វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

ទ្រឹស្តីបរមាកម្ម

រៀបរៀងដោយ គរុនិស្សិតបរិញ្ញាបត្រ+១
ឯកទេស គណិតវិទ្យា ក្រុម២ ជំនាន់ទី២២

២០១៧

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

ប្រធានបទស្រាវជ្រាវ

ទ្រឹស្តីបរមាកម្ម

សាស្ត្រាចារ្យណែនាំៈ ហួត សុខលឿន

ស្រាវជ្រាវដោយ គរុនិស្សិតបរិញ្ញាបត្រ+១

ឯកទេសគណិតតវិទ្យា ក្រុម២ ជំនាន់ទី២២

១. គង់ គឹមសេង **៤. ធុន លឿយ**

២. ថេង សុវណ្ណារាជ **៥. ក. យន់ ធីតា**

៣. នេន វិចិត្រ **៦. អុល អាង**

២០១៦ - ២០១៧

អារម្ភកថា

សៀវភៅទ្រឹស្តីបរមាកម្មមួយក្បាលនេះ ត្រូវបានរៀបចំចងក្រងឡើងក្នុងគោលបំណងបំពេញតម្រូវការ និងជាឯកសារជំនួយដល់ការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិតដែលចូលចិត្តមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា ព្រោះសៀវភៅប្រភេទនេះ ពុំសូវមានឯកសារជាភាសាខ្មែរច្រើនដូចសៀវភៅប្រភេទផ្សេងៗទៀតទេ ។ សៀវភៅនេះវាមានសារប្រយោជន៍ខ្លាំងចំពោះអ្នកសិក្សា ពិសេសនិស្សិតដែលកំពុងសិក្សានៅសាកលវិទ្យាល័យ គរុនិស្សិត និងអ្នកធ្វើការងារផងដែរ ។

នៅក្នុងសៀវភៅនេះយើងខ្ញុំបានដកស្រង់យកខ្លឹមសារមេរៀនសំខាន់ៗ អំពីវិធីដោះស្រាយចំណោទបែបបរមាកម្ម។ វាមានបីផ្នែកសំខាន់ៗគឺ ផ្នែកខ្លឹមសារមេរៀនសង្ខេប ផ្នែកលំហាត់គំរូ និងមានលំហាត់ ចំណោទបន្ថែមទៀតសម្រាប់ឲ្យមិត្តអ្នកអានរៀនអនុវត្តដោះស្រាយដោយខ្លួនឯង ។

ការរៀបរៀងសៀវភៅមួយក្បាលនេះ ធ្វើឡើងដោយការពិភាក្សារបស់យើងខ្ញុំជាគរុ-និស្សិត មានទឹកដៃនៅក្មេងខ្ចី និងមានបទពិសោធតិចតួច ព្រមទាំងប្រើពេលវេលាដ៏ខ្លី យើងខ្ញុំជឿជាក់ថា សំណេរនេះពិតជាមានចំនុចខ្វះខាតត្រង់កន្លែងចំណុចណាមួយជាមិនខាន។ ដូចនេះយើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀង សូមមេត្តាអភ័យទោសពីមិត្តអ្នកអាន ព្រមទាំងលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ផងដែរ ហើយរីករាយទទួលនូវការរិះគន់ ស្ថាបនា ក្នុងគោលបំណងកែលំអសៀវភៅនេះឲ្យបានប្រសើរឡើង ។

ជាទីបញ្ចប់ សូមជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពល្អ និងទទួលបានជោគជ័យក្នុងការសិក្សា ការងារ គ្រប់ពេលវេលា។

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី៣០ ខែមិថុនា ឆ្នាំ២០១៧

គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ក្រុម២ ជំនាន់ទី២២

សេចក្ដីថ្លែងអំណរគុណ

ខ្ញុំបាទ នាងខ្ញុំជាគរុនិស្សិតជំនាន់ទី ២២ ឯកទេសគណិតវិទ្យា ក្រុម២ នៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ជាដំបូងសូមគោរពថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះ លោកអ្នកមានគុណទាំងពីរ គឺលោកឪពុក និងអ្នកម្ដាយ ដែលបានផ្ដល់កំណើតចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សាយើងខ្ញុំ ផ្ដល់ក្ដីស្រឡាញ់ មានព្រហ្មវិហារធម៌ចំពោះកូន ផ្ដល់ការសិក្សា អប់រំ ទាំងកម្លាំងកាយ កម្លាំងចិត្ត និងសម្ភារ រហូតដល់កូនមានចំណេះវិជ្ជាដូចសព្វថ្ងៃ ។

សូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះលោកគ្រូ អ្នកគ្រូទាំងអស់ដែលបានបង្រៀនយើងខ្ញុំ តាំងពីថ្នាក់បឋមសិក្សា រហូតដល់ថ្នាក់ឧត្ដមសិក្សា ដែលបានបង្ហាត់បង្រៀននូវចំណេះ ជំនាញ និងអប់រំសីលធម៌ដ៏ប្រពៃ ក្នុងគោលបំណងផ្ដល់ចំណេះដឹង អប់រំសិស្សឲ្យក្លាយជាពលរដ្ឋល្អក្នុងសង្គម ។

សូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូទាំងអស់នៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ដែលខិតខំប្រឹងប្រែងបង្រៀន បណ្ដុះបណ្ដាលនូវជំនាញបន្ថែមដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពដល់យើងខ្ញុំ ។ ពិសេស សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅដល់លោកសាស្ត្រាចារ្យ ហួត សុខលឿន ដែលបានផ្ដល់គំនិត ផ្ដល់ឯកសារ ដឹកនាំលើប្រធានបទស្រាវជ្រាវរបស់ក្រុមយើងខ្ញុំ ។

សូមថ្លែងអំណរគុណផងដែរចំពោះមិត្តរួមថ្នាក់ដែលបានផ្ដល់ជា កម្លាំងចិត្ត និងផ្ដល់នូវគំនិតល្អៗ ។

យើងខ្ញុំមានសេចក្ដីសោមនស្សរីករាយដែលបានសិក្សា និងទទួលបានការបណ្ដុះបណ្ដាលនៅវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ដើម្បីក្លាយខ្លួនជាគ្រូបង្រៀនដ៏ល្អ មានចំណេះដឹង ជំនាញច្បាស់លាស់ប្រកបដោយវិជ្ជាជីវៈខ្ពស់ សម្រាប់ផលិតនូវធនធានមនុស្សនាពេលអនាគត ។

សេចក្ដីបញ្ចប់ សូមប្រសិទ្ធពរជូនឯកឧត្ដមនាយក សាស្ត្រាចារ្យ និងមិត្តរួមថ្នាក់ឲ្យជួបតែពុទ្ធពរទាំងបួនប្រការ គឺ អាយុ វណ្ណៈ សុខៈ ពលៈ កុំបីឃ្លៀងឃ្លាតឡើយ ៕

មាតិកា

ចំណងជើង **ទំព័រ**

អារម្ភកថា....(i)

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ....(ii)

សេចក្តីផ្តើម 1

ទ្រឹស្តីបរមាកម្ម 2

I. គម្រូគណិតវិទ្យាស្តីអំពីការបង្កើតកម្មវិធីសម្រាប់ចំណោទចំរុះ 2

1. ការបង្កើតទម្រង់នៃបញ្ហាកម្មលីនេអ៊ែរ 2
2. ការបង្កើតកម្មវិធីគម្រូគណិតវិទ្យាសម្រាប់ចំណោទនៃគម្រោងការងារ ចំណោទចម្រុះ និងចំណោទនៃដំណើរការផលិតកម្ម 3

II. វិធីដោះស្រាយចំណោទ 6

1. ដំណោះស្រាយចំណោទ LP តាមក្រាហ្វិច 6
2. វិធី simplex 10
   a) ទម្រង់កាណូនិចនៃ LP 10
   b) វិធីដោះស្រាយ 12
   c) ករណីពិសេសទាំងបួន 17

III. Lagrange Miltipliers 28

1. ករណីអនុគមន៍គោលបំណងមានពីរអថេរ និងមានអនុគមន៍កម្រិតព្រំដែនមួយ 28
2. ករណីអនុគមន៍គោលបំណងមានបីអថេរ និងមានអនុគមន៍កម្រិតព្រំដែនមួយ 32
3. ករណីអនុគមន៍កម្រិតព្រំដែនមានច្រើនជាសមីការ 34
4. ករណីអនុគមន៍កម្រិតព្រំដែនជាសមីការ និងវិសមីការ 36

ផ្នែកលំហាត់ 41

ផ្នែកចម្លើយ 49
លំហាត់អនុវត្តន៍ 101
ឯកសារយោង 114

សេចក្តីផ្តើម

ការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិការ ជាវិធីសាស្ត្រក្នុងការធ្វើការសម្រេចចិត្តយ៉ាងណាឱ្យការរៀបចំ និងប្រតិបត្តិលើប្រព័ន្ធឱ្យបានប្រសើរបំផុត ជាធម្មតាក្រោមលក្ខខណ្ឌតម្រូវការចែកចាយធនធានកម្រ។

ការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិការត្រូវបានបង្កើតឡើងដោយ រូបវិទូជនជាតិអង់គ្លេសល្បីម្នាក់ឈ្មោះ PM Blackett នៅឆ្នាំ ១៩៤០ ដែលមានការចូលរួមពីរូបវិទូផ្នែកគណិតវិទ្យាពីររូប អ្នករូបនិយមផ្នែកហោរាសាស្ត្រមួយរូប មន្ត្រីយោធាមួយរូប អ្នកសេរីរៈវិទ្យានិយមពីររូប និងរដ្ឋករមួយរូប។ ក្រុមមួយនេះបង្កើតឡើងដើម្បីធ្វើការវិភាគលើបញ្ហាយោធាជាច្រើនដែលបានកើតមានក្នុងអំឡុងសង្គ្រាមលោកលើកទី២ដូចជា ការដាក់ពង្រាយរ៉ាដា ការគ្រប់គ្រងក្បួនការពារ ការទម្លាក់គ្រាប់បែក ការប្រឆាំងនាវាមុចទឹក និងប្រតិបត្តិការជីករ៉ែ ។ល។ អ្នកវិទ្យាសាស្ត្រទាំងអស់នេះព្យាយាមកំណត់នូវរបៀបសាងសង់ និងកន្លែងដែលគេត្រូវបោះទីតាំងទាំងនោះឲ្យបានប្រសើរបំផុត។

ក្រោយទទួលបានបទពិសោធន៍ជាច្រើនពីវិស័យយោធា "ការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិការ" ត្រូវបានគេលើកយកមកប្រើប្រាស់ក្នុងវិស័យឧស្សាហកម្ម និងពាណិជ្ជកម្មផងដែរ។ អ្នកគ្រប់គ្រងបានប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រមួយចំនួននៅក្នុង " ការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិ" ដើម្បីធ្វើយ៉ាងណាឱ្យការគ្រប់គ្រងរបស់ពួកគេប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព ដែលឈានទៅរកការទទួល បាននូវភាពប្រសើរបំផុតនៃប្រាក់ចំណេញ ឬថ្លៃដើមក្នុងផលិតកម្ម ឬសេវាកម្មរបស់ពួកគេ។

ទ្រឹស្តីបរមាកម្ម

I. គម្រូគណិតវិទ្យាស្តីអំពីការបង្កើតកម្មវិធីសម្រាប់ចំណោទចំរុះ

កម្មវិធីលីនេអ៊ែរ គឺជាកម្មវិធីមួយដែលគេនិយមប្រើច្រើនជាងគេ នៅក្នុងការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិការតាមប៉ាន់ស្មានប្រមាណ ២៥% នៃការគណនាផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រដោយកុំព្យូទ័រទាំងអស់ (ដោយមិនគិតពីដំណើរការទិន្នន័យ) គឺគេកំពុងដោះស្រាយ ឬអនុវត្តកម្មវិធីលីនេអ៊ែរ។ វាត្រូវបានគេប្រើប្រាស់យ៉ាងទូលំទូលាយលើបញ្ហាផ្សេងៗតាំងពីការធ្វើឲ្យដល់កម្រិតខ្ពស់បំផុត (ដូចជាចំណូលអាជីវកម្មមួយ) និងធ្វើឲ្យកម្រិតទាបបំផុត (ដូចជាការចំណាយទៅលើរបបអាហាររបស់អ្នកជំងឺម្នាក់ក្នុងមន្ទីរពេទ្យ)។ ក្នុងចំណោទនៃការបង្កើតកម្មវិធីលីនេអ៊ែរ បរិមា-ណាមួយត្រូវបានគេធ្វើឲ្យធំបំផុត ឬតូចបំផុត ទៅតាមកម្រិតផ្សេងៗដែលបានកំណត់ជាក់លា-ក់។

មានគោលបំណងពីរនៅក្នុងមេរៀននេះ ៖ ទី១ គឺការយល់អំពីវិធីរក និងការប្រើប្រាស់របស់វា ទី២ គឺការបង្កើតពិសោធន៍អនុវត្តខ្លះៗក្នុងការបង្កើតរូបមន្តនៃចំណោទបញ្ហា និងការវិភាគលទ្ធផល។

1. ការបង្កើតទម្រង់នៃបញ្ហាកម្មវិធីលីនេអ៊ែរ (Formation of LP Problems)

a) គម្រូកម្មវិធីលីនេអ៊ែរ (the LP Models)

ក. អថេរសម្រេចចិត្ត (Decision Variables) *ជាបរិមាណផលិតផលដែលត្រូវសម្រេចចិត្ត ផលិតក្នុងបញ្ហាផលិតផលចម្រុះ ឬជាបរិមាណវត្ថុធាតុដើមដែលត្រូវសម្រេចចិត្តទិញក្នុងបញ្ហាល្បាយដើម្បីទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុត* (Optimal Solution) *គឺចំណេញអតិបរមា ឬចំណាយថ្លៃដើមអប្បបរមា។ ដើម្បីធ្វើបែបនេះបាន យើងត្រូវតាងអថេរដោយអក្សរ មានន័យថា តាងឲ្យបរិមាណទាំងឡាយដែលយើងត្រូវរកតម្លៃរបស់វាក្នុងការដោះស្រាយចំណោទ។ ជាធម្មតាគេតាង* $x_1, x_2, ..., x_n$ *ជា* n *អថេរសម្រេចចិត្តនៃចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរ។*

ខ. អនុគមន៍គោលដៅ (Objective Function) *សំដៅទៅដល់កន្សោម ដែលប្រាប់ពីទំនាក់ទំនងរវាងទិន្នន័យ និងប្រាក់ចំណេញ ។ ចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរនីមួយៗមានអនុគម-ន៍គោលដៅតែមួយគត់ដែលគេអាចសរសេរជារាងលីនេអ៊ែរ* $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ *ដែល* $c_1, c_2, ..., c_n$ *ជាចំនួនពិតថេរ ហើយ* z *ត្រូវរកតម្លៃអតិបរមា ឬអប្បបរមារបស់វា។*

គ. **កម្រិតព្រំដែន** (Constraints) ជារាល់លក្ខខណ្ឌដែលបានកំណត់ ឬកម្រិតក្នុងចំណោទ ។ លក្ខខណ្ឌទាំងនេះអាចសរសេរជាទម្រង់សមីការ ឬវិសមីការលីនេអ៊ែរ។

b) ការបង្កើតរូបមន្តសម្រាប់បញ្ហា LP (The Formulation of the LP Problems)

ក្នុងការដោះស្រាយចំណោទនៃការបង្កើតកម្មវិធីលីនេអ៊ែរមួយ ជាដំបូងយើងត្រូវបង្កើតរូបមន្តជាទម្រង់នៃគណិតវិទ្យា។ ដើម្បីធ្វើបានដូចនេះយើងត្រូវកំណត់ឲ្យបានច្បាស់នូវ៖

១. អថេរសម្រេចចិត្ត (*Decision Variables*)
២. អនុគមន៍គោលដៅ (*Objective Function*)
៣. កម្រិតព្រំដែន (*Constriants*)

2. ការបង្កើតកម្មវិធីគម្រូគណិតវិទ្យាសម្រាប់ចំណោទនៃគម្រោងការខារ ចំណោទចម្រុះ និងចំណោទនៃដំណើរការផលិតកម្ម

__ឧទាហរណ៍១__៖ ក្រុមហ៊ុន Word Car Wing Ltd. របស់លោកហ្វួតផលិតរូបចម្លាក់ពីរប្រភេទគឺកូនរទេះគោ និងរូបអប្សរាសម្រាប់ទីផ្សារទេសចរណ៍។ រូបចម្លាក់កូនរទេះគោមួយលក់បានថ្លៃ $27 ប៉ុន្តែប្រើឈើអស់តម្លៃ $10 ហើយចំណាយផលិតវាអស់ចំនួន $14 ។ ចំណែករូបចម្លាក់អប្សរាវិញលក់បានថ្លៃ $21 ហើយប្រើឈើអស់តម្លៃ $9 ហើយចំណាយផលិតវាអស់ចំនួន $10 ។ ក្នុងការផលិតរូបចម្លាក់ទាំងពីរប្រភេទខាងលើនេះ ត្រូវការកម្មករជំនាញពីរប្រភេទគឺផ្នែកជាងឈើនិងផ្នែកបង្ហើយ។ កូនរទេះគោមួយត្រូវការរយៈពេល 1h សម្រាប់ផ្នែកជាងឈើ និង 2h សម្រាប់ផ្នែកបង្ហើយ ។ រីឯរូបអប្សរាវិញត្រូវការរយៈពេល 1h សម្រាប់ផ្នែកជាងឈើ និង 1h សម្រាប់ផ្នែកបង្ហើយ ។ ក្នុងមួយសប្តាហ៍ៗលោកហ្វួតមានឈើដែលចាំបាច់គ្រប់គ្រាន់ ប៉ុន្តែគាត់មានចំនួនម៉ោងសម្រាប់ផ្នែកបង្ហើយតែ 100h និងផ្នែកជាងឈើ 80h ប៉ុណ្ណោះ ដែលអាចប្រើបាន។តម្រូវការរូបអប្សរាមិនកំណត់ទេ ប៉ុន្តែរទេះគោវិញយ៉ាងច្រើនបំផុតគឺ 40 ប៉ុណ្ណោះដែលគេត្រូវទិញក្នុងមួយសប្តាហ៍ៗ។ លោកហ្វួតចង់បង្កើនប្រាក់ចំណេញរបស់គាត់ឱ្យដល់កម្រិតអតិបរមា។

ចូរបង្កើតរូបមន្តតាមបែបគណិតវិទ្យាសមស្របមួយ។

ដំណោះស្រាយ

បង្កើតតារាងសង្ខេប

បម្រាប់ប្រធាន ៖ រទេះគោមួយលក់បាន $27 ចំណាយថ្លៃឈើ $10 ចំណាយបង្កើត $14

ប្រាក់ចំណេញ = $27-($10+$14) = $3

រូបអប្សារាមួយលលក់បាន $21 ចំណាយថ្លៃឈើ $9 ចំណាយបង្កើត $10

ប្រាក់ចំណេញ = $21-($9+$10) = $2

ផលិតផល	ផ្នែកជាងឈើ (h/ឯកតា)	ផ្នែកបង្ហើយ (h/ឯកតា)	ប្រាក់ចំណេញ ($/ឯកតា)
កូនរទេះគោ	1	1	3
រូបអប្សារា	2	1	2
រយៈពេលបម្រុង(យ៉ាងច្រើន)	80	100	

- កំណត់អថេរសម្រេចចិត្ត

  តាង X_1 ជាចំនួនកូនរទេះគោ $(X_1 \geq O)$ និងតាង X_2 ជាចំនួនរូបអប្សារា $(X_2 \geq 0)$

- កំណត់អនុគមន៍គោលបំណង

  ជាប្រាក់ចំណេញសរុបដែលត្រូវរកតម្លៃអតិបរមាគឺ $Z = 3X_1 + 2X_2$

- កណត់កម្រិតព្រំដែន ឬល័ក្ខខ័ណ្ឌកំណត់

បញ្ហារបស់ក្រុមហ៊ុនមានល័ក្ខខ័ណ្ឌកំណត់ពីរគឺការប្រើប្រាស់ពេលវេលារបស់ជាងឈើនិងការបង្ហើយមិនលើសពី 80h និង100h ។

គេបានវិសមីការកម្រិតព្រំដែនគឺ $X_1 + X_2 \leq 80$

$$2X_1 + X_2 \leq 100$$

- សរសេរជាទម្រង់ស្តង់ដា

Maximize profit $Z = 3X_1 + 2X_2$

$$\text{Subject to} \begin{cases} X_1 + X_2 \leq 80 \\ 2X_1 + X_2 \leq 100 \\ X_1 \,,\, X_2 \geq O \end{cases}$$

<u>ឧទាហរណ៍២៖</u> ប្រៃសនីយ៍មួយកន្លែងត្រូវការចំនួនបុគ្គលិកធ្វើការពេញម៉ោងផ្សេងៗ នៅថ្ងៃខុសៗគ្នា។ ច្បាប់សហជីពចែងថា បុគ្គលិកធ្វើការពេញម៉ោងត្រូវ ធ្វើការថ្ងៃជាប់ៗគ្នាហើយបន្ទាប់មកត្រូវបានឈប់សម្រាកពីរថ្ងៃ។ ឧទាហរណ៍បុគ្គលិកដែលធ្វើការពីថ្ងៃចន្ទ ដល់ថ្ងៃសុក្រ ត្រូវឈប់សម្រាកនៅថ្ងៃសៅរ៍ និងថ្ងៃអាទិត្យ។ ចំនួនបុគ្គលិកធ្វើការពេញម៉ោងត្រូវធ្វើ

ការតាមថ្ងៃដែលបានកំណត់ដូចក្នុងតារាងខាងក្រោម។ ចូរបង្កើតរូបមន្ត LP មួយ ដើម្បីឱ្យប្រៃសនីយ៍ នេះប្រើប្រាស់បុគ្គលិកធ្វើការពេញម៉ោងដែលគេត្រូវជួលនេះតិចបំផុត។

តារាងកម្មករដែលត្រូវធ្វើការសម្រាប់ប្រៃសនីយ៍

		ចំនួនបុគ្គលិកធ្វើពេញម៉ោង
ថ្ងៃទី១	ចន្ទ	១៧
ថ្ងៃទី២	អង្គារ	១៣
ថ្ងៃទី៣	ពុធ	១៥
ថ្ងៃទី៤	ព្រហស្បតិ៍	១៩
ថ្ងៃទី៥	សុក្រ	១៤
ថ្ងៃទី៦	សៅរ៍	១៦
ថ្ងៃទី៧	អាទិត្យ	១១

ចម្លើយ៖ តាង X_i ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅក្នុងថ្ងៃ i ។

គេបាន X_1 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃចន្ទ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃចន្ទដល់ថ្ងៃសុក្រ)

X_2 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃអង្គារ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃអង្គារដល់ថ្ងៃសៅរ៍)

X_3 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃពុធ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃពុធដល់ថ្ងៃអាទិត្យ)

X_4 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃព្រហស្បតិ៍ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃព្រហស្បតិ៍ដល់ចន្ទ)

X_5 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃសុក្រ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃសុក្រដល់ថ្ងៃអង្គារ)

X_6 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃសៅរ៍ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃសៅរ៍ដល់ថ្ងៃពុធ)

X_7 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃអាទិត្យ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃអាទិត្យដល់ថ្ងៃព្រហស្បតិ៍)

ចំនួនបុគ្គលិកធ្វើការពេញម៉ោង = ចំនួនបុគ្គលិកចាប់ផ្តើមធ្វើការថ្ងៃចន្ទ + ចំនួនបុគ្គលិកចាប់ផ្តើមធ្វើការថ្ងៃអង្គារ + ... + ចំនួនបុគ្គលិកចាប់ផ្តើមធ្វើការថ្ងៃអាទិត្យ

គេបានអនុគមន៍គោលដៅគឺ $\min Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$

ប្រៃសនីយ៍ត្រូវប្រាកដថាយ៉ាងហោចណាស់មានមនុស្ស ១៧ នាក់ធ្វើការនៅថ្ងៃចន្ទ។ បុគ្គលិកទាំងអស់ត្រូវធ្វើនៅថ្ងៃ ចន្ទ លើកលែងតែ បុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើធ្វើការថ្ងៃអង្គារ និងថ្ងៃពុធ (ព្រោះពួកគេត្រូវឈប់សម្រាកនៅ ថ្ងៃអាទិត្យនិងថ្ងៃចន្ទ ថ្ងៃចន្ទនិងថ្ងៃអង្គារ រៀងគ្នា)។ នេះមានន័យថាចំនួនបុគ្គលិកដែលធ្វើការនៅថ្ងៃចន្ទគឺ $X_1 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$ ។ ដូចគ្នាដែរចំពោះថ្ងៃផ្សេងទៀត ។

រូបបន្ត *LP* នៃចំណោទនេះគឺ

$$\min Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$$

ចន្ទ	$X_1 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 17$
អង្គារ	$X_1 + X_2 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 13$
ពុធ	$X_1 + X_2 + X_3 + X_6 + X_7 \geq 15$
ព្រហស្បតិ៍	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_7 \geq 19$
សុក្រ	$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 14$
សៅរ៍	$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 16$
អាតិត្យ	$X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 11$

$$X_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3, ..., 7)$$

II. វិធីដោះស្រាយចំណោទ

1. ដំណោះស្រាយចំណោទលីនេអ៊ែរ (LP) តាមក្រាហ្វិច

❖ **ជំហានទី១ ៖** ក្នុងការដោះស្រាយចំណោទនៃការបង្កើតកម្មវិធីលីនេអ៊ែរមួយ ជាដំបូងយើងត្រូវបង្កើតរូបមន្តជាទម្រង់នៃគណិតវិទ្យា។ ដើម្បីធ្វើបានដូចនេះយើងត្រូវកំណត់ឲ្យបានច្បាស់នូវ៖

១. អថេរសម្រេចចិត្ត (*Decision Variables*)

២. អនុគមន៍គោលដៅ (*Objective Function*)

៣. កម្រិតព្រំដែន (*Constriants*)

- **ជំហានទី២ ៖** ពេលនេះយើងត្រូវគូសកម្រិតព្រំដែននៃចំណោទក្នុងក្រាហ្វិចមួយ។ ដើម្បីឲ្យបានជាចម្លើយដែលយើងចង់បាន ចម្លើយនោះត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះកម្រិតព្រំដែនទាំងអស់។
- **ជំហានទី៣ ៖** យើងត្រូវដៅចំណុចកាច់ជ្រុងទាំងអស់ជុំវិញតំបន់ចម្លើយ។
- **ជំហានទី៤ ៖** យកចំណុចកាច់ជ្រុងនៃតំបន់ចម្លើយជំនួសក្នុងអនុគមន៍គោលដៅ ។ បន្ទាប់មកសង្កេតមើលតម្លៃដែលប្រសើរបំផុត (អតិបរមា ឬអប្បបរមា)។

លំហាត់គំរូ

១). រក Maximize profit $Z = 3X_1 + 2X_2$

$$\text{Subject to } \begin{cases} X_1 + X_2 \le 80 & (1) \\ 2X_1 + X_2 \le 100 & (2) \\ X_1 \ , \ X_2 \ge O \end{cases}$$

សង់ក្រាបនៃសមីការនីមួយៗ៖

$(1): X_1 + X_2 \le 80$

$X_2 \le 80 - X_1$

$X_2 = 80 - X_1$

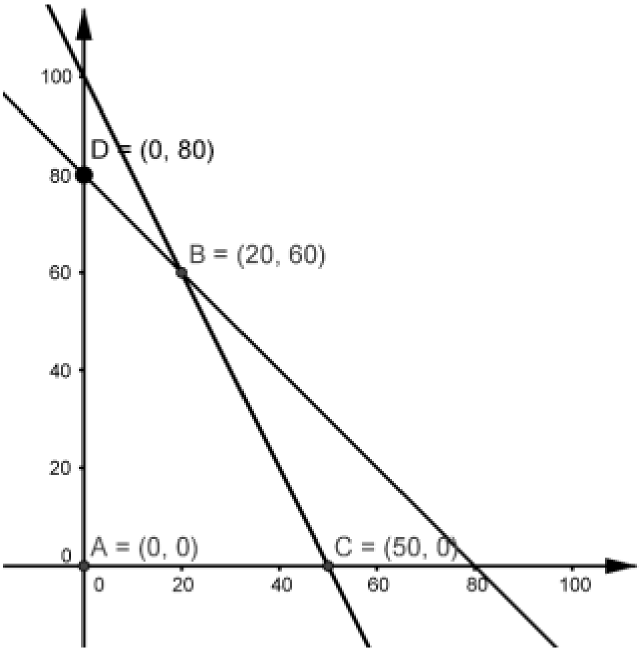
X_1	0	80
X_2	80	0

$(2): 2X_1 + X_2 \le 100$

$X_2 \le 100 - 2X_1$

$X_2 = 100 - 2X_1$

X_1	0	50
X_2	100	0



តំបន់ចម្លើយចំណុចកាច់ជ្រុងគឺ

$A(0,0)$, $\max Z = 3(0)+2(0)=0$

$B(20,60)$, $\max Z = 3(20)+2(60)=180$

$C(50,0)$, $\max Z = 3(50)+2(0)=150$

$D(0,80)$, $\max Z = 3(0)+2(80)=160$

ដូចនេះចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $X_1 = 20$, $X_2 = 60$, $Z = 180$ ។

២). ក្រុមហ៊ុន Toyota តម្លើងរថយន្តពីរប្រភេទគឺឡានតូច Cars និងឡានដឹកទំនិញ Van នៅទីក្រុងបាងកក។ រថយន្តនីមួយៗត្រូវឆ្លងកាត់ហាងបាញ់ថ្នាំនិងហាងតម្លើង។ ប្រសិនបើហាងបាញ់ថ្នាំត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានតូចគេបាញ់ថ្នាំបានចំនួន 800 ក្នុងមួយថ្ងៃ ។ ប្រសិនបើហាងបាញ់ថ្នាំត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានដឹកទំនិញ គេបាញ់ថ្នាំបានចំនួន 700 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ប្រសិនបើហាងតម្លើងត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានតូចគេអាចតម្លើងបានចំនួន 1700 ក្នុងមួយថ្ងៃ ។ ប្រសិនបើហាងតម្លើងត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានដឹកទំនិញគេអាចតម្លើងបានចំនួន 1200 ក្នុងមួយថ្ងៃ ។ ឡានតូចនីមួយៗផ្តល់ប្រាក់ចំណេញបាន $300 ឡានដឹកទំនិញផ្តល់បាន $500 ។

ចូរបង្កើតរូបមន្តតាមបែបគំរូកម្មវិធីលីនេអ៊ែរ ដែលនឹងធ្វើឱ្យប្រាក់ចំណេញរបស់ក្រុមហ៊ុន Toyota តម្លើងដល់កម្រិតអតិបរមា។ បន្ទាប់មកដោះស្រាយតាមក្រាហ្វិច ។

ដំណោះស្រាយ

បង្កើតរូបមន្តគំរូកម្មវិធីលីនេអ៊ែរដើម្បីឱ្យបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមា និងដោះស្រាយតាមក្រាហ្វិច

- តារាងសង្ខេប

	Cars	Vans
ផ្នែកបាញ់ថ្នាំ	$\frac{1}{800}$	$\frac{1}{700}$
ផ្នែកតំឡើង	$\frac{1}{1700}$	$\frac{1}{1200}$
Profit	$300	$300

តាង : x ជាចំនួន Cars , y ជាចំនួន Vans

គេបាន $Max f(x) = 300x + 500y$

$$\begin{cases} \frac{1}{800}x + \frac{1}{700}y \le 1 \\ \frac{1}{1700}x + \frac{1}{1200}y \le 1 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

ក្រាហ្វិកសម្រាប់ $\frac{1}{800}x + \frac{1}{700}y = 1$

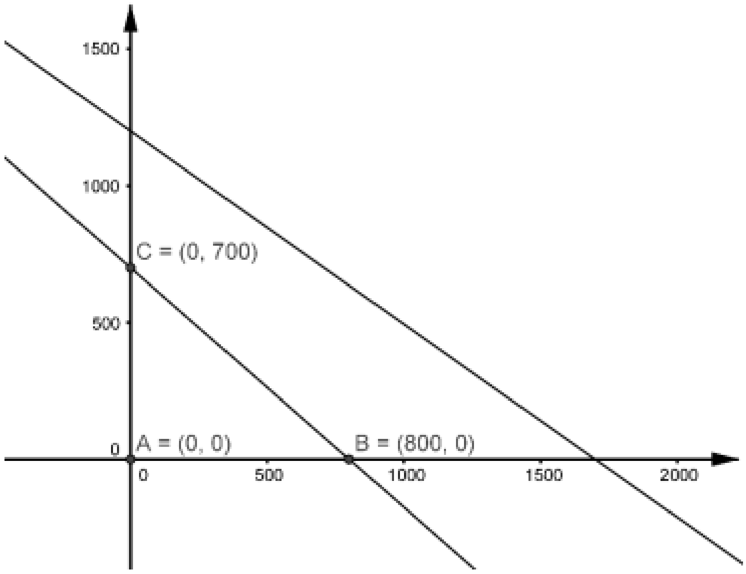
គេបាន

x	0	800
y	700	0

សម្រាប់ $\frac{1}{1700}x + \frac{1}{1200}y = 1$

គេបាន

x	0	1700
y	1200	0



តំបន់ចម្លើយ ចំណុចកាច់ជ្រុងយើងបាន

$A(0,0)$ នាំឱ្យ $Max\ f(x) = 300 \times 0 + 500 \times 0 = 0$

$B(800,0)$ នាំឱ្យ $Max\ f(x) = 300 \times 800 + 500 \times 0 = 24000$

$C(0,700)$ នាំឱ្យ $Max\ f(x) = 300 \times 0 + 500 \times 700 = 35000$

ដូចនេះ ក្រុមហ៊ុន Toyota គួរតែផលិតឡានតូចចំនួន 0 គ្រឿង និងផលិតឡានដឹកទំនិញចំនួន 700 គ្រឿង ដែលនាំឱ្យទទួលប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមាគឺ $Max\ f(x) = 35000\$$ ។

2. វិធី Simplex

a). ទម្រង់កាណូនិចនៃ LP

ក្នុងផ្នែកនេះ យើងនឹងសិក្សាអំពីវិធី Simplex ដែលជាវិធីដោះស្រាយតាមបែបពិជ-គណិតសម្រាប់ចំណោទ LP ដែលមានទំហំប៉ុណ្ណាក៏ដោយ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ដើម្បីប្រើវិធី Simplex ចំណោទ LP ត្រូវសរសេរជា "ទម្រង់កាណូនិច" ។ ក្នុងទម្រង់កាណូនិច កម្រិតព្រំដែនទាំងអស់ត្រូវសរសេរជាសមីការ។

<u>**ឧទាហរណ៍១៖**</u> ចំណោទមួយមានកម្រិតព្រំដែនកំណត់ដោយ៖ $0.2x_1+0.4x_2\le 60$ ។

គេបានទម្រង់កាណូនិចគឺ $0.2x_1+0.4x_2+s=60$ ដែល $s\ge 0$ ។

<u>**ឧទាហរណ៍២៖**</u> ចូរសរសេរចំណោទលីនេអ៊ែរខាងក្រោមឲ្យទៅជាទម្រង់កាណូនិចគម្រូទូទៅ៖

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $P=0.6x_1+0.8x_2$ ដោយលក្ខខណ្ឌ៖

$$\begin{cases}0.2x_1+0.4x_2\le 60\\ 0.2x_1+0.2x_2\le 40\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$ ។

<u>**ចម្លើយ**</u>

ទម្រង់កាណូនិច $P=0.6x_1+0.8x_2+0s_1+0s_2$ ដោយលក្ខខណ្ឌ៖

$$\begin{cases}0.2x_1+0.4x_2+s_1=60\\ 0.2x_1+0.2x_2+s_2=40\\ x_1,x_2,s_1,s_2\ge 0\end{cases}$$ ។

<u>**ជាទូទៅ៖**</u> ចំណោទនៃការបង្កើតកម្មវិធីលីនេអ៊ែរមួយមានទម្រង់កាណូនិចនៅពេលដែល៖

១. ចំណោទនោះនៅក្នុងប្រភេទរកតម្លៃអតិបរមា

២. កម្រិតព្រំដែនទាំងអស់ជាសមីការ (លើកលែងតែកម្រិតព្រំដែនមិនអវិជ្ជមាន)

៣. អថេរទាំងអស់មិនអវិជ្ជមាន

ចំណាំ៖

ឧទាហរណ៍៖ *ចូរសរសេរចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរដូចតទៅនេះ ឲ្យទៅជាទម្រង់កាណូនិចតំរូទូទៅ។*

រកតម្លៃអប្បបរមា $Z = x_1 - x_2 + x_3$ *ដោយលក្ខខណ្ឌ៖*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 4 \\ 2x_1 - 5x_3 = 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

ដោយ x_3 *គ្មានព្រំដែន យើងតាង* $x_3 = x_4 - x_5 \quad , x_4, x_5 \ge 0$

តាង $P = -Z$ *យើងរកតម្លៃអតិបរមា* $P = -x_1 + x_2 - x_4 + x_5$ *ដោយលក្ខខណ្ឌ៖*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 \ge 4 \\ 2x_1 - 5(x_4 - x_5) = 2 \\ x_1, x_2, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 \le 5 \\ -2x_1 - x_2 - x_4 + x_5 \le -4 \\ 2x_1 - 5x_4 - 5x_5 = 2 \\ x_1, x_2, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 \le 5 \\ -2x_1 - x_2 - x_4 + x_5 \le -4 \\ 2x_1 - 5x_4 - 5x_5 \le 2 \\ 2x_1 - 5x_4 - 5x_5 \ge 2 \\ x_1, x_2, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 \le 5 \\ -2x_1 - x_2 - x_4 + x_5 \le -4 \\ 2x_1 - 5x_4 - 5x_5 \le 2 \\ -2x_1 + 5x_4 + 5x_5 \le -2 \\ x_1, x_2, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

គេបាន $P = -x_1 + x_2 - x_4 + x_5 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$ *ដែល៖*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + s_1 = 5 \\ -2x_1 - x_2 - x_4 + x_5 + s_2 = -4 \\ 2x_1 - 5x_4 - 5x_5 + s_3 = 2 \\ -2x_1 + 5x_4 + 5x_5 + s_4 = -2 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, s_1, s_2, s_3, s_4 \ge 0 \end{cases}$$ ។

b) វិធីដោះស្រាយ

ក្នុងការដោះស្រាយចំណោទលីនេអ៊ែរតាមវិធី Simplex គេត្រូវធ្វើតាមជំហានដូចជា៖

ជំហានទី១ ៖

- សរសេរអនុគមន៍គោលដៅ និងកម្រិតព្រំដែនទាំងអស់ជាទម្រង់កាណូនិចស្តង់ដា។

<u>ឧទាហរណ៍:</u> រកតម្លៃអតិបរមានៃ $P = 6.0x_1 + 0.8x_2$

$$\text{ដែលមានលក្ខខណ្ឌ} \begin{cases} 0.2x_1 + 0.4x_2 \le 60 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 \le 40 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

ទម្រង់កាណូនិចនៃចំណោទគឺ $P = 6.0x_1 + 0.8x_2 + 0s_1 + 0s_2$

$$\text{ដែលមានលក្ខខណ្ឌ} \begin{cases} 0.2x_1 + 0.4x_2 + s_1 = 60 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 + s_2 = 40 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0 \end{cases}$$

- បង្កើតតារាង Simplex ដំបូង

	C_j	0.6	0.8	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
0	s_1	0.2	0.4	1	0	60
0	s_2	0.2	0.2	0	1	40

- ជួរដេក C_j ជាមេគុណអថេរនីមួយៗនៃអនុគមន៍គោលដៅ
- ជួរដេក X_B ជាអថេរនីមួយៗ
- ជួរឈរ X_B ជាអថេរគោល
- ជួរឈរ C_B ជាមេគុណនៃអថេរគោលនៃអនុគមន៍គោលដៅ
- ជួរដេកអថេរគោល គឺជាមេគុណនៃអថេរនីមួយៗនៅក្នុងកម្រិតព្រំដែននីមួយៗ
- ជួរឈរ RHS ជាចម្លើយនៃកម្រិតព្រំដែននីមួយៗ

__ចំណាំៈ__ អថេរគោលដំបូង គឺជាអថេរធូរស្រាល s_1, s_2 ។

- តារាង Simplex 1
  - រកជួរដេក Z_j កំណត់ដោយ $Z_j = C_B^t \times t_j$ ដែល t_j ជាវ៉ិចទ័រនៅក្រោម x_j

គេបាន $Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} = 0(0.2) + 0(0.2) = 0$

$Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} = 0(0.4) + 0(0.2) = 0$

$Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0(1) + 0(0) = 0$

$Z_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0(0) + 0(1) = 0$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} = 0(60) + 0(40) = 0$

  - រកជួរដេក $Z_j - C_j$

គេបាន $Z_1 - C_1 = 0 - 0.6 = -0.6$

$Z_2 - C_2 = 0 - 0.8 = -0.8$

$Z_3 - C_3 = 0 - 0 = 0$

$Z_4 - C_4 = 0 - 0 = 0$

	C_j	0.6	0.8	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
0	s_1	0.2	0.4	1	0	60
0	s_2	0.2	0.2	0	1	40
Z_j		0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$		–0.6	–0.8	0	0	

- ជំហានទី២

បើជួរដេក $Z_j - C_j$ មានតម្លៃវិជ្ជមានទាំងអស់ នោះចំណោទទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុត ។ ប៉ុន្តែបើជួរដេក $Z_j - C_j$ មានតម្លៃអវិជ្ជមាន នោះចំណោទមិនទាន់ទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតទេ ដូចនេះយើងត្រូវធ្វើតារាង Simplex បន្តទៀត ។

- ជំហានទី៣ ៖ រកអថេរចូល (Entering variable) និងអថេរចេញ (Leaving variable)
  - រកអថេរចូល ៖ ពិនិត្យតម្លៃអវិជ្ជមាននៃ $Z_j - C_j$ (ករណី ជួរឈរ RHS វិជ្ជមានទាំងអស់)

    បើ $\left|Z_{j_k} - C_{j_k}\right| > \left|Z_{j_m} - C_{j_m}\right| \qquad , k \neq m$

    នោះអថេរនៃជួរឈរ $Z_{j_k} - C_{j_k}$ នៃជួរដេក X_B ជាអថេរចូល

    ដោយ $|-0.6| < |-0.8|$ នោះ x_2 ជាអថេរចូល ។
  - រកអថេរចេញ ៖

    ធ្វើផលធៀបជួរឈរចម្លើយ RHS ជាមួយជួរនៃអថេរចូលរៀងគ្នា ។ បើផលធៀបនៃជួរដេកណាតូចជាងគេ នោះអថេរគោល X_B នៃជួរដេកនោះជាអថេរចេញ ។

    <u>**ចំណាំ**</u> គេធ្វើផលធៀបតែចំនួនវិជ្ជមានតែប៉ុណ្ណោះ។

    ដោយ $\frac{60}{0.4} = 150 < \frac{40}{0.2} = 200$ នោះ s_1 ជាអថេរចេញ ។

<u>**សម្គាល់៖**</u> បើសិនជួរឈរចម្លើយ RHS មានតម្លៃអវិជ្ជមាន គេត្រូវរកអថេរចាកចេញមុនទើបរកអថេរចូល ។

  - រកអថេរចេញ ៖ ពិនិត្យតម្លៃអវិជ្ជមានក្នុងជួរឈរ RHS

    បើ $\left|RHS_i\right| > \left|RHS_j\right|$ នោះអថេរគោលនៃជួរដេក i ជាអថេរចាកចេញ ។
  - រកអថេរចូល

    ធ្វើផលធៀបជួរដេក $Z_j - C_j$ ណាដែលមានតម្លៃអវិជ្ជមានជាមួយនឹងជួរដេកនៃអថេរចេញរៀងគ្នា ។ បើផលធៀបណាតូចជាងគេ នោះអថេរដែលត្រូវនឹងជួរឈរនោះជាអថេរចូល។

    <u>**ចំណាំ**</u> គេធ្វើផលធៀបតែចំនួនអវិជ្ជមានតែប៉ុណ្ណោះ ។

- ជំហានទី៤ ៖ ចំណុចប្រសព្វរវាងអថេរចូល និងអថេរចេញ ហៅថាធាតុវិល ។

  គេបាន 0.4 ជាធាតុវិល

- ធ្វើបរិវត្តមួយក្នុងតារាង Simplex ថ្មី
    - អថេរចូល x_2 មកជំនួសកន្លែងអថេរចាកចេញ s_1 ។
    - ជួរឈរត្រង់ធាតុវិលត្រូវស្មើ 1 និងផ្សេងទៀតស្មើ 0 ។

គេបាន $R_1^1 \div 0.4 \to R_1^2$, $R_2^1 - 0.2R_1^2 \to R_2^2$

តារាង Simplex 2 :

	C_j	0.6	0.8	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	បរិវត្តមួយ
0.8	x_2	0.5	1	2.5	0	60	$R_1^1 \div 0.4 \to R_1^2$
0	s_2	0.1	0	-0.5	1	40	$R_2^1 - 0.2R_1^2 \to R_2^2$
Z_j							
$Z_j - C_j$							

- ជំហានទី៥ ៖ រក Z_j និង $Z_j - C_j$

$$Z_j = C_B^t \times t_j$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix} = (0.8)(0.5) + (0)(0.1) = 0.4$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0.8)(1) + (0)(0) = 0.8$$

$$Z_3 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} = (0.8)(2.5) + (0)(-0.5) = 2$$

$$Z_4 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0.8)(0) + (0)(1) = 0$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 150 \\ 10 \end{pmatrix} = (0.8)(150) + (0)(10) = 120$$

	C_j	0.6	0.8	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	បម្រែបម្រួល
0.8	x_2	0.5	1	2.5	0	60	$R_1^1 \div 0.4 \to R_1^2$
0	s_2	0.1	0	-0.5	1	40	$R_2^1 - 0.2R_1^2 \to R_2^2$
Z_j		0.4	0.8	2	0	120	
$Z_j - C_j$		-0.2	0	2	0		

ដោយជួរដេក $Z_j - C_j$ មានតម្លៃអវិជ្ជមាន នោះយើងមិនទាន់ទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតទេ ។ ដូចនេះយើងត្រូវធ្វើបន្តទៀតដោយរកអថេរចូល និងអថេរចេញ រួចបង្កើតតារាង Simplex ថ្មី រហូតដល់ទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុត។

- រកចូលគឺ x_1
- ផលធៀប $\frac{150}{0.5} = 300 < \frac{10}{0.1} = 100$ នោះ s_2 ជាអថេរចេញ ។
- ធាតុវិល គឺ 0.1

តារាង Simplex 3 :

	C_j	0.6	0.8	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	បម្រែបម្រួល
0.8	x_2	0	1	5	-5	100	$R_1^2 - 0.5\, R_2^3 \to R_1^3$
0.6	x_1	1	0	-5	10	100	$R_2^2 \div 0.1 \to R_2^3$
Z_j		0.6	0.8	1	2	140	
$Z_j - C_j$		0	0	1	2		

ដោយជួរដេក $Z_j - C_j$ មានតម្លៃវិជ្ជមានទាំងអស់

ដូចនេះ ចំណោទទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_1 = 100 \quad x_2 = 100 \quad P = 140$ ។

c). ករណីពិសេសទាំងបួន

១. ភាពគ្មានចម្លើយ (Infeasibility)

ចំណោទ LP មួយមិនមានចម្លើយកាលណា មានតម្លៃអវិជ្ជមានមួយក្នុង RHS នៃកម្រិតព្រំដែនមួយ និងគ្មានចំនួនអវិជ្ជមានលេចឡើងក្នុងជួរដេកនោះ (មានអថេរចេញ ប៉ុន្តែមិនមាន អថេរចូល) ។

២. ភាពមិនទ័ល (Unboundedness)

ចំណោទ LP មួយដែលត្រូវរកតម្លៃអតិបរមា មានចម្លើយមួយមិនទ័លកាលណា នៅត្រង់ជំហានណាមួយដែលមានអថេរមួយមានតម្រុយអវិជ្ជមាន ប៉ុន្តែចំនួនទាំងអស់ក្នុងជួរដេកបង្រួមស្មើ 0 ឬអវិជ្ជមាននៅពេលចំនួន RHS ទាំងអស់មិនអវិជ្ជមាន (មានអថេរចូល ប៉ុន្តែគ្មានអថេរចេញ) ។

៣. ចម្លើយប្រសើរបំផុតមានច្រើន (Alternative optima)

ចំណោទ LP មួយអាចមានចម្លើយប្រសើរបំផុតច្រើនកាលណា ក្នុងតារាងប្រសើរបំផុតមានអថេរមិនមែនគោលមួយមានតម្លៃសូន្យក្នុងជួរដេកគោលដៅ $Z_j - C_j$ ។

៤. ឱនភាព (Degeneracy)

ចំណោទ LP មួយអាចមានឱនភាពកាលណាវាមានចម្លើយគោលដៅអាចយកបានមួយដែលក្នុងនោះអថេរគោលមួយស្មើ 0 ។ ករណីអាចលើកឡើង កាលណានៅត្រង់ជំហានណាមួយមានផលធៀបស្មើគ្នាបានប្រើដើម្បីកំណត់អថេរចាកចេញ។ ឱនភាពអាចមានជាបណ្តោះអាសន្ន ឬជាអចិន្ត្រៃយ៍។

លំហាត់គំរូ

១. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 5x_1 + x_2$ ដែលមានលក្ខខណ្ឌ

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 \, , \, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

គេបានទម្រង់កាណូនិច គឺ $Z = 5x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2$ ដែលមានលក្ខខណ្ឌ

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + s_1 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + s_2 = -6 \\ x_1\ ,\ x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

តារាង Simplex ដំបូង

	C_j	5	1	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
0	s_1	4	3	1	0	12
0	s_2	2	-3	0	1	-6

រក Z_j

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = (0)(4) + (0)(2) = 0$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = (0)(3) + (0)(-3) = 0$$

$$Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)(1) + (0)(0) = 0$$

$$Z_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0)(0) + (0)(1) = 0$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} = (0)(12) + (0)(-6) = 0$$

រក $Z_j - C_j$

$$Z_1 - C_1 = 0 - 5 = -5$$
$$Z_2 - C_2 = 0 - 1 = -1$$
$$Z_3 - C_3 = 0 - 0 = 0$$
$$Z_4 - C_4 = 0 - 0 = 0$$

តារាង Simplex 1:

	C_j	5	1	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2 ↓	s_1	s_2	RHS
0	s_1	4	3	1	0	12
0 ←	s_2	2	**-3**	0	1	-6
	Z_j	0	0	0	0	0
	$Z_j - C_j$	-5	-1	0	0	

គេបាន s_2 ជាអថេរចេញ ហើយ x_2 ជាអថេរចូល និង -3 ជាធាតុវិល ។

ធ្វើបម្រែបម្រួលតារាងថ្មី

$R_2^1 \div (-3) \to R_2^2$ និង $R_1^1 - 3R_2^2 \to R_1^2$

តារាង Simplex 2:

	C_j	5	1	0	0	
C_B	X_B	x_1 ↓	x_2	s_1	s_2	RHS
0 ←	s_1	**6**	0	1	1	6
1	x_2	$-\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	2
	Z_j	$-\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	2
	$Z_j - C_j$	$-\frac{17}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	

តារាង Simplex 3:

	C_j	5	1	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
5	x_1	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
1	x_2	0	1	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{8}{3}$
	Z_j	5	1	$\frac{17}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{23}{3}$
	$Z_j - C_j$	0	0	$\frac{17}{18}$	$\frac{11}{18}$	

ដោយ ជួរដេក $Z_j - C_j$ មិនមានតម្លៃអវិជ្ជមាន នោះគេបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ

$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{8}{3}$, $Z = \frac{23}{3}$ ។

២. ចូររកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 2x_1 + x_2$ ដោយលក្ខខណ្ឌ៖

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 < 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

គេបានទម្រង់កាណូនិច គឺ $Z = 2x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$ ដែលមានលក្ខខណ្ឌ៖

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + s_1 = -6 \\ x_1 + s_2 = 4 \\ x_2 + s_3 = 1 \\ x_1 \ , x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

តារាង Simplex ដំបូង

	C_j	2	1	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
0	s_1	−1	−1	1	0	0	−6
0	s_2	1	0	0	1	0	4
0	s_3	0	1	0	0	1	1

រក Z_j

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)(-1) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0)(-1) + (0)(0) + (0)(1) = 0$$

$$Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)(1) + (0)(0) + (0)(0) = 0$$

$$Z_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$

$$Z_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0)(0) + (0)(0) + (0)(1) = 0$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = (0)(-6) + (0)(4) + (0)(1) = 0$$

រក $Z_j - C_j$

$$Z_1 - C_1 = 0 - 2 = -2$$
$$Z_2 - C_2 = 0 - 1 = -1$$
$$Z_3 - C_3 = 0 - 0 = 0$$
$$Z_4 - C_4 = 0 - 0 = 0$$
$$Z_5 - C_5 = 0 - 0 = 0$$

តារាង Simplex 1:

	C_j	2	1	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2 ↓	s_1	s_2	s_3	RHS
0 ←	s_1	−1	(−1)	1	0	0	−6
0	s_2	1	0	0	1	0	4
0	s_3	0	1	0	0	1	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - C_j$	−2	−1	0	0	0	

គេបាន s_1 ជាអថេរចេញ ហើយ x_2 ជាអថេរចូល និង -1 ជាធាតុវិល ។

ធ្វើបម្រែបម្រួលតារាងថ្មី

$$R_1^1 \div (-1) \to R_1^2 \ , \ R_2^1 \to R_2^2 \ \text{និង}\ R_3^1 - R_1^2 \to R_3^2$$

តារាង Simplex 2:

	C_j	2	1	0	0	0	
C_B	X_B	x_1 ↓	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
1	x_2	1	1	-1	0	0	6
0	s_2	1	0	0	1	0	4
0 ←	s_3	(-1)	0	1	0	1	-5
	Z_j	1	1	-1	0	0	6
	$Z_j - C_j$	-1	0	-1	0	0	

គេបាន s_3 ជាអថេរចេញ ហើយ x_1 ជាអថេរចូល និង -1 ជាធាតុវិល ។

ធ្វើបម្រែបម្រួលតារាងថ្មី

$$R_3^2 \div (-1) \to R_3^3 \ , \ R_1^2 - R_3^3 \to R_1^3 \ \text{និង}\ R_2^2 - R_3^3 \to R_3^3$$

តារាង Simplex 3:

	C_j	2	1	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
1	x_2	0	1	0	0	1	1
0 ←	s_2	0	0	1	1	1	-1
2	x_1	1	0	-1	0	-1	5
	Z_j	2	1	-2	0	-1	11
	$Z_j - C_j$	0	0	-2	0	-1	

យើងមិនអាចបន្តតារាងនេះទៅទៀតបានទេ ព្រោះទោះជាមានចំនួនអវិជ្ជមានក្នុង *RHS* នៃជួរដេកទី២ក៏ដោយ (មានអថេរចេញ) ប៉ុន្តែគ្មានចំនួនអវិជ្ជមានក្នុងជួរដេកនេះ ដើម្បីឲ្យបានជាជួរឈរស្នូលមួយដែរ (គ្មានអថេរចូល) ។

ដូចនេះដំណោះស្រាយគ្មានចម្លើយទេ ។

៣. ចូររកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 2x_1 + x_2$ ដោយលក្ខខណ្ឌ៖

$$\begin{cases} x_1 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

គេបានទម្រង់កាណូនិច គឺ $Z = 2x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2$ ដែលមានលក្ខខណ្ឌ៖

$$\begin{cases} x_1 + s_1 = 3 \\ -x_1 - x_2 + s_2 = -2 \\ x_1 \ , x_2, s_1, s_2 \ge 0 \end{cases}$$

តារាង Simplex ដំបូង

	C_j	2	1	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	*RHS*
0	s_1	1	0	1	0	3
0	s_2	−1	−1	0	1	−2

តារាង Simplex 1:

	C_j	2	1	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	*RHS*
0	s_1	1	0	1	0	3
0	s_2	−1	−1	0	1	−2
	Z_j	0	0	0	0	0
	$Z_j - C_j$	−2	−1	0	0	

គេបាន s_2 ជាអថេរចេញ ហើយ x_2 ជាអថេរចូល និង -1 ជាធាតុរិល ។

ធ្វើបំប្លែងប្រូលតារាងថ្មី

$R_2^1 \div (-1) \to R_2^2$ និង $R_1^1 \to R_1^2$

តារាង Simplex 2:

	C_j	2	1	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
0	s_1	1	0	1	0	3
1	x_2	1	1	0	-1	2
	Z_j	1	1	0	-1	2
	$Z_j - C_j$	-1	0	0	-1	

តម្រុយលេខ -1 ក្នុងជួរដេក $Z_j - C_j$ ប្រាប់យើងថា s_2 អាចជាអថេរចូល ប៉ុន្តែមិនមានចំនួនវិជ្ជមានក្នុងជួរឈរ ដែលអាចធ្វើផលធៀបទេ នោះគឺគ្មានអថេរណាមួយចង់ចាកចេញពីគោលទេ ។ ដោយហេតុថាកំណើនមួយឯកតាៗនៃ s_2 ធ្វើឲ្យអនុគមន៍គោលដៅកើន១ នោះអនុគមន៍គោលដៅអាចមានតម្លៃធំស្រេចចិត្ត គឺថាជាចម្លើយប្រសើរបំផុតមិនទ័ល ។ (*ករណីនេះ* x_1 *អាចជាអថេរចូលបានដែរ ព្រោះវាមានតម្រុយអវិជ្ជមាន -1 ក្នុងជួរដេក* $Z_j - C_j$ *ផងដែរ ។ យ៉ាងណាក៏ដោយ ជាចុងបញ្ចប់ជំរើសនឹងនាំទៅដល់ចម្លើយមិនទ័លផងដែរ ។ ការជ្រើសរើស* s_2 *ជាអថេរចូលក្នុងគោលធ្វើឲ្យយើងស្រាយឃើញភាពមិនទ័លបានឆាប់*)។

៤. ចូររកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 3x_1 + 6x_2$ ដោយលក្ខខណ្ឌ៖

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

គេបានទម្រង់កាណូនិច គឺ $Z = 3x_1 + 6x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$ ដែលមានលក្ខខណ្ឌ៖

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 4 \\ x_1 + s_2 = 3 \\ x_2 + s_3 = 1 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

តារាង Simplex ដំបូង

	C_j	3	6	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
0	s_1	1	2	1	0	0	4
0	s_2	1	0	0	1	0	3
0	s_3	0	1	0	0	1	1

តារាង Simplex 1:

	C_j	3	6	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2 ↓	s_1	s_2	s_3	RHS
0	s_1	1	2	1	0	0	4
0	s_2	1	0	0	1	0	3
0 ←	s_3	0	(1)	0	0	1	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - C_j$	-3	-6	0	0	0	

គេបាន x_2 ជាអថេរចូល ហើយ s_3 ជាអថេរចេញ និង 1 ជាធាតុវិល ។

ធ្វើបំម្លែងប្រួលតារាងថ្មី

$R_3^1 \to R_3^2$, $R_2^1 \to R_2^2$ និង $R_1^1 - 2R_3^2 \to R_1^2$

តារាង Simplex 2:

	C_j	3	6	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
0	s_1	1	0	1	0	-2	2
0	s_2	1	0	0	1	0	3
6	x_2	0	1	0	0	1	1
Z_j		0	6	0	0	6	6
$Z_j - C_j$		-3	0	0	0	6	

គេបាន x_1 ជាអថេរចូល ហើយ s_1 ជាអថេរចេញ និង 1 ជាធាតុវិល ។

ធ្វើបំរែបំរួលតារាងថ្មី

$R_1^2 \to R_1^3$, $R_2^2 - R_1^3 \to R_2^3$ និង $R_3^2 \to R_3^3$

តារាង Simplex 3:

	C_j	3	6	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
3	x_1	1	0	1	0	-2	2
0	s_2	0	0	-1	1	2	1
6	x_2	0	1	0	0	1	1
Z_j		3	6	3	0	0	12
$Z_j - C_j$		0	0	3	0	0	

ដោយ ជួរដេក $Z_j - C_j$ មិនមានតម្លៃអវិជ្ជមាន នោះគេបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ

$x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $Z = 12$ ។

ក្នុងជួរដេក $Z_j - C_j$ ជានិច្ចកាល អថេរគោល x_1, s_2, x_2 មានតម្លៃសូន្យ និងអថេរមិនមែនគោល s_1, s_3 មានតម្លៃខុសពីសូន្យ ។ ប៉ុន្តែយើងសង្កេតឃើញថានៅក្នុងជួរដេក $Z_j - C_j$ អថេរមិនមែនគោល s_3 មានតម្លៃ 0 ។ករណីនេះចម្លើយប្រសើរបំផុតមានច្រើន។

៥. ចូរបង្កើនឲ្យដល់កម្រិតអតិបរមានៃ $Z = 4x_1 + 5x_2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ៖

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

គេបានទម្រង់កាណូនិច គឺ $Z = 4x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 0s_2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ៖

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + s_1 = 12 \\ x_2 + s_2 = 3 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0 \end{cases}$$

តារាង Simplex ដំបូង

	C_j	4	5	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
0	s_1	3	4	1	0	12
0	s_2	0	1	0	1	3

តារាង Simplex 1:

	C_j	4	5	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
0	s_1	3	4	1	0	12
0	s_2	0	1	0	1	3
	Z_j	0	0	0	0	0
	$Z_j - C_j$	-4	-5	0	0	

ដោយ $|-4| < |-5|$ នោះ x_2 ជាអថេរចូល

ដោយ $\frac{12}{4} = \frac{3}{1}$ នោះ s_1 ឬ s_2 មួយណាជាអថេរចេញក៏បាន ។ យក s_2 ជាអថេរចេញ ។ នោះ 1 ជាធាតុវិល ។

ធ្វើបម្លែងប្រួលតារាងថ្មី

$R_2^1 \to R_2^2$ និង $R_1^1 - 4R_2^2 \to R_1^2$

តារាង Simplex 2:

	C_j	4	5	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
0	s_1	3	0	1	-4	0
5	x_2	0	1	0	1	3
	Z_j	0	5	0	5	15
	$Z_j - C_j$	-4	0	0	5	

យើងសង្កេតឃើញថា អថេរគោល s_1 មានចម្លើយសូន្យ ដូចនេះចំណោទមានចម្លើយឌិនភាព។

III. Lagrange Miltipliers

Lagrange Milipliers ត្រូវបានប្រើប្រាស់ដើម្បីដោះស្រាយចំណោទបរមាកម្មមិនលីនេអ៊ែរ (Non-Linear programs) ដែលអនុគមន៍កម្រិតព្រំដែនទាំងអស់ជាសមីការ ។ យើងពិនិត្យមើលចំណោទមិនលីនេអ៊ែរតាមប្រភេទខាងក្រោម ៖

1. ករណីអនុគមន៍គោលបំណងមានពីរអថេរ និងមានអនុគមន៍កម្រិតព្រំដែនមួយ (Two variable - one constraint)

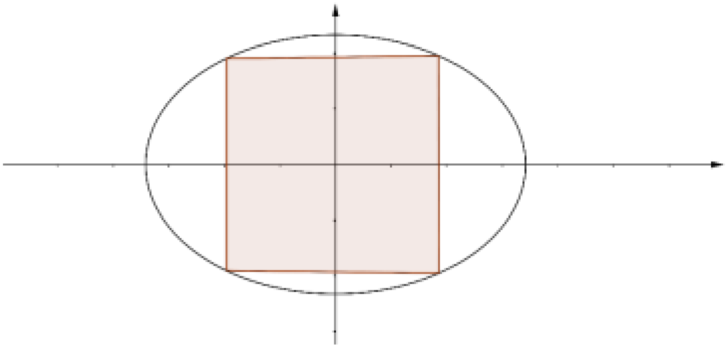
គេឲ្យអនុគមន៍ $Z = f(x,y)$ និងបំពេញលក្ខខណ្ឌ $g(x,y) = k$ យើងនឹងបង្កើតអនុគមន៍ថ្មី $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda[g(x,y) - k]$ ។ នេះជាអនុគមន៍មាន 3 អថេរ ដែលមានអថេរដើម x និង y ហើយថែមអថេរថ្មីមួយទៀត λ ហៅថា $Lambda$ ។ សម្រាប់ចំណុចដែលយើងផ្តោតទៅលើគឺ $g(x,y) = k$ តម្លៃនៃ L គឺដូចគ្នានិងតម្លៃនៃ f ដោយមិនគិតពីតម្លៃនៃ λ ។ បន្ទាប់មកយើងគណនា $\frac{\partial L}{\partial x}$ និង $\frac{\partial L}{\partial y}$ ។ ដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហានេះឲ្យកាន់តែងាយស្រួលឡើងនោះយើងត្រូវចងជាបីសមីការរួចដោះស្រាយ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ g(x, y) = k \end{cases}$$

<u>ឧទាហរណ៍១៖</u> ចូររកតម្លៃនៃការេធំបំផុតដែលចារឹកក្នុងអេលីប $x^2 + 2y^2 = 1$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ផ្ទៃក្រឡាការេគឺ $f(x, y) = 4xy$



នោះគេបាន $L(x, y, \lambda) = 4xy - \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$

នាំឲ្យ $\dfrac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 4y - 2\lambda x$

$\dfrac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 4x - 4\lambda y$

ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{cases} 4y - 2\lambda x = 0 \\ 4x - 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = \lambda x & (1) \\ x = \lambda y & (2) \\ x^2 + 2y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

យក (2) ជំនួសចូល (1) គេបាន

$$2y = \lambda(\lambda y)$$

$$2y - \lambda^2 y = 0$$

$$y(2 - \lambda^2) = 0$$

នាំឲ្យ $y = 0$ ឬ $2 - \lambda^2 = 0$

- បើ $y = 0$ នោះគេបាន $x = 0$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2 + 2x^2 = 1$

ដូច្នេះមានតែ $2 - \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$

- បើ $\lambda = \pm\sqrt{2}$ នោះគេបាន $y = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ ជំនួសក្នុង (3)

គេបាន $x^2+2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2=1$

$$2x^2=1$$

នាំឲ្យ $x=\pm\sqrt{1/2}$ នោះ $y=\pm1$

នោះគេបានចំនុចដែលអាចកើតឡើងគឺ$\left(\sqrt{\frac{1}{2}},1\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},-1\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},1\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-1\right)$

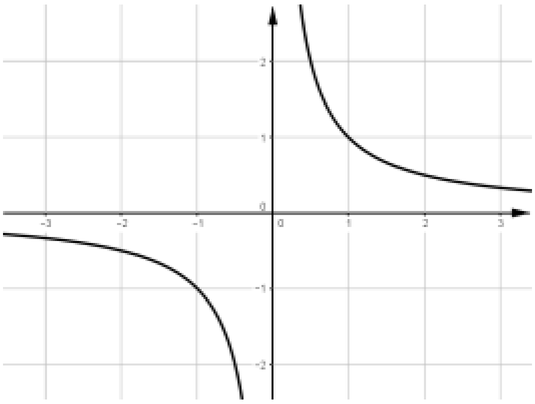
$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}},1\right)=f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-1\right)=2\sqrt{2}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}},-1\right)=f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},1\right)=-2\sqrt{2}<0$$ មិនយក

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមានៃ $4xy$ ដែល $x^2+2x^2=1$ កើតឡើងត្រង់ចំណុច $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},1\right)$ និង $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},-1\right)$ ដែលមានតម្លៃជាអតិបរមាគឺ $2\sqrt{2}$ ។

<u>ឧទាហរណ៍២៖</u> ចូររកប្រវែងខ្លីបំផុតរវាងខ្សែកោង $xy=1$ នឹងគល់តម្រុយ។

ដែលគេឲ្យ $Z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$



$Min\,Z=\sqrt{x^2+y^2}$ ដែល $xy=1$

ប៉ុន្តែត្រង់ចំនុចអប្បបរមានៃ $\sqrt{x^2+y^2}$ សមមូលទៅនឹងចំណុចអប្បបរមានៃ x^2+y^2 ដែរ នោះគេយក $Min\,Z=x^2+y^2$ ដែល $xy=1$

គេបាន $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(xy-1)$

នាំឲ្យ $\frac{\partial L(x,y)}{\partial x}=2x-\lambda y$

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x}=2y-\lambda x$$

យើងត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 2x-\lambda y=0 \\ 2y-\lambda x=0 \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=\lambda y & (1) \\ 2y=\lambda x & (2) \\ xy=1 & (3) \end{cases}$$

តាម (1) និង (2) គេបាន $\lambda=\frac{2x}{y}$ និង $\lambda=\frac{2y}{x}$

នាំឲ្យ $\frac{2x}{y}=\frac{2y}{x} \Leftrightarrow 2x^2=2y^2$

$$x^2=y^2$$

$$x=\pm y$$

- ចំពោះ $x=-y$ ជំនួសក្នុង (3) គេបាន $(-y)y=1 \Rightarrow y^2=-1$ គ្មានចម្លើយ
- ចំពោះ $x=y$ ជំនួសក្នុង (3) គេបាន $(y)y=1 \Rightarrow y^2=1 \quad \Rightarrow y=\pm 1$

នោះគេទទួលបានចំណុចដែលអាចកើតមានឡើងគឺ $(1,1)$ និង $(-1,-1)$ ដែល $Z(1,1)=Z(-1,-1)=\sqrt{2}$ ។

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $\sqrt{x^2+y^2}$ ដែល $xy=1$ កើតឡើងត្រង់ចំណុច $(1,1)$ និង $(-1,-1)$ ដែលមានតម្លៃ $Min\,Z=2$ ។

<u>ឧទាហរណ៍៣៖</u> នាង Amanda ទើបតែទិញសត្វឆ្កែមួយក្បាល។ នាងចង់ធ្វើទ្រុងនៅទីធ្លាខាងក្រោយផ្ទះរបស់នាង។ ទ្រុងនោះធ្វើជារាងចតុកោណកែងដែលមានវិមាត្រ200 feet។ នាងមានគម្រោងសង់ទ្រុងនោះនៅជាប់និងជញ្ជាំងផ្ទះរបស់នាង ហើយត្រូវធ្វើតែបីចំហៀងតែប៉ុណ្ណោះ ។ នាងចង់ធ្វើទ្រុងនោះយ៉ាងណាឲ្យមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត ដែលសមីការនៃផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត គឺ $A=xy$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

តាងសមីការ Lagrange

$$L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(2x+y-200)$$

គេបាន $L_x=y-2\lambda$, $L_y=x-\lambda$, $L_\lambda=-2x-y+200$

ឲ្យ $L_x=0$, $L_y=0$, $L_\lambda=0$

$$\begin{cases} y-2\lambda=0 \\ x-\lambda=0 \\ -2x-y+200=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2\lambda & (1) \\ x=\lambda & (2) \\ 2x+y=200 & (3) \end{cases}$$

យក (2) និង(3) ជំនួសក្នុង (4) គេបាន

$$2x+y=200$$

$$2(\lambda)+2\lambda=200$$

$$\lambda=50$$

នាំឲ្យយើងបាន x=50 feet និង y=100 feet ដែលធ្វើឲ្យមានផ្ទៃក្រលាអតិបរមាគឺ 5000 $feet^2$ ។

2. **ករណីអនុមន៍គោលបំណងមានបីអថេរ និងមានអនុគមន៍កម្រិតព្រំដែនមួយ**
(Three variable-one constraint)

ប្រសិនបើយើងចង់រកតម្លៃអតិបរមា ឬតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x,y,z)$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\varphi(x,y,z)=k$ គេនឹងបង្កើតអនុគមន៍ថ្មី $L(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda\left[\varphi(x,y,z)-k\right]$ ។ បន្ទាប់មកយើងនឹងដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=0\\ \varphi(x,y,z)=k\end{cases}$$

<u>**ឧទាហរណ៍១៖**</u> ប្រើទ្រឹស្តីបទ *Lagrange multipliers* ដើម្បីរកតម្លៃអតិបរមា និងតម្លៃអប្បបរមានៃ $x+2y-2z$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2+z^2=1$ ។

ចម្លើយ

តាង $L(x,y,z,\lambda)=x+2y-2z-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$

ធ្វើដេរីវេធៀប

$$\frac{\partial L}{\partial x}=1-2\lambda x \quad,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=2-2\lambda y \quad,\quad \frac{\partial L}{\partial z}=-2-2\lambda z$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-2\lambda x=0\\ 2-2\lambda y=0\\ -2-2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{2\lambda} & (1)\\ y=\dfrac{1}{\lambda} & (2)\\ z=-\dfrac{1}{\lambda} & (3)\\ x^2+y^2+z^2=1 & (4)\end{cases}$$

តាម (4) គេបាន $\left(\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{\lambda}\right)^2=1$ នាំឲ្យ $\lambda=\pm\dfrac{3}{2}$

បើ $\lambda=\dfrac{3}{2}$ នាំឲ្យ $x=\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{2}{3}$, $z=-\dfrac{2}{3}$ គេបាន $f\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)=3$

បើ $\lambda = -\frac{3}{2}$ នាំឲ្យ $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$, $z = \frac{2}{3}$ គេបាន $f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -3$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមាស្មើ 3 នៅត្រង់ចំណុច $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ និងតម្លៃអប្បបរមាស្មើ -3 នៅត្រង់ចំណុច $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ។

<u>ឧទាហរណ៍២៖</u> គេមានផ្ទៃក្រឡា $x + 2y - 2z = 3$ គឺប្លង់ក្នុងលំហដែលមាន 3 វិមាត្រ ។ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ។ រកប្រវែងនៃប្លង់ចេញពីគល់តម្រុយ (ប្រវែងខ្លីបំផុតនៃចំណុចផ្សេងៗនៅលើប្លង់ ចេញពីគល់តម្រុយ)។

<u>**ចម្លើយ**</u>

$Min\,Z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x + 2y - 2z = 3$ ប៉ុន្តែអប្បបរមានៃ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ គឺសមមូលនឹងអប្បបរមានៃ $x^2 + y^2 + z^2$ ដូច្នេះយើងអាច $x^2 + y^2 + z^2$ ជំនួសអោយ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ បាន។

គេបាន $L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + 2y - 2z - 3)$

នោះ $\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda$, $\frac{\partial L}{\partial z} = 2z + 2\lambda$

យើងត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 2x - \lambda = 0 \\ 2y - 2\lambda = 0 \\ 2z + 2\lambda = 0 \\ x + 2y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{2} & (1) \\ y = \lambda & (2) \\ z = -\lambda & (3) \\ x + 2y - 2z = 3 & (4) \end{cases}$$

យក (1) , (2) , (3) ជំនួសក្នុង (4) គេបាន $\frac{\lambda}{2} + 2\lambda + 2\lambda = 3 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

នាំឲ្យ $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{2}{3}$

គេបាន $f\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1$

ដូច្នេះប្រវែងជាអប្បបរមានៃចំណុចក្នុងប្លង់ចេញពីគល់តម្រុយគឺ 1 ។

3. **ករណីអនុគមន៍កម្រិតព្រំដែនមានច្រើនជាសមីការ (Equality Constraints)**

យើងក៏អាចដោះស្រាយរក Minimize or Maximize តាម Lagrange ដែលមានច្រើនអថេរ និងច្រើនលក្ខខណ្ឌផងដែរ ដែលបានផ្តល់ឲ្យ nonlinear program ជាមួយនឹងលក្ខខណ្ឌសមភាព។

Min (or Max) f(x)

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} g_1(x) = b_1 \\ g_2(x) = b_2 \\ \vdots \\ g_m(x) = b_m \end{cases}$

ដោយដោះស្រាយតាម Lagrange គេបាន

$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i(x) \right]$ ដែល λ_i ផ្តល់នូវតម្លៃដែលមានជាប់ទាក់ទងនឹងលក្ខខណ្ឌ i ។

<u>ឧទាហរណ៍១</u>: រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $x_1 + x_2 + x_3^2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$ ។

វាងាយស្រួលក្នុងការរកតម្លៃអប្បបរមាដោយផ្ទាល់ ដែលយើងបាននៅត្រង់ចំណុច (x_1, x_2, x_3) គឺ $(1,0,0)$ តែបើដោះស្រាយតាម Lagrange គេបាន:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x_1 + x_2 + x_3^2 + \lambda_1(1 - x_1) + \lambda_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

យើងសង្កេតឃើញថា

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(1, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2,) = 1 \quad , \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Re$$

ហើយលទ្ធផល $\frac{\partial L}{\partial x_2}$ នៅតែដោះស្រាយប្រសើរបំផុត

ដូច្នេះ ដើម្បីឲ្យប្រសើរបំផុតនោះវាស្ថិតនៅត្រង់ $(1,0,0)$ ដែលធ្វើឲ្យមានតម្លៃអប្បរមាស្មើ 1 ។

<u>ឧទាហរណ៍</u>២: បុរសម្នាក់បានយកលុយរបស់គាត់ទៅវិនិយោគជាមួយ មូលនិធិចំនួន 3 ដែលគាត់រំពឹងទុកថានឹងទទួលបានផលត្រឡប់មកវិញ 10%, 10% និង 15% រៀងគ្នា។ ដូច្នេះ ដើម្បីកាត់បន្ថយការប្រឈមខណៈពេលការសម្រេច រំពឹងទុកថាបានផលចំណេញ 12% ។ យើងធ្វើ

ការសិក្សាពីហានិភ័យនៃការត្រឡប់មកវិញ ភាពខុសគ្នានៃការវិនិយោគនេះហើយ ដែល x គឺវិនិយោគក្នុងមូលនិធិទី1 , y គឺវិនិយោគក្នុងមូលនិធិទី 2 , និង z វិនិយោគក្នុងមូលនិធិទី 3 ហើយ x+y+z=1 ។ ការប្រែប្រួលនៃការទទួលបានផលត្រឡប់មកវិញ ត្រូវបានគេគណនាទៅជា $400x^2 + 800^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz$ ។

<u>**ចម្លើយ**</u>

$$Min\ f = 400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz$$

$$st\ \begin{cases} x + y + 1.5z = 1.2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

ដោយប្រើប្រាស់ Lagrange Multiple គេបាន

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz$$
$$+\lambda_1(1.2 - x - y - 1.5z) + \lambda_2(1 - x - y - z)$$

នោះគេបាន

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 800x + 200y - \lambda_1 - \lambda_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1600y + 200x + 400z - \lambda_1 - \lambda_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 3200z + 400y - 1.5\lambda_1 - \lambda_2$$

គេបាន ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ x + y + 15z = 1.2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 800x + 200y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (1) \\ 1600y + 200x + 400z - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (2) \\ 3200z + 400y - 1.5\lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (3) \\ x + y + 15z = 1.2 & (4) \\ x + y + z = 1 & (5) \end{cases}$$

ក្រោយពីបានដោះស្រាយសមីការរួចគេបាន

$$x = 0.5, y = 0.1, z = 0.4, \lambda_1 = 1800, \lambda_2 = -1380, \qquad Min\ f = 390$$ ។

4. អនុគមន៍កម្រិតព្រំដែនជាសមីការ និងជាវិសមីការ (Equality and Inequality Constraints)

យ៉ាងណាមិញយើងអាចដោះស្រាយរក Minimize ឬ Maximize ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ Lagrange បានដូចគ្នាដែរ ដែលផ្តល់ឲ្យ Nonlinear program ជាមួយនឹងលក្ខខណ្ឌទាំងសមភាព និងវិសមភាព។

Maximize f(x)

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ
$$\begin{cases} g_1(x) = b_1 \\ g_2(x) = b_2 \\ \vdots \\ g_m(x) = b_m \\ h_1(x) \le d_1 \\ h_2(x) \le d_2 \\ \vdots \\ h_p(x) \le d_p \end{cases}$$

ប្រសិនបើលក្ខខណ្ឌវិសមភាពមានសញ្ញាធំជាងឬស្មើ (≥) យើងត្រូវបម្លែងសញ្ញា (≥) ទៅជាសញ្ញា (≤) ដោយគុណនិង(-1) បញ្ចូល ហើយក៏ប្តូរពីអនុគមន៍ minimization (or maximization) ទៅជាអនុគមន៍ Maximization (or minimization) ។

តាមទ្រឹស្តីបទ Lagrange គេបាន

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - g_i(x)\right) + \sum_{j=1}^{p} \mu_i \left[d_j - h_j(x)\right]$$

<u>**ឧទាហរណ៍១**</u>: Maximize $x^3 - 3x$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x \le 2$ ។

The Lagrange គឺ $L(x,\mu) = x^3 - 3x + \mu(2 - x)$

យើងត្រូវការ $3x^2 - 3 - \mu = 0$

$$x \le 2$$
$$2 - x = 0$$
$$\mu \ge 0$$

ជាទូទៅ នៅត្រង់ចំណុចនេះ យើងត្រូវបំបែកធ្វើការវិភាគទៅលើករណីនេះដោយផ្អែកលើលក្ខខណ្ឌបំពេញនេះ

- បើ $\mu = 0$ នោះ $x^2 - 3 = 0$ នាំឲ្យ $x = \pm 1$ គេបាន $f(1) = -2$ និង $f(-1) = 2$
- បើ $x = 2$ នោះ $\mu = 9$ គេបាន $f(2) = 2$

ដូច្នេះ ដើម្បីឲ្យទទួលបានជាអតិបរមានោះ $x = -1$ និង $x = 2$ ដែល $Max\ f = 2$ ។

<u>**ឧទាហរណ៍២**</u>: Minimize $(x-2)^2 + 2(y-1)^2$ Subject to $\begin{cases} x + 4y \le 3 \\ x \ge y \end{cases}$ ។

ដំបូងយើងត្រូវប្តូរទៅជាទម្រង់ស្តង់ដា គេបាន៖

$$Maximize : -(x-2)^2 - 2(y-1)^2$$

$$\text{Subject to:} \quad \begin{cases} x + 4y \le 3 \\ -x + y \le 0 \end{cases}$$

សមីការ Lagrange ៖ $L(x, y, \mu_1, \mu_2) = -(x-2)^2 - 2(y-1)^2 + \mu_1(3 - x - 4y) + \mu_2(x - y)$

នោះគេបាន

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2(x-2) - \mu_1 + \mu_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -4(y-1) - 4\mu_1 - \mu_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = 3 - x - 4y$$
$$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} = x - y$$

គេបាន ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu_2} = 0 \\ x + 4y \le 3 \\ -x + y \le 0 \\ \mu_1, \mu_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2(x-2) - \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ -4(y-1) - 4\mu_1 - \mu_2 = 0 \\ 3 - x - 4y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y \le 3 \\ -x + y \le 0 \\ \mu_1, \mu_2 \ge 0 \end{cases}$$

ពិនិត្យទៅលើពីរលក្ខខណ្ឌដែលត្រូវបំពេញ និងមួយករណី

- បើ $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$ និង $x = 2, \ y = 1$ គ្មានតំបន់ចម្លើយ(គ្មាន អតិបរមា)
- បើ $\mu_1 = 0$, $x - y = 0$ គេបាន $x = y = \frac{3}{4}, \ \mu_2 = -\frac{3}{4}$ គ្មានចម្លើយ $(\mu_1, \mu_2 \ge 0)$
- បើ $\mu_1 = 0, \ (3 - x - 4y) = 0$ គេបាន $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $\mu_1 = \frac{2}{3}$
- បើ $x - y = 0$, $(3 - x - 4y) = 0$ គេបាន $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{3}{5}$, $\mu_1 = \frac{22}{25}$, $\mu_2 = -\frac{48}{25}$ គ្មានចម្លើយ$(\mu_2 \ge 0)$

ដូច្នេះ គេបាន $x = \frac{5}{3}, \ y = \frac{1}{3}$ និង $Maximize\ f = -1$ ឬ $Minnimize\ f = 1$ ។

<u>**ឧទាហរណ៍៣**</u>: ឧបមាថាយើងទិញសារធាតុគីមី \$10 ក្នុងមួយអោន។ ហើយមានធាតុគីមីចំនួន 17.25 អោនប៉ុណ្ណោះដែលអាចរកបាន។ យើងអាចផ្លាស់ប្តូរសារធាតុគីមីនេះនៅក្នុងផលិតផលពីរគឺ A និង B ដើម្បីផលិតឲ្យចេញជាផលិតផល A ត្រូវចំណាយ \$3 ក្នុងមួយអោន និងទៅជាផលិតផល B ត្រូវចំណាយ \$5 ក្នុងមួយអោន។ ប្រសិនបើផលិតផល A ផលិតអស់ X_1 អោន ហើយក្នុងតម្លៃដែលយើង បានដាក់គឺ \$30-X_1 និង ផលិតផល B ផលិតអស់ X_2 អោន ហើយក្នុងតម្លៃដែលយើងបានដាក់គឺ \$50-X_2 ។ តើយើងគួរតែទិញសារធាតុគីមីចំនួនប៉ុន្មាន ?

តាង x_3 គឺជាសារធាតុគីមីដែលគេទិញ

នោះគេបាន $Maximze\ x_1(30 - x_1) + x_2(50 - 2x_2) - 3x_1 - 5x_2 - 10x_3$

Subject to: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 0 \\ x_3 \le 17.25 \end{cases}$

គេបាន សមីការ Lagrange

$$L(x_1, x_2, x_3, \mu_1, \mu_2) = x_1(30 - x_1) + x_2(50 - 2x_2) - 3x_1 - 5x_2 - 10x_3$$
$$+\mu_1\left[0 - (x_1 + x_2 - x)\right] + \mu_2(17.25 - x_3)$$

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu_2} = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 0 \\ x_3 \ge 17.25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 - 2x_2 - 3 - \mu_1 = 0 & (1) \\ 50 - 4x_2 - \mu_1 - 5 = 0 & (2) \\ -10 + \mu_1 - \mu_2 = 0 & (3) \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 & (4) \\ 17.25 - x_3 = 0 & (5) \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 0 & (6) \\ x_3 \le 17.25 & (7) \\ \mu_1, \mu_2 \ge 0 \end{cases}$$

តាមការដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

គេបាន $x_1 = 8.5$, $x_2 = 8.75$, $x_3 = 17.25$ និង $Max : -369.875$ ។

ផ្នែកលំហាត់

លំហាត់ដោះស្រាយចំណោទលីនេអ៊ែរតាមក្រាប

1. ដោះស្រាយចំណោទខាងក្រោមតាមក្រាហ្វិច

A. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $z = 3x + 2y$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x + 2y \le 10 \\ 3x + y \le 15 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

B. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $z = 3x + 4y$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x + 2y \le 24 \\ x + y \le 14 \\ 2x + y \le 24 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

C. រកតម្លៃអប្បរមានៃ $z = 3x + 4y$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 2x + y \ge 8 \\ x + 2y \le 10 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

D. រកតម្លៃអប្បរមានៃ $z = 5x + 6y$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x + 4y \ge 20 \\ 4x + y \ge 20 \\ x + y \le 20 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$ ។

2. មីងស៊ីនួនចង់លាយម្សៅសណ្តែក ស្ករសនិងទឹកដើម្បីធ្វើភេជ្ជៈពីរប្រភេទគឺទឹកសណ្តែកស និងទឹកសណ្តែកខៀវ។ ទឹកសណ្តែកសធ្វើពីស្ករស 20% ម្សៅសណ្តែក 20% និងទឹក 60% ហើយទឹកសណ្តែកខៀវធ្វើពីស្ករស 40% ម្សៅសណ្តែក 20% និងទឹក 40%។ មីងស៊ីនួនចំណេញបាន 60 សេនក្នុង 1kg នៃទឹកសណ្តែកស និងបានចំណេញ 80 សេនក្នុង1kg នៃទឹកសណ្តែកខៀវ។ ប្រសិនបើគាត់មានស្ករស 60kg និងម្សៅសណ្តែក 40kg នោះគាត់អាចផលិតទឹកសណ្តែកប្រភេទនីមួយៗបានប៉ុន្មានគីឡូក្រាម ដើម្បីឱ្យគាត់ទទួលបានប្រាក់ចំណេញខ្ពស់បំផុត?

3. ក្រុមហ៊ុន TOYOTA តំឡើងរថយន្តពីរប្រភេទគឺឡានតូច (Car) និងឡានដឹកទំនិញ (Van) នៅទីក្រុង Bang Kok។ រថយន្តនីមួយៗត្រូវឆ្លងកាត់ហាងបាញ់ថ្នាំ និងហាងតំឡើង។ ប្រសិនបើហាងបាញ់ថ្នាំត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានតូច នោះគេអាចបាញ់ថ្នាំឡានតូច បានចំនួន 800 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ប្រសិនបើហាងបាញ់ថ្នាំត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានដឹកទំនិញ នោះគេអាចបាញ់ថ្នាំឡានដឹកទំនិញបានចំនួន 700 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ប្រសិនបើហាងតំឡើងត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានតូច នោះគេអាចតំឡើងឡានតូចបានចំនួន 1700 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ប្រសិនបើហាងតំឡើងត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានដឹកទំនិញ នោះគេអាចតំឡើងឡានដឹកទំនិញបានចំនួន 1200 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ឡានតូចនីមួយៗផ្តល់ប្រាក់ចំណេញបាន \$300 និងឡានដឹកទំនិញផ្តល់បាន \$500 ។ ចូរអ្នកបង្កើតរូបមន្តតាមបែបកម្មវិធីលីនេអ៊ែរ ដែលនឹងធ្វើឱ្យប្រាក់ចំណេញរបស់ក្រុមហ៊ុន TOYOTA ឡើងដល់កម្រិតអតិបរមា ។ បន្ទាប់មកដោះស្រាយតាមក្រាហ្វិច។

4. សហគ្រាសកាត់ដេរមួយមានសង្វាក់ផលិតកម្មពីរលំដាប់គឺកាត់ និងដេរ។ ក្នុងមួយថ្ងៃៗគេមានពេលវេលាបម្រុងសម្រាប់កាត់ 160 h និងមានពេលវេលាបម្រុងសម្រាប់ដេរ 210 h ។ ផលិត ផលរបស់សហគ្រាសគឺខោ និងអាវដែលគេអាចរកប្រាក់ចំណេញ $5 ក្នុងខោមួយ $4 ក្នុងអាវមួយ។ ការងារកាត់ក្នុងមួយម៉ោងៗគេអាចកាត់បានខោ 6 ឬ អាវ 4 ។ កិច្ចការដេរត្រូវចំណាយពេល 20mn សម្រាប់ខោមួយ និង 15mn អាវមួយ។ តើក្នុងមួយថ្ងៃសហគ្រាសត្រូវ ផលិតខោនិងអាវចំនួនប៉ុន្មានដើម្បីបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមា? សរសេររូបមន្តគណិតវិទ្យានៃចំណោទ និងដំណោះស្រាយតាមក្រាហ្វិច។

5. ស្រីលក្ខណាមានហាងលក់ទឹកអប់តូចមួយ ជាហាងដែលនាងលក់ទឹកអប់ម៉ាកដែលលាយខ្លួនឯង និងលក់ម៉ាកផ្សេងៗទៀតរបស់គេ។ បច្ចុប្បន្ននេះនាងបានដាក់លក់ផលិតផលពីរប្រភេទរបស់នាងផ្ទាល់គឺ Silent Flower និង Moon Swing ។ Silent Flower ផ្តល់ប្រាក់ចំណេញ 9$ ក្នុងមួយអោន ចំណែកឯ Moon Swing ផ្តល់ប្រាក់ចំណេញ 6$ប៉ុណ្ណោះក្នុងមួយអោន។ ប្រភេទទឹកអប់ទាំងពីររបស់នាងផ្សំឡើងដោយធាតុសំខាន់ៗបីគឺ E_1, E_2 និង E_3 ។ ការផ្សំចាំបាច់ត្រូវធ្វើដូចខាងក្រោម៖

	E_1	E_2	E_3
Silent Flower	0.2oz	0.3oz	0.5oz
Moon Swing	0.1oz	0.1oz	0.8oz

ស្រីលក្ខណាតែងតែត្រួតពិនិត្យគ្រឿងផ្គត់ផ្គង់របស់នាងរាល់ថ្ងៃ។ នៅព្រឹកនេះនាងមាន E_1 ចំនួន 48oz E_2 ចំនួន 30oz និង E_3 ចំនួន 60oz ។ តើនាងគួរលាយអ្វីខ្លះក្នុងថ្ងៃនេះដើម្បីធ្វើឱ្យប្រាក់ចំណេញរបស់នាងកើនឡើងអតិបរមា?

6. អ្នកគ្រប់គ្រងផ្នែកប្រាក់វិភាគទានមួយចង់វិនិយោគ $100 000 នៅក្នុងហ៊ុនពីរគឺ A និងB។ ហ៊ុន A គឺអភិរក្សនិយម (មានស្ថេរភាពថិតថេរ) ចំណែកឯហ៊ុន B វិញគឺត្រូវបានគេគិតថាប្រថុយប្រថាន។ អ្នកគ្រប់គ្រងទាំងនោះបានយល់ស្របថាពួកគេគួរវិនិយោគយ៉ាងច្រើន $80 000 ទៅក្នុងហ៊ុន A និងយ៉ាងតិច $12 000 ទៅក្នុងហ៊ុន B ។ គេសង្ឃឹមថាហ៊ុន A និងផ្តល់កម្រៃ 12% ក្នុងមួយឆ្នាំហើយហ៊ុន B និងផ្តល់កម្រៃ 15% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តាមច្បាប់នៃគម្រោងប្រាក់វិភាគទានបានកំណត់ថា ត្រូវវិនិយោគទៅក្នុងក្រុមហ៊ុនអភិរក្សនិយមយ៉ាងហោចបីដងធៀបទៅនឹងហ៊ុនដែលប្រថុយប្រថាននោះ។ តើគេគួរវិនិយោគទៅក្នុងហ៊ុន A ប៉ុន្មាននិងហ៊ុន B ប៉ុន្មាន ដើម្បីឱ្យផលត្រឡប់មកវិញអតិបរមា? ចូរដោះស្រាយដោយប្រើក្រាប។

7. គេយកត្រីពីរប្រភេទយកមកចិញ្ចឹមក្នុងស្រះមួយ។ ទម្ងន់ជាមធ្យមរបស់ត្រីគឺ 2kg សម្រាប់ត្រីប្រភេទទីមួយ និង 1kg សម្រាប់ត្រីប្រភេទទីពីរ។ រាល់ថ្ងៃមានចំណីពីរប្រភេទសម្រាប់ឱ្យត្រីស៊ី គឺចំណីប្រភេទទីមួយមាន 500 ឯកតា និងចំណីប្រភេទទីពីរមាន 900 ឯកតា។ រាល់ថ្ងៃត្រីប្រភេទទីមួយស៊ីចំណីប្រភទទីមួយអស់ 1 ឯកតា និងចំណីប្រភេទទីពីរអស់ 3ឯកតា ហើយត្រីប្រភេទទីពីរស៊ីចំណីប្រភេទទីមួយអស់ 2 ឯកតា និងចំណីប្រភេទទីពីរអស់ 1ឯក-តា។ តើគេត្រូវជ្រើសរើសត្រី យ៉ាងដូចម្តេចយកមកចិញ្ចឹម បើម្ចាស់ចង់ទទួលបានទម្ងន់ត្រីច្រើនបំផុត តាមដែលអាចធ្វើបាន?
8. ក្រុមហ៊ុន Zupper Toy មានគម្រោងផលិតតុក្កតាថ្មីពីរ Marty និង Ivan ។ គេសង្ឃឹមថា Marty នឹងត្រូវការជ័រ 80g និងផ្លាស្ទិច 20g ហើយ Ivan នឹងត្រូវការជ័រ 40g និងផ្លាស្ទិច 60g។ ក្រុមហ៊ុនមានជ័រ 120 តោន និងផ្លាស្ទិច 50 តោន។ តើក្រុមហ៊ុនគួរតែទទួលយក គំរោងផលិតកម្ម ណាមួយដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមា បើ Marty មួយៗនិងផ្តល់ប្រាក់ចំណេញបាន 2$ ហើយ Ivan នីមួយៗផ្តល់ប្រាក់ចំណេញ 3.75$?
9. រោងចក្រ Electrocomp Corporation ផលិតផលិតផលអគ្គិសនីពីរប្រភេទគឺ ម៉ាស៊ីនត្រជាក់ និង កង្ហារប្រភេទធំ។ ឧបករណ៍ទាំងពីរនេះប្រើប្រាស់ពេលវេលាសម្រាប់តំឡើងចំពោះឧបករណ៍នីមួយក្នុងការ wiring និង drilling គឺមានរយៈពេលប្រហាក់ប្រហែលគ្នា។ ចំពោះម៉ាស៊ីនត្រជាក់មួយគ្រឿងត្រូវការ 3h សម្រាប់ wiring និង 2h សម្រាប់ drilling។ ចំពោះកង្ហារមួយត្រូវការ 2h សម្រាប់ wiring និង 1h សម្រាប់ drilling ។ ក្នុងអំឡុងរយៈពេលផលិតកម្មបន្តបន្ទាប់ទៀត 240h នៃរយៈពេល wiring និង 140h នៃរយៈពេល drilling ត្រូវបានគេប្រើប្រាស់។ នៅពេលលក់គេអាចទទួលបានប្រាក់ចំណេញ 25$ ក្នុងម៉ាស៊ីនត្រជាក់មួយគ្រឿង និង 15$ សម្រាប់កង្ហារមួយគ្រឿង។ បង្កើតទម្រង់ស្តង់ដា និង ដោះស្រាយស្ថានភាពផលិតផលចម្រុះតាមវិធីក្រាហ្វិច ដោយគណនាថា តើគេត្រូវផលិត ម៉ាស៊ីនត្រជាក់ និង កង្ហារចំនួនប៉ុន្មានដើម្បីរកឱ្យឃើញនូវប្រាក់ចំណេញអតិបរមា?
10. កសិករម្នាក់មានដីចម្ការចំនួន 150 អា គាត់ដាំដំណាំទាំងពីរមុខគឺពោត និង សណ្តែក។ ថ្លៃចំណាយក្នុងការដាំសណ្តែក និង ពោត ស្មើ 20 ដុល្លា និង 10 ដុល្លា រៀងគ្នា។ គាត់មានលុយត្រឹមតែ 2000 ដុល្លា ប៉ុណ្ណោះសម្រាប់ដាំដំណាំទាំងពីរមុខនេះ។ គាត់បង្គាប់ឱ្យគេដាំដំណាំសណ្តែកយ៉ាងតិច 10 អា និង ដំណាំពោតយ៉ាងតិច 20 អា ហើយគាត់បានធ្វើការប៉ាន់ស្មានថា គាត់នឹងទទួលបានប្រាក់ចំណេញពីដំណាំសណ្តែក 150 ដុល្លា ក្នុងមួយអា និងដំណាំពោត 120 ដុល្លា។ តើគាត់ត្រូវដាំដំណាំមួយមុខៗប៉ុន្មានអាទើបបានប្រាក់ចំណេញច្រើនបំផុត? សរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដា និងដំណោះស្រាយតាមក្រាហ្វិច។

លំហាត់ដោះស្រាយចំណោទលីនេអ៊ែរតាមវិធី Simplex

1. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

   រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 4x_1 + 3x_2$

   ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 120 \\ x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 \,,\, x_2 \ge 0 \end{cases}$ ។

2. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

   រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

   ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12 \\ x_2 + x_3 \le 8 \\ x_1 \,,\, x_2 \,,\, x_3 \ge 0 \end{cases}$ ។

3. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

   រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 24x_1 + 16x_2 + 10x_3$

   ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 30 \\ x_1 \,,\, x_2 \,,\, x_3 \ge 0 \end{cases}$ ។

4. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

   រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 320x_1 + 108x_2 + 120x_3$

   ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 45 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 \le 54 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 32 \\ x_1 \,,\, x_2 \,,\, x_3 \ge 0 \end{cases}$ ។

5. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

   រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 32x_1 + 18x_2 + 19x_3$

   ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 12 \\ 8x_1 + 10x_2 + 3x_3 \le 90 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 30 \\ x_1 \,;\, x_2 \,,\, x_3 \ge 0 \end{cases}$ ។

6. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

   រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

   ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 20 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \le 50 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 30 \\ x_1 \,,\, x_2 \,,\, x_3 \ge 0 \end{cases}$ ។

7. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 5x_1 + 42x_2 + 26x_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 7x_1 + 12x_2 + 6x_3 \le 50 \\ 18x_1 + 9x_2 + 4x_3 \le 85 \\ 2x_1 + 14x_2 + x_3 \le 66 \\ x_1 , x_2 , x_3 \ge 0 \end{cases}$ ។

8. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = x_1 + x_2 + 5x_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 100 \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 \le 80 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 120 \\ x_1 , x_2 , x_3 \ge 0 \end{cases}$ ។

9. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 2x_1 + x_2 + x_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x_2 + 3x_3 \le 6 \\ x_1 + 2x_3 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 , x_2 , x_3 \ge 0 \end{cases}$ ។

10. ក្រុមហ៊ុន Zupper Toy មានគម្រោងផលិតតុក្កតាថ្មីពីរប្រភេទ Magnificent Marty និង Incredible Ivan ។ គេសង្ឃឹមថា Marty នឹងត្រូវការជ័រ 80g និថផ្លាស្ទិច 20g ហើយ Ivan នឹងត្រូវការជ័រ 40g និងផ្លាស្ទិច 60g ។ ក្រុមហ៊ុនមានជ័របម្រុងទុក 120 តោន និងផ្លាស្ទិច 50 តោន ប៉ុណ្ណោះ ។ តើក្រុមហ៊ុនគួរតែទទួលយកគម្រោងផលិតកម្មណាមួយដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមាបើ Marty និង Ivanនិមួយៗផ្តល់ប្រាក់ចំណេញបាន $2 និង $3.75 រៀងគ្នា។

ចូរសរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដា និងដោះស្រាយវាតាមវិធីស៊ីមផ្លេច។

11. គេយកត្រីពីរប្រភេទមកចិញ្ចឹមក្នុងស្រះមួយ។ ទម្ងន់ជាមធ្យមរបស់ត្រីគឺ 2Kg សម្រាប់ត្រីប្រភេទទី១ និង 1Kg សម្រាប់ត្រីប្រភេទទី២ ។ រាល់ថ្ងៃមានចំណីពីរប្រភេទសម្រាប់ឱ្យត្រីស៊ីគឺចំណីប្រភេទទី១ 500 ឯកតា និងជំណីប្រភេទទី២មាន 900 ឯកតា។ រាល់ថ្ងៃជាមធ្យមត្រីប្រភេទទី១ ស៊ីចំណីប្រភេទទី១ អស់ 1 ឯកតានិងចំណីប្រភេទទី២អស់ 3 ឯកតាហើយត្រីប្រភេទទី២ ស៊ីចំណីប្រភេទទី១ អស់ 2 ឯកតានិងចំណីប្រភេទទី២អស់ 1 ឯកតា។ តើត្រូវជ្រើសរើសត្រីយ៉ាងដូចម្តេចយកមកចិញ្ចឹម បើម្ចាស់ចង់បានទម្ងន់ត្រីច្រើនបំផុតដែលអាចធ្វើបាន?

ចូរសរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដាគណិតវិទ្យា និងដោះស្រាយវាតាមវិធីស៊ីមផ្លេច។

12. ក្រុមហ៊ុន Supperior Tool Company ផលិតនូវគ្រឿងដែកផ្សេងៗមានដែកគោល 50mm ពីរប្រភេទគឺ ប្រភេទក្បាលមូលនិងប្រភេទក្បាលសំប៉ែត។ ក្រុមហ៊ុនបានលក់ដែកគោលទៅឱ្យហាងគ្រឿងដែកតម្លៃ $20 និង $25 រៀងគ្នាក្នុងមួយប្រអប់។ តម្លៃសម្ភារៈក្នុងប្រអប់នីមួយៗគឺ $10 និង $8 រៀងគ្នា ហើយនៅកន្លែងផលិតនៃរោងចក្រមានចំណាយផ្សេងៗចំនួន $5000 ក្នុងមួយសប្តាហ៍។ ការផលិតនិងការវេចខ្ចប់ដែកគោលក្បាលមូលមួយប្រអប់អស់រយៈពេល 3 នាទី និង 2 នាទី ចំណែកដែកគោលក្បាលសំប៉ែតមួយប្រអប់អស់រយៈពេល 2 នាទីនិង 8 នាទីរៀងគ្នា។ ក្នុងមួយសប្តាហ៍ៗការផលិតនិងការវេចខ្ចប់អាចប្រើអស់រយៈពេល 60 ម៉ោងរៀងគ្នា។

ចូរកំណត់អនុគមន៍គោលបំណង ដែលនឹងផ្តល់ប្រាក់ចំណេញខ្ពស់បំផុតប្រចាំសប្តាហ៍ដល់ក្រុមហ៊ុន។ (សរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដាគណិតវិទ្យា និងដោះស្រាយវាតាមវិធីស៊ីមផ្លេច។

13. ម្ចាស់ហាងលក់ទឹកអប់មួយលក់ទឹកអប់ពីរប្រភេទដែលមានម៉ាក់ Silent Flower និង Mood Swing លាយដោយខ្លួនឯង។ទឹកអប់ម៉ាក Silent Flower ផ្តល់ប្រាក់ចំណេញ 10% ក្នុងមួយអោន(ounce) និង Mood Swing ផ្តល់ប្រាក់ចំណេញ 10% ក្នុងមួយអោន ។ ទឹកអប់ប្រភេទទាំងពីរនេះផ្សំឡើងដោយធាតុសំខាន់ៗ (ទឹកលម្អងនៃដើមឈើ ឬ ផ្កា) គឺ E_1, E_2 និងE_3 ។ ការផ្សំចាំបាច់ត្រូវធ្វើតារាងខាងក្រោម ៖

Type	E_1	E_2	E_3
Silent Flower	20%	30%	50%
Mood Swing	10%	10%	80%

ព្រឹកនេះនៅក្នុងហាងមានសារធាតុ E_1 ចំនួន 48 oz ,និង E_2 ចំនួន 30 oz និង E_3 ចំនួន 60 oz ។ តើថ្ងៃនេះម្ចាស់ហាងត្រូវផលិតទឹកអប់ទាំងពីរប្រភេទយ៉ាងណា ដើម្បីឱ្យគាត់បានចំណេញអតិបរមា?

ចូរសរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដាគណិតវិទ្យា និងដោះស្រាយវាតាមវិធីស៊ីមផ្លេច។

លំហាត់ដោះស្រាយចំណោទមិនលីនេអ៊ែរតាមវិធី Lagrange Miltipliers

1. គេមានអនុគមន៍ *Cobb.Douglas*: $f(x,y)=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ ដែល $100x+100y=400000$ ។ ចូររកចំណុចបរមាដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ *lagrange multiplies* ។
2. ឥឡូវយើងនឹងមកត្រួតពិនិត្យមើលសមីការប្រាក់ចំណេញ បានដាក់បង្ហាញនៅដើមផ្នែកនេះ

$$p(x,y)=-2x^2+60x-3y^2+72y+100$$

ដែល x តាងឲ្យចំនួនកៅអីដែលធ្វើដោយដៃ និង y ជាចំនួនកៅអីយោលដែលធ្វើដោយដៃនៃការផលិតក្នុងរយៈពេលមួយសប្តាហ៍។ ដែល $g(x,y)=x+y=20$ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ Lagrange multiplies រកតម្លៃ x,y ណាដែលធ្វើឲ្យប្រសើបំផុត។

3. អនុគន៍ $U=f(x,y)$ តំណាងឲ្យអត្ថប្រយោជន៍ ឬ ភាពពេញចិត្តរបស់អតិថិជន ដែលពួកគេប្រើប្រាស់ដ៏ជាក់លាក់នៃចំនួនផលិតផល x និង y ។ អនុគមន៍ $f(x,y)=x^2y^2$ ដែលក្រោមលក្ខខណ្ឌ $g(x,y)=2x+4y=40$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ មានតម្លៃអតិបរមា។
4. ប្រើទ្រឹស្តីបទ *Lagrange multipliers* ចូររក $Min\, f(x,y,z)=2xy+2yz+xz$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $xyz=4$ ។
5. បើ $x>0$, $y>0$ និង $z>0$ ចូរកំណត់តម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ $f(x,y,z)=xyz$ ដែលមានលក្ខខណ្ឌ $x+y+z^2=16$ ។

ផ្នែកចម្លើយ

លំហាត់ដោះស្រាយចំណោទលីនេអ៊ែរតាមក្រាប

1. ដំណោះស្រាយចំណោទតាមក្រាម៖

A. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $z = 3x + 2y$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x + 2y \le 10 \\ 3x + y \le 15 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

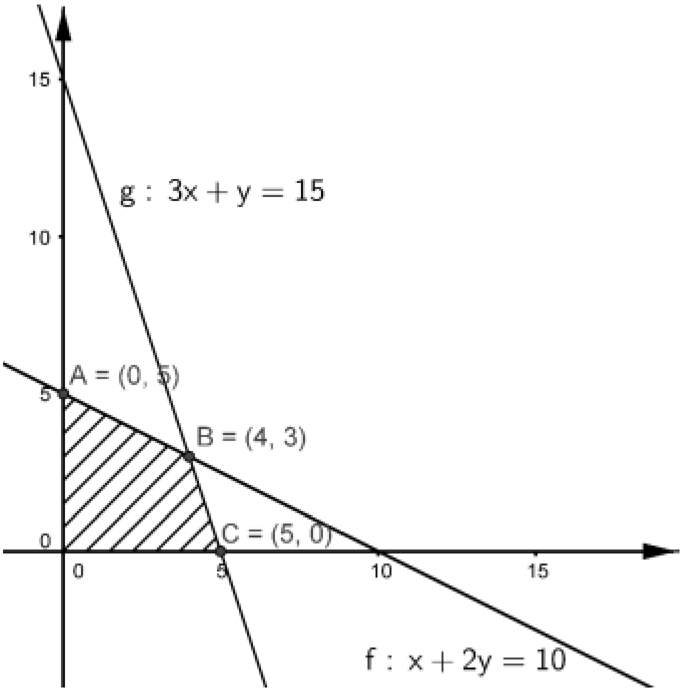
- សង់បន្ទាត់

$x + 2y = 10$

x	0	10
y	5	0

$3x + y = 15$

x	0	5
y	15	0



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់គូសឆ្នូត និងចំណុចកាច់ជ្រុង
- រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ

$\begin{cases} x + 2y = 10 & (1) \times (-3) \\ 3x + y = 15 & (2) \end{cases}$

$-5y = -15 \Rightarrow y = 3$

$(1): x + 2(3) = 10 \Rightarrow x = 4$

តម្លៃនៃចំណុចកាច់ជ្រុង

- $0(0,0) \Rightarrow z = 3(0) + 2(0) = 0$
- $A(0,5) \Rightarrow z = 3(0) + 2(5) = 10$
- $B(4,3) \Rightarrow z = 3(4) + 2(3) = 18$
- $C(5,0) \Rightarrow z = 3(5) + 2(0) = 15$

ដូចនេះ ចម្លើយដែលប្រសើរបំផុត $(x = 4, y = 3)$ ដែលធ្វើឱ្យ z មានតម្លៃអតិបរមាគឺ 18។

B. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $z = 3x + 4y$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x + 2y \le 24 & (1) \\ x + y \le 14 & (2) \\ 2x + y \le 24 & (3) \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

- សង់បន្ទាត់

$x + 2y = 24$

x	0	0
y	12	24

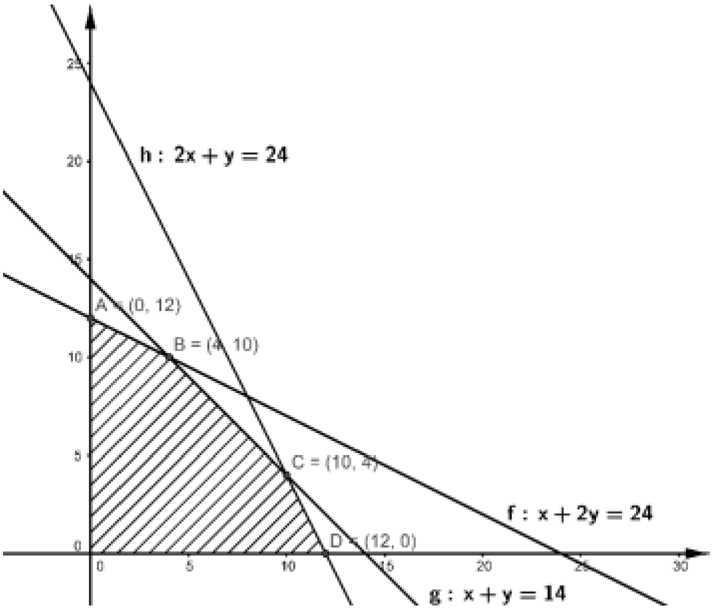
$x + y = 14$

x	0	14
y	14	0

$2x + y = 24$

x	0	12
y	24	0

h: 2x + y = 24



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់គូសឆ្នូត និងចំណុចកាច់ជ្រុង

តម្លៃនៃចំណុចកាច់ជ្រុង

- $0(0,0) \Rightarrow z = 0$
- $A(0,12) \Rightarrow z = 3(0) + 4(12) = 48$
- $B(4,10) \Rightarrow z = 3(4) + 4(10) = 52$
- $C(10,4) \Rightarrow z = 3(10) + 4(4) = 46$
- $D(12,0) \Rightarrow z = 3(12) + 4(0) = 12$

ដូចនេះ ចម្លើយដែលប្រសើរបំផុត $x = 4, y = 10$ ដែលធ្វើឱ្យ z មានតម្លៃអតិបរមា 56។

C. រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $z = 3x + 4y$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 2x + y \ge 8 & (1) \\ x + 2y \le 10 & (2) \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

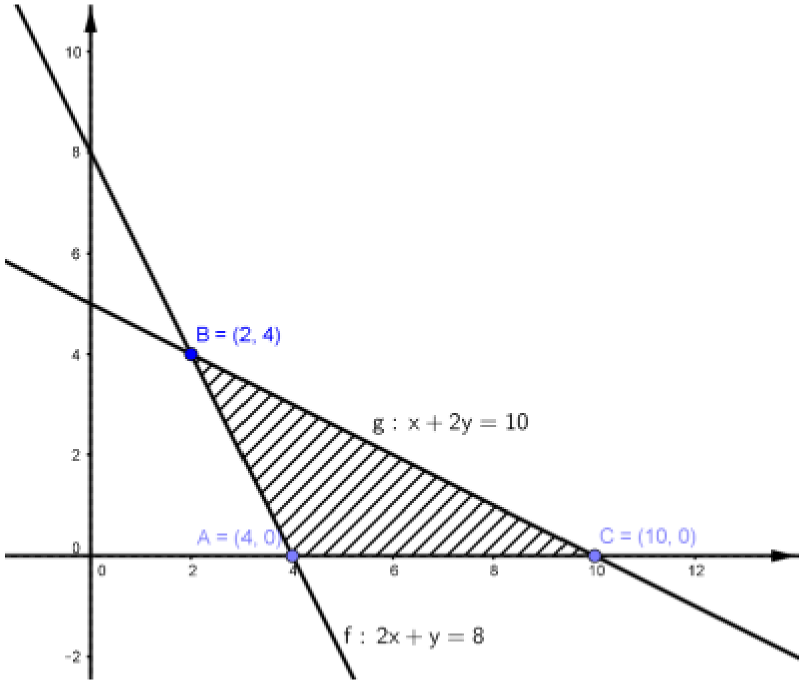
- សង់បន្ទាត់

$2x+y=8$

x	0	4
y	8	0

$x+2y=10$

x	0	10
y	5	0



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់គូសឆ្នូត និងចំណុចកាច់ជ្រុង
- រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ដែលជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់និងបន្ទាត់ (d_2)

$$+\begin{cases}2x+y=8 & (1)\times(-2)\\ x+2y=10 & (2)\end{cases}$$

$-3x=-6 \Rightarrow x=2$ ជំនួសក្នុង (1)

$(1): 2(2)+y=8 \Rightarrow y=4$

តម្លៃនៃចំណុចកាច់ជ្រុង

- $A(4,0) \Rightarrow z=3\times4+4\times0=12$
- $B(2,4) \Rightarrow z=3\times2+4\times4=22$
- $C(10,0) \Rightarrow z=3\times10+4\times0=30$

ដូចនេះ ចម្លើយដែលប្រសើរបំផុតគឺ $x=4, y=0$ ដែលធ្វើឱ្យ z មានតម្លៃអប្បបរមា12។

D. រកអប្បរមានៃ $z=5x+6y$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases}x+4y\geq 20\\ 4x+y\geq 20\\ x+y\leq 20\\ x,y\geq 0\end{cases}$

- សង់បន្ទាត់

$x+4y=20$

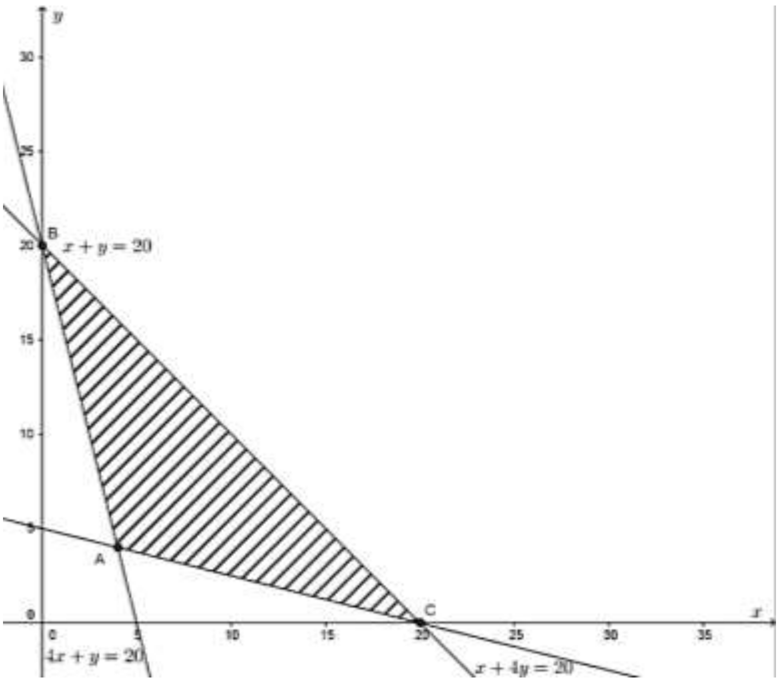
x	0	20
y	5	0

$4x + y = 20$

x	0	5
y	20	0

$x + y = 20$

x	0	20
y	20	0



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់គូសឆ្នូត និងចំណុចកាច់ជ្រុង
- រកកូអរដោនេនៃចំណុច A ដែលជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(d_1) និងបន្ទាត់(d_2)

$$+\begin{cases} x + 4y = 20 & (1)\times(-4) \\ 4x + y = 20 & (2) \end{cases}$$

$-15y = -60 \Rightarrow y = 4$ ជំនួសក្នុង (1)

$(1): x + 4(4) = 20 \Rightarrow x = 4$

តម្លៃនៃចំណុចកាច់ជ្រុង

- $A(4,4) \Rightarrow z = 5\times4 + 6\times4 = 44$
- $B(0,20) \Rightarrow z = 5\times0 + 6\times20 = 120$
- $C(20,0) \Rightarrow z = 5\times20 + 6\times0 = 100$

ដូចនេះ ចម្លើយដែលប្រសើរបំផុតគឺ $x = 4, y = 4$ ដែលធ្វើឱ្យ z មានតម្លៃអប្បបរមា 44 ។

2). មីងស៊ីនួនចង់លាយម្សៅសណ្តែក ស្ករស និងទឹក ដើម្បីធ្វើភេសជ្ជៈពីរប្រភេទគឺទឹកសណ្តែកស និងទឹកសណ្តែកខៀវ។ ទឹកសណ្តែកសធ្វើពីស្ករស 20% ម្សៅសណ្តែក 20% និងទឹក 60% ហើយទឹកសណ្តែកខៀវធ្វើពីស្ករស 40% ម្សៅសណ្តែក 20% និងទឹក 40%។ មីងស៊ីនួនចំណេញបាន 60 សេនក្នុង 1kg នៃទឹកសណ្តែកស និងបានចំណេញ 80 សេនក្នុង1kg នៃទឹកសណ្តែកខៀវ។ ប្រសិនបើគាត់មានស្ករស 60kg និងម្សៅសណ្តែក 40kg នោះតើគាត់អាចផលិតទឹកសណ្តែកប្រភេទនិមួយបានប៉ុន្មានគីឡូក្រាម ដើម្បីឱ្យគាត់ទទួលបានប្រាក់ចំណេញខ្ពស់បំផុត?

ដំណោះស្រាយ

2. រកចំនួនទឹកសណ្តែកស និងខៀវដែលត្រូវផលិតដើម្បីទទួលប្រាក់ចំណេញអតិបរមា

- តារាងសង្ខេប

	ស្ករស	ម្សៅសណ្តែក	ទឹក	ប្រាក់ចំណេញ
ទឹកសណ្តែកស	0.2	0.2	0.6	0.6$/1kg
ទឹកសណ្តែកខៀវ	0.4	0.2	0.4	0.8$/1kg
វត្ថុដែលមានសរុប	60kg	40kg		

- បង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

តាង x ជាទឹកសណ្តែកស

y ជាទឹកសណ្តែកខៀវ

$Max\,P: \quad z = 0.6x + 0.8y$

$$\text{S.t} \quad \begin{cases} 0.2x + 0.4y \le 60 \\ 0.2x + 0.2y \le 40 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

$0.2x + 0.4y \le 60$ ការប្រើស្ករសដើម្បីផលិតទឹកសណ្តែកស និងខៀវយ៉ាងច្រើន 60kg

$0.2x + 0.2y \le 40$ ការប្រើម្សៅសណ្តែកដើម្បីផលិតទឹកសណ្តែកស និងខៀវយ៉ាងច្រើន 40kg ។

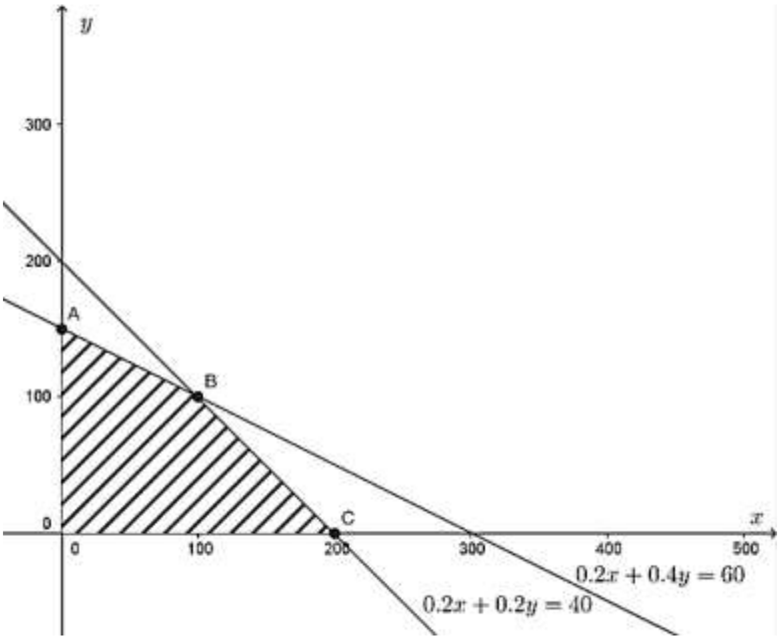
- សង់បន្ទាត់

$0.2x + 0.4y = 60$

x	0	300
y	150	0

$0.2x + 0.2y = 40$

x	0	200
y	200	0



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់គូសឆ្នូត និងចំណុចកាច់ជ្រុង
- រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ដែលជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(d_1) និង(d_2)

$$-\begin{cases} 0.2x+0.4y=60 & (1) \\ 0.2x+0.2y=40 & (2) \end{cases}$$

$0.2y=20 \Rightarrow y=100$ ជំនួស (1)

$$(1): 0.2x+0.4(100)=60 \Rightarrow x=\frac{60-40}{0.2}=100$$

- តម្លៃនៃចំណុចកាច់ជ្រុង
- $0(0,0) \Rightarrow z=0$
- $A(0,150) \Rightarrow z=0.6(0)+0.8(150)=120$
- $B(100,100) \Rightarrow z=0.6(100)+0.8(100)=140$
- $C(200,0) \Rightarrow z=0.6(200)+0.8(0)=120$

ដូចនេះ ចម្លើយដែលប្រសើរបំផុតគឺ $x=0$ និង $y=200$ ដើម្បីទទួលបានចំណេញអតិបរមា 160$ ។

3). ក្រុមហ៊ុន TOYOTA តំឡើងរថយន្តពីរប្រភេទគឺឡានតូច (Car) និងឡានដឹកទំនិញ (Van) នៅទីក្រុង Bang Kok។ រថយន្តនីមួយៗត្រូវឆ្លងកាត់ហាងបាញ់ថ្នាំ និងហាងតំឡើង។ ប្រសិន បើហាងបាញ់ថ្នាំត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានតូច នោះគេអាចបាញ់ថ្នាំឡានតូច បានចំនួន 800 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ប្រសិនបើហាងបាញ់ថ្នាំត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានដឹកទំនិញ នោះគេអាចបាញ់ថ្នាំឡានដឹកទំនិញបានចំនួន 700 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ប្រសិនបើហាងតំឡើងត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានតូច នោះគេអាចតំឡើងឡានតូចបានចំនួន 1700 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ប្រសិនបើហាងតំឡើងត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានដឹកទំនិញ នោះគេអាចតំឡើងឡានដឹកទំនិញបានចំនួន 1200 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ឡានតូចនីមួយៗផ្តល់ប្រាក់ចំណេញបាន $300 និងឡានដឹកទំនិញផ្តល់បាន $500 ។ ចូរអ្នកបង្កើតរូបមន្តតាមបែបកម្មវិធីលីនេអ៊ែរដែលនឹងធ្វើឱ្យប្រាក់ចំណេញរបស់ក្រុមហ៊ុន TOYOTA ឡើងដល់កម្រិតអតិបរមា ។ បន្ទាប់មកដោះស្រាយតាមក្រាហ្វិច ។

ដំណោះស្រាយ

3. រកចំនួន Car និង Van ដែលត្រូវផលិតដើម្បីឱ្យបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមា

- តារាងសង្ខេប

	Cars	Vans
ផ្នែកបាញ់ថ្នាំ	$\frac{1}{800}$	$\frac{1}{700}$
ផ្នែកតំឡើង	$\frac{1}{1700}$	$\frac{1}{1200}$
ប្រាក់ចំណេញ	$\$300$	$\$500$

$\frac{1}{800}$ មានន័យថាមួយថ្ងៃបាញ់ថ្នាំ Cars បាន 800 គ្រឿង

$\frac{1}{700}$ មានន័យថាមួយថ្ងៃបាញ់ថ្នាំ Vans បាន 700 គ្រឿង

$\frac{1}{1700}$ មានន័យថាមួយថ្ងៃតំឡើង Cars បាន 1700 គ្រឿង

$\frac{1}{1200}$ មានន័យថាមួយថ្ងៃតំឡើង Vans បាន 1200 គ្រឿង

- បង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

តាង x ជាចំនួន Cars

y ជាចំនួន Vans

$MaxP: \quad z = 300x + 500y$

S.t $\begin{cases} \frac{1}{800}x + \frac{1}{700}y \le 1 \\ \frac{1}{1700}x + \frac{1}{1200}y \le 1 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

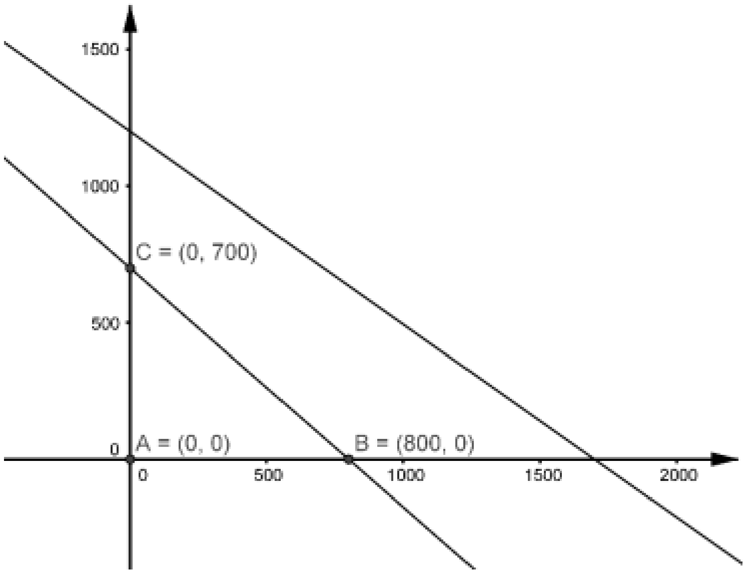
- ដំណោះស្រាយតាមក្រាប

$\frac{1}{800}x + \frac{1}{700}y = 1$

x_1	0	800
x_2	700	0

$\frac{1}{1700}x + \frac{1}{1200}y = 1$

x_1	0	1700
x_2	1200	0



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់ចំណុចកាច់ជ្រុង
  តម្លៃនៃចំណុចកាច់ជ្រុង
- $A(0,0)=0$
- $B(800,0)\Rightarrow z=300(800)+500(0)=240000$
- $C(0,700)\Rightarrow z=300(0)+500(700)=350000$

ដូចនេះ ក្រុមហ៊ុន *TOYOTA* ត្រូវផលិត *Cars* ចំនួន 0 និង *Vans* ចំនួន 700 ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណេញអតិបរិមា 350000$ ។

4). សហគ្រាសកាត់ដេរមួយមានសង្វាក់ផលិតកម្មពីរលំដាប់គឺកាត់ និងដេរ។ ក្នុងមួយថ្ងៃៗគេមានពេលវេលាបម្រុងសម្រាប់កាត់ 160 h និងមានពេលវេលាបម្រុងសម្រាប់ដេរ 210 h ។ ផលិតផលរបស់សហគ្រាសគឺខោ និងអាវដែលគេអាចរកប្រាក់ចំណេញ $5 ក្នុងខោមួយ $4 ក្នុងអាវមួយ។ ការងារកាត់ក្នុងមួយម៉ោងៗគេអាចកាត់បានខោ 6 ឬ អាវ 4 ។ កិច្ចការដេរត្រូវចំណាយពេល 20mn សម្រាប់ខោមួយ និង 15mn អាវមួយ។ តើក្នុងមួយថ្ងៃសហគ្រាសត្រូវ ផលិតខោនិងអាវចំនួនប៉ុន្មានដើម្បីបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមា? សរសេររូបមន្តគណិតវិទ្យានៃចំណោទ និងដំណោះស្រាយតាមក្រាហ្វិច។

ដំណោះស្រាយ

4. រកចំនួន ខោ និងអាវដែលត្រូវផលិតដើម្បីឱ្យបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមា

- តារាងសង្ខេប

	ខោ	អាវ	ម៉ោងបម្រុង
ផ្នែកកាត់	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$160h$
ផ្នែកដេរ	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$210h$
ប្រាក់ចំណេញ	$\$5$	$\$4$	

- បង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

  តាង x ជាចំនួនខោត្រូវផលិត

  y ជាចំនួនអាវត្រូវផលិត

  $MaxP: \ z=5x+4y$

$$S.t\begin{cases}\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}y\le 160\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y\le 210\\ x,y\ge 0\end{cases}$$

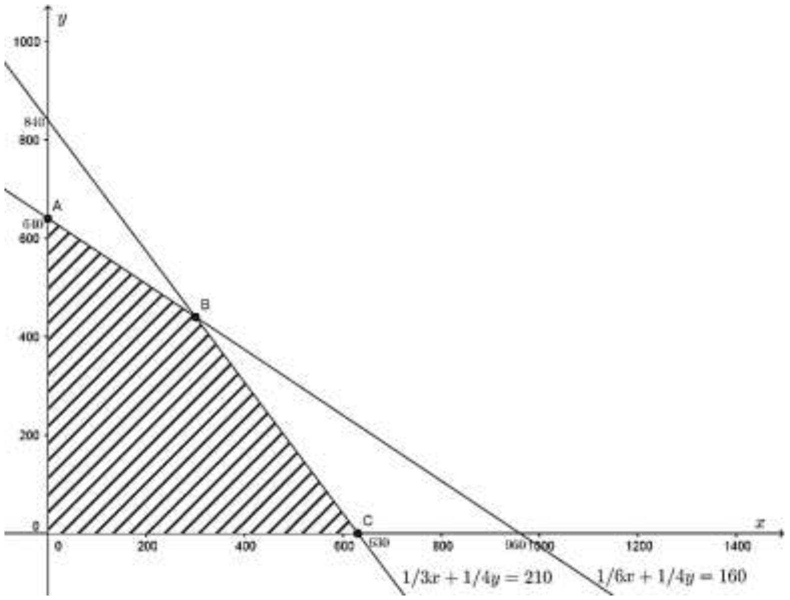
- ដំណោះស្រាយតាមក្រាប

$\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}y=160$

x	0	960
y	640	0

$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y=210$

x_1	0	630
x_2	840	0



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់គូសឆ្នូត និងចំណុចកាច់ជ្រុង
- រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ដែលជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}y=160$ និងបន្ទាត់ $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=210$

$$+\begin{cases}\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}y=160 & (1)\times(-1)\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=210 & (2)\end{cases}$$

$$\frac{1}{6}x=50\Rightarrow x=300$$

$$(1):\frac{1}{6}(300)+\frac{1}{4}y=160$$

$$50+\frac{1}{4}y=160$$

$$y=\frac{160-50}{4}=440$$

តាមក្រាបខាងលើ តំបន់ចម្លើយដែលអាចទទួលយកបាន គឺតំបន់ចតុកោណប៉ោងកំពូល OABC ។

- $(0,0)=0$
- $A(0,640)\Rightarrow z=5\times 0+4\times 640=2560$

- $B(300,440) \Rightarrow z = 5\times300 + 4\times440 = 3260$
- $C(360,0) \Rightarrow z = 5\times630 + 4\times0 = 3150$

ដូចនេះ តាមការគណនាខាងលើសហគ្រាសគួរតែផលិតខោចំនួន 300 ឯកតា និងអាវចំនួន 440 ឯកតា ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណេញអតិបរិមាគឺ 3260$។

5). ស្រីលក្ខណាមានហាងលក់ទឹកអប់តូចមួយជាហាងដែលនាងលក់ទឹកអប់ម៉ាកដែលលាយខ្លួនឯង និងលក់ម៉ាកផ្សេងៗទៀតរបស់គេ។ បច្ចុប្បន្ននេះនាងបានដាក់លក់ផលិតផលពីរប្រភេទរបស់នាងផ្ទាល់គឺ Silent Flower និង Moon Swing ។ Silent Flower ផ្តល់ប្រាក់ចំណេញ 9$ ក្នុងមួយអោន ចំណែកឯ Moon Swing ផ្តល់ប្រាក់ចំណេញ 6$ប៉ុណ្ណោះក្នុងមួយអោន។ ប្រភេទទឹកអប់ទាំងពីររបស់នាងផ្សំឡើងដោយធាតុសំខាន់ៗបីគឺ E_1, E_2 និង E_3 ។ ការផ្សំចាំបាច់ត្រូវធ្វើដូចខាងក្រោម៖

	E_1	E_2	E_3
Silent Flower	0.2oz	0.3oz	0.5oz
Moon Swing	0.1oz	0.1oz	0.8oz

ស្រីលក្ខណាតែងតែត្រួតពិនិត្យគ្រឿងផ្គត់ផ្គង់របស់នាងរាល់ថ្ងៃ។ នៅព្រឹកនេះនាងមាន E_1 ចំនួន 48oz E_2 ចំនួន 30oz និង E_3 ចំនួន 60oz ។ តើនាងគួរលាយអ្វីខ្លះក្នុងថ្ងៃនេះដើម្បីធ្វើឱ្យប្រាក់ចំណេញរបស់នាងកើនឡើងអតិបរមា?

ដំណោះស្រាយ

5. តារាងសង្ខេប

	E_1	E_2	E_3	ប្រាក់ចំណេញ
Silent Flower	0.2oz	0.3oz	0.5oz	9$
Moon Swing	0.1oz	0.1oz	0.8oz	6$
គ្រឿងផ្សំសរុប	48oz	30oz	60oz	

- ការបង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

តាង x ជាទឹកអប់ម៉ាក Silent Flower

y ជាទឹកអប់ម៉ាក Moon Swing

$MaxP: z = 9x + 6y$

S.t $\begin{cases} 0.2x+0.1y \le 48 \\ 0.3x+0.1y \le 30 \\ 0.5x+0.8y \le 60 \\ x, y \le 0 \end{cases}$

- ដំណោះស្រាយតាមក្រាប

$0.2x+0.1y=48$

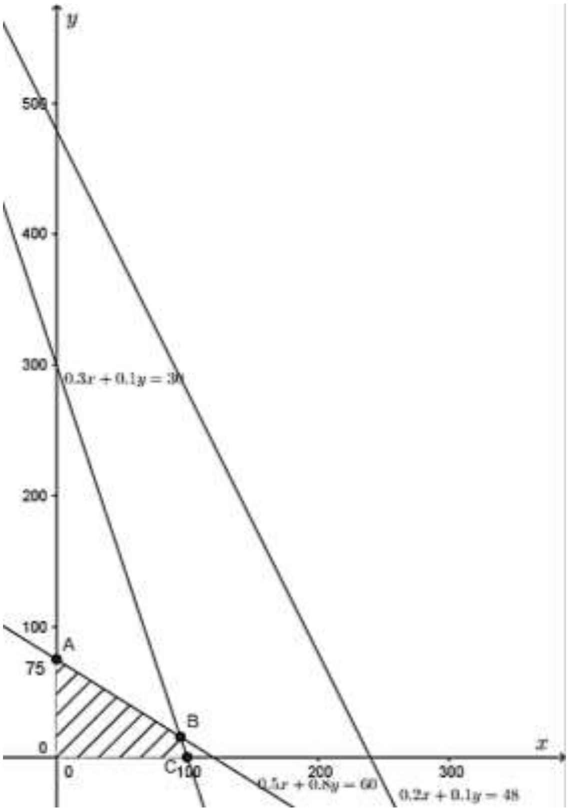
x	0	240
y	480	0

$0.3x+0.1y=30$

x	0	100
y	300	0

$0.5x+0.8y=60$

x	0	120
y	75	0



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់គូសឆ្នូត និងចំណុចកាច់ជ្រុង
- រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ដែលជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d_2) និងបន្ទាត់ (d_3)

$$+\begin{cases} 0.3x+0.1y=30 & (1)\times(-8) \\ 0.5x+0.8y=60 & (2) \end{cases}$$

$-1.9x=-180 \Rightarrow x=\frac{180}{1.9}=94.74$ ជំនួស (1)

$(1): 0.3(94.74)+0.1y=30 \Rightarrow y=\frac{30-28.422}{0.1}=15.78$

តម្លៃនៃចំណុចកាច់ជ្រុង

- $0(0,0) \Rightarrow z=0$
- $A(0,75) \Rightarrow z=9(0)+6(75)=450$
- $B(94.74,15.78) \Rightarrow z=9(94.74)+6(15.78)=947.34$
- $C(100,0) \Rightarrow z=9(100)+6(0)=900$

ដូចនេះនាងគួរលក់ទឹកអប់ Silent Flower ចំនួន 94.74 អោន និង Moon Swing ចំនួន15.78 អោន ។

6). អ្នកគ្រប់គ្រងផ្នែកប្រាក់វិនិច្ឆ័យម្នាក់ចង់វិនិយោគ $100 000 នៅក្នុងហ៊ុនពីរគឺ A និង B។ ហ៊ុន A គឺអភិរក្សនិយម (មានស្ថេរភាពថិតថេរ) ចំណែកឯហ៊ុន B វិញគឺត្រូវបានគេគិតថាប្រថុយប្រថាន។ អ្នកគ្រប់គ្រងទាំងនោះបានយល់ស្របថាពួកគេគួរវិនិយោគយ៉ាងច្រើន $80 000 ទៅក្នុងហ៊ុន A និងយ៉ាងតិច $12 000 ទៅក្នុងហ៊ុន B ។ គេសង្ឃឹមថាហ៊ុន A និងផ្តល់កម្រៃ 12% ក្នុងមួយឆ្នាំហើយហ៊ុន B និងផ្តល់កម្រៃ 15% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តាមច្បាប់នៃគម្រោងប្រាក់វិនិច្ឆ័យបានកំណត់ថា ត្រូវវិនិយោគទៅក្នុងក្រុមហ៊ុនអភិរក្សនិយមយ៉ាងហោចបីដងធៀបទៅនឹងហ៊ុនដែលប្រថុយប្រថាននោះ។ តើគេគួរវិនិយោគទៅក្នុងហ៊ុន A ប៉ុន្មាន និងហ៊ុន B ប៉ុន្មានដើម្បីឱ្យផលត្រឡប់មកវិញអតិបរមា? ចូរដោះស្រាយដោយប្រើក្រាប។

ដំណោះស្រាយ

6. រកចំនួនទឹកប្រាក់ដែលត្រូវវិនិយោគទៅលើក្រុមហ៊ុន A និង B ដើម្បីឱ្យបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមា

- បង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

  តាង x ជាក្រុមហ៊ុន A

  y ជាក្រុមហ៊ុន B

  $$MaxP: \ z = 0.12x + 0.15y$$

  $$\text{S.t} \quad \begin{cases} x + y \le 100000 \\ x \le 80000 \\ y \ge 12000 \\ x \ge 3y \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

- $x + y \le 100000$ មានន័យថាការវិនិយោគទៅលើក្រុមហ៊ុន A និងក្រុមហ៊ុន B យ៉ាងច្រើនអស់ $100000
- $x \le 80000$ វិនិយោគទៅលើក្រុមហ៊ុន A អស់ទឹកប្រាក់យ៉ាងច្រើន $80000
- $y \le 12000$ វិនិយោគទៅលើក្រុមហ៊ុន B អស់ទឹកប្រាក់យ៉ាងតិច$ 120000
- $x \ge 3y$ វិនិយោគទៅលើក្រុមហ៊ុន A យ៉ាងហោចបីដងធៀបនឹងក្រុមហ៊ុន B
- សង់បន្ទាត់

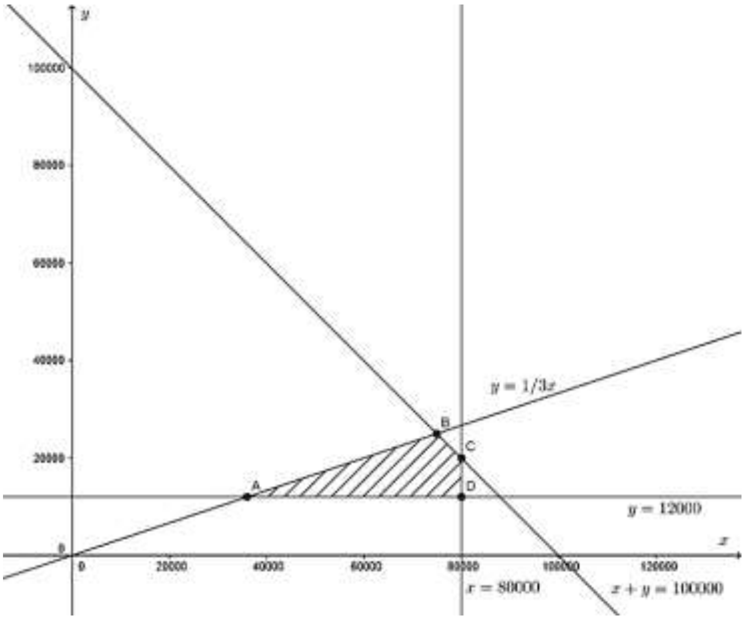
  $x = 80000$
  $y = 12000$

$x+y=100000$

x	0	100000
y	100000	0

$y=\frac{1}{3}x$

x	0	60000
y	0	20000



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់គូសឆ្នូត និងចំណុចកាច់ជ្រុង
- A ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $y=12000$ និង $y=\frac{1}{3}x$

$\begin{cases} y=12000 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases} \Big| 12000=\frac{1}{3}x \Rightarrow x=36000$

$\Rightarrow A(3600,1200) \Rightarrow z=0.12(36000)+0.15(12000)=1620$

- B ជាចំណុចប្រសព្វរវាង $x+y=100000$ និង $y=\frac{1}{3}x$

$\begin{cases} x+y=100000 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases}$

$\Rightarrow x+\frac{1}{3}x=100000 \Rightarrow 4x=300000 \Rightarrow x=75000$

$\Rightarrow y=\frac{1}{3}(75000)=25000$

$\Rightarrow B(75000,25000) \Rightarrow z=0.12(75000)+0.15(25000)=12750$

- C ជាចំណុចប្រសព្វរវាង $x=80000$ និង $y=12000$

$\Rightarrow C(8000,1200) \Rightarrow z=0.12(80000)+0.15(12000)=11400$

- D ជាចំណុចប្រសព្វរវាង $x=80000$ និង $x+y=100000$

$\begin{cases} x+y=100000 \\ x=80000 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 80000+y=100000 \Rightarrow y=20000$

$\Rightarrow D(80000,20000) \Rightarrow z=0.12(80000)+0.15(20000)=12600$

ដូចនេះ គេគួរវិនិយោគលើក្រុមហ៊ុនA ទឹកប្រាក់ $75000 និង B ទឹកប្រាក់ $25000 ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណេញ អតិបរមាគឺ $12750 ។

> 7). គេយកត្រីពីរប្រភេទយកមកចិញ្ចឹមក្នុងស្រះមួយ។ ទម្ងន់ជាមធ្យមរបស់ត្រីគឺ 2kg សម្រាប់ត្រីប្រភេទទីមួយ និង 1kg សម្រាប់ត្រីប្រភេទទីពីរ។ រាល់ថ្ងៃមានចំណីពីរប្រភេទសម្រាប់ឱ្យត្រីស៊ី គឺចំណីប្រភេទទីមួយមាន 500 ឯកតា និងចំណីប្រភេទទីពីរមាន 900 ឯក-តា។ រាល់ថ្ងៃត្រីប្រភេទទីមួយស៊ីចំណីប្រភទទីមួយអស់ 1 ឯកតា និងចំណីប្រភេទទីពីរអស់ 3ឯកតា ហើយត្រីប្រភេទទីពីរស៊ីចំណីប្រភេទទីមួយអស់ 2 ឯកតា និងចំណីប្រភេទទីពីរអស់ 1ឯកតា។ តើគេត្រូវជ្រើសរើសត្រី យ៉ាងដូចម្ដេចយកមកចិញ្ចឹម បើម្ចាស់ចង់ទទួលបានទម្ងន់ត្រីច្រើនបំផុត តាមដែលអាចធ្វើបាន?

ដំណោះស្រាយ

7. រកចំនួនប្រភេទត្រីដែលត្រូវចិញ្ចឹមដើម្បីទទួលបានទម្ងន់ត្រីច្រើនបំផុត

- តារាងសង្ខេប

ប្រភេទត្រី	ចំណីទី១	ចំណីទី២	ទម្ងន់ត្រី
ទីមួយ	1 ឯកតា	3 ឯកតា	2kg
ទីពីរ	2 ឯកតា	1 ឯកតា	1kg
ចំណីសរុប	500 ឯកតា	900 ឯកតា	

- ការបង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

តាង x ជាត្រីប្រភេទទីមួយ

y ជាត្រីប្រភេទទីពីរ

$$MaxP: \quad z = 2x + y$$

$$\text{S.t} \begin{cases} x + 2y \le 500 \\ 3x + y \le 900 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

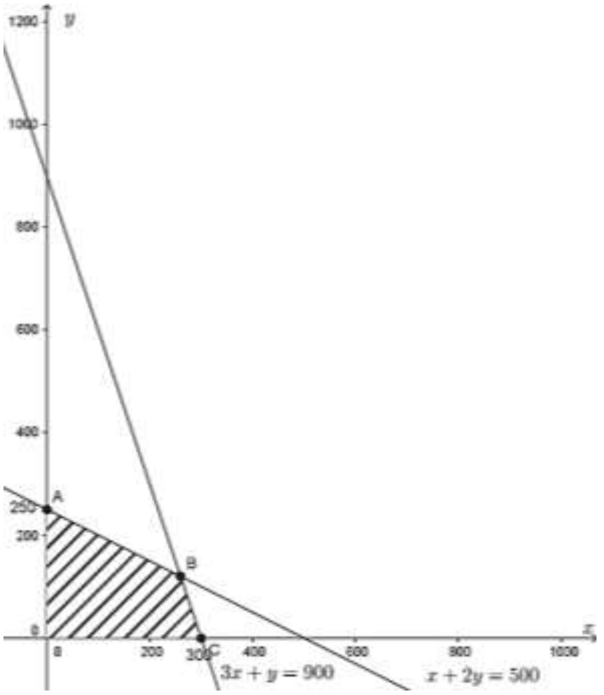
- សង់បន្ទាត់

$x + 2y = 500$

x	0	500
y	250	0

$3x + y = 900$

x	0	300
y	900	0



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់គូសឆ្នូត និងចំណុចកាច់ជ្រុង

- រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ដែលជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $x+2y=500$ និង $3x+y=900$

$$+\begin{cases} x+2y=500 & (1)\times(-3) \\ 3x+y=900 & (2) \end{cases}$$

$$-5y=-600 \Rightarrow y=120 \text{ ជំនួស } (1)$$

$(1): x+2(120)=500 \Rightarrow x=260$

តម្លៃនៃចំណុចកាច់ជ្រុង

- $0(0,0) \Rightarrow z=0$
- $A(0,250) \Rightarrow z=2(300)+0=600$
- $B(260,120) \Rightarrow z=2(260)+120=640$
- $C=(300,0) \Rightarrow z=2(300)+500=500$

ដូចនេះ គេត្រូវចិញ្ចឹមត្រីប្រភេទទីមួយចំនួន 260 ក្បាល និងត្រីប្រភេទទីពីរចំនួន 120 ក្បាល ដើម្បីឱ្យទម្ងន់ត្រីអតិបរមាគឺ 640 គីឡូក្រាម។

8). ក្រុមហ៊ុន Zupper Toy មានគម្រោងផលិតតុក្កតាថ្មីពីរ Marty និង Ivan ។ គេសង្ឃឹមថា Marty នឹងត្រូវការជ័រ 80g និងផ្លាស្ទិច 20g ហើយ Ivan នឹងត្រូវការជ័រ 40g និងផ្លាស្ទិច 60g។ ក្រុមហ៊ុនមានជ័រ 120 តោន និងផ្លាស្ទិច 50 តោន។ តើក្រុមហ៊ុនគួរតែទទួលយក គំរោងផលិតកម្ម ណាមួយដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមា បើ Marty មួយៗនិងផ្តល់ប្រាក់ចំណេញបាន 2$ ហើយ Ivan នីមួយៗផ្តល់ប្រាក់ចំណេញ 3.75$?

ដំណោះស្រាយ

8. បង្កើតរូបមន្តកម្មវិធីលីនេអ៊ែរដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណេញអតិបរមា

- តារាងសង្ខេប

	ជ័រ	ផ្លាស្ទិច	ប្រាក់ចំណេញ
Marty	80g	20g	\$2
Ivan	40g	60g	\$3.75
	120×10^6 g	50×10^6g	

- ការបង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

តាង x ជាតុក្កតាម៉ាក Marty

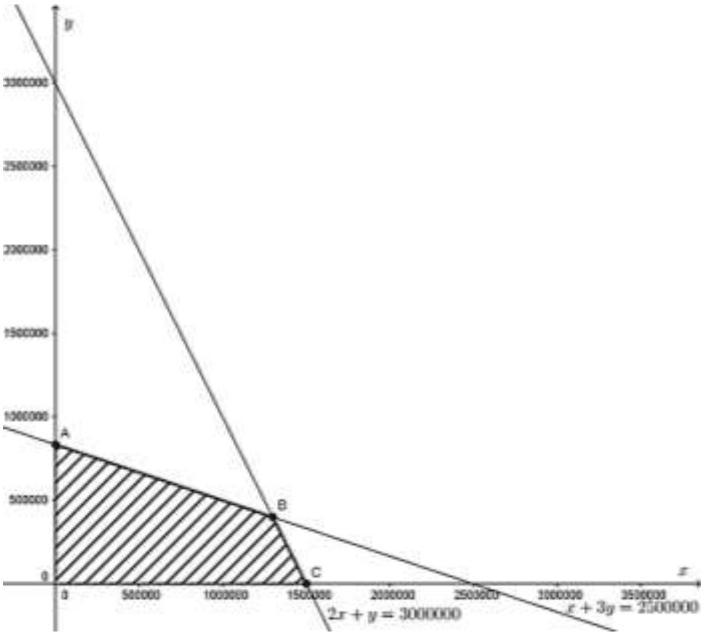
y ជាតុក្កតាម៉ាក Ivan

$MaxP: \quad z = 2x + 3.75y$

$$\text{S.t}\begin{cases} 80x + 40y \le 120\times10^6 \\ 20x + 60y \le 50\times10^6 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{ឬ}\begin{cases} 2x + y = 3000000 \\ x + 3y = 2500000 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

- សង់បន្ទាត់



$2x + y = 3000000$

x	0	1500000
y	3000000	0

$x + 3y = 2500000$

x	0	2500000
y	833333.3333	0

- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់គូសឆ្នូត និងចំណុចកាច់ជ្រុង
- រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ដែលជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $2x + y = 3000000$ និង $x + 3y = 2500000$

$$+\begin{cases} 2x + y = 30\times10^5 & (1) \\ x + 3y = 25\times10^5 & (2)\times(-4) \end{cases}$$

$-200y = -80 \Rightarrow y = 4\times10^5$ ជំនួស (1)

$(1): 80x + 40(4\times10^5) = 120\times10^6$

$$\Rightarrow x = \frac{1200\times10^5 - 160\times10^5}{80} = 13\times10^5$$

តម្លៃនៃចំណុចកាច់ជ្រុង

- $0(0,0) \Rightarrow z = 0$
- $A(0, 833333.3333) \Rightarrow z = 2(0) + 3.75(833333.3333) = 3125000$
- $B(1300000, 400000) \Rightarrow z = 2(1300000) + 3.75(400000) = 4100000$
- $C(1500000, 0) \Rightarrow z = 2(1500000) + 3.75(0) = 3000000$

ដូចនេះ ក្រុមហ៊ុនគួរផលិតតុក្កតា Marty ចំនួន 1300000 និង Ivan ចំនួន 400000 ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណេញអតិបរមាគឺ $4100000។

9). រោងចក្រ Electrocomp Corporation ផលិតផលិតផលអគ្គិសនីពីរប្រភេទគឺ ម៉ាស៊ីនត្រជាក់ និង កង្ហារប្រភេទធំ។ ឧបករណ៍ទាំងពីរនេះប្រើប្រាស់ពេលវេលាសម្រាប់តំឡើងចំពោះឧបករណ៍នីមួយក្នុងការ wiring និង drilling គឺមានរយៈពេលប្រហាក់ប្រហែលគ្នា។ ចំពោះ ម៉ាស៊ីនត្រជាក់មួយគ្រឿងត្រូវការ 3h សម្រាប់ wiring និង 2h សម្រាប់ drilling ។ ចំពោះកង្ហារមួយត្រូវការ 2h សម្រាប់ wiring និង 1h សម្រាប់ drilling ។ ក្នុងអំឡុងរយៈពេលផលិតកម្មបន្តបន្ទាប់ទៀត 240h នៃរយៈពេល wiring និង 140h នៃរយៈពេល drilling ត្រូវបានគេប្រើប្រាស់។ នៅពេលលក់គេអាចទទួលបានប្រាក់ចំណេញ 25$ ក្នុងម៉ាស៊ីនត្រជាក់មួយគ្រឿង និង 15$ សម្រាប់កង្ហារមួយគ្រឿង។ បង្កើតទម្រង់ស្តង់ដា និងដោះស្រាយស្ថានភាពផលិតផលចម្រុះតាមវិធីក្រាហ្វិច ដោយគណនាថា តើគេត្រូវផលិតម៉ាស៊ីនត្រជាក់ និង កង្ហារចំនួនប៉ុន្មានដើម្បីរកឱ្យឃើញនូវប្រាក់ចំណេញអតិបរមា?

ដំណោះស្រាយ

9. រកចំនួនម៉ាស៊ីនត្រជាក់ និងកង្ហារដែលត្រូវផលិតដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមា

- តារាងសង្ខេប

	wiring	Drilling	
ម៉ាស៊ីនត្រជាក់	3h	2h	\$25
កង្ហារ	2h	1h	\$15
ម៉ោងសរុប	240h	140h	

- ការបង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

តាង x ជាចំនួនម៉ាស៊ីនត្រជាក់ និង

y ជាចំនួនកង្ហារប្រភេទធំ

$MaxP: z = 25x + 15y$

$$\text{S.t}\begin{cases} 3x + 2y \le 240 \\ 2x + y \le 140 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

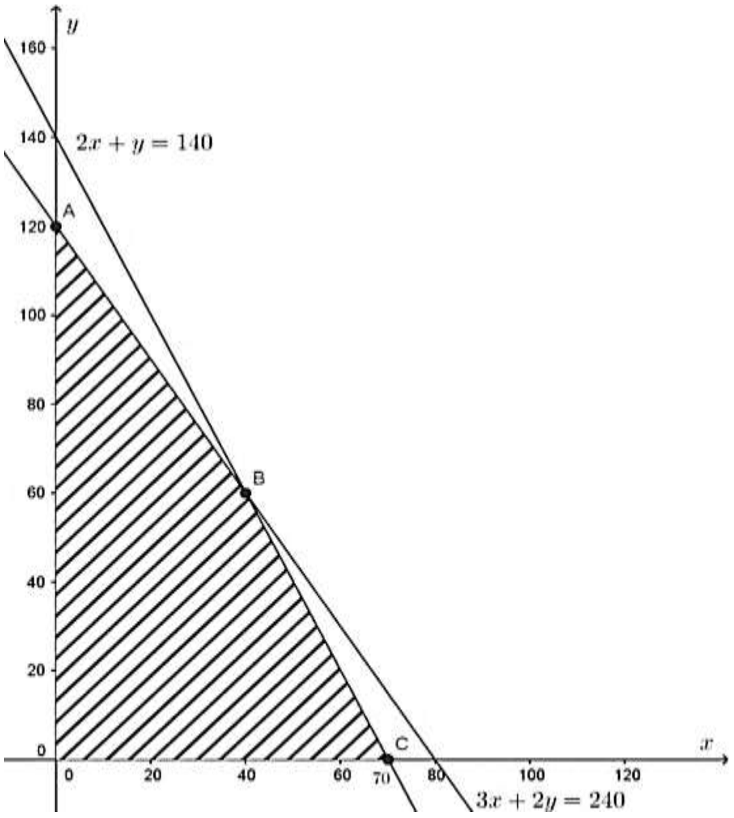
- សង់បន្ទាត់

$3x + 2y = 240$

x	0	80
y	120	0

$2x + y = 140$

x	0	70
y	140	0



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់គូសឆ្នូត និងចំណុចកាច់ជ្រុង
- រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ដែលជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $3x + 2y = 240$ និង $2x + y = 140$

$$+\begin{cases} 3x + 2y = 240 & (1) \\ 2x + y = 140 & (2)\times(-2) \end{cases}$$

$$-x = -40 \Rightarrow x = 40$$ ជំនួសក្នុង (1)

$$(1): 3(40) + 2y = 240 \Rightarrow y = \frac{240 - 120}{2} = 60$$

តម្លៃនៃចំណុចកាច់ជ្រុង

- $0(0,0) \Rightarrow z = 0$
- $A(0,120) \Rightarrow z = 25(0) + 15(120) = 1800$
- $B(40,60) \Rightarrow z = 25(40) + 15(60) = 1900$
- $C(70,0) \Rightarrow z = 25(70) + 15(0) = 1750$

ដូចនេះ ក្រុមហ៊ុនផលិតម៉ាស៊ីនត្រជាក់ចំនួន 40 និងកង្ហារ ចំនួន 60 ដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមា 1900។

10). កសិករម្នាក់មានដីចម្ការចំនួន 150 អា គាត់ដាំដំណាំទាំងពីរមុខគឺពោត និង សណ្តែក ។ ថ្លៃចំណាយក្នុងការដាំសណ្តែក និង ពោត ស្មើ 20 ដុល្លា និង 10 ដុល្លា រៀងគ្នា។ គាត់មានលុយត្រឹមតែ 2000 ដុល្លា ប៉ុណ្ណោះសម្រាប់ដាំដំណាំទាំងពីរមុខនេះ។ គាត់បង្គាប់ឱ្យគេដាំដំណាំសណ្តែកយ៉ាងតិច 10 អា និង ដំណាំពោតយ៉ាងតិច 20 អា ហើយគាត់បានធ្វើការប៉ាន់ស្មានថា គាត់នឹងទទួលបានប្រាក់ចំណេញពីដំណាំសណ្តែក 150 ដុល្លា ក្នុងមួយអា និងដំណាំពោត 120ដុល្លា។ តើគាត់ត្រូវដាំដំណាំមួយមុខៗប៉ុន្មានអា ទើបបានប្រាក់ចំណេញច្រើនបំផុត? សរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដា និងដំណោះស្រាយតាមក្រាហ្វិច។

ដំណោះស្រាយ

10. សរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដានិងដោះស្រាយតាមក្រាហ្វិច

- ការបង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

  តាង x ជាចំនួនដំណាំសណ្តែកក្នុងមួយអា និង y ជាចំនួនដំណាំពោតក្នុងមួយអា

$$MaxP: z = 150x + 120y$$

$$\text{S.t}\begin{cases} x + y \le 150 \\ 20x + 10y \le 2000 \\ x \le 10 \\ y \le 20 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

- សង់បន្ទាត់

$x + y = 150$

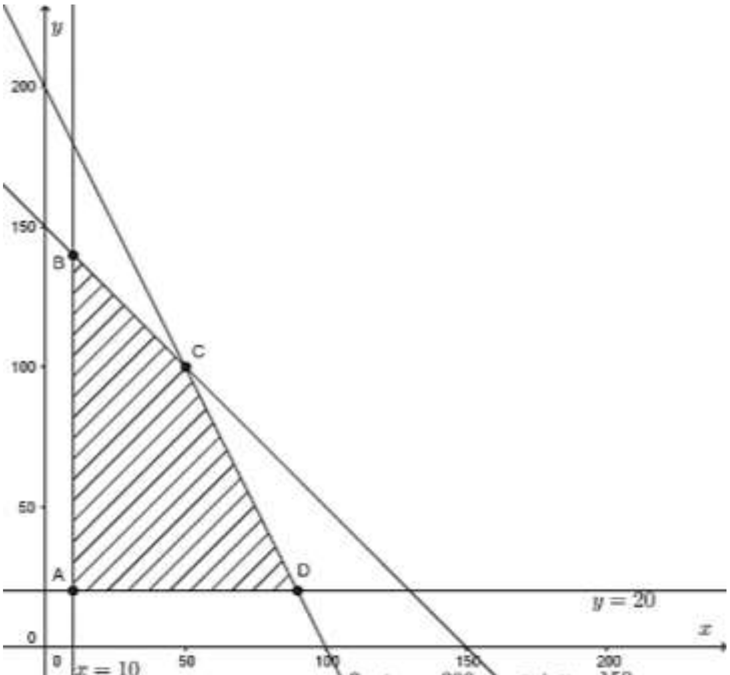
x	0	150
y	150	0

$20x + 10y = 2000$

x	0	100
y	200	0

$x = 10$

$y = 20$



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់គូសឆ្នូត និងចំណុចកាច់ជ្រុង
- A ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $x=10$ និង $y=20$

$\Rightarrow A(10,20) \Rightarrow z=150(10)+120(20)=3900$

- B ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $x=10$ និង $x+y=150$

$$\begin{cases} x=10 \\ x+y=150 \end{cases} \Rightarrow y=150-10=140$$

$\Rightarrow B\ (10,140) \Rightarrow z=150(10)+120(140)=18300$

- C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $2x+y=200$ និង $x+y=150$

$$-\begin{cases} 2x+y=200 \\ x+y=150 \end{cases}$$

$$x=50 \Rightarrow y=100$$

$\Rightarrow C(50,100) \Rightarrow z=150(50)+120(100)=19500$

- D ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $2x+y=200$ និង $y=20$

$$\begin{cases} 2x+y=200 \\ y=20 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{200-20}{2}=90$$

$\Rightarrow D(90,20) \quad \Rightarrow z=150(90)+120(20)=15900$

ដូចនេះ កសិករត្រូវដាំសណ្តែកចំនួន 50អា និងពោតចំនួន 100អា ដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមា 19500។

លំហាត់ដោះស្រាយចំណោទលីនេអ៊ែរតាមវិធី Simplex

1. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 4x_1 + 3x_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 120 \\ x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 , x_2 \ge 0 \end{cases}$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 4x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + S_1 = 120 \\ x_1 + x_2 + S_2 = 40 \\ x_1 , x_2 , S_1 , S_2 \ge 0 \end{cases}$

តារាងស៊ីមផ្លេចដំបូង

C_j	អថេរគោល	4 x_1	3 x_2	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប Ratio
0 0	S_1 S_2	4 1	2 1	1 0	0 1	120 40	$120 \div 4 = 30$ $40 \div 1 = 40$
	Z_j $Z_j - C_j$	0 -4	0 -3	0 0	0 0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $|-4| > |-3|$ នាំឱ្យ x_1 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន $30 < 40$ នាំឱ្យជួរដេក S_1 ជាអថេរចេញនិង 4 ជាធាតុវិល

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_1 = S_1 \div 4$

ជួរដេកថ្មី $S_2 = S_2 - (1) \times (x_1$ ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី១

C_j	អថេរគោល	4 x_1	3 x_2	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប Ratio
4	x_1	1	0.5	0.25	0	30	$30\div 0.5=60$
0	S_2	0	0.5	-0.25	1	10	$10\div 0.5=20$
	Z_j	4	2	1	0	120	
	Z_j-C_j	0	-1	1	0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក Z_j-C_j ដោយ $-1<0$ នាំឱ្យ x_2 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន $20<60$ នាំឱ្យជួរដេក s_2 ជាអថេរចេញនិង 0.5 ជាធាតុវិល

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_2=S_2\div 0.5$

ជួរដេកថ្មី $x_1=x_1-(0.5)\times($ x_2 ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី២

C_j	អថេរគោល	4 x_1	3 x_2	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប Ratio
4	x_1	1	0	0.5	-1	20	
3	x_2	0	1	-0.5	2	20	
	Z_j	0	0	0.5	2	140	
	Z_j-C_j	0	0	0.5	2		

តាមតារាងស៊ីមផ្លេចទី២ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j-C_j\geq 0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_1=20; x_2=20$; $Max\ \ Z=140$ ។

2. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z=3x_1+2x_2+4x_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 2x_1+x_2\leq 12 \\ x_2+x_3\leq 8 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\geq 0 \end{cases}$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0S_1 + 0S_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + S_1 = 12 \\ x_2 + x_3 + S_2 = 8 \\ x_1 , x_2 , x_3 , S_1 ; S_2 \geq 0 \end{cases}$

តារាងស៊ីមផ្លេចដំបូង

C_j	អថេរ គោល	3 x_1	2 x_2	4 x_3	0 S_1	0 S_2	RHS	ផលធៀប Ratio
0 0	S_1 S_2	2 0	1 1	0 1	1 0	0 1	12 8	$12 \div 0 = \infty$ $8 \div 1 = 8$
	Z_j $Z_j - C_j$	0 -3	0 -2	0 -4	0 0	0 0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $|-4| > |-3| > |-2|$ នាំឱ្យ x_3 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន ជួរដេក S_1 កំណត់មិនបាន នាំឱ្យជួរដេក S_2 ជាអថេរចេញ និង 1 ជាធាតុវិល ។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_3 = S_2 \div 1$

ជួរដេកថ្មី $S_1 = S_1 - (0) \times (x_3$ ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី១

C_j	អថេរ គោល	3 x_1	2 x_2	4 x_3	0 S_1	0 S_2	RHS	ផលធៀប Ratio
0 4	S_1 x_3	2 0	1 1	0 1	1 0	0 1	12 8	$12 \div 2 = 6$ $8 \div 0 = \infty$
	Z_j $Z_j - C_j$	0 -3	0 2	4 0	0 0	4 4	32	

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $-3 < 0$ នាំឱ្យ x_1 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន ជួរដេក x_3 កំណត់មិនបាន នាំឱ្យជួរដេក S_1 ជាអថេរចេញ និង 2 ជាធាតុវិល ។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_1 = S_1 \div 2$

ជួរដេកថ្មី $x_3 = x_3 - (0) \times (x_1$ ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី២

C_j	អថេរ គោល	3 x_1	2 x_2	4 x_3	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប Ratio
3 4	x_1 x_3	1 0	0.5 1	0 1	0.5 0	0 1	6 8	
	Z_j $Z_j - C_j$	0 0	5.5 3.5	4 0	1.5 1.5	4 4	50	

តាមតារាងស៊ីមផ្លេចទី២ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j - C_j \geq 0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_1 = 6$; $x_3 = 8$; $Max\ \ Z = 50$ ។

3. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 24x_1 + 16x_2 + 10x_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 24x_1 + 16x_2 + 10x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_2 = 20 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + S_3 = 30 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ S_1\ ,\ S_2\ ,\ S_3 \geq 0 \end{cases}$

តារាងស៊ីមផ្លេចដំបូង

C_j	អថេរ គោល	24 x_1	16 x_2	10 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	*RHS*	ផលធៀប Ratio
0 0 0	S_1 S_2 S_3	3 2 3	2 2 1	1 3 3	1 0 0	0 1 0	0 0 1	12 20 30	$12 \div 3 = 4$ $20 \div 2 = 10$ $30 \div 3 = 10$
	Z_j $Z_j - C_j$	0 -24	0 -16	0 -10	0 0	0 0	0 0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $|-24| > |-16| > |-10|$ នាំឱ្យ x_1 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបឃើញបាន $4 < 10$ នាំឱ្យជួរដេក S_1 ជាអថេរចេញ និង 3 ជាធាតុវិល ។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_1 = S_1 \div 3$

ជួរដេកថ្មី $S_2 = S_2 - (2)\times(x_1$ ថ្មី$)$

ជួរដេកថ្មី $S_3 = S_3 - (3)\times(x_1$ ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី១

C_j	អថេរគោល	24 x_1	16 x_2	10 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប Ratio
24	x_1	1	0.67	0.33	0.33	0	0	4	$4 \div 0.33 = 12.12$
0	S_2	0	0.67	2.33	–0.67	1	0	12	$12 \div 2.33 = 5.15$
0	S_3	0	–1	2	–1	0	1	18	$18 \div 2 = 9$
	Z_j	24	16.08	7.92	7.92	0	0	96	
	$Z_j - C_j$	0	0.08	–2.08	7.92	0	0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $-2.08 < 0$ នាំឱ្យ x_3 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបឃើញបាន $5.15 < 9 < 12.12$ នាំឱ្យជួរដេក S_2 ជាអថេរចេញ និង 2.33 ជាធាតុវិល ។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_3 = S_2 \div 2.33$

ជួរដេកថ្មី $x_1 = x_1 - (0.33)\times(x_3$ ថ្មី$)$

ជួរដេកថ្មី $S_3 = S_3 - (2)\times(x_3$ ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី២

C_j	អថេរគោល	24 x_1	16 x_2	10 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប Ratio
24	x_1	1	0.57	0	0.43	–0.14	0	2.29	
10	x_3	0	0.29	1	–0.29	0.43	0	5.14	
0	S_3	0	–1.57	0	–0.43	–0.86	1	7.71	
	Z_j	24	16.57	10	7.43	0.86	0	106.29	
	$Z_j - C_j$	0	0.57	0	7.43	0.86	0		

តាមតារាងស៊ីមផ្លេចទី២ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j - C_j \geq 0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_1 = 2.29$; $x_2 = 0$; $x_3 = 5.14$; $S_3 = 7.71$; $Max\ Z = 106.29$ ។

4. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 320x_1 + 108x_2 + 120x_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 45 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 54 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 32 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 320x_1 + 108x_2 + 120x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_2 = 20 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 0S_3 = 30 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ;\ S_1\ ,\ S_2\ ,\ S_3 \geq 0 \end{cases}$

តារាងស៊ីមផ្លេចដំបូង

C_j	អថេរគោល	320 x_1	108 x_2	120 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	*RHS*	ផលធៀប Ratio
0 0 0	S_1 S_2 S_3	1 6 3	2 8 4	5 2 2	1 0 0	0 1 0	0 0 1	45 54 32	$45 \div 1 = 45$ $54 \div 6 = 9$ $32 \div 3 = 10.66$
	Z_j $Z_j - C_j$	0 -320	0 -108	0 -120	0 0	0 0	0 0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $|-320| > |-120| > |-108|$ នាំឱ្យ x_1 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន $9 < 10.66$ នាំឱ្យជួរដេក S_2 ជាអថេរចេញ និង 6 ជាធាតុវិល ។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_1 = S_2 \div 6$

ជួរដេកថ្មី $S_1 = S_1 - (1) \times (x_1$ ថ្មី$)$

ជួរដេកថ្មី $S_3 = S_3 - (3) \times (x_1$ ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី១

C_j	អថេរ គោល	320 x_1	108 x_2	120 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប Ratio
0	S_1	0	0.67	4.67	1	-0.17	0	36	$36 \div 4.67 = 7.7$
320	x_1	1	1.33	0.33	0	0.17	0	9	$9 \div 0.33 = 27.27$
0	S_3	0	0	1	0	-0.51	1	5	$5 \div 1 = 5$
	Z_j	320	425.6	105.6	0	54.4	0	2880	
	$Z_j - C_j$	0	317.6	-14.4	0	54.4	0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $-14.4 < 0$ នាំឱ្យ x_3 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន $5 < 7.7 < 27.27$ នាំឱ្យជួរដេក S_3 ជាអថេរចេញនិង 1 ជាធាតុវិល ។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_3 = S_3 \div 1$

ជួរដេកថ្មី $x_1 = x_1 - (0.33) \times (x_3$ ថ្មី$)$

ជួរដេកថ្មី $S_1 = S_1 - (4.67) \times (x_3$ ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី២

C_j	អថេរ គោល	320 x_1	108 x_2	120 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប Ratio
0	S_1	0	0.67	0	1	2.17	-4.67	12.67	
320	x_1	1	1.33	0	0	0.33	-0.33	7.33	
120	x_3	0	0	1	0	-0.51	1	5	
	Z_j	320	425.6	120	0	44.4	14.4	2946.67	
	$Z_j - C_j$	0	317.6	0	0	44.4	14.4		

តាមតារាងស៊ីមផ្លេចទី២ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j - C_j \ge 0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_1 = 7.33$; $x_2 = 0$; $x_3 = 5$; $S_1 = 12.67$; $Max\ \ Z = 2946.67$ ។

5. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 32x_1 + 18x_2 + 19x_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 12 \\ 8x_1 + 10x_2 + 3x_3 \le 90 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 30 \\ x_1 \ ; \ x_2 \ , \ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 32x_1 + 18x_2 + 19x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + S_1 = 12 \\ 8x_1 + 10x_2 + 3x_3 + S_2 = 90 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + S_3 = 30 \\ x_1 \ ; x_2 \ , x_3 \ , S_1 \ , S_2 \ , S_3 \geq 0 \end{cases}$

តារាងស៊ីមផ្លេចដំបូង

C_j	អថេរ គោល	32 x_1	18 x_2	19 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប Ratio
0	S_1	2	1	1	1	0	0	12	$12 \div 2 = 6$
0	S_2	8	10	3	0	1	0	90	$90 \div 8 = 11.25$
0	S_3	4	4	3	0	0	1	30	$30 \div 4 = 7.5$
	Z_j	0	0	0	0	0	0		
	$Z_j - C_j$	-32	-18	-19	0	0	0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $|-32| > |-19| > |-18|$ នាំឱ្យ x_1 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន $6 < 7.5 < 11.25$ នាំឱ្យជួរដេក s_1 ជាអថេរចេញ និង 2 ជាធាតុវិល ។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_1 = S_1 \div 2$

ជួរដេកថ្មី $S_2 = S_2 - (8) \times ($ x_1 ថ្មី$)$

ជួរដេកថ្មី $S_3 = S_3 - (4) \times ($ x_1 ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី១

C_j	អថេរ គោល	32 x_1	18 x_2	19 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប Ratio
32	x_1	1	0.5	0.5	0.5	0	0	6	$6 \div 0.5 = 12$
0	S_2	0	6	-1	-4	1	0	42	$42 \div (-1) = -42$
0	S_3	0	2	1	-2	0	1	6	$6 \div 1 = 6$
	Z_j	32	16	16	16	0	0	192	
	$Z_j - C_j$	0	-2	-3	16	0	0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $|-3| > |-2|$ នាំឱ្យ x_3 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន $6 < 12$ នាំឱ្យជួរដេក S_3 ជាអថេរចេញនិង 1 ជាធាតុវិល

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_3 = S_3 \div 1$

ជួរដេកថ្មី $x_1 = x_1 - (0.50) \times$ (x_3 ថ្មី)

ជួរដេកថ្មី $S_2 = S_2 - (-1) \times$ (x_3 ថ្មី)

តារាងស៊ីមផ្លេចទី២

C_j	អថេរ គោល	32 x_1	18 x_2	19 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	*RHS*	ផលធៀប Ratio
32	x_1	1	-0.5	0	1.5	0	-0.5	3	
0	S_2	0	8	0	-6	1	1	48	
19	x_3	0	2	1	-2	0	1	6	
	Z_j	32	14	19	10	0	3	210	
	$Z_j - C_j$	0	4	0	10	0	3		

តាមតារាងស៊ីមផ្លេចទី២ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j - C_j \geq 0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_1 = 3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 6$;$S_2 = 48$; $Max\ Z = 210$ ។

6. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 30 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + S_1 = 20 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + S_2 = 50 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + S_3 = 30 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ S_1\ ,\ S_2\ ,\ S_3 \geq 0 \end{cases}$$

តារាងស៊ីមផ្លេចដំបូង

C_j	អថេរគោល	2 x_1	3 x_2	4 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប Ratio
0	S_1	1	2	1	1	0	0	20	$20\div1=20$
0	S_2	5	1	2	0	1	0	50	$50\div2=25$
0	S_3	1	3	1	0	0	1	30	$30\div1=30$
	Z_j	0	0	0	0	0	0		
	Z_j-C_j	-2	-3	-4	0	0	0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក Z_j-C_j ដោយ $|-4|>|-3|>|-2|$ នាំឱ្យ x_3 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន $20<25<30$ នាំឱ្យជួរដេក S_1 ជាអថេរចេញ និង 1 ជាធាតុវិល ។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_3=S_1\div1$

ជួរដេកថ្មី $S_2=S_2-(2)\times(x_3$ ថ្មី$)$

ជួរដេកថ្មី $S_3=S_3-(1)\times(x_3$ ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី១

C_j	អថេរគោល	2 x_1	3 x_2	4 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប Ratio
4	x_3	1	2	1	1	0	0	20	
0	S_2	3	-3	0	-2	1	0	10	
0	S_3	0	1	0	-1	0	1	10	
	Z_j	4	8	4	4	0	0	80	
	Z_j-C_j	2	5	0	4	0	0		

តាមតារាងស៊ីមផ្លេចទី១ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j-C_j\geq0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_1=0;\ x_2=0\ ;\ x_3=20\ ;S_2=10\ ;\ S_3=10\ ;\ Max\ \ Z=80$ ។

7. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z=5x_1+42x_2+26x_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ
$$\begin{cases}7x_1+12x_2+6x_3\leq50\\18x_1+9x_2+4x_3\leq85\\2x_1+14x_2+x_3\leq66\\x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\geq0\end{cases}$$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 5x_1 + 42x_2 + 26x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 7x_1 + 12x_2 + 6x_3 + S_1 = 50 \\ 18x_1 + 9x_2 + 4x_3 + S_2 = 85 \\ 2x_1 + 14x_2 + x_3 + S_3 = 66 \\ x_1 \text{ , } x_2 \text{ , } x_3 \text{ , } S_1 \text{ , } S_2 \text{ , } S_3 \geq 0 \end{cases}$

តារាងស៊ីមផ្លេចដំបូង

C_j	អថេរ គោល	5 x_1	42 x_2	26 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប Ratio
0 0 0	S_1 S_2 S_3	7 18 2	12 9 14	6 4 1	1 0 0	0 1 0	0 0 1	50 85 66	$50 \div 12 = 4.16$ $85 \div 9 = 9.44$ $66 \div 14 = 4.71$
	Z_j $Z_j - C_j$	0 -5	0 -42	0 -26	0 0	0 0	0 0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $z_j - c_j$ ដោយ $|-42| > |-26| > |-5|$ នាំឱ្យ x_2 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន $4.16 < 4.71 < 9.44$ នាំឱ្យជួរដេក S_1 ជាអថេរចេញនិង 12 ជាធាតុរំល ។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_2 = S_1 \div 12$

ជួរដេកថ្មី $S_2 = S_2 - (9) \times (x_2$ ថ្មី$)$

ជួរដេកថ្មី $S_3 = S_3 - (14) \times (x_2$ ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី១

C_j	អថេរ គោល	5 x_1	42 x_2	26 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប Ratio
42 0 0	x_2 S_2 S_3	0.58 12.75 -6.17	1 0 0	0.5 -0.5 -6	0.08 -0.75 -1.17	0 1 0	0 0 1	4.17 47.5 7.67	$4.17 \div 0.5 = 8.34$ $47.5 \div (-0.5) = -95$ $7.67 \div (-6) = -1.27$
	Z_j $Z_j - C_j$	24.36 19.36	42 0	21 -5	3.5 3.5	0 0	0 0	175	

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $-5<0$ នាំឱ្យ x_3 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន 8.34 ជាចំនួនវិជ្ជមាននាំឱ្យជួរដេក x_2 ជាអថេរចេញ និង 0.5 ជាធាតុរិល ។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_3 = x_2 \div 0.5$

ជួរដេកថ្មី $S_2 = S_2 - (-0.5)\times$ (x_3 ថ្មី)

ជួរដេកថ្មី $S_3 = S_3 - (-6)\times$ (x_2 ថ្មី)

តារាងស៊ីមផ្លេចទី២

c_j	អថេរ គោល	5 x_1	42 x_2	26 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	*RHS*	ផលធៀប Ratio
26	x_3	1.17	2	1	0.17	0	0	8.33	
0	S_2	13.33	1	0	–0.67	1	0	51.67	
0	S_3	0.83	12	0	–0.17	0	1	57.67	
	Z_j	30.33	52	26	4.33	0	0	216.67	
	$Z_j - C_j$	25.33	10	0	4.33	0	0		

តាមតារាងស៊ីមផ្លេចទី២ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j - C_j \geq 0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_3 = 8.33$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $S_2 = 51.67$; $S_3 = 57.67$; និង $Max\,Z = 216.67$ ។

8. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លេច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = x_1 + x_2 + 5x_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 100 \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 120 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = x_1 + x_2 + 5x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + S_1 = 100 \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 + S_2 = 80 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + S_3 = 120 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ S_1\ ,\ S_2\ ,\ S_3 \geq 0 \end{cases}$

តារាងស៊ីមផ្លិចដំបូង

C_j	អថេរ គោល	1 x_1	1 x_2	5 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	*RHS*	ផលធៀប Ratio
0 0 0	S_1 S_2 S_3	4 8 1	3 1 5	8 2 4	1 0 0	0 1 0	0 0 1	100 80 120	$100\div 8=12.5$ $80\div 2=40$ $120\div 4=30$
	Z_j Z_j-C_j	0 -1	0 -1	0 -5	0 0	0 0	0 0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $|-5|>|-1|$ នាំឱ្យ x_3 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន $12.25<30<40$ នាំឱ្យជួរដេក S_1 ជាអថេរចេញ និង 8 ជាធាតុវិល។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_3 = S_1 \div 8$

ជួរដេកថ្មី $S_2 = S_2 - (2)\times($ x_3 ថ្មី$)$

ជួរដេកថ្មី $S_3 = S_3 - (4)\times($ x_3 ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លិចទី១

C_j	អថេរ គោល	1 x_1	1 x_2	5 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	*RHS*	ផលធៀប Ratio
5 0 0	x_3 S_2 S_3	0.5 7 -1	0.38 0.25 3.5	1 0 0	0.12 -0.25 -0.5	0 1 0	0 0 1	12.5 55 70	
	Z_j Z_j-C_j	2.5 1.5	1.9 0.9	5 0	0.6 0.6	0 0	0 0	62.5	

តាមតារាងស៊ីមផ្លិចទី១ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j - C_j \ge 0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_3=12.5$; $x_2=0$; $x_3=0$; $S_2=55$; $S_3=70$; $Max\ Z=62.5$ ។

9. ដោះស្រាយចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរតាមកម្មវិធីស៊ីមផ្លិច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = x_1 + x_2 + 5x_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ
$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+8x_3\le 100 \\ 8x_1+x_2+2x_3\le 80 \\ x_1+5x_2+4x_3\le 120 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ge 0 \end{cases}$$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = x_1 + x_2 + 5x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + S_1 = 100 \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 + S_2 = 80 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 + S_3 = 120 \\ x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0 \end{cases}$

តារាងស៊ីមផ្លេចដំបូង

C_j	អថេរ គោល	2 x_1	1 x_2	1 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប Ratio
0	S_1	0	1	3	1	0	0	6	$6 \div 0 = \infty$
0	S_2	1	0	2	0	1	0	8	$8 \div 1 = 8$
0	S_3	2	3	0	0	0	1	30	$30 \div 2 = 15$
	Z_j	0	0	0	0	0	0		
	$Z_j - C_j$	-2	-1	-1	0	0	0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $|-2| > |-1|$ នាំឱ្យ x_1 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន $8 < 15$ នាំឱ្យជួរដេក S_2 ជាអថេរចេញ និង 1 ជាធាតុវិល ។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_1 = S_2 \div 1$

ជួរដេកថ្មី $S_1 = S_1 - (0) \times ($$x_1$ ថ្មី)

ជួរដេកថ្មី $S_3 = S_3 - (2) \times ($$x_1$ ថ្មី)

តារាងស៊ីមផ្លេចទី១

C_j	អថេរ គោល	2 x_1	1 x_2	1 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប Ratio
0	S_1	0	1	3	1	0	0	6	$6 \div 1 = 6$
2	x_1	1	0	2	0	1	0	8	$8 \div 0 = \infty$
0	S_3	0	3	-4	0	-2	1	14	$14 \div 3 = 4.66$
	Z_j	2	0	4	0	2	0	16	
	$Z_j - C_j$	0	-1	3	0	2	0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $-1 < 0$ នាំឱ្យ x_2 ជាអថេរចូល

ដោយពិនិត្យផលធៀបយើងបាន $4.66 < 6$ នាំឱ្យជួរដេក S_3 ជាអថេរចេញ និង 3 ជាធាតុរំលេ ។

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_2 = S_3 \div 3$

ជួរដេកថ្មី $S_1 = S_1 - (1) \times$ (x_2 ថ្មី)

ជួរដេកថ្មី $x_1 = x_1 - (0) \times$ (x_2 ថ្មី)

តារាងស៊ីមផ្លេចទី២

c_j	អថេរគោល	2 x_1	1 x_2	1 x_3	0 S_1	0 S_2	0 S_3	*RHS*	ផលធៀប Ratio
0 2 1	S_1 x_1 x_2	0 1 0	0 0 1	4.33 2 −1.33	1 0 0	0.67 1 −0.67	−0.33 0 0.33	1.33 8 4.67	
	Z_j $Z_j - C_j$	2 0	1 0	2.67 1.67	0 0	1.33 1.33	0.33 0.33	20.67	

តាមតារាងស៊ីមផ្លេចទី១ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j - C_j \geq 0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_1 = 8$; $x_2 = 4.67$; $x_3 = 0$; $S_1 = 1.33$; $Max\ \ Z = 20.67$ ។

10). ក្រុមហ៊ុន Zupper Toy មានគម្រោងផលិតតុក្កតាថ្មីពីរប្រភេទ Magnificent Marty និង Incredible Ivan ។ គេសង្ឃឹមថា Marty នឹងត្រូវការជ័រ 80g និងផ្លាស្ទិច 20g ហើយ Ivan នឹងត្រូវការជ័រ 40g និងផ្លាស្ទិច 60g ។ ក្រុមហ៊ុនមានជ័របម្រុងទុក 120 តោន និងផ្លាស្ទិច 50 តោនប៉ុណ្ណោះ។ តើក្រុមហ៊ុនគួរតែទទួលយកគម្រោងផលិតកម្មណាមួយដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមាបើ Marty និង Ivanនីមួយៗផ្តល់ប្រាក់ចំណេញបាន $2 និង $3.75 រៀងគ្នា ។

ចូរសរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដា និងដោះស្រាយវាតាមវិធីស៊ីមផ្លេច។

ដំណោះស្រាយ

10. រកប្រាក់ចំណេញអតិបរមាដែលក្រុមហ៊ុនគួរតែទទួលយកគម្រោង

តាង x_1 ជាចំនួនតុក្កតាម៉ាក Marty

x_2 ជាចំនួនតុក្កតាម៉ាក Ivan

គេបានអនុគមន៍គោលដៅគឺ

រកប្រាក់ចំណេញអតិបរមានៃ $Z = 2x_1 + 3.75x_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 80x_1 + 40x_2 \leq 120 \times 10^6 \\ 20x_1 + 60x_2 \leq 50 \times 10^6 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកប្រាក់ចំណេញអតិបរមានៃ $Z = 2x_1 + 3.75x_2 + 0S_1 + 0S_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 80x_1 + 40x_2 + S_1 = 120 \times 10^6 \\ 20x_1 + 60x_2 + S_2 = 50 \times 10^6 \\ x_1 , x_2 , S_1 , S_2 \geq 0 \end{cases}$

តារាងស៊ីមផ្លេចដំបូង

C_j	អថេរគោល	2 x_1	3.75 x_2	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប
0 0	S_1 S_2	80 20	40 60	1 0	0 1	120×10^6 50×10^6	$120\times10^6/40$ $50\times10^6/60$
	Z_j $Z_j - C_j$	0 –2	0 –3.75	0 0	0 0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $|-3.75| > |-2|$ នាំឱ្យ x_2 ជាអថេរចូល

ដោយផលធៀប $50\times10^6/60 < 120\times10^6/40$ នាំឱ្យជួរដេក S_2 ជាអថេរចេញនិង 60 ជាធាតុវិល

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_2 = S_2 \div 60$

ជួរដេកថ្មី $S_1 = S_1 - 40 \times$ (x_2 ថ្មី)

តារាងស៊ីមផ្លេចទី១

C_j	អថេរគោល	2 x_1	3.75 x_2	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប
0 3.75	S_1 x_2	66.67 0.33	0 1	1 0	-0.67 0.02	86666666.67 833333.33	86666666 / 66.67 833333.33 / 0.33
	Z_j $Z_j - C_j$	1.24 -0.76	3.75 0	0 0	1.24 1.24	3125000	

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $-0.76 < 0$ នាំឱ្យ x_1 ជាអថេរចូល

ដោយផលធៀប $86666666/66.67 < 833333.33/0.33$ នាំឱ្យជួរដេក S_2 ជាអថេរចេញ

និង 66.67 ជាធាតុវិល

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_1 = S_1 \div 66.67$

ជួរដេកថ្មី $x_2 = x_2 - 0.33 \times$ (x_1 ថ្មី)

តារាងស៊ីមផ្លេចទី២

C_j	អថេរគោល	2 x_1	3.75 x_2	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប
2 3.75	x_1 x_2	1 0	0 1	0.01 0	-0.01 0.02	1300000 400000	
	Z_j $Z_j - C_j$	0 0	0 0	0.02 0.02	0.06 0.06	4100000	

តាមតារាងស៊ីមផ្លេចទី២ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j - C_j \geq 0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_1 = 1300000; x_2 = 400000$; $Max\ \ Z = 4100000$ ។

11). គេយកត្រីពីរប្រភេទមកចិញ្ចឹមក្នុងស្រះមួយ។ ទម្ងន់ជាមធ្យមរបស់ត្រីគឺ 2Kgសម្រាប់ត្រីប្រភេទទី១ និង 1Kg សម្រាប់ត្រីប្រភេទទី២ ។ រាល់ថ្ងៃមានចំណីពីរប្រភេទសម្រាប់ឱ្យត្រីស៊ីគឺចំណីប្រភេទទី១ 500 ឯកតានិងជំណីប្រភេទទី២មាន 900 ឯកតា។ រាល់ថ្ងៃជាមធ្យមត្រីប្រភេទទី១ស៊ីចំណីប្រភេទទី១ អស់ 1 ឯកតានិងចំណីប្រភេទទី២អស់ 3 ឯកតាហើយត្រីប្រភេទទី២ ស៊ីចំណីប្រភេទទី១ អស់ 2 ឯកតានិងចំណីប្រភេទទី២អស់ 1 ឯកតា។ តើត្រូវជ្រើសរើសត្រីយ៉ាងដូចម្តេចយកមកចិញ្ចឹម បើម្ចាស់ចង់បានទម្ងន់ត្រីច្រើនបំផុតដែលអាចធ្វើបាន?

ចូរសរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដាគណិតវិទ្យា និងដោះស្រាយវាតាមវិធីស៊ីមផ្លេច។

ដំណោះស្រាយ

11. សរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដាគណិតវិទ្យា និងដោះស្រាយវាតាមវិធីស៊ីមផ្លេច

តាង x_1 ជាចំនួនប្រភេទត្រីទី១

x_2 ជាចំនួនប្រភេទត្រីទី២

គេបានអនុគមន៍គោលដៅគឺ

រកទម្ងន់ត្រីអតិបរមានៃ $Z = 2x_1 + x_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 500 \\ 3x_1 + x_2 \le 900 \\ x_1 , x_2 \ge 0 \end{cases}$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកទម្ងន់ត្រីអតិបរមានៃ $Z = 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 = 500 \\ 3x_1 + x_2 + S_2 = 900 \\ x_1 , x_2 , S_1 , S_2 \ge 0 \end{cases}$

តារាងស៊ីមផ្លេចដំបូង

C_j	អថេរគោល	2 x_1	1 x_2	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប
0	S_1	1	2	1	0	500	$500 \div 1 = 500$
0	S_2	3	1	0	1	900	$900 \div 3 = 300$
	Z_j	0	0	0	0		
	$Z_j - C_j$	-2	-1	0	0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $|-2| > |-1|$ នាំឱ្យ x_1 ជាអថេរចូល

ដោយផលធៀប $300 < 500$ នាំឱ្យជួរដេក S_2 ជាអថេរចេញនិង 3 ជាធាតុវិល

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_1 = S_2 \div 3$

ជួរដេកថ្មី $S_1 = S_1 - (1) \times$ (x_1 ថ្មី)

តារាងស៊ីមផ្លេចទី១

C_j	អថេរគោល	2 x_1	1 x_2	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប
0 2	S_1 x_1	0 1	1.67 0.33	1 0	-0.33 0.33	200 300	$200 \div 1.67 = 119.76$ $300 \div 0.33 = 909.09$
	Z_j $Z_j - C_j$	2 0	0.66 -0.34	0 0	0.66 0.66	600	

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $-0.34 < 0$ នាំឱ្យ x_2 ជាអថេរចូល

ដោយផលធៀប $119.76 < 909.09$ នាំឱ្យជួរដេក S_1 ជាអថេរចេញ និង 1.67 ជាធាតុវិល

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_2 = S_1 \div 1.67$

ជួរដេកថ្មី $x_1 = x_1 - (0.33) \times (x_2 \text{ ថ្មី})$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី២

C_j	អថេរគោល	2 x_1	1 x_2	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប
1 2	x_2 x_1	0 1	1 0	0.6 -0.2	-0.2 0.4	120 260	
	Z_j $Z_j - C_j$	2 0	1 0	0.2 0.2	0.6 0.6	640	

តាមតារាងស៊ីមផ្លេចទី២ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j - C_j \geq 0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_1 = 260$; $x_2 = 120$; $Max\ Z = 640$ ។

12). ក្រុមហ៊ុន Supperior Tool Company ផលិតនូវគ្រឿងដែកផ្សេងៗមានដែកគោល 50mm ពីរប្រភេទគឺ ប្រភេទក្បាលមូលនិងប្រភេទក្បាលសំប៉ែត។ ក្រុមហ៊ុនបានលក់ដែកគោលទៅឱ្យហាងគ្រឿងដែកតម្លៃ \$20 និង \$25 រៀងគ្នាក្នុងមួយប្រអប់។ តម្លៃសម្ភារៈក្នុងប្រអប់នីមួយៗគឺ \$10 និង \$8 រៀងគ្នា ហើយនៅកន្លែងផលិតនៃរោងចក្រមានចំណាយផ្សេងៗចំនួន \$5000 ក្នុងមួយសប្ដាហ៍ ។ ការផលិតនិងការវេចខ្ចប់ដែកគោលក្បាលមូលមួយប្រអប់អស់រយៈពេល 3 នាទី និង 2 នាទី ចំណែកដែកគោលក្បាលសំប៉ែតមួយប្រអប់អស់រយៈពេល 2 នាទីនិង 8 នាទីរៀងគ្នា។ ក្នុងមួយសប្ដាហ៍ៗការផលិតនិងការវេចខ្ចប់អាចប្រើអស់រយៈពេល 60 ម៉ោងរៀងគ្នា។ ចូរកំណត់អនុគមន៍គោលបំណងដែលនឹងផ្ដល់ប្រាក់ចំណេញខ្ពស់បំផុតប្រចាំសប្ដាហ៍ដល់ក្រុមហ៊ុន។ (សរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដាគណិតវិទ្យា និងដោះស្រាយវាតាមវិធីស៊ីមផ្លេច។)

ដំណោះស្រាយ

12. សរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដាគណិតវិទ្យា និងដោះស្រាយវាតាមវិធីស៊ីមផ្លេច

តាង x_1 ជាចំនួនប្រអប់នៃដែកគោលប្រភេទក្បាលមូល

x_2 ជាចំនួនប្រអប់នៃដែកគោលប្រភេទក្បាលសំប៉ែត

គេបានអនុគមន៍គោលដៅគឺ

រកប្រាក់ចំណេញអតិបរមានៃ $Z = 10x_1 + 17x_2 - 5000$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 3600 \\ 2x_1 + 8x_2 \le 3600 \\ x_1 \,,\, x_2 \ge 0 \end{cases}$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកប្រាក់ចំណេញអតិបរមានៃ $Z = 10x_1 + 17x_2 - 5000 + 0S_1 + 0S_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + S_1 = 3600 \\ 2x_1 + 8x_2 + S_2 = 3600 \\ x_1 \,,\, x_2 \,,\, S_1 \,,\, S_2 \ge 0 \end{cases}$

តារាងស៊ីមផ្លេចដំបូង

C_j	អថេរគោល	10 x_1	17 x_2	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប
0	S_1	3	2	1	0	3600	$3600 \div 2 = 1800$
0	S_2	2	8	0	1	3600	$3600 \div 8 = 450$
	Z_j	0	0	0	0		
	$Z_j - C_j$	-10	-17	0	0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $|-17| > |-10|$ នាំឱ្យ x_2 ជាអថេរចូល

ដោយផលធៀប $450 < 1800$ នាំឱ្យជួរដេក s_2 ជាអថេរចេញនិង 8 ជាធាតុវិល

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_2 = S_2 \div 8$

ជួរដេកថ្មី $S_1 = S_1 - (2) \times (x_2$ ថ្មី)

តារាងស៊ីមផ្លេចទី១

C_j	អថេរគោល	10 x_1	17 x_2	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប
0	S_1	2.5	0	1	-0.25	2700	$2700 \div 2.5 = 1080$
17	x_2	0.25	1	0	0.12	450	$450 \div 0.25 = 1800$
	Z_j	4.25	17	0	2.04	7650	
	$Z_j - C_j$	-5.75	0	0	2.04		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $-5.75 < 0$ នាំឱ្យ x_1 ជាអថេរចូល

ដោយផលធៀប $1080 < 1800$ នាំឱ្យជួរដេក S_1 ជាអថេរចេញ

និង 2.5 ជាធាតុវិល

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_1 = S_1 \div 2.5$

ជួរដេកថ្មី $x_2 = x_2 - (0.25) \times (x_1$ ថ្មី)

តារាងស៊ីមផ្លេចទី២

C_j	អថេរគោល	10 x_1	17 x_2	0 S_1	0 S_2	*RHS*	ផលធៀប
10	x_1	1	0	0.4	-0.1	1080	
17	x_2	0	1	-0.1	0.15	180	
	Z_j	10	17	2.3	1.55	13860	
	$Z_j - C_j$	0	0	2.3	1.55		

តាមតារាងស៊ីមផ្លេចទី២ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j - C_j \geq 0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_1 = 1080$; $x_2 = 180$; $Max\ Z = 13860 - 5000 = 8860$ ។

13). ម្ចាស់ហាងលក់ទឹកអប់មួយលក់ទឹកអប់ពីរប្រភេទដែលមានម៉ាក់ Silent Flower និង Mood Swing លាយដោយខ្លួនឯង។ ទឹកអប់ម៉ាក Silent Flower ផ្តល់ប្រាក់ចំណេញ 10% ក្នុងមួយអោន(ounce) និង Mood Swing ផ្តល់ប្រាក់ចំណេញ 10% ក្នុងមួយអោន ។ ទឹកអប់ប្រភេទទាំងពីរនេះផ្សំឡើងដោយធាតុសំខាន់ៗ (ទឹកលម្អងនៃដើមឈើ ឬ ផ្កា) គឺ E_1, E_2 និងE_3 ។ ការផ្សំចាំបាច់ត្រូវធ្វើតារាងខាងក្រោម ៖

Type	E_1	E_2	E_3
Silent Flower	20%	30%	50%
Mood Swing	10%	10%	80%

ព្រឹកនេះនៅក្នុងហាងមានសារធាតុ E_1 ចំនួន 48 oz ,និង E_2 ចំនួន 30 oz និងE_3 ចំនួន 60 oz ។ តើថ្ងៃនេះម្ចាស់ហាងត្រូវផលិតទឹកអប់ទាំងពីរប្រភេទយ៉ាងណាដើម្បីឱ្យគាត់បានចំណេញអតិបរមា?

ចូរសរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដាគណិតវិទ្យា និងដោះស្រាយវាតាមវិធីស៊ីមផ្លេច។

ដំណោះស្រាយ

13. សរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដាគណិតវិទ្យា និងដោះស្រាយវាតាមវិធីស៊ីមផ្លេច

តាង x_1 ជាចំនួនប្រភេទទឹកអប់ម៉ាក Silent Flower

x_2 ជាចំនួនប្រភេទទឹកអប់ម៉ាក Mood Swing

គេបានអនុគមន៍គោលដៅគឺ

រកចំនួនការផលិតអតិបរមានៃ $Z = 9x_1 + 6x_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 0.2x_1 + 0.1x_2 \le 48 \\ 0.3x_1 + 0.1x_2 \le 30 \\ 0.5x_1 + 0.8x_2 \le 30 \\ x_1 , x_2 , x_3 \ge 0 \end{cases}$

សរសេរអនុគមន៍ខាងលើជាទម្រង់កាណូនិច

រកចំនួនការផលិតអតិបរមានៃ $Z = 9x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 0.2x_1 + 0.1x_2 + S_1 = 48 \\ 0.3x_1 + 0.1x_2 + S_2 = 30 \\ 0.5x_1 + 0.8x_2 + S_3 = 30 \\ x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3 \ge 0 \end{cases}$

តារាងស៊ីមផ្លេចដំបូង

C_j	អថេរគោល	9 x_1	6 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	*RHS*	ផលធៀប
0	S_1	0.2	0.1	1	0	0	48	$48 \div 0.2 = 240$
0	S_2	0.3	0.1	0	1	0	30	$30 \div 0.3 = 100$
0	S_3	0.5	0.8	0	0	0	60	$60 \div 0.5 = 120$
	Z_j	0	0	0	0	0		
	$Z_j - C_j$	-9	-6	0	0	0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $|-9| > |-6|$ នាំឱ្យ x_1 ជាអថេរចូល

ដោយផលធៀប $100 < 120 < 240$ នាំឱ្យជួរដេក S_2 ជាអថេរចេញនិង 0.3 ជាធាតុវិល

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_1 = S_2 \div 0.3$

ជួរដេកថ្មី $S_1 = S_1 - (0.2) \times ($ x_1 ថ្មី$)$

ជួរដេកថ្មី $S_3 = S_3 - (0.5) \times ($ x_1 ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី១

C_j	អថេរគោល	9 x_1	6 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	*RHS*	ផលធៀប
0	S_1	0	0.03	1	-0.67	0	28	$28 \div 0.03 = 933.33$
9	x_1	1	0.33	0	3.33	0	100	$100 \div 0.33 = 303.03$
0	S_3	0	0.63	0	-1.67	1	10	$10 \div 0.63 = 15.87$
	Z_j	9	2.97	0	29.97	0	900	
	$Z_j - C_j$	0	-3.03	0	29.97	0		

តាមតារាងខាងលើយើងពិនិត្យមើល

ជួរដេក $Z_j - C_j$ ដោយ $-3.03 < 0$ នាំឱ្យ x_2 ជាអថេរចូល

ដោយផលធៀប $15.87 < 303.03$ នាំឱ្យជួរដេក S_3 ជាអថេរចេញនិង 0.63 ជាធាតុវិល

គេបាន ជួរដេកថ្មី $x_2 = S_3 \div 0.63$

ជួរដេកថ្មី $S_1 = S_1 - (0.03) \times ($ x_2 ថ្មី$)$

ជួរដេកថ្មី $x_1 = x_1 - (0.33) \times ($ x_2 ថ្មី$)$

តារាងស៊ីមផ្លេចទី២

C_j	អថេរគោល	9 x_1	6 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	RHS	ផលធៀប
0	S_1	0	0	1	–0.58	–0.05	27.47	
9	x_1	1	0	0	4.21	–0.53	94.74	
6	x_2	0	1	0	–2.63	1.58	15.79	
	Z_j	9	0	0	29.97	0	947.37	
	$Z_j - C_j$	0	0	0	29.97	0		

តាមតារាងស៊ីមផ្លេចទី២ខាងលើយើងពិនិត្យមើលជួរដេក $Z_j - C_j \geq 0$ នោះយើងទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុតគឺ $x_1 = 94.47$; $x_2 = 15.79$; $S_1 = 27.47$; $Max\ \ Z = 947.37$ ។

លំហាត់ដោះស្រាយចំណោទមិនលីនេអ៊ែរតាមវិធី Lagrange Multipliers

1. គេមានអនុគមន៍ *Cobb.Douglas*: $f(x,y)=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ ដែល $100x+100y=400000$ ។ ចូររក ចំណុចបរមាដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ *lagrange multipliers* ។

ចម្លើយ

ជំហានទី១: តាងសមីការ Lagrange

$$L(x,y,\lambda)=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}-\lambda(100x+100y-400000)$$

ជំហានទី២: ធ្វើដេរីវេដោយផ្នែក

$$L_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-100\lambda$$

$$L_y=\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}-100\lambda$$

$$L_\lambda=-100x-100y+400000$$

ជំហានទី៣: ឲ្យ $L_x=0$, $L_y=0$ និង $L_\lambda=0$ គេបាន

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-100\lambda=0\\ \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}-100\lambda=0\\ -100x-100y+400000=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{2x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{300} & (1)\\ \lambda=\frac{x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}}{300} & (2)\\ -100x-100y+400000=0 & (3)\end{cases}$$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$\frac{2x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{300}=\frac{x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}}{300}$$

$$2x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{2y^{\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{2}{3}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}}$$

$$2y=x \qquad (4)$$

យក (4) ជំនួសក្នុង (3)

$$-100x-100y+400000=0$$

$$-100(2y)-100y+400000=0$$

$$y=\frac{4000}{3}$$

តាម (4): $x = 2y = 2\times\frac{4000}{3} = \frac{8000}{3}$

ដូចនេះ ចំណុច $\left(\frac{8000}{3}, \frac{4000}{3}\right)$ ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមា និងមានតម្លៃអតិបរមាស្មើ 2116.53 ឯកតា

2. ឥឡូវយើងនឹងមកត្រួតពិនិត្យមើល សមីការប្រាក់ចំណេញបានដាក់បង្ហាញនៅដើមផ្នែកនេះ

$$p(x,y) = -2x^2 + 60x - 3y^2 + 72y + 100$$

ដែល x តាងឲ្យចំនួនកៅអីដែលធ្វើដោយដៃ និង y ជាចំនួនកៅអីយោលដែលធ្វើដោយដៃនៃការផលិតក្នុងរយៈពេលមួយសប្តាហ៍។ ដែល $g(x,y) = x + y = 20$ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ Lagrange multiplies រកតម្លៃ x, y ណាដែលធ្វើឲ្យប្រសើបំផុត។

<u>ចម្លើយ</u>

តាងសមីការ Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = \left(-2x^2 + 60x - 3y^2 + 72y + 100\right) - \lambda(x + y - 20)$$

គេបាន

$$\begin{cases} L_x = -4x + 60 - \lambda \\ L_y = -6y + 72 - \lambda \\ L_\lambda = -x - y + 20 \end{cases}$$

ឲ្យ $L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_\lambda = 0$

$$\begin{cases} -4x + 60 - \lambda = 0 & (1) \\ -6y + 72 - \lambda = 0 & (2) \\ -x - y + 20 = 0 & (3) \end{cases}$$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$-4x + 60 = -6y + 72$$

$$y = \frac{6 + 2x}{3} \qquad (4)$$

យក (4) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន

$$-x-y+20=0$$
$$-x-\left(\frac{6+2x}{3}\right)+20=0$$
$$5x=54$$
$$x=\frac{54}{5}\approx 11$$

នាំឲ្យ $y=\frac{6+2(11)}{3}\approx 9$

ដូច្នេះគួរតែផលិតកៅអីចំនួន 11 និងកៅអីយោលចំនួន 9 ដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមាគឺ 923 ឯកតា។

3. អនុគន៍ $U=f(x,y)$ តំណាងឲ្យអត្ថប្រយោជន៍ ឬ ភាពពេញចិត្តរបស់អតិថិជនដែលពួកគេប្រើប្រាស់ដ៏ជាក់លាក់នៃចំនួនផលិតផល x និង y ។ អនុគមន៍ $f(x,y)=x^2y^2$ ដែលក្រោមលក្ខខណ្ឌ $g(x,y)=2x+4y=40$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ មានតម្លៃអតិបរមា។

<u>ចម្លើយ</u>

កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ មានតម្លៃអតិបរមា

តាងសមីការ Lagrange $L(x,y,\lambda)=x^2y^2-\lambda(2x+4y-40)$

គេបាន $L_x=2xy^2-2\lambda$, $L_y=2x^2y-4\lambda$, $L_\lambda=-2x-4y+40$

ឲ្យ $L_x=0$, $L_y=0$, $L_\lambda=0$

$$\begin{cases}2xy^2-2\lambda=0\\2x^2y-4\lambda=0\\-2x-4y+40=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2xy^2=2\lambda & (1)\\2x^2y=4\lambda & (2)\\2x+4y=40 & (3)\end{cases}$$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$2xy^2=x^2y$$
$$2y=x \qquad (4)$$

យក (4) ជំនួសក្នុង (3)

$$2x+4y=40$$
$$2(2y)+4y=40$$
$$y=5$$

នាំឲ្យ $x=10$

(តាម(1) : $\lambda=xy^2$ តើវាមានន័យដូចម្ដេច?

វាមានន័យថា ប្រសិនបើចំនួនថេរនោះកើនពី $40 \to 41$ នោះអតិបិជនជាអតិបរមានឹងកើន ២៥០ នាក់ទៀត)

ដូច្នេះផលិតផល $x = 10$ និង ផលិតផល $y = 5$ និង $f(x, y) = 2500$ ។

4. ប្រើទ្រឹស្តីបទ Lagrange multipliers ចូររក $Min\ f(x, y, z) = 2xy + 2yz + xz$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $xyz = 4$ ។

ចម្លើយ

តាង $L(x, y, z, \lambda) = 2xy + 2yz + xz - \lambda(xyz - 4)$

ធ្វើដេរីវេធៀប

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2y + z - \lambda yz \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2x + 2z - \lambda xz \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial z} = x + 2y - \lambda xy$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ xyz = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + z - \lambda yz = 0 \\ 2x + 2z - \lambda xz = 0 \\ x + 2y - \lambda xy = 0 \\ xyz = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{2y + z}{yz} & (1) \\ \lambda = \dfrac{2x + 2z}{xz} & (2) \\ \lambda = \dfrac{x + 2y}{xy} & (3) \\ xyz = 4 & (4) \end{cases}$$

តាម (1) , (2) , (3) គេបាន

$$\frac{2y + z}{yz} = \frac{2x + 2z}{xz} = \frac{x + 2y}{xy}$$

$$\frac{2}{z} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} + \frac{2}{x} = \frac{1}{y} + \frac{2}{x}$$

គេបាន $\begin{cases} \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{x} \\ \dfrac{2}{z} = \dfrac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = z \end{cases}$ ជំនួសក្នុង (4)

នាំឲ្យ $(2y)y(2y) = 4$

$$y^3 = 1$$

$$y^3 - 1 = 0$$

$$y = 1$$

នោះ $x = z = 2$, $y = 1$ និង $f(2,1,2) = 12$ ។

ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមាស្មើ 12 នៅត្រង់ចំណុច $(2,1,2)$ ។

5. បើ $x > 0$, $y > 0$ និង $z > 0$ ចូរកំណត់តម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ $f(x,y,z) = xyz$ ដែលមានលក្ខខណ្ឌ $x + y + z^2 = 16$ ។

ចម្លើយ

តាង $L(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda\left(x + y + z^2 - 16\right)$

ធ្វើដេរីវេធៀប

$$\frac{\partial L}{\partial x} = yz - \lambda \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = xz - \lambda \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial z} = xy - 2\lambda z$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ x + y + z^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz - \lambda = 0 \\ xz - \lambda = 0 \\ xy - 2\lambda z = 0 \\ x + y + z^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = yz & (1) \\ \lambda = xz & (2) \\ \lambda = \dfrac{xy}{2z} & (3) \\ x + y + z^2 = 16 & (4) \end{cases}$$

តាម (1) , (2) , (3) គេបាន

$$yz = xz = \frac{xy}{2z}$$

$x = y$, $z^2 = \dfrac{x}{2}$ ជំនួសក្នុង (4)

គេបាន $x + x + \dfrac{x}{2} = 16 \quad \Rightarrow x = \dfrac{32}{5}$

នោះ $x = y = \dfrac{32}{5}$, $z = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$ និង $f\left(\dfrac{32}{5}, \dfrac{32}{5}, \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{4096}{25\sqrt{5}}$ ។

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមាស្មើ $\frac{4096}{25\sqrt{5}}$ នៅត្រង់ចំណុច $\left(\frac{32}{5},\frac{32}{5},\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ ។

6. ប្រើទ្រឹស្តីបទ *Lagrange multipliers* ចូរកំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $f(x,y,z)=8x^2+4yz-16z+600$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $4x^2+y^2+4z^2=16$ ។

ចម្លើយ

តាង $L(x,y,z,\lambda)=8x^2+4yz-16z+600-\lambda(4x^2+y^2+4z^2-16)$

ធ្វើដេរីវេធៀប

$$\frac{\partial L}{\partial x}=16x-8\lambda x \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y}=4z-2\lambda y \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial z}=4y-16-8\lambda z$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=0\\ 4x^2+y^2+4z^2=16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}16x-8\lambda x=0\\ 4z-2\lambda y=0\\ 4y-16-8\lambda z=0\\ 4x^2+y^2+4z^2=16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x(2-\lambda)=0 & (1)\\ \lambda=\frac{2z}{y} & (2)\\ \lambda=\frac{y-4}{2z} & (3)\\ 4x^2+y^2+4z^2=16 & (4)\end{cases}$$

តាម (1) , (2) , (3) គេបាន $x=0$, $4z^2=y^2-4y$ ជំនួសក្នុង (4)

នាំឲ្យ $4(0)^2+y^2+(y^2-4y)=16$

$$(y+2)(y-4)=0$$

$$y=-2 \ , \ y=4$$

បើ $y=-2$ នោះ $x=0$, $z=\sqrt{3}$ និង $f(0,-2,\sqrt{3})=558.43$

បើ $y=4$ នោះ $x=0$, $z=0$ និង $f(0,4,0)=600$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ f ស្មើ 600 នៅត្រង់ចំណុច $(0,4,0)$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. រកតម្លៃបរមាខាងក្រោមតាមលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យតាមក្រាប ៖

ក. $\max Z = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{st}\begin{cases} \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \le 1 \\ \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

ខ. $\max Z = 2x_1 - x_2$

$$\text{st}\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

គ. $\max Z = x_1 + x_2$

$$\text{st}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \ge 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

ឃ. $\max Z = 4x_1 + x_2$

$$\text{st}\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \le 16 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

ង. $\max Z = -x_1 + 3x_2$

$$\text{st}\begin{cases} x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

ច. $\max Z = 3x_1 + x_2$

$$\text{st}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

ឆ. $\min Z = x_1 - x_2$

$$\text{st}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ -x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

ជ. $\min Z = 3x_1 + 5x_2$

$$\text{st}\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 36 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 45 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. រកតម្លៃបរមាខាងក្រោមតាមលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ ៖

ក. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 4x + 5y$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 2x + 4y \le 12 \\ x + 3y \le 21 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

ខ. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z = 2x + y$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 4x + 3y \ge 24 \\ 4x + y \le 16 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

គ. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z=5x+3y$

ក្រោមលក្ខណ្ឌ $\begin{cases}3x+y\le 24\\ x+y\le 10\\ x+3y\le 24\\ x,y\ge 0\end{cases}$

ឃ. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z=15x+30y$

ក្រោមលក្ខណ្ឌ $\begin{cases}x+2y\ge 1000\\ 2x-y\le 0\\ 2x+y\le 200\\ x,y\ge 0\end{cases}$

ង. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $Z=10y_1-9y_2$

ក្រោមលក្ខណ្ឌ $\begin{cases}2y_1-3y_2\ge 1\\ y_1+y_2\le 0\\ y_1,y_2\ge 0\end{cases}$

ច. រកតម្លៃអប្បរមានៃ $Z=x_1-2x_2$

ក្រោមលក្ខណ្ឌ $\begin{cases}-4x_1+6x_2\le 9\\ x_1+x_2\le 4\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$

ឆ. រកតម្លៃអប្បរមានៃ $Z=x+2y$

ក្រោមលក្ខណ្ឌ $\begin{cases}2x+3y\ge 30\\ 3x+2y\ge 30\\ x,y\ge 0\end{cases}$

ជ. រកតម្លៃអប្បរមានៃ $Z=25x+50y$

ក្រោមលក្ខណ្ឌ $\begin{cases}x+2y\le 120\\ x+y\ge 60\\ x-2y\ge 0\\ x,y\ge 0\end{cases}$

ឈ. រកតម្លៃអប្បរមា $Z=25x+15y$

ក្រោមលក្ខណ្ឌ $\begin{cases}4x+5y\ge 100\\ 3x+4y\ge 240\\ x\le 60\\ y\le 45\\ x,y\ge 0\end{cases}$

ញ. រកតម្លៃអប្បរមានៃ $Z=25x+30y$

ក្រោមលក្ខណ្ឌ $\begin{cases}2x+3y\ge 120\\ 3x+2y\ge 360\\ x\le 80\\ y\le 120\\ x,y\ge 0\end{cases}$

ដ. $\min Z=-x_1+-x_2$

ក្រោមលក្ខណ្ឌ $\begin{cases}x_1+x_2\le 1\\ -x_1+x_2\le 0\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$ ។

3. បង្ហាញថាចំណោទខាងក្រោមមានចម្លើយប្រសើរបំផុតមានច្រើន ៖

$$\max Z=-3x_1+6x_2 \text{ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ } \begin{cases}5x_1+7x_2\le 35\\ -x_1+2x_2\le 2\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$ ។

4. រកចម្លើយប្រសើរបំផុតទាំងអស់នៃចំណោទ ៖

ក. $\max Z = x_1 + x_2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 + 2x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$ ។

ខ. $\max Z = 3x_1 + 3x_2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$ ។

5. តើមានចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានប៉ុន្មាននៃចំណោទ ៖

$\max Z = 2x_1 + 2x_2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ ។

6. បង្ហាញថាចំណោទមានចម្លើយមិនទាល់ ៖

ក. $\max Z = 2x_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

ខ. $\max Z = x_1 + 2x_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

គ. $\min Z = -x_1 + -3x_2$

ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ ។

7. បង្ហាញថាចំណោទមានឱនភាព ៖

$\max Z = 5x_1 + 3x_2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ ។

8. ប្រើ Lagrange multipliers ដើម្បីរកតម្លៃអតិបរមា ឬអប្បបរមានៃបណ្តាអនុគមន៍តាមលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ ខាងក្រោម ៖

ក. $f(x,y)=x+2y$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2=4$

ខ. $f(x,y)=xy^2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2=1$

គ. $f(x,y)=e^{2xy}$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^3+y^3=16$

ឃ. $f(x,y)=x^2+y^2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^6+y^6=1$

ង. $f(x,y)=y^2-x^2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+2y^2=4$

ច. $f(x,y)=xy+x+y$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $xy=4$

ឆ. អនុគមន៍ $f(x,y)=xy$ ដែលមានខ្សែកោង $3x^2+y^2=6$

ជ. $f(x,y)=x+y$ ដែល $x^2+y^2=1$

ឈ. $f(x,y)=xy$ ដែល $4x^2+y^2=8$

ញ. $f(x,y)=x^2+y$ ដែល $x^2-y^2=1$

ដ. $f(x,y)=x^2+2y^2$ ដែល $x^2+y^2\le 4$ ។

ចំណាំ៖ ប្រសិនបើផ្ទៃកម្រិតធំដែលមិនអាចកំណត់បាន (ផ្ទៃក្រឡាខិតទៅជិតអនន្ត) នោះការប្រើប្រាស់Lagrange multipliers គឺមិនអាចរកចំណុចអតិបរមា និងចំណុចអប្បបរមាបានទេ ។

9. ប្រើ Lagrange multipliers ដើម្បីរកតម្លៃអតិបរមា ឬអប្បបរមានៃបណ្តាអនុគមន៍តាមលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ ខាងក្រោម៖

ក. $f(x,y)=3x+2y$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2=1$

ខ. $f(x,y)=2x-y$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2=1$

គ. $f(x,y)=x-2y$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2=25$

ឃ. $f(x,y)=x+y$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+2y^2=1$

ង. $f(x,y)=x^2+2y^2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2=1$

ច. $f(x,y)=x^2y$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2=1$

ឆ. $f(x,y)=x^4+y^2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2=1$

ជ. $f(x,y)=x^4+y^4$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2=1$

ឈ. $f(x,y)=x\sin y$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2=1$

ញ. $f\left(x,y\right)=\sin x\cos y$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2=1$ ។

10. រកតម្លៃបរមានៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $Maximize\ f\left(x,y\right)=e^{x+y}-x\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x+y=4$

ខ. $Minimize\ f\left(x,y\right)=\ln\left(x+2y\right)$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $xy+y=5$

គ. $Minimize\ f\left(x,y\right)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{xy}+\dfrac{1}{y^2}$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x+2y=7$

ឃ. $Maximize\ f\left(x,y\right)=xe^{x^2-y}$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+2y^2=1$ ។

11. រកតម្លៃអតិបរមា ឬតម្លៃអប្បបរមានៃ ដោយប្រើ lagrange Multipliers ៖

ក. អនុគមន៍ $f\left(x,y,z\right)=x+y+2z$ ដែលមានផ្ទៃក្រឡា $x^2+y^2+z^2=3$ ។

ខ. អនុគមន៍ $f\left(x,y,z\right)=x^2-y^2$ ដែលមានផ្ទៃក្រឡា $x^2+2y^2+3z^2=1$ ។ (រកគ្រប់ចម្លើយដែលអាចកើតឡើង) ។

គ. $f\left(x,y,z\right)=x+3y-z$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2+z^2=4$

ឃ. $f\left(x,y,z\right)=xyz$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+2y^2+4z^2=9$

ង. $f\left(x,y,z\right)=xy^2z^3$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2+2z^2=25$

ច. $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $z=1+2xy$

ឆ. $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $xyz=4$

ជ. $f\left(x,y,z\right)=\sqrt{xyz}$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=1$ ដែល $x,y,z>0$ ។

12. រកតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត និងអប្បបរមាដាច់ខាតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក. $f\left(x,y\right)=x^2+4y^2+1$; $R=\left\{\left(x,y\right),x^2+4y^2\le 1\right\}$

ខ. $f\left(x,y\right)=x^2-4y^2+xy$; $R=\left\{\left(x,y\right),4x^2+9y^2\le 36\right\}$

គ. $f\left(x,y\right)=2x^2+y^2+2x-3y$; $R=\left\{\left(x,y\right),x^2+y^2\le 1\right\}$

ឃ. $f\left(x,y\right)=\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2$; $R=\left\{\left(x,y\right),x^2+y^2\le 4\right\}$ ។

13. រកតម្លៃបរមានៃ f ដែលមានអនុគមន៍កម្រិតព្រំដែនខាងក្រោម ៖

ក. $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z^2=x^2+y^2\end{cases}$

ខ. $f(x,y,z)=xyz$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ xy+yz+xz=1 \end{cases}$ ។

14. $Maximize\ : 2\ln x_1+3\ln x_2+3\ln x_3$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $x_1+2x_2+2x_3=10$ ។

15. រកតម្លៃបរមានៃ $f(x,y,z,w)=xw-yz$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x^2+2y^2=4 \\ 2z^2+w^2=9 \end{cases}$ ។

16. តាង $a,b,c,p,q,r,\alpha,\beta,\gamma$ ជាអថេរវិជ្ជមាន ។ រកតម្លៃអតិបរមានៃ $f(x,y,z)=x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} ax^p+by^q+cz^r=1 \\ x,y,z\geq 0 \end{cases}$ ។

17. រកតម្លៃបរមានៃ $f(x,y,z,w)=(x+z)(y+w)$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y^2+w^2=1 \end{cases}$ ។

18. រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x,y,z,w)=x^2+2y^2+z^2+w^2$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x+y+z+3w=1 \\ x+y+2z+w=2 \end{cases}$

19. រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}+\dfrac{z^2}{r^2}$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ x,y,z\geq 0 \end{cases}$ ។

20. រកតម្លៃបរមានៃ $f(x,y,z)=2x+y+2z$ ក្រោមលក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x+z=2 \end{cases}$ ។

21. រកប្រវែងជាអតិបរមា និងអប្បបរមារវាងអេលីប $x^2+xy+2y^2=1$ និងគល់តម្រុយ ។

22. រកវិមាត្រនៃចតុកោណដែលមានផ្ទៃក្រឡាជាអតិបរមាដែលមានជ្រុងស្របគ្នា នឹងអក្សកូអរដោនេ ដែលចារឹកនៅក្នុងអេលីប $4x^2+16y^2=16$ ។

23. ចូររកវិមាត្រនៃចតុកោណដែលមានបរិមាត្រជាអតិបរមាដែលមានជ្រុងស្របគ្នានឹងអ័ក្សកូអរដោណេដែលចារឹកក្នុងអេលីប $4x^2+9y^2=36$ ។

24. ក្រុមហ៊ុនផលិតក្រដាសដុំទូទៅ មានទទឹងប្រវែង $5m$ តែក្រុមហ៊ុនមានវិធីកាត់ក្រដាសទាំងនេះ។ ក្រុមហ៊ុនមានការបញ្ជាទិញមួយ សម្រាប់ក្រដាសទទឹង ប្រវែង $320m$ ចំនួន 105 ដុំ ទទឹងប្រវែង $140cm$ ចំនួន 47 ដុំ និងទទឹងប្រវែង $65cm$ ចំនួន 82 ដុំ។ តើគេត្រូវការទិញក្រដាសទូទៅចំនួនអប្បរមា មានប៉ុន្មានដុំ ដើម្បីបំពេញតាមការបញ្ជានេះ ?

25. ក្រុមហ៊ុនផលិតសារធាតុគីមី Leary Company ផលិតសារធាតុគីមីបីប្រភេទ A,B និង C ។ សារធាតុគីមីទាំងនេះ ត្រូវផលិតតាមរយៈដំណើរការផលិតកម្មពីរគឺ ដំណើរការទី១ និងដំណើរការទី២។ ការចាត់ចែងដំណើរការទី១ សម្រាប់មួយម៉ោងថ្លៃ \$4 ហើយផលិតបាន

សារធាតុគីមី A ៣ឯកតា B ១ឯកតា និង C ១ឯកតា ។ ការចាត់ចែងដំណើរការទី២ សម្រាប់មួយម៉ោងថ្លៃ \$1 ហើយផលិតបានសារធាតុគីមី A ១ឯកតា B ១ឯកតា។ ដើម្បី

ធ្វើតាមតម្រូវការអតិថិជនយ៉ាងហោចណាស់សារធាតុគីមី *A* ១០ឯកតា *B* ៥ឯកតា និង *C* ៣ឯកតា ត្រូវផលិតប្រចាំថ្ងៃ។ តាមក្រាភិច ចូរកំណត់គម្រោងផលិតកម្មដែលបន្ថយដល់កម្រិតអប្បរបមា នូវចំណាយនៃការបំពេញតម្រូវការជាប្រចាំថ្ងៃរបស់ក្រុមហ៊ុនផលិតសារធាតុគីមីនេះ។

26. ក្រុមហ៊ុនផលិតស្រា Sheep glass មានកន្លែងផលិតស្រាទំពាំងបាយជូរពីរកន្លែងផ្សេងគ្នា។ ក្រុមហ៊ុននេះត្រូវផ្គត់ផ្គង់ឲ្យឃ្លាំងបីនូវស្រាសម្រាប់បញ្ចូលក្នុងធុង ។ ចំនាយលើការដឹកជញ្ជូនលើផលិតផល1000 លីត្រ រវាងរោងចក្រ និង ឃ្លាំងនីមួយៗ ដែលអាចធ្វើបាន និង តម្រូវការរបស់ឃ្លាំងនីមួយៗ (គិតជាលីត្រ)

បង្ហាញដូចតារាងខាងក្រោម៖

	ឃ្លាំងទី១	ឃ្លាំងទី២	ឃ្លាំងទី៣	ផ្គត់ផ្គង់
រោងចក្រទី១	$50	$40	$35	100
រោងចក្រទី២	$30	$45	$40	140
តម្រូការ	80	75	65	

ប្រសិនបើតម្រូវការរបស់ឃ្លាំងត្រូវតែបំពេញដាច់ខាត ចូរកំណត់គម្រោងដឹកជញ្ជូន ដែល និងបន្ថយចំណាយលើការដឹកជញ្ជូនឲ្យដល់កម្រិតទាបបំផុត។

27. រោងចក្រអគ្គីសនីមួយៗដើរដោយធ្យូងថ្ម ពីរកន្លែង។ ការចំណាយនៃធ្យូងថ្ម រួមទាំងការដឹកជញ្ជូនមួយតោន ឯកតាកម្ដៅក្នុងមួយតោន និងបរិមាណដឹកជញ្ជូនក្នុងមួយថ្ងៃមានដូចតារាងខាងក្រោម៖

អណ្ដូងរ៉ែធ្យូងថ្ម	*A*	*B*
$ ចំណាយក្នុងមួយតោន	4	5
ឯកតាកម្ដៅក្នុងមួយតោន	3	2
តោន បរិមាណកម្ដៅក្នុងមួយតោន	600	2000

បើសម្ថភាពប្រើប្រាស់ធ្យូងថ្មនៅរោងចក្រអគ្គីសនីមានកំណត់ត្រឹមត្រូវ 1800 តោនក្នុងមួយថ្ងៃ ហើយត្រូវការកម្ដៅយ៉ាងហោចណាស់ 2700 ឯកតាក្នុងមួយថ្ងៃ។ ចូរកំណត់

របៀបការទិញធ្យូងថ្ម ដើម្បីឲ្យរោងចក្រអាចដំណើរការបានដោយការចំណាយអប្បបរមា។

28. អ្នកផលិតម្នាក់បានផលិតសាច់អាំងពីរប្រភេទគឺ DD Smokey និង Blaze Away ។ ក្នុងកំឡុងផលិតកម្ម សាច់អាំងត្រូវប្រើប្រាស់ម៉ាស៊ីនពីរគឺ ម៉ាស៊ីន A និងម៉ាស៊ីន B។ ចំនួនម៉ោងដែលដែលត្រូវការប្រើប្រាស់លើម៉ាស៊ីនទាំងពីរត្រូវបានបង្ហាញតាមតារាងខាងក្រោម៖

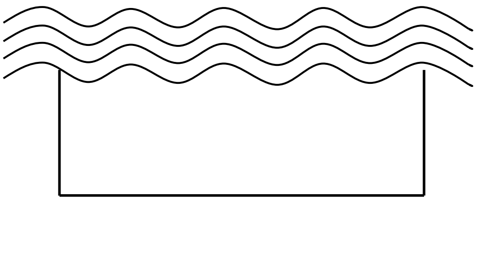
ប្រភេទ	ម៉ាស៊ីន A	ម៉ាស៊ីន B
DD Smokey	$2h$	$4h$
Blaze Away	$4h$	$2h$

បើម៉ាស៊ីននីមួយៗអាចប្រើប្រាស់បាន 24 ម៉ោងក្នុងមួយថ្ងៃ ហើយប្រាក់ចំណេញនៃការគំរូសាច់អាំង DD Smokey និង Blaze Away មានចំនួន $4 និង $6 រៀងគ្នា តើគេគួរតែផលិតប្រភេទនៃសាច់នីមួយៗចំនួនប៉ុន្មានក្នុងមួយថ្ងៃ ដើម្បីឲ្យគេទទួលបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមា? តើប្រាក់ចំណេញជាអរតិបរមាស្មើប៉ុន្មាន?

29. អ្នកវិនិយោគម្នាក់មានប្រាក់$20 000 សម្រាប់វិនិយោគ។ គាត់អាចវិនិយោគបីផ្នែកគឺ ស្តុកអគ្គិសនីដែនមានភាគហ៊ុន12% ប័ណ្ណបំណុលក្រុមប្រឹក្សាទីក្រុងដែលផ្តល់ការប្រាក់ 10% និងប័ណ្ណជាតិដែលផ្តល់ការប្រាក់ 11% ។ សន្មត់ថាទឹកប្រាក់ដែលត្រូវវិនិយោគក្នុងស្តុកមិនអាចលើសពីពាក់កណ្តាលនៃបរិមាណវិនិយោគសរុប ហើយបរិមាណវិនិយោគក្នុងប័ណ្ណមិនលើសពី $100 000 ទេប៉ុន្តែយ៉ាងហោចណាស់ត្រឹម $70 000 ដែរ។ តើគោលនយោបាយវិនិយោគមួយណា គួរតែត្រូវធ្វើតាមដើម្បីបង្កើនចំណូលបានជាអតិបរមា?

ចូរសរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដាគណិតវិទ្យា និងដោះស្រាយវាតាមវិធីស៊ីមផ្លេច។

30. កសិករម្នាក់មាន 400 បង្គោលរបងសម្រាប់ព័ន្ធជុំវិញចំការមួយរាងចតុកោណកែង ហើយចំការនោះនៅជាប់មាត់ទន្លេ (ដូចរូប) ។ រកវិមាត្រនៃចំការដើម្បីឲ្យចំការនោះមានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា បើសិនជាបង្គោលរបងត្រូវបានដាក់តែបីជ្រុងនៃចំការ ។



31. មនុស្សម្នាក់ព្យាយាមធ្វើឲ្យមានតុល្យភាព រវាងការធ្វើការនិងលំហែកំសាន្ត មានន័យថា បើអ្នកធ្វើការតិចម៉ោង ប្រាក់ចំណូលរបស់អ្នកក៏បានតិចដូចគ្នាដែរ ។ ដូច្នេះហើយ មនុស្សម្នាក់ៗ មានខ្សែកោង មិនខុសប្លែកគ្នាប៉ុន្មានទេ ដែលភ្ជាប់នៃចំនួនម៉ោងនៃលំហែកំសាន្ត តាងដោយអក្សរ (L) និងប្រាក់ចំណូលតាងដោយអក្សរ (S) ។ ឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើអ្នកមិនមានដំណើរលំហែកំសាន្តក្នុងមួយសប្តាហ៍នោះប្រាក់ចំណូលរបស់អ្នកបាន $\$1125$ ក្នុងមួយសប្តាហ៍ តែបើអ្នកមានដំណើរកំសាន្ត 10 ម៉ោងក្នុងមួយសប្តាហ៍ នោះប្រាក់ចំណូលរបស់អ្នកបានត្រឹមតែ $\$750$ ក្នុងមួយសប្តាហ៍។ មានន័យថា $L=0$ នោះ $S=\$1125$ និង $L=10$ នោះ $S=\$750$ ។

(a). ចូរគូសក្រាហ្វនៃខ្សែកោងបីដែលមានលក្ខណះស្រដៀងគ្នា។

(b). អ្នកមាន 100 ម៉ោងក្នុងមួយសប្តាហ៍សម្រាប់ធ្វើការនិងលំហែកំសាន្ត ហើយនិងអ្នកអាចរកបាន $\$10$ ក្នុងមួយម៉ោង។ ចូរសរសេរសមីការតំណាង ឲ្យចំណោទបញ្ហានេះ ដែលជាអនុគមន៍នៃអក្សរ L & S ។

(c). នៅលើអ័ក្សដដែល គូសក្រាបនៃចំណោទបញ្ហានេះ។

(d). ចូរធ្វើការប៉ាន់ស្មានចេញពីក្រាប នៃម៉ោងលំហែកំសាន្ត និងប្រាក់ចំណូលដែលមានបង្ហាញនៅក្នុងតារាងខាងក្រោម។

+ Weekly income

I	*II*	*III*
1125	1125	1375
750	875	1000
500	625	750
375	500	625
250	375	500

+ Weekly leisure hours

I	*II*	*III*
0	20	40
10	30	50
20	40	60
30	50	70
50	70	90

32. អ្នកឡើងភ្នំម្នាក់កំពុងនៅលើកំពូលភ្នំ គាត់ចង់ចុះពីលើកំពូលភ្នំមកដល់ដីឲ្យបានលឿនបំផុត ។ កម្ពស់នៃភ្នំឲ្យដោយអនុគមន៍ $h(x,y)=3000-\frac{1}{1000}\left(5x^2+4xy+2y^2\right)m$ ដែល x,y ជាកូអរដោនេនៃបន្ទាត់ដេក នៃផែនដីគិតជាម៉ែត (m) ដែលកំពូលភ្នំជាស្ថិតនៅលើតម្រុយ។ នៅក្នុងរយៈពេល 30 នាទី អ្នកឡើងភ្នំអាចទៅដល់ចំណុច (x,y) នៅលើរង្វង់ដែលមានកាំ $1000\ m$ ។ តើនាងគួរធ្វើដំណើរតាមទិសដៅមួយណា ដើម្បីឲ្យបានលឿនតាមអ្វីដែលអាចធ្វើទៅបាន ? អ្នកឡើងភ្នំអាចឡើងទៅដល់ចំណុចណាមួយក្នុងរង្វង់ $x^2+y^2\le 1000^2$ ក្នុងរយៈពេលកន្លះម៉ោង ។ គេចង់រកតម្លៃអប្បរមានៃ h នៅក្នុងរង្វង់នោះ។

33. គេមានទ្រុងចិញ្ចឹមមាន់រាងជាការេគឺ $20\ feet\times 20\ feet$ ។ ហើយគេសម្រេចចិត្តចិញ្ចឹមទាក្នុងទ្រុងតែមួយ ប៉ុន្តែគេចង់បែងចែកមាន់ និងទា ឲ្យនៅដាច់ដោយឡែកពីគ្នា ដែលមានរបងហ៊ុំព័ទ្ធប្រវែង $10\ feet$ ដោយបែងចែកចេញជាពីរផ្នែក។ អ្នកបែងធ្វើទ្រុងត្រូវធ្វើរបងឲ្យត្រង់ ដោយភ្ជាប់ពីជ្រុងម្ខាងនៃទ្រុង ទៅជាប់និងជ្រុងម្ខាងទៀត។ ការធ្វើបែបនេះបង្កើតឲ្យបានតំបន់មានរាងជាត្រីកោណ នៅក្នុងទ្រុងដែលអាចដាក់ទា និង មាន់បានដាច់ដោយឡែកពីគ្នា។ យោងទៅតាមអ្វីដែលគេបានលើកឡើង មានច្បាប់សុខមាលភាពរបស់សត្វផ្សេងៗពីគ្នា (លក្ខណ្ឌនៃការរស់នៅរបស់សត្វ) ដែលការពារតំបន់ត្រីកោណមិនឲ្យតូចចង្អៀតពេក។

ចូររកក្រឡាផ្ទៃជាអតិបរមានៃរបាំងព័ទ្ធជុំវិញទា ក្នុងករណីដែលអ្នករស់នៅរដ្ឋ Arizona និងរដ្ឋ California:

(a). ក្នុងរដ្ឋ Arizona ច្បាប់បានចែងថា ជ្រុងមួយដែលមិនមែនជាអ៊ីប៉ូតេនុស ត្រូវតែមានប្រវែងយ៉ាងហោចណាស់ $8\ feet$ ហើយជ្រុងផ្សេងទៀត ត្រូវតែមានប្រវែងយ៉ាងហោចណាស់ $5\ feet$ ។ $Ans:\left(24\ feet^2\right)$

(b). នៅក្នុងរដ្ឋ California ច្បាប់បានចែងថា ជ្រុងផ្សេងៗនៃត្រីកោណត្រូវតែមាន ប្រវែងយ៉ាងហោចណាស់ $5\ feet$ ។ $Ans:\left(25\ feet^2\right)$

34. សាលាមួយចង់សាងសង់ផ្លូវដែកដែលមានរាងជារង្វិលជុំ សម្រាប់សិស្សរបស់ពួកគេ។ ជាក់ស្តែងផ្លូវដែកនេះមានរាងជាចម្រៀកត្រង់ស្របគ្នាពីរ ដែលគេភ្ជាប់ដោយរង្វង់តូចៗ

នៅខាងចុងចម្រៀកនីមួយៗ។ ផ្លូវដែកនោះមានប្រវែងសរុប 400 m ។ តំបន់ដែលនៅចន្លោះរវាងចម្រៀកត្រង់ទាំងពីរនៃផ្លូវដែកដែលមានផ្ទៃក្រឡារាងជាចតុកោណ។ ផ្ទៃក្រឡារាងចតុកោណនោះត្រូវបានគេធ្វើឲ្យទៅជាវាលស្មៅមួយ។

(a). ចម្រៀកត្រង់និមួយៗ នៃផ្លូវដែករអាមានប្រវែងយ៉ាងវច្រើន 150 m ។ $Ans:\left(\frac{20000}{\pi}m^2\right)$

(b). ចម្រៀកត្រង់និមួយៗ នៃផ្លូវដែករអាមានប្រវែងយ៉ាងវច្រើន 40 m ។ $Ans:\left(\frac{12800}{\pi}m^2\right)$

35. អនុគមន៍ផលិតរបស់ក្រុមហ៊ុន Cobb Douglas ត្រូវបានផ្តល់ឲ្យដោយ $f(x,y)=50x^{2/5}y^{3/5}$ ដែល x តំណាងឲ្យ *Units of labor* និង y តំណាងឲ្យ *Units of Capital* ។ ឧបមាថា *Units of labor* និង *Capital* មានតម្លៃ 100\$ និង 200\$ រៀងគ្នា ។ ប្រសិនបើមានថវិកា 30 000\$ ចូររកកម្រិតផលិតផលជាអតិបរមានៃក្រុមហ៊ុននេះ ។

36. ក្រុមហ៊ុនមួយបានផលិតទំនិញពីរប្រភេទខុសគ្នា ។ ការចំណាយសរុបនៃការផលិតអាស្រ័យទៅលើបរិមាណ q_1 និង q_2 ដែលផ្គត់ផ្គង់ដោយរោងចក្រ និងត្រូវបានបញ្ជាក់ដោយអនុគមន៍ចំណាយរួមគ្នាគឺ $C=f(q_1,q_2)=2q_1^2+q_1q_2+q_2^2+500$ ។ គោលបំណងរបស់ក្រុមហ៊ុនគឺដើម្បីផលិត 200 ឯកតា ខណៈដែលការចំណាយលើការផលិតត្រូវបានកាត់បន្ថយ ។ តើមានប៉ុន្មានឯកតាដែលក្រុមហ៊ុនគួរផ្គត់ផ្គង់ ។

ក្រុមហ៊ុនចង់បានជាអប្បបរមា $C=f(q_1,q_2)=2q_1^2+q_1q_2+q_2^2+500$ ដែល $q_1+q_2=200\,(g(q_1,q_2)=q_1+q_2)$ ។

37. នាយកគ្លីនិកសុខភាពមួយកន្លែងមានថវិការប្រចាំឆ្នាំ \$ 600,000 ។ គាត់ចង់បម្រុងទុកថវិការរបស់គាត់ដើម្បីបង្កើនចំនួននៃអ្នកជំងឺតាងដោយ V , D ជាចំនួននៃគ្រូពេទ្យ និង N ជាចំនួននៃគិលានុបដ្ឋាយិកាដែលមានអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម៖

$$V=1000D^{0.6}N^{0.3}$$

ប្រាក់ខែរបស់ Doctor គឺ \$ 40,000 ហើយគិលានុបដ្ឋាយិកាគឺ \$ 10,000 ។

ក. កំណត់បញ្ហាការបង្កើនប្រសិទ្ធិភាពរបស់វិជ្ជបណ្ឌិត ។

ខ. ចូរសរសេរលក្ខខណ្ឌដែលត្រូវបានបំពេញលក្ខខណ្ឌដោយ $\frac{\partial V}{\partial D}$ និង $\frac{\partial V}{\partial N}$ សម្រាប់ធ្វើឲ្យ V មានតម្លៃប្រសើរបំផុត ។

គ. ដោះស្រាយបញ្ហានៅសំណួរ (ក) ។

ឃ. រកតម្លៃនៃ Lagrange multipliers ហើយបកស្រាយលទ្ធផលនេះ ។

ង. នៅត្រង់ចំណុចបរមា តើអ្វីជាការចំណាយនៃដំណើរទស្សនកិច្ចនេះ? តើចំនួនអ្នកចូលពេទ្យមានការកើនឡើង ឬធ្លាក់ចុះ? ហេតុអ្វី?

38. នាយកដ្ឋានផ្លូវថ្នល់មួយ កំពុងមានផែនការណ៍សាងសង់តំបន់កម្សាន្តមួយសម្រាប់អ្នករៀនបើកបរម៉ូតូ។ វាមានទ្រង់ទ្រាយរាងជាចតុកោណកែងដែលមានផ្ទៃក្រឡា 5000 $yards^2$ ។ កន្លែងនោះត្រូវការធ្វើរបងហ៊ុំព័ទ្ធតែបីចំហៀងប៉ុណ្ណោះ និងវាមិននៅជិតផ្លូវហាយវេទេ។ តើគេត្រូវកាធ្វើយ៉ាងដូចម្ដេច ដើម្បីឲ្យការសាងសង់ផ្លូវនោះរួចរាល់ហើយចម្ងាយជិតបំផុត។

39. ស្ត្រីពីរនាក់បានសម្រេចចិត្តចាប់ផ្ដើមបើកធ្វើឧស្សាហកម្មខ្នាតតូចរួមគ្នា ។ ពួកគេមានគម្រោងផលិតអាវពីរប្រភេទ គឺ rhinestone និងអាវប៉ាក់។ ប្រាក់ចំណេញដុលសរុបត្រូវបានផ្ដល់ដោយអនុគមន៍ $P(x,y) = 16x + 20y - x^2 - y^2$ ដែល x ជាចំនួនអាវ rhinestone និង y ជាចំនួននៃអាវប៉ាក់ដែលបានផលិតក្នុងរយពេលមួយខែ។ ហើយក្នុងមួយខែពួកគេអាចផលិតបាតច្រើនបំផុតចំនួន 6 អាវតែប៉ុណ្ណោះ។ តើគួរតែផលិតប្រភេទអាវនិមួយៗចំនួនប៉ុន្មានដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមាក្នុងមួយខែៗ។

ឯកសារយោង

1. លឹម សុកលី, ម៉ែន សុគន្ធ, ចាន់ សូនី និងអេវ៉ាន់ អាស្លី (២០០២). ការស្រាវជ្រាវប្រតិបត្តិការ ១, បោះពុម្ពលើកទី៤. ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ, ភ្នំពេញ។
2. យឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា (២០១៥). ទ្រឹស្តីបរមាកម្ម, កម្រិតមូលដ្ឋាន, ភ្នំពេញ។
3. Deborah Hughes-Hallett. Andrew M. Gleason and William G. Mc Callum. et. all. (2005). Calculus, Single Variable. Jonh Willey & Sons, Inc.
4. Niclas Andréasson, Anton EVgraFov and Michael Patriksson (2005). An Introduction to Continuous Optimization. Goteborg, Inc.
5. Ron Larson and Anne V. Hodgkins (2008). College Algebra and Calculus: An Applied Approach. Cengage Learning, Inc. Canada.
6. Ron Larson and Bruce H. Edwards (2012). Calculus 10e. Cengage Learning, Inc. America.
7. Wayne L. Winston (2004). Operations Research: Applications and agorithms, Fourth Edition. Thomson Learning, Inc. Canada.