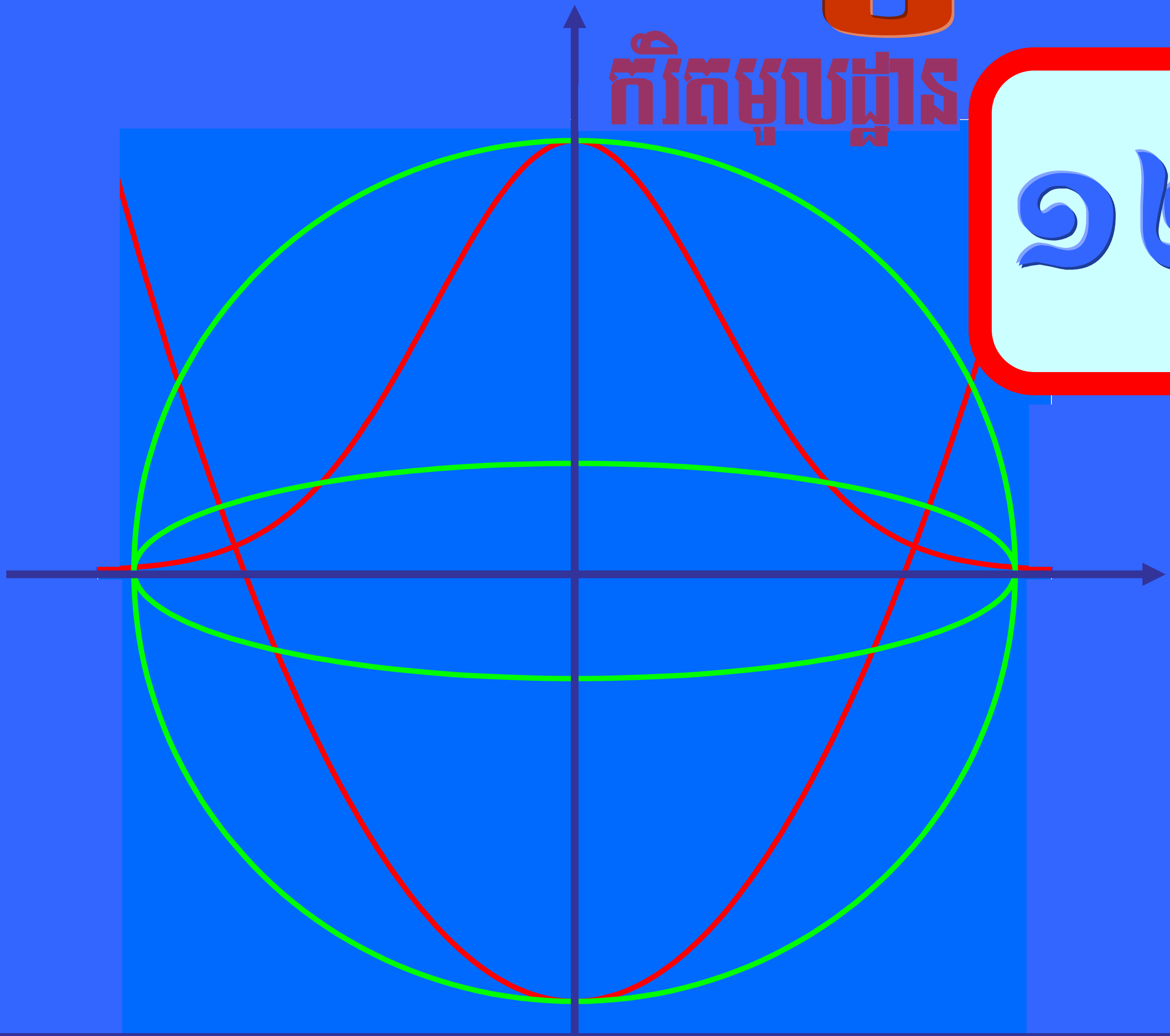
លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រផ្នែក គណិតវិទ្យា

កំណែលំហាត់

គណិតវិទ្យា

កម្រិតមូលដ្ឋាន

១២



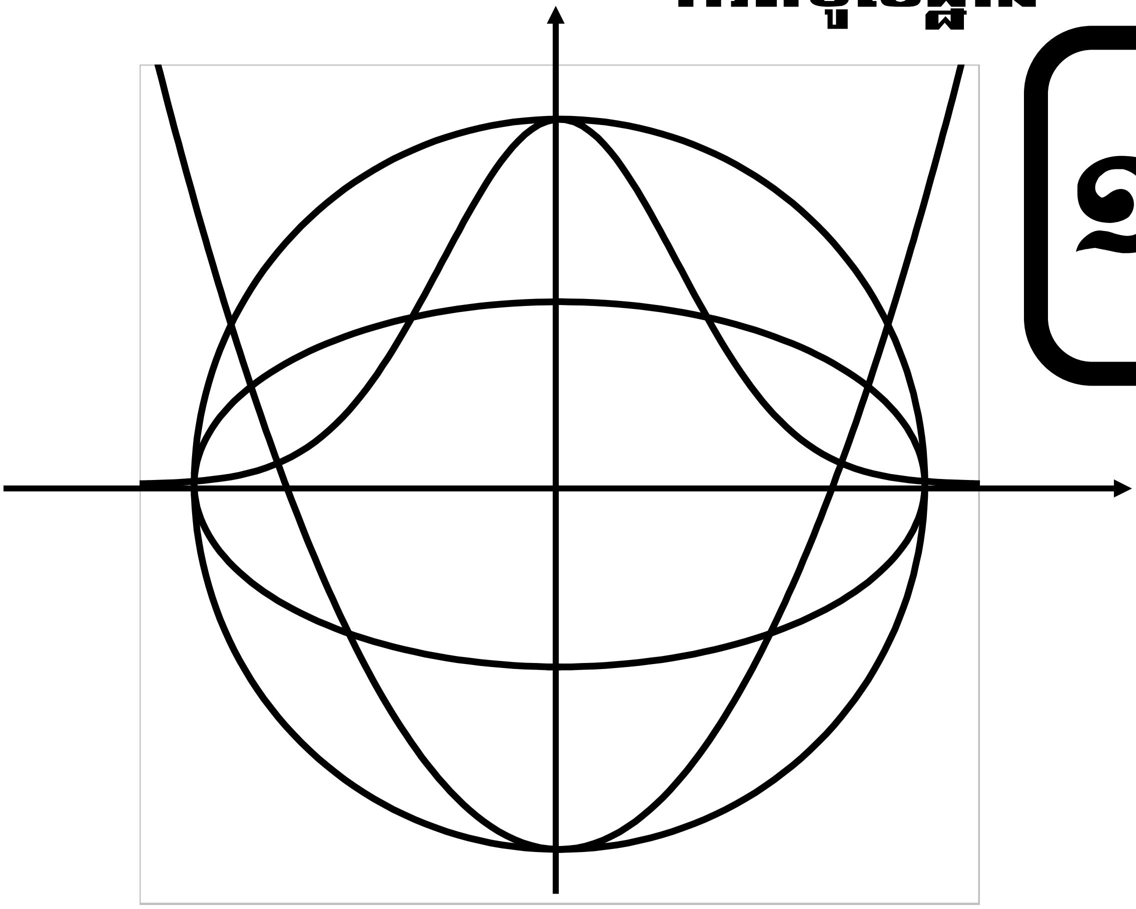
ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រផ្នែក គណិតវិទ្យា

កំណែលំហាត់

គណិតវិទ្យា

កម្រិតមូលដ្ឋាន



១២

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្គុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន	លោក អ៊ឹង សំណាង
លោកស្រី ទុយ វីណា	លោក ទិត្យ ម៉េង
លោក នន់ សុខណា	លោក ព្រឹម សុនិត្យ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយាកុំព្យូទ័រ	រចនាទំព័រ និង ក្រាប
លោក អ៊ឹង សំណាង	លោក ព្រំ ម៉ាឡា
កញ្ញា លី គុណ្ណាកា	

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សា ជាទីមេត្រី !!

សៀវភៅ កំណែលំហាត់គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី12 កម្រិតមូលដ្ឋានដែលយើងខ្ញុំបាន រៀបរៀងនេះ រួមមានបួនជំពូកធំៗ ដែលបានដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២កម្រិតមូលដ្ឋាន របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ។ ក្នុងជំពូកនីមួយៗយើងខ្ញុំបានសង្ខេបមេរៀន និង ដកស្រង់លំហាត់ក្នុងមេរៀននៃជំពូក នីមួយៗមកធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយ ដែលអាចជាជំនួយស្មារតីដល់អ្នកសិក្សា ក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ។

ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ការបកស្រាយនូវរាល់លំហាត់ក្នុងសៀវភៅ នេះវាមិនល្អហួសគេហួសឯង ទាំងស្រុងនោះទេ ។ កំហុសឆ្គងនានា ទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធប្រាកដជាកើតមានដោយអចេតនា ពុំខានឡើយ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំរង់ចាំជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់ អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បីកែតម្រូវសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាព ថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ យើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀង សូមជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ ទទួលបានជោគជ័យក្នុងជីវិត និង មានសុខភាពល្អ ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ២៩ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១០

អ្នករៀបរៀង **លឹម ផល្គុន**

មាតិការឿង

ទំព័រ

ជំពូកទី១

មេរៀនទី១ លីមីតនៃអនុគមន៍ ០១

មេរៀនទី២ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ ៣៣

ជំពូកទី២

មេរៀនទី១ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ ៥៨

មេរៀនទី២ អនុវត្តន៍នៃអនុគមន៍ ៨០

ជំពូកទី៣

មេរៀនទី១ អនុគមន៍ សនិទាន ១០៦

មេរៀនទី២ អនុគមន៍អិុស្ប៉ូណង់ស្យែល ១៣៥

មេរៀនទី៣ អនុគមន៍លោការីត ១៥០

ជំពូកទី៤

មេរៀនទី១ ព្រីមីទីវ និង អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ១៥៩

មេរៀនទី២ អាំងតេក្រាលកំណត់ ១៨០

លំហាត់បន្ថែម ១៨៩

មេរៀនសង្ខេប

លីមីតនៃអនុគមន៍

១_លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

✍ ***និយមន័យ*** :

អនុគមន៍ f មានលីមីតស្មើ L កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឱ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។

គេសរសេរ : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ។

✍ ***និយមន័យ*** :

គេថាអនុគមន៍ f ខិតទៅ $+\infty$ ឬ $-\infty$ កាលណា x ខិតទៅជិត a បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឱ្យ $f(x) > M$ ឬ $f(x) < -M$ ។

គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ឬ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ។

២_លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

✍ គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីតស្មើ L កាលណា x ទៅជិត $+\infty$ ឬ $-\infty$ បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ គេអាចរក $N > 0$ ដែល $x > N$ ឬ $x < -N$ នាំឱ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។

គេសរសេរ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ ឬ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ ។

✍ គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ទៅជិត $+\infty$ បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ គេមាន $N > 0$ ដែល $x > N$ នាំឱ្យ $f(x) > M$ ។គេសរសេរ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ។

✍ គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ទៅជិត $-\infty$ បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ គេមាន $N > 0$ ដែល $x < -N$ នាំឱ្យ $f(x) > M$ ។គេសរសេរ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ។

៣_ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim_{x\to a} f(x) = L$; $\lim_{x\to a} g(x) = M$ និង $\lim_{x\to a} h(x) = N$ ដែល L ; M ; N ជាចំនួនពិតនោះគេបាន :

1/ $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = L \pm M$

(a ជាចំនួនកំណត់ ឬអនន្ត) ។

$2/\ \lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)-h(x)\right]=L+M-N$

$3/\ \lim_{x\to a}\left[k\,f(x)\right]=k\ \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]$

$4/\ \lim_{x\to a}\left[f(x).g(x).h(x)\right]=L.M.N$

$5/\ \lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{L}{M}\ ;\ M\neq 0$

$6/\ \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=L^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ ។

៤_លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

$1/\lim_{x\to a}\left(\sqrt[n]{x}\right)=\sqrt[n]{a}$ ចំពោះ $a\geq 0$ និង $n\in IN$

$2/\lim_{x\to a}\left(\sqrt[n]{x}\right)=\sqrt[n]{a}$ ចំពោះ $a<0$ និង n ជាចំនួនគត់សេស

$3/\lim_{x\to a}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right]=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]}=\sqrt[n]{L}$

បើ $L\geq 0$ និង n ជាចំនួនគត់គូ ឬ $L<0$ និង n ជាចំនួនគត់សេស ។

៥_លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ដែលមាន $\lim_{x\to a}[g(x)]=L$

និង $\lim_{x\to L}f(x)=f(L)$ នោះ $\lim_{x\to a}f\left[g(x)\right]=f(L)$ ។

៦_លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f\ ;g$ និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

និង $f(x) \geq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$ នោះ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ។

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f\ ; g$ និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

និង $f(x) \leq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$ នោះ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ។

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f\ ; g; h$ និងចំនួនពិត A ដែល

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lambda$ និង $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ចំពោះគ្រប់

$x \geq A$ នោះ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$ ។

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f\ ; g$ និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lambda'$ និង $f(x) \leq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$

នោះ $\lambda \leq \lambda'$ ។

៧_លីមីតរាងមិនកំនត់

✍ លីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$ គេត្រូវបំបែកភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

✍ លីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{\infty}{\infty}$

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

✍ លីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $+\infty-\infty$

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $+\infty-\infty$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណនៃកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

៨_លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

-បើ **a** ជាចំនួនពិតស្ថិតនៅក្នុងដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែលឱ្យនោះគេបាន $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

និង $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$ ។

-វិធាន បើ **x** ជារង្វាស់មុំ ឬធ្នូគិតជារ៉ាដ្យង់នោះគេបាន

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{និង} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \quad ។$$

៩_លីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

$1/\ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$2/\ \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$3/\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$4/\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n > 0)$

$5/\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad (n > 0)$

១០_លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

$1/\ \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

$2/\ \lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

$3/\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$4/\ \lim_{x\to0} x\ln x = 0$

$5/\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n > 0)$

$6/\ \lim_{x\to0^+} x^n \ln x = 0$

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-ស្រាយបញ្ជាក់ថា លីមីតខាងក្រោមនេះពិតដោយប្រើនិយមន័យ

ក. $\lim_{x\to 3}(5x-2)=13$

ខ. $\lim_{x\to 2^-}\sqrt{(x-2)(x-3)}=0$

គ. $\lim_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim_{x\to 3}(5x-2)=13$

តាង $f(x)=5x-2$

គេមាន $f(x)-13=(5x-2)-13=5x-15=5(x-3)$

$|f(x)-13|=5|x-3|<\varepsilon$ នាំឱ្យ $|x-3|<\frac{\varepsilon}{5}$

បើគេតាង $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ នោះគ្រប់ $\varepsilon>0$ មាន $\delta=\frac{\varepsilon}{5}>0$ ដែល

$|x-3|<\delta$ នាំឱ្យ $|f(x)-13|<\varepsilon$ ។

គេថា $f(x)$ មានលីមីតស្មើ 13 កាលណា x ខិតជិត 3 ។

ដូចនេះ $\lim_{x\to 3}(5x-2)=13$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{(x-2)(x-3)}=0$

តាង $f(x)=\sqrt{(x-2)(x-3)}$

ដោយ $x\to 2^-$ នោះយើងសន្មតថា $0<x<2$ ។

គេបាន $|x-2|=-(x-2)=2-x>0$

និង $|x-3|=-(x-3)=3-x<3$ ។

ចំពោះគ្រប់ $\varepsilon>0$ យក $\delta=\dfrac{\varepsilon^2}{3}$ ដែល $0<|x-2|<\delta$

នាំឱ្យ $|f(x)|=|\sqrt{(x-2)(x-3)}|=|\sqrt{(2-x)(3-x)}|$

$$|f(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3}\times 3}=\varepsilon$$ ។

ដូចនេះចំពោះគ្រប់ $\varepsilon>0$ មាន $\delta>0$ ដែល $0<|x-2|<\delta$

នាំឱ្យ $|\sqrt{(x-2)(x-3)}|<\varepsilon$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{(x-2)(x-3)}=0$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b$

តាង $f(x)=ax+b$

-ចំពោះ $a=0$ នោះគ្រប់ x គេមាន $ax+b=b$

ក្នុងករណីនេះ $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b=b$ ។

-សន្មតថា $\mathbf{a \neq 0}$ ។

គេមាន $\mathbf{f(x)-(ax_0+b)=ax+b-ax_0-b=a(x-x_0)}$

$\mathbf{|f(x)-(ax_0+b)|=|a|.|x-x_0|<\varepsilon}$

ឬ $\mathbf{|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{|a|}\,,\ a\neq 0}$ ។

បើគេតាង $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}$ នោះគ្រប់ $\varepsilon>0$ មាន $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|a|}>0$

ដែល $|x-x_0|<\delta$ នាំឱ្យ $\mathbf{|f(x)-(ax_0+b)|<\varepsilon}$

ដូចនេះ $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b}$ ។

2-បើ $\mathbf{\lim\limits_{x\to a}f(x)=M}$ និង $\mathbf{\lim\limits_{x\to a}g(x)=L}$ ដែល $\mathbf{M}$ និង $\mathbf{L}$ ជាចំនួនថេរនោះ ចូរបង្ហាញថា

ក. $\mathbf{\lim\limits_{x\to a}[k.f(x)]=k.L}$

ខ. $\mathbf{\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+M}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\mathbf{\lim\limits_{x\to a}[k.f(x)]=k.L}$

-បើ $\mathbf{k=0}$ នោះ $\mathbf{kf(x)=kL=0}$ គ្រប់ $\mathbf{x}$ ។

-សន្មតថា $\mathbf{k \neq 0}$

គេមាន $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$

ដែល $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$ ចំពោះគ្រប់ x ដែល $|x - a| < \delta$ ។

ដូចនេះគ្រប់ x ដែល $|x - a| < \delta$ នោះយើងបាន

$$|kf(x) - kl| = |k||f(x) - l| < |k|.\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$ ។

ដោយគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $|kf(x) - kl| < \varepsilon$ គ្រប់ x

នោះ $|x - a| < \delta$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to a}[kf(x)] = kL$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$

ដោយ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ និង $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ នោះចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$

មាន $\delta_1 > 0$ និង $\delta_2 > 0$ ដែល

$|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ចំពោះ $|x - a| < \delta_1$

$|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ចំពោះ $|x - a| < \delta_2$

គេមាន $|f(x) + g(x) - L - M| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)|$

$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$$

យក $\delta < \delta_1$ និង $\delta < \delta_2$ នោះគ្រប់ x ដែល $|x-a| < \delta$

គេបាន $|f(x)+g(x)-L-M| \le |f(x)-L| + |g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ។

ដោយគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $|x-a| < \delta$ នាំឱ្យ

$|(f(x)+g(x)) - (L+M)| < \varepsilon$ ។

ដូចនេះ $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = L+M$ ។

3-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

ខ. $\lim_{x\to +\infty}\frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$

គ. $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{|x|}$

ឃ. $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3})$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$$(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})=A-B$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x+1-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x-1+x)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{x^2-x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{1}{2}$ ។

ខ. $\lim_{x\to +\infty}\frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3(1-\frac{1}{x})(2+\frac{3}{x})(\frac{2}{x}-1)}{x^3(1+\frac{1}{x^2})(2+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(1-\frac{1}{x})(2+\frac{3}{x})(\frac{2}{x}-1)}{(1+\frac{1}{x^2})(2+\frac{1}{x})}=\frac{-2}{2}=-1$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to +\infty}\frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}=-1$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{|x|}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+1)}{-x}$

$=-\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=-1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{|x|}=-1$ ។

ឃ. $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3})$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+8x-1-x^2+3}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8x+2}{|x|\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x(8+\frac{2}{x})}{-x(\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}})}$

$=-\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}=-\dfrac{8}{1+1}=-4$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3})=-4$ ។

4-កំនត់ចំនួនថេរ **a** ដើម្បីឱ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួនថេរ ហើយ កំនត់លីមីតនេះផង ។

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$

គ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនថេរ **a** ដើម្បីឱ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួនថេរ ហើយ កំនត់លីមីតនេះផង

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$

ដើម្បីឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $x=1$ ជាឫសសមីការ $\sqrt{x+3}-a=0$ គេបាន $\sqrt{1+3}-a=0 \Rightarrow a=2$ ។

ចំពោះ $a=2$ គេបាន

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$

ដើម្បីឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $x=0$ ជាឬសសមីការ

$\sqrt{1+3x}-a=0$ គេបាន $\sqrt{1+3(0)}+a=0 \Rightarrow a=-1$ ។

ចំពោះ $a=-1$ គេបាន

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x-1}{x(\sqrt{1+3x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{1+3x}+1}=\frac{3}{2}$$

គ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$

ដើម្បីឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $x=2$ ជាឬសសមីការ

$\sqrt{x+a}-1=0$ គេបាន $\sqrt{2+a}-1=0 \Rightarrow a=-1$ ។

ចំពោះ $a=-1$ គេបាន

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$$

ឃ. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$

ដើម្បីឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $x=-1$ ជាឫសសមីការ

$\sqrt{x^2+ax}-1=0$ គេបាន $\sqrt{1-a}-1=0\Rightarrow a=0$ ។

ចំពោះ $a=0$ គេបាន

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{|x|-1}{(|x|-1)(|x|+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{2}$$

5-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$

ង. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

ច. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3.\dfrac{\sin 3x}{3x}}{25.\left(\dfrac{\sin 5x}{x}\right)^2}=\frac{3.1}{25.1^2}=\frac{3}{25}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}=\dfrac{3}{25}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\cos^3 x\tan^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^3 x)\tan^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1+\cos x+\cos^2 x)\tan^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{(1+\cos x+\cos^2 x)\tan^3 x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{(\dfrac{x}{2})^2}\times\frac{x^3}{\tan^2 x}\times\frac{1}{x(1+\cos x+\cos^2 x)}=\pm\infty$$

គ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ ។

ឃ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

តាង $t=\dfrac{\pi}{2}-x\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-t$

កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{2}$ នោះ $t\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{t^2}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{(\frac{t}{2})^2}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\frac{1}{2}$ ។

ង. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}$

តាង $t=\frac{1}{x}$ កាលណា $x\to\pm\infty$ នោះ $t\to0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$ ។

ច. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

តាង $t=\frac{1}{x}$ កាលណា $x\to+\infty$ នោះ $t\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{(\frac{t}{2})^2}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$ ។

6-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2+xe^x)$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^x$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x}{2e^x+1}$

ង. $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

ច. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\ln(x^2+1)$

ឆ. $\lim\limits_{x\to-4}x\ln\left(4-3x-x^2\right)$

ជ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\{x[\ln(x+1)-\ln x]\}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2+xe^x)$

គេមាន $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+xe^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)+\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^x)=+\infty$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$)

ហើយ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+xe^x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)+\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)=+\infty$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$)

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2+xe^x)=+\infty$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^{x}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^{x}=-\infty$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}+2\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$)

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}=0$ ។

ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-x}{2e^{x}+1}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}(1-\frac{x}{e^{x}})}{e^{x}(2+\frac{1}{e^{x}})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-xe^{-x}}{2+e^{-x}}=\frac{1}{2}$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$)

ង. $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\ln x-\ln(x+1)\right]$

$=\lim\limits_{x\to0}\ln x-\lim\limits_{x\to0}\ln(x+1)=-\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=-\infty$ ។

ច. $\lim_{x\to\pm\infty} x\ln(x^2+1)$

$= \lim_{x\to\pm\infty}(x)\times\lim_{x\to\pm\infty}\ln(x^2+1) = \pm\infty$

ព្រោះ $\lim_{x\to\pm\infty}(x) = \pm\infty$ និង $\lim_{x\to\pm\infty}\ln(x^2+1) = +\infty$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\pm\infty} x\ln(x^2+1) = \pm\infty$ ។

ឆ. $\lim_{x\to-4} x\ln\left(4-3x-x^2\right)$

តាង $x = t-4$ កាលណា $x\to -4$ នោះ $t\to 0$

$= \lim_{t\to 0}(t-4)\ln\left[4-3(t-4)-(t-4)^2\right]$

$= \lim_{t\to 0}(t-4)\ln(5t-t^2)$

$= \lim_{t\to 0}(t-4)[\ \ln t+\ln(5-t)] = +\infty$

(ព្រោះ $\lim_{t\to 0}(t-4) = -4$; $\lim_{t\to 0}[\ln t+\ln(5-t)] = -\infty$)

ដូចនេះ $\lim_{x\to-4} x\ln\left(4-3x-x^2\right) = +\infty$ ។

ជ. $\lim_{x\to+\infty}\{x[\ln(x+1)-\ln x]\}$

$= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$

(ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$)

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\{x[\ln(x+1)-\ln x]\} = 1$ ។

7-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan x\cos x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos x}{x}+\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{1-\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$)

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin^2 x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{2\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\dfrac{3}{2}$ ។

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin^2 x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}+2\lim_{x\to 0}\left[(\cos x)\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}=\dfrac{5}{2}$ ។

៨-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2x-3\sin x+1}{4\sin^2x-1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{\sin^2x}$

គ. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}$ $(a\neq0\ ,\ b\neq0\ ,\ a\neq b)$

ឃ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\sqrt{1+x\sin x-\cos x}}$

ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1)$

ច. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2x-3\sin x+1}{4\sin^2x-1}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin x-1)(2\sin x-1)}{(2\sin x-1)(2\sin x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x-1}{2\sin x+1}=\frac{\frac{1}{2}-1}{1+1}=-\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}=-\dfrac{1}{4}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1^2}=\frac{3}{2}$$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

និង $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{3}{2}$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x(a-b)}{\sin ax-\sin bx}$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$)

គេមាន $\sin ax-\sin bx=2\sin\dfrac{(a-b)x}{2}\cos\dfrac{(a+b)x}{2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(a-b)}{2\sin\frac{(a-b)x}{2}\cos\frac{(a+b)x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a-b)x}{2\sin\frac{(a-b)x}{2}}\times\frac{1}{\cos\frac{(a+b)x}{2}}=1$$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}{1+x\sin x-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}{x\sin x+\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}{x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}\times\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)=\frac{1}{2}\times 2=1$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}=1$ ។

ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x-x^2-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}}-1\right)$$

$$=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}-1)=\frac{1}{2}$ ។

ច. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x+2-2}$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})$$

$$=3\times 1\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$ ។

9-កំនត់អនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌលីមីតទាំងពីរខាងក្រោម

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=1\ \ (i)\quad \text{និង}\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1\ \ (ii)$$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់អនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ

តាង $f(x)=ax^2+bx+c$

គេមាន $\lim_{x\to +\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-1}=1$

សមមូល $\lim_{x\to +\infty}\frac{ax^2}{x^2}=1\Rightarrow a=1$

អនុគមន៍អាចសរសេរ $f(x)=x^2+bx+c$ ។

គេមាន $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$

គេទាញ $\lim_{x\to 1}f(x)=0$

$$\lim_{x\to 1}(x^2+bx+c)=0$$

$$1+b+c=0\Rightarrow c=-1-b$$

អនុគមន៍អាចសរសេរ $f(x)=x^2+bx-1-b$

$$f(x)=(x-1)(x+1)+b(x-1)$$

$$=(x-1)(x+1+b)$$

ហើយ $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+b)}{x^2-1}=-1$

ឬ $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+b)}{(x-1)(x+1)}=-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1+b}{x+1}=-1$$

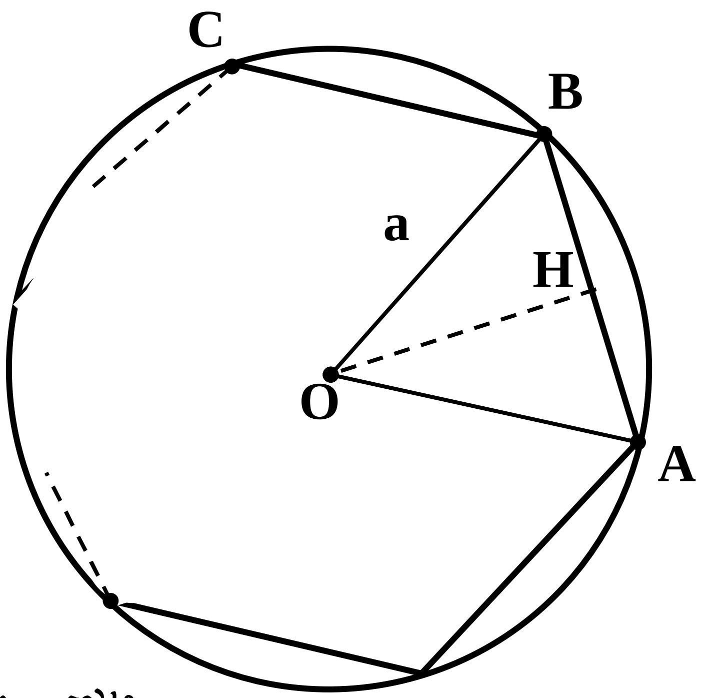
$$\frac{2+b}{2}=-1\Rightarrow b=-4$$

ដូចនេះ $f(x)=x^2-4x+3$ ។

10-គេមានពហុកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន **n** ជ្រុងនិងកាំស្មើ **a** ។

តាង S_n ជាផ្ទៃក្រឡានៃពហុកោណនេះ ។ គណនា S_n រួច $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ



គណនា S_n រួច $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

-មុំផ្ចិតរបស់ពហុកោណ

$$\varphi_n = \frac{2\pi}{n}$$

-ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ**OAB**

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}a^2 \sin\frac{2\pi}{n}$$

-ក្រឡាផ្ទៃរបស់ពហុកោណនិយ័ត **n** ជ្រុង

$$S_n = n\times S_{OAB} = \frac{1}{2}a^2 n \sin\frac{2\pi}{n}$$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}a^2 n\sin\frac{2\pi}{n} = \pi a^2 \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi a^2$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \pi a^2$ ។

មេរៀនទី២

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១_ភាពជាប់ត្រង់មួយចំនុច

✍ ***និយមន័យ*** :

អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x = c$ កាលណា f បំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោម

1- f កំណត់ចំពោះ $x = c$

2- f មានលីមីតកាលណា $x \to c$

3- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

២_លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$ នោះគេបាន

១. $f(x) \pm g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$

២. $f(x).g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$

៣. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$ ដែល $g(c) \neq 0$ ។

៣_ភាពជាប់លើចន្លោះ

✍ ***និយមន័យ*** :

-អនុគមន៍ $\mathbf{f}$ ជាប់លើចន្លោះបើក $\mathbf{(a,b)}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{f}$ ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $\mathbf{x}$ នៃចន្លោះបើនោះ ។

-អនុគមន៍ $\mathbf{f}$ ជាប់លើចន្លោះបិទ $\mathbf{[a,b]}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{f}$ ជាប់ លើចន្លោះបើក $\mathbf{(a,b)}$ និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

(អនុគមន៍ $\mathbf{f}$ ជាប់ត្រង់ $\mathbf{a}$ ខាងស្តាំ ជាប់ត្រង់ $\mathbf{b}$ ខាងឆ្វេង)

៤_ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើអនុគមន៍ $\mathbf{g}$ ជាប់ត្រង់ $\mathbf{x = c}$ និងអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ ជាប់ត្រង់ $\mathbf{g(c)}$ នោះអនុគមន៍បណ្តាក់ $(f \circ g)(x) = f\left[\, g(x) \,\right]$ ជាប់ត្រង់ $\mathbf{c}$ ។

៥_អនុវត្តន៍ អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

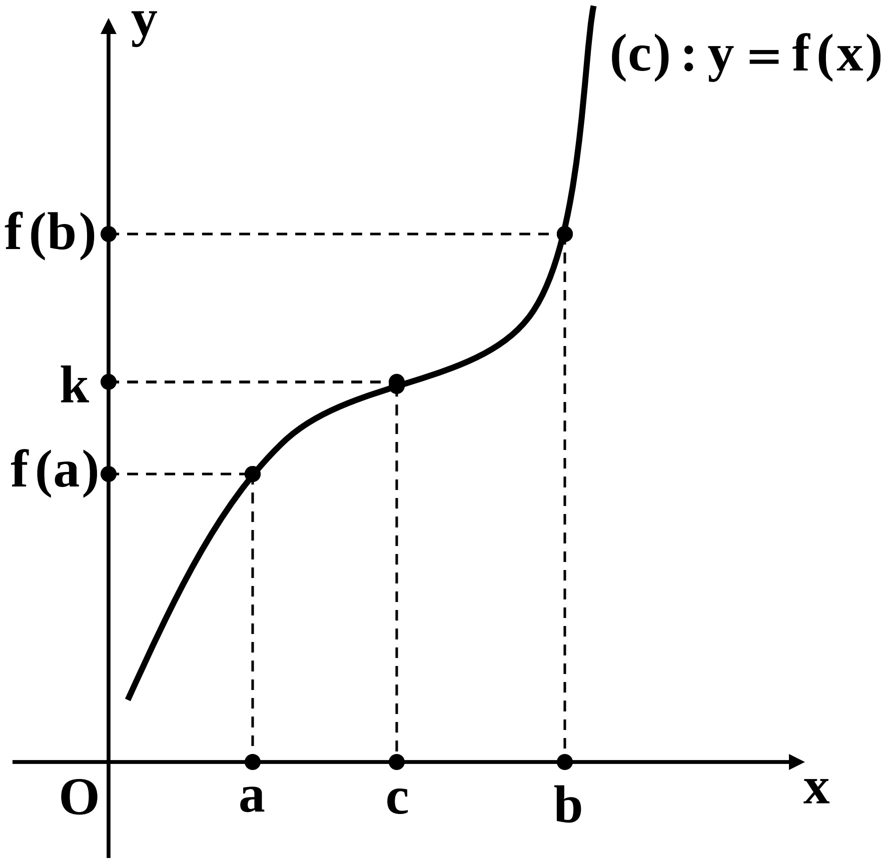
បើ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍មិនកំនត់ត្រង់ $\mathbf{x = a}$ និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ $\mathbf{f}$ តាមភាពជាប់ត្រង់ $\mathbf{x = a}$ កំនត់ដោយ

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{បើ } x \neq a \\ L & \text{បើ } x = a \end{cases}$$

៦_ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

ទ្រឹស្តីបទ :

បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ និង k ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a, b]$ ដែល $f(c) = k$ ។



លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-បញ្ជាក់ថា តើអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់តម្លៃ x ដែលឱ្យឬទេ ?

ក. $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$, $x = 2$

ខ. $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$, $x = 1$

គ. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, $x = 4$

ឃ. $f(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2}$, $x = -2$

ង. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{បើ } x \le 2 \\ 2 & \text{បើ } x > 2 \end{cases}$, $x = 2$

ច. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{បើ } x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{បើ } x \ge -1 \end{cases}$, $x = -1$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ក. $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$, $x = 2$

មាន $f(2) = 20 - 12 + 1 = 9$ កំនត់

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(5x^2 - 6x + 1) = 20 - 12 + 1 = 9$

ដោយ $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 9$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 2$ ។

ខ. $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$, $x = 1$

មាន $f(1) = \dfrac{3}{2}$ កំនត់

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{3}{2}$

ដោយ $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \dfrac{3}{2}$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ។

គ. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$, $x = 4$

មាន $f(4) = \dfrac{\sqrt{4} - 2}{4 - 4} = \dfrac{0}{0}$ មិនកំនត់

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x = 4$ ។

ឃ. $f(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2}$, $x = -2$

មាន $f(-2) = \dfrac{|-2+2|}{-2+2} = \dfrac{0}{0}$ មិនកំនត់

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x = -2$ ។

ង. $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{បើ } x\le 2 \\ 2 & \text{បើ } x>2 \end{cases}$, $x=2$

មាន $f(2)=2+1=3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=3$ និង $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2)=2$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ នោះ $f(x)$ គ្មានលីមីត $x\to 2$ ។

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x=2$ ។

ច. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{បើ } x<-1 \\ x^2-3 & \text{បើ } x\ge -1 \end{cases}$, $x=-1$

មាន $f(-1)=1-3=-2$ កំនត់

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{x^2-1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x-1)=-2$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2-3)=-2$

ដោយ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-2$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=-1$ ។

2-រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ដាច់ ។

ក. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-6}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x-5}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x-2}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-3x-18}$

ង. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+1 & \text{បើ } x\le 2\\ 3-x & \text{បើ } x>2\end{cases}$

ច. $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{បើ } x\le -1\\ 2 & \text{បើ } -1<x<1\\ -x+3 & \text{បើ } x>1\end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ដាច់ ។

ក. $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x-6}$

អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ដាច់លុះត្រាតែ $2x-6=0\Rightarrow x=3$ ។

ខ. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x-5}$

អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ដាច់លុះត្រាតែ $x^2+4x-5=0$

គេទាញឫស $x_1=1\ ;\ x_2=-5$ ។

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x-2}$

អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ដាច់លុះត្រាតែ $x^2-x-2=0$

គេទាញឫស $x_1=-1\ ;\ x_2=2$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-3x-18}$

អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ដាច់លុះត្រាតែ $x^2-3x-18=0$

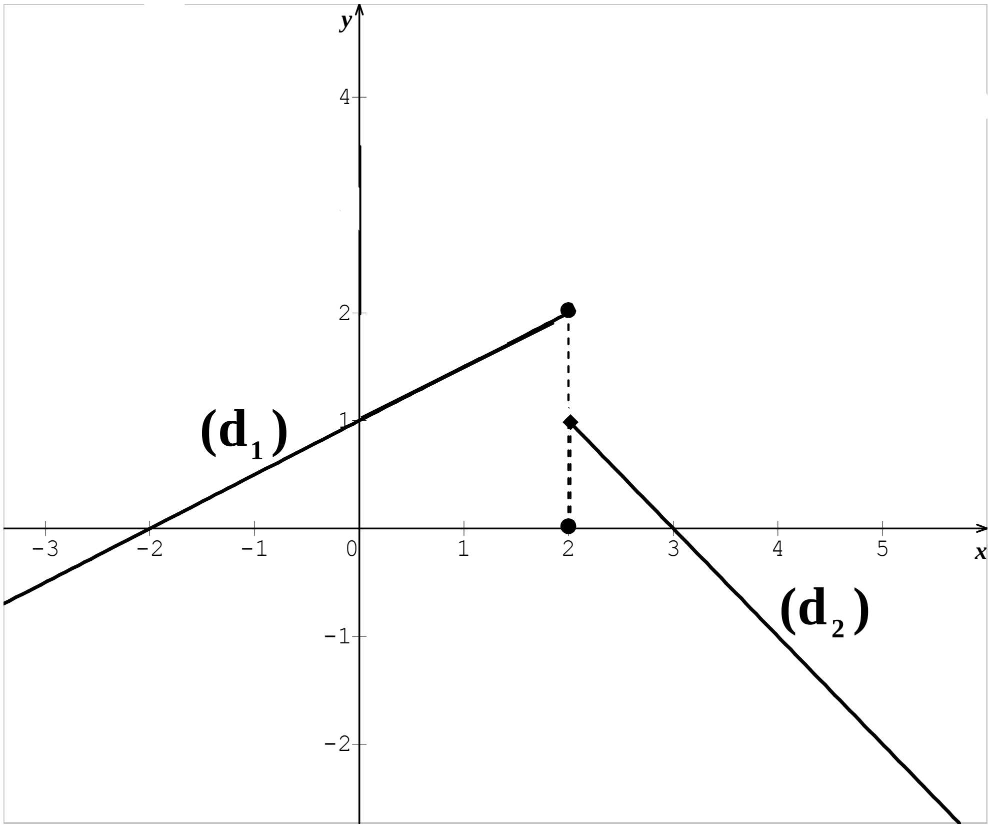
$\Delta=9+72=9^2$

គេទាញឫស $x_1=\dfrac{3+9}{2}=6\ ;\ x_2=\dfrac{3-9}{2}=-3$ ។

ង. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+1 & \text{បើ}\quad x\le 2\\ 3-x & \text{បើ}\quad x>2\end{cases}$

តាង $(d_1): y=\dfrac{1}{2}x+1\ ,\ x\le 2$

និង $(d_2): y=3-x\ ,\ x>2$



តាមក្រាហ្វិកយើងឃើញថាគ្រប់ $x \in IR$, f ជាអនុគមន៍ដាច់ ។

ច. $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{បើ } x \leq -1 \\ 2 & \text{បើ } -1 < x < 1 \\ -x+3 & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$

ដោះស្រាយដូចលំហាត់ទី (ង)

គេបានគ្រប់ $x \in IR$ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ដាច់ ។

3-សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោមលើចន្លោះដែលឱ្យ ។

ក. $f(x)=\frac{x-3}{4+x}$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[-4,1]$

ខ. $f(x)=x(1+\frac{1}{x})$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[0,1]$

គ. $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & \text{បើ } x\le 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x>3 \end{cases}$

លើចន្លោះ $(0,3)$ និង $[0\ ,\ 3\ ]$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ក. $f(x)=\frac{x-3}{4+x}$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[-4,1]$

-លើចន្លោះ $(0,1)$ យើងឃើញថាអនុគមន៍ f កំនត់បានជានិច្ច

ដូចនេះអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(\ 0\ ,\ 1\ )$ ។

-លើចន្លោះ $[-4\ ,\ 1\ ]$ អនុគមន៍ f មិនអាចកំនត់បានជានិច្ចទេ ព្រោះ

បើ $x=-4$ នោះ $f(-4)=\frac{-4-3}{4-4}=-\frac{7}{0}$ មិនកំនត់ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x=-4$ និងដាច់ក្នុងចន្លោះ $[-4\ ,\ 1\ ]$ ។

ខ. $f(x)=x(1+\frac{1}{x})$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[0,1]$

-លើចន្លោះ $(0\,,1)$ យើងឃើញថា $f(x)=x(1+\frac{1}{x})=x+1$ កំនត់

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(0\,,1)$ ។

-លើចន្លោះ $[\,0\,,1\,]$ យើងឃើញថា f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x=0$

ព្រោះអនុគមន៍ f មិនកំនត់ត្រង់ $x=0$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ដាច់លើចន្លោះ $[\,0\,,1\,]$ ។

គ. $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & \text{បើ } x\le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x>3 \end{cases}$

លើចន្លោះ $(0,3)$ និង $[0\,,3\,]$

បើ $x=3$ នោះ $f(3)=3(3-1)=6$ កំនត់

មាន $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x(x-1)=6$

និង $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3+}(x+3)=6$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=6=f(3)$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ IR ។ ហេតុនេះវាជាអនុគមន៍ជាប់

លើចន្លោះ $(0,3)$ និង $[0\,,3\,]$ ។

4-រកតម្លៃ $\mathbf{A}$ ដែលធ្វើឱ្យ $\mathbf{f(x)}$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ $\mathbf{x}$

ក. $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{Ax-3} & \text{បើ } \mathbf{x<2} \\ \mathbf{3-x+2x^2} & \text{បើ } \mathbf{x\geq 2} \end{cases}$

ខ. $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{1-3x} & \text{បើ } \mathbf{x<4} \\ \mathbf{Ax^2+2x-3} & \text{បើ } \mathbf{x\geq 4} \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ $\mathbf{A}$ ដែលធ្វើឱ្យ $\mathbf{f(x)}$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ $\mathbf{x}$

ក. $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{Ax-3} & \text{បើ } \mathbf{x<2} \\ \mathbf{3-x+2x^2} & \text{បើ } \mathbf{x\geq 2} \end{cases}$

ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{f(x)}$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ $\mathbf{x}$ លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 2^-}(Ax-3) = \lim\limits_{x\to 2^+}(3-x+2x^2)$

$$2A-3 = 3-2+8$$

$$2A-3 = 9 \Rightarrow A = 6$$

ដូចនេះ $\mathbf{A=6}$ ។

ខ. $f(x)=\begin{cases} 1-3x & \text{បើ } x<4 \\ Ax^2+2x-3 & \text{បើ } x\geq 4 \end{cases}$

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=f(4)$$

គេបាន $\lim_{x\to 4^-}(1-3x)=\lim_{x\to 4^+}(Ax^2+2x-3)$

$$1-12=16A+8-3$$

$$-11=16A+5\Rightarrow A=-1$$

ដូចនេះ $A=-1$ ។

5-រកតម្លៃ A និង B ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2+5x-9 & \text{បើ } x<1 \\ B & \text{បើ } x=1 \\ (3-x)(A-2x) & \text{បើ } x>1 \end{cases}$$

ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ A និង B

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1)$$

គេបាន $\lim_{x\to1^-}(Ax^2+5x-9)=\lim_{x\to1^+}(3-x)(A-2x)=B$

$$A+5-9=2(A-2)=B$$

$$A-4=2A-4=B$$

គេទាញ $A=0$, $B=-4$ ។

6-ក្នុងបណ្តាអនុគមន៍ខាងក្រោម តើ **f** អាចមានបន្លាយតាមភាពជាប់ត្រង់ **a** ឬទេ ?

ក. $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}}$, $\mathbf{a=3}$ ។

ខ. $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}}$, $\mathbf{a=2}$ ។

គ. $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}}$, $\mathbf{a=1}$ ។

ឃ. $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}}$, $\mathbf{a=4}$

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

ក. $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}}$, $\mathbf{a=3}$ ។

គេមាន $\mathbf{\lim\limits_{x\to3}f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6}$

ដូចនេះគេអាចបន្លាយ **f** តាមភាពជាប់ត្រង់ $\mathbf{a=3}$ ។

បើ **g** ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នោះអនុគមន៍ **g** កំនត់ដោយ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x\neq 3\\ 6 & \text{បើ } x=3\end{cases}$$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$, $a=2$ ។

គេមាន $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+5)=7$

ដូចនេះគេអាចបន្លាយ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $a=2$ ។

បើ g ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នោះអនុគមន៍ g កំនត់ដោយ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2} & \text{បើ } x\neq 2\\ 7 & \text{បើ } x=2\end{cases}$$

គ. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, $a=1$ ។

គេមាន $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$

ដូចនេះគេអាចបន្លាយ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $a=1$ ។

បើ g ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នោះអនុគមន៍ g កំនត់ដោយ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{បើ } x\neq 1\\ 3 & \text{បើ } x=1\end{cases}$$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}$, $a=4$

គេមាន $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)(x-4)}{(x+1)(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x+1}=\frac{8}{5}$$

ដូចនេះគេអាចបន្លាយ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $a=4$ ។

បើ g ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នោះអនុគមន៍ g កំនត់ដោយ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4} & \text{បើ } x\neq 4\\[2ex] \dfrac{8}{5} & \text{បើ } x=4\end{cases}$$

7-ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល បង្ហាញថា អនុគមន៍ខាងក្រោមមានចំនួន c ក្នុងចន្លោះដែលឱ្យ ។

ក. $f(x) = x^2 + x - 1$, $[0,5]$, $f(c) = 11$ ។

ខ. $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $[0 , 3]$, $f(c) = 0$ ។

គ. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$, $[0,3]$, $f(c) = 4$ ។

ឃ. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$, $[\dfrac{5}{2}, 4]$, $f(c) = 6$

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

ក. $f(x) = x^2 + x - 1$, $[0,5]$, $f(c) = 11$ ។

គេមាន $f(0) = -1$ និង $f(5) = 25 + 5 - 1 = 29$

ដោយ $f(0) = -1 < f(c) = 11 < f(5) = 29$

ដូចនេះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៃ$[0,5]$ ដែល $f(c) = 11$ ។

ខ. $f(x)=x^2-6x+8$, $[0\ ,\ 3\ ]$, $f(c)=0$ ។

គេមាន $f(0)=8$ និង $f(3)=9-18+8=-1$

ដោយ $f(3)=-1<f(c)=0<f(0)=8$

ដូចនេះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៃ$[0,3]$

ដែល $f(c)=0$ ។

គ. $f(x)=x^3-x^2+x-2$, $[0,3\ ]$, $f(c)=4$ ។

គេមាន $f(0)=-2$ និង $f(3)=27-9+3-2=19$

ដោយ $f(0)=-2<f(c)=4<f(3)=19$

ដូចនេះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៃ$[0,3]$

ដែល $f(c)=4$ ។

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$, $[\ \dfrac{5}{2}\ ,\ 4\ ]$, $f(c)=6$

គេមាន $f(\frac{5}{2})=\dfrac{\frac{25}{4}+\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}-1}=\dfrac{\frac{35}{4}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{35}{6}$ និង $f(4)=\dfrac{16+4}{4-1}=\dfrac{20}{3}$

ដោយ $f(\dfrac{5}{2})=\dfrac{35}{6}<f(c)=6<f(4)=\dfrac{20}{3}$ ដូចនេះតាមទ្រឹស្តីបទ

តម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៃ$[\dfrac{5}{2},4]$ ដែល $f(c)=6$ ។

8-គេឱ្យអនុគមន៍ និង ចន្លោះបិទដូចខាងក្រោម ។ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល រកតម្លៃ c បើគេស្គាល់តម្លៃ k ។

ក. $f(x)=2+x-x^2$, $[0,3]$, $k=1$ ។

ខ. $f(x)=\sqrt{25-x^2}$, $[-45 , 3]$, $k=3$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ c

ក. $f(x)=2+x-x^2$, $[0,3]$, $k=1$ ។

ដោះស្រាយសមីការ $f(c)=k$ ដែល $c\in[0 , 3]$

គេបាន $2+c-c^2=1$ ឬ $c^2-c-1=0$, $\Delta=1+4=5$

គេទាញឫស $c_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$

ដូចនេះ $c=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ។

ខ. $f(x)=\sqrt{25-x^2}$, $[-45 , 3]$, $k=3$ ។

ចម្លើយ $c=-4$ (សិស្សដោះស្រាយខ្លួនឯង) ។

9-ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x\tan x=\cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មាន

ឫសពិតមួយចន្លោះ $[0,\frac{\pi}{4}]$ ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $(x^n-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$

យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0,1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x\tan x=\cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មាន

ឫសពិតមួយចន្លោះ $[0,\frac{\pi}{4}]$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x)=x\tan x-\cos x$

គេមាន $f(0)=-1$ និង $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$

ដោយ $f(0)\times f(\frac{\pi}{4})<-(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2})<0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃ

កណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួនពិត c មួយនៃ $[0,\frac{\pi}{4}]$

ដែល $f(c)=0$ ។ ដូចនេះសមីការ $x\tan x=\cos x$ យ៉ាងហោចណាស់

មានឫសពិតមួយចន្លោះ $[0,\frac{\pi}{4}]$ ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $(x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0, 1)$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x) = (x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1$

គេមាន $f(0) = -2$ និង $f(1) = \sqrt{2}\sin 1 - 1 > \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} - 1 = 0$

ដោយ $f(0)\times f(1) < 0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃ

កណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួនពិត c មួយនៃ $[0, 1]$

ដែល $f(c) = 0$ ។

ដូចនេះសមីការ $(x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $[0, \frac{\pi}{4}]$ ។

លំហាត់ជំពូកទី១ និង ដំណោះស្រាយ

1-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3})$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3})$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x\sin x}{x-\sin^2 x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}|x|\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)=+\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)=2-1=1$ ។

ខ. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+2-x^2+x-3}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2-\frac{1}{x})}{|x|(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+3})=1$

គ. $\lim_{x\to0}\frac{x^2-x\sin x}{x-\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(x-\sin x)}{x(1-\frac{\sin^2 x}{x})}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{1-\frac{\sin x}{x}.\sin x}=\frac{0-0}{1-1\times0}=0$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\frac{x^2-x\sin x}{x-\sin^2 x}=0$ ។

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\sin x)\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\sin x)\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{|\sin x|}-\frac{\sin x}{|\sin x|}\right)\sqrt{1+\cos x}$$

-បើ $x\to 0^-$ នោះ $|\sin x|=-\sin x$

គេបាន

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2x}{-\sin x}+1\right)\sqrt{1+\cos x}=-\sqrt{2}$$ -

បើ $x\to 0^+$ នោះ $|\sin x|=\sin x$

គេបាន

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x}{\sin x}-1\right)\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}$$

មេរៀនទី១

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១_ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ x_0

✍ និយមន័យ :

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាលីមីត (បើមាន) នៃផលធៀប កំនើន $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ កាលណា Δx ខិតទៅជិត 0 ។

គេកំនត់សរសេរ

$$y'_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

២_ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះគេបាន

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = y' \times u'$$

ឬ $\frac{d}{dx} f[u(x)] = f'(u) \times u'(x)$

៣_ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

1. $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

2. $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

3. $y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

4. $y = \cot x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

5. $y = \sin u \Rightarrow y' = u'\cos u$

6. $y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u$

7. $y = \tan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

8. $y = \cot u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

៤_ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេបន្តបន្ទាប់ដល់លំដាប់ n

នោះ $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ ហៅថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$

ហើយ $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$ ។

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x)=(2x+1)^4$

ខ. $f(x)=\sqrt{5x^6-12}$

គ. $f(x)=(x^5-4x^2+8)^8$

ឃ. $f(x)=(3x^4-7x^2+9)^5$

ង. $f(x)=\dfrac{1}{5x^2-6x+2}$

ច. $f(x)=\dfrac{2}{(6x^2+5x+1)^2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x)=(2x+1)^4$

តាមរូបមន្ត $(u^n)'=n.u'.u^{n-1}$

យើងបាន $f'(x)=4(2x+1)'(2x+1)^3$

$$=8(2x+1)^3$$

ដូចនេះ $f'(x)=8(2x+1)^3$

ខ. $f(x)=\sqrt{5x^6-12}$

តាមរូបមន្ត $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

យើងបាន $f'(x)=\dfrac{(5x^6-12)'}{2\sqrt{5x^6-12}}$

$=\dfrac{30x^5}{2\sqrt{5x^6-12}}$

$=\dfrac{15x^5}{\sqrt{5x^6-12}}$

គ. $f(x)=(x^5-4x^2+8)^8$

យើងបាន $f'(x)=8(x^5-4x^2+8)'(x^5-4x^2+8)^7$

$=8(5x^4-8x)(x^5-4x^2+8)^7$

$=8x(5x^3-8)(x^5-4x^2+8)^7$

ឃ. $f(x)=(3x^4-7x^2+9)^5$

យើងបាន $f'(x)=5(3x^4-7x^2+9)'(3x^4-7x^2+9)^4$

$=5(12x^3-14x)(3x^4-7x^2+9)^4$

$=10x(6x^2-7)(3x^4-7x^2+9)^4$

ង. $f(x)=\dfrac{1}{5x^2-6x+2}$

យើងបាន $f'(x)=-\dfrac{(5x^2-6x+2)'}{(5x^2-6x+2)^2}$

$=-\dfrac{10x-6}{(5x^2-6x+2)^2}$

ច. $f(x)=\dfrac{2}{(6x^2+5x+1)^2}$

គេអាចសរសេរ $f(x)=2(6x^2+5x+1)^{-2}$

គេបាន $f'(x)=-4(6x^2+5x+1)'(6x^2+5x+1)^{-3}$

$$=\frac{-4(12x+5)}{(6x^2+5x+1)^3}$$

2-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ ខ. $y=\dfrac{1}{\sqrt{5x^3+2}}$

គ. $y=\sqrt{\dfrac{3x+1}{2x-1}}$ ឃ. $y=\left(\dfrac{x+2}{2-x}\right)^3$

ង. $y=(x+2)^3(2x-1)^5$ ច. $y=2(3x+1)^4(5x-3)^2$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$

គេអាចសរសេរ $y=(4x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

គេបាន $y'=-\dfrac{1}{2}(4x^2+1)'(4x^2+1)^{-\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{4x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$

ខ. $y = \frac{1}{\sqrt{5x^3+2}}$

គេអាចសរសេរ $y = (5x^3+2)^{-\frac{1}{2}}$

គេបាន $y' = -\frac{1}{2}(5x^3+2)'(5x^3+2)^{-\frac{3}{2}}$

$$= -\frac{15x^2}{2\sqrt{(5x^3+2)^3}}$$

គ. $y = \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}$

គេបាន $y' = (\frac{3x+1}{2x-1})' . \frac{2}{\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}}$

$$= \frac{3(2x-1)-2(3x+1)}{(2x-1)^2} . \frac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3x+1}}$$

$$= -\frac{10}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)(3x+1)}}$$

ឃ. $y = \left(\frac{x+2}{2-x}\right)^3$

គេបាន $y' = 3(\frac{x+2}{2-x})'\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^3$

$$= \frac{3(2-x)+3(x+2)}{(2-x)^2} . \left(\frac{x+2}{2-x}\right)^3 = \frac{12(x+2)^3}{(2-x)^5}$$

ង. $y=(x+2)^3(2x-1)^5$

គេបាន $y'=3(x+2)^2(2x-1)^5+10(2x-1)^4(x+2)^3$

$=(x+2)^2(2x-1)^4(6x-3+10x+20)$

$=(16x+17)(x+2)^2(2x-1)^4$

ច. $y=2(3x+1)^4(5x-3)^2$

យើងបាន $y'=24(3x+1)^3(5x-3)^2+30(5x-3)(3x+1)^4$

$=2(5x-3)(3x+1)^3(60x-36+45x+15)$

$=2(5x-3)(105x-21)(3x+1)^3$

3-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ តាមវិធីពីរយ៉ាងគឺ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃផលគុណ និងដេរីវេនៃស្វ័យគុណ រួចបង្ហាញថាវិធីទាំងពីរមានលទ្ធផលដូចគ្នា

ក. $f(x)=(3x+5)^2$ ខ. $f(x)=(7-4x)^2$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x)=(3x+5)^2$

គេអាចសរសេរ $f(x)=(3x+5)(3x+5)$

តាមរូបមន្ត $(uv)' = u'v + v'u$

គេបាន $f'(x) = (3x+5)'(3x+5) + (3x+5)'(3x+5)$
$= 3(3x+5) + 3(3x+5)$
$= 9x + 15 + 9x + 15$
$= 18x + 30 = 6(3x+5)$

ម្យ៉ាងទៀតដោយប្រើរូបមន្ត $(u^n)' = nu'.u^{n-1}$

គេបាន $f'(x) = 2(3x+5)'(3x+5)$

$= 6(3x+5)$

ខ. $f(x) = (7-4x)^2$

គេអាចសរសេរ $f(x) = (7-4x)(7-4x)$

គេបាន $f'(x) = (7-4x)'(7-4x) + (7-4x)'(7-4x)$
$= -4(7-4x) - 4(7-4x)$
$= 8(7-4x)$

ម្យ៉ាងទៀតដោយប្រើរូបមន្ត $(u^n)' = nu'.u^{n-1}$

គេបាន $f'(x) = 2(7-4x)'(7-4x)$

$= -8(7-4x)$ ។

4-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ ខ. $y = 5x^3 - 2\sin x \cos x$

គ. $y = (2x - \sin x)^3$ ឃ. $y = \sin x - x^2 \cos x$

ង. $y = x^2 - \tan^2 x$ ច. $y = 3x \cot^2 x$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

ដោយ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

គេបាន $y = 1 \Rightarrow y' = 0$

ខ. $y = 5x^3 - 2\sin x \cos x$

គេមាន $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

គេបាន $y = 5x^3 - \sin 2x$

$$y' = 15x - 2\cos 2x$$

គ. $y = (2x - \sin x)^3$

$$y' = 3(2x - \sin x)'(2x - \sin x)^2$$

$$= 3(2 - \cos x)(2x - \sin x)^2$$

ឃ. $y = \sin x - x^2 \cos x$

$y' = (\sin x)' - (x^2)'\cos x - x^2(\cos x)'$

$= \cos x - 2x\cos x + x^2 \sin x$

$= (1-2x)\cos x + x^2 \sin x$

ង. $y = x^2 - \tan^2 x$

$y' = 2x - 2(\tan x)'\tan x$

$= 2x - 2(1+\tan^2 x)\tan x$

$= 2(x - \tan x - \tan^3 x)$

ច. $y = 3x\cot^2 x$

$y' = (3x)'\cot^2 x + 3x(\cot^2 x)'$

$= 3\cot^2 x - 6x(1+\cot^2 x)\cot x$

$= 3\cot x(\cot x - 2x - 2x\cot^2 x)$

5-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \sin^2 x^2$

ខ. $y = x^3 - \cos^2 5x$

គ. $y = \dfrac{\tan 2x}{1 - \cos x}$

ឃ. $y = x^3 - \sin(x^2 - 5x)$

ង. $y = \sin 3x + \cos(x^3 - 1)$

ច. $y = \tan(2x^3 - 5x)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \sin^2 x^2$

គេបាន $y' = 2(x^2)' \cos x^2 \sin x^2$

$= 4x \cos x^2 \sin x^2$

$= 2x \sin 2x^2$

ខ. $y = x^3 - \cos^2 5x$

គេបាន $y' = 3x^2 + 10 \sin 5x \cos 5x$

$= 3x^2 + 5 \sin 10x$

គ. $y = \dfrac{\tan 2x}{1 - \cos x}$

$$y' = \frac{2(1 + \tan^2 2x)(1 - \cos x) - \sin x \tan 2x}{(1 - \cos x)}$$

ឃ. $y = x^3 - \sin(x^2 - 5x)$

$$y' = 3x^2 - (x^2 - 5x)'\cos(x^2 - 5x)$$

$$= 3x^2 - (2x - 5)\cos(x^2 - 5x)$$

ង. $y = \sin 3x + \cos(x^3 - 1)$

$$y' = 3\cos 3x - 3x^2 \sin(x^3 - 1)$$

$$= 3(\cos 3x - x^2 \sin(x^3 - 1))$$

ច. $y = \tan(2x^3 - 5x)$

$$y' = \frac{(2x^3 - 5x)'}{\cos^2(2x^3 - 5x)}$$

$$= \frac{6x^2 - 5}{\cos^2(2x^3 - 5x)}$$

6-គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = 3x^2 - \sin 2x$ ខ. $y = -3x^4 + 2x^2$

គ. $y = x + \frac{1}{x}$ ឃ. $y = \frac{x^2}{x+1}$

ង. $y = (x^2 + 4)^3$ ច. $y = (x^3 - 1)^4$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = 3x^2 - \sin 2x$

គេបាន $y' = 6x - 2\cos 2x$

$$y' = 3(3x - \cos 2x)$$

ហើយ $y'' = 3(3 + 2\sin 2x)$

ខ. $y = -3x^4 + 2x^2$

គេបាន $y' = 12x^3 + 4x$

ហើយ $y'' = 36x^2 + 4$

គ. $\mathbf{y = x + \frac{1}{x}}$

គេបាន $\mathbf{y' = 1 - \frac{1}{x^2}}$

ហើយ $\mathbf{y'' = \frac{2}{x^3}}$

ឃ. $\mathbf{y = \frac{x^2}{x+1}}$

គេអាចសរសេរ $\mathbf{y = \frac{(x^2-1)+1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}}$

គេបាន $\mathbf{y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}}$

ហើយ $\mathbf{y'' = \frac{2}{(x+1)^3}}$ ។

ង. $\mathbf{y = (x^2+4)^3}$

គេបាន $\mathbf{y' = 6x(x^2+4)^2}$

ហើយ $\mathbf{y'' = 6(x^2+4)^2 + 24x^2(x^2+4)}$

$\mathbf{= 6(x^2+4)(x^2+4+4x^2)}$

$\mathbf{= 6(x^2+4)(5x^2+4)}$

ច. $\mathbf{y = (x^3-1)^4}$

$\mathbf{y'' = 12x(11x^3-2)(x^3-1)^2}$ ។

7-រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x=\tan y$

ខ. $x=\sin y$

គ. $xy+\sin y=0$

ឃ. $x+\sin y=xy$

ង. $x+\tan(xy)=0$

ច. $y^2=\sin^4 2x+\cos^4 2x$

ដំណោះស្រាយ

រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x=\tan y$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$(x)'=(\tan y)'$$

$$1=y'\frac{1}{\cos^2 y}\Rightarrow y'=\cos^2 y$$

ខ. $x=\sin y$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$(x)'=(\sin y)'$$

$$1=y'\cos y\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos y}$$

គ. $xy + \sin y = 0$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$(xy + \sin y)' = 0$

$y + xy' + y'\cos y = 0$

$$y'(x + \cos y) = -y \Rightarrow y' = -\frac{y}{x + \cos y}$$

ឃ. $x + \sin y = xy$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$(x + \sin y)' = (xy)'$

$1 + y'\cos y = y + xy'$

$$y'(\cos y - x) = y - 1 \Rightarrow y' = \frac{y - 1}{\cos y - x}$$

ង. $x + \tan(xy) = 0$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$(x + \tan(xy))' = 0$

$$1 + \frac{(xy)'}{\cos^2(xy)} = 0$$

$$1 + \frac{y + xy'}{\cos^2(xy)} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y + \cos^2(xy)}{x}$$

ច. $y^2 = \sin^4 2x + \cos^4 2x$

គេមាន

$$\sin^4 2x + \cos^4 2x = (\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x\cos^2 2x$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

គេបាន $y^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$2yy' = -\sin 2x\cos 2x = -\frac{1}{2}\sin 4x$$

គេទាញ $y' = -\dfrac{\sin 4x}{4y}$ ។

8-រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $2x^2 + y^2 = 4$

ខ. $2x^3 + y^3 = 8$

គ. $x^2 + xy + y^2 = -1$

ឃ. $x^3 + 2xy - y^2 = 3$

ង. $x^3 + y^3 = 3xy$

ច. $x^3y + xy^3 = 3x^2$

ដំណោះស្រាយ

រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $2x^2 + y^2 = 4$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$4x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{y}$$

ហើយ $y'' = -\dfrac{2y - 2xy'}{y^2}$

$$= -\frac{2y - 2x(-\frac{2x}{y})}{y^2} = -\frac{2y^2 + 4x^2}{y^3}$$

ដូចនេះ $y' = -\dfrac{2x}{y}$ និង $y'' = -\dfrac{4x^2 + 2y^2}{y^3}$

ខ. $2x^3 + y^3 = 8$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$6x^2 + 3y'y^2 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x^2}{y^2}$$

ហើយ $y'' = -\frac{4xy^2 - 4x^2yy'}{y^4}$

$$= -\frac{4xy - 4x^2y'}{y^3}$$

$$= -\frac{4xy - 4x^2(-\frac{2x^2}{y^2})}{y^3}$$

$$= -\frac{4xy^3 + 8x^4}{y^5}$$

ដូចនេះ $y' = -\frac{2x^2}{y^2}$ និង $y'' = -\frac{4xy^3 + 8x^4}{y^5}$

គ. $x^2 + xy + y^2 = -1$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0$$

$$(x + 2y)y' = -(2x + y)$$

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

ហើយ $y''=-\dfrac{(2+y')(x+2y)-(1+2y')(2x+y)}{(x+2y)^2}$

$$=-\frac{2x+4y+xy'+2yy'-2x-y-4xy'-2yy'}{(x+2y)^2}$$

$$=-\frac{3y-3xy'}{(x+2y)^2}=-\frac{3y-3x(-\frac{2x+y}{x+2y})}{(x+2y)^2}$$

$$=-\frac{3xy+6y^2+6x^2+3xy}{(x+2y)^3}$$

$$=-\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3}$$

ដោយ $x^2+xy+y^2=-1$

ដូចនេះ $y''=\dfrac{6}{(x+2y)^3}$ ។

១-គណនា

ក. $f^{(4)}(x)$ បើ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

ខ. $f^{(6)}(x)$ បើ $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - \sin 2x$

គ. $f^{(8)}(x)$ បើ $f(x) = x^8 - 5x^2 + \cos x$

ឃ. $f^{(10)}(x)$ បើ $f(x) = \frac{120}{x^6}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f^{(4)}(x)$

មាន $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

គេបាន $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f''(x) = 6x - 6$

$f^{(3)}(x) = 6$

$f^{(4)}(x) = 0$

ខ. $f^{(6)}(x)$

មាន $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - \sin 2x$

គេបាន $f'(x) = x^6 - 2\cos 2x$

$f''(x) = 6x^5 + 4\sin 2x$

$f^{(3)}(x) = 30x^4 + 8\cos 2x$

$f^{(4)}(x) = 120x^3 - 16\sin 2x$

$f^{(5)}(x) = 360x^2 - 32\cos 2x$

$f^{(6)}(x) = 720x + 64\sin 2x$

គ. $f^{(8)}(x)$

មាន $f(x) = x^8 - 5x^2 + \cos x$

គេបាន $f'(x) = 8x^7 - 10x - \sin x$

$f''(x) = 8.7x^6 - 10 - \cos x$

$f^{(3)}(x) = 8.7.6x^5 + \sin x$

$f^{(4)}(x) = 8.7.6.5x^4 + \cos x$

$f^{(5)}(x) = 8.7.6.5.4x^3 - \sin x$

$f^{(6)}(x) = 8.7.6.5.4.3x^2 - \cos x$

$f^{(7)}(x) = 8.7.6.5.4.3.2x + \sin x$

$f^{(8)}(x) = 8! + \cos x$

ឃ. $f^{(10)}(x)$

គេមាន $f(x) = \dfrac{120}{x^6}$

គេបាន $f(x) = \dfrac{15!}{x^{16}}$ (សិស្សដោះស្រាយខ្លួនឯង)

មេរៀនទី២

អនុវត្តន៏នៃដេរីវេ

១_ល្បឿននៃចលនា

✍ **និយមន័យ :**

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $\mathbf{V(t) = S'(t) = \frac{dS}{dt}}$

ដែល **S(t)** ជាចម្ងាយនៅខណៈ **t** ។

២_សំទុះនៃចលនា

សំទុះនៃចលនាមួយនៅខណះ **t** គឺ $\mathbf{a(t) = \frac{dV(t)}{dt} = V'(t)}$

ដែល **V(t)** ជាល្បឿននៃចលនានៅខណៈ **t** ។

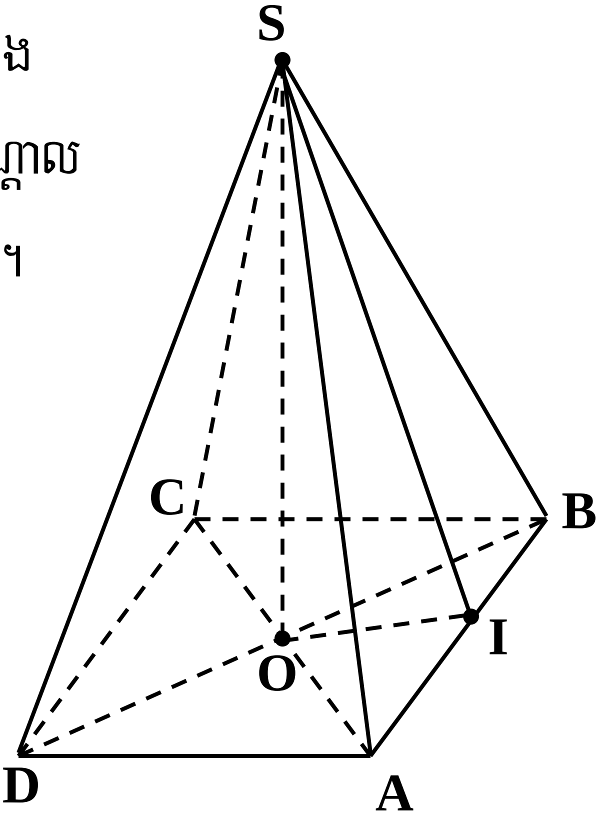
លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-ពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័ត **SABCD** មានផ្ទៃក្រលាខាង S_t ។
គណនាផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់ **SO** និងជ្រុងមួយនៃបាតដើម្បីឱ្យមាឌពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័តមានតម្លៃអតិបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់ **SO** និងជ្រុងមួយនៃបាត

តាង $AB = x$, $x > 0$ ជាប្រវែងជ្រុងបាត ហើយយក **I** ជាចំនុចកណ្តាលនៃ **[AB]** នាំឱ្យ **SI** ជាអាប៉ូតែម ។



គេបានក្រឡាផ្ទៃខាងរបស់ពីរ៉ាមីត

$$S_L = \frac{1}{2}x.SI \times 4 \Rightarrow SI = \frac{S_L}{2x}$$

ត្រីកោណ **SOI** កែងត្រង់**O**

គេបាន$SI^2 = SO^2 + OI^2$

ឬ $SO^2 = \left(\frac{S_L}{2x}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$$SO^2 = \frac{{S_L}^2 - x^4}{4x^2} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{{S_L}^2 - x^4}}{2x}$$

ដែល ${S_L}^2 - x^4 > 0$ ឬ $x < \sqrt{S_L}$ តែ $x > 0$

ហេតុនេះ $0 < x < \sqrt{S_L}$ ។

តាង V ជាមាឌរបស់ពីរ៉ាមីត $SABCD$

គេបាន $V(x) = \frac{1}{3} S_{ABCD3} \times SO = \frac{1}{3} x^2 \frac{\sqrt{{S_L}^2 - x^4}}{2x}$

$$V(x) = \frac{1}{6} x \sqrt{{S_L}^2 - x^4}$$

យើងបាន $V'(x) = \frac{{S_L}^2 - 3x^4}{6\sqrt{{S_L}^2 - x^4}}$

បើ $V'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{{S_L}^2}{3}}$

x	0		$\sqrt[4]{\frac{{S_L}^2}{3}}$		$\sqrt{S_L}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	អតិបរមា	↘	

តាមតារាងខាងលើយើងឃើញថា $\mathbf{V(x)}$ មានតម្លៃអតិបរមាលុះត្រា

តែ $\mathbf{x = \sqrt[4]{\frac{S_L^{\ 2}}{3}}}$ ។

ដោយ $\mathbf{SO = \frac{\sqrt{S_L^{\ 2} - x^4}}{2x} \Rightarrow \frac{SO}{x} = \frac{\sqrt{S_L^{\ 2} - x^4}}{2x^2}}$

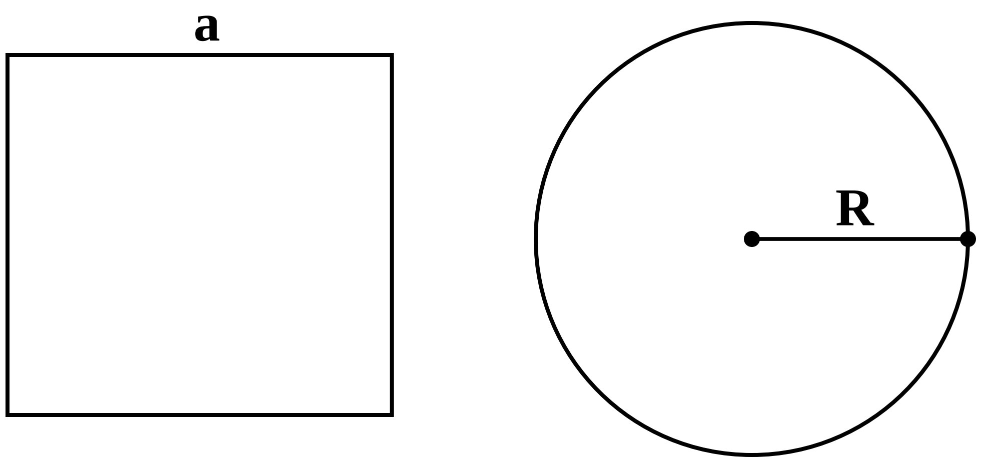
ឬ $\mathbf{\frac{SO}{x} = \frac{\sqrt{S_L^{\ 2} - \frac{S_L^{\ 2}}{3}}}{2\sqrt{\frac{S_L^{\ 2}}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ ។

ដូចនេះផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់ និងជ្រុងបាតនៃពីរ៉ាមីតគឺ $\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ។

2-ផលបូកបរិមាត្រការេមួយ និង រង្វង់មួយមានប្រវែង L ។
គណនាផលធៀបរវាងរង្វាស់កាំរង្វង់ និង ជ្រុងការេដើម្បីឱ្យផលបូក
ផ្ទៃក្រឡាការេនិងរង្វង់មានតម្លៃអប្បបរមា ?

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលធៀបរវាងរង្វាស់កាំរង្វង់ និង ជ្រុងការេ



តាង a ជារង្វាស់ជ្រុងនៃការេ និង R ជារង្វាស់កាំនៃរង្វង់

ដោយ ផលបូកបរិមាត្រការេមួយ និង រង្វង់មួយមានប្រវែង L នោះ

គេបាន $4a + 2\pi R = L \Rightarrow a = \dfrac{L - 2\pi R}{4}$ (1)

តាង $\sum$ ជាផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេនិងរង្វង់ ។

គេបាន $\sum = a^2 + \pi R^2$ (2)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$$\sum(R)=\left(\frac{L-2\pi R}{4}\right)^2+\pi R^2$$

$$=\frac{L^2-4\pi LR+20\pi^2R^2}{16}$$

គេបាន $\sum'(R)=\frac{-4\pi L+40\pi^2R}{16}$

បើ $\sum'(R)=0$ នោះ $-4\pi L+40\pi^2R=0\Rightarrow R=\frac{L}{10\pi}$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\sum''(R)=\frac{40\pi}{16}=\frac{5\pi}{2}>0$ នាំឱ្យ $\sum(R)$ មាន

តម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $R=\frac{L}{10\pi}$ ។

តាម (1) គេបាន $a=\frac{L-2\pi\times\frac{L}{10\pi}}{4}=\frac{L}{5\pi}$

គេបាន $\frac{R}{a}=\frac{\frac{L}{10\pi}}{\frac{L}{5\pi}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះផលធៀបរវាង រង្វាស់កាំរង្វង់ និង ជ្រុងការេគឺ $\frac{1}{2}$ ។

3-ប្រអប់ត្រង់មួយមានគម្របលើ និង បាតក្រោមជាការេហើយមានមាឌ $250cm^3$ ។ សម្ភារះសម្រាប់ធ្វើគម្របលើ និងបាតក្រោមតម្លៃ **2000** រៀលក្នុងមួយសង្ទីម៉ែត្រការេ ហើយសម្ភារះសម្រាប់ធ្វើផ្ទៃខាងមានតម្លៃ **1000** រៀលក្នុងមួយសង្ទីម៉ែត្រការេ ។ កំនត់រង្វាស់ទ្រនុងនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយលើសម្ភារះមានតម្លៃអប្បរមា រួចគណនាប្រាក់ចំណាយអប្បបរមានោះ ?

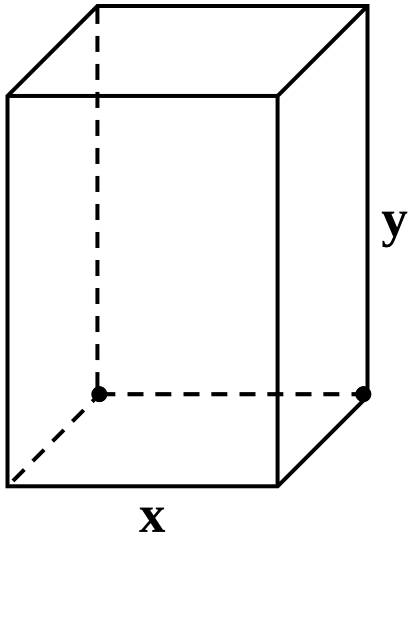
ដំណោះស្រាយ

កំនត់រង្វាស់ទ្រនុងនៃប្រអប់ និង ប្រាក់ចំណាយអប្បបរមា

តាង **x** ជាជ្រុងបាត និង **y** ជាទ្រនុងខាង

មាឌរបស់ប្រអប់គឺ $V = x^2y = 250$

គេទាញ $y = \frac{250}{x^2}$ **(1)**



ប្រាក់ចំណាយសម្ភារះធ្វើគម្រប និង បាត

របស់ប្រអប់គឺ $2x^2 \times 2000 = 4000x^2$

ប្រាក់ចំណាយសម្ភារះធ្វើផ្ទៃខាងរបស់ប្រអប់គឺ

$4y^2 \times 1000 = 4000y^2$ ។

តាង T ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយសរុបលើសម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើប្រអប់

គេបាន $T = 4000x^2 + 4000y^2 = 4000(x^2 + y^2)$ (2)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$$T(x) = 4000(x^2 + \frac{62500}{x^4})$$

គេបាន $T'(x) = 4000(2x - \frac{250000}{x^5})$

បើ $T'(x) = 0$ នោះ $2x - \frac{250000}{x^5} = 0$

គេទាញ $x = \sqrt[6]{125000} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

គេមាន $T''(x) = 4000(2 + \frac{1250000}{x^6})$

ចំពោះ $x = 5\sqrt{2} \Rightarrow T''(5\sqrt{2}) > 0$ នាំឱ្យ $T(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមា

ត្រង់ $x = 5\sqrt{2}$ ហើយ $y = \frac{250}{x^2} = \frac{250}{50} = 5$ ។

ដូចនេះទំហំរបស់ប្រអប់គឺ 5cm ។

គណនាប្រាក់ចំណាយអប្បបរមា

ចំពោះ $x = 5\sqrt{2}$, $y = 5$ គេបាន

$T = 4000(50 + 25) = 30,0000$ រៀល ជាប្រាក់ចំណាយអប្បបរមា

4-ទូកមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរពីចំនុចត្រួតពិនិត្យ ដែលរយះពេល t នាទីក្រោយមកទូកនោះមានចម្ងាយពីចំនុចត្រួតពិនិត្យដែលតាងដោយអនុគមន៍ $S(t)=t^3+60t$ គិតជាម៉ែត្រ ។

ក. រកល្បឿននៃទូកត្រង់ចំនុចចាប់ផ្តើម ?

ខ. កំនត់ល្បឿននៃទូកខណះ $t=3mn$?

ដំណោះស្រាយ

ក. រកល្បឿននៃទូកត្រង់ចំនុចចាប់ផ្តើម

តាង $V(t)$ ជាអនុគមន៍ល្បឿននៃទូកនៅខណៈ t នោះគេបាន

$$V(t)=\frac{dS(t)}{dt}=S'(t)=3t^2+60$$

បើ $t=0 \Rightarrow V(t=0)=60m/mn$

ដូចនេះល្បឿននៃទូកត្រង់ចំនុចចាប់ផ្តើមគឺ $V=60m/mn$ ។

ខ. កំនត់ល្បឿននៃទូកខណះ $t=3mn$

បើ $t=3mn$ នោះ $V(3)=3(3)^2+60=87m/mn$

ដូចនេះ ល្បឿននៃទូកខណះ $t=3mn$ គឺ $87m/mn$ ។

5-រថយន្តមួយចាប់ផ្ដើមចេញដំណើរដោយល្បឿនដែលតាងដោយ

អនុគមន៍ $\mathbf{V(t)=\dfrac{100t}{t+15}\ \ (m/s)}$

កំនត់សំទុះនៃរថយន្តខណះពេល

ក. $\mathbf{t=5s}$ គ. $\mathbf{t=20s}$

ខ. $\mathbf{t=10s}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\mathbf{t=5s}$

តាង $\mathbf{a(t)}$ ជាអនុគមន៍សំទុះនៃរថយន្តនៅខណៈ $\mathbf{t}$ នោះគេបាន

$$\mathbf{a(t)=\frac{dV(t)}{dt}=V'(t)=\frac{1500}{(t+15)^2}}$$

បើ $\mathbf{t=5s\Rightarrow a(5)=\dfrac{1500}{400}=3.75m/s^2}$

ខ. បើ $\mathbf{t=10s\Rightarrow a(10)=\dfrac{1500}{625}=2.4m/s^2}$

គ. បើ $\mathbf{t=20s\Rightarrow a(20)=\dfrac{1500}{1225}=1.22m/s^2}$

6-រថយន្តមួយផ្តើមចេញដំនើរដោយល្បឿនដែល t វិនាទីតាងដោយ

អនុគមន៍ $\mathbf{V(t) = \dfrac{22t}{0.44t + 3.3}}$ ម៉ែត្រក្នុងមួយវិនាទី ។

កំណត់សំទុះរបស់រថយន្តនៅខណះពេល :

ក- **5** វិនាទី ខ-**10** វិនាទី គ- **20** វិនាទី ឃ- **30** វិនាទី ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់សំទុះរបស់រថយន្តនៅខណះពេល

មាន $\mathbf{V(t) = \dfrac{22t}{0.44t + 3.3} = \dfrac{2200t}{44t + 330} = \dfrac{200t}{4t + 10} = \dfrac{100t}{2t + 5}}$

គេបាន $\mathbf{a(t) = V'(t) = \dfrac{500}{(2t + 5)^2}}$

ក- $\mathbf{t = 5s \Rightarrow a(5) = \dfrac{500}{225} = 2.22 m/s^2}$

ខ-$\mathbf{t = 10s \Rightarrow a(10) = \dfrac{500}{625} = 0.80 m/s^2}$

គ- $\mathbf{t = 20s \Rightarrow a(20) = \dfrac{500}{2025} = 0.25 m/s^2}$

ឃ- $\mathbf{t = 30s \Rightarrow a(30) = \dfrac{500}{4225} = 0.12 m/s^2}$

លំហាត់ជំពូកទី២ និង ដំណោះស្រាយ

1-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $\mathbf{f(x)=(7x+2)^2}$

ខ. $\mathbf{g(x)=(x^2-8)^{-1}}$

គ. $\mathbf{y=(4x^2+9x-2)^3}$

ឃ. $\mathbf{f(x)=\sqrt[3]{5x^3-4}}$

ង. $\mathbf{g(x)=x(4-3x^2)^2}$

ច. $\mathbf{y=\dfrac{\sqrt{5x-2}}{x^3}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $\mathbf{f(x)=(7x+2)^2}$

$$\mathbf{f'(x)=2(7x+2)'(7x+2)=14(7x+2)}$$

ខ. $\mathbf{g(x)=(x^2-8)^{-1}}$

$$\mathbf{g'(x)=-(x^2-8)'(x^2-8)^{-2}}$$
$$\mathbf{=-2x(x^2-8)^{-2}}$$

គ. $\mathbf{y=(4x^2+9x-2)^3}$

$$\mathbf{y'=3(4x^2+9x-2)'(4x^2+9x-2)^2}$$
$$\mathbf{=3(8x+9)(4x^2+9x-2)^2}$$

ឃ. $f(x)=\sqrt[3]{5x^3-4}=(5x^3-4)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(5x^3-4)'(5x^3-4)^{\frac{1}{3}-1}$$

$$=5x^2(5x^3-4)^{-\frac{2}{3}}$$

ង. $g(x)=x(4-3x^2)^2$

$$g'(x)=(x)'(4-3x^2)^2+x((4-3x^2)^2)'$$

$$=(4-3x^2)^2-12x^2(4-3x^2)$$

$$=(4-3x^2)(4-15x^2)$$

ច. $y=\dfrac{\sqrt{5x-2}}{x^3}$

$$y'=\frac{(\sqrt{5x-2})'x^3-(x^3)'\sqrt{5x-2}}{x^6}$$

$$=\frac{\dfrac{5x^3}{2\sqrt{5x-2}}-3x^2\sqrt{5x-2}}{x^6}$$

$$=\frac{5x-6(5x-2)}{x^4\sqrt{5x-2}}$$

$$=\frac{5x-30x+12}{x^4\sqrt{5x-2}}$$

$$=\frac{-25x+12}{x^4\sqrt{5x-2}}$$

2-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = x^3 \sin 2x$

ខ. $y = 3x^3 - x\cos 3x$

គ. $y = -x\cos(4-3x^2)$

ឃ. $f(x) = \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$

ង. $f(x) = \dfrac{\tan 2x}{x^2-1}$

ច. $f(x) = \cos(\sin^2 3x)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $y = x^3 \sin 2x$

$$y' = 3x^2 \sin 2x + 2x^3 \cos 2x$$

$$= x^2(3\sin 2x + 2x\cos x)$$

ខ. $y = 3x^3 - x\cos 3x$

$$y' = 9x^2 - \cos 3x + 3x\sin 3x$$

គ. $y = -x\cos(4-3x^2)$

$$y' = -\cos(4-3x^2) - 6x^2\sin(4-3x^2)$$

ឃ. $f(x) = \dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{6x^2 \sin 3x\cos 3x - 2x\sin^2 3x}{x^4} = \frac{3x\sin 6x - 2\sin 3x}{x^3}$$

ឃ. $f(x) = \dfrac{\tan 2x}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \dfrac{\dfrac{2(x^2-1)}{\cos^2 2x} - 2x\tan 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \dfrac{2(x^2-1) - x\sin 4x}{(x^2-1)^2\cos^2 2x}$$

ច. $f(x) = \cos(\sin^2 3x)$

$$f'(x) = -(\sin^2 3x)'\sin(\sin^2 3x)$$

$$= -6\sin 3x\cos 3x\sin(\sin^2 3x)$$

$$= -3\sin 6x\sin(\sin^2 3x)$$

3-គណនាដេរីវេទី2នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 8$ ខ. $f(x) = x^4 + 6x^{\frac{3}{2}} - 9$

គ. $f(x) = (2x^2 + 7)^{\frac{2}{3}}$ ឃ. $f(x) = 5x + \dfrac{2}{x+1}$

ង. $f(x) = x^2 - \dfrac{14}{x-2}$ ច. $f(x) = \dfrac{7x+2}{x^3}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេទី2នៃអនុគមន៍

ក. $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 8$

គេបាន $f'(x) = 3x^2 - 8x - 1$

និង $f''(x) = 6x - 8 = 2(3x - 4)$

ខ. $f(x) = x^4 + 6x^{\frac{3}{2}} - 9$

គេបាន $f'(x) = 4x^3 + 9x^{\frac{1}{2}}$

និង $f''(x) = 12x^2 + \dfrac{9}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

គ. $f(x)=(2x^2+7)^{\frac{2}{3}}$

គេបាន $f'(x)=\frac{2}{3}(2x^2+7)'(2x^2+7)^{-\frac{1}{3}}$

$=\frac{8x}{3}(2x^2+7)^{-\frac{1}{3}}$

ហើយ $f''(x)=\frac{8}{3}(2x^2+7)^{-\frac{1}{3}}-\frac{8x}{9}(2x^2+7)'(2x^2+7)^{-\frac{4}{3}}$

$=\frac{8}{3}(2x^2+7)^{-\frac{1}{3}}-\frac{32x^2}{9}(2x^2+7)^{-\frac{4}{3}}$

ឃ. $f(x)=5x+\frac{2}{x+1}$

គេបាន $f'(x)=5-\frac{2}{(x+1)^2}$

និង $f''(x)=\frac{4}{(x+1)^3}$

ង. $f(x)=x^2-\frac{14}{x-2}$

គេបាន $f'(x)=2x+\frac{14}{(x-2)^2}$

និង $f''(x)=2-\frac{28}{(x-2)^3}$

ច. $f(x)=\frac{7x+2}{x^3}=7x^{-2}+2x^{-3}$

គេបាន $f'(x)=-14x^{-3}-6x^{-4}$ និង $f''(x)=42x^{-4}+24x^{-5}$ ។

4-រក $\mathbf{y'}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$

ក. $\mathbf{x^3 + y^3 = 5}$ ខ. $\mathbf{xy^2 = -1}$

គ. $\mathbf{x - \sqrt{y} = 2}$ ឃ. $\mathbf{2y + \sqrt{xy} = 5x^2}$

ង. $\mathbf{x^2 + 4(y+3)^2 = 9}$ ច. $\mathbf{x^3y + xy^3 = 3x^3}$

ដំណោះស្រាយ

រក $\mathbf{y'}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$

ក. $\mathbf{x^3 + y^3 = 5}$

គេបាន $\mathbf{(x^3 + y^3)' = (5)'}$

$$\mathbf{3x^2 + 3y'y^2 = 0}$$

គេទាញ $\mathbf{y' = -\dfrac{x^2}{y^2}}$ ។

ខ. $\mathbf{xy^2 = -1}$

គេបាន $\mathbf{(xy^2)' = (-1)'}$

$$\mathbf{y^2 + 2xy'y = 0}$$

គេទាញ $\mathbf{y' = -\dfrac{y^2}{2xy}}$ ។

គ. $\mathbf{x-\sqrt{y}=2}$

គេបាន $\mathbf{(x-\sqrt{y})'=(2)'}$

$$\mathbf{1-\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0}$$

គេទាញ $\mathbf{y'=2\sqrt{y}}$ ។

ឃ. $\mathbf{2y+\sqrt{xy}=5x^2}$

គេបាន $\mathbf{(2y+\sqrt{xy})'=(5x^2)'}$

$$\mathbf{2y'+\frac{(xy)'}{2\sqrt{xy}}=10x}$$

$$\mathbf{2y'+\frac{y+xy'}{2\sqrt{xy}}=10x}$$

គេទាញ $\mathbf{y'=\dfrac{20x\sqrt{xy}-y}{x+4\sqrt{xy}}}$ ។

ង. $\mathbf{x^2+4(y+3)^2=9}$

គេបាន $\mathbf{2x+8y'(y+3)=0\Rightarrow y'=-\dfrac{x}{4(y+3)}}$ ។

ច. $\mathbf{x^3y+xy^3=3x^3}$

គេបាន $\mathbf{3x^2y+x^3y'+y^3+3xy'y^2=9x^2}$

គេទាញ $\mathbf{y'=\dfrac{9x^2-3x^2y-y^3}{x^3+3xy^2}}$ ។

5-រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x^2 + xy = 5$

ខ. $x^2y^2 - 2x = 3$

គ. $x^2 - y^2 = 16$

ឃ. $1 - xy = x - y$

ង. $y^2 = x^3$

ច. $y^2 = 4x$

ដំណោះស្រាយ

រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x^2 + xy = 5$

គេបាន $2x + y + xy' = 0$

ហើយ $2 + y' + y' + xy'' = 0$

គេទាញ $y'' = -\dfrac{2(1+y')}{x}$

ដោយ $2x + y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{2x+y}{x}$

គេបាន $y'' = -\dfrac{2(1-\frac{2x+y}{x})}{x} = \dfrac{2(x+y)}{x^2}$

ដូចនេះ $y'' = \dfrac{2(x+y)}{x^2}$ ។

ខ. $x^2y^2 - 2x = 3$

គេបាន $2xy^2 + 2x^2y'y - 2 = 0$

ឬ $xy^2 + x^2yy' - 1 = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{1 - xy^2}{x^2y} = \dfrac{1}{x^2y} - \dfrac{y}{x}$

ហើយ $y'' = -\dfrac{2xy + x^2y'}{x^4y^2} - \dfrac{y'x - y}{x^2}$

$$= -\frac{2}{x^3y} - \frac{y'}{x^2y^2} - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2}$$

$$= \frac{xy^2 - 2}{x^3y} - \frac{xy^2 + 1}{x^2y^2}y'$$

$$= \frac{xy^2 - 2}{x^3y} - \frac{xy^2 + 1}{x^2y^2} \cdot \frac{1 - xy^2}{x^2y}$$

$$= \frac{xy^2 - 2}{x^3y} - \frac{1 - x^2y^4}{x^4y^3}$$

$$= \frac{x^2y^4 - 2xy^2 - 1 + x^2y^4}{x^4y^3} = \frac{2x^2y^4 - 2xy^2 - 1}{x^4y^3}$$

ដូចនេះ $y'' = \dfrac{2x^2y^4 - 2xy^2 - 1}{x^4y^3}$ ។

គ. $x^2 - y^2 = 16$

គេបាន $2x - 2y'y = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{x}{y}$

ហើយ $y''=\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{y-\frac{x^2}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}$ ។

ឃ. $1-xy=x-y$

គេបាន $-y-xy'=1-y'\Rightarrow y'=\frac{1+y}{1-x}$

ហើយ $y''=\frac{y'(1-x)+1+y}{(1-x)^2}=\frac{(1-x)\frac{1+y}{1-x}+1+y}{(1-x)^2}$

ដូចនេះ $y''=\frac{2(1+y)}{(1-x)^2}$ ។

ង. $y^2=x^3$

គេបាន $2y'y=3x^2\Rightarrow y'=\frac{3x^2}{2y}$

ហើយ $2y''y+2y'^2=6x\Rightarrow y''=\frac{6x-2y'^2}{2y}$

ឬ $y''=\frac{6x-2.\frac{9x^4}{4y^2}}{2y}=\frac{12xy^2-9x^4}{8y^3}$ ។

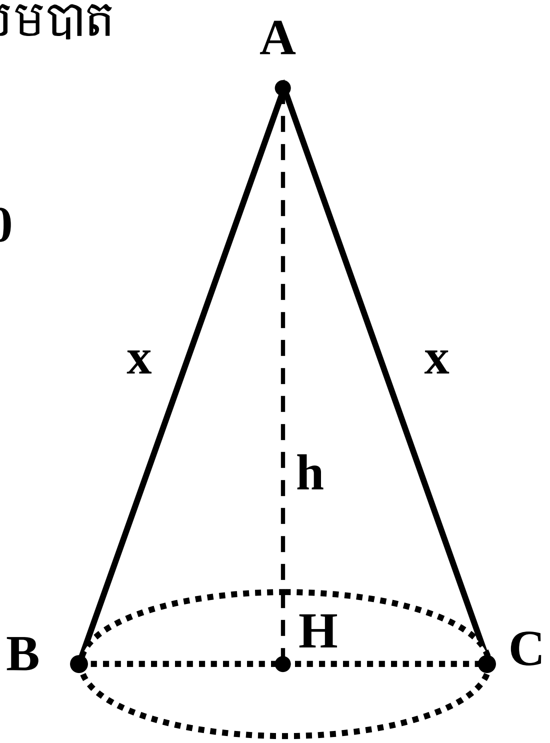
ច. $y^2=4x$ នាំឱ្យ $2yy'=4\Rightarrow y'=\frac{2}{y}$

ហើយ $y''=-\frac{2y'}{y^2}=-\frac{4}{4xy}=-\frac{1}{xy}$ ។

6-ត្រីកោណសមបាត **ABC** មួយមានបរិមាត្រ **2p** វិលជុំវិញកម្ពស់ដែលគូសចេញពីកំពូល **A** កំនត់បានលូលីតមួយមានមាឌធំបំផុត ។ គណនារង្វាស់ជ្រុង និង កម្ពស់នៃត្រីកោណសមបាតនោះ ?

ដំណោះស្រាយ

គណនាជ្រុង និង កម្ពស់នៃត្រីកោណសមបាត



តាង $\mathbf{AB = AC = x}$

និង $\mathbf{AH = h}$ ដែល $\mathbf{x > 0\ ;\ h > 0}$

គេបាន $\mathbf{2p = x + x + BC}$

ឬ $\mathbf{BC = 2(p - x)}$ ។

ត្រីកោណសមបាត **ABC** វិលជុំវិញកម្ពស់ **AH** បង្កើតបានជាសូលីដបរិវត្តន៍មួយគឺជាកោណដែលមានកម្ពស់ **AH** ជនេត្រ $\mathbf{AB = AC}$ និងថាសបាតជារង្វង់មានកាំ

$$\mathbf{BH = HC = \frac{BC}{2} = p - x} \quad ។$$

យក **V** ជាមាឌរបស់កោណ និង **S** ជាផ្ទៃក្រឡាថាសបាត ។

យើងបាន $V = \frac{1}{3} S \times h$

ដោយ $S = \pi (p - x)^2$

ក្នុងត្រីកោណកែង AHB គេមាន $AB^2 = AH^2 + HB^2$

គេទាញ $h^2 = x^2 - (p - x)^2 = 2px - p^2$

នាំឱ្យ $h = \sqrt{2px - p^2}$ ដែល $2px - p^2 > 0$ ឬ $x > \frac{p}{2}$ ។

គេបាន $V = \frac{\pi}{3}(p - x)^2 \sqrt{2px - p^2}$

យើងបាន $V' = \frac{\pi p}{3} \cdot \frac{5x^2 - 8px + 3p^2}{\sqrt{2px - p^2}}$

បើ $V' = 0 \Rightarrow x_1 = p$; $x_2 = \frac{3p}{5}$ ។

x	$\frac{p}{2}$		$\frac{3p}{5}$		p
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$	↗		អតិបរមា	↘	

តាមតារាងអថេរភាពខាងលើ ជាមួយនឹងលក្ខខណ្ឌកំណត់គេបាន

$x=\frac{3p}{5}$ ជាតម្លៃដែលធ្វើឱ្យ V មានតម្លៃអតិបរមា ។

ចំពោះ $x=\frac{3p}{5}\Rightarrow BC=2(p-\frac{3p}{5})=\frac{4p}{5}$

ហើយ $AH=h=\sqrt{2px-p^2}=\sqrt{\frac{6p^2}{5}-p^2}=\frac{p\sqrt{5}}{5}$

ដូចនេះ $AB=AC=\frac{3p}{5}$, $BC=\frac{4p}{5}$, $AH=\frac{p\sqrt{5}}{5}$ ។

7-រថយន្តមួយចាប់ផ្ដើមចេញដំណើរពីចំនុចត្រួតពិនិត្យមួយ ។ នៅខណៈ t វិនាទីរថយន្តនោះឃ្លាតពីចំនុចត្រួតពិនិត្យដែលតាងដោយអនុគមន៍ចម្ងាយចរ $S(t)=4.4t^2$ គិតជាម៉ែត្រ ហើយ $0\le t\le 10$ ។

ប្រើអនុគមន៍ខាងលើរួចបំពេញតារាងខាងក្រោម

t	0	2	4	6	8	10
$S(t)$						
$V(t)$						
$a(t)$						

ដំណោះស្រាយ

បំពេញតារាង

គេមាន $\mathbf{S(t) = 4.4t^2}$ គិតជាម៉ែត្រ ហើយ $\mathbf{0 \le t \le 10}$

គេបាន $\mathbf{V(t) = S'(t) = 8.8t}$

និង $\mathbf{a(t) = S''(t) = 8.8}$ ថេរ ។

t	0	2	4	6	8	10
S(t)	0	17.6	70.4	158.4	281.6	440
V(t)	0	17.6	35.2	52.8	70.4	88
a(t)	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8

មេរៀនទី១

អនុគមន៍សនិទាន

១_សិក្សាអនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$

ដែល $p \neq 0$, $a \neq 0$ និង $a{x_0}^2 + bx_0 + c \neq 0$ ចំពោះ $x_0 = -\dfrac{q}{p}$

◆ ដែនកំនត់ $D = IR - \{-\dfrac{q}{p}\}$

◆ ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = \dfrac{apx^2 + 2aqx + bq - cp}{(px + q)^2}$

-បើ $y' = 0$ មានឫសពីរខុសគ្នានោះអនុគមន៏មានអតិបរមាធៀបមួយ និង អប្បបរមាធៀបមួយ ។

-បើ $y' = 0$ មានឫសឌុបនោះអនុគមន៏ក្លាយជាដឺក្រេទីមួយ

-បើ $y' = 0$ គ្មានឫសនោះអនុគមន៏គ្មានបរមាទេ

◆ អាស៊ីមតូត

-បន្ទាត់ $x = -\dfrac{q}{p}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

-អនុគមន៍អាចសរសេរ $y=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{px+q}$

ដែល $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\gamma}{px+q}=0$ នោះបន្ទាត់ $y=\alpha x+\beta$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

◆ មានក្រាបជាអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតឆ្លុះជាចំនុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូទាំងពីរ ។

២_សិក្សាអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

ដែល $p\neq 0$, $a , b , c , p , q , r \in IR$ ។

◆ មានអាស៊ីមតូតដេកមួយជានិច្ច

◆ ចំនួនអាស៊ីមតូតឈរគឺអាស្រ័យនឹងឫសសមីការ $px^2+qx+r=0$

-បើ $\Delta=q^2-4pr<0$ គ្មានអាស៊ីមតូតឈរទេ និងក្រាបមានមែកតែមួយ ។

-បើ $\Delta=q^2-4pr=0$ មានអាស៊ីមតូតឈរមួយ $x=-\dfrac{q}{2p}$ និងក្រាបមានមែកពីរ ។

-បើ $\Delta=q^2-4pr>0$ មានអាស៊ីតូតឈរពីរគឺ $x=\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2p}$ និង $x=\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2p}$ ហើយក្រាបមានមែកបី ។

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y=\dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$

ខ. $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-1}$

គ. $y=-x+3+\dfrac{3}{x-1}$

ដំណោះស្រាយ

រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y=\dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$

គេបាន $y=\dfrac{(x^2+2x)+(2x+4)-3}{x+2}$

$$=\frac{x(x+2)+2(x+2)-3}{x+2}=x+2-\frac{3}{x+2}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} y=\lim\limits_{x\to 2}(x+2-\dfrac{3}{x+2})=\pm\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ហើយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x+2}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់$y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ខ. $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$

គេមាន $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x-1)}$

ដោយ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x-1)} = \pm\infty$ និង $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x-1)} = \pm\infty$

ដូចនេះបន្ទាត់ $x = -1$, $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = 1$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

គ. $y = -x + 3 + \dfrac{3}{x-1}$

គេមាន $\lim\limits_{x \to 1}\left(-x + 3 + \dfrac{3}{x-1}\right) = \pm\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ និង $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3}{x-1} = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = -x + 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

2-សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y=\dfrac{x^2-2x+6}{2x+2}$

ខ. $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$

គ. $y=\dfrac{x^2-9}{4-x^2}$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y=\dfrac{x^2-2x+6}{2x+2}$

. ដែនកំណត់ $D=IR-\{-1\}$

. សរសេរជារាងកាណូនិច $y=\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{9}{2x+2}$

. ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y'=\dfrac{1}{2}-\dfrac{9}{2(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-9}{2(x+1)^2}=\dfrac{(x+4)(x-2)}{2(x+1)^2}$

បើ $y'=0\Rightarrow x_1=-4\ ,\ x_2=2$

-បរមានៃអនុគមន៍ y

ចំពោះ $x = -4$ អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀប $y = f(-4) = -5$

ចំពោះ $x = 2$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀប $y = f(2) = 1$ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{x-3}{2} + \frac{9}{2x+2}\right) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-}\left(\frac{x-3}{2} + \frac{9}{2x+2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+}\left(\frac{x-3}{2} + \frac{9}{2x+2}\right) = +\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x \to -1}\left(\frac{x-3}{2} + \frac{9}{2x+2}\right) = \pm\infty$

នោះបន្ទាត់ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $\lim_{x \to \infty} \frac{9}{2x+2} = 0$ នោះបន្ទាត់ $y = \frac{x-3}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-5	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

.សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបជាមួយអក្ស័កូអរដោនេ

បើ $x=0$ នោះ $y=3$ នាំឱ្យក្រាបកាត់អក្ស័ (oy) ត្រង់ $(0,3)$

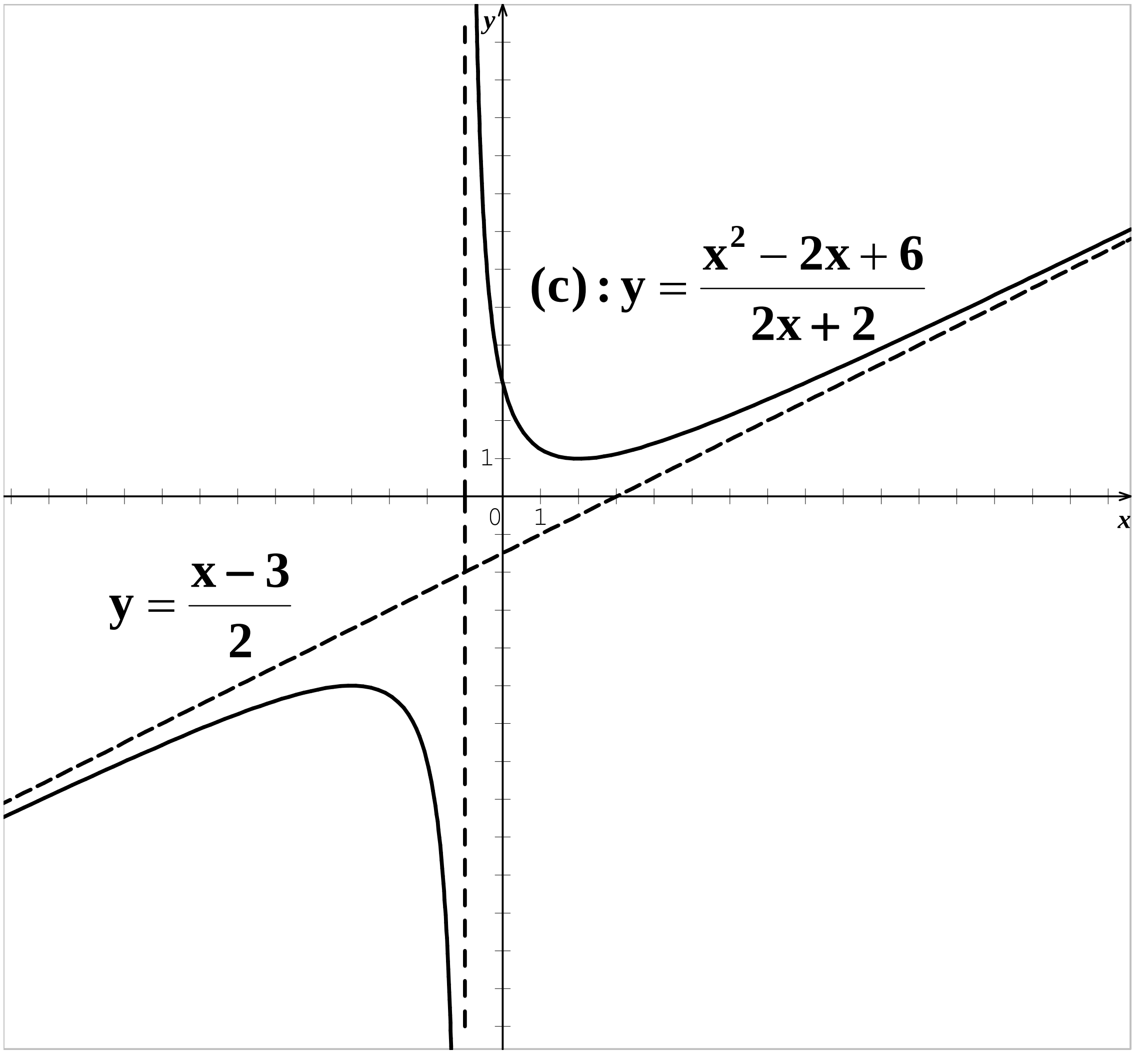
បើ $y=0 \Rightarrow x^2-2x+6=(x-1)^2+5=0$ (គ្មានឫស)

នាំឱ្យក្រាបមិនកាត់អក្ស័ (ox) ទេ ។

-ផ្ចិតឆ្លុះ

អាស៊ីមតូតឈរ $x=-1$ ប្រសព្វជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=\frac{x-3}{2}$

ត្រង់ចំនុច $I(-1\,,\,-2)$ គឺជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាង $y=\frac{x^2-2x+6}{2x+2}$



ខ. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$

.ដែនកំនត់ $D = IR - \{ 1 ; 2 \}$

. គេមាន $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x-3}{x-2}$

.ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y'=\dfrac{1}{(x-2)^2}>0$ នាំឱ្យ y ជាអនុគមន៍កើន ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-3}{x-2}=1 \quad \text{និង} \quad \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-2}=\pm\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-3}{x-2}=1$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=1$ ជាអសុីមតូតដេក

ហើយ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x-2}=\pm\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=2$ ជាអសុីមតូតឈរ ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1

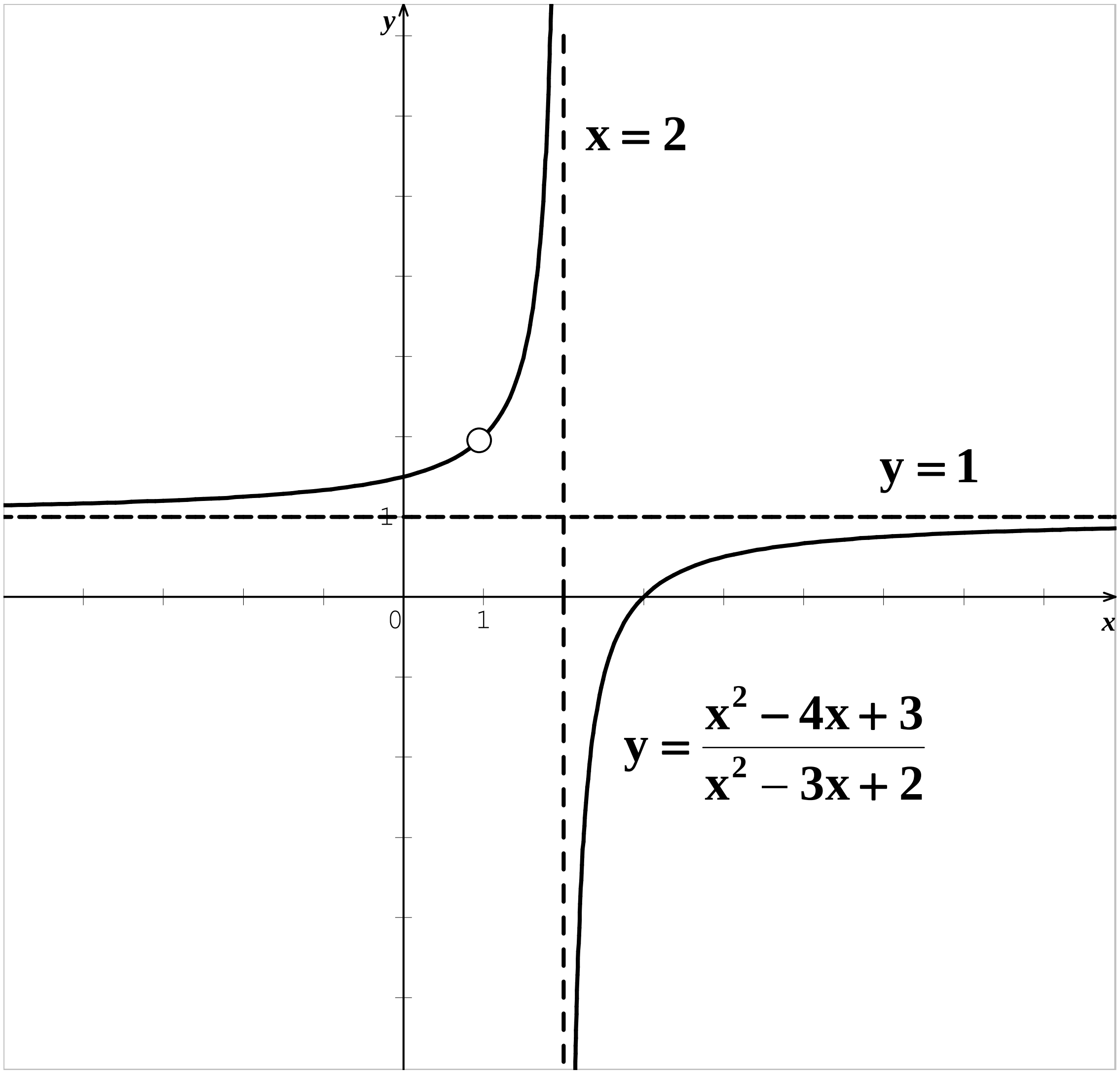
.សំណង់ក្រាប

-បើ $x=o$ នោះ $y=\dfrac{3}{2}$ នាំឱ្យក្រាបកាត់ (oy) ត្រង់ $(0\ ,\ \dfrac{3}{2})$ ។

-បើ $y = 0 \Rightarrow x = 3$ នាំឱ្យក្រាបកាត់ (ox) ត្រង់ (3 ;0) ។

-ផ្ចិតឆ្លុះ

អាស៊ីមតូតឈរ $x = 2$ កាត់អាស៊ីមតូតដេក $y = 1$ ត្រង់ I(2 , 1) ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។



គ. $y = \dfrac{x^2 - 9}{4 - x^2}$

.ដែនកំណត់ $D = IR - \{ -2 ; 2 \}$

.ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = \dfrac{-10x}{(4 - x^2)^2}$

-បើ $y' = 0 \Rightarrow x = 0$

-បរមានៃ $y = \dfrac{x^2 - 9}{4 - x^2}$

ចំពោះ $x = 0$ អនុគមន៍មានអតិបរមា $y = -\dfrac{9}{4}$

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 9}{(2 - x)(2 + x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 9}{(2 - x)(2 + x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 9}{(2 - x)(2 + x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 9}{(2 - x)(2 + x)} = +\infty$$

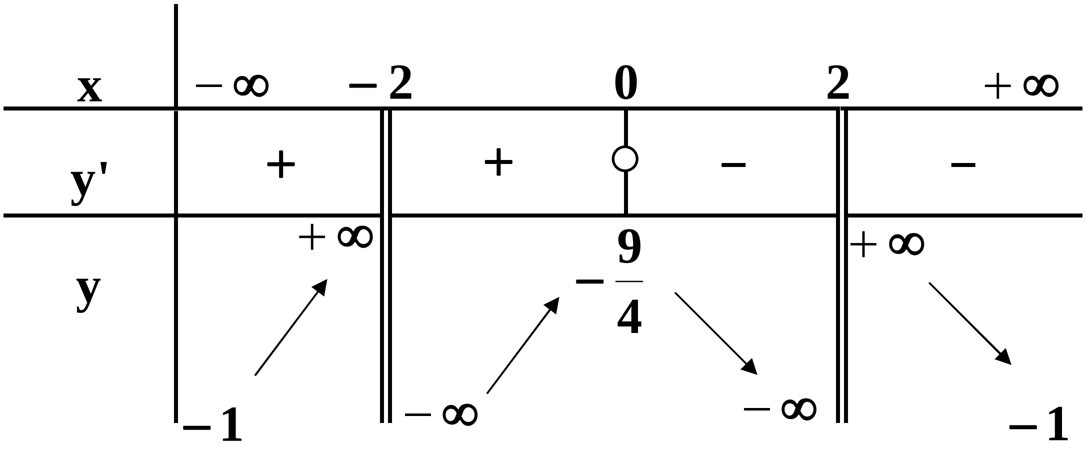
-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-9}{4-x^2}=\pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-9}{4-x^2}=\pm\infty$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=-2$ និង $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{x^2-9}{4-x^2}=-1$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

-តារាងអថេរភាព



.សំណង់ក្រាប $y=\frac{x^2-9}{4-x^2}$

-កូអរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាបជាមួយអក្ស័កូអរដោនេ

បើ $x=0$ នោះ $y=-\frac{9}{4}$ នាំឱ្យក្រាប(c) កាត់អក្ស័(oy) ត្រង់ចំនុច

មានកូអរដោនេ $(0\,;-\frac{9}{4})$ ។

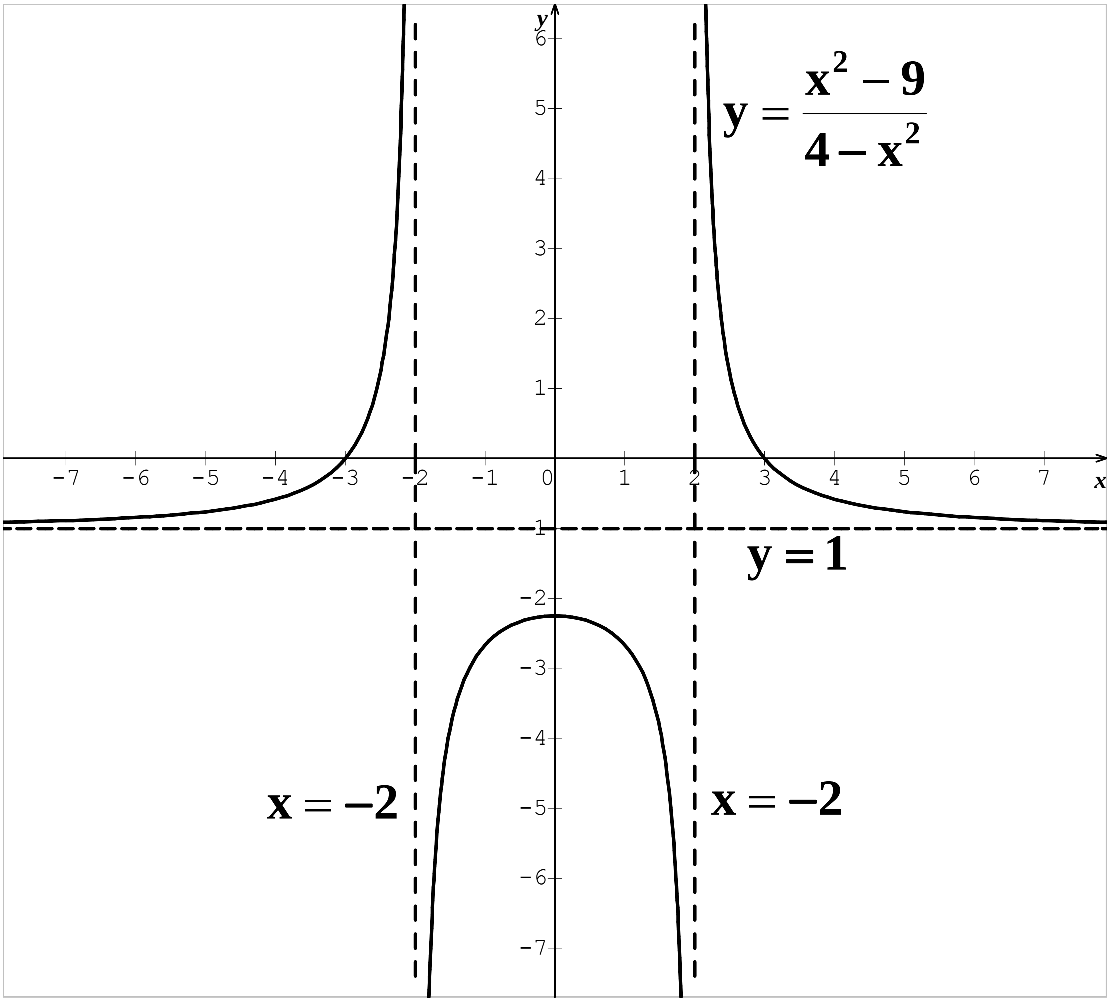
បើ $y = 0$ គេបាន $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -3\ ,\ x_2 = 3$

ដូចនេះក្រាបកាត់ **(ox)** ត្រង់ $(-3, 0)$ និង $(3\ ,\ 0\ )$ ។

-អក្សឆ្លុះ

អនុគមន៍ $y = \dfrac{x^2 - 9}{4 - x^2}$ ជាអនុគមន៍គូ ។

ដូចនេះអក្ស **(oy)** ជាអក្សឆ្លុះរបស់ក្រាប ។



3-ក. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{x^2-4x+8}{x-2}$

ខ. សិក្សាទៅតាមតម្លៃ m អត្ថិភាព និង សញ្ញានៃឫសសមីការ

$x^2-(m+4)x+2m+8=0$ ដោយប្រើក្រាបតាង y ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$$y=\frac{x^2-4x+8}{x-2}$$

. ដែនកំណត់ $D=IR-\{2\}$

. សរសេរជារាងកាណូនិច $y=x-2+\frac{4}{x-2}$

. ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y'=1-\frac{4}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

បើ $y'=0\Rightarrow x_1=0\ ,\ x_2=4$

-បរមានៃអនុគមន៍ y

ចំពោះ $x=0$ អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀប $y=f(0)=-4$

ចំពោះ $x=4$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀប $y=f(4)=4$ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-2+\frac{4}{x-2}\right)=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left(x-2+\frac{4}{x-2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(x-2+\frac{4}{x-2}\right)=+\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x\to 2}\left(x-2+\frac{4}{x-2}\right)=\pm\infty$

នោះបន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x-2}=0$ នោះបន្ទាត់ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

.សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបជាមួយអក្ស័កូអរដោនេ

បើ $\mathbf{x = 0}$ នោះ $\mathbf{y = -4}$ នាំឱ្យក្រាបកាត់អក្ស័ **(oy)** ត្រង់ $\mathbf{(0, -4)}$

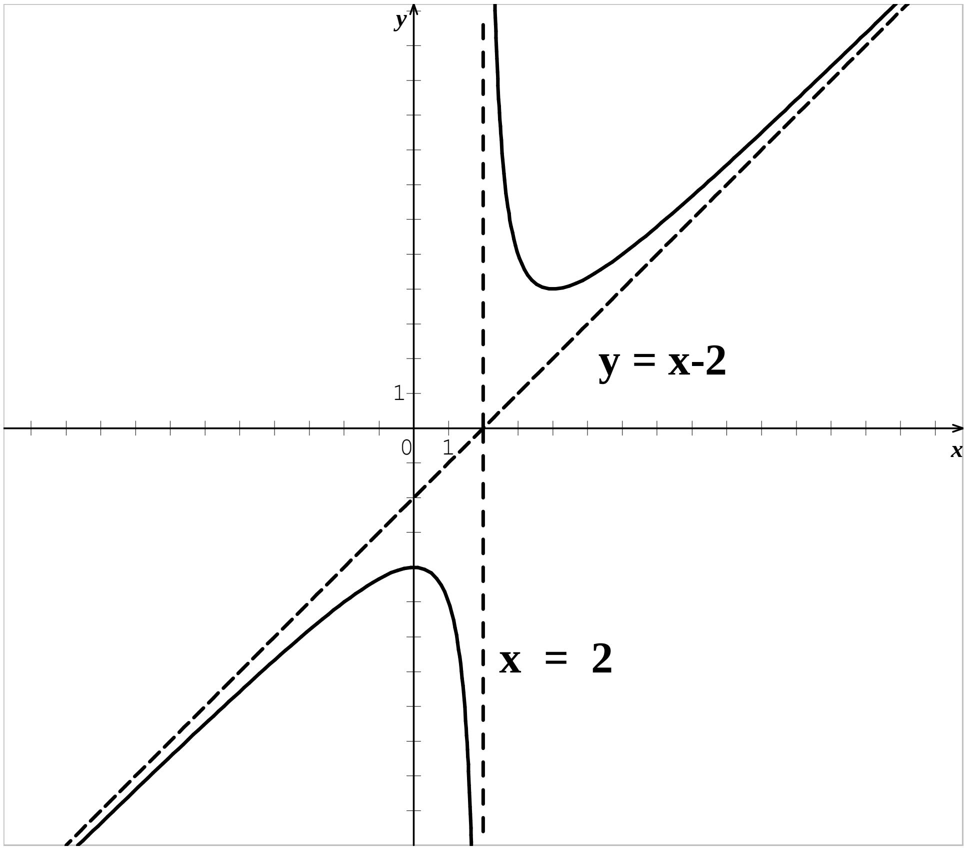
បើ $\mathbf{y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 = 0}$ (គ្មានឫស)

នាំឱ្យក្រាបមិនកាត់អក្ស័ **(ox)** ទេ ។

-ផ្ចិតឆ្លុះ

អាស៊ីមតូតឈរ $\mathbf{x = 2}$ ប្រសព្វជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $\mathbf{y = x - 2}$

ត្រង់ចំនុច **I(2 , 0)** គឺជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាង $\mathbf{y = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}}$ ។



4-កំនត់តម្លៃ **a** ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{x^2-2ax+3a^2}{x-2a}$

កើនលើចន្លោះ $(1\,,+\infty)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ **a**

$$y=\frac{x^2-2ax+3a^2}{x-2a}$$

ដែនកំណត់ $D=IR-\{2a\}$

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x(x-2a)+3a^2}{x-2a}=x+\dfrac{3a^2}{x-2a}$

គេបាន $y'=f'(x)=1-\dfrac{3a^2}{(x-2a)^2}=\dfrac{(x-2a)^2-3a^2}{(x-2a)^2}$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{x^2-2ax+3a^2}{x-2a}$ កើនលើចន្លោះ $(1\,,+\infty)$

លុះត្រាតែ $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ x លើចន្លោះ $(1\,,+\infty)$ ពោលគឺ

គេត្រូវឱ្យ $(x-2a)^2-3a^2>0\ ,\ \forall x>1$ ។

5-គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអាស៊ីមតូតទ្រេតកាត់តាមចំនុចនឹងមួយចំពោះគ្រប់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដែលត្រូវកំនត់កូអរដោនេ ។

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y = m$ ប៉ះនឹងក្រាប ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបចំពោះ $m = -1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអាស៊ីមតូតទ្រេតកាត់តាមចំនុចនឹងមួយ

គេមាន $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$

ដែនកំនត់ $D = IR - \{-2\}$

អនុគមន៍អាចសរសេរ

$$y = \frac{(mx^2 + 2mx) + (mx + 2m) + 1}{x + 2}$$

$$= mx + m + \frac{1}{x + 2}$$

ដោយ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x + 2} = 0$ នាំឱ្យ $y = mx + m$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

ហើយដោយ $y = m(x+1)$ សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ $m \in IR$

លុះត្រាតែ $x+1=0$ ឬ $x=-1$ និង $y=0$ ។

ដូចនេះអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបកាត់តាមចំនុចនឹង $I(-1\ ,\ 0\ )$ ចំពោះ

គ្រប់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y=m$ ប៉ះនឹងក្រាប

សមីការអាប់ស៊ីស

$$\frac{mx^2+3mx+2m+1}{x+2}=m$$

$$mx^2+3mx+2m+1=mx+2m$$

$$mx^2+2mx+1=0$$

$$\Delta'=m^2-m=m(m-1)$$

ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y=m$ ប៉ះនឹងក្រាបលុះត្រាតែ $\begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'=m(m-1)=0 \end{cases}$

គេទាញបាន $m=1$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបចំពោះ $m=-1$

ចំពោះ $m=-1$ គេបាន $y=-x-1+\dfrac{1}{x+2}$

ដែនកំណត់ $D=IR-\{\ -2\ \}$ ។

. ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = -1 - \frac{1}{(x+2)^2} = -\frac{(x+2)^2+1}{(x+2)^2} < 0$

នាំឱ្យអនុគមន៍ f ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់ នាំឱ្យវាគ្មានបរមាទេ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x \to \pm\infty}\left(-x-1+\frac{1}{x+2}\right) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-}\left(-x-1+\frac{1}{x+2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+}\left(-x-1+\frac{1}{x+2}\right) = +\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x \to -2}\left(-x-1+\frac{1}{x+2}\right) = \pm\infty$

នោះបន្ទាត់ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x+2} = 0$ នោះបន្ទាត់ $y = -x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

.សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបជាមួយអក្សកូអរដោនេ

បើ $x=0$ នោះ $y=-\frac{1}{2}$ នាំឱ្យក្រាបកាត់អក្ស (oy) ត្រង់ $(0,-\frac{1}{2})$

បើ $y=0 \Rightarrow -x-1+\frac{1}{x+2}=0$

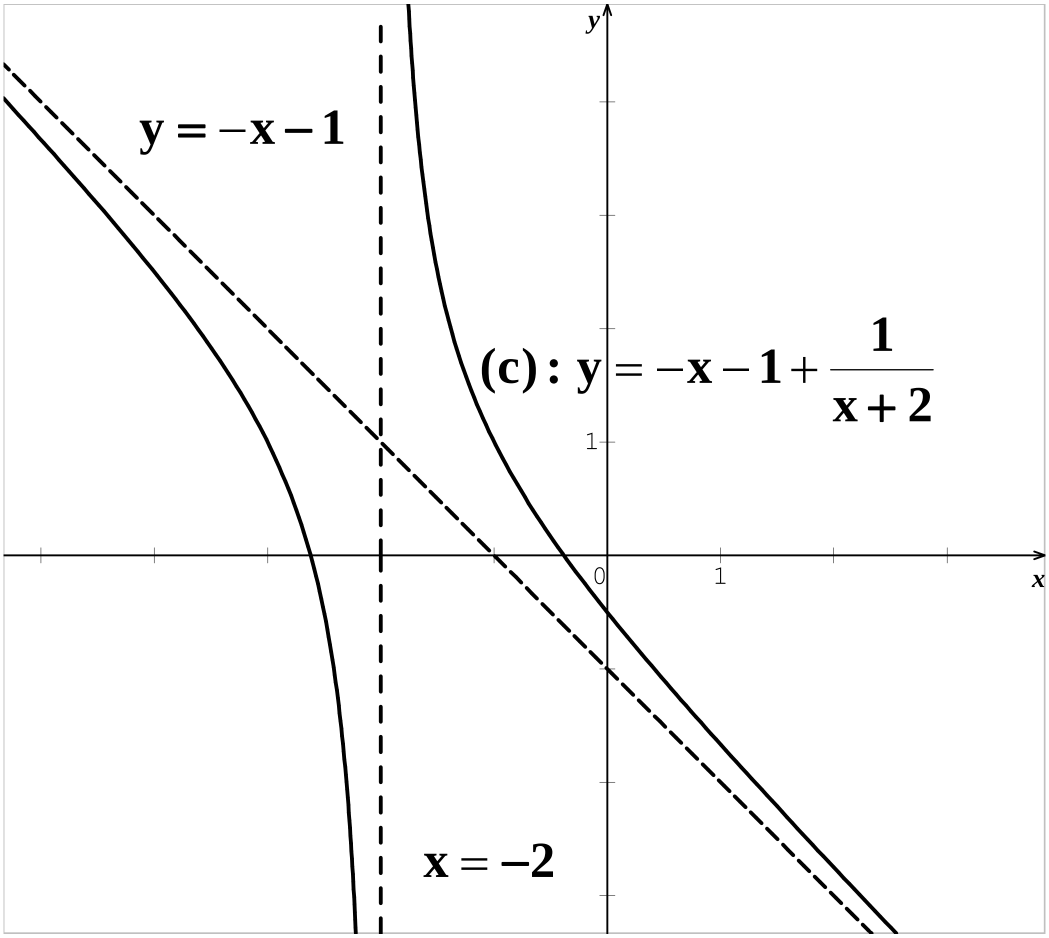
$$-x^2-3x-1=0$$

$$\Delta=9+4=5 \Rightarrow x_1=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\ ,\ x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

-ផ្ចិតឆ្លុះ

អាស៊ីមតូតឈរ $x=-2$ ប្រសព្វជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=-x-1$

ត្រង់ចំនុច $I(-2\ ,\ 1\ )$ គឺជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាង $y=-x-1+\frac{1}{x+2}$ ។



6-រកតម្លៃបរមាធៀបរបស់អនុគមន៍ $y=\dfrac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1}$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃបរមាធៀប

$$y=\frac{20x^2+10x+3}{3x^2+2x+1}$$

ដែនកំណត់ $D = IR$

អនុគមន៍អាចសរសេរ $y(3x^2 + 2x + 1) = 20x^2 + 10x + 3$

ឬ $3x^2y + 2xy + y - 20x^2 - 10x - 3 = 0$

$$(3y - 20)x^2 + 2(y - 5)x + y - 3 = 0 \quad (E)$$

$$\begin{aligned}\Delta' &= (y-5)^2 - (y-3)(3y-20) \\ &= y^2 - 10y + 25 - 3y^2 + 20y + 9y - 60 \\ &= -2y^2 + 19y - 35\end{aligned}$$

បើ $\Delta' = 0 \Rightarrow -2y^2 + 19y - 35 = 0$

មានឬស $y_1 = 7$; $y_2 = \dfrac{5}{2}$ ។

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$ មានតម្លៃបរមាធៀបលុះត្រា

តែសមីការ (E) មានឬស ពោលគឺគេត្រូវឱ្យ $\Delta' = -2y^2 + 19y - 35 \geq 0$

គេទាញ $\dfrac{5}{2} \leq y \leq 7$ ។

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមាធៀបគឺ 7 និងតម្លៃអប្បរមាធៀបគឺ $\dfrac{5}{2}$ ។

7- រកតម្លៃបរមាធៀបរបស់អនុគមន៍ $y = x^2 + 2x + 1 + \frac{a^2}{(x+1)^2}$

ដែល **a** ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រខុសពីសូន្យ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃបរមាធៀប

គេមាន $y = x^2 + 2x + 1 + \frac{a^2}{(x+1)^2} = (x+1)^2 + \frac{a^2}{(x+1)^2}$

តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រគេបាន

$$y = (x+1)^2 + \frac{a^2}{(x+1)^2} \geq 2\sqrt{(x+1)^2 \times \frac{a^2}{(x+1)^2}} = 2|a|$$

ដូចនេះអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបស្មើនឹង $2|a|$ ។

៨-សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x + 1 + \frac{1}{x+1}$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$$y = x + 1 + \frac{1}{x+1}$$

. ដែនកំណត់ $D = IR - \{-1\}$

. ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

បើ $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = -2$

-បរមានៃអនុគមន៍ y

ចំពោះ $x = -2$ អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀប $y = f(-2) = -2$

ចំពោះ $x = 0$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀប $y = f(0) = 2$ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-}\left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}\left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)=+\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x\to-1}\left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)=\pm\infty$

នោះបន្ទាត់ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$ នោះបន្ទាត់ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

.សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបជាមួយអក្ស័កូអរដោនេ

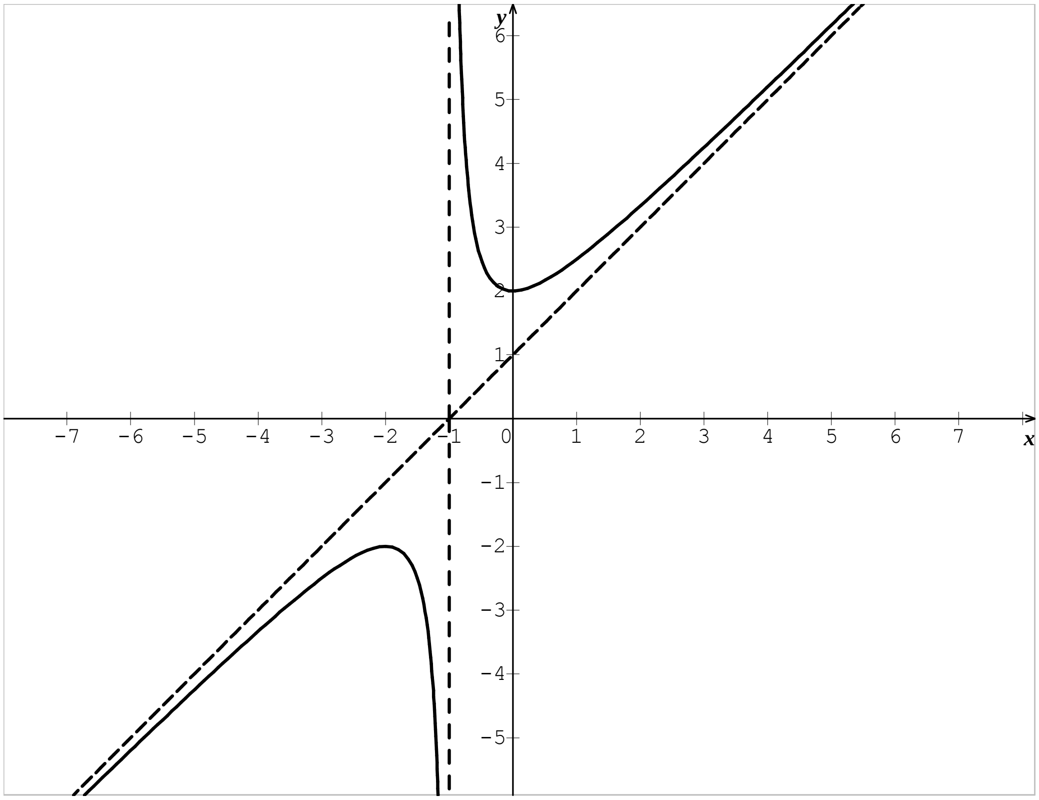
បើ $\mathbf{x = 0}$ នោះ $\mathbf{y = 2}$ នាំឱ្យក្រាបកាត់អក្ស័ **(oy)** ត្រង់ **(0, 2)**

បើ $\mathbf{y = 0 \Rightarrow x + 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + 1}{x+1} = 0}$ (គ្មានឫស)

នាំឱ្យក្រាបមិនកាត់អក្ស័ **(ox)** ទេ ។

-ផ្ចិតឆ្លុះ

អាស៊ីមតូតឈរ $\mathbf{x = -1}$ ប្រសព្វជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $\mathbf{y = x + 1}$ ត្រង់ចំនុច **I(–1 , 0)** គឺជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាង $\mathbf{y = x + 1 + \frac{1}{x+1}}$ ។



៩-គេឱ្យ C_m ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = x + 1 + \frac{4}{(x+m)^2}$

ក.តើមានក្រាប C_m ចំនួនប៉ុន្មានដែលកាត់តាមចំនុច $A(1\ ,\ 3\ )$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ប៉ះក្រាប C_m ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x = 2 - m$ ស្របនឹងអក្ស័ ox ។

ដំណោះស្រាយ

ក.តើមានក្រាប C_m ចំនួនប៉ុន្មានដែលកាត់តាមចំនុច $A(1\ ,\ 3\ )$

យកកូអរដោនេនៃចំនុច A ផ្ទៀងផ្ទាត់ក្នុងសមីការ C_m គេបាន

$$3 = 2 + \frac{4}{(m+1)^2} \Rightarrow (m+1)^2 = 4$$

គេទាញបាន $m_1 = -3\ ,\ m_2 = 1$ ។

ដូចនេះមានក្រាប C_m ពីរដែលកាត់តាម$A(1\ ,\ 3\ )$ មានសមីការរៀងគ្នា

$$y = x + 1 + \frac{4}{(x-3)^2} \quad \text{និង} \quad y = x + 1 + \frac{4}{(x+1)^2}$$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ប៉ះក្រាប C_m ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x = 2 - m$ ស្របនឹងអក្ស័ ox

គេមាន $y = x + 1 + \frac{4}{(x+m)^2}$

ដែនកំនត់ $D = IR - \{-m\}$

ដេរីវេ $y' = 1 - \frac{8}{(x+m)^3}$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ C_m ត្រង់ $x = 2-m$ គឺជាចំនួនដេរីវេ

ត្រង់ $x = 2-m$ ដែលកំណត់ដោយ $a = f'(2-m)$ ។

គេបាន $a = f(2-m) = 1 - \frac{8}{(2-m+m)^3} = 1 - 1 = 0$

លទ្ធផលនេះបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ប៉ះក្រាប C_m ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស

$x = 2-m$ ស្របនឹងអក្ស័ ox ។

មេរៀនទី២

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

- ចំនួន e ឬគោល e ដែលគេនិយមប្រើមានតម្លៃ $e = 2.718281$

  ដែល $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ។

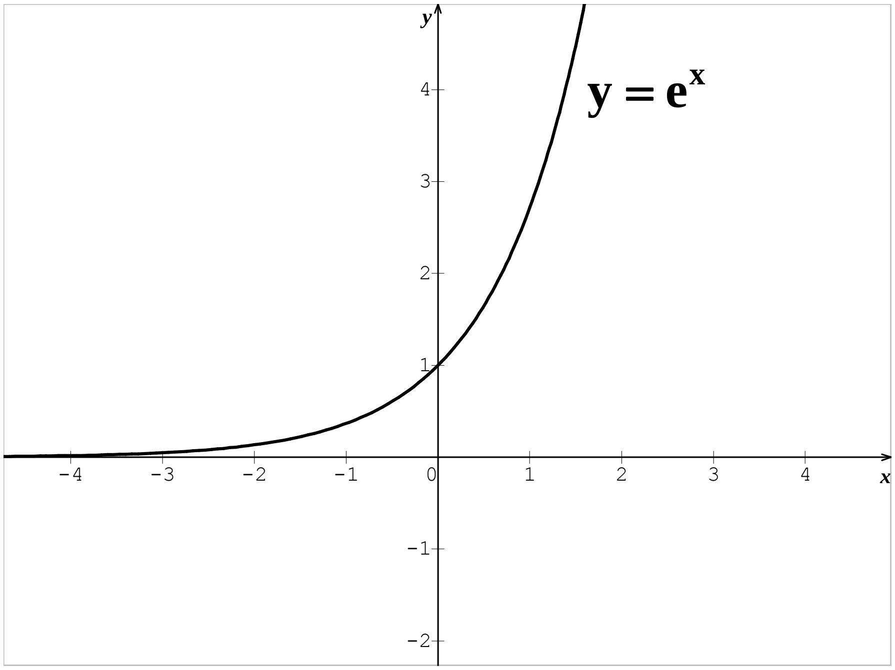
- អនុគមន៍ $f(x) = e^x$ ហៅថាអនុគមន៍អិុស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e ។

- ដេរីវេ

  -បើ $y = e^x$ នោះ $y' = e^x$

  -បើ $y = e^{u(x)}$ នោះ $y' = u'(x).e^{u(x)}$

- ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = e^x$



លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \to +\infty} e^{3x}$

ខ. $\lim_{x \to -\infty} e^{5x}$

គ. $\lim_{x \to +\infty} 6e^{2x}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim_{x \to +\infty} e^{3x} = +\infty$

ខ. $\lim_{x \to -\infty} e^{5x} = 0$

គ. $\lim_{x \to +\infty} 6e^{2x} = 6 \lim_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$

2-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x\to+\infty} xe^{x+1}$

ខ. $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{4x}$

គ. $\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{n}{x})^x$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x\to+\infty} xe^{x+1} = e\lim_{x\to+\infty}(x)\times\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

ខ. $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{4x} = 0$ ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty} e^{4x} = 0$ ។

គ. $\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{n}{x})^x = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{n}{x}\right)^{\frac{x}{n}}\right]^n = e^n$

ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^{\frac{x}{n}} = e$ ។

3-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^{x-2}}{x^3}$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}\right)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^{x-2}}{x^3} = \dfrac{3}{e^2} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{4}{x-1}\right)^{x+2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right]^{\frac{4(x+2)}{x-1}} = e^4$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}} = e$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4(x+2)}{x-1} = 4$ ។

គ. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{xe^x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{e^x} = 2$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right) = 2$ ។

4-គណនាដេរីវេខាងក្រោម

ក. $y = xe^{-x}$

ខ. $f(x) = x^2e^x$

គ. $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេខាងក្រោម

ក. $y = xe^{-x}$

គេបាន $y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

ដូចនេះ $y' = (1-x)e^{-x}$ ។

ខ. $f(x)=x^2e^x$

គេបាន $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(2+x)e^x$

ដូចនេះ $f'(x)=x(x+2)e^x$ ។

គ. $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

គេបាន $$g'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$$

5-គណនាដេរីវេខាងក្រោម

ក. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{e^x(1+\cos x)}{1-\cos x}$

គ. $g(x)=e^{\frac{x-1}{x+1}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេខាងក្រោម

ក. $\mathbf{y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$

គេបាន $\mathbf{y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$

ខ. $\mathbf{f(x) = \frac{e^x(1+\cos x)}{1-\cos x}}$

គេបាន

$$\mathbf{f'(x) = \frac{e^x(1-\cos^2 x) - e^x \sin x(1-\cos x) - \sin x e^x(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}}$$

$$\mathbf{= \frac{e^x(\sin^2 x - \sin x + \sin x\cos x - \sin x + \sin x \cos x)}{(1-\cos x)^2}}$$

$$\mathbf{= \frac{(\sin x + 2\cos x - 2)\sin x e^x}{(1-\cos x)^2}}$$

គ. $\mathbf{g(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}}$

គេបាន $\mathbf{g'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' e^{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} e^{\frac{x-1}{x+1}}}$

ដូចនេះ $\mathbf{g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} e^{\frac{x-1}{x+1}}}$ ។

6-សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = x^2e^{-x}$

ខ. $y = 5 + 2e^{-x}$

គ. $g(x) = e^x - x^2$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = x^2e^{-x}$

.ដែនកំណត់ $D = IR$

.ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

-បើ $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \; ; \; x_2 = 2$

ចំពោះ $x = 0$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀប $y = f(0) = 0$

ចំពោះ $x = 2$ អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀប $y = \frac{4}{e^2}$

-គណនាលីមីត

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^{-x} = +\infty$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2e^{-x} = 0$

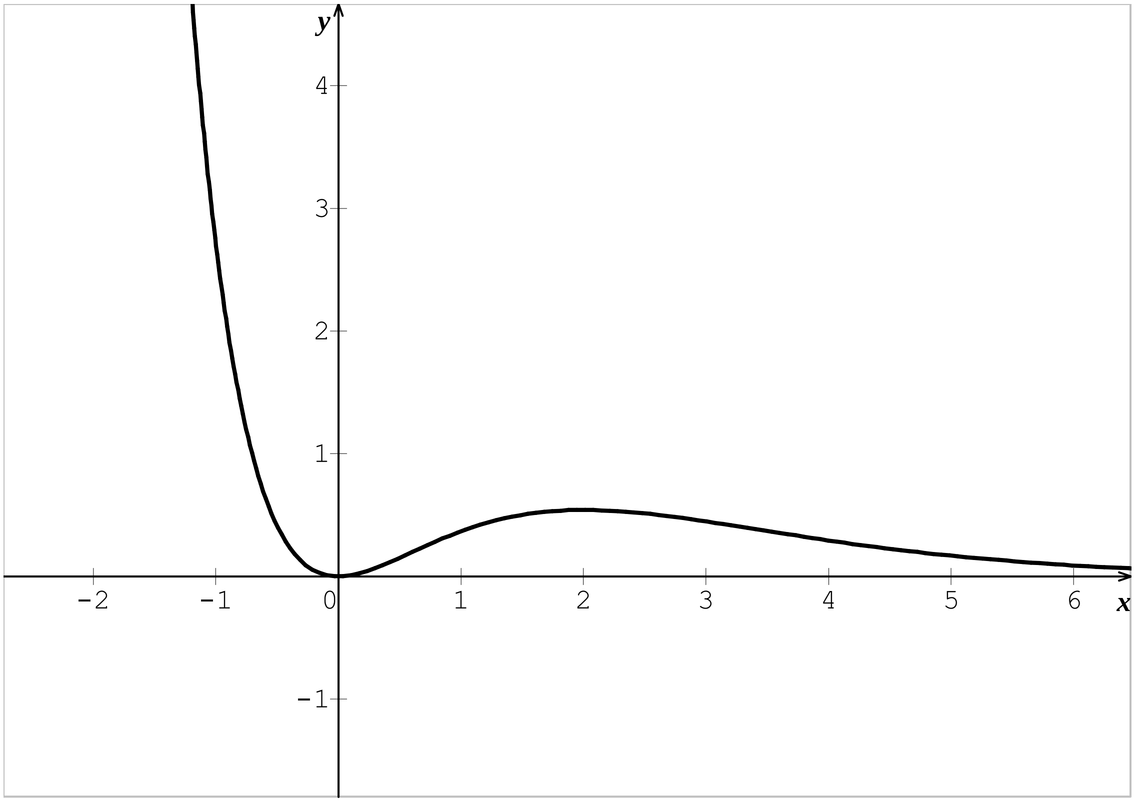
-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	$-\infty$

.សំណង់ក្រាប $(C): y=x^2e^{-x}$



ខ. $y = 5 + 2e^{-x}$

.ដែនកំណត់ $D = IR$

.ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = -2e^{-x} < 0$, $\forall x \in IR$

នាំឱ្យអនុគមន៍ f ចុះជានិច្ច ។ នាំឱ្យអនុគមន៍គ្មានចំនុចបរមាធៀបទេ ។

-គណនាលីមីត

$\lim_{x \to -\infty}(5 + 2e^{-x}) = +\infty$ និង $\lim_{x \to +\infty}(5 + 2e^{-x}) = 5$

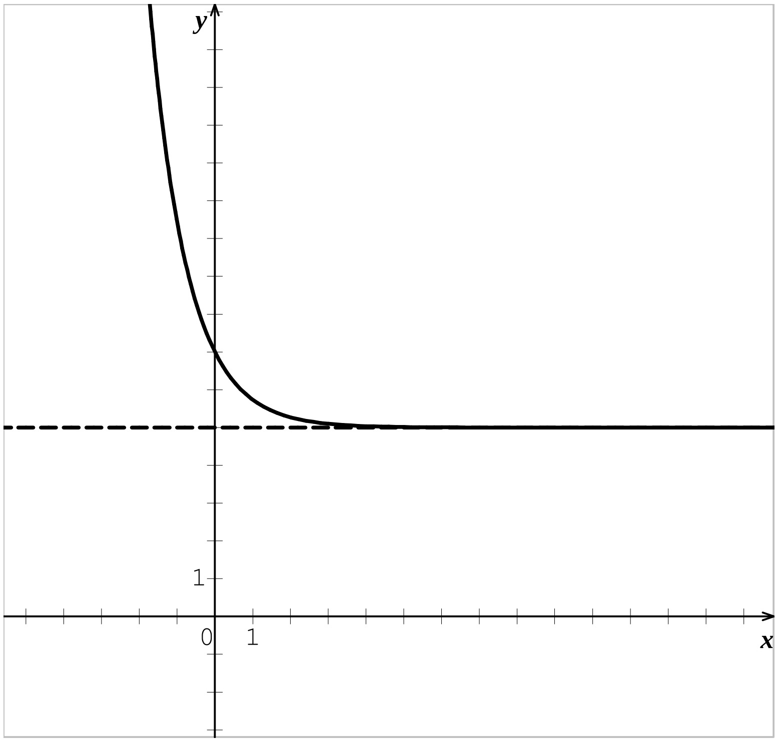
-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x \to +\infty}(5 + 2e^{-x}) = 5$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 5$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

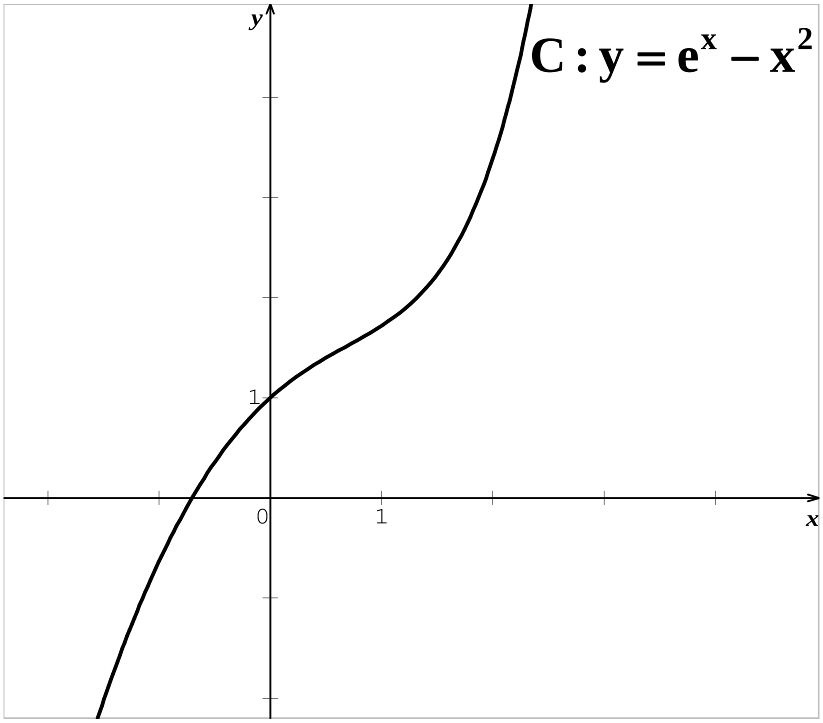
-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	$-$	
y	$+\infty$ ↘	5

.សំណង់ក្រាប $(C): y = 5 + 2e^{-x}$



គ. $g(x) = e^{x} - x^{2}$



7-សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x)=\dfrac{1}{2-e^{-x}}$

ខ. $g(x)=\dfrac{e^{x}}{x^{2}}$

គ. $g(x)=\dfrac{x}{e^{x}}$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x)=\dfrac{1}{2-e^{-x}}$

.ដែនកំណត់ $D=IR-\{-\ln 2\}$

.ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y'=-\dfrac{e^{-x}}{(2-e^{-x})^{2}}<0$

នាំឱ្យអនុគមន៍ f ចុះជានិច្ច ។ នាំឱ្យអនុគមន៍គ្មានចំនុចបរមាធៀបទេ ។

-គណនាលីមីត

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2-e^{-x}}=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2-e^{-x}}=\dfrac{1}{2}$

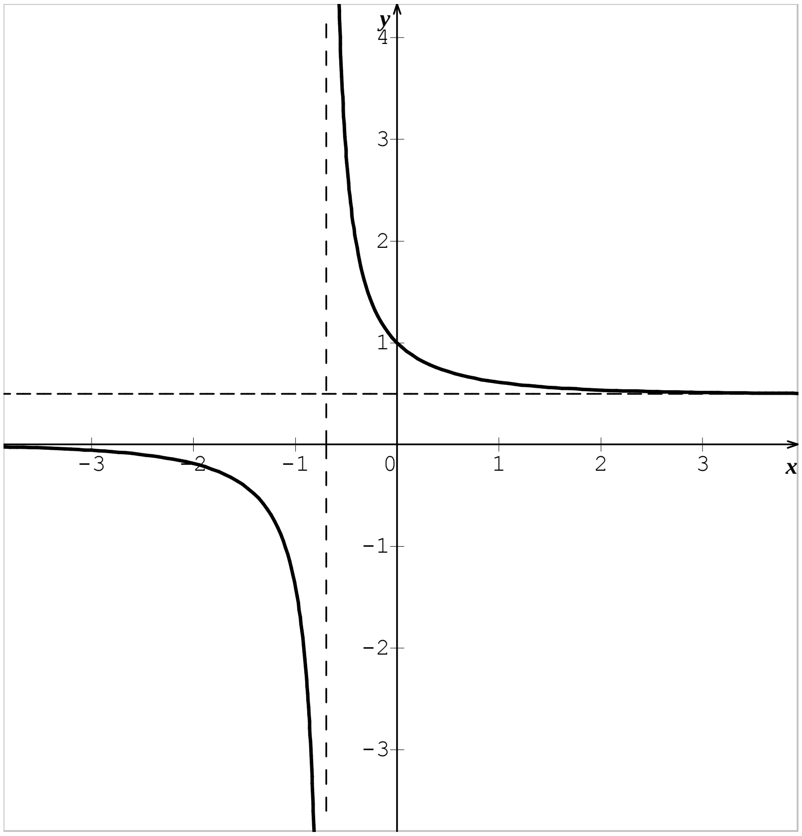
-អាស៊ីមតូត ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2-e^{-x}}=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2-e^{-x}}=\dfrac{1}{2}$

នាំឱ្យ $y=0$ និង $y=\dfrac{1}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

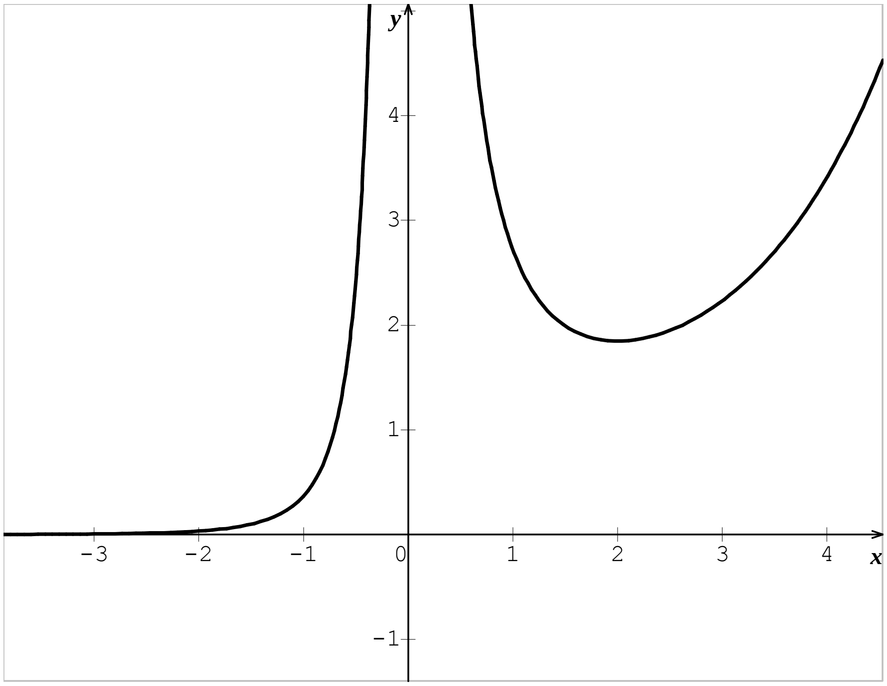
-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$

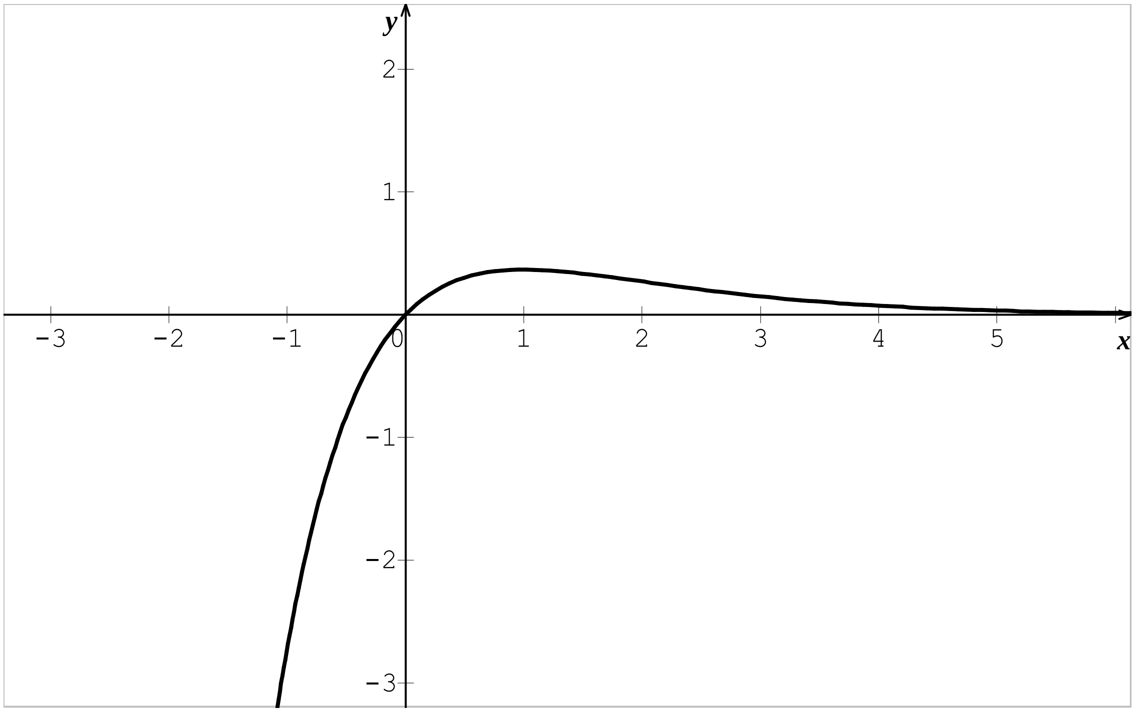
.សំណង់ក្រាប $(C): y=\dfrac{1}{2-e^{-x}}$



ខ. $g(x)=\frac{e^x}{x^2}$



គ. $g(x)=\frac{x}{e^x}$



៨-ឧបមាថាគេយកប្រាក់ **5000** ដុល្លា ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស **11%** ក្នុងមួយឆ្នាំ ។
បើគេផ្ញើរយៈពេល 10 ឆ្នាំ តើគេទទួលបានប្រាក់សរុបទាំងអស់ចំនួនប៉ុន្មានបើការទូទាត់ច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំ ?

ដំណោះស្រាយ

គណនាប្រាក់សរុបដែលគេទទួលបាន

ដោយការទូទាត់មានច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំនោះតាមរូបមន្ត

$\mathbf{A = p\,e^{r.t}}$ ដែល **A :** ជាប្រាក់សរុប

p : ជាប្រាក់ដើម

r : ជាអត្រាការប្រាក់សមាស

t : ជារយៈពេលដាក់ប្រាក់សន្សំ

គេបាន $\mathbf{A = 5000 \times (2.718)^{(0.11)(10)} = 15019}$ ដុល្លា ។

មេរៀនទី៣

អនុគមន៍លោការីត

◆ លោការីតនេពែនៃចំនួនវិជ្ជមាន k គឺជានិទស្សន្ត x នៃ e ដែល $e^x = k$

គេកំនត់សរសេរ $x = \ln k$ ហើយ $x = \ln k \Leftrightarrow e^x = k$ ។

◆ អនុគមន៍ $f(x) = \ln x$ ហៅថាអនុគមន៍លោការីតនេពែនៃ $x > 0$ ។

◆ លីមីត

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$, $n > 0$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

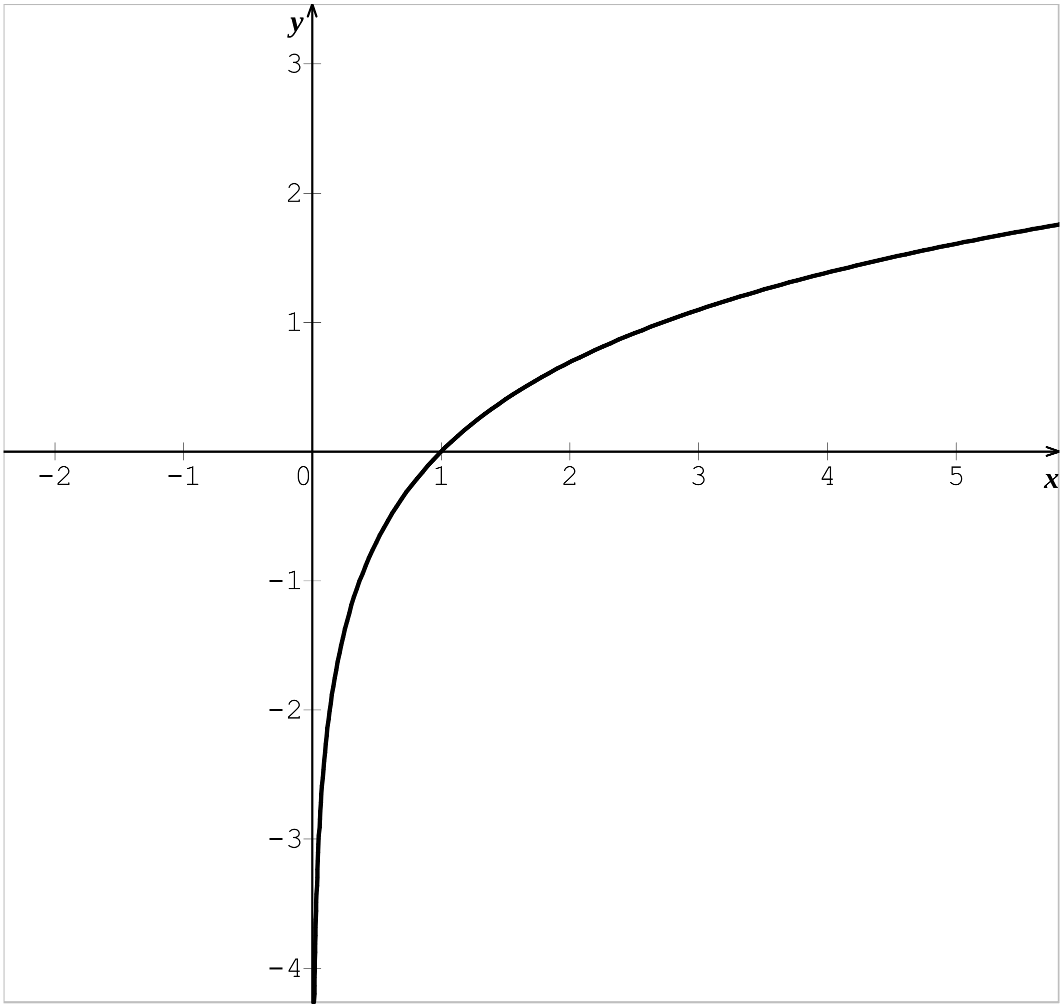
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = +\infty$

◆ ដេរីវេ

-បើ $y = \ln x$ នោះ $y' = \dfrac{1}{x}$

-បើ $y = \ln u(x)$ នោះ $y' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

◆ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \ln x$



លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម

ក. $e^{\ln 7}$

ខ. $\ln e^{x-2}$

គ. $\ln e^{7x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម

ក. $e^{\ln 7} = 7$

ខ. $\ln e^{x-2} = x - 2$

គ. $\ln e^{7x} = 7x$

2-សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = 3 - \ln x$

ខ. $y = \ln(x-3)$

គ. $y = \ln(2+e^x)$

ដំណោះស្រាយ

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = 3 - \ln x$

.ដែនកំណត់ $D = (\ 0\ ;+\infty\ )$

.ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = -\frac{1}{x} < 0\ \forall x \in (0,+\infty)$

នាំឱ្យវាជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើដែនកំនត់ និងគ្មានចំនុចបរមាធៀបទេ ។

-គណនាលីមីត

$\lim\limits_{x\to+\infty}(3-\ln x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to0^+}(3-\ln x) = +\infty$

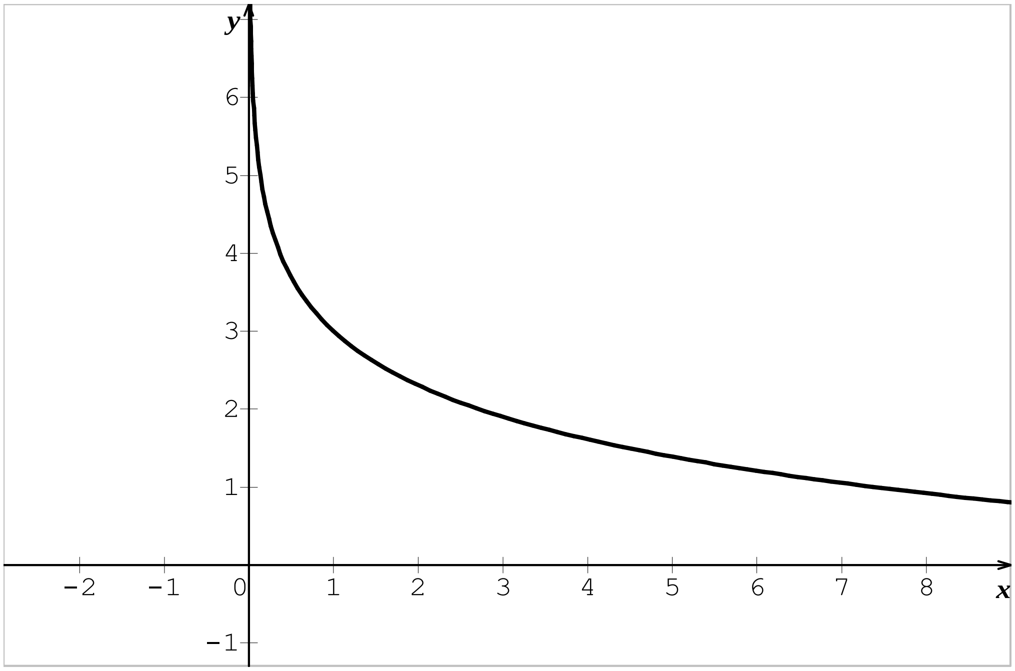
-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to0^+}(3-\ln x) = +\infty$ នាំឱ្យអក្ស៊ (oy) ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

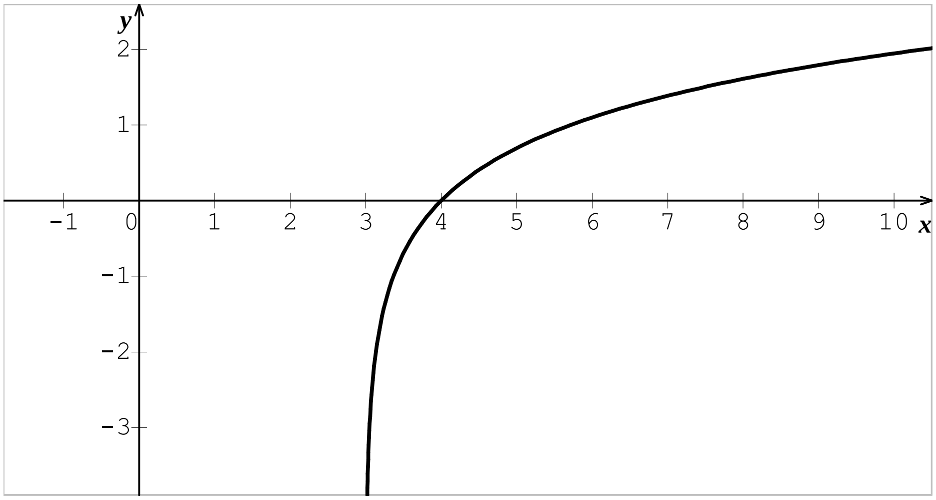
-តារាងអថេរភាព

x	0		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

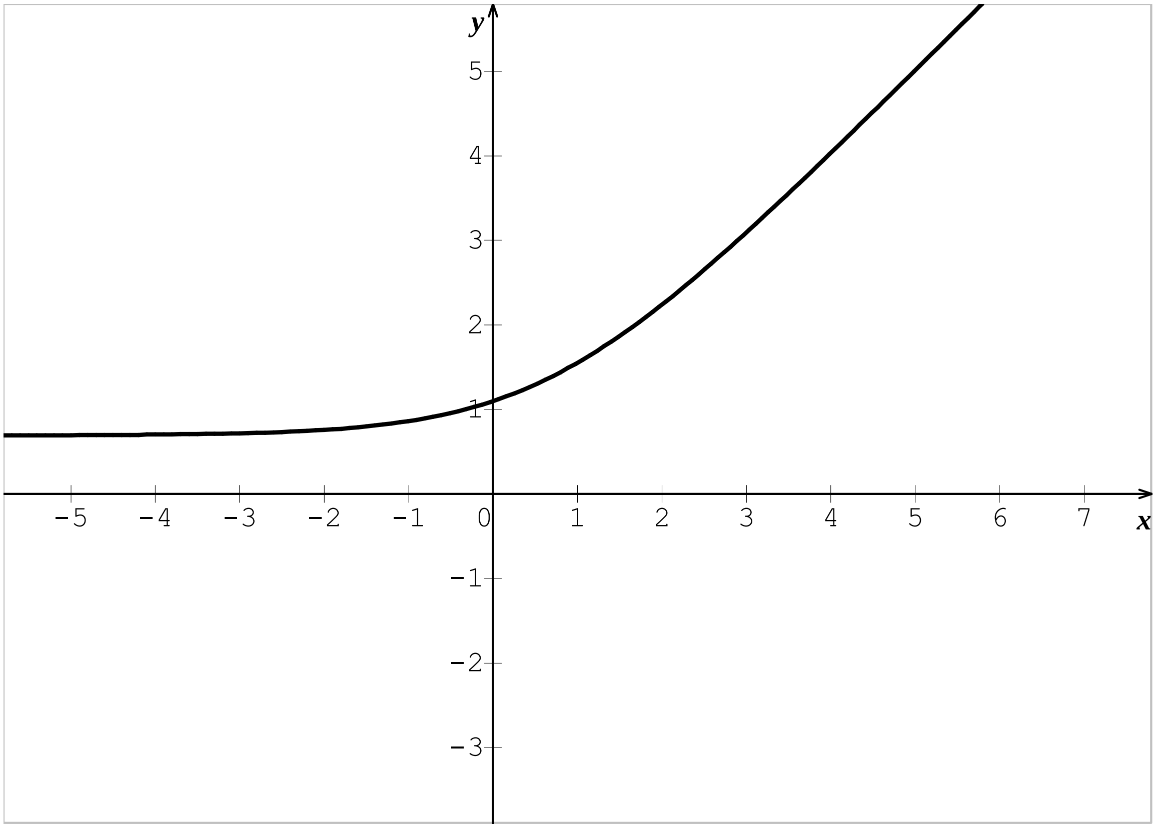
.សំណង់ក្រាប $\mathbf{y = 3 - \ln x}$



ខ. $y = \ln(x-3)$



គ. $y = \ln(2+e^x)$



3-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-5}\ln x$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{x^2}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-5}\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^5} = 0$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}\right) = 0$

គ. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

4-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \sqrt{x}.\ln x$

ខ. $y = x\sqrt[3]{\ln x}$

គ. $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $\mathbf{y = \sqrt{x}.\ln x}$

គេបាន $\mathbf{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}}$

ខ. $\mathbf{y = x\sqrt[3]{\ln x} = x(\ln x)^{\frac{1}{3}}}$

គេបាន $\mathbf{y' = (\ln x)^{\frac{1}{3}} + (\ln x)^{-\frac{2}{3}}}$

គ. $\mathbf{y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$

គេបាន $\mathbf{y' = \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}}$

$$\mathbf{= \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$ ។

5-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y=\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}$

ខ. $y=x\ln x-x$

គ. $y=x^2\ln\dfrac{1}{x^2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y=\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}=\ln e^x-\ln(e^x+1)=x-\ln(e^x+1)$

គេបាន $y'=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x+1}$

ខ. $y=x\ln x-x$

គេបាន $y'=\ln x-x.\dfrac{1}{x}-1=\ln x-2$

គ. $y=x^2\ln\dfrac{1}{x^2}=-x^2\ln x^2$

គេបាន $y'=-2x\ln x^2-x^2.\dfrac{2x}{x^2}=-2x(2\ln|x|+1)$

មេរៀនទី១

ព្រីមីទីវ និង អាំងតេក្រាលមិនកំនត់

◆ និយមន័យ

$F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ កាលណា $F'(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំនត់នៃអនុគនី $f(x)$ ។

◆ ទ្រឹស្តីបទ

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $f(x)$ មានទម្រង់ទូទៅ $F(x)+C$ ដែល C ជាចំនួនពិតថេរ ។

◆ និយមន័យអាំងតេក្រាលមិនកំនត់

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំនត់នៃ $f(x)$ កំនត់ដោយ $\int f(x).dx = F(x) + C$

ដែល C ជាចំនួនពិតថេរ ។

◆ លក្ខណៈអាំងតេក្រាលមិនកំនត់

1. $\int kf(x).dx = k.\int f(x).dx$ ដែល k ជាចំនួនពិតថេរ ។

2. $\int [f(x) \pm g(x)].dx = \int f(x).dx \pm \int g(x).dx$

◆ រូបមន្តអាំងតេក្រាលមិនកំនត់

1. $\int k.dx = kx + C$

2. $\int x^n.dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, $C \in IR$, $n \neq -1$

3. $\int \frac{1}{x}.dx = \ln|x| + C$

4. $\int \frac{1}{x^2}.dx = -\frac{1}{x} + C$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}.dx = 2\sqrt{x} + C$

6. $\int e^x.dx = e^x + C$

7. $\int \sin x.dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x.dx = \sin x + C$

9. $\int \frac{1}{\cos^2 x}.dx = \tan x + C$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x}.dx = -\cot x + C$

11. $\int k.f'(x).dx = k.f(x) + C$

12. $\int f^n(x).f'(x).dx = \frac{1}{n+1}f^{n+1}(x) + C$

13. $\int f'(x).e^{f(x)}.dx = e^{f(x)} + C$

14. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}.dx = \ln|f(x)| + C$

15. $\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}.dx = -\frac{1}{(n-1)f^{n-1}(x)} + C$

16. $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}.dx = -\frac{1}{f(x)} + C$

17. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}.dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

18. $\int \sin[f(x)].f'(x).dx = -\cos[f(x)] + C$

19. $\int \cos[f(x)].f'(x).dx = \sin[f(x)] + C$

20. $\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}.dx = \tan[f(x)] + C$

21. $\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}.dx = -\cot[f(x)] + C$

◆ រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\int f(x).g'(x).dx = f(x).g(x) - \int g(x).f'(x).dx$$

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$, $\forall x \in IR$ ដែល

ក. $F(x) = -7x + 4$ និង $f(x) = -7$

ខ. $F(x) = 3x^3 - 7x$ និង $f(x) = 9x^2 - 7$

គ. $F(x) = 3e^{x^2-1} - 7$ និង $f(x) = 6xe^{x^2-1}$

ឃ. $F(x) = \ln(e^{3x} - x) + \sqrt{11}$ និង $f(x) = \dfrac{3e^{3x} - 1}{e^{3x} - x}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$, $\forall x \in IR$

ក. $F(x) = -7x + 4$ និង $f(x) = -7$

គេមាន $F'(x) = -7 = f(x)$, $\forall x \in IR$

ដូចនេះ $F(x) = -7x + 4$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = -7$ ។

ខ. $F(x) = 3x^3 - 7x$ និង $f(x) = 9x^2 - 7$

គេមាន $F'(x) = 9x^2 - 7 = f(x)$, $\forall x \in IR$

ដូចនេះ $F(x) = 3x^3 - 7x$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = 9x^2 - 7$ ។

គ. $F(x)=3e^{x^2-1}-7$ និង $f(x)=6xe^{x^2-1}$

គេមាន $F'(x)=6xe^{x^2-1}=f(x)\ ,\ \forall x\in IR$

ដូចនេះ $F(x)=3e^{x^2-1}-7$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=6xe^{x^2-1}$ ។

ឃ. $F(x)=\ln(e^{3x}-x)+\sqrt{11}$ និង $f(x)=\dfrac{3e^{3x}-1}{e^{3x}-x}$

គេមាន $F'(x)=\dfrac{(e^{3x}-x)'}{e^{3x}-x}=\dfrac{3e^{3x}-1}{e^{3x}-x}f(x)\ ,\ \forall x\in IR$

ដូចនេះ $F(x)=\ln(e^{3x}-x)+\sqrt{11}$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=\dfrac{3e^{3x}-1}{e^{3x}-x}$

2-រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x)$ កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ I ដោយ

ក. $f(x)=5\ \ ,\ I=IR$ ខ. $f(x)=-4x+3\ ,\ I=IR$

គ. $f(x)=-x^2+3x+5\ ,\ I=IR$

ឃ. $f(x)=\dfrac{2}{x}\ ;\ I=(0\ ,+\infty)$

ង. $f(x)=\dfrac{1}{3x+2}\ ,\ I=(-\dfrac{2}{3}\ ,+\infty)$

ច. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5}$ ឆ. $f(x)=e^{3x-2}$

ជ. $f(x)=xe^{x^2}\ \ ,\ I=IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកព្រីមីទីវ $\mathbf{F(x)}$ នៃ $\mathbf{f(x)}$

ក. $\mathbf{f(x)=5 \quad , I = IR}$

តាមនិយមន័យគេបាន $\mathbf{F'(x)=f(x)=5}$

គេទាញ $\mathbf{F(x)=\int 5dx = 5x+C \quad , \quad C \in IR}$

ខ. $\mathbf{f(x)=-4x+3 \ , I = IR}$

តាមនិយមន័យគេបាន $\mathbf{F'(x)=f(x)=-4x+3}$

គេទាញ $\mathbf{F(x)=\int (-4x+3)dx = -2x^2+3x+C \quad , \quad C \in IR}$

គ. $\mathbf{f(x)=-x^2+3x+5 \ , I = IR}$

តាមនិយមន័យគេបាន $\mathbf{F'(x)=f(x)=-x^2+3x+5}$

គេទាញ

$$\mathbf{F(x)=\int (-x^2+3x+5).dx}$$

$$\mathbf{=-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+5x+C \quad , \quad C \in IR}$$

ឃ. $\mathbf{f(x)=\frac{2}{x} \ ; \ I=(0 \ , +\infty)}$

តាមនិយមន័យគេបាន $\mathbf{F'(x)=f(x)=\frac{2}{x}}$

គេទាញ $F(x)=\int \frac{2}{x}dx = 2\ln x + C$, $C \in IR$

ង. $f(x)=\frac{1}{3x+2}$, $I=(-\frac{2}{3},+\infty)$

តាមនិយមន័យគេបាន $F'(x)=f(x)=5$

គេទាញ $F(x)=\int \frac{1}{3x+2}dx = \frac{1}{3}\ln(3x+2)+C$, $C \in IR$

ច. $f(x)=\frac{x}{x^2+5}$

តាមនិយមន័យគេបាន $F'(x)=f(x)=\frac{x}{x^2+5}$

គេទាញ $F(x)=\int \frac{x}{x^2+5}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+5)+C$, $C \in IR$

ឆ. $f(x)=e^{3x-2}$

តាមនិយមន័យគេបាន $F'(x)=f(x)=e^{3x-2}$

គេទាញ $F(x)=\int e^{3x-2}dx = \frac{1}{3}e^{3x-2}+C$, $C \in IR$

ជ. $f(x)=xe^{x^2}$, $I=IR$

តាមនិយមន័យគេបាន $F'(x)=f(x)=xe^{x^2}$

គេទាញ $F(x)=\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$, $C \in IR$ ។

3-រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំនត់ដោយ

ក.$f(x)=\frac{3}{\cos^2 x}$ និង $F(\frac{\pi}{4})=-1$

ខ.$f(x)=x^2-x$ និង $F(o)=1$

គ. $f(x)=x^2-e^x$ និង $F(0)=1$

ឃ.$f(x)=x^2-xe^{x^2}$ និង $F(0)=1$

ដំណោះស្រាយ

រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំនត់ដោយ

ក.$f(x)=\frac{3}{\cos^2 x}$ និង $F(\frac{\pi}{4})=-1$

គេបាន $F'(x)=f(x)=\frac{3}{\cos^2 x}$

គេទាញ $F(x)=\int \frac{3}{\cos^2 x}dx=3\tan x+C$

បើ $x=\frac{\pi}{4}$ នោះ $F(\frac{\pi}{4})=3\tan\frac{\pi}{4}+C=-1\Rightarrow C=-4$

ដូចនេះ $F(x)=3\tan x-4$ ។

ខ.$f(x)=x^2-x$ និង $F(o)=1$

គេបាន $F'(x)=f(x)=x^2-x$

គេទាញ $F(x)=\int (x^2-x)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$

បើ $x=0$ នោះ $F(0)=C=1$

ដូចនេះ $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+1$ ។

គ. $f(x)=x^2-e^x$ និង $F(0)=1$

គេបាន $F'(x)=f(x)=x^2-e^x$

គេទាញ $F(x)=\int (x^2-e^x)dx=\frac{1}{3}x^3-e^x+C$

បើ $x=0$ នោះ $F(0)=-1+C=1\Rightarrow C=2$

ដូចនេះ $F(x)=\frac{1}{3}x^3-e^x+2$ ។

ឃ.$f(x)=x^2-xe^{x^2}$ និង $F(0)=1$

គេបាន $F'(x)=f(x)=x^2-xe^{x^2}$

គេទាញ $F(x)=\int (x^2-xe^{x^2})dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

បើ $x=0$ នោះ $F(0)=-\frac{1}{2}+C=1\Rightarrow C=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{x^2}+\frac{3}{2}$ ។

4-រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ

ក. $f(x)=\sin x$ និង $F(0)=3$

ខ. $f(x)=x-e^{x}$ និង $F(1)=1-e$

គ. $f(x)=\dfrac{x}{(x^{2}-4)^{3}}$ និង $F(5)=3$

ឃ. $f(x)=\sin x\cos^{3}x$ និង $F(\frac{\pi}{4})=16$

ដំណោះស្រាយ

រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ

ក. $f(x)=\sin x$ និង $F(0)=3$

គេបាន $F'(x)=f(x)=\sin x$

គេទាញ $F(x)=\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

បើ $x=0$ នោះ $F(0)=-1+C=3\Rightarrow C=4$

ដូចនេះ $F(x)=-\cos x+4$ ។

ខ. $f(x) = x - e^x$ និង $F(1) = 1 - e$

គេបាន $F'(x) = f(x) = x - e^x$

គេទាញ $F(x) = \int (x - e^x)dx = \frac{1}{2}x^2 - e^x + C$

បើ $x = 1$ នោះ $F(1) = \frac{1}{2} - e + C = 1 - e \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - e^x + \frac{1}{2}$ ។

គ. $f(x) = \frac{x}{(x^2 - 4)^3}$ និង $F(5) = 3$

គេបាន $F'(x) = f(x) = \frac{x}{(x^2 - 4)^3}$

គេទាញ $F(x) = \int \frac{x}{(x^2 - 4)^3}.dx$

តាង $u = x^2 - 4 \Rightarrow du = 2xdx$

គេបាន $F(x) = \frac{1}{2}\int u^{-3}du = -\frac{1}{4}u^{-2} + C$

ឬ $F(x) = -\frac{1}{4}.\frac{1}{(x^2 - 4)^2} + C$

បើ $x = 5$ នោះ $F(5) = -\frac{1}{1764} + C = 3 \Rightarrow C = \frac{5293}{1764}$

ដូចនេះ $F(x) = -\frac{1}{4(x^2 - 4)^2} + \frac{5293}{1764}$ ។

ឃ.$f(x)=\sin x\cos^3 x$ និង $F(\frac{\pi}{4})=16$

គេបាន $F'(x)=f(x)=\sin x\cos^3 x$

គេទាញ $F(x)=\int \sin x\cos^3 x dx=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

បើ $x=\frac{\pi}{4}$ នោះ $F(\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{16}+C=16\Rightarrow C=\frac{257}{16}$

ដូចនេះ $F(x)=-\frac{1}{4}\cos^4 x+\frac{257}{16}$ ។

5-គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក.$\int (2x^3-5x^2+3x+1)dx$ ខ.$\int (5-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$

គ.$\int 2\sqrt[4]{x}.dx$ ឃ.$\int (\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5})dx$

ង.$\int (x^2-1)\sqrt{x}.dx$ ច.$\int (2e^x+\frac{6}{x}-\ln 5)dx$

ឆ.$\int \frac{4x^4-3x^5+1}{x^4}dx$ ជ.$\int \frac{3x^2-2x+1}{\sqrt{x}}.dx$

ឈ.$\int (3\sin x+5\cos x)dx$ ញ.$\int (\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{4}{\cos^2 x}-5)dx$

ដ.$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}.dx$ ឋ.$\int (1-e^x)^2 dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $\int (2x^3 - 5x^2 + 3x + 1)dx$

$= 2\int x^3dx - 5\int x^2dx + 3\int xdx + \int dx$

$= \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$

ខ. $\int (5 - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

$= 5\int dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= 5x - 2\sqrt{x} + C$

គ. $\int 2\sqrt[4]{x}.dx$

$= 2\int x^{\frac{1}{4}}dx = \frac{8}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$

ឃ. $\int (\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5})dx$

$= 3\int x^{-4}dx + \int x^{-5}dx = -x^{-3} - \frac{1}{4}x^{-4} + C$

ង. $\int (x^2 - 1)\sqrt{x}.dx$

$= \int x^{\frac{5}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

ច. $\int (2e^x + \frac{6}{x} - \ln 5)dx$

$= 2\int e^x + 6\int \frac{dx}{x} - \ln 5\int dx$

$= 2e^x + 6\ln|x| - x\ln 5 + C$

ឆ. $\int \frac{4x^4 - 3x^5 + 1}{x^4}dx$

$= 4\int dx - 3\int xdx + \int x^{-4}dx$

$= 4x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^{-3} + C$

ជ. $\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}}.dx$

$= 3\int x^{\frac{3}{2}}dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + C$

ឈ. $\int (3\sin x + 5\cos x)dx$

$= 3\int \sin xdx + 5\int \cos xdx$

$= -3\cos x + 5\sin x + C$

ញ. $\int (\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{4}{\cos^2 x} - 5)dx$

$= -Cotx + 4\tan x - 5x + C$

ដឹ. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}.dx$

$= \int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}.dx$

$= \int (e^{2x}-e^x+1)dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$

បឹ. $\int (1-e^x)^2 dx$

$= \int (1-2e^x+e^{2x}).dx$

$= \int dx - 2\int e^x dx + \int e^{2x}dx$

$= x - 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

ឱ. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}.dx = 4\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}dx = -\frac{2}{\sin 2x} + C$

ឰ. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = 4\int \frac{dx}{\sin^2 2x} = -2\cot 2x + C$

៦-គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម

ក. $\int 3e^{3x}dx$

ខ. $\int 2xe^{x^2}dx$

គ. $\int 5e^{4-5x}dx$

ឃ. $\int (6x-7)e^{3x^2-7x}dx$

ង. $\int (3x^2-2x+1)e^{x^3-x^2+x}dx$

ច. $\int \cos x\, e^{\sin x}dx$

ឆ. $\int xe^{x^2}dx$

ជ. $\int 6x^2e^{x^3}dx$

ឈ. $\int (x+1)e^{x^2+2x}dx$

ញ. $\int \frac{2}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int 3e^{3x}dx = \int e^{3x}.(3x)'\,dx = e^{3x} + C$

ខ. $\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}.(x^2)'\,dx = e^{x^2} + C$

គ. $\int 5e^{4-5x}dx = -\int e^{4-5x}(4-5x)'\,dx = -e^{4-5x} + C$

ឃ. $\int (6x-7)e^{3x^2-7x}dx = \int e^{3x^2-7x}(3x^2-7x)'\,dx$

$$= e^{3x^2-7x} + C$$

ង. $\int (3x^2 - 2x + 1)e^{x^3 - x^2 + x}dx$

$= \int e^{x^3 - x^2 + x}(x^3 - x^2 + x)'dx$

$= e^{x^3 - x^2 + x} + C$

ច. $\int \cos x\, e^{\sin x}dx$

$= \int e^{\sin x}(\sin x)'dx = e^{\sin x} + C$

ឆ. $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)'dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

ជ. $\int 6x^2e^{x^3}dx = 2\int e^{x^3}(x^3)'dx = 2e^{x^3} + C$

ឈ. $\int (x+1)e^{x^2+2x}dx$

$= \frac{1}{2}\int e^{x^2+2x}(x^2+2x)'dx = \frac{1}{2}e^{x^2+2x} + C$

ញ. $\int \frac{2}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}dx = -4\int (-\sqrt{x})'e^{-\sqrt{x}}dx$

$= -4e^{-\sqrt{x}} + C$

7-គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $\int xe^{-x}dx$

ខ. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx$

គ. $\int (1-x)e^{x}dx$

ឃ. $\int (3-2x)e^{-x}dx$

ង. $\int x\ln 2x.dx$

ច. $\int x\ln x^{2}dx$

ឆ. $\int xe^{-\frac{x}{5}}dx$

ជ. $\int xe^{0.1x}dx$

ឈ. $\int x\sqrt{x-6}\,.dx$

ញ. $\int x\sqrt{1-x}dx$

ដ. $\int x(x+1)^{8}dx$

ឋ. $\int (x+1)(x+2)^{6}dx$

ឌ. $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$

ឍ. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$

ណ. $\int x^{2}e^{-x}dx$

ត. $\int x^{2}e^{3x}dx$

ថ. $\int x^{3}e^{x}dx$

ទ. $\int x^{3}e^{2x}dx$

ធ. $\int x^{2}\ln x.dx$

ន. $\int x(\ln x)^{2}dx$

ប. $\int \frac{\ln x}{x^{2}}dx$

ផ. $\int \frac{\ln x}{x^{3}}.dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $\int xe^{-x}dx$

តាង $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$

តាមរូបមន្ត $\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int g(x)f'(x)dx$

គេបាន $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$

$= -(x+1)e^{-x} + C$

ខ. $\int xe^{\frac{x}{2}}dx = 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + C$

គ. $\int (1-x)e^{x}dx = (2-x)e^{x} + C$

ឃ. $\int (3-2x)e^{-x}dx = (2x-1)e^{-x} + C$

ង. $\int x\ln 2x.dx = \frac{1}{2}x^2\ln 2x - \frac{x^2}{4} + C$

ច. $\int x\ln x^2dx = \frac{x^2}{2}(\ln x^2 - 1) + C$

ឆ. $\int xe^{-\frac{x}{5}}dx = -5(x+5)e^{-\frac{x}{5}} + C$

ជ. $\int xe^{0.1x}dx = 10(x-10)e^{0.1x} + C$

ឈ. $\int x\sqrt{x-6}\,.dx = \frac{2}{3}x(x-6)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x-6)^{\frac{5}{2}} + C$

ញ. $\int x\sqrt{1-x}dx = -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}} + C$

ដ. $\int x(x+1)^8dx = \frac{1}{10}(x+1)^{10} - \frac{1}{9}(x+1)^9 + C$

ឋ. $\int (x+1)(x+2)^6dx = \frac{(x+2)^8}{8} - \frac{(x+2)^7}{7} + C$

ឌ. $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx = 2x\sqrt{x+2} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+2)^3} + C$

ឍ. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx = -\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + x(2x+1)^{\frac{1}{2}} + C$

ណ. $\int x^2e^{-x}dx = -(x^2+2x+2)e^{-x} + C$

ត. $\int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9})e^{3x} + C$

ថ. $\int x^3e^xdx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$

ទ. $\int x^3e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4})e^{2x} + C$

ធ. $\int x^2\ln x.dx = \frac{x^3\ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$

ន. $\int x(\ln x)^2dx = \frac{x^2}{2}\left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right] + C$

បែ. $\int \frac{\ln x}{x^2} = -\frac{1+\ln x}{x} + C$

ផ. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{2\ln x+1}{4x^2} + C$ ។

មេរៀនទី២

អាំងតេក្រាលកំណត់

◆ រូបមន្តអាំងតេក្រាលកំណត់

អាំងតេក្រាលកំណត់ពី $\mathbf{a}$ ទៅ $\mathbf{b}$ នៃអនុគមន៍ $\mathbf{y=f(x)}$ គឺជាកំណើន នៃអនុគមន៍ព្រីមីទីវ $\mathbf{F(x)}$ ដែលត្រូវនឹងកំណើននៃ $\mathbf{x}$ ពី $\mathbf{a}$ ទៅ $\mathbf{b}$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\int_a^b f(x).dx = \left[\ F(x)\ \right]_a^b = F(b)-F(a)$ ។

◆ លក្ខណៈ

1. $\int_a^b k.f(x).dx = k\int_a^b f(x).dx$

2. $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

3. $\int_a^a f(x).dx = 0$

4. $\int_a^b [f(x)+g(x)-h(x)].dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$

5. $\int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx = \int_a^b f(x).dx$ ដែល $a \le c \le b$ ។

◆ រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\int_a^b f(x).g'(x).dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b g(x).f'(x).dx$$ ។

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-គណនាតម្លៃនៃ

ក. $\int_{1}^{2} f(x).dx + \int_{2}^{1} f(x).dx$

ខ. $\int_{1}^{1} \frac{f(x)}{3}.dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ

ក. $\int_{1}^{2} f(x).dx + \int_{2}^{1} f(x).dx$

$= \int_{1}^{2} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx = 0$

ខ. $\int_{1}^{1} \frac{f(x)}{3}.dx = \frac{1}{3}\int_{1}^{1} f(x).dx = 0$

2-គេមាន $\mathbf{f}$ និង $\mathbf{g}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ហើយ $\int_1^2 f(x)dx = -4$

$\int_2^5 f(x)dx = 6$ និង $\int_1^5 g(x)dx = 8$ ។ គណនា

ក. $\int_1^5 f(x)dx$

ខ. $\int_5^1 [-4f(x)].dx$

គ. $\int_1^5 [4f(x) - 2g(x)].dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនា

ក. $\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = -4 + 6 = 2$

ខ. $\int_5^1 [-4f(x)].dx = 4\int_1^5 f(x)dx = 4 \times 2 = 8$

គ. $\int_1^5 [4f(x) - 2g(x)].dx$

$= 4\int_1^5 f(x)dx - 2\int_1^5 g(x).dx$

$= 8 - 2(8) = -8$

3-ចូរគណនាតម្លៃនៃ **k** បើ $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ **k**

គេបាន $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = 2$

$$\left[\sqrt{2x-1}\right]_1^k = 2$$

$$\sqrt{2k-1} - 1 = 2$$

$$\sqrt{2k-1} = 3 \Rightarrow k = 5$$

ដូចនេះ $K = 5$ ។

4-គណនា

ក. $\int_{1}^{1}(3x^2+1)dx$

ខ. $\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^2}-3\right).dx$

គ. $\int_{4}^{9}\frac{2}{\sqrt{x}}dx$

ឃ. $\int_{2}^{4}\sqrt{x-2}.dx$

ង. $\int_{2}^{4}\sqrt[3]{x-2}.dx$

ច. $\int_{-4}^{0}\frac{1}{\sqrt{4-x}}.dx$

ឆ. $\int_{5}^{1}\frac{1}{\sqrt{3x+1}}.dx$

ជ. $\int_{1}^{3}5x(x^2-7)^3dx$

ឈ. $\int_{0}^{2}3x^2\sqrt{x^3+1}.dx$

ញ. $\int_{1}^{2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}.dx$

ដ. $\int_{1}^{4}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right).dx$

ឋ. $\int_{0}^{1}(3x^2-2x)^2.dx$

ឌ. $\int_{0}^{4}\left[\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}\right].dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int_{1}^{1}(3x^2+1)dx=\left[x^3+x\right]_1^1=0$

ខ. $\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^2}-3\right).dx=\left[-\frac{1}{x}-3x\right]_1^2=(-\frac{13}{2})-(-4)=-\frac{5}{2}$

គ. $\int_4^9 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \left[4\sqrt{x}\,\right]_4^9 = 12 - 8 = 4$

ឃ. $\int_2^4 \sqrt{x-2}.dx = \left[\frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = \frac{2}{3}\sqrt{8} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

ង. $\int_2^4 \sqrt[3]{x-2}.dx = \left[\frac{3}{4}(x-2)^{\frac{4}{3}}\right]_2^4 = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

ច. $\int_{-4}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x}}.dx = \left[-2\sqrt{4-x}\right]_{-4}^0 = -4 + 4\sqrt{2}$

ឆ. $\int_5^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}.dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_5^1 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$

ជ. $\int_1^3 5x(x^2-7)^3 dx = \left[\frac{5}{8}(x^2-7)^4\right]_1^3 = 10 - 810 = -800$

ឈ. $\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}.dx = \left[\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = 18 - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$

ញ. $\int_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}.dx = \left[\sqrt{x^2+4x+1}\,\right]_1^2 = \sqrt{13} - \sqrt{6}$

ដ. $\int_1^4 \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right).dx = \left[6\sqrt{x} - x\right]_1^4 = 8 - 5 = 3$

ឋ. $\int_0^1 (3x^2-2x)^2.dx = \frac{2}{15}$

ឌ. $\int_0^4 \left[\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}\right].dx = \frac{21}{338}$

5-គណនា

ក.$\int_1^2 3e^{4x}.dx$

ខ.$\int_0^1 4x^3e^{2x^4}.dx$

គ.$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.dx$

ឃ.$\int_1^3 3e^{2x}(e^{-2x}+1).dx$

ង.$\int_0^1 \frac{dx}{2+3x}$

ដំណោះស្រាយ

ក.$\int_1^2 3e^{4x}.dx = \left[\frac{3}{4}e^{4x}\right]_1^2 = \frac{3}{4}(e^4-1)e^4$

ខ.$\int_0^1 4x^3e^{2x^4}.dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x^4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2-1)$

គ.$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.dx = \left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = 2(e^2-e)$

ឃ.$\int_1^3 3e^{2x}(e^{-2x}+1).dx = 6-\frac{3}{2}e^6+\frac{3}{2}e^2$

ង.$\int_0^1 \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(2+3x)'}{2+3x}.dx$

$= \frac{1}{3}\left[\ln(2+3x)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$ ។

6-គណនា

ក. $\int_0^1 \frac{2x^2}{1+2x^3}.dx$

ខ. $\int_1^{\ln 2} \frac{e^x}{4e^x-2}.dx$

គ. $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}.dx$

ឃ. $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}.dx$

ង. $\int_0^1 xe^{2x^2}.dx$

ច. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x.dx$

ឆ. $\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{2x}.dx$

ជ. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}.dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int_0^1 \frac{2x^2}{1+2x^3}.dx = \left[\frac{1}{3}\ln(1+2x^3)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln 3$

ខ. $\int_1^{\ln 2} \frac{e^x}{4e^x-2}.dx = \left[\frac{1}{4}\ln(4e^x-2)\right]_1^{\ln 2} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2e-1}\right)$

គ. $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}.dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\ln 5$

ឃ. $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}.dx = \left[\frac{1}{3}(\ln x)^3\right]_1^e = \frac{1}{3}$

ង. $\int_0^1 xe^{2x^2}.dx = \left[\frac{1}{4}e^{2x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}(e^2-1)$ ។

ច. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x.dx = [-\ln\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$

ឆ. $\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{2x}.dx = \left[\frac{1}{6}(1+\ln x)^3\right]_1^e = \frac{7}{6}$

ជ. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}.dx = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \ln 2$

7-សហគ្រាសមួយទទួលបានប្រាក់ចំណូលបន្ថែមពីការលក់ផលិតផលប្រើប្រាស់ចំនួន t គ្រឿង ។

បើអត្រានៃចំណូលបន្ថែមកំណត់ដោយអនុគមន៍ $R'(x) = 180 + 0.2t$ (គិតជាពាន់រៀល) ក្នុងមួយគ្រឿង ។

រកបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណូលក្នុងការលក់កើនឡើងពីចំនួន 30គ្រឿង ទៅ 40 គ្រឿង ?

ដំណោះស្រាយ

រកបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណូល

គេបាន $\Delta R = \int_{30}^{40}(180 + 0.2t).dt$

$= \left[180t + 0.1t^2\right]_{30}^{40} = 1870$ (គិតជាពាន់រៀល)

1_គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int\left(12x^5+5x^4-9x^2+4x+7\right).dx$$

$$=12\int x^5.dx+5\int x^4dx-9\int x^2.dx+4\int xdx+7\int dx$$

$$=12\left(\frac{1}{6}x^6\right)+5\left(\frac{1}{5}x^5\right)-9\left(\frac{1}{3}x^3\right)+4\left(\frac{1}{2}x^2\right)+7x+c$$

$$=2x^6+x^5-3x^3+2x^2+7x+c$$

ដូចនេះ $I=2x^6+x^5-3x^3+2x^2+7x+c$

2_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int\frac{4x^7-5x^4+1}{x^2}.dx$

$$=\int\left(4x^5-5x^2+\frac{1}{x^2}\right).dx$$

$$=\int 4x^5.dx-\int 5x^2.dx+\int\frac{1}{x^2}.dx$$

$$=4\int x^5.dx-5\int x^2.dx+\int\frac{1}{x^2}.dx$$

$$=4\left(\frac{1}{6}x^6\right)-5\left(\frac{1}{3}x^3\right)+\left(-\frac{1}{x}\right)+c$$

$$=\frac{2}{3}x^6-\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{x}+c$$

ដូចនេះ $I = \frac{2}{3}x^6 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{x} + c$

3_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x^7 - 4x^5 + 1}{x}.dx$

$$= \int \left(x^6 - 4x^4 + \frac{1}{x}\right).dx$$

$$= \int x^6.dx - 4\int x^4.dx + \int \frac{1}{x}.dx$$

$$= \frac{1}{7}x^7 - \frac{4}{5}x^5 + \ln|x| + c$$

4_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}.dx$

$$= \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right).dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}.dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}.dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + c$$

ដូចនេះ $I = \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}.dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c$

5_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (\sin x + \cos x)^2.dx$

$$= \int \left(\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x\right).dx$$

$$= \int (1 + \sin 2x).dx$$

$$= \int dx + \int \sin 2x.dx$$

$$= x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

6_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2\cos^3 x + 1}{\cos^2 x}.dx$

$$= \int \left(2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right).dx$$

$$= 2\int \cos x.dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}.dx$$

$$= 2\sin x + \tan x + c$$

ដូចនេះ $\boxed{I = 2\sin x + \tan x + c}$

7_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \sin^2 x.dx$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right).dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x.dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

៨_គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I=\int \cos^2 x.dx}$

$$\mathbf{=\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right).dx}$$

$$\mathbf{=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2x.dx}$$

$$\mathbf{=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}.\sin 2x+c}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C}}$

៩_គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I=\int (\tan x+\cot x)^2.dx}$

$$\mathbf{=\int \left(\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x\right).dx}$$

$$\mathbf{=\int \left(\tan^2 x+2+\cot^2 x\right).dx}$$

$$\mathbf{=\int \left[\left(1+\tan^2 x\right)+\left(1+\cot^2 x\right)\right].dx}$$

$$\mathbf{=\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right).dx}$$

$$\mathbf{=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}}$$

$$\mathbf{=\tan x-\cot x+c}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I=\tan x-\cot x+C}}$

10_គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I = \int \sin x.\cos 2x.dx}$

$$= \frac{1}{2}\int [\sin(x+2x) + \sin(x-2x)].dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 3x - \sin x).dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x\right) + c$$

ដូចនេះ $\boxed{I = -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C}$

11_គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I = \int \cos 2x \cos 4x.dx}$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos(2x+4x) + \cos(2x-4x)].dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 6x + \cos 2x).dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 2x\right] + c$$

$$= \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2xx + C}$ ។

12-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2}{3x+1}.dx$

$$= 2\int \frac{dx}{3x+1}$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{(3x+1)'}{3x+1}.dx$$

$$= \frac{2}{3}\ln|3x+1| + C$$

13-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{7}{\sqrt{2x-3}}.dx$

$$= 7\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$$

$$= 7\sqrt{2x-3} + C$$

14-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{10}{(x-2)^2}.dx$

$$= 10\int \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{10}{x-2} + C$$

15-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{4x^2-9}$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 - \frac{9}{4}} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2(\frac{3}{2})}.\ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}}{x+\frac{3}{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C$$

16-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{x^2+9}$

$$=\int \frac{dx}{x^2+3^2}$$

$$=\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3})+C$$

17-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$$=\int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}$$

$$=\arcsin(\frac{x}{2})+C$$

18-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C$$

19-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}|+C$$

20_គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I=\int 2^{x}.3^{x+1}.5^{2x}.dx}$

$$\mathbf{=\int 2^{x}.3^{x}.3.25^{x}.dx}$$

$$\mathbf{=3\int (150)^{x}.dx}$$

$$\mathbf{=\frac{3}{\ln(150)}.(150)^{x}+C}$$

21_គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I=\int (4e^{2x}+1)^{2}.dx}$

$$\mathbf{=\int (16e^{4x}+8e^{2x}+1).dx}$$

$$\mathbf{=16\int e^{4x}.dx+8\int e^{2x}.dx+\int dx}$$

$$\mathbf{=4e^{4x}+4e^{2x}+x+C}$$

$$\mathbf{=(2e^{2x}+1)^{2}+x-1+C}$$

22_គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I=\int \frac{(2x+3).dx}{x^{2}+3x-4}}$

តាង $\mathbf{u=x^{2}+3x-4}$ នាំអោយ $\mathbf{du=(2x+3).dx}$

$$\mathbf{I=\int \frac{(2x+3).dx}{x^{2}+3x-4}}$$

$$\mathbf{=\int \frac{du}{u}}$$

$$\mathbf{=\ln|u|+c}$$

$$\mathbf{=\ln|x^{2}+3x-4|+c}$$

23-គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I = \int \frac{(2x-3).dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}}$

តាង $\mathbf{u = x^2 - 3x + 2}$ នាំអោយ $\mathbf{du = (2x-3).dx}$

$$\mathbf{I = \int \frac{(2x-3).dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}}$$

$$\mathbf{= \int \frac{du}{\sqrt{u}}}$$

$$\mathbf{= 2\sqrt{u} + c}$$

$$\mathbf{= 2\sqrt{x^2-3x+2} + c}$$

24-គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I = \int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^2}}$

តាង $\mathbf{u = e^x + 1}$ នាំអោយ $\mathbf{du = e^x.dx}$

$$\mathbf{I = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c}$$

$$\mathbf{= -\frac{1}{e^x+1} + c}$$

25-គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I = \int \sin^4 x \cos x.dx}$

តាង $\mathbf{u = \sin x}$ នាំអោយ $\mathbf{du = \cos x.dx}$

$$\mathbf{I = \int \sin^4 x \cos x.dx}$$

$$\mathbf{= \int u^5.du = \frac{1}{6}u^6 + c = \frac{1}{6}\sin^6 x + c}$$

26-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}.dx$

គេមាន $I=\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}.dx$

$$=\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}.\frac{1}{\cos^2 x}.dx$$

$$=\int \tan^4 x.\frac{dx}{\cos^2 x}$$

តាង $u=\tan x$ នាំអោយ $du=\frac{dx}{\cos^2 x}$

$$I=\int u^5.du$$

$$=\frac{1}{5}u^5+c$$

$$=\frac{1}{5}\tan^5 x+c$$

27-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{4x^3.dx}{(x^4+1)^5}$

តាង $u=x^4+1$ នាំអោយ $du=4x^3.dx$

$$I=\int \frac{4x^3.dx}{(x^4+1)^5}$$

$$= \int \frac{du}{u^5}$$

$$= \int u^{-5}.du = -\frac{1}{4}.u^{-4} + c$$

$$= -\frac{1}{4}\left(x^4 + 1\right)^{-4} + c$$

28-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \left(e^x + 2\right)^4.e^x dx$

តាង $u = e^x + 2$ នាំអោយ $du = e^x.dx$

$$I = \int \left(e^x + 2\right)^4.e^x dx$$

$$= \int u^4.du = \frac{1}{5}u^5 + c$$

$$= \frac{1}{5}\left(e^x + 2\right)^5 + c$$

29-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \cos^3 x.dx$

គេមាន $I = \int \cos^3 x.dx$

$$= \int \cos^2 x.\cos x.dx$$

$$= \int \left(1 - \sin^2 x\right).\cos x.dx$$

តាង $u = \sin x$ នាំអោយ $du = \cos x.dx$

$$= \int (1-u^2).du$$

$$= u - \frac{1}{3}u^3 + c = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$$

30_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \sin^7 x \cos^3 x.dx$

គេមាន $I = \int \sin^7 x \cos^3 x.dx$

$$= \int \sin^7 x.\cos^2 x.\cos x.dx$$

$$= \int \sin^7 x.(1-\sin^2 x).\cos x dx$$

តាង $u = \sin x$ នាំអោយ $du = \cos x.dx$

$$= \int u^7(1-u^2).du$$

$$= \int (u^7 - u^9).du = \frac{1}{8}u^8 - \frac{1}{10}u^{10} + c$$

$$= \frac{1}{8}\sin^8 x - \frac{1}{10}\sin^{10} x + c$$

31_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{\sin 2x.dx}{\sqrt{3-\sin^4 x}}$

គេមាន $I = \int \frac{\sin 2x.dx}{\sqrt{3-\sin^4 x}}$

$$= \int \frac{2\sin x \cos x.dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sin^2 x)^2}}$$

តាង $u=\sin^2 x$ នាំអោយ $du=2\sin x\cos x.dx$

$$=\int \frac{du}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-u^2}}$$

$$=\arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)+c \quad =\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{3}}\right)+c$$

32_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{x^3-2x}{(x-1)^4}.dx$

$I=\int \frac{x^3-2x}{(x-1)^4}.dx$ តាង $u=x-1$

នាំអោយ $\begin{cases} x=u+1 \\ dx=du \end{cases}$

$$=\int \frac{(u+1)^3-2(u+1)}{u^4}.du$$

$$=\int \frac{u^3+3u^2+3u+1-2u-2}{u^4}.du$$

$$=\int \frac{u^3+3u^2+u-1}{u^4}.du$$

$$=\int \left(\frac{1}{u}+3.\frac{1}{u^2}+u^{-3}-u^{-4}\right).du$$

$$=\ln|u|-\frac{3}{u}-\frac{1}{2}u^{-2}+\frac{1}{3}u^{-3}+c$$

$$=\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}-\frac{1}{2}(x-1)^{-2}+\frac{1}{3}(x-1)^{-3}+c$$

33_គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I}=\int \frac{(\cos x-\sin x).dx}{1+\sin 2x}$

គេមាន $\mathbf{I}=\int \frac{(\cos x-\sin x).dx}{1+\sin 2x}$

$$=\int \frac{(\cos x-\sin x).dx}{\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}$$

$$=\int \frac{(\cos x-\sin x).dx}{(\sin x+\cos x)^2}$$

តាង $u=\sin x+\cos x$ នាំអោយ $du=(\cos x-\sin x).dx$

$$=\int \frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+c=-\frac{1}{\sin x+\cos x}+c$$

34_គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I}=\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.dx$

តាង $u=\sqrt{x}$ នាំអោយ $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}.dx$

$$\mathbf{I}=\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.dx$$

$$=\int \sin u.du=-\cos u+c$$

$$=-\cos\sqrt{x}+c$$

35_គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I}=\int \cos(\sin x).\cos x dx$

តាង $u=\sin x$ នាំអោយ $du=\cos x.dx$

$$\mathbf{I}=\int \cos(\sin x).\cos x dx$$

$$= \int \cos u.du = \sin u + c$$

$$= \sin(\sin x) + c$$

36_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{5x^9.dx}{1+x^5}$

តាង $u = 1 + x^5$ នាំអោយ $du = 5x^4.dx$

$$I = \int \frac{[(1+x^5)-1].5x^4.dx}{1+x^5}$$

$$= \int \frac{(u-1).du}{u} = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right).du = u - \ln|u| + c$$

$$= (1+x^5) - \ln|1+x^5| + c$$

37_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{4x^7.dx}{(1+x^4)^2}$

តាង $u = 1 + x^4$ នាំអោយ $du = 4x^3.dx$

$$I = \int \frac{x^4.4x^3.dx}{(1+x^4)^2}$$

$$= \int \frac{[(1+x^4)-1].4x^3.dx}{(1+x^4)^2}$$

$$= \int \frac{(u-1).du}{u^2} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right).du = \ln|u| + \frac{1}{u} + c$$

$$= \ln|1+x^4| + \frac{1}{1+x^4} + c$$

38_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int e^{x^2+x}(2x+1).dx$

តាង $u=x^2+x$ នាំអោយ $du=(2x+1).dx$

$I=\int e^{x^2+x}(2x+1).dx$

$=\int e^u.du=e^u+c$

$=e^{x^2+x}+c$

ដូចនេះ $I=e^{x^2+x}+C$ ។

39_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{(\cos x-\sin x).dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos x}}$

តាង $u=1+\sin x+\cos x$

នាំអោយ $du=(\cos x-\sin x).dx$

$I=\int \frac{(\cos x-\sin x).dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos x}}$

$=\int \frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+c$

$=2\sqrt{1+\sin x+\cos x}+c$

40_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{(x^2-1).dx}{(x^2+1)^2}$

ដោយចែកភាគយកនឹងភាគបែង នឹង x^2 គេបាន ៖

$$I=\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right).dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$$

តាង $u=x+\frac{1}{x}$ នាំអោយ $du=\left(1-\frac{1}{x^2}\right).dx$

$$=\int \frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+c$$

$$=-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}+c=-\frac{x}{x^2+1}+c$$

41_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{x^4+1}$

គេមាន $I=\int \frac{dx}{x^4+1}$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(1+\frac{1}{x^2})dx}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int \frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

តាង $u = x - \frac{1}{x}$ នាំឲ្យ $du = (1 + \frac{1}{x^2}).dx$

និង $v = x + \frac{1}{x}$ នាំឲ្យ $dv = (1 - \frac{1}{x^2}).dx$

គេបាន $I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + 2} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2 - 2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\frac{u}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{v - \sqrt{2}}{v + \sqrt{2}}\right| + C$$

ដូចនេះ

$$\boxed{I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x}) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\right| + C}$$ ។

42-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (2x+1)\cos x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 2x + 1 \\ dv = \cos x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2.dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$I = \int (2x+1)\cos x.dx$

$= (2x+1)\sin x - \int 2\sin x.dx$

$= (2x+1)\sin x + 2\cos x + c$

43-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (6x-1)\cos 3x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 6x - 1 \\ dv = \cos 3x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 6.dx \\ v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{cases}$

$$I = \int (6x-1)\cos 3x.dx$$

$$= \frac{1}{3}(6x-1)\sin 3x - \int 2\sin 3x.dx$$

$$= \frac{1}{3}(6x-1)\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x + c$$

44_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (2x+3)\sin 2x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 2x+3 \\ dv = \sin 2x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2.dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$$I = -\frac{1}{2}(2x+3)\cos 2x + \int \cos 2x.dx$$

$$= -\frac{1}{2}(2x+3)\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

45_គណនាអាំងតេក្រាល$I = \int x^2 \sin x.dx$

តាង $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \sin x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2x.dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$I = \int x^2 \sin x.dx$$

$$= -x^2\cos x + \int 2x\cos x.dx$$

តាង $\begin{cases} u = 2x \\ dv = \cos x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2.dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$= -x^2\cos x + \left[2x\sin x - \int 2\sin x.dx\right]$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

46-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (2x-3)e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 2x-3 \\ dv = e^x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2.dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$I = \int (2x-3)e^x.dx$$

$$= (2x-3)e^x - \int 2e^x.dx$$

$$= (2x-3)e^x - 2e^x + c$$

$$= (2x-5).e^x + c$$

ដូចនេះ $I = (2x-5).e^x + C$ ។

47-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (4x+1).e^{2x}.dx$

តាង $\begin{cases} u = 4x+1 \\ dv = e^{2x}.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 4.dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$I = \frac{1}{2}(4x+1)e^{2x} - \int 2e^{2x}.dx$$

$$= \frac{1}{2}(4x+1)e^{2x} - e^{2x} + c$$

$$= \frac{1}{2}(4x-1).e^{2x} + c$$

48_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int x^2e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2x.dx \\ v = e^x \end{cases}$

$I=\int x^2e^x.dx$

$=x^2e^x-\int 2xe^x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 2x \\ dv = e^x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2.dx \\ v = e^x \end{cases}$

$=x^2e^x-\left[2xe^x-\int 2e^x.dx\right]$

$=x^2e^x-2xe^x-2e^x+c$

$=\left(x^2-2x-2\right)e^x+c$

49_គណនាអាំងតេក្រាល

តាង $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = \dfrac{1}{x}.dx \\ v = \dfrac{1}{4}x^4 \end{cases}$

$I=\int x^3\ln x.dx$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \int \frac{1}{4}x^4 . \frac{1}{x}.dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 .dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + c$$

50_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int x.\tan^2 x.dx$

តាង $\begin{cases} u = x \\ dv = \tan^2 x.dx \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} du = dx \\ v = \int \tan^2 xdx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1).dx = \tan x - x \end{cases}$

គេបាន $I = x(\tan x - x) - \int (\tan x - x).dx$

$$I = x\tan x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + c$$ ។

51-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}$ ដែល $x\neq 0$ និង $x\neq -1$

ក-កំនត់ចំនួនពិត A , B , C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត A , B , C

គេបាន $\dfrac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$

$$\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$2x^2+2x+1=(A+C)x^2+(A+B)x+B$$

គេទាញបាន $\begin{cases}A+C=2\\A+B=2\\B=1\end{cases}$ នាំឱ្យ $A=1$, $B=1$, $C=1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=1\ ,\ C=1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A=1$, $B=1$, $C=1$ គេបាន :

$$f(x)=\frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$$

យើងបាន $\mathbf{I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right).dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x+1}}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I=\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|x+1|+C}}$ ។

52-គេមានអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)=\frac{4x^2-x+1}{x^3+1}}$ ដែល $\mathbf{x\neq-1}$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $\mathbf{a, b, c}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I=\int f(x).dx}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត $\mathbf{a , b , c}$

គេបាន $\mathbf{\frac{4x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}}$

$$\mathbf{\frac{4x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{a(x^2-x+1)+(x+1)(bx+c)}{(x+1)(x^2-x+1)}}$$

$$\mathbf{4x^2-x+1=ax^2-ax+a+bx^2+cx+bx+c}$$

$$\mathbf{4x^2-x+1=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)}$$

គេទាញបាន $\mathbf{\begin{cases}a+b=4\\-a+b+c=-1\\a+c=1\end{cases}}$ នាំឱ្យ $\mathbf{a=2 , b=2 , c=-1}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{a=2 , b=2 , c=-1}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a=2$, $b=2$, $c=-1$ គេមាន :

$$f(x)=\frac{4x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{2}{x+1}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

គេបាន $I=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right).dx$

$$=\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{(2x-1).dx}{x^2-x+1}$$

$$=2\int\frac{(x+1)'}{(x+1)}.dx+\int\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}.dx$$

$$=2\ln|x+1|+\ln|x^2-x+1|+C$$

53-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$

ដែល $x\neq-1$ និង $x\neq 3$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឱ្យចំពោះ $x\neq-1$ និង $x\neq 3$

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត **a , b , c**

គេបាន $\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$

$$\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}=\frac{a(x-3)^2+b(x+1)(x-3)+c(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}$$

$$5x^2-14x+13=ax^2-6ax+9a+bx^2-2bx-3b+cx+c$$

$$5x^2-14x+13=(a+b)x^2+(-6a-2b+c)x+(9a-3b+c)$$

គេទាញបាន $\begin{cases}a+b=5\\-6a-2b+c=-14\\9a-3b+c=13\end{cases}$ នាំឱ្យ $a=2\ ,\ b=3,\ c=4$

ដូចនេះ $\boxed{a=2\ ,\ b=3,\ c=4}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a=2\ ,\ b=3\ ,c=4$ គេមាន :

$$f(x)=\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}$$

គេបាន $I=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}\right).dx$

$$= 2\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{x-3} + 4\int \frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$= 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| - \frac{4}{x-3} + c$$

54-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x^4)}$ ដែល x ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ

ក-ចូរកំនត់បីចំនួនពិត A ,B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx^3 + C}{1+x^4}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J = \int \dfrac{4x^3 \ln x.dx}{(1+x^4)^2}$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A , B , C

គេបាន $\dfrac{1}{x(1+x^4)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx^3 + C}{1+x^4}$

$$\frac{1}{x(1+x^4)} = \frac{A(1+x^4) + x(Bx^3 + C)}{x(1+x^4)}$$

$$1 = A + Ax^4 + Bx^4 + Cx$$

$$1 = (A+B)\,x^4 + Cx + A$$

គេទាញ $\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$ នាំឱ្យ $A=1\ ,\ B=-1\ ,\ C=0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=-1\ ,\ C=0}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A=1\ ,\ B=-1\ ,\ C=0$

គេមាន $f(x)=\dfrac{1}{x(1+x^4)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^3}{1+x^4}$

គេបាន

$$I=\int f(x).dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^3}{1+x^4}\right).dx$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{4x^3dx}{1+x^4}$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln|x|-\dfrac{1}{4}\ln(1+x^4)+C}$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J=\int\dfrac{4x^3\ln x.dx}{(1+x^4)^2}$

តាង $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\dfrac{4x^3.dx}{(1+x^4)^2} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=\dfrac{1}{x}.dx \\ v=\int\dfrac{4x^3.dx}{(1+x^4)^2}=-\dfrac{1}{1+x^4} \end{cases}$

គេបាន $J=-\frac{\ln x}{1+x^4}-\int(-\frac{1}{1+x^4}).\frac{1}{x}.dx$

$$=-\frac{\ln x}{1+x^4}+\int\frac{dx}{x(1+x^4)}=-\frac{\ln x}{1+x^4}+I$$

ដោយ $I=\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C$

ដូចនេះ $\boxed{J=-\frac{\ln x}{1+x^4}+\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C}$ ។

55-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{e^{2x}+1}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ក-ចូរកំនត់បីចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x)=A+\frac{B.e^{2x}}{e^{2x}+1}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J=\int\frac{2xe^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2}$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A , B

គេបាន $\frac{1}{e^{2x}+1}=A+\frac{B.e^{2x}}{e^{2x}+1}$

$$\frac{1}{e^{2x}+1}=\frac{A(e^{2x}+1)+B.e^{2x}}{e^{2x}+1}=\frac{(A+B)e^{2x}+A}{e^{2x}+1}$$

គេទាញ $\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}$ នាំឱ្យ $A=1$, $B=-1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{A = 1\ ,\ B = -1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A = 1\ ,\ B = -1$

គេមាន $f(x) = 1 - \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

គេបាន

$$I = \int (1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}).dx = \int dx - \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}.dx}{e^{2x}+1} = x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C$$

ដូចនេះ $\boxed{I = x - \dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C}$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J = \int \dfrac{2xe^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2}$

តាង $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{2e^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = dx \\ v = \int \dfrac{2e^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2} = -\dfrac{1}{e^{2x}+1} \end{cases}$

គេបាន $J = -\dfrac{x}{e^{2x}+1} + \int \dfrac{dx}{e^{2x}+1} = -\dfrac{x}{e^{2x}+1} + I$

ដោយ $I = x - \dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C$

ដូចនេះ $\boxed{J = -\dfrac{x}{e^{2x}+1} + x - \dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C}$ ។

56-គេឱ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}}$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $\mathbf{A,B}$ និង $\mathbf{C}$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)}$

អាចសរសេរជារាង :

$$\mathbf{f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}}$$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I=\int_0^1 f(x).dx}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $\mathbf{A,B}$ និង $\mathbf{C}$

គេមាន $\mathbf{f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}}$

និង $\mathbf{f(x)=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}}$

គេបាន $$\mathbf{\frac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}}$$

$$\mathbf{\frac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{A.(x+2)^2+B.(x+1)(x+2)+C.(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}}$$

$$\mathbf{2x^2+4x+3=A.(x+2)^2+B.(x+1)(x+2)+C.(x+1)\quad(1)}$$

ចំពោះ $\mathbf{x=-1}$ តាម(1)គេបាន $\mathbf{2-4+3=A}$ នាំឱ្យ $\mathbf{A=1}$

ចំពោះ $x=-2$ តាម (1) គេបាន $8-8+3=-C$ នាំឱ្យ $C=-3$

ចំពោះ $x=0$ តាម (1) គេបាន $3=4A+2B+C$

នាំឱ្យ $B=\frac{3-4A-C}{2}=\frac{3-4+3}{2}=1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,B=1\ ,C=-3}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$

ចំពោះ $A=1, B=1, C=-3$

គេបាន $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$

គេបាន $I=\int_0^1 f(x).dx=\int_0^1\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}\right].dx$

$$I=\int_0^1\frac{1}{x+1}.dx+\int_0^1\frac{1}{x+2}.dx-3\int_0^1\frac{1}{(x+2)^2}.dx$$

$$I=\int_0^1\frac{(x+1)'}{(x+1)}.dx+\int_0^1\frac{(x+2)'}{(x+2)}.dx-3.\int_0^1\frac{(x+2)'}{(x+2)^2}.dx$$

$$I=\left[\ln|x+1|\right]_0^1+\left[\ln|x+2|\right]_0^1-3.\left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^1$$

$$I = \left[\ln|x+1|\right]_0^1 + \left[\ln|x+2|\right]_0^1 - 3.\left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^1$$

$$I = [\ln 2 - \ln 1] + [\ln 3 - \ln 2] + 3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right]$$

$$I = \ln 2 - 0 + \ln 3 - \ln 2 + 1 - \frac{3}{2}$$

$$I = \ln 3 - \frac{1}{2} = \frac{-1 + 2\ln 3}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \int_0^1 f(x).dx = \frac{-1+2\ln 3}{2}}$ ។

57-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ កំនត់លើ IR ។

ក-ចូរសរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x) = A + \frac{B.e^{-x}}{1+e^{-x}}$

ដែល A និង B ជាពីរចំនួនពិត ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 f(x).dx$ ដោយសរសេរលទ្ធផល

ជារាង $a + \ln b$ ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិតត្រូវរក ។

ដំណោះស្រាយ

ក- សរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x) = A + \frac{B.e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{(e^x+1)-2}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$$

$$=1-\frac{2e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}=1-\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

ដូចនេះ $f(x)=1+\frac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ហើយ $A=1$ និង $B=-2$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$

គេបាន $I=\int_0^1\left(1+\frac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right).dx$ ព្រោះ $f(x)=1+\frac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$=\int_0^1\left[1+2.\frac{(1+e^{-x})'}{(1+e^{-x})}\right].dx=\left[x+2\ln(1+e^{-x})\right]_0^1$$

$$=\left[1+2\ln(1+e^{-1})\right]-\left[0+2\ln(1+1)\right]$$

$$=1+2\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)-2\ln 2$$

$$=1+2\ln(e+1)-2\ln e-2\ln 2$$

$$=1+2[\ln(e+1)-\ln 2]-2=-1+2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

ដូចនេះ $I=\int_0^1 f(x).dx=-1+2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

ហើយ $a=-1$ និង $b=\frac{e+1}{2}$ ។

58-គេឱ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)=(x^2+x-7).e^x}$ កំនត់លើ **IR** ។

ក-កំនត់ចំនួនពិត **a,b** និង **c** ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍

$\mathbf{F(x)=(ax^2+bx+c).e^x}$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I=\int_0^3 f(x).dx}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត **a,b** និង **c**

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $\mathbf{F(x)}$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)}$លុះត្រាតែ

$\mathbf{\forall x \in IR : F'(x)=f(x)}$

គេបាន $\mathbf{F'(x)=(ax^2+bx+c)'.e^x+(e^x)'.(ax^2+bx+c)}$

$$\mathbf{=(2ax+b).e^x+e^x(ax^2+bx+c)}$$

$$\mathbf{=[ax^2+(2a+b)x+(b+c)].e^x}$$

ដោយ $\mathbf{F'(x)=f(x)}$

នាំឱ្យ $\mathbf{[ax^2+(2a+b)x+(b+c)]\ .e^x=(x^2+x-7).e^x}$

គេទាញបាន $\begin{cases}\mathbf{a=1}\\ \mathbf{2a+b=1}\\ \mathbf{b+c=-7}\end{cases}$ **នាំឱ្យ** $\begin{cases}\mathbf{a=1}\\ \mathbf{b=-1}\\ \mathbf{c=-6}\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{a=1\ ,b=-1\ ,c=-6}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{3} f(x).dx$

ដោយ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ នោះគេបាន :

$$I=\int_{0}^{3} f(x).dx=[F(x)]_{0}^{3}=F(3)-F(0)$$

ចំពោះ $a=1, b=-1, c=-6$ គេមាន $F(x)=(x^{2}-x-6).e^{x}$

គេបាន $F(3)=(9-3-6).e^{3}=0$ និង $F(0)=(0-0-6).e^{0}=-6$

ដូចនេះ $I=0-(-6)=6$ ។

59-ក.កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ

$\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត a និង b

គេបាន $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}$

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x(1+\sin x)+b\cos x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x(a+a\sin x+b-b\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x[(a+b)+(a-b)\sin x]}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{(a+b)+(a-b).\sin x}{\cos x}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a=b=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{1}{2}\ ,b=\frac{1}{2}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$

តាមសំរាយខាងលើ ចំពោះ $a=\frac{1}{2}$ និង $b=\frac{1}{2}$ គេមាន :

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}$$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

យើងបាន $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}.dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cos x}{2(1-\sin x)}+\frac{\cos x}{2(1+\sin x)}\right].dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin x}.dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+\sin x}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[-\frac{(1-\sin x)'}{(1-\sin x)}.dx\right]+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\sin x)'}{(1+\sin x)}.dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln|1-\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\left[\ln|1+\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln 1\right]+\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln 1\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}\right]=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}\right]=\ln(\sqrt{2}+1)$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\ln(\sqrt{2}+1)}$

60-គេមានអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)=\dfrac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}}$

ដែល $\mathbf{x\neq -1}$ និង $\mathbf{x\neq 3}$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $\mathbf{a, b , c}$ ដើម្បីឱ្យ

$\mathbf{f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}+\dfrac{c}{(x-3)^2}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I=\int f(x).dx}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក- កំនត់បីចំនួនពិត $\mathbf{a, b , c}$

គេបាន $\mathbf{\dfrac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}+\dfrac{c}{(x-3)^2}}$

ឬ $\mathbf{3x^2-7x+6=a(x-3)^2+b(x+1)(x-3)+c(x+1)}$

ចំពោះ $\mathbf{x=-1}$ គេបាន $\mathbf{16=16a}$ នាំឱ្យ $\mathbf{a=1}$

ចំពោះ $\mathbf{x=3}$ គេបាន $\mathbf{12=4c}$ នាំឱ្យ $\mathbf{c=3}$

ចំពោះ $\mathbf{x=0}$ គេបាន $\mathbf{6=9a-3b+c}$

នាំឱ្យ $\mathbf{b=\dfrac{9a+c-6}{3}=2}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{a=1 , b=2, c=3}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I = \int f(x).dx}$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $\mathbf{a = 1,\ b = 2\ ,\ c = 3}$ គេមាន :

$$\mathbf{f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2}}$$

គេបាន $\mathbf{I = \int (\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2}).dx}$

$$\mathbf{= \int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x-3} + 3\int \frac{dx}{(x-3)^2}}$$

$$\mathbf{= \ln|x+1| + 2\ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C}$$

61-គេមានអនុគមន៍ $\mathbf{f(x) = \frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)}}$

ដែល $\mathbf{x \neq \{1,\ 2\ ,\ 3\}}$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត $\mathbf{a,\ b\ ,\ c}$ ដើម្បីឱ្យ

$\mathbf{f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I = \int f(x).dx}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក- កំនត់បីចំនួនពិត $\mathbf{a,\ b\ ,\ c}$

គេបាន $\mathbf{\frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}}$

$$\frac{6x^2-22x+18}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$6x^2-22x+18=a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)$$

-ចំពោះ $x=1$ គេបាន $2=2a$ នាំឱ្យ $a=1$

-ចំពោះ $x=2$ គេបាន $-2=-b$ នាំឱ្យ $b=2$

-ចំពោះ $x=3$ គេបាន $6=2c$ នាំឱ្យ $c=3$

ដូចនេះ $\boxed{a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=3}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

ចំពោះ $a=1, b=2\ , c=3$

គេមាន $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$

គេបាន $I=\int(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}).dx$

$$=\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{x-3}$$

$$=\ln|x-1|+2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int f(x).dx=\ln|x-1|+2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C}$

62-គេមានអាំងតេក្រាល

$$\mathbf{I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x.dx} \text{ និង } \mathbf{J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x.dx}$$

ក-ចូរគណនា $\mathbf{I+J}$ និង $\mathbf{I-J}$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ $\mathbf{I}$ និង $\mathbf{J}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $\mathbf{I+J}$ និង $\mathbf{I-J}$

យើងបាន $\mathbf{I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x.dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x.dx}$

$$\mathbf{= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x).dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I+J = \frac{\pi}{4}}}$ ។

យើងបាន $\mathbf{I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x.dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x.dx}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x).dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2xdx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{I - J = \frac{1}{2}}$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ I និង J

គេមាន $\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$ **នាំឱ្យ** $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ និង $J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ ។

63- គេមានស្វ៊ីត (I_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

ដោយ $I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$

ក-ចូរគណនាតួ I_1 ។

ខ-ចូរបញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n រួចទាញថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$

រួចទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$

ក-ចូរគណនាតួ I_1

គេមាន $I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^1 (1-x)e^x.dx = \int_0^1 (1-x).e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x(-dx) = -1 + \left[e^x\right]_0^1 = e-2$

ដូចនេះ $\boxed{I = e-2}$ ។

ខ-បញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n

គេមាន $I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$

នាំឱ្យ $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.\int_0^1 (1-x)^{n+1}.e^x dx$

តាង $\begin{cases} u = (1-x)^{n+1} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -(n+1)(1-x)^n \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[(1-x)^{n+1}e^x\right]_0^1 + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_n$$

ដូចនេះ $\boxed{I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}}$ ។

ទាញឱ្យបានថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$

គេមាន $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$

ចំពោះ $n = 1 \ : \ I_2 = I_1 - \frac{1}{2!}$

ចំពោះ $n = 2 : I_3 = I_2 - \frac{1}{3!}$

....

ចំពោះ $n = n - 1 : I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$

ដោយធ្វើផលបូកទំនាក់ទំនងនេះអង្គ និង អង្គ គេបាន :

$I_n = I_1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - .... - \frac{1}{n!}$ ដោយ $I_1 = e - 2 = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - .... - \frac{1}{n!} = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)}$ ។

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$

ចំពោះ $x \in [0, 1]$ គេមាន $1 \le e^x \le e$ និង $(1-x)^n \ge 0$

គេបាន $(1-x)^n \le e^x(1-x)^n \le e(1-x)^n$

នាំឱ្យ $\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n.dx \le \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx \le \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-x)^n.dx$

ដោយ $\int_0^1 (1-x)^n.dx = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

គេទាញបាន $\frac{1}{n!(n+1)} \le I_n \le \frac{e}{n!(n+1)}$ ។

កាលណា $n \to +\infty$ នាំឱ្យ $\frac{1}{n!(n+1)} \to 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$ ។

ទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$

គេមាន $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$ នាំឱ្យ $\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = e - I_n$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = \lim_{n\to+\infty}(e - I_n) = e$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828}$

54- គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a f(x).dx$, $q>0$, $q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+3^x}.dx$

ក.បង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx\ \ ,\ \ q>0\ ,q\neq 1$ ។

គេមាន $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}+\int_{0}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}\ \ (1)$

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$

និងចំពោះ $x\in[-a,0]$ នាំឱ្យ $t\in[a,0]$

គេបាន

$$\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=-\int_{a}^{0}\frac{f(-t).dt}{1+q^{-t}}=\int_{0}^{a}\frac{q^t.f(-t)dt}{1+q^t}=\int_{0}^{a}\frac{q^x f(-x).dx}{1+q^x}$$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x)=f(x)\ \ ,\forall x\in[-a,a]$

គេទាញបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x)}{1+q^x}.dx\ \ (2)$

យក (2) ទៅជួសក្នុង (1) គេបាន :

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x).dx}{1+q^x}+\int_{0}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}$$

$$=\int_{0}^{a}\frac{(q^x+1)f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx$$

ដូចនេះ $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx\ \ ,\ \ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ : គណនា $\mathbf{I}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^{x}}.dx$

ដោយ $\cos x$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេបាន :

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx=\left[\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I=1}$ ។

55-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_{0}^{\pi}x.f(\sin x).dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x).dx$?

អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $I=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x.dx}{1+\cos^{2}x}$ ។

បង្ហាញថា $\int_{0}^{\pi}x.f(\sin x).dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x).dx$

តាង $x=\pi-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ និង ចំពោះ $x\in[0,\pi]$

នាំឱ្យ $t\in[\pi,0]$

គេបាន $\int_{0}^{\pi}x.f(\sin x).dx=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t).f\left[\sin(\pi-t)\right].dt$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \int_0^{\pi} (\pi - t).f(\sin t).dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t).dt - \int_0^{\pi} t.f(\sin t).dt$$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x).dx - \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ។

អនុវត្តន៍ៈ គណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$

គេមាន $I = \int_0^{\pi} \frac{x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi} x.\frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}$

តាង $z = \cos x$ នាំឱ្យ $dz = -\sin x.dx$

ហើយចំពោះ $x \in [0,\pi]$ នោះ $z \in [1,-1]$

គេបាន $I = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2}[\arctan z]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}}$ ។

56– ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៍ : ចូរគណនា $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

បង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

តាង $x = a+b-t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$

និង ចំពោះ $x \in [a,b]$ នាំឱ្យ $t \in [b,a]$

គេបាន $\int_a^b f(x).dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt) = \int_a^b f(a+b-t).dt$

ដូចនេះ $\boxed{\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx}$ ។

អនុវត្តន៍ : គណនា $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

យើងបាន $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2\left[1+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{3}-x)\right].dx$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2\left[1+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right].dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan x+3-\sqrt{3}\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\log_2 4-\log_2(1+\sqrt{3}\tan x)\right].dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2 4.dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{\pi}{3}\log_2 2^2-I=\frac{2\pi}{3}-I$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\boxed{I=\frac{\pi}{3}}$ ។

57-គេសន្មត់ថា f ជាអនុគមន៍មួយកំនត់លើ **IR** ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនងៈ $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$ ។

ចូរគណនា $I=\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}f(x).dx$ ។

គណនា $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$

យើងមាន $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x).dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$

តាង $x = -t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$

និង ចំពោះ $x \in \left[-\frac{\pi}{3} , 0 \right]$ នាំឱ្យ $t \in \left[\frac{\pi}{3}, 0 \right]$

គេបាន $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x).dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} f(-t).(-dt) = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-t).dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx$

គេទាញ $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} [f(-x) + f(x)].dx$

ដោយ $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x} = \sqrt{4\sin^2 x} = 2|\sin x|$

គេបាន $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2|\sin x|.dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x.dx = 2[-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = 1$

ដូចនេះ $\boxed{I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx = 1}$ ។