ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

គណិតវិទ្យា

១១

រៀបរៀងដោយ ៖ សេង សុភាសិត

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

កិច្ចតែងការបង្រៀន

កំរិតមូលដ្ឋាន

ជំពូក ទី...១... **ស្វ៊ីត**

មេរៀនទី...១.... **ស្វ៊ីតចំនួនពិត**

(*III.អថេរភាពស្វ៊ីត*)

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : សិស្សបង្ហាញពីអថេរភាពស្វ៊ីតនិង ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សរកអថេរភាពស្វ៊ីតបានត្រឹមត្រូវតាម រយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II.ពេលវេលា: ...០២....ម៉ោង ថ្ងៃ..................ទី..................ខែ...............ឆ្នាំ..........

III.សម្ភារ:ឧបទេស

-ស . ស :ទំព័រទី..៤. ដល់ទំព័រទី.៦...

-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-បន្ទាត់ឈើ

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*ជំហានទី១* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) (០២នាទី) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ក)តើអ្វីជាស្វ៊ីតចំនួនពិត? ខ)កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត: $1;5;9;13;17;............$	*ជំហានទី២* (រំលឹកមេរៀនចាស់) (០៨ នាទី) ក)ស្វ៊ីតចំនួនពិតជាអនុគមន៍លេខ ដែលកំណត់ពី $IN \to IR$ ខ) $a_n = 4n - 3$	សិស្សឆ្លើយ ក)ស្វ៊ីតចំនួនពិតជាអនុគមន៍លេខ ដែលកំណត់ពី $IN \to IR$ ខ) $a_n = 4n - 3$
គ្រូសរសេរចំណងជើងមេរៀន គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍២ ឲ្យសិស្សសង្កេត និងឆ្លើយ	*ជំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) (៦០ នាទី) មេរៀនទី.១. **ស្វ៊ីតចំនួនពិត** (**ត**) *III* **អថេរភាពស្វ៊ីត** ១.**ស្វ៊ីត**កើន **ស្វ៊ីត**ចុះ	សិស្សសង្កេតឆ្លើយនិងកត់ត្រា **ស្វ៊ីត** $1;2;3;4;5;.......$ មាន

គ្រូឲ្យសិស្សទាញសន្និដ្ឋាន	Ex_1 : គេឲ្យ**ស្វ៊ីត** $(a_n)_{\forall n\in IN}$ ដែល $a_n=n$ ហើយតួនៃ**ស្វ៊ីត**គឺ $1;2;3;4;5;......$ តាមលំដាប់នៃតួគេសង្កេតឃើញថា $1<2<3<4.....$ ឬ $a_1<a_2<a_3<a_4<.....$ គេថា**ស្វ៊ីត**នេះជា**ស្វ៊ីត**កើន Ex_2 : គេឲ្យ**ស្វ៊ីត** $(a_n)_{\forall n\in IN}$ ដែល $a_n=\frac{1}{n}$ ហើយតួនៃ**ស្វ៊ីត**គឺ $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};........$ តាមលំដាប់នៃតួគេសង្កេតឃើញថា	$1<2<3<4.....$ ឬ $a_1<a_2<a_3<a_4<.....$ -គេថា**ស្វ៊ីត**នេះជា**ស្វ៊ីត**កើន សិស្សសង្កេតឆ្លើយនិងកត់ត្រា **ស្វ៊ីត**គឺ $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};........$ តាមលំដាប់នៃតួ $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>............$ ឬ $a_1>a_2>a_3>a_4>..................$
គ្រូទាញនិយមន័យដាក់ឲ្យសិស្ស	$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>............$ ឬ $a_1>a_2>a_3>a_4>..................$ ◆និយមន័យ ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតកើនលុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n\in IN$ បើ $a_{n+1}>a_n$ ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតចុះលុះត្រាតែគ្រប់ចំនួនគត់ $n\in IN$ បើ $a_{n+1}<a_n$ ◆សំគាល់ : គេអាចកំណត់អថេរភាពស្វ៊ីតតាម២វិធី : -វិធីផលសង: $a_{n+1}-a_n$ -បើ $a_{n+1}-a_n>0$ ជាស្វ៊ីតកើន -បើ $a_{n+1}-a_n<0$ ជាស្វ៊ីតចុះ -វិធីផលធៀបតួ -បើ $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ជាស្វ៊ីតកើន	
គ្រូទាញទំនាក់ទំនងរបស់ស្វ៊ីតកើននិងស្វ៊ីតចុះនិងស្វ៊ីតម៉ូណូតូន	-បើ $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ជាស្វ៊ីតចុះ <u>២.ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន</u> និយមន័យ:ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនលុះត្រាតែ	សិស្សសង្កេតលើស្វ៊ីតម៉ូណូតូន
គ្រូដាក់លំហាត់គំរូបង្ហាញស្វ៊ីត $(a_n)_{\forall n\in IN}$ ដែល $a_n=\frac{n}{n+1}$ ជា**ស្វ៊ីត**ម៉ូណូតូន	$a_1<a_2<a_3<.........a_n<a_{n+1}<.........$ ឬ $a_1>a_2>a_3>.........a_n>a_{n+1}>.........$ ស្វ៊ីតកើនឬស្វ៊ីតចុះជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន	$a_{n+1}-a_n=\frac{n}{n+2}-\frac{n}{n+1}$ $=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0$ ព្រោះ $n\in IN$

គ្រូបែងចែកជាក្រុមពិភាក្សាលំហាត់ ក)កំណត់ភាពកើននិងភាពចុះនៃស្វីត: $1)a_n=\frac{1}{n+3}$ $2)a_n=\frac{2n+1}{n+3}$ ខ)កំណត់**ស្វីត**ណាជា**ស្វីត**ម៉ូណូតូន? $1)a_n=n^2-4n-5$ $2)a_n=\frac{n-1}{n}$	ចម្លើយ: $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0$ នោះ (a_n) ជាស្វីតម៉ូណូតូន ប្រតិបត្តិ ក)កំណត់ភាពកើននិងភាពចុះនៃស្វីត: $1)a_n=\frac{1}{n+3}$ ជា**ស្វីត**ចុះ $2)a_n=\frac{2n+1}{n+3}$ ជា**ស្វីត**ចុះ ខ)**ស្វីត**ម៉ូណូតូនគឺស្វីត: $1)a_n=n^2-4n-5$	សិស្សដោះស្រាយសំនួរជាដៃគូរួចឡើងរាយការណ៍ $1)a_n=\frac{1}{n+3}$ ជា**ស្វីត**ចុះ $2)a_n=\frac{2n+1}{n+3}$ ជា**ស្វីត**ចុះ ខ)**ស្វីត**ម៉ូណូតូនគឺស្វីត: $1)a_n=n^2-4n-5$
-គ្រូសួរអំពីស្វីតកើន ចុះ តើស្វីតកើនឬស្វីតចុះមានលក្ខណៈដូចម្តេច?	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) (១៥ នាទី) -បើ $a_{n+1}>a_n$ ជាស្វីតកើន -បើ $a_{n+1}<a_n$ ជាស្វីតចុះ	-សិស្សឆ្លើយ -បើ $a_{n+1}>a_n$ ជាស្វីតកើន -បើ $a_{n+1}<a_n$ ជាស្វីតចុះ
-គ្រូដាក់លំហាត់ ទី៦ ទី៧ទំព័រ១៥ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ) (០៥ នាទី) -ដោះស្រាយលំហាត់ទី៦ទី៧ទំព័រ១៥	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...១....   **ស្វ៊ីត**

មេរៀនទី...១....   **ស្វ៊ីតចំនួនពិត**

(*IV*.*ស្វ៊ីតទាល់*)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញស្វ៊ីតទាល់ តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សបកស្រាយស្វ៊ីតទាល់ ស្វ៊ីតទាល់លើ ស្វ៊ីតទាល់ក្រោម និងលំហាត់តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយលំហាត់ដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ……………..ទី……………..ខែ…………..ឆ្នាំ………..

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី.៦.. ដល់ទំព័រទី..៨..

-ស . គ : ទំព័រទី.៦.. ដល់ទំព័រទី.៨...

-បន្ទាត់ឈើ

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>*ជំហានទី១*</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ១)តើស្វ៊ីតចុះឬស្វ៊ីតកើនមានលក្ខណៈដូចម្តេច? ២)តើស្វ៊ីតម៉ូណូតូនជាស្វ៊ីតមានលក្ខណៈដូច	<u>*ជំហានទី២*</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) -បើ $a_{n+1} > a_n$ ជាស្វ៊ីតកើន -បើ $a_{n+1} < a_n$ ជាស្វ៊ីតចុះ ស្វ៊ីត(a_n)ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនលុះត្រាតែ $a_1 < a_2 < a_3 < ....a_n < a_{n+1} < ....$ ឬ $a_1 > a_2 > a_3 > ....a_n > a_{n+1} > ....$ ស្វ៊ីតកើនឬស្វ៊ីតចុះជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន	សិស្សឆ្លើយ -បើ $a_{n+1} > a_n$ ជាស្វ៊ីតកើន -បើ $a_{n+1} < a_n$ ជាស្វ៊ីតចុះ ស្វ៊ីត(a_n)ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនលុះត្រាតែ $a_1 < a_2 < a_3 < ....a_n < a_{n+1} < ....$ ឬ $a_1 > a_2 > a_3 > ....a_n > a_{n+1} > ....$ ស្វ៊ីតកើនឬស្វ៊ីតចុះជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍២ ឲ្យសិស្សសង្កេត និងឆ្លើយ $Ex_1:$ គេឲ្យស្វ៊ីត $2;1;0;-1;-2;-3;........$ Ex_2 គេឲ្យស្វ៊ីត $(a_n)_{\forall n\in IN}$ ដែល $a_n=3-2^n$	<u>*ជំហានទី៣*</u> (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.១. **ស្វ៊ីតចំនួនពិត** (ត) $IV.$ **ស្វ៊ីតទាល់** ក)ស្វ៊ីតទាល់លើ $Ex_1:$ គេឲ្យស្វ៊ីត $(a_n)_{\forall n\in IN}$ ជាតួទូទៅនៃ ស្វ៊ីត $a_1=2>a_2=1>a_3=0>a_4=-1>.....$ គេថាស្វ៊ីតទាំងនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើ ដែល 2 ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត (a_n) ស្វ៊ីត $a_1=1>a_2=-1>a_3=-5>.......$ គេថាស្វ៊ីតទាំងនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើ ដែល 1 ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត (a_n) និយមន័យ : ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើលើលុះត្រាតែមានចំនួនពិត M មួយដែល $\forall n\in IN$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n\le M$ ចំនួន M ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត។	 សិស្សសង្កេតឆ្លើយនិងកត់ត្រា គេឲ្យស្វ៊ីត $(a_n)_{\forall n\in IN}$ ជាតួទូទៅនៃ ស្វ៊ីត $a_1=2>a_2=1>a_3=0>a_4=-1>.....$ គេថាស្វ៊ីតទាំងនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើ ដែល 2 ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត (a_n) គេឲ្យស្វ៊ីត $(a_n)_{\forall n\in IN}$ ជាតួទូទៅនៃ ស្វ៊ីត $a_1=1>a_2=-1>a_3=-5>.......$ គេថាស្វ៊ីតទាំងនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើ ដែល 2 ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត (a_n)
	ខ)ស្វ៊ីតទាល់ក្រោម Ex_1 គេឲ្យស្វ៊ីត $2;4;6;8;10;........$ គេសង្កេតឃើញថាយក (a_n) យើងបាន $a_1=2>a_2=4>a_3=6>..............$ នេះជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ចំនួន 2 ហៅថាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត (a_n)	គេសង្កេតឃើញថាយក (a_n) យើងបាន $a_1=2>a_2=4>a_3=6>..............$ នេះជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ចំនួន 2 ហៅថាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត (a_n)
គ្រូដាក់សំគាល់ដល់សិស្ស	◆<u>**សំគាល់**</u>ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមលុះត្រាមានចំនួនពិត N ដែលចំពោះ $\forall n\in IN$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n\ge N$ ។ចំនួន N ហៅថាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត។ ◆<u>**ចំណាំ**</u> បើ $(a_n)_{\forall n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតកើននោះ (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម។ បើ $(a_n)_{\forall n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតចុះនោះ (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ។ គ)ស្វ៊ីតទាល់	

គ្រូទាញនិយមន័យ និងចំណាំឲ្យសិស្ស	រកគោលលើនិងគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $a_n=\frac{n}{2n+1}$ ដោយ $a_1=\frac{1}{3};a_2=\frac{2}{5};.............a_n=\frac{n}{n+1}$ តាមលំដាប់តួនៃស្វីតនោះគេបាន $\frac{1}{3}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វីតហើយ $\frac{1}{2}$ គោលលើនៃស្វីតព្រោះកាលណា n ខិតជិតអនន្តនោះ $\frac{n}{2n+1}$ ខិតជិត $\frac{1}{2}$ ដែលជាគោលលើ និង $\frac{1}{3}$ ជាក្រោមនៃស្វីត ◆និយមន័យ ស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លុះត្រាតែស្វីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើផងទាល់ក្រោមផង។ ចំណាំ បើ $a_n\geq N$ ជាស្វ៊ីតក្រោម បើ $a_n\leq M$ ជាស្វ៊ីតលើដោយ $n\to\infty$ នាំឲ្យ $\lim\limits_{x\to\infty}a_n=M$ នោះ $N\leq a_n\leq M$ នោះ $(a_n)_{\forall n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតទាល់	សិស្សដោះស្រាយ $a_n=\frac{n}{2n+1}$ ដោយ $a_1=\frac{1}{3};a_2=\frac{2}{5};.............a_n=\frac{n}{n+1}$ តាមលំដាប់តួនៃស្វ៊ីតនោះគេបាន $\frac{1}{3}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត
គ្រូចែកក្រុមពិភាក្សា ១)រកគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $a_n=2n+1$ ២)បង្ហាញថា $a_n=\frac{1}{n^2}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ ៣)រកគោលលើនៃស្វ៊ីត $\begin{cases}a_1=1\\a_n=\frac{a_{n-1}}{2}\ n\geq 2\end{cases}$ គ្រូសំរបសំរួលតាមក្រុម	១)គោលក្រោមនៃស្វីត $a_n=2n+1$ គឺ 3 ២) $a_n=\frac{1}{n^2}$ ជាស្វីតទាល់លើព្រោះ $a_1=1$ និង $a_n=0$ ពេល $n\to\infty$ ៣)គោលលើនៃស្វីត $\begin{cases}a_1=1\\a_n=\frac{a_{n-1}}{2}\end{cases}$ គឺ 0	១)គោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $a_n=2n+1$ គឺ 3 ២)ស្វ៊ីត $a_n=\frac{1}{n^2}$ ជាស្វីតទាល់លើព្រោះ $a_1=1$ និង $a_n=0$ ពេល $n\to\infty$ ៣)គោលលើនៃស្វ៊ីត $\begin{cases}a_1=1\\a_n=\frac{a_{n-1}}{2}\end{cases}$ គឺ 0
តើស្វ៊ីតទាល់ក្រោមជាស្វ៊ីតដូចម្តេច? តើស្វ៊ីតទាល់ក្រោមជា	*ជំហានទី៤* (ពង្រឹងចំណេះដឹង) ស្វីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមលុះត្រាមានចំនួនពិត N ដែលចំពោះ $\forall n\in IN$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n\geq N$ ។ចំនួន N ហៅថាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត។ ស្វីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើលើលុះត្រាតែ	ស្វីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមលុះត្រាមានចំនួនពិត N ដែលចំពោះ $\forall n\in IN$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n\geq N$ ។ចំនួន N ហៅថាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត។ ស្វីត (a_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើលើលុះត្រាតែ

ស្វ៊ីតដូចម្តេច?	មានចំនួនពិត M មួយដែល $\forall n \in IN$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \leq M$ ចំនួន M ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត។	មានចំនួនពិត M មួយដែល $\forall n \in IN$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \leq M$ ចំនួន M ហៅថាគោលលើនៃស្វ៊ីត។
-គ្រូដាក់លំហាត់ ទី 8;9 ទំព័រទី 9 ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	*<u>ជំហានទី៥</u>* (កិច្ចការផ្ទះ) -ដោះស្រាយលំហាត់ទី៨ទី៩ទំព័រ៩	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី…១….   **ស្វ៊ីត**

មេរៀនទី…២….   **ស្វ៊ីតនពន្ធ**

(*I.និយមន័យស្វ៊ីតនពន្ធ II តួទី n នៃស្វ៊ីត*)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង : សិស្សរៀបរាប់និយមន័យស្វ៊ីតនពន្ធនិងរកតួទី n ស្វ៊ីតនៃស្វ៊ីតនពន្ធ តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយលំហាត់ស្វ៊ីតនពន្ធនិងរកតួទី n ស្វ៊ីតនៃស្វ៊ីតនពន្ធ តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> …១….ម៉ោង ថ្ងៃ……………..ទី……………..ខែ…………..ឆ្នាំ……….

III.<u>សម្ភារ:ឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី..១០. ដល់ទំព័រទី.១១…

-ស . គ : ទំព័រទី..១០. ដល់ទំព័រទី.១១…

-បន្ទាត់ឈើ

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>*ជំហានទី១*</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ១)តើស្វ៊ីតចុះជាស្វ៊ីតទាល់លើ រឺជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម? ២)តើស្វីទាល់ជាស្វ៊ីតដូចម្តេច?	<u>*ជំហានទី២*</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) ១)ជាស្វ៊ីតទាល់លើ ២) ជាស្វ៊ីតទាល់លើផងនិងទាល់ក្រោមផង	សិស្សឆ្លើយ ១)ជាស្វ៊ីតទាល់លើ ២) ជាស្វ៊ីតទាល់លើផងនិងទាល់ក្រោមផង
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្ស	<u>*ជំហានទី៣*</u> (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.២. **ស្វ៊ីតនពន្ធ** *I* **និយមន័យនៃស្វ៊ីតនពន្ធ** ឧទាហរណ៍ គេមានស្វ៊ីត:	

សង្កេតនិងរកពីទំនាក់ទំនងពីតួមួយទៅតួមួយទៀតនិងឲ្យឆ្លើយ	2;6;10;14;18;.............................. $u_1=2$ $u_2=6=2+4$ $u_3=10=6+4$ $u_4=14=10+4$ $u_5=18=14+4$ .... យើងឃើញថាក្រៅពីទី១ស្មើនឹងតួមុនបូកចំនួនថេរ(4)ហៅថាផលសងរួម។ គេថា 2;6;10;14;18;.............................. ជាស្វីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d=4$ ជាទូទៅផលសងរួមនៃស្វីតនព្វន្តតាងដោយ d កំណត់ដោយ $d=u_2-u_1=u_3-u_2=..........$ និយមន័យ:ស្វីតនព្វន្តជាស្វីតនៃចំនួនពិតដែល ក្រៅពីទី១ស្មើនឹងតួមុនបូកចំនួន d ថេរមួយ។ II **តួទី n នៃស្វីត** ជាទូទៅបើ(u_n)ជាស្វីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ u_1 និង d ជាផលសងរួមនោះ តួទី n នៃស្វីតកំណត់ដោយ	សិស្សឆ្លើយ $u_1=2$ $u_2=6=2+4$ $u_3=10=6+4=2+2\times 4$ $u_4=14=10+4=2+3\times 4$ $u_5=18=14+4=2+4\times 4$ .... បើ d ជាផលសងរួមនោះ $u_1=u_1+(n-1)dd=4$
គ្រូដាក់រូបមន្តឲ្យសិស្សបកស្រាយ	$u_n=u_1+(n-1)d$ ដោយ $u_1=u_1$ $u_2=u_1+(2-1)d$ $u_3=u_1+(3-1)d$ $u_4=u_1+(4-1)d$ .... $u_n=u_1+(n-1)d$	សិស្សបកស្រាយរូបមន្ត $u_n=u_1+(n-1)d$ $u_1=u_1$ $u_2=u_1+(2-1)d$ $u_3=u_1+(3-1)d$ $u_4=u_1+(4-1)d$ .... $u_n=u_1+(n-1)d$
គ្រូដាក់សំគាល់ដល់សិស្ស	<u>សំគាល់</u>បើ(u_n)ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែល u_o ជាតួទី១និងផលសងរួម d នោះ តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $u_n=u_o+nd$	
គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ Ex_1 គេមានស្វីតនព្វន្ត 2;8;14;20;...............	$u_{20}=u_{20}+(n-1)d$ ដោយ $\begin{cases}u_1=2\\ d=6\end{cases}$	សិស្សដោះស្រាយ ក)ដោយ $u_n=u_1+(n-1)d$

ក)រកតួទី២០ ខ)តើចំនួន 236 ជាតួទីប៉ុន្មាន? គ្រូចែកក្រុមពិភាក្សាប្រតិបត្តិ រួចសំយោគយកចម្លើយត្រឹមត្រូវ ក)គេឲ្យស្វ៊ីត $-8;-3;2;1;\ldots\ldots$ គណនា u_{17} ; u_{43} ខ)តើចំនួន 322 ជាតួទីប៉ុន្មាន? គ) $\begin{cases} u_{35}=9 \\ u_{45}=17 \end{cases}$ គណនា u_1 ; d ; u_{40} ឃ) $\begin{cases} u_3=12 \\ u_6=24 \end{cases}$ គណនា u_1 ; d ; u_{2010}	$u_{20}=2+(20-1)6=116$ $236=2+(n-1)6$ $n=40$ ក)គេឲ្យស្វ៊ីត $-8;-3;2;1;\ldots\ldots$ គណនា u_{17} ; u_{43} ខ)តើចំនួន 322 ជាតួទីប៉ុន្មាន? គ) $\begin{cases} u_{35}=9 \\ u_{45}=17 \end{cases}$ គណនា u_1 ; d ; u_{40} ឃ) $\begin{cases} u_3=12 \\ u_6=24 \end{cases}$ គណនា u_1 ; d ; u_{2010}	$u_{20}=u_1+(20-1)d$ ដោយ $\begin{cases} u_1=2 \\ d=6 \end{cases}$ ខ) $u_n=u_1+(n-1)d$ $236=2+(n-1)6$ $n=40$ នោះចំនួន 236 ជាតួទី២០នៃស្វ៊ីត ក្រុមសិស្សឡើងឆ្លើយ ក) $u_{17}=$; $u_{43}=$ ខ)ចំនួន 322 ជាតួទី? គ) $u_1=$ $d=$ $u_{40}=$ ឃ) $u_1=$ $d=$ $u_{2010}=$
១)ដូចម្តេចហៅថាស្វ៊ីតនព្វន្ត? ២)កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត?	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) ១)ស្វ៊ីតនព្វន្តជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល ក្រៅពីទី១ស្មើនឹងតួមុនបូកចំនួនថេរមួយ។ ២) $u_n=u_1+(n-1)d$	សិស្សឆ្លើយ ១)ស្វ៊ីតនព្វន្តជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល ក្រៅពីទី១ស្មើនឹងតួមុនបូកចំនួនថេរមួយ។ ២) $u_n=u_1+(n-1)d$
-គ្រូដាក់លំហាត់ ទី 3&4 ទំព័រទី14 ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះ និងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យ និងច្បាប់ចរាចរណ៍	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ) -ដោះស្រាយលំហាត់ទី៣ទី៤ទំព័រ១៤	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី…១…. **ស្វ៊ីត**

មេរៀនទី…២…. **ស្វ៊ីតនពន្ត**

(*III.ផលបូកតួស្វ៊ីតនព្វន្ត*)

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : សិស្សបង្ហាញពីផលបូកតួស្វ៊ីតនព្វន្តតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សគណនាផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្តតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយលំហាត់ដោយស្មារតីយោគយល់

II.ពេលវេលា: …២….ម៉ោង ថ្ងៃ……………..ទី……………..ខែ…………..ឆ្នាំ………..

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី..១២. ដល់ទំព័រទី.១៤...

-ស . គ : ទំព័រទី១២... ដល់ទំព័រទី..១៤..

-បន្ទាត់ឈើ

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*ជំហានទី១* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ១)ដូចម្តេចហៅថាស្វ៊ីតនព្វន្ត? ២)កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត?	*ជំហានទី២* (រំលឹកមេរៀនចាស់) ១)ស្វ៊ីតនព្វន្តជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល ក្រៅពីទី១ស្មើនឹងតួមុនបូកចំនួនថេរមួយ។ ២) $u_n = u_1 + (n-1)d$	សិស្សឆ្លើយ ១)ស្វ៊ីតនព្វន្តជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល ក្រៅពីទី១ស្មើនឹងតួមុនបូកចំនួនថេរមួយ។ ២) $u_n = u_1 + (n-1)d$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី គ្រូបកស្រាយរូបមន្ត	*ជំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.២. **ស្វ៊ីតនព្វន្ត** (**តចប់**) *III* ***ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត*** ជាទូទៅ:ផលបូក n តួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន u_1 ជាតួទី១និង u_n ជាតួទី n កំណត់ដោយ $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$	

គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សសង្កេតនិងដោះស្រាយ	គេមាន $u_1;u_2;u_3;$............ជាតួនៃស៊ីត តាង s_n ជាផលបូកតួនៃស៊ីត $s_n=u_1+u_2+u_3+.........+u_{n-1}+u_n$ $\underline{s_n=u_n+u_{n-1}+..............+u_3+u_2+u_1}$ $2s_n=(u_1+u_n)+(u_2+u_{n-1})+.....+(u_n+u_1)$ ដោយ $u_1+u_n=u_2+u_{n-1}=........$ នោះយើងបាន $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$ ឧទាហរណ៍:គេរៀបឥដ្ឋទីធ្លាមុខផ្ទះដែលមានរាងជាចតុកោណព្នាយ។ទីធ្លានោះមានឥដ្ឋ18ជួរដែលជួរទី1មានឥដ្ឋ14ដុំ ហើយជួរបន្តបន្ទាប់មានចំនួនឥដ្ឋលើសជួរមុន1ដុំ។តើត្រូវចំណាយឥដ្ឋប៉ុន្មានដុំដើម្បីឲ្យពេញ? ដោយ $u_1=14$ និង $u_{18}=14+17=31$ $S_{18}=\frac{18}{2}(u_1+u_{18})$ $S_{18}=9(14+31)$ $S_{18}=405$	សិស្សដោះស្រាយ តាង $u_1=14$ និងផលសងរួម $d=1$ ហើយ $u_{18}=14+(17\times1)$ យើងបាន $S_{18}=\frac{18}{2}(u_1+u_{18})$ $S_{18}=9(14+31)$ $S_{18}=405$
គ្រូសរសេរសំគាល់	សំគាល់ បើ $a;b;c$ ជាស៊ីតនព្វន្ត នោះ $2b=a+c$ ហៅថា(មធ្យមនព្វន្ត) ឬ $u_1+u_n=u_2+u_{n-1}=........=u_p+u_{n-p+1}$ ផលបូកតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង	សិស្សកត់ត្រា
គ្រូចែកក្រុមពិភាក្សាប្រតិបត្តិ រួចសំយោគយកចម្លើយត្រឹមត្រូវ ក) $\begin{cases}u_2=-12\\u_{12}=18\end{cases}$ គណនា u_1 & d ខ)បង្ហាញថាស៊ីត $u_n=\frac{2n+3}{4}$ ជាស៊ីតនព្វន្តកើន? គ)ប្រាំចំនួនជាស៊ីតនព្វន្ត ហើយផលបូកវាស្មើ125និង ផលបូកពីរតួដំបូងស្មើ38។ គណនាតម្លៃតួទាំងប្រាំនោះ?	ចម្លើយ ក) $u_1=-15\ ;\ d=3$ ខ) u_n ជាស៊ីតនព្វន្តកើន គ)17;21;25;29;33	សិស្សដោះស្រាយ ក) $u_1=-15\ ;\ d=3$ ខ) u_n ជាស៊ីតនព្វន្តកើន គ)17;21;25;29;33

គ្រូសួរ ដូចម្តេចហៅថាមធ្យមនព្វន្ត?	*ជំហានទី៤* (ពង្រឹងចំណេះដឹង) មធ្យមនព្វន្តគឺជាពីរដងតួកណ្តាលស្មើនឹងផលបូកតួដើមនិងតួចុង	មធ្យមនព្វន្តគឺជាពីរដងតួកណ្តាលស្មើនឹងផលបូកតួដើមនិងតួចុង
-គ្រូដាក់លំហាត់ ទី 7;10;11 ទំព័រទី 15 ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះ និងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យ និងច្បាប់ចរាចរណ៍	*ជំហានទី៥* (កិច្ចការផ្ទះ) -ដោះស្រាយលំហាត់ទី៧ទី១០ទី១១ ទំព័រ១៤	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...១....　　　　**ស្វ៊ីត**

មេរៀនទី...៣....　　　　**ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ**

(*I*.និយមន័យ　*II*. តួទី n នៃស្វ៊ីត ធរណីមាត្រ)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង : សិស្សរៀបរាប់និយមន័យស្វីតធរណីមាត្រ តួទី n នៃស្វ៊ីត ធរណីមាត្រ តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយ តួទី n នៃស្វ៊ីត ធរណីមាត្រ តាមរយ:ប្រតិបត្តិបានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ..................ទី..................ខែ...............ឆ្នាំ...........

III.<u>សម្ភារ:ឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី..១៦. ដល់ទំព័រទី.១៨...

-ស . គ : ទំព័រទី..១៦. ដល់ទំព័រទី.១៨...

-បន្ទាត់ឈើ

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>*ជំហានទី១*</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ១) ដូចម្េតចហៅថាមធ្យមនព្វន្ត? ២)ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត?	<u>*ជំហានទី២*</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) ១) មធ្យមនព្វន្តគឺជាពីរដងតួកណ្តាលស្មើនឹងផលបូកតួដើមនិងតួចុង ២) $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$	សិស្សឆ្លើយ ១) មធ្យមនព្វន្តគឺជាពីរដងតួកណ្តាលស្មើនឹងផលបូកតួដើមនិងតួចុង ២) $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្ស	<u>*ជំហានទី៣*</u> (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.៣. **ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ** *I* **និយមន័យ** ឧទាហរណ៍ គេមានស្វីត:	សិស្សសង្កេតនិងឆ្លើយ

សង្កេតនិងរកពីទំនាក់ទំនងពីតួមួយទៅតួមួយទៀតនិងឲ្យឆ្លើយ គ្រូដាក់និយមន័យ គ្រូណែនាំសិស្សស្រាយរូបមន្ត គ្រូលើកលំហាត់គំរូពន្យល់ ស្វ៊ីត $6;12;24;48;........$ ក)គណនា $u_{10};u_{14}$ ខ)តើចំនួន 384 ជាតួទី	$2;6;18;54;162;..............................$ $u_1 = 2$ $u_2 = 6 = 2\times 3$ $u_3 = 18 = 6\times 3$ $u_4 = 54 = 18\times 3$ $u_5 = 162 = 54\times 3$ $...................................$ យើងសង្កេតឃើញថាតួនីមួយៗនៃស្វ៊ីតក្រៅពីតួទីមួយស្មើតួមុនគុណនឹងចំនួនថេរមួយ។ ជាទូទៅ:ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតតាងដោយ $q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{u_3}{u_2}=.........=\frac{u_n}{u_{n-1}};(q\neq 0)$ និយមន័យ: ស្វ៊ីតធរណីមាត្រជាដែលតួនីមួយៗក្រៅពីតួទី១ ស្មើតួមុនគុណនឹងចំនួនថេរមួយ។ $II.$**តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ** រូបមន្ត:តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ ដោយ $\underline{u_n = u_1.q^{n-1}\ ;\ \forall n\in IN}$ បកស្រាយ: តាង $u_1;u_2;u_3;........$ ជាតួរៀងគ្នាទី១ទី២ទី៣......... $u_2 = u_1.q$ $u_3 = u_2.q = u_1.q^2$ $u_4 = u_3.q = u_1.q^3$ $u_5 = u_4.q = u_1.q^4$ $.............................$ $.............................$ $u_n = u_{n-1}.q = u_1.q^{n-1}$ ប្រតិបត្តិ ស្វ៊ីត $6;12;24;48;........$ ក)គណនា $u_{10};u_{14}$ $\begin{cases} u_{10} = 3027 \\ u_{14} = 49152 \end{cases}$	$2;6;18;54;162;..............................$ យើងបាន $u_1 = 2$ $u_2 = 6 = 2\times 3$ $u_3 = 18 = 6\times 3$ $u_4 = 54 = 18\times 3$ $u_5 = 162 = 54\times 3$ $...................................$ សិស្សកត់និយមន័យ សិស្សបកស្រាយ $u_2 = u_1.q$ $u_3 = u_2.q = u_1.q^2$ $u_4 = u_3.q = u_1.q^3$ $u_5 = u_4.q = u_1.q^4$ $.............................$ $.............................$ $u_n = u_{n-1}.q = u_1.q^{n-1}$ សិស្សដោះស្រាយ $u_{10} = u_1.q^9$ $u_{14} = u_1.q^{13}$ $= 6.2^9$ $= 6.2^{13}$ $= 3027$ $= 49152$

ប៉ុន្មាន? គ្រូដាក់លំហាត់ជាក្រុម ១)គេមានស្វ៊ីត $3;12;48;192;........$ ក)គណនាតួទី ៧ ខ)តើចំនួន 39366 ជាតួទីប៉ុន្មាន?	ខ)តើចំនួន 384 ជាតួទី 7	$u_n = u_1.q^{n-1}$ $384 = 6.2^{n-1}$ $64 = 2^{n-1}$ $7 \quad = n$
គ្រូសួរ ១)ឲ្យនិយមន័យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ? ២)រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ?	<u>*ជំហានទី៤*</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) ១)ស្វ៊ីតធរណីមាត្រជាដែលតួនីមួយៗក្រៅពីតួទី១ ស្មើតួមុនគុណនឹងចំនួនថេរមួយ។ ២) $u_n = u_1.q^{n-1} \;\; ; \forall n \in IN$	១)ស្វ៊ីតធរណីមាត្រជាដែលតួនីមួយៗក្រៅពីតួទី១ ស្មើតួមុនគុណនឹងចំនួនថេរមួយ។ ២)$_{-} u_n = u_1.q^{n-1} \;\; ; \forall n \in IN$
-គ្រូដាក់លំហាត់ ទី 3;5 ទំព័រទី 25 ឲ្យសិស្សធ្វើនផ្ទះ និងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	<u>*ជំហានទី៥*</u> (កិច្ចការផ្ទះ) -ដោះស្រាយលំហាត់ទី៣ទី៥ ទំព័រ២៥	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...១...

ស្វ៊ីត

កំរិតមូលដ្ឋាន

មេរៀនទី...៣.... **ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ**

(*III.ផលគុណស្មើចំងាយពីតួចុង-IV.ផលបូកតួស្វ៊ីតធរណីមាត្រ*)

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : សិស្សប្រាប់ពីលក្ខណៈ ផលគុណស្មើចំងាយពីតួចុងនិង ផលបូកតួស្វ៊ីតធរណីមាត្រតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយលំហាត់ ផលគុណស្មើចំងាយពីតួចុងនិង ផលបូកតួស្វ៊ីតធរណីមាត្រតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II.ពេលវេលាៈ ...0២...ម៉ោង ថ្ងៃ..............ទី..............ខែ...........ឆ្នាំ.........

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី..១៨. ដល់ទំព័រទី.២២...

-ស . គ : ទំព័រទី..១៨. ដល់ទំព័រទី..២២..

-បន្ទាត់ឈើ

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*ជំហានទី១* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ១)ឲ្យនិយមន័យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ? ២)រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ?	*ជំហានទី២* (រំលឹកមេរៀនចាស់) ១)ស្វ៊ីតធរណីមាត្រជាដែលតួនីមួយៗក្រៅពីតួទី១ ស្មើតួមុនគុណនឹងចំនួនថេរមួយ។ ២) $u_n = u_1.q^{n-1}$; $\forall n \in IN$	សិស្សឆ្លើយ ១)ស្វ៊ីតធរណីមាត្រជាដែលតួនីមួយៗក្រៅពីតួទី១ ស្មើតួមុនគុណនឹងចំនួនថេរមួយ។ ២) $u_n = u_1.q^{n-1}$; $\forall n \in IN$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី	*ជំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី៣ **ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ**(ត) *I* **ផលគុណតួស្មើចំងាយពីតួចុង**	

គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្ស សង្កេតនិងរកពីទំនាក់ទំនងពីតួមួយទៅតួមួយទៀតនិងឲ្យឆ្លើយ គ្រូដាក់លំហាត់អនុវត្តន៍គណនា u_1 & q គ្រូទាញលំហាត់គំរូ ១)គេមានផលបូកស្វ៊ីត $s_n = 5+10+20+40+..........$	ឧទាហរណ៍ គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $u_1;u_2;u_3;u_4;u_5;u_6$ បង្ហាញថា $u_1.u_6 = u_2.u_5 = u_3.u_4$ $u_1.u_6 = u_1.(u_1.q^5) = u_1^{\ 2}.q^5$ $u_2.u_5 = (u_1.q).(u_1.q^4) = u_1^{\ 2}.q^5$ $u_3.u_4 = (u_1.q^2).(u_1.q^3) = u_1^{\ 2}.q^5$ <u>ជាទូទៅ</u> បើ $u_1;u_2;u_3;......;u_p;u_{n-p+1};.....u_{n-1};u_n$ នោះ $u_1.u_n = u_2.u_{n-1} = ... = u_{n-p+1}.u_p$ ដូច្នេះគេបាន ផលគុណតួស្មើចំងាយពីតួចុងស្មើនិងផលគុណតួចុងទាំងពីរ។ <u>ករណីពិសេស</u> បីចំនួន $a;b;c$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនោះ $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$ ឬ $q^2 = a.c$ ហៅថាមធ្យមធរណីមាត្រ។ $\begin{cases} u_1.q^2 = 4 \\ u_1.q^4 = 36 \end{cases}$ ចម្លើយ $q^2 = 9$ $q = 3$ $u_1 = \frac{4}{9}$ $IV.$**ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ** បើ u_1 ជាតួទី១និង q ជាផលធៀបរួមហើយ u_n ជាតួទី n និង S_n ជាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ $S_n = u_1 + u_1.q + u_1.q^2 + ... + u_1.q^{n-1} \ (1)$ $qS_n = u_1.q + u_1.q^2 + u_1.q^3 + ... + u_1.q^n \ (2)$ យក $(2)-(1)$ $\Rightarrow S_n = u_1 \frac{(q^n - 1)}{q-1}$ ឬ $S_n = u_1 \frac{(1-q^n)}{1-q}$ ចម្លើយ ១)ដោយ $S_7 = u_1 \frac{(q^7-1)}{q-1} = 5.\left(\frac{2^7-1}{2-1}\right)$ $S_7 = 635$	 សិស្សឡើងដោះស្រាយ $\begin{cases} u_1.q^2 = 4 \\ u_1.q^4 = 36 \end{cases}$ $q^2 = 9$ $q = 3$ $u_1 = \frac{4}{9}$ សិស្សដោះស្រាយ ១)ដោយ $S_7 = u_1 \frac{(q^7-1)}{q-1}$

គណនា S_7 ២)គណនាផលបូក $2+6+18+.....+1458$ គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិតាមក្រុម ១)តើគេត្រូវថែមចំនួនប៉ុន្មានទៀតទៅលើចំនួន $3;24;94$ ដើម្បីជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ? ២)គេមានស្វ៊ីត $6;3;1,5;0,75;...........$ គណនា $u_7\ ;S_7$	២)មាន $u_n=u_1.q^{n-1}$ $1458=2.3^{n-1}$ នាំឲ្យ $S_7=2.\left(\frac{3^7-1}{3-1}\right)=2186$ $n=7$ ប្រតិបត្តិ ១) $(x+3)(x+94)=(24+x)^2$ ២)មាន $q=\frac{1}{2}\ \ ;\ \ u_1=6$ $u_7=6.\left(\frac{1}{2}\right)^6$ $S_7=6.\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}}\right)$	$=5.\left(\frac{2^7-1}{2-1}\right)$ $S_7=635$ ២)មាន $u_n=u_1.q^{n-1}\Rightarrow 1458=2.3^{n-1}$ $n=7$ នោះ $S_7=2.\left(\frac{3^7-1}{3-1}\right)=2186$ សិស្សដោះស្រាយ ១) $(x+3)(x+94)=(24+x)^2$ ២)មាន $q=\frac{1}{2}\ \ ;\ \ u_1=6$ $u_7=6.\left(\frac{1}{2}\right)^6$ $S_7=6.\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}}\right)=12\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right)$
គ្រូសួរ ចូរសរសេរ ១)រូបមន្តមធ្យមធរណីមាត្រ ២) រូបមន្តផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រ	<u>*ជំហានទី៤*</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) ១) $b^2=a.c$ ២) $S_n=u_1.\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$	សិស្សឆ្លើយ ១) $b^2=a.c$ ២) $S_n=u_1.\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$
-គ្រូដាក់លំហាត់ ទី 5&6 ទំព័រទី 25 ឲ្យសិស្សធ្វើនផ្ទះ និងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	<u>*ជំហានទី៥*</u> (កិច្ចការផ្ទះ) -ដោះស្រាយលំហាត់ទី៥ទី៦ ទំព័រ២៥	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...១.... **ស្វីត**

មេរៀនទី...៣.... **ស្វីតធរណីមាត្រ**

(V. ស្វីតធរណីមាត្រអនន្តតួ)

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : សិស្សប្រាប់ពីលក្ខណៈស្វីតធរណីមាត្រអនន្តតួ តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយលំហាត់ស្វីតធរណីមាត្រអនន្តតួ តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II. ពេលវេលាៈ ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ.....................ទី.....................ខែ..................ឆ្នាំ..............

III. សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី..២២. ដល់ទំព័រទី.២៤...

-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-បន្ទាត់ឈើ

IV. ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ចូរសរសេរ ១)រូបមន្តមធ្យមធរណីមាត្រ ២) រូបមន្តផលបូកស្វីតធរណីមាត្រ	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់) ១) $b^2 = a.c$ ២) $S_n = u_1.\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$	សិស្សឆ្លើយ ១) $b^2 = a.c$ ២) $S_n = u_1.\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សសង្កេតនិងរកពីទំនាក់ទំនងពីតួមួយទៅតួមួយទៀតនិង	ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី៣ **ស្វីតធរណីមាត្រ**(តចប់) V. **ស្វីតធរណីមាត្រអនន្តតួ** Ex ពិនិត្យមើលស្វីតខាងក្រោមៈ $18+1,8+0,18+0,0018+......$	សិស្សសង្កេតនិងដោះស្រាយ $18+1,8+0,18+0,0018+......$

<table>
<tr>
<td>ឲ្យឆ្លើយ

គ្រូដាក់លំហាត់អនុវត្តន៍
១)សរសេរជាចំនួនទសភាគ
$a)0,\overline{7}\quad b)2,\overline{34}\quad c)0,\overline{452}$

២)គណនាផលបូក
$16+12+9+........$</td>
<td>$S_2=19.8$
$S_3=19,98$
$S_4=19,998$
$S_5=19,9998$
$S_6=19,99998$
....
$S_n=19,99999.......98$
សង្កេតឃើញថា S_n ខិតទៅរក 20 បើ n ខិតទៅរកអនន្ត
យើងបាន
$S_n=u_1+u_2+u_3+............+u_n$
$S_n=u_1+u_1.q+u_1.q^2+.......+u_1.q^{n-1}\quad(1)$
$S_n=u_1.\left(\dfrac{q^n-1}{q-1}\right)$
$S_n=\dfrac{u_1q^n}{q-1}-\dfrac{u_1}{q-1}\ \ ;\ q\neq 1$
បើ $|q|<1$ នោះ q^n កាន់តែតូចមានន័យថា $q^n\to 0$ បើ $n\to+\infty$
នោះ $S_n=0-\dfrac{u_1}{q-1}$ ឬ $S_n=\dfrac{u_1}{1-q}$
សំគាល់ បើ $|q|>1$ នោះ S_n មិនអាចកំណត់បាន។
ចម្លើយ
$a)\dfrac{7}{9}\quad b)\dfrac{232}{99}\quad c)\dfrac{452}{999}$

២) គណនាផលបូក
$S_n=u_1\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)$
$S_n=16\left(\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\right)=64\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)$</td>
<td>$S_2=19.8$
$S_3=19,98$
$S_4=19,998$
$S_5=19,9998$
$S_6=19,99998$
....
$S_n=19,99999.......98$

សិស្សឡើងដោះស្រាយ
$a)S_n=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{o,7}{1-0,1}=\dfrac{7}{9}$
$b)2+S_n=2+\dfrac{u_1}{1-q}$
$=2+\dfrac{0,34}{1-0,01}=\dfrac{232}{99}$
$c)S_n=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{0,452}{1-0.001}=\dfrac{452}{999}$
២) គណនាផលបូក
$S_n=u_1\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)$
$S_n=16\left(\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\right)$
$=64\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)$</td>
</tr>
</table>

គ្រូសួរ ចូរសរសេរ ១)រូបមន្តផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ ២)គណនា $0,\overline{12}+0,\overline{1}$	*ជំហានទី៤* (ពង្រឹងចំណេះដឹង) ១) $S_n=\frac{u_1}{1-q}$ ២) $\frac{12}{99}+\frac{1}{9}$	សិស្សឆ្លើយ ១) $S_n=\frac{u_1}{1-q}$ ២) $\frac{12}{99}+\frac{1}{9}$
-គ្រូដាក់លំហាត់ ទី 8&9 ទំព័រទី 25 ឲ្យសិស្សធ្វើនផ្ទះ និងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	*ជំហានទី៥* (កិច្ចការផ្ទះ) -ដោះស្រាយលំហាត់ទី៨ទី៩ ទំព័រ២៥	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...២.... **អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍លោការីត**

មេរៀនទី...១.... **អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល**

(*I.ស្វ័យគុណ - លក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ*)

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញនិយមន័យ ស្វ័យគុណ និង លក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ រយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សគណនា ឫសទី n និងសរសេររ៉ាឌីកាល់ជាអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.ពេលវេលា: ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ..................ទី..................ខែ................ឆ្នាំ.............

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី.២៨.. ដល់ទំព័រទី..៣០..

-ស . គ : ទំព័រទី..២៨. ដល់ទំព័រទី..៣០..

-បន្ទាត់ កូនបាល់ ខ្សែម៉ែត្រ

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*ជំហានទី១* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ $a)3\times3\times3\times3=......$ $b)x\times x\times x\times x=..x^{?}...$ $c)\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=...\left(\frac{1}{2}\right)^{?}..$	*ជំហានទី២* (រំលឹកមេរៀនចាស់) $a)3\times3\times3\times3=...81...$ $b)x\times x\times x\times x=..x^{4}...$ $c)\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=...\left(\frac{1}{2}\right)^{5}..$	-សិស្សឆ្លើយ $a)3\times3\times3\times3=...81...$ $b)x\times x\times x\times x=..x^{4}...$ $c)\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=...\left(\frac{1}{2}\right)^{5}..$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី មេរៀនទី.១. **អនុគមន៍ អិុចស្ប៉ូណង់ស្យែល**	*ជំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.១. **អនុគមន៍អិុចស្ប៉ូណង់ស្យែល** *I* **ស្វ័យគុណ** ១.និយមន័យ	សិស្សសង្កេតនិងគណនា

-គ្រូទាញឧទាហរណ៍ សរសេរជាទម្រង់ ស្វ័យគុណ $a)2\times2\times2\times2\times2\times2=......$ $b)x\times x\times x\times x\times x\times x=.....$ $c)\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times$ $\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times=.....$ $d)\underbrace{a\times a\times a\times a\times......\times a}_{n\ \text{Kta}}=......$	Ex សរសេរជាទម្រង់ស្វ័យគុណ $a)2\times2\times2\times2\times2\times2=...2^6...$ $b)x\times x\times x\times x\times x\times x=..x^6...$ $c)\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^8$ $d)\underbrace{a\times a\times a\times a\times..........\times a}_{n\ \text{Kta}}=...a^n...$ សនិដ្ឋាន $\underbrace{a\times a\times a\times a\times a\times a\times......\times a}_{n}=...a^n...$ a^n ហៅថា a ស្វ័យគុណ n n ហៅថានិទស្សន្ត n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន a ហៅថាគោលនៃស្វ័យគុណ	$a)2\times2\times2\times2\times2\times2=...2^6...$ $b)x\times x\times x\times x\times x\times x=..x^6...$ $c)\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^8$ $d)\underbrace{a\times a\times a\times a\times..........\times a}_{n\ \text{Kta}}=...a^n...$
គ្រូដាក់ ប្រតិបត្តិ សរសេរជាស្វ័យគុណ $a)64=......$ $b)\left(\frac{64}{81}\right)=.....$ $c)0,25=......$	ប្រតិបត្តិ ទម្រង់ស្វ័យគុណ $a)64=...2^6...$ $b)\left(\frac{64}{81}\right)=..\left(\frac{2^6}{3^4}\right)...$ $c)0,25=\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$	សិស្សឆ្លើយ $a)64=...2^6...$ $b)\left(\frac{64}{81}\right)=..\left(\frac{2^6}{3^4}\right)...$ $c)0,25=\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$
គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យ ក្រុមសិស្សទាញសនិដ្ឋាន ក្រុមទី១ $1)2^3\times2^5=.....$ $2)x^3\times x^7=.....$ $3)a^m\times a^n=........$	២.លក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ ក)ផលគុណនៃស្វ័យគុណគោលដូចគ្នា Ex_1 $1)2^3\times2^5=..2^8...$ $2)x^3\times x^7=...x^{10}..$ $3)a^m\times a^n=a^{m+n}$ <u>ជាទូទៅ:</u>ផលគុណនៃស្វ័យគុណដែលមានគោលដូចគ្នា ជាស្វ័យគុណដែលនិទស្សន្តជាផលបូកនៃនិទស្សន្តរបស់វា។	សិស្សសង្កេតនិងដោះស្រាយ Ex_1 $1)2^3\times2^5=..2^8...$ $2)x^3\times x^7=...x^{10}..$ $3)a^m\times a^n=a^{m+n}$ <u>ជាទូទៅ:</u>ផលគុណនៃស្វ័យគុណដែលមានគោលដូចគ្នា ជាស្វ័យគុណដែលនិទស្សន្តជាផលបូកនៃនិទស្សន្តរបស់វា
ក្រុមទី២ $1)\left(2^3\right)^5=.....$ $2)\left(x^3\right)^7=.....$ $3)\left(a^n\right)^m=........$	ខ)ស្វ័យគុណនៃស្វ័យគុណ Ex_2 $1)\left(2^3\right)^5=..2^{15}...$ $2)\left(x^3\right)^7=..x^{21}...$ $3)\left(a^n\right)^m=a^{n\times m}$ <u>ជាទូទៅ:</u> ស្វ័យគុណនៃស្វ័យគុណជាស្វ័យគុណដែលនិទស្សន្តជាផលគុណនៃ	សិស្សឡើងដោះស្រាយ Ex_2 $1)\left(2^3\right)^5=..2^{15}...$ $2)\left(x^3\right)^7=..x^{21}...$ $3)\left(a^n\right)^m=a^{n\times m}$ <u>ជាទូទៅ:</u>ស្វ័យគុណនៃស្វ័យ

	និទស្សន្តរបស់វា។	គុណជាស្វ័យគុណដែល និទស្សន្តជាផលគុណនៃ និទស្សន្តរបស់វា។
ក្រុមទី៣ $1)2^2\times 3^2=.....$ $2)x^3\times y^3=.....$ $3)\left(a^n.b^n\right)=.....$	គ)ស្វ័យគុណនៃផលគុណ $Ex_3\,1)2^2\times 3^2=\left(2\times 3\right)^2=6^2=36$ $2)x^3\times y^3=\left(x\times y\right)^3$ $3)\left(a^n.b^n\right)=\left(ab\right)^n$ <u>ជាទូទៅ:</u> ស្វ័យគុណនៃផលគុណដែលមានគោលខុសគ្នាជាផលគុណនៃស្វ័យគុណ។	សិស្សឡើងដោះស្រាយ $Ex_3\,1)2^2\times 3^2=\left(2\times 3\right)^2=6^2=36$ $2)x^3\times y^3=\left(x\times y\right)^3$ $3)\left(a^n.b^n\right)=\left(ab\right)^n$ <u>ជាទូទៅ:</u> ស្វ័យគុណនៃផលគុណដែល មានគោលខុសគ្នាជាផល គុណនៃស្វ័យគុណ។
ក្រុមទី៤ $Ex_4\,1)\left(\frac{3}{2}\right)^4=......$ $2)\left(\frac{e^2}{f^3}\right)^4=.....$ $3)\left(\frac{a}{b}\right)^n=......$	ឃ)ស្វ័យគុណនៃផលចែក $Ex_4\,1)\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$ $2)\left(\frac{e^2}{f^3}\right)^4=\frac{e^8}{f^{12}}$ $3)\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ <u>ជាទូទៅ:</u> ស្វ័យគុណនៃផលចែកដែលមានគោលខុសគ្នាជាផលចែកនៃស្វ័យគុណ។	សិស្សឡើងដោះស្រាយ $Ex_4\,1)\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$ $2)\left(\frac{e^2}{f^3}\right)^4=\frac{e^8}{f^{12}}$ $3)\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ <u>ជាទូទៅ:</u>ស្វ័យគុណនៃផល ចែកដែលមានគោលខុសគ្នា ជាផលចែកនៃស្វ័យគុណ។
ក្រុមទី៥ $Ex_5\,1)\frac{3^5}{3^2}=......$ $2)\frac{x^7}{x^{10}}=.....$ $3)\frac{a^m}{a^n}=......$	ង)ផលចែកនៃស្វ័យគុណគោលដូចគ្នា $Ex_5\,1)\frac{3^5}{3^2}=3^{5-2}=3^3=27$ $2)\frac{x^7}{x^{10}}=x^{7-10}=x^{-3}$ $3)\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ <u>ជាទូទៅ:</u>ផលចែកនៃស្វ័យគុណគោលដូចគ្នា ស្វ័យគុណដែលនិទស្សន្តជាផលសងនៃនិទស្សន្តតំណាងចែកនិងនិទស្សន្តតួចែករបស់វា។	សិស្សឡើងដោះស្រាយ $Ex_5\,1)\frac{3^5}{3^2}=3^{5-2}=3^3=27$ $2)\frac{x^7}{x^{10}}=x^{7-10}=x^{-3}$ $3)\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ <u>ជាទូទៅ:</u>ផលចែកនៃស្វ័យ គុណគោលដូចគ្នា ស្វ័យគុណ ដែលនិទស្សន្តជាផលសងនៃ និទស្សន្តតំណាងចែកនិង និទស្សន្តតួចែករបស់វា។
គ្រូសរុបការសេនិដ្ឋាន	<u>ជាទូទៅ</u> $1)a^n.a^m=a^{n+m}$ $2)\left(a^m\right)^n=a^{m.n}$ $5)\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ $3)\left(ab\right)^n=a^n.b^n$ $4)\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$	<u>ជាទូទៅ</u>

1) $a^n.a^m = ?$ 2) $\left(a^m\right)^n = ?$ 3) $\left(ab\right)^n = ?$ 4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = ?$ 5) $\dfrac{a^n}{a^m} = ?$		1) $a^n.a^m = a^{n+m}$ 2) $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$ 3) $\left(ab\right)^n = a^n.b^n$ 4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ 5) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
-គ្រូដាក់លំហាត់ 1) $\left(\dfrac{2^3}{3^4}\right)^5 = ?$ 2) $\left(a^2b^5c^{-2}\right)^2 = ?$ 3) $\left(\dfrac{a^4b^4}{a^3}\right)^3 = ?$	*ជំហានទី៤* (ពង្រឹងចំណេះដឹង) 1) $\left(\dfrac{2^3}{3^4}\right)^5 = \dfrac{2^{15}}{3^{20}}$ 2) $\left(a^2b^5c^{-2}\right)^2 = a^4b^{10}c^{-4}$ 3) $\left(\dfrac{a^4b^4}{a^3}\right)^3 = a^3b^{12}$	សិស្សពិភាក្សាតាមក្រុមនិងដោះស្រាយរួចឡើងរាយការណ៍
-គ្រូដាក់លំហាត់ទី១ទី២ ទំព័រ៥៦ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	*ជំហានទី៥* (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី១ និង ទី២ ទំព័រ៥៦	សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី…២…. **អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍លោការីត**

មេរៀនទី…១…. **អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល**

(៣.ស្វ័យគុណសូន្យនិងចម្រាសនៃស្វ័យគុណ - II.ឫសទី n)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញពីស្វ័យគុណសូន្យនិងចម្រាសនៃស្វ័យគុណ - ឫសទី n រយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សគណនា ស្វ័យគុណសូន្យនិងចម្រាសនៃស្វ័យគុណ តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> …២….ម៉ោង ថ្ងៃ……………..ទី……………..ខែ…………..ឆ្នាំ………..

III.<u>សម្ភារ:ឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី.៣១.. ដល់ទំព័រទី..៣៣..

-ស . គ : ទំព័រទី..៣១. ដល់ទំព័រទី…៣៣.

-បន្ទាត់ កូនបាល់ ខ្សែម៉ែត្រ

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>*ជំហានទី១*</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ $1)a^n.a^m=?\quad 2)\left(a^m\right)^n=?$ $3)\left(ab\right)^n=?\quad 4)\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=?$	<u>*ជំហានទី២*</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) $1)a^n.a^m=a^{n+m}\ 2)\left(a^m\right)^n=a^{m.n}$ $3)\left(ab\right)^n=a^n.b^n\ 4)\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$	-សិស្សឆ្លើយ $1)a^n.a^m=a^{n+m}\ 2)\left(a^m\right)^n=a^{m.n}$ $3)\left(ab\right)^n=a^n.b^n\ 4)\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី *មេរៀនទី.១.* **អនុគមន៍ អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** -គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍	<u>*ជំហានទី៣*</u> (មេរៀនថ្មី) *មេរៀនទី.១.* **អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** **៣.ស្វ័យគុណសូន្យនិងចម្រាសនៃ ស្វ័យគុណ** **ក)ស្វ័យគុណសូន្យ**	សិស្សសង្កេតនិងគណនា

$Ex:1)\dfrac{5^4}{5^4}=?$ $2)\dfrac{x^7}{x^7}=?$ $3)\dfrac{a^n}{a^n}=?$ -គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ $Ex:\ 1)\dfrac{5^6}{5^7}=?$ $2)\dfrac{x^6}{x^9}=?$ $3)\dfrac{1}{a^{-n}}=?$	$Ex:1)\dfrac{5^4}{5^4}=5^0=1$ $2)\dfrac{x^7}{x^7}=x^0=1$ សនិដ្ឋាន $\boxed{a^0=1}$ $3)\dfrac{a^n}{a^n}=a^0=1$ **ខ)ចម្រាសនៃស្វ័យគុណ** $Ex:\ 1)\dfrac{5^6}{5^7}=\dfrac{1}{5}=5^{-1}$ $2)\dfrac{x^6}{x^9}=x^{-3}$ $3)\dfrac{1}{a^{-n}}=a^n$ <u>ជាទូទៅ</u> $1)\ a^0=1\quad(a\neq 0)\qquad 2)\ \dfrac{1}{a^n}=a^{-n}$	$Ex:1)\dfrac{5^4}{5^4}=5^{4-4}=5^0=1$ $2)\dfrac{x^7}{x^7}=x^{7-7}=x^0=1$ $3)\dfrac{a^n}{a^n}=a^0=1$ សិស្សសង្កេតនិងគណនា $1)\dfrac{5^6}{5^7}=\dfrac{5.5.5.5.5.5}{5.5.5.5.5.5.5}=\dfrac{1}{5}=5^{-1}$ $2)\dfrac{x^6}{x^9}=x^{-3}$ $3)\dfrac{1}{a^{-n}}=a^n$ សិស្សសង្កេត
គ្រូដាក់ ប្រតិបត្តិ គណនា $1)(o,oo5)^0=?$ $2)\left(-7^0\right)=?$ $3)\left(\dfrac{\left(2+3^0\right)^2}{2^4}\right)^2=?$	ប្រតិបត្តិ គណនា $1)(o,oo5)^0=1$ $2)\left(-7^0\right)=1$ $3)\left(\dfrac{\left(2+3^0\right)^2}{2^4}\right)^2=\left(\dfrac{2^2}{2^4}\right)^2=\dfrac{1}{2^4}=2^{-4}$	សិស្សឆ្លើយ $1)(o,oo5)^0=1$ $2)\left(-7^0\right)=1$ $3)\left(\dfrac{\left(2+3^0\right)^2}{2^4}\right)^2=\dfrac{1}{2^4}=2^{-4}$
-គ្រូលើកឧទាហរណ៍ និងសំគាល់ខ្លះៗ	$II.$ **ឫសទី n** **១) ឫសទី n ដែល n ជាចំនួនគត់គូនិងសេស** x ជាឫសការេនៃចំនួនវិជ្ជមាន a កាលណា $x^2=a$ គេបាន $x=+\sqrt{a}$ និង $x=-\sqrt{a}$ សំគាល់ $\sqrt{0}=0;\ \sqrt{16}=+4$ និង $-\sqrt{16}=-4$ ហើយចំនួនអវិជ្ជមានពុំមានឫសការេទេ <u>ជាទូទៅ:</u>ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a មានឫសការេពីរគឺ: $\sqrt{a}$ និង $-\sqrt{a}$ ។	សិស្សសង្កេត
គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ $Ex_1\ 1)\sqrt{9}=?$ $2)\sqrt{-49}=?$ $3)x^2=81$ $Ex_2\ 1)\sqrt[3]{8}=?$ $2)\sqrt[3]{-8}=?$	ឧទាហរណ៍ $Ex_1\ 1)\sqrt{9}=?$ $2)\sqrt{-49}=$ គ្មានឫសការេទេ $3)x=\pm 9$ $Ex\ 1)\sqrt[3]{8}=2$ $2)\sqrt[3]{-8}=-2$	សិស្សដោះស្រាយឧទាហរណ៍ $Ex_1\ 1)\sqrt{9}=?$ $2)\sqrt{-49}=$ គ្មានឫសការេទេ $3)x=\pm 9$ $Ex_2\ 1)\sqrt[3]{8}=2$ $2)\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$
	ជាទូទៅ: ឫសគូបនៃចំនួនពិត a មានតែមួយគត់គឺ $\sqrt[3]{a}$	

Ex_3 1)$\sqrt[3]{-1}=?$ 2)$\sqrt[4]{81}=?$ 3)$x^5=-2$	Ex_3 1)$\sqrt[3]{-1}=-1$ 2)$\sqrt[4]{81}=3$ 3)$x^5=-2$ $\Rightarrow x=\sqrt[5]{-2}$ <u>ជាទូទៅ:</u>បើ a ជាចំនួនពិតនិង $n\geq 2$ ជាចំនួន គត់រឺឡាទីបវិជ្ជមាន គេបាន: 1) $\sqrt[n]{a^n}=\|a\|$ បើ n គូ 2)$\sqrt[n]{a^n}=a$ បើ n សេស	Ex_3 1)$\sqrt[3]{-1}=-1$ 2)$\sqrt[4]{81}=3$ 3)$x^5=-2$ $\Rightarrow x=\sqrt[5]{-2}$ Ex_1
គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ គណនា 1)$\sqrt{\frac{9}{25}}=?$ 2)$\sqrt{(x-1)^2}=?$ 3)$\sqrt[4]{81}=?$ 4)$\sqrt[4]{2a^4}=?$	ប្រតិបត្តិ 1)$\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$ 2)$\sqrt{(x-1)^2}=\|x-1\|$ 3)$\sqrt[4]{81}=3$ 4)$\sqrt[4]{2a^4}=\sqrt[4]{2}.\|a\|$	សិស្សដោះស្រាយ 1)$\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$ 2)$\sqrt{(x-1)^2}=\|x-1\|$ 3)$\sqrt[4]{81}=3$ 4)$\sqrt[4]{2a^4}=\sqrt[4]{2}.\|a\|$
-គ្រូលើកឧទាហរណ៍ $a)\sqrt[3]{125}.\sqrt[3]{27}=?$ $b)\sqrt{5}.\sqrt{20}=?$	**ខ)គុណកន្សោមរ៉ាឌីកាល់** $a)\sqrt[3]{125}.\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{5^3}.\sqrt[3]{3^3}=5.3=15$ $b)\sqrt{5}.\sqrt{20}=\sqrt{100}=10$ <u>ជាទូទៅ:</u> $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 2$ និងគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន a និង b ។	សិស្សឆ្លើយ $a)\sqrt[3]{125}.\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{5^3}.\sqrt[3]{3^3}$ $=5.3=15$ $b)\sqrt{5}.\sqrt{20}=\sqrt{100}=10$
-គ្រូលើកឧទាហរណ៍ $a)\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=?$ $b)\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{3}}=?$	**គ)ចែកកន្សោមរ៉ាឌីកាល់** $a)\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}=\frac{4}{3}$ $b)\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{300}{3}}=\sqrt{100}=10$ <u>ជាទូទៅ:</u> $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 2$ និងគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន a និង b ។	សិស្សឆ្លើយ $a)\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}=\frac{4}{3}$ $b)\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{300}{3}}=\sqrt{100}=10$
គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ $a)2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}=?$ $b)a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}=?$ $c)\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}=?$	**ឃ)សរសេររ៉ាឌីកាល់ជាស្វ័យគុណសនិទាន** $a)2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.\sqrt{2}=\sqrt{2^2}=2$ $b)a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^3}=a$ $c)\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{x^5}$ <u>ជាទូទៅ:</u> $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 2$ និង $m\geq 1$; $a>0$ ។	សិស្សឆ្លើយ $a)2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.\sqrt{2}=\sqrt{2^2}=2$ $b)a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}=a$ $c)\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ $=x^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{x^5}$
-គ្រូលើកឧទាហរណ៍	**ង)សរសេររ៉ាឌីកាល់ជាស្វ័យ**	សិស្សឆ្លើយ

$a)\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}=?$ $b)\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}=?$ -គ្រូលើកឧទាហរណ៍ $a)\sqrt[3]{64}=?$ $b)\sqrt[nx]{a^{kx}}=?$ គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ:គណនា $a)\sqrt[3]{32}=?$ $b)\sqrt{2x^2-4x+2}=?$ $c)\dfrac{\sqrt[3]{27x^5}}{\sqrt[3]{343y^3}}=?$	$a)\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}=\left(\sqrt[4]{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{2}$ $b)\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{1}{15}}=\sqrt[15]{x}$ <u>ជាទូទៅ:</u> $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\times m]{a}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n\geq 2$ និង $K\geq 2$; $a>0$ ។ **ច)សម្រួលសន្ទស្សន៍រ៉ាឌីកាល់** $a)\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$ $b)\sqrt[nx]{a^{kx}}=a^{\frac{kx}{nx}}=a^{\frac{k}{n}}$ <u>ជាទូទៅ:</u> $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n\geq 2$ និង $K\geq 2$; $a>0$ **លក្ខណៈឫសទី**n បើ $n\geq 2$ និង $K\geq 2; m\geq 0$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាននិង $a\&b$ ជាចំនួនវិជ្ជមានគេបាន: $1)\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ $3)\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $2)\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $4)\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\times m]{a}$ $5)\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ ប្រតិបត្តិ: $a)\sqrt[3]{32}=2\sqrt[3]{4}$ $b)\sqrt{2x^2-4x+2}=\sqrt{2(x-1)^2}=\sqrt{2}\|x-1\|$ $c)\dfrac{\sqrt[3]{27x^5}}{\sqrt[3]{343y^3}}=\dfrac{3x\sqrt[3]{x^2}}{7y}$	$a)\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}=\left(\sqrt[4]{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$ $=2^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{2}$ សិស្សឆ្លើយ $a)\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=2^2=4$ $b)\sqrt[nx]{a^{kx}}=a^{\frac{kx}{nx}}=a^{\frac{k}{n}}$ សិស្សឆ្លើយ $a)\sqrt[3]{32}=2\sqrt[3]{4}$ $b)\sqrt{2x^2-4x+2}$ $=\sqrt{2(x-1)^2}=\sqrt{2}\|x-1\|$ $c)\dfrac{\sqrt[3]{27x^5}}{\sqrt[3]{343y^3}}=\dfrac{3x\sqrt[3]{x^2}}{7y}$
-គ្រូសួររូបមន្ត $1)\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=?$ $2)\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=?$ $3)\sqrt[n]{a^m}=?$ $4)\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=?$	<u>*ជំហានទី៤*</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) $1)\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ $3)\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $2)\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $4)\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\times m]{a}$	សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍ $1)\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ $3)\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $2)\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $4)\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\times m]{a}$

-គ្រូដាក់លំហាត់ទី៤ដល់ទី៩ទំព័រ៤៦ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	*<u>ជំហានទី៥</u>* (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី៤ ដល់ ទី៩ ទំព័រ៤៦	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...២....　　　អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍លោការីត

មេរៀនទី...១....　　　**អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល**

(*III.អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល- IV.សមីការនិងវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល*)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល សមីការនិងវិសមីការ អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សគូសក្រាបអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងគណនាសមីការ និងវិសមីការតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ.................ទី.................ខែ..............ឆ្នាំ...........

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី.៣៧.. ដល់ទំព័រទី..៤០..

-ស . គ : ទំព័រទី.៣៧.. ដល់ទំព័រទី..៤០..

-បន្ទាត់

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្ដាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*<u>ជំហានទី១</u>* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្ដាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ $a) 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}} = ?$ $b) e^{\frac{1}{3}}.e^{\frac{1}{3}}.e^{\frac{1}{3}} = ?$ $c) \sqrt{e}.\sqrt[3]{e} = ?$	*<u>ជំហានទី២</u>* (រំលឹកមេរៀនចាស់) $a) 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}} = 2$ $b) e^{\frac{1}{3}}.e^{\frac{1}{3}}.e^{\frac{1}{3}} = a$ $c) \sqrt{e}.\sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = e^{\frac{5}{6}}$	-សិស្សឆ្លើយ $a) 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}} = 2$ $b) e^{\frac{1}{3}}.e^{\frac{1}{3}}.e^{\frac{1}{3}} = a$ $c) \sqrt{e}.\sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = e^{\frac{5}{6}}$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី មេរៀនទី.១. **អនុគមន៍ អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** -គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍	*<u>ជំហានទី៣</u>* (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.១. **អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** *III.* **អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** *Ex.*រដ្ឋមួយមានប្រជាជន១លាននាក់។ ១ទសវត្សរ៍ក្រោយមកប្រជាជនបានកើន	សិស្សសង្កេតនិងគណនា

ឲ្យសិស្សសរសេរទំនាក់ទំនងស្ទីតធរណីមាត្រ

ណែនាំឲ្យសិស្សបង្កើតអនុគមន៍និងសួរ

$f(x)=(1,3)^x$

$f(3)=?$

$f(-3)=?$

-គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=2^x$ ដោយបំពេញតារាងតម្លៃលេខ

x	$y=2^x$
-2	?
-1	?
0	?
1	?
2	?

ដល់ 30% ។សរសេរទំនាក់ទំនងជាស្ទីតធរណីមាត្រ?

តាង $a_o=1$ និងផលធៀបរួម $r=30\%$

$a_1=a_0+a_0r=a_0(1+r)$

$a_2=a_1+a_1r=a_1(1+r)=a_0(1+r)^2$

$a_3=a_0(1+r)^3$

....

$a_x=a_0(1+30\%)^x=(1.3)^x$

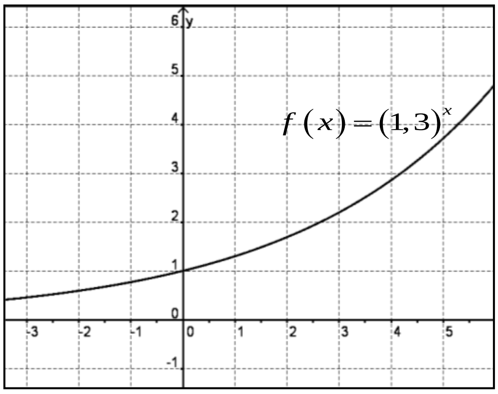
គេបានអនុគមន៍ $f(x)=(1,3)^x$

$f(3)=(1,3)^3=2,19$

$f(-3)=(1,3)^{-3}=0,45$

និយមន័យ

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=a^x$ ដែល $x\in IR$ ហើយ a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានខុសពី1 ។



ប្រតិបត្តិ: សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=2^x$

បំពេញតារាងតម្លៃលេខ

x	$y=2^x$
-2	0.25
-1	0.50
0	1
1	2

តួទី១ $a_o=1$

និងផលធៀបរួម $r=30\%$

$a_1=a_0+a_0r=a_0(1+r)$

$a_2=a_1+a_1r=a_1(1+r)$

$=a_0(1+r)^2$

$a_3=a_0(1+r)^3$

....

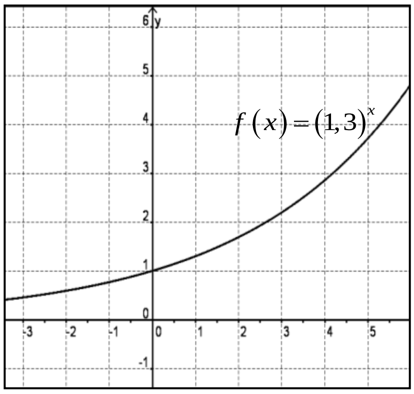
$a_x=a_0(1+30\%)^x=(1.3)^x$

$f(x)=(1,3)^x$

មានន័យថា:

$f(3)$ គឺ 3 ទសវត្សរ៍ក្រោយមករដ្ឋនេះមានប្រជាជន 2,19 លាននាក់

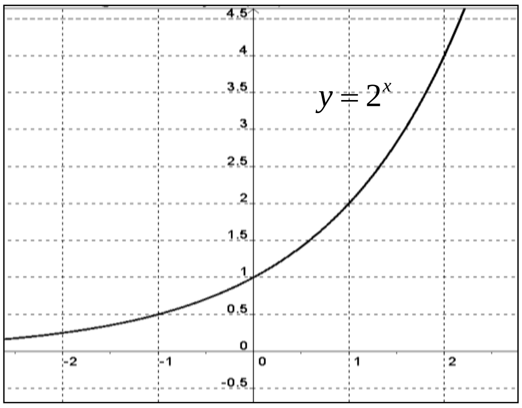
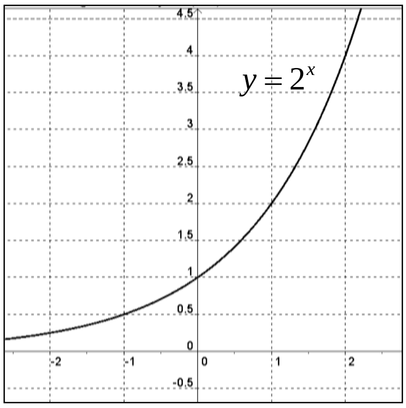
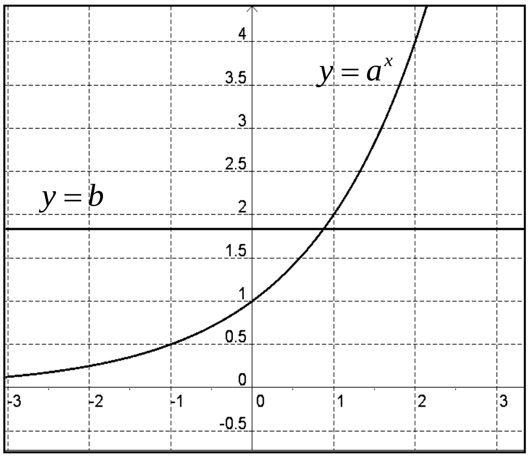
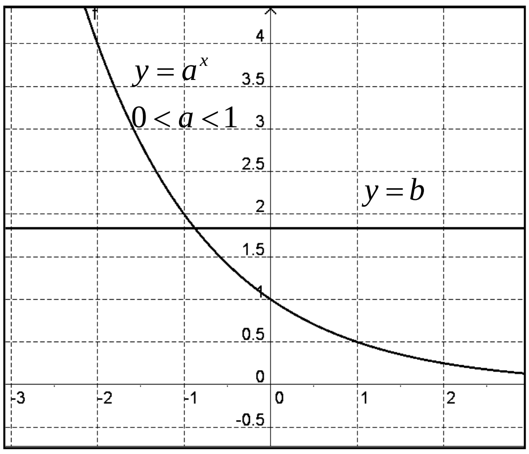
$f(-3)$ គឺ 3 ទសវត្សរ៍មុនរដ្ឋនេះមានប្រជាជន 0,45 លាននាក់



សិស្សឆ្លើយ

បំពេញតារាងតម្លៃលេខ

x	$y=2^x$
-2	0.25
-1	0.50
0	1
1	2
x	$y=2^x$

-ណែនាំសិស្សសង់ក្រាប	សង់ក្រាប  	សង់ក្រាប 
–គ្រូឲ្យទម្រង់សមីការ $b=a^x$ ជា ថាសមីការ អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល	$IV.$ **សមីការនិងវិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** **ក-សមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** សមីការ $b=a^x$ ដែល a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ខុសពី1ហើយ $b>0$ ហៅថាសមីការ អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល **បំណកស្រាយតាមក្រាប**   	–សិស្សសង្កេត
គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការ	<u>ជាទូទៅ</u> ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a>0$; $a\neq 1$ $a^x=a^y$ សមមូល $x=y$ ប្រតិបត្តិ	

$a)4^x=8\quad b)3^{x-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $c)4^{x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3x}$ $d)5^{1-x}=(0,2)^{3x}$ គ្រូដាក់ ប្រតិបត្តិ $1)2^x\le\frac{1}{16}\quad 2)16^n<8^{n+1}$ $3)4^x-6.2^x+8<0$ $4)(0,7)^{0,49}>0,49$	$a)4^x=8\quad ; x=\frac{3}{2}$ $b)3^{x-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad ;\quad x=\frac{3}{2}$ $c)4^{x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3x}\quad ;\quad x=-1$ $d)5^{1-x}=(0,2)^{3x}\quad ;\quad x=\frac{1}{2}$ **ខ-វិសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** គេមានអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y=a^x$ ដែល $a>0$; $a\neq 1$; $x\in IR$ $-$បើ $a>1$ នោះ $y=a^x$ ជាអនុគមន៍កើន ដូចនេះ $a^x\ge a^y$ សមមូល $x\ge y$ $a^x\le a^y$ សមមូល $x\le y$ $-$បើ $0<a<1$ នោះ $y=a^x$ ជាអនុគមន៍ចុះ ដូចនេះ $a^x\ge a^y$ សមមូល $x\le y$ $a^x\le a^y$ សមមូល $x\ge y$ ប្រតិបត្តិៈ ដោះស្រាយវិសមីការ $1)2^x\le\frac{1}{16}\ ;\ x\in(-\infty;4]$ $2)16^n<8^{n+1}\ ;\ x\in(-\infty;3]$ $3)4^x-6.2^x+8<0\quad ; x\in(1;2)$ $4)(0,7)^{0,49}>0,49\quad ;\ x\in(-\infty;2)$	សិស្សឆ្លើយ $a)4^x=8\quad ; x=\frac{3}{2}$ $b)3^{x-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad ;\quad x=\frac{3}{2}$ $c)4^{x-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3x}\quad ;\ x=-1$ $d)5^{1-x}=(0,2)^{3x}\quad ;\quad x=\frac{1}{2}$ សិស្សសង្កេត សិស្សឆ្លើយ $1)2^x\le\frac{1}{16}$ $2^x\le\frac{1}{2^4}\quad ;\quad x\in(-\infty;4]$ $2)16^n<8^{n+1}$ $2^{4n}<2^{3(n+1)}\ ;\quad x\in(-\infty;3]$ $3)4^x-6.2^x+8<0$ $t=2^x;\ t>0\ ;\quad x\in(1;2)$ $4)(0,7)^{0,49}>0,49\ ;\ x\in(-\infty;2)$
-គ្រូសួររូបមន្ត ១)ដូចម្ដេចហៅថាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល? ២)ដោះស្រាយសមីការ $4^{3x-1}=\frac{1}{256}$	*<u>ជំហានទី៤</u>* (ពង្រឹងចំណេះដឹង) ១អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=a^x$ ដែល $x\in IR$ ហើយ a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានខុសពី1 ២) $4^{3x-1}=\frac{1}{256}$ $2^{2(3x-1)}=2^{-8}$ $\underline{x=-1}$	សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍ ១អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាអនុគមន៍កំនត់ដោ $f(x)=a^x$ ដែល $x\in IR$ ហើយ a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានខុសពី1 ២) $4^{3x-1}=\frac{1}{256}$ $2^{2(3x-1)}=2^{-8}$ $\underline{x=-1}$

-គ្រូដាក់លំហាត់ទី១១ដល់ទី១៥ទំព័រ៩៧ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	*<u>ជំហានទី៥</u>* (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី១១ ដល់ ទី១៥ ទំព័រ៩៧	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...២.... **អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍លោការីត**

មេរៀនទី...២.... **អនុគមន៍លោការីត**

(*I.អនុគមន៍ច្រាស*)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញពីសញ្ញាណ អនុគមន៍ច្រាសតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សគណនាអនុគមន៍ច្រាសនិងគូសក្រាបអនុគមន៍ច្រាស តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ................ទី................ខែ..............ឆ្នាំ...........

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី.៣៨.. ដល់ទំព័រទី..៥០..

-ស . គ : ទំព័រទី..៣៨. ដល់ទំព័រទី...៥០.

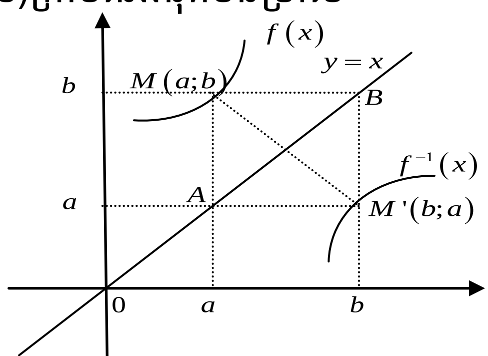
-បន្ទាត់

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*<u>ជំហានទី១</u>* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=2^{x+1}$ $g(x)=2x+2$ គណនា $f(1); f(2); f(3)$ $g(-1); g(0); g(10)$	*<u>ជំហានទី២</u>* (រំលឹកមេរៀនចាស់) $f(1)=2^{1+1}=4$ $f(2)=2^{2+1}=8$ $f(3)=2^{3+1}=16$ $g(-1)=0$ $g(0)=2$ $g(10)=20+2=22$	-សិស្សឆ្លើយ $f(1)=2^{1+1}=4$ $f(2)=2^{2+1}=8$ $f(3)=2^{3+1}=16$ $g(-1)=0$ $g(0)=2$ $g(10)=20+2=22$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី មេរៀនទី.១. **អនុគមន៍លោការីត** -គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍	*<u>ជំហានទី៣</u>* (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.១. **អនុគមន៍លោការីត** *I.* **អនុគមន៍ច្រាស** **ក)សញ្ញាណនៃអនុគមន៍ច្រាស** *Ex.*គេមានអនុគមន៍ពីរ $f \& g$	សិស្សសង្កេតនិងគណនា

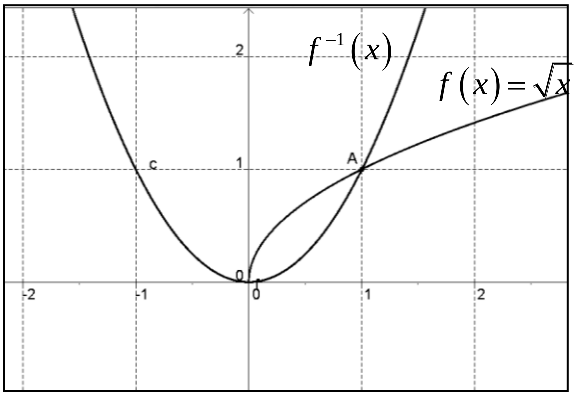
<table>
<tr>
<td>អនុគមន៍ $f \& g$ កំនត់ដោយ
$f(x)=2x+2$
$g(x)=\frac{x}{2}-1$ គណនា
$f(1)=?$ $g(1)=?$
$f(2)=?$ $g(2)=?$
$f(3)=?$ $g(3)=?$
ណែនាំសិស្សសង្កេតគូមានលំដាប់</td>
<td>កំនត់ដោយ $f(x)=2x+2$; $g(x)=\frac{x}{2}-1$
គណនា
$f(1)=4$ $g(4)=1$
$f(2)=6$ $g(6)=2$
$f(3)=8$ $g(8)=3$

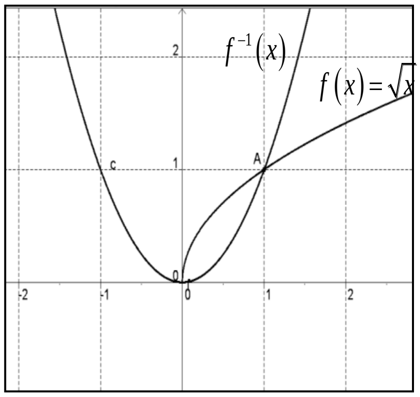
យើងសង្កេតឃើញថា
f & g
$(1;4)$ $(4;1)$
$(2;6)$ $(6;2)$
$(3;8)$ $(8;3)$
មានន័យថាធាតុដើម f ប្រែក្លាយជារូបភាពតាម g ហើយច្រាសមកវិញធាតុដើម g ប្រែក្លាយជារូបភាពតាម f វិញក្នុងករណីនេះ គេថា $g(x)$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $f(x)$
<u>ជាទូទៅ</u>
គេតាងអនុគមន៍ច្រាសនៃ f គឺ f^{-1}
និយមន័យ បើ $(a;b)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $y=f(x)$ ហើយ $(b;a)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $y=f^{-1}(x)$ នោះ f^{-1} ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)$</td>
<td>$f(1)=4$ $g(4)=1$
$f(2)=6$ $g(6)=2$
$f(3)=8$ $g(8)=3$

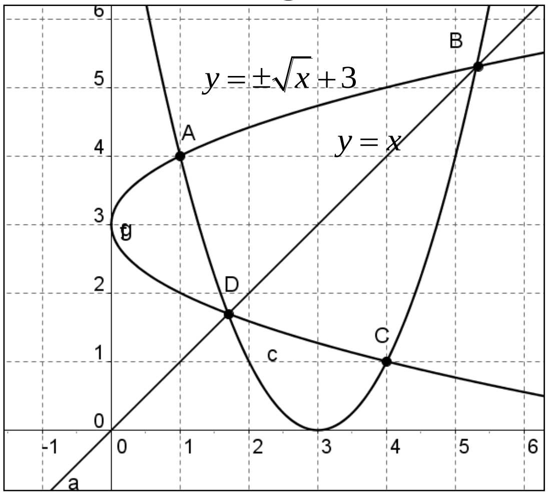
គូមានលំដាប់
f & g
$(1;4)$ $(4;1)$
$(2;6)$ $(6;2)$
$(3;8)$ $(8;3)$</td>
</tr>
<tr>
<td>គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ
កំណត់អនុគមន៍ច្រាសនៃ
$f(x)=\frac{1}{x+2}$
$g(x)=\frac{x-1}{x}$
$h(x)=x^2$</td>
<td>ប្រតិបត្តិ
$f(x)=\frac{1}{x+2}$ $f^{-1}(x)=\frac{1-2x}{x}$
$g(x)=\frac{x-1}{x}$ មាន $g^{-1}(x)=\frac{1}{1-x}$
$h(x)=x^2$ $h^{-1}(x)=\sqrt{x}$; $x\geq 0$
ខ)ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាស


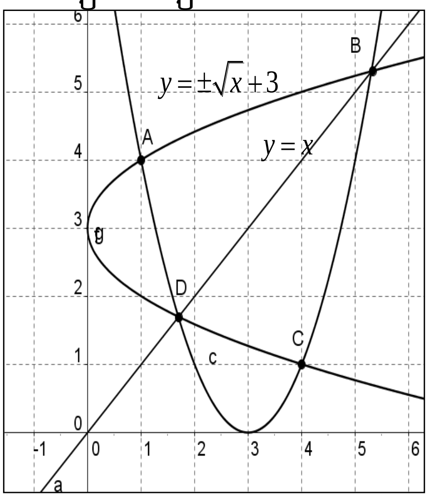
ចំនុច $M(a;b)$ ឆ្លុះគ្នានឹង $M'(b;a)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ (AB)</td>
<td>សិស្សដោះស្រាយ
$f^{-1}(x)=\frac{1-2x}{x}$
$g^{-1}(x)=\frac{1}{1-x}$
$h^{-1}(x)=\sqrt{x}$; $x\geq 0$

–សិស្សសង្កេត</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>-ណែនាំសិស្សសង់ក្រាប
គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x}$
ដែល $x\ge 0$ ។
ចូរកំណត់អនុគមន៍
ច្រាសនៃ f រួចសង់ក្រាប
បំពេញតារាង
<table>
<tr><td colspan="2">$f(x)=\sqrt{x}$</td><td colspan="2">$f^{-1}(x)=x^2$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$f(x)$</td><td>x</td><td>$f^{-1}(x)$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>?</td><td>0</td><td>?</td></tr>
<tr><td>1</td><td>?</td><td>1</td><td>?</td></tr>
<tr><td>4</td><td>?</td><td>2</td><td>?</td></tr>
</table>
</td>
<td>ដូចនេះក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាស f^{-1}ត្រូវឆ្លុះនឹងក្រាបអនុគមន៍ f ធៀបនឹងបន្ទាត់(AB)
<u>ជាទូទៅ</u> បើអនុគមន៍ពីរ $f(x)\&g(x)$ ច្រាសគ្នានោះក្រាបនៃអនុគន៍ទាំងពីរឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។
ប្រតិបត្តិ
គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x}$ ដែល $x\ge 0$ ។
ចូរកំណត់អនុគមន៍ច្រាសនៃ f
រួចសង់ក្រាប
<table>
<tr><td colspan="2">$f(x)=\sqrt{x}$</td><td colspan="2">$f^{-1}(x)=x^2$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$f(x)$</td><td>x</td><td>$f^{-1}(x)$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr>
</table>
ក្រាបនៃអនុគមន៍


</td>
<td>សិស្សឆ្លើយ
<table>
<tr><td colspan="2">$f(x)=\sqrt{x}$</td><td colspan="2">$f^{-1}(x)=x^2$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$f(x)$</td><td>x</td><td>$f^{-1}(x)$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr>
</table>


</td>
</tr>
<tr>
<td>-គ្រូសួររូបមន្ត
គេមានអនុគមន៍
$f(x)=(x-3)^2$
ក)សង់ក្រាបតាង f
ខ)តើមានអនុគមន៍
ច្រាសរឺទេ?</td>
<td><u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង)


<u>$f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}+3$</u>គ្មានទំនាក់ទំនងច្រាសទេ</td>
<td>សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍


$f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}+3$
គ្មានទំនាក់ទំនងច្រាសទេ</td>
</tr>
</table>

-គ្រូដាក់លំហាត់ទី១ដល់ទី៣ទំព័រ៦៤ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍។	*<u>ជំហានទី៥</u>* (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី១ ដល់ ទី៣ ទំព័រ៦៤	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្ដាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

កំរិតមូលដ្ឋាន

ជំពូក ទី...២.... អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងអនុគមន៍លោការីត

មេរៀនទី...២.... **អនុគមន៍លោការីត**

(*II.អនុគមន៍លោការីត*)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញពីសញ្ញាណនៃអនុគមន៍លោការីត តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សគណនាលោការីតនិងសង់ក្រាបតាងអនុគមន៍លោការីត តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ................ទី................ខែ..............ឆ្នាំ...........

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី.៥១.. ដល់ទំព័រទី..៥៥..

-ស . គ : ទំព័រទី..៣៨. ដល់ទំព័រទី...៥០.

-បន្ទាត់

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ 1) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ 2) $g(x)=\frac{x-1}{x}$ 3) $y^2=x\ ;\ x>0$	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) 1) $f(x)=\frac{1}{x+1}\ ;\ f^{-1}(x)=\frac{1-x}{x}$ 2) $g(x)=\frac{x-1}{x}\ ;\ f^{-1}(x)=\frac{1}{1-x}$ 3) $y^2=x\ ;\ x>0\ ;\ y=\sqrt{x}$	-សិស្សឆ្លើយ 1) $f(x)=\frac{1}{x+1}\ ;\ f^{-1}(x)=\frac{1-x}{x}$ 2) $g(x)=\frac{x-1}{x}\ ;\ f^{-1}(x)=\frac{1}{1-x}$ 3) $y^2=x\ ;\ x>0\ ;\ y=\sqrt{x}$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី មេរៀនទី.១. **អនុគមន៍លោការីត** -គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.១. **អនុគមន៍លោការីត** *II.* **អនុគមន៍លោការីត** **ក)សញ្ញាណនៃអនុគមន៍លោការីត** *Ex.* គេមានសមីការ	សិស្សសង្កេតនិងគណនា

$1)x^2=3$ $2)y^2=x\ ;(x>0)$ $3)2^x=3$ គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ $1)\log_2 64$ $2)\log_3 243$ $3)\log_2\frac{1}{16}$ $4)\log_2 1$ $5)\log_4\frac{1}{4}$ $6)\log_{\frac{1}{5}} 25$ -ណែនាំសិស្សសង្កេត រូបមន្តនិងសំរាយ	$1)x^2=3$ $2)y^2=x\ ;(x>0)$ $3)2^x=3$ $x=?$ គេបានតម្លៃ $x=\log_2 3$ ហៅថាលោការីតគោល 2 នៃ 3 គេបានអនុគមន៍ $y=\log_2 x$ ហៅថាអនុគមន៍លោការីតវាជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល <u>ជាទូទៅ</u> បើគេមាន $a^x=y$ នោះ $x=\log_a y\ ;\ y>0\,;a>0;a\neq 1$ ហើយ $f(x)=a^x$ មានអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x)=\log_a x$ ជាអនុគមន៍លោការីតគោល a នៃ x ។ <u>ចំណាំ</u> បើ $a=10$ នោះ $\log_{10} a=\log a$ ហៅថា **លោការីតទសភាគ** ប្រតិបត្តិ គណនាតម្លៃ $1)\log_2 64$ $2)\log_3 243$ $3)\log_2\frac{1}{16}$ $4)\log_2 1$ $5)\log_4\frac{1}{4}$ $6)\log_{\frac{1}{5}} 25$ **ខ)លក្ខណៈនៃលោការីត** ដោយ $a^1=a$ នោះ $\log_a a=1$ ហើយ $a^0=1$ នោះ $\log_a 1=0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន $x;y$ និង $a\neq 1$ គេបាន: $*\log_a(x.y)=\log_a x+\log_a y$ $*\log_a x^n=n\log_a x$ $*\log_a a=1$ $*\log_a a^x=x$ សម្រាយបញ្ជាក់	$1)x^2=3\ ;\ x=\pm\sqrt{3}$ $2)y^2=x\ ;\ y=\sqrt{x}\,(x>0)$ $3)2^x=3$ $x=?$ សិស្សឆ្លើយ $1)\log_2 64$ $x=\log_2 64$ $2^x=64$ $2^x=2^6$ $x=6$ $2)\log_3 243\ ;\ x=5$ $3)\log_2\frac{1}{16}\ ;\ x=-4$ $4)\log_2 1\ ;\ x=0$ $5)\log_4\frac{1}{4}\ ;\ x=-1$ $6)\log_{\frac{1}{5}} 25\ ;\ x=-2$ សិស្សសង្កេត តាង $m=\log_a x\ ;\ n=\log_a y$ $a^m=x\ ;\ a^n=y$ សម្រាយបញ្ជាក់

–គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ:

គណនា

1) $\log_5 89$

2) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}$

3) $\log_{0,5} \sqrt[3]{4}$

4) $\log_{0,2} 25^{\frac{2}{3}}$

5) $\log_{\sqrt[3]{7}} \log_2 2^{\sqrt{3}}$

គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍:

គណនាតម្លៃលេខនិង

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$f(x)=\log_2 x$ ដោយឲ្យ

សិស្សបំពេញតារាង

$x.y = a^{m+n}$

$m+n=\log_a(x.y)$

$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$

$a^{m-n}=\dfrac{x}{y}$

$m-n=\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

$\log_a x^n=\log_a \underbrace{(x.x.x.\ldots\ldots\ldots\ldots x)}_{n}$

$\log_a x^n=\log_a x+\log_a x+\ldots.+\log_a x$

$m=\log_a x$

$a^m=x$

$(x^n)^m=x^{m.n}$

$(\log_a x)(\log_x a)=1$

$\log_a x=\dfrac{1}{\log_x a}$

ប្រតិបត្តិ

1) $\log_5 89=\dfrac{\log 89}{\log 5}=2.7889$

2) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{5}=\dfrac{\frac{1}{2}\log 5}{\frac{1}{2}\log 2}=2.3219$

3) $\log_{0,5}\sqrt[3]{4}=\log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{2}{3}}=-\dfrac{2}{3}$

4) $\log_{0,2} 25^{\frac{2}{3}}=\log_{\frac{1}{5}} 5^{\frac{4}{3}}=-\dfrac{4}{3}$

5) $\log_{\sqrt[3]{7}}\log_2 2^{\sqrt{3}}=\log_{\sqrt[3]{7}}\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}\log_7 3$

គ)ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត

ឧទាហរណ៍:គណនាតម្លៃលេខនិងសង់

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\log_2 x$

តារាងត្រូវគ្នានៃ x & y

x	-2	-1	0	1	2
$y=2^x$	$0,25$	$0,5$	1	2	4

$x.y = a^{m+n}$

$m+n=\log_a(x.y)$

$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$

$a^{m-n}=\dfrac{x}{y}$

$m-n=\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)$

$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

$\log_a x^n=\log_a \underbrace{(x.x.x.\ldots\ldots\ldots\ldots x)}_{n}$

$\log_a x^n=\log_a x+\log_a x+\ldots.+\log_a x$

$m=\log_a x$

$a^m=x$

$(x^n)^m=x^{m.n}$

$(\log_a x)(\log_x a)=1$

$\log_a x=\dfrac{1}{\log_x a}$

សិស្សឡើងដោះស្រាយ

1) $\log_5 89=\dfrac{\log 89}{\log 5}=2.7889$

2) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{5}=\dfrac{\frac{1}{2}\log 5}{\frac{1}{2}\log 2}=2.3219$

3) $\log_{0,5}\sqrt[3]{4}=\log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{2}{3}}=-\dfrac{2}{3}$

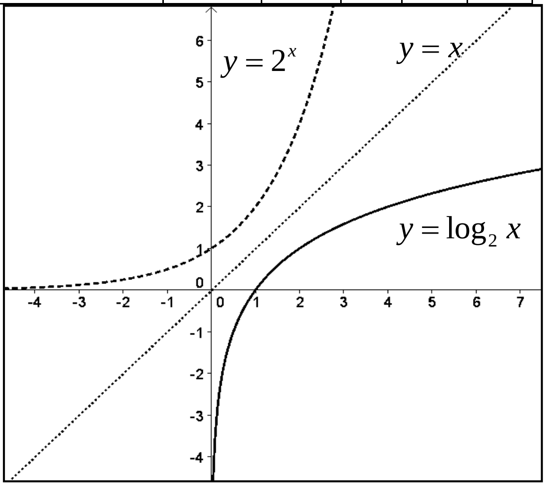
4) $\log_{0,2} 25^{\frac{2}{3}}=\log_{\frac{1}{5}} 5^{\frac{4}{3}}=-\dfrac{4}{3}$

5) $\log_{\sqrt[3]{7}}\log_2 2^{\sqrt{3}}=\log_{\sqrt[3]{7}}\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}\log_7 3$

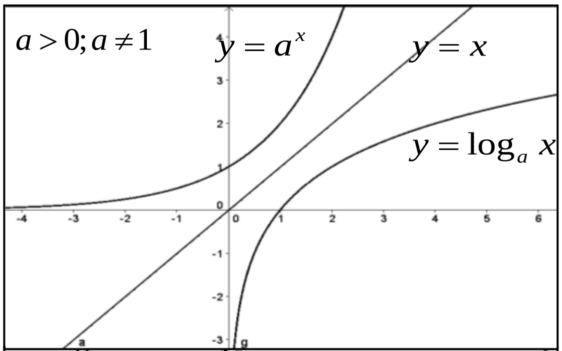
x	$y=2^x$	x	$y=\log_2 x$
-2	$0,25$	$0,25$	-2
-1	$0,5$	$0,5$	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2

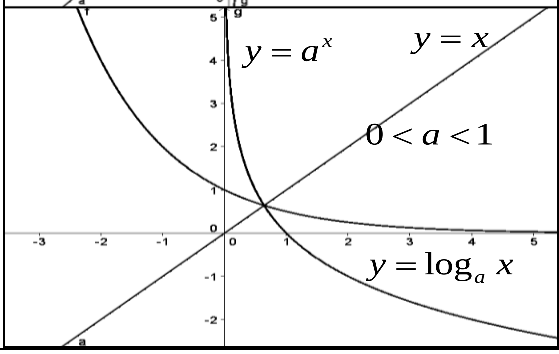
<table>
<tr>
<td></td>
<td>

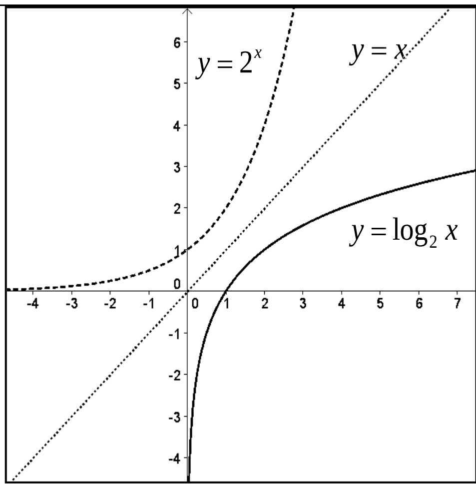
x	$0,25$	$0,5$	1	2	4
$y=\log_2 x$	-2	-1	0	1	2



<u>ជាទូទៅ</u> អនុគមន៍ $y=a^x$ និង $y=\log_a x$





</td>
<td>


សិស្សសង្កេត
</td>
</tr>
<tr>
<td>
-គ្រូសួររូបមន្ត
$a)\log_a(x.y)=?$
$b)\log_a x^n=?$
$c)\log_a a=?$
$d)\log_a a^x=?$
</td>
<td>
<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង)
$a)\log_a(x.y)=\log_a x+\log_a y$
$b)\log_a x^n=n\log_a x$
$c)\log_a a=1$
$d)\log_a a^x=x$
</td>
<td>
សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍
$a)\log_a(x.y)=\log_a x+\log_a y$
$b)\log_a x^n=n\log_a x$
$c)\log_a a=1$
$d)\log_a a^x=x$
</td>
</tr>
<tr>
<td>
-គ្រូដាក់លំហាត់
ទី៤ដល់ទី៥ទំព័រ៦៥
ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិង
ណែនាំសិស្សគោរព
វិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍
</td>
<td>
<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ)
លំហាត់ទី៤ ដល់ ទី៥ ទំព័រ៦៥
</td>
<td>
-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់
ដំបូន្មានគ្រូ
</td>
</tr>
</table>

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៣.... **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

មេរៀនទី..៣.... **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

(IV.សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញពីដឺក្រេ រ៉ាដ្យង់និងត្រីកោណមាត្រតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សបំលែងពីដឺក្រេ ទៅ រ៉ាដ្យង់និងពីរ៉ាដ្យង់ទៅ ដឺក្រេ ហើយគណនាត្រីកោណមាត្រតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ...............ទី...............ខែ.............ឆ្នាំ.........

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី ៧៩.. ដល់ទំព័រទី.៨៥.

-ស . គ : ទំព័រទី.៧៩.. ដល់ទំព័រទី..៨៥..

-បន្ទាត់ ក្រដាសរង្វង់

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=?$ $\sin(\pi+\theta)=?$ គណនាតម្លៃកន្សោម $y=\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ បើ $\alpha=\frac{\pi}{4}$	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $y=\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ បើ $\alpha=\frac{\pi}{4}$ $y=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{0}$ គ្មានន័យ	-សិស្សឆ្លើយ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $y=\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ បើ $\alpha=\frac{\pi}{4}$ $y=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $=\frac{1}{0}$
–គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី មេរៀនទី.១.**អនុគមន៍ ត្រីកោណមាត្រ**	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.៣. **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**	–សិស្សកត់ត្រា

–ណែនាំសិស្សសង្កេតដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ តើ អនុគមន៍ស៊ីនុសកំណត់លើអ្វី? តើអនុគមន៍កូស៊ីនុសកំណត់លើអ្វី? តើ អនុគមន៍តង់សង់កំណត់ លើអ្វី? តើ អនុគមន៍កូតង់សង់កំណត់ លើអ្វី? ប្រតិបត្តិ រកខួបនៃអនុគមន៍ $y=\sin\frac{1}{2}x$ $y=3\tan\frac{1}{2}x$	***IV.សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ*** ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ គេត្រូវរកៈ **–ក ដែនកំណត់** $\otimes$អនុគមន៍ស៊ីនុសកំណត់លើ ℝ $\otimes$អនុគមន៍កូស៊ីនុសកំណត់លើ ℝ $\otimes$ អនុគមន៍តង់សង់កំណត់បានលុះត្រាតែ $\cos x\neq 0$; $x\neq(1+2k)\frac{\pi}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$ នោះដែនកំណត់ $D=IR-\left\{(1+2k)\frac{\pi}{2}\right\}$ $\otimes$ អនុគមន៍កូតង់សង់កំណត់បានលុះត្រាតែ $\sin x\neq 0$; $x\neq(k\pi)$; $k\in\mathbb{Z}$ នោះដែនកំណត់ $D=IR-\{(k\pi)\}$ **–ខ ខួបនៃអនុគមន៍** **និយមន័យ** អនុគមន៍មានដែនកំណត់ D f ជាអនុគមន៍មានខួប p លុះត្រាតែ p ជាចំនួនតូចបំផុតដែល $\forall x\in D:\ f(x+p)=f(x)$ តាមនិយមន័យគេអាចទាញបាន $f(x)=f(x+p)=f((x+p)+p)=.........$ $f(x)=f(x-p)=f((x-p)-p)=.........$ ជាទូទៅអនុគមន៍ $y=\sin ax$ និង $y=\cos ax$ មានខួប $p=\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$ អនុគមន៍ $y=\tan ax$ និង $y=\cot ax$ មានខួប $p=\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$ ខួបនៃអនុគមន៍ $y=\sin\frac{1}{2}x$; $T=8\pi$ $y=3\tan\frac{1}{2}x; T=2\pi$ **គ ភាពគូនិងភាព សេស**	អនុគមន៍ស៊ីនុសកំណត់លើ ℝ អនុគមន៍កូស៊ីនុសកំណត់លើ ℝ អនុគមន៍តង់សង់កំណត់បានលុះត្រាតែ $\cos x\neq 0$ នោះដែនកំណត់ $D=IR-\left\{(1+2k)\frac{\pi}{2}\right\}$ អនុគមន៍កូតង់សង់កំណត់បានលុះត្រាតែ $\sin x\neq 0$; $x\neq(k\pi)$ នោះដែនកំណត $D=IR-\{(k\pi)\}$ ខួបនៃអនុគមន៍ $y=\sin\frac{1}{2}x$; $T=8\pi$ $y=3\tan\frac{1}{2}x; T=2\pi$

-គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយវិសមីការ $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>\sin x$	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>\sin x$ $\Leftrightarrow \sin x-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<0$ $\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x-x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)<0$ $\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<0$ $\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<0$ $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+2k\pi<x-\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$	សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍ $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>\sin x$ $\Leftrightarrow \sin x-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<0$ $\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x-x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)<0$ $\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<0$ $\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)<0$ $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+2k\pi<x-\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$
-គ្រូដាក់លំហាត់ទី៩និង១០ ទំព័រ១១២ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី៩និងលេខ១០ ទំព័រ ១១២	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៣....　　**អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

មេរៀនទី..1　　**អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

1. រង្វាស់មុំ

2. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញពីដឺក្រេ រ៉ាដ្យង់និងត្រីកោណមាត្រតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សបំលែងពីដឺក្រេ ទៅ រ៉ាដ្យង់និងពីរ៉ាដ្យង់ទៅ ដឺក្រេ
ហើយគណនាត្រីកោណមាត្រតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ..............ទី...............ខែ............ឆ្នាំ.........

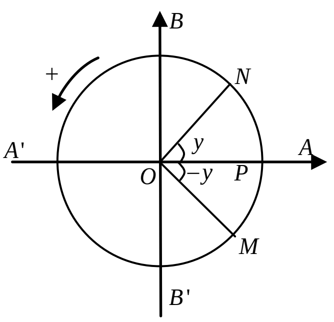
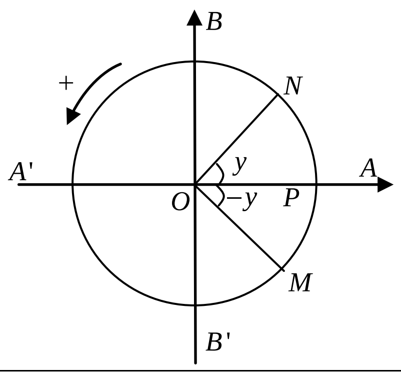
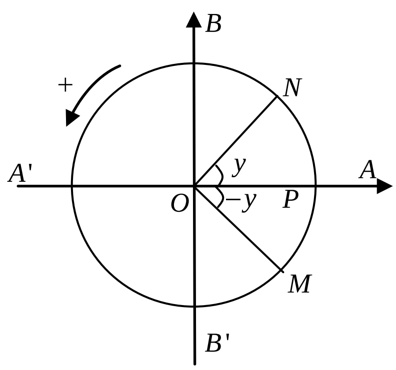
III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

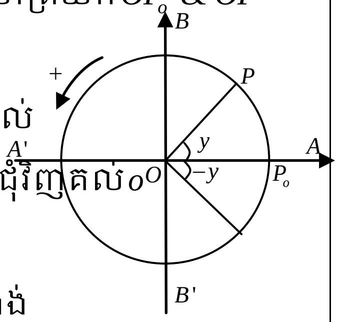
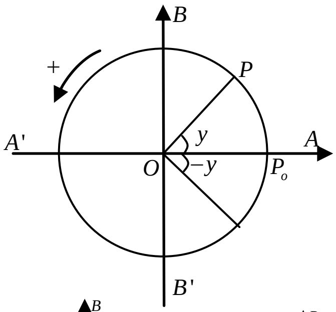
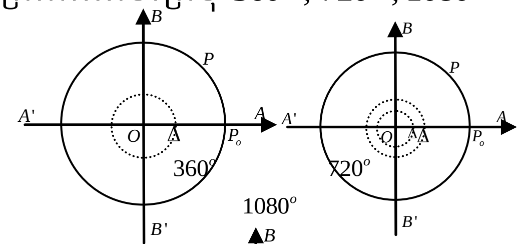
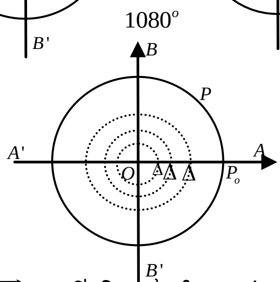
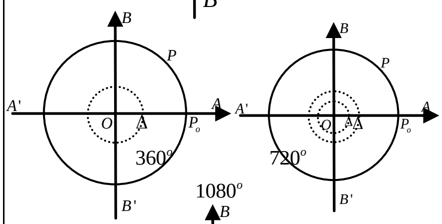
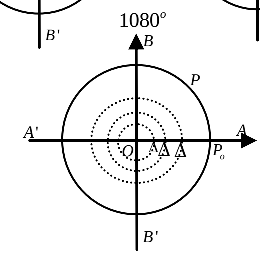
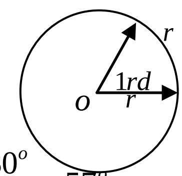
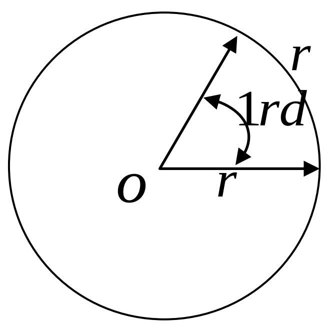
-ស . ស :ទំព័រទី ៦៨.. ដល់ទំព័រទី.៧៣.

-ស . គ : ទំព័រទី.៦៨.. ដល់ទំព័រទី..៧៣..

-បន្ទាត់ ក្រដាសរង្វង់

IV.<u>ដំណឹកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ចូរដាក់ឈ្មោះអនុគមន៍ តើអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍អ្វី?  	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) អនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ  	-សិស្សឆ្លើយ អនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ 
–គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី)	–សិស្សកត់ត្រា

មេរៀនទី.១. **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**	មេរៀនទី.៣. **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ** I.**រង្វាស់មុំ** **ក)ការកំណត់មុំមានទិសដៅ**	
ណែនាំសិស្សគូសរង្វង់ និងគូសអ័ក្សពីរកែងគ្នា	ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រយក $\overrightarrow{OP_o}$ & $\overrightarrow{OP}$ មកកំណត់ទិសដៅ $\overrightarrow{OX}$ ហៅថាវ៉ិចទ័រគល់ $\overrightarrow{OP}$ ជាវ៉ិចទ័រចល័តជុំវិញគល់ o ហៅថាវ៉ិចទ័រចុង 	សិស្សគូសរូប 
ឧទាហរណ៍ ចូរគូសមុំក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ៖ 360^o ; 720^o ; 1080^o	ឧទាហរណ៍៖ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រមុំ 360^o ; 720^o ; 1080^o   <u>ជាទូទៅ</u> $\overrightarrow{OP_o}$ & $\overrightarrow{OP}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រកំណត់បានមុំ $\alpha + k.360^o$; $(k \in \mathbb{Z})$ សំគាល់មុំ α និង $\alpha + 360^o$ មានរង្វាស់ខុសគ្នាប៉ុន្តែមានវ៉ិចទ័រគល់និងវ៉ិចទ័រចុងដូចគ្នា	 
ឧទាហរណ៍គណនារង្វាស់មុំ $\alpha = 45^o + K.360^o$ ក្នុងករណី $K=1$ & $K=-1$	ចំពោះ $K=1$ នោះ $\alpha = 405^o$ ចំពោះ $K=-1$ នោះ $\alpha = -315^o$	
ណែនាំសិស្សវាស់មុំផ្ចិតដែលស្កាត់ធ្នូមួយមានប្រវែងស្មើនឹងកាំរង្វង់	**២រង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់** និយមន័យ៖ ១រ៉ាដ្យង់ជារង្វាស់មុំផ្ចិតដែលស្កាត់ធ្នូមួយមានប្រវែងស្មើនឹងកាំរង្វង់ហើយគេកំណត់សរសេរ $1rd$ ។  សំគាល់ $1^o = \frac{\pi}{180} \approx 0.017$; $1rd = \frac{180^o}{\pi} \approx 57^o$ $2\pi(rd) = 360^o$	
ប្រតិបត្តិ៖ប្តូរមុំពី	ជាទូទៅ $(\overrightarrow{OP_o}, \overrightarrow{OP}) = \alpha + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$	

$30^o;\ 45^o;\ 150^o$ ជារ៉ាដ្យង់

– ណែនាំសិស្សគូសរង្វង់ត្រីកោណមាត្រផ្ចិត o កាំ R

P ជាចំនុចនៅលើរង្វង់

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\theta$

គូសអ័ក្ស

$(x'x);(y'y);(u'u);(v'v)$

ប្រតិបត្តិ

$a)2\sin\frac{\pi}{3}+4\cos\frac{\pi}{6}-3\tan\frac{\pi}{3}+4\cot\frac{\pi}{4}$

$b)\dfrac{5-4\tan^2 45^o+\cot^2 60^o}{2\cos^2 60^o-2\sin^3 90^o+4\tan 45^o}$

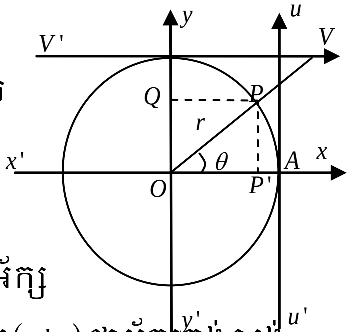
ប្រតិបត្តិ

ប្តូរមុំពី $30^o;\ 45^o;\ 150^o$ ជារ៉ាដ្យង់

$30^o=\frac{\pi}{6}\ ;45^o=\frac{\pi}{4};150^o=\frac{5\pi}{6}$

II.អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

១ ស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់ស្យង់ កូតង់សង់



– អ័ក្ស $(x'x)$ ជាអ័ក្សកូស៊ីនុស

– អ័ក្ស $(y'y)$ ជាអ័ក្សស៊ីនុស

– អ័ក្ស $(v'v)$ ជាអ័ក្សកូតង់សង់ – អ័ក្ស $(u'u)$ ជាអ័ក្សតង់សង់

ដូចនេះ៖ **<u>គេបានស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់ និង កូតង់សង់ជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ</u> ជាទូទៅ**

តារាងតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំខ្លះៗ

អនុមុំ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ប្រតិបត្តិ គណនា៖

$$a)2\sin\frac{\pi}{3}+4\cos\frac{\pi}{6}-3\tan\frac{\pi}{3}+4\cot\frac{\pi}{4}$$

$$=2.\frac{\sqrt{3}}{2}+4.\frac{\sqrt{3}}{2}-3\sqrt{3}+4.1=4$$

$$b)\frac{5-4\tan^2 45^o+\cot^2 60^o}{2\cos^2 60^o-2\sin^3 90^o+4\tan 45^o}$$

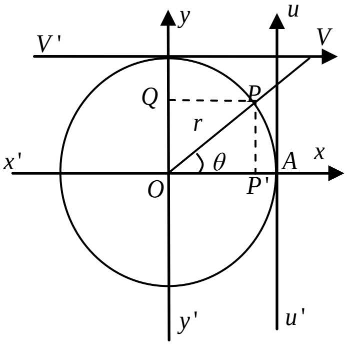
$$=\frac{5-4+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}{2.\left(\frac{1}{2}\right)^2-2+4}=\frac{8}{15}$$

២ សញ្ញានៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ប្តូរមុំពី $30^o;\ 45^o;\ 150^o$ ជារ៉ាដ្យង់

$30^o=\frac{\pi}{6}\ ;45^o=\frac{\pi}{4};150^o=\frac{5\pi}{6}$

សិស្សឡើងគូស

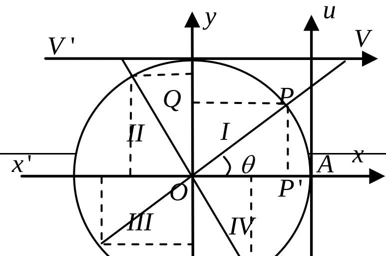


$$a)2\sin\frac{\pi}{3}+4\cos\frac{\pi}{6}-3\tan\frac{\pi}{3}+4\cot\frac{\pi}{4}$$

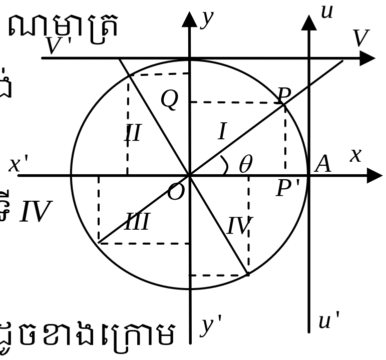
$$=2.\frac{\sqrt{3}}{2}+4.\frac{\sqrt{3}}{2}-3\sqrt{3}+4.1=4$$

$$b)\frac{5-4\tan^2 45^o+\cot^2 60^o}{2\cos^2 60^o-2\sin^3 90^o+4\tan 45^o}$$

$$=\frac{5-4+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}{2.\left(\frac{1}{2}\right)^2-2+4}=\frac{8}{15}$$



<table>
<tr>
<td>ណែនាំសិស្សបំពេញសញ្ញាក្នុងតារាងតាមកាដ្រង់នីមួយៗ</td>
<td>ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ មានបួនកាដ្រង់ គឺកាដ្រង់ទី I ទី II ទី III និងទី IV



តារាងសង្ខេបដូចខាងក្រោម

<table>
<tr><th>អនុ / កាដ្រង់</th><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>IV</th></tr>
<tr><td>sin</td><td>+</td><td>+</td><td>−</td><td>−</td></tr>
<tr><td>cos</td><td>+</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td></tr>
<tr><td>tan</td><td>+</td><td>−</td><td>+</td><td>−</td></tr>
<tr><td>cot</td><td>+</td><td>−</td><td>+</td><td>−</td></tr>
</table></td>
<td><table>
<tr><th>អនុ</th><th>sin</th><th>cos</th><th>tan</th><th>cot</th></tr>
<tr><td>I</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>II</td><td>+</td><td>−</td><td>−</td><td>−</td></tr>
<tr><td>III</td><td>−</td><td>−</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>−</td><td>+</td><td>−</td><td>−</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>-គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ
១)តើអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រមានអ្វីខ្លះ?
២)តើមុំនៅកាដ្រង់ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ
$\begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos < o \end{cases}$</td>
<td><u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង)
១)_ស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់ និង កូតង់សង់ជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ
២)នៅកាដ្រង់ទី III</td>
<td>សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍
១)ស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់និង កូតង់សង់ជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ
២)នៅកាដ្រង់ទី III</td>
</tr>
<tr>
<td>-គ្រូដាក់លំហាត់ទី១និង៣ ទំព័រ៨៦ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះ</td>
<td><u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ)

លំហាត់ទី១និងលេខ៣ ទំព័រ ៨៦</td>
<td>-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ</td>
</tr>
</table>

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៣....　　**អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

មេរៀនទី..៣....　　**អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

(*III.លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ*)

កំរិតមូលដ្ឋាន

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញពីលក្ខណៈនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សបំលែងរូបមន្តមុំផ្ទុំ មុំបំពេញ មុំបន្ថែម មុំដែលមានផលសងស្មើπ និង មុំដែលមានផលសងស្មើ$\frac{\pi}{2}$តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ..............ទី..............ខែ............ឆ្នាំ.........

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី ៦៨.. ដល់ទំព័រទី.៧៣.

-ស . គ : ទំព័រទី.៦៨.. ដល់ទំព័រទី..៧៣..

-បន្ទាត់ ក្រដាសរង្វង់

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>*ជំហានទី១*</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ចូរគណនាតម្លៃកន្សោមៈ $A=2\sin\frac{2\pi}{4}-3\tan^2\frac{\pi}{6}+2\cos$ $B=\sin^2\theta+\cos^2\theta$ ករណី $i)\theta=\frac{\pi}{6}$; $ii)\theta=\frac{4\pi}{3}$	<u>*ជំហានទី២*</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) $A=2\sin\frac{2\pi}{4}-3\tan^2\frac{\pi}{6}+2\cos^4\frac{\pi}{2}+3\cot^2\frac{\pi}{4}$ $A=2-3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+2.0^4+3.1^2=4$ $i)B=\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $B=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$ $ii)B=\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ $B=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$	-សិស្សឆ្លើយ $A=2\sin\frac{2\pi}{4}-3\tan^2\frac{\pi}{6}+2\cos^4\frac{\pi}{2}+$ $A=2-3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+2.0^4+3.1^2=4$ $i)B=\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $B=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$ $ii)B=\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ $B=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$

<table>
<tr>
<td>

–គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី

មេរៀនទី.១.

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

</td>
<td>

<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី)

មេរៀនទី.៣.

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

III. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ក)ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ

</td>
<td>

–សិស្សកត់ត្រា

</td>
</tr>
<tr>
<td>

ណែនាំសិស្សគូសរង្វង់

និងគូសអ័ក្សពីកែងគ្នា

ដៅចំនុច $P;Q;R$

តាមពីតាគ័រ

$OP^2=?$ ចូរសន្និដ្ឋាន

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=?$

ឧតាហរណ៍ សម្រួល

$a)1+\tan^2\theta$

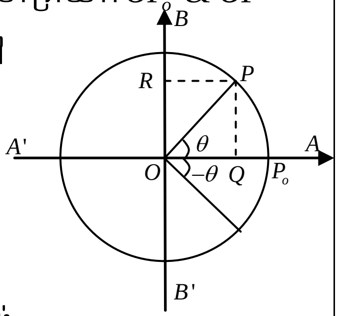
$b)1+\cot^2\theta$

</td>
<td>

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រយក $\overrightarrow{OP_o}$ & $\overrightarrow{OP}$

មកកំណត់ទិសដៅ

តាមពីតាគ័រ



$OP^2=OQ^2+QP^2$

$OP^2=OQ^2+OR^2$

$OP^2=1$

ព្រោះ OP ជាកាំរង្វង់

នោះ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$a)1+\tan^2\theta=1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

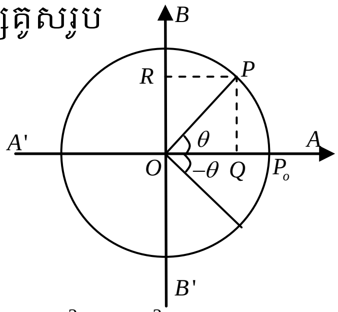
$b)1+\cot^2\theta=1+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

សន្និដ្ឋាន $\boxed{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

$\boxed{1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\ ;1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}}$

</td>
<td>

សិស្សគូសរូប



$OP^2=OQ^2+QP^2$

$OP^2=OQ^2+OR^2$

$OP^2=1$

សន្និដ្ឋាន $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$a)1+\tan^2\theta=1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$b)1+\cot^2\theta=1+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

ណែនាំសិស្សគូសរង្វង់

និងគូសអ័ក្សពីកែងគ្នា

ដៅចំនុច $P;A$

រួចសន្និដ្ឋាន

$\sin(\theta+2k\pi)=?$

$\cos(\theta+2k\pi)=?$

$\tan(\theta+2k\pi)=?$

$\cot(\theta+2k\pi)=?$

ប្រតិបត្តិ

$\sin\dfrac{9\pi}{4}$

$\cos\left(-\dfrac{17\pi}{13}\right)$

$\sin\left(\dfrac{11\pi}{3}\right)$

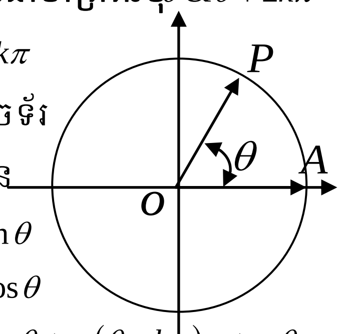
</td>
<td>

២អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំ θ&$\theta+2k\pi$

ដោយមុំ θ&$\theta+2k\pi$

ជាមុំកំនត់ដោយវ៉ិចទ័រ

$\overrightarrow{OA}$&$\overrightarrow{OP}$ សន្និដ្ឋាន



$\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta$

$\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$

$\tan(\theta+2k\pi)=\tan\theta;\tan(\theta+k\pi)=\tan\theta;$

$\cot(\theta+2k\pi)=\cot\theta;\cot(\theta+k\pi)=\cot\theta$

ប្រតិបត្តិ សម្រួល

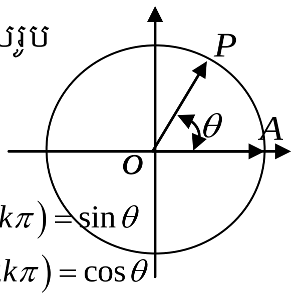
$\sin\dfrac{9\pi}{4}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+4\pi\right)=1$

$\cos\left(-\dfrac{17\pi}{13}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-6\pi\right)=\dfrac{1}{2}$

$\sin\left(\dfrac{11\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{-\pi}{3}+2\pi\right)=-\dfrac{1}{2}$

</td>
<td>

សិស្សគូសរូប



$\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta$

$\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$

$\tan(\theta+2k\pi)=\tan\theta$

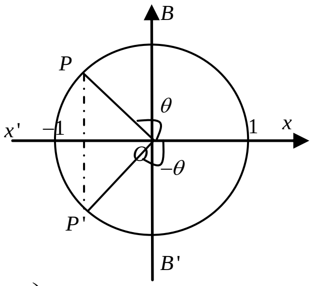
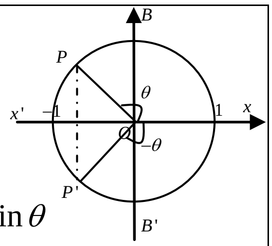
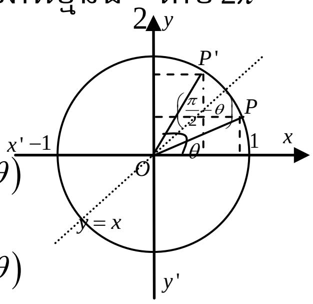
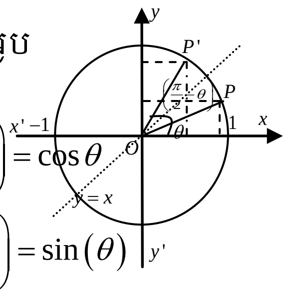
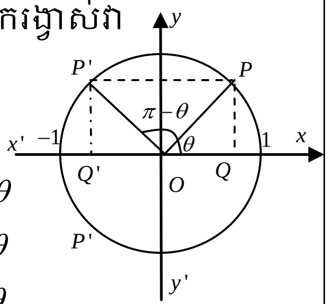
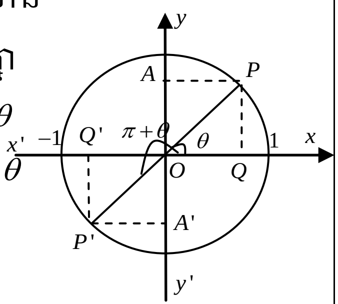
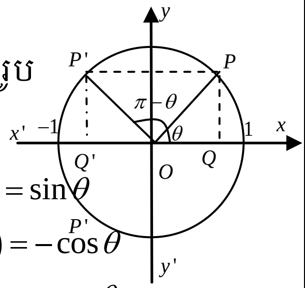
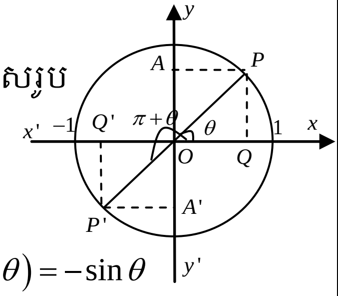
$\cot(\theta+2k\pi)=\cot\theta$

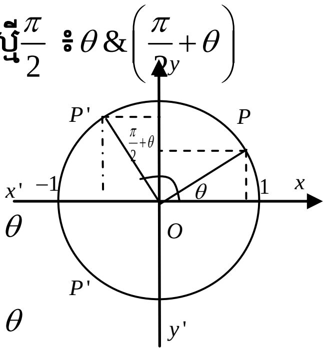
$\sin\dfrac{9\pi}{4}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+4\pi\right)=1$

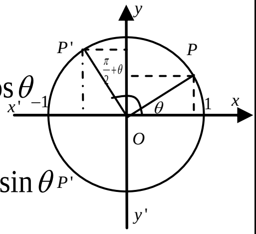
$\cos\left(-\dfrac{17\pi}{13}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-6\pi\right)=\dfrac{1}{2}$

$\sin\left(\dfrac{11\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{-\pi}{3}+2\pi\right)=-\dfrac{1}{2}$

</td>
</tr>
</table>

ណែនាំសិស្សគូសរង្វង់ និងគូសអ័ក្សពីកែងគ្នា និងដៅចំនុច $P;P'$រួច សនិដ្ឋាន $\sin(-\theta)=?$ $\cos(-\theta)=?$ $\tan(-\theta)=?$ $\cot(-\theta)=?$	**គ មុំផ្ទុំ** **១មុំផ្ទុយគ្នា** $\theta\&-\theta$ ជាមុំពីរដែលផលបូកវា ស្មើសូន្យតាម π  $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ $\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$ $\cot(-\theta)=-\cot(\theta)$	 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$ $\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$ $\cot(-\theta)=-\cot(\theta)$
ណែនាំសិស្សគូសរង្វង់ និងគូសអ័ក្សពីកែងគ្នា និងដៅចំនុច $P;P'$រួច សនិដ្ឋាន $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=?$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=?$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=?$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=?$	**២មុំបំពេញ** $\theta\&\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ ជាមុំពីរ ដែលផលបូករង្វាស់វាស្មើនឹង $\frac{\pi}{2}$ តាម 2π  $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot(\theta)$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan(\theta)$	សិស្សគូសរូប  $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot(\theta)$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan(\theta)$
ណែនាំសិស្សគូសរង្វង់ និងគូសអ័ក្សពីកែងគ្នា និងដៅចំនុច $P;P'$រួច សនិដ្ឋាន $\sin(\pi-\theta)=?$ $\cos(\pi-\theta)=?$ $\tan(\pi-\theta)=?$ $\cot(\pi-\theta)=?$ ណែនាំសិស្សគូសរង្វង់និងគូសអ័ក្សពីកែងគ្នានិងដៅចំនុច $P;P';Q;Q';A;A'$ រួចសនិដ្ឋាន $\sin(\pi+\theta)=?$ $\cos(\pi+\theta)=?$ $\tan(\pi+\theta)=?$ $\cot(\pi+\theta)=?$	**៣មុំបន្ថែមៈ** $\theta\&(\pi-\theta)$ ជាមុំពីរដែលផលបូករង្វាស់វា ស្មើនឹង π តាម 2π  $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ **៣មុំមានផលសងស្មើ** π **៖** $\theta\&(\pi+\theta)$ ចំនុច OP និង OP មាន ចំនោលកែងផ្ទុយគ្នា  $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$ $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$	សិស្សគូសរូប  $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ សិស្សគូសរូប  $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$ $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$

<table>
<tr>
<td>ណែនាំសិស្សគូសរង្វង់
និងគូសអ័ក្សពីកែងគ្នា
និងដៅចំនុច $P;P'$ រួច
សនិដ្ឋាន
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=?$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=?$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=?$
$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=?$
ប្រតិបត្តិគណនា
$A=\cos(-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+$
$+\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=?$
$B=\sin\left(210^o\right)$
$C=\dfrac{\cot\frac{3}{4}\pi}{\sin\frac{3\pi}{2}}$
$a)2\sin\frac{\pi}{3}+4\cos\frac{\pi}{6}-3\tan\frac{\pi}{3}+$
$b)\dfrac{5-4\tan^2 45^o+\cot^2 60}{2\cos^2 60^o-2\sin^3 90^o+4\,\text{ta}}$</td>
<td>៤មុំមានផលសងស្មើ $\frac{\pi}{2}$ ៖ θ & $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$


$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$
$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\tan\theta$
ប្រតិបត្តិ គណនា៖
$A=\cos(-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$
$A=\cos x+\cos x-\cos x-\cos x=0$
$B=\sin\left(210^o\right)=\sin\left(180^0+30^o\right)$
$B=-\sin 30^o=-\frac{1}{2}$
$C=\dfrac{\cot\frac{3}{4}\pi}{\sin\frac{3\pi}{2}}=\dfrac{\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)}$
$C=\dfrac{-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\pi}=1$</td>
<td>សិស្សគូសរូប


$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$
$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\tan\theta$
សិស្សឡើងរាយការណ៍
$A=\cos(-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+$
$+\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$
$A=\cos x+\cos x-\cos x-\cos x=0$
$B=\sin\left(210^o\right)=\sin\left(180^0+30^o\right)$
$B=-\sin 30^o=-\frac{1}{2}$
$C=\dfrac{\cot\frac{3}{4}\pi}{\sin\frac{3\pi}{2}}=\dfrac{\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)}$
$C=\dfrac{-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\pi}=1$</td>
</tr>
<tr>
<td>-គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ
ចូរបំពេញរូបមន្តខាងក្រោម
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=?$
$\sin(\pi+\theta)=?$
$\sin(\theta+2k\pi)=?$
$\cos(\theta+2k\pi)=?$</td>
<td><u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង)
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$
$\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta$
$\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$</td>
<td>សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$
$\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta$
$\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$</td>
</tr>
<tr>
<td>-គ្រូដាក់លំហាត់ទី៣និង៤
ទំព័រ៨៦ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះ</td>
<td><u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ)
លំហាត់ទី៣និង៤ ទំព័រ ៨៦</td>
<td>-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់
ដំបូន្មានគ្រូ</td>
</tr>
</table>

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៣....　　　**អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

កំរិតមូលដ្ឋាន

មេរៀនទី..៣....　　　**អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

(IV.សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញពីដឺក្រេ រ៉ាដ្យង់និងត្រីកោណមាត្រតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សបំលែងពីដឺក្រេ ទៅ រ៉ាដ្យង់និងពីរ៉ាដ្យង់ទៅ ដឺក្រេ ហើយគណនាត្រីកោណមាត្រតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...០២....ម៉ោង ថ្ងៃ.................ទី..................ខែ...............ឆ្នាំ...........

III.<u>សម្ភារ:ឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី ៧៩.. ដល់ទំព័រទី.៨៥.

-ស . គ : ទំព័រទី.៧៩.. ដល់ទំព័រទី..៨៥..

-បន្ទាត់ ក្រដាសរង្វង់

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=?$ $\sin(\pi+\theta)=?$ គណនាតម្លៃកន្សោម $y=\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ បើ $\alpha=\frac{\pi}{4}$	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $y=\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ បើ $\alpha=\frac{\pi}{4}$ $y=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{0}$ គ្មានន័យ	-សិស្សឆ្លើយ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $y=\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ បើ $\alpha=\frac{\pi}{4}$ $y=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $=\frac{1}{0}$
–គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី មេរៀនទី.១.**អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី) **មេរៀនទី.៣.** **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**	–សិស្សកត់ត្រា

<table>
<tr>
<td>
–ណែនាំសិស្សសង្កេត
ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍
ត្រីកោណមាត្រ
តើ អនុគមន៍ស៊ីនុសកំណត់
លើអ្វី?
តើអនុគមន៍កូស៊ីនុស
កំណត់លើអ្វី?
តើ អនុគមន៍តង់សង់
កំណត់ លើអ្វី?
តើ អនុគមន៍កូតង់សង់
កំណត់ លើអ្វី?

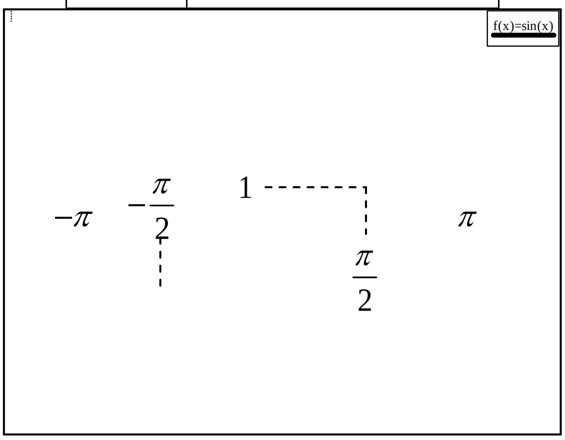
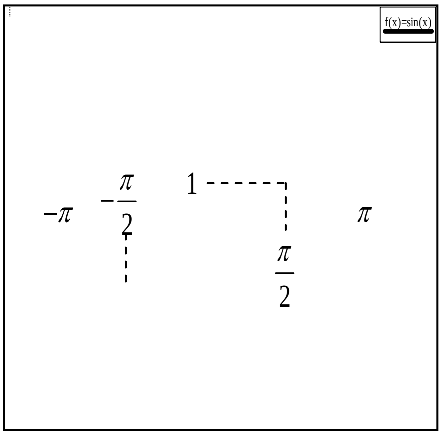
ប្រតិបត្តិ
រកខួបនៃអនុគមន៍
$y=\sin\frac{1}{2}x$
$y=3\tan\frac{1}{2}x$
</td>
<td>
$IV.$ សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ
ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ
គេត្រូវរកៈ
–ក ដែនកំណត់
$\otimes$ អនុគមន៍ស៊ីនុសកំណត់លើ$\mathbb{R}$
$\otimes$ អនុគមន៍កូស៊ីនុសកំណត់លើ$\mathbb{R}$
$\otimes$ អនុគមន៍តង់សង់កំណត់បានលុះត្រា
តែ $\cos x\neq 0\ ;\ x\neq(1+2k)\frac{\pi}{2}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$
នោះដែនកំណត់ $D=IR-\left\{(1+2k)\frac{\pi}{2}\right\}$
$\otimes$ អនុគមន៍កូតង់សង់កំណត់បានលុះត្រា
តែ $\sin x\neq 0\ ;\ x\neq(k\pi)\ ;\ k\in\mathbb{Z}$
នោះដែនកំណត់ $D=IR-\{(k\pi)\}$
–ខ ខួបនៃអនុគមន៍
និយមន័យ អនុគមន៍មានដែនកំណត់ D
f ជាអនុគមន៍មានខួប p លុះត្រាតែ p ជា
ចំនួនតូចបំផុតដែល
$\forall x\in D:\ f(x+p)=f(x)$ តាមនិយមន័
យគេអាចទាញបាន
$f(x)=f(x+p)=f((x+p)+p)=.........$
$f(x)=f(x-p)=f((x-p)-p)=.........$

ជាទូទៅអនុគមន៍ $y=\sin ax$ និង $y=\cos ax$
មានខួប $p=\frac{2\pi}{|a|}$
អនុគមន៍ $y=\tan ax$ និង $y=\cot ax$
មានខួប $p=\frac{\pi}{|a|}$
ខួបនៃអនុគមន៍
$y=\sin\frac{1}{2}x\ ;\ T=8\pi$
$y=3\tan\frac{1}{2}x;\ T=2\pi$
គ ភាពគូនិងភាព សេស
និយមន័យ$-f$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើ D
</td>
<td>
–អនុគមន៍ស៊ីនុសកំណត់លើ$\mathbb{R}$
–អនុគមន៍កូស៊ីនុសកំណត់លើ$\mathbb{R}$
–អនុគមន៍តង់សង់កំណត់
បានលុះត្រាតែ $\cos x\neq 0$
នោះដែនកំណត់
$D=IR-\left\{(1+2k)\frac{\pi}{2}\right\}$
–អនុគមន៍កូតង់សង់កំណត់បាន
លុះត្រាតែ $\sin x\neq 0\ ;\ x\neq(k\pi)$
នោះដែនកំណត
$D=IR-\{(k\pi)\}$

ខួបនៃអនុគមន៍
$y=\sin\frac{1}{2}x\ ;\ T=8\pi$
$y=3\tan\frac{1}{2}x;\ T=2\pi$

ក) $f(-x)=-x-\sin(-x)$
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>ប្រតិបត្តិ រកភាពគូ សេស
នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖
ក) $y=x-\sin x$
ខ) $y=\tan x\cot^3 x$</td>
<td>f ជាអនុគមន៍គូលុះត្រាតែ $f(-x)=f(x)$
f ជាអនុគមន៍គសេសលុះត្រាតែ
$f(-x)=-f(x)$ ដែល $x\in D\ ;\ -x\in D$
<u>ប្រតិបត្តិ</u>
ក) $f(-x)=-x-\sin(-x)=-(x-\sin x)$
$f(-x)=-f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស
ខ) $f(-x)=\tan(-x)\cot^3(-x)=\tan x\cot^3 x$
$f(-x)=f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ</td>
<td>$=-(x-\sin x)$
$f(-x)=-f(x)$
ជាអនុគមន៍សេស
ខ) $f(-x)=\tan(-x)\cot^3(-x)$
$=\tan x\cot^3 x$
$f(-x)=f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ</td>
</tr>
<tr>
<td>ដាក់សំនួរដល់សិស្ស
រកដែនកំណត់?
រកខួប?
សិក្សាភាពគូ សេស?
សិក្សាទិសដៅអថេរភាព?

ណែនាំសិស្សគូសក្រាប</td>
<td>១ អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sin x$
$-$ដែនកំណត់៖ $y=\sin x$ កំណត់លើ IR
$-$ខួប៖ $y=\sin x$ មានខួប $T=2\pi$
$-$ភាពសេស៖ $\sin(-x)=-\sin x$
ជាអនុគមន៍សេសមានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ
$-$ទិសដៅអថេរភាព៖ កាលណា x
កើនពី $0\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $\sin x$ កើនពី $0\to1$
កើនពី $\frac{\pi}{2}\to\pi$ នោះ $\sin x$ ចុះពី $1\to0$
តារាងអថេរភាព
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $\frac{\pi}{2}$ π</td></tr>
<tr><td>$\sin x$</td><td>$0\nearrow 1\searrow 0$</td></tr>
</table>

</td>
<td>$-$ដែនកំណត់៖ $y=\sin x$ កំណត់
លើ IR
$-$ខួប៖ $y=\sin x$ មានខួប $T=2\pi$
$-$ភាពសេស៖ $\sin(-x)=-\sin x$
$-$ទិសដៅអថេរភាព៖
កាលណា x
កើនពី $0\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $\sin x$
កើនពី $0\to1$
កើនពី $\frac{\pi}{2}\to\pi$ នោះ $\sin x$
ចុះពី $1\to0$

</td>
</tr>
<tr>
<td>ដាក់សំនួរដល់សិស្ស
រកដែនកំណត់?
រកខួប?</td>
<td>២ អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cos x$
$-$ដែនកំណត់៖ $y=\cos x$ កំណត់លើ IR
$-$ខួប៖ $y=\cos x$ មានខួប $T=2\pi$
$-$ភាពសេស៖ $\cos(-x)=\cos x$</td>
<td>$-$ដែនកំណត់៖ $y=\cos x$
កំណត់លើ IR
$-$ខួប៖ $y=\cos x$ មានខួប $T=2\pi$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
សិក្សាភាពគូ សេស?

សិក្សាទិសដៅអថេរភាព?

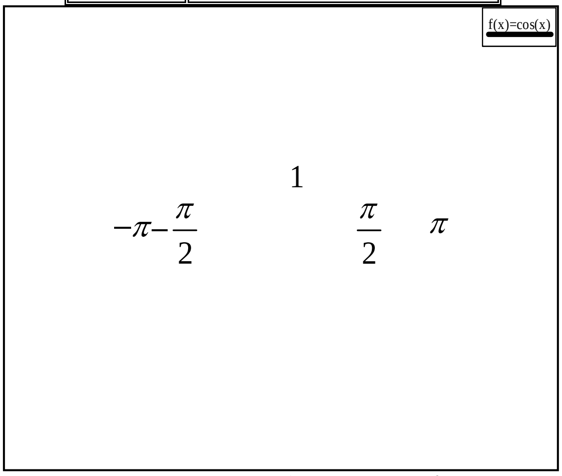
ណែនាំសិស្សគូសក្រាប

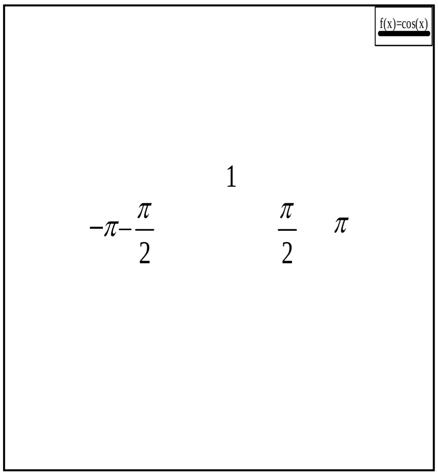
ដាក់សំនួរដល់សិស្ស

រកដែនកំណត់?

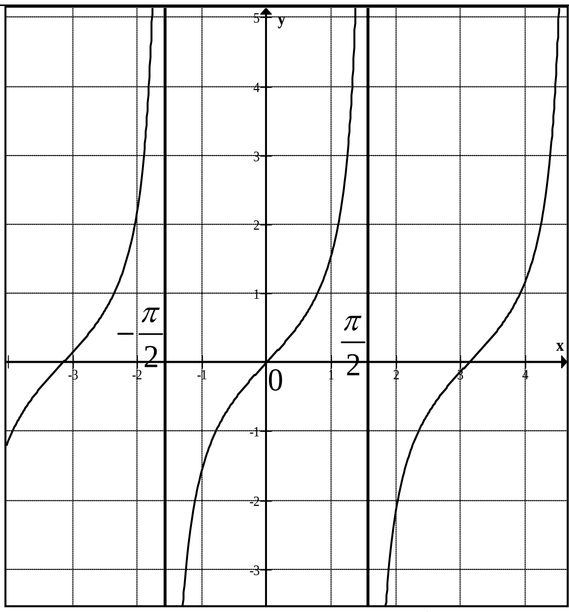
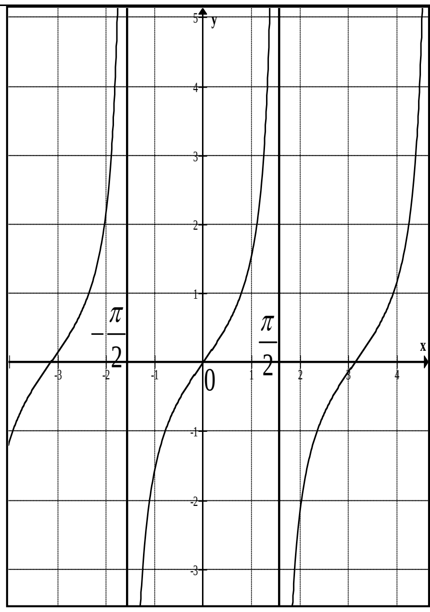
រកខួប?

សិក្សាភាពគូ សេស?

សិក្សាទិសដៅអថេរភាព?
</td>
<td>
ជាអនុគមន៍គូមានអ័ក្សអរដោនេជាអ័ក្សឆ្លុះ
$-$ទិសដៅអថេរភាព៖ កាលណា x
កើនពី $0\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $\cos x$ ចុះពី $1\to0$
កើនពី $\frac{\pi}{2}\to\pi$ នោះ $\sin x$ ចុះពី $0\to-1$
តារាងអថេរភាព
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $\frac{\pi}{2}$ π</td></tr>
<tr><td>$\cos x$</td><td>1 $\searrow$ 0 $\searrow$ -1</td></tr>
</table>


៣ អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\tan x$
$-$ដែនកំណត់៖ $y=\tan x$ កំណត់លើ
$IR-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$
$-$ខួប៖ $y=\tan x$ មានខួប $T=\pi$
$-$ភាពសេស៖ $\tan(-x)=-\tan x$ ជា
អនុគមន៍គសេសមានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ
$-$ទិសដៅអថេរភាព៖ កាលណា x
កើនពី $0\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $\tan x$ កើនពី $0\to+\infty$
កើនពី $-\frac{\pi}{2}\to0$ នោះ $\tan x$ កើនពី $-\infty\to0$
សិក្សាតែពី $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ រួចធ្វើបំលែងឆ្លុះធៀប
គល់ o បានមែក $\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$ តារាងអថេរភាព
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $\frac{\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>$\tan x$</td><td>0 $\nearrow$ $+\infty$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
$-$ភាពសេស៖ $\cos(-x)=\cos x$
$-$ទិសដៅអថេរភាព៖
កាលណា x
កើនពី $0\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $\cos x$
ចុះពី $1\to0$
កើនពី $\frac{\pi}{2}\to\pi$ នោះ $\sin x$
ចុះពី $0\to-1$


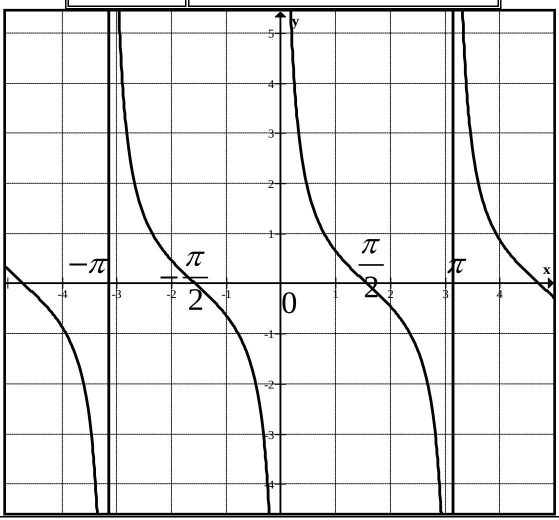
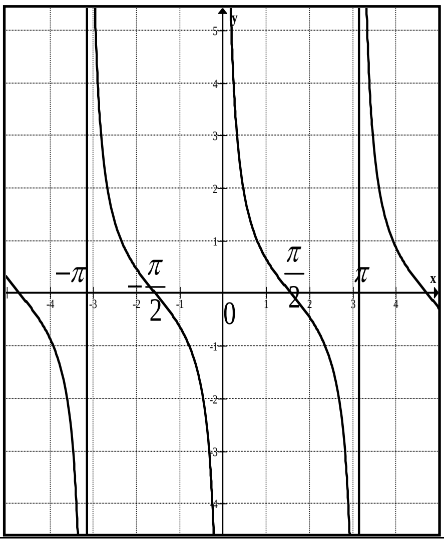
$-$ដែនកំណត់៖ $y=\tan x$
កំណត់លើ
$IR-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$
$-$ខួប៖ $y=\tan x$ មានខួប $T=\pi$
$-$ភាពសេស៖ $\tan(-x)=-\tan x$
ជាអនុគមន៍គសេសមានគល់
តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ
$-$ទិសដៅអថេរភាព៖
កាលណា x
កើនពី $0\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $\tan x$
កើនពី $0\to+\infty$
កើនពី $-\frac{\pi}{2}\to0$ នោះ $\tan x$
កើនពី $-\infty\to0$
</td>
</tr>
</table>

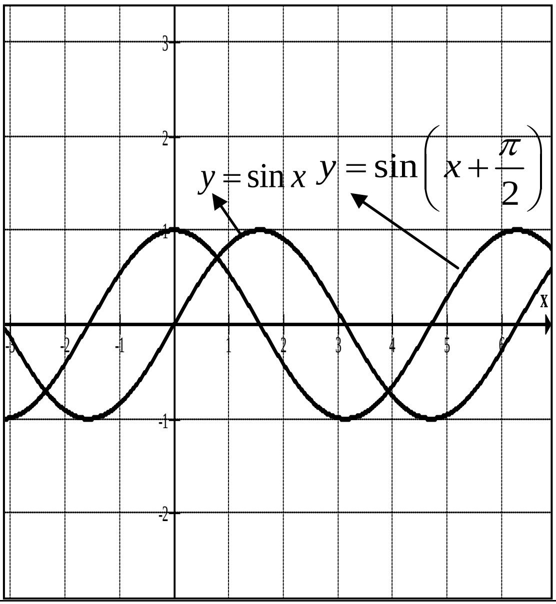
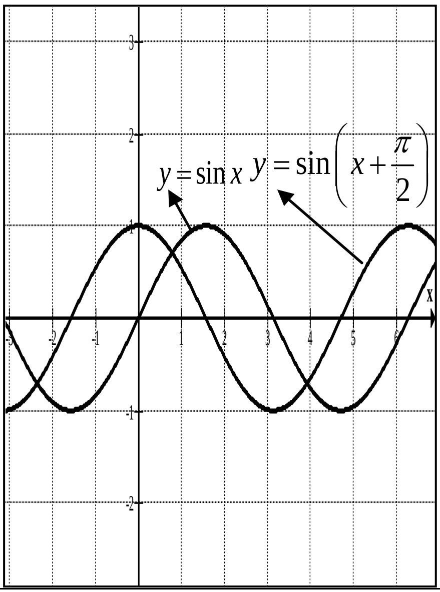
<table>
<tr>
<td>ណែនាំសិស្សគូសក្រាប</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>ដាក់សំនួរដល់សិស្ស

រកដែនកំណត់?

រកខួប?

សិក្សាភាពគូ សេស?

សិក្សាទិសដៅអថេរភាព?</td>
<td>៤ អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cot x$
$-$ ដែនកំណត់៖ $y=\cot x$ កំណត់លើ $IR-\{k\pi\}$
$-$ ខួប៖ $y=\tan x$ មានខួប $T=\pi$
$-$ ភាពសេស៖ $\cot(-x)=-\cot x$ ជាអនុគមន៍គសេសមានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ
$-$ ទិសដៅអថេរភាព៖ កាលណា x កើនពី $0\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $\cot x$ ចុះពី $+\infty\to 0$
កើនពី $\frac{\pi}{2}\to\pi$ នោះ $\cot x$ កើនពី $0\to-\infty$
សិក្សាតែពី $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$ រួចធ្វើបំលែងឆ្លុះបានមែក $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right)$ តារាងអថេរភាព
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $\frac{\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>$\cot x$</td><td>$+\infty$ $\searrow$ 0</td></tr>
</table></td>
<td>$-$ ដែនកំណត់៖ $y=\cot x$ កំណត់លើ $IR-\{k\pi\}$
$-$ ខួប៖ $y=\tan x$ មានខួប $T=\pi$
$-$ ភាពសេស៖ $\cot(-x)=-\cot x$ ជាអនុគមន៍គសេសមានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ
$-$ ទិសដៅអថេរភាព៖ កាលណា x កើនពី $0\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $\cot x$ ចុះពី $+\infty\to 0$
កើនពី $\frac{\pi}{2}\to\pi$ នោះ $\cot x$ កើនពី $0\to-\infty$</td>
</tr>
<tr>
<td>ណែនាំសិស្សគូសក្រាប</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

-គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ ប្រើក្រាប $y=\sin x$ សង់ ក្រាប $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	*ជំហានទី៤* (ពង្រឹងចំណេះដឹង) បំលែងកិលក្រាប $y=\sin x$ ទៅខាងឆ្វេង $\frac{\pi}{2}$ ឯកតានោះបានក្រាប $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 	សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍ 
-គ្រូដាក់លំហាត់ទី១១ និង១២ទំព័រ៨៧ឲ្យសិស្ស ធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្ស គោរពវិន័យនិងច្បាប់ ចរាចរណ៍	*ជំហានទី៥* (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី១១និងលេខ១២ ទំព័រ ៨៧	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៣.... **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

មេរៀនទី..២.... **រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ**

(*I.រូបមន្តផលបូកនិងផលដកII.អនុវត្តរូបមន្តផលបូក*)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញពីរូបមន្តត្រីកោណមាត្រតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សស្រាយរូបមន្ត ផលបូកមុំឌុប រូបមន្តមុំបំលែង តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហាការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ...............ទី...............ខែ.............ឆ្នាំ..........

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី ៨៨.. ដល់ទំព័រទី.៩០.

-ស . គ : ទំព័រទី.៨៨.. ដល់ទំព័រទី..៩០.

-បន្ទាត់ ក្រដាសរង្វង់

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ផ្នាប់ និង វិន័យ	<u>*ជំហានទី១*</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ផ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ចូរដែនកំណត់ ក) $y=\sin x$ ខ)គណនា ចំពោះ $\alpha=30^o;\beta=60^o$ $A=\cos(\alpha+\beta)$ $B=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ រួចប្រៀបធៀប A និង B	<u>*ជំហានទី២*</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) ក) អនុគមន៍ស៊ីនុសកំណត់លើ ℝ ខ)គណនា $A=\cos(\alpha+\beta)=\cos(30^o+60^o)=0$ $B=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $B=\cos 30^o\cos 60^o-\sin 30^o\sin 60^o$ $B=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ $\Rightarrow A=B$ នោះ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	-សិស្សឆ្លើយ ក) $y=\sin x$ កំណត់លើ ℝ $A=\cos(\alpha+\beta)=\cos(30^o+60^o)=0$ $B=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $B=\cos 30^o\cos 60^o-\sin 30^o\sin 60^o$ $B=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ $\Rightarrow A=B$
–គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី មេរៀនទី.១. **រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ** ណែនាំសិស្សគូសរង្វង់ និងគូសអ័ក្សពីកែងគ្នា	<u>*ជំហានទី៣*</u> (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.៣. **រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ** ***I.រូបមន្តផលបូកនិងផលដក*** ***១ គណនា*** $\cos(\alpha-\beta)$ ***និង*** $\cos(\alpha+\beta)$	–សិស្សកត់ត្រា

ដៅចំនុច $M \& N$

$(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OM})=?$

$(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{ON})=?$

$(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})=?$

ចូរគណនា $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=?$

តាមផលគុណស្កាលែ

និងកន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែ?

បើយក $-\beta$ ជំនួស β

តើ $\cos(\alpha-\beta)=?$

ប្រតិបត្តិ

$\cos\frac{5\pi}{12}$

គណនា

ណែនាំសិស្សប្រើមុំបំពេញ

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=?$

ប្រតិបត្តិ

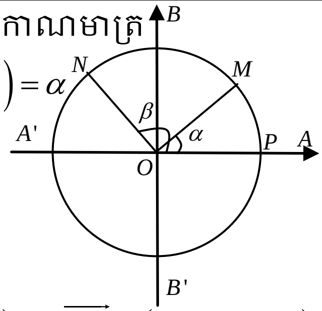
$\sin\frac{\pi}{12}$

ណែនាំសិស្សប្រើរូបមន្ត

ខាងលើ

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=?$

ពិនិត្យមើលរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ



ដែលមាន $(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OM})=\alpha$

$(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{ON})=\beta$

$(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})=\beta-\alpha$

យើងបាន

$\overrightarrow{OM}=(\cos\alpha;\sin\alpha)$; $\overrightarrow{ON}=(\cos\beta;\sin\beta)$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=OM.ON\cos(\beta-\alpha)$ ដោយ

$ON=OM=1$; $\cos(-x)=\cos x$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\cos(\alpha-\beta)$ (១)

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ (២)

តាមផលគុណស្កាលែ

តាម(១)និង(២)

$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos(\alpha+\beta)\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

ប្រតិបត្តិ

$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

២ គណនា $\sin(\alpha-\beta)$ **និង** $\sin(\alpha+\beta)$

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]$

$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

ជំនួស β ដោយ $-\beta$

$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

ប្រតិបត្តិ

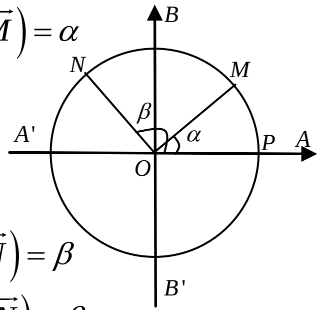
$\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

៣ គណនា $\tan(\alpha-\beta)$ **និង** $\tan(\alpha+\beta)$

មាន $\tan(\alpha+\beta)$ ដែល

សិស្សគូសរូប

$(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OM})=\alpha$



$(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{ON})=\beta$

$(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})=\beta-\alpha$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\cos(\alpha-\beta)$ ឬ

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos(\alpha+\beta)\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

សិស្សបកស្រាយប្រតិបត្តិ

$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

សិស្សឡើងបកស្រាយ

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]$

$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

ជំនួស β ដោយ $-\beta$

$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

សិស្សបកស្រាយប្រតិបត្តិ

$\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ចែកប្រភាគនិង $\cos\alpha\cos\beta$ $\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=?$	$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ $=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ $=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$ $=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$	$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ $=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ $=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$ $=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$
ជំនួស β ដោយ $-\beta$ ក្នុង $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$	នោះ $\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}}$ ជំនួស β ដោយ $-\beta$ $\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}}$	ជំនួស β ដោយ $-\beta$ $\tan(\alpha-(-\beta))=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha.\tan(-\beta)}$
ប្រតិបត្តិសម្រួលកន្សោម $A=\frac{\tan 3a-\tan a}{1+\tan a\tan 3a}+$ $+\cot\left(\frac{\pi}{2}+2a\right)$	**<u>ចំណាំ</u>** រូបមន្តកំណត់បានលុះត្រាតែ $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;(\alpha-\beta)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ ប្រតិបត្តិ $A=\frac{\tan 3a-\tan a}{1+\tan a\tan 3a}+\cot\left(\frac{\pi}{2}+2a\right)$ $A=\tan(3a-a)+(-\tan 2a)$ $A=0$	សិស្សឡើងដោះស្រាយ $A=\frac{\tan 3a-\tan a}{1+\tan a\tan 3a}+\cot\left(\frac{\pi}{2}+2a\right)$ $A=\tan(3a-a)+(-\tan 2a)$ $A=0$
ណែនាំសិស្ស យក $\alpha=\beta$ ជំនួសក្នុង កន្សោមខាងក្រោម៖ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$	***II.អនុវត្តរូបមន្តផលបូក*** ***១ រូបមន្តមុំឌុប*** យក $\alpha=\beta$ ជំនួស $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$ $\boxed{\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha}$	$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$ $\boxed{\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha}$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	យក $\alpha=\beta$ ជំនួស $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$ $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$ $\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$	សិស្សឡើងដោះស្រាយ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$ $\boxed{\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$
$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$	យក $\alpha=\beta$ ជំនួស $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$ $\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha.\tan\alpha}$	សិស្សឡើងដោះស្រាយ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$

យក $\frac{\alpha}{2}$ ជំនួសក្នុង α ទៅក្នុង
រូបមន្ត

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$
$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
$$\tan^2(\alpha)=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

យក $t=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ជំនួសក្នុង
រូបមន្ត

$$\cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\underbrace{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}_{1}}=?$$

$$\sin\alpha=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\underbrace{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}_{1}}=?$$

គណនា $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=?$

ប្រតិបត្តិ

ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\tan\frac{x}{2}$$

$$\boxed{\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

២ រូបមន្តកន្លះមុំ

ក យក $\frac{\alpha}{2}$ ជំនួសក្នុង α ទៅក្នុងរូបមន្ត

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$
$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\,;\tan^2(\alpha)=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

យើងបាន

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2};\tan^2\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

ខ យក $t=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ជំនួសក្នុងរូបមន្ត

$$\cos(\alpha)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin\alpha=\frac{\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}\;;\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}\;;\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}}$$

ប្រតិបត្តិ

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=t=\boxed{\tan\frac{x}{2}}$$

ដោយ $t=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha.\tan\alpha}$$

$$\boxed{\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

សិស្សឡើងដោះស្រាយ

យក $\frac{\alpha}{2}$ ជំនួសក្នុង α យើងបាន

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$
$$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

សិស្សឡើងដោះស្រាយ

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\sin\alpha=\frac{\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}}\quad;\quad\boxed{\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}}$$

សិស្សឡើងដោះស្រាយ

យក $\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right.$ ជំនួសក្នុង

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=t=\tan\frac{x}{2}$$

-គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ ចូរបំពេញរូបមន្តខាងក្រោម $\tan(\alpha+\beta)=?$ $\tan(2\alpha)=?$ $\sin(2\alpha)=?$	<u>*ជំហានទី៤*</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$ $\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$	សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$ $\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$
-គ្រូដាក់លំហាត់ទី៦និង៧ ទំព័រ៩៦ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះ	<u>*ជំហានទី៥*</u> (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី៦និង៧ ទំព័រ ៩៦	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៣.... **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

មេរៀនទី..២.... **រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ**

(*III.រូបមន្តបំលែង*)

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញរូបមន្តបំលែងនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សបំលែងរូបមន្តផលគុណជាផលបូកនិងផលបូកជាផលគុណនៃ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រតាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.ពេលវេលា: ...០១....ម៉ោង ថ្ងៃ..............ទី..............ខែ...........ឆ្នាំ.........

III.សម្ភារ:ឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី ៦៨.. ដល់ទំព័រទី.៧៣.

-ស . គ : ទំព័រទី.៦៨.. ដល់ទំព័រទី..៧៣..

-បន្ទាត់ ក្រដាសរង្វង់

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*ជំហានទី១* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ចូរបំពេញរូបមន្តខាងក្រោម $\tan(\alpha+\beta)=?$ $\tan(2\alpha)=?$ $\sin(2\alpha)=?$	*ជំហានទី២* (រំលឹកមេរៀនចាស់) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$ $\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$	-សិស្សឆ្លើយ $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$ $\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$
–គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី មេរៀនទី.១. **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**	*ជំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.៣. **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ** *III.រូបមន្តបំលែង* **១)បំលែងពីផលគុណទៅជាផលបូក** មានរូបមន្តផលបូកនិងផលដកខាងក្រោម៖	–សិស្សកត់ត្រា

ណែនាំសិស្សយក ក)បូករូបមន្ត១និង២? ខ)ដក រូបមន្ត១និង២? គ)បូក រូបមន្ត៣និង៤? ឃ) ដករូបមន្ត៣និង៤?	$\boxed{1)\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$ $\boxed{2)\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ $\boxed{3)\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$ $\boxed{4)\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$ យើងបានរូបមន្ត $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$	សិស្សឡើងគណនា ក)បូករូបមន្ត១និង២ $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ ខ)ដក រូបមន្ត១និង២ $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ គ)បូក រូបមន្ត៣និង៤ $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ ឃ) ដករូបមន្ត៣និង៤? $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$
ប្រតិបត្តិ គណនា $\cos 75^o\cos 45^o$	ប្រតិបត្តិ $\cos 75^o\cos 45^o$ $=\frac{1}{2}\left[\cos\left(75^o+45^o\right)+\cos\left(75^o-45^o\right)\right]$ $=\frac{1}{2}\left[\cos 120^o+\cos 30^o\right]$ $=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$	សិស្សឡើងគណនា $\cos 75^o\cos 45^o$ $=\frac{1}{2}\left[\cos\left(75^o+45^o\right)+\cos\left(75^o-45^o\right)\right]$ $=\frac{1}{2}\left[\cos 120^o+\cos 30^o\right]$ $=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$
ណែនាំសិស្សតាង $\alpha+\beta=p\ \ \&\ \ \alpha-\beta=q$ ទាញរក $\alpha\&\beta$ រួចយកមក ជំនួសក្នុងរូបមន្ត $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$	**២)បំលែងពីផលបូកទៅជាផលគុណ** តាង $\alpha+\beta=p\ \ \&\ \ \alpha-\beta=q$ $\Leftrightarrow\alpha=\frac{p+q}{2}\ \ \&\ \ \beta=\frac{p-q}{2}$ ជំនួសក្នុង $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$ យើងបាន $\boxed{\begin{array}{l}\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\ \cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\\ \sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\ \sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}\end{array}}$	សិស្សឡើងគណនា $\alpha=\frac{p+q}{2}\ \ \&\ \ \beta=\frac{p-q}{2}$ យើងបាន $\boxed{\begin{array}{l}\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\ \cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\\ \sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\ \sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}\end{array}}$
គណនារក $\tan p+\tan q=?$	$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}$ $=\frac{\sin p\cos q+\sin q\cos p}{\cos p\cos q}$ $=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$	$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}$ $=\frac{\sin p\cos q+\sin q\cos p}{\cos p\cos q}$ $=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$
ណែនាំសិស្សយក $-q$ ជំនួសក្នុង q		$\tan p+\tan(-q)=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin(-q)}{\cos(-q)}$ $=\frac{\sin p\cos q-\sin q\cos p}{\cos p\cos q}$ $=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

ឲ្យសិស្សគណនារករូបមន្ត $\cot p+\cot q=?$ $\cot p-\cot q=?$	$\boxed{\tan p-\tan q=\dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}}$ និងរូបមន្ត $\cot p+\cot q$ $\cot p-\cot q$ គឺ $\boxed{\begin{array}{l}\cot p+\cot q=\dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}\\ \cot p-\cot q=\dfrac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}\end{array}}$	$\tan p+\tan q=\dfrac{\sin p}{\cos p}+\dfrac{\sin q}{\cos q}$ $=\dfrac{\sin p\cos q+\sin q\cos p}{\cos p\cos q}$ $=\dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$
ប្រតិបត្តិ គេមាន $A;B;C$ ជាមុំក្នុងត្រីកោណមួយចូរបង្ហាញថា $\sin A+\sin B+\sin C$ $=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$	ប្រតិបត្តិ $\sin A+\sin B+\sin C$ $=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ ដោយ $A+B+C=\pi\Rightarrow\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$ $2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ $=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)+2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\dfrac{C}{2}$ $=2\cos\dfrac{C}{2}\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)+2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\dfrac{C}{2}$ $=2\cos\dfrac{C}{2}\left[\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\right]$ $=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$	សិស្សឡើងបកស្រាយ $\sin A+\sin B+\sin C$ $=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ ដោយ $A+B+C=\pi\Rightarrow\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$ $2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ $=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)+2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\dfrac{C}{2}$ $=2\cos\dfrac{C}{2}\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)+2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\dfrac{C}{2}$ $=2\cos\dfrac{C}{2}\left[\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\right]$ $=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$
-គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ ចូរបំពេញរូបមន្តខាងក្រោម $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=?$ $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=?$ $\tan p-\tan q=?$ $\cot p+\cot q=?$	<u>*ជំហានទី៤*</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ $\tan p-\tan q=\dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$ $\cot p+\cot q=\dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$	សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍ $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ $\tan p-\tan q=\dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$ $\cot p+\cot q=\dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$
-គ្រូដាក់លំហាត់ទី៩ដល់១៣ ទំព័រ៩៧ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះ	<u>*ជំហានទី៥*</u> (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី៩ដល់១៣ ទំព័រ ៩៧	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៣.... **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

មេរៀនទី..៣.... **សមីការ និង វិសមីការត្រីកោណ**

(*I.*ចំនួនដែលមានកូស៊ីនុយដូចគ្នា *II.*ចំនួនដែលមានស៊ីនុយដូចគ្នា)

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង :សិស្សពិពណ៌នាសមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយសមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.ពេលវេលា: ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ...............ទី...............ខែ............ឆ្នាំ.........

III.សម្ភារ:ឧទេស

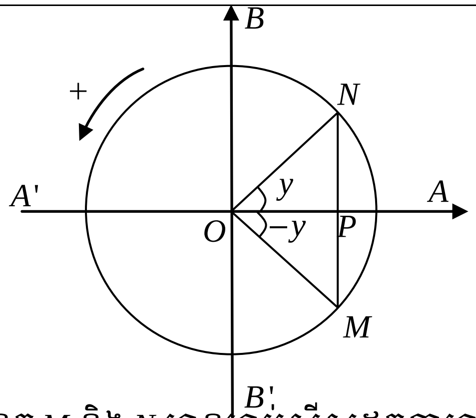
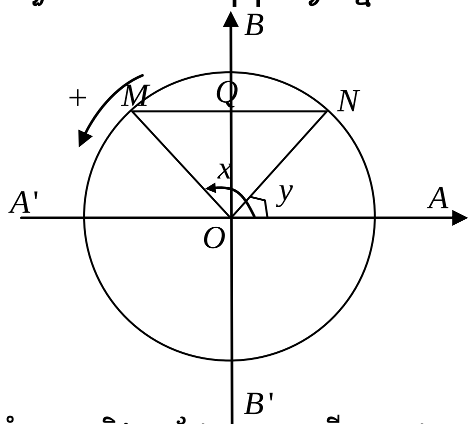
-ស . ស :ទំព័រទី.៩៨.. ដល់ទំព័រទី.៩៩..

-ស . គ : ទំព័រទី.៩៨.. ដល់ទំព័រទី..៩៩..

-បន្ទាត់ ក្រដាសតារាង

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*ជំហានទី១* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ រកទំនាក់ទំនងរវាងតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំពីរផ្ទុយគ្នា?	*ជំហានទី២* (រំលឹកមេរៀនចាស់) $\cos(-x)=\cos x$ $\sin(-x)=-\sin x$ $\tan(-x)=-\tan x$ $\cot(-x)=-\cot x$	-សិស្សឆ្លើយ $\cos(-x)=\cos x$ $\sin(-x)=-\sin x$ $\tan(-x)=-\tan x$ $\cot(-x)=-\cot x$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី មេរៀនទី.១. **សមីការ និង វិសមីការត្រីកោណ**	*ជំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.៣. **សមីការ និង វិសមីការត្រីកោណ** *I.* **ចំនួនដែលមានកូស៊ីនុយដូចគ្នា**	សិស្សកត់ត្រា

-គ្រូលើកឧទាហរណ៍ដោយគូសរង្វង់ត្រីកោណឲ្យសិស្សសង្កេតហើយរកអាប់ស៊ីសនៃចំនុច N និងអាប់ស៊ីសនៃចំនុច M ។		
–បំផុសសំនួរសិស្ស –បើ M និង N ត្រួតស៊ីគ្នា តើរង្វាស់មុំ x និង y មានទំនាក់ទំនងគ្នាបែបណា? –បើ M និង N ឆ្លុះគ្នាធៀប និងអ័ក្ស $(x'x)$ តើមុំ $(\overline{OA};\overline{ON})$ និង $(\overline{OA};\overline{OM})$ មានទំនាក់ទំនងគ្នាបែបណា? –ណែនាំសិស្សទាញជាទូទៅ	ចំនុច M និង N មានអាប់ស៊ីសដូចគ្នាមានពីរករណី: –បើ M និង N ត្រួតស៊ីគ្នានោះ x និង y ជារង្វាស់មុំតែមួយ $\boxed{x=y+2\pi k \quad (k\in\mathbb{Z})}$ –បើ M និង N ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស $(x'x)$ នោះមុំ $(\overline{OA};\overline{ON})$ និង $(\overline{OA};\overline{OM})$ ផ្ទុយគ្នា ហើយ $-y$ ជារង្វាស់មួយនៃមុំ $(\overline{OA};\overline{ON})$ ដូចនេះ $\boxed{x=-y+2\pi k \quad (k\in\mathbb{Z})}$ យើងបាន $\boxed{x=y+2\pi k \quad (k\in\mathbb{Z})}$ $\boxed{x=-y+2\pi k \quad (k\in\mathbb{Z})}$ <u>ជាទូទៅ</u> ពីរចំនួន x និង y មានកូស៊ីនុសដូចគ្នា $\cos x=\cos y$ លុះត្រាតែ $x=y+2\pi k\ ; x=-y+2\pi k \quad (k\in\mathbb{Z})$	–សិស្សសង្កេត –សិស្សទាញជាទូទៅ ពីរចំនួន x និង y មានកូស៊ីនុសដូចគ្នា $\cos x=\cos y$ លុះត្រាតែ $x=y+2\pi k\ ; x=-y+2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$
–គ្រូលើកផ្ទាំងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដូចរូបក្នុងសៀវភៅណែនាំសិស្សសង្កេតចំនុច N និង M	**$II.$ ចំនួនដែលមានស៊ីនុសដូចគ្នា**  ពីរចំនួន x និង y ដែលមានស៊ីនុសដូចគ្នា $\sin x=\sin y$ ក្នុងករណីនេះយើងបាន –បើ M និង N ត្រួតស៊ីគ្នានោះ $x=y+2\pi k \quad (k\in\mathbb{Z})$ –បើ M និង N ឆ្លុះគ្នានឹងអ័ក្ស $(x'x)$ នោះមុំ $(\overline{OA};\overline{ON})$ និង $(\overline{OA};\overline{OM})$ ជាមុំបន្ថែមគ្នា	

$-$បើ M និង N ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស $(y'y)$ តើចំនុច N មានកូអរដោនេស្មើប៉ុន្មាន? $-$ណែនាំសិស្សទាញជាទូទៅ	ហើយ $\pi - y$ ជារង្វាស់មុំ $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ ដូចនេះ $x = \pi - y + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$ ចំនុច N មានកូអរដោនេស្មើនឹង $\sin y$ <u>ជាទូទៅ</u> ពីរចំនួន x និង y មានកូស៊ីនុសដូចគ្នា $\sin x = \sin y$ លុះត្រាតែ $x = y + 2\pi k \ ; x = \pi - y + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$	សិស្សឆ្លើយ $-$ ចំនុច N មានកូអរដោនេស្មើនឹង $\sin y$ $-$សិស្សទាញជាទូទៅ ពីរចំនួន x និង y មានកូស៊ីនុសដូចគ្នា $\sin x = \sin y$ លុះត្រាតែ $x = y + 2\pi k \ ; x = \pi - y + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$
-គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ ក)បើមុំ $x = 45^o$ តើមុំ y មានរង្វាស់ស្មើប៉ុន្មានបើមុំ $x \& y$ មានស៊ីនុសដូចគ្នា? ខ)បើមុំ $x = 120^o$ តើមុំ y មានរង្វាស់ស្មើប៉ុន្មានបើមុំទាំងពីរមានកូស៊ីនុសដូចគ្នា?	<u>*ជំហានទី៤*</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) ក) $\left[\begin{array}{l} x = 45^o \ ; \ y = 45^o \\ x = 45^o \ ; y = 180^o - 45^o = 135^o \end{array}\right.$ ខ) $\left[\begin{array}{l} x = 120^o \ ; \ y = 120^o \\ x = 120^o \ ; \ y = -120^0 \end{array}\right.$	សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍ ក) $\left[\begin{array}{l} x = 45^o \ ; \ y = 45^o \\ x = 45^o \ ; y = 135^o \end{array}\right.$ ខ) $\left[\begin{array}{l} x = 120^o \ ; \ y = 120^o \\ x = 120^o \ ; \ y = -120^0 \end{array}\right.$
-គ្រូដាក់លំហាត់ទី១ ទំព័រ១១០ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	<u>*ជំហានទី៥*</u> (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី១ ទំព័រ ១១០	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី…៣…. **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

មេរៀនទី..៣…. **សមីការ និង វិសមីការត្រីកោណ**

(*III*.សមីការត្រីកោណមាត្រ)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញសមីការត្រីកោណមាត្រ តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយសមីការត្រីកោណមាត្រ តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> …២….ម៉ោង ថ្ងៃ……………..ទី……………..ខែ…………..ឆ្នាំ………..

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី.៩៩.. ដល់ទំព័រទី.១០០..

-ស . គ : ទំព័រទី.៩៩.. ដល់ទំព័រទី..១០០..

-បន្ទាត់ ក្រដាសរង្វង់

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>*ជំហានទី១*</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ក)រកទំនាក់ទំនងរវាងតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំពីរផ្ទុយគ្នា? ខ) រកទំនាក់ទំនងរវាងតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំបំពេញគ្នា?	<u>*ជំហានទី២*</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) $\cos(-x)=\cos x$ $\sin(-x)=-\sin x$ $\tan(-x)=-\tan x$ (មុំពីរផ្ទុយ) $\cot(-x)=-\cot x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos x$ (មុំបំពេញគ្នា) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot x$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan x$	-សិស្សឆ្លើយ $\cos(-x)=\cos x$ $\sin(-x)=-\sin x$ $\tan(-x)=-\tan x$ $\cot(-x)=-\cot x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot x$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan x$

–គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី

មេរៀនទី.១.

សមីការ និង វិសមីការត្រីកោណ

-គ្រូលើកឧទាហរណ៍ រួចសួរសិស្សតើ $\frac{1}{2}$ ជាកូស៊ីនុសនៃមុំណាខ្លះ?

–គ្រូចំផុសសំនួរសិស្សបើ $|a|>1$ តើសមីការមានចម្លើយឬទេ?

ចុះបើ a នៅចន្លោះ $[-1;1]$ តើសមីការមានចម្លើយឬទេ?

–គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិដោះស្រាយសមីការ

$1)\cos x=0$

$2)\cos x=1$

$3)\cos x=-1$

–ណែនាំសិស្សទាញរករូបមន្ត?

–តាមរូបមន្តចូររកចម្លើយសមីការខាងក្រោម

$\cos U(x)=\cos V(x)$

–គ្រូលើកផ្ទាំងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដូចរូបក្នុងសៀវភៅណែនាំសិស្សសង្កេតចំនុច N និង M

<u>*ជំហានទី៣*</u> (មេរៀនថ្មី)

មេរៀនទី.៣.

សមីការ និង វិសមីការត្រីកោណ

III. **សមីការត្រីកោណមាត្រ**

<u>១ដំណោះស្រាយសមីការ $\cos x=a$</u>

Ex ដោះស្រាយសមីការ $\cos x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$

$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$ ដោយ $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

ដូចនេះសមីការ $\cos x=a$ មានចម្លើយពីរ

–បើ $|a|>1$ សមីការគ្មានចម្លើយ

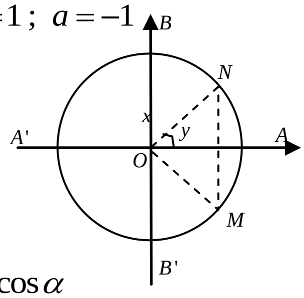
– បើ a នៅចន្លោះ $[-1;1]$ សមីការមានចម្លើយពីរ

ប្រតិបត្តិ ដោះស្រាយសមីការ $\cos x=a$ ចំពោះ $a=0$; $a=1$; $a=-1$

$1)\cos x=0$

$2)\cos x=1$

$3)\cos x=-1$



សមីការ $\cos x=\cos\alpha$

នោះមានចម្លើយពីរ $\left[\begin{array}{l}x=\alpha+2\pi k\\ x=-\alpha+2\pi k\end{array}\right.$

សមីការ $\cos U(x)=\cos V(x)$

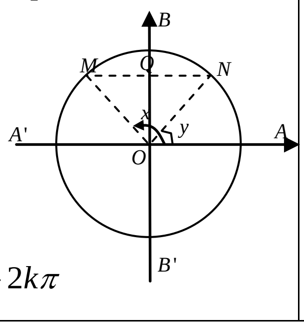
មានចម្លើយ $U(x)=\pm V(x)+2\pi k$

<u>២ដំណោះស្រាយសមីការ $\sin x=a$</u>

–បើ $|a|>1$ សមីការគ្មានចម្លើយ

– បើ a នៅចន្លោះ $[-1;1]$ សមីការមានចម្លើយពីរ

$\left[\begin{array}{l}x=\alpha+2\pi k\\ x=\pi-\alpha+2\pi k\end{array}\right.$



<u>ចំនាំ</u>

$\sin x=1$ នោះ $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

–សិស្សកត់ត្រា

–សិស្សឆ្លើយ

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$

$x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$

–សិស្សដោះស្រាយជាក្រុម

$1)x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$2)x=2\pi k$

$3)x=\pi+2\pi k$

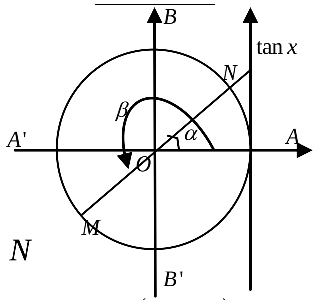
–សិស្សឆ្លើយ

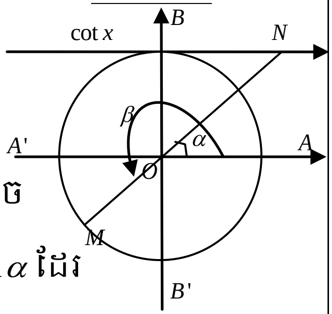
សមីការ $\cos x=\cos\alpha$ នោះ

មានចម្លើយពីរ $\left[\begin{array}{l}x=\alpha+2\pi k\\ x=-\alpha+2\pi k\end{array}\right.$

–សិស្សទាញជាទូទៅ

ពីរចំនួន x និង y មានស៊ីនុសដូចគ្នា $\sin x=\sin\alpha$ លុះត្រាតែ $x=\alpha+2\pi k$; $x=\pi-\alpha+2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$

ចំពោះសមីការខាងក្រោម $\sin V(x)=\sin U(x)$ តើមានចម្លើយដូចម្តេច?	$\sin x=-1$ នោះ $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $\sin x=0$ $x=2k\pi$ ជាទូទៅ សមីការ $\sin x=\sin\alpha$ មានចម្លើយពីរគឺ $x=\alpha+2k\pi$ ឬ $x=\pi-\alpha+2k\pi$ ដូចគ្នាដែរសមីការ $\sin V(x)=\sin U(x)$ ដែល $V(x);U(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x សមមូល $V(x)=U(x)+2k\pi$ និង $V(x)=\pi-U(x)+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$	សមីការ $\sin V(x)=\sin U(x)$ ដែល $V(x);U(x)$ ជាអនុគមន៍ នៃ x សមមូល $V(x)=U(x)+2k\pi$ និង $V(x)=\pi-U(x)+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$
ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការ ក) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ខ) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$	ក) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$ នោះ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right.\quad ;k\in\mathbb{Z}$ ខ) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ នោះ $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$ $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi+4k\pi \\ x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right.$	ក) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ នោះ $\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$ $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ និង $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ខ) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$ នោះ $x=\pi+4k\pi$ និង $x=\frac{7\pi}{4}+2k\pi$
តើ $\tan(x)=\tan(x+2k\pi)$ រឺទេ? នោះសមីការ $\tan x=\tan\alpha$ មានចម្លើយដូចម្តេច?	**៣ដំណោះស្រាយសមីការ** $\tan x=a$ តាមរូបយើងបាន ធ្នូមួយមានចុង M មានរង្វាស់ $\pi+\alpha$ និង ធ្នូមួយមានចុង N  មានរង្វាស់ $\pi+\alpha+2k\pi=\alpha+(2k+1)\pi$ នោះសមីការ $\tan x=a=\tan\alpha$ មានចម្លើយ $x=\alpha+k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$ ចំនាំសមីការ $\tan V(x)=\tan U(x)$ ដែល $V(x);U(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x សមមូល $V(x)=U(x)+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$	សមីការ $\tan x=a=\tan\alpha$ មានចម្លើយ $x=\alpha+k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការ $\tan 3x=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការ $\cot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$	ឧទាហរណ៍: ដោះស្រាយសមីការ $\tan 3x=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ $\Leftrightarrow 3x=\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+k\pi$ $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{15}+k\frac{\pi}{5}\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$ **<u>៤ដំណោះស្រាយសមីការ</u>** <u>$\cot x=a$</u> យើងបានសមីការ  $\cot x=\cot\alpha$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\tan x}=\frac{1}{\tan\alpha}$ ដូច សមីការ $\tan x=\tan\alpha$ ដែរ នោះសមីការ $\cot V(x)=\cot U(x)$ ដែល $V(x);U(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x សមមូល $V(x)=U(x)+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ ឧទាហរណ៍ $\cot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow \cot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cot\frac{\pi}{6}$ $\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\pi$ $\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$	$\tan 3x=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ $\Leftrightarrow 3x=\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+k\pi$ $\Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{15}+k\frac{\pi}{5}\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$ ឧទាហរណ៍ $\cot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow \cot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cot\frac{\pi}{6}$ $\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\pi$ $\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$
-គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ក) $\cos U(x)=\cos V(x)$ ខ) $\sin V(x)=\sin U(x)$ គ) $\cot x=\cot\alpha$	*<u>ជំហានទី៤</u>* (ពង្រឹងចំណេះដឹង) ក) $U(x)=\pm V(x)+2\pi k$ ខ) $V(x)=U(x)+2k\pi$ និង $V(x)=\pi-U(x)+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ គ) $V(x)=U(x)+k\pi$	សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍ ក) $U(x)=\pm V(x)+2\pi k$ ខ) $V(x)=U(x)+2k\pi$ និង $V(x)=\pi-U(x)+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ គ) $V(x)=U(x)+k\pi$
-គ្រូដាក់លំហាត់ទី៣ដល់៤ ទំព័រ១១០ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	*<u>ជំហានទី៥</u>* (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី៣ដល់៤ ទំព័រ ១១០	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្ដាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៣.... **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

មេរៀនទី..៣.... **សមីការ និង វិសមីការត្រីកោណ**

(IV.វិសមីការត្រីកោណមាត្រ)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញវិសមីការត្រីកោណមាត្រតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយវិសមីការត្រីកោណមាត្រ

តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ................ទី................ខែ..............ឆ្នាំ...........

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

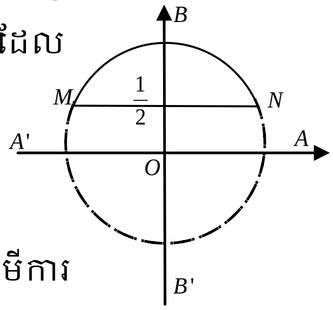
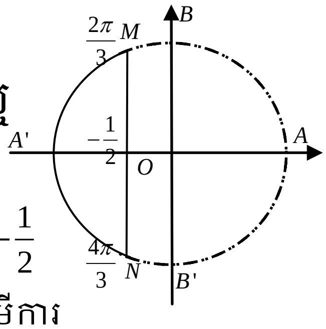
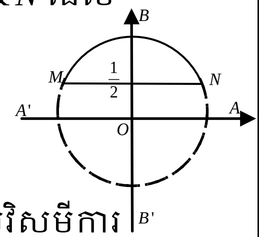
-ស . ស :ទំព័រទី.១០៦.. ដល់ទំព័រទី.១០៧..

-ស . គ : ទំព័រទី.១០៦.. ដល់ទំព័រទី..១០៧..

-បន្ទាត់ ក្រដាសរង្វង់

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ដោះស្រាយសមីការ ៖ ក) $\sin x=\frac{1}{2}$ ខ) $\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=\sqrt{3}$	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) ក) $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin x=\sin\frac{\pi}{6}$ នោះ $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ & $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ខ) $\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\frac{\pi}{3}$ ឬ $\Leftrightarrow\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ នោះ $x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$	-សិស្សឆ្លើយ ក) $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin x=\sin\frac{\pi}{6}$ នោះ $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ & $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ខ) $\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\frac{\pi}{3}$ ឬ $\Leftrightarrow\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ នោះ $x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

–គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី មេរៀនទី.១. **សមីការ និង វិសមីការត្រីកោណ** -គ្រូលើកឧទាហរណ៍ រូចសួរសិស្សតើ $\frac{1}{2}$ ជាស៊ីនុសនៃមុំណាខ្លះ? –ណែនាំសិស្សសង្កេតពីស៊ីនុសនៃមួយចំនួនធំជាងឬស្មើ $\frac{1}{2}$ លុះតែរូបភាពនៃមួយចំនួននោះនៅលើធ្នូ NBM រួមទាំងចំនុច $M \& N$ –សួរសិស្សតើ $-\frac{1}{2}$ ជាកូស៊ីនុសនៃមុំណាខ្លះ? –កូស៊ីនុសនៃមួយចំនួនតូចជាងជាង $-\frac{1}{2}$ លុះត្រាតែរូបភាពនៃមួយចំនួននោះនៅលើធ្នូ $MA'N$ រួមទាំងលើកលែងចំនុច $M \& N$	<u>*ជំហានទី៣*</u> (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.៣. **សមីការ និង វិសមីការត្រីកោណ** IV.វិសមីការត្រីកោណមាត្រ Ex_1 **ដោះស្រាយវិសមីការ** $\sin x \geq \frac{1}{2}$ នោះយើងបានចម្លើយ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{array}\right.$ តាមរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ មានចំនុច $M \& N$ ដែល $AN = \frac{\pi}{6}$ និងធ្នូ $AM = \frac{5\pi}{6}$  ដូចនេះចម្លើយវិសមីការ $\boxed{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z})}$ Ex_2 **ដោះស្រាយវិសមីការ** $2\cos x + 1 < 0$ $\cos x < -\frac{1}{2}$ $\cos x < \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ឬ ហើយ $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$  ដូចនេះចម្លើយវិសមីការ $\boxed{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z})}$ ករណីពិសេស វិសមីការ $\sin x > 0$ មានចម្លើយ $\boxed{2k\pi < x < \pi + 2k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z})}$ Ex_3 **ដោះស្រាយវិសមីការ** $\tan x \geq -1$ <u>ចំនាំ</u>សមីការ $1) \tan x \leq a \quad ; \ 2) \tan \geq a$ មានចម្លើយ $1) \boxed{-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \alpha + k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z})}$ $2) \boxed{\alpha + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z})}$ យើងបានចម្លើយឧទាហរណ៍	–សិស្សកត់ត្រា –សិស្សឆ្លើយ សិ $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ នោះ នោះ $\sin x \geq \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ –សិស្សដោះស្រាយជាក្រុម តាមរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ មានចំនុច $M \& N$ ដែល $AN = \frac{\pi}{6}$ និងធ្នូ $AM = \frac{5\pi}{6}$  ដូចនេះចម្លើយវិសមីការ $\boxed{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z})}$ –សិស្សឆ្លើយ សិ $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ នោះ ឬ $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ដូចនេះចម្លើយវិសមីការ $\boxed{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z})}$

	$-\frac{\pi}{4}+k\pi \le x \le \frac{3\pi}{4}+k\pi \ ; (k \in \mathbb{Z})$ **<u>សំគាល់</u>** ដំណោះស្រាយវិសមីការ cot ដូចគ្នានឹងដំណោះស្រាយវិសមីការ $\tan x$ ដែរ។ វិសមីការ $\rightarrow$ សំណុំចម្លើយ $\sin x \le a \rightarrow \pi-\alpha+2k\pi \le x \le \alpha+2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$ $\sin x \le a \rightarrow \alpha+2k\pi \le x \le \pi-\alpha+2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$ $\cos x \le a \rightarrow \alpha+2k\pi \le x \le -\alpha+2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$ $\cos x \ge a \rightarrow -\alpha+2k\pi \le x \le \alpha+2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$ $\tan x \le a \rightarrow -\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \alpha+2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$ $\tan x \ge a \rightarrow \alpha+2k\pi \le x \le k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$	
-គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិដោះស្រាយវិសមីការ $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) > \sin x$	*<u>ជំហានទី៤</u>* (ពង្រឹងចំណេះដឹង) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) > \sin x$ $\Leftrightarrow \sin x - \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) < 0$ $\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x-x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x-\frac{\pi}{3}}{2}\right) < 0$ $\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < 0$ $\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < 0$ $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+2k\pi < x-\frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{3}+2k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z})$	សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍ $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) > \sin x$ $\Leftrightarrow \sin x - \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) < 0$ $\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x-x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x-\frac{\pi}{3}}{2}\right) < 0$ $\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < 0$ $\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) < 0$ $\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+2k\pi < x-\frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{3}+2k\pi \ ; \ (k \in \mathbb{Z})$
-គ្រូដាក់លំហាត់ទី៩និង១០ ទំព័រ១១២ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	*<u>ជំហានទី៥</u>* (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី៩និងលេខ១០ ទំព័រ ១១២	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី…៣…. **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

មេរៀនទី..៣…. **សមីការ និង វិសមីការត្រីកោណ**

(IV.វិសមីការត្រីកោណមាត្រ)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញវិសមីការត្រីកោណមាត្រតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយវិសមីការត្រីកោណមាត្រ តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> …២….ម៉ោង ថ្ងៃ…………….ទី…………….ខែ…………..ឆ្នាំ……….

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី.១០៦.. ដល់ទំព័រទី.១០៧..

-ស . គ : ទំព័រទី.១០៦.. ដល់ទំព័រទី..១០៧..

-បន្ទាត់ ក្រដាសរង្វង់

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ដោះស្រាយសមីការ ៖ ក) $\sin x=\frac{1}{2}$ ខ) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=\sqrt{3}$	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) ក) $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}$ នោះ $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ & $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ខ) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\frac{\pi}{3}$ ឬ $\Leftrightarrow \tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ នោះ $x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$	-សិស្សឆ្លើយ ក) $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}$ នោះ $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ & $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ខ) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\frac{\pi}{3}$ ឬ $\Leftrightarrow \tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ នោះ $x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

–គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី

មេរៀនទី.១.

សមីការ និង វិសមីការត្រីកោណ

-គ្រូលើកឧទាហរណ៍ រួចសួរសិស្សតើ $\frac{1}{2}$ ជាស៊ីនុសនៃមុំណាខ្លះ?

–ណែនាំសិស្សសង្កេតពី ស៊ីនុសនៃមួយចំនួនធំជាង ឬស្មើ $\frac{1}{2}$ លុះតែរូបភាពនៃមួយចំនួននោះនៅលើធ្នូ NBM រួមទាំងចំនុច $M \& N$

–សួរសិស្សតើ $-\frac{1}{2}$ ជាកូស៊ីនុសនៃមុំណាខ្លះ?

–កូស៊ីនុសនៃមួយចំនួនតូចជាងជាង $-\frac{1}{2}$ លុះត្រាតែរូបភាពនៃមួយចំនួននោះនៅលើធ្នូ $MA'N$ រួមទាំងលើកលែងចំនុច $M \& N$

<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី)

មេរៀនទី.៣.

សមីការ និង វិសមីការត្រីកោណ

IV.វិសមីការត្រីកោណមាត្រ

Ex_1 **ដោះស្រាយវិសមីការ** $\sin x \ge \frac{1}{2}$

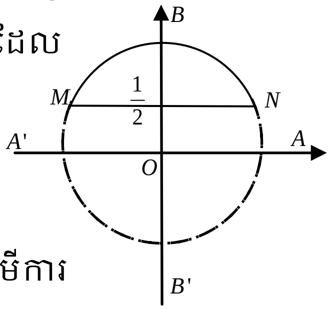
នោះយើងបានចម្លើយ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6} \\ x=\frac{5\pi}{6} \end{array}\right.$

តាមរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ

មានចំនុច $M \& N$ ដែល

$AN=\frac{\pi}{6}$ និងធ្នូ

$AM=\frac{5\pi}{6}$



ដូចនេះចម្លើយវិសមីការ

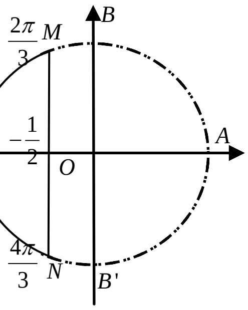
$\boxed{\frac{\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6}+2k\pi \;;\; (k\in\mathbb{Z})}$

Ex_2 **ដោះស្រាយវិសមីការ** $2\cos x+1<0$

$\cos x<-\frac{1}{2}$

$\cos x<\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ឬ

ហើយ $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$



ដូចនេះចម្លើយវិសមីការ

$\boxed{\frac{2\pi}{3}+2k\pi \le x \le \frac{4\pi}{3}+2k\pi \;;\; (k\in\mathbb{Z})}$

ករណីពិសេស

វិសមីការ $\sin x>0$ មានចម្លើយ

$\boxed{2k\pi<x<\pi+2k\pi \;;\; (k\in\mathbb{Z})}$

Ex_3 **ដោះស្រាយវិសមីការ** $\tan x\ge -1$

<u>ចំណាំ</u>សមីការ $1)\tan x\le a \quad ;\ 2)\tan \ge a$

មានចម្លើយ

$1)\boxed{-\frac{\pi}{2}+k\pi \le x \le \alpha+k\pi \;;\; (k\in\mathbb{Z})}$

$2)\boxed{\alpha+k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+k\pi \;;\; (k\in\mathbb{Z})}$

យើងបានចម្លើយឧទាហរណ៍

–សិស្សកត់ត្រា

–សិស្សឆ្លើយ

សិ $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ នោះ នោះ

$\sin x\ge\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

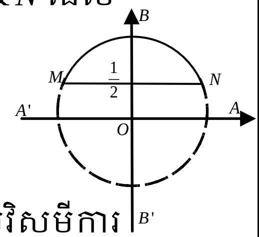
–សិស្សដោះស្រាយជាក្រុម

តាមរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ

មានចំនុច $M \& N$ ដែល

$AN=\frac{\pi}{6}$ និងធ្នូ

$AM=\frac{5\pi}{6}$



ដូចនេះចម្លើយវិសមីការ

$\boxed{\frac{\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6}+2k\pi \;;\; (k\in\mathbb{Z})}$

–សិស្សឆ្លើយ

សិ $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ នោះ ឬ

$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

ដូចនេះចម្លើយវិសមីការ

$\boxed{\frac{2\pi}{3}+2k\pi \le x \le \frac{4\pi}{3}+2k\pi \;;\; (k\in\mathbb{Z})}$

	$-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \le x \le \dfrac{3\pi}{4}+k\pi \ ; (k\in\mathbb{Z})$ **សំគាល់** ដំណោះស្រាយវិសមីការ cot ដូចគ្នានឹងដំណោះស្រាយវិសមីការ $\tan x$ ដែរ។ វិសមីការ → សំណុំចម្លើយ $\sin x \le a \to \pi-\alpha+2k\pi \le x \le \alpha+2k\pi ;(k\in\mathbb{Z})$ $\sin x \le a \to \alpha+2k\pi \le x \le \pi-\alpha+2k\pi ;(k\in\mathbb{Z})$ $\cos x \le a \to \alpha+2k\pi \le x \le -\alpha+2k\pi ;(k\in\mathbb{Z})$ $\cos x \ge a \to -\alpha+2k\pi \le x \le \alpha+2k\pi ;(k\in\mathbb{Z})$ $\tan x \le a \to -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \alpha+2k\pi ;(k\in\mathbb{Z})$ $\tan x \ge a \to \alpha+2k\pi \le x \le k\pi ;(k\in\mathbb{Z})$	
-គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិដោះស្រាយវិសមីការ $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)>\sin x$	***ជំហានទី៤*** (ពង្រឹងចំណេះដឹង) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)>\sin x$ $\Leftrightarrow \sin x-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)<0$ $\Leftrightarrow 2\sin\left(\dfrac{x-x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x+x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)<0$ $\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)<0$ $\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)<0$ $\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}+2k\pi<x-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ $\Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi<x<\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi \ ; \ (k\in\mathbb{Z})$	សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍ $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)>\sin x$ $\Leftrightarrow \sin x-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)<0$ $\Leftrightarrow 2\sin\left(\dfrac{x-x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x+x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)<0$ $\Leftrightarrow 2\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)<0$ $\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)<0$ $\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}+2k\pi<x-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ $\Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi<x<\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi \ ; \ (k\in\mathbb{Z})$
-គ្រូដាក់លំហាត់ទី៩និង១០ ទំព័រ១១២ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	***ជំហានទី៥*** (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី៩និងលេខ១០ ទំព័រ ១១២	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៤.... **ម៉ាទ្រីស និង ដេទែមីណង់**

មេរៀនទី...១.... **ម៉ាទ្រីស**

($III.$ម៉ាទ្រីសច្រាស)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញ ម៉ាទ្រីសច្រាសតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សគណនាម៉ាទ្រីសច្រាសតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ.................ទី.................ខែ...............ឆ្នាំ..........

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី.១២៦.. ដល់ទំព័រទី..១២៧..

-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-បន្ទាត់ កូនបាល់ ខ្សែម៉ែត្រ

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ គណនាផលគុណម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}12 & 4 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 7 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}=?$ កំនត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & -7\\ a & 0\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -6\\ -11 & -9\end{bmatrix}$	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) $\begin{bmatrix}12 & 4 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 7 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26 & -6\\ -11 & -9\end{bmatrix}$ កំនត់ a និង b $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & -7\\ a & 0\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -6\\ -11 & -9\end{bmatrix}$ នោះ $a=1\,;\ b=-3\,;\ c=5$	សិស្សឆ្លើយ $\begin{bmatrix}12 & 4 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 7 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26 & -\\ -11 & -\end{bmatrix}$ កំនត់ a និង b $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & -7\\ a & 0\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -6\\ -11 & -9\end{bmatrix}$ នោះ $a=1\,;\ b=-3\,;\ c=5$

គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី មេរៀនទី.១.**ម៉ាទ្រីស និង ដេទែមីណង់**	<u>*ជំហានទី៣*</u> (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី.១.**ម៉ាទ្រីស និង ដេទែមីណង់** 3 ម៉ាទ្រីសច្រាស Ex ម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}3&4\\1&3\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1&-2\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$	សិស្សឡើងគណនា
ហៅសិស្សឡើងគណនា $AB\ ;\ BA$	គណនា $AB\ ;\ BA$ $AB=\begin{bmatrix}3&4\\1&3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&-2\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $BA=\begin{bmatrix}1&-2\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ បើ $AB=BA=I$ នោះ B ហៅថា ម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A តាងដោយ A^{-1} $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-4\\-1&3\end{bmatrix}$	$AB=\begin{bmatrix}3&4\\1&3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&-2\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $BA=\begin{bmatrix}1&-2\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
គ្រូហៅសិស្សឡើងគណនា	$Ex_2\ A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ និង $M=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix};ad-cd\neq 0$ គណនា AM និង MA និងរកម៉ាទ្រីស B បើដឹងថា $AB=BA=I$ ដែល I ជា ម៉ាទ្រីសឯកតាលំដាប់ 2×2 $AM=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}ab-cb&0\\0&ad-cb\end{bmatrix}$ $=(ad-cb)\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	សិស្សទាញជាទូទៅ បើគេមានចំនួនពិត K និងម៉ាទ្រីស A នោះម៉ាទ្រីស AK បានដោយគុណ ធាតុនីមួយៗនៃម៉ាទ្រីស A នឹងចំនួន ពិត K បើ $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ នោះ $AK=KA=\begin{bmatrix}ka&kb\\kc&kd\end{bmatrix}$
គ្រូណែនាំសិស្សដោះស្រាយជាក្រុម		សិស្សឡើងដោះស្រាយ

ហៅសិស្សឡើងបកស្រាយតារាងនិងគណនា		សិស្សដោះស្រាយ

		សិស្សឡើងដោះស្រាយ

		$(A+B)C=\begin{bmatrix}1&4&4\\0&1&1\end{bmatrix}$ $AC+BC=\begin{bmatrix}1&4&4\\0&1&1\end{bmatrix}$ នោះ $\Rightarrow(A+B)C=AC+BC$
គ្រូដាក់លំហាត់តាមក្រុម មាន $C=\begin{bmatrix}1&a\\b&6\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}2&-3\\0&8\end{bmatrix}$ រកតម្លៃ a និង b បើ $DC=8C$	<u>*ជំហានទី៤*</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) $DC=\begin{bmatrix}2&-3\\0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&h\\b&6\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}2-3b&2a-18\\8b&48\end{bmatrix}$ $8C=8\begin{bmatrix}1&a\\b&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&8a\\8b&48\end{bmatrix}$ $\begin{cases}2-3b&=8\\2a-18&=8a\end{cases}$ $\Rightarrow b=-2\ ;\ a=-3$	សិស្សឡើងដោះស្រាយ $DC=\begin{bmatrix}2&-3\\0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&h\\b&6\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}2-3b&2a-18\\8b&48\end{bmatrix}$ $8C=8\begin{bmatrix}1&a\\b&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&8a\\8b&48\end{bmatrix}$ $\begin{cases}2-3b&=8\\2a-18&=8a\end{cases}$ $\Rightarrow b=-2\ ;\ a=-3$
-គ្រូដាក់លំហាត់ទី៣ដល់ទី៦ទំព័១២៨ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះនិងណែនាំសិស្សគោរពវិន័យនិងច្បាប់ចរាចរណ៍	<u>*ជំហានទី៥*</u> (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី៣ដល់៦ ទំព័រ ១២៨	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៤....

ម៉ាទ្រីសនិងដេទែមីណង់

មេរៀនទី..១....

ម៉ាទ្រីស

(*I.សញ្ញាណនៃម៉ាទ្រីស II.ប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស*)

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញ សញ្ញាណនៃម៉ាទ្រីសនិងប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សគណនា ប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីសតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.ពេលវេលា: ...០២....ម៉ោង ថ្ងៃ..................ទី..................ខែ...............ឆ្នាំ...........

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី ៦៨.. ដល់ទំព័រទី.៧៣.

-ស . គ : ទំព័រទី.៦៨.. ដល់ទំព័រទី..៧៣..

-បន្ទាត់

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

<table>
<tr><th>សកម្មភាពគ្រូ</th><th>ខ្លឹមសាមេរៀន</th><th>សកម្មភាពសិស្ស</th></tr>
<tr>
<td>-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន
អនាម័យ
សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ</td>
<td>ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ
សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ</td>
<td>តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍</td>
</tr>
<tr>
<td>គ្រូសួរ
គេមានទូដាក់សៀវភៅមួយ មាន២ថ្នាក់។ថ្នាក់លើដាក់សៀវភៅគណិត១៣ក្បាល រូបវិទ្យា៥ក្បាលគីមី៧ក្បាល ថ្នាក់ក្រោមដាក់ គណិត៨ ក្បាលរូបវិទ្យា១០ក្បាលគីមី ៤ក្បាល
ចូរបំពេញតារាងខាងក្រោម៖
<table>
<tr><td>ថ្នាក់</td><td>គ.ណិ</td><td>រូប</td><td>គីមី</td></tr>
<tr><td>លើ</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td></tr>
<tr><td>ក្រោម</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td></tr>
</table>
</td>
<td>ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)
យើងបានតារាង
<table>
<tr><td></td><td>គ.ណិ</td><td>រូប</td><td>គីមី</td></tr>
<tr><td>ថ្នាក់លើ</td><td>១៣</td><td>៥</td><td>៧</td></tr>
<tr><td>ថ្នាក់ក្រោម</td><td>៨</td><td>១០</td><td>៤</td></tr>
</table>
</td>
<td>សិស្សឆ្លើយ
<table>
<tr><td></td><td>គ.ណិ</td><td>រូប</td><td>គីមី</td></tr>
<tr><td>ថ្នាក់លើ</td><td>១៣</td><td>៥</td><td>៧</td></tr>
<tr><td>ថ្នាក់ក្រោម</td><td>៨</td><td>១០</td><td>៤</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>–គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី
មេរៀនទី.១.
ម៉ាទ្រីស</td>
<td>ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)
មេរៀនទី.១.
ម៉ាទ្រីស</td>
<td>–សិស្សកត់ត្រា</td>
</tr>
</table>

ណែនាំសិស្សយកពត៌មានក្នុងតារាងមកបំពេញក្នុងដង្កៀប $\begin{bmatrix} .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{bmatrix}$

តើក្នុងដង្កៀបមានជួរដេកចំនួនប៉ុន្មាន? ជួរឈរចំនួនប៉ុន្មាន?

តើ $\begin{bmatrix} 13 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 4 \end{bmatrix}$ ហៅថាអ្វី?

ណែនាំទាញជាទូទៅ

ឲ្យសិស្សសរសេរម៉ាទ្រីស A មានលំដាប់ $m\times n$?

ប្រតិបត្តិរកចំនួនជួរដេកនិងជួរឈរនៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម?

$\begin{bmatrix} 12 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

I. *សញ្ញាណនៃម៉ាទ្រីស*

១) និយមន័យ

ថ្នាក់	គ.ណិ	រូប	គីមី
លើ	១៣	៥	៧
ក្រោម	៨	១០	៤

សរសេរពត៌មានក្នុងដង្កៀប $\begin{bmatrix} 13 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 4 \end{bmatrix}$ ហៅថាម៉ាទ្រីស

ចំនួននីមួយក្នុងដង្កៀបហៅថា**ធាតុ**

ម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2×3 ដែល 2 ជាចំនួនជួរដេក 3 ជាចំនួនជួរឈរ

ជាទូទៅ

ម៉ាទ្រីសជាការរៀបចំនួនជារៀងចតុកោណកែងក្នុងដង្កៀប។គេកំណត់តាងម៉ាទ្រីសដោយអក្សរធំដូចជា $A;B;...$ និងធាតុម៉ាទ្រីសដោយអក្សរតូច

ម៉ាទ្រីស A មានលំដាប់ $m\times n$ កំណត់ដោយ

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots\ldots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m2}\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{11} ស្ថិតនៅជួរដេកទី១ជួរឈរទី១

a_{11} ស្ថិតនៅជួរដេកទី១ជួរឈរទី១

a_{11} ស្ថិតនៅជួរដេកទី១ជួរឈរទី១

....

....

ប្រតិបត្តិ

$\begin{bmatrix} 12 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ មាន២ជួរដេក៣ជួរឈរ

សិស្សបំពេញពត៌មានក្នុងដង្កៀប

	គ.ណិ	រូប	គីមី
ថ្នាក់លើ	១៣	៥	៧
ថ្នាក់ក្រោម	៨	១០	៤

គឺ $\begin{bmatrix} 13 & 5 & 7 \\ 8 & 10 & 4 \end{bmatrix}$

ជាទូទៅ

ម៉ាទ្រីសជាការរៀបចំនួនជារៀងចតុកោណកែងក្នុងដង្កៀប។

សិស្សសរសេរម៉ាទ្រីស $m\times n$ លំដាប់

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots\ldots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m2}\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

សិស្សឡើងបកស្រាយៈ

$\begin{bmatrix} 12 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ មាន២ជួរដេក៣ជួរឈរលំដាប់ 2×3

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix} 26 & -6 \\ -11 & -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ មាន៣ជួរដេក២ជួរឈរ $\begin{bmatrix} 26 & -6 \\ -11 & -9 \end{bmatrix}$ មាន២ជួរដេក២ជួរឈរ	$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ មាន៣ជួរដេក២ជួរឈរ មានលំដាប់ 2×3 $\begin{bmatrix} 26 & -6 \\ -11 & -9 \end{bmatrix}$ មាន២ជួរដេក ២ជួរឈរ មានលំដាប់ 2×2
តើម៉ាទ្រីស $o=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសអ្វី?	**២ប្រភេទនៃម៉ាទ្រីស** **ក)ម៉ាទ្រីសសូន្យ** ជាម៉ាទ្រីសដែលមានធាតុទាំងអស់ស្មើសូន្យតាងដោយ០។ *Ex* $o=\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix};o=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$o=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសសុន្យ
ឲ្យសិស្សលើកឧទាហរណ៍ម៉ាទ្រីសមានចំនួនជួរដេកស្មើចំនួនជួរឈរ	**ខ)ម៉ាទ្រីសការេ** ជាម៉ាទ្រីសមានចំនួនជួរដេកនិងចំនួនជួរឈរស្មើគ្នា $A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots\ldots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n2}\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}$ ជា ម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n ដែល $a_{11};a_{22};a_{33};\ldots\ldots a_{nn}$ ជាធាតុនៅលើអង្កត់ទ្រូងសេស។ ឧទាហរណ៍ ជាម៉ាទ្រីសការេ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -9 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} -1 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix};\ldots\ldots$	ឧទាហរណ៍ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -9 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} -1 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix};\ldots\ldots$
ឲ្យសិស្សលើកឧទាហរណ៍ម៉ាទ្រីសការេដែលធាតុនៅអង្កត់ទ្រូងសេសស្មើ1	**គ)ម៉ាទ្រីសឯកតា** ជាម៉ាទ្រីសការេដែលធាតុនៅអង្កត់ទ្រូងពិសេស $a_{11};a_{22};a_{33};\ldots\ldots a_{nn}=1$ ហើយធាតុផ្សេងទៀតស្មើសូន្យ	ឧទាហរណ៍ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ldots$

ប្រតិបត្តិចូរកំណត់តម្លៃ

$a;b;c;n;m$ ដើម្បីឲ្យ $M=N$

ដែល

$$M=\begin{bmatrix} c & 23 & 0 & 9 \\ 12 & -5 & n & 4 \\ a & 18 & 2 & 32 \end{bmatrix};$$

$$M=\begin{bmatrix} 2 & 23 & m & 9 \\ 12 & b & 6 & 4 \\ 15 & 18 & 2 & 32 \end{bmatrix}$$

ឧទាហរណ៍

គណនាផលបូក

នៃម៉ាទ្រីស

$$\begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 35 & 25 & 23 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 35 & 28 & 20 \\ 40 & 21 & 30 \end{bmatrix}$$

ប្រតិបត្តិ

គេឲ្យម៉ាទ្រីសៈ

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix};$$

$$B=\begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 4 & -1 & -8 \end{bmatrix};$$

$$C=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

គណនា ក) $A-B$

ខ) $B-C$

គ) $A+X=B$ រកម៉ាទ្រីស X

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}..........$$

II. ប្រមាណវិធីនៃម៉ាទ្រីស

១ ម៉ាទ្រីសស្មើគ្នា

ម៉ាទ្រីសពីរស្មើគ្នាកាលណាម៉ាទ្រីសទាំងពីរមានលំដាប់ដូចគ្នានិងមានធាតុត្រូវគ្នាស្មើរៀងគ្នា។

ប្រតិបត្តិ

បើ $M=N$ នោះ

$$\begin{bmatrix} c & 23 & 0 & 9 \\ 12 & -5 & n & 4 \\ a & 18 & 2 & 32 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 23 & m & 9 \\ 12 & b & 6 & 4 \\ 15 & 18 & 2 & 32 \end{bmatrix}$$

$c=2;m=0;b=-5;n=6;a=15$

២ វិធីបូកនិងវិធីដកនៃ ម៉ាទ្រីស

ឧទាហរណ៍ គណនាផលបូក

នៃម៉ាទ្រីស

$$\begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 35 & 25 & 23 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 35 & 28 & 20 \\ 40 & 21 & 30 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 30+35 & 20+28 & 25+20 \\ 35+40 & 25+21 & 23+30 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 65 & 48 & 45 \\ 75 & 46 & 53 \end{bmatrix}$$

ជាទូទៅ ម៉ាទ្រីសពីរអាចបូកបូកឬដកគ្នាបានលុះត្រាតែម៉ាទ្រីសទាំងពីរមានលំដាប់ដូចគ្នាហើយគេបូកឬដកធាតុត្រូវគ្នារៀងគ្នា។

ប្រតិបត្តិ

ក) $A-B$

$$A-B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 1 & -7 & 6 \\ -3 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

ខ) $B-C$ មិនអាចគណនាបានទេព្រោះមានលំដាប់ខុសគ្នា

គ) $A+X=B$ រកម៉ាទ្រីស X

បើ $M=N$ នោះ

$$\begin{bmatrix} c & 23 & 0 & 9 \\ 12 & -5 & n & 4 \\ a & 18 & 2 & 32 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 23 & m & 9 \\ 12 & b & 6 & 4 \\ 15 & 18 & 2 & 32 \end{bmatrix}$$

$c=2;m=0;b=-5;n=6;a=15$

គណនាផលបូក

នៃម៉ាទ្រីស

$$\begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 35 & 25 & 23 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 35 & 28 & 20 \\ 40 & 21 & 30 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 30+35 & 20+28 & 25+20 \\ 35+40 & 25+21 & 23+30 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 65 & 48 & 45 \\ 75 & 46 & 53 \end{bmatrix}$$

ក) $A-B$

$$A-B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 1 & -7 & 6 \\ -3 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

ខ) $B-C$ មិនអាចគណនាបានទេ

ព្រោះ

មានលំដាប់ខុសគ្នា

គ) $A+X=B$ រកម៉ាទ្រីស X

$A+X=B$

$\Leftrightarrow X=B-A$

	$A+X=B$ $\Leftrightarrow X=B-A$ $X=\begin{bmatrix}3 & 9 & 0\\ 4 & -1 & -8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 2 & 6\\ 1 & 3 & 7\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}-1 & 7 & -6\\ 3 & -4 & -15\end{bmatrix}$	$X=\begin{bmatrix}3 & 9 & 0\\ 4 & -1 & -8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 2 & 6\\ 1 & 3 & 7\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}-1 & 7 & -6\\ 3 & -4 & -15\end{bmatrix}$
-គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ ដូចម្តេចហៅថា ក)ម៉ាទ្រីសសូន្យ? ខ)ម៉ាទ្រីសឯកតា?	<u>*ជំហានទី៤*</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) **ក)ម៉ាទ្រីសសូន្យ** ជាម៉ាទ្រីសដែលមានធាតុទាំងអស់ស្មើសូន្យតាងដោយ០។ **ខ)ម៉ាទ្រីសឯកតា** ជាម៉ាទ្រីសការេដែលធាតុនៅអង្កត់ទ្រូងពិសេស $a_{11};a_{22};a_{33};........a_{nn}=1$ ហើយធាតុផ្សេងទៀតស្មើសូន្យ	សិស្សពិភាក្សានិងរាយការណ៍ **ក)ម៉ាទ្រីសសូន្យ** ជាម៉ាទ្រីសដែលមានធាតុទាំងអស់ស្មើសូន្យតាងដោយ០។ **ខ)ម៉ាទ្រីសឯកតា** ជាម៉ាទ្រីសការេដែលធាតុនៅអង្កត់ទ្រូងពិសេស $a_{11};a_{22};a_{33};........a_{nn}=1$ ហើយធាតុផ្សេងទៀតស្មើសូន្យ
-គ្រូដាក់លំហាត់ទី១ដល់៥ ទំព័រ១២៨ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះ	<u>*ជំហានទី៥*</u> (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់ទី១ដល់៥ ទំព័រ ១២៨	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

ជំពូក ១ ៖ ស្វ៊ីតចំនួនពិត

OUTLINE

I. **ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន**

1. និយមន័យ
2. អថេរភាពនៃស្វ៊ីត
   ក. ស្វ៊ីតកើន
   ខ. ស្វ៊ីតចុះ
   គ. ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន
3. ស្វ៊ីតទាល់
   ក. ស្វ៊ីតទាល់លើ
   ខ. ស្វ៊ីតទាល់ក្រោម
   គ. ស្វ៊ីតទាល់

II. **លំហាត់**

III. **ដំណោះស្រាយ**

ស៊ីតចំនួនពិត

I. ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន

1. និយមន័យ

ស៊ីតចំនួនពិតគឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពី $\mathbb{N}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។

2. អថេរភាពនៃស៊ីត

ក. ស៊ីតកើន

ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតកើនលុះត្រាតែ $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$ ។

ខ. ស៊ីតចុះ

ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតចុះលុះត្រាតែ $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1} < a_n$ ។

គ. ស៊ីតម៉ូណូតូន

ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតម៉ូណូតូនលុះត្រាតែ $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$ ឬ $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$ ។

3. ស៊ីតទាល់

ក. ស៊ីតទាល់លើ

ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតទាល់លើកាលណាចំនួនពិត M មួយដែល $\forall n\in\mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \le M$ ។ M ហៅថាគោលលើនៃស៊ីត ។

ខ. ស៊ីតទាល់ក្រោម

ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតទាល់ក្រោមកាលណាមានចំនួនពិត m មួយដែល $\forall n\in\mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $m \le a_n$ ។ ចំនួន m ហៅថាគោលក្រោមនៃស៊ីត ។

គ. ស៊ីតទាល់

ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតទាល់កាលណាវាទាល់លើផង និងទាល់ក្រោមផង ។

II. លំហាត់

1. គេឲ្យ $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ ។ រក $u_7, u_{30}, u_{365}, u_{2012}, u_{2n}, u_{2n+1}$ ។
2. កំណត់តួទី n បំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម ៖

   ក. $4, 9, 14, 19, 24, 29, \ldots$ ខ. $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

   គ. $0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$ ឃ. $-2, 4, -6, 8, \ldots$
3. សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដូចតទៅ ៖

   ក. $u_n = \frac{1}{1+n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ខ. $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

   គ. ស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_{n+1} = a_n^2$ និង $a_1 = 2$

   ឃ. ស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 2$ និង $a_1 = 1$
4. សិក្សាភាពកើន ចុះនៃស្វ៊ីត ៖

   ក. $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ ខ. $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ គ. $u_n = -\sqrt{n+3}$

   ឃ. $a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$ ង. $v_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ ច. $a_n = \frac{3^n}{n^2}$
5. គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ដោយ $a_n = \frac{an^2+1}{2n^2+3}$ ។ កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឲ្យ ៖

   ក. ស្វ៊ីត (a_n) កើន ខ. ស្វ៊ីត (a_n) ចុះ
6. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (v_n) ដែល $v_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ រួចរកគោលនៃស្វ៊ីត ។
7. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n = \frac{7n+5}{5n+7}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ រួចរកគោលនៃស្វ៊ីត ។
8. សិក្សាភាពកើន និងចុះរបស់ស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \geq 3$ ។
9. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ ៖

   $u_1 = 1$ និង $u_{n+1} = 3u_n + 10$, $\forall n \in \mathbb{N}$

   $v_1 = 5$ និង $v_{n+2} = v_{n+1} + 6v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

   បំពេញតារាងខាងក្រោម ៖

n	3	5	7	9
u_n				
v_n				

10. គេឲ្យស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = \frac{3n^2}{n+1}$ ។ បង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ីតកើន ។

11. (u_n) ជាស៊ីតកំណត់ដោយ $u_n = \frac{5^n}{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$ ។ បង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ីតកើន ។

III. ដំណោះស្រាយ

1. រក $u_7, u_{30}, u_{365}, u_{2012}, u_{2n}, u_{2n+1}$

យើងមាន ៖ $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$, គេបាន ៖

$$u_7 = \frac{1+(-1)^7}{7} = 0$$

$$u_{30} = \frac{1+(-1)^{30}}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

$$u_{365} = \frac{1+(-1)^{365}}{365} = 0$$

$$u_{2012} = \frac{1+(-1)^{2012}}{2012} = \frac{1}{1006}$$

$$u_{2n} = \frac{1+(-1)^{2n}}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$$

$$u_{2n+1} = \frac{1+(-1)^{2n+1}}{2n+1} = 0$$

2. កំណត់តួទី n បំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ នៃស្ទីតខាងក្រោម ៖

ក. $4, 9, 14, 19, 24, 29, \dots$

គេបាន ៖

$$\begin{aligned}
9 &= 4+5 \\
14 &= 4+2\cdot 5 \\
19 &= 4+3\cdot 5 \\
24 &= 4+4\cdot 5 \\
29 &= 4+5\cdot 5 \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $u_n = 4+5(n-1) = 5n-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ខ. $3, 5, 7, 9, 11, \dots$

ដូចនេះ $u_n = 3+2(n-1) = 2n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

គ. $0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots$

ដូចនេះ $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ឃ. $-2, 4, -6, 8, \dots$

ដូចនេះ $u_n = 2n(-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

3. សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដូចតទៅ ៖

ក. $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន ៖

$$n^2 < (n+1)^2$$
$$1+n^2 < 1+(n+1)^2$$
$$\frac{1}{1+n^2} > \frac{1}{1+(n+1)^2}$$
$$u_n > u_{n+1}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតមូណូតូនចុះ ។

ខ. $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ យើងមាន $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$ គេបាន ៖

$$2^n < 2^{n+1}$$
$$\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}}$$
$$-\frac{1}{2^n} < -\frac{1}{2^{n+1}}$$
$$1-\frac{1}{2^n} < 1-\frac{1}{2^{n+1}}$$
$$u_n < u_{n+1}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតមូណូតូនកើន ។

គ. ស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_{n+1} = a_n^2$ និង $a_1 = 2$

គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន ៖

$$a_{n+1} = a_n^2 = \left(a_{n-1}^2\right)^2 = \left(a_{n-2}^2\right)^4 = \cdots = a_1^{2^n} = 2^{2^n}$$

នាំឲ្យ $a_n = 2^{2^{n-1}}$

$$\Rightarrow a_{n+1} > a_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតមូណូតូនកើន ។

ឃ. ស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 2$ និង $a_1 = 1$

គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ យើងមាន $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 2$

គេបាន ៖

$$a_{n+1}-a_n=a_n^2+2>0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតមូណូតូនកើន ។

4. សិក្សាភាពកើន ចុះនៃស្វ៊ីត ៖

ក. $u_n=\dfrac{n+1}{n+2}$

ដោយ $u_n=\dfrac{n+1}{n+2}=1-\dfrac{1}{n+2}\Rightarrow u_{n+1}=1-\dfrac{1}{n+3}$

$$\Rightarrow u_n<u_{n+1}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ. $u_n=\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

ដោយ $u_n=\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

គេបាន ៖

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}}{\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}}=\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}\times\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3\left(\frac{n+3}{n}\right)=\frac{(n^3+3n^2+3n+1)(n+3)}{n(n^3+6n^2+12n+8)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^4+6n^3+12n^2+10n+3}{n^4+6n^3+12n^2+8n}=1+\frac{2n+3}{n^4+6n^3+12n^2+8n}>1$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

គ. $u_n=-\sqrt{n+3}$

យើងមាន $u_n=-\sqrt{n+3}$ គេបាន ៖ $u_{n+1}=-\sqrt{n+4}$

$$\Rightarrow u_{n+1}<u_n$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ឃ. $a_n=\dfrac{3^n}{2^{n+1}}$

យើងមាន $a_n=\dfrac{3^n}{2^{n+1}}$ គេបាន ៖ $a_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}}{2^{n+2}}$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{3^{n+1}}{2^{n+2}}}{\dfrac{3^n}{2^{n+1}}}=\frac{3}{2}>1$$

ដូចនេះ (a_n) ជាស៊ីតកើន ។

ង. (ទុកជាលំហាត់)

ច. (ទុកជាលំហាត់)

5. គេឲ្យស៊ីត (a_n) កំណត់គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ដោយ $a_n=\dfrac{an^2+1}{2n^2+3}$ ។ កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឲ្យ ៖

ក. ស៊ីត (a_n) កើន ខ. ស៊ីត (a_n) ចុះ

6. បង្ហាញថាស៊ីត (v_n) ដែល $v_n=\dfrac{n^2+1}{2n^2-3}$ ជាស៊ីតទាល់ រួចរកគោលនៃស៊ីត ។

7. បង្ហាញថាស៊ីត (u_n) ដែល $u_n=\dfrac{7n+5}{5n+7}$ ជាស៊ីតទាល់ រួចរកគោលនៃស៊ីត ។

8. សិក្សាភាពកើន និងចុះរបស់ស៊ីត (u_n) ដែល $u_n=\dfrac{n^2}{2^n}$, $n\geq 3$ ។

9. បំពេញតារាងខាងក្រោម ៖

n	3	5	7	9
u_n	49	481	4369	39361
v_n				

10. បង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ីតកើន

យើងមាន , ស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n=\dfrac{3n^2}{n+1}$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2}{x+1}$, $x\geq 1$

នាំឲ្យគេបាន ដេរីវេនៃ $f(x)$ គឺ ៖

$$f'(x)=\frac{6x(x+1)-3x^2}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{6x^2+6x-3x^2}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{3x(x+2)}{(x+1)^2}>0\ ,\ \forall x\geq 1$$

នាំឲ្យ $f(n)$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ជាអនុគមន៍កើន

នោះគេបាន , $n<n+1\Rightarrow f(n)<f(n+1)$ ឬ $u_n<u_{n+1}$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្ទីតកើនត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

11. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្ទីតកើន

យើងមាន , (u_n) ជាស្ទីតកំណត់ដោយ $u_n=\dfrac{5^n}{n+2}\ ,\forall n\in\mathbb{N}$ នាំឲ្យ $u_{n+1}=\dfrac{5^{n+1}}{n+3}$

គេបាន ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{5^{n+1}}{n+3}}{\dfrac{5^n}{n+2}}=\frac{5(n+2)}{n+3}$$
$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{5}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\leq\frac{1}{5}\left(\frac{4}{3}\right)<1$$
$$u_n<u_{n+1}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្ទីតកើនត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ជំពូក ២ ៖ ស្វ៊ីតនព្វន្ត

OUTLINE

I. **ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន**

1. និយមន័យ
2. រូបមន្តតួទី n
3. មធ្យមនព្វន្ត
4. រូបមន្តផលបូក

II. **លំហាត់**

III. **ដំណោះស្រាយ**

ស្វ៊ីតនព្វន្ត

I. ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន

1. និយមន័យ

ស្វ៊ីតនព្វន្តគឺ ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ(ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកនឹងចំនួនថេរ d មួយ ហៅថាផលសងរួម ។

2. រូបមន្តតួទី n

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលយើងស្គាល់ តួទី១ គឺ u_1 និងផលសងរួម d គេបានតួទូទៅ(តួទីn) របស់វាគឺ ៖

$$u_n = u_1 + (n+1)d$$

ដូចគ្នាដែរ , បើសិនជាយើងស្គាល់តួទី p ណាមួយវិញ គេបាន ៖

$$u_n = u_p + (n-p)d$$

3. មធ្យមនព្វន្ត

មធ្យមនព្វន្តនៃពីរចំនួនa និង b គឺ $A=\dfrac{a+b}{2}$ ។

មធ្យមនព្វន្តនៃ n ចំនួន $x_1, x_2, \dots, x_n$ គឺ $A=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ ។

4. រូបមន្តផលបូក

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលយើងស្គាល់ តួទី១ គឺ u_1 និងផលសងរួម d គេបាន ផលបូក n តួដំបូង របស់វាគឺ ៖

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n}{2}(u_1+u_n)$$

ឬ $$S_n = \frac{n\left(u_1+(n-1)d\right)}{2}$$

☺☺☺☺

II. លំហាត់

1. គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដូចខាងក្រោម ៖

$$a_1 = 0, |a_2| = |a_1 + 1|, |a_3| = |a_2 + 1|, \dots, |a_n| = |a_{n-1} + 1|$$

បង្ហាញថា ៖ $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$ ។

2. គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិតដែលមានទំនាក់ទំនង ៖ $b_{n+1} = \dfrac{2 - \sqrt{3} + b_n}{1 + \left(\sqrt{3} - 2\right) b_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

គណនា b_n ដោយដឹងថា $b_1 = \sqrt{3}$ ។

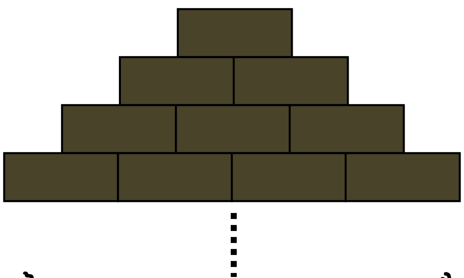
3. គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = \log_a 5$ និង $u_{n+1} = \log_a\left(1 + a^{u_n}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

4. គេអោយស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) ដែល $n = 1, 2, 3, \dots$ ហើយតួនីមួយៗជាចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \dfrac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}$ ។

5. គេអោយស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $\forall n \in \mathbb{N}$ ដែល $a_1 = \dfrac{2013}{2}$ និង $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^2 a_n$ ។ កំណត់ a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

6. គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = \log_a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$, $(n \in \mathbb{N}\ , a > 1)$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n = 2\log_a 2 - \log_a 3 - \log_a 11 - \log_a 61 + \log_a 503$

7. កម្មករសំណង់ម្នាក់រៀបជញ្ជាំងរាងជណ្តើរជាមួយស្រទាប់ឥដ្ឋដែលបង្ហាញដូចក្នុងរូប ។ ប្រសិនបើកម្មករនោះប្រើឥដ្ឋអស់ ២៥៥៦ ដុំ , តើមានប៉ុន្មានស្រទាប់ដែលរៀបបាន ?



8. តំបន់នីមួយៗនៃស្តាតមួយមាន ៤៤ ជួរដេក ដែលមានកៅអីអង្គុយ ២២កន្លែងនៅជួរដេកទី១ , ២៣កន្លែងនៅជួរដេកទី២ , ២៤កន្លែងនៅជួរដេកទី៣ និងជាបន្តបន្ទាប់ ។

ក. តើមានកៅអីអង្គុយចំនួនប៉ុន្មាននៅក្នុងជួរដេកទី៤៤(ចុងក្រោយ) ?

ខ. តើមានកៅអីអង្គុយសរុបចំនួនប៉ុន្មាននៅក្នុងមួយតំបន់ ?

គ. តើមានកៅអីអង្គុយសរុបចំនួនប៉ុន្មាននៅក្នុងស្តាតមួយដែលមាន ២៥ តំបន់ ?

9. ស៊ីតមួយកំណត់ដោយ $u_n = 3n-2 \, , \forall n \in \mathbb{N}$ ។

១. បង្ហាញថា (u_n) គឺជាស៊ីតនព្វន្ត ។

២. រក u_1 និង d ។

៣. រកតួទី ៥៧ ។

៤. តើតួនៃស៊ីតតូចបំផុតទីប៉ុន្មានដែលមានតម្លៃធំជាង ៤៥0 ?

10. ស៊ីតមួយកំណត់ដោយ $u_n = \frac{71-7n}{2} \quad , \ \forall n \in \mathbb{N}$ ។

១. បង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

២. រក u_1 និង d ។

៣. រក u_{75} ។ ៤. តើតម្លៃនៃ n ស្មើប៉ុន្មាន បើ $u_n < -200$?

11. រកតម្លៃ k ដែល $3k+1, k$ និង -3 ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតនព្វន្តមួយ ។

12. គេមានស៊ីត $2, 9, 16, 23, 30, \ldots$ ។

១. បង្ហាញថាស៊ីតខាងលើគឺជាស៊ីតនព្វន្ត ។

២. រកតួទូទៅនៃស៊ីត ។

៣. រកតួទី ១00 នៃស៊ីត ។

៤. តើ ៨២៨ និង ២៣៤១ ជាសមាជិកនៃស៊ីត ឬទេ ?

13. គេមានស៊ីត $6, 17, 28, 39, 50, \ldots$ ។

១. បង្ហាញថាស៊ីតនេះ ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

២. រកតួទូទៅនៃស៊ីតនេះ ។

៣. រកតួទី ៥0 ។

៤. តើ ៣២៥ និង ៧៦១ ជាសមាជិកនៃស៊ីតនេះដែរ ឬទេ ?

14. គេមានស្វ៊ីត $87, 83, 79, 75, \ldots$ ។

១. បង្ហាញថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះ ។

៣. រកតួទី៤០ នៃស្វ៊ីត ។

៤. តើ -143 ជាសមាជិកនៃស្វ៊ីតដែរ ឬទេ ?

15. (v_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ដោយ $v_n = \dfrac{5}{4n-7}$ ។ គេតាង $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ ។

១. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ។

16. គេឲ្យស្វ៊ីត (v_n) និង (u_n) កំណត់ដោយ $v_1 = 2, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$ និង $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ ។

១. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២. សរសេរតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) ។

17. គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_1 = 1$ និង $u_2 = 6$ ។

១. រកផលសងរួម d នៃស្វ៊ីតនេះ ។

២. រក u_3, u_4, u_5, u_6 ។

18. ក្នុងបំណោមស្វ៊ីតខាងក្រោម , ណាខ្លះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ? រកផលសងរបស់វា ។

១. ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 1$ និង $a_{n+1} = a_n + 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

២. ស្វ៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $b_1 = 3$ និង $b_{n+1} = b_n + n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

៣. ស្វ៊ីត (c_n) កំណត់តាម $c_{n+1} = c_n + 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

19. បង្ហាញថាស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ៖

១. ស្វ៊ីត $(u_n): 2, 9, 16, 23, 30, \ldots$ ។ ២. ស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n = 19n - 3$ ។

20. គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយកំណត់គ្រប់ $n \geq 1$ ដោយ $u_1 - u_2 = 4$ និង $u_5 = -8$

១. រកផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនេះ ។ ២. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះ ។

៣. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

21. ស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយមាន $u_{17} - u_{20} = 9$ និង $(u_{17})^2 + (u_{20})^2 = 153$ ។

កំណត់ u_1 និង d នៃស៊ីតនេះ ។

22. ស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយមាន $d>0, u_{31}+u_{34}=11$ និង $(u_{31})^2+(u_{34})^2=101$ ។ រកតួទូទៅនៃស៊ីតនេះ ។

23. គេឲ្យស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយ និងពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន m,k ដែល $m<k$ ។

    បង្ហាញថា $u_k=\dfrac{u_{k-m}+u_{k+m}}{2}$ ។

    <u>អនុវត្តន៍</u> ៖ រក u_{802} បើ $u_{409}=1211$ និង $u_{2013}=803$ ។

24. ស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_5+u_{19}=90$ ។ រកផលបូក 23 តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

25. ស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_2+u_5=42$ និង $u_4+u_9=66$ ។ រកផលបូក 346 តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

26. ស៊ីតនព្វន្តមួយមានតួទី១ស្មើនឹង 102 និងតួទី២ស្មើនឹង 105 ។

    ១. រកតួដែលមានតម្លៃ 999 ។

    ២. គណនាផលបូក 300 តួដំបូងនៃស៊ីត ។

27. គេឲ្យស៊ីតនព្វន្តកើន (u_n) មាន $u_1^3+u_{15}^3=302094$ និងផលបូក 15 តួដំបូងនៃស៊ីតស្មើនឹង 585 ។ រកតួទី១ u_1 និង ផលសងរួមនៃស៊ីតនេះ ។

28. មុំទាំងបីនៃត្រីកោណកែងមួយបង្កើតបានជាស៊ីតនព្វន្តមួយ ។ រករង្វាស់មុំនៃត្រីកោណនោះ ។

29. ស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយកំណត់គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ដោយ $u_{11}=10$ និង $u_{1001}=10000$ ។ រក S_{101} ។

30. រកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យបីចំនួន $10-3x, 2x^2+3, 7-4x$ ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតនព្វន្តមួយ ។

31. គេឲ្យ a,b,c ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតនព្វន្តមួយ ។ បង្ហាញថា a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2, b^2+bc+c^2 ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតនព្វន្តមួយ ។

32. គេឲ្យស៊ីតនព្វន្ត (a_n) មួយកំណត់គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

    បង្ហាញថា $a_1+a_n=a_k+a_{n-k+1}\ ,\ \forall k\in\mathbb{N}$ ។

III. ដំណោះស្រាយ

1. បង្ហាញថា $\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}\geq -\frac{1}{2}$

យើងមាន ៖ $a_1=0$

$$+\begin{cases}|a_2|=|a_1+1|\Rightarrow a_2^2=a_1^2+2a_1+1\\|a_3|=|a_2+1|\Rightarrow a_3^2=a_2^2+2a_2+1\\\text{...}\\|a_{n+1}|=|a_n+1|\Rightarrow a_{n+1}^2=a_n^2+2a_n+1\end{cases}$$

$$a_{n+1}=a_1^2+2(a_1+a_2+a_3+...+a_n)+n$$

ដោយ ៖ $a_{n+1}\geq 0$, $a_1=0$

$$\Leftrightarrow 2(a_1+a_2+a_3+...+a_n)+n\geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}\geq -\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}\geq -\frac{1}{2}$ ពិត ។

2. គណនា b_n ដោយដឹងថា $b_1=\sqrt{3}$

យើងមាន ៖ $b_{n+1}=\frac{2-\sqrt{3}+b_n}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)b_n}$

តាង ៖

$$\tan x=2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \tan 2x=\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \tan 2x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan 2x=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{12}$$

តាង ៖ $b_n = \tan a_n \Rightarrow b_{n+1} = \tan a_{n+1}$

$$\Rightarrow \tan a_{n+1} = \frac{\tan\frac{\pi}{12} + \tan a_n}{1 - \tan\frac{\pi}{12}\tan a_n}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{12} + a_n\right)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{\pi}{12} + a_n$$

មានន័យថា (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = \frac{\pi}{12}$ ។

នាំឲ្យ,

$$b_1 = \tan a_1 = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\pi}{3}$$

គេបាន ៖ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{\pi}{3} + (n+1)\frac{\pi}{12}$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{(n+3)\pi}{12}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

3. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន ៖ $u_{n+1} = \log_a\left(1 + a^{u_n}\right)$

$$\Leftrightarrow a^{u_{n+1}} = 1 + a^{u_n}$$

$$\Leftrightarrow a^{u_{n-1}} - a^{u_n} = 1$$

គេបាន $\left(a^{u_n}\right)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = 1$ និងតួទី១ $a^{u_1} = a^{\log_a 5} = 5$

$$\Rightarrow a^{u_n} = a^{u_1} + (n-1)d$$

$$\Rightarrow a^{u_n} = 5 + (n-1)1$$

$$\Rightarrow a^{u_n} = 4 + n$$

$$\Rightarrow u_n = \log_a(4+n)$$

ដូចនេះ $u_n = \log_a(4+n)$ ត្រូវបានកំណត់ ។

4. បង្ហាញថា $\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n+1}}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}$

តាង $d=u_2-u_1=u_3-u_2=...=u_n-u_{n-1}$

- ករណី $d=0$

$\Rightarrow u_2-u_1=u_3-u_2=...=u_n-u_{n-1}=0$
$\Rightarrow u_1=u_2=u_3=...=u_{n-1}=u_n$

យើងបាន ៖

$$\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}$$

- ករណី $d\neq 0$

យើងបាន ៖

$$\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{\sqrt{u_{n-1}}-\sqrt{u_n}}{u_{n-1}-u_n}$$

$$+\begin{cases} n=2\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}=\frac{\sqrt{u_1}-\sqrt{u_2}}{-d} \\ n=3\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}=\frac{\sqrt{u_2}-\sqrt{u_3}}{-d} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n=n\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{\sqrt{u_{n-1}}-\sqrt{u_n}}{-d} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{\sqrt{u_1}-\sqrt{u_n}}{-d}$$

$$=\frac{u_1-u_n}{-d}$$

$$=\frac{u_1-\left(u_1+(n-1)d\right)}{-d\left(\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}\right)}$$

$$=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}$$

5. កំណត់ a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ a_1=\frac{2013}{2}$$
$$a_1+a_2+a_3+...+a_n=n^2a_n$$

យើងបាន ៖

$$S_n=S_{n-1}+a_n$$
$$\Rightarrow a_n=s_n+s_{n-1}$$
$$\Rightarrow a_n=n^2a_n+(n-1)a_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow a_n\left(1-n^2\right)=(n-1)^2a_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow a_n(n+1)=(n-1)a_{n-1}$$

ចំពោះ ៖

$$n=2\Rightarrow a_2=\frac{1}{3}a_1$$
$$n=3\Rightarrow a_3=\frac{2}{4}a_2$$
$$n=4\Rightarrow a_4=\frac{3}{5}a_3$$
....
$$n=n\Rightarrow a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$$
$$\Rightarrow a_n=\frac{1\times 2}{n(n+1)}a_1$$
$$\Leftrightarrow a_n=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{2013}{2}$$
$$\Leftrightarrow a_n=\frac{2013}{n(n+1)}$$

ដូចនេះ $a_n=\dfrac{2013}{n(n+1)}$ **ត្រូវបានកំណត់ ។**

6. កំណត់តម្លៃ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ a_n=\log_a\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

គេបាន ៖

$$a_n=2\log_a 2-\log_a 3-\log_a 11-\log_a 61+\log_a 503$$
$$=\left(\log_a 4+\log_a 503\right)-\left(\log_a 3+\log_a 11+\log_a 61\right)$$
$$=\log_a 4\cdot 503-\log_a 3\cdot 11\cdot 61$$

$$a_n = \log_a \frac{2012}{2013}$$
$$= \log_a \frac{2012}{2012+1}$$
$$\Rightarrow n = 2012$$

ដូចនេះ $n = 2012$ ត្រូវបានគណនា ។

7. រកចំនួនស្រទាប់ដែលរៀបបាន

តាមបំរាប់ និងតាមរូប , គេបាន ៖

ចំនួនឥដ្ឋក្នុងស្រទាប់ទី១(កំពូល) គឺ ៖ $u_1 = 1$

ចំនួនឥដ្ឋក្នុងស្រទាប់ទី២ គឺ ៖ $u_2 = 2$

ចំនួនឥដ្ឋក្នុងស្រទាប់ទី៣ គឺ ៖ $u_3 = 3$

....

ចំនួនឥដ្ឋក្នុងស្រទាប់ទី n គឺ ៖ $u_n = n$

គេបាន , ចំនួនឥដ្ឋសរុបគឺ ៖

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$= 1 + 2 + \cdots + n$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

តែតាមបំរាប់ , គេមាន $S_n = 2556$ នោះគេបាន ៖

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2556$$
$$n^2 + n = 5112$$
$$n^2 + n - 5112 = 0$$
$$\Delta = 1^2 - 4(1)(-5112) = 20449$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{20449} = 143$$
$$n = \frac{-1 \pm 143}{2} = \left[\begin{array}{l} 71 \\ -72 \end{array}\right.$$

ដោយ $n > 0$

ដូចនេះគេអាចតំរៀបបានចំនួន ៧១ ស្រទាប់ ។

8. តាមបំរាប់ , គេអាចតាង ៖

កន្លែងអង្គុយនៅជួរទី១ ៖ $u_1 = 22$

កន្លែងអង្គុយនៅជួរទី២ ៖ $u_2 = 23$

កន្លែងអង្គុយនៅជួរទី៣ ៖ $u_3 = 24$

....

តាមគំរូខាងលើនេះ , គេបាន (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ $u_1 = 22$ និង ផលសងរួម $d = 1$, យើងបាន , កន្លែងអង្គុយនៅជួរទី n គឺ $u_n = u_1 + (n-1)d$

ឬ $u_n = 22 + 1(n-1) = n + 21$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

ក. រកចំនួនកៅអីអង្គុយនៅក្នុងជួរដេកទី៤៤

ដោយ $u_n = n + 21$ គេបាន ៖

$$u_{44} = 44 + 21 = 65 \text{ កៅអី}$$

ដូចនេះនៅជួរដេកទី៤៤ មានចំនួន ៦៥ កៅអី ។

ខ. រកចំនួនកៅអីអង្គុយសរុបនៅក្នុងមួយតំបន់

ចំនួនកៅអីអង្គុយសរុបនៅក្នុងមួយតំបន់ គឺជាផលបូកកៅអីទាំងអស់នៃតំបន់ នោះ , គេបាន ៖

$$S_{44} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{44} = \frac{44(u_1 + u_{44})}{2} = 22(22 + 65) = 1914 \text{ កៅអី}$$

ដូចនេះ ចំនួនកៅអីអង្គុយសរុបនៅក្នុងមួយតំបន់គឺ ១ ៩១៤ កៅអី ។

គ. រកចំនួនកៅអីអង្គុយសរុបនៅក្នុងស្តាតមួយដែលមាន ២៥តំបន់

ដោយស្តាតនោះមានចំនួន ២៥តំបន់ , គេបាន ៖

ចំនួនកៅអីអង្គុយសរុបគឺ $S = 25 \cdot 1914 = 47850$ កៅអី

ដូចនេះស្តាតនោះមានកៅអីអង្គុយសរុប ៤៧ ៨៥0 កៅអី ។

9. ១. បង្ហាញថា (u_n) គឺជាស៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន , $u_n = 3n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ នោះ $u_{n+1} = 3(n+1) - 2$

យើងបាន ,

$$u_{n+1}-u_n=\left(3(n+1)-2\right)-(3n-2)$$
$$=3n+1-3n+2$$

$u_{n+1}-u_n=3$ ថេរ

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. រក u_1 និង d

ដោយ $u_n=3n-2\ ,\forall n\in\mathbb{N}$ និង $u_{n+1}-u_n=3$

មានន័យថា , គេបាន ៖ $u_1=3\cdot 1-2=1$ និង $d=u_{n+1}-u_n=3$

ដូចនេះ $u_1=1$ និង $d=3$ ត្រូវបានកំណត់ ។

៣. រកតួទី ៥៧

ដោយ $u_n=3n-2\ ,\forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន , តួទី៥៧ នៃស្វ៊ីតគឺ ៖

$$u_{57}=3\cdot 57-2=169$$

ដូចនេះតួទី៥៧ នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ ១៦៩ ។

៤. តើតួនៃស្វ៊ីតតូចបំផុតទីប៉ុន្មានដែលមានតម្លៃធំជាង ៤៥0 ?

គេបាន ,

$$u_n>450$$
$$3n-2>450$$
$$n>\frac{450+2}{3}=150.667$$

ដូចនេះតួនៃស្វ៊ីតតូចបំផុតនោះគឺតួទី ១៥១ ។

10. ១. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន , $u_n=\dfrac{71-7n}{2}\quad ,\ \forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន $u_{n+1}=\dfrac{71-7(n+1)}{2}$ នាំឲ្យ ៖

$$u_{n+1}-u_n=\frac{71-7(n+1)}{2}-\frac{71-7n}{2}$$
$$=\frac{71-7n-7-71+7n}{2}$$

$u_{n+1}-u_n=-\dfrac{7}{2}$ ថេរ

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. រក u_1 និង d

យើងមាន $u_n=\dfrac{71-7n}{2}\quad,\ \forall n\in\mathbb{N}$ និង $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{7}{2}$ មានន័យថា ៖

$$u_1=\frac{71-7\cdot 1}{2}=32 \text{ និង } d=u_{n+1}-u_n=-\frac{7}{2}$$

ដូចនេះ $u_1=32$ និង $d=-\dfrac{7}{2}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

៣. រក u_{75}

ដោយ $u_n=\dfrac{71-7n}{2}\quad,\ \forall n\in\mathbb{N}$, គេបាន ៖

$$u_{75}=\frac{71-7\cdot 75}{2}=-227$$

ដូចនេះ $u_{75}=-227$ ត្រូវបានកំណត់ ។

៤. តើតម្លៃនៃ n ស្មើប៉ុន្មាន បើ $u_n<-200$?

គេបាន ,

$$\begin{aligned} u_n&<-200\\ \frac{71-7n}{2}&<-200\\ 71-7n&<-2\cdot 200\\ 7n&>71+400\\ n&>\frac{471}{7}=67.3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $n\geq 68$ ត្រូវបានកំណត់ ។

11. រកតម្លៃ k

យើងមាន , $3k+1, k$ និង -3 ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ

គេបាន , មធ្យមនព្វន្ត ,

$$\begin{aligned} k&=\frac{3k+1-3}{2}\\ 2k&=3k-2\\ k&=2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $k=2$ ត្រូវបានកំណត់ ។

12. ១. បង្ហាញថាស្វ៊ីតខាងលើគឺជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន , ស្វ៊ីត $2,9,16,23,30,\ldots$

តាងស្វ៊ីត $(u_n):2,9,16,23,30,\ldots$, គេបាន ៖

$$u_2 - u_1 = 9 - 2 = 7$$
$$u_3 - u_2 = 16 - 9 = 7$$
$$u_4 - u_3 = 23 - 16 = 7$$
$$u_5 - u_4 = 30 - 23 = 7$$

នាំឲ្យ $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = u_5 - u_4 = 7$ ថេរ

ដូចនេះស្វ៊ីត (u_n) គឺជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $u_1 = 2$ និង $d = 7$ ។

២. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត

ដោយស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_1 = 2$ និង $d = 7$, នោះ ៖

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$
$$u_n = 2 + 7(n-1)$$
$$u_n = 7n - 5$$

ដូចនេះតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះគឺ $u_n = 7n - 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

៣. រកតួទី ១០០ នៃស្វ៊ីត

យើងមាន $u_n = 7n - 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$, គេបានតួទី១០០ នៃស្វ៊ីត គឺ ៖

$$u_{100} = 7 \cdot 100 - 5 = 695$$

ដូចនេះតួទី ១០០ នៃស្វ៊ីតគឺ $u_{100} = 695$ ។

៤. តើ ៨២៨ និង ២៣៤១ ជាសមាជិកនៃស្វ៊ីត ឬទេ ?

យើងមាន , $u_n = 7n - 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$

បើ $u_n = 828$ គេបាន ៖

$$7n - 5 = 828$$
$$n = \frac{828 + 5}{7} = 119$$

បើ $u_n = 2341$ គេបាន ៖

$$7n - 5 = 2341$$
$$n = \frac{2341 + 5}{7} = 335.1 \notin \mathbb{N}$$

ដូចនេះ ៨២៨ ជាសមាជិកនៃស្វ៊ីត តែ២៣៤១ មិនមែនជាសមាជិកនៃស្វ៊ីតទេ ។

13. ១. បង្ហាញថាស្វ៊ីតនេះ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន , ស្វ៊ីត $6, 17, 28, 39, 50, \ldots$

តាងស្វ៊ីត $(u_n): 6, 17, 28, 39, 50, \ldots$, គេបាន ៖

$$u_2 - u_1 = 17 - 6 = 11$$
$$u_3 - u_2 = 28 - 17 = 11$$
$$u_4 - u_3 = 39 - 28 = 11$$
$$u_5 - u_4 = 50 - 39 = 11$$

យើងឃើញថា , $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = u_5 - u_4 = 11$ ថេរ

ដូច្នេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $u_1 = 6$ និង $d = 11$ ។

២. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះ

ដោយស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_1 = 6$ និង $d = 11$, គេបាន ៖

តួទូទៅនៃស្វ៊ីត គឺ ,

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$
$$u_n = 6 + 11(n-1)$$
$$u_n = 11n - 5$$

ដូចនេះតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះគឺ $u_n = 11n - 5 \ , \forall n \in \mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

៣. រកតួទី ៥0

ដោយ $u_n = 11n - 5 \ , \forall n \in \mathbb{N}$ នាំឲ្យគេបាន ,

$$u_{50} = 11 \cdot 50 - 5 = 545$$

ដូចនេះ $u_{50} = 545$ ត្រូវបានគណនា ។

៤. តើ ៣២៥ និង ៧៦១ ជាសមាជិកនៃស្វ៊ីតនេះដែរ ឬទេ ?

យើងមាន , $u_n = 11n - 5 \ , \forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន ៖

បើ $u_n = 325$ នោះយើងបាន ៖

$$11n - 5 = 325$$
$$n = \frac{325 + 5}{11} = 30$$

បើ $u_n = 761$ នោះយើងបាន ៖

$$11n - 5 = 761$$
$$n = \frac{761 + 5}{11} = 69.6 \notin \mathbb{N}$$

ដូចនេះ ៣២៥ ជាសមាជិកនៃស៊ីតខាងលើ តែ ៧៦១ មិនមែនជាសមាជិកនៃស៊ីតខាងលើទេ ។

14. ១. បង្ហាញថាស៊ីតនេះជាស៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន , ស៊ីត $87, 83, 79, 75, \ldots$

តាងស៊ីត $(u_n): 87, 83, 79, 75, \ldots$, គេបាន ៖

$$u_2 - u_1 = 83 - 87 = -4$$
$$u_3 - u_2 = 79 - 83 = -4$$
$$u_4 - u_3 = 75 - 79 = -4$$

ដោយ $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = -4$ ថេរ

ដូចនេះ (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមាន $u_1 = 87$ និង $d = -4$ ។

២. រកតួទូទៅនៃស៊ីតនេះ

ស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_1 = 87$ និង $d = -4$, នោះគេបាន ៖

តួទូទៅនៃស៊ីត (u_n) គឺ ៖

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$
$$u_n = 87 + (n-1)(-4)$$
$$u_n = 91 - 4n$$

ដូចនេះតួទូទៅនៃស៊ីត (u_n) គឺ $u_n = 91 - 4n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

៣. រកតួទី៤០ នៃស៊ីត

យើងមាន , $u_n = 91 - 4n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន ៖

$$u_{40} = 91 - 4 \cdot 40 = 91 - 160 = -69$$

ដូចនេះ $u_{40} = -69$ ត្រូវបានគណនា ។

៤. តើ -143 ជាសមាជិកនៃស៊ីតដែរ ឬទេ ?

យើងមាន , $u_n = 91 - 4n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

បើ -143 ជាសមាជិកនៃស៊ីត (u_n) នោះគេបាន ៖

$$91-4n=-143$$
$$4n=91+143$$
$$n=\frac{234}{4}=58.5\notin\mathbb{N}$$

ដូចនេះ -143 មិនមែនជាសមាជិកនៃស៊ីតខាងលើទេ ។

15. ១. បង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន , $v_n=\frac{5}{4n-7}$ និង $u_n=\frac{1}{v_n}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

នោះគេបាន , $u_{n+1}=\frac{1}{v_{n+1}}$ នាំឲ្យយើងបាន ៖

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\frac{5}{4(n+1)-7}}-\frac{1}{\frac{5}{4n-7}}$$
$$=\frac{4n+4-7}{5}-\frac{4n-7}{5}$$
$$u_{n+1}-u_n=\frac{4}{5} \text{ ថេរ}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមាន $u_1=\frac{1}{v_1}=\frac{1}{\frac{5}{4\cdot1-7}}=-\frac{3}{5}$ និង $d=\frac{4}{5}$ ។

២. រកតួទូទៅនៃស៊ីត (u_n)

ស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_1=-\frac{3}{5}$ និង $d=\frac{4}{5}$, គេបាន ៖

$$u_n=u_1+(n-1)d$$
$$=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot(n-1)$$
$$=-\frac{3}{5}+\frac{4n}{5}-\frac{4}{5}$$
$$=\frac{4n}{5}-\frac{7}{5}$$

ដូចនេះ $u_n=\frac{4n-7}{5}\,,\forall n\in\mathbb{N}$ ជាតួទូទៅនៃស៊ីត ត្រូវបានកំណត់ ។

16. ១. បង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន , ស៊ីត (v_n) និង (u_n) ដែល $v_1=2, v_{n+1}=\frac{v_n}{v_n+1}$ និង $u_n=\frac{1}{v_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

គេបាន ,

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}$$
$$=\frac{1}{\frac{v_n}{v_n+1}}-\frac{1}{v_n}$$
$$=\frac{v_n+1}{v_n}-\frac{1}{v_n}$$

$u_{n+1}-u_n=1$ ថេរ

ដូចនេះ (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមាន $u_1=\frac{1}{v_1}=\frac{1}{2}$ និង $d=1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. សរសេរតួទូទៅនៃស៊ីត (u_n) និង (v_n)

ស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_1=\frac{1}{2}$ និង $d=1$ គេបាន , តួទូទៅរបស់វាគឺ ៖

$$u_n=u_1+(n-1)d$$
$$=\frac{1}{2}+1\cdot(n-1)$$
$$=n-\frac{1}{2}$$

និង

$$v_n=\frac{1}{u_n}$$
$$=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{2}{2n-1}$$

ដូចនេះតួទូទៅនៃស៊ីតគឺ $u_n=n-\frac{1}{2}$ និង $v_n=\frac{2}{2n-1}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

17. ចម្លើយខ្លី

១. $d=5$

២. $u_3=11, u_4=16, u_5=21, u_6=26$ ។

18. ចម្លើយខ្លី

១. ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត ដែល $d=a_{n+1}-a_n=4$ ។

២. ស្វ៊ីត (b_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្តទេ ។

៣. ស្វ៊ីត (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែល $d = c_{n+1} - c_n = 2$ ។

19. ១. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន , $(u_n): 2, 9, 16, 23, 30, \dots$

គេបាន ៖

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 9 - 2 = 7 \\ u_3 - u_2 &= 16 - 9 = 7 \\ u_4 - u_3 &= 23 - 16 = 7 \\ u_5 - u_4 &= 30 - 23 = 7 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $u_1 = 2$ និង $d = 7$ ។

២. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន , $u_n = 19n - 3$ នាំឲ្យគេបាន $u_{n+1} = 19(n+1) - 3$

យើងបាន ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (19(n+1) - 3) - (19n - 3) \\ &= 19n + 19 - 3 - 19n + 3 \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n = 19$ ថេរ

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $d = 19$ ។

20. ១. រកផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនេះ

យើងមាន , ស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 - u_2 = 4$ និង $u_5 = -8$ គេបាន ,

$$u_2 - u_1 = -(u_1 - u_2) = -4$$

ដូចនេះផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះគឺ $d = -4$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះ

ស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_5 = -8$ និង $d = -4$

គេបាន តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ ,

$$\begin{aligned} u_n &= u_5 + (n-5)d \\ &= -8 + (n-5)(-4) \\ &= -8 - 4n + 20 \\ &= 12 - 4n \end{aligned}$$

ដូចនេះ $u_n = 12 - 4n \ , \forall n \in \mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

៣. រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត

ស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $d = -4$ និង $u_n = 12 - 4n$

គេបាន ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ ,

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \\ &= \frac{n(12 - 4 + 12 - 4n)}{2} \\ &= \frac{n(20 - 4n)}{2} \\ &= 10n - 2n^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $S_n = 10n - 2n^2 \ , \forall n \in \mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

21. កំណត់ u_1 និង d នៃស្វ៊ីតនេះ

យើងមាន , ស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_{17} - u_{20} = 9$ និង $(u_{17})^2 + (u_{20})^2 = 153$

ហើយ $u_n = u_1 + (n-1)d$, គេបាន ៖

$$\begin{cases} u_{17} - u_{20} = 9 \\ (u_{17})^2 + (u_{20})^2 = 153 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + 16d) - (u_1 + 19d) = 9 & (1) \\ (u_1 + 16d)^2 + (u_1 + 19d)^2 = 153 & (2) \end{cases}$$

តាម (1) គេបាន , $-3d = 9 \Rightarrow d = -3$

ជំនួស $d = -3$ ទៅក្នុងសមីការ (2) គេបាន ៖

$$\begin{aligned} (u_1 + 16 \cdot (-3))^2 + (u_1 + 19 \cdot (-3))^2 &= 153 \\ (u_1 - 48)^2 + (u_1 - 57)^2 &= 153 \\ 2u_1^2 - 210u_1 + 5553 &= 153 \\ 2u_1^2 - 210u_1 + 5400 &= 0 \\ u_1^2 - 105u_1 + 2700 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (-105)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2700 = 15^2$$

$$u_{1,1} = \frac{-(-105) - \sqrt{15^2}}{2 \cdot 1} = 45$$

$$u_{1,2} = \frac{-(-105) + \sqrt{15^2}}{2 \cdot 1} = 60$$

ដូចនេះ $d = -3$ និង $u_1 = 45$ ឬ $u_1 = 60$ ត្រូវបានគណនា ។

22. រកតួទូទៅនៃស៊ីតនេះ

យើងមាន , ស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $d>0, u_{31}+u_{34}=11$ និង $(u_{31})^2+(u_{34})^2=101$

គេទាញបាន , $u_{34}=11-u_{31}$ ជំនួសសមភាពនេះក្នុង $(u_{31})^2+(u_{34})^2=101$

គេបាន ៖

$$(u_{31})^2+(11-u_{31})^2=101$$
$$u_{31}^2+121-22u_{31}+u_{31}^2=101$$
$$2u_{31}^2-22u_{31}+20=0$$
$$u_{31}^2-11u_{31}+10=0$$
$$u_{31,1}=1\ ,\ u_{31,2}=10$$

បើ $u_{31}=1$ នោះ $u_{34}=11-1=10$

បើ $u_{31}=10$ នោះ $u_{34}=11-10=1$

ហើយ $u_n=u_1+(n-1)d\ ,\forall n\in\mathbb{N}$, នាំឲ្យគេបាន ៖

$$u_{31}=u_1+30d \text{ និង } u_{34}=u_1+33d$$

សមមូល ,

$$\begin{cases}u_1+30d=1\\u_1+33d=10\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}u_1+30d=10\\u_1+33d=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}3d=9\\u_1=1-30d\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}3d=-9\\u_1=10-30d\end{cases}$$

$$\begin{cases}d=3\\u_1=1-30\cdot 3=-89\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}d=-3<0\\u_1=10-30d\end{cases} \text{ (មិនយក)}$$

ដូចនេះ $u_1=-89$ និង $d=3$ ត្រូវបានកំណត់ ។

23. បង្ហាញថា $u_k=\dfrac{u_{k-m}+u_{k+m}}{2}$

យើងមាន , ស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយ និងពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន m,k ដែល $m<k$

គេបាន ៖ $u_n=u_1+(n-1)d$ នាំឲ្យគេបាន ,

$$u_{k-m}=u_1+(k-m-1)d \text{ និង } u_{k+m}=u_1+(k+m-1)d$$

នាំឲ្យ ,

$$\frac{u_{k-m}+u_{k+m}}{2}=\frac{u_1+(k-m-1)d+u_1+(k+m-1)d}{2}$$
$$=\frac{2u_1+(2k-2)d}{2}$$
$$=u_1+(k-1)d$$
$$=u_k$$

ដូចនេះ $u_k=\frac{u_{k-m}+u_{k+m}}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

<u>អនុវត្តន៍</u> ៖ រក u_{1211} បើ $u_{409}=1211$ និង $u_{2013}=803$

យើងឃើញថា , $\frac{409+2013}{2}=1211$ នោះយើងបាន ,

$$u_{1211}=\frac{u_{2013}+u_{409}}{2}=\frac{1211+803}{2}$$
$$u_{1211}=\frac{2014}{2}=1007$$

ដូចនេះ $u_{1211}=1007$ ត្រូវបានកំណត់ ។

24. រកផលបូក 23 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

យើងមាន , ស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_5+u_{19}=90$

គេបាន , $u_n=u_1+(n-1)d$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$u_1+4d+u_1+18d=90$$
$$2u_1+22d=90$$
$$u_1+11d=45$$

ផលបូក២៣ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះគឺ ៖

$$S_{23}=\frac{23(u_1+u_{23})}{2}$$
$$=\frac{23(u_1+u_1+22d)}{2}$$
$$=\frac{23(2u_1+22d)}{2}$$
$$=23(u_1+11d)$$
$$=23\cdot 45$$
$$=1035$$

ដូចនេះផលបូក ២៣ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះគឺ $S_{23}=1035$ ។

25. រកផលបូក 346 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

យើងមាន , ស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_2+u_5=42$ និង $u_4+u_9=66$

ហើយ $u_n = u_1 + (n-1)d$ គេបាន ,

$$\begin{cases} u_1 + d + u_1 + 4d = 42 \\ u_1 + 3d + u_1 + 8d = 66 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2u_1 + 5d = 42 \\ 2u_1 + 11d = 66 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6d = 24 \\ u_1 = 42 - 5d \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 4 \\ u_1 = 42 - 5 \cdot 4 = 22 \end{cases}$$

យើងបាន , $u_n = 22 + 4(n-1) = 4n + 18$, $\forall n \in \mathbb{N}$

នោះផលបូក 246 តួដំបូងនៃស៊ីតនេះគឺ ៖

$$\begin{aligned} S_{246} &= \frac{246(u_1 + u_{246})}{2} \\ &= 123(22 + 4 \cdot 246 + 18) \\ &= 123 \cdot 1024 \\ &= 125952 \end{aligned}$$

ដូចនេះផលបូក 246 នៃស៊ីតនេះគឺ $S_{246} = 125952$ ត្រូវបានគណនា ។

26. ១. រកតួដែលមានតម្លៃ 999

យើងមាន , ស៊ីតនព្វន្ត (u_n) មួយមានតួទី១ស្មើនឹង 102 និងតួទី២ស្មើនឹង 105

គេបាន , $d = u_2 - u_1 = 105 - 102 = 3$

នេះតួទូទៅនៃស៊ីតគឺ ៖ $u_n = u_1 + (n-1)d = 3n + 99$, $\forall n \in \mathbb{N}$

បើ $u_k = 999$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$3k + 99 = 999$$

$$k = \frac{999 - 99}{3}$$

$$k = 300$$

ដូចនេះតួដែលមានតម្លៃស្មើនឹង 999 គឺតួទី 300 ។

២. គណនាផលបូក 300 តួដំបូងនៃស៊ីត

តាមសម្រាយខាងលើ , យើងមាន $u_1 = 102$ និង $u_{300} = 999$ គេបាន ៖

ផលបូក 300 តួដំបូងនៃស៊ីតនេះគឺ ៖

$$S_{300}=\frac{300(u_1+u_{300})}{2}$$
$$=150(102+999)$$
$$=165150$$

ដូចនេះផលបូក៣០០តួដំបូងនៃស្វ៊ីតគឺ $S_{300}=165150$ ត្រូវបានកំណត់ ។

27. រកតួទី១ u_1 និង ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនេះ

យើងមាន , ស្វ៊ីតនព្វន្តកើន (u_n) មាន $u_1^3+u_{15}^3=302094$ និងផលបូក 15 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតស្មើនឹង 585 , គេបាន ៖

$$\frac{(u_1+u_{15})15}{2}=585$$
$$u_1+u_{15}=78$$
$$u_{15}=78-u_1$$

នោះ $u_1^3+u_{15}^3=302094$ ក្លាយទៅជា ,

$$u_1^3+(78-u_1)^3=302094$$
$$u_1^3+474552-18252u_1+234u_1^2-u_1^3=302094$$
$$234u_1^2-18252u_1+172458=0$$
$$u_1^2-78u_1+737=0$$
$$u_1=\frac{-(-39)\pm\sqrt{(-39)^2-737}}{1}=39\pm\sqrt{28^2}=\left[\begin{array}{l}67\\11\end{array}\right.$$

ដោយស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន នោះមានន័យថា $u_{15}>u_1$

បើ $u_1=67$ នោះ $u_{15}=78-67=11$ មិនយកព្រោះ $u_{15}<u_1$

បើ $u_1=11$ នោះ $u_{15}=78-11=67$

នាំឲ្យគេបាន ,

$$u_{15}=u_1+14d$$
$$67=11+14d$$
$$d=\frac{67-11}{14}=4$$

ដូចនេះ $u_1=11$ និង $d=4$ ត្រូវបានកំណត់ ។

28. រករង្វាស់មុំនៃត្រីកោណនោះ

យើងមាន , មុំទាំងបីនៃត្រីកោណកែងមួយបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ

តាង x, y ជាមុំស្រួចពីរនៃត្រីកោណកែងនោះ , ដែល $x<y<90^o$

គេបាន , $90^o = x+2d$ និង $y = 90^o - d$

តាមលក្ខណៈផលបូកមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយស្មើនឹង 180^o គេបាន ៖

$$x+y+90^o = 180^o$$
$$90^o - 2d + 90^o - d = 90^o$$
$$d = \frac{90^o}{3} = 30^o$$

នោះ $x = 90^o - 2d = 30^o$ និង $y = 90^o - 30^o = 60^o$

ដូចនេះត្រីកោណនោះមានរង្វាស់មុំ $30^o, 60^o$ និង 90^o ។

29. រក S_{101}

យើងមាន , ស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) កំណត់ដោយ $u_{11} = 10$ និង $u_{1001} = 10000$

គេបាន ៖

$$u_{1001} = u_{11} + (1001-11)d$$
$$10000 = 10 + 990d$$
$$d = \frac{10000-10}{990} = \frac{9990}{990} = \frac{111}{11}$$

ហើយ

$$u_{101} = u_{11} + (101-11)d$$
$$= 10 + 90 \cdot \frac{111}{11}$$
$$= \frac{10100}{11}$$

និង

$$u_{11} = u_1 + 10d$$
$$u_1 = u_{11} - 10d$$
$$u_1 = 10 - 10 \cdot \frac{111}{11} = -\frac{1000}{11}$$

គេបាន ,

$$S_{101}=\frac{101(u_1+u_{101})}{2}$$
$$=\frac{101\left(-\frac{1000}{11}+\frac{10100}{11}\right)}{2}$$
$$=\frac{459550}{11}$$

ដូចនេះ $S_{101}=\frac{459550}{11}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

30. រកតម្លៃ x

យើងមាន , បីចំនួន $10-3x, 2x^2+3, 7-4x$ ជាបីតួតគ្នានៃស្ទីតនព្វន្តមួយ

គេបាន ,

$$2x^2+3=\frac{(10-3x)+(7-4x)}{2}$$
$$2\left(2x^2+3\right)=17-7x$$
$$4x^2+7x-11=0$$
$$x=\frac{-7\pm\sqrt{225}}{4\cdot 2}=\frac{-7\pm 15}{8}=\left[\begin{array}{l}1\\ -\frac{11}{4}\end{array}\right.$$

ដូចនេះ $x=1$ ឬ $x=-\frac{11}{4}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

31. បង្ហាញថា a^2+ab+b^2 , a^2+ac+c^2 , b^2+bc+c^2 ជាបីតួតគ្នានៃស្ទីតនព្វន្តមួយ

យើងមាន , a,b,c ជាបីតួតគ្នានៃស្ទីតនព្វន្តមួយ

គេបាន , $a+c=2b$

ម្យ៉ាងទៀត ៖

$$\left(a^2+ab+b^2\right)+\left(b^2+bc+c^2\right)=a^2+2b^2+c^2+ab+bc$$
$$=a^2+2b^2+c^2+b(a+c)$$
$$=a^2+2\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+c^2+\frac{a+c}{2}\cdot(a+c)$$
$$=a^2+c^2+(a+c)^2$$
$$=a^2+c^2+a^2+c^2+2ac$$
$$=2\left(a^2+ac+c^2\right)$$

ទំនាក់ទំនងចុងក្រោយនេះស្រាយបានថា a^2+ab+b^2 , a^2+ac+c^2 , b^2+bc+c^2 ជាស្ទីតនព្វន្តមួយ ។

32. បង្ហាញថា $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1} \quad , \ \forall k \in \mathbb{N}$

យើងមាន , ស្វ៊ីតនព្វន្ត (a_n) មួយកំណត់គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេបាន , $a_n = a_1 + (n-1)d$

គេបាន ៖ $a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d$ (១)

និង $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k+1-1)d = 2a_1 + (n-1)d$ (២)

តាម(១) និង (២) នាំឲ្យគេបាន $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1} \quad , \ \forall k \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1} \quad , \ \forall k \in \mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ជំពូក ៣ ៖ ស្ទីតធរណីមាត្រ

OUTLINE

I. **ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន**

1. និយមន័យនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ
2. តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ
3. ធម្យមធរណីមាត្រ
4. ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង
5. ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ
6. ផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

II. **លំហាត់**

III. **ដំណោះស្រាយ**

ស៊ីតធរណីមាត្រ

I. ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន

1. និយមន័យនៃស៊ីតធរណីមាត្រ

និយមន័យ ៖ ស៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស៊ីតនៃចំនួនពិត ដែលតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទី១) ស្មើនឹងតួមុន បន្ទាប់ គុណនឹងចំនួនថេរ r ដែល $r \neq 0$ ។

ចំនួនថេរ r នេះហៅថា ផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រ ហើយ $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \cdots = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ដែល $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ ជាតួនៃស៊ីតធរណីមាត្រ ។

2. តួទី n នៃស៊ីតធរណីមាត្រ

ស៊ីត (u_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ ស្មើនឹង u_1 និងមានផលធៀបរួម r គេបានតួទី n នៃស៊ីននេះគឺ ៖

$$u_n = u_1 r^{n-1}$$

ដូចគ្នាដែរ បើសិនជាយើងស្គាល់តួទី p ណាមួយ , គេបាន ៖

$$u_n = u_p r^{n-p}$$

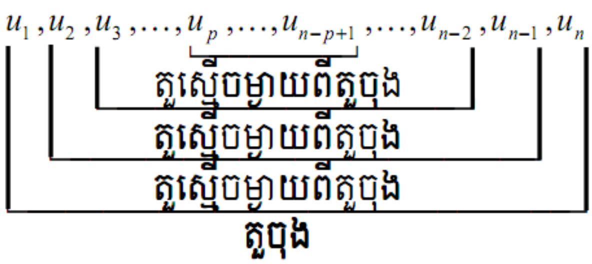
3. មធ្យមធរណីមាត្រ

មធ្យមធរណីមាត្រនៃពីរចំនួន a និង b គឺ $G = \sqrt{ab}$ ។

មធ្យមធរណីមាត្រនៃ n ចំនួន $x_1, x_2, \ldots, x_n$ គឺ $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ ។

4. ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង

បើ $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p, \ldots, u_{n-p+1}, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។ គេបាន ៖



ជាទូទៅ ៖ ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុងស្មើនឹង ផលគុណតួចុងទាំងពីរ

គេកំណត់សរសេរ ៖ $u_p u_{n-p+1} = u_1 u_n$ ។

5. ផលបូកតួនៃស៊ីតធរណីមាត្រ

បើគេយក S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានតួទី១ u_n

និង ផលធៀបរួម r នោះគេបាន ៖

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

ឬ $$S_n = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + \cdots + u_1 r^{n-1} \qquad (*)$$

- បើ $r = 1$ គេបាន ៖

$$S_n = u_1 + u_1 + \cdots + u_1 = n u_1$$

- បើ $r \neq 1$ គេបាន ៖

  គុណអង្គទាំងពីរនៃ $(*)$ នឹងផលធៀបរួម r គេបាន ៖

$$rS_n = u_1 r + u_1 r^2 + u_1 r^3 + \cdots + u_1 r^n \qquad (**)$$

  យក $(**) - (*)$ គេបាន ៖

$$rS_n - S_n = \left(u_1 r + u_1 r^2 + u_1 r^3 + \cdots + u_1 r^n\right) - \left(u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + \cdots + u_1 r^{n-1}\right)$$

$$S_n\left(r-1\right) = u_1 r^n - u_1 r$$

$$S_n = \frac{u_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} \quad , \ r \neq 1$$

ជាទូទៅ ៖ ផលបូក n ដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រ (u_n) ដែលមានតួទី១ u_1 និងផលធៀបរួម r , គេបាន ៖

$$S_n = n u_1 \qquad \text{បើ } r = 1$$

ហើយ $$S_n = \frac{u_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} \qquad \text{បើ } r \neq 1$$

6. ផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

ជាទូទៅ ៖ ផលបូកតួនៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

$$S_\infty = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + \cdots + u_1 r^{n-1} + \cdots$$

ដែល $|r| < 1$ កំណត់ដោយ $S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$ (ព្រោះ $S_n = \frac{u_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} \to 0$ ពេល $n \to \infty$ និង $|r| < 1$) ។

សំគាល់ ៖ បើ $|r| \geq 1$ នោះ S_∞ មិនអាចកំណត់បាន ។

II. លំហាត់

1. រក u_1 និង S_5 នៃស៊ីតធរណីមាត្រខាងក្រោម ៖
   ក. ស៊ីតធរណីមាត្រ $\frac{12}{25},\frac{6}{5},3,\ldots$

   ខ. ស៊ីតធរណីមាត្រដែល $u_1 = 27$ ហើយ $r = \frac{2}{3}$

2. ក្នុងស៊ីតធរណីមាត្រមួយដែល $u_3 = 32$ និង $u_6 = 4$ រក u_1, r និងផលបូក 5 តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រនេះ។
3. ដោយប្រើរូបមន្ត $S_n = \dfrac{u_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$ រក S_5 និង S_6 សម្រាប់ស៊ីតធរណីមាត្រ $18,-9,4\frac{1}{2},\ldots$ ហើយទាញរកតម្លៃនៃ u_6 ។
4. រកតម្លៃផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រដែល $u_3 = 6, u_8 = 1458$ ។
5. រកផលបូក 10 តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រដែល $u_6 = \dfrac{32}{33}, u_7 = 1\frac{31}{33}$ ។
6. រក S_∞ នៃស៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $u_2 = -9, u_5 = \dfrac{1}{3}$ ។
7. តួទី $4,8$ និង 14 នៃស៊ីតនព្វន្ត មានផលសងរួម $d = 0.5$ គឺជាស៊ីតធរណីមាត្រ រកតួទី១នៃស៊ីតនព្វន្ត និងផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រ។
8. រកផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ ស្មើ 5 ហើយ $S_\infty = 15$ ។
9. ផលបូកពីរតួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រស្មើ 9 ហើយផលបូកអនន្តតួនៃស៊ីតនេះស្មើនឹង 25 ។ បើស៊ីតធរណីមាត្រមានផលសងរួម r វិជ្ជមាន។ រក r និងតួទី១នៃស៊ីត។
10. គណនាផលបូកតួនៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $6+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\cdots$ ។
11. ប្រាក់ 5 000$ ត្រូវបានធ្វើវិនិយោគ រយៈពេល 4 ឆ្នាំ ដោយទទួលបានការប្រាក់ 7% នៃប្រាក់ដើមក្នុង១ឆ្នាំ ដែលធ្វើការទូទាត់ ១ឆ្នាំម្តង ។ តើគេនឹងទទួលបានប្រាក់សរុបប៉ុន្មានក្នុងអំឡុងពេលនេះ ?
12. តើគេនឹងត្រូវធ្វើការវិនិយោគដោយប្រើដើមទុនប៉ុន្មាន ? ប្រសិនបើគេចង់ទទួលបានប្រាក់សរុប 10 000 $ ក្នុងរយៈពេល 4 ឆ្នាំ, ដោយការវិនិយោគទទួលបានការប្រាក់ 8.5% នៃប្រាក់ដើមក្នុង១ឆ្នាំ ដែលការទូទាត់ត្រូវបានធ្វើ 1 ឆ្នាំម្តង ។

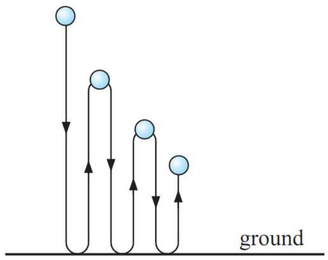
13. នៅក្នុងចម្ការមួយមានសត្វទន្សាយសរុបដំបូងចំនួន ៥០ក្បាល ។ ចំនួននេះត្រូវបានកើនឡើងតាមសប្តាហ៍នីមួយៗចំនួន ៧% នៃចំនួនសរុប ។

១. តើមានសត្វទន្សាយចំនួនប៉ុន្មាន បន្ទាប់ពីរយៈពេល ៖

ក. ១៥ សប្តាហ៍ ខ. ៣០ សប្តាហ៍ ។

២. តើរយៈពេលប៉ុន្មានទើបសត្វទន្សាយកើនឡើងដល់ ៥០០ក្បាល ?

14. បាល់មួយប្រើរយៈពេល $1s$ ដើម្បីទៅប៉ះនឹងដី នៅពេលត្រូវបានគេទំលាក់ និងប្រើរយៈពេល 90% នៃពេលនេះដើម្បីលោតឡើងមកដល់កម្ពស់ថ្មីវិញ។ ចលនានេះត្រូវបានបន្តរហូតដល់បាល់លែងមានចលនា ។



១. បង្ហាញថារយៈពេលសរុបនៃចលនាឲ្យដោយ ៖

$1+2\cdot 0.9+2\cdot 0.9^2+2\cdot 0.9^3+\cdots$ ។

២. រក S_n នៃស៊េរីខាងលើ ។

៣. តើបាល់ត្រូវចំណាយពេលប៉ុន្មានដើម្បីលែងមានចលនា ?

15. នៅក្នុងឆ្នាំនីមួយៗអ្នកលក់ត្រូវបានទទួលប្រាក់បន្ថែម $\$2000$ ដែលត្រូវបានបញ្ចូលទៅក្នុងគណនេយ្យតែមួយ ដែលទទួលបានកំរៃការប្រាក់អត្រា 6% ក្នុងមួយឆ្នាំ និងមានការទូទាត់១ឆ្នាំម្តង ។ ទឹកប្រាក់សរុបរាល់ការបញ្ចប់ឆ្នាំនីមួយៗក្នុងគណនេយ្យត្រូវបានគណនាតាម ៖

$$A_0=2000$$
$$A_1=A_0\cdot 1.06+2000$$
$$A_2=A_1\cdot 1.06+2000$$

១. បង្ហាញថា $A_2=2000\left(1+1.06+1.06^2\right)$ ។

២. បង្ហាញថា $A_3=2000\left(1+1.06+1.06^2+1.06^3\right)$ ។

៣. ទាញរកទឹកប្រាក់សរុបក្នុងធនាគារបន្ទាប់ពីរយៈពេល ១០ឆ្នាំ ។

16. គេមាន (u_n) ជាស្វ៊ីតវិជ្ជមានជានិច្ចដែលកំណត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1=e \\ u_{n+1}^2=2556u_n \ , \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$ និង $v_n=\ln u_n-\ln 2556 \ , n\in\mathbb{N}$ ។

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

17. (u_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $u_n=\dfrac{2^n-3n+2013}{4}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

(v_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $v_n=\dfrac{2^n+3n-2013}{4}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

តាង ស្វ៊ីត $a_n=u_n+v_n$ ។ បង្ហាញថា (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

18. (v_n) និង (u_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $v_1=-1, v_{n+1}=-3v_n-1$ និង $u_n=2v_n+\dfrac{1}{2}$ ។

១. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

២. សរសេរតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) ។

III. ដំណោះស្រាយ

1. ក. រក u_5 និង S_5 នៃស៊ីតធរណីមាត្រ $\frac{12}{25},\frac{6}{5},3,\ldots$

យើងបាន ៖ $r=\dfrac{3}{\frac{6}{5}}=\dfrac{5}{2}$

$$\Rightarrow u_5=u_1r^4\ ,\ u_1=\frac{12}{25}\ ,\ r=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow u_5=\frac{12}{25}\left(\frac{5}{2}\right)^4$$

$$\Rightarrow \boxed{u_5=\frac{75}{4}}$$

$$S_5=\frac{u_1\left(r^5-1\right)}{r-1}$$

$$=\frac{\frac{12}{25}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2-1\right)}{\frac{5}{2}-1}$$

$$=30.93$$

ដូចនេះ $u_5=\frac{75}{4}\ ,\ S_5=30.93$ ត្រូវបានកំណត់ ។

ខ. រក u_5 និង S_5 នៃស៊ីតធរណីមាត្រ

គេឲ្យ ៖ $u_1=27\ ,\ r=\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow u_5=u_1r^4$$

$$=27\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$=\frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow u_5=\frac{16}{3}$$

$$S_5 = \frac{u_1\left(r^5 - 1\right)}{r - 1}$$
$$= \frac{27\left(\left(\frac{2}{3}\right)^5 - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1}$$
$$= \frac{211}{3}$$
$$= 70\tfrac{1}{3}$$
$$S_5 = 70\tfrac{1}{3}$$

ដូចនេះ $u_5 = \frac{16}{3}$, $S_5 = 70\tfrac{1}{3}$ **ត្រូវបានកំណត់ ។**

2. រក u_1 , r **និង** S_5 **នៃស្ទីតធរណីមាត្រដែល** $u_3 = 32$, $u_6 = 4$

យើងមាន ៖

$$\begin{cases} u_3 = u_1 r^2 \\ u_6 = u_1 r^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 r^2 = 32 & (1) \\ u_1 r^5 = 4 & (2) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{u_1 r^2}{u_1 r^5} = \frac{32}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{r^3} = 8$$
$$\Rightarrow r = \frac{1}{2}$$
$$(1) \Rightarrow u_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 32$$
$$\Rightarrow u_1 = 128$$
$$S_5 = \frac{u_1\left(1 - r^5\right)}{1 - r}$$
$$= \frac{128\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$S_5 = 248$$

ដូចនេះ $u_1 = 128$, $r = \frac{1}{2}$ **និង** $S_5 = 248$ **ត្រូវបានកំណត់ ។**

3. រក S_5, S_6 និង u_6

យើងមាន ៖

$$S_n = \frac{u_1\left(r^n - 1\right)}{r-1}$$

$$\Rightarrow S_5 = \frac{u_1\left(r^5 - 1\right)}{r-1} \quad , u_1 = 18 \text{ , } r = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_5 = \frac{18\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{-\frac{1}{2} - 1}$$

$$\Rightarrow S_5 = \frac{99}{8}$$

$$S_6 = \frac{u_1\left(r^6 - 1\right)}{r-1}$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{18\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right)}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{189}{16}$$

ដោយ ៖ $S_6 = S_5 + u_6$

$$\Rightarrow u_6 = S_6 - S_5$$
$$= \frac{189}{16} - \frac{99}{8}$$
$$= -\frac{9}{16}$$

ដូចនេះ $u_6 = -\frac{9}{16}$, $S_5 = \frac{99}{8}$, $S_6 = \frac{189}{16}$ **ត្រូវបានគណនា ។**

4. រកផលធៀបនៃស្ទីតធរណីមាត្រ

$$u_3 = 6 \text{ , } u_8 = 1458$$

$$u_3 = u_1 r^2 \text{ , } u_8 = u_1 r^7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 r^2 = 6 & (1) \\ u_1 r^7 = 1458 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \frac{u_1 r^7}{u_1 r^2} = \frac{1458}{6}$$

$$\Rightarrow r = 3$$

5. រក S_{10} នៃស៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន ៖

$$u_6 = \frac{32}{33} \ , \ u_7 = 1\tfrac{31}{33}$$
$$r = \frac{u_7}{u_6}$$
$$\Rightarrow r = \frac{64}{33} \times \frac{33}{32}$$
$$\Rightarrow r = 2$$

យើងបាន ៖

$$u_6 = u_1 r^5 \Rightarrow u_1 = \frac{u_6}{r^5}$$
$$\Rightarrow u_1 = \frac{32}{33} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$u_1 = \frac{1}{33}$$
$$\Rightarrow S_{10} = \frac{u_1\left(r^{10} - 1\right)}{r - 1}$$
$$= \frac{\frac{1}{33}\left(2^{10} - 1\right)}{2 - 1}$$
$$= 31$$

ដូចនេះ $S_{10} = 31$ **ត្រូវបានគណនា ។**

6. រក S_{∞} នៃស៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន ៖

$$\begin{cases} u_2 = -9 \\ u_5 = \frac{1}{3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_2 = u_1 r \\ u_5 = u_1 r^4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_1 r = -9 \\ u_1 r^4 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 r = -9 \\ u_1 r^4 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

ដោយ ៖ $|r| = \frac{1}{3} < 1$

$$\Rightarrow S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$$

$$u_1 = -\frac{9}{r} = \frac{-9}{-\frac{1}{3}} = 27$$

$$\Rightarrow S_\infty = \frac{27}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow S_\infty = \frac{81}{4}$$

7. រកតួទី១នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត និងផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រ u_4, u_8 និង u_{14} ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = 0.5$

គេបាន ៖

$$u_4 = u_1 + 3d = u_1 + \frac{3}{2}$$

$$u_8 = u_1 + 7d = u_1 + \frac{7}{2}$$

$$u_{14} = u_1 + 13d = u_1 + \frac{13}{2}$$

ដោយ u_4, u_8, u_{14} ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គេបាន ៖

$$u_8^2 = u_4 . u_{14}$$ (មធ្យមធរណីមាត្រ)

$$\Rightarrow \left(u_1 + \frac{7}{2}\right)^2 = \left(u_1 + \frac{3}{2}\right)\left(u_1 + \frac{13}{2}\right)$$

$$u_1^2 + 7u_1 + \frac{49}{4} = u_1^2 + 8u_1 + \frac{39}{4}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{5}{2}$$

នោះ , នាំឲ្យ គេបាន ៖

$$u_4 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow u_4 = 4$$
$$u_8 = \frac{5}{2} + \frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow u_8 = 6$$
$$u_{14} = \frac{5}{2} + \frac{13}{2}$$
$$\Rightarrow u_{14} = 9$$

នាំអោយ $r = \frac{3}{2}$

ដូចនេះតួទី១នៃស៊ីតនព្វន្តគឺ $u_1 = \frac{5}{2}$ និងផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រគឺ $r = \frac{3}{2}$

8. រកផលធៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រ

តាមរូបមន្ត ៖ $S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$; ករណី $|r| < 1$

ដោយ ៖ $S_\infty = 15$, $u_1 = 5$

គេបាន ៖ $15 = \frac{5}{1-r}$

$$1 - r = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $q = \frac{2}{3}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

9. រកផលធៀបរួមវិជ្ជមាន r និងតួទី១នៃស៊ីត

តាមរូបមន្ត ៖

$$S_n = \frac{u_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$
$$\Rightarrow S_2 = \frac{u_1\left(1-r^2\right)}{1-r}$$
$$S_2 = u_1\left(1+r\right)$$

ដោយ $S_2 = 9$

$$\Rightarrow u_1(1+r) = 9$$
$$\Rightarrow u_1 = \frac{9}{1+r} \qquad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$S_\infty = \frac{u_1}{1-r} \text{ , } S_\infty = 25$$
$$\Rightarrow \frac{u_1}{1-r} = 25$$
$$u_1 = 25(1-r) \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) , យើងបាន ៖

$$\frac{9}{1+r} = 25(1-r)$$
$$1-r^2 = \frac{9}{25}$$
$$r = \frac{4}{5} \quad , \quad r > 0$$
$$\Rightarrow u_1 = 25(1-r)$$
$$u_1 = 25\left(1-\frac{4}{5}\right)$$
$$u_1 = 5$$

ដូចនេះផលធៀបរួមវិជ្ជមាននៃស្វ៊ីតគឺ $r = \frac{4}{5}, u_1 = 5$ ។

10. $6+2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\cdots$ ជាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ ដែលមានតួទី១ $u_1 = 6$ និងផលធៀបរួម $r = \frac{1}{3}$ ។

តាមរូបមន្ត ៖ $S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$

គេបាន ៖ $S_\infty = \frac{6}{1-\frac{1}{3}} = 9$ ។

11. គណនាប្រាក់សរុបដែលគេនឹងទទួលបានក្នុងអំឡុងពេលនោះ

តាមបំរាប់ , ប្រាក់សរុបដែលគាត់នឹងទទួលបាននៅឆ្នាំនីមួយៗគឺជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ $u_1 = 5000\$$ និងកំណើនតួគុណ $q = 100\% + 7\% = 1.07$

គេបាន , ចំនួនប្រាក់នៅចុងឆ្នាំទី n គឺ ៖ $u_n = u_1 q^{n-1}$

ដោយប្រាក់ដែលគាត់ធ្វើវិនិយោគចំនួន ៤ឆ្នាំ ត្រូវនឹង $n=5$, គេបាន ៖

$$u_5 = u_1 q^4 = (5\,000\$)(1.07)^4 = 6553.98\$$$

ដូចនេះចំនួនប្រាក់សរុបគឺ 6 553.98 $ ។

12. រកប្រាក់ដើមទុនសម្រាប់ធ្វើការវិនិយោគ

តាមបំរាប់ , ប្រាក់សរុបដែលគាត់នឹងទទួលបាននៅឆ្នាំនីមួយៗគឺជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ u_1 , កំណើនតួគុណ $q = 100\% + 8.5\% = 1.085$ និង $u_5 = 10\,000\$$ ។

គេបាន , ចំនួនប្រាក់នៅចុងឆ្នាំទី n គឺ ៖ $u_n = u_1 q^{n-1}$

ដោយប្រាក់ដែលគាត់ធ្វើវិនិយោគចំនួន ៤ឆ្នាំ ត្រូវនឹង $n=5$, គេបាន ៖

$$u_5 = u_1 q^4$$

$$10\,000\$ = u_1 (1.085)^4$$

$$u_1 = \frac{10\,000\$}{(1.085)^4} = 7\,215.74\$$$

ដូចនេះចំនួនប្រាក់ដើមដែលគេត្រូវធ្វើវិនិយោគគឺ 7 215.74 $ ។

13. តាមបំរាប់ , ចំនួនសត្វទន្សាយសរុបតាមសប្តាហ៍នីមួយៗបង្កើតបានជាស្ទីតធរណីមាត្រ ដែលមានតួទី១ $u_1 = 50$ និងកំណើនតួគុណ $q = 100\% + 7\% = 1.07$

គេបាន , ចំនួនសត្វទន្សាយនៅសប្តាហ៍ទី n គឺ ៖ $u_{n+1} = u_1 q^n$

១. ក. រកចំនួនសត្វទន្សាយ បន្ទាប់ពីរយៈពេល ១៥ សប្តាហ៍

តាមសម្រាយខាងលើ , $u_{n+1} = u_1 q^n$ គេបាន ៖

$$u_{16} = u_1 q^{15} = 50(1.07)^{15}$$

$$u_{16} = 138 \text{ ក្បាល}$$

ដូចនេះចំនួនសត្វទន្សាយ បន្ទាប់ពីរយៈពេល ១៥ សប្តាហ៍គឺ ១៣៨ ក្បាល ។

ខ. រកចំនួនសត្វទន្សាយ បន្ទាប់ពីរយៈពេល ៣០ សប្តាហ៍

តាមសម្រាយខាងលើ , $u_{n+1} = u_1 q^n$ គេបាន ៖

$$u_{31} = u_1 q^{30} = 50(1.07)^{30}$$

$$u_{31} = 381 \text{ ក្បាល}$$

ដូចនេះចំនួនសត្វទន្សាយ បន្ទាប់ពីរយៈពេល ១៥ សប្តាហ៍គឺ ៣៨១ ក្បាល ។

២. រករយៈពេលដែលសត្វទន្សាយកើនឡើងដល់ ៥០០ក្បាល

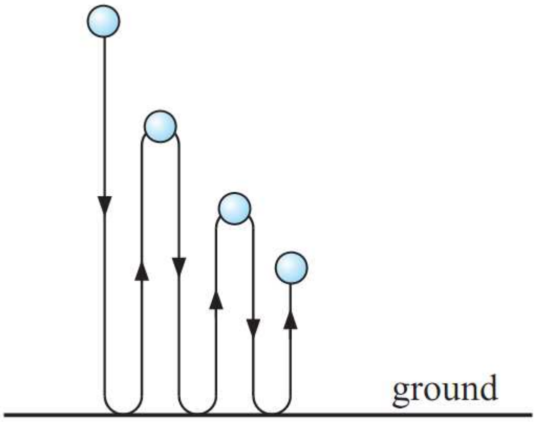
តាមសម្រាយខាងលើ , $u_{n+1} = u_1 q^n$

បើ $u_{n+1}=500$ គេបាន ៖

$$500=50(1.07)^n$$
$$1.07^n=100$$
$$n=\log_{1.07}100=34$$ សប្តាហ៍

ដូចនេះរយៈពេលដែលសត្វទន្សាយកើនឡើងដល់ ៥០០ក្បាលគឺ ៣៤ សប្តាហ៍

14. ១. បង្ហាញថារយៈពេលសរុបនៃចលនាឲ្យដោយ $1+2\cdot 0.9+2\cdot 0.9^2+2\cdot 0.9^3+\cdots$



តាមបំរាប់ , គេបាន ៖

រយៈពេលប៉ះនឹងដីលើកទី១របស់បាល់គឺ $u_1=1$ (វិនាទី)

រយៈពេលប៉ះនឹងដីលើកទី២របស់បាល់គឺ $2u_2=2\cdot 0.9$ (វិនាទី)

រយៈពេលប៉ះនឹងដីលើកទី៣របស់បាល់គឺ $2u_3=2\cdot 0.9^2$ (វិនាទី)

រយៈពេលប៉ះនឹងដីលើកទី៤របស់បាល់គឺ $2u_4=2\cdot 0.9^3$ (វិនាទី)

....

គេបាន , រយៈពេលសរុបនៃចលនាគឺ $1+2\cdot 0.9+2\cdot 0.9^2+2\cdot 0.9^3+\cdots$ (វិនាទី)

ដូចនេះសំណើត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. រក S_n នៃស៊េរីខាងលើ

តាមសម្រាយខាងលើ , គេបាន ៖

$$\begin{aligned}S_n&=1+2\cdot 0.9+2\cdot 0.9^2+2\cdot 0.9^3+\cdots+2\cdot 0.9^n\\&=\left(2+2\cdot 0.9+2\cdot 0.9^2+2\cdot 0.9^3+\cdots+2\cdot 0.9^n\right)-1\\&=\frac{2\left(1-0.9^n\right)}{1-0.9}-1\\&=20\left(1-0.9^n\right)-1\\&=19-20\cdot 0.9^n\end{aligned}$$

ដូចនេះ $S_n=19-20\cdot 0.9^n$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

៣. រករយៈពេលដែលបាល់លែងមានចលនា

ពេលដែល n ធំបំផុត , គេបាន $0.9^n = 0$

គេបាន , $S_\infty = 19\,s$

ដូចនេះចលនារបស់បាល់បានចំណាយពេលអស់ ១៩វិនាទី ទើបឈប់មាន ចលនា ។

15. ១. បង្ហាញថា $A_2 = 2000\left(1+1.06+1.06^2\right)$

តាមបំរាប់ , ប្រាក់សរុបរាល់ការបញ្ចប់ឆ្នាំនីមួយៗត្រូវបានគណនាតាម ៖

$$A_0 = 2000$$
$$A_1 = A_0\cdot 1.06 + 2000 = 2000\cdot 1.06 + 2000 = 2000(1+1.06)$$
$$A_2 = A_1\cdot 1.06 + 2000 = 2000(1+1.06)1.06 + 2000 = 2000\left(1+1.06+1.06^2\right)$$

ដូចនេះ $A_2 = 2000\left(1+1.06+1.06^2\right)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. បង្ហាញថា $A_3 = 2000\left(1+1.06+1.06^2+1.06^3\right)$

តាមសម្រាយខាងលើ , គេបាន ៖

$$A_3 = A_2\cdot 1.06 + 2000 = 2000\left(1+1.06+1.06^2\right)1.06 + 2000$$
$$A_3 = 2000\left(1+1.06+1.06^2+1.06^3\right)$$

ដូចនេះ $A_3 = 2000\left(1+1.06+1.06^2+1.06^3\right)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

៣. ទាញរកទឹកប្រាក់សរុបក្នុងធនាគារបន្ទាប់ពីរយៈពេល ១០ឆ្នាំ

តាមលំនាំគំរូខាងលើ , គេបាន ៖

$$\begin{aligned} A_{10} &= 2000\left(1+1.06+1.06^2+1.06^3+\cdots+1.06^{10}\right) \\ &= 2000\cdot\frac{1.06^{11}-1}{1.06-1} \\ &= 29943.3\$ \end{aligned}$$

ដូចនេះប្រាក់សរុបក្នុងធនាគារបន្ទាប់ពីរយៈពេល ១០ឆ្នាំគឺ $A_{10} = 29943.3\$$ ។

16. ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន , (u_n) ជាស្វ៊ីតវិជ្ជមានជានិច្ចដែល $\begin{cases} u_1 = e \\ u_{n+1}^2 = 2556u_n \end{cases}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

និង $v_n = \ln u_n - \ln 2556$, $n\in\mathbb{N}$

គេបាន ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln u_{n+1} - \ln 2556 \\ &= \ln\sqrt{2556u_n} - \ln 2556 \\ &= \frac{1}{2}\ln 2556u_n - \ln 2556 \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln 2556u_n - 2\ln 2556\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln 2556 + \ln u_n - 2\ln 2556\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln u_n - \ln 2556\right) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

ទំនាក់ទំនងនេះស្រាយបានថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q=\frac{1}{2}$ និង $v_1 = \ln u_1 - \ln 2556 = 1 - \ln 2556$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើ , នាំឲ្យគេបាន ៖

$$v_n = v_1\cdot q^{n-1} = \left(1-\ln 2556\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ដោយ $v_n = \ln u_n - \ln 2556$, $n\in\mathbb{N}$ នាំឲ្យ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} u_n &= e^{v_n+\ln 2556} = e^{v_n}\cdot e^{\ln 2556} \\ &= 2556\cdot e^{\left(1-\ln 2556\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $u_n = 2556\cdot e^{\left(1-\ln 2556\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

ដោយ $u_n = 2556\cdot e^{\left(1-\ln 2556\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន ,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2556\cdot e^{\left(1-\ln 2556\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 2556\cdot e^0 = 2556$$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2556$ ត្រូវបានគណនា ។

17. បង្ហាញថា (a_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន , $u_n = \frac{2^n - 3n + 2013}{4}$ និង $v_n = \frac{2^n + 3n - 2013}{4}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

យើងក៏មានស៊ីត $a_n = u_n + v_n$, នាំឲ្យយើងបាន ៖

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{u_{n+1}+v_{n+1}}{u_n+v_n}$$
$$=\frac{\frac{2^{n+1}-3(n+1)+2013}{4}+\frac{2^{n+1}+3(n+1)-2013}{4}}{\frac{2^n-3n+2013}{4}+\frac{2^n+3n-2013}{4}}$$
$$=\frac{\frac{2\cdot 2^{n+1}}{4}}{\frac{2\cdot 2^n}{4}}$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$ ថេរ

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន

$$a_1=u_1+v_1=\frac{2-3+2013}{4}+\frac{2+3-2013}{4}=1$$ និង $q=2$ ។

18. ១. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន , (v_n) និង (u_n) ជាស្វ៊ីត $v_1=-1, v_{n+1}=-3v_n-1$ និង $u_n=2v_n+\frac{1}{2}$

គេបាន ,

$$u_{n+1}=2v_{n+1}+\frac{1}{2}$$
$$=2(-3v_n-1)+\frac{1}{2}$$
$$=-6v_n-2+\frac{1}{2}$$
$$=-6v_n-\frac{3}{2}$$
$$=-3\left(2v_n+\frac{1}{2}\right)$$
$$u_{n+1}=-3u_n$$

ទំនាក់ទំនងនេះស្រាយបានថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន

$$u_1=2v_1+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$ និង $q=-3$ ។

២. សរសេរតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n)

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (u_n) មាន $u_1=-\frac{3}{2}$ និង $q=-3$, គេបានតួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ ៖

$$u_n=u_1q^{n-1}$$
$$=\left(-\frac{3}{2}\right)(-3)^{n-1}$$
$$=\frac{(-3)^n}{2}$$

និង

$$v_n=\frac{u_n-\frac{1}{2}}{2}$$
$$=\frac{\frac{(-3)^n}{2}-\frac{1}{2}}{2}$$
$$=\frac{(-3)^n-1}{4}$$

ដូចនេះតួទូទៅនៃស៊ីត គឺ $u_n=\frac{(-3)^n}{2}$ **និង** $v_n=\frac{(-3)^n-1}{4}$ **គ្រប់** $n\in\mathbb{N}$ **។**

ជំពូក ៤ ៖ វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

OUTLINE

I. **ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន**

1. គោលការណ៍នៃវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា
2. ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

   ឧទាហរណ៍ នៃស្វ៊ីតហ្វីបូណាស៊ី

II. **លំហាត់**

III. **ដំណោះស្រាយ**

វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

I. ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន

1. គោលការណ៍នៃវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

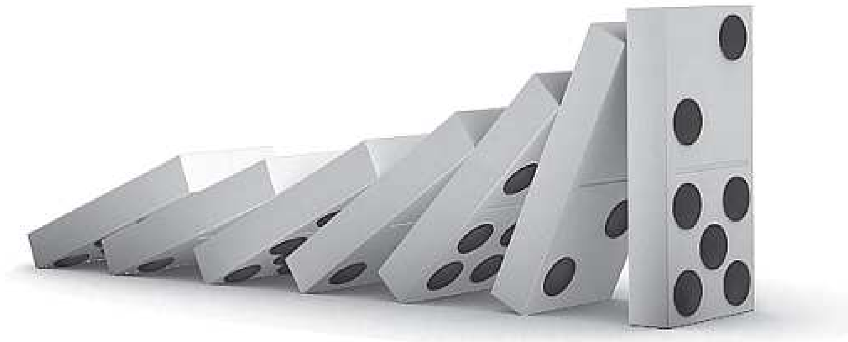
និយមន័យ ៖ $P(n)$ ជាសំណើដែលទាក់ទងនឹងចំនួនគត់ n ។

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេត្រូវ ៖

i. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P(1)$ ពិត

ii. ឧបមាថា $P(n)$ ពិតដល់ $n=k$

iii. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $P(k)$ ពិត នាំឲ្យបាន $P(k+1)$ ពិត ។



2. ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

ពិនិត្យមើលពន្លាតនៃកន្សោម $(x+y)^n$ បំពោះតម្លៃខ្លះៗនៃ n ៖

$n=0:(x+y)^0=1$

$n=1:(x+y)^1=1x+1y$

$n=2:(x+y)^2=1x^2+2xy+1y^2$

$n=3:(x+y)^3=1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3$

$n=4:(x+y)^4=1x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+1y^4$

$n=5:(x+y)^5=1x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+1y^5$

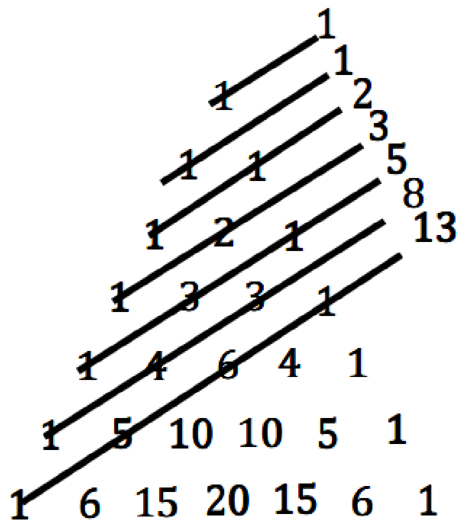
....

គេសង្កេតជួរដេកនីមួយៗនៃពន្លាតកន្សោម $(x+y)^n$ ឃើញថា ៖

- ពន្លាតទ្វេធានីមួយៗជាពហុធាដែលមាន $n+1$ តួ ។
- ក្នុងពន្លាតទ្វេធានីមួយៗ ស្វ័យគុណនៃ x ចុះ១ដឺក្រេជាបន្តបន្ទាប់ ហើយ ស្វ័យគុណនៃ y កើន១ដឺក្រេជាបន្តបន្ទាប់ បើគេអានពីឆ្វេងទៅស្តាំ ។
- ដឺក្រេនៃតួនីមួយៗនៃពហុធាស្មើនឹង n ។

- លេខមេគុណចាប់ផ្តើម និងចុងក្រោយគឺ 1 ដូចគ្នា ហើយផលបូកលេខមេគុណពីរតួជាប់គ្នានៃពន្លាត $(x+y)^3$ ជាលេខមេគុណនៃពន្លាត $(x+y)^4$ ... ។

តម្រៀបលេខមេគុណទាំងនេះជារាងត្រីកោណដូចខាងក្រោម ហៅថា "**ត្រីកោណប៉ាស្កាល់**" ។



ស៊ីត $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$ ហៅថាស៊ីត Fibonacci ។

ខាងស្តាំនេះជាឧទាហរណ៍មួយនៃស៊ីត Fibonacci *ដែលគេហៅម្យ៉ាងទៀតថាជាស៊ីតនៃធម្មជាតិ ព្រោះថាក្នុងធម្មជាតិភាគច្រើនសុទ្ធតែទាក់ទិននឹងស៊ីតនេះទាំងអស់ ។*

ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា ៖

$$(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^r x^{n-r}y^r=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^ny^n$$ ។

II. លំហាត់

1. ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+\cdots+n)\geq n^2$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ។
2. ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា $\forall n\in\mathbb{N}$, ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

ខ. $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$

គ. $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

ឃ. $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$

ង. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

ច. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ឆ. $1+5+5^2+5^3+\cdots+5^n=\frac{5^n-1}{4}$

3. គេតាងស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=0,u_2=1$ និង $u_n=\frac{u_{n-1}+u_{n-2}}{2}$ គ្រប់ $n>2$ ។

ក. រក u_3,u_4,u_5 និង u_6 ។

ខ. ទស្សទាយពីតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) រួចបង្ហាញថាវាត្រឹមត្រូវតាមវិចារអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា ។

4. ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា $\forall n\in\mathbb{N}$, ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$

ខ. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$

គ. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$

ឃ. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\leq n$

ង. $n!>2^n \quad ,\forall n\geq 4$

5. បំភ្លឺសំណើនីមួយៗខាងក្រោមដោយប្រើវិចារកំណើន ($n\in\mathbb{N}$) ៖

ក. $1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$

ខ. $\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

6. គេឲ្យ (a_n) ជាស៊ីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលមានតួខុសៗគ្នាពីរៗ ។ ចូរបង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។
7. បង្ហាញថា $1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}=\frac{5^n-1}{4}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។
8. បង្ហាញថា $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។
9. បង្ហាញថាពហុកោណប៉ោងដែលមាន n ជ្រុង មានអង្កត់ទ្រូងចំនួន $\frac{1}{2}\cdot n(n-3)$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 3$ ។
10. បើ n បន្ទាត់ត្រូវបានគូស ដែលបន្ទាត់នីមួយៗប្រសព្វនឹងគ្រប់បន្ទាត់ផ្សេងទៀត ហើយគ្មានបីបន្ទាត់ដែលមានចំណុចរួមមួយ ។ បង្ហាញថាវាបានចែកប្លង់ចំនួន $\frac{n(n+1)}{2}+1$ ផ្នែក ។
11. បើ n ចំណុចត្រូវបានដាក់ក្នុងត្រីកោណមួយហើយគ្មានចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ដែលគូសភ្ជាប់កំពូលទាំងបីនៃត្រីកោណ និងចំណុចនៅខាងក្នុងវាដើម្បីបង្កើតបានជាត្រីកោណតូចៗ ។ បង្ហាញថាវាបង្កើតបានត្រីកោណចំនួន $2n+1$ ។
12. បង្ហាញថា $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។
13. បង្ហាញថាសំណើខាងក្រោមពិតចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1 \text{ ។}$$

14. បង្ហាញថាសំណើខាងក្រោមពិតចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} \text{ ។}$$

III. ដំណោះស្រាយ

1. ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+\cdots+n)\geq n^2$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

- ចំពោះ $n=1$ គេបាន $(1)(1)\geq 1^2$ ពិត
- ឧបមាថាវិសមភាពខាងលើពិតរហូតដល់ $n=k$

  គឺ ៖ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(1+2+3+\cdots+k)\geq k^2$ ពិត
- យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$

  យើងមាន $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(1+2+3+\cdots+k)\geq k^2$ គេបាន ៖

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\left(1+2+3+\cdots+k+(k+1)\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(1+2+3+\cdots+k)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)(k+1)$$

$$+\left(\frac{1}{k+1}\right)\left(1+2+3+\cdots+k+(k+1)\right)$$

$$\geq k^2+k+\frac{k}{2}+\frac{(k+1)(k+2)}{2(k+1)}=k^2+k+\frac{k}{2}+\frac{k+2}{2}$$

$$=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

  នោះ $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\left(1+2+3+\cdots+k+(k+1)\right)\geq(k+1)^2$ ពិត

  ដូចនេះ $\forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+\cdots+n)\geq n^2$ ។

2. ទុកជាលំហាត់ ។
3. ទុកជាលំហាត់ ។
4. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

- បើ $n=1$ គេបាន $1<2\sqrt{1}$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គេបាន , $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$, $\forall k\in\mathbb{N}$
- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$

  យើងមាន ,

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}\ ,\ \forall k\in\mathbb{N}$$ គេបាន

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

យើងនឹងបង្ហាញថា , $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$ គ្រប់ $k\in\mathbb{N}$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$\sqrt{k+1}>\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{2}$$

$$2\sqrt{k+1}>\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$$

$\sqrt{k+1}>\sqrt{k}$ ពិត

នាំឲ្យ $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$ ពិតចំពោះ $n=k+1$

ដូចនេះតាមវិចារកំណើន គេបានសមភាព

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ.ទុកជាលំហាត់ ។

5. ទុកជាលំហាត់ ។

6. បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

តាមបំរាប់ , (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលមានតួខុសៗគ្នាពីរៗ គេបាន ៖

ផលបូក $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}$ មានតម្លៃតូចបំផុតកាលណា ,$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$

តែដោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលមានតួខុសៗគ្នាពីរៗ , នោះយើងទាញបាន $a_k\geq k$ ចំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$ ។

នាំឲ្យគេបាន $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

ដូចនេះវិសមភាព $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ គ្រប់ $k\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

7. បង្ហាញថា $1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}=\frac{5^n-1}{4}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

- បើ $n=1$ គេបាន $1=\frac{5^1-4}{1}$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $1+5+5^2+\cdots+5^{k-1}=\frac{5^k-1}{4}$ គ្រប់ $k\in\mathbb{N}$
- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$

  យើងមាន ,

$$1+5+5^2+\cdots+5^{k-1}=\frac{5^k-1}{4}\text{ គ្រប់ } k\in\mathbb{N}$$

នាំឲ្យ ,

$$\begin{aligned}1+5+5^2+\cdots+5^{k-1}+5^k &= \frac{5^k-1}{4}+5^k \\ &= \frac{5^k-1+4\cdot 5^k}{4} \\ &= \frac{5\cdot 5^k-1}{4}\end{aligned}$$

$1+5+5^2+\cdots+5^k = \dfrac{5^{k+1}-1}{4}$ ពិត

ដូចនេះតាមវិចារកំណើន គេបានសមភាព $1+5+5^2+\cdots+5^{n-1} = \dfrac{5^n-1}{4}$

គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

8. បង្ហាញថា $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

- បើ $n=1$ គេបាន $1\cdot 2=1^2(1+1)$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\cdots+k(3k-1)=k^2(k+1)$ $,\forall n\in\mathbb{N}$
- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិចំពោះ $n=k+1$

យើងមាន , $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\cdots+k(3k-1)=k^2(k+1)$ $,\forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\cdots+k(3k-1)+(k+1)(3k+2) &= k^2(k+1)+(k+1)(3k+2) \\ &= (k+1)\left(k^2+3k+2\right) \\ &= (k+1)(k+1)(k+2)\end{aligned}$$

$1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\cdots+(k+1)(3k+2)=(k+1)^2(k+2)$ ពិត

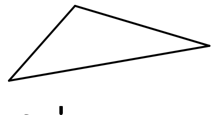
ដូចនេះ តាមវិចារកំណើន គេបានសមភាព

$1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

9. បង្ហាញថាពហុកោណប៉ោងដែលមាន n ជ្រុង មានអង្កត់ទ្រូងចំនួន $\frac{1}{2}\cdot n(n-3)$

តាង P_n : ជាពហុកោណប៉ោង n ជ្រុងមានចំនួនអង្កត់ទ្រូង $a_n=\frac{1}{2}\cdot n(n-3)$

- បើ $n=3$ គេបាន, P_3 :ត្រីកោណមានចំនួនអង្កត់ទ្រូង $a_3=\frac{1}{2}\cdot 3(3-3)=0$ ពិត

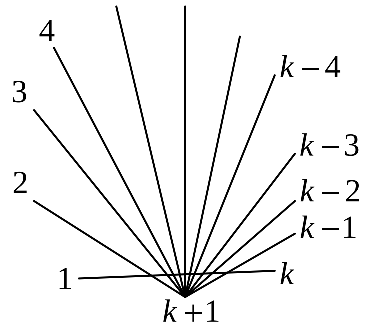


- ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់ $n=k$ គេបាន ,

P_k :ពហុកោណប៉ោង k ជ្រុង មានចំនួនអង្កត់ទ្រូង $a_k=\frac{1}{2}\cdot k(k-3)$

- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតបំពោះ $n=k+1$ គេបាន បំនួនអង្កត់ទ្រូងគឺ ៖

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + k - 2 + 1 \\
&= \frac{1}{2}\cdot k(k-3) + k - 1 \\
&= \frac{1}{2}k(k-3) + \frac{2}{2}(k-1) \\
&= \frac{1}{2}\left(k^2 - 3k + 2k - 2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(k^2 - k - 2\right) \\
&= \frac{1}{2}(k+1)(k-2)
\end{aligned}
$$



$a_{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)\left((k+1)-3\right)$ ពិត

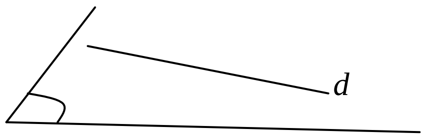
គេបាន P_{k+1} ពិត

ដូចនេះតាមវិចារកំណើន គេបាន , ពហុកោណប៉ោងដែលមាន n ជ្រុង មាន បំនួនអង្កត់ទ្រូងសរុប $\frac{1}{2}\cdot n(n-3)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

10. បង្ហាញថាវាបានចែកប្លង់បំនួន $\frac{n(n+1)}{2}+1$ ផ្នែក

តាង $P_n:\ n$ បន្ទាត់នោះបានចែកប្លង់បំនួន $a_n = \frac{n(n+1)}{2}+1$ ផ្នែក

- បើ $n=1$ គេបាន , $P_1:$ បន្ទាត់ 1 ចែកប្លង់បំនួន $a_1 = \frac{1(1+1)}{2}+1=2$ ផ្នែក ពិត



- ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់ $n=k$ គេបាន ,

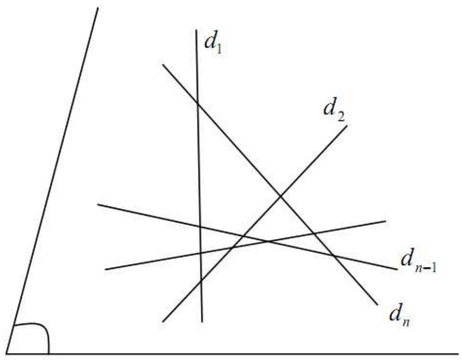
$P_k:\ k$ បន្ទាត់បានចែកប្លង់បំនួន $a_k = \frac{k(k+1)}{2}+1$ ផ្នែក

- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតបំពោះ $n=k+1$

បំពោះ $n=k+1$ គេបានបំនួនផ្នែកនៃប្លង់គឺ ,

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + k \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+1+k \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}
$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)}{2}$$



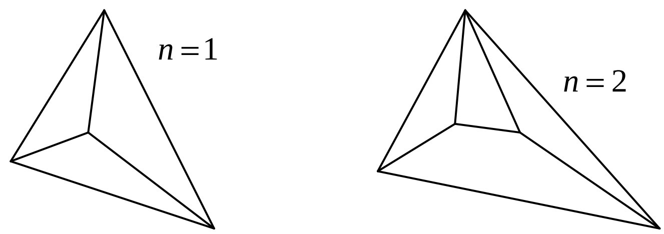
គេបាន , P_{k+1} ពិត

ដូចនេះតាមវិចារកំណើនគេបាន n បន្ទាត់ចែកប្លង់ចំនួន $\frac{n(n+1)}{2}+1$ ផ្នែក ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

11. បង្ហាញថាចំនួនត្រីកោណមានចំនួន $2n+1$

តាង $P_n:$ n ចំណុចក្នុងត្រីកោណបង្កើតបានត្រីកោណចំនួន $a_n=2n+1$

- បើ $n=1$ គេបានចំនួនត្រីកោណគឺ $a_1=2\cdot1+1=3$ ពិត



- ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់ $n=k$ គេបាន ,

  $P_k:$ k ចំណុចនៅក្នុងត្រីកោណបង្កើតបានត្រីកោណចំនួន $a_k=2k+1$
- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$, គេបាន ៖

  ចំពោះ $n=k+1$ ចំណុចនៅក្នុងត្រីកោណបង្កើតបានត្រីកោណចំនួន ៖

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k+2 \\ &= (2k+1)+2 \\ &= 2k+3 \\ &= 2(k+1)+1 \end{aligned}$$

គេបាន P_{k+1} ពិត

ដូចនេះតាមវិចារកំណើនគេបាន n ចំណុចក្នុងត្រីកោណបង្កើតបាន ត្រីកោណចំនួន $2n+1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

12. បង្ហាញថា $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

តាង $P_n:\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

- បើ $n=1$ គេបាន , $P_1:\frac{1}{2\cdot5}=\frac{1}{6+4}$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់ $n=k$ គេបាន ,

  $P_k:\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\cdots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{k}{6k+4}$ ចំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$

- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតបំពោះ $n=k+1$, គេបាន ៖

$$\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{k}{6k+4}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{k}{2(3k+2)}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{k(3k+5)+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{3k^2+5k+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{(3k+2)(k+1)}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{k+1}{6k+10}$$

$$=\frac{k+1}{6(k+1)+4}$$

គេបាន , P_{k+1} ពិត

ដូចនេះ តាមវិចារកំណើនគេបាន $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$

បំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

13. បង្ហាញថា $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

តាង $P_n:\ 1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

- បើ $n=1$ គេបាន, $P_1:\ 1\cdot1!=1=(1+1)!-1$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$, គេបាន ៖

$P_k:\ 1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1$ គ្រប់ $k\in\mathbb{N}$

- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតបំពោះ $n=k+1$, គេបាន ៖

$$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)!=(k+1)!-1+(k+1)\cdot(k+1)!$$

$$=(k+1)!(1+k+1)-1$$

$$=(k+1)!(k+2)-1$$

$$=(k+2)!-1$$

$$=((k+1)+1)!-1$$

គេបាន, P_{k+1} ពិត

ដូចនេះតាមវិចារកំណើនគេបាន $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

14. បង្ហាញថា $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

តាង $P_n:\ \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

- បើ $n=1$ គេបាន $P_1:\ \frac{1}{2!}=\frac{1}{2}=\frac{2!-1}{2!}$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គេបាន ,

  $P_k:\ \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}=\frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}$ គ្រប់ $k\in\mathbb{N}$
- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតបំពោះ $n=k+1$ គេបាន ,

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$=\frac{((k+1)!-1)(k+2)+(k+1)}{(k+2)!}$$

$$=\frac{(k+1)!(k+2)-(k+2)+(k+1)}{(k+2)!}$$

$$=\frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$$

$$=\frac{((k+1)+1)!-1}{((k+1)+1)!}$$

គេបាន , P_{k+1} ពិត

ដូចនេះតាមវិចារកំណើនគេបាន $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$

គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ជំពូក ៥ ៖ ស៊្មីតអាកម៉្ញូនិច

OUTLINE

I. **ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន**

1. និយមន័យ
2. ទំនាក់ទំនងគូនៃស៊្មីតអាកម៉្ញូនិច
3. មធ្យមអាកម៉្ញូនិច
4. តួទូទៅនៃស៊្មីតអាកម៉្ញូនិច

II. **លំហាត់**

III. **ដំណោះស្រាយ**

ស្ទីតអាកម៉ូនិច

I. ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន

1. និយមន័យ

ស្ទីតអាកម៉ូនិច គឺជាស្ទីតដែលបម្រាសរបស់វា ជាស្ទីតនព្វន្ត ។

2. ទំនាក់ទំនងតួនៃស្ទីតអាកម៉ូនិច

ស្ទីត (u_n) ជាស្ទីតអាកម៉ូនិច $(u_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N})$ នោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$$u_n = \frac{2u_{n-1}u_{n+1}}{u_{n-1}+u_{n+1}} \ , \forall n \geq 2$$

3. មធ្យមអាកម៉ូនិច

មធ្យមអាកម៉ូនិចនៃពីរចំនួន a និង b គឺ ៖ $H = \frac{2ab}{a+b}$ ។

មធ្យមអាកម៉ូនិចនៃ n ចំនួន $x_1, x_2, \ldots, x_n$ គឺ ៖ $H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$ ។

4. តួទូទៅនៃស្ទីតអាកម៉ូនិច

បើ (v_n) ជាស្ទីតនព្វន្ត ហើយ (u_n) ជាស្ទីតអាកម៉ូនិចដែលកើតពីស្ទីតនព្វន្ត នេះ គេបាន ៖ $v_n = v_1 + (n-1)d$

នោះតួទូទៅនៃស្ទីតអាកម៉ូនិចនេះគឺ ៖ $u_n = \frac{1}{v_1+(n-1)d}$ ។

ឬ $u_n = \frac{u_1}{1+(n-1)u_1 d}$ ដែល u_1 ជាតួទីមួយនៃស្ទីតអាកម៉ូនិច និង d ជាផលសងរួមនៃស្ទីតនព្វន្ត ។

II. លំហាត់

1. គេឲ្យ a, b និង c ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតអាកម៉ូនិចមួយ ។

   បង្ហាញថា $b = \dfrac{2ac}{a+c}$ ។

2. គេឲ្យ (u_n) ជាស៊ីតអាកម៉ូនិច ។ បង្ហាញថា $u_n = \dfrac{2u_{n-1}u_{n+1}}{u_{n-1}+u_{n+1}}$, $\forall n \geq 2$ ។

3. គេឲ្យស៊ីតអាកម៉ូនិច (u_n) ដែលមាន $u_1 = 2$ និង $d = 3$ ។ រក u_n ។

4. គេឲ្យស៊ីត (u_n) , $(u_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N})$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

   $$u_{n+1} = \frac{1}{\dfrac{2}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}} \ , n \geq 2 \text{ ។}$$

   បង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ីតអាកម៉ូនិច ។

5. គេឲ្យស៊ីតធរណីមាត្រ (a_n) ដែល $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ និង អនុគមន៍ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

   $$f\left(\sqrt{xy}\right) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ ។}$$

   បង្ហាញថាស៊ីត $(f(a_n))$ ជាស៊ីតអាកម៉ូនិច ។

6. គេមាន ៖ a, b, c ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតនព្វន្ត ,

   b, c, d ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតធរណីមាត្រ ,

   និង c, d, e ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតអាកម៉ូនិច ។

   បង្ហាញថា a, c, e ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតធរណីមាត្រ ។

III. ដំណោះស្រាយ

1. បង្ហាញថា $b=\dfrac{2ac}{a+c}$

យើងមាន ៖ a,b និង c ជាបីតួតគ្នានៃស្ទីតអាកម៉ូនិចមួយ

គេបាន ៖ $\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}$ និង $\dfrac{1}{c}$ ជាបីតួតគ្នានៃស្ទីតនព្វន្ត

តាមមធ្យមនព្វន្ត , គេបាន ៖

$$\frac{1}{b}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}$$
$$\frac{2}{b}=\frac{c+a}{ca}$$
$$b=\frac{2ac}{a+c}$$

ដូចនេះលក្ខណៈ $b=\dfrac{2ac}{a+c}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

2. បង្ហាញថា $u_n=\dfrac{2u_{n-1}u_{n+1}}{u_{n-1}+u_{n+1}}$, $\forall n\geq 2$

យើងមាន , (u_n) ជាស្ទីតអាកម៉ូនិច

គេបាន ៖ $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

គេបាន ៖

$$\frac{1}{u_n}=\frac{\frac{1}{u_{n-1}}+\frac{1}{u_{n+1}}}{2}$$
$$\frac{2}{u_n}=\frac{1}{u_{n-1}}+\frac{1}{u_{n+1}}$$
$$u_n=\frac{2u_{n-1}u_{n+1}}{u_{n-1}+u_{n+1}}$$

ដូចនេះទំនាក់ទំនងតួ $u_n=\dfrac{2u_{n-1}u_{n+1}}{u_{n-1}+u_{n+1}}$, $\forall n\geq 2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

3. រក u_n

យើងមាន , $u_1=2$ និង $d=3$ គេបាន ៖

$$u_n=\frac{u_1}{1+(n-1)u_1d}=\frac{2}{1+(n-1)(2)(3)}=\frac{2}{6n-5} \text{ ដែល } n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះស្ទីតអាកម៉ូនិចនោះគឺ $u_n=\dfrac{2}{6n-5}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

4. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្ទីតអាកម៉ូនិច

យើងមាន ៖ ស្ទីត (u_n) , $(u_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N})$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$$u_{n+1}=\frac{1}{\frac{2}{u_n}-\frac{1}{u_{n-1}}}\ ,\ n\ge 2$$

គេបាន ៖

$$u_{n+1}=\frac{u_nu_{n-1}}{2u_{n-1}-u_n}$$
$$2u_{n+1}u_{n-1}-u_{n+1}u_n=u_nu_{n-1}$$
$$u_nu_{n-1}+u_{n+1}u_n=2u_{n-1}u_{n+1}$$
$$u_n\left(u_{n-1}+u_{n+1}\right)=2u_{n-1}u_{n+1}$$
$$u_n=\frac{2u_{n-1}u_{n+1}}{u_{n-1}+u_{n+1}}\qquad (*)$$

ទំនាក់ទំនង $(*)$ នេះបង្ហាញបានថា (u_n) ជាស្ទីតអាកម៉ូនិច ។

5. បង្ហាញថាស្ទីត $(f(a_n))$ ជាស្ទីតអាកម៉ូនិច

យើងមាន ៖ ស្ទីតធរណីមាត្រ (a_n) ដែល $a_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}$

គេបាន ៖

$$a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}$$
$$\Rightarrow a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$$

ម្យ៉ាងទៀត ៖

អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f\left(\sqrt{xy}\right)=\dfrac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^+$

គេបាន ៖

$$f(a_n)=f\left(\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}\right)$$
$$\Leftrightarrow f(a_n)=\frac{2f(a_{n-1})f(a_{n+1})}{f(a_{n-1})+f(a_{n+1})}\qquad (*)$$

ទំនាក់ទំនង $(*)$ នេះបង្ហាញបានថា $f(a_n)$ ជាស្ទីតអាកម៉ូនិច ។

6. បង្ហាញថា a,c,e ជាបីតួតគ្នានៃស្ទីតធរណីមាត្រ

យើងមាន , a,b,c ជាបីតួតគ្នានៃស្ទីតនព្វន្ត ,

b,c,d ជាបីតួតគ្នានៃស្ទីតធរណីមាត្រ ,

និង c,d,e ជាបីតួតគ្នានៃស្ទីតអាកម៉ូនិច

នាំឲ្យ, គេបាន ៖ $a+c=2b$, $c^2=bd$ និង $d=\dfrac{2ce}{c+e}$

យើងបាន ,

$$c^2 = bd = \frac{a+c}{2}\cdot\frac{2ce}{c+e}$$

$$c = \frac{(a+c)e}{c+e}$$

$$c^2 + ce = ae + ce$$

$$c^2 = ae$$

សមភាពចុងក្រោយនេះ បង្ហាញឲ្យឃើញថា a,c,e ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ជំពូក ៦ ៖ ផលសងតួនៃស្វ៊ីត និងទំនាក់ទំនងតួនៃស្វ៊ីត

OUTLINE

I. **ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន**

1. កំណត់តួទី n ដោយប្រើផលសងតួនៃស្វ៊ីត

   ក. ផលសងលំដាប់១

   ខ. ផលសងលំដាប់២

2. កំណត់តួទី n ដោយប្រើស្វ៊ីតជំនួយ

   ក. ចំពោះស្វ៊ីតដែលមានទំនាក់ទំនង $u_1 = a, u_{n+1} = bu_n + p(n)$

   ខ. ចំពោះស្វ៊ីតដែលមានទំនាក់ទំនង $u_1 = a, u_{n+1} = bu_n + p(n)c^n$

   គ. ចំពោះស្វ៊ីតដែលមានទំនាក់ទំនងជាប្រភាគ $u_n = \dfrac{a + bu_{n-1}}{a' + b'u_{n-1}}$

   ឃ. ទំនាក់ទំនងកំនើនក្នុងទម្រង់ $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

3. ទំនាក់ទំនងរវាង a_n និង S_n

II. **លំហាត់**

III. **ដំណោះស្រាយ**

ផលសងតួនៃស៊ីត និងទំនាក់ទំនងតួនៃស៊ីត

I. ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន

1. *កំណត់តួទី n ដោយប្រើផលសងតួនៃស៊ីត*

ក. ផលសងតួលំដាប់ទី១

ជាទូទៅ ៖ គេមានស៊ីត (a_n) ។ គេតាងស៊ីត (b_n) ដែល $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ ស៊ីត (b_n) នេះនឹងចូលជាស៊ីតនព្វន្ត ឬស៊ីតធរណីមាត្រ ឬស៊ីតដែលអាចរកតួទូទៅបាន ។ គេបាន ៖ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ស៊ីត (b_n) ហៅថាផលសងលំដាប់១ ។

ខ. ផលសងតួលំដាប់ទី២

ជាទូទៅ ៖ គេមានស៊ីត (a_n) ។

គេតាងស៊ីត (b_n) ដែល $b_n = a_{n+1} - a_n$ ហៅថាផលសងលំដាប់១ ។

ប្រសិនបើ (b_n) នៅតែមិនអាចឲ្យយើងរករូបមន្តតួទូទៅបាន គេត្រូវ ៖

តាងស៊ីត (c_n) ដែល $c_n = b_{n+1} - b_n$ ហៅថាផលសងលំដាប់ ២ ។

គេបាន , $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$ និង $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ ។

ចំណាំ ៖ ប្រសិនបើ ផលសងលំដាប់២ នៅតែមិនអាចដោះស្រាយបានទៀត យើងអាចធ្វើផលសងលំដាប់ ៣ ជាបន្ត , ... ។

2. *កំណត់តួទី n ដោយប្រើស៊ីតជំនួយ*

ក. ចំពោះស៊ីតដែលមានទំនាក់ទំនង ៖

$$\begin{aligned} &u_1 = a \\ &u_{n+1} = bu_n + p(n) \end{aligned}$$

ដែល $p(n)$ ជាពហុធា ។ គេប្រើស៊ីតជំនួយ (α_n) ដែល α_n ជាពហុធាមានដឺក្រេស្មើ $p(n)$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងស៊ីត (u_n) ។ ក្នុងករណីនេះគេជំនួស (α_n) ក្នុងទំនាក់ទំនងនៃស៊ីត រួចកំណត់ស៊ីត α_n ។

ខ. ចំពោះស៊ីតដែលមានទំនាក់ទំនង ៖

$$u_1 = a$$
$$u_{n+1} = bu_n + p(n)c^n$$

ដែល $p(n)$ ជាពហុធា ។ គេប្រើស៊ីតជំនួយ α_n ដែល $\alpha_n = q(n)c^n$ ដែល $q(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេស្មើ $p(n)$ ។

គ. ចំពោះស៊ីតដែលមានទំនាក់ទំនងជាប្រភាគ ៖

$$u_n = \frac{a + bu_{n-1}}{a' + b'u_{n-1}}$$

គេប្រើស៊ីតជំនួយ $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ ដែល $\alpha < \beta$ ហើយ α និង β ជាតម្លៃនៃ u ដែលនាំអោយ (u_n) ជាស៊ីតថេរ មានន័យថា $u_n = u_{n-1} = u_{n-2} = \cdots = u_1 = u$ ។

ឃ. ទំនាក់ទំនងកំនើនក្នុងទម្រង់ $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

ជាទូទៅ ៖

បើទំនាក់ទំនងនៃស៊ីត (a_n) មានទម្រង់ $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ គេពិចារណាទៅលើពីរចំនួន α, β ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$ នោះគេបាន $a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$ ទំនាក់ទំនងអាចបំលែងតាមរបៀបពីរយ៉ាងដូចខាងក្រោម ៖

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$
$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$$

គេអាចរក α, β ដោយដោះស្រាយសមីការ $x^2 + px + q = 0$

សមីការ $x^2 + px + q = 0$ ហៅថាសមីការសំគាល់នៃសមីការស៊ីត $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ ។

3. ទំនាក់ទំនងរវាង a_n និង S_n

ជាទូទៅ ៖ ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $S_n - S_{n-1} = a_n$, $S_1 = a_1$ ។

II. លំហាត់

1. (u_n) ជាស៊ីតកំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2}u_n + 1 \end{cases}$ ។

   គណនា u_n ដែលជាតួទី n នៃស៊ីត (u_n) ។

2. កំណត់តួទូទៅនៃស៊ីត (a_n) ដោយទំនាក់ទំនងកំនើន $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 4a_n + 1$ ។

3. គេអោយស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 5$ និង $u_n = 2u_{n-1} - n$ ។

   កំណត់ u_n ជាតួទី n នៃស៊ីត ។

4. គេអោយស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n^2 - n + 1 \end{cases}$ ។

   គណនា u_n តួទី n នៃស៊ីត ។

5. (u_n) ជាស៊ីតកំណត់ដោយ ៖

   $u_1 = 1$

   $u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n$

   គណនា u_n ជាតួទី n នៃស៊ីត (u_n) ។

6. គេឲ្យស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

   $u_1 = -2$

   $u_n = \frac{2 + u_{n-1}}{1 + 2u_{n-1}}$

   គណនា u_n ជាតួទី n នៃស៊ីត (u_n) ។

7. គេមាន $S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ជាផលបូកតួនៃស៊ីត (a_n) ។

   ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង a_{n+1} និង a_n ។

   ខ. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n) ។

8. ស៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនង

   $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_{n+1} = 4a_{n+1} - 3a_n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

   កំណត់តួទី n នៃស៊ីត ។

9. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $2, 4, 8, 14, 22, 32, \ldots$ ។

   ២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ ។

10. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $1, 2, 5, 10, 17, \ldots$ ។

    ២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ ។

11. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $4,5,7,10,14,\ldots$ ។
    ២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ ។
12. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $3,5,8,12,17,23,\ldots$ ។
    ២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ ។
13. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $1,2,6,15,31,56,\ldots$ ។
    ២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ ។
14. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $4,18,48,100,180,294,\ldots$ ។
    ២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ ។
15. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $1,2,5,12,27,58,121,\ldots$ ។
    ២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ ។
16. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $1,2,5,10,17,\ldots$ ។
    ២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ ។
17. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $1,5,14,30,55,91,\ldots$ ។
    ២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ ។
18. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $(a_n): p,q,p,q,p,q,\ldots$ ។

III. ដំណោះស្រាយ

1. គណនា u_n ដែលជាតួទី n នៃស៊ីត (u_n)

តាង $\alpha_n = a$ នោះ $\alpha_{n+1} = a$

ដែល ៖ $\alpha_{n+1} = \sqrt{2}u_n - 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}a - 1$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)a = 1$$
$$\Rightarrow a = \sqrt{2}+1$$

គេបាន ៖

$$-\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2}u_n - 1 \\ \alpha_{n+1} = \sqrt{2}\alpha_n - 1 \end{cases}$$
$$u_{n+1} - \alpha_{n+1} = \sqrt{2}\left(u_n - \alpha_n\right)$$

តាង $v_n = u_n - \alpha_n \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha_{n+1}$

$\Rightarrow v_{n+1} = \sqrt{2}v_n$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១

$v_1 = u_1 - \alpha_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 = -1$ និង

ផលធៀបរួម $r = \sqrt{2}$ ។

គេបាន ៖

$$v_n = v_1 r^{n-1}$$
$$v_n = -\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$$
$$\Rightarrow u_n - \alpha_n = -\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$$
$$\Rightarrow u_n = -\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} - \alpha_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = -\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} + \sqrt{2} + 1$$
$$u_n = -\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} + \sqrt{2} + 1$$

ដូចនេះ $u_n = -\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} + \sqrt{2} + 1$ ត្រូវបានគណនា ។

2. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n)

តាង $\alpha_n = a \Rightarrow \alpha_{n+1} = a$

ដែល $\alpha_{n+1} = 4\alpha_n + 1$

$$\Leftrightarrow a = 4a + 1$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha_n = -\frac{1}{3}$$

គេបាន ៖

$$-\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + 1 \\ \alpha_{n+1} = 4\alpha_n + 1 \end{cases}$$
$$a_{n+1} - \alpha_{n+1} = 4(a_n - \alpha_n)$$

តាងស្វ៊ីត (b_n) ដែល $b_n = a_n - \alpha_n$

គេបាន ៖ $b_{n+1} = 4b_n$

ទំនាក់ទំនងនេះ បញ្ជាក់បានថា ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ $b_1 = a_1 - \alpha_1 = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$ និងផលធៀបរួម $r = 4$ ។

គេបាន ៖ $b_n = b_1 r^{n-1} = \frac{4}{3}\left(4^{n-1}\right) = \frac{4^n}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

នាំឲ្យគេបាន ៖ $a_n = b_n + \alpha_n = \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4^n - 1}{3}$

ដូចនេះ $a_n = \frac{4^n - 1}{3}$, $n \in \mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

3. គណនា u_n តួទី n នៃស្វ៊ីត

តាង $\alpha_n = an + b \Rightarrow \alpha_{n-1} = a(n-1) + b = an - a + b$

ដែល $\alpha_n = 2\alpha_{n-1} - n$

$$an + b = 2(an - a + b) - n$$
$$an + b = 2an - 2a + 2b - n$$
$$an + b = (2a - 1)n - 2a + 2b$$

គេបាន ៖

$$\begin{cases} 2a - 1 = a \\ -2a + 2b = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

នោះ $\alpha_n = n + 1$

គេមាន ៖

$$-\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} - n \\ \alpha_n = 2\alpha_{n-1} - n \end{cases}$$
$$u_n - \alpha_n = 2(u_{n-1} - \alpha_{n-1})$$

តាង $v_n = u_n - \alpha_n \Rightarrow v_{n-1} = u_{n-1} - \alpha_{n-1}$

គេបាន ៖ $v_n = 2v_{n-1}$ **ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១** $v_1 = u_1 - v_1 = 5 - 1 - 2 = 2$

និងផលធៀបរួម $r = 2$ ។

គេបាន ៖

$$\begin{aligned} v_n &= v_1.r^{n-1} \\ &= 2.2^{n-1} \\ &= 2^n \\ u_n - \alpha_n &= 2^n \\ \Rightarrow u_n &= 2^n + \alpha_n = 2^n + n + 2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $u_n = 2^n + n + 2$ **ត្រូវបានកំណត់ ។**

4. **គណនា** u_n **តួទី** n **នៃស៊ីត**

តាង $\alpha_n = an^2 + bn + c$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_{n+1} &= a(n+1)^2 + b(n+1) + c \\ &= an^2 + 2an + a + bn + b + c \\ &= an^2 + (2a+b)n + a + b + c \end{aligned}$$

ដែល $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{3}\alpha_n + n^2 - n + 1$

$$\begin{aligned} an^2 + (2a+b)n + a + b + c &= \frac{1}{3}\alpha_n + n^2 - n + 1 \\ &= \frac{1}{3}an^2 + \frac{1}{3}bn + \frac{1}{3}c + n^2 - n + 1 \\ &= \left(\frac{a}{3} + 1\right)n^2 + \left(\frac{b}{3} - 1\right)n + \frac{c}{3} + 1 \end{aligned}$$

គេបាន ៖

$$\begin{cases} a = \dfrac{a}{3} + 1 \\ 2a + b = \dfrac{b}{3} - 1 \\ a + b + c = \dfrac{c}{3} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = -6 \\ c = \dfrac{33}{4} \end{cases}$$

គេបាន ៖

$$\alpha_n = \frac{3}{2}n^2 - 6n + \frac{33}{4}$$

គេមាន ៖

$$-\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n^2 - n + 1 \\ \alpha_{n+1} = \frac{1}{3}\alpha_n + n^2 - n + 1 \end{cases}$$

$$u_{n+1} - \alpha_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - \alpha_n)$$

តាង $v_n = u_n - \alpha_n \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha_{n+1}$

គេបាន $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $v_1 = -\frac{11}{4}$ និង $r = \frac{1}{3}$

គេបាន ៖ $v_n = v_1 r^{n-1} = -\frac{11}{4}\cdot\frac{1}{3^{n-1}} = -\frac{11}{4\times 3^{n-1}}$

$$\Rightarrow u_n - \alpha_n = -\frac{11}{4\times 3^{n-1}}$$

$$\Rightarrow u_n = -\frac{11}{4\times 3^{n-1}} + \alpha_n = -\frac{11\times 3^{1-n}}{4} + \frac{3}{2}n^2 - 6n + \frac{33}{4}$$

ដូចនេះ $u_n = -\frac{11\times 3^{1-n}}{4} + \frac{3}{2}n^2 - 6n + \frac{33}{4}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

5. រក u_n

តាង $\alpha_n = (an+b)2^n \Rightarrow \alpha_{n+1} = (an+a+b)2^{n+1}$

ដែល ៖

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + (n+1)2^n$$
$$(2an+2a+2b)2^n = (an+b)2^n + (n+1)2^n$$
$$(2an+2a+2b)2^n = \left[(a+1)n+b+1\right]2^n$$

គេបាន ៖

$$\begin{cases} 2a = a+1 \\ 2a+2b = b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

នោះយើងបាន $\alpha_n = (n-1)2^n$, $\alpha_1 = 0$

គេមាន ៖

$$-\begin{cases} u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + (n+1)2^n \end{cases}$$
$$u_{n+1} - \alpha_{n+1} = u_n - \alpha_n$$

ដោយ ៖ $u_{n+1} - \alpha_{n+1} = u_n - \alpha_n = u_{n-1} - \alpha_{n-1} = \cdots = u_1 - \alpha_1 = 1 - 0 = 1$ បើរ

គេបាន ៖ $u_n = \alpha_n + 1 = (n-1)2^n + 1$

ដូចនេះ $u_n = (n-1)2^n + 1$ត្រូវបានកំណត់ ។

6. រក u_n

បើ(u_n)ជាស៊ីតបើរគេបាន ៖

$$u = \frac{2+u}{1+2u}$$
$$\Leftrightarrow 2u^2 + u = 2 + u$$
$$\Leftrightarrow u = \pm 1$$

គេតាង $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$

$$v_n = \frac{\dfrac{2+u_{n-1}}{1+2u_{n-1}} + 1}{\dfrac{2+u_{n-1}}{1+2u_{n-1}} - 1}$$
$$= \frac{2+u_{n-1}+1+2u_{n-1}}{2+u_{n-1}-1-2u_{n-1}}$$
$$= \frac{3u_{n-1}+3}{-u_{n-1}+1}$$
$$= -3\left(\frac{u_{n-1}+1}{u_{n-1}-1}\right)$$
$$v_n = -3v_{n-1}$$

គេបាន (v_n)ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $v_1 = \dfrac{u_1+1}{u_1-1} = \dfrac{-2+1}{-2-1} = \dfrac{1}{3}, r = -3$

គេបាន ៖ $v_n = v_1 r^{n-1} = \dfrac{1}{3}(-3)^{n-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n+1}{u_n-1} = \frac{1}{3}(-3)^{n-1}$$

$$u_n+1=\frac{(-3)^{n+1}}{3}u_n-\frac{(-3)^{n-1}}{3}$$

$$\left(\frac{(-3)^{n-1}}{3}-1\right)u_n=\frac{(-3)^{n-1}}{3}+1$$

$$u_n=\frac{\frac{(-3)^{n-1}}{3}+1}{\frac{(-3)^{n-1}}{3}-1}$$

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{\frac{(-3)^{n-1}}{3}+1}{\frac{(-3)^{n-1}}{3}-1}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

7. គេមាន $S_n=4-a_n-\dfrac{1}{2^{n-2}}$

គេបាន $S_{n+1}=4-a_{n+1}-\dfrac{1}{2^{n-1}}$

ក) កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង a_{n+1} និង a_n

យើងមាន ៖

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=S_{n+1}-S_n\\&=4-a_{n+1}-\frac{1}{2^{n-1}}-4+a_n+\frac{1}{2^{n-2}}\\&=-a_{n+1}+a_n+\frac{2}{2^{n-2}}-\frac{1}{2^{n-2}}\\&=-a_{n+1}+a_n+\frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

$$2a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2^n}$$

ដូចនេះ $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2^n}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

ខ) កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (a_n)

តាម(ក) ៖ $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2^n}$ គុណអង្គសងខាងនឹង 2^{n+1}

គេបាន ៖ $2^{n+1}a_{n+1}=2^na_n+2$

តាង $v_n=2^na_n\Rightarrow v^{n+1}=2^{n+1}a_{n+1}$

គេបាន ៖

$$v_{n+1} = v_n + 2 \Rightarrow v_{n+1} - v_n = 2$$

នោះ (v_n)ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $v_1 = 2a_1 = 2,\ d = 2$

គេបាន ៖

$$\begin{aligned} v_n &= v_1 + (n-1)d \\ &= 2 + (n-1)2 = 2n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2^n a_n = 2n$$

$$a_n = \frac{2n}{2^n}$$

$$a_n = \frac{n}{2^{n-1}}$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{n}{2^{n-1}}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

8. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

យើងមាន ៖

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 4a_{n+1} - 3a_n \\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n &= 0 \end{aligned}$$

សមីការសំគាល់មានរាង $x^2 - 4x + 3 = 0$

ដោយ $a + b + c = 0$ នោះ $x_1 = 1\ ,\ x_2 = 3$

ទំនាក់ទំនងខាងលើអាចសរសេរជា ៖

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) & (1) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = (a_{n+1} - 3a_n) & (2) \end{cases}$$

$(1): a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$

តាង $b_n = a_{n+1} - a_n$ គេបាន $b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$

និង $b_1 = a_2 - a_1 = 3$

គេបាន ៖ $b_{n+1} = 3b_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $b_1 = 3, r = 3$ ។

នោះ

$$b_n = b_1 r^{n-1} = 3^n$$

$$a_{n+1} - a_n = 3^n \qquad (a)$$

$$(2): a_{n+2} - 3a_{n+1} = a_{n+1} - 3a_n = \ldots = a_2 - 3a_1 = 3 \qquad (b)$$

តាម (a) និង (b) យើងបាន ៖

$$-\begin{cases} a_{n+1}-a_n=3^n \\ a_{n+1}-3a_n=3 \end{cases}$$
$$2a_n=3^n-3$$
$$\Rightarrow a_n=\frac{3^n-3}{2}$$

ដូចនេះ $a_n=\dfrac{3^n-3}{2}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

9. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត

សន្មតស៊ីត $(a_n): 2,4,8,14,22,32,\ldots$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

តាងស៊ីត (b_n) ដែល $b_n=a_{n+1}-a_n$ នោះគេបាន ,

$(b_n): 2,4,6,8,10,\ldots$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

គេបាន , $b_n=2n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2+\sum_{k=1}^{n-1} 2k \\ &= 2+2\big(1+2+3+\cdots+(n-1)\big) \\ &= 2+2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} \\ &= n^2-n+2 \end{aligned}$$

ដូចនេះស៊ីតនោះគឺ $a_n=n^2-n+2$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ

ផលបូក n តួ នៃស៊ីតខាងលើ គឺ ៖

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k+2\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2-\sum_{k=1}^{n} k+2\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)-\left(1+2+\cdots+n\right)+2\left(1+1+\cdots+1\right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+2n \end{aligned}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1-3)+12n}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n-2)+12n}{6}$$
$$=\frac{n\left(n^2-1+6\right)}{3}$$
$$=\frac{n\left(n^2+5\right)}{3}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n\left(n^2+5\right)}{3}$ ត្រូវបានគណនា ។

10. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $1,2,5,10,17,\ldots$

សន្មតស៊ីត $(a_n):1,2,5,10,17,\ldots$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

តាងស៊ីត (b_n) ដែល $b_n=a_{n+1}-a_n$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$(b_n):1,3,5,7,\ \ldots \text{ គ្រប់ } n\in\mathbb{N}$$

គេបាន , $b_n=2n-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$
$$=1+2\left(1+2+3+\cdots+(n-1)\right)-(n-1)$$
$$=2-n+2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$
$$=n^2-2n+2$$

ដូចនេះស៊ីតនោះគឺ $a_n=n^2-2n+2$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ

ផលបូក n តួ នៃស៊ីតខាងលើ គឺ ៖

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-2k+2\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)-2(1+2+\cdots+n)+2(1+1+\cdots+1)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1-6)+12n}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n-5)+12n}{6}$$
$$=\frac{n\left(2n^2-3n+7\right)}{6}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n\left(2n^2-3n+7\right)}{6}$ ត្រូវបានគណនា ។

11. ១. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $4,5,7,10,14,\ldots$

សន្មតស្វ៊ីត $(a_n):4,5,7,10,14,\ldots$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

តាងស្វ៊ីត (b_n) ដែល $b_n=a_{n+1}-a_n$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$(b_n):1,2,3,4,\ldots \text{ គ្រប់ } n\in\mathbb{N}$$

គេបាន , $b_n=n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=4+\sum_{k=1}^{n-1}k$$
$$=4+\left(1+2+3+\cdots+(n-1)\right)$$
$$=4+\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$
$$=\frac{n^2-n+8}{2}$$

ដូចនេះស្វ៊ីតនោះគឺ $a_n=\frac{n^2-n+8}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. គណនាផលបូក n តួនៃស្វ៊ីតខាងលើ

ផលបូក n តួ នៃស្វ៊ីតខាងលើ គឺ ៖

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2-k+8}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k+8\sum_{k=1}^{n}1\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)-\left(1+2+\cdots+n\right)+8\left(1+1+\cdots+1\right)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+8n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1-3)+48n}{6}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n-2)+48n}{6}\right) \\
&= \frac{n\left(n^2-1+24\right)}{6} \\
&= \frac{n\left(n^2+23\right)}{6}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{n\left(n^2+23\right)}{6}$ ត្រូវបានគណនា ។

12. ១. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $3,5,8,12,17,23,\ldots$

សន្មតស្វ៊ីត $(a_n): 3,5,8,12,17,23,\ldots$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

តាងស្វ៊ីត (b_n) ដែល $b_n = a_{n+1} - a_n$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$(b_n): 2,3,4,5,6,\ldots \text{ គ្រប់ } n \in \mathbb{N}$$

គេបាន , $b_n = n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \\
&= 3 + \left(1+2+3+\cdots+(n-1)\right)+(n-1) \\
&= 3 + \frac{(n-1)\cdot n}{2} + n - 1 \\
&= \frac{n^2-n+2(n+2)}{2} \\
&= \frac{n^2+n+4}{2}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះស៊ីតនោះគឺ $a_n = \frac{n^2+n+4}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ

ផលបូក n តួ នៃស៊ីតខាងលើ គឺ ៖

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2+k+4}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k+4\sum_{k=1}^{n}1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+\left(1+2+\cdots+n\right)+4\left(1+1+\cdots+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}+4n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1+3)+24n}{6}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+4)+24n}{6}\right) \\
&= \frac{n\left(n^2+3n+2+12\right)}{6} \\
&= \frac{n\left(n^2+3n+14\right)}{6}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n\left(n^2+3n+14\right)}{6}$ ត្រូវបានគណនា ។

13. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $1,2,6,15,31,56,\ldots$

សន្មតស៊ីត $(a_n):1,2,6,15,31,56,\ldots$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

តាងស៊ីត (b_n) ដែល $b_n = a_{n+1}-a_n$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$(b_n):1,4,9,16,25,\ldots \text{ គ្រប់ } n \in \mathbb{N}$$

គេបាន , $b_n = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2 \\
&= 1+\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\right)
\end{aligned}$$

$$=1+\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+1$$

ដូចនេះស្វ៊ីតនោះគឺ $a_n=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. គណនាផលបូក n តួនៃស្វ៊ីតខាងលើ

ផលបូក n តួ នៃស្វ៊ីតខាងលើ គឺ ៖

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k-1)(2k-1)}{6}+1\right)$$
$$=\frac{1}{6}\left(2\sum_{k=1}^{n}k^3-3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\frac{1}{3}\left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right)-\frac{1}{2}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+\frac{1}{6}(1+2+\cdots+n)+n$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{12}+n$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2-n(n+1)(2n+1)+n(n+1)+12n}{12}$$
$$=\frac{n(n+1)\left(n^2+n-2n-1+1\right)+12n}{12}$$
$$=\frac{n(n+1)\left(n^2-n\right)+12n}{12}$$
$$=\frac{n^2\left(n^2-1\right)+12n}{12}$$
$$=\frac{n\left(n^3-n+12\right)}{12}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n\left(n^3-n+12\right)}{12}$ ត្រូវបានគណនា ។

14. ១. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $4,18,48,100,180,294,\ldots$

សន្មតស្វ៊ីត $(a_n):4,18,48,100,180,294,\ldots$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

តាងស្វ៊ីត (b_n) ដែល $b_n=a_{n+1}-a_n$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$(b_n):14,30,52,80,114,\ \ldots \text{ គ្រប់ } n\in\mathbb{N}$$

តាងស្វ៊ីត (c_n) ដែល $c_n=b_{n+1}-b_n$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$(c_n):16,22,28,34,\ \ldots \text{ គ្រប់ } n\in\mathbb{N}$$

គេបាន , (c_n) **ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន** $c_1 = 16$ **និង** $d = 22 - 16 = 6$

គេបាន , $c_n = c_1 + (n-1)d = 6n + 10$, $\forall n \in \mathbb{N}$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$\begin{aligned}
b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 14 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k + 10) \\
&= 14 + 6\left(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\right) + 10(n-1) \\
&= 14 + 6 \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2} + 10n - 10 \\
&= 10n + 4 + 3n(n-1) \\
&= 3n^2 + 7n + 4
\end{aligned}$$

នាំឲ្យគេបាន ,

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 4 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(3k^2 + 7k + 4\right) \\
&= 4 + 3\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right) + 7\left(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\right) + 4(n-1) \\
&= 4 + 3 \cdot \frac{(n-1)\cdot n \cdot (2n-1)}{6} + 7 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 4n - 4 \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{2} + 4n + \frac{7n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1+7) + 8n}{2} \\
&= \frac{n(n-1)(2n+6) + 8n}{2} \\
&= n(n-1)(n+3) + 4n \\
&= n\left(n^2 + 2n - 3 + 4\right) \\
&= n\left(n^2 + 2n + 1\right) \\
&= n(n+1)^2
\end{aligned}$$

ដូចនេះស្វ៊ីតនោះគឺ $a_n = n(n+1)^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ **ត្រូវបានកំណត់ ។**

២. គណនាផលបូក n តួនៃស្វ៊ីតខាងលើ

ផលបូក n តួ នៃស្វ៊ីតខាងលើ គឺ ៖

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \left(1^3+2^3+\cdots+n^3\right) + 2\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right) + (1+2+\cdots+n) \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{3n^2(n+1)^2 + 4n(n+1)(2n+1) + 6n(n+1)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)\left(3n^2+3n+8n+4+6\right)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)\left(3n^2+11n+10\right)}{12}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{n(n+1)\left(3n^2+11n+10\right)}{12}$ ត្រូវបានគណនា ។

15. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $1,2,5,12,27,58,121,\ldots$

សន្មតស៊ីត $(a_n): 1,2,5,12,27,58,121,\ldots$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

តាងស៊ីត (b_n) ដែល $b_n = a_{n+1} - a_n$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$(b_n): 1,3,7,15,31,63,\ldots \text{ គ្រប់ } n \in \mathbb{N}$$

តាងស៊ីត (c_n) ដែល $c_n = b_{n+1} - b_n$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$(c_n): 2,4,8,16,32,\ldots \text{ គ្រប់ } n \in \mathbb{N}$$

គេបាន , (c_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $c_1 = 2$ និង $q = \dfrac{4}{2} = 2$

គេបាន , $c_n = c_1 q^{n-1} = 2\cdot 2^{n-1} = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\
&= 1 + \left(2+2^2+\cdots+2^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

$$=1+2\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}$$
$$=1+2\left(2^{n-1}-1\right)$$
$$=1+2^n-2$$
$$=2^n-1$$

នាំឲ្យគេបាន ,

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(2^k-1\right)$$
$$=1+\left(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\right)-(n-1)$$
$$=1+2\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}-n+1$$
$$=2+2\left(2^{n-1}-1\right)-n$$
$$=2+2^n-2-n$$
$$=2^n-n$$

ដូចនេះស្វីតនោះគឺ $a_n=2^n-n\,,\ \forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. គណនាផលបូក n តួនៃស្វីតខាងលើ

ផលបូក n តួ នៃស្វីតខាងលើ គឺ ៖

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(2^k-k\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\left(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n\right)-\left(1+2+\cdots+n\right)$$
$$=2\cdot\frac{2^n-1}{2-1}-\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=2\left(2^n-1\right)-\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(4\cdot2^n-n^2-n-4\right)$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{2}\left(4\cdot2^n-n^2-n-4\right)$ ត្រូវបានគណនា ។

16. ១. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត $1,2,5,10,17,\ldots$

សន្មតស៊ីត $(a_n):1,2,5,10,17,\ldots$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

តាងស៊ីត (b_n) ដែល $b_n=a_{n+1}-a_n$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$(b_n):1,3,5,7,\ldots \text{ គ្រប់ } n\in\mathbb{N}$$

គេបាន , (b_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមាន $b_1=1$ និង $d=2$

គេបាន , $b_n=b_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)\\&=1+2\big(1+2+3+\cdots+(n-1)\big)-(n-1)\\&=1+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-n+1\\&=2+n(n-1)-n\\&=n^2-2n+2\end{aligned}$$

ដូចនេះស៊ីតនោះគឺ $a_n=n^2-2n+2$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. គណនាផលបូក n តួនៃស៊ីតខាងលើ

ផលបូក n តួ នៃស៊ីតខាងលើ គឺ ៖

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2-2k+2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right) - 2\left(1+2+\cdots+n\right) + 2n \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 2n \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)-6n(n+1)+12n}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1-6)+12n}{6} \\
&= \frac{n\left(2n^2-3n-5+12\right)}{6} \\
&= \frac{n\left(2n^2-3n+7\right)}{6}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{n\left(2n^2-3n+7\right)}{6}$ ត្រូវបានគណនា ។

17. ១. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $1,5,14,30,55,91,\ldots$

សន្មតស្វ៊ីត $(a_n):1,5,14,30,55,91,\ldots$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

តាងស្វ៊ីត (b_n) ដែល $b_n = a_{n+1}-a_n$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$(b_n):4,9,16,25,36,\ldots$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

គេបាន , $b_n=(n+1)^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^2 \\
&= 1+\left(2^2+3^2+\cdots+n^2\right) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះស្វ៊ីតនោះគឺ $a_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. គណនាផលបូក n តួនៃស្វ៊ីតខាងលើ

ផលបូក n តួ នៃស្វ៊ីតខាងលើ គឺ ៖

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(2k^3+3k^2+k\right) \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k \\
&= \frac{1}{3}\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)+\frac{1}{2}\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)+\frac{1}{6}(1+2+\cdots+n) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2+n(n+1)(2n+1)+n(n+1)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)\left(n^2+n+2n+1+1\right)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)\left(n^2+3n+2\right)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ ត្រូវបានគណនា ។

18. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n): p, q, p, q, p, q, \ldots$

របៀបទី ១

តាងស្វ៊ីត (b_n) ដែល $b_n=a_{n+1}-a_n$, នាំឲ្យគេបាន ៖

$(b_n): q-p, p-q, q-p, p-q, \ldots$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

គេបាន , $b_n=(-1)^n(p-q)$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

នោះយើងបាន ,

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \\
&= p+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(p-q) \\
&= p+(p-q)\left(-1+1-1+1-\cdots+(-1)^{n-1}\right) \\
&= p+(p-q)\cdot(-1)\cdot\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-(-1)} \\
&= p-(p-q)\cdot\frac{1-(-1)^{n-1}}{2}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{2}\left(2p-(p-q)\left(1-(-1)^{n-1}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2p-p+q+(-1)^{n-1}(p-q)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left((p+q)+(-1)^{n-1}(p-q)\right)$$

ដូចនេះ $a_n=\frac{1}{2}\left((p+q)+(-1)^{n-1}(p-q)\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

របៀបទី ២

តាងស៊ីត (c_n) ដែល $c_n=a_{n+1}+a_n$, នាំឲ្យគេបាន ៖

$(c_n):q+p,p+q,q+p,p+q,\ldots$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

គេបាន , $c_n=p+q$ ថេរគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

នោះយើងបាន ,

$$c_n=a_n+a_{n+1}$$
$$a_n+a_{n+1}=c_n$$
$$a_n+a_{n+1}=p+q \text{ ថេរ}$$

តាងស៊ីតជំនួយ (α_n) ដែល $\alpha_n=a$ ថេរ , ហើយ $\alpha_n+\alpha_{n+1}=p+q$

គេបាន ,

$$a+a=p+q$$
$$a=\frac{1}{2}(p+q)$$

មានន័យថា , $\alpha_n=a=\frac{1}{2}(p+q)$, $\forall n\in\mathbb{N}$

ហើយ

$$a_n+a_{n+1}=p+q \qquad (1)$$
$$\alpha_n+\alpha_{n+1}=p+q \qquad (2)$$

ដកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$(a_n-\alpha_n)+(a_{n+1}-\alpha_{n+1})=0$$

តាងស៊ីត (β_n) ដែល $\beta_n=a_n-\alpha_n$ នោះគេបាន ,

$$\beta_n+\beta_{n+1}=0$$
$$\beta_{n+1}=-\beta_n$$

ទំនាក់ទំនងនេះមានន័យថា (β_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន

$\beta_1=a_1-\alpha_1=p-\frac{1}{2}(p+q)=\frac{1}{2}(p-q)$ និង $r=-1$, គេបាន ៖

$$\beta_n=\beta_1 r^{n-1}$$
$$=\frac{1}{2}(p-q)(-1)^{n-1}$$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$a_n-\alpha_n=\frac{1}{2}(p-q)(-1)^{n-1}$$

$$a_n=\frac{1}{2}(p-q)(-1)^{n-1}+\alpha_n$$

$$=\frac{1}{2}(p-q)(-1)^{n-1}+\frac{1}{2}(p+q)$$

$$=\frac{1}{2}\Big((p+q)+(-1)^{n-1}(p-q)\Big)$$

ដូចនេះ $a_n=\frac{1}{2}\Big((p+q)+(-1)^{n-1}(p-q)\Big)\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$ **ត្រូវបានកំណត់ ។**

ជំពូក ៧ ៖ ស៊ីតខួប

OUTLINE

I. **ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន**

1. និយមន័យទី១
2. និយមន័យទី២

II. **លំហាត់**

III. **ដំណោះស្រាយ**

ស៊ីតខួប

I. ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន

1. និយមន័យទី១

ស៊ីត (u_n) មួយជាស៊ីតខួប កាលណាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន p ដែល ៖

$$u_{n+p} = u_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន p តូចបំផុតនៃស៊ីត (u_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈខាងលើ ហៅថា ខួប នៃស៊ីត ។

សំគាល់ ៖ បើ $p=1$ នោះ (u_n) ជាស៊ីតថេរ ។

2. និយមន័យទី២

ស៊ីត (u_n) មួយជាស៊ីតខួប កាលណាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន s , $(s>1)$ ដែល ៖

$$u_{ns} = u_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន s តូចបំផុតនៃស៊ីត (u_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈខាងលើ ហៅថា ខួប នៃស៊ីត ។

II. លំហាត់

1. បង្ហាញថាស៊ីត (u_n) មានខួបស្មើនឹង 2 មានរាង ៖

$$u_n = \frac{1}{2}\left(p+q+(p-q)(-1)^{n+1}\right)\ ; p,q \in \mathbb{R}$$ ។

2. បង្ហាញថាស៊ីត (u_n) មានខួបស្មើនឹង 3 មានរាង ៖

$$u_n = \frac{1}{3}\left(p+q+r+(-p-q+2r)\right)\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(p-q)\sin\frac{2n\pi}{3}\ ; p,q,r \in \mathbb{R}$$ ។

3. គេឲ្យស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = \sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{6}$ ។ រកខួបនៃស៊ីត (u_n) ។

4. គេឲ្យស៊ីត (u_n) ដែល $u_n = \sin\frac{(2n-1)\pi}{3}$ ។

១. បង្ហាញថា $u_n = u_{n+3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

២. រកផលបូក ១៧តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

5. គេមានស៊ីត (v_n) កំណត់ដោយ ៖

$v_1 = 1$ និង $v_{n+1} = -\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

១. រក v_2, v_3 និង v_4 ។

២. បង្ហាញថា $v_n = v_{n+3}$ គ្រប់ $n \geq 1$ ។

6. គេឲ្យស៊ីត (u_n) ដែល $u_n = \cos\frac{(3n+1)\pi}{6}$ ។

១. បង្ហាញថា $u_n = u_{n+4}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

២. រកផលបូក ២៧តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ ។

III. ដំណោះស្រាយ

1. បង្ហាញថាស៊ីត (u_n) មានខួបស្មើនឹង 2 មានរាង ៖

$$u_n = \frac{1}{2}\left(p+q+(p-q)(-1)^{n+1}\right)\ ; p,q \in \mathbb{R}$$

តាមបំរាប់ ៖ $u_n = \frac{1}{2}\left(p+q+(p-q)(-1)^{n+1}\right)\ ; p,q \in \mathbb{R}$

ឧបមាថា ៖ $u_{n+2} = u_n$ គេបាន ៖

$$\frac{1}{2}\left(p+q+(p-q)(-1)^{n+2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(p+q+(p-q)(-1)^{n+1}\right)$$

$$(p-q)(-1)^{n+3} = (p-q)(-1)^{n+1}$$

$$(-1)^n(-1)^3 = (-1)^n(-1)$$

$$-1 = -1 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $u_{n+2} = u_n$ នាំឲ្យ (u_n) មានខួបស្មើនឹង 2 ។

2. បង្ហាញថាស៊ីត (u_n) មានខួបស្មើនឹង 3 មានរាង ៖

$$u_n = \frac{1}{3}\left(p+q+r+(-p-q+2r)\right)\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(p-q)\sin\frac{2n\pi}{3}\ ; p,q,r \in \mathbb{R}$$

យើងមាន ៖

$$\cos\frac{2(n+3)\pi}{3} = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)$$

$$\cos\frac{2(n+3)\pi}{3} = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}+2\pi\right)$$

$$\cos\frac{2(n+3)\pi}{3} = \cos\frac{2n\pi}{3}$$

ដូចគ្នាដែរ ៖

$$\sin\frac{2(n+3)\pi}{3} = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)$$

$$\sin\frac{2(n+3)\pi}{3} = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}+2\pi\right)$$

$$\sin\frac{2(n+3)\pi}{3} = \sin\frac{2n\pi}{3}$$

នាំឲ្យគេបាន ៖

$$\frac{1}{3}\left(p+q+r+(-p-q+2r)\right)\cos\frac{2(n+3)\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}(p-q)\sin\frac{2(n+3)\pi}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(p+q+r+(-p-q+2r)\right)\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}(p-q)\sin\frac{2n\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+3}=u_n$$

ដូចនេះស្វ៊ីត (u_n) មានខួបស្មើនឹង 3 ។

3. រកខួបនៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន ៖ ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n=\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{6}$

តាង p ជាខួបនៃស្វ៊ីត (u_n) , $p\in\mathbb{N}$, គេបាន ៖

$$u_{n+p}=u_n$$

$$\sin\frac{(n+p)\pi}{3}+\cos\frac{(n+p)\pi}{6}=\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{6}$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{p\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{n\pi}{6}+\frac{p\pi}{6}\right)=\sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{p\pi}{3}=2k\pi\\ \frac{p\pi}{6}=2k'\end{cases}\quad k,k'\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}p=6k\\ p=12k'\end{cases}$$

ដោយ p តូចបំផុត នោះនាំឲ្យ $p=12$ ។

ដូចនេះស្វ៊ីត (u_n) មានខួបស្មើនឹង 12 ។

4. ១. បង្ហាញថា $u_n=u_{n+3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

យើងមាន , ស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n=\sin\frac{(2n-1)\pi}{3}$ គេបាន ៖

$$u_{n+3}=\sin\frac{\left(2(n+3)-1\right)\pi}{3}$$

$$=\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)$$

$$=\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{3}+2\pi\right)$$

$$=\sin\frac{(2n-1)\pi}{3}=u_n$$

ដូចនេះ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេបាន $u_n=u_{n+3}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. រកផលបូក ១៧តួដំបូងនៃស្ទីតនេះ

តាម(១) គេទាញបានថា (u_n) ជាស្ទីតខួបដែលមានខួប $p=3$, គេបាន ៖

$$u_1=u_4=u_7=u_{10}=u_{13}=u_{16}$$
$$u_2=u_5=u_8=u_{11}=u_{14}=u_{17}$$
$$u_3=u_6=u_9=u_{12}=u_{15}$$

នោះផលបូក ១៧តួដំបូងនៃស្ទីត (u_n) គឺ ៖

$$S_{17}=u_1+u_2+\cdots+u_{17}$$
$$S_{17}=5\left(u_1+u_2+u_3\right)+u_1+u_2$$

ដោយ $u_n=\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{3}$ នោះយើងបាន ,

$$u_1=\sin\frac{(2\cdot1-1)\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$u_2=\sin\frac{(2\cdot2-1)\pi}{3}=\sin\pi=0$$
$$u_3=\sin\frac{(2\cdot3-1)\pi}{3}=\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

នាំឲ្យ $S_{17}=5\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ $S_{17}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ត្រូវបានគណនា ។

5. ១. រក v_2,v_3 និង v_4

យើងមាន , ស្ទីត (v_n) ដែល $v_1=1$ និង $v_{n+1}=-\dfrac{3}{2}v_n^2+\dfrac{5}{2}v_n+1$ គ្រប់ $n\geq1$

គេបាន ,

$$v_2=-\frac{3}{2}v_1^2+\frac{5}{2}v_1+1=-\frac{3}{2}\cdot1^2+\frac{5}{2}\cdot1+1=2$$
$$v_3=-\frac{3}{2}v_2^2+\frac{5}{2}v_2+1=-\frac{3}{2}\cdot2^2+\frac{5}{2}\cdot2+1=0$$
$$v_4=-\frac{3}{2}v_3^2+\frac{5}{2}v_3+1=-\frac{3}{2}\cdot0^2+\frac{5}{2}\cdot0+1=1$$

ដូចនេះ $v_2=2,v_3=0$ និង $v_4=1$ ត្រូវបានគណនា ។

២. បង្ហាញថា $v_n = v_{n+3}$ គ្រប់ $n \geq 1$

▪ បើ $n=1$ គេបាន $v_4 = 1 = v_1$ ពិត

▪ ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $v_{k+3} = v_k$

▪ យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$, គេបាន ៖

$$v_{(k+1)+3} = v_{(k+3)+1} = -\frac{3}{2}v_{k+3}^2 + \frac{5}{2}v_{k+3} + 1$$

$$= -\frac{3}{2}v_k^2 + \frac{5}{2}v_k + 1$$

$v_{(k+1)+3} = v_{k+1}$ ពិត

ដូចនេះ តាមវិចារកំណើនគេទាញបានថា $v_n = v_{n+3}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$ ។

6. ចម្លើយខ្លី

១. ស្រដៀងលំហាត់ទី ៤

២. $S_{27} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ជំពូក ៨ ៖ លីមីតនៃស្វ៊ីត

OUTLINE

I. **ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន**

1. ស្វ៊ីតអនន្ត
   ក. និយមន័យ
   ខ. ស្វ៊ីតរួម
   គ. ស្វ៊ីតរីក

2. ប្រមាណវិធីលើលីមីតនៃស្វ៊ីត
   ក. ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះ
   ខ. លក្ខណៈគ្រឹះ

3. លីមីតនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត
   ក. សញ្ញាណស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត
   ខ. លីមីតស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត

4. លីមីតនៃស៊េរី
   ក. ស៊េរីអនន្ត
   ខ. ស៊េរីរួម និងស៊េរីរីក
   គ. ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត
   ឃ. ភាពរួម និងរីកនៃស៊េរីធរណីមាត្រ
   ង. លក្ខណៈនៃស៊េរីអនន្ត

II. **លំហាត់**

III. **ដំណោះស្រាយ**

លីមីតនៃស៊ីត

I. ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន

1. ស៊ីតអនន្ត

ក. និយមន័យ

ស៊ីត $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ដែលមានចំនួនតួច្រើនអនន្ត ហៅថាស៊ីតអនន្ត ។ អំណើះតទៅ បើគេសរសេរ (a_n) មានន័យថាជាស៊ីតអនន្ត ។

ខ. ស៊ីតរួម

និយមន័យ ៖ ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតរួមខិតទៅរកចំនួនពិត λ បើ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda$ ។

ស៊ីត (a_n) រួមទៅរកចំនួនពិត λ លុះត្រាតែ បំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $N > n_0$ ដែល $|a_n - \lambda| < \varepsilon$ បំពោះគ្រប់ $n > N$ ។

គ. ស៊ីតរីក

និយមន័យ ៖

- ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតរីកទៅរក $+\infty$ បើ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ។
- ស៊ីត (a_n) ជាស៊ីតរីកទៅរក $-\infty$ បើ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ។

2. ប្រមាណវិធីលើលីមីតនៃស៊ីត

ក. ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះ

គេមានស៊ីត (a_n) និង (b_n) ដែលរួមទៅរកចំនួនពិត M និង N រៀងគ្នា , គេបាន ៖

- $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n = kM$ ដែល k ថេរ

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = M \pm N$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = MN$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{M}{N}$ បើ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = N \neq 0$

➢ បើ $N = 0$ និង $M \neq 0$ នោះ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ មិនមាន

➢ បើ $N = 0$ និង $M = 0$ នោះ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ អាចឬមួយមាន ឬមួយមិនមាន

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p = M^p$ ដែល $p > 0, M > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} p^{a_n} = p^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = p^M$ ដែល $p > 0, M > 0$

ខ. លក្ខណៈគ្រឹះ

ឧបមាថា $a_n \leq b_n$ បំពោះលំដាប់ទី n ដែលធំបង្គួរ ។

- បើ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ និង $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ នាំឲ្យ $\alpha \leq \beta$
- បើ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ នាំឲ្យ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

  ឧបមាថា $a_n \leq b_n \leq c_n$ បំពោះលំដាប់ទី n ដែលធំបង្គួរ ។

- បើ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$ នាំឲ្យ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ។

3. *លីមីតនៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត*

ក. សញ្ញាណស៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត

គេមានស៊ីត (r_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តដែលមានតួទី១ ស្មើនឹង r និង ផលធៀបរួម r ។

- បើ $r = 2$ នោះគេបានស៊ីត ៖ $2, 4, 8, \ldots$ រីកទៅរក $+\infty$ ។

- បើ $r=\frac{1}{2}$ នោះគេបានស៊ីត ៖ $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots$ រួមទៅរក 0 ។

ខ. លីមីតស៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត

(a_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមានផលធៀបរួម គេបាន ៖

- បើ $r>1$ នោះ $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_1 r^{n-1}=+\infty$ គេថា (a_n) រីកទៅរក $+\infty$ ។
- បើ $r=1$ នោះ (a_n) ថេរ ហើយ $\lim_{n\to\infty} a_n=a_1$ ។
- បើ $r=0$ នោះ (a_n) ថេរ ហើយ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ។
- បើ $|r|<1$ នោះ $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_1 r^{n-1}=0$ គេថា (a_n) រីកទៅរក 0 ។
- បើ $r\le -1$ នោះ (a_n) ជាស៊ីតឆ្លាស់ ហើយកាលណា $n\to\infty$ គេមិនអាចកំណត់លីមីតនៃ (a_n) បានទេ ។

4. *លីមីតនៃស៊េរី*

ក. ស៊េរីអនន្ត

និយមន័យ ៖ ស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ គឺជាផលបូកបំនួនតួនៃស៊ីតអនន្ត (a_n) ។

ខ. ស៊េរីរួម និងស៊េរីរីក

ទ្រឹស្តីបទ ៖ បំពោះស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ។

- បើស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ រួម នោះ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ។
- បើស៊ីត (a_n) មិនរួមរក 0 ទេនោះ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរីក ។

សម្រាយបញ្ជាក់

- ឧបមាថា $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ រួម

តាង $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ជាផលបូកដោយផ្នែកនៃ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ គេបាន ៖

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = 0$$

- សំណើផ្ទុយពីសំណើក្នុងសំណួរទី១ គឺ ៖

បើ $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ នាំឲ្យស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ រីក

ដោយសំណើក្នុងសំណួរទី១ ពិត នាំឲ្យសំណើផ្ទុយរបស់វាក៏ពិតដែរ ។

ទ្រឹស្តីបទ ៖

i. បើ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ រួមទៅរក A និង $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ រួមទៅរក B ។ នោះស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \pm b_n\right)$ រួម

ទៅរក $A \pm B$ និង $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ រួមទៅរក cA បំពោះ c ជាចំនួនថេរ ។

ii. បើ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ រួម និង $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ រីក នោះ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \pm b_n\right)$ ជាស៊េរីរីក ។

គ. ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត

និយមន័យ ៖ ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្តគឺជា ស៊េរីអនន្តដែលកំណត់ដោយ $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots$ ដែលតួទី១គឺ $a \neq 0$ និងផលធៀបរួមគឺ r ។

ឃ. ភាពរួម និងរីកនៃស៊េរីធរណីមាត្រ

ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots$ ដែល $a \neq 0$ ៖

- បើ $|r|<1$ នោះស៊េរីរួមទៅរក $\frac{a}{1-r}$ ។
- បើ $|r|\geq 1$ នោះស៊េរីរីក ។

ង. លក្ខណៈនៃស៊េរីអនន្ត

បើ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ និង $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ ជាស៊េរីរួម , គេបាន ៖

- $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = k\alpha \ ,k$ ថេរ
- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha \pm \beta$

II. លំហាត់

1. រកលីមីតនៃស៊ីត $(a_n):1,2,1,2,1,2,1,2,\cdots$ ។

2. រកលីមីតនៃស៊ីត $(a_n):1,1,1,1,1,\cdots$ ។

3. រកលីមីតនៃស៊ីត $(a_n):1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$ ។

4. កំណត់គ្រប់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យស៊េរី $1+(x-3)+(x-3)^2+(x-3)^3+\cdots$ រួម ។

5. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n}{4n^2-5}$ ខ. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi n^2+1}{2n^2}\right)$

គ. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-5}{2n^2-5}$ ឃ. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan\left(\frac{1}{n}\right)$

ង. $\lim\limits_{n\to\infty}(0.99999)^n$

6. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យស៊េរី $1+(x-2)+(x-2)^2+(x-2)^3+\cdots$ រួម ។

7. បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}=0$ ។

8. រក $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4^n}$ ។

9. រក $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{4^n}$ ។

10. រក $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$ ។

11. សិក្សាភាពធ្លោះទៅរកអនន្តនៃស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_1=0.9, u_2=0.99, u_3=0.999,\ldots,u_n=0.99\cdots9$ (n តួលេខ 9) ។

III. ដំណោះស្រាយ

1. រកលីមីតនៃស៊ីត

យើងមានស៊ីត $(a_n): 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots$

ពេលដែល $n \to \infty$ នោះស៊ីត (a_n) យកតម្លៃ ឬមួយ 1 ឬមួយ 2 ។

ដូចនេះស៊ីត (a_n) គ្មានលីមីតទេ ។

2. រកលីមីតនៃស៊ីត

យើងមានស៊ីត $(a_n): 1, 1, 1, 1, 1, \cdots$

ពេលដែល $n \to \infty$ នោះស៊ីត $a_n \to 1$ ។

ដូចនេះស៊ីត (a_n) មានលីមីតស្មើនឹង 1 ។

3. រកលីមីតនៃស៊ីត

យើងមានស៊ីត $(a_n): 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$

ពេលដែល $n \to \infty$ នោះស៊ីត $a_n \to 0$ ។

ដូចនេះស៊ីត (a_n) មានលីមីតស្មើនឹង 0 ។

4. កំណត់គ្រប់តម្លៃ x

យើងមានស៊េរី $1 + (x-3) + (x-3)^2 + (x-3)^3 + \cdots$

ជាស៊េរីធរណីមាត្រដែលមាន

ផលសងរួម $r = x - 3$ ។

នាំឲ្យស៊េរីខាងលើរួមកាលណា $|r| < 1$

$$|x-3| < 1$$
$$-1 < x - 3 < 1$$
$$2 < x < 4$$

ដូចនេះ ស៊េរីខាងលើរួមកាលណា $2 < x < 4$ ។

5. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n}{4n^2-5}$

គេបាន ៖

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n}{4n^2-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(4-\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{3}{4}$$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

ខ. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi n^2+1}{2n^2}\right)$

គេបាន ៖

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi n^2+1}{2n^2}\right)=\sin\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^2+1}{2n^2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi n^2+1}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\pi+\frac{1}{n^2}\right)}{2n^2}=\frac{\pi}{2}$

គ. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-5}{2n^2-5}$

គេបាន ៖

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-5}{2n^2-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{2n^2}=2$$

ឃ. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan\left(\frac{1}{n}\right)$

គេបាន ៖

$$\lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{1}{n}\right)=\tan\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\tan 0=0$$

ង. $\lim\limits_{n\to\infty}(0.99999)^n$

គេបាន ៖

$\lim\limits_{n\to\infty}(0.99999)^n=0$ ព្រោះ $0.99999<1$

6. (ដោះស្រាយដូចលំហាត់ទី៤ ដែរ)

7. បង្ហាញថា $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}=0$

យើងមាន ៖

$$0\le\frac{4^n}{n!}=\frac{4\times4\times4\times\cdots\times4}{1\times2\times3\times\cdots\times n}\le\frac{4^3}{3!}\times\frac{4}{n}$$

ព្រោះ $\frac{4\times4\times\cdots\times4}{4\times5\times\cdots\times(n-1)}\le1$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^3}{3!}\times\frac{4}{n}\right)=0$ នាំឲ្យ ,គេបាន ៖ $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}=0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}=0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

8. រក $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4^n}$

ដោយ $4^n=(1+3)^n\ge\frac{9n(n-1)}{2}$ គេបាន ៖

$$0<\frac{n}{4^n}\le\frac{2n}{9n(n-1)}$$

$$0<\frac{n}{4^n}\le\frac{2}{9(n-1)}\to0$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4^n}=0$ ត្រូវបានគណនា ។

9. រក $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4^n}$

ដោយ $4^n=(1+3)^n\ge\frac{3^3n(n-1)(n-2)}{3!}\ge\frac{9n(n-1)(n-2)}{2}$ គេបាន ៖

$$0\le\frac{n^2}{4^n}\le\frac{2n^2}{9n(n-1)(n-2)}$$

$$0\le\frac{n^2}{4^n}\le\frac{2n}{9(n-1)(n-2)}\to0$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4^n}=0$ ត្រូវបានគណនា ។

10. រក $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

គេបាន ៖

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}$$
$$=0$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=0$ ត្រូវបានកំណត់ ។

11. សិក្សាភាពធ្លោះទៅរកអនន្តនៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន , $u_1=0.9, u_2=0.99, u_3=0.999,\ldots,u_n=0.99\cdots 9$ (n តួលេខ 9)

គេបាន ,

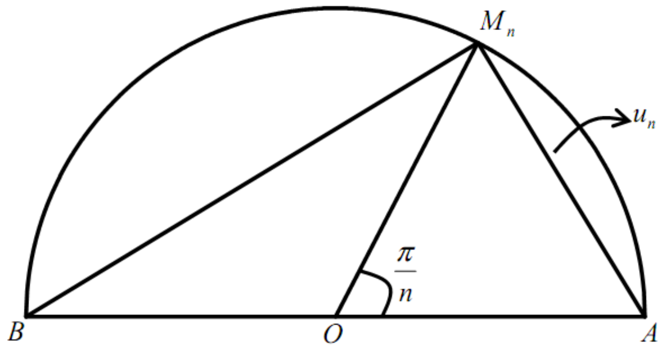
$$u_1=0.9=1-0.1=1-\frac{1}{10}$$
$$u_2=0.99=1-0.01=1-\frac{1}{10^2}$$
$$u_3=0.999=1-0.001=1-\frac{1}{10^3}$$
....
$$u_n=1-\frac{1}{10^n}$$

គេបាន , $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=1$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{10^n}=0$

ដូចនេះភាពធ្លោះទៅរកអនន្តនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺស្មើនឹង 1 ។

លំហាត់សាឡើងវិញ

1. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) ដែល u_n គឺជារង្វាស់របស់ AM_n ដូចក្នុងរូប ។
(គេឲ្យ $OA=1$) ។ ចូរកំណត់ u_n ។



2. សិក្សាភាពកើនចុះនៃស្វ៊ីត ៖

ក. (u_n) ដែល $u_n=n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ខ. (u_n) ដែល $u_n=\frac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

គ. (u_n) ដែល $u_n=19-5n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ឃ. (u_n) ដែល $u_n=\frac{4^n}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

3. បង្ហាញថា (u_n) ដែល $u_n=\frac{2n-1}{n+1}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ ។

4. សរសេរ ៥តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n) ដែល ៖

ក. $u_n=\frac{2n^2-3}{4}$, $n\in\mathbb{N}$ ខ. $u_n=\sin\frac{n\pi}{4}$, $n\in\mathbb{N}$ ។

5. គេឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតដែលកំណត់គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ដោយ $u_1=0, u_{n+1}=\frac{2}{u_n^2+1}$ ។
ចូររក u_3, u_5 ។

6. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1$ និង $u_n=2u_{n-1}+3$, $\forall n>1$ ។បង្ហាញថា ៖

ក. $u_n=2^{n+1}-3$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ខ. ស្វ៊ីត (u_n) កើន ។

7. សិក្សាអថេរភាពរបស់ស្វ៊ីត ៖

ក. $u_n=3n-2$ ខ. $u_n=\frac{2n+3}{3n+2}$ ។

8. សិក្សាអថេរភាពរបស់ស្វ៊ីត ៖

ក. $u_n=n^2-2n-4$ ខ. $u_n=\frac{n}{3^n}$ ។

9. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n=\frac{n^2+1}{2n^2}$ ជាស្វ៊ីតចុះ និងទាល់ ។

10. គេឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតដែល $u_n=\cos\frac{2n\pi}{3}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។ ចូរបំពេញតារាង ៖

n	1	2	3	4	5
u_n					

11. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_1=3$ និង $u_{n+1}=u_n+5$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

១. រក u_2,u_4,u_6 ។

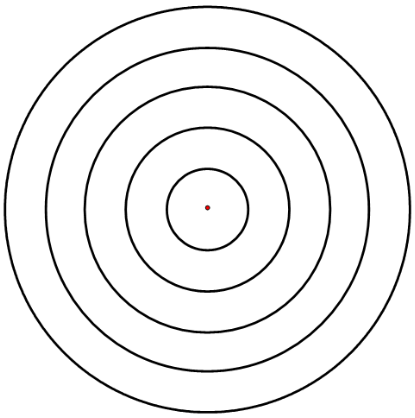
២. បង្ហាញថា $u_n=5n-2$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

12. គេឲ្យ (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1$ និង $u_{n+1}=u_n-(n+1)2^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

បង្ហាញថា ៖ ១. (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ។

២. $u_n=1-(n-1)\cdot 2^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

13. គេមានស្វ៊ីតនៃរង្វង់ $(O,r_1),(O,r_2),(O,r_3),\dots,(O,r_n),\dots$ ដែល (r_n) គឺជាកាំរង្វង់ទី n ហើយកាំ r_n ធំជាងកាំ r_{n-1} ចំនួន ៣ឯកតា គ្រប់ $n\geq 2$ ហើយ $r_1=2$ ។



តាង (u_n) គឺជាបរិមាត្រនៃរង្វង់ទី n ។

និង (v_n) គឺជាផ្ទៃក្រឡានៃរង្វង់ទី n ។

១. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត រួចទាញរក u_n ។

២. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត v_n ។

14. ស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_1-u_2=3$ និង $u_5=-10$ ។ រក d និង u_n ។

15. រកផលបូក ៖

១. $\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+3+\cdots+\frac{19}{3}+7$

២. $50+\frac{348}{7}+\frac{346}{7}+\frac{344}{7}+\cdots+\frac{2}{7}$ ។

16. គណនាផលបូក ៖

$A=1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots+\frac{256}{390625}$

$B=1+10^{-1}+10^{-2}+10^{-3}+\cdots+10^{-12}$ ។

17. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=2$ និង $u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

បង្ហាញថា $u_n=\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

18. គេមានស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) ដែល $u_n=\frac{n^2+1}{n+1}$ និង $v_n=\frac{2n}{n+1}$ ។

១. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល $a_n=u_n+v_n$ ។

២. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (b_n) ដែល $b_n=u_n-v_n$ ។

៣. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (c_n) ដែល $c_n=u_n\cdot v_n$ ។

៤. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (d_n) ដែល $d_n=\frac{u_n}{v_n}$ ។

19. គេឲ្យស្វ៊ីតកើន (a_n) និង (b_n) ដែល $a_n=n^2$ និង $b_n=2n(n+1)$ ។

សិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីត $(a_n+b_n),(a_n-b_n),(a_n\cdot b_n)$ និង $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ ។

20. តើស្វ៊ីតខាងក្រោមណាខ្លះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ? ណាខ្លះជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ?

រក d បំពោះស្វ៊ីតនព្វន្ត និង q បំពោះស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

១. ស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n=8n+3$ ។

២. ស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n=n^2+n+1$ ។

៣. ស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n=3\cdot 8^n$ ។

៤. ស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n:4,-2,1,0.5,\ldots$ ។

21. តើសំណើខាងក្រោមណាខ្លះពិត ?

១. ស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 3$ និង $u_{n+1} = u_n + 2$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គឺជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២. ស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 2$ និង $u_{n+1} = u_n + n$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គឺជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

៣. ស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 4$ និង $u_{n+1} = 5u_n$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គឺជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

៤. ស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 1$ និង $u_{n+1} = nu_n$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គឺជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

22. បង្ហាញថា (u_n) មានលីមីតស្មើ 0 ។

១. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ ២. $u_n = \dfrac{\cos\frac{n\pi}{5}}{n^2}$ ៣. $u_n = \dfrac{1}{(-2)^n}$

៤. $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ ៥. $u_n = \dfrac{1}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}$ ៦. $u_n = \dfrac{3^n \cdot \cos 2n}{5^n}$ ។

23. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) មាន $u_n = \dfrac{n-1}{n^2}$ ។ បង្ហាញថា ៖

១. $0 \le u_n < \dfrac{1}{n}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

២. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ ។

24. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) មានលីមីតស្មើ 0 ។

១. $u_n = (0.99)^n$ ២. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 2^n}{5^n}$ ៣. $u_n = \dfrac{\cos n^2}{(1.01)^n}$ ។

25. បង្ហាញថា $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1-3n}{n} = -3$ ។

26. រក ៖

១. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{4 - \dfrac{1}{n}}$ ២. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{8n^2 - 1}{n^2}}$

៣. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^3 - 4n^2 + 3n + 3}{n^3 - 5n + 7}$ ៤. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$ ។

27. រកលីមីតនៃស្វ៊ីត (u_n) ដែល ៖

១. $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ ២. $u_n = \dfrac{\sin 2n}{3^n} - 1$

៣. $u_n = \dfrac{n-1}{n}$ ៤. $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ ។

28. រកលីមីតនៃស្វ៊ីត (u_n) ដែល ៖

១. $u_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{2n^2 - 1}$ ២. $u_n = \dfrac{-2n^2 + n + 1}{3n^3 + 4n}$

៣. $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{\sqrt{n^4 + n^2 - 1}}$ ៤. $u_n = \dfrac{2^n + 4^n}{2 \cdot 3^n + 4^n}$ ។

29. រកលីមីតនៃស្វ៊ីត (u_n) ដែល ៖

១. $u_n = \sqrt{\dfrac{2n^3 + n^2 + 1}{(n+1)(2n^2 - 1)}}$ ២. $u_n = \dfrac{(n+1)\sqrt{n^2 - n + 1}}{3n^2 + n}$

៣. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + n} + n + 1}{2n - 1}$ ៤. $u_n = \dfrac{n\sqrt{n^2 + 1} + 2n^2}{4n^3 + n - 3}$ ។

30. គេឲ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC មានរង្វាស់ជ្រុង a ។ $\Delta A_1B_1C_1$ ជាត្រីកោណដែលមានកំពូលនីមួយៗឋិតនៅត្រង់ចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុងនីមួយៗរបស់ ΔABC ។ ត្រីកោណ $A_2B_2C_2$ ជាត្រីកោណដែលមានកំពូលនីមួយៗឋិតនៅត្រង់ចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុងនីមួយៗរបស់ $\Delta A_1B_1C_1$, ... , $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ ជាត្រីកោណដែលមានកំពូលនីមួយៗឋិតនៅត្រង់ចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុងនីមួយៗរបស់ $\Delta A_nB_nC_n$ ។

តាង $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ និង $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ ជាបរិមាត្រ និងផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$ រៀងគ្នា ។

១. រកតួទូទៅរបស់ស្វ៊ីត (P_n) និង (S_n) ។

២. រកផលបូក $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n + \cdots$

និង $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$ ។

31. រកលីមីត ៖

១. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) n$ ២. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n}\right)$ ។

32. ១. បង្ហាញថា បើ $q>1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ ។

២. រក $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n-3^n\right)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n+1}{1-2^n}$ ។

33. គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) ដែលមានផលបូក n តួដំបូង គឺ ៖

$S_n=\dfrac{n(7-3n)}{2}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

១. រក u_1,u_2 និង u_3 ។

២. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ។

៣. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

34. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ដោយ $u_1=1$ និង $u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+2}$ ។

១. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (v_n) ដែល $v_n=u_n^2$ គឺជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ សរសេរតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (v_n) ។

២. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ។

៣. រកផលបូក $S=u_1^2+u_2^2+u_3^2+\cdots+u_{1001}^2$ ។

35. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ ។

១. បង្ហាញថា $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}\le u_n\le\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

២. រកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

36. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖ $u_1=10$ និង $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$ ។

១. បង្ហាញថា $u_n>1$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

២. បង្ហាញថា $u_{n+1}-1<\dfrac{u_n-1}{2}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

៣. រក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

37. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=-5$ និង $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n-6$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

តាង (v_n) គឺជាស្វ៊ីតដែល $v_n=u_n+18$ ។

១. បង្ហាញថា (v_n) គឺជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

២. រកផលបូកអនន្តនៃស្វ៊ីត (v_n) រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

38. ស្វ៊ីតហ្វីបូណាស៊ី (F_n) គឺជាស្វ៊ីតដែលកំណត់ដោយ $F_1 = F_2 = 1$ និង

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ គ្រប់ $n \geq 1$ ។

១. បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ ។

២. បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ ។

៣. បង្ហាញថា $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, $\forall n \geq 2$ ។

៤. បង្ហាញថា $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ដែល α និង β គឺជាឫសរបស់សមីការ

$x^2 - x - 1 = 0$ ។

៥. $\alpha^{n-2} \leq F_n \leq \alpha^{n-1}$ បំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

39. គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ ៖ $u_1 = 1$ និង

$u_{n+1} = \dfrac{u_n^4}{4u_n^3 + 6u_n^2 + 4u_n + 1}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ ។

១. ចូរបង្ហាញថា $1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)^4, \forall n = 1, 2, \ldots$ ។

២. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះ ។

40. រោងចក្រផលិតជីគីមីមួយផលិតបាន ៣៦00 តោន នៅឆ្នាំ ២00៣ ។ ផលិតផលនេះកើនឡើង ៥% ក្នុង ១ឆ្នាំ ។

១. តើរោងចក្រនោះផលិតជីបានប៉ុន្មាននៅឆ្នាំ ២0១៥ ?

២. តើរោងចក្រនោះផលិតជីសរុបបានប៉ុន្មានពីឆ្នាំ ២00៣ ដល់ឆ្នាំ ២0១៥ ?

41. តាមការស្ទាបស្ទង់ LDP ទទួលបានអ្នកគាំទ្រ ២0ម៉ឺននាក់នៅខែ មិថុនា ឆ្នាំ ២0១២ ។ សមាជិកអ្នកគាំទ្រម្នាក់ៗដែលយល់បានច្បាស់ពី LDP បានជួយផ្សព្វផ្សាយពី LDP ទៅកាន់អ្នកដែលគេស្គាល់ ឲ្យបេះស្តាប់ , គិតជាមធ្យមសមាជិកម្នាក់ណែនាំអ្នកដែលគេស្គាល់បានម្នាក់ក្នុងរយះពេល ១ខែ ហើយអ្នកដែលត្រូវបានគេពន្យល់ មានតែ ៣0%ប៉ុណ្ណោះដែលយល់ពីហើយគាំទ្រ

LDP ។ ដំណើការនេះចេះតែបន្តទៅរាល់ៗខែ ។

សួរថា ៖ តើ ១ឆ្នាំក្រោយមក មានអ្នកដែលគាំទ្រ LDP ចំនួនប៉ុន្មាននាក់ ?

42. គេឲ្យ $u_n = \dfrac{3n^2+1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ ។ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

43. ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1 = 1, x_2 = 1$ និង $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។

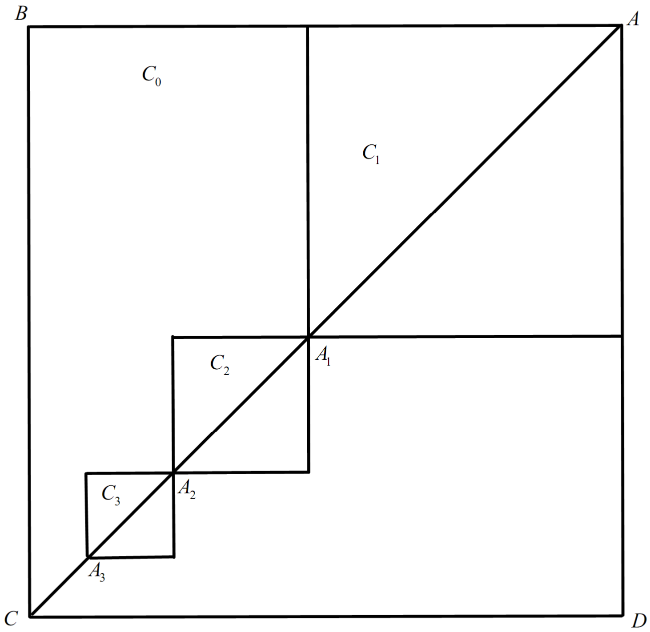
១. បង្ហាញថា $x_{k+1} \cdot x_{k+2} - x_k \cdot x_{k+3} = (-1)^k$ ចំពោះគ្រប់ $k \in \mathbb{N}$ ។

២. គេតាង $arc\cot$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $\cot$ ។ បង្ហាញថា ៖

$$arc\cot x_1 - arc\cot x_2 - arc\cot x_3 - \cdots - arc\cot x_{2011} = arc\cot x_{2012}$$ ។

44. គេឲ្យការ៉េធំ C_0 មានរង្វាស់ជ្រុង a ។ គេកំណត់ស្វ៊ីតនៃការ៉េតូចៗ $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ ដូចបង្ហាញក្នុងរូប ។ ស្វ៊ីតនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$AA_1 = \frac{13}{24}AC, A_1A_2 = \frac{13}{24}AA_1, \ldots, A_nA_{n+1} = \frac{13}{24}A_{n-1}A_n, \ldots$$ ។



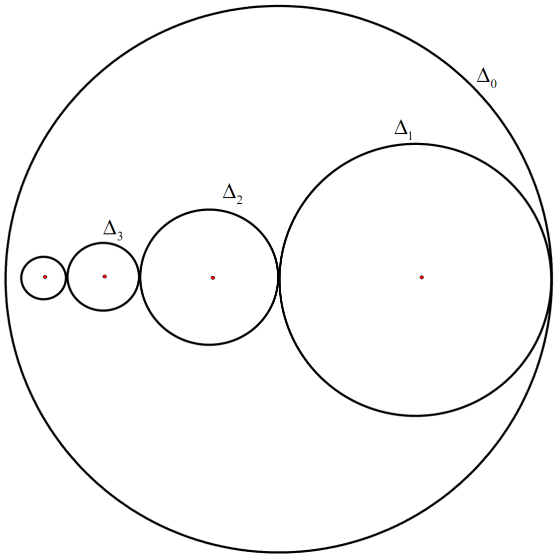
១. តើស្វ៊ីត (C_n) ទាំងអស់បិតនៅក្នុងការ៉េ C_0 ដែរ ឬទេ ? តើមានស្វ៊ីតនៃការ៉េ (C_n) ចំនួនប៉ុន្មានដែលបិតនៅក្នុងការ៉េ C_0 ?

២. តើគេត្រូវបង្កើតការ៉េ $AB'C'D'$ ថ្មីឲ្យមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើប៉ុន្មាន ដើម្បីឲ្យគ្រប់ល្មមសម្រាប់ផ្ទុកស្វ៊ីតនៃការ៉េ (C_n) ទាំងអស់ ?

45. គេមានរង្វង់ធំ Δ_0 មួយនិងស្វ៊ីតនៃរង្វង់តូចៗ(Δ_n), $n \in \mathbb{N}$ (ដូចរូបខាងក្រោម) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

រង្វង់ Δ_0 មានរង្វាស់កាំស្មើនឹង R

រង្វង់ Δ_n មានរង្វាស់កាំស្មើនឹងពាក់កណ្ដាលនៃរង្វង់ Δ_{n-1} គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$



១. បង្ហាញថាគ្រប់រង្វង់ទាំងអស់នៃស្វ៊ីត (Δ_n) សុទ្ធតែឋិតនៅក្នុងរង្វង់ Δ_0 ។

២. តាង A_n គឺជាផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃរង្វង់ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ ។ បង្ហាញថា A_n ស្មើនឹង ១ ភាគ ៣ នៃផ្ទៃក្រឡារបស់រង្វង់ Δ_0 ។

46. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត (a_n) និងស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (b_n) ជាស្វ៊ីតដែលមានតួជាចំនួនវិជ្ជមាន , ដែលមានចំនួនតួនៃស្វ៊ីតនីមួយៗគឺ n តួដូចគ្នា ហើយតួទី១នៃស្វ៊ីតទាំងពីរមានតម្លៃស្មើគ្នា (ធំជាងសូន្យ) និងតួទី n នៃស្វ៊ីតទាំងពីរក៏មានតម្លៃស្មើគ្នាដែរ (តួផ្សេងពីនេះមិនសំខាន់ថាស្មើ ឬមិនស្មើគ្នាទេ) ។ តាង A ជាផលបូកគ្រប់ n តួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (a_n) និង B ជាផលបូកគ្រប់ n តួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (b_n) ។

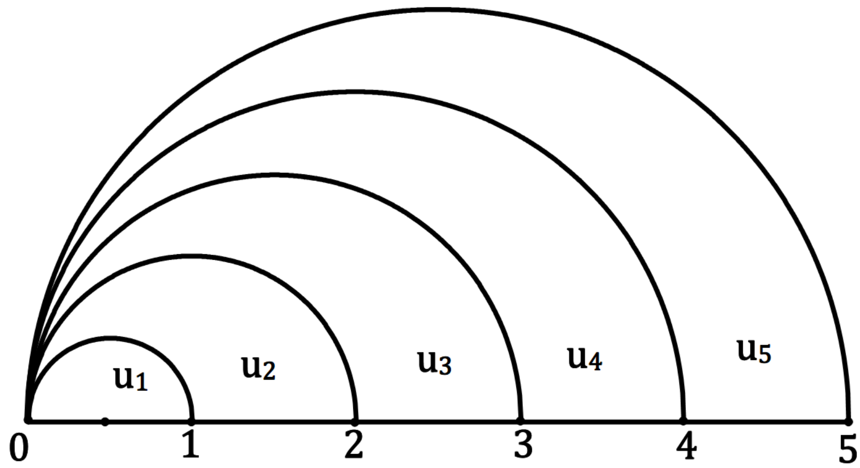
បង្ហាញថា $A \geq B$ ។

47. ស្វ៊ីត (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត និងស្វ៊ីតធរណីមាត្ររៀងគ្នា ។ ស្វ៊ីតទាំងពីរនេះមាន $a_1 = b_1 = 1$ និង $a_{10} = b_{10}$ ។

១. រក d បើដឹងថា $q = 2$ ។

២. សរសេរ១០តួដំបូងនៃ (a_n) និង (b_n) ។

48. គេមានស៊ីត (u_n) ជាស៊ីតនៃផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃរូប ដែល u_1 ជាផ្ទៃក្រឡាកន្លះរង្វង់តូច , u_2 ជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃកន្លះរង្វង់ធំបន្ទាប់ លើកលែង u_1 ចេញ , u_3 ជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃកន្លះរង្វង់ធំបន្ទាប់ លើកលែង u_1 និង u_2 ចេញ,... ដូចរូបខាងក្រោម ។



បង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

49. គេឲ្យស៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ ៖ $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 2}{a_n + 1} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

១. បង្ហាញថា $a_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

២. បង្ហាញថា $a_n \leq \dfrac{3}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

50. គេមានស៊ីត (u_n) កំណត់គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ដោយ $u_1 = 1$ និង $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1 + 15u_n^2}}$ ។

១. តាង $v_n = \dfrac{1}{u_n^2}$, ចូរបង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

២. រកតួទូទៅនៃស៊ីត (v_n) រួចទាញរកតួទូទៅនៃស៊ីត (u_n) និងរកផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ ។

51. គេឲ្យស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 2$ និង $u_{n+1} = 3u_n + \sqrt{2}\cos\dfrac{(n-1)\pi}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ចូររកតួទូទៅនៃស៊ីត (u_n) ។

52. គេឲ្យ a, b, c, d ជាបួនតួនៃស៊ីតនព្វន្តមួយ ។ បង្ហាញថា $abcd + (b-a)^4$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

1. កំណត់ u_n

ដោយ $OA = OB = OM_n = 1$ (កាំនៃរង្វង់តែមួយ)

ហើយ $\angle AOM_n = \dfrac{\pi}{n}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ OAM_n , គេបាន ៖

$$AM_n^2 = OA^2 + OM_n^2 - 2\cdot OA\cdot OM_n\cdot\cos\angle AOM_n$$
$$= 1 + 1 - 2\cos\frac{\pi}{n}$$
$$= 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$$
$$AM_n = \sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)} \quad , \ AM_n > 0$$
$$= \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2n}}$$
$$= 2\sin\frac{\pi}{2n}$$

ដោយ $u_n = AM_n$

ដូចនេះ $u_n = 2\sin\dfrac{\pi}{2n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

2. សិក្សាភាពកើនចុះនៃស្វ៊ីត ៖

ក. (u_n) ដែល $u_n = n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$

ដោយ $n+1>n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន ៖

$$(n+1)^2 > n^2$$

នាំឲ្យ $u_{n+1} > u_n$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

ខ. (u_n) ដែល $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

ដោយ $n+2>n+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន ៖

$$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$

នាំឲ្យ $u_{n+1} < u_n$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

គ. (u_n) ដែល $u_n = 19-5n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន $u_{n+1} = 19-5(n+1)$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = 19-5n-5-19+5n = -5<0$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ឃ. (u_n) ដែល $u_n = \dfrac{4^n}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន $u_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}}{n+1}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4^{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{n}{4^n} = \dfrac{4n}{n+1}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

សមមូល $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \le \dfrac{1}{4}(1+1) = \dfrac{1}{2} < 1$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

3. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

គ្រប់ $n\in\mathbb{N}, u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ គេបាន ,

$$0 < \frac{2n-1}{n+1} = 2-\frac{3}{n+1} < 2 \ , \forall n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ដែលមានគោលក្រោម 0 និងគោលលើ 2 ។

4. សរសេរ ៥តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n) ដែល ៖

ក. $u_n = \dfrac{2n^2-3}{4}$, $n\in\mathbb{N}$

គេបាន , $u_1 = -\dfrac{1}{4}, u_2 = \dfrac{5}{4}, u_3 = \dfrac{15}{4}, u_4 = \dfrac{29}{4}, u_5 = \dfrac{47}{4}$

ខ. $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$, $n\in\mathbb{N}$

គេបាន , $u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, u_2 = 1, u_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, u_4 = 0, u_5 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. រក u_3 និង u_5

យើងមាន , $u_1 = 0$ និង $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ នាំឲ្យ , គេបាន ៖

$$u_2=\frac{2}{u_1^2+1}=\frac{2}{0^2+1}=2$$
$$u_3=\frac{2}{u_2^2+1}=\frac{2}{2^2+1}=\frac{2}{5}$$
$$u_4=\frac{2}{u_3^2+1}=\frac{2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2+1}=\frac{50}{29}$$
$$u_5=\frac{2}{u_4^2+1}=\frac{2}{\left(\frac{50}{29}\right)^2+1}=\frac{1682}{3341}$$

ដូចនេះ $u_3=\frac{2}{5}$ និង $u_5=\frac{1682}{3341}$ ត្រូវបានគណនា ។

6. ក. បង្ហាញថា $u_n=2^{n+1}-3\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$

យើងមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1$ និង $u_n=2u_{n-1}+3\ ,\ \forall n>1$

- បើ $n=1$ គេបាន $u_1=2^{1+1}-3=1$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $u_k=2^{k+1}-3\ ,\ \forall k\in\mathbb{N}$
- យើងនឹងស្រាយថាវាពិតបំពោះ $n=k+1$

យើងមាន , $u_k=2^{k+1}-3\ ,\ \forall k\in\mathbb{N}$ ហើយ $u_{k+1}=2u_k+3$ គេបាន ,

$$u_{k+1}=2\left(2^{k+1}-3\right)+3$$
$$=2^{k+2}-6+3$$
$$u_{k+1}=2^{k+2}-3$$ ពិត

ដូចនេះតាមវិចារកំណើនគេបាន $u_n=2^{n+1}-3\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. បង្ហាញថា ស្វ៊ីត (u_n) កើន

យើងមាន , $u_n=2^{n+1}-3\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$ គេបាន ៖

$$u_{n+1}-u_n=\left(2^{n+2}-3\right)-\left(2^{n+1}-3\right)$$
$$=2\cdot 2^{n+1}-3-2^{n+1}+3$$
$$=2^{n+1}>0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

7. សិក្សាអថេរភាពរបស់ស្វ៊ីត ៖

ក. (កើន)

ខ. យើងមាន , $u_n=\frac{2n+3}{3n+2}$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \frac{2n+5}{3n+5}-\frac{2n+3}{3n+2}\\ &= \frac{6n^2+19n+10-6n^2-19n-15}{(3n+2)(3n+5)}\\ &= -\frac{5}{(3n+2)(3n+5)}<0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

8. ក. សិក្សាអថេរភាពរបស់ស្វ៊ីត $u_n=n^2-2n-4$

តាមបំរាប់ , គេបាន ៖ $u_{n+1}=(n+1)^2-2(n+1)-4=n^2-5$

យើងបាន ,

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= (n^2-5)-(n^2-2n-4)\\ &= 2n-1>0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពរបស់ស្វ៊ីត $u_n=\frac{n}{3^n}$

តាមបំរាប់ , គេបាន ៖ $u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{n+1}{3\cdot 3^n}$

យើងបាន ,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n+1}{3\cdot 3^n}\cdot\frac{3^n}{n}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{3}(1+1)=\frac{2}{3}<1\end{aligned}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

9. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ និងទាល់

យើងមាន , $u_n=\frac{n^2+1}{2n^2}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេបាន ៖

$$u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

ដោយ ,

$$n < n+1$$
$$n^2 < (n+1)^2$$
$$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$$
$$1+\frac{1}{n^2} > 1+\frac{1}{(n+1)^2}$$
$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
$$u_n > u_{n+1} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ម្យ៉ាងទៀត , តួដែលធំជាងគេនៃ (u_n) គឺ $u_1 = \frac{1^2+1}{2\cdot 1^2} = 1$ នោះគេបាន ,

$$1 \geq u_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2}$$

នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនចុះ ហើយទាល់ ដែលមានគោលលើ 1 និង គោលក្រោម $\frac{1}{2}$ ។

10. បំពេញតារាង ៖

n	1	2	3	4	5
u_n	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

11. ១. រក u_2, u_4, u_6

យើងមាន $u_1 = 3$ និង $u_{n+1} = u_n + 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$, គេបាន ៖

$$u_2 = u_1 + 5 = 3 + 5 = 8$$
$$u_3 = u_2 + 5 = 8 + 5 = 13$$
$$u_4 = u_3 + 5 = 13 + 5 = 18$$
$$u_5 = u_4 + 5 = 18 + 5 = 23$$
$$u_6 = u_5 + 5 = 23 + 5 = 28$$

ដូចនេះ $u_2 = 8, u_4 = 18, u_6 = 28$ ត្រូវបានរក ។

២. បង្ហាញថា $u_n = 5n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

យើងមាន $u_{n+1} = u_n + 5$ គេបាន ៖

$$u_{k+1}-u_k=5\ ,\ \forall k\in\mathbb{N}$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=\sum_{k=1}^{n-1}5$$
$$(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\cdots+(u_n-u_{n-1})=5(n-1)$$
$$u_n-u_1=5n-5$$
$$u_n=5n-5+u_1=5n-5+3=5n-2$$

ដូចនេះ $u_n=5n-2\ ,\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

12. ១. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

យើងមាន , $u_1=1$ និង $u_{n+1}=u_n-(n+1)2^n\ ,\forall n\in\mathbb{N}$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$u_{n+1}-u_n=-(n+1)2^n<0\ ,\forall n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនចុះ ។

២. បង្ហាញថា $u_n=1-(n-1)\cdot 2^n\quad ,\forall n\in\mathbb{N}$

- បើ $n=1$ នោះ $u_1=1-(1-1)\cdot 2^1=1$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ ៖ $u_k=1-(k-1)\cdot 2^k\ ,\forall k\in\mathbb{N}$
- យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$

យើងមាន , $u_{k+1}=u_k-(k+1)2^k\ ,\forall k\in\mathbb{N}$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$\begin{aligned}u_{k+1}&=1-(k-1)\cdot 2^k-(k+1)2^k\\&=1-2^k(k-1+k+1)\\&=1-2^k(2k)\end{aligned}$$

$u_{k+1}=1-k\cdot 2^{k+1}$ ពិត

ដូចនេះតាមវិចារកំណើន គេបាន $u_n=1-(n-1)\cdot 2^n\quad ,\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

13. ១. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត រួចទាញរក u_n

ដោយ (u_n) ជាបរិមាត្រនៃរង្វង់ទី n គេបាន ៖

$u_n=2\pi r_n$ ហើយគេក៏បាន $u_{n-1}=2\pi r_{n-1}$

នោះ $u_n-u_{n-1}=2\pi r_n-2\pi r_{n-1}=2\pi(r_n-r_{n-1})$

តែតាមបំរាប់ , $r_n-r_{n-1}=3\ ,\forall n\in\mathbb{N}$ និង $r_1=2$, នោះគេបាន ៖

$u_n-u_{n-1}=2\pi(3)=6\pi$ ថេរ

មានន័យថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=6\pi$ និងតួទី១ គឺ $u_1=2\pi r_1=4\pi$ ។

គេបាន ,

$$u_n=u_1+(n-1)d=4\pi+(n-1)(6\pi)$$
$$u_n=2\pi(3n-1)\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយមានតួទូទៅ $u_n=2\pi(3n-1)\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$ ។

២. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត v_n

ដោយ (v_n) ជាផ្ទៃក្រឡានៃរង្វង់ទី n , នោះ $v_n=\pi r_n^2$

យើងមាន $u_n=2\pi r_n$ និង $u_n=2\pi(3n-1)\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$

គេបាន , $2\pi r_n=2\pi(3n-1)\Rightarrow r_n=3n-1$

នាំឲ្យយើងបាន , $v_n=\pi(3n-1)^2\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$ ។

ដូចនេះ $v_n=\pi(3n-1)^2\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

14. រក d និង u_n

យើងមាន , ស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) មាន $u_1-u_2=3$ និង $u_5=-10$

នាំឲ្យគេបាន , $u_2-u_1=-3\Rightarrow d=-3$

យើងបាន ,

$$u_n=u_5+(n-5)d=-10+(n-5)(-3)$$
$$u_n=-3n+5\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ $d=-3$ និង $u_n=-3n+5\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

15. ១. រកផលបូក $\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+3+\cdots+\frac{19}{3}+7$

គេបាន ,

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+3+\cdots+\frac{19}{3}+7\\&=\frac{1}{3}+\frac{3}{3}+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+\frac{9}{3}+\cdots+\frac{19}{3}+\frac{21}{3}\\&=\frac{1}{3}(1+3+5+7+9+\cdots+19+21)\end{aligned}$$

ដោយ $1,3,5,7,9,\ldots,19,21$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួទី១ $u_1=1$ និង $d=3-1=2$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n-1$

នាំឲ្យ $2n-1 = 21 \Rightarrow n = 11$

នាំឲ្យ $1+3+5+7+\cdots+19+21 = \frac{11(1+21)}{2} = 121$

គេបាន $S = \frac{1}{3}\cdot 121 = \frac{121}{3}$

ដូចនេះ $\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+3+\cdots+\frac{19}{3}+7 = \frac{121}{3}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. រកផលបូក $50+\frac{348}{7}+\frac{346}{7}+\frac{344}{7}+\cdots+\frac{2}{7}$

គេបាន ,

$$\begin{aligned} S &= 50+\frac{348}{7}+\frac{346}{7}+\frac{344}{7}+\cdots+\frac{2}{7} \\ &= \frac{350}{7}+\frac{348}{7}+\frac{346}{7}+\frac{344}{7}+\cdots+\frac{2}{7} \\ &= \frac{1}{7}(350+348+346+344+\cdots+2) \end{aligned}$$

ដោយ $350, 348, 346, 344, \ldots, 2$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួទី១ $u_1 = 350$ និង $d = 348-350 = -2$, គេបាន $u_n = u_1+(n-1)d = 350-2(n-1) = 352-2n$

នាំឲ្យ $352-2n = 2 \Rightarrow n = 175$

នាំឲ្យ $350+348+346+344+\cdots+2 = \frac{175(350+2)}{2} = 30800$

គេបាន $S = \frac{1}{7}\cdot 30800 = 4400$

ដូចនេះ $50+\frac{348}{7}+\frac{346}{7}+\frac{344}{7}+\cdots+\frac{2}{7} = 4400$ ត្រូវបានកំណត់ ។

16. គណនាផលបូក ៖

$$\begin{aligned} A &= 1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots+\frac{256}{390625} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^0+\left(\frac{2}{5}\right)^1+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^8 \end{aligned}$$

នាំឲ្យ A ជាផលបូល ៩តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q = \frac{2}{5}$ និងតួទី១គឺ $u_1 = 1$ គេបាន ៖

$$A = u_1 \cdot \frac{1-q^9}{1-q} = 1\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^9}{1-\frac{2}{5}}$$

$$A = \frac{5}{3}\left(1-\frac{512}{1953125}\right) = \frac{650871}{390625}$$

ដូចនេះ $A = \frac{650871}{390625}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

$B = 1+10^{-1}+10^{-2}+10^{-3}+\cdots+10^{-12}$ ជាផលបូក ១៣តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមាន $q=10^{-1}$ និង $u_1 = 1$ គេបាន ៖

$$B = 1\cdot\frac{1-\left(10^{-1}\right)^{13}}{1-10^{-1}} = \frac{10}{9}\left(1-10^{-13}\right) = 1.111111111$$

ដូចនេះ $B = 1.111111111$ ត្រូវបានកំណត់ ។

17. បង្ហាញថា $u_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

- បើ $n=1$ នោះ $u_1 = \frac{2^{1-1}+1}{2^{1-1}} = \frac{1+1}{1} = 2$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $u_k = \frac{2^{k-1}+1}{2^{k-1}}$
- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតដល់ $n=k+1$, គេបាន ៖

$$u_{k+1} = \frac{u_k+1}{2} = \frac{\frac{2^{k-1}+1}{2^{k-1}}+1}{2} = \frac{2^{k-1}+1+2^{k-1}}{2\cdot 2^{k-1}} = \frac{2\cdot 2^{k-1}+1}{2^k}$$

$u_{k+1} = \frac{2^k+1}{2^k}$ ពិត

ដូចនេះតាមវិចារកំណើន គេបាន $u_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបាន ស្រាយបញ្ជាក់ ។

18. ចម្លើយខ្លី

១. $a_n = n+1$ ២. $b_n = \frac{(n-1)^2}{n+1}$ ៣. $c_n = \frac{2n\left(n^2+1\right)}{(n+1)^2}$ ៤. $d_n = \frac{n^2+1}{2n}$ ។

19. សិក្សាអថេរភាពនៃស្ទីត $(a_n+b_n),(a_n-b_n),(a_n\cdot b_n)$ និង $\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)$

តាង $c_n=a_n+b_n=n^2+2n^2+2n=n(3n+2)$

$d_n=a_n-b_n=n^2-2n^2-2n=-n^2-2n=-n(n+1)$

$e_n=a_n\cdot b_n=n^2\cdot 2n(n+1)=2n^3(n+1)$

$f_n=\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{2n(n+1)}{n^2}=\dfrac{2(n+1)}{n}$

គេបាន ,

$$c_{n+1}-c_n=(n+1)(3n+5)-n(3n+2)$$
$$=8n+5-2n=6n+5>0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

នាំឲ្យ (c_n) ជាស្ទីតកើន ។

$$d_{n+1}-d_n=-(n+1)(n+2)+n(n+1)$$
$$=-3n-2+n=-2n-2<0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

នាំឲ្យ (d_n) ជាស្ទីតចុះ ។

$$e_{n+1}-e_n=2(n+1)^3(n+2)-2n^3(n+1)$$
$$=2\left(n^3+3n^2+3n+1\right)(n+2)-2n^3(n+1)$$
$$=2\left(n^4+5n^3+9n^2+7n+2-n^4-n^3\right)$$
$$=2\left(4n^3+9n^2+7n+2\right)>0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

នាំឲ្យ (e_n) ជាស្ទីតកើន ។

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{2(n+2)}{n+1}\cdot\frac{n}{2(n+1)}$$
$$=\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}$$

ឬ $\dfrac{f_n}{f_{n+1}}=\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1+\dfrac{1}{n^2+2n}>1\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$

នាំឲ្យ (f_n) ជាស្ទីតចុះ ។

20. តើស្ទីតខាងក្រោមណាខ្លះជាស្ទីតនព្វន្ត ? ណាខ្លះជាស្ទីតធរណីមាត្រ ?

រក d បំពោះស្ទីតនព្វន្ត និង q បំពោះស្ទីតធរណីមាត្រ ។

១. យើងមាន , $u_n=8n+3$ នាំឲ្យ $u_{n+1}=8(n+1)+3$

គេបាន $u_{n+1}-u_n=8$ ថេរ

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $d=8$ ។

២. យើងមាន , $u_n=n^2+n+1$ នាំឲ្យ $u_{n+1}=(n+1)^2+(n+1)+1=n^2+3n+3$

គេបាន $u_{n+1}-u_n=2n+2$ មិនថេរ

និង $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}$ មិនថេរ

ដូច្នេះ (u_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយក៏មិនមែនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែរ ។

៣. យើងមាន , $u_n=3\cdot 8^n$ នាំឲ្យ $u_{n+1}=3\cdot 8^{n+1}=24\cdot 8^n$

គេបាន $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{24\cdot 8^n}{3\cdot 8^n}=8$ ថេរ

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $q=8$ ។

៤. យើងមាន , $u_n:4,-2,1,0.5,...$

គេបាន , $u_2-u_1=-2-4=-6$ និង $u_3-u_2=1-(-2)=3$

ដោយ $-6\neq 3$ នាំឲ្យ (u_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្តទេ ។

ហើយ $\frac{u_2}{u_1}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$, $\frac{u_3}{u_2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$ និង $\frac{u_4}{u_3}=\frac{0.5}{1}=\frac{1}{2}$

ដោយ $\frac{u_4}{u_3}\neq\frac{u_2}{u_1}$ នាំឲ្យ (u_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រទេ ។

ដូច្នេះ (u_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយក៏មិនមែនជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែរ ។

21. ចម្លើយខ្លី

១. ពិត ២. មិនពិត

៣. ពិត ៤. មិនពិត ។

22. បង្ហាញថា (u_n) មានលីមីតស្មើ 0

១. យើងមាន $u_n=\frac{(-1)^n}{n!}$ នាំឲ្យ $|u_n|=\left|\frac{(-1)^n}{n!}\right|\leq\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ នាំឲ្យ (u_n) មានលីមីតស្មើនឹងសូន្យ ។

២. យើងមាន $u_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{5}}{n^2}$ នាំឲ្យ $|u_n|=\left|\frac{\cos\frac{n\pi}{5}}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ នាំឲ្យ (u_n) មានលីមីតស្មើនឹងសូន្យ ។

៣. យើងមាន $u_n=\frac{1}{(-2)^n}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ដោយ $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$

នាំឲ្យ (u_n) មានលីមីតស្មើនឹងសូន្យ ។

៤. យើងមាន $u_n=\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ នាំឲ្យ $|u_n|=\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ នាំឲ្យ (u_n) មានលីមីតស្មើនឹងសូន្យ ។

៥. យើងមាន $u_n=\frac{1}{n^k}=\left(\frac{1}{n}\right)^k$, $k\in\mathbb{N}$ នាំឲ្យ $|u_n|=\left|\left(\frac{1}{n}\right)^k\right|\le\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ នាំឲ្យ (u_n) មានលីមីតស្មើនឹងសូន្យ ។

៦. យើងមាន $u_n=\frac{3^n\cdot\cos 2n}{5^n}$ នាំឲ្យ $|u_n|=\left|\frac{3^n\cdot\cos 2n}{5^n}\right|\le\left|\left(\frac{3}{5}\right)^n\right|$, $\forall n\in\mathbb{N}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$ ព្រោះ $\left|\frac{3}{5}\right|<1$ នាំឲ្យ (u_n) មានលីមីតស្មើនឹងសូន្យ ។

23. ១. បង្ហាញថា $0\le u_n<\frac{1}{n}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

យើងមាន , $u_n=\frac{n-1}{n^2}$ ដោយ $n-1\ge 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ និង $n^2>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

នាំឲ្យគេបាន $u_n\ge 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (១)

ម្យ៉ាងទៀត , $u_n-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n^2}-\frac{1}{n}=\frac{n-1-n}{n^2}=-\frac{1}{n^2}<0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

នាំឲ្យ $u_n<\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (២)

តាម(១) និង(២) នាំឲ្យគេបាន $0\le u_n<\frac{1}{n}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ $0\le u_n<\frac{1}{n}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

យើងមាន $0\le u_n<\frac{1}{n}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$, គេបាន ៖

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} u_n < \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$$
$$0 \le \lim_{n\to+\infty} u_n < 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

24. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) មានលីមីតស្មើ 0

១. យើងមាន $u_n = (0.99)^n = \left(\frac{99}{100}\right)^n$

ដោយ $\left|\frac{99}{100}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) មានលីមីតស្មើ 0 ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. យើងមាន $u_n = \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{5^n}$ នាំឲ្យ $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n \cdot 2^n}{5^n}\right| \le \left(\frac{2}{5}\right)^n$

ដោយ $\left|\frac{2}{5}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) មានលីមីតស្មើ 0 ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

៣. យើងមាន $u_n = \frac{\cos n^2}{(1.01)^n}$ នាំឲ្យ $|u_n| = \left|\frac{\cos n^2}{(1.01)^n}\right| \le \frac{1}{(1.01)^n}$

ដោយ $\left|\frac{1}{1.01}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1.01}\right)^n = 0$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) មានលីមីតស្មើ 0 ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

25. បង្ហាញថា $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-3n}{n} = -3$

យើងមាន , $\frac{1-3n}{n} = \frac{1}{n} - 3$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

នោះគេបាន , $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-3n}{n} = -3$ ។

26. ១. រក $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4 - \frac{1}{n}}$

គេបាន , $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4 - \frac{1}{n}} = \sqrt{4} = 2$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ។

២. រក $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{8n^2-1}{n^2}}$

គេបាន , $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{8n^2-1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{8-\dfrac{1}{n^2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ ។

៣. រក $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^3-4n^2+3n+3}{n^3-5n+7}$

គេបាន , $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^3-4n^2+3n+3}{n^3-5n+7}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3\left(2-\dfrac{4}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(1-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{7}{n^3}\right)}=2$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0,\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3}=0$ ។

៤. រក $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-n+3}{n^3+2n}$

គេបាន , $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-n+3}{n^3+2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}=0$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0,\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3}=0$ ។

27. ចម្លើយខ្លី

១. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

២. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-1$

៣. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

៤. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ ។

28. ចម្លើយខ្លី

១. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{1}{2}$

២. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

៣. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

៤. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ ។

29. ចម្លើយខ្លី

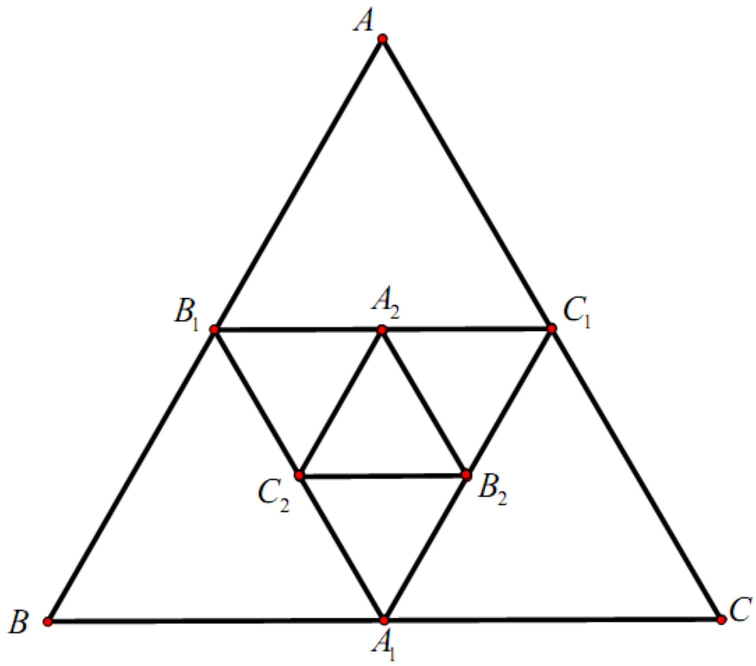
១. $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2n^3+n^2+1}{(n+1)(2n^2-1)}}=1$

២. $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)\sqrt{n^2-n+1}}{3n^2+n}=\dfrac{1}{3}$

៣. $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n+1}{2n-1}=1$

៤. $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2}{4n^3+n-3}=0$ ។

30. ១. រកតួទូទៅរបស់ស្វ៊ីត (P_n) និង (S_n)



តាង (a_n) ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណ $A_nB_nC_n$,

តាមបំរាប់ , គេបាន ៖ $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

ទំនាក់ទំនងនេះស្រាយបានថា (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ $a_1=\dfrac{a}{2}$

និងផលធៀបរួម $q=\dfrac{1}{2}$ ។

នាំឲ្យគេបាន , $a_n=a_1q^{n-1}=\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{a}{2^n}$

យើងបាន , បរិមាត្រនៃត្រីកោណសម័ង្ស $A_nB_nC_n$ គឺ $P_n=3a_n=\dfrac{3a}{2^n}$

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណសម័ង្ស $A_nB_nC_n$ គឺ ៖

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot a_n\cdot\left(\frac{\sqrt{3}a_n}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}a_n^2}{4}$$

$$S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2^n}\right)^2=\frac{\sqrt{3}a^2}{4\cdot 2^{2n}}$$

ដូចនេះបរិមាត្រ និងផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ $A_nB_nC_n$ គឺ $P_n=\frac{3a}{2^n}$ និង $S_n=\frac{\sqrt{3}a^2}{4\cdot 2^{2n}}$ ($n\in\mathbb{N}$)រៀងគ្នា ត្រូវបានកំណត់ ។

២. រកផលបូក $P=P_1+P_2+\cdots+P_n+\cdots$ និង $S=S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots$

យើងមាន $P_n=\frac{3a}{2^n}$ និង $S_n=\frac{\sqrt{3}a^2}{4\cdot 2^{2n}}$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}P&=P_1+P_2+\cdots+P_n+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}P_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3a}{2^k}\\&=3a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)\\&=3a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3a\end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}S_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}a^2}{4\cdot 2^{2k}}\\&=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots\right)\\&=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\\&=\frac{\sqrt{3}a^2}{12}\end{aligned}$$

ដូចនេះផលបូក $P=P_1+P_2+\cdots+P_n+\cdots=3a$

និង $S=S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots=\frac{\sqrt{3}a^2}{12}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

31. រកលីមីត ៖

១. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=+\infty$

២. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n}}=+\infty$ ។

32. ១. បង្ហាញថា បើ $q>1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$

តាង $p=\frac{1}{q}$ ដោយ $q>1$ នាំឲ្យគេបាន $0<p<1$

នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$

ដូចនេះ បើ $q>1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. រក $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n-3^n\right)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n+1}{1-2^n}$

យើងបាន , $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n-3^n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)=-\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty$

និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n+1}{1-2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=-\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

33. ១. រក u_1,u_2 និង u_3

យើងមាន , $S_n=\frac{n(7-3n)}{2}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេបាន ៖

$$S_1=u_1$$
$$S_2=u_1+u_2=S_1+u_2$$
$$S_3=u_1+u_2+u_3=S_2+u_3$$

នាំឲ្យគេបាន ,

$$u_1=S_1=\frac{1\cdot(7-3\cdot1)}{2}=2$$
$$u_2=S_2-S_1=\frac{2\cdot(7-3\cdot2)}{2}-1=0$$
$$u_3=S_3-S_2=\frac{3\cdot(7-3\cdot3)}{2}-0=-3$$

ដូចនេះ $u_1=2,u_2=0$ និង $u_3=-3$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន , $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n=S_{n-1}+u_n$

នាំឲ្យគេទាញបាន ៖ $u_n = S_n - S_{n-1}$

ម្យ៉ាងទៀត , ដោយ $S_n = \frac{n\cdot(7-3n)}{2}$ នាំឲ្យ $S_{n-1} = \frac{(n-1)\cdot(7-3(n-1))}{2}$

គេបាន ,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n\cdot(7-3n)}{2} - \frac{(n-1)\cdot(10-3n)}{2} \\ &= \frac{7n-3n^2-10n+3n^2+10-3n}{2} \\ &= \frac{-6n+10}{2} \\ u_n &= -3n+5 \ , \forall n\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

ដូចនេះតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = 5-3n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

៣. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាម(២) គេបាន $u_n = 5-3n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ នាំឲ្យ $u_{n+1} = 5-3(n+1) = 2-3n$

យើងបាន , $u_{n+1} - u_n = (2-3n)-(5-3n) = -3$ ថេរ

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=-3$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

34. ១. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន , ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 1$ និង $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+2}$ ហើយ $v_n = u_n^2$

គេបាន , $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2$

$$v_{n+1} = v_n + 2$$

$v_{n+1} - v_n = 2$ ថេរ

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតថេរ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

សរសេរតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (v_n)

យើងមាន , $v_1 = u_1^2 = 1^2 = 1$

គេបាន , (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $v_1 = 1$ និងផលសងរួម $d = 2$ ។

យើងបាន , $v_n = v_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n-1$

ដូចនេះតួទូទៅគឺ $v_n = 2n-1$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន , $v_n = u_n^2$ និង $v_n = 2n-1$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$u_n = \sqrt{2n-1} \text{ គ្រប់ } n \in \mathbb{N} \text{ ។}$$

ដូចនេះតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = \sqrt{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

៣. រកផលបូក $S = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots + u_{1001}^2$

យើងមាន , $u_n^2 = v_n = 2n-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} S &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots + u_{1001}^2 \\ &= v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_{1001} \\ &= \sum_{k=1}^{1001} v_k = \sum_{k=1}^{1001} (2k-1) \\ &= 2\sum_{k=1}^{1001} k - \sum_{k=1}^{1001} 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1001(1001+1)}{2} - \left(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1001 time} \right) \\ &= 1001 \cdot 1002 - 1001 \\ &= 1001^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $S = 1001^2$ ត្រូវបានគណនា ។

35. ១. បង្ហាញថា $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

យើងមាន , ស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

គ្រប់ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន ៖

$$1 \le k \le n$$

$$n^2 + 1 \le n^2 + k \le n^2 + n$$

$$\sqrt{n^2+1} \le \sqrt{n^2+k} \le \sqrt{n^2+n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

យក $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ គេបាន ,

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$
....
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

បូកអង្គទាំងសងខាងនៃវិសមភាពខាងលើ , គេបាន ៖

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

ដូចនេះ $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \ , \forall n \in \mathbb{N}$ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. រកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

យើងមាន , $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \ , \forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន ៖

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \le \lim_{n\to+\infty} u_n \le \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \le \lim_{n\to+\infty} u_n \le \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$
$$1 \le \lim_{n\to+\infty} u_n \le 1$$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

ដូចនេះ គេទាញបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ ត្រូវបានគណនា ។

36. ១. បង្ហាញថា $u_n > 1$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

យើងមាន , ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖ $u_1 = 10$ និង $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

- បើ $n = 1$ នោះ $u_1 = 10 > 1$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $u_k > 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$
- យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k+1$

  គេបាន ,

$u_{k+1}=\sqrt{u_k}>\sqrt{1}=1$ ពិត

ដូច្នេះតាមវិចារកំណើន គេទាញបាន $u_n>1$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. បង្ហាញថា $u_{n+1}-1<\frac{u_n-1}{2}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

យើងមាន , $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$ គេបាន ៖

$u_{n+1}-1=\sqrt{u_n}-1=\frac{u_n-1}{\sqrt{u_n}+1}\le\frac{u_n-1}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ព្រោះ $u_n>1$ ។

ដូចនេះ $u_{n+1}-1<\frac{u_n-1}{2}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

៣. រក $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

តាង $v_n=u_n-1$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដោយ $0<u_{n+1}-1<\frac{u_n-1}{2}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$, គេបាន ៖

$$0<v_{n+1}<\frac{1}{2}\cdot v_n \quad ,\forall n\in\mathbb{N}$$

គេបាន ,

$$v_2<\frac{1}{2}\cdot v_1 \qquad , \qquad v_3<\frac{1}{2}\cdot v_2<\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot v_1$$

តាមវិចារកំណើន យើងអាចស្រាយបានថា ៖ $0<v_n<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot v_1=9\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-1)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ ត្រូវបានគណនា ។

37. ១. បង្ហាញថា (v_n) គឺជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន , ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=-5$ និង $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-6$, $\forall n\in\mathbb{N}$

និង (v_n) គឺជាស្វ៊ីតដែល $v_n=u_n+18$

គេបាន ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}+18 \\ &= \left(\frac{2}{3}u_n-6\right)+18 \\ &= \frac{2}{3}u_n+12 \\ &= \frac{2}{3}\left(u_n+12\cdot\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3}(u_n+18) \\ v_{n+1} &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

ទំនាក់ទំនងនេះមានន័យថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $q=\frac{2}{3}$ និង

$v_1=u_1+18=-5+18=13$ ។

២. រកផលបូកអនន្តនៃស្វ៊ីត (v_n) រួចគណនា $\lim_{n\to+\infty} u_n$

តាមសម្រាយខាងលើ , គេបាន ៖

អនន្តតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (v_n) ដែល $|q|=\left|\frac{2}{3}\right|<1$ គឺ ៖

$$S=\frac{v_1}{1-q}=\frac{13}{1-\frac{2}{3}}=39$$

ហើយ គេបាន $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$ មានន័យថា $\lim_{n\to+\infty} u_n=-18$ ។

38. ១. បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n} F_k=F_{n+2}-1$

យើងមាន , $F_1=F_2=1$ និង $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ គ្រប់ $n\ge 1$, គេបាន ៖

$F_k=F_{k+2}-F_{k+1}$ បំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$, នាំឲ្យគេបាន ៖

$$F_1+F_2+F_3+\cdots+F_n=(F_3-F_2)+(F_4-F_3)+\cdots+(F_{n+2}-F_{n+1})$$

$$\sum_{k=1}^{n}F_k=F_{k+2}-F_2$$

$$\sum_{k=1}^{n}F_k=F_{k+2}-1$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n}F_k=F_{k+2}-1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n}F_k^2=F_n\cdot F_{n+1}$

- បើ $n=1$ គេបាន $\sum_{k=1}^{1}F_k^2=F_1^2=1=1\cdot 1=F_1F_2$ ពិត

- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=m$ គឺ $\sum_{k=1}^{m} F_k^2 = F_m \cdot F_{m+1}$
- យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា វាពិតចំពោះ $n=m+1$,

គេមាន ,

$$\sum_{k=1}^{m} F_k^2 + F_{m+1}^2 = F_m \cdot F_{m+1} + F_{m+1}^2$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} F_k^2 = F_{m+1}\left(F_n + F_{m+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} F_k^2 = F_{m+1} \cdot F_{m+2} \text{ ពិត}$$

ដូច្នេះតាមវិចារកំណើនគេទាញបាន $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ ត្រូវបានស្រាយ ។

៣. បង្ហាញថា $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, $\forall n \geq 2$

- បើ $n=2$ គេបាន $F_3 \cdot F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^2$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $F_{k+1} \cdot F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k$, $\forall k \geq 2$
- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$

គេបាន ,

$$\begin{aligned} F_{k+2} \cdot F_k - F_{k+1}^2 &= \left(F_{k+1} + F_k\right) \cdot F_k - F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1} \cdot F_k + F_k^2 - F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}\left(F_k - F_{k+1}\right) + F_k^2 \\ &= -F_{k+1} \cdot F_{k-1} + F_k^2 \\ &= -\left(F_{k+1} \cdot F_k - F_k^2\right) \\ &= -(-1)^k \end{aligned}$$

$$F_{k+2} \cdot F_k - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1} \text{ ពិត}$$

ដូច្នេះតាមវិចារកំណើន គេបាន $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, $\forall n \geq 2$ ត្រូវបាន ស្រាយបញ្ជាក់ ។

៤. បង្ហាញថា $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

យើងមាន , α និង β គឺជាឫសរបស់សមីការ $x^2 - x - 1 = 0$, គេបាន ៖

$\alpha^2=\alpha+1$ និង $\beta^2=\beta+1$

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ ដោយប្រើវិចារកំណើនគណិតវិទ្យា

- បើ $n=1$ គេបាន $F_1=\dfrac{\alpha^1-\beta^1}{\alpha-\beta}=1$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $F_k=\dfrac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}$ នោះវាប្រាកដជាពិតផងដែរ

  ក្នុងករណី $n=k-1$ គឺ $F_{k-1}=\dfrac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}$ ។
- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$

  គេបាន ,

$$\begin{aligned}F_k+F_{k-1}&=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}\\&=\frac{\alpha^k-\beta^k+\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}\\&=\frac{\alpha^{k-1}(\alpha+1)-\beta^{k-1}(\beta+1)}{\alpha-\beta}\\&=\frac{\alpha^{k-1}\cdot\alpha^2-\beta^{k-1}\cdot\beta^2}{\alpha-\beta}\\&=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}\end{aligned}$$

នាំឲ្យ $F_{k+1}=F_k+F_{k-1}=\dfrac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}$ ពិត

ដូច្នេះតាមវិចារកំណើនគេបាន $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

៥. $\alpha^{n-2}\le F_n\le\alpha^{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដោយដោះស្រាយសមីការខាងលើ , គេបាន $\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ យើងសន្មត $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

- បើ $n=1$ គេបាន $\alpha^{-1}\le F_1\le\alpha^0\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\le F_1=1\le1$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $\alpha^{k-2}\le F_k\le\alpha^{k-1}$ នោះវាក៏ពិតផងដែរចំពោះ

  $n=k-1$ គឺ $\alpha^{k-3}\le F_{k-1}\le\alpha^{k-2}$ ។
- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$

  គេបាន ,

$$\alpha^{k-3}+\alpha^{k-2}\le F_{k-1}+F_k\le\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}$$
$$\alpha^{k-3}(1+\alpha)\le F_{k+1}\le\alpha^{k-2}(\alpha+1)$$
$$\alpha^{k-3}\cdot\alpha^2\le F_{k+1}\le\alpha^{k-2}\cdot\alpha^2$$
$$\alpha^{k-1}\le F_{k+1}\le\alpha^k$$ **ពិត**

ដូច្នេះតាមវិចារកំណើនគេបាន $\alpha^{n-2}\le F_n\le\alpha^{n-1}$ **គ្រប់** $n\in\mathbb{N}$ **ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។**

39. ១. **បូរបង្ហាញថា** $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4,\forall n=1,2,\ldots$

យើងមាន , ស្វ៊ីត (u_n) **៖** $u_1=1$ **និង** $u_{n+1}=\frac{u_n^4}{4u_n^3+6u_n^2+4u_n+1}$ **,** $\forall n=1,2,\ldots$

នាំឲ្យ គេបាន ៖

$$\frac{1}{u_{n+1}}=\frac{4u_n^3+6u_n^2+4u_n+1}{u_n^4}$$
$$1+\frac{1}{u_{n+1}}=1+\frac{4u_n^3+6u_n^2+4u_n+1}{u_n^4}$$
$$=\frac{u_n^4+4u_n^3+6u_n^2+4u_n+1}{u_n^4}$$
$$=\left(\frac{u_n+1}{u_n}\right)^4$$
$$1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4,\forall n=1,2,\ldots$$

ដូចនេះ $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4,\forall n=1,2,\ldots$ **ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។**

២. **កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះ**

យើងមាន $u_1=1$ **និង** $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4,\forall n=1,2,\ldots$

តាង $v_n=1+\frac{1}{u_n}$ **នាំឲ្យគេបាន** $v_{n+1}=1+\frac{1}{u_{n+1}}$ **និង** $v_1=1+\frac{1}{u_1}=2$ **យើងបាន ,**

$$v_2=v_1^4=2^4$$
$$v_3=v_2^4=\left(2^4\right)^4=(2)^{4^2}$$
$$v_4=v_3^4=\left((2)^{4^2}\right)^4=(2)^{4^3}$$
....
$$v_n=(2)^{4^{n-1}}$$

គេបាន , $1+\frac{1}{u_n}=v_n=(2)^{4^{n-1}}$ នាំឲ្យ $u_n=\frac{1}{(2)^{4^{n-1}}-1}$ ។

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{(2)^{4^{n-1}}-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

40. ១. តើរោងចក្រនោះផលិតជីបានប៉ុន្មាននៅឆ្នាំ ២០១៥ ?

យើងមាន , រោងចក្រផលិតជីបាន ៣៦០០ តោន នៅឆ្នាំ ២០០៣

តាង ស្វ៊ីត (u_n) ជាចំនួនផលិតផលជីគីមី (គិតជាតោន)

ហើយ ឆ្នាំ ២០០៣ ត្រូវគ្នានឹង $n=1$

តាមបំរាប់ , គេបាន ៖ ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $u_1=3600$ និង $q=100\%+5\%=1.05$ ។

គេបាន , តួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះគឺ ៖

$$u_n=u_1q^{n-1}=3600\cdot(1.05)^{n-1}$$

ឆ្នាំ ២០១៥ ត្រូវនឹង $n=13$ នាំឲ្យគេបាន ៖

$$u_{13}=3600\cdot(1.05)^{13-1}=6465.08 \text{ តោន}$$

ដូចនេះរោងចក្រនោះផលិតជីបាន ៦៤៦៥.០៨ តោន នៅឆ្នាំ ២០១៥ ។

២. តើរោងចក្រនោះផលិតជីសរុបបានប៉ុន្មានពីឆ្នាំ ២០០៣ ដល់ឆ្នាំ ២០១៥ ?

ផលិតផលសរុបពីឆ្នាំ ២០០៣ ដល់ឆ្នាំ ២០១៥ គឺ ៖

$$S_{13}=u_1\cdot\frac{q^{13}-1}{q-1}$$
$$=3600\cdot\frac{1.05^{13}-1}{1.05-1}$$
$$S_{12}=63766.74 \text{ តោន}$$

ដូចនេះរោងចក្រនោះផលិតជីសរុបបាន ៦៣៧៦៦.៧៤ តោន ពីឆ្នាំ ២០០៣ ដល់ឆ្នាំ ២០១៥ ។

41. តើ ១ឆ្នាំក្រោយមក មានអ្នកដែលគាំទ្រ LDP បំនួនប៉ុន្មាននាក់ ?

តាងស្វ៊ីត (u_n) ជាចំនួនអ្នកគាំទ្រ LDP ,

ហើយ $u_1=20$ (ម៉ឺននាក់) ជាចំនួនអ្នកគាំទ្រ LDP នៅខែមិថុនា ២០១២

តាមបំរាប់ , គេបាន ៖ $u_{n+1}=u_n+30\%\cdot u_n=1.3u_n$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះ មានន័យថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមាន $u_1=20$ (ម៉ឺន) និង $q=1.3$ ។ គេបាន , តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ ៖

$$u_n=u_1q^{n-1}=20\cdot 1.3^{n-1} \text{ គ្រប់ } n\in\mathbb{N}$$

មួយឆ្នាំក្រោយមក(ខែ មិថុនា ឆ្នាំ ២០១៣) $u_{13}=20\cdot 1.3^{12}=465.96$ ម៉ឺននាក់

ដូចនេះ មួយឆ្នាំក្រោយមកអ្នកដែកគាំទ្រ LDP មានចំនួន ៖

៤ លាន ៦ សែន ៥ ម៉ឺន ៩ ពាន់ ៦ រយ នាក់ ។

42. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន

យើងមាន , ស្វ៊ីត $u_n=\dfrac{3n^2+1}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ នាំឲ្យ $u_{n+1}=\dfrac{3(n+1)^2+1}{2}$

គេបាន ,

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{3(n+1)^2+1}{2}-\frac{3n^2+1}{2}\\&=\frac{3(n+1-n)(n+1+n)}{2}\\&=\frac{3(2n+1)}{2}>0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

43. ១. បង្ហាញថា $x_{k+1}\cdot x_{k+2}-x_k\cdot x_{k+3}=(-1)^k$ ចំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$

យើងមាន , ស្វ៊ីត (x_n) ដែល $x_1=1, x_2=1$ និង $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$

- បើ $k=1$ គេបាន , $x_2\cdot x_3-x_1\cdot x_4=1\cdot 2-1\cdot 3=-1=(-1)^1$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $k=m$ គឺ , $x_{m+1}\cdot x_{m+2}-x_m\cdot x_{m+3}=(-1)^m$ គ្រប់ $m\in\mathbb{N}$
- យើងបង្ហាញថាវាពិតចំពោះ $k=m+1$

  គេបាន ,

$$\begin{aligned}x_{m+2}\cdot x_{m+3}-x_{m+1}\cdot x_{m+4}&=x_{m+2}\cdot\left(x_{m+1}+x_{m+2}\right)-x_{m+1}\cdot\left(x_{m+2}+x_{m+3}\right)\\&=x_{m+2}\cdot x_{m+1}+x_{m+2}^2-x_{m+1}\cdot x_{m+2}-x_{m+1}\cdot x_{m+3}\\&=x_{m+2}^2-x_{m+1}\cdot\left(x_{m+1}+x_{m+2}\right)\\&=x_{m+2}^2-x_{m+1}^2-x_{m+1}\cdot x_{m+2}\\&=\left(x_{m+2}-x_{m+1}\right)\left(x_{m+2}+x_{m+1}\right)-x_{m+1}\cdot x_{m+2}\\&=\left(x_{m+1}+x_m-x_{m+1}\right)\cdot x_{m+3}-x_{m+1}\cdot x_{m+2}\\&=x_{m+1}\cdot x_{m+3}+x_m\cdot x_{m+3}-x_{m+1}\cdot x_{m+3}-x_{m+1}\cdot x_{m+2}\\&=x_m\cdot x_{m+3}-x_{m+1}\cdot x_{m+2}\\&=(-1)\left(x_{m+1}\cdot x_{m+2}-x_m\cdot x_{m+3}\right)\end{aligned}$$

$x_{m+2}\cdot x_{m+3}-x_{m+1}\cdot x_{m+4}=(-1)(-1)^m=(-1)^{m+1}$ ពិត

ដូចនេះតាមវិចារកំណើន គេបាន $x_{k+1}\cdot x_{k+2}-x_k\cdot x_{k+3}=(-1)^k$ គ្រប់ $k\in\mathbb{N}$

ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. បង្ហាញថា $arc\cot x_1-arc\cot x_2-arc\cot x_3-\cdots-arc\cot x_{2011}=arc\cot x_{2012}$

បើ $a=\cot\alpha$ និង $b=\cot\beta$ នោះគេបាន , $\alpha=arc\cot a$ និង $\beta=arc\cot b$

យើងបាន ,

$$\begin{aligned}\cot(\alpha-\beta)&=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\\&=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}\\&=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}}\\&=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}\end{aligned}$$

សមមូល ,

$$\alpha-\beta=arc\cot\left(\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta-\cot\alpha}\right)$$

$$arc\cot a-arc\cot b=arc\cot\left(\frac{ab-1}{b-a}\right)$$

គេអាចសរសេរ ,

$$arc\cot x_{2m} - arc\cot x_{2m+1} = arc\cot\left(\frac{x_{2m}x_{2m+1}+1}{x_{2m+1}-x_{2m}}\right)$$
$$= arc\cot\left(\frac{x_{2m}x_{2m+1}+1}{x_{2m}+x_{2m-1}-x_{2m}}\right)$$
$$arc\cot x_{2m} - arc\cot x_{2m+1} = arc\cot\left(\frac{x_{2m}x_{2m+1}+1}{x_{2m-1}}\right) \qquad (1)$$

តាមសំណួរទី ១ ខាងលើ , យក $k=2m-1$ គេបាន ៖

$$x_{2m}\cdot x_{2m+1} - x_{2m-1}\cdot x_{2m+2} = (-1)^{2m-1} = -1$$
$$\Rightarrow x_{2m}\cdot x_{2m+1} = x_{2m-1}\cdot x_{2m+2}$$

នោះទំនាក់ទំនង (1) ក្លាយទៅជា ,

$$arc\cot x_{2m} - arc\cot x_{2m+1} = arc\cot\left(\frac{x_{2m-1}\cdot x_{2m+2}}{x_{2m-1}}\right) = arc\cot x_{2m+2}$$

យក $m=1,2,3,\cdots,1005$ គេបាន ៖

$$arc\cot x_1 - arc\cot x_3 = arc\cot x_4 \quad ,\ (x_1 = x_2)$$
$$arc\cot x_4 - arc\cot x_5 = arc\cot x_6$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$arc\cot x_{2010} - arc\cot x_{2011} = arc\cot x_{2012}$$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃសមភាពទាំងអស់ខាងលើ , គេបាន ៖

$$arc\cot x_1 - arc\cot x_2 - arc\cot x_3 - \cdots - arc\cot x_{2011} = arc\cot x_{2012}$$

ដូចនេះសមភាព $arc\cot x_1 - arc\cot x_2 - arc\cot x_3 - \cdots - arc\cot x_{2011} = arc\cot x_{2012}$

ត្រូវបានបង្ហាញ ។

44. ១. តើស៊ីត (C_n) ទាំងអស់ឋិតនៅក្នុងការ៉េ C_0 ដែរ ឬទេ ?

តាមបំរាប់ , ការ៉េ $ABCD$ មានរង្វាស់ជ្រុងស្មើនឹង a

ហើយការ៉េ $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ មានរង្វាស់ជ្រុង $AA_1 = \frac{13}{24}AC, A_1A_2 = \frac{13}{24}AA_1, \dots,$

$A_{n-1}A_n = \frac{13}{24}A_{n-2}A_{n-1}$ ។

តាងស៊ីត (u_n) ជាស៊ីតនៃ $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ នាំឲ្យគេបាន ,

$u_n = \frac{13}{24}u_{n-1}$ មានន័យថា (u_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $u_1 = \frac{13}{24}AC$

និង $q = \frac{13}{24}$ ។

គេបាន , ប្រវែងនៃអង្កត់ត្រង់ $AA_1A_2A_3\cdots A_n$ គឺ ៖

$$\begin{aligned}
S &= AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n \\
&= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \\
&= u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \\
&= \left(\frac{13}{24}\cdot AC\right)\cdot \frac{1-\left(\frac{13}{24}\right)^n}{1-\frac{13}{24}} \\
&= \frac{13}{24}\cdot\frac{24}{11}\cdot AC\cdot\left(1-\left(\frac{13}{24}\right)^n\right) \\
&= \frac{13}{11}\cdot AC\cdot\left(1-\left(\frac{13}{24}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

យើងបាន , $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{13}{11}\cdot AC\cdot\left(1-\left(\frac{13}{24}\right)^n\right) = \frac{13}{11}\cdot AC > AC$

នេះមានន័យថា មានផ្នែកខ្លះនៃស្វ៊ីតការ៉េ (C_n) ឋិតនៅខាងក្រៅ C_0 ។

តើមានស្វ៊ីតនៃការ៉េ (C_n) ចំនួនប៉ុន្មានដែលឋិតនៅក្នុងការ៉េ C_0 ?

ការ៉េ (C_n) ទាំងអស់ដែលឋិតនៅក្នុងការ៉េ C_0 ត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\begin{aligned}
S_n &\le AC \\
\frac{13}{11}\cdot AC\cdot\left(1-\left(\frac{13}{24}\right)^n\right) &\le AC \\
1-\left(\frac{13}{24}\right)^n &\le \frac{11}{13} \\
\left(\frac{13}{24}\right)^n &\ge 1-\frac{11}{13} \\
n &\le \log_{\frac{13}{24}}\frac{2}{13} \\
n &\le 3.05
\end{aligned}$$

នេះមានន័យថា , មានស្វ៊ីតនៃការ៉េ (C_n) តែបីប៉ុណ្ណោះដែលឋិតនៅក្នុងការ៉េ C_0

២. តើគេត្រូវបង្កើតការ៉េ $AB'C'D'$ ថ្មីឲ្យមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើប៉ុន្មាន ដើម្បីឲ្យគ្រប់ល្មមសម្រាប់ផ្ទុកស្វ៊ីតនៃការ៉េ (C_n) ទាំងអស់ ?

ការ៉េ $AB'C'D'$ ដែលត្រូវកំណត់ គឺត្រូវតែបំពេញលក្ខខណ្ឌ ៖

$$AC' = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

$$AC' = \frac{13}{11}\cdot AC$$

$$= \frac{13}{11}\cdot\sqrt{2}a$$

នាំឲ្យ $AB' = \frac{13}{11}a$

ដូចនេះការេ $AB'C'D'$ ត្រូវមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើនឹង $\frac{13}{11}a$ ។

45. តាង (R_n) ជាកាំរបស់រង្វង់ទី n ដែល $n\geq 1$

តាមបំរាប់ , គេបាន ៖ $R_1 = \frac{R}{2}$ និង $R_n = \frac{R_{n-1}}{2}\ ,\forall n\geq 2$

ទំនាក់ទំនងនេះស្រាយបញ្ជាក់បានថា (R_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $R_1 = \frac{R}{2}$ និង $q = \frac{1}{2}$ ។

១. បង្ហាញថាគ្រប់រង្វង់ទាំងអស់នៃស្វ៊ីត (Δ_n) សុទ្ធតែបិតនៅក្នុងរង្វង់ Δ_0

ផលបូកនៃកាំទាំងអស់របស់រង្វង់ (Δ_n) គឺ ៖ $S = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$, គេបាន ៖

$$S = R_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= \frac{R}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{R}{2}\cdot 2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= R\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

យើងបាន , $\lim_{n\to+\infty} S = \lim_{n\to+\infty} R\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = R$ ដែល R ជាកាំនៃរង្វង់ Δ_0

ដូចនេះ គ្រប់រង្វង់ទាំងអស់នៃស្វ៊ីត (Δ_n) សុទ្ធតែបិតនៅក្នុងរង្វង់ Δ_0 ។

២. បង្ហាញថា A_n ស្មើនឹង ១ ភាគ ៣ នៃផ្ទៃក្រឡារបស់រង្វង់ Δ_0

តាង (S_n) ជាផ្ទៃក្រឡារបស់រង្វង់ទី n គេបាន ,

$$\begin{aligned}S_n &= \pi R_n^2\\ &= \pi\left(\frac{R_{n-1}}{2}\right)^2\\ &= \frac{\pi}{4}R_{n-1}^2\\ &= \frac{1}{4}S_{n-1}\end{aligned}$$

ទំនាក់ទំនងនេះមានន័យថា (S_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន

$S_1 = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$ និង $q' = \frac{1}{4}$ ។

នោះផលបូកនៃផ្ទៃក្រឡា Δ_n ទាំងអស់គឺ ៖

$$\begin{aligned}A_n &= S_1 + S_2 + \cdots + S_n\\ &= S_1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\\ &= \frac{\pi R^2}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\end{aligned}$$

ដោយផ្ទៃក្រឡារង្វង់ Δ_0 គឺ $S = \pi R^2$ ហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 1$

គេបាន ៖ $A_n \to \frac{1}{3}S$

ដូចនេះ A_n ស្មើនឹង ១ ភាគ ៣ នៃផ្ទៃក្រឡារបស់រង្វង់ Δ_0 ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

46. បង្ហាញថា $A \geq B$

តាមបំរាប់ , គេមាន ៖

$$(a_n): a_1, a_2, \ldots, a_n$$

និង $(b_n): b_1, b_2, \ldots, b_n$

ដែល $a_1 = b_1 > 0$ និង $a_n = b_n = b_1 q^{n-1}$, គេបាន ៖

$$
\begin{aligned}
A &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&= \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \\
&= \frac{\left(a_1 + a_1 q^{n-1}\right)\cdot n}{2} \\
&= \frac{a_1 n\left(1 + q^{n-1}\right)}{2}
\end{aligned}
$$

និង

$$
\begin{aligned}
B &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\
&= b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
&= a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}
\end{aligned}
$$

យើងចង់បង្ហាញថា $A \ge B$ មានន័យថា $\frac{\left(1+q^{n-1}\right)\cdot n}{2} \ge \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ព្រោះ $a_1 > 0$

យើងមាន ,

$$
\begin{aligned}
\frac{q^n - 1}{q - 1} &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(1+q^{n-1}\right) + \left(q + q^{n-2}\right) + \left(q^2 + q^{n-3}\right) + \cdots + \left(q^k + q^{n-k-1}\right) + \cdots + \left(q^{n-1} + 1\right)\right)
\end{aligned}
$$

ដោយ $q^k + q^{n-k-1} \le 1 + q^{n-1}$ ពីព្រោះ $q^k + q^{n-k-1} - 1 - q^{n-1} = \left(q^k - 1\right)\left(1 - q^{n-k-1}\right) \le 0$

នាំឲ្យគេបាន ៖

$$
\begin{aligned}
\frac{q^n - 1}{q - 1} &\le \frac{1}{2}\left(\left(1+q^{n-1}\right) + \left(1+q^{n-1}\right) + \left(1+q^{n-1}\right) + \cdots + \left(1+q^{n-1}\right)\right) \\
&= \frac{\left(1 - q^{n-1}\right)\cdot n}{2}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $A \ge B$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

47. ១. រក d បើដឹងថា $q = 2$

យើងមាន , ស្វ៊ីត (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត និងស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល

$a_1 = b_1 = 1$, $a_{10} = b_{10}$ និង $q = 2$, គេបាន ៖

$$b_{10} = b_1 q^9 = 1 \cdot 2^9 = 2^9 \text{ និង } a_{10} = a_1 + 9d = 1 + 9d$$

នាំឲ្យគេបាន , $1 + 9d = 2^9 \Rightarrow d = \frac{512 - 1}{9} = \frac{511}{9}$

ដូចនេះ $d=\frac{511}{9}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

២. សរសេរ១០តួដំបូងនៃ (a_n) និង (b_n)

យើងមាន , $a_1=b_1=1$, $q=2$ និង $d=\frac{511}{9}$ គេបាន ៖

$$a_1=1, a_2=\frac{520}{9}, a_3=\frac{1031}{9}, a_4=\frac{1542}{9}, a_5=\frac{2053}{9}$$

$$a_6=\frac{2564}{9}, a_7=\frac{3075}{9}, a_8=\frac{3586}{9}, a_9=\frac{4097}{9}, a_{10}=512$$

$$b_1=1, b_2=2, b_3=4, b_4=8, b_5=16, b_6=32, b_7=64, b_8=128, b_9=256, b_{10}=512$$

ដូចនេះបំណោទត្រូវបានដោះស្រាយរួចរាល់ ។

48. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វីតនព្វន្ត

តាង (d_n) ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃកន្លះរង្វង់ទី n

តាមរូបយើងមាន , $d_n=n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

គេបាន , ផ្ទៃក្រឡានៃកន្លះរង្វង់ទី n គឺ $s_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi d_n^2}{4}=\frac{\pi n^2}{8}$

យើងបាន ,

$$u_n=s_n-s_{n-1}=\frac{\pi n^2}{8}-\frac{\pi(n-1)^2}{8}$$
$$=\frac{\pi(2n-1)}{8} \quad , \forall n\in\mathbb{N}$$

គេបាន ,

$$u_n-u_{n-1}=\frac{\pi(2n-1)}{8}-\frac{\pi\big(2(n-1)-1\big)}{8}$$
$$=\frac{\pi(2n-1-2n+3)}{8}$$

$u_n-u_{n-1}=\frac{\pi}{4}$ ថេរ

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វីតនព្វន្តដែលមាន $u_1=\frac{\pi}{8}$ និង $d=\frac{\pi}{4}$ ។

49. ១. បង្ហាញថា $a_n\ge 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

យើងមាន , ស្វីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=1$ និង $a_{n+1}=\frac{a_n+2}{a_n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

- បើ $n=1$ នោះ $a_1=1\ge 1$ ពិត

- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $a_k \geq 1 , \forall k \in \mathbb{N}$
- យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$

គេបាន ,

$a_{k+1} = \dfrac{a_k+2}{a_k+1} = 1 + \dfrac{1}{a_k+1} \geq 1$ ពិត ព្រោះ $a_k \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a_k+1} > 0$

ដូចនេះតាមវិចារកំណើន គេបាន $a_n \geq 1 , \forall n \in \mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. បង្ហាញថា $a_n \leq \dfrac{3}{2} , \forall n \in \mathbb{N}$

- បើ $n=1$ គេបាន $a_1 = 1 \leq \dfrac{3}{2}$ ពិត
- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $a_k \leq \dfrac{3}{2} , \forall n \in \mathbb{N}$
- យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$

គេបាន ,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - \frac{3}{2} &= \frac{a_k+2}{a_k+1} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{2a_k + 4 - 3a_k - 3}{2(a_k+1)} \\ &= \frac{1-a_k}{2(a_k+1)} \leq 0 \end{aligned}$$

ព្រោះតាម(១) គេបាន $a_k \geq 1$ និង $a_k + 1 > 0$

គេទាញបាន $a_{k+1} - \dfrac{3}{2} \leq 0 \Rightarrow a_{k+1} \leq \dfrac{3}{2}$ ពិត

ដូចនេះតាមវិចារកំណើនគេបាន $a_n \leq \dfrac{3}{2} , \forall n \in \mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

50. ១. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន , ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ដោយ $u_1 = 1$ និង $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+15u_n^2}}$

ហើយ ស្វ៊ីត (v_n) ដែល $v_n = \dfrac{1}{u_n^2} \;\; , n \in \mathbb{N}$

គេបាន ,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{u_n}{\sqrt{1+15u_n^2}}\right)^2}-\frac{1}{u_n^2}$$
$$=\frac{1}{\frac{u_n^2}{1+15u_n^2}}-\frac{1}{u_n^2}$$
$$=\frac{1+15u_n^2}{u_n^2}-\frac{1}{u_n^2}$$
$$=\frac{1+15u_n^2-1}{u_n^2}$$
$$=\frac{15u_n^2}{u_n^2}$$

$v_{n+1}-v_n=15$ ថេរ

ដូច្នេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $v_1=\frac{1}{u_1^2}=1$ និង $d=15$ ។

២. រក v_n រួចទាញរក u_n និងរកផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$

យើងមាន , ស្វ៊ីតនព្វន្ត (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $v_1=\frac{1}{u_1^2}=1$ និង $d=15$ ។

គេបាន , $v_n=v_1+(n-1)d$ សមមូល ៖

$$v_n=1+15(n-1)$$
$$v_n=15n-14\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

យើងបាន ៖

$$u_n^2=\frac{1}{v_n}=\frac{1}{15n-14}$$
$$u_n=\frac{1}{\sqrt{15n-14}}\ ,\forall n\in\mathbb{N}$$

ហើយ ,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} v_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (15k-14) \\ &= 15(1+2+3+\cdots+n)-14n \\ &= \frac{15n(n+1)}{2}-14n \\ &= \frac{n(15n-13)}{2} \ , \forall n\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

ដូចនេះ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ **គេបាន** $v_n=15n-14$ **,** $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{15n-14}}$ **និង** $S_n=\dfrac{n(15n-13)}{2}$

ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

51. ទុកជាលំហាត់ ។

52. ទុកជាលំហាត់ ។

លំហាត់ស្រាវជ្រាវ

1. គេឲ្យស្វ៊ីត $2,4,6,8,10,12$ ។

ក. រកដែនកំណត់($\mathbf{domain}$) និងសំណុំរូបភាព($\mathbf{range}$) នៃស្វ៊ីតនេះ ។

ខ. រក a_1, a_3, a_5, a_6 ។ គ. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះ ។

ឃ. តើស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតរាប់អស់ ឬអនន្ត ? ចូរពន្យល់ ។

2. សរសេរ ៥តួដំបូងនៃស្វ៊ីតដែលមានតួទូទៅ ៖

ក. $a_n = 2^n$ ខ. $a_n = n+1$ គ. $a_n = \frac{1}{n}$ ឃ. $a_n = 2^{n-1}$

ង. $a_n = 3n$ ច. $a_n = 2^n - 1$ ឆ. $a_n = 3(2^n)$ ជ. $a_n = 5n$

ឈ. $a_n = 3^{n-1}$ ញ. $a_n = 3n-2$ ដ. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ឋ. $a_n = \frac{1}{n^2}$

ឌ. $a_n = 1+(n-1)^2$ ឍ. $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ណ. $a_n = 5+(n-1)^3$ ត. $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$

ថ. $a_n = 1+\frac{1}{n}$ ទ. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ។

3. រកតួទី ២០១៣ នៃស្វ៊ីតដែល $a_n = 1+3(n-1)$ ។

4. គេឲ្យស្វ៊ីត $1,3,5,\ldots$ ។

ក. តាមអ្នកគិត តើតួទី៤ គឺលេខប៉ុន្មាន ?

ខ. តើ $a_n = 2n-1$ គឺជាតួទូទៅនៃស្វ៊ីតខាងលើដែរ ឬទេ ? ចូរពន្យល់ ។

គ. តើ $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)+(2n-1)$ គឺជាតួទូទៅនៃស្វ៊ីតខាងលើដែរ ឬ ទេ ? ចូរពន្យល់ ។

ឃ. ដោយប្រើតួទូទៅក្នុងសំណួរ(ខ),ចូរសសរសេរ ១០ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ។

ង. ដោយប្រើតួទូទៅក្នុងសំណួរ(គ),ចូរសសរសេរ ១០ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

ច. ទាញបង្ហាញថា បើគេស្គាល់ ២ ឬ៣តួ ដំបូងនៃស្វ៊ីត មួយ មិនអាចកំណត់ ឯកលក្ខណៈនៃស្វ៊ីតមួយបានទេ ?

5. រកតួទូទៅ និងសរសេរ ៣តួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម ៖

ក. $2,3,4,5,...$ ខ. $3,6,9,12,...$ គ. $1,3,9,...$

ឃ. $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},...$ ង. $1,-1,1,-1,...$ ច. $-1,\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27},...$ ។

6. ស្វ៊ីតមួយកំណត់ដោយ $a_n=n^2+n$ ។ តើតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតនេះដែលមានតម្លៃស្មើនឹង 132 ?

7. ប្រើវិធីផលសងកំណត់[1] ដើម្បីរកបីតួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីត ៖

ក. $4,18,48,100,180,294,...$ ខ. $1,2,4,8,16,31,57,...$ ។

8. តើស្វ៊ីត $1,2,4,7,11,16$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ឬមិនមែន ?

9. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $1,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},-1,...$ ។ រកផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនេះ ។

10. ប្រាក់ឧបត្ថមរបស់ប្រពន្ធលោកគ្រូ ស្តុក ដែលរដ្ឋផ្តល់ឲ្យក្នុងនាមគាត់ជាភរិយាគ្រូបង្រៀនសព្វថ្ងៃគឺ ៧២ 000៛ ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ ឧបមាថាគោលនយោបាយថ្មីរបស់រាជរដ្ឋាភិបាលត្រូវតម្លើងប្រាក់នេះ ២ 000៛ ក្នុងមួយឆ្នាំ, តើប៉ុន្មានឆ្នាំទៅមុខទៀតដែលប្រាក់នេះនឹងឡើងដល់ ១00 000៛ ក្នុងមួយឆ្នាំ ?

11. រកបួនមធ្យមនព្វន្តនៅចន្លោះ ១២ និង ៤៧ ។

12. សរសេរ ៥តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន ៖

ក. $a_1=1,d=3$ ខ. $a_1=4,d=2$ គ. $a_1=-2,d=3$ ឃ. $a_1=-12,d=5$

ង. $a_1=\frac{1}{2},d=\frac{1}{2}$ ច. $a_1=-5,d=-2$ ឆ. $a_1=17,d=-3$ ជ. $a_1=\frac{2}{3},d=1$

ឈ. $a_1=-\frac{3}{2},d=-\frac{1}{4}$ ញ. $a_1=\sqrt{5},d=\sqrt{3}$ ដ. $a_1=-\sqrt{5},d=\sqrt{5}$

ឋ. $a_1=-\frac{3}{5},d=\frac{1}{5}$ ។

[1] **ឧទាហរណ៍នៃវិធីផលសងកំណត់ ៖**

១០ ១៦ ២៨ ៤៦ ៧០ ១០០ ១៣៦ ១៧៨ ២២៦

៦ ១២ ១៨ ២៤ ៣០ ៣៦ ៤២ ៤៨

៦ ៦ ៦ ៦ ៦ ៦ ៦

13. តើស្វ៊ីតខាងក្រោមនេះជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ឬទេ ? បើស្វ៊ីតនព្វន្ត ចូររកផលសងរួមរបស់វា ។

ក. $1,2,3,4,5$ ខ. $3,6,9,12$ គ. $2,4,8,16,32$ ឃ. $1,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}$

ង. $32,4,-24$ ច. $\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}$ ។

14. សរសេរតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដូចតទៅ ៖

ក. $a_1=2,d=3$ ខ. $a_1=1,d=4$ គ. $a_1=5,d=5$ ឃ. $a_1=-3,d=2$

ង. $a_1=-2,d=5$ ច. $a_1=-8,d=-3$ ឆ. $a_1=\frac{1}{2},d=\frac{1}{2}$ ជ. $a_1=\frac{1}{2},d=\frac{1}{4}$

ឈ. $a_1=\frac{2}{3},d=-\frac{1}{3}$ ញ. $a_1=-\frac{3}{2},d=\frac{1}{2}$ ដ. $a_1=\sqrt{5},d=\sqrt{3}$ ឋ. $a_1=-\frac{3}{5},d=\frac{1}{5}$

15. ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម , គេឲ្យបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ចូររក ៖

ក. $-2,2,6$ រកតួទី ១០ ខ. $4,12,20$ រកតួទី ១៨

គ. $10,-1,-12$ រកតួទី ២១ ឃ. $\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4}$ រកតួទី ១២

ង. $12,6\frac{1}{2},1$ រកតួទី ៣៥ ច. $\frac{5}{6},\frac{7}{6},\frac{3}{2}$ រកតួទី ១០ ។

16. រកតួដែលបាត់នៅក្នុងស្វ៊ីតនព្វន្តខាងក្រោម ៖

ក. $50,?,?,?,110$ ខ. $-10,?,?,1$ គ. $-9,?,?,?,3$

ឃ. $3,?,?,?,?,?,21$ ង. $?,-7,?,?,14,?$ ច. $?,50,?,?,29$ ។

17. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ៖

ក. $8,x,18$ ខ. $9,2x+3,14$ គ. $x+1,2x,x$

ឃ. $\frac{1}{x+3},2,x+5$ ង. $6x+5,2x-7,8x+2$ ច. $\frac{1}{x},\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^3}$ ។

18. ពីរតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តត្រូវបានគេឲ្យ ដូចខាងក្រោម , ចូររកតួដែលគេសួរ ៖

ក. $a_5=12,a_7=16,a_1=?$ ខ. $a_2=3,a_5=18,a_1=?$

គ. $a_2=-6,a_{10}=-22,a_1=?$ ឃ. $a_1=x,a_3=y,a_2=?$

ង. $a_4=8,a_{10}=26,a_{12}=?$ ច. $a_6=13,a_4=28,a_3=?$ ។

19. តើស្វ៊ីតថេរ គឺជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ឬទេ ? ចូរពន្យល់ ។

20. បើគេគុណគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយនឹងចំនួនថេរមួយ , តើស្វ៊ីតថ្មីដែលកើតឡើងនេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ឬទេ ? ចូរពន្យល់ ។
21. បើ (a_n) និង (b_n) គឺជាស្វ៊ីតនព្វន្តពីរ , តាង (c_n) ជាស្វ៊ីតមួយដែល $c_n = a_n + b_n$ តើ (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ឬទេ ? ចូរពន្យល់ ។
22. សំ ទិញឡានមួយថ្លៃ $6800 ។ សន្មតថាតម្លៃឡាននោះថយចុះ $700 នៅឆ្នាំទី១ និង $400 នៅរៀងរាល់ឆ្នាំបន្ទាប់មក ។
    ១. តើឡាននោះនឹងមានតម្លៃប៉ុន្មាននៅ ៨ឆ្នាំបន្ទាប់ ?
    ២. តើនៅពេលណាទើបឡាននោះមានតម្លៃ 0 ដុលា ?
23. នៅក្នុងឆ្នាំ ២០០៥ , ប្រាក់ខែរបស់ សំ គឺ $13 000 ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ ប្រាក់ខែរបស់គាត់កើនឡើងដោយអត្រាមួយថេររៀងរាល់ឆ្នាំ ។ បើប្រាក់ខែរបស់គាត់នៅឆ្នាំ ២០១២ គឺ $16 325 ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើក្នុងមួយឆ្នាំៗប្រាក់ដែលកើនឡើងរបស់គាត់គឺប៉ុន្មាន ?
24. តើមានចំនួនជាពហុគុណនៃ ៧ ចំនួនប៉ុន្មានដែលឋិតនៅចន្លោះ ១១ និង ៣៩១ ?
25. តើមានចំនួនជាពហុគុណនៃ ១៣ ចំនួនប៉ុន្មានដែលឋិតនៅចន្លោះ ២៩ និង ២៥៨ ?
26. សារា ចាប់ផ្តើមទទួលបានប្រាក់ខែ $23 450ក្នុងមួយឆ្នាំ ពីការងារថ្មីរបស់នាង ។ បើនាងទទួលបានការដំឡើងប្រាក់ថេរ $850ក្នុងមួយឆ្នាំៗ ។
    ១. តើក្នុងរយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំទៀតទើបប្រាក់ខែរបស់នាងបានដល់ $35 000 ក្នុងមួយឆ្នាំ ?
    ២. ប្រសិនបើនាងធ្វើការងារនេះក្នុងរយៈពេល ១0ឆ្នាំ , តើនាងនឹងទទួលប្រាក់ប៉ុន្មាននៅឆ្នាំទី ១០ ?
27. ទិត បានឈ្នះរង្វាន់ទី១ ក្នុងការផ្សងសំណាងក្នុងតំបន់មួយ ។ គាត់នឹងទទួលបានប្រាក់ $50 នៅថ្ងៃទី១ខែមិថុនា, $75 នៅថ្ងៃទី២ខែមិថុនា , $100 នៅថ្ងៃទី៣ខែមិថុនា, នឹងបន្តទៅ ... ។ ទម្រង់នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

១. តើ ទិត នឹងទទួលបានប្រាក់ប៉ុន្មាននៅថ្ងៃទី២៧ ខែមិថុនា ?

២. តើនៅចុងខែមិថុនា , ទិតនឹងទទួលបានប្រាក់ចំនួនប៉ុន្មាន ?

28. រកតួទី ៦នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ 9 , -6 , 4 , ... ។

29. រកមធ្យមធរណីមាត្របីដែលនៅចន្លោះ 3 និង 243 ។

30. ក្នុងត្រីកោណ ΔRST , $\angle RST$ គឺជាមុំកែង និង $SU \perp RT$ ។
រក UT បើ $RU = 9$ និង $US = 15$ ។
(ចងចាំថា ៖ ប្រវែងនៃកម្ពស់ដែលគូសចេញពីកំពូលនៃមុំកែង គឺជាមធ្យមធរណីមាត្រនៃប្រវែងអង្កត់ទាំងពីរនៅលើអ៊ីប៉ូតេនុសដែលចែកដោយកម្ពស់នោះ) ។

31. រកប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក. $a_1 = 3, r = 2$ ខ. $a_1 = 2, r = -3$ គ. $a_1 = 1, r = -2$

ឃ. $a_1 = 4, r = \frac{1}{2}$ ង. $a_1 = -5, r = \frac{1}{2}$ ច. $a_1 = -2, r = -1$

ឆ. $a_3 = -1, r = \frac{1}{4}$ ជ. $a_1 = 12, r = -\frac{1}{2}$ ឈ. $a_1 = 100, r = 0.1$ ។

32. ពិនិត្យស្វ៊ីតខាងក្រោម , តើជាស្វ៊ីតនព្វន្ត , ធរណីមាត្រ , ទាំងពីរ ឬផ្សេងពីនេះ ?

ក. 2 , 10 , 50 , 150 ខ. 9 , 6 , 4 , 8/3 គ. 7 , 14 , 21 , 28

ឃ. 3 , 3 , 3 , 3 ង. 5 , 0 , 0 , 0 ច. -1 , 1 , -1 , 1 ។

33. បីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រត្រូវបានគេប្រាប់ដូចខាងក្រោម ៖

ក. 1 , 2 , 4 រកតួទី ៨ ខ. -6 , 2 , -2/3 រកតួទី ៧

គ. 5 , 15 , 45 រកតួទី ៥ ឃ. -1 , -4 , -16 រកតួទី ៦

ង. 0.001 , 0.01 , 0.1 រកតួទី ២៨ ច. 0.2 , 0.22 , 0.242 រកតួទី ១១

ឆ. 3/2 , 9/4 , 27/8 រកតួទី ៦ ជ. $\sqrt{3}, 3, \sqrt{27}$ រកតួទី ៧ ។

34. រកបណ្ដាតួទាំងឡាយនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលឋិតនៅចន្លោះតួដែលគេប្រាប់

ក. $a_1 = 4, a_4 = 32$ ខ. $a_1 = 15, a_4 = 405$ គ. $a_1 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{1}{32}$

ឃ. $a_1 = \frac{1}{3}, a_5 = 27$ ង. $a_1 = -5, a_6 = -1215$ ច. $a_1 = -6, a_4 = 162$ ។

35. រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឲ្យស្វ៊ីតខាងក្រោមជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ក. $8, x, 2$ ខ.$3, 6, 2x+18$ គ. $x+1, x, x-4$ ឃ. $x+1, 2x-1, 4x-3$ ។

36. តើអាចមានស្វ៊ីតណាមួយដែលជាស្វ៊ីតនព្វន្តផង និងស្វ៊ីតធរណីមាត្រផងដែរ ឬទេ ? ចូរពន្យល់ ។

37. ប្រសិនបើយើងគុណគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយជាមួយនឹងចំនួនថេរមួយ តើស្វ៊ីតថ្មីនេះជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែរ ឬទេ ? ចូរពន្យល់ ។

38. បើ $a_4 = 3$ និង $a_7 = 24$ ជាពីរតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។ ចូររក a_1 ។

39. ប្រជាប្រិយភាពរបស់ក្រុម Pine City មានការកើនឡើង 10% ជារៀងរាល់ឆ្នាំ ។ បើពេលនេះមានការគាំទ្រពីសំណាក់ប្រជាពលរដ្ឋ 20 000 នាក់ហើយការកើនឡើងនេះបេះតែបន្តទៅ ។ តើ ៥ឆ្នាំបន្ទាប់ ចំនួនអ្នកគាំទ្រ នឹងមានចំនួនប៉ុន្មាននាក់ ?

40. គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖ $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots$ ។ បន្ទាប់មកយើងបំពាក់លោការីតគោលដប់ទៅលើពួកវា ៖ $\log a_1, \log(a_1r), \log(a_1r^2), \ldots$ ។ បង្ហាញថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

41. រកផលបូកនៃស៊េរីនព្វន្តខាងក្រោម ៖

ក. $2+4+6+8+10+12$ ខ. $5+8+11+14+17+20+23$

គ. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1+\frac{5}{4}+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+2$ ឃ. $-17-6+5+16+27$ ។

42. រក S_n នៃស៊េរីនព្វន្តនីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក. $a_1 = 10, a_n = 38, n = 14$ ខ. $a_1 = 2, a_n = 200, n = 100$

គ. $a_1 = 50, n = 20, d = -4$ ឃ. $a_1 = 4, n = 15, d = 7$

ង. $a_1 = -20, n = 10, d = 17$ ច. $a_1 = 9, n = 14, d = -6$

ឆ. $a_1=-3, n=10, d=-4$ ជ. $a_1=-11, n=21, d=3$

ឈ. $a_1=3\frac{1}{2}, a_n=11, n=16$ ញ. $a_1=5, n=13, d=3\frac{1}{2}$ ។

43. វស្សា និយាយថាផលបូកដែលមានទម្រង់ $\sum_{k=1}^{n}(dk+b)$ ដែល d និង b ជាចំនួនថេរ,គឺជាស៊េរីនព្វន្តមួយ ។តើនាងថានេះត្រឹមត្រូវ ឬទេ ? ចូរពន្យល់ ។

44. រកផលបូក ៣0តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ៖

ក. $1+5+9+\cdots$ ខ. $-5-2+1+\cdots$ គ. $-9-3+3+\cdots$

ឃ. $2-2-6-\cdots$ ង. $-3+1+5+\cdots$ ច. $-7-10-13-\cdots$ ។

45. ផលបូកនៃស៊េរីនព្វន្តមួយស្មើនឹង ៧៧ ។ បើតួទី១ របស់វាគឺ ២ និងតួចុងក្រោយរបស់វាគឺ ១២ , តើស៊េរីនៃមានប៉ុន្មានតួ ?

46. រកផលបូកនៃ ១00 ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង ។

47. រកផលបូកនៃ ១00 ចំនួនគត់វិជ្ជមានគូដំបូង ។

48. រកផលបូកនៃ ១00 ចំនួនគត់វិជ្ជមានសេសដំបូង ។

49. ផលបូកនៃស៊េរីនព្វន្តមួយស្មើនឹង ១៤ ១៥0 ។ បើតួទី១ របស់វាគឺ -៧ និងតួចុងក្រោយរបស់វាគឺ ២៩0 , តើស៊េរីនៃមានប៉ុន្មានតួ ?

50. ទម្លាក់សេរីនៃអង្គធាតុមួយ , អង្គធាតុធ្លាក់បានចម្ងាយ 16 feet នៅក្នុង១វិនាទីដំបូង 48 feet នៅក្នុងវិនាទីបន្ទាប់ , និងបេះតែបន្តទៅ ។ ចម្ងាយនៃទម្លាក់សេរីគឺកើនឡើង 32 feet ក្នុងវិនាទីនីមួយៗ ។ តើចម្ងាយនៃទម្លាក់គឺប៉ុន្មានក្នុងវិនាទីទី ៖

ក. ៦ វិនាទី ? ខ. ៨ វិនាទី ? គ. ១0 វិនាទី ? ឃ. ១២ វិនាទី ?

51. ស្រាយបញ្ជាក់សំណើខាងក្រោមដោយប្រើវិចារកំណើនគណិតវិទ្យា ៖

១. $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$

២. $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

៣. 7^n+2 ចែកដាច់នឹង 3 គ្រប់ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៤. $3^{2n+2}-8n-9$ ចែកដាច់នឹង 64 ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

៥. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$, $n\in\mathbb{N}$

៦. $1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}=\dfrac{1-r^n}{1-r}$, $n\in\mathbb{N}$,$(r\neq 1)$

៧. $5^{2n}-1$ ចែកដាច់នឹង 24 ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

៨. $3+5\cdot 2+7\cdot 2^2+9\cdot 2^3+\cdots+(2n+1)\cdot 2^{n-1}=1+(2n-1)\cdot 2^n$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

៩. 5^n+3 ចែកដាច់នឹង 4 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n ។

១០. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+4\cdot 5^2+\cdots+n(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$, $n\in\mathbb{N}$

១១. $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+\cdots+n(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$, $n\in\mathbb{N}$ ។

១២. 7^n-1 ចែកដាច់នឹង 6 គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

១៣. $1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)$ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

១៤. 3^n-1-2n ចែកដាច់នឹង 4 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n ។

១៥. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

១៦. $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$ ។

១៧. $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ ។

១៨. $\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}$ គឺជាចំនួនគត់សេសគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

១៩. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

២០. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$, $n\in\mathbb{N}$ ។

52. គណនាលីមីតនៃ ៖

១. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{(-1)^n\cdot 2^n}{3^n}\right)$

២. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-\sqrt{n}}{n}$

៣. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{3n^2}$

៤. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^4-2n^2+n-20}{2n^2+n+1}$

៥. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n-100-3^n}{7\cdot 2^n+10\cdot 3^n}$

៦. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4\cdot 2^n-15\cdot 3^n+1000\right)$

៧. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{2}}{n}$ ៨. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}+2n}{3n+1}$

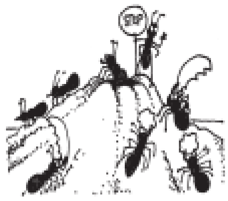
៩. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^n+3}{3^{2n}-1}$ ។

53. ហ្វូងនៃសត្វស្រមោចមួយរស់នៅក្នុងរន្ធ មានចំនួន ៥00 ក្បាល ។ ហ្វូងស្រមោចនេះមានកំណើនចំនួនសមាជិកចំនួន ១២% រៀងរាល់សប្តាហ៍ ។

១. តើចំនួនសត្វស្រមោចនឹងមានចំនួនប៉ុន្មានបន្ទាប់ពី ៖

ក. ១0 សប្តាហ៍ក្រោយមក?

ខ. ២0 សប្តាហ៍ក្រោយមក ?



២. តើត្រូវរង់ចាំពេលប៉ុន្មានសប្តាហ៍ទើបហ្វូងស្រមោចនេះកើនសមាជិកដល់ ២ 000 ក្បាល ?

54. សន្មតថា $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}$ ។

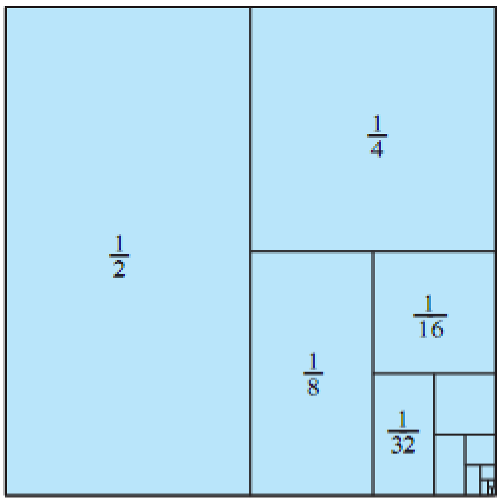
១. គណនា S_1,S_2,S_3,S_4 និង S_5 សរសេរចម្លើយជាប្រភាគងាយបំផុត ។

២. តាម(១) ទស្សទាយពីតួទូទៅនៃ (S_n) ។

៣. រក S_n ដោយប្រើ $S_n=\dfrac{u_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$ ។

៤. រក S_n កាលណា n យកតម្លៃយ៉ាងធំមហិមា ។

៥. តើមានទំនាក់ទំនងអ្វីនៅចន្លោះរូបភាពខាងក្រោម និង (៤) ?



55. រកផលបូកនៃ ៖

១. $\sum_{k=1}^{5} k(k+1)(k+2)$ ២. $\sum_{k=6}^{12} 100\cdot(1.2)^{k-3}$ ។

56. រក n បើ ៖

១. $\sum_{r=1}^{n}(2r+3)=1517$ ២. $\sum_{r=1}^{n} 2\cdot 3^{r-1}=177146$ ។

57. រក x បើ $\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{3x}{2}\right)^{r-1}=4$ ។

58. ស្ទីតនព្វន្តមួយ និងស្ទីតធរណីមាត្រមួយមានតួទី១ និងតួទី២ របស់ពួកវាស្មើគ្នា ។ តួទី១៤ នៃស្ទីតនព្វន្ត ស្មើនឹង ៣ដងនៃតួទី៣ នៃស្ទីតធរណីមាត្រ ។ រកតម្លៃនៅតួទី២០ នៃស្ទីតនីមួយៗ ។

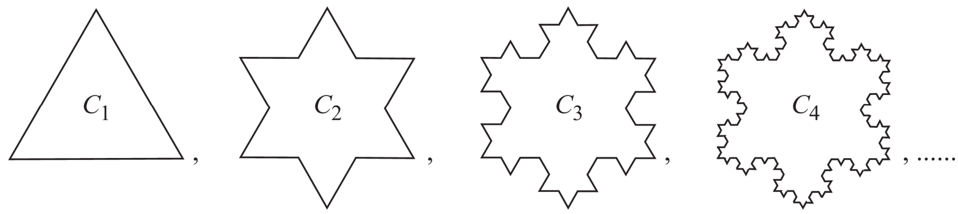
59. នៅពេលដែលបាល់មួយធ្លាក់តាមខ្សែឈរពីលើតុមួយមកដី វាក៏លោកឡើងលើវិញកម្ពស់ ៧៥% នៃកម្ពស់ដែលវាធ្លាក់ចុះពីមុន ។ ប្រវែងសរុបនៃចលនាគឺ ៤៩0 ស.ម. , គណនាកម្ពស់ពីតុ មកដី ។

60. ផលបូក n តួដំបូងនៃស្ទីតនព្វន្តមួយគឺ $\frac{n(3n+11)}{2}$ ។

១. រកពីរតួដំបូងនៃស្ទីតនេះ ។

២. រកតួទី ២0 នៃស្ទីតនេះ ។

61.



To draw Von Koch's Snowflake curve we

- **start with an equilateral triangle, C_1**
- **then divide each side into 3 equal parts**
- **then on each middle part draw an equilateral triangle**
- **then delete the side of the smaller triangle which lies on C_1 .**

The resulting curve is C_2 , and C_3 , C_4 , C_5 , ... are found by 'pushing out' equilateral triangles on each edge of the previous curve as we did with C_1 to get C_2 .

We get a sequence of special curves C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , ... and Von Koch's curve is the limiting case, i.e., when n is infinitely large for this sequence.

Your task is to investigate the perimeter and area of Von Koch's curve.

What to do:

1. Suppose C_1 has a perimeter of 3 units. Find the perimeter of C_2 , C_3 C_4 and C_5 .

Remembering that Von Koch's curve is C_n, where n is infinitely large, find the perimeter of Von Koch's curve.

2. Suppose the area of C_1 is 1 unit^2 . Explain why the areas of C_2 , C_3 , C_4 and C_5 are

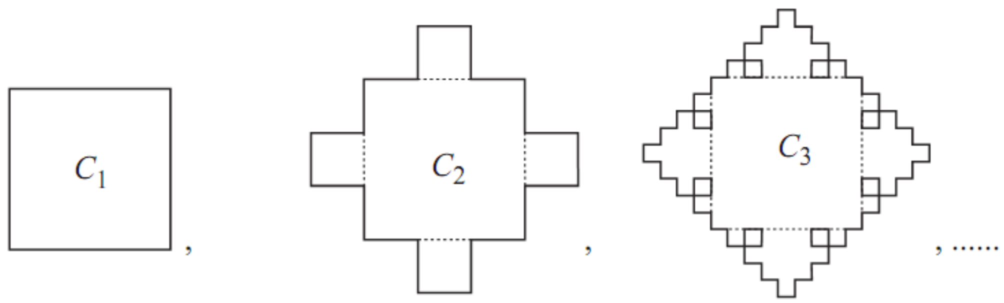
$A_2 = 1+\frac{1}{3}$ **units^2** $\qquad$ $A_3 = 1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{9}\right)$ **units^2**

$A_4 = 1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2\right)$ **units^2** $\qquad$ $A_5 = 1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^3\right)$ **units^2 .**

Use your calculator to find A_n where n =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., giving answers which are as accurate as your calculator permits.

What do you think will be the area within Von Koch's snowflake curve?

3. Similarly, investigate the sequence of curves obtained by *pushing out* squares on successive curves from the middle third of each side, i.e., the curves C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , etc.



Region contains 8 holes.

62. គេឲ្យចំនួនពិត $x \neq 2k\pi$ ។ បង្ហាញថា ៖

$$1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \ , \forall x \in \mathbb{N} \ ។$$

63. បំពោះគ្រប់បំនួនគត់វិជ្ជមាន n ,បង្ហាញថា ៖

១. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$ ។

២. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$ ។

64. បំពោះគ្រប់បំនួនគត់វិជ្ជមាន n ,បង្ហាញថា ៖

១. $n\left(2n^2-3n+1\right)$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

២. $11^{n+1}+12^{2n-1}$ ចែកដាច់នឹង 133 ។

65. គេឲ្យបំនួនគត់វិជ្ជមាន n , និង n បំនួនវិជ្ជមាន $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $x_1x_2\ldots x_n=1$ ។ បង្ហាញថា $x_1+x_2+\cdots+x_n\geq n$ ។

66. បំពោះគ្រប់បំនួនគត់វិជ្ជមាន $n\geq 2$, បង្ហាញថា ៖

១. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ ។

២. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n$ ។

67. គេឲ្យបំនួនគត់ $n\geq 2$ និងមាន n បំនួនវិជ្ជមាន $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ ដែលយក តម្លៃនៅចន្លោះ $(0,1)$ ។

បង្ហាញថា $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-a_1-a_2-\cdots-a_n$ ។

68. ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម,រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត ដែលចាប់ផ្តើមជាមួយ $n=1$

១. $1,-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\cdots$ ២. $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8},\cdots$ ៣. $\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{4}{3\sqrt{e}},\frac{9}{4\sqrt{e}},\frac{16}{5\sqrt{e}},\cdots$

៤. $0,3,8,15,24,\cdots$ ៥. $2,-6,10,-14,18,\cdots$ ៦. $1,0,1,0,1,\cdots$

៧. $2,4,2,4,2,4,\cdots$ ៨. $0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\frac{7}{6},\frac{6}{7},\cdots$ ៩. $0,\frac{3}{\sqrt{\pi}},\frac{8}{\sqrt[3]{\pi}},\frac{15}{\sqrt[4]{\pi}},\cdots$

១០. $2,\frac{5}{2},\frac{10}{3},\frac{17}{4},\cdots$ ។

69. នៅក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម , រករូបមន្តពីរសម្រាប់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត ដែល ករណី១ចាប់ផ្តើមជាមួយ $n=1$ និងករណីមួយទៀតចាប់ផ្តើមពី $n=0$

១. $1,-r,r^2,-r^3,\cdots$ ២. $r,-r^2,r^3,-r^4,\cdots$ ។

70. បើ (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនវិជ្ជមាន ហើយ $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n = 1$ ។

បង្ហាញថា $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot(1+a_3)\cdot\cdots\cdot(1+a_n) \geq 2^n$ ។

71. ១. គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $1, 2, 3, \ldots, 2013$, បង្ហាញថា ៖

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2013}} = \frac{2012}{\sqrt{2013}+1}$$ ។

២. គេមាន (u_n) ជាស្វ៊ីតវិជ្ជមានជានិច្ចដែលកំណត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_1 = e \\ u_{n+1}^2 = 2013 u_n \ , \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$ និង $v_n = \ln u_n - \ln 2013 \ , n \in \mathbb{N}$ ។

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ។

72. គណនាផលបូក

ក. $S_n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+n}$

ខ. $S_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$

គ. $S_n = \frac{1}{(1+2)4} + \frac{1}{(1+2+3)5} + \ldots + \frac{1}{(1+2+3+\ldots+n)(n+2)}$

ឃ. $S_n = \frac{1}{(1\times 3)^2} + \frac{2}{(3\times 5)^2} + \frac{3}{(5\times 7)^2} + \ldots + \frac{n}{\left[(2n-1)(2n+1)\right]^2}$

វិធីសាស្ត្របំបែកប្រភាគដោយផ្នែក

I. **ប្រភាគសនិទាន** $\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

១. ករណី $P(x)$ **និង** $Q(x)$ **មានដឺក្រេស្មើគ្នា**

២. ករណី $P(x)$ **មានដឺក្រេធំជាងដឺក្រេនៃ** $Q(x)$

៣. ករណី $P(x)$ **មានដឺក្រេតូចជាងដឺក្រេនៃ** $Q(x)$

៤. ទូទៅកម្ម

II. **អនុវត្ត**

១. សមីការអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

២. ការគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍សនិទានមួយចំនួន

វិធីសាស្ត្របំបែកប្រភាគដោយផ្នែក

I. ប្រភាគសនិទាន $\frac{P(x)}{Q(x)}=A(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$

១. ករណី $P(x)$ និង $Q(x)$ មានដឺក្រេស្មើគ្នា

ឧបមាថា $P(x)$ និង $Q(x)$ មានដឺក្រេស្មើនឹង n នោះ $A(x)$ ជាចំនួនពិតថេរ ហើយ $R(x)$ មានដឺក្រេតូចជាង ឬស្មើ $n-1$ ។ ក្នុងករណីនេះប្រភាគ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ អាចសរសេរក្នុងទម្រង់ខ្លះៗដូចខាងក្រោម ៖

១.១. ទម្រង់ $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{ax+b}{cx+d}=A+\frac{B}{cx+d}$, A និង B ជាចំនួនពិតត្រូវកំណត់ ។

១.២. ទម្រង់ $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{ax^2+bx+c}{\alpha x^2+\beta x+\delta}=A+\frac{Bx+C}{\alpha x^2+\beta x+\delta}$ A,B,C ជាចនួនពិតត្រូវកំណត់ ។

១.៣. ទម្រង់ $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{\alpha x^3+\beta x^2+\delta x+\lambda}=A+\frac{Bx^2+Cx+D}{\alpha x^3+\beta x^2+\delta x+\lambda}$ A,B,C,D ជាចំនួនពិតត្រូវកំណត់ ។

ឧទាហរណ៍១ ៖ បំបែកប្រភាគខាងក្រោមដោយផ្នែក ៖

ក. $F(x)=\frac{2x-1}{x+3}$, ខ. $G(x)=\frac{-2x^2-x+1}{x^2+x+2}$, គ. $H(x)=\frac{5x^3+x^2-2x+23}{x^3+4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បំបែកប្រភាគដោយផ្នែក

ក. $F(x)=\frac{2x-1}{x+3}$

$F(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $\frac{2x-1}{x+3}=A+\frac{B}{x+3}$

$$=\frac{A(x+3)+B}{x+3}$$

$$=\frac{Ax+3A+B}{x+3}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} A=2 \\ 3A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-7 \end{cases}$

ដូចនេះ $F(x)=2+\frac{-7}{x+3}$ ។

ខ. $G(x)=\frac{-2x^2-x+1}{x^2+x+2}$

$G(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $\frac{-2x^2-x+1}{x^2+x+2}=A+\frac{Bx+C}{x^2+x+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2-x+1}{x^2+x+2}=\frac{A\left(x^2+x-2\right)+Bx+C}{x^2+x+2}$$

$$\Leftrightarrow -2x^2-x+1=Ax^2+(A+B)x+2A+C$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ A+B=-1 \\ 2A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=1 \\ C=5 \end{cases}$$

ដូចនេះ $G(x)=-2+\frac{x+5}{x^2+x+2}$ ។

គ. $H(x)=\frac{5x^3+x^2-2x+23}{x^3+4}$

$H(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $\frac{5x^3+x^2-2x+23}{x^3+4}=A+\frac{Bx^2+Cx+D}{x^3+4}$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^3+x^2-2x+23}{x^3+4}=\frac{Ax^3+4A+Bx^2+Cx+D}{x^3+4}$$

$$=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+4A+D}{x^3+4}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} A=5 \\ B=1 \\ C=-2 \\ D=3 \end{cases}$

ដូចនេះ $H(x)=5+\frac{x^2-2x+3}{x^3+4}$ ។

២. ករណី $P(x)$ មានដឺក្រេធំជាងដឺក្រេនៃ $Q(x)$

ឧបមា $P(x)$ មានដឺក្រេ m និង $Q(x)$ មានដឺក្រេ n , $(m>n)$ នោះ $A(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី $m-n$ និង $R(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី $n-1$ ។ ក្នុងករណីនេះ ប្រភាគ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ អាចសរសេរជាទម្រង់ងាយៗដូចខាងក្រោម ៖

២.១. ទម្រង់ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}=Ax+B+\dfrac{C}{dx+e}$ A,B,C ជាចំនួនពិតត្រូវកំណត់។

២.២. ទម្រង់ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{\alpha x^2+\beta x+\delta}=Ax+B+\dfrac{Cx+D}{\alpha x^2+\beta x+\delta}$, A,B,C,D

ជាចំនួនពិតដែលត្រូវកំណត់ ។

២.៣. ទម្រង់ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{\alpha x+\beta}=Ax^2+Bx+C+\dfrac{D}{\alpha x+\beta}$, A,B,C,D

ជាចំនួនពិតដែលត្រូវកំណត់ ។

ឧទាហរណ៍២ ៖ បំបែកប្រភាគដោយផ្នែកនៃប្រភាគដូចខាងក្រោម

ក. $F(x)=\dfrac{3x^2-4x+4}{x-2}$, ខ. $G(x)=\dfrac{4x^3-8x^2+10x-5}{2x^2-x+2}$, គ. $H(x)=\dfrac{-2x^3+5x^2+4x+1}{2x-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បំបែកប្រភាគដោយផ្នែក

ក. $F(x)=\dfrac{3x^2-4x+4}{x-2}$

$F(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $\dfrac{3x^2-4x+4}{x-2}=Ax+B+\dfrac{C}{x-2}$

$$=\frac{Ax(x-2)+B(x-2)+C}{x-2}$$

$$=\frac{Ax^2-(2A-B)x-2B+C}{x-2}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} A=3 \\ 2A-B=4 \\ -2B+C=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases}$

ដូចនេះ $F(x)=3x+2+\dfrac{8}{x-2}$ ។

ខ. $G(x)=\dfrac{4x^3-8x^2+10x-5}{2x^2-x+2}$

$G(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $\dfrac{4x^3-8x^2+10x-5}{2x^2-x+2}=Ax+B+\dfrac{Cx+D}{2x^2-x+2}$

$$=\frac{Ax\left(2x^2-x+2\right)+B\left(2x^2-x+2\right)+cx+D}{2x^2-x+2}$$

$$=\frac{2Ax^3-(A-2B)x^2+(2A-B+C)+2B+D}{2x^2-x+2}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 2A=4 \\ A-2B=8 \\ 2A-B+C=10 \\ 2B+D=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-3 \\ C=3 \\ D=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $G(x)=2x-3+\dfrac{3x+1}{2x^2-x+2}$ ។

គ. $H(x)=\dfrac{-2x^3+5x^2+4x+1}{2x-1}$

$H(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់

$$\frac{-2x^3+5x^2+4x+1}{2x-1}=Ax^2+Bx+C+\frac{D}{2x-1}$$

$$=\frac{Ax^2(2x-1)+Bx(2x-1)+C(2x-1)+D}{2x-1}$$

$$=\frac{2Ax^3+(-A+2B)x^2+(-B+2C)x+(-C+D)}{2x-1}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 2A=-2 \\ -A+2B=5 \\ -B+2C=4 \\ -C+D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \\ C=3 \\ D=4 \end{cases}$

ដូចនេះ $H(x)=-x^2+2x+3+\dfrac{4}{2x-1}$ ។

៣. ករណី $P(x)$ **មានដឺក្រេតូចជាងដឺក្រេនៃ** $Q(x)$ **នោះ** $A(x)=0$

៤. ទូទៅកម្ម

៤.១. បើ $Q(x)=(ax+b)(cx+d)(ex+f)......(px^2+qx+r)$

$$\text{នោះ } \frac{P(x)}{Q(x)}=A(x)+\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{cx+d}+\frac{A_3}{ex+f}+.....+\frac{Bx+C}{px^2+qx+r}$$

៤.២. បើ $Q(x)=(ax+b)^n$

$$\text{នោះ } \frac{P(x)}{Q(x)}=A(x)+\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+.....+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

ឧទាហរណ៍៣ ៖ បំបែកប្រភាគដោយផ្នែកនៃប្រភាគដូចខាងក្រោម ៖

ក. $F(x)=\dfrac{10}{x^2-x-6}$ ខ. $G(x)=\dfrac{2x^5-5x^4+3x^2-3x-14}{(x+1)(2x-3)(x^2-x+1)}$

គ. $H(x)=\dfrac{x^4+32x-32}{x^2(x-2)^3}$ ឃ. $I(x)=\dfrac{x^4-9x^2-12x}{(x+1)^4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $F(x)=\dfrac{10}{x^2-x-6}$

$F(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $\dfrac{10}{x^2-x-6}=\dfrac{A_1}{x+2}+\dfrac{A_2}{x-3}$

$$=\frac{A_1(x-3)+A_2(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{x^2-x-6}=\frac{(A_1+A_2)x+(-3A_1+2A_2)}{x^2-x-6}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ -3A_1+2A_2=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=-2 \\ A_2=2 \end{cases}$

ដូចនេះ $F(x)=\dfrac{-2}{x+2}+\dfrac{2}{x-3}$ ។

ខ. $G(x)=\dfrac{2x^5-5x^4+3x^2-3x-14}{(x+1)(2x-3)(x^2-x+1)}$

$G(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់

$$\frac{2x^5-5x^4+3x^2-3x-14}{(x+1)(2x-3)\left(x^2-x+1\right)}=Ax+B+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{2x-3}+\frac{Ex+F}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{(Ax+B)(x+1)(2x-3)\left(x^2-x+1\right)+C(2x-3)\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)(2x-3)\left(x^2-x+1\right)}+$$

$$\frac{D(x+1)\left(x^2-x+1\right)+(Ex+F)(x+1)(2x-3)}{(x+1)(2x-3)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$=\frac{2Ax^5-3Ax^4+2Ax^2-3Ax+2Bx^4-3Bx^3+2Bx-3B+2Cx^3-5Cx^2+5Cx-3C}{(x+1)(2x-3)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$+\frac{Dx^3+D+2Ex^3-Ex^2-3E+2Fx^2-Fx-3F}{(x+1)(2x-3)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$=\frac{2Ax^5+(-3A+2B)x^4+(-3B+2C+D+2E)x^3+(2A-5C-E+2F)x^2+(-3A+2B+5C-F)x}{(x+1)(2x-3)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$+\frac{-3B-3C+D-3E-3F}{(x+1)(2x-3)\left(x^2-x+1\right)}$$

គេបាន $\begin{cases}2A=2\\-3A+2B=-5\\-3B+2C+D+2E=0\\2A-5C-E+2F=3\\-3A+2B+5C-F=-3\\-3B-3C+D-3E-3F=-14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=1\\D=-5\\E=0\\F=3\end{cases}$

ដូចនេះ $G(x)=x-1+\frac{1}{x+1}-\frac{5}{2x-3}+\frac{3}{x^2-x+1}$ ។

គ. $H(x)=\frac{x^4+32x-32}{x^2(x-2)^3}$

$H(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់

$$\frac{x^4+32x-32}{x^2(x-2)^3}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x-2}+\frac{A_4}{(x-2)^2}+\frac{A_5}{(x-2)^3}$$

$$=\frac{A_1x^4-6A_1x^3+12A_1x^2-3A_1x+A_2x^3-6A_2x^2+12A_2x-3A_2}{x^2(x-2)^3}$$

$$+\frac{A_3x^4-4A_3x^3+4A_3x^2+A_4x^3-12A_2x+A_5x^2}{x^2(x-2)^3}$$

$$= \frac{(A_1+A_3)x^4+(-6A_1+A_2-4A_3+A_4)x^3+(12A_1-6A_2+4A_3-2A_4+A_5)x^2}{x^2(x-2)^3}$$

$$+\frac{(-8A_1+12A_2)x-8A_2}{x^2(x-2)^3}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} A_1+A_3=1 \\ -6A_1+A_2-4A_3+A_4=0 \\ 12A_1-6A_2+4A_3-2A_4+A_5=0 \\ -8A_1+12A_2=32 \\ 8A_2=32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=2 \\ A_2=4 \\ A_3=-1 \\ A_4=4 \\ A_5=12 \end{cases}$

ដូចនេះ $H(x)=\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}+\frac{12}{(x-2)^3}$ ។

ឃ. $I(x)=\frac{x^4-9x^2-12x}{(x+1)^4}$

$I(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់

$$\frac{x^4-9x^2-12x}{(x+1)^4}=A+\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{(x+1)^3}+\frac{A_4}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{A(x+1)^4+A_1(x+1)^3+A_2(x+1)^2+A_3(x+1)+A_4}{(x+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow x^4-9x^2-12x=Ax^4+4Ax^3+6Ax^2+4Ax+A+A_1x^3+3A_1x^2+3A_1x$$
$$+A_2x^2+2A_2x+A_2+A_3x+A_3+A_4$$

$$=Ax^4+(4A+A_1)x^3+(6A+3A_1+A_2)x^2+(4A+3A_1+2A_2+A_3)x$$
$$+(A+A_1+A_2+A_3+A_4)$$

គេទាញបាន $\begin{cases} A=1 \\ 4A+A_1=0 \\ 6A+3A_1+A_2=-9 \\ 4A+3A_1+2A_2+A_3=-12 \\ A+A_1+A_2+A_3+A_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ A_1=-4 \\ A_2=-3 \\ A_3=2 \\ A_4=4 \end{cases}$

ដូចនេះ $I(x)=1-\frac{4}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}+\frac{4}{(x+1)^4}$ ។

ចំណាំ ៖

ក្នុងករណី $P(x)$ មានដឺក្រេធំជាង ឬស្មើនឹងដឺក្រេនៃ $Q(x)$ គេអាចបំបែកប្រភាគ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ដោយផ្នែកតាមវិធីចែកពហុធា (ឬវិធីបន្ថែម បន្ថយតួ) ក៏បាន ។

ឧទាហរណ៍៤ ៖ បំបែកប្រភាគដោយផ្នែកនៃប្រភាគខាងក្រោម ៖

ក. $F(x)=\frac{3x-5}{2x-4}$ ខ. $G(x)=\frac{8x^2-5x+1}{x+3}$

គ. $H(x)=\frac{x^4-2x^3-5x+1}{2x+1}$ ឃ. $I(x)=\frac{4x^3-17x^2+33x-23}{x^2-3x+4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បំបែកប្រភាគដោយផ្នែក

ក. $F(x)=\frac{3x-5}{2x-4}$

$$=\frac{3}{2}.\frac{6x-10}{6x-12}$$

$$=\frac{3}{2}.\frac{6x-12+2}{6x-12}$$

$$=\frac{3}{2}\left(1+\frac{2}{6x-12}\right)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2x-4}$$

ដូចនេះ $F(x)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2x-4}$ ។

ខ. $G(x)=\frac{8x^2-5x+1}{x+3}$

$$=\frac{8x^2-5x-87+88}{x+3}$$

$$=\frac{(x+3)(8x-29)}{x+3}+\frac{88}{x+3}$$

$$=8x-29+\frac{88}{x+3} \quad , \ x\neq -3$$

ដូចនេះ $G(x)=8x-29+\dfrac{88}{x+3}$ ។

គ. $H(x)=\dfrac{x^4-2x^3-5x+1}{2x+1}$

គេបាន

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-2x^3-5x+1 & \\
\underline{-x^4-\frac{1}{2}x^3} & 2x+1 \\ \hline
0-\frac{5}{2}x^3 & \frac{1}{2}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{8}x-\frac{45}{16} \\
\underline{\quad\frac{5}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2} & \\
\quad 0-\frac{5}{4}x^2-5x & \\
\underline{\qquad\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{8}x} & \\
\qquad 0-\frac{45}{8}x+1 & \\
\underline{\qquad\quad\frac{45}{8}x+\frac{45}{16}} & \\
\qquad\quad 0+\frac{61}{16} &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \frac{x^4-2x^3-5x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{8}x-\frac{45}{16}+\frac{\frac{61}{16}}{2x+1}$$

ដូចនេះ $H(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{5}{4}x^2+\dfrac{5}{8}x-\dfrac{45}{16}+\dfrac{61}{16(2x+1)}$

ឃ. $I(x)=\dfrac{4x^3-17x^2+33x-23}{x^2-3x+4}$

គេបាន

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3-17x^2+33x-23 & \\
\underline{-4x^3+12x^2-16x} & x^2-3x+4 \\ \hline
0-5x^2+17x-23 & 4x-5 \\
\underline{\quad 5x^2-15x+20} & \\
\quad 0+2x-3 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \frac{4x^3-17x^2+33x-23}{x^2-3x+4}=4x-3+\frac{2x-3}{x^2-3x+4}$$

ដូចនេះ $I(x)=4x-5+\dfrac{2x-3}{x^2-3x+4}$ ។

II. អនុវត្ត

១. សមីការអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

គេអាចប្រើវិធីបំបែកប្រភាគដោយផ្នែក ដើម្បីកំណត់សមីការអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង

តាងអនុគមន៍បាន ។

ឧទាហរណ៍ ៥ ៖ រកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង អាស៊ីមតូតទ្រេត នៃក្រាបតាង អនុគមន៍

នីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ខ. $f(x)=\dfrac{6x^2-5x-1}{2x^2+3x+4}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{-x^3+1}$ ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

ង. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x+3}$ ច. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

ឆ. $f(x)=\dfrac{x^3+2x+1}{x+2}$ ជ. $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-5x+1}{2x+1}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

រកសមីការអាស៊ីតូតដេក និង អាស៊ីមតូតទ្រេត

ក. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

$$=\frac{x-1+1}{x-1}$$

$$=1+\frac{1}{x-1}$$

តាង $\varepsilon(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ដែល $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាង f ។

ខ. $f(x)=\dfrac{6x^2-5x-1}{2x^2+3x+4}$

$$=\frac{\left(6x^2+9x+12\right)-\left(14x+13\right)}{2x^2+3x+4}$$

$$=\frac{3\left(2x^2+3x+4\right)}{2x^2+3x+4}-\frac{14x+13}{2x^2+3x+4}$$

$$=3-\frac{14x+13}{2x^2+3x+4}$$

តាង $\varepsilon(x)=-\frac{14x+13}{2x^2+3x+4}$ ដែល $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{14x+13}{2x^2+3x+4}\right)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=3$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាង f ។

គ. $f(x)=\frac{x^3-3x+2}{-x^3+1}$

$$=\frac{x^3-1-3x+3}{-x^3+1}$$

$$=\frac{x^3-1}{-\left(x^3-1\right)}+\frac{-3(x-1)}{-(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$$

$$=-1+\frac{3}{x^2+x+1}\quad , x\neq 1$$

តាង $\varepsilon(x)=\frac{3}{x^2+x+1}$ ដែល $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x^2+x+1}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាង f ។

ឃ. $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2}$

$$=\frac{x^2-2x}{x-2}+\frac{4}{x-2}$$

$$=\frac{x(x-2)}{x-2}+\frac{4}{x-2}$$

$$=x+\frac{4}{x-2}$$

តាង $\varepsilon(x)=\frac{4}{x-2}$ ដែល $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x-2}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោងតាង f ។

ង. $f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x+3}$

$f(x)$ អាចសរសេរជាទម្រង់

$$\frac{2x^2-3x+1}{x+3}=Ax+B+\frac{C}{x+3}$$
$$=\frac{(Ax+B)(x+3)+C}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=Ax^2+(3A+B)x+(3B+C)$$

គេទាញបាន $\begin{cases}A=2\\3A+B=-3\\3B+C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=-9\\C=28\end{cases}$

$$\Rightarrow f(x)=2x-9+\frac{28}{x+3}$$

តាង $\varepsilon(x)=\frac{28}{x+3}$ ដែល $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{28}{x+3}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=2x-9$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាង f ។

ប. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

$$=\frac{x^3-x+x}{x^2-1}$$
$$=\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}$$
$$=x+\frac{x}{x^2-1}$$

តាង $\varepsilon(x)=\frac{x}{x^2-1}$ ដែល $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែក្រាបតាង f ។

ផ. $f(x)=\frac{x^3+2x+1}{x+2}$

គេបាន

$$\begin{array}{r|l}
x^3+2x+1 & \\
-x^3-x^2 & x+1 \\
\hline
0-x^2+2x & x^2-x+3 \\
x^2+x & \\
\hline
0+3x+1 & \\
-3x-3 & \\
\hline
0-2 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+2x+1}{x+1}=x^2-x+3+\frac{-2}{x+1}$$

ឬ $f\left(x\right)=x^2-x+3-\dfrac{2}{x+1}$

តាង $\varepsilon\left(x\right)=-\dfrac{2}{x+1}$ ដែល $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{2}{x+1}\right)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់មានសមីការ $y=x^2-x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាង f ។

ង. $f\left(x\right)=\dfrac{2x^3-x^2-5x+1}{2x+1}$

$f\left(x\right)$ អាចសរសេរជាទម្រង់

$$\frac{2x^3-x^2-5x+1}{2x+1}=Ax^2+Bx+C+\frac{D}{2x+1}$$

$$=\frac{Ax^2\left(2x+1\right)+Bx\left(2x+1\right)+C\left(2x+1\right)+D}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-x^2-5x+1=2Ax^3+\left(A+2B\right)x^2+\left(B+2C\right)x+C+D$$

គេទាញបាន $\begin{cases}2A=2\\A+2B=-1\\B+2C=-5\\C+D=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-2\\D=3\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{2x^3-x^2-5x+1}{2x+1}=x^2-x-2+\frac{3}{2x+1}$$

ឬ $f\left(x\right)=x^2-x-2+\dfrac{3}{2x+1}$

តាង $\varepsilon\left(x\right)=\dfrac{3}{2x+1}$ ដែល $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varepsilon\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{2x+1}=0$

ដូចនេះ ខ្សែកោងមានសមីការ $y=x^2-x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាង f ។

២. ការគណនាអាំងតេក្រាល

គេអាចប្រើវិធីបំបែកប្រភាគដោយផ្នែក ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល នៃអនុគមន៍សនិទានមួយចំនួនបានដែរ ។

ឧទាហរណ៍៦ ៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$A=\int\frac{x}{2x-3}dx$ $B=\int\frac{-5}{2x^2-5x+3}dx$

$C=\int\frac{5x^2+17x+18}{x^2+3x+3}dx$ $D=\int\frac{6x^3-11x^2-3x-3}{2x^2-5x+1}dx$

$E=\int\frac{5x^3-16x^2+11x-3}{2x^4-5x^3+3x^2}dx$ $F=\int\frac{2x^3+7x^2+2x+4}{x^3-x^2+4x-4}dx$

$G=\int\frac{-6}{(x+1)(x-2)(x^2-x-1)}dx$ $H=\int\frac{x^3-6x+2}{(x+1)^4}dx$

$I=\int\frac{8x^3-11x^2+8x}{(x-1)^2(x+2)^3}dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល

$A=\int\frac{x}{2x-3}dx$

ដោយ $\frac{x}{2x-3}=\frac{1}{2}.\frac{2x-3+3}{2x-3}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2(2x-3)}$

គេបាន $A=\int\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{2(2x-3)}\right]dx$

$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{2x-3}$

$=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\int\frac{d(2x-3)}{2x-3}$

$=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\ln|2x-3|+c$

ដូចនេះ $A=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\ln|2x-3|+c$ ។

$$B=\int\frac{-5}{2x^2-5x+3}dx$$

ដោយ $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$

នោះ $\frac{-5}{2x^2-5x+3}$ អាចសរសេរជាទម្រង់

$$\frac{-5}{2x^2-5x+3}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{2x-3}$$

$$=\frac{A_1(2x-3)+A_2(x-1)}{(x-1)(2x-3)}$$

$$=\frac{(2A_1+A_2)x+(-3A_1-A_2)}{(x-1)(2x-3)}$$

គេទាញបាន $\begin{cases}2A_1+A_2=0\\-3A_1-A_2=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=5\\A_2=-10\end{cases}$

$$\Rightarrow\frac{-5}{2x^2-5x+3}=\frac{5}{x-1}-\frac{10}{2x-3}$$

គេបាន $B=\int\left(\frac{5}{x-1}-\frac{10}{2x-3}\right)dx$

$$=5\int\frac{(x-1)'}{x-1}dx-5\int\frac{(2x-3)'}{2x-3}dx$$

$$=5\ln|x-1|-5\ln|2x-3|+c$$

$$=5\ln\left|\frac{x-1}{2x-3}\right|+c$$

ដូចនេះ $B=5\ln\left|\frac{x-1}{2x-3}\right|+c$ ។

$$C=\int\frac{5x^2+17x+18}{x^2+3x+3}dx$$

គេមាន $\frac{5x^2+17x+18}{x^2+3x+3}=\frac{5x^2+15x+15+2x+3}{x^2+3x+3}$

$$=\frac{5(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}+\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$$

$$=5+\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$$

គេបាន $C=\int\left(5+\frac{2x+3}{x^2+3x+3}\right)dx$

$$=5\int dx+\int\frac{\left(x^2+3x+3\right)'}{x^2+3x+3}dx$$

$$=5x+\ln\left(x^2+3x+3\right)+c$$

ដូចេះ $C=5x+\ln\left(x^2+3x+3\right)+c$ ។

$D=\int\frac{6x^3-11x^2-3x-3}{2x^2-5x+1}dx$

$$\begin{array}{l|l} 6x^3-11x^2-3x-3 & \\ \underline{-6x^3+15x^2-3x} & \underline{2x^2-5x+1} \\ 0+4x^2-6x-3 & 3x-2 \\ \underline{\quad -4x^2+10x-2} & \\ \quad 0+4x-5 & \end{array}$$

គេបាន $\frac{6x^3-11x^2-3x-3}{2x^2-5x+1}=3x+2+\frac{4x-5}{2x^2-5x+1}$

$\Rightarrow D=\int\left(3x+2+\frac{4x-5}{2x^2-5x+1}\right)dx$

$$=3\int xdx+2\int dx+\int\frac{\left(2x^2-5x+1\right)'}{2x^2-5x+1}dx$$

$$=\frac{3}{2}x^2+2x+\ln\left|2x^2-5x+1\right|+c$$

ដូចនេះ $D=\frac{3}{2}x^2+2x+\ln\left|2x^2-5x+1\right|+c$ ។

$E=\int\frac{5x^3-16x^2+11x-3}{2x^4-5x^3+3x^2}dx$

ដោយ $2x^4-5x^3+3x^2=x^2\left(2x^2-5x+3\right)$

$$=x^2\left(x-1\right)\left(2x-3\right)$$

នោះ $\frac{5x^3-16x^2+11x-3}{2x^4-5x^3+3x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4}{2x-3}$

$$=\frac{A_1x\left(x-1\right)\left(2-3\right)+A_2\left(x-1\right)\left(2x-3\right)+A_3x^2\left(2x-3\right)+A_4x^2\left(x-1\right)}{x^2\left(x-1\right)\left(2x-3\right)}$$

$$\Leftrightarrow 5x^3-16x^2+11x-3=A_1\left(2x^3-5x^2-3x\right)+A_2\left(2x^2-5x+3\right)+A_3x^2\left(2x-3\right)+A_4\left(x^3-x^2\right)$$

$$=\left(2A_1-2A_3+A_4\right)x^3+\left(-5A_1+2A_2-3A_3-A_4\right)x^2+\left(3A_1-5A_2\right)x+3A_2$$

គេទាញបាន $\begin{cases}2A_1+2A_3+A_4=5\\-5A_1+2A_2-3A_3-A_4=-16\\3A_1-5A_2=11\\3A_2=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=2\\A_2=-1\\A_3=3\\A_4=-5\end{cases}$

នោះ $\dfrac{5x^3-16x^2+11x-3}{2x^4-5x^3+3x^2}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{-1}{x^2}+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{-5}{2x-3}$

$$\Rightarrow E=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x-1}-\frac{5}{2x-3}\right)dx$$

$$=2\int\frac{dx}{x}+\int\left(\frac{1}{x}\right)'dx+3\int\frac{(x-1)'}{x-1}dx-\frac{5}{2}\int\frac{(2x-3)'}{2x-3}dx$$

$$=2\ln|x|+\frac{1}{x}+3\ln|x-1|-\frac{5}{2}\ln|2x-3|+c$$

ដូចនេះ $E=2\ln|x|+\dfrac{1}{x}+3\ln|x-1|-\dfrac{5}{2}\ln|2x-3|+c$ ។

$$F=\int\frac{2x^3+7x^2+2x+4}{x^3-x^2+4x-4}dx$$

ដោយ $x^3-x^2+4x-4=x^2\left(x-1\right)+4\left(x-1\right)$

$$=\left(x-1\right)\left(x^2+4\right)$$

គេបាន $\dfrac{2x^3+7x^2+2x+4}{x^3-x^2+4x-4}=A+\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2x+A_3}{x^2+4}$

$$=\frac{A(x-1)\left(x^2+4\right)+A_1\left(x^2+4\right)+(x-1)\left(A_2x-A_3\right)}{(x-1)\left(x^2+4\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+7x^2+2x+4=Ax^3-Ax^2+4Ax-4A+A_1x^2+4A_1+A_2x+A_3x-A_3$$

$$=Ax^3+\left(-A+A_1+A_2\right)x^2+\left(4A-A_2+A_3\right)x+\left(-4A+4A_1-A_3\right)$$

គេទាញបាន $\begin{cases}A=2\\-A+A_1+A_2=7\\4A-A_2+A_3=2\\-4A+4A_1-A_3=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\A_1=3\\A_2=6\\A_3=0\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{2x^3+7x^2+2x+4}{x^3-x^2+4x+4}=2+\frac{3}{x-1}+\frac{6x}{x^2+4}$$

គេបាន $F=\int\left(2+\frac{3}{x-1}+\frac{6x}{x^2+4}\right)dx$

$$=2\int dx+3\int\frac{(x-1)^{'}}{x-1}x+3\int\frac{\left(x^2+4\right)^{'}}{x^2+4}dx$$

$$=2x+3\ln|x-1|+3\ln\left(x^2+4\right)+c$$

ដូចនេះ $F=2x+3\ln|x-1|+3\ln\left(x^2+4\right)+c$ ។

$$G=\int\frac{-6}{(x+1)(x-2)\left(x^2-x-1\right)}dx$$

គេមាន $\frac{-6}{(x+1)(x-2)\left(x^2-x-1\right)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3x+A_4}{x^2-x-1}$

$$=\frac{A_1(x-2)\left(x^2-x-1\right)+A_2(x-1)\left(x^2-x-1\right)+(A_3x+A_4)(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)\left(x^2-x-1\right)}$$

$$\Leftrightarrow A_1\left(x^3-3x^2+x+2\right)+A_2\left(x^3-2x-1\right)+A_3\left(x^3-x^2-2x\right)+A_4\left(x^2-x-2\right)=-6$$

$$\Leftrightarrow (A_1+A_2+A_3)x^3+(-3A_1-A_3+A_4)x^2+(A_1-2A_2-2A_3-A_4)x+(2A_1-A_2-2A_4)=-6$$

គេទាញបាន $\begin{cases}A_1+A_2+A_3=0\\-3A_1-A_3+A_4=0\\A_1-2A_2-2A_3-A_4=0\\2A_1-A_2-2A_4=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=2\\A_2=-2\\A_3=0\\A_4=6\end{cases}$

$$\Rightarrow\frac{-6}{(x+1)(x-2)\left(x^2-x-1\right)}=\frac{2}{x+1}+\frac{-2}{x-2}+\frac{6}{x^2-x-1}$$

គេបាន $G=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{6}{x^2-x-1}\right)dx$

$$=2\int\frac{(x+1)^{'}}{x+1}dx-2\int\frac{(x-2)^{'}}{x-2}dx+6\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

$$= 2\ln|x+1| - 2\ln|x-2| + \frac{6\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + c$$

$$= 2\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right| + \frac{6\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right| + c$$

ដូចនេះ $G = 2\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right| + \frac{6\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right| + c$ ។

$$H = \int \frac{x^3-6x+2}{(x+1)^4}dx$$

គេមាន $\frac{x^3-6x+2}{(x+1)^4} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{A_4}{(x+1)^4}$

$$= \frac{A_1(x+1)^3 + A_2(x+1)^2 + A_3(x+1) + A_4}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{A_1(x^3+3x^2+3x+1) + A_2(x^2+2x+1) + A_3(x+1) + A_4}{(x+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow x^3-6x+2 = A_1x^3 + (3A_1+A_2)x^2 + (3A_1+2A_2+A_3)x + (A_1+A_2+A_3+A_4)$$

គេទាញបាន $\begin{cases} A_1 = 1 \\ 3A_1 + A_2 = 0 \\ 3A_1 + 2A_2 + A_3 = -6 \\ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = -3 \\ A_3 = -3 \\ A_4 = 7 \end{cases}$

នោះ $\frac{x^3-6x+2}{(x+1)^4} = \frac{1}{x+1} + \frac{-3}{(x+1)^2} + \frac{-3}{(x+1)^3} + \frac{7}{(x+1)^4}$

គេបាន $H = \int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{7}{(x+1)^4}\right)dx$

$$= \int \frac{(x+1)'}{x+1}dx - 3\int(x+1)^{-2}d(x+1) - 3\int(x+1)^{-3}d(x+1) + 7\int(x+1)^{-4}d(x+1)$$

$$= \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{7}{3(x+1)} + c$$

ដូចនេះ $H = \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{7}{3(x+1)} + c$ ។

បំលែងលីនេអ៊ែរ

1. បំលែងលីនេអ៊ែរ
   - 1.1. សញ្ញាណ
   - 1.2. បំនុចឥតប្រែប្រួល
   - 1.3. បំលែងលីនេអ៊ែរប្រាស
2. បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះ
   - 2.1. បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'x$
   - 2.2. បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$
   - 2.3. បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O
3. បំលែងចាំង
4. បំលែងវិល
5. បំលែងលីនេអ៊ែរបណ្តាក់
   - 5.1. សញ្ញាណ
   - 5.2. បណ្តាក់រវាង $\mathcal{R}$ និង $\mathcal{H}$
   - 5.3. បណ្តាក់នៃពីរបំលែងវិល
6. ការប្តូរគោល

បំលែងលីនេអ៊ែរ

1. បំលែងលីនេអ៊ែរ

1.1. សញ្ញាណ

គេមានចំនុច $M(x,y)$ និង ចំនុច $M'(x',y')$ នៅក្នុងប្លង់ (xoy) ។ បំលែងលីនេអ៊ែរពីចំនុច M ទៅ M' ជាបំលែងដែលកំនត់ដោយសមីការ ៖

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

បើគេតាងម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសបំលែងលីនេអ៊ែរ យើងបាន ចំនុចរូបភាពនៃ M តាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស A កំនត់ដោយ ៖ $\boxed{M' = A(M)}$

<u>សំគាល់</u> ៖ គេអាចគណនា x' និង y' ដោយគុណម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ និង ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ រួចផ្ទឹមអង្គទាំងពីរ ។

<u>លំហាត់គំរូ</u>

១. រកចំនុចរូបភាពនៃ $M\left(2, \frac{1}{2}\right)$ តាមបំលែងនៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

២. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងនៃចំនុច $(1,2)$ ទៅចំនុច $(8,1)$ និង បំលែងពីចំនុច $(-1,1)$ ទៅចំនុច $(1,2)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

១. រកចំនុចរូបភាពនៃ $M\left(2, \frac{1}{2}\right)$ តាមបំលែងនៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

តាង $M(x',y')$ ជាចំនុចរូបភាពនៃ $M\left(2, \frac{1}{2}\right)$ តាម A

$$\Rightarrow M' = A(M) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2} \\ 4\times 2+3\times\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{19}{2} \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2} \\ y' = \frac{19}{2} \end{cases}$$

ដូចនេះ រូបភាពនៃ M តាមបំប្លែងនៃម៉ាទ្រីស A គឺ $M'\left(-\frac{1}{2}, \frac{19}{2}\right)$

២. <u>រកម៉ាទ្រីស</u> A

តាង ម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ម៉ាទ្រីសនៃបំលែងនៃចំនុច $(1,2)$ ទៅចំនុច $(8,1)$ និង

បំលែងពីចំនុច $(-1,1)$ ទៅចំនុច $(1,2)$ យើងបាន:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} a+2c=8 & (1) \\ b+2d=1 & (2) \end{cases}$$

និង
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} -a+c=1 & (3) \\ -b+d=2 & (4) \end{cases}$$

យក $(1)+(3)$ យើងបាន $3c=9 \Rightarrow c=3$

$(2)+(4)$ យើងបាន $3d=3 \Rightarrow d=1$

តាម $(1) \Rightarrow a=2$

តាម $(4) \Rightarrow b=-1$

ដូចនេះ $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

1.2. ចំនុចឥតប្រែប្រួល

Q ជាចំនុចឥតប្រែប្រួលតាមបំលែងនៃម៉ាទ្រីស A កាលណា $\boxed{Q=A(Q)}$

<u>សំគាល់</u> គ្រប់ចំនុចដែលប្លែងតាមម៉ាទ្រីសឯកតា $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ជាចំនុចឥតប្រែប្រួល

<u>លំហាត់គំរូ</u>

១. គេមានសមីការបំប្លែងពីចំនុច $M(x,y)$ ទៅ $M'(x',y')$ កំនត់ដោយ

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ ។ កំនត់ចំនុចឥតប្រែប្រួល។

២. បង្ហាញថា បំប្លែងនៃបន្ទាត់ $y=2x-1$ តាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ បានរូបភាពជា

បន្ទាត់ $y=2x-1$ ខ្លួនឯង

<u>ចំណាំ</u>

ដើម្បីរករូបភាពនៃបន្ទាត់ រឺ ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍មួយយើងត្រូវៈ

- រករាងទូទៅនៃចំនុចដែលឋិតលើបន្ទាត់ ឬ ខ្សែកោងនោះ
- បំប្លែងចំនុចដែលតាងអោយរាងទូទៅនៃចំនុចដែលឋិតលើបន្ទាត់ ឬ ខ្សែកោងនោះ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីសដែលគេអោយ
- ទាញរក អរដោនេ នៃចំនុចរូបភាពជាអនុគមន៍នៃ អាប់ស៊ីសរបស់វា
- កំនត់ប្រភេទនៃរូបភាពតាមរាងនៃអនុគមន៍របស់វា

ឧទាហរណ៍

រាងទូទៅនៃចំនុចឋិតលបន្ទាត់ រឺ ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

- រាងទូទៅនៃចំនុចដែលឋិតលើបន្ទាត់ $ax+by+c=0$ គឺ $\left(k,-\dfrac{ak+c}{b}\right)$ $k\in IR$ និង $b\neq 0$
- រាងទូទៅនៃចំនុចដែលឋិតលើខ្សែកោងតាងអោយអនុគមន៍ $y=f(x)$ គឺ $\left(k,f\left(k\right)\right)$ ដែល $k\in IR$

រករូបភាពតាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីសដែលគេអោយ

បើ $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ ចំនុចទូទៅនៃ អនុគមន៍ $y=f(x)$ តាម A

យើងបាន $\quad M'=A\left(\left(k,f\left(k\right)\right)\right)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} k \\ f\left(k\right) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} x'=g\left(k\right) \\ y'=h\left(k\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad y'=h\left(g^{-1}\left(x'\right)\right)$ ជាអនុគមន៍តាងអោយរូបភាពនៃ

$y=f(x)$ តាម A

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

១. <u>កំនត់ចំនុចឥតប្រែប្រួល</u>

តាមសម្មតិកម្ម $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x-y \\ 3x+4y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x-y+3 \\ 3x+4y-3 \end{bmatrix}$$

បើ $M\left(x,y\right)$ ជាចំនុចឥតប្រែប្រួលលុះត្រាតែ $x'=x$ និង $y'=y$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2x - y + 3 \\ y = 3x + 4y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -3 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការយើងបាន $(x = -1, y = 2)$

ដូចនេះ បំនុចឥតប្រែប្រួលគឺ $M(-1, 2)$

២. រូបភាពនៃបន្ទាត់ $y = 2x - 1$

តាង M ជាបំនុចទូទៅលើបន្ទាត់ $y = 2x - 1$

$\Rightarrow$ M មានកូអរដោនេ $(k, 2k-1)$ ដែល $k \in IR$

តាង $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ M តាម $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 2k-1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k - (2k-1) \\ 4k - (2k-1) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 \\ 2k+1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = k+1 \\ y' = 2k+1 \end{cases}$$

តាម $x' = k + 1 \Rightarrow k = x' - 1$

$\Rightarrow$ $y' = 2(x'-1) + 1$

យើងបាន $y' = 2x' - 1$ ជារូបភាពនៃ $y = 2x - 1$ តាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

តែដោយបន្ទាត់ $y' = 2x' - 1$ និងបន្ទាត់ $y = 2x - 1$ ត្រូវបានសង់ក្នុងតំរុយតែមួយនោះ រូបភាពរបស់វាទាំងពីរត្រួតស៊ីគ្នា បានន័យថា បន្ទាត់ $y' = 2x' - 1$ និងបន្ទាត់ $y = 2x - 1$ ជាបន្ទាត់តែមួយ

ដូចនេះ បំប្លែងនៃបន្ទាត់ $y = 2x - 1$ តាមម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ បានរូបភាពជាបន្ទាត់ $y = 2x - 1$ ខ្លួនឯង

1.3. បំលែងលីនេអ៊ែរច្រាស

គេមានបំលែងលីនេអ៊ែរពីបំនុច M និង M' តាមម៉ាទ្រីស A កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង

$$M' = A(M)$$

យើងបាន $A^{-1}(M') = A^{-1}A(M)$

សមមូល $M = A^{-1}(M')$ ជាទំនាក់ទំនងនៃបំលែងពីបំនុច M' ទៅ M តាមបំលែងនៃម៉ាទ្រីស A^{-1} ។ ទំនាក់ទំនងនេះហៅថា បំលែងលីនេអ៊ែរច្រាសតាមម៉ាទ្រីស A

ដូចនេះ បើគេមានបំលែងលីនេអ៊ែរពីបំនុច M និង M' តាមម៉ាទ្រីស A នោះគេបានបំលែងលីនេអ៊ែរច្រាសពីបំនុច M' ទៅ M តាមម៉ាទ្រីស A កំនត់ដោយ $\boxed{M = A^{-1}(M')}$

<u>សំគាល់</u> ៖បើម៉ាទ្រីសនៃបំលែង $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ នោះ $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

<u>លំហាត់គំរូ</u>

១. គេមាន $M'(0,1)$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាម $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ។

កំនត់ M

២. គេមានបន្ទាត់ $(L'):\quad x-2y+9=0$ ជារូបភាពនៃបន្ទាត់ (L) តាមបំលែងនៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ។ កំនត់សមីការនៃបន្ទាត់ (L)

<u>ដំនោះស្រាយ</u>

១. <u>កំនត់</u> M

តាងចំនុច M' ជារូបភាពនៃ M តាមម៉ាទ្រីស A

យើងបាន $M'=A(M)$

នាំអោយ បំលែងលីនេអ៊ែរប្រាសពីចំនុច M' ទៅ M តាមម៉ាទ្រីស A កំនត់ដោយ

$M=A^{-1}(M')$

ដោយ $M'(0,1)$

ហើយ $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad M\left(1/5, 1/5\right)$$

២. <u>កំនត់សមីការនៃបន្ទាត់</u> L

បើ (L') ជារូបភាពនៃ (L) តាមបំលែងនៃម៉ាទ្រីស A យើងបាន រូបភាពគ្រប់ចំនុចលើ (L) តាមបំលែងនៃម៉ាទ្រីស A ត្រូវឋិតនៅលើបន្ទាត់ (L')

តាង $M(x,y)$ ជាចំនុចទូទៅលើបន្ទាត់ (L)

M' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងនៃម៉ាទ្រីស A

យើងបាន $M'=A(M)$ និង M' ឋិតនៅលើបន្ទាត់ (L')

នាំអោយ $M=A^{-1}(M')$

តែ M' ជាចំនុចមួយលើបន្ទាត់ (L') $\quad \Rightarrow M'\left(a, \frac{a+9}{2}\right)$ ដែល $a\in IR$

ហើយ $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ (a+9)/2 \end{bmatrix}$$

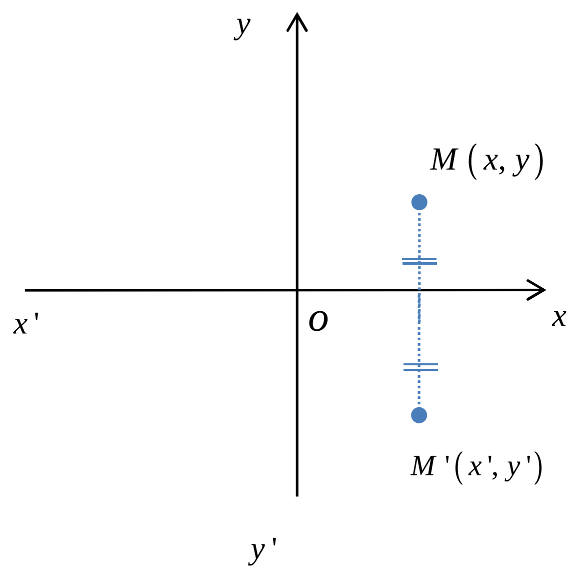
$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{9a+9}{12} \\ \dfrac{-3a+9}{12} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9a+9}{12} & (1) \\ y = \dfrac{-3a+9}{12} \end{cases}$$

តាម (1) $\quad a = \dfrac{12x-9}{9} \Rightarrow y = \dfrac{-4x+12}{12} \Leftrightarrow x+3y-3=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ (L) មានសមីការ $x+3y-3=0$ ជារូបភាពតាមបំលែងលីនេអ៊ែរ ប្រាសតាមម៉ាទ្រីស A នៃបន្ទាត់ (L') ដែលមានសមីការ $x-2y+9=0$

2. បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះ

2.1. បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $x'x$



បើ $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសយើងបាន

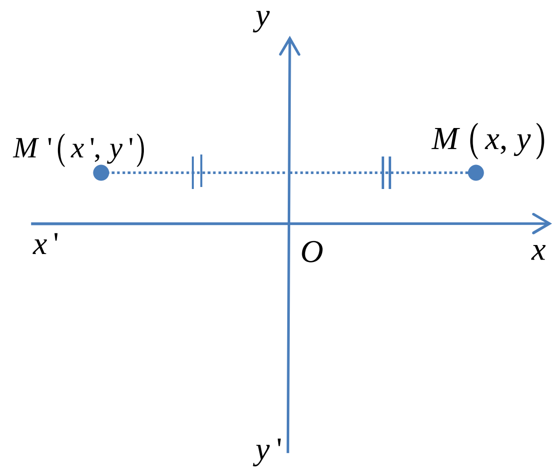
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 0.y \\ y' = 0.x - y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ: បើ $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀប អ័ក្ស $x'x$ យើងបាន

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.2. បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$



បើ $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេយើងបាន

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 0.y \\ y' = 0.x + y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ បើ $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀប អ័ក្ស $y'y$ យើងបាន

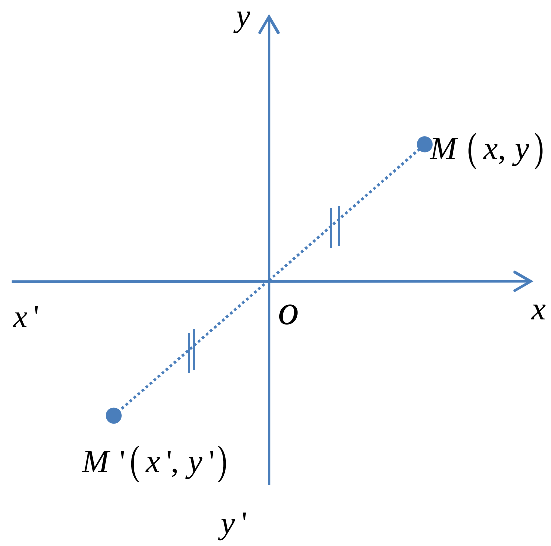
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.3. បំលែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O

បើ $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់តំរុយយើងបាន

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 0.y \\ y' = 0.x - y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



ដូចនេះ បើ $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀប គល់ O យើងបាន

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3. បំលែងចាំង

បើ $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាមបំលែងចាំង H ដែលមានផលធៀប k ដែល $k \neq 0$ យើងបាន

កូអរដោនេ $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + 0.y \\ y' = 0.x + ky \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

<u>ជាទូទៅ</u> គេតាង បំលែងចាំង H ដែលមានផលធៀប k ដោយ $H(o,k)$ ដែល

$$H = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ បើ $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាមបំលែង ចាំងដែល មានផលធៀប $k\neq 0$ នោះយើងបាន $H(o,k):\quad M'=H(M)$

សមមូល $H(o,k):\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

សំគាល់

• បើ $k=1$ នោះ $H=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ នាំអោយបំលែងចាំងតាម H អោយរូបភាពខ្លួនឯង

• បើ $k=-1$ នោះ $H=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ នាំអោយបំលែងចាំងតាម H ជាបំលែងឆ្លុះ ធៀបនឹងគល់ o

ឧទាហរណ៍

១. រករូបភាពនៃបន្ទាត់ $ax+by+c=0$ តាមបំលែងចាំង $H(O,1)$ និង $H(O,-1)$

២. កំនត់រូបភាពនៃប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ តាមបំលែងចាំង $H(O,4)$

ដំណោះស្រាយ

១. រករូបភាពនៃបន្ទាត់ $ax+by+c=0$

តាង M ជាចំនុចទូទៅលើបន្ទាត់ $ax+by+c=0$

នាំអោយ M មានកូអរដោនេ $\left(k,-\dfrac{ak+c}{b}\right)$ $,k\in\mathbb{R}\ \ ,b\neq 0$

ហើយតាង $M'(x',y')$ ជាសំនុំចំនុចរូបភាពនៃសំនុំចំនុច M តាម H

$\Rightarrow\quad M'=H(M)$

• បើតាមបំលែងចាំង $H(O,1)$

យើងបាន $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ -\dfrac{ak+c}{b} \end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k \\ -\dfrac{ak+c}{b} \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x'=k \\ y'=-\dfrac{ak+c}{b} \end{cases}\quad\Rightarrow\quad y'=-\dfrac{ax'+c}{b}$$

សមមូល $ax'+by'+c=0$ ជាបន្ទាត់ដែលអោយរូបភាពដូចរូបភាពនៃបន្ទាត់ $ax+by+c=0$

ដូចនេះ រករូបភាពនៃបន្ទាត់ $ax+by+c=0$ តាមបំលែងចាំង $H(O,1)$ជា បន្ទាត់ $ax+by+c=0$ ខ្លួនឯង

• បើតាមបំលែងចាំង $H(O,-1)$

យើងបាន $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ -\dfrac{ak+c}{b} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \\ \dfrac{ak+c}{b} \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = -k \\ y' = \dfrac{ak+c}{b} \end{cases} \Rightarrow \quad y' = \frac{-ax'+c}{b}$$

សមមូល $-ax'-by'+c=0$ ជាបន្ទាត់ដែលអោយរូបភាពដូចរូបភាពនៃបន្ទាត់

$-ax-by+c=0$

តែ $-ax-by+c = a(-x)+b(-y)+c$

នាំអោយ $-ax-by+c=0 \Leftrightarrow a(-x)+b(-y)+c=0$ ជាបន្ទាត់ដែលឆ្លុះ

នឹងបន្ទាត់ $ax+by+c=0$ត្រង់ O

ដូចនេះ រូបភាពនៃបន្ទាត់ $ax+by+c=0$ តាមបំលែងចាំង $H(O,-1)$ ដូចគ្នា

នឹង រូបភាពនៃ $ax+by+c=0$ តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងគល់ តំ

បន្ទាត់ $-ax-by+c=0$

២. កំនត់រូបភាពនៃប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ តាមបំលែងចាំង $H(O,4)$

តាង M ជាចំនុចទូទៅលើ $y=x^2$

$\Rightarrow$ M មានកូអរដោនេ (k,k^2) $,k\in\mathbb{R}$

ហើយតាង $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ M តាម $H(O,4)$

$\Rightarrow$ $M' = H(M)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k \\ 4k^2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = 4k \\ y' = 4k^2 \end{cases} \Rightarrow \quad k = \frac{x'}{4}$$

$\Rightarrow \quad y' = 4\left(\dfrac{x'}{4}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \dfrac{1}{4}(x')^2$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានរូបភាព

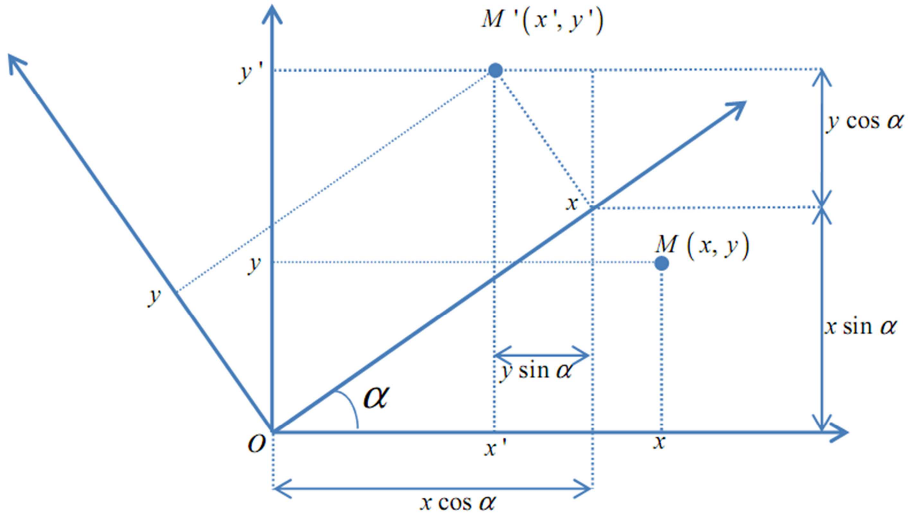
ដូចគ្នានឹង ប៉ារ៉ាបូល $y=\dfrac{1}{4}x^2$

ដូចនេះ រូបភាពនៃប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ តាមបំលែងចាំង $H(O,4)$ គឺ ប៉ារ៉ាបូល

$y=\dfrac{1}{4}x^2$

4. បំលែងវិល

ក្នុងប្លង់ (xOy) គេមានចំនុច M ដែលមានកូអរដោនេ(x,y) ។ $M'(x',y')$ ជារូប ភាពនៃ M តាមបំលែងវិលក្រោមមុំ α ដូចរូប



គេបាន $\begin{cases} OM' = OM \\ \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \alpha \end{cases}$

នាំអោយ $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ជាទូទៅ គេតាងបំលែងវិលតាមមុំ α ដោយ $\Re(O,\alpha)$ ដែល $\Re = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

ដូចនេះ បើ $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាមបំលែងវិលនៃមុំ α

នោះយើងបាន $\Re(O,\alpha):\ M' = \Re(M) \Leftrightarrow \Re(o,\alpha):\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

លំហាត់គំរូ

១. គេមានចំនុច $M(2,3)$ ។ រករូបភាពនៃ M តាមបំលែងវិល $\Re\left(O,\frac{\pi}{3}\right)$

២. កំនត់រូបភាពនៃបន្ទាត់ $y = 2x - 1$ តាមបំលែងវិល $\Re\left(O,\frac{\pi}{4}\right)$

ដំណោះស្រាយ

១. រករូបភាពនៃ M តាមបំលែងវិល $\Re\left(O,\frac{\pi}{3}\right)$

តាង $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងវិល $\Re\left(O,\frac{\pi}{3}\right)$

នាំអោយ $M' = \Re(M)$

សមមូល $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2-3\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{2\sqrt{3}+3}{2} \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ រូបភាពនៃ $M(2,3)$ តាម $\Re\left(O,\frac{\pi}{3}\right)$ គឺ $M'\left(\frac{2-3\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}+3}{2}\right)$

២. កំនត់រូបភាពនៃបន្ទាត់ $y=2x-1$ តាមបំលែងវិល $\Re\left(O,\frac{\pi}{4}\right)$

តាង M ជាចំនុចទូទៅឋិតលើបន្ទាត់ $y=2x-1$

យើងបាន M មានកូអរដោនេ $(k, 2k-1)$, $k \in \mathbb{R}$

ហើយតាង M' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងវិល $\Re\left(O,\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \quad M' = \Re(M) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 2k-1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 2k-1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}k + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2}k - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

សមមូល $\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}k + \frac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ y' = \frac{3\sqrt{2}}{2}k - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

តាម (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}k = \frac{\sqrt{2}}{2} - x' \quad \Rightarrow \quad y' = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x'\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad y' = -3x' + \sqrt{2}$$

ដូចនេះ រូបភាពនៃបន្ទាត់ $y=2x-1$ តាមបំលែងវិល $\Re\left(O,\frac{\pi}{4}\right)$

បន្ទាត់ $y=-3x+\sqrt{2}$

5. បំលែងលីនេអ៊ែរបណ្តាក់

5.1. សញ្ញាណ

បើគេមានបីចំនុច M , M' និង M'' ហើយបំលែងលីនេអ៊ែរពីរ៖

- បំលែងលីនេអ៊ែរពីចំនុច M ទៅ M' តាមម៉ាទ្រីស A
- បំលែងលីនេអ៊ែរពីចំនុច M' ទៅ M'' តាមម៉ាទ្រីស B

គេបាន $M' = A(M)$ និង $M'' = B(M')$

$\Rightarrow$ $M'' = B(A(M))$

$\Leftrightarrow$ $M'' = BA(M)$ ជាបំលែងពីចំនុច M ទៅ M'' តាមម៉ាទ្រីស BA

ដូចនេះ បើគេប្លែងពីចំនុច M ទៅ M'' តាមម៉ាទ្រីស A និង B បន្តបន្ទាប់ យើងបាន $M'' = BA(M)$

<u>លំហាត់គំរូ</u>

រករូបភាពនៃ $M(0,-2)$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស A និង B ជាបន្តបន្ទាប់ដែល

ម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បំលែងលីនេអ៊ែរនៃ M តាមម៉ាទ្រីស A និង B បន្តបន្ទាប់ ជាបំលែងនៃចំនុច M តាមម៉ាទ្រីស BA

តាង $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ $M(0,-2)$

យើងបាន $M' = BA(M)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -10 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ រូបភាពនៃ $M(0,-2)$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស A និង B ជាបន្តបន្ទាប់ គឺ $(-16,-10)$

5.2 . បណ្តាក់រវាង $\Re$ និង H

បើគេមាន

- $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x,y)$ តាមបំលែងវិល $\Re(O,\alpha)$
- $M''(x'',y'')$ ជារូបភាពនៃ $M'(x',y')$ តាមបំលែងចាំង $H(O,k)$

យើងបាន $\begin{cases} M' = \Re(M) \\ M'' = H(M') \end{cases}$

នោះ បំលែងលីនេអ៊ែរបណ្តាក់ពី M ទៅ M'' កំនត់ដោយ

$$M'' = H\Re(M)$$

ដោយ $H\Re = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}$

តែ $\Re H = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $H\Re = \Re H$

> ដូចនេះ បើគេប្លែងពីចំនុច M ទៅ M'' តាមបំលែងវិល $\Re(O,\alpha)$ និងបំលែងចាំង $H(O,k)$ ជាបន្តបន្ទាប់យើងបាន $M'' = H\Re(M) = \Re H(M)$

<u>លំហាត់គំរូ</u>

កំនត់រូបភាពនៃ $M(2,1)$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរបណ្តាក់នៃបំលែងវិល $\Re\left(O,\dfrac{\pi}{6}\right)$ និងបំលែងចាំង $H(O,2)$

តាង $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $M(2,1)$

យើងបាន $M' = H\Re(M)$

សមមូល $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\dfrac{\pi}{6} & -2\sin\dfrac{\pi}{6} \\ 2\sin\dfrac{\pi}{6} & 2\cos\dfrac{\pi}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -2\times\dfrac{1}{2} \\ 2\times\dfrac{1}{2} & 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}-1 \\ 2+\sqrt{3} \end{bmatrix}$

ដូចនេះ: រូបភាពនៃ $M(2,1)$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរបណ្តាក់នៃបំលែងវិល $\Re\left(O,\dfrac{\pi}{6}\right)$ និងបំលែងចាំង $H(O,2)$ គឺ $\left(2\sqrt{3}-1, 2+\sqrt{3}\right)$

5.3 . បណ្តាក់នៃពីរបំលែងវិល

បើគេមានបំលែងវិលពីរ

- $M\left(x,y\right)$ អោយរូបភាពទៅ $M'\left(x',y'\right)$ តាមបំលែងវិល $\Re_1\left(O,\alpha_1\right)$
- $M'\left(x',y'\right)$ អោយរូបភាពទៅ $M''\left(x'',y''\right)$ តាមបំលែងចាំង $\Re_2\left(O,\alpha_2\right)$

យើងបាន $\begin{cases} M'=\Re_1\left(M\right) \\ M''=\Re_2\left(M'\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \quad M''=\Re_2\Re_1\left(M\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha_2\cos\alpha_1-\sin\alpha_2\sin\alpha_1 & -\sin\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_2\cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_2\cos\alpha_1+\cos\alpha_2\sin\alpha_1 & \cos\alpha_2\cos\alpha_1-\sin\alpha_2\sin\alpha_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\left(\alpha_1+\alpha_2\right) & -\sin\left(\alpha_1+\alpha_2\right) \\ \sin\left(\alpha_1+\alpha_2\right) & \cos\left(\alpha_1+\alpha_2\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ បើគេប្លែងពីចំនុច M ទៅ M' តាមបំលែងវិល $\Re_1\left(O,\alpha_1\right)$ ហើយ
បន្តប្លែងពី M' ទៅ M'' តាមបំលែងវិល $\Re_2\left(O,\alpha_2\right)$
យើងបាន M'' ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងវិល $\Re\left(O,\alpha_1+\alpha_2\right)$

<u>លំហាត់គំរូ</u> រករូបភាពនៃ $\left(3,2\right)$ តាមបំលែងវិល $\Re_1\left(O,12^\circ\right)$ រួចបន្តតាមបំលែងវិល $\Re_2\left(O,18^\circ\right)$

តាង $M\left(x,y\right)$ ជារូបភាពនៃ $\left(3,2\right)$ តាមបំលែងបណ្តាក់នៃបំលែងវិលទាំងពីរ

នាំអោយ M ជារូបភាពនៃ $\left(3,2\right)$ តាមបំលែងវិល $\Re\left(O,12^\circ+18^\circ\right)$

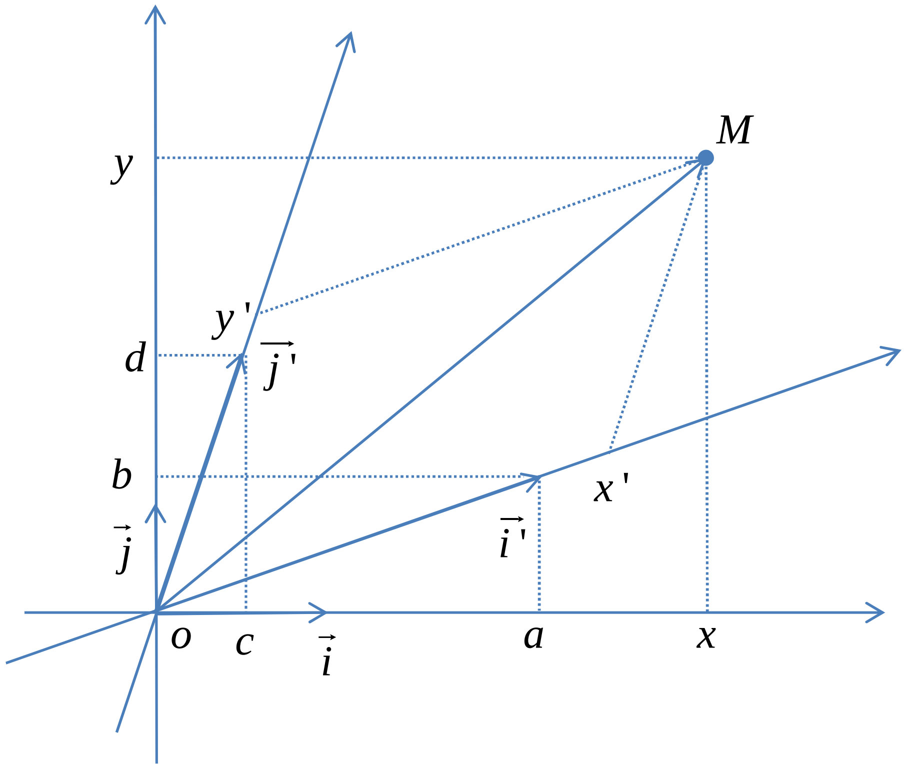
$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\left(30^\circ\right) & -\sin\left(30^\circ\right) \\ \sin\left(30^\circ\right) & \cos\left(30^\circ\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2}-1 \\ \sqrt{3}+\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ រូបភាពនៃ $\left(3,2\right)$ តាមបំលែងបណ្តាក់នៃបំលែងវិលទាំងពីរគឺ $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-1,\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$

6. ការប្តូរគោល

គេមានចំនុច M ដែលមានកូអរដោនេ (x, y) ក្នុងតំរុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ និងមានកូអរដោនេ (x', y') ក្នុងតំរុយ $(O,\vec{i}',\vec{j}')$ ដូចក្នុងរូប



យើងបាន ចំពោះតំរុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ មាន $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ (2)

ចំពោះតំរុយ $(O,\vec{i}',\vec{j}')$ មាន $\overrightarrow{OM}=x'\vec{i}'+y'\vec{j}'$ (1)

តែ ដោយដឹងថា $\vec{i}'=(a,b)$ និង $\vec{j}'=(c,d)$ បើធៀបនឹងតំរុយ$(O,\vec{i},\vec{j})$

នាំអោយ $\begin{cases}\vec{i}'=a\vec{i}+b\vec{j}\\ \vec{j}'=c\vec{i}+d\vec{j}\end{cases}$

តាម(1) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OM}=x'\left(a\vec{i}+b\vec{j}\right)+y'\left(c\vec{i}+d\vec{j}\right)$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM}=x'a\vec{i}+x'b\vec{j}+y'c\vec{i}+y'd\vec{j}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OM}=(x'a+y'c)\vec{i}+(x'b+y'd)\vec{j}$

តែតាម(2) $\Rightarrow$ $\begin{cases}x=x'a+y'c\\ y=x'b+y'd\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$

ជាសមីការបំលែងលីនេអ៊ែរប្តូរគោលនៃកូអរដោនេនៃចំនុច M ពីតំរុយ $(O,\vec{i}',\vec{j}')$ ទៅ តំរុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$

តាង $P=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរប្តូរគោល

$B=\{\vec{i},\vec{j}\}$ និង $B'=\{\vec{i}',\vec{j}'\}$

ដូចនេះ គេអាចសរសេរ $\boxed{\left[\overrightarrow{OM}\right]_B = P\left[\overrightarrow{OM}\right]_{B'}}$

ដែល $\left[\overrightarrow{OM}\right]_B=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ និង $\left[\overrightarrow{OM}\right]_{B'}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

ចំណាំ $P=\left[\left[\vec{i}'\right]_B \quad \left[\vec{j}'\right]_B\right]$

<u>លំហាត់គំរូ</u> ក្នុងតំរុយ $(O,\vec{i}',\vec{j}')$ ចំនុច M មានកូអរដោនេ $(-3,5)$ ។ គេដឹងថាក្នុងតំរុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\vec{i}'=(1,1)$ និង $\vec{j}'=(2,1)$

ក. ចូររកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរប្តូរគោលនៃចំនុច M ពីតំរុយ $(O,\vec{i}',\vec{j}')$ ទៅ តំរុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$

ខ. រកកូអរដោនេនៃ M ធៀបនឹងគោល B ក្នុងតំរុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរប្តូរគោល

យើងមាន $\vec{i}'=(1,1)$ និង $\vec{j}'=(2,1)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{i}'=\vec{i}+\vec{j} \\ \vec{j}'=2\vec{i}+\vec{j} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\vec{i}'\right]_B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \left[\vec{j}'\right]_B=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរប្តូរគោល

ខ. រកកូអរដោនេនៃ M ធៀបនឹងគោល B

យើងមាន $\left[\overrightarrow{OM}\right]_B = P\left[\overrightarrow{OM}\right]_{B'}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ដោយ ក្នុងតំរុយ $(O,\vec{i}',\vec{j}')$ ចំនុច M មានកូអរដោនេ $(-3,5)$

យើងបាន $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

ដូចនេះ M មានកូអរដោនេ $(7,2)$ ធៀបនឹងគោល B ក្នុងតំរុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

<u>សំគាល់</u>

តាម $\left[\overrightarrow{OM}\right]_B = P\left[\overrightarrow{OM}\right]_{B'}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{c}{ad-bc} \\ -\dfrac{b}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

យក $P^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{c}{ad-bc} \\ -\dfrac{b}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរប្តូរ

ពីតំរុយ$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ទៅ តំរុយ $\left(O,\vec{i}',\vec{j}'\right)$

យើងបាន $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{OM}\right]_{B'} = P^{-1}\left[\overrightarrow{OM}\right]_B$$

លំហាត់បន្ថែម

១. រករូបធរណីមាត្រដែលបន្ទាត់ $2x-y+3=0$ ប្លែងតាមបំលែងលីនេអ៊ែរ $(x,y)\to(3x-y,-2x+y)$

២. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងចាំងដែលប្លែង ប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2$ ទៅជាប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$

៣. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងចាំងដែលប្លែង គ្រប់ចំនុចទាំងអស់លើបន្ទាត់ $3x+2y-1=0$ ទៅចំនុច $(-1,1)$

៤. រក a និង b បើបន្ទាត់ $3x-4y+1=0$ ប្លែងទៅជាបន្ទាត់ $3x+2y-1=0$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរដែលបញ្ជាក់ដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 5\end{bmatrix}$

៥. យក f ជាបំលែងលីអ៊ែរដែលបញ្ជាក់ដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -5\end{bmatrix}$ ហើយបន្ទាត់ (L_1) និង បន្ទាត់ (L_2) ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច $P(0,1)$ ។ រកសមីការនៃបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) បើ (L_1) ប្លែងទៅ (L_2) តាម f ។

៦. គេមានចំនុចបំលែងលីនេអ៊ែរ $f:(x,y)\to(ax+by,cx+dy)$ ។ បើ P_1 និង P_2 ប្លែងទៅចំនុច P_1' និង P_2' ហើយ $P_1P_2=P_1'P_2'$ បង្ហាញថា $\begin{cases}a^2+c^2=b^2+d^2=1\\ ab+cd=0\end{cases}$

ដំនោះស្រាយ

១. រករូបធរណីមាត្រដែលបន្ទាត់ $2x-y+3=0$ ប្លែងតាមបំលែងលីនេអ៊ែរ $(x,y)\to(3x-y,-2x+y)$

យើងមាន បំលែងលីនេអ៊ែរ $(x,y)\to(3x-y,-2x+y)$

$$\Rightarrow \begin{cases}x'=3x-y\\ y'=-2x+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

តាង $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

ករូបភាពនៃបន្ទាត់ $2x-y+3=0$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

តាង M ជាចំនុចទូទៅលើបន្ទាត់ $2x-y+3=0$

$\Rightarrow$ M មានកូអរដោនេ $\left(k,\dfrac{k-3}{2}\right)$ ដែល $k\in\mathbb{R}$

តាង $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ M តាម $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\ \dfrac{k-3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k - \dfrac{k-3}{2} \\ -2k + \dfrac{k-3}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{5k+3}{2} \\ \dfrac{-3k-3}{2} \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = 5k+3 \\ y' = \dfrac{-3k-3}{2} \end{cases}$$

តាម $2x' = 5k+3 \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{2x'-3}{5}$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{-3\dfrac{2x'-3}{5} - 3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 5y' + 3x' + 3 = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $2x - y + 3 = 0$ ប្លែងតាមបំលែងលីនេអ៊ែរ $(x, y) \to (3x - y, -2x + y)$

គឺបន្ទាត់ $5y + 3x + 3 = 0$

២. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងចាំងដែលប្លែង ប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2$ ទៅជាប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$

តាង $H = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរនៃ $y = ax^2$ ទៅជាប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$

រករូបភាពនៃប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស $H = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

តាង M ជាចំនុចទូទៅលើប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2$

$\Rightarrow$ M មានកូអរដោនេ $\left(p, ap^2\right)$ ដែល $p \in \mathbb{R}$

តាង $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ M តាម $H = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $, k \in \mathbb{R}$ $, k \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ ap^2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k.p \\ k.a.p^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = k.p \\ y' = k.a.p^2 \end{cases}$$

យើងបាន រករូបភាពនៃប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស $H = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

គឺជាសំណុំចំនុច $\left(k.p\,, k.a.p^2\right)$

តែ រូបភាពនៃប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស H គឺ $y = x^2$

$\Rightarrow$ $\forall p \in \mathbb{R}$ ចំនុច $\left(k.p\,, k.a.p^2\right)$ គឺឋិតលើប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$

$\Leftrightarrow$ $k.a.p^2 = (kp)^2 \quad \forall p \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $p^2\left(ka - k^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad ka - k^2 = 0 \quad \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = a \end{array}\right.$

តែ $k \neq 0 \;\Rightarrow\; k = a \quad \Rightarrow \quad H = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

ដូចនេះ: $H = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរនៃ $y = ax^2$ ទៅជាប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$

៣. រកម៉ាទ្រីសនៃបំលែងចាំងដែលប្លែង គ្រប់ចំនុចទាំងអស់លើបន្ទាត់ $3x+2y-1=0$ ទៅចំនុច $(-1,1)$

តាង $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរនៃ $3x+2y-1=0$ ទៅចំនុច $(-1,1)$

រករូបភាពនៃបន្ទាត់ $3x+2y-1=0$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

តាង M ជាចំនុចទូទៅលើបន្ទាត់ $3x+2y-1=0$

$\Rightarrow$ M មានកូអរដោនេ $\left(k, \dfrac{-2k+1}{3}\right)$ ដែល $k \in \mathbb{R}$

តាង $M'(x', y')$ ជារូបភាពនៃ M តាម $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $, k \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \dfrac{-2k+1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ak + \dfrac{b-3kb}{2} \\ ck + \dfrac{d-3kd}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{2ak+b-3kb}{2} \\ y' = \dfrac{2ck+d-2kd}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = 2ak+b-3kb \\ 2y' = 2ck+d-2kd \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = k(2a-3b)+b \\ 2y' = k(2c-3d)+d \end{cases}$$

តែរូបភាពនៃបន្ទាត់ $3x+2y-1=0$ តាមបំលែងនៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ គឺចំនុច $(-1,1)$

$$\Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = k(2a-3b)+b \\ 2 = k(2c-3d)+d \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-3b=0 \\ 2c-3d=0 \\ b=-2 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ c=3 \\ b=-2 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ: $A=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរនៃគ្រប់ចំនុចលើ $3x+2y-1=0$ ទៅចំនុច $(-1,1)$

៤. រក a និង b បើបន្ទាត់ $3x-4y+1=0$ ប្លែងទៅជាបន្ទាត់ $3x+2y-1=0$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរដែល បញ្ជាក់ដោយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 5 \end{bmatrix}$

តាង $A=\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 5 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរនៃ $3x-4y+1=0$ ទៅជា $3x+2y-1=0$

រករូបភាពនៃ $3x-4y+1=0$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 5\end{bmatrix}$

តាង M ជាចំនុចទូទៅបន្ទាត់ $3x-4y+1=0$

$\Rightarrow$ M មានកូអរដោនេ $\left(k,\dfrac{4k-1}{3}\right)$ ដែល $k\in\mathbb{R}$

តាង $M'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ M តាម $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 5\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\ \dfrac{4k-1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+\dfrac{4ka-a}{3}\\ bk+\dfrac{20ka-5}{3}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=\dfrac{3k+4ka-a}{3}\\ y'=\dfrac{3kb+20k-5}{3}\end{cases}$$

យើងបាន រូបភាពនៃបន្ទាត់ $3x-4y+1=0$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 5\end{bmatrix}$

គឺសំណុំចំនុច $\left(\dfrac{3k+4ka-a}{3},\dfrac{3kb+20k-5}{3}\right)$ $k\in\mathbb{R}$

តែរូបភាពនៃបន្ទាត់ $3x-4y+1=0$ តាមបំលែងលីនេអ៊ែរនៃម៉ាទ្រីស A គឺបន្ទាត់ $3x+2y-1=0$

$\Rightarrow$ $\forall k\in\mathbb{R}$ ចំនុច $\left(\dfrac{3k+4ka-a}{3},\dfrac{3kb+20k-5}{3}\right)$ គឺឋិតលើបន្ទាត់ $3x+2y-1=0$

$$\Leftrightarrow 3\frac{3k+4ka-a}{3}+2\frac{3kb+20k-5}{3}-1=0 \qquad \forall k\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 9k+12ka-3a+6kb+40k-10-3=0 \qquad \forall k\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow k(12a+6b+49)-3a-13=0 \qquad \forall k\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}12a+6b+49=0\\ -3a-13=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{13}{3}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{13}{3}\\ \dfrac{1}{2} & 5\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ: $a=-\dfrac{13}{3}, b=\dfrac{1}{2}$ ត្រូវនឹងម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{13}{3}\\ \dfrac{1}{2} & 5\end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសនៃបំលែងលីនេអ៊ែរនៃ

បន្ទាត់ $3x-4y+1=0$ ទៅបន្ទាត់ $3x+2y-1=0$

៥. រកសមីការនៃបន្ទាត់ (L_1) និងបន្ទាត់ (L_2)

សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំនុច (x_1,y_1) និង (x_2,y_2) កំនត់ដោយ $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$

យើងមាន បន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច $P(0,1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(0,1)\in(L_1) \\ P(0,1)\in(L_2) \end{cases}$$

ម្យ៉ាងទៀត (L_1) ប្លែងទៅ (L_2) តាមបំលែងនៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -5\end{bmatrix}$

យើងបាន រូបភាពនៃគ្រប់ចំនុចលើ (L_1) តាមបំលែងនៃម៉ាទ្រីស A ឋិតនៅលើបន្ទាត់ (L_2)

ហើយ រូបភាពនៃគ្រប់ចំនុចលើ (L_2) តាមបំលែងច្រាសនៃម៉ាទ្រីស A ឋិតនៅលើ (L_1)

ដូចនេះ បើ P ជាចំនុចមួយលើបន្ទាត់ (L_1) នោះ $P'=A(P)\in(L_2)$

និង បើ P ជាចំនុចមួយលើបន្ទាត់ (L_2) នោះ $P'=A^{-1}(P)\in(L_1)$

រកសមីការនៃបន្ទាត់ (L_2)

យើងមាន $P(0,1)\in(L_1)$ រករូបភាពនៃ P នៅលើ (L_2)

តាង $P'(x',y')$ ជារូបភាពនៃ $P(0,1)\in(L_1)$ $\Rightarrow P'=A(P)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=2 \\ y'=-5 \end{cases} \Rightarrow P'(2,-5)$$

$\Rightarrow$ (L_2) ជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំនុច $P(0,1)$ និង $P'(2,-5)$

យើងបាន រាងទូទៅនៃសមីកាបន្ទាត់ (L_2) កំនត់ដោយ $y=\dfrac{-5-1}{2-0}(x-0)+1$

$\Leftrightarrow$ $(L_2):\quad y=-3x+1$

រកសមីការនៃបន្ទាត់ (L_1)

យើងមាន $P(0,1)\in(L_2)$ $\Rightarrow$ រូបភាពរបស់វាលើ (L_1) កំនត់ដោយ $P'=A^{-1}(P)$

ដោយ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -5\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{-5+4}\begin{bmatrix}-5 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=2 \\ y'=-1 \end{cases} \Rightarrow P'(2,-1)$$

$\Rightarrow$ (L_1) ជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំនុច $P(0,1)$ និង $P'(2,-1)$

យើងបាន រាងទូទៅនៃសមីកាបន្ទាត់ (L_2) កំនត់ដោយ $y=\dfrac{-1-1}{2-0}(x-0)+1$

$\Leftrightarrow$ $(L_1):\quad y=-x+1$

៦. បង្ហាញថា $a^2+c^2=b^2+d^2=1$ និង $ab+cd=0$

យើងមាន បំលែងលីនេអ៊ែរ $f:(x,y)\to(ax+by,cx+dy)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

តាង $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P'_1(x'_1,y'_1)$ និង $P_2'(x'_2,y'_2)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x'_1\\ y'_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix} \text{ និង } \begin{bmatrix}x'_2\\ y'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1=ax_1+by_1 \\ y'_1=cx_1+dy_1 \end{cases} \text{ និង } \begin{cases} x'_2=ax_2+by_2 \\ y'_2=cx_2+dy_2 \end{cases}$$

ចំពោះ ចំនុច P_1 និង P_2 ទូទៅដែល $P_1 \neq P_2$

យើងបាន $\begin{cases} P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ P'_1\, P'_2 = \sqrt{(ax_2 + by_2 - ax_1 - by_1)^2 + (cx_2 + dy_2 - cx_1 - dy_1)^2} \end{cases}$

បើ $P_1P_2 = P_1'P_2'$ **នោះចំពោះ** $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in IR$ **ដែលចំនុច** $P_1(x_1, y_2) \neq P_2(x_2, y_2)$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(ax_2 + by_2 - ax_1 - by_1)^2 + (cx_2 + dy_2 - cx_1 - dy_1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (ax_2 + by_2 - ax_1 - by_1)^2 + (cx_2 + dy_2 - cx_1 - dy_1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = [a(x_2 - x_2) + b(y_2 - y_1)]^2 + [c(x_2 - x_2) + d(y_2 - y_1)]^2$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = a^2(x_2 - x_2)^2 + b^2(y_2 - y_1)^2 + c^2(x_2 - x_2)^2 + d^2(y_2 - y_1)^2 + 2cd(x_2 - x_2)(y_2 - y_1) + 2cd(x_2 - x_2)(y_2 - y)$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (a^2 + c^2)(x_2 - x_2)^2 + (b^2 + d^2)(y_2 - y_1)^2 + (2cd + 2cd)(x_2 - x_2)(y_2 - y)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + c^2 - 1)(x_2 - x_2)^2 + (b^2 + d^2 - 1)(y_2 - y_1)^2 + (2cd + 2cd)(x_2 - x_2)(y_2 - y) = 0$$

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

យើងបាន $\begin{cases} a^2 + c^2 - 1 = 0 \\ b^2 + d^2 - 1 = 0 \\ 2ab + 2cd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

I. ភាពជាប់ត្រង់១ចំនុច

ក. និយមន័យ

ខ. លក្ខណៈ

II. ភាពជាប់លើចន្លោះ

III. អនុគមន៍បន្លាយភាពជាប់

IV. ភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. និយមន័យដេរីវេត្រង់ចំនុចមួយ

ខ. ភាពមានដេរីវេ

គ. ទំនាក់ទំនងភាពជាប់ និងភាពមានដេរីវេ

V. ដំណោះស្រាយលំហាត់ និងលំហាត់អនុវត្តន៍

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

I. ភាពជាប់ត្រង់១ចំនុច

ក. និយមន័យ

អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x = a$ កាលណា ៖

- f កំនត់ចំពោះ $x = a$
- f មានលីមីត កាលណា $x \to a$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

ឧទាហរណ៍ ៖ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{បើ } x \neq 2 \\ 12 & \text{បើ } x = 2 \end{cases}$

យើងបាន ៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) \\ &= 12\end{aligned}$$

ដោយ $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 12$

ដូច្នេះ f ជាប់ត្រង់ $x = 2$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{បើ } x \neq -1 \\ x^2-3 & \text{បើ } x = -1 \end{cases}$

យើងបាន ៖

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1}(x-1) \\ &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(-1) &= (-1)^2-3 \\ &= -2\end{aligned}$$

ដោយ $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) = -2$

ដូច្នេះ f ជាប់ត្រង់ $x=-1$

ខ. លក្ខណៈ

បើ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=a$ នោះ យើងបាន ៖

1. $f(x)\pm g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=a$
2. $f(x)\cdot g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=a$
3. $k\cdot f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=a$; k ជាចំនួន
4. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=a$ ដែល $g(a)\neq 0$

II. ភាពជាប់លើចន្លោះ

ជាទូទៅ ៖

- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនក្នុងចន្លោះបើកនោះ។
- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) និងមានលីមីត $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ និង $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ (អនុគមន៍ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ a និងជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ b)។

ឧទាហរណ៍ ៖

១. គេអោយ $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ។ តើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $(-2,2)$ និង $[-2,2]$ ឬទេ?

ចំលើយ

- លើចន្លោះ $(-2,2)$ អនុគមន៍ f កំណត់ នោះវាជាប់ត្រង់ចំណុចនៃចន្លោះនេះ។ ដូចនេះ f ជាប់លើចន្លោះ $(-2,2)$
- លើចន្លោះ $[-2,2]$

ដោយ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(-2,2)$ ហើយ

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}\left(\sqrt{4-x^2}\right) = \sqrt{4-4^+} = 0 = f(-2)$ និង

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\sqrt{4-x^2}\right) = \sqrt{4-4^-} = 0 = f(2)$

នោះ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ -2 និងខាងឆ្វេងត្រង់ 2

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[-2,2]$ ។

២. គេអោយអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{3}{x+5}$ ។ តើ $g(x)$ ជាប់ឬដាច់លើចន្លោះណាខ្លះ ខាងក្រោម៖

$(3,7)$, $[-6,9]$, $(-\infty,0)$, $(-5,+\infty)$, $[-5,+\infty)$, $[-10,5]$

ចំលើយ

- អនុគមន៍ g ជាប់លើចន្លោះ $(3,7)$, $(-5,+\infty)$, $[-10,5]$ ព្រោះវាជាប់គ្រប់ចំណុចទាំងអស់លើចន្លោះទាំងនេះ។
- អនុគមន៍ g ជាប់លើចន្លោះ $[-6,9]$, $(-\infty,0)$, $[-5,+\infty)$ ព្រោះចន្លោះទាំងនេះដាច់ត្រង់ចំណុច $x=-5$

III. <u>**អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់**</u>

ជាទូទៅ ៖ បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x=a$ និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=a$ កំណត់ដោយ ៖

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{បើ } x\neq a \\ l & \text{បើ } x=a \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍១. រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x_0=1$ ដែល $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$

ចំលើយ

គេបាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1} f(x) &= \lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1} \\ &= \lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi-\pi x)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to1}\frac{\sin\pi(1-x)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to1}\frac{\sin\pi(1-x)}{-(1-x)}=-\pi\end{aligned}$$

ដូច្នេះ បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x_0=1$ គឺ $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x-1} & \text{បើ } x\neq1 \\ -\pi & \text{បើ } x=1\end{cases}$

ឧទាហរណ៍២. រកបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$ ដែល $f(x)=\dfrac{\left(1-\cos\sqrt{|x|}\right)^2}{1-\sqrt{\cos x}}$

ចំលើយ

គេបាន ៖ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1-\cos\sqrt{|x|}\right)^2}{1-\sqrt{\cos x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(2\sin^2\frac{\sqrt{|x|}}{2}\right)^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^4\left(\frac{\sqrt{|x|}}{2}\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{|x|}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^4\times\frac{4\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^4}{2\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=1\times 2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 គឺ $g(x)=\begin{cases} f(x)=\dfrac{\left(1-\cos\sqrt{|x|}\right)^2}{1-\sqrt{\cos x}} & \text{បើ } x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{បើ } x=0\end{cases}$

IV. ភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. និយមន័យដេរីវេត្រង់ចំនុចមួយ

អនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ a ប្រសិនបើមានលីមីតនៃផលធៀបរវាងកំនើនអនុគមន៍ និងកំនើនអថេរ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ កាលណា $\Delta x\to 0$ គេសរសេរ ៖

$$\boxed{y'=f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

ឧទាហរណ៍ ៖ រកដេរីវេត្រង់ $x_0=3$ នៃអនុគមន៍ $y=x^2-2$

ចំលើយ

គេបាន

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\frac{(3+h)^2-2-(3^2-2)}{h}$$
$$=\frac{9+6h+h^2-2-7}{h}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{h(6+h)}{h}$$
$$=6+h$$

$$\Rightarrow f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$$

ខ. ភាពមានដេរីវេ

ដើម្បីបង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ a គេត្រូវបង្ហាញថា ដេរីវេស្តាំ និងឆ្វេងស្មើគ្នា

គឺត្រូវបង្ហាញថា ៖ $f'(a^-)=f'(a^+)$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to o^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to o^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ឧទាហរណ៍ ៖ តើអនុគមន៍ $y: f(x)=|\sin x|$ មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ រឺទេ ?

បំលើយ

គេបាន

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}$$
$$=-1$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}$$
$$=1$$

ដោយ $f'(0^-)\neq f'(0^+)$

ដូច្នេះ $y: f(x)=|\sin x|$ គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ ។

គ. ទំនាក់ទំនងភាពជាប់ និងភាពមានដេរីវេ

ឧទាហរណ៍១. បង្ហាញថា បើអនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេលើចន្លោះ $I=(a,b)$ នោះ $f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ I ។

បំលើយ

ឧបមាថា $f(x)$ មានដេរីវេលើ $I=(a,b)$

នោះមានលីមីត $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ ចំពោះ $x_o\in I$

យក $f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

$$\lim_{x\to x_o}\{f(x)-f(x_o)\}=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}(x-x_o)$$
$$=f'(x_o)\cdot 0=0$$

យើងបាន ៖ $\lim_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)$

នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=x_o$

ដូច្នេះ គេសន្និដ្ឋានថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ I ។

ឧទាហរណ៍២. តើអនុគមន៍ជាប់សុទ្ធតែមានដេរីវេរឺទេ ?

បំលើយ

អនុគមន៍ជាប់មិនសុទ្ធតែមានដេរីវេទេ

ឧបមាថា មានអនុគមន៍ $y=|x|$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ប៉ុន្តែគ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ពីព្រោះ

$$f'(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-0}{x-0}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

<u>សន្និដ្ឋាន</u> ៖ បើ f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ x_o នោះ f ត្រូវតែជាប់ត្រង់ x_o ។ប៉ុន្តែបើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ x_0 នោះមិនសុទ្ធតែមានដេរីវេត្រង់ x_o ទេ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីអោយ $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{បើ } x\ge 0\\ ax+b & \text{បើ } x<0\end{cases}$ មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ។

បម្លើយ

f មានដេរីវេត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f \text{ ជាប់ត្រង់ } x_0\\ f'(x_0^+)=f'(x_0^-)\end{cases}$

+ លក្ខខណ្ឌដើម្បីអោយ f ជាប់ត្រង់ $x_0=0$

- $f(0)=\sin 0=0$
- $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(ax+b)=a\times0+b=b$
- $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\sin x=\sin 0=0$

យើងបាន $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

$\Leftrightarrow\ b=0$

+ លក្ខខណ្ឌ f មានដេរីវេត្រង់ $x_0=0$

- $f'(0^-)=\lim_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

  $=\lim_{x\to0^-}\dfrac{ax+b-0}{x}\quad(b=0)$

  $=\lim_{x\to0^-}\dfrac{ax}{x}=a$

- $f'(0^+)=\lim_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

  $=\lim_{x\to0^+}\dfrac{\sin x-0}{x}=1$

ដោយ $f'(0^-)=f'(0^+)$

$\Leftrightarrow\quad a=1$

ដូច្នេះ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $a=1\,;\,b=0$

ផ្នែកលំហាត់

V. លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ

១. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} e^x+x-1 & \text{ចំពោះ } x\le 1 \\ a\dfrac{\sin \pi x}{x-1} & \text{ចំពោះ } x>1 \end{cases}$

ចម្លើយ

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីអោយ f ជាប់ត្រង់ $x=1$

f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=1$ លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

- $f(1)=e^1+1-1=e$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(e^x+x-1\right)=e+1-1=e$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{a\sin \pi x}{x-1}\right)$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{a\sin(\pi-\pi x)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{a\sin \pi(1-x)}{-(1-x)}$$

$$=-\pi a$$

យើងបាន $-\pi a=e$

$$\Leftrightarrow \quad a=-\frac{e}{\pi}$$

ដូចនេះ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ លុះត្រាតែ $a=-\dfrac{e}{\pi}$

២. អនុគមន៍ f កំណត់ $f(x)=\begin{cases} m^2-1 & if \quad x=0 \\ \dfrac{x}{x-\ln x} & if \quad x>0 \end{cases}$

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីអោយ f ជាប់ខាងស្ដាំត្រង់ $x=0$ ។

ចម្លើយ

f ជាប់ខាងស្ដាំត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x-\ln x}=0$ (ព្រោះ $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$, $\lim_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty$)
- $f(0)=m^2-1$

យើងបាន $m^2-1=0 \Leftrightarrow (m-1)(m+1)=0$

$$\Leftrightarrow m=1 \text{ ឬ } m=-1$$

ដូចនេះ f ជាប់ខាងស្ដាំត្រង់ $x=0$ កាលណា $m=1$, $m=-1$

៣. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីអោយ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x^2-4}-2}{ax^2-4} & \text{បើ } x>2\\ ax^2+1 & \text{បើ } x\le 2\end{cases}$

<u>ចម្លើយ</u>

- $\forall x>2$, f ជាប់ជានិច្ច
- $\forall x\le 2$, f ជាប់ជានិច្ច (ព្រោះ f ជាពហុធា)

f ជាប់ $\forall x\in\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ f ជាប់ត្រង់ $x=2$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(ax^2+1\right)=4a+1=f(2)$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{2x^2-4}-2}{x^2-4}$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-4-4}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{2x^2-4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{2x^2-4}+2\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{8-4}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ 4a+1=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ 4a=\frac{1}{2}-1$$

$$\Rightarrow\ a=-\frac{1}{8}$$

៤. គេអោយអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}$, $x\ne 1$

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

ខ. កំណត់អនុគមន៍ f ដែលជាបន្លាយភាពជាប់នៃអនុគមន៍ g ត្រង់ $x=1$

<u>ចម្លើយ</u>

ក. $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{1-x}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

ខ. អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=1$

កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} g(x)=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{1-x} & \text{បើ } x\neq 1 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{បើ } x=1 \end{cases}$

៥. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\sin \pi x}{x-2}$ ដែល $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

$g(x)$ ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $\begin{cases} g(x)=f(x) & ;\ \text{ចំពោះ } x\neq 2 \\ g(x)=m+2 & ;\ \text{ចំពោះ } x=2 \end{cases}$

ក. គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ កាលណា x ខិតជិត 2

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីអោយ g ជាបន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=2$

<u>ចម្លើយ</u>

$f(x)=\dfrac{\sin \pi x}{x-2}\quad ,\quad x\in\mathbb{R}-\{2\}$

$\begin{cases} g(x)=f(x) & ;\ \text{ចំពោះ } x\neq 2 \\ g(x)=m+2 & ;\ \text{ចំពោះ } x=2 \end{cases}$

ក. គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ កាលណាខិតជិត 2

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\sin \pi x}{x-2}$$

តាង $t=x-2 \Rightarrow x=t+2$

ពេល $x\to 2$ នោះ $t\to 0$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin \pi x}{x-2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin \pi(t+2)}{t+2-2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\pi}{t}=\pi$$

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីអោយមានបន្លាយភាពជាប់ត្រង់ $x=2$

យើងមាន $g(2)=m+2$

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2} f(x)=\pi$$

នាំអោយ $m+2=\pi$

ដូចនេះ $m=\pi-2$

៦. f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=e^x+x-1$ ចំពោះ $x\leq 1$ និង $f(x)=\dfrac{a\sin \pi x}{x-1}$ ចំពោះ $x>1$ ។

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីអោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=1$ ។

ចម្លើយ

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីអោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់

$$\begin{cases} f(x) = e^x + x - 1 & \text{ចំពោះ } x \le 1 \\ f(x) = \dfrac{a\sin \pi x}{x-1} & \text{ចំពោះ } x > 1 \end{cases}$$

$f(1) = e + 1 - 1 = e$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{a\sin \pi x}{x-1}$$

តាង $u = x - 1 \Rightarrow x = u + 1$

ពេល $x \to 1$ នោះ $u \to 0$

គេបាន $\displaystyle \lim_{u\to 0} \frac{a\sin \pi(u+1)}{u+1-1} = \lim_{u\to 0} \frac{a\sin(\pi + \pi u)}{u}$

$$= -\lim_{u\to 0} \frac{a\sin \pi u}{u}$$

$$= -a\pi$$

ដោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 1$ នោះ

$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad -a\pi = e$

$$\Leftrightarrow \quad a = -\frac{e}{\pi}$$

៧. ក. គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{បើ } x \ge 2 \\ 2010x + a & \text{បើ } x < 2 \end{cases}$

កំនត់តម្លៃ a ដើម្បីអោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ 2 ។

ខ. គេអោយអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 1}$ ។ សិក្សាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x = 0$

តើ f មានដេរីវេត្រង់ $x = 0$ ឬទេ ?

ចំលើយ

ក. កំនត់តម្លៃ a

យើងមាន $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{បើ } x \ge 2 \\ 2010x + a & \text{បើ } x < 2 \end{cases}$

គេបាន $f(2) = 2^2 - 1 = 3$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 1) = 3$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2010x + a) = 4020 + a$$

ដើម្បីអោយ f ជាប់ត្រង់ $x = 2$ លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

គេបាន: $4020 + a = 3 \Rightarrow a = -4017$

ដូចនេះ $a=-4017$

ខ. សិក្សាភាពជាប់ត្រង់ $x=0$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x}{|x|-4}$

គេបាន: $f(0)=\dfrac{0}{0-4}=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|-4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x-4}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|-4}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x-4}=0$$

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$

នាំអោយ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

- សិក្សាភាពមានដេរីវេត្រង់ $x=0$

តាមនិយមន័យដេរីវេ យើងបាន:

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{h}{|h|-4}}{h}=-\frac{1}{4}$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{h}{|h|-4}}{h}=-\frac{1}{4}$$

ប៉ុន្តែ $f'_+(x)=f'_-(x)=-\dfrac{1}{4}$

ដូចនេះ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ។

នាំអោយ អនុគមន៍ f មានភាពជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

៨. គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}(x+a)e^{-bx} & ; \quad x<0\\ ax^2+bx+1 & ; \quad x\ge 0\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីអោយ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ។

<u>ចំលើយ</u>

កំនត់តម្លៃ $a\&b$

យើងមាន $f(x)=\begin{cases}(x+a)e^{-bx} & ; \quad x<0 \\ ax^2+bx+1 & ; \quad x\geq 0\end{cases}$

- ភាពជាប់ត្រង់ $x_0=0$

គេបាន: $f(0)=1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+a)e^{-bx}=a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(ax^2+bx+1\right)=1$$

ដើម្បីអោយ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad a=1$$

ដូចនេះ $a=1$

- ភាពមានដេរីវេត្រង់ $x=0$

តាមនិយមន័យដេរីវេ

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(0+x)-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)e^{-bx}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{xe^{-bx}}{x}+\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-bx}-1}{x}=1-b$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(0+x)-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+bx+1-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+bx}{x}=b$$

f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ

$$f'_-(0)=f'_+(0)$$

$$\Leftrightarrow \quad b=1-b$$

$$\Rightarrow \quad b=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $a=1 \; ; \; b=\frac{1}{2}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} & \text{បើ } x\neq 0\\ \dfrac{5}{3} & \text{បើ } x=0\end{cases}$

ខ. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^7-1}{x-1} & \text{បើ } x\neq 1\\ 7 & \text{បើ } x=1\end{cases}$

គ. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x+3}{x-1} & \text{បើ } x\neq 1\\ -1 & \text{បើ } x=1\end{cases}$

2. បង្ហាញថា អនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ ជាប់លើចន្លោះបិទ $[-4,4]$ ឬទេ?

3. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\ln x}{x-\ln x} & \text{បើ } x>0\\ m+1 & \text{បើ } x=0\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីអោយ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ខាងស្តាំ។

4. រកបន្លាយភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ក. $f(x)=\dfrac{x^2-|x|}{x^2+|x|}$ ត្រង់ $x_0=0$

ខ. $f(x)=\dfrac{\sin(n\pi x)}{1-x}$, $n\in\mathbb{N}$ ត្រង់ $x_0=1$

គ. $f(x)=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$ ខាងឆ្វេងត្រង់ $x_0=1$

5. គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}x^6\sin\dfrac{1}{x} & \text{បើ } x\neq 0\\ 0 & \text{បើ } x=0\end{cases}$

តើ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ឬទេ?

6. គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}(x+a)e^{-bx} & \text{បើ } x<0\\ ax^2+bx+1 & \text{បើ } x\geq 0\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីអោយ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$

7. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីអោយ f ជាប់ត្រង់ x_0

ក. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2+5x-9}{x-1} & \text{បើ } x\neq 1\\ 2a-3 & \text{បើ } x=1\end{cases}$

ខ. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 3x}{\sin 2x} & \text{បើ } x\neq 1\\ a^2-3a+2 & \text{បើ } x=1\end{cases}$

8. គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ: $f\left(x\right)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & ; \quad x<1\\ 3x+2 & ; \quad x\geq 1\end{cases}$

កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីអោយអនុគមន៍មានដេរីវេត្រង់ $x=1$ ។

តើ f មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ឬទេ?

9. សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $\begin{cases}f\left(x\right)=x-1 & \text{បើ } x\in\left[1,2\right]\\ f\left(x\right)=-2x+7 & \text{បើ } x\in\left]2,3\right]\end{cases}$ និង $x=2$

ខ. $\begin{cases}f\left(x\right)=\dfrac{1-3x}{x-2} & \text{បើ } x\in\left[0,1\right]\\ f\left(x\right)=2\sin\dfrac{\pi}{2}x & \text{បើ } x\in\left[1,2\right]\end{cases}$ និង $x=1$

10. គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f\left(x\right)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{x^2-16}$ ។ កំណត់អនុគមន៍ g ជាបន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ចំនុច $x=4$ ។

11. តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f\left(x\right)=\dfrac{|x|}{x}$ តាមភាពជាប់ត្រង់ចំនុច $x=0$ ឬទេ?

វិភាគបន្សំ

I. ហ្វាក់តូរីយ៉ែល (Factorial)

II. គោការណ៍គ្រឹះនៃរាប់

1. វធានផលគុណ
2. រូបមន្ត ផលបូក (ឬវិធានផលបូក)

III. តំរៀប (Arragnment)

1. និយមន័យ
2. រូបមន្តនៃ តំរៀប

IV. ចម្លាស់(Permulation)

1. និយមន័យ
2. ចម្លាស់មិនច្រំដែល
3. ចម្លាស់(រាងជាបន្ទាត់)
4. ចម្លាស់វង់
5. ចម្លាស់មានភាពច្រំដែល

V. បន្សំ (Combination)

1. និយមន័យ
2. រូបមន្ត នៃបន្សំ
3. លក្ខណៈ នៃបន្សំ

វិភាគបន្សំ

I. ហ្វាក់តូរីយ៉ែល (Factorial)

+ ហ្វាក់តូរីយ៉ែលនៃ n តាងដោយសញ្ញា ៖ $n!$ ។
+ $n!$ គឺមានន័យថា ជាផលគុណនៃ ចំនួនគត់តគ្នា ពី 1 ដល់ n គឺថា ៖

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 5.4.3.2.1$$

❖ **ចំណាំ ៖**

⊕ $0! = 1$

⊕ $1! = 1$

⊕ $n! = (n-1)!.n$

⊕ $\dfrac{n!}{p!} = n(n-1)(n-2)\ldots(p+3)(p+2)(p+1)$

⊕ $\dfrac{n!}{(n-p)!} = (n-p+1)(n-p+2)(n-p+3)\ldots(n-1)n$

⊕ $\dfrac{n!}{(n-2)!} = n.(n-1)$

II. គោលការណ៍គ្រឹះនៃរាប់

1. វិធានផលគុណ

a. វិធាន

បើគេមានព្រឹត្តិការណ៍ k , $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ដែល ៖

ព្រឹត្តិការណ៍ ទី1 E_1 មាន m_1 ករណី

ព្រឹត្តិការណ៍ ទី2 E_2 មាន m_2 ករណី

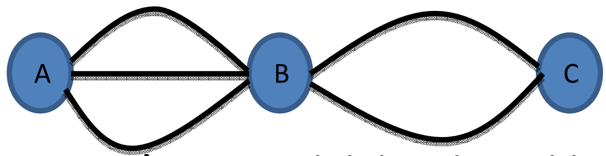
ព្រឹត្តិការណ៍ ទី3 E_3 មាន m_3 ករណី

… … … … … …

ព្រឹត្តិការណ៍ ទីk E_k មាន m_k ករណី

នោះចំនួនរបៀប ឬករណីនៃព្រឹត្តិការណ៍ k កើតឡើង គឺមាន ៖ $m_1.m_2m_3\ldots m_k$ ករណីផ្សេងគ្នា ។

ឧទាហរណ៍1: ដូចបង្ហាញក្នុងរូប ។



ដើម្បីធ្វើដំណើរពីទីក្រុង A ទៅដល់ទីក្រុង C អ្នកធ្វើដំណើរ ត្រូវឆ្លងកាត់ទីក្រុង B ។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា ដើម្បីធ្វើដំណើរ ចេញពីទីក្រុង A ទៅដល់ ទីក្រុង C ។

ចម្លើយ

ដើម្បីចេញពីទីក្រុង A ទៅដល់ ទីក្រុង B មាន 3 របៀបផ្សេងគ្នា

ដើម្បីចេញពីទីក្រុង B ទៅដល់ទីក្រុង C មាន 2 របៀបផ្សេងគ្នា

តាមគោលការណ៍គ្រឹះនៃរាប់គេបាន ៖ ពី A ទៅ C មាន $3\times 2=6$ របៀប(ករណី) ។

ឧទាហរណ៍2: គេអោយសំនុំ $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ ។សួរថា តើគេអាចបង្កើត ចំនួនមួយដែលមាន 6 លេខបានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា ដែលចែកដាច់ នឹង 5 និងជាចម្មតាត្រូវតែមានលេខ សូន្យ ។

ចម្លើយ

យើងតាងលេខដែលមាន 6 ខ្ទង់ដែលត្រូវរក ដោយ ៖ $n=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$

ដោយ n ត្រូវចែកដាច់នឹង 5 នោះ $a_1=\{0,5\}$

តាមបំរាប់ , n ត្រូវតែមានលេខ សូន្យ នោះយើងត្រូវសិក្សាករណីដូចខាងក្រោម ៖

+ បើ $a_6=0$ នោះ ចំនួនដែលត្រូវរកមានរាង $n_1=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5 0}$ គេបាន ៖
  A. a_1 មាន 7 ករណី
  B. a_2 មាន 6 ករណី
  C. a_3 មាន 5 ករណី
  D. a_4 មាន 4 ករណី
  E. a_5 មាន 3 ករណី

នាំអោយ មាន $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=2520$ ចំនួននៃ n ។

+ បើ $a_6=5$ នោះចំនួនដែលត្រូវរកគឺមានរាង $n_2=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5 5}$ គេបាន ៖
  A. a_1 មាន 6 ករណី $a_1\neq 0$ នោះគេមាន 4 ជម្រើសទៀតសម្រាប់លេខសូន្យក្នុង $\overline{a_2a_3a_4a_5}$
  B. ឧបមាថា $a_2=0$ នោះ a_3 មាន 5 ជម្រើស
  a_4 មាន 4 ជម្រើស
  a_5 មាន 3 ជម្រើស

ដូចនេះ យើងបាន $4(6\cdot 1\cdot 5\cdot 4\cdot 3)=1440$ ករណី

សរុបមក, ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ $n_1+n_2=2520+1440=3970$ ចំនួននៃ n ។

2. **រូបមន្ត ផលបូក (ឬវិធានផលបូក)**

យើងមានសំនុំ H មួយមាន K ព្រឹត្តិការណ៍ ៖ $H_1, H_2, ...H_k$ ខុសៗគ្នាដែល ៖

+ ព្រឹត្តិការណ៍ H_1 មាន n_1 ករណីកើតឡើង
+ ព្រឹត្តិការណ៍ H_2 មាន n_2 ករណីកើតឡើង

… … … … … … …

+ ព្រឹត្តិការណ៍ H_k មាន n_k ករណីកើតឡើង

គេបានចំនួនរបៀបទាំងអស់ក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ H គឺ $n_1+n_2+n_3+...+n_k$ របៀប ។

ឧទាហរណ៍១ ៖ សិស្សសាលាមួយត្រូវប្រឡងបញ្ចប់វគ្គ ដោយសាលាតម្រូវអោយជ្រើសរើស វិញ្ញាសាបីប្រភេទគឺ ៖

+ សំណួរ ងាយស្រួល មាន 48 ប្រយោគសំណួរ
+ សំណួរ កំរិតមធ្យម មាន 40 ប្រយោគសំណួរ
+ សំណួរ លំបាក មាន 32 ប្រយោគសំណួរ

សួរថា តើមានប៉ុន្មានរបៀបក្នុងការជ្រើសរើសសំណួរប្រឡង ?

ចម្លើយ

រកចំនួនរបៀបក្នុងការជ្រើសរើសសំណួរ

មាន 48 របៀប ក្នុងការជ្រើសរើសសំណួរដែលងាយស្រួល

មាន 40 របៀប ក្នុងការជ្រើសរើសសំណួរដែលមានកំរិតមធ្យម

មាន 32 របៀប ក្នុងការជ្រើសរើសសំណួរដែលមានកំរិតលំបាក

នោះ យើងមាន 48+40+32=120 ករណី ក្នុងការជ្រើសរើសប្រយោគសំណួរ ។

ឧទាហរណ៍២: គេមានសំនុំ $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ ។សួរថា ៖

a. តើមានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា ក្នុងការបង្កើតលេខ 4 ខ្ទង់យ៉ាងណាអោយលេខ 1 ត្រូវតែមានហើយវាជាចំនួនសេស ។
b. តើមានប៉ុន្មានរបៀបដើម្បី បង្កើតលេខ 5 ខ្ទង់ផ្សេងៗគ្នា ដែលធ្វើយ៉ាងណាអោយចំនួនទាំងអស់នោះគឺចាប់ផ្តើមដោយលេខសេស ហើយវាបញ្ចប់ដោយលេខគូ ។

ចម្លើយ

a. រកចំនួនរបៀបដើម្បីបង្កើតលេខ 4 ដែលលេខ 1 ត្រូវតែមានហើយវាជាចំនួនសេស
តាង ចំនួនដែលត្រូវរកដោយ $n=\overline{a_1a_2a_3a_4}$
បើ n ជាចំនួនសេសនោះ $a_4=\{1,3,5\}$ នោះយើងពិនិត្យមើលករណីដូចខាងក្រោម ៖

+ ករណីទី1: $a_4 = 1$ គេបានចំនួនដែលរកមានរាង $n_1 = \overline{a_1 a_2 a_3 1}$

a_1 មាន 5 ជម្រើស $a_1 \neq 0$

a_2 មាន 5 ជម្រើស

a_3 មាន 4 ជម្រើស

នោះ យើងមាន $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ ចំនួននៃ n ។

+ ករណីទី2: $a_4 = 3$ គេបាន ចំនួនដែលរកមានរាង $n_2 = \overline{a_1 a_2 a_3 3}$

A. បើ $a_1 = 1$ គេបាន

a_2 មាន 5 ជម្រើស

a_3 មាន 4 ជម្រើស

នោះមាន $5 \cdot 4 = 20$ ករណី នៃ n_2

B. បើ $a_1 \neq 1$ គេបាន ៖

a_1 មាន 4 ជម្រើស $a_1 \neq 0$

នោះ យើងពិនិត្យមើលថា លេខ 1 អាចឈរ ទៅក្នុងខ្ទង់ នៃ a_2 ឬ a_3

- ឧបមាថា បើ $a_2 = 1$ នោះ a_3 មាន 4 ជម្រើស ។

ដូចគ្នាដែរ, ចំពោះ $a_3 = 1$ នោះ a_2 មាន 4 ជម្រើស ។

ដូចនេះ ក្នុងករណី $a_1 \neq 1$ យើងមាន $4 \cdot (4 \cdot 2) = 32$ ចំនួន ។

សរុបមក, ក្នុងករណី A និង B យើងបាន 20+32=52 ករណី នៃ n_2 ។

+ ករណីទី3: បើ $a_4 = 5$ គេបានចំនួនករណីគឺដូចគ្នានឹងករណីទី 2 ដែរ, គេបាន ៖

ដូចនេះ ចំនួនករណីសរុបគឺ $n_1 + 2n_2 = 100 + 2 \cdot 52 = 204$ នៃចំនួន n ។

III. តំរៀប (Arragnment)

1. **និយមន័យ** គេអោយA ជាសំនុំមួយដែលមាន n ជាតុ និងចំនួនគត់ k មួយ $(k \leq n)$ ។ គេអាចបង្កើតចំនួនស៊េរីលេខមួយ ដែលមាន k ជាតុ ដោយយកចេញពី n ជាតុ ដែល ៖
   a. ដែល k ជាតុនេះ គឺខុសៗគ្នា ដោយគិតលំដាប់ ថ្នាក់ ។

គេតាង និមិត្តសញ្ញាដោយ៖ A_n^k ។

2. **រូបមន្តនៃ តំរៀប**

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

ឧទាហរណ៍២: គេអោយសំណុំ $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ។ សួរថា តើគេអាចបង្កើតលេខដែលមាន ចំនួន 5 ខ្ទង់ បានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា ចេញពីសំនុំ A ។

ចម្លើយ

រកចំនួនរបៀបដែលគេអាចបង្កើតលេខដែលមាន 5 ខ្ទង់ផ្សេងគ្នា

បំនួនដែលមាន លេខ 5 ខ្ទង់ ផ្សេងគ្នា ដែលបង្កើតចេញពីសំនុំ A គឺ ជាតំរៀបនៃ 5 ជាតុ ខុសៗគ្នា ក្នុងចំណោម 7 ជាតុគេបាន ៖

តាមរូបមន្ត $A_7^5=\frac{7!}{(7-5)!}=\frac{7!}{2!}=2520$ របៀបផ្សេងគ្នា ។

ដូចនេះ គេអាចបង្កើតលេខ 5 ខ្ទង់បាន 2520 របៀបផ្សេងគ្នា ។

ឧទាហរណ៍២: តើគេអាចរៀបចំនួនគត់ ដែលមាន 4 ខ្ទង់បានប៉ុន្មានរៀបគ្នា ?

ចម្លើយ

របៀបទី១៖

យើងតាង សំនុំ $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

បំនួនលេខ 4 ខ្ទង់ខុសៗគ្នា ដែលបង្កើតចេញពីសំនុំ A គឺមាន ៖

$$A_{10}^4=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=10.9.8.7=5040 \text{ ករណី}$$

ប៉ុន្តែ ក្នុងចំណោម A_{10}^4 មាន លេខដែលផ្តើមដោយលេខសូន្យគឺមានចំនួន A_9^3 លេខ ។

(ព្រោះ លេខដែលផ្តើមដោយលេខសូន្យមានរាង $\overline{0a_2a_3a_4}\Rightarrow$ មាន A_9^3 នៃ $\overline{a_2a_3a_4}$)

ដូចនេះ បំនួនដែលត្រូវរកគឺ $A_{10}^4-A_9^3=5040-504=4536$ ករណី ។

របៀបទី២ ៖

តាង $n=\overline{a_1a_2a_3a_4}$ ជាចំនួនដែលត្រូវរក យើងបាន ៖

a_1 មាន 9 ជម្រើស $a_1\neq 0$

a_2 មាន 9 ជម្រើស

a_3 មាន 8 ជម្រើស

a_4 មាន 7 ជម្រើស

នោះ យើងមាន , $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7=4536$ លេខផ្សេងគ្នា ។

របៀបទី3 ៖

តាង $n=\overline{a_1a_2a_3a_4}$ ជាចំនួនដែលត្រូវរក យើងបាន ៖

+ a_1 មាន 9 ជម្រើស $a_1\neq 0$
+ មាន A_9^3 ជម្រើសនៃ $\overline{a_2a_3a_4}$

នាំអោយ យើងមាន , $9\cdot A_9^3=4536$ លេខខុសៗគ្នា ។

ឧទាហរណ៍៣៖ ពី 6 លេខ $0,1,3,5,7,9$ ។ តើគេអាចបង្កើតចំនួនដែលមាន 4 ខ្ទង់បានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា និងចំនួននោះមិនចែកដាច់នឹង 5 ។

ចម្លើយ

រកលេខ 4 ខ្ទង់ខុសៗគ្នា ហើយមិនចែកដាច់នឹង 5

តាង ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ $n=\overline{a_1a_2a_3a_4}$

តាមបម្រាប់ , n មិនចែកដាច់នឹង 5 នោះ $a_4\neq\{0,5\}$

របៀបទី១ ៖

+ មាន 4 ជម្រើសក្នុងការរើសយក a_4
+ មាន 4 ជម្រើសក្នុងការរើសយក a_1
+ មាន A_4^2 ជម្រើសក្នុងការរើសយក $\overline{a_2a_3}$

នោះយើងមាន , $4\cdot 4\cdot A_4^2=192$ ចំនួនដែលត្រូវរក ។

របៀបទី២ ៖

+ មាន A_6^4 ជម្រើសក្នុងការបង្កើតលេខ 4 ខ្ទង់ខុសៗគ្នា

ក្នុងនោះ A_6^4 មាន A_5^3 ករណីដែល ផ្តើមដោយលេខសូន្យ (រាង $n=\overline{0a_2a_3a_4}$)

ដូចនេះ មាន $A_6^4-A_5^3=300$ ករណីដែលមានលេខ 4 ខ្ទង់ខុសៗគ្នា ។

+ ប៉ុន្តែ ឥឡូវ យើងនឹងរក លេខ 4 ខ្ទង់ខុសៗគ្នា ដែលចែកដាច់នឹង 5 ។ នោះបើ n ចែកដាច់ នឹង 5 កាលណា $a_4 = \{0,5\}$ គេបាន ៖

a_4 មាន 2 ជម្រើស

មាន A_5^3 ជម្រើស នៃ $\overline{a_1a_2a_3}$

នាំអោយ , មាន $2 \cdot A_5^3$ ករណីដែលចែកដាច់នឹង 5 ។

- o បំពោះករណីខាងលើនេះ យើងត្រូវដកចំនួនដែលផ្តើមដោយកលេខសូន្យចេញ ។ គឺថា ពេលនេះ គឺ $a_1 = 0$ នោះ $a_4 = 5$ និង មាន A_4^2 ករណីនៃ $\overline{a_2a_3}$ ។
  នោះ គេមាន , $1 \cdot A_4^2 \cdot 1 = A_4^2$ ករណី ។

ដូចនេះ គេមាន $2A_5^3 - A_4^2 = 108$ ករណី ។

ដូចនេះ សរុបសេចក្តីមក ៖ $300 - 108 = 192$ ករណី ។

IV. **ចម្លាស់** (Permulation)

1. **និយមន័យ** ៖ គេឲ្យសំណុំ A មួយមានn ធាតុ ។ បម្លាស់ នៃ n ធាតុគឺជា តំរៀបនៃ n ធាតុ ក្នុងបំណោម n ធាតុ។ បម្លាស់ n ធាតុ គឺតាងដោយសញ្ញា ៖

$$P_n = n!$$

2. **ចម្លាស់មិនច្រំដែល** ៖ យើងតាងចម្លាស់នៃ n វត្ថុមិនច្រំដែលគឺ ជាចំនួនតំរៀបដែលរៀបគិតលំដាប់ នៃ n វត្ថុផ្សេងគ្នាចូលក្នុង n ទីតាំង ។

3. **ចម្លាស់** (**រាងជាបន្ទាត់**)
   យើងមាន n វត្ថុ ដែលយើង ,
   ជ្រើសរើស 1 វត្ថុដាក់ត្រង់ទីតាំងទី1 មាន n របៀបក្នុងការជ្រើសរើសនឹងនៅសល់ $n-1$ វត្ថុ
   ជ្រើសរើស 1 វត្ថុទៀតដាក់ត្រង់ទីតាំងទី2 មាន $n-1$ របៀបក្នុងការជ្រើសរើសនឹងនៅសល់ $n-2$ វត្ថុ
   … … … … … … … … … … …
   មាន 2 ជម្រើសក្នុងការ ដាក់ 1 វត្ថុ ត្រង់ទីតាំងទី $n-1$ នឹងនៅសល់ 1 វត្ថុ
   មាន 1 ជម្រើស សម្រាប់ដាក់ 1 វត្ថុចុងក្រោយ ។

ដូចនេះ បំនួនករណីទាំងអស់គឺ $n \cdot (n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_n$ ។

ពិនិត្យមើល ,

គឺគេមាន n ប្រឡោះ ដែលនឹងត្រូវដាក់តំរៀប n វត្ថុ ។

ឧទាហរណ៍១: គេឲ្យ លេខ 6 ខ្ទង់កំនត់ដោយ 1,2,3,4,5,6 ។ គេចង់បង្កើត ចំនួនមួយដែលមាន6 ខ្ទង់ផ្សេងគ្នា ។ សួរថា តើក្នុងបណ្តាចំនួនដែលមាន លេខ 6 ខ្ទង់នេះមានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា ដែលក្នុងនោះ លេខ 1 និង លេខ 6 មិននៅជាប់គ្នាទេ ?

ចម្លើយ

ក្នុងការបង្កើតចំនួនមួយ ដែលមានលេខ 6 ខ្ទង់ផ្សេងគ្នា ដែលជ្រើសចេញពី 1,2,3,4,5,6 គឺមាន $P_6 = 6! = 720$ របៀបផ្សេងគ្នា ។

+ ឥឡូវយើងគណនារកចំនួន ដែលលេខ 1 និង លេខ 6 មិនឈរនៅជាប់គ្នា ។
+ ឧបមាថា លេខ 1 និង លេខ 6 ឈរនៅជាប់គ្នា នោះ លេខ 1 និង លេខ 6 វាផ្លាស់ជាមួយ4 លេខដែលនៅសល់ គឺយើងទទួលបាន ៖ 5! ករណី = 120 ករណី ។
+ ប៉ុន្តែ រាល់ពេលដែល លេខ 1 និង លេខ 6 ផ្លាស់ម្តងៗ គឺមាន 2! ករណី = 2 ករណី ទៀត គេបាន ៖ $5!2! = 120\cdot 2 = 240$ ករណី ដែលលេខ 1 និង លេខ 6នៅឈរជាប់គ្នា ។

ដូចនេះ មាន 720-240=480 ករណី ដែល លេខ 1 និង លេខ 6មិនឈរនៅជាប់គ្នា ។

4. **ចម្លាស់វង់**

ឧទាហរណ៍ថា បើគេអញ្ជើញ ភ្ញៀវ n នាក់ អោយចូលអង្គុយនៅលើតុ មួយមានរាងជារង្វង់ ។ សួរថា តើមានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា ដើម្បីអោយភ្ញៀវអង្គុយតាមលំដាប់ ?

យើងពិនិត្យ មើលឃើញថា, ភ្ញៀវម្នាក់ បានចូលទៅអង្គុយកន្លែងគួរសម្បនៅតុមួយដែលមានរាងមូល ។ នោះនៅសល់ $(n-1)$ ភ្ញៀវទៀត ដែលនឹងត្រូវចូលទៅអង្គុយតុមូល ដែលមាន $(n-1)$ កៅអីដែលនៅសល់ សម្រាប់ពួកគាត់ ។ គេបាន ,

$(n-1)!$ របៀបផ្សេងគ្នា សម្រាប់ភ្ញៀវ n នាក់ ។

5. **ចម្លាស់មានភាពច្រំដែល**

គេមាន n វត្ថុ យកទៅតំរៀបក្នុង n ទីតាំង ។

ក្នុង n វត្ថុ នេះមាន	n_1	វត្ថុដូចគ្នា	
មាន	n_2	វត្ថុដូចគ្នា	
មាន	n_3	វត្ថុដូចគ្នា	
...	...	....	....
មាន	n_k	វត្ថុដូចគ្នា	

ដែល $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ ខុសគ្នាពីរៗ

ដូចនេះ តំរៀបនៃ n វត្ថុ ដែលមានធាតុច្រំដែល $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ គឺកំណត់ដោយរូបមន្ត ,

$$P_n\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right) = \frac{n!}{n_1!.n_2!\ldots n_k!}$$

ឧទាហរណ៍១: គេមានទូដាក់សៀវភៅមួយ ។ គេចង់ តំរៀបសៀវភៅ គណិត 3 ក្បាលដូចគ្នា , សៀវភៅ រូប 4 ក្បាលដូចគ្នា និង សៀវភៅ គីមី 2 ក្បាលដូចគ្នា ទៅក្នុងទូដាក់សៀវភៅនេះ ។ សួរថា តើមានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នា ដែលនឹងអាចកើតឡើង ?

ចម្លើយ

រកចំនួនរបៀបក្នុងការរៀបសៀវភៅដាក់ក្នុងទូ

តាមបម្រាប់ប្រធាន សៀវភៅពុម្ពទាំងអស់មាន 9 ក្បាល

និងយើងមានសៀវភៅ គណិត 3 ក្បាលដូចគ្នា

សៀវភៅ រូប 4 ក្បាលដូចគ្នា

សៀវភៅ គីមី 2 ក្បាលដូចគ្នា

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបក្នុងតំរៀបគឺ $P_9 = \dfrac{9!}{3!.4!.2!} = 1260$ របៀបផ្សេងគ្នា ។

ឧទាហរណ៍២: គេអោយ 6 តួអក្សរនៃពាក្យ BENZEN ។ សួរថា តើមានរបៀបផ្សេងគ្នាក្នុងការតំរៀបអក្សរនេះ ?

ចម្លើយ

ក្នុង 6 តួអក្សរនៃពាក្យ BENZEN មាន៖ E មាន 2 តួអក្សរ

B មាន 1 តួអក្សរ

N មាន 2 តួអក្សរ

Z មាន 1 តួអក្សរ

ដូចនេះ ចំនួនធាតុដែលតំរៀបបានគឺ , $P_6\left(2,1,2,1\right) = \dfrac{6!}{2!.1!.2!.1!} = 180$ របៀប ។

V. បន្សំ (Combination)

1. **និយមន័យ ៖** គេឲ្យសំណុំ A មួយដែលមាន n ធាតុ និង មានចំនួនគត់ $p\left(p \le n\right)$ ។ គេជ្រើសរើស p ធាតុមិនច្រំដែលខុសៗគ្នា ចេញពី n ធាតុនៃសំនុំ A ដោយមិនគិតពីលំដាប់ធាតុ ។ គេតាងបន្សំនៃ p ធាតុ ជ្រើសចេញពី n ធាតុគឺ តាងដោយសញ្ញា ៖ C_n^p

2. រូបមន្ត នៃបន្សំ

បើយើងធ្វើបម្លាស់នៃ p វត្ថុក្នុងបន្សំមួយ, នោះយើងនឹងបានតំរៀបទាំងអស់នៃ n វត្ថុយក p មិនប្រំដែល ។បម្លាស់នេះ តាងដោយ $p!$ ។ដូចនេះ គ្រប់បន្សំនឹងមាន $p!$(តំរៀប) ។ នោះយើងបានរូបមន្តមួយកំណត់ដោយ ,

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

នោះគេបាន ៖

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

3. លក្ខណៈ នៃបន្សំ

a. $C_n^0 = C_n^n = 1$

b. $C_n^k = C_n^{n-k}$ ព្រោះ យើងយក $k = n-k$ ជំនួសក្នុង k

c. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ ព្រោះ $\begin{array}{c} C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \\ \downarrow \\ C_n^k \end{array}$

d. $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$

ព្រោះ $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{\left[(n-1)-(k-1)\right]!} = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1}$

e. $C_n^k = \frac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1}$ ព្រោះ

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{(n-k+1)\cdot n!}{(k-1)!k(n-k+1)\cdot(n-k)!}$$

$$= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)\cdot(n-k)!}$$

$$= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!}$$

$$= \frac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1}$$

f. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$ ព្រោះ

ប្រើ ទ្វេធាញូតុន ៖ $\left(a+b\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}\cdot b^k$ រួចយក $a=1$ និង $b=1$

ចំណាំ ៖ $\left(a-b\right)^n=\left[a+\left(-b\right)\right]^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}\cdot\left(-b\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k a^{n-k}\cdot b^k$

ឬ $\left(a-b\right)^n=\left[a+\left(-b\right)\right]^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k\cdot\left(-b\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{n-k} a^k\cdot b^{n-k}$

ឧទាហរណ៍១: ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស 20 នាក់ ក្នុងនោះមានគណកម្មការថ្នាក់ពីរនាក់ ។ សួរថាតើមានប៉ុន្មានរបៀប ដើម្បីអោយមនុស្សបីនាក់ចូលរួម ក្នុងសន្និសិទមួយក្នុងសណ្ឋាគារ ដែលយ៉ាងណាអោយអ្នកទាំងបីនាក់នោះយ៉ាងហោចណាស់ក៏មានគណកម្មការថ្នាក់ម្នាក់ដែរ ?

ចម្លើយ

របៀបទី១ ៖

យើងមាន , $C_2^1\cdot C_{18}^2$ ដែលក្នុងនោះមាន គណកម្មការមួយរូប

$C_2^2\cdot C_{18}^1$ ដែលក្នុងនោះមានគណកម្មការ បំនួនពីររូប

ដូចនេះ យើងមាន $C_2^1\cdot C_{18}^2+C_2^2\cdot C_{18}^1=324$ ករណី

របៀបទី២ ៖

យើងមាន , C_{20}^3 របៀបក្នុងការជ្រើសរើសបីនាក់ពី សិស្សទាំង20 នាក់

មាន C_{18}^3 របៀបក្នុងការជ្រើសរើសសិស្សបីនាក់ដែលមិនមានគណកម្មការ ថ្នាក់ចូលរួម

នោះយើងបាន: $C_{20}^3-C_{18}^3=324$ ករណី ដែលយ៉ាងហោចណាស់ មានគណកម្មការថ្នាក់ម្នាក់ ក្នុងចំណោមសិស្សទាំងបីនាក់ដែលចូលរួមក្នុងសន្និសិទ ។

ឧទាហរណ៍២: គេមានតែម 5 ផ្សេងគ្នា សម្រាប់បិទលើសំបុត្រ 6 ផ្សេងគ្នាដែរ ។ ឥឡូវយើងជ្រើសរើសតែមបី យកទៅបិទសំបុត្របីផ្សេងគ្នាដែរ ។ តែមមួយ បិទបានសំបុត្រតែមួយគត់ ។ សួរថា តើមានប៉ុន្មានរបៀបក្នុងការធ្វើបែបនេះ ?

ចម្លើយ

យើងជ្រើសរើសតែមបីគឺមាន C_5^3 របៀប

និង មាន C_6^3 របៀបក្នុងការជ្រើសរើស សំបុត្រ 3 ចេញពីសំបុត្រទាំង 6

និង មាន $3!$ របៀបក្នុងការជ្រើសរើសតែមបីទៅបិទ នឹងសំបុត្រទាំងបី ។

ដូចនេះ យើងមាន $3!\cdot C_5^3 \cdot C_6^3 = 1200$ ករណី ។

ប្រូបាប៊ីលីតេ (PROBABILITY)

I. លំហសំណាក និងព្រឹត្តិការណ៍(SAMPLE SPACES AND EVENTS)

   a. ពិសោធន៍ចៃដន្យ(RANDOM EXPERIMENTS)

   b. វិញ្ញាសា

   c. លំហសំណាក(SAMPLE SPACES)

   d. ព្រឹត្តិការណ៍(EVENTS)

II. ប្រូបាប (PROBABILITY)

   1. និយមន័យ (DIFFENITION)
   2. លក្ខណៈប្រូបាប (PROPERTIES OF PROBABILITY)
   3. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍សមាស
   4. គណនាប្រូបាបដោយប្រើបន្សំ
   5. គណនាប្រូបាបដោយប្រើចម្លាស់
   6. ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ (THE CONDITIONAL PROBABILITY)
   7. ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា (INDEPENDENCE EVENT)
   8. ទ្រឹស្តីបទ បៃយេស (BAYES’ THEOREM)

ប្រូបាប៊ីលីតេ

PROBABILITY

ក្នុងពិសោធន៍ចៃដន្យមួយ គេមិនអាចដឹងប្រាកដថា ថាតើមានព្រឹត្តិការណ៍ណាមួយនឹងកើតឡើងជាក់លាក់នោះទេ។ក្នុងប្រូបាប បើគេរំពឹងថា នឹងមានព្រឹត្តិការណ៍នោះវាមានតម្លៃ នោះចន្លោះ 0 និង 1 ។ បើយើងប្រាកដថា ព្រឹត្តិការណ៍នឹងកើតមានឡើង នោះ ប្រូបាបវាគឺស្មើនឹង 100% ឬ 1 តែបើយើងរំពឹងថា ព្រឹត្តិការណ៍នឹងមិនកើតមានឡើង នោះប្រូបាបវាគឺស្មើនឹង 0% ។

I. **លំហសំណាក និងព្រឹត្តិការណ៍**(SAMPLE SPACES AND EVENTS)

a. **ពិសោធន៍ចៃដន្យ**(RANDOM EXPERIMENTS)

ពិសោធន៍មួយ ដែលគេធ្វើដោយមិនបានដឹងជាមុនថា នឹងមានលិទ្ធផលអ្វីមួយកើត ឡើងប្រាកដ គឺគេហៅថា ពិសោធន៍ចៃដន្យ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ បើគេបោះកាក់មួយ ចំនួនមួយដងនោះ គេមិនអាចដឹងថាតើនឹងមានលទ្ធផលអ្វីកើតឡើងប្រាកដទេ ។ នេះជាពិសោធន៍ចៃដន្យ ។

b. **វិញ្ញាសា**

ពិសោធន៍មួយ ដែលគេកំនត់ ធ្វើដោយជាក់លាក់ ក្នុងពិសោធន៍ចៃដន្យមួយគឺ ហៅថាវិញ្ញាសា ។

ឧទាហរណ៍ ៖ ការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ ពីរបំនួនមួយដង ។

c. **លំហសំណាក**(SAMPLE SPACES)

យើងតាងលំហសំណាកដោយ អក្សរ S ។
លំហសំណាក គឺជាសំនុំនៃលទ្ធផលទាំងអស់ ដែលអាចកើតមានក្នុងវិញ្ញាសាមួយនៃពិសោធន៍ចៃដន្យមួយ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ ការបោះកាក់ មួយដែលមានមុខ H និង ខ្នង T បំនួនពីរដងគឺមានលទ្ធផល ,

$2^2 = 4$ ករណីគឺ $\{HH, HT, TH, TT\}$ ហៅថា លំហសំណាក ។

d. **ព្រឹត្តិការណ៍**(EVENTS)

ព្រឹត្តិការណ៍ជាសំនុំរងនៃលំហសំណាក ។

ព្រឹត្តិការណ៍ ៖

1. ព្រឹត្តិការណ៍ឯកជាតុ
2. ព្រឹត្តិការណ៍ មិនអាចមាន
3. ព្រឹត្តិការណ៍ ប្រាកដ
4. ព្រឹត្តិការណ៍ សមាស
   ក. ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ
   ខ. ព្រឹត្តិការណ៍ ផលបូក
   គ. ព្រឹត្តិការណ៍ ផ្ទុយ

\+ ព្រឹត្តិការណ៍ ឯកជាតុ គឺជាព្រឹត្តិការណ៍ ដែលមានលទ្ធផលតែមួយគត់កើតឡើង ។

\+ ព្រឹត្តិការណ៍ មិនកើតមាន គឺមានន័យថាគ្មានលទ្ធផលណាមួយកើតមានឡើង ។

\+ ព្រឹត្តិការណ៍ ប្រាកដ គឺគ្រប់លទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចកើតមានឡើងក្នុងលំហ សំណាក ។

\+ ព្រឹត្តិការណ៍ សមាស

ព្រឹត្តិការណ៍ ជាសំនុំរងនៃលំហសំណាក នោះគេអាចប្រើសញ្ញា $\cap$ឬ$\cup$ ដើម្បីបង្កើតព្រឹត្តិការណ៍ បន្ថែមទៀតដែលជាព្រឹត្តិការណ៍សមាស ដែលគេហៅថា ៖ ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ ឬ ព្រឹត្តិការណ៍ ផលបូក ។

\+ ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃ A និង Bគឺជាប្រជុំនៃ ព្រឹត្តិការណ៍A និងព្រឹត្តិការណ៍ B។ គេតាងដោយសញ្ញា $A\cup B$ ។

\+ ព្រឹត្តិការណ៍ ផលគុណនៃ Aនិង B គឺជាប្រសព្វនៃ ព្រឹត្តិការណ៍A និង ព្រឹត្តិការណ៍B គេតាងដោយសញ្ញា $A\cap B$ ។

\+ ព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នានៃព្រឹត្តិការណ៍ A និង ព្រឹត្តិការណ៍ B គឺព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរគ្មានលទ្ធផលណាមួយដូចគ្នា ហើយផលគុណនៃ ព្រឹត្តិការណ៍ A និង ព្រឹត្តិការណ៍ B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន ។ គេតាងដោយ ៖

$$A\cap B=\phi$$

និង $$A\cup B=S$$

\+ ព្រឹត្តិការណ៍ពីរផ្ទុយ ឬ ព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នាគឺ ,

o ផលគុណនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរ គឺជាព្រឹត្តិការណ៍មិនមានគឺថា $A\cap\bar{A}=\phi$

o ផលបូកនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរគឺជាព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដគឺថា $A\cup\bar{A}=S$

ចំណាំ ៖ ព្រឹត្តិការណ៍ពីរផ្ទុយគ្នា ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា ។

គេតាងព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃ A ដោយ $\bar{A}$ ឬ A^c ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេធ្វើវិញ្ញាសាចាប់យកឃ្លីម្តងមួយចំនួនពីរ លើកចេញពីថង់ ដែលមាន ឃ្លី បីមានពណ៌ខុសៗគ្នា គឺ ក្រហម ខៀវ លឿង ដោយដាក់ចូលវិញ ។ ចូរកំណត់លំហសំណាក និងព្រឹត្តិការណ៍ ៖

A: “ចាប់ឃ្លីពីរមានពណ៌ខុសគ្នា”

B: “ចាប់ឃ្លីខៀវនៅលើទីមួយ”

C: “ចាប់បានឃ្លីពីរមានពណ៌ដូចគ្នា”

D: “ចាប់បានឃ្លីក្រហមនៅលើទីមួយ”

ចម្លើយ

តាង S ជាលំហសំណាក B ជាឃ្លីមានពណ៌ខៀវ,តាង R ជាឃ្លីមានពណ៌ ក្រហម ,តាង Y ជាឃ្លីមានពណ៌លឿង

គេបាន , $S=\{BB,RR,YY,BR,BY,RY,RB,YB,YR\}$

$$A=\{BR,BY,RY,RB,YB,YR\}$$
$$B=\{BK,BY,BB\}$$
$$C=\{BB,RR,YY\}$$
$$D=\{RB,RY,RR\}$$

យើងសង្កេតឃើញថា ៖

+ Aនិង B មានលទ្ធផលរួមគឺ BR,BY ហៅថាព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណកំណត់ដោយ ៖

$$A\cap B=\{BR,BY\}$$

+ លទ្ធផលទាំងអស់នៃ Aនិង B ហៅថា ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកគេកំណត់សរសេរដោយ ៖

$$A\cup B=\{BR,BY,RY,RB,YB,YR,BB\}$$

+ ព្រឹត្តិការណ៍ Bនិង D ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងនឹងគ្នាព្រោះ វាគ្មានលទ្ធផលណាមួយដូចគ្នាទេ គេកំណត់សរសេរដោយ ៖ $A\cap D=\phi$

+ ដោយ $A\cap C=\varnothing$ និង $A\cup C=S$ នោះគេថា ព្រឹត្តិការណ៍ C ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹងA ឬ ព្រឹត្តិការណ៍ C ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃ A ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ ។ តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ B ជាព្រឹត្តិការណ៍ ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខជាពហុគុណនៃ3 និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខតូចជាង ឬ ស្មើនឹង 2 ។ ចូរកំណត់ ៖

ក. តើសកម្មភាពណាមួយជា ជាពិសោធន៍ចៃដន្យ, ជាវិញ្ញាសា ?

ខ. លំហសំណាក ? ចូររកធាតុនៃលំហសំណាក នៃព្រឹត្តិការណ៍ A,B និង C ។

គ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ $A\cap B, A\cap C$ និង $B\cap C$ ។

ឃ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក $A\cup B,\ B\cup C$ ។

ង. ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃព្រឹត្តិការណ៍ A,B,C ។

ច. តើព្រឹត្តិការណ៍ ណាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងនឹងគ្នា ។

ចម្លើយ

ក. ពិសោធន៍ចៃដន្យគឺសកម្មភាព បោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់

វិញ្ញាសា ៖ សកម្មភាពនៃការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ , ជាព្រឹត្តិការណ៍ ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខជាពហុគុណនៃ3 និង ជាព្រឹត្តិការណ៍ ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខតូចជាង ឬ ស្មើនឹង 2 ទាំងនេះ ហៅថា វិញ្ញាសា ។

ខ. លំហសំណាក ៖ ដោយគេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ គេបានលទ្ធផលអាចកើតឡើងមានលេខ 1,2,3,4,5 និង 6 ។ នោះគេបានលំហសំណាកគឺ ៖ S={1,2,3,4,5,6} ។

ចូររកធាតុនៃលំហសំណាក នៃព្រឹត្តិការណ៍ A,B និង C

+ ព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ A={2,4,6}

+ ព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ B={3,6}

+ ព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ C={1,2}

គ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ $A\cap B=\{6\}$; $A\cap C=\{2\}$; $B\cap C=\phi$

ឃ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក $A\cup B=\{2,3,4,6\}; B\cup C=\{1,2,3,6\}$

ង. ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង ព្រឹត្តិការណ៍ A,B,C :

$$\overline{A}=\{1,3,5\}\ ;\overline{B}=\{1,2,4,5\}\quad ;C=\{3,4,5,6\}$$

ច. ដោយ $B\cap C=\phi$ នោះ Bនិង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរមិនទាក់ទងគ្នា ។

II. ប្រូបាប (PROBABILITY)

ប្រូបាបជាមានអត្ថប្រយោជន៍ អ្វីខ្លះក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ ?
គេប្រើ ប្រូបាប ក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ របស់យើងដូចជា ប្រើប្រាស់ក្នុងកំរិតនៃភាពល្អៀង ភាពមិនទៀងទាត់ អាចដោះស្រាយបញ្ហាក្នុងមជ្ឈដ្ឋានមួយដែលមានការប្រែប្រួល ។ គេអាចប្រើប្រូបាប ក្នុងការសម្រេចចិត្ត ឬ ការជ្រើសរើស ជាពិសេសគឺ ក្នុងវិស័យ សេដ្ឋកិច្ច ឧត្តុនិយម ការជានាវាប់រង ..... ។

1. និយមន័យ (DIFFENITION)

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ ជាផលធៀបនៃករណីស្រប និងករណីអាច ។
គេកំណត់ដោយរូបមន្ត ,

$$P(A)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\frac{n(A)}{n(S)}$$

2. លក្ខណៈប្រូបាប (PROPERTIES OF PROBABILITY)

a. បើ $e_{i(1\le i\le n)}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកជាតុនៃលំហសំណាក S គេបាន ៖

$$P(e_1)+P(e_2)+\ldots+P(e_n)=\sum_{n=1}^{n}P(e_i)=P(S)=1$$

b. ចំណាំ , S ជាលំហសំណាក ៖

$+A$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ មិនកើតមានឡើង តាង $A=\phi$ ។
នាំអោយ $n(A)=0\Rightarrow P(A)=0$

$+A$ ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃលំហសំណាក S ។ គេបាន ,
$n(A)\le n(S)\Rightarrow P(A)\le P(S)$

$+P(S)=1$

$+P(\phi)=0$

$+0\le P(A)\le P(S)$

+ប្រូបាប ជាអនុគមន៍ដែលអនុវត្តន៍ពីលំហសំណាក S ទៅ $[0,1]$

3. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍សមាស

a. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃ A និង B គឺកំណត់ដោយ

+ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$; $A\cap B=\phi$; A,B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ។

+ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)$; $A\cap B\neq\phi$; A,B ជាព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា ។ $P(B|A)$ មើលថា $P(B$ ដែល A កើតមុន $)$

+ គេមាន n ជាព្រឹត្តិការណ៍: $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n$ ដែលមិនទាក់ទងគ្នាពីរៗយើងបាន:
$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1).P(A_2)\ldots.P(A_n)$

ចំណាំ ៖ ចំពោះប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ យើងនឹងសិក្សាលំអិតនៅផ្នែកខាងមុខ ។

b. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃ A និង B គឺកំណត់ដោយ ៖

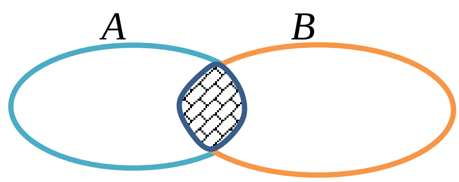
+ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$; $A\cap B\neq\phi$

+ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, $A\cap B=\phi$, A,B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ។

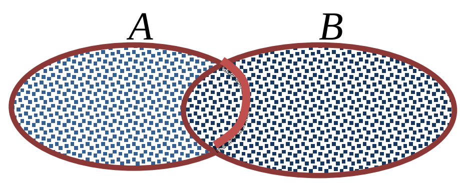
+ មាន n ជាព្រឹត្តិការណ៍: $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n$ ដែលមិនទាក់ទងគ្នាពីរៗ យើងបាន ,
$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

c. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ , បើ A ជាព្រឹត្តិការណ៍មួយដែលមិនកើតឡើងនោះដោយ $\bar{A}$ ដែល $A\cup\bar{A}=S\Rightarrow P(\bar{A})=1-P(A)$ ។

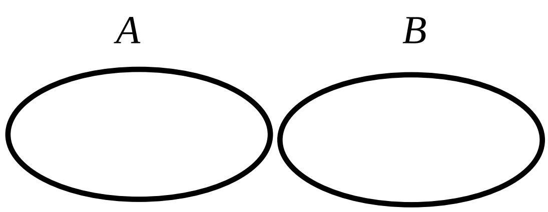
d. ពិនិត្យមើលលើដ្យាក្រាមវិន



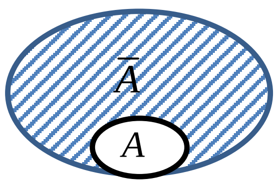
$A\cap B$



$A\cup B$



$A\cap B=\phi$



- បើមានបីព្រឹត្តិការណ៍ A,Bនិង C នោះគេបាន ៖

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

4. **គណនាប្រូបាបដោយប្រើបន្សំ**

ដោយយើងដឹងហើយថា ដើម្បីគណនាប្រូបាប យើងត្រូវ រកចំនួនករណីស្រប និង រកចំនួនករណីអាច ជាមុនសិន ។ ពេលខ្លះការគណនា ករណីទាំងពីរខាងលើនេះ មានការលំបាក ហេតុនេះ យើងត្រូវប្រើរូបមន្តបន្សំជាជំនួយ ។

ឧទាហរណ៍១៖ ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ខៀវ 8 និងឃ្លីពណ៌ស 6 ។ ឃ្លី 5 ត្រូវគេជ្រើសរើសដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាបដែល ៖

ក. ឃ្លីទាំង 5 សុទ្ធតែពណ៌ខៀវ

ខ. ឃ្លីទាំង 5 សុទ្ធតែពណ៌ស

គ. ឃ្លីពីរ ពណ៌ខៀវ និងឃ្លី បីពណ៌ស ។

ចម្លើយ

ក.គណនាប្រូបាបដែលឃ្លីទាំង 5 សុទ្ធតែពណ៌ខៀវ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ ចាប់បានឃ្លីទាំង 5 សុទ្ធតែពណ៌ខៀវ

បំនួនករណីស្របគឺ $C_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!5!} = 56$

បំនួនករណីអាចគឺ $C_{14}^5 = \frac{14!}{(14-5)!5!} = 2002$

នោះ $P(A) = \frac{C_8^5}{C_{14}^5} = \frac{56}{2002} = .279 = 27.90\%$

ខ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីទាំង 5 សុទ្ធតែពណ៌ស

តាង B ជាព្រឹត្តិកាណ៍ ដែលចាប់បានឃ្លីទាំង 5 សុទ្ធតែពណ៌ស

បំនួនករណីស្រប , C_6^5

នោះ $P(B) = \frac{C_6^5}{C_{14}^5} = \frac{6}{2002} = .0029$

គ. រកប្រូបាប ដែលចាប់បានឃ្លីពីរ ពណ៌ខៀវ និងឃ្លី បីពណ៌ស

តាង C ជាព្រឹត្តិកាណ៍ដែលចាប់បានឃ្លីពីរ ពណ៌ខៀវ និងឃ្លី បីពណ៌ស

ចំនួនករណីស្រប ៖ $C_6^3 \times C_8^2$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{C_6^3 \times C_8^2}{C_{14}^5}=\dfrac{560}{2002}=.2797$

ឧទាហរណ៍២៖ បៀ 2 សន្លឹកត្រូវបានគេហូតចេញដោយចៃដន្យ ចេញពីហូរ 52 សន្លឹក ។

គណនាប្រូបាបដែលហូតបានបៀទាំងពីរនោះជាសន្លឹកអាត់ ។

5. **គណនាប្រូបាបដោយប្រើចម្លាស់**

ដូចគ្នានឹងការប្រើបន្សំដែរ គឺ ពេលខ្លះដំណោះស្រាយមួយចំនួន គេត្រូវប្រើចម្លាស់ក្នុងការដោះស្រាយ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេបង្កើតលេខសង្ងាត់របស់សោដោយ ចំនួនមួយដែលមានលេខ 4 ខ្ទង់ ខុសពីសូន្យ ។

ក. តើគេអាចបង្កើតលេខសម្ងាត់នេះ បានប៉ុន្មានបែប ?

ខ. គេជ្រើសរើស យកលេខសម្ងាត់មួយដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ ៖

A: “លេខសម្ងាត់ជាចំនួនគូរ”

B: “លេខសម្ងាត់ទាំងបួនជាលេខគូ”

C: “លេខសម្ងាត់ទាំងបួនមានលេខមួយ តែមួយគត់”

D: “លេខសម្ងាត់ទាំងបួនសុទ្ធខុសៗគ្នា”

ចម្លើយ

ក. លេខសម្ងាត់នេះ ជាចម្លាស់ 4 លេខដែលយកចេញពី 9 លេខហើយអាចមានលេខប្រាំដែល ។

ខ. ការរើសយកលេខសម្ងាត់និមួយៗ មានឱកាសដូចគ្នាព្រោះគេរើសដោយចៃដន្យ គេបាប្រូបាបនៃការយកបានលេខនិមួយៗ ជាសមប្រូបាប ។

+ ព្រឹត្តិការណ៍ A ជាព្រឹត្តិកាណ៍យកលេខសម្ងាត់ជាចំនួនគូគឺជាចំនួនដែលមានលេខ 2,4,6,8 នៅខាងចុង ។ លេខនិមួយៗក្នុងចំណោមបីលេខខាងដើមរបស់លេខសម្ងាត់ត្រូវរើសចេញពីរ 9 លេខ ហើយលេខចុងក្រោយរើសចេញពី 4 លេខដែលជាលេខគូ ។
គេអាចបង្កើតលេខសម្ងាត់តាមរបៀបនេះ បានចំនួន $9^3 \times 4$ ដោយចំនួនករណីអាចគឺ 9^4 និងចំនួនករណីស្របមាន $9^3 \times 4$ គេបាន ៖

$$P(A)=\frac{9^3\times 4}{9^4}=\frac{4}{9}=.444$$

+ ព្រឹត្តិការណ៍ B ជាព្រឹត្តិការណ៍ មានលេខទាំងបួនខ្ទង់ជាលេខគូ នោះលេខមួយ ខ្ទង់ៗ ត្រូវរើសពី 4 លេខ 2,4,6,8 ហើយអាចប្រំដែល ។
  គេបានចំនួនចម្លាស់ប្រំដែលនៃ 4 ជាតុគឺ $4^4=256$ ។ នោះគេបាន ៖

$$P(B)=\frac{256}{6561}=.390$$

+ ព្រឹត្តិការណ៍ C ព្រឹត្តិការណ៍ លេខសម្ងាត់មានលេខ មួយតែម្តងគត់ ៖
  លេខ មួយ អាចមានទីតាំង 4 បែបគឺ $1\circ\circ\circ\ ;\circ1\circ\circ;\circ\circ1\circ;\circ\circ\circ1$ ។
  ឯលេខនីមួយៗក្នុងចំណោមលេខនៅត្រង់បីកន្លែង ទៀតត្រូវមាន 8 ជម្រើស
  នោះចំនួនលេខសម្ងាត់ដែលកើតឡើងទាំងអស់មាន , 4×8^3 គេបាន ៖

$$P(C)=\frac{4\times 8^3}{9^4}=.312$$

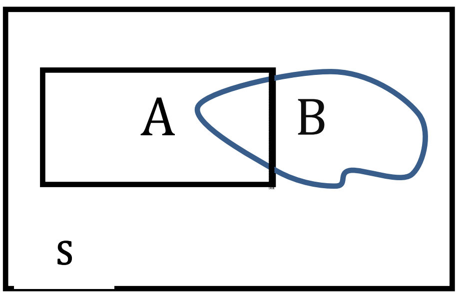
+ ព្រឹត្តិការណ៍ D ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលលេខទាំងបួនខ្ទង់របស់លេខសម្ងាត់ជាលេខខុសៗគ្នា
  ចំនួននៃលេខសម្ងាត់ជាចំនួនចម្លាស់នបៃ 4 ជាតុយកពី 9 ជាតុគឺ ៖

$$P(9,4)=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024$$

$$P(D)=\frac{3024}{6561}=.46$$

6. **ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ** (THE CONDITIONAL PROBABILITY)

ឧបមាថា យើងមានព្រឹត្តិការណ៍ពីរ គឺ Aនិង B ក្នុងលំហ សំណាក S ដោយដឹងថា ព្រឹត្តិការណ៍ A កើតមុន ព្រឹត្តិការណ៍ B នោះប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B ដោយដឹងថា ព្រឹត្តិការណ៍កើតរួចគឺ កំណត់សរសេរដោយ ៖



$$P(B|A)$$

+ រូបមន្ត: $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)};\ P(A)\neq 0$

ចំពោះ: $P(A)\neq 0$ នោះមានន័យថា ព្រឹត្តិការណ៍ A ត្រូវតែកើតឡើង ។

+ គេអាចគណនាបានដូចគ្នាចំពោះ: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)};\ P(B)\neq 0$

+ តាមដ្យាក្រាមខាងលើយើងបាន:

$$P(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|S|}\ ;\ P(A)=\frac{|A|}{|S|}\ ;\ P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{|A\cap B|}{|A|}$$

+ តាមរយៈរូបមន្តខាងលើយើងទាញបានរូបមន្តផលគុណដូចខាងក្រោម ៖

$$P(A\cap B)=P(B|A)\times P(A)=P(A|B)\times P(B)$$

ទ្រឹស្តីបទ ៖ តាង S ជាលំហសំណាក ដែលមានព្រឹត្តិការណ៍ពីរ Aនិង B នោះគេបាន ៖

$$P(B|A)=\frac{\text{ចំនួនធាតុ } A\cap B}{\text{ចំនួនធាតុ } A}$$

ឬ $$P(B|A)=\frac{\text{ចំនួនរបៀបនៃ } A \text{ នឹង } B \text{ អាចកើតឡើង}}{\text{ចំនួនរបៀបនៃ } E\text{ដែល អាចកើតឡើង}}$$

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគូ ត្រូវបានបោះឡើងលើ ។ ចូររកប្រូបាប P ដែលមានផលបូកស្មើនឹង 10 ឬ ធំជាងបើ ៖

a. លេខ 5 កើតឡើងលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ទី មួយ ។
b. លេខ 5 កើតឡើងយ៉ាងហោចណាស់ម្តងក្នុងចំណោមគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ ។

ចម្លើយ

a.លេខ 5 កើតឡើងលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ទីមួយ

បើលេខ 5 កើតឡើងលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ទីមួយ, នោះយើងនឹងបានលំហសំណាកគឺ ៖

A={ (5,1),(5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)} គេបាន ,

ផលបូកស្មើនឹង 10 ឬ ធំជាង10 គឺមានតែពីរករណីដែលអាចកើតឡើង (5,5), (5,6)

ដូចនេះ $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ។

b. លេខ 5 កើតឡើងយ៉ាងហោចណាស់ម្តងក្នុងចំណោមគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ

នោះលំហសំណាកវាមាន11ធាតុគឺ ៖ B={(5,1),(5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (6,5)} ។ គេបានផលបូកស្មើនឹង 10 ឬ ធំជាង10 គឺមានតែបីករណី ដែលអាចកើតឡើង (5,5), (5,6) , (6,5)

ដូចនេះ $P=\frac{3}{11}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគូត្រូវបានគេបោះឡើងលើ ។ បើសិនជា ផលបូកវាស្មើនឹង 6 ។ ចូររកប្រូបាបដែលមួយក្នុងចំណោមគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរចេញលេខ 2 ។

ចម្លើយ

តាង A ={ផលបូកស្មើនឹង 6 }={(1,5), (2,4),(3,3),(4,2),(5,1)}

B={2 អាចកើតឡើងលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ណាមួយ }

គេបាន $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{A}=\frac{|A\cap B|}{|A|}$

តែ $A\cap B=\{(2,4),(4,2)\}$ នោះ $P(B|A)=\frac{2}{5}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត, បើគេរកតែប្រូបាបនៃAនោះគេបានៈ $P(A)=\frac{11}{36}$

ព្រោះ A={(2,1), (2,2), (2,3),..., (1,2), (3,2),...,(6,2)} មាន11 ជាតុ នឹងលំហសំណាក $n(S)=6\times 6=36$

ឧទាហរណ៍៣៖ ក្នុងប្រអប់ទីមួយ I មានឃ្លីក្រហម 3 និង ឃ្លីខៀវ 2 ហើយប្រអប់ទី II មានឃ្លី2 ពណ៌ក្រហម និង 8 ពណ៌ខៀវ ។ កាក់មួយត្រូវបានគេបោះឡើង ។ បើកាក់នោះចេញ មុខនោះ គេនឹងជ្រើសរើសឃ្លីមួយចេញពីប្រអប់ទី I ប៉ុន្តែ បើកាក់នោះចេញខ្នង នោះឃ្លីមួយនឹងត្រូវជ្រើស ចេញពីថង់ទី II ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលឃ្លីពណ៌ក្រហមមួយត្រូវបានគេជ្រើសចេញ ។

ចម្លើយ

តាង R ជាព្រឹត្តិការណ៍ “ ឃ្លីក្រហមត្រូវបានជ្រើសចេញពីថង់ ” និង I និង II ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលប្រអប់ទី I និងប្រអប់ទី II ត្រូវបានគេជ្រើសរើស រៀងគ្នា ។ ដោយឃ្លីក្រហម ជាលទ្ធផលដែលជ្រើសរើសចេញពីប្រអប់ទី I ឬប្រអប់ទី II នោះប្រូបាបដែល គេជ្រើសរើស បានពណ៌ក្រហមមួយគឺ ៖

$$P(R)=P(I)P(R|I)+P(II)P(R|II)$$
$$=\frac{1}{2}.\frac{3}{5}+\frac{1}{2}.\frac{2}{10}=\frac{2}{5}$$

7. **ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា** (INDEPENDENCE EVENT)

ព្រឹត្តិការណ៍ មិនទាក់ទងគ្នាកាលណា លទ្ធផលដែលកើតឡើងរបស់ព្រឹត្តិការណ៍មួយមិនជាប់ពាក់ព័ន្ធ នឹងលទ្ធផលនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយទៀត ។ នោះយើងថា ព្រឹត្តិការណ៍ពីរ A និង B មិនទាក់ទងគ្នានោះគេកំណត់សរសេរដោយ ៖

$P(A|B)=P(A)$ ឬ $P(B|A)=P(B)$

តាមរូបមន្តផលគុណខាងលើ ៖

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A)$$

$$= P(A)\times P(B)$$ ព្រោះ $P(B|A)=P(B)$

ឬ $$P(A\cap B) = P(B)\times P(A|B)$$

$$= P(B)\times P(A)$$ ព្រោះ $P(A|B)=P(A)$

ដូចនេះ ព្រឹត្តិការណ៍ពីរ A និង B ជាពីរព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នានោះគេកំណត់សរសេរ ៖

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

ចំណាំ ៖ បើព្រឹត្តិការណ៍ ពីរ A និង B ទាក់ទងគ្នាកាលណា ,

$$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$$

ឧទាហរណ៍១៖ គេបោះកាក់មួយចំនួនបីដង ។ រកប្រូបាបដែល ៖

ក. បោះកាក់ទីមួយចេញមុខ H ។

ខ. បោះកាក់ទីពីរចេញមុខ H ។

គ. មុខ H ចេញពីរដងផ្ទួនៗគ្នា ។

ចម្លើយ

តាង A: “បោះកាក់ទីមួយចេញមុខ H”

B: “បោះកាក់ទីពីរចេញមុខ H ”

C: “មុខ H ចេញពីរដងផ្ទួនៗគ្នា ”

លំហសំណាកមាន, S={HHH,HHT,HTT,HTH,THH,THT,TTH,TTT} នោះ n(S)=$2^3=8$
និង n(A)=4 , n(B)=4 , n(C)=2គេបាន ៖

P(A)=$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, P(B)=$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, P(C)=$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

យើងពិនិត្យមើល ,

$$P(A\cap B)=P(\{HHH,HHT\})=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap C)=P(\{HHT\})=\frac{1}{8}$$

$$P(B\cap C)=P(\{HHT,THH\})=\frac{1}{4}$$

យើងបាន ៖

$P(A).P(B)=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=P(A\cap B)\ ;A\&B$ មិនទាក់ទងគ្នា

$P(A).P(C)=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}=P(A\cap C)\ ;A\&B$ មិនទាក់ទងគ្នា

$P(B).P(C)=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\neq P(B\cap C)\ ;A\&B$ ទាក់ទងគ្នា

ឧទាហរណ៍២៖ កាតាបមួយមាន បាល់ស 4 និងបាល់ខ្មៅ 2 ។ កាតាបមួយទៀតមានបាល់ស 3 និងមានបាល់ខ្មៅ 5 ។បើបាល់មួយត្រូវបានគេជ្រើសរើសចេញពីកាតាបនីមួយៗ។ចូររកប្រូបាបដែល

a. បាល់ទាំងពីរមានពណ៌ស ។
b. បាល់ទាំងពីរមានពណ៌ខ្មៅ ។
c. មួយពណ៌ស និងមួយទៀតពណ៌ខ្មៅ ។

ចម្លើយ

តាង W_1 ជាព្រឹត្តិការណ៍ “ បាល់ ស យកចេញពីកាតាបទីមួយ ”

W_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍ “ បាល់ ស យកចេញពីកាតាប ទីពីរ ”

a. បាល់ទាំងពីរមានពណ៌ស

$$P(W_1 \cap W_2) = P(W_1)P(W_2 | W_1) = P(W_1)P(W_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

b. បាល់ទាំងពីរមានពណ៌ខ្មៅ

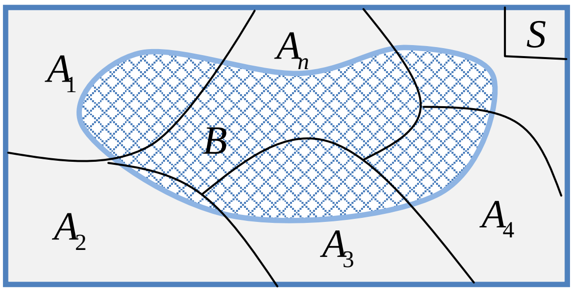
តាង $\bar{W_1}$ និង $\bar{W_2}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនបានបាល់ពណ៌សនៅកាតាបទីមួយ និងទីពីរ រៀងគ្នា

$$P(\bar{W_1} \cap \bar{W_2}) = P(\bar{W_1})P(\bar{W_2} | \bar{W_1}) = P(\bar{W_1})P(\bar{W_2}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{24}$$

c. មួយពណ៌ស និងមួយទៀតពណ៌ខ្មៅ

$$1 - P(W_1 \cap W_2) - P(\bar{W_1} \cap \bar{W_2}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{24} = \frac{13}{24}$$

8. **ទ្រឹស្តីបទ បៃយេស** (BAYES' THEOREM)



បើ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នាពីរៗ នៅក្នុងលំហសំណាកមួយ ហើយមានព្រឹត្តិការណ៍ B មួយកើតឡើងក្នុងព្រឹត្តិកាណ៍ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ នោះ យើងបាន ៖

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$$
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

ដោយ ,

$$P(A_1 \cap B) = P(B | A_1) \times P(A_1), \ldots, P(A_i \cap B) = P(B | A_i) \times P(A_i)$$

គេបាន ៖

$$P(B) = P(A_1) \times P(B | A_1) + P(A_2) \times P(B | A_2) + \ldots + P(B | A_n) \times P(A_n)$$
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} \left[P(B | A_i) \times P(A_i) \right]$$

ប៉ុន្តែបើ A_k ជាព្រឹត្តិការណ៍មួយក្នុងលំហសំណាកនោះយើងបាន ,

$$P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}=\frac{P(B \mid A_k)\times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}\left[P(B \mid A_i)\times P(A_i)\right]}$$

ក្នុងទ្រឹស្តីបទបៃយែសនេះ អាចអោយយើងអាចរកបាននូវ ប្រូបាបផ្សេងៗគ្នានៃ ព្រឹត្តិការណ៍ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ។

សរុបមក ,

+ រូបមន្តប្រូបាបសរុប ៖

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}\left[P(B \mid A_i)\times P(A_i)\right]$$

+ ទ្រឹស្តីបទបាយែស ,

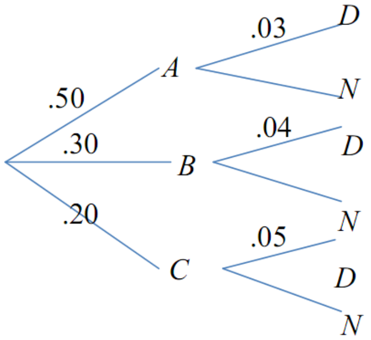
$$P(A_k \mid B)=\frac{P(B \mid A_k)\times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}\left[P(B \mid A_i)\times P(A_i)\right]}$$

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានម៉ាស៊ីនបី គឺ A,Bនិង C ផលិតសម្ភារៈសរុបបាន ៖ 50% , 30% និង 20% រៀងគ្នាក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយ ។ ភាគរយនៃផលិតផលដែលខូច ដែលបង្កឡើងពីម៉ាស៊ីនទាំងបីគឺ 3%,4% និង 5% ។

ក.បើគេជ្រើសរើសផលិតផលមួយដោយចៃដន្យ, ចូរអ្នករកប្រូបាបដែលផលិតផលនោះជាផលិតផលខូច ។

ខ. ឧបមាថា ផលិតផលមួយត្រូវបានគេជ្រើសរើសយកដោយចៃដន្យ និងគេរកឃើញថា វាជាផលិតផលដែលខូច ។ ចូររកប្រូបាបដែលផលិតផលនោះគឺជាផលិតផលដែលផលិតដោយម៉ាស៊ីន A , គឺថា , រក P(A|X) ។

ចម្លើយ



ក. រកប្រូបាបដែលផលិតផលនោះជាផលិតផលខូច

តាម X ជាព្រឹត្តិការណ៍ នៃផលិតផលដែលខូចគេបាន ៖

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A).P(X|A)+P(B).P(X|B)+P(C).P(X|C) \\ &= (.50).(.03)+(.30)(.04)+(.20)(.05) \\ &= .037 = 3.7\% \end{aligned}$$

ខ. រកប្រូបាបដែលផលិតផលនោះគឺជាផលិតផលដែលផលិតដោយម៉ាស៊ីនA

ដោយអនុវត្តន៍លើទ្រឹស្តីបទ បៃយែស យើងបាន ៖

$$\begin{aligned} P(A|X) &= \frac{P(A)\cdot P(X|A)}{P(A)\cdot P(X|A)+P(B)\cdot P(X|B)+P(C)\cdot P(X|C)} \\ &= \frac{(.50)\cdot(.30)}{P(X)} = \frac{.015}{.037} = \frac{15}{37} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍២ ៖ គេបានម៉ាស៊ីនបី A,B និង C ដែលផលិត ផលិតផលបាន 60% ,30% និង 10% នៃផលិតផលក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយ ។ ភាគរយនៃផលិតផលដែលខូចគឺ 2%,3% និង 4% នៃម៉ាស៊ីន A , B និង C ។ គេជ្រើសរើសផលិតផលមួយដោយចៃដន្យ ហើយជាផលិតផលដែលខូច ។ ចូររកប្រូបាបប៊ីលីតេ ដែលផលិតផលនោះផលិតដោយម៉ាស៊ីន C ។

ចម្លើយ

តាង X={ផលិតផលដែលខូច }

P(C|X) ជាប្រូបាបនៃផលិតផលដែលផលិតដោយម៉ាស៊ីន C ដែលជាផលិតផលខូច

តាមទ្រឹស្តីបទបៃយែសគេបាន ,

$$\begin{aligned} P(C|X) &= \frac{P(C)\cdot P(X|C)}{P(C).P(X|C)+P(A)\cdot P(X|A)+P(B)\cdot P(X|B)} \\ &= \frac{(.10)\cdot(.04)}{(.10)\cdot(.04)+(.60)\cdot(.02)+(.30)\cdot(.03)} \\ &= \frac{4}{25} \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍៣៖ ក្នុងមហាវិទ្យាល័យមួយ មាន 4% ជាបុរស និង 1% ជាស្ត្រី ដែលមានកំពស់ខ្ពស់ជាង 1.70m ។ ក្នុងមាន 60 % ជានិស្សិតស្រី ។ ឥឡូវ ប្រសិនបើនិស្សិតម្នាក់គឺត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យ និង មានកំពស់ខ្ពស់ជាង 1.70m ។ ចូររកប្រូបាបនៃ និសិស្សម្នាក់នោះជានិស្សិតស្រី ។

ចម្លើយ

តាង X={ និស្សិត មានកំពស់ខ្ពស់ជាង 1.70 m}

P(W|X) ជាប្រូបាបនៃនិស្សិតស្រី ដែលមានកំពស់ខ្ពស់ជាង 1.70m

តាមទ្រឹស្តីបទ បៃយែស យើងបាន ៖

$$P(W \mid X) = \frac{P(W)\cdot P(X \mid W)}{P(W)\cdot P(X \mid W) + P(M)\cdot P(X \mid M)}$$
$$= \frac{(.60)\cdot(.01)}{(.60)\cdot(.01)+(.40)\cdot(.04)} = \frac{3}{11}$$

ឧទាហរណ៍៣៖ ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លីក្រហម 8 , ឃ្លីស 3 និងឃ្លីខៀវ 9 ។ បើឃ្លីបីត្រូវបានគេចាប់យកដោយចៃដន្យ ដោយមិនដាក់ចូលវិញ, ចូរកំណត់ប្រូបាបដែល ,

a. ឃ្លីទាំងបីជាពណ៌ក្រហម ។
b. ឃ្លីទាំងបីជាពណ៌ស ។
c. ឃ្លីពីរ ពណ៌ក្រហមនិងឃ្លីមួយទៀតពណ៌ខៀវ ។
d. យ៉ាងហោចណាស់ឃ្លីមួយមានពណ៌ស ។
e. ឃ្លីនីមួយៗមានពណ៌ខុសៗគ្នា ។
f. ឃ្លីដែលចាប់បាន តាមលំដាប់ពណ៌ ក្រហម, ស និង ខៀវ ។

ចម្លើយ

a. របៀបទី១៖

តាង R_1, R_2 និង R_3 តាងអោយព្រឹត្តិការណ៍ នៃ” ចាប់លើកទីមួយជាឃ្លីពណ៌ក្រហម ”, “ ចាប់លើកទីពីរ ជាឃ្លីពណ៌ក្រហម ” និង “ចាប់លើកទីបីជាឃ្លីពណ៌ក្រហម ” រៀងគ្នា។ នោះ យើងបាន ,

$R_1 \cap R_2 \cap R_3$ តាងអោយព្រឹត្តិការណ៍ ដែលឃ្លីទាំងបីជាពណ៌ក្រហម

នោះគេបាន ៖

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) \cdot P(R_3 \mid R_1 \cap R_2)$$
$$= \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} = \frac{14}{285}$$

របៀបទី២ ៖

$$P = \frac{C(8,3)}{C(20,3)} = \frac{14}{285}$$

b. ឃ្លីទាំងបីជាពណ៌ស

បើយើងប្រើរបៀបទី២ នោះយើងបាន ,

$$P(\text{ឃ្លីពណ៌សទាំងបី}) = \frac{C(3,3)}{C(20,3)} = \frac{1}{1440}$$

ឬយើងអាចប្រើរបៀបទីមួយក៏បានដែរ ។

c. ឃ្លីពីរ ពណ៌ក្រហមនិងឃ្លីមួយទៀតពណ៌ខៀវ

P(ក្រហម២ និងស ១)= $\frac{C(8,2) \times C(3,1)}{C(20,3)} = \frac{7}{95}$

d. យ៉ាងហោចណាស់ឃ្លីមួយមានពណ៌ស

$P($ គ្មានពណ៌ស មួយសោះ $)= \frac{C(17,3)}{C(20,3)} = \frac{34}{57}$ នោះគេបាន

តាមប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគេបាន ,

$P($ យ៉ាងហោចណាស់មានសមួយ $)= 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57}$ ។

e. ឃ្លីនីមួយៗមានពណ៌ខុសៗគ្នា

$P($ ឃ្លីនីមួយៗមានពណ៌ខុសៗគ្នា $)= \frac{C(8,1) \times C(3,1) \times C(9,1)}{C(20,3)} = \frac{18}{95}$

f. ឃ្លីដែលចាប់បាន តាមលំដាប់ពណ៌ ក្រហម, ស និង ខៀវ

$P($ចាប់ឃ្លីតាមលំដាប់ពណ៌ ក្រហម ស ខៀវ$)$

$$=\frac{1}{3!}P(\text{ឃ្លីបីមានពណ៌ខុសៗគ្នា})$$

$$=\frac{1}{3!}\times\frac{18}{95}=\frac{3}{95}$$

ឬ តាមរបៀបម្យ៉ាងទៀត៖

$$P\left(R_1\cap W_1\ \cap B_3\right)=P\left(R_1\right)P\left(W_2\mid R_1\right)P\left(B_3\mid R_1\cap W_2\right)$$

$$=\frac{8}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{9}{18}=\frac{3}{95}$$

ឧទាហរណ៍៤៖ ក្នុងល្បែងលេង ប្អៀម(Poker) គេហូតយកបៀ 5 សន្លឹកចេញពីហូ 52 សន្លឹក ។ ចូររកប្រូបាបប៊ីលីតេ ដែល ៖

a. 4សន្លឹកជាអាត់(Aces) ។

b. 4សន្លឹកជាអាត់(Aces) និង 1សន្លឹកជាស្តេច(King) ។

c. លេខ 10មាន3សន្លឹក និងពីសន្លឹកជា កំលោះ (Jack)

d. លេខ 9, លេខ 10, កំលោះ (Jack), ក្រមុំ (Queen) និង ស្តេច (King) តាមលំដាប់ ។

e. មាន 3សន្លឹក ជាស៊ីត និង 2សន្លឹកផ្សេងទៀត ។

f. យ៉ាងហោចណាស់មានអាត់មួយ ។

ចម្លើយ

a. 4សន្លឹកជាអាត់(Aces)

$$P(\ 4\text{សន្លឹកជាអាត់})=\frac{C(4,4)\times C(48,1)}{C(52,5)}=\frac{1}{54\,145}$$

b. 4សន្លឹកជាអាត់(Aces) និង 1សន្លឹកជាស្តេច(King)

$$P(4\text{ជាអាត់ និង}1\text{ទៀតជាស្តេច})=\frac{C(4,4)\times C(4,1)}{C(52,5)}=\frac{1}{108\,290}$$

c. លេខ 10មាន3សន្លឹក និងពីសន្លឹកជា កំលោះ (Jack)

$$P(3\text{ជាសន្លឹកលេខ}10\text{ និង }2\text{ទៀតជាកំលោះ})=\frac{C(4,3)\times C(4,2)}{C(52,5)}$$

d. លេខ 9, លេខ 10, កំលោះ (Jack), ក្រមុំ (Queen) និង ស្តេច (King) តាមលំដាប់

$$P(9,10,Jack,Queen,King)=\frac{C(4,1)\cdot C(4,1)\cdot C(4,1)\cdot C(4,1)\cdot C(4,1)}{C(52,5)}$$

$$=\frac{64}{162\,435}$$

e. មាន 3 សន្លឹក ជាស៊ីុត និង 2 សន្លឹកផ្សេងទៀត

P(3 សន្លឹកជាស៊ីុត និង 2 ផ្សេងទៀត) $=\frac{4\times C(13,3)\left(3\times C_{13}^{2}\right)}{C(52,5)}=\frac{429}{4\,165}$

ព្រោះ វាមានបួនរបៀបក្នុងការជ្រើសរើស បៀស៊ីុតទីមួយ និងមានបីរបៀប ក្នុងការជ្រើសរើសបៀស៊ីុតទីពីរ ។

f. យ៉ាងហោចណាស់មានអាត់មួយ

P(គ្មានអាត់) $=\frac{C(48,5)}{C(52,5)}=\frac{35\,673}{54\,145}$ នោះគេបានប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ ,

P(ដែលយ៉ាងហោចណាស់មានអាត់មួយ) គឺ $1-\frac{35\,673}{54\,145}=\frac{18\,472}{54\,145}$ ។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៧....　　　　**ចំនួនកុំផ្លិច**

មេរៀនទី...១....　　　　**ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពិជគណិត**

III.ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

IV.វិចទ័ររូបភាពនៃផលបូក ផលដកនិងផលគុណចំនួនពិតជាមួយនឹងចំនួនកុំផ្លិច

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សពន្យល់ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិចតាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សតាងចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិចតាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...០២....ម៉ោង ថ្ងៃ...............ទី................ខែ.............ឆ្នាំ..........

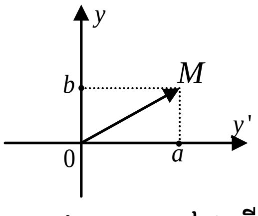
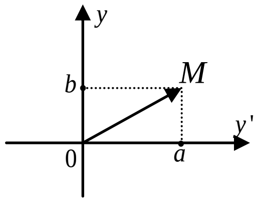
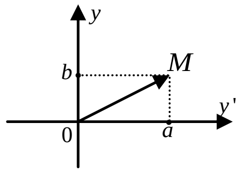
III.<u>សម្ភារ:ឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី.១៤០.. ដល់ទំព័រទី..១៤៣..

-ស . គ : ទំព័រទី ១៤១ ដល់ទំព័រទី..១៤៣..

-បន្ទាត់ ក្រដាសធំសម្រាប់គូសតារាង

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

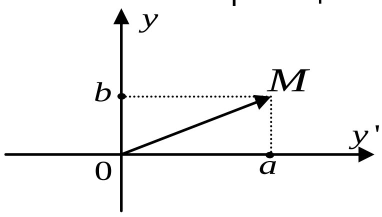
សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>*ជំហានទី១*</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរះចូរបំពេញ ១)$(a+bi)+(c+id)=?$ ២)$(a+bi)(c+id)=?$ ៣)គេតាងចំនួនកុំផ្លិច $z=a+ib$ ដោយចំនុចM ដែលមានកូអរដោនេ$(a;b)$  តើការតាងនេះហៅថាអ្វី?	<u>*ជំហានទី២*</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់) ១) $(a+bi)+(c+id)=(a+c)+(b+d)i$ ២) $(a+bi)(c+id)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ ៣)គេតាងចំនួនកុំផ្លិច$z=a+ib$ ដោយចំនុចM ដែលមាន កូអរដោនេ $(a;b)$  ការតាងនេះហៅថាការតាងចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច	សិស្សឆ្លើយ ១) $(a+bi)+(c+id)=(a+c)+(b+d)i$ ២) $(a+bi)(c+id)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ ៣)គេតាងចំនួនកុំផ្លិច$z=a+ib$ ដោយចំនុចM ដែលមាន កូអរដោនេ$(a;b)$  ការតាងនេះ ហៅថាការតាង ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

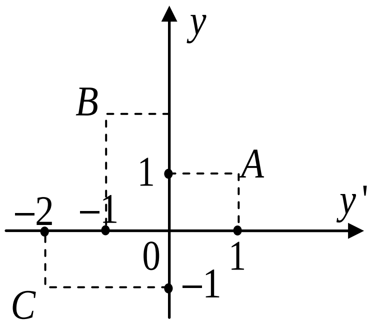
<table>
<tr>
<td>
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី
មេរៀនទី.១.
ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពិជគណិត
ណែនាំសិស្សគូសតម្រុយដែលមានអ័ក្សពីរកែងគ្នា ហើយដៅចំណុច $M(a;b)$ តាងចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$

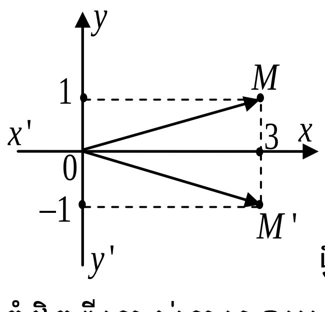
តើចំណុច M ជាចំណុចរូបភាពនៃអ្វី?

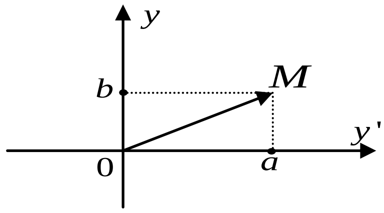
តើអ័ក្ស $(x'ox)$ និង $(y'oy)$ ហៅថាអ័ក្សអ្វី?

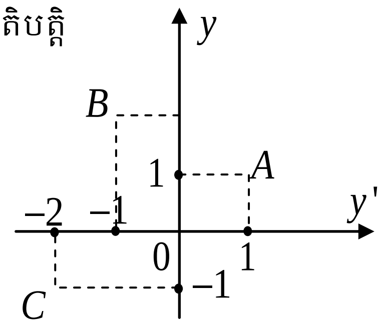
ប្រតិបត្តិ
1)តាងរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $1+i;-1+2i;-2-i$ ដោយចំណុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច?
2)តាងរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=3+i$ & $\bar{z}=3-i$

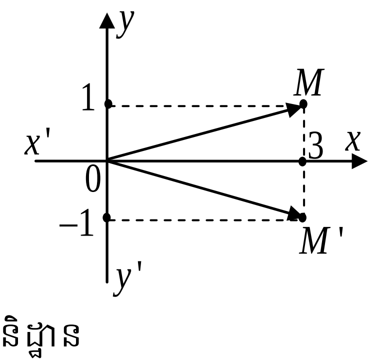
ណែនាំសិស្សទាញសនិដ្ឋានរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់
</td>
<td>
<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី)
មេរៀនទី.១.
ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពិជគណិត
III.ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច
១)ការតាងចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច
គេមានតម្រុយអរតូណរមេ (xoy) ។ គេតាងចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ដោយចំណុច $M(a;b)$ ក្នុងតម្រុយនេះ។


ចំណុច M ជាចំណុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ គេកំណត់សរសេរ $M(z)$ ហើយវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃ $z=a+bi$ គេកំណត់សរសេរ $\overrightarrow{OM}(z)$ ។ប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយហៅថាប្លង់កុំផ្លិច។
អ័ក្ស $(x'ox)$ ហៅថាអ័ក្សនៃផ្នែកពិត
អ័ក្ស $(y'oy)$ ហៅថាអ័ក្សនៃផ្នែកនិមិត្ត
ប្រតិបត្តិ


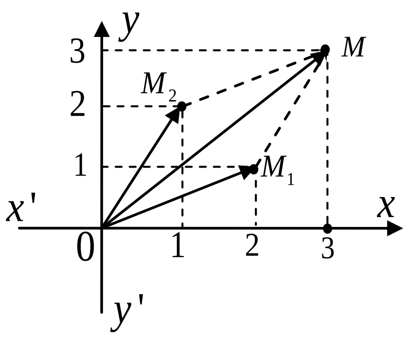
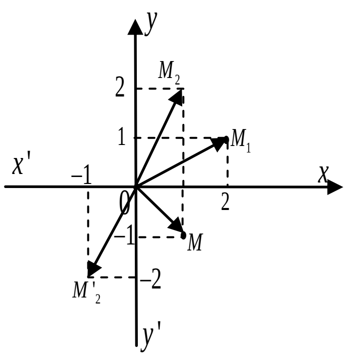
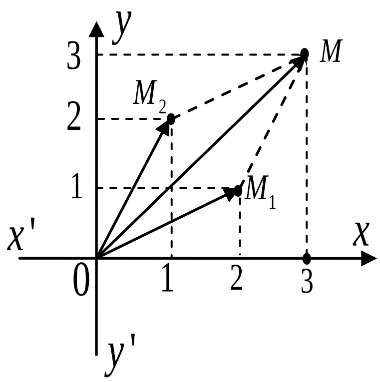
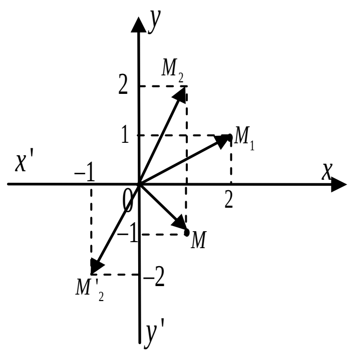


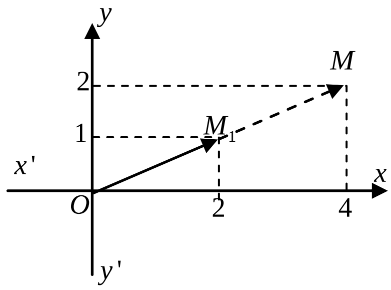
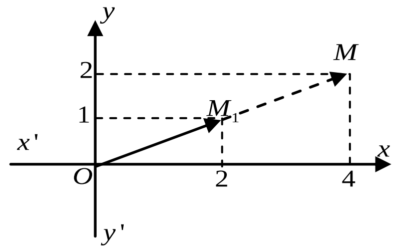
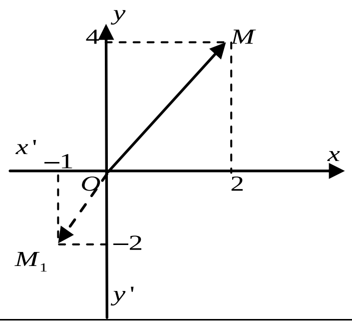
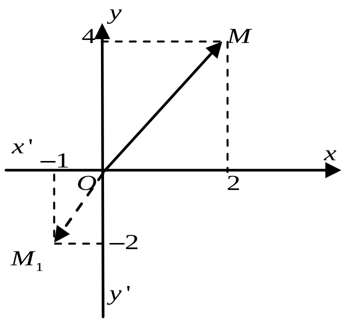
សនិដ្ឋាន
ចំនួនកុំផ្លិចពីរឆ្លាស់គ្នាមានរូបភាពឆ្លុះគ្នាធៀបនិងអ័ក្ស។
</td>
<td>


តាងចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ដោយចំណុច $M(a;b)$ ។
ចំណុច M ជាចំណុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ គេកំណត់សរសេរ $M(z)$ ហើយវ៉ិចទ័ររូបភាពនៃ $z=a+bi$ គេកំណត់សរសេរ $\overrightarrow{OM}(z)$ ។ប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយហៅថាប្លង់កុំផ្លិច។
អ័ក្ស $(x'ox)$ ហៅថាអ័ក្សនៃផ្នែកពិត
អ័ក្ស $(y'oy)$ ហៅថាអ័ក្សនៃផ្នែកនិមិត្ត
ប្រតិបត្តិ




សនិដ្ឋាន
ចំនួនកុំផ្លិចពីរឆ្លាស់គ្នាមានរូបភាពឆ្លុះគ្នាធៀបនិងអ័ក្ស។
</td>
</tr>
</table>

ឲ្យសិស្សគូសរូបភាពនៃ $z_1=2+i$ និង $z_2=1+2i$ រូចគូស $\overrightarrow{OM}$ ជាអង្កត់ទ្រូង ប្រលេឡូក្រាមតាមលក្ខណៈ: ផលបូកនៃវិចទ័រហើយជារូបភាពនៃ z_1+z_2 ណែនាំសិស្សធ្វើផលបូក $z_1+z_2=?$ ឧទាហរណ៍ កំណត់រូបភាពនៃផលដក z_1-z_2 ដែល $z_1=2+i$ និង $z_2=1+2i$ ណែនាំសិស្សសង់ វិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូបភាពនៃ z_1 វិចទ័រ $\overrightarrow{OM_2}$ ជារូបភាពនៃ z_2 វិចទ័រ $\overrightarrow{OM'_2}$ ជារូបភាពនៃ $-z_2$ ឲ្យសិស្សធ្វើផលបូក $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM'_2}$ ឧទាហរណ៍ កំណត់រូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $2z$ បើ $z=2+i$	***IV*.វិចទ័ររូបភាពនៃផលបូក ផលដក និងផលគុណចំនួនពិតជាមួយនឹងចំនួនកុំផ្លិច** **១)វិចទ័ររូបភាពនៃផលបូកចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច** Ex_1 គេមាន $z_1=2+i$ និង $z_2=1+2i$ ក្នុង  ប្លង់កុំផ្លិច។តាង $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង $\overrightarrow{OM_2}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_2 នោះ $z_1+z_2=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃនៃ z_1+z_2 **២)វិចទ័ររូបភាពនៃផលដកចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច** ឧទាហរណ៍ កំណត់រូបភាពនៃផលដក z_1-z_2 ដែល $z_1=2+i$ និង $z_2=1+2i$ យើងមាន $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$ តាងវិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូបភាពនៃ z_1 ហើយ $\overrightarrow{OM_2}$ ជារូបភាពនៃ z_2 និងវិចទ័រ វិចទ័រ $\overrightarrow{OM'_2}$ ជារូបភាពនៃ $-z_2$ គេបាន $z_1-z_2=z_1+(-z_2)=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM'_2}$  **៣)វិចទ័ររូបភាពនៃផលគុណចំនួនពិតនឹងចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច**	 យើងបាន $z_1+z_2=(2+i)+(1+2i)=3+3i$ នោះ $z_1+z_2=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM}$ កំណត់រូបភាពនៃផលដក z_1-z_2 ដែល $z_1=2+i$ និង $z_2=1+2i$ យើងមាន $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$ តាងវិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូបភាពនៃ z_1 ហើយ $\overrightarrow{OM_2}$ ជារូបភាពនៃ z_2 និងវិចទ័រ វិចទ័រ $\overrightarrow{OM'_2}$ ជារូបភាពនៃ $-z_2$ គេបាន $z_1-z_2=z_1+(-z_2)=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM'_2}$  ឧទាហរណ៍

ណែនាំសិស្សគូស តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូភាពនៃ z វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូភាពនៃ $2z$	ឧទាហរណ៍ កំណត់រូបភាពនៃចំនួន កុំផ្លិច $2z$ បើ $z=2+i$ ។ តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូភាពនៃ z វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូភាពនៃ $2z$ គេបាន $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OM_1}$ 	កំណត់រូបភាពនៃចំនួន កុំផ្លិច $2z$ បើ $z=2+i$ ។ តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM_1}$ ជារូភាពនៃ z វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូភាពនៃ $2z$ គេបាន $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OM_1}$ 
រករូបភាពនៃ $-\frac{1}{2}z$ បើគេឲ្យ $z=2+4i$	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) ដោយ $-\frac{1}{2}z=-\frac{1}{2}(2+4i)=-1-2i$ 	ដោយ $-\frac{1}{2}z=-\frac{1}{2}(2+4i)=-1-2i$ 
ណែនាំសិស្សធ្វើលំហាត់ លេខ៦ដល់លេខ៧ទំព័រ ១៩៣និងមើលមេរៀន នៅផ្ទះ	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ) ធ្វើលំហាត់ទំព័រ១៩៣ លេខ៦ដល់លេខ៧	សិស្សស្តាប់ការណែនាំ