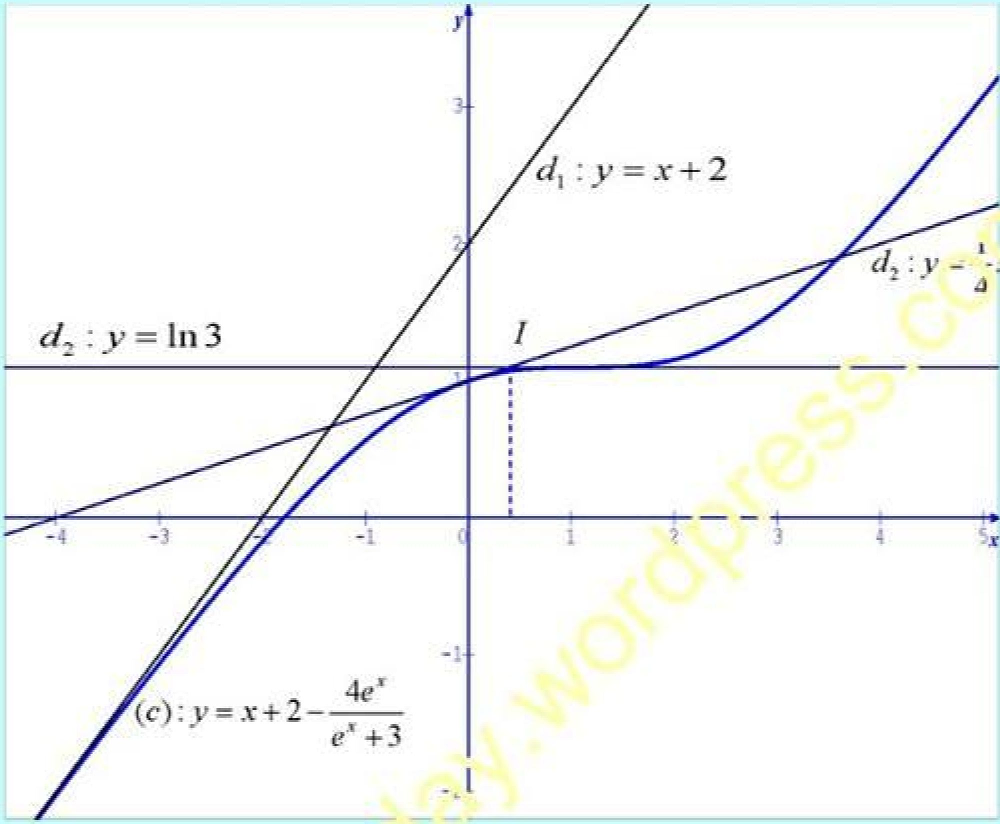
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីសសូន្យ
មានរាង $d_3 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

ដោយ $f'(0) = \left(\frac{e^0 - 3}{e^0 + 3}\right)^2 = \left(\frac{1-3}{1+3}\right)^2 = \frac{1}{4}$

និង $f(0) = 0 + 2 - \frac{4e^0}{e^0 + 3} = 1$

ដូចនេះ $d_3 : y = \frac{1}{4}x + 1$ ។

$b.$ ដោយសន្មតថាចំណុច I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C និងក្នុងតម្លៃប្រហែល
នៃ $\ln 3$ សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ប៉ះ d_1, d_2, d_3 ។


y
x
$d_1 : y = x + 2$
$d_2 : y = \ln 3$
I
$(c) : y = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$
$d_2 : y = \frac{1}{4}x + 1$
-4
-3
-1
0
1
2
3
4
5
3
2
1
-1

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\frac{2(e^x-1)}{e^x+1}$

មានក្រាប (C)។

១.ចូរគណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ រួចសិក្សាទីតាំងធៀបរវាង ខ្សែកោង (C) ជាមួយនឹងបន្ទាត់ $(\Delta): y=x+2$ ។

២.ក)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ខ)គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣.ក)ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ចូរស្រាយបំភ្លឺថាកន្សោម $f(x)$ អាចសរសេរ ជាពីរទម្រង់ $f(x)=x+\frac{4}{e^x+1}$ និង $f(x)=x+4-\frac{4e^x}{e^x+1}$ ។

ខ)ទាញបញ្ជាក់ថាក្រាប (C) មានអាស៊ីមតូតទ្រេតពីរតាងដោយ (d_1) និង (d_2)

៤.គណនា $f(x)+f(-x)$ រួចទាញថាចំណុច $I(0,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)។

៥.គណនា $f(1)$ និង $f(2)$ រួចសង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ $(\Delta),(d_1),(d_2)$ នៅក្នុងតម្រុយអរតូនម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ តែមួយ។

គេយក $e=2.7$, $\frac{e-1}{e+1}=0.5$ និង $\frac{e^2-1}{e^2+1}=0.8$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ រួចសិក្សាទីតាំងធៀប រវាងខ្សែកោង (C) ជាមួយនឹងបន្ទាត់ $(\Delta): y=x+2$ ៖

យើងមាន $f(x)=x+2-\frac{2(e^x-1)}{e^x+1}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+2-\dfrac{2\left(e^x-1\right)}{e^x+1}\right]=-\infty$

និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+2-\dfrac{2\left(e^x-1\right)}{e^x+1}\right]=+\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\begin{cases}(C): f(x)=x+2-\dfrac{2(e^x-1)}{e^x+1}\\ (\Delta): y=x+2\end{cases}$

យើងបាន $(C)-(\Delta): f(x)-y=-\dfrac{2(e^x-1)}{e^x+1}=\dfrac{2(1-e^x)}{e^x+1}$

ដោយគ្រប់ $x\in\mathbb{R}: e^x+1>0$ នោះ $f(x)-y=\dfrac{2\left(1-e^x\right)}{e^x+1}$

បើ $1-e^x<0\Leftrightarrow x>0$ នោះ (C) ស្ថិតនៅពីក្រោមបន្ទាត់ (Δ) ។

បើ $1-e^x=0\Leftrightarrow x=0$ នោះ (C) ប្រសព្វបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច $I(0,2)$

បើ $1-e^x>0\Leftrightarrow x<0$ នោះ (C) ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ (Δ) ។

២.ក) ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

យើងបាន $f(x)=x+2-\dfrac{2(e^x-1)}{e^x+1}$

យើងបាន $f'(x)=1-\dfrac{2e^x\left(e^x+1\right)-2e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{\left(e^x+1\right)^2-4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}+2e^{x}+1-4e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{\left(e^{x}-1\right)^{2}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$$ ពិត

ដូចនេះ $f'(x)=\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ខ)គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ៖

យើងមាន $f'(x)=\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x នោះ f

ជាអនុគមន៍កើនហើយបើ $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}-1=0$ ឬ $x=0$ ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

៣.ក)ស្រាយបំភ្លឺថាអនុគមន៍ $f(x)$អាចសរសេរជាពីរទម្រង់៖

$$f(x)=x+\frac{4}{e^{x}+1} \text{ និង } f(x)=x+4-\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}$$

យើងមាន $f(x)=x+2-\frac{2\left(e^{x}-1\right)}{e^{x}+1}=x+\left[2-\frac{2\left(e^{x}-1\right)}{e^{x}+1}\right]=x+\frac{4}{e^{x}+1}$ ពិត

និង $f(x)=x+2-\frac{2\left(e^{x}-1\right)}{\left(e^{x}+1\right)}=x+4+\left[-\frac{2\left(e^{x}-1\right)}{\left(e^{x}+1\right)}-2\right]=x+4-\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}$ ពិត

ខ)ទាញបញ្ជាក់ថាក្រាប (C) មានអាស៊ីមតូតទ្រេតពីរតាងដោយ (d_1) និង (d_2)

យើងមាន $f(x)=x+\frac{4}{e^x+1}$ និង $f(x)=x+4-\frac{4e^x}{e^x+1}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x+1}=0$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{e^x+1}=0$

នោះបន្ទាត់ $(d_1): y=x$ និង $(d_2): y=x+4$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

នៃក្រាប (C) រៀងគ្នាត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។

៤.គណនា $f(x)+f(-x)$ រួចទាញថាចំណុច $I(0,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)

យើងមាន $f(x)=x+2-\frac{2(e^x-1)}{e^x+1}$ (1)

ជំនួស x ដោយ $-x$ ក្នុង (1) យើងបាន៖

$$f(x)+f(-x)=-x+2-\frac{2(e^{-x}-1)}{e^{-x}+1}=-x+2+\frac{2(e^x-1)}{e^x+1} \quad (2)$$

បូកសមីការ $(1)\&(2)$ យើងបាន $f(x)+f(-x)=4$ ។

ដូចនេះ $f(x)+f(-x)=4$ ។

តាមរូបមន្ត $f(x)+f(2a-x)=2b$ នោះគេទាញ $a=0$, $b=2$ ។

ដូចនេះ $I(0,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

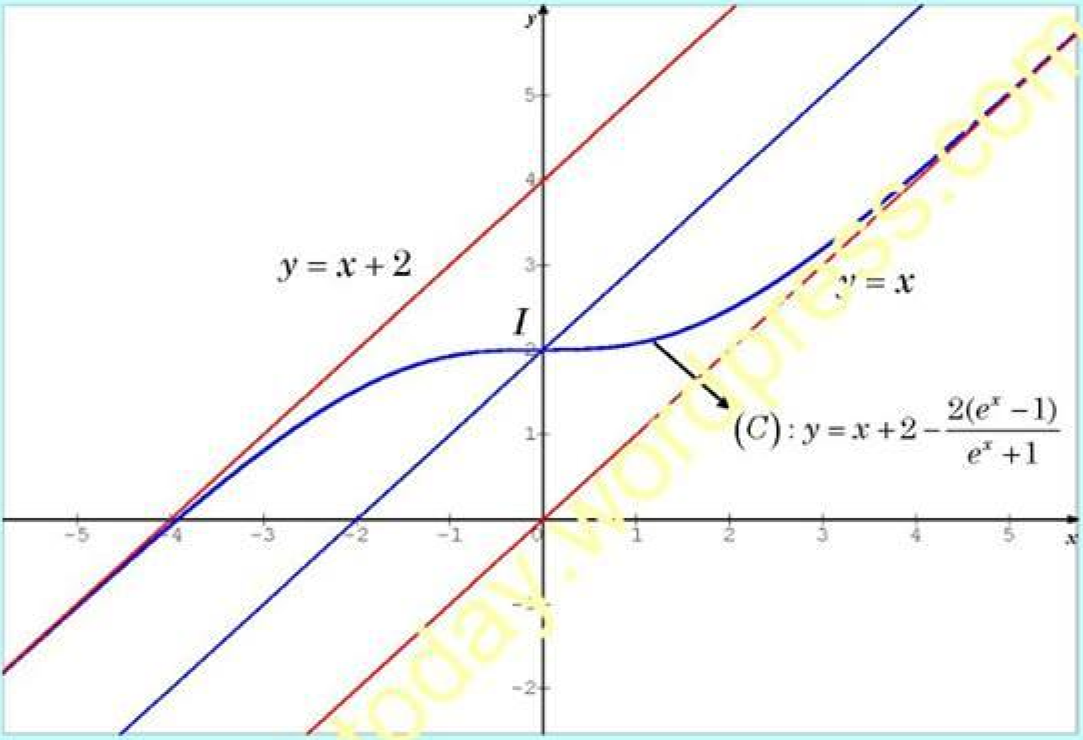
៥.គណនា $f(1)$ និង $f(2)$ និងសង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ $(\Delta),(d_1),(d_2)$ ៖

យើងមាន $f(x)=x+2-\frac{2(e^x-1)}{e^x+1}$

ចំពោះ $x=1: f(1)=1+2-\frac{2(e-1)}{e+1}=3-2\times0.5=2$

ចំពោះ $x = 2 : f(2) = 2 + 2 - \frac{2(e^2 - 1)}{e^2 + 1} = 4 - 2 \times 0.8 = 2.4$

ដូចនេះ $f(1) = 2$ និង $f(2) = 2.4$ ។



www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២០

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=2(x+1)^2e^x$

តាង (C) ជាក្រាបតំណាង f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

១.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ រួចទាញបញ្ជាក់ថាក្រាប (C) មានអក្ស័អាប់ស៊ីសជាអាស៊ីមតូតដេក ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣.កំណត់បីចំនួនពិត a,b,c ដោយដឹងថា $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$ គឺជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

៤.ចូរសង់ក្រាប (C) រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃមណ្ឌលប៉ុងខណ្ឌដោយក្រាប (C) និងអក្ស័អាប់ស៊ីសនិងបន្ទាត់ $x=-3$, $x=0$ ។

(គេឲ្យ $e=2.7$, $e^{-1}=0.4$, $e^{-3}=0.05$)

ដំណោះស្រាយ

១)គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

យើងមាន f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=2(x+1)^2e^x$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2(x+1)^2e^x=+\infty$

និង $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2(x+1)^2e^x=0$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ។

ទាញបញ្ជាក់ថាក្រាប (C) មានអក្ស័អាប់ស៊ីសជាអាស៊ីមតូតដេក ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ នោះក្រាប (C) មានអក្ស័អាប់ស៊ីសជាអាស៊ីមតូតដេក។

២)គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f(x)=2(x+1)^2e^x$

យើងបាន $f'(x)=4(x+1)e^x+2(x+1)^2e^x$

$$=2(x+1)e^x\left[2+(x+1)\right]$$

$$=2(x+1)(x+3)e^x$$

ដូចនេះ $f'(x)=2(x+1)(x+3)e^x$ ។

បើ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=0\\ x+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-3\end{array}\right.$

យើងបាន $f(-3)=\dfrac{8}{e^3}=0.4$ និង $f(-1)=0$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	0.4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

៣)កំណត់បីចំនួនពិត a,b,c

ដើម្បីឲ្យ $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$ គឺជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$

កាលណា $\forall x\in\mathbb{R}:\ F'(x)=f(x)$

យើងមាន $F'(x)=(2ax+b)e^x+\left(ax^2+bx+c\right)e^x$

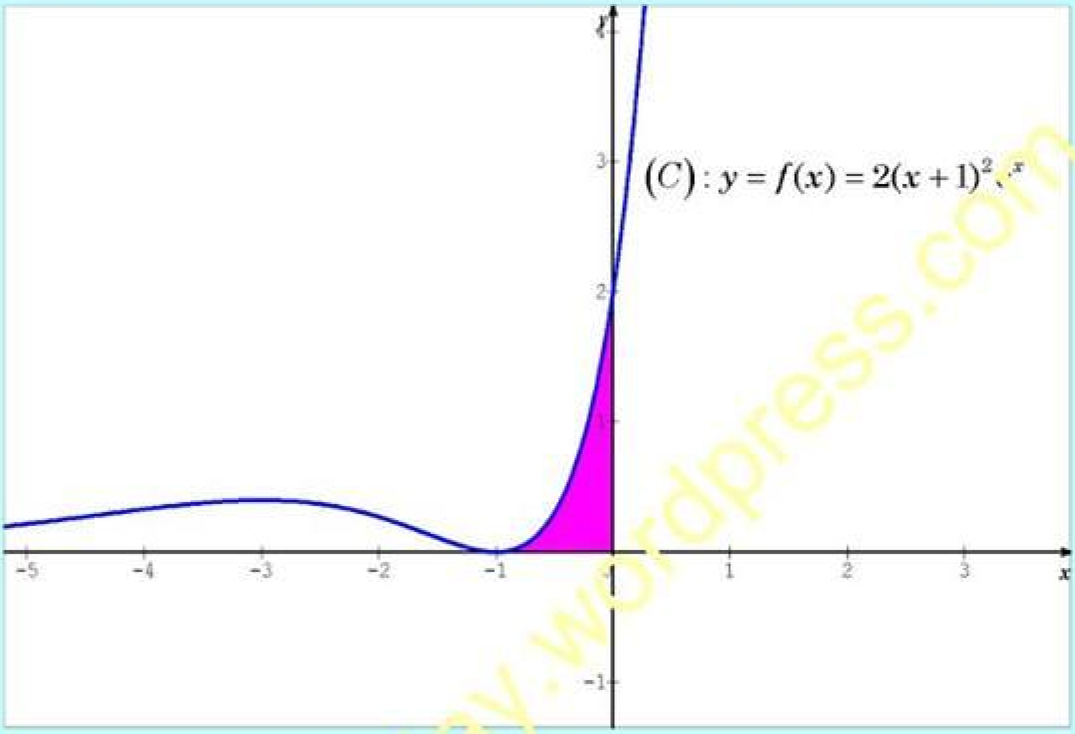
$$=\left[ax^2+(2a+b)x+(b+c)\right]e^x$$

យើងបាន $\left[ax^2+(2a+b)x+(b+c)\right]e^x=2\left(x^2+2x+1\right)e^x$

យើងទាញ $\begin{cases}a=2\\ 2a+b=4\\ b+c=2\end{cases}$ នោះ $a=2\,,\ b=0\,,c=2$

ដូចនេះ $a=2\,,\ b=0\,,c=2$ ។ ហើយ $F(x)=2\left(x^2+1\right)e^x$ ។

៤)សង់ក្រាប (C)



គណនាផ្ទៃក្រឡានៃមណ្ឌលប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (C) និងអក្ស័អាប់ស៊ីស
និងបន្ទាត់ $x=-1$, $x=0$ ៖

យើងបាន $S=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{-1}^{0} = F(0)-F(-1)$

ដោយ $F(x)=2\left(x^2+1\right)e^x$ នោះ $F(0)=2$, $F(-1)=\frac{4}{e}$

ដូចនេះ $S = 2-\frac{4}{e} = \frac{2(e-2)}{e}$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

លំហាត់ទី២១

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x-4+\dfrac{8}{e^x+2}$

តាង (C) ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

១)ក.រកលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ខ.ស្រាយថាអនុគមន៍ f អាចសរសេរជា $f(x)=x-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

គ.ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតពីររបស់ខ្សែកោង (C) ។

២)ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2$ ។

ខ.សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣)រកសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x=\ln 2$ ។

៤)គណនា $f(-2)$ និង $f(2)$ រួចសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T) និងអាស៊ីមតូតទាំងអស់របស់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ តែមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

១)ក.រកលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-4+\dfrac{8}{e^x+2}\right)=-\infty$ ។

និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-4+\dfrac{8}{e^x+2}\right)=+\infty$ ។

ខ.ស្រាយថាអនុគមន៍ f អាចសរសេរជា $f(x)=x-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

យើងមាន $f(x)=x-4+\dfrac{8}{e^x+2}=x+\left(\dfrac{8}{e^x+2}-4\right)=x-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ ពិត

ដូចនេះ $f(x)=x-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

គ.ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតពីររបស់ខ្សែកោង (C)

យើងមាន $f(x)=x-4+\dfrac{8}{e^x+2}$ និង $f(x)=x-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{e^x+2}=0$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+2}=0$

ដូចនេះ $(d_1): y=x-4$ និង $(d_2): y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។

២)ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2$

យើងមាន $f(x)=x-4+\dfrac{8}{e^x+2}$

យើងបាន $f'(x)=1-\dfrac{8e^x}{(e^x+2)^2}=\dfrac{(e^x+2)^2-8e^x}{(e^x+2)^2}=\dfrac{(e^x-2)^2}{(e^x+2)^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2$ ។

ខ.សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x នោះ f ជាអនុគមន៍កើនហើយបើ $f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-2=0$ ឬ $x=\ln 2$ ។

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1.3	$\nearrow$	$+\infty$

ចំពោះ $x = \ln 2$ នោះ $f(\ln 2) = -2 + \ln 2 = -1.3$ ។

៣)រកសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x = \ln 2$

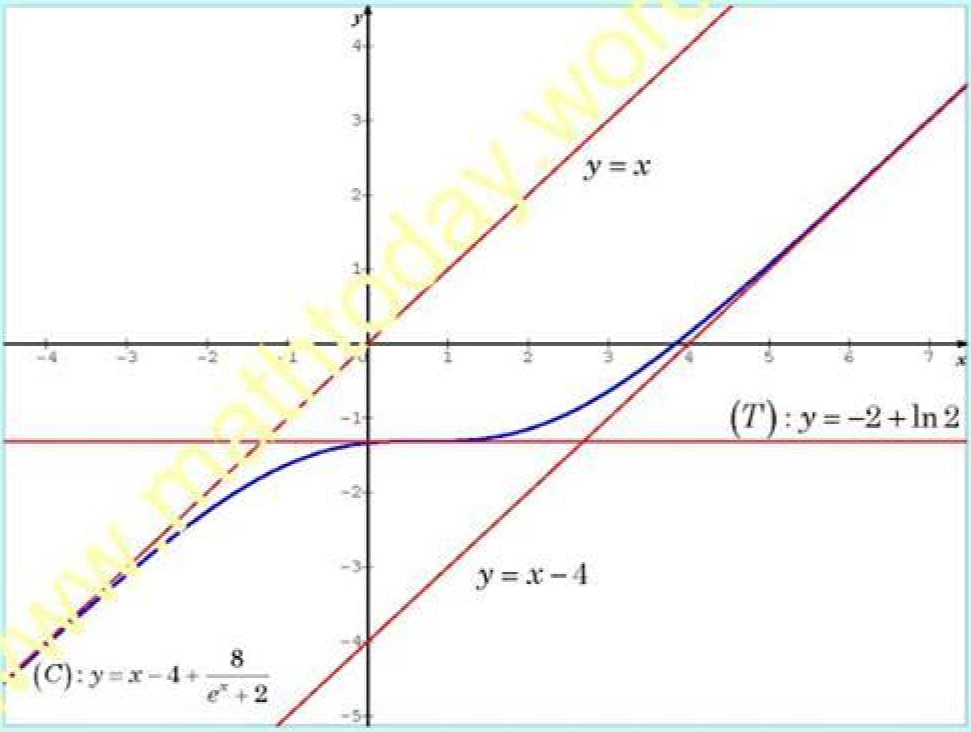
គេមាន $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 2}{e^x + 2}\right)^2$ នោះ $f'(\ln 2) = 0$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) គឺ $(T): y = -2 + \ln 2$ ។

៤)គណនា $f(-2)$ និង $f(2)$

$f(-2) = -2 - 4 + \dfrac{8}{e^{-2} + 2} = -2.4$ និង $f(2) = 2 - 4 + \dfrac{8}{e^2 + 2} = -1.1$ ។

សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T) និងអាស៊ីមតតូតទាំងអស់របស់ក្រាប (C)



www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x^3-6x+3x\ln x+3$ មានក្រាប (C) ។

១)គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ ។

២)ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=3\left(x^2-1+\ln x\right)$ ។

៣)គេតាង $g(x)=x^2-1+\ln x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ក)ចូរស្រាយថា $g'(x)>0$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ខ)គណនា $g(1)$ ។

ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ចំពោះ $x\in(0,1)$ និង $x\in(1,+\infty)$ ។

៤)ដោយប្រើលទ្ធផលសំណួរទី៣ចូរទាញបញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។ គេឲ្យ $\ln 2=0.7$ ។

៥)គណនាតម្លៃ $f(2)$ ។ ចូរសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

១)គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x^3-6x+3x\ln x+3$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-6x+3x\ln x+3\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1-\frac{6}{x}+3\frac{\ln x}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)\right]=+\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^3}=0$ ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^3-6x+3x\ln x+3\right)=3$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=0$ ។

២)ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=3\left(x^2-1+\ln x\right)$

យើងមាន $f(x)=x^3-6x+3x\ln x+3$

យើងបាន $f'(x)=3x^2-6+3\ln x+3=3x^2-3+3\ln x$

ដូចនេះចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=3\left(x^2-1+\ln x\right)$ពិត។

៣.ក)ស្រាយថា $g'(x)>0$ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x>0$

យើងមាន $g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+1}{x}>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

ដូចនេះស្រាយថា $g'(x)>0$ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x>0$។

ខ)គណនា $g(1)$

យើងបាន $g(1)=1^2-1+\ln 1=1-1+0=0$ ដូចនេះ $g(1)=0$ ។

សិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ចំពោះ $x\in(0,1)$ និង $x\in(1,+\infty)$

ដោយ $g'(x)>0$ជានិច្ចគ្រប់ $x>0$ នោះ g ជាអនុគមន៍កើនលើ $(0,+\infty)$

ហើយដោយយើងមាន $g(1)=0$ នោះយើងអាចសន្និដ្ឋានសញ្ញានៃ g ដូចតទៅ៖

ចំពោះ $x\in(0,1)$នោះ $g(x)<0$ និងចំពោះ $x\in(1,+\infty)$នោះ $g(x)>0$ ។

៤)ទាញរកសញ្ញានៃ $f'(x)$លើចន្លោះ $(0,+\infty)$

យើងមាន $f'(x)=3\left(x^2-1+\ln x\right)=3g(x)$

នោះ $f(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$។

យោងតាមសម្រាយខាងលើយើងបាន $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(0,1)$

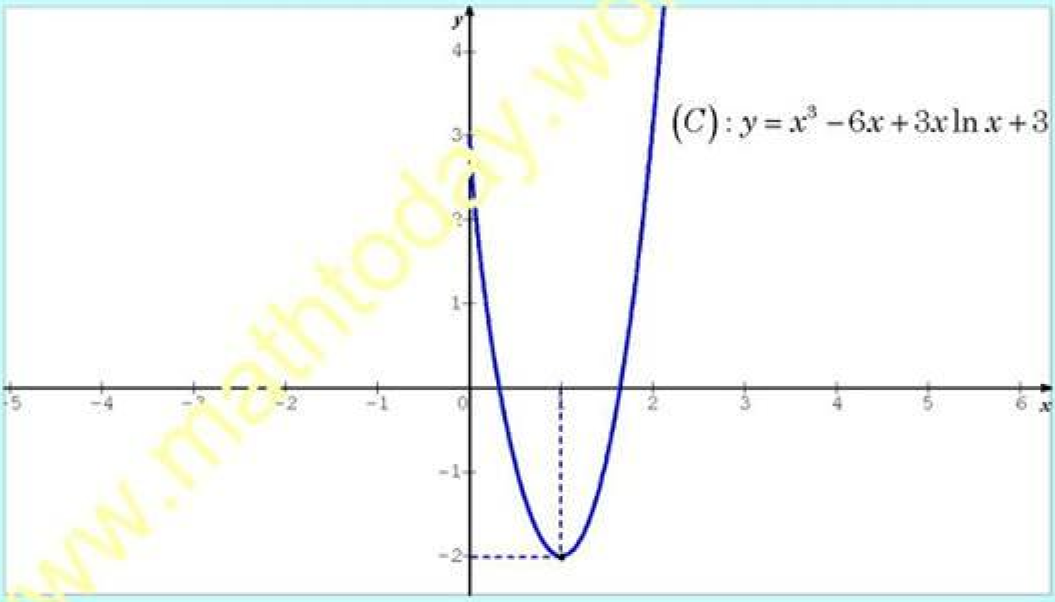
ហើយ $f'(x)=0$ ចំពោះ $x=1$ និង $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(1,+\infty)$ ។

តារាងអថេរភាពនៃ f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

៥)គណនាតម្លៃ $f(2)$រួចសង់ក្រាប(C)ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$

ចំពោះ $x=2$ នោះ $f(2)=8-12+6\ln 2+3=3.2$



លំហាត់ទី២៣

ផ្នែក A :

គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=2x^2-2x+\ln x$ ។

១.ចូរស្រាយថាគ្រប់ $x>0$: $g'(x)>0$ ។

២.គណនា $g(1)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ g លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1,+\infty)$ ។

ផ្នែក B :

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ ៖

$$y=f(x)=2(x-\ln x-2)-\frac{1+\ln x}{x}$$

(C) ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

១.គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ នៃក្រាប (c) ។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើ $(0,+\infty)$ ។

ចូរគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ខាងលើ ។

៣.គណនាតម្លៃ $f(\frac{1}{4})$, $f(e)$ និង $f(4)$ រួចទាញបញ្ជាក់ថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ α និង β ដែល $\frac{1}{4}<\alpha<1$ និង $e<\beta<4$ ។

៤.គណនា $f(2)$ រួចសង់ក្រាប (c) ។

៥.ស្រាយថាអនុគមន៍ F កំណត់ដោយ $F(x)=x^2-2x-2x\ln x-\frac{(1+\ln x)^2}{2}$ គ្រប់ $x>0$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ ។

៦.គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (c) ជាមួយអ័ក្ស (ox) និងបន្ទាត់ $x=1$, $x=e$ ។($e=2.7$, $\ln4=2\ln2=1.4$, $\frac{1}{e}=0.4$)។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែក A :

គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=2x^2-2x+\ln x$

១.ស្រាយថាគ្រប់ $x>0 : g'(x)>0$

យើងមាន $g(x)=2x^2-2x+\ln x$

យើងបាន $g'(x)=4x-2+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4x^2-2x+1}{x}=\dfrac{(4x-1)^2+3}{4x}>0$

គ្រប់ $x>0$ ។

ដូចនេះគ្រប់ $x>0 : g'(x)>0$ ។

២.គណនា $g(1)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ g លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1,+\infty)$

យើងបាន $g(1)=2(1)^2-2(1)+\ln 1=2-2+0=0$ ។

ដោយគ្រប់ $x>0 : g'(x)>0$ នោះ g ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $(0,+\infty)$ ។

ដោយ $g(1)=0$ នោះយើងអាចទាញរកសញ្ញារបស់ g លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1,+\infty)$ ដូចតទៅ

.ចំពោះ $x\in(0,1) : g(x)<0$ ។

.ចំពោះ $x\in(1,+\infty) : g(x)>0$ ។

ផ្នែក B :

១.គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (c)

យើងមាន $f(x)=2(x-\ln x-2)-\dfrac{1+\ln x}{x}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2(x-\ln x-2)-\dfrac{1+\ln x}{x}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left[2\left(1-\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}\right)-\frac{1+\ln x}{x^2}\right]=+\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x^2}=0$ ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[2(x-\ln x-2)-\frac{1+\ln x}{x}\right]=+\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x}=-\infty$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ នោះ $x=0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (c) ។

២.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$

យើងមាន $f(x)=2(x-\ln x-2)-\frac{1+\ln x}{x}$

យើងបាន $f'(x)=2-\frac{2}{x}-\frac{1-1-\ln x}{x^2}=\frac{2x^2-2x+\ln x}{x^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ។

ដោយគ្រប់ $x>0: f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$ ។

តាមលទ្ធផលផ្នែក A: ខាងលើយើងទាញបាន

.ចំពោះ $x\in(0,1): g(x)<0$ នោះ $f'(x)<0$ ។

.ចំពោះ $x\in(1,+\infty): g(x)>0$ នោះ $f'(x)>0$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ខាងលើ ៖

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $f(1)=-3$ ។

៣.គណនាតម្លៃ $f(\frac{1}{4})$, $f(e)$ និង $f(4)$

យើងមាន $f(x)=2(x-\ln x-2)-\frac{1+\ln x}{x}$

យើងបាន

$$f(\frac{1}{4})=2(\frac{1}{4}-\ln\frac{1}{4}-2)-4(1+\ln\frac{1}{4})=2(0.25+1.4-2)-4(1-1.4)=0.9$$

$$f(e)=2(e-\ln e-2)-\frac{1+\ln e}{e}=2(2.7-1-2)-2(0.4)=-1.4$$

និង $f(4)=2(4-\ln 4-2)-\frac{1+\ln 4}{4}=2(2-1.4)-\frac{2.4}{4}=0.6$ ។

ដូចនេះ $f(\frac{1}{4})=0.9$, $f(e)=-1.4$, $f(4)=0.6$ ។

បញ្ជាក់ថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ α និង β ដែល $\frac{1}{4}<\alpha<1$ និង $e<\beta<4$ ៖

យើងមាន $f(\frac{1}{4})f(1)=(0.9)(-3)=-2.7<0$ និង

$f(e)f(4)=(-1.4)(0.6)=-0.84<0$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយើងទាញសន្និដ្ឋានថាសមីការ $f(x)=0$

មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ α និង β ដែល $\frac{1}{4}<\alpha<1$ និង $e<\beta<4$ ។

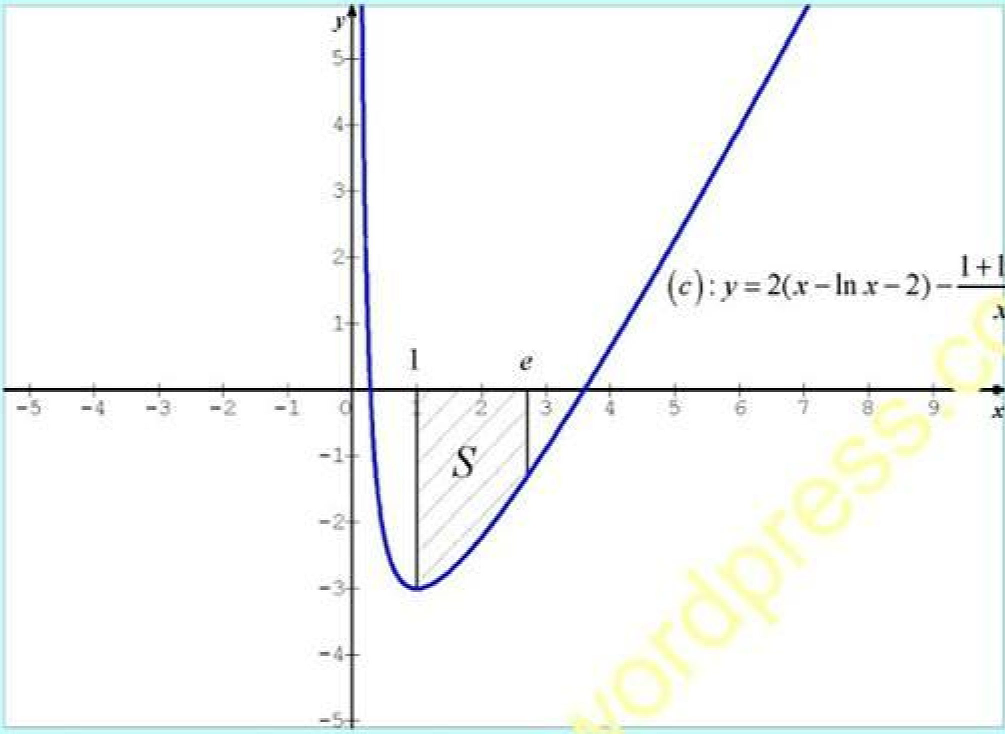
៤.គណនា $f(2)$ រួចសង់ក្រាប (c) ៖

យើងមាន $f(x)=2(x-\ln x-2)-\frac{1+\ln x}{x}$

ចំពោះ $x=2$ នោះ $f(2)=2(2-\ln 2-2)-\frac{1+\ln 2}{2}$

$$=-2(0.4)-\frac{1.4}{2}=-1.5$$ ។

ដូចនេះ $f(2)=-1.5$ ។



៨. ស្រាយថាអនុគមន៍ F ជាព្រីមីទីវមួយរបស់ $f(x)$

យើងមាន $F(x) = x^2 - 2x - 2x\ln x - \frac{(1+\ln x)^2}{2}$ គ្រប់ $x > 0$

យើងបាន $F'(x) = 2x - 2 - (2\ln x + 2) - (1+\ln x)'(1+\ln x)$

$$= 2x - 2 - 2\ln x - 2 - \frac{1+\ln x}{x}$$

$$= 2(x - \ln x - 2) - \frac{1+\ln x}{x} = f(x)$$

ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ ។

៩. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង (c) និងអ័ក្ស (ox) និងបន្ទាត់ $x = 1$, $x = e$

យើងបាន $S = -\int_1^e f(x)dx = -\left[F(x)\right]_1^e = F(1) - F(e)$

ដោយ $F(1)=1-2-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$ និង $F(e)=e^2-2e-2e-2=e^2-4e-2$

យើងបាន $S=-\frac{3}{2}-e^2+4e+2=-e^2+4e+\frac{1}{4}\approx 3.76$

ដូចនេះ $S=3.76$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៤

ផ្នែក A :

គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x^2-1+2\ln x$ ។

១) ស្រាយបញ្ជាក់ថា g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។គណនា $g(1)$ ។

២) ទាញបញ្ជាក់សញ្ញារបស់ $g(x)$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1,+\infty)$ ។

ផ្នែក B :

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x-1-\dfrac{1+2\ln x}{x}$

តាង (c) ជាក្រាបរបស់វានៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

១) សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង $+\infty$ ។

២) ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(\Delta): y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (c) កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ ។ បញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាង (c) និង (Δ) ។

៣) ស្រាយបញ្ជាក់ថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ។

៤) ដោយប្រើលទ្ធផលសំណួរខាងលើ ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

៥) គណនា $f(\frac{1}{e})$, $f(2)$ និង $f(e)$ ។ទាញបញ្ជាក់ថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសពីរ α និង β ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{e}<\alpha<1$ និង $2<\beta<e$ ។

៦) ចូរសង់ក្រាប (c) និងបន្ទាត់ (Δ) ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ (c) និង (Δ) ព្រមទាំងបន្ទាត់ឈរ ពីរ $x=1$, $x=e$ ។

(គេយក $e=2.72$, $\frac{1}{e}=0.36$, $\ln 2=0.69$)

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែក A:

១)ស្រាយបញ្ជាក់ថា g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$

គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x^2-1+2\ln x$

យើងបាន $g'(x)=2x+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x^2+1)}{x^2}>0\ \ \forall x\in(0,+\infty)$

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។

គណនា $g(1)$ ៖

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $g(1)=1-1+2\ln 1=0$ ។

២)ទាញបញ្ជាក់សញ្ញារបស់ $g(x)$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1,+\infty)$

ដោយ g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ និង $g(1)=0$

យើងអាចទាញបញ្ជាក់សញ្ញានៃ $g(x)$ ដូចខាងក្រោម៖

-ចំពោះ $x\in(0,1)$: $g(x)<0$

-ចំពោះ $x\in(1,+\infty)$: $g(x)>0$ ។

ផ្នែក B:

១)សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង $+\infty$

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x-1-\dfrac{1+2\ln x}{x}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-1-\dfrac{1+2\ln x}{x}\right)=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1-\dfrac{1+2\ln x}{x}\right)=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+2\ln x}{x}\right)=0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ។

២)ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(\Delta): y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (c)

គេមាន $(c)-(\Delta): f(x)-y=\left(x-1-\frac{1+2\ln x}{x}\right)-(x-1)=-\frac{1+2\ln x}{x}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+2\ln x}{x}=0$ នោះបន្ទាត់ $(\Delta): y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត
នៃ (c) កាលណា $x\to+\infty$ ។

បញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាង (c) និង (Δ) ៖

គេមាន $f(x)-y=-\frac{2\ln x+1}{x}$

-បើ $-\frac{2\ln x+1}{x}>0$ សមមូល $0<x<e^{-\frac{1}{2}}$
នោះខ្សែកោង (c) ស្ថិតនៅខាងលើ (Δ) ។

-បើ $-\frac{2\ln x+1}{x}=0$ សមមូល $x=e^{-\frac{1}{2}}$ នោះខ្សែកោង
(c) កាត់បន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច $A(e^{-\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{2}}-1)$ ។

-បើ $-\frac{2\ln x+1}{x}<0$ សមមូល $x>e^{-\frac{1}{2}}$ នោះខ្សែកោង (c) នៅក្រោម (Δ) ។

៣)ស្រាយបញ្ជាក់ថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

គេមាន $f(x)=x-1-\frac{1+2\ln x}{x}$

គេបាន $f'(x)=1-\frac{\frac{2}{x}(x)-(1+2\ln x)}{x^2}$

$$=1-\frac{1-2\ln x}{x^2}=\frac{x^2-1+2\ln x}{x^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ដែល $g(x)=x^2-1+2\ln x$ ។

៤)សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$

គេមាន $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$ ។

តាមលទ្ធផលក្នុងសំណួរ A យើងអាចសន្និដ្ឋានសញ្ញារបស់ $f'(x)$ ដូចតទៅ៖

-ចំពោះ $x\in(0,1): f'(x)<0$ ។

-ចំពោះ $x=1$ គេបាន $f'(x)=0$ ។

-ចំពោះ $x\in(1,+\infty)" f'(x)>0$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ៖

x			1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $f(1)=1-1-\frac{1+2\ln 1}{1}=-1$

៥)គណនា

គេមាន $f(x)=x-1-\frac{1+2\ln x}{x}$

ចំពោះ $x=\frac{1}{e}$ គេបាន $f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}-1-\frac{1+2\ln e^{-1}}{\frac{1}{e}}$

$$=0.36-1+2.72=2.08$$

ចំពោះ $x=2$ គេបាន $f(2)=2-1-\dfrac{1+2\ln 2}{2}$
$=1-0.5-0.69=-0.19$

ចំពោះ $x=e$ គេបាន $f(e)=e-1-\dfrac{1+2\ln e}{e}$
$=2.72-1-3(0.36)=0.64$

ដូចនេះ $f(\frac{1}{e})=2.08$, $f(2)=-0.19$ និង $f(e)=0.64$ ។

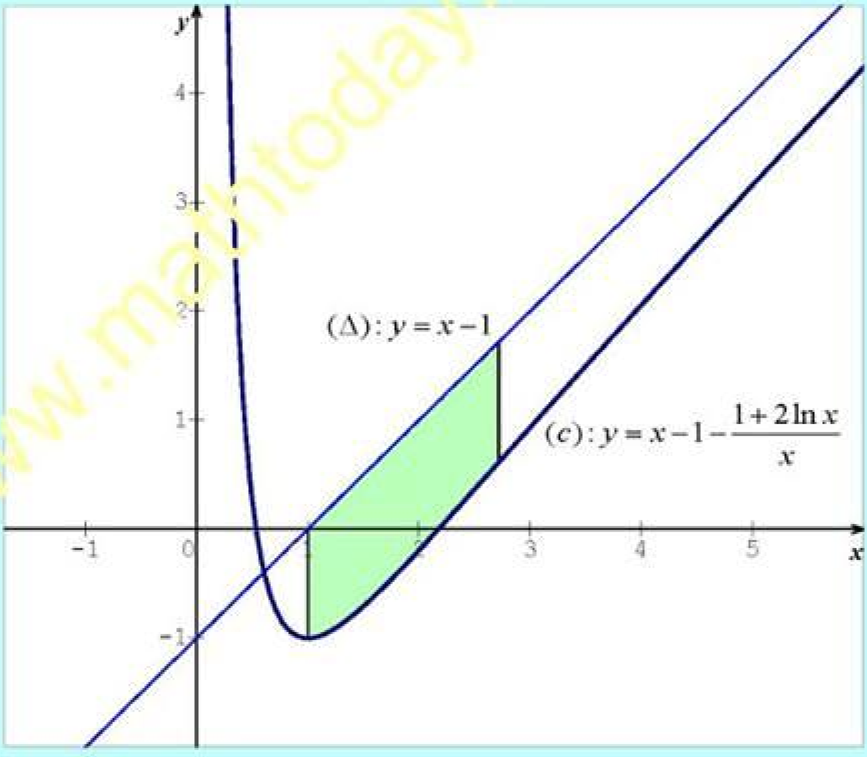
ទាញបញ្ជាក់ថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសពីរ α និង β ៖

គេមាន $f(\frac{1}{e})f(1)=-2.08<0$ និង $f(2)f(e)=(-019)(0.64)<0$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយើងអាចសន្និដ្ឋានថាសមីការ $f(x)=0$

មានឫសពីរ α និង β ដែល $\frac{1}{e}<\alpha<1$ និង $2<\beta<e$ ។

៦)គូសក្រាប (c) និងបន្ទាត់ (Δ) ៖



គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ (c) និង (Δ) និងបន្ទាត់ឈរ $x=1$, $x=e$

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាដែលត្រូវរក ។

យើងបាន $S=\int_1^e\left[(x-1)-(x-1-\frac{1+2\ln x}{x})\right]dx=\int_1^e\frac{1+2\ln x}{x}dx$

តាង $u=1+2\ln x$ នោះ $du=\frac{2dx}{x}$ ។ ចំពោះ $x\in[1,e]$ នោះ $u\in[1,3]$

គេបាន $S=\frac{1}{2}\int_1^3 udu=\frac{1}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^3=\frac{3^2-1^2}{4}=2$

ដូចនេះ $S=2$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

លំហាត់ទី២៥

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=2x-1+e^{-x}$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ មានក្រាប (C)។

១)រកលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត (L) នៃ (C)។ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត (L) និងខ្សែកោង (C) ។

២)ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=\ln 2$ រួចកំណត់តម្លៃអប្បបរមាធៀបនោះ។សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ គេឲ្យ $\ln 2=0.7$។

៣)រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់គល់ $O(0,0)$ រួចរកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង (T) និង (L) ។

៤)គណនា $f(-2)$ និង $f(-1)$ រួចទាញថាមាន $\alpha\in[-2,-1]$ ដែល $f(\alpha)=0$។ ចូរសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T) និង (L) ។

៥)គណនាផ្ទៃក្រឡា S_λ នៃផ្ទៃប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត (L) និងបន្ទាត់ឈរ $x=0$, $x=\lambda$,$(\lambda>0)$ រួចទាញរក $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S_\lambda$ ។

ដំណោះស្រាយ

១)រកលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ៖

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-1+e^{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left(\frac{2x}{e^{-x}}-\frac{1}{e^{-x}}+1\right)\right]=+\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{e^{-x}}-\frac{1}{e^{-x}}+1\right)=1$ ។

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x-1+e^{-x}\right) = +\infty$ ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ ។

កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត (L) នៃ (C) ៖

គេមាន $f(x) = 2x-1+e^{-x}$ ដោយ $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ នោះ $(L):\ y = 2x-1$

ជាសមីការនៃអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) កាលណា $x \to +\infty$ ។

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត (L) និងខ្សែកោង (C) ៖

គេមាន $(C)-(L):\ f(x)-y = e^{-x} > 0$ គ្រប់ $x \in \Re$

ដូចនេះខ្សែកោង (C) ស្ថិតនៅខាងលើអាស៊ីមតូតទ្រេត (L) ជានិច្ច។

២)ស្រាយថាអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = -\ln 2$

គេមាន $f(x) = 2x-1+e^{-x}$ គេបាន $f'(x) = 2-e^{-x}$

និង $f''(x) = e^{-x}$ ចំពោះ $x = -\ln 2$

គេបាន $\begin{cases} f'(-\ln 2) = 2-e^{\ln 2} = 2-2 = 0 \\ f''(-\ln 2) = e^{\ln 2} = 2 > 0 \end{cases}$

ដូចនេះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = -\ln 2$ ។

កំណត់តម្លៃអប្បបរមាធៀបនៃ f ៖

ចំពោះ $x = -\ln 2$ គេបាន៖

$f(-\ln 2) = -2\ln 2 - 1 + e^{\ln 2} = -2(0.7) - 1 + 2 = -0.4$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមាធៀបនៃ f គឺ $f(-\ln 2) = -0.4$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-0.4	↗ $+\infty$

៣)រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់គល់ $O(0,0)$ ៖

តាមរូបមន្ត $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ឬ $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ដោយ $f'(0)=2-1=1$, $f(0)=0$

ដូចនេះ $(T): y=x$ ។

រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង (T) និង (L) ៖

កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង (T) និង (L) ជាគូចម្លើយនៃប្រពន្ធ័សមីការ៖

$\begin{cases} y=x \\ y=2x-1 \end{cases}$ បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន $x=1, y=1$ ។

ដូចនេះ $A(1,1)$ ។

៤)គណនា $f(-2)$ និង $f(-1)$ រួចទាញថាមាន $\alpha\in[-2,-1]$ ដែល $f(\alpha)=0$

គេមាន $f(x)=2x-1+e^{-x}$ នោះ $f(-2)=-4-1+e^{2}=-5+7.29=2.29$

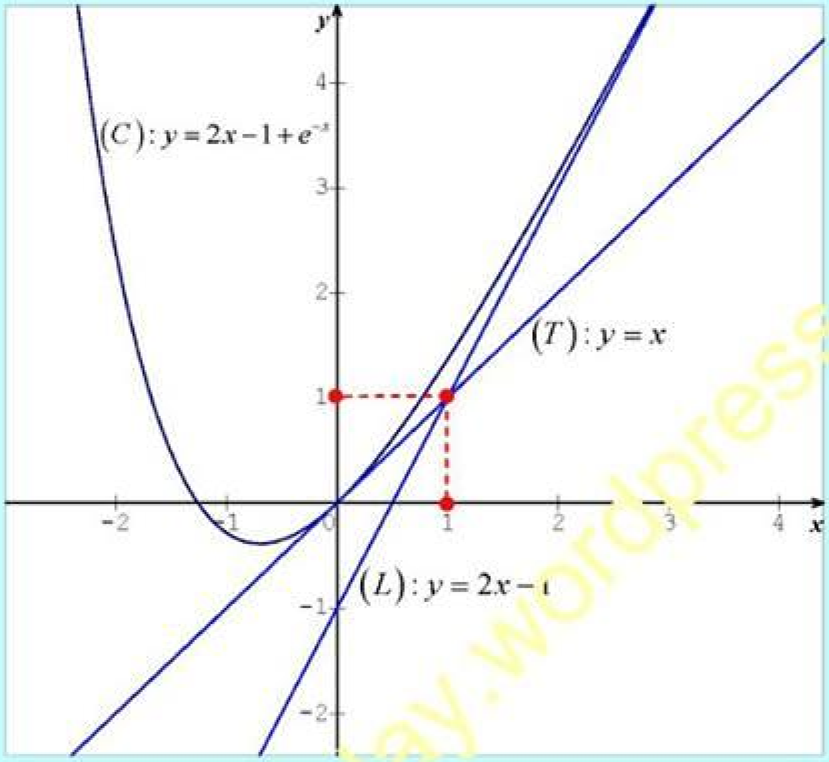
ហើយ $f(-1)=-2-1+e=-3+2.7=-0.3$ ។

ដូចនេះ $f(-2)=2.29$, $f(-1)=-0.3$ ។

ដោយ $f(-2)f(-1)=(2.29)(-.13)<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

គេទាញបានថាមាន $\alpha\in[-2,-1]$ ដែល $f(\alpha)=0$ ។

សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T) និង (L) ៖



ផ) គណនាផ្ទៃក្រឡា S_λ នៃផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត (L)

និងបន្ទាត់ឈរ $x = 0$, $x = \lambda$, $(\lambda > 0)$ រួចទាញរក $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} S_\lambda$ ៖

យើងបាន $S_\lambda = \int_0^\lambda \left[\left(2x - 1 + e^{-x}\right) - \left(2x - 1\right) \right] dx = \int_0^\lambda e^{-x} dx$

$$= \left[-e^{-x} \right]_0^\lambda = 1 - e^{-\lambda}$$

ដូចនេះ $S_\lambda = 1 - e^{-\lambda}$ ។ម្យ៉ាងទៀតកាលណា $\lambda \to +\infty$ នោះ $e^{-\lambda} \to 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} S_\lambda = 1$ ។

www.mathtoday.wordpress.com