ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

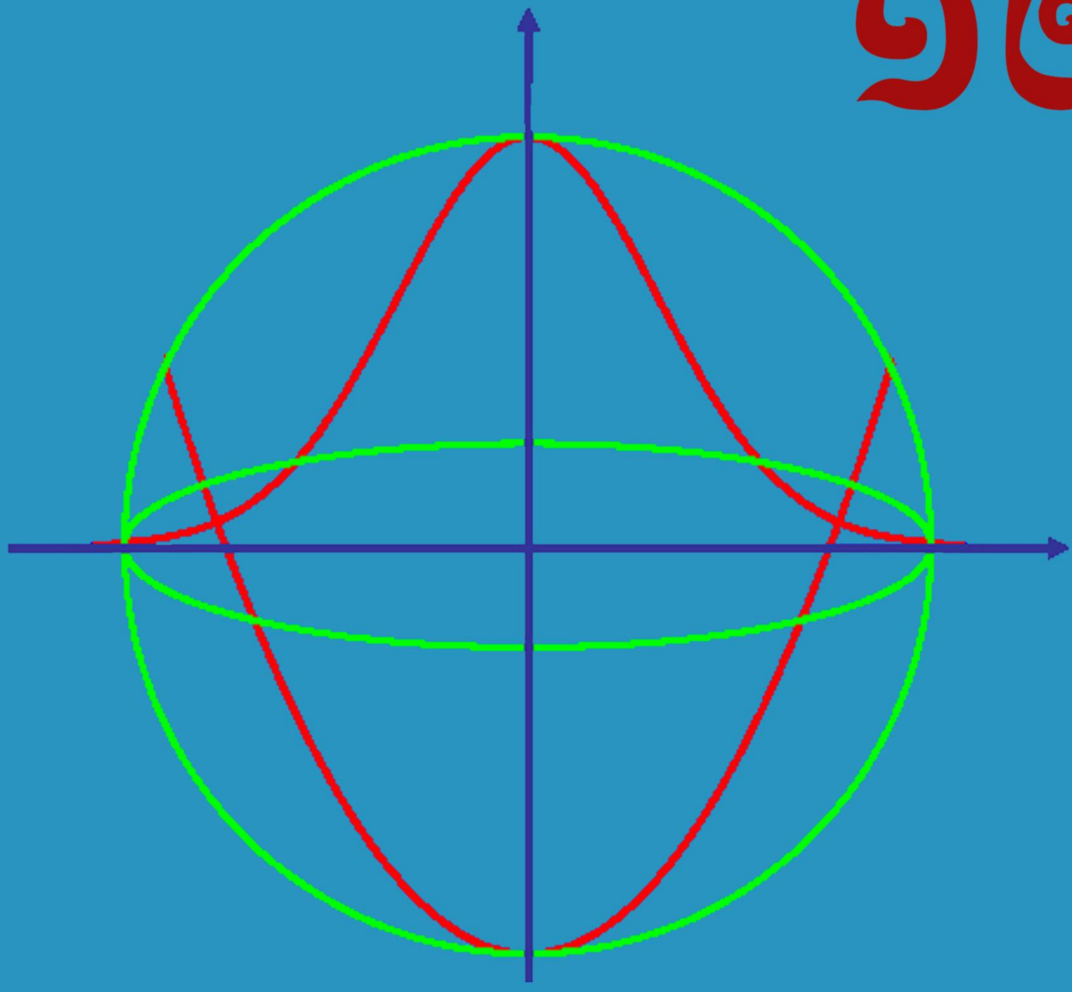
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

កិច្ចតែងការបង្រៀន

គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ១២



ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

គណិតវិទ្យា

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ថ្នាក់ទី ១២

រៀបរៀងដោយ ៖

គរុនិស្សិតក្រុម២ ឯកទេស គណិតវិទ្យា-រូបវិទ្យា ជំនាន់ទី ១៧

ណែនាំដោយសាស្ត្រាចារ្យ ៖

ថៃ ហេង , ម៉ែន ខាំង , ចាន់ វ៉ាដា , លឹម បូណា , ផាន់ សុភាព

ភ្នំពេញ , មិថុនា ២០១២ , ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ត្រូវនឹងខែ បឋមសាឍ ឆ្នាំ រោង ព.ស. ២៥៥៦

រក្សាសិទ្ធិ **ហាមថតចម្លងសៀវភៅនេះ**

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

បញ្ជីបែងចែកភារកិច្ច និងការទទួលខុសត្រូវលើកិច្ចតែងការបង្រៀន
របស់គរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម (បរិញ្ញា+១) ជំនាន់ទី១៧
ឯកទេស ៖ គណិតវិទ្យា-រូបវិទ្យា (ក្រុម២)

ល.រ.	គោត្តនាម-នាម		ភេទ	ក្របខណ្ឌខេត្ត	ទទួលលើ
១	នីម	លេងហេង	ប្រុស	តាកែវ	មាឌសូលីត និងប្រវែងធ្នូ
២	ប៉ែត	ឡោ	ប្រុស	តាកែវ	ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺគ្លីត
៣	ប៉ែន	ផេត	ប្រុស	តាកែវ	បំណែងចែកប្រូបាប
៤	ម៉ាន់	សួង	ប្រុស	តាកែវ	ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ
៥	លាក់	ធក	ប្រុស	តាកែវ	លីមីតនៃអនុគមន៍
៦	លឹម	វង្សា	ប្រុស	តាកែវ	សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងកូអរដោនេប៉ូលែ
៧	រ៉ាន់	ជី	ប្រុស	តាកែវ	អេលីប
៨	ស៊ិន	គឹមសេង	ប្រុស	តាកែវ	បំនួនបឋម
៩	ហៃ	ប៉ាហ៊ិន	ប្រុស	តាកែវ	ពហុគុណរួម និងតួចែករួម
១០	ឌុន	វណ្ណា	ស្រី	កំពត	អនុគមន៍អសនិទាន
១១	នួន	ភេទ	ប្រុស	កំពត	បំណែងចែកនរម៉ាល់
១២	ស៊ុត	ចាន់និមល	ប្រុស	កំពត	អនុវត្តន៍ដេរីវេ (កម្រិតខ្ពស់)
១៣	ស៊ូ	លីន	ស្រី	កំពត	ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ
១៤	សួង	ចិល	ប្រុស	កំពត	សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១
១៥	កៃ	ជីប	ប្រុស	កំពង់ឆ្នាំង	អនុវត្តន៍ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ
១៦	ឈន	ភារម្យ	ប្រុស	កំពង់ឆ្នាំង	អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្របម្រុះ
១៧	យ៉ែម	សុជាន្នី	ប្រុស	កំពង់ឆ្នាំង	អាំងតេក្រាលកំណត់
១៨	ស៊ី	វណ្ណា	ប្រុស	កំពង់ឆ្នាំង	សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២
១៩	ឱ	គុជ្ជា	ប្រុស	កំពង់ឆ្នាំង	សមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែរ
២០	គង់	របេតា	ស្រី	កំពង់ធំ	លីមីតស្វីត
២១	ប៊ិត	សម្បត្តិ	ប្រុស	កំពង់ធំ	ភាពជាប់នៃអនុគមន៍
២២	មាន	សុខជា	ប្រុស	កំពង់ធំ	អនុគមន៍សនិទាន
២៣	សេង	គុងស៊ាំង	ប្រុស	កំពង់ធំ	ស្ថិតិនៃពីរអថេរ
២៤	ហេង	ដារា	ប្រុស	កំពង់ធំ	បំណែងចែកទ្វេធា
២៥	ផុក	ម៉េង	ប្រុស	កំពង់ស្ពឺ	អនុវត្តន៍ដេរីវេ (កម្រិតមូលដ្ឋាន)

អារម្ភកថា

សៀវភៅកិច្ចតែងការបង្រៀនគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ ទាំងពីរកម្រិត ដែលមិត្តអ្នកអាន កំពុងតែអាននេះ បានកើតមានឡើងក្រោមគំនិតផ្តួចផ្តើមរបស់សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៅវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ (N.I.E.)ជាពិសេសគឺលោកសាស្ត្រាចារ្យ ថៃ ហេង ។

នាដើមឆ្នាំសិក្សា លោកគ្រូ ថៃ ហេង បានហៅតំណាងគរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា-រូបវិទ្យា ទាំងប្រាំក្រុម(ក្នុងមួយក្រុមយកតំណាងម្នាក់) មកធ្វើការចាប់យកលេខ ១ ដល់ លេខ៥ ដោយចៃដន្យ ។ តំណាងក្រុម២ របស់យើងខ្ញុំចាប់បានលេខ ៥ដែលត្រូវចាប់យកថ្នាក់ក្រោយគេសម្រាប់ការសរសេរកិច្ចតែងការបង្រៀនគណិតវិទ្យាពីថ្នាក់ទី ៧ ដល់ទី១២ (លើកលែងទី១១ ព្រោះមានស្រាប់) , ចៃដន្យអី តំណាងក្រុមផ្សេងៗចាប់យកអស់ សល់មួយសន្លឹកសម្រាប់ក្រុមយើង គឺសល់ថ្នាក់ទី១២ នេះតែម្តង, ដោយមើលឃើញថា កិច្ចតែងការថ្នាក់ទី១២ មានសល់ពីឆ្នាំមុនខ្លះៗទៅហើយ តំណាងក្រុមយើងខ្ញុំក៏បែងចែកមេរៀនមួយចំនួនដែលមិនមានពីឆ្នាំមុន បានមួយមេរៀនក្នុងគរុនិស្សិតម្នាក់ គ្រប់ៗគ្នា ។ នៅក្នុងនាទីនេះ រាល់មេរៀនដែលយើងខ្ញុំមិនបានយកមកបញ្ចូលគឺមានន័យថា យើងខ្ញុំមានរួចរាល់ទៅហើយ ដែលបន្សល់ទុកដោយគរុនិស្សិតជំនាន់មុន ។

សៀវភៅកិច្ចតែងការនេះមិនមានលក្ខណៈល្អឥតខ្ចោះនោះទេ ព្រោះម្នាក់ៗមានចំណេះដឹងខុសៗគ្នា ហើយមិនបានពិនិត្យឲ្យបានល្អិតល្អន់ទៀត ។ ឯកសារនេះគឺគ្រាន់តែជាឯកសារយោងសម្រាប់មិត្តអ្នកសិក្សាតែប៉ុណ្ណោះ ។

កិច្ចតែងការមិនមែនមានតែទម្រង់ណាមួយឲ្យដាច់ខាតនោះឡើយ តែវាអាចឲ្យយើងរចនាតាមបែបផ្សេងៗ គ្នា ។ កិច្ចតែងការគ្រាន់តែជាការត្រៀមគំនិតសម្រាប់បង្រៀនតែប៉ុណ្ណោះ វាមិនមែនត្រូវតែបង្រៀនតាមកិច្ចតែងការទាំងស្រុងនោះឡើយ ។ ការបង្រៀនគឺតាមស្ថានភាពជាក់ស្តែង ។ លំហាត់គណិតវិទ្យាមួយមិនមែនមានវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយតែមួយបែបនោះទេ គឺអាចមានរបៀបដោះស្រាយច្រើនខុសៗគ្នា , មានលំហាត់មួយចំនួនទៀតធ្វើផ្សេងគ្នា ឃើញចម្លើយផ្សេងគ្នា តែត្រឹមត្រូវដូចគ្នា ។ ឧទាហរណ៍ ៖ សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហដែលកាត់តាមចំណុច $A(1,2,3)$ និង $B(0,4,2)$ គឺ ៖

$AB:\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=3-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ ឬ $AB:\begin{cases}x=0+t\\y=4-2t\\z=2+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ (ចម្លើយត្រូវដូចគ្នា) ។

សូមអរគុណ និងសូមគោរពជូនពរមិត្តអ្នកអានឲ្យទទួលបានតែសេចក្តីសុខគ្រប់គ្នា ។ សូមឲ្យអ្នកបង្រៀនទាំងអស់ខំប្រឹង កុំទម្លាក់ដៃ ដើម្បីកុំឲ្យយុវជនជំនាន់ក្រោយៗល្ងង់ ព្រោះពួកគេជាសន្លឹកបៀដ៏មានតម្លៃសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍប្រទេសជាតិ ។

តំណាងអ្នករៀបរៀង

បញ្ជីអត្ថបទ

គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២កម្រិតមូលដ្ឋាន *ទំព័រ*

ជំពូក១ ៖ លីមីត ១

មេរៀនទី១ ៖ លីមីតនៃអនុគមន៍ ១

មេរៀនទី២ ៖ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ ១៣

ជំពូក២ ៖ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ ៤១

មេរៀនទី១ ៖ ដេរីវេនៃអនុគមន៍(ឯកសារគរុសិស្សជំនាន់មុន)........ ៤១

មេរៀនទី២ ៖ អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ ៦១

ជំពូក៣ ៖ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប ៧១

មេរៀនទី១ ៖ អនុគមន៍សនិទាន ៧១

មេរៀនទី២ ៖ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល (ឯកសារគរុសិស្សជំនាន់មុន)........ ៩៤

មេរៀនទី៣ ៖ អនុគមន៍លោការីត(ឯកសារគរុសិស្សជំនាន់មុន)........ ១០៨

ជំពូក៤ ៖ អាំងតេក្រាល ១៣១

មេរៀនទី១ ៖ ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ (ឯកសារគរុសិស្សជំនាន់មុន) ១៣១

មេរៀនទី២ ៖ អាំងតេក្រាលកំណត់ (ឯកសារគរុសិស្សជំនាន់មុន)........ ១៥១

ជំពូក៥ ៖ ស្ថិតិពីរអថេរ ១៦៤

មេរៀនទី១ ៖ ស្ថិតិមានពីរអថេរ ១៦៤

មេរៀនទី២ ៖ សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ១៨១

ជំពូក៦ ៖ កោនិក ១៩៤

មេរៀនទី១ ៖ ប៉ារ៉ាបូល (ឯកសារគរុសិស្សជំនាន់មុន)........ ១៩៤

មេរៀនទី២ ៖ អេលីប (ឯកសារគរុសិស្សជំនាន់មុន)........ ២១៥

មេរៀនទី៣ ៖ អ៊ីពែបូល (ឯកសារគរុសិស្សជំនាន់មុន)........ ២៣១

គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២កម្រិតខ្ពស់

ជំពូក១ ៖ លីមីតនៃស្វ៊ីត ២៤១

មេរៀនទី១ ៖ លីមីតនៃស្វ៊ីត ២៤១

ជំពូក២ ៖ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ ២៦១

មេរៀនទី១ ៖ អនុវត្តន៍ដេរីវេ ២៦១

ជំពូក៣ ៖ អថេរភាព និងក្រាបនៃអនុគមន៍ ២៧៦

មេរៀនទី១ ៖ អនុវត្តន៍អសនិទាន ២៧៦

មេរៀនទី២ ៖ អនុវត្តន៍ត្រីកោណមាត្របម្រុះ ២៩៨
ជំពូក៤ ៖ អាំងតេក្រាលកំណត់ ៣១២
មេរៀនទី១ ៖ អាំងតេក្រាលកំណត់ ៣១២
មេរៀនទី២ ៖ មាឌសូលីត និងប្រវែងធ្នូ ៣២៤
ជំពូក៥ ៖ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៣៣៧
មេរៀនទី១ ៖ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១ ...... ៣៣៧
មេរៀនទី២ ៖ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់២ ...... ៣៦៣
ជំពូក៦ ៖ បំណែងចែកប្រូបាប ៣៩៥
មេរៀនទី១ ៖ បំណែងចែកប្រូបាប ៣៩៥
មេរៀនទី២ ៖ បំណែងចែកទ្វេធា ៤០២
មេរៀនទី៣ ៖ បំណែងចែកណរម៉ាល់ ៤១៧
ជំពូក៧ ៖ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ៤២៦
មេរៀនទី១ ៖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ៤២៦
មេរៀនទី២ ៖ អនុវត្តន៍នៃផលគុណវ៉ិចទ័រ ៤៥០
ជំពូក៨ ៖ ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺគ្លីត ៤៥៦
មេរៀនទី១ ៖ ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺគ្លីត ៤៥៦
មេរៀនទី២ ៖ បំនួនបឋម ៤៦៣
មេរៀនទី៣ ៖ តួចែករួម និងពហុគុណរួម ៤៧០
ជំពូក៩ ៖ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងកូអរដោនេប៉ូលែ ៤៨៥
មេរៀនទី១ ៖ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងកូអរដោនេប៉ូលែ ៤៨៥
គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២(យកពីទី១១)
មេរៀនទី១ ៖ ប្រូបាប ៤៩៥
មេរៀនទី២ ៖ ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ ៥២៤

កិច្ចតែងការបង្រៀន

បង្រៀនគណិតវិទ្យា

ជំពូកទី ១ : លីមីត

មេរៀនទី ១ : លីមីតនៃអនុគមន៍

I **លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់ និង អនន្ត**

1. **លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់**
2. **លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ អនន្ត**
3. **ប្រមាណវិធីលើលីមីត**

II **លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន**

I វត្ថុបំណង

ចំណេះដឹង: សិស្សរៀបរាប់និយមន័យលីមីតនៃអនុគមន៍ត្រងចំនួនកំណត់ និងត្រង់អនន្តបានត្រឹមត្រូវតាមរយ:ខ្លឹមសារមេរៀន។

ចំណិន: សិស្សអាចគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់ត្រង់អនន្ត និងកំណត់ប្រមាណវិធីលើលីមីតបានត្រឹមត្រូវតាមរយ:ឧទាហរណ៍។

ឥរិយាបថ:សិស្សមានស្មារតីប្រុងប្រយត្ន័ក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់។

II **រយ:ពេល:** ០២ម៉ោង ថ្ងៃ ....ទី.......... ខែ ..... ឆ្នាំ ២០.......

III **សម្ភារឧបទេស** ស ស ទំព័រទី ០១ ០៨ ។

ស គ ទំព័រទី ដល់ ។

បន្ទាត់ ប៉ារ៉ាបូល ។

IV **ដំណើកនាំមេរៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
- គ្រូគពិនិត្យ អវត្តមាន វិន័យ និង បរិស្ថាន	- ជំហានទី១ "រដ្ឋាបាលថ្នាក់"	- ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍

- គ្រូសួរសំនួរ បើ x ខិតជិត a ហើយ អនុគមន៍y=f(x) ខិតជិតb នោះគេ កំណត់បានលីមីតដូចម្តេច?	-ជំហានទី២ "រំលឹកមេរៀន" $\lim_{x\to a} f(x) = b$	-សិស្សស្តាប់ និង ឆ្លើយ -កំណត់បាន $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ។
- គ្រូសរសេរចំណងជើងមេរៀន - គ្រូឲ្យសិស្សកំណត់និយមន័យ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួន កំណត់ -គ្រូឲ្យសិស្សដោះស្រាយលំហាត់ Ex1: គេមាន f(x)=5x+2 ។ គេដឹងថា $\lim_{x\to -2} f(x) = 8$; រកចំនួន$\alpha > 0$ដោយស្គាល់ $\varepsilon = 0.002$ដែល 0< |x+2|<α នាំឲ្យ | f(x)-(-8)| <ε។ E_{x2}: អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ F(x)=$\frac{2x+1}{x-1}$ ។ បង្ហាញថា $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ ។ -គ្រូឲ្យសិស្សកំណត់និយមន័យ លីមីតនៃអនុគមន៍នៅត្រង់ អនន្ត	ជំហានទី៣ " មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ" 1.លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់ * និយមន័យ: អនុគមន៍ f មានលិមីត L កាលណា xខិតជិត a បើ ∀ε>0 មានចំនួន δ>0 ដែល0<|x-a|< δនាំឲ្យ | f(x)- L | <ε គេសរសេរ: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ។ * និយមន័យ: គេថាអនុគមន៍ f ខិតជិត a ចំពោះ∀ $M > 0$មាន $\delta > 0$ ដែល0< | x-a | <δ នាំអោយ f(x)>0ឬ f(x) < - M ។ គេសរសេរ $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ឬ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ ចម្លើយ E_{x1}:| f(x)-(-8) | <0.002 នោះ | 5x+2+8 | < 0.002 | 5x + 10 | < 0.002 5 | x+2 | < 0.002 => | x+2 | <$\frac{0.002}{5} = 0.0004 = \alpha$ ដូចនេះ α= 0.0004 ។ ចម្លើយE_{x2}: មាន f(x)=$\frac{2x+1}{x-1}$ = 2+ $\frac{3}{x-1}$ កំណត់ចំនួន M>0ដែល f(x)>M យើងគ្រាន់តែឲ្យ$\frac{3}{x-1}$>Mឬ 0< x -1 < $\frac{3}{M}$នោះ$\alpha = \frac{3}{M} > 0$ ដែល	-សិស្សកត់ -សិស្សកំណត់បាន និយមន័យ សិស្សដោះស្រាយលំ ហាត់ដោយខ្លួនឯង ។ - សិស្សកំណត់និមន័យ បានច្បាស់លាស់ ។

- គ្រូឲ្យសិស្សដោះស្រាយលំហាត់ E_x: គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\frac{4x+1}{2x+1}$ ។ បង្ហាញថា $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ និង $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ -គ្រូឲ្យសរសេរប្រមាណវិធីលើលីមីត -គ្រូដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្សដោះស្រាយ E_x: កំណត់តំលៃ a,b ដែល	ដែល 0< I x+1 I <α នាំឲ្យ f(x)>M ដូចនេះ $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ ។ 2. លីមីតនៃអនុគមន៍នៅត្រង់អនន្ត: -និយមន័យ: អនុគមន៍ f មានលីមីត L កាលណា x ខិតជិត$+\infty$ ឬ$-\infty$ គេបាន$\forall\ \varepsilon > 0$ មាន N>0 ដែល x>N ឬ x < -N នាំឲ្យ I f(x)-L I <ε ។ គេសរសេរ$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ឬ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ ។ - និយមន័យ: + អនុគមន៍ f មានលីមីត$+\infty$កាលណា X ខិតទៅ$+\infty$ចំពោះ $\forall$ M>0 មានN>0 ដែលx>Nនាំឲ្យ f(x)>M ។ គេសរសេរ: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ + អនុគមន៍ f មានលីមីត$+\infty$កាលណា X ខិតទៅ$-\infty$ចំពោះ $\forall$ M>0 មានN>0 ដែលx< - N នាំឲ្យ f(x)>M ។ គេសរសេរ: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ។ ចម្លើយ E_x: គេបាន f $F(x) - 2 = \frac{4x+1}{2x+1} - 2 = \frac{-1}{2x+1}; x \neq -\frac{1}{2}$ នាំឲ្យ I f(x)-2 I $= \frac{1}{I\ 2x+1}$<ε នោះ I 2x+1 I > $\frac{1}{\varepsilon}$ ឬ $\begin{cases} 2x+1 > \frac{1}{\varepsilon} \\ 2x+1 < -\frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x > \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \end{cases}$ ឬ$\begin{cases} x > \frac{1}{2\varepsilon} \\ x < -\left(\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$ គេបាន$\forall\varepsilon > 0$មាន$A = \frac{1}{2\varepsilon} > 0$ ឬ $A=\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$ដែល $x > A$ឬ x<-A	សិស្សឡើងដោះស្រាយលំហាត់ សិស្សអនុវត្តន៍តាមការណែនាំពីគ្រូ សិស្សដោះស្រាយលំ

បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax-6}{2x^2+3x-2}=b$ ។	នាំឲ្យ $\lvert f(x)-2\rvert<\varepsilon$ ។ ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ និង $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ ។ 3. ប្រមាណវិធីលើលីមីត បើ $\lim_{x\to a} f(x)=L; \lim_{x\to a} g(x)=M$ និង $\lim_{x\to a} h(x)=N; N; M; L\epsilon R$ គេបាន: ក) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=L\pm M$ ខ) $\lim_{x\to a} f(x)+g(x)-h(x)]=L+M-N$ គ) $\lim_{x\to a} Kf(x)=KL; K$ ចំនួនថេរ ឃ) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x).h(x)]=L.M.N$ ង) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{L}{M}; M\neq 0; g(x)\neq 0$ ច) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n=L^n; n$ ចំនួនគត់វិឡាទីប <u>ចំលើយ:</u> ដោយ $\lim_{x\to-2} 2x^2+3x-2=0$ => $\lim_{x\to-2}\ x^2\ ax-6=0$ គេបាន $\lim_{x\to-2} x^2+ax-6=4-2a-6=0$ $=-2a=2$ =>a= - 1 ដូចនេះ: $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax-6}{2x^2+3x-2}=b$ $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+ax-6}{(2x-1)(x+2)}=b$ =>b=1 លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន: «ជាទូទៅ: $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}; a\geq 0; n\epsilon N; n\geq 2$ $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}\ a<0; n$ សេស $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{f(x)}\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L}=L^{1/n}$	ហាត់
- អោយសិស្សលក្ខណ:ទូទៅលីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន -គ្រូដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្សដោះ	ចំលើយ $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}}$	- សិស្សកំណត់បាន លក្ខណ:ទូទៅនៃលីមី តអនុ គមន៍អសនិទាន

ស្រាយ: គណនា$\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}}$ - គ្រូដាក់លំហាតើឲ្យសិស្សដោះស្រាយ គណនា$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ -ពេលប្អូនៗទៅផ្ទះវិញធ្វើលំហាត់និងើលមេរៀនបន្តទៀត	$=\sqrt[3]{\lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}}$ $=\sqrt[3]{.\frac{4^2-12+6}{2.4^2-4-1}}$ $=\sqrt[3]{\frac{10}{27}}=\frac{\sqrt[3]{10}}{3}$ ។ ជំហ៊ានទី៤″ពង្រឹងពុទ្ធិ″ $=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ $=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$; $x\neq 1$ = -2 ជំហ៊ានទិ៥ ‘បណ្តាំផ្ញើរ’	-សិស្សដោះស្រាយលំហាត់ -សិស្សស្តាប់តាមការណែនាំយ៉ាសខ្ជាប់ខ្ជួន

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- ❖ **បង្រៀនគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២**
- ❖ **ជំពូកទី១ លីមីត**
- ❖ **មេរៀនទី១ លីមីតនៃអនុគមន៍(ត)**

III លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

១.អនុគមន៍បណ្ដាក់

២.លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

៣.លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

VI លីមីតរាងមិនកំណត់:

១.លីមីតមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

២.លីមីតមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

៣.លីមីតមានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

I វត្ថុបំណង:

- ចំណេះដឹង: សិស្សកំណត់និយមន័យលីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់និងលីមីតនៃអនុគមន៍ រាងមិនកំណត់បានត្រឹមត្រូវតាមរយ:ខ្លឹមសារនៃមេរៀន។
- បំនិន: សិស្សដោះស្រាយលំហាត់លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់និងលីមីតមានរាងមិនកំណត់បានច្បាស់លាស់តាមរយ:ឧទាហរណ៍។
- ឥរិយាបថ: សិស្សចូលចិត្តដោះស្រាយលំហាត់ ។

II រយ:ពេល: 0២ ម៉ោង ថ្ងៃ............ទី..........ខែ.......ឆ្នាំ.......

III សម្ភារឧបទេស: បន្ទាត់

IV ដំនើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
• គ្រូត្រួតពិនិត្យវត្តមាន វិន័យ	ជំហានទី១"រដ្ឋបាលថ្នាក់"	• ប្រធានថ្នាក់ឡើង

និងបរិស្ថាន		វាយការណ៍
• គ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្ស ដោះស្រាយ: Ex.កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ លីមីត $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$ ជាចំនួនថេរ ។	ជំហានទី២“រំលឹកមេរៀន” ចម្លើយ: ដោយ $x-1=0$ $\Rightarrow \lim_{x\to1}\sqrt{x+3}-a=0$ $\lim_{x\to1}\sqrt{x+3}-a=2-a=0$ $\Rightarrow a=2$	• សិស្សដោះស្រាយ លំហាត់
• គ្រូសរសេរចំណងជើងមេ រៀនលើក្តារខៀន: • គ្រូឱ្យសិស្សកំណត់: លក្ខណៈទូទៅនៃអនុគមន៍ បណ្តាក់ • គ្រូឱ្យសិស្សដោះស្រាយ លំហាត់: Ex:គេមាន $f(x)=3x+1$និង $g(x)=x^2$ ។គណនា $fog(x)$ និង $gof(x)$ • គ្រូឱ្យសិស្សលក្ខណៈទូទៅ នៃលីមីតអនុគមន៍បណ្តាក់: • គ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្ស ដោះស្រាយ: Ex:គណនា $\lim_{x\to-4}\sqrt[3]{3x+4}$ • គ្រូឱ្យសិស្សកំណត់លីមី តតាម រយៈការប្រៀបធៀប: • គ្រូដាក់លំហាត់សិស្សដោះ ស្រាយ:	ជំហានទី“មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ” ១.អនុគមន៍បណ្តាក់: ជាទូទៅ: f និង g ជាអនុគមន៍ពីរ។អនុគម ន៍បណ្តាក់នៃ f និង g តាងដោយ gof គឺជា អនុគមន៍កំណត់: $gof(x)=g\left[f(x)\right]$ ។ ចម្លើយ: យើងបាន: $*\ fog(x)=f\left[g(x)\right]=f\left(x^2\right)=3x^2+1$ $*\ gof(x)=g\left[f(x)\right]=g(3x+1)=(3x+1)^2$ $=9x^2+6x+1$ ។ $*$ ជាទូទៅបើ f និង g ជាអនុគមន៍មាន លីមីត $\lim_{x\to a}g(x)=L$ និង $\lim_{x\to L}f(x)=f(L)$ នោះ $\lim_{x\to a}f\left[g(x)\right]=f(L)$ ។ ចម្លើយ: ដោយ $\lim_{x\to-4}3x+4=-8$ ដូចនេះ $\lim_{x\to-4}\sqrt[3]{3x+4}=\lim_{x\to-8}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{(-8)}=-2$ បើអនុគមន៍ f និង g មានចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ និង $f(x)\geq g(x);\forall x\geq A$ នោះ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ។ ចម្លើយ: បើ $x\geq4; x.x\geq4.x; x^2\geq4x$ $\Rightarrow \begin{matrix} x\geq2\sqrt{x} \\ x-\sqrt{x}\geq\sqrt{x}\end{matrix}$ ដោយ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x}=+\infty$ ។	• សិស្សកត់អនុគមន៍ បណ្តាក់ f និង g gof $x \to f(x) \to$ $g\ \left[f(x)\right]$ • សិស្សឡើងដោះ • សិស្សឡើងដោះ ស្រាយលំហាត់ • សិស្សកំណត់បាន លីមីតនៃអនុគមន៍ បណ្តាក់... • សិស្សឡើដោះ ស្រាយលំហាត់ • សិស្សអាចកំណត់ បាន • សិស្សឡើងដោះ ស្រាយលំហាត់

Ex : គេមាន $f(x)=x-\sqrt{x}$ ចំពោះ $x\geq 4$ ។ • គ្រូឱសិស្សបង្ហាញពីវិធានដោះស្រាយលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ • គ្រូដាក់លំហាត់សិស្សដោះស្រាយ: Ex : គណនា $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$	• វិធានដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ គេត្រូវបំបែកភាគយកនិងភាគបែងជាផលគុណកត្តាហើយសម្រួលបន្ទប់មកគណនាលីមីតថ្មី៕ ចម្លើយ: $=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ $=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x\left(x^2+3x+2\right)}{(x+2)(x-3)}$ $=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)};x\neq-2$ $=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x(x+1)}{x-3}=-\frac{2}{5}$	• សិស្សកំណត់លីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ • សិស្សឡើងដោះស្រាយលំហាត់
• គ្រូឱ្យសិស្សបង្ហាញពីវិធានដោះស្រាយលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ • គ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សដោះស្រាយ: Ex : គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^4-5x}{x^2-3x+1}$ • គ្រូឱ្យសិស្សកំណត់វិធានដោះស្រាយលីមីតរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$	• វិធានដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៃភាគយកនិងភាគបែងជាកត្តារួមសិនហើយសម្រួលចោលរួចគណនាលីមីតថ្មី។ ចម្លើយ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4-5x}{x^2+3x+1}$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2}$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$	• សិស្សបង្ហាញពីលីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$ • សិស្សឡើងដោះស្រាយលំហាត់ • សិស្សកំណត់លីមីតរាង $+\infty-\infty$ • សិស្សឡើងដោះស្រាយ •
• គ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សដោះស្រាយ: Ex : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x^2+1\right)$	• វិធានៈដើម្បីគណនាលីមីតរាង $+\infty-\infty$ គេត្រូវដាក់តួមានដឺក្រេធំជាងគេជាកត្តារួមរួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។ ចម្លើយ: គណនា	

	$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x+1\right)$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+2}+x+1}$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{x^2+2}+x+1}$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)}$ $=\frac{-2}{2}=-1$	
• គ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សដោះស្រាយ: Ex: គណនា $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$	ជំហានទី៤"ពង្រឹងពុទ្ធិ" ចម្លើយ: គណនា $=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}$ $=\frac{1}{2}$	• សិស្សឡើងដោះស្រាយ
• ពេលប្អូនទៅផ្ទះវិញមេរៀនបន្តនិងឧស្សាហ៍ដោះស្រាយលំហាត់ ....។	ជំហានទី៥"បណ្តាំផ្ញើ"	• សិស្សស្តាប់តាមការណែនាំពីគ្រូ ។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

❖ បង្រៀនគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២

❖ ជំពូកទី១ លីមីត

❖ មេរៀនទី១ លីមីតនៃអនុគមន៍ (តចប់)

V លីមីតនៃអនុគមន៍មិនពិជគណិត

១.លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

២.លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

៣.លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពៃ

I វត្ថុបំណង:

- ចំណេះដឹង: សិស្សអាចរៀបរាប់ពីលក្ខណ:ទូទៅរបស់លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រអិចស្ប៉ូនិងលោការីតបានត្រឹមត្រូវតាមរយ:ខ្លឹមសារមេរៀន។
- បំណិន: សិស្សអាចដោះស្រាយលំហាត់លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រអិចស្ប៉ូនិងលោការីតបានច្បាស់លាស់តាមរយ:ឧទាហរណ៍។
- ឥរិយាបថ: សិស្សចូលចិត្តដោះស្រាយលំហាត់និងបានល្អត្រឹមត្រូវ។

II រយ:ពេល: 0២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ......ឆ្នាំ

III សម្ភារ:ឧបទេស:

- បន្ទាត់ ដៃកឈាន..........។
- ស.សទំព័រទី16 ដល់ ទី22 ។
- ស.គ ទំព័រទី......ដល់........។

IV ដំណើកនាំបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារបង្រៀន	សកម្មភាពសិស្ស
• គ្រូត្រួតពិនិត្យវត្តមាន វិន័យនិងបរិស្ថាន។	ជំហានទី១"រដ្ឋបាលថ្នាក់"	• ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
• ដាក់លំហាត់ឱ្យដោះស្រាយ: Ex: កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$ ជាចំនួនថេរ	ជំហានទី២"រំលឹកមេរៀន" ចម្លើយ:ដោយ $\lim_{x\to 1} x-1=0$ $\Rightarrow \lim_{x\to}\sqrt{x+3}-a=0$ យើងបាន: $\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3}-a=2-a=0$ $\Rightarrow a=2$	• សិស្សឡើងដោះស្រាយ
• គ្រូសរសេរចំណងជើង	ជំហានទី៣"មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ"	• សិស្សកត់

មេរៀនលើក្តាខៀន • គ្រូឱ្យសិស្សកំណត់លក្ខណៈទូទៅនិងទ្រឹស្តីបទលីមីតអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ	១.លីមីតអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ $*$ជាទូទៅ:បើ a ជាចំនួនពិតក្នុងដែនកំណត់ គេបាន: $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a,\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$ $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$ ។	• សិស្សកំណត់លក្ខណៈទូទៅនិងទ្រឹស្តីបទ:
• គ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សដោះស្រាយ: Ex_1 : គណនន $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}$	$*$ទ្រឹស្តីបទ:បើ x ជារង្វាស់មុំឬធ្នូគិតជារ៉ាដ្យង់ គេបាន: ក/. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ ខ/. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ ចម្លើយ: Ex_1 គណនា $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$ $=\frac{1}{2}$ ចម្លើយ: Ex_2 : គណនា $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sin 3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sin 3x}{3x}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$ $=\frac{1}{3}$	• សិស្សឡើងដោះស្រាយ • សិស្ស.កំណត
• គ្រូឱ្យសិស្សកំណត់លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងលក្ខណៈ: ទៅ:	២.លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល: ក/. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ខ/. $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ គ/. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ ជាទូទៅ:បើ $n>0$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ ចម្លើយ: Ex_1 : គណនា	• សិស្សឡើងដោះស្រាយលំហាត់

• គ្រូឱ្យសិស្សកំណត់លក្ខណៈទូទៅនៃលីមីតនៃលីមីតលោការីតនេពែ: • គ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សដោះស្រាយ Ex: គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell nx(\ell nx+2x)$ Ex: គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ell nx}{x^2+x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x\right)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=0$ ។ ៣.លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ: ក/. $\lim\limits_{x\to+\infty}=\ell nx=+\infty$ ខ/. $\lim\limits_{x\to0^+}\ell nx=-\infty$ គ/. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell nx}{x}=0$ ឃ/. $\lim\limits_{x\to0}x\ell nx=0$ ជាទូទៅ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell nx}{x^n}=0\ ;n\geq o$ នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ell nx=0$ ចម្លើយ: Ex: គណនា $=\lim\limits_{x\to+\infty}\ell nx(\ell nx+2x)$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\ell nx\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\ell nx+\lim\limits_{x\to+\infty}2x\right)$ $=+\infty$ ចម្លើយ: Ex: គណនា $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ell nx}{x^2+x}\right)$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell nx}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ell nx}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+4}\right)=0$ ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ell nx}{x^2+x}\right)=0$ ។	• សិស្សកំណត់បានលីមីតអនុគមន៍លោការីត • សិស្សឡើងដោះស្រាយលំហាត់
• គ្រូដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សដោះស្រាយ: Ex: គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ell nx+x^2+5\right)$	ជំហានទី៤"ពង្រឹងពុទ្ធិ" ចម្លើយ: គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ell nx+x^2+5\right)$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\dfrac{\ell nx}{x}+1+\dfrac{5}{x^2}\right)$ ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ell nx}{x}+1+\dfrac{5}{x^2}\right)=1$ ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ell nx+x^2+5\right)=+\infty$ ។	• សិស្សឡើងដោះស្រាយលំហាត់
• ពេលប្អូនទៅផ្ទះវិញមើលមេរៀនបន្ត រួចដោះស្រាយលំហាត់ឱ្យបានច្រើនដង ។	ជំហានទី៥ "បណ្តាំផ្ញើ"	• សិស្សស្តាប់ការណែនាំយ៉ាងយកខ្ជាប់ខ្ជួនបំផុត ។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ១ លីមីត

មេរៀនទី ២ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១.វត្ថុបំណងក្រោយពីរៀនមេរៀននេះចប់សិស្សមានសមត្ថភាព

-**ចំណេះដឹង**:បង្ហាញលក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពន្យល់ណែនាំរបស់គ្រូ និងការពិភាក្សាក្រុម ។

-**បំណិន**:អនុវត្តទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលក្នុងការរកឫសនៃសមីការបានត្រឹមត្រូវ តាមរយៈការពន្យល់ណែនាំ

-**កិរិយាបថ**: សិស្សពិភាក្សាក្រុមយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់របស់គ្រូ និងការពិភាក្សាក្រុម

២.សម្ភារៈ

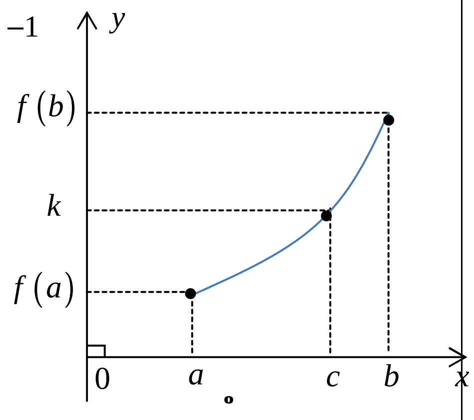
-សៀវភៅសិស្សទំព័រ ៣៥ ដល់ ៣៧ បោះពុម្ពឆ្នាំ ២០០៩

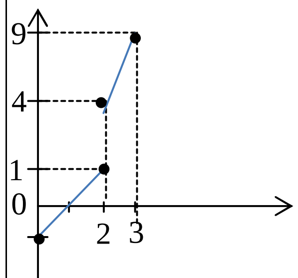
៤.ដំណើរការនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ពិនិត្យសណាប់ធ្នាប់និងពង្រឹងវិន័យ	ជំហានទី១(៥-៧)នាទី រដ្ឋលថ្នាក់ និងលំនឹងថ្នាក់	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូឲ្យសិស្សឲ្យនិយមន័យភាពជាប់នៃអនុគមន៍	ជំហានទី២(៥-១០)នាទី រំលឹកមេរៀនចាស់ និយមន័យ-អនុគមន៍ជាប់លើ(a,b)លុះត្រា f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃxនៃចន្លោះបើក នោះអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ$[a,b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់លើចន្លោះបើក(a,b) មានលីមីត	សិស្សឡើងឆ្លើយ

	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a);\lim\limits_{x\to b} f(x)=b$	
គ្រូឲ្យសិស្សពិនិត្យឧទាហរណ៍ លំហាត់គំរូទី១ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ។តើ f មានបន្លាយភាពជាប់ត្រង់0ឬទេ?	ជំហានទី៣ (៦០នាទី) មេរៀនថ្មី ៦.អនុវត្តន៍ អនុគមន៍បន្លាយភាពជាប់ ឧទាហរណ៍:គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ ។តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=1$ ឬទេ? ដំណោះស្រាយ អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ កាលណា $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=$ ប៉ុន្តែ f មិនកំណត់ត្រង់1ទេនាំឲ្យ f មិនជាប់ត្រង់1 គេថា g ជាបន្លាយភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f តាមភាពជាប់ត្រង់1 ជាទូទៅ បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x=a$ និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ នោះអនុគមន៍បន្លាយភាពជាប់នៃ f តាមភាពជាប់ ត្រង់ a កំណត់ដោយ $g(x)=\begin{cases} f(x); x\neq 0 \\ e; x=0\end{cases}$ អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x^2\neq 0$ $\Leftrightarrow x\neq 0$ -ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{0\}$ គេបាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{4}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)$	សិស្សពិនិត្យឧទាហរណ៍យ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់ សិស្សឡើងដោះស្រាយ និងកត់ត្រាចូលសៀវភៅ

លំហាត់គំរូទី២ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases} x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}; x\neq 0 \\ 1; x=0\end{cases}$ សិក្សាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ $x=0$	$=\frac{2}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ យក g ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $g(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x^2}; x\neq 0\\ \frac{1}{2}; x=0\end{cases}$ នោះ g ជាបន្លាយភាពជាប់ត្រង់ $x=0$ ដំណោះស្រាយ គេមាន $f(x)=\begin{cases} x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}; x\neq 0 \\ 1; x=0\end{cases}$ $=\begin{cases} x+\frac{x}{x}=x+1; x>1 \\ x-\frac{x}{x}=x-1; x<1 \\ 1; x=0\end{cases}$	
គ្រូឲ្យសិស្សសង្កេតឧទាហរណ៍ គេមាន $f(x)=x^2+2$ លើចន្លោះ $[0,2]$	តាមសមតិកម្ម យើងបាន $\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1=f(0)$; f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=0$ $\lim_{x\to 0^-}(x-1)\neq f(0)$; f មិនជាប់ខាងឆ្វេង $x=0$ ដូចនេះ f មិនជាប់ត្រង់ $x=0$ ៧.ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល គេមាន $f(x)=x^2-2$	
គ្រូសរសេរទ្រឹស្តីបទដាក់លើក្តាខៀន	.បើ $x=0$ នោះ $f(0)=-2$.បើ $x=2$ នោះ $f(2)=2$ យក k ;ដែល $f(0)\leq k\leq f(2)$ គេបានសមីការ $x^2-2=k$ រឺ $x^2=k+2$ ដោយ $-2\leq k\leq 2$ នោះ $k+2\geq 0$ ដូចនេះនៅចន្លោះ $[0,2]$ គេបាន $x=\sqrt{k+2}, \forall k / f(0)\leq k\leq f(2)$	

លំហាត់គំរូ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $\begin{cases} x-1; 0\le x\le 2 \\ x^2; 2< x\le 3 \end{cases}$ តើគ្រប់ $-1\le k\le 9$ មាន c ដែល $f(c)=k$ រឺទេ?	សមីការ $x^2-2=k$ មានឫស $x=c;0\le c\le 2$ ទ្រឹស្តីបទ បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង k ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a,b]$ ដែល $f(x)=k$ សំរាយបញ្ជាក់ អនុគមន៍ f ជាប់ និងកើនលើចន្លោះបិទ $[a,b]$; f កើនដាច់ខាតមានន័យថា $x<x'$ នោះ $f(x)<f(x')$ ដែល x និង $x'\in[a,b]$ នាំឲ្យចំនួនពិត k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ គេបាន $f(a)<k<f(b)$ និង f ជាអនុគមន៍ជាប់តាមទ្រឹស្តីបទបញ្ជាក់ថាមានចំនួនពិត c មួយនៅចន្លោះ a,b ដែល $f(c)=k$ បំនកស្រាយតាមធរណីមាត្រ  	សិស្សកត់ត្រា

លំហាត់គូទី២ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលបង្ហាញថាចំពអនុគមន៍ពហុធា $f(x)=x^3+2x-1$ មានចំនួនពិត c នៅចន្លោះ $[0,1]$ ដែល $f(c)=0$ គ្រូអោយសិស្សធ្វើប្រតិបត្តិ	ដំណោះស្រាយ  តាមក្រាប f ដាច់ត្រង់ 2 ដែលស្ថិតក្នុងចន្លោះ $[0,3]$ គេបាន $f(0)=-1$ $f(3)=9$ បើ $k\in[1,4]$ នោះគ្មានតម្លៃ c ដែល $f(c)=k$ ព្រោះគ្មានតម្លៃអនុគមន៍ចន្លោះ 1 និង 4 ប្រើទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាល បង្ហាញថាសមីការ $x^5-3x-1=0$ មានរឹសយ៉ាងតិចមួយនៅ ចន្លោះ $[1,2]$	សិស្សឡើងដោះស្រាយ គេមាន $f(x)=x^3+2x-1$ • $f(0)=0^3+2(0)-1$ • $f(1)=1^3+2(1)-1=2$ នាំអោយ $f(0).f(1)=-2<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាល $f(0).f(1)$ មានចំនួន c មួយ យ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[0,1]$ ដែល $f(c)=0$ ដំណោះស្រាយ តាង $f(x)=x^5-3x-1$ $f(1)=1-3.1-1=-3$ $f(2)=32-6-1=25$ $\Rightarrow f(1).f(2)=-3.25=-75<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាល $f(1).f(2)<0$ មានចំនួន c មួយ យ៉ាងតិចនៅចន្លោះ $[1,2]$ ដែល $f(c)=0$
	ជំហានទី4 រំលឹកមេរៀនឡើងវិញ	

លំហាត់ គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ: $f(x)=\begin{cases}x^2+2, x\geq -1\\ 2x+5, x<-1\end{cases}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាប់លើចំនុច $x=-1$		ដំណោះស្រាយ តាមសមតិកម្ម $f(1)=(-1)^2+2-3$ $\bullet \lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(x^2+2)=3$ $=f(-1)$ f ជាប់ខាងស្តាំ។ $\bullet \lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(2x+5)=3$ $=f(-1)$ f ជាប់ខាងឆ្វេង។ ដូចនេះ f ជាប់ត្រង់ $x=-1$
គ្រូកត់សំនួរ និងលំហាត់ដាក់លើក្តារខៀ ន និងនែនាំសិស្សអោយខិតខំរៀ នសូត្រ	ជំហានទី5 បណ្តាំផ្ញើ លំហាត់ទំព័រ 40-41 លេខ 4-6	សិស្សកត់ត្រាសំនួរ និងលំហាត់ព្រមទាំ ងត្រង់ត្រាប់ស្តាប់ការនែនាំរបស់គ្រូ យ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ១ លីមីត

មេរៀនទី១ លីមីតនៃអនុគមន៍

5.លីមីតនៃអនុមន៍មិនពិជគណិត

5.1 លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

១.វត្ថុបំណង:ក្រោយពីរៀនមេរៀននេះចប់សិស្សមានសមត្ថភាព

-ចំណេះដឹង:គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្របានត្រឹមត្រូវ

តាមរយៈការពន្យល់ណែនាំរបស់គ្រូ និងការពិភាក្សាក្រុម

-បំណិន:

-ឥរិយាបថ: សិស្សពិភាក្សាក្រុមយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់

២.សម្ភារៈឧបទេស

-សៀវភៅសិស្សទំព័រទី២ ដល់ ២៧

-បន្ទាត់

៣.រយៈពេល ១h

៤.ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ឲ្យសិស្សឡើងរាយការណ៍ពី: -សណ្តាប់ធ្នាប់ -អនាម័យ	ជំហានទី១(លំនឹងថ្នាក់) -សណ្តាប់ធ្នាប់ -អនាម័យ	-សណ្តាប់ធ្នាប់ -អនាម័យ -អវត្តមាន

-អវត្តមាន	-អវត្តមាន	
ឲ្យសិស្សឡើងកែលំហាត់គណនាលីមីត ក. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)$ ខ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-5x}{x^2-5x+4}$	ជំហានទី២(រំលឹកមេរៀនចាស់) ដំណោះស្រាយ ក. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)$ $=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x-1-x^2-3}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-3}}\right)=-4$ ខ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-5x}{x^2-5x+4}$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(3-5/x^3\right)}{x^2\left(1-5/x+\infty\, 4/x^2\right)}=+\infty$	សិស្សឡើងគណនា ក. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)$ $=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x-1-x^2-3}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-3}}\right)=-4$ ខ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-5x}{x^2-5x+4}$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(3-5/x^3\right)}{x^2\left(1-5/x+\infty\, 4/x^2\right)}=+\infty$
ឧទាហរណ៍: គេមានរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ចូរប្អូនសង្កេត -កាលមុំ x ខិតជិត 0 នោះ $\sin x$ ខិតរក 0 -កាលមុំ x ខិតជិត 0 នោះ $\cos x$ ខិតរក 1 -កាលមុំ x ខិតជិត 0 នោះ $\tan x$ ខិតរក 0 -គេសរសេរ $\lim_{x\to0}\sin x=0$, $\lim_{x\to0}\cos x=1$, $\lim_{x\to0}\tan x=0$	ជំហានទី៣(មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី១: **លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ** ចូរប្អូនសង្កេត -កាលមុំ x ខិតជិត 0 នោះ $\sin x$ ខិតរក 0 -កាលមុំ x ខិតជិត 0 នោះ $\cos x$ ខិតរក 1 -កាលមុំ x ខិតជិត 0 នោះ $\tan x$ ខិតរក 0 -គេសរសេរ $\lim_{x\to0}\sin x=0$, $\lim_{x\to0}\cos x=1$, $\lim_{x\to0}\tan x=0$	សិស្សសង្កេត និងស្តាប់ -កាលមុំ x ខិតជិត 0 នោះ $\sin x$ ខិតរក 0 -កាលមុំ x ខិតជិត 0 នោះ $\cos x$ ខិតរក 1 -កាលមុំ x ខិតជិត 0 នោះ $\tan x$ ខិតរក 0 -គេសរសេរ $\lim_{x\to0}\sin x=0$, $\lim_{x\to0}\cos x=1$, $\lim_{x\to0}\tan x=0$

គ្រូឲ្យសិស្សសង្កេតលក្ខណៈទូទៅ គ្រូធ្វើសំរាយបញ្ជាក់	ជាទូទៅ: បើ a ជាចំនួនពិតស្ថិតនៅក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ គេបាន: $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$ $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$ $\lim_{x\to a}\tan x=\tan a$ ទ្រឹស្តីបទ:បើ x ជារង្វាស់មុំ រឺធ្នូគិតជារ៉ាដ្យង់គេបាន ក. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, ខ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ សំរាយបញ្ជាក់ ក.បើ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ គេបានក្រលាផ្ទៃ $\Delta OAT\geq$ ក្រលាផ្ទៃចំរៀកថាស $OAP\geq$ ផ្ទៃក្រលា ΔOAP	ជាទូទៅ: បើ a ជាចំនួនពិតស្ថិតនៅក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ គេបាន: $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$ $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$ $\lim_{x\to a}\tan x=\tan a$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$\frac{1}{2}\times1\times\tan\theta\geq\frac{1}{2}\times1^2\cdot\theta\geq\frac{1}{2}\times1\times\sin\theta$
$\tan\theta\geq\theta\geq\sin\theta$
គុណវិសមភាពនិង $\frac{1}{\sin\theta}$ គេបាន
$\frac{1}{\cos\theta}\geq\frac{\theta}{\sin\theta}\geq1$
$\cos\theta\leq\frac{\sin\theta}{\theta}\leq1$
-បើ $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$ គេបាន
$\cos(-\theta)\leq\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}\leq1$
$\cos\theta\leq\frac{\sin\theta}{\theta}\leq1$
$\lim_{\theta\to0}\cos\theta\leq\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\leq\lim_{\theta\to0}1$
$1\leq\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\leq1$
ដូចនេះ $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>គ្រូឲ្យសិស្សឡើងគណនា
ក. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin5x}$
ខ. $\lim_{x\to0}\frac{\cos6x-\cos x}{\sin^2x}$</td>
<td>ជំហានទី៨(ពង្រឹងចំណេះដឹង)
គណនា ក. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin5x}$
គេបាន $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin5x}$
$=\lim_{x\to0}\frac{x+4-4}{\sin5x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{20}$
ខ. $\lim_{x\to0}\frac{\cos6x-\cos x}{\sin^2x}$
តាម
$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
នោះ
$\cos6x-\cos x=-2\sin\frac{6x+x}{2}\sin\frac{6x-x}{2}$
$=-2\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{5x}{2}$</td>
<td>សិស្សឡើងធ្វើលំហាត់លើក្ដារខៀន
គណនា ក. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin5x}$
គេបាន $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin5x}$
$=\lim_{x\to0}\frac{x+4-4}{\sin5x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\frac{1}{20}$
ខ.
$\lim_{x\to0}\frac{\cos6x-\cos x}{\sin^2x}$
តាម
$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
នោះ</td>
</tr>
</table>

	គេបាន $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos x}{\sin^2 x}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{5x}{2}}{\sin^2 x}$ $=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cdot\frac{7x}{2}\cdot\frac{5x}{2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot x^2}\right)=-\frac{35}{2}$	$\cos 6x-\cos x=-2\sin\frac{6x+x}{2}\sin\frac{6x-x}{2}$ $=-2\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{5x}{2}$ គេបាន $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos x}{\sin^2 x}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{5x}{2}}{\sin^2 x}$ $=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cdot\frac{7x}{2}\cdot\frac{5x}{2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot x^2}\right)=-\frac{35}{2}$
គ្រូសរសេរលំហាត់លើក្តារខៀន $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$	ជំហានទី៥(កិច្ចការផ្ទះ) ចូរគណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$	សិស្សកត់ត្រាលំហាត់ធ្វើនៅផ្ទះ ចូរគណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- **មុខវិជ្ជា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)**
- **ជំពូកទី១ :លីមីត**
- **មេរៀនទី២ : ភាពជាប់នៃអនុគមន៍**
- **ពេលវេលា : ...២...ម៉ោង ថ្ងៃ.........ទី...ខែ..............ឆ្នាំ.........**

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : បង្ហាញសញ្ញាណនៃអនុគមន៍ជាប់ បានត្រឹមត្រូវ។
កំណត់និយមន័យនៃអនុគមន៍ជាប់ត្រង់មួយចំណុចបានត្រឹមត្រូវ។

-បំណិន : ពន្យល់ពីសញ្ញាណនៃអនុគមន៍ជាប់ បានត្រឹមត្រូវ។
បកស្រាយនិយមន័យនៃអនុគមន៍ជាប់ត្រង់មួយចំណុច បានច្បាស់លាស់។

-ឥរិយាបថ :សិស្សបានបណ្ដុះស្មារតីយកចិត្តទុកដាក់ និង មានទំនួលខុសត្រូវ។

II. ខ្លឹមសារមេរៀន :

១.សញ្ញាណនៃអនុគមន៍ជាប់

២. ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី២៨ដល់ទំព័រទី៣០

-ស . គ : ទំព័រទី២៨ដល់ទំព័រទី៣០

- សន្លឹកកម្រង់លំហាត់ប្រត្តិបត្តិ បន្ទាត់ ឧបករណ៍សម្រាប់គូសប៉ារ៉ាបូល

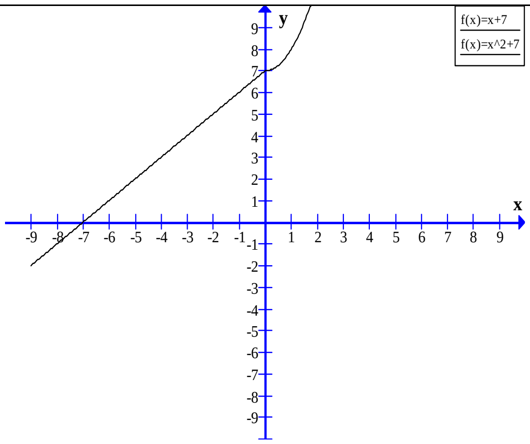
IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្ដាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ចូរឱ្យនិយមន័យលីមីតឆ្វេងនិង លីមីតស្ដាំនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ត្រង់ x_0 ។	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី)	-បើ $f(x)$ ខិតជិត l កាលណា x ខិតជិ x_0 ពីខាងឆ្វេងនោះ l ជាលីមីតឆ្វេងនៃ $f(x)$ ។

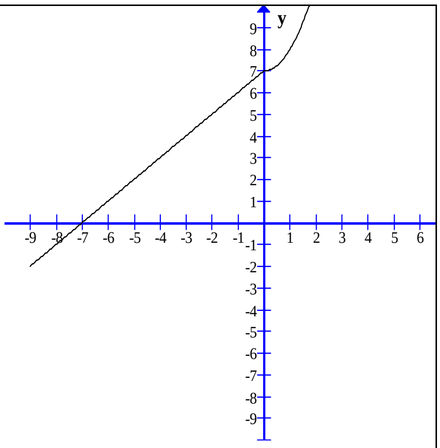
-តើនៅពេលណាដែលអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានលីមីតត្រង់ x_0 ?		គេសរសេរ $\lim_{x\to x_0-} f(x)=L$ -បើ $f(x)$ ខិតជិតRកាលណា x ខិតជិត x_0 ពីខាងស្តាំនោះ Rជាលីមីតស្តាំនៃ $f(x)$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ -អនុគមន៍ $y=f(x)$ មានលីមីត ត្រង់ x_0 កាលណាលីមីតឆ្វេងស្មើនិងលីមីតស្តាំគឺ $\lim_{x\to x_0-} f(x)=\lim_{x\to x_0+} f(x)=L$ ឬ $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$
-គូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ លើចន្លោះ I មួយដោយមិនលើកខ្មៅដៃ រួចឱ្យសិស្សសង្កេតមើល។ -តើក្រាបនោះជាខ្សែជាប់ ឬដាច់? -បញ្ជាក់ប្រាប់សិស្សថា f ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់ចំណុចនៃចន្លោះ I ព្រោះខ្សែជាប់នេះគ្មានដាច់ ឬ ចន្លោះ។	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី រយៈពេល៦០នាទី) **មេរៀនទី២:** **ភាពជាប់នៃអនុគមន៍** ១. សញ្ញាណនៃអនុគមន៍ជាប់ ២.ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច	-សិស្សសង្កេត -ជាខ្សែជាប់ -សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រា

-ណែនាំសិស្សធ្វើឧទាហរណ៍	ឧទាហរណ៍ គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\begin{cases}x^2+7\\ x+7\end{cases}$ បើ $\begin{matrix}x\geq 0\\ x\prec 0\end{matrix}$ ក. រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍f ខ. រក $f(0)$,$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ និង$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$រួចទាញរក $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ គ. ប្រៀបធៀបតម្លៃរបស់ $f(0)$ និង $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ឃ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f ចម្លើយ ក.$D=\mathbb{R}$ ខ. $f(0)=0^2+7=7$ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0+7=7$ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0^2+7=7$ ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^-}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=7$ គ.ដោយ $f(0)=7$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=7$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=7$ ឃ.សង់ក្រាប	- ក.$D=\mathbb{R}$ ខ. $f(0)=0^2+7=7$ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0+7=7$ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0^2+7=7$ ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^-}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=7$ គ.ដោយ $f(0)=7$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=7$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=7$ ឃ.សង់ក្រាប

<table>
<tr>
<td>
-តើក្រាបដែលសង់បានជាប់គ្នាត្រង់ $x=0$ ឬទេ?
-បញ្ជាក់ប្រាប់សិស្សថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។
-ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f មួយជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=c$ តើអនុគមន៍ f ត្រូវបំពេញលក្ខខណ្ឌអ្វីខ្លះ?
-ឱ្យសិស្សទាញនិយមន័យអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=c$ ។

-ឱ្យលក្ខណៈសម្គាល់ដល់សិស្ស បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មិនជាប់ត្រង់ $x=c$ គេថា f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x=c$
</td>
<td>


-និយមន័យ អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=c$ កាលណា f បំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោម
. f កំណត់ចំពោះ $x=c$
. f មានលីមីតត្រង់ $x=c$
. $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

-សម្គាល់
បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មិនជាប់ត្រង់ $x=c$ គេថា f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x=c$
លំហាត់គំរូ
ក.អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ
</td>
<td>

-ជាប់គ្នាត្រង់ $x=0$
-សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រា
-បំពេញលក្ខខណ្ឌបី
-f កំណត់ចំពោះ $x=c$
-f មានលីមីតកាលណា $x\to c$
-$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$
- និយមន័យ អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់
ត្រង់ចំណុច $x=c$ កាលណា f បំពេញ
លក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោម
. f កំណត់ចំពោះ $x=c$
. f មានលីមីតត្រង់ $x=c$
. $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

-សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា

ក.តើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់
</td>
</tr>
</table>

$f(x)=x^2-4$ ។តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$ ឬទេ?

ខ. អនុគមន៍ g កំណត់ដោយ

$$g(x)=\begin{cases}-1 & ,x\prec 0\\ 1 & ,x\succ 0\end{cases}$$

តើ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ?

(សង់ក្រាបបញ្ជាក់)

ចម្លើយ

ក.តើអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$ ឬទេ?

រក

$f(2)=2^2-4=0\ (1)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2^2-4=0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2^2-4=0$

ដោយ

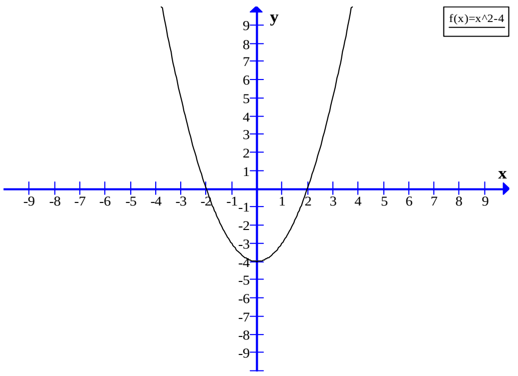
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=0\ (2)$

តាម(១)និង (២)គេបាន

$\lim\limits_{x\to 2} f(2)=0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$



ខ. តើ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ?

$x=2$ ឬទេ?

រក

$f(2)=2^2-4=0\ (1)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2^2-4=0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2^2-4=0$

ដោយ

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$

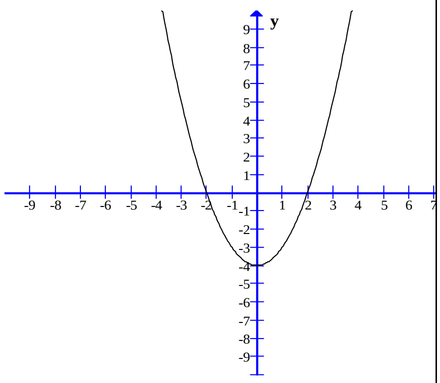
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=0\ (2)$

តាម(១)និង (២)គេបាន

$\lim\limits_{x\to 2} f(2)=0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់

$x=2$



ខ. តើ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់

$x=0$ ឬទេ?

រក

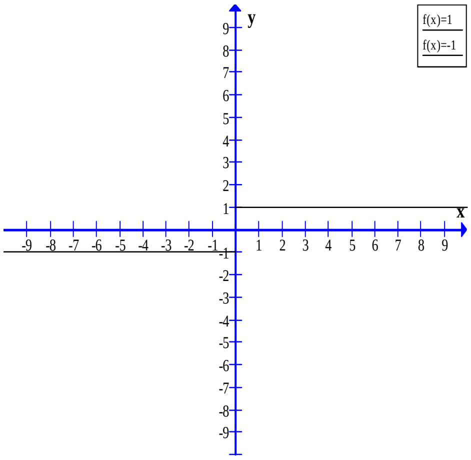
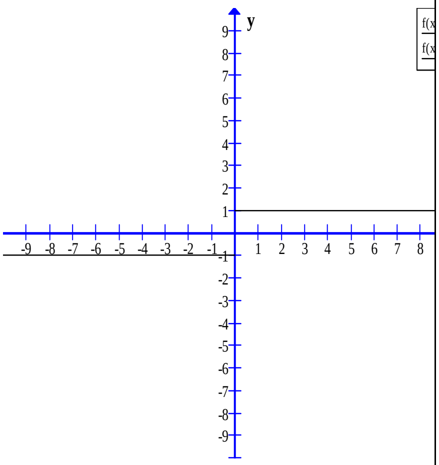
$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

$\Rightarrow g$ គ្មានលីមីតត្រង់ $x=0$ ទេ។

ដូចនេះ g មិនជាប់ត្រង់ $x=0$ ទេ។

	រក $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -1$ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ $\Rightarrow g$ គ្មានលីមីតត្រង់ $x=0$ ទេ។ ដូចនេះ g មិនជាប់ត្រង់ $x=0$ ទេ។  	
-ចែកក្រុមលំហាត់ប្រតិបត្តិឱ្យសិស្សធ្វើជាដៃគូឬជាបុគ្គល -គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}3+x\ ,\ x\le 1\\ 3-x\ ,x\succ 1\end{cases}$ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x=1$	**ជំហានទី៤** (ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី)	-សិក្សាភាពជាប់ រក $f(1)=3+1=4$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3+1=4$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3-1=2$ ដោយ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ នោះ f គ្មានលីមីតត្រង់ $x=1$ ទេ។ ដូចនេះ អនុគមន៍ f មិនជាប់ត្រង់ $x=1$ ទេ។
	ជំហានទី៥	

-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ -ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់	(កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី)	-សិស្សកត់លំហាត់និងអនុវត្តតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- មុខវិជ្ជា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)
- ជំពូកទី១ : លីមីត
- មេរៀនទី២ : ភាពជាប់នៃអនុគមន៍
-ពេលវេលា : …២…ម៉ោង ថ្ងៃ………ទី…ខែ…………..ឆ្នាំ……….

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : -កំណត់និយមន័យអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបើកនិងលើចន្លោះបិទបានត្រឹមត្រូវ។
-កំណត់និយមន័យអនុគមន៍បណ្តាក់បានត្រឹមត្រូវ។

-បំណិន : សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍លើចន្លោះបើក និងលើចន្លោះបិទបានច្បាស់លាស់។
-សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់បានត្រឹមត្រូវ។

-ឥរិយាបថ : សិស្សអាចយកចំណេះដឹងទាំងនេះទៅពន្យល់មិត្តភក្តិ ដោយមានភាពជឿជាក់និងមានសាមគ្គីភាព។

II. ខ្លឹមសារមេរៀន :

៤.ភាពជាប់លើចន្លោះ

៥. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី៣២ដល់ទំព័រទី៣៤

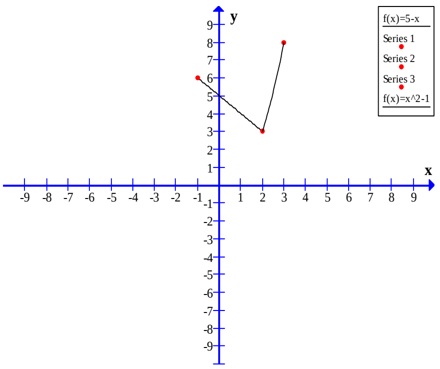
-ស . គ : ទំព័រទី៣២ ដល់ទំព័រទី៣៤

- សន្លឹកកម្រង់លំហាត់ប្រត្តិបត្តិ សន្លឹកកម្រងសំណួរតម្រង់ទិសការពិភាក្សា។

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍

-តើសរសេរ $x\in(a,b)$ និង $x\in[a,b]$ មានន័យដូចម្ដេច?	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី)	-$x\in(a,b)$ មានន័យថាគឺគ្រប់តម្លៃ x នៅក្នុងចន្លោះ a និង b ឬគេសរសេរ $a\prec x\prec b$ ។ -$x\in[a,b]$ មានន័យថាគឺគ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ a និង b ផង និងតម្លៃ $x=a$ និង $x=b$ ផង ឬ គេសរសេរ $a\le x\le b$ ។
-ឱ្យសិស្សសង្កេតលើឧទាហរណ៍ទី១និងទី២ -បញ្ជាក់ប្រាប់សិស្សថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបើក $(-\infty,-5)$ និងជាប់លើបើក $(-5,+\infty)$	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី រយះពេល៦០នាទី) **មេរៀនទី២:** **ភាពជាប់អនុគមន៍** ៤.ភាពជាប់លើចន្លោះ ឧទាហរណ៍១ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2}{x+5}$ -ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(Df)$ អនុគមន៍ f គ្មានន័យកាលណា $x+5\neq0\Rightarrow x\neq-5$ គេបាន $D_f=(-\infty,-5)\cup(-5,+\infty)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x\in(-\infty,-5)$ និង $x\in(-5,+\infty)$ ឧទាហរណ៍ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $g(x)=\begin{cases}5-x\ ,-1\le x\le 2\\ x^2-1\ ,,2\prec x\le 3\end{cases}$ ដោយ $y=5-x$ និង $y=x^2-1$	-សិស្សសង្កេត -សិស្សស្ដាប់

	ជាអនុគមន៍ពហុធា។ នោះ $y=5-x$ ជាប់គ្រប់ $x\in(-1,2)$ (1) ហើយ $y=x^2-1$ ជាប់គ្រប់ $x\in(2,3)$ (2) -ម្យ៉ាងទៀត $g(2)=5-2=3$ $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(5-x)=3$ $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-1)=3$ គេបាន $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2+} g(x)=g(2)$ នាំឱ្យ g ជានុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$ (3) តាម(1), (2) និង (3) គេថា g ជាប់លើចន្លោះបើក $(-1,3)$ តែ $g(-1)=5-1=4$	
-បញ្ជាក់ប្រាប់សិស្សថា g ជាអនុគមន៍ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=-1$ ។	$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(5-x)$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=g(1)=4$ ហើយ	
- បញ្ជាក់ប្រាប់សិស្សថា g ជាអនុគមន៍ជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ $x=3$	$g(3)=3^2-1=8$ $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-1)=8$ $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=g(3)=8$	
		
- ដោយ g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបើក $(-1,3)$ g ខាងស្តាំត្រង់ $x=-1$ និង g ខាងឆ្វេងត្រង់ $x=3$ គេថា g ជាប់លើចន្លោះបិ $[-1,3]$	-និយមន័យ -អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ចន្លោះបើកនោះ។	-សិស្សទាញនិយមន័យ

-ណែនាំឱ្យសិស្សទាញនិយមន័យភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះបើក (a,b) និងភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ។ -ណែនាំឱ្យសិស្សធ្វើលំហាត់គំរូ	- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ចន្លោះបើក (a,b) និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ និង $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ "អនុគមន៍ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=a$ និងជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ $x=b$" លំហាត់គំរូ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ លើចន្លោះ $(2,3)$ និង $[-2,3]$ ។ ចម្លើយ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f អនុគមន៍ f គ្មានន័យកាលណា $x-3=0 \Rightarrow x=3$ នាំឱ្យ f ជាប់ចំពោះចំនួនពិត x លើកលែងតែ $x=3$ ដូចនេះ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(2,3)$ ប៉ុន្តែមិនជាប់លើចន្លោះបិទ $[-2,3]$ ព្រោះត្រង់ $x=3$ អនុគមន៍ f គ្មានន័យ។ <u>៥. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់</u> ឧទាហរណ៍ គេមានអនុគមន៍ $h(x)=Cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ លើចន្លោះ $(2,3)$ និង $[-2,3]$ តាង $f(x)=Cosx$ និង $g(x)=x+\dfrac{\pi}{3}$	-អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ចន្លោះបើកនោះ។ - អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ចន្លោះបើក (a,b) និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ និង $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ "អនុគមន៍ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=a$ និងជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ $x=b$" សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f អនុគមន៍ f គ្មានន័យកាលណា $x-3=0 \Rightarrow x=3$ នាំឱ្យ f ជាប់ចំពោះចំនួនពិត x លើក លែងតែ $x=3$ ដូចនេះ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(2,3)$ ប៉ុន្តែមិនជាប់លើចន្លោះបិទ $[-2,3]$ ព្រោះត្រង់ $x=3$ អនុគមន៍ f គ្មានន័យ។

-ដាក់ឧទាហរណ៍ឱ្យសិស្សសង្កេតរបៀបតាងអនុគមន៍បណ្ដាក់	-g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ - f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $g(0)=\frac{\pi}{3}$ ដូចនេះ $h=fog$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។	-សិស្សសង្កេតនិងឆ្លើយ
- តាង $f(x)=Cosx$ និង $g(x)=x+\frac{\pi}{3}$ នោះ $h(x)=f\left[g(x)\right]$ ជាអនុគមន៍បណ្ដាក់តាងដោយ $(fog)(x)=f\left[g(x)\right]$		
-តើ $g(x)=x+\frac{\pi}{3}$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ឬទេ?ព្រោះអ្វី? - $f(x)=Cosx$ ជាប់ត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$ ឬទេ?ព្រោះអ្វី?		-g ជាប់ត្រង់ $x=0$ ព្រោះ g ជាអនុគមន៍ពហុធាជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។ - f ជាប់ត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$ ព្រោះ $Cosx$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។
-បញ្ជាក់ប្រាប់សិស្សថា ដោយ $g(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ហើយ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$ ដែល $g(x)=\frac{\pi}{3}$ នាំឱ្យ $h=fog$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។	-ជាទូទៅ ៖ បើអនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ c និងអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $g(c)$ នោះ អនុគមន៍បណ្ដាក់ $(fog)(x)=f\left[g(x)\right]$ ជាប់ត្រង់ c ។	-សិស្សស្ដាប់
-ឱ្យសិស្សពិភាក្សាគ្នាទាញសន្និដ្ឋានជាទូទៅ	លំហាត់គំរូ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $h(x)=\left\|\frac{xSinx}{x^2+2}\right\|$ ត្រង់ $x=0$ ចម្លើយ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ តាង $f(x)=\left\|\frac{xSinx}{x^2+2}\right\|$ និង $g(x)=\|x\|$	-សិស្សទាញជាទូទៅ
-ណែនាំសិស្សសង្កេតលើលំហាត់គំរូ	ដោយ f ជានុគមន៍សនិទានជាប់ត្រង់ $x=0$ និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $h=(gof)(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។	-សិស្សសង្កេត

-ចែកកម្រង់លំហាត់ប្រតិបត្តិឱ្យសិស្សធ្វើតាមក្រុម	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី) -ប្រត្តិបត្តិ ១.គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{3+x}}$ តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(-3,2)$ និង $(-3,2]$ ឬទេ? ២.រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ជាអនុគមន៍ជាប់ដែល $f(x)=\sqrt{1-x^2}$	១. តើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(-3,2)$ និង $(-3,2]$ ឬទេ? អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $\frac{2-x}{3+x}\geq 0$ $\Leftrightarrow x\in(-3,2]$ ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $(-3,2)$ និង $(-3,2]$ ។ ២.អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $1-x^2\geq 0$ $\Leftrightarrow x\in[-1,1]$ ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[-1,1]$
-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ -ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី)	-សិស្សកត់លំហាត់និងអនុវត្តតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ១ លីមីត

មេរៀនទី ២ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

I.**វត្ថុបំណងនៃមេរៀន**:ក្រោយពេលរៀនមេរៀននេះចប់សិស្សអាច ៖

- ចំណេះដឹង : បង្ហាញបានពីលក្ខណៈ និងប្រមាណវិធីនៃអនុគមន៍បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍

-បំណិន :បកស្រាយលក្ខណៈ និងប្រមាណវិធីនៃអនុគមន៍ជាប់រយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II. **ពេលវេលា** ០២ម៉ោង

III. **សម្ភារៈឧបទេស**

- សៀវភៅសិស្ស :ទំព័រទី ៣០ ដល់ទំព័រទី ៣១
- សៀវភៅគ្រូ : ទំព័រទី ៣០ ដល់ទំព័រទី ៣១

IV.**ខ្លឹមសារមេរៀន**

៣. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់

IV.**ដំណើរនាំមេរៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យអវត្តមានអនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់និងវិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់)	-ណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
- ចូរឲ្យនិយមន័យភាពជាប់នៃអនុគមន៍ ។	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់)	និយមន័យ អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=c$ កាលណា f បំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោម៖ f កំណត់ចំពោះ $x=c$ f មានលីមីតត្រង់ $x=c$ $\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$
	ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី) **មេរៀនទី២ភាពជាប់នៃអនុគមន៍** **៣. លក្ខណៈអនុគមន៍**	

- បញ្ហាញលក្ខណៈនៃអនុមន៍	បើអនុគមន៍ f និង g ជាប់ត្រង់ $x=c$ នោះគេបាន $(1).f(x)+g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=c$ ។ $(2).f(x)-g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=c$ ។ $(3).f(x)\times g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=c$ ។ $(4).Kf(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=c$ ។ $(5).\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=c$ ដែល $g(x)\neq 0$	- សង្កេត និង កត់ត្រា
- កំណត់ពីភាពជាប់នៃអនុគមន៍លីនេអ៊ែជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់ចំនួនពិត	អនុគមន៍លីនេអ៊ែជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់គ្រប់ចំនួនពិត។	- សង្កេត និងស្តាប់
- បង្ហាញពីអនុមន៍ពហុធា p ជាប់គ្រប់តម្លៃ x	អនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី n នៃ p ដែល $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ ដែល $a_1,a_2,...,a_n$ ជាចំនួនពិតហើយ $a_0\neq 0$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។ បើ c ជាចំនួនពិតគេបាន $\lim\limits_{x\to c}p(x)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+...+a_n$ $=p(c)$ ដូចនេះ អនុគមន៍ p ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។	
- អនុគមន៍សនិទាន $R(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ តើអនុគមន៍ p និង q ជាប់ត្រង់ $x=c$ ឬទេ?	- អនុគមន៍សនិទាន $R(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ដែល $q(x)\neq 0$ ។អនុគមន៍ p និង q ជាប់ត្រង់ $x=c$ គេបាន $\lim\limits_{x\to c}p(x)=p(c),\lim\limits_{x\to c}q(x)=q(c)$ នោះ $\lim\limits_{x\to c}R(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}=R(c)$ គេបាន R ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=c$	- អនុគមន៍ p និង q ជាប់ត្រង់ $x=c$

- ឲ្យសិស្សសង្កេតមើលអនុគមន៍អសនិទាន និងរកដែនកំណត់ - ដាក់លំហាត់គំរូឲ្យសិស្សធ្វើ	បើ $x=c$ នាំឲ្យ $q(x)=0$ នោះ $R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ គ្មានន័យ គេបាន R ជាអនុគមន៍មិនជាប់ត្រង់ $x=c$ បើ $x=c$ នាំឲ្យ $q(c)=0$ ទេ។ - អនុគមន៍រ៉ាឌីកាល $f(x)=\sqrt[n]{x}$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់។ - អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ $f(x)=\sin x$ និង $g(x)=\cos x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត។ - អនុគមន៍ $y=\tan x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ និង $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ ។ - អនុគមន៍ $y=\cot x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ និង $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ ។ លំហាត់គំរូ រកតម្លៃ x ដែលនាំឲ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ជាប់៖ ក. $f(x)=x^{14}+20x^4$ ខ. $g(x)=(7x^2+8)(3-x)$ គ. $h(x)=\frac{x+3}{x^2-3x-10}$	- សង្កេត និងកត់ត្រា ក. ដោយ x^{14} និង $20x^4$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x នោះ $f(x)=x^{14}+20x^4$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។ ខ. ដោយ $(7x^2+8)$ និង $(3-x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x នោះ $g(x)=(7x^2+8)(3-x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ។ គ. អនុគមន៍ $h(x)$ គ្មានន័យកាលណា $x^2-3x-10=0$ $\Rightarrow x=5, x=2$ ដូចនេះ $h(x)=\frac{x+3}{x^2-3x-10}$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x\neq5$ និង $x\neq2$
	<u>ជំហានទី ៥</u>(ពង្រឹងពុទ្ធិ)	

- ដាក់ប្រតិបត្តិឲ្យសិស្សធ្វើ	ប្រតិបត្តិ បង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x នៃដែនកំណត់ ក. $f(x)=x^4\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$ ខ. $g(x)=\frac{x^2+7x-11}{x^3+6x^2+5x-12}$	ក. $f(x)=x^4\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$ ដោយ x^4 ជាប់គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$ ជាប់គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន $f(x)=x^4\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$ ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ ។ ខ. $g(x)=\frac{x^2+7x-11}{x^3+6x^2+5x-12}$ អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $x^3+6x^2+5x-12\neq 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x+4)\neq 0$ $\Rightarrow x\neq 1, x\neq -3, x\neq -4$ ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លើកលែងតែ $x=1, x=-3, x=-4$
- ពេលត្រឡប់ទៅផ្ទះវិញប្អូនត្រូវធ្វើលំហាត់ផង ។	<u>ជំហានទី ៥</u>(បណ្តាំផ្ញើរ)	-ស្តាប់និងកត់ត្រា

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យា
- ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន
- ជំពូកទី២: អនុគមន៍ដេរីវេ
- មេរៀនទី១: អនុគមន៍ដេរីវេ
- រយពេល2h

I វត្ថុបំណង

- ចំណេះដឹង: អោយសិស្សចេះគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុច x_0 និងដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់។
- ចំណេះធ្វើ: សិស្សធ្វើលំហាត់គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុច x_0 និងបណ្តាក់បាបលឿនហើយត្រឹមត្រូវ។
- ឥរិយាបថ: សិស្សមានស្មារតីក្លាហានក្នុងការគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុច x_0 និងអនុគមន៍បណ្តាក់៕

II ខ្លឹមសារមេរៀន

1. ដេរីវេត្រង់ចំណុច x_0
2. ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

III សំភារ:ឧបទេស

- សៀវភៅសិស្សទំព័រ $(44 \to 46)$ បោះពុម្ពឆ្នាំ2011
- សៀវភៅគ្រូទំព័រទី

IV វិធីបង្រៀន

គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល

V ដំណើរការបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ពិនិត្យអវត្តមានអនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់សិស្សក្នុងថ្នាក់	1. ជំហានទី1 $(3\,\text{min})$ - រដ្ឋបាលថ្នាក់រៀន	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
	2. ជំហានទី2 $(7\,\text{min})$ - រំលឹកមេរៀនចាស់	

-ចូរប្អូនសរសេររូបមន្តដេរីវេ ខាងក្រោម៖ $-y=x^n \Rightarrow y^{'}=?$ $-y=u^n \Rightarrow y^{'}=?$ $-y=\sqrt{x} \Rightarrow y^{'}=?$ $-y=\sqrt{u} \Rightarrow y^{'}=?$	$-y^{'}=nx^{n-1}$ $-y^{'}=nu^{n-1}$ $-y^{'}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $-y^{'}=\frac{u^{'}}{2\sqrt{u}}$	សិស្សសរសេររូបមន្តលើក្តារខៀន $-y'=nx^{n-1}$ $-y^{'}=nu^{n-1}$ $-y^{'}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $-y^{'}=\frac{u^{'}}{2\sqrt{u}}$
ចែកសិស្សជាក្រុមពិភាក្សា តើដេរីវេត្រង់ x_0 នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ គឺជាអ្វី? Ex_1 :រកដេរីវេត្រង់ $x_0=1$ នៃអនុគមន៍ $y=x^2-2$ ។ Ex_2 : រកដេរីវេត្រង់ $x_0=2$ នៃអនុគមន៍ $y=x^3-1$ ។ Ex_3 : រកដេរីវេត្រង់ $x_0=1$ នៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$ ។ -បើ $y=f(u)$ ហើយ $u=g(x)$ តើ	3. ជំហានទី3 $(25\,\text{min})$ មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ **ដេរីវេនៃអនុគមន៍** 1. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ x_0 $-y^{'}=f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $-f^{'}(1)=2$ $-f^{'}(2)=12$ $-f^{'}(1)=\frac{1}{2}$ 2. ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ $y=\frac{d}{dx}f[u(x)]=f'(u)\times u'(x)$ $=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ $y'=8x(x^2+21)^3$	សិស្សពិភាក្សាតាមក្រុម ជាផលធៀបរវាងកំណើនអនុគមន៍ និងកំណើនអថេរ។ $f^{'}(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $-f^{'}(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2+1}{x-1}=2$ $-f^{'}(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ $=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=12$ $-f^{'}(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$ $y'=\frac{d}{dx}f[u(x)]=f'(u)\times u'(x)$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ $y=(x^2+21)^4$ $u=x^2+21\Rightarrow\frac{du}{dx}2x$

$y' = \frac{d}{dx} f[u(x)] = ?$ Ex គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ក. $y = (x^2+21)^4$ ខ. $y = (x^3+2x-1)$ គ. $-y = \sqrt{x^4-1}$ តាមរូបមន្តនិងឧទាហរណ៍ខាងលើនេះ តើប្អូនអាចទាញដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = u^n$ ដែល u ជាអនុគមន៍នៃ x បាន យ៉ាងដូចម្តេច? Ex : គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ក. $y = (x^2+2)^{80}$ ខ) $y = 4\sqrt[4]{x^2+2x+5}$	$y' = 11(3x^2+2)(x^3+2x-1)^{10}$ $-y' = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}$ $-y = u^n \Rightarrow y' = nu'u^{n-1}$ $y' = 160x(x^2+2)^{79}$ $y' = \frac{2(x+1)}{(x^2+2x+5)^{\frac{3}{4}}}$	តាង $y = u^4 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 4u^3$ $\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 8x(x^2+21)^3$ $y = (x^3+2x-1)'$ តាង $u = x^3+2x-1$ $\frac{du}{dx} = 3x^2+2$ $y \pm u'' \Rightarrow \frac{dy}{du} = 11u^{10}$ $\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 11(3x+2)(x^3+2x-1)^{10}$ $-y = \sqrt{x^4-1}$ តាង $u = x^4-1$ $\frac{du}{dx} = 4x^3 \Rightarrow y = \sqrt{u}$ $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ $\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}$ $y = u^n$ ដោយ u ជាអនុគមន៍នៃ x នោះ: $\frac{du}{dx} = u'$ $\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $y' = nu^{n-1}u'$ $y' = nu'u^{n-1}$ $y = (x^2+2)^{80}$ មានរាង $y = u^n; u = x^2+2; n = 80$ $\Rightarrow y' = 80(x^2+2)'(x^2+2)^{80-1}$ $y' = 160x(x^2+2)^{79}$ $y = 4\sqrt[4]{x^2+2x+5}$ $= 4(x^2+2x+5)^{\frac{1}{4}}$ រាង $y = u^n; u = x^2+2x+5; n = 4$ $\Rightarrow y' = 4 \times \frac{1}{4}(x^2+2x+5)'$

		$\times\left(x^2+2x+5\right)^{\frac{1}{4}-1}$ $y'=\left(2x+2\right)\left(x^2+2x+5\right)^{-\frac{3}{4}}$ $y'=\frac{2\left(x+1\right)}{\left(x^2+2x+5\right)^{\frac{3}{4}}}$
-រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=4x+1$ ត្រង់ $x_0=1$ -រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ ក) $y=\left(x^2+5x\right)^{10}$ ខ) $y=\sqrt{x^2+x+1}$	4 ជំហានទី 4(12min) ពង្រឹងពុទ្ធិ $-f'(1)=4$ $-y'=10\left(2x+5\right)\left(x^2+5x\right)^9$ $-y'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$	$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ $=\lim_{x\to1}\frac{4x-4}{x-1}$ $-y=\left(x^2+5x\right)^{10}$ រាង $y=u^n$ ដែល $u=x^2+5x;n=10$ $y'=\frac{dy}{dx}=10\left(x^2+5x\right)'\left(x^2+5x\right)^{10-1}$ $=10\left(2x+5\right)\left(x^2+5x\right)^9$ $-y=\sqrt{x^2+x+1}=\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{2}-1}$ រាង $y=u^n;u=x^2+x+1;n=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(x^2+x+1\right)'$ $\times\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{2}-1}$
-ប្អូនៗទៅផ្ទះវិញធ្វើលំហាត់ទី1;2ទំព័រ54។	5 ជំហានទី 5(3min) -បណ្តាំផ្ញើ	-សិស្សយកបណ្តាំផ្ញើរបស់គ្រូទៅអនុវត្តន៍។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- *មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យា*
- ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន
- ជំពូកទី២: អនុគមន៍ដេរីវេ
- មេរៀនទី១: អនុគមន៍ដេរីវេ
- រយៈពេល $2h$

I វត្ថុបំណង

- ចំណេះដឹង: អោយសិស្សចេះគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់និងកូតង់សង់។
- ចំណេះធ្វើ: សិស្សធ្វើលំហាត់គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់និងកូតង់សង់ បាបលឿនហើយត្រឹមត្រូវ។
- ឥរិយាបថ:
  សិស្សមានស្មារតីក្លាហានក្នុងការគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

II ខ្លឹមសារមេរៀន

3. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

3.1 ដេរីវេនៃអនុគមន៍ស៊ីនុសនិងកូស៊ីនុស

3.2 ដេរីវេនៃអនុគមន៍តង់សង់និងកូតង់សង់

III សំភារ:ឧបទេស

- សៀវភៅសិស្សទំពរ័ $(46 \to 50)$ បោះពុម្ពឆ្នាំ2011
- សៀវភៅគ្រូទំពរ័ទី

IV វិធីបង្រៀន

គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល

V ដំណើរការបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យអវត្តមានអនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់សិស្សក្នុងថ្នាក់	ជំហានទី 1 លំនឹងថ្នាក់	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍

ជាទូទៅ: $y=u^n$ ដែល u ជា អនុគមន៍នៃ x នោះ $\frac{dy}{dx}=?$	ជំហានទី 2 រំលឹកមេរៀន ដោយ $y=u^n$ ដែល u ជា អនុគមន៍នៃ x នោះ $\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\times\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\times u'$	-ដោយ $y=u^n$ ដែល u ជាអនុគមន៍ នៃ x នោះ $\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\times\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\times u'$
-ដាក់ឧទាហរណ៍អោយសិស្សសង្កេត Ex_1 :គេអោយអនុគមន៍ $y=\sin x$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ -ណែនាំសិស្សអោយរកដេរីវេ $y=\sin x\Rightarrow y'=?$	ជំហានទី 3 មេរៀនថ្មី 3 ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ 3.1ដេរីវេនៃអនុគមន៍ស៊ីនុសនិងកូស៊ីនុស Ex_1 :គេអោយអនុគមន៍ $y=\sin x$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន $y'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ $=\lim_{h\to0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+h)}{h}$ $=\lim_{h\to0}\left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$ $=1\times\cos x=\cos x$	សិស្សសង្កេតមើលឧទាហរណ៍ គេបាន $y'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ $=\lim_{h\to0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+h)}{h}$ $=\lim_{h\to0}\left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$ $=1\times\cos x=\cos x$
Ex_2 : គេអោយ $y=\cos x$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ -ណែនាំសិស្សអោយគណនា $y=\cos x\Rightarrow y'=?$	ដូចនេះ $y'=\cos x$ Ex_2 : គេអោយ $y=\cos x$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន $y'=\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ $=\lim_{h\to0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}\left[\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]}{h}$ $=\lim_{h\to0}\left[\frac{-\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$ $=-1\times\sin x=-\sin x$ ដូចនេះ $y'=-\sin x$	ដូចនេះ $y'=\cos x$ សិស្សដេរីវេ $y=\cos x$ $y'=\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ $=\lim_{h\to0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}\left[\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]}{h}$ $=\lim_{h\to0}\left[\frac{-\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]$ $=-1\times\sin x=-\sin x$ ដូចនេះ $y'=-\sin x$

Ex_3 : គេអោយ $y=\sin\left(x^2-3\right)$ អោយសិស្សគណនា y' - អោយសិស្សទាញរករាងទូទៅនៃអនុគមន៍ដេរីវេ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ត្រង់ដេរីវេនៃអនុគមន៍ ស៊ីនុសនិងកូស៊ីនុស អោយសិស្សដោះស្រាយលំហាត់គំរូ 1.គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ក). $f(x)=\sin x-x\cos x$ ខ $f(x)=\cos^2 x+x\sin x$ 2. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម	Ex_3 : គេអោយ $y=\sin\left(x^2-3\right)$ គេតាង $u=-3+x^2; y=\sin x$ គេបាន $\frac{du}{dx}=2x$ និង $\frac{dy}{du}=\cos u$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ $=2x\times\cos u$ $=2x\cos\left(x^2-3\right)$ ដូចនេះ $y'=2x\cos\left(x^2-3\right)$ ជាទូទៅ បើ $y=\sin x\Rightarrow y'=\cos x$ បើ $y=\cos x\Rightarrow y'=-\sin x$ បើ $y=\sin u\Rightarrow y'=u'\sin u$ បើ $y=\cos u\Rightarrow y'=-u'\sin u$ លំហាត់គំរូ1 1គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ក). $f(x)=\sin x-x\cos x$ ខ). $f(x)=\cos^2 x+x\sin x$ **<u>ចម្លើយ</u>** ក) $f(x)=\sin x-x\cos x$ ដោយ $(u+v)'=u'+v'$ $(u\times v)'=u'v+v'u$ គេបាន $f'(x)=\cos x-\left[x'\cos x+(\cos x)'x\right]$ $=\cos x-\cos x+x\sin x$ $=x\sin x$ ដូចនេះ $f'(x)=x\sin x$ ខ) $f(x)=\cos^2 x+x\sin x$ ដោយ $(u+v)'=u'+v'$ $(u\times v)'=u'v+v'u$ គេបាន $f'(x)=2\cos x(\cos x)'$	-គណនា y' ចំពោះ $y=\sin\left(x^2-3\right)$ គេតាង $u=-3+x^2; y=\sin x$ គេបាន $\frac{du}{dx}=2x$ និង $\frac{dy}{du}=\cos u$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ $=2x\times\cos u$ $=2x\cos\left(x^2-3\right)$ ដូចនេះ $y'=2x\cos\left(x^2-3\right)$ ជាទូទៅ បើ $y=\sin x\Rightarrow y'=\cos x$ បើ $y=\cos x\Rightarrow y'=-\sin x$ បើ $y=\sin u\Rightarrow y'=u'\sin u$ បើ $y=\cos u\Rightarrow y'=-u'\sin u$ ដោះស្រាយលំហាត់គំរូ1 1គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ក). $f(x)=\sin x-x\cos x$ ដោយ $\begin{cases}(u+v)'=u'+v'\\(u.v)'=u'v+v'u\end{cases}$ គេបាន $f'(x)=\cos x-$ $\left[x'\cos x+(\cos x)'x\right]$ $=\cos x-\cos x+x\sin x$ $=x\sin x$ ដូចនេះ $f'(x)=x\sin x$ ខ). $f(x)=\cos^2 x+x\sin x$ $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$ $(u+v)'=u'+v'$ $(u\times v)'=u'v+v'u$ គេបាន $f'(x)=2\cos x(\cos x)'$ $+\left[x'\sin x+x(\sin x)'\right]$ $=-2\cos x\sin x+(\sin x+\cos x)$ $=-\sin 2x+\sin x+\cos x$ ដូចនេះ

ក). $f(x)=-3x^4$

$+\sin(2x^3-1)$

$+\left[x'\sin x+x(\sin x)'\right]$

$=-2\cos x\sin x+(\sin x+\cos x)$

$=-\sin 2x+\sin x+\cos x$

ដូចនេះ

$f'(x)=-\sin 2x+\cos x+\sin x$

លំហាត់ទី២

គណនាអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក) $f(x)=-3x^4+\sin(2x^3-1)$

ខ) $f(x)=x^2\cos(3x+1)$

ចម្លើយ

ក) $f(x)=-3x^4+\sin(2x^3-1)$

តាមរូបមន្ត $(x^n)'=nx^{n-1}$

$(\sin u)'=u'\cos u$

$f'(x)=-12x^3+6x^2\cos(2x^3-1)$

ដូចនេះ

$f'(x)=-12x^3+6x^2\cos(2x^3-1)$

ខ) $f(x)=x^2\cos(3x+1)$

តាមរូបមន្ត $(u\times v)'=u'v+v'u$

$(\cos u)'=-u'\sin u$

គេបាន

$f'(x)=(x^2)'\cos(3x+1)$

$+x^2\left[\cos(3x+1)\right]$

$=2x\cos(3x+1)$

$+x^2\left[-3\sin(3x+1)\right]$

$=2x\cos(3x+1)-3x^2\sin(3x+1)$

ដូចនេះ

$f'(x)=2x\cos(3x+1)$

$-3x^2\sin(3x+1)$

ប្រតិបត្តិ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក) $f(x)=x^3\cos x+2\sin x$

ខ) $f(x)=\cos(5x^4-3)+x\sin 2x$

$f'(x)=-\sin 2x+\cos x+\sin x$

ចម្លើយ

ក) $f(x)=-3x^4+\sin(2x^3-1)$

តាមរូបមន្ត $(x^n)'=nx^{n-1}$

$(\sin u)'=u'\cos u$

ដូចនេះ

$f'(x)=-12x^3+6x^2\cos(2x^3-1)$

ខ) $f(x)=x^2\cos(3x+1)$

$f'(x)=-12x^3+6x^2\cos(2x^3-1)$

តាមរូបមន្ត $(u\times v)'=u'v+v'u$

$(\cos u)'=-u'\sin u$

គេបាន

$f'(x)=(x^2)'\cos(3x+1)$

$+x^2\left[\cos(3x+1)\right]$

$=2x\cos(3x+1)$

$+x^2\left[-3\sin(3x+1)\right]$

$=2x\cos(3x+1)-3x^2\sin(3x+1)$

ដូចនេះ

$f'(x)=2x\cos(3x+1)$

$-3x^2six(3x+1)$

អោយសិស្សពិភាក្សា ប្រតិបត្តិ គណនាដេរីវេនៃ អនុគមន៍ខាងក្រោម: ក) $f(x)=x^3\cos x+2\sin x$ ខ) $f(x)=\cos\left(5x^4-3\right)$ $+x\sin 2x$		ពិភាក្សារួចឡើងធ្វើ ក) $f(x)=x^3\cos x+2\sin x$ តាមរូបមន្ត $(u+v)'=u'+v'$ $(u\times v)'=u'v+v'u$ $+\left[(2)'\sin x+2(\sin x)'\right]$ $=3x^2\cos x-x^3\sin x+2\cos x$ ដូចនេះ $f'(x)=3x^2\cos x-x^3\sin x$ $+2\cos x$ ខ) $f(x)=\cos\left(5x^4-3\right)+x\sin 2x$ $f'(x)=\left[\cos\left(5x^4-3\right)\right]'$ $+[x\sin 2x]'$ $=-20x^3\sin\left(5x^4-3\right)$ $+\sin 2x+2x\cos 2x$ ដូចនេះ $f'(x)=-20x^3\sin\left(5x^4-3\right)$ $+\sin 2x+2x\cos 2x$
អោយឧទាហរណ៍សិស្ស Ex$_1$ គេអោយ $y=\tan x$ ចំពោះ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ អោយសិស្សគណនា y'	3.2ដេរីវេអនុគមន៍តង់សង់និងកូតង់សង់ Ex$_1$ គេអោយ $y=\tan x$ ចំពោះ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ គេអាចសរសេរ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ គេបាន $y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$ $=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$ $=\frac{\cos x\cos x+\sin x\sin x}{\cos^2 x}$ $=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$ $=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	គណនា y' ដោយ $y=\tan x$ ចំពោះ $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ ដោយ $y=\tan x$ គេអាចសរសេរ $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ គេបាន $y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$ $=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$ $=\frac{\cos x\cos x+\sin x\sin x}{\cos^2 x}$ $=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$ $=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ ដូចនេះ $y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

អោយឧទាហរណ៍សិស្ស Ex₂គេអោយ $y=\cot x$ ចំពោះ $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ អោយសិស្សគណនា y'	ដូចនេះ $y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ Ex₂គេអោយ $y=\cot x$ ចំពោះ $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ គេអាចសរសេរ $y=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ $y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$ $=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}$ $=\frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}$ $=-\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$ $=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\left(1+\cot^2 x\right)$ ដូចនេះ $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\left(1+\cot^2 x\right)$ ជាទូទៅ បើ $y=\tan x$ នោះ $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $=1+\tan^2 x$ បើ $y=\cot x$ នោះ $y'=-\frac{1}{\sin^2}$ $=-\left(1+\cot^2 x\right)$ បើ $y=\tan u$ នោះ $y'=\frac{u'}{\cos^2 u}$ $=u'\left(1+\tan^2 u\right)$ បើ $y=\cot u$ នោះ $y'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$ $=-u'\left(1+\cot^2 u\right)$ <u>លំហាត់គំរូ1</u> ក) $f(x)=x^3\tan x$ ខ) $f(x)=(2+\cot x)^3$	គណនា y' ដោយ $y=\cot x$ ចំពោះ $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ គេអាចសរសេរ $y=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ $y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$ $=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}$ $=\frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}$ $=-\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$ $=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\left(1+\cot^2 x\right)$ ដូចនេះ $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ $=-\left(1+\cot^2 x\right)$ ជាទូទៅ បើ $y=\tan x$ នោះ $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $=1+\tan^2 x$ បើ $y=\cot x$ នោះ $y'=-\frac{1}{\sin^2}$ $=-\left(1+\cot^2 x\right)$ បើ $y=\tan u$ នោះ $y'=\frac{u'}{\cos^2 u}$ $=u'\left(1+\tan^2 u\right)$ បើ $y=\cot u$ នោះ $y'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$ $=-u'\left(1+\cot^2 u\right)$ ដោះស្រាយលំហាត់គំរូ ក) $f(x)=x^3\tan x$ តាមរូបមន្ត $(u\times v)'=u'v+v'u$ គេបាន

អោយសិស្សដោះស្រាយលំហាត់គំរូ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក) $f(x)=x^3\tan x$ ខ) $f(x)=(2+\cot x)^3$ អោយសិស្សពិភាក្សាដោះ ស្រាយលំហាត់ប្រតិបត្តិ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក) $f(x)=3x^2\tan^3 x$ ខ) $f(x)=(1+\tan x)^2$ គ) $f(x)=3\cot(x^4-3)$ ឃ)	រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងលើ ចម្លើយ ក) $f(x)=x^3\tan x$ តាមរូបមន្ត $(u\times v)'=u'v+v'u$ គេបាន $f'(x)=(x^3)'\tan x+x^3(\tan x)'$ $=3x^2\tan x+x^3\frac{1}{\cos^2 x}$ ដូចនេះ $f'(x)=3x^2\tan x+x^3\frac{1}{\cos^2 x}$ ខ) $f(x)=(2+\cot x)^3$ តាមរូបមន្ត $u^n=u'nu^{n-1}$ $(u+v)'=u'+v'$ គេបាន $f'(x)=3(2+\cot x)^2\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ ដូចនេះ $f'(x)=-\frac{3(2+\cot x)^2}{\sin^2 x}$ ប្រតិបត្តិ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក) $f(x)=3x^2\tan^3 x$ ខ) $f(x)=(1+\tan x)^2$ គ) $f(x)=3\cot(x^4-3)$ ឃ) $f(x)=x\tan(2x^2-3)$	$f'(x)=(x^3)'\tan x+x^3(\tan x)'$ $=3x^2\tan x+x^3\frac{1}{\cos^2 x}$ ដូចនេះ $f'(x)=3x^2\tan x+x^3\frac{1}{\cos^2 x}$ ខ) $f(x)=(2+\cot x)^3$ តាមរូបមន្ត $u^n=u'nu^{n-1}$ $(u+v)'=u'+v'$ គេបាន $f'(x)=3(2+\cot x)^2\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$ ដូចនេះ $f'(x)=-\frac{3(2+\cot x)^2}{\sin^2 x}$ ពិភាក្សារួចឡើងធ្វើ ក) $f(x)=3x^2\tan^3 x$ តាមរូបមន្ត $(u\times v)'=u'v+v'u$ $f'(x)=(3x^2)'\tan^3 x$ $+3x^2(\tan^3 x)'$ $=6x\tan^3 x+\tan^2 x\frac{9x^2}{\cos^2 x}$ ដូចនេះ $f'(x)=6x\tan^3 x+\tan^2 x\frac{9x^2}{\cos^2 x}$ ខ) $f(x)=(1+\tan x)^2$ តាមរូបមន្ត $u^n=nu^{n-1}u'$ គេបាន $f'(x)=\left[(1+\tan x)^2\right]'$ $=2(1+\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}$ ដូចនេះ $f'(x)=\frac{2(1+\tan x)}{\cos^2 x}$ គ) $f(x)=3\cot(x^4-3)$ $f'(x)=\left[3\cot(x^4-3)\right]'$

$f(x)=x\tan\left(2x^2-3\right)$		$=3\left[-\dfrac{4x^3}{\sin^2\left(x^4-3\right)}\right]$ ដូចនេះ $f'(x)=-\dfrac{12x^3}{\sin^2\left(x^4-3\right)}$ ឃ) $f(x)=x\tan\left(2x^2-3\right)$ $f'(x)=\left[x\tan\left(2x^2-3\right)\right]'$ $=(x)'\tan\left(2x^2-3\right)$ $+x\left[\tan\left(2x^2-3\right)\right]'$ $=\tan\left(2x^2-3\right)$ $+x\left[4x\dfrac{1}{\cos^2\left(2x^2-3\right)}\right]$ ដូចនេះ $f'(x)=\tan\left(2x^2-3\right)+\dfrac{4x^2}{\cos^2\left(2x^2-3\right)}$
សួរសិស្សថាតើបើ $y=\tan x, y=\cos x,$ $y=\sin x, y=\cot x$ $y=\tan u, y=\sin u,$ $y=\cos x, y=\cot u$ តើ y' វាស្មើនឹងប៉ុន្មានបើ $y=\tan x$ ចំពោះ $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\cot x$ ចំពោះ $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$	**<u>ជំហានទី4</u>** **<u>ពង្រឹងចំនេះដឹង</u>** $y=\tan x\Rightarrow y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ $y=\cos x\Rightarrow y'=-\sin x$ $y=\cot x\Rightarrow y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $=-\left(1+\cot^2 x\right)$ $y=\sin x\Rightarrow y'=\cos x$ $y=\tan u\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$ $y=\sin u\Rightarrow y'=\cos u$ $y=\cot u\Rightarrow y'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$ $y=\cos u\Rightarrow y'=-u'\sin u$	
អោយសិស្សធ្វើលំហាត់ក្នុងសៀវភៅទំព័រទី៥៥	**<u>ជំហានទី5</u>** <u>បណ្តាំផ្ញើ</u> អោយសិស្សធ្វើលំហាត់ក្នុង	ស្តាប់រួចយកលំហាត់ដែលគ្រូដាក់អោយធ្វើនៅផ្ទះ

ត្រង់លេខ៨និង៩	សៀវភៅទំព័រទី៥៥ត្រង់លេខ៨និង៩	

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- *មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យា*
- ថ្នាក់ទី១២ កម្រិតមូលដ្ឋាន
- ជំពូកទី២: ដេរីវេនៃអនុគមន៍
- មេរៀនទី១: ដេរីវេនៃអនុគមន៍
- រយពេល2h

I វត្ថុបំណង

- ចំណេះដឹង: អោយសិស្សចេះគណនាដេរីវេទី២និងដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់
- ចំណេះធ្វើ: សិស្សធ្វើលំហាត់គណនាដេរីវេទី២និងដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ បាបលឿនហើយត្រឹមត្រូវ។
- ឥរិយាបថ: សិស្សមានស្មារតីក្លាហានក្នុងការគណនាដេរីវេទី២និងដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់៕

II ខ្លឹមសារមេរៀន

4 ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

4.1 ដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍

4.2 ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

III សំភារ:ឧបទេស

- សៀវភៅសិស្សទំព័រ $(51 \to 53)$ បោះពុម្ពឆ្នាំ2011
- សៀវភៅគ្រូទំព័រទី

IV វិធីបង្រៀន

គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល

V សកម្មភាពបង្រៀន និងរៀន

សកម្មភាពគ្រូបង្រៀន	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យអវត្តមានអនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់សិស្សក្នុងថ្នាក់	ជំហានទី១ លំនឹងថ្នាក់រៀន	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
គ្រូអោយសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក) $f(x)=x^3\tan x$ ខ) $f(x)=3x^2+\tan\left(x^3-1\right)$	ជំហានទី២ រំលឹកមេរៀនចាស់ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក) $f(x)=x^3\tan x$ ខ) $f(x)=3x^2+\tan\left(x^3-1\right)$ ក) $f(x)=x^3\tan x$	សិស្សឡើងធ្វើលំហាត់ ក) $f(x)=x^3\tan x$ តាមរូបមន្ត $(uv)'=u'v+v'u$ គេបាន

	តាមរូបមន្ត $(uv)' = u'v + v'u$ គេបាន $f'(x) = (x^3)'\tan x + x^3(\tan x)'$ $= 3x^2\tan x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$ ដូចនេះ $f'(x) = 3x^2\tan x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$	$f'(x) = (x^3)'\tan x$ $+ x^3(\tan x)'$ $= 3x^2\tan x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$ ដូចនេះ $f'(x) = 3x^2\tan x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$
គ្រូសរសេរចំណងជើងមេរៀនថ្មីដាក់លើក្តារខៀន គ្រូអោយសិស្សសង្កេតលើឧទាហរណ៍ទី១ គេអោយអនុគមន៍ $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ $f'(x) = 4x^3 - 6x$ $f''(x) = 12x^2 - 6$ ដូចនេះ $f''(x) = 12x^2 - 6$ គ្រូពន្យល់និងប្រាប់លក្ខណះទូទៅនៃដេរីវេទី២ នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ កំនត់តាងតាងដោយ $y'' = f''(x)$ ឬ $\frac{d^2y}{dx^2}$ គ្រូអោយសិស្សពិនិត្យលើលំហាត់គំរូទី១ គណនា $f'(x)$ និង $f''(x)$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក) $f(x) = x^3 - 12x + 1$ ខ) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ __ចម្លើយ__ ក) $f(x) = x^3 - 12x + 1$	__ជំហានទី៣__ មេរៀនថ្មី 4 ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ 4.1 ដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ ឧទាហរណ៍ទី១គេអោយអនុគមន៍ $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ $f'(x) = 4x^3 - 6x$ $f''(x) = 12x^2 - 6$ ដូចនេះ $f''(x) = 12x^2 - 6$ __ជាទូទៅ__ ដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ កំនត់តាងដោយ $y'' = f''(x)$ ឬ $\frac{d^2y}{dx^2}$ លំហាត់គំរូទី១ គណនា $f'(x)$ និង $f''(x)$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក) $f(x) = x^3 - 12x + 1$ ខ) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ __ចម្លើយ__ ក) $f(x) = x^3 - 12x + 1$ គេបាន $f'(x) = 3x^2 - 12$	សិស្សយកចិត្តទុកដាក់ស្តាប់គ្រូពន្យល់និងសិស្សសង្កេតនិងកត់ត្រាចូលសៀវភៅ សិស្សស្តាប់ការនែនាំរបស់គ្រូ សិស្សពិនិត្យយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់ហើយចំលងលំហាត់គំរូនេះដាក់ក្នុងសៀវភៅ

គេបាន $f'(x)=3x^2-12$ នោះ $f''(x)=6x$ ដូចនេះ $f'(x)=3x^2-12$ $f''(x)=6x$ ខ) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$ គេបាន $f'(x)=\frac{2x(x^2-9)-x^2\times 2x}{(x^2-9)^2}$ $=-\frac{18x}{(x^2-9)^2}$ $f''(x)=\frac{-18(x^2-9)}{(x^2-9)^4}$ $+\frac{18x\times 2(x^2-9)2x}{(x^2-9)^4}$ $=\frac{-18(x^2-9)(x^2-9-4x^2)}{(x^2-9)^4}$ $=\frac{54(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$ ដូចនេះ $f'(x)=-\frac{18x}{(x^2-9)^2}$ $f''(x)=\frac{54(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$ គ្រូអោយសិស្សសង្កេត លំហាត់គំរូទី២ រក y' និងយ y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ក) $x^2+y^2=4$ ខ) $xy+y^2-x^2=5$ ចម្លើយ ក. រក y' នៃ $x^2+y^2=4$ ដេរីវេ អង្គទាំងពីរ $\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(4)$	នោះ $f''(x)=6x$ ដូចនេះ $f'(x)=3x^2-12$ $f''(x)=6x$ ខ) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$ គេបាន $f'(x)=\frac{2x(x^2-9)-x^2\times 2x}{(x^2-9)^2}$ $=-\frac{18x}{(x^2-9)^2}$ $f''(x)=-\frac{18(x^2-9)^2+54x^2(x^2-9)}{(x^2-9)^4}$ $=\frac{-18(x^2-9)(x^2-9-4x^2)}{(x^2-9)^4}$ $=\frac{54(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$ ដូចនេះ $f'(x)=-\frac{18x}{(x^2-9)^2}$ $f''(x)=\frac{54(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$ លំហាត់គំរូទី២ រក y' និងយ y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ក) $x^2+y^2=4$ ខ) $xy+y^2-x^2=5$ ចម្លើយ ក. រក y' នៃ $x^2+y^2=4$ ដេរីវេ អង្គទាំងពីរ $\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(4)$ $\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(4)$	សិស្សពិនិត្យនិងតាមដាន លើលំហាត់គំរូទី២យ៉ាង ម៉ត់ចត់និងកត់ត្រាចូលក្នុង សៀវភៅ។

<table>
<tr>
<td>
$\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(y^2\right)=\frac{d}{dx}(4)$
$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$
$2x+2yy'=0, \frac{dy}{dx}=y'$
ដូចនេះ $y'=-\frac{x}{y}$ បើ $y\neq 0$
រក y'' នៃ $x^2+y^2=4$
$x+yy'=0$ នោះ $y''=\frac{-1-\left(y'\right)^2}{y}$
ដោយ $y'=-\frac{x}{y}, y\neq 0$
ដូចនេះ $y''=-\frac{x^2+y^2}{y^3}$
ខ) $xy+y^2-x^2=5$
រក y' នៃ $xy+y^2-x^2=5$
ដេរីវេអង្គទាំងពីរ
គេបាន
$\frac{d}{dx}\left(xy+y^2-x^2\right)=\frac{d}{dx}(5)$
$\left(y+xy'\right)+2yy'-2x=0$
$y+\left(x+2y\right)y'-2x=0$
ដូចនេះ $y'=\frac{2x-y}{x+2y}$
រក y'' នៃ $xy+y^2-x^2=5$
គេបាន
$y'+y'+xy''+2y'y'+1yy''-2=0$
$\left(x+2y\right)y''=2-2y'-2\left(y'\right)^2$
$y''=\frac{2-2y'-2\left(y'\right)^2}{x+2y}$
ដោយ $y'=\frac{2x-y}{x+2y}$ នាំអោយ
$y''=\frac{2\left(x+2y\right)^2-2\left(2x-y\right)}{(x+2y)^3}$
$\times\frac{(x+2y)-2\left(2x-y\right)^2}{(x+2y)^3}$
$=\frac{10\left(xy+y^2-x^2\right)}{(x+2y)^3}=\frac{50}{\left(x+2y\right)^3}$
</td>
<td>
$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$
$2x+2yy'=0, \frac{dy}{dx}=y'$
ដូចនេះ $y'=-\frac{x}{y}$ បើ $y\neq 0$
រក y'' នៃ $x^2+y^2=4$
$x+yy'=0$ នោះ
$y''=\frac{-1-\left(y'\right)^2}{y}$
ដោយ $y'=-\frac{x}{y}, y\neq 0$
ដូចនេះ $y''=-\frac{x^2+y^2}{y^3}$
ខ) $xy+y^2-x^2=5$
រក y' នៃ $xy+y^2-x^2=5$
ដេរីវេអង្គទាំងពីរ
$\frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}\left(y^2\right)-\frac{d}{dx}x^2=\frac{d}{dx}(5)$
គេបាន
$\frac{d}{dx}\left(xy+y^2-x^2\right)=\frac{d}{dx}(5)$
$\left(y+xy'\right)+2yy'-2x=0$
$y+\left(x+2y\right)y'-2x=0$
ដូចនេះ $y'=\frac{2x-y}{x+2y}$
រក y'' នៃ $xy+y^2-x^2=5$
គេបាន
$y'+y'+xy''+2y'y'+1yy''-2=0$
$\left(x+2y\right)y''=2-2y'-2\left(y'\right)^2$
$y''=\frac{2-2y'-2\left(y'\right)^2}{x+2y}$
ដោយ $y'=\frac{2x-y}{x+2y}$ នាំអោយ
$y''=\frac{2\left(x+2y\right)^2-2\left(2x-y\right)}{(x+2y)^3}$
$\times\frac{(x+2y)-2\left(2x-y\right)^2}{(x+2y)^3}$
</td>
<td>
សិស្សពិនិត្យលើលំហាត់គំរូយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់យល់នូវអ្វីដែលគ្រូពន្យល់និងកត់ត្រាចូលក្នុងសៀវភៅបានល្អ។
ក) $y=x^4-3x^2+x^{-2}$
</td>
</tr>
</table>

គ្រូអោយសិស្សឡើងធ្វើប្រតិបត្តិ គណនាដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក) $y=x^4-3x^2+x^{-2}$ ខ) $f(x)=\sin 3x^2+1$ គ្រូហៅឈ្មោះសិស្ស អោយឡើងធ្វើលំហាត់ ប្រតិបត្តិទី២	$=\frac{10\left(xy+y^2-x^2\right)}{(x+2y)^3}=\frac{50}{(x+2y)^3}$ ប្រតិបត្តិទី១ គណនាដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក) $y=x^4-3x^2+x^{-2}$ ខ) $f(x)=\sin 3x^2+1$ ប្រតិបត្តិទី២ រក y' និងយ y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ក) $xy+yx^2=2$ ខ) $4xy=x^2+y^2$	$y'=4x^3-6x-2x$ $y'=4x^3-8x$ $y''=12x^2-8$ ដូចនេះ $y'=4x^3-8x$ $y''=12x^2-8$ $f(x)=\sin 3x^2+1$ $f'(x)=\left(\sin 3x^2+1\right)'$ $=6x\cos 3x^2$ $f''(x)=6\cos 3x^2$ $+\left(-36x^2\sin 3x^2\right)$ ដូចនេះ $f'(x)=6\cos 3x^2$ $f''(x)=6\cos 3x^2$ $-36x^2\sin 3x^2$ សិស្សឡើងធ្វើលំហាត់ ប្រតិបត្តិនិងចំលងចូល ក្នុងសៀវភៅបានយ៉ាងល្អ ក) $xy+yx^2=2$ គេបាន $\frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}\left(yx^2\right)=\frac{d}{dx}(2)$ $y+xy'+y'x^2+2xy=0(1)$ $y'\left(x+x^2\right)=-y-2xy$ នាំអោយ $y'=\frac{-(y+2xy)}{x+x^2}$ តាម (1) គេបាន $\left(y+xy'+y'x^2+2xy\right)'=0$ $y'+y'+xy''+y''x^2$ $+2xy'+2y+2xy'=0$ $y''\left(x+y^2\right)=-2y'-4xy'-y$ $=-2y'(1+2x)-2y$ $y''=\frac{2y(1+2x)^2}{\left(x+x^2\right)}-\frac{2y}{x+x^2}$

គ្រូអោយសិស្សកត់ចំណាំគឺគេប្រើទំរង់ $f^{(n)}$ ចាប់ពី $n=4$ តទៅ។ គ្រូអោយសិស្សពិនិត្យតាមដានលើលំហាត់គំរូទី១ គណនាដេរីវេទី៤នៃ $f(x)=x^4+3x$	4.2 ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ ឧទាហរណ៍ គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=3x^5-7x^3+x-10$ គេបាន $f'(x)=15x^4-21x^2+1$ $f''(x)=60x^3-42x$ $f'''(x)=180x^2-42$ $f^{(4)}=360x$ $f^{(5)}=360$ $f^{(6)}=0$ <u>ជាទូទៅ</u> ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ អាចមានដេរីវេខ្លួនឯងទៀតគេហៅថាដេរីវេបន្តបន្ទាប់ថាដេរីវេទី១ ទី២......ទី n គេតាងដោយ $f', f'',......, f^{(n)}$ ។ លំហាត់គំរូទី១ គណនាដេរីវេទី៤នៃ $f(x)=x^4+3x$ យើងបាន	ខ) $4xy=x^2+y^2$ $\frac{d}{dx}(4xy)=\frac{d}{dx}(x^2+y^2)$ រឺ $\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(4xy)$ សិស្សបានដឹងនិងកត់ចំណាំ

	$f'(x)=4x^3+3$ $f''(x)=12x^2, f'''(x)=24x$ $f^{(4)}(x)=24$ ដូចនេះ $f^{(4)}(x)=24$	
គ្រូរកសិស្សដែលស្ម័គ្រចិត្តឡើងធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិចំនួនពីរនាក់និងពន្យល់អំពីរបៀបដែលខ្លួនបានធ្វើដល់មិត្តរួមថ្នាក់។	<u>ជំហានទី៤</u> <u>ពង្រឹងពុទ្ធិ</u> គណនាដេរីវេទី៥នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ក) $f(x)=\cos 3x-5x^7$ ខ) $f(x)=2x^4-\sin 4x$	$f(x)=\cos 3x-5x^7$ $f'(x)=-3\sin 3x-35x^6$ $f''(x)=-9\cos x-210x^5$ $f'''(x)=27\sin 3x-1050x^4$ $f^{(4)}(x)=81\cos 3x-4200x$ $f^{(5)}(x)=-243six3x$ $-12600x^2$ ខ) $f(x)=2x^4-\sin 4x$ $f'(x)=8x^3-4\cos 4x$ $f''(x)=24x^2+16\sin 4x$ $f'''(x)=48x+64\cos 4x$ $f^{(4)}(x)=48-256\sin 4x$ $f^{(5)}(x)=-1024\cos 4x$
គ្រូផ្ដែផ្ដាំនិងសួរពីចំណាប់អារម្មណ៍របស់អំពីមេរៀនដែលរៀនរួចនិងដាក់កិច្ចការផ្ទះដល់សិស្ស។	ជំហានទី៥ បណ្ដាំផ្ញើ គ្រូដាក់កិច្ចការផ្ទះអោយសិស្សធ្វើសៀវភៅសិស្សទំព័រ៥៥លំហាត់លេខ៩ចំនុចក,ខ,គ	សិស្សស្ដាប់ហើយកត់ត្រាទុក។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូកទី២ ដេរីវេនៃអនុគមន៍

មេរៀនទី២អនុវត្តន៍ដេរីវេ

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹងៈ សិស្សចេះដេរីវេបានល្អនិងកាន់តែច្បាស់ក្នុងការបកស្រាយរូបមន្តដេរីវេ
- បំណិនៈ សិស្សប្រើដេរីវេក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា
- ឥរិយាបថៈ សិស្សមានស្មារតីក្លាហានក្នុងការគណនាដេរីវេយ៉ាងងាយស្រួល

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ.........ទី.......ខែ..........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្សៈ ទំព័រ ៥៦-៥៨
- សៀវភៅគ្រូៈទំព័រ

IV. ខ្លឹមសារមេរៀន

1. **អនុវត្តន៍ក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា**

V. ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- លំនឹងថ្នាក់	- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		
-គ្រូអោយសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\left(x^3-6x\right)^4$	គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\left(x^3-6x\right)^4$	$y=\left(x^3-6x\right)^4$ តាង $u=x^3-6x$ នាំអោយ $y=u^4$ គេបាន $y'=4u^3u'$ $=4\left(x^3-6x\right)^3\left(x^3-6x\right)'$ $=4\left(x^3-6x\right)^3\left(3x^2-6\right)$ $=12\left(3x^2-6\right)\left(x^3-6x\right)^3$

<table>
<tr><th colspan="3">ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)</th></tr>
<tr>
<td>-គ្រូអោយសិស្សសង្កេតមើលឧទាហរណ៍១គ្រូសួរសិស្ស:
តើក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយប្រាក់ចំនួនប៉ុន្មានសំរាប់ផលិតសំភារៈមួយគ្រឿង?
គ្រូពន្យល់និងកែលំហាត់</td>
<td>**អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ**

1. **អនុវត្តន៍ក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា**
លំហាត់គំរូ១: ក្រុមហ៊ុនផលិតសំភារៈមួយប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយប្រាក់២ពាន់រៀលសំរាប់ផលិតសំភារៈ១គ្រឿង។គេដឹងថាបើក្រុមហ៊ុនលក់សំភារៈ១គ្រឿងតម្លៃ៥ពាន់រៀលនោះក្នុងមួយខែលក់អស់៤០០០គ្រឿង។
អ្នកគ្រប់គ្រងក្រុមហ៊ុនបានសង្កេតឃើញថាកាលណាតម្លៃសំភារៈកើនឡើងម្តង១ពាន់រៀលនោះបរិមាណសំភារៈលក់ចេញក្នុង១ខែថយចុះម្តង៤០០គ្រឿងដែលក្រុមហ៊ុនត្រូវលក់ដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំនេញជាអតិបរមា។
<u>ចម្លើយ</u>
តាង x ជាតម្លៃលក់សម្ភារៈ១គ្រឿង និង $P(x)$ ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុប
ប្រាក់ចំនេញសរុប=ប្រាក់ចំនេញក្នុង១គ្រឿង$\times$បរិមាណសម្ភារៈ
តាមសម្មតិកម្មគេបាន
ប្រាក់ចំនេញក្នុង១គ្រឿង$=x-2$ ពាន់រៀល
បរិមាណសម្ភារៈលក់បានក្នុង១ខែ
$=4000-400(x-5)$
គេបាន
$P(x)=(x-2)\left[4000-400(x-5)\right]$
$=400(x-2)(10-x+5)$
$=400(x-2)(15-x)$</td>
<td>-សិស្សមើលនិងគិតពិភាក្សាលើលំហាត់
<u>ចម្លើយ</u>
តាង x ជាតម្លៃលក់សម្ភារៈ១គ្រឿងនិង $P(x)$ ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុប
ប្រាក់ចំនេញសរុប=ប្រាក់ចំនេញក្នុង១គ្រឿង$\times$បរិមាណសម្ភារៈ
តាមសម្មតិកម្មគេបាន
ប្រាក់ចំនេញក្នុង១គ្រឿង
$=x-2$ ពាន់រៀល
បរិមាណសម្ភារៈលក់បានក្នុង១ខែ
$=4000-400(x-5)$
គេបាន
$P(x)=(x-2)[4000-400$
$\times(x-5)]$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
$P'(x)=400(15-x)-400(x-2)$
$=400(15-x-x+2)$
$=400(17-2x)$
$=400(15-x-x+2)$
$=400(17-2x)$
$P'(x)=0$ សមមូល $17-2x=0$
$\Rightarrow x=\frac{17}{2}=8.5$
$P(8.5)=400(8.5-2)(15-8.5)$
$=16900$ ពាន់រៀល

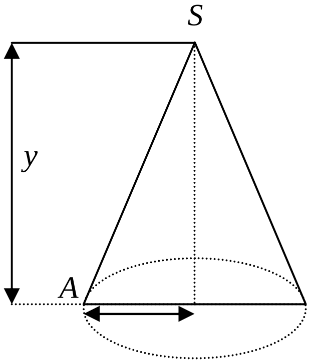
x : 8.5
$P'(x)$: 0
$P(x)$: ↗ អតិ ↘

ដូចនេះដើម្បីឲ្យក្រុមហ៊ុនចំនេញបានជាអតិបរមាចំនួន 16900 ពាន់រៀលក្រុមហ៊ុនត្រូវលក់សំភារៈ១គ្រឿងតម្លៃ 8500 ។
</td>
<td>
$=400(x-2)(10-x+5)$
$=400(x-2)(15-x)$
$P'(x)=400(15-x)$
$-400(x-2)$
$=400(15-x-x+2)$
$=400(17-2x)$
$=400(15-x-x+2)$
$=400(17-2x)$
$P'(x)=0 \Leftrightarrow 17-2x=0$
$\Rightarrow x=\frac{17}{2}=8.5$
$P(8.5)=400(8.5-2)$
$\times(15-8.5)$
$=16900$ ពាន់រៀល

x : 8.5
$P'(x)$: 0
$P(x)$: ↗ អតិ ↘

ដូចនេះដើម្បីឲ្យក្រុមហ៊ុនចំនេញបានជាអតិបរមាចំនួន 16900 ពាន់រៀលក្រុមហ៊ុនត្រូវលក់សំភារៈ១គ្រឿងតម្លៃ 8500 ។
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)</td>
</tr>
<tr>
<td>-គ្រូអោយសិស្សពិភាក្សាតាមក្រុមរួចឡើងដោះស្រាយលំហាត់គំរូ៣។</td>
<td>
លំហាត់គំរូ៣:
គេសង់ជម្រកមួយរាងកោនបរិវត្តដែលមានមាឌ V ។គណនាផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់នៃកោននិងកាំថាសបាតដើម្បីជម្រកនោះមានផ្ទៃក្រលាខាងអប្បបរមា។
<u>ចម្លើយ</u>
តាង $\begin{cases} SO=y\,,\,y>0 \\ OA=AB=x\,,\,x>0 \end{cases}$
</td>
<td>
-សិស្សរកលំហាត់រួចពិភាក្សាដើម្បីរកដំណោះស្រាយ

<u>ចម្លើយ</u>
តាង $\begin{cases} SO=y\,,\,y>0 \\ OA=AB=x\,,\,x>0 \end{cases}$
</td>
</tr>
</table>



គេមាន $V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$ នោះ

$y=\frac{3V}{\pi x^2}$

គណនា SA និង SB ដោយ

$SA=SB$ ត្រីកោណ SOA កែងត្រង់ O គេបាន

$SA^2=SO^2+OA^2$

$=\frac{9V^2}{\pi^2x^4}+x^2$

$=\frac{9V^2+\pi^2x^6}{\pi^2x^4}$

$SA=\frac{\sqrt{9V^2+\pi^2x^6}}{\pi x^2}$

ដោយ $P=2\pi x$ បរិមាត្របាតកោណ

បើ $S(x)$ ជាផ្ទៃក្រលាខាងនៃកោណគេបាន

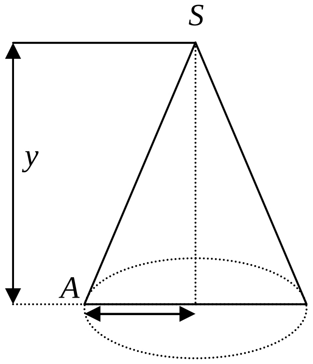
$S'(x)=\frac{3\pi^2x^6-9V^2-\pi^2x^6}{x^2\sqrt{9V^2+\pi^2x^6}}$

$=\frac{2\pi^2x^6-9V^2}{x^2\sqrt{9V^2-\pi^2x^6}}$

$S'(x)=0$ នោះ $2\pi^2x^6-9V^2=0$

$x^6=\frac{9V^2}{2\pi^2}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$

x	$\frac{3V}{\sqrt{2}\pi}$
$S'(x)$	0
$S(x)$	↘ អប្ប ↗



គេមាន $V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$ នោះ

$y=\frac{3V}{\pi x^2}$

គណនា SA និង SB ដោយ

$SA=SB$ ត្រីកោណ SOA កែងត្រង់ O គេបាន

$SA^2=SO^2+OA^2$

$=\frac{9V^2}{\pi^2x^4}+x^2$

$=\frac{9V^2+\pi^2x^6}{\pi^2x^4}$

$SA=\frac{\sqrt{9V^2+\pi^2x^6}}{\pi x^2}$

ដោយ $P=2\pi x$ បរិមាត្របាតកោណ

បើ $S(x)$ ជាផ្ទៃក្រលាខាងនៃកោណ គេបាន

$S'(x)=\frac{3\pi^2x^6-9V^2-\pi^2x^6}{x^2\sqrt{9V^2+\pi^2x^6}}$

$=\frac{2\pi^2x^6-9V^2}{x^2\sqrt{9V^2-\pi^2x^6}}$

$S'(x)=0$ នោះ

$2\pi^2x^6-9V^2=0$

$x^6=\frac{9V^2}{2\pi^2}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>ផលធៀប $\frac{y}{x}=\frac{3V}{\pi x^3}$
$=\frac{3V}{\pi\sqrt{\frac{9V^2}{2\pi^2}}}$
$=\sqrt{2}$
ដូចនេះដើម្បីឲ្យក្រលាផ្ទៃនៃជម្រកអប្បបរមាលុះត្រាតែផលធៀបកំពស់និងកាំថាសបាតនៃជម្រកស្មើនឹង $\sqrt{2}$</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$\frac{3V}{\sqrt{2\pi}}$</td></tr><tr><td>$S'(x)$</td><td>0</td></tr><tr><td>$S(x)$</td><td>↘ អប្ប ↗</td></tr></table>ផលធៀប $\frac{y}{x}=\frac{3V}{\pi x^3}$
$=\frac{3V}{\pi\sqrt{\frac{9V^2}{2\pi^2}}}$
$=\sqrt{2}$
ដូចនេះដើម្បីឲ្យក្រលាផ្ទៃនៃជម្រកអប្បបរមាលុះត្រាតែផលធៀបកំពស់និងកាំថាសបាតនៃជម្រកស្មើនឹង $\sqrt{2}$</td>
</tr>
<tr><td colspan="3" align="center">ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)</td></tr>
<tr>
<td>-អោយសិស្សធ្វើលំហាត់លេខ១និង២ ទំព័រ៦១</td>
<td align="center">កិច្ចការផ្ទះ</td>
<td>-សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា</td>
</tr>
</table>

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូកទី២ ដេរីវេនៃអនុគមន៍

មេរៀនទី២អនុវត្តន៍ដេរីវេ (ត)

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សកំណត់បានពីល្បឿនខណៈនិងសំទុះខណៈបានត្រឹមត្រូវតាមឧទាហរណ៍
- បំណិន: សិស្សគណនាតំលៃល្បឿនខណៈនិងសំទុះខណៈបានត្រឹមត្រូវតាមឧទាហរណ៍។
- ឥរិយាបថ: សិស្សមានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នចំពោះការគណនាតំលៃល្បឿនខណៈនិងសំទុះខណៈ

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ៥៩-៦១
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ

IV. ខ្លឹមសារមេរៀន

2. ល្បឿនខណៈនិងសំទុះខណៈ

V. ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- លំនឹងថ្នាក់	- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		
-រកពីរចំនួនដែលមានផលបូកស្មើ110 ហើយផលគុណមានតំលៃអតិបរមារួចគណនាតំលៃអតិបរមានោះ។		-សិស្សឡើងបកស្រាយតាង x, y ជាចំនួនដែលត្រូវរក

<table>
<tr><td></td><td></td><td>សម្មតិកម្ម
$x+y=110\Leftrightarrow y=110-x$
$P=x\cdot y$
$\Rightarrow P(x)=x(110-x)$
$P(x)=110x-x^2$
$P'(x)=110-2x$
$P'(x)=0\Rightarrow 110-2x=0$
$\Rightarrow x=\frac{110}{2}=55$
$\Rightarrow y=110-55=55$
$\Rightarrow P(55)=55^2=3025$
ដូចនេះ $x=y=55$
$P(55)=3025$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)</td></tr>
<tr><td>-តើល្បឿនជាអ្វីនៃចម្ងាយចរ?

-រួចហៅនិយមន័យអោយសិស្សកត់

-គ្រូផ្តល់លំហាត់គំរូដល់សិស្ស

-ពន្យល់សិស្សអោយធ្វើដេរីវេរួចជំនួសតំលៃ t ចូល</td><td>មេរៀនទី២ អនុវត្តន៍ដេរីវេ
2. ល្បឿននិងសំទុះនៃចលនា
2.1.ល្បឿននៃចលនា

-ល្បឿននៃចលនានៅខណ:មួយគឺ $V(t)=\frac{ds}{dt}=S'(t)$ ដែល $S(t)$ ជាចំងាយចរនៅខណ:t

លំហាត់: គេទំលាក់គ្រាប់មួយអោយដោយសមីការ
$S(t)=4t^2-2t+2$
ដែល $t(s)$; $S(m)$ ។
ចូរកំណត់ល្បឿនពេល
$t=1s$, $t=3s$
<u>ចម្លើយ</u></td><td>-ល្បឿនជាដេរីវេទី១នៃចម្ងាយចរ
-ល្បឿននៃចលនានៅខណ:មួយគឺ
$V(t)=\frac{ds}{dt}=S'(t)$ ដែល $S(t)$ ជាចំងាយចរនៅខណ: t

លំហាត់: គេទំលាក់គ្រាប់មួយអោយដោយសមីការ
$S(t)=4t^2-2t+2$
ដែល $t(s)$; $S(m)$ ។
ចូរកំណត់ល្បឿនពេល
$t=1s$, $t=3s$
<u>ចម្លើយ</u></td></tr>
</table>

	កំណត់ល្បឿន គេមាន $S(t)=4t^2-2t+2$ $V(t)=S'(t)=8t-2$ $V(1)=8-2=6\,m/s$ $V(3)=8\times3-2=22\,m/s$ ដូចនេះ បើ $t=1s\Rightarrow V=6\,m/s$ បើ $t=3s\Rightarrow V=22\,m/s$	កំណត់ល្បឿន គេមាន $S(t)=4t^2-2t+2$ $V(t)=S'(t)=8t-2$ $V(1)=8-2=6\,m/s$ $V(3)=8\times3-2=22\,m/s$ ដូចនេះ បើ $t=1s\Rightarrow V=6\,m/s$ បើ $t=3s\Rightarrow V=22\,m/s$
-តើសំទុះជាអ្វីនៃល្បឿននិងចំងាយ? -ផ្តល់និយមន័យអោយសិស្ស -ផ្តល់ឧទាហរណ៍	**2.2. សំទុះនៃចលនា** -សំទុះនៃចលនានៅខណៈt គឺ $a(t)=\frac{dv}{dt}$ រឺ $a(t)=S''(t)$ នៃចលនានៅខណៈt -ឧទាហរណ៍: រថយន្តមួយមានល្បឿន$V(t)=2t^2+3t+5$ ។ គណនាសំទុះពេល$t=1s$,$t=2s$ <u>ចម្លើយ</u> គេបាន $a(t)=\frac{dv}{dt}=4t+3$ ចំពោះ$t=1s\Rightarrow a=7\,m/s^2$ ចំពោះ$t=2s\Rightarrow a=11m/s^2$ ដូចនេះ បើ$t=1s\Rightarrow a=7\,m/s^2$ បើ$t=2s\Rightarrow a=11m/s^2$	-គឺជា $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=S''(t)$ -សំទុះនៃចលនានៅខណៈt គឺ $a(t)=\frac{dv}{dt}$ រឺ $a(t)=S''(t)$ នៃចលនានៅខណៈt -ឧទាហរណ៍: រថយន្តមួយមានល្បឿន $V(t)=2t^2+3t+5$ ។ គណនាសំទុះពេល $t=1s$,$t=2s$ <u>ចម្លើយ</u> គេបាន $a(t)=\frac{dv}{dt}=4t+3$ ចំពោះ$t=1s\Rightarrow a=7\,m/s^2$ ចំពោះ$t=2s\Rightarrow a=11m/s^2$ ដូចនេះ បើ$t=1s\Rightarrow a=7\,m/s^2$ បើ$t=2s\Rightarrow a=11m/s^2$
-ផ្តល់ឧទាហរណ៍ទី២ -រួចពន្យល់សិស្សអោយឡើងធ្វើដោះស្រាយ	-ឧទាហរណ៍: ចលនាមួយមានសមីការ$S(t)=2t^3+3t^2-6t+3$ ដែលS គិតជា(m) , t គិតជា(s) ។	-ឧទាហរណ៍: ចលនាមួយមានសមីការ $S(t)=2t^3+3t^2-6t+3$

	ក.គណនាល្បឿនពេល $t_1 = 1s$, $t_2 = 4s$ ខ.គណនាសំទុះពេល $t = 0s$, $t = 2s$ <u>ចម្លើយ</u> ក. គណនាល្បឿនV គេមាន $S(t) = 2t^3 + 3t^2 - 6t + 3$ $V(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 + 6t - 6$ -បើ $t = 1s \Rightarrow V = 6\,m/s$ -បើ $t = 4s \Rightarrow V = 114\,m/s$ ខ. គណនាសំទុះa គេមាន$V(t) = 6t^2 + 6t - 6$ $a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t + 6$ -បើ $t = 0s \Rightarrow a = 6\,m/s^2$ -បើ $t = 2s \Rightarrow a = 30\,m/s^2$	ដែល S គិតជា(m) , t គិតជា (s) ។ ក.គណនាល្បឿនពេល $t_1 = 1s$, $t_2 = 4s$ ខ.គណនាសំទុះពេល $t = 0s$, $t = 2s$ <u>ចម្លើយ</u> ក. គណនាល្បឿនV គេមាន $S(t) = 2t^3 + 3t^2 - 6t + 3$ $V(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 + 6t - 6$ -បើ $t = 1s \Rightarrow V = 6\,m/s$ -បើ $t = 4s \Rightarrow V = 114\,m/s$ ខ. គណនាសំទុះa គេមាន$V(t) = 6t^2 + 6t - 6$ $a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t + 6$ -បើ $t = 0s \Rightarrow a = 6\,m/s^2$ -បើ $t = 2s \Rightarrow a = 30\,m/s^2$
ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-ផ្តល់លំហាត់អោយសិស្សឡើងបកស្រាយ -លំហាត់: ចលនាមួយអោយដោយសមីការ $S(t) = 2t^2 + 4 + \sin\frac{\pi}{2}t$ ក. គណនាល្បឿនពេល$t = 0$ ខ. គណនាសំទុះពេល$t = 3s$		-សិស្សរកត់លំហាត់ ក. គណនាល្បឿន$t = 0$ គេមាន $S(t) = 2t^2 + 4 + \sin\frac{\pi}{2}t$ $V = \frac{dx}{dt} = 4 + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$ បើ$t = 0 \Rightarrow V = \frac{\pi}{2}\,m/s$ ខ. គណនាសំទុះa គេមាន

		$V(t)=4t+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$ $a(t)=\frac{dv}{dt}=4-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}t$ បើ $t=3s$ នោះ $a=\left(4+\frac{\pi^2}{4}\right)m/s^2$
ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)		
-ចូរប្អូនដោះស្រាយលំហាត់នៅទំព័រ៦១-៦២នៅផ្ទះ។	កិច្ចការផ្ទះ	-សិស្សស្តាប់ការណែនាំរបស់គ្រូ

កិច្ចតែងការ

- ❖ មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២ មូលដ្ឋាន
- ❖ ជំពូកទី៣: សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
- ❖ មេរៀនទី១: អនុគមន៍សនិទាន
- ❖ រយៈពេល២: ម៉ោង

I **វត្ថុបំណង**

- ➢ ចំណេះដឹង: ចេះរកអាស៊ីមតូតទ្រេត តាមរយៈការណែនាំពន្យល់របស់គ្រូ
- ➢ បំណិន: សិស្សអាចដោះស្រាយលំហាត់បានដោយខ្លួនតាមរយលំហាត់គំរូ។
- ➢ ឥរិយាបទ: សិស្សមានស្មារតីក្លាហានក្នុងការ ដោះស្រាយលំហាត់បានដោយខ្លួន។

II **ខ្លឹមសារមេរៀន**

ជំពូកទី៣: សិក្សាអថេរភាគ និងសង់ក្រាប

មេរៀនទី១: អនុគមន៍សនិទាន

១. អនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

១.១ អាស៊ីមតូតទ្រេត

III **សម្ភារ:**

- ➢ សៀវភៅសិស្សទំព័រទី (64⟶ 66)បោះពុម្ពឆ្នាំ 2010
- ➢ សំភារ:ឧបទេស: ហ្វឺត បន្ទាត់ក្រិត ក្រដាស

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
- ពិនិត្យអវត្តមាន សណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យសិស្ស	☛ជំហានទី១: (រដ្ឋបាលថ្នាក់)	– ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
គណនាលីមីត 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+2x}$	☛ជំហានទី២: (រំលឹកមេរៀនចាស់) 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x}{x}$ $=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$ $=+\infty$	សិស្សឆ្លើយ: 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x}{x}$ $=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$ $=+\infty$

	2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+5}{x^2+2x}$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right)$ $=1$	2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+5}{x^2+2x}$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}\right)$ $=1$
ណែនាំសិស្សធ្វើ លំហាត់គំរូ: ឧទាហរណ៍: រកអាស៊ីមតូតទ្រេត នៃក្រាមតាងអនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$ _	☛ជំហានទី៣: (ខ្លឹមសាមេរៀន) **១. អនុគមន៍** $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ **១.១ អាស៊ីមតូតទ្រេត** ចម្លើយ: ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេត គេចែក x^2+2x+3 និង $x+1$ គេបាន: $y=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$ $=x+1+\frac{2}{x+1}$ $\Rightarrow y-(x+1)=\frac{2}{x+1}$ គេបាន: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-(x+1)\right]$ $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x+1}=0$ <u>ដូចនេះ</u> បន្ទាត់ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូត ទ្រេត។	សិស្សឆ្លើយ: ចម្លើយ: ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតទ្រេត គេចែក x^2+2x+3 និង $x+1$ គេបាន: $y=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$ $=x+1+\frac{2}{x+1}$ $\Rightarrow y-(x+1)=\frac{2}{x+1}$ គេបាន: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-(x+1)\right]$ $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x+1}=0$ <u>ដូចនេះ</u> បន្ទាត់ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូត ទ្រេត។ <u>សិស្សឆ្លើយ</u>

លំហាត់គំរូ: រកសមីការអាស៊ីម ទ្រេតនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{4x^2+x+5}$	<u>ចម្លើយ:</u> រកមេគុណនៃបន្ទា $y=ax+b$ គេបាន: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+5}}{x}$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{4+\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{5}{x^2}}}{x}$ $=2$ $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+5}-2x\right)$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+5}-2x\right)$ $\times\dfrac{\left(\sqrt{4x^2+x+5}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x+5}+2x\right)}$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+2\right)}$ $=\dfrac{1}{4}$ ដូចនេះ សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=2x+\dfrac{1}{4}$	

          លំហាត់គំរូ -រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអនុគនម៍: $f\left(x\right)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$	ជាទូទៅ បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=a$ & $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f\left(x\right)-ax\right]=b$ នោះបន្ទាត់មានសមីការ សមីការ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាង f ។ -គេមាន $f\left(x\right)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$ $=x-3+\frac{1}{x-2}$ គេបាន: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-2}=0$ ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=x-3$ ជាអាស៊ីត តូតទ្រេតនៃក្រាប។	
គ្រូដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្សឡើងដោះស្រាយ។ រកសមីការអាស៊ីមទ្រេតនៃអនុគន៍: $y=\frac{x^2-4x+7}{x-2}$	☛<u>ជំហានទី៥</u>: (ពង្រឹងពុទ្ធិ) លំហាត់: រកសមីការអាស៊ីមទ្រេតនៃអនុគន៍:	−ធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ

	$y = \dfrac{x^2 - 4x + 7}{x - 2}$	
សិស្សធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ(ខ)&(គ)	☛<u>ជំហានទី៥</u>: (បណ្តាំផ្ញើរ) លំហាត់ប្រតិបត្តិ (ខ)និង (គ)ទំព័រ66។	កត់ត្រាលេខលំហាត់។

កិច្ចតែងការ

- ❖ **មុខវិជ្ជា:　គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ កំរិតមូលដ្ឋាន**
- ❖ **ជំពូកទី៣:　សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប**
- ❖ **មេរៀនទី១:　អនុគមន៍សនិទាន**
- ❖ **រយៈពេល :　២ម៉ោង**

$I)$ ***វត្ថុបំណង***

- ➢ ចំណេះដឹង: ចេះរកអាស៊ីមតូតទ្រេត សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនសអនុគមន៍ តាមរយការណែនាំពន្យល់របស់គ្រូ។
- ➢ បំនិណ: សិស្សអាចដោះស្រាយលំហាត់បានដោយខ្លួនតាមរយលំហាត់គំរូ។
- ➢ ឥរិយាបទ: សិស្សមានស្មារតីក្លាហានក្នុងការ ដោះស្រាយលំហាត់បានដោយខ្លួន។

$II)$ ***ខ្លឹមសារមេរៀន***

- ❖ **ជំពូកទី៣:　សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប**
- ❖ **មេរៀនទី១:　អនុគមន៍សនិទាន**

១.២. សិស្សាអនុវត្តន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

$III)$ ***សម្ភារះ***

- ➢ សៀវភៅសិស្សទំព័រ(៦៦- ៧០)។
- ➢ សំភារ:ឧបទេស: ហ្វឺតបន្ទាត់ក្រិតក្រដាស។

$IV)$ ***ដំណើរកនាំមេរៀន***

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
- ពិនិត្យអវត្តមាន សណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យសិស្ស	➢ ជំហាន់ទី១: រដ្ឋបាលថ្នាក់	– ប្រធានឡើង រាយការណ៍
គ្រូហៅសិស្សម្នាក់ឡើងធ្វើលំហាត់: រកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអនុ.ខាងក្រោមក្នុងករណី $x\to\pm\infty$ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$	➢ ជំហាន់ទី២: (រំលឹកមេរៀនចាស់) –បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ នោះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=ax+b$ ជាអស៊ីមតូតទ្រេត។	$a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=1$ ហើយ $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x}-x\right]=$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^2+1-x^2}{x}\right]=0$ នោះបន្ទាត់ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប។

គ្រូឲ្យសិស្សពិនិត្យមើល **លំហាត់គំរូទី១** សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (c) នៃអនុគមន៍ $y=\frac{x^2-4}{x-1}$	➢ ជំហានទី៣: (ខ្លឹមសារមេរៀនថ្មី) ១.២. សិក្សាអនុវត្តន៍ $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ លំហាត់គំរូ: សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (c) នៃអនុគមន៍ $y=\frac{x^2-4}{x-1}$. ដែនកំណត់ $D=R-\{1\}$.សរសេរជារាង កាណូនិច $f(x)=\frac{x^2-4}{x-1}$ $=x+1-\frac{3}{x-1}$. ទិសដៅអថេរភាព . ដេរីវេ: $f'(x)=\left(x+1-\frac{3}{x-1}\right)'$ $=1+\frac{3}{(x-1)^2}$ ដោយ $(x-1)^2>0\ ,\ \ x\in D$ នោះ $f'(x)>0\ ,\ x\in D$ គេបាន: f ជាអនុគមន៍កើនលើ D ហើយ f គ្មានបរមាធៀបទេ។ -គណនាលីមីត:	សិស្សយកចិត្តទុកដាក់ស្តាប់គ្រូពន្យល់

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x-1}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x+1)$$

$$=+\infty \quad \&$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(x+1)$$

$$=-\infty$$

-អាស៊ីមតូត: ដោយ

$$\lim_{x\to1} f(x)=\pm\infty$$

នោះគេបាន $x=1$

ជាអាស៊ីមតូតឈរ។

គេបាន:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$$

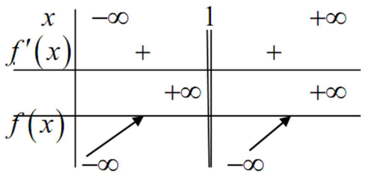
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3}{x-1}\right]=0$$

<u>ដូចនេះ:</u> $y=x+1$

ជាអាស៊ីមទ្រេត

នៃក្រាប។

-សង់តារាងអថេរភាព:



-សំណង់ក្រាប:

. ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអ័ក្ស $0x$ គេបាន:

គ្រូចែកសិស្សជាក្រុមតូចៗដើម្បីពិភាក្សា**លំហាត់គំរូ** ។

គ្រូបំផុសសិស្សអំពីប្លង់សិក្សាអថេរភាព។

- ដែនកំណត់

• ទិសដៅអថេរភាព –រកដេរីវេគឺ $f'(x)$ –រកបរមា(អតិ និងអប្ប) –គណនាលីមីត –អាស៊ីមតូត • តារាងអថេរភាព • សំណង់ក្រាប គ្រូឲ្យសំគាល់ដល់សិស្សថា:គេអាចរកផ្ចិតឆ្លុះ $I(a\ ;\ b)$ នៃក្រាបតាមរូបមន្តមួយទៀតគឺ $f(2a+x)-f(x)=2b$ ដែល $I(a,b)$ ។	$0x\ :\ y=0$ $\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x-1}$ $\Leftrightarrow x^2-4$ $\Leftrightarrow x=-2\ \ \&\ \ x=2$. ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអ័ក្ស$0y$ គេបាន: $x=0$ $\Rightarrow f(0)=4$. ផ្ចិតឆ្លុះ : អាស៊ីមតូតឈរ $x=1$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x+1$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចមួយ $I(1\ ,\ 2)$ ។ តាមរូបមន្តប្តូរអ័ក្ស: $\begin{cases} x=1+X \\ y=2+Y \end{cases}$ & $y=x+1-\frac{3}{x-1}$ គេបាន: $2+Y$ $=1+X+1-\frac{3}{1+X-1}$ $=X+2-\frac{3}{X}$ $\Rightarrow Y=X+2-\frac{3}{X}-2$ $=X-\frac{3}{X}\ ,\ \forall x\in D$ យើងបាន:	

	$F\left(-X\right)=\left(-X\right)-\frac{3}{\left(-X\right)}$ $=-\left(X-\frac{3}{X}\right)$ $=-F\left(X\right)$ $\Rightarrow F\left(-X\right)=-F\left(X\right)$ នាំឲ្យ $F\left(X\right)$ ជាអនុគមន៍សេស ដូចនេះ $I\left(1\,,\,2\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ក្រាប។ **របៀបសិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍** $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ • ដែនកំណត់ • ទិសដៅអថេរភាព –រកដេរីវេគឺ $f'(x)$ –រកបរមា(អតិ និងអប្ប) បើមាន –គណនាលីមីត –អាស៊ីមតូត • តារាងអថេរភាព • សំណង់ក្រាប គ្រូឲ្យសំគាល់ដល់សិស្សថា:គេអាចរក **ផ្ចិតឆ្លុះ** $I(a\ ;\ b)$ នៃក្រាបតាមរូបមន្តមួយទៀតគឺ $f\left(2a+x\right)-f\left(x\right)=2b$ ដែល $I\left(a,b\right)$ ។	
	➢ ជំហានទី៥:	ធ្វើលំហាត់នៅផ្ទះ

១. គេមានអនុគមន៍ f : $y = x+1+\dfrac{1}{x+1}$ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប នៃអនុគមន៍ f ។	(ពង្រឹងពុទ្ធិ)	
–មើលមេរៀនថ្មី និងធ្វើលំហាត់ <u>ប្រតិបត្តិ</u> 1) $y = \dfrac{x^2 - x + 9}{x-1}$ 2) $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x-1}$	➢ ជំហាន់ទី៥: (បណ្តាំផ្ញើរ)	កត់ត្រាលេខលំហាត់

កិច្ចតែងការ

- ❖ មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២ មូលដ្ឋាន
- ❖ ជំពូកទី៣: សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
- ❖ មេរៀនទី១: អនុគមន៍សនិទាន
- ❖ រយៈពេល២: ម៉ោង

I **<u>វត្ថុបំណង</u>**

- ➢ <u>ចំណេះដឹង:</u> ចេះរកអាស៊ីមតូតទ្រេត សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ តាមរយការណែនាំពន្យល់របស់គ្រូ
- ➢ <u>បំណិន</u>: សិស្សអាចដោះស្រាយលំហាត់បានដោយខ្លួនតាមរយលំហាត់គំរូ។
- ➢ ឥរិយាបទ: សិស្សមានស្មារតីក្លាហានក្នុងការ ដោះស្រាយលំហាត់បានដោយខ្លួន។

II **<u>ខ្លឹមសារមេរៀន</u>**

ជំពូកទី៣: សិក្សាអថេរភាគ និងសង់ក្រាប

មេរៀនទី១: អនុគមន៍សនិទាន

១.២ សិក្សាអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

III **<u>សម្ភារ:</u>**

- ➢ សៀវភៅសិស្សទំព័រទី 71 $\longrightarrow$ 77បោះពុម្ពឆ្នាំ 2010
- ➢ សំភារ:ឧបទេស: ហ្វឺត បន្ទាត់ក្រិត ក្រដាស

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
- ពិនិត្យអវត្តមានសណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យសិស្ស	☛<u>ជំហានទី</u>១: (រដ្ឋបាលថ្នាក់)	– ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
– គ្រូឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់ – រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{x^2+4x+1}{x+2}$	☛<u>ជំហានទី២</u>: (រំលឹកមេរៀនចាស់) x^2+4x+1 | $x+2$ $-x^2-2x$ | $x+2$ $2x+1$ $-2x-4$ -3	សិស្សឆ្លើយ x^2+4x+1 | $x+2$ $-x^2-2x$ | $x+2$ $2x+1$ $-2x-4$ -3

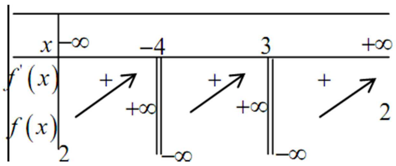
	$\frac{x^2+4x+1}{x+2}=x+2-\frac{3}{x+2}$ $y-(x+2)=-\frac{3}{x+2}$ គេបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+2}=0$ ដូចនេះតាមនិយមន័យបន្ទាត់ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត។	$\frac{x^2+4x+1}{x+2}=x+2-\frac{3}{x+2}$ $y-(x+2)=-\frac{3}{x+2}$ គេបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+2}=0$ ដូចនេះតាមនិយមន័យ បន្ទាត់ $y=x+2$ ជាអា ស៊ីមតូតទ្រេត។
ណែនាំសិស្សធ្វើលំហាត់ ឧទាហរណ៍:សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-2}$ ចូរប្អូនរកដេរីវេនៃអនុគមន៍: $f(x)=\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$ -ឲ្យសិស្សគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-4^-}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$ $\lim\limits_{x\to-4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-4^+}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$ $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$ $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$	☛<u>ជំហានទ៣</u>:(ខ្លឹមសារមេរៀន) ១.២: <u>សិក្សាអនុគមន៍</u> $y=\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ ឧទាហរណ៍:សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-2}$ • ដែនកំណត់ $D=\Re-\{-4;3\}$ • ទិសដៅអថេរភាព ដេរីវេ $f'(x)=\frac{11x^2-56+104}{\left(x^2+x-12\right)^2}$ $f(x)'=0$ គេបាន $11x^2-56x+104=0$ មាន $\Delta'=28'-(11\times104)<0$ និង $a=11>0$ ។ដូចនេះ $f'(x)=>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ ។អនុ. $f(x)$ កើនលើ D ។ $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-4^+}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}=-\infty$	– សិស្សបើកសៀវភៅ រកដេរីវេ: -គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-4^+}f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=-\infty$

<table>
<tr>
<td>-ឲ្យសិស្សរកអាស៊ីមតូតនៃអនុ.

-នាំសិស្សគូសតារាងអថេរភាព

-នាំសិស្សគូសក្រាប
-ឲ្យសិស្សរកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងអ័ក្ស $x'x$

-ឲ្យសិស្សរកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងអ័ក្ស $y'oy$
តើក្រាបកាត់អាស៊ីមតូតដេកឬទេ?

-ឲ្យសិស្សទាញលក្ខណទូទៅ</td>
<td>គេមាន $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2$
គេបានបន្ទាត់ $y=2$
ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប។
$\lim_{x\to-4} f(x)=\pm\infty \,\&\, \lim_{x\to3} f(x)=\pm\infty$
នោះសមីការ $x=-4 \,\&\, x=3$
ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប។

ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប Cនិងអ័ក្ស $x'x$ គេបាន $y=0 \Leftrightarrow 2x^2-9x+4$
មាន $\Delta=81-32=49$
មានឬស $x=\frac{1}{2} \,\&\, x=4$
$\Rightarrow$ គេបាន $x=0 \Rightarrow f(0)=-\frac{1}{3}$
$\begin{cases} y=2 \\ y=\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12} \end{cases}$
$\Rightarrow$ គេបាន $\left(x=\frac{28}{11}; y=2\right)$

<u>ជាទូទៅ</u>: <u>អនុគមន៍</u>
$y=\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ ដែល $a;b;c$
ខុសពីសូន្យនិង $p\neq0$
អនុ.មានលក្ខណមួយចំនួនដូចខាងក្រោម:
.គ្រប់ក្រាបតាងអនុ.នេះមានអាស៊ីមតូតដេកមួយជានិច្ច។
.ចំនួនអាស៊ីមតូតឈរអាស្រ័យនិងឬសសមីការ $px^2+qx+r=0$</td>
<td>-រកអាស៊ីមតូត

-គូសតារាងអថេរភាព

ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប Cនិងអ័ក្ស $x'x$ គេបាន
$y=0 \Leftrightarrow 2x^2-9x+4$
មាន $\Delta=81-32=49$
មានឬស $x=\frac{1}{2} \,\&\, x=4$

ទាញរកលក្ខខណ្ឌទូទៅ</td>
</tr>
</table>

គ្រូដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្សឡើងដោះស្រាយ។	☛<u>ជំហានទី៤</u>:(ពង្រឹងពុទ្ធិ) លំហាត់:សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម: $y=\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}$	–ធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ
សិស្សធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ(ខ)&(គ)	☛<u>ជំហានទី៥</u>:(បណ្តាំផ្ញើរ) លំហាត់ប្រតិបត្តិ (ខ)និង (គ)ទំព័រ77។	កត់ត្រាលេខលំហាត់។

កិច្ចតែងការ

- ❖ មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ កំរិតមូលដ្ឋាន
- ❖ ជំពូកទី៣: សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
- ❖ មេរៀនទី១: អនុគមន៍សនិទាន
- ❖ រយះពេល : ២ម៉ោង

I) ***វត្ថុបំណង***

- ➢ ចំណេះដឹង: ចេះរកអាស៊ីមតូតទ្រេត សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនសអនុគមន៍ តាមរយការណែនាំពន្យល់របស់គ្រូ។
- ➢ បំនិណ: សិស្សអាចដោះស្រាយលំហាត់បានដោយខ្លួនតាមរយលំហាត់គំរូ។
- ➢ ឥរិយាបទ: សិស្សមានស្មារតីក្លាហានក្នុងការ ដោះស្រាយលំហាត់បានដោយខ្លួន។

II) ***ខ្លឹមសារមេរៀន***

- ❖ ជំពូកទី៣: សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
- ❖ មេរៀនទី១: អនុគមន៍សនិទាន

៣. អនុវត្តន៍

III) ***សម្ភារះ***

- ➢ សៀវភៅសិស្សទំព័រ(៧៨- ៨៥)។
- ➢ សំភារ:ឧបទេស: ហ្វឺត បន្ទាត់ក្រិត ក្រដាស។

IV) ***ដំណើរការនាំមេរៀន***

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
- ពិនិត្យអវត្តមាន សណ្តាប់ធ្នាប់ និងអនាម័យសិស្ស	➢ ជំហាន់ទី១: រដ្ឋបាលថ្នាក់	– ប្រធានឡើងរាយការណ៍
គ្រូហៅសិស្សម្នាក់ឡើងធ្វើលំហាត់: រកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអនុ.ខាងក្រោមក្នុងករណី $x\to\pm\infty$ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$	➢ ជំហាន់ទី២: (រំលឹកមេរៀនចាស់) $-$បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=ax+b$ ជាអស៊ីមតូត	$-\ a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=1$ ហើយ $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x}-x\right]=$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^2+1-x^2}{x}\right]=0$ នោះបន្ទាត់ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប។
គ្រូឲ្យសិស្សពិនិត្យមើលលំហា	➢ ជំហាន់ទី៣:	

ត់គំរូទី១ –គ្រូពន្យល់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត mហើយឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់សំនួរ ក។	(ខ្លឹមសារមេរៀន) ៣) អនុវត្តន៍ ឧទាហរណ៍: គេឲ្យអនុគមន៍: $y=\frac{mx^2+1}{x}$ ដែលមានក្រាប c_m ក/សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបចំពោះ $m=1$។ ខ/កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យអនុ.កើនក្នុងចន្លោះ $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ គ/តើមានចំនុចនឹងដែលស្ថិតនៅក្រោមក្រាម c_m ចំពោះគ្រប់mឬទេ។ ឃ/ដោយប្រើក្រាប c_1 កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $x^2-ax+1>0$ ចំពោះ $\forall x>0$ ។ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបចំពោះ $m=1$ $c_1: y=\frac{x^2+1}{x}$ • ដែនកំណត់ $D=\Re-\{0\}$ • ទិសដៅអថេរភាព – ដេរីវេ $y'=\frac{x^2-1}{x^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$ តារាងសញ្ញាណដេរីវេ ចំពោះ $x=-1$ អនុ.មានអតិបរមាគឺ ចំពោះ $x=1$ អនុ.មានអតិបរមាគឺ $f(-1)=2$	

ឲ្យសិស្សចេះរកចំនុចនឹងលើខ្សែកោងប៉ារ៉ាម៉ែតចំពោះគ្រប់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ។	គណនាលីមីត $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x}=\pm\infty$ –អាស៊ីមតូត នោះ $x=0$ ជាអស៊ីមតូតឈរ គ/រកចំនុចនឹងដែលក្រាប (c_m) ទាំងអស់កាត់តាមចំនុចនោះ តាង $A(x_A,y_A)$ ជាចំនុចដែលក្រាប c_m ទាំងអស់កាត់តាម គេបាន $y_A=\frac{mx_A+1}{x_A}$ $;\forall m\in R \,\&\, x\neq 0$ នោះ $x_Ay_A=mx_A^2+1$ $\forall m\in R$ $\begin{cases} x_A^2=0 \\ x_Ay_A-1=0\end{cases}$ គ្មានឫស ដូចនេះគ្មានចំនុចនិង A ទេ ឃ/កំណត់ a ដើម្បីអោយ $x^2-ax+1>0$ ចំពោះ $\forall x>0$ គេបាន $x^2-ax+1>0$ $\forall x>0$ គេបាន $\frac{x^2+1}{x}>a$ តាមក្រាបគេឃើញថា $\frac{x^2+1}{x}>a$ ចំពោះ $\forall x>0$ កាលណា $a<2$ លំហាត់គំរូទី2:គេឲ្យអនុគមន៍ $f: y=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ ក/សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប c នៃអនុគមន៍។	

ឲ្យសិស្សចេះប្រើខ្សែកោងដើម្បីទាញរកចម្លើយវិសមីការ។	ខ/ដោយប្រើក្រាប c ទាញរកក្រាបរបស់អនុគមន៍ $y=\left\|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right\|$ ។ ឃ/ដោយប្រើក្រាប c សិក្សាទៅតាមតម្លៃ m នូវចំនួនឫសនៃសមីការ $x^2-\|x\|+2=m(\|x\|-1)$	
គ្រូចែកសិស្សជាក្រុមតូចៗដើម្បីពិភាក្សាលំហាត់គំរូទី2។ $-$គ្រង់សំនួរ ក គ្រូបំផុសសិស្សអំពីប្លង់សិក្សាអថេរភាព។ • ដែនកំណត់ • ទិសដៅអថេរភាព $-$រកដេរីវេគឺ $f'(x)$ $-$រកបរមា(អតិ និងអប្ប) $-$គណនាលីមីត $-$អាស៊ីមតូត • តារាងអថេរភាព • សំណង់ក្រាប		$-$ក/សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $c: y=\frac{x^2-x+2}{x-1}=x+\frac{2}{x-1}$ • ដែនកំណត់ $D=R-\{1\}$ • ទិសដៅអថេរភាព ដេរីវេ $f'(x)=\frac{x^2-x-1}{(x-1)^2}$ $f'(x)=0$ គេបាន $\frac{x^2-x-1}{(x-1)^2}=0$ នាំឲ្យ $x=1+\sqrt{2}; x=1-\sqrt{2}$ $-$ចំនុចអតិបរមា

ចំពោះ $x = 1-\sqrt{2}$

អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប

$$f\left(1-\sqrt{2}\right) = \frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2 - \left(1-\sqrt{2}\right) + 2}{1-\sqrt{2}-1}$$

$= 1-2\sqrt{2}$

ចំពោះ $x = 1+\sqrt{2}$

អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប

$$f\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1-\sqrt{2}\right) + 2}{1+\sqrt{2}-1} -$$

$= 2\sqrt{2}+1$

គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x + \frac{2}{x-1}\right) = \pm\infty$$

និង $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2}{x-1} = \pm\infty$

$-$អាស៊ីមតូត:ដោយ $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{2}{x-1} = \pm\infty$

នោះ $x = 1$ ជាអសុីមតូតឈរ។

អនុ. $f(x) = x + \frac{2}{x-1}$ គេបាន

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x-1} = 0$$

នាំឲ្យ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប។

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1-2\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$1+2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

• សំណង់ក្រាប

$-$បើ $y = 0$ នោះ $\frac{x^2 - x + 2}{x-1} = 0$ ឬ $x^2 - x + 2 = 0$

សមីការគ្មានឫសក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស $0x$ ទេ។

$-$បើ $x = 0$ នោះ $\frac{0^2 - 0 + 2}{0-1} = -2$ ។

$-$ផ្ចិតឆ្លុះ :អាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$

និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x$ កាត់គ្នាត្រង់

$I(1,1)$ ។

<table>
<tr>
<td>គ្រូឲ្យសំគាល់ដល់សិស្សថា:គេ
អាចរកផ្ចិតឆ្លុះ I
នៃក្រាបតាមរូបមន្តមួយទៀត
គឺ $f(2a+x)-f(x)=2b$
ដែល $I(a,b)$ ។</td>
<td></td>
<td>តាមរូបមន្តប្តូរអ័ក្ស $x=1+X$
$y=1+Y$
$Y=1+X+\frac{2}{1+X-1}-1$
គេបាន $=X+\frac{2}{X}$
$F(-X)=-X+\frac{2}{-X}=-\left(X+\frac{2}{X}\right)$
$=-F(X)$
នាំឲ្យ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស។
ដូចនេះ $I(1,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ក្រាប c ។
ខ/ទាញរកក្រាបរបស់អនុគមន៍
$y=\left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|$
គេមាន $y=\left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|$
សញ្ញានៃ $\frac{x^2-x+2}{x-1}, x^2-x+2>0$
ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ព្រោះ $\Delta=1-8<0$
ដូចនេះប្រភាគមានសញ្ញាដូច $x-1$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>|</td><td>$+$</td></tr>
</table>
$-$បើ $x>1, \frac{x^2-x+2}{x-1}>0$
$y=\left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ ។
មែកនៃ $y=\left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|$ ជាមែកនៃ
$y=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ ។
$-$បើ $x<1, \frac{x^2-x+2}{x-1}<0$
$y=\left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|=-\left(\frac{x^2-x+2}{x-1}\right)$ ។
មែកនៃ $y=\left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|$ ឆ្លុះគ្នានឹងមែកនៃ
$y=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។</td>
</tr>
</table>

		ដូចនេះក្រាប $y=\left\|\dfrac{x^2-x+2}{x-1}\right\|$ ជាប្រជុំនៃមែកនៅខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសដែល មែកជារបស់ $y=\dfrac{x^2-x+2}{x-1}$ និងមែកមួយទៀតបានដោយបំលែងឆ្លុះធៀបនិ ងអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃមែករបស់ $y=\dfrac{x^2-x+2}{x-1}$ ដែលត្រូវនឹង $x<1$ គ/ពិភាក្សាតាមតម្លៃ $m: x^2-\|x\|+2=m(\|x\|-1)$ សមមូល $\dfrac{x^2\|x\|+2}{\|x\|-1}=m$ អង្គខាងឆ្វេងជាក្រាប $C_2: y=\dfrac{x^2-\|x\|+2}{\|x\|-1}$ គេមាន $y=\dfrac{x^2-\|x\|+2}{\|x\|-1}=$ $\begin{cases}\dfrac{x^2-x+2}{x-1} & \text{បើ } x\geq 0\\ \dfrac{x^2+x+2}{-x-1} & \text{បើ } x<0\end{cases}$ ដូចនេះក្រាប $C_2: y=\dfrac{x^2-\|x\|+2}{\|x\|-1}$ មានក្រាបមួយផ្នែកជារបស់ $y=\dfrac{x^2-x+2}{x-1}$ ផ្នែក $x\geq o$ (មិនយកផ្នែក $x<0$ ទេ)ហើយមួយផ្នែកទៀតជាក្រាបឆ្លុះរបស់ $y=\dfrac{x^2-x+2}{x-1}$ ផ្នែក $x\geq o$ ធៀបនិងអ័ក្ស $0y$ ។ គូសបន្ទាត់ $D: y=m$ គេឃើញថា: $-$បើ $m<-2$:មានឫសពីរផ្សេងគ្នា។ $-$បើ $m=-2$:មានឫសឌុបមួយ។ $-$បើ $-2<m<2\sqrt{2}+1$:គ្មានឫស។ $-$បើ $m=2\sqrt{2}+1$:មានឫសឌុបពីរ។ $-$បើ $m>2\sqrt{2}+1$: មានឫសបួន។
១. គេមានអនុគមន៍ f :	➢ ជំហាន់ទី៤: ពង្រឹងពុទ្ធិ	អនុវត្តធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ

$y=\frac{x^2+x}{2x-2}$ ក) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប នៃអនុគមន៍ f ។ ខ) ដោយប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ f ចូរសិក្សាចំនួនរឹសនៃសមីការទៅ តាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m: $x^2+x=2m(x-1)$		
–មើលមេរៀនថ្មី	➢ ជំហានទី៥: បណ្តាំផ្ញើរ	ព្យាយាមធ្វើលំហាត់

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- <u>មុខវិជ្ជា:</u> គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី12 កំរិតមូលដ្ឋាន
- <u>ជំពូកទី៣:</u> សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
- <u>មេរៀនទី2:</u> អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
- <u>រយពេល:</u> 2ម៉ោង

I) *<u>វត្ថុបំណង</u>*

- ចំណេះដឹង:សិស្សរក e និងលីមីតសំខាន់នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈតារាងនិងពន្យល់របស់គ្រូ។
- សិស្សគណនាលីមីតនិងសង់ក្រាបអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈតារាងនិងការបកស្រាយរបស់គ្រូ។
- ឥរិយាបទ:សិស្សសកម្មនិងសហការគ្នាបានល្អ

II) *<u>ខ្លឹមសារមេរៀន</u>*

III) *<u>សម្ភារឧបទេស</u>*

–សៀវភៅសិស្ស តារាងតម្លៃ e និងក្រាបស្កត់

–សៀវភៅសិស្សទំព័រ

IV) *<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>*

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
–ពិនិត្យ អនាម័យសណ្តាប់ធ្នាប់និងអវត្តមាន	ជំហានទី1: រដ្ឋបាលថ្នាក់	–ប្រធានឡើងរាយការណ៍
–កាលពីសប្តាហ៍មុនយើងបានរៀនសិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបដើម្បីដោះស្រាយដើរតាមប៉ុន្មានជំហាន? –ដូចម្តេចដែលហៅថាអនុគមន៍?	ជំហាន់ទី2: រំលឹកមេរៀនចាស់ –ដែនកំណត់ –ដេរីវេ –លីមីតនិងអាស៊ីមតូត –បរមា –តារាងអថេរភាព –សង់ក្រាប –អនុគមន៍គឺជាទំនាក់ទំនងពីសំនុំ A ទៅសំនុំ B ដែលគ្រប់ធាតុរបស់សំនុំ A មានរូបភាពតែមួយគត់។	–ដែនកំណត់ –ដេរីវេ –លីមីតនិងអាស៊ីមតូត –បរមា –តារាងអថេរភាព –សង់ក្រាប –អនុគមន៍គឺជាទំនាក់ទំនងពីសំនុំ A ទៅសំនុំ B ដែលគ្រប់ធាតុរបស់សំនុំ A មានរូបភាពតែមួយគត់។

–ថ្ងៃនេះយើងស្គាល់អនុគមន៍ថ្មីមួយទៀតគឺ	–អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល	

និ

ជំហានទី3:

ខ្លឹមសារមេរៀន

មេរៀនទី2:<u>អនុ.អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល</u>

1) ចំនួន e

តារាង

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000000
10	2.59374246
100	2.70484383
1000	2.71692393
10000	2.71814593
100000	2.71826824
1000000	2.71828047
10000000	2.71828169
100000000	2.71828181
1000000000	2.71828183
10000000000	

គេកំណត់សរសេរ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828$$

–សិស្សស្តាប់ និងសាកល្បងគណនាដោយឲ្យតម្លៃn

–សិស្សសង្កេតតារាងស្តាប់ការពន្យល់របស់គ្រូ

–សិស្សស្តាប់ការបកស្រាយរបស់គ្រូដោយយកចិត្តទុកដាក់។

–សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រា

2) <u>អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល</u>

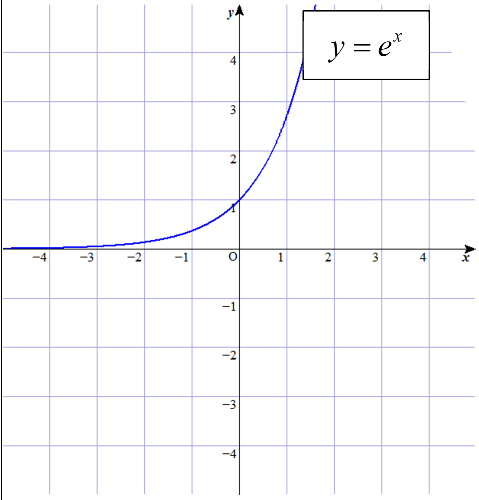
2.1) និយមន័យ និងលក្ខណ

ក)និយមន័យ

–គ្រូឲ្យនិយមន័យ

គ្រប់ចំនួនពិត x អនុគមន៍ f កំណត់បាន $f(x)=e^x$ ហៅថា អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

–សិស្សស្តាប់ កត់ត្រា

$-$គ្រូសាកល្បងឲ្យសិស្សសងក្រាបនៃ $y=e^x$ $-$គ្រូបញ្ជាក់ឲ្យតារាងតម្លៃ $-$គ្រូបង្ហាញរូបនិងពន្យល់ $-$គ្រូបន្ថែមៈដោយគោល $e=2.7182$ នោះអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាអនុគមន៍កើនលើ R ។ $-$គ្រូកត់លក្ខណលើក្តារខៀន	(គោល e)។ ខ)សង់ក្រាប <table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td>0.36</td><td>1</td><td>2.71</td></tr></table>  អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលកើនលើ R ។ គ)លក្ខណ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតខ m,n គេបាន $1)e^{m+n}=e^m.e^n$ $2)e^{-n}=\frac{1}{e^n}$ $3)e^{m-n}=\frac{e^m}{e^n}$ $4)\left(e^m\right)^n=e^{m.n}$	 $-$សិស្សកត់ត្រា
$-$ចូរឲ្យនិយមន័យអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល។ $-$សិក្សាលើ R តើក្រាបអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលយ៉ាងម៉េច។ $-$គណនាៈ	**ជំហានទី4:** **ពង្រឹងពុទ្ធិ** $-$ជាអនុគមន៍ដែលគ្រប់ចំនួនពិត x អនុគមន៍ $f(x)=e^x$ $-$កើន $y=e^{5x-2+x-1}=e^{6x-3}$ $y=e^{-10x+7+2x-3}=e^{-8x+4}$	$-$អនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=e^x$ $-$ក្រាបកើនជានិច្ច។ $y=e^{5x-2+x-1}=e^{6x-3}$ $y=e^{-10x+7+2x-3}=e^{-8x+4}$

$y=\frac{e^{5x-2}}{e^{-x+1}}$ $y=\frac{e^{-10x+7}}{e^{-2x+3}}$		
−ទៅផ្ទះវិញមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់ទំព័រ ៩៣លំហាត់ លេខ 1&2។	ជំហានទី5: បណ្តាំផ្ញើរ	សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រាលេខទំព័រ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- ❖ មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី12 កំរិតមូលដ្ឋាន
- ❖ ជំពូកទី៣: សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
- ❖ មេរៀនទី2: អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
- ❖ រយពេល: 2ម៉ោង

I) *វត្ថុបំណង*

- ➢ ចំណេះដឹង:សិស្សរក e និងលីមីតសំខាន់នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈតារាងនិងពន្យល់របស់គ្រូ។
- ➢ បំណិន:សិស្សគណនាលីមីតនិងសង់ក្រាបអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈតារាងនិងការបកស្រាយរបស់គ្រូ។
- ➢ ឥរិយាបទ:សិស្សសកម្មនិងសហការគ្នាបានល្អ

II) *ខ្លឹមសារមេរៀន*

2.2) ដេរីវេអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

III) *សម្ភារឧបទេស*

– សៀវភៅសិស្ស ថ្នាក់ទី12(កំរិតមូលដ្ឋាន)ទំព័រ87.88.89.90

– សៀវភៅសិស្សទំព័រ

IV) *ដំណើរការមេរៀន*

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
–ពិនិត្យ អនាម័យសណ្ដាប់ធ្នាប់និងអវត្តមាន	ជំហានទី1: រដ្ឋបាលថ្នាក់	–ប្រធានឡើងរាយការណ៍
–គ្រូឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់ 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{5x}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} 6e^{2x}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{x}+3x-5\right)$	ជំហាន់ទី2: រំលឹកមេរៀនចាស់ x $-\infty$ 0	1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x}=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{5x}=o$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} 6e^{2x}=+\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{x}+3x-5\right)=+\infty$
	y' – y $-\infty$ ជំហាន់ទី3: ខ្លឹមសារមេរៀន	

<table>
<tr>
<td>–គ្រូពន្យល់មេរៀន</td>
<td>

មេរៀនទី2:<u>អនុ.អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល</u>

2.2) អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
ឧទាហរណ៍:គេមានអនុគមន៍
$H(x)=\frac{e^x-1}{x}$ ។គណនាតម្លៃលេខនៃអនុមន៍ $H(x)$ ចំពោះ x ស្មើនឹង
$0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$
តារាង

<table>
<tr><td>x</td><td>0.1</td><td>0.01</td><td>0.001</td><td>0.0001</td></tr>
<tr><td>$\frac{e^x-1}{x}$</td><td>1.0516</td><td>1.0049</td><td>1.0047</td><td>1</td></tr>
</table>

គេសង្កេតឃើញថាបើ $x\to 0$ នោះ
$\frac{e^x-1}{x}\to 1$
គេបាន
$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x}=1}$
</td>
<td>–សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
ឧទាហរណ៍:គេឲ្យអនុគមន៍ $y=e^x$ ។រកដេរីវេត្រង់ x_0 ។
តាមនិយមន័យដេរីវេគេបាន
$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{(x_0+\Delta x)}-e^{x_0}}{\Delta x}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x_0}.e^{\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x_0}(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$
$=e^{x_0}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x_0}(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=e^{x_0}$
ដូចនេះដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=e^x$ គឺជាអនុគមន៍ $y'=e^x$ ។
</td>
<td>–សិស្សស្តាប់ កត់ត្រា</td>
</tr>
<tr>
<td>–គ្រូណែនាំសិស្សឲ្យចេះទាញលក្ខណទូទៅ
បើ $f(x)=e^x$ នោះ</td>
<td>
ជាទូទៅ:បើ $f(x)=e^x$ នោះ
$f'(x)=e^x$

–ឧទាហរណ៍:គណនាដេរីវេនៃអនុ
</td>
<td>–សិស្សឡើងទាញលក្ខណ:ទូទៅ
បើ $f(x)=e^x$ នោះ $f'(x)=e^x$</td>
</tr>
</table>

$f'(x)=e^x$ –គ្រូឲ្យសិស្សសង្កេតមើលឧទាហរណ៍ទី3ហើយទាញលក្ខណៈទូទៅរបស់អនុគន៍	គមន៍ $y=e^{2x}$ គេបាន $y'=\left(e^{2x}\right)'=2e^{2x}$ ជាទូទៅ បើ $f(x)=e^{u(x)}$ នោះ $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$	–សិស្សឡើងទាញលក្ខណៈទូទៅនៃអនុគមន៍
–គ្រូឲ្យសិស្សសង្កេតមើលលំហាត់គំរូទី2 គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $1)y=e^{4x}$ $2)y=e^{x^2-3x+1}$ $3)y=xe^x$	ចម្លើយៈគណនាតាមរូបមន្ត $y=e^{u(x)}\Leftrightarrow y'=u'(x)e^{u(x)}$ $1)y'=\left(e^{4x}\right)'=(4x)'e^{4x}=4e^{4x}$ $2)y'=\left(e^{x^2-3x+1}\right)'=\left(x^2-3x+1\right)'e^{x^2-3x+1}$ $=(2x-3)e^{x^2-3x+1}$ $3)y'=\left(xe^x\right)'=x'e^x+\left(e^x\right)'x$ $=e^x+xe^x=e^x(1+x)$	$y=e^{u(x)}\Leftrightarrow y'=u'(x)e^{u(x)}$ $1)y'=\left(e^{4x}\right)'=(4x)'e^{4x}=4e^{4x}$ $2)y'=\left(e^{x^2-3x+1}\right)'=\left(x^2-3x+1\right)'e^{x^2-3x+1}$ $=(2x-3)e^{x^2-3x+1}$ $3)y'=\left(xe^x\right)'=x'e^x+\left(e^x\right)'x$ $=e^x+xe^x=e^x(1+x)$
–ចូរប្អូនធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $1)y=\left(x^2-3\right)e^x$ $2)y=x^2e^{-2x}$ $3)y=\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$	ចម្លើយ $1)y'=\left(x^2-3\right)'e^x+(e^x)'\left(x^2-3\right)$ $=2xe^x+(e^x)\left(x^2-3\right)=e^x\left(x^2+2x-3\right)$ $2)y'=\left(x^2\right)'e^{-2x}+(e^{-2x})'x^2$ $=2xe^{-2x}-2x^2e^{-2x}=2xe^{-2x}(1-x)$ $3)y'=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'e^x-\left(e^x\right)'\sqrt{x}}{\left(e^x\right)^2}$ $=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x-e^x\sqrt{x}}{e^{2x}}=\dfrac{\frac{e^x-2xe^x}{2\sqrt{x}}}{e^{2x}}$ $=\dfrac{(1-2x)}{2\sqrt{x}e^x}$	ចម្លើយ $1)y'=\left(x^2-3\right)'e^x+(e^x)'\left(x^2-3\right)$ $=2xe^x+(e^x)\left(x^2-3\right)=e^x\left(x^2+2x-3\right)$ $2)y'=\left(x^2\right)'e^{-2x}+(e^{-2x})'x^2$ $=2xe^{-2x}-2x^2e^{-2x}=2xe^{-2x}(1-x)$ $3)y'=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'e^x-\left(e^x\right)'\sqrt{x}}{\left(e^x\right)^2}$ $=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x-e^x\sqrt{x}}{e^{2x}}=\dfrac{\frac{e^x-2xe^x}{2\sqrt{x}}}{e^{2x}}$ $=\dfrac{(1-2x)}{2\sqrt{x}e^x}$
–គ្រូពន្យល់លំហាត់គំរូទី2	–លំហាត់គំរូទី2:សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=4-2e^{-x}$ • ដែនកំនត់ $D=R$ • ទិសដៅអថេរភាព -ដេរីវេ $y'=2e^{-x}$ $y'>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ -លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-2e^{-x}\right)=4-2\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-2e^{-x}\right)=4-\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=4$	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ $y=4$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប។
• តារាងអថេរភាព
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$-\infty$ ↗</td><td>2</td><td>↗ 4</td></tr>
</table>
• ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=4-2e^{-x}$
-ចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្ស $(y'0y)$ $x=0$ នាំឲ្យ $y=2$
-សង់ចំនុច
<table>
<tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-1.4</td><td>2</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>−គ្រូឲ្យសិស្សសង្កេតមើលលំហាត់គំរូទី3ហើយពន្យល់សិស្ស</td>
<td>
លំហាត់គំរូទី៣:សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=xe^x$ ។
• ដែនកំនត់ $D=R$
• ទិសដៅអថេរភាព
-ដេរិវេ
$y'=(x)'e^x+(e^x)'x=e^x(1+x)$
ដោយ $e^x>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ នោះ y' មានសញ្ញាដូច $(x+1)$
-សង់ចំនុច
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
</table>
ត្រង់ $x=-1$ អនុគមន៍ $y=f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាគឺ
$f(-1)=-e^{-1}=-0.36$
−លីមីត
ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ ហើយ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$
គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{e^{-x}}=0$
ដូចនេះសមីការ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតនៃ
</td>
<td>-សិស្សចាប់ដៃគូតូចៗពិភាក្សាលំហាត់គំរូទី3.</td>
</tr>
</table>

ក្រាប។

$\lim_{x\to+\infty} xe^{x} = +\infty$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↘	e^{-1}	↗	$+\infty$

• ក្រាប

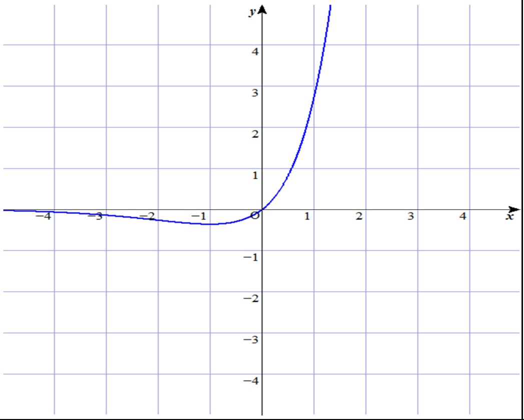
-ចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្ស $(x'0x)$ $x=0$ នាំឲ្យ $y=0$

-ចំនុចរបត់ $y''=(x+2)e^{x}$

ដោយ $e^{x}>0 \Rightarrow y''$ មានសញ្ញាដូច $(x+2)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	

ដូចនេះអនុគមន៍មានចំនុចរបត់ $I(-2;-0.27)$



ជំហាន់ទី4:

ពង្រឹងពុទ្ធិ

−ចូរឲ្យនិយមន័យអនុគមន

−ជាអនុគមន៍ដែលគ្រប់ចំនួនពិត x អនុគមន៍ $f(x)=e^{x}$

−កើន

−អនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=e^{x}$

−ក្រាបកើនជានិច្ច។

–ទៅផ្ទះវិញមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់ទំព័រ ៩៣លំហាត់។	ជំហាន់ទី5: បណ្តាំផ្ញើរ	សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រាលេខទំព័រ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី12 កំរិតមូលដ្ឋាន
- ជំពូកទី៣: សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
- មេរៀនទី2: អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
- រយពេល: 2ម៉ោង

$I)$ *វត្ថុបំណង*

- ចំណេះដឹង:កំណត់បានពីរបៀបគណនាការប្រាក់សមាសបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈតារាងនិងពន្យល់របស់គ្រូ។
- បំណិន:សិស្សគណនាការប្រាក់បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈតារាងនិងការបកស្រាយរបស់គ្រូ។
- ឥរិយាបទ:សិស្សសកម្មនិងសហការគ្នាបានល្អ

$II)$ *ខ្លឹមសារមេរៀន*

3) អនុវត្តន៍

$III)$ *សម្ភារឧបទេស*

– សៀវភៅសិស្ស ថ្នាក់ទី12(កំរិតមូលដ្ឋាន)ទំព័រ $90 \to 92$

– សៀវភៅសិស្សទំព័រ

$IV)$ *ដំណើកនាំមេរៀន*

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
–ពិនិត្យ អនាម័យសណ្តាប់ធ្នាប់ និងអវត្តមាន	ជំហានទី1: រដ្ឋបាលថ្នាក់	–ប្រធានឡើងរាយការណ៍
–គ្រូតពីនិត្យមេរៀនចាស់	ជំហាន់ទី2: រំលឹកមេរៀនចាស់ គណនាលីមីត $1)\ f(x)=e^x$ $2)\ f(x)=e^{u(x)}$ $3)\ f(x)=e^{3x}$	$1)\ f'(x)=e^x$ $2)\ f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$ $3)\ f'(x)=3e^{3x}$
	ជំហាន់ទី3: ខ្លឹមសារមេរៀន e^{-1} មេរៀនទី2:<u>អនុ.អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល</u>	

-បន្តមេរៀន	3) អនុវត្តន៍ +គេប្រើអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e សំរាប់គណនាកំនើន និងតំហាយចុះ។ ឧទាហរណ៍:ជំងឺអសន្នរោគកើតឡើងដោយបាតតេរីក្នុងពោះវៀន ដែលបំបែកខ្លួនតាមរូបមន្តអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $N = N_0 e^{1.368t}, N$ ជាចំនួនបាតតេរីក្រោយពេល t ម៉ោង។ ហើយ N_0 ជាចំនួនបាតតេរីនៅខណ: $t = 0$ ។បើបាតតេរីមានចំនួន 1 តើមានបាតតេរីចំនួននប៉ុន្មាននៅរយ:ពេល: ក/ 5ម៉ោង ខ/ 12ម៉ោង ចម្លើយ ក/បើ $N_0 = 1 \& t = 5 \Rightarrow N = N_0 e^{1.368\times5}$ $= 1022$ ខ/បើ $N_0 = 1 \& t = 5 \Rightarrow N = N_0 e^{1.368\times12}$ $= 16718057$ រូបមន្តការប្រាក់សមាស $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ • p ជាប្រាក់ដើម • r អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ • n ចំនួនដងនៃការទូទាត់ការប្រាក់ក្នុងមួយឆ្នាំ • A ជាចំនួនប្រាក់សរុបក្នុងរយ:ពេល t ឆ្នាំ។ ឧទាហរណ៍:រកប្រាក់សរុបនៃប្រាក់	–សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា –សិស្សស្តាប់ កត់ត្រា -តាមរូបមន្តការប្រាក់សមាស

<table>
<tr>
<td>បន្តពន្យល់សិស្សអំពីការប្រាក់សមាសកាលណាចំនួនដងនៃគិតកាន់តែច្រើនដង់។

-គ្រូពន្យល់លំហាត់គំរូទី2

-ណែនាំសិស្សឲ្យចេះប្រើរូបមន្ត $A=pe^{rt}$

–គ្រូឲ្យសិស្សសង្កេតមើលលំហាត់គំរូទី3ហើយពន្យល់សិស្ស</td>
<td>ដើមចំនួន100$ ដែលគេបានវិនិយោគក្នុងរយៈពេល 2ឆ្នាំដោយទទួលអត្រាការប្រាក់8% តាមរយៈពេលកំណត់គិតជាត្រីមាសប្រចាំឆ្នាំ។

ជាទូទៅ
$A=p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=p\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\left(\frac{n}{r}\right)rt}$
$=p\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$
(តាង $m=\frac{n}{r}$)
តែ $\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=e$
ដូចនេះ: $A=\lim_{n\to+\infty}p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{rn}=pe^{rn}$
❖ បើចំនួនដងនៃការទូទាត់ច្រើនអនន្ត
ឬការទូទាត់ជាបន្តបន្ទាប់ $A=pe^{rt}$ មន្តការប្រាក់សមាសកំលណត់ដោយ ក ដែលក្នុងនោះ A ជាប្រាក់សរុប p ជាប្រាក់ដើម r អត្រាការប្រាក់សមាស និង t ជាចំនួនឆ្នាំដាក់ប្រាក់។
លំហាត់គំរូទី2 បើគេយកប្រាក់ 100 ដុល្លាទៅធ្វើវិនិយោគដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស8% ក្នុងមួយឆ្នាំ។តើគេបានប្រាក់សរុបប៉ុន្មាន បើគេដាក់ប្រាក់រយៈពេល 2 ឆ្នាំហើយដងនៃការទូទាត់ច្រើនអនន្ត?</td>
<td>$A=p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$
យើងបាន
$A=100\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{4.2}$
$=117.1659\$$</td>
</tr>
</table>

-ឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់គំរូ និងលំហាត់ប្រតិបត្តិបន្ត	ចម្លើយ តាមរូបមន្តការប្រាក់សមាស $A = pe^{rt}$ ដែល $p = 100, r = 0.08, t = 2$ គេបាន $A = pe^{rt} = 100e^{0.08(2)}$ $= 117.35$ ។ ខ្លឹសារលំហាត់ក្នុងសៀវសិស្ស ទំព័រ 92 ។	ចម្លើយ តាមរូបមន្តការប្រាក់សមាស $A = pe^{rt}$ ដែល $p = 100, r = 0.08, t = 2$ គេបាន $A = pe^{rt} = 100e^{0.08(2)}$ $= 117.35$ ។ ពិភាក្សាតាមក្រុម។
−ឲ្យសិស្សឡើងក្តារខៀនសរសេររូបមន្តការប្រាក់សមាស។ -ករណីគេគិតច្រើនអនន្ត	**ជំហាន់ទី4:** **ពង្រឹងពុទ្ធិ** $-A = p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $\bullet A = pe^{rt}$	$-A = p\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $\bullet A = pe^{rt}$
−ទៅផ្ទះវិញមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់ទំព័រ ៩៣លំហាត់។	**ជំហាន់ទី5:** **បណ្តាំផ្ញើរ**	សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រាលេខទំព័រ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- ❖ <u>មុខវិជ្ជា:</u> គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី12 កំរិតមូលដ្ឋាន
- ❖ <u>ជំពូកទី៣:</u> សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
- ❖ <u>មេរៀនទី3:</u> អនុគមន៍លោការីត
- ❖ <u>រយពេល:</u> 2ម៉ោង

I) <u>*វត្ថុបំណង*</u>

- ➢ ចំណេះដឹង:កំណត់បានពីនិយមន័យអនុគមន៍លោការីតនេពៃរបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈនិងពន្យល់របស់គ្រូ។
- ➢ បំណិន:អនុវត្តន៍បានត្រឹមត្រូវអំពីខ្លឹមសារអនុគមន៍លោការីតនេពៃរតាមរយៈការធ្វើលំហាត់គំរូ លំហាត់ប្រតិបត្តិ និងការបកស្រាយរបស់គ្រូ។
- ➢ ឥរិយាបទ:សិស្សសកម្មនិងសហការគ្នាបានល្អ ក្នុងការសិក្សារៀនសូត្រ។

II) <u>*ខ្លឹមសារមេរៀន*</u>

1) លោការីតនេពៃរ

2) អនុគមន៍លោការីតនេពៃរ

III) <u>*សម្ភារឧបទេស*</u>

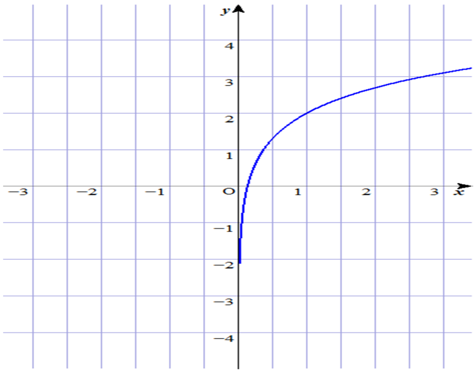
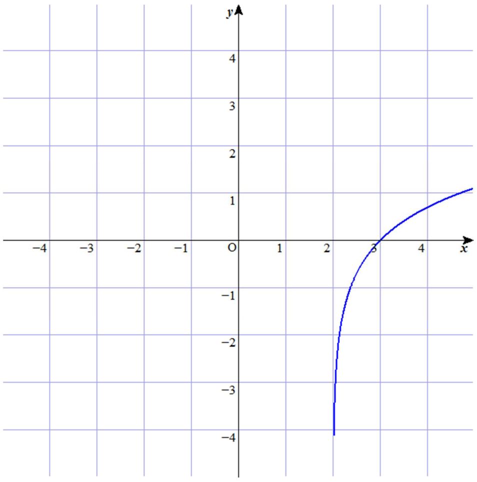
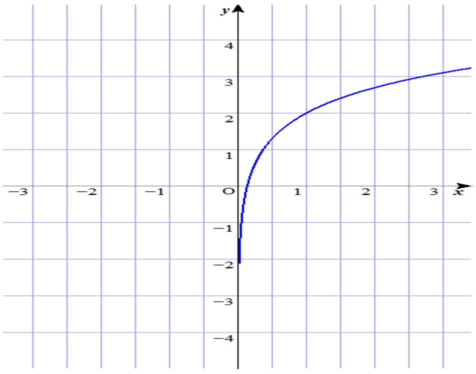
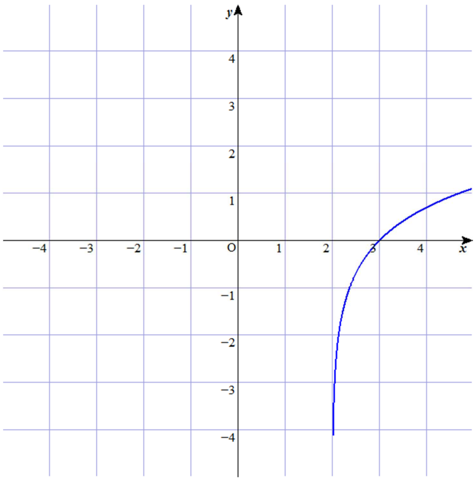
– សៀវភៅសិស្ស ថ្នាក់ទី12(កំរិតមូលដ្ឋាន)ទំព័រ $94 \to 96$

– សៀវភៅសិស្សទំព័រ

IV) <u>*ដំណើរការមេរៀន*</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
–ពិនិត្យ អនាម័យសណ្តាប់ធ្នាប់ និងអវត្តមាន	ជំហានទី1: រដ្ឋបាលថ្នាក់	–ប្រធានឡើងរាយការណ៍
–គ្រូសរសេរ $a^x = k$ ឲ្យសិស្សទាញរកតម្លៃ x? -តើតម្លៃ x ដែលទទួលបានមានរាងជាអ្វី?	ជំហាន់ទី2: រំលឹកមេរៀនចាស់ $a^x = k \Leftrightarrow x = \log_a k$	-សិស្សសរសេរចម្លើយ $a^x = k \Rightarrow x = \log_a k$ -តម្លៃ x ដែលទទួលបានមានរាងជាលោការីត(លោការីតគោល a នៃ k)

	ជំហានទី3: ខ្លឹមសារមេរៀន មេរៀនទី3:<u>អនុគមន៍លោការីតនេពែរ</u> ១.លោការីតនេពែរ និយមន័យ លោការីតនេពែរនៃសចំនួនពិតវិជ្ជមាន k គឺនិទស្សន្ត x នៃ e^x ដែល $e^x = k$ ។ គេកំណត់សរសេរ $x = \ln k$ *<u>សំគាល់</u>*:ដោយ $x = \ln k$ និង $e^x = k$ នោះគេបាន $e^{\ln k} = k$ និង $\ln e^x = k$ ចំពោះគ្រប់ $k > 0$ ។ លំហាត់គំរូ1 គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម ក. $e^{\ln 5}$ ខ. $\ln e^{3x+4}$ ខ្លឹមសារលហាត់ក្នុងសៀវភៅសិស្សទំព័រ 95។ ២.<u>អនុគមន៍លោការីតនេពែរ</u> *និយមន័យ* បើ $x > 0$ អនុគមន៍លោការីតនេពែរនៃ x ដែលកំណត់ដោយ $y = \ln x$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y = e^x$ ។	–សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា -ចម្លើយ ក. $e^{\ln 5} = 5$ ខ. $\ln e^{3x+4} = 3x + 4$ ពិភាក្សាលំហាត់។
-គ្រូផ្តើមចេញពីឧទាហរណ៍នាំសិស្សទៅដល់និយមន័យ		-សង្កេតតាមដានការពន្យល់បកស្រាយរបស់គ្រូ។
-ឲ្យសិស្សសង្កេតឧតាហរណ៍ទំព័រ៩៦។ពន្យល់សិស្សពីរបៀបសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍។	២.២*<u>ក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល</u>* ខ្លឹមសារមេរៀនក្នុងសៀវភៅសិស្សទំព័រ៩៦។ ប្រតិបត្តិ:សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍	-សង្កេតតាមដានការពន្យល់បកស្រាយរបស់គ្រូ។

<table>
<tr>
<td>-ចែកសិស្សជាក្រុមធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ។</td>
<td>ក/ $y=2+\ln x$ ខ/ $y=\ln(x-2)$
ចម្លើយ
ក/ $y=2+\ln x$

ខ/ $y=\ln(x-2)$
</td>
<td>ក/ $y=2+\ln x$

ខ/ $y=\ln(x-2)$
</td>
</tr>
<tr>
<td>−ឲ្យសិស្សឡើងក្ដារខៀនគណនា
ក/ $e^{\ln 2011}$
ខ/ $\ln e^{2012x+2011}$
គ/ $e^{\ln\left(\ln e^{2012x+2011}\right)}$</td>
<td>ជំហានទី4:
ពង្រឹងពុទ្ធិ</td>
<td>ក/ $e^{\ln 2011}=2011$
ខ/ $\ln e^{2012x+2011}=2012x+2011$
គ/ $e^{\ln\left(\ln e^{2012x+2011}\right)}=2012x+2011$</td>
</tr>
<tr>
<td>−ទៅផ្ទះវិញមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់។</td>
<td>ជំហានទី5:
បណ្ដាំផ្ញើរ</td>
<td>សិស្សស្ដាប់ និងកត់ត្រាលេខទំព័រ</td>
</tr>
</table>

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- ❖ មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី12 កំរិតមូលដ្ឋាន
- ❖ ជំពូកទី៣: សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
- ❖ មេរៀនទី3: អនុគមន៍លោការីត
- ❖ រយពេល: ១ម៉ោង

I) វត្ថុបំណង

- ➢ ចំណេះដឹង: សង់ក្រាភិច អនុគមន៍លោការីតតាមរយៈឧទាហរណ៍លើក្តារខៀន
  គណនាបានដេរីវេអនុគមន៍លោការីតតាមរយៈឧទាហរណ៍ ប្រតិបត្តិនិងពន្យល់របស់គ្រូ។
- ➢ បំណិនៈអនុវត្តន៍បានត្រឹមត្រូវអំពីខ្លឹមសារអនុគមន៍លោការីតនេពៃរតាមរយៈការធ្វើលំហាត់គំរូ លំហាត់ប្រតិបត្តិ និងការបកស្រាយរបស់គ្រូ។
- ➢ ឥរិយាបទៈសិស្សសកម្មនិងសហការគ្នាបានល្អ ក្នុងការសិក្សារៀនសូត្រ។

II) ខ្លឹមសារមេរៀន

2.3 ដេរីវេអនុគមន៍លោការីតនេពៃរ

III) សម្ភារឧបទេស

– សៀវភៅសិស្ស ថ្នាក់ទី12(កំរិតមូលដ្ឋាន)ទំព័រ $96 \to 97$

– សៀវភៅសិស្សទំព័រ

IV) ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
–ពិនិត្យ អនាម័យសណ្តាប់ធ្នាប់ និងអវត្តមាន	ជំហានទី1: រដ្ឋបាលថ្នាក់	–ប្រធានឡើងរាយការណ៍
–តើអនុគមន៍ $y=e^x$ ជាអនុគមន៍អ្វី?ហើយ $y=\ln x$ តាងអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ណា?	ជំហាន់ទី2: រំលឹកមេរៀនចាស់	-អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល - $y=\ln x$ ជាអនុគមន៍ច្រាស់នៃ $y=e^x$
	ជំហាន់ទី3:	

	ខ្លឹមសារមេរៀន **មេរៀនទី3:<u>អនុគមន៍លោការីតនេពែរ</u>**	
-ឲ្យសិស្សពិនិត្យសៀវភៅពុម្ពទាំងអស់គ្នា រួចសួរ $y=\ln x$ គេអាចសរសេរដូចម្តេច?	**២.៣.ដេរីវេអនុគមន៍លោការីតនេពែរ** ក/ដេរីវេ $y=\ln x$ $y=\ln x$ គេអាចសរសេរ $e^y=x$	–សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា $y=\ln x$ គេអាចសរសេរ $e^y=x$
-ណែនាំសិស្សរកដេរីវេ -តើដេរីវេ e^u ស្មើអ្វី? -បន្ទាប់មកឲ្យរកដេរីវេ $e^{\ln x}$	$y=e^u \Rightarrow y'=e^u u'$ គេបាន $\left(e^{\ln x}\right)'=x'$ $(\ln x)'e^{\ln x}=1$ $(\ln x)'=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}$ $y'=\frac{1}{x}$	$y=e^u \Rightarrow y'=e^u u'$
-ណែនាំសិស្ស $y=f(x)$ រួចឲ្យទាញសន្និដ្ឋានទូទៅ	បើ $f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}; x>0$	-សន្និដ្ឋាន បើ $f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}; x>0$
ឲ្យលំហាត់តាមសៀវភៅពុម្ពគណនាដេរីវេខាងក្រោម ក/ $y=x^3+\ln x$ ខ/ $y=x^4+2\ln x$	ចម្លើយ ក/ $y'=\left(x^3+\ln x\right)'$ $=3x^2+\frac{1}{x}$ ខ/ $y=\left(x^4+2\ln x\right)'$ $=4x^3+2\frac{1}{x}$	ចម្លើយ ក/ $y'=\left(x^3+\ln x\right)'$ $=3x^2+\frac{1}{x}$ ខ/ $y=\left(x^4+2\ln x\right)'$ $=4x^3+2\frac{1}{x}$
-ដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិរកដេរីវេខាងក្រោម $1) y=3x^4+5\ln x$ $2) y=p^5-6\ln p$	ចម្លើយ $1) y'=12x^3+\frac{5}{x}$ $2) y'=5p^4-\frac{6}{p}$	ចម្លើយ $1) y'=12x^3+\frac{5}{x}$ $2) y'=5p^4-\frac{6}{p}$

<table>
<tr>
<td>ឲ្យសិស្សសង្កេតករណីចំនុច ក/រួចឲ្យសិស្សរកដេរីវេ $y=\ln u(x)$

-ឲ្យសិស្សតាង $y=f(x)$ រួចទាញសន្និដ្ឋាន

-ចែកសិស្សជាក្រុមធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ។
ក/ $f(x)=\ln 2x$
ខ/ $f(x)=\ln\left(x^2+2x\right)$
គ/ $\ln(\cos x)$
ឃ/ $f(x)=\ln\left(x^2-4\right)^3$</td>
<td>ខ/ដេរីវេ $y=\ln u(x)$

-គេមាន $y=\ln u(x)$ គេបាន
$y=\ln u(x)\Leftrightarrow e^y=u(x)$
$\left(e^y\right)'=\left[u(x)\right]'$
$\left(\ln u(x)\right)'e^{\ln u(x)}=u'(x)$
$\left[\ln u(x)\right]'=\dfrac{u'(x)}{e^{\ln(x)}}$
$y'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

បើ $f(x)=\ln u(x)$ នោះ
$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)};u(x)>0$

ចម្លើយ
ក/ $f'(x)=\dfrac{2}{2x}$
ខ/ $f'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x}$
គ/ $f'(x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}$
ឃ/ $f'(x)=\dfrac{3\left(x^2-4\right)'\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$
$=\dfrac{6x}{\left(x^2-4\right)^2};x\neq\pm2$</td>
<td>-គេមាន $y=\ln u(x)$ គេបាន
$y=\ln u(x)\Leftrightarrow e^y=u(x)$
$\left(e^y\right)'=\left[u(x)\right]'$
$\left(\ln u(x)\right)'e^{\ln u(x)}=u'(x)$
$\left[\ln u(x)\right]'=\dfrac{u'(x)}{e^{\ln(x)}}$
$y'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

បើ $f(x)=\ln u(x)$ នោះ
$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)};u(x)>0$

ចម្លើយ
ក/ $f'(x)=\dfrac{2}{2x}$
ខ/ $f'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x}$
គ/ $f'(x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}$
ឃ/ $f'(x)=\dfrac{3\left(x^2-4\right)'\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$
$=\dfrac{6x}{\left(x^2-4\right)^2};x\neq\pm2$</td>
</tr>
<tr>
<td>−ឲ្យសិស្សឡើងក្តារខៀនគណនាតើដេរីវេ
$1)\ y=\ln x=?$
$2)\ y=\ln u(x)=?$</td>
<td>ជំហាន់ទី4:
ពង្រឹងពុទ្ធិ</td>
<td>$1)\ y'=\dfrac{1}{x}$
$2)\ y'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>ជំហាន់ទី5:</td>
<td></td>
</tr>
</table>

–ទៅផ្ទះវិញមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់។	បណ្តាំផ្ញើរ	សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រាលេខទំព័រ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- ❖ មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី12 កំរិតមូលដ្ឋាន
- ❖ ជំពូកទី៣: សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
- ❖ មេរៀនទី3: អនុគមន៍លោការីត
- ❖ រយពេល: ១ម៉ោង

$I)$ *វត្ថុបំណង*

- ➢ ចំណេះដឹង: សង់ក្រាភិច អនុគមន៍លោការីតតាមរយៈឧទាហរណ៍លើក្តារខៀន
គណនាបានដេរីវេអនុគមន៍លោការីតតាមរយៈឧទាហរណ៍ ប្រតិបត្តិនិងពន្យល់របស់គ្រូ។
- ➢ បំណិនៈអនុវត្តន៍បានត្រឹមត្រូវអំពីខ្លឹមសារអនុគមន៍លោការីតនេពៃរតាមរយៈការធ្វើលំហាត់គំរូ លំហាត់ប្រតិបត្តិ និងការបកស្រាយរបស់គ្រូ។
- ➢ ឥរិយាបទៈសិស្សសកម្មនិងសហការគ្នាបានល្អ ក្នុងការសិក្សារៀនសូត្រ។

$II)$ *ខ្លឹមសារមេរៀន*

3) សមីការ និងវិសមីការលោការីតនេពៃរ

3.1 សមីការ

3.2 វិសមីការ

3.3 ប្រព័ន្ធសមីការ

$III)$ *សម្ភារឧបទេស*

– សៀវភៅសិស្ស ថ្នាក់ទី12(កំរិតមូលដ្ឋាន)ទំព័រ $96 \rightarrow 97$

– សៀវភៅសិស្សទំព័រ

$IV)$ *ដំណើកនាំមេរៀន*

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
–ពិនិត្យ អនាម័យសណ្តាប់ធ្នាប់និងអវត្តមាន	ជំហានទី1: រដ្ឋបាលថ្នាក់	–ប្រធានឡើងរាយការណ៍
–គ្រូសួរសំនួរសិស្ស តើអ្វីទៅហៅថាលោការីតនេពៃរ? –លក្ខណៈរបស់អនុគមន៍លោការីត	ជំហាន់ទី2: រំលឹកមេរៀនចាស់ លោការីនេពៃរនៃមួយចំនួនវិជ្ជមានគឺជានិទស្សន្ត x នៃ e^x ដែល $e^x = k$ $+\ln(ab) = \ln a + \ln b$	-អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល - $y = \ln x$ ជាអនុគមន៍ច្រាស់នៃ $y = e^x$ $+\ln(ab) = \ln a + \ln b$

	$+\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$ g	$+\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$
-គ្រូពន្យល់ និងណែនាំសិស្សឲ្យសង្កេតមើលលំហាត់គំរូ -ចែកសិស្សជាក្រុមតូចៗពិភាក្សាលំហាត់គំរូទី២	ជំហានទី3: ខ្លឹមសារមេរៀន មេរៀនទី3:<u>អនុគមន៍លោការីតនេពែរ</u> 3) សមីការ និងវិសមីការលោការីតនេពែរ 3.1 សមីការ លំហាត់គំរូ:ដោះស្រាយសមីការក្នុង R $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln 45$ <u>ចម្លើយ</u> សមីការត្រូវបំពេញលក្ខណ: $\begin{cases}x-2>0\\x+2>0\end{cases}\Rightarrow x>2$ ជាលក្ខខ័ណដែលធ្វើឲ្យសមីការមានន័យ $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln 45$ $\ln(x-2)(x+2)=\ln 45$ $(x-2)(x+2)=45$ $x^2-4-45=0$ $x^2-49=0\Rightarrow x=\pm 7$ ដោយ $x>2$ ដូចនេះ $x=7$ ជាឫសនៃសមីការ លំហាត់គំរូទី២ដោះស្រាយសមីការក្នុង R $3e^{2x}+e^{x}-10=0$ ចម្លើយ ដោយ $e^{x}>0$ គេបាន $3(e^{x})^2+e^{x}-10=0$	–សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា សមីការត្រូវបំពេញលក្ខណ: $\begin{cases}x-2>0\\x+2>0\end{cases}\Rightarrow x>2$ ជាលក្ខខ័ណដែលធ្វើឲ្យសមីការមានន័យ $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln 45$ $\ln(x-2)(x+2)=\ln 45$ $(x-2)(x+2)=45$ $x^2-4-45=0$ $x^2-49=0\Rightarrow x=\pm 7$ ដោយ $x>2$ ដូចនេះ $x=7$ ជាឫសនៃសមីការ ចម្លើយ ដោយ $e^{x}>0$ គេបាន $3(e^{x})^2+e^{x}-10=0$

	$t=e^x \Rightarrow 3t^2+t-10=0$ $\Delta=1^2-4(3)(-10)=121$ តាង $t_1=\frac{-1-\sqrt{121}}{2.3}=-2$ $t_2=\frac{-1+\sqrt{121}}{2.3}=\frac{5}{3}$ ដោយ $e^x>0$ គេបាន $t=-2$ មិនយក ចំពោះ $t=\frac{5}{3}\Rightarrow x=\ln\frac{5}{3}$ ដូចនេះសមីការមានឫស $x=\ln\frac{5}{3}$	$t=e^x \Rightarrow 3t^2+t-10=0$ $\Delta=1^2-4(3)(-10)=121$ តាង $t_1=\frac{-1-\sqrt{121}}{2.3}=-2$ $t_2=\frac{-1+\sqrt{121}}{2.3}=\frac{5}{3}$ ដោយ $e^x>0$ គេបាន $t=-2$ មិនយក ចំពោះ $t=\frac{5}{3}\Rightarrow x=\ln\frac{5}{3}$ ដូចនេះសមីការមានឫស $x=\ln\frac{5}{3}$
-គ្រូឲ្យសិស្សសង្កេតមើវិធីដោះស្រាយវិសមីការ	3.2 វិសមីការ លំហាត់គំរូ:ដោះស្រាយវិសមីការក្នុង **R:** $\ln(x+3)+\ln(x+5)\le\ln 15$ ចម្លើយ សមីការមានន័យពេល $x>-3$ ដោយ $e>1$ នោះវិសមីការមិនប្តូរទិសដៅទេ $(x+3)(x+5)\le 15$ $x^2+8x\le 0$ ដោះស្រាយវិសមីការគេបាន $-8\le x\le 0$ ដោយ $x>-3$ វិសមីការមានចម្លើយតែ $-3<x\le 0$	ចម្លើយ សមីការមានន័យពេល $x>-3$ ដោយ $e>1$ នោះវិសមីការមិនប្តូរទិសដៅទេ $(x+3)(x+5)\le 15$ $x^2+8x\le 0$ ដោះស្រាយវិសមីការគេបាន $-8\le x\le 0$ ដោយ $x>-3$ វិសមីការមានចម្លើយតែ $-3<x\le 0$
-គ្រូពន្យល់ពីរបៀបដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ	3.3 ប្រព័ន្ធសមីការ លំហាត់គំរូ:ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុង **R** $\begin{cases}\ln y=\ln x+2\\ xy=9e^2\end{cases}$ ចម្លើយ លក្ខខ័ណន័យប្រព័ន្ធគឺ $\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$ $\begin{cases}\ln y=\ln x+2\\ xy=9e^2\end{cases}$	ចម្លើយ លក្ខខ័ណន័យប្រព័ន្ធគឺ $\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$ $\begin{cases}\ln y=\ln x+2\\ xy=9e^2\end{cases}$

-ឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិតាមក្រុម ប្រតិបត្តិ ១.ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម $\ln(1-x)+\ln(2x+3)-\ln(x+1)=\ln 3$ ២.ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម $\ln\left(x^2-4e^2\right)<1+\ln 3x$	$\begin{cases}\ln\frac{x}{y}=\ln e^2\\ xy=9e^2\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x}{y}=e^2\\ xy=9e^2\end{cases}$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធគេបាន $x=\pm 3$ ដោយ $x>0\Rightarrow x=3$ និង $y=3e^2$ ចម្លើយ $1)x=0$ $2)x\in(2e,4e)$	$\begin{cases}\ln\frac{x}{y}=\ln e^2\\ xy=9e^2\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x}{y}=e^2\\ xy=9e^2\end{cases}$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធគេបាន $x=\pm 3$ ដោយ $x>0\Rightarrow x=3$ និង $y=3e^2$ ចម្លើយ $1)x=0$ $2)x\in(2e,4e)$
-ដូចម្តេចដែលហៅថាឬសសមីការ? -ដូចម្តេចដែលហៅថាឬសនៃវិសមីការ?	ជំហាន់ទី4: ពង្រឹងពុទ្ធិ	-ជាតម្លៃនៃអញ្ញាត -ជាតម្លៃនៃអញ្ញាតនៅលើចន្លោះមួយ
−ទៅផ្ទះវិញមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់ ១.ដោះស្រាយសមីការ	ជំហាន់ទី5: បណ្តាំផ្ញើរ	សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រាលេខទំព័រ

$\frac{e^x-2}{e^x-3}=4$ ២.ដោះស្រាយវិសមីការ $3e^x-10e^{-x}+1\geq 0$		

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- ❖ មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី12 កំរិតមូលដ្ឋាន
- ❖ ជំពូកទី៣: សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
- ❖ មេរៀនទី3: អនុគមន៍លោការីត
- ❖ រយពេល: ២ម៉ោង

$I)$ *វត្ថុបំណង*

- ➢ ចំណេះដឹង: សង់ក្រាភិច អនុគមន៍លោការីតតាមរយ:ឧទាហរណ៍លើក្ដារខៀន
  គណនាបានដេរីវេអនុគមន៍លោការីតតាមរយ:ឧទាហរណ៍ ប្រតិបត្តិនិងពន្យល់របស់គ្រូ។
- ➢ បំណិន:អនុវត្តន៍បានត្រឹមត្រូវអំពីខ្លឹមសារអនុគមន៍លោការីតនេពៃរតាមរយ:ការធ្វើលំហាត់គំរូ លំហាត់ប្រតិបត្តិ និងការបកស្រាយរបស់គ្រូ។
- ➢ ឥរិយាបទ:សិស្សសកម្មនិងសហការគ្នាបានល្អ ក្នុងការសិក្សារៀនសូត្រ។

$II)$ *ខ្លឹមសារមេរៀន*

4) សិក្សាអនុគមន៍ដែទាក់ទង់នឹងអនុគមន៍លោការីតនេពៃរ

5) អនុវត្តន៍

$III)$ *សម្ភារឧបទេស*

$-$សៀវភៅសិស្ស ថ្នាក់ទី12(កំរិតមូលដ្ឋាន)ទំព័រ $99 \to 104$

$-$សៀវភៅសិស្សទំព័រ

$IV)$ *ដំណើកនាំមេរៀន*

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
$-$ពិនិត្យ អនាម័យសណ្ដាប់ធ្នាប់និងអវត្តមាន	ជំហានទី1: រដ្ឋបាលថ្នាក់	$-$ប្រធានឡើងរាយការណ៍
$-$គ្រូសួររូបមន្តសិស្ស គណនាដេរីវេ $1) f(x)=\ln x$ $2) f(x)=\ln u(x)$	ជំហាន់ទី2: រំលឹកមេរៀនចាស់ $1) f'(x)=\frac{1}{x}$ $2) f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$	$1) f'(x)=\frac{1}{x}$ $2) f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$
	ជំហាន់ទី3:	

ខ្លឹមសារមេរៀន

មេរៀនទី3:<u>អនុគមន៍លោការីតនេពែរ</u>

4) សិក្សាអនុគមន៍ដែទាក់ទង់នឹងអនុគមន៍លោការីតនេពែរ

-គ្រូពន្យល់ និងណែនាំសិស្សឲ្យសង្កេតមើលលំហាត់គំរូ

-គ្រូឲ្យសិស្សប្រាប់ពីជំហាននៃការសង់ក្រាប

លំហាត់គំរូទី១សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក/ $y=\dfrac{\ln x}{x}$ ខ/ $y=e^{x}\ln x$

ចម្លើយ

ក/ $y=\dfrac{\ln x}{x}$

• ដែនកំណត់ $D=(0;+\infty)$

• ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ

$y'=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{x^{2}}$

$y'=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow x=e$

-តារាងសញ្ញាណ

x	0		e		$+\infty$
y'		$+$	|	$-$	

តាមតារាងយើងឃើញថាត្រង់ $x=e$

$y'=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ អនុគមន៍មានអតិបរមា

$f(e)=\dfrac{1}{e}$

លីមី $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

-តារាងអថេរភាព

-តារាងសញ្ញាណ

x	0		e		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

-ដេរីវេទី២: $y''=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

ត្រង់ $x=e^{\frac{3}{2}}\Rightarrow y''=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

-តារាងសញ្ញាណ

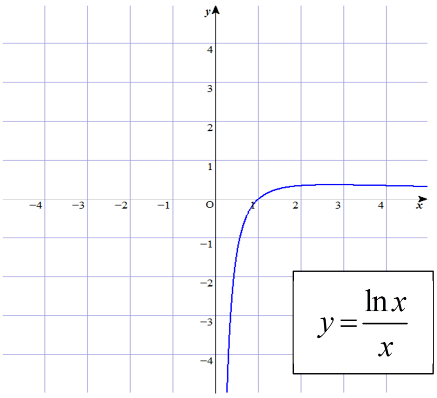
x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	

ដូចនេះចំនុចរបត់នៃក្រាបគឺ

$I\left(e^{\frac{3}{2}};\frac{3}{2\sqrt[2]{e^3}}\right)$

-សង់ក្រាប

ចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្ស $(x'0x)$ គឺ $y=0\Rightarrow x=1$



-ចែកសិស្សជាក្រុមតូចៗពិភាក្សាលំហាត់គំរូទី២	ខ្លឹមមេរៀនក្នុងសៀវភៅសិស្ស ទំព័រ100	ពិភាក្សាតាមក្រុមៗ
-គ្រូពណ៌នាអំពីការប្រើប្រាសនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលថាៈគេអាចប្រើប្រាសក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដើម្បីតាមដាននិងសង្កេតអំពី អត្រាកំនើន និងថយចុះនៃការលូតលាស់របស់ -មេរោគ(ជិវវិទ្យា) -កំនើនប្រជាជន	5) អនុវត្តន៍ -ខ្លឹមមេរៀនក្នុងសៀវភៅសិស្ស ទំព័រ103,104	ធ្វើលំហាត់គំរូ

ដូច្នេះគ្រូឲ្យសិស្សសង្កេតលំហាត់ដើម្បីទទួលបាននូវបញ្ញាតថ្មីៗ។		
-ឲ្យសិស្សប្រាប់អំពីការប្រើប្រាស់នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល	ជំហាន់ទី4: ពង្រឹងពុទ្ធិ	-ពណ៌មាអំពី កំណើននៃមេរោ កំណើននៃ ប្រជាន។
-ជួយធ្វើការងារឪពុកម្តាយនិជួយង្ហាត់បង្រៀនប្អូនៗ។ ព្រមទាំងមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់។	ជំហាន់ទី5: បណ្តាំផ្ញើរ	សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រាលេខទំព័រ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- ❖ <u>មុខវិជ្ជា:</u> គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី12 កំរិតមូលដ្ឋាន
- ❖ <u>ជំពូកទី៣:</u> សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប
- ❖ <u>មេរៀនទី1:</u> អនុគមន៍សនិទាន
- ❖ <u>រយពេល:</u> 2ម៉ោង

I) ***<u>វត្ថុបំណង</u>***

- ➢ ចំណេះដឹង
- ➢ បំនិណ
- ➢ ឥរិយាបទ

II) ***<u>ខ្លឹមសារមេរៀន</u>***

III) ***<u>សម្ភារ</u>***

− សៀវភៅគ្រូទំព័រ

− សៀវភៅសិស្សទំព័រ

IV) ***<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>***

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
	ជំហាន់ទី1: រដ្ឋបាលថ្នាក់	− ប្រធានឡើងរាយការណ៍
− គ្រូហៅសិស្សម្នាក់ឡើងធ្វើលំហាត់: រកអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអនុ.ខាងក្រោមក្នុងករណី $x \to \pm\infty$ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$	ជំហាន់ទី2: រំលឹកមេរៀនចាស់ − បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - ax\right] = b$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = ax + b$ ជាអស៊ីមតូត	$-\ a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2} = 1$ ហើយ $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x} - x\right] =$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^2+1-x^2}{x}\right] = 0$ នោះបន្ទាត់ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប។
− គ្រូឲ្យសិស្សពិនិត្យមើលលំហាត់	ជំហាន់ទី3: ខ្លឹមសារមេរៀន 3)អនុវត្តន៍	

<table>
<tr>
<td>គំរូទី១

–គ្រូពន្យល់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ហើយឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់សំនួរ ក។

–ឲ្យសិស្សចេះរកចំនុចនឹងលើខ្សែ</td>
<td>ឧទាហរណ៍:គេឲ្យអនុ. $y=\frac{mx^2+1}{x}$ ដែលមានក្រាប c_m
ក/សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប ចំពោះ $m=1$។
ខ/កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យអនុ.កើន ក្នុងចន្លោះ $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$
គ/តើមានចំនុចនឹងដែលស្ថិតនៅក្រោមក្រាប c_m ចំពោះគ្រប់ m ឬទេ។
ឃ/ដោយប្រើក្រាប c_1 កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $x^2-ax+1>0$ ចំពោះ $\forall x>0$
–សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប ចំពោះ $m=1$
$c_1: y=\frac{x^2+1}{x}$
• ដែនកំណត់ $D=\Re-\{0\}$
• ទិសដៅអថេរភាព
–ដេរីវេ $y'=\frac{x^2-1}{x^2}$
$f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$
តារាងសញ្ញាណដេរីវេ
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>+</td><td>−</td><td>||</td><td>−</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↗</td><td>↘</td><td>||</td><td>↘</td><td>↗</td></tr>
</table>
ចំពោះ $x=-1$ អនុ.មានអតិបរមាគឺ
ចំពោះ $x=1$ អនុ.មានអតិបរមាគឺ
$f(-1)=2$
គណនាលីមីត
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x}=\pm\infty$
–អាស៊ីមតូត
នោះ $x=0$ ជាអស៊ីមតូតឈរ
គ/រកចំនុចនឹងដែលក្រាប (c_m) ទាំង</td>
<td></td>
</tr>
</table>

កោងប៉ារ៉ាម៉ែតចំពោះគ្រប់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ។ –ឲ្យសិស្សចេះប្រើខ្សែកោងដើម្បីទាញរកចម្លើយវិសមីការ។ –គ្រូចែកសិស្សជាក្រុមតូចៗដើម្បីពិភាក្សាលំហាត់គំរូទី2។ –គ្រង់សំនួរ ក គ្រូបំផុសសិស្សអំពីប្លង់សិក្សាអថេរភាព។ • ដែនកំណត់ • ទិសដៅអថេរភាព –រកដេរីវេគឺ $f'(x)$ –រកបរមា(អតិ និងអប្ប) –គណនាលីមីត –អាស៊ីមតូត • តារាងអថេរភាព • សំណង់ក្រាប	អស់កាត់តាមចំនុចនោះ តាង $A(x_A,y_A)$ ជាចំនុចដែលក្រាប c_m ទាំងអស់កាត់តាម គេបាន $y_A=\frac{mx_A+1}{x_A};\forall m\in R\ \&\ x\neq 0$ នោះ: $x_Ay_A=mx_A^2+1$ $\forall m\in R$ $\begin{cases}x_A^2=0\\ x_Ay_A-1=0\end{cases}$ គ្មានឬស ដូចនេះគ្មានចំនុចនិង A ទេ ឃ/កំណត់ a ដើម្បីអោយ $x^2-ax+1>0$ ចំពោះ $\forall x>0$ គេបាន $x^2-ax+1>0\ \forall x>0$ គេបាន $\frac{x^2+1}{x}>a$ តាមក្រាបគេឃើញថា $\frac{x^2+1}{x}>a$ ចំពោះ $\forall x>0$ កាលណា $a<2$ លំហាត់គំរូទី2:គេឲ្យអនុគមន៍ $f:y=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ ក/សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប c នៃអនុគមន៍។ ខ/ដោយប្រើក្រាប c ទាញរកក្រាបរបស់អនុគមន៍ $y=\left\|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right\|$ ។ ឃ/ដោយប្រើក្រាប c សិក្សាទៅតាមតម្លៃ m នូវចំនួនឬសនៃសមីការ $x^2-\|x\|+2=m(\|x\|-1)$ ។	–ក/សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប $c:y=\frac{x^2-x+2}{x-1}=x+\frac{2}{x-1}$ • ដែនកំណត់ $D=R-\{1\}$ • ទិសដៅអថេរភាព ដេរីវេ $f'(x)=\frac{x^2-x-1}{(x-1)^2}$ $f'(x)=0$ គេបាន $\frac{x^2-x-1}{(x-1)^2}=0$ នាំឲ្យ $x=1+\sqrt{2};x=1-\sqrt{2}$ –ចំនុចអតិបរមា ចំពោះ $x=1-\sqrt{2}$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប $f(1-\sqrt{2})=\frac{(1-\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})+2}{1-\sqrt{2}-1}$ $=1-2\sqrt{2}$

–គ្រូឲ្យសំគាល់ដល់សិស្សថាៈគេអាចរកផ្ចិតឆ្លុះ I នៃក្រាបតាមរូប

ចំពោះ $x=1+\sqrt{2}$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប

$$f\left(1+\sqrt{2}\right)=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)+2}{1+\sqrt{2}-1}$$
$$=2\sqrt{2}+1$$

–គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{2}{x-1}\right)=\pm\infty$$

និង $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2}{x-1}=\pm\infty$

–អាស៊ីមតូតៈដោយ

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2}{x-1}=\pm\infty$$

នោះ $x=1$ ជាអស៊ីមតូតឈរ។

អនុ. $f(x)=x+\frac{2}{x-1}$ គេបាន

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x-1}=0$$

នាំឲ្យ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប។

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1-2\sqrt{2}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$1+2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

• សំណង់ក្រាប

–បើ $y=0$ នោះ $\frac{x^2-x+2}{x-1}=0$ ឬ

$x^2-x+2=0$ សមីការគ្មានឫស ក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស $0x$ ទេ។

–បើ $x=0$ នោះ $\frac{0^2-0+2}{0-1}=-2$ ។

–ផ្ចិតឆ្លុះ :អាស៊ីមតូតឈរ $x=1$ និង អាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x$ កាត់គ្នាត្រង់ $I(1,1)$ ។

មន្តមួយទៀតគឺ

$f(2a+x)-f(x)=2b$ ដែល

$I(a,b)$ ។

តាមរូបមន្តប្តូរអ័ក្ស $x=1+X$

$y=1+Y$

គេបាន

$Y=1+X+\frac{2}{1+X-1}-1$

$=X+\frac{2}{X}$

$F(-X)=-X+\frac{2}{-X}=-\left(X+\frac{2}{X}\right)$

$=-F(X)$

នាំឲ្យ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស។

ដូចនេះ $I(1,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ក្រាប c ។

ខ/ទាញរកក្រាបរបស់អនុគមន៍

$y=\left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|$

គេមាន $y=\left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|$

សញ្ញានៃ $\frac{x^2-x+2}{x-1}, x^2-x+2>0$

ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ព្រោះ $\Delta=1-8<0$

ដូចនេះប្រភាគមានសញ្ញាដូច $x-1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\frac{x^2-x+2}{x-1}$		$-$	‖	$+$	

$-$ បើ $x>1, \frac{x^2-x+2}{x-1}>0$

$y=\left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ ។

មែកនៃ $y=\left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|$ ជាមែកនៃ

$y=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ ។

$-$ បើ $x<1, \frac{x^2-x+2}{x-1}<0$

$y=\left|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right|=-\left(\frac{x^2-x+2}{x-1}\right)$ ។

		មែកនៃ $y=\left\|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right\|$ ឆ្លុះគ្នានឹងមែកនៃ $y=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។ ដូចនេះក្រាប $y=\left\|\frac{x^2-x+2}{x-1}\right\|$ ជាប្រជុំនៃមែកនៅខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ដែលមែកជារបស់ $y=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ និងមែកមួយទៀតបានដោយបំលែងឆ្លុះធៀបនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃមែករបស់ $y=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ ដែលត្រូវនឹង $x<1$។ គ/ពិភាក្សាតាមតម្លៃ m : $x^2-\|x\|+2=m(\|x\|-1)$ សមមូល $\frac{x^2\|x\|+2}{\|x\|-1}=m$ អង្គខាងឆ្វេងជាក្រាប $C_2: y=\frac{x^2-\|x\|+2}{\|x\|-1}$ គេមាន $y=\frac{x^2-\|x\|+2}{\|x\|-1}=$ $\begin{cases}\frac{x^2-x+2}{x-1} & \text{បើ } x\ge 0\\ \frac{x^2+x+2}{-x-1} & \text{បើ } x<0\end{cases}$ ដូចនេះក្រាប $C_2: y=\frac{x^2-\|x\|+2}{\|x\|-1}$ មានក្រាបមួយផ្នែកជារបស់ $y=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ ផ្នែក $x\ge o$ (មិនយកផ្នែក $x<0$ ទេ)ហើយមួយផ្នែកទៀតជាក្រាបឆ្លុះរបស់ $y=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ ផ្នែក $x\ge o$ ធៀបនិងអ័ក្ស $0y$ ។ គូសបន្ទាត់ $D: y=m$ គេឃើញថា:

		– បើ $m<-2$: មានឬសពីរផ្សេងគ្នា។ – បើ $m=-2$: មានឬសឌុបមួយ។ – បើ $-2<m<2\sqrt{2}+1$: គ្មានឬស។ – បើ $m=2\sqrt{2}+1$: មានឬសឌុបពីរ។ – បើ $m>2\sqrt{2}+1$: មានឬសបួន។
–	ជំហាន់ទី4: ពង្រឹងពុទ្ធិ	
– មើលមេរៀនថ្មី	ជំហាន់ទី5: បណ្តាំផ្ញើរ	

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៤....

មេរៀនទី...១... **ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់**

- មុខវិជ្ជា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)

- ជំពូកទី៤ : អាំងតេក្រាល

- មេរៀនទី១ : ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

- បង្រៀនដោយ : សាស្ត្រាចារ្យ ....

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : សិស្សកំណត់និយមន័យព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍តាមរយៈការបង្ហាញរបស់គ្រូ។

-បំណិន : សិស្សអនុវត្តទ្រឹស្តីបទព្រីមីទីវក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់បានត្រឹមត្រូវ តាមរយៈការពន្យល់របស់គ្រូ។

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីយកចិត្តទុកដាក់រៀនសូត្រតាមរយៈការណែនាំរបស់គ្រូ។

II.ពេលវេលា: ...២...ម៉ោង ថ្ងៃ.................ទី................ខែ...............ឆ្នាំ...........

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី.១១០.. ដល់ទំព័រទី.១១២...

-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ក/ $y=x^3+3x^2-4x-6$ ខ/ $y=e^{\frac{1}{x}}$	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី) គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ក/ $y=x^3+3x^2-4x-6$ $y'=3x^2+6x-4$ ខ/ $y=e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y'=-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$	-សិស្សឡើងគណនា គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ ក/ $y=x^3+3x^2-4x-6$ $y'=3x^2+6x-4$ ខ/ $y=e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y'=-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

  -ណែនាំសិស្សឲ្យសង្កេត លើឧទាហរណ៍ ឧ១- គេទម្លាក់វត្ថុមួយពីទី ដែលមានកម្ពស់ h មក។នៅខ ណះ ពេល $t_0=0$ វត្ថុនោះមានល្បឿន $V(0)=0$ ។ក្រោមចលនាទម្លាក់ នៅខណះពេល t អង្គធាតុផ្លាស់ទី ដោយល្បឿន $V(t)=gt$ ដែល g ជាសំទុះនៃទម្លាក់សេរី។ គណនា ចម្ងាយចរនៃវត្ថុនៅខណះពេល t ។ ឧ២- រក $F(x)$ ដែល $F'(x)=2x$ -ឲ្យសិស្សទាញរកនិយមន័យ ព្រីមីទីវតាមឧទាហរណ៍ខាងលើ -គ្រូឲ្យសិស្សសង្កេតលំហាត់គំរូ លំហាត់គំរូ៖ គេមាន $F(x)=x^3+x^2+x$ និង $f(x)=3x^2+2x+1$ ។ បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ -គ្រូដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិ ក/ រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x)=\sin x$ ចំពោះគ្រប់	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី រយះពេល៦០នាទី) **មេរៀនទី១:** **ព្រីមីទីវនិងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់** ១. ព្រីមីទីវ ១.១ និយមន័យ ដំណោះស្រាយ ១-តាង $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណះ ពេល t ។ យើងដឹងថា $V(t)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=S'(x)$ ដូចនេះ គេត្រូវរក $S(t)$ ដែលមាន $S'(t)=V(t)=gt$ គេបាន $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$ ព្រោះ $S'(t)=gt$ $S(t)$ ដែលបានរកឃើញហៅថា ព្រីមីទីវនៃ $V(t)=gt$ ឧ២- គេបាន $F(x)=x^2$ ព្រោះ $F'(x)=2x$ គេថា $F(x)=x^2$ ជាព្រីមីទីវនៃ $F'(x)=2x$ និយមន័យ៖ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ កាលណា $F'(x)=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ចម្លើយ៖ យើងមាន $F(x)=x^3+x^2+x$ គេបាន $F'(x)=3x^2+2x+1=f(x)$ ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ក/ រកព្រីមីទីវ $F(x)$ គេមាន	 -សិស្សស្តាប់គ្រូពន្យល់ និងកត់ត្រា ដំណោះស្រាយ តាង $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខ ណះពេល t ។ យើងដឹងថា $V(t)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=S'(x)$ ដូចនេះ គេត្រូវរក $S(t)$ ដែលមាន $S'(t)=V(t)=gt$ គេបាន $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$ ព្រោះ $S'(t)=gt$ $S(t)$ ដែលបានរកឃើញហៅ ថា ព្រីមីទីវនៃ $V(t)=gt$ ឧ២- គេបាន $F(x)=x^2$ ព្រោះ $F'(x)=2x$ -សិស្សទាញរកនិយមន័យ ព្រីមីទីវ -សិស្សសង្កេតលើលំហាត់គំរូ ចម្លើយ៖យើងមាន $F(x)=x^3+x^2+x$ គេបាន $F'(x)=3x^2+2x+1=f(x)$ ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ -សិស្សឡើងដោះស្រាយ

$x\in IR$ ។ ខ/ រកព្រីមីទីវ $G(x)$ នៃ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ចំពោះ $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ។ គ/ អនុគមន៍ H កំណត់លើ $]0,+\infty[$ ដោយ $H(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ ។ បង្ហាញ ថា H ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $h(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ -គ្រូឲ្យសិស្សសង្កេតឧទាហរណ៍រួចទាញរកទ្រឹស្តីបទ ឧ- គេមានអនុគមន៍បីផ្សេងគ្នា $F(x)=x^2$ $G(x)=x^2+2008$ $H(x)=x^2-29$ បង្ហាញថាអនុគមន៍ទាំងនបីជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍តែមួយ។	$F'(x)=f(x)=\sin x$ នាំអោយ $F(x)=-\cos x$ ដូចនេះ $F(x)=-\cos x$ ខ/ រកព្រីមីទីវ $G(x)$ គេមាន $G'(x)=f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ នាំអោយ $G(x)=-\dfrac{1}{x}$ ដូចនេះ $G(x)=-\dfrac{1}{x}$ គ/ បង្ហាញ ថា H ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $h(x)$ យើងមាន $H(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ នាំឲ្យ $H'(x)=e^{-\frac{1}{x}}+(-\frac{1}{x})'e^{-\frac{1}{x}}(x+1)$ $=e^{-\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(x+1)$ $=e^{-\frac{1}{x}}(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})$ $=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=h(x)$ ដូចនេះ H ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $h(x)$ លើ $(0,+\infty)$ ១.២ ទ្រឹស្តីបទ ដំណោះស្រាយ យើងមាន៖ $F'(x)=G'(x)=H'(x)=2x$ ដោយអនុគមន៍ទាំងបីមានដេរីវេស្មើគ្នា នោះវាជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=2x$ តែមួយ។ គេថា $f(x)=2x$ មានព្រីមីទីវច្រើនរាប់មិនអស់ដែលខុសគ្នាត្រង់តួចំនួនពិតថេរ។	ក/ រកព្រីមីទីវ $F(x)$ គេមាន $F'(x)=f(x)=\sin x$ នាំអោយ $F(x)=-\cos x$ ដូចនេះ $F(x)=-\cos x$ ខ/ រកព្រីមីទីវ $G(x)$ គេមាន $G'(x)=f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ នាំអោយ $G(x)=-\dfrac{1}{x}$ ដូចនេះ $G(x)=-\dfrac{1}{x}$ គ/ បង្ហាញ ថា H ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $h(x)$ យើងមាន $H(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ នាំឲ្យ $H'(x)$ $=e^{-\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(x+1)$ $=e^{-\frac{1}{x}}(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})$ $=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=h(x)$ ដូចនេះ H ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $h(x)$ លើ $(0,+\infty)$ -សិស្សសង្កេតលើឧទាហរណ៍រួចទាញរកទ្រឹស្តីបទ

	គេតាងព្រីមីទីវនៃ $2x$ ដោយ x^2+c ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។ ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះសំណុំព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ f មានទម្រង់ទូទៅ $F(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។	
-ឲ្យសិស្សឡើងស្រាយទ្រឹស្តីបទ	សម្រាយបញ្ជាក់៖ គេមានអនុគមន៍ $(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$ ព្រោះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះ $F(x)+c$ ក៏ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ ដែរ។	-សិស្សកត់ត្រា
-ឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់គំរូ លំហាត់គំរូ១៖ រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x)=x^2$ ដែល $f(3)=2$ ។	ចម្លើយ៖ យើនមាន $f(x)=x^2$ នោះនាំឲ្យ $F(x)=\frac{1}{3}x^3+c$ ដោយ $f(3)=2$ គេបាន $2=\frac{1}{3}3^3+c\Rightarrow c=-7$ ដូចនេះ $F(x)=\frac{1}{3}x^3-7$	-សិស្សឡើងធ្វើលំហាត់គំរូ យើនមាន $f(x)=x^2$ នោះនាំឲ្យ $F(x)=\frac{1}{3}x^3+c$ ដោយ $f(3)=2$ គេបាន $2=\frac{1}{3}3^3+c\Rightarrow c=-7$ ដូចនេះ $F(x)=\frac{1}{3}x^3-7$
-ឲ្យលក្ខណៈសម្គាល់ដល់សិស្ស	សំគាល់៖ គេអាចគណនាចំនួនថេរ c បានកាលណាគេស្គាល់តម្លៃព្រីមីទីវចំពោះតម្លៃ x ណាមួយ។	-សិស្សកត់ត្រា
លំហាត់គំរូ២៖ ក/ ដោយប្រើដេរីវេ បង្ហាញថា អនុគមន៍ $G(x)=\frac{3}{2}x^2+4x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ដែលនឹងត្រូវកំណត់។ ខ/ ដោយប្រើលទ្ធផលនូវសំនួរ «ក» ចូរបង្ហាញថា $F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^2$ គឺជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f ដែរ។	ចម្លើយ៖ ក/ យើងមាន $G(x)=\frac{3}{2}x^2+4x$ នោះគេបាន $G'(x)=3x+4$ ដូចនេះ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=3x+4$ ខ/ យើងមាន $F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^2$ នាំឲ្យ $F'(x)=\frac{1}{6}6(3x+4)=3x+4$	ក/ យើងមាន $G(x)=\frac{3}{2}x^2+4x$ នោះគេបាន $G'(x)=3x+4$ ដូចនេះ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=3x+4$ ខ/ យើងមាន $F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^2$ នាំឲ្យ

-ឲ្យសិស្សកត់ត្រា	ដោយ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=3x+4$ នោះ $F(x)$ ក៏ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=3x+4$ ដែរ។	$F'(x)=\frac{1}{6}6(3x+4)=3x+4$ ដោយ $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=3x+4$ នោះ $F(x)$ ក៏ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=3x+4$ ដែរ។ -សិស្សកត់ត្រា
-ឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិក/ រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x)=\cos x+1$ ដែល $f(\frac{\pi}{3})=3$ ។	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី) ចម្លើយ៖ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)=\cos x+1$ គឺ $F(x)=\sin x+x+c$ ព្រោះ $F'(x)=\cos x+1$ ដោយ $f(\frac{\pi}{3})=3$ នាំឲ្យ $3=\sin\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+c$ គេបាន $c=\frac{6-\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$ ដូចនេះ $F(x)=\sin x+x+\frac{6-\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$	-សិស្សឡើងដោះស្រាយ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)=\cos x+1$ $F(x)=\sin x+x+c$ ព្រោះ $F'(x)=\cos x+1$ ដោយ $f(\frac{\pi}{3})=3$ នាំឲ្យ $3=\sin\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+c$ គេបាន $c=\frac{6-\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$ ដូចនេះ $F(x)=\sin x+x+\frac{6-\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$
-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ -ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី) លំហាត់៖ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $F(x)=\frac{x^2}{x^2+5x}$ និង $G(x)=\frac{-5}{x+5}$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍តែមួយ។	-សិស្សកត់លំហាត់ និងអនុវត្តតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី…៤….

មេរៀនទី…១… **ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់**

- មុខវិជ្ជា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)

- ជំពូកទី៤ : អាំងតេក្រាល

- មេរៀនទី១ : ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

- បង្រៀនដោយ : សាស្ត្រាចារ្យ ....

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : សិស្សកំណត់និយមន័យអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ នៃអនុគមន៍តាមរយៈការបង្ហាញរបស់គ្រូ។

-បំណិន : សិស្សអនុវត្តរូបមន្តគ្រឹះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការពន្យល់របស់គ្រូ។

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីយកចិត្តទុកដាក់រៀនសូត្រតាមរយៈការណែនាំរបស់គ្រូ។

II.ពេលវេលា: …២…ម៉ោង ថ្ងៃ……………..ទី……………..ខែ………….ឆ្នាំ……….

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី.១១០.. ដល់ទំព័រទី.១១២...

-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-តារាងរូបមន្តគ្រឹះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-បើ $F'(x)=f(x)$ នោះ $F(x)$ ហៅថាអ្វីនៃ $f(x)$?	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី) $F(x)$ ហៅថាជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$	$F(x)$ ហៅថាជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$
	ជំហានទី៣	

	(មេរៀនថ្មី រយៈពេល៦០នាទី) **មេរៀនទី១:** **ព្រីមីទីវនិងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់** ២. អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ១.១ និយមន័យ	
-ណែនាំសិស្សឲ្យសង្កេតលើឧទាហរណ៍ ឧ១-គេមានអនុគមន៍ H,G និង F ដែលកំណត់ដោយ $H(x)=x^4+x^3+7$ $G(x)=x^4+x^3+2002$ និង $F(x)=x^4+x^3+c$ ដែល c -តើ $H(x)$ $G(x)$ និង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=4x^3+3x^2$ ឬទេ?	ដំណោះស្រាយ គេបាន $H'(x)=4x^3+3x^2=f(x)$ $G'(x)=4x^3+3x^2=f(x)$ និង $F'(x)=4x^3+3x^2=f(x)$ ដូចនេះ $H(x)$ $G(x)$ និង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=4x^3+3x^2$	-សិស្សសង្កេតលើឧទាហរណ៍រួចកត់ត្រា
-តើសំណុំព្រីមីទីវទាំងអស់ហៅថាអ្វី?	-ហៅថាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់	-ហៅថាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់
-គ្រូឲ្យសិស្សទាញរកនិយមន័យអាំងតេក្រាលមិនកំណត់	និយមន័យ៖ បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $f(x)$ កំណត់ដោយ $\int f(x)dx=F(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។	-ទាញរកនិយមន័យ
-គ្រូឲ្យឧទាហរណ៍ទី២	-ឧទាហរណ៍ទី២៖ គេសង្កេតឃើញថាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=4x^3+3x^2$ គឺជាអនុគមន៍ $F(x)=x^4+x^3+c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។ ដូចនេះ $\int(4x^3+3x^2)dx=x^4+x^3+c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ។	-សង្កេតលើឧទាហរណ៍ទី២

-ឲ្យសិស្សពិភាក្សាជាដៃគូ រួចឡើងរកដេរីវេនៃអនុគមន៍ ១/ $F(x)=5x$ ២/ $F(x)=-4x+9$ -រួចទាញរកអាំងតេក្រាល នៃអនុគមន៍និមួយៗ -ឲ្យសិស្សទាញរកជាទូទៅ $\int kdx=?$ បើ $k\neq 0$ -ឲ្យសិស្សគណនា $\int dx$ -ឲ្យសិស្សសង្កេតតាមការពន្យល់របស់គ្រូ -បែងចែកសិស្សជា៤ក្រុមឲ្យគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖ 1- $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 2- $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ 3- $F(x)=-\frac{1}{x}$ 4- $F(x)=-\frac{1}{x}+5$ រួចឲ្យសិស្សទាញរកអាំងតេក្រា	១.២ រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ចម្លើយ៖ ១/ $F(x)=5x$ $\Rightarrow F'(x)=5$ គេកំណត់បាន $\int 5dx=5x+c$ ២/ $F(x)=-4x+9$ $\Rightarrow F'(x)=-4$ គេកំណត់បាន $\int(-4)dx=-4x+c$ ជាទូទៅ៖ បើ $k\neq 0$ នោះ $\int kdx=kx+c$ ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ សម្គាល់៖ $\int dx=x+c;c\in IR$ -ដោយ $\int f(x)dx=F(x)+c$ $\Leftrightarrow f(x)=[F(x)+c]'$ គេបាន $[k\int f(x)dx]'=k[\int f(x)dx]'$ $=k[F(x)+c]'=kf(x)$ ជាទូទៅ៖ បើ $k\neq 0$ នោះ៖ $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ 1- $F(x)=\frac{1}{2}x^2\Rightarrow F'(x)=x$ នោះ៖ $\int xdx=\frac{1}{2}x^2+c$ 2- $F(x)=\frac{1}{3}x^3\Rightarrow F'(x)=x^2$ នោះ៖ $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+c$ 3- $F(x)=-\frac{1}{x}\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{x^2}$ នោះ៖ $\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c$	-សិស្សពិភាក្សា រួចឡើងគណនា ១/ $F(x)=5x$ $\Rightarrow F'(x)=5$ គេកំណត់បាន $\int 5dx=5x+c$ ២/ $F(x)=-4x+9$ $\Rightarrow F'(x)=-4$ គេកំណត់បាន $\int(-4)dx=-4x+c$ -ទាញរកលក្ខណះជាទូទៅ $\int dx=x+c;c\in IR$ -សិស្សសង្កេត -សិស្សពិភាក្សា រួចឡើងគណនា 1- $F(x)=\frac{1}{2}x^2\Rightarrow F'(x)=x$ 2- $F(x)=\frac{1}{3}x^3\Rightarrow F'(x)=x^2$ 3- $F(x)=-\frac{1}{x}\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{x^2}$ 4- $F(x)=-\frac{1}{x}+5\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{x^2}$

លនៃដេរីវេ នៃអនុគមន៍និមួយៗ បែងចែកសិស្សជា៤ក្រុមដដែល គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖ 1- $F(x)=\frac{x^2}{2}+e^x-5$ 2- $F(x)=2\sqrt{x}$ -រូចទាញរកអាំងតេក្រាល នៃអនុគមន៍និមួយៗ -តាមរូបមន្ត $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ ឲ្យសិស្សទាញរក $\int[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+.......+c_nf_n(x)]dx$ - ដាក់លំហាត់គំរូដោយកែឲ្យសិស្ស	4- $F(x)=-\frac{1}{x}+5\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{x^2}$ នោះ៖ $\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c$ ជាទូទៅ៖ $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c;c\in IR,n\neq-1$ $\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c;c\in IR$ 1- $F(x)=\frac{x^2}{2}+e^x-5$ $\Rightarrow F'(x)=x+e^x$ នោះ៖ $\int(x+e^x)dx=\frac{1}{2}x^2+e^x+c$ 2- $F(x)=2\sqrt{x}\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ នោះ៖ $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+c$ ជាទូទៅ៖ $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+c;c\in IR$ គេទាញបាន $\int[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+.......+c_nf_n(x)]dx$ $=c_1\int f_1(x)dx+c_2\int f_2(x)dx+.......+c_n\int f_n(x)dx$ លំហាត់គំរូ៖ គណនាអាំងតេក្រាល 1- $\int 8x^2dx$ 2- $\int(3e^x+\frac{1}{4}x^2-6)dx$ ចម្លើយ៖ គណនាអាំងតេក្រាល 1- $\int 8x^2dx=8\frac{x^{2+1}}{2+1}+c=\frac{8}{3}x^3+c$ 2- $\int(3e^x+\frac{1}{4}x^2-6)dx=3\int e^xdx+\frac{1}{4}\int x^2dx-\int 6dx$ $=3e^x+\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}-6x+c=3e^x+\frac{x^3}{12}-6x+c$	-សិស្សពិភាក្សា រួចឡើងគណនា 1- $F(x)=\frac{x^2}{2}+e^x-5$ $\Rightarrow F'(x)=x+e^x$ នោះ៖ $\int(x+e^x)dx=\frac{1}{2}x^2+e^x+c$ 2- $F(x)=2\sqrt{x}\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ នោះ៖ $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+c$ ដោយ $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ ហើយ $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ គេបាន $\int[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+.......+c_nf_n(x)]dx$ $=c_1\int f_1(x)dx+c_2\int f_2(x)dx+.......+c_n\int f_n(x)dx$ -សិស្សសង្កេត និងកត់ត្រា

-ឲ្យសិស្សពីរនាក់ឡើងគណនា -$F'(x)$ កាលណា $F(x)=\ln\|x\|;(x>0)$ -$G'(x)$ កាលណា $G(x)=\ln\|x\|;(x<0)$	2.3 អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ នៃ $y=e^x$ និង $y=\frac{1}{x}$ ឧ- បើ $x>0\Rightarrow F(x)=\ln x$ គេបាន $\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{x}$ - បើ $x<0\Rightarrow G(x)=\ln(-x)$ គេបាន $\Rightarrow G'(x)=\frac{1}{x}$	$F'(x)=\frac{1}{x}$ $G'(x)=\frac{1}{x}$ គេបាន $F'(x)=G'(x)$
-ឲ្យសិស្សទាញរក $\int\frac{1}{x}dx=........?$	យើងសង្កេតឃើញថា $F(x)=\ln x;(x>0)$ និង $G(x)=\ln x;(x<0)$ មាន $F'(x)=G'(x)=\frac{1}{x}$ ដូច្នេះ $\int\frac{1}{x}dx=\ln\|x\|+c;c\in IR;x\neq 0$	$\int\frac{1}{x}dx=\ln\|x\|+c;c\in IR;x\neq 0$
-ឲ្យសិស្សពីរនាក់ឡើងគណនា -$F'(x)$ កាលណា $F(x)=e^x+8$ -$F'(x)$ កាលណា $F(x)=e^x+c$ -ឲ្យសិស្សទាញរក $\int e^x dx=........?$	ដោយ $F(x)=e^x+8\Rightarrow F'(x)=e^x$ $F(x)=e^x+c\Rightarrow F'(x)=e^x$ ដូច្នេះ $\int e^x dx=e^x+c;c\in IR$	$F(x)=e^x+8\Rightarrow F'(x)=e^x$ $F(x)=e^x+c\Rightarrow F'(x)=e^x$ គេបាន $\int e^x dx=e^x+c;c\in IR$
-ដាក់លំហាត់គំរូឲ្យសិស្សអនុវត្ត តាមរូបមន្តដោយកែឲ្យនូវលំ ហាត់ទី១ 1- $\int 3e^x dx=3e^x+c$ រួចឲ្យសិស្សកែលំហាត់ទី២ ៣	លំហាត់គំរូ៖ គណនាអាំងតេក្រាល 1- $\int 3e^x dx$ 2- $\int\frac{6}{x}dx$ 3- $\int(6e^x-\frac{10}{x}+\frac{4}{x})dx$ ចម្លើយ៖ 1- $\int 3e^x dx=3e^x+c$ 2- $\int\frac{6}{x}dx=6\int\frac{1}{x}dx=6\ln\|x\|+c$ 3- $\int(6e^x-\frac{10}{x}+\frac{4}{x})dx$ $=6\int e^x dx-10\int\frac{1}{x}dx+4\int\frac{1}{x}dx$	-សង្កេតគ្រូណែនាំ រួចធ្វើលំហាត់ទី២ ៣ 2- $\int\frac{6}{x}dx=6\int\frac{1}{x}dx=6\ln\|x\|+c$ 3- $\int(6e^x-\frac{10}{x}+\frac{4}{x})dx$ $=6\int e^x dx-10\int\frac{1}{x}dx+4\int\frac{1}{x}dx$ $=6e^x-6\ln\|x\|+c$

	$=6e^x-10\ln\lvert x\rvert+4\ln\lvert x\rvert+c$ $=6e^x-6\ln\lvert x\rvert+c$	
-ឲ្យសិស្សសរសេររូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖ 1- $\int kdx=?$ 2- $\int x^n dx=?$ បើ $n\neq -1$ 3- $\int \frac{1}{x^2}dx=?$ 4- $\int[f(x)\pm g(x)]dx=?$	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី) 1- $\int kdx=kx+c$ 2- $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ បើ $n\neq -1$ 3- $\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c$ 4- $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$	-សិស្សឡើងសរសេររូបមន្ត 1- $\int kdx=kx+c$ 2- $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ បើ $n\neq -1$ 3- $\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c$ 4- $\int[f(x)\pm g(x)]dx$ $=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$
-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ -ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី) លំហាត់៖ គណនាអាំងតេក្រាល ក/ $\int(7x^6+5x^4-8)dx$ ខ/ $\int(2x^2-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{\sqrt{x}}+1)dx$ គ/ $\int(x^2+2\sqrt{x})dx$	-សិស្សកត់លំហាត់ និងអនុវត្តតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៤....

មេរៀនទី...១... **ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់**

- **មុខវិជ្ជា** : **គណិតវិទ្យា** **ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)**
- **ជំពូកទី៤** : **អាំងតេក្រាល**
- **មេរៀនទី១** : **ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់**
- **បង្រៀនដោយ : សាស្ត្រាចារ្យ** ....

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : សិស្សកំណត់បានរូបមន្តអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ តាមរយៈការបង្ហាញរបស់គ្រូ។

-បំណិន : សិស្សអនុវត្តរូបមន្តគ្រឹះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់បានត្រឹមត្រូវ តាមរយៈការពន្យល់របស់គ្រូ។

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីយកចិត្តទុកដាក់រៀនសូត្រតាមរយៈការណែនាំរបស់គ្រូ។

II.ពេលវេលា: ...២...ម៉ោង ថ្ងៃ.................ទី.................ខែ..............ឆ្នាំ..........

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី.១១៧.. ដល់ទំព័រទី.១១៨...

-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-តារាងរូបមន្តគ្រឹះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់ គណនា៖ ក/ $\int(3x^5+2x^2+x)dx$	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី) ចម្លើយ៖ ក/ $\int(3x^5+2x^2+x)dx$ $=\frac{1}{2}x^6+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+c$	ក/ $\int(3x^5+2x^2+x)dx$ $=3\int x^5dx+2\int x^2dx+\int xdx$

ខ/ $\int (\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x})dx$	ខ/ $\int (\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x})dx$ $=-\frac{1}{3x^3}+2\ln\|x\|+c$	$=\frac{1}{2}x^6+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+c$ ខ/ $\int (\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x})dx$ $=\int x^{-4}dx+2\int\frac{1}{x}dx$ $=-\frac{1}{3x^3}+2\ln\|x\|+c$
-ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖ $F(x)=-\cos x+5$ $F(x)=-\cos x-7$ $F(x)=-\cos x+c$ -សួរសិស្សឲ្យទាញរក $\int \sin xdx=?$ -ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖ $F(x)=\sin x+4$ $F(x)=\sin x-10$ សួរសិស្សបើ $F(x)=\sin x+c$ តើ $F'(x)=?$ -សួរសិស្សឲ្យទាញរក $\int \cos xdx=?$	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី រយៈពេល៦០នាទី) **មេរៀនទី១:** **ព្រីមីទីវនិងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់** ២.៤ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ បើ $F(x)=-\cos x+5$ នោះ $F'(x)=\sin x$ បើ $F(x)=-\cos x-7$ នោះ $F'(x)=\sin x$ បើ $F(x)=-\cos x+c$ នោះ $F'(x)=\sin x$ រូបមន្ត៖ $\int \sin xdx=-\cos x+c; c\in IR$ ចម្លើយ៖ $F(x)=\sin x+4$ $\Rightarrow F'(x)=\cos x$ $F(x)=\sin x-10$ $\Rightarrow F'(x)=\cos x$ $F(x)=\sin x+c$ $\Rightarrow F'(x)=\cos x$ រូបមន្ត៖ $\int \cos xdx=\sin x+c; c\in IR$	-សង្កេតរួចគណនា -$\int \sin xdx=-\cos x+c$ សិស្សគណនា៖ $F(x)=\sin x+4$ $\Rightarrow F'(x)=\cos x$ $F(x)=\sin x-10$ $\Rightarrow F'(x)=\cos x$ $F(x)=\sin x+c$ $\Rightarrow F'(x)=\cos x$ សិស្សទាញរក $\int \cos xdx=\sin x+c$

ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖ $F(x)=\tan x+2$ $F(x)=\tan x-3$	ចម្លើយ៖ $F(x)=\tan x+2$ $\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ $F(x)=\tan x-3$ $\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	សិស្សគណនា៖ $F(x)=\tan x+2$ $\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ $F(x)=\tan x-3$ $\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$
-សួរសិស្សឲ្យទាញរក $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=?$ ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖ $F(x)=-\cot x+1$ $F(x)=-\cot x-5$	រូបមន្ត៖ $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c; c\in IR$ ចម្លើយ៖ $F(x)=-\cot x+1$ $\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ $F(x)=-\cot x-5$ $\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$	សិស្សទាញរក $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c$ សិស្សគណនា $F(x)=-\cot x+1$ $\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ $F(x)=-\cot x-5$ $\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$
-សួរសិស្សឲ្យទាញរក $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=?$ -ឲ្យលំហាត់គំរូដល់សិស្ស លំហាត់៖ គណនាអាំងតេក្រាល ក/ $A=\int(5\sin x-3\cos x)dx$ ខ/ $B=\int(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x})dx$ គ/ $C=\int(\tan x+\cot x)^2dx$	រូបមន្ត៖ $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+c; c\in IR$ ចម្លើយ៖ គណនាអាំងតេក្រាល ក/ $A=\int(5\sin x-3\cos x)dx$ $=5\int\sin xdx-3\int\cos xdx$ $=-5\cos x-3\sin x+c$ ខ/ $B=\int(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{3}{\sin^2 x})dx$ $=2\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+3\int\frac{1}{\sin^2 x}dx$ $=2\tan x-3\cot x+c$ គ/ $C=\int(\tan x+\cot x)^2dx$ $=\int(\tan^2 x+2+\cot^2 x)dx$ $=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx$ $=\tan x-\cot x+c$	សិស្សទាញរក $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+c$ -សិស្សសង្កេតលើលំហាត់គំរូរួចកត់ត្រា

-ចែកសិស្សជាបួនក្រុម រួចឲ្យសិស្សគណនាលំហាត់ប្រតិបត្តិ ប្រតិបត្តិ៖ គណនាអាំងតេក្រាល ក/ $A=\int(\frac{2}{3}\cos x+\sin x)dx$ ខ/ $B=\int(\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}-5)dx$ គ/ $C=\int(1+\cos x)dx$ ឃ/ $D=\int(3\sin+5\cos x)dx$	ចម្លើយ៖ ក/ $A=\int(\frac{2}{3}\cos x+\sin x)dx$ $=\frac{2}{3}\sin x-\cos x+c$ ខ/ $B=\int(\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}-5)dx$ $=4\tan x-\cot x-5x+c$ គ/ $C=\int(1+\cos x)dx$ $=x+\sin x+c$ ឃ/ $D=\int(3\sin x+5\cos x)dx$ $=-3\cos x+5\sin x+c$	សិស្សពិភាក្សាគ្នាតាមក្រុម រួចតំណាងក្រុមឡើងសរសេរចម្លើយលើក្ដារខៀន
-ឲ្យសិស្សឆ្លើយនឹងសំនួរខាងក្រោម 1- $\int\sin x=?$ 2- $\int\cos x dx=?$ 3- $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=?$ 4- $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=?$	**<u>ជំហានទី៤</u>** (ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី) ចម្លើយ៖ 1- $\int\sin x=-\cos x+c$ 2- $\int\cos x dx=\sin x+c$ 3- $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c$ 4- $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+c$	-សិស្សឡើងសរសេររូបមន្ត 1- $\int\sin x=-\cos x+c$ 2- $\int\cos x dx=\sin x+c$ 3- $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c$ 4- $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+c$
-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ -ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់	**<u>ជំហានទី៥</u>** (កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី) លំហាត់៖ គណនាអាំងតេក្រាល ក/ $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ ខ/ $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$	-សិស្សកត់លំហាត់ និងអនុវត្តតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៤....

មេរៀនទី...១... **ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់**

- **មុខវិជ្ជា** : **គណិតវិទ្យា** **ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)**
- **ជំពូកទី៤** : **អាំងតេក្រាល**
- **មេរៀនទី១** : **ព្រីមីទីវ និងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់**
- **បង្រៀនដោយ : សាស្ត្រាចារ្យ** ....

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង : សិស្សកំណត់បានរបៀបគណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួយ និងរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក តាមរយៈការបង្ហាញរបស់គ្រូ។

-បំណិន : សិស្សអនុវត្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួយ និងអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកក្នុងការ ដោះស្រាយលំហាត់បានត្រឹមត្រូវ តាមរយៈការពន្យល់របស់គ្រូ។

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីយកចិត្តទុកដាក់រៀនសូត្រតាមរយៈការណែនាំរបស់គ្រូ។

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២...ម៉ោង ថ្ងៃ.................ទី.................ខែ..............ឆ្នាំ...........

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

-ស . ស :ទំព័រទី.១១៩.. ដល់ទំព័រទី.១២២...

-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-តារាងរូបមន្តគ្រឹះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី) ចម្លើយៈ	សិស្សឡើងគណនា

គណនាអាំងតេក្រាល៖ ក/ $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ ខ/ $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$	ក/ $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ $=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$ $=\int (\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x})dx$ $=-\cot x-\tan x+c$ ខ/ $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ $=\int (\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x})dx$ $=\tan x-\cot x+c$	ក/ $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ $=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$ $=\int (\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x})dx$ $=-\cot x-\tan x+c$ ខ/ $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ $=\int (\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x})dx$ $=\tan x-\cot x+c$
-ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្ស គណនាអាំងតេក្រាល $\int (x^2+1)^5 xdx$ -ណែនាំសិស្សឲ្យតាង $t=x^2+1$ -ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្ស គណនាអាំងតេក្រាល ក/ $A=\int \sin(2x+1)dx$ ខ/ $B=\int \sin^2 x\cos xdx$	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី រយៈពេល៦០នាទី) **មេរៀនទី១:** **ព្រីមីទីវនិងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់** ២.៥ ការគណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដោយប្រើអថេរជំនួយ និងអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ក/ ការគណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួយ ចម្លើយ៖ $\int (x^2+1)^5 2xdx$ តាង $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx$ គេបាន $\int (x^2+1)^5 2xdx$ $=\int t^5dt=\frac{1}{6}t^6+c=\frac{(x^2+1)^6}{6}+c$ ចម្លើយ៖ គណនា ក/ $A=\int \sin(2x+1)dx$ តាង $u=2x+1\Rightarrow du=2dx$ គេបាន $A=\frac{1}{2}\int \sin tdt$ $=-\frac{1}{2}\cos t+c=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+c$	-សង្កេតរួចគណនា $\int (x^2+1)^5 2xdx$ តាង $t=x^2+1\Rightarrow dt=2xdx$ គេបាន $\int (x^2+1)^5 2xdx$ $=\int t^5dt=\frac{1}{6}t^6+c=\frac{(x^2+1)^6}{6}$ -សិស្សគណនា ក/ $A=\int \sin(2x+1)dx$ តាង $u=2x+1\Rightarrow du=2dx$ គេបាន $A=\frac{1}{2}\int \sin tdt$

	ខ/ $B=\int \sin^2 x\cos x dx$ តាង $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x dx$ គេបាន $B=\int t^2 dt=\frac{1}{3}t^3+c$ $=\frac{1}{3}\sin^3 x+c$	$=-\frac{1}{2}\cos t+c=-\frac{1}{2}\cos(2x+1)$ ខ/ $B=\int \sin^2 x\cos x dx$ តាង $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x dx$ គេបាន $B=\int t^2 dt=\frac{1}{3}t^3+c$ $=\frac{1}{3}\sin^3 x+c$
-ឲ្យសិស្សពិភាក្សាទាញរកវិធាន ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើអថេរជំនួយ	វិធាន៖ ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល ដោយប្រើអថេរជំនួយគេត្រូវ៖ -តាង $t=f(x)$ រួចរក $dt=f'(x)dx$ -ជំនួស $f(x)$ ដោយ t រួចគណនា អាំងតេក្រាលធៀបនឹងអថេរ t -ជំនួស t ដោយ $f(x)$ វិញនោះគេបាន ចម្លើយជាអនុគមន៍នៃ x ។	ពិភាក្សារួចទាញរកវិធាន
-ដាក់លំហាត់គំរូឲ្យសិស្ស ពិភាក្សាដោះស្រាយ លំហាត់៖ គណនាអាំងតេក្រាល ខាងក្រោម៖ ក/ $A=\int (x^2+3x-1)^4(2x+3)dx$ ខ/ $B=\int 8x^3\sin x^4 dx$	ចម្លើយ៖ គណនា ក/ $A=\int (x^2+3x-1)^4(2x+3)dx$ តាង $t=x^2+3x-1$ នាំអោយ $dt=(2x+3)dx$ គេបាន $A=\int t^4 dt=\frac{1}{5}t^5+c$ $=\frac{1}{5}(x^2+3x-1)^5+c$ ខ/ $B=\int 8x^3\sin x^4 dx$ តាង $t=x^4 \Rightarrow dt=4x^3dx$ គេបាន $B=\int 2\sin t dt$ $=-2\cos t+c=-2\cos x^4+c$	-ពិភាក្សាគ្នារួចដោះស្រាយ ក/ $A=\int (x^2+3x-1)^4(2x+3)dx$ តាង $t=x^2+3x-1$ នាំអោយ $dt=(2x+3)dx$ គេបាន $A=\int t^4 dt=\frac{1}{5}t^5+c$ $=\frac{1}{5}(x^2+3x-1)^5+c$ ខ/ $B=\int 8x^3\sin x^4 dx$ តាង $t=x^4 \Rightarrow dt=4x^3dx$ គេបាន $B=\int 2\sin t dt$ $=-2\cos t+c=-2\cos x^4+c$
បង្ហាញសិស្ស គេមានអនុគមន៍ ពីរ f និង g ដែលមានដេរីវេ f'	ខ/ អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក	សិស្សសង្កេតមើលការបង្ហាញរបស់គ្រូរួចទាញរក $(fg)'$

និង g' អោយសិស្សគណនា $(fg)'=?$ អោយសិស្សបំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x រួចទាញរក $\int(f'g)dx$ -ណែនាំសិស្សឲ្យស្គាល់អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក -ដាក់លំហាត់គំរូឲ្យសិស្សគណនាអាំងតេក្រាល ក/ $A=\int xe^x dx$ ខ/ $B=\int \ln x dx$ គ/ $C=\int(3x+2)\sin x dx$ ឃ/ $D=\int e^x\cos x dx$	គេបាន $(fg)'=f'g+g'f$ $\int(fg)'dx=\int(f'g+g'f)dx$ នាំឲ្យ $\int(f'g)dx=fg-\int g'f dx$ រូបមន្ត៖ $\int(f'g)dx=fg-\int g'f dx$ ហៅថាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចម្លើយ៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖ ក/ $A=\int xe^x dx$ តាង $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$ $g'(x)=e^x\Rightarrow g(x)=e^x$ គេបាន $A=xe^x-\int e^x dx$ $=(x-1)e^x+c$ ខ/ $B=\int \ln x dx$ តាង $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ $g'(x)=1\Rightarrow g(x)=x$ គេបាន $B=x\ln x-\int dx$ $=(\ln x-1)x+c$ គ/ $C=\int(3x+2)\sin x dx$ តាង $f(x)=3x+2\Rightarrow f'(x)=3$ $g'(x)=\sin x\Rightarrow g(x)=-\cos x$ គេបាន $C=-(3x+2)\cos x+\int 3\cos x dx$ $=-(3x+2)\cos x+3\sin x+c$ ឃ/ $D=\int e^x\cos x dx$ តាង $f(x)=e^x\Rightarrow f'(x)=e^x$ $g'(x)=\cos x\Rightarrow g(x)=\sin x$ គេបាន $D=e^x\sin x-\int e^x\sin x dx$	$(fg)'=f'g+g'f$ $\int(fg)'dx=\int(f'g+g'f)dx$ នាំឲ្យ $\int(f'g)dx=fg-\int g'f dx$ សិស្សស្ដាប់រួចកត់ត្រា សិស្សពិភាក្សាគ្នាដោះស្រាយលំហាត់

	តាង $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$ $g'(x)=\sin x \Rightarrow g(x)=-\cos x$ គេបាន $D=e^x\sin x-[-e^x\cos x+\int \cos x e^x dx]$ $D=e^x\sin x+e^x\cos x-D$ $D=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+c$	
-ឲ្យសិស្សឆ្លើយនឹងសំនួរ តើ $\int f(x)g'(x)dx=?$	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី) ចម្លើយ៖ $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$	-សិស្សឡើងសរសេររូបមន្ត $\int f(x)g'(x)dx$ $=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$
-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ -ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី) លំហាត់៖ គណនាអាំងតេក្រាល ក/ $I=\int(-2x+1)\cos x dx$ ខ/ $J=\int(5x-4)\ln x dx$	-សិស្សកត់លំហាត់ និងអនុវត្តតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៤....

មេរៀនទី...២... **អាំងតេក្រាលកំណត់**

- **មុខវិជ្ជា** : **គណិតវិទ្យា** **ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)**
- **ជំពូកទី៤** : **អាំងតេក្រាល**
- **មេរៀនទី២** : **អាំងតេក្រាលកំណត់**
- **បង្រៀនដោយ : សាស្ត្រាចារ្យ** ....

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : សិស្សកំណត់បាននិយមន័យអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទមួយតាមរយៈការបង្ហាញរបស់គ្រូ។

-បំណិន : សិស្សអនុវត្តគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់បាន ត្រឹមត្រូវតាមលក្ខណៈគ្រឹះ និង ការពន្យល់ដោយលើកឧទាហរណ៍ របស់គ្រូ។

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីយកចិត្តទុកដាក់រៀនសូត្រតាមរយៈការណែនាំរបស់គ្រូ។

II.ពេលវេលា: ...២...ម៉ោង ថ្ងៃ...............ទី...............ខែ............ឆ្នាំ..........

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី.១៣២.. ដល់ទំព័រទី..១៣៤..

-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-តារាងរូបមន្តគ្រឹះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី) ចម្លើយៈ	សិស្សឡើងគណនា

១/ បង្ហាញថា $F(x)=3x^3-7x$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=9x^2-7$ ២/ គណនាអាំងតេក្រាល $\int(2x^3-5x^2+3x+1)dx$	១/ យើងមាន $F(x)=3x^3-7x$ $F'(x)=9x^2-7=f(x)$ នោះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។ ២/ $\int(2x^3-5x^2+3x+1)dx$	១/យើងមាន $F(x)=3x^3-7x$ $F'(x)=9x^2-7=f(x)$ នោះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។ ២/ $\int(2x^3-5x^2+3x+1)dx$
វត្ថុមួយផ្លាស់ទីតាមទិសដេក ដោយល្បឿន $V(t)=5+3t^2\,m/mn$ ។ រកកំ ណើនចម្ងាយនៃវត្ថុដែលត្រូវនឹង កំណើនពេលពីខណៈ $t=3mn$ និង $t=5mn$ ។ -អោយសិស្សទាញរកនិយម ន័យនៃអាំងតេក្រាលកំណត់	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី រយៈពេល៦០នាទី) **មេរៀនទី២: អាំងតេក្រាលកំណត់** ១-និយមន័យ ដំណោះស្រាយ តាង $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៃបំលាស់ទី $\Rightarrow S'(t)=V(t)$ នោះ $S(t)=\int V(t)dt=\int(5+3t^2)dt$ $S(t)=5t+t^3+c$ -ចម្ងាយចរនៃវត្ថុខណៈ $t=3mn$ គឺ $S(3)=5\times3+3^3+c=42+c$ -ចម្ងាយចរនៃវត្ថុខណៈ $t=5mn$ គឺ $S(5)=5\times5+5^3+c=150+c$ ដូចនេះ កំណើនចម្ងាយចរចន្លោះ $t=3mn$ និង $t=5mn$ គឺ $S(5)-S(3)=(150+c)-(42+c)=108m$ + បើ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ នោះគេបាន $F(x)=G(x)+c$ $\Rightarrow F(a)=G(a)+c$ $F(b)=G(b)+c$ គេបាន $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$ ផលដក $F(b)-F(a)$ ហៅថាអាំងតេ ក្រាលកំណត់ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ។គេកំណត់សរសេរ $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$	សិស្សសង្កេតលើឧទាហរណ៍ និងឆ្លើយសំនួរគ្រូ $\Rightarrow S'(t)=V(t)$ នោះ $S(t)=\int V(t)dt=\int(5+3t^2)dt$ $S(t)=5t+t^3+c$ -ចម្ងាយចរនៃវត្ថុខណៈ $t=3mn$ គឺ $S(3)=5\times3+3^3+c=42+c$ -ចម្ងាយចរនៃវត្ថុខណៈ $t=5mn$ គឺ $S(5)=5\times5+5^3+c=150+c$ ដូចនេះ កំណើនចម្ងាយចរ ចន្លោះ $t=3mn$ និង $t=5mn$ គឺ $S(5)-S(3)=(150+c)-(42+c)$ -សិស្សកត់ត្រា

ដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិ ប្រតិបត្តិៈ គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោមៈ ១/ $\int_{-2}^{1} 4x^3dx$ ២/ $\int_{1}^{4}(2x^2-4x+5)dx$ ៣/ $\int_{1}^{3}(x^2+\frac{1}{x}-e^x)dx$	និយមន័យៈ អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ពីរ a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ គឺជាកំណើននៃអនុគមន៍ព្រីមីទីវនៃ $F(x)$ ដែលត្រូវនឹងកំណើន x ពី $a\to b$ គេកំណត់សរសេរ $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ ចម្លើយៈ ១/ $\int_{-2}^{1} 4x^3dx=\left[x^4\right]_{-2}^{1}=16-1=15$ ២/ $\int_{1}^{4}(2x^2-4x+5)dx$ $=[\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x]_1^4$ $=(\frac{2}{3}\times4^3-2\times4^2+5\times4)-(\frac{2}{3}\times1^3-2\times1^2+5\times1)$ $=\frac{128}{3}-32+20-\frac{2}{3}-2+5=33$ ៣/ $\int_{1}^{3}(x^2+\frac{1}{x}-e^x)dx$ $=\frac{1}{3}x^3+\ln\lvert x\rvert-e^x$ $=(\frac{1}{3}.27+\ln3-e^3)-(\frac{1}{3}+\ln1-e)$ $=\frac{26}{3}+\ln3-e^3+e$	១/ $\int_{-2}^{1} 4x^3dx=\left[x^4\right]_{-2}^{1}$ $=16-1=15$ ២/ $\int_{1}^{4}(2x^2-4x+5)dx$ $=[\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x]_1^4$ $=(\frac{2}{3}\times4^3-2\times4^2+5\times4)-(\frac{2}{3}\times1^3-2\times1^2+5\times1)$ $=\frac{128}{3}-32+20-\frac{2}{3}-2+5=33$ ៣/ $\int_{1}^{3}(x^2+\frac{1}{x}-e^x)dx$ $=\frac{1}{3}x^3+\ln\lvert x\rvert-e^x$ $=(\frac{1}{3}.27+\ln3-e^3)-(\frac{1}{3}+\ln1-e)$ $=\frac{26}{3}+\ln3-e^3+e$
-ឲ្យសិស្សឡើងដោះស្រាយលំហាត់ប្រតិបត្តិ គណនាអាំងតេក្រាល ក/ $\int_{1}^{0}(-3x^5-3x^2+2x+5)dx$ ខ/ $\int_{1}^{0}(\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}})dx$ គ/ $\int_{1}^{0}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})dx$	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី) ចម្លើយៈ ក/ $\int_{1}^{0}(-3x^5-3x^2+2x+5)dx$ $=\left[-\frac{1}{2}x^6-x^3+x^2+5x\right]_0^1$ $=0-(-\frac{1}{2}1^6-1^3+1^2+5.1)=-\frac{9}{2}$ ខ/ $\int_{1}^{0}(\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}})dx$	-សិស្សឡើងគណនាលំហាត់ ក/ $\int_{1}^{0}(-3x^5-3x^2+2x+5)dx$ $=\left[-\frac{1}{2}x^6-x^3+x^2+5x\right]_0^1$ $=0-(-\frac{1}{2}1^6-1^3+1^2+5.1)=-\frac{9}{2}$ ខ/ $\int_{1}^{0}(\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}})dx$

	$=[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-8x^{\frac{1}{2}}]_1^0=\frac{22}{3}$ គ/ $\int_1^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})dx$ $=\left[x+\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{x}\right]_1^2$ $=(2+\ln2-\frac{1}{2})-(1+\ln1-1)=\frac{3}{2}+\ln2$	$=[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-8x^{\frac{1}{2}}]_1^0=\frac{22}{3}$ គ/ $\int_1^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})dx$ $=\left[x+\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{x}\right]_1^2$ $=(2+\ln2-\frac{1}{2})-(1+\ln1-1)$ $=\frac{3}{2}+\ln 2$
-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ -ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី) លំហាត់៖ គណនាអាំងតេក្រាល $\int_1^2(\frac{1}{x^2}-3)dx$	-សិស្សកត់លំហាត់ និងអនុវត្តតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៤....

មេរៀនទី...២... **អាំងតេក្រាលកំណត់**

- **មុខវិជ្ជា** : **គណិតវិទ្យា** **ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)**
- **ជំពូកទី៤** : **អាំងតេក្រាល**
- **មេរៀនទី២** : **អាំងតេក្រាលកំណត់**
- **បង្រៀនដោយ : សាស្ត្រាចារ្យ** ....

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : សិស្សប្រាប់បានពីការអាំងតេក្រាលកំណត់តាមលក្ខណៈគ្រឹះ និងដោយប្តូរអថេរបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការបង្ហាញរបស់គ្រូ។

-បំណិន : សិស្សអនុវត្តគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់តាមលក្ខណៈគ្រឹះ និងដោយប្តូរអថេរបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍របស់គ្រូ។

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីយកចិត្តទុកដាក់រៀនសូត្រតាមរយៈការណែនាំរបស់គ្រូ។

II.ពេលវេលា: ...២...ម៉ោង ថ្ងៃ...............ទី...............ខែ............ឆ្នាំ..........

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី.១៣៤.. ដល់ទំព័រទី..១៣៧..

-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-តារាងរូបមន្តគ្រឹះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី)	

-ឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់ $\int_1^2 (\frac{1}{x^2}-3)dx$	ចម្លើយ៖ $\int_1^2 (\frac{1}{x^2}-3)dx = (-\frac{1}{x}-3x)\Big\|_1^2$ $= (-\frac{1}{2}-6)-(-1-3) = -\frac{5}{2}$	សិស្សឡើងគណនា $\int_1^2 (\frac{1}{x^2}-3)dx = (-\frac{1}{x}-3x)\Big\|_1^2$ $= (-\frac{1}{2}-6)-(-1-3) = -\frac{5}{2}$
-អោយសិស្សសង្កេតលើឧទាហរណ៍ទី១នៅ ទំព័រ ១៣៤ Ex1 គេអោយ $f(x)=4x^3$ ក/ គណនា $\int_1^{-2} f(x)dx$ ខ/ គណនា $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ -អោយសិស្សទាញរកលក្ខណះ -អោយសិស្សទាញរកសម្រាយបញ្ជាក់ -អោយសិស្សគណនា $\int_1^1 e^x dx$ -អោយសិស្សទាញរកលក្ខណះ -អោយសិស្សទាញរកសម្រាយ	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី រយះពេល៦០នាទី) **មេរៀនទី២: អាំងតេក្រាលកំណត់** ២- លក្ខណះ ដំណោះស្រាយ ក/ គណនា $\int_1^{-2} f(x)dx$ $=\int_1^{-2} 4x^3dx = [x^4]\Big\|_1^{-2} = 16-1 = 15$ ខ/ គណនា $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ $=\int_{-2}^{1} 4x^3dx = [x^4]\Big\|_{-2}^{1} = 1-16 = -15$ លក្ខណះ បើអនុគមន៍ f កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ សម្រាយបញ្ជាក់៖ $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ $\int_b^a f(x)dx = F(a)-F(b)$ $=-[F(b)-F(a)] = -\int_a^b f(x)dx$ នោះគេបាន $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ចម្លើយ៖ $\int_1^1 e^x dx = \left[e^x\right]_1^1 = e-e = 0$ ជាទូទៅ៖ $\int_a^a f(x)dx = 0$ សម្រាយ៖ $\int_a^a f(x)dx = [F(x)]_a^a$	សិស្សសង្កេតលើឧទាហរណ៍ និងឆ្លើយសំនួរគ្រូ ក/ គណនា $\int_1^{-2} f(x)dx$ $=\int_1^{-2} 4x^3dx = [x^4]\Big\|_1^{-2} = 16-1 = 15$ ខ/ គណនា $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ $=\int_{-2}^{1} 4x^3dx = [x^4]\Big\|_{-2}^{1} = 1-16 = -15$ -ទាញរកលក្ខណះគ្រឹះ -ទាញរកសម្រាយបញ្ជាក់ -ទាញរកសម្រាយបញ្ជាក់ $\int_1^1 e^x dx = \left[e^x\right]_1^1 = e-e = 0$ ទាញរក $\int_a^a f(x)dx = 0$ ទាញរកសម្រាយបញ្ជាក់

បញ្ជាក់ -អោយសិស្សគណនា $\int_0^4 3e^x dx$ និង $\int_0^2 3e^x dx+\int_2^4 3e^x dx$ -អោយសិស្សទាញរកលក្ខណៈជាទូទៅ -អោយសិស្សទាញរកសម្រាយបញ្ជាក់ -ឲ្យសិស្សពិនិត្យឧទាហរណ៍ និងលំហាត់ដោះស្រាយ -អោយសិស្សធ្វើការសន្និដ្ឋាន អោយសិស្សពិនិត្យសម្រាយបញ្ជាក់	$=F(a)-F(a)=0$ ចម្លើយ៖ $\int_0^4 3e^xdx=\left[3e^x\right]_0^4=3e^4-3$ $\int_0^2 3e^xdx+\int_2^4 3e^xdx$ $=\left[3e^x\right]_0^2+\left[3e^x\right]_2^4$ $=3e^2-3+3e^4-3e^2=3e^4-3$ ជាទូទៅ៖ បើ f កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ $[a,c]$ ដែល $a<b<c$ នោះ $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$ សម្រាយបញ្ជាក់៖ $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$ $F(b)-F(a)+F(c)-F(b)$ $=F(c)-F(a)=\int_a^c f(x)dx$ លំហាត់៖ បង្ហាញថា $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin xdx=3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin xdx$ យើងមាន $\int_0^{\frac{\pi}{3}}3\sin xdx=[-3\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}$ $=-3\cos\frac{\pi}{3}+3\cos 0^\circ=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$ ហើយ $3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin xdx=3[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}$ $=3(-\cos\frac{\pi}{3}+\cos 0^\circ)=3(-\frac{1}{2}+1)=\frac{3}{2}$ ជាទូទៅ៖ $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ សម្រាយបញ្ជាក់៖ $k\int_a^b f(x)dx=k[F(b)-F(a)]$ $=kF(b)-kF(a)=\int_a^b kf(x)dx$	$\int_a^a f(x)dx=[F(x)]_a^a$ $=F(a)-F(a)=0$ សិស្សគណនា $\int_0^4 3e^xdx=\left[3e^x\right]_0^4=3e^4-3$ $\int_0^2 3e^xdx+\int_2^4 3e^xdx$ $=\left[3e^x\right]_0^2+\left[3e^x\right]_2^4$ $=3e^2-3+3e^4-3e^2=3e^4-$ -ទាញរកលក្ខណៈទូទៅ -ពិនិត្យនិងធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់ ពិនិត្យឧទាហរណ៍រួចគណនា យើងមាន $\int_0^{\frac{\pi}{3}}3\sin xdx=[-3\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}$ $=-3\cos\frac{\pi}{3}+3\cos 0^\circ=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$ ហើយ $3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin xdx=3[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}$ $=3(-\cos\frac{\pi}{3}+\cos 0^\circ)=3(-\frac{1}{2}+1)=\frac{3}{2}$ ធ្វើការសន្និដ្ឋានភាពទូទៅមួយ ពិនិត្យលើការស្រាយបញ្ជាក់ ពិនិត្យលក្ខណៈទូទៅ

-អោយសិស្សសង្កេតលក្ខណៈទូទៅចំណុច (ង)	ជាទូទៅ៖ បើគេមាន $\int_a^b f(x)dx$ និង $\int_a^b g(x)dx$ នោះគេបាន $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$	
-អោយសិស្សសង្កេតលើសម្រាយបញ្ជាក់	សម្រាយបញ្ជាក់៖ $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=[F(b)\pm G(b)]-[F(a)\pm G(a)]$ $=[F(b)-F(a)]\pm[G(b)-G(a)]$ $=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$	-ពិនិត្យលើការស្រាយបញ្ជាក់របស់គ្រូ
-អោយសិស្សពិនិត្យលើឧទាហរណ៍ ឧ៖ គណនា $\int_2^4(4x-5)dx+\int_2^4(5-6x)dx$	ចម្លើយ៖ $\int_2^4(4x-5)dx+\int_2^4(5-6x)dx$ $=\int_2^4(4x-5+5-6x)dx=\int_2^4(-2x)dx$ $=(-x^2)\Big\vert_2^4=-16+4=-12$	-ពិនិត្យលើឧទាហរណ៍ដែលគ្រូដាក់អោយ
-អោយសិស្សពិនិត្យលក្ខណៈទូទៅចំណុច (ច)និងឧទាហរណ៍ គណនា៖ $\int_2^4(\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2}x)dx$	ជាទូទៅ៖ $\int_a^b[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx\pm\beta\int_a^b g(x)dx$ ចម្លើយ៖ $\int_2^4(\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2}x)dx=\int_2^4\frac{3}{x^2}dx+\int_2^4\frac{1}{2}xdx$ $=(-\frac{3}{x})\Big\vert_2^4+(\frac{1}{4}x^2)\Big\vert_2^4=(-\frac{3}{4}+\frac{3}{2})+(4-1)$ $=\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$	-ពិនិត្យលើឧទាហរណ៍ដែលគ្រូដាក់អោយ
-ឲ្យសិស្សសង្កេតលើលក្ខណៈទូទៅ	២- គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្តូរអថេរ ជាទូទៅ៖ បើ $u=g(x)$ ជាប់និងមានដេរីវេលើ $[a,b]$ នោះគេបាន $\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)}f(u)du$ ។	សង្កេតលើលក្ខណៈទូទៅ
-អោយសិស្សធ្វើលំហាត់គំរូ លំហាត់គំរូ៖ គណនា ក/ $\int_0^2 x(x^2+1)^3dx$ ខ/ $\int_1^2\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}dx$	ចម្លើយ៖ ក/ $\int_0^2 x(x^2+1)^3dx$ តាង $u=x^2+1\Rightarrow du=2xdx$ បើ $x=0\Rightarrow u=1$ បើ $x=2\Rightarrow u=5$ គេបាន $\int_0^2 x(x^2+1)^3dx=\int_1^5\frac{1}{2}u^3du$	-សិស្សអនុវត្តធ្វើលំហាត់ ក/ $\int_0^2 x(x^2+1)^3dx$ តាង $u=x^2+1\Rightarrow du=2xdx$ បើ $x=0\Rightarrow u=1$ បើ $x=2\Rightarrow u=5$ គេបាន

	$=\frac{1}{8}u^4\Big\|_1^5=\frac{625}{8}-\frac{1}{8}=78$ ខ/ $\int_1^2\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}dx$ តាង $u=x^3+1\Rightarrow du=3x^2dx$ បើ $x=1\Rightarrow u=2$ បើ $x=2\Rightarrow u=9$ គេបាន $\int_1^2\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}dx=\int_2^9\frac{du}{u^2}$ $=(-\frac{1}{u})\Big\|_2^9=-\frac{1}{9}+\frac{1}{2}=\frac{7}{18}$	$\int_0^2 x(x^2+1)^3dx=\int_1^5\frac{1}{2}u^3du$ $=\frac{1}{8}u^4\Big\|_1^5=\frac{625}{8}-\frac{1}{8}=78$ ខ/ $\int_1^2\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}dx$ តាង $u=x^3+1\Rightarrow du=3x^2dx$ បើ $x=1\Rightarrow u=2$ បើ $x=2\Rightarrow u=9$ គេបាន $\int_1^2\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}dx=\int_2^9\frac{du}{u^2}$ $=(-\frac{1}{u})\Big\|_2^9=-\frac{1}{9}+\frac{1}{2}=\frac{7}{18}$
-ចែកសិស្សជាបួនក្រុមតូចៗឲ្យធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិគណនាអាំងតេក្រាល ក/ $\int_0^4\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx$ ខ/ $\int_1^2(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}})dx$ គ/ $\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ -តំណាងក្រុមឡើងរាយការណ៍	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី) ចម្លើយ៖ ក/ $\int_0^4\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx$ តាង $u=x^2+2x+2\Rightarrow du=2(x+1)dx$ បើ $x=0\Rightarrow u=2$ បើ $x=4\Rightarrow u=26$ គេបាន $\int_0^4\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx=\int_2^{26}\frac{du}{2u^3}$ $=(-\frac{1}{4u^2})\Big\|_2^{26}=-\frac{1}{2704}+\frac{1}{16}=\frac{168}{2704}$ ខ/ $\int_1^2(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}})dx$ តាង $u=x^2+4x+1\Rightarrow du=2(x+2)dx$ បើ $x=1\Rightarrow u=6$ បើ $x=2\Rightarrow u=13$ គេបាន $\int_1^2(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}})dx=\int_6^{13}\frac{du}{2\sqrt{u}}$ $=\sqrt{u}\Big\|_6^{13}=\sqrt{13}-\sqrt{6}$	-សិស្សឡើងគណនាលំហាត់ ក/ $\int_0^4\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx$ តាង $u=x^2+2x+2\Rightarrow du=2(x+1)dx$ បើ $x=0\Rightarrow u=2$ បើ $x=4\Rightarrow u=26$ គេបាន $\int_0^4\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx=\int_2^{26}\frac{du}{2u^3}$ $=(-\frac{1}{4u^2})\Big\|_2^{26}=-\frac{1}{2704}+\frac{1}{16}=\frac{168}{2704}$ ខ/ $\int_1^2(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}})dx$ តាង $u=x^2+4x+1\Rightarrow du=2(x+2)dx$ បើ $x=1\Rightarrow u=6$ បើ $x=2\Rightarrow u=13$ គេបាន $\int_1^2(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}})dx=\int_6^{13}\frac{du}{2\sqrt{u}}$ $=\sqrt{u}\Big\|_6^{13}=\sqrt{13}-\sqrt{6}$ គ/ $\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

	គ/ $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ តាង $u=\sqrt{x} \Rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ បើ $x=1 \Rightarrow u=1$ បើ $x=4 \Rightarrow u=2$ គេបាន $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2 2e^u du$ $=2e^u\Big\|_1^2=2e(e-1)$	តាង $u=\sqrt{x} \Rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ បើ $x=1 \Rightarrow u=1$ បើ $x=4 \Rightarrow u=2$ គេបាន $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2 2e^u du$ $=2e^u\Big\|_1^2=2e(e-1)$
-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ -ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី) លំហាត់៖ គណនាអាំងតេក្រាលនៅទំព័រទី១៣៩ លំហាត់ទី២ និងទី៤ ពី(ក)ដល់ (ជ)។	-សិស្សកត់លំហាត់ និងអនុវត្តតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៤....

មេរៀនទី...២... **អាំងតេក្រាលកំណត់**

- **មុខវិជ្ជា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)**
- **ជំពូកទី៤ : អាំងតេក្រាល**
- **មេរៀនទី២ : អាំងតេក្រាលកំណត់**
- **បង្រៀនដោយ : សាស្ត្រាចារ្យ** ....

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : សិស្សប្រាប់បានពីរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្អែកបានត្រឹមត្រូវតាមរយះការបង្ហាញរបស់គ្រូ។

-បំណិន : សិស្សអនុវត្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្អែកបានត្រឹមត្រូវតាមរយះឧទាហរណ៍របស់គ្រូ។

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីយកចិត្តទុកដាក់រៀនសូត្រតាមរយះការណែនាំរបស់គ្រូ។

II.ពេលវេលា: ...២...ម៉ោង ថ្ងៃ................ទី................ខែ.............ឆ្នាំ..........

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី.១៣៧.. ដល់ទំព័រទី..១៣៨..

-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-តារាងរូបមន្តគ្រឹះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ត្រួតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី) ចម្លើយះ	សិស្សឡើងគណនា

$\int_0^2 x(x^2+1)^3dx$	គណនា $\int_0^2 x(x^2+1)^3dx$ តាង $u=x^2+1\Rightarrow du=2xdx$ បើ $x=0\Rightarrow u=1$ បើ $x=2\Rightarrow u=5$ គេបាន $\int_0^2 x(x^2+1)^3dx=\int_1^5\frac{1}{2}u^3du$ $=\frac{x^4}{8}\Big\|_1^5=\frac{625}{8}-\frac{1}{8}=78$	តាង $u=x^2+1\Rightarrow du=2xdx$ បើ $x=0\Rightarrow u=1$ បើ $x=2\Rightarrow u=5$ គេបាន $\int_0^2 x(x^2+1)^3dx=\int_1^5\frac{1}{2}u^3du$ $=\frac{x^4}{8}\Big\|_1^5=\frac{625}{8}-\frac{1}{8}=78$
- គេអោយអនុគមន៍ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ (a,b) នោះអោយសិស្សរក $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ -គ្រូអោយក្រុមពិភាក្សាធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តខាងលើ -ឲ្យសិស្សអានប្រធានលំហាត់ ២ឬ៣ចប់ -អោយសិស្សធ្វើលំហាត់គំរូ	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី រយៈពេល៦០នាទី) **មេរៀនទី២: អាំងតេក្រាលកំណត់** ៤- រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក អនុគមន៍ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ (a,b) នោះ $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ $=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx$ សម្រាយបញ្ជាក់៖ $[f(x).g(x)]=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$ $\int_a^b[f(x).g(x)]'dx=\int_a^b f(x).g'(x)dx+\int_a^b g'(x)f(x)dx$ $\Leftrightarrow[f(x)g(x)]_a^b=\int_a^b f(x).g'(x)dx+\int_a^b g'(x)f(x)dx$ $\Rightarrow\int_a^b f(x).g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b g'(x)f(x)dx$ ៥- អនុវត្តន៍ +ក្រុមហ៊ុនលក់រថយន្តមួយទទួលប្រាក់ចំណេញតាមបំរែបំរួលនៃរថយន្តដែលបានលក់។ អត្រាប្រាក់ចំណេញបន្ថែម កំណត់បានអនុគមន៍ $P(x)=30-0.28x$ ដែល x ជាចំនួនរថយន្ត និង $P(x)$ គិត ជាសែនរៀល។ រកបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណេញពីការលក់រថយន្តចាប់ពីចំនួន10 ទៅ30 គ្រឿង។	សង្កេតលើរូបមន្ត $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ $=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx$ -ក្រុមពិភាក្សាធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត -សិស្សម្នាក់ៗអានលំហាត់២ ឬបីចប់ដោយប្រុងប្រយ័ត្ន

-ឲ្យសិស្សពិភាក្សាធ្វើលំហាត់ តាមក្រុម	ចម្លើយ៖ បម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណេញពីការ លក់រថយន្តចាប់ពីចំនួន10 ទៅ30 គ្រឿងអាចគណនាតាមអាំងតេក្រាល កំណត់នៃអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ បន្ថែម $P(x)=30-0.28x$ពី10 ទៅ30 គេបាន $\int_{10}^{30}P(x)dx=\int_{10}^{30}(30-0.28x)dx$ $=[30x-\frac{0.28x^2}{2}]_{10}^{30}=(900-0.28\times450)-(300-0.28\times50)$ $=488$ ដូចនេះ បម្របម្រួលនៃប្រាក់ចំណេញ ពីការលក់រថយន្តចាប់ពីចំនួន10 ទៅ30 គ្រឿងគឺ 48 800 000រៀល	សិស្សពិភាក្សាគ្នាតាមក្រុមធ្វើ លំហាត់យ៉ាងសកម្មដោយមាន គ្រូជួយពន្យល់នូវចម្ងល់
-គ្រូឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់ $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx$	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី) ចម្លើយ៖ $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx$ តាង $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$ គេបាន $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$ $=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0+[\cos]_0^{\frac{\pi}{2}}$ $=\frac{\pi}{2}+0+0-1=\frac{\pi}{2}-1$	-សិស្សឡើងគណនាលំហាត់ $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx$ តាង $f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$ គេបាន $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$ $=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0+[\cos]_0^{\frac{\pi}{2}}$ $=\frac{\pi}{2}+0+0-1=\frac{\pi}{2}-1$
-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ -ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀន ឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី) លំហាត់៖ គណនាអាំងតេក្រាល $\int_0^4 xe^x dx=?$	-សិស្សកត់លំហាត់ និងអនុវត្តតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- មុខវិជ្ជា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)
- ជំពូកទី៥ : ស្ថិតិពីរអថេរ
- មេរៀនទី១ : ស្ថិតិមានពីរអថេរ
- បង្រៀនដោយ ៖ សាស្ត្រាចារ្យ ....

I.**វត្ថុបំណងនៃមេរៀន**

-ចំណេះដឹង : សិស្សកំណត់និយមន័យនៃស្ថិតិមានពីអថេរបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍។

-ចំណិន : សិស្សបកស្រាយបាន ស្ថិតិមានពីរអថេរជាចំណុចតាមរយៈការណែនាំរបស់គ្រូ។

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីយកចិត្តទុកដាក់រៀនសូត្រតាមរយះការណែនាំរបស់គ្រូ។

II. **ខ្លឹមសារមេរៀន** : ពេលវេលា: ...២...ម៉ោង ថ្ងៃ.........ទី...ខែ.............ឆ្នាំ..........

១,សញ្ញាណស្ថិតិមានពីរអថេរ

២,បំណកស្រាយស្ថិតិមានពីរអថេរតាមក្រាប

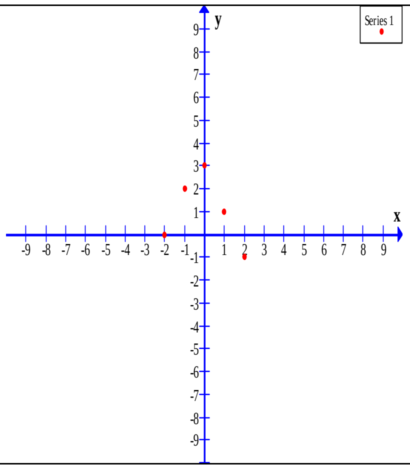
III.**សម្ភារៈឧទេស**

-ស . ស :ទំព័រទី.១៤៦ ដល់ទំព័រទី១៥០

-ស . គ : ទំព័រទី១៤៦ ដល់ទំព័រទី១៥០

IV.**ដំណើកនាំមេរៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ឲ្យសិស្សឡើងដៅចំណុចទិន្នន័យលើក្តារខៀន -គេមានតារាងទិន្នន័យ	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី)	-សិស្សឡើងដៅចំណុច

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>x_i</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>-1</td></tr>
</table>
-ចូរដៅចំណុចតាងទិន្នន័យខាងខាងលើក្នុងតម្រុយកែង
</td>
<td></td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>-ដាក់ឧទាហរណ៍ណែនាំសិស្សឱ្យសង្កេតតារាងទិន្នន័យ

-ចូរបកស្រាយទិន្នន័យក្នុងតារាង</td>
<td>
<u>ជំហានទី៣</u>
(មេរៀនថ្មី រយៈពេល៦០នាទី)
មេរៀនទី១:
ស្ថិតិមានពីរអថេរ
១.សញ្ញាណស្ថិតិមានពីរអថេរ
១.១ ឧទាហរណ៍
ឧទាហរណ៍: តារាងខាងក្រោមជាតារាងចំនួនសៀវភៅដែលរោងពុម្ពបានបោះពុម្ពទៅតាមឆ្នាំនិមួយៗ(ចំនួនសៀវភៅជាម៉ឺនក្បាល)
<table>
<tr><td>ឆ្នាំ</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>ចំនួន ស.ភ</td><td>48</td><td>48.4</td><td>49.5</td><td>48.9</td></tr>
</table>
-ការបកស្រាយតារាងទិន្នន័យ
-ឆ្នាំទី១ រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 48ម៉ឺនក្បាល
-ឆ្នាំទី២ រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 48.4 ម៉ឺនក្បាល
-ឆ្នាំទី៣ រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 49.5 ម៉ឺនក្បាល
-ឆ្នាំទី4 រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 48.9 ម៉ឺនក្បាល
</td>
<td>-សង្កេតឧទាហរណ៍

-បកស្រាយទិន្នន័យ
-ឆ្នាំទី១
រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 48ម៉ឺនក្បាល
-ឆ្នាំទី២
រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 48.4 ម៉ឺនក្បាល
-ឆ្នាំទី៣
រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 49.5 ម៉ឺនក្បាល</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>-ប្រាប់សិស្សថា ចំនួនសៀវភៅដែលបានបោះពុម្ពមានទំនាក់ទំនង និងឆ្នាំបោះពុម្ព។ ការសិក្សាបែបនេះហៅថា ស្ថិតិមានពីរអថេរ។</td>
<td>-តាមតារាងទិន្នន័យ ចំនួនសៀវភៅដែលបានបោះពុម្ពមានទំនាក់ទំនង និងឆ្នាំបោះពុម្ព។ ការសិក្សាបែបនេះហៅថា ស្ថិតិមានពីរអថេរ។
-លំហាត់គំរូ ក្នុងបណ្តាតារាងខាងក្រោមតើមួយណាជាស្ថិតិមានពីរអថេរ។
ក. ពិន្ទុសិស្សក្នុងថ្នាក់រៀនមួយ
<table>
<tr><td>ពិន្ទុ</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>ចំនួនសិស្ស</td><td>5</td><td>9</td><td>12</td><td>7</td><td>4</td></tr>
</table>
ខ. ប្រាក់ចំណេញរបស់ក្រុមហ៊ុនមួយតាមឆ្នាំនិមួយៗ (គិតជាលានរៀល)
<table>
<tr><td>ឆ្នាំ</td><td>2005</td><td>2006</td><td>2007</td><td>2008</td></tr>
<tr><td>ប្រាក់ចំណេញ</td><td>10</td><td>12</td><td>11</td><td>15</td></tr>
</table>
គ.ចំនួនកូននៅក្នុងគ្រួសារ និងចំនួនគ្រួសារ
<table>
<tr><td>ចំនួនកូន</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>ចំនួនគ្រួសារ</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>8</td><td>4</td></tr>
</table>
-ចម្លើយ
-តារាងទិន្នន័យ ខ ជាតារាងស្ថិតិមានពីរអថេរ ពីព្រោះប្រាក់ចំណេញមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងឆ្នាំនិមួយៗ។</td>
<td>-ឆ្នាំទី4 រោងពុម្ពបានបោះពុម្ពសៀវភៅចំនួន 48.9 ម៉ឺនក្បាល
-សិស្សស្តាប់ និងសង្កេត

តារាងទិន្នន័យ ខ ជាតារាងស្ថិតិមានពីរអថេរ ពីព្រោះ ប្រាក់ចំណេញមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងឆ្នាំនិមួយៗ។
-ចំណែកតារាងទិន្នន័យ ក និង គ</td>
</tr>
</table>

-ចែកក្រដាសលំហាត់ប្រត្តិបត្តិឱ្យសិស្សដោះស្រាយតាមក្រុម

-ដាក់លំហាត់គំរូណែនាំសិស្សពិភាក្សាគ្នា បកស្រាយ

-ចំណែកតារាងទិន្នន័យ ក និង គ ជាស្ថិតិមានមួយអថេរ។

១.២ ,ចំណកស្រាយស្ថិតិមានពីរអថេរតាមក្រាប

<u>លំហាត់គំរូ</u> ៖ ការកត់ត្រាទុកនៅក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយសម្រាប់រយៈពេល ៥ ឆ្នាំចុងក្រោយនេះបានបង្ហាញពីទំនាក់ទំនងរវាងចំនួនឯកតានៃផលិតផលដែលបានលក់(គិតជាពាន់ឯកតា) និងតម្លៃនៃផលិតផលគិតជាពាន់រៀល។

Pតម្លៃ	8.80	8	7.50	6.90	6.20
Xចំនួនឯកតា	3.8	5.2	7.3	8	9.6

-ចូរបកស្រាយស្ថិតិមានពីរអថេរខាងលើជាចំណុច។

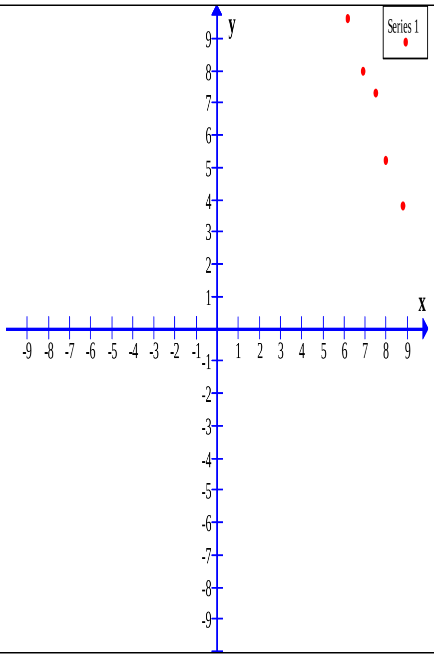
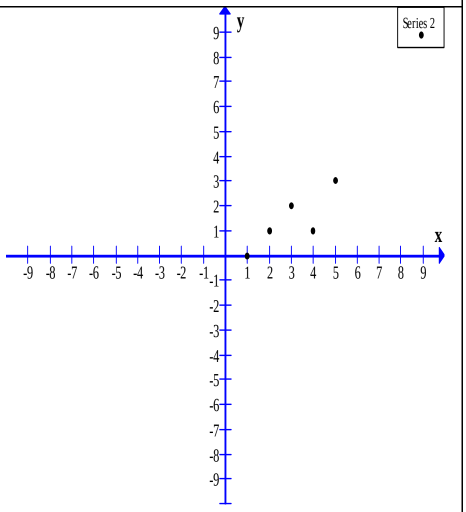
ចម្លើយ

នៅក្នុងតម្រុយកែងមួយ គេក្រិតតម្លៃលក់នៃផលិតផលនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយចំនួនឯកតានៃផលិតផលនោលើអ័ក្សអរដោនេ។

គេបាន

ជាស្ថិតិមានមួយអថេរ។

-ដោះស្រាយ

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>-ឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់នៅលើក្តារខៀន</td>
<td><u>ជំហានទី៤</u>
(ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី)
-គេឱ្យតារាងទិន្នន័យ
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr>
</table>
-ចូរបកស្រាយទិន្នន័យខាងលើជាចំនុច</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ
-ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់</td>
<td><u>ជំហានទី៥</u>
(កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី)</td>
<td>-សិស្សកត់លំហាត់ និងអនុវត្តតាម</td>
</tr>
</table>

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- មុខវិជ្ជា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)
- ជំពូកទី៥ : ស្ថិតិពីរអថេរ
- មេរៀនទី១ : ស្ថិតិមានពីរអថេរ

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : សិស្សប្រាប់បានពីរចំណុចមធ្យមបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍។

-បំណិន : សិស្សរកបានសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចណាមួយ និងចំណុចមនុស្សតាមរយៈលំហាត់គំរូបានត្រឹមត្រូវ។

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយលំហាត់ដោយយកចិត្តទុកដាក់ខ្ពស់។

II. ខ្លឹមសារមេរៀន : ពេលវេលា: ...២...ម៉ោង ថ្ងៃ.........ទី...ខែ.............ឆ្នាំ...........

១.៣ ចំណុចមធ្យម

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី.១៥០ ដល់ទំព័រទី១៥២

-ស . គ : ទំព័រទី១៥០ ដល់ទំព័រទី១៥២

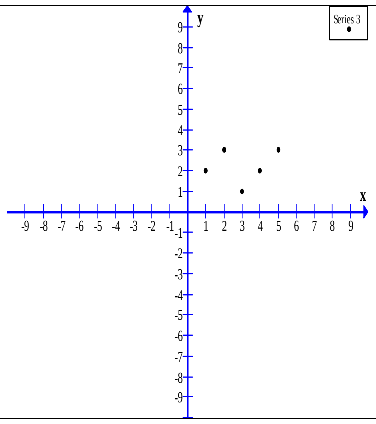
IV.ដំណើរការនាំមេរៀន

<table>
<tr><th>សកម្មភាពគ្រូ</th><th>ខ្លឹមសាមេរៀន</th><th>សកម្មភាពសិស្ស</th></tr>
<tr><td>-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់</td><td><u>ជំហានទី១</u>
(រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)</td><td>-
ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍</td></tr>
<tr><td>-ដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សធ្វើ
គេមានតារាងទិន្នន័យ
<table><tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y_i</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>

ក.សរសេរទិន្នន័យខាងលើជាគូ</td><td><u>ជំហានទី២</u>
(រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី)</td><td>-ចម្លើយ
ក. $(1,2),(2,3),(3,1),(4,3),(5,3)$
ខ. ដៅចំណុច</td></tr>
</table>

មានលំដាប់

ខ. បកស្រាយស្ថិតិមានពីរអថេរ ដោយចំណុច



-ដាក់ឧទាហរណ៍ ណែនាំសិស្ស រកចំនុចមធ្យម $M\left(\bar{x},\bar{y}\right)$

ជំហានទី៣

(មេរៀនថ្មី រយះពេល៦០នាទី)

មេរៀនទី១:
ស្ថិតិមានពីរអថេរ

១.៣ ចំណុចមធ្យម

-ឧទាហរណ៍ បើគេតាង x_i ជាអថេរនៃឆ្នាំបោះពុម្ព ហើយ y_i ជាចំនួនសៀវភៅដែលបោះពុម្ពនោះគេបានតារាងទិន្នន័យ

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	48	48.4	49.5	48.9	49.3	48.7

-បើតាង $M\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ ជាមធ្យមនៃចំនុចទាំង ៦ដែល $\bar{x}$ និង $\bar{y}$ ជាមធ្យមរៀងគ្នានៃអថេរ x_i និង y_i

-តើ $\bar{x}$ =?

-តើ $\bar{y}$ =?

-តើចំណុចមធ្យម M = ?

-តាង $M\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ ជាចំនុចមធ្យមនៃចំនុចទាំង ៦ ដែល $\bar{x}$ និង $\bar{y}$ ជាមធ្យមរៀងគ្នានៃអថេរ x_i និង y_i

គេបាន $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$

$$\bar{y}=\frac{48+48.4+49.5+48.9+49.3+48.7}{6}$$

$$=48.8$$

ដូចនេះ ចំណុចមធ្យមកំណត់ដោយ

$M\left(3.5{,}48.8\right)$

-លំហាត់គំរូ តារាងខាងក្រោមជាតារាងស្ថិតិមានពីរអថេរ

គេបាន

$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$

$\bar{y}=\frac{48+48.4+49.5+48.9}{6}$

$\frac{49.3+47.7}{6}=48.8$

ដូចនេះ:

ចំណុចមធ្យមកំណត់ដោយ

$M\left(3.5{,}48.8\right)$

x_i	2	4	6	8	9	10
y_i	7	10	13	15	20	28

ក. បកស្រាយស្ថិតិមានពីរអថេរខាងលើជាចំណុច

ខ. រកចំណុចមធ្យម M

គ. រកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច M និងចំណុច $(6\,,13)$

-តើប្អូនដៅចំណុចដែលមានកូអរដោនេដូចម្តេច?

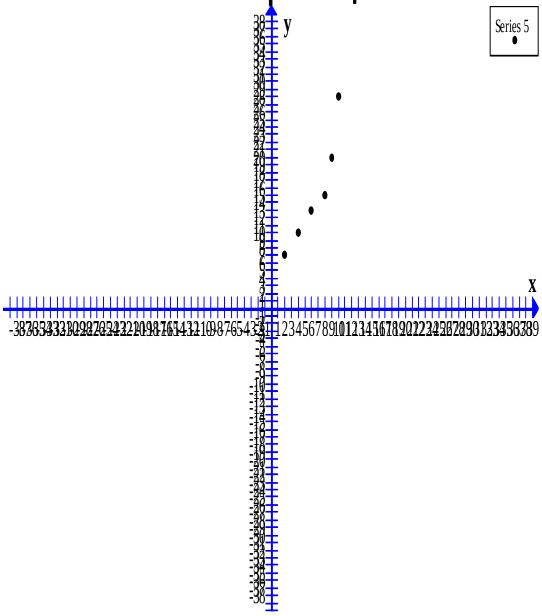
-ចូរប្អូនដៅចំណុចលើអ័ក្ស

ចម្លើយ

ក. ដៅចំណុចដែលមានកូអរដោនេ

$(2\,,7)\,,(4\,,10)\,,(6\,,13)\,,(8\,,15)$

$(9\,,20)\,,(10\,,28)$ ក្នុងតម្រុយកែង



-តើចំណុចមធ្យមកំណត់ដូចម្តេច?

-តើ $\bar{x}$ = ?

-តើ $\bar{y}$ = ?

-តើគេបាន M ?

ខ. ចំណុចមធ្យមកំណត់ដោយ $M\left(\bar{x},\bar{y}\right)$

គេបាន

$$\bar{x}=\frac{2+4+6+8+9+10}{6}=6.5$$

$$\bar{y}=\frac{7+10+13+15+20+28}{6}=15.5$$

ដូចនេះ $M\ (6.5\,,15.5\ )$

-តើសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $M\ (6.5\ ,15.5\ )$ និងចំណុច $(6\ ,13)$ កំណត់ដូចម្តេច? -ចូរប្អូនរកតម្លៃ y ? -តើ $y=?$ -លំហាត់ -ចែកសន្លឹកលំហាត់ប្រត្តិបត្តិឱ្យសិស្សធ្វើតាមក្រុម	គ. សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $M\ (6.5\ ,15.5\ )$ និងចំណុច $(6\ ,13)$ -សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $M\ (6.5\ ,15.5\ )$ និងចំណុច $(6\ ,13)$ កំណត់ដោយ $\frac{y-13}{x-6}=\frac{13-15.5}{6-6.5}=\frac{-2.5}{-0.5}=5$ $\Rightarrow y-13=5(x-6)$ $y=5x-17$ ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់គឺ $y=5x-17$	គ. សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $M\ (6.5\ ,15.5\ )$ និងចំណុច $(6\ ,13)$ -សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $M\ (6.5\ ,15.5\ )$ និងចំណុច $(6\ ,13)$ កំណត់ដោយ $\frac{y-13}{x-6}=\frac{13-15.5}{6-6.5}=\frac{-2.5}{-0.5}=5$ $\Rightarrow y-13=5(x-6)$ $y=5x-17$ ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់គឺ $y=5x-17$ -ដោះស្រាយ

<table>
<tr>
<td>
-ដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សឡើងធ្វើ
-គេមានតារាងនៃស្ថិតិពីរអថេរ ដូចខាងក្រោម
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>2</td><td>2,5</td><td>3,5</td><td>4</td><td>6</td></tr>
</table>
ក. រកចំណុចមធ្យម
ខ.រកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមនិង $(3\ ,\ 4)$
</td>
<td>
ជំហានទី៤
(ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី)
</td>
<td>
ចម្លើយ
-រកចំណុចមធ្យម $M\left(\overline{x},\overline{y}\right)$
$\overline{x}=\dfrac{0+1+2+3+4}{5}=2$
$\overline{y}=\dfrac{2+2.5+3.5+4+6}{5}$
$=3.6$
ដូចនេះ $M(2\ ,\ 3.6)$
ខ.សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $M\ (2\ ,\ 3.6\ )$ និងចំណុច $(3\ ,\ 4)$ កំណត់ដោយ
$\dfrac{y-4}{x-3}=\dfrac{4-2}{4-3.6}=\dfrac{2}{0.4}=5$
$\Rightarrow\ y-4=5(x-3)$
$y=5x-11$
ដូចនេះ $y=5x-11$
</td>
</tr>
<tr>
<td>
-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ
-ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់
</td>
<td>
<u>ជំហានទី៥</u>
(កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី)
</td>
<td>
-សិស្សកត់លំហាត់ និងអនុវត្តតាម
</td>
</tr>
</table>

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- **មុខវិជ្ជា** : **គណិតវិទ្យា** **ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)**
- **ជំពូកទី៥** : **ស្ថិតិពីរអថេរ**
- **មេរៀនទី១** : **ស្ថិតិមានពីរអថេរ**

I.**វត្ថុបំណងនៃមេរៀន**

-ចំណេះដឹង : សិស្សកំណត់និយមន័យនៃបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍។

-ចំណិន : សិស្សរកបានសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែតាមរយៈលំហាត់បានត្រឹមត្រូវ។

-ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីយកចិត្តទុកដាក់រៀនសូត្រតាមរយះការណែនាំរបស់គ្រូ។

II. **ខ្លឹមសារមេរៀន** : ពេលវេលា: ...២...ម៉ោង ថ្ងៃ.........ទី...ខែ..............ឆ្នាំ..........

២.សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

២.១ បន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

២.២ សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

III.**សម្ភារៈឧទេស**

-ស . ស :ទំព័រទី.១៤៦ ដល់ទំព័រទី១៥០

-ស . គ : ទំព័រទី១៤៦ ដល់ទំព័រទី១៥០

-សន្លឹកកម្រង់លំហាត់ប្រត្តិបត្តិ

IV.**ដំណើកនាំមេរៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-តើសមីការបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី)	-មានរាង $y=a\left(x-x_0\right)+y_0$ -រកចំណុចមធ្យម $M\left(\overline{x},\overline{y}\right)$

ហើយកាត់តាម (x_0 , y_0) មានរាងដូចម្ដេច ?

-គេមានតារាងនៃស្ថិតិពីរអថេរ ដូចខាងក្រោម

x_i	0	2	3	4	6
y_i	7	15	10	20	8

ក. រកចំណុចមធ្យម

ខ.រកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមនិង $(5 , 14)$

$$\bar{x} = \frac{0+2+3+4+6}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{7+15+10+20+8}{5}$$

$=12$

ដូចនេះ $M(3 , 12)$

ខ.សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $M(3 , 12)$ និងចំណុច $(5 , 14)$ គេបាន

$$\frac{y-14}{x-3} = \frac{14-12}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow y - 14 = x - 3$$

$$y = x + 11$$

-ដាក់ឧទាហរណ៍ ណែនាំសិស្សបលស្រាយស្ថិតិមានពីរអថេរជាចំណុច

<u>ជំហានទី៣</u>

(មេរៀនថ្មី រយះពេល៦០នាទី)

មេរៀនទី១:

ស្ថិតិមានពីរអថេរ

២.សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

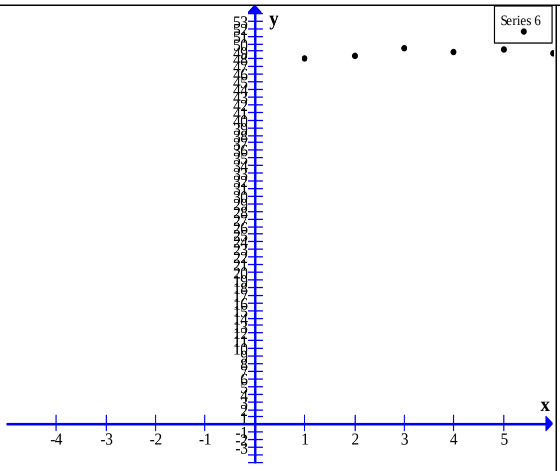
២.១ បន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

-ឧទាហរណ៍ គេមានតារាងស្ថិតិពីរអថេរខាងក្រោម

ឆ្នាំបោះពុម្ព	1	2	3	4	5	6
ចំនួន ស.ភ (ជាម៉ឺនក្បាល)	48	48,4	49,5	48,9	49,3	48,7

-ឱ្យសិស្សឡើងដៅចំណុច

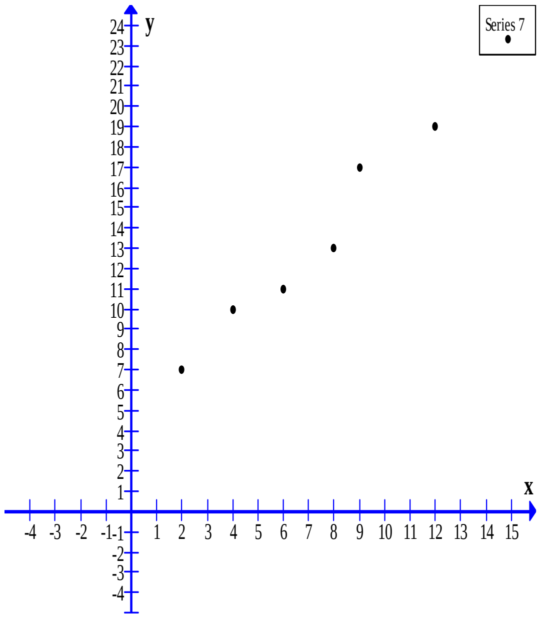
-បកស្រាយទិន្នន័យពីរអថេរជាចំណុច

-ចូរប្អូនសង្កេតចំណុចទាំង៦ ហើយសង់បន្ទាត់ d មួយដែល នៅជិតចំណុចទាំងនោះបំផុត -ប្រាប់សិស្សថា បន្ទាត់d ហៅថា បន្ទា បន្ទាត់នេះអាចឱ្យគេធ្វើការប៉ាន់ ស្មាន បាននូវចំនួនសៀវភៅដែលនឹង ត្រូវបោះពុម្ពនៅពេលខាងមុខ។ ត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ។ -ទាញជាទូទៅឱ្យសិស្សសង្កេត	 -តាមក្រាបគេសង្កេតឃើញថា ចំណុច ទាំង ៦នៅរាយប៉ាយមិនស្ថិតនៅលើ បន្ទាត់តែមួយ។ឥឡូវគេចង់សង់បន្ទាត់ D មួយដែលស្ថិតនៅជិតបំផុតទៅនឹង ចំណុចទាំង ៦។ គេត្រូវរំកិលបន្ទាត់ d លៃយ៉ាងណាឱ្យចម្ងាយទាំងនោះទៅ បន្ទាត់មានប្រវែងតូចបំផុត។ បន្ទាត់ d ហៅថាបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេ អ៊ែ។ បន្ទាត់ដែលសង់បានអាចឱ្យគេធ្វើការប៉ា ន់ស្មាន បាននូវចំនួនសៀវភៅដែលនឹង ត្រូវបោះពុម្ពនៅពេលខាងមុខ។ ២.២ សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ -ជាទូទៅ ដើម្បីរក សមីការបន្ទាត់ តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែគេត្រូវរកចំណុច មធ្យមពីរ - តម្រៀបចំណុចទិន្នន័យពីរអាប់ស៊ីស តូចទៅអាប់ស៊ីសធំ។ -ចែកចំណុចទិន្នន័យជាពីរក្រុមស្មើគ្នា	-សង្កេត -សង្កេត

	បើចំណុចទិន្នន័យជាចំនួនគូ។ តែបើចំណុចទិន្នន័យជាចំនួនសេសគេចែកចំណុចទាំងនោះជាពីរក្រុមមិនស្មើគ្នា។ -រកចំណុចមធ្យមនៃក្រុមនីមួយៗ -សរសេរសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរ។	
-ដាក់លំហាត់គំរូណែនាំសិស្សដោះស្រាយ	លំហាត់គំរូ ទិន្នន័យក្នុងតារាងខាងក្រោមជាស្ថិតិមានពីរអថេរ	

x_i	2	4	6	8	9
y_i	7	10	11	13	17

	ក. ដៅចំណុចទិន្នន័យក្នុងតម្រុយកែង ខ. ចែកចំណុចទិន្នន័យជាពីរក្រុមរួចសរសេរសមីការដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមនៃក្រុមទាំងពីរ។	-ដៅចំណុច
-ចូរប្អូនដៅចំណុចលើអ័ក្ស	ចម្លើយ ក. ដៅចំណុចទិន្នន័យ	



-តើគេចែកទិន្នន័យជាប៉ុន្មានក្រុម?អ្វីខ្លះ?	ខ. ចែកចំណុចទិន្នជាពីក្រុម	
- បើតាង $M_1\left(\overline{x_1}\,,\overline{y_1}\right)$ ជាមធ្យម	-ក្រុមទី១ $(2\,,7),(4\,,10),(6,11),(8\,,13)$	

ចំណុចនៃក្រុមទី១ -តើ $\overline{x_1}$ =? -តើ $\overline{y_1}$ =? -តើគេបាន M_1 = ? - បើតាង $M_2\left(\overline{x_2}\ ,\overline{y_2}\right)$ ជាមធ្យម ចំណុចនៃក្រុមទី១ -តើ $\overline{x_2}$ =? -តើ $\overline{y_2}$ =? -តើគេបាន M_2 = ? -តើសមីការដែលកាត់តាម ចំណុច M_1 និង M_2 មានរាងដូច ម្ដេច? -ចែកស្លឹកលំហាត់ប្រត្តិបត្តិ ឱ្យសិស្សដោះស្រាយតាមក្រុម	-ក្រុមទី២ $(9\ ,17),(12\ ,19),(14\ ,23)$ តាង $M_1\left(\overline{x_1}\ ,\overline{y_1}\right)$ ជាមធ្យមចំណុចនៃក្រុមទី១ ដែល $\overline{X_1}=\frac{2+4+6+8}{4}=5$ $\overline{Y_1}=\frac{7+10+11+13}{4}=10.25$ ដូចនេះ $M_1\ (5\ ,10.25)$ តាង $M_2\left(\overline{x_2}\ ,\overline{y_2}\right)$ ជាមធ្យមចំណុចនៃក្រុមទី២ ដែល $\overline{X_2}=\frac{9+12+14}{3}=11.67$ $\overline{Y_2}=\frac{17+19+23}{3}=19.67$ ដូចនេះ $M_2\ (11.67\ ,19.67)$ សមីការដែលកាត់តាមចំណុច M_1 និង M_2 គឺ $\frac{y-10.25}{x-5}=\frac{10.25-19.67}{5-11.67}$ $y-10.25=1.41(x-5)$ $\Rightarrow y1.41x-3.2$ ដូចនេះសមីការដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរគឺ $y=1.41x-3.2$	 -ធ្វើតាមក្រុម

-ឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់ -គេមានតារាងស្ថិតិមានពីរអថេរ x_i: -2, -1, 0, 1, 2, 3 y_i: 2, -2, 1, 0, 3, 2 ក. រកចំណុចមធ្យម M_1 និង M_2 ខ. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតតម្រង់លីនេអ៊ែដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរ	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី)	ចម្លើយ . ចែកចំណុចទិន្នជាពីក្រុម -ក្រុមទី១ $(-2\ ,\ 2),(-1\ ,-2),(0,\ 1)$ -ក្រុមទី២ $(1,0\ ),(2\ ,3),(3\ ,2)$ តាង $M_1(\overline{x_1}\ ,\overline{y_1})$ ជាមធ្យមចំណុចនៃក្រុមទី១ ដែល $\overline{X_1}=\frac{-2-1+0}{3}=-1$ $\overline{Y_1}=\frac{2-2+1}{3}=0.33$ ដូចនេះ $M_1\ (-1\ ,\ 0.33)$ តាង $M_2(\overline{x_2}\ ,\overline{y_2})$ ជាមធ្យមចំណុចនៃក្រុមទី២ ដែល $\overline{X_2}=\frac{1+2+3}{3}=2$ $\overline{Y_2}=\frac{0+3+2}{3}=1.67$ ដូចនេះ $M_2\ (2\ ,1.67)$ ខ.សមីការដែលកាត់តាមចំណុច $M_1(-1\ ,\ 0.33)$ និង $M_2(2\ ,1.67)$ គឺ $\frac{y-0.33}{x+1}=\frac{1.67-0.33}{2+1}$ $y-0.33=0.45(x+1)$ $\Rightarrow y=\ 0.45x+0.78$ ដូចនេះសមីការដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរគឺ $y=0.45x+0.78$
	<u>ជំហានទី៥</u>	

-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ -ប្រាប់សិស្សឲ្យ	(កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី)	-សិស្សកត់លំហាត់ និងអនុវត្តតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ៥ ស្ថិតិពីរអថេរ

មេរៀនទី ២ សមីការបន្ទាត់តំរែតម្រង់លីនេអ៊ែ

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន: ក្រោយពេលរៀនមេរៀននេះចប់សិស្សអាច ៖

- ចំណេះដឹង : បង្ហាញបានពីទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍
- បំណិន : កំណត់បានពីទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ
- ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II. ពេលវេលា ០២ម៉ោង

III. សម្ភារៈឧបទេស

- សៀវភៅសិស្ស :ទំព័រទី ១៥៨ ដល់ទំព័រទី ១៥៩
- សៀវភៅគ្រូ : ទំព័រទី ១៥៨ ដល់ទំព័រទី ១៥៩

IV.ខ្លឹមសារមេរៀន

១. ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែ

IV. ដំណឹកនាំមេរៀន

<table>
<tr><th>សកម្មភាពគ្រូ</th><th>ខ្លឹមសាមេរៀន</th><th>សកម្មភាពសិស្ស</th></tr>
<tr><td>-ពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ</td><td><u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់)</td><td>-ណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍</td></tr>
<tr><td>- បង្ហាញទិន្នន័យនៃស្ថិតិមានពីរអថេរ
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table>
រំលឹកពីជំហានបន្តបន្ទាប់នៃការដៅចំណុចទិន្នន័យ និង ការកំណត់សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចមធ្យមទាំងពីរ។</td><td><u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់)</td><td>- ដៅចំណុច

- ចែកទិន្នន័យជាក្រុម
- ក្រុមទី១ $(0,2),(1,1),(2,3)$
- ក្រុមទី២ $(3,4),(4,3),(5,4)$
- រកចំណុចមធ្យមនៃក្រុមនីមួយ
ក្រុមទី១ $M_1\left(\overline{x_1},\overline{y_1}\right)$</td></tr>
</table>

$\overline{x_1} = \frac{0+1+2}{3} = 1$

$\overline{y_1} = \frac{2+1+3}{3} = 2$

ដូចនេះ $M_1(1,2)$ ។

ក្រុមទី២ $M_2\left(\overline{x_2}, \overline{y_2}\right)$

$\overline{x_2} = \frac{3+4+5}{3} = 4$

$\overline{y_2} = \frac{4+3+4}{3} = 3.6$

ដូចនេះ $M_2(4, 3.6)$

- សមីការបន្ទាត់តាមចំណុច M_1 និង M_2

$\frac{y-2}{x-1} = \frac{3.6-2}{4-1}$

$\frac{y-2}{x-1} = \frac{1.6}{3}$

$3y - 6 = 1.6x - 1.6$

$3y = 1.6 - 1.6 + 6$

$y = 0.53x + 1.46$

ដូចនេះ $y = 0.53x + 1.46$

<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី)

មេរៀនទី២ សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

១. ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែ

- ដាក់ឧទាហរណ៍

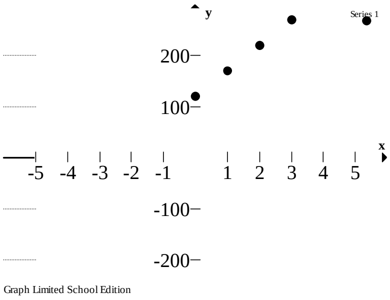
ឧទាហរណ៍ ក្រុមហ៊ុនមួយបានកំណត់ប្រាក់បៀវត្សសម្រាប់បុគ្គលិកទៅតាមចំនួនឆ្នាំនៃអតីតភាពដែលបានបម្រើការងារក្នុងក្រុមហ៊ុន ។

- កត់ត្រានិងសង្កេត

x_1	0	1	2	3
y_1	120	170	220	270

- ឲ្យសិស្សដៅចំណុចទាំងបី

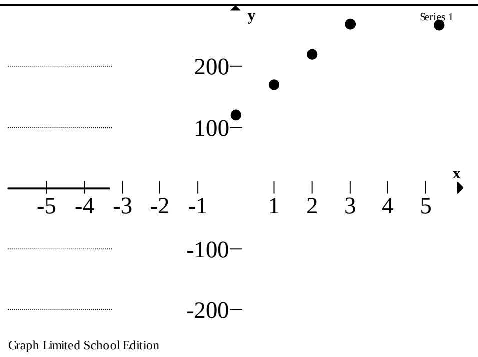
• ដៅចំណុច $(0,120), (1,170)$, $(2,220)$ និង $(3,270)$



<table>
<tr>
<td>
- បញ្ជាក់ប្រាប់សិស្សដូចមានក្នុងខ្លឹមសារមេរៀន

- ឲ្យសិស្សទាញជាទូទៅ

- ដាក់លំហាត់គំរូនិងណែនាំឲ្យសិស្សធ្វើ

-
</td>
<td>


តាមផលធៀប $\frac{170-120}{1-0}=\frac{220-170}{2-1}$ នេះបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចំណុចទាំងអស់ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយដែលមានប្រាប់ទិសស្មើនឹង 50 ហើយមានសមីការ $\frac{y-120}{x-0}=50$
$\Rightarrow y=50x+120$
ដូចនេះសមីការ $y=50x+120$ ជាទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដែលហៅថា(ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែ)។
ជាទូទៅ សមីការ $y=ax+b$ ជាទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដែលហៅថា (ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែ)។
លំហាត់គំរូ បំពេញចន្លោះខាងក្រោម រួចរកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចទិន្នន័យទាំងនេះបើមាន
ក.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>-1</td><td>5</td><td>2</td><td></td><td>17</td></tr>
</table>
ខ.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>7</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>9</td><td></td><td>6</td><td>2</td><td>7</td></tr>
</table>
</td>
<td>
- សង្កេត

ជាទូទៅ សមីការ $y=ax+b$ ជាទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដែលហៅថា(ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែ)។
ចម្លើយ
ក. ចំណុចទិន្នន័យ $(1,-1)$, $(3,3),(2,2),(7,17)$
គេបានផលធៀប
$\frac{5+1}{3-1}=3,\frac{2-5}{2-3}=3$ និង $\frac{17-2}{7-2}=3$
ដោយផលធៀបស្មើនិង 3នោះចំណុចទាំងអស់នេះស្ថិតនៅលើបន្ទាំត់តែមួយ
គេបាន $\frac{y+1}{x-1}=3\Rightarrow y=3x-4$
- បើ $x=6\Rightarrow y=3\times 6-4=14$
ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចទាំងនោះគឺ
$y=3x-4$
ខ. ចំណុចទិន្នន័យ $(7,9),(4,6)$ $(3,2),(6,7)$
គេបានផលធៀប $\frac{6-9}{4-7}=1$
$\frac{2-6}{3-4}=4$
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>ដោយ $\frac{6-9}{4-7}\neq\frac{2-6}{3-4}$
គេអាចសន្និដ្ឋានថាចំណុចទាំង៤ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយទេ។ ប៉ុន្តែគេត្រូវការបន្ទាត់ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃ y ទៅតាមតម្លៃ x</td>
</tr>
<tr>
<td>- ចូរបំពេញចន្លោះខាងក្រោម
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>y_i</td><td>-1</td><td>1</td><td></td><td>5</td><td>7</td></tr>
</table>
</td>
<td><u>ជំហានទី ៤</u>(ពង្រឹងពុទ្ធិ)</td>
<td>- គេបានផលធៀប $\frac{1+1}{1-0}=2$
$\frac{5-1}{3-1}=2,\frac{7-5}{4-3}=2$
- ដោយផលធៀបមានតម្លៃស្មើនិង២ថេរ ដូចនេះចំណុចទាំងអស់ស្ថិតលើបន្ទាត់តែមួយ។
គេបាន $\frac{y+1}{x-0}=2\Rightarrow y=2x-1$
បើ $x=2\Rightarrow y=2\times2-1=3$
ដូចនេះ ចន្លោះដែលត្រូវបំពេញគឺ $y=3$</td>
</tr>
<tr>
<td>- ពេលត្រឡប់ទៅផ្ទះវិញប្អូនត្រូវធ្វើលំហាត់ផង ។</td>
<td><u>ជំហានទី ៥</u>(បណ្តាំផ្ញើរ)</td>
<td>-ស្តាប់និងកត់ត្រា</td>
</tr>
</table>

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ៥ ស្ថិតិពីរអថេរ

មេរៀនទី ២ សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន: ក្រោយពេលរៀនមេរៀននេះចប់សិស្សអាច ៖

- ចំណេះដឹង : កំណត់បានសមីការបន្ទាត់ បានត្រឹមត្រូវតាមរយះឧទាហរណ៍
- បំណិន :រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែតាមរយៈរូបមន្តបានត្រឹមត្រូវ
- ឥរិយាបថ : មានស្មារតីសហការគ្នាក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II. ពេលវេលា ០២ម៉ោង

III. សម្ភារៈឧបទេស

- សៀវភៅសិស្ស : ទំព័រទី ១៦០ ដល់ទំព័រទី ១៦៦
- សៀវភៅគ្រូ : ទំព័រទី ១៦០ ដល់ទំព័រទី ១៦៦

IV.ខ្លឹមសារមេរៀន

២. សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

IV. ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្ដាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់)	-ណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
- តើសមីការបន្ទាត់ដែលមានទម្រង់ $y = ax + b$ ជាទំនាក់ទំនង រវាង x និង y ហៅថាអ្វី?	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់)	- សមីការបន្ទាត់ដែលមានទម្រង់ $y = ax + b$ ជាទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ហៅថា(ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែ)
- ប្រាប់សិស្សពីសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី២ សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ ២. សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ $\therefore$ បើគេមានចំណុចទិន្នន័យ (x_1, y_1) $(x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots (x_n, y_n)$ នោះ សមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែមានរាង	- សិស្សសង្កេត និងកត់ត្រា

- ដាក់ឧទាហរណ៍ណែនាំសិស្សឲ្យដោះស្រាយ

$y = ax + b$ ដែល

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

និង $b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$។

$\therefore$ សម្គាល់ $b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$b = \overline{y} - a\overline{x}$ ឬ $\overline{y} = a\overline{x} + \overline{y}$ មានន័យថាបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែកាត់តាមចំណុចមធ្យម $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$។

ឧទាហរណ៍ រកសមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែនៃទន្និន័យក្នុងតារាងខាងក្រោម៖

x_i	1	1	2	4
y_i	1	2	2	6

- តាមទិន្នន័យខាងលើគេបានតារាងដូចខាងក្រោម

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1	1	1
1	2	2	1
2	2	4	4
4	6	24	16
8	11	31	22

សមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែមានរូបមន្ត $y = ax + b$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= \frac{4(31) - 8(11)}{4(22) - 8^2} = \frac{36}{24} = 1.5$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

- ដាក់លំហាត់គំរូឲ្យសិស្សធ្វើ

លំហាត់គំរូ តាមរបាយការណ៍មន្ត្រីម្នាក់មកពីក្រសួងទេសចរណ៍បានឲ្យដឹងថាចំនួនទេសចរណ៍ដែលមកកំសាន្តតាងដោយតារាងខាងក្រោម

x_i ឆ្នាំ	2005	2006	2007	2008	2009
y_i ម៉ឺន	25.7	26.3	29.7	34.2	38.3

បើ $x=0$ តាងឆ្នាំ 2005

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

ខ. ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានចំនួនទេសចរណ៍ដែលនឹងមកកំសាន្តក្នុងឆ្នាំ 2010 ។

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4}y_i-a\sum_{i=1}^{4}x_i\right)$$

$$=\frac{1}{4}(11-1.5\times 8)$$

$$=\frac{1}{4}(11-12)=0.25$$

ដូចនេះសមីការតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ $y=1.5x-0.25$

បើ $x=0$ តាងឆ្នាំ2005នោះគេបានចំណុចទិន្នន័យ $(0,26.3)$ $(1,26.3),(2,29.7),(3,34.2)$ និង $(4,38.3)$ ។

ក. សមីការបន្ទាត់មានរាង

$y=ax+b$

សង់តារាង

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
0	25.7	0	0
1	26.3	26.3	1
2	29.7	59.4	4
3	34.2	102.6	9
4	38.3	153.2	16
10	154.2	341.5	30

គេបាន

$$a=\frac{5(341.5)-10(154.2)}{5(30)-10^2}$$

$$=3.31$$

$$b=\frac{1}{5}(154.2-3.31\times 10)$$

$$=24.22$$ ។

ដូចនេះ

សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេ

- ដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តឲ្យសិស្សពិភាក្សាដោះស្រាយ

∴ ប្រតិបត្តិ ក្រុមហ៊ុនមួយលក់រថយន្តដែលបានប្រើប្រាស់រួចៗតម្លៃលក់បញ្ចុះទៅតាមចំនួនឆ្នាំដែលបានប្រើប្រាស់។តាង x_i ជាចំនួនឆ្នាំដែលបានប្រើប្រាស់ និង y_i តាងតម្លៃលក់(ឯកតាជាលានរៀល)

x_i	2	4	5	5	5
y_i	169	103	85	82	89
5	6	6	6	7	7
98	66	95	169	70	49

អ៊ែ គឺ $y=3.31x+24.22$ ។

ខ. ឆ្នាំ 2010 ត្រូវនិង $x=5$

បើ $x=5$ នោះ

$y=3.31\times 5+24.22=40.77$

ដូចនេះ ចំនួនទេសចរណ៍មកកំសាន្តក្នុងឆ្នាំ 2010 គឺ40.77 ម៉ឺននាក់ ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

សមីការបន្ទាត់មានរាងទូទៅ

$y=ax+b$

ចំណុចទិន្នន័យស្មើនឹង 11នោះ គេបាន $n=11$

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
2	169	338	4
4	103	412	16
5	85	425	25
5	82	410	25
5	89	445	25
5	98	490	25
6	66	396	36
6	95	570	36
6	169	1014	36
7	70	490	49
7	49	343	49
58	1075	5333	326

$$a=\frac{11(5333)-58(1075)}{11(326)-(58)^2}$$

$=-16.60$

$$b=\frac{1}{11}\left(1075-(-16.60)58\right)$$

$=185.25$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់តម្រែ

		តម្រង់លីនេអ៊ែមានរាង $y=-16.60x+185.25$ ខ. តម្លៃរថយន្តដែលមានណាស់ 3ឆ្នាំ និង 5ឆ្នាំ បើ $x=3$ នោះ $y=-16.60(3)+185.25$ $=135.45$ បើ $x=5$ នោះ $y=16.60(5)+185.25$ $=102.25$ ដូចនេះ តម្លៃរថយន្តដែលមាន សំណាស់៣ឆ្នាំ ស្មើនឹង 135.45 លានរៀល។ ចំណាស់៥ឆ្នាំស្មើនឹង 102.25 លានរៀល។
តើសមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង លីនេអ៊ែមានរាងដូចម្តេច? ហើយរក a,b	<u>ជំហានទី ៤</u>(ពង្រឹងពុទ្ធិ)	សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់ លីនេអ៊ែមានរាង $y=ax+b$ $a=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$ $b=\dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$
- ធ្វើលំហាត់លេខ ៥ទំព័រទី ១៧៣ ដាក់ក្នុងសៀវភៅ	<u>ជំហានទី៥</u> (បណ្តាំផ្ញើ)	- ស្តាប់ និងកត់ត្រា

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ៥ ស្ថិតិពីរអថេរ

មេរៀនទី ២ សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន: ក្រោយពេលរៀនមេរៀននេះចប់សិស្សអាច ៖

- ចំណេះដឹង : កំណត់បានពីរូបមន្តមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍
- បំណិន :ដោះស្រាយលំហាត់តាមរយៈរូបមន្តបានត្រឹមត្រូវ
- ឥរិយាបថ : មានស្មារតីសហការគ្នាក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II. ពេលវេលា ០២ម៉ោង

III. សម្ភារៈឧបទេស

- សៀវភៅសិស្ស :ទំព័រទី ១៦៦ ដល់ទំព័រទី ១៧០
- សៀវភៅគ្រូ : ទំព័រទី ១៦៦ ដល់ទំព័រទី ១៧០

IV.ខ្លឹមសារមេរៀន

៣. មេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

IV. ដំណើរការមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់)	-ណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
- តើសមីការបន្ទាត់តម្រង់តម្រង់លីនេអ៊ែមានរាងដូចម្តេច?	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់)	សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែមានរាង $y = ax + b$ $a = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$ $b = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$
	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី) **មេរៀនទី២ សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ** **៣. គុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ**	

- ប្រាប់សិស្សពីរូបមន្តមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

∴ មេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែកំណត់រូបមន្ត

$$r=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\times\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}}$$

តម្លៃ r អាចប្រែប្រួលក្នុងចន្លោះ $-1\le r\le 1$

តម្លៃ r ហៅថាមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

បើ $r>0$ បញ្ជាក់ថា y កើនទៅតាមតម្លៃ x ។

បើ $r<0$ បញ្ជាក់ថា y ថយទៅតាមតម្លៃ x ។

បើ $r=1$ ឬ $r=-1$ ចំណុចទិន្នន័យស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែមានន័យថា x និង y មានទំនាក់ទំនងគ្នាឥតខ្ចោះ។

បើ $x=0.9$ ឬ $x=-0.9$ គេថា x និង y មានទំនាក់ទំនងយ៉ាងខ្លាំង។សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែអាចយកមកប៉ាន់ស្មានបានល្អ។

បើ $x=0.4$ ឬ $x=-0.4$ គេថា x និង y មានទំនាក់ទំនងយ៉ាងខ្សោយ។សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែពុំបានលទ្ធផលល្អទេ។

បើ $r=0$ គេថា x និង y គ្មានទំនាក់ទំនងគ្នា។ដូចនេះ គេមិនអាចប្រើប្រាស់សមីការបន្ទាត់តម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែដើម្បីធ្វើការប៉ាន់ស្មានលទ្ធផងបានឡើយ។

- ស្តាប់និងសង្កេត

- ដាក់ឧទាហរណ៍មកពន្យល់និងណែនាំសិស្ស

ឧទាហរណ៍ រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែនៃទិន្និន័យក្នុងតារាងខាងក្រោម

x_i	1	2	3	4
y_i	2	4	4	6

រកមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែតាមរូបមន្ត

$$r=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\times\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}}$$

ដែល $n=4$ គេបាន

តារាងផងបូកដូចខាងក្រោម

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
1	2	2	1	4
2	4	8	4	16

3	4	12	9	16
4	6	24	16	36
10	16	46	30	72

គេបាន

$$r=\frac{4\times46-(10\times16)}{\sqrt{4\times30-10^2}\times\sqrt{4\times72-16^2}}$$

$r=0.95$

ដោយ $r=0.95$ ដូចនេះគេអាចនិយាយថា x និង y មានទំនាក់ទំនងគ្នាខ្លាំង។

- ដាក់លំហាត់គំរូឲ្យសិស្សពិភាក្សាគ្នា

លំហាត់គំរូ ទិន្នន័យខាងក្រោមជាតារាងទិន្នន័យទំនាក់ទំនងរវាងចំណូលសរុបប្រចាំសប្តាហ៍គិតជាពាន់ដុល្លា និងពិន្ទុតេស្តរបស់បុគ្គលិក

អ្នកលក់	x_i ពិន្ទុតេស្ត	y_i ប្រាក់$
លោកA	4	5
លោកB	7	12
លោកC	3	4
លោកD	6	8
លោកE	10	11

គណនាមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ។

គណនាមេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ

តាមរូបមន្ត

$$r=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\times\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}}$$

ដោយ $n=5$ គេបានតារាងផលបូកដូចខាងក្រោម

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
4	5	20	16	25
7	12	84	47	144
3	4	12	9	16
6	8	48	36	36
10	11	110	110	100
30	40	274	210	370

គេបាន

$$r=\frac{5\times274-30\times40}{\sqrt{5\times210-30^2}\times\sqrt{5\times370-40^2}}$$

$$=\frac{170}{\sqrt{150\times250}}=0.88$$

ដោយ $r=0.88$ បញ្ជាក់ថាមានទំនាក់ទំនងយ៉ាងខ្លាំងរវាងពិន្ទុតែសរបស់បុគ្គលិក និងប្រាក់ចំណូលប្រចាំសប្តាហ៍មានន័យ

		ថាតែសបុគ្គលិករបស់អ្នកធ្វើ តែសមានសុពលភាព។
- តើមេគុណតម្រែតម្រង់លី នេអ៊ែមានរូបមន្តដូចម្តេច?	<u>ជំហានទី ៤</u>(ពង្រឹងពុទ្ធិ)	មេគុណតម្រែតម្រង់លីនេអ៊ែ មានរូបមន្ត $r=\dfrac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\times\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}}$
- ពេលត្រឡប់ទៅផ្ទះវិញប្អូន ត្រូវ ធ្វើលំហាត់ផង ។	<u>ជំហានទី ៥</u>(បណ្តាំផ្ញើរ)	-ស្តាប់និងកត់ត្រា

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី…១….

មេរៀនទី…១….   **ប៉ារ៉ាបូល**

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញសញ្ញាណស៊្វីតចំនួនពិត ស៊្វីតរាប់អស់ និង ស៊្វីតអនន្តតួ រយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយប្រតិបត្តិនិងលំហាត់តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.ពេលវេលា: ១….ម៉ោង ថ្ងៃ……………..ទី……………..ខែ…………..ឆ្នាំ……….

III.សម្ភារ:ឧទេស

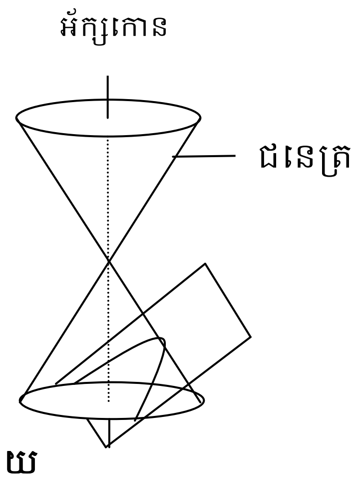
-ស . ស :ទំព័រទី.១៧៨.. ដល់ទំព័រទី..១៧៩..

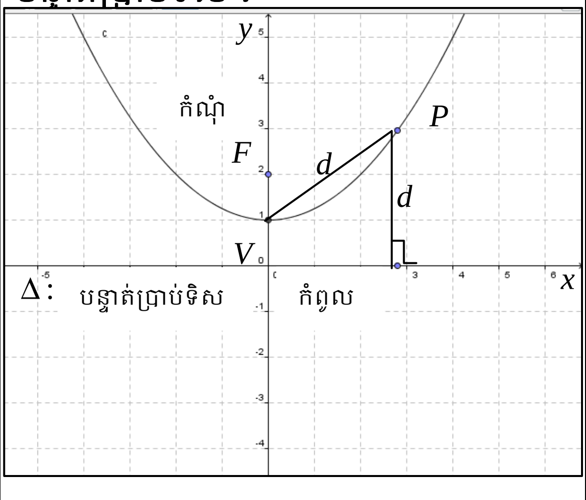
-ស . គ : ទំព័រទី… ដល់ទំព័រទី….

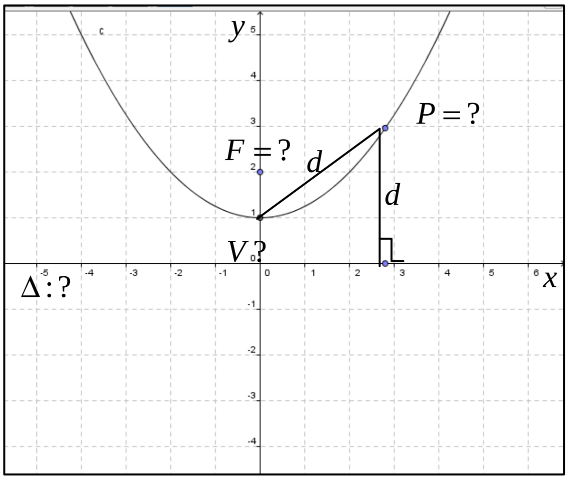
-បន្ទាត់

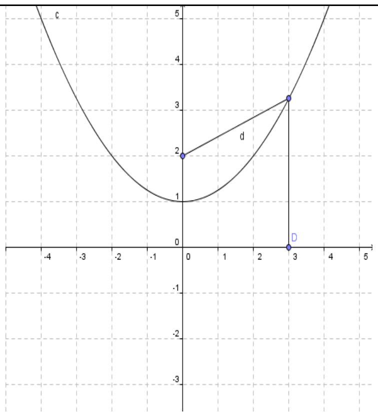
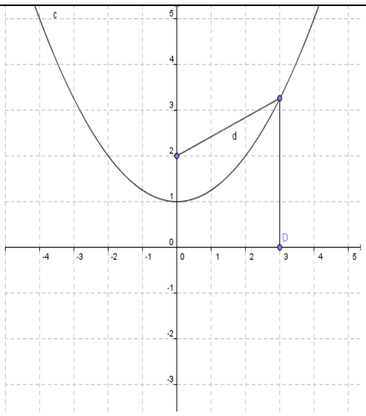
IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*ជំហានទី១* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ តើប្អូនបានសិក្សាអំពីប៉ារ៉ាបូលដែរឬទេ? គ្រូពន្យល់មេរៀនថ្មីឲ្យសិស្ស តើនៅក្រៅសំណុំ $\mathbb{R}$ មាន សំណុំអ្វីខ្លះ?	*ជំហានទី២* (រំលឹកមេរៀនចាស់) ដោយមេរៀនថ្មីមិនបាច់រំលឹកមេរៀនចាស់	សិស្សឆ្លើយនិងសង្កេត
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី	*ជំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) *មេរៀនទី.១. ប៉ារ៉ាបូល*	

<table>
<tr>
<td>បង្ហាញរូបភាពដើម្បីឲ្យសិស្សជឿ</td>
<td>I សេក្តីចផ្តើម
គេឲ្យប្លង់មួយកាត់តាមកោនបរិវត្តមានរាងជារង្វង់(មិនកាត់តាមកំពូល)ហើយស្រប និងជនេតកោណនោះ។ប្រសព្វដែលបានមកនេះមានជាខ្សែកោងមួយដែលហៅថាប៉ារ៉ាប៉ូល។ដូចនេះប៉ារ៉ាប៉ូលជាកោនិមួយ។
បង្ហាញរូបភាពដើម្បីឲ្យសិស្សជឿ


២/និយមន័យ
ប៉ារ៉ាប៉ូលជាសំនុំចំនុចនៅក្នុងប្លង់ដែលមានចំងាយស្មើពីចំនុចនឹង F មួយនិងបន្ទាត់នឹង (Δ) មួយនៅក្នុងប្លង់នោះ។ ចំនុចនឹង F ហៅថាកុំណុំនិង បន្ទាត់នឹង (Δ) ហៅថាបន្ទាត់ប្រាប់ទិស។</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>សកម្មភាពនៅចំនុចនេះគ្រូត្រូវបង្ហាញសិស្សពីឧបករណ៍សំរាប់គូរប៉ារ៉ាប៉ូល</td>
<td>
</td>
<td>សិស្សមានសំភារៈឧបទេសគ្រប់ៗគ្នា</td>
</tr>
</table>

បំផុសគំនិតឲ្យសិស្សឆ្លើយ ១.បន្ទាត់ដែលកាត់តាមកំណុំ F ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) ហៅថាអ្វី? ២.ចំណុច V ដែលស្ថិតនៅលើអក្ស័ឆ្លុះនិងជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កេតដែលភ្ជាប់កំណុំ F និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ ហៅថាអ្វី? ៣.ចំងាយពីកំណុំទៅកំពូលប៉ារ៉ាប៉ូលហៅថាអ្វី?		សិស្សឆ្លើយ ១.ហៅថាអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាប៉ូល។ ២.ហៅថាកំពូលនៃប៉ារ៉ាប៉ូល ៣.ហៅថាប៉ារ៉ាម៉ែត P
គ្រូសួរតើប៉ារ៉ាបូលជាកោនិចដែរឬទេ? តើគេអាចគូរប៉ារ៉ាប៉ូលមួយដោយមិនស្គាល់កំពូលកំណុំនិងបន្ទាត់ ប្រាប់ទិសបានដែរឬទេ?	*<u>ជំហានទី៤</u>* (ពង្រឹងចំណេះដឹង) គេមិនអាចគូរបាននូវប៉ារ៉ាប៉ូលមួយដោយមិនស្គាល់កំពូលឬកំណុំនិងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសបានទេ	.ប៉ារ៉ាបូលជាប្រភេទកោនិក .គេមិនអាចគូរបានទេ
គ្រូប្រាប់សិស្សឲ្យអានមេរៀននិង ត្រៀមសំភារៈសំរាប់ប្រើនូវមេរៀនក្រោយ។ ឲ្យសិស្សសង់ប៉ារ៉ាបូលម្នាក់មួយ	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ)	សិស្សអនុវត្តន៍

	c d D	c d D

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៦.

មេរៀនទី...១.... *ប៉ារ៉ាបូល(ត)*

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង:សិស្សប្រាប់ពីសមីការស្តង់ដាជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេតាមឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយប្រតិបត្តិនិងលំហាត់តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.ពេលវេលា: ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ.................ទី.................ខែ..............ឆ្នាំ..........

III.សម្ភារ:ឧទេស

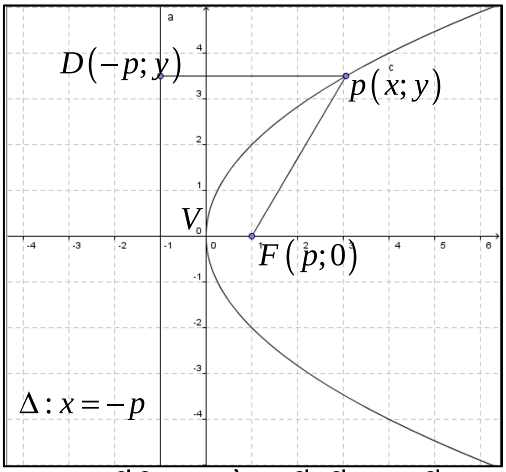
-ស . ស :ទំព័រទី.១៧៩.. ដល់ទំព័រទី..៨..

-ស . គ : ទំព័រទី១៧៩... ដល់ទំព័រទី....

-បន្ទាត់

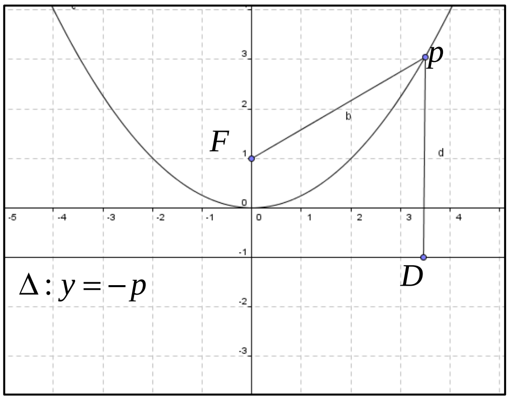
IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*ជំហានទី១* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ ឲ្យសិស្សឲ្យនិយមន័យ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស	*ជំហានទី២* (រំលឹកមេរៀនចាស់) និយមន័យ: ប៉ារ៉ាបូលជាសំណុំចំនុចនៅក្នុងប្លង់ដែលមានចំងាយស្មើពីចំនុចនឹង F មួយនិងបន្ទាត់និង Δ មួយនៅក្នុងប្លង់នោះ។ចំនុចនឹង F ហៅថាកំណុំនិងបន្ទាត់ Δ ហៅថាបន្ទាត់ប្រាប់ទិស។	សិស្សឆ្លើយ
.គ្រូសរសេរចំនងជើ	*ជំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) *មេរៀនទី.១. សមីការនៃប៉ារ៉ាបូល*	.សិស្សសង្កេត

ង .គ្រូគូររូបរួចពន្យល់	៣.១សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់ជាអ័ក្សកូរដោនេ ក.ករណីបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ ស្របនិងអ័ក្សអរដោនេ  .គេអាចប្រើនិយមន័យដើម្បីរកសមីការប៉ារ៉ាបូល។សមីការនោះអាស្រ័យលើកំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស។ឧបមាថាប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល V ជាគល់អ័ក្សកូរអរដោនេនិងកំណុំ F មានចំងាយ p ឯកតានោះ $F(p;0)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ មានសមីការ $x=-p$ ។ តាង $p(x;y)$ ជាចំនុចមួយស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល។ បើ D ជាចំនុចមួយមានមានកូអរដោនេ $(-p;y)$ គេបាន $PF=PD$ $\sqrt{(x-p)^2+y^2}=\sqrt{(x+p)^2}$ (ប្រើរូបមន្តចំងាយរវាងពីចំនុច) $(x-p)^2+y^2=(x+p)^2$ (លើកអង្គទាំងពីរជាំគោល) $x^2-2xp+p^2+y^2=x^2=2xp+p^2$	 សិស្សសង្កេត

$y^2 = 4px$ នោះជាសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល
ដែលមានកំពូល $V(0;0)$ និងកំណុំ $F(p;0)$ ស្ថិតនៅអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ខ.<u>ករណីបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស:</u>



ដូចគ្នានេះដែរសមិការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល
ដែលមានកំពូល $V(0;0)$ និងកំណុំ $F(0;p)$ ស្ថិតនៅអ័ក្សអរដោនេគឺ $x^2 = 4py$
នៅក្នុងសមីការទាំងនេះ p អាចជាចំនួនវិជ្ជាមានឬអវិជ្ជាមាន។

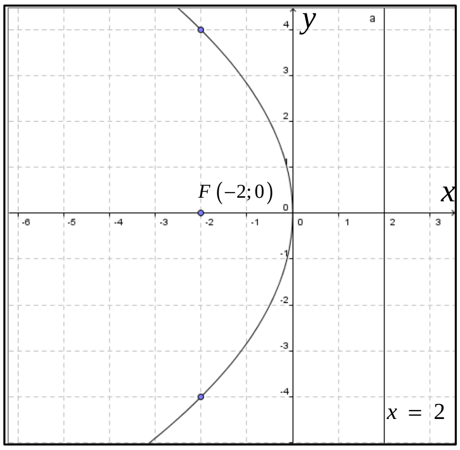
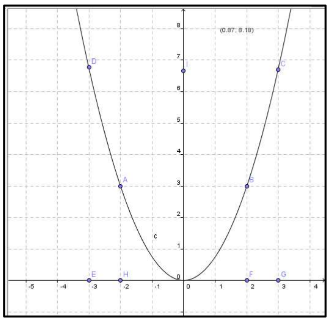
ជាទូទៅ:

សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ

១.បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេនោះប៉ារ៉ាបូល
មានសមីការ $x^2 = 4py$ ហើយមានកំណុំ $F(0;p)$
និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $y = -p$ ។

.បើ $p > 0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y > 0$

.បើ $p < 0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផត

គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍គំរូរកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំណុំត្រង់ចំនុច $(-2;0)$ និងបន្ទាត់ប្រាបទិសមាន $x=2$ សមីការ	ទៅរកទិស $y<0$ ២.បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីសនោះសមីការមានស្តង់ដា $y^2=4xp$ ហើយមាន $F(p;0)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=-p$.បើ $p>0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x>0$.បើ $p<0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x<0$  កំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសនោះអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស។ដោយកំពូលស្ថិតលើអ័ក្សឆ្លុះជាចំនុចកណ្តាលរវាងកំណុំនិងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនោះកំពូលជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ។ ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ $y^2=4xp$ ដែល $p=-2$ ដូចនេះសមីការស្តង់ដាគឺ $y^2=-8x$	សិស្សមើលនិងសង្កេត
.ប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំនុច $(0;0)$ និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ ក/រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលហើយកាត់	*ជំហានទី៤* (ពង្រឹងចំណេះដឹង) 	សិស្សអនុវត្ត

តាមចំនុច $A(4;12)$ ខ/រកតម្លៃ y_1 បើ $B(3;y_1)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល	ក/ដោយប៉ារ៉ាបូលនោះមានកំពូលត្រង់ $(0;0)$ និងកមណ្ដុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេនោះអ័ក្សអរដោនេជាអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល។គេបានសមីការប៉ារ៉ាបូលគឺ $x^2=4yp$ ដោយ $A(4;12)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះកូអរដោនេរបស់វាផ្ទៀង $x^2=4yp$ ផ្ទាត់សមីការ $\Leftrightarrow 4^2=4p(12)$ $\Leftrightarrow 16=48p \Rightarrow p=\frac{1}{3}$ ដូចនេះសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $x^2=\frac{4}{3}y$ ខ.រកតម្លៃ y_1 ជំនួស $x=3$ និង $y=y_1$ ក្នុងសមីការ $y=\frac{7}{4}x^2$ គេបាន $y_1=\frac{3}{4}(3)^2=\frac{27}{4}$ ដូចនេះបើស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ $y_1=\frac{27}{4}$	
.គ្រូឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់ប្រត្តិបត្តិ	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ) រកកូអរដោនេកំពូលកំណុំនឹងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល $y^2=-6x$ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនោះ។	សិស្សអនុវត្តន៍

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៦....

មេរៀនទី...១.... ប៉ារ៉ាបូល

៣.២សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលខុសពីគល់អ័ក្ស

ក.ករណីបន្ទាត់ប្រាប់ទិស(Δ) ស្របនិងអ័ក្សអរដោនេ

ខ. ករណីបន្ទាត់ប្រាប់ទិស(Δ) ស្របនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញនិយមន័យនៃប៉ារ៉ាបូលតាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយប្រតិបត្តិនិងលំហាត់តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.ពេលវេលា: ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ...............ទី...............ខែ............ឆ្នាំ..........

III.សម្ភារ:ឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី.២.. ដល់ទំព័រទី..៤..

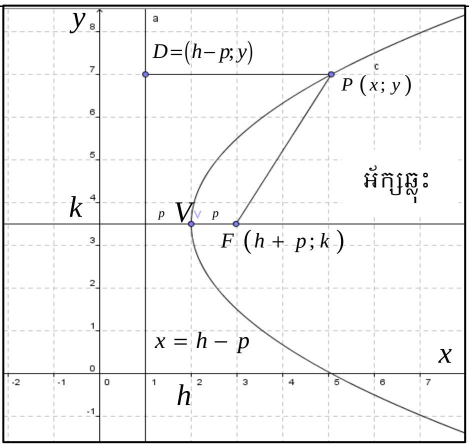
-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-បន្ទាត់ ខ្សែម៉ែត្រ

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*ជំហានទី១* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ តើសមីការស្តង់ដាប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេនិងអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេមានរាង	*ជំហានទី២* (រំលឹកមេរៀនចាស់) .សមីការប៉ារ៉ាបូលមានរាង: +បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេនោះប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា $x^2 = 4yp$ មានកំណុំ $F(0;p)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានសមីការ $y = -p$ ។	សិស្សឆ្លើយ +បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេនោះ ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា $x^2 = 4yp$ មានកំណុំ $F(0;p)$ និងបន្ទាត់

ដូចម្តេច? បើ $p>0; p<0$ សមីការប៉ារ៉ាបូលមានភាពផតដូចម្តេច? តើសមីការស្តង់ដាប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេនិងអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីសមានរាងដូចម្តេច? បើ $p>0; p<0$ សមីការប៉ារ៉ាបូលមានភាពផតដូចម្តេច?	.បើ $p>0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y>0$.បើ $p<0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y<0$ +បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីសនោះសមីការមានស្តង់ដា $y^2=4xp$ ហើយមាន $F(p;0)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=-p$.បើ $p>0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x>0$ V .បើ $p<0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x<0$	ប្រាប់ទិសមានសមីការ $y=-p$ ។ .បើ $p>0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y>0$.បើ $p<0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $y<0$.បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីសនោះសមីការមានស្តង់ដា k $y^2=4xp$ k ហើយមាន $F(p;0)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=-p$.បើ $p>0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x>0$.បើ $p<0$ នោះប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x<0$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មីនិងបកស្រាយរូបមន្ត	*<u>ជំហានទី៣</u>* (មេរៀនថ្មី) *មេរៀនទី.១. ប៉ារ៉ាបូល* *៣.២<u>សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ</u>* *ក/<u>ករណីបន្ទាត់ប្រាប់ទិស</u>* (Δ) *<u>ស្របនិងអ័ក្សអរដោនេ</u>* គេប្រើនិយមន័យប៉ារ៉ាបូលដើម្បីរកសមីការស្តង់ដាមានកំពូល $V(h;k)$ និង p ជាចំងាយពីកំពូលទៅកំណុំនិងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស។	សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា



តាងចំនុច p ជាចំងាយពីកំពូលទៅកំណុំនិងទៅបន្ទាត់ប្រាប់ទិស។ បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេកនោះកូអរដោនេនៃកំណុំគឺ $F(h+p;k)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសគឺ $x=h-p$ ។

តាង (Δ) ជាចំនុចមួយនៅលើប៉ារ៉ាបូល បើ (Δ) ជាចំនុចមួយមានកូអរដោនេ (Δ) គេបាន

$PF=PD$

$PF=\sqrt{(x-h-p)^2+(y-k)^2}$

$PD=\sqrt{(x-h+p)^2+(y-y)^2}$

$\sqrt{(x-h-p)^2+(y-k)^2}=\sqrt{(x-h+p)^2}$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេយើងបាន

$$(x-h-p)^2+(y-k)^2=(x-h+p)^2$$

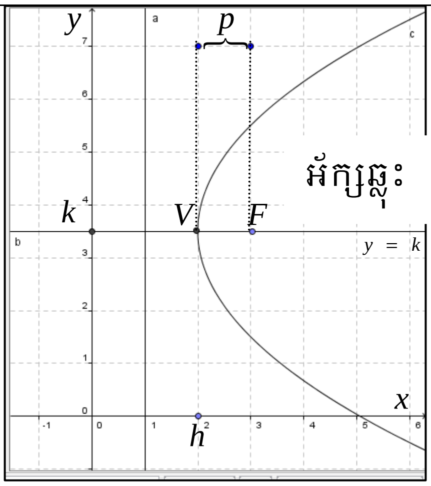
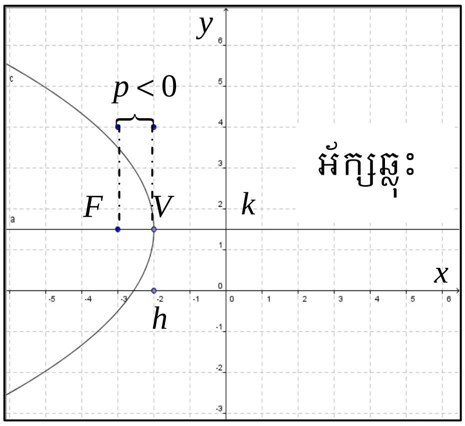
$$(x-h)^2-2p(x-h)+p^2+(y-k)^2=$$

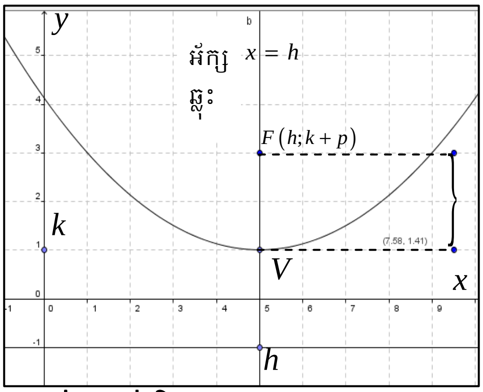
$$(x-h)^2+2p(x-h)+p^2$$

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

យើងបានសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $(h;k)$ និងអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេកមានរាង $(y-k)^2=4p(x-h)$

+ករណីប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x>0\,;x<0$

	 បន្ទាត់ប្រាប់ទិស(Δ): $x = h - p$ អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក $p > 0$ + ករណីប៉ារ៉ាបូលបែរភាពផតទៅរកទិស $x < 0$  បន្ទាត់ប្រាប់ទិស(Δ): $x = h - p$ អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក $p < 0$ ខ.<u>ករណីបន្ទាត់ប្រាប់ទិសស្របនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស</u> គេប្រើនិយមន័យនៃប៉ារ៉ាបូលដើម្បីរកសមីការនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $V(h;k)$	



បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta : y = k - p$

អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ: $p > 0$

តាង D ជាចំងាយពីកំពូលទៅកំណុំនិង ទៅបន្ទាត់ប្រាប់ទិស។

បើអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរកូអរដោនេនៃ កំណុំគឺ $F(h;k+p)$ និងសមីការបន្ទាត់ ប្រាប់ទិសគឺ $y = k - p$ ។

តាង $p(x;y)$ ជាចំនុចមួយនៅលើប៉ារ៉ាបូល។

បើ D ជាចំនុចមួយមានកូអរដោនេ $(x;k-p)$ គេបាន

$PF = PD$

$\sqrt{(x-h)^2+(y-k-p)^2} = \sqrt{(y-k+p)^2}$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេយើងបាន

$(x-h)^2+(y-k-p)^2=(y-k+p)^2$

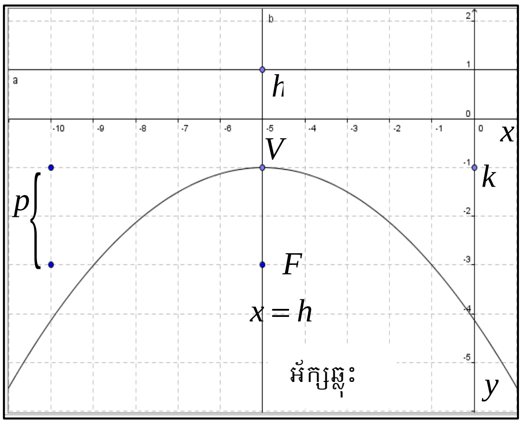
$(x-h)^2-2p(y-k)+p^2+(y-k)^2=$

$(y-k)^2+2p(y-k)+p^2$

$(x-h)^2=4p(y-k)$

យើងបានសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល ដែលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ

+ករណី $p < 0$ ប៉ារ៉ាបូលបេរភាពផតទៅរក $y < 0$

លំហាត់អនុវត្តន៍ ក/ចូររកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលត្រង់ចំនុច $(2;1)$ និងកំណុំ $(2;4)$ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូល ខ/រកកូអរដោនេនៃកំពុលកំណុំនិងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល $(y-2)^2=4(x+1)$ រួចសង់។	 បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta: y=k-p$ អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរៈ $p<0$	សិស្សឆ្លើយ សមីការស្តង់ដាគឺ $(x-2)^2=12(y-1)$ សំណង់ប៉ារ៉ាបូល ខ/រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំនិងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមាន $(h;k)=(-1;2)$ $(h+p;k)=(0;2)$ $x=h-p=x-2$
ចូរប្អូនធ្វើលំហាត់ប្រត្តិបត្តិ ទី១ ទី២ទំព័រទី១៨៤	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង)	សិស្សពិភាក្សាជាក្រុម
សិស្សធ្វើលំហាត់ទំព័រ១៨៩ ទី៤	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ)	សិស្សឲ្យម៉ោងក្រោយ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៦.... មេរៀនទី...១.... **ប៉ារ៉ាបូល**

(៣.៣ សមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូល)

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង :សិស្សសរសេរសមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូល បម្លែងរាងទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូលជាទម្រង់ស្តង់ដានិងពីសមីការស្តង់ដាទៅរាងទូទៅតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយប្រតិបត្តិនិងលំហាត់តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.ពេលវេលា: ...១....ម៉ោង ថ្ងៃ..................ទី..................ខែ...............ឆ្នាំ............

III.សម្ភារៈឧទេស

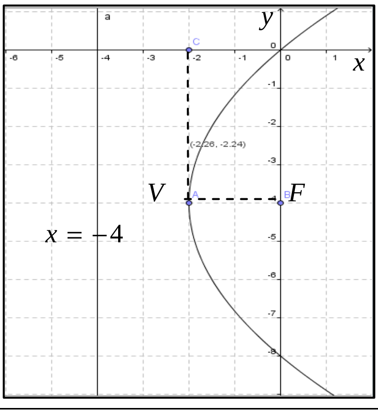
-ស . ស :ទំព័រទី.១៨៤.. ដល់ទំព័រទី..១៨៥..

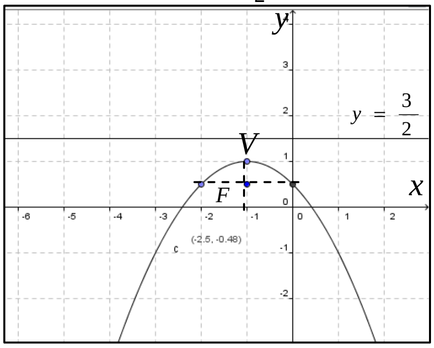
-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-បន្ទាត់

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*ជំហានទី១* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ +រូបមន្តឯកលក្ខណភាព $(a+b)^2;(a-b)^2$ +ឲ្យសរសេរកន្សោម $A=x^2+6x+9$ ជារាងឯកលក្ខណភាព +ធ្វើដូចម្តេចដើម្បីរកតួ b ? +តើសមីការ $(x-h)^2=4p(y-k)$ និង	*ជំហានទី២* (រំលឹកមេរៀនចាស់)	សិស្សឆ្លើយ + $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ + $A=(x+3)^2$ +យើងយកមេគុណដែលជាប់ x ចែកនិង 2 ។ +សមីការ $(x-h)^2=4p(y-k)$ សម្គាល់ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ។ សមីការ $(y-k)^2=4p(x-h)$

$(y-k)^2=4p(x-h)$ សម្គាល់អ្វីខ្លះនៃប៉ារ៉ាបូល		សម្គាល់ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក។
គ្រូសរសេរឧទាហរណ៍ជាលំហាត់គំរូដល់សិស្ស Ex_1 បម្លែងសមីការប៉ារ៉ាបូល $y^2+8y-8x=0$ ជាទម្រង់ស្តង់ដា។ .លើកអង្គមានអញ្ញាត y និង x ទៅម្ខាងម្នាកនៃសញ្ញាស្មើ .សង្កេតឃើញតួ y ស្មើប៉ុន្មាន .ថែមអង្គទាំងពីរនិងតម្លៃ b^2 .គេបានទម្រង់មួយ Ex_2 រកកំពូល កំណុំ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនោះ? +ត្រូវធ្វើដូចម្តេចដើម្បីរកកំពូល កំណុំ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស? ឲ្យសិស្សសង្កេត +តើកំពូល កំណុំនិងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសមានរាងដូចម្តេច? +គេបានកំពូល កំណុំនិងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសគឺ	*ដំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) *មេរៀនទី.១. ប៉ារ៉ាបូល(ត)* *៣.៣ សមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូល* Ex_1 បម្លែងសមីការប៉ារ៉ាបូល $y^2+8y-8x=0$ ជាទម្រង់ស្តង់ដា $y^2+8y=8x$ គេបានតួ $b=\frac{8}{2}=4$ $y^2+8y+16=8x+16$ $(y+4)^2=8(x+2)$ $(y+4)^2=8(x+2)$ $(y-(-4))^2=8(x-(-2))$ $(y-k)^2=4p(x-h)$ គេបាន $h=-2;k=-4;p=2>0$.កំពូល $V(h;k)=V(-2;-4)$.កំណុំ $F(h+p;k)=(0;-4)$.បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $(x=h-p)=(x=-4)$ តារាងតំលៃ x: 0 ; y: $y=0$, $y=-8$ 	សិស្សកត់ត្រា +ត្រូវរក $h;k;p$ រួចសរសេរនិងឲ្យតម្លៃលេខដែលត្រូវការ។ យើងត្រូវផ្ទឹមវានិងសមីការស្តង់ដាប៉ារ៉ាបូលដែលត្រូវគ្នា។ +មានរាងដូចជា៖ .កំពូល $(h;k)$.កំណុំ $(h+p;k)$.បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $(x=h-p)$

<table>
<tr>
<td>+តើគេសង់ប៉ារ៉ាបូលយ៉ាងដូចម្តេច?</td>
<td></td>
<td>គូសតំរុយកែងអរតូណារមេក្នុងប្លង់</td>
</tr>
<tr>
<td>+ប្រតិបត្តិ:
រកកូរដោនេកំពូល កំណុំនិងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល
$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$</td>
<td><u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង)</td>
<td>សិស្សឆ្លើយ
$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$
$-2y=-x^2+2x$
$-2y+1=x^2+2x$
$-2y+2=x^2+2x+1$
$-2(y-1)=(x+1)^2$
ផ្ទឹមនិងសមីការ $(x-h)^2=4p(y-k)$
គេបាន $h=-1; k=1; p=-\frac{1}{2}$
.កំពូល $V(h;k)=(-1;1)$
.កំណុំ $F(h;k+p)=\left(-1;\frac{1}{2}\right)$
.បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=k-p=\frac{3}{2}$
.សង់
$\begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ \hline y & -1 & \frac{1}{2} \end{array}$
</td>
</tr>
<tr>
<td>គ្រូឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់ទិ២និងទី៣</td>
<td><u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ)</td>
<td>សិស្សឲ្យកិច្ចការម៉ោងក្រោយ</td>
</tr>
</table>

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី…៦…

មេរៀនទី…១…. **ប៉ារ៉ាបូល**

(៤.លក្ខណៈអុបទិចនៃប៉ារ៉ាបូល)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សស្គាល់មុំចំណាំងប៉ះនិងនៃប៉ារ៉ាបូលតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយប្រតិបត្តិនិងលំហាត់តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> …២….ម៉ោង ថ្ងៃ……………..ទី……………..ខែ…………..ឆ្នាំ……….

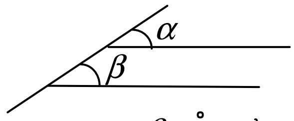
III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

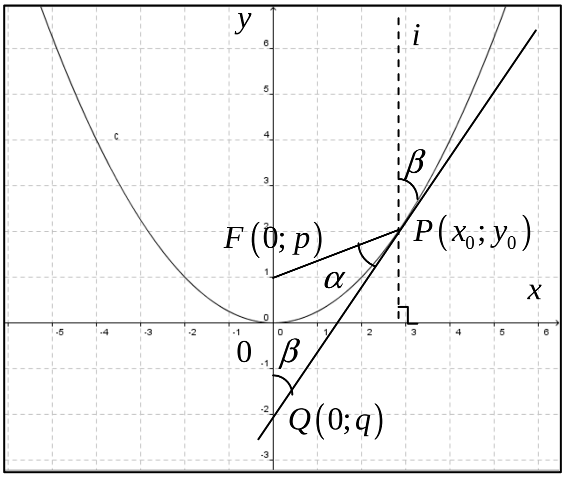
-ស . ស :ទំព័រទី.១៨៦.. ដល់ទំព័រទី..១៨៧..

-ស . គ : ទំព័រទី… ដល់ទំព័រទី….

-បន្ទាត់

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*<u>ជំហានទី១</u>* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ *ដូចម្តេចដែលហៅថាត្រីកោណសមបាត? *ដូចម្តេចដែលហៅថាមុំត្រូវគ្នា? *បើគេស្គាល់ k ជាមេគុណប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់និងចំនុច $M(a;b)$ តើសមីការបន្ទាត់មានរាងដូចម្តេច?	*<u>ជំហានទី២</u>* (រំលឹកមេរៀនចាស់)	សិស្សឆ្លើយ *ត្រីកោណមានប្រវែងជ្រុងពីរស្មើគ្នាជាត្រីកោណសមបាទ។ *មុំត្រូវគ្នាជាមុំដែលមានជ្រុងមួយស្របគ្នាហើយជ្រុងមួយទៀតជាបន្ទាត់ឬមកាត់កំពូលនោះ។  $\alpha=\beta$ មុំត្រូវគ្នា

*បើអនុគមន៍ f មានដេរីវេ ត្រង់ (x_0) ដែល $f'(x_0)$ កំនត់។តើអាចនិយាយថា ដូចម្តេចចំពោះ $f'(x_0)$? *រូបមន្តរវាងចំងាយពីរចំនុច បើ $A(x_A;y_A)$ និង $B(x_B;y_B)$ រក $\|AB\|$?		* $y = k(x-a)+b$ * $f'(x_0)$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ $f(x)$ ត្រង់ x_0 ។ * $\|AB\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី *មេរៀនទី.១.* **ប៉ារ៉ាបូល**	<u>*ជំហានទី៣*</u> (មេរៀនថ្មី) *មេរៀនទី.១.* **ប៉ារ៉ាបូល** ៤.លក្ខណអុបទិចនៃប៉ារ៉ាបូល *ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ $x^2=4py$ មានកំណុំ $F(0;p)$ ។ *គូសបន្ទាត់ (l) ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ $p(x_0;y_0)$ *តាង α មុំផ្គុំរវាង (l) និងអង្កត់ FP β មុំផ្គុំរវាង (l) និងបន្ទារត់ឈរកាត់តាម p ស្របនិងអ័ក្សឆ្លុះ។  *បន្ទាត់ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ $p(x_0;y_0)$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $y'=\frac{2x_0}{4p}=\frac{x_0}{2p}$ ហើយសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y-y_0=\frac{x_0}{2p}(x-x_0)$	សិស្សសង្កេតនិងកត់ត្រា

	*បើបន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $Q(0;q)$ គេបាន៖ $q = y_0 - \frac{x_0}{p} = \frac{x_o^2}{4p} - \frac{x_o^2}{2p} = -\frac{x_o^2}{4p}$ *ប្រវែងអង្កត់ FQ គឺ $p - q = p + \frac{x_o^2}{4p}$ *តាមរូបមន្តរវាងចំងាយពីរចំនុច FP $\sqrt{x_o^2 + (y_o - p)^2} = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{x_o^2}{4p} - p\right)^2}$ $\sqrt{\left(\frac{x_o^2}{4p}\right)^2 + 2\frac{x_o^2}{4p}p + p^2} = \frac{x_o^2}{4p} + p$ * $\triangle FQP$ ជាត្រីកោណសមបាត $\Rightarrow \alpha = \beta$ សន្និដ្ឋាន: បន្ទាត់ស្របនិងអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលដែលកាត់ប៉ារ៉ាបូលត្រង់ p និងបន្ទាត់ PF ផ្គុំជាមួយបន្ទាត់ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ចំនុច p បានមុំស្មើគ្នា។	
ឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់ទី២និង៣	<u>*ជំហានទី៤*</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង)	សិស្សអនុវត្តន៍ជាក្រុម
	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ) ធ្វើលំហាត់នៅសល់	

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៦....

មេរៀនទី...២.... **អេលីប**

(១.សេចក្ដីផ្ដើម ២.និយមន័យនៃអេលីប)

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញសញ្ញាណនៃអេលីបនិងកំនត់និយមន័យនៃអេលីបតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយប្រតិបត្តិនិងលំហាត់តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.ពេលវេលា: ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ..................ទី..................ខែ................ឆ្នាំ...........

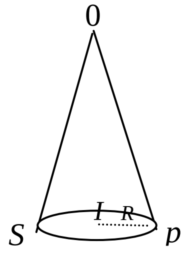
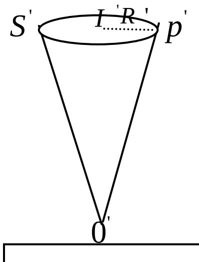
III.សម្ភារ:ឧទេស

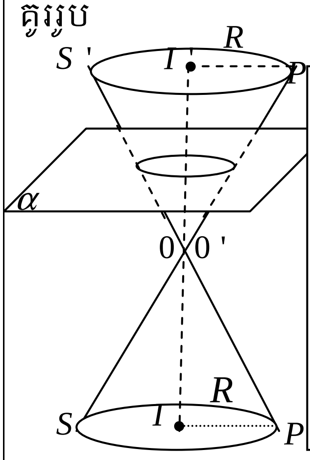
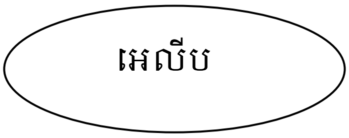
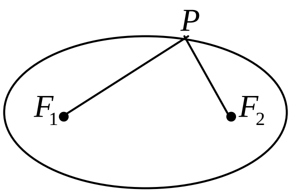
-ស . ស :ទំព័រទី.២.. ដល់ទំព័រទី..៤..

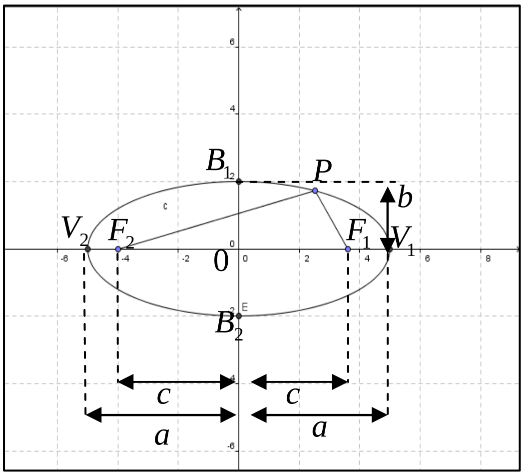
-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-បន្ទាត់ កូនបាល់ ខ្សែម៉ែត្រ

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្ដាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*ជំហានទី១* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្ដាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
.គ្រូឲ្យសិស្សឡើងសង់រូបកោណផ្កាប់និងផ្ងា។ គ្រូឲ្យសិស្សសរសេររូបមន្តគណនាមាឌកោណនិងផ្ទៃបាតនៃកោណ។	*ជំហានទី២* (រំលឹកមេរៀនចាស់)  ផ្ចិត I កាំ R  ផ្ចិត I' កាំ R'	សិស្សសង់រូប គូសរូប $V=\frac{1}{3}S_b.h$. $S_b=\pi R^2$ $S_b \rightarrow$ ផ្ទៃបាត $\pi=3,14$ $h \rightarrow$ កំពស់ $R\rightarrow$ កាំបាត

គ្រូលើករូបដែលសិស្សបានសង់ជាថ្មីដោយដាក់ឲ្យកំពូលនៃកោនទាំងពីរត្រួតស៊ីគ្នានិងឲ្យកំពស់នៃកោណមួយជាបន្លាយនៃកំពស់របស់កោណមួយទៀត គ្រូពន្យល់ប្រាប់សិស្សថារូបនេះជារូបកោណបរិវត្តន៍ដែល II' ជាអ័ក្សកោណគ្រូឲ្យសិស្សពិនិត្យនូវពេលដែលគេយកប្លង់មួយទៅកាត់កោននោះមុខកាត់ដែលទទួលបានត្រូវបានគេកំណត់ថាជាអេលីប។ .គ្រូឲ្យឧទាហរណ៍ហើយពន្យល់	*ជំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) *មេរៀនទី*.១. **អេលីប** ១.សេចក្តីផ្តើម គូររូប  ប្លង់មួយកាត់កោនបរិវត្តន៍ដែលមានបាទជារង្វង់ហើយមិនកែងនិងអ័ក្សកោននោះផ្នែកប្រសព្វដែលបានជារូបធរណីមាត្រមួយហៅថាអេលីប  ២.និយមន័យ: Ex គេអាចសង់ងេលីបនៅលើក្រដាសដូចរូបខាងក្រោមៈ ដំបូងគេដោតម្ជុលពីរនៅលើក្រដាសនៅត្រង់ចំណុចពីរផ្សេងគ្នា F_1 និង F_2 ហើយភ្ជាប់ចង់ខ្សែទាំងសងខាងទៅនឹងម្ជុលទាំងពីរនោះ។ បន្ទាប់មកទាញចុងខ្មៅដៃឲ្យខ្សែនោះតឹងដោយខ្មៅដៃនៅត្រង់ចំណុច P គេរំកិលចុងខ្មៅដៃលើក្រដាសរក្សាឲ្យតឹងជានិច្ច។ 	សិស្សស្តាប់គ្រូពនយល់ .សិស្សស្តាប់គ្រូពន្យល់

	<u>និយមន័យ:</u>អេលីបជាសំណុំចំនុច នៅក្នុងប្លង់ដែលមានផលបូកចម្ងាយ ពីចំនុចនោះទៅចំនុចនិងជាចំនួនថេរ។  .ចំនុចនឹងពីរ F_1 និង F_2 ហៅថាកំនុំ។ តាង V_1 និង V_2 ជាចមនុចប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ F_1F_2 និងអេលីប។ តាង B_1 និង B_2 ជាចំនុចប្រសព្វរវាង មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ F_1F_2 និងអេលីប។ . V_1 និង V_2 ហៅថាកំពូលនៃអេលីប .អង្កត់ V_1V_2 ហៅថាអ័ក្សធំនៃអេលីប ហើយគេតាង $V_1V_2=2a;(a>0)$ អ័ក្សធំ កាត់តាមកំនុំនៃអេលីប .អង្កត់ B_1B_2 ហៅថាអ័ក្សតូចនៃអេលីប ហើយគេតាង $B_1B_2=2b$ ដែល $a>b>0$. V_1V_2 ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច O ហៅថា ផ្ចិតអេលីប។ . $OV_1=OV_2=a$ និង OV_2 ហៅថាកន្លះ អ័ក្សធំដែល $OV_1=OV_2=a$ ។ .OB_1 និង OB_2 ហៅថាកន្លះអ័ក្សតូច ដែល $OB_1=OB_2=b$ ។ .តាង $F_1F_2=c$.អ័ក្សធំនិងអ័ក្សតូចជាអ័ក្សឆ្លុះនៃ	សិស្សស្តាប់គ្រូពន្យល់

គ្រូធ្វើបំណាកស្រាយតាមនិយមន័យនូវផលបូកប្រវែងពី F_1 ទៅ P និងពី F_2 ទៅ P ។ គ្រូពន្យល់សង្កត់ធ្ងន់ទៅលើផលបូកចំងាយនោះគឺស្មើចំនួនថេរ $2a$ សំដៅទៅលើចំងាយពីកំពូល V_1 និង V_2 ។ គ្រូឲ្យសិស្សឡើងសង់រូបអេលីបផ្ចិត O កំនុំ F_1 និង F_2 និងកំពូល V_1V_2 ។ គ្រូពន្យល់ថា P ជាចំនុចនៅលើអេលីប	អេលីប។ ឧបមា P នៅត្រង់ V_1 គេបាន PF_1+PF_2 $=V_1F_1+V_1F_2$ $=V_2F+V_1F_2$ $=V_1V_2=2a$ បើ P នៅត្រង់ B_1 គេបាន $PF_1+PF_2=B_1F_1+B_1F_2=2B_1F_2$ តាមនិយមន័យគេបាន $2B_1F_2=2a \Rightarrow B_1F_2=a$ $\Delta\perp OB_1F_2$ តាមទ្រឹស្តីពីតាក័រគេបាន $B_1F_2^{\,2}=OB_1^2+OF_2^{\,2}$ ឬ $a^2=b^2+c^2$ (រូបដូចខាងលើ)	សិស្សឡើងសង់រូប
គ្រូឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់	*ជំហានទី៤* (ពង្រឹងចំណេះដឹង) ពង្រឹងចំពោះដឹង លំហាត់ ក/គណនាផលបូកចំងាយពី F_1 ទៅ P និងពី F_2 ទៅ P នៅត្រង់ V_2 (រូបដែលសង់ហើយ) ខ/បើ P នៅត្រង់ B_2 តាមនិយមន័យរកប្រវែងពី O ទៅ B_2 ហើយទាញ	សិស្សធ្វើលំហាត់

	បង្ហាញថា $a^2=b^2+c^2$	
គ្រូដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះ។	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ) លំហាត់៖ គេឲ្យអេលីបមួយដែលមានចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំស្មើ 2 និងពីផ្ចិតទៅកំពូលស្មើ 3 ។ ក/គណនាផលបូលចម្ងាយពីកំណុំទាំងពីរទៅចំណុច P ដែលនៅត្រង់កំពូលនៃអេលីប។ ខ/គណនាប្រវែងកន្លះអ័ក្សតូចនៃអេលីប។ (ផ្ចិតអេលីប $I\ (0;0)$)	

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...១....

មេរៀនទី...២.... **អេលីប**

៣.សមីការអេលីប

៣.១ សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្ស

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សកំណត់សមីការស្តង់ដានៃអេលីបបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការបកស្រាយពន្យល់របស់គ្រូ។

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយប្រតិបត្តិនិងលំហាត់តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ................ទី................ខែ.............ឆ្នាំ..........

III.<u>សម្ភារៈឧទេស</u>

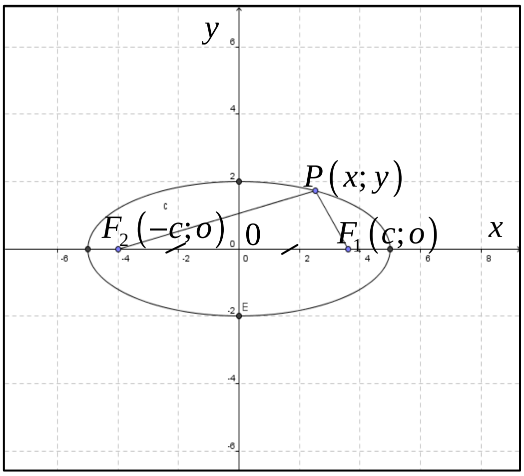
-ស . ស :ទំព័រទី.១៩៤.. ដល់ទំព័រទី..១៩៩..

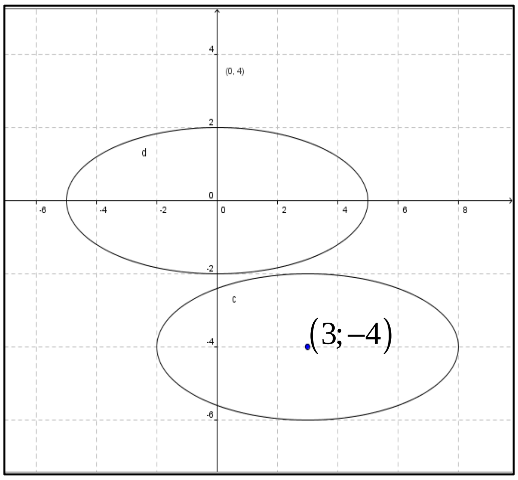
-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

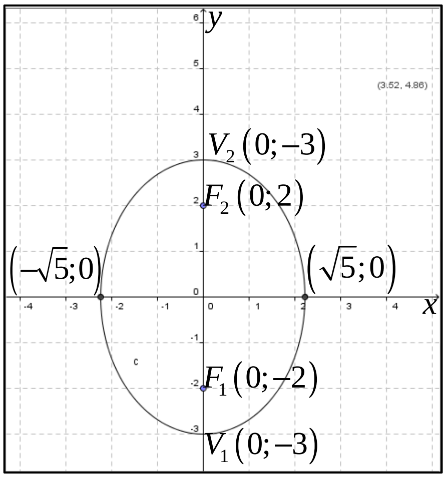
-បន្ទាត់ ខ្សែម៉ែត្រ តារាងរូបភាព ស្កុត

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
.គ្រូឲ្យសិស្សឲ្យនិយមន័យអេលីប? .ប្រាប់ធាតុសំខាន់ៗនៃអេលីប?	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់)	សិស្សឆ្លើយ អេលីបជាសំណុំចំនុចនៅក្នុងប្លង់ដែលមានផលបូកចម្ងាយពីចំនុចនោះទៅចំនុចនឹងពីរជាចំនួនថេរ។ .មាន កំណុំ កំពូល អ័ក្សធំ

		អ័ក្សតូច ផ្ចិត កន្លះអ័ក្សធំនិងកន្លះអ័ក្សតូច។
.គ្រូធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់ពីសមីការអេលីបដោយលើករូបភាពនិងបញ្ជាក់ឧទាហរណ៍។ .អេលីបមួយមានផ្ចិតគល់តំរុយកូអរដោនេ $(0;0)$ និងកំណុំទាំងពីរលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស តាង $F_1(c;0)$ និង $F_1(-c;0)$.គ្រូបញ្ជាក់នេះជាសមីការស្តង់ដានសអេលីបកាត់តាមគល់អ័ក្ស .បន្ទាប់មកគ្រូកត់ជាទូទៅទំព័រ១៩៥លើក្តាខៀន	*ជំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) *មេរៀនទី.១.* **អេលីប** ៣.<u>សមីការនៃសអេលីប</u> ៣.១<u>សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ</u>  គេបាន: $PF_1+PF_2=2a$ $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ លើកអង្គទាំងពីរជាការេ $a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$ លើកជាការេ $x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$ ដោយ $b^2=a^2-c^2$ $\Rightarrow x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$ ចែក a^2b^2 ដូចនេះ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ សមីការស្តង់ដា $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	សិស្សសង្កេតនិងកត់ត្រា សិស្សកាត់ត្រា សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា

គ្រូបញ្ជាក់អ័ក្សទាំងពីរ	-អ័ក្សធំ $2a$;អ័ក្សតូច $2b$ -កំពូល $(a;0)\&(-c;0)$ -កំណុំ $(c;0)\&(-c;0)$ ដែល $c^2=a^2+b^2$	
គ្រូឲ្យឧទាហរណ៍និងពន្យល់ ឧះគេឲ្យសមីការ $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$ ក.កំនត់ប្រភេទរូធរណី មាត្រ។ ខ.សង់រូប រកផ្ចិតកំពូល កំណុំ។	សមីការស្តង់ដា $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$ ហើយកំពូលនិងកំណុំមានអរដោនេផ្ទុយ ពីសមីការលើ ៣.២<u>សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមាន</u> <u>ផ្ចិតខុសពីគល់អ័ក្ស</u> ក.បើគេជំនួស $x=x-3$ និង $y=y+4$ គេបានសមីការស្តង់ដាអេលីបថ្មី $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$ ដែលបានមកពីការរំកិលអេលីបមុនឲ្យ ស្របនិងអ័ក្សកូអរដោនេទៅខាងស្តាំចំនួ ន ៣ឯកតានិងចុះក្រោមចំនួន៤ឯកតា	សិស្សមើលឧទាហណ៍
គ្រូបិទរូបលើក្តាខៀន គ្រូពន្យល់ អេលីបតាង $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$ ប៉ុននិងអេលីបតាង $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ គេបាន $a^2=25\Rightarrow a=5$ $b^2=4\Rightarrow b=2$ ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=2\times5=10$ តូច $2b=2\times2=4$	រូបធរណីមាត្រះ  	កត់ត្រាចំលើយ

កំពូល $(8;-4)\&(-2;-4)$ កំណុំ $\left(3+\sqrt{21}-4\right)\&\left(3-\sqrt{21};-4\right)$ ព្រោះ $c^2=a^2+b^2=25-4=21$ $\Rightarrow c=\sqrt{21}$.គ្រូជាទូទៅទំព័រ១៩៨	ខ្លឹមសារជាទូទៅនៅទំព័រ១៩៨	
.គ្រូឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់ គំរូទី១◌: រកសមីការស្តង់ដាអេលីប មានកំណុំ $(0;2)$ និង កំពូល $(0;-3)$ និង $(0;3)$ រួចសង់អេលីបនោះ។	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង) 	សិស្សពិភាក្សាជាក្រុម .ដោយកំពូលនៅត្រង់ចំនុច $(0;-3)$ និង $(0;3)$ ហើយផ្ចិត $(0;0)$ និងអ័ក្សធំនៅលើអ័ក្សអរដោនេ $c=2\,;\,a=3$ $\Rightarrow b^2=a^2-c^2$ $=9-4=5$ អេលីបមានសមីការស្តង់ដា $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$
ឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិនៅទំព័រ១៩៦&១៩៩	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ)	សិស្សប្រគល់កិច្ចការនៅម៉ោងក្រោយ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៦. *មេរៀនទី...៣....* **អ៊ីពែបូល**

(១.សេចក្តីផ្តើមអំពីអ៊ីពែបូល ; ២.និយមន័យនៃអ៊ីពែបូល; ៣.សមីការអ៊ីពែបូល;

៣.១ សមីការស្តង់ដាអ៊ីពែបូលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូរដោនេ)

I.<u>វត្ថុបំណងនៃមេរៀន</u>

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញសេចក្តីផ្តើមអំពីអ៊ីពែបូល និយមន័យនៃអ៊ីពែបូល; សមីការអ៊ីពែបូលនិងបកស្រាយ សមីការស្តង់ដាអ៊ីពែបូលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូរដោនេ តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ។

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយប្រតិបត្តិនិងលំហាត់តាមរយ:ឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.<u>ពេលវេលា:</u> ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ...............ទី...............ខែ.............ឆ្នាំ..........

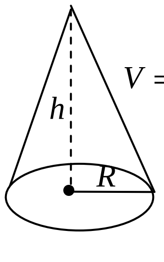
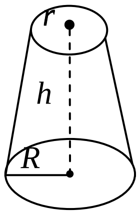
III.<u>សម្ភារ:ឧទេស</u>

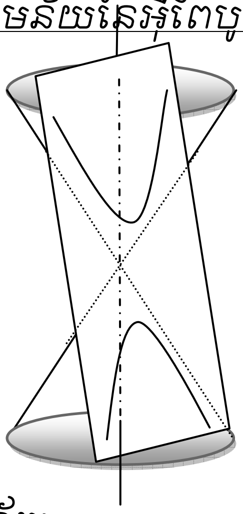
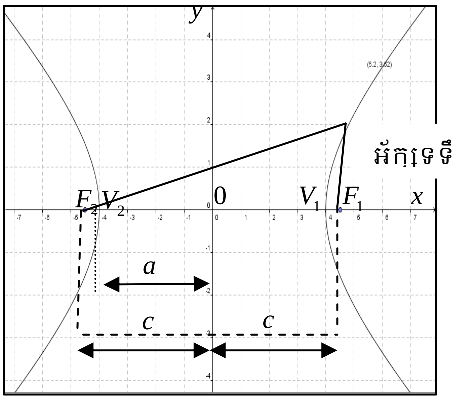
-ស . ស :ទំព័រទី.២០៤.. ដល់ទំព័រទី..២១១..

-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-បន្ទាត់ ខ្សែម៉ែត្រ

IV.<u>ដំណើកនាំមេរៀន</u>

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	<u>*ជំហានទី១*</u> (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ .ចូរប្អូនគូររូបកោណមួយដែលប្អូនស្គាល់។ .ចូរប្អូនគូររូបកំណត់កោណមួយផ្សេងទៀត .គ្រូត្រូវពិនិត្យមើលរូបដែលសិស្សសរសេរនៅលើក្តារ	<u>*ជំហានទី២*</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់)  $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$ កោន  កំណាត់កោន	សិស្សឡើងគូររូបកោន

ខៀន		
.គ្រូត្រូវកត់ត្រាឬសរសេរមេរៀនដាក់នៅលើក្តាខៀន .គ្រូត្រូវគូរូបអ័ក្សកោនមួយដើម្បីធ្វើការបកស្រាយនិយមន័យអ៊ីពែបូល? គ្រូត្រូវសរសេរនិយមន័យអ៊ីពែបូលដាក់នៅលើក្តាខៀន ហើយពន្យល់បកស្រាយអំពីនិយមន័យនោះឲ្យមានភាពទូលំទូលាយ។	*ជំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) *មេរៀនទី.១.* **អ៊ីពែបូល** ១.*សេចក្តីផ្តើមអ៊ីពែបូល* *ប្លង់មួយស្របនិងអ័ក្សនៃផ្ទៃកោនបរិវត្តន៍ប្រសព្វផ្ទៃកោនបានខ្សែកោងដែលមានពីរផ្នែកផ្សេងគ្នាហៅ* *ថា"អ៊ីពែបូល"។* ២.*និយមន័យនៃអ៊ីពែបូល*  *និយមន័យ:* *អ៊ីពែបូលជាសំណុំចំនុច P នៅក្នុងប្លង់ដែលមានផលដករវាងចំងាយពី ចំនុច P ទៅ ចំនុចនឹងពីរគឺ F_1 និង F_2 ជាកំណុំនៃអ៊ីពែបូល។* 	សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រាមេរៀន សិស្សកត់ត្រា

-V_1V_2 ហៅថាកំពូលអ៊ីពែបូល។

-បន្ទាត់ F_1F_2 ហៅថាអ័ក្សទទឹង។

-ចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ F_1F_2 គឺជាផ្ចិត 0 នៃអ៊ីពែបូល។

-តាង $0F_1 = 0F_2 = c$ និង $0V_1 = 0V_2 = a$
ដែល $c > a > 0$

-មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ F_1F_2 ហៅថាអ័ក្សឆ្លាស់

-អ័ក្សទទឹងនិងអ័ក្សឆ្លាស់ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃអ៊ីពែបូល។

៣.<u>សមីការនៃអ៊ីពែបូល</u>

៣.១<u>សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ</u>

ក.ករណីអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស

តាមនិយមន័យគេអាចទាញបានសមីការ
ស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិត $(0;0)$ និងកំនុំទាំងពីរស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស
។ទាញពិនិយមន័យផលដករវាងចម្ងាយពីចំណុច P ទៅកំនុំទាំងពីរជាចំនួនថេរ
គេបាន

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{\left((x-c)^2 + y^2\right)^2} = \left(\pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$+(x+c)^2 + y^2$$

គ្រូសរសេរលំហាត់គំរូដាក់នៅលើក្តារខៀនហើយដោះស្រាយតាមលំដាប់លំដោយ	$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2\pm4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ $+x^2-2cx+c^2+y^2$ $-4a^2-4cx=\pm4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ $-a^2-cx^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ $a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2\left(x^2+2cx+c^2+y^2\right)$ សមីការនេះសរសេរទៅជា $\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$ កំណត់យក $b^2=c^2-a^2$ សមីការនេះក្លាយទៅជា $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង a^2b^2 គេបាន $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ហៅថាសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលមានផ្ចិតជាគល់កូអរដោនេហើយមានអ័ក្សទទឹងនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស។ <u>ជាទូទៅ:</u> អ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេហើយអ័ក្សទទឹងស្ថិតនៅអ័ក្សអាប់ស៊ីសមានសមីការស្តង់ដា $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0;b>0\right)$ -កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(a;0)$ និង $(-a;0)$ -កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(c;0)$ និង $(-c;0)$ ដែល $c^2=a^2+b^2$ -សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ $y=\frac{b}{a}x$ និង $y=-\frac{b}{a}x$ លំហាត់គំរូ: គេឲ្យសមីការ $9x^2-16y^2=144$ ក.បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។កំណត់កូអរដោនេកំពូលនិង	សិស្សសង្កេតនិងកត់ត្រា

កូអរដោនេកំណុំ។

ខ.រកសមីការអាស៊ីមតូត

គ.សង់អ៊ីពែបូល

ចំលើយ

ក.កំណត់កូអរដោនេកំពូលនិងកូអរដោនេកំណុំ

គេមានសមីការ $9x^2-16y^2=144$

ចែកអង្គទាំងពីរនិង 144

គេបាន $\frac{9x^2}{144}-\frac{16y^2}{144}=\frac{144}{144}$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

គេទាញបានកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរគឺ $(4;0)$ និង $(-4;0)$ ។

$c^2=a^2+b^2$

តាម $c^2=16+9=25$

$\Rightarrow c=\sqrt{25}=5$

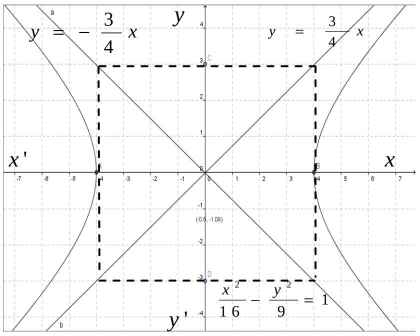
ដូចនេះកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរគឺ $(5;0);(-5;0)$ ។

ខ.សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ

$y=\frac{b}{a}x \Rightarrow y=\frac{3}{4}x$

$y=-\frac{b}{a}x \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x$

គ.សង់អ៊ីពែបូល



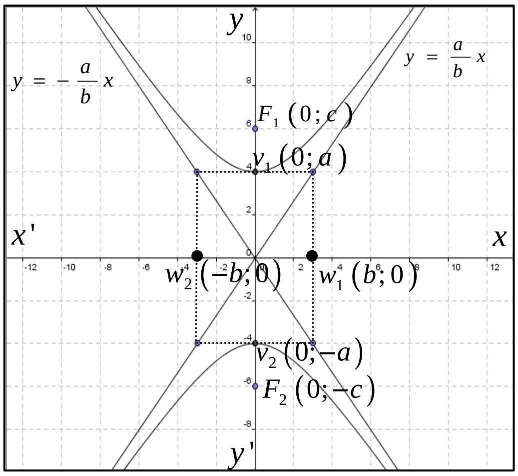
ខ.ករណីអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអរដោនេ

យើងមានសមីការអ៊ីពែបូល $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ដែលមានផ្ចិត $(0;0)$ និងកំនុំ $(0;\pm c)$ ដែលមានអ័ក្សទទឹងចាអ័ក្សអាប់ស៊ីសហើយ $c^2=a^2+b^2$ ។នោះគេប្តូរ x ជា y និង y ជា

x

យើងបាន $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ជាសមីការរូបឆ្លុះរបស់អ៊ីពែបូល $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ធៀបនិងបន្ទាត់ $y = x$ ។

ដូចនេះសមីការ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ជាសមីការអ៊ីពែបូលមានផ្ចិត $(0;0)$ និងកំណុំ $(0;\pm c)$ ហើយអ័ក្សទទឹងស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេដែល $c^2=a^2+b^2$



ជាទូទៅ:អ៊ីពែបូលដែលមានអ័ក្សទទឹង
ជា
អ័ក្សងអរដោនេមានសមីការស្តង់ដា

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;(a>o;b>o)$

-កំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0;\pm a)$

-កំណុំទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0;\pm c)$

	ដែល $c^2 = a^2 + b^2$ -សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ $y = \pm\frac{a}{b}x$	
គ្រូឲ្យធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ ទំព័រទី២១១ ត្រង់ចំនុចក;ខ;គ។	*<u>ជំហានទី៤</u>* (ពង្រឹងចំណេះដឹង)	សិស្សពិភាក្សាជាក្រុម
គ្រូឲ្យធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ ទំព័រទី២១៧លេខរៀង ១ដល់៣	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ)	សិស្សប្រកល់កិច្ចការ នៅម៉ោងក្រោយ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៦....

មេរៀនទី...៣.... **អ៊ីពែបូល**

(.*សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូល;សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូល*)

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង :សិស្សបង្ហាញសមីការស្តង់ដានិងសមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូលតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយប្រតិបត្តិនិងលំហាត់តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.ពេលវេលា: ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ...............ទី...............ខែ.............ឆ្នាំ..........

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី.២១១.. ដល់ទំព័រទី..៥..

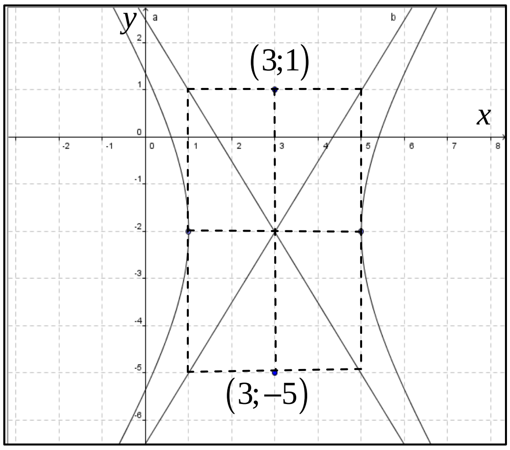
-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

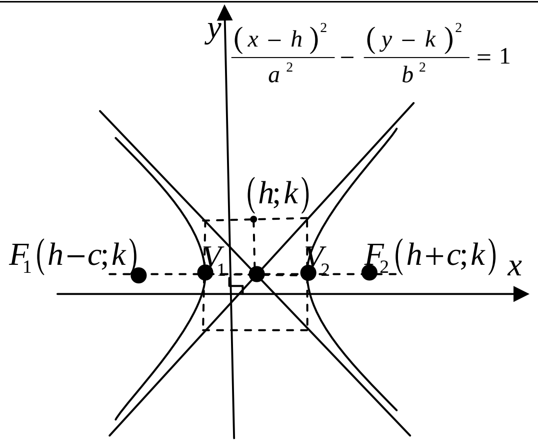
-បន្ទាត់ កូនបាល់ ខ្សែម៉ែត្រ

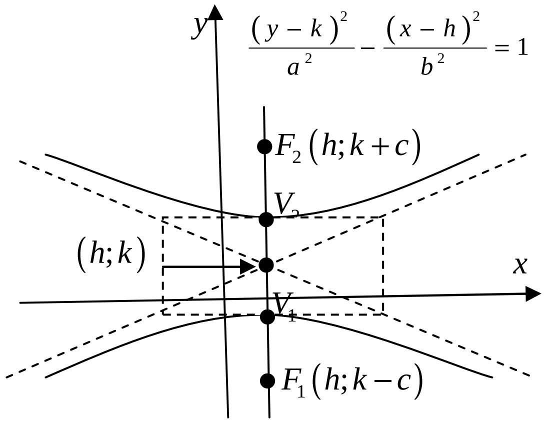
IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	*ជំហានទី១* (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ .តើសមីការស្តង់ដារបស់អ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិត 0 និងអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអាប់ស៊ីសមានទំរង់ដូចម្តេច? .តើកំពូលអ៊ីពែបូលស្មើប៉ុន្មាន? .កូអរដោនេនៃកំនុំនិងអាស៊ីម	*ជំហានទី២* (រំលឹកមេរៀនចាស់) ឧ:កំណត់កូរដោនេកំពូល កំនុំ និងសមីការអាស៊ីមតូតនៃសមីការ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ចំលើយ យើងមានសមីការ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ នោះជាសមីការអ៊ីពែបូលដែលមានអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអាប់ស៊ីសនិង $a=3;b=4$ នោះ	សិស្សឆ្លើយ .សមីការស្តង់ដាអ៊ីពែបូលគឺ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;(a>0;b>0)$.កំពូលទាំងពីរគឺ $(a;0);(-a;0)$.កូអរដោនេនៃកំនុំគឺ $(c;0);(-c;0)$ ដែល $c^2=a^2+b^2$ សមីការអាស៊ីមតូតគឺ $y=\pm\frac{b}{a}x$

តូតស្មើប៉ុន្មាន?	$c^2=a^2+b^2\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}$ $c=\sqrt{3^2+4^2}=5$ កំពូលអ៊ីពែបូលគឺ: $(a;o)=(3;0)$ និង $(-a;o)=(-3;0)$ $(3;1)$ កំនុំគឺ $(\pm c;0)=(\pm 5;0)$ សមីការអាសុីមតូតគឺ $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{3}x$	
គ្រូសរសេរឧទាហរណ៍ គេឲ្យសមីការ $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ ក/កំណត់ប្រភេទនៃរូបធរណីមាត្រដែលក្រាបតាងសមីការខាងលើ។ ខ/រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំនិងសមីការអាសុីមតូត រួចសង់អ៊ីពែបូល។	*ជំហានទី៣* (មេរៀនថ្មី) *មេរៀនទី.៣.* **អ៊ីពែបូល** ចំលើយ ក/បើជំនួស x ដោយ $x-3$ និង y ដោយ $y+2$ ក្នុងសមីការ $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ នៃអ៊ីពែបូល H នោះគេបាន $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ ដែលជាសមីការអ៊ីពែបូលថ្មីមួយទៀត H' បានពីការរំកិលអ៊ីពែបូលចាស់ទៅខាងស្តាំ៣ឯកតាហើយស្របនិងអ័ក្សអាប់សុីសនិងចុះក្រោម២ឯកតាហើយស្របនិងអ័ក្សអរដោនេ។ ខ/ដោយអ៊ីពែបូលថ្មីបានពីបំលែងកិលអ៊ីពែបូលចាស់នោះ $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ ប៉ុនគ្នានិងអ៊ីពែបូល $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ នោះ: $a^2=4;b^2=9\Rightarrow c=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ +ផ្ចិតមានកូអរដោនេ $(3;-2)$ +កំពូលគឺ $(5;-2);(1;-2)$ +កំណុំគឺ $(3+\sqrt{13};-2);(3-\sqrt{13};-2)$ +សមីការអាសុីមតូតគឺ $y=\pm\frac{3}{2}(x-3)-2$	សិស្សកត់ត្រា

គ្រូឲ្យជាទូទៅ	 ទូទៅ: ១/អ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិត $(h;k)$ និងអ័ក្សទទឹងស្របនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីសមានសមីការគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1;(a>0;b>0)$.កំពូល $(h\pm a;k)$.កំនុំ $(h\pm c;k);c^2=a^2+b^2$.សមីការអាស៊ីមតូតគឺ $y=k\pm\frac{b}{a}(x-h)$ ២/ អ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិត $(h;k)$ និងអ័ក្សទទឹងស្របនិងអ័ក្សអរដោនេមានសមីការគឺ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2};(a>0;b>0)$.កំពូល $(h;k\pm a)$.កំនុំ $(h;k\pm c);c^2=a^2+b^2$.សមីការអាស៊ីមតូតគឺ $y=k\pm\frac{a}{b}(x-h)$	សិស្សកត់ត្រា





៣.៣<u>សមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូល</u>

ជាទូទៅ៖

សមីការដឺក្រេទី២មានរាង

$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ ដែល $AB<0$

ជាសមីការទូទៅនៃអ៊ីពែបូល។

ឧ:អ៊ីពែបូលមួយមានសមីការទូទៅ

$4x^2-9y^2+32x+18y+91=0$ ។

.គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍គំរូ

ក/បំលែងសមីការនេះជាសមីការស្តង់ដា

ខ/រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំនិង សមីការអាស៊ីមតូត។រួចសង់អ៊ីពែបលៈ។

<u>ចំលើយ</u>

ក.បំលែងសមីការនេះជាសមីការស្តង់ដា

យើងមានសមីការ

$4x^2-9y^2+32x+18y+91=0$

$(4x^2+32x)-(9y^2-18y)+91=0$

$4(x^2+8x)-9(y^2-2y)+91=0$

$4(x^2+8x+16-16)-9(y^2-2y+1-1)+91=0$

$4(x^2+8x+16)-64-9(y^2-2y+1)+91+9=0$

$4(x+4)^2-9(y-1)^2+36=0$

$4(x+4)^2-9(y-1)^2=-36$

$\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x+4)^2}{9}=1$

ខ.រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំនិង សមីការអាស៊ីមតូតរួខសង់ក្រាប

យើងមានសមីការ

$\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x+4)^2}{9}=1$

នោះ $h=-4;k=1;a=2;b=3;c=\sqrt{13}$

អ័ក្សទទឹងស្របនិងអ័ក្សអរដោនេ

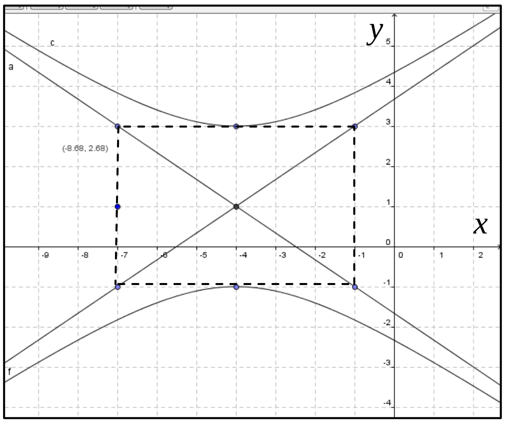
+កូអរដោនេផ្ចិតគឺ $(-4;1)$

+កំពូលទាំងពីរគឺ $(-4;3);(-4;-1)$

+កំណុំទាំងពីរគឺ $\left(-4;1\pm\sqrt{13}\right)$

+សមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរគឺ

$y=\frac{2}{3}x+\frac{11}{3};y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$



	ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)	សិស្សឆ្លើយ

ប្រត្តិបត្តិ:រកសមីការស្តង់ដា នៃអ៊ីពែបូលដែលមានកំណុំ ត្រង់ចំនុច $(6;1)$ និង $(-2;1)$ ហើយអាស៊ីមតូតមានសមីការ $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ & $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$		យើងបានចំនុចកណ្តាលនៃកំណុំទាំងពីរគឺជាផ្ចិតនៃអ៊ីពែបូលគឺ: $\left(\frac{6-2}{2};\frac{1+1}{2}\right)=(2;1)$ $\Rightarrow h=2;k=1$ យើងមានសមីការអាស៊ីមតូត $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}=1+\frac{3}{4}x-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}=1-\frac{3}{4}x\frac{3}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} y=1+\frac{3}{4}(x-2) \\ y=1-\frac{3}{4}(x-2) \end{cases}$ $b=3;a=4$ ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{(x-2)^2}{4^2}-\frac{(y-1)^2}{3^2}=1$
គ្រូដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្សធ្វើនៅផ្ទះ	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ) រកកូអរដោនេផ្ចិត កំណុំ កំពូលនិងសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូលហើយសង់ក្រាបនីមួយ ក/ $-x^2+4y^2-2x-6y+11=0$ ខ/ $25x^2+16y^2-250x-382y+109=0$	សិស្សអនុវត្តន៍

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូក ទី...៦....

មេរៀនទី...៣... **អ៊ីពែប៉ូល**

(៤.អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ ; ៥.លក្ខណចំណាំងផ្លាតនៃអ៊ីពែប៉ូល)

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង :សិស្សស្គាល់អំពីអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនិងចេះរកលក្ខណៈចំណាំងផ្លាតនៃអ៊ីពែបូល តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-បំណិន :សិស្សដោះស្រាយប្រតិបត្តិនិងលំហាត់តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II.ពេលវេលា: ...២....ម៉ោង ថ្ងៃ................ទី...............ខែ............ឆ្នាំ.........

III.សម្ភារៈឧទេស

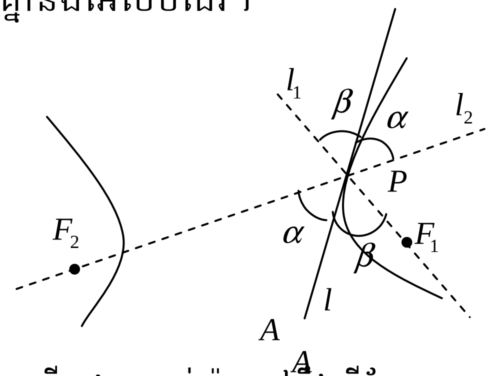
-ស . ស :ទំព័រទី.២១៥.. ដល់ទំព័រទី..២១៦..

-ស . គ : ទំព័រទី... ដល់ទំព័រទី....

-បន្ទាត់ ខ្សែម៉ែត្រ

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

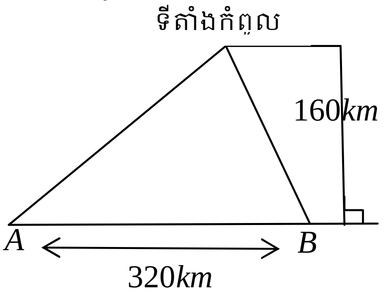
សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ .តើសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ អ័ក្សទទឹងស្របនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីសមានសមីការស្តង់ដាដូចម្តេច?	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)	សិស្សឆ្លើយ +មានផ្ចិត $(h;k)$ កំណុំ $(h+c;k);(h-c;k)$ និងកំពូល $(h+a;k);(h-a;k)$ សមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $c^2=a^2+b^2$ + មានផ្ចិត $(h;k)$ កំណុំ

.តើសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតខុសពីគល់អ័ក្សកូអរដោនេ អ័ក្សទទឹងស្របនិងអ័ក្សអរដោនេមានសមីការស្តង់ដាដូចម្តេច?		$(h;k+c);(h;k-c)$ និងកំពូល $(h;k+a);(h;k-a)$ សមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ $c^2=a^2+b^2$
គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី	*<u>ជំហានទី៣</u>* (មេរៀនថ្មី) *មេរៀនទី.៣.* **អ៊ីពែបូល** ៤.<u>អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ</u> e និយមន័យ: អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ e នៃអ៊ីពែបូលគឺជាផលធៀបរវាង c ដែលជាចំងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំនិង a ដែលជាចំងាយពីផ្ចិតទៅកំពូលនៃអ៊ីពែបូល $e=\frac{c}{a}$ សំគាល់: គ្រប់អ៊ីពែបូលមានកំណុំនៅលើអ័ក្សទទឹងនៃអ៊ីពែបូល $c>a>o$ នោះ $\frac{c}{a}>1$ ឬ $e>1$ ៥.<u>លក្ខណ:ចំណាំងផ្លាតនៃអ៊ីពែបូល</u> +អ៊ីពែបូលមានលក្ខណ:ចំណាំងផ្លាតដូចគ្នានឹងអេលីបដែរ។  .បើ l ជាបន្ទាត់ប៉ះនៅនឹងអ៊ីពែបូលត្រង់ចំនុច p ដែលមានកំណុំ F_1 និង F_2 ដូចរូប។ .បើ α ជាមុំស្រួចផ្គុំឡើងរវាង F_2p និង l ហើយ β ជាមុំផ្គុំរវាង F_1p និង l នោះ $\alpha=\beta$	សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា

.បើកាំពន្លឺមានទិសដៅតាមបន្ទាត់ l_1 កាត់តាមចំនុច F_1 និង p នោះវានឹងចាំងផ្លាតត្រលប់ពីចំនុច p តាមបន្ទាត់ l_2 កាត់តាមចំណុច F_2 និង p លក្ខណៈនេះគេអាចប្រើក្នុងការកំណត់កែវយឺតប្រភេទ Casse grain ។

គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍

កប៉ាល់មួយកំពុងធ្វើដំណើរពីចំនុច c ស្របនិងឆ្នេរសមុទ្រ ហើយមានចំងាយ $160km$ ពីមាត់សមុទ្រ កប៉ាល់នេះបានបង្ហាញនូវសញ្ញាគ្រោះថ្នាក់ដែលត្រូវបានទទួលដោយស្ថានីយពីរ A និង B ហើយមានចំងាយពីគ្នា $320km$ (ដូចរូបខាងក្រោម)។ តាមការវាស់រយះពេលខុសគ្នាដោយមន្ត្រីស្ថានីយក្នុងការចាប់បានសញ្ញាគ្រោះថ្នាក់ កំណត់ឃើញថាកប៉ាលនេះនៅជិតស្ថានីយ B ជាងស្ថានីយ A ចំងាយ $256km$ ។ តើកប៉ាលនេះមានទីតាំងនៅត្រង់ចំនុចណា?



ចំលើយ

តាង d_1 ចំងាយពីកប៉ាលទៅស្ថានីយ A

d_2 ចំងាយពីកប៉ាលទៅស្ថានីយ B

យើងបាន

$d_1 - d_2 = 256 = 2a$

$\Rightarrow a = 128$

ដោយ $c = \dfrac{320}{2} = 160$ និង $c^2 = a^2 + b^2$

នោះ $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{160^2 - 128^2} = 96$

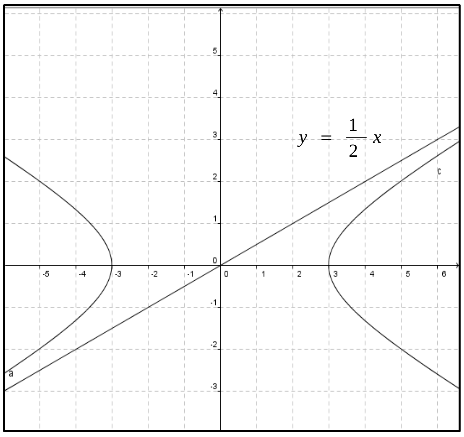
សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានកំនុំមួយនៅត្រង់ចំនុច A ហើយកាត់តាមកូអរដោនេនៃកប៉ាលនៅត្រង់ចំនុច $p(x;y)$ គឺ

$$\frac{x^2}{128^2} - \frac{y^2}{96^2} = 1$$

ដោយ $y = 160$ គេបាន $\dfrac{x^2}{128^2} - \dfrac{y^2}{96^2} = 1$

$$x = \sqrt{\left(1 + \frac{160^2}{96^2}\right)128} \approx 128.\sqrt{3.7}$$

កូអរដោនេនៃចំនុចដែលកប៉ាលស្ថិតនៅគឺ $\left(128\sqrt{3.7};160\right)$ ។

គ្រូឲ្យសិស្សពិភាក្សាលើ លំហាត់ទី១១	*ជំហានទី៤* (ពង្រឹងចំណេះដឹង)  	សិស្សឡើងធ្វើ ចំលើយ តាមគន្លងអ៊ីពែបូលដែលមាន $V(\pm 3;0)$ និង $W\left(0;\pm\frac{3}{2}\right)$ យើងបានសមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$ នាំឲ្យ $x^2-4y^2=9$ បើមានមែកតែម្ខាងនៅខាងស្តាំ នោះ $x=\sqrt{4y^2+9}$ ជាសមីការ គន្លង។
គ្រូឲ្យសិស្សយកលំហាត់ ធ្វើនៅផ្ទះទំព័រទី២១៩ លំហាត់ទី៩	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ)	សិស្សប្រគលកិច្ចការនៅ ម៉ោងក្រោយ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ១ លីមីតនៃស៊ីត

មេរៀនទី ១ លីមីតនៃស៊ីត

I. **ស៊ីតអនន្ត**

១. និយមន័យ

២. ស៊ីតរួម

៣. ស៊ីតរីក

I. **វត្ថុបំណងនៃមេរៀន ៖** ក្រោយពីរៀនចប់សិស្សមាន

- ចំណេះដឹង : កំណត់និយមន័យ ស៊ីតអនន្ត ស៊ីតរួម ស៊ីតរីក បានត្រឹមត្រូវតាមរយរយៈឧទាហរណ៍
- បំនិន : បង្ហាញបាននូវស៊ីតអនន្ត ស៊ីតរួម ស៊ីតរីក បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈលំហាត់គំរូ
- ឥរិយាបថ : សហការគ្នាដោះស្រាយលំហាត់ប្រតិបត្តិ

II. **ពេលវេលា** ០២ ម៉ោង ថ្ងៃ... ទី... ខែ... ឆ្នាំ២០១...

III. **សម្ភារៈឧបទេស**

សៀវភៅគ្រូ

សៀវភៅសិស្ស

IV. **ដំណើរការមេរៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
គ្រូតពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ធ្នាប់ថ្នាក់រៀន	ជំហានទី ១ រដ្ឋបាលថ្នាក់	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
ចូរអោយនិយមន័យស៊ីតនៃចំនួនពិត។ និយមន័យស៊ីតនព្វន្ត។និយមន័យស៊ីតធរណីមាត្រ។	ជំហានទី ២ រំលឹកមេរៀន	-ស៊ីតចំនួនពិតជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពី $IN \rightarrow IR$។ -ស៊ីតនព្វន្តជាអនុគមន៍លេខបន្តបន្ទាប់គ្នា ដែលកើតឡើងពីផលបូកចំនួនដំបូងមួយនិងចំនួនថេរ។ -ស៊ីតធរណីមាត្រជាអនុគមន៍លេខបន្តបន្ទាប់គ្នា ដែលកើតឡើងពីផលគុណចំនួនដំបូង

		មួយ និងចំនួនថេរ។
ចាប់ផ្តើមមេរៀនចំនុចទី១ គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ទី១ឲ្យសិស្សសង្កេត ហេតុអ្វីបានជាស្វ៊ីតមានតួច្រើនអនន្តជាស្វ៊ីតអនន្ត? គ្រូដាក់ឧទហរណ៍ទី២ តើស្វ៊ីតនេះមានតួច្រើនអនន្តតួឬទេ? ឲ្យនិយមន័យ ស្វ៊ីតងនន្តដល់សិស្ស ដាក់លំហាត់គំរូឲ្យសិស្សពិភាក្សា និងឲ្យសិស្សម្នាក់ឡើងដោះស្រាយ	ជំហានទី ៣ មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ **ជំពូកទី ១ លីមីតនៃស្វ៊ីត** **មេរៀនទី ១ លីមីតនៃស្វ៊ីត** **I ស្វ៊ីតអនន្ត** **១. និយមន័យ** <u>ឧទាហរណ៍១</u>៖ ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots,\frac{1}{n},\dots$ ដែលមានចំនួនតួច្រើនអនន្តជាស្វ៊ីតអនន្ត។ ដែលមានចំនួនតួច្រើនអនន្តជាស្វ៊ីតអនន្ត។ <u>ឧទាហរណ៍២</u>៖ ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $1,4,9,16,\dots,n^2,\dots$ ដែលមានចំនួនតួច្រើនអនន្តជាស្វ៊ីតអនន្ត។ <u>និយមន័យ</u> ស្វ៊ីត $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots$ ដែលមានចំនួនតួច្រើនអនន្តហៅថាស្វ៊ីតអនន្ត។ លំហាត់គំរូ៖ រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតខាងក្រោមរួចបញ្ជាក់ថាស្វ៊ីតទាំងនោះជាស្វ៊ីតអនន្ត $\frac{3}{1},\frac{5}{4},\frac{7}{7},\frac{9}{10},\frac{11}{13},\dots$ ។ គេសង្កេតឃើញថាភាគយកនៃតួនីមួយៗជាចំនួនសេស និងភាគបែងនៃតួបន្ទាប់បានដោយយកភាគបែងនៃតួនៅមុខបូកនិង៣។ ដូចនេះ	ស្តាប់ សង្កេត កត់ត្រា បានជាស្វ៊ីតមានតួច្រើនអនន្តជាស្វ៊ីតអនន្តព្រោះយើងមិនអាចកំណត់ចំនួនតួនៃស្វ៊ីតបាន ស្វ៊ីតនេះមានតួច្រើនអនន្តតួ កត់ត្រានិយមន័យនៃស្វ៊ីតអនន្ត ពិភាក្សាលំហាត់គំរូ សិស្សម្នាក់ឡើងដោះស្រាយ គេសង្កេតឃើញថាភាគយកនៃតួនីមួយៗជាចំនួនសេស និងភាគបែងនៃតួបន្ទាប់បានដោយយកភាគបែងនៃតួនៅមុខបូកនិង៣។ ដូចនេះ $\frac{3}{1},\frac{5}{4},\frac{7}{7},\frac{9}{10},\frac{11}{13},\dots,\frac{2n+1}{3n-2}$ មានចំនួនតួច្រើនអនន្តជាស្វ៊ីតអនន្ត ហើយមានតួទូទៅ

ចូលចំនុចទី២ ដាក់ឧទាហរណ៍ និងពន្យល់ពីឧទាហរណ៍។ ឲ្យសិស្សទាញសន្និដ្ឋាននិយមន័យស្វ៊ីតរួម ដាក់លំហាត់គំរូឲ្យសិស្សពិភាក្សា	$\frac{3}{1},\frac{5}{4},\frac{7}{7},\frac{9}{10},\frac{11}{13},\dots,\frac{2n+1}{3n-2}$ មានចំនួនតួច្រើនអនន្តជាស្វ៊ីតអនន្ត ហើយមានតួទូទៅ $a_n=\frac{2n+1}{3n-2},n\in\mathbb{N}$ ។ **២. ស្វ៊ីតរួម** <u>ឧទាហរណ៍</u> $(b_n):\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\dots,\frac{n+1}{n},\dots$ ។ គេបាន $(b_n)=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$ ។ កាលណា n យកតម្លៃធំឡើងៗ នោះ $\frac{1}{n}$ មានតម្លៃកាន់តែតូចទៅៗ ហើយខិតទៅរកសូន្យ។ ដូចនេះ b_n យកតម្លៃកាន់តែខិតជិត 1 ។ គេថាស្វ៊ីត (b_n) មានលីមីត 1 កាលណា n ខិតទៅ $+\infty$ ហើយគេកំណត់សរសេរ $\lim_{n\to+\infty}b_n=1$ ។ ក្នុងករណីនេះគេថាស្វ៊ីត (b_n) រួមទៅរក 1។ <u>និយមន័យ</u> ស្វ៊ីត $(a_n):a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots$ ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរកចំនួនពិត λ បើ $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lambda$ ។ <u>លំហាត់គំរូ</u>៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$ ជាស្វ៊ីតរួម ដំណោះស្រាយ ស្វ៊ីតនេះមានតួទូទៅ $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ។ដោយ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ នោះ គេបាន $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=0$	$a_n=\frac{2n+1}{3n-2},n\in\mathbb{N}$ ។ កត់ត្រា ស្តាប់ និង សង្កេត ធ្វើការសន្និដ្ឋាន និងកត់ត្រានិយមន័យ ពិភាក្សាដោះស្រាយលំហាត់ ដំណោះស្រាយ ស្វ៊ីតនេះមានតួទូទៅ $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ។ដោយ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ នោះ គេបាន $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=0$ ដូចនេះស្វ៊ីត

ចូលចំនុចទី ៣ ដាក់ឧទាហរណ៍ទី១នឹងពន្យល់ពីឧទាហរណ៍ ប្រាប់ថា (a_n) រីកទៅរក $+\infty$ បង្ហាញ នឹងពន្យល់ឧទាហរណ៍ទី ២ ឲ្យសិស្សទាញសន្និដ្ឋាននិយមន័យនៃស្វ៊ីតរីក	ដូចនេះស្វ៊ីត $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ជាស្វ៊ីតរួមទៅរក 0 ។ **៣. ស្វ៊ីតរីក** ឧទាហរណ៍១៖ ស្វ៊ីត $1,4,9,16,\dots,n^2,\dots$ មានតួទូទៅ $a_n=n^2$ ។ កាលណា n កើនធំទៅៗ ហើយខិតទៅជិតអនន្តនោះ $a_n=n^2$ កើនធំទៅៗ ខិតទៅជិតអនន្តដែរ។ គេសរសេរ $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)=+\infty$ គេថា (a_n) រីកទៅរក $+\infty$ ឧទាហរណ៍២៖ ស្វ៊ីត $1,0,-1,-2,\dots,2-n,\dots$ មានតួទូទៅ $a_n=2-n$ ។កាលណា $n\to+\infty$ គេបាន $(2-n)\to-\infty$ ឬ $\lim\limits_{n\to+\infty}(2-n)=-\infty$ ។គេថាស្វ៊ីត (a_n) ជាស្វ៊ីតរីកទៅរក $-\infty$ ។ និយមន័យ ស្វ៊ីត $(a_n):a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots$ ជាស្វ៊ីតរីកខិតទៅរក $+\infty$ បើ a_n មានលីមីត $+\infty$ ឬ $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)=+\infty$ ។ ស្វ៊ីត $(a_n):a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots$ ជាស្វ៊ីតរីកខិតទៅរក $-\infty$ បើ a_n មានលីមីត $-\infty$ ឬ $\lim\limits_{n\to+\infty}=-\infty$ ។	$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ជាស្វ៊ីតរួមទៅរក 0 ។ ស្តាប់ សង្កេតលើឧទាហរណ៍ កត់ត្រា សិស្សសន្និដ្ឋាននិយមន័យនៃស្វ៊ីតរីក នឹង កត់ត្រានិយមន័យ
ដាក់លំហាត់គំរូឲ្យសិស្សឡើងដោះស្រាយ	ជំហានទី៤ ពង្រឹងពុទ្ធិ លំហាត់គំរូ បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ដែល $u_n=-3n^2-2$ ជាស្វ៊ីតរីក។	ពិភាក្សា និង ដោះស្រាយ គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}(-3n^2-2)$ $=\lim\limits_{n\to+\infty}(-3n^2)$ $=+\infty$

ចូរឲ្យនិយមន័យស្វីតរីក។ និងស្វីតរួម។		ដូចនេះស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតរីកទៅរក $-\infty$ ។ ស្វ៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ជាស្វ៊ីតរីកខិតទៅរក $+\infty$ បើ a_n មានលីមីត $+\infty$ ឬ $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n) = +\infty$ ។ ស្វ៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ជាស្វ៊ីតរីកខិតទៅរក $-\infty$ បើ a_n មានលីមីត $-\infty$ ឬ $\lim\limits_{n\to+\infty} = -\infty$ ។ ស្វ៊ីតរួម ស្វ៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរកចំនួនពិត λ បើ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lambda$ ។
ពេលត្រលប់ទៅផ្ទះវិញធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិរបស់ចំនុចទី ៣ ស្វ៊ីតរីក នៅទំព័រទី០៤ (ក និង ខ)	ជំហានទី ៥ បណ្តាំផ្ញើ	កត់ត្រា នឹង ធ្វើតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ១ លីមីតនៃស្វ៊ីត

មេរៀនទី ១ លីមីតនៃស្វ៊ីត

II. ប្រមាណវិធីលើលីមីតនៃស្វ៊ីត

១. ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះ

២. លក្ខណៈគ្រឹះ

III. លីមីតនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១. សញ្ញាណស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត

I. ចំណុចបំណងនៃមេរៀន ៖ ក្រោយពីរៀនចប់សិស្សមាន

- ចំណេះដឹង : ពន្យល់ពីលក្ខណៈគ្រឹះ និងទ្រឹស្តីបទគ្រឹះបានត្រឹមត្រូវ និងកំណត់សញ្ញាណនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្របានត្រឹមត្រូវ
- បំនិន : គណនាលីមីតស្វ៊ីតដោយប្រើប្រមាណវិធីបានត្រឹមត្រូវ
- ឥរិយាបថ : សហការគ្នាដោះស្រាយលំហាត់

II. ពេលវេលា ០២ ម៉ោង ថ្ងៃ... ទី... ខែ... ឆ្នាំ២០១...

III. សម្ភារៈឧបទេស

សៀវភៅគ្រូ

សៀវភៅសិស្ស

IV. ដំណើរការមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
គ្រូតពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ធ្នាប់ថ្នាក់រៀន	ជំហានទី ១ រដ្ឋបាលថ្នាក់	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
ចូរឲ្យនិយមន័យស្វ៊ីតរីក។ និង ស្វ៊ីតរួម។	ជំហានទី ២ រំលឹកមេរៀន	ស្វ៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ជាស្វ៊ីតរីកខិតទៅរក $+\infty$ បើ a_n មានលីមីត $+\infty$ ឬ

		$\lim_{n\to+\infty}(a_n)=+\infty$ ។ ស្វ៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ជាស្វ៊ីតរីកខិតទៅរក $-\infty$ បើ a_n មានលីមីត $-\infty$ ឬ $\lim_{n\to+\infty} = -\infty$ ។ ស្វ៊ីតរួម ស្វ៊ីត $(a_n): a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរកចំនួនពិត λ បើ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda$ ។
សរសេរទ្រឹស្តីបទគ្រឹះ និងពន្យល់ ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះមានលក្ខណៈដូចនិងលីមីតដែល ឲ្យសិស្សពិភាក្សាដោះស្រាយលំហាត់គំរូដោយប្រើទ្រឹស្តីបទគ្រឹះចំនុចថ្មី សរសេរ និងពន្យល់ពីលក្ខណៈគ្រឹះ	ជំហានទី ៣ មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ **ជំពូកទី ១ លីមីតនៃស្វ៊ីត** **មេរៀនទី ១ លីមីតនៃស្វ៊ីត** **IIប្រមាណវិធីលើលីមីតនៃស្វ៊ីត** **១. ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះ** គេមានស្វ៊ីត (a_n) និង (b_n) ដែលមាន $\lim_{n\to+\infty} a_n = M$ និង $\lim_{n\to+\infty} b_n = N$ គេបាន៖ ▪ $\lim_{n\to+\infty} ka_n = kM$ ដែល k ជាចំនួនថេរ ▪ $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = M+N$, $\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n) = M-N$ ▪ $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_{n)} = MN$,បើ $N \neq 0$ នោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{M}{N}$ ។ <u>លំហាត់គំរូ</u> គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីត ក. $(u_n): u_n = \frac{3n+1}{n} + \frac{5}{n^2}$ **២. លក្ខណៈគ្រឹះ** ឧបមាថា $a_n \le b_n$ ចំពោះលំដាប់ទី n ដែលធំបង្គួរ។ ▪ បើ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ និង $\lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$ នោះ $\alpha \le \beta$	កត់ត្រា និងស្តាប់ ដោះស្រាយលំហាត់គំរូ តាង $v_n = \frac{3n+1}{n}$ និង $w_n = \frac{5}{n^2}$ គេបាន $u_n = v_n + w_n = \frac{3n+1}{n} + \frac{5}{n^2}$ $v_n = \frac{3n+1}{n} = 3 + \frac{1}{n}$ ដោយ $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{n}$ $= \lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{1}{n}$ $= 3$ និង $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n^2} = 0$ នោះ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n + \lim_{n\to+\infty} w_n$ $= 3+0$ $= 3$ ដោះស្រាយលំហាត់គំរូ ក.$u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6}$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ គេមាន $-1 \le \sin\frac{n\pi}{6} \le 1$ ហើយ $-\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6} \le \frac{1}{n}$ ដោយ $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ និង

ដាក់លំហាត់គំរូឲ្យសិស្សអនុវត្តតាមលក្ខណៈគ្រឹះ ដាក់សំគាល់ និងពន្យល់ ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សរកតួរបស់ស៊ីតដោយប្រើ $r=2$ និង $r=\frac{1}{3}$ ពន្យល់ប្រាប់សិស្សថា ស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួច្រើនអនន្ត ជាស៊ីតអនន្ត។	▪ បើ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=+\infty$ ▪ ឧបមាថា $a_n\le b_n\le c_n$ ចំពោះលំដាប់ទី n ដែលធំបង្គួរ បើ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=\alpha$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=\alpha$ ។ <u>លំហាត់គំរូ</u> គណនាលីមីតនៃស៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ ក. $u_n=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6}$ ខ. $u_n=\frac{n+(-1)^n}{2n}$ <u>សំគាល់</u> ក្នុងលក្ខណៈ ១ ខាងលើមិនអាចថា $a_n<b_n$ បានទេទោះ $a_n<b_n$ ពិតគ្រប់ n ក៏ដោយ។ **III លីមីតនៃស៊ីតធរណីមាត្រ** **១. សញ្ញាណស៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត** <u>ឧទាហរណ៍១៖</u> គេមានស៊ីត (r^n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត ដែលមានតួទីមួយ r និងផលធៀបរួម r ។ បើ $r=2$ នោះគេបានស៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត $2,4,8,16,\ldots$ ដែលជាស៊ីតរីកទៅរក $+\infty$ ។ បើ $r=\frac{1}{3}$ នោះគេបានស៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots$ ជាស៊ីតរួមទៅរក 0 ។	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6}=0$ ខ. $u_n=\frac{n+(-1)^n}{2n}$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ គេមាន $-1\le(-1)^n\le1$ ហើយ $\frac{n-1}{2n}\le u_n\le\frac{n+1}{2n}$ ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$ គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+(-1)^n}{2n}=\frac{1}{2}$ កត់ត្រា និង ស្តាប់ ចំពោះ $r=2$ គេបាន (r^n) គឺ $n=1,r^1=2^1=2$ $n=2,r^2=2^2=4$ $n=3,r^3=2^3=8$ $n=4,r^4=2^4=16$ ចំពោះ $r=\frac{1}{3}$ គេបាន (r^n) គឺ $n=1,r^1=(\frac{1}{3})^1=\frac{1}{3}$ $n=2,r^2=\frac{1}{9}$ $n=3,r^3=\frac{1}{27}$ $n=4,r^4=\frac{1}{81}$
ចូរពណ៌នាអំពីលក្ខណៈគ្រឹះនៃប្រមាណវិធីលើលីមីតនៃ	ជំហានទី ៤ ពង្រឹងពុទ្ធិ	ពិភាក្សាហើយឆ្លើយនិងសំនួរ ឧបមាថា $a_n\le b_n$ ចំពោះលំដាប់ទី n

ស៊ីត។		ដែលធំបង្គួរ។ ▪ បើ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ និង $\lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$ នោះ $\alpha \le \beta$ ▪ បើ $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ នោះ $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ ▪ ឧបមាថា $a_n \le b_n \le c_n$ ចំពោះលំដាប់ទី n ដែលធំបង្គួរ បើ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \alpha$ នោះ $\lim_{n\to+\infty} b_n = \alpha$ ។
ពេលត្រឡប់ទៅផ្ទះវិញ ធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិនៅទំព័រទី០៥ត្រង់ចំនុចលក្ខណៈគ្រឹះ	ជំហានទី ៥ បណ្តាំផ្ញើរ	កត់ត្រា នឹងធ្វើតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ១ លីមីតនៃស៊ីត

មេរៀនទី ១ លីមីតនៃស៊ីត

III. លីមីតនៃស៊ីតធរណីមាត្រ

២. លីមីតស៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត

IV. លីមីតនៃស៊េរី

១. ស៊េរីអនន្ត

២. ស៊េរីរួមនិងស៊េរីរីក

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន ៖ ក្រោយពីរៀនចប់សិស្សមាន

- ចំណេះដឹង : កំណត់សញ្ញាណនៃស៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត និងស៊េរីអនន្តបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍
- បំនិន : គណនាលីមីតស៊ីតធរណីមាត្រ និងស្រាយបញ្ជាក់ស៊េរីរួម និងស៊េរីរីកបានត្រឹមត្រូវ
- ឥរិយាបថ : សហការគ្នាដោះស្រាយលំហាត់

II. ពេលវេលា ០២ ម៉ោង ថ្ងៃ... ទី... ខែ... ឆ្នាំ២០១...

III. សម្ភារៈឧបទេស

សៀវភៅគ្រូ

សៀវភៅសិស្ស

IV. ដំណើរការបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
គ្រូតពិនិត្យអវត្តមានអនាម័យនិងសណ្តាប់ធ្នាប់ថ្នាក់រៀន	ជំហានទី ១ រដ្ឋបាលថ្នាក់	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
ចូរពណ៌នាពីទ្រឹស្តីគ្រឹះលើប្រមាណវិធីនៃលីមីត	ជំហានទី ២ រំលឹកមេរៀន	គេមានស៊ីត(a_n) និង (b_n) ដែលមាន $\lim_{n\to+\infty} a_n = M$ និង

ស្វ៊ីត		$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = N$ គេបាន៖ ▪ $\lim\limits_{n\to+\infty} ka_n = kM$ ដែល k ជាចំនួនថេរ ▪ $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = M + N$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = M - N$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n b_n) = MN$,បើ $N \neq 0$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{M}{N}$
ឲ្យសិស្សសង្កេតលើករណីទាំងបួនរបស់ស្វ៊ីត (r^n) ឲ្យសិស្សគនទាលីមីតស្វ៊ីត (r^n) តាមករណីនីមួយៗរបស់ r	ជំហានទី ៣ មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ **ជំពូកទី ១ លីមីតនៃស្វ៊ីត** **មេរៀនទី ១ លីមីតនៃស្វ៊ីត** **III លីមីតនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ** **២. លីមីតស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត** គេសិក្សាលីមីតនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត (r^n) ទៅតាមករណីដូចខាងក្រោម៖ ក. ករណី $r > 1$ កាលណា $n \to +\infty$ គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = +\infty$ ខ. ករណី $r = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 1$ ព្រោះគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតស្មើនឹង 1។ គ. ករណី $\|r\| < 1$ + បើ $r = 0$ នោះគេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ ព្រោះគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតសុទ្ធតែស្មើនឹង 0 ។ + បើ $r \neq 0$ នោះគេយក $S = \dfrac{1}{\|r\|}$ ហើយគេទាញបាន $s > 1$ តាមករណី ក. គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} s^n = +\infty$ ។ ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\|r^n\| = \lim\limits_{n\to+\infty}\|r\|^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{s^n} = 0$ ។	កត់ត្រា សង្កេត ពិភាក្សារកលីមីតនៃស្វ៊ីត ក. ករណី $r > 1$ គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = +\infty$ ខ. ករណី $r = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 1$ ព្រោះគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតស្មើនឹង 1។ គ. ករណី $\|r\| < 1$ បើ $r = 0$ គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ ព្រោះគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតសុទ្ធតែស្មើនឹង 0 ។ បើ $r \neq 0$ គេយក $S = \dfrac{1}{\|r\|}$ គេទាញបាន $s > 1$ តាមករណី ក. គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} s^n = +\infty$ ។ ដូចនេះ៖ $\lim\limits_{n\to+\infty}\|r^n\| = \lim\limits_{n\to+\infty}\|r\|^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{s^n} = 0$ ។ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ កាលណា $\|r\| < 1$ ។ ឃ.ករណី $r \leq -1$

	$\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ កាលណា $\lvert r\rvert<1$។ ឃ.ករណី $r\le -1$ កាលណា $r\le -1$ សញ្ញានៃ r^n ផ្លាស់ប្តូរឆ្លាស់គ្នាតាម n ជាចំនួនគូ ឬសេស និងតម្លៃដាច់ខាតវាកើនធំទៅៗ។ដូចនេះស្វ៊ីត (r^n) ជាស្វ៊ីតឆ្លាស់គ្នា។ គេបានតារាងសង្ខេបដូចខាងក្រោម៖	កាលណា $r\le -1$ សញ្ញានៃ r^n ផ្លាស់ប្តូរឆ្លាស់គ្នាតាម n ជាចំនួនគូ ឬសេស។
សង្ខេបករណីទាំងបួនដាក់ក្នុងតារាង	លីមីតនៃស្វ៊ីត (r^n) - បើ $r>1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n=+\infty$ ហើយ (r^n) ជាស្វ៊ីតរីកទៅរក $+\infty$ ។ - បើ $r=1$ នោះ (r^n) ជាស្វ៊ីតថេរ ហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n=1$។ - បើ $r=0$ នោះ (r^n) ជាស្វ៊ីតថេរ ហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n=0$។ - បើ $0<\lvert r\rvert<1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n=0$ ហើយ (r^n) ជាស្វ៊ីតរួមទៅរក 0 - បើ $r\le -1$ នោះស្វ៊ីត (r^n) ជាស្វ៊ីតឆ្លាស់ ហើយកាលណា $n\to+\infty$ គេមិនអាចកំណត់លីមីតនៃ (r^n) បានទេ។	កត់ត្រា និងសង្កេតលើតារាង
ចូលចំនុចថ្មី ឲ្យគេពិនិត្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រនិងឲ្យរកផលបូកនៃស្វ៊ីតនេះ	**IV លីមីតនៃស៊េរី** **១. ស៊េរីអនន្ត** គេពិនិត្យមើលផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត ដែលមានតួទីមួយ $\frac{1}{2}$ និងផលធៀបរួម $\frac{1}{2}$ ។ គេបាន $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ ដែលជាផលបូកតួស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត។ ផលបូកតួនៃស្វ៊ីត	ពិនិត្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រហើយរកផលបូកនៃស្វ៊ីត

ប្រាប់សិស្សថាស៊េរីជាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតអនន្ត។ ទាញនិយមន័យឲ្យសិស្ស ចំនុចទីពីរ **២. ស៊េរីរួមនិងស៊េរីរីក** ចំនុច(ក) ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សពិភាក្សា គេអាចសន្និដ្ឋានថាស៊េរីមួយរួមដោយសិក្សាលើផលបូកដោយផ្នែកនៃស៊េរីនោះ។	អនន្តនេះហៅថាស៊េរីអនន្ត។គេកំណត់សរសេរ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ <u>និយមន័យ</u> ស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ គឺជាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតអនន្ត(a_n)។ បើគេយក $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ នោះ S_n ហៅថាផលបូកដោយផ្នែកនៃស៊េរី។ **២. ស៊េរីរួមនិងស៊េរីរីក** **ក. ស៊េរីរួម** <u>ឧទាហរណ៍</u>៖ គេមានស៊េរីអនន្តមួយ $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$ មានផលបូកដោយផ្នែក $S_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ គេបាន $\lim_{n\to+\infty}S_n=2(1-0)=2$ ។ ស្វ៊ីត(S_n)រួមទៅរក 2 ។ ដូចនេះ ផលបូកនៃស៊េរីអនន្ត S ស្មើនិង 2 ។ ចំពោះស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ មានផលបូកដោយផ្នែកទី n គឺ $(S_n)=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ ។ បើស្វ៊ីតនៃផលបូកដោយផ្នែក(S_n) រួមទៅ S គេថាស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ជាស៊េរី	សង្កេតលើឧទាហរណ៍ ទាញសន្និដ្ឋានពីស៊េរីរួម

	រួម។ លីមីត S ហៅថាផលបូកនៃស៊េរី។ **ខ. ស៊េរីរីក** ទ្រឹស្តីបទ៖ ចំពោះស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - បើស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរួមនោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ - បើស្វ៊ីត (a_n) មិនរួមរក 0 នោះ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរីក។	កត់ត្រា និងស្តាប់
ចំនុច(ខ)		
ដាក់ទ្រឹស្តីបទនិងធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់	សម្រាយបញ្ជាក់ ▪ ឧបមាស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ រួម។ តាង $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ និង S_n ជាផលបូក n តួនៃស៊េរីនេះ។ គេបាន $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ $= S_{n-1} + a_n$ ដូចនេះ $a_n = S_n - S_{n-1}$ គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - S_{n-1})$ $= S - S = 0$ ដូចនេះបើស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ រួមនោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ ។ ▪ សំណើផ្ទុយពីសំណើទីមួយ គឺ បើ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ នោះស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ រីក។ ដោយសំណើក្នុងសំនួរទីមួយពិតនាំឲ្យសំណើផ្ទុយរបស់វាក៏ពិតដែរ។ដូច្នេះ គេសន្និដ្ឋានបានថាបើ a_n មិនរួមទៅរក 0 នោះស៊េរី $\sum_{n-1}^{\infty} a_n$ រីក។	ពិភាក្សា និងដោះស្រាយស៊េរី $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ តួទី n អាចសរសេរ

ដាក់លំហាត់គំរូឲ្យសិស្សពិភាក្សា នឹងដោះស្រាយ	<u>លំហាត់គំរូ</u> ក្នុងស៊េរីមិនកំណត់ $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ។តើស៊េរីនេះជាស៊េរីរួមឬស៊េរីរីក?	$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ នោះផលបូក n តួដំបូងគឺ $S_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ $=\sqrt{n+1}-1$ គេបាន $\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-1\right)=+\infty$ ដូចនេះស៊េរីនេះជាស៊េរីរីក។
ចូរពណ៌នាពីទ្រឹស្តីបទនៃស៊េរីរីក។	ជំហានទី ៤ ពង្រឹងពុទ្ធិ	<u>ទ្រឹស្តីបទ៖</u> ចំពោះស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ✚ បើស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរួមនោះ $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$ ✚ បើស្វ៊ីត (a_n) មិនរួមរក 0 នោះ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរីក។
ពេលទៅផ្ទះធ្វើលំហាត់ទី ០៦ (ក) និង(ឃ)នៅទំព័រទី១៦។	ជំហានទី ៥ បណ្តាំផ្ញើ	កត់ត្រានិងធ្វើតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ១ លីមីតនៃស្វ៊ីត

មេរៀនទី ១ លីមីតនៃស្វ៊ីត

IV. លីមីតនៃស៊េរី

៣. ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត

៤. លក្ខណៈនៃស៊េរីអនន្ត

V. អនុវត្តន៍

១. ចំនួនទសភាគខួប

I. **វត្ថុបំណងនៃមេរៀន ៖** ក្រោយពីរៀនចប់សិស្សមាន

- ចំណេះដឹង : បង្ហាញពីលក្ខណៈនៃស៊េរីអនន្ត និងគណនាលីមីតស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត បានត្រឹមត្រូវ។
- បំនិន : សរសេរពីចំនួនទសភាគទៅជាចំនួនសនិទានបានត្រឹមត្រូវ
- ឥរិយាបថ : សហកាគ្នាដោះស្រាយលំហាត់

II. **ពេលវេលា** ០២ ម៉ោងថ្ងៃ... ទី... ខែ... ឆ្នាំ២០១...

III. **សម្ភារៈឧបទេស**

សៀវភៅគ្រូ

សៀវភៅសិស្ស

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
គ្រូតពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ធ្នាប់ថ្នាក់រៀន	ជំហានទី ១ រដ្ឋបាលថ្នាក់	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
ចូរពណ៌នាពីទ្រឹស្តីបទនៃស៊េរីរីក។	ជំហានទី ២ រំលឹកមេរៀន	<u>ទ្រឹស្តីបទ៖</u> ចំពោះស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ✚ បើស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរួមនោះ

		$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ បើស៊ីត (a_n) មិនរួមរក 0 នោះ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរីក។
-ដាក់និយមន័យនៃស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត	ជំហានទី ៣ មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ **ជំពូកទី ១ លីមីតនៃស៊ីត** **មេរៀនទី ១ លីមីតនៃស៊ីត** **IV លីមីតនៃស៊េរី** **៣. ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត** ក. និយមន័យ ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្តគឺជាស៊េរីអនន្តដែលកំណត់ដោយ $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$ ដែលមានតួទីមួយ $a \neq 0$ និងផលធៀបរួម r ។	-កត់ត្រានិងស្ដាប់ ក. និយមន័យ ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្តគឺជាស៊េរីអនន្តដែលកំណត់ដោយ $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$ ដែលមានតួទីមួយ $a \neq 0$ និងផលធៀបរួម r ។
-សិក្សាពីភាពរួមនិងរីកនៃស៊េរីធរណីមាត្រ -គ្រូសិស្សពិភាក្សាលើលក្ខខណ្ឌនីមួយៗរបស់ a • $a = 0$ • $a \neq 0$ -អោយសិស្សពិភាក្សាពីលក្ខខណ្ឌនៃ r និងគណនាលីមីត • $\|r\| < 1$ • $\|r\| > 1$ • $r = 1$ • $r = -1$	ខ. ភាពរួមនិងរីនៃស៊េរីធរណីមាត្រ គេមានស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ -បើ $a = 0$ នោះគេបាន $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = 0$ -បើ $a \neq 0$ នោះគេបាន S_n ជាផលបូកដោយផ្នែកទី n នៃស៊េរីធរណីមាត្រនោះករណី $r \neq 0$ គេបាន $S_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1}$ $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ -បើ $\|r\| < 1$ នោះគេបាន	-ពិភាក្សា -បើ $a = 0$ នោះគេបាន $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = 0$ -បើ $a \neq 0$ នោះគេបាន S_n ជាផលបូកដោយផ្នែកទី n នៃស៊េរីធរណីមាត្រនោះករណី $r \neq 0$ គេបាន $S_n = a + ar + \ldots + ar^{n-1}$ $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ -បើ $\|r\| < 1$ នោះគេបាន $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$ ហើយ

-ធ្វើការសង្ខេបលើការសិក្សា	$\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ ហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $= \frac{a}{1-r}$ -បើ $\|r\| > 1$ នោះគេបានស្វ៊ីត (ar^{n-1}) រីកហើយស្វ៊ីត S_n ក៏រីកដែរ -បើ $r = 1$ នោះគេបាន: $S_n = a + a + \ldots + a = na$ $S_n = na$ និង $a \neq 0$ ហើយស្វ៊ីត (S_n) រីក។ -បើ $r = -1$ នោះ $S_n = a$ រឺ $S_n = 0$ គេបានតារាងសង្ខេប គ្រប់ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ ដែល $(a \neq 0)$ ជាស៊េរីរួមឬរីកទៅតាមករណីដូចខាងក្រោម៖ -បើ $\|r\| < 1$ នោះស៊េរីរួមទៅរក $\frac{a}{1-r}$ -បើ $\|r\| \geq 1$ នោះស៊េរីរីក។	$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $= \frac{a}{1-r}$ -បើ $\|r\| > 1$ នោះគេបានស្វ៊ីត (ar^{n-1}) រីកហើយស្វ៊ីត S_n ក៏រីកដែរ -បើ $r = 1$ នោះគេបាន: $S_n = a + a + \ldots + a = na$ $S_n = na$ និង $a \neq 0$ ហើយស្វ៊ីត (S_n) រីក។ -បើ $r = -1$ នោះ $S_n = a$ រឺ $S_n = 0$ គេបានតារាងសង្ខេប គ្រប់ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ ដែល $(a \neq 0)$ ជាស៊េរីរួមឬរីកទៅតាមករណីដូចខាងក្រោម៖ -បើ $\|r\| < 1$ នោះស៊េរីរួមទៅរក $\frac{a}{1-r}$ -បើ $\|r\| \geq 1$ នោះស៊េរីរីក។
-ប្រាប់សិស្សថាលក្ខណៈនៃស៊េរីមានលក្ខណៈដូចគ្នានិងទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃស្វ៊ីតអនន្តចំពោះប្រមាណវិធីបូកនិងដក	**៤. លក្ខណៈនៃស៊េរីអនន្ត** បើស៊េរី $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ និង $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ ជាស៊េរីរួម គេបាន៖ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = k\alpha$, k ជាចំនួនថេរ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ $= \alpha + \beta$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ $= \alpha - \beta$ ឧទាហរណ៍៖ រកផលបូកនៃស៊េ	-សិស្សសង្កេត និងកត់ត្រា បើស៊េរី $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ និង $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ ជាស៊េរីរួម គេបាន៖ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = k\alpha$, k ជាចំនួនថេរ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ $= \alpha + \beta$ • $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ $= \alpha - \beta$

-ដាក់ឧទាហរណ៍អោយសិស្សពិភាក្សា	វិអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}+\frac{2}{3^n}\right)$។ **ចម្លើយ** ដោយ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ ជាស៊េរីធរណីមាត្រអនន្តដែលមានតួទីមួយស្មើនឹង $\frac{3}{2}$ និងផលធៀបរួម $\frac{1}{2}$ និង $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ ជាស៊េរីធរណីមាត្រអនន្តដែលមានតួទីមយយស្មើនឹង $\frac{2}{3}$ និងមានផលធៀបរួម $\frac{1}{3}$ និងដោយ $\|r\|<1$ នោះស៊េរីធរណីមាត្រទាំងពីរជាស៊េរីរួម។ គេបាន $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}+\frac{2}{3^n}\right)$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ $=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{3}}$ $=3+1=4$	-សិស្សពិភាក្សា គេបាន $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}+\frac{2}{3^n}\right)$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ $=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{3}}$ $=3+1=4$
-ប្រាប់សិស្សនូវហេតុផលនៃចំនួនទសភាគខួបនិងភាពខុសគ្នានៃចំនួនទសភាគកំណត់និងចំនួនទសភាគខួប -ដាក់ឧទាហរណ៍ពីចំនួនទសភាគខួបនិងចំនួនទសភាគកំណត់ -ប្រាប់សិស្សថាចំនួនទសភាគ	V. **អនុវត្តន៍** 1. **ចំនួនទសភាគខួប** គ្រប់ចំនួនសនិទានគឺជាចំនួនទសភាគកំណត់ឬជាចំនួនទសភាគខួប។ ឧទាហរណ៍: ចំនួនទសភាគកំណត់ $\frac{1}{4}=0.25$, $\frac{1}{2}=0.5$ ចំនួនទសភាគខួប $\frac{1}{3}=0.333\ldots$, $\frac{5}{6}=0.8333\ldots$ គ្រប់ចំនួនទសភាគខួបតាង	-ស្តាប់ សង្កេតនិងកត់ត្រា គ្រប់ចំនួនសនិទានគឺជាចំនួនទសភាគកំណត់ឬជាចំនួនទសភាគខួប។ ឧទាហរណ៍: ចំនួនទសភាគកំណត់ $\frac{1}{4}=0.25$, $\frac{1}{2}=0.5$ ចំនួនទសភាគខួប $\frac{1}{3}=0.333\ldots$, $\frac{5}{6}=0.8333\ldots$ គ្រប់ចំនួនទសភាគខួបតាង ដោយចំនួនសនិទានដែលអាច

ខូបបានមកពីផលបូកនៃស៊ីត ធរណីមាត្រអនន្ត។ -ដាក់ឧទាហរណ៍អោយសិស្ស សរសេរពីចំនួនទសភាគខួបទៅ ជាប្រភាគសនិទានដោយប្រើ ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត	ដោយចំនួនសនិទានដែលអាច អនុវត្តន៍តាមស៊េរីធរណីមាត្រ អនន្ត។ ឧទាហរណ៍: $0.\overline{39} = 0.393939\ldots$ $= 0.39 + 0.0039$ $+ 0.000039 + \ldots$ តាងអង្គទាំងពីរនៃស៊េរីធរណី មាត្រអនន្តមានតួនាទីមួយ 0.39 និងផលធៀបរួម 0.01 ។ គេបាន $0.\overline{39} = \dfrac{0.39}{1-0.01} = \dfrac{39}{99} = \dfrac{13}{33}$	អនុវត្តន៍តាមស៊េរីធរណីមាត្រ អនន្ត។ -ពិភាក្សាដោះស្រាយ $0.\overline{39} = 0.393939\ldots$ $= 0.39 + 0.0039$ $+ 0.000039 + \ldots$ $= \dfrac{39}{100} + \dfrac{39}{(100)^2}$ $+ \dfrac{39}{(100)^3} + \cdots$ $= \dfrac{0.39}{1-0.01} = \dfrac{0.39}{0.99}$ $= \dfrac{39}{99} = \dfrac{13}{33}$
-កំណត់និយមន័យនៃស៊េរី ធរណីមាត្រអនន្ត។ -ចូរប្រាប់ពីភាពរួមនិងភាពរីកនៃ ស៊េរីធរណីមាត្រ។	ជំហានទី៤ ពង្រឹងពុទ្ធិ	-ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្តគឺជាស៊េរី អនន្តដែលកំណត់ដោយ: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots$ ដែលមានតួទីមួយ $a \neq 0$ និង ផលធៀបរួម r ។ -ភាពរួមនិងភាពរីនៃស៊េរីធរណី មាត្រ៖ គ្រប់ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ ដែល $(a \neq 0)$ ជាស៊េរីរួមឬរីកទៅ តាមករណីខាងក្រោម៖ -បើ $\lvert r\rvert < 1$ នោះស៊េរីរួមទៅរក $\dfrac{a}{1-r}$ -បើ $\lvert r\rvert \geq 1$ នោះស៊េរីរីក។
ពេលទៅផ្ទះវិញធ្វើលំហាត់ទី៧ នៅទំព័រទី១៦	ជំហានទី៥ បណ្តាំផ្ញើ	កត់ត្រានិងធ្វើតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)

ជំពូកទី២ ដេរីវេនៃអនុគមន៍

មេរៀនទី១ អនុវត្តន៍ដេរីវេ

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: ពិពណ៌នាពីឌីផេរ៉ង់ស្យែល វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ និងទ្រឹស្តីបទរ៉ូល បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈសំណួរបំផុសរបស់គ្រូ។
- បំណិន: សិស្សបកស្រាយនិយមន័យឌីផេរ៉ង់ស្យែល វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ និងទ្រឹស្តីបទរ៉ូលបានច្បាស់លាស់តាមរយៈឧទាហរណ៍គំរូរបស់គ្រូ។
- ឥរិយាបថ: សិស្សមានបម្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ឌីផេរ៉ង់ស្យែល វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ និងទ្រឹស្តីបទរ៉ូលក្នុងការប្រលងមានកំរិតខ្ពស់

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ២០-២៤
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ ២០-២៤

IV. ខ្លឹមសារមេរៀន

1. **ឌីផេរ៉ង់ស្យែល**
2. **វិសមភាពកំណើនមានកំណត់**
3. **ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល**

V. ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- លំនឹងថ្នាក់	- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		
-គណនាតំលៃនៃ y'		-សិស្សពិចារណារួចឡើងធ្វើ

បើ $x=1$ $y=3x^2+10x-1$ $y=\dfrac{5x^3}{(3x-1)}$		• $y=3x^2+10x-1$ $y'=6x+10$ តែ $x=1$ នោះ $y'=16$ • $y=\dfrac{5x^3}{(3x-1)}$ $y'=\dfrac{15x(3x-1)-15x^3}{(3x-1)^2}$ តែ $x=1$ នោះ $y'=\dfrac{45-15-15}{2^2}$ $=\dfrac{15}{4}$
ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)		
-អោយសិស្សមើលមេរៀន ទំព័រទី២០-២១ -ចូរកំណត់និយមន័យឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ -គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍: គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=x^2$ ។ រក dy នៅត្រង់ $x=1$ និង $dx=0.01$ ។	**អនុវត្តន៍ដេរីវេ** **1. ឌីផេរ៉ង់ស្យែល** **និយមន័យ:** -បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានដេរីវេ នោះឌីផេរ៉ង់ស្យែល dy កំណត់ដោយ $dy=f'(x)dx$ **2. វិសមភាពកំណើនមានកំណត់**	-សិស្សអានដោយយកចិត្តទុកដាក់ -សិស្សអានសៀវភៅពិចារណារួចឆ្លើយ •បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានដេរីវេនោះឌីផេរ៉ង់ស្យែល dy កំណត់តាងដោយ $dy=f'(x)dx$ •សិស្សពិចារណាលើសង្កេតនិយមន័យរួចធ្វើ ដោយ $y=x^2$ $y'=2x$ $dy=2xdx$ តែ $x=1$; $dx=0.01$ $dy=2\times1\times0.01$ $=0.02$

-ទ្រឹស្តីបទ: គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់និងជាប់ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ I ។បើមានពីរចំនួនពិត m និង M ដែលចំពោះគ្រប់ $x\in I$, $m\le f'(x)\le M$ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a;b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន $m(b-a)\le f(b)-f(a)$ $\le M(b-a)$	-ទ្រឹស្តីបទ: គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់និងជាប់ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ I ។បើមានពីរចំនួនពិត m និង M ដែលចំពោះគ្រប់ $x\in I$, $m\le f'(x)\le M$ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a;b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន $m(b-a)\le f(b)-f(a)$ $\le M(b-a)$	-សិស្សសង្កេតទាំងយកចិត្តទុកដាក់
ឧទាហរណ៍: គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-1;+\infty)$ ដែល $f(x)=\sqrt{1+x}$ កំណត់តំលៃអមនៃអនុគមន៍ដេរីវេ $f'(x)$ ចំពោះ $\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$		-សិស្សសង្កេតនិយមន័យ អានសៀវភៅ ពិចារណារួចធ្វើ: •កំណត់តំលៃអម $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ $f(x)=\sqrt{1+x}$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ $f'(0)\ge f'(x)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)$ $f'(0)=\frac{1}{2}$ $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}$ ដូចនេះ ចំពោះ $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ គេបាន $\frac{1}{\sqrt{6}}\le f'(x)\le\frac{1}{2}$
-ទ្រឹស្តីបទ: គេអោយអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a;b]$ ។បើមានចំនួនពិត M ដែល $\lvert f'(x)\rvert\le M$	**-ទ្រឹស្តីបទ:** គេអោយអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a;b]$ ។បើមានចំនួនពិត M ដែល $\lvert f'(x)\rvert\le M$ ចំពោះ $x\in[a;b]$ នោះគេបាន	-សិស្សសង្កេតដោយយកចិត្តទុកដាក់

ចំពោះ $x\in[a;b]$ នោះគេបានវិសមភាព $\lvert f(b)-f(a)\rvert\le(b-a)$ ឧទាហរណ៍: គេអោយ f មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(t)=\cos t$ ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ គេបាន $\lvert\cos x-\cos y\rvert\le\lvert x-y\rvert$ +បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $\lvert a;b\rvert$ មានដេរីវេលើចន្លោះ $(a;b)$ និង $f(a)=f(b)$ នោះគេមានចំនួន $c\in(a;b)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=0$	វិសមភាព $\lvert f(b)-f(a)\rvert\le(b-a)$ **3. ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល** -បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $\lvert a;b\rvert$ មានដេរីវេលើចន្លោះ $(a;b)$ និង $f(a)=f(b)$ នោះគេមានចំនួន $c\in(a;b)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=0$	-សិស្សអានសៀវភៅពិចារណារួចធ្វើ: -គេមាន $f(t)=\cos t$ $f'(t)=-\sin t$ គេបានវិសមភាព $\lvert f'(t)\rvert\le1$ គ្រប់ $t\in\mathbb{R}$ ដូចនេះ ចំពោះ $x;y\in\mathbb{R}$ គេបាន $\lvert\cos x-\cos y\rvert\le\lvert x-y\rvert$ -សិស្សសង្កេតដោយយកចិត្តទុកដាក់
	ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)	
-ឧទាហរណ៍: គេអោយ $f(x)=x^2-3x+2$ ក. រកអាប់ស៊ីស x_1 និង x_2 នៃចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាបតាងអនុគមន៍និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ខ. បង្ហាញថាមានចំនួនពិត c មួយនៅចន្លោះ $(x_1;x_2)$ ដែល $f'(c)=0$ រួចគណនា c ។		-សិស្សសង្កេតប្រធានពិចារណារួចធ្វើ ក. រក $x_1;x_2$ ជាចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $f(x)=x^2-3x+2$ f ប្រសព្វនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីសកាលណា $f(x)=0$ យើងបាន $x^2-3x+2=0$ $x_1=1$; $x_2=2$ ដូចនេះ ក្រាបនៃខ្សែកោងកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំនុច $x_1=1$; $x_2=2$

		ខ. បង្ហាញថាមានចំនួនពិត $c\in(1;2)$ ដែល $f'(c)=0$ + f ជាអនុគមន៍ពហុធា នោះ f ជាប់លើ $[1;2]$ ហើយ $f(1)=f(2)=0$ តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូល គេបាន $c\in(1;2),\ f'(c)=0$ $f(x)=x^2-3x+2$ $f'(x)=2x-3$ $f'(x)=0$ រឺ $x=\frac{3}{2}$ ដូចនេះ $c=\frac{3}{2}$
ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)		
-គេមាន $f(x)=x^2-2x$ រកគ្រប់ $c\in[0;2]$ ដែល $f'(c)=0$	កិច្ចការផ្ទះ លំហាត់លេខ១២ទំព័រ២១៦	-សិស្សកត់ត្រាលំហាត់ដាក់ក្នុងសៀវភៅ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)

ជំពូកទី២ ដេរីវេនៃអនុគមន៍

មេរៀនទី១ អនុវត្តន៍ដេរីវេ (ត)

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សពិពណ៌នាពីទ្រឹស្តីបទតំលៃមធ្យម ប្រាក់ចំណាយបន្ថែម ប្រាក់ចំណូលបន្ថែមតាមរយៈឧទាហរណ៍គំរូរបស់គ្រូបានត្រឹមត្រូវ។
- បំណិន: សិស្សបកស្រាយពីទ្រឹស្តីបទតំលៃមធ្យម ប្រាក់ចំណាយបន្ថែម ប្រាក់ចំណូលបន្ថែមតាមរយៈការពន្យល់របស់គ្រូបានច្បាស់លាស់។
- ឥរិយាបថ: សិស្សមានបម្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទតំលៃមធ្យម ប្រាក់ចំណាយបន្ថែមនិងប្រាក់ចំណូលបន្ថែមក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់។

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ២៥-៣១
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ ២៥-៣១

IV. ខ្លឹមសារមេរៀន

4. ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម
5. អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច
   5.1. ប្រាក់ចំណាយបន្ថែម
   5.2. ប្រាក់ចំណូលបន្ថែម
      ក. ប្រាក់ចំណូលសរុប
      ខ. ប្រាក់ចំណូលបន្ថែម

V. ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ		- តំណាងសិស្សឡើងរាយ

សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ		ការណ៍
	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)	
-កែកិច្ចការផ្ទះ: $f(x)=x^2-2x$ រកគ្រប់ $c\in[0;2]$ ដែល $f'(x)=0$		-សិស្សឡើងធ្វើ យើងមាន $f(x)=x^2-2x$ $f'(x)=2x-2$ $f'(x)=0$ រឺ $2x-2=0$ នោះ $x=1$ ដូចនេះ $c=1$
	ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)	
ទ្រឹស្តីបទ -បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a;b]$ មានដេរីវេលើ $(a;b)$ នោះមាន $c\in(a;b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ឧទាហរណ៍: គេអោយ $f(x)=x^2$ រកគ្រប់ $c\in(-2;1)$ ដែល $f'(c)=\frac{f(1)-f(-2)}{1+2}$	**អនុវត្តន៍ដេរីវេ** (ត) **4. ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម** -បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a;b]$ មានដេរីវេលើ $(a;b)$ នោះ មាន $c\in(a;b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ **5. អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច**	-សិស្សសង្កេតនិងស្តាប់គ្រូពន្យល់យ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់ -សិស្សសង្កេតប្រធានពិចារណារួចធ្វើ: យើងមាន $f(x)=x^2$ $f'(x)=2x$ ដែល $f'(x)=\frac{f(1)-f(-2)}{1+2}$ $=\frac{1-4}{3}$ $f'(x)=-1$ យើងបាន $2x=-1$ $x=-\frac{1}{2}$ ដូចនេះ $c=-\frac{1}{2}$

•**ជាទូទៅ:** $C'(x)$ ជាប្រាក់ចំណាយបន្ថែមដែលមានតម្លៃប្រហែលនឹងទឹកប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈឯកតាទី $x+1$។មានន័យថាប្រាក់ចំណាយបន្ថែមជាអត្រាបម្រែបម្រួលប្រាក់ចំណាយសរុប កាលណាកត្តាផលិតកម្មប្រែប្រួលមួយឯកតា។ $C'(x)\approx C(x+1)-C(x)$ ឧទាហរណ៍: ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយប្រភេទបានផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង ដែលតម្លៃចំណាយសរុបកំណត់ដោយអនុគមន៍ $C(x)=500+3x$ (ពាន់រៀល) គណនាប្រាក់ចំណាយបន្ថែមក្នុងការផលិតសម្ភារៈទី១០១	**5.1 ប្រាក់ចំណាយបន្ថែម** **ជាទូទៅ:** $C'(x)$ ជាប្រាក់ចំណាយបន្ថែមដែលមានតម្លៃប្រហែលនឹងទឹកប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈឯកតាទី $x+1$។មានន័យថាប្រាក់ចំណាយបន្ថែមជាអត្រាបម្រែបម្រួលប្រាក់ចំណាយសរុប កាលណាកត្តាផលិតកម្មប្រែប្រួលមួយឯកតា។ $C'(x)\approx C(x+1)-C(x)$	-សិស្សសង្កេតនិងកត់ត្រា -សិស្សសង្កេតប្រធានពិចារណារួចធ្វើ -ប្រាក់ចំណាយបន្ថែមក្នុងការផលិតសម្ភារៈទី101 យើងបាន $C'(101)=C(101)-C(100)$ តែ $C(x)=500+3x$ ពាន់រៀល $C(101)=(500+3\times101)$ $=803$ ពាន់រៀល $C(100)=(500+3\times100)$ $=800$ ពាន់រៀល $C'(101)=(803-800)$ $C'(101)=3$ ពាន់រៀល
ជាទូទៅ: ប្រាក់ចំណូលសរុប =តម្លៃលក់ចេញឯកតា×បរិមាណលក់បាន $R(x)=P\times x$	**5.2 ប្រាក់ចំណូលបន្ថែម** **ក. ប្រាក់ចំណូលសរុប** **ជាទូទៅ:** ប្រាក់ចំណូលសរុប=តម្លៃលក់ចេញឯកតា×បរិមាណលក់បាន $R(x)=P\times x$ ដែល $P=D(x)$	-សិស្សសង្កេតនិងកត់ត្រាដោយយកចិត្តទុកដាក់

ដែល $P=D(x)$ ឧទាហរណ៍: ក្រុមហ៊ុនលក់គ្រឿងអេឡិចត្រូនិចមួយ បានលក់សម្ភារៈមួយគ្រឿងតម្លៃ $D(x)=100-0.5x$ ពាន់រៀល ។ x ជាបរិមាណលក់ក្នុងមួយខែ។ គណនាប្រាក់ចំណូលសរុបក្នុង១ខែ បើក្រុមហ៊ុនលក់បាន ១២៣គ្រឿង។		-សិស្សអានប្រធានពិចារណារួចធ្វើ គណនាប្រាក់ចំណូលសរុបក្នុង១ខែ តាមរូបមន្ត $R(x)=P\times x$ តែ $P=D(x)=100-0.5x$ $R(x)=100x-0.5x^2$ តែ $x=123$ គ្រឿង $R(123)=100\times123$ $-0.5(123)^2$ $=4735.5$ ពាន់រៀល
•**ជាទូទៅ:** $R'(x)$ ជាប្រាក់ចំណូលបន្ថែមដែលមានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណូលដែលបានពីការលក់សម្ភារៈឯកត្តាទី $x+1$ មានន័យថាប្រាក់ចំណូលបន្ថែមជាអត្រាបម្រែបម្រួលប្រាក់ចំណូលសរុប កាលណាផលិតផលត្រូវបានលក់ប្រែប្រួលមួយឯកតា។ $R'(x)\approx R(x+1)-R(x)$ ឧទាហរណ៍: អ្នកគ្រប់គ្រងរោងចក្រផលិតសម្ភារៈមួយអោយដឹងថាគាត់លក់សម្ភារៈមួយគ្រឿងក្នុងតម្លៃ $P=D(x)=46-0.25x$ ពាន់រៀល។	**ខ. ប្រាក់ចំណូលបន្ថែម** **ជាទូទៅ:** $R'(x)$ ជាប្រាក់ចំណូលបន្ថែមដែលមានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណូលដែលបានពីការលក់សម្ភារៈឯកត្តាទី $x+1$ មានន័យថាប្រាក់ចំណូលបន្ថែមជាអត្រាបម្រែបម្រួលប្រាក់ចំណូលសរុប កាលណាផលិតផលត្រូវបានលក់ប្រែប្រួលមួយឯកតា។ $R'(x)\approx R(x+1)-R(x)$	-សិស្សស្តាប់និងសង្កេតដោយយកចិត្តទុកដាក់ -សិស្សអានប្រធានពិចារណារួចឡើងធ្វើ ក. ប្រាក់ចំណូលសរុបពីការលក់សម្ភារៈ 31 គ្រឿង តាមរូបមន្ត $R(x)=P\times x$ $=46x-0.25x^2$

ក. គណនាប្រាក់ចំណូលសរុបដែលពីការលក់សម្ភារៈ ៣១គ្រឿង ខ. ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណូលពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី៣១។		តែ $x=31$ $R(31)=46\times31$ $-0.25\times(31)^2$ $R(31)=1185.75$ ពាន់រៀល ខ. ប្រាក់ចំណូលដែលបានមកពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី31 $R'(x)=46-0.25\times x$ $R(30)=46-0.25\times30$ $=31$ ពាន់រៀល
ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-ប្រាក់ចំណាយបន្ថែមមានរូបមន្តដូចម្តេច? -ប្រាក់ចំណូលសរុបមានរូបមន្តដូចម្តេច?		ក. សិស្សពិចារណារួចឆ្លើយប្រាក់ចំណាយបន្ថែមមានរូបមន្ត $C'(x)=C(x+1)-C(x)$ -សិស្សពិចារណារួចឆ្លើយប្រាក់ចំណូលសរុបមានរូបមន្ត $R(x)=P\times x$ ដែល $P=D(x)$
ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)		
-ធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិទំព័រទី31	កិច្ចការផ្ទះ	-សិស្សកត់ទំព័រលំហាត់

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)

ជំពូកទី២ ដេរីវេនៃអនុគមន៍

មេរៀនទី១ អនុវត្តន៍ដេរីវេ (តចប់)

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សពណ៌នាពីប្រាក់ចំណេញបន្ថែម ប្រាក់ចំណាយមធ្យមន្ថែមតាមរយៈ ឧទាហរណ៍គំរូរបស់គ្រូបានត្រឹមត្រូវ។
- បំណិន: សិស្សបកស្រាយពីរបៀបរកប្រាក់ចំណេញបន្ថែម និងប្រាក់ចំណេញមធ្យម បន្ថែមតាមរយៈការពន្យល់របស់គ្រូបានច្បាស់លាស់។
- ឥរិយាបថ: សិស្សមានបម្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការអនុវត្តន៍អនុវត្តន៍រូបមន្តប្រាក់ចំណេញបន្ថែម និងប្រាក់ចំណាយមធ្យមបន្ថែមតាមរយៈខ្លឹមសារមេរៀនបានកម្រិតខ្ពស់។

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ៣២-៣៧
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ ៣២-៣៧

IV. ខ្លឹមសារមេរៀន

5.3. ប្រាក់ចំណេញបន្ថែម

ក. ប្រាក់ចំណេញសរុប

ខ. ប្រាក់ចំណេញបន្ថែម

5.4. ប្រាក់ចំណាយមធ្យមបន្ថែម

V. ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ		- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		

-ហៅសិស្សឡើងកែកិច្ចការផ្ទះ		-សិស្សឡើងធ្វើ ក. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប $R(x)=P\times x$ តែ $P=D(x)=140-0.5x$ $R(x)=140x-0.5x^2$ ខ. រកតម្លៃប្រហែលដែលបានមកពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី31 $R'(x)=140-x$ $R'(30)=(140-30)$ $=110$ ម៉ឺនរៀល
ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)		
•**ជាទូទៅ** ប្រាក់ចំណេញសរុប =ប្រាក់ចំណូលសរុប –ប្រាក់ចំណាយសរុប $P(x)=R(x)-C(x)$ ឧទាហរណ៍: សហគ្រាសមួយបានចំណេញសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងដែលតាងដោយអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប $C(x)=0.002x^2+0.72x$ $+260$ ពាន់រៀល ហើយសហគ្រាសនោះលក់ចេញវិញសម្ភារៈមួយគ្រឿងតម្លៃ $P=D(x)=3-0.001x$ ពាន់	**អនុវត្តន៍ដេរីវេ** (**តចប់**) **5.3 ប្រាក់ចំណេញបន្ថែម** **ក. ប្រាក់ចំណេញសរុប** **ជាទូទៅ** ប្រាក់ចំណេញសរុប =ប្រាក់ចំណូលសរុប –ប្រាក់ចំណាយសរុប $P(x)=R(x)-C(x)$	-សិស្សស្តាប់យ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់ -សិស្សពិចារណារួចឡើងធ្វើ: ក. ប្រាក់ចំណូលសរុប $R(x)=P\times x$ តែ $P=D(x)=3-0.001x$ $R(x)=3x-0.001x^2$ ខ. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប $P(x)=R(x)-C(x)$ តែ

រៀល។ ក. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុប ខ. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប		$C(x)=0.002x^2+0.32x$ $+260$ $P(x)=(3x-0.001x^2)-$ $(0.002x^2-0.72x$ $+260)$ $P(x)=-0.003x^2+2.28x$ -260 ពាន់រៀល
•ជាទូទៅ $P'(x)$ ជាប្រាក់ចំណេញបន្ថែមដែលមានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈឯកតាទី $x+1$ ។មានន័យថា ប្រាក់ចំណេញបន្ថែមជាអត្រាបម្រែបម្រួលប្រាក់ចំណេញសរុប កាលណាផលិតផលដែលបានលក់ប្រែប្រួល1ឯកតា $P'(x)\approx P(x+1)-P(x)$	**ខ. ប្រាក់ចំណេញបន្ថែម** **ជាទូទៅ** $P'(x)$ ជាប្រាក់ចំណេញបន្ថែមដែលមានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈឯកតាទី $x+1$ ។មានន័យថា ប្រាក់ចំណេញបន្ថែមជាអត្រាបម្រែបម្រួលប្រាក់ចំណេញសរុប កាលណាផលិតផលដែលបានលក់ប្រែប្រួល1ឯកតា $P'(x)\approx P(x+1)-P(x)$	
ឧទាហរណ៍: រោងចក្រមួយចំណាយប្រាក់សរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង ដែលអោយតាមអនុគមន៍ $C(x)=2070+25x+0.1x^2$ ពាន់រៀល ហើយរោងចក្រលក់ចេញវិញទទួលបានប្រាក់ចំណូលសរុបដែលត្រូវតាមអនុគមន៍ $R(x)=100x-0.1x^2$ ពាន់រៀល ក. កំណត់អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប		-សិស្សពិចារណារួចឡើងធ្វើ ក. អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប $P(x)=R(x)-C(x)$ តែ $R(x)=100x^2-0.1x^2$ $C(x)=2070+25x$ $+0.1x^2$ $P(x)=(100x^2-0.1x^2)-$ $(2070+25x+0.1x^2)$ $P(x)=-0.2x^2+75x$ -2070 ពាន់រៀល ខ. គណនាតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណេញដែលបានពី

ខ. ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណេញដែលបានពីការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី81 •**ជាទូទៅ** បើ $C(x)$ តាងប្រាក់ចំណេញសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងនេះ $\overline{C}=\dfrac{C(x)}{x}$ ជាប្រាក់ចំណាយមធ្យមក្នុងការផលិតសម្ភារៈ១គ្រឿងៗ។ $\overline{C}'(x)$ ជាប្រាក់ចំណាយមធ្យមបន្ថែមដែលមានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណាយមធ្យម កាលណាផលិតកើនឡើង១ឯកតា	**5.4 ប្រាក់ចំណាយមធ្យមបន្ថែម** **ជាទូទៅ** បើ $C(x)$ តាងប្រាក់ចំណេញសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងនេះ $\overline{C}=\dfrac{C(x)}{x}$ ជាប្រាក់ចំណាយមធ្យមក្នុងការផលិតសម្ភារៈ១គ្រឿងៗ។ $\overline{C}'(x)$ ជាប្រាក់ចំណាយមធ្យមបន្ថែមដែលមានតម្លៃប្រហែលនឹងប្រាក់ចំណាយមធ្យម កាលណាផលិតកើនឡើង១ឯកតា	ការលក់សម្ភារៈគ្រឿងទី81 $P'(x)=-0.4x+75$ $P'(80)=-0.4\times80+75$ $=43$ ពាន់រៀល
ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-ឧទាហរណ៍: ប្រាក់ចំណាយក្នុង១សប្តាហ៍របស់ក្រុមហ៊ុនមួយគឺ $C(x)=0.125x^2+20x$ $+1000$ ពាន់រៀល។ x ជាបរិមាណសម្ភារៈផលិតបាន ក. គណនាប្រាក់ចំណាយមធ្យម ខ. គណនាប្រាក់ចំណាយមធ្យមបន្ថែម កាលណា $x=100$ ។		-សិស្សពិចារណារួចធ្វើ: ក. ប្រាក់ចំណាយមធ្យម $\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$ តែ $C(x)=0.125x^2+20x$ $+1000$ $\overline{C}(x)=\dfrac{1}{x}(0.125x^2+20x$ $+1000)$ $=0.125x+20+\dfrac{1000}{x}$ ខ. ប្រាក់ចំណាយបន្ថែមមធ្យម

		កាលណា $x=100$ $\overline{C}'(x)=0.125-\frac{1000}{x^2}$ $\overline{C}'(100)=0.125-\frac{1000}{100}$ $=0.025$ ពាន់រៀល
ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)		
-ធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិទំព័រទី37	កិច្ចការផ្ទះ	-សិស្សរកត់ទំព័រលំហាត់

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី៣ អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍

មេរៀនទី១ អនុគមន៍អសនិទាន

I. វត្ថុបំណង

- ចំណេះដឹង: សិស្សប្រាប់រាងទូទៅរបស់អនុគមន៍អសនិទានបាន
- បំនិន: សិស្សចេះសិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax+b};a\neq 0$
- ឥរិយាបថ: សិស្សមានទំនុកចិត្តក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II. រយៈពេល: ២ម៉ោងសិក្សា

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្សទំព័រទី៨៤ដល់៨៨
- សៀវភៅគ្រូទំព័រទី៨៤ដល់៨៨
- បន្ទាត់និងឧបករណ៍គូសប៉ារ៉ាបូល

IV. វិធីសាស្ត្របង្រៀន

- គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល

V. ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (5នាទី)		
-គ្រូតពិនិត្យអវត្តមាន សណ្តាប់ធ្នាប់ វិន័យ និង បរិស្ថាន	(រដ្ឋបាលថ្នាក់)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (១០នាទី)		
-ចូរនិយាយពីរបៀប សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ សនិទាន។	រំលឹកមេរៀនចាស់	-ដើម្បីសិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ សនិទានយើងត្រូវះ ១/ រកដែនកំណត់ ២/ ទិសដៅអថេរភាព -រកដេរីវេទី១៎: សិក្សាតម្លៃបរមាធៀប -រកលីមីត -រកអាស៊ីមតូត: អាស៊ីមតូតដេក

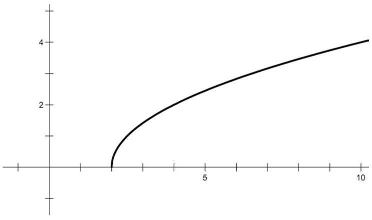
		ឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេត ៣/ តារាងអថេរភាព ៤/ សំណង់ក្រាប: រកចំណុចប្រសព្វ រវាងអក្សអដោនេ ៥/ រកអក្សឆ្លុះ។
ជំហានទី៣(៨០នាទី)		
-គ្រូសរសេរចំណងជើង មេរៀនថ្មី។ ដាក់ឧទាហរណ៍ បង្ហាញដល់សិស្ស។	មេរៀនថ្មី ជំពូកទី៣ អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ មេរៀនទី១ អនុគមន៍អសនិទាន I.អនុគមន៍អសនិទាន រាង $y=\sqrt{ax+b};a\neq 0$ 1.1សិក្សាអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax+b};a\neq 0$ ឧ.សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{2x-4}$ -រកដែនកំណត់ អនុគមន៍មានន័យកាលណា $2x-4\geq 0, x\geq 2$ ដូចនេះ $D=[2;\infty[$ -ទិសដៅអថេរភាព ➢ ដេរីវេ $y'=\frac{(2x-4)'}{2\sqrt{2x-4}}=\frac{1}{\sqrt{2x-4}}$ ដោយ $y'>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>2$ ។ ➢ លីមីត $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-4}=+\infty$ -ទិសដៅអថេរភាព	-សិស្សកត់ត្រាមេរៀនថ្មីនិង ស្តាប់គ្រូពន្យល់រួចពិភាក្សា លំហាត់។ មេរៀនថ្មី ជំពូកទី៣ អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ មេរៀនទី១ អនុគមន៍អសនិទាន I.អនុគមន៍អសនិទាន រាង $y=\sqrt{ax+b};a\neq 0$ 1.1សិក្សាអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax+b};a\neq 0$ ឧ.សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{2x-4}$ -រកដែនកំណត់ អនុគមន៍មានន័យកាលណា $2x-4\geq 0, x\geq 2$ ដូចនេះ $D=[2;\infty[$ -ទិសដៅអថេរភាព ➢ ដេរីវេ $y'=\frac{(2x-4)'}{2\sqrt{2x-4}}=\frac{1}{\sqrt{2x-4}}$ ដោយ $y'>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>2$ ។ ➢ លីមីត

x	2 $\qquad +\infty$
y'	$\Vert$ $+$
y	$0 \nearrow +\infty$

-សង់ក្រាប: តារាងតម្លៃលេខ

x	2	4
y	0	2

ក្រាប



ជាទូទៅ:ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍អសនិទានរាង

$y=\sqrt{ax+b};a\neq 0$

យើងត្រូវ:

➢ ដែនកំណត់

អនុគមន៍មានន័យកាលណា៖ $ax+b\geq 0$

- បើ $a>0;x\geq -\frac{b}{a};D=[-\frac{b}{a};+\infty[$
- បើ $a<0;x\leq \frac{-b}{a};D=]-\infty;-\frac{b}{a}]$

➢ ដេរីវេ

$y'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

+ករណី $a>0$

-តារាងអថេរភាព

x	$-\frac{b}{a}$ $\qquad +\infty$
y'	$\Vert$ $+$
y	$0 \nearrow +\infty$

➢ ក្រាប

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x-4}=+\infty$

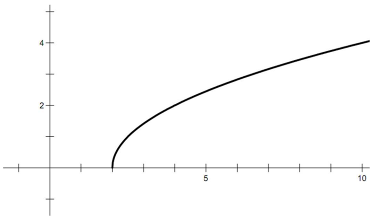
-ទិសដៅអថេរភាព

x	2 $\qquad +\infty$
y'	$\Vert$ $+$
y	$0 \nearrow +\infty$

-សង់ក្រាប: តារាងតម្លៃលេខ

x	2	4
y	0	2

ក្រាប



ជាទូទៅ: ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍អសនិទានរាង

$y=\sqrt{ax+b};a\neq 0$

យើងត្រូវ:

➢ ដែនកំណត់

អនុគមន៍មានន័យកាលណា៖ $ax+b\geq 0$

- បើ $a>0;x\geq -\frac{b}{a};D=[-\frac{b}{a};+\infty[$
- បើ $a<0;x\leq \frac{-b}{a};D=]-\infty;-\frac{b}{a}]$

➢ ដេរីវេ

$y'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

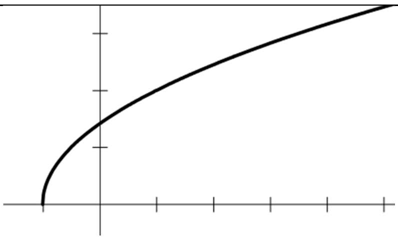
+ករណី $a>0$

-តារាងអថេរភាព

x	$-\frac{b}{a}$ $\qquad +\infty$
y'	$\Vert$ $+$
y	$0 \nearrow +\infty$

➢ ក្រាប

លំហាត់គំរូ:
សិក្សាអថេរភាពនិង
សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍៖
$y=\sqrt{-3x+5}$
ធ្វើការបកស្រាយ
លំហាត់និងពន្យល់
ដល់សិស្ស។

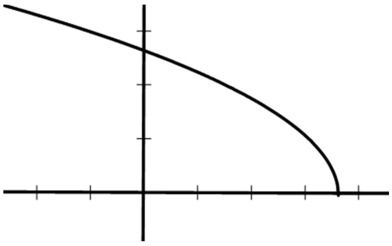


+ករណី $a<0$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$
y'	$-$	‖
y	$+\infty$ ↘	0

➢ ក្រាប



លំហាត់គំរូ៖សិក្សាអថេរភាព
និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$y=\sqrt{-3x+5}$

➢ រកដែនកំណត់

អនុគមន៍មានន័យកាលណា:

$-3x+5\geq 0; x\leq \frac{5}{2}$

ដូចនេះ $D=]-\infty;\frac{5}{3}]$

➢ ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ

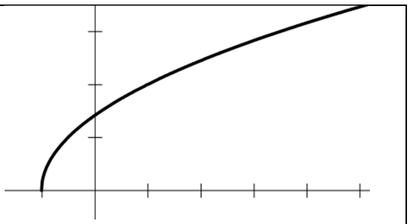
$y'=\frac{-3}{2\sqrt{-3x+5}}<0;\forall x<\frac{5}{3}$

-លីមីត

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-3x+5}=+\infty$

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$
y'	$-$	‖
y	$+\infty$ ↘	0

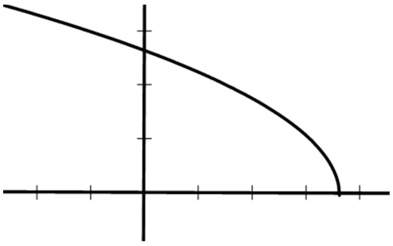


+ករណី $a<0$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$
y'	$-$	‖
y	$+\infty$ ↘	0

➢ ក្រាប



លំហាត់គំរូ៖សិក្សាអថេរភាព
និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$y=\sqrt{-3x+5}$

➢ រកដែនកំណត់

អនុគមន៍មានន័យកាលណា:

$-3x+5\geq 0; x\leq \frac{5}{2}$

ដូចនេះ $D=]-\infty;\frac{5}{3}]$

➢ ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ

$y'=\frac{-3}{2\sqrt{-3x+5}}<0;\forall x<\frac{5}{3}$

-លីមីត

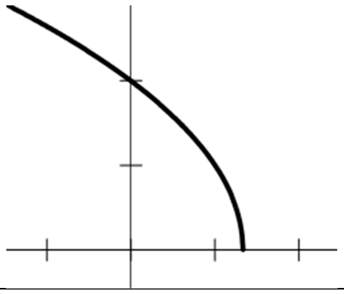
$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-3x+5}=+\infty$

-តារាងអថេរភាព

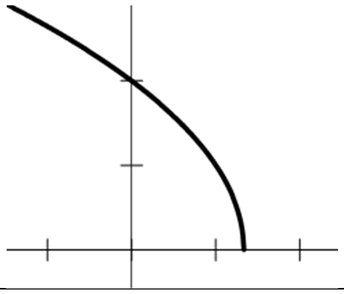
x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$
y'	$-$	‖
y	$+\infty$ ↘	0

<table>
<tr>
<td></td>
<td>➢ ក្រាប
តារាងតម្លៃលេខ

x | 0 | 1
y | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{2}$

</td>
<td>➢ ក្រាប
តារាងតម្លៃលេខ

x | 0 | 1
y | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{2}$

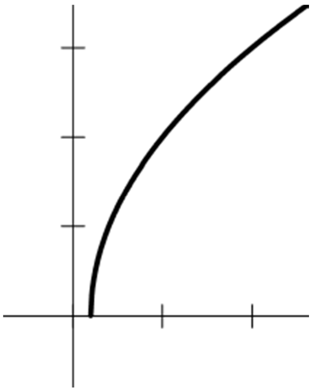
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3" align="center">ជំហានទី៤(១៥នាទី)</td>
</tr>
<tr>
<td>-គ្រូដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិឲ្យសិស្សអនុវត្តន៍។
-គ្រូប្រាប់ឲ្យសិស្សអនុវត្តន៍ម្នាក់មួយចំណុចនៅលើក្តាខៀន។</td>
<td>ពង្រឹងពុទ្ធិ
សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍
ក- $y=\sqrt{5x-1}$
ខ- $y=\sqrt{2-x}$</td>
<td>-សិស្សនាំគ្នាធ្វើលំហាត់ដោយយកចិត្តទុកដាក់
សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍៖
ក- $y=\sqrt{5x-1}$
➢ រកដែនកំណត់
អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ៖
$5x-1\ge 0; x\ge \frac{1}{5}$
ដូចនេះ $D=[\frac{1}{5};+\infty[$
➢ ទិសដៅអថេរភាព
-ដេរីវេ
$y'=\frac{5}{2\sqrt{5x-1}}>0;\forall x>\frac{1}{5}$
-លីមីត
$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5x-1}=+\infty$
-តារាងអថេរភាព

x | $\frac{1}{5}$ $+\infty$
y' | $+$
y | 0 ↗ $+\infty$</td>
</tr>
</table>

➢ ក្រាប

តារាងតម្លៃលេខ

x	1	2
y	2	3



ខ- $y=\sqrt{2-x}$

➢ រកដែនកំណត់

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ

$2-x\geq 0; x\leq 2$

$D=]-\infty;2]$

➢ ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ

$y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}<0;\forall x<2$

-លីមីត

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$

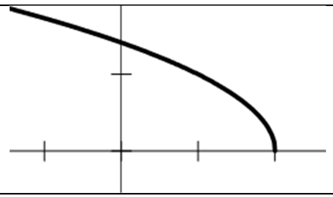
-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		2
y'		$-$	
y	$+\infty$	↘	0

➢ ក្រាប

តារាងតម្លៃលេខ

x	0	1
y	$\sqrt{2}$	1

		
	ជំហានទី៥(៥នាទី)	
-សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ ក- $y=\sqrt{x+5}$ ខ- $y=\sqrt{-4x+1}$	កិច្ចការផ្ទះ	សិស្សកត់ត្រាលំហាត់ដាក់ក្នុងសៀវភៅ។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី៣ អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍

មេរៀនទី១ អនុគមន៍អសនិទាន

I. វត្ថុបំណង

- ចំណេះដឹង: សិស្សបានយល់ដឹងពីសារៈសំខាន់របស់អនុគមន៍អសនិទាន។
- បំនិន: សិស្សចេះប្រើអនុគមន៍ក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ។
- ឥរិយាបថ: សិស្សមានទំនុកចិត្តក្នុងការអនុវត្តន៍។

II. រយៈពេល: ២ម៉ោងសិក្សា

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

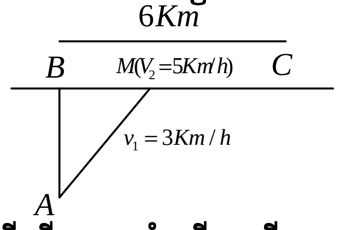
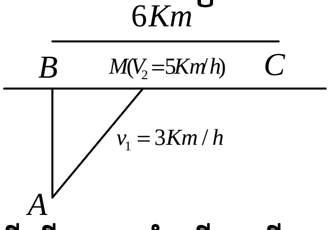
- សៀវភៅសិស្សទំព័រទី៤៨ដល់៥១
- សៀវភៅគ្រូទំព័រទី៤៨ដល់៥១
- បន្ទាត់ ឧបករណ៍គូសប៉ារ៉ាបូលនិងដៃកឈាន។

IV. វិធីសាស្ត្របង្រៀន

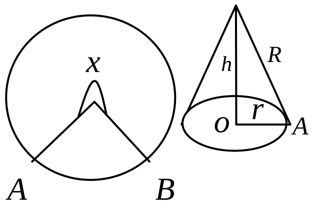
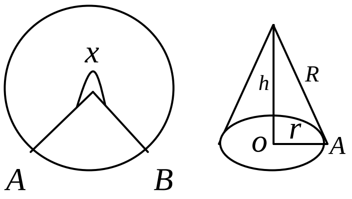
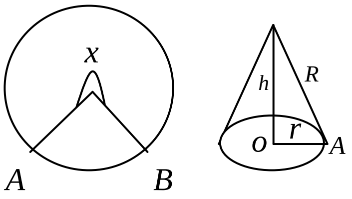
- គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល

V. ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១(៥នាទី)		
-គ្រូតពិនិត្យអវត្តមាន សណ្តាប់ធ្នាប់ វិន័យ និង បរិស្ថាន។	(រដ្ឋបាលថ្នាក់)	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២(១០នាទី)		
-ចូនិយាយពីរបៀប សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ អសនិទាន $y=\sqrt{ax+b}; a\neq 0$		-ដើម្បីសិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍សនិទាន យើងត្រូវះ ១/ រកដែនកំណត់ ២/ ទិសដៅអថេរភាព -រកដេរីវេទី១ៈ សិក្សាភាពកើនរឺចុះនៃអនុន៍ -រកលីមីត ៣/ តារាងអថេរភាព

		៨/ សំណង់ក្រាប: រកចំណុចប្រសព្វរវាងអក្ស៍ អដោនេរ។
ជំហានទី៣(៨០នាទី)		
-គ្រូសរសេរចំណង់ជើង មេរៀនថ្មី។ ដាក់ឧទាហរណ៍បង្ហាញ ដល់សិស្ស។ -ណែនាំសិស្សពីរបៀប តាងអញ្ញាតរបៀបសរសេរ សមីការនៃអនុគមន៍តាម សម្មតិកម្មរបស់លំហាត់ដូ ចជា សម្មតិកម្មទាក់ទង់និងចម្ងា យ ចរ រយៈពេល ល្បឿន និងទ្រឹស្តីបទពីតាករ័ក្នុង ត្រីកោណកែង។	មេរៀនថ្មី ជំពូកទី៣ អថេរភាពនិងក្រាបនៃ អនុគមន៍ មេរៀនទី១ អនុគមន៍អសនិទាន III. អនុវត្តន៍ លំហាត់គំរូ: មនុស្សម្នាក់ធ្វើដំណើរពី ចំណុចAកាត់វាលខ្សាច់ ទៅកាន់ចំណុចMដែលនៅ លើផ្លូវជាតិដោយ ល្បឿន3Km/hរួចបន្តដំណើរ លើកំណារ់ផ្លូវជាតិដោយ ល្បឿន 5Km/h។ ចម្ងាយផ្លូវពី AទៅBស្មើ 2Km ហើយពី BទៅCស្មើ 6Km។ រកទីតាំងនៃMដើម្បីឲ្យអ្នក ដំណើរប្រើពេលអស់តិច បំផុតក្នុងការធ្វើដំណើរ ពីAទៅMនិងពីMទៅC។ ដំណោះស្រាយ  ដើម្បីឲ្យអ្នកដំណើរប្រើពេល	មេរៀនថ្មី ជំពូកទី៣ អថេរភាពនិងក្រាបនៃ អនុគមន៍ មេរៀនទី១ អនុគមន៍អសនិទាន III. អនុវត្តន៍ លំហាត់គំរូ: មនុស្សម្នាក់ធ្វើដំណើរពី ចំណុចAកាត់វាលខ្សាច់ ទៅកាន់ចំណុចMដែលនៅ លើផ្លូវជាតិដោយ ល្បឿន3Km/hរួចបន្តដំណើរ លើកំណាត់ផ្លូវជាតិដោយ ល្បឿន5Km/h។ ចម្ងាយផ្លូវពី AទៅBស្មើ 2Km ហើយពី BទៅCស្មើ 6Km។ រកទីតាំងនៃMដើម្បីឲ្យអ្នក ដំណើរប្រើពេលអស់ តិចបំផុតក្នុងការធ្វើដំណើរ ពីAទៅMនិងពីMទៅC។ ដំណោះស្រាយ  -ដើម្បីឲ្យអ្នកដំណើរប្រើពេល

	អស់តិចបំផុតលុះត្រាតែចម្ងាយពី AទៅCខ្លីបំផុត។ -ចម្ងាយពីAទៅCខ្លីបំផុតលុះត្រាតែអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមា។ -តាង x ជាចម្ងាយពីBទៅM -តាង6-x ជាចម្ងាយពីMទៅC។ +ក្នុងត្រីកោណកែងABMមន $AM^2 = AB^2 + BM^2$ $\Leftrightarrow AM = \sqrt{AB^2 + BM^2}$ $\Leftrightarrow AM = \sqrt{4+x^2}$ -រយៈពេលធ្វើដំណើរ ពីAទៅMគឺ $\frac{\sqrt{4+x^2}}{3}$ រយៈពេលធ្វើដំណើរពីAទៅC គឺ $f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{6-x}{5}$ -រកដេរីវេ $y' = (\frac{\sqrt{4-x^2}}{3} + \frac{6-x}{5})'$ $= \frac{x}{3\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{5}$ $= \frac{5x - 3\sqrt{4+x^2}}{15\sqrt{4+x^2}}$ $= \frac{16(x+\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2})}{15\sqrt{4+x^2}(5x+3\sqrt{4+x^2})}$ ដោយ $x > 0$ ភាគបែងវិជ្ជមាន ហើយ $16(x+\frac{3}{2}) > 0$ ដូចនេះដេរីវេមានសញ្ញាដូច $x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$	អស់តិចបំផុត លុះត្រាតែចម្ងាយពីAទៅCខ្លីបំផុត។ -ចម្ងាយពីAទៅCខ្លីបំផុតលុះត្រាតែអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមា។ -តាង x ជាចម្ងាយពីBទៅM -តាង6-x ជាចម្ងាយពីMទៅC។ +ក្នុងត្រីកោណកែងABMមាន $AM^2 = AB^2 + BM^2$ $\Leftrightarrow AM = \sqrt{AB^2 + BM^2}$ $\Leftrightarrow AM = \sqrt{4+x^2}$ -រយៈពេលធ្វើដំណើរ ពីAទៅMគឺ $\frac{\sqrt{4+x^2}}{3}$ រយៈពេលធ្វើដំណើរពីAទៅCគឺ $f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \frac{6-x}{5}$ -រកដេរីវេ $y' = (\frac{\sqrt{4-x^2}}{3} + \frac{6-x}{5})'$ $= \frac{x}{3\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{5}$ $= \frac{5x - 3\sqrt{4+x^2}}{15\sqrt{4+x^2}}$ $= \frac{16(x+\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2})}{15\sqrt{4+x^2}(5x+3\sqrt{4+x^2})}$ ដោយ $x > 0$ ភាគបែងវិជ្ជមាន ហើយ $16(x+\frac{3}{2}) > 0$ ដូចនេះដេរីវេមានសញ្ញាដូច $x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

-លំហាត់គំរូទី២៖ គេចង់បានថាសមួយដល មានកាំRទៅធ្វើជា កោណមួយ។ គេត្រូវកាត់ចំរៀកថាស មួយយកចេញពីថាស មូលនោះធ្វើយ៉ាងនេះ គេបានកោណដូច រូបខាងក្រោម៖  ក/ គណនាមាឌកោណជា អនុគមន៍នៃ x ដែលxជាមនៃចម្រៀក ថាសែដលនៅសល់។ ខ/ រកតម្លៃxដើម្បីឲ្យមាឌ កោណធំបំផុត។	-តារាងអថេរភាព x: 0 … $\frac{3}{2}$ … 6 $f'(x)$: $-$ 0 $+$ $f(x)$: ↘ $f(\frac{3}{2})$ ↗ -បើ $x=\frac{3}{2}$ នោះ f មានតម្លៃតូចបំផុត។ ដូចនេះចំណុច M ត្រូវស្ថិត នៅចម្ងាយ $\frac{3}{2}Km$ ពីចំណុច B ។ -លំហាត់គំរូទី២៖ គេចង់បានថាសមួយដែល មានកាំRទៅធ្វើជា កោណមួយ។ គេត្រូវកាត់ចំរៀកថាសមួយ យកចេញពីថាសមូលនោះ ធ្វើយ៉ាងនេះគេបានកោណ ដូចរូបខាងក្រោម៖  ក/ គណនាមាឌកោណជា អនុគមន៍នៃ x ដែលxជាមនៃចម្រៀក ថាសែដលនៅសល់។ ខ/ រកតម្លៃxដើម្បីឲ្យមាឌ កោណធំបំផុត។ ដំណោះស្រាយ ក/ គណនាមាឌកោណជា	-តារាងអថេរភាព x: 0 … $\frac{3}{2}$ … 6 $f'(x)$: $-$ 0 $+$ $f(x)$: ↘ $f(\frac{3}{2})$ ↗ -បើ $x=\frac{3}{2}$ នោះ f មានតម្លៃតូចបំផុត។ ដូចនេះចំណុច M ត្រូវស្ថិត នៅចម្ងាយ $\frac{3}{2}Km$ ពីចំណុច B ។ -លំហាត់គំរូទី២៖ គេចង់បានថាសមួយដែល មានកាំRទៅធ្វើជា កោណមួយ។ គេត្រូវកាត់ចំរៀកថាសមួយ យកចេញពីថាសមូលនោះ ធ្វើយ៉ាងនេះគេបានកោណដូច រូបខាងក្រោម៖  ក/ គណនាមាឌកោណជា អនុគមន៍នៃ x ដែលxជាមនៃចម្រៀក ថាសែដលនៅសល់។ ខ/ រកតម្លៃxដើម្បីឲ្យមាឌ កោណធំបំផុត។ -សិស្សស្តាប់គ្រូពន្យល់ដោយ យកចិត្តទិកដាក់និង

អនុគមន៍នៃ x

ប្រវែងធ្នូ AB គឺ Rx គេបាន៖

$2\pi r = Rx \Rightarrow r = \frac{Rx}{2\pi}$

ដូចនេះកោណមានមាឌ

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi(\frac{Rx}{2\pi})^2\sqrt{R^2 - (\frac{Rx}{2\pi})^2}$

$= \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

V មានតម្លៃលេខលុះត្រាតែ៖

$4\pi^2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2\pi$

ខ/ រកតម្លៃxដើម្បីឲ្យមាឌ

កោណធំបំផុត

$V = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

$V' = \frac{R^3}{24\pi^2}[2x\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

$+ x^2\frac{(4\pi^2 - x^2)}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$

$= \frac{R^3}{24\pi^2}[\frac{8\pi^2 x - 3x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}]$

$= \frac{R^3 x}{8\pi^2}\frac{(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} + x)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} - x)$

ដោយ $0 < x < 2\pi$ នោះ

$\frac{R^3 x}{8\pi^2}\left[\frac{2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} + x}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right] > 0$

ហើយដេរីវេមានសញ្ញាដូច

$\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} - x\right)$

គេបានតារាងអថេរភាព

x	0		$2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$		2π
V'		$+$	0	$-$	
V		↗		↘	

អតិបរមា

នាំគ្នាធ្វើលំហាត់ដាក់ក្នុងសៀវភៅ។

ដំណោះស្រាយ

ក/ គណនាមាឌកោណជា

អនុគមន៍នៃ x

ប្រវែងធ្នូ AB គឺ Rx គេបាន៖

$2\pi r = Rx \Rightarrow r = \frac{Rx}{2\pi}$

ដូចនេះកោណមានមាឌ

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi(\frac{Rx}{2\pi})^2\sqrt{R^2 - (\frac{Rx}{2\pi})^2}$

$= \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

V មានតម្លៃលេខលុះត្រាតែ៖

$4\pi^2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2\pi$

ខ/ រកតម្លៃxដើម្បីឲ្យមាឌ

កោណធំបំផុត

$V = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

$V' = \frac{R^3}{24\pi^2}[2x\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

$+ x^2\frac{(4\pi^2 - x^2)}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$

$= \frac{R^3}{24\pi^2}[\frac{8\pi^2 x - 3x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}]$

$= \frac{R^3 x}{8\pi^2}\frac{(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} + x)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} - x)$

ដោយ $0 < x < 2\pi$ នោះ

$\frac{R^3 x}{8\pi^2}\left[\frac{2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} + x}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right] > 0$

ហើយដេរីវេមានសញ្ញាដូច

<table>
<tr><td></td><td>ដូចនេះកោណមានមាឌធំបំផុតបើ $x=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ ។</td><td>$\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}-x\right)$
គេបានតារាងអថេរភាព
x : 0 , $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, 2π
V' : $+$ 0 $-$
V : ↗ អតិបរមា ↘
ដូចនេះកោណមានមាឌធំបំផុតបើ $x=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ ។</td></tr>
<tr><td colspan="3">ជំហានទី៤(១៥នាទី)</td></tr>
<tr><td>តើគេអនុវត្តន៍អនុគមន៍អសនិទានសំរាប់ធ្វើអ្វី?</td><td>ពង្រឹងពុទ្ធិ</td><td>-អនុវត្តន៍សំរាប់រកតម្លៃធំបំផុតរឺតូចបំផុត។</td></tr>
<tr><td colspan="3">ជំហានទី៥(៥នាទី)</td></tr>
<tr><td>ចូរប្អូនធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិទំព័រទី៥១។</td><td>កិច្ចការផ្ទះ</td><td>-សិស្សកត់ត្រាកិច្ចការផ្ទះចូលសៀវភៅ។</td></tr>
</table>

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី៣ អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍

មេរៀនទី១ អនុគមន៍អសនិទាន

I. វត្ថុបំណង

- ចំណេះដឹងៈ សិស្សប្រាប់រាងទូទៅរបស់អនុគមន៍អសនិទានបាន
- បំនិនៈ សិស្សចេះសិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax^2+bx+c};a\neq 0$
- ឥរិយាបថៈ សិស្សមានទំនុកចិត្តក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II. រយៈពេលៈ ២ម៉ោងសិក្សា

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្សទំព័រទី៨៤ដល់៨៨
- សៀវភៅគ្រូទំព័រទី៨៤ដល់៨៨
- បន្ទាត់និងឧបករណ៍គូសប៉ារ៉ាបូល

IV. វិធីសាស្ត្របង្រៀន

- គោលវិធីសិស្សមជ្ឈមណ្ឌល

V. ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
	ជំហានទី១(៥នាទី)	
-គ្រូតពិនិត្យអវត្តមាន សណ្តាប់ធ្នាប់ វិន័យ និង បរិស្ថាន។	(រដ្ឋបាលថ្នាក់)	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
	ជំហានទី២(១០នាទី)	
-ចូនិយាយពីរបៀប សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ អសនិទាន $y=\sqrt{ax+b};a\neq 0$	រំលឹកមេរៀនចាស់	-ដើម្បីសិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍សនិទាន យើងត្រូវៈ ១/ រកដែនកំណត់ ២/ ទិសដៅអថេរភាព -រកដេរីវេទី១ៈ សិក្សាភាពកើនរឺចុះនៃអនុន៍ -រកលីមីត ៣/ តារាងអថេរភាព

<table>
<tr><td></td><td></td><td>៤/ សំណង់ក្រាប:
រកចំណុចប្រសព្វរវាងអក្ស័
អដោនេរ។</td></tr>
<tr><td colspan="3">ជំហានទី៣(៨០នាទី)</td></tr>
<tr><td>-គ្រូសរសេរចំណង់ជើង
មេរៀនថ្មី។
ដាក់ឧទាហរណ៍បង្ហាញ
ដល់សិស្ស។</td><td>មេរៀនថ្មី
ជំពូកទី៣
អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍
មេរៀនទី១
អនុគមន៍អសនិទាន
II.សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគន៍
$y=\sqrt{ax^2+bx+c};a\neq 0$
-សិក្សាអថេរភាពនិងសង់
ក្រាបនៃអនុគមន៍
$y=\sqrt{x^2-4x+3}$ ។
➢ រកដែនកំណត់
អនុគមន៍មានន័យកាលណា៖
$x^2-4x+3\geq 0$
បើ $x^2-4x+3=0$
$\Delta=(-4)^2-4.1.3=4$
$\Leftrightarrow x_1=1;x_2=3$
$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & 1 & & 3 & +\infty \\ \hline x^2-4x+3 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$
គេបាន $x^2-4x+3\geq 0$
បើ $x\leq 1;x\geq 3$
ដូចនេះ $D=]-\infty;1]\cup[3;+\infty[$
➢ ទិសដៅអថេរភាព
-ដេរីវេ
$y'=\frac{(x^2-4x+3)'}{2\sqrt{x^2-4x+3}}$
$=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$
ដេរីវេមានសញ្ញាដូច $x-2$
ព្រោះ $\sqrt{x^2-4x+3}>0$</td><td>សិស្សកត់ត្រាមេរៀនថ្មី
មេរៀនថ្មី
ជំពូកទី៣
អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍
មេរៀនទី១
អនុគមន៍អសនិទាន
II.សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគន៍
$y=\sqrt{ax^2+bx+c};a\neq 0$
-សិក្សាអថេរភាពនិងសង់
ក្រាបនៃអនុគមន៍
$y=\sqrt{x^2-4x+3}$ ។
➢ រកដែនកំណត់
អនុគមន៍មានន័យកាលណា៖
$x^2-4x+3\geq 0$
បើ $x^2-4x+3=0$
$\Delta=(-4)^2-4.1.3=4$
$\Leftrightarrow x_1=1;x_2=3$
$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & 1 & & 3 & +\infty \\ \hline x^2-4x+3 & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$
គេបាន $x^2-4x+3\geq 0$
បើ $x\leq 1;x\geq 3$
ដូចនេះ $D=]-\infty;1]\cup[3;+\infty[$
➢ ទិសដៅអថេរភាព
-ដេរីវេ
$y'=\frac{(x^2-4x+3)'}{2\sqrt{x^2-4x+3}}$
$=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$
ដេរីវេមានសញ្ញាដូច $x-2$</td></tr>
</table>

ចំពោះ $x<1$ ឬ $x>3$

បើ $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$ 0 $+$		$+$
y'	$-$		$-$ 0 $+$		$+$

-លីមីត

$y=\sqrt{x^2-4x+3}$

$=\sqrt{(x-2)^2-1}$

$=|x-2|+\varepsilon(x)$

ដែល $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$

គេបាន

$f(x)=x-2+\varepsilon(x); x\geq 3$

$f(x)=-x+2+\varepsilon(x); x\leq 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-2+\varepsilon(x)$

$=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x+2+\varepsilon(x)$

$=+\infty$

-អាស៊ីមតូត៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$

ដូចនេះ៖ $y=x-2$

ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង

$x\to+\infty$ ។

- $y=-x+2$

ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង

$x\to-\infty$ ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
y'	$-$				$+$
y	$+\infty$ ↘	0		0	↗ $+\infty$

➢ ក្រាប

តារាងអថេរភាព

x	0	1	3
y	$\sqrt{3}$	0	0

ព្រោះ $\sqrt{x^2-4x+3}>0$

ចំពោះ $x<1$ ឬ $x>3$

បើ $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$ 0 $+$		$+$
y'	$-$		$-$ 0 $+$		$+$

-លីមីត

$y=\sqrt{x^2-4x+3}$

$=\sqrt{(x-2)^2-1}$

$=|x-2|+\varepsilon(x)$

ដែល $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$

គេបាន

$f(x)=x-2+\varepsilon(x); x\geq 3$

$f(x)=-x+2+\varepsilon(x); x\leq 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-2+\varepsilon(x)$

$=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x+2+\varepsilon(x)$

$=+\infty$

-អាស៊ីមតូត៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$

ដូចនេះ៖ $y=x-2$

ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង

$x\to+\infty$ ។

- $y=-x+2$

ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង

$x\to-\infty$ ។

-តារាងអថេរភាព

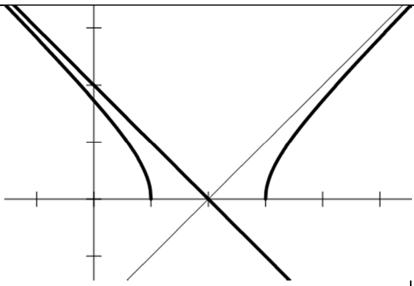
x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
y'	$-$				$+$
y	$+\infty$ ↘	0		0	↗ $+\infty$

➢ ក្រាប

តារាងអថេរភាព

x	0	1	3
y	$\sqrt{3}$	0	0

-គ្រូដាក់លំហាត់គំរូទី២
សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប
នៃអនុគមន៍៖
$y=\sqrt{-2x^2+10x-8}$



លំហាត់គំរូ២
សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប
នៃអនុគមន៍៖
$y=\sqrt{-2x^2+10x-8}$

➢ រកដែនកំណត់
អនុគមន៍មានន័យកាលណា៖
$-2x^2+10x-8\ge 0$
បើ $-2x^2+10x-8=0$
$\Leftrightarrow x_1=1; x_2=4$

សញ្ញានៃអនុគមន៍

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$-2x^2+10x-8$	$-$	0	$+$	0	$-$

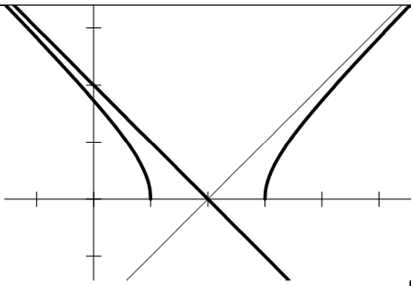
គេបាន៖ $-2x^2-10x-8\ge 0$
បើ $1\le x\le 4$
ដូចនេះ $D=[1;4]$ ។

➢ ទិសដៅអថេរភាព
-ដេរីវេ

$$y'=\frac{-4x+10}{2\sqrt{-2x^2+10x-8}}$$
$$=\frac{-2x+5}{\sqrt{-2x^2+10x-8}}$$

ដេរីវេមានសញ្ញាតាម $-2+5$
ព្រោះ
$\sqrt{-2x^2+10x-8}>0; \forall x\in]1;4[$
ចំពោះ $x=\frac{5}{2}\Rightarrow y'=0$

x	1		$\frac{5}{2}$		4
y'		$+$	0	$-$	



លំហាត់គំរូ២
សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប
នៃអនុគមន៍៖
$y=\sqrt{-2x^2+10x-8}$

➢ រកដែនកំណត់
អនុគមន៍មានន័យកាលណា៖
$-2x^2+10x-8\ge 0$
បើ $-2x^2+10x-8=0$
$\Leftrightarrow x_1=1; x_2=4$

សញ្ញានៃអនុគមន៍

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$-2x^2+10x-8$	$-$	0	$+$	0	$-$

គេបាន៖ $-2x^2-10x-8\ge 0$
បើ $1\le x\le 4$
ដូចនេះ $D=[1;4]$ ។

➢ ទិសដៅអថេរភាព
-ដេរីវេ

$$y'=\frac{-4x+10}{2\sqrt{-2x^2+10x-8}}$$
$$=\frac{-2x+5}{\sqrt{-2x^2+10x-8}}$$

ដេរីវេមានសញ្ញាតាម $-2+5$
ព្រោះ
$\sqrt{-2x^2+10x-8}>0; \forall x\in]1;4[$
ចំពោះ $x=\frac{5}{2}\Rightarrow y'=0$

x	1		$\frac{5}{2}$		4
y'		$+$	0	$-$	

-ណែនាំសិស្សក្នុងការទាញសេចក្ដីសន្និដ្ឋានចំពោះអនុគមន៍អសនិទានរាង

$y=\sqrt{ax^2+bx+c};a\neq 0$

ដូចនេះy មានអតិបរមាត្រង់

$f(\frac{5}{2})=\sqrt{-2(\frac{5}{2})^2+10(\frac{5}{2})-8}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

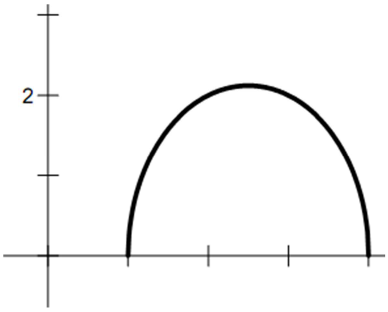
-តារាងអថេរភាព

x	1		$\frac{5}{2}$		4
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	↘	0

➢ សង់ក្រាប

តារាងតម្លៃលេខ

x	1	4
y	0	0



❖ ជាទូទៅ

អនុគមន៍អសនិទានរាង

$y=\sqrt{ax^2+bx+c};a\neq 0$

$;ax^2+bx+c=0$

$\exists\Delta=b^2-4ac$

+ ករណី $a>0$

ក្រាបនៃអនុគមន៍មានអាស៊ីមតូតពីរ។

គេបាន:

$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$

$=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|+\varepsilon(x)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}$

$-\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|+\varepsilon(x)$

$=0$

-បើ $x\to+\infty$ ក្រាបនៃ

ដូចនេះy មានអតិបរមាត្រង់

$f(\frac{5}{2})=\sqrt{-2(\frac{5}{2})^2+10(\frac{5}{2})-8}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

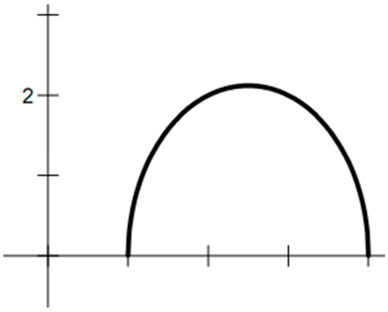
-តារាងអថេរភាព

x	1		$\frac{5}{2}$		4
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	↘	0

➢ សង់ក្រាប

តារាងតម្លៃលេខ

x	1	4
y	0	0



❖ ជាទូទៅ

អនុគមន៍អសនិទានរាង

$y=\sqrt{ax^2+bx+c};a\neq 0$

$;ax^2+bx+c=0$

$\exists\Delta=b^2-4ac$

+ ករណី $a>0$

ក្រាបនៃអនុគមន៍មានអាស៊ីមតូតពីរ។

គេបាន:

$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$

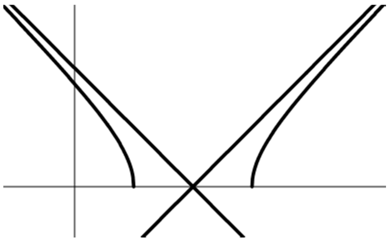
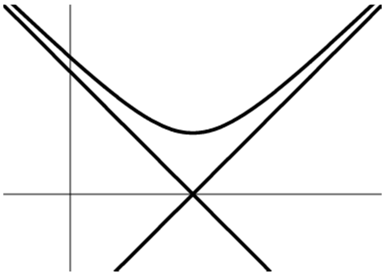
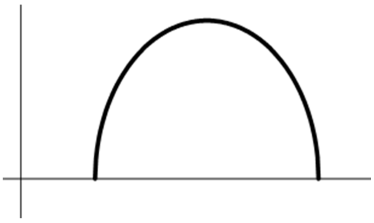
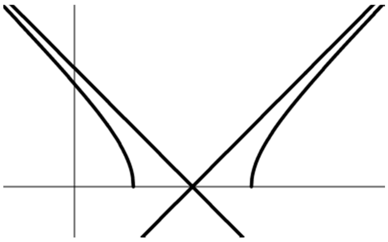
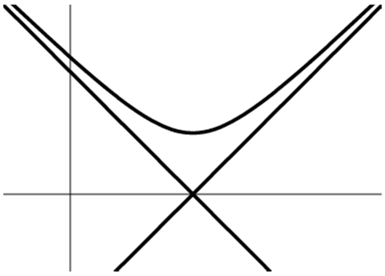
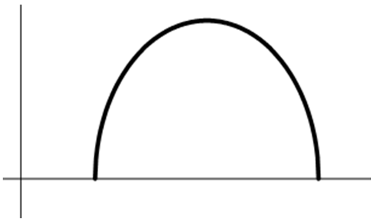
$=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|+\varepsilon(x)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}$

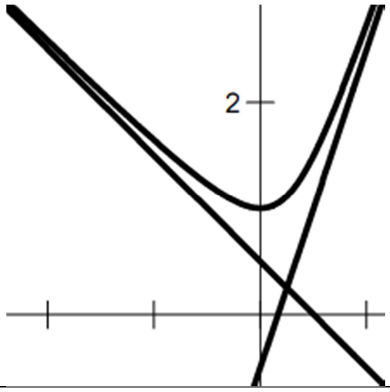
$-\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|+\varepsilon(x)$

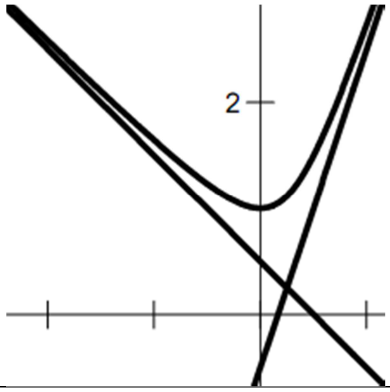
$=0$

-បើ $x\to+\infty$ ក្រាបនៃ

+គ្រូបន្ថែមលំហាត់ឧទាហរណ៍សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍៖ $y=x+\sqrt{4x^2-2x+1}$	មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$ -បើ $x\to-\infty$ ក្រាបនៃអនុគមន៍អាស៊ីមតូតទ្រេត $y=\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$ ➢ ក្រាប + ករណី $a>0;\Delta>0$  +ករណី $a>0;\Delta<0$  + ករណី $a<0;\Delta>0$  + ករណី $a<0$ ក្រាបនៃអនុគមន៍គ្មានអាស៊ីមតូតទេ។ ឧ.សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប នៃអនុគមន៍៖ $y=x+\sqrt{4x^2-2x+1}$ ដំណោះស្រាយ ➢ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$ ➢ ទិសដៅអថេរភាព	មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$ -បើ $x\to-\infty$ ក្រាបនៃអនុគមន៍អាស៊ីមតូតទ្រេត $y=\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$ ➢ ក្រាប + ករណី $a>0;\Delta>0$  +ករណី $a>0;\Delta<0$  + ករណី $a<0;\Delta>0$  + ករណី $a<0$ ក្រាបនៃអនុគមន៍គ្មានអាស៊ីមតូតទេ។ -សិស្សសង្កេតនិងកត់ត្រា ឧ.សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប នៃអនុគមន៍៖ $y=x+\sqrt{4x^2-2x+1}$ ដំណោះស្រាយ ➢ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$ ➢ ទិសដៅអថេរភាព

	-ដេរីវេ $y'=1+\frac{8x-2}{2\sqrt{4x^2-2x+1}}$ $=1+\frac{4x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$ $y'=0 \Leftrightarrow 1+\frac{4x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{4x^2-2x+1}+4x-1=0$ $\Rightarrow x=0$ -ដេរីវេទី២ $y''=\frac{3}{(\sqrt{4x^2-2x+1})}>0$ $y''>0$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាត្រង់ $x=0$ តម្លៃអប្បបរមា $f(0)=0+\sqrt{4.0-2.0+1}=1$ -លីមីត $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ -អាស៊ីមតូត $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=$ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sqrt{4x^2-2x+1}}{x}$ $a=\lim_{x\to+\infty}(1+\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}})$ $=3(x\to+\infty)$ $b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ $=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{4x^2-2x+1}+3x)$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}=-\frac{1}{2}$ ដូចនេះអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=3x-\frac{1}{2};(x\to+\infty)$ បើ $x\to-\infty$ គេបាន	-ដេរីវេ $y'=1+\frac{8x-2}{2\sqrt{4x^2-2x+1}}$ $=1+\frac{4x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$ $y'=0 \Leftrightarrow 1+\frac{4x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{4x^2-2x+1}+4x-1=0$ $\Rightarrow x=0$ -ដេរីវេទី២ $y''=\frac{3}{(\sqrt{4x^2-2x+1})}>0$ $y''>0$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាត្រង់ $x=0$ តម្លៃអប្បបរមា $f(0)=0+\sqrt{4.0-2.0+1}=1$ -លីមីត $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ -អាស៊ីមតូត $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=$ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sqrt{4x^2-2x+1}}{x}$ $a=\lim_{x\to+\infty}(1+\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}})$ $=3(x\to+\infty)$ $b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ $=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{4x^2-2x+1}+3x)$ $=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}=-\frac{1}{2}$ ដូចនេះអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=3x-\frac{1}{2};(x\to+\infty)$ បើ $x\to-\infty$ គេបាន

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$
$=\lim_{x\to-\infty}(1-\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}})=-1$
$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$
$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-2x+1}-x}=\frac{1}{2}$
ដូចនេះអាស៊ីមតូតទ្រេត
$y=-x+\frac{1}{2};(x\to-\infty)$
-តារាងអថេរភាព
x: $-\infty$ 0 $+\infty$
y': $-$ 0 $+$
y: $+\infty$ 1 $+\infty$
➢ ក្រាប


</td>
<td>
$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$
$=\lim_{x\to-\infty}(1-\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}})=-1$
$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$
$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-2x+1}-x}=\frac{1}{2}$
ដូចនេះអាស៊ីមតូតទ្រេត
$y=-x+\frac{1}{2};(x\to-\infty)$
-តារាងអថេរភាព
x: $-\infty$ 0 $+\infty$
y': $-$ 0 $+$
y: $+\infty$ 1 $+\infty$
➢ ក្រាប


</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ជំហានទី៤(១៥នាទី)</td>
</tr>
<tr>
<td>-ចូនិយាយពីរបៀប
សិក្សាអថេរភាពនិង
សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍
អសនិទាន
$y=\sqrt{ax^2+bx+c};a\neq0$</td>
<td>ពង្រឹងពុទ្ធិ</td>
<td>-ដើម្បីសិក្សាអថេរភាពនិង
សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍សនិទាន
$y=\sqrt{ax^2+bx+c};a\neq0$
យើងត្រូវះ
១/ រកដែនកំណត់
២/ ទិសដៅអថេរភាព
-រកដេរីវេទី១
សិក្សាភាពកើនរឺចុះនៃអនុន៍
-រកលីមីត
-រកអាស៊ីមតូតទ្រេត
៣/ តារាងអថេរភាព
៤/ សង់ក្រាប</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3"></td>
</tr>
</table>

ជំហានទី៥(៥នាទី)		
សិក្សាអថេរភាពនិង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ អសនិទាន $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ $y = (x-1)\sqrt{x^2 + 2x - 1}$	កិច្ចការផ្ទះ	សិស្សកត់ត្រាលំហាត់។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី..៣.. អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍

មេរៀនទី..២.. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចម្រុះ

(១.អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចម្រុះ - លំហាត់គំរូ១- លំហាត់គំរូ២)

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង : សិស្សពណ៌នាពីវិធីសាស្ត្រសិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណចម្រុះ ដែលជា អនុគមន៍គូ និងអនុគមន៍សេស បានត្រឹមត្រូវ
- បំណិន : សិស្សដោះស្រាយលំហាត់បានត្រឹមត្រូវដោយខ្លួនឯង
- ឥរិយាបទ : សិស្សសប្បាយរីករាយ និងមានទឹកចិត្តខិតខំរៀនសូត្រ

II. ពេលវេលា ...០២...ម៉ោង ថ្ងៃទី..................ខែ..................ឆ្នាំ..............

III. សម្ភារៈឧបទេស

- សៀវភៅសិស្ស : គណិតវិទ្យាទី ១២ កម្រិតខ្ពស់ ទំព័រទី ៥៤ ដល់ ៥៧

IV. ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
– គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	**<u>ជំហានទី១</u>** (រដ្ឋបាលថ្នាក់) – គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំនាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរ – ចូររកខួបនៃ $\sin(ax+b)$ និង $\cos(bx+d)$ – ចូររកខួបនៃ $\cos(bx+d)+\sin(ax+b)$	**<u>ជំហានទី២</u>** (រំលឹកមេរៀនចាស់) – ខួបនៃ $\sin(ax+b)$ គឺ $p_1=\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$ – ខួបនៃ $\cos(bx+d)$ គឺ $p_2=\frac{2\pi}{\lvert c\rvert}$ – ខួបនៃ $\cos(bx+d)+\sin(ax+b)$ គឺ $lcm\left(p_1, p_2\right)$	$p_1=\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$ $p_2=\frac{2\pi}{\lvert c\rvert}$ បើ $f(x)$ មានខួប p_1 ហើយ $g(x)$ មានខួប p_2 នោះ $f(x)\pm g(x)$ ឬ $f(x).g(x)$ និង $\frac{f(x)}{g(x)}$ មានខួប $p=lcm(p_1, p_2)$

– បើ f ជាអនុគមន៍គូ ឬសេស នោះគេសិក្សាតែលើចន្លោះ $\left[0,\frac{p}{2}\right]$	**<u>ជំហានទី៣</u>** (មេរៀនថ្មី) មេរៀនទី២ **អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចម្រុះ** ១.អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចម្រុះ ❖ ដើម្បីសិក្សានិងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ត្រីកោនមាត្រចម្រុះយើងត្រូវសិក្សាតាមលំដាប់លំដោយដូចខាងក្រោម៖ • ដែនកំនត់ D • កំនត់ចន្លោះដែលត្រូវសិក្សា – ខួប P – ភាពគូ ភាពសេស • ទិសដៅអថេរភា – ដេរីវេ និង សញ្ញាដេរីវេ – ចំនុចបរមា – អាស៊ីមតូត (បើមាន) – តារាងអថេរភាព • ក្រាប	– អញ្ចឹងបើ f ជាអនុគមន៍មិនគូ មិនសេសគេត្រូវសិក្សាលើចន្លោះមួយខួបគឺ $\left[-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right]$
– ដំបូងរកដែនកំនត់ $D_f=?$ – កំនត់ចន្លោះដែលត្រូវសិក្សា: – រកខួប – ភាពគូ ភាពសេស	**លំហាត់គំរូ១** សិក្សាអថេរភាពនិងក្រាបនៃ $y=f(x)=\sin x(1+\cos x)$ **ចម្លើយ** **ដែនកំនត់** $D=IR$ **ខួប** ចំពោះ $\sin x$ មានខួប $p_1=2\pi$ ហើយ $\cos x$ មានខួប $p_2=2\pi$ $\Rightarrow y=\sin x(1+\cos x)$ មានខួប $p=lcm\left(2\pi,2\pi\right)=2\pi$ **ភាពគូ ភាពសេស** (i) $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ ពិត (ii) $f(-x)=\sin(-x)\left(1+\cos(-x)\right)$ $=-\sin x\left(1+\cos x\right)=-f\left(x\right)$	**ដែនកំនត់** $\sin x$ មាន $D_1=\Re$ $1+\cos x$ មាន $D_2=\Re$ $D_f=D_1\cap D_2=\Re\cap\Re=\Re$ **ខួប** $\sin x$ មានខួប $P_1=\frac{2\pi}{1}$ $1+\cos x$ មានខួប $P_2=\frac{2\pi}{1}$ $\Rightarrow f$ មាន P ជាពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ $\left(2\pi,2\pi\right)=2\pi$ – $f(-x)=-f(x)$ $\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍សេស

– តើ f ត្រូវសិក្សាលើចន្លោះណា?	យើងបាន f ជាអនុគមន៍សេស ដូចនេះ យើងសិក្សាតែក្នុងចន្លោះ $\left[o,\frac{p}{2}\right]$ គឺ ចន្លោះ $[0,\pi]$	ចំពោះអនុគមន៍គូរឺអនុគមន៍សេស គេត្រូវសិក្សាលើចន្លោះ $\left[0,\frac{P}{2}\right]$
– គណនាដេរីវេរក $f'(x)$	**ទិសដៅអថេរភាព** – ដេរីវេ $f(x)=\sin x(1+\cos x)$ $f'(x)=\cos x(1+\cos x)-\sin x.\sin x$ $=\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$ $=\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)$ $=2\cos^2 x+\cos x-1$ $=(\cos x+1)(2\cos x-1)$	$f'(x)=(\cos x+1)(2\cos x-1)$
– តើគេអាចសិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេបានយ៉ាងដូចបានដោយរបៀបណា?	– សញ្ញាដេរីវេ បើ $0\le x\le \pi$ $\Rightarrow 0\le \cos x+1\le 2$ ហើយ $-3\le 2\cos x-1\le 1$	**សញ្ញានៃ** $f'(x)$ បាននៃបាន ពីការគុណសញ្ញានៃ $\cos x+1$ និង $2\cos x-1$
– សិក្សាសញ្ញា $\cos x+1$	**ចំពោះ** $\cos x+1$ បើ $\cos x+1=0\Rightarrow x=\pi$ បើ $0\le x<\pi \Rightarrow \cos x+1>0$	**ចំពោះ** $0\le x\le \pi$ $0\le \cos x+1\le 2$ គឺ ≥ 0 ដូចនេះគេត្រូវរក x ណាដែល $\cos x+1=0$ និង $\cos x+1>0$
– សិក្សាសញ្ញា $2\cos x-1$	**ចំពោះ** $2\cos x-1$ បើ $2\cos x-1=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ បើ $2\cos x-1>0\Rightarrow \cos x>\frac{1}{2}$ $\Rightarrow 0\le x<\frac{\pi}{3}$ បើ $2\cos x-1<0\Rightarrow \cos x<\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{\pi}{3}<x<\pi$ **តារាងសញ្ញានៃ** $f'(x)$	**ម៉្យាងទៀត** $-3\le 2\cos x-1\le 1$ គឺស្មើរសូន្យ វិជ្ជមានផង និង អវិជ្ជមានផង ដូចនេះ ដើម្បីសិក្សាសញ្ញារបស់វាយើងត្រូវរកx ដែល $2\cos x-1=0$ $2\cos x-1>0$ និង $2\cos x-1<0$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos x+1$	2	+		+	0
$2\cos x-1$	1	+	0	−	−3
$f'(x)$	2	+	0	−	0

– តើចំនុចបរមារកើតមាននៅត្រង់ណាខ្លះ?

– បន្ទាប់ពីរចំនុចបរមា គេត្រូវសង់តារាងអថេរភាពនៃ f រួចសង់ក្រាប

– ពេលសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍សេស ដំបូងគេត្រូវសង់វាលើចន្លោះ $\left[0,\frac{p}{2}\right]$ រួចបំលែងឆ្លុះធៀបនិងគល់តំរុយបានរូបលើ $\left[-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right]$

– $D_f=?$

– តើ f ត្រូវសិក្សាលើចន្លោះណា?

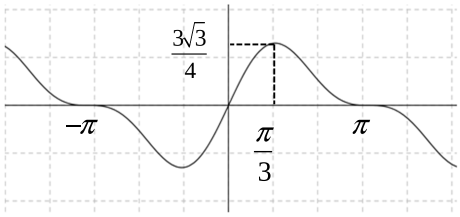
ចំនុចបរមា

– លើចន្លោះ $[0,\pi]$ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$ នោះគេបាន អនុគមន៍ f មានអតិបរមាត្រូវនឹង $f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	2	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

ក្រាប $y=\sin x(1+\cos x)$



លំហាត់គំរូ២ សិក្សាអថេរភាពនិងក្រាបនៃ $y=f(x)=2\cos x-\cos 2x$

ចម្លើយ

ដែនកំនត់ $D=IR$

ខួប

ចំពោះ $\cos x$ មានខួប $p_1=2\pi$

ហើយ $\cos 2x$ មានខួប $p_2=\pi$

$\Rightarrow y=2\cos x-\cos 2x$ មានខួប $p=lcm\left(2\pi,\pi\right)=2\pi$

ភាពគូ ភាពសេស

(i) $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ ពិត

(ii) $f(-x)=2\cos(-x)-\cos(-2x)$

$=2\cos x-\cos 2x$

$=f(x)$

យើងបាន f ជាអនុគមន៍គូ

បន្ទាប់មក រកសញ្ញានៃ $f'(x)$ តាមតារាងសញ្ញារួម

ចំនុចបរមា

– ចំនុចបរមារកើតមាននៅត្រង់ x ទាំងឡាយណាដែលធ្វើអោយ $f'(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)$

ត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$ f មានអតិបរមា គឺ $f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

ត្រង់ $x=\pi$ មាន $f'(\pi)=0$ តែ f ជាអនុគមន៍សេស យើងបាន នៅចុងចន្លោះដែលយើងសិក្សា $f'(x)$ មិនបានប្តូរសញ្ញាទេ

ដូចនេះ ត្រង់ $x=\pi$ គ្មាចំនុចបរមាទេ

$y=f(x)=2\cos x-\cos 2x$

ដែនកំនត់

$D_f=D_{\cos x}\cap D_{\cos 2x}$

$=\Re\cap\Re=\Re$

ខួប ជាពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ 2π និង π គឺ $P=lcm\left(2\pi,\pi\right)=2\pi$

ភាពគូ ភាពសេស

ដោយ $f(-x)=f(x)$

– ចំពោះទិសដៅអថេរ និងតារាងអថេរភាពនៃ f

– សញ្ញានៃ $f'(x)$?

– សញ្ញានៃ $2\sin x$?

– សញ្ញានៃ $2\cos x - 1$?

ដូចនេះ យើងសិក្សាតែក្នុងចន្លោះ
គឺ ចន្លោះ $[0, \pi]$

ទិសដៅអថេរភាព

– ដេរីវេ

$$f(x) = 2\cos x - \cos 2x$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x$$

$$= 2\sin x(-1 + 2\cos x)$$

– សញ្ញាដេរីវេ

បើ $0 \le x \le \pi$

$\Rightarrow \quad 0 \le 2\sin x \le 2$

ហើយ $-3 \le 2\cos x - 1 \le 1$

ចំពោះ $2\sin x$

បើ $2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$

$\Rightarrow x = 0$ រឺ $x = \pi$

បើ $0 < x < \pi \Rightarrow 2\sin x > 0$

ចំពោះ $2\cos x - 1$

បើ $2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

បើ $2\cos x - 1 > 0 \Rightarrow \cos x > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 \le x < \frac{\pi}{3}$

បើ $2\cos x - 1 < 0 \Rightarrow \cos x < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3} < x \le \pi$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$2\sin x$	0	$+$		$+$	0
$2\cos x - 1$	1	$+$	0	$-$	-3
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

$\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍គូ

f ជាអនុគមន៍គូ ត្រូវសិក្សា
លើ ចន្លោះ $[0, \pi]$

$f'(x) = 2\sin x(-1 + 2\cos x)$

យើងបាន សញ្ញានៃ $f'(x)$
បានពីការគុណសញ្ញានៃ
$2\sin x$ និង $2\cos x - 1$

បើ $0 \le x \le \pi$

$\Rightarrow \quad 0 \le 2\sin x \le 2$
គឺ ≥ 0

ដូចនេះគេត្រូវរក x ណាដែល
$2\sin x = 0$ និង $2\sin x > 0$

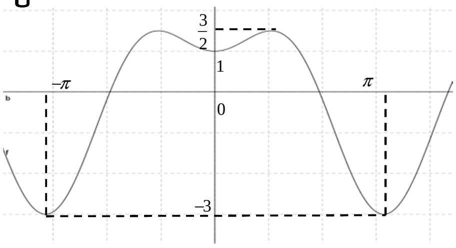
ម្យ៉ាងទៀត

$-3 \le 2\cos x - 1 \le 1$
គេត្រូវរក x ណាដែល

$2\cos x - 1 = 0$
$2\cos x - 1 > 0$
និង $2\cos x - 1 < 0$

<table>
<tr>
<td>– តើ f មានចំនុចបរមា នៅត្រង់ណាខ្លះ?

– សង់តារាងអថេរភាព

– សង់ក្រាប</td>
<td>**ចំនុចបរមា**
– លើចន្លោះ $(0,\pi)$ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញា ពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$ នោះ គេបាន អនុគមន៍ f មានអតិបរមា ត្រូវនឹង $f(\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}$
– ត្រង់ $x=0$ និង $x=\pi$ យើងបាន $f'(x)=0 \Rightarrow f$ មានអប្បរមាពីរ គឺ $f(o)=1$ និង $f(\pi)=-3$
តារាងអថេរភាព
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td></td><td>π</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>1</td><td>↗</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>↘</td><td>-3</td></tr>
</table>
ក្រាប

</td>
<td>បន្ទាប់មក រកសញ្ញានៃ $f'(x)$ តាមតារាងសញ្ញារួម

ចំនុចបរមា
ត្រង់ $x=\frac{\pi}{3}$ f មានអតិបរមា គឺ $f(\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}$
ត្រង់ $x=0$ និង $x=\pi$ មាន ដេរីវេស្មើសូន្យ ហើយ f ជាអនុគមន៍គូ នៅចុងចន្លោះដែលយើងសិក្សាគឺ ដេរីវេប្តូរសញ្ញា $\Rightarrow f$ មានអប្បរមាពីរ គឺ $f(o)=1$ និង $f(\pi)=-3$

ក្រាប
ដំបូងគេត្រូវសង់វាលើចន្លោះ $[0,\pi]$ រួចបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្សអដោនេ បានរូបលើ $[-\pi,\pi]$</td>
</tr>
<tr>
<td>– ដើម្បីដឹងថា តើអនុគមន៍ត្រីមាត្រចម្រុះមួយត្រូវ</td>
<td><u>**ជំហានទី៤**</u> (ពង្រឹងពុទ្ធិ)
• ដើម្បីកំនត់ចន្លោះដែលត្រូវសិក្សា នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រមួយយើង</td>
<td>• បើ f ជាអនុគមន៍ គូឬ សេស គេត្រូវសិក្សាលើ</td>
</tr>
</table>

សិក្សាលើចន្លោះណា គេត្រូវធ្វើដូចម្ដេច?	ត្រូវ – រកដែនកំនត់ – ខួប – ភាពគូភាពសេស	ចន្លោះ $\left[0,\frac{p}{2}\right]$ • បើ f មិនគូមិនសេសត្រូវសិក្សាលើ $\left[-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right]$
សិក្សាអថេរភាពនិង ក្រាបនៃ $y=f(x)=2\sin x-\sin 2x$	**<u>ជំហានទី៥</u>** (កិច្ចការផ្ទះ) **លំហាត់** សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃ $y=f(x)=2\sin x-\sin 2x$	

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី..៣.. អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍

មេរៀនទី..២.. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចម្រុះ

(១.អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចម្រុះ - លំហាត់គំរូ៣)

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង : សិស្សពណ៌នាពីវិធីសាស្ត្រសិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណចម្រុះ ដែលជាអនុគមន៍ មិនគូ មិនសេស បានត្រឹមត្រូវ
- បំណិន : សិស្សដោះស្រាយលំហាត់បានត្រឹមត្រូវដោយខ្លួនឯង
- ឥរិយាបទ : សិស្សសប្បាយរីករាយ និងមានទឹកចិត្តខិតខំរៀនសូត្រ

II. ពេលវេលា ...០២...ម៉ោង ថ្ងៃទី.................ខែ..................ឆ្នាំ..............

III. សម្ភារៈឧបទេស

- សៀវភៅសិស្ស : គណិតវិទ្យាទី ១២ កម្រិតខ្ពស់ ទំព័រទី ៥៧ ដល់ ៦០

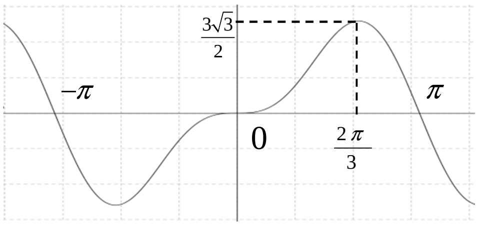
IV. ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	**<u>ជំហានទី១</u>** (រដ្ឋបាលថ្នាក់) - គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	តំនាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
សិក្សាអថេរភាពនិង ក្រាបនៃ $y = f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ - តើ f ត្រូវសិក្សាលើចន្លោះណា?	**<u>ជំហានទី២</u>** (កំនែលំហាត់) **លំហាត់** សិក្សាអថេរភាពនិង ក្រាបនៃ $y = f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ **ដែនកំនត់** $D = IR$ **ខួប** ចំពោះ $\sin x$ មានខួប $p_1 = 2\pi$ ហើយ $\sin 2x$ មានខួប $p_2 = \pi$ $\Rightarrow f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ មាន ខួប $p = lcm(2\pi, \pi) = 2\pi$ **ភាពគូ ភាពសេស** (i) $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ ពិត	**ដែនកំនត់** $\sin x$ មាន $D_1 = \Re$ $\sin 2x$ មាន $D_2 = \Re$ $D_f = D_1 \cap D_2 = \Re \cap \Re = \Re$ **ខួប:** $\sin x$ មានខួប $P_1 = \frac{2\pi}{1}$ $\sin 2x$ មានខួប $P_2 = \frac{2\pi}{1}$ $\Rightarrow f$ មាន P ជាពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ $(2\pi, 2\pi) = 2\pi$ - $f(-x) = -f(x)$

	$(ii)\quad f(-x)=2\sin(-x)-\sin(-2x)$ $=-2\sin x+\sin 2x=-f(x)$ យើងបាន f ជាអនុគមន៍សេស ដូចនេះ យើងសិក្សាតែក្នុងចន្លោះ $[0,\pi]$	$\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍សេស ចំពោះអនុគមន៍គូរឺអនុគមន៍សេស គេត្រូវសិក្សាលើចន្លោះ$[0,\pi]$
– គណនាដេរីវេរក $f'(x)$	**ទិសដៅអថេរភាព** – ដេរីវេ $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ $\Rightarrow f'(x)=2\cos x-2\cos 2x$ $=2\cos x-4\cos^2 x+2$ $=2(1-\cos x)(2\cos x+1)$	$y'=2(1-\cos x)(2\cos x+1)$
– តើគេអាចសិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេបានយ៉ាងដូចបានដោយរបៀបណា?	– សញ្ញាដេរីវេ បើ $0\le x\le\pi$ $\Rightarrow\quad -1\le 2\cos x+1\le 3$ ហើយ $0\le 1-\cos x\le 2$	**សញ្ញានៃ** $f'(x)$ បាននៃបាន ពីការគុណសញ្ញានៃ $1-\cos x$ និង $2\cos x+1$
– សិក្សាសញ្ញា $1-\cos x$	**ចំពោះ** $1-\cos x$ បើ $1-\cos x=0\Rightarrow x=0$ បើ $0<x\le\pi \Rightarrow 1-\cos x>0$	**ចំពោះ** $0\le x\le\pi$ $0\le 1-\cos x\le 2$ គឺ ≥ 0 ដូចនេះគេត្រូវរក x ណាដែល $1-\cos x=0$ និង $1-\cos x>0$
– សិក្សាសញ្ញា $2\cos x+1$	**ចំពោះ** $2\cos x+1$ បើ $2\cos x+1=0\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$ បើ $2\cos x+1>0\Rightarrow \cos x>-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow 0\le x<\frac{2\pi}{3}$ បើ $2\cos x+1<0\Rightarrow \cos x<-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{2\pi}{3}<x\le\pi$	**ម៉្យាងទៀត** $-1\le 2\cos x+1\le 3$ គឺស្មើរសូន្យ វិជ្ជមានផង និង អវិជ្ជមានផង ដូចនេះ ដើម្បីសិក្សាសញ្ញា របស់វាយើងត្រូវរកx ដែល $2\cos x+1=0$ $2\cos x+1>0$ និង $2\cos x+1<0$
	តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$	បន្ទាប់មក រកសញ្ញានៃ

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos x+1$	3	+	0	−	−1
$1-\cos x$	0	+		+	2
$f'(x)$	0	+	0	−	−4

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>$f'(x)$ តាមតារាងសញ្ញារួម</td>
</tr>
<tr>
<td>– តើចំនុចបរមារកើតមាន នៅត្រង់ណាខ្លះ?

– បន្ទាប់ពីរចំនុចបរមា គេត្រូវសង់តារាងអថេរ ភាពនៃ f រួចសង់ក្រាប</td>
<td>ចំនុចបរមា
– លើចន្លោះ $(0,\pi)$ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=\frac{2\pi}{3}$ នោះគេបាន អនុគមន៍ f មានអតិបរមាត្រូវនឹង $f(\frac{2\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$
– ត្រង់ $x=0$ មាន $f'(0)=0$ និង $f(0)=0$ តែ f ជាអនុគមន៍សេស យើងបាន ត្រង់ $x=0$ មានបន្ទាត់ប៉ះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស
តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>$\frac{2\pi}{3}$</td><td></td><td>π</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>-4</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td>↗</td><td>$\frac{3\sqrt{3}}{2}$</td><td>↘</td><td>0</td></tr>
</table>
ក្រាប

</td>
<td>ចំនុចបរមា
តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)$ ត្រង់ $x=\frac{2\pi}{3}$ f មានអតិបរមា គឺ $f(\frac{2\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$
ត្រង់ $x=0$ មាន $f'(0)=0$ តែ f ជាអនុគមន៍សេស យើងបាន នៅចុងចន្លោះ ដែលយើងសិក្សា $f'(x)$ មិនបានប្តូរសញ្ញាទេ ដូចនេះ ត្រង់ $x=0$ គ្មាចំនុចបរមាទេ

ក្រាប
– ពេលសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍សេស ដំបូងគេត្រូវសង់វាលើចន្លោះ $[0,\pi]$ រួចបំលែងឆ្លុះធៀបនិងគល់តំរុយបានរូបលើ $[-\pi,\pi]$</td>
</tr>
<tr>
<td>សង់ក្រាបនៃ អនុគមន៍</td>
<td><u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី)
មេរៀនទី២
អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចម្រុះ
១.អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចម្រុះ
លំហាត់គំរូ៣ សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃ អនុគមន៍</td>
<td></td>
</tr>
</table>

$y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}$ – ខួប $P=?$ – តើ f ជាអនុគមន៍គូឬ អនុគមន៍សេស? – តើ យើងត្រូវសិក្សា អនុគមន៍ f លើចន្លោះ ណា? – ដេរីវេ? – រកសញ្ញានៃ y'?	$y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}$ **ដែនកំនត់** អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\sin 2x\neq 0 \Rightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2} \quad ,k\in\mathbb{Z}$ ដូចនេះ $D=\Re-\left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\},k\in\mathbb{Z}$ **ខួប** ចំពោះ $\sin x$ មានខួប $p_1=2\pi$ ហើយ $\sin 2x$ មានខួប $p_2=\pi$ $\cos x$ មានខួប $p_3=2\pi$ $\Rightarrow\ y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}$ មាន ខួប $p=lcm\left(2\pi,\pi,2\pi\right)=2\pi$ **ភាពគូ ភាពសេស** $(i)\quad \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ ពិត $(ii)\quad f(-x)=\dfrac{\sin(-x)+\cos(-x)}{\sin(-2x)}$ $=\dfrac{-\sin(x)+\cos(x)}{-\sin(2x)}$ f មិនគូមិនសេស ដូចនេះ យើងសិក្សាតែក្នុងចន្លោះ គឺ ចន្លោះ $[-\pi,\pi]$ **ទិសដៅអថេរភាព** – ដេរីវេ $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}$ $\Rightarrow$ $f'(x)=\dfrac{\left(\sin x-\cos x\right)(2+\sin 2x)}{\sin^2 2x}$ $=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)(2+\sin 2x)}{\sin^2 2x}$ – សញ្ញាដេរីវេ បើ $-\pi\le x\le\pi$	**ដែនកំនត់** អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\sin 2x\neq 0 \Rightarrow 2x\neq k\pi$ $,k\in\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2}$ $\Rightarrow D_f=\Re-\left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\},k\in\mathbb{Z}$ **ខួប** $\sin x$ មានខួប $p_1=2\pi$ $\sin 2x$ មានខួប $p_2=\pi$ $\cos x$ មានខួប $p_3=2\pi$ $p=lcm\left(2\pi,\pi,2\pi\right)=2\pi$ – $f(-x)\neq -f(x)$ – ហើយ $f(-x)\neq f(x)$ $\Rightarrow f$ មិនគូ មិនសេស ដូចនេះ យើងសិក្សាតែក្នុងចន្លោះ $\left[-\dfrac{p}{2},\dfrac{p}{2}\right]$ $y'=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)(2+\sin 2x)}{\sin^2 2x}$ **សញ្ញានៃ** $f'(x)$ បាននៃបាន ពីការគុណសញ្ញានៃ $\sin^2 2x$ ជាមួយ $2\sin x+2$ និង $\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \quad 1 \le 2\sin x + 2 \le 3$

$\sin^2 2x \ge 0$

$-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

ចំពោះ $\sin^2 2x$

បើ $\sin^2 2x = 0$

$\Rightarrow \; x = \frac{-\pi}{2}, x = 0 \;\; , x = \frac{\pi}{2} \quad x = \pi$

រឺ $x = -\pi$

ចំពោះ $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

បើ $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow \; x = \frac{-3\pi}{4}$ រឺ $, x = \frac{\pi}{4}$

បើ $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \pi$ ឬ $-\pi < x < -\frac{3\pi}{4}$

បើ $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

$\Rightarrow \frac{-3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin 2x + 2$	2	+		+		+		+		+		+	2
$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	1	+	0	−		−		−	0	+		+	1
$\sin^2 2x$	0	+		+	0	+	0	+		+	0	+	0
$f'(x)$	‖	+	0	−	‖	−	‖	−	0	+	‖	+	‖

– រកចំនុចបរមានៃ f ?

ចំនុចបរមា

– $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x = \frac{-3\pi}{4}$ និង ពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x = \frac{\pi}{4}$ គេបាន អនុគមន៍ f មាន អតិបរមាត្រូវនឹង $f(\frac{-3\pi}{4}) = -\sqrt{2}$

បើ $-\pi \le x \le \pi$

$2\sin 2x + 2$ គឺ > 0

$\sin^2 2x \ge 0$

$-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

ដូចនេះ ត្រូវសិក្សា ករណី

$\sin^2 2x = 0$

$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

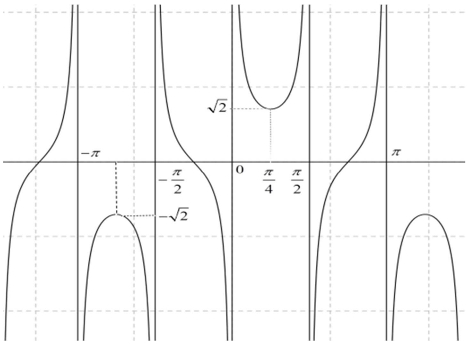
បន្ទាប់មក រកសញ្ញានៃ $f'(x)$ តាមតារាងសញ្ញារួម

ចំនុចបរមា

តាមតារាង

អនុគមន៍ f មានអតិបរមា ត្រង់ $x = \frac{-3\pi}{4}$ និង មានអប្បរមាត្រង់ $x = \frac{\pi}{4}$

<table>
<tr>
<td>– បន្ទាប់ពីសង់តារាងសញ្ញាដេរីវេ យើងត្រូវរកលីមីតព្រោះ អនុគមន៍ f មិនកំនត់ត្រង់
$x=-\pi\,,\frac{-\pi}{2}\,,o\,,\frac{\pi}{2}\,,\pi$
– បញ្ជាក់ពី អាស៊ីមតូត (បើមាន)</td>
<td>អប្បរមាត្រូវនឹង $f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$
លីមីត និង អាស៊ីមតូត
$\lim\limits_{x\to-\pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-\pi^+}\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}=-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}=\infty$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}=\infty$
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}=\infty$

$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}=+\infty$
ដូចនេះ $x=0\,,x=\pm\pi$ និង $x=\pm\frac{\pi}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង</td>
<td>លីមីត និង អាស៊ីមតូត
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ គេបាន $x=a$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ</td>
</tr>
<tr>
<td>– សង់តារាងអថេរភាព</td>
<td>តារាងអថេរភាព
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\pi$</td><td>$-\frac{3\pi}{4}$</td><td>$-\frac{\pi}{2}$</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>π</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>|| +</td><td>0</td><td>− || −</td><td>|| −</td><td>0</td><td>+ || +</td><td>||</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>|| $-\infty$ ↗</td><td>$-\sqrt{2}$</td><td>↘ $-\infty$ || $+\infty$ ↘</td><td>$-\infty$ || $+\infty$ ↘</td><td>$\sqrt{2}$</td><td>↗ $+\infty$ || $-\infty$ ↗</td><td>$+\infty$ ||</td></tr>
</table></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>ក្រាប

</td>
<td>ក្រាប
អនុគមន៍ខួបមិនគូរមិនសេស ត្រូវសិក្សានិងសង់លើ $\left[-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right]$ ហើយ រូបនៃអនុគមន៍ទាំងមូល កើតពីការរំកិលនៃក្រាបលើ $\left[-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right]$</td>
</tr>
</table>

– បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំនត់ត្រង់ $x=a$ និង $x=b$ ដើម្បីសង់តារាងអថេរភាពក្រៅពីសញ្ញាដេរីវេ និង ចំនុចបរមាគេត្រូវរអ្វីទៀត?	**<u>ជំហានទី៤</u>** (ពង្រឹងពុទ្ធិ) – បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំនត់ត្រង់ $x=a$ និង $x=b$ ដើម្បីសង់តារាងអថេរភាពក្រៅពីសញ្ញាដេរីវេ និងចំនុចបរមាគេត្រូវរក – $\lim_{x\to a} f(x)$ – $\lim_{x\to b} f(x)$ – អាស៊ីមតូត (បើមាន)	បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំនត់ត្រង់ត្រង់ $x=a$ និង $x=b$ នោះដើម្បីបំពេញសង់តារាងអថេរភាព យើងត្រូវកំនត់ $\lim_{x\to a} f(x)$ និង $\lim_{x\to b} f(x)$
លំហាត់ សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃ $y=f(x)=\dfrac{\cos x-1}{\sin x}$	**<u>ជំហានទី៥</u>** (កិច្ចការផ្ទះ) **លំហាត់** សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃ $y=f(x)=\dfrac{\cos x-1}{\sin x}$	សិស្សកត់ត្រាលំហាត់

កិច្ចតែងការបង្រៀន
គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

ថ្ងៃទី..................ខែ..................ឆ្នាំ ២០១....

ជំពូកទី ៩ ៖ អាំងតេក្រាល

មេរៀនទី ១៖ អាំងតេក្រាលកំណត់

(សៀវភៅសិស្សទំព័រ១៣២ ដល់ ១៣៣)

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

ក្រោយរៀនមេរៀនចប់សិស្សអាច ៖

–ចំនេះដឹង ៖ +កំនត់និយមន័យអាំងតេក្រាលកំនត់នៃអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទមួយបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈលើកឧទាហរណ៍ ។

–ចំនេះធ្វើ ៖ +បកស្រាយនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំនត់នៃអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទមួយបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការស្តាប់ការពន្យល់ និងពិភាក្សាក្រុម ។

–ឥរិយាបថ ៖ +សិស្សមានស្មារតីទទួលខុសត្រូវលើការអនុវត្តន៍លំហាត់ ។
+សិស្សមានទំនាក់ទំនងល្អនឹងគ្នា ។

II. រយៈពេល ៖ ៥០ នាទី

III. សម្ភារៈឧបទេស ៖ សន្លឹកកម្រងលំហាត់ សន្លឹកកម្រងសំនួរតម្រង់ទិសការសង្កេត និងពិភាក្សា និងផ្ទាំងក្រដាសដែលមានសរសេរឧទាហរណ៍ ។

IV. ដំណើរការនៃការបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារបង្រៀន	សកម្មភាពសិស្ស
– រៀបចំសណ្តាប់ធ្នាប់ ក្នុងថ្នាក់ – សំណេះសំណាល ប្រមូលអារម្មណ៍សិស្ស មុនចាប់ផ្តើមបង្រៀន	**ជំហានទី ១** (៥ នាទី) **រប្បបាលថ្នាក់** – ពិនិត្យអនាម័យ – ពិនិត្យអវត្តមាន – សំណេះសំណាល	– ស្វាគមន៍
–គ្រូសួររំលឹក ពីនិយមន័យនៃអាំងតេក្រាលមិនកំនត់ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ មួយ ហើយតម្រូវអោយ សិស្សរកអាំងតេក្រាលមិនកំនត់ នៃអនុគមន៍	**ជំហានទី ២** (៥ នាទី) **រលឹកមេរៀនចាស់**	–បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំនត់នៃ $f(x)$ កំនត់ដោយ $\int f(x)dx = F(x)+c$

$f(x)=2x-\frac{1}{x^2}$ លើ $D=(0,+\infty)$		ដែល c ជាចំនួនពិតថេរ ។ ហើយ $F(x)=\int f(x)dx$ $=\int\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)dx$ $=x^2+\frac{1}{x}+c\ ,c\in\mathbb{R}$
– គ្រូបិទផ្ទាំងក្រដាស ដែលមានសរសេរចំណោទ1 លើក្តារខៀន និងចែកសិស្សជាក្រុមពិភាក្សា ណែនាំសិស្សឲ្យសង្កេត ក្នុងការរកកំណើនប្រជាជនដោយគ្រូ គ្រាន់តែបញ្ជាក់ ប្រាប់សិស្សថា កំណើនប្រជាពលរដ្ឋជាអាំងតេក្រាល នៃអត្រាកំណើនប្រជាពលរដ្ឋ ។ – គ្រូបញ្ជាក់សិស្សថា ប្រជាពលរដ្ឋ ក្នុងពេលបច្ចុប្បន្ន គឺ $T(0)$ ហើយកំណើនប្រជាពលរដ្ឋ រយៈពេល៨ឆ្នាំ គឺ $T(8)$ ហើយកំណើនប្រជា	**ជំហានទី ៣** (៣០ នាទី) **មេរៀនថ្មី** **មេរៀនទី ២ ៖** **អាំងតេក្រាលកំណត់** **1. និយមន័យ** – <u>ចំណោទ1</u> តាមការសិក្សាស្រាវជ្រាវ បានបង្ហាញឲ្យឃើញថាចំនួនប្រជាជន នៅក្នុងសហគមន៍មួយកើនឡើង ជារៀងរាល់ឆ្នាំដោយអត្រា $t(x)=5+3x$ ដែល x ជាចំនួនឆ្នាំ ។ រកកំណើនប្រជាជននៅរយៈពេល ៨ ឆ្នាំទៀត ។ – តាង $T(x)$ ជាកំណើនប្រជាជន គេបាន $T(x)$ ជាអាំងតេក្រាលនៃ $t(x)$ គឺ៖ $T(x)=\int t(x)dx$ $=\int(5+3x)dx$ $=\int 5dx+\int 3xdx$ $=5x+\frac{3}{2}x^2+c$ – ប្រជាពលរដ្ឋក្នុងពេលបច្ចុប្បន្ន គឺ $T(0)=5.0+\frac{3}{2}0^2+c=c$ – កំណើនប្រជាពលរដ្ឋ រយៈពេល៨ឆ្នាំខាងមុខ គឺ	– សិស្សចូលជាក្រុម រួចកត់ត្រា និង ស្តាប់ការពន្យល់ ។ – សិស្ស ពិភាក្សាក្នុងក្រុម សង្កេត និង កត់ត្រា។

ពេលវដ្តរយៈពេល ៨ឆ្នាំទៅមុខទៀត $T(8)-T(0)$ បញ្ជាក់ប្រាប់សិស្ស ផលដកនេះ ហៅថា អាំងតេក្រាលកំនត់ពី 0 ទៅ ៨ នៃអនុគមន៍ $t(x)$ ។	$T(8)=5.8+\frac{3}{2}8^2+c=136+c$ – ដូចនេះ កំណើនប្រជាជនរយៈពេល ៨ឆ្នាំទៅមុខទៀត គឺ $T(8)-T(0)=136$ នាក់ – ផលដកនេះហៅថា អាំងតេក្រាលកំនត់ពី 0 ទៅ ៨ នៃអនុគមន៍ $t(x)$ ។	
– គ្រូបិទផ្ទាំងក្រដាស ដែលមានសរសេរ ចំណោទ2 ណែនាំសិស្ស ឲ្យសង្កេតការរកចម្ងាយចរ ដោយស្គាល់ល្បឿនតាមអាំងតេក្រាល ។	<u>ចំណោទ2</u> វត្ថុមួយផ្លាស់ទីតាមទិសដេក ដោយល្បឿន $v(t)=5+3t^2 m/mn$ ។ រកកំនើនចម្ងាយនៃវត្ថុដែលត្រូវនឹងកំនើនពេលពីខណៈ $t=3mn$ ទៅដល់ខណៈ $t=5mn$ ។	– សិស្សកត់ត្រា និង ស្តាប់ការពន្យល់ ។
– បញ្ជាក់ប្រាប់សិស្ស ថា ដោយដេរីវេ នៃចម្ងាយចរស្មើនឹងល្បឿន ដូចនេះ ដើម្បីរកចម្ងាយចរ គេត្រូវគណនាអាំងតេក្រាល នៃល្បឿន ។	– តាង $S(t)$ ជាចម្ងាយចរ នោះ គេបាន $S'(t)=v(t)$ $\Rightarrow S(t)=\int v(t)dt$ $=\int(5+3t^2)dt$ $=5t+t^3+c$	– សិស្សពិភាក្សា ក្នុងក្រុម សង្កេត និង កត់ត្រា។
– បន្ទាប់មក គណនាចម្ងាយចរនៅខណៈពេល $t=3mn$ និង ចម្ងាយចរនៅខណៈពេល $t=5mn$ ។	$S(3)=42+c$ $S(5)=150+c$ – ដូចនេះ កំនើនចម្ងាយចរនៃវត្ថុនៅខណៈ $t=3mn$ និង $t=5mn$ គឺ $S(5)-S(3)=108m$ ។	– សិស្ស ពិភាក្សាក្នុងក្រុម សង្កេត គណនា និង កត់ត្រា។
– បញ្ជាក់ប្រាប់ សិស្សថា ផលដកនេះ ហៅថាអាំងតេក្រាលកំនត់ពី 3 ទៅ 5 នៃអនុគមន៍ $v(t)$ ។	– ផលដកនេះ ហៅថាអាំងតេក្រាលកំនត់ពី 3 ទៅ 5 នៃអនុគមន៍ $v(t)$ ។	– សិស្សសង្កេត និង កត់ត្រា។
– ណែនាំ សិស្សឲ្យសង្កេតលើលទ្ធផល នៃចំណោទទាំងពីររួចចោទជាសំនួរថា តើ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ តែមួយឬទេ?	– បើ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ តែមួយ – គេបាន $F(x)=G(x)+c$	– សិស្សពិភាក្សាក្នុងក្រុម សង្កេត និង កត់ត្រា។

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង $F(x)$ និង$G(x)$ ។ – គេបាន $F(x)=G(x)+c$ តាមទ្រឹស្តីបទព្រឹមីទីវ – បើ $x=a$ គេបាន $F(a)=G(a)+c$ – បើ $x=b$ គេបាន $F(b)=G(b)+c$ នាំអោយ $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$	តាមទ្រឹស្តីបទព្រឹមីទីវ – បើ $x=a$ គេបាន $F(a)=G(a)+c$ – បើ $x=b$ គេបាន $F(b)=G(b)+c$ – នាំអោយ $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$	
– ផលដក $F(b)-F(a)$ ហៅថាអាំងតេក្រាលកំនត់ ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ រួចណែនាំសិស្សអោយកំនត់សរសេរ $\int_a^b f(x)dx$ ។	– ផលដក $F(b)-F(a)$ ហៅថាអាំងតេក្រាលកំនត់ ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ហើយ គេកំនត់សរសេរ $\int_a^b f(x)dx$ ។	–សិស្សសង្កេត និងកត់ត្រា
– ណែនាំសិស្សឲ្យពិភាក្សា រួចទាញនិយមន័យអាំងតេក្រាលកំនត់ ។		– សិស្សពិភាក្សាក្នុងក្រុម និងទាញសន្និដ្ឋាន។
– ឲ្យគ្រប់ក្រុមអានចម្លើយ។	និយមន័យ អាំងតេក្រាលកំនត់ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ គឺជាកំនើននៃអនុគមន៍ព្រឹមីទីវ $F(x)$ ដែលត្រូវនឹងកំនើននៃ x ពី a ទៅb ។ គេកំនត់សរសេរ $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b$ $=F(b)-F(a)$	និយមន័យ អាំងតេក្រាលកំនត់ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ គឺជាកំនើននៃអនុគមន៍ព្រឹមីទីវ $F(x)$ ដែលត្រូវនឹងកំនើននៃ x ពី a ទៅb ។ គេកំនត់សរសេរ $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b$ $=F(b)-F(a)$
– គ្រូបញ្ជាក់ប្រាប់ សិស្សថាក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ គេប្រើនិមិត្តសញ្ញា ៖		– សិស្សសង្កេត និង កត់ត្រា ។

$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b$ $=F(b)-F(a)$ – គ្រូបញ្ជាក់ប្រាប់សិស្សឲ្យកត់សម្គាល់ថា ផលដក $F(b)-F(a)$ មិនទាក់ទងនឹងចំនួនថេរ c ទេ ។ – គ្រូដាក់លំហាត់គំរូ និងលំហាត់ប្រតិបត្តិ ឲ្យសិស្សដោះស្រាយជាដៃគូ ឬ ជាក្រុម ។	– សម្គាល់ ៖ ផលដក $F(b)-F(a)$ មិនទាក់ទងនឹងចំនួនថេរ c ទេ ។ – លំហាត់គំរូ ៖ គណនា ក. $\int_1^3 x^2dx$ ខ. $\int_1^4\left(2x^2-4x+5\right)dx$	– សិស្សសង្កេត និង កត់ត្រា ។ – សិស្សដោះស្រាយលំហាត់ជាដៃគូ ឬជាក្រុម។ ចម្លើយ ក. $\int_1^3 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$ $=\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 3\right)$ $=\frac{26}{3}$ ខ. $\int_1^4\left(2x^2-4x+5\right)dx$ $=\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x\right]_1^3$ $=\left(\frac{2}{3}\cdot 4^3-2\cdot 4^2+5\cdot 4\right)$ $-\left(\frac{2}{3}\cdot 1^3-2\cdot 1^2+5\cdot 1\right)$ $=27$
– គ្រូចែកសន្លឹកកម្រងលំហាត់ឲ្យ សិស្សគ្រប់គ្នា និងតម្រូវឲ្យធ្វើលំហាត់ដាក់ក្នុង ក្រដាសកិច្ចការ។	**ជំហានទី ៩** (៥ នាទី) **វាយតម្លៃ** គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ខាងក្រោម ៖ ក. $\int_{-1}^1\left(x^2-1\right)dx$ ខ. $\int_1^2\left(\frac{3}{x^2}-2\right)dx$	– សិស្ស ប្រឹងប្រែងធ្វើលំហាត់ដោយខ្លួនឯង និង ដល់ម៉ោង ប្រមូលសន្លឹកកិច្ចការឲ្យគ្រូ ។

-គ្រូសរសេរកិច្ចការផ្ទះលើ ក្ដារខៀន ។	**ជំហានទី ៥** (៥ នាទី) **កិច្ចការផ្ទះ** គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ខាងក្រោម ៖ $\int_4^9\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$	-សិស្សគ្រប់គ្នា ចម្លងកិច្ចការផ្ទះ ។

កិច្ចតែងការបង្រៀន
គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

ថ្ងៃទី..................ខែ..................ឆ្នាំ ២០១....

ជំពូកទី ៤ ៖ អាំងតេក្រាល

មេរៀនទី ១៖ អាំងតេក្រាលកំណត់ (ត)

(សៀវភៅសិស្សទំព័រ១៣៤ ដល់ ១៣៥)

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

ក្រោយរៀនមេរៀនចប់សិស្សអាច ៖

–ចំនេះដឹង ៖ +កំនត់លក្ខណៈអាំងតេក្រាលកំនត់នៃអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទមួយបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈលើកឧទាហរណ៍ ។

–ចំនេះធ្វើ ៖ +ដោះស្រាយអាំងតេក្រាលកំនត់នៃអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទមួយបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការស្តាប់ការពន្យល់ និងពិភាក្សាក្រុម ។

–ឥរិយាបថ ៖ +សិស្សមានស្មារតីទទួលខុសត្រូវលើការអនុវត្តន៍លំហាត់ ។
+សិស្សមានទំនាក់ទំនងល្អនឹងគ្នា ។

II. រយៈពេល ៖ ៥០ នាទី

III. សម្ភារៈឧបទេស ៖ សន្លឹកកម្រងលំហាត់ សន្លឹកកម្រងសំនួរតម្រង់ទិសការសង្កេត និងពិភាក្សា ។

IV. ដំណើរការនៃការបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារបង្រៀន	សកម្មភាពសិស្ស
– រៀបចំសណ្តាប់ធ្នាប់ ក្នុងថ្នាក់ – សំណេះសំណាល ប្រមូលអារម្មណ៍សិស្ស មុនចាប់ផ្តើមបង្រៀន	**ជំហានទី ១**(៥ នាទី) **រដ្ឋបាលថ្នាក់** – ពិនិត្យអនាម័យ – ពិនិត្យអវត្តមាន – សំណេះសំណាល	– ស្វាគមន៍
–គ្រូពិនិត្យកិច្ចការផ្ទះ និង ធ្វើអត្រាកំនៃ ឬ ជ្រើសរើសសិស្សម្នាក់ ដែលធ្វើបានត្រឹមត្រូវឡើងធ្វើអត្រាកំនៃ	**ជំហានទី ២** (៥ នាទី) **រលឹកមេរៀនចាស់** គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ខាងក្រោម ៖ $\int_4^9 \left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ ចម្លើយ	–សិស្ស ដាក់កិច្ចការឲ្យគ្រូពិនិត្យ និង ម្នាក់ស្ម័គ្រចិត្តធ្វើអត្រាកំនៃ ។

	$\int_4^9 \left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ $=\left[\frac{1}{2}x^2+2\sqrt{x}\right]_4^9$ $=\frac{1}{2}(9)^2+2\sqrt{9}$ $-\frac{1}{2}(4)^2+2\sqrt{4}$ $=\frac{55}{2}$	
–គ្រូចែកជាក្រុម រួចដាក់ឧទាហរណ៍ រួចណែនាំ សិស្សឲ្យគណនា $\int_{-2}^{1}4x^3dx$ –រួចគណនា $\int_{1}^{-2}4x^3dx$ ណែនាំសិស្ស ឲ្យសង្កេតមើលលទ្ធផលនៃ ឧទាហរណ៍ ហើយពិភាក្សាជាក្រុម រួចទាញរកលក្ខណៈទូទៅ ។	**ជំហានទី ៣** (៣០ នាទី) **មេរៀនថ្មី** **2.លក្ខណៈ** ឧទាហរណ៍ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=4x^3$ ។ $\int_{-2}^{1}4x^3dx=\left[x^4\right]_{-2}^{1}$ $=(1)^4-(-2)^4$ $=-15$ $\int_{1}^{-2}4x^3dx=\left[x^4\right]_{1}^{-2}$ $=(-2)^4-(1)^4$ $=15$ ដូចនេះ $\int_{-2}^{1}4x^3dx=-\int_{1}^{-2}4x^3dx$	– សិស្សចូលជាក្រុម រួចកត់ត្រា និង ធ្វើការគណនាក្នុងក្រុម ។ $\int_{-2}^{1}4x^3dx=-\int_{1}^{-2}4x^3dx$
–គ្រូ សម្រាយបញ្ជាក់ $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ ដល់សិស្ស ។	ក. បើអនុគមន៍ f កំនត់ និងជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ ។ សំរាយបញ្ជាក់ $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ $=-\left[F(a)-F(b)\right]$ $=-\int_b^a f(x)dx$	– សិស្សសង្កេត និង កត់ត្រា ។
–គ្រូដាក់ ឧទាហរណ៍រួចណែនាំ សិស្សឲ្យគណនា $\int_{10}^{10}e^xdx$ រួចឲ្យសិស្សពិនិត្យលទ្ធផល រួចណែនាំសិស្ស	ឧទាហរណ៍ គណនា $\int_{10}^{10}e^xdx$ $\int_{10}^{10}e^xdx=\left[e^x\right]_{10}^{10}$ $=e^{10}-e^{10}=0$	– សិស្សគណនា ពិនិត្យលទ្ធផល និង ទាញសន្និដ្ឋាន និង ឡើងធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់។

ទាញសន្និដ្ឋានរូបមន្ត $\int_a^a f(x)dx$ រួចឲ្យតំណាងសិស្ស ឡើងសម្រាយរូបមន្តនេះ ។	ខ. $\int_a^a f(x)dx=0$ ។ សម្រាយបញ្ជាក់ $\int_a^a f(x)dx=F(a)-F(a)=0$	$\int_a^a f(x)dx=0$
–គ្រូដាក់ ឧទាហរណ៍រួចណែនាំ សិស្សឲ្យគណនា $\int_0^4 3e^x dx$ រួចគណនា $\int_0^2 3e^x dx+\int_2^4 3e^x dx$ រួចឲ្យសិស្សពិនិត្យ លទ្ធផលនៃឧទាហរណ៍ ហើយពិភាក្សាដើម្បី ទាញសន្និដ្ឋានទូទៅ និង ឲ្យតំណាងសិស្សឡើងសម្រាយរូបមន្ត $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f$	ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា $\int_0^4 e^x dx=\int_0^2 e^x dx+\int_2^4 e^x dx$ $\int_0^4 3e^x dx=3\left[e^x\right]_0^4=3\left(e^4-e^0\right)$ $=3e^4-3$ $\int_0^2 3e^x dx+\int_2^4 3e^x dx$ $=3\left[e^x\right]_0^2+3\left[e^x\right]_2^4$ $=3\left(e^2-e^0\right)+3\left(e^4-e^2\right)$ $=3e^4-3$ ដូចនេះ $\int_0^4 e^x dx=\int_0^2 e^x dx+\int_2^4 e^x dx$	– សិស្សគណនា ពិនិត្យលទ្ធផលនិងទាញសន្និដ្ឋាន និង ឡើងធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត។
	គ.បើអនុគមន៍ f កំនត់និងជាប់លើចន្លោះ $[a,c]$ និង $a<b<c$ $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$ សម្រាយបញ្ជាក់ $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$ $=\left[F(x)\right]_a^b+\left[F(x)\right]_b^c$ $=F(b)-F(a)+F(c)-F(b)$ $=F(c)-F(a)$ $=\int_a^c f(x)dx$	
–គ្រូដាក់ ឧទាហរណ៍រួចណែនាំ សិស្សឲ្យគណនា $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin x dx$ រួចគណនា $3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$ រួចឲ្យសិស្សពិនិត្យលទ្ធផល ហើយពិភាក្សា ជាក្រុមរួចទាញលក្ខណៈទូទៅ ។	ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin x dx=3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin x dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$ $=-\cos\frac{\pi}{3}+\cos 0$ $=\frac{3}{2}$	– សិស្សគណនា ពិនិត្យលទ្ធផល និង ពិភាក្សាទាញសន្និដ្ឋាន ។

	$3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x dx = 3[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}$ $= 3\left(-\cos\frac{\pi}{3}+\cos 0\right)$ $= \frac{3}{2}$ ដូចនេះ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\sin x dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x dx$	
–ឲ្យតំណាងសិស្សឡើងសម្រាយរូបមន្ត $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$	ឃ. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ $k\in\mathbb{R}$ សម្រាយបញ្ជាក់ $k\int_a^b f(x)dx = k\left[F(x)\right]_a^b$ $= k\left[F(b)-F(a)\right]$ $= kF(b)-kF(a)$ $= \int_a^b kf(x)dx$	– សិស្សឡើងធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់។
–គ្រូណែនាំសិស្សឲ្យពិភាក្សាដើម្បីធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត បើ $\int_a^b f(x)dx$ និង $\int_a^b g(x)dx$ មាននោះ គេបាន $\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx$ $=\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$	ង. បើ $\int_a^b f(x)dx$ និង $\int_a^b g(x)dx$ មាននោះ គេបាន $\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx$ $=\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ សម្រាយបញ្ជាក់ $\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx = F(b)-G(b)$ **(*F* និង *G*ជាព្រីមីទីវរៀងគ្នានៃ *f*, *g*)** $=\left[F(b)-F(a)\right]-\left[G(b)-G(a)\right]$ $=\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ $\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]dx = F(b)+G(b)$ **(*F* និង *G*ជាព្រីមីទីវរៀងគ្នានៃ *f*, *g*)** $=\left[F(b)-F(a)\right]+\left[G(b)-G(a)\right]$ $=\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$	– សិស្ស ពិភាក្សាក្នុងក្រុម និង ឡើងធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់។
–គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សអនុវត្តន៍ ដើរត្រួតពិនិត្យតាមក្រុម ។	ឧទាហរណ៍ គណនា $\int_2^4(4x-5)dx+\int_2^4(5-6x)dx$	–សិស្ស ដោះស្រាយលំហាត់ក្នុងក្រុម ។

	$\int_2^4 (4x-5)\,dx+\int_2^4 (5-6x)\,dx$ $=\int_2^4 (4x-5+5-6x)\,dx$ $=\int_2^4 (-2x)\,dx=-2\int_2^4 xdx$ $=-2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^4$ $=-2\left(\frac{1}{2}\cdot 4^2-\frac{1}{2}\cdot 2^2\right)$ $=-12$	
–គ្រូដាក់រូបមន្ត និង ធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់ $\alpha\int_a^b f(x)dx\pm\beta\int_a^b g(x)dx$ $=\alpha\left[F(x)\right]_a^b\pm\beta\left[G(x)\right]_a^b$ $=\alpha\left[F(b)-F(a)\right]$ $\pm\beta\left[G(b)-G(a)\right]$ $=\left[\alpha F(b)-\alpha F(a)\right]$ $\pm\left[\beta G(b)-\beta G(a)\right]$ $=\int_a^b \alpha f(x)\,dx\pm\int_a^b \beta g(x)\,dx$ $=\int_a^b\left[\alpha f(x)\pm\beta g(x)\right]dx$	**ច.** $\int_a^b\left[\alpha f(x)\pm\beta g(x)\right]dx$ $=\alpha\int_a^b f(x)dx\pm\beta\int_a^b g(x)dx$	–សិស្សសង្កេត និងកត់ត្រា ។
–គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សដោះស្រាយ ដើរពិនិត្យតាមក្រុម ។	ឧទាហរណ៍ គណនា $\int_2^4\left(\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2}x\right)dx$ $\int_2^4\left(\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2}x\right)dx=3\int_2^4\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int_2^4 xdx$ $=\left[-\frac{3}{x}\right]_2^4+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_2^4$ $=\frac{15}{4}$	–សិស្ស ដោះស្រាយលំហាត់ក្នុងក្រុម ។
–គ្រូចែកសន្លឹកកម្រងលំហាត់ឲ្យ សិស្សគ្រប់គ្នា និងតម្រូវឲ្យ	**ជំហានទី ៤** (៥ នាទី) **វាយតម្លៃ** គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ខាង	–សិស្ស ប្រឹងប្រែងធ្វើលំហាត់ដោយខ្លួនឯង និង ដល់ម៉ោង

ធ្វើលំហាត់ដាក់ក្នុង ក្រដាសកិច្ចការ។	ក្រោម ៖ ក. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x-3\sin x)\,dx$ ខ. $\int_1^4\left(\frac{4}{x}+7\ln x\right)dx+\int_4^1\left(\frac{4}{x}+7\ln x\right)dx$	ប្រមូល សន្លឹកកិច្ចការឲ្យគ្រូ ។
–គ្រូសរសេរកិច្ចការផ្ទះលើក្ដារខៀន ។	**ជំហានទី ៥** (៥ នាទី) **កិច្ចការផ្ទះ** គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ខាងក្រោម ៖ $\int_1^2 x\left(x^2-3\right)dx$	–សិស្សគ្រប់គ្នា ចម្លងកិច្ចការផ្ទះ ។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ៤ អាំងតេក្រាលកំណត់

មេរៀនទី២ មាឌសូលីត និងប្រវែងធ្នូ

ម៉ោងទី រយៈពេល ២ ម៉ោង

I. **គោលបំណង:** ក្រោយពេលរៀនចប់សិស្សទទួលបាន:

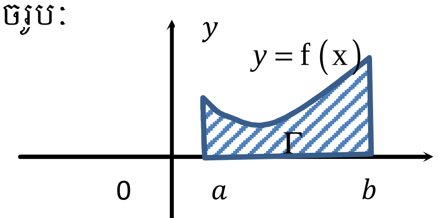
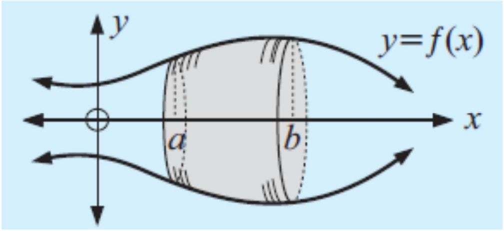
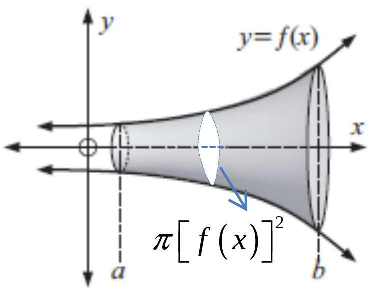
- **ចំណេះដឹង:** សិស្សនឹង
  - ស្គាល់ច្បាស់អំពី មាឌនៃសូលីតបរិវត្ត ដែលបានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរពីរ ។
  - យល់ពីនិយមន័យ និងរូបមន្ត អាំងតេក្រាលដើម្បីគណនាមាននៃអាំងតេក្រាលបានត្រឹមត្រូវ ។
- **បំណិន:** ចេះប្រើរូបមន្ត និងនិយមន័យដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់មានត្រឹមត្រូវ
  - ចេះសង្ខេបខ្លឹមសាមេរៀន
- **ឥរិយាបថ:** សិស្សមានបម្រុងប្រយ័ត្នខ្ពស់ក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់។កែប្រែចំណុចខ្វះខាត និងការយល់ច្រលំមួយចំនួន និងទាញយកប្រយោជន៍ពីគណិតវិទ្យាទៅប្រើប្រាស់ក្នុងស្ថានភាពរស់នៅក្នុងសង្គម និងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ ហើយមានលក្ខណៈតក្កៈ ។

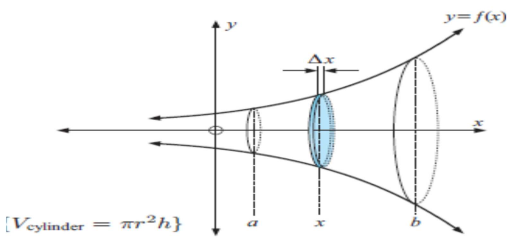
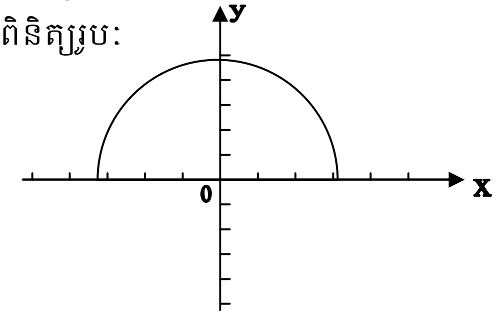
II. **សម្ភារៈឧបទេស:**

- គ្រូបង្រៀន: សៀវភៅគ្រូ កិច្ចតែងការបង្រៀន, សៀវភៅសិស្ស,
- សិស្ស: មានសៀវភៅពុម្ពសិស្ស, សៀវភៅកត់ត្រា

III. **ដំណើរនាំមេរៀន:**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់រៀន		
គ្រូតពិនិត្យសណ្តាប់ធ្នាប់, អណាម័យ និងវត្តមានសិស្សក្នុងថ្នាក់រៀន ។		ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍ ។
ជំហានទី២៖ រំឭកមេរៀន		
ចូរសរសេររូបមន្តគណនាក្រឡាផ្ទៃថាស ។ គណនាអាំងតេក្រាល		រូបមន្តគណនាផ្ទៃក្រឡា: $S=\pi r^2$; ឬ $S=\dfrac{\pi D^2}{4}$ ។

$\int\left(x^2+e^x\right)dx$		$=\frac{1}{3}x^3+e^x+c$
ជំហានទី៣៖ ខ្លឹមសារមេរៀន		
គ្រូសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ឲ្យសិស្សមើលរួចណែនាំពីរង្វិលនៃក្រាបជុំវិញអ័ក្ស(0x) ។ គ្រូណែនាំ អំពីរបៀបក្នុងការគណនារកមាឌនៃសូលីត ដោយចែកសូលីតជា n ចំណែកស្មើៗគ្នា $x_1;x_2;..;x_n$ ដែលមានទទឹងស្មើនឹង Δx ។ បន្ទាប់មកគ្រូគូសមុខកាត់នៃសូលីតបរិវត្តមានកាំ $f(x)$ និងកម្ពស់ Δx ។ កំណត់មាឌសូលីតនីមួយៗ រួចធ្វើផលបូកនៃមាឌទាំងនោះ៖ ដោយ $f(x_1);..,f(x_n)$ ជាកាំនិង Δx ជាទទឹង ។ បើ $n\to\infty$ នោះសូលីតមានទទឹងតូចទៅៗ ដែលហាក់ដូចជាមានរាងជាស៊ីឡាំងបរិវត្ត ហើយលីមីតនៃផលបូកនេះកំណត់បានជាមាឌនៃសូលីតបរិវត្ត: $V=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\sum\limits_{i=1}^{n}\left[f(x)\right]^2dx$ $=\pi\int_a^b f(x)dx$ ។ដោយគ្រូណែនាំពីរបៀបស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តខាងលើ ។	1.មាឌសូលីត **1.2. មាឌសូលីតបរិវត្តដែលបានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស** គេឲ្យ $y=f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ[a;b] ។ គេតាង Γ ជាផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបនៃ f និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស, បន្ទាត់ $x=a;x=b$ ។ដូចរូប:  គេរង្វិលក្រាប $y=f(x)$ ជុំវិញអ័ក្ស $(x'x)$ បង្កើតបានជាមាឌសូលីតបរិវត្តមួយដូចរូបខាងក្រោម:  គណនាមាឌសូលីតបរិវត្ត សូលីតដែលមានមុខកាត់ជាមុខថាស មានកាំស្មើ $f(x)$ និងផ្ទៃមុខកាត់ $\pi[f(x)]^2$  មាឌស៊ីឡាំងមានមុខកាត់មានកាំ $f(x)$ និងកំពស់ Δx គឺ $\pi\left[f(x)\right]^2\Delta x$ ។	សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា

គ្រូបញ្ជាក់ថា មាឌនេះគឺកើតឡើងពីរង្វិលនៃផ្ទៃអនុ $f(x)$ ជុំវិញ (ox) និងខណ្ឌដោយបន្ទាត់ $x=a;x=b$ ។	 ចំពោះអនុ. ខាងលើជាប់លើ $[a;b]$ គេចែក $[a;b]$ ជា n ចំណែកស្មើៗគ្នាគឺស្មើនឹង $\Delta x;(x_1,x_2,...,x_n)$ នោះ $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ គេបានផលបូកនៃមានស៊ីឡាំងនីមួយៗគឺជាមាឌនៃសូលីតគឺថា: $V=\pi\left[f(x_1)\right]^2\Delta x+\pi\left[f(x_2)\right]^2\Delta x+...$ $+\pi\left[f(x_n)\right]^2\Delta x$ $\Leftrightarrow V=\sum_{i=1}^{n}\pi\left[f(x_i)\right]^2\Delta x$ ពេល $n\to\infty\Rightarrow\Delta x\to 0$ នោះតម្លៃ $\lim_{n\to\infty}\pi\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\right]^2\Delta x=\lim_{n\to\infty}\pi\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\right]$ $=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$ ។ ដូចនេះ: $V==\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$ ។	
គ្រូណែនាំ និងដាក់លំហាត់គំរូទី១ ឲ្យសិស្សធ្វើ ។ ដោយណែនាំសិស្សអោយអនុវត្តន៍តាមរូបមន្ត $V==\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$	**លំហាត់១៖** គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់ពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $x'0x$ នៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុ. $y=x^2$ នោះ ចន្លោះ $[a;b]$ ។	ចម្លើយ: មាឌនៃសូលីត $y=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$ $=\pi\int_0^1\left[x^2\right]^2dx=\pi\left[\frac{1}{5}.x^5\right]_0^1$ $=\pi\left(\frac{1}{5}-0\right)=\frac{\pi}{5}$ ឯកតាមាឌ
គ្រូដាក់លំហាត់ទី២ ដោយបញ្ជាក់ពីខ្សែកោងដែលវិលជុំវិញអ័ក្ស (ox) មានផ្ចិត 0 និងមានកាំ r ។ ដោយប្រើរូបមន្តក្នុងការគណនាមាឌនៃរង្វង់ដែលវិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសបង្កើតបានជាមាឌស្វ៊ែ ។ គ្រូដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិឲ្យ	**លំហាត់២៖** បង្ហាញថាមាឌស្វ៊ែកាំr គឺ $V=\frac{4}{3}\pi r^2$ ។ ពិនិត្យរូប: 	ចម្លើយ:បង្ហាញថា $V=\frac{4}{3}\pi r^2$ មាឌនៃស្វ៊ែកាំ r កើតឡើងពីរង្វង់ផ្ចិតo កាំ r វិលជុំវិញ ox ។ គេបានសមីការរង្វង់គឺ $x^2+y^2=r^2\Leftrightarrow y^2=r^2-x^2$ នោះ $y=\sqrt{r^2-x^2};(y>0)$ គេបាន: $V=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}^2dx$ $=\pi\left(r^2x-\left(\frac{1}{3}x^3\right)\right)_{-r}^{r}$ $=\pi\left(r^2(2r)-\frac{r^3}{3}+\frac{-r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$ ដូចនេះ: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ ពិត ។

សិស្សធ្វើ។ គ្រូណែនាំ: ក. $V=\pi\int_{-2}^{1}(2-x)^2\,dx=64\pi$ ខ. $V=\int_{-2}^{2}(4-x^2)^2\,dx=\frac{64\pi}{3}$	**<u>លំហាត់ប្រតិបត្តិ:</u>** ក.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្ត ដែលវិលជុំវិញ(0x)ដោយ$y=2-x$នៅចន្លោះ [-2;1] ខ. ដូចគ្នា ដែលខណ្ឌដោយក្រាប $y=4-x^2$វិលជុំវិញ(0x) នៅចន្លោះ [-2;2]។	ចម្លើយ: ក. $V=\pi\int_{-2}^{1}(2-x)^2\,dx=64\pi$ ខ. $V=\int_{-2}^{2}(4-x^2)^2\,dx=\frac{64\pi}{3}$
ជំហានទី ៤៖ ពង្រឹងពុទ្ធិ		
រកមាឌនៃសូលីតបរិវត្ត ដែលខណ្ឌដោយ$y=x$និង (0x)។		$V=\pi\int_{0}^{3}x^2dx=9\pi$ ឯកតា។
ជំហានទី៥៖ បណ្តាំផ្ញើ		
ចូរប្អូនៗយកមេរៀននេះ ឡើងវិញ ។ និងប្អូនៗ ត្រូវមើលមេរៀន បន្ទាប់ ។		សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រា ដោយយកចិត្តទុកដាក់ ។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ៤ អាំងតេក្រាលកំណត់

មេរៀនទី២ មាឌសូលីត និងប្រវែងធ្នូ

ម៉ោងទី រយះពេល

I. **គោលបំណង:** ក្រោយពេលរៀនចប់សិស្សទទួលបានៈ

- **ចំណេះដឹង:** សិស្សនឹង
  - o ស្គាល់ច្បាស់អំពី បញ្ញាត្តទូទៅក្នុងការគណនា មាឌនៃសូលីតបរិវត្ត ដែលបានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=(x)$ និង $y=g(x)$ នៅលើចន្លោះ $[a;b]$ ដែល $f(x)\geq g(x)$ កំណត់ដោយ $V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx-\pi\int_a^b\left[g(x)\right]^2dx$ ។
  - o យល់ពីនិយមន័យ និងរូបមន្ត អាំងតេក្រាលដើម្បីគណនាមាននៃអាំងតេក្រាលបានត្រឹមត្រូវ ។
- **បំណិន:** ចេះប្រើរូបមន្ត និងនិយមន័យដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់មានត្រឹមត្រូវ
  - o ចេះសង្ខេបខ្លឹមសាមេរៀន
- **ឥរិយាបទ:** សិស្សមានបម្រុងប្រយ័ត្នខ្ពស់ក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់។កែប្រែចំណុចខ្វះខាត និងការយល់ច្រលំមួយចំនួន និងទាញយកប្រយោជន៍ពីគណិតវិទ្យាទៅប្រើប្រាស់ក្នុងស្ថានភាពរស់នៅក្នុងសង្គម និងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ ហើយមានលក្ខណៈតក្កៈ ។

II. **សម្ភារៈឧបទេស:**

- គ្រូបង្រៀនៈ សៀវភៅគ្រូ កិច្ចតែងការបង្រៀន, សៀវភៅសិស្ស,
- សិស្សៈ មានសៀវភៅពុម្ពសិស្ស, សៀវភៅកត់ត្រា

III. **ដំណើរនាំមេរៀន:**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់រៀន		
គ្រូតពិនិត្យសណ្តាប់ធ្នាប់, អណាម័យ និងវត្តមានសិស្សក្នុងថ្នាក់រៀន ។		ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍ ។
ជំហានទី២៖ រំឭកមេរៀន		

ចូរគណនា $\int_1^2 x^2dx$ ។		$=\frac{1}{3}x^3+c$
ជំហានទី៣៖ ខ្លឹមសារមេរៀន		
• គ្រូផ្តល់ឧទាហរណ៍គំរូ ដូចជា $y=x^2$, $g=\sqrt{x}$ ដែលត្រូវនឹងចន្លោះ $[0;1]$ ។ រួចគ្រូត្រូវគណនាមាឌនៃ y គឺ $V_y=\frac{\pi}{5}$ និង មាឌនៃ g គឺ $V_g=\frac{\pi}{2}$ ។ យើងយក $V=V_g-V_y$ $=\pi\int_0^1[g(x)]^2dx-\pi\int_0^1[f(x)]^2dx$ $=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$ ឯកតាមាឌ ឲ្យសិស្សសង្កេត ចំពោះចន្លោះ $[0;1]$ គេបាន $x^2\le\sqrt{x}\Leftrightarrow f\le g$ នោះ៖ មាឌនៃសូលីតនៅចន្លោះ $[0;1]$ ខណ្ឌដោយ f និង g គឺស្មើនឹង $V=\int_0^1[g(x)-f(x)]dx$ ។ • គ្រូផ្តល់បញ្ញត្តិទូទៅក្នុងការគណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីការបង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ លើចន្លោះ $[a;b]$ ដែល $f(x)\ge g(x)$ ។ • គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍គំរូ ទីមួយ និងទីពីរ ។	**1.1. មាឌសូលីតបរិវត្តដែលបានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស(ត)** ជាទូទៅ: មាឌនៃសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីការបង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ លើចន្លោះ $[a;b]$ ដែល $f(x)\ge g(x)$ កំណត់ដោយ: $V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx-\pi\int_a^b\left[g(x)\right]^2dx$ ។ **លំហាត់គំរូ១៖** កំណត់មាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស (ox) នៃផ្ទៃខណ្ឌដោយក្រាបអនុ. $f(x)=x^2+1$ និង $g(x)=-x+3$ ដែលត្រូវនឹង $0\le x\le1$ ។ ចម្លើយ: $V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx-\pi\int_a^b\left[g(x)\right]^2dx$ $=\pi\int_0^1[-x+3]^2dx-\pi\int_0^1\left[x^2+1\right]^2dx$ $=\frac{67\pi}{15}$ **លំហាត់គំរូទី២៖** គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃខណ្ឌដោយក្រាបតាងដោយ: $y=\sqrt{x}$ និង $y=x^2$; $(0\le x\le1)$ ។ **ចម្លើយ:**	សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា ចម្លើយ: ចំពោះ $0\le x\le1$ នោះ $2\le-x+3\le3$ $\Leftrightarrow 2\le g(x)\le3$ និង $0\le x^2+1\le2$ $\Leftrightarrow 0\le f(x)\le1$ នោះ: $g(x)\ge f(x)$ ។ យើងបានមាឌសូលីតដែលបង្កើតបានមកពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនូវផ្ទៃខណ្ឌដោយក្រាបនៃអនុ. ទាំង២កំណត់ដោយ: $V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx-\pi\int_a^b\left[g(x)\right]^2dx$ $=\pi\int_0^1[-x+3]^2dx-\pi\int_0^1\left[x^2+1\right]^2dx$ $=\frac{67\pi}{15}$ ចម្លើយ: ចំពោះ $0\le x\le1$ គេបាន: $\sqrt{x}\ge x^2\Leftrightarrow f(x)\ge g(x)$ នោះ៖

	$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2 dx-\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2 dx$ $=\pi\int_0^1\left(x-x^4\right)dx=\frac{3\pi}{10}$	$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2 dx-\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2 dx$ $=\pi\int_0^1\left(x-x^4\right)dx=\frac{3\pi}{10}$
គ្រូបញ្ជាក់អំពីនិយមន័យ និងបញ្ញត្តិក្នុងការគណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលវិលជុំវិញអ័ក្សអរដោនេ ។	**1.2: មាឌសូលីតបរិវត្តដែលបានពីការរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអរដោនេ** ដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស (oy) នូវផ្ទៃដែលកំណត់ដោយក្រាប $x=g(y)$ និងបន្ទាត់ដេកy=aនិង y=b បង្កើតបានជាសូលីតមួយដែលមានមាឌកំណត់ដោយ: $V=\pi\int_a^b\left[g(y)\right]^2 dy$ ។	
គ្រូណែនាំពី របៀបដោះស្រាយលំហាត់គំរូ១ ដោយប្រើតាមបញ្ញត្តិ ។	ឧទាហរណ៍១៖ គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តដែលបង្កើតពីការរង្វិលក្រាបតាងដោយ $y=\sqrt{3-x}$ និង $o\le y\le\sqrt{3}$ ។ ចម្លើយ: $V=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(3-y^2\right)dx=\frac{24\sqrt{3}\pi}{5}$	ចម្លើយ: គេមាន $y=\sqrt{3-x}$ នោះ $y^2=2-x\Leftrightarrow x=3-y^2$ នោះ: $V=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(3-y^2\right)dx=\frac{24\sqrt{3}\pi}{5}$
គ្រូណែនាំពីបញ្ញត្តិទូទៅ និងទ្រឹស្តីបទក្នុងការកំណត់អនុគមន៍តាមអាំងតេក្រាលកំណត់ ។	**2. កំណត់អនុគមន៍តាមអាំងតេក្រាលកំណត់** **ជាទូទៅ:** f ជាអនុគមន៍កំណត់ និងជាប់លើ $[a;b]$ ។ អនុគមន៍ F ដែលកំណត់និងជាប់លើចន្លោះ $[a;b]$ ដោយ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ហៅថាអនុគមន៍កំណត់តាមអាំងតេក្រាលកំណត់ ។ **ទ្រឹស្តីបទ:** បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a;b]$ នោះអនុគមន៍ F កំណត់លើចន្លោះ $[a;b]$ ដោយ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ជាប់លើចន្លោះ $[a;b]$ និងមានដេរីវេគ្រប់ចំណុចលើចន្លោះ $[a;b]$ ហើយ $\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]=f(x)$ ។	
គ្រូណែនាំសិស្សអោយធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់ទៅលើទ្រឹស្តីបទនេះ ។	**សម្រាយបញ្ជាក់** $F(t)=$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(t)$ $\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)$ នោះ:	

គ្រូណែនាំសិស្សអោយធ្វើលំហាត់ជាក្រុម ឬជាដៃគូរ	$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left[F(x)-F(a)\right]$ $=\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]=f(x)$ ។ **លំហាត់គំរូ** គណនា ក. $\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\,dt$ ខ. $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\sin t}{t^2+1}dt$ គ. $\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt$	ចម្លើយ: ក. $\cos x$ ខ. $\frac{\sin x}{x^2+1}$ គ. $\sqrt{x^2+1}$
ជំហានទី ៤៖ ពង្រឹងពុទ្ធិ		
អោយសិស្សធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ	ក. គេអោយ $F(x)=\int_0^x t(t^2-1)\,dt$ ។ គណនា $\frac{d}{dx}\left[F(x)\right]$ ។ ខ. $F(x)=\int_0^x t\cos t\,dt$ ។ គណនា $\frac{d}{dx}\left[F\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ ។	$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_0^x t(t^2-1)\,dt\right]$ $=x(x^2-1)$ $\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x t\cos t\,dt$ $=x\cos x$ នោះ $\frac{d}{dx}F\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$ ។
ជំហានទី៥៖ បណ្តាំផ្ញើ		
ចូរប្អូនៗយកមេរៀននេះឡើងវិញ ។ និងប្អូនៗ ត្រូវមើលមេរៀនបន្ទាប់ ។		សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រាដោយយកចិត្តទុកដាក់ ។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី ៤ អាំងតេក្រាលកំណត់

មេរៀនទី២ មាឌសូលីត និងប្រវែងធ្នូ (តចប់)

ម៉ោងទី រយៈពេល ២ ម៉ោង

I. **គោលបំណង:** ក្រោយពេលរៀនចប់សិស្សទទួលបាន:

- **ចំណេះដឹង:** សិស្សនឹង
  - ស្គាល់ច្បាស់អំពី បញ្ញាត្តទូទៅក្នុងការគណនា រកតម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍, បំណកស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រ ។
  - ចេះកំណត់ពីរបៀបគណនាប្រវែងធ្នូនៃក្រាប ។
- **បំណិន:** ចេះប្រើរូបមន្ត និងនិយមន័យដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់មានត្រឹមត្រូវ
  - ចេះសង្ខេបខ្លឹមសាមេរៀន
- **ឥរិយាបថ:** សិស្សមានបម្រុងប្រយ័ត្នខ្ពស់ក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់។កែប្រែចំណុចខ្វះខាត និងការយល់ច្រលំមួយចំនួន និងទាញយកប្រយោជន៍ពីគណិតវិទ្យាទៅប្រើប្រាស់ក្នុងស្ថានភាពរស់នៅក្នុងសង្គម និងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ ហើយមានលក្ខណៈតក្កៈ ។

II. **សម្ភារៈឧបទេស:**

- គ្រូបង្រៀន: សៀវភៅគ្រូ កិច្ចតែងការបង្រៀន, សៀវភៅសិស្ស,
- សិស្ស: មានសៀវភៅពុម្ពសិស្ស, សៀវភៅកត់ត្រា

III. **បញ្ញាត្តិមេរៀន**

- f ជាប់លើចន្លោះ $[a;b]$ នោះតម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍ធៀបនឹង x កំណាត់ដោយ $y_m = \dfrac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx$ ។
- ប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f នៅចន្លោះបន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយរូបមន្ត $L=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$

IV. **ដំណើកនាំមេរៀន:**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១៖ រដ្ឋបាលថ្នាក់រៀន		

<table>
<tr><td>គ្រូតពិនិត្យសណ្តាប់ធ្នាប់, អវត្តមាន និងវត្តមានសិស្សក្នុងថ្នាក់រៀន ។</td><td></td><td>ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍ ។</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">ជំហានទី២៖ រំឭកមេរៀន</td></tr>
<tr><td>ក.គេអោយ $P(x)=\int_0^x \sin t dt$ ។ គណនា $\frac{d}{dx}P(x)$ ។
ខ. $F=\int\limits_0^x \sqrt{t^2-5t+4}$ ។
គណនា $\frac{d}{dx}F(x)$</td><td></td><td>ចម្លើយ:
ក. $\frac{d}{dx}P(x)$
$=\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sin t dt\right]=\sin x$
ខ. $\frac{d}{dx}F$
$=\frac{d}{dx}\left[\int\limits_0^x \sqrt{t^2-5t+4}\right]$
$=\sqrt{x^2-5x+4}$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">ជំហានទី៣៖ ខ្លឹមសារមេរៀន</td></tr>
<tr><td>គ្រូណែនាំនិងផ្តល់និយមន័យអោយសិស្សដើម្បីរកតន្លៃនៃអនុគមន៍ ។
បន្ទាប់គ្រូស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនោះអោយសិស្ស ។
<u>ជាទូទៅ</u>៖បើ f ជាអនុគមន៍កំណត់ និងជាប់លើចន្លោះ $[a;b]$ នោះគេបានតម្លៃមធ្យមនៃតម្លៃ អនុគមន៍លើចន្លោះ $[a;b]$ តាមរបៀបដូចខាងក្រោម:
. ចែកចន្លោះ $[a;b]$ ជា n ចំណែកស្មើៗគ្នា ហើយចន្លោះនិមួយៗមានប្រវែង $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ ។ យក $x_1;x_2;..;x_n$ ជាតម្លៃនោះចន្លោះតូចៗនិមួយៗរៀងគ្នា។
. រកតម្លៃប្រហែលនៃតម្លៃ</td><td>3. តម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍
និយមន័យ: f ជាប់លើចន្លោះ $[a;b]$ នោះតម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍ធៀបនឹង x កំណត់ដោយ $y_m=\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx$
បំណកស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រ
$y_m=\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$
គុណ (1) និង $(b-a)$ គេបាន:
$y_m(b-a)=\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$ យើងឃើញថា នៅអង្គខាងស្តាំនៃ (2) គឺជាផ្ទៃនៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាប $y=f(x)$ និង បន្ទាត់ $x=a;x=b$ ។ ហើយអង្គខាងឆ្វេងគឺជាផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងដែលមានទទឹង f_m និងបណ្តោយ $(b-a)$ ។ ដូចនេះ តាម (2) គេអាចអះអាងថា តម្លៃមធ្យមនៃអនុ. លើ $[a;b]$ គឺជាទទឹងនៃចតុកោណកែងដែលមានបណ្តោយ $(b-a)$ និងផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹងផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់ដែលកំណត់ដោយក្រាបនៃ</td><td>សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រា
<u>ជាទូទៅ</u>៖បើ f ជាអនុគមន៍កំណត់ និងជាប់លើចន្លោះ $[a;b]$ នោះគេបានតម្លៃមធ្យមនៃតម្លៃ អនុគមន៍លើចន្លោះ $[a;b]$ តាមរបៀបដូចខាងក្រោម:
. ចែកចន្លោះ $[a;b]$ ជា n ចំណែកស្មើៗគ្នា ហើយចន្លោះនិមួយៗមានប្រវែង $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ ។ យក $x_1;x_2;..;x_n$ ជាតម្លៃនោះចន្លោះតូចៗនិមួយៗរៀងគ្នា ។
. រកតម្លៃប្រហែលនៃតម្លៃមធ្យមរបស់ f នៅលើ $[a;b]$ ។ នោះ</td></tr>
</table>

មធ្យមរបស់ f នៅលើ $[a;b]$ ។ នោះ:

$$\frac{f(x_1)+..+f(x_n)}{n}$$

$$=\frac{1}{b-a}.\left[f(x_1)\frac{b-a}{n}+...+f(x_n)\frac{b-a}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[f(x_1)\Delta x+...+f(x_n)\Delta x\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

បើ $n\to\infty$ នោះ: $\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ មានតម្លៃកាត់តែជាក់លាក់ ហើយខិតទៅរកតម្លៃមធ្យមមួយដែលតាង y_m គឺ

$$y_m=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty} f(x_k)\Delta x$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

ដូចនេះ គេបាននិមយន័យដូចខាងលើ ។

អនុ. $y=f(x)$ និងបន្ទាត់ $x=a;x=b$ ។

លំហាត់គំរូ១៖ គននតម្លៃមធ្យមនៃអនុ. $y=\sqrt{x}$ លើចន្លោះ $[0;4]$ ។

ចម្លើយ: តាមរូបមន្ត:

$$y_m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

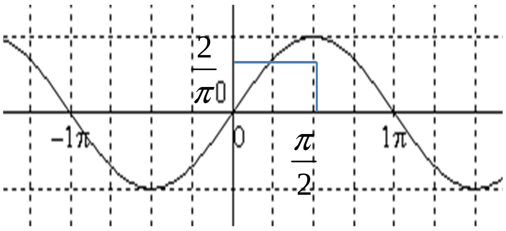
$$=\frac{1}{4-0}\int_0^4\sqrt{x}dx=\frac{4}{3}$$

លំហាត់គំរូ២៖ ក. គណនាតម្លៃមធ្យមនៃ $y=\sin x$ លើ $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ។

ខ. សង់ក្រាប អនុគមន៍ $y=\sin x$ និងចតុកោណកែងដែលមានទទឹងជាតម្លៃធម្យមនៃ y ។

ចម្លើយ: ក. $y=\frac{2}{\pi}$ ។

ខ. សង់ក្រាប:



4. ប្រវែងធ្នូនៃក្រាប

f ជាអនុគមន៍ជាប់និងកំណត់ដោយ $y=f(x)$ និងមានក្រាប C ។ គេអាចគណនាប្រវែងធ្នូ $\widehat{AB}$ នៃក្រាប C ដែលនៅចន្លោះបន្ទាត់ $x=a$ និង $x=b$ តាមរបៀបខាងក្រោម:

គេចែកចន្លោះ $[a;b]$ ជា n ចំណែកស្មើនឹង $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ ។ គេយកចំណុច $P_0(x;f(x))$ និងចំណុច $P(x+\Delta x;f(x+\Delta x))$ ដែល $a\le x<x+\Delta x\le b$ ។ តាង $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

$$\frac{f(x_1)+..+f(x_n)}{n}$$

$$=\frac{1}{b-a}.\left[f(x_1)\frac{b-a}{n}+...+f(x_n)\frac{b-a}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[f(x_1)\Delta x+...+f(x_n)\Delta x\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

បើ $n\to\infty$ នោះ: $\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ មានតម្លៃកាត់តែជាក់លាក់ហើយខិតទៅរកតម្លៃមធ្យមមួយដែលតាង y_m គឺ

$$y_m=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty} f(x_k)\Delta x$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

ដូចនេះ **និយមន័យ:** f ជាប់លើចន្លោះ $[a;b]$ នោះតម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍ធៀបនឹង x កំណត់ដោយ

$$y_m=\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx \text{ ។}$$

4. ប្រវែងធ្នូនៃក្រាប

ជាទូទៅ ប្រវែងនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f នៅចន្លោះ: $[a;b]$ កំណត់ដោយ:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx \text{ ។}$$

	$\Delta L = P_oP \Rightarrow \Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ $= \sqrt{(\Delta x)^2\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\right]^2}$ $\Rightarrow \Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\right]^2}\,(\Delta x)$ ដូចនេះ ពេល $n \to \infty \Rightarrow \Delta x \to 0$ $\Rightarrow dL = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.dx$ $= \sqrt{1+(y')^2}dx$ $\Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$ ដូចនេះ ជាទូទៅ ប្រវែងនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ f នៅចន្លោះ $[a;b]$ កំណត់ដោយៈ $L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$ ។ **លំហាត់គំរូ១៖ គណនាប្រវែងធ្នូនៃក្រាប** តាងអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1$ នៅចន្លោះបន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=1$ ។ **ចម្លើយ:** យើងមាន $y = f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1$ នោះ $y' = 2\sqrt{2}\sqrt{x}$ $\Rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1+8x}dx = \frac{13}{6}$	**លំហាត់គំរូ១៖ គណនាប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍** $y = f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1$ នៅចន្លោះបន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=1$ ។ **ចម្លើយ:** យើងមាន $y = f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - 1$ នោះ $y' = 2\sqrt{2}\sqrt{x}$ $\Rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1+8x}dx = \frac{13}{6}$
ជំហានទី ៤៖ ពង្រឹងពុទ្ធិ		
អោយសិស្សធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ ក.គណនាប្រវែងធ្នូ $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ នៅចន្លោះ $[0;3]$ ។ ខ. គណនាប្រវែងធ្នូ $L(a): y = x^{3/2}\ ;\ a \ge \frac{5}{9}$		ក. យើងមាន $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ $\Rightarrow y' = \frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$ នោះ $L(a) = \frac{27}{4}$ ។ ខ. $a = \frac{32}{9}$

។ចូររក $L(a)$ និង តម្លៃ a បើ $L(a)=7$ ។		
ជំហានទី៥៖ បណ្តាំផ្ញើ		
ចូរប្អូនៗយកមេរៀននេះឡើងវិញ និងប្អូនៗ ត្រូវធ្វើលំហាត់ចុងសៀវមេរៀន។		សិស្សស្តាប់ និងកត់ត្រាដោយយកចិត្តទុកដាក់ ។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

❖ ជំពូកទី៥ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

❖ មេរៀនទី១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១

I. **វត្ថុបំណងមេរៀន:**ក្រោយពីរៀនមេរៀនចប់សិស្សអាចៈ

- ចំណេះដឹង:កំណត់សញ្ញាណនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈខ្លឹមសារមេរៀន។
- ចំណេះធ្វើ:ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍របស់គ្រូ។
- ឥរិយាបថ:មានស្មារតីទទួលខុសត្រូវលើការអនុវត្តន៍លំហាត់បានកំរិតខ្ពស់។

II. **រយៈពេល:** ០១ម៉ោង

III. **សម្ភារឧបទេស**

- សៀវភៅសិស្សទំព័រទី៩២ ៩៧ បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១០
- ម៉ែតឈើ

IV. **ដំណើរការនៃការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	**ខ្លឹមសារមេរៀន**	**សកម្មភាពសិស្ស**
-ពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-អោយសិស្សឡើងធ្វើ លំហាត់ -គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=(3x^4+5)^6$ -គណនាអាំងតេក្រាល $\int(x^7-11x^5+\frac{3}{5}x^2)dx$	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់) $y=(3x^4+5)^6$ $\Rightarrow y'=72x^3(3x^4+5)^5$ $\int(x^7-11x^5+\frac{3}{5}x^2)dx$ $=\frac{1}{8}x^8-\frac{11}{6}x^6+\frac{1}{5}x^3+c$	-ឡើងធ្វើលំហាត់ $y=(3x^4+5)^6$ $\Rightarrow y'=6(3x^4+5)^5(3x^4+5)'$ $=72x^3(3x^4+5)^5$ $\int(x^7-11x^5+\frac{3}{5}x^2)dx$ $=\int x^7dx-11\int x^5dx+\frac{3}{5}\int x^2dx$ $=\frac{1}{8}x^8-\frac{11}{6}x^6+\frac{1}{5}x^3+c$

	ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)	
-បង្ហាញវត្ថុបំណងមេរៀនថ្ងៃនេះ	មេរៀនទី១**សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១** 1.**សញ្ញាណនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១**	
-ដាក់ឧទាហរណ៍ -ចូរគណនា y' -ចូរសរសេរទំនាក់ទំនងរវាង y និង y'	ឧទាហរណ៍:គេមានអនុគមន៍ $y=cx-3$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត c ។គណនាដេរីវេទី១ y' រួចសរសេរទំនាក់ទំនងរវាង y និង y' ។	-ពិនិត្យឧទាហរណ៍ -យើងមាន $y=cx-3$ $\Rightarrow y'=c$ -ទំនាក់ទំនង y និង y' គេបាន $y=xy'-3$ $y+3=xy'$ $y'=\frac{1}{x}y+\frac{3}{x}$ ឬ $y'-\frac{1}{x}y=\frac{3}{x}$
-បញ្ជាក់សមីការពីសញ្ញាណនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី ១ និងចម្លើយទូទៅ	-សមីការ $y'-\frac{1}{x}y=\frac{3}{x}$ ហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ដែលមានអនុគមន៍ $y=cx-3$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះ។	-យកចិត្តទុកដាក់ស្តាប់ការបញ្ជាក់របស់គ្រូ
-អោយសិស្សទាញនិយម ន័យ	-និយមន័យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១	-ទាញនិយមន័យ • សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ជាទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍ដេរីវេទី១របស់អនុគមន៍នោះ អថេរនិងចំនួនថេរ។ • ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាអនុគមន៍មួយដែលអនុគមន៍នេះនិងដេរីវេរប

		ស់វាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ។ • លំដាប់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺជាលំដាប់នៃដេរីវេខ្ពស់ជាងគេក្នុង សមីការ។
-បញ្ជាក់ពីលក្ខណ:សំគាល់អនុគមន៍ ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល -ដាក់ឧទាហរណ៍អោយសិស្សឡើងធ្វើលើក្តារខៀន -ដាក់ឧទាហរណ៍ -សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ ស្យែល -ចូរគណនាចំងាយចរក្នុងរយ:ពេ	-**សំគាល់:**អនុគមន៍ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានច្រើនរាប់មិនអស់។ គ្រប់ខ្សែកោងដែលតាងចម្លើយនីមួយៗនៃសមីការបង្កើតបានជាគ្រួសារនៃខ្សែកោង។ ឧទាហរណ៍:គេមានអនុគមន៍ $y = ke^{-3x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត k ។សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមាន $y = ke^{-3x}$ ជាចម្លើយទូទៅ។ 2.**ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១** 2.1.**សមីការមានទម្រង់** $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ឧទាហរណ៍:វត្ថុPមួយផ្លាស់ទីតាមអ័ក្ស $\overrightarrow{ox}$ ដែលមានចំណុច o ជាគល់ដោយល្បឿនថេរ a (គិតជា m ក្នុង1វិនាទី)។តាង $x(t)$ ជាចម្ងាយដែលPផ្លាស់ទីចេញពីចំណុច o នៅលើអ័ក្សអស់រយ:ពេល t ។	 -ឡើងធ្វើឧទាហរណ៍ $y = ke^{-3x}$ នាំអោយ $y' = -3ke^{-3x} = -3y$ គេបាន $y' + 3y = 0$ ជាសមីការឌីផេ រ៉ង់ស្យែលដែលមានអនុគមន៍ $y = ke^{-3x}$ ជាចម្លើយទូទៅ។ -ពិនិត្យ បើ $x(t)$ ជាចម្ងាយចរដែលPផ្លាស់ទីក្នុងរយ:ពេល t នោះល្បឿននៃការផ្លាស់ទីរបស់វត្ថុPគឺ $x'(t)$ ។ដោយល្បឿននេះស្មើ a នោះគេបាន $x'(t) = a$ ដែល $x'(t)$ ជាដេរីវេនៃ $x(t)$ សមីការ $x'(t) = a$ អាចសរសេរជា $\frac{dx}{dt} = a$ ។

ល t -បញ្ជាក់ចម្លើយនៃ $\frac{dx}{dt}=a$ -គណនាចំងាយចរនៅខណៈ $t=2s$ បើខណៈ $t=0s$ វត្ថុP ផ្លាស់ទីបានចម្ងាយ $3m$ ពី គល់ o -បញ្ជាក់ពីចម្លើយពិសេស -ចូរកំណត់វិធានដើម្បីដោះស្រាយសមីការមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx}=f(x)$	$x(t)$ ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dx}{dt}=a$ ។ - $x(t)=at+3$ ហៅថាចម្លើយពិសេសនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១តាមលក្ខខ័ណ្ឌ $x(0)=3$ -ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx}=f(x)$ a).សរសេរ $\frac{dy}{dx}=f(x)$ ជា $dy=f(x)dx$ b).រកអាំងតេក្រាលអង្គទាំងពីរ $\int dy=\int f(x)dx$ ឬ $y=\int f(x)dx+c$ c ជាចំនួនថេរ	-យើងមាន $\frac{dx}{dt}=a$ $\Rightarrow dx=adt \quad (1)$ បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ(1) គេបាន $\int dx=\int adt$ $x(t)=at+c \quad (c\in\mathbb{R})$ ជាចម្ងាយចរដែលPផ្លាស់ទីបានក្នុងរយៈពេល t -គណនាចម្ងាយចរ គេមាន $x(t)=ax+c$; $(t=0;x=3)$គេបាន $x(0)=a(0)+c$ ដោយ $x(0)=3\Rightarrow c=3$ ដូចនេះ $x(t)=at+3$ យើងបាន $x(2)=2a+3$ ។ --ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx}=f(x)$ a).សរសេរ $\frac{dy}{dx}=f(x)$ ជា $dy=f(x)dx$ b).រកអាំងតេក្រាលអង្គទាំងពីរ $\int dy=\int f(x)dx$ ឬ $y=\int f(x)dx+c$ c ជាចំនួនថេរ

-ដាក់ឧទាហរណ៍អោយសិស្សពិភាក្សារួចឡើងធ្វើលើក្តា ខៀន	c). $y=\int f(x)dx+c$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dy}{dx}=f(x)$ d).រកចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(x_0)=y_0$ គឺយក x_0 និង y_0 ទៅជំនួសក្នុងចម្លើយទូទៅរួចទាញយក $c=y_0-F(x_0)$ នោះ $y=\int f(x)dx+y_0-F(x_0)$ ជាចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌ $y(x_0)=y_0$ ។ ឧទាហរណ៍:ដោះស្រាយសមីការ $y'=\frac{2x}{x^2+1}$	c). $y=\int f(x)dx+c$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dy}{dx}=f(x)$ d).រកចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(x_0)=y_0$ គឺយក x_0 និង y_0 ទៅជំនួសក្នុងចម្លើយទូទៅរួចទាញយក $c=y_0-F(x_0)$ នោះ $y=\int f(x)dx+y_0-F(x_0)$ ជាចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌ $y(x_0)=y_0$ ។ -ពិភាក្សារួចឡើងធ្វើ $y'=\frac{2x}{x^2+1}$ នាំអោយ $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}$ $dy=\frac{2x}{x^2+1}dx$ $\int dy=\int\frac{2x}{x^2+1}dx$ $=\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$ $=\ln(x^2+1)+c$;c ជាចំនួនថេរ ដូចនេះ $y=\ln(x^2+1)+c$
-ហៅសិស្សដោះស្រាយសមីការ ក. $y'=6x^2+4x+5$ ខ. $y'=xe^{x^2}$	ជំហានទី៤ (ពង្រឹងពុទ្ធិ) $y'=6x^2+4x+5$ $\Rightarrow y=2x^3+2x^2+5x+c$	-ឡើងធ្វើលំហាត់

	$y'=xe^{x^2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$	$y'=6x^2+4x+5$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=6x^2+4x+5$ ក. $dy=(6x^2+4x+5)dx$ $\int dy=\int(6x^2+4x+5)dx$ $y+c_1=2x^3+2x^2+5x+c_2$ $y=2x^3+2x^2+5x+c$ ដែល $c=c_2-c_1$ ខ. $y'=xe^{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=xe^{x^2}$ $dy=xe^{x^2}dx$ $\int dy=\int xe^{x^2}dx$ តាង $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx$ $\Rightarrow dx=\frac{dt}{2x}$ គេបាន $\int xe^{x^2}dx=\int xe^t\frac{dt}{2x}$ $=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$ ដូចនេះ $y=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$
-ទៅផ្ទះវិញធ្វើលំហាត់លេខ០១ ទំព័រទី១១០	ជំហានទី៥ បណ្តាំផ្ញើ លំហាត់លេខ០១ទំព័រ១១០	-កត់ចំណាំយកទៅអនុវត្តន៍

កិច្ចតែងការបង្រៀន

❖ ជំពូកទី៥ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

❖ មេរៀនទី១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១(ត)

២.២.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ដែលអាចញែកអថេរបាន

(រាង $g(y)\frac{dy}{dx}=f(x)$)

I. វត្ថុបំណង:

- ចំណេះដឹង:កំណត់និយមន័យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ដែលអាចញែលអថេរបាន(រាង $g(y)\frac{dy}{dx}=f(x)$)តាមរយ:ខ្លឹមសារមេរៀនបានត្រឹមត្រូវ។
- ចំណេះធ្វើ:ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ដែលអាចញែលអថេរបាន(រាង $g(y)\frac{dy}{dx}=f(x)$)តាមរយ:ឧទាហរណ៍របស់គ្រូបានត្រឹមត្រូវ។
- ឥរិយាបថ:មានបំរុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់បានកម្រិតខ្ពស់។

II. សម្ភារឧបទេស

- សៀវភៅសិស្សទំព័រ៩៥-៩៧បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១១
- សៀវភៅគ្រូទំព័រ៩៥-៩៧បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១១

III. រយៈពេល ០១ម៉ោង

IV. ដំណើរការបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យអវត្តមានអណាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ វិន័យ	**ជំហានទី១** រដ្ឋបាលថ្នាក់	-ប្រធានថ្នាក់ឬតំណាងថ្នាក់ ឡើងរាយការណ៍
-ដោះស្រាយសមីការ ក. $y'=3x^2-2x+1$ ខ. $xy'=1$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$	**ជំហានទី២** រំលឹកមេរៀនចាស់ ក. $y'=3x^2-2x+1$ $\Rightarrow y=x^3-x^2+x+c$ ខ. $xy'=1$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ $\Rightarrow y=\ln\|x\|+c$	-ដោះស្រាយសមីការ ក. $y'=3x^2-2x+1$ គេបាន $\frac{dy}{dx}=3x^2-2x+1$ $dy=(3x^2-2x+1)dx$ $\int dy=\int(3x^2-2x+1)dx$

		$y = x^3 - x^2 + x + c$ ខ. $xy' = 1$ $\Rightarrow y' = \frac{1}{x}$ គេបាន $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow dy = \frac{1}{x}dx$ $\int dy = \int \frac{1}{x}dx$ $y = \ln\|x\| + c$
-ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សធ្វើ -សរសេរជារាងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្បែលលំដាប់ទី១ដែលអាចញែកអថេរបាន -ឲ្យសិស្សកំណត់និយមន័យឌីផេរ៉ង់ស្បែលលំដាប់ទី១ដែលអាចញែកអថេរបាន	**ជំហានទី៣** មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ **សមីការឌីផេរ៉ង់លំដាប់ទី១**(ត) **២.២.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្បែលលំដាប់ទី១ដែលអាចញែកអថេរបាន** (**រាង** $g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$) **ក.និយមន័យ** ឧទាហរណ៍:រកសមីការឌីផេរ៉ង់នៃគ្រួសាររង្វង់ផ្ចិត O ដែល O ជាគល់តម្រុយកូអរដោនេ។ **-និយមន័យ:**ឌីផេរ៉ង់ស្បែលលំដាប់ទី១ដែលអាចញែកអថេរបានជាសមីការដែលក្រោយពេលសម្រួលរួចមានទម្រង់ទូទៅ $g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$ ។	-រង្វង់ផ្ចិត O មានសមីការទូទៅ $x^2 + y^2 = c$ ដែល c ជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន គេបាន $y^2 = c - x^2$ ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរ $2yy' = -2x \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្បែលនៃគ្រួសាររង្វង់ផ្ចិត O ។ -សមីការនេះអាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ឬ $y\frac{dy}{dx} = -x$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្បែលលំដាប់ទី១ដែលអាចញែកអថេរបាន -កំណត់បានត្រឹមត្រូវ

-ដាក់ឧទាហរណ៍គំរូដោះស្រាយបង្ហាញសិស្ស ឧទាហរណ៍:ដោះស្រាយសមីការ $y'=x^2y^3$ គេបាន $y'=x^2y^3$ អាចសរសេរជា $\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}=x^2$ ជាសមីការដែលអាចញែកអថេរបាន $\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}=x^2$ $\Rightarrow \frac{dy}{y^3}=x^2dx$ បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ គេបាន $\int\frac{dy}{y^3}=\int x^2dx$ $-\frac{1}{2y^2}=\frac{1}{3}x^3+c$ $\frac{2}{3}x^3y^2+2cy^2+1=0$ ឬ $2x^3y^2+6cy^2+3=0$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'=x^2y^3$ -ឲ្យសិស្សទាញទូទៅ	**ខ.របៀបដោះស្រាយសមីការ** $g(y)\frac{dy}{dx}=f(x)$	-យកចិត្តទុកដាក់ពិនិត្យការដោះស្រាយបង្ហាញរបស់គ្រូ
	ជាទូទៅ:ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ ដែលអាចញែកអថេរបាន គេត្រូវ: • សរសេរសមីការឲ្យទៅជារាង $g(y)\frac{dy}{dx}=f(x)$ • ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹងអថេរ x $\int g(y)dy=\int f(x)dx$ $G(y)=F(x)+c$ (c ជាចំនួនណាមួយក៏បាន) ដែល $G(y)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(y)$ និង $F(x)$ ជា	-ទាញទូទៅបានត្រឹមត្រូវ

-ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សធ្វើ	ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ ឧទាហរណ៍:ដោះស្រាយសមីការ $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}$ តាមលក្ខដើម $y(2)=0$ ។	-គេបាន $e^{-y}dy=e^{x}dx$ $\int e^{-y}dy=\int e^{x}dx$ $-e^{-y}=e^{x}+c$ ឬ $e^{x}+e^{-y}=c$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ។ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(2)=0$ គេបាន $e^{2}+e^{0}=c\Rightarrow c=e^{2}+1$ ដូចនេះ $e^{x}+e^{-y}=e^{2}+1$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ។
-ដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិឲ្យសិស្សធ្វើ	**ជំហានទី៤** ពង្រឹងពុទ្ធិ ប្រតិបត្តិ:រកអនុគមន៍ចម្លើយមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $x\frac{dy}{dx}-y=2x^{2}y$ ដែលក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយនោះកាត់តាមចំណុច $(x=1,y=e)$ ។	-ឡើងធ្វើលើក្តារខៀន ដោះស្រាយសមីការ $x\frac{dy}{dx}-y=2x^{2}y$ គេបាន $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2x^{2}+1}{x}$ $\int\frac{dy}{y}=\int\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx$ $\ln\lvert y\rvert=x^{2}+\ln\lvert x\rvert+c$ តាមលក្ខខណ្ឌ $(x=1,y=e)$ $\ln e=1+\ln 1+c\Rightarrow c=0$ ដូចនេះ $\ln\lvert y\rvert=x^{2}+\ln\lvert x\rvert$ ឬ $y=\pm e^{x^{2}+\ln\lvert x\rvert}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ។
-ទៅផ្ទះវិញធ្វើលំហាត់លេខ២ទំព័រ១១០	**ជំហានទី៥** បណ្តាំផ្ញើ លំហាត់លេខ២ទំព័រ១១០	-កត់ចំណាំយកទៅអនុវត្តន៍

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- ❖ ជំពូកទី៥ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល
- ❖ មេរៀនទី១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១

I. វត្ថុបំណង

- ចំណេះដឹង:កំណត់និយមន័យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី១មេគុណថេរអូម៉ូសែន(អង្គទី២ស្មើសូន្យ)តាមរយៈខ្លឹមសារមេរៀនបានត្រឹមត្រូវ។
- ចំណេះធ្វើ:ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី១មេគុណថេរអូម៉ូសែន(អង្គទី២ស្មើសូន្យ)តាមរយៈលំហាត់ប្រតិបត្តិបានត្រឹមត្រូវ។
- ឥរិយាបថ:មានស្មារតីចូលចិត្តដោះស្រាយលំហាត់បានកម្រិតខ្ពស់។

II. សម្ភារឧបទេស

- សៀវភៅសិស្សទំព័រ៩៨-១០០បោះពុម្ព២០១១
- សៀវភៅគ្រូទំព័រ៩៨-១០០បោះពុម្ព២០១១

III. រយៈពេល ០១ម៉ោង

IV. ដំណើរការបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យអវត្តមាន វិន័យ អនាម័យ	ជំហានទី១ រដ្ឋបាលថ្នាក់	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ដោះស្រាយសមីការ $y'=e^{2x}, y(0)=5$	ជំហានទី២ រំលឹកមេរៀនចាស់	-ដោះស្រាយសមីការ $y'=e^{2x}, y(0)=5$ $\frac{dy}{dx}=e^{2x} \Leftrightarrow dy=e^{2x}dx$ $\int dy=\int e^{2x}dx$ $\Rightarrow y=\frac{1}{2}e^{2x}+c$ ដោយ $y(0)=5$

		$\Leftrightarrow 5=\frac{1}{2}e^{2\cdot5}+c \Rightarrow c=5-\frac{1}{2}e^{10}$ ដូចនេះ $y=\frac{1}{2}e^{2x}+5-\frac{1}{2}e^{10}$
-ចូរឲ្យនិយមន័យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី១មេគុណថេរអូម៉ូសែន -ប្រាប់ពីរបៀបដោះស្រាយសមីការ $y'+ay=0$	ជំហានទី៣ មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១** **២.៣សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី១មេគុណថេរអូម៉ូសែន(** **អង្គទី២ស្មើសូន្យ)** **ក.និយមន័យ** និយមន័យ:សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី១មេគុណថេរអូម៉ូសែន(អង្គទី២ស្មើសូន្យ)ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ $y'+ay=0$ (a ជាចំនួនថេរ)។ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=Ae^{-ax}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។ **ខ.របៀបដោះស្រាយសមីការ** $y'+ay=0$ គេសរសេរ $\frac{dy}{dx}=-ay$ តាមវិធីញែកអថេរគេបាន $\frac{dy}{y}=-adx$ $\int\frac{dy}{y}=\int -adx$ $\ln\|y\|=-ax+c \Rightarrow y=\pm e^{c}e^{-ax}$ យក $A=\pm e^{c}$: $y=Ae^{-ax}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី១មេគុណថេរអូម៉ូសែន។ ឧទាហរណ៍:រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+y=0$ ដែល $y(0)=1$	-សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី១មេគុណថេរអូម៉ូសែន(អង្គទី២ស្មើសូន្យ)ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ $y'+ay=0$ (a ជាចំនួនថេរ)។ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=Ae^{-ax}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន។ -យកចិត្តទុកដាក់ស្តាប់ការពន្យល់របស់គ្រូ

-ដាក់ឧទាហរណ៍អោយសិស្សធ្វើ		-រកចម្លើយទូទៅ $y'+y=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-y$ ឬ $\frac{dy}{y}=-dx \Rightarrow \ln\|y\|=-x+c$ ដូចនេះ $y=Ae^{-x}$ (A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន)ជាចម្លើយទូទៅនៃ $y'+y=0$ ។ រកចម្លើយពិសេស $y(0)=1 \Leftrightarrow 1=Ae^{0} \Rightarrow A=1$ ដូចនេះ $y=e^{-x}$ ជាចម្លើយពិសេស
-ដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិឲ្យសិស្សធ្វើ	ជំហានទី៤ ពង្រឹងពុទ្ធិ ប្រតិបត្តិ:ដោះស្រាយសមីការ $-y'+2y=0$ តាមលក្ខខណ្ឌ $y(3)=-2$	-ដោះស្រាយសមីការ $-y'+2y=0$ $y'-2y=0 \Rightarrow y=Ae^{2x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ដោយ $y(3)=-2 \Leftrightarrow -2=Ae^{2\times 3}$ $\Rightarrow A=-2e^{-6}$ ដូចនេះ $y=-2e^{2x-6}$
-ទៅផ្ទះវិញធ្វើលំហាត់លេខ ៣-៤ទំព័រ១១០	ជំហានទី៥ បណ្តាំផ្ញើ លំហាត់លេខ៣-៤ទំព័រ១១០	-កត់ចំណាំយកទៅអនុវត្តន៍

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- ជំពូកទី៥ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល
- មេរៀនទី១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១

២.៤.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន(អង្គទី២ខុសពីសូន្យ)

I. **វត្ថុបំណង**

- ចំណេះដឹង:បកស្រាយពីវិធីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែនតាមរយ:ខ្លឹមសារមេរៀនបានត្រឹមត្រូវ។
- ចំណេះធ្វើ:ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែនតាមរយ:លំហាត់ប្រតិបត្តិបានត្រឹមត្រូវ។
- ឥរិយាបថ:មានបំរុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១ មេគុណមិនអូម៉ូសែនបានកម្រិតខ្ពស់។

II. **រយៈពេល** ០១ម៉ោង

III. **សម្ភារឧបទេស**

- សៀវភៅសិស្ស ទំព័រទី១០០-១០៤ បោះពុម្ភឆ្នាំ២០១១
- សៀវភៅគ្រូ ទំព័រទី១០០-១០៤ បោះពុម្ភឆ្នាំ២០១១

IV. **ដំណើរការបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យអវត្តមានវិន័យ អណាម័យ	ជំហានទី១ រដ្ឋបាលថ្នាក់	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ដោះស្រាយសមីការ $2y'-5y=0, y(1)=-3$	ជំហានទី២ រំលឹកមេរៀនចាស់	-$2y'-5y=0$ គេបាន $\frac{dy}{dx}=\frac{5}{2}y$ ឬ $\frac{dy}{y}=\frac{5dx}{2}$ $\ln\lvert y\rvert=\frac{5}{2}x+c \Rightarrow y=Ae^{\frac{5}{2}x}$ តាមលក្ខខណ្ឌ $y(1)=-3$ $-3=Ae^{\frac{5}{2}\cdot 1} \Rightarrow A=-3e^{-\frac{5}{2}}$ ដូចនេះ $y=-3e^{\frac{5x-5}{2}}$

-ដាក់ឧទាហរណ៍បង្ហាញសិស្ស ក.កំណត់រក a និង b បើ g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ g និង g' ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (E) $g(x)=ax+b$ នាំឲ្យ $g'(x)=a$ $g'(x)-3g(x)=3x+2$ $a-3(ax+b)=3x+2$ $-3ax+a-3b=3x+2$ ទាញបាន $\begin{cases}-3a=3\\a-3b=2\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$ ដូចនេះ $g(x)=-x-1$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ។ ខ.បង្ហាញថា $f=h+g$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) បើ h ជាចម្លើយនៃសមីការ $y'-3y=0\Rightarrow h'-3h=0$ ម្យ៉ាងទៀត g ជាចម្លើយនៃ (E) គេបាន $g'-3g=3x+2$ បូកសមភាពអង្គនិងអង្គ $h'+g'-3(h+g)=3x+2$	ជំហានទី៣ មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១(ត)** **២.៤.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអ៊ែលំដាប់ទី១មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន(អង្គទី២ខុសពីសូន្យ)** ក.របៀបដោះស្រាយសមីការ $y'+ay=p(x)$ ឧទាហរណ៍:គេមានសមីការ $y'-3y=3x+2\,(E)$ ។ ក.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=ax+b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។ ខ.បើ h ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'-3y=0$ បង្ហាញថា $f=h+g$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។ គ.រកចម្លើយ h នៃសមីការ $y'-3y=0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅ f នៃសមីការ (E) ។	-ស្តាប់ការបង្ហាញរបស់គ្រូ

$(h+g)'-3(h+g)=3x+2$ ដោយ $f=h+g$ នោះ $f'-3f=3x+2$ ដូចនេះ $f=h+g$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។ គ.ដោះស្រាយសមីការ $y'-3y=0$ ឬ $\frac{dy}{dx}=3y$ $\frac{dy}{y}=3dx$ ឬ $\ln\|y\|=3x+c$ $y=\pm e^{3x+c}=\pm e^{c}\cdot e^{3x}$ ដូចនេះ $h(x)=Ae^{3x}$ ដោយ $f=h+g$ នោះ $f(x)=Ae^{3x}-x-1$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។ -ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន $y'+ax=p(x),p(x)\neq 0$ គេត្រូវធ្វើដូចម្តេច?	-ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន $y'+ax=p(x),p(x)\neq 0$ គេត្រូវ: • រកអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=0$ តាងដោយ y_c • រកអនុគមន៍ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'+ay=p(x)$ តាងដោយ y_p • ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=p(x)$ គឺអនុគមន៍ y ដែល $y=y_c+y_p$ ឧទាហរណ៍:ដោះស្រាយសមី	-ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន $y'+ax=p(x),p(x)\neq 0$ គេត្រូវ: • រកអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=0$ តាងដោយ y_c • រកអនុគមន៍ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'+ay=p(x)$ តាងដោយ y_p • ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=p(x)$ គឺអនុគមន៍ y ដែល $y=y_c+y_p$ -ដោះស្រាយសមីការ

-ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សធ្វើ	ការ $y'-2y=8x^2-8x\ (E)$	$y'-2y=0$ ឬ $\frac{dy}{dx}=2y$ $\frac{dy}{y}=2dx\Rightarrow\ln\lvert y\rvert=2x+c$ $y_c=Ae^{2x}\ \ (A=\pm e^c)$ -រកចម្លើយពិសេសនៃ (E) $y_p=ax^2+bx+c$ $y'_p=2ax+b$ $(E): 2ax+b-2ax^2-2bx-2c$ $=8x^2-8x$ $-2ax^2+(2a-2b)x+b-2c$ $=8x^2-8x$ $\begin{cases}-2a=8\\2a-2b=-8\\b-2c=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a=-4\\b=0\\c=0\end{cases}$ $y_p=-4x^2$ ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=y_c+y_p$ $y=Ae^{2x}-4x^2$ -ស្តាប់ការបង្ហាញរបស់គ្រូ
-ដាក់ឧទាហរណ៍បង្ហាញសិស្ស ក.រកចម្លើយនៃសមីការ $y'+2y=0(E)$ គេបាន $\frac{dy}{dx}=-2y\Rightarrow\frac{dy}{y}=-2dx$ $\ln\lvert y\rvert=-2x+c\Rightarrow y=\pm e^{-2x+c}$ $y=Ae^{-2x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។ ខ.គណនា $f'(x)$ និង $g'(x)$ $f(x)=e^{-2x}g(x)$	ខ.ដំណោះស្រាយសមីការ $y'+ay=p(x)$ តាមវិធីបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ ឧទាហរណ៍:គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+2y=3e^{-3x}\ (E)$ ក.រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+2y=0(E)$ ខ.តាងអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=e^{-2x}g(x)$ ។ គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ	

$f'(x)=-2e^{-2x}g(x)+e^{-2x}g'(x)$ បើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) នោះគេបាន $f'(x)+2f(x)=3e^{-3x}$ $-2e^{-2x}g(x)+e^{-2x}g'(x)+2e^{-2x}g(x)$ $=3e^{-3x}$ $e^{-2x}g'(x)=3e^{-3x}$ $g'(x)=\frac{3e^{-3x}}{e^{-2x}}=3e^{-x}$ គ.ដោយ $g'(x)=3e^{-x}$ នោះ $g(x)=\int 3e^{-x}dx=-3e^{-x}+c$ ដោយ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) កាលណា $g'(x)=3e^{-x}$ នោះ $f(x)=e^{-2x}g(x)$ $=e^{-2x}(-3e^{-x}+c)$ ដូចនេះ $f(x)=ce^{-2x}-3e^{-3x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។	$g(x)$ និង $g'(x)$ ។គណនា $g'(x)$ បើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។ គ.ទាញរក $g(x)$ រួច $f(x)$ ដើម្បីឲ្យ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។	
-ដាក់ប្រតិបត្តិឲ្យសិស្សធ្វើ	ជំហានទី៤ ពង្រឹងពុទ្ធិ ប្រតិបត្តិ:ដោះស្រាយសមីការ $y'+2y=x^2$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=2$	-ដោះស្រាយសមីការ $y'+2y=x^2\ (E)$ • រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+2y=0$ គេបាន $y=Ae^{-2x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ $y'+2y=0$ • $y=A(x)e^{-2x}$ $\Rightarrow y'=-2e^{-2x}A(x)+e^{-2x}A'(x)$ គេបាន $\Rightarrow -2e^{-2x}A(x)+e^{-2x}A'(x)$ $+2A(x)e^{-2x}=x^2$ $A'(x)=x^2e^{2x}$ $A(x)=\int x^2e^{2x}dx$

		$\Rightarrow A(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$ $+c$ (ដែល c ជាចំនួនថេរណាក៏បាន) ដូចនេះ $y=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{8}+c$
-ទៅផ្ទះវិញធ្វើលំហាត់លេខ១០ទំព័រទី១១១	ជំហានទី៥ បណ្តាំផ្ញើ លំហាត់លេខ១០ទំព័រទី១១១	-កត់ចំណាំយកទៅអនុវត្តន៍

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- **ជំពូកទី៥ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល**
- **មេរៀនទី១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១**

I. វត្ថុបំណង

- ចំណេះដឹង:បកស្រាយបាតុភូតធម្មជាតិជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមរយៈខ្លឹមសារមេរៀនបានត្រឹមត្រូវ។
- បំណិន:អនុវត្តន៍សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រតាមរយៈខ្លឹមសារមេរៀនបានត្រឹមត្រូវ។
- ឥរិយាបថ:មានស្មារតីចូលចិត្តដោះស្រាយលំហាត់បានកម្រិតខ្ពស់។

II. សម្ភារឧបទេស

- សៀវភៅសិស្សទំព័រ១០៥-១០៩បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១១
- សៀវភៅគ្រូទំព័រ១០៥-១០៩បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១១

III. រយៈពេល ០២ម៉ោង

IV. ដំណើរការបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យអវត្តមានវិន័យអណាម័យ	ជំហានទី១ រដ្ឋបាលថ្នាក់	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ដោះស្រាយសមីការ $y'+y=\cos x+\sin x$	ជំហានទី២ រំលឹកមេរៀនចាស់	-ដោះស្រាយសមីការ $y'+y=\cos x+\sin x$ $y'+y=0\Rightarrow y_c=Ae^{-x}$ តាង $y_p=a\cos x+b\sin x$ $\Rightarrow y'_p=-a\sin x+b\cos x$ $-a\sin x+b\cos x+a\cos x$ $+b\sin x=\cos x+\sin x$ $\begin{cases}-a+b=1\\a+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$ គេបាន $y_p=b\cos x$ ដូចនេះ $y=y_c+y_p$

		$y = Ae^{-x} + b\cos x$
-ដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្សធ្វើ	ជំហានទី៣ មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១** **៣.អនុវត្តន៍សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ** **៣.១.អនុវត្តន៍ក្នុងគីមីវិទ្យា** ឧទាហរណ៍:អ្នកវិទ្យាសាស្ត្របានសង្កេតឃើញថាចំនួនណ្វៃយ៉ូនៃសារធាតុវិទ្យុសកម្មត្រូវថយចុះទៅតាមរយ:ពេលដែលប្រើប្រាស់។គេដឹងថាល្បឿននៃការបំបែកណ្វៃយ៉ូនេះសមាមាត្រនឹងចំនួនណ្វៃយ៉ូដែលនៅសល់។តាង N_0 ជាចំនួនណ្វៃយ៉ូនៃធាតុវិទ្យុសកម្មដែលមាននៅខណ:ពេល $t = 0$ ។រកចំនួនណ្វៃយ៉ូដែលសល់ក្នុងរយ:ពេល t ជាអនុគមន៍នៃ t ។	-សិស្សឡើងធ្វើ -តាង k ជាមេគុណសមាមាត្រ N ជាចំនួនណ្វៃយ៉ូនៃសារធាតុវិទ្យុសកម្មដែលនៅសល់ក្នុងខណ:ពេល t ដោយល្បឿននៃការបំបែកណ្វៃយ៉ូសមាមាត្រនឹងចំនួនណ្វៃយ៉ូដែលនៅសល់នោះគេអាចសរសេរ: $\frac{dN}{dt} = -kN$ ដែលជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ $\frac{dN}{dt} = -kN \Rightarrow \frac{dN}{N} = -kdt$ $\int \frac{dN}{N} = -k\int dt$ $\ln\lvert N\rvert = -kt + c$ $\Rightarrow N = Ae^{-kt+c}$ (យក $A = \pm e^c$) $N(t) = Ae^{-kt}$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $N(0) = N_0$ គេបាន $N_0 = Ae^{-k(0)} \Rightarrow A = N_0$ $N(t) = N_0e^{-kt}$ ដូចនេះនៅខណ:ពេល t សារធាតុនៃវិទ្យុសកម្មនៅសល់ណ្វៃយ៉ូចំនួន N_0e^{-kt} ។

-លោកញ៉ូតុនបានរកឃើញថា អត្រាថយចុះនៃសីតុណ្ហភាព របស់វត្ថុមួយសមាមាត្រទៅនឹង ផលដករវាងសីតុណ្ហភាពវត្ថុនិង សីតុណ្ហភាពមជ្ឈដ្ឋានជុំវិញនោះ ច្បាប់នេះហៅថាច្បាប់ត្រជាក់ របស់ញូតុនដែលបកស្រាយ: $\frac{dT}{dt}=-k(T-M)$ -ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សធ្វើ	**៣.២.អនុវត្តន៍ក្នុងរូបវិទ្យា** ច្បាប់ត្រជាក់របស់ញ៉ូតុន $\frac{dT}{dt}=-k(T-M)$ ដែល T ជាសី តុណ្ហភាពវត្ថុ, M ជាសីតុណ្ហភាព មជ្ឈដ្ឋានជុំវិញ, k ជាមេគុណសមា មាត្រនិង t ជារយៈពេល។ ឧទាហរណ៍:នំដុតដែលគេទើប លើកចេញពីចង្រ្កានមានសីតុណ្ហ ភាព $120°C$ ។គេយកនំដុតនេះមក ដាក់ក្នុងបន្ទប់មួយមានសីតុណ្ហ ភាព $28°C$ ។គេឃើញថា៣នាទី ក្រោយមកសីតុណ្ហភាពនំធ្លាក់ នៅ $80°C$ ។ ក.សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដែលទាក់ទងទៅនឹងសីតុណ្ហភាព T របស់នំនៅខណៈពេល t និង លក្ខខណ្ឌដើមនៃចំណោទ។ ខ.គណនាសីតុណ្ហភាពនំនៅ ខណៈពេល t ។ គ.គណនារយៈពេលដែល សីតុណ្ហភាពនំថយចុះដល់ $30°C$	 -ក.អត្រាថយចុះនៃសីតុណ្ហ ភាពគឺ $-\frac{dT}{dt}$ ដោយអត្រាថយចុះនេះសមា មាត្រនឹងផលដករវាងសីតុណ្ហ ភាពនំនិងសីតុណ្ហភាពបរិយា កាសជុំវិញ នោះគេបានសមីការឌីផេរ៉ង់ ស្យែល: $-\frac{dT}{dt}=k(T-M)$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $T(0)=T_0=120°C$ ដោយ សីតុណ្ហភាព $M=28°C$ នោះ $\frac{dT}{dt}=-k(T-28), T(0)=120$ ខ.សីតុណ្ហភាពនំនៅខណៈ ពេល t $\frac{dT}{dt}=-k(T-28)$ ឬ $\frac{dT}{T-28}=-kdt$ $\ln\|T-28\|=-kt+c$ $T-28=\pm e^{-kt+c}=Ae^{-kt}$

ឧទាហរណ៍:គេសិក្សាពីកំនើននៃការបណ្តុះបាក់តេរីក្នុងមជ្ឈដ្ឋានមួយ។តាង $N(t)$ ជាអនុគមន៍នៃ t ជាចំនួនបាក់តេរីដែលមាននៅខណៈពេល t (t គិតជាម៉ោង)។គេដឹងថាចំនួនបាក់តេរីកើនឡើង 10% ក្នុងមួយម៉ោង។ ក.បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ t ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $N(t)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $N(t+1)-N(t)=0.1N(t)$	**៣.៣.អនុវត្តន៍ក្នុងជីវវិទ្យា** -ក.ដោយចំនួនបាក់តេរីមាន $N(t)$ នៅម៉ោង t ហើយកើនបាន 10% ក្នុងមួយម៉ោងនោះក្រោយមកចំនួនបាក់តេរីមាន $N(t+1)=N(t)+\frac{10}{100}N(t)$ $N(t+1)-N(t)=0.1N(t)$ ខ. $N'(t)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{N(t+1)-N(t)}{t+1-t}$ $N'(t)=0.1N(t)$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល	$T(t)=Ae^{-kt}+28$ ដោយ $T(0)=120$ $\Rightarrow 120=Ae^{-k(0)}+28$ $A=92$ $T(t)=92e^{-kt}+28$ ដោយ៣នាទីក្រោយសីតុណ្ហភាពនំថយចុះពី $120°C$ មក $80°C$ នោះគេបាន: $80=92e^{-k(3)}+28$ $e^{-3k}=\frac{52}{92}=\frac{13}{23}$ $-3k=\ln\frac{13}{23}$ $k=-\frac{1}{3}\ln\frac{13}{23}=0.19$ ដូចនេះ $T(t)=92e^{-0.19t}+28$ គ.រយៈពេលដែលសីតុណ្ហភាពថយចុះដល់ $30°C$ $30=92e^{-0.19t}+28$ $-0.19t=\ln(0.02173)$ $t=20$ នាទី 9 វិនាទី។ -ក.ដោយចំនួនបាក់តេរីមាន $N(t)$ នៅម៉ោង t ហើយកើនបាន 10% ក្នុងមួយម៉ោងនោះក្រោយមកចំនួនបាក់តេរីមាន $N(t+1)=N(t)+\frac{10}{100}N(t)$ $N(t+1)-N(t)=0.1N(t)$ ខ. $N'(t)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{N(t+1)-N(t)}{t+1-t}$ $N'(t)=0.1N(t)$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ខ.គេចាត់ទុកថា $N(t+1)-N(t)$ ខិតទៅរក $N'(t)$ ដែលជាដេរីវេនៃ N ។គណនាចំនួនបាក់តេរីនៅខណៈពេល $t=3h$ បើគេដឹងថាចំនួនបាក់តេរីនៅពេលចាប់ផ្តើមបណ្តុះមាន $N_0=10^4$ ។ -ដាក់ឧទាហរណ៍ឲ្យសិស្សធ្វើ ឧទាហរណ៍:លោកសារីបានសម្រេចចិត្តថានឹងឈប់ជក់បារីដើម្បីថែរក្សាសុខភាព និងធ្វើការសន្សំប្រាក់ឡើងវិញ។គាត់ជក់ក្នុងមួយថ្ងៃ២កញ្ចប់បើគិតជាប្រាក់គាត់ត្រូវចំណាយអស់៣ម៉ឺនរៀលក្នុងមួយសប្តាហ៍។ឧបមាគាត់បញ្ចូលប្រាក់នេះជារៀងរាល់សប្តាហ៍ក្នុងគណនីសន្សំនៃធនាគារនោះគាត់នឹងទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស10% ក្នុងមួយឆ្នាំ។តើគាត់ទទួលបានប្រាក់ទាំងការទាំងដើមប៉ុន្មាន បើគាត់ព្យាយាមផ្ញើរប្រាក់នេះចូលធានាគារក្នុងរយៈពេល៣០ឆ្នាំ។	$\frac{dN}{dt}=0.1N$ នាំឲ្យ $\frac{dN}{N}=0.1dt$ $\ln\|N\|=0.1t+c$ $N(t)=Ae^{0.1t}$ ដោយ $N(0)=N_0=10^4$ នោះ $10^4=Ae^{0.1(0)}\Rightarrow A=10^4$ $N(t)=10^4e^{0.1t}$ $t=3:N(3)=10^4e^{0.3}=13498$ បាក់តេរី។ **៣.៤.អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច** -បើ S ជាទឹកប្រាក់ដែលមានក្នុងឆ្នាំ t ហើយអត្រាការប្រាក់ 10% ក្នុង១ឆ្នាំនោះកំណើនទឹកប្រាក់ក្នុងឆ្នាំនោះគឺ $\frac{dS}{dt}=\frac{10}{100}S$ បើនៅពេលនោះគេបន្ថែមទឹកប្រាក់ d ទៀតនោះកំណើនទឹកប្រាក់គឺ $\frac{dS}{dt}=0.1S+d$ ឬ $\frac{dS}{dt}-0.1S=d$ ដោយក្នុង១សប្តាហ៍លោកសារីសន្សំបាន៣ម៉ឺនរៀលនោះក្នុង១ឆ្នាំគាត់សន្សំបាន: $3\times52=156$ ម៉ឺនរៀល គេបាន $\frac{dS}{dt}-0.1S=156$ ម៉ឺនរៀលជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានចម្លើយជាអនុគមន៍ $S(t)$ ជាចំនួនទឹកប្រាក់ដែលមានក្នុងធានាគារនៅខណៈពេល t	$\frac{dN}{dt}=0.1N$ នាំឲ្យ $\frac{dN}{N}=0.1dt$ $\ln\|N\|=0.1t+c$ $N(t)=Ae^{0.1t}$ ដោយ $N(0)=N_0=10^4$ នោះ $10^4=Ae^{0.1(0)}\Rightarrow A=10^4$ $N(t)=10^4e^{0.1t}$ $t=3:N(3)=10^4e^{0.3}=13498$ បាក់តេរី។ -បើ S ជាទឹកប្រាក់ដែលមានក្នុងឆ្នាំ t ហើយអត្រាការប្រាក់ 10% ក្នុង១ឆ្នាំនោះកំណើនទឹកប្រាក់ក្នុងឆ្នាំនោះគឺ $\frac{dS}{dt}=\frac{10}{100}S$ បើនៅពេលនោះគេបន្ថែមទឹកប្រាក់ d ទៀតនោះកំណើនទឹកប្រាក់គឺ $\frac{dS}{dt}=0.1S+d$ ឬ $\frac{dS}{dt}-0.1S=d$ ដោយក្នុង១សប្តាហ៍លោកសារីសន្សំបាន៣ម៉ឺនរៀលនោះក្នុង១ឆ្នាំគាត់សន្សំបាន: $3\times52=156$ ម៉ឺនរៀល គេបាន $\frac{dS}{dt}-0.1S=156$ ម៉ឺនរៀលជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានចម្លើយជាអនុគមន៍ $S(t)$ ជាចំនួនទឹកប្រាក់ដែលមានក្នុងធានាគារនៅខណៈពេល t

	$\frac{dS}{dt}-0.1S=156(1)$ សមីការ $\frac{dS}{dt}-0.1S=0$ មានចម្លើយ $S'(t)=Ae^{0.1t}$ ធ្វើបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ A គេបាន $S'(t)=A'(x)e^{0.1t}+0.1A(x)e^{0.1t}$ $(1): A'(x)e^{0.1t}+0.1A(x)$ $-0.1A(x)e^{0.1t}=156$ $A'(x)=e^{0.1t}\cdot 156$ $A(x)=156\int e^{-0.1t}dt$ $=-1560e^{-0.1t}+c$ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (i) គឺ $S(t)=-1560+ce^{0.1t}$ ដោយនៅឆ្នាំដំបូងប្រាក់ដើមរបស់លោកសារីគ្មាននោះ $S(O)=0$ $S(O)=-1560+ce^{0.1(0)}$ $0=-1560+c$ នាំឲ្យ $c=1560$ ដូចនេះ $S(t)=1560e^{0.1t}-1560$ 30 ឆ្នាំក្រោយមកលោកសារីមានប្រាក់ចំនួន $S(30)=1560e^{0.1(30)}-1560$ $=29773.4376$ ម៉ឺនរៀល	$\frac{dS}{dt}-0.1S=156(1)$ សមីការ $\frac{dS}{dt}-0.1S=0$ មានចម្លើយ $S'(t)=Ae^{0.1t}$ ធ្វើបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ A គេបាន $S'(t)=A'(x)e^{0.1t}+0.1A(x)e^{0.1t}$ $(1): A'(x)e^{0.1t}+0.1A(x)$ $-0.1A(x)e^{0.1t}=156$ $A'(x)=e^{0.1t}\cdot 156$ $A(x)=156\int e^{-0.1t}dt$ $=-1560e^{-0.1t}+c$ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (i) គឺ $S(t)=-1560+ce^{0.1t}$ ដោយនៅឆ្នាំដំបូងប្រាក់ដើមរបស់លោកសារីគ្មាននោះ $S(O)=0$ $S(O)=-1560+ce^{0.1(0)}$ $0=-1560+c$ នាំឲ្យ $c=1560$ ដូចនេះ $S(t)=1560e^{0.1t}-1560$ 30 ឆ្នាំក្រោយមកលោកសារីមានប្រាក់ចំនួន $S(30)=1560e^{0.1(30)}-1560$ $=29773.4376$ ម៉ឺនរៀល
-តើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលបានអនុវត្តន៍ក្នុងអ្វីខ្លះ?	ជំហានទី៤ ពង្រឹងពុទ្ធិ	-សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលបានអនុវត្តន៍ក្នុងគីមីវិទ្យា រូបវិទ្យា ជីវវិទ្យា សេដ្ឋកិច្ច...។

-ទៅផ្ទះវិញធ្វើលំហាត់លេខ១១ ទំព័រ១១១	ជំហានទី៥ បណ្តាំផ្ញើ លំហាត់លេខ១១ទំព័រ១១១	-កត់ចំណាំយកទៅអនុវត្តន៍

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)
ជំពូកទី៥ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល
មេរៀនទី២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី២

I. វត្ថុបំណង

- ចំនេះដឹង : ក្រោយពីរៀនចំមេរៀននេះសិស្សអាចរៀបរាប់ពីបាតុភូតធម្មជាតិ និង វិទ្យាសាស្ត្រខ្លះៗជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍
- ចំនេះធ្វើ : សិស្សដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍
- ឥរិយាបថ : សិស្សមានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II. ខ្លឹមសារមេរៀន

4. អនុវត្តនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ

ក. ចលនាគ្មានកំលាំងកកិត

ខ. ចលនាមានកំលាំងកកិត

III. សម្ភារៈឧបទេស

- ស.ស ទំព័រ 125 ដល់ 128 បោះពុម្ពឆ្នាំ2010
- ស.គ

IV. លំនាំនៃការបង្រៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិ-ស្ស
គ្រូត្រួតពិនិត្យវត្តមាន និងអនាម័យថ្នាក់រៀន	ជំហ៊ានទី1 : 3នាទី	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
គ្រូដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្សដោះស្រាយ	ជំហ៊ានទី2 (រំលឹកមេរៀនចាស់) 10នាទី លំហាត់: ដោះស្រាយសមីការ : $y'''+y''-4y=0$ គេបានសមីការសំគាល់ $r^3-3r^2-4=0$ $(r-1)(r^2+4r+4)$ $=(r-1)(r+2)^2$	សិស្សដោះស្រាយលំហាត់លើក្តារខៀន ចំលើយទូទៅគឺ $y=Ae^x+Be^{-2x}+Cxe^{-2x}$

	$\Rightarrow r_1=1, r_2=r_3=-2$ ចំលើយទូទៅគឺ $y=Ae^{x}+Be^{-2x}+Cxe^{-2x}$	
គ្រូណែនាំឲ្យ សិស្សមើល សៀវភៅពុម្ព ត្រង់ទំព័រ 125 ហើយពន្យល់ណែនាំសិស្ស គ្រូដាក់លំហាត់ គំរូណែនាំពន្យល់ សិស្សពីរបៀបដោះស្រាយ	ជំហ៊ានទី3(មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ) 70នាទី **4. អនុវត្តនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ** **ក. ចលនាគ្មានកំលាំងកកិត** បើគេថ្លក់វត្ថុមួយមានម៉ាស m នៅខាងក្នុងរ៉ឺស័រដែលគេចងភ្ជាប់នឹងរបារមួយ (ដូចរូប) នោះគេឃើញរ៉ឺស័រលូតបានប្រវែង S ។ តាមកូនលក្ខខណ្ឌលំនឹង mg=ks រឺ mg-ks=0 បើម៉ាសត្រូវបានជំនួសដោយ x ចេញ ពីទីតាំងលំនឹង ហើយភ្ជាប់ដោយកំលាំង ថ្មី នោះនៅក្នុងច្បាប់ទី2 ញូតុន F=ma ដែល a ជាសំទុះ $a=\frac{d^2x}{dt^2}$ តាមច្បាប់ហុក : $ma=-k(s+x)+mg$ $ma=-ks-ks+mg$ តែ $mg=ks$ $\Rightarrow ma=-kx \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}+ks=0$ រឺ $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$ តាង $\frac{k}{m}=c^2$ គេបាន $\frac{d^2x}{dt^2}+c^2x=0$	សិស្សមើល សៀវភៅពុម្ព ត្រង់ទំព័រ125 ហើយស្តាប់គ្រូពន្យល់ សិស្សគិតដោះស្រាយលំហាត់ ដោយមានណែនាំពន្យល់ពីគ្រូ សិស្សស្តាប់ គ្រូពន្យល់ និង

គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិ ឲ្យសិស្សធ្វើលើ ក្តារខៀន	ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់2 អូម៉ូសែននិងមានមេគុណថេរ រឺ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃ ចលនាសេរី ។ **លំហាត់:** បើគេព្យួរវត្ថុមានម៉ាស m=1kg នៅចុងនៃរ៉ឺស័រនោះ រ៉ឺស័រលូត បានប្រវែង 0.20m ។ នៅខណ: t=0 គេឲ្យវត្ថុស្ថិតនៅខាងក្រោមទីតាំងលំនឹងចម្ងាយ 0.40m ។ បន្ទាប់មកគេ លែងវត្ថុឲ្យរត់ឡើងលើដោយល្បឿន 0.70m/s ។ រកសមីការនៃចលនាសេរីនេះ ។ ដោយ m = 1kg ធ្វើឲ្យរ៉ឺស័រយឺតបាន 0.20m នោះគេបាន $mg = ks$ $\Rightarrow k = \frac{mg}{s} = \frac{1\times 9.8}{0.20}$ $= 49N.m$ ដោយចលនានេះគ្មានកំលាំងកកិត គេបាន $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{49}{1}x$ រឺ $x''+49x=0$ សមីការសំគាល់ $r^2+49=0\Rightarrow r=\pm 7i$ ចម្លើយទូទៅ $x(t)=A\cos 7t+B\sin 7t$ ដោយខណ: $t=0\Rightarrow x(0)=0.40$	កត់ត្រា សិស្សធ្វើលំហាត់ ប្រតិបត្តិ លើក្តារខៀន $x(t)=-\frac{1}{4}\cos\sqrt{96t}$ សិស្សមើល សៀវភៅពុម្ព

គ្រូឲ្យសិស្ស មើលសៀវភៅ ពុម្ពទំព័រ127 ហើយពន្យល់ ណែនាំសិស្ស	ហើយ $x'(0) = -0.70$ យើងបាន $x(0) = 0.40 \Rightarrow A = 0.40$ $x'(t) = -7A\sin 7t + 7B\sin 7t$ $x'(0) = -0.70 = 7B$ $\Rightarrow B = -\frac{1}{10}$ ដូចនេះ សមីការនៃចលនាសេរីគឺ $x(t) = \frac{2}{5}\cos 7t - \frac{1}{10}\sin 7t$	ទំព័រ127 និង ស្តាប់ការពន្យល់ របស់គ្រូ សិស្សស្តាប់ និង កត់ត្រា សិស្សធ្វើលំហាត់លើ ក្តារខៀនតាម រយៈសៀវភៅ ពុម្ព និង ការ ណែនាំរបស់គ្រូ
គ្រូដាក់លំហាត់ ឲ្យសិស្សធ្វើលើ ក្តារខៀន	ប្រតិបត្តិ វត្ថុមានម៉ាស m=0.75kg ត្រូវព្យួរនៅ ចុងរ៉ឺស័រក្នុងមជ្ឈដ្ឋានមួយដែលមាន សំទុះទំនាញផែនដី $g = 9.6m/s^2$ ពេលនោះរ៉ឺស័រលូតបានប្រវែង 0.1m ។ រកសមីការនៃចលនារបស់វត្ថុ បើវត្ថុនោះត្រូវគេលែងចេញពីទីតាំងមួយនៅខាងលើ ទីតាំងលំនឹងចម្ងាយ 0.25m ដោយ m=0.75kg ធ្វើឲ្យរ៉ឺស័រលូតបាន 0.1m នោះតាមច្បាប់ហុកគេបាន mg=ks $\Rightarrow k = \frac{mg}{s} = \frac{0.75\times 9.6}{0.1}$ $= 72N.m$ ដោយចលនានេះគ្មានកំលាំងកកិត	សិស្សសរសេរ លំហាត់ចូល សៀវភៅ និង ស្តាប់គ្រូ $x(t) = -\frac{9}{10}te^{-4t}$

	$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$ $\Leftrightarrow x^{''}+\frac{72}{0.75}x=0$ $\Rightarrow x^{''}+96x=0$ ដោយរ៉ឺស័រលែងចេញខាងលើទីតាំងលំនឹង $0.25m \Rightarrow x(0)=-0.25$ $, x^{'}(0)=0$ សមីការសំគាល់ $r^2+96=0 \Rightarrow r=i\sqrt{96}$ ចម្លើយទូទៅ $x(t)=A\cos\sqrt{96t}$ $+B\sin\sqrt{96t}$ $x(0)=-0.25 \Rightarrow A=0.25$ $x^{'}(t)=-A\sqrt{96}\sin\sqrt{96t}$ $+B\sqrt{96}\cos\sqrt{96t}$ $x^{'}(0)=0 \Rightarrow B=0$ គេបាន $x(t)=-\frac{1}{4}\cos\sqrt{96t}$ **ខ. ចលនាមានកំលាំងកកិត** បើប្រព័ន្ធចលនានៃវត្ថុស្ថិតនៅមជ្ឈដ្ឋាន ដែលមានកំលាំងកកិតនោះគេដឹងថាកំលាំងកកិតសមាមាត្រនឹងល្បឿននៃចលនា ។ កំលាំងកកិតគិតពី μv ដែល μ ជាមេគុណសមាមាត្រនឹង v ជាល្បឿន $v=\frac{dx}{dt}$ តាមច្បាប់ទី2ញូតុននិងហុក គេបាន : $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\mu v$ $\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$	

	លំហាត់ : បើគេព្យួរម៉ាស m=0.25kg នៅចុងនៃ រ៉ឺស័រ លូតបានប្រវែង 61cm ។ ក្នុងទីតាំងលំនឹងគេប្រើកំលាំងឲ្យម៉ាសរត់ទៅលើ ដោយល្បឿនដើម 0.9m/s គេសន្មត់ថាក្នុងប្រព័ន្ធចលនានេះមាន កំលាំងកកិត 2ដងនៃ $g=9.76m/s^2$ ។ រកសមីការ បំលាស់ទី $x(t)$ តាមច្បាប់ហុក $mg=ks\Rightarrow k=\frac{mg}{s}$ $k=\frac{0.25\times9.76}{0.61}=4N.m$ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃចលនានេះគឺ : $0.25\frac{d^2x}{dt^2}=-4x-2\frac{dx}{dt}$ $\Leftrightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+8\frac{dx}{dt}+16x=0$ គេមានលក្ខខណ្ឌដើម $x(0)=0,x'(0)=-0.9$ សមីការសំគាល់ $r^2+8r+16=0$ $\Rightarrow r_1=r_2=-4$ ចម្លើយទូទៅ $x(t)=Ae^{-4t}+Bte^{-4t}$ $x(0)=0\Rightarrow A=0$ $x'(t)=-4Ae^{-4t}+Be^{-4t}-4Bte^{-4t}$ $x'(0)=-0.9\Rightarrow-0.9=-4A+B$ $\Leftrightarrow B=-0.9$ ដូចនេះ $x(t)=-\frac{9}{10}te^{-4t}$	
គ្រូដាក់លំហាត់ ឲ្យសិស្សធ្វើក្នុងសៀវភៅរៀងៗខ្លួន	ជំហានទី4 (ពង្រឹងពុទ្ធិ)7នាទី **លំហាត់** :	សិស្សធ្វើ លំហាត់ក្នុងសៀវភៅរួច ឡើងកែលើ

	ដោះស្រាយសមីការនិង បកស្រាយ បញ្ហាលក្ខខណ្ឌដើមខាងក្រោម : $\frac{d^2x}{dt^2}+16x=0, x(0)=10, x'(0)$ គេបានសមីការសំគាល់ $r^2+16=0 \Rightarrow r=\pm 4i$ ចំលើយទូទៅ $x(t)=A\cos 4t+B\sin 4t$ $x(0)=10 \Rightarrow A=10$ $x'(t)=-4A\sin 4t+4B\cos 4t$ $x'(0)=0 \Rightarrow 4B=0 \Rightarrow B=0$ ដូចនេះ $x(t)=10\cos 4t$	ក្តារខៀន $x(t)=10\cos 4t$
ពេលប្អូនទៅ ផ្ទះវិញធ្វើ លំហាត់ ប្រតិ-បត្តិទំព័រ128	ជំហ៊ានទី5 (បណ្តាំផ្ញើរ)3នាទី លំហាត់ប្រតិបត្តិទំព័រទី128	សិស្សស្តាប់គ្រូ និង កត់ចំណាំ លេខទំព័រ128

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)
ជំពូកទី៥ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល
មេរៀនទី២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី២

I. **វត្ថុបំណង** : ក្រោយពីរៀនចប់សិស្សអាច :

- សិស្សស្គាល់រាងទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលរាង $y''+by'+c=p(x)$
- សិស្សអាចដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលរាង $y''+by'+c=p(x)$ បាន

II. **រយៈពេល** : 2ម៉ោង ថ្ងៃទី.........ខែ......ឆ្នាំ......

III. **សំភារៈឧបទ្ទេស** :

- ស.ស ទំព័រទី .... ដល់..... បោះពុម្ពឆ្នាំ2010
- ស.គ ទំព័រទី.....ដល់......
- បន្ទាត់ឈើ

IV. **សកម្មភាពបង្រៀន** :

សកម្មភាពគ្រូ	**ខ្លឹមសារមេរៀន**	**សកម្មភាពសិស្ស**
គ្រូពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	**ជំហ៊ានទី1 (លំនឹងថ្នាក់)** 3នាទី	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
គ្រូនិយាយ និង សរសេរលើក្តារខៀន ព្រមទាំងសួរ សិស្ស ខ្លះផង	**ជំហ៊ានទី2 (រំលឹកមេរៀនចាស់)** 7នាទី សមីការអូម៉ូសែនរាង $y''+by'+cy=0$ នោះសមីការ សំគាល់គឺ : $r^2+br+c=0$ - បើ $\Delta>0$: សមីការមានរឹសពីរ គឺ r_1,r_2 ផ្សេងគ្នា $\Rightarrow y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$ - បើ $\Delta=0$:សមីការមានរឹសឌុប គឺ r_0 $\Rightarrow y=(Ax+B)e^{r_0x}$ - $\Delta<0$: សមីការមានរឹសជា	សិស្សពិនិត្យមើលសកម្មភាពបកស្រាយរបស់គ្រូ

	កុំផ្លិចឆ្លាស់គឺ $r=\alpha\pm i\beta$ $\Rightarrow y=\left(A\cos\beta x+B\sin\beta x\right)e^{\alpha x}$	
+ គ្រូ សរសេរ មេរៀនថ្មី +យើងពិនិត្យមើល សមីការមិនអូម៉ូសែនគឺមានរាង $y''+by'+cy=p(x)$ +តើគេអាចស្រាយសមីការបែបនេះដូចម្ដេច? + ចូរពិនិត្យ Ex ដោះស្រាយសមីការ $y''-y=e^{x}\quad(E)$ +តាង $Z=y'-y$ គេបាន	ជំហ៊ានទី3(មេរៀនថ្មី)70នាទី **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ លំដាប់2(ត)** **3. ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់2 មិនអូម៉ូសែន និងមានមេគុណថេរ** សមីការមានរាងទូទៅគឺ : $y''+by'+cy=p(x)$ **3.1 វិធីដោះស្រាយសមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ លំដាប់2មិនអូម៉ូសែន** $y''+by'+cy=p(x)$ Ex : ដោះស្រាយសមីការ $y''-y=e^{x}\quad(E)$ **ចម្លើយ** $(E)\Leftrightarrow(y'-y)'+(y'-y)=e^{x}$ តាង $Z=(y'-y)\quad(1)$ នោះគេបាន • ដោះស្រាយសមីការ(1): $Z'+Z=e^{x}$ i. សមីការអូម៉ូសែនគឺ $Z'+Z=e^{x}$ $\Rightarrow Z_c=Ke^{-x}\ ,\ K\in\mathbb{R}$ ii. ចម្លើយពិសេសរាង $Z_p=e^{-x}K(x)$	+ សិស្ស កត់ត្រា + សិស្ស សង្កេត និង កត់ត្រា + សិស្ស សង្កេត និង កត់ត្រា + សិស្សសង្កេត + សិស្សពិភាក្សា ជា4ក្រុម

$Z=Be^{-x}+\frac{e^x}{2}$ នោះ $y'-y=Be^{-x}+\frac{e^x}{2}$ តើគេអាចដោះស្រាយសមីការនេះ យ៉ាងដូចម្តេច? + គ្រូសរសេរលំហាត់លើក្តារខៀនរួចឲ្យសិស្សគិតពិភាក្សាជាគូៗរួចគ្រូហៅម្នាក់ឲ្យឡើងក្តារខៀន	$\Rightarrow Z'_p=e^{-x}K'(x)-e^{-x}K(x)$ $(1)\Rightarrow e^{-x}K'(x)-e^{-x}K(x)$ $+e^{-x}K(x)=e^x$ $\Rightarrow K'(x)=e^{2x}$ $\Rightarrow K(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow Z_p=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)\ ,\ c\in\mathbb{R}$ ដូចនេះ $Z=Z_c+Z_p$ $=Ke^{-x}+ce^{-x}+\frac{e^x}{2}$ $=Be^{-x}+\frac{e^x}{2}\ ,(B=K+c)\in\mathbb{R}$ នោះ $y'-y=Be^{-x}+\frac{e^x}{2}\quad(2)$ • ដោះស្រាយសមីការ(2): $y'-y=Be^{-x}+\frac{e^x}{2}$ $\Rightarrow e^{-x}y'-e^{-x}y=Be^{-2x}+\frac{1}{2}$ $\Rightarrow\left(e^{-x}y\right)'=Be^{-2x}+\frac{1}{2}$ $\Rightarrow e^{-x}y=-\frac{Be^{-2x}}{2}+\frac{x}{2}+c_1$ $\Rightarrow y=-\frac{Be^{-2x}}{2}+\frac{xe^x}{2}+c_1e^x$ **លំហាត់** ដោះស្រាយសមីការ $y''-y=xe^x\quad(E)$ **ចម្លើយ** $(E)\Leftrightarrow\left(y'-y\right)'+\left(y'-y\right)=xe^x$ តាង $Z=\left(y'-y\right)\quad(*)$ $\Rightarrow Z'+Z=xe^x$ • ដោះស្រាយសមីការ $Z'+Z=xe^x\quad(**)$ i. សមីការអូម៉ូសែន $Z'+Z=0$ $\Rightarrow Z_c=Ke^{-x}\ ,\ K\in\mathbb{R}$	+ សិស្ស ធ្វើដាក់លើ ក្រដាសព្រៀងរួច ឡើងធ្វើលើក្តារខៀន

+ ពីមុនសមីការ $y'+ay=p(x)$ => ចំ.ទូទៅ= ចំ.ពិសេស+ចំ.អូម៉ូសែន តើចំពោះសមីការ $y'+ay=p(x)$ ចំ.ទូទៅ=? + តើគេរកចំលើយពិសេសយ៉ាងដូចម្តេច? + ទេមិនដូចគ្នាទេ ព្រោះវាមានសមីការសំគាល់ ដែលធ្វើឲ្យ ចំ.អូម៉ូសែន មានរាងតែបីទេ + ឲ្យសិស្សគិត3នាទី រួចហៅឡើងធ្វើលំហាត់	ii. ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (**)មានរាង $Z_p=e^{-x}g(x)$ $\Rightarrow Z'_p=e^{-x}g'(x)-e^{-x}g(x)$ គេបាន $(**):e^{-x}g'(x)-e^{-x}g(x)$ $+e^{-x}g(x)=xe^{x}$ $\Rightarrow g'(x)=xe^{2x}$ $\Rightarrow g(x)=\frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+c_1$, $c_1\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow Z_p=\frac{e^{x}}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+c_1e^{-x}$, $c_1\in\mathbb{R}$ ដូចនេះ $Z=Z_c+Z_p$ $=Ke^{-x}+c_1e^{-x}+\frac{e^x}{4}(2x-1)$ $=ce^{-x}+\frac{e^x}{4}(2x-1)$ នោះ $y'-y=ce^{-x}+\frac{e^x}{4}(2x-1)$ $\Rightarrow (e^{-x}y)'=ce^{-2x}+\frac{1}{4}(2x-1)$ $\Rightarrow e^{-x}y=-ce^{-2x}+\frac{1}{4}(2x-1)$ $+A,\ \ A\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow y=-\frac{c}{2}e^{-x}+\frac{e^x}{4}(x^2-x)$ $+Ae^{x}$ **3.2 វិធីដោះស្រាយតាមការស្វែងរកចម្លើយពិសេសមិនអូម៉ូសែន** ចំ.ទូទៅ=ចំ.ពិសេស+ចំ.អូម៉ូសែន Ex : ដោះស្រាយសមីការ $y''-y=e^{x}\ (E)$	+ ចំ.ពិ សេស គឺ អាស្រ័យលើ ចំ.អូម៉ូសែន Ex : $y=Ke^{x}$ $\Rightarrow y_p=e^{x}g(x)$ ដែលគេត្រូវរក $g(x)$ + ចំពោះ សមីការ $y''+by'+cy=p(x)$ ក៏ដូចគ្នាដែរ + កត់ត្រា និងសួរ

+ ចម្លើយពិសេសរាង $y_p = a\sin x + b\cos x$ ព្រោះដេរីវេអាចចេញជា $\sin x$ រឺ $\cos x$ ដែលគេទូទាត់នៅសល់ $\sin x$ នោះ !	+ សមីការអូម៉ូសែនរាង $y''-y=0$ សមីការសំគាល់គឺ $r^2-1=0 \Rightarrow r=\pm 1$ $\Rightarrow y = Ae^{-x}+Be^{x}\ ,(A,B\in\mathbb{R})$ + ចំលើយពិសេសរាង $y = axe^x$ $\Rightarrow y_p' = ae^x + axe^x$ $= ae^x(x+1)$ $\Rightarrow y_p'' = ae^x + ae^x(x+1)$ $= ae^x(x+2)$ $(E) :\Rightarrow ae^x(x+2) - axe^x = e^x$ $\Rightarrow ax + 2a - ax = 1$ $\Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p = \frac{xe^x}{2}$ ដូចនេះ $y = y_c + y_p = Ae^{-x} + Be^x + \frac{xe^x}{2}$ **លំហាត់** ដោះស្រាយសមីការ $y''-2y'+y=\sin x \qquad (E)$ ។ **ចម្លើយ** + សមីការអូម៉ូសែនគឺ $y''-2y'+y=0$ សមីការសំគាល់គឺ $r^2-2r+1=0$ $\Rightarrow r_0 = 1 \Rightarrow y_c = (Ax+B)e^x,\ (A$ + ចម្លើយពិសេសរាង $y_p = a\sin x + b\cos x$ $\Rightarrow y_p' = a\cos x - b\sin x$ $\Rightarrow y_p'' = -a\sin x - b\cos x$ នោះគេបាន :	

	$(E)\Rightarrow -a\sin x-b\cos x$ $-2\left(a\cos x-b\sin x\right)$ $+a\cos x+b\sin x=\sin x$ $\Rightarrow 2b\sin x-2a\cos x=\sin x$ $\Rightarrow b=\frac{1}{2}\ ,\ a=0$ $\Rightarrow y_p=\frac{1}{2}\cos x$ ដូចនេះ $y=y_c+y_p$ $=(Ax+B)e^x+\frac{1}{2}\cos x$	
+ គ្រូសួរ :	**ជំហ៊ានទី4 (ពង្រឹងពុទ្ធិ)**7នាទី + ប្រើអថេរជំនួយដោយតាងZ +ចំ.ទូទៅ=ចំ.ពិសេស+ចំ.អូម៉ូសែន	+ សិស្សឆ្លើយ :
+ គ្រូដាក់ លំហាត់ឲ្យសិស្សធ្វើនៅ ផ្ទះ	**ជំហ៊ានទី5 (បណ្តាំផ្ញើរ)** 3នាទី ដោះស្រាយសមីការ ក. $y''-\sqrt{3}y'-y=2x+1$ ខ. $y''+y'+y=\left(x-1\right)e^x$	+សិស្សកត់ត្រា លំហាត់ដោយយក ចិត្តទុកដាក់

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)
ជំពូកទី៥ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល
មេរៀនទី២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី២

I. វត្ថុបំណង : ក្រោយពីរៀនចប់សិស្សអាច :
- កំណត់សញ្ញាណសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2
- កំណត់សមីការសំគាល់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2អូម៉ូសែន

II. រយះពេល : 2ម៉ោង ថ្ងៃទី.........ខែ......ឆ្នាំ......

III. សំភារ:ឧបទ្ទេស :
- ស.ស ទំព័រទី .... ដល់..... បោះពុម្ពឆ្នាំ2010
- ស.គ ទំព័រទី.....ដល់......
- បន្ទាត់ឈើ

IV. សកម្មភាពបង្រៀន :

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
គ្រូពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	**ជំហ៊ានទី1 (លំនឹងថ្នាក់)** 3នាទី	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរសំនួរ និង ដាក់លំហាត់ 1, ដូចម្តេចហៅថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី1? 2, បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y=\sin x+\cos x$ ជាចំលើយនៃសមីការ $y'+y=2\cos x$	**ជំហ៊ានទី2** **(រំលឹកមេរៀនចាស់)7នាទី** 1, សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ លំដាប់ទី1 ជាទំនាក់ទំនងរវាង អនុគមន៍ ដេរីវេទី1របស់អនុគមន៍ នេះ អថេរ និង ចំនួនអថេរ ។ 2, បង្ហាញថា $y=\sin x+\cos x$ ជា **ចម្លើយនៃ** $y'+y=2\cos x$ គេមាន $y=\sin x+\cos x$ $\Rightarrow y'=\cos x-\sin x$ គេបាន	ចម្លើយរបស់សិស្ស

	$y'+y=\cos x-\sin x+\sin x$ $+\cos x$ $=2\cos x$ ដូចនេះ $y=\sin x+\cos x$ ជាគូចម្លើយនៃ $y'+y=2\cos x$	
 + គ្រូ សរសេរ មេរៀនថ្មី + គ្រូឲ្យសិស្សសង្កេត Ex គេមានអនុគមន៍ $f_1(x)$ និង $f_2(x)$ ដែល កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f_1(x)=e^{-x}$ និង $f_2(x)=e^{3x}$ +ឲ្យសិស្សរកចម្លើយ ក, គណនាដេរីវេទី1 និង ដេរីវេទី2 នៃអនុគមន៍ f_1 និង f_2 ខ, ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ ចំនួនពិត x $f_1''(x)-2f_1'(x)-3f_1(x)=0$ និង $f_2''(x)-2f_2'(x)-3f_2(x)=0$ គ, បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $y''-2y'-3y=0$ ចំពោះគ្រប់ c_1 និង c_2 +គ្រូឲ្យសិស្សសាកល្បង	ជំហ៊ានទី3(មេរៀនថ្មី)70នាទី **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ លំដាប់**2(**ត**) 1. **សមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី**2 .សមីការ $f_1''(x)-2f_1'(x)-3f_1(x)=0$ និង $f_2''(x)-2f_2'(x)-3f_2(x)=0$ អាចសរសេរជាសមីការ $y''-2y'-3y=0$ ហៅថាសមីការ លីនេអ៊ែ លំដាប់ ទី2អូម៉ូសែន និង មានមេគុណថេរ (1,-2,-3) .ដោយអនុគមន៍ $f_1(x),f_2(x)$ ដែលមានដេរីវេទី1 $f_1'(x),f_2'(x)$ និងដេរីវេទី2 $f_1''(x),f_2''(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ សមីការ $y''-2y'-3y=0$ នោះគេថា $f_1(x),f_2(x)$ ជា ចម្លើយគោលនៃសមីការនេះ .ដោយអនុគមន៍ $y=c_1f_1+c_2f_2$ និងដេរីវេទី1 និង ទី2នៃ អនុគមន៍នេះផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $y''-2y'-3y=0$	 ចម្លើយ ក, $f_1(x)=e^{-x}$ $\Rightarrow f_1'(x)=-e^{-x}$ $\Rightarrow f_1''(x)=e^{-x}$ $f_2(x)=e^{3x}$ $\Rightarrow f_2'(x)=3e^{3x}$ $\Rightarrow f_2''(x)=9e^{3x}$ ខ, $f_1''(x)-2f_1'(x)-3f_1(x)$ $=e^{-x}+2e^{-x}-3e^{-x}=0$ $f_2''(x)-2f_2'(x)-3f_2(x)$ $=9e^{3x}-6e^{3x}-3e^{3x}=0$ គ, $y=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ $\Rightarrow y'=c_1f_1'(x)+c_2f_2'(x)$ $\Rightarrow y''=c_1f_1''(x)+c_2f_2''(x)$ $\Rightarrow y''-2y'-3y=$ $c_1f_1''(x)+c_2f_2''(x)$ $-2\left[c_1f_1'(x)+c_2f_2'(x)\right]$ $3\left[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\right]$ $=c_1\times 0+c_2\times 0=0$ ដូចនេះ $y=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $y''-2y'-3y=0$ +ចំលើយសិស្ស

កំណត់និយមន័យរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2 អូម៉ូសែន	ចំពោះគ្រប់ចំនួនថេរ c_1 និង c_2 នោះគេថាអនុគមន៍ $y=c_1f_1+c_2f_2$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការនេះ **<u>និយមន័យ</u>** សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែ លំដាប់ទី2អូម៉ូសែន និងមានមេ គុណថេរជាសមីការដែលអាច សរសេរជារាងទូទៅ $ay''+by'+cy=0$ ដែល a,b,c ជាចំនួនពិត $a\neq 0$ ។ **<u>ចំណាំ</u>** ដើម្បីងាយស្រួលដោះស្រាយ $ay''+by'+cy=0$ ដែល មេគុណ $y''=1$ ។ ការដោះស្រាយសមីការនេះគឺ រកគ្រប់អនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ សមីការ ។	
+ គ្រូដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្ស ពិភាក្សាជាក្រុមរួចឡើងធ្វើ ចំលើយនៅលើក្ដារខៀន **លំហាត់:** ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ជាចំលើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលគេឲ្យនៅខាងស្ដាំ ក, $f(x)=(2x+1)e^{-x}$, $y''+2y'+y=0$	ជំហានទី4 (ពង្រឹងពុទ្ធិ)7នាទី ចម្លើយ **ក,**	

ខ, $f(x)=e^{-x}\sin x$, $y''+2y'+2y=0$	$f(x)=(2x+1)e^{-x}$ $\Rightarrow f'(x)=-(2x+1)e^{-x}+2e^{-x}$ $=(1-2x)e^{-x}$ $\Rightarrow f''(x)=-(1-2x)e^{-x}-2e^{-x}$ $=(2x-3)e^{-x}$ គេបាន $f''(x)+2f'(x)+f(x)$ $=\left[(2x-3)e^{-x}+2(1-2x)e^{-x}\right.$ $\left.+(2x+1)e^{-x}\right]$ $=(2x-3-4x+2+2x+1)e^{-x}$ $=0$ ខ, គេមាន $f(x)=e^{-x}\sin x$ $\Rightarrow f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$ $\Rightarrow f''(x)=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$ $-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$ $=-2e^{-x}\cos x$ គេបាន $f''(x)+2f'(x)+f(x)$ $=-2e^{-x}\cos x+2\left(-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x\right)$ $+2e^{-x}\sin x$ $=-2e^{-x}\cos x-2-e^{-x}\sin x+2e^{-x}\cos x$ $+2e^{-x}\sin x$ $=0$ ដូចនេះ $f(x)=e^{-x}\sin x$ ជាចម្លើយនៃ $y''+2y'+2y=0$	+ ចំលើយសិស្ស :
+ គ្រូដាក់កិច្ចការផ្ទះឲ្យសិស្សធ្វើ លំហាត់: ក, បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)=Ae^{x}+Bxe^{x}$ ជាចំលើយនៃសមីការ $y''-2y'+y=0$ ដែល	ជំហ៊ានទី5 (បណ្តាំផ្ញើរ) 3នាទី	+សិស្សកត់ត្រា លំហាត់ ដោយយក ចិត្តទុកដាក់

A, B ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។ ខ, សរសេរនិយមន័យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2 ។		

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)

ជំពូកទី៥ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

មេរៀនទី២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី២

I. **វត្ថុបំណង** : ក្រោយពីរៀនចប់សិស្សអាច :

- ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2ដែលមានសមីការសំគាល់មានរឹសឌុប
- ដោះស្រាយសមីការសំគាល់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2ដែលមានសមីការសំគាល់មានរឹសពីរជាចំនួនកុំផ្លិច

II. **រយៈពេល** : 2ម៉ោង ថ្ងៃទី………ខែ……ឆ្នាំ……

III. **សំភារៈឧបទ្ទេស** :

- ស.ស ទំព័រទី …. ដល់….. បោះពុម្ពឆ្នាំ2010
- ស.គ ទំព័រទី…..ដល់……
- បន្ទាត់ឈើ

IV. **សកម្មភាពបង្រៀន** :

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
គ្រូពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	ជំហ៊ានទី1 (លំនឹងថ្នាក់) 3នាទី	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
គ្រូសួរសួរសិស្សអំពីនិយមន័យសមីការសំគាល់ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី2	ជំហ៊ានទី2 (រំលឹកមេរៀនចាស់)7នាទី ចូរឲ្យនិយមន័យនៃសមីការសំគាល់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី2 ។	សិស្សឡើងឆ្លើយ និយមន័យ: សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី2អូម៉ូសែន និងមានមេគុណថេរជាសមីការដែលអាចសរសេរជារាងទូទៅ $ay''+by'+cy=0$ ដែល a,b,c ជាចំនួនពិត និង $a\neq 0$
+ គ្រូ សរសេរ មេរៀនថ្មី	ជំហ៊ានទី3(មេរៀនថ្មី)70នាទី **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលី**	

+ គ្រូសរសេរ Ex ដាក់លើក្ដារខៀនឲ្យសិស្សសង្កេត	**នេះអើរលំដាប់2(ត)** **ខ. សមីការសំគាល់មានរឹសឌុប** Ex ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+4y'+4y=0 \quad (E)$	សិស្សសរសេរ Ex ដាក់ក្នុងសៀវភៅ
+គ្រូហៅសិស្សដោះស្រាយ សមីការដឺក្រេទី2	ចម្លើយ សមីការសំគាល់នៃ (E) គឺ $\lambda^2+4\lambda+4=0$ សមីការសំគាល់មានរឹស $\lambda_1,\lambda_2=-2$ (E) អាចសរសេរ $(y'+2y)'+2(y'+2y)=0 \; (i)$ តាង $Z=y'+2y$ $(i): Z'+2Z=0$ $\frac{dz}{dx}=-2z \Rightarrow \frac{dz}{z}=-2dx$ $\ln\|z\|=-2x+c$ $Z=Ae^{-2x} \; \left(A=\pm e^{c}\right)$	+សមីការសំគាល់នៃសមីការ (E) គឺ $\lambda^2+4\lambda+4=0$ $\Delta'=4-4=0$ $\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-\frac{b'}{a}=-2$
+គ្រូហៅសិស្សឲ្យឡើងធ្វើដេរីវេ +គ្រូហៅសិស្សឲ្យឡើងធ្វើអាំងតេក្រាល	គេបាន: $y'+2y=Ae^{-2x} \; (ii)$ $y'+2y=0$ មានចម្លើយ $y=c_1e^{-2x}$ (តាមទម្រង់ $Z'+2Z=0$) ធ្វើបំរែបំរួលចំនួនថេរ c_1: $y=c_1e^{-2x}, y'=c_1'(x)e^{-2x}-2c_1($	$y=c_1(x)e^{-2x} \Rightarrow$ $y'=c_1'(x)e^{-2x}-c_1(x)e^{-2x}$ + $\int c_1'(x)=\int A$ $c_1(x)=Ax+B$
+គ្រូណែនាំសិស្សឲ្យញែករកលក្ខណៈទូទៅ	$(ii): c_1'(x)e^{-2x}-2c_1(x)e^{-2x}+2$ $c_1'(x)e^{-2x}=Ae^{-2x}\Rightarrow c_1(x)$ (B ជាចំនួនថេរ) ដូចនេះ $y=(Ax+B)e^{-2x}$ គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+4y'+4y=0$ គឺ	
+គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិឲ្យសិស្ស	$y=(Ax+B)e^{-2x}$ ដែល $A\&B$ ជាចំនួនថេរណា	+ សិស្សឆ្លើយ ៖

ឡើងធ្វើលើក្ដារខៀន	មួយក៏បាន <u>ជាទូទៅ</u> បើសមីការសំគាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0$ នៃ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+by'+c=0$ មានឫស ឌុបជាចំនួនពិតគឺ $\lambda_1=\lambda_2=\alpha$ នោះគេបាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេ រ៉ង់ស្យែលនេះគឺ $y=(Ax+B)e^{\alpha x}$ ដែល $A\&B$ ជាចំនួនថេរណា មួយក៏បាន ។ $\lambda_1=xe^{\alpha x}$ និង $\lambda_2=e^{\alpha x}$ ជាចម្លើយ គោល ។ <u>ប្រតិបត្តិ</u> ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ ស្យែល $4y''-4y'+y=0$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=-3, y'(0)=2$	សមីការ $4y''-4y'+y=0$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda^2-4\lambda+1=0$ មានឫសឌុបគឺ $\lambda_1=\lambda_2=1$ ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃ សមីការគឺ $y=(Ax+B)e^{\alpha x}$ ដែល $A\&B$ ជាចំនួនថេរណា មួយក៏បាន តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=-3$ $\Leftrightarrow -3=A\times 0\times e^0+Be^0$ $\Rightarrow B=-3 \quad (1)$ $y=Axe^x+Be^x$ $y'=Axe^x+Ae^x+Be^x$ $y'(0)=2$ $\Leftrightarrow 2=A+B \ (2)$ $(1)\&(2)$ គេបាន $A=-1$ ដូចនេះ $y=-xe^x-3e^x$ ជាចម្លើយពិសេស តាមលក្ខខណ្ឌ $y(0)=-3\&y'(0)=2$
+គ្រូឲ្យសិស្សសង្កេត Ex		+សិស្សកត់ត្រា និង សង្កេត
+ណែនាំឲ្យសិស្សឲ្យសិស្ស ឲ្យដោះស្រាយសមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរ លំដាប់2 បើ បើ λ_1 និង λ_2 ជាឫស2		+សិស្សឆ្លើយ

ផ្សេងគ្នានៃសមីការសំគាល់នោះគេទាញបានចម្លើយទូទៅនៃ(E) ដូចម្តេច? +ណែនាំសិស្សឲ្យយកតំលៃ $e^{ix}=\cos x+\sin x$ $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ ជំនួសក្នុងសមីការ $y=Ae^{(\alpha-i\beta)x}+Be^{(\alpha+i\beta)x}$ +គ្រូណែនាំសិស្សឲ្យទាញរកលក្ខណះទូទៅ + គ្រូដាក់ប្រតិបត្តិឲ្យសិស្សឡើងធ្វើលើក្តារខៀន	**គ. សមីការសំគាល់មានរឹសពីរជាចំនួនកុំផ្លិច** Ex:គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+by'+cy=0$ ដែលសមីការសំគាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0$ មានរឹស2ជាចំនួនកុំផ្លិច $\lambda_1=\alpha-i\beta$ និង $\lambda_2=\alpha+i\beta$ ។ រកចម្លើយទូទៅនៃ (E) ។ ចម្លើយ តាមវិធីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល លីនេអ៊ែរលំដាប់2 បើ λ_1 និង λ_2 ជារឹស2ផ្សេងគ្នានៃសមីការសំគាល់ នោះគេបានចម្លើយទូទៅ (E) គឺ $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_1 x}$ ដោយ $\lambda_1=\alpha-i\beta$ និង $\lambda_2=\alpha+i\beta$ $y=Ae^{(\alpha-i\beta)x}+Be^{(\alpha+i\beta)x}$ $=Ae^{\alpha x}.Ae^{-i\beta x}+Be^{\alpha x}+Be^{i\beta x}$ តាមរូបមន្ត $Euler$ $e^{ix}=\cos x+\sin x$ $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ គេបាន $y=Ae^{ix}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$ $+Be^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$ $y=(A+B)e^{\alpha x}\cos\beta x+i(B-A$ ជាចម្លើយនៃ (E)	$y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_1 x}$ ចម្លើយ សមីការសំគាល់គឺ $\lambda^2+4\lambda+8=0$ $\Delta'=4-8=-4=4i^2$ $\Rightarrow\lambda_1=-2-2i$ $\Rightarrow\lambda_2=-2+2i$ ចម្លើយទូទៅគឺ

	គេអាចបាន: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ និង $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ ជាចម្លើយគោលនៃ(E) ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃ(E) គឺ: $y = k_1(A+B)e^{\alpha x}\cos\beta x + k_2(B-A)e^{\alpha x}\sin\beta x$ ឬ $y = Ce^{\alpha x}\cos\beta x + D\sin\beta x$ [ដែល $C = k_1(A+B), D = k_2(B-A)$ $y = e^{\alpha x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x)$ ដែល$C\&D$ ជា ចំនួនថេរ ។ <u>ជាទូទៅ</u> សមីការសំគាល់ $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ នៃ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + by' + c = 0$ មានរឹស កុំផ្លិច $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ និង $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ នោះគេបាន សមីការទូទៅនៃសមីការឌី ផេរ៉ង់ស្យែលនេះគឺ $y = e^{\alpha x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x)$ ដែល$C\&D$ ជា ចំនួនថេរ ។ ប្រតិបត្តិ: ដោះស្រាយសមីការ $y'' + 4y' + 8y = 0$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 1 \& y'(0) = 2$ ។	$y = e^{-2x}(C\cos 2x + D\sin 2x)$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = 1$: $1 = e^0(C\cos 2x + D\sin 2x)$ $\Rightarrow C = 1$ $y'(0) = 2$: $2 = 2e^{-2x}(C\cos 2x + D\sin 2x)$ $+ e^{-2x}C(-2x\sin 2x) + D(2\cos 2$ $\Rightarrow D = 2$ ដូចនេះ: $y = e^{-2x}(\cos 2x + 2\sin 2x)$
+ គ្រូហៅសិស្សឡើងសួររូបមន្តរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់2	ជំហ៊ានទី4 (ពង្រឹងពុទ្ធិ)7នាទី 1. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់2 អូម៉ូសែននិងមានមេគុណថេរមានរាងទូទៅយ៉ាង	

	ដូចម្តេច? 2. សមីការ (E) មានសមីការសំគាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0$ ដែលមានរឹស $\lambda_1 \& \lambda_2$ ។ ក. បើសមីការសំគាល់មានរឹសពីរជាចំនួនពិត ផ្សេងគ្នាគឺ $\lambda_1=\alpha$ និង $\lambda_2=\beta$ នោះចម្លើយទូទៅ នៃ (E) មានរាងដូចម្តេច? ខ. បើសមីការសំគាល់មានរឹសឌុប គឺ $\lambda_1=\lambda_2=\alpha$ នោះចម្លើយទូទៅនៃ (E) មានរាង ដូចម្តេច? គ. បើសមីការសំគាល់មានរឹសពីរជាចំនួនកុំផ្លិច គឺ $\lambda_1=\alpha-i\beta$ និង $\lambda_2=\alpha+i\beta$ នោះចម្លើយទូទៅ នៃ (E) មានរាងដូចម្តេច?	+ ចំលើយសិស្ស : 1. $y''+by'+c=0 \ \ (E)$ ដែល $b\&c$ ជាចំនួនថេរ 2.សមីការ (E) មានសមីការសំគាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0$ ដែលមានរឹស $\lambda_1 \& \lambda_2$ ក. ដោយ $\lambda_1=\alpha \& \lambda_2=\beta$ $\Rightarrow (E): y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$ ($A\&B$ ជាចំនួនថេរ) ខ. ដោយ $\lambda_1=\alpha$ និង $\lambda_2=\beta$ $\Rightarrow (E): y=Axe^{\alpha x}+Be^{\alpha x}$ គ. ដោយ $\lambda_1=\alpha-i\beta$ និង $\lambda_2=\alpha+i\beta$ $(E): y=e^{\alpha x}(C\cos\beta x+D\sin\beta$ $C\&D$ ជាចំនួនថេរ ។
+ គ្រូសរសេរកិច្ចការផ្ទះដាក់លើក្តារខៀន	ជំហានទី5 (បណ្តាំផ្ញើរ) 3នាទី 1. ដោះស្រាយសមីការ ក. $y''-y=0, y(0)=1, y'(0)=-2$ ខ. $y''-2y'+3y=0,$ $y(0)=2, y'(0)=1$	+សិស្សកត់ត្រា លំហាត់ដោយយក ចិត្តទុកដាក់

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)
ជំពូកទី៥ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល
មេរៀនទី២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ទី២

I. វត្ថុបំណង : ក្រោយពីរៀនចប់សិស្សអាច :
- ចេះរកសំគាល់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2
- ដោះស្រាយសមីការសំគាល់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2ដែលមាន សមីការសំគាល់មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា

II. រយះពេល : 2ម៉ោង ថ្ងៃទី.........ខែ......ឆ្នាំ......

III. សំភារ:ឧបទ្ទេស :
- ស.ស ទំព័រទី .... ដល់..... បោះពុម្ពឆ្នាំ2010
- ស.គ ទំព័រទី.....ដល់......
- បន្ទាត់ឈើ

IV. សកម្មភាពបង្រៀន :

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
គ្រូពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង វិន័យ	ជំហ៊ានទី1 (លំនឹងថ្នាក់) 3នាទី	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
គ្រូឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់ Ex គ្រូសួរសិស្សពីនិយមន័យនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2	ជំហ៊ានទី2 (រំលឹកមេរៀនចាស់)7នាទី Ex ដោះស្រាយសមីការ $y'-4y=0$ ។ $y'-4y=0 \Rightarrow \frac{y'}{y}=3$ $\Rightarrow \ln\|y\|=3x+c$ $\Rightarrow y=Ae^{3x}\left(A=\pm e^{c}\right)$ និយមន័យ: សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី2 អូម៉ូសែន និង មានមេគុណថេរជាសមីការដែល អាចសរសេរជារាង	សិស្សឡើងធ្វើលំហាត់ សិស្សឆ្លើយ

	ទូទៅ $ay''+by'+c=0$ ដែល $a,b\&c$ ជាចំនួនពិត និង $a\neq 0$ ។	
+ គ្រូ សរសេរ មេរៀនថ្មី + គ្រូឲ្យសិស្សមើល Ex ទំព័រទី 114 +គ្រូឲ្យសិស្សពន្លាត $(y'-\alpha y)'-\beta(y'-\alpha y)$ ហើយ ប្រៀបធៀបវាជាមួយ $y''-5y'+6y$ +គ្រូឲ្យសិស្សរករឹសនៃ សមីការ $\lambda^2-5\lambda+6=0$ +គ្រូប្រាប់សិស្សពីសមីការ សំគាល់	ជំហានទី3(មេរៀនថ្មី)70នាទី **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់**2(**ត**) 2. **ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់**2**អូម៉ូសែន និងមេគុណថេរ** 2.1 **ការបង្កើតសមីការសំគាល់** Ex គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-5y'+6y=0$ និងសមីការ $y'-\alpha y=0$ ។ កំនត់ចំនួនពិត $\alpha\&\beta$ ដើម្បីឲ្យ y ។ គេបាន: $(y'-\alpha y)'-\beta(y'-\alpha y)$ $=y''-\alpha y'-\beta y'+\alpha\beta y$ $=y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y$ នោះគេបាន: $y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y=y''-5y'$ $\Rightarrow \alpha+\beta=5 \quad \& \quad \alpha\beta=6$ នោះគេបាន $\alpha\&\beta$ ជារឹសនៃសមីការ $\lambda^2-5\lambda+6=0$ មានរឹសពីរផ្សេងគ្នាគឺ: $\lambda_1=2 \ \& \ \lambda_2=3$ ដូចនេះ $\alpha=2,\beta=3$ ឬ $\alpha=3,\beta=2$ គេបាន: $y''-5y'+6y=(y'-2y)'-3(y'-$	+ សិស្សពិនិត្យមើលនិង សង្កេត + សិស្សធ្វើតាមការណែនាំ + សិស្សគណនាហើយឆ្លើយ $\lambda^2-5\lambda+6=0$ $(\lambda-2)-(\lambda-3)=0$ $\Rightarrow \lambda=2\ ,\ \lambda=3$ +

	ឬ $y''-5y'+6y=(y'-3y)'-2(y'-3y)$	សិស្សសង្កេតមើលនិងស្តាប់
+គ្រូសួរ:តើអ្នកណាអាចឲ្យជាទូទៅបាន?	បើយើងតាង $z=y'-3y$ ឬ $z=y'-2y$ នោះយើងបាន: $y''-5y'+6y=z'-3z$ ឬ $y''-5y'+6y=z'-2z$	+សិស្សឆ្លើយ
+ គ្រូឲ្យសិស្សគណនា Ex	គេអាចបំលែងអង្គទី1 ដែលសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់2 $y''-5y'+6y=0$ គឺ $\lambda^2-5\lambda+6=0$ ទៅជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល លំដាប់1 $z'-3z=0$ ឬ $z'-2z=0$	
	+សមីការសំគាល់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-5y'+6y=0$ គឺ $\lambda^2-5\lambda+6=0$	+ សិស្សសរសេរ និង គិតធ្វើលំហាត់ Ex
	+ ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ $y''-5y'+6y=0$ ដំបូងដោះស្រាយសមីការ $z'-3z=0$ ឬ $z'-2z=0$ រួចយើងបានសមីការ $y'-3y=z$ ឬ $y'-2y=z$	+សិស្សឡើងធ្វើ
+គ្រូសរសេរចំនងជើងថ្មី	ជាទូទៅ: + សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2 $y''+by'+cy=0$ គេអាចសរសេរជាសមីការ $(y'-\alpha y)'-\beta(y'-\alpha y)=0$ ដែល $\alpha\ \&\ \beta$ ជាឫសរបស់សមីការសំគាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0\ (\lambda=\mathbb{C})$	+សិស្សសរសេរចំណងជើង

+មើល Ex ទំព័រ 115 +សរសេរសមីការសំគាល់ និង ដោះស្រាយសមីការ +បំលែងសមីការនេះទៅជា ទំរង់ $(y'-\alpha y)'-\beta(y'+\alpha y)=0$ តាង $z=y'+\alpha y$ និង ដោះស្រាយសមីការ $z'-\beta z=0$ + ជំហ៊ានបន្ទាប់ដោះស្រាយសមីការ $y'+4y=c_1e^{2x}$ ហើយយើង រកចម្លើយនៃសមីការ $y'+4y=0$	+ សមីការសំគាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0$ នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+by'+cy=0$ អាចមានរឹសឌុប ឬ មានរឹស2ជាចំនួនកុំផ្លិច។ Ex សរសេរ និង រករឹសនៃសមីការសំគាល់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់2ខាងក្រោម: ក. $y''+y'-6y=0$ ខ. $y''+4y'+4y=0$ គ. $y''-2y'+5y=0$ ចម្លើយ ក. $y''+y'-6y=0$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda^2+\lambda-6=0$ មានរឹស $1,-3$ ខ. $y''+4y'+4y=0$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda^2+4\lambda+4=0$ មានរឹស $\lambda=-2$ គ. $y''-2y'+5y=0$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda^2-2\lambda+5=0$ $\Delta'=1-5=-4=(2i)^2$ $\lambda=1\pm 2i$ មានរឹសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចគឺ $\lambda=1-2i$ និង $\lambda=1+2i$ ។ **2.2 វិធីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2** **ក. ករណីដែលសមីការសំគាល់មានរឹសពីរ ជា**	+សិស្សមើលសៀវភៅទំព័រ115 +សិស្សរករឹសសមីការសំគាល់ +សិស្សសរសេរបំលែងសមីការ និង ដោះស្រាយសមីការ $z'-\beta z=0$ + សិស្សពិនិត្យ និង សង្កេត

	ចំនួនពិតផ្សេងគ្នា	
+ គ្រូឲ្យលក្ខណៈទូទៅ	Ex គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែ លំដាប់ទី2 $y''+2y'-8y=0 \ (E)$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda^2+2\lambda-8=0$	+សិស្សស្តាប់ និង កត់ត្រា
	ដោយ $\Delta'=1-(-8)=9$ សមីការសំគាល់មានរឹសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា គឺ -4 & 2 ។	+សិស្សមើល និង កត់ត្រា
+ គ្រូឲ្យ Ex មួយទៀត	សមីការ $y''+2y'-8y=0 \ (E)$ អាចសរសេរជា: $(y'+4y)'-2(y'+4y)=0$ តាង $z=y'+4y$	
	នោះគេបាន $z'-2z=0$ $\Rightarrow z'=2z \Leftrightarrow \frac{dz}{dx}=2z$ $\Leftrightarrow \frac{dz}{z}=2dx \Rightarrow \ln\lvert z\rvert=2x+c$ $\Rightarrow \lvert z\rvert=e^{2x+c}$ $\Rightarrow z=c_1e^{2x} \ (c_1=e^c)$ ដោយ $z=y'+4y$ នោះគេបាន $y'+4y=c_1e^{2x}$ + ដោះស្រាយសមីការ $y'+4y=c_1e^{2x} \ (*)$ រកដោយដោះស្រាយសមីការ $y'+4y=0$ មុន $\Rightarrow y'=-4y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=-4y \Leftrightarrow \frac{dy}{y}$ $\Rightarrow \ln\lvert y\rvert=-4x+c \Rightarrow y=c_2e^{-4x}$ (គេឲ្យ c_2 ជាអនុគមន៍នៃ x	+សិស្សសង្កេត និង កត់ត្រា

គេបាន

$y = c_2(x)e^{-4x}$

$\Rightarrow y' = c_2'(x)e^{-4x} - 4c_2(x)e^{-4x}$

ជំនួសក្នុង$(*)$ គេបាន:

$\left[c_2'(x)e^{-4x} - 4c_2(x)e^{-4x}\right]$

$+4c_2(x)e^{-4x} = c_1e^{2x}$

$\Rightarrow c_2'(x)e^{-4x} = c_1e^{2x}$

$\Rightarrow c_2'(x) = c_1e^{6x}$

$\Rightarrow c_2(x) = \int c_1e^{6x}dx$

$= \frac{1}{6}c_1e^{6x} + A$

$= Be^{6x} + A \quad \left(B = \frac{1}{6}c_1\right)$

ដូចនេះ

$y = \left(Be^{6x} + A\right)e^{-4x}$

$y = Ae^{-4x} + Be^{2x}$

គេបានចំលើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$y'' + 2y' - 8y = 0 \ (E)$ គឺ

$y = Ae^{-4x} + Be^{2x}$ ដែល

$A \& B$ ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

ជាទូទៅ:

+ រកសមីការសំគាល់ $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ នៃ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + by' + cy = 0$

+ បើសមីការសំគាល់មានរឹសពីរជាចំនួនពិត ផ្សេងគ្នា $\lambda_1 = \alpha \quad \& \quad \lambda_2 = \beta$ នោះសមីការ $y'' + by' + cy = 0$ មានចម្លើយទូទៅ $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ ដែល $A \& B$ ជាចំនួនពិតណា

	មួយក៏បាន $y_1 = e^{\alpha x}, y_2 = e^{\beta x}$ ជាចម្លើយគោល ។ Ex ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្សែលលំដាប់2 $y''+3y'+2y=0$ ។ មានសមីការសំគាល់ $\lambda^2+3\lambda+2=0$ មានរឹស $\lambda_1=-1$ & $\lambda_2=-2$ គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''+3y'+2y=0$ គឺ $y=Ae^{-x}+Be^{-2x}$ (ដែល A,B ថេរ)	
+ គ្រូឲ្យសិស្សធ្វើលំហាត់	ជំហ៊ានទី4 (ពង្រឹងពុទ្ធិ)7នាទី លំហាត់: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្សែល $y''-3y'+y=0$ ចម្លើយ $y''-3y'+y=0$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda^2-3\lambda+1=0$ $\Delta'=9-4.1.1=5$ $\Rightarrow \lambda_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \lambda_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''-3y'+y=0$ គឺ $y=Ae^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)x}+Be^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)x}$ ដែល A,B ជាចំនួនថេរ	+សិស្សឡើងធ្វើលំហាត់
+ គ្រូសរសេរកិច្ចការផ្ទះដាក់លើក្តារខៀន	ជំហ៊ានទី5 (បណ្តាំផ្ញើរ) 3នាទី ដោះស្រាយសមីការ ក. $4y''+7y'+2y=0$ ខ. $y''-2y'=0$ គ. $y''-3y'+3y=0$	+សិស្សកត់ត្រា លំហាត់ដោយយក ចិត្តទុកដាក់

	ឃ. $2y''+3y'-2y=0$ ង. $y''-3y'+y=0$	

កិច្ចតែងការបង្រៀនគណិតវិទ្យាទី១២

១. ជំពូកទី៦ បំណែងចែកប្រូបាប

២. មេរៀនទី១ បំណែងចែកប្រូបាប

៣. រយៈពេល: ២ម៉ោងសិក្សា

៤. វត្ថុបំណង: ក្រោយពេលបង្រៀនមេរៀននេះចប់សិស្សអាចៈ

- ចំណេះដឹង: សិស្សបកស្រាយខ្លឹមសារ អថេរចៃដន្យ បំណែងចែកប្រូបាប និង អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការបង្ហាញរបស់គ្រូ។
- បំនិន: សិស្សដោះស្រាយលំហាត់បានត្រឹមត្រូវ តាមរយៈការពិភាក្សាជាក្រុម និងជាបុគ្គលក្រោមការដឹងនាំរបស់គ្រូ។
- ឥរិយាបថ: បណ្ដុះទឹកចិត្តសិស្សឱ្យចូលចិត្តការគិត

៥. សកម្មភាពបង្រៀន និងរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
•ពិនិត្យអនាម័យ សណ្ដាប់ធ្នាប់ អវត្តមាន •តើប្រូបាបនៃព្រឹត្តការណ៍A មានតម្លៃដូចម្ដេច? •តើករណីអាចជាអ្វី? ១.អថេរចៃដន្យនិងបំណែងចែកប្រូបាប ១.១ អថេរចៃដន្យ: ផ្ដល់និយមន័យ	<u>ជំហានទី១</u> •បានត្រឹមត្រូវ <u>ជំហានទី២</u> •ជាផលធៀបរវាងចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍Aនិង ករណីអាចៈ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ •ករណីអាចគឺជាករណីសរុបនៃព្រឹត្តិការណ៍ឬលំហរ <u>ជំហានទី៣</u> មេរៀនទី១ បំណែងចែកប្រូបាប ១.អថេរចៃដន្យ និង បំណែងចែកប្រូបាប និយមន័យ: អថេរចៃដន្យគឺជាអថេរដែលភ្ជាប់ចំនួនទៅនឹងធាតុនីមួយៗនៃលំហរសំណាកហើយមានផលបូកប្រូបាបស្មើ 1។ <u>ចម្លើយ</u> លទ្ធផលដែលបោះកាក់ពីរដងគឺ:	• ប្រធានថ្នាក់រាយការណ៍ អង្គុយស្ងៀមស្ងាត់ • ឆ្លើយ • ឆ្លើយ • ស្ដាប់ដោយយកចិត្ត ទុកដាក់ • តាមដានស្ដាប់ដោយយក

Ex: គេបោះកាក់មួយដែលមានមុខH និងTចំនួនពីរដង, តាង x ជាចំនួនមុខHដែលចេញលទ្ធផល។ចូរបង្កើតតាង អថេរ x?

* បញ្ជាក់:

$P(TT)+P(TH)+P(HH)$

$=0.25+0.25+0.25+0.25$

$=1$

១.២ បំណែងចែកប្រូបាប

ផ្តល់និយមន័យ និងឧទាហរណ៍ដើម្បីបកស្រាយ

Ex_1: ចូរធ្វើតារាងបំណែងចែកនៃ X នៃការបោះកាក់មុខH និងT ចំនួនពីរដង។

ប្រតិបត្តិ: គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ 3 ព្រមគ្នា។ តាង X ជាចំនួនលេខ3 ដែលចេញក្នុងលទ្ធផល។ គណនា $P(X=x)$ រួចធ្វើតារាង បំណែងចែកប្រូបាបនៃអថេរ X ។

TT, TH, HT, HH ។

លទ្ធផលបោះកាក់2ដង	TH	TH	HT	HH
តម្លៃ x	0	1	1	2

និយមន័យ: ប្រូបាប $P(X=x)$ ដែលភ្ជាប់ទៅនឹងតម្លៃនីមួយៗនៃអថេរចៃដន្យ X ។

<u>ចម្លើយ</u>

X ជាអថេរចៃដន្យដែលកាក់ចេញមុខ H នោះ $X=0,1,2$ ដែល

$P(X=0)=0.25$

$P(X=1)=0.5$

$P(X=2)=0.5$

តម្លៃ X	0	1	2
$P(x)$	0.25	0.5	0.5

<u>ចម្លើយ</u>

$$P(X=0)=\frac{125}{216}$$

$$P(X=1)=\frac{75}{216}$$

$$P(X=2)=\frac{15}{216}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{216}$$

ចិត្តទុកដាក់

- តាមដានសង្កេត ស្តាប់សួរព្រមទាំង កត់ត្រា។

- ពិភាក្សាដោះស្រាយ លទ្ធផលបោះកាក់មាន $aaa, 3aa, a3a, aa3,$ $33a, 3a3, a33, 333$

$X=0,1,2,3$

$p(X=0)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$

$P(X=1)=3\left(\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\right)=\frac{75}{216}$

$P(X=2)=3\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\right)=\frac{15}{216}$

$P(X=3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>តារាងបំណែងចែក
ប្រូបាប:
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$P(X$</td><td>$\frac{125}{216}$</td><td>$\frac{75}{216}$</td><td>$\frac{15}{216}$</td><td>$\frac{1}{216}$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>១.៣អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប

ឧទាហរណ៍:
តាង X ជាផលបូកលទ្ធផលនៃការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរគ្រាប់ៗរកប្រូបាបនៃលទ្ធផលនីមួយ:</td>
<td>និយមន័យ: អនុគមន៍ដែលអាចគណនាតម្លៃប្រូបាប $P(X=x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃទាំងអស់ហៅថាអនុដង់ស៊ីតេប្រូបាប។
$X=2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$
$P(X=x)=\frac{1}{36},\frac{2}{36},\frac{3}{36},\frac{4}{36},\frac{5}{36},$
$\frac{6}{36},\frac{5}{36},\frac{4}{36},\frac{3}{36},\frac{1}{36}$
រឺ $P(X=x)=\frac{x-1}{36}, X=2,3,....7$
$P(X=x)=\frac{13-x}{36}, x=8,9....,12$
ហៅថាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាបនៃអថេរ x ។</td>
<td>• តាមដានសង្កេតស្តាប់និងសួរ

• តាមដានសង្កេតស្តាប់ដោយយកចិត្តទុកដាក់</td>
</tr>
<tr>
<td>ប្រតិបត្តិ:គេឱ្យអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប $P(Y=y)=cy^2$ ដែលតម្លៃ
$y=0,1,2,3,4$
ក.គណនា $P(Y=y)$
ខ.គណនា c</td>
<td>ក. $P(Y=y)=0,C,4C,9C,16C$
ចំពោះ $y=0,1,2,3,4$ ។
ខ.គណនា C ដោយ
$P(Y=y)=1$
$30C=1$
$\Rightarrow C=\frac{1}{30}$</td>
<td><u>ចម្លើយ</u> (ពិភាក្សា)
ក.គណនា $P(Y=y)$
$P(y=0)=0$
$P(y=1)=C$
$P(y=2)=4C$
$P(y=3)=9C$
$P(y=4)=16C$
ខ.គណនា C
ដោយ
$P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+$
$P(4)=1$
$30C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{30}$</td>
</tr>
</table>

១.ដូចម្តេចដែលហៅថាអថេរចៃដន្យ? ២.ដូចម្តេចដែលហៅថាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ ?	<u>ជំហានទី៤</u> ១.និយមន័យ: (១.១) ២.និយមន័យ (១.៣) <u>ជំហានទី៥</u> បណ្តាំផ្ញើរ	• ឆ្លើយ

កិច្ចតែងការបង្រៀនថ្នាក់ទី១២

១. ជំពូកទី ៦

២. មេរៀនទី១ បំណែងចែកប្រូបាប

៣. រយៈពេល: ២ ម៉ោងសិក្សា

៤. វត្ថុបំណង:

- ចំណេះដឹង: ពណ៌នាពីសង្ឃឹមគណិតនៃអថេរចៃដន្យ X និងវ៉ារ្យង់នៃអថេរចៃដន្យ X បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈការបង្ហាញរបស់គ្រូ។
- បំនិន: ដោះស្រាយលំហាត់បានយ៉ាងស្ទាត់តាមរយៈការពិភាក្សាជាក្រុមនិងបុគ្គល។
- ឥរិយាបថ: បណ្តុះទឹកចិត្តឱ្យមានសកម្មភាពពិភាក្សានិងមានការប្រុងប្រយ័ត្ន លើការដោះស្រាយ ។

៥. សកម្មភាពបង្រៀន និងរៀន

<table>
<tr><th>សកម្មភាពគ្រូ</th><th>ខ្លឹមសារមេរៀន</th><th>សកម្មភាពសិស្ស</th></tr>
<tr><td>• ពិនិត្យសណ្តាប់ធ្នាប់ អនាម័យ អវត្តមាន</td><td><u>ជំហានទី១</u>
• បានត្រឹមត្រូវ</td><td>• ប្រធានរាយការណ៍</td></tr>
<tr><td>• ដូចម្តេចដែលហៅថាអថេរចៃដន្យ?
• ដូចម្តេចដែលហៅថាបំណែងចែកប្រូបាប?</td><td><u>ជំហានទី២</u>
• ជាអថេរដែលភ្ជាប់ចំនួនទៅនឹងធាតុនីមួយៗក្នុងលំហរដែលមានផលបូកប្រូបាបាស្មើ 1។
$P(X=x)$ ដែលភ្ជាប់ទៅនឹងអថេរចៃដន្យ x ។</td><td>• ឆ្លើយយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់</td></tr>
<tr><td>• ផ្តល់រូបមន្តតម្លៃមធ្យមតាមពិសោធ
• ផ្តល់ឧទាហរណ៍: គណនាតម្លៃមធ្យម $\overline{X}$ តាមតារាង:
<table><tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>f</td><td>15</td><td>22</td><td>23</td><td>19</td><td>23</td><td>18</td></tr></table></td><td><u>ជំហានទី៣</u>
២.សង្ឃឹមគណិតនៃអថេរ X
២.១.តម្លៃមធ្យមតាមពិសោធ
$\overline{X}=\frac{\sum fX}{\sum f}$
• គណិតតម្លៃមធ្យម
$\overline{X}=\frac{\sum fX}{\sum f}$</td><td>• តាមដានសង្កេតមើលនិងស្តាប់យ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់</td></tr>
</table>

• ឱ្យនិយមន័យនិងរូបមន្ត សង្ឃឹមគណិត

Ex: ឆ្នាំនេះផ្ទះឡើងថ្លៃ 20% ស្មើ 0.3 តម្លៃផ្ទះនឹង 10% ស្មើ 0.5 តម្លៃផ្ទះចុះថោក 10% ស្មើ 0.1 ។ តើអ្នកសង្ឃឹមថាផ្ទះឡើងថ្លៃ $\%$?

• ផ្តល់រូបមន្ត:

• ឧទាហរណ៍:

x	1	2	3
$P(X=x)$	0.1	0.6	0.3

$$=\frac{15+44+69+115+108}{120}$$
$$=3.558$$

២.២. តម្លៃមធ្យមតាមទ្រឹស្តីបទ ជាបំណែងចែកប្រូបាបហើយ តម្លៃមធម្យមជាតម្លៃសង្ឃឹមទុក ហៅថា សង្ឃឹមគណិត។

និយមន័យ:សង្ឃឹមគណិត នៃអថេរ X កំណត់ដោយ

$$E(X)=\sum X_iP_i \quad i=1,2,3$$

តាមរូបមន្ត:

$$E(x)=\sum x_ip_i$$
$$=\frac{20}{100}\times0.3+\frac{10}{100}\times0.5-\frac{10}{100}\times0.1$$
$$=10\%$$

២.៣.សង្ឃឹមគណិតនៃអនុគមន៍ នៃអថេរចៃដន្យ X

$$E(x)=\sum\left[f(x)\times P(X=x)\right]$$

ចម្លើយ: គណនា $E(5x)$

តាមរូបមន្ត:

$$E(5x)=\sum\left[5x\left(P(X=x)\right)\right]$$
$$=5\times2P(X=2)+5\times2P(X=2)$$
$$+5\times3P(X=3)=11$$

៣.វ៉ារ្យង់នៃអថេរ X

៣.១.និយមន័យ

•តាមដានសង្កេត

តាង X ជាអថេរ (តម្លៃផ្ទះនឹងឡើងថ្លៃជា $\%$) យើងបានតារាង

X	20%	10%	-10%
$P(X=x)$	0.3	0.5	0.1

តាម $E(x)=\sum x_ip_i$

$$=\frac{20}{100}\times0.3+\frac{10}{100}\times0.5$$
$$-\frac{10}{100}\times0.1$$
$$=10\%$$

•តាមដានមើលស្តាប់ សួរ កត់ត្រា

• ផ្តល់និយមន័យ

Ex: គេឱ្យបំណែងនៃ

អថេរចៃដន្យ X

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.1	0.3	0.2	0.3	0.1

ក/.គណនា $Var(x)$

ខ/.គណនាគម្លាតស្តង់ដា

•ផ្តល់លក្ខណៈនៃវ៉ារ្យង់

១.$Var=0$

២.$Var(ax)=a^2Var(x)$

៣.$Var(ax+b)=a^2Var(x)$

•ចូរប្រើរូបមន្ត $Var(x)$

$Var=E(X-\mu)^2$ ដែល

$\mu=E(x)$ គេបាន

$\sigma=\sqrt{Var(x)}$ ហៅថា

គម្លាតស្តង់ដា

រឺ $Var(x)=E(x^2)-E^2(x)$

$Var(x)=E(x-\mu)^2$

$=E(x^2)-E^2(x)$

$=1.4$

$\sigma=\sqrt{1.4} \quad =1.2$

៣.២ លក្ខណៈនៃវ៉ារ្យង់

សម្រាយបញ្ជាក់

១. $Var(a)=0$

យើងមាន

$Var(a)=E(a^2)-E^2(a)$

$=a^2-[E(a)]^2$

$=a^2-a^2$

$=0$

<u>ជំហានទី៤</u>

មានពីរគឺ

១. សង្ឃឹមគណិតនៃអថេរ X

$E(x)=\sum X[P(X=x)]$

២. សង្ឃឹមគណិតនៃអនុគមន៍

អថេរ X

$E(f(x))=\sum[f(x).(P(X=x))]$

$Var(x)=E(X-\mu)^2$

$=E(x^2)-E^2(x)$

<u>ជំហានទី៥</u>

បណ្តាំផ្ញើរ

•តាមដានសង្កេតនិងស្តាប់

ព្រមទាំងមានសំណួរនិង

កត់ត្រា ។

•រក $\mu=E(x)$

$=\sum x.P(X=x)$

$=3$

$\Rightarrow \; Var=E(x-3)^2$

$=\sum(x-3)^2\times P(X=x)$

$=4\times0.1+1\times0.3+0\times0.2$

$+4\times0.1=1.4$

ខ/.គណនា σ

តាម $\sigma=\sqrt{Var(x)}$

$=\sqrt{1.4}=1.2$

•តាមដានស្តាប់សង្កេត

•ធ្វើការបកស្រាយលើ

លក្ខណៈ (២ និង៣) ។

•ឆ្លើយ

•ឆ្លើយ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- មុខវិជ្ជា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)
- ជំពូកទី៦ : បំណែងចែកប្រូបាប
- មេរៀនទី២ : បំណែងចែកទ្វេធា

I.វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

-ចំណេះដឹង : សិស្សកំណត់និយមន័យនៃការពិសោធទ្វេធាបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍។

-បំណិន : សិស្សគណនាប្រូបាបនៃអថេរទ្វេធាx នៃបំណែងចែកទ្វេធា សង្ឃឹមគណិត និងវ៉ារ្យង់នៃអថេរx តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ។

-ឥរិយាបថ : សិស្សសហការគ្នាដោះស្រាយលំហាត់ដោយស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នខ្ពស់។

II. ខ្លឹមសារមេរៀន : ពេលវេលា: ...២...ម៉ោង ថ្ងៃ........ទី...ខែ...............ឆ្នាំ..........

១. បំណែងចែកទ្វេធា

១.១ ការពិសោធទ្វេធា

១.២ ច្បាប់ទ្វេធានៃប្រូបាប

២. សង្ឃឹមគណិតនិងវ៉ារ្យង់នៃអថេរចៃដន្យx

III.សម្ភារៈឧទេស

-ស . ស :ទំព័រទី១៥០ ដល់ទំព័រទី១៥៤

-ស . គ : ទំព័រទី១៥០ ដល់ទំព័រទី១៥៤

- សន្លឹកកម្រង់លំហាត់ប្រត្តិបត្តិ និងកម្រងសំណួរតម្រង់ទិសការសង្កេត

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សធ្វើលើក្តារខៀន	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី) -គណនា$c(5\,,3)$,$c(8\,,8)$ $c(7,0)$	-គណនា $c(5\,,3)$

-គេមានតារាងទិន្នន័យ		តាមរូបមន្ត $c(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ $c(5,3)=\frac{5!}{3!(5-3)!}$ $=\frac{4\times5}{2}=10$ $c(8,8)=\frac{8!}{8!(8-8)!}=\frac{8!}{8!0!}$ $=1$ $c(7,0)=\frac{7!}{0!(7-0)!}=1$ $c(6,3)=\frac{6!}{3!(6-3)!}=\frac{6!}{3!3!}$ $=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$
-ដាក់ឧទាហរណ៍ ណែនាំសិស្សសង្កេតលទ្ធផលនៃការបោះកាក់មួយ -បញ្ជាក់ប្រាប់សិស្ស -ឱ្យសិស្សទាញរកនិយមន័យនៃការពិសោធន៍ទ្វេធា	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី រយៈពេល៦០នាទី) **មេរៀនទី២:** **បំណែងចែកទ្វេធា** **១. បំណែងចែកទ្វេធា** **១.១ ការពិសោធទ្វេធា** -ឧទាហរណ៍ ក្នុងការពិសោធន៍បោះកាក់មួយដែលមានមុខ H និង T លទ្ធផលមានពីរយ៉ាងគត់គឺ ចេញមុខ H ឬចេញមុខ T បើគេបោះបានមុខ H ដូចបំណង គេថាពិសោធន៍នេះបានជោគជ័យ ហើយបើផ្ទុយមកវិញគឺបរាជ័យ។ -និយមន័យ ការពិសោទ្វេធាគឺជាការពិសាធន៍ដែលមានលក្ខណៈ: ១. ការពិសាធន៍ n វិញ្ញាសាដូចគ្នា	-សង្កេត -និយមន័យ ការពិសោទ្វេធាគឺជាការពិសាធន៍ដែលមានលក្ខណៈ:

	ហើយវិញ្ញាសានីមួយៗមិនទាក់ទងគ្នា ២. វិញ្ញាសានីមួយៗមានលទ្ធផលមួយក្នុងចំនោម"ជោគជ័យ"ឬ "បរាជ័យ"។ ៣. ប្រូបាប p នៃ"ជោគជ័យ"រក្សាតម្លៃថេរចំពោះគ្រប់វិញ្ញាសា ហើយប្រូបាបនៃ"បរាជ័យ"គឺ $q = 1 - p$ ៤.អថេរចៃដន្យទ្វេធាx គឺជាចំនួនដងនៃ "ជោគជ័យ" ក្នុង n វិញ្ញាសានៃការពិសោធន៍។ ៥. បំណែងចែកទ្វេធាគឺជាបំណែងចែកប្រូបាបនៃអថេរចៃដន្យទ្វេធាx។	១. ការពិសោធន៍n វិញ្ញាសាដូចគ្នា ហើយវិញ្ញាសានីមួយៗមិនទាក់ទងគ្នា ២. វិញ្ញាសានីមួយៗមានលទ្ធផលមួយក្នុងចំនោម "ជោគជ័យ "ឬ "បរាជ័យ"។ ៣. ប្រូបាប p នៃ"ជោគជ័យ"រក្សាតម្លៃថេរចំពោះគ្រប់វិញ្ញាសា ហើយប្រូបាបនៃ"បរាជ័យ"គឺ - $q = 1 - p$ ៤.អថេរចៃដន្យទ្វេធាx គឺជាចំនួនដង នៃ "ជោគជ័យ" ក្នុង n វិញ្ញាសានៃការ ពិសោធន៍។ ៥.បំណែងចែកទ្វេធាគឺជាបំណែងចែកប្រូបាបនៃអថេរចៃដន្យទ្វេធាx។
-ដាក់ឧទាហរណ៍ណែនាំសិស្សគណនា -បើការចេញមុខ H "ជោគជ័យ" គេបាន $p(H) = ?$ $p(T) = ?$	១.២ ច្បាប់ទ្វេធានៃប្រូបាប ឧទាហរណ៍ គេបោះកាក់មួយដែលមិនស្មើសាច់ល្អ កាក់មុខពីរគឺ H និងT ប្រូបាបដែលនិងចេញបានH ស្មើនឹង $\frac{2}{3}$ បើគេបោះកាក់នោះ ៤ដង។ ចូរគណនាប្រូបាបដែលនិងចេញមុខ H ចំនួនពីរដង ចម្លើយ ការចេញមុខ H "ជោគជ័យ"	

-តើប្រូបាបចេញមុខ H ២ដងនិ T ២ដងតាមលំដាប់ស្មើនឹងប៉ុន្មាន? -តើការចេញមុខ H ២ដងនិង T ២ដងអាចមានប៉ុន្មានករណី? អ្វីខ្លះ? -ចំនួនករណីនេះជាចំនួនបន្សំនៃប៉ន្មាន? អ្វីខ្លះ? -តើករណីនីមួយៗមានប្រូបាបស្មើគ្នាឬទេ? -តើគេបាន P (ចេញមុខ H ២ដង)=? -ឱ្យសិស្សទាញជាទូទៅ	គេបាន ៖ $P(H)=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow P(T)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ ប្រូបាបចេញមុខ H ២ដង និង T ២ដង តាមលំដាប់ស្មើនឹង $P(HHTT)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$ (ព្រឹត្តិការណ៍តាមលំដាប់មិនទាក់ទងគ្នា) ប៉ុន្តែការចេញមុខ H ២ដងនិង T ២ដង អាចមាន ៦ករណី $(HHTT),(HTTH),(TTHH),$ $(THTH),(HTHT),(THHT)$ ចំនួនករណីនេះគឺជាចំនួនបន្សំ $C(4,2)=\frac{4!}{2!(4-2)!}=6$ ករណី ដោយករណីនីមួយៗមានប្រូបាបស្មើគ្នា គេបាន P (ចេញមុខ H ២ដង) $=C(4,2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$ $=6\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$ ដូចនេះ ប្រូបាបដែលនឹងចេញមុខ H ២ដងពេលគេបោះកាក់មួយចំនួន ៤ដងស្មើនឹង $\frac{8}{27}$ -ជាទូទៅ ក្នុងការពិសោធន៍ទ្វេធាដែលមាន n វិញ្ញាសា បើប្រូបាបដែលបានជោគជ័យស្មើនឹង P បរូបាបដែលបរាជ័យស្មើនឹង q $q=1-p$ និង x ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធា	

-ដាក់លំហាត់គំរូ -ចែកក្រដាសលំហាត់ប្រត្តិបត្តិ -បង្ហាញពីច្បាប់ទ្វេធានៃប្រូបាប	នោះអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប នៃអថេរ x កំណត់ដោយ $P\left(X=x\right)=C\left(n,x\right)p^{x}\times\left(1-p\right)^{n-x}$ ដែល $x=0\ ,1\ ,\ 2,3.......,n$ បើ x អថេរចៃដន្យទ្វេធានោះគេអាច សរសេរ $X\ -Bin\left(n,p\right)$ ដែល $n,\ p$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបំណែង ចែក។ លំហាត់គំរូ បើ x ជាអថេរនៃ $Bin\left(n,0.6\right)$ ហើយ $P\left(X\prec 1\right)=0.0256$ គណនាតម្លៃ n ចម្លើយ គណនាតម្លៃ n តាមសម្មតិកម្ម $X-Bin\left(n,0.6\right)$ ហើយ $P\left(X\prec 1\right)=P\left(X=0\right)=0.0256\left(1\right)$ ម្យ៉ាងទៀត $P\left(X=x\right)=C\left(n,x\right)P^{x}\left(1-p\right)^{n-x}$ $P\left(X=0\right)=C\left(n,0\right).\left(0.6\right)^{0}.\left(0.4\right)^{n-0}$ $=\left(0.4\right)^{n}\ \ \left(2\right)$ តាម(១)និង(២) គេបាន $0.0256=\left(0.4\right)^{n}$ $\Leftrightarrow \log\left(0.0256\right)=n\log\left(0.4\right)$ $\Rightarrow -1.592=n\left(-0.398\right)$ $\Rightarrow n=\frac{1.592}{0.398}=4$ ដូចនេះ $n=4$ ២. សង្ឃឹមគណិតនិងវ៉ារ្យង់នៃអថេរ ចៃដន្យ X ច្បាប់ទ្វេធានៃប្រូបាប បើ X ជាអថេរចៃដន្យនៃ $Bin\left(n\ ,p\right)$	

	នោះ $E(X)=np$ ហើយវ៉ារ្យង់តាងដោយ $Var(X)=np(1-p)$ ឧទាហរណ៍ ឧបមាថាប្រូបាបដែលជាថ្ងៃមានភ្លៀងស្មើនឹង 0.4 ។គណនាចំនួនថ្ងៃមានភៀងដែលសង្ឃឹមទុកក្នុងមួយសប្តាហ៍ និងគម្លាតស្តង់ដា ចម្លើយ យក "ថ្ងៃមានភៀង"ជាជោគជ័យ គេបាន $P=0.4, q=1-p=1-0.4=0.6$ តាង X ជាអថេរចៃដន្យដែលជា"ចំនួនថ្ងៃមានភៀងក្នុងមួយសប្តាហ៍" នោះ X ជាអថេរនៃ $Bin(n, p)$ ដែល $n=7$, $p=0.4$ តាមច្បាប់ទ្វេធា $E(X)=np=7\times0.4=2.8$ $Var(X)=np(1-p)=2.8\times0.6$ $=1.68$ -គម្លាតស្តង់ដាមានរូបមន្ត $\sigma=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{1.68}=1.30$ ថ្ងៃ ដូចនេះ ចំនួនមានភៀងដែលសង្ឃឹមទុកក្នុងមួយសប្តាហ៍ប្រហែល ៣ថ្ងៃ និងគម្លាតស្តង់ដាប្រហែល១ថ្ងៃ។ លំហាត់គំរូ នៅក្នុងថង់មួយមានបាល់ពណ៌ក្រហម៦បាល់ពណ៌លឿង៨និងបាល់ពណ៌ខៀវ៦។គេចាប់យកបាលមួយដោយចៃដន្យចេញពីថង់នោះ ហើយកត់ទុកពណ៌របស់បាល់រួចដាក់	

-ចែកក្រដាសលំហាត់ប្រត្តិបត្តិ	ក្នុងថង់វិញ។ គេចាប់ហើយដាក់ចូលទៅវិញចំនួន ១០ដង។ ក. រកចំនួនបាល់ពណ៌ក្រហមដែលសង្ឃឹមទុកនឹងចាប់បានទាំងអស់ ខ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានបាល់ពណ៌លឿងទាំងអស់មិនលើសពី៤។ ចម្លើយ ក. តាង X ជាអថេរចៃដន្យ "ចំនួនបាល់ពណ៌ក្រហម" $X - Bin(n\ ,p)$ ដែល $n=10$ ហើយ $P=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ គេបាន $E(X)=np=10\times\frac{3}{10}=3$ ដូចនេះសង្ឃឹមទុកថា គេនឹងចាប់បានពណ៌ក្រហមទាំងអស់ចំនួន៣បាល់ ខ. តាងy ជាអថេរចៃដន្យ "ចំនួនបាល់ពណ៌លឿង" $X - Bin(10\ ,p)$ ដែល $P=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ និង $q=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ ប្រូបាបដែលចាប់បានបាល់ពណ៌លឿងមិនលើសពី ៤គឺ $P(x\le 4)$ គេបាន	ក. តាង X ជាអថេរចៃដន្យ "ចំនួនបាល់ពណ៌ក្រហម" $X - Bin(n\ ,p)$ ដែល $n=10$ ហើយ $P=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ គេបាន $E(X)=np=10\times\frac{3}{10}=3$ ដូចនេះសង្ឃឹមទុកថា គេនឹងចាប់បាន ពណ៌ក្រហមទាំងអស់ចំនួន ៣បាល់ ខ. តាងy ជាអថេរចៃដន្យ "ចំនួនបាល់ពណ៌លឿង" $X - Bin(10\ ,p)$ ដែល $P=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ និង $q=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ ប្រូបាបដែលចាប់បានបាល់ពណ៌លឿងមិនលើសពី ៤គឺ $P(x\le 4)$ គេបាន

ឱ្យសិស្សធ្វើតាមក្រុម -ចែកក្រដាសលំហាត់ប្រត្តិបត្តិឱ្យសិស្សធ្វើតាមក្រុម	$P(x=4)=P(x=0)+P(x=1)+$ $P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)$ $P(x=0)=C(10,0)+\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^{10}$ $=0.0060$ $P(x=1)=C(10,1)+\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^9$ $=0.0403$ $P(x=2)=C(10,2).\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^8$ $=0.1209$ $P(x=3)=C(10,3).\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^7$ $=0.2150$ $P(x=4)=C(10,4).\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^6$ $=0.2508$ $P(x\le 4)=0.0060+0.0403+0.1209$ $+0.2150+0.2508=0.6330$ ដូចនេះប្រូបាបដែលចាប់បានបាល់ពណ៌លឿងមិនលើសពី ៤គឺ 0.6330	$P(x=4)=P(x=0)+P(x=1)+$ $P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)$ $P(x=0)=C(10,0)+\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^{10}$ $=0.0060$ $P(x=1)=C(10,1)+\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^9$ $=0.0403$ $P(x=2)=C(10,2).\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^8$ $=0.1209$ $P(x=3)=C(10,3).\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^7$ $=0.2150$ $P(x=4)=C(10,4).\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^6$ $=0.2508$ $P(x\le 4)=0.0060+0.0403+0.12$ $+0.2150+0.2508=0.6330$ ដូចនេះប្រូបាបដែលចាប់បានបាល់ពណ៌លឿងមិនលើសពី ៤គឺ 0.6330 -ដោះស្រាយតាមក្រុម

-ដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សធ្វើលើក្ដារខៀន	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី) - X ជាអថេរចៃដន្យដែល $X-Bin(12,0.45)$ ក. $P(x=5)$ ខ. $P(x\succ 1)$ គ. គម្លាតស្តង់ដា	ចម្លើយ តាមរូបមន្តអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប $P(X=x)=C(n,x)P^{x}(1-p)^{n-x}$ $x=0,1,2.........$ ក. $P(x=5)=C(12,0.45)(0.45)^{5}$ $\times(0.55)^{7}=0.2225$ ខ. $P(x\succ 1)=1-P(x\le 1)$ $P(x\le 1)=P(x=0)+P(x=1)$ $P(x\le 1)=0.0008+0.0075$ $=0.0083$ $\Rightarrow P(x\succ 1)=1-0.0083=09917$ គ. $Var(X)=np(1-p)$ $=12(o.45)(0.55)=2.97$ គម្លាតស្តង់ដា $\sigma=\sqrt{2.97}=1.72$
-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ -ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី)	-សិស្សកត់លំហាត់ និងអនុវត្តតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- មុខវិជ្ជា : គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២(កម្រិតមូលដ្ឋាន)
- ជំពូកទី៦ : បំណែងចែកប្រូបាប
- មេរៀនទី២ : បំណែងចែកទ្វេធា

I.**វត្ថុបំណងនៃមេរៀន**

-**ចំណេះដឹង** : សិស្សប្រាប់ពីវិធីគណនាតម្លៃនៃអថេរចៃដន្យx ដែលកើតញឹកញាប់ជាងគេ តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ។

-**បំណិន** : សិស្សគណនាតម្លៃនៃអថេរចៃដន្យ x ដែលកើតញឹកញាប់ជាងគេតាមរយៈ លំហាត់គំរូបានត្រឹមត្រូវ។

-**ឥរិយាបថ** : សិស្សសហការគ្នាដោះស្រាយលំហាត់ដោយស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នខ្ពស់។

II. **ខ្លឹមសារមេរៀន** : ពេលវេលា: …២…ម៉ោង ថ្ងៃ………ទី…ខែ…………..ឆ្នាំ………..

៣. គណនាតម្លៃនៃអថេរចៃដន្យដែលកើតឡើងញឹកញាប់ជាងគេ

III.**សម្ភារៈឧទេស**

-ស . ស :ទំព័រទី១៥០៤ដល់ទំព័រទី១៥៧

-ស . គ : ទំព័រទី១៥៤ ដល់ទំព័រទី១៥៧

- សន្លឹកកម្រង់លំហាត់ប្រត្តិបត្តិ

IV.ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសាមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ ធ្នាប់ក្នុងថ្នាក់	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់ ៣នាទី)	-ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ឲ្យសិស្សឡើងដៅចំណុចទិន្នន័យលើក្តារខៀន	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់ ៧នាទី) ឧទាហរណ៍ គេបោះកាក់មួយដែលស្មើសាច់ល្អ។ កាក់នោះម្ខាងមានរូបក្បាលមនុស្ស និងម្ខាងទៀតគ្មានរូបក្បាលមនុស្ស។ គេបោះកាក់នោះចំនួន១០ដង	-ចម្លើយ សន្មតថា "កាក់ចេញបានរូបក្បាលមនុស្ស" ជាជោគជ័យ គេបាន

	ក.រកប្រូបាបដែលនឹងចេញរូបខាងក្បាលមនុស្សចំនួន ៥ដង ខ. រកប្រូបាបដែលនឹងចេញបានរូបក្បាលមនុស្សតិចជាង ៣ដង តើអ្នកសង្ឃឹងថានឹងដេញបានរូបក្បាលមនុស្សចំនួនប៉ុន្មានដង?	$p=\frac{1}{2}\ ,q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ តាង X ជាអថេរចៃដន្យ "ចំនួនដងដែលចេញបានរូបខាងក្បាលមនុស្ស" ក.រក $p(x=5)$ $p(x=5)=C(10\ ,5)\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5$ $=0.2461$ ដូចនេះ $p(x=5)=0.2461$ ខ. $p(x\prec 3)$ $p(x\prec 3)=p(x=0)+p(x=1)$ $+p(x=2)$ តែ $p(x=0)=C(10,0)\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ $=0.0010$ $p(x=1)=C(10,1)\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9$ $=0.0098$ $p(x=2)=C(10,2)\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8$ $=0.439$ $\Rightarrow p(x\prec 3)=0.0011+0.0098$ $+0.439=0.0547$ ដូចនេះ $p(x\prec 3)=0.0547$ គ. ដោយ $X-Bin(10,0.5)$ គេបាន $E(x)=10.\frac{1}{2}=5$ ដូចនេះ យើងសង្ឃឹមថានឹងចេញរូបខាងក្បាលមនុស្ស ៥ដង។

-ប្រាប់សិស្សពីតម្លៃប្រូបាបដែលធ្វើឱ្យអថេរ x កើតឡើងញឹកញាប់ជាងគេ -ដាក់ឧទាហរណ៍ណែនាំសិស្សគណនា -តើអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេមានរូបមន្តដូចម្តេច? -តើ..........?ត្រូវនិងប្រូបាបធំជាងគេ -តើតម្លៃនៃ....ដែលកើតញឹកញាប់ជាងគេឬម៉ូតស្មើនឹងប៉ុន្មាន? -ឱ្យសិស្សទាញរកវិធានទូទៅ	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី រយៈពេល៦០នាទី) **មេរៀនទី២:** **បំណែងចែកទ្វេធា** **៣.គណនាតម្លៃនៃអថេរចៃដន្យដែលកើតឡើងញឹកញាប់ជាងគេ** -តម្លៃអថេរចៃដន្យ X ដែលកើតឡើងញឹកញាប់ជាងគេគឺតម្លៃx ណាដែលត្រូវនឹងតម្លៃប្រូបាបធំជាងគេ តម្លៃនោះជួនកាលគេហៅថា ម៉ូត។ ឧទាហរណ៍បើ x ជាអថេរចៃដន្យនៃ $Bin(10,0.45)$ គណនាតម្លៃ x ដែលកើតឡើងញឹកញាប់ជាងគេ។ ចម្លើយ $X - Bin(10,0.45)$ គេបាន $p(X=x)=C(n,x)p^{x}(1-p)^{n-x}$ $x=0,1,2,3...,10$ $p(10,0)=C(10,0)(0.45)^{0}(0.55)^{10}$ $=0.0025$ $p(x=1)=C(10,1).(0.45)^{1}(0.55)^{9}$ $=0.0207$ $p(x=2)=C(10,2)(0.45)^{2}(0.55)^{8}$ 0.0763 $p(x=3)=C(10,3)(0.45)^{3}(0.55)^{7}$ $=0.1665$ $p(x=4)=C(10,4)(0.45)^{4}(0.55)^{6}$ $=0.3484$ $p(x=5)=C(10,5)(0.45)^{5}(0.55)^{5}$ $=0.2340$ $p(x=6)=C(10,6)(0.45)^{6}(0.55)^{4}$ $=0.1595$	$p(X=x)=C(n,x)p^{x}(1-p)^{n-x}$ $x=0,1,2,3...,10$ $p(10,0)=C(10,0)(0.45)^{0}(0.55)^{10}$ $=0.0025$ $p(x=1)=C(10,1).(0.45)^{1}(0.55)^{9}$ $=0.0207$ $p(x=2)=C(10,2)(0.45)^{2}(0.55)^{8}$ 0.0763 $p(x=3)=C(10,3)(0.45)^{3}(0.55)^{7}$ $=0.1665$ $p(x=4)=C(10,4)(0.45)^{4}(0.55)^{6}$ $=0.3484$ $p(x=5)=C(10,5)(0.45)^{5}(0.55)^{5}$ $=0.2340$ $p(x=6)=C(10,6)(0.45)^{6}(0.55)^{4}$ $=0.1595$ គេឃើញថាតម្លៃ x =4 នៃ x ត្រូវនឹង ប្រូបាបធំជាងគេ ដូចនេះ តម្លៃនៃ x ដែលកើតញឹកញាប់ ជាងគេ ឬម៉ូតស្មើនឹង ៤។

-ដាក់លំហាត់គំរូណែនាំសិស្ស គណនា	គេឃើញថាតម្លៃ x =4 នៃ x ត្រូវនឹងប្រូបាបធំជាងគេ ដូចនេះ តម្លៃនៃ x ដែលកើតញឹកញាប់ជាងគេ ឬម៉ូតស្មើនឹង ៤។ -ជាទូទៅ ដើម្បីរកតម្លៃនៃ x ដែលធ្វើឱ្យតម្លៃប្រូបាបធំជាងគេ គេត្រូវ រកប្រូបាបតម្លៃ x ដែលនៅជិតតម្លៃមធ្យមឬ $E(x)=np$ លំហាត់គំរូ x ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធានៃបំណែងចែកទ្វេធាដែលមានមធ្យមស្មើនឹង ២ និងវ៉ារ្យង់ស្មើនឹង1.6 ក. គណនាតម្លៃ x ដែលកើតឡើងញឹកញាប់ជាងគេ ខ. គណនា $p(x \prec 6)$ ចម្លើយ ក. បើ x ជាអថេរនៃ $Bin(n,p)$ គេបាន $E(x)=np$ និង $Var(x)=npq$ តាង $q=1-p$ តែ $E(x)=2, Var(x)=1.6$ ដូចនេះ $np=2,\ npq=1.6$ ជំនួស $np=2$ ក្នុងសមីការ $npq=1.6$ គេបាន $2q=1.6 \Rightarrow q=0.8$ ដោយ $p=1-q=1-0.8=0.2$ ហើយ $np=2\ , n=\frac{2}{p}=\frac{2}{0.2}=10$ គេត្រូវយកតម្លៃ x នៃX នៅក្បែរៗតម្លៃមធ្យមហេតុនេះ $x=0\ ,1\ ,\ 2\ ,3$ x ជាអថេរទ្វេធានៃបំណែងចែកទ្វេធា	-គណនា

-ចែកក្រដាសលំហាត់ប្រត្តិបត្តិឱ្យសិស្សធ្វើ	គេបានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប $p(X=x)=C(n,x)p^x.q^{n-x}$ $p(x=1)=C(10,1)(0.2)^1(0.8)^9$ $=0.2484$ $p(x=2)=C(10,2)(0.2)^2(0.8)^8$ $=0.3020$ $p(10,3)=C(10,3)(0.2)^3(0.8)^7$ $=0.2013$ ដូចនេះ តម្លៃ នៃ $x=2$ កើតឡើងញឹកញាប់ជាងគេ។ ខ. គណនា $p(x\prec 6)$ $p(x\prec 6)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)$ $+p(x=3)+p(x=4)+p(x=5)$ $p(x=0)=C(10,0)(0.2)^0(0.8)^{10}$ $=0.1074$ $p(x=4)=C(10,1).(0.2)^4(0.8)^6$ $=0.0881$ $p(x=5)C(10,2)(0.2)^5(0.8)^5$ $=0.0264$ $p(x\prec 6)=0.1074+0.2684+0.3020$ $+0.2013+0.0881+0.0264=0.9936$ ដូចនេះ $p(x\prec 6)=0.9936$	-ដោះស្រាយតាមក្រុម
-ដាក់លំហាត់ឱ្យសិស្សដោះស្រាយ	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងចំណេះដឹង ១៥នាទី) គេដឹងថាអថេរចៃដន្យដែល $X-Bin(8,0.45)$ ក. គណនាតម្លៃ x ដែលកើតឡើងញឹកញាប់ជាងគេ ខ. $p(x\prec 4)$	ក. ដោយ $E(x)=np=8(0.45)3.6$ នោះតម្លៃ $x=2,\ 3\ ,4\ ,5$

		$p(X=x)=C(n,x)\,p^x(1-p)^{n-x}$ $p(x=2)=C(8,2)(0.45)^2(0.55)^6$ $=0.1569$ $p(x=3)=C(8,3)(0.45)^3(0.55)^5$ $=0.2568$ $p(x=4)=C(8,4)(0.45)^4(0.55)^4$ $=0.2627$ $p(x=5)=C(8,5)(0.45)^5(0.55)^3$ $=0.1719$ ដូចនេះ តម្លៃ X ដែលកើតឡើងញឹកញាប់ជាងគេគឺ $X=4$ ខ. $p(x\prec 4)$ $p(x\prec 4)=p(x=0)+p(x=1)+$ $p(x=2)+p(x=3)$ $p(x=0)=C(8,0)(0.45)^0(0.55)^8$ $=0.0084$ $p(x=1)=C(8,1).(0.45)^1(0.55)^7$ $=0.0548$ $p(x\prec 4)=0.0084+0.0548+$ $0.1569+0.2568=0.4769$ ដូចនេះ $p(x\prec 4)=0.4769$
-គ្រូដាក់កិច្ចការឲ្យសិស្សធ្វើ -ប្រាប់សិស្សឲ្យមើលមេរៀនឡើងវិញ និងធ្វើលំហាត់	<u>ជំហានទី៥</u> (កិច្ចការផ្ទះ ៥នាទី)	-សិស្សកត់លំហាត់ និងអនុវត្តតាម

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)

ជំពូកទី៦ បំណែងចែកប្រូបាប

មេរៀនទី៣ បំណែងចែកណរម៉ាល់

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សអោយនិយមន័យអថេរចៃដន្យជាប់តាមរយៈឧទាហរណ៍និងកំណត់អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាបនៃអថេរណរម៉ាល់ X តាមរយៈខ្លឹមសារមេរៀន។
- បំណិន: សិស្សដោះស្រាយលំហាត់បានត្រឹមត្រូវតាមខ្សែកោងណរម៉ាល់
- ឥរិយាបថ: សិស្សចូលរួមដោះស្រាយលំហាត់យ៉ាងសកម្មនិងស្និទ្ធស្នាល

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ១៦០-១៦៤
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ ១៦០-១៦៤

IV. ខ្លឹមសារមេរៀន

1. **អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាបនៃអថេរណរម៉ាល់** X

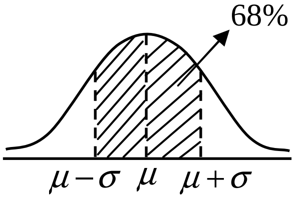
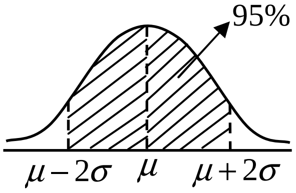
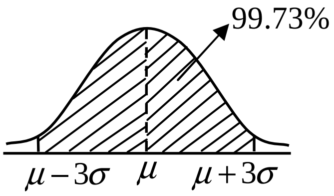
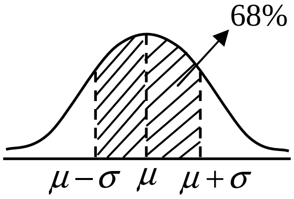
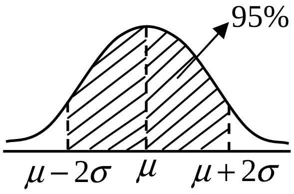
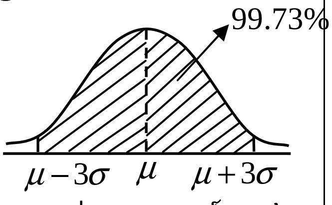
   1.1. អថេរចៃដន្យជាប់

   1.2. បំណែងចែកណរម៉ាល់

V. ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- លំនឹងថ្នាក់	- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		
-ក្នុងពិសោធន៍ទ្វេធា n វិញ្ញាសា បើប្រូបាបជោគជ័យ p ប្រូបាបបរាជ័យ q ។តើអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប		- $P(X=x)=C(n,x)\,p^x q^{n-x}$ ដែល $x=0,1,2,\ldots,n$

$P(X=x)=?$ -បើ X ជាអថេរនៃ $Bin(8,0.4)$ គណនា $P(X=2)$		-យើងមាន $Bin(8,0.4)$ នោះ $n=8, p=0.4, q=0.6$ $P(X=2)=C(8,2)(0.4)^2$ $\times(0.6)^{8-2}$ $=\frac{8!}{6!2!}(0.4)^2(0.6)^6$
ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)		
-គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍: បុរសម្នាក់មានម៉ាសនៅចន្លោះ 82.5kg និង 83.5kg ។ បើអថេរ X ជាម៉ាសរបស់បុរសនោះតើគេអាចស្គាល់តម្លៃពិតប្រាកដរបស់ X បានដែរឬទេ? -គ្រូប្រាប់ថា X ហៅថាអថេរចៃដន្យជាប់ -ចូរអោយនិយមន័យអថេរចៃដន្យជាប់ -អោយសិស្សមើលនិយមន័យក្នុងសៀវភៅទំព័រ១៦១	**បំណែងចែកណរម៉ាល់** **1. អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាបនៃអថេរណរម៉ាល់** X **1.1.អថេរចៃដន្យជាប់** និយមន័យ: អថេរចៃដន្យជាប់គឺជាអថេរចៃដន្យដែលយកតម្លៃណាមួយក៏បាននៅក្នុងចន្លោះនៃចំនួនពិតមួយ។ **1.2.បំណែងចែកណរម៉ាល់** **និយមន័យ:** បើអថេរចៃដន្យ X មានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប $f(x)$ ដែល $f(x)=\frac{e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ហើយ $x\in(-\infty,+\infty)$ នោះគេថាអថេរ X ជាអថេរចៃដន្យនៃបំណែកចែកណរម៉ាល់ដែលមានមធ្យមស្មើ μ និងវ៉ារ្យង់ស្មើនឹង σ^2 ។	-សិស្សសង្កេតឧទាហរណ៍ និងឆ្លើយសំនួរ -គេមិនអាចស្គាល់តម្លៃពិតរបស់ X បានទេ គ្រាន់តែដឹងថា X អាចយកតម្លៃណាមួយក៏បានអោយស្ថិតក្នុងចន្លោះ 82.5kg និង 83.5kg ។ និយមន័យ: អថេរចៃដន្យជាប់គឺជាអថេរចៃដន្យដែលយកតម្លៃណាមួយក៏បាននៅក្នុងចន្លោះនៃចំនួនពិតមួយ។ -ធ្វើតាមការណែនាំរបស់គ្រូ **និយមន័យ:** បើអថេរចៃដន្យ X មានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេប្រូបាប $f(x)$ ដែល $f(x)=\frac{e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ហើយ $x\in(-\infty,+\infty)$ នោះគេថាអថេរ X ជាអថេរចៃដន្យនៃ

-គ្រូអោយសិស្សសង្កេតនិងណែនាំពីលក្ខណ:ពិសេសនៃខ្សែកោង $f(x)$	បំណែងចែកណរម៉ាល់ដែលមានមធ្យម μ និងវ៉ារ្យង់ σ^2 កំណត់ដោយ $N(\mu,\sigma^2)$ **✶លក្ខណ:ពិសេសនៃខ្សែកោង** $f(x)$ ①មានរាងដូចជួងនិងមានលក្ខណ:ឆ្លុះធៀបនឹងម៉ូត ②ផ្ទៃផ្នែកឆូតប្រហែល 68% នៃផ្ទៃទាំងអស់ដែលនៅចន្លោះ $\pm\sigma$ ពីមធ្យម គេអាចសរសេរ $\mu\pm\sigma=(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$  -ក្នុងចន្លោះ $\mu\pm2\sigma=(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ ផ្ទៃប្រហែល 95%  -ក្នុងចន្លោះ $\mu\pm3\sigma=(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ ផ្ទៃប្រហែល 99.73% 	បំណែកចែកណរម៉ាល់ដែលមានមធ្យមស្មើ μ និងវ៉ារ្យង់ស្មើនឹង σ^2 ។បំណែងចែកណរម៉ាល់ដែលមានមធ្យម μ និងវ៉ារ្យង់ σ^2 កំណត់ដោយ $N(\mu,\sigma^2)$ **✶លក្ខណ:ពិសេសនៃខ្សែកោង** $f(x)$ ①មានរាងដូចជួងនិងមានលក្ខណ:ឆ្លុះធៀបនឹងម៉ូត ②ផ្ទៃផ្នែកឆូតប្រហែល 68% នៃផ្ទៃទាំងអស់ដែលនៅចន្លោះ $\pm\sigma$ ពីមធ្យម គេអាចសរសេរ $\mu\pm\sigma=(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$  -ក្នុងចន្លោះ $\mu\pm2\sigma=(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ ផ្ទៃប្រហែល 95%  -ក្នុងចន្លោះ $\mu\pm3\sigma=(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ ផ្ទៃប្រហែល 99.73%  -សិស្សកត់ឧទាហរណ៍នៅធ្វើតាមការណែនាំរបស់គ្រូ

-គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ណែនាំសិស្សអោយដោះស្រាយដោយប្រើលក្ខណៈពិសេស	ឧទាហរណ៍:បំណែងចែកប្រាក់ចំណូលប្រចាំឆ្នាំរបស់ក្រុមវិនិយោគមួយក្រុមប្រហាក់ប្រហែលនិងបំណែងចែកណរម៉ាល់ដែលមានមធ្យមស្មើនឹង៣៧២០០ដុល្លានិងមានគំលាតស្តង់ដាស្មើនឹង៨០០ដុល្លា។ ក. តើប្រាក់ចំណូលប្រហែល 68% ស្ថិតនៅចន្លោះចំនួនប៉ុន្មានដុល្លា? ខ. តើប្រាក់ចំណូលប្រហែល 95% ស្ថិតនៅចន្លោះចំនួនប៉ុន្មានដុល្លា? គ. តើប្រាក់ចំណូលប្រហែល 99.73% ស្ថិតនៅចន្លោះចំនួនប៉ុន្មានដុល្លា? ឃ. រកមេដ្យាននិងម៉ូតនៃបំណែងចែក។ <u>ចំលើយ</u> ក. តាមខ្សែកោងណរម៉ាល់ប្រហែល 68% នៃផ្ទៃទាំងអស់គឺនៅចន្លោះ $\mu\pm\sigma=(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ ដោយ $\mu=37200,\sigma=800$ $\mu\pm\sigma=(37200-800,$ $37200+800)$ $=(36400,38000)$ ដូចនេះ ប្រហែលជា 68% នៃប្រាក់ចំណូលប្រចាំឆ្នាំនៅចន្លោះពី 36400 ដុល្លានិង 38000 ដុល្លា។ ខ. ប្រាក់ចំណូលប្រហែល 95% នៅក្នុងចន្លោះ $\mu\pm2\sigma=(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ $=(37200-2\times800,$ $37200+2\times800)$ $=(35600,38800)$	<u>ចំលើយ</u> ក. តាមខ្សែកោងណរម៉ាល់ប្រហែល 68% នៃផ្ទៃទាំងអស់គឺនៅចន្លោះ $\mu\pm\sigma=(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ ដោយ $\mu=37200,\sigma=800$ $\mu\pm\sigma=(37200-800,$ $37200+800)$ $=(36400,38000)$ ដូចនេះ ប្រហែលជា 68% នៃប្រាក់ចំណូលប្រចាំឆ្នាំនៅចន្លោះពី 36400 ដុល្លានិង 38000 ដុល្លា។ ខ. ប្រាក់ចំណូលប្រហែល 95% នៅក្នុងចន្លោះ $\mu\pm2\sigma=(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ $=(37200-2\times800,$ $37200+2\times800)$ $=(35600,38800)$ គ. ប្រាក់ចំណូលប្រហែល 99.73% ស្ថិតក្នុងចន្លោះ $\mu\pm3\sigma=(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$

	គ. ប្រាក់ចំណូលប្រហែល 99.73% ស្ថិតក្នុងចន្លោះ $\mu \pm 3\sigma = (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ $= (37200 - 2\times 800,$ $37200 + 2\times 800)$ $= (35600, 38800)$ ឃ. ដោយប្រាក់ចំណូលប្រចាំឆ្នាំប្រហាក់ប្រហែលបំណែងចែកណរម៉ាល់នោះមធ្យម ម៉ូត និង មេដ្យាន ស្មើគ្នាគឺ 37200 ដុល្លា	$= (37200 - 2\times 800,$ $37200 + 2\times 800)$ $= (35600, 38800)$ ឃ. ដោយប្រាក់ចំណូលប្រចាំឆ្នាំប្រហាក់ប្រហែលបំណែងចែកណរម៉ាល់នោះមធ្យម ម៉ូត និងមេដ្យាន ស្មើគ្នាគឺ 37200 ដុល្លា
ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-ក្នុងបំណែងចែកណរម៉ាល់ +ផ្ទៃប្រហែល 68% ស្ថិតក្នុងចន្លោះណាំ? +ផ្ទៃប្រហែល 95% ស្ថិតនៅចន្លោះណា? +ផ្ទៃប្រហែល 99.73% ស្ថិតនៅចន្លោះណា?		+ផ្ទៃប្រហែល 68% ក្នុងចន្លោះ $\mu \pm \sigma = (\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ +ក្នុងចន្លោះ $\mu \pm 2\sigma = (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ +ក្នុងចន្លោះ $\mu \pm 3\sigma = (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$
ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)		
-សូមប្អូនធ្វើលំហាត់ទំព័រទី ១៧០ លំហាត់លេខ១និង២		-សិស្សកត់ត្រាលេខទំព័រនិងលេខលំហាត់

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)

ជំពូកទី៦ បំណែងចែកប្រូបាប

មេរៀនទី៣ បំណែងចែកណរម៉ាល់ (តចប់)

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សកំណត់បានពីរបៀបរកប្រូបាបដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់ តាមរយៈខ្លឹមសារមេរៀន។
- បំណិន: សិស្សគណនាប្រូបាបបានត្រឹមត្រូវដោយប្រើខ្សែកោងណរម៉ាល់។
- ឥរិយាបថ: សិស្សចូលរួមយ៉ាងសកម្មក្នុងការដោះស្រាយនិងយកទៅអនុវត្តក្នុងជីវភាព

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទេ្ទស

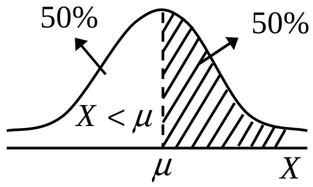
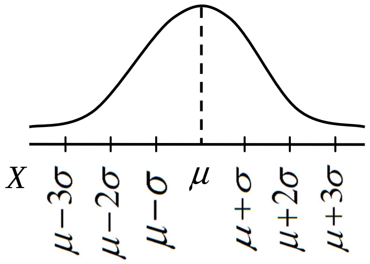
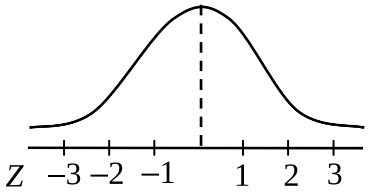
- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ១៦៤-១៦៧
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ ១៦៤-១៦៧

IV. ខ្លឹមសារមេរៀន

2. ប្រូបាបដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់

V. ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- លំនឹងថ្នាក់	- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		
-តើផ្ទៃក្រឡាប្រហែល 68% នៃផ្ទៃសរុបស្ថិតក្នុងចន្លោះណា? -ផ្ទៃប្រហែល 95% ស្ថិតក្នុងចន្លោះណា?		-ស្ថិតក្នុងចន្លោះ $\mu\pm\sigma=(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ -ស្ថិតក្នុងចន្លោះ $\mu\pm 2\sigma=(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$

-ផ្ទៃប្រហែល 99.73% ស្ថិតក្នុងចន្លោះណា?		-ស្ថិតក្នុងចន្លោះ $\mu\pm3\sigma=(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$
	ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)	
-អោយសិស្សសង្កេតខ្សែកោងណរម៉ាល់ដែលគ្រូគូសលើក្តារខៀន -តើផ្ទៃក្រឡាដែលស្ថិតនៅខាងក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់ដែល $X>\mu$ ស្មើប៉ុន្មានភាគរយ?ចុះ $X<\mu$? -គ្រូប្រាប់ថា"ឬមានប្រូបាបស្មើ0.5 ដូចគ្នា -គ្រូប្រាប់ថាដើម្បីងាយស្រួលគណនាប្រូបាប គេត្រូវបង្កើតអ័ក្សថ្មីមានអថេរហៅថាអថេរណរម៉ាល់ស្តង់ដា Z ដោយយក 0 នៅចំតម្លៃ μ ហើយមួយឯកតាស្មើនឹង σ	**បំណែងចែកណរម៉ាល់** **2. ប្រូបាបដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោងណរម៉ាល់**  $P(X>\mu)=P(X<\mu)=0.5$   **ជាទូទៅ:** បើស្គាល់តម្លៃនៃអថេរ X នោះគេអាចរកតម្លៃនៃអថេរណរម៉ាល់ស្តង់ដា Z បានតាមរូបមន្តបំលែង $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ ដែល μ ជាមធ្យមនៃបំណែងចែក ហើយ σ ជាគំលាតស្តង់ដា។	-ស្មើនឹង 50% នៃផ្ទៃសរុប -ស្មើនឹង 50% នៃផ្ទៃសរុប -សិស្សស្តាប់ការណែនាំរបស់គ្រូ រួចកត់ត្រា **ជាទូទៅ:** បើស្គាល់តម្លៃនៃអថេរ X នោះគេអាចរកតម្លៃនៃអថេរណរម៉ាល់ស្តង់ដា Z បានតាមរូបមន្តបំលែង $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ ដែល μ ជាមធ្យមនៃបំណែងចែក ហើយ σ ជាគំលាតស្តង់ដា។

-ប្រាប់សិស្សបើ Z ជាអថេរណរម៉ាល់ស្តង់ដានោះគេសរសេរ $N(0,1)$ ដែល O ជាមធ្យមនិងណែនាំសិស្សពីរបៀបមើលតារាងប្រូបាប -គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍ទំព័រ ១៦៦ ឧទាហរណ៍:បើ z ជាអថេរនៃ $N(0,1)$ ។គណនា ក. $P(\|z\|<1.43)$ ខ. $P(\|z\|>1.43)$ ណែនាំនិងរួមគណនាជាមួយសិស្ស	ចម្លើយ ក. $P(\|z\|<1.43)$ $=P(-1.43<z<1.43)$ $=0.4236+0.4236$ (មើលតារាង) $=0.8472$ ខ. $P(\|z\|>1.43)$ ដោយ $\|z\|>1.43$ នោះ $z>1.43$ ឬ $z<-1.43$ គេបាន $P(\|z\|>1.43)=P(z>1.43)$ $+P(z<-1.43)$ $=(0.5-0.4236)$ $+(0.5-0.4236)$ $=0.1528$	-សិស្សស្តាប់និងរៀនមើលតារាងប្រូបាបដោយយកចិត្តទុកដាក់ ចម្លើយ ក. $P(\|z\|<1.43)$ $=P(-1.43<z<1.43)$ $=0.4236+0.4236$ (មើលតារាង) $=0.8472$ ខ. $P(\|z\|>1.43)$ ដោយ $\|z\|>1.43$ នោះ $z>1.43$ ឬ $z<-1.43$ គេបាន $P(\|z\|>1.43)=P(z>1.43)$ $+P(z<-1.43)$ $=(0.5-0.4236)$ $+(0.5-0.4236)$ $=0.1528$
-គ្រូដាក់លំហាត់គំរូអោយសិស្សធ្វើ លំហាត់គំរូ: បើ X ជាអថេរនៃ $N(10,25)$ ។គណនាប្រូបាប ក. $P(X>12)$ ខ. $P(X<6)$ គ. $P(6<X<12)$ -ណែនាំអោយសិស្សប្តូរពីអថេរ X ទៅជាអថេរណរម៉ាល់ Z ដោយប្រើរូបមន្ត	លំហាត់គំរូ: បើ X ជាអថេរនៃ $N(10,25)$ ។គណនាប្រូបាប ក. $P(X>12)$ ខ. $P(X<6)$ គ. $P(6<X<12)$ ចម្លើយ ក. គណនា $P(X>12)$ បើ X ជាអថេរនៃ $N(10,25)$ ដែល $\mu=10,\sigma^2=25\Rightarrow\sigma=5$	-សិស្សរួមជាមួយគ្រូគណនាលំហាត់គំរូនិងកត់ត្រា -សិស្សធ្វើតាមការណែនាំ ចម្លើយ ក. គណនា $P(X>12)$ បើ X ជាអថេរនៃ $N(10,25)$ ដែល

	គេបាន $Z=\frac{X-10}{5}$ $P(X>12)=P\left(\frac{X-10}{5}>\frac{12-10}{5}\right)$ $=P(Z<-0.8)$ $=0.5-0.2881$ $=0.2119$ គេបាន $P(X<6)=0.2119$ គ. គណនា $P(6<X<12)$ $P(6<X<12)=P\left(\frac{6-10}{5}<\frac{X-10}{5}<\frac{12-1}{5}\right)$ $=P(-0.8<Z<0.1554)$ $=0.2881+0.1554$ $=0.4435$ ដូចនេះ $P(6<X<12)=0.4435$	$\mu=10,\sigma^2=25\Rightarrow\sigma=5$ គេបាន $Z=\frac{X-10}{5}$ $P(X>12)=P\left(\frac{X-10}{5}>\frac{12-10}{5}\right)$ $=P(Z<-0.8)$ $=0.5-0.2881$ $=0.2119$ គេបាន $P(X<6)=0.2119$ គ. គណនា $P(6<X<12)$ $P(6<X<12)=P\left(\frac{6-10}{5}<\frac{X-10}{5}<\frac{12-1}{5}\right)$ $=P(-0.8<Z<0.1554)$ $=0.2881+0.1554$ $=0.4435$ ដូចនេះ $P(6<X<12)=0.4435$
ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-លំហាត់: បើ Z ជាអថេរនៃ $N(0,1)$ ។គណនា ក. $P(Z<1.54)$ ខ. $P(Z>0.23)$		ក. $P(Z<1.54)$ តាមតារាងយើងបាន $P(Z<1.54)=0.5+0.4382$ $=0.9382$ ខ. $P(Z>0.23)$ $=0.5-0.0910$ $=0.409$
ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)		
-ចូរប្អូនដោះស្រាយលំហាត់លេខ៣,៤,៥ទំព័រ១៧០និង ១៧១នៅផ្ទះ។	កិច្ចការផ្ទះ	-សិស្សស្តាប់ការណែនាំរបស់គ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី៧៖ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

មេរៀនទី១៖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំនេះដឹង: ពិពណ៌នា ពីនិយមន័យផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ
- បំនិន: បង្ហាញពីផលគុណវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ
- ឥរិយាបថ: មានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II. រយៈពេល ២ ម៉ោង

III. ខ្លឹមសារមេរៀន

១. និយមន័យផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

១.១.និយមន័យ

IV. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- បន្ទាត់ សន្លឹកកម្រងសំណួរតម្រង់ទិសការពិភាក្សានិងលំហាត់ប្រតិបត្តិ
- សៀវភៅគ្រូទំព័រ ១៧៤-១៧៥
- សៀវភៅសិស្សទំព័រ ១៧៤-១៧៥

V. ដំណើរការនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យថ្នាក់រៀន អនាម័យ វិន័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង អវត្តមាន	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)	-សិស្សក្រោកឈរ ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-គ្រូសួរសិស្សឲ្យរំលឹក និយមន័យផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងប្លង់ដែលមានពីរ វ៉ិ	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀន)	-សិស្សឆ្លើយផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ

ចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$		$\vec{a}.\vec{b}=\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\cos\alpha$ ដែល α ជា មុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$
-ណែនាំសិស្សឲ្យសង្កេតឧទាហរណ៍រួចតម្រូវឲ្យសិស្សទាញរកនិយមន័យវ៉ិចទ័រក្នុងលំហដូចខាងក្រោម៖ $\vec{U}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ និង $\vec{V}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រ ក្នុងលំហ។ ផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{U}$ និង $\vec{V}$ គឺជាវ៉ិចទ័រកំណត់ដោយ $\vec{U}\times\vec{V}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$ -បញ្ជាក់ប្រាប់សិស្សថាដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការគណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រគេប្រើដេទែមីណង់លំដាប់បីដូចខាងក្រោម៖ $\vec{U}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$ ដាក់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\vec{U}$ ក្នុងជួរដេកទីពីរនិងដាក់កូអរដោ-នេវ៉ិ	ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី) ជំពូកទី៧៖ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ មេរៀនទី១៖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ១. និយមន័យផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ ១.១ និយមន័យ	-សិស្សស្តាប់និងពិចារណា -សិស្សស្តាប់ ពិចារណានិង កត់ត្រា

ចទ័រ $\vec{V}$ ក្នុងជួរដេកទីបីនោះ គេបាន៖ $\vec{U}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$ $=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}$ $+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$ $*$ សំគាល់: ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការគណនាផលគុណនៃពីរ វ៉ិចទ័រគេសន្មតប្រើដេទែមីណង់លំដាប់បីដូចខាងក្រោម៖ $\vec{U}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$ ដាក់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\vec{U}$ ក្នុងជួរដេកទីពីរនិងដាក់កូអរដោនេ វ៉ិចទ័រ $\vec{V}$ ក្នុងជួរដេកទីបីនោះ គេបាន៖ $\vec{U}\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$ $=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$ $+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$ $=\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix}\vec{j}$ $+\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\vec{k}$ $=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}$ $+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$ -ណែនាំសិស្សអោយធ្វើលំហាត់		-សិស្សស្តាប់និងពិចារណាយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់

<table>
<tr>
<td>គំរូជាបុគ្គល
+លំហាត់គំរូ៖ គេឲ្យ
$\overrightarrow{U}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ និង
$\overrightarrow{V}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ ។រកវ៉ិចទ័រ
ក.$\overrightarrow{U}\times\overrightarrow{V}$ ខ.$\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{U}$ គ.$\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{V}$</td>
<td>-គេឲ្យ
$\overrightarrow{U}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ និង
$\overrightarrow{V}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ ។រកវ៉ិចទ័រ
ក.$\overrightarrow{U}\times\overrightarrow{V}$ ខ.$\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{U}$
គ.$\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{V}$
ចម្លើយ
ក.$\overrightarrow{U}\times\overrightarrow{V}=3\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$
ខ.$\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{U}=-3\vec{i}-5\vec{j}-7\vec{k}$
គ.$\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{V}=\vec{0}$</td>
<td>-សិស្សដោះស្រាយលំហាត់ជាបុគ្គល
ក. $\overrightarrow{U}\times\overrightarrow{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&1\\3&1&-2\end{vmatrix}$
$=\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&1\\3&-2\end{vmatrix}\vec{j}$
$+\begin{vmatrix}1&-2\\3&1\end{vmatrix}\vec{k}$
$=(4-1)\vec{i}-(-2-3)\vec{j}$
$+(1+6)\vec{k}$
$=3\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$
ខ.$\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{U}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&1&-2\\1&-2&1\end{vmatrix}$
$=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3&-2\\1&1\end{vmatrix}\vec{j}$
$+\begin{vmatrix}3&1\\1&-2\end{vmatrix}\vec{k}$
$=(1-4)\vec{i}-(3+2)\vec{j}$
$+(-6-1)\vec{k}$
$=-3\vec{i}-5\vec{j}-7\vec{k}$
គ.$\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{V}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&1&-2\\3&1&-2\end{vmatrix}$
$=\begin{vmatrix}1&-2\\1&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3&-2\\3&-2\end{vmatrix}\vec{j}$
$+\begin{vmatrix}3&1\\3&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{0}$</td>
</tr>
<tr>
<td>-គ្រូដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិឲ្យសិស្សធ្វើជាក្រុមនៅលើក្តារខៀន</td>
<td>-ប្រតិបត្តិ: គេឲ្យ
$\overrightarrow{U}=\sqrt{2}\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}+2\vec{k}$ និង
$\overrightarrow{V}=-\vec{i}+\vec{j}$ ។
ចូរប្រៀបធៀប
$\left|\overrightarrow{U}\times\overrightarrow{V}\right|$ និង $\left|\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{U}\right|$</td>
<td>-សិស្សដោះស្រាយលំហាត់ជាក្រុមហើយឡើងកែលើ ក្តារខៀន
ចម្លើយ
ប្រៀបធៀប</td>
</tr>
</table>

		$\left\|\vec{U}\times\vec{V}\right\|$ និង $\left\|\vec{V}\times\vec{U}\right\|$ ដោយ $\vec{U}=\sqrt{2}\vec{i}+\sqrt{3}\vec{j}+2\vec{k}$ និង $\vec{V}=-\vec{i}+\vec{j}$ នោះ $\vec{U}\times\vec{V}=-2\vec{i}-2\vec{j}$ $-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\vec{k}$ នាំឲ្យ $\left\|\vec{U}\times\vec{V}\right\|=$ $\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}$ $=\sqrt{13+2\sqrt{6}}$ តែ $\vec{V}\times\vec{U}=-\left(\vec{U}\times\vec{V}\right)$ នោះគេបាន $\vec{V}\times\vec{U}=2\vec{i}+2\vec{j}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\vec{k}$ នាំឲ្យ $\left\|\vec{V}\times\vec{U}\right\|=\sqrt{13+2\sqrt{6}}$ ដូចនេះ $\left\|\vec{U}\times\vec{V}\right\|=\left\|\vec{V}\times\vec{U}\right\|$
-គ្រូដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្សធ្វើតាមបុគ្គល	ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំនេះដឹង) -គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ និង $\vec{b}=-5\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$ ។ ចូរប្រៀបធៀប $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|$ និង $\left\|\vec{b}\times\vec{a}\right\|$	-សិស្សដោះស្រាយតាមបុគ្គល ចម្លើយ ដោយ $\vec{a}\times\vec{b}=-11\vec{i}+11\vec{j}$ នាំឲ្យ $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|=\sqrt{(-11)^2+(11)^2}$ $=11\sqrt{2}$ ហើយ $\vec{b}\times\vec{a}=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ $=11\vec{i}-11\vec{j}$ នាំឲ្យ $\left\|\vec{b}\times\vec{a}\right\|=\sqrt{(11)^2+(-11)^2}$ $=11\sqrt{2}$ ដូចនេះ $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|=\left\|\vec{b}\times\vec{a}\right\|$
-ដាក់លំហាត់កិច្ចការផ្ទះឲ្យសិស្សយកទៅអនុវត្តន៍តាមផ្ទះ	ជំហានទី៥ (កិច្ចការផ្ទះ)	-សិស្សយកទៅអនុវត្តន៍តាមផ្ទះ

	-គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ និង $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ ចូរប្រៀបធៀប $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|$ និង $\left\|\vec{v}\times\vec{u}\right\|$	

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី៧៖ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

មេរៀនទី១៖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំនេះដឹង: បង្ហាញពីលក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ
- បំនិន: ពិពណ៌នាអំពីលក្ខណៈផលគុណវ៉ិចទ័រ
- ឥរិយាបថ: មានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II. រយៈពេល ២ ម៉ោង

III. ខ្លឹមសារមេរៀន

២. លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

៣.បំណកស្រាយផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រតាមបែបធរណីមាត្រ

IV. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- បន្ទាត់
- សៀវភៅគ្រូទំព័រ ១៧៦-១៧៧
- សៀវភៅសិស្សទំព័រ ១៧៦-១៧៧

V. ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យថ្នាក់រៀន អនាម័យ វិន័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង អវត្តមាន	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)	-សិស្សក្រោកឈរ ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
-ឲ្យសិស្សឡើងកែលំហាត់កិច្ចការផ្ទះ	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀន) -គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ និង $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ ចូរប្រៀបធៀប $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|$ និង	-សិស្សឡើងកែលំហាត់កិច្ចការផ្ទះ ចម្លើយ ចូរប្រៀបធៀប $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|$ និង

	$\left\|\vec{v}\times\vec{u}\right\|$ **ចម្លើយ** $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\| = \left\|\vec{v}\times\vec{u}\right\|$	$\left\|\vec{v}\times\vec{u}\right\|$ **ដោយ** $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ **និង** $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ **យើងបាន** $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}$ $=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}$ $+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$ $=(-3+2)\vec{i}-(2-1)\vec{j}$ $+(-4+3)\vec{k}$ $=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ $\vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}$ $=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{j}$ $+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}\vec{k}$ $=(-2+3)\vec{i}-(1-2)\vec{j}$ $+(-3+4)\vec{k}$ $=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ **នាំឲ្យ** $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}$ $=\sqrt{3}$ $\left\|\vec{v}\times\vec{u}\right\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}$ $=\sqrt{3}$ **ដូចនេះ** $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\| = \left\|\vec{v}\times\vec{u}\right\|$

	ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី) ជំពូកទី៧៖ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ មេរៀនទី១៖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ២. លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ	
-គ្រូកត់លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រលើក្តារខៀន	-លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ បើ $\vec{U}$,$\vec{V}$ និង$\vec{W}$ ជាវ៉ិចទ័រនៅក្នុងលំហនិង c ជាចំនួនពិតនោះគេបាន: ក. $\vec{U}\times\vec{V}=-\left(\vec{V}\times\vec{U}\right)$ ខ. $\vec{U}\times\left(\vec{V}+\vec{W}\right)=\vec{U}\times\vec{V}+\vec{U}\times\vec{W}$ គ. $C\left(\vec{U}\times\vec{V}\right)=\left(C\vec{U}\right)\times\vec{V}$ $=\vec{U}\times\left(C\vec{V}\right)$ ឃ. $\vec{U}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{U}=\vec{0}$ ង. $\vec{U}\times\vec{U}=\vec{0}$ ច.$\vec{U}.\left(\vec{V}\times\vec{W}\right)=\left(\vec{U}\times\vec{V}\right).\vec{W}$	-សិស្សស្តាប់ ពិចារណានិងកត់ត្រាទុក -សិស្សសង្កេតនិងពិចារណាយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់
-គ្រូឲ្យសិស្សសង្កេតលក្ខណៈនិងពីការបកស្រាយលក្ខណៈ ក. សម្រាយបញ្ជាក់ ក. តាង $\vec{U}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ និង $\vec{V}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ គេបាន: $\vec{U}\times\vec{V}=\left(u_2v_3-u_3v_2\right)\vec{i}-$ $\left(u_1v_3-u_3v_1\right)\vec{j}+\left(u_1v_2-u_2v_1\right)\vec{k}$ និង		

<table>
<tr>
<td>$\vec{V}\times\vec{U}=(v_2u_3-v_3u_2)\vec{i}-$
$(v_1u_3-v_3u_1)\vec{j}+(v_1u_2-v_2u_1)\vec{k}$
នាំឲ្យ $\vec{U}\times\vec{V}=-(\vec{V}\times\vec{U})$
-គ្រូឲ្យសិស្សបកស្រាយ
លក្ខណៈបន្តតាមបុគ្គល
ខ. $\vec{U}\times(\vec{V}+\vec{W})=\vec{U}\times\vec{V}+\vec{U}\times\vec{W}$
គ. $c(\vec{U}\times\vec{V})=(c\vec{U})\times\vec{V}$
$=\vec{U}\times(c\vec{V})$
ឃ. $\vec{U}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{U}=\vec{0}$
ង. $\vec{U}\times\vec{U}=\vec{0}$
ច. $\vec{U}.(\vec{V}\times\vec{W})=(\vec{U}\times\vec{V}).\vec{W}$</td>
<td></td>
<td>-សិស្សបកស្រាយលំហាត់លើ
ក្ដារខៀន
ចម្លើយ
ខ. តាង $\vec{U}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$
, $\vec{V}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ និង
$\vec{W}=w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}$
នោះគេបាន:
$\vec{V}+\vec{W}=(v_1+w_1)\vec{i}+$
$(v_2+w_2)\vec{j}+(v_3+w_3)\vec{k}$
នាំឲ្យ
$\vec{U}\times(\vec{V}+\vec{W})=\left[u_2(v_3+w_3)-u_3(v_2+w_2)\right]\vec{i}$
$-\left[u_1(v_3+w_3)-u_3(v_1+w_1)\right]\vec{j}+$
$\left[u_1(v_2+w_2)-u_2(v_1+w_1)\right]\vec{k}$
$=[(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-$
$(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}]$
$+[(u_2w_3-u_3w_2)\vec{i}-$
$(u_1w_3-u_3w_1)\vec{j}+(u_1w_2-u_2w_1)\vec{k}]$
$=\vec{U}\times\vec{V}+\vec{U}\times\vec{W}$ ។
គ. តាង $\vec{U}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$
$\vec{V}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ និង c ជាចំនួនថេរ
គេបាន:
$c(\vec{U}\times\vec{V})=c(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-$
$c(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+c(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$
$=(cu_2v_3-cu_3v_2)\vec{i}-$
$(cu_1v_3-cu_3v_1)\vec{j}+(cu_1v_2-cu_2v_1)\vec{k}$
$=(c\vec{U})\times\vec{V}$
ឃ. តាង $\vec{U}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ និង
$\vec{0}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$
គេបាន
$\vec{U}\times\vec{0}=(u_2 0-u_3 0)\vec{i}-$
$(u_1 0-u_3 0)\vec{j}+(u_1 0-u_2 0)\vec{k}=\vec{0}$
និង</td>
</tr>
</table>

		$\vec{0}\times\vec{U}=(0u_2-0u_3)\vec{i}-$ $(0u_1-0u_3)\vec{j}+(0u_1-0u_2)\vec{k}=\vec{0}$ នាំឲ្យ $\vec{U}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{U}=\vec{0}$ ។ ង. តាង $\vec{U}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ គេបាន $\vec{U}\times\vec{U}=(u_2u_3-u_3u_2)\vec{i}-$ $(u_1u_3-u_3u_1)\vec{j}+(u_1u_2-u_2u_1)\vec{k}=\vec{0}$ ដូចនេះ $\vec{U}\times\vec{U}=\vec{0}$ ។ ច. តាង $\vec{U}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$, $\vec{V}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ និង $\vec{W}=w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}$ នោះគេបាន: $\vec{V}\times\vec{W}=(v_2w_3-v_3w_2)\vec{i}-$ $(v_1w_3-v_3w_1)\vec{j}+(v_1w_2-v_2w_1)\vec{k}$ នាំឲ្យ $\vec{U}.(\vec{V}\times\vec{W})=u_1(v_2w_3-v_3w_2)-$ $u_2(v_1w_3-v_3w_1)+u_3(v_1w_2-v_2w_1)$ $=u_1v_2w_3-u_1v_3w_2-u_2v_1w_3$ $+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2-u_3v_2w_1 \quad (1)$ ហើយ $\vec{U}\times\vec{V}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-$ $(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$ នាំឲ្យ $(\vec{U}\times\vec{V}).\vec{W}=(u_2v_3-u_3v_2)w_1-$ $(u_1v_3-u_3v_1)w_2+(u_1v_2-u_2v_1)w_3$ $=u_2v_3w_1-u_3v_2w_1-u_1v_3w_2$ $+u_3v_1w_2+u_1v_2w_3-u_2v_1w_3 \quad (2)$ តាម (1) និង (2) គេបាន: $\vec{U}.(\vec{V}\times\vec{W})=(\vec{U}\times\vec{V}).\vec{W}$ ។
	៣.បំណកស្រាយផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ	

-គ្រូគូររូបលើក្ដារខៀនហើយប្រាប់សិស្សឲ្យសង្កេតរួចទាញរកផលគុណនីមួយៗតាមបែបធរណីមាត្រ	តាមបែបធរណីមាត្រ	-សិស្សសង្កេតមើលហើយទាញតាមគ្រូពន្យល់
-គ្រូដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្ស អនុវត្តន៍	ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំនេះដឹង) -លំហាត់: គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{p}=(3,1,-2)$; $\vec{q}=(-4,0,3)$; $\vec{a}=(1,-3,1)$ និង $\vec{b}=(-3,-2,-3)$ ។ ចូររក $\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$ និង $\lvert\vec{p}\times\vec{q}\rvert$ ចម្លើយ $\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=11\sqrt{2}$ $\lvert\vec{p}\times\vec{q}\rvert=\sqrt{26}$	-សិស្សឡើងដោះស្រាយលំហាត់លើក្ដារខៀន ចម្លើយ ដោយ $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 1\\ -3 & -2 & -3\end{vmatrix}$ $=-11\vec{i}+11\vec{k}$ នាំឲ្យ $\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=\sqrt{(-11)^2+(11)^2}$ $=11\sqrt{2}$ ហើយ $\vec{p}\times\vec{q}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 1 & -2\\ -4 & 0 & 3\end{vmatrix}$ $=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ នាំឲ្យ $\lvert\vec{p}\times\vec{q}\rvert=\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}$ $=\sqrt{26}$
	ជំហានទី៥	

-ពេលទៅដល់ផ្ទះវិញចូរប្អូនមើលមេរៀនឡើងវិញនិងរំលឹកពីរបៀបគណនាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណដោយស្គាល់កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងបី	(កិច្ចការផ្ទះ)	-សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រាទុក

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី៧៖ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

មេរៀនទី១៖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំនេះដឹង: បង្ហាញពីលក្ខណ:ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រតាមបែបធរណីមាត្រ
- បំនិន: ពិពណ៌នាពីផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័របែបធរណីមាត្រ
- ឥរិយាបថ: មានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II. រយៈពេល ២ ម៉ោង

III. ខ្លឹមសារមេរៀន

៣.បំណកស្រាយផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រតាមបែបធរណីមាត្រ

ក. $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់ទៅនិង $\vec{u}$ ផងនិង $\vec{v}$ ផង

ខ. $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\sin\theta$

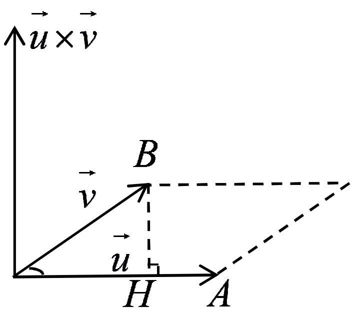
គ. ដោយប្រលេឡូក្រាមសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ហើយ θ ជាមុំដែលផ្គុំឡើងរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

IV. សម្ភារៈឧបទេ្ទសៀ

- បន្ទាត់ សន្លឹកកម្រងសំនួរពិភាក្សានិងលំហាត់ប្រតិបត្តិ
- សៀវភៅគ្រូទំព័រ ១៧៨-១៨០
- សៀវភៅសិស្សទំព័រ ១៧៨-១៨០

V. ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យថ្នាក់រៀន អនាម័យ វិន័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង អវត្តមាន	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)	-សិស្សក្រោកឈរ ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
	ជំហានទី២	

-គ្រូសួរសិស្សឲ្យគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC និងកត់ត្រាលំហាត់លើក្តារខៀន	(រំលឹកមេរៀន) -លំហាត់ ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ដោយដឹងថា $A(0,0,2)$; $B(1,2,4)$ និង $C(1,-2,0)$ ចម្លើយ $S_{ABC}=2\sqrt{2}$ ឯកតាផ្ទៃ	-សិស្សឡើងឡើងដោះស្រាយលើក្តារខៀន ចម្លើយ ដោយ $\overrightarrow{AB}=(1,2,2)$; $\overrightarrow{AC}=(1,-2,-2)$ យើងបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ $=4\vec{j}-4\vec{k}$ នាំឲ្យ $\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{4^2+(-4)^2}$ $=4\sqrt{2}$ ដូចនេះ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$ $=\frac{1}{2}(4\sqrt{2})$ $=2\sqrt{2}$ ឯកតាផ្ទៃ
-គ្រូគូររូបង្ហាញ  -ណែនាំសិស្សឲ្យស្រាយបញ្ជាក់ផលគុណនៃពីរ	ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី) ជំពូកទី៧៖ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ មេរៀនទី១៖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ៣. លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រតាមបែបធរណីមាត្រ	

វ៉ិចទ័រតាមបែបធរណីមាត្រ ដូចខាងក្រោម៖ $*$ បើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ និង θ ជាមុំដែលផ្គុំឡើង រវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន: ក. $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់ទៅនិង $\vec{u}$ ផងនិង $\vec{v}$ ផង - បង្ហាញថា $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ កែងនិង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ -តាង $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ ដែល $\vec{u}=(x,y,z)$ និង $\vec{v}=(x',y',z')$ នាំឲ្យ $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ $=(yz'-zy')\vec{i}-$ $(xz'-zx')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$ គេបាន $\vec{w}.\vec{u}=(yz'-zy')x-$ $(xz'-zx')y+(xy'-yx')z$ $=yz'x-zy'x-xz'y$ $+zx'y+xy'z-yx'z$ $=0$ ដូចនេះ $\vec{w}\perp\vec{u}$ ។ ម្យ៉ាងទៀត $\vec{w}.\vec{v}=(yz'-zy')x'-$ $(xz'-zx')y'+(xy'-yx')z'$ $=yz'x'-zy'x'-xz'y'$ $+zx'y'+xy'z'-yx'z'$ $=0$ ដូចនេះ $\vec{w}\perp\vec{v}$ ។ ខ. $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\sin\theta$ - បង្ហាញថា $\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\sin\theta$ -យក $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ យើងមាន		-សិស្សស្តាប់ ពិចារណានិងកត់ត្រាទុក

$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sqrt{1-\cos^2\theta}$ $=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sqrt{1-\dfrac{\left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2}{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2}}$ (ព្រោះ $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$) $=\sqrt{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2-\left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2}$ $=\sqrt{\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)}$ $\overline{-\left(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3\right)^2}$ $=\sqrt{(u_2v_3-u_3v_2)^2+}$ $\overline{+(u_1v_3-u_3v_1)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2}$ $=\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ ដូចនេះ $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ ។ -ណែនាំសិស្សស្រាយ គ. ឃ. និង ង. តាមបុគ្គល -ណែនាំសិស្សពឲ្យសង្កេតពីវិបាកបើ $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតាហើយអរតូកូណាល់ទៅនិង $\vec{u}$ ផងនិង $\vec{v}$ ផងនោះ $\vec{u}\times\vec{v}=\pm\left(\|\vec{u}\times\vec{v}\|\vec{n}\right)$ ឬ $\vec{u}\times\vec{v}=\pm\left(\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta\right)\vec{n}$ -ណែនាំសិស្សធ្វើលំហាត់គំរូទី១ ទីនិង ទី៣ ជាដៃគូ		-សិស្សស្តាប់និងពិចារណាយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់
-គ្រូដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិឲ្យសិស្សធ្វើតាមក្រុម ប្រតិបត្តិ ក. គេឲ្យបីចំនុច $A(1,1,1)$;$B(2,0,3)$ និង $C(-1,2,0)$ នៅក្នុងលំហ។រកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។ ខ. បង្ហាញថាចតុកោណដែល	ជំហានទី៤ (ពង្រឹងពុទ្ធិ) ចម្លើយ ក. $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ ខ. $S_{ABCD}=2\sqrt{259}$ ឯកតាផ្ទៃ	-តំណាងក្រុមឡើងដោះស្រាយលំហាត់លើក្តារខៀន ចម្លើយ ក. រកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ដោយ $\overrightarrow{AB}=(1,-1,2)$ និង $\overrightarrow{AC}=(-2,1,-1)$ គេបាន

មានកំពូលត្រង់ចំណុច $A(5,2,0)$; $B(2,6,1)$; $C(2,4,7)$ និង $D(5,0,6)$ ជាប្រលេឡូក្រាម រួចរកផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាមនោះ។		$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}$ $=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}$ $+\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$ $=-\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$ នាំឲ្យ $\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+(-1)^2}$ $=\sqrt{11}$ ដូចនេះ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$ $=\frac{1}{2}\sqrt{11}$ ឯកតាផ្ទៃ។ ខ. បង្ហាញថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម រួចរកផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាមនេះ ដោយ $\overrightarrow{AB}=(-3,4,1)$ និង $\overrightarrow{DC}=(-3,4,1)$ គេបាន: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ នោះ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AD}$ ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AD}=(0,-2,6)$ យើងបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 6\end{vmatrix}$ $=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -2 & 6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 0 & 6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 0 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$ $=26\vec{i}+18\vec{j}+6\vec{k}$ គេបាន $\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{26^2+18^2+6^2}$ $=\sqrt{1036}=2\sqrt{259}$ ដូចនេះ ផ្ទៃក្រលារបស់ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ គឺ $S_{ABCD}=2\sqrt{259}$ ឯកតាផ្ទៃ។

-គណនាផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ ABC ដែល $A(0,0,2)$; $B(1,2,4)$ និង $C(1,-2,0)$ ចូរប្អូនដល់ផ្ទះមើលមេរៀនឡើងវិញហើយធ្វើលំហាត់នេះផង	ជំហានទី៥ (កិច្ចការផ្ទះ)	-សិស្សកត់ត្រាទុក និងស្តាប់ដំបូន្មានគ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី៧៖ វិចទ័រក្នុងលំហ

មេរៀនទី១៖ ផលគុណនៃពីរវិចទ័រក្នុងលំហ

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំនេះដឹង: ពិពណ៌នាពីផលគុណនៃពីរវិចទ័រក្នុងរូបវិទ្យា
- បំនិន: បង្ហាញពីផលគុណចម្រុះនៃបីវិចទ័រក្នុងលំហ
- ឥរិយាបថ: មានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់

II. រយៈពេល ២ ម៉ោង

III. ខ្លឹមសារមេរៀន

៤. អនុវត្តន៍ផលគុណនៃពីរវិចទ័រក្នុងរូបវិទ្យា

៥. ផលគុណចម្រុះនៃបីវិចទ័រក្នុងលំហ

៥.១ និយមន័យ

៥.២ ទ្រឹស្តីបទទី១

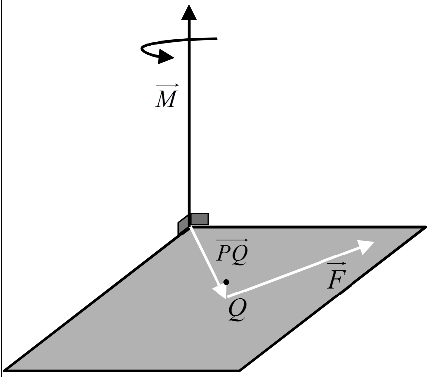
៥.៣ ទ្រឹស្តីបទទី២

IV. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- បន្ទាត់ សន្លឹកកម្រងសំណួរតម្រង់ទិស ការពិភាក្សានិងសង្កេត
- សៀវភៅគ្រូទំព័រ ១៨០-១៨២
- សៀវភៅសិស្សទំព័រ ១៨០-១៨២

V. ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យថ្នាក់រៀន អនាម័យ វិន័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង អវត្តមាន	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)	-សិស្សក្រោកឈរ ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍

គ្រូកត់លំហាត់កិច្ចការផ្ទះលើក្ដារខៀន -គណនាផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ ABC ដែល $A(0,0,2)$;$B(1,2,4)$ និង $C(1,-2,0)$	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀន)	-សិស្សឡើងឡើងដោះស្រាយលើក្ដារខៀន ចម្លើយ ដោយ $\overrightarrow{AB}=(1,2,2)$;$\overrightarrow{AC}=(1,-2,-2)$ យើងបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & -2 & -2\end{vmatrix}$ $=4\vec{j}-4\vec{k}$ នាំឲ្យ $\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{4^2+(-4)^2}$ $=4\sqrt{2}$ ដូចនេះ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$ $=\frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}\right)$ $=2\sqrt{2}$ ឯកតាផ្ទៃ
-គ្រូគូររូបលើក្ដារខៀន  -ណែនាំសិស្សឲ្យសង្កេតរូបរួច	ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី) ជំពូកទី៧៖ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ មេរៀនទី១៖ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ៩. អនុវត្តន៍ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងរូបវិទ្យា	-សិស្សសង្កេតនិងពិចារណាយ៉ាងយក

តម្រូវឲ្យសិស្សទាញថាបើ Q ជាចំណុចចាប់នៃកម្លាំង $\vec{F}$ នោះ ម៉ូម៉ង់នៃកម្លាំង $\vec{F}$ ត្រង់ P គឺ $\left\|\vec{M}\right\|=\left\|\overrightarrow{PQ}\times\vec{F}\right\|$ -ណែនាំសិស្សឲ្យធ្វើលំហាត់គំរូ ១ តាមបុគ្គល		ចិត្តទុកដាក់ -សិស្សដោះស្រាយលំហាត់រៀងៗខ្លួន
-ណែនាំសិស្សឲ្យទាញរកនិយមន័យថាបើមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u};\vec{v}$ និង $\vec{w}$ នៅក្នុងលំហនោះ ផលគុណចម្រុះនៃ $\vec{u};\vec{v}$ និង $\vec{w}$ តាមលំដាប់គឺជាចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ $\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$ ។	៥. ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ៥.១ និយមន័យ	-សិស្សសង្កេតមើលនិងពិចារណារ
-ណែនាំសិស្សឲ្យទាញរកទ្រឹស្តីបទថា បើគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{U}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$, $\vec{V}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ និង $\vec{W}=w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}$ នោះ $\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}$ -ប្រាប់សិស្សបើវ៉ិចទ័រ $\vec{u};\vec{v}$ និង $\vec{w}$ មិននៅក្នុងប្លង់តែមួយនោះ ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រ $\vec{u};\vec{v}$ និង $\vec{w}$ តាមលំដាប់គឺជាមាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតដែលសង់លើ $\vec{u};\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ។	៥.២ ទ្រឹស្តីបទទី១	-សិស្សមើលសៀវភៅទំព័រ ១៨១ -សិស្សស្តាប់ សង្កេតនិងពិចារណាឮ
	៥.៣ ទ្រឹស្តីបទទី២ (បំណាកស្រាយតាមផល	

-ណែនាំសិស្សឲ្យទាញរកទ្រឹស្តីបទថាមាឌ V របស់ប្រលេពីប៉ែតដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u};\vec{v}$ និង $\vec{w}$ គឺ $V=\left\|\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right\|$ និងមាឌ W របស់តេត្រាអែតគឺ $W=\frac{\left\|\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)\right\|}{6}$ ។ -ប្រាប់សិស្សឲ្យពិនិត្យមើលលំហាត់គំរូ -គ្រូដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិឲ្យសិស្សធ្វើតាមក្រុម ប្រតិបត្តិ រកមាឌប្រលេពីប៉ែតដែលមានជ្រុងជាប់ $\vec{u};\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ដូចខាងក្រោម៖ ក. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}\ ,\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$ ខ. $\vec{u}=(1,3,1);\vec{v}=(0,5,5)$ និង $\vec{w}=(4,0,4)$	គុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រ) ចម្លើយ ក. ដោយ $\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=2$ នាំឲ្យមាឌប្រលេពីប៉ែតគឺ $V=2$ ឯកតាមាឌ ខ. $V=60$ ឯកតាមាឌ	ចម្លើយ ក. ដោយ $\vec{u}.\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=2$ នាំឲ្យមាឌប្រលេពីប៉ែតគឺ $V=2$ ឯកតាមាឌ ខ. $V=60$ ឯកតាមាឌ
-គ្រូដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្សធ្វើតាមបុគ្គល លំហាត់ បង្ហាញថា $\vec{a};\vec{b}$ និង $\vec{c}$ ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយដែល $\vec{a}=(2,3,-1)$; $\vec{b}=(1,-1,3)$ និង $\vec{c}=(1,9,-11)$	ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំនេះដឹង)	-សិស្សម្នាក់ឡើងដោះស្រាយលំហាត់លើក្តារខៀន ចម្លើយ ដោយ $\vec{c}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\begin{vmatrix}1&9&-11\\2&3&-1\\1&-1&3\end{vmatrix}$ $=\begin{vmatrix}3&-1\\-1&3\end{vmatrix}-9\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}$ $-11\begin{vmatrix}2&3\\1&-1\end{vmatrix}$ $=8-63+55=0$ ដូចនេះវ៉ិចទ័រ $\vec{a};\vec{b}$ និង $\vec{c}$ ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។
	ជំហានទី៥	

- ចូរប្អូនទៅដល់ផ្ទះធ្វើលំហាត់ក្នុងសៀវភៅពុម្ពទំព័រ ១៨៥ លំហាត់លេខ ៧	(កិច្ចការផ្ទះ)	-សិស្សស្តាប់និងកត់ត្រាទុក

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)

ជំពូកទី៧ វិចទ័រក្នុងលំហ

មេរៀនទី២អនុវត្តន៍នៃផលគុណវិចទ័រ

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ និងសមីការស្វ៊ែរ តាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ។
- បំណិន: សិស្សសរសេរបានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត សមីការប្លង់ និងសមីការស្វ៊ែរបាន
- ឥរិយាបថ: សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់។

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

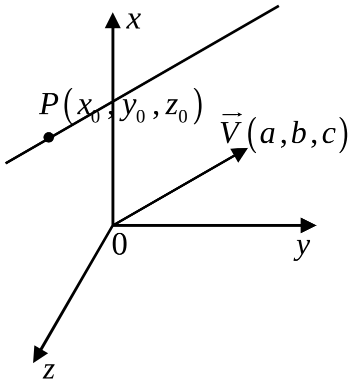
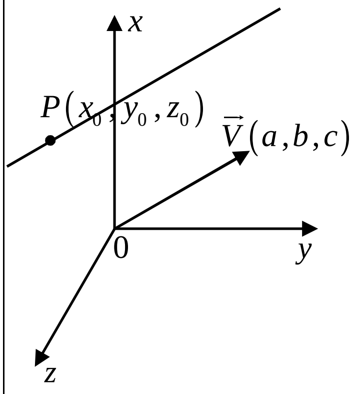
- មានបន្ទាត់ ហ្វឺត សៀវភៅ សិស្សនិងសៀវភៅគ្រូ

IV. ខ្លឹមសារមេរៀន

1. **បន្ទាត់និងប្លង់ក្នុងលំហ**
   1.1. **បន្ទាត់ក្នុងប្លង់**
   1.2. **ប្លង់ក្នុងលំហ**
2. **សមីការស្វ៊ែរ**

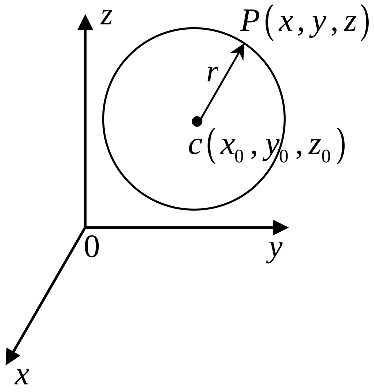
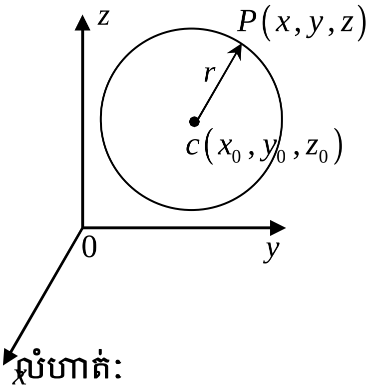
V. ដំណើរនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- លំនឹងថ្នាក់	- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		
-គ្រូសួរសិស្សអោយរំលឹកពីសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ដែលកាត់ឯតាមចំណុច	សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $P(x_0, y_0)$ ហើយស្របនឹង $\vec{V} = (a,b)$ ។	សិស្សស្តាប់គ្រូពន្យល់មេរៀន ហើយកត់ត្រាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ដែលកាត់

$P(x_0,y_0)$ ហើយស្រប $\vec{V}=(a,b)$ ។	ចម្លើយ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L គឺ $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$	តាមចំនុច $P(x_0,y_0)$ ហើយស្រប $\vec{V}=(a,b)$ ។ ចម្លើយ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L គឺ: $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$
ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)		
-គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី -គ្រូណែនាំសិស្សអោយសង្កេតរូបរួចគ្រូបង្ហាញរូបមន្តរកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនិងសមីការឆ្លុះក្នុងលំហ -គ្រូដាក់លំហាត់គំរូអោយសិស្សសង្កេតមើល	**អនុវត្តន៍ផលគុណវិចទ័រ** **1. បន្ទាត់និងប្លង់ក្នុងលំហ** **1.1. បន្ទាត់ក្នុងប្លង់**  គេមានបន្ទាត់ L មួយស្របទៅនឹងវិចទ័រ $\vec{V}=(a,b,c)$ ហើយកាត់តាមចំនុច $P(x_0,y_0,z_0)$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតបន្ទាត់ L គឺ: $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ លំហាត់: រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំនុច $(1;-2;4)$ ហើយស្របទៅនឹងវិចទ័រ $\vec{V}=(2;4;-4)$ ។ ចម្លើយ រកសមីការនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំនុច $(1;-2;4)$ ហើយស្របនឹង	 គេមានបន្ទាត់ L មួយស្របទៅនឹងវិចទ័រ $\vec{V}=(a,b,c)$ ហើយកាត់តាមចំនុច $P(x_0,y_0,z_0)$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតបន្ទាត់ L គឺ: $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ លំហាត់: រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំនុច $(1;-2;4)$ ហើយស្របទៅនឹងវិចទ័រ $\vec{V}=(2;4;-4)$ ។ ចម្លើយ រកសមីការនៃបន្ទាត់ L កាត់

-គ្រូបង្ហាញរូបមន្តសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ទៅអោយសិស្ស។ ហើយគ្រូដាក់លំហាត់គំរូអោយសិស្ស។	$\vec{V}=(2;4;-4)$ គេបាន: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+4t\\z=4-4t\end{cases}$ ដែល $t\in\mathbb{R}$ គេមានបន្ទាត់ L មួយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{V}=(a;b;c)$ ហើយកាត់តាមចំនុច $P(x_0;y_0;z_0)$ នោះសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L គឺ $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$	តាមចំនុច $(1;-2;4)$ ហើយស្របនឹង $\vec{V}=(2;4;-4)$ គេបាន: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+4t\\z=4-4t\end{cases}$ ដែល $t\in\mathbb{R}$ គេមានបន្ទាត់ L មួយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{V}=(a;b;c)$ ហើយកាត់តាមចំនុច $P(x_0;y_0;z_0)$ នោះសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L គឺ $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$
	លំហាត់: រកសមីការឆ្លុះបន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំនុច $A(0,0,0)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(1;2;3)$ ចម្លើយ រកសមីការឆ្លុះ គេមានបន្ទាត់ (D) កាត់តាម $A(0,0,0)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(1,2,3)$ នោះសមីការឆ្លុះ $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ រឺ $\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{3}$ រឺ $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ ដូចនេះ (D) គឺ $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$	លំហាត់: រកសមីការឆ្លុះបន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំនុច $A(0,0,0)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(1;2;3)$ ចម្លើយ រកសមីការឆ្លុះ គេមានបន្ទាត់ (D) កាត់តាម $A(0,0,0)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(1,2,3)$ នោះសមីការឆ្លុះ $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ រឺ $\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{3}$ រឺ $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ ដូចនេះ (D) គឺ $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$
-គ្រូណែនាំសិស្សអោយសង្កេតពីរូបមន្តសមីការប្លង់ ហើយបញ្ជាក់ប្រាប់វ៉ិចទ័រ	1.2 **ប្លង់ក្នុងលំហ** បើប្លង់មួយកាត់តាមចំណុច $P(x_0,y_0,z_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(a,b,c)$ នោះសមីការប្លង់គឺ	-សិស្សស្តាប់ហើយកត់ត្រា បើប្លង់មួយកាត់តាមចំណុច $P(x_0,y_0,z_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(a,b,c)$ នោះសមីការប្លង់គឺ

$\vec{n}=(a,b,c)$ កែងនឹងប្លង់ ហៅថាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ ។ -គ្រូដាក់លំហាត់គំរូអោយសិស្សសង្កេតតាម។	$a(x-x_0)+b(y-y_0)$ $+c(z-z_0)=0$ លំហាត់: រកសមីការទូទៅនៃប្លង់ដែលកំណត់ដោយចំនុច $A(2,1,1)$ ហើយវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(3,4,2)$ ។ **ចម្លើយ** រកសមីការប្លង់ គេមានប្លង់កំណត់ដោយចំណុច $A(2,1,1)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(3,4,2)$ គេបានសមីការប្លង់គឺ $a(x-x_0)+b(y-y_0)$ $+c(z-z_0)=0$ $\Leftrightarrow 3(x-2)+4(y-1)$ $+2(z-1)=0$ $\Leftrightarrow 3x-6+4y-4+2z-z=0$ $\Leftrightarrow 3x+4y+2z-8=0$ ដូចនេះ សមីការប្លង់គឺ $3x+4y+2z-8=0$	$a(x-x_0)+b(y-y_0)$ $+c(z-z_0)=0$ លំហាត់: រកសមីការទូទៅនៃប្លង់ដែលកំណត់ដោយចំនុច $A(2,1,1)$ ហើយវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(3,4,2)$ ។ **ចម្លើយ** រកសមីការប្លង់ គេមានប្លង់កំណត់ដោយចំណុច $A(2,1,1)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(3,4,2)$ គេបានសមីការប្លង់គឺ $a(x-x_0)+b(y-y_0)$ $+c(z-z_0)=0$ $\Leftrightarrow 3(x-2)+4(y-1)$ $+2(z-1)=0$ $\Leftrightarrow 3x-6+4y-4+2z$ $-z=0$ $\Leftrightarrow 3x+4y+2z-8=0$ ដូចនេះ សមីការប្លង់គឺ $3x+4y+2z-8=0$
-ណែនាំសិស្សអោយសង្កេតរូបអោយស្គាល់ពីផ្ចិតនិងកាំរបស់ស្វ៊ែរហើយបង្ហាញរូបមន្តសមីការស្វ៊ែរ។	**2. សមីការស្វ៊ែរ** បើគេមានស្វ៊ែរ (S) មួយដែលមានផ្ចិត $c(x_0,y_0,z_0)$ និងកាំ r នោះសមីការស្វ៊ែរ (S) គឺ $(S):(x-a)^2+(y-b)^2$ $+(z-c)^2=r^2$	-សិស្សកត់ត្រាតាមគ្រូបង្ហាញ: បើគេមានស្វ៊ែរ (S) មួយដែលមានផ្ចិត $c(x_0,y_0,z_0)$ និងកាំ r នោះសមីការស្វ៊ែរ (S) គឺ $(S):(x-a)^2+(y-b)^2$ $+(z-c)^2=r^2$

-គ្រូដាក់លំហាត់គំរូអោយសិស្សសង្កេត	 លំហាត់: រកសមីការស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិត $(2;2;0)$ និងកាំរបស់ស្វ៊ែរស្មើ $3cm$ ចម្លើយ រកសមីការផ្ចិត $(2;2;0)$ និងកាំស្មើ $3cm$ នោះសមីការស្វ៊ែរគឺ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=3^2$ ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែរកំណត់ដោយ $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=9$	 លំហាត់: រកសមីការស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិត $(2;2;0)$ និងកាំរបស់ស្វ៊ែរស្មើ $3cm$ ចម្លើយ រកសមីការផ្ចិត $(2;2;0)$ និងកាំស្មើ $3cm$ នោះសមីការស្វ៊ែរគឺ $(x-a)^2+(y-b)^2$ $+(z-c)^2=r^2$ $(x-2)^2+(y-2)^2$ $+(z-0)^2=3^2$ ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែរកំណត់ដោយ $(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=9$
ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-រកសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ែរដែលមានចំនុច $A(2,2,0)$ និង $B(0,0,2)$ ជាចំនុចចុងសងខាងនៃអង្កត់ផ្ចិត។	រកសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ែរដែលមានចំនុច $A(2,2,0)$ និង $B(0,0,2)$ ជាចំនុចចុងសងខាងនៃអង្កត់ផ្ចិត។	-សិស្សពិចារណារួចឆ្លើយដោយចំនុច $A(2,2,0)$ និង $B(0,0,2)$ ជាចំនុចចុងសងខាងនៃអង្កត់ផ្ចិតនោះ គេបានផ្ចិតស្វ៊ែរគឺ $\left(\frac{2+0}{2},\frac{2+0}{2},\frac{0+2}{2}\right)$ $=(1,1,1)$ កាំស្វ៊ែរ

		$r=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{3}$ ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែរកំណត់ដោយ $S:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$
ជំហានទី៥ (បណ្ដាំផ្ញើ)		
-ណែនាំសិស្សធ្វើលំហាត់លេខ៧ទំព័រ១៩៩និងមើលមេរៀននៅផ្ទះបន្ថែម។	កិច្ចការផ្ទះ លំហាត់លេខ៧ទំព័រ១៩៩	-សិស្សស្ដាប់ការណែនាំរបស់គ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

I មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ (កម្រិតខ្ពស់)

II ចំណងជើងមេរៀន:

ជំពូកទី៨ ភាពចែកដាច់និងវិធីចែកអឺគ្លីត

មេរៀនទី១ ភាពចែកដាច់និងវិធីចែកអឺគ្លីត

១ ភាពចែកដាច់ក្នុង$\mathbb{Z}$

១.១ តួចែកដាច់និង ពហុគុណនៃចំនួនគត់រ៉ឺទ្បាទីប

១.២ លក្ខណៈចែកដាច់នៃផលបូកនិងផលដក

១.៣ លក្ខណៈចែកដាច់នឹងមួយចំនួន

III **ទស្សចំណង:** ក្រោយពីរៀនចប់សិស្សអាច:

កំណត់ភាពចែកដាច់ក្នុង$\mathbb{Z}$

IV **រយៈពេល: ២ម៉ោង ថ្ងៃ.........ទី.........ខែ............ឆ្នាំ...............**

V **សម្ភារៈឧបទ្ទេស:**

- ស.សទំព័រទី 202 ដល់ 209 បោះពុម្ពឆ្នាំ 2010
- ស.គ ទំព័រទី..........ដល់............
- បន្ទាត់ឈើ + បន្ទាត់ជ័រ

VI **សកម្មភាពបង្រៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	**ខ្លឹមសារមេរៀន**	**សកម្មភាពបង្រៀន**
គ្រូគពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យសណ្តាប់ធ្នាប់និងវិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (លំនឹងថ្នាក់ 3 នាទី)	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
ហៅសិស្ស២ នាក់ឬ ៣នាក់ ឆ្លើយសំណួរនិង ធ្វើលំហាត់ មេរៀនចាស់	<u>ជំហានទី២</u>(រំលឹកមេរៀនចាស់៧នាទី) លំហាត់:បង្ហាញថា $10^{2009}-1$និង $10^{2010}-1$ចែកដាច់នឹង9។	ឡើងធ្វើលំហាត់លើ ក្តារខៀន

• គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី • កែឧទាហរណ៍ឱ្យសិស្សមើល • កែលំហាត់គំរូ បង្ហាញថា $10^{2009}-1$ នឹង $10^{2010}-1$ចែកដាច់នឹង9 ។ <u>ចម្លើយ</u> $10^{2009}-1=(10-1)(10^{2008}+10^{2007}+10^{2006}\ldots\ldots+1)$ $=9(10^{2008}+10^{2007}+10^{2006}+\ldots+1)$ ដូចនេះ$10^{2009}-1$ចែកដាច់នឹង9 • ទុកពេលឱ្យសិស្សចំលងមេរៀន • ណែនាំសិស្សពន្យល់ពីរបៀប ចែកអឺគ្លីត • ប្រាប់ពីរបៀបដោះស្រាយ របៀបវិធីចែកអឺគ្លីត	<u>ជំហានទី៣</u>(មេរៀនថ្មី) 70 នាទី <u>មេរៀនទី១</u>ភាពចែកដាច់និងវិធីចែកអឺគ្លីត Ex: 24ចែកដាច់នឹង 3 បង្ហាញថា $10^{2010}-1$ចែកដាច់នឹង 9 <u>ចម្លើយ</u> $10^{2010}-1=(10-1)(10^{2009}+10^{2008}+10^{2007}+\ldots\ldots+1)$ $=9(10^{2008}+10^{2007}+10^{2006}+\ldots+1)$ ដូចនេះ$10^{2010}-1$ចែកដាច់នឹង9។ +និយមន័យ ១.២លក្ខណៈចែកដាច់នៃផលបូកឬផលដក +លំហាត់Ex ទី2 1.៣លក្ខណៈចែកដាច់និងមួយចំនួន +លំហាត់ទី1. គេមានចំនួន $n=abcd_{10}$ (របាបគោល10)។ ក/.បង្ហាញថា n ចែកដាច់និង3(នឹង9) កាលណា a+b+c+d ចែកដាច់នឹង 3(នឹង9)។ ខ/.បង្ហាញថា n ចែកដាច់នឹង11កាលណា(b+d)−(a+c) ចែកដាច់នឹង11។ <u>ចម្លើយ</u> ក/. $n=1000a+100b+10c+d$ $=(999+1)a+(99+1)b+(9+1)c+d$ $=9(111a+11b+c)+(a+b+c+d)$ ដូចនេះ n ចែកដាច់នឹង3(នឹង9) កាល	+សិស្សសរសេរមេរៀនថ្មី +សិស្សឆ្លល់លើកដៃសួរគ្រូ +សិស្សចំលងមេរៀនចូលក្នុងសៀវភៅ....... +សិស្សកត់មេរៀន +សិស្សមើលកត់ត្រា

• គ្រូពន្យល់ឱ្យសិស្សធ្វើលំហាត់	ណាa+b+c+dចែកដាច់នឹង3 (នឹង9)។ ខ/. n=1000a+100b+10c+d =(1100 − 110+ 11 − 1)a +(110 − 11+1)b +(11 − 1)c+(b+d) − (a+c) ដូចនេះ n ចែកដាច់នឹង11កាលណា (b+d)−(a+c) ចែកដាច់នឹង11។ Ex_1: ដោយមិនចាំបាច់គណនាផលបូកនិងផលដកបង្ហាញថា: ក.777777+4136 និង777777 − 4136 ចែកដាច់នឹង11។ ខ.បង្ហាញថា8^{2007}−1 និង8^{2008}−1 ចែកដាច់នឹង7 ។	+សិស្សឡើងធ្វើលំហាត់លើក្ដារខៀន
• គ្រូពន្យល់មេរៀនសារឡើងវិញ ដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិឱ្យសិស្សធ្វើ	ជំហានទី៤(ពង្រឹងពិន្ទុ) 7 នាទី +លំហាត់ប្រតិបត្តិ 1. គេមានចំនួន n=8x6y_{10}(របាប់គោល10)។បើផលគុណលេខពីខ្ទង់ xy=12 ។ចូរកំនត់ដើម្បីឱ្យវាចែកដាច់នឹង3 ។	+សិស្សឡើងធ្វើលំហាត់ចម្លើយ
• ធ្វើលំហាត់លេខ 12 ទំព័រលេខ 209	ជំហានទី៥ (បណ្ដាំផ្ញើរ) 3 នាទី	+សិស្សកត់ត្រាដោយយកចិត្តទុកដាក់

កិច្ចតែងការបង្រៀន

I **មុខវិជ្ជា: គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ (កម្រិតខ្ពស់)**

II **ចំណងជើងមេរៀន:**

ជំពូកទី៨ ភាពចែកដាច់និងវិធីចែកអឺគ្លីត (ត)

២.វិធីចែកបែបអឺគ្លីត
២.១ និយមន័យ
២.២ ទ្រឹស្តីបទ

III **វត្ថុបំណង:** ក្រោយពីរៀនចប់សិស្សអាច:

កំណត់វិធីចែកបែបអឺគ្លីត

IV **រយៈពេល: ២ម៉ោង ថ្ងៃ.........ទី.........ខែ.............ឆ្នាំ...............**

V **សម្ភារៈឧបទ្ទេស:**

- ស.សទំព័រទី202 ដល់ 209 បោះពុម្ពឆ្នាំ 2010
- ស.គ ទំព័រទី..........ដល់ទំព័រទី............
- បន្ទាត់ឈើ + បន្ទាត់ជ័រ

VI **<u>សកម្មភាពបង្រៀន</u>**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមានសិស្ស អនាម័យសណ្តាប់ធ្នាប់និងវិន័យ	<u>ជំហានទី១</u> (លំនឹងថ្នាក់3 នាទី)	ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍
ហៅសិស្ស២នាក់ឬ ៣នាក់ ឆ្លើយសំនួរនិងធ្វើលំហាត់មេរៀនដែលរៀនរួច	<u>ជំហានទី២</u> (រំលឹកមេរៀនចាស់7 នាទី) លំហាត់: បង្ហាញថា $13^{1985}+13^{1986}+13^{1992}$ ចែកដាច់នឹង170។	ឡើងធ្វើលំហាត់នៅលើ ក្តារខៀន
• គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី • កែឧទាហរណ៍ឱ្យសិស្សមើល • កែលំហាត់គំរូ	<u>ជំហានទី៣</u> (មេរៀនថ្មី) 70 នាទី	+សិស្សសរសេរមេរៀនថ្មី

រកផលចែក q និងសំណល់ r ក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃa និងb ដូចខាងក្រោម: ក. a=194 , b=7 ខ. −1317, b=21 ចម្លើយ ក.ដោយ194=7x27+5 នាំឱ្យ9=27និងr=5 ខ. ដោយ − 1317=21x(−16) នាំឱ្យ9=−15 និង r=19	មេរៀនទី១. ភាពចែកដាច់និង វិធីចែកដាច់បែបអឺគ្លីត Ex: បង្ហាញថាអត្ថិភាពនៃ q នឹង r _បើa ជាពហុគុណនៃក្នុង ℤ នោះគេបាន a=bq +0 , r=0 _បើa មិនមែនជាពហុគុណនៃ b ក្នុងℤ នោះមានពហុគុណនៃ bដែលតូចជាង aនិងពហុគុណផ្សេងទៀតនៃ b ដែលមានធំជាងa ។ បើbqនិងb(q+1) ជាពហុគុណនៃbដែលតូចជាងនឹងធំជាងa នោះគេបាន bq<a<b(q+1)ឬ 0≤a−bq<b តាង r=a−bq គេបាន a=bq +r ដែល 0≤r<b ។ +និយមន័យ ២.២ ទ្រឹស្តីបទ លំហាត់គំរូ: គេនឹងថាចំនួន m ចែកនឹង 17 បានសំណល់ 8 ហើយ n ចែកនឹង 17 បានសំណល់12 ។កំនត់សំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃ m+n; mn និង m^2 និង17 ។ ចម្លើយ គេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ qនិងq′ដែល m=17q +8 (1) និង n=17q′′+12 (2) យក(1)+(2)គេបាន៖	+សិស្សឆ្លល់លើកដៃសួរគ្រូ +សិស្សចំលងមេរៀនចូលក្នុងសៀវភៅ +សិស្សកត់មេរៀន

	$m+n(17q+8)+(17q'+12)$ $=17q+17q'+20$ $=17(q+q')+17x1+3$ $=17(q+q'+1)+3$ ដូចនេះសំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីត នៃ m+n និង 17 គឺ 3 ។ $mn=(17q+8)x(17q'+12)$ $=17^2qq'+17x12q+17x8q'+17$ $x5+11$ $=17(17qq'+12q+8q'+5)+11$ ដូចនេះសំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីត នៃmn និង17គឺ11 ។ $m^2=(17q+8)^2$ $=17^2q^2+2x17x89+64$ $=17(17q^2+16q+3)+13$ ដូចនេះសំណល់នៃវិធីចែកបែបអឺគ្លីត នៃm^2 និង17គឺ13 ។ Ex1:រកផលចែកqនិងសំណល់r ក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃ aនិងb ដូចខាងក្រោម៖ ក. a=−734 ; b=5 ខ. a=−849 ; b=13	+សិស្សឡើងធ្វើលំហាត់ លើក្ដារខៀន
គ្រូពន្យល់មេរៀនសារឡើងវិញ ដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិឱ្យសិស្សធ្វើ	<u>ជំហានទី៤</u> (ពង្រឹងពុទ្ធិ) 7 នាទី +លំហាត់ ១.រកផលចែកqនិងសំណល់rក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃaនិងbដូចខាងក្រោម៖ ក. a=569 ; b=7	+សិស្សឡើងធ្វើលំហាត់: <u>ចម្លើយ</u> ក.569=7x81+2 ខ.−671=6x−111+5 (q=111; r=5)

	ខ. a=−671 ; b=6 ២. រកគ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដែល 7x+y=37	<u>ចម្លើយ</u> 37=7x5+2 37=7x+y
ធ្វើលំហាត់លេខ 13 ដល់លេខ 15 ទំព័រលេខ 209	<u>ជំហានទី៥</u> (បណ្តាំផ្ញើរ)3 នាទី	សិស្សរកត់លំហាត់យកទុក្ខធ្វើនៅគេហដ្ឋាន ។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)

ជំពូកទី៨ ភាពចែកដាច់និងវិធីចែកអឺគ្លីត

មេរៀនទី២ ចំនួនបឋម

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សប្រាប់បានពីនិយមន័យចំនួនបឋមតាមរយៈខ្លឹមសារមេរៀនយ៉ាងត្រឹមត្រូវ។
- បំណិន: សិស្សបកស្រាយទ្រឹស្តីបទនៃចំនួនបឋមនិងរបៀបកំណត់ចំនួនបឋមតាមការដោះស្រាយលំហាត់ត្រឹមត្រូវ។
- ឥរិយាបថ: សិស្សមានបម្រុងប្រយ័ត្នពេលធ្វើកិច្ចការផ្សេងៗ។

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ២១០-២១៥
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ

IV. ខ្លឹមសារមេរៀន

1. **អនន្តភាពនៃចំនួនបឋម**

   1.1. **ចំនួនបឋម**

V. ដំណើរការមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- លំនឹងថ្នាក់	- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		
-អោយសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់	លំហាត់: រកផលចែក q និងសំណល់ r ក្នុងវិធីចែកបែបអឺគ្លីត a និង b ដូចខាងក្រោម	-ដោះស្រាយលំហាត់ $a=b\times q+r$ $194=7\times 27+5$ នាំអោយ $q=27$; $r=5$

	$a=194$; $b=7$	
ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)		
-ប្រាប់និយមន័យចំនួនបឋម -បង្ហាញទ្រឹស្តីបទនិងអោយសិស្សស្រាយបញ្ជាក់ -ស្រាយបញ្ជាក់: តាង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនបឋម តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើ n មានតួចែកជាចំនួនបឋមតូចបំផុតមួយតាងដោយ b	**ចំនួនបឋម** **1. អនន្តភាពនៃចំនួនបឋម** **1.1. ចំនួនបឋម** និយមន័យ: ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ជាចំនួនបឋម លុះត្រាតែ $n>1$ ហើយ n មានតួចែកតែពីរគត់គឺ1និង n ខ្លួនឯង។ **-ទ្រឹស្តីបទ:** គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ធំជាង1មានតួចែកជាចំនួនបឋមមួយដែលជាតួចែកតូចបំផុតក្រៅពី1។ **ទ្រឹស្តីបទ:** បើ $n\in\mathbb{N}$ ហើយ n ជាចំនួនបឋម នោះមានចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋម b ដែល b/n និង b^2/n ។	-ស្តាប់ -ពិនិត្យទ្រឹស្តីបទនិងស្រាយបញ្ជាក់ -បើ n ជាចំនួនបឋមនោះ n ជាតួចែកបឋមតូចបំផុតនៃចំនួន n ខ្លួនឯង។ -បើ n មិនបឋម តាង d ជាតួចែកតូចបំផុតនៃ n ឧបមាថា d មិនបឋមមានតួចែក b មួយទៀតដែល $b<d$ ដូចនេះ b ក៏ជាតួចែកនៃ n ដែរ $\Rightarrow b/n$ និង $b<d$ ដែលផ្ទុយពី d ជាតួចែកតូចបំផុតនៃ n ដូចនេះ d មិនអាចមានតួចែក b បានទេ មានន័យថា d ជាតួចែកបឋមតូចបំផុតនៃ n ។ -សង្កេតដោយយកចិត្តទុកដាក់

គេបាន $n = bq$ ហើយ b ជាតួចែកតូចបំផុតនៃ n និង $b \le n$ ។ ដូចនេះ $b^2 \le n$ មានន័យថា n ចែកដាច់នឹងចំនួនបឋមណាមួយដែលការេរបស់វាតូចជាងឬស្មើ n ។	**ទ្រឹស្តីបទ:** បើ $n \in \mathbb{N}; n$ ចែកមិនដាច់នឹងចំនួនមិនបឋមដែលមានការេតូចជាងឬស្មើ n នោះ n ជាចំនួនបឋម។	-មើលសម្រាយបញ្ជាក់
-អោយសិស្សធ្វើលំហាត់	លំហាត់: បង្ហាញថា173 ជាចំនួនបឋម។	-ដោះស្រាយលំហាត់ 173 ចែកមិនដាច់នឹងចំនួនបឋម $2;3;5;7;11$ និង13 ទេ ហើយ $13^2 = 169 \le 173$ ដូចនេះ 173 ជាចំនួនបឋម
ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-អោយសិស្សធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ	លំហាត់: បង្ហាញថាចំនួន 997 ជាចំនួនបឋម។	-ឆ្លោះ 997 ចែកមិនដាច់នឹងចំនួនបឋម $2;3;5;7;11;$ $13;17;19;23;29;31$ ហើយ $31^2 \le 997$ ដូចនេះ 997 ជាចំនួនបឋម
ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)		
-អោយសិស្សធ្វើលំហាត់នៅផ្ទះ	កិច្ចការផ្ទះ លំហាត់លេខ១២ទំព័រ២១៦	-សិស្សស្តាប់ការណែនាំរបស់គ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់)

ជំពូកទី៨ ភាពចែកដាច់និងវិធីចែកអឺគ្លីត

មេរៀនទី២ ចំនួនបឋម (តចប់)

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សប្រាប់ពីការបំបែកមួយចំនួនជាផលគុណកត្តាបឋមបានតាមរយៈ មេរៀនមេរៀនយ៉ាងត្រឹមត្រូវ។
- បំណិន: សិស្សបំបែកមួយចំនួនជាផលគុណកត្តាបឋមបានតាមរយៈការធ្វើលំហាត់ យ៉ាងត្រឹមត្រូវ។
- ឥរិយាបថ: បណ្តុះគំនិតសិស្សអោយចេះវិភាគពីបញ្ហាផ្សេងៗ។

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ២១២-២១៥
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ
- បន្ទាត់

IV. ខ្លឹមសារមេរៀន

2. **ការបំបែកមួយចំនួនជាផលគុណកត្តាបឋម**

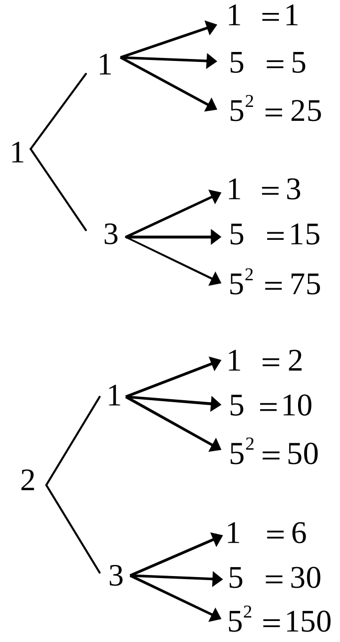
 2.1. **អត្ថិភាពនិងភាពតែមួយគត់នៃការបំបែក**

 2.2. **លក្ខខណ្ឌចែកដាច់**

V. ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ		- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		
-អោយសិស្សឡើងធ្វើលំហាត់	លំហាត់: បញ្ជាក់ថាចំនួន 937 និង	-ដោយចំនួន 937 ចែកមិន

	1933 ជាចំនួនបឋម។	ដាច់ 2;3;5;7;11;13;17; 19;23;29 ទេ ដូចនេះ 937 ជាចំនួនបឋម
ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)		
-បង្ហាញទ្រឹស្តីបទដល់សិស្សរួចអោយសិស្សស្រាយបញ្ជាក់ -គ្រូបង្ហាញទ្រឹស្តីបទដល់សិស្សរួចអោយសិស្សស្រាយបញ្ជាក់	**ចំនួនបឋម** **2. ការបំបែកមួយចំនួនជាផលគុណកត្តាបឋម** **2.1 អត្ថិភាពនិងភាពតែមួយគត់នៃការបំបែក** **ទ្រឹស្តីបទ:** គ្រប់ចំនួនគត់មិនបឋមហើយធំជាងមួយអាចបំបែកជាផលគុណកត្តាបឋមបានហើយបានតែមួយបែបគត់។ សន្និដ្ឋាន: គ្រប់ចំនួនមិនបឋមអាចសរសេរជាផលគុណនៃកត្តាបឋមបាន។ **2.2 លក្ខខណ្ឌចែកដាច់** **ទ្រឹស្តីបទ:** តាង n និង p ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាង1ដើម្បីអោយ p ជាតួចែកមួយនៃ n លុះត្រាតែគ្រប់តួចែកបឋមនៃ p ជាតួចែកនៃ n ហើយនិទស្សន្តនៃតួចែកនៃ p មិនធំជាងនិទស្សន្តនៃតួចែកដែលដូចគ្នារៀងគ្នានៃ n។	-សង្កេតមើលទ្រឹស្តីបទ ស្រាយបញ្ជាក់ តាង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនបឋម នោះ n អាចមានតួចែកបឋមមួយតាងដោយ a ហើយ $n=aq$ -បើ q ចំនួនបឋមនោះ n អាចសរសេរជាផលគុណពីរកត្តាបឋមបាន។ -បើ q មិនមែនជាចំនួនបឋម នោះ $q=b\cdot q'$ ដែល $q'<q$ បើ q' បឋមនោះ $n=abq'$ -ស្រាយបញ្ជាក់: ឧបមាថា $n=a^{\alpha}\times b^{\beta}\times c^{\gamma}$ ដែល $a;b;c$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។ បើ p ជាតួចែកមួយនៃ n នោះ $n=p\cdot q$ ហើយការបំបែក $p\cdot q$ ជាផលគុណនៃកត្តាបឋម

-អោយសិស្សធ្វើលំហាត់គំរូ	លំហាត់គំរូ: ក. រកសំណុំតួចែកនៃ150 ខ. បើ $n=a^{\alpha}\times b^{\beta}\times c^{\gamma}$ ដែល $a;b;c$ ជាចំនួនបឋមហើយ $\alpha;\beta;\gamma$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ បង្ហាញថាចំនួនតួចែកទាំងអស់នៃ n គឺ $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ ដូចនេះ សំណុំតួចែកនៃ150 គឺ $\{1;2;3;5;10;15;25;$ $30;50;75;150\}$	-ធ្វើលំហាត់ $150=2\times3\times5^2$ មានបីក្រុម ក្រុមទី១គឺ1;2 ក្រុមទី២គឺ 2;1;3 ក្រុមទី៣គឺ$1;5;5^2$ 
ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-អោយសិស្សធ្វើលំហាត់ប្រតិបត្តិ	ប្រតិបត្តិ: ក. រកសំណុំតួចែកនៃ 4258 ខ. រកតម្លៃអប្បបរមានៃ m ដែលធ្វើអោយ $20m$ ជាការេនៃចំនួនគត់វ៉ុឡាទីប។	ក. រកសំណុំតួចែក $4258=2\times2129$ មានពីរក្រុមគឺ1;2 និង 1;2129 ដូចនេះ $\{1;2;2129;4258\}$ ខ. ដើម្បីអោយ $20m=2^2\times5m$ ជាការេប្រាកដគ្រាន់តែអោយ $5m$ ជាការេប្រាកដ $5m=a^2;a$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន $m=\frac{a^2}{5}$ $20m=20\times5=100$ ដូចនេះ $m=5$

ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)		
-អោយសិស្សធ្វើលំហាត់នៅផ្ទះ	កិច្ចការផ្ទះ លំហាត់ទំព័រ ២១៦ដល់២១៧	-សិស្សស្តាប់ការណែនាំរបស់គ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី៨ ៖ ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺគ្លីត

មេរៀនទី៣ ៖ តួចែករួម និងពហុគុណរួម

I. **វត្ថុបំណងនៃមេរៀន** ៖ ក្រោយពីរៀនមេរៀននេះចប់សិស្សអាច ៖

- បំនេះដឹង ៖ ប្រាប់ពីរបៀបរកតួចែករួម និងពហុគុណរួម បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍ ។
- បំនិន ៖ រកតួចែករួម និងពហុគុណរួម បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈលំហាត់គំរូ ។
- ឥរិយាបថ ៖ មានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្ន និងចេះធ្វើការងារជាក្រុម ។

II. **រយៈពេលបង្រៀន** ៖ កិច្ចតែងការនេះសម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោងសិក្សា ។

III. **សម្ភារៈឧបទេ្ទស**

- សៀវភៅគ្រូ និង សៀវភៅសិស្ស
- ទ្រឹស្តីចំនួន

IV. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន** ៖ ប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រចម្រុះ "ចោទឆ្លើយ , សង្កេត , រិះរក , ..."

V. **ដំណើរនាំមេរៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យអនាម័យ វិន័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង អវត្តមាន ។	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)	-សិស្សក្រោកឈរ ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍ ។
-ដូចម្តេចដែលហៅថាចំនួនបឋម? -តើ 2013 ជាចំនួនបឋម ឬទេ?	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀន)	-គឺជាចំនួនដែលមានតួចែកតែ៤គត់គឺ ± 1 និង $\pm$ ខ្លួនឯង ។ -មិនមែនទេ ព្រោះ $2013 \vdots 3$ ។
	ជំហានទី៣ ១. តួចែករួមធំបំផុត	

	១.១ តួចែករួមនៃពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ	
-ចូររកគ្រប់តួចែកវិជ្ជមាននៃ 30 និង 45 ។	- តួចែកវិជ្ជមាននៃ ៖ 30 មាន $\{1,2,3,5,10,15,30\}$ 45 មាន $\{1,3,5,9,15,45\}$	- តួចែកវិជ្ជមាននៃ ៖ 30 មាន $\{1,2,3,5,10,15,30\}$ 45 មាន $\{1,3,5,9,15,45\}$
-តើតួចែករួមនៃ 30 និង 45 មានអ្វីខ្លះ ?	- មាន ៖$\{1,3,5,15\}$	- មាន ៖$\{1,3,5,15\}$
- ចូរឲ្យនិយមន័យតួចែករួម d នៃពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ។	- និយមន័យ ៖ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ, គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ d ជាតួចែករួមនៃ a និង b កាលណា d ជាតួចែកនៃ a ផងនិងជាតួចែកនៃ b ផង។	- និយមន័យ ៖ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ, គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ d ជាតួចែករួមនៃ a និង b កាលណា d ជាតួចែករួមនៃ a និង b ហើយតាងដោយ $\delta=\gcd(a,b)$ ។
- តើតួចែករួមធំបំផុតនៃ 30 និង 45 គឺប៉ុន្មាន ?	- គឺ 15 ។	- គឺ 15 ។
- ចូរឲ្យនិយមន័យតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ។	- និយមន័យ ៖ តួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលធំជាងគេក្នុងចំណោមតួចែករួមនៃ a និង b ហើយតាងដោយ $\delta=\gcd(a,b)$ ។	- និយមន័យ ៖ តួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលធំជាងគេក្នុងចំណោមតួចែករួមនៃ a និង b ហើយតាងដោយ $\delta=\gcd(a,b)$ ។
- រក $\gcd(6,12)$	- តួចែកនៃ 6 មាន $\{1,2,3,6\}$ និង 12 មាន $\{1,2,3,6,12\}$ គេបាន $\gcd(6,12)=6$	- តួចែកនៃ 6 មាន $\{1,2,3,6\}$ និង 12 មាន $\{1,2,3,6,12\}$ គេបាន $\gcd(6,12)=6$
- បើ a ជាតួចែកនៃ b តើ		

$\gcd(a,b)=?$ - ចូររៀបរាប់ពីរបៀបនៃការរក $\gcd(a,b)$ ។	- នោះ $\gcd(a,b)=a$ - ដើម្បីរក $\gcd(a,b)$ គេត្រូវបំបែក $a\&b$ ជាកត្តាបឋម ។ $\gcd(a,b)$ ជាផលគុណកត្តាបឋមដែលដូចគ្នានិងមាននិទស្សន្តតូចនៃ $a\&b$ ។	- នោះ $\gcd(a,b)=a$ - ដើម្បីរក $\gcd(a,b)$ គេត្រូវបំបែក $a\&b$ ជាកត្តាបឋម ។ $\gcd(a,b)$ ជាផលគុណកត្តាបឋមដែលដូចគ្នានិងមាននិទស្សន្តតូចនៃ $a\&b$ ។
-រក $\gcd(60,90)$, $\gcd(56,84)$ និង $\gcd(16,15)$ ។	- $60=2^2\cdot3\cdot5$ និង $90=2\cdot3^2\cdot5$ នោះ $\gcd(60,90)=30$ $56=2^3\cdot7$ និង $84=2\cdot3\cdot7$ នោះ $\gcd(56,84)=28$ $16=2^4$ និង $15=3\cdot5$ នោះ $\gcd(56,84)=1$	- $60=2^2\cdot3\cdot5$ និង $90=2\cdot3^2\cdot5$ នោះ $\gcd(60,90)=30$ $56=2^3\cdot7$ និង $84=2\cdot3\cdot7$ នោះ $\gcd(56,84)=28$ $16=2^4$ និង $15=3\cdot5$ នោះ $\gcd(56,84)=1$
-តើប្រភាគ $\frac{15}{16}$ សម្រួលបានឬទេ? ព្រោះអ្វី ?	-មិនបានទេ ព្រោះ $\gcd(56,84)=1$	-មិនបានទេ ព្រោះ $\gcd(56,84)=1$
-បើ $\gcd(a,b)=1$ តើ a និង b ហៅថាអ្វី ? ប្រភាគ $\frac{a}{b}$ ហៅថាអ្វី ?	-ហៅថាចំនួនបឋមនឹងគ្នា ។ ប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។	-ហៅថាចំនួនបឋមនឹងគ្នា ។ ប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។
-ចូរសម្រួលប្រភាគ $\frac{168}{441}$	មាន $168=2^3\cdot3\cdot7$ និង $441=3^2\cdot7^2$ គេបាន ៖ $\gcd(168,441)=21$ នោះ $\frac{168}{441}=\frac{21\cdot8}{21\cdot21}=\frac{8}{21}$	មាន $168=2^3\cdot3\cdot7$ និង $441=3^2\cdot7^2$ គេបាន ៖ $\gcd(168,441)=21$ នោះ $\frac{168}{441}=\frac{21\cdot8}{21\cdot21}=\frac{8}{21}$

-ស្រាយទ្រឹស្តីបទឲ្យសិស្ស -លំហាត់គំរូ ៖ រក $\gcd(75,25)$ និង $\gcd(213,63)$ ។ -ស្រាយទ្រឹស្តីបទ និងអាល់កូរីតអឺគ្លីតឲ្យសិស្ស	១.២ លក្ខណៈនៃតួចែករួមធំបំផុតនៃពីរចំនួន -ទ្រឹស្តីបទ ៖បើ $a \& b$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $a=bq+r$ ដោយ $0<r<b$ នោះ $\gcd(a,b)=\gcd(b,r)$ ។ សម្រាយ(មើលទំព័រ២២០) ១.៣ អាល់កូរីតអឺគ្លីត -ទ្រឹស្តីបទ ៖gcd នៃ $a \& b$ គឺជាសំណល់ចុងក្រោយបំផុតខុសពីសូន្យ ក្នុងវិធីចែកបន្តបន្ទាប់គ្នា ឬអាល់កូរីតអឺគ្លីត។ សម្រាយ(មើលទំព័រ២២០) សំគាល់ ៖ បើ $r_n=1$ នោះ $a \& b$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា។	-សង្កេត - $\gcd(75,25)=25$ ព្រោះ $75 \vdots 25$ $\gcd(213,63)=\gcd(63,24)$ $=\gcd(24,15)=3$ -សង្កេត
- រក $\gcd(90,45)$ និង $\gcd(125,95)$ - សម្រួលប្រភាគ $\frac{234}{2009}$	ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំនេះដឹង)	- $\gcd(90,45)=45$ និង $\gcd(125,95)=\gcd(95,30)$ $=\gcd(30,5)=5$ $\gcd(234,2009)=\gcd(137,97)$ $=\gcd(97,40)=\gcd(40,17)=1$ នោះប្រភាគ $\frac{234}{2009}$ សម្រួលមិនបាន ។

-ដាក់លំហាត់កិច្ចការផ្ទះឲ្យសិស្ស(លំហាត់១ដល់៥ទំព័រ ២៣២)	ជំហានទី៥ (កិច្ចការផ្ទះ)	-សិស្សកត់ត្រា និងស្តាប់

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី៨ ៖ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺគ្លីត

មេរៀនទី៣ ៖ តួចែករួម និងពហុគុណរួម

I. **វត្ថុបំណងនៃមេរៀន ៖** ក្រោយពីរៀនមេរៀននេះចប់សិស្សអាច ៖

- បំនេះដឹង ៖ ប្រាប់ពីរបៀបរក gcd តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីតបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍ ។
- បំនិន ៖ រក gcd តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីតបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈលំហាត់គំរូ ។
- ឥរិយាបថ ៖ មានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្ន និងចេះធ្វើការងារជាក្រុមដល់សិស្ស ។

II. **រយៈពេលបង្រៀន ៖** កិច្ចតែងការនេះសម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោងសិក្សា ។

III. **សម្ភារៈឧបទ្ទេស**

- សៀវភៅគ្រូ និង សៀវភៅសិស្ស
- ទ្រឹស្តីចំនួន

IV. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន ៖** ប្រើប្រាស់វិធីសាស្រ្តចម្រុះ "ចោទឆ្លើយ , សង្កេត , រិះរក , ..."

V. **ដំណើរនាំមេរៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-ពិនិត្យអនាម័យ វិន័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និង អវត្តមាន ។	ជំហានទី១(រដ្ឋបាលថ្នាក់)	-សិស្សក្រោកឈរ ប្រធានថ្នាក់ឡើងរាយការណ៍ ។
-រក $\gcd(90,45)$	ជំហានទី២(រំលឹកមេរៀន)	-ដោយ $90 = 45\cdot 2+0$ នោះ $\gcd(90,45)=45$
- រក $\gcd(5664,984)$ ។	ជំហានទី៣ ១.៤ របៀបរក gcd តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីត	- រក $\gcd(5664,984)$

	5	1	3	10	ផលចែក
5664	987	744	240	24	
744	240	24	0		សំណល់
r_1	r_2	r_3			

តាមតារាងគេបាន ,

$\gcd(5664,984)=24$

-ណែនាំសិស្សឲ្យទាញជាទ្រឹស្តីបទ ។ ណែនាំសិស្សឲ្យធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់ ។

-ទ្រឹស្តីបទ ៖ $a\&b$ ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ។សំណុំតួចែករួមនៃ $a\&b$ ស្មើនឹងសំណុំតួចែករួមធំបំផុតរបស់វា ។

-ទ្រឹស្តីបទ ៖គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a,b,n និងគ្រប់តួចែករួម d នៃ $a\&b$ គេបាន ៖

$\gcd(na,nb)=n\gcd(a,b)$

និង $\gcd\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=\frac{\gcd(a,b)}{d}$

-ទ្រឹស្តីបទ ៖$a\&b$ ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិហើយ δ ជាតួចែករួមនៃ $a\&b$ ។ δ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $a\&b$ លុះត្រាតែ $\frac{a}{\delta}\&\frac{b}{\delta}$ បឋមរវាងគ្នា

(សម្រាយទំព័រទី២២២,២២៣)

-ណែនាំសិស្សឲ្យទាញនិយមន័យ	១.៥ តួចែករួមធំបំផុតនៃច្រើនចំនួនគត់ ក. និយមន័យ	-និយមន័យ ៖ $a_1, a_2, ..., a_n$ ជា n ចំនួនគត់ធម្មជាតិ។តួចែករួមធំបំផុតនៃ $a_1, a_2, ..., a_n$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាងគេបណ្ដាតួចែករួមនៃ $a_1, a_2, ..., a_n$ ។និមិត្តសញ្ញា $\delta = \gcd(a_1, a_2, ..., a_n)$ ។
-ណែនាំសិស្សឲ្យទាញលក្ខណៈ	ខ. លក្ខណៈ	-លក្ខណៈទូទៅ i .ដើម្បីរក $\gcd(a_1, a_2, ..., a_n)$ គេរក $\gcd(a_1, a_2) = \delta_1$ រួចរក $\gcd(\delta_1, a_3) = \delta_2, ...$ ហើយធ្វើបែបនេះរហូតដល់ a_n ។ $\gcd(a_1, a_2, ..., a_n)$ $= \gcd(((a_1, a_2), a_3), ..., a_n)$ ii .សំណុំតួចែករួមនៃ $a_1, ..., a_n$ ស្មើសំណុំតួចែកនៃ gcd របស់វា
-រក $\gcd(315, 225, 525)$		-យើងមាន $\gcd(315, 225) = 45$ $\gcd(45, 525) = 15$ នោះ $\gcd(315, 225, 525) = 15$
-ណែនាំសិស្សឲ្យធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្ដីបទបឺស៊ូ	១.៦ ទ្រឹស្ដីបទបឺស៊ូ និងទ្រឹស្ដីបទហ្គោស ក. ទ្រឹស្ដីបទបឺស៊ូ	-ទ្រឹស្ដីបទបឺស៊ូ ៖ $a \& b$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នា លុះត្រាតែមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $u \& v$ ដែល $au + bv = 1$ ។

-រក $\gcd(12,18)$ និង $\gcd(12,18\cdot5)$ រួចសន្និដ្ឋាន $\gcd(12,18)$ & $\gcd(12,18\cdot5)$ -ណែនាំសិស្សធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់លើទ្រឹស្តីបទហ្គោស -ណែនាំសិស្សធ្វើការទាញវិបាក និងស្រាយបញ្ជាក់	ខ. ទ្រឹស្តីបទហ្គោស	(សម្រាយទំព័រ២២៤) -គេបាន $\gcd(12,18)=6$ និង $\gcd(12,18\cdot5)=6$ គេសន្និដ្ឋានបានថា $\gcd(12,18)=\gcd(12,18\cdot5)$ -ទ្រឹស្តីបទហ្គោស ៖បើផលគុណ ab ចែកដាច់នឹង c ហើយ c & a បឋមរវាងគ្នា នោះ b ចែកដាច់នឹង c ។ មានន័យថា ៖ $c\mid ab$ & $\gcd(a,c)=1\Rightarrow c\mid b$ (សម្រាយទំព័រ២២៥) -វិបាក ៖បើមួយចំនួនគត់ n ចែកដាច់នឹង a ផង,ចែកដាច់នឹង b ផង ហើយ a & b បឋមរវាងគ្នា នោះ n ចែកដាច់នឹងផលគុណ ab ។ បានន័យថា ៖ $a\mid n, b\mid n$ & $\gcd(a,b)=1$ $\Rightarrow ab\mid n$ (សម្រាយទំព័រ២២៦)
- ដោះស្រាយសមីការ $75x+125y=5$ ដែល $x,y\in\mathbb{Z}$ ។	ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំនេះដឹង)	- ដោះស្រាយសមីការ $75x+125y=5$ $15x+25y=1$ ដោយ $\gcd(15,25)=5\neq1$ ដូចនេះសមីការគ្មានឫសក្នុង $\mathbb{Z}$ ទេ ។

-ដាក់លំហាត់កិច្ចការផ្ទះឲ្យសិស្ស(ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{Z}$ សមីការ $40x+80y=4$)	ជំហានទី៥ (កិច្ចការផ្ទះ)	-សិស្សកត់ត្រា និងស្តាប់

កិច្ចតែងការបង្រៀន

ជំពូកទី៨ ៖ ភាពចែកដាច់ និងវិធីចែកអឺគ្លីត

មេរៀនទី៣ ៖ តួចែករួម និងពហុគុណរួម

I. **វត្ថុបំណងនៃមេរៀន ៖** ក្រោយពីរៀនមេរៀននេះចប់សិស្សអាច ៖

- បំនេះដឹង ៖ ប្រាប់ពីលក្ខណៈ និងរបៀបរកពហុគុណរួមតូចបំផុតបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈ ឧ. ។
- បំនិន ៖ កំណត់លក្ខណៈ និងរកពហុគុណរួមតូចបំផុតបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈលំហាត់គំរូ ។
- ឥរិយាបថ ៖ មានស្មារតីប្រុងប្រយ័ត្ន និងចេះធ្វើការងារជាក្រុម ។

II. **រយៈពេលបង្រៀន ៖** កិច្ចតែងការនេះសម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោងសិក្សា ។

III. **សម្ភារៈឧបទ្ទេស**

- សៀវភៅគ្រូ និង សៀវភៅសិស្ស
- ទ្រឹស្តីចំនួន

IV. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន ៖** ប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រចម្រុះ "ចោទឆ្លើយ , សង្កេត , រិះរក , ..."

V. **ដំណើរនាំមេរៀន**

សកម្មភាពគ្រូ	**ខ្លឹមសារ**	**សកម្មភាពសិស្ស**
-ត្រួតពិនិត្យសណ្តាប់ធ្នាប់	**ជំហានទី១**	-ប្រធានថ្នាក់រាយការណ៍
-ឲ្យសិស្សឡើងកែកិច្ចការ	**ជំហានទី២**	-ដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{Z}$ $40x+80y=4$ $10x+20y=1$ ដោយ $\gcd(10,20)=10\neq 1$ ដូចនេះសមីការគ្មានឫសក្នុង $\mathbb{Z}$ ទេ ។
	ជំហានទី៣ **២. ពហុគុណរួមតូចបំផុត** **២.១ ពហុគុណរួមតូចបំផុត**	

-ណែនាំសិស្សទាញនិយមន័យ -រក $lcm(168,180)$ -ណែនាំសិស្សទាញជាលក្ខណៈទូទៅក្នុងការរក $lcm(a,b)$ -គណនា $\frac{1581}{306}-\frac{912}{12312}$	**ក. និយមន័យ**	-និយមន័យ ៖ ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិ $a\&b$ គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលជាពហុគុណរួមវិជ្ជមាន ហើយតូចជាងគេនៃ $a\&b$ ។ -មាន $168=2^3\cdot3\cdot7$ និង $180=2^2\cdot3^2\cdot5$ នោះ: $lcm(168,180)=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$ $=2520$ -ជាទូទៅ ៖ ដើម្បីរក $lcm(a,b)$ គេត្រូវ , ១. បំបែក $a\&b$ ជាផលគុណកត្តាបឋម ។ ២. គណនាផលគុណនៃកត្តាបឋមទាំងអស់ ដោយយកកត្តាដែលមាននិទស្សន្តធំចំពោះកត្តាណាដែលដូចគ្នា ។ ផលគុណនេះជា $lcm(a,b)$ ។ -ដោយ $\gcd(1581,306)=51$ និង $\gcd(912,12312)=456$ គេបាន , $\frac{1581}{306}-\frac{912}{12312}=\frac{31}{6}-\frac{2}{27}$ ហើយ $lcm(6,27)=54$ គេបាន , $\frac{31}{6}-\frac{2}{27}=\frac{31\cdot9-2\cdot2}{54}$ $=\frac{275}{54}$

-ណែនាំសិស្សទាញជាទ្រឹស្តីបទ និងធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់	**ខ. ទ្រឹស្តីបទ**	-ទ្រឹស្តីបទ ៖ គ្រប់ពហុគុណនៃ $lcm(a,b)$ គឺជាពហុគុណរួមនៃ a និង b ។ (សម្រាយទំព័រទី ២២៨)
-ណែនាំសិស្ស ធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ	**២.២ លក្ខណៈនៃពហុគុណរួមតូចបំផុត**	- លក្ខណៈ ៖ គ្រប់ a,b និង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និងគ្រប់តួចែករួម d នៃ $a\&b$ គេបាន ៖ ១. $lcm(a,b)=lcm(b,a)$ ២. $lcm(a,a)=a$ ៣. $lcm(1,a)=a$ ៤. $lcm(a,na)=na$ ៥. $lcm(na,nb)=n\cdot lcm(a,b)$ ៦. $lcm\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=\frac{lcm(a,b)}{d}$ (សម្រាយទំព័រ ២២៩)
-រក $lcm(25,15)$		-បាន $lcm(25,15)=5\cdot lcm(5,3)$ $=5\cdot 15=75$
-ណែនាំសិស្សធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ	**២.៣ ទំនាក់ទំនងរវាង lcm និង gcd** **ក. ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនបឋមរវាងគ្នា**	-ទ្រឹស្តីបទ ៖ បើ $a\&b$ ជាពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នានោះ $lcm(a,b)=ab$ ។ -ទ្រឹស្តីបទ ៖ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $a\&b$ គេបាន ៖ $\gcd(a,b)\cdot lcm(a,b)=ab$ ឬ $\delta\mu=ab$ ។

-រក $lcm(1176,252)$ -សួរសិស្ស, រកពហុគុណនៃ $5,10,15$ រួចរក $lcm(5,10,15)$ -ណែនាំឲ្យទាញនិយមន័យ	**ខ. ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃច្រើនចំនួនគត់**	(សម្រាយទំព័រទី ២២៩,២៣០) -មាន $\gcd(1176,252)=84$ (តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីត) គេបាន, $lcm(1176,252)=\frac{1176\cdot 252}{\gcd(1176,252)}$ $=3528$ - ពហុគុណនៃ 5 មាន $5,10,15,20,25,30,...$ 10 មាន $10,20,30,40,...$ 15 មាន $15,30,45,60,75,...$ គេបាន , $lcm(5,10,15)=30$ -និយមន័យ ៖ ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ n ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $a_1,a_2,...,a_n$ គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលតូចជាងគេបណ្ដាពហុគុណរួមវិជ្ជមាននៃ $a_1,...,a_n$ ដែលកំណត់សរសេរដោយ, $\mu=lcm(a_1,...,a_n)$ ។ ១. សំណុំពហុគុណរួមនៃ $a_1,...,a_n$ ស្មើនឹងពហុគុណនៃ lcm របស់វា ។ ២. ដើម្បីរក $lcm(a_1,...,a_n)$ គេរក $lcm(a_1,a_2)=\mu_1$ រួច $lcm(\mu_1,a_3)$,... ហើយធ្វើបែបនេះរហូតដល់ a_n ។

	ជំហានទី៤	
-រក $lcm(45,65,85)$		-បាន $lcm(45,65)=5\cdot lcm(9,13)$ $=5\cdot 9\cdot 13=585$ $lcm(585,85)=5\cdot lcm(117,17)$ $=5\cdot 117\cdot 17=9945$ នោះ $lcm(45,65,85)=9945$
	ជំហានទី៥	
-កិច្ចការផ្ទះ បើ $lcm(126,70\cdot a)=42$ ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃ a ។		-ចម្លងកិច្ចការ និងស្តាប់ ។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- មុខវិជ្ជា ៖ គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២
- ជំពូកទី៩ ៖ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និង កូអរដោនេប៉ូលែ
- មេរៀនទី១ ៖ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និង កូអរដោនេប៉ូលែ
- រយៈពេល ២ ម៉ោង

I. វត្ថុបំណងមេរៀន

-ចំណេះដឹង ៖ សិស្សប្រាប់ពីនិយមន័យនៃខ្សែកោងរាប និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតបាន ត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍។

-បំនិន ៖ សិស្សកំណត់ សិស្សប្រាប់ពីនិយមន័យនៃខ្សែកោងរាប និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងសង់ក្រាបតាងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈលំហាត់គំរូ ។

-ឥរិយាបថ ៖ បណ្តុះស្មារតីរាងវៃប្រុងប្រយ័ត្នក្នុងការសង់ក្រាប ។

II. សំភារឧបទេស

-សៀវភៅសិស្សទំព័រ ២៣៦

-សៀវភៅគ្រូទំព័រ ២៣៦

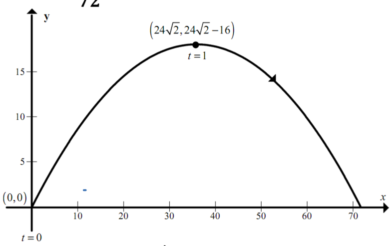
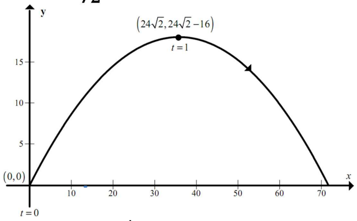
-បន្ទាត់ និងប៉ារ៉ាបូល

III. ដំណើរការនៃមេរៀន

<table>
<tr><th>សកម្មភាពគ្រូ</th><th>ខ្លឹមសារមេរៀន</th><th>សកម្មភាពសិស្ស</th></tr>
<tr><td>-ត្រួតពិនិត្យ</td><td>ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)
អនាម័យ-វិន័យ អវត្តមាន</td><td>-ប្រធានថ្នាក់រាយការណ៍</td></tr>
<tr><td>-ឲ្យសិស្សឡើងកែកិច្ចការ
លំហាត់
រកGCDតាមអាល់កូរីតអឺគ្លីត
នៃ 2468 និង 442។</td><td>ជំហានទី២ (កែកិច្ចការចាស់)

ចំលើយ
រកGCDនៃ2468 និង 442
តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីត
គេបានតារាង
<table>
<tr><td></td><td>5</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>18</td></tr>
<tr><td>2468</td><td>442</td><td>258</td><td>184</td><td>74</td><td>36</td><td>2</td></tr>
<tr><td>258</td><td>184</td><td>74</td><td>36</td><td>2</td><td>0</td><td></td></tr>
</table>
តាមតារាងគេបាន
GCD(2468,442)=2</td><td>-អនុវត្តន៍ដោះស្រាយលំហាត់

ចំលើយ
រកGCDនៃ2468 និង 442
តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីត
គេបានតារាង
<table>
<tr><td></td><td>5</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>18</td></tr>
<tr><td>2468</td><td>442</td><td>258</td><td>184</td><td>74</td><td>36</td><td>2</td></tr>
<tr><td>258</td><td>184</td><td>74</td><td>36</td><td>2</td><td>0</td><td></td></tr>
</table>
តាមតារាងគេបាន
GCD(2468,442)=2</td></tr>
<tr><td></td><td>ជំហានទី៣
មេរៀនទី១ ៖ សមីការប៉ារ៉ាមែត
និង កូអរដោនេប៉ូលែ</td><td></td></tr>
</table>

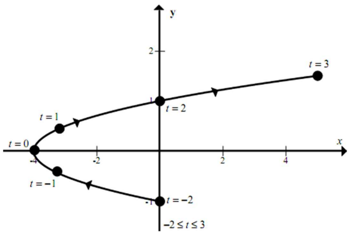
ណែនាំសិស្សពិនិត្យមើលក្រាប-នៃចលនាវត្ថុមួយផ្លាស់ទីក្នុងលំហអាកាសត្រង់មុំ45°។វត្ថុនោមានល្បឿនដើម48cm/sហើយមានគន្លងជាប៉ារ៉ាបូលដែលកំណត់ដោយសមីការ $y=-\frac{x^2}{72}+x$ តើវាជាសមីការអ្វី? ដើម្បីកំណត់រយពេលចរតើគេត្រូវធ្វើដូចម្តេច? ណែនាំសិស្សទាញរក x និង y ជាអនុគមន៍នៃ t ណែនាំសិស្សអោយធ្វើការសន្និដ្ឋាន តើគន្លងនៃចលនាមានឈ្មោះដូចម្តេច? ណែនាំសិស្សទាញជានិយមន័យ ណែនាំសិស្សនោះស្រាយលំហាត់ Ex គូសខ្សែកោងដែលកំណត់ដោយសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $x=t^2-4$ និង $y=\frac{t}{2}$ $-2\le t\le 3$	1 ខ្សែកោងរាប និង សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $y=-\frac{x^2}{72}+x$  សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $x=24\sqrt{2}t$; $y=-16t^2+24\sqrt{2}t$	$y=-\frac{x^2}{72}+x$  សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $x=24\sqrt{2}t$; $y=-16t^2+24\sqrt{2}t$ $y=-\frac{x^2}{72}+x$ ជាសមីការដេកាត ដើម្បីកំណត់រយពេលចរគេអាចប្រើអថេរទី៣ ថ្មីមួយទៀតដែលហៅថាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។ កូអរដោនេនៃចំនុចមួយនៅរយពេល t គឺ $x=(Vo\cos\theta)t=48cos45^\circ\times t$ $=24\sqrt{2}\times t$ $y=-\frac{x^2}{72}+x=\frac{(24t\sqrt{2})^2}{72}+24\sqrt{2}\,t$ $=-16t^2+24\sqrt{2}\,t$ ដោយ x និង y ជាអនុគមន៍នៃ t គេថា $x=24\sqrt{2}\,t$ និង $y=-16t^2+24\sqrt{2}\,t$ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។ ចំពោះចលនាពិសេសនេះ x និង y ជាអនុគមន៍នៃ t ហើយគន្លងដែលបាន ហៅថា ខ្សែកោងរាប។ និយមន័យ បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់នៃអថេរ t នៅលើចន្លោះ I ។ នោះសមីការ $x=f(t)$ និង $y=g(t)$ ហៅថា សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ t និង t ហៅថាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

កាលណា t ប្រែប្រួលនៅលើចន្លោះ I សំនុំចំនុចនៃចំនុច (x;y) ដែលហៅថា ក្រាបនៃសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។ ខ្សែកោងតាងអោយ x=f(t) និង y=g(t) នៅលើចន្លោះI ហៅថាខ្សែកោងរាប។

ដោះស្រាយលំហាត់

ចំពោះ t នៅលើចន្លោះ[-2;3] គេបានចំនុច (x;y) ដូចក្នុងតារាង

t	-2	-1	0	1	2	3
x	0	-3	-4	-3	0	5
y	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5



ការបំលែងសមីការប៉ារ៉ាម៉ាត្រទៅជាសមីការដេកាត

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

=>

ដោះស្រាយរក t ក្នុងសមីការមួយ

=>

ជំនួសក្នុងសមីការពីរ

=>

សមីការដេកាត

អនុវត្តន៍ ៖ ដោះស្រាយតាមការណែនាំបំលែងជាសមីការដេកាត

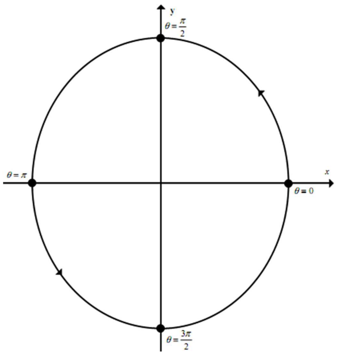
$x = 3\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{3}$

$y = 4\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{4}$

តាមរូបមន្ត ៖

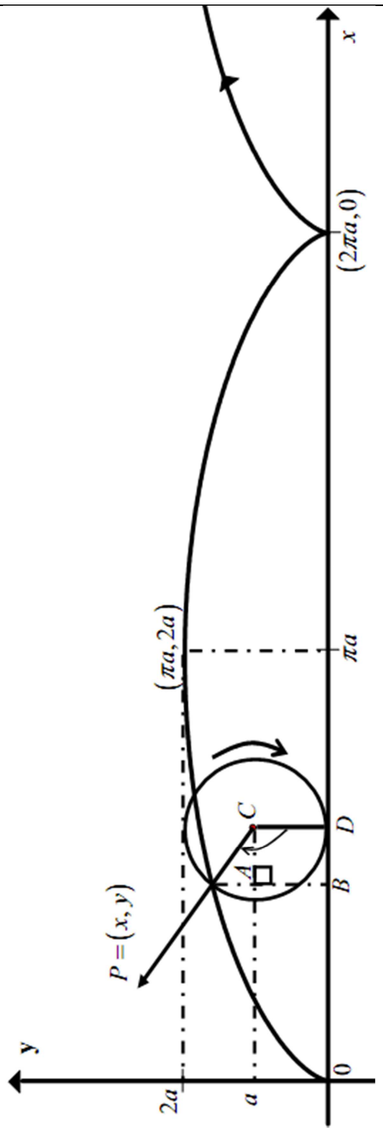
$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

គេបាន $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>តាមសមីការដេកាតគេឃើញខ្សែកោងនេះជាអេលីបមានផ្ចិតត្រង់(0;0) និងកំពូល(0;4) និង(0;-4) កាត់អ័ក្សតូចត្រង់(-3;0) និង(0;3)។


អនុវត្តន៍តាមការណែនាំជាទូទៅ
ក្រាបនៃសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ
$\mathbf{x=h+a\sin\theta}$ និង
$\boldsymbol{y=k+bcos\theta}$, $\boldsymbol{0\le\theta\le 2\pi}$
ជាអេលីប។គូសផ្ទុយនិងទិសដៅនៃដំនើរនាឡិកាដែលមានសមីការ ៖
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$</td>
</tr>
<tr>
<td>ណែនាំសិស្សបង្កើតគំនូសបំព្រួញបំលែងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រទៅជាសមីការដេកាត

ណែនាំសិស្សធ្វើលំហាត់ឧទាហរណ៍
គូសខ្សែកោងតាងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ
$x=3\cos\theta$ និង $\mathrm{y}=4\sin\theta$</td>
<td>ជំហានទី៤
(ពង្រឹងចំនេះដឹង)</td>
<td>អនុវត្តន៍ដោះស្រាយលំហាត់គំរូ
ចំលើយ
តាងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ θ ជារង្វង់មុំដែលជាមុំរង្វិលរបស់ចំនុចP(x;y)ផ្តើមចេញពីគល់តំរុយកូអរដោនេ។
បើ$\theta=0$ នោះ$P(0;0)$
បើ$\theta=\pi$ នោះ $P(\pi a;2a)$
បើ$\theta=2\pi$ នោះ $\mathrm{P}(2\pi a;0)$
តាមរូបគេឃើញថាមុំ
APC=180° $-\,\theta$</td>
</tr>
</table>

$0 \le \theta \le 2\pi$ ណែនាំសិស្សទាញលក្ខណទូទៅ ណែនាំសិស្សអោយដោះស្រាយលំហាត់គំរូ កំណត់ខ្សែកោងដែលបានគូសដោយចំនុច P មួយដែលស្ថិតនៅលើរង្វង់មានកាំ a ហើយរមៀលដោយឥតរអិលតាមបន្ទាត់មួយនៅក្នុងប្លង់។ខ្សែកោងនេះហៅថា ស៊ីក្លូអ៊ីត។		ដូចនេះ $sin\theta = \sin(180° - \theta)$ $= sinAPC$ $= \frac{AC}{a} = \frac{BD}{a}$ $cos\theta = -\cos(180° - \theta)$ $= sinAPC = -\frac{AP}{a}$ $=> AP = -acos\theta$ និង $BC = asin\theta$ ដោយរង្វង់នេះរមៀលតាមអ័ក្សអាប់ស៊ីសគេដឹងថា $OD = \widehat{PD} = a\theta$ ម្យ៉ាងទៀត$\mathrm{BA} = \mathrm{DC} = \mathrm{a}$ គេបាន $x = OD - BD = a\theta - asin\theta$ $y = BA + AB = a - acos\theta$ ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រគឺ $x = a(\theta - sin\theta)$និង $\mathrm{y = a(1 - cos\theta)}$
ដាក់លំហាត់កិច្ចការផ្ទះ លំហាត់ គូសខ្សែកោងតាងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\begin{cases} x = 4 + 2cos\theta \\ y = -1 + 4sin\theta \end{cases}$	ជំហានទី៥ កិច្ចការផ្ទះ+បណ្ដាំផ្ញើ	ចំលងលំហាត់ទុកធ្វើផ្ទះ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

- មុខវិជ្ជា : គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២
- ជំពូកទី៩ : សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និង កូអរដោនេប៉ូលែ
- មេរៀនទី១ : សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និង កូអរដោនេប៉ូលែ

  ២ ៖ កូអរដោនេប៉ូលែ

  ២.១ ៖ កូអរដោនេប៉ូលែ

  ២.២ ៖ ទំនាក់ទំនងរវាងកូអរដេកាត និងកូអរដោនេប៉ូលែ
- រយៈពេល ២ ម៉ោង

I. វត្ថុបំណងមេរៀន

-ចំណេះដឹង ៖សិស្សបង្ហាញពីកូអរដោនេប៉ូលែ និង ទំនាក់ទំនងរវាងកូអរដោនេដេកាត និងកូអរដោនេប៉ូលែបានត្រឹមត្រូវ តាមរយៈឧទាហរណ៍។

-បំនិន ៖ សិស្សសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ប៉ូលែបានត្រឹមត្រូវតាមរយៈ លំហាត់គំរូ។

-ឥរិយាបថ ៖ បណ្តុះស្មារតីវាងវៃ និង ស្រលាញ់ការសិក្សាវិទ្យាសាស្រ្តគណិតវិទ្យា។

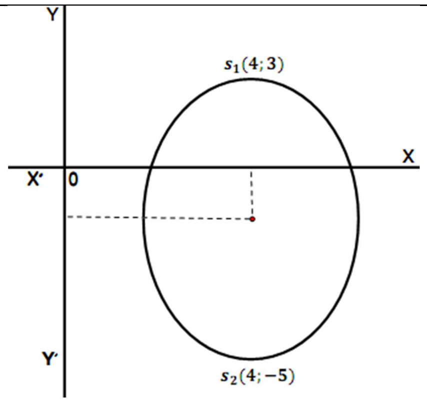
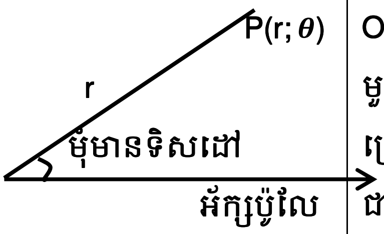
II. សំភារឧបទេស

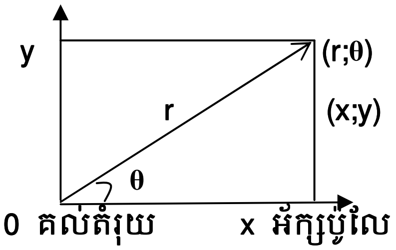
-សៀវភៅសិស្សទំព័រ ២៤១

-សៀវភៅគ្រូទំព័រ ២៤១

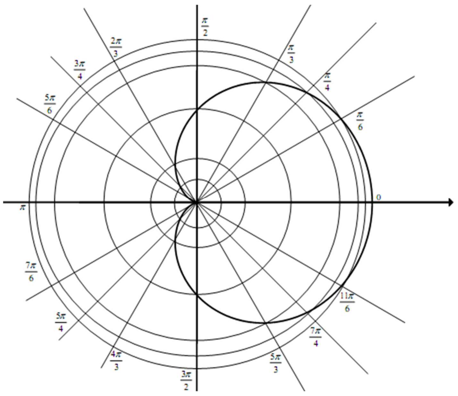
III . ដំណើរការមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
-គ្រូតពិនិត្យ	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់) -អនាម័យ វិន័យ អវត្តមាន	-ប្រធានថ្នាក់រាយការណ៍
លំហាត់ គូសខ្សែកោងតាងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\begin{cases} x = 4 + 2cos\theta \\ y = -1 + 4sin\theta \end{cases}$	ជំហានទី២ (កែកិច្ចការចាស់)	ចំលើយ បំលែងជាសមីការដេកាត $x = 4 + 2cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{x-4}{2}$ $y = -1 + 4sin\theta \Rightarrow sin\theta = \frac{y+1}{4}$ តាមរូបមន្ត $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ គេបាន $\frac{(x-4)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{4^2} = 1$ មានក្រាបជាអេលីបដែលមាន $C(4;-1)$, $S_1(4;3)$, $S_2(4;5)$, $F_1(4;2\sqrt{3}-1)$, $F_2(4;-2\sqrt{3}-1)$

		
 តើតំរុយកូអរដោនេប៉ូលែ មានលក្ខណដូចម្ដេច? ណែនាំសិស្សធ្វើលក្ខណ សំគាល់ ណែនាំសិស្សទាញជា លក្ខណទូទៅ ណែនាំសិស្សដោះស្រាយ លំហាត់គំរូ រកអរដោនេប៉ូលែផ្សេង ទៀតនៃ ចំនុច $(2;\frac{\pi}{6})$	ជំហានទី៣ មេរៀនទី១ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង កូអរដោនេប៉ូលែ ២. កូអរដោនេប៉ូលែ  	 លក្ខណតំរុយកូអរដោនេប៉ូលែ ចំនុចនឹងOមួយហៅថាប៉ូលែ កន្លះបន្ទាត់ដើមមួយហៅថាអ័ក្ស ប៉ូលែ OP= θជារង្វាស់មុំមានទិស ដៅ ផ្គុំដោយអ័ក្សប៉ូលែ និង អង្កត់ OP បើ$0 \le \theta \le 2\pi$នោះចំនុចនី មួយៗនៃប្លង់កំណត់ដោយគូ)r; θ) តែមួយគត់លើកលែងតែគល់) O(បើθយកតំលៃក្នុង IRនោះចំនុច មួយនៃប្លង់កំណត់ដោយគូ)r; θ) ច្រើនដែលតាងដោយ$(r;\theta+2\pi n)$ ជាទូទៅ ៖ចំនុចមួយនៅក្នុងប្លង់ មានកូអរដោនេប៉ូលែ$(r;\theta)$ ឬ $(r;\theta+2\pi n)$ដែលមាន n ជាចំនួន គត់រ៉ឺឡាទីប។ ចំលើយ ៖ រកអរដោនេប៉ូលែនៃ $(2;\frac{\pi}{6})$មានច្រើន ដូចជា $n=1$ គេបាន $(2;\frac{12\pi}{6})$ $n=2$ គេបាន $(2;\frac{25\pi}{6})$ - - - - - - - - - - - - - -

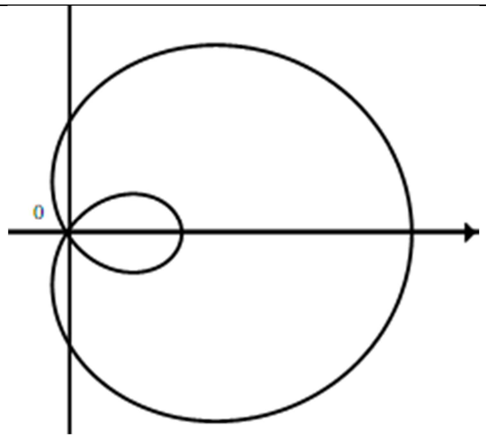
<table>
<tr>
<td>ណែនាំសិស្សឲ្យសង់រូប
ដោយយកអ័ក្សប៉ូលែឲ្យ
ត្រួតស៊ីគ្នាជាមួយនឹង
ប៉ូលែឲ្យត្រួតស៊ីជាមួយ
នឹងគល់តំរុយ
ចូរទាញរក x & y ជា
អនុគមន៍នៃr និង θ</td>
<td>២.ទំនាក់ទំនងរវាងកូអរដោនេ
ដេកាតនិង អរដោនេប៉ូលែ</td>
<td>

$cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = rcos\theta$
$sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = rsin\theta$</td>
</tr>
<tr>
<td>ណែនាំសិស្សទាញជា
លក្ខណទូទៅ</td>
<td></td>
<td>ម្យ៉ាងទៀត $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$
នាំឲ្យ $x^2 + y^2 = r^2$ ហើយ $\tan\theta = \frac{y}{x}$
ជាទូទៅ
កូអរដោនៃប៉ូលែ$(r;\theta)$និងកូអរដោនេ
ដេកាត)x;y) នៃចំនុចមួយមានទំនាក់
ទំនងគ្នាដូចខាងក្រោម
$x = rcos\theta \ ; y = rsin\theta$
$r^2 = x^2 + y^2 \ ; tan\theta = \frac{y}{x}$ បើ $x \neq 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>ណែនាំសិស្សដោះ
ស្រាយលំហាត់គំរូ
បំលែងកូអរដោនេប៉ូលែ
ទៅជាកូអរដោនេដេកាត
រួចដៅនៅក្នុងតំរុយកូអរ
ដោនេដេកាត$(2;\pi)$</td>
<td></td>
<td>អនុវត្តន៍ដោះស្រាយ
ចំលើយ
គេមាន $(r;\theta) = (2;\pi)$
គេបាន $x = rcos\theta = 2cos\pi = -2$
$y = rsin\theta = 2sin\pi = 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>ណែនាំសិស្សដោះស្រាយ
ឧទាហរណ៍
គូសក្រាបនៃសមីការប៉ូលែ
$r = 2 + 2cos\theta$
តើr ប្រែប្រួលដូចម្ដេច?
ចូរបង្កើតតារាងតំលៃនៃ
សមីការប៉ូលែ</td>
<td>២.៣ ក្រាបនៃសមីការប៉ូលែ</td>
<td>អនុវត្តន៍
ដោយអនុគមន៍កូស៊ីនុសចុះពី 1 ទៅ -1
កាលណាθប្រែប្រួលពី0 ទៅ π
នាំឲ្យr ចុះពី4 ទៅ 0។
តារាងសមីការប៉ូលែ
<table>
<tr><td>θ</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>$\frac{2\pi}{3}$</td><td>$\frac{3\pi}{4}$</td><td>$\frac{5\pi}{6}$</td><td>π</td></tr>
<tr><td>r</td><td>4</td><td>$2+\sqrt{3}$</td><td>$2+\sqrt{2}$</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>$2-\sqrt{2}$</td><td>$2-\sqrt{3}$</td><td>0</td></tr>
</table>
បើθកើនឡើង π ទៅ 2π នោះ $cos\theta$
កើនពី-1 ទៅ 1 គេបាន r ពី 0 ទៅ
4។គេដៅចំនុចចំពោះ$\pi \leq \theta \leq 2\pi$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>នៅពាក់កណ្តាលផ្នែកខាងក្រោមនៃក្រាប


$r = 2 + 2cos\theta$
ជាទូទៅ
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a \neq 0$
សមីការប៉ូលែដែលមានទំរង់ណាមួយខាងក្រោម
$r = a(1 + cos\theta)\ ; r = a(1 + sin\theta)$
$r = a(1 - cos\theta)\ ; r = a(1 - sin\theta)$
មានក្រាបជាកាដ្យូអ៊ីត Cardioid ។
សមីការប៉ូលែដែលមានទំរង់ណាមួយខាងក្រោម $r = a + bcos\theta$
ឬ $r = a + bsin\theta$
មានក្រាបជាលីម៉ាសុន ។</td>
</tr>
<tr>
<td>ដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្សដោះស្រាយលំហាត់គូសក្រាបនៃសមីការប៉ូលែ
$r = 2 + 4cos\theta$</td>
<td>ជំហានទី៤
(ពង្រឹងចំនេះដឹង)
<table>
<tr><td>θ</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>$\frac{2\pi}{3}$</td><td>$\frac{3\pi}{4}$</td><td>$\frac{5\pi}{6}$</td><td>π</td></tr>
<tr><td>r</td><td>4</td><td>$2+2\sqrt{3}$</td><td>$2+2\sqrt{2}$</td><td>4</td><td>2</td><td>0</td><td>$2-2\sqrt{2}$</td><td>$2-2\sqrt{3}$</td><td>-2</td></tr>
</table>
</td>
<td>អនុវត្តន៍ដោះស្រាយ
ចំលើយ ៖ គូអរដោនេនៃចំនុចខ្លះៗត្រូវនឹង $0 \leq \theta \leq \pi$
មានដូចតារាងខាងឆ្វេង

គេកត់សំគាល់ឃើញថា r=0ត្រង់ $\theta = \frac{2\pi}{3}$
តម្លៃ $r < 0$ បើ $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$
នោះគេបានពាក់កណ្តាលផ្នែកខាងក្រោមនៃគំនូចតូច និង ពាក់កណ្តាលផ្នែកខាងក្រោមនៃគំនូចធំ។យក θនៅចន្លោះពី π ទៅ 2π នាំឲ្យគេបានពាក់កណ្តាលផ្នែកខាងលើនៃគំនូចតូច និង ពាក់កណ្តាលផ្នែកខាងលើនៃគំនូចធំ។</td>
</tr>
</table>

		 $r = 2 + 4cos\theta$
ដាក់លំហាត់ឲ្យសិស្ស + លំហាត់ គូសក្រាបនៃសមីការប៉ូលែ $r = 2cos3\theta$	ជំហានទី៥ (កិច្ចការផ្ទះ+បណ្តាំផ្ញើ)	ចំលងលំហាត់ទុកធ្វើនៅផ្ទះ។

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូកទី៦ ប្រូបាប

មេរៀនទី១ ប្រូបាប

1. លំហសំណាក និងព្រឹត្តិការណ៍

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សបានកំណត់និយមន័យនៃពាក្យ ពិសោធន៍ចៃដន្យវិញ្ញាសាលំហសំណាក
- បំណិន: សិស្សដោះស្រាយលំហាត់គម្រូបានត្រឹមត្រូវ
- ឥរិយាបថ: សិស្សចូលរួមដោះស្រាយដោយយកចិត្តទុកដាក់

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ១៩៨-១៩៩
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ
- កាក់ គ្រាប់ឡុកឡាក់

IV. ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- គ្រូតពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		
- គ្រូសួរ: ថង់មួយមានឃ្លី៤ ពណ៌ខៀវ ក្រហម ខ្មៅ និងស +បើប្អូនលូកដៃចាប់យកឃ្លី១ពីថង់។តើប្អូនដឹងថាបានឃ្លីពណ៌អ្វី? +តើមានប៉ុន្មានករណីផ្សេងគ្នា	ការចាប់យកឃ្លី១ពីថង់ដែលមានពណ៌ខៀវ ក្រហម ខ្មៅ និងស	-សិស្សឆ្លើយ +គេមិនអាចដឹងបានឃ្លីពណ៌អ្វីមួយប្រាកដនោះទេ +មាន៤ករណីផ្សេងគ្នា

ដែលអ្នកអាចចាប់បាន?		
ជំហានទី៣ (មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ)		
-គ្រូសរសេរមេរៀនថ្មី 1. "ប្រូបាប" និងចំណាងជើងរង -គ្រូអោយសិស្សអានឧទាហរណ៍ រួចបញ្ជាក់ថានេះជាពិសោធន៍ចៃដន្យ។ -គ្រូអោយសិស្សកំណត់ន័យរបស់ពាក្យ "ពិសោធន៍ចៃដន្យ -គ្រូអោយសិស្សអានឧទាហរណ៍២និង៣រួចបញ្ជាក់ថាក្នុងការកំណត់បោះកាក់១ដងឬ២ដង...ឬការចាប់យកបណ្ណម្តងមួយៗចំនួន២លើកចេញពីថង់ដោយមិនដាក់វិញថាជា"វិញ្ញាសា"។ -គ្រូអោយសិស្សកំណត់ន័យរបស់ពាក្យវិញ្ញាសា -គ្រូអោយសិស្សពិនិត្យឧទាហរណ៍និងឆ្លើយសំណួរ	មេរៀនទី១ **ប្រូបាប** **1.លំហសំណាកនិងព្រឹត្តិការណ៍** **1.1.ពិសោធន៍ចៃដន្យវិញ្ញាសា** ឧ១.នៅពេលដែលគេបោះកាក់១គេមិនអាចដឹងច្បាស់ជាមុនថាកាក់នោះផ្ងារឡើងខាងរូបឬមួយខាងលេខនោះទេ។ -ពិសោធន៍ចៃដន្យគឺជាពិសោធន៍មួយដែលគេធ្វើដោយមិនបានដឹងជាមុនថាមានលទ្ធផលអ្វីមួយប្រាកដកើតឡើងនោះទេ។ ឧ២,៣.បើគេយកកាក់មួយមកពិសោធន៍ដោយកំណត់ជាក់លាក់ថា គេបោះកាក់១ដងឬ២ដងឬ៣ដង...ឬបើគេយកសន្លឹកបណ្ណម្តងមួយៗចំនួន២លើកចេញពីថង់ដោយចៃដន្យហើយមិនដាក់ចូលថង់វិញ (ថង់មានសន្លឹកបណ្ណ៤ចុះលេខ១,២,៣និង៤)។ -វិញ្ញាសាគឺជាពិសោធន៍មួយដែលគេកំណត់ធ្វើដោយជាក់លាក់ក្នុងពិសោធន៍ចៃដន្យមួយ។ **1.2.លំហសំណាក** ឧ: គេបោះកាក់មួយដែលមានមុខ HនិងTចំនួនពីរដង។តើមានលទ្ធផលប៉ុន្មានរបៀបកើតឡើង?	-សិស្សកត់ត្រា -សិស្សស្តាប់ដោយយកចិត្តទុកដាក់ -សិស្សឡើងឆ្លើយ: ពិសោធន៍ចៃដន្យជាពិសោធន៍មួយដែលគេធ្វើដោយមិនបានដឹងជាមុនថាមានលទ្ធផលអ្វីមួយប្រាកដកើតឡើងនោះទេ។ -សិស្សអាននិងស្តាប់ដោយយកចិត្តទុកដាក់ -សិស្សឆ្លើយ: វិញ្ញាសាគឺជាពិសោធន៍មួយដែលគេកំណត់ធ្វើដោយជាក់លាក់ក្នុងពិសោធន៍ចៃដន្យមួយ -ក្រោយពីពិភាក្សាគ្នារួចសិស្សឡើងបកស្រាយ: ៤របៀប(TT),(TH),(HT),និង

-គ្រូបញ្ជាក់ថាសំណុំលទ្ធផលដែលអាចកើតឡើងទាំងអស់ក្នុងវិញ្ញាសានេះហៅថា"សំណុំសំណាកឬលំហសំណាក" -គ្រូអោយសិស្សកំណត់ន័យរបស់ពាក្យលំហសំណាក -គ្រូអោយសិស្សកត់លំហាត់គម្រូរួចពិភាក្សារកចម្លើយ	-លំហសំណាកឬសំណុំសំណាកគឺជាសំណុំលទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចកើតឡើងក្នុងវិញ្ញាសាមួយនៃពិសោធន៍ចៃដន្យ។ -លំហាត់គម្រូ: គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចំនួន ២ដង។ ក.តើសកម្មភាពណាជាពិសោធន៍ចៃដន្យ?ជាវិញ្ញាសា? ខ.ចូរសរសេរលំហសំណាក <u>ចម្លើយ</u> ក.ពិសោធន៍ចៃដន្យគឺជាសកម្មភាពបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់។វិញ្ញាសាគឺជាសកម្មភាពបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចំនួន២ដង។ ខ.លំហសំណាក $S=\{(1,1),(1,2),\ldots,(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ មាន៣៦ករណីផ្សេងគ្នា។	(HH)។ -សិស្សគិតរួចឆ្លើយថាលំហសំណាកគឺជាសំណុំលទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចកើតឡើងក្នុងវិញ្ញាសាមួយនៃពិសោធន៍ចៃដន្យ។ -សិស្សពិភាក្សារួចឆ្លើយ ក.ពិសោធន៍ចៃដន្យគឺជាសកម្មភាពបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់។វិញ្ញាសាគឺជាសកម្មភាពបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចំនួន២ដង។ ខ.លំហសំណាក់ $S=\{(1,1),(1,2),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}$ សរុបមាន៣៦ករណីផ្សេងគ្នា។
ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-អោយសិស្សពិភាក្សាប្រតិបត្តិរួចឆ្លើយនឹងសំណួរ	**ប្រតិបត្តិ:**គេចាប់យកឃ្លីម្តង២គ្រាប់ចេញពីថង់មួយដោយចៃដន្យដែលក្នុងនោះមានឃ្លីក្រហម២ លឿង២ និងខៀវ១។ ក.តើសកម្មភាពណាជាពិសោធន៍	-សិស្សពិភាក្សាលើលំហាត់ប្រតិបត្តិរួចឡើងឆ្លើយ

	ចៃដន្យ?ជាវិញ្ញាសា? ខ.ចូរសរសេរលំហសំណាក ចម្លើយ ក.ពិសោធន៍ចៃដន្យជាសកម្មភាពយកឃ្លីពីថង់។វិញ្ញាសាជាសកម្មភាពចាប់យកឃ្លីម្តង២ចេញពីថង់។ ខ.លំហសំណាក់ $S=\{\{R_1R_2\},\{R_1Y_1\},\{R_1Y_2\},$ $\{R_1B\},\{R_2Y_1\},\{R_2Y_2\},$ $\{R_2B\},\{Y_1Y_2\},\{Y_1B\},\{Y_2B\}\}$ ដែល $R=$ក្រហម, $Y=$លឿង $B=$ខៀវ	ក.ពិសោធន៍ចៃដន្យគឺជាសកម្មភាពចាប់យកឃ្លីចេញពីថង់។វិញ្ញាសាជាសកម្មភាពចាប់យកឃ្លីម្តង២ចេញពីថង់។ ខ.លំហសំណាក់ $S=\{\{R_1R_2\},\{R_1Y_1\},\{R_1Y_2\},$ $\{R_1B\},\{R_2Y_1\},\{R_2Y_2\},$ $\{R_2B\},\{Y_1Y_2\},\{Y_1B\},$ $\{Y_2B\}\}$ ដែល $R=$ក្រហម, $Y=$លឿង, $B=$ខៀវ
ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)		
-ចូរប្អូនបង្កើតពិសោធន៍ដោយខ្លួនឯងហើយកំណត់ថាតើសកម្មភាពមួយណាជាពិសោធន៍ចៃដន្យ ណាមួយជាវិញ្ញាសា ហើយមានអ្វីជាលំហសំណាក់។		-សិស្សស្តាប់និងសន្យាធ្វើដោយខ្លួនឯង

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូកទី៦ ប្រូបាប

មេរៀនទី១ ប្រូបាប

1. លំហសំណាក និងព្រឹត្តិការណ៍

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សបានកំណត់ន័យនៃពាក្យ ព្រឹត្តិការណ៍ ព្រឹត្តិការណ៍សមាស បានត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍
- បំណិន: សិស្សដោះស្រាយលំហាត់គម្រូបានត្រឹមត្រូវ
- ឥរិយាបថ: សិស្សសហការដោះស្រាយលំហាត់ដោយយកចិត្តទុកដាក់

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ២០០-២០៤
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ
- កាក់ ឃ្លី គ្រាប់ឡុកឡាក់

IV. ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- លំនឹងថ្នាក់	- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		
- គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់២ព្រមគ្នា។ ក.តើសកម្មភាពណាជាពិសោធន៍ចៃដន្យ?ជាវិញ្ញាសា? ខ.ចូរសរសេរលំហសំណាក់	ក.ពិសោធន៍ចៃដន្យជាសកម្មភាពបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់។វិញ្ញាសាជាសកម្មភាពបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់២ព្រមគ្នា។ ខ.លំហសំណាក់	ក.ពិសោធន៍ចៃដន្យគឺជាសកម្មភាពបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់។វិញ្ញាសាគឺជាសកម្មភាពបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចំនួន២ដង។

	$S=\{(1,1),(1,2),\ldots,(6,1),(6,2),$ $(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ ស្មើនឹង៣៦ករណី	ខ.លំហសំណាក់ $S=\{(1,1),(1,2),\ldots,$ $(6,1),\ldots,(6,6)\}$ សរុបមាន៣៦ករណីផ្សេងគ្នា។
ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)		
-គ្រូសរសេរចំណងជើងមេរៀនដាក់លើក្តារខៀន	មេរៀនទី១ **ប្រូបាប** (**ត**) **1.3 ព្រឹត្តិការណ៍** **ក. ព្រឹត្តិការណ៍**	-សិស្សកំណត់ចំណងជើងមេរៀនថ្មី
-គ្រូអោយឧទាហរណ៍១: ក្នុងវិញ្ញាសាបោះកាក់មួយចំនួន២ដង តើមានករណីដែលមុខខាងរូបHកើតឡើងតែ១ដងគត់?	-មានពីរករណីគឺ(HT),(TH)	-មានពីរករណីគឺ $\{(TH),(HT)\}$
-គ្រូបញ្ជាក់ថាលទ្ធផលដែលកើតឡើងស្របតាមបំណងប្រាថ្នានេះហៅថាព្រឹត្តិការណ៍ រួចអោយសិស្សកំណត់ន័យនៃពាក្យព្រឹត្តិការណ៍។ -អោយឧទាហរណ៍២: ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីក្រហម១ ខៀវ១ និងលឿង១។គេចាប់យកឃ្លីម្តងមួយដោយចៃដន្យចេញពីថង់រួចដាក់ចូលថង់វិញចំនួន២ដង។តាមរយៈពិសោធន៍នេះគ្រូវណែនាំអោយសិស្សយ៉ាងច្បាស់ ថាតើអ្វីជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមានព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដ។	-ព្រឹត្តិការណ៍ជាសំណុំរងនៃលំហសំណាក់។ +ព្រឹត្តិការណ៍ដែលលទ្ធផលកើតឡើងមានតែមួយករណីគត់ហៅថា "ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ"។ +ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្មានលទ្ធផលណាមួយកើតឡើងនៅក្នុងលំហសំណាក់ហៅថា "ព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន"។ +ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រប់លទ្ធផលទាំងអស់ដូចក្នុងលំហសំណាក់ហៅថា "ព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដ"។	-សិស្សស្តាប់យ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់រួចបានកំណត់ថាព្រឹត្តិការណ៍ជាសំណុំរងនៃលំហសំណាក់។ +ព្រឹត្តិការណ៍ដែលលទ្ធផលកើតឡើងមានតែមួយករណីគត់ហៅថា "ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ"។ +ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្មានលទ្ធផលណាមួយកើតឡើងនៅក្នុងលំហសំណាក់ហៅថា "ព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន"។ +ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រប់លទ្ធផលទាំងអស់ដូចក្នុងលំហសំណាក់ហៅថា "ព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដ"។

-លំហាត់គំរូ: គេធ្វើវិញ្ញាសាបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់២គ្រាប់មួយតូចមួយធំ។ ក.ចូរកំណត់ព្រឹត្តិការណ៍ B_1 : "គ្រាប់ឡុកឡាក់ធំចេញលេខ៤" B_2 : "គ្រាប់ឡុកឡាក់ធំចេញលេខសេស" B_3 : "គ្រាប់ឡុកឡាក់តូចចេញលេខ៣ គ្រាប់ឡុកឡាក់ធំចេញលេខ៥" B_4 : "គ្រាប់ឡុកឡាក់តូចចេញលេខ១ គ្រាប់ធំចេញលេខ៧" ខ.តើព្រឹត្តិការណ៍ណាជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ?	$B_1=\{(4,1),(4,1),(4,3),$ $(4,4),(4,5),(4,6)\}$ $B_2=\{(1,1),(1,2),\ldots,(3,1),$ $(3,2),\ldots,(5,5),(5,6)\}$ $B_3=\{(3,5)\}$ B_4 ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន ខ.ព្រឹត្តិការណ៍ B_3 ជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ។	$B_1=\{(4,1),(4,1),(4,3),$ $(4,4),(4,5),(4,6)\}$ $B_2=\{(1,1),(1,2),\ldots,(3,1),$ $(3,2),\ldots,(5,6)\}$ $B_3=\{(3,5)\}$ B_4 ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន ខ.ព្រឹត្តិការណ៍ B_3 ជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុ។
-គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍រួចណែនាំអោយសិស្សកំណត់និយមន័យនៃព្រឹត្តិការណ៍សមាសនីមួយៗ។	**ខ.ព្រឹត្តិការណ៍សមាស** +ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃAនិងB ជាប្រសព្វនៃព្រឹត្តិការណ៍Aនិងព្រឹត្តិការណ៍B។ +ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃAនិងBជាប្រជុំនៃព្រឹត្តិការណ៍AនិងB។ +ព្រឹត្តិការណ៍Bនិងព្រឹត្តិការណ៍Dជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃBនិងDជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន: $B\cap D=\varnothing$ ។ +ព្រឹត្តិការណ៍២ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នាឬជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃ	+ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃAនិងBជាប្រសព្វនៃព្រឹត្តិការណ៍Aនិងព្រឹត្តិការណ៍B។ +ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃAនិងBជាប្រជុំនៃព្រឹត្តិការណ៍AនិងB។ +ព្រឹត្តិការណ៍Bនិងព្រឹត្តិការណ៍Dជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃBនិងDជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាន $B\cap D=\varnothing$ ។

-គ្រូដាក់លំហាត់គំរូអោយសិស្សពិភាក្សាតាមក្រុមដើម្បីរកចម្លើយ។ គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់។គេតាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខជាពហុគុណនៃ៣និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខតូចជាងឬស្មើនឹង២។ចូរកំណត់: ក.លំហាសំណាក់និងព្រឹត្តិការណ៍ A,B,C ខ.ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ $A\cap B, A\cap C, B\cap C$ គ.ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក $A\cup B,\ B\cup C$ ឃ.ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹងព្រឹត្តិ	ព្រឹត្តិការណ៍ទាំង២ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាននិងព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃព្រឹត្តិកាណ៍ទាំងពីរជាព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដ: $A\cap\overline{A}=\varnothing$, $A\cup\overline{A}=S$ គេបានព្រឹត្តិការណ៍២ផ្ទុយគ្នាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះចម្រុង។ <u>ចម្លើយ</u> ក.លំហសំណាក់ $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ $A=\{2,4,6\}$ $B=\{3,6\}$ $C=\{1,2\}$ ខ.ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ $A\cap B=\{6\}$ $A\cap C=\{2\}$ $B\cap C=\varnothing$ គ.ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក $A\cup B=\{2,3,4,6\}$ $B\cup C=\{1,2,3,6\}$ ឃ.ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹងព្រឹត្តិការណ៍ A,B,C គឺ $\overline{A}=\{1,3,5\}$ $\overline{B}=\{1,2,4,5\}$ $\overline{C}=\{3,4,5,6\}$ ង.ដោយ $B\cap C=\varnothing$ នោះ B និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង។	+ព្រឹត្តិការណ៍២ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នាឬជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំង២ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមាននិងព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរជាព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដ: $A\cap\overline{A}=\varnothing$, $A\cup\overline{A}=S$ គេបានព្រឹត្តិការណ៍២ផ្ទុយគ្នាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង។ -សិស្សពិភាក្សារួចផ្តល់ ចម្លើយ ក.លំហសំណាក់ $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ $A=\{2,4,6\}$ $B=\{3,6\}$ $C=\{1,2\}$ ខ.ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ $A\cap B=\{6\}$ $A\cap C=\{2\}$ $B\cap C=\varnothing$ គ.ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក $A\cup B=\{2,3,4,6\}$ $B\cup C=\{1,2,3,6\}$ ឃ.ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹងព្រឹត្តិការណ៍ A,B,C គឺ

ការណ៍ A,B,C ង.តើព្រឹត្តិការណ៍ណាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង?		$\overline{A}=\{1,3,5\}$ $\overline{B}=\{1,2,4,5\}$ $\overline{C}=\{3,4,5,6\}$ ង.ដោយ $B\cap C=\varnothing$ នោះ B និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង។
ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-ដូចម្តេចដែលហៅថាព្រឹត្តិការណ៍? -ដូចម្តេចដែលហៅថាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុមិនចុះសម្រុងប្រាកដ?	-ជាសំណុំរងនៃលំហសំណាក +ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលមានលទ្ធផលកើតឡើងតែមួយគត់។ +ព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងជាពីរព្រឹត្តិការណ៍ដែលផលគុណនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរមិនអាចមាន។ +ព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលមានគ្រប់លទ្ធផលទាំងអស់ដែលកើតឡើងដូចក្នុងលំហសំណាក់។	-ជាសំណុំរងនៃលំហសំណាក +ព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលមានលទ្ធផលកើតឡើងតែមួយគត់។ +ព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងជាពីរព្រឹត្តិការណ៍ដែលផលគុណនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរមិនអាចមាន។ +ព្រឹត្តិការណ៍ប្រាកដជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលមានគ្រប់លទ្ធផលទាំងអស់ដែលកើតឡើងដូចក្នុងលំហសំណាក់
ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)		
-អោយសិស្សធ្វើលំហាត់លេខ ១ទំព័រ២១៨	កិច្ចការផ្ទះ	-សិស្សកត់ត្រាលេខរៀង និងលេខទំព័រនៃលំហាត់

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូកទី៦ ប្រូបាប

មេរៀនទី១ ប្រូបាប

2. **ប្រូបាប**

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សកំណត់និយមន័យប្រូបាបនិងលក្ខណៈនៃប្រូបាបតាមរយៈឧទាហរណ៍បានត្រឹមត្រូវ
- បំណិន: សិស្សដោះស្រាយលំហាត់គំរូនិងលំហាត់ប្រតិបត្តិបានត្រឹមត្រូវដោយប្រើនិយមន័យប្រូបាបនិងលក្ខណៈនៃប្រូបាប។
- ឥរិយាបថ: សិស្សសហការដោះស្រាយលំហាត់ដោយយកចិត្តទុកដាក់

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III.សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ២០៥-២០៧
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ
- គ្រាប់ឡុកឡាក់ សន្លឹកប័ណ្ណដែលមានចុះលេខ

IV. ដំណើរការនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- លំនឹងថ្នាក់	- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		

-គេអោយសំណុំ: $A=\{0,1,2,3,4,5\}$ $B=\{1,3,5\}$ $C=\{2,4,6\}$ ចូរកំណត់: $A\cap B, A\cap C$ $B\cap C, A\cup B, A\cup C, B\cup C$	$A\cap B=\{1,3,5\}$ $A\cap C=\{2,4\}$ $B\cap C=\varnothing$ $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5\}$ $A\cup C=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ $B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$	$A\cap B=\{1,3,5\}$ $A\cap C=\{2,4\}$ $B\cap C=\varnothing$ $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5\}$ $A\cup C=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ $B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$
ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)		
-គ្រូសរសេរចំណងជើងមេរៀនដាក់លើក្តារខៀន -គ្រូអោយឧទាហរណ៍១និងឧទាហរណ៍២ដូចមានក្នុងសៀវភៅសិស្សរួចអោយសិស្សកំណត់និយមន័យប្រូបាប។ -គ្រូដាក់លំហាត់គម្រូអោយសិស្សពិភាក្សារកចម្លើយ	មេរៀនទី១ **ប្រូបាប** (ត) **2. ប្រូបាប** **2.1. និយមន័យ** -ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយជាផលធៀបនៃចំនួនករណីស្របនឹងចំនួនករណីអាច $P(A)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\frac{n(A)}{n(S)}$ -លំហាត់គំរូ: គេរើសសិស្សម្នាក់អោយធ្វើជាប្រធានក្រុមក្នុងចំណោមសិស្សស្រី៥នាក់និងសិស្សប្រុស៣នាក់។រកប្រូបាបដែលប្រធានក្រុមជាសិស្សស្រីនិងរកប្រូបាបសិស្សប្រុសជាប្រធានក្រុម។ A ជាសិស្សប្រុសជាប្រធាន B ជាសិស្សស្រីជាប្រធាន សិស្សសរុប $5+3=8$ នាក់ នោះ $n(S)=8$, $n(A)=3,$ $n(B)=5$ ។ ដូច្នេះ $P(A)=\frac{3}{8}$, $P(B)=\frac{5}{8}$ ។	-សិស្សកត់ត្រាចំណងជើងមេរៀនថ្មី -ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយជាផលធៀបនៃចំនួនករណីស្របនឹងចំនួនករណីអាច $P(A)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}$ $=\frac{n(A)}{n(S)}$ -ចម្លើយ តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលសិស្សប្រុសធ្វើជាប្រធានក្រុមហើយ B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលសិស្សស្រីធ្វើជាប្រធានក្រុម។ សិស្សសរុប $5+3=8$ នាក់ $n(S)=8$, $n(A)=3,$ $n(B)=5$ ។គេបាន ប្រូបាបដែលសិស្សប្រុសជាប្រធាន $P(A)=\frac{3}{8}$ ប្រូបាបដែលសិស្សស្រីជា

-អោយសិស្សគណនាប្រតិបត្តិនៅលើក្តារខៀន	**ប្រតិបត្តិ:** គេធ្វើវិញ្ញាសាហូតប័ណ្ណម្តងមួយសន្លឹកចំនួន២ដងចេញពីថង់មួយដែលមានប័ណ្ណលេខ១ លេខ២ លេខ៣ ដោយហូតហើយដាក់វិញ។ ក.ចូរសរសេរលំហសំណាក់ S ព្រឹត្តិការណ៍ A ដែលហូតលើកទី១បានលេខគូនិងព្រឹត្តិការណ៍ B ដែលហូតទាំងពីរលើកបានប័ណ្ណមានផលបូកលេខស្មើនឹង៥។ ខ.រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និងប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B <u>ចម្លើយ</u> ក. $S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4)\}$ $A=\{(2,2),(2,1),(2,3)\}$ $B=\{(2,3),(3,2)\}$ ខ. $n(S)=9$ $n(A)=3$ $n(B)=2$ គេបាន $P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ $P(B)=\frac{2}{9}$	ប្រធាន $P(B)=\frac{5}{8}$ -ចម្លើយ: ក. $S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ $A=\{(2,1),(2,2),(2,3)\}$ $B=\{(2,3),(3,2)\}$ ខ. $n(S)=9$ $n(A)=3$ $n(B)=2$ គេបាន: $P(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ $P(B)=\frac{2}{9}$
-គ្រូបញ្ជាក់ថាក្នុងវិញ្ញាសាបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់លទ្ធផលទាំងអស់កើតឡើងក្នុងលំហសំណាកគឺ	**2.2.លក្ខណៈនៃប្រូបាប** មានន័យថា $P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=P(\{5\})=P(\{6\})=\frac{1}{6}$ ផលបូកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ឯក	-សិស្សស្តាប់ដោយយកចិត្តទុកដាក់រួចកត់ត្រា។

លទ្ធផលបោះបានលេខ១ លេខ២ លេខ៣ លេខ៤ លេខ ៥ និងលេខ៦ មានប្រូបាបស្មើនឹង $\frac{1}{6}$ ដូចគ្នា។	ធាតុទាំងអស់ដែលអាចកើតឡើងក្នុងលំហសំណាក S ស្មើនឹង1គឺ $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$។ គេបាន: $P(S)=1$។ **ជាទូទៅ:** +បើគេតាង e_i ជាព្រឹត្តិការណ៍ឯកធាតុនៃលំហសំណាក S នោះ គេបាន: $P(e_1)+P(e_2)+\ldots+P(e_n)$ $=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=P(S)=1$ +បើ A ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចកើតឡើងគឺ $A=\varnothing$ នោះ $n(A)=0$ ហើយ $P(A)=0$ +បើ A ជាព្រឹត្តិការណ៍មួយនៃលំហសំណាក S នោះ $n(A)\le n(S)$ ហើយ $P(A)\le P(S)$	
-គ្រូអោយសិស្សទាញជាសន្និដ្ឋានរួម	**សន្និដ្ឋាន:** -ប្រូបាបនៃលំហសំណាក S ស្មើនឹង1 : $P(S)=1$ -ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមានស្មើនឹង 0: $P(\varnothing)=0$ -ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយក្នុងលំហសំណាកជាចំនួនដែលនៅចន្លោះ $[0,1], 0\le P(A)\le P(S)$ -ប្រូបាបជាអនុគមន៍ដែលកំណត់ពីលំហសំណាក S ទៅចន្លោះ $[0,1], P:S\to[0,1]$ ។	**សន្និដ្ឋាន:** -ប្រូបាបនៃលំហសំណាក S ស្មើនឹង1 : $P(S)=1$ -ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មិនអាចមានស្មើនឹង 0: $P(\varnothing)=0$ -ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយក្នុងលំហសំណាកជាចំនួនដែលនៅចន្លោះ: $[0,1], 0\le P(A)\le P(S)$ -ប្រូបាបជាអនុគមន៍ដែលកំណត់ពីលំហសំណាក S ទៅចន្លោះ $[0,1], P:S\to[0,1]$ ។

ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-ចូរអោយនិយមន័យប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A មួយ -B ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ចេញលេខ។ចូររក $P(B)$ ។	-$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ -$n(B)=\varnothing$ នោះ $P(B)=0$	-សិស្សឆ្លើយ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ -$n(B)=\varnothing$ នោះ $P(B)=0$
ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)		
-អោយសិស្សធ្វើលំហាត់លេខ ២និងលេខទំព័រ២១៨	កិច្ចការផ្ទះ	-សិស្សស្តាប់ការណែនាំនិងកត់ត្រាលេខលំហាត់និងលេខទំព័រ

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូកទី៦ ប្រូបាប

មេរៀនទី១ ប្រូបាប

(ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍សមាស)

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សស្គាល់ច្បាស់អំពីលក្ខណៈនៃព្រឹត្តិការណ៍សមាស
- បំណិន: សិស្សប្រើលក្ខណៈព្រឹត្តិការណ៍សមាសក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់បាន ត្រឹមត្រូវតាមរយៈឧទាហរណ៍
- ឥរិយាបថ: សិស្សសហការដោះស្រាយដោយស្មារតីយោគយល់

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ២០៨-២១២
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ
- គ្រាប់ឡុកឡាក់ ឃ្លី ក្រដាស(សន្លឹកកាត)ដែលមានតួអក្សរ ALGEBRA

IV. ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
	ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)	
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- លំនឹងថ្នាក់	- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
	ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)	
-គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់។តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខសេស។ B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញ	ក. $A=\{1,3,5\}$ $B=\{3,6\}$ $C=\{1,2,3\}$ ខ. $A\cup B=\{1,3,5,6\}$ $B\cap C=\{3\}$	ក. $A=\{1,3,5\}$ $B=\{3,6\}$ $C=\{1,2,3\}$ ខ. $A\cup B=\{1,3,5,6\}$ $B\cap C=\{3\}$

លេខជាពហុគុណនៃ 3 និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខតូចជាងឬស្មើ 3 ។ចូរកំណត់ ក.ព្រឹត្តិការណ៍ A,B,C ខ.ព្រឹត្តិការណ៍ $A\cup B, B\cap C$		
ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)		
ឧ១. គេធ្វើវិញ្ញាសាបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់។តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍បោះបានលេខគូនិង B ជាព្រឹត្តិការណ៍បោះបានលេខជាពហុគុណនៃ 3 គ្រូណែនាំអោយសិស្សកំណត់លំហសំណាក ប្រូបាបនៃផលបូកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនិងប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ។	មេរៀនទី១ **ប្រូបាប** (**ត**) **ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍សមាស** គេបាន: លំហសំណាក $S\{1,2,3,4,5,6\}$ $A=\{2,4,6\}$ $B=\{3,6\}$ ក. $A\cap B=\{6\}$ នោះ $n(A\cap B)=1\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ តែ $P(A)=\frac{3}{6}$, $P(B)=\frac{2}{6}$ ដូចនេះ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ខ. $A\cup B=\{2,3,4,6\}$ នោះ $P(A\cup B)=\frac{4}{6}$ គេដឹងថាបើ $A\cap B\neq\emptyset$ នោះ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ $-n(A\cap B)$	-សិស្សកត់ចំណងជើងមេរៀនរួចឡើងដោះស្រាយ គេបាន: លំហសំណាក $S\{1,2,3,4,5,6\}$ $A=\{2,4,6\}$ $B=\{3,6\}$ ក. $A\cap B=\{6\}$ នោះ $n(A\cap B)=1$ $\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ តែ $P(A)=\frac{3}{6}$, $P(B)=\frac{2}{6}$ ដូចនេះ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ខ. $A\cup B=\{2,3,4,6\}$ នោះ $P(A\cup B)=\frac{4}{6}$ គេដឹងថាបើ $A\cap B\neq\emptyset$ នោះ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ $-n(A\cap B)$ $P(A\cup B)=\frac{n(A)+n(B)}{n(S)}$ $-\frac{-n(A\cap B)}{n(S)}$

ឧទាហរណ៍២: ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីក្រហម២និងឃ្លីខៀវ៣ គេចាប់យកឃ្លី២ចេញពីថង់ម្តងមួយៗដោយចៃដន្យ។ ក. ក្នុងករណីយកហើយដាក់វិញ ចូររកប្រូបាបដែលចាប់បាន -ឃ្លីក្រហមមុននិងខៀវក្រោយ -ឃ្លីក្រហមមុនឬខៀវក្រោយ	$P(A\cup B)=\frac{n(A)+n(B)}{n(S)}$ $-\frac{-n(A\cap B)}{n(S)}$ $=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$ $=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$ ដូចនេះ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ $-P(A\cap B)$ បើ $A\cap B=\varnothing$ នោះ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ គ.ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹងព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $\overline{A}$ គេបាន $\overline{A}=\{1,3,5\}$, $P(\overline{A})=\frac{3}{6}$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$, $A\cup\overline{A}=S$ នោះ $P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$ ដូចនេះ $P(\overline{A})=1-P(A)$ **<u>ចម្លើយ</u>** តាងព្រឹត្តិការណ៍ A: "ចាប់បានឃ្លីក្រហមមុន" B: "ចាប់បានឃ្លីខៀវក្រោយ" ក.ករណីចាប់ហើយដាក់វិញ ការចាប់ឃ្លីលើកទី១និងទី២ជាព្រឹត្តិការណ៍២មិនទាក់ទងគ្នាទេ	$=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}$ $-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$ $=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$ ដូចនេះ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ $-P(A\cap B)$ បើ $A\cap B=\varnothing$ នោះ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ គ.ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹងព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $\overline{A}$ គេបាន $\overline{A}=\{1,3,5\}$, $P(\overline{A})=\frac{3}{6}$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$, $A\cup\overline{A}=S$ នោះ $P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$ $=1$ ដូចនេះ $P(\overline{A})=1-P(A)$ សិស្សឡើងគណនា តាងព្រឹត្តិការណ៍ A:"ចាប់បានឃ្លីក្រហមមុន" B:"ចាប់បានឃ្លីខៀវក្រោយ" ក.ករណីចាប់ហើយដាក់វិញ ការចាប់ឃ្លីលើកទី១និងទី២ជាព្រឹត្តិការណ៍២មិនទាក់ទងគ្នាទេ គេបាន

ខ. ក្នុងករណីយកហើយមិនដាក់វិញ ចូររកប្រូបាបដែលចាប់បាន -ឃ្លីក្រហមមុននិងខៀវក្រោយ -ឃ្លីក្រហមមុនឬខៀវក្រោយ	គេបាន $P(A)=\frac{2}{5},P(B)=\frac{3}{5}$ -នោះប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីក្រហមមុននិងខៀវក្រោយ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ $=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$ -ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីក្រហមមុនឬខៀវក្រោយជាព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A និង $B:A\cup B$ $A=\{(កក),(កខ)\}$ $B=\{(ខខ),(កខ)\}$ ដោយ $A\cap B=\{(កខ)\}$ គេបាន: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ $-P(A\cap B)$ $=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{6}{25}$ $=\frac{19}{25}$ ខ. ក្នុងវិញ្ញាសាយកហើយមិនដាក់វិញ: ចំនួនឃ្លីដែលត្រូវចាប់លើកទី១ វាប៉ះពាល់ដល់ការចាប់ឃ្លីលើកទី២ ។គេថាព្រឹត្តិការណ៍ដែលកើតលើកទី២ទាក់ទងនឹងព្រឹត្តិការណ៍លើកទី១។ -បើលើកទី១ចាប់បានឃ្លីក្រហម	$P(A)=\frac{2}{5},P(B)=\frac{3}{5}$ -នោះប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីក្រហមមុននិងខៀវក្រោយ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ $=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$ -ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីក្រហមមុនឬខៀវក្រោយជាព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A និង $B:A\cup B$ $A=\{(កក),(កខ)\}$ $B=\{(ខខ),(កខ)\}$ ដោយ $A\cap B=\{(កខ)\}$ គេបាន: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ $-P(A\cap B)$ $=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{6}{25}$ $=\frac{19}{25}$ ខ. ក្នុងវិញ្ញាសាយកហើយមិនដាក់វិញ: ចំនួនឃ្លីដែលត្រូវចាប់លើកទី១ វាប៉ះពាល់ដល់ការចាប់ឃ្លីលើកទី២។ គេថាព្រឹត្តិការណ៍ដែលកើតលើកទី២ទាក់ទងនឹងព្រឹត្តិការណ៍លើកទី១។ -បើលើកទី១ចាប់បានឃ្លីក្រហមនិងលើកទី២ចាប់បានឃ្លីខៀវ នោះប្រូបាប

	និងលើកទី២ចាប់បានឃ្លីខៀវ នោះប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីក្រហមមុនគឺ $\frac{2}{5}$ និងប្រូបាបចាប់បានឃ្លីខៀវក្រោយគឺ $\frac{3}{4}$ គេកំណត់សរសេរ: $P(A)=\frac{2}{5}$ និង $P\left(B\text{ដែល}A\text{កើតមុន}\right)=\frac{3}{4}$ ដូចនេះ ប្រូបាបផលគុណនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និង B: $P(A\cap B)=P\left(B\text{ដែល}A\text{កើតមុន}\right)+P(A)-P(A\cap B)$ $=\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{3}{10}=\frac{17}{20}$	ដែលចាប់បានឃ្លីក្រហមមុនគឺ $\frac{2}{5}$ និងប្រូបាបចាប់បានឃ្លីខៀវក្រោយគឺ $\frac{3}{4}$ គេកំណត់សរសេរ: $P(A)=\frac{2}{5}$ និង $P\left(B\text{ដែល}A\text{កើតមុន}\right)=\frac{3}{4}$ ដូចនេះ ប្រូបាបផលគុណនៃព្រឹត្តិការណ៍ A និង B: $P(A\cap B)=P(B\text{ដែល}A$ $\text{កើតមុន})+P(A)$ $-P(A\cap B)$ $=\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{3}{10}=\frac{17}{20}$
-គ្រូអោយសិស្សទាញសេចក្តីសន្និដ្ឋាន	-សន្និដ្ឋាន: +ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B គឺ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ បើ A និង B មិនទាក់ទងគ្នា $P(A\cap)B=P(A)+P\left(B\text{ដែល}A\text{កើតមុន}\right)$ +ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A និង B គឺ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា	-សន្និដ្ឋាន: +ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B គឺ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ បើ A និង B មិនទាក់ទងគ្នា $P(A\cap)B=P(A)+P\left(B\text{ដែល}A\text{កើតមុន}\right)$ +ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A និង B គឺ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នា +ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង A គឺ $P(\overline{A})=1-P(A)$

	+ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹង A គឺ $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)$	
ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-គេសរសេរតួអក្សរមួយដាក់លើសន្លឹកកាតមួយក្នុងចំនោមតួអក្សរនៃពាក្យ ALGEBRA រួចដាក់ចូលក្នុងថង់។គេចាប់យកសន្លឹកកាតម្ដងមួយចេញពីថង់២ដងដោយចៃដន្យដោយយកហើយដាក់វិញ។ A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានស្រៈលើកទី១ B ចាប់បានព្យញ្ជនៈលើកទី១និង C ចាប់បានព្យញ្ជនៈលើកទី២។តើព្រឹត្តិការណ៍ណាជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា។	-ចម្លើយៈ ព្រឹត្តិការណ៍ $A=\{(សព),(សស)\}$ ដែល(ស=ស្រៈ និង ព=ព្យញ្ជនៈ) $B=\{(ពព),(ពស)\}$ $C=\{(ពព),(សព)\}$ -ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា ព្រោះ $A\cap B=\varnothing$ និង $A\cup B=S$	-ចម្លើយៈ ព្រឹត្តិការណ៍ $A=\{(សព),(សស)\}$ ដែល(ស=ស្រៈ និង ព=ព្យញ្ជនៈ) $B=\{(ពព),(ពស)\}$ $C=\{(ពព),(សព)\}$ -ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា ព្រោះ $A\cap B=\varnothing$ និង $A\cup B=S$
ជំហានទី៥ (បណ្ដាំផ្ញើ)		
-អោយសិស្សធ្វើលំហាត់លេខ៣ទំព័រ២១៨	កិច្ចការផ្ទះ	-សិស្សស្ដាប់និងកត់ត្រា

កិច្ចតែងការបង្រៀន

មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ (កំរិតមូលដ្ឋាន)

ជំពូកទី៦ ប្រូបាប

មេរៀនទី១ ប្រូបាប

3. គណនាប្រូបាបដោយប្រើចម្លាស់និងបន្សំ

I. វត្ថុបំណងនៃមេរៀន

- ចំណេះដឹង: សិស្សគណនាចំនួនករណីអាចក៏ដូចជាចំនួនករណីស្របក្នុងលំហាសំណាក ដោយប្រើចម្លាស់និងបន្សំបានត្រឹមត្រូវ។
- បំណិន: សិស្សដោះស្រាយលំហាត់ក្នុងឧទាហរណ៍ដោយប្រើចម្លាស់បិងបន្សំបាន ត្រឹមត្រូវ។
- ឥរិយាបថ: សិស្សសហការដោះស្រាយលំហាត់ដោយស្មារតីយោគយល់

II. ពេលវេលា

២ម៉ោង ថ្ងៃ..........ទី.......ខែ...........ឆ្នាំ..........

III. សម្ភារៈឧបទ្ទេស

- សៀវភៅសិស្ស: ទំព័រ ២១៣-២១៦
- សៀវភៅគ្រូ: ទំព័រ
- គ្រាប់ឡុកឡាក់១គ្រាប់ កាស៩

IV. ដំណើកនាំមេរៀន

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
ជំហានទី១ (រដ្ឋបាលថ្នាក់)		
- គ្រូពិនិត្យអវត្តមាន អនាម័យ សណ្តាប់ធ្នាប់ និងវិន័យ	- លំនឹងថ្នាក់	- តំណាងសិស្សឡើងរាយការណ៍
ជំហានទី២ (រំលឹកមេរៀនចាស់)		
-ចូរកំណត់ ១.ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ A និង B បើ		-សិស្សឆ្លើយ ១. ក. $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

ក. A និង B មិនទាក់ទងគ្នា ខ. A និង B ទាក់ទងគ្នា ២.ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក A និង B បើ គ. A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ចុះសម្រុង ឃ. A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុង		ខ. $P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)$ ២. ក. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ ខ. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
ជំហានទី៣ (មេរៀនថ្មី)		
-គ្រូសរសេរចំណងជើងមេរៀនដាក់លើក្តារខៀន -គ្រូណែនាំអោយសិស្សនោះស្រាយលំហាត់ក្នុងឧទាហរណ៍ -គ្រូសួរ: តើគេធ្វើដូចម្តេចដើម្បីកំណត់ចំនួនករណីអាច ? -គ្រូបំផុសគំនិតអោយសិស្សរកប្រូបាបចំណុច ក ខ និងគ ដោយខ្លួនឯង។	មេរៀនទី១ **ប្រូបាប** (**តចប់**) **3. គណនាប្រូបាបដោយប្រើចម្លាស់និងបន្សំ** **3.1.គណនាប្រូបាបដោយប្រើចម្លាស់** -ឧទាហរណ៍១. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់២ដង។ ក.រកប្រូបាបដែលបោះបានលេខទាំងពីរលើកខុសគ្នា។ ខ.រកប្រូបាបដែលបោះបានលេខទាំងពីរលើកជាលេខគូ។ គ.រកប្រូបាបដែលបោះបានលេខទាំងពីរលើកខុសគ្នានិងជាលេខគូ ចម្លើយ ចម្លាស់ច្រំដែលនៃ២ធាតុយកពី៦ធាតុ។នោះចំនួនករណីអាចគឺ $6^2=36$ ករណី ក.តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលបោះបានលេខខុសគ្នាទាំង២លើក។ A ជាចម្លាស់នៃ២ធាតុយកពី៦ធាតុ។ គេបាន:	-សិស្សកត់ចំណងជើងមេរៀនថ្មី ចម្លាស់ច្រំដែលនៃ២ធាតុយកពី៦ធាតុ។នោះចំនួនករណីអាចគឺ $6^2=36$ ករណី ក.តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលបោះបានលេខខុសគ្នាទាំង២លើក។ A ជាចម្លាស់នៃ២ធាតុយកពី៦ធាតុ។

	$A = P(6,2) = 30$ ដូចនេះ $P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ ខ.តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍បោះបានលេខទាំង២ជាលេខគូ។ B ជាចម្លាស់ច្រំដែលជាលេខ $2, 4, 6$ នោះ $n(B) = 3^2 = 9$ ។ គេបាន: $P(B) = \frac{9}{36} = 0.25$ គ.ព្រឹត្តិការណ៍ដែលបោះបានលេខទាំង២ខុសគ្នានិងជាលេខគូជាព្រឹត្តិការណ៍ $A \cap B$ $A \cap B = \{(2,4),(2,6),(4,2),(4,6),(6,2),(6,4)\}$ $n(A \cap B) = 6$ ជាចំនួនករណីស្រប ដូចនេះ $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = 0.166$	គេបាន: $A = P(6,2) = 30$ ដូចនេះ $P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ ខ.តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍បោះបានលេខទាំង២ជាលេខគូ។ B ជាចម្លាស់ច្រំដែលជាលេខ $2, 4, 6$ នោះ $n(B) = 3^2 = 9$ ។ គេបាន: $P(B) = \frac{9}{36} = 0.25$ គ.ព្រឹត្តិការណ៍ដែលបោះបានលេខទាំង២ខុសគ្នានិងជាលេខគូជាព្រឹត្តិការណ៍ $A \cap B$ $A \cap B = \{(2,4),(2,6),(4,2),(4,6),(6,2),(6,4)\}$ $n(A \cap B) = 6$ ជាចំនួនករណីស្រប ដូចនេះ $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = 0.166$
-គ្រូដាក់ឧទាហរណ៍១អោយសិស្សពិភាក្សារកដំណោះស្រាយ។	**3.2. គណនាប្រូបាបដោយប្រើបន្សំ** -ឧទាហរណ៍១. គេរើសសិស្ស៨នាក់ដោយចៃដន្យក្នុងចំណោមសិស្សប្រុស៩នាក់និងសិស្សស្រី១១នាក់ទៅសម្ភាសន៍។ ក.តើគេអាចរៀបសិស្សបានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា? ខ.រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A:"តើគេអាចរៀបសិស្សបាន	-សិស្សរកត់ឧទាហរណ៍១និងពិភាក្សាគ្នារកចម្លើយ។

	ប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា?″ B:"ក្នុងក្រុមមានសិស្សស្រី៥នាក់និងសិស្សប្រុស៣នាក់″ ចម្លើយ ក.ចំនួនករណីអាចជាបន្សំ៨ធាតុយកពី២០ធាតុគឺ $C(20,8)=\frac{20!}{12!\cdot 8!}=125970$ ខ.គេរើសសិស្សដោយចៃដន្យដូចនេះធាតុនីមួយៗមានសមប្រូបាប +សិស្ស៨នាក់ដែលត្រូវជ្រើសរើសមានសុទ្ធតែស្រីគឺគេរើស៨នាក់ក្នុងចំណោម១១នាក់។ចំនួនករណីស្របជាបន្សំ $C(11,8)=165$ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\frac{165}{125970}=0.0013$ +គេរើសសិស្សស្រី៥នាក់និងសិស្សប្រុស៣នាក់ចេញពីសិស្សស្រី១១នាក់និងសិស្សប្រុស៩នាក់ ចំនួនរបៀបដែលរើសសិស្សស្រី៥នាក់គឺ $C(11,5)$ និងចំនួនរបៀបដែលរើសសិស្សប្រុស៣នាក់គឺ $C(9,3)$ ។ ដូចនេះចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $C(11,5)\times C(9,3)$ ។គេបាន $P(B)=\frac{C(11,5)\times C(9,3)}{C(20,8)}$ $=0.308$	-សិស្សឡើងគណនាលើក្តារខៀន ក.ចំនួនករណីអាចជាបន្សំ៨ធាតុយកពី២០ធាតុគឺ $C(20,8)=\frac{20!}{12!\cdot 8!}=125970$ ខ.គេរើសសិស្សដោយចៃដន្យដូចនេះធាតុនីមួយៗមានសមប្រូបាប +សិស្ស៨នាក់ដែលត្រូវជ្រើសរើសមានសុទ្ធតែស្រីគឺគេរើស៨នាក់ក្នុងចំណោម១១នាក់។ចំនួនករណីស្របជាបន្សំ $C(11,8)=165$ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\frac{165}{125970}=0.0013$ +គេរើសសិស្សស្រី៥នាក់និងសិស្សប្រុស៣នាក់ចេញពីសិស្សស្រី១១នាក់និងសិស្សប្រុស៩នាក់ ចំនួនរបៀបដែលរើសសិស្សស្រី៥នាក់គឺ $C(11,5)$ និងចំនួនរបៀបដែលរើសសិស្សប្រុស៣នាក់គឺ $C(9,3)$ ។ ដូចនេះចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $C(11,5)\times C(9,3)$ ។គេបាន

		$P(B)=\frac{C(11,5)\times C(9,3)}{C(20,8)}$ $=0.308$
ជំហានទី៤ (ពង្រឹងចំណេះដឹង)		
-គេបង្កើតលេខសម្ងាត់របស់សោដោយចំនួនដែលមានលេខ៤ខ្ទង់ខុសពីលេខសូន្យ ក.តើគេប្រើចម្លាស់ឬបន្សំដើម្បីកំណត់លេខសម្ងាត់ទាំងនេះ? ខ.គណនាចំនួនលេខសម្ងាត់ដែលអាចបង្កើតបានទាំងអស់		-ក. គេប្រើចម្លាស់ច្រាំដែលនៃ៤ធាតុយកពី៩ធាតុ។ ខ. ចំនួនលេខសម្ងាត់ទាំងអស់គឺ $9^4=6561$
ជំហានទី៥ (បណ្តាំផ្ញើ)		
-អោយសិស្សមើលមេរៀនឡើងវិញនិងធ្វើលំហាត់នៅទំព័រ២១៨	កិច្ចការផ្ទះ	-សិស្សស្តាប់ការណែនាំរបស់គ្រូ

កិច្ចតែងការបង្រៀន
ជំពូកទី៦
មេរៀនទី១

I. **វត្ថុបំណង៖**

- ចំណេះដឹង: ចេះនិយមនយ័ប្រូបាបមានលក្ខណ្ឌ័និងរូបមន្តប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ័
- ចំណេះធ្វើ: ចេះដោះស្រាយលំហាត់ប្រូបាបមានលក្ខណ្ឌ័បានត្រឹមត្រូវ
- ឥរិយាបទ: ចេះយករូបមន្តប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ័ទៅអនុវត្តបានត្រឹមត្រូវ

II. **ខ្លឹមសារមេរៀន៖**

១.ប្រូបាបមានលក្ខណ្ឌ័

III. **សម្ភារៈឧបទេសៈ** ស.សទំព័១១៨-១២២ និងបន្ទាត់

IV. **វិធីសាស្ត្របង្រៀន៖** សិស្សមជ្ឈមណ្ឌល

V. **ដំណើកនាំមេរៀន៖**

សកម្មភាពគ្រូ	ខ្លឹមសារមេរៀន	សកម្មភាពសិស្ស
– ត្រួតពិនិត្យអវត្តមានអនាមយ័ និងសណ្តាបធ្នាប់	**១. លំនឹងថ្នាក់**	– តំណាងសិស្សរាយការណ៍ ពីចំនួនអវត្តមាន
– សួរសិស្ស រូបមន្ត៖ $P(A)=?$ $C(p,n)=?$ $A(m,n)=?$	**២. រំលឹក** $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ $C(p,n)=\dfrac{n!}{(m-p)!p!}$ $A(m,n)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$	សិស្សឆ្លើយ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ $A(m,n)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ $C(p,n)=\dfrac{n!}{(m-p)!p!}$
– កត់ចំណងជើងមេរៀន រួចដាក់ឧទាហរណ៍	**៣.មេរៀនប្រចាំថ្ងៃ៖** «**ប្រូបាបមានលក្ខណ្ឌ័**» **១.ប្រូបាបមានលក្ខណ៍៖** ឧទាហរណ៍៖ ក្នុងចំណោមសិស្ស២០០នាក់ ដែល រៀនចប់វិទ្យាល័យមួយមានស្រី ៩០ នាក់ និងប្រុស ១១០នាក់ ក្នុងនោះមានស្រី ២៧នាក់ប៉ុណ្ណោះ បន្តការសិក្សា។ ឯសិស្សប្រុសមានតែ ៦៦នាក់ ដែលបន្តការសិក្សា។ គេចង់រើសសិស្សម្នាក់។ រកប្រូបាប	– សិស្សកត់

ក. ជួបសិស្សស្រី

គ. ជួបសិស្សស្រីដែលបន្តការសិក្សា

ឃ.ជួបសិស្សប្រុសដែលបន្តការ
សិក្សា

ង. ជួបសិស្សបន្តការសិស្សា

ច. ជួបសិស្សបន្តការសិស្សាដោយដឹង
មុនថាជាសិស្សស្រី

ឆ. ជួបសិស្សបន្តការសិស្សាដោយដឹង
មុនថាជាសិស្សបន្តការសិក្សា

តារាងទិន្នន័យ

ភេទ / ការសិក្សា	ស្រី	ប្រុស	សរុប
បន្តការសិក្សា	២៧	៦៦	៩៣
មិនសិក្សា	៦៣	៤៤	១០៧
សរុប	៩០	១១០	២០០

– អោយសិស្សតាងលំហសំណាកនិងព្រឹត្តិការណ៍ផ្សេងៗ

– អោយសិស្សគណនាប្រូបាបពី ក ទៅ ង

តាង s លំហាសំណាក $n(s)=200$

តាងព្រឹតិការណ៍៖

G ជួបសិស្សស្រី $\Rightarrow P(G)=90$

B ជួបសិស្សប្រុស $\Rightarrow n(B)=110$

C ជួបសិស្សបន្តការសិក្សា $\Rightarrow n(C)=93$

$\overline{C}$ ជួបសិស្សមិនសិក្សា $\Rightarrow n(\overline{C})=107$

ក. ប្រូបាបព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សស្រី

$$P(B)=\frac{n(G)}{n(s)}=\frac{90}{200}=0.45$$

ខ. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សប្រុស

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(s)}=\frac{110}{200}=0.55$$

គ. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សស្រីដែលបន្តការសិក្សា

$$P(G\cap C)=\frac{n(G\cap C)}{n(s)}=\frac{27}{200}=0.135$$

ឃ. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សប្រុសដែលបន្តការសិក្សា

– សិស្សតាងលំហសំណាកដោយ s និងព្រឹត្តិការណ៍ផ្សេងៗ ដោយអក្សរធំ និងទាញរកចំនួនធាតុវា

– សិស្សគណនាប្រូបាប ពី ក ទៅ ង

	$P(B\cap C)=\frac{n(B\cap C)}{n(s)}=\frac{66}{200}=0.33$ ង. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ជួបសិស្សបន្តការសិក្សា $P(C)=\frac{n(C)}{n(s)}=\frac{93}{200}=0.465$	
– ចំពោះសំណួរ (ច) គ្រូណែនាំសិស្សគណនា រួចបំផុសសំណួរទាញនិយមន័យប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ និងណែនាំសិស្សអោយទាញជារូបមន្ត	ច. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍បន្តការសិក្សា ដោយដឹងមុនថាជាសិស្សស្រី: បានន័យថាសិស្សបន្តការសិក្សារើសចេញពីចំណោមសិស្សស្រី ប្រូបាបវាគឺ $\frac{n(G\cap C)}{n(G)}=\frac{27}{90}=0.30$ <u>ចំពោះ</u> $\frac{n(G\cap C)}{n(G)}=\frac{\frac{n(G\cap C)}{n(s)}}{\frac{n(G)}{n(s)}}=\frac{P(G\cap C)}{P(G)}$ $=\frac{0.135}{0.45}=0.3$ ប្រូបាបនេះហៅថាប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍Gដោយដឹងព្រឹត្តិការណ៍G	– សិស្សសង្កេត រួចទាញរូបមន្ត $P(C/G)=\frac{P(C\cap G)}{P(G)}$
– អោយសិស្សប្រើរូបមន្តនេះក្នុងកការគណនាសំណួរ (ឆ) - ណែនាំសិស្សអោយទាញរូបមន្តប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ A ដោយដឹង B - ដូចគ្នាដែរ តើ $P(B/A)=?$	គេសរសេរ $P(C/G)$ ឬ $P_G(C)=\frac{n(G\cap C)}{n(G)}$ ឆ. ប្រូបាបជួបសិស្សស្រីដោយដឹងមុនថាបន្តការសិក្សា $P(G/C)=\frac{p(G\cap C)}{P(C)}=\frac{0.135}{o.465}=0.29$ **<u>និយមន័យ</u>** - ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌនៃព្រឹត្តិការណ៍ A ដោយដឹង B គឺ $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ - ដូចគ្នាដែរ $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ - យើងបាន	ឆ. ប្រូបាបជួបសិស្សស្រីដោយដឹងមុនថាបន្តការសិក្សា $P(G/C)=\frac{P(G\cap C)}{P(C)}$ $=\frac{0.135}{0.465}$ $=0.29$ $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ $P(A\cap B)$ $=P(A).P(B/A)$ $=P(B).P(A/B)$
– ដាក់លំហាត់ប្រតិបត្តិអោយសិស្សធ្វើ។	$P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)=P(B)\times P(A/B)$	

	<u>ប្រតិបត្តិ</u> សិប្បកម្មមួយមានម៉ាសស៊ីន២ផលិតវត្ថុដូចគ្នា។ គេដឹងថាម៉ាស៊ីនទី១ផលិតបាន៤៥%ក្នុងនោះខូច៣% និងម៉ាស៊ីនទី២ផលិតបាន៥៥% ដែលក្នុងនោះខូច២%។ ក. តើប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូច ដោយដឹងថាផលិតដោយម៉ាស៊ីនទី១ស្មើប៉ុន្មាន? ខ. រកប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូចក្នុងម៉ាស៊ីនទី១ គ. រកប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូចក្នុងម៉ាស៊ីនទី២ ឃ. បើម៉ាស៊ីនទាំងពីរផលិតបានវត្ថុ១០០០ តើម៉ាស៊ីនទី១ធ្វើអោយខូចអស់ប៉ុន្មាន? ម៉ាស៊ីនទី២ធ្វើអោយខូចអស់ប៉ុន្មាន?	- តាងា A ព្រឹត្តិការណ៍ជួបវត្ថុផលិតដោយម៉ាស៊ីនទី១ - A' ព្រឹត្តិការណ៍ជួបវត្ថុផលិតដោយម៉ាស៊ីនទី២ - B វត្ថុខូច ក. $P(B/A)$ $=3\%=0.03$ ខ. $P(B/A)$ $=P(A)\times P(B/A)$ $=0.45\times 0.03$ $=0.0135$
- សួររូបមន្ត $P(A/B)=?$ $P(B/A)=?$ $P(A\cap B)=?$	**ជំហានទី៤ ពង្រឹងពុទ្ធិ**	$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ $P(B/A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}$ $P(A\cap B)$ $=P(A)\times P(B/A)$ $=P(A)\times P(A/B)$
- អោយសិស្សកត់លេកលំហាត់ និងទំព័រ ដើម្បីធ្វើនៅផ្ទះ	**ជំហានទី៥ បណ្តាំផ្ញើ** លំហាត់ ទី២ ទំព័រទី១៣១	- សិស្សយកលំហាត់

កិច្ចតែងការបង្រៀន
ជំពូកទី៦
មេរៀនទី១

I. **វត្ថុបំណង៖** អោយសិស្ស

- អោយនិយមន័យព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា និងមិនទាក់ទងគ្នា ចេះរូបមន្តប្រូបាបសរុប និងប្រូបាបទ្រឹស្តីបទបៃយេសបានត្រឹមត្រូវ
- ចេះដោះស្រាយលំហាត់ដោយប្រើរូបមន្តប្រូបាបសរុប និងទ្រឹស្តីបទបៃយេស
- មានចំណូលចិត្តសិក្សាមេរៀនគណិតវិទ្យា

II. **ខ្លឹមសារមេរៀន៖**

២. ព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា និងមិនទាក់ទងគ្នា

៣. រូបមន្តប្រូបាបសរុប

III. **សម្ភារៈឧបទេស៖**

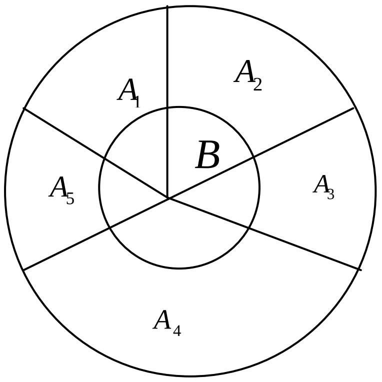
- ស.សទំព័រទី១២៣→១២៩ និងសៀវភៅគ្រូទំព័រ
- បន្ទាត់

V. **ដំណើរនាំមេរៀន៖**

សកម្មភាពគ្រូ	**ខ្លឹមសារមេរៀន**	**សកម្មភាពសិស្ស**
- គ្រូតពិនិត្យ អវត្តមាន អនាម័យ និងសណ្តាប់ធ្នាប់	ជំហានទី១ លំនឹងថ្នាក់	- ប្រធានថ្នាក់រាយការណ៍ពីចំនួនអវត្តមាន
- សួររូបមន្តប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ	ជំហានទី២ រំលឹក $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)$ $=P(B)\times P(A/B)$	- សិស្សឆ្លើយ
- គ្រូណែនាំប្រាប់សិស្សពីព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នានិងមិនទាក់ទងគ្នា	ជំហានទី៣ មេរៀនថ្មី <u>មេរៀនទី១</u> « <u>**ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ**</u>» ខ. <u>ព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា និងមិនទាក់ទងគ្នា</u> **ជាទូទៅ** – A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នាកាលណា $P(A/B)=P(A)\times P(B)$	- សិស្សសង្កេត និងកត់ត្រា

	ឬ $P(A/B)=P(A)$ ឬ $P(B/A)=P(B)$ - ទាក់ទងគ្នាកាលណា $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$	
- ដាក់ឧទាហរណ៍អោយសិស្សពិនិត្យដោយយកចិត្តទុកដាក់ រួចណែនាំសិស្សទាញរកចម្លើយ – តើចំនួនករណីអាចមានប៉ុន្មាន?	ឧទាហរណ៍: ថងមួយមានប៊ូលស៣ មានលេខខុសគ្នា និងប៊ូលខ្មៅពីរមានលេខខុសគ្នា។ គេចាប់យកប៊ូលម្តងមួយៗចំនួនពីរដងដោយចៃដន្យចេញពីរថងដោយដាក់វិញ។ តាងព្រឹត្តិការណ៍ A «ចាប់លើទី១បានប៊ូលស» B «ចាប់លើកទី២បានប៊ូលខ្មៅ» ក. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A;B$ និង $A\cap B$ ខ. តើព្រឹត្តិការណ៍ A និង B អាស្រ័យគ្នាឬទេ? គ. គណនា $P(B/A)$ និង $P(A/B)$	- សិស្សអានប្រធានលំហាត់និងសង្ខេប - ករណីអាច $n(s)=5^2$ - ចាប់បានប៊ូលសលើទី១មាន៣របៀប
– ក្នុងការចាប់ប៊ូលលើកទី១បាន សមានប៉ុន្មានរបៀប? ដោយចាប់ហើយដាក់វិញនោះលើកទី២អាចចាប់បានប៉ុន្មានរបៀប? តើ $n(A)=?$ - ដូចគ្នាដែរតើ $n(B)=?$ $n(A\cap B)=?$ - ដោយសិស្សរកប្រូបាបចំនុច(ក) - អោយសិស្សគណនា $P(A)\times P(B)$ រួចប្រៀបធៀប $P(A\cap B)$	<u>ចម្លើយ</u> ដោយវិញ្ញាសារចាប់ហើយដាក់វិញនោះករណីអាចជាចម្លាស់ច្រំដែលនៃ២ធាតុយកចេញពី៥ធាតុ $n(s)=5^2=25$ $n(A)=3\times5=15$ $n(B)=5\times2=10$ $n(A\cap B)=3\times2=6$ ក. $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(s)}=\dfrac{15}{25}=\dfrac{3}{5}$ $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(s)}=\dfrac{10}{25}=\dfrac{2}{5}$ $P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(s)}=\dfrac{6}{25}$ ខ. តើ A និង B អាស្រ័យគ្នាឬទេ $P(A)\times P(B)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}=P(A\cap B)$ $\Rightarrow A$ និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនអាស្រ័យគ្នាទេ	- ដោយចាប់ហើយដាក់វិញនោះលើកទី២មាន៥របៀប។ $\Rightarrow n(A)=3\times5$ (តាមគោលការណ៍ផលគុណ) - $n(B)=5\times2$ - $n(A\cap B)=3\times2$ – $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(s)}=\dfrac{15}{25}$ $=\dfrac{3}{5}$ - $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(s)}=\dfrac{10}{25}$ $=\dfrac{2}{5}$ $-P(A\cap B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(s)}$ $=\dfrac{6}{25}$ - $P(A)\times P(B)$ $=P(A\cap B)$ $\Rightarrow A$ និង B

<table>
<tr>
<td>
- អោយសិស្សពិនិត្យមើលលក្ខខណ្ឌទី២ និងទី៣នៃព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា

– ពន្យល់ណែនាំសិស្សរហូតទាញបានរូបមន្តប្រូបាបសរុប និងទ្រឹស្តីបទបៃយេស
</td>
<td>
គ. ដោយ A និង B មិនទាក់ទងគ្នានោះ
$P(A/B)=P(A)=\frac{3}{5}$
$P(B/A)=P(B)=\frac{2}{5}$
៣. រូបមន្តប្រូបាបសរុប


– បើ $A_1;A_2;......;A_n$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសម្រុងគ្នាពីរពីក្នុងលំហសំណាកមួយ ហើយ B កើតឡើងក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ $A_1;A_2;......;A_n$ នោះ
$\mathbf{B}=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup.....\cup(B\cap A_n)$
$\Rightarrow P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+..........$
$.....+P(B\cap A_n)$
$=P(A_1)\times P(B/A_1)+P(A_2)\times P(B\cap A_2)+..$
$....+p(A_n)\times P(B/A_n)$
$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\times P(B/A_i)$
(ប្រូបាបសរុប)

$P(A_k/B)=\frac{P(A_k\cap B)}{P(B)}$
$=\frac{P(B/A_k)\times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\times P(B/A_i)}$
(ទ្រឹស្តីបទបៃយេស)

ប្រូបាបសរុប
$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\times P(B/A_i)$
</td>
<td>
ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ឬមិនអាស្រ័យគ្នា
- $P(A/B)=p(A)$
– $P(B/A)=P(B)$

- សិស្សសង្កេត និងទាញរូបមន្ត
</td>
</tr>
</table>

- ដាក់ឧទាហរណ៍រួចអោយសិស្សតាងព្រឹត្តិការណ៍និងសង្ខេបបំរាប់ - តើចំនុច ក សួររកអ្វី? – ណែនាំសិស្សអោយគណនាដោយប្រើរូបមន្តប្រូបាបសរុបដោយចាត់ទុក $A;B;C$ ដូចជា $A_1;A_2;A_3$ តើយើងទាញបានដូចម្តេច?	**ទ្រឹស្តីបទបៃយេស** $P(A_k/B)=\dfrac{P(B/A_k)\times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\times P(B/A_i)}$ ឧទាហរណ៍: គេមានម៉ាស៊ីន $A;B$ និង C ផលិតវត្ថុដូចគ្នា។ ម៉ាស៊ីន A ផលិតបាន ៥០% B បាន៣០% និង C បាន២០%។ គេដឹងថាវត្ថុដែលផលិតដោយម៉ាស៊ីន A មានខូច៣% ម៉ាស៊ីន B ខូច៣% និងម៉ាស៊ីន C ខូច៤%។ ក. រកប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូច ខ. ក្នុងចំណោមវត្ថុខូច១០០០ តើរបស់ម៉ាស៊ីន $A;B;C$ ប៉ុន្មាន?	– តាងព្រឹត្តិការណ៍ A ម៉ាស៊ីន A ផលិតវត្ថុ B ម៉ាស៊ីន B ផលិតវត្ថុ C ម៉ាស៊ីន C ផលិតវត្ថុ D វត្ថុខូច បំរាប់មាន $P(A)=0.5$ $P(B)=0.3$ $P(C)=0.2)$ $P(D/A)=0.03$ $P(D/B)=0.04$ $P(D/C)=0.04$ ក. រក $P(D)$ $P(D)$ $=P(D\cap A)+P(D\cap B)$ $+P(D\cap C)$ $=P(A)\times P(D/A)$ $+P(B)\times P(D/B)$ $+P(C)\times P(D/C)$ $=0.5\times 0.03+0.3$ $\times 0.04+0.2\times 0.04$ $=0.035$ ខ.-ប្រូបាបម៉ាស៊ីន A ផលិតវត្ថុខូចគឺ $P(A/D)$ $=\dfrac{P(D/A)\times P(A)}{P(D)}$ $=0.428$ $\Rightarrow$ វត្ថុខូចផលិតដោយម៉ាស៊ីន A គឺ $1000\times 0.428=428$ – ដូចគ្នាដែរចំពោះ B

		$P(B/D)$ $=\frac{P(D/B)\times P(B)}{P(D)}$ $=\frac{0.04\times 0.3}{0.035}$ $=0.343$ $\Rightarrow$វត្ថុផលិតខូចដោយម៉ាស៊ីន B គឺ $1000\times 0.343=343$ - $P(C/D)$ $=\frac{P(D/C)\times P(C)}{P(D)}$ $=\frac{0.04\times 0.2}{0.035}$ $=0.229$ $\Rightarrow$វត្ថុខូចរបស់ម៉ាស៊ីន C គឺ $1000\times 0.229=229$
- សួររូមន្តប្រូបាបសរុប និងទ្រឹស្តីបទបៃយេស	- ជំហានទី៥ ពង្រឹងពុទ្ធិ	− $P(B)$ $=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\times P(B/A_i)$ − $P(A_k/B)$ $=\frac{P(B/A_k)\times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\times P(B/A_i)}$
– អោយសិស្សត្រលប់ទៅផ្ទះធ្វើប្រតិបត្តិទំព័រ ១២៩	ជំហានទី៥ បណ្តាំធ្វើប្រតិបត្តិទំព័រ ១២៩	– សិស្សកត់ប្រតិបត្តិ