វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

ស៊ីត និង ស៊េរី

◈ ស្នាដៃស្រាវជ្រាវ
គរុនិស្សិត គណិតវិទ្យា-រូបវិទ្យា ក្រុម១០ ជំនាន់ទី១៩
◈ សាស្ត្រាចារ្យណែនាំៈ **លោក ថៃ ហេង**

©រក្សាសិទ្ធិគ្រប់យ៉ាង ២០១៤

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

បញ្ជីរាយនាមគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម(បរិញ្ញា+១) ជំនាន់ទី១៩

គណិតវិទ្យា-រូបវិទ្យា ក្រុម១០

ល.រ	គោត្តនាម-នាម	ភេទ	ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត	ក្រុងខេត្ត	លេខទូរស័ព្ទ
១	នង មូនី	ស	២៥ កុម្ភៈ ១៩៨៤	ក្រចេះ	097 274 7229
២	ម៉ម កុទ្បា	ប	១៨ ធ្នូ ១៩៨៣	ក្រចេះ	092 523 390
៣	យឹម គង្គា	ប	២៧ មេសា ១៩៩០	ក្រចេះ	015 860 025
៤	កូវ ដាលីន	ស	១៨ ធ្នូ ១៩៨៩	ស្ទឹងត្រែង	093 863 221
៥	អ៊ុន ម៉ុល	ស	១២ មិថុនា ១៩៩២	ស្ទឹងត្រែង	097 802 0014
៦	គា ស៊ីឈាន	ប	០៥ ធ្នូ ១៩៨៩	ព្រះវិហារ	098 883 436
៧	ផេង ហ៊ិត	ប	២០ មករា ១៩៨៨	ព្រះវិហារ	092 722 267
៨	ហួន ចរិយា	ស	០៣ មករា ១៩៨៨	ព្រះវិហារ	096 505 9436
៩	អ៊ុច ប៊ុនថន	ប	១៣ មេសា ១៩៨៩	ព្រះវិហារ	089 344 588
១១	ធូ ហ៊ាន	ប	២៥ សីហា ១៩៨៧	រតនគីរី	097 684 9707
១២	លី សួ	ប	២៥ ធ្នូ ១៩៨៧	រតនគីរី	097 455 1855

អារម្ភកថា

សួស្តី ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីរាប់អាន!

នេះជាសៀវភៅដ៏ពិសេសមួយដែលក្រុមរបស់ខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវ និងចងក្រងឡើងដោយជ្រើសរើសលំហាត់ស្ទីតល្អៗចេញពីឯកសារខ្មែរនិងបរទេស ព្រមទាំងលំហាត់ដែលធ្លាប់ចេញប្រឡងកន្លងមកមួយចំនួន សម្រាប់ការដាក់តាំងពិពណ៌ស្នាដៃនៅវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំនាពេលដ៏ខ្លីខាងមុខនេះ ក៏ដូចជាការទុកជាឯកសារស្រាវជ្រាវរបស់មិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់គ្នាផងដែរ។

ខ្ញុំសង្ឃឹមថាសៀវភៅនេះនឹងក្លាយជាមិត្តដ៏ល្អរបស់អ្នកសិក្សាគ្រប់ៗគ្នា ។ តែទោះបីជាយើងខ្ញុំព្យាយាមសរសេរយ៉ាងផ្ចិតផ្ចង់យ៉ាងណាក្តីក៏ចំណុច ខ្វះខាតតែងតែកើតឡើងដែរ អាស្រ័យហេតុនេះខ្ញុំសូមអភ័យទោស និង រង់ចាំទទួលការរិះគន់កែលំអក្នុងន័យស្ថាបនាដោយក្តីពេញចិត្តពីសំណាក់សិស្សានុសិស្ស លោកគ្រូ អ្នកគ្រូនិងមិត្តអ្នកសិក្សាគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន និងគ្រប់ពេលវេលា ។

ជាចុងក្រោយខ្ញុំសូមជូនពរប្អូនៗសិស្សានុសិស្សនិងអ្នកមានគុណទាំងអស់ឲ្យជួបតែសំណាងល្អ សុខភាពល្អ និងទទួលបានជោគ ជ័យគ្រប់ភារកិច្ច ។

ភ្នំពេញ,ថ្ងៃទី 31 **ខែឧសភា ឆ្នាំ** 2014

អ៊ូច ប៊ុនថន

E-mail: ouchbunthorn@yahoo.com

ផ្នែក១

គន្លឹះ និង មេរៀនសង្ខេប

ស្វ៊ីត និង ស៊េរី

I. ស្វ៊ីតចំនួនពិត

1) **ស្វ៊ីតចំនួនពិត** គឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពី $\mathbb{N}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។

2) **តួទី n នៃស្វ៊ីតចំនួនពិត:**

ដើម្បីសរសេររូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតគេពិនិត្យមើលតួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត រួចរកមើលលំនាំរបស់វា។ តួនីមួយៗជាអនុគមន៍នៃចំនួនតួ។ តួទីមួយត្រូវនឹង $n=1$, តួទីពីរត្រូវនឹង $n=2$,តួទីបីត្រូវនឹង $n=3$, ... , តួទី n ត្រូវនឹង $n=n$ ។

• **សម្គាល់:**

❶ ស្វ៊ីតតាងដោយនិមិត្តសញ្ញា $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ឬ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

ដែល $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$.

❷ បើ a_0 ជាតួទីមួយ , a_1 ជាតួទីពីរ , ... នោះតួទី n គឺ a_{n-1}

3) **អថេរភាពនៃស្វ៊ីត**

• ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតកើន លុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n\in\mathbb{N}$ $a_{n+1}>a_n$

• ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ លុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n\in\mathbb{N}$ $a_{n+1}<a_n$

• ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតថេរ លុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n\in\mathbb{N}$ $a_{n+1}=a_n$

• ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន លុះត្រាតែ

$a_1<a_2<a_3<a_4<...<a_n<a_{n+1}<...$

ឬ $a_1>a_2>a_3>a_4>...>a_n>a_{n+1}>...$ ។

◘ **ចំណាំ:** ស្វ៊ីតកើន ឬ ស្វ៊ីតចុះ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន។

❀ **របៀបសិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីត:**

❶ សិក្សាសញ្ញានៃ $a_{n+1}-a_n$

- ➢ បើ $a_{n+1}-a_n>0$ នោះ (a_n) ជាស្វ៊ីតកើន
- ➢ បើ $a_{n+1}-a_n<0$ នោះ (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ
- ➢ បើ $a_{n+1}-a_n=0$ នោះ (a_n) ជាស្វ៊ីតថេរ

❷បើ $a_n > 0$ ហើយជាកន្សោមស្វ័យគុណ ឬហ្វាក់តូរ្យែលនោះគេអាចសិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីតតាមរយៈផលធៀប $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

- បើ $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ នោះ (a_n) ជាស្វ៊ីតកើន
- បើ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ នោះ (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះ
- បើ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ នោះ (a_n) ជាស្វ៊ីតថេរ

4) **ស្វ៊ីតទាល់**

- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$, $a_n \le M$ ដែល $n \in \mathbb{N}$
- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម $\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{R}$, $N \le a_n$ ដែល $n \in \mathbb{N}$
- ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ លុះត្រាតែ (a_n) ទាល់លើផង និងទាល់ក្រោមផង។

II. ស្វ៊ីតនព្វន្ត

1) **ស្វ៊ីតនព្វន្ត** គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ(ក្រៅពីតួទីមួយ)ស្មើតួមុនបន្ទាប់បូកនឹងចំនួនថេរ d មួយ។ d ហៅថាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត។

ផលសងរួម $d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \dots = u_n - u_{n-1} = \frac{u_n - u_1}{n-1}$

2) រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តគឺ $u_n = u_1 + (n-1)d$ ដែល u_1 ជាតួទីមួយ

បើ u_0 ជាតួទីមួយ នោះ

❶ តួទី $n+1$ គឺ $u_n = u_0 + nd$

❷ តួទី n គឺ $u_{n-1} = u_0 + (n-1)d$

3) ផលបូក $u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = u_3 + u_{n-2} = \dots = u_p + u_{n+1-p}$

4) មធ្យមនព្វន្ត $u_p = \frac{u_{p-1} + u_{p+1}}{2}$

5) ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

III. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

1) **ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ** គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ(ក្រៅពីតួទីមួយ)ស្មើតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q មួយ។ q ហៅថាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ផលធៀបរួម $q=\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{u_3}{u_2}=\ldots=\dfrac{u_n}{u_{n-1}}=\sqrt[n-1]{\dfrac{u_n}{u_1}}$

2) រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $u_n=q\cdot u_{n-1}=u_1\cdot q^{n-1}$

3) ផលគុណ $u_1\times u_n=u_2\times u_{n-1}=u_3\times u_{n-2}=\ldots=u_p\times u_{n+1-p}$

4) មធ្យមធរណីមាត្រ $u_p=\sqrt{u_{p-1}\times u_{p+1}}$

5) ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $S_n=\dfrac{u_nq-u_1}{q-1}=\dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$

6) បើ $|q|<1$ នោះគេបាន $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{u_1}{1-q}$ ។

IV. ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតផ្សេងៗ

1) **រូបមន្តផលបូកតួនៃស្វ៊ីតផ្សេងៗ**

a). $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

b). $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$

c). $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

d). $k+(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+n-1)=\dfrac{n(2k+n-1)}{2}$

e). $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

f). $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

g). $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

h). $1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

i). $1^4+2^4+3^4+...+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

j). $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{2^n}+...=2$

k). $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}+...=1$

l). $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+...+\dfrac{1}{(n-1)!}+...=e$

2) **លក្ខណៈនៃផលបូក**

a). $\sum\limits_{k=1}^{n} c=nc$ **b).** $\sum\limits_{k=1}^{n} ca_k=c\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

c). $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k+\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

d). $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k-\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

e). $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2+2\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k+\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$

3) **របៀបកំណត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស្ទីត**

គេមានស្ទីត (a_n) :

a). ស្ទីត (b_n) កំណត់ដោយ $b_n=a_{n+1}-a_n$, $n=1,2,3,...$ ជាផលសងលំដាប់ 1 នៃស្ទីត (a_n) នោះគេបាន $a_n=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។

b). ស្ទីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់ 2 នៃស្ទីត (a_n) គឺជាផលសងលំដាប់ 1 នៃស្ទីត (b_n) កំណត់ដោយ $c_n=b_{n+1}-b_n$ ដែល $n=1,2,3,...$ នោះគេបាន

$b_n=b_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។

V. ទំនាក់ទំនងតួនៃស្វ៊ីត

1) កំណត់តួទី n ដោយប្រើស្វ៊ីតជំនួយ

គេប្រើស្វ៊ីតជំនួយ (r_n) ដែល $r_n = \alpha n + \beta$ ដែល α និង β ជាចំនួនថេរ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងនៃស្វ៊ីត។ ក្នុងករណីនេះ គេជំនួស r_n ក្នុងទំនាក់ទំនៃស្វ៊ីត រួចគណនាតម្លៃ α និង β បន្ទាប់មកកំណត់បានស្វ៊ីត (r_n) គេនឹងធ្វើផលសង $a_{n+1} - r_n$ ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)។

2) ទំនាក់ទំនងរវាង a_n និង S_n

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $S_n - S_{n-1} = a_n$ និង $S_1 = a_1$ ។

3) ទំនាក់ទំនងកំណើនក្នុងទម្រង់ $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

• របៀបដោះស្រាយ $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ ។ បើទំនាក់ទំនងនៃស្វ៊ីត (a_n) មានទម្រង់ $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ ។ គេពិចារណាពីរចំនួន α និង β ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\alpha + \beta = -p$ និង $\alpha\beta = q$ នោះគេបាន $a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$ ។

• ទំនាក់ទំនងនេះបំលែងតាមពីរយ៉ាងដូចខាងក្រោម:

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

• ទំនាក់ទំនងទាំងពីរខាងលើនេះគឺជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រអាចឲ្យគេរក α និង β ដោយដោះស្រាយសមីការ $x^2 + px + q = 0$ ព្រោះគេស្គាល់ផលបូក និង ផលគុណរបស់វា។

• សមីការ $x^2 + px + q = 0$ ហៅថា " **សមីការសម្គាល់នៃ** $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ " ។

4) របៀបកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_n - au_{n-1} = 0 , n \geq 2 , n \in \mathbb{N} \end{cases}$

បើ $a \neq 0$ នោះសមីការសម្គាល់ $r - a = 0$ នាំឲ្យ $r = a$

គេបានចម្លើយទូទៅ $u_n = e \cdot (a)^n$ ដែល e ជាចំនួនពិត និង $a \neq 1$។

5) របៀបកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត

$$\begin{cases} u_1=\alpha\ ,\ u_2=\beta \\ u_n-au_{n-1}-bu_{n-2}=0\ ,\ n\geq 3\ ,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

សមីការសម្គាល់ $r^2-ar-b=0$

❶ បើសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា $r_1,r_2\neq 0$ គេបានចម្លើយទូទៅ

$u_n=e_1\cdot r_1^n+e_2\cdot r_2^n$ ដែល e_1,e_2 ជាចំនួនពិត និង $n\in\mathbb{N}$ ។

❷ បើសមីការមានឫសឌុប $r_1=r_2=r_o\neq 0$ គេបានចម្លើយទូទៅ

$u_n=(e_1+ne_2)\cdot r_o^n$ ដែល e_1,e_2 ជាចំនួនពិត និង $n\in\mathbb{N}$ ។

❸ បើសមីការមានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចពីរឆ្លាស់គ្នាគឺ $\rho(\cos\theta\pm i\sin\theta)$

គេបានចម្លើយទូទៅ $u_n=\rho^n(e_1\cos n\theta+e_2\sin n\theta)$ ដែល e_1,e_2 ជាចំនួនពិត និង $n\in\mathbb{N}$ ។

⎈ **<u>សម្គាល់:</u>** តម្លៃ e_1,e_2 គេអាចរកឃើញតាមរយៈ $u_1=\alpha\ ,\ u_2=\beta$

VI. វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

1) គោលការណ៍នៃវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

$P(n)$ ជាសំណើដែលទាក់ទងនឹងចំនួនគត់ n ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេត្រូវៈ

❶ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះ $n=1$

❷ ឧបមាថា $P(n)$ ពិតចំពោះតម្លៃ n

❸ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិត នាំឲ្យបាន $P(n+1)$ ពិត។

2) ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

$$(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}C(n,r)x^{n-r}y^r$$

$$=C(n,0)x^n+C(n,1)x^{n-1}y^1+C(n,2)x^{n-2}y^2+\ldots+C(n,n)y^n$$

VII. ស៊េរីអនន្ត

1) ស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$

2) ផលបូក n តួដំបូង $S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

3) ភាពរួមនៃស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$ បើ $\lim_{n\to\infty} S_n = L$

4) សិក្សាតួទី n $(N^{th}\ term\ test)$

- បើស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរួម នោះគេបាន $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- បើ $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ នោះស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរីក

5) លក្ខណៈនៃភាពរួមរបស់ស៊េរី

បើស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ និង $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ ជាស៊េរីរួម នោះគេបានៈ

❶ $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = k\alpha$ ដែល k ជាចំនួនថេរ

❷ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha + \beta$

❸ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha - \beta$

VIII. របៀបសរសេរចំនួនទសភាគខួបទៅជាចំនួនសនិទាន

ឧទាហរណ៍ : សរសេរចំនួន $0.\overline{17}$ ទៅជាចំនួនសនិទាន

❶ សរសេរជាស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត ដែលមាន $a = 0.17$ ជាតួទី១

$$0.\overline{17} = 0.17171717\ldots = 0.17 + 0.0017 + 0.000017 + \ldots$$

❷ រកផលធៀបរួម $r = \dfrac{0.0017}{0.17} = \dfrac{0.000017}{0.0017} = \ldots = 0.01$

❸ គេបាន $0.\overline{17} = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{0.17}{1-0.01} = \dfrac{0.17}{0.99} = \dfrac{17}{99}$

ចំណាំ: បើ $0.\overline{a_1a_2a_3...a_n} = \dfrac{a_1a_2a_3...a_n}{\underbrace{999...9}_{n\text{ ខ្ទង់}}}$

IX. សិក្សាភាពរួម (*Convergence Tests*)

1) ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$ ដែល $a \neq 0$

- បើ $|r| < 1$ នោះស៊េរីរួមទៅរក $\dfrac{a}{1-r}$
- បើ $|r| \geq 1$ នោះស៊េរីរីក។

2) សិក្សាតាមការប្រៀបធៀប (*The Comparison Test*)

គេមាន $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ និង $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ជាស៊េរីដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $0 < a_n \leq b_n$ ចំពោះគ្រប់ n គេបាន:

❶ បើ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ជាស៊េរីរួម នោះគេបាន $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ក៏ជាស៊េរីរួមដែរ

❷ បើ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរីក នោះគេបាន $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ក៏ជាស៊េរីរីកដែរ

3) សិក្សាតាមការប្រៀបធៀបលីមីត (*The Limit Comparison Test*)

គេមាន $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ និង $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ជាស៊េរីដែល a_n និង b_n វិជ្ជមានចំពោះគ្រប់ n

❶ បើ $0 < \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} < \infty$ នោះ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ និង $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ជាស៊េរីរីកទាំងពីរ ឬជាស៊េរីរួមទាំងពីរ។

❷ បើ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ នោះ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ រួម នាំឲ្យ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ក៏រួមដែរ

❸ បើ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ នោះ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ រីក នាំឲ្យ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ក៏រីកដែរ ។

4) p-ស៊េរី ($p-series$)

p-ស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ ជាស៊េរីរួមចំពោះ $p>1$ និងរីកចំពោះ $0<p\le 1$

5) ការសិក្សាតាមផលធៀប (*The Ratio Test*)

គេមាន $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីដែលមានតួនីមួយៗវិជ្ជមាន

❶ បើ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ នោះ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរួម

❷ បើ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ នោះ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរីក

❸ បើ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ នោះ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ អាចជាស៊េរីរួម ឬជាស៊េរីរីក ហើយការសិក្សាតាមផលធៀបអាចមិនជាក់លាក់ ដូច្នេះការសិក្សាតាមរបៀបផ្សេងទៀតត្រូវតែប្រើជាជំនួយ (May converge or diverge and the ratio test is inconclusive; some other tests must be used.)

ផ្នែក២

កម្រងលំហាត់

លំហាត់ 1.1

ចូរកំណត់តួទី n ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ នៃស្វ៊ីតខាងក្រោមៈ

a). $5\,,7\,,9\,,11\,,13,\,...$ ***b***). $16\,,13\,,10\,,7\,,4\,,...$

c). $-3\,,-1\,,1\,,3\,,5\,,...$ ***d***). $\frac{2}{3}\,,\frac{3}{5}\,,\frac{4}{7}\,,\frac{5}{9}\,,...$

លំហាត់ 1.2

១. ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n=3n+4$ ។

គណនាៈ ***i***). a_1 ***ii***). a_5 ***iii***). a_2+a_3

២. ស្វ៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $b_n=5+2n$ ។

គណនាៈ ***i***). b_4 ***ii***). b_{10} ***iii***). b_{20}

៣. u_n នៃស្វ៊ីតមួយគឺ $2n-1$ ។

i) គណនា $u_1+u_2+u_3$ ***ii***). រកតម្លៃ n ដើម្បីឲ្យ $u_n=19$ ។

លំហាត់ 1.3

ស្វ៊ីតមួយមានតួទូទៅ $a_n=\frac{2^n}{3}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $a_{n+1}\div a_n$ ជាចំនួនថេរ។

លំហាត់ 1.4

តើស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតទាល់ឬទេ?

a). $a_n=\frac{n^3+2n^2-1}{n^2+n}\,,n\geq 1$ ***b***). $a_n=\frac{\pi}{n}\,,n\geq 1$

c). $a_n=\frac{45}{5+4\cos^2\frac{n\pi}{8}}$

លំហាត់ 1.5

១. តួទី n នៃស្វ៊ីតមួយកំណត់ $(n+3)(n-1)$ ។ សរសេរបីតួដំបូង រួចគណនាផលបូករបស់វា។

២. u_n នៃស្វ៊ីតមួយគឺ $\alpha n^2+\beta n$ ។ បើ $u_1=5$ និង $u_2=14$ ចូររកតម្លៃនៃ α និង β ។

លំហាត់ 1.6

តួទូទៅស្វ៊ីតមួយគឺ $a_n = 4n-3$ ។

i). គណនា a_3 និង a_8 ។

ii).តើ n មានតម្លៃប៉ុន្មានធ្វើឲ្យ $a_n = 45$?

iii).បង្ហាញថា $a_{n+1} - a_n$ ជាចំនួនថេរ។

iv). បង្ហាញថា $a_{n+1} - a_n < a_2$ ។

លំហាត់ 1.7

ស្វ៊ីតមួយមានតួទូទៅ $a_n = 4n - 21$ ។

i). តើមានប៉ុន្មានតួដែលជាតួអវិជ្ជមាន?

ii). គណនា $a_{19} \div a_8$ ។

iii).បើ $a_n - a_{n-1} = k$, គណនា $\sqrt{k}$ ។

លំហាត់ 1.8

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) មួយដែល $a_0 = 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ដោយ $a_{n+1} = 1 + a_n^2$

ក. គណនា a_n ចំពោះ n ពី 1 ដល់ 5 ។

ខ. បង្កើតអនុគមន៍ f ដែលចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេបាន $a_{n+1} = f(a_n)$ ។

លំហាត់ 1.9

សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីត (a_n) និង (b_n) ដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម:

ក. $a_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$ ខ. $b_n = (-1)^n \times \dfrac{1}{n}$ គ. $b_n = (n-3)^2$

ឃ. $a_n = 2^n \times 3^{n+1}$ ង. $\begin{cases} b_o = 4 \\ b_{n+1} = b_n - 3 \end{cases}$

លំហាត់ 1.10

គេឲ្យបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត 5 , 8 , 11 ។

i). ចូរកំណត់តួទី1 និងផលសងរួម d

ii). គណនាតម្លៃ u_{15} នៃស្វ៊ីត។ តើ 62 ជាតួជាទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត?

iii).បង្ហាញ u_n ជាទម្រង់ងាយមួយ រួចប្រើវាដើម្បីគណនា u_{15} ។

លំហាត់ 1.11

តួទី 5 នៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើ -8 និងផលបូករវាងតួទី 4 និងតួទី 10 ស្មើនឹង -32 ។
រកតម្លៃ u_1 និង d ។ តើតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតដែលមានស្មើនឹង -108 ។

លំហាត់ 1.12

១. ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមាន $a_6 = 20$ និង $a_{10} = 4a_2$ ។
កំណត់តម្លៃ a_1 និង d រួចគណនា a_{101} ។
២. គេឲ្យបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $x+6$, $2x+1$, $x+18$ ។
កំណត់តម្លៃ a_1 និង d រួចគណនា a_{20} ។

លំហាត់ 1.13

a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ $2n+1$ ។ សរសេរបង្ហាញ a_{n-1} ដែលជាតួទី $(n-1)$ ។ បង្ហាញថា $a_n - a_{n-1} =$ ចំនួនថេរ។ តើ (a_n) ជាប្រភេទស្វ៊ីតអ្វី? ព្រោះអ្វី?

លំហាត់ 1.14

១. 6 តួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តគឺ $x_1, x_2, 4, x_3, -2, x_4$ ។ រក x_1, x_2, x_3 និង x_3 ។
២. តើមានប៉ុន្មានចំនួននៅចន្លោះ 160 និង 300 ដែលចែកដាច់នឹង 7 ?

លំហាត់ 1.15

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ ។
***i*).** បង្ហាញថាផលសងរួមកំណត់ដោយ $d = u_2 - u_1 = \dots = u_n - u_{n-1}$
***ii*).** បង្ហាញថាតួទី n កំណត់ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d$
***iii*).** ទាញបញ្ជាក់ថា $d = \dfrac{u_n - u_1}{n-1}$ ។

លំហាត់ 1.16

បើស្វ៊ីត $(u_n): u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ បង្ហាញថាផលបូក n តួដំបូងកំណត់ដោយ

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2}\cdot n = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2}\cdot n \text{ ។}$$

លំហាត់ 1.17

១. តើមានប៉ុន្មានតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $\{7, 13, 19, \dots, 259\}$?

២. គណនា $S_n = 1+2+3+...+1989$ ដែល $n=1989$

៣. គណនា $S_n = 11+18+25+...$ ដែល $n=1979$

៤. គណនា $\Sigma = 124+133+142+...+1987$

លំហាត់ 1.18

១. a_n ជាតួទី n នៃស្វីតនព្វន្ត $p+qn$ ។ បើ $a_2 = 1$ និង $a_5 = 16$ ចូររកតម្លៃ a_1 និង d រួចគណនា S_{10} ព្រមទាំងរកតម្លៃ p និង q ។

២. ស្វីតនព្វន្តមួយមានប្រាំពីរតួវិជ្ជមាន។ តួកណ្តាលមានតម្លៃ 15 និងតួធំជាងគេស្មើនឹង 27 ។ គណនា S_7 ។

លំហាត់ 1.19

បីចំនួនវិជ្ជមានជាស្វីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d>0$ យក a,b,c ជាចំនួននោះ។

ក. គណនា b បើ $a+b+c=18$

ខ. b ជាតម្លៃដែលរកឃើញនៅសំណួរ(**ក**) គេបង្កើតប្រភាគ $\frac{c}{a}$ ។ តើ d យកតម្លៃប៉ុន្មានដើម្បីឲ្យ $\frac{c}{a} \in \mathbb{N}$? គណនា a និង c ។

លំហាត់ 1.20

គេមានស្វីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួម d និង $u_1 = 1$ ។ គណនា d ក្នុងករណីខាងក្រោម:

ក/. $S_n = 176$, $u_n = 31$

ខ/. ផលធៀបតួទី 8 និងតួទី 3 ស្មើ 4

គ/. ផលដកការេនៃតួទី 10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3 ។

លំហាត់ 1.21

បង្ហាញថាចំនួនខាងក្រោមជាស្វីតនព្វន្ត:

ក/. $\frac{1}{x+1}$, $\frac{x}{x^2-1}$, $\frac{1}{x-1}$

ខ/. $(a^2+b^2)^2$, a^4+b^4 , $(a^2-b^2)^2$

គ/. $(a^2-2ab-b^2)^2$, $(a^2+b^2)^2$, $(a^2+2ab-b^2)^2$

លំហាត់ 1.22

ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលបូក 100 តួស្មើ -16350 និងតួចុងក្រោយស្មើ -312 ។
គណនាតួទីមួយ និងផលសងរួម d ។

លំហាត់ 1.23

ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមាន $u_2, u_3, u_4, \ldots$ ដែលផលសងរួម $d=2$ និង $u_2=3$ ។

ក/. គណនា u_{20} , u_n

ខ/. គណនាតួទី 20 និងតួទី n ។

លំហាត់ 1.24

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_o, u_1, u_2, u_3, \ldots.$ ដែល $d=2$ និង $u_o=3$ ។

ក/. គណនាតួ u_{22} និង u_n

ខ/. គណនាតួទី 22 និងតួទី n ។

លំហាត់ 1.25

ក/. រកប្រាំចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្តនៅចន្លោះ 10 និង 82 ។

ខ/. រកប្រាំបីចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលគេស្គាល់ផលបូក $S=196$ និងតួទីមួយ
ស្មើនឹង 7 ។

លំហាត់ 1.26

ផលបូក 3 តួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើ 33 និងផលគុណរបស់វាស្មើ 1287 ។ រកចំនួន
ទាំងបីនោះ ។

លំហាត់ 1.27

បើបីចំនួន a, b, c ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ចូរបង្ហាញថា:

ក/. $a^2+8bc=(2b+c)^2$

ខ/. $\frac{2}{9}(a+b+c)^3=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$ ។

លំហាត់ 1.28

តើមានប៉ុន្មានតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=3$ តួទីមួយ $u_1=7$ និង

ផលបូកតួស្មើ 205 ។

លំហាត់ 1.29

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ $u_o, u_1, u_2, \ldots, u_n$ ដែលមានផលសងរួម $d = \frac{1}{2}$ និង $u_5 = 0$ ។

ក/. គណនាតួ u_o តួទី 11 និងតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ។

ខ/. គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនេះ។

លំហាត់ 1.30

គេមានស្វ៊ីត 19 , 31 , 43 , ...

ក/. កំណត់តួទី 15 និងតួទី 39 នៃស្វ៊ីត។

ខ/. តើតម្លៃ 127 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត?

គ/. គណនាផលបូក 39 ដំបូង។

លំហាត់ 1.31

រកតម្លៃ u_1 , q , u_n និង u_7 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោមៈ

i). 5 , 15 , 45 , ...

ii). 81 , – 27 , 9 , ...

iii). 64 , 48 , 36 , ...

iv). 50 , – 20 , 8 , ...

លំហាត់ 1.32

រកតួទី 6 និងផលបូក 6 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $\{4, 6, 9, \ldots\}$ ។

លំហាត់ 1.33

រកតួដំបូងនិងរេសុងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $u_3 = 25$ និង $u_5 = 156\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ 1.34

រកតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី 6 និងតួទី 7 ស្មើនឹង $\frac{32}{9}$ និង $\frac{64}{27}$ រៀងគ្នា។

លំហាត់ 1.35

$2k+2, 5k+1, 10k+2$ ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។ រកតម្លៃ k ។

លំហាត់ 1.36

ចំពោះស្វ៊ីត $\{2, 2\sqrt{3}, 6, \ldots\}$។ រកតួទី 10 និងផលបូក 10 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត។

លំហាត់ 1.37

គណនាតម្លៃនៃស៊េរី $16-8+4-2+\ldots+\dfrac{1}{16}$ ។

លំហាត់ 1.38

គណនាផលបូក 9 តួនៃស៊េរី $3+3^{4/3}+3^{5/3}+\ldots$ ។

លំហាត់ 1.39

បួនតួដំបូងនៃស្វ៊ីតគឺ $x, \dfrac{2}{3}x^2, \dfrac{4}{9}x^3, \dfrac{8}{27}x^4$ ។ រកទម្រង់ផលបូក n តួដំបូង រួចគណនាតម្លៃនោះចំពោះ $n=6$ និង $x=3$។

លំហាត់ 1.40

រកតម្លៃ x និង y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ 1, x, y ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត និង 1, y, x ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

លំហាត់ 1.41

(i). រករូបមន្តនៃស៊េរី $1+x+x^2+\ldots+x^{2n}$ ។

(ii). រកផលបូកនៃស៊េរី $12+8+5\dfrac{1}{3}+\ldots$ ។

លំហាត់ 1.42

ផលបូក 8 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើ 17 ដងនៃផលបូក 4 តួដំបូង។ រករេសុង ។

លំហាត់ 1.43

ផលបូក 4 តួដំបូងនៃស៊េរីធរណីមាត្រស្មើ 30 និងផលបូកស៊េរីមិនកំណត់ស្មើ 32។ រកបីតួដំបូងនៃស៊េរីនេះ។

លំហាត់ 1.44

១. រក u_n ដែលជាតួទូទៅនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រៈ $128, 64, 32, \ldots$

ហើយគណនាតម្លៃ u_8 ។

២. បីតួដំបូងនៃស្ទីតធរណីមាត្រគឺ $x-4$, x , $x+6$ ។ គណនាតម្លៃ x ។

រកតម្លៃ u_1 , q និង u_6 ។

លំហាត់ 1.45

១. រក S_{10} នៃស៊េរីធរណីមាត្រ $3+12+48+...$ ។

២. តើមានប៉ុន្មានតួនៃស៊េរីធរណីមាត្រ $3+6+12+...$ ដែល $S_n=1533$ ។

លំហាត់ 1.46

១. រកផលបូកនៃស៊េរី $1+4+16+...+4096$

២. ផលបូកបីតួដំបូងនៃស៊េរីធរណីមាត្រស្មើ 21 និងតួទីពីរស្មើ 6 ។

រកតម្លៃពីរតួផ្សេងទៀត។

លំហាត់ 1.47

រក u_n និង S_n នៃស៊េរីធរណីមាត្រ $4+12+36+...$ ។

បង្ហាញថា $2S_n+4=3u_n$ ។

លំហាត់ 1.48

a).គេមានស្ទីត $a_n=3n^2$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាស្ទីតនេះមិនមែនជាស្ទីតធរណីមាត្រ។

b).រកផលបូកនៃ 60 តួដំបូងនៃស៊េរីនព្វន្ត $59+57+55+...$ ។

c). ស្ទីតធរណីមាត្រមួយមាន $a_2=18$ និង $a_5=486$ ។

ក. រកតម្លៃ a_1 និង q

ខ. រកតម្លៃ S_6 ។ បើ $a_n=1458$ ចូររកតម្លៃ n ។

លំហាត់ 1.49

S_{10} នៃស៊េរីធរណីមាត្រស្មើ 3069 និង $S_5=93$ ។ រក a_1 និង q ។

លំហាត់ 1.50

តើគេត្រូវថែមប៉ុន្មានទៅលើចំនួន 3 , 24 , 94 ដើម្បីឲ្យបាន 3 តួតគ្នានៃស្ទីតធរណីមាត្រ។

លំហាត់ 1.51

គណនា a , b , c នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដោយដឹងថា:

ក. $a+b+c=156$ និង $a^2+b^2+c^2=13104$ ។

ខ. $a+b+c=65$ និង $abc=3375$ ។

លំហាត់ 1.52

(a). ចូរសរសេរជាទម្រង់ទូទៅចំពោះ a_n និង S_n នៃស៊េរីនព្វន្តមួយ។

(b). ផលបូកប្រាំតួដំបូងនៃស៊េរីនព្វន្តស្មើ 2 និងតួទីប្រាំស្មើ $-\frac{6}{5}$ ។

រកតម្លៃ a_1 និង d រួចគណនាផលបូកប្រាំតួបន្ទាប់។

(c). ផលបូក S_n នៃ n ដំបូងនៃស៊េរីនព្វន្តកំណត់ដោយ $S_n=3n^2-6n$

គណនា S_2 , S_1 និង a_2 ដែលជាតួទី 2 នៃស៊េរី។

បើ $a_n=333$ ចូររកតម្លៃ n ។ គណនាមធ្យមនៃ 20 តួដំបូង។

លំហាត់ 1.53

(a). ចូរបង្ហាញថាផលបូក n តួនៃស៊េរី $1+3+5+.....$ ស្មើនឹង n^2 ។

(b). ក្នុងស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ $S_3=24$ និង $S_6=54$ ។ រក S_9 ។

(c). ចូរបង្ហាញផលបូក 20 តួដំបូងនៃស៊េរីធរណីមាត្រ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+.....$

ជាទម្រង់ $2-\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ។

លំហាត់ 1.54

(a). បើ $10 , p , q , 28$ ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ចូររកតម្លៃ p និង q ។

(b). ❶ តួទីមួយ a_1 នៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើ 9 និងផលសងរួមស្មើ 4 ។ រក a_5 ជាតួទីប្រាំ និង S_{10} ជាផលបូក10 តួដំបូង។

❷ ក្នុងស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ $S_n=5n-2n^2$ ។ រក a_1, a_2 និង d ដែលជាផលសងរួម រួចរក a_{10} និង S_{10} ។

(c). u_n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយស្មើ $243\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ។

❶ សរសេរនូវតម្លៃនៃ u_1 និង q

❷ រកតម្លៃនៃ u_8

❸ បើ $u_n = 32$ ចូររកតម្លៃ n ។

លំហាត់ 1.55

(a). បើ $5 , x , 80 , y$ ជាតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{xy} = 80$ ។

(b). ក្នុងស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ តួទីមួយស្មើ 6 និងផលសងរួមស្មើ 6 ។ សរសេរ a_n ដែលជាតួទូទៅនៃស្វ៊ីត។ តើមានប៉ុន្មានចំនួននៅចន្លោះពី 1 ទៅ 1000 ដែលជាពហុគុណនៃ 6 ។ រកផលបូកនៃពហុគុណទាំងនោះ។

(c). រក S_n ចំពោះស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $27 + 18 + 12 + ...$

បើ $u_n = \dfrac{128}{81}$ នៃស៊េរីនេះ ចូររក n ព្រមទាំង S_n ។

លំហាត់ 1.56

(a). ប្រើ a_n ជាតួទី n និង S_n ជាផលបូក n តួនៃស៊េរីនព្វន្តមួយ។ ស៊េរីនព្វន្តមួយមាន $a_6 = 208$ និង $a_{11} = 183$ ។ គណនា S_{40} ។

(b). ពីរតួដំបូងនៃស៊េរីគឺ $1 + 2 + ...$

(i). បើស៊េរីនេះជាស៊េរីធរណីមាត្រ ចូរសរសេរពីរតួបន្ទាប់ និងបង្ហាញថា $S_{20} < 2^{20}$ ។

(ii). បើស៊េរីនេះជាស៊េរីនព្វន្ត ចូរបង្ហាញថា $S_n = \dfrac{n^2 + n}{2}$ និងរកផលបូក 100 តួដំបូង។

លំហាត់ 1.57

គណនា a , b , c និង q នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដោយដឹងថា $a + b + c = 312$ និង $c - a = 192$ ។

លំហាត់ 1.58

(a).រកផលបូក 40 តួដំបូងនៃស៊េរីនព្វន្ត $75+72\frac{1}{2}+70+....$

(b). ស្វ៊ីតមួយមាន $a_1=8$ និង $a_2=6$ ។

(i). រក a_{10} បើវាជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

(ii). រក a_5 បើវាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

(c). ស៊េរីនព្វន្តមួយមាន $a_5=8$ និង $S_8=61$ ។ រក a_1, d និង a_{21} ។

លំហាត់ 1.59

គេឲ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $\{\sqrt{5}+\sqrt{3}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, ...\}$ ។ ចូររកផលធៀបរួម និងផលបូកនៃស៊េរីមិនកំណត់។

លំហាត់ 1.60

(a). $\frac{5}{3}, x, \frac{3}{5}$ ជាតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។ គណនាតម្លៃទាំងពីរនៃ x ។

(b). ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមាន $a_3=12$ និង $d=-3$ ។ បើ $S_n=33$ ចូររកតម្លៃទាំងពីរនៃ n ។ ចូរពន្យល់ថា ហេតុអ្វីបានជាអាចមានតម្លៃពីរផ្សេងគ្នានៃ n ។

(c). ចំពោះស៊េរីធរណីមាត្រ $S_n=3(2^n-1)$ ។

(i). រក a_1 និង q

(ii). គណនា a_n និង a_{10} ។

លំហាត់ 1.61

(a). ក្នុងស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលបូក 10 តួដំបូងស្មើ 205 និងផលបូក 10 តួបន្ទាប់ស្មើ 705 ។ សរសេរបីតួដំបូងនៃស៊េរីនេះ។

(b). ស្វ៊ីតមួយមាន $a_n=3-4n$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $a_{n+1}-a_{n-1}>a_3$

(c). ផលបូកបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើ 91 និងតួកណ្ដាលស្មើ 21 ។ ចូររកតម្លៃនៃពីរតួផ្សេងទៀត។

(d). ស៊េរីធរណីមាត្រមួយមាន $S_4=75$ និង $S_8=1275$ ។ ទាញរក

$\frac{S_8}{S_4}$ រួចគណនាតម្លៃ a_1 និង q ។

លំហាត់ 1.62

ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1, 3, 7, 13, 21, 31, \dots$ ។

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $2, 4, 8, 14, 22, 32, \dots$ ។

គ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n):\ p, q, p, q, p, q, \dots$ ។

លំហាត់ 1.63

គេឲ្យស្វ៊ីត $1, 2, 5, 10, 17, \dots$ ។

ក/. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

លំហាត់ 1.64

គេឲ្យស្វ៊ីត $(U_n) = \{7, 8, 11, 16, 23, \dots\}$ ។

ក/. ចូររកតួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n) ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

លំហាត់ 1.65

ក/. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $4, 5, 7, 10, 14, \dots$ ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

លំហាត់ 1.66

ក/. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $3, 5, 8, 12, 17, 23, \dots$ ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

លំហាត់ 1.67

ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1, 5, 14, 30, 55, 91, \dots$ ។

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

លំហាត់ 1.68

គេឲ្យស្វ៊ីត $(a_n): 1, 2, 6, 15, 31, 56, \dots$ ។

ក/. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

លំហាត់ 1.69

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $4, 18, 48, 100, 180, 294, \ldots$ រួចគណនា ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

លំហាត់ 1.70

ក. ចូរកំណត់តួ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម

$-2, 1, 7, 19, 43, 91, 187, \ldots$ ។

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

លំហាត់ 1.71

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + 4a_n$ ។

លំហាត់ 1.72

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n - n + 1$ ។

កំណត់តួទី n ។

លំហាត់ 1.73

គេមានផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $S_n = n^3 + 2n$ ។

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

លំហាត់ 1.74

យក $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ប្រសិនបើ S_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ $S_n + n = 3^n$

ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។ រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

លំហាត់ 1.75

ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមចំពោះ $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(a_k + \frac{1}{k+1}\right) = 2^n + 1 - \frac{1}{n+1}$$ ។

ក. បង្ហាញតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ។

លំហាត់ 1.76

ស្វីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 1$, $a_2 = 13$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វីតនេះ ។

លំហាត់ 1.77

ពិចារណាស្វីត (a_n) ដែលបានកំណត់ដូចខាងក្រោម:

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 1, (n = 1, 2, 3, \ldots)$ ក. ចូររកតួទូទៅនៃស្វីត (a_n) ។

ខ. គណនាផលបូក $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ។

លំហាត់ 1.78

ស្វីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1 = 1$, $a_{n+1} = pa_n + q$ គណនាតម្លៃ p និង q បើគេដឹងថាតួទី 3 ស្មើ 6 និងតួទី 5 ស្មើ 86 ។

លំហាត់ 1.79

កំណត់តួទី n នៃស្វីត (U_n) ដែល $\begin{cases} U_1 = \dfrac{2}{5} \\ 5U_n - 2U_{n-1} = 0 \end{cases}$

លំហាត់ 1.80

កំណត់តួទី n នៃស្វីត (U_n) ដែលកំណត់ដោយ $\begin{cases} U_1 = -3 \\ 2U_{n+1} + 3U_n = 0 \end{cases}$

លំហាត់ 1.81

គេមានស្វីត (U_n) កំណត់ដោយ $U_1 = 1, U_2 = 2$,

$U_n = 4U_{n-1} - 4U_{n-2}$ ដែល $(n \geq 3, n \in \mathbb{N})$ ។

កំណត់តួទី n នៃស្វីតនេះ ។

លំហាត់ 1.82

(U_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $U_1 = -1$, $U_2 = 2$,
$U_n = 6U_{n-1} - 9U_{n-2}$, $n \geq 3$ ។ កំណត់ U_n ដែលជាតួទី n ។

លំហាត់ 1.83

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n) ដែល $\begin{cases} U_1 = 2 , U_2 = 3 \\ U_{n+2} = \dfrac{U_{n+1} + U_n}{2} \end{cases}$

លំហាត់ 1.84

1. ចំពោះ $h > 0$ និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \geq 2$,
   បង្ហាញថា $(1+h)^n > 1 + nh$ ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា
2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n^3 + 2n$ ជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$
   ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។

លំហាត់ 1.85

បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

ក. ចំនួន $4^n + 2$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

ខ. ចំនួន $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

លំហាត់ 1.86

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$
ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ 1.87

រកប្រភាគដែលមានតម្លៃស្មើនឹង:

(i) $2.3\dot{8}$ (ii) $4.\dot{6}\dot{2}$ (iii) $0.41717\ldots$

លំហាត់ 1.88

(i) $0.323232\ldots = \dfrac{p}{q}$ ដែល p និង q ជាចំនួនគត់។ រកតម្លៃ p និង q

(ii) បង្ហាញថា 1.2888... ជាចំនួនសនិទាន ដោយសរសេរជាទម្រង់ $\frac{m}{n}$

ដែល m និង n ជាចំនួនគត់។

លំហាត់ 1.89

(i) គេឲ្យតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$ ។ ចូរសរសេរ

បីតួដំបូង និងគណនាផលបូករបស់វា ។

(ii) នៅក្នុងស៊េរីនព្វន្តមួយតួទី 18 ស្មើ 70 និងតួទី 14 ស្មើ 3 ដងនៃតួទី 5 ។

គណនាផលបូក 50 តួដំបូង ។

(iii) តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ a_1 ស្មើ 5 និងផលធៀបរួម r ស្មើ 2 ។

រក a_8 និង S_4 រួចរកតម្លៃ n បើ $S_n = 635$ ។

លំហាត់ 1.90

ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ និង $u_o = \frac{2}{3}$

ក. គណនា u_1 និង u_2

ខ. តាង $v_n = \sqrt{2}u_n - n$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

សរសេរ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គណនា $S_n = u_o + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ផ្នែកព

លំហាត់-ចម្លើយ

លំហាត់ 1.1

ចូរកំណត់តួទី n ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

$\boldsymbol{a}$). $5\,,7\,,9\,,11\,,13,\,...$ $\boldsymbol{b}$). $16\,,13\,,10\,,7\,,4\,,...$

$\boldsymbol{c}$). $-3\,,-1\,,1\,,3\,,5\,,...$ $\boldsymbol{d}$). $\frac{2}{3}\,,\frac{3}{5}\,,\frac{4}{7}\,,\frac{5}{9}\,,...$

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម:

$\boldsymbol{a}$). $5\,,7\,,9\,,11\,,13,\,...$

យើងសង្កេតឃើញថា:

$a_1=5=2\times1+3$

$a_2=7=2\times2+3$

$a_3=9=2\times3+3$

$a_4=11=2\times4+3$

....

$a_n=2n+3$ ដែល $n=1,2,3,\,...$

ដូចនេះ តួទី n គឺ $a_n=2n+3$ ដែល $n=1,2,3,\,...$ ។

$\boldsymbol{b}$). $16\,,13\,,10\,,7\,,4\,,...$

យើងសង្កេតឃើញថា:

$a_1=16=19-3\times1$

$a_2=13=19-3\times2$

$a_3=10=19-3\times3$

$a_4=7=19-3\times4$

$a_5=4=19-3\times5$

....

$a_n=19-3n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ តួទី n គឺ $a_n = 19 - 3n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

$\boldsymbol{c}$). $-3\,,\,-1\,,\,1\,,\,3\,,\,5\,,\,\ldots$

យើងសង្កេតឃើញថាៈ

$a_1 = -3 = 2\times1-5$

$a_2 = -1 = 2\times2-5$

$a_3 = 1 = 2\times3-5$

$a_4 = 3 = 2\times4-5$

$a_5 = 5 = 2\times5-5$

....

$a_n = 2n-5$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ តួទី n គឺ $a_n = 2n-5$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

$\boldsymbol{d}$). $\frac{2}{3}\,,\,\frac{3}{5}\,,\,\frac{4}{7}\,,\,\frac{5}{9}\,,\,\ldots$

យើងសង្កេតឃើញថាៈ

$$a_1 = \frac{2}{3} = \frac{1+1}{2\times1+1}$$

$$a_2 = \frac{3}{5} = \frac{2+1}{2\times2+1}$$

$$a_3 = \frac{4}{7} = \frac{3+1}{2\times3+1}$$

$$a_5 = \frac{5}{9} = \frac{4+1}{2\times4+1}$$

....

$a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ 1.2

១. ស្ទីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = 3n+4$ ។
គណនា: $\boldsymbol{i}).\ a_1$ $\boldsymbol{ii}).\ a_5$ $\boldsymbol{iii}).\ a_2+a_3$
២. ស្ទីត (b_n) កំណត់ដោយ $b_n = 5+2n$ ។
គណនា: $\boldsymbol{i}).\ b_4$ $\boldsymbol{ii}).\ b_{10}$ $\boldsymbol{iii}).\ b_{20}$
៣. u_n នៃស្ទីតមួយគឺ $2n-1$ ។
$\boldsymbol{i})$ គណនា $u_1+u_2+u_3$ $\boldsymbol{ii}).$ រកតម្លៃ n ដើម្បីឲ្យ $u_n = 19$

ចម្លើយ

១. គេមានស្ទីត $a_n = 3n+4$

$\boldsymbol{i}).$ គណនា a_1

$a_1 = 3(1)+4 = 3+4 = 7$

ដូចនេះ: $\boxed{a_1 = 7}$

$\boldsymbol{ii}).$ គណនា a_5

$a_5 = 3(5)+4 = 15+4 = 19$

ដូចនេះ: $\boxed{a_5 = 19}$

$\boldsymbol{iii}).$ គណនា a_2+a_3

$a_2 = 3(2)+4 = 6+4 = 10$

$a_3 = 3(3)+4 = 9+4 = 13$

$a_2+a_3 = 10+13 = 23$

ដូចនេះ: $\boxed{a_2+a_3 = 23}$

២. គេមានស្ទីត $b_n = 5+2n$

$\boldsymbol{i}).$ គណនា b_4

$b_4 = 5+2(4) = 5+8 = 13$

ដូចនេះ $\boxed{b_4 = 13}$

ii). គណនា b_{10}

$b_{10} = 5 + 2(10) = 5 + 20 = 25$

ដូចនេះ $\boxed{b_{10} = 25}$

iii). គណនា b_{20}

$b_{20} = 5 + 2(20) = 5 + 40 = 45$

ដូចនេះ $\boxed{b_{20} = 45}$

៣. គេមានស្វ៊ីត $u_n = 2n - 1$

i) គណនា $u_1 + u_2 + u_3$

$u_1 = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$

$u_2 = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$

$u_3 = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$

$u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 3 + 5 = 9$

ដូចនេះ $\boxed{u_1 + u_2 + u_3 = 9}$

ii). រកតម្លៃ n ដើម្បីឲ្យ $u_n = 19$

បើ $\begin{cases} u_n = 19 \\ u_n = 2n - 1 \end{cases}$ នាំឲ្យ $2n - 1 = 19$

ឬ $2n = 20$ នាំឲ្យ $n = \frac{20}{2} = 10$

ដូចនេះ ដើម្បីឲ្យ $u_n = 19$ លុះត្រាតែ $n = 10$ ។

លំហាត់ 1.3

ស្វ៊ីតមួយមានតួទូទៅ $a_n = \frac{2^n}{3}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $a_{n+1} \div a_n$ ជាចំនួនថេរ។

ចម្លើយ

បង្ហាញថា $a_{n+1} \div a_n$ ជាចំនួនថេរ

គេមាន $a_n = \dfrac{2^n}{3}$ នាំឲ្យ $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{3} = \dfrac{2\cdot 2^n}{3}$

គេបាន $a_{n+1} \div a_n = \dfrac{2\cdot 2^n}{3} \div \dfrac{2^n}{3} = \dfrac{2\cdot 2^n}{3} \times \dfrac{3}{2^n} = 2$ (ជាចំនួនថេរ)

ដូចនេះ $a_{n+1} \div a_n = 2$ ជាចំនួនថេរ។

លំហាត់ 1.4

តើស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតទាល់ឬទេ?

a). $a_n = \dfrac{n^3 + 2n^2 - 1}{n^2 + n}$, $n \geq 1$ ***b***). $a_n = \dfrac{\pi}{n}$, $n \geq 1$

c). $a_n = \dfrac{45}{5 + 4\cos^2 \dfrac{n\pi}{8}}$

ចម្លើយ

តើស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតទាល់ឬទេ?

a). $a_n = \dfrac{n^3 + 2n^2 - 1}{n^2 + n}$, $n \geq 1$

គេមាន $a_n = \dfrac{n^3 + 2n^2 - 1}{n^2 + n} = n + 1 - \dfrac{n+1}{n^2 + n}$

$$a_{n+1} = (n+1) + 1 - \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2 + (n+1)} = n + 2 - \frac{n+2}{n^2 + 3n + 2}$$

គេបាន $a_{n+1} - a_n = \left(n + 2 - \dfrac{n+2}{n^2 + 3n + 2} \right) - \left(n + 1 - \dfrac{n+1}{n^2 + n} \right)$

$$a_{n+1}-a_n=1+\frac{n+1}{n^2+n}-\frac{n+2}{n^2+3n+2}$$

$$a_{n+1}-a_n=1+\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_{n+1}-a_n=1+\frac{(n+2)(n+1)-n(n+2)}{n(n^2+3n+2)}$$

$$a_{n+1}-a_n=1+\frac{(n^2+3n+2)-(n^2+2n)}{n(n^2+3n+2)}=1+\frac{n+2}{n(n^2+3n+2)}$$

ចំពោះ $n\geq 1$ គេបាន $n+2>0$ និង $n(n^2+3n+2)>0$

នាំឲ្យ $1+\frac{n+2}{n(n^2+3n+2)}>0$ នោះ $a_{n+1}-a_n>0$ ឬ $a_{n+1}>a_n$

ដោយ $a_{n+1}>a_n$ ចំពោះ $n\geq 1$ ដូច្នេះស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតកើនជានិច្ច

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ដែលមាន 1 ជាគោលក្រោម។

b). $a_n=\frac{\pi}{n}\,,\, n\geq 1$

គេបានតួនៃស្វ៊ីត $a_1=\pi\,,\, a_2=\frac{\pi}{2}\,,\, a_3=\frac{\pi}{3}\,,\,\ldots\,,\,\frac{\pi}{n}\,,\,\ldots$

គេឃើញថា $a_1>a_2>a_3>\ldots$

នាំឲ្យ $a_n=\frac{\pi}{n}\leq\pi$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ នោះ $M=\pi$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត (a_n)

នាំឲ្យស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ $(*)$

ម្យ៉ាងទៀត តាមលំដាប់នៃស្វ៊ីតគេបាន $N=0$ ជាគោលក្រោម

(ព្រោះពេល n ខិតជិតអនន្ត នោះ $\frac{\pi}{n}$ ខិតជិត 0)

នាំឲ្យស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម $(**)$

តាម $(*)$ និង $(**)$ នាំឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

$c).\ a_n=\dfrac{45}{5+4\cos^2\dfrac{n\pi}{8}}$

គេមាន $0\le\cos^2\dfrac{n\pi}{8}\le 1$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

គេបាន $0\le 4\cos^2\dfrac{n\pi}{8}\le 4$ នោះ $5\le 5+4\cos^2\dfrac{n\pi}{8}\le 9$

នាំឲ្យ $\dfrac{1}{9}\le\dfrac{1}{5+4\cos^2\dfrac{n\pi}{8}}\le\dfrac{1}{5}$ នោះ $\dfrac{45}{9}\le\dfrac{45}{5+4\cos^2\dfrac{n\pi}{8}}\le\dfrac{45}{5}$

ឬ $5\le\dfrac{45}{5+4\cos^2\dfrac{n\pi}{8}}\le 9$ គេបាន $N=5$ ជាគោលក្រោម និង $M=9$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត (a_n) នាំឲ្យស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

លំហាត់ 1.5

១. តួទី n នៃស្វ៊ីតមួយកំណត់ $(n+3)(n-1)$ ។ សរសេរបីតួដំបូង រួចគណនាផលបូករបស់វា។

២. u_n នៃស្វ៊ីតមួយគឺ $\alpha n^2+\beta n$ ។ បើ $u_1=5$ និង $u_2=14$ ចូររកតម្លៃនៃ α និង β ។

ចម្លើយ

១. តាង $u_n=(n+3)(n-1)$

- សរសេរបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីត

$u_n=(n+3)(n-1)$

$u_1=(1+3)(1-1)=(4)(0)=0$

$u_2=(2+3)(2-1)=(5)(1)=5$

$u_3=(3+3)(3-1)=(6)(2)=12$

ដូចនេះ: $\boxed{u_1=0\,,\,u_2=5\,,\,u_3=12}$

• គណនាផលបូកបីតួដំបូង

$u_1+u_2+u_3=0+5+12=17$

ដូចនេះ: $\boxed{u_1+u_2+u_3=17}$

២. គេមាន $u_n=\alpha n^2+\beta n$

រកតម្លៃនៃ α និង β

បើ $u_1=5$ នោះ: $\alpha+\beta=5\quad(i)$

បើ $u_2=14$ នោះ: $4\alpha+2\beta=14$ ឬ $2\alpha+\beta=7\quad(ii)$

តាម (i) និង (ii) គេបាន

$$\begin{cases}\alpha+\beta=5\\2\alpha+\beta=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\\beta=3\end{cases}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\alpha=2\,,\,\beta=3}$

លំហាត់ 1.6

តួទូទៅស្វ៊ីតមួយគឺ $a_n=4n-3$។

i). គណនា a_3 និង a_8។

ii). តើ n មានតម្លៃប៉ុន្មានធ្វើឲ្យ $a_n=45$?

iii). បង្ហាញថា $a_{n+1}-a_n$ ជាចំនួនថេរ។

iv). បង្ហាញថា $a_{n+1}-a_n<a_2$។

ចម្លើយ

i). គណនា a_3 និង a_8

គេមាន $a_n=4n-3$

គេបាន $a_3=4(3)-3=12-3=9$

$a_8 = 4(8) - 3 = 32 - 3 = 29$

ដូចនេះ $\boxed{a_3 = 9\ ,\ a_8 = 29}$

ii). តើ n មានតម្លៃប៉ុន្មានធ្វើឲ្យ $a_n = 45$?

គេមាន $a_n = 45$ តែ $a_n = 4n - 3$

គេបាន $4n - 3 = 45$ ឬ $4n = 45 + 3 = 48$ នាំឲ្យ $n = 12$

ដូចនេះ បើ $n = 12$ នោះនាំឲ្យ $a_{12} = 45$ ។

iii). បង្ហាញថា $a_{n+1} - a_n$ ជាចំនួនថេរ

គេមាន $a_n = 4n - 3$ នោះ $a_{n+1} = 4(n+1) - 3 = 4n - 1$

គេបាន $a_{n+1} - a_n = (4n - 1) - (4n - 3) = 2$ ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ $a_{n+1} - a_n = 2$ ជាចំនួនថេរ។

iv). បង្ហាញថា $a_{n+1} - a_n < a_2$ ។

គេមាន $a_n = 4n - 3$

គេបាន $a_2 = 4(2) - 3 = 8 - 3 = 5$

តែ $a_{n+1} - a_n = 2$ នាំឲ្យ $a_{n+1} - a_n < a_2$

ដូចនេះ $\boxed{a_{n+1} - a_n < a_2}$

លំហាត់ 1.7

ស្វ៊ីតមួយមានតួទូទៅ $a_n = 4n - 21$ ។

i). តើមានប៉ុន្មានតួដែលជាតួអវិជ្ជមាន?

ii). គណនា $a_{19} \div a_8$ ។

iii). បើ $a_n - a_{n-1} = k$, គណនា $\sqrt{k}$ ។

ចម្លើយ

i). តើមានប៉ុន្មានតួដែលជាតួអវិជ្ជមាន?

ឧបមាថា $a_n < 0$

គេបាន $4n-21<0$ ឬ $4n<21$ នាំឲ្យ $n<\dfrac{21}{4}\approx 5$ (ព្រោះ $n\in\mathbb{N}$)

ដូចនេះ មានចំនួន 5 តួ ដែលជាតួអវិជ្ជមានគឺ $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ។

ii). គណនា $a_{19}\div a_8$

គេមាន $a_n=4n-21$

គេបាន $a_8=4(8)-21=32-21=11$

$a_{19}=4(19)-21=76-21=55$

នាំឲ្យ $a_{19}\div a_8=55\div 11=5$

ដូចនេះ $\boxed{a_{19}\div a_8=5}$

iii). គណនា $\sqrt{k}$

គេមាន $a_n-a_{n-1}=k$

គេបាន $k=a_n-a_{n-1}=(4n-21)-[4(n-1)-21]$

$=4n-21-4n+4+21=4$

នាំឲ្យ $\sqrt{k}=\sqrt{4}=2$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{k}=2}$

លំហាត់ 1.8

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) មួយដែល $a_0=0$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 0$ ដោយ $a_{n+1}=1+a_n^2$

ក. គណនា a_n ចំពោះ n ពី 1 ដល់ 5 ។

ខ. បង្កើតអនុគមន៍ f ដែលចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ គេបាន $a_{n+1}=f(a_n)$ ។

ចម្លើយ

ក. គណនា a_n ចំពោះ n ពី 1 ដល់ 5

គេមាន $a_{n+1}=1+a_n^2$ ដែល $a_0=0$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 0$

$n=0:\ a_1=1+a_o^2=1+0^2=1$

$n=1: a_2=1+a_1^2=1+1^2=2$

$n=2: a_3=1+a_2^2=1+2^2=5$

$n=3: a_4=1+a_3^2=1+5^2=26$

$n=4: a_5=1+a_4^2=1+26^2=677$

$n=5: a_6=1+a_5^2=1+677^2=458330$

ខ. បង្កើតអនុគមន៍ f ដែលចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ គេបាន $a_{n+1}=f(a_n)$

តាង $x=a_n$ គេបាន $a_{n+1}=f(a_n)=f(x)=1+x^2$

ដូចនេះ $f(x)=1+x^2$ ដែល $x=a_n$ និង $n\ge 1$ ។

លំហាត់ 1.9

សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្ទីត (a_n) និង (b_n) ដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម:

ក. $a_n=\dfrac{2n+5}{n+1}$ ខ. $b_n=(-1)^n\times\dfrac{1}{n}$ គ. $b_n=(n-3)^2$

ឃ. $a_n=2^n\times 3^{n+1}$ ង. $\begin{cases} b_o=4 \\ b_{n+1}=b_n-3 \end{cases}$

ចម្លើយ

សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្ទីត (a_n) និង (b_n)

ក. $a_n=\dfrac{2n+5}{n+1}$

ចំពោះ $n=1,2,3,\ldots$ គេបានតួនៃស្ទីត:

$$a_1=\frac{2(1)+5}{(1)+1}=\frac{7}{2}$$

$$a_2=\frac{2(2)+5}{(2)+1}=\frac{9}{3}$$

$$a_3 = \frac{2(3)+5}{(3)+1} = \frac{11}{4}$$

$$a_4 = \frac{2(4)+5}{(4)+1} = \frac{13}{5}$$

....

គេឃើញថា $\frac{7}{2} > \frac{9}{3} > \frac{11}{4} > \frac{13}{5} > \ldots$ ឬ $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $a_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន។

ខ. $b_n = (-1)^n \times \dfrac{1}{n}$

ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \ldots$ គេបានតួនៃស្វ៊ីត:

$$b_1 = (-1)^1 \times \frac{1}{1} = -\frac{1}{1}$$

$$b_2 = (-1)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b_3 = (-1)^3 \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

....

គេឃើញថា $b_1 = -\frac{1}{1} < b_2 = \frac{1}{2}$ តែ $b_2 = \frac{1}{2} > b_3 = -\frac{1}{3}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $b_n = (-1)^n \times \dfrac{1}{n}$ មិនមែនជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនទេ។

គ. $b_n = (n-3)^2$

ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \ldots$ គេបានតួនៃស្វ៊ីត:

$$b_1 = (1-3)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$b_2 = (2-3)^2 = (-1)^2 = 1$$

$b_3 = (3-3)^2 = 0^2 = 0$

$b_4 = (4-3)^2 = 1^2 = 1$

....

ដោយ $b_1 > b_2 > b_3 < b_4 < ...$ នោះស្វ៊ីតនេះគ្មានភាពម៉ូណូតូន

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $b_n = (n-3)^2$ គ្មានភាពម៉ូណូតូន។

ឃ. $a_n = 2^n \times 3^{n+1}$

គេមាន $a_n = 2^n \times 3^{n+1}$ នោះ $a_{n+1} = 2^{n+1} \times 3^{(n+1)+1} = 6 \times 2^n \times 3^{n+1}$

គេបាន $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6 \times 2^n \times 3^{n+1}}{2^n \times 3^{n+1}} = 6 > 1$

នាំឲ្យ $a_{n+1} > a_n$ នាំឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតកើនចំពោះ $n = 1, 2, 3, ...$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $a_n = 2^n \times 3^{n+1}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន។

ង. $\begin{cases} b_o = 4 \\ b_{n+1} = b_n - 3 \end{cases}$

គេមាន $b_{n+1} = b_n - 3$ នាំឲ្យ $b_{n+1} - b_n = -3 < 0$

នោះ $b_{n+1} - b_n < 0$ សមមូល $b_{n+1} < b_n$ ចំពោះ $n = 0, 1, 2, 3, ...$

គេបាន (b_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (b_n) ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន។

លំហាត់ 1.10

គេឲ្យបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $5, 8, 11$ ។

i). ចូរកំណត់តួទី1 និងផលសងរួម d

ii). គណនាតម្លៃ u_{15} នៃស្វ៊ីត។ តើ 62 ជាតួជាទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត?

iii). បង្ហាញ u_n ជាទម្រង់ងាយមួយ រួចប្រើវាដើម្បីគណនា u_{15} ។

ចម្លើយ

i). កំណត់តួទី1 និងផលសងរួម d

គេបានតួទីមួយគឺ $u_1 = 5$ និង $d = u_2 - u_1 = 8 - 5 = 3$

ដូចនេះ $\boxed{u_1 = 5\,,\, d = 3}$

***ii*)**. គណនាតម្លៃ u_{15} នៃស្វ៊ីត

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$

ដោយ $n = 15\,,\, u_1 = 5$ និង $d = 3$

គេបាន $u_{15} = 5 + (15-1)(3) = 5 + 14\times 3 = 5 + 42 = 47$

ដូចនេះ $\boxed{u_{15} = 47}$

● តើ 62 ជាតួជាទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត?

យក $u_n = 62$ នោះ $u_1 + (n-1)d = 62$

$5 + (n-1)(3) = 62$ ឬ $5 + 3n - 3 = 62$

$3n = 60$ នាំឲ្យ $n = 20$

ដូចនេះ តួទី 20 នៃស្វ៊ីតស្មើនឹង 62 ។

***iii*)**. បង្ហាញ u_n ជាទម្រង់ងាយមួយ រួចប្រើវាដើម្បីគណនា u_{15}

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$u_n = 5 + (n-1)(3) = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 3n + 2}$

ប្រើ $u_n = 3n + 2$ ដើម្បីគណនា u_{15}

គេបាន $u_{15} = 3(15) + 2 = 45 + 2 = 47$

ដូចនេះ $\boxed{u_{15} = 47}$

លំហាត់ 1.11

តួទី 5 នៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើ -8 និងផលបូករវាងតួទី 4 និងតួទី 10 ស្មើនឹង -32 ។ រកតម្លៃ u_1 និង d ។ តើតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតដែលមានស្មើនឹង -108 ។

ចម្លើយ

● រកតម្លៃ u_1 និង d

គេមាន $u_5=-8$ និង $u_4+u_{10}=-32$

ដោយ $u_5=u_1+4d$, $u_4=u_1+3d$ និង $u_{10}=u_1+9d$

គេបាន $u_1+4d=-8$ (1)

$u_4+u_{10}=u_1+3d+u_1+9d=2u_1+12d$

$\Rightarrow 2u_1+12d=-32 \Leftrightarrow u_1+6d=-16$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\begin{cases} u_1+4d=-8 \\ u_1+6d=-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=-4 \\ u_1=8 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{u_1=8\ ,\ d=-4}$

● តើតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតដែលមានស្មើនឹង -108

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1+(n-1)d$

យក $u_n=-108$, $u_1=8$ និង $d=-4$

គេបាន $8+(n-1)(-4)=-108$

$8-4n+4=-108$

$-4n=-108-12$

$4n=120 \Rightarrow n=30$

ដូចនេះ តួទី 30 នៃស្វ៊ីតស្មើនឹង -108 ។

លំហាត់ 1.12

១. ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមាន $a_6=20$ និង $a_{10}=4a_2$ ។
កំណត់តម្លៃ a_1 និង d រួចគណនា a_{101} ។

២. គេឲ្យបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $x+6$, $2x+1$, $x+18$ ។
កំណត់តម្លៃ a_1 និង d រួចគណនា a_{20} ។

ចម្លើយ

១. រកតម្លៃ a_1 និង d រួចគណនា a_{101}

គេមាន $a_6 = 20$ និង $a_{10} = 4a_2$

គេបាន $\begin{cases} a_1 + 5d = 20 \\ a_1 + 9d = 4(a_1 + d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 5d = 20 \\ 3a_1 - 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ d = 3 \end{cases}$

$$a_{101} = a_1 + 100d = 5 + 100\times 3 = 5 + 300 = 305$$

ដូចនេះ $\boxed{a_1 = 5\,,\, d = 3\,,\, a_{101} = 305}$

២. កំណត់តម្លៃ a_1 និង d រួចគណនា a_{20}

បើ $x+6\,,\, 2x+1\,,\, x+18$ ជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត គេបានៈ

$(x+6)+(x+18) = 2(2x+1)$

$2x + 24 = 4x + 2$

$2x = 22 \Rightarrow x = 11$

គេបាន $a_1 = x + 6 = 11 + 6 = 17$

$a_2 = 2x + 1 = 2(11) + 1 = 22 + 1 = 23$

$d = a_2 - a_1 = 23 - 17 = 6$

តាមរូបមន្ត $a_n = a_1 + (n-1)d$

គេបាន $a_{20} = 17 + (20-1)(6) = 17 + 114 = 131$

ដូចនេះ $\boxed{a_1 = 17\,,\, d = 6\,,\, a_{20} = 131}$

លំហាត់ 1.13

a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ $2n+1$។ សរសេរបង្ហាញ a_{n-1} ដែលជាតួទី $(n-1)$ ។ បង្ហាញថា $a_n - a_{n-1} =$ ចំនួនថេរ។ តើ (a_n) ជាប្រភេទស្វ៊ីតអ្វី? ព្រោះអ្វី?

ចម្លើយ

• សរសេរបង្ហាញ a_{n-1} ដែលជាតួទី $(n-1)$

គេមាន $a_n = 2n + 1$ នាំឲ្យ $a_{n-1} = 2(n-1) + 1 = 2n - 2 + 1 = 2n - 1$

ដូចនេះ $\boxed{a_{n-1} = 2n - 1}$

• បង្ហាញថា $a_n - a_{n-1} =$ ចំនួនថេរ

គេបាន $a_n - a_{n-1} = (2n+1)-(2n-1) = 2n+1-2n+1 = 2$ ថេរ

ដូចនេះ: $\boxed{a_n - a_{n-1} = 2 \text{ ជាចំនួនថេរ}}$

• ស្វ៊ីត (a_n) ជាប្រភេទស្វ៊ីតនព្វន្ត ព្រោះវាមានផលសងរួម $d = 2$ ។

លំហាត់ 1.14

១. 6 តួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តគឺ $x_1, x_2, 4, x_3, -2, x_4$ ។ រក x_1, x_2, x_3 និង x_3 ។

២. តើមានប៉ុន្មានចំនួននៅចន្លោះ 160 និង 300 ដែលចែកដាច់នឹង 7 ?

ចម្លើយ

១. រក x_1, x_2, x_3 និង x_3

តាង $a_1 = x_1$, $a_2 = x_2$, $a_3 = 4$, $a_4 = x_3$, $a_5 = -2$, $a_6 = x_4$

បើ $x_1, x_2, 4$ ជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេបាន:

$a_1 + a_3 = 2a_2$ ឬ $x_1 + 4 = 2x_2$

តែ $a_2 = a_1 + d$ ឬ $x_2 = x_1 + d$

គេបាន $x_1 + 4 = 2(x_1 + d)$ ឬ $x_1 + 2d = 4 \quad (i)$

បើ $x_3, -2, x_4$ ជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេបាន:

$a_4 + a_6 = 2a_5$ ឬ $x_3 + x_4 = 2(-2)$ ឬ $x_3 + x_4 = -4$

តែ $\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = x_3 = x_1 + 3d \\ a_6 = a_1 + 5d = x_4 = x_1 + 5d \end{cases}$

គេបាន $(x_1 + 3d) + (x_1 + 5d) = -4$

$$2x_1 + 8d = -4 \Leftrightarrow x_1 + 4d = -2 \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $\begin{cases} x_1 + 2d = 4 \\ x_1 + 4d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ d = -3 \end{cases}$

គេបាន: $a_1 = x_1 = 10$

$a_2 = x_2 = a_1 + d = 10 + (-3) = 7$

$a_4 = x_3 = a_1 + 3d = 10 + 3(-3) = 10 - 9 = 1$

$a_6 = x_4 = a_1 + 5d = 10 + 5(-3) = -5$

ដូចនេះ $\boxed{x_1 = 10\ ,\ x_2 = 7\ ,\ x_3 = 1\ ,\ x_4 = -5}$

២. តើមានប៉ុន្មានចំនួននៅចន្លោះ 160 និង 300 ដែលចែកដាច់នឹង 7 ?

ចំនួននៅចន្លោះ 160 និង 300 ដែលចែកដាច់នឹង 7 មាន $\{161\ ,168\ ,\ \dots\ ,\ 294\}$

រកចំនួនតួនៃស្វ៊ីត $\{161\ ,168\ ,\ \dots\ ,\ 294\}$

តាង $a_1 = 161$ ជាតួទីមួយ និងផលសងរួម $d = 7$ ហើយ $a_n = 294$

តាមរូបមន្ត $a_n = a_1 + (n-1)d$

គេបាន $294 = 161 + (n-1)(7)$ ឬ $294 - 161 = 7n - 7$

$7n = 133 + 7 = 140$ នាំឲ្យ $n = 20$

ដូចនេះ ចន្លោះពី 160 ទៅ 300 មាន 20 ចំនួនដែលចែកដាច់នឹង 7 ។

លំហាត់ 1.15

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ ។

i). បង្ហាញថាផលសងរួមកំណត់ដោយ $d = u_2 - u_1 = \dots = u_n - u_{n-1}$

ii). បង្ហាញថាតួទី n កំណត់ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d$

iii). ទាញបញ្ជាក់ថា $d = \dfrac{u_n - u_1}{n-1}$ ។

ចម្លើយ

i). បង្ហាញថា $d = u_2 - u_1 = \dots = u_n - u_{n-1}$

តាមនិយមន័យនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត គេបាន:

$u_2 = u_1 + d \Rightarrow d = u_2 - u_1$

$u_3 = u_2 + d \Rightarrow d = u_3 - u_2$

$u_4 = u_3 + d \Rightarrow d = u_4 - u_3$

$u_5 = u_4 + d \Rightarrow d = u_5 - u_4$

....

$u_n = u_{n-1} + d \Rightarrow d = u_n - u_{n-1}$

គេទាញបាន $d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = ... = u_n - u_{n-1}$

ដូចនេះ $\boxed{d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = ... = u_n - u_{n-1}}$

ii). បង្ហាញថាតួទី n កំណត់ដោយ $u_n = u_1 + (n-1)d$

តាមនិយមន័យនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត គេបាន:

$u_2 = u_1 + d = u_1 + (2-1)d$

$u_3 = u_2 + d = u_1 + d + d = u_1 + 2d = u_1 + (3-1)d$

$u_4 = u_3 + d = u_1 + 2d + d = u_1 + 3d = u_1 + (4-1)d$

$u_5 = u_4 + d = u_1 + 3d + d = u_1 + 4d = u_1 + (5-1)d$

....

$u_n = u_{n-1} + d = u_1 + (n-2)d + d = u_1 + (n-1)d$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}$

iii). ទាញបញ្ជាក់ថា $d = \dfrac{u_n - u_1}{n-1}$

តាម (***ii***) គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$(n-1)d = u_n - u_1$ នាំឲ្យ $d = \dfrac{u_n - u_1}{n-1}$

ដូចនេះ $\boxed{d = \dfrac{u_n - u_1}{n-1}}$

លំហាត់ 1.16

បើស្វ៊ីត $(u_n) : u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ បង្ហាញថាផលបូក n តួដំបូងកំណត់ដោយ

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

ចម្លើយ

បង្ហាញថា $S_n=\dfrac{u_1+u_n}{2}\cdot n=\dfrac{2u_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

ដោយ $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

នោះគេបាន $u_1+u_n=u_2+u_{n-1}=u_3+u_{n-2}=\ldots$

$$+\left|\begin{aligned}S_n&=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n\\S_n&=u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\ldots+u_1\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}2S_n&=(u_1+u_n)+(u_2+u_{n-1})+(u_3+u_{n-2})+\ldots+(u_n+u_1)\\&=\underbrace{(u_1+u_n)+(u_1+u_n)+(u_1+u_n)+\ldots+(u_1+u_n)}_{n\text{តួ}}\end{aligned}$$

$2S_n=(u_1+u_n)n$ នាំឲ្យ $S_n=\dfrac{u_1+u_n}{2}\cdot n$

ម្យ៉ាងទៀត $u_n=u_1+(n-1)d$

គេបាន $S_n=\dfrac{u_1+u_1+(n-1)d}{2}\cdot n=\dfrac{2u_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\dfrac{u_1+u_n}{2}\cdot n=\dfrac{2u_1+(n-1)d}{2}\cdot n}$

$*$ករណីគេស្គាល់ u_1,u_n និង d នោះ $S_n=\dfrac{(u_n^2-u_1^2)+(u_n+u_1)d}{2d}$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $S_n=\dfrac{u_1+u_n}{2}\cdot n$

តែ $u_n=u_1+(n-1)d\Rightarrow n=\dfrac{u_n-u_1+d}{d}$

គេបាន $S_n=\dfrac{u_1+u_n}{2}\cdot\dfrac{u_n-u_1+d}{d}$

$$S_n=\frac{(u_n+u_1)(u_n-u_1)+(u_n+u_1)d}{2d}=\frac{(u_n^2-u_1^2)+(u_n+u_1)d}{2d}$$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n = \dfrac{(u_n^2 - u_1^2) + (u_n + u_1)d}{2d}}$

លំហាត់ 1.17

១. តើមានប៉ុន្មានតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $\{7,13,19,\ldots,259\}$?
២. គណនា $S_n = 1+2+3+\ldots+1989$ ដែល $n = 1989$
៣. គណនា $S_n = 11+18+25+\ldots$ ដែល $n = 1979$
៤. គណនា $\Sigma = 124+133+142+\ldots+1987$

ចម្លើយ

១. តើមានប៉ុន្មានតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $\{7,13,19,\ldots,259\}$?

តាមរូបមន្ត $d = \dfrac{u_n - u_1}{n-1}$ នាំឲ្យ $n = \dfrac{u_n - u_1}{d} + 1$

ដោយ $u_1 = 7$, $u_n = 259$, $d = 13 - 7 = 6$

គេបាន $n = \dfrac{259-7}{6} + 1 = 42 + 1 = 43$

ដូចនេះ ស្វ៊ីតនព្វន្តនេះមាន 43 តួ។

២. គណនា $S_n = 1+2+3+\ldots+1989$ ដែល $n = 1989$

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{(u_1 + u_n)}{2} \cdot n$

ដោយ $u_1 = 1$, $u_n = 1989$, $n = 1989$

គេបាន $S_n = \dfrac{(1+1989)}{2} \cdot (1989) = 995 \times 1989 = 1979055$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n = 1979055}$

៣. គណនា $S_n = 11+18+25+\ldots$ ដែល $n = 1979$

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{2u_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

ដោយ $u_1 = 11$, $n = 1979$, $d = 18 - 11 = 7$

គេបាន $S_n = \dfrac{2(11) + (1979 - 1)(7)}{2} \cdot (1979)$

$$S_n = \frac{22 + 13846}{2} \times 1979 = 6934 \times 1979 = 13722386$$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n = 13722386}$

៤. គណនា $\Sigma = 124 + 133 + 142 + \ldots + 1987$

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{(u_n^2 - u_1^2) + (u_n + u_1)d}{2d}$

ដោយ $u_1 = 124$, $u_n = 1987$, $d = 133 - 124 = 142 - 133 = 9$

គេបាន $\Sigma = \dfrac{(1987^2 - 124^2) + (1987 + 124)(9)}{2(9)}$

$$\Sigma = \frac{(3948169 - 15376) + 2111 \times 9}{18} = \frac{3932793 + 18999}{18}$$

$$\Sigma = \frac{3951792}{18} = 219544$$

ដូចនេះ: $\boxed{\Sigma = 219544}$

លំហាត់ 1.18

១. a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $p + qn$ ។ បើ $a_2 = 1$ និង $a_5 = 16$ ចូររក តម្លៃ a_1 និង d រួចគណនា S_{10} ព្រមទាំងរកតម្លៃ p និង q ។

២. ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានប្រាំពីរតួវិជ្ជមាន។ តួកណ្ដាលមានតម្លៃ 15 និងតួធំជាង គេស្មើនឹង 27 ។ គណនា S_7 ។

ចម្លើយ

១. រកតម្លៃ a_1 និង d

គេមាន $a_n = p + qn$

គេបាន $a_1 = p+q$, $a_2 = p+2q$ និង $a_5 = p+5q$

នាំឲ្យ $d=(p+2q)-(p+q)=q$

តាមបម្រាប់: $\begin{cases} a_2=1 \\ a_5=16 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} p+2q=1 \\ p+5q=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-9 \\ q=5 \end{cases}$

គេបាន $a_n=-9+5n$

$$a_1 = p+q=-9+5=-4 \text{ , } d=q=5$$

$$S_{10}=\frac{10\times(a_1+a_{10})}{2}$$

ដោយ $a_{10}=-9+10\times5=41$

គេបាន $S_{10}=\frac{10\times(-4+41)}{2}=\frac{10\times37}{2}=185$

ដូចនេះ $\boxed{a_1=-4\text{ , }d=5\text{ , }p=-9\text{ , }q=5\text{ , }S_{10}=185}$

២. គណនា S_7

តួកណ្ដាលមានតម្លៃ 15 និងតួធំជាងគេស្មើនឹង 27

គេបាន $u_4=15$ និង $u_7=15$

នាំឲ្យ $u_1+u_7=2u_4$ (ផលបូកតួចុងស្មើនឹងផលបូកតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង)

$u_1+u_7=2u_4=2\times15=30$

គេបាន $S_7=\frac{(u_1+u_7)}{2}\times7=\frac{30}{2}\times7=105$

ដូចនេះ $\boxed{S_7=105}$

លំហាត់ 1.19

បីចំនួនវិជ្ជមានជាស្ទីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d>0$ យក a,b,c ជាចំនួននោះ។

ក. គណនា b បើ $a+b+c=18$

ខ. b ជាតម្លៃដែលរកឃើញនៅសំណួរ(ក) គេបង្កើតប្រភាគ $\frac{c}{a}$ ។ តើ d យកតម្លៃប៉ុន្មានដើម្បីឲ្យ $\frac{c}{a}\in\mathbb{N}$? គណនា a និង c ។

ចម្លើយ

ក. គណនា b បើ $a+b+c=18$

ដោយ a,b,c ជាស្ទីតនព្វន្ត នោះនាំឲ្យ $2b=a+c$

គេបាន $a+b+c=18 \Leftrightarrow b+2b=18$

$$3b=18 \Rightarrow b=\frac{18}{3}=6$$

ដូចនេះ $\boxed{b=6}$

ខ. រកតម្លៃ d ដើម្បីឲ្យ $\frac{c}{a}\in\mathbb{N}$?

b ជាតួកណ្ដាល នោះស្ទីតនេះគេបាន $a=b-d$, b , $c=b+d$

នាំឲ្យ $\frac{c}{a}=\frac{b+d}{b-d}=\frac{6+d}{6-d}=\frac{12-(6-d)}{6-d}=\frac{12}{6-d}-1$

ដើម្បីឲ្យ $\frac{c}{a}\in\mathbb{N}$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} 6-d \text{ ជាតួចែកនៃ } 12 \\ 6-d<12 \\ d\neq 6 \end{cases}$

ដូច្នេះ $6-d$ ត្រូវយកតម្លៃ $\{1,2,3,4\}$

ចំពោះ $6-d=1 \Rightarrow d=5$

$6-d=2\Rightarrow d=4$

$6-d=3\Rightarrow d=3$

$6-d=4\Rightarrow d=2$

• គណនាតម្លៃ a និង c

ចំពោះ $d=5$ នោះ $a=6-5=1$ និង $c=6+5=11$

ចំពោះ $d=4$ នោះ $a=6-4=2$ និង $c=6+4=10$

ចំពោះ $d=3$ នោះ $a=6-3=3$ និង $c=6+3=9$

ចំពោះ $d=2$ នោះ $a=6-2=4$ និង $c=6+2=8$

លំហាត់ 1.20

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួម d និង $u_1=1$ ។ គណនា d ក្នុងករណីខាងក្រោម:

ក/. $S_n=176$, $u_n=31$

ខ/. ផលធៀបតួទី 8 និងតួទី 3 ស្មើ 4

គ/. ផលដកការេនៃតួទី 10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3 ។

ចម្លើយ

ក/. គណនា d

គេមាន $S_n=176$, $u_n=31$

តាមរូបមន្ត $d=\dfrac{u_n-u_1}{n-1}$

ដោយ $S_n=\dfrac{n}{2}(u_1+u_n)\Leftrightarrow 176=\dfrac{n}{2}(1+31)\Leftrightarrow 176=32\times\dfrac{n}{2}$

នាំឲ្យ $16n=176\Rightarrow n=11$

គេបាន $d=\dfrac{31-1}{11-1}=\dfrac{30}{10}=3$

ដូចនេះ $\boxed{d=3}$

ខ/. ផលធៀបតួទី 8 និងតួទី 3 ស្មើ 4

$$\frac{u_8}{u_3}=4 \text{ ឬ } \frac{u_1+7d}{u_1+2d}=4 \text{ ឬ } \frac{1+7d}{1+2d}=4 \Leftrightarrow 4(1+2d)=1+7d$$

$$4+8d=1+7d \Leftrightarrow 8d-7d=1-4 \Rightarrow d=-3$$

ដូចនេះ $\boxed{d=-3}$

គ/. ផលដកការេនៃតួទី 10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3

$$u_{10}^2-u_7^2=3 \Leftrightarrow (u_1+9d)^2-(u_1+6d)^2=3$$

$$(1+9d)^2-(1+6d)^2=3$$

$$(1+18d+81d^2)-(1+12d+36d^2)=3$$

$$6d+45d^2=3 \Leftrightarrow 15d^2+2d-1=0$$

$$\Delta'=1^2-15(-1)=16$$

$$d_1=\frac{-1+4}{15}=\frac{1}{5},\ d_2=\frac{-1-4}{15}=-\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{d_1=\frac{1}{5},\ d_2=-\frac{1}{3}}$

លំហាត់ 1.21

បង្ហាញថាចំនួនខាងក្រោមជាស្វ៊ីតនព្វន្ត:

ក/. $\frac{1}{x+1},\ \frac{x}{x^2-1},\ \frac{1}{x-1}$

ខ/. $(a^2+b^2)^2,\ a^4+b^4,\ (a^2-b^2)^2$

គ/. $(a^2-2ab-b^2)^2,\ (a^2+b^2)^2,\ (a^2+2ab-b^2)^2$

ចម្លើយ

បង្ហាញថាចំនួនខាងក្រោមជាស្វ៊ីតនព្វន្ត:

ក/. $\frac{1}{x+1}, \frac{x}{x^2-1}, \frac{1}{x-1}$

បើ $\frac{1}{x+1}, \frac{x}{x^2-1}, \frac{1}{x-1}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះ $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=2\cdot\frac{x}{x^2-1}$

គេបាន $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{(x-1)+(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x}{x^2-1}=2\cdot\frac{x}{x^2-1}$

ដូចនេះ $\frac{1}{x+1}, \frac{x}{x^2-1}, \frac{1}{x-1}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

ខ/. $(a^2+b^2)^2$, a^4+b^4 , $(a^2-b^2)^2$

បើ $(a^2+b^2)^2$, a^4+b^4 , $(a^2-b^2)^2$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តលុះត្រាតែ

$(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2=2(a^4+b^4)$

គេបាន $(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2=a^4+2a^2b^2+b^4$

$+a^4-2a^2b^2+b^4=2a^4+2b^4=2(a^4+b^4)$

ដូចនេះ $(a^2+b^2)^2$, a^4+b^4 , $(a^2-b^2)^2$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

គ/. $(a^2-2ab-b^2)^2$, $(a^2+b^2)^2$, $(a^2+2ab-b^2)^2$

បើ $(a^2-2ab-b^2)^2$, $(a^2+b^2)^2$, $(a^2+2ab-b^2)^2$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

កាលណា $(a^2-2ab-b^2)^2+(a^2+2ab-b^2)^2=2(a^2+b^2)^2$

គេបាន $(a^2-2ab-b^2)^2+(a^2+2ab-b^2)^2$

$=(a^4+4a^2b^2+b^4-4a^3b-2a^2b^2+4ab^3)$

$+(a^4+4a^2b^2+b^4+4a^3b-2a^2b^2-4ab^3)$

$=(2a^4+8a^2b^2+2b^4-4a^2b^2)$

$=(2a^4+4a^2b^2+2b^4)=2(a^4+2a^2b^2+b^4)=2(a^2+b^2)$

ដូចនេះ $(a^2-2ab-b^2)^2,(a^2+b^2)^2,(a^2+2ab-b^2)^2$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

លំហាត់ 1.22

ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលបូក 100 តួស្មើ -16350 និងតួចុងក្រោយស្មើ -312 គណនាតួទីមួយ និងផលសងរួម d ។

ចម្លើយ

គណនាតួទីមួយ និងផលសងរួម d

តាមបម្រាប់ $\begin{cases} S_{100} = -16350 \\ u_{100} = -312 \end{cases}$

តែ $S_{100} = \dfrac{100}{2}(u_1 + u_{100}) = 50(u_1 - 312)$

គេបាន $50(u_1 - 312) = -16350 \Leftrightarrow u_1 - 312 = -327$

នាំឲ្យ $u_1 = 312 - 327 = -15$

$$d = \frac{u_{100} - u_1}{100 - 1} = \frac{-312 - (-15)}{99} = -3$$

ដូចនេះ: $\boxed{u_1 = -15 \,,\, d = -3}$

លំហាត់ 1.23

ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមាន $u_2, u_3, u_4, \ldots$ ដែលផលសងរួម $d = 2$ និង $u_2 = 3$ ។

ក/. គណនា u_{20} , u_n

ខ/. គណនាតួទី 20 និងតួទី n ។

ចម្លើយ

ក/. គណនា u_{20} , u_n

$u_{20} = u_2 + 18d = 3 + 18 \times 2 = 3 + 36 = 39$

$u_n = u_2 + (n-2)d = 3 + (n-2) \times 2 = 3 + 2n - 4 = 2n - 1$

ដូចនេះ: $\boxed{u_{20} = 39 \,,\, u_n = 2n - 1}$

ខ/. គណនាតួទី 20 និងតួទី n

តួទី 20 គឺ $u_{21}=u_2+19d=3+19\times 2=3+38=41$

តួទី n គឺ $u_{n+1}=u_2+(n-1)d=3+(n-1)\times 2=3+2n-2=2n+1$

ដូចនេះ: $\boxed{u_{21}=41\,,\,u_{n+1}=2n+1}$

លំហាត់ 1.25

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_o, u_1, u_2, u_3, ...$ ដែល $d=2$ និង $u_o=3$ ។

ក/. គណនាតួ u_{22} និង u_n

ខ/. គណនាតួទី 22 និងតួទី n

ចម្លើយ

ក/. គណនាតួ u_{22} និង u_n

$u_{22}=u_o+22\times d=3+22\times 2=3+44=47$

$u_n=u_o+n\times d=3+n\times 2=3+2n$

ដូចនេះ: $\boxed{u_{22}=47\,,\,u_n=3+2n}$

ខ/. គណនាតួទី 22 និងតួទី n

តួទី 22 គឺ $u_{21}=u_o+21\times d=3+21\times 2=3+42=45$

តួទី n គឺ $u_{n-1}=u_o+(n-1)\times d=3+(n-1)\times 2=2n+1$

ដូចនេះ: $\boxed{u_{21}=45\,,\,u_{n-1}=2n+1}$

លំហាត់ 1.25

ក/. រកប្រាំចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្តនៅចន្លោះ 10 និង 82 ។

ខ/. រកប្រាំបីចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលគេស្គាល់ផលបូក $S=196$ និងតួទីមួយស្មើនឹង 7 ។

ចម្លើយ

ក/. រកប្រាំចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្តនៅចន្លោះ 10 និង 82

តាង d ជាផលសងរួម និង $u_1 = 10$, $u_7 = 82$

គេបាន $d = \frac{u_7 - u_1}{7-1} = \frac{82-10}{6} = \frac{72}{6} = 12$

ចំពោះ $d = 12$ គេបាន $\{10, 22, 34, 46, 58, 70, 82\}$

ដូចនេះ ប្រាំចំនួនដែលត្រូវរកគឺ $\{22, 34, 46, 58, 70\}$ ។

ខ/. រកប្រាំបីចំនួនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមាន $S = 196$ និង $u_1 = 7$

តែ $S = \frac{8}{2}(u_1 + u_8) = 4(7 + u_8)$

គេបាន $4(7 + u_8) = 196 \Leftrightarrow u_8 = \frac{196}{4} - 7 = 42$

នាំឲ្យ $d = \frac{u_8 - u_1}{8-1} = \frac{42-7}{7} = 5$

គេបានចំនួនដែលត្រូវរកគឺ $\{7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42\}$

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ $\{7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42\}$ ។

លំហាត់ 1.26

ផលបូក 3 តួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើ 33 និងផលគុណរបស់វាស្មើ 1287 ។ រកចំនួនទាំងបីនោះ

ចម្លើយ

រកចំនួនទាំងបីនោះ

តាង a , b , c ជាបីចំនួនដែលត្រូវរក

បើ a , b , c ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេអាចសរសេរ

$b-d$, b , $b+d$ ដែល d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត

គេបាន $a+b+c = 33 \Leftrightarrow (b-d) + b + (b+d) = 33$

$\Leftrightarrow 3b = 33 \Rightarrow b = 11$

ម្យ៉ាងទៀត $abc=1287 \Leftrightarrow (b-d)(b)(b+d)=1287$

$\Leftrightarrow (11-d)(11)(11+d)=1287$

$\Leftrightarrow (11-d)(11+d)=\dfrac{1287}{11}=117$

$\Leftrightarrow 121-d^2=117 \Leftrightarrow d^2=121-117=4$

នាំឲ្យ $d=\sqrt{4}=\pm 2$

ចំពោះ $d=-2$ គេបាន $a=11-(-2)=13$, $b=11$, $c=11-2=9$

ចំពោះ $d=2$ គេបាន $a=11-2=9$, $b=11$, $c=11+2=13$

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ $\{13,11,9\}$ ឬ $\{9,11,13\}$។

លំហាត់ 1.27

បើបីចំនួន a,b,c ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ចូរបង្ហាញថា:

ក/. $a^2+8bc=(2b+c)^2$

ខ/. $\dfrac{2}{9}(a+b+c)^3=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$

ចម្លើយ

ក/. បង្ហាញថា $a^2+8bc=(2b+c)^2$

បើ a,b,c ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេបាន $2b=a+c$ ឬ $a=2b-c$

គេបាន $a^2+8bc=(2b-c)^2+8bc=4b^2-4bc+c^2+8bc$

$=4b^2+4bc+c^2=(2b)^2+2\cdot 2b\cdot c+c^2=(2b+c)^2$

ដូចនេះ: $\boxed{a^2+8bc=(2b+c)^2}$

ខ/. $\dfrac{2}{9}(a+b+c)^3=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$

គេបាន $a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$

$=a^2(b+c)+b^2\cdot 2b+c^2(a+b)$

$$= a^2(b+c)+b^2\cdot 2b+c^2(a+b)$$
$$= 2b^3+b(a^2+c^2)+ac(a+c)$$
$$= 2b^3+b[(a+c)^2-2ac]+ac(a+c)$$
$$= 2b^3+b(2b)^2-2abc+ac(2b)$$
$$= 2b^3+b(2b)^2-2abc+2abc=6b^3=\frac{2}{9}(3b)^3$$
$$=\frac{2}{9}(2b+b)^3=\frac{2}{9}(a+c+b)^3=\frac{2}{9}(a+b+c)^3$$

ដូចនេះ: $\boxed{\frac{2}{9}(a+b+c)^3=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)}$

លំហាត់ 1.28

តើមានប៉ុន្មានតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=3$ តួទីមួយ $u_1=7$ និង ផលបូកតួស្មើ 205។

ចម្លើយ

រកចំនួនតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)=\frac{n}{2}[2u_1+(n-1)d]$

ដោយ $S_n=205$, $u_1=7$, $d=3$

គេបាន $205=\frac{n}{2}[2\cdot 7+(n-1)\cdot 3]\Leftrightarrow \frac{n}{2}(14+3n-3)=205$

$$205=\frac{n}{2}[2\cdot 7+(n-1)\cdot 3]\Leftrightarrow \frac{n}{2}(14+3n-3)=205$$

$$n(11+3n)=2\times 205\Leftrightarrow 3n^2+11n-410=0$$

$$\Delta=(11)^2-4(3)(-410)=121+4920=5041=71^2$$

$n=\dfrac{-11+71}{6}=10$, $n=\dfrac{-11-71}{6}<0$ (មិនយក)

ដូចនេះ ស្វ៊ីតនព្វន្តនោះមានចំនួន 10 តួ។

លំហាត់ 1.29

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ $u_o, u_1, u_2, ..., u_n$ ដែលមានផលសងរួម $d=\dfrac{1}{2}$

និង $u_5=0$ ។

ក/. គណនាតួ u_o តួទី 11 និងតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ។

ខ/. គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនេះ។

ចម្លើយ

ក/. គណនាតួ u_o តួទី 11 និងតួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ

តាមរូបមន្ត $u_n=u_o+nd$

គេបាន $u_5=u_o+5\times d \Leftrightarrow 0=u_o+5\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow u_o=-\dfrac{5}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{u_o=-\dfrac{5}{2}}$

តួទី 11 គឺ $u_{10}=u_o+10d=-\dfrac{5}{2}+10\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$

តួទី n គឺ $u_{n-1}=u_o+(n-1)d=-\dfrac{5}{2}+(n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(n-6)$

ដូចនេះ $\boxed{u_o=-\dfrac{5}{2}\ ,\ u_{10}=\dfrac{5}{2}\ ,\ u_{n-1}=\dfrac{1}{2}(n-6)}$

ខ/. គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនេះ

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)(u_o+u_n)}{2}=\frac{(n+1)(2u_o+nd)}{2}$$

$$S_{n+1}=\frac{(n+1)[2(-\frac{5}{2})+n(\frac{1}{2})]}{2}=\frac{(n+1)(n-10)}{4}$$

ដូចនេះ: $\boxed{S_{n+1}=\frac{(n+1)(n-10)}{4}}$

លំហាត់ 1.30

គេមានស្វ៊ីត 19 , 31 , 43 , ...
ក/. កំណត់តួទី 15 និងតួទី 39 នៃស្វ៊ីត។
ខ/. តើតម្លៃ 127 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត?
គ/. គណនាផលបូក 39 ដំបូង។

ចម្លើយ

ក/. កំណត់តួទី 15 និងតួទី 39 នៃស្វ៊ីត

ដោយ $d=31-19=43-31=...=12$ (ផលសងរួម)

នោះ 19 , 31 , 43 , ... ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាមរូបមន្ត $u_n=u_1+(n-1)d$

គេបាន $u_{15}=u_1+14d=19+14\times12=19+168=187$

$u_{39}=u_1+38d=19+38\times12=19+456=475$

ដូចនេះ: $\boxed{u_{15}=187\ ,\ u_{39}=475}$

ខ/. តើតម្លៃ 127 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត?

តាង $u_n=127$ គេបាន $127=19+(n-1)(12)$

សមមូល $12n-12+19=127\Leftrightarrow 12n=120\Rightarrow n=10$

ដូចនេះ: តម្លៃ 127 ជាតួទី 10 នៃស្វ៊ីត។

គ/. គណនាផលបូក 39 ដំបូង

$$S_{39}=\frac{39}{2}(u_1+u_{39})=\frac{39}{2}(19+475)=\frac{39(494)}{2}=9633$$

លំហាត់ 1.31

រកតម្លៃ u_1 , q , u_n និង u_7 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម:

i). 5 , 15 , 45 , ... ***ii***). 81 , − 27 , 9 , ...

iii). 64 , 48 , 36 , ... ***iv***). 50 , − 20 , 8 , ...

ចម្លើយ

រកតម្លៃ u_1 , q , u_n និង u_7 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម:

i). 5 , 15 , 45 , ...

គេបាន $u_1 = 5\ ,\ q = \frac{15}{5} = 3\ ,\ u_n = u_1 q^{n-1} = 5\times 3^{n-1}$

និង $u_7 = 5\times 3^{7-1} = 5\times 3^6 = 3645$

ដូចនេះ $\boxed{u_1 = 5\ ,\ q = 3\ ,\ u_n = 5\times 3^{n-1}\ ,\ u_7 = 3645}$

ii). 81 , − 27 , 9 , ...

គេបាន $u_1 = 81\ ,\ q = \frac{-27}{81} = -\frac{1}{3}\ ,\ u_n = u_1 q^{n-1} = 81\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

និង $u_7 = 81\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{7-1} = 81\times\left(-\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}$

ដូចនេះ $\boxed{u_1 = 81\ ,\ q = -\frac{1}{3}\ ,\ u_n = 81\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ ,\ u_7 = \frac{1}{9}}$

iii). 64 , 48 , 36 , ...

គេបាន $u_1 = 64\ ,\ q = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}\ ,\ u_n = u_1 q^{n-1} = 64\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

និង $u_7 = 64\times\left(\frac{3}{4}\right)^{7-1} = 64\times\left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{4^3\times 3^6}{4^6} = \frac{729}{64}$

ដូចនេះ: $u_1 = 64\ ,\ q = \frac{3}{4}\ ,\ u_n = 64 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\ ,\ u_7 = \frac{729}{64}$

***iv*).** $50\ , -20\ ,\ 8\ , ...$

គេបាន $u_1 = 50\ ,\ q = \frac{-20}{50} = -\frac{2}{5}\ ,\ u_n = u_1 q^{n-1} = 50 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

និង $u_7 = 50 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{7-1} = 50 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{6} = \frac{5^2 \times 2 \times 2^6}{5^6} = \frac{128}{625}$

ដូចនេះ: $u_1 = 50\ ,\ q = -\frac{2}{5}\ ,\ u_n = 50 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\ ,\ u_7 = \frac{128}{625}$

លំហាត់ 1.32

រកតួទី 6 និងផលបូក 6 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $\{4, 6, 9, ...\}$

ចម្លើយ

• រកតួទី 6 នៃស្វ៊ីត

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 q^{n-1}$

ដោយ $u_1 = 4$ និង $q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

គេបានតួទី 6 គឺ $u_6 = u_1 q^{6-1} = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^3} = \frac{243}{8}$

ដូចនេះ: $u_6 = \frac{243}{8}$

• រកផលបូក 6 តួដំបូង

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$

គេបាន $S_6=\dfrac{u_1(q^6-1)}{q-1}=\dfrac{4\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^6-1\right]}{\left(\dfrac{3}{2}\right)-1}=\dfrac{4\left(\dfrac{729}{64}-1\right)}{\left(\dfrac{1}{2}\right)}$

$=\dfrac{4\times 2(729-64)}{64}=\dfrac{8\times 665}{64}=\dfrac{665}{8}$

ដូចនេះ: $\boxed{S_6=\dfrac{665}{8}}$

លំហាត់ 1.33

រកតួដំបូងនិងរេសុងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $u_3=25$ និង $u_5=156\dfrac{1}{2}$

ចម្លើយ

រកតួដំបូងនិងរេសុងនៃស្វ៊ីត

$$\begin{cases}u_3=u_1q^2\\ u_5=u_1q^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^2=25\\ u_1q^4=156\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

គេបាន $(u_1q^2)q^2=156\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 25q^2=156\dfrac{1}{2}=156.5$

$\Rightarrow q^2=\dfrac{156.5}{25}=6.25\Rightarrow q=\pm\sqrt{6.25}=\pm 2.5=\pm\dfrac{5}{2}$

ចំពោះ: $q=-\dfrac{5}{2}$

គេបាន $u_1q^2=25\Leftrightarrow u_1\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2=25\Rightarrow u_1=25\times\dfrac{4}{25}=4$

ចំពោះ: $q=\frac{5}{2}$

គេបាន $u_1q^2=25\Leftrightarrow u_1\left(\frac{5}{2}\right)^2=25\Rightarrow u_1=25\times\frac{4}{25}=4$

ដូចនេះ: $\boxed{(u_1=4\ ,\ q=-\frac{5}{2})\ ,\ (u_1=4\ ,\ q=\frac{5}{2})}$

លំហាត់ 1.34

រកតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី 6 និងតួទី 7 ស្មើនឹង $\frac{32}{9}$ និង $\frac{64}{27}$ រៀងគ្នា។

ចម្លើយ

រកតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

តាមបម្រាប់ $\begin{cases} u_6=\frac{32}{9} \\ u_7=\frac{64}{27} \end{cases}$

ដោយ $u_7=u_1q^6=(u_1q^5)q=\frac{32}{9}q$

គេបាន $\frac{32}{9}q=\frac{64}{27}\Rightarrow q=\frac{64}{27}\times\frac{9}{32}=\frac{2}{3}$

នាំឲ្យ $u_7=u_1q^6\Leftrightarrow\frac{64}{27}=u_1\left(\frac{2}{3}\right)^6=u_1\frac{64}{27\times27}$

$\Leftrightarrow\frac{64}{27}=u_1\frac{64}{27\times27}\Rightarrow u_1=\frac{64}{27}\times\frac{27\times27}{64}=27$

ដូចនេះ: $\boxed{u_1=27}$

លំហាត់ 1.35

$2k+2, 5k+1, 10k+2$ ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។ រកតម្លៃ k

ចម្លើយ

រកតម្លៃ k

បើ $2k+2, 5k+1, 10k+2$ ជាស្វ៊ីតធរណិមាត្រលុះត្រាតែ

$(5k+1)^2 = (2k+2)(10k+2)$

$\Leftrightarrow 25k^2 + 10k + 1 = 20k^2 + 4k + 20k + 4$

$\Leftrightarrow 5k^2 - 14k - 3 = 0$

$\Delta' = (-7)^2 - (5)(-3) = 49 + 15 = 64 = 8^2$

$k = \dfrac{7-8}{5} = -\dfrac{1}{5}$, $k = \dfrac{7+8}{5} = 3$

ដូចនេះ: $\boxed{k = -\dfrac{1}{5}, \ k = 3}$

លំហាត់ 1.36

ចំពោះស្វ៊ីត $\{2, 2\sqrt{3}, 6, \ldots\}$។ រកតួទី 10 និងផលបូក 10 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត។

ចម្លើយ

• រកតួទី 10 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 q^{n-1}$

ដោយ $u_1 = 2$ និង $q = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

គេបាន $u_{10} = 2\times(\sqrt{3})^9 = 2\times(\sqrt{3})^8\sqrt{3} = 2\times 3^4 \times\sqrt{3} = 162\sqrt{3}$

ដូចនេះ: $\boxed{u_{10} = 162\sqrt{3}}$

• រកផលបូក 10 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត

តាមរូបមន្ត $S_n=\dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$

គេបាន $S_{10}=\dfrac{2[(\sqrt{3})^{10}-1]}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(3^5-1)(\sqrt{3}+1)}{3-1}=242(\sqrt{3}+1)$

ដូចនេះ: $\boxed{S_{10}=242(\sqrt{3}+1)}$

លំហាត់ 1.37

គណនាតម្លៃនៃស៊េរី $16-8+4-2+\ldots+\dfrac{1}{16}$ ។

ចម្លើយ

គណនាផលបូក $16-8+4-2+\ldots+\dfrac{1}{16}$

តាមរូបមន្ត $S_n=\dfrac{u_nq-u_1}{q-1}$

ដោយ $u_1=16$, $q=\dfrac{-8}{16}=-\dfrac{1}{2}$ និង $u_n=\dfrac{1}{16}$

គេបាន $S=16-8+4-2+\ldots+\dfrac{1}{16}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{16}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)-16}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1}$

$$S=\frac{-\dfrac{1}{32}-16}{-\dfrac{3}{2}}=\frac{1+(16\times 32)}{32}\times\frac{2}{3}=\frac{1+512}{16\times 3}=\frac{513}{16\times 3}=\frac{171}{16}$$

ដូចនេះ: $\boxed{16-8+4-2+...+\frac{1}{16}=\frac{171}{16}}$

លំហាត់ 1.38

គណនាផលបូក 9 តួនៃស៊េរី $3+3^{4/3}+3^{5/3}+...$

ចម្លើយ

គណនាផលបូក 9 តួនៃស៊េរី $3+3^{4/3}+3^{5/3}+...$

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{u_1(q^n-1)}{q-1}$

ដោយ $u_1=3$, $q=\frac{3^{4/3}}{3}=3^{1/3}$

គេបាន $S_9=\frac{3[(3^{1/3})^9-1]}{(3^{1/3})-1}=\frac{3(3^3-1)}{\sqrt[3]{3}-1}$

$$S_9=\frac{78(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1)}{3-1}=39(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)$$

ដូចនេះ: $\boxed{S_9=39(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)}$

លំហាត់ 1.39

បួនតួដំបូងនៃស្វ៊ីតគឺ $x,\frac{2}{3}x^2,\frac{4}{9}x^3,\frac{8}{27}x^4$ ។ រកទម្រង់ផលបូក n តួដំបូង រួចគណនាតម្លៃនោះចំពោះ $n=6$ និង $x=3$ ។

ចម្លើយ

- រកទម្រង់ផលបូក n តួដំបូង

$$q=\frac{\frac{2}{3}x^2}{x}=\frac{\frac{4}{9}x^3}{\frac{2}{3}x^2}=\frac{\frac{8}{27}x^4}{\frac{4}{9}x^3}=\dots=\frac{2}{3}x \text{ (ផលធៀបរួម)}$$

នោះស្ទីតខាងលើជាស្ទីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុង $q=\frac{2}{3}x$

គេបាន $S_n=\frac{u_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{x\left[\left(\frac{2}{3}x\right)^n-1\right]}{\left(\frac{2}{3}x\right)-1}=\frac{3x\left[(2x)^n-(3)^n\right]}{(3)^n(2x-3)}$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n=\frac{3x\left[(2x)^n-(3)^n\right]}{(3)^n(2x-3)}}$

• គណនាតម្លៃ S_n ចំពោះ $n=6$ និង $x=3$

គេបាន $S_6=\frac{3(3)\left[(2\times3)^6-(3)^6\right]}{(3)^6(2\times3-3)}=\frac{3^8(2-1)}{3^7(2-1)}=3$

ដូចនេះ: $\boxed{S_6=3}$

លំហាត់ 1.40

រកតម្លៃ x និង y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $1, x, y$ ជាស្ទីតនព្វន្ត និង $1, y, x$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ។

ចម្លើយ

រកតម្លៃ x និង y ដែល $x\neq1, y\neq1$

បើ $1, x, y$ ជាស្ទីតនព្វន្ត នោះ $1+y=2x \quad (i)$

បើ $1, y, x$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ នោះ $y^2=(1)(x)=x \ (ii)$

តាម $(ii): x = y^2$ ជំនួសក្នុង (i) គេបាន

$$1 + y = 2(y^2) \Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0$$

មានរាង $a + b + c = 0$ គឺ $2 - 1 - 1 = 0$ នោះ $y = 1$, $y = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$

ចំពោះ $y = -\frac{1}{2}$ នោះ $x = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{x = \frac{1}{4} , y = -\frac{1}{2}}$

លំហាត់ 1.41

(i). រករូបមន្តនៃស៊េរី $1 + x + x^2 + ... + x^{2n}$

(ii). រកផលបូកនៃស៊េរី $12 + 8 + 5\frac{1}{3} + ...$

ចម្លើយ

(i). រករូបមន្តនៃស៊េរី $1 + x + x^2 + ... + x^{2n}$

ដោយ $1, x, x^2, ... , x^n, x^{n+1}, x^{n+2}, ..., x^{2n}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q = x$ និងមាន $2n+1$ តួ

គេបាន $S_{2n+1} = 1 + x + x^2 + ... + x^{2n} = \frac{(x^{2n+1} - 1)}{x - 1}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{2n+1} = 1 + x + x^2 + ... + x^{2n} = \frac{(x^{2n+1} - 1)}{x - 1}}$

(ii). រកផលបូកនៃស៊េរី $12 + 8 + 5\frac{1}{3} + ...$

ដោយ $q=\frac{8}{12}=\frac{5\frac{1}{3}}{8}=...=\frac{2}{3}$ (ផលធៀបរួម)

នោះ $12+8+5\frac{1}{3}+...$ ជាស៊េរីធរណីមាត្រ

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{u_1(q^n-1)}{q-1}$ តែ $u_1=12$ និង $q=\frac{2}{3}$

គេបាន $S_n=\frac{12\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right]}{\left(\frac{2}{3}\right)-1}=\frac{12(2^n-3^n)\cdot 3}{3^n(2-3)}=\frac{36(3^n-2^n)}{3^n}$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n=\frac{36(3^n-2^n)}{3^n}}$

លំហាត់ 1.42

ផលបូក 8 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើ 17 ដងនៃផលបូក 4 តួដំបូង។ រករេសុង

ចម្លើយ

រករេសុងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

តាមបម្រាប់ $S_8=17S_4$

គេបាន $\frac{u_1(q^8-1)}{q-1}=17\frac{u_1(q^4-1)}{q-1}\Leftrightarrow q^8-1=17(q^4-1)$

$\Leftrightarrow q^8-1=17q^4-17\Leftrightarrow q^8-17q^4+16=0$

តាង $t=q^4$ តែ $t>0, t\neq 1$

គេបាន $q^8-17q^4+16=0\Leftrightarrow t^2-17t+16=0$

សមីការមានរាង $a+b+c=0$ គឺ $1-17+16=0$

គេបាន $t=\frac{c}{a}=16$, $t=1$ (មិនយក)

ចំពោះ $t=16$ នាំឲ្យ $q^4=16\Rightarrow q=\pm\sqrt[4]{16}=\pm2$

ដូចនេះ $\boxed{q=\pm2}$

លំហាត់ 1.43

ផលបូក 4 តួដំបូងនៃស៊េរីធរណីមាត្រស្មើ 30 និងផលបូកស៊េរីមិនកំណត់ស្មើ 32 ។ រកបីតួដំបូងនៃស៊េរីនេះ។

ចម្លើយ

រកបីតួដំបូងនៃស៊េរីនេះ

តាមបម្រាប់ $S_4=30$ និង $S_\infty=32$

ផលបូកស៊េរីមិនកំណត់ $S_\infty=\frac{u_1}{1-q}$ នាំឲ្យ $\frac{u_1}{1-q}=32\Rightarrow u_1=32(1-q)$

ផលបូក 4 តួគឺ $S_4=\frac{u_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{32(1-q)(q^4-1)}{q-1}=32(1-q^4)$

គេបាន $32(1-q^4)=30\Leftrightarrow 32q^4=32-30=2$

$q^4=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}\Rightarrow q=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\pm\frac{1}{2}$

ដូចនេះ រេសុងនៃស្វ៊ីតគឺ $\boxed{q=\pm\frac{1}{2}}$

លំហាត់ 1.44

១. រក u_n ដែលជាតួទូទៅនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រៈ $128, 64, 32, \ldots$
ហើយគណនាតម្លៃ u_8 ។
២. បីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $x-4$, x , $x+6$ ។ គណនាតម្លៃ x ។
រកតម្លៃ u_1 , q និង u_6 ។

ចម្លើយ

១. រកតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $u_1 = 128$ និង $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{64}{128} = \dfrac{1}{2}$

គេបាន $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 128 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 128 \times 2^{1-n}$

ហើយ $u_8 = 128 \times 2^{1-8} = 2^7 \times 2^{-7} = 1$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 128 \times 2^{1-n} \text{ , } u_8 = 1}$

២. គណនាតម្លៃ x

បើ $x-4$, x , $x+6$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះគេបានៈ

$x = \sqrt{(x-4)(x+6)}$ ឬ $x^2 = (x-4)(x+6) = x^2 + 2x - 24$

$2x - 24 = 0$ នាំឲ្យ $x = 12$

ដូចនេះ $\boxed{x = 12}$

● រកតម្លៃ u_1 , q និង u_6

តាមតម្លៃ $x = 12$ គេបានស្វ៊ីតៈ $8 , 12 , 18$

នាំឲ្យ $u_1 = 8$, $q = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

គេបាន $u_6 = u_1 \times q^{6-1} = 8 \times \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^2} = \frac{243}{4}$

ដូចនេះ: $\boxed{u_1 = 8 \text{ , } q = \frac{3}{2} \text{ , } u_6 = \frac{243}{4}}$

លំហាត់ 1.45

១. រក S_{10} នៃស៊េរីធរណីមាត្រ $3 + 12 + 48 + ...$

២. តើមានប៉ុន្មានតួនៃស៊េរីធរណីមាត្រ $3 + 6 + 12 + ...$ ដែល $S_n = 1533$

ចម្លើយ

១. រក S_{10} នៃស៊េរីធរណីមាត្រ $3 + 12 + 48 + ...$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$

ដោយ $u_1 = 3 \text{ , } n = 10 \text{ , } q = \frac{12}{3} = 4$

គេបាន $S_{10} = \frac{3(4^{10} - 1)}{4 - 1} = 4^{10} - 1 = 1048576 - 1 = 1048575$

ដូចនេះ: $\boxed{S_{10} = 1048575}$

២. តើមានប៉ុន្មានតួនៃស៊េរីធរណីមាត្រ $3 + 6 + 12 + ...$ ដែល $S_n = 1533$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$

ដោយ $S_n = 1533 \text{ , } u_1 = 3 \text{ , } q = \frac{6}{3} = 2$

គេបាន $1533 = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1}$ ឬ $2^n - 1 = 511$

$2^n = 511 + 1 = 512 = 2^9$ នាំឲ្យ $n = 9$

ដូចនេះ ដើម្បីបាន $S_n = 1533$ លុះត្រាតែស៊េរីខាងលើមាន 9 តួ។

លំហាត់ 1.46

១. រកផលបូកនៃស៊េរី $1+4+16+...+4096$

២. ផលបូកបីតួដំបូងនៃស៊េរីធរណីមាត្រស្មើ 21 និងតួទីពីរស្មើ 6 ។ រកតម្លៃពីរតួផ្សេងទៀត។

ចម្លើយ

១. រកផលបូកនៃស៊េរី $1+4+16+...+4096$

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q-1}$

គេមាន $u_1 = 1$, $q = 4$, $n = ?$

ដោយ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ នោះ $4096 = 1\times 4^{n-1}$

$4^{n-1} = 4096 = 4^6$ នាំឲ្យ $n-1=6$ ឬ $n=7$

គេបាន $S_7 = \dfrac{1\times(4^7-1)}{4-1} = \dfrac{(4^6\times 4)-1}{3} = \dfrac{(4096\times 4)-1}{3}$

$S_7 = \dfrac{16384-1}{3} = \dfrac{16383}{3} = 5461$

ដូចនេះ: $\boxed{S_7 = 1+4+16+...+4096 = 5461}$

២. រកតម្លៃពីរតួផ្សេងទៀត

តាង a_1 , a_2 , a_3 ជាបីតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលត្រូវរក

តាមបម្រាប់: ផលបូកបីតួដំបូងនៃស៊េរីធរណីមាត្រស្មើ 21 និងតួទីពីរស្មើ 6

គេបាន $a_1 + a_2 + a_3 = 21$ និង $a_2 = 6$

បើ a_1 , a_2 , a_3 ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេបាន $a_1 \times a_3 = a_2^2 = 6^2 = 36 \quad (i)$

ម្យ៉ាងទៀត $a_1 + a_2 + a_3 = 21$ ឬ $a_1 + a_3 = 21 - a_2 = 21 - 6 = 15 \quad (ii)$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $\begin{cases} a_1 + a_3 = 15 \\ a_1 \times a_3 = 36 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a_1 + a_3 = 12 + 3 \\ a_1 \times a_3 = 12 \times 3 \end{cases}$

នាំឲ្យ $(a_1 = 12 , a_3 = 3)$ ឬ $(a_1 = 3 , a_3 = 12)$

ដូចនេះ $(a_1 = 12 , a_2 = 6 , a_3 = 3)$ ឬ $(a_1 = 3 , a_2 = 6 , a_3 = 12)$ ។

លំហាត់ 1.47

រក u_n និង S_n នៃស៊េរីធរណីមាត្រ $4 + 12 + 36 + \ldots$ ។
បង្ហាញថា $2S_n + 4 = 3u_n$ ។

ចម្លើយ

• រក u_n និង S_n នៃស៊េរីធរណីមាត្រ $4 + 12 + 36 + \ldots$

គេមាន $u_1 = 4 , q = \dfrac{12}{4} = 3$

គេបាន $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 4 \times 3^{n-1}$

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{4(3^n - 1)}{3 - 1} = 2(3^n - 1)$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 4 \times 3^{n-1} , S_n = 2(3^n - 1)}$

• បង្ហាញថា $2S_n + 4 = 3u_n$

គេមាន $2S_n + 4 = 2 \times 2(3^n - 1) + 4 = 4(3^n - 1) + 4 = 4 \times 3^n \quad (i)$

$$3u_n = 3 \times 4 \times 3^{n-1} = 4 \times 3^n \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $2S_n + 4 = 3u_n$

ដូចនេះ $\boxed{2S_n + 4 = 3u_n}$

លំហាត់ 1.48

a).គេមានស្វ៊ីត $a_n = 3n^2$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាស្វ៊ីតនេះមិនមែនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

b).រកផលបូកនៃ 60 តួដំបូងនៃស៊េរីនព្វន្ត $59+57+55+\ldots$ ។

c). ស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយមាន $a_2 = 18$ និង $a_5 = 486$ ។

ក. រកតម្លៃ a_1 និង q

ខ. រកតម្លៃ S_6 ។ បើ $a_n = 1458$ ចូររកតម្លៃ n ។

ចម្លើយ

a).ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាស្វ៊ីត $a_n = 3n^2$ មិនមែនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើ (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} =$ ចំនួនថេរ

គេមាន $a_n = 3n^2$ នោះ $a_{n-1} = 3(n-1)^2$

គេបាន $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{3n^2}{3(n-1)^2} = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^2$ មិនមែនជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (a_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

b).រកផលបូកនៃ 60 តួដំបូងនៃស៊េរីនព្វន្ត $59+57+55+\ldots$

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{2u_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

ដោយ $n = 60$, $u_1 = 59$, $d = u_2 - u_1 = 57-59 = -2$

គេបាន $S_{60} = \dfrac{2\times 59+(60-1)(-2)}{2}\cdot 60$

$S_{60} = \dfrac{118-118}{2}\times 60 = 0$

ដូចនេះ: $\boxed{S_{60} = 0}$

c). ក. រកតម្លៃ a_1 និង q នៃស្វីតធរណីមាត្រ

គេមាន $a_2 = 18$ និង $a_5 = 486$

$$\begin{cases} a_2 = a_1 q \\ a_5 = a_1 q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q = 18 \\ a_1 q^4 = 486 \end{cases}$$

តែ $a_1 q^4 = (a_1 q) q^3 = 18 q^3$

នាំឲ្យ $18q^3 = 486$ ឬ $q^3 = 27 = 3^3$ នាំឲ្យ $q = 3$

គេបាន $3a_1 = 18 \Rightarrow a_1 = 18 \div 3 = 6$

ដូចនេះ: $\boxed{a_1 = 6 , q = 3}$

ខ. រកតម្លៃ S_6

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

ដោយ $a_1 = 6 , q = 3 , n = 6$

គេបាន $S_6 = \dfrac{6 \times (3^6 - 1)}{3 - 1} = 3(3^6 - 1) = 3^7 - 3 = 2187 - 3 = 2184$

ដូចនេះ: $\boxed{S_6 = 2184}$

• បើ $a_n = 1458$ រកតម្លៃ n

តាមរូបមន្ត $a_n = a_1 q^{n-1}$

ដោយ $a_n = 1458 , a_1 = 6 , q = 3$

គេបាន $1458 = 6 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^n$ ឬ $3^n = 729 = 3^6$ នាំឲ្យ $n = 6$

ដូចនេះ: $\boxed{n = 6}$

លំហាត់ 1.49

S_{10} នៃស៊េរីធរណីមាត្រស្មើ 3069 និង $S_5 = 93$ ។ រក a_1 និង q ។

ចម្លើយ

រកតម្លៃ a_1 និង q

$$S_5=\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}=93$$

$$S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}\times(q^5+1)$$

$S_{10}=93\times(q^5+1)$ តែ $S_{10}=3069$

គេបាន $93\times(q^5+1)=3069$ ឬ $93q^5=3069-93=2976$

នាំឲ្យ $q^5=\frac{2976}{93}=32$ ឬ $q=\sqrt{32}=2$

គេបាន $\frac{a_1(q^5-1)}{q-1}=93$ សមមូល $\frac{a_1(2^5-1)}{2-1}=93$

នាំឲ្យ $31a_1=93\Rightarrow a_1=3$

ដូចនេះ $\boxed{a_1=3\,,\,q=2}$

លំហាត់ 1.50

តើគេត្រូវថែមប៉ុន្មានទៅលើចំនួន $3\,,\,24\,,\,94$ ដើម្បីឲ្យបាន 3 តួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ចម្លើយ

រកចំនួនដែលត្រូវថែម

តាង x ជាចំនួនដែលត្រូវថែម

គេបាន $3+x\,,\,24+x\,,\,94+x$ បើបីចំនួននេះជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ

$$(24+x)^2=(3+x)(94+x)$$

$$576+48x+x^2=282+3x+94x+x^2$$

$$97x-48x=576-282$$

$$49x = 294 \Rightarrow x = \frac{294}{49} = 6$$

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវថែមគឺ $x = 6$ ។

លំហាត់ 1.51

គណនា a , b , c នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដោយដឹងថា:

ក. $a+b+c=156$ និង $a^2+b^2+c^2=13104$

ខ. $a+b+c=65$ និង $abc=3375$

ចម្លើយ

ក. រកចំនួន a , b , c នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $a+b+c=156$ និង $a^2+b^2+c^2=13104$

គេបាន $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

ឬ $2(ab+ac+bc)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

ដោយ a , b , c នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គេបាន $b^2 = ac$

នាំឲ្យ $2(ab+b^2+bc)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$$2b(a+b+c)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$

នាំឲ្យ $b = \dfrac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)}$

$$b = \frac{(156)^2-(13104)}{2(156)} = 36$$

គេបាន $\begin{cases} a+b+c=156 \\ b^2 = ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=120 \\ ac=1296 \end{cases}$

ដូច្នេះ a និង c ជាឫសនៃសមីការ $X^2-120X+1296=0$

$$\Delta' = (60)^2 - 4\times 1296 = 3600-1296 = 2304 = (48)^2$$

នាំឲ្យ $X_1 = 60 - 48 = 12$, $X_2 = 60 + 48 = 108$

ដូចនេះ គេបានគូចម្លើយ $\boxed{\begin{array}{l} a = 12 \, , \, b = 36 \, , \, c = 108 \\ a = 108 \, , \, b = 36 \, , \, c = 12 \end{array}}$

ក. រកចំនួន a , b , c នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $a + b + c = 65$ និង $abc = 3375$

ដោយ a , b , c នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គេបាន $b = aq \Rightarrow a = \dfrac{b}{q}$ និង $c = bq$

គេបាន $\dfrac{b}{q} \cdot b \cdot bq = 3375$ ឬ $b^3 = 3375$ នាំឲ្យ $b = \sqrt[3]{3375} = 15$

គេបាន $\begin{cases} a + b + c = 65 \\ abc = 3375 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 15 + c = 65 \\ 15ac = 3375 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 50 \\ ac = 225 \end{cases}$

ដូច្នេះ a និង c ជាឫសនៃសមីការ $X^2 - 50X + 225 = 0$

$\Delta' = (25)^2 = 625 - 225 = 400 = 20^2$

នាំឲ្យ $X_1 = 25 - 20 = 5$, $X_2 = 25 + 20 = 45$

ដូចនេះ គេបានគូចម្លើយ $\boxed{\begin{array}{l} a = 5 \, , \, b = 15 \, , \, c = 45 \\ a = 45 \, , \, b = 15 \, , \, c = 5 \end{array}}$

លំហាត់ 1.52

(a). ចូរសរសេរជាទម្រង់ទូទៅចំពោះ a_n និង S_n នៃស៊េរីនព្វន្តមួយ។

(b). ផលបូកប្រាំតួដំបូងនៃស៊េរីនព្វន្តស្មើ 2 និងតួទីប្រាំស្មើ $-\frac{6}{5}$ ។

រកតម្លៃ a_1 និង d រួចគណនាផលបូកប្រាំតួបន្ទាប់។

(c). ផលបូក S_n នៃ n ដំបូងនៃស៊េរីនព្វន្តកំណត់ដោយ $S_n = 3n^2 - 6n$

គណនា S_2 , S_1 និង a_2 ដែលជាតួទី 2 នៃស៊េរី។

បើ $a_n = 333$ ចូររកតម្លៃ n ។ គណនាមធ្យមនៃ 20 តួដំបូង។

ចម្លើយ

(a). សរសេរជាទម្រង់ទូទៅចំពោះ a_n និង S_n

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d} \text{ ដែល } \begin{cases} a_1 : \text{ជាតួទីមួយ} \\ a_n : \text{ជាតួទី } n \\ d : \text{ជាផលសងរួម} \end{cases}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)} \text{ ដែល } \begin{cases} a_1 : \text{ជាតួទីមួយ} \\ a_n : \text{ជាតួទី } n \\ S_n : \text{ជាផលបូក } n \text{ តួ} \end{cases}$$

(b). រកតម្លៃ a_1 និង d

$$\text{តាមបម្រាប់ } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2 \quad (1) \\ a_5 = -\frac{6}{5} \quad (2) \end{cases}$$

ដោយ $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$ និង $a_5 = a_1 + 4d$

ចំពោះ (i): $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 2$

$5a_1 + 10d = 2 \quad (3)$

ចំពោះ $(ii): a_1 + 4d = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow 5a_1 + 20d = -6 \quad (4)$

តាម (3) & (4) គេបាន $\begin{cases} 5a_1 + 10d = 2 \\ 5a_1 + 20d = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = -\frac{4}{5} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a_1 = 2 \, , \, d = -\frac{4}{5}}$

- គណនាផលបូកប្រាំតួបន្ទាប់

$$S_5 = \frac{5}{2}(a_6 + a_{10})$$

ដោយ $a_6 = a_1 + 5d = 2 + 5(-\frac{4}{5}) = 2 - 4 = -2$

$$a_{10} = a_1 + 9d = 2 + 9(-\frac{4}{5}) = \frac{10-36}{5} = -\frac{26}{5}$$

គេបាន $S_5 = \frac{5}{2}(-2 - \frac{26}{5}) = -5 - 13 = -18$

ដូចនេះ ផលបូកប្រាំតួបន្ទាប់គឺ $\boxed{S_5 = -18}$

(c). ផលបូក S_n នៃ n ដំបូងនៃស៊េរីនព្វន្តកំណត់ដោយ $S_n = 3n^2 - 6n$

- គណនា S_2 , S_1 និង a_2

$$S_2 = 3(2)^2 - 6(2) = 12 - 12 = 0$$

$$S_1 = 3(1)^2 - 6(1) = 3 - 6 = -3$$

ដោយ $a_1 = S_1 = -3$ និង $S_2 = a_1 + a_2$

ឬ $-3 + a_2 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 3$

ដូចនេះ: $\boxed{S_2 = 0 \, , \, S_1 = -3 \, , \, a_2 = 3}$

- រកតម្លៃ n បើ $a_n = 333$

តាមរូបមន្ត $a_n = a_1 + (n-1)d$

ដោយ $a_n = 333$, $a_1 = -3$, $d = a_2 - a_1 = 3-(-3) = 6$

គេបាន $333 = -3 + (n-1)(6)$

$6n - 6 = 333 + 3$

$6n = 336 + 6 = 342$

$n = \frac{342}{6} = 57$

ដូចនេះ $\boxed{n = 57}$

• គណនាមធ្យមនៃ 20 តួដំបូង

មធ្យម $a_{av} = \frac{S_{20}}{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) \cdot \frac{1}{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2}$

$a_1 = -3$, $a_{20} = a_1 + 19d = -3 + 19(6) = 111$

គេបាន $a_{av} = \frac{-3+111}{2} = \frac{108}{2} = 54$

ដូចនេះ មធ្យមគឺ $\boxed{a_{av} = 54}$

លំហាត់ 1.53

(a). ចូរបង្ហាញថាផលបូក n តួនៃស៊េរី $1+3+5+.....$ ស្មើនឹង n^2 ។

(b). ក្នុងស្ទីតនព្វន្តមួយ $S_3 = 24$ និង $S_6 = 54$ ។ រក S_9 ។

(c). ចូរបង្ហាញផលបូក 20 តួដំបូងនៃស៊េរីធរណីមាត្រ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...$

ជាទម្រង់ $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ។

ចម្លើយ

(a). បង្ហាញថាផលបូក n តួនៃស៊េរី $1+3+5+.....$ ស្មើនឹង n^2

តាង S_n ជាផលបូក n តួនៃស៊េរី $1+3+5+.....$

ដោយ $1,3,5,...$ ជាស្ទីតនព្វន្ត (ព្រោះ $d=3-1=5-3=...=2$)

នោះ $a_1=1$, $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)2=2n-1$

គេបាន $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(1+2n-1)=\frac{n}{2}(2n)=n^2$

ដូចនេះ ផលបូក n តួនៃស៊េរីគឺ $\boxed{S_n=n^2}$

(b). ក្នុងស្ទីតនព្វន្តមួយ $S_3=24$ និង $S_6=54$ ។ រក S_9

$$\begin{cases} S_3=\frac{3}{2}(a_1+a_3)=\frac{3}{2}(a_1+a_1+2d)=\frac{3}{2}(2a_1+2d)=3(a_1+d) \\ S_6=\frac{6}{2}(a_1+a_6)=\frac{6}{2}(a_1+a_1+5d)=\frac{6}{2}(2a_1+5d)=6a_1+15d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3(a_1+d)=24 \\ 6a_1+15d=54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+d=8 \\ a_1+\frac{5}{2}d=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=\frac{22}{3} \\ d=\frac{2}{3} \end{cases}$$

គេបាន $S_9=\frac{9}{2}(a_1+a_9)=\frac{9}{2}(2a_1+8d)=\frac{9}{2}\left(2\cdot\frac{22}{3}+8\cdot\frac{2}{3}\right)$

$S_9=(3\times 22)+(3\times 8)=66+24=90$

ដូចនេះ: $\boxed{S_9=90}$

(c). បង្ហាញផលបូក 20 តួដំបូងនៃ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+.....$ ជាទម្រង់ $2-\left(\frac{1}{2}\right)^k$

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{u_1(q^n-1)}{q-1}$

ដោយ $u_1=1$, $u_2=\frac{1}{2}$, $q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{1/2}{1}=\frac{1}{2}$, $n=20$

គេបាន:

$$S_{20}=\frac{1\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{20}-1\right]}{\left(\frac{1}{2}\right)-1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}-1}{-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right)=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{20}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{19}}$

លំហាត់ 1.54

(a).បើ 10 , p , q , 28 ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ចូររកតម្លៃ p និង q ។

(b). ❶ តួទីមួយ a_1 នៃស្វ៊ីតនព្វន្តស្មើ 9 និងផលសងរួមស្មើ 4 ។ រក a_5 ជាតួទីប្រាំ និង S_{10} ជាផលបូក 10 តួដំបូង។

❷ ក្នុងស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ $S_n=5n-2n^2$ ។ រក a_1, a_2 និង d ដែលជាផលសងរួម រួចរក a_{10} និង S_{10} ។

(c). u_n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយស្មើ $243\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ។

❶ សរសេរនូវតម្លៃនៃ u_1 និង q

❷ រកតម្លៃនៃ u_8

❸ បើ $u_n=32$ ចូររកតម្លៃ n ។

ចម្លើយ

(a).រកតម្លៃ p និង q

បើ 10 , p , q , 28 ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $\begin{cases}2p=10+q\\2q=p+28\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4p-2q=20\\-p+2q=28\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=16\\q=22\end{cases}$

ដូចនេះ: $\boxed{p=16\ ,\ q=22}$

(b). ❶ រក $a_5\ ,\ S_{10}$

តាមរូបមន្ត $a_n = a_1 + (n-1)d$

ដោយ $a_1 = 9\ ,\ d = 4$

គេបាន $a_5 = 9 + 4(4) = 9 + 16 = 25$

តាមរូបមន្ត $S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

គេបាន $S_{10} = \dfrac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 5(2a_1 + 9d) = 5(2\times 9 + 9\times 4) = 270$

ដូចនេះ: $\boxed{a_5 = 25\ ,\ S_{10} = 270}$

❷ រក a_1, a_2 និង d រួចរក a_{10} និង S_{10}

គេមាន $S_n = 5n - 2n^2$

គេបាន $a_1 = S_1 = 5(1) - 2(1)^2 = 5 - 2 = 3$

$S_2 = 5(2) - 2(2)^2 = 10 - 8 = 2$

$S_2 = a_1 + a_2 \Rightarrow a_2 = S_2 - a_1 = 2 - 3 = -1$

$d = a_2 - a_1 = (-1) - 3 = -4$

ដូចនេះ: $\boxed{a_1 = 3\ ,\ a_2 = -1\ ,\ d = -4}$

គេបាន $a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9(-4) = 3 - 36 = -33$

$S_{10} = \dfrac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 5(3 - 33) = -150$

ដូចនេះ: $\boxed{a_{10} = -33\ ,\ S_{10} = -150}$

(c). ❶ សរសេរនូវតម្លៃនៃ u_1 និង q

គេមាន $u_n = 243\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

គេបាន $u_1 = 243\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 162$

$u_2 = 243\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 243\times\frac{4}{9} = 108$

នាំឲ្យ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{108}{162} = \frac{2}{3}$

ដូចនេះ: $\boxed{u_1 = 162\ ,\ q = \frac{2}{3}}$

❷ រកតម្លៃនៃ u_8

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 q^{n-1}$

គេបាន $u_8 = u_1 q^7 = 162\left(\frac{2}{3}\right)^7$

ដូចនេះ: $\boxed{u_8 = 162\left(\frac{2}{3}\right)^7}$

❸ រកតម្លៃ n

គេមាន $u_n = 32\ ,\ u_1 = 162$ និង $q = \frac{2}{3}$

គេបាន $32 = 162\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ឬ $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{32}{162} = \frac{2^5}{3^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

នាំឲ្យ $n-1 = 5 \Rightarrow n = 6$

ដូចនេះ: $\boxed{n = 6}$

លំហាត់ 1.55

(a).បើ $5 , x , 80 , y$ ជាតួនៃស្វីតធរណីមាត្រ ចូរបង្ហាញថា
$\sqrt{xy}=80$ ។

(b). ក្នុងស្វីតនព្វន្តមួយ តួទីមួយស្មើ 6 និងផលសងរួមស្មើ 6 ។ សរសេរ a_n ដែលជាតួទូទៅនៃស្វីត។ តើមានប៉ុន្មានចំនួននៅចន្លោះពី 1 ទៅ 1000 ដែលជាពហុគុណនៃ 6 ។ រកផលបូកនៃពហុគុណទាំងនោះ។

(c).រក S_n ចំពោះស្វីតធរណីមាត្រ $27+18+12+.....$
បើ $u_n=\dfrac{128}{81}$ នៃស៊េរីនេះ ចូររក n ព្រមទាំង S_n ។

ចម្លើយ

(a).បង្ហាញថា $\sqrt{xy}=80$

បើ $x , 80 , y$ ជាតួនៃស្វីតធរណីមាត្រ

នោះគេបាន $xy=(80)^2$ ឬ $\sqrt{xy}=80$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{xy}=80}$

(b). សរសេរ a_n ដែលជាតួទូទៅនៃស្វីតនព្វន្ត

តាមរូបមន្ត $a_n=a_1+(n-1)d$

ដោយ $a_1=6 , d=6$

គេបាន $a_n=6+(n-1)6=6n$

ដូចនេះ $\boxed{a_n=6n}$ ដែល $n=1,2,3,...$

• តើមានប៉ុន្មានចំនួននៅចន្លោះពី 1 ទៅ 1000 ដែលជាពហុគុណនៃ 6

ចំនួននៅចន្លោះពី 1 ទៅ 1000 ជាពហុគុណនៃ 6 មាន $\{6 , 12 , 18 , ... , 996\}$

តាង $a_1=6$ ជាតួទីមួយ

$a_2=12=2\times 6$ ជាតួទីពីរ

$a_2 = 18 = 3 \times 6$ ជាតួទីបី

....

$a_n = 996 = n \times 6$ នាំឲ្យ $n = 996 \div 6 = 166$

ដូចនេះ ក្នុងចន្លោះពី 1 ទៅ 1000 មាន 166 ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 6 ។

• រកផលបូកនៃពហុគុណទាំងនោះ

ដោយ $\{6, 12, 18, ..., 996\}$ ជាស្វីតនព្វន្ត

គេប្រើតាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

អនុវត្តន៍ចំពោះ $n = 166$, $a_1 = 6$, $a_{166} = 996$

គេបាន $S_{166} = \frac{166}{2}(6 + 996) = 83 \times 1002 = 83166$

ដូចនេះ $\boxed{S_{166} = 83166}$

(c). រក S_n ចំពោះស្វីតធរណីមាត្រ $27 + 18 + 12 + ...$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$

គេមាន $u_1 = 27$, $q = \frac{18}{27} = \frac{12}{18} = ... = \frac{2}{3}$

គេបាន $S_n = \frac{27\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}{\left(\frac{2}{3}\right) - 1} = \frac{27\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{2}{3}}$

$$= \frac{27\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\frac{1}{3}} = 81\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

ដូចនេះ: $S_n = 81\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

•រក n ព្រមទាំង S_n បើ $u_n = \frac{128}{81}$ នៃស៊េរីនេះ:

បើ $u_n = \frac{128}{81}$ និង $u_n = 27\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

នាំឲ្យ $27\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{128}{81}$ ឬ $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{128}{81\cdot 27}$

ឬ $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^7}{3^4\cdot 3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^7$ នាំឲ្យ $n-1=7 \Rightarrow n=8$

ចំពោះ $n=8$ គេបាន $S_8 = 81\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^8\right) = 81\left(1-\frac{2^7\cdot 2}{3^4\cdot 3^4}\right)$

$$S_8 = 81\left(1-\frac{128\times 2}{81\times 81}\right) = 81-\frac{256}{81} = \frac{6561-256}{81} = \frac{6305}{81}$$

ដូចនេះ: $S_8 = \frac{6305}{81}$

លំហាត់ 1.56

(a).ប្រើ a_n ជាតួទី n និង S_n ជាផលបូក n តួនៃស៊េរីនព្វន្តមួយ។ ស៊េរីនព្វន្តមួយមាន $a_6 = 208$ និង $a_{11} = 183$។ គណនា S_{40} ។

(b). ពីរតួដំបូងនៃស៊េរីគឺ $1+2+.....$

(i). បើស៊េរីនេះជាស៊េរីធរណីមាត្រ ចូរសរសេរពីរតួបន្ទាប់ និងបង្ហាញថា $S_{20} < 2^{20}$ ។

(ii). បើស៊េរីនេះជាស៊េរីនព្វន្ត ចូរបង្ហាញថា $S_n = \dfrac{n^2+n}{2}$ និងរកផលបូក 100 តួដំបូង។

ចម្លើយ

(a).គណនា S_{40}

គេមាន $a_6 = 208$ និង $a_{11} = 183$

តែ $a_6 = a_1 + 5d$ នាំឲ្យ $a_1 + 5d = 208$

$$a_{11} = a_1 + 10d = (a_1 + 5d) + 5d$$

$$a_{11} = a_6 + 5d \Leftrightarrow 183 = 208 + 5d$$

$$\Rightarrow d = \frac{183-208}{5} = -5$$

$$\Rightarrow a_1 = a_6 - 5d = 208 - 5(-5) = 233$$

គេបាន $S_{40} = \dfrac{40}{2}(a_1 + a_{40}) = 20(2a_1 + 39d)$

$$S_{40} = 20[233 + 39(-5)] = 20 \times 38 = 760$$

ដូចនេះ: $\boxed{S_{40} = 760}$

(b). ពីរតួដំបូងនៃស៊េរីគឺ $1+2+.....$

(i). សរសេរពីរតួបន្ទាប់

បើស៊េរីគឺ $1+2+.....$ ជាស៊េរីធរណីមាត្រ នោះផលធៀបរួមគឺ $q=2\div 1=2$

ដូច្នេះ គេបានពីរតួបន្ទាប់ទៀតគឺ $1+2+4+8+.....$ ។

• បង្ហាញថា $S_{20}<2^{20}$

គេមាន $S_{20}=\dfrac{1\times(2^{20}-1)}{2-1}=2^{20}-1$

ឬ $S_{20}=2^{20}-1$ នាំឲ្យ $S_{20}<2^{20}$

ដូចនេះ: $\boxed{S_{20}<2^{20}}$

(ii).បង្ហាញថា $S_n=\dfrac{n^2+n}{2}$

បើស៊េរីគឺ $1+2+.....$ ជាស៊េរីនព្វន្ត នោះផលធៀបរួមគឺ $d=2-1=1$

គេបាន $S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)=\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

$$S_n=\frac{n}{2}[2+(n-1)\times 1]=\frac{n}{2}(2+n-1)=\frac{n}{2}(n+1)=\frac{n^2+n}{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n=\dfrac{n^2+n}{2}}$

• រកផលបូក 100 តួដំបូង

$$S_{100}=\frac{(100)^2+(100)}{2}=\frac{10000+100}{2}=\frac{10100}{2}=5050$$

ដូចនេះ: $\boxed{S_{100}=5050}$

លំហាត់ 1.57

គណនា a , b , c និង q នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដោយដឹងថា
$a+b+c=312$ និង $c-a=192$ ។

ចម្លើយ

គណនា a , b , c និង q

$c-a=192$ នាំឲ្យ $c=192+a \quad (i)$

$(a+b+c)-(c-a)=312-192$

ឬ $2a+b=120$ នាំឲ្យ $b=120-2a \quad (ii)$

បើ a , b , c ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះគេបាន $b^2=ac \quad (ii)$

យក (i) & (ii) ជំនួសក្នុង (iii) គេបាន

$(120-2a)^2=a(192+a)$

$14400-480a+4a^2=192a+a^2$

$3a^2-672a+14400=0$

$a^2-224a+4800=0$

$\Delta'=(112)^2-4800=12544-4800=7744=(88)^2$

នាំឲ្យ $a=-b'+\sqrt{\Delta'}=-(-112)+88=200$

$a=-b'-\sqrt{\Delta'}=-(-112)-88=24$

• ចំពោះ $a=24$

តាម (i) : $c=192+24=216$

តាម (ii) : $b=120-2(24)=120-48=72$

គេបាន $q=\dfrac{72}{24}=\dfrac{216}{72}=3$

ដូចនេះ $\boxed{a=24\ ,\ b=72\ ,\ c=216\ ,\ q=3}$

• ចំពោះ $a=200$

តាម (i) : $c=192+200=392$

តាម (ii) : $b=120-2(200)=120-400=-280$

គេបាន $q=-\dfrac{280}{200}=-\dfrac{392}{280}=-\dfrac{7}{5}$

ដូចនេះ: $\boxed{a=200\ ,\ b=-280\ ,\ c=392\ ,\ q=-\frac{7}{5}}$

លំហាត់ 1.58

(a).រកផលបូក 40 តួដំបូងនៃស៊េរីនព្វន្ត $75+72\frac{1}{2}+70+....$

(b). ស្វ៊ីតមួយមាន $a_1=8$ និង $a_2=6$ ។

(i). រក a_{10} បើវាជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

(ii). រក a_5 បើវាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

(c). ស៊េរីនព្វន្តមួយមាន $a_5=8$ និង $S_8=61$ ។ រក a_1, d និង a_{21}

ចម្លើយ

(a).រកផលបូក 40 តួដំបូងនៃស៊េរីនព្វន្ត $75+72\frac{1}{2}+70+....$

តាមរូបមន្ត $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

ដោយ $n=40\ ,\ a_1=75\ ,\ a_2=72\frac{1}{2}\ ,\ d=72\frac{1}{2}-75=-2\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

នាំឲ្យ $a_{40}=a_1+39d=75+39(-\frac{5}{3})=75-65=10$

គេបាន $S_{40}=\frac{40}{2}(75+10)=20\times85=1700$

ដូចនេះ: $\boxed{S_{40}=1700}$

(b). ស្វ៊ីតមួយមាន $a_1=8$ និង $a_2=6$

(i). រក a_{10} បើវាជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ផលសងរួម $d=a_2-a_1=6-8=-2$

គេបាន $a_{10}=a_1+9d=8+9(-2)=8-18=-10$

ដូចនេះ: $\boxed{a_{10}=-10}$

(ii). រក a_5 បើវាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ផលធៀបរួម $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

គេបាន $a_5=a_1q^4=8\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{2^3\cdot 3^4}{2^8}=\frac{3^4}{2^5}=\frac{81}{32}$

ដូចនេះ: $\boxed{a_5=\frac{81}{32}}$

(c). ស៊េរីនព្វន្តមួយមាន $a_5=8$ និង $S_8=61$។ រក a_1, d និង a_{21}

គេមាន $a_5=a_1+4d=8$

$S_8=\frac{8}{2}(a_1+a_8)=4(2a_1+7d)=4[2(a_1+4d)-d]$

$S_8=4[2(a_1+4d)-d]=4(2a_5-d)=4(2\times 8-d)=64-4d$

តែ $S_8=61$ នាំឲ្យ $64-4d=61\Rightarrow d=\frac{64-61}{4}=\frac{3}{4}$

គេបាន $a_1=8-4d=8-4\left(\frac{3}{4}\right)=5$

$a_{21}=a_1+20d=5+20\left(\frac{3}{4}\right)=5+15=20$

ដូចនេះ: $\boxed{a_1=5\,,\, d=\frac{3}{4}\,,\, a_{21}=20}$

លំហាត់ 1.59

គេឲ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $\{\sqrt{5}+\sqrt{3}\,,\,\sqrt{5}-\sqrt{3}\,,\,....\}$។ ចូររកផលធៀបរួម និងផលបូកនៃស៊េរីមិនកំណត់។

ចម្លើយ

រកផលធៀបរួម និងផលបូកនៃស៊េរីមិនកំណត់

ផលធៀបរួម $q=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$$q=\frac{5-2\sqrt{15}+3}{5-3}=\frac{8-2\sqrt{15}}{2}=4-\sqrt{15}$$

ផលបូក $S_n=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\left[(4-\sqrt{15})^n-1\right]}{(4-\sqrt{15})-1}$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\left[(4-\sqrt{15})^n-1\right]}{(3-\sqrt{15})}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(3+\sqrt{15})\left[(4-\sqrt{15})^n-1\right]}{(3-\sqrt{15})(3+\sqrt{15})}$$

$$=\frac{(6\sqrt{5}+8\sqrt{3})\left[(4-\sqrt{15})^n-1\right]}{9-15}$$

$$=\frac{(6\sqrt{5}+8\sqrt{3})\left[(4-\sqrt{15})^n-1\right]}{-6}$$

$$=\frac{(3\sqrt{5}+4\sqrt{3})\left[1-(4-\sqrt{15})^n\right]}{3}$$

ដូចនេះ: $\boxed{q=4-\sqrt{15}\ ,\ S_n=\dfrac{(3\sqrt{5}+4\sqrt{3})\left[1-(4-\sqrt{15})^n\right]}{3}}$

លំហាត់ 1.60

(a). $\frac{5}{3}, x, \frac{3}{5}$ ជាតួនៃស៊ីតធរណីមាត្រ។ គណនាតម្លៃទាំងពីរនៃ x ។

(b). ស៊ីតនព្វន្តមួយមាន $a_3 = 12$ និង $d = -3$។ បើ $S_n = 33$ ចូររកតម្លៃទាំងពីរនៃ n។ ចូរពន្យល់ថា ហេតុអ្វីបានជាអាចមានតម្លៃពីរផ្សេងគ្នានៃ n ។

(c). ចំពោះស៊េរីធរណីមាត្រ $S_n = 3(2^n - 1)$ ។

(i). រក a_1 និង q

(ii). គណនា a_n និង a_{10}

ចម្លើយ

(a). គណនាតម្លៃទាំងពីរនៃ x

ដោយ $\frac{5}{3}, x, \frac{3}{5}$ ជាតួនៃស៊ីតធរណីមាត្រ

គេបាន $x^2 = \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

ដូចនេះ: $\boxed{x = \pm 1}$

(b). រកតម្លៃទាំងពីរនៃ n

ដោយ $a_3 = a_1 + 2d$ តែ $a_3 = 12$ និង $d = -3$

នាំឲ្យ $a_1 - 6 = 12 \Rightarrow a_1 = 18$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2\times 18 + (n-1)(-3)] \text{ តែ } S_n = 33$$

នាំឲ្យ $\frac{n}{2}[2\times 18 + (n-1)(-3)] = 33$

$$\frac{n}{2}(36 - 3n + 3) = 33 \Leftrightarrow n(39 - 3n) = 66$$

$$-3n^2+39n-66=0 \Leftrightarrow n^2-13n+22=0$$

$$(-13)^2-4(22)=169-88=81=9^2$$

$$\Rightarrow n=\frac{13\pm 9}{2}$$ គេបាន $n=\{2, 11\}$

ដូចនេះ: $\boxed{n=2\ ,\ n=11}$

• **ពន្យល់:** ហេតុដែលអាចមានតម្លៃពីរផ្សេងគ្នានៃ n

ចំពោះ $n=2$ មានន័យថាផលបូកពីរតួដំបូងស្មើ 33។ នៅពេលដែល $n>2$ នោះ ផលបូកធំជាង 33 ប៉ុន្តែ $d=-3<0$ នាំឲ្យស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតចុះ ដូច្នេះតួបន្ទាប់របស់វានឹងអាចមានតម្លៃអវិជ្ជមាន ដែលធ្វើឲ្យផលបូក $n=11$ តួស្មើនឹង 33 ដែរ។

(c). ចំពោះស៊េរីធរណីមាត្រ $S_n=3(2^n-1)$

(i). រក a_1 និង q

$$a_1=S_1=3(2^1-1)=3$$

$S_2=3(2^2-1)=9$ និង

តែ $S_2=a_1+a_2=3+a_2$

នាំឲ្យ $a_2=S_2-3=9-3=6$

គេបាន $q=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{6}{3}=2$

ដូចនេះ: $\boxed{a_1=3\ ,\ q=2}$

(ii). គណនា a_n និង a_{10}

តាមរូបមន្ត $a_n=a_1q^{n-1}$

ដោយ $a_1=3\ ,\ q=2$

គេបាន $a_n=3\cdot 2^{n-1}$

$$a_{10}=3\cdot 2^{10-1}=3\times 2^9=1536$$

ដូចនេះ: $\boxed{a_n=3\cdot 2^{n-1}\ ,\ a_{10}=1536}$

លំហាត់ 1.61

(a). ក្នុងស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលបូក 10 តួដំបូងស្មើ 205 និងផលបូក 10 តួបន្ទាប់ស្មើ 705 ។ សរសេរបីតួដំបូងនៃស៊េរីនេះ។

(b). ស្វ៊ីតមួយមាន $a_n = 3 - 4n$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $a_{n+1} - a_{n-1} > a_3$

(c). ផលបូកបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រស្មើ 91 និងតួកណ្ដាលស្មើ 21 ។ ចូររកតម្លៃនៃពីរតួផ្សេងទៀត។

(d). ស៊េរីធរណីមាត្រមួយមាន $S_4 = 75$ និង $S_8 = 1275$ ។ ទាញរក $\frac{S_8}{S_4}$ រួចគណនាតម្លៃ a_1 និង q ។

ចម្លើយ

(a). សរសេរបីតួដំបូងនៃស៊េរីនេះ

តាមបំរាប់ $\begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_{10} = 205 \\ a_{11} + a_{12} + ... + a_{20} = 705 \end{cases}$

ដោយ $a_1 + a_2 + ... + a_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 5(2a_1 + 9d)$

នាំឲ្យ $5(2a_1 + 9d) = 205$

$a_{11} + a_{12} + ... + a_{20} = \frac{10}{2}(a_{11} + a_{20}) = 5(a_1 + 10d + a_1 + 19d)$

$= 5(2a_1 + 9d + 20d) = 5(2a_1 + 9d) + 100d$

នាំឲ្យ $5(2a_1 + 9d) + 100d = 705$

គេបាន $205 + 100d = 705 \Leftrightarrow 100d = 705 - 205 = 500 \Rightarrow d = 5$

នោះ $5(2a_1 + 9 \times 5) = 205 \Leftrightarrow 2a_1 + 45 = 41$

$2a_1 = 41 - 45 = -4$ នាំឲ្យ $a_1 = -2$

គេបានតួទូទៅ $a_n = a_1 + (n-1)d = -2 + (n-1)5 = 5n - 7$

គេបាន $a_1 = 5(1) - 7 = -2$

$a_2 = 5(2) - 7 = 3$

$a_3 = 5(3) - 7 = 8$

ដូចនេះ បីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តគឺ $\boxed{-2 , 3 , 8}$

(b). ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $a_{n+1} - a_{n-1} > a_3$

គេមាន $a_n = 3 - 4n$

នោះ $a_3 = 3 - 4\times 3 = 3 - 12 = -9$

$a_{n+1} = 3 - 4(n+1) = -4n - 1$

$a_{n-1} = 3 - 4(n-1) = -4n + 7$

គេបាន $a_{n+1} - a_{n-1} = (-4n-1) - (-4n+7) = -8 > a_3$

ដូចនេះ $\boxed{a_{n+1} - a_{n-1} > a_3}$

(c). រកតម្លៃនៃពីរតួផ្សេងទៀត

តាង a , b , c ជាបីតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

តាមសម្មតិកម្ម $\begin{cases} a + b + c = 91 \\ b = 21 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a + c = 70 \quad (i)$

បើ a , b , c ជាបីតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះ $ac = b^2 = 21^2 = 441 \quad (ii)$

តាម (i) & (ii) គេបាន $\begin{cases} a + c = 70 \\ ac = 441 \end{cases}$

a និង c ជាឫសនៃសមីការ $X^2 - 70X + 441 = 0$

$\Delta = (70)^2 - 4\times 441 = 4900 - 1764 = 3136 = (56)^2$

នាំឲ្យ $X = \dfrac{70 \pm 56}{2}$ នោះ $X \in \{7 , 63\}$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} a = 7 , b = 21 , c = 63 \\ a = 63 , b = 21 , c = 7 \end{array}}$

(d). ទាញរក $\dfrac{S_8}{S_4}$ រួចគណនាតម្លៃ a_1 និង q

គេមាន $S_4 = 75$ និង $S_8 = 1275$

គេបាន $\dfrac{S_8}{S_4} = \dfrac{1275}{75} = 17$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{S_8}{S_4} = 17}$

ដោយ $S_4 = \dfrac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1} \Rightarrow a_1 = \dfrac{S_4(q-1)}{(q^4 - 1)} = \dfrac{75}{(q+1)(q^2+1)}$

$$a_1 = \frac{75}{(q+1)(q^2+1)}\ ,\ q \neq -1$$

តាម $\dfrac{S_8}{S_4} = 17$ នាំឲ្យ $S_8 = 17S_4$

សមមូល $\dfrac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = 17 \times \dfrac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1}$

គេបាន $q^8 - 1 = 17(q^4 - 1)$ ចំពោះ $q \neq 1$, $a_1 \neq 0$

$$(q^4 - 1)(q^4 + 1) = 17(q^2 - 1)(q^2 + 1)$$

$$(q^2 - 1)(q^2 + 1)(q^4 + 1) = 17(q^2 - 1)(q^2 + 1)$$

$$(q^2 - 1)(q^4 + 1) = 17(q^2 - 1)$$

$$(q^2 - 1)(q^4 + 1) - 17(q^2 - 1) = 0$$

$$(q^2 - 1)(q^4 + 1 - 17) = 0 \Leftrightarrow (q^2 - 1)(q^4 - 16) = 0$$

នាំឲ្យ $\left[\begin{array}{l} q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q = \pm 1 \ \text{(មិនយក)} \\ q^4 - 16 = 0 \Rightarrow q = \pm 2 \end{array}\right.$

• ចំពោះ $q=-2$ នោះ $a_1=\dfrac{75}{(-2+1)[(-2)^2+1]}=\dfrac{75}{-5}=-15$

• ចំពោះ $q=2$ នោះ $a_1=\dfrac{75}{(2+1)(2^2+1)}=\dfrac{75}{3\times 5}=5$

ដូចនេះ $\boxed{a_1=-15\,,\,q=-2 \text{ ឬ } a_1=5\,,\,q=2}$

លំហាត់ 1.62

ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1\,,3\,,7\,,13\,,21\,,31\,,...$ ។

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $2\,,4\,,8\,,14\,,22\,,32\,,...$ ។

គ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n):\ p\,,q\,,p\,,q\,,p\,,q\,,...$ ។

ចម្លើយ

ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1\,,3\,,7\,,13\,,21\,,31\,,...$

$-$តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតដែលគេឲ្យ ។

$-$ស្វ៊ីត b_n ជាផលសងលំដាប់1នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលមានតួ b_n កំណត់ដោយ

$b_n=a_{n+1}-a_n$ ។ គេបាន:

$$b_1=a_2-a_1=3-1=2=2\times 1$$

$$b_2=a_3-a_2=7-3=4=2\times 2$$

$$b_3=a_4-a_3=13-7=6=2\times 3$$

$$b_4=a_5-a_4=21-13=8=2\times 4$$

....

$$b_{n-1}=a_n-a_{n-1}=2(n-1)$$

បូកអង្គនិងអង្គគេបាន:

$b_1+b_2+b_3+...+b_{n-1}=a_n-a_1=2[1+2+3+...+(n-1)]$

$a_n=a_1+b_1+b_2+b_3+...+b_{n-1}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

$a_n=1+2\cdot\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}=1+n(n-1)=n^2-n+1$

ដូចនេះ $a_n=n^2-n+1$ ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត $1,3,7,13,21,31,...$ ។

ខ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $2,4,8,14,22,32,...$

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតដែលគេឲ្យ

ស្វ៊ីត b_n ជាផលសងលំដាប់ 1 នៃស្វ៊ីត (a_n)

គេបាន:

$b_1=a_2-a_1=4-2=2=2\times1$

$b_2=a_3-a_2=8-4=4=2\times2$

$b_3=a_4-a_3=14-8=6=2\times3$

$b_4=a_5-a_4=22-14=8=2\times4$

....

$b_{n-1}=a_n-a_{n-1}=2(n-1)$

បូកអង្គនិងអង្គគេបាន:

$a_n-a_1=b_1+b_2+b_3+...+b_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}2n=2+2\sum_{k=1}^{n-1}n$

$a_n=2+2\cdot\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}=2+n(n-1)=n^2-n+2$

ដូចនេះ $a_n=n^2-n+2$ ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត $2,4,8,14,22,32,...$ ។

គ. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n): $p,q,p,q,p,q,...$

$$a_2 - a_1 = q - p = (-1)^1(p-q)$$

$$a_3 - a_2 = p - q = (-1)^2(p-q)$$

$$a_4 - a_3 = q - p = (-1)^3(p-q)$$

....

$$a_n - a_{n-1} = (-1)^{n-1}(p-q)$$

ដោយបូកអង្គនិងអង្គគេបាន:

$$a_n - a_1 = (p-q)[(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + ... + (-1)^{n-1}]$$

$$a_n = a_1 + (p-q)\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k = p + (p-q)(-1)\cdot\frac{(-1)^{n-1}-1}{-1-1}$$

$$a_n = p + \frac{1}{2}(p-q)[(-1)^{n-1}-1]$$

$$a_n = \frac{(p-q)(-1)^{n-1}}{2} + p - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q$$

$$a_n = \frac{(p-q)(-1)^{n-1}}{2} + \frac{1}{2}(p+q)$$

$$a_n = \frac{1}{2}[(p-q)(-1)^{n-1} + (p+q)]$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{2}[(p-q)(-1)^{n-1} + (p+q)]$ ។

លំហាត់ 1.63

គេឲ្យស្វ៊ីត $1, 2, 5, 10, 17, ...$ ។

ក/. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ

ក/. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត

គេឲ្យស្វ៊ីត $1, 2, 5, 10, 17, ...$

$a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$

$a_3 - a_2 = 5 - 2 = 3$

$a_4 - a_3 = 10 - 5 = 5$

$a_5 - a_4 = 17 - 10 = 7$

....

គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

$$a_n = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 = 1 + 2\cdot\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} - (n-1)$$

$$= 1 + n(n-1) - (n-1) = 1 + n^2 - n - n + 1 = n^2 - 2n + 2$$

ដូចនេះ $a_n = n^2 - 2n + 2$ ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^2 - 2k + 2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 2n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 12n}{6}$$

$$= \frac{1}{6}n[(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 12]$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1 - 6n - 6 + 12)$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2 - 3n + 7)$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{6}n(2n^2-3n+7)$ ។

លំហាត់ 1.64

គេឲ្យស្ទីត $(U_n)=\{7\,,8\,,11\,,16\,,23\,,...\}$ ។

ក/. ចូររកតួទី n នៃស្ទីត (U_n) ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីតនេះ ។

ចម្លើយ

គេឲ្យស្ទីត $(U_n)=\{7\,,8\,,11\,,16\,,23\,,...\}$

ក/. រកតួទី n នៃស្ទីត (U_n)

$$U_2-U_1=8-7=1$$

$$U_3-U_2=11-8=3$$

$$U_4-U_3=16-11=5$$

$$U_5-U_4=23-16=7$$

....

គេបាន $U_n=U_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=7+2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$

$$U_n=7+2\cdot\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}-(n-1)$$

$$=7+n(n-1)-(n-1)=7+n^2-n-n+1$$

$$=n^2-2n+8$$

ដូចនេះ $U_n=n^2-2n+8$ ជាតួទី n នៃស្ទីត ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីតនេះ

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}U_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+8)=\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}8$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+8n$$

$$=\frac{1}{6}n[(n+1)(2n+1)-6(n+1)+48]$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1-6n-6+48)$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2-3n+43)$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{6}n(2n^2-3n+43)$ ។

លំហាត់ 1.65

ក/. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $4\,,5\,,7\,,10\,,14\,,...$ ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ

ក/. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $4\,,5\,,7\,,10\,,14\,,...$

តាង a_n ជាតួទី n នៃស៊ីតដែលគេឲ្យ

$b_1=a_2-a_1=5-4=1$

$b_2=a_3-a_2=7-5=2$

$b_3=a_4-a_3=10-7=3$

$b_4=a_5-a_4=14-10=4$

....

$b_n=a_{n+1}-a_n=n$

គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 4 + \dfrac{(n-1)(n-1+1)}{2}$

$$a_n = 4 + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}(8 + n^2 - n) = \frac{1}{2}(n^2 - n + 8)$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត $4, 5, 7, 10, 14, \ldots$ គឺ $a_n = \dfrac{1}{2}(n^2 - n + 8)$ ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2 - k + 8) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 8\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + 8n\right]$$

$$= \frac{1}{12}n(2n^2 + 3n + 1 - 3n - 3 + 48)$$

$$= \frac{1}{12}n(2n^2 + 46) = \frac{1}{6}n(n^2 + 23)$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{1}{6}n(n^2 + 23)$ ។

លំហាត់ 1.66

ក/. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $3, 5, 8, 12, 17, 23, \ldots$ ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ

ក/. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $3, 5, 8, 12, 17, 23, \ldots$

តាង U_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតដែលគេឲ្យ

$b_1 = U_2 - U_1 = 5 - 3 = 2$

$b_2 = U_3 - U_2 = 8 - 5 = 3$

$b_3 = U_4 - U_3 = 12 - 8 = 4$

....

$b_n = U_{n+1} - U_n = n + 1$

គេបាន $U_n = U_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = U_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)$

$$U_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 = 3 + \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + (n-1)$$

$$= 3 + \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = \frac{1}{2}(6 + n^2 - n + 2n - 2)$$

$$= \frac{1}{2}(n^2 + n + 4)$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតនេះគឺ $U_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 4)$ ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2 + k + 4) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 4\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + 4n\right]$$

$$S_n = \frac{1}{12} n(2n^2 + 3n + 1 + 3n + 3 + 24)$$

$$= \frac{1}{12} n(2n^2 + 6n + 28) = \frac{1}{6} n(n^2 + 3n + 14)$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{6} n(n^2 + 3n + 14)$ ។

លំហាត់ 1.67

ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1, 5, 14, 30, 55, 91, \dots$ ។
ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ

ក. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1, 5, 14, 30, 55, 91, \dots$

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតដែលគេឲ្យ ហើយ b_n ជាផលសងលំដាប់នៃស្វ៊ីតលំដាប់មួយ a_n ។

$$b_1 = a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4 = 2^2$$

$$b_2 = a_3 - a_2 = 14 - 5 = 9 = 3^2$$

$$b_3 = a_4 - a_3 = 30 - 14 = 16 = 4^2$$

....

$$b_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2$$

គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2$

$$a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + 2k + 1) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 1 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + (n-1)(n-1+1) + (n-1)$$

$$= \frac{n(2n^2 - 3n + 1)}{6} + n^2 - n + n - 1 + 1$$

$$=\frac{n(2n^2-3n+1)}{6}+n^2$$

$$=\frac{2n^3-3n^2+n+6n^2}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីតគឺ $a_n=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$ ។

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីតនេះ

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^3+3k^2+k}{6}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$S_n=\frac{1}{3}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{[n(n+1)]^2+n(n+1)(2n+1)+n(n+1)}{12}$$

$$=\frac{n(n+1)[n(n+1)+(2n+1)+1]}{12}$$

$$=\frac{n(n+1)(n^2+n+2n+1+1)}{12}=\frac{n(n+1)(n^2+3n+2)}{12}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n(n+1)(n^2+3n+2)}{12}$ ។

លំហាត់ 1.68

គេឲ្យស្ទីត $(a_n):1\,,2\,,6\,,15\,,31\,,56\,,...$ ។

ក/. កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (a_n) ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីតនេះ ។

ចម្លើយ

គេឲ្យស្វ៊ីត $(a_n): 1, 2, 6, 15, 31, 56, \ldots$

ក/. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

- ផលសងលំដាប់ 1

$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$

$b_2 = a_3 - a_2 = 6 - 2 = 4$

$b_3 = a_4 - a_3 = 15 - 6 = 9$

$b_4 = a_5 - a_4 = 31 - 15 = 16$

....

- ផលសងលំដាប់ 2

$c_1 = b_2 - b_1 = 4 - 1 = 3$

$c_2 = b_3 - b_2 = 9 - 4 = 5$

$c_3 = b_4 - b_3 = 16 - 9 = 7$

....

$c_n = b_{n+1} - b_n = 2n + 1$

គេបាន $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1$

$$b_n = 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + (n-1) = 1 + n(n-1) + (n-1)$$

$$= 1 + n^2 - n + n - 1 = n^2$$

នាំឲ្យ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$$a_n = 1 + \frac{n(2n^2 - 3n + 1)}{6} = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 6)$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 6)$ ។

ខ/. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3-3k^2+k+6)$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=\frac{n(n+1)[n(n+1)-(2n+1)+1]}{12}+n$$
$$=\frac{n(n+1)(n^2+n-2n-1+1)}{12}+n=\frac{1}{12}n(n+1)(n^2-n)+n$$
$$=\frac{1}{12}n^2(n+1)(n-1)+n=\frac{1}{12}n^2(n^2-1)+n$$
$$=\frac{1}{12}(n^4-n^2)+n=\frac{1}{12}(n^4-n^2+12n)$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{12}(n^4-n^2+12n)$ ។

លំហាត់ 1.69

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $4\,,18\,,48\,,100\,,180\,,294\,,...$ រួចគណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $4\,,18\,,48\,,100\,,180\,,294\,,...$

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីតដែលគេឲ្យ

- ផលសងលំដាប់1

$b_1 = a_2 - a_1 = 18 - 4 = 14$

$b_2 = a_3 - a_2 = 48 - 18 = 30$

$b_3 = a_4 - a_3 = 100 - 48 = 52$

$b_4 = a_5 - a_4 = 180 - 100 = 80$

$b_5 = a_6 - a_5 = 294 - 180 = 114$

....

- ផលសងលំដាប់ 2

$c_1 = b_2 - b_1 = 30 - 14 = 16$

$c_2 = b_3 - b_2 = 52 - 30 = 22$

$c_3 = b_4 - b_3 = 80 - 52 = 28$

$c_4 = b_5 - b_4 = 114 - 80 = 34$

....

ស្វ៊ីត (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី 1 ស្មើ 16 ហើយផលសងរួមស្មើ 6

គេបានតួទូទៅ $c_n = 16 + (n-1)6 = 6n - 6 + 16 = 6n + 10$

នាំឲ្យ $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k + 10) = 14 + 6\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 10$

$$b_n = 14 + 6 \cdot \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + 10(n-1)$$

$$= 14 + 3n(n-1) + 10(n-1) = 3n^2 + 7n + 4$$

នាំឲ្យ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k^2 + 7k + 4)$

$$a_n = 4 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 7\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 4$$

$$= 4 + 3\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 7\cdot\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + 4(n-1)$$

$$= 4 + \frac{3n(n-1)(2n-1) + 21n(n-1) + 24(n-1)}{6}$$

$$= 4 + \frac{(n-1)[3n(2n-1) + 21n + 24]}{6}$$

$$= 4 + \frac{(n-1)(6n^2 - 3n + 21n + 24)}{6}$$

$$= 4 + \frac{(n-1)(6n^2 + 18n + 24)}{6}$$

$$= 4 + \frac{6n^3 + 18n^2 + 24n - 6n^2 - 18n - 24}{6}$$

$$= 4 + \frac{6n^3 + 12n^2 + 6n}{6} - 4 = n^3 + 2n^2 + n$$

ដូចនេះ $a_n = n^3 + 2n^2 + n$ ។

● គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^3 + 2k^2 + k) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

$$S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4}+\frac{(2n+1)}{3}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)[3n(n+1)+4(2n+1)+6]$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+3n+8n+4+6)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+11n+10)$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+11n+10)$ ។

លំហាត់ 1.70

ក. ចូរកំណត់តួ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម

$-2\,,1\,,7\,,19\,,43\,,91\,,187\,,\ldots$ ។

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ

ក. កំណត់តួ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $(U_n): -2\,,1\,,7\,,19\,,43\,,91\,,187\,,\ldots$

តាង (V_n) ជាស្វ៊ីតផលសងលំដាប់ 1 នៃស្វ៊ីត (U_n)

គេបាន $V_1=U_2-U_1=1+2=3$

$V_2=U_3-U_2=7-1=6$

$V_3=U_4-U_3=19-7=12$

$V_4=U_5-U_4=43-19=24$

....

ស្វ៊ីត (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលតួទី 1 ស្មើ 3 ហើយផលធៀបរួមស្មើ 2

នោះគេបានតួទូទៅគឺ $V_n = 3\cdot 2^{n-1}$ ។

នាំឲ្យ $U_n = U_1 + \sum_{k=1}^{n-1} V_k = U_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3\cdot 2^{n-1}) = U_1 + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n-1} 2^n$

$$U_n = -2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = -2 + 3(2^{n-1}-1) = 3\cdot 2^{n-1} - 5$$

ដូចនេះ $U_n = 3\cdot 2^{n-1} - 5$ ។

ខ. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីតនេះ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n}(3\cdot 2^{n-1} - 5) = 3\sum_{k=1}^{n} 2^{n-1} - \sum_{k=1}^{n} 5$$

$$= 3\cdot\frac{2^n - 1}{2-1} - 5n = 3\cdot 2^n - 5n - 3$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 3\cdot 2^n - 5n - 3}$

លំហាត់ 1.71

កំណត់តួទូទៅនៃស្ទីត (a_n) ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន
$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + 4a_n$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទូទៅនៃស្ទីត (a_n)

តាង (r_n) ដែល $r_n = \alpha n + \beta$ ជាស្ទីតជំនួយ

គេបាន $\alpha(n+1) + \beta = 1 + 4(\alpha n + \beta)$

$\alpha n + \alpha + \beta = 1 + 4\alpha n + 4\beta$

$3\alpha n + 3\beta - \alpha = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 0 \\ 3\beta - \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

នោះគេបាន $r_n = -\frac{1}{3}$

ធ្វើផលសងរវាងស្វ៊ីត $a_{n+1} - r_n$

$$a_{n+1} + \frac{1}{3} = 1 + 4a_n + \frac{1}{3} = 4a_n + \frac{4}{3}$$

$$a_{n+1} + \frac{1}{3} = 4(a_n + \frac{1}{3})$$

តាង $V_n = a_n + \frac{1}{3}$ នោះ $V_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{3}$

គេបាន $V_{n+1} = 4V_n$ ឬ $\frac{V_{n+1}}{V_n} = 4$

នោះ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = 4$

នាំឲ្យ $V_n = V_1 \cdot 4^{n-1}$ តែ $V_1 = a_1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

នាំឲ្យ $V_n = \frac{4}{3} \cdot 4^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot 4^n$

នាំឲ្យ $\frac{1}{3} \cdot 4^n = a_n + \frac{1}{3} \Rightarrow a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ ។

លំហាត់ 1.72

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - n + 1$ ។
កំណត់តួទី n ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

តាង (r_n) ដែល $r_n = \alpha n + \beta$ ជាស្វ៊ីតជំនួយ

គេបាន $\alpha(n+1) + \beta = 2(\alpha n + \beta) - n + 1$

$\alpha n + \beta + \alpha = 2\alpha n + 2\beta - n + 1$

$-\alpha n - \beta + \alpha = -n + 1$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$

នោះគេបាន $r_n = n$

ធ្វើផលសងរវាងស្វ៊ីត $a_{n+1} - r_n$

$a_{n+1} - n = 2a_n - n + 1 - n = 2a_n - 2n + 1$

$a_{n+1} - (n+1) = 2(a_n - n)$

តាង $V_n = a_n - n$ នោះ $V_{n+1} = a_{n+1} - (n+1)$

គេបាន $V_{n+1} = 2V_n$ ហើយ $V_n = V_1 \cdot 2^{n-1}$

តាត $V_n = a_n - n \Rightarrow V_1 = a_1 - 1 = 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow V_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

នោះ $a_n - n = 2^n \Rightarrow a_n = 2^n + n$

ដូចនេះ $a_n = 2^n + n$ ជាតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

លំហាត់ 1.73

គេមានផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $S_n = n^3 + 2n$ ។
កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

គេមាន $S_n = n^3 + 2n$

នាំឲ្យ $S_{n-1} = (n-1)^3 + 2(n-1) = n^3 - 3n^2 + 5n - 3$

គេបាន $a_n = S_n - S_{n-1} = (n^3 + 2n) - (n^3 - 3n^2 + 5n - 3)$

$a_n = 3n^2 - 3n + 3 = 3(n^2 - n + 1)$

ដូចនេះ $a_n = 3(n^2 - n + 1)$ ។

លំហាត់ 1.74

យក $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ប្រសិនបើ S_n បំពេញលក្ខខណ្ឌ $S_n + n = 3^n$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។ រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ចម្លើយ

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n)

គេមាន $S_n = 3^n - n \Rightarrow S_1 = a_1 = 3 - 1 = 2$

នាំឲ្យ $S_{n-1} = 3^{n-1} - (n-1)$

គេបាន $a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n - n) - (3^{n-1} - n + 1) = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

បើ $n = 1$ នោះ $a_1 = 2 \cdot 3^0 - 1 = 1$ មិនពិតចំពោះ $n = 1$

ដូចនេះ $a_1 = 2$, $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ ដែល $n \geq 2$ ។

លំហាត់ 1.75

ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមចំពោះ $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(a_k + \frac{1}{k+1}\right) = 2^n + 1 - \frac{1}{n+1}$ ។

ក. បង្ហាញតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ។

ចម្លើយ

ក. បង្ហាញតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)=2^n+1-\frac{1}{n+1} \qquad (i)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)=2^{n+1}+1-\frac{1}{n+2} \qquad (ii)$$

យក $(ii)-(i)$ គេបាន:

$$\frac{1}{n+1}\left(a_{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=2^n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{n+1}a_{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=2^n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

នាំឲ្យ $a_{n+1}=(n+1)2^n$

នាំឲ្យ $a_n=n\cdot 2^{n-1}$ ចំពោះ $n=2,3,4,\ldots$ (iii)

យក $n=1$ជំនួសក្នុង (i) គេបាន $a_1+\frac{1}{2}=2+1-\frac{1}{2}=3-1=2$

ប៉ុន្តែ $a_1=2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ (iii)

ដូចនេះ $a_1=2$, $a_n=n\cdot 2^{n-1}$, $(n=2,3,4,\ldots)$ ។

ខ. គណនា $\sum_{k=1}^{n}a_k$

តាង $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

- ចំពោះ $n=1$ នោះ $S_1=a_1=2$
- ចំពោះ $n\geq 2$

$$S_n=2+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^{n-1}$$

$$2S_n=2\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\ldots+n\cdot 2^n$$

នាំឲ្យ $S_n - 2S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1} - n \cdot 2^n$

$$-S_n = \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - n \cdot 2^n = 2^n - 2 - n \cdot 2^n$$

$$\Rightarrow S_n = (n-1)2^n + 2$$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $S_1 = (1-1) \cdot 2^1 + 2 = 2$ (ពិត)

ដូចនេះ $S_n = (n-1)2^n + 2$ ។

លំហាត់ 1.76

ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 1$, $a_2 = 13$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

គេមាន $a_1 = 1$, $a_2 = 13$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$

សមីការសម្គាល់ $x^2 - x - 6 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 + 4 \times 6 = 25 = 5^2$$

នាំឲ្យ $x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$, $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$

គេបាន $\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) & (1) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) & (2) \end{cases}$

- ចំពោះ (1) : $a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n)$

តាង $b_n = a_{n+1} + 2a_n$ នោះស្វ៊ីត (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើ 3 និងតួទីមួយគឺ $b_1 = a_2 + 2a_1 = 13 + 2 = 15$

នាំឲ្យ $b_n = b_1 \cdot 3^{n-1} = 15 \cdot 3^{n-1}$ នាំឲ្យ $a_{n+1} + 2a_n = 15 \cdot 3^{n-1}$ (3)

- ចំពោះ (2) : $a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n)$

តាង $c_n = a_{n+1} - 3a_n$ នោះស្វ៊ីត (c_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើ -2 និងតួទីមួយគឺ $c_1 = a_2 - 3a_1 = 13 - 3 = 10$

នាំឲ្យ $c_n = c_1 \cdot (-2)^{n-1} = 10 \cdot (-2)^{n-1}$

នាំឲ្យ $a_{n+1} - 3a_n = 10 \cdot (-2)^{n-1} \quad (4)$

តាម (3) និង (4) គេបាន:

$$\begin{cases} a_{n+1} + 2a_n = 15 \cdot 3^{n-1} & (3) \\ a_{n+1} - 3a_n = 10 \cdot (-2)^{n-1} & (4) \end{cases}$$

យក (3) ដក (4) គេបាន $5a_n = 15 \cdot 3^{n-1} - 10 \cdot (-2)^{n-1}$

$$5a_n = 5 \cdot 3^n + 5 \cdot (-2)^n \Rightarrow a_n = 3^n + (-2)^n$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ $a_n = 3^n + (-2)^n$ ។

លំហាត់ 1.77

ពិចារណាស្វ៊ីត (a_n) ដែលបានកំណត់ដូចខាងក្រោម:

$a_1 = 1 , a_2 = 3 , a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 1 , (n = 1 , 2 , 3 , ...)$

ក. ចូររកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ខ. គណនាផលបូក $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ។

ចម្លើយ

ក. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n)

គេមាន $a_1 = 1 , a_2 = 3 , a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$

នោះ: $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 1$

នាំឲ្យ $a_{n+3} - a_{n+2} = 3(a_{n+2} - a_{n+1}) - 2(a_{n+1} - a_n)$

តាង $b_n = a_{n+1} - a_n \qquad (1)$

នាំឲ្យ $b_{n+2}=3b_{n+1}-2b_n$

សមីការសម្គាល់ $x^2=3x-2$ មានឫស $x_1=1$, $x_2=2$

គេបាន $\begin{cases} b_{n+2}-2b_{n+1}=b_{n+1}-2b_n & (2) \\ b_{n+2}-b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n) & (3) \end{cases}$

• ចំពោះ $(2): \ b_{n+2}-2b_{n+1}=b_{n+1}-2b_n$

តាង $U_n=b_{n+1}-2b_n$ នោះស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតថេរដែល $U_1=b_2-2b_1$

តែតាម $(1): b_1=a_2-a_1=3-1=2$

$$b_2=a_3-a_2=3a_2-2a_1-1-a_2$$

$$=2a_2-2a_1-1=6-2-1=3$$

នាំឲ្យ $U_1=3-2\times 2=-1$ នាំឲ្យ $U_n=-1$

នាំឲ្យ $b_{n+1}-2b_n=-1 \quad (4)$

• ចំពោះ $(3): b_{n+2}-b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)$

តាង $V_n=b_{n+1}-b_n$ នោះស្វ៊ីត (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផល

ធៀបរួមស្មើ 2 និង $V_1=b_2-b_1=1$

គេបាន $V_n=V_1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

នាំឲ្យ $b_{n+1}-b_n=2^{n-1} \quad (5)$

តាម $(4)\,\&\,(5)$ គេបាន

$$\begin{cases} b_{n+1}-2b_n=-1 & (4) \\ b_{n+1}-b_n=2^{n-1} & (5) \end{cases}$$

យក $(5)-(4)$ គេបាន $b_n=2^{n-1}+1$

តាម $(1): b_n=a_{n+1}-a_n=2^{n-1}+1$

នាំឲ្យ $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k-1}+1)$

$$a_n = 1 + \frac{2^{n-1}-1}{2-1} + (n-1) = 2^{n-1} + n - 1$$

ដូចនេះ $a_n = 2^{n-1} + n - 1$ ។

ខ. គណនាផលបូក $\sum_{k=1}^{n} a_k$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^{k-1} + k - 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2^n - 1}{2-1} + \frac{1}{2}n(n+1) - n = 2^n + \frac{1}{2}n(n-1) - 1$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^n + \frac{1}{2}n(n-1) - 1$ ។

លំហាត់ 1.78

ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1 = 1$, $a_{n+1} = pa_n + q$ គណនាតម្លៃ p និង q បើគេដឹងថាតួទី 3 ស្មើ 6 និងតួទី 5 ស្មើ 86 ។

ចម្លើយ

គណនាតម្លៃ p និង q

$a_1 = 1$

$a_2 = pa_1 + q = p + q$

$a_3 = pa_2 + q = p(p+q) + q = p^2 + pq + q$

តែ $a_3 = 6$ នោះ $p^2 + pq + q = 6 \quad (1)$

$a_4 = pa_3 + q = 6p + q$

$a_5 = pa_4 + q = p(6p+q) + q$

តែ $a_5 = 86$ នោះ $p^2 + pq + q = 86 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$\begin{cases} p^2+pq+q=6 & (1) \\ 6p^2+pq+q=86 & (2) \end{cases}$$

យក $(2)-(1)$ គេបាន $5p^2=80$

$p^2=16$ នោះគេបាន $p=-4$, $p=4$

- ចំពោះ $p=-4$

តាម $(1): (-4)^2+(-4)q+q=6$

$$16-4q+q=6$$

$$-3q=-10$$

$$q=\frac{10}{3}$$

- ចំពោះ $p=4$

តាម $(1): (4)^2+(4)q+q=6$

$$16+4q+q=6$$

$$5q=-10$$

$$q=-\frac{10}{5}=-2$$

ដូចនេះ $(p=-4\ , q=\frac{10}{3})$ ឬ $(p=4\ , q=-2)$ ។

លំហាត់ 1.79

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n) ដែល $\begin{cases} U_1=\frac{2}{5} \\ 5U_n-2U_{n-1}=0 \end{cases}$

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $\begin{cases} U_1 = \dfrac{2}{5} \\ 5U_n - 2U_{n-1} = 0 \end{cases}$

សមីការសម្គាល់ $5r - 2 = 0$ នាំឲ្យ $r = \dfrac{2}{5}$

គេបាន $U_n = e\cdot(a)^n = e\left(\dfrac{2}{5}\right)^n, e \in \mathbb{R}$

ដោយ $U_1 = \dfrac{2}{5}$ នាំឲ្យ $e\left(\dfrac{2}{5}\right)^1 = \dfrac{2}{5} \Rightarrow e = 1$

ដូចនេះ $U_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត ។

លំហាត់ 1.80

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n) ដែលកំណត់ដោយ $\begin{cases} U_1 = -3 \\ 2U_{n+1} + 3U_n = 0 \end{cases}$

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $\begin{cases} U_1 = -3 \\ 2U_{n+1} + 3U_n = 0 \end{cases}$

សមីការសម្គាល់ $2r + 3 = 0 \Rightarrow r = -\dfrac{3}{2}$

គេបាន $U_n = e\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n, e \in \mathbb{R}$ តែ $U_1 = -3$

នាំឲ្យ $e\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^1=-3\Rightarrow e=2$

ដូចនេះ $U_n=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត ។

លំហាត់ 1.81

គេមានស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ដោយ $U_1=1, U_2=2$,
$U_n=4U_{n-1}-4U_{n-2}$ ដែល $(n\geq 3, n\in\mathbb{N})$ ។
កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនេះ

សមីការសម្គាល់ $r^2=4r-4$ មានឫសឌុប $r_o=2$

គេបាន $U_n=(e_1+e_2n)r_o^n=(e_1+e_2n)\cdot 2^n$

ដោយ $\begin{cases}U_1=1\\U_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(e_1+e_2)2=1\\(e_1+2e_2)2^2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e_1=\frac{1}{2}\\e_2=0\end{cases}$

ដូចនេះ $U_n=\frac{1}{2}\cdot 2^n=2^{n-1}$ ។

លំហាត់ 1.82

(U_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $U_1=-1, U_2=2$,
$U_n=6U_{n-1}-9U_{n-2}$, $n\geq 3$ ។ កំណត់ U_n ដែលជាតួទី n ។

ចម្លើយ

កំណត់ U_n ដែលជាតួទី n

សមីការសម្គាល់ $r^2 = 6r - 9$ មានឫសឌុប $r_o = 3$

គេបាន $U_n = (e_1 + ne_2)r_o^n = (e_1 + ne_2)3^n$

ដោយ $\begin{cases} U_1 = -1 \\ U_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (e_1 + e_2)3 = -1 \\ (e_1 + 2e_2)3^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = -\dfrac{8}{9} \\ e_2 = \dfrac{5}{9} \end{cases}$

ដូចនេះ: $U_n = \left(-\dfrac{8}{9} + \dfrac{5}{9}n\right) \cdot 3^n$ ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត ។

លំហាត់ 1.83

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n) ដែល $\begin{cases} U_1 = 2\,, U_2 = 3 \\ U_{n+2} = \dfrac{U_{n+1} + U_n}{2} \end{cases}$

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n)

គេមាន $U_{n+2} = \dfrac{U_{n+1} + U_n}{2} \Leftrightarrow 2U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$

សមីការសម្គាល់ $2r^2 = r + 1 \Leftrightarrow 2r^2 - r - 1 = 0$

សមីការមានឫស $r_1 = 1\,, r_2 = -(1/2)$

គេបាន $U_n = e_1 \cdot r_1^n + e_2 \cdot r_2^n = e_1 \cdot 1^n + e_2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

ដោយ $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 - \dfrac{1}{2}e_2 = 2 \\ e_1 + \dfrac{1}{4}e_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = \dfrac{8}{3} \\ e_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

ដូចនេះ $U_n = \dfrac{8}{3} + \dfrac{4}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត ។

លំហាត់ 1.84

1. ចំពោះ $h > 0$ និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \geq 2$,
បង្ហាញថា $(1+h)^n > 1+nh$ ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា
2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n^3 + 2n$ ជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$
ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។

ចម្លើយ

1. បង្ហាញថា $(1+h)^n > 1+nh$ ចំពោះ $n \geq 2$, $h > 0$

ចំពោះ $n = 2$ គេបាន $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > 1+2h$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ n គឺ $(1+h)^n > 1+nh$

ស្រាយថាវាពិតដល់ $n+1$ គឺ $(1+h)^{n+1} > 1+(n+1)h$

គេមាន $(1+h)^n > 1+nh$

ដោយ $h > 0$ នោះ $1+h > 0$

គេបាន $(1+h)^n(1+h) > (1+nh)(1+h)$

$(1+h)^{n+1} > 1+nh+h+nh^2$

$(1+h)^{n+1} > 1+(n+1)h+nh^2 > 1+(n+1)h$ ពិត

(ព្រោះ $nh^2 \geq 0$) ។

ដូចនេះ $(1+h)^n > 1+nh$ ចំពោះ $n \geq 2$, $h > 0$ ។

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n^3 + 2n$ ជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន 0 ជាពហុគុណនៃ 3 ពិត

ឧបមាថា $n = k$ គេបាន $k^3 + 2k$ ជាពហុគុណនៃ 3 ពិត

ស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ គឺ $(k+1)^3 + 2(k+1)$ ជាពហុគុណនៃ 3

គេបាន $(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)$$

$$= 3q + 3(k^2 + k + 1)$$

$= 3(q + k^2 + k + 1)$ ជាពហុគុណនៃ 3 ពិត

ដូចនេះ $k^3 + 2k$ ជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ 1.85

បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

ក. ចំនួន $4^n + 2$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

ខ. ចំនួន $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

ចម្លើយ

ក. បង្ហាញថា $4^n + 2$ ចែកដាច់នឹង 3

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $4 + 2 = 3 \times 2$ ចែកដាច់នឹង 3 ពិត

ឧបមាថា $n = k$ គេបាន $4^k + 2$ ចែកដាច់នឹង 3 ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ គឺ $4^{k+1} + 2$ ចែកដាច់នឹង 3

គេបាន $4^{k+1} + 2 = 4 \cdot 4^k + 2 = 4(4^k + 2) - 6$

$4^{k+1} + 2 = 3 \cdot 4A - 3 \cdot 2 = 3(4A - 2)$ ចែកដាច់នឹង 3 ពិត

ដូចនេះ 4^n+2 ចែកដាច់នឹង 3 ។

ខ. បង្ហាញថា $3^{n+3}-4^{4n+2}$ ចែកដាច់នឹង 11

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $3^4-4^{4+2}=81-4096=4015=11\cdot 365$

ចែកដាច់នឹង 11 ពិត

ឧបមាថា $n=k$ គេបាន $3^{k+3}-4^{4k+2}$ ចែកដាច់នឹង 11 ពិត

ស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតដល់ $n=k+1$ គឺ $3^{(k+1)+3}-4^{4(k+1)+2}$

ចែកដាច់នឹង 11

គេបាន $3^{(k+1)+3}-4^{4(k+1)+2}=3\cdot 3^{k+3}-4^4\cdot 4^{4k+2}$

$$=3\cdot 3^{k+3}-256\cdot 4^{4k+2}$$

$$=3(3^{k+3}-4^{4k+2})-253\cdot 4^{4k+2}$$

$$=11\times 3B-11\times 23\cdot 4^{4k+2}$$

$=11(3B-23\cdot 4^{4k+2})$ ចែកដាច់នឹង 11 ពិត

ដូចនេះ $3^{n+3}-4^{4n+2}$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

លំហាត់ 1.86

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$
ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $n\in\mathbb{N}$ ។

ចម្លើយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P_n=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $P_1=1\cdot 1!=(1+1)!-1=1$ ពិត

ឧបមាថា $n=k$ គេបាន $P_k=(k+1)!-1$ ពិត

ស្រាយថាវាពិតដល់ $n=k+1$ គឺ $P_{k+1}=(k+2)!-1$

គេបាន $P_{k+1}=P_k+(k+1)\cdot(k+1)!$

$$P_{k+1}=(k+1)!-1+(k+1)\cdot(k+1)!=(k+1)!(1+k+1)-1$$

$$=(k+1)!(k+2)-1=(k+2)!-1$$ ពិត

ដូចនេះ: $P_n=1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1$ ។

លំហាត់ 1.87

រកប្រភាគដែលមានតម្លៃស្មើនឹង:

(i) $2.3\dot{8}$ (ii) $4.\dot{6}\dot{2}$ (iii) $0.41717...$

ចម្លើយ

រកប្រភាគដែលមានតម្លៃស្មើនឹង:

(i) $2.3\dot{8}$

$$2.3\dot{8}=2.3+0.0888...=2.3+0.0888...$$

ដោយ $0.0888...=0.08+0.008+0.0008+...$

យក $a=0.8\ ,\ r=\dfrac{0.08}{0.8}=0.1$

នាំឲ្យ $0.0888...=0.08+0.008+...=\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{0.08}{1-0.1}=\dfrac{0.08}{0.9}=\dfrac{8}{90}$

គេបាន $2.3\dot{8}=2.3+\dfrac{8}{90}=\dfrac{23}{10}+\dfrac{8}{99}=\dfrac{23\times9+8}{90}=\dfrac{215}{90}$

ដូចនេះ: $\boxed{2.3\dot{8}=\dfrac{215}{90}}$

(ii) $4.\dot{6}\dot{2}$

$$4.\dot{6}\dot{2}=4+0.62+0.0062+...=4+\frac{a}{1-r}$$

ដោយ $a=0.62\ ,\ r=\dfrac{0.0062}{0.62}=0.01$

គេបាន

$$4.\dot{6}\dot{2}=4+\frac{a}{1-r}=4+\frac{0.62}{1-0.01}=4+\frac{62}{99}=\frac{4\times 99+62}{99}=\frac{458}{99}$$

ដូចនេះ $\boxed{4.\dot{6}\dot{2}=\frac{458}{99}}$

(iii) 0.41717...

$$0.41717...=0.4+0.017+0.00017+...$$

$0.017+0.00017+...=\frac{a}{1-r}$ ដែល $a=0.017$, $r=0.01$

$$0.017+0.00017+...=\frac{0.017}{1-0.01}=\frac{0.017}{0.99}=\frac{17}{990}$$

គេបាន $0.41717...=0.4+\frac{17}{990}=\frac{4}{10}+\frac{17}{990}=\frac{413}{990}$

ដូចនេះ $\boxed{0.41717...=\frac{413}{990}}$

លំហាត់ 1.88

(i) $0.323232...=\frac{p}{q}$ ដែល p និង q ជាចំនួនគត់។ រកតម្លៃ p និង q

(ii) បង្ហាញថា 1.2888... ជាចំនួនសនិទាន ដោយសរសេរជាទម្រង់ $\frac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់។

ចម្លើយ

(i) រកតម្លៃ p និង q

$0.323232...=0.32+.0032+...=\frac{a}{1-r}$ ដែល $a=0.32$, $r=0.01$

គេបាន $0.323232... = \frac{0.32}{1-0.01} = \frac{0.32}{0.99} = \frac{32}{99} = \frac{p}{q}$

ដូចនេះ $\boxed{p = 32\ ,\ q = 99}$

(ii) បង្ហាញថា 1.2888... ជាចំនួនសនិទាន

សរសេរ 1.2888... ជាទម្រង់ $\frac{m}{n}$

គេមាន $1.2888... = 1.2 + 0.08 + 0.008 + ... = 1.2 + \frac{a}{1-r}$

ដោយ $a = 0.08\ ,\ r = \frac{0.008}{0.08} = 0.1$

គេបាន $1.2888... = 1.2 + \frac{0.08}{1-0.1} = \frac{12}{10} + \frac{8}{90} = \frac{12\times 9+8}{90} = \frac{116}{90}$

ដូចនេះ 1.2888... ជាចំនួនសនិទាន ដែល $1.2888... = \frac{116}{90}$ ។

លំហាត់ 1.89

(i) គេឲ្យតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$ ។ ចូរសរសេរបីតួដំបូង និងគណនាផលបូករបស់វា ។

(ii) នៅក្នុងស៊េរីនព្វន្តមួយតួទី 18 ស្មើ 70 និងតួទី 14 ស្មើ 3 ដងនៃតួទី 5 ។ គណនាផលបូក 50 តួដំបូង ។

(iii) តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ a_1 ស្មើ 5 និងផលធៀបរួម r ស្មើ 2 ។ រក a_8 និង S_4 រួចរកតម្លៃ n បើ $S_n = 635$ ។

ចម្លើយ

(i) សរសេរបីតួដំបូង និងគណនាផលបូករបស់វា

គេមាន $a_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $a_1 = -\frac{1}{1+3} = -\frac{1}{4}$

ចំពោះ $n=2$ គេបាន $a_2 = \frac{1}{2+3} = \frac{1}{5}$

ចំពោះ $n=3$ គេបាន $a_3 = -\frac{1}{3+3} = -\frac{1}{6}$

គេបាន $S_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{-15+12-10}{60} = -\frac{13}{60}$

ដូចនេះ $a_1 = -\frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = -\frac{1}{6}$ និង $S_3 = -\frac{13}{60}$ ។

(ii) គណនាផលបូក 50 តួដំបូង

$$S_{50} = \frac{50}{2}(a_1 + a_{50}) = 25(2a_1 + 49d)$$

គេមាន $a_{18} = 70$ និង $a_{14} = 3a_5$

តែ $\begin{cases} a_{18} = a_1 + 17d \\ a_{14} = a_1 + 13d \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 17d = 70 \\ a_1 + 13d = 3(a_1 + 4d) \end{cases}$

នាំឲ្យ $\begin{cases} a_1 + 17d = 70 & (1) \\ 2a_1 - d = 0 & (2) \end{cases}$

យក (1) បូក17(2) គេបាន $35a_1 = 70 \Rightarrow a_1 = 2$

តាម (2) : $d = 2a_1 = 2\times 2 = 4$

នាំឲ្យ $S_{50} = 25(2\times 2 + 49\times 4) = 25(4+196) = 5000$

ដូចនេះ $S_{50} = 5000$ ។

(iii) រក a_8 និង S_4

$a_8 = a_1 r^7 = 5\times 2^7 = 640$

$$S_4 = \frac{a_1(r^4-1)}{r-1} = \frac{5(2^4-1)}{2-1} = 5(16-1) = 75$$

ដូចនេះ $a_8 = 640$, $S_4 = 75$ ។

• រកតម្លៃ n បើ $S_n = 635$

$S_n = 5(2^n - 1)$ តែ $S_n = 635$

នាំឲ្យ $5(2^n-1) = 635 \Leftrightarrow 5\times 2^n = 635+5 = 640$

$\Rightarrow 2^n = 128 = 2^7 \Rightarrow n = 7$

ដូចនេះ $n = 7$ បើ $S_n = 635$ ។

លំហាត់ 1.90

ស្ទីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ និង $u_o = \frac{2}{3}$

ក. គណនា u_1 និង u_2

ខ. តាង $v_n = \sqrt{2}u_n - n$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ។

សរសេរ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គណនា $S_n = u_o + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ចម្លើយ

ក. គណនា u_1 និង u_2

$$u_1 = \frac{u_o}{2} + \frac{0}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$u_2 = \frac{u_1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_2 = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6} + \sqrt{2} = \frac{1+6\sqrt{2}}{6}$$

ដូចនេះ: $u_1=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $u_2=\frac{1+6\sqrt{2}}{6}$

ខ. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $v_n=\sqrt{2}u_n-n$

ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\sqrt{2}u_{n+1}-(n+1)$

$$v_{n+1}=\sqrt{2}\left(\frac{u_n}{2}+\frac{n}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-(n+1)$$

$$v_{n+1}=\frac{\sqrt{2}u_n}{2}+\frac{n}{2}+1-n-1=\frac{\sqrt{2}u_n}{2}-\frac{n}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}u_n-n)$$

$v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដូច្នេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុងស្មើ $\frac{1}{2}$ និងតួដំបូងស្មើ $v_o=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

• សរសេរ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $v_n=v_o\cdot q^n=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

តែ $v_n=\sqrt{2}u_n-n$ នោះគេបាន:

$\sqrt{2}u_n-n=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ឬ $\sqrt{2}u_n=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+n$

ដូចនេះ: $u_n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{\sqrt{2}}$

គ. គណនា $S_n=u_o+u_1+u_2+...+u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $u_n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}v_n+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot n$

គេបាន $u_o=\frac{1}{\sqrt{2}}v_o+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0$

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}v_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1$$

$$u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}v_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2$$

$$\vdots$$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{2}}v_n+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot n$$

គេបាន $S_n=\frac{1}{\sqrt{2}}(v_o+v_1+v_2+\dots+v_n)+\frac{1}{\sqrt{2}}(0+1+2+\dots+n)$

ដោយ $v_o+v_1+v_2+\dots+v_n=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

$$v_o+v_1+v_2+\dots+v_n=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$0+1+2+\dots+n=\frac{(0+n)(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

គេបាន $S_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

ដូចនេះ $S_n=\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+\frac{n(n+1)\sqrt{2}}{4}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។