លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

ក្រងលំហាត់ គណិតវិទ្យា

កម្រិតវិទ្យាល័យ

ភាគ ១- នព្វន្ត

សេរី ៤.១

មីនា ២០១១

blank

លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

កម្រងលំហាត់ គណិតវិទ្យា

កម្រិតវិទ្យាល័យ

ភាគ ១- នព្វន្ត

ស៊េរី ៤.១
មីនា ២០១១

ភាគ១ - នព្វន្ត

ផ្សាយលើកទី ១ : គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច -នព្វន្ត ២០០៨

ផ្សាយលើកទី ២ : កម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យា-នព្វន្ត ២០០៩

ផ្សាយលើកទី ៣ : កម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យា-នព្វន្ត សីហា ២០១០

៣.១ --ធ្នូ ២០១០

៣.២ --កុម្ភៈ ២០១១

ផ្សាយលើកទី ៤ : កម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យា-នព្វន្ត មីនា ២០១១

៤.១ មីនា ២០១១

ភាគ២ - ពីជគណិត វិភាគ

ដោយ **លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ**

ទំនាក់ទំនង

- វែបសាយថ៍ http://www.dahlina.com/
- អ៊ីមេល lsvichet@yahoo.com

មាតិកា

ផ្នែកទី១ ទ្រឹស្ដីបទ

១. និយមន័យ ទ្រឹស្ដីបទ 1
១.១ និយមន័យ 1
១.២ គោលការណ៍ទ្រុងព្រាប 4
១.៣ លក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ 5
២. ភាពចែកដាច់........ 9
២.១ ភាពចែកដាច់ 9
២.២ ចំនួនការេ ចំនួនគូប 9
២.៣ ចំនួនបឋម 10
២.៤ ទ្រឹស្ដីបទ 11
២.៥ ទ្រឹស្ដីបទ 12
២.៦ វិធីចែកបែបអឺគ្លីដ 16
២.៧ ភាពសមមូល 18
២.៨ ទ្រឹស្ដីបទ 19
៣. ប្រព័ន្ធរាប់ 21
៣.១ ទ្រឹស្ដីបទ 23
៣.២ ភាពចែកដាច់ក្នុងប្រព័ន្ធទសភាគ 28
៤. ការបំបែកជាកត្តាផលគុណ 29
៤.១ តួចែករួមធំបំផុត PGCD 29
៤.២ ពហុគុណរួមតូចបំផុត PPCM 30
៤.៣ ទ្រឹស្ដីបទ Bachet-Bézout 31

៤.៤ កូរ៉ូលែអឺគ្លីដ 33
៤.៥ ទ្រឹស្តីបទ 33
៤.៦ ទ្រឹស្តីបទ 35
៤.៧ ទ្រឹស្តីបទអឺគ្លីដ 36
៤.៨ ទ្រឹស្តីបទ 37
៤.៩ ទ្រឹស្តីបទ 37
៤.១០ ទ្រឹស្តីបទ 38
៤.១១ ទ្រឹស្តីបទ 38
៤.១២ ទ្រឹស្តីបទ 39
៤.១៣ ទ្រឹស្តីបទ 40
៤.១៤ ប្រមាណវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ 42
៤.១៥ ទ្រឹស្តីបទ 42
៤.១៦ ទ្រឹស្តីបទ 43
៤.១៧ ទ្រឹស្តីបទ 44
៥. ភាពសមមូលក្នុងសំណុំចំនួនគត់ 45
៥.១ សមីការសមមូលលីនេអ៊ែរ 45
៥.២ ទ្រឹស្តីបទ 45
៥.៣ ទ្រឹស្តីបទ 47
៥.៤ កូរ៉ូលែ 47
៥.៥ ទ្រឹស្តីបទប្រូបិន 48
៥.៦ ទ្រឹស្តីបទ 50
៥.៧ ទ្រឹស្តីបទសំណល់ចែកចិន 50
៥.៨ ទ្រឹស្តីបទវីលសុន 52
៥.៩ កូនទ្រឹស្តីបទភែម៉ា 54
៥.១០ វិបាក 55

៦. ផ្នែកគត់ 57

៦.១ ផ្នែកគត់ ផ្នែកទសភាគ 57

៦.២ ទ្រឹស្តីបទ 57

៦.៣ ទ្រឹស្តីបទ 59

៦.៤ ទ្រឹស្តីបទឌីប៉ូលីញ៉ាក់ 61

៧. អនុគមន៍នព្វន្ត 63

៧.១ អនុគមន៍នព្វន្ត 63

៧.២ ទ្រឹស្តីបទ 64

៧.៣ ទ្រឹស្តីបទអយល័រ 68

៧.៤ ទ្រឹស្តីបទ 70

៧.៥ ទ្រឹស្តីបទ 70

៧.៦ ទ្រឹស្តីបទ 72

៧.៧ ទ្រឹស្តីបទឡឺសង់ 74

៧.៨ ទ្រឹស្តីបទខាំម័រ 75

ផ្នែកទី២ លំហាត់

តក្កវិទ្យា 77

ប្រព័ន្ធរាប់ ចំនួនគត់ ភាពចែកដាច់ 93

ប្រព័ន្ធរាប់ 93

ចំនួនគត់ 98

ភាពចែកដាច់ 99

សំណល់ ភាពសមមូល 105

ចំនួនការេ 106

ចំនួនដែលមានរាងណាមួយ 108

ពហុគុណរួមតូចបំផុត តួចែករួមធំបំផុត 111

ចំនួនបឋម 111
ពហុគុណរួមតូចបំផុត តួចែករួមធំបំផុត...113
បំបែកជាកត្តាបឋម 115
ផ្នែកគត់..117
សមីការដ្យូផង់..119

ផ្នែកទី៣ ដំណោះស្រាយ

តក្កវិទ្យា 127
ប្រព័ន្ធរាប់ ចំនួនគត់ ភាពចែកដាច់ 181
ប្រព័ន្ធរាប់..181
ចំនួនគត់..207
ភាពចែកដាច់ 211
សំណល់ ភាពសមមូល...245
ចំនួនការេ..250
ចំនួនដែលមានរាងណាមួយ...260
ពហុគុណរួមតូចបំផុត តួចែករួមធំបំផុត...269
ចំនួនបឋម 269
ពហុគុណរួមតូចបំផុត តួចែករួមធំបំផុត...279
បំបែកជាកត្តាបឋម 287
ផ្នែកគត់..297
សមីការដ្យូផង់..309

១

និយមន័យ.ទ្រឹស្តីបទ

១.១. និយមន័យ

$\mathbb{N}$ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលមានទាំងលេខសូន្យ $\mathbb{N} = \{0;\ 1; 2; 3; \ldots\}$

$\mathbb{N}^*$ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ សំណុំចំនួនគត់ $\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2;\ -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$

$\mathbb{Z}^*$ សំណុំចំនួនគត់មិនសូន្យ $\mathbb{Z}^* = \{\ldots; -3; -2;\ -1; 1; 2; 3; \ldots\}$

$\mathbb{Z}^+$ សំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានឬសូន្យ $\mathbb{Z}^+ = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$

$\mathbb{Z}^{+*}$ សំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbb{Z}^{+*} = \{1; 2; 3; \ldots\}$

$\mathbb{R}$ សំណុំចំនួនពិត

$\mathbb{R}^+$ សំណុំចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $\mathbb{R}^+ = \{x|x \geq 0\}$

ចំនួនអសនិទាន ជាចំនួនដែលមិនអាចសរសេរជារាង a/b បាន ដែល $a; b$ ជាចំនួនគត់ ។

ចំនួនគត់គូ ឬចំនួនគូ ជាចំនួនដែលមានរាង $2p$ ដែល p ជាចំនួនគត់ ។ ឧទាហរណ៍ $2; 4; 6; 8; ..$ ជាចំនួនគូ ។

ចំនួនគត់សេស ឬចំនួនសេស ជាចំនួនដែលមានរាង $2p + 1$ ដែល p ជាចំនួនគត់ ។ ឧទាហរណ៍ $1; 3; 5; \ldots$ ។

■ ឧទាហរណ៍: បើ x, y ជា២ចំនួនគត់ ដែល $x+y$ គូ នោះ x, y ត្រូវតែមានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា ។

ចម្លើយ

យើងនឹងបង្ហាញថា បើ x, y ត្រូវតែមានលក្ខណៈគូសេសផ្ទុយគ្នា នោះ $x+y$ សេស ។ ដូច្នេះ យើងសន្មតថា x, yត្រូវតែមានលក្ខណៈគូសេសផ្ទុយគ្នា ។ យើងសន្មតថា x គូ ហើយ y សេស ។ ដូច្នេះមានចំនួនគត់ k និង m ដែល $x = 2k$ និង $y = 2m+1$ ។ ដូច្នេះ $x+y = 2k+2m+1 = 2(k+m)+1$ ជាចំនួនសេស ។

■ឧទាហរណ៍: ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ចម្លើយ

យើងសន្មតថា សំណើខាងលើមិនពិត ។ មានន័យថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន ដូច្នេះ មានចំនួនគត់ a, b ដែល$\sqrt{2} = a/b$ ។ ក្នុងចំនួនគត់ដែលអាចមានទាំងនោះ សន្មតថា a, b តូចជាងគេ ។

$\sqrt{2} = a/b \quad \Rightarrow \quad a = b\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad a^2 = 2b^2$

$\Rightarrow$ a ត្រូវតែជាចំនួនគូ ។ $a = 2m$ ដែល $m < a$ ជាចំនួនគត់មិនសូន្យ

$\Rightarrow \quad 2m^2 = b^2$

$\Rightarrow$ b ត្រូវតែជាចំនួនគូ ។ $b = 2n$ ដែល $n < b$ ជាចំនួនគត់មិនសូន្យ ។

ដូច្នេះ $\sqrt{2} = a/b = \frac{2m}{2n} = m/n$ ដែល $m < a$ និង $n < b$ មានន័យថា (a, b) មិនមែនជាគូតម្លៃតូចបំផុតទេ ⇒ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។ មានន័យថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

■ឧទាហរណ៍: ចូរបង្ហាញថា $(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}$ ជាចំនួនគត់គូ ហើយថា $(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n} = b\sqrt{2}$ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន b និង ចំពោះចំនួនគត់ $n \geq 1$ ។

ចម្លើយ

ករណី $n = 1$

$$(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2 = 6 \text{ គត់គូ ពិត}$$

$$(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2} \text{ ពិត ។}$$

សន្មតថាពិត រហូតដល់ $n-1, n > 1$ ដូច្នេះ

$$(1+\sqrt{2})^{2n-2} + (1-\sqrt{2})^{2n-2} = 2N$$

$$(1+\sqrt{2})^{2n-2} - (1-\sqrt{2})^{2n-2} = a\sqrt{2}$$

ដែល N និង a ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n} \\
&= (1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})^{2n-2} + (1-\sqrt{2})^2(1-\sqrt{2})^{2n-2} \\
&= (3+2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{2n-2} + (3-2\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{2n-2} \\
&= 12N + 2\sqrt{2}a\sqrt{2} \\
&= 12N + 4a
\end{aligned}$$

ជាចំនួនគត់គូ ។ ហើយដូចគ្នា

$$(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n} = (3a+4N)\sqrt{2}$$

ដូច្នេះសំណើខាងលើ ពិត ចំពោះ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន b និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ ។

១.២. គោលការណ៍ទ្រុងព្រាប

រូប–ទ្រុងព្រាប

> បើមានព្រាបចំនួន $n+1$ ហើយ ទ្រុងមានរន្ធចំនួន n នោះវាត្រូវតែមានព្រាបយ៉ាងតិច២ ដែលឋិតនៅក្នុងរន្ធតែមួយ ។

គោលការណ៍នេះ មើលទៅហាក់ដូចជា ងាយណាស់ នរណាក៏ដឹងដែរ តែវាសំខាន់ខ្លាំងណាស់ ។ ឧទាហរណ៍ខាងក្រោមនឹងបង្ហាញពីប្រយោជន៍ របស់វា ។

■ ឧទាហរណ៍: តាង A ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ 20 ជ្រើសរើសចេញពី ស្វ៊ីតពីជគណិត $1,4,\dots,100$ ។ ចូរបង្ហាញថា ត្រូវតែមានចំនួនគត់ 2 ផ្សេងគ្នាដែលមានផលបូកស្មើ 104 ។

ចម្លើយ

យើងចែក ធាតុទាំង 34 របស់ស្វីតនេះ ទៅជា19ក្រុម $\{1\}, \{52\}, \{4; 100\}, \{10; 94\}, \ldots,$ $\{49; 55\}$ ។ ដោយយើងត្រូវជ្រើសរើសយកចំនួនគត់ចំនួន 20 ចេញពី សំណុំចំនួន 19 ខាងលើ នោះតាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប វាត្រូវតែមានចំនួនគត់2 ដែលឋិតនៅក្នុងសំណុំតែមួយនៃបណ្តាសំណុំខាងលើ ហើយដែលមានផលបូក 104 ។

១.៣. លក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់

តើពាក្យថា " លក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ " មានន័យថាម៉េច?

លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ (necessary condition) ជាលក្ខខណ្ឌដែលត្រូវតែគោរព ដើម្បីឱ្យសំណើមួយពិត ។ឧទាហរណ៍ ជាថានិកសត្វ ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ដើម្បី ថាជាមនុស្ស (ប៉ុន្តែថានិកសត្វទាំងអស់ មិនមែនសុទ្ធតែជាមនុស្សនោះទេ) ។ " P ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់សម្រាប់ Q " សមមូលនឹង " Q មិនអាចពិតបានទេ បើ P មិនពិត " ឬ " បើ P មិនពិត នោះ Q មិនពិត " ។ ដោយប្រើឈ្នាប់ $\Rightarrow$ គេអាចសរសេរបានថា $Q \Rightarrow P$ ។

លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ (sufficient condition) ជាលក្ខខណ្ឌមួយ ដែលបើលក្ខខណ្ឌនេះពិត នោះសំណើមួយក៏ពិតដែរ ។ ឧទាហរណ៍ សៅជាឪពុកសាន នោះមានន័យថា សៅជាប្រុស ។ ដោយដឹងថា សៅជាឪពុក គេគ្រប់គ្រាន់នឹងអាចសន្និដ្ឋានបានថា សៅជាមនុស្សប្រុស ។ ឧទាហរណ៍ ចំនួនមួយចែកដាច់នឹង ៤ ជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់នឹងអាចនិយាយបានថាចំនួននោះជាចំនួនគូ តែភាពចែកដាច់នឹង ៤ មិនមែនជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ដើម្បីឱ្យចំនួនមួយជាចំនួនគូនោះទេ ។ ភាពចែកដាច់នឹង ២ ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និង គ្រប់គ្រាន់ ដើម្បីឱ្យចំនួនមួយជាចំនួនគូ ។

បើ P ជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់សំណើ Q នោះមានន័យថា បើ P ពិត នោះ Q ពិត ឬ $P \Rightarrow Q$ ។ តែបើ P មិនពិត នោះមិនគ្រប់គ្រាន់នឹងអាចនិយាយបានថា Q មិនពិតដែរទេ ។

លក្ខខណ្ឌ q ជាចំនួនសនិទាន ជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់នឹងសន្និដ្ឋានបានថា q ជាចំនួនពិត ។ ប៉ុន្តែ លក្ខខណ្ឌ q ជាចំនួនសនិទានមិនមែនជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ដើម្បីឱ្យចំនួនមួយជាចំនួនពិតនោះទេ ។

ពាក្យថា "... បើ និង ទាល់តែ " (if and only if, iff)

ឧទាហរណ៍ A ពិតបើនិងទាល់តែ B ពិត ដែលមានន័យថា " A ពិត បើ B ពិត ($B \Rightarrow A$) " និង " A ពិត តែក្នុងករណី B ពិតតែមួយប៉ុណ្ណោះ (មិន $B \Rightarrow$ មិន A)" ។

❶ បើជាផ្លែចេក នោះស្វានឹងស៊ី ឬ ស្វានឹងស៊ី បើជាផ្លែចេក ឬ ទាល់តែស្វាស៊ី ទើបផ្លែនោះជាផ្លែចេក

សំណើនេះប្រាប់ឱ្យយើងដឹងថា ស្វានឹងស៊ីផ្លែចេក តែវាមិនបានប្រាប់ថា ស្វានឹងមិនស៊ីផ្លែឈើផ្សេងទៀតទេ ។ ស្វាអាចស៊ីឬមិនស៊ីនូវផ្លែឈើផ្សេងទៀត ដោយ សំណើនេះមិនបានបញ្ជាក់ឱ្យបានច្បាស់នោះទេ ។ ដូច្នេះផ្លែឈើជាផ្លែចេកជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឱ្យស្វាស៊ីផ្លែឈើ ។

❷ ទាល់តែជាផ្លែចេក បានស្វាស៊ី ឬ ស្វានឹងស៊ី ទាល់តែជាផ្លែចេក ឬ បើស្វាស៊ី នោះត្រូវតែជាផ្លែចេក

សំណើនេះប្រាប់ឱ្យយើងដឹងថា ស្វាស៊ីតែផ្លែចេកតែប៉ុណ្ណោះ ។ ប៉ុន្តែសំណើនេះ មិនបានបដិសេធលទ្ធភាពដែល ស្វាអាចនឹងមិនស៊ីចេក ដែលគេដាក់ឱ្យវាស៊ីនោះទេ ដែលនេះផ្ទុយពីសំណើក្នុង ❶ ដែលប្រាប់យើងឱ្យដឹងថា ឱ្យតែមានចេក ស្វានឹងស៊ី ។ ករណីនេះ ផ្លែចេកជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ដើម្បីឱ្យស្វាស៊ី តែមិនមែនជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ទេ ព្រោះស្វាអាចនឹងមិនស៊ីចេកដែលគេឱ្យទៅវា ។

❸ បើនិងទាល់តែជាផ្លែចេក ស្វានឹងស៊ី ឬ ស្វានឹងស៊ី បើនិងទាល់តែជាផ្លែចេក

សំណើនេះប្រាប់យើងឱ្យដឹងថា ស្វានឹងស៊ីចេកទាំងអស់ដែលគេផ្តល់ឱ្យវា ហើយវានឹងមិនស៊ីផ្លែឈើផ្សេងទៀតទេ ។ ករណី ផ្លែចេក ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឱ្យស្វាស៊ី ។

■ ឧទាហរណ៍ $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ហើយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា បើនិងទាល់តែ $a = b$ ។ ឃ្លានេះមានន័យថា គ្មានលក្ខខណ្ឌណាផ្សេងទៀត ក្រៅពី $a = b$ ឧទាហរណ៍ $a = -b, a = 2b, \ldots.$ ដែលនាំឱ្យ $a^2 + b^2 = 2ab$ បានទេ ។

■ ឧទាហរណ៍ យើងពិនិត្យសមីការ $x^2 = x$ ។

គេអាចនិយាយថា សមភាពនេះពិត *បើ* $x = 0$ (លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់) ។

គេអាចនិយាយផងដែរថា សមភាពនេះពិត *បើ* $x = 1$ (លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់) ។

តែគេមិនអាចនិយាយថា « សមភាពនេះពិត *ទាល់តែ* $x = 1$ » បានទេ (ព្រោះ $x = 0$ ក៏សមភាពនេះពិតដែរ) ។

គេក៏មិនអាចនិយាយថា « សមភាពនេះពិត *ទាល់តែ* $x = 0$ » ដែរ (ព្រោះ $x = 1$ ក៏សមភាពនេះពិតដែរ) ។

គេអាចនិយាយថា « សមភាពនេះពិត *ទាល់តែ* $x \geq 0$ » បាន (ព្រោះ $x^2 \geq 0$ តែ $x \geq 0$ មិនគ្រប់គ្រាន់ ឱ្យគេសន្និដ្ឋានបានថា $x^2 = x$ បានទេ ។ $x \geq 0$ ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់) ។

គេអាចនិយាយថា « សមភាពនេះពិត *បើនិងទាល់តែ* $x = 0$ ឬ $x = 1$ » (លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់និងចាំបាច់)

២

ភាពចែកដាច់

២.១. ភាពចែកដាច់

បើ $a \neq 0, b$ ជាចំនួនគត់ យើងនិយាយថា a *ចែកដាច់* b បើសិនជា មានចំនួនគត់ c មួយ ដែល $ac = b$ ។ យើងសរសេរថា $a \mid b$ ។

a ជា *តួចែក* របស់ b ។

b ជា *ពហុគុណ* នៃ a ។

■ ឧទាហរណ៍ : 2 ចែក 6 ដាច់ ។ យើងមាន $2 \times 3 = 6$ ។ 2 និង 3 ជាតួចែករបស់ 6 ។ តួចែករបស់ 6 មាន 2; 3 និង 6 ខ្លួនវា ។

២.២ ចំនួនការេ ចំនួនគូប

ចំនួនការេ ជាចំនួនដែលមានរាង m^2 ដែល m ជាចំនួនគត់ ។

ចំនួនគូប ជាចំនួនដែលមានរាង m^3 ដែល m ជាចំនួនគត់ ។

■ ឧទាហរណ៍ : 4 ជាចំនួនការេ ព្រោះ $4 = 2^2$ ។ 9 ជាចំនួនការេព្រោះ $9 = 3^2$ ។

២.៣ ចំនួនបឋម

" ចំនួនបឋម " p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ធំជាង ១ ដែលតួចែករបស់វាមានតែលេខ 1 និង p ។

បើចំនួនគត់ $n > 1$ មិនមែនជាចំនួនបឋម យើងហៅវាថា " ចំនួនពហុគុណ " ។ យើងអាចសរសេរ n ជា $n = ab$ ដែល $1 < a \leq b < n; a, b \in \mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍

ចំនួនបឋម: $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; \ldots$

ចំនួនពហុគុណ $4; 6; 8; 9; 10; 12; \ldots$

1 មិនមែនជាចំនួនបឋម ហើយក៏មិនមែនជា ចំនួនពហុគុណដែរ ។

យើងឃើញថា 2 ជាចំនួនបឋមគូតែមួយគត់ ហើយ 2 និង 3 ជាចំនួនគត់តរៀងគ្នាតែមួយគត់ ដែលបឋមទាំង២ ។

■ ឧទាហរណ៍: ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $3n - 4, 4n - 5$ និង $5n - 3$ ជាចំនួនបឋម ។

ដំណោះស្រាយ

ចំនួនទាំងបីបូកចូលគ្នា ស្មើនឹង $2n - 4 + 4n - 5 + 5n - 3 = 12n - 12$ ជាលេខគូ ។ ដូច្នេះក្នុងចំណោមលេខទាំងបី ត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់មួយដែលជាលេខគូ ។ យើងដឹងថា មានលេខ 2 តែមួយប៉ុណ្ណោះ ដែលចំនួនបឋមគូ ។ យើងមាន $4n - 5$ ជាលេខសេស ដូច្នេះចំនួនដែលគួរតែស្មើ 2 មានតែ $3n - 4$ និង $5n - 3$ ។

បើ $3n - 4 = 2 \Rightarrow n = 2$ ។ បើ $n = 2$ យើងទាញបាន ចំនួនទាំងបីស្មើនឹង $2; 3; 7$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $5n-3=2 \Rightarrow n=1$ ។ បើ $n=1$ យើងទាញបាន ចំនួនទាំងបីស្មើនឹង $1;-1;2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ដូច្នេះ $n=2$ ។៚

■ ឧទាហរណ៍: [AHSME 1976] បើ p និង q ជាចំនួនបឋម និង $x^2-px+q=0$ មានឫសគត់ពីរផ្សេងគ្នា ចូរគណនា p និង q ។

ដំណោះស្រាយ

តាង x_1 និង x_2 ដែល $x_1<x_2$ ជាឫសគត់វិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា ។ ដូច្នេះ $x^2-px+q=(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow p=x_1+x_2$ និង $q=x_1x_2$ ។ ដោយ q ជាចំនួនបឋម នោះ $x_1=1$ ។ ដូច្នេះ $q=x_2$ និង $p=x_2+1 \Rightarrow p=q+1$ ។ ដោយ p និង q ជាចំនួនបឋមទាំងពីរ នោះ $q=2$ និង $p=3$ ។ ៚

២.៤ ទ្រឹស្តីបទ

$1°$ បើ a,b,c ជាចំនួនគត់ដែល $c|a, c|b$ នោះ $c|(am+bn)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ m,n ។

$2°$ បើ x,y,z ជាចំនួនគត់ដែល $x|y, y|z$ នោះ $x|z$ ។

$3°$ បើ $a|b$ និង $b\neq 0$ នោះ $1\leq |a| \leq |b|$

$4°$ បើ $a|b$ និង $b\neq 0$ នោះ $(b/a)\,|b$

២.៥ ទ្រឹស្តីបទ

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានទាំងអស់ មានចំនួនតួចែកវិជ្ជមានជាចំនួនគូ លើកលែងតែវាជាចំនួនការេ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយ ។ យើងដឹងថា បើ a ចែក n ដាច់ នោះ n/a ក៏ចែក n ដាច់ដែរ ព្រោះ $a\left(\frac{n}{a}\right) = n$ ។ ដូច្នេះ បើ a ជាតួចែករបស់ n នោះយើងមាន n/a ក៏ជាតួចែករបស់ n ដែរ ។ ករណី n មិនមែនជាចំនួនការេ យើងមាន $a \neq \frac{n}{a}$ ចំពោះគ្រប់ $a|n$ ។ ករណី n ជាចំនួនការេ យើងអាចរកបាន b ដែល $b = n/a$ និង $a = b$ ព្រោះ $n = ab = a^2$ ជាចំនួនការេ ។

ដូច្នេះតាមលក្ខណៈនេះ បើ $a_1, a_2, \dots, a_k$ ជាតួចែករបស់ចំនួនគត់ n នោះ គេអាចរកបានតួចែកផ្សេងទៀតរបស់ n តាងដោយ $b_1, b_2, \dots, b_k$ ដែល $b_i = n/a_i$ ។

ករណី n មិនមែនជាចំនួនការេ យើងមាន $a_i \neq b_i, \forall\, i = 1, .., k$ ព្រោះបើមាន $a_i = b_i$ នោះ $n = a_i b_i = a_i^2$ ជាចំនួនការេ ។ ដូច្នេះ ចំនួនតួចែករបស់ n ស្មើ $2k$ ជាចំនួនគូ ។ តួចែករបស់ n មាន $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k\}$ ។

ករណី n ជាចំនួនការេ យើងអាចរកបាន i មួយ ដែល $a_i = b_i$ ព្រោះបើមាន $a_i = b_i$ នោះ $n = a_i b_i = a_i^2$ ជាចំនួនការេ ។ ដូច្នេះតួចែករបស់ n មាន $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_i = b_i, \dots, a_k, b_k\} \longrightarrow \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_i, \dots a_k, b_k\}$ ។ យើងទាញបាន n មានតួចែកចំនួន $2k - 1$ ជាចំនួនសេស ។

ឧទាហរណ៍ ចំពោះ $36 = 6^2 = 2^2 3^2$ ជាចំនួនការេ ក្រៅពីលេខ 6 មួយចេញ បើ a ជាតួចែករបស់ 36 នោះ យើងអាចរកបាន $b \neq a$ ដែលជាតួចែករបស់ 36 ដែរ បានជានិច្ច ។ ដូចជា 2 ជាតួចែកមួយរបស់ 36 និង $\frac{36}{2} = 18$ ក៏ជាតួចែករបស់ 36 ដែរ ។ 4 ជាតួចែកមួយរបស់ 36 និង $\frac{36}{4} = 9$ ក៏ជាតួចែករបស់ 36 ដែរ ។ល ។ ដោយផ្គុំគ្នាជាគូៗ តួចែករបស់ 36 មានទាំងអស់

$$\{(1;36);(2;18);(3;12);(4;9);(6)\}$$

ដូច្នេះចំនួនតួចែករបស់របស់ 36 ស្មើ 9 ដែលជាចំនួនសេស ។

■ ឧទាហរណ៍: សិស្សគេចរៀនចំនួនម្ភៃនាក់ បានដើរឆ្លងកាត់ទូដាក់សម្ភារៈមួយជួរដែលបិទទ្វារជិតទាំងអស់ ហើយបង់លេខពីលេខ១ ដល់លេខ២០ ។ សិស្សទីមួយបើកទ្វារទាំងអស់ឡើង ។ បន្ទាប់មកសិស្សទីពីរបិទទ្វាររបស់ទូទាំងអស់ដែលមានលេខ ២, ៤, ៦, ៨, ១០, ១២, ១៤, ១៦, ១៨, ២០ ។ សិស្សទីបីបើកបិទទូទាំងអស់ដែលមានលេខ ៣ ៦ ៩ ១២ ១៥ ១៨ : បើទូណាបិទ សិស្សនោះបើក, បើទូណាបើក សិស្សនោះបិទវិញ ។ សិស្សផ្សេងទៀតធ្វើបែបនេះបន្តបន្ទាប់មកទៀត ដោយសិស្សទី i បើកបិទទូដែលមានលេខជាពហុគុណនៃ i : បើទូណាបិទ សិស្សនោះបើក, បើទូណាបើក សិស្សនោះបិទវិញ ។ តើទូលេខប៉ុន្មានដែលនឹងចំហទ្វារ ក្រោយពេលសិស្សទាំងម្ភៃនាក់នោះធ្វើការបើកបិទម្តងម្នាក់រួចរាល់ហើយ?

ដំណោះស្រាយ

យើងដឹងថា ទូទី i នឹងចំហ បើវាត្រូវបើកបិទចំនួនសេសដង និងថា ទូទី i ត្រូវបើកបិទដោយសិស្សទី j ទាល់តែ j ជាតួចែករបស់ i ។ ដូច្នេះ ចំនួនបើកបិទនៅទូទី i ស្មើនឹងចំនួនតួចែករបស់លេខ i ។ ឧទាហរណ៍ ទូលេខ១៤ ត្រូវសិស្សទី១បើក សិស្សទី២បិទ សិស្សទី៤បើក

ដូច្នេះចំនួនបើកបិទមាន៣ដង ។ ទូលេខ៦ ត្រូវសិស្សទី១បើក សិស្សទី២បិទ សិស្សទី៣បើក សិស្សទី៦បិទ ដូច្នេះចំនួនបើកបិទមាន៤ដង ។

យើងដឹងទៀតថា ចំនួនគត់វិជ្ជមានតែមានចំនួនតួចែកជាចំនួនសេសគឺមានតែចំនួនការេតែប៉ុណ្ណោះ ។ ចំនួនការេពី1 ដល់ 20 មាន $1; 4; 9; 16$ ។ ដូច្នេះទូលេខ ១ លេខ៤ លេខ៩ និងលេខ១៦ ត្រូវបើកបិទចំនួនសេសដង ដូច្នេះជាចុងក្រោយត្រូវនៅចំហ ។ ដូច្នេះទូដែលចំហមានចំនួនបួន ។៚

■ ឧទាហរណ៍: តាង n ជាចំនួនគត់ធំជាង 1 ។ ចូរបង្ហាញថា

(a) 2^n ជាផលបូកនៃចំនួនគត់សេសពីរតជាប់គ្នា ;

(b) 3^n ជាផលបូកនៃចំនួនគត់បីតគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

(a) យើងមាន $2^n = (2k-1) + (2k+1) \Rightarrow k = 2^{n-2} \Rightarrow 2^n = (2^{n-1}-1) + (2^{n-1}+1)$ ដូច្នេះជាផលបូកនៃចំនួនសេស $2^{n-1}-1$ និង $2^{n-1}+1$ ។ ចំនួនសេសពីរនេះជាចំនួនសេសតជាប់គ្នា ។

(b) យើងមាន $3^n = (s-1) + s + (s+1) \Rightarrow s = 3^{n-1} \Rightarrow 3^n = (3^{n-1}-1) + 3^{n-1} + (3^{n-1}+1)$ ដូច្នេះជាផលបូកនៃចំនួនគត់បីតជាប់គ្នា ។៚

■ ឧទាហរណ៍: តាង k ជាចំនួនគូ ។ តើគេអាចសរសេរលេខ 1 ជាផលបូកនៃច្រាសរបស់ចំនួន សេសចំនួន k ផ្សេងគ្នាបានដែរឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

យើងសន្មតថា គេអាចសរសេរបាន

$$1=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}$$

ដែល $n_1, n_2, \dots, n_k$ ជាចំនួនសេស ។ កន្សោមខាងលើសមមូលនឹង

$$n_1n_2\dots n_k = n_2n_3\dots n_k + n_1n_3\dots n_k + \cdots + n_1n_2\dots n_{k-1} = s_1+s_2+\cdots+s_k$$

ដែល $s_i = n_1n_2\dots n_{i-1}n_{i+1}\dots n_k$ ។

យើងមាន $n_1n_2\dots n_k$ ជាចំនួនសេស និង $s_1; s_2; \dots; s_k$ សុទ្ធតែជាចំនួនសេស ។ យើងដឹងថា ផលបូកនៃចំនួនសេសចំនួនគូដង(ព្រោះ k ជាចំនួនគូ) ឧទាហរណ៍ 2ដង 4ដង 6ដង ។ល ។ ជាចំនួនគូ ។ ដូច្នេះអង្គខាងឆ្វេងនៃសមភាពជាចំនួនគូ ហើយអង្គខាងស្តាំជាចំនួនសេស ដូច្នេះអង្គទាំងពីរមិនអាចស្មើគ្នាបានទេ ។៚

■ ឧទាហរណ៍: មៅជ្រើសរើសលេខចំនួនប្រាំចេញពីសំណុំ $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ។ បើមៅប្រាប់ទៅនារីអំពីផលគុណនៃចំនួនទាំងប្រាំ នោះនារីមិនអាចកំណត់បានថាផលបូកនៃចំនួនទាំងប្រាំនេះគូឬសេសបានទេ ។ តើផលគុណនៃចំនួនទាំងប្រាំដែលមៅបានជ្រើសរើសស្មើប៉ុន្មាន?

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $1.2.3\dots7=5040$ ។ ដូច្នេះ ប្រាប់ពីផលគុណនៃចំនួនគត់ប្រាំដែលមៅបានជ្រើសរើស គឺដូចជាប្រាប់ពីផលគុណនៃចំនួនពីរដែលមៅមិនបានជ្រើសរើសដែរ ។ បើស្គាល់ផលគុណនៃចំនួនពីរដែលនៅសល់ ធម្មតានារីអាចទាញបានចំនួនទាំងពីរនោះជាអ្វី រួចទាញបានចំនួនទាំងប្រាំដែលមៅបានជ្រើសរើស នាំឱ្យនារីអាចកំណត់បានថាផលបូកនៃចំនួនទាំងប្រាំថាគូឬសេសបាន ។ តែមានផលបូកពីរ ដែលនារីមិនអាចកំណត់បាន នោះគឺ 12 ដែលអាចជា 3×4 ឬ 2×6 និង 6 ដែលអាចជា 2×3 និង 1×6 ។ តែមិនមែនជា 6 ទេ ព្រោះបើជា 6 នោះ យើងមាន $2+3=5$ សេស និង $1+6=7$ សេស ហើយ

ដោយ $1+2+3+4+5+6+7=28$ គូ នោះនារីនឹងកំណត់បានថាផលបូកនៃចំនួនទាំងប្រាំដែលម៉ៅបានជ្រើសរើសជាចំនួនសេស ។ ដូច្នេះផលគុណនៃចំនួនពីរដែលម៉ៅមិនបានជ្រើសរើសត្រូវស្មើ 12 ។ ដូច្នេះផលគុណនៃចំនួនទាំងប្រាំដែលម៉ៅបានជ្រើសរើសត្រូវតែស្មើនឹង

$$\frac{5040}{12}=420$$

២.៦ ទ្រឹស្តីបទ- វិធីចែកបែបអឺគ្លីដ

បើ a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ គេមានចំនួនគត់ q,r មួយគត់ ដែល

$$a=bq+r, 0\leq r<b$$

ឧទាហរណ៍ ៖ ចំពោះចំនួនគត់ 7 និង 3 យើងមាន $\mathbf{7}=2\times\mathbf{3}+\mathbf{1}$ ដែល 1 ជាសំណល់ ហើយ $0<1<3$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដំបូងយើងបង្ហាញថា មាន q,r ។ សំណើពិត ដោយយើងយក

$$q=\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor; \text{និង } r=a-bq$$

ដែល $\lfloor x\rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់នៃ x ; ឧទាហរណ៍ $\lfloor 4,67\rfloor=4$ ។ យើងមាន $\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$ ។

យើងត្រូវបង្ហាញថា $0\leq r<b$ ។ យើងដឹងថា $q\leq a/b<q+1 \Rightarrow 0\leq r<b$ ។

បន្ទាប់មកទៀត យើងបង្ហាញថា គេមាន q,r តែមួយគត់ ។ យើងឧបមាថា គេអាចរកឃើញ q,r,q',r' ដែល

$$a=bq+r=bq'+r'$$
$$b(q-q')=r-r'$$

ដូច្នេះ b ចែក $r'-r$ ដាច់ តែ $|b|>|r'-r|$ ដូច្នេះ មានតែ $r'-r=0$ នាំឱ្យ $r'=r$ រួចហើយ $q'=q$ ។

គួរកត់សម្គាល់ថា ចំពោះចំនួនគត់ $n>0$ មួយ តាមវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ គេអាចចែកសំណុំចំនួនគត់ទៅតាមសំណល់របស់វិធីចែកនឹង n ។

ឧទាហរណ៍ ធៀបនឹង 2, ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ទាំងអស់ យើងអាចចែកជាចំនួនដែលមានរាង $2k, 2k+1$, ដែល $k\in\mathbb{Z}$ ។ ឧទាហរណ៍ $4=2.2;\ 5=2.2+1; 6=2.3;\dots$ ។

ឧទាហរណ៍ ធៀបនឹង 3, ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ទាំងអស់ យើងអាចចែកជាចំនួនដែលមានរាង $3k, 3k+1,\ 3k+2$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$ ។ ឧទាហរណ៍ $4=3.1+1;\ 5=3.1+2; 6=3.2;\dots$ ។

ឧទាហរណ៍ ធៀបនឹង 4, ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ទាំងអស់ យើងអាចចែកជាចំនួនដែលមានរាង $4k, 4k+1,\ 4k+2, 4k+3$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$ ។ ឧទាហរណ៍ $4=4.1;\ 5=4.1+1; 6=4.1+2; 7=4.1+3; 8=4.2;\dots$ ។

■ ឧទាហរណ៍:

(a) តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា $3^{2^n}+1$ ចែកដាច់នឹង 2 តែចែកមិនដាច់នឹង 4 ។

(b) ចូរកំណត់ចំនួនគត់ n ធំបំផុត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ 2^n ចែកដាច់ $3^{1024}-1$ ។

ដំណោះស្រាយ

(a) យើងមាន 3^{2^n} ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ $3^{2^n}+1$ ជាចំនួនគូ ដូច្នេះ ចែកដាច់នឹង 2 ។

យើងមាន យើងមាន $3^{2^n} = 3^{2.2^{n-1}} = (3^2)^{2^{n-1}} = 9^{2^{n-1}} = (8+1)^{2^{n-1}}$ ។

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុន

$$(x+y)^m = x^m + \binom{m}{1} x^{m-1}y + \binom{m}{2} x^{m-2}y^2 + \cdots + \binom{m}{m-1} xy^{m-1} + y^m$$

យក $x = 8$ និង $y = 1$ និង $m = 2^{n-1}$ យើងទាញបាន

$$(8+1)^m = 8^m + \binom{m}{1} 8^{m-1} + \binom{m}{2} 8^{m-2} + \cdots + \binom{m}{m-1} 8 + 1$$

តួនីមួយៗក្នុងផលបូកខាងលើ លើកលែងតែតួខាងចុង សុទ្ធតែជាពហុគុណនៃ 8 ដូច្នេះតួទាំងនេះចែកដាច់នឹង 4 ។ យើងទាញបាន 3^{2^n} ចែកនឹង 4 សល់សំណល់ 1 ។ ដូច្នេះ $3^{2^n} = 4q + 1$ ដែល q ជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះ $3^{2^n} + 1 = 4q + 2$ ចែកនឹង 4 សល់សំណល់ 2 ។

(b) យើងមាន $2^{10} = 1024$ និង $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ និង

$$3^{2^{10}} - 1 = \left(3^{2^9}+1\right)\left(3^{2^9}-1\right) = \left(3^{2^9}+1\right)\left(3^{2^8}+1\right)\left(3^{2^9}-1\right) = \cdots$$
$$= \left(3^{2^9}+1\right)\left(3^{2^8}+1\right)\ldots\left(3^{2^1}+1\right)\left(3^{2^0}+1\right)(3-1)$$

យើងដឹងថា $3^{2^k} + 1$ ចែកដាច់នឹង 2 តែចែកមិនដាច់នឹង 4 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ។ ដូច្នេះ

$$3^{2^k} + 1 = 2N_k$$

ដែល N_k ជាចំនួនសេស ។ ដូច្នេះ

$$3^{2^{10}} - 1 = (2N_9)(2N_8)\ldots(2N_1)(4)(2) = 2^9.2^2.2N_1N_2\ldots N_9 = 2^{12}N_1N_2\ldots N_9$$

ដែល $N_1N_2\ldots N_9$ ជាចំនួនសេស ។ ដូច្នេះ n ធំបំផុត ដែល 2^n ចែកដាច់ $3^{2^{10}} - 1$, ស្មើនឹង 12 ។

២.៧ ភាពសមមូល

សរសេរថា $a \equiv b \pmod{n}$ អានថា a សមមូល b តាម(modulo) n ។

មានន័យថា n ចែកដាច់ $(a-b)$ ឬ $a = nq + b$ ដែល q ជាចំនួនគត់ ។

ឬមានន័យម្យ៉ាងទៀតថា a និង b មានសំណល់ដូចគ្នា ពេលចែកជាមួយ n ។

ឧទាហរណ៍

$15 = 7.2 + 1 \implies 15 \equiv 1 \pmod 7$ ឬ $1 \equiv 15 \pmod 7$ ។

$15 = 7.1 + 8 \implies 15 \equiv 8 \pmod 7$

$15 = 7.3 - 6 \implies 15 \equiv -6 \pmod 7$ ។

ដូច្នេះ $15 \equiv 1 \equiv 8 \equiv -6 \equiv \cdots \pmod 7$

$13 = 7.1 + 6 \implies 13 \equiv 6 \pmod 7$
$13 = 3.4 + 1 \implies 13 \equiv 1 \pmod 3$

២.៨ ទ្រឹស្តីបទ

តាង $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^+$ ដែល $a \equiv b \pmod m$ និង $c \equiv d \pmod m$ នោះ

1° $a + c \equiv b + d \pmod m$
2° $a - c \equiv b - d \pmod m$
3° $ac \equiv bd \pmod m$
4° $a^k \equiv b^k \pmod m$
5° បើ f ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់ នោះ

$f(a) \equiv f(b) \pmod m$

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ $a \equiv b \pmod m$ និង $c \equiv d \pmod m$ នោះ គេអាចរកបាន $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ដែល

$a = b + k_1 m$ និង $c = d + k_2 m$ ។ ដូច្នេះ

$$a \pm c = b \pm d\ (k_1 + k_2)m$$
$$ac = bd + m(k_1 d + k_2 b)$$

ដូច្នេះយើងទាញបានលក្ខណៈលេខ 1 ដល់លេខ 3 ។

យក $c = a^{k-1}; d = b^{k-1}$ ជំនួសចូល ក្នុងលេខ 3 យើងទាញបាន $a^k \equiv b^k \pmod m$

។

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈលេខ 5° តាង $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ ។

តាមលក្ខណៈលេខ 4 យើងទាញបាន

$$a^k \equiv b^k \pmod m$$

ដោយយក $a = b = a_k;\ c = a^k; d = b^k \implies c \equiv d \pmod m$ តាមលក្ខណៈលេខ 3

យើងទាញបាន

$$a_k a^k \equiv a_k b^k \pmod m$$

ហើយតាមលក្ខណៈលេខ 1 យើងទាញបាន

$$f(a) = a_k a^k + \cdots + a_1 a + a_0 \equiv a_k b^k + \cdots + a_1 b + a_0 = f(b) \pmod m$$

■ឧទាហរណ៍: ចូរគណនា តម្លៃសមមូលរបស់ចំនួនការេ តាម 13 ។

ចម្លើយ

សំនួរគឺចង់បាន $r^2 \equiv ? \pmod{13}$ ។

យើងមាន $r^2 \equiv (13 - r)^2 \pmod{13}$ ។

$$\begin{aligned}
&0^2 \equiv 0 \pmod{13}\\
&1^2 \equiv 1 \pmod{13}\\
&2^2 \equiv 4 \pmod{13}\\
&3^2 \equiv 9 \pmod{13}\\
&4^2 \equiv 3 \pmod{13}\\
&5^2 \equiv 12 \pmod{13}\\
&6^2 \equiv 10 \pmod{13}\\
&7^2 \equiv (13-7)^2 = 6^2 \equiv 10 \pmod{13}\\
&8^2 \equiv (13-8)^2 = 5^2 \equiv 12 \pmod{13}\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ ចំនួនការេ សមមូលនឹង $0,1,3,4,9,10,12 \pmod{13}$ ។

៣

ប្រព័ន្ធរាប់

ប្រព័ន្ធរាប់ ជារបៀបសរសេរឬតាងចំនួនមួយ ដោយលេខ តាមបែបដាក់លាក់ណាមួយ ។

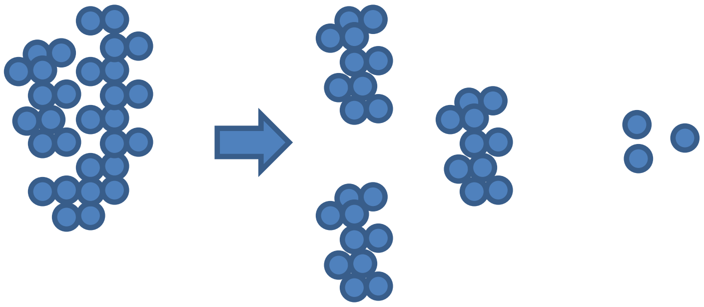
ឧទាហរណ៍ ចំនួន ដប់ពីរ ត្រូវតាងដោយ 12 ។ 12 តាងឱ្យចំនួនដប់ពីរនេះ ជាសំណេរក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល ១០ ។ ដូច្នេះ 12 ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល ១០ មានន័យថា 1 ដង ១០ និង 2 ។

ចំនួន ម្ភៃប្រាំ ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល ១០ តាងដោយ 25 ដែលស្មើនឹង 2 ដងដប់ និង 5 ។

ចំនួន សាមសិបប្រាំពីរ ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល ១០ តាងដោយ 37 ដែលស្មើនឹង 3 ដងដប់ និង 7 ។

ចំនួន មួយរយសាមសិបពីរ ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល ១០ តាងដោយ 132 ដែលស្មើនឹង 1 ដង 10^2 និង 3 ដង 10 និង 2 ។

យើងស្រមៃរបៀបរាប់ក្នុងគោល ១០ នេះ ទៅនឹងយាយម្នាក់គាត់រាប់ក្រូចមួយគំនរដែលមានចំនួន ៣៥ ផ្លែ ។ ពេលរាប់បាន ១០ គាត់ដាក់ម្ដុំ រាប់បាន ១០ ទៀត គាត់ដាក់ម្ដុំទៀត រាប់បាន ១០ ទៀត គាត់ដាក់ម្ដុំទៀត ។ ជាចុងក្រោយគាត់នៅសល់ក្រូច ៣ផ្លែ ។ ដូច្នេះជាបញ្ចប់ គាត់មានក្រូចចំនួន ៣ ដុំ ដែលមួយដុំមានក្រូច១០ និង ក្រូចនៅសល់៣ផ្លែទៀត ។



ជាទូទៅ ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល ១០

$$N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + a_1.10 + a_0$$

ដែល $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ជាតួលេខក្នុងខ្ទង់នីមួយៗ ឬហៅថា អង្គ: ។ a_n ជាលេខខ្ទង់ទី ១ ឬ អង្គ:ទី១, ..., a_0 ជាលេខខ្ទង់ខាងចុង ឬ អង្គ:ខាងចុងឬលេខខ្ទង់រាយ ។ អង្គ: $a_0, a_1, \dots, a_n$ នីមួយៗទាំងនេះ ជាចំនួនគត់ ដែល $0 \le a_i \le 9, i = 0, .., n-1$ និង $1 \le a_n \le 9$ ។ បណ្ដា a_i អាចមានតម្លៃចាប់ពី 0 ដល់ 9 ព្រោះជាប្រព័ន្ធគោល 10 ។

ឧទាហរណ៍ ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល ១០

$$19 = 1.10 + 9$$
$$36 = 3.10 + 6$$
$$4567 = 4.10^3 + 5.10^2 + 6.10 + 7$$
$$68974 = 6.10^4 + 8.10^3 + 9.10^2 + 7.10 + 4$$

ប្រព័ន្ធរបាប់មិនមែនមានតែគោល ១០ នោះទេ ។ គេមានប្រព័ន្ធរបាប់គោល ២ គោល ៣ គោល ៤ .... គោល ១០ គោល ១១ ... ។

ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល ២ លេខក្នុងខ្ទង់នីមួយៗ ឬ អង្គ: អាចមានតម្លៃ 0 ឬ 1 ។ ប្រព័ន្ធរបាប់គោល ២ ឬ ប្រព័ន្ធទ្វេភាគ ឬ ប៊ីនែរ (បារាំង)ឬ ប៊ីនរី (អង់គ្លេស) ត្រូវបានប្រើប្រាស់ដោយប្រព័ន្ធកុំព្យូទ័រទំនើបទាំងអស់ និងសៀគ្វីអេឡិចត្រូនិច ដែលប្រើ logic gate ។

ឧទាហរណ៍ ក្នុងប្រព័ន្ធគោលពីរ 111 មានន័យថា $1.2^2 + 1.2 + 1 = 7$ ក្នុងប្រព័ន្ធគោល ១០ ។

ដើម្បីកុំឱ្យមានការច្រលំគ្នាក្នុងការសរសេរ គេប្រើសន្ទស្សន៍ ដើម្បីតំណាងឱ្យគោលរបស់ប្រព័ន្ធ ដូចជា 111_2 មានន័យថា ជាសំណេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល ២ ។ 3201_4 ជាសំណេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល ៤ ។ ជាទូទៅ បើអង្កៈនីមួយៗ មិនមែនជាតួលេខទេ តែជាអក្សរវិញ ដើម្បីកុំឱ្យច្រលំនឹងកន្សាផលគុណ គេបន្ថែមរបារពីលើមួយជាន់ទៀត ៖

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_b$$

ដែលនេះជាសំណេរក្នុងប្រព័ន្ធគោល b ។

សំណេរក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល b អង្កៈនីមួយៗអាចមានតម្លៃចាប់ពី 0 ដល់ $b-1$ ។

ឧទាហរណ៍

$$1101_2 = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2 + 1 = 13_{10}$$
$$123_4 = 1.4^2 + 2.4 + 3 = 27_{10}$$

ប្រព័ន្ធគោល ១៦ ត្រូវបានគេយកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងកុំព្យូទ័រដែរនោះ មានអង្កៈនីមួយៗ អាចមានលេខជា $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A, B, C, D, E, F$ ដែល A តាងឱ្យលេខ ១០ ; B តាងឱ្យលេខ ១១ ; C តាងឱ្យលេខ ១២ ; D តាងឱ្យលេខ ១៣ ; E តាងឱ្យលេខ ១៤ ; F តាងឱ្យលេខ ១៥ ។

ឧទាហរណ៍ $2AF3 = 2.16^3 + 10.16^2 + 15.16 + 3 = 10995$ ក្នុងគោល១០ ។

៣.១ ទ្រឹស្តីបទ

តាង b ជាចំនួនគត់មួយធំជាង 1 ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ គេមានប្រព័ន្ធចំនួនគត់ $(k, a_0, a_1, \dots, a_k)$ តែមួយគត់ ដែល $0 \leq a_i \leq b-1, i = 0,1,\dots,k$; $a_k \neq 0$ និង

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

សម្រាយបញ្ជាក់

❶ បង្ហាញថា មានប្រព័ន្ធ $(k, a_0, a_1, \dots, a_k)$

យើងពិនិត្យប្រមាណវិធីចែកអឺគ្លីដ

$$\begin{aligned} n &= q_1 b + r_1, \quad 0 \le r_1 \le b-1 \\ q_1 &= q_2 b + r_2, \quad 0 \le r_2 \le b-1 \\ &\dots \\ q_{k-1} &= q_k b + r_k, \quad 0 \le r_k \le b-1 \end{aligned}$$

ដែល q_k ជាផលចែកមិនសូន្យចុងក្រោយគេបង្អស់ ។

តាង

$$q_0 = n, a_0 = n - q_1 b, a_1 = q_1 - q_2 b, \dots, a_{k-1} = q_{k-1} - q_k b, a_k = q_k$$

ដូច្នេះ

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\, b^i = \sum_{i=0}^{k-1} (q_i - q_{i+1} b)\, b^i + q_k b^k = q_0 + \sum_{i=1}^{k} q_i\, b^i - \sum_{i=1}^{k} q_i\, b^i = q_0 = n$$

❷ បង្ហាញថា មានតែមួយគត់

សន្មតថា $n = c_0 + c_1 b + \cdots + c_h b^h$ ជាសំណេរមួយបែបទៀត ។

បើ $h \neq k$ សន្មតថា $h > k$ ដូច្នេះ $n \ge b^h \ge b^{k+1}$ ។ តែ

$$n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_k b^k \le (b-1)\left(1 + b + \cdots + b^k\right) = b^{k+1} - 1 < b^{k+1}$$

ផ្ទុយគ្នា ។

បើ $h = k$ នោះ

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 b + \cdots + a_k b^k = c_0 + c_1 b + \cdots + c_k b^k \\ & \Leftrightarrow (a_0 - c_0) + (a_1 - c_1) b + \cdots + (a_k - c_k) b^k = 0 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ b ចែកដាច់ $(a_0 - c_0)$ ។ តែថា $|a_0 - c_0| < b$ ដូច្នេះ $a_0 = c_0$ ។ ដូច្នេះ

$$a_1 + a_2 b + \cdots + a_k b^{k-1} = c_1 + c_2 b + \cdots + c_k b^{k-1}$$

តាមរបៀបដដែល យើងទាញបាន

$$a_1 = c_1, a_2 = c_2, \dots, a_k = c_k$$

● ឧទាហរណ៍ សរសេរ $\overline{1010011}_2$ ក្នុងប្រព័ន្ធគោល១០

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned} \overline{1010011}_2 &= 1.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2 + 1 = 64 + 16 + 2 + 1 \\ &= 83 \end{aligned}$$

● ឧទាហរណ៍ សរសេរ 1211 ក្នុងប្រព័ន្ធគោល៣

ចម្លើយ

$$1211 = \overline{a_k \dots a_1 a_0}_3 = a_k.3^k + \cdots + a_1.3 + a_0$$

យើងមាន

$$\begin{aligned} &1211 = 403.3 + 2 \ \Rightarrow a_0 = 2 \\ &403 = 134.3 + 1 \ \Rightarrow a_1 = 1 \\ &134 = 44.3 + 2 \ \Rightarrow a_2 = 2 \\ &44 = 14.3 + 2 \ \Rightarrow a_3 = 2 \\ &14 = 4.3 + 2 \ \Rightarrow a_4 = 2 \\ &4 = 1.3 + 1 \ \Rightarrow a_5 = 1 \\ &1 = 0.3 + 1 \ \Rightarrow a_6 = 1 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $1211 = 1.3^6 + 1.3^5 + 2.3^4 + 2.3^3 + 2.3^2 + 1.3 + 2 = 1122212_3$ ។

● ឧទាហរណ៍ តាង $\overline{xy}$ និង $\overline{yx}$ ជាចំនួនមានលេខ២ខ្ទង់ ។ បង្ហាញថាផលបូកចំនួនទាំងពីរជាចំនួនពហុគុណ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\overline{xy} = 10x + y$ និង $\overline{yx} = 10y + x$ ។ ដូច្នេះ $\overline{xy} + \overline{yx} = 11(x + y)$ ជាចំនួនពហុគុណ ។

● ឧទាហរណ៍ (អាមេរិច AHSME ១៩៧៣) ក្នុងសមីការខាងក្រោម អក្សរមួយតំណាងឱ្យលេខមួយក្នុងគោល ១០

$$\overline{YE}.\overline{ME} = \overline{TTT}$$

គណនា $E + M + T + Y$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\overline{TTT} = 100T + 10T + T = 111T = T.3.37$ ។ ដូច្នេះ $\overline{YE}.\overline{ME} = T.3.37$ ។ដូច្នេះមានមួយក្នុងចំណោម $\overline{YE}$ និង $\overline{ME}$ ត្រូវតែជាពហុគុណនៃ 37 ដែលអាចជា 37 ឬ $37.2 = 74$ ។

បើ មានមួយក្នុងចំណោម $\overline{YE}$ និង $\overline{ME}$ ជា 37 នោះ E ជាលេខ 7 ។ ដូច្នេះ $T.3$ អាច ជា $\overline{YE}$ ឬ $\overline{ME}$ ដែលមានលេខ 7 ជាខ្ទង់ខាងចុង ។ ដូច្នេះ មានតែ $T = 9$ ។ ដូច្នេះ $\overline{TTT} = 999 = 27.37$ ។ ដូច្នេះ $E + M + T + Y = 2 + 3 + 7 + 9 = 21$ ។
បើ មានមួយក្នុងចំណោម $\overline{YE}$ និង $\overline{ME}$ ជា 74 នោះ E ជាលេខ 4 ។ដូច្នេះ $T.3/2$ អាច ជា $\overline{YE}$ ឬ $\overline{ME}$ ដែលមានលេខ 4 ជាខ្ទង់ខាងចុង ។ តែមិនអាចមាន T បែបនេះទេ ។

● ឧទាហរណ៍ (អាមេរិច AIME ២០០១) គណនាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានមាន លេខ២ខ្ទង់ ដែលចែកដាច់នឹងតួលេខខ្ទង់នីមួយៗរបស់វា ។

ចម្លើយ

តាង $\overline{ab}$ ជាចំនួនគត់ ដែល ចែកដាច់នឹង a និង នឹង b ។ ដូច្នេះ $10a + b$ ចែកដាច់នឹង a និង នឹង b ។ $10a + b$ ចែកដាច់នឹង a នាំឱ្យ b ចែកដាច់នឹង a ដូច្នេះ $b = ka$ ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។$10a + b$ ចែកដាច់នឹង b នាំឱ្យ $10a$ ចែកដាច់នឹង $b = ka$ ដូច្នេះ $k = 1$ ឬ $k = 2$ ឬ $k = 5$ ។ ដូច្នេះ $\overline{ab}$ អាចជា $11, 22, .., 99, 12, 24, 36, 48$ និង 15 ។ ផលបូកចំនួនទាំងនេះស្មើនឹង $11 + 22 + \cdots + 99 + 12 + 24 + 36 + 48 + 15 = 630$ ។

● ឧទាហរណ៍ (អាមេរិច AMC12 ២០០២) សំណុំចំនួនបឋមខ្លះដូចជា {7,83,421,659} ប្រើគ្រប់តួលេខមិនសូន្យទាំងប្រាំបួន តែម្តងគត់ ។ តើផលបូក នៃធាតុរបស់សំណុំបែប នេះអាចមានតម្លៃតូចបំផុតស្មើប៉ុន្មាន?

ចម្លើយ

យើងដឹងថាធាតុរបស់សំណុំចំនួនបឋម មិនអាចមានលេខខ្ទង់រាយជាលេខ 4,6 និងលេខ 8 ទេ ។ ដូច្នេះផលបូកធាតុនៃសំណុំចំនួនបឋមបែបនេះ ត្រូវមានតម្លៃយ៉ាងតិច $40 + 60 + 80 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 = 207$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត សំណុំចំនួនបឋម ដែលមានផលបូកស្មើ 207 មានដូចជា $\{2, 5, 7, 43, 61, 89\}$ ។ ដូច្នេះ ចម្លើយគឺ 207 ។

● ឧទាហរណ៍ (អាមេរិច AMC12 ២០០៥) កុងទ័រឡានមួយបានខូច ដោយវាលោតពីលេខ៣ ទៅលេខ៥ ដោយរំលងលេខ៤ ទោះបីជាលេខ៤នោះឋិតនៅខ្ទង់ណាក៏ដោយ ។ ឧទាហរណ៍ បន្ទាប់ពីបើកបានចម្ងាយ១គម កុងទ័រនោះលោតពី 000039 ទៅ 000050 ។ បើពេលនេះកុងទ័រនោះចង្អុលថា 002005 តើឡាននោះបើកបានចម្ងាយប៉ុន្មានគម ហើយ?

ចម្លើយ

ដោយសារកុងទ័រនោះខូចលេខ១ខ្ទង់ ដូច្នេះ មានន័យថាវាប្រើតែលេខ ៩ តួប៉ុណ្ណោះ គឺ 0,1,2,3,5,6,7,8,9 ។ ដូច្នេះមានន័យថា កុងទ័រនោះកត់ត្រាចម្ងាយក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល ៩ លើកលែងតែវាប្រើប្រាស់លេខ ៥ ៦ ៧ ៨ និង ៩ តំណាងឱ្យលេខ ៤ ៥ ៦ ៧ និង ៨ ក្នុងប្រព័ន្ធគោល ៩ ។ ដូច្នេះចម្ងាយដែលកុងទ័រនោះបង្ហាញតាមពិតគឺ

$$2004_9 = 2.9^3 + 4 = 2.729 + 4 = 1462$$

គម ។

● ឧទាហរណ៍ ចូរបង្ហាញថា $11\ldots1_9$ ជាចំនួនត្រីកោណ ដែលមានន័យថា វាស្មើនឹងផលបូកនៃ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូងពី១ ដល់ k ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$11\ldots1_9 = 9^{n-1} + 9^{n-2} + \cdots + 9 + 1$$
$$= \frac{9^n - 1}{9 - 1} = \frac{1}{2}.\frac{3^n - 1}{2}.\frac{3^n + 1}{2} = \frac{1}{2}.\frac{3^n - 1}{2}.\left(\frac{3^n - 1}{2} + 1\right) = \frac{k(k+1)}{2}$$
$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + k$$

ដែល $k = \frac{3^n - 1}{2}$ ។ ដូច្នេះ $11\ldots1_9$ ជាផលបូកនៃ k ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង ។

៣.២ ភាពចែកដាច់ក្នុងប្រព័ន្ធទសភាគ

៣.២.១ ទ្រឹស្តីបទ ភាពចែកដាច់នឹង ៣ និង នឹង ៩

ចំនួនគត់មួយចែកដាច់នឹង 3 ឬ នឹង 9 បើ ផលបូកតួលេខក្នុងខ្ទង់ (ឬអង្គៈ) ទាំងអស់ ចែកដាច់នឹង 3 ឬនឹង 9 រៀងគ្នា និងច្រាសមកវិញ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$ ។ យើងមាន

$$n = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + \cdots + a_1.10 + a_0$$

យើងមាន $10^k = (9+1)^k = 9^k + \binom{k}{1}9^{k-1} + \cdots + 1 \equiv 1 \pmod 3$ ។ ដូច្នេះ

$$n \equiv a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 3$$

ដូច្នេះ n ចែកដាច់នឹង 3 ទាល់តែ $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$ ចែកដាច់នឹង 3 ដែរ ។

ដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$n \equiv a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 9$$

ដូច្នេះ n ចែកដាច់នឹង 9 ទាល់តែ $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$ ចែកដាច់នឹង 9 ដែរ ។

៣.២.២ ទ្រឹស្តីបទ ភាពចែកដាច់នឹង ១១

ចំនួនគត់មួយចែកដាច់នឹង ១១ បើផលបូកតួលេខខ្ទង់ទីសេស ដកផលបូកលេខខ្ទង់ទីគូ ចែកដាច់នឹង ១១ និង ច្រាសមកវិញ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $10^k = (11-1)^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} n &= a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + \cdots + a_1.10 + a_0 \\ &\equiv (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \cdots - a_1 + a_0 \pmod{11} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ n ចែកដាច់នឹង ១១ បើ $(-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \cdots - a_1 + a_0$ ចែកដាច់នឹង ១១ និងច្រាសមកវិញ ។

៤

ការបំបែកជាកត្តាផលគុណ

៤.១ តួចែករួមធំបំផុត

■ ឧទាហរណ៍– គណនាតួចែករួមនៃ 12 និង 18 ។

យើងមាន $12 = 2.2.3$ ដូច្នេះតួចែករបស់វាមាន $\{2;4;3;6;12\}$ និង $18 = 2.3.3$ ដូច្នេះតួចែករបស់វាមាន $\{2;3;6;9;18\}$ ។ ដូច្នេះ 12 និង 18 មានតួចែករួម $\{2;3;6\}$ ។ ក្នុងចំណោមតួចែករួមទាំងនេះ តួចែករួមដែលធំជាងគេគឺ 6 ។ យើងនិយាយថា តួចែករួមធំបំផុតរបស់ 12 និង 18 ស្មើ 6 ។

និយមន័យ

បើ $a, b \in \mathbb{Z}$ មិនសូន្យទាំង ២ ព្រមគ្នា នោះ ចំនួនគត់ធំបំផុត ដែលចែក a, b ដាច់ទាំងពីរ ហៅថា *តួចែករួមធំបំផុត* របស់ a និង b ។

គេតាងដោយ (a, b) ឬដោយ $PGCD(a, b)$ ។

លក្ខណៈ

បើ $d|a$ និង $d|b$ នោះ $d|PGCD(a,b)$

■ ឧទាហរណ៍– គណនា PGCD នៃ 18 និង 12 ។

យើងមាន

$$\frac{18 = 2.9 = 2^1.3^2}{12 = 3.4 = 2^2.3^1} \Rightarrow PGCD(18;12) = 2.3 = 6$$

■ ឧទាហរណ៍– គណនា PGCD នៃ 45 និង 30 ។

យើងមាន

$$\frac{45 = 2^0.3^2.5^1}{30 = 2^1.3^1.5^1} \Rightarrow PGCD(45;30) = 2^0.3^1.5^1 = 15$$

យើងឃើញថា $45 = 15 \times 3; 30 = 15 \times 2$

លក្ខណៈ

បើ $PGCD(a,b) = 1$ នោះគេនិយាយថា a និង b បឋមនឹងគ្នា ។

ដូច្នេះ បើ a និង b បឋមនឹងគ្នា នោះចំនួន២នេះមិនអាចមានកត្តារួមធំជាង ១ ទេ ។

៤.២ ពហុគុណរួមតូចបំផុត

■ ឧទាហរណ៍– គណនាពហុគុណរួមនៃ 2 និង 3 ។

យើងមាន ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 2 ផងនិងនៃ 3 ផង មាន $2 \times 3 = 6; 2^2 \times 3 = 12; 2 \times 3^2 = 18; 2 \times 3 \times 5 = 30; ....$ ។ ចំនួនទាំងនេះហៅថា ចំនួនពហុគុណរួមនៃ 2 និង 3 ។ ចំនួនបែបនេះមានច្រើនរាប់មិនអស់ ។ តែចំនួនដែលតូចជាងគេ គឺ 6 ។

ដូច្នេះ 6 ជាពហុគុណរួមតូចបំផុតរវាង 2 និង 3 ។

និយមន័យ

បើ $a, b \in \mathbb{Z}$ មិនសូន្យទាំង២ព្រមគ្នា នោះ ចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដែលជាពហុគុណនៃ a ផងនិង b ផង ហៅថា *ពហុគុណរួមតូចបំផុត* នៃ a និង b ។ គេតាងដោយ $[a, b]$ ឬ $PPCM(a, b)$ ។

■ ឧទាហរណ៍– គណនាពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ 100 និង 90

យើងមាន

$$\frac{100 = 2^2 3^0 5^2}{90 = 2^1 3^2 5^1} \Rightarrow PPCM(100,90) = 2^2 3^2 5^2 = 900$$

លក្ខណៈ

យើងឃើញថា បើ $a|c$ និង $b|c$ នោះ $PPCM(a, b)|c$ ។

៤.៣ ទ្រឹស្តីបទ Bachet-Bézout

តួចែករួមធំបំផុតរបស់គ្រប់ចំនួនគត់ពីរ តាងដោយ a, b អាចសរសេរជាបន្សំលីនេអ៊ែនៃ a និង b បានជានិច្ច មានន័យថាមានចំនួនគត់ពីរតាងដោយ x, y ដែល

$$PGCD(a, b) = ax + by$$

សម្រាយបញ្ជាក់

■ ឧទាហរណ៍ $PGCD(18; 12) = 6$ ។ យើងមាន $6 = 18 - 12 \Rightarrow x = 1, y = -1$ ។

■ ឧទាហរណ៍ $PGCD(45; 30) = 15$ ។ យើងមាន $15 = 45 - 30 \Rightarrow x = 1, y = -1$ ។

■ ឧទាហរណ៍ $PGCD(12;3) = 3$ ។ យើងមាន $3 = 12 - 3 \times 3 \Rightarrow x = 1, y = -3$ ។

តាង $A = \{ax + by \,|ax + by > 0;\ x, y \in \mathbb{Z}$ ។ យើងដឹងថា មានមួយក្នុងចំណោម $\pm a, \pm b$ ជាធាតុរបស់ A ព្រោះ a, b មិនអាចសូន្យទាំងពីរ ។ A មានធាតុតូចបំផុត តាងដោយ d ។ ដូច្នេះ គេមាន x_0, y_0 ដែល $d = ax_0 + by_0$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $d = PGCD(a, b)$ ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវបង្ហាញថា $d|a; d|b$ ($\Rightarrow d$ ជាតួចែករួមរបស់ a, b)និងថា បើ $t|a$ និង $t|b$ នោះ $t|d$ ($\Rightarrow d$ ជាតួចែករួមធំបំផុតរបស់ a, b) ។

ជាដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថា $d|a$ ។ តាមប្រមាណវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ យើងអាចរកបានចំនួនគត់ q, r ដែល $0 \leq r < d$ ហើយដែល $a = dq + r$

$$\Rightarrow r = a - dq = a - (ax_0 + by_0)q = a(1 - qx_0) - by_0$$

បើ $r > 0$ នោះ $r \in A$ ។ ដោយ $r < d$ នោះ វាមានតំលៃតូចជាងធាតុតូចជាងគេរបស់ A ដែលតាងដោយ d ដូច្នេះវាផ្ទុយពីការសន្មត ។ ដូច្នេះ $r = 0 \Rightarrow dq = a \Rightarrow d|a$ ។

ដូចគ្នា យើងអាចបង្ហាញថា $d|b$ ។

សន្មតថា $t|a, t|b \Rightarrow a = tm; b = tn$ ចំពោះចំនួនគត់ m, n ។ ដូច្នេះ

$$d = ax_0 + by_0 = t(mx_0 + ny_0)$$

មានន័យថា $t|d$ ។ ដូច្នេះ ទ្រឹស្តីបទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

សម្គាល់

យើងអាចចែងទ្រឹស្តីបទនេះតាមមួយបែបទៀតថា « គ្រប់បន្សំលីនេអ៊ែនៃ a, b ចែកដាច់នឹង $PGCD(a, b)$ ។ »

៤.៤ កូរ៉ូលែអឺគ្លីដ

បើ a ចែកដាច់ bc និង បើ $PGCD(a,b)=1$ នោះ a ចែកដាច់ c ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ $PGCD(a,b)=1$ នោះ តាមទ្រឹស្តីបទ Bachet-Bézout គេមានចំនួនគត់ x,y ដែល $ax+by=1$ ។ ដោយ $a|bc$ នោះ គេមានចំនួនគត់ s មួយ ដែល $as=bc$ ។ នោះ

$$c=c.1=c(ax+by)=cax+cby=cax+asy=a(cx+sy)$$

ដូច្នេះ យើងទាញបាន $a|c$ ។

៤.៥ ទ្រឹស្តីបទ

$1°$ បើ $PGCD(a,b)=d$ នោះ $PGCD(a/d,b/d)=1$ ។

$2°$ បើ c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $PGCD(ca,cb)=c.PGCD(a,b)$ ។

$3°$ ចំពោះចំនួនគត់មិនសូន្យ a,b,c គេមាន

$$PGCD(a,bc)=PGCD\big(a,c.PGCD(a,b)\big)$$

$4°$ ចំពោះចំនួនគត់មិនសូន្យ a,b,c គេមាន $PGCD(a^2,b^2)=[PGCD(a,b)]^2$

សម្រាយបញ្ជាក់

$1°$ តាមទ្រឹស្តីបទ Bachet-Bézout គេមានចំនួនគត់ x,y ដែល $ax+by=d$ ។ ដូច្នេះ $\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y=1$ ។ យើងមាន a/d និង b/d ជាចំនួនគត់ ។ យើងដឹងថា $PGCD(a/d,b/d)$ ចែកដាច់គ្រប់បន្សំលីនេអ៊ែនៃ a/d និង b/d ។ ដោយមានបន្សំលីនេអ៊ែមួយ គឺ

$\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y$ ដែលស្មើ 1 នោះ $PGCD(a/d\,,b/d)$ ចែក 1 ដាច់ ។ យើងទាញបាន $PGCD(a/d\,,b/d)=1$ ។

$2°$ តាង $d_1=PGCD(ca,cb)$ និង $d_2=PGCD(a,b)$ ។ យើងបង្ហាញថា $d_1|cd_2$ និង $cd_2|d_1$ ។

យើងមាន $d_2=PGCD(a,b)$ ដូច្នេះតាមទ្រឹស្តីបទ Bachet-Bézout គេអាចរកបានចំនួនគត់ x,y ដែល $d_2=ax+by \ \Rightarrow cd_2=cax+cby$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ Bachet-Bézout ដដែល គេមានគ្រប់បន្សំលីនេអ៊ែរវាង ca និង cb ចែកដាច់នឹង $PGCD(ca,cb)=d_1$ ។ ដូច្នេះ $d_1|cd_2$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទ Bachet-Bézout គេអាចរកបានចំនួនគត់ x,y ដែល $d_1=acx+bcy=c(ax+by)$ ។ តែ $ax+by$ ជាបន្សំលីនេអ៊ែនៃ a,b ហើយដូច្នេះ វាចែកដាច់នឹង d_2 ។ គេមានចំនួនគត់ s ដែល $sd_2=ax+by$ ។ ដូច្នេះ $d_1=csd_2$ មានន័យថា $cd_2|d_1$ ។

ចំណាំ ៖

ដូចគ្នា យើងទាញបាន $PGCD(ca,cb)=|c|PGCD(a,b)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនសូន្យ c ។

$3°$ ដោយ $PGCD\big(a,c.PGCD(a,b)\big)$ ចែកដាច់ $c.PGCD(a,b)$ នោះ វាចែកដាច់ bc ។ ដូច្នេះ $PGCD\big(a,c.PGCD(a,b)\big)$ ចែកដាច់ a និង bc ហើយដូច្នេះ

$$PGCD\big(a,c.PGCD(a,b)\big)|\ PGCD(a,bc)$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត $PGCD(a,bc)$ ចែកដាច់ a និង bc នោះ វាចែកដាច់ ac និង bc ។ ដូច្នេះ $PGCD(a,bc)$ ចែកដាច់ $PGCD(ac,bc)=c.PGCD(a,b)$ ។ ដូច្នេះ $PGCD(a,bc)$ ចែកដាច់ a និង $c.PGCD(a,b)$ ហើយដូច្នេះ វាចែកដាច់ $PGCD\big(a,c.PGCD(a,b)\big)$ ។

$$\Rightarrow PGCD\big(a, c.PGCD(a,b)\big) \mid PGCD(a,bc)$$

4° សន្មតថា $PGCD(m,n) = 1$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ 3° យើងទាញបាន

$$PGCD(m^2,n^2) = PGCD\big(m^2, nPGCD(m^2,n)\big)$$
$$= PGCD\Big(m^2, n.PGCD\big(n, m.PGCD(m,n)\big)\Big) \quad (1)$$

ដោយ $PGCD(m,n) = 1$ នោះ

$$(1) \Rightarrow \ PGCD(m^2,n^2) = PGCD(m^2,n)$$

តាមទ្រឹស្តីបទ3° ដដែល យើងទាញបាន

$$PGCD(m^2,n) = PGCD\big(n, m?PGCD(m,n)\big) = 1$$

ដូច្នេះ $PGCD(m,n) = 1 \ \Rightarrow PGCD(m^2,n^2) = 1$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទ 1°

$$PGCD\left(\frac{a}{PGCD(a,b)}, \frac{b}{PGCD(a,b)}\right) = 1$$

ដូច្នេះ

$$PGCD\left(\frac{a^2}{\big(PGCD(a,b)\big)^2}, \frac{b^2}{\big(PGCD(a,b)\big)^2}\right) = 1$$

តាមទ្រឹស្តីបទ 2° ដោយយក $c = \big(PGCD(a,b)\big)^2$ យើងទាញបាន

$$PGCD\left(c.\frac{a^2}{\big(PGCD(a,b)\big)^2}, c.\frac{b^2}{\big(PGCD(a,b)\big)^2}\right)$$
$$= c.PGCD\left(\frac{a^2}{\big(PGCD(a,b)\big)^2}, \frac{b^2}{\big(PGCD(a,b)\big)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ PGCD(a^2,b^2) = \big(PGCD(a,b)\big)^2$$

៤.៦ ទ្រឹស្តីបទ

បើ $n > 1$ នោះ n ចែកដាច់យ៉ាងហោចណាស់ នឹងចំនួនបឋមមួយ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ $n > 1$ នោះវាមានយ៉ាងហោចណាស់តួចែកមួយធំជាងមួយ ។ ដូច្នេះ វាមានតួចែកមួយដែលតូចជាងគេ ហើយធំជាងមួយ តាងដោយ q ។ យើងថា q ជាចំនួនបឋម ។ បើ q មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ នោះ យើងអាចសរសេរ q ជា $q = ab, 1 < a \leq b < q$ ។ តែបើដូច្នេះ a ជាតួចែករបស់ n ដែលធំជាងមួយ និងតូចជាង q ដែលផ្ទុយនឹងការសន្មត ដែលថា q តូចជាងគេ ។

៤.៧ ទ្រឹស្តីបទអឺគ្លីដ

សំណុំចំនួនបឋម ជាសំណុំអនន្ត ។

សម្រាយបញ្ជាក់

សន្មតថា សំណុំចំនួនបឋមជាសំណុំកំណត់ ដែលមានចំនួនបឋមតែ $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ។ យើងដឹងថា គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ដែលធំជាងមួយ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹងចំនួនបឋមយ៉ាងហោចណាស់មួយ (ទ្រឹស្តីបទ 4.6) ។ ដូច្នេះ គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ ត្រូវតែចែកដាច់នឹងយ៉ាងហោចណាស់ចំនួនបឋមមួយក្នុងចំណោម $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ។ យើងពិនិត្យចំនួនគត់ធំជាងមួយ $n = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ ។ ត្រូវតែមានចំនួនបឋមមួយក្នុងចំណោម $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ដែលចែក n ដាច់ ។ តែបើមាន $p_i (1 \leq i \leq k)$ មួយ ចែក n ដាច់ នោះ p_i ត្រូវតែចែក 1 ដាច់ ព្រោះ $p_1 p_2 \ldots p_k$ ចែកដាច់នឹង p_i ។ ដូច្នេះ $\Rightarrow p_i = 1$ តែ p_i ជាចំនួនបឋម ដូច្នេះ $p_i > 1$ ។ ដូច្នេះមិនអាច ។ យើងទាញបាន សំណុំចំនួនបឋមមិនអាចជាសំណុំកំណត់បាន ទេ ។ល។

៤.៨ ទ្រឹស្តីបទ

ផលគុណនៃចំនួនគត់ពីរដែលមានរាង $4k+1$ ក៏ជាចំនួនដែលមានរាង $4k+1$ ដែរ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $(4a+1)(4b+1) = 4(4ab+a+b)+1 = 4K+1; K = 4ab+a+b$
ដូច្នេះសំណើពិត ។ល៕

៤.៩ ទ្រឹស្តីបទ

ចំនួនបឋមដែលមានរាង $4n+3$ មានច្រើនរាប់មិនអស់ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិធីផ្ទុយ ដោយសន្មតថាចំនួនបឋមមានរាង $4n+3$ មានចំនួនកំណត់ តាងដោយ $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k$; $p_0 = 3$ ។ យើងពិនិត្យចំនួន $N = 4p_1p_2 \dots p_k + 3$ ។

តាង q ជាតួចែកបឋមមួយរបស់ N ។ q អាចមានរាង $4a, 4a+1, 4a+2, 4a+3$ ។
$-q$ មិនអាចមានរាង $4a, 4a+2$ ទេ ព្រោះមិនមែនជាចំនួនបឋម ។
$-$ បើ $q = 4a+3$: នោះ q ជាចំនួនបឋមមួយដែលមានរាង $4n+3 \Rightarrow q$ ជាចំនួនបឋមមួយក្នុងចំណោម $p_i (0 \le i \le k)$ (ព្រោះសំណុំចំនួនបឋមដែលមានរាង $4n+3$ មានតែ $3, p_1, p_2, \dots, p_k$ តែប៉ុណ្ណោះ) ។ តែក្នុងករណីនេះ បើ $q = 3$ នោះ $N \equiv 4p_1p_2 \dots p_k \neq 0 \pmod q$ ព្រោះ p_i សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម ដែលធំជាង 3 ។ តែបើ

$q = p_i, 1 \leq i \leq k$ នោះ $N \equiv 3 \neq 0 \pmod{q}$ ។ ដូច្នេះ q មិនអាចជាតួចែករបស់ N បានទេ ផ្ទុយពីការសន្មត ។

–ដូច្នេះមានតែ $q = 4a + 1$ ។ ដូច្នេះតួចែករបស់ N សុទ្ធតែមានរាង $4a + 1$ ។ ដូច្នេះ N ស្មើនឹងផលគុណនៃបណ្តាលេខដែលមានរាង $4a + 1$, ដូច្នេះ N ត្រូវតែមានរាង $4a + 1$ ដែរ ។ យើងទាញបាន $N = 4a + 1 \equiv 1 \pmod{4}$ តែមិនអាចព្រោះ $N = 4p_1p_2 \ldots p_k + 3 \equiv 3 \pmod{4}$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបានថា ចំនួនបឋមដែលមានរាង $4n + 3$ ត្រូវតែមានចំនួនច្រើនមិនកំណត់ ។៚

៤.១០ ទ្រឹស្តីបទ

បើចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ជាចំនួនពហុគុណ នោះ វាមានកត្តាបឋម p មួយ ដែល $p \leq \sqrt{n}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

សន្មតថា $n = ab, 1 < a \leq b < n$ ។ បើ a និង b សុទ្ធតែធំជាង $\sqrt{n}$ ទាំង២ នោះ $n = ab > \sqrt{n}\sqrt{n} = n$ មិនពិត ។ ដូច្នេះ n ត្រូវមានកត្តាមួយខុសពី 1 និង $\leq \sqrt{n}$ ។ ដូច្នេះ វាត្រូវមានកត្តាបឋមមួយ ដែល $\leq \sqrt{n}$ ។៚

៤.១១ ទ្រឹស្តីបទ

បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ $\binom{p}{k}$ ចែកដាច់នឹង p ចំពោះគ្រប់ $0 < k < p$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន

$$\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}\Rightarrow k!\binom{p}{k}=p(p-1)\dots(p-k+1)$$

ដូច្នេះ នាំឱ្យ $p|k!\binom{p}{k}$ ។ ដោយ $k<p$ នោះ p ចែកមិនដាច់ $k!$ ។ តាមគូរ៉ូលែអឺគ្លីដ នោះ មានតែ $\Rightarrow p|\binom{p}{k}$ ។ល។

៤.១២ ទ្រឹស្តីបទ

គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ សុទ្ធតែអាចបំបែកជាផលគុណ ដែលមានកត្តាទាំងអស់ជាចំនួនបឋម ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧទាហរណ៍ $1332=2^2 3^2 37\ \Rightarrow 1332$ ជាផលគុណនៃ 2,3,37 ដែលសុទ្ធតែជាចំនួនបឋម ឬកត្តាផលគុណរបស់ 1332 សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម ។

យើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់សុទ្ធតែអាចបំបែកជាផលគុណដូចខាងលើបានទាំងអស់ ។

យើងពិនិត្យចំនួនគត់ n មួយ ។

ក–ករណី n ជាចំនួនបឋម នោះ $n=1.n$ សំណើពិត ។

ខ–ករណី n មិនមែនជាចំនួនបឋម ដូច្នេះយ៉ាងហោចណាស់ មានតួចែកបឋម p_1 មួយ ដែល $n=p_1q_1$ ដែល $1<q_1<n$

យើងមាន២ករណីទៀត

១–ករណី q_1 ជាចំនួនបឋម នោះ $n=p_1q_1$ ជាផលគុណនៃចំនួនបឋម២ ។

២–ករណី q_1 មិនមែនជាចំនួនបឋម ។ q_1 មានតួចែកបឋម p_2 មួយយ៉ាងតិចដែល $q_1=p_2q_2$ និង $n=p_1p_2q_2$ ដែល $1<q_2<q_1<n$ ។

តាមវិចារដូចគ្នា យើងទាញបាន កត្តាបឋមរបស់ n ដែល $1 < \cdots < q_2 < q_1 < n$ ។ ដោយចំនួនតួចែករបស់ n មានចំនួនកំណត់ នោះ មាន k មួយ ដែល q_k ជាចំនួនបឋម ហើយស្មើ p_k ។

ដូច្នេះ n អាចសរសេរជា $n = p_1 p_2 \dots p_k$ ដែល $p_1, p_2, \dots, p_k$ សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម (មានខ្លះខុសគ្នា ខ្លះស្មើគ្នា) ។ល។

យើងអាចរៀបកត្តាបឋមទាំងនោះជារាង

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}; \alpha_1 > 0;\ \alpha_2 > 0; \dots ; \alpha_m > 0$$
$$p_1 < p_2 < \cdots < p_m$$

ដែល p_j ជាបណ្តាចំនួនបឋមខុសៗគ្នា ។ យើងហៅការបំបែកជាផលគុណកត្តាបឋមនៃ n ខាងលើ ថា កត្តាផលគុណរាងកាណូនិចនៃ n ។ ឧទាហរណ៍ $2^3 3^2 5^2 7^3$ ជា កត្តាផលគុណរាងកាណូនិចនៃ 617400 ។

៤.១៣ ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃនព្វន្ត

គ្រប់ចំនួនគត់ធំជាងមួយ អាចបំបែកជាកត្តាផលគុណកាណូនិចបានតែមួយបែបគត់ ។ ឬនិយាយម្យ៉ាងទៀតថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n > 1$ គេមានចំនួនបឋមដែលខុសគ្នាពីរៗ $p_1, p_2, \dots, p_k$ តែមួយបែបគត់ និងចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ តែមួយបែបគត់ ដែល

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧបមាថាវាអាចបំបែកបាន២យ៉ាង

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \quad \text{និង} \quad n = p_1'^{\beta_1} p_2'^{\beta_2} \dots p_h'^{\beta_h}$$

ដែល $p_1, p_2, \dots, p_k$ ជាចំនួនបឋមខុសគ្នាពីរៗ និង $p_1', p_2', \dots, p_h'$ ជាចំនួនបឋមខុសគ្នាពីរៗ ។ យើងមាន

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = {p_1'}^{\beta_1} {p_2'}^{\beta_2} \dots {p_h'}^{\beta_h}$$

ដោយ $p_1|n \quad \Rightarrow p_1|{p_1'}^{\beta_1} {p_2'}^{\beta_2} \dots {p_h'}^{\beta_h}$ ។ តែ $p_1, p_1', p_2', \dots, p_h'$ សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម នោះត្រូវមានមួយក្នុងចំណោម $p_1', p_2', \dots, p_h'$ ដែលស្មើនឹង p_1 ។ សន្មតថា $p_1 = p_1'$ ។ តាមរបៀបដូចគ្នាយើងទាញបាន $h = k$ និង $p_i = p_i', 1 \le i \le k$ ។ ដូច្នេះ n អាចដាក់ជាផលគុណកត្តាបឋមបានតែមួយបែបគត់ ។៚

ទ្រឹស្តីបទខាងលើ នាំឱ្យយើងទាញបានទំនាក់ទំនងសម្រាប់គណនា $PGCD$និង $PPCM$នៃចំនួនគត់២បើសិនជាយើងស្គាល់ផលគុណកត្តាបឋមរបស់វា ។ តាង

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$
$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$$

ដែលក្នុងនោះ បណ្តា p_i ខុសគ្នា២ៗ តែបណ្តា α_i និង β_i អាចមានខ្លះស្មើសូន្យ ។ យើងមាន

$$PGCD(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$$
$$PPCM(a,b) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$$

គួរកត់សម្គាល់ថា ចំពោះចំនួនពិត α និង β យើងមាន

$$\min(\alpha,\beta) + \max(\alpha,\beta) = \alpha + \beta$$

នាំឱ្យយើងទាញបាន

$$PGCD(a,b)PPCM(a,b) = ab$$

៤.១៤ ប្រមាណវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ

តាង a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បន្ទាប់ធ្វើប្រមាណវិធីចែកបន្តបន្ទាប់គ្នា យើងទាញបានស៊េរីនៃវិសមភាពដូចតទៅ ៖

$$\begin{aligned}
&a = bq_1 + r_2; \quad 0 < r_2 < b\\
&b = r_2q_2 + r_3; \quad 0 < r_3 < r_2\\
&r_2 = r_3q_3 + r_4; \quad 0 < r_4 < r_3\\
&\vdots\\
&r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n; \quad 0 < r_n < r_{n-1}\\
&r_{n-1} = r_nq_n
\end{aligned}$$

ស៊េរីនៃសំណល់នឹងទៅដល់ r_{n+1} ដែលនឹងស្មើសូន្យ ។ ព្រោះថា $b, r_2, r_3, \dots$ ជាស្វ៊ីតចុះនៃបណ្ដាចំនួនគត់ ដូច្នេះ ស្វ៊ីតនេះ មិនអាចមានចំនួនតួវិជ្ជមានលើសពី b ទេ ។

៤.១៥ ទ្រឹស្ដីបទ

បើ a,b,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $PGCD(a,b) = PGCD(a+nb,b)$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $d = PGCD(a,b)$ និង $c = PGCD(a+nb,b)$ ។ ដោយ $d|a$ និង $d|b$ នោះ $d|(a+nb)$ ។ ដូច្នេះ d ជាតួចែករួមរបស់ b និង $a+nb$ ។ ដូច្នេះ $d|c$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត $c|(a+nb)$ និង $c|b$ នោះ $c|(a+nb-nb) = a$ ។ ដូច្នេះ c ជាតួចែករួមនៃ a និង b មានន័យថា $c|d$ ។ ដូច្នេះ $d|c$ និង $c|d$ នាំឱ្យ $c = d$ ។

៤.១៦ ទ្រឹស្តីបទ

បើ r_n ជាសំណល់ចុងក្រោយ មុនសូន្យ នៅក្នុងប្រមាណវិធីចែកអឺគ្លីដ នោះ

$$r_n = PGCD(a,b)$$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន

$$\begin{aligned} r_2 &= a - bq_1 \\ r_3 &= b - r_2q_2 \\ r_4 &= r_2 - r_3q_3 \\ &\vdots \\ r_n &= r_{n-2} - r_{n-1}q_{n-1} \\ r_{n+1} &= 0 = r_{n-1} - r_nq_n \end{aligned}$$

តាង $r = PGCD(a,b)$ ។ សមីការទីមួយ នាំឱ្យ $r|r_2$ ។ ទីពីរនាំឱ្យ $r|r_3$ ។ បន្តបន្ទាប់មកទៀត $r|r_n$ ។

តែដោយចេញពីសមីការចុងក្រោយ ហើយបកទៅលើវិញ យើងទាញបាន

$$r_n|r_{n-1}, r_n|r_{n-2}, \dots, r_n|b, r_n|a$$

ដូច្នេះ r_n ជាតួចែករួមរបស់ a និង b ដូច្នេះ $r_n|PGCD(a,b)$ ឬក៏ $r_n|r$ ។

ដូច្នេះ $r_n = r$ ។ល។

■ឧទាហរណ៍: គណនា $PGCD(23,29)$

ចម្លើយ

យើងមាន

$$\begin{aligned} 29 &= 23 \times 1 + 6 \\ 23 &= 6 \times 3 + 5 \\ 6 &= 5 \times 1 + 1 \\ 5 &= 1 \times 5 + 0 \end{aligned}$$

សំណល់មុនសូន្យគឺ 1 ដូច្នេះ $PGCD(23,29) = 1$ ។

៤.១៧ ទ្រឹស្តីបទ

សន្មតថា a, b, c ជាចំនួនគត់ដែល $PGCD(a,b)|c$ ។ បើគេស្គាល់គូចម្លើយ (x_0, y_0) នៃសមីការឌីយ៉ូផង់* $ax + by = c$ នោះចម្លើយផ្សេងទៀតនៃសមីការនេះ នឹងមានរាង

$$x = x_0 + t\frac{b}{d};\ \ y = y_0 - t\frac{a}{d}$$

ដែល $d = PGCD(a,b)$ និង $t \in \mathbb{Z}$ ។

*សមីការឌីយ៉ូផង់ជាសមីការដែលមានឫសបិតក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងថា បើ (x_0, y_0) ជាឫសរបស់សមីការ $ax + by = c$ នោះ $x = x_0 + t\frac{b}{d}, y = y_0 - t\frac{a}{d}$ ក៏ជាឫសដែរ ។ តែយើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់ចម្លើយនៃសមីការ នឹងមានរាងបែបនេះទាំងអស់ ។

សន្មតថា (x', y') ផ្ទៀងផ្ទាត់ $ax' + by' = c$ ។ ដូចគ្នាដែរ $ax_0 + by_0 = c$ ។ ដូច្នេះយើងមាន

$$a(x' - x_0) = b(y_0 - y')$$

ចែកអង្គទាំង២នឹង $d = PGCD(a,b)$ យើងទាញបាន

$$\frac{a}{d}(x' - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y')$$

ដោយ $PGCD\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ នោះ $\frac{a}{d} | (y_0 - y')$ ដោយយោងតាមគូរ៉ូលែអឺគ្លីដ ។ ដូច្នេះគេមានចំនួនគត់ t ដែល $t\frac{a}{d} = y_0 - y'$ នាំឱ្យ $y = y_0 - t\frac{a}{d}$ ។ ចេញពីនេះ យើងទាញបាន

$$\frac{a}{d}(x' - x_0) = \frac{b}{d}t\frac{a}{d}$$

$$\Rightarrow x' = x_0 + t\frac{b}{d}$$

៥

ភាពសមមូលក្នុងសំណុំចំនួនគត់

៥.១ សមីការសមមូលលីនេអ៊ែ

សមីការសមមូលអញ្ញាត x មួយកំណត់ដោយ $ax \equiv b \pmod{n}$ ។ កន្សោម $ax \equiv b \pmod{n}$ មានន័យថាមាន $t \in \mathbb{Z}$ ដែល $ax = b + nt$ ។ ដូច្នេះ សមីការសមមូលអញ្ញាត x ដែល $ax \equiv b \pmod{n}$ មានចម្លើយ លុះត្រាតែសមីការដ្យូផង់ $ax + ny = b$ មានចម្លើយ និងច្រាសមកវិញ ។ ដូច្នេះ យើងឃើញថា សមីការសមមូល $ax \equiv b \pmod{n}$ មានចម្លើយទាល់តែ $PGCD(a, n)|b$ ។

៥.២ ទ្រឹស្តីបទ

គេឱ្យចំនួនគត់ a, b, n ។ បើសមីការសមមូល $ax \equiv b \pmod{n}$ មានចម្លើយមួយ នោះវាមានចម្លើយមិនសមមូលគ្នា តាម n ចំនួន $PGCD(a, n)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង៍ចម្លើយមួយនោះដោយ (x_0, y_0) ។ តាមទ្រឹស្តីបទ 4.17 យើង៍ទាញបាន សមីការដ្យូផង់លីនេអ៊ែ $ax + ny = b$ មានចម្លើយមានរាង៍

$$x = x_0 + n\frac{t}{d}; y = y_0 - a\frac{t}{d}; \quad d = PGCD(a, n), t \in \mathbb{Z}$$

យើងឱ្យ t មានតម្លៃ $t = 0,1,\dots,(d-1)$ យើងទាញបាន ចម្លើយមិនសមមូលគ្នាតាម n ចំនួន d ។ បើ $x = x_0 + n\frac{t'}{d}$ ជាចម្លើយមួយផ្សេងទៀត ដែល $t' \geq d$ នោះយើងសរសេរ t' ជា $t' = qd + r, 0 \leq r < d$ ។ យើងទាញបាន

$$x = x_0 + n\frac{qd+r}{d} = x_0 + nq + n\frac{r}{d} \equiv x_0 + n\frac{r}{d} \pmod n$$

មានន័យថាឫស $x = x_0 + n\frac{t'}{d}$ សមមូលទៅនឹងចម្លើយមួយដែលមានរួចមកហើយក្នុងចំណោម $x = x_0 + n\frac{t}{d}, t = 0,1,\dots,(d-1)$ ។

ដូច្នេះ បើសមីការមានចម្លើយមួយ នោះ មានចម្លើយមិនសមមូលគ្នាតាម n ចំនួន d ។ល។

■ឧទាហរណ៍: ដោះស្រាយសមីការ $5x \equiv 3 \pmod 7$

ចម្លើយ

តាមទ្រឹស្តីបទ 5.2 សមីការនេះមានចម្លើយមិនសមមូលគ្នាតាម 7តែមួយគត់ ព្រោះ $PGCD(5,7) = 1$ ។ ជាដំបូងយើងដោះស្រាយសមីការដ្យូផង់ $5x + 7y = 1$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&7 = 5.1 + 2 \quad \Rightarrow 2 = 7 - 5.1 \\
&5 = 2.2 + 1 \quad \Rightarrow 1 = 5 - 2.2 \\
&2 = 2.1 \\
&\Rightarrow 1 = 5 - 2.2 = 5 - 2(7 - 5.1) = 5.3 - 7.2
\end{aligned}$$

យើងទាញបាន $x_0 = 3, y_0 = -2$ ។

$$\begin{aligned}
&5.3 - 7.2 = 1 \;\Rightarrow 5(9) - 7(6) = 3 \;\Leftrightarrow 5(2+7) - 7.6 = 3 \\
&\Rightarrow 5.2 = 7.1 + 3 \;\Rightarrow 5.2 \equiv 3 \pmod 7
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $x \equiv 2 \pmod 7$ ឬ $x = 7t + 2, t \in \mathbb{Z}$ ។ល។

■ឧទាហរណ៍: ដោះស្រាយសមីការ $3x \equiv 6 \pmod{12}$

ចម្លើយ

ដោយ $PGCD(3,12) = 3$ ហើយ $3|6$ នោះ សមីការមានចម្លើយចំនួន 3 ដែលមិនសមមូលគ្នាតាម 12 ។ យើងពិនិត្យឃើញថា $x = 2$ ជាចម្លើយមួយ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ 4.17 គ្រប់

ចម្លើយទាំងអស់មានរាង $x = 2 + t\frac{12}{3} = 2 + 4t; t \in \mathbb{Z}$ ។ ដោយឱ្យ $t = 0,1,2$ នោះចម្លើយមិនសមមូលគ្នាទាំង 3 របស់សមីការសមមូលតាម 12 គឺ 2,6,10 ។ ៕

៥.៣ ទ្រឹស្តីបទ

គេឱ្យចំនួនគត់ x, y និង ចំនួនគត់មិនសូន្យ a, n នោះ $ax \equiv ay \pmod{n}$ ទាល់តែ $x \equiv y \left(\bmod \frac{n}{PGCD(a,n)}\right)$ និងច្រាសមកវិញ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ $ax \equiv ay \pmod{n}$ នោះ $a(x-y) = sn$ ចំពោះចំនួនគត់ s ណាមួយ ។ ដូច្នេះ

$$(x-y)\frac{a}{PGCD(a,n)} = s\frac{n}{PGCD(a,n)}$$

តាមទ្រឹស្តីបទ 4.5 យើងទាញបាន $PGCD\left(\frac{a}{PGCD(a,n)}, \frac{n}{PGCD(a,n)}\right) = 1$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ 4.4 យើងទាញបាន $n/PGCD(a,n)$ ចែកដាច់$(x-y)$ ។

ដូច្នេះ $x \equiv y \left(\bmod \frac{n}{PGCD(a,n)}\right)$ ។

ច្រាសមកវិញ បើ

$$x \equiv y \left(\bmod \frac{n}{PGCD(a,n)}\right) \Rightarrow ax \equiv ay \left(\bmod \frac{an}{PGCD(a,n)}\right)$$
$$\Rightarrow ax - ay = K\frac{an}{PGCD(a,n)}$$

ដោយ $PGCD(a,n)$ ចែកដាច់ a នោះ

$$\frac{a}{PGCD(a,n)} = L \in \mathbb{Z} \Rightarrow ax - ay = KL\,n = tn, t \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow ax \equiv ay \pmod{n}$$

៥.៤ កូរ៉ូលែ

បើ $ax \equiv ay \pmod{n}$ និង $PGCD(a,n) = 1$ នោះ $x \equiv y \pmod{n}$ ។

■ឧទាហរណ៍ : ចូរគណនា x ដែល $x \equiv 3 \pmod{5}$ និង $x \equiv 7 \pmod{11}$

ចម្លើយ

ដោយ $x = 3 + 5a$ ដូច្នេះ $11x = 33 + 55a$ ។ ដោយ $x = 7 + 11b$ ដូច្នេះ $10x = 70 + 110b$ ។ ដូច្នេះ $x = 11x - 10x = 33 + 55a - 70 - 110b \Rightarrow x \equiv -37 \equiv 18 \pmod{55}$ ។ ដូច្នេះ $x = 18 + 55t, t \in \mathbb{Z}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការសមមូលដែលឱ្យ ។ ៚

■ឧទាហរណ៍ : ចូរគណនាចំនួនគត់ n មួយ ដែលពេលចែកនឹង 4 សល់សំណល់ 2, ពេលចែកនឹង 5 សល់សំណល់ 1 ហើយ ពេលចែកនឹង 7 សល់សំណល់ 1 ។

ចម្លើយ

យើងចង់បាន n ដែល $n \equiv 2 \pmod 4$; $n \equiv 1 \pmod 5$; $n \equiv 1 \pmod 7$

$$\Rightarrow 35n \equiv 70\ (mod\ 140); 28n \equiv 28\ (mod\ 140);\ 20n \equiv 20\ (mod\ 140);$$

យើងមាន

$$n = 21n - 20n = 3(35n - 28n) - 20n$$

ដូច្នេះ $n \equiv 3(70 - 28) - 20 = 106 \pmod{140} \Rightarrow n \equiv 106\ (mod\ 140)$ ។ ៚

៥.៥ ទ្រឹស្តីបទប្រូបិន

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន a, b ។ បើ $PGCD(a, b) = 1$ នោះ ចំនួននៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $m = ar + bs$ ចំពោះចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន r, s បាន ស្មើនឹង $(a-1)(b-1)/2$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងសន្មតហៅថា n ជាចំនួនអាចបំបែកបានតាម a, b បើចំពោះចំនួនគត់ a, b គេមានចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន r, s ដែល $n = ar + bs$ ។

យើងពិនិត្យតារាងដែលចំនួនធាតុមិនកំណត់ខាងក្រោម

0	1	2	…	k	…	$a-1$
a	$a+1$	$a+2$	…	$a+k$	…	$2a-1$
$2a$	$2a+1$	$2a+2$	…	$2a+k$	…	$3a-1$
⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮

លេខក្នុងជួរឈរនីមួយៗនៃតារាងនេះ ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួមស្មើ a ។ ចំនួននៅពីក្រោមចំនួនគត់ n ណាមួយក្នុងតារាងនេះ គឺ $n+ka$ ដែល k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ យើងដឹងថាបើ n អាចបំបែកជា $n=ar+bs$ បាន នោះ $n+ka$ ក៏អាចបំបែកបានដែរ ព្រោះ $n+ka=ar+bs+ka=a(k+r)+bs$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបានថា បើចំនួនគត់ n មួយអាចបំបែកបាន នោះគ្រប់ចំនួនគត់ដែលនៅពីក្រោមវាសុទ្ធតែអាចបំបែកបានទាំងអស់ ។

គ្រប់ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ b សុទ្ធតែអាចបំបែកបានទាំងអស់ ព្រោះ $n=bs=a\times 0+bs$ ។ យើងនិយាយថា គ្មានពហុគុណនៃ b ពីរខុសគ្នាតាងដោយ vb និង wb ដែល $0\leq v,w\leq a-1$ អាចឋិតនៅក្នុងជួរឈរតែមួយនៃតារាងខាងលើបានទេ ។ ព្រោះថាបើមិនអ៊ីចឹងទេ នោះយើងនឹងមាន $va=wb+ka \implies va\equiv wb \pmod a \implies b(v-w)\equiv 0 \pmod a$ ។ ដោយ $\mathrm{PGCD}(a,b)=1$ មានន័យថា a និង b បឋមគ្នា និងតាមទ្រឹស្តីបទ 4.4 យើងទាញបាន $v-w\equiv 0 \pmod a$ ។ ដោយ $0\leq v,w\leq a-1$ នោះយើងទាញបាន $v=w$ ។ ដូច្នេះមិនអាចមានចំនួនពហុគុណនៃ b ពីរខុសគ្នាឋិតក្នុងជួរឈរតែមួយបានទេ ។

ឥឡូវយើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ក្នុងជួរឈរតែមួយនៃតារាង ដែលនៅពីលើពហុគុណនៃ b តាងដោយ $vb, 0\leq v\leq a-1$ សុទ្ធតែជាចំនួនមិនអាចបំបែកបាន ។ គ្រប់ចំនួនដែលនៅក្នុងជួរឈរតែមួយលើ vb មានរាង $vb-ka$ ចំពោះចំនួនគត់ k មួយ ។ បើ $vb-ka$ អាចបំបែកបានចំពោះ a,b នោះមានចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x,y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $vb-ka=ax+by$ ។ ដូច្នេះ $by\leq ax+by=vb-ka<vb$ ។ ដូច្នេះ $0\leq y<v<a \implies y\not\equiv v \pmod a$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត ចំនួនពីរឋិតនៅលើជួរឈរតែ

មួយ សមមូលគ្នាតាម a ។ ដូច្នេះ $vb \equiv bv - ka = ax + by \pmod a \Longrightarrow vb \equiv by \pmod a$ ។ ដោយ $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$ នោះ $v \equiv y \pmod a$ (តាមកូរ៉ូលែ 5.4) ផ្ទុយពី $y \not\equiv v \pmod a$ ។

ដូច្នេះ ចំនួននៃចំនួនមិនអាចបំបែកបានតាម a, b ស្មើនឹងចំនួននៃចំនួនដែលនៅពីលើចំនួនដែលមានរាង $vb, 0 \leq v \leq a-1$ ។ នៅលើជួរឈរទី j គេមានចំនួនចំនួន $(vb - j)/a$ ពីលើ vb ។ ដូច្នេះចំនួននៃចំនួនដែលមិនអាចបំបែកបានតាម a, b ស្មើនឹង

$$\sum_{v=0}^{a-1}\sum_{j=0}^{a-1}\frac{vb-j}{a} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

ចំនួនគត់ដែលមិនអាចបំបែកបានធំបំផុតឋិតនៅចំពីលើ $(a-1)b$ ដូច្នេះ ចំនួនគត់ដែលមិនអាចបំបែកបានធំបំផុត មានតម្លៃស្មើនឹង $(a-1)b - a$ ។ល។

៥.៦ ទ្រឹស្តីបទ

គេឱ្យ a, b ជាចំនួនគត់បឋមរវាងគ្នា ។ សមីការ $ax + by = n$ គ្មានចម្លើយជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x, y ចំពោះ $n = ab - a - b$ ។ បើ $n > ab - a - b$ នោះ សមីការនេះមានចម្លើយជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។

៥.៧ ទ្រឹស្តីបទសំណល់ចែកចិន

គេឱ្យ $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ជាចំនួនវិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នាពីរៗ ហើយសុទ្ធតែធំជាងមួយ ។

តាង $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ជាចំនួនគត់ណាមួយ នោះប្រព័ន្ធសមីការសមមូល

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \quad\vdots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

មានចម្លើយ ហើយតែមួយគត់តាម $m_1 m_2 \ldots m_k$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $P_j = m_1 m_2 \dots m_k / m_j\,; 1 \le j \le k$ ។ តាង Q_j ដែល $P_j Q_j \equiv 1 \pmod{m_j}$ ។ យើងដឹងថា មាន Q_j ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងលើ ព្រោះគ្រប់ m_i បឋមរវាងគ្នាពីរៗ នាំឱ្យ m_j បឋមនឹង P_j ។ យើងបង្កើតចំនួន

$$x = a_1 P_1 Q_1 + a_2 P_2 Q_2 + \cdots + a_k P_k Q_k$$

យើងឃើញថាចំនួនខាងលើផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ ។

ដើម្បីបង្ហាញថា ចម្លើយមានតែមួយ យើងសន្មតថា មាន y ផ្សេងទៀត ដែល $y \equiv a_j \pmod{m_j}$ ចំពោះគ្រប់ $j \in \{1,2,\dots,k\}$ ។ ដូច្នេះ $y - x \equiv 0 \pmod{m_j}$ ចំពោះគ្រប់ j ។ យើងទាញបានថា m_j នីមួយៗចែកដាច់ $(y-x)$ ។ ដោយ m_j បឋមរវាងគ្នាពីរៗ នោះយើងទាញបាន $m_1 m_2 \dots m_k \,|(y-x)$ ឬនិយាយម្យ៉ាងទៀត $y \equiv x \pmod{m_1 m_2 \dots m_k}$ ។ល។

■ឧទាហរណ៍ : តើគេអាចរកបានមួយលានចំនួនគត់តរៀងគ្នាដែលចំនួនទាំងអស់នោះសុទ្ធតែចែកដាច់នឹងចំនួនការេឬទេ? ។

ចម្លើយ

តាង $p_1, p_2, \dots, p_{1.000.000}$ ជាចំនួនគត់ទាំងមួយលានបឋមគ្នាពីរៗ ។ តាមទ្រឹស្ដីបទសំណល់ចែកចិន ប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមមានចម្លើយ

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{p_1^2} \\ x \equiv -2 \pmod{p_2^2} \\ \qquad\vdots \\ x \equiv -1.000.000 \pmod{p_{1.000.000}^2} \end{cases}$$

បណ្ដាចំនួន $x+1, x+2, \dots, (x+1.000.000)$ ជាមួយលានចំនួនគត់តរៀងគ្នា ដែលនីមួយៗចែកដាច់នឹងការេនៃចំនួនបឋម ។ល។

៥.៨ ទ្រឹស្តីបទវីលសុន

ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម p គេមាន $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងដឹងថា បើ s បឋមនឹង p នោះគេមាន x ដែល $sx \equiv 1 \pmod p$ ។ ព្រោះបើ $\mathrm{PGCD}(s,p) = 1$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ Bachet-Bézout គេមានចំនួនគត់ x, y ដែល $sx + py = 1 \Rightarrow sx \equiv 1 \pmod p$ ។ តាង $x \equiv s' \pmod p$ ។ ដូច្នេះ $s' < p$ ។ ដោយ $sx \equiv 1 \pmod p$ និង $x \equiv s' \pmod p$ នោះ $ss' \equiv 1 \pmod p$ ។ មានន័យថា ចំពោះ s មួយដែលបឋមនឹង p គេមាន $s' < p$ មួយ (ហើយមានតែមួយគត់) ដែល $ss' \equiv \pmod p$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ $s_1, s_2 < p$ គេមាន s_1', s_2' ដែល $s_1 s_1' \equiv 1 \pmod p$ និង $s_2 s_2' \equiv 1 \pmod p$ ។ បើ $s_1' = s_2' = s$ នោះ $s_1 s_1' \equiv 1 \pmod p \Leftrightarrow s_1 s \equiv 1 \pmod p \Rightarrow s_2(s_1 s) \equiv s_2 \pmod p \Leftrightarrow s_1(s_2 s_2') \equiv s_2 \pmod p \Rightarrow s_1 \equiv s_2\ (mod\ p)$ ។ ដោយ $s_1, s_2 < p$ នោះ $s_1 = s_2$ ។ ដូច្នេះចំពោះ s_1, s_2 ផ្សេងគ្នា នោះយើងមាន s_1', s_2' ផ្សេងគ្នាដែរ ។

បើ $p = 2$ ឬ $p = 3$ នោះទ្រឹស្តីខាងលើពិត ។

សន្មតថា $p > 3$ ។ ពិនិត្យ a ដែល $2 \le a \le p-2$ ។ ចំពោះ a នីមួយៗខាងដើមនេះ យើងកំណត់ $a' \le p-1$ មួយទៀតដែល $aa' \equiv 1 \pmod p$ ។ បើ $a' = 1$ នោះ $a \equiv 1 \pmod p \Rightarrow a = 1$ មិនអាចព្រោះ $a \ge 2$ ។ បើ $a' = p-1$ នោះ $a(p-1) \equiv 1 \pmod p \Rightarrow -a \equiv 1 \pmod p \Rightarrow p - a \equiv 1 \pmod p$ ។ តែ $2 \le p - a < p \Rightarrow p - a \equiv x \pmod p; x \ge 2$ ។ ដូច្នេះ $2 \le a' \le p-2$ ។ ចំពោះ a ផ្សេងគ្នាយើងមាន a' ផ្សេងគ្នាដែរ ។ បើ $a = a'$ នោះ $a^2 \equiv 1 \pmod p \Rightarrow p | (a^2 - 1) = (a+1)(a-1)$ ។ ដោយ p ជាចំនួនបឋមនោះ $a \equiv 1 \pmod p$ ឬមិន

អ៊ីចឹងទេ $a \equiv -1 \pmod p$ ។ តែ $a \le p-2 \Rightarrow a-1=p$ ឬ $a+1=p$ ។ តែមិន អាចទាំងពីរព្រោះ $a-1 \le p-3 < p$ និង $a+1 \le p-1 < p$ ។ ដូច្នេះ $a \ne a'$ ។ យើងមាន $a \ne a'; a, a' \in \{2,3,\dots,p-2\}$ និង ចំពោះ a មួយយើងអាចរកបាន a' មួយ គត់ ដែល $aa' \equiv 1 \pmod p$ ហើយបើ a ផ្សេងគ្នា យើងទទួលបាន a' ផ្សេងគ្នាដែរ ។ ដូច្នេះយើងអាចបំបែកសំណុំ$\{2,3,\dots,p-2\}$ជាពីរគឺ $S_1 \cup S_2 = \{2,3,\dots,p-2\}, S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a \in S_1$ និង $a' \in S_2$ និង $aa' \equiv 1 \pmod p$ ។ សំណុំ S_1 និង S_2 មានចំនួនធាតុស្មើនឹង $\frac{p-3}{2}$ ។

តាង $S_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}, S_2 = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_m\}$ ដែល $a_i a'_i \equiv 1 \pmod p$ និង $m = \frac{p-3}{2}$ ។ ដូច្នេះ

$$\prod_{i=1}^{m} a_i a'_i \equiv 1 \pmod p \iff 2.3\dots(p-2) \equiv 1 \pmod p$$
$$\Rightarrow (p-1)! \equiv p-1 \pmod p$$
$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

■ឧទាហរណ៍ : បើ p ជាចំនួនបឋម ដែល $p \equiv 1 \pmod 4$ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv -1 \pmod p$$

ចម្លើយ

យើងសង្កេតឃើញថា

$$j(p-j) = pj - j^2 \Rightarrow j(p-j) \equiv -j^2 \pmod p$$

យើងមាន

$$(p-1)! = \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} j(p-j)$$

$$\Rightarrow (p-1)! \equiv \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} -j^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$$

ដោយ $p = 4k+1 \Rightarrow \frac{p-1}{2} = 2k$ នោះ $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$ ។ ដូច្នេះ

$$\Rightarrow (p-1)! \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p$$

តាមទ្រឹស្តីបទ **វីលសុន** $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ ដូច្នេះ

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv -1 \pmod p$$

៥.៩ កូនទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ា

(Fermat's Little Theorem)

គ្រប់ចំនួនបឋម p និងគ្រប់ចំនួនគត់ a គេមាន $a^p \equiv a \pmod p$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារដោយកំណើនតាម a ។ ពេល $a = 1$ យើងទាញបានថាសំណើពិត ។ សន្មតថា p ចែកដាច់ $a^p - a$ ។ យើងមាន

$$(a+1)^p - (a+1) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^k - a = \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}a^k + a^p - a$$

ចំពោះ $1 \le k \le p-1$ យើងមាន

$$k\binom{p}{k} = k\frac{p!}{k!\,(p-k)!} = p\frac{(p-1)!}{(k-1)!\,[p-1-(k-1)]!} = p\binom{p-1}{k-1}$$

មានន័យថា $p|k\binom{p}{k}$ តែដោយ $PGCD(p,k) = 1$ ដូច្នេះ $p|\binom{p}{k}$ ។ ចំពោះ $k = 0$ ក៏យើងមាន $p|\binom{p}{k}$ ដែរ ។ ដូច្នេះ

$$(a+1)^p-(a+1)=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}a^k+a^p-a\equiv a^p-1\equiv 0 \pmod p$$

ដូច្នេះ $(a+1)^p-(a+1)$ ចែកដាច់នឹង p ។ ដូច្នេះសំណើពិត ។ល។

តាមរយៈទ្រឹស្តីបទនេះយើងទាញបានថា $a(a^{p-1}-1)\equiv 0 \pmod p$ ។ ដូច្នេះ បើ p ចែក a មិនដាច់ទេ នោះមានន័យថា p ចែក $a^{p-1}-1$ ដាច់ ។ ដូច្នេះ $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ ។

៥.១០ វិបាក

តាង p ជាចំនួនបឋមនិងសន្មតថា p ចែក a មិនដាច់ នោះ$a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ ។

■ឧទាហរណ៍ : តាង $a_1=4, a_n=4^{a_{n-1}}, n>1$ ។ ចូរគណនាសំណល់នៃ a_{100} ចែកនឹង 7 ។

ចម្លើយ

តាមទ្រឹស្តីបទ**ហ្វែម៉ា** យើងមាន $4^6\equiv 1 \pmod 7$ ។ យើងមាន $4^n\equiv 4 \pmod 6$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n មានន័យថា $4^n=4+6t$ ចំពោះចំនួនគត់ t ណាមួយ ។ ដូច្នេះ

$$a_{100}=4^{a_{99}}=4^{4+6t}=4^4.(4^6)^t\equiv 4 \pmod 7$$

a_{100} ចែកនឹង 7 សល់ 4 ។ល។

៦

ផ្នែកគត់

៦.១ ផ្នែកគត់ និង ផ្នែកទសភាគ

ផ្នែកគត់នៃ x តាងដោយ $\lfloor x \rfloor$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុតដែលតូចជាងឬស្មើ x ។

ឧទាហរណ៍ $\lfloor 3{,}78 \rfloor = 3;\ \lfloor 3{,}1 \rfloor = 3;\ \lfloor -2{,}8 \rfloor = -3;\ \lfloor -2{,}1 \rfloor = -3;$

យើងមាន $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ ឬក៏ $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

គេប្រើសញ្ញាសម្គាល់ $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកទសភាគ ។

ដូច្នេះ $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}, 0 \leq \{x\} < 1$

៦.២ ទ្រឹស្តីបទ

គេឱ្យ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ នោះ

1) $\lfloor \alpha + a \rfloor = \lfloor \alpha \rfloor + a$

2) $\left\lfloor \frac{\alpha}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor \alpha \rfloor}{n} \right\rfloor$

3) $\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor \leq \lfloor \alpha + \beta \rfloor \leq \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor + 1$

សម្រាយបញ្ជាក់

1) តាង $m = \lfloor \alpha + a \rfloor$ ។ ដូច្នេះ $m \leq \alpha + a < m + 1 \Rightarrow m - a \leq \alpha < m - a + 1$ មានន័យថា $m - a = \lfloor \alpha \rfloor \Rightarrow m = \lfloor \alpha \rfloor + a$ ។

2)

$$\frac{\alpha}{n} = \left\lfloor \frac{\alpha}{n} \right\rfloor + \theta, 0 \le \theta < 1 \ \Rightarrow \alpha = n\left\lfloor \frac{\alpha}{n} \right\rfloor + n\theta$$

ដោយ $n\left\lfloor \frac{\alpha}{n} \right\rfloor$ ជាចំនួនគត់ នោះតាម 1) យើងទាញបាន

$$\lfloor \alpha \rfloor = \left\lfloor n\left\lfloor \frac{\alpha}{n} \right\rfloor + n\theta \right\rfloor = n\left\lfloor \frac{\alpha}{n} \right\rfloor + \lfloor n\theta \rfloor$$
$$\Rightarrow \frac{\lfloor \alpha \rfloor}{n} = \left\lfloor \frac{\alpha}{n} \right\rfloor + \frac{\lfloor n\theta \rfloor}{n}$$

ដោយ $0 \le \lfloor n\theta \rfloor \le n\theta < n$ ដូច្នេះ $0 \le \frac{\lfloor n\theta \rfloor}{n} < 1$ ។

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{\alpha}{n} \right\rfloor \le \frac{\lfloor \alpha \rfloor}{n} = \left\lfloor \frac{\alpha}{n} \right\rfloor + \frac{\lfloor n\theta \rfloor}{n} < \left\lfloor \frac{\alpha}{n} \right\rfloor + 1$$
$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{\alpha}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor \alpha \rfloor}{n} \right\rfloor$$

3) តាមវិសមភាព $\alpha - 1 < \lfloor \alpha \rfloor \le \alpha, \beta - 1 < \lfloor \beta \rfloor \le \beta$ យើងទាញបាន

$$\alpha + \beta - 2 < \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor \le \alpha + \beta$$

ដោយ $\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor$ ជាចំនួនគត់តូចជាងឬស្មើ $\alpha + \beta$ នោះវាត្រូវតែតូចជាងឬស្មើផ្នែកគត់របស់ $\alpha + \beta$ ។ មានន័យថា $\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor \le \lfloor \alpha + \beta \rfloor$ ។

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta - 2 < \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor \\ &\Rightarrow \ \alpha + \beta < \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor + 2 \\ &\Rightarrow \ \lfloor \alpha + \beta \rfloor < \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor + 2 \\ &\Rightarrow \ \lfloor \alpha + \beta \rfloor \le \lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor + 1 \end{aligned}$$

■ឧទាហរណ៍ : ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ និង $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor &= \lfloor 2(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \rfloor + \lfloor 2(\lfloor y \rfloor + \{y\}) \rfloor \\ &= 2\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\{x\} \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor \\ \lfloor x + y \rfloor &= \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor \end{aligned}$$

ដូច្នេះយើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\lfloor 2\{x\} \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor \ge \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$$

ដោយសារវិសមភាពគ្មានលក្ខណៈពិសេសរវាង x និង y នោះយើងអាចសន្មតថា $\{x\} \geq \{y\}$ ។ យើងដឹងថា $\{x\} \geq 0$ ដូច្នេះ

$$\lfloor 2\{x\} \rfloor + \lfloor 2\{y\} \rfloor \geq \lfloor 2\{x\} \rfloor \geq \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$$

ពិត ។ល។

៦.៣ ទ្រឹស្តីបទ

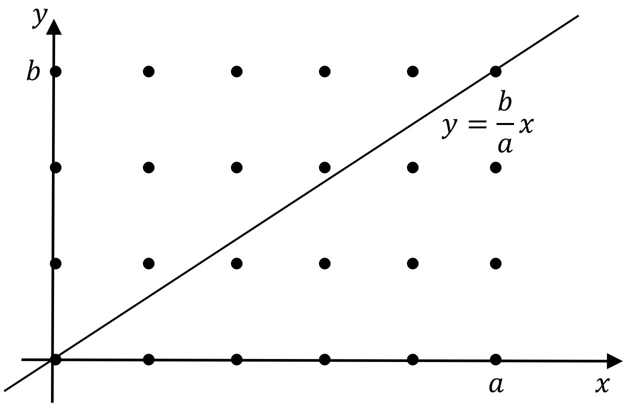
បើ a, b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នា ចូរបង្ហាញថា

$$\left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2b}{a} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(a-1)b}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{b} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(b-1)a}{b} \right\rfloor$$
$$= \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

❶ របៀបទី ១

ពិនិត្យចតុកោណកែងមួយ ដែលមានកំពូលត្រង់ $(0,0), (0,b), (a,0), (a,b)$ ។ ចតុកោណកែងនេះ មាន $(a-1)(b-1)$ ចំណុចដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់ ។ ចតុកោណកែងនេះចែកជាពីរចំណែកស្មើគ្នាដោយបន្ទាត់ $y = \frac{b}{a}x$ ។



យើងនិយាយថា គ្មានចំណុចណាមួយដែលឋិតនៅលើបន្ទាត់នេះ មានកូអរដោនេជាចំនួនគត់ទេ លើកលែងតែចំណុចចុងទាំងពីរ ។ ព្រោះថាបើសិនជាមានចំណុចមានកូអរដោនេគត់ឋិតនៅលើបន្ទាត់នេះ ត្រង់ (m,n)ដែល $0<m<a, 0<n<b$ នោះ $\frac{n}{m}=\frac{b}{a}$ ។ នោះ មានន័យថាប្រភាគ $\frac{b}{a}$ អាចបង្រួមទៅជា $\frac{n}{m}$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែល a,b បឋមរវាងគ្នា ។

ចំណុច $L_k=\left(k,\frac{kb}{a}\right), 1\le k\le a-1$ ជាបណ្ដាចំណុចដែលឋិតនៅលើបន្ទាត់នេះ ។ $\lfloor kb/a\rfloor$ ស្មើនឹងចំនួនចំណុចមានកូអរដោនេគត់ ដែលឋិតនៅលើបន្ទាត់ឈរ ចេញពី $(k,0)$ ទៅ $\left(k,\frac{kb}{a}\right)$ ។ដូច្នេះ $\sum_{k=1}^{a-1}\lfloor kb/a\rfloor$ ជាចំនួនចំណុចមានកូអរដោនេគត់ ដែលឋិតនៅក្នុងពាក់កណ្ដាលផ្នែកខាងក្រោមរបស់ចតុកោណកែង ។ ដូចគ្នាដែរ $\sum_{k=1}^{a-1}\lfloor ka/b\rfloor$ ជាចំនួនចំណុចមានកូអរដោនេគត់ ដែលឋិតនៅក្នុងពាក់កណ្ដាលផ្នែកខាងលើរបស់ចតុកោណកែង ។ ដោយជាសរុបមាន $(a-1)(b-1)$ ចំណុចមានកូអរដោនេគត់ ហើយចែកស្មើគ្នាផ្នែកខាងលើនិងខាងក្រោមចតុកោណកែង $\Rightarrow$សំណើខាងលើពិត ។៚

❷ របៀបទី ២

ដោយ a បឋមនឹង b ដូច្នេះ ia/b ,ដែល $0<i<b$, មិនមែនជាចំនួនគត់ ។ ដោយដឹងថា

$$\lfloor n+\alpha\rfloor = n+\lfloor\alpha\rfloor$$

ចំពោះចំនួនគត់ n ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $1\le i\le b-1$ យើងមាន

$$\left\lfloor\frac{ia}{b}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{(b-i)a}{b}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{ia}{b}\right\rfloor+\left\lfloor a+\frac{-ia}{b}\right\rfloor=a+\left\lfloor\frac{ia}{b}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{-ia}{b}\right\rfloor=a-1$$

ដូច្នេះ

$$2\left(\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2a}{b}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{(b-2)a}{b}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{(b-1)a}{b}\right\rfloor\right)$$

$$=\left(\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{(b-1)a}{b}\right\rfloor\right)+\left(\left\lfloor\frac{2a}{b}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{(b-2)a}{b}\right\rfloor\right)+\cdots$$

$$+\left(\left\lfloor\frac{(b-1)a}{b}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor\right)=(a-1)(b-1)$$

$$\Rightarrow \left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2a}{b}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{(b-2)a}{b}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{(b-1)a}{b}\right\rfloor=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

៦.៤ ទ្រឹស្តីបទឌីប៉ូលីញ៉ាក់

(De Polignac)

តាង p ជាចំនួនបឋម ។ ចំនួនគត់ធំបំផុត k ដែល p^k ចែកដាច់ $n!$ កំណត់ដោយ

$$\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor+\cdots$$

សម្រាយបញ្ជាក់

ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ពី 1 ដល់ n, ចំនួនគត់ដែលចែកដាច់នឹង p មានចំនួន $\lfloor n/p\rfloor$, ចំនួនគត់ដែលចែកដាច់នឹង p^2មានចំនួន $\lfloor n/p^2\rfloor$,..... ។ ដូច្នេះ $n!$ ចែកដាច់នឹង p ស្វ័យគុណ $\left(\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\cdots\right)$ ។

ឧទាហរណ៍ $10!=1.2.3.4.5.6.7.8.9.10$ ។ ពី 1 ដល់ 10 ចំនួនចែកដាច់នឹង 3 មានចំនួន 3 គឺ 3,6,9 ។ ចំនួនចែកដាច់នឹង $3^2=9$ មានចំនួន 1 គឺ 9 ។ ដូច្នេះ 10! ចែកដាច់នឹង $3^{3+1}=3^4$ ។ល។

■ឧទាហរណ៍ : តើមានលេខសូន្យចំនួនប៉ុន្មាននៃខាងចុង 300!

ដំណោះស្រាយ

លេខសូន្យខាងចុង 300! ស្មើនឹង ចំនួនដែលជាស្វ័យគុណនៃ 10 ធំបំផុតដែលចែកដាច់ 300! មានន័យថា 10^k ធំបំផុតដែលចែកដាច់ 300! ។ យើងមិនអាចយករូបមន្ត ឌីប៉ូលីញ៉ាក់ មកប្រើដោយផ្ទាល់បានទេ ព្រោះ 10 មិនមែនជាចំនួនបឋម ។ តែ $10 = 5.2$ ។ ដូច្នេះ k ធំបំផុត ដែល 10^k ចែកដាច់300! ស្មើនឹង តម្លៃតូចជាងគេនៃ k ក្នុងចំណោម (kធំបំផុត ដែល 2^k ចែកដាច់ 300!) និង (kធំបំផុត ដែល 5^k ចែកដាច់ 300!) ។ តាមរូបមន្ត ឌីប៉ូលីញ៉ាក់

k ធំបំផុត ដែល 2^k ចែកដាច់ 300! ស្មើនឹង $k_2 = \lfloor 300/2 \rfloor + \lfloor 300/2^2 \rfloor + \cdots$

k ធំបំផុត ដែល 2^k ចែកដាច់ 300! ស្មើនឹង $k_2 = \lfloor 300/5 \rfloor + \lfloor 300/5^2 \rfloor + \cdots < k_2$

$$\begin{aligned} k_2 &= \left\lfloor \frac{300}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{300}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{300}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{300}{5^4} \right\rfloor + \cdots \\ &= 60 + 12 + 4 + 0 + .. = 74 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ 300! មានលេខសូន្យនៅខាងចុងចំនួន 74 ខ្ទង់ ។ល៕

៧

អនុគមន៍នព្វន្ត

៧.១ អនុគមន៍នព្វន្ត

អនុគមន៍នព្វន្តជាអនុគមន៍ ដែលមានដែនកំណត់ជាសំណុំរងនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ខាងក្រោមនេះជាអនុគមន៍នព្វន្តសំខាន់ៗក្នុងនព្វន្ត

- $d(n)$ ជាចំនួនតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n
- $\sigma(n)$ ជាផលបូកនៃតួចែកវិជ្ជមានទាំងអស់របស់ n
- $\sigma_s(n)$ ជាផលបូកស្វ័យគុណ s នៃតួចែកវិជ្ជមានទាំងអស់របស់ n
- $P(n)$ ជាផលគុណតួចែកវិជ្ជមានទាំងអស់របស់ n
- $\phi(n)$ ជាចំនួននៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលធំមិនលើសពី n និងបឋមនឹង n ។ គេហៅ $\phi(n)$ ថា អនុគមន៍អយល័រ
- $\omega(n)$ ជាចំនួនតួចែកបឋមខុសៗគ្នារបស់ n
- $\Omega(n)$ ជាចំនួនតួចែកបឋមរបស់ n រាប់មិនបាច់គិតថាខុសគ្នាឬអត់ទេ(ស្មើនឹងផលបូកនៃស្វ័យគុណរបស់កត្តាបឋមរបស់ n ឧទាហរណ៍ $20 = 2^2.5$ យើងមាន 2ចំនួនពីរដង 5ចំនួនម្តង ដូច្នេះ $\Omega(20) = 2 + 1 = 3$) ។

អនុគមន៍ខាងលើអាចតាងជាសញ្ញាដោយ

$$d(n) = \sum_{d|n} 1\,;\ \ \sigma(n) = \sum_{d|n} d\,; \omega(n) = \sum_{p|n} 1\,;$$

$$\Omega(n)=\sum_{p^{\alpha}||n}\alpha\,;\phi(n)=\sum_{\substack{1\le k\le n\\ PGCD(k,n)=1}}1$$

(សញ្ញា || នៅក្នុង $p^{\alpha}||n$ មានន័យថា $p^{\alpha}|n$ តែ $p^{\alpha}\nmid n$)

ឧទាហរណ៍ 1,2,4,5,10,20 ជាតួចែករបស់ 20 ។ យើងមាន $d(20)=6;\sigma(20)=42;\omega(20)=2;\Omega(20)=3$ ។ ដោយ 1,3,7,9,11,13,17,19 ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានធំមិនលើសពី 20 និងបឋមនឹង 20 នោះ $\phi(20)=8$ ។

$d(n)=\sum_{d|n}1$ មានន័យថា ចំពោះ d ប្រែប្រួលពី 1 ដល់ n បើមានចំនួនគត់ d ណាមួយចែក n ដាច់ យើងបង្កើនផលបូកមួយឯកតា ។ ឧទាហរណ៍

$d(6)=\sum_{d|6}1$ យើងប្រែប្រួល $d=1,2,\ldots,6$

$$\begin{aligned}
&d=1;1|6\ \Rightarrow d(n)\leftarrow 1\\
&d=2;2|6\ \Rightarrow d(n)\leftarrow d(n)+1=2\\
&d=3;3|6\ \Rightarrow d(n)\leftarrow d(n)+1=2+1=3\\
&d=4;4\nmid 6\\
&d=5;5\nmid 6\\
&d=6;6|6\ \Rightarrow d(n)\leftarrow d(n)+1=3+1=4
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $d(6)=4$ មានន័យថា 6 មានតួចែកចំនួនបួនគឺ $\{1,2,3,6\}$ ។

៧.២ ទ្រឹស្តីបទ

បើផលគុណកត្តាបឋមរបស់ n មានរាង $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ នោះ យើងមាន

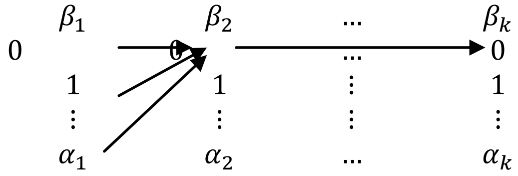
$$\begin{aligned}
&d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)\\
&\sigma_s(n)=\frac{p_1^{s(\alpha_1+1)}-1}{p_1^s-1}\frac{p_2^{s(\alpha_2+1)}-1}{p_2^s-1}\cdots\frac{p_k^{s(\alpha_k+1)}-1}{p_k^s-1}\\
&P(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}
\end{aligned}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

❶ដោយ $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ នោះ តួចែករបស់ n មានរាង $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}$ ដែល $0\le\beta_i\le\alpha_i$ ។

ដោយយកតម្លៃ β_i ប្រែប្រួលពី 0 ដល់ α_i យើងផ្សំបានតួចែករបស់ n មានចំនួន

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$$



តួចែករបស់ n មានដូចជា

$$1$$
$$p_1,p_1^2,\dots,p_1^{\alpha_1},p_2,p_2^2,\dots$$
$$p_1p_2,p_1p_3,\dots\dots$$

❷យើងមាន

$$\sigma_s(n)=\sum_{0\le\beta_1\le\alpha_1,\dots,0\le\beta_k\le\alpha_k}p_1^{s\beta_1}p_2^{s\beta_2}\dots p_k^{s\beta_k}$$
$$=\left[\sum_{0\le\beta_1\le\alpha_1,\dots,0\le\beta_{k-1}\le\alpha_{k-1}}p_1^{s\beta_1}p_2^{s\beta_2}\dots p_{k-1}^{s\beta_{k-1}}\right]\left(p_k^s+p_k^{2s}+\dots+p_k^{\alpha_k s}\right)$$
$$=\left[\sum_{0\le\beta_1\le\alpha_1,\dots,0\le\beta_{k-1}\le\alpha_{k-1}}p_1^{s\beta_1}p_2^{s\beta_2}\dots p_{k-1}^{s\beta_{k-1}}\right]\frac{p_k^{(\alpha_k+1)s}-1}{p_k^s-1}$$
$$\vdots$$
$$=\frac{p_1^{s(\alpha_1+1)}-1}{p_1^s-1}\frac{p_2^{s(\alpha_2+1)}-1}{p_2^s-1}\dots\frac{p_k^{s(\alpha_k+1)}-1}{p_k^s-1}$$

ក្នុងប្រមាណវិធីខាងលើ ដំបូងយើងទុកតម្លៃ $\beta_i, 1\le i\le k-1$ ឱ្យនៅថេរសិន បន្ទាប់មកយើងធ្វើប្រមាណវិធីបូកតាម β_k ដោយឱ្យ β_k ប្រែប្រួលពី 0 ដល់ α_k ។ យើងធ្វើដូចគ្នាចំពោះស្វ័យគុណផ្សេងទៀត ។

❸តួចែកវិជ្ជមានមួយរបស់ n មានរាង $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k}$ ដែល $0\le\beta_i\le\alpha_i$ ។ ផលគុណរបស់បណ្ដាតួចែកទាំងអស់របស់ n មានរាង $P(n)=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\dots p_k^{\gamma_k}$ ។

យើងនឹងគណនា γ_i ។ យើងយកចំនួនគត់ v មួយដែល $v\in\{0,1,\dots,\alpha_1\}$ ។ តួចែករបស់ n ដែល $\beta_1=v$ មានទាំងអស់ចំនួន $(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\dots(\alpha_k+1)$ ។ ពេលយើងគុណតួចែកទាំងអស់នេះ បញ្ចូលគ្នា យើងបាន

$$\gamma_1 = (\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\dots(\alpha_k+1)\sum_{v=0}^{\alpha_1} v$$
$$= \frac{1}{2}\alpha_1(1+\alpha_1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\dots(\alpha_k+1)$$
$$= \alpha_1\frac{d(n)}{2}$$

តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបាន $\gamma_i = \alpha_i\, d(n)/2$ ។ ដូច្នេះ

$$P(n) = p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\dots p_k^{\gamma_k} = \left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}\right)^{\frac{d(n)}{2}} = n^{\frac{d(n)}{2}}$$

■ឧទាហរណ៍ : ចូរបង្ហាញថា $d(n) \le 2\sqrt{n}$ ។

ចម្លើយ

គ្រប់តួចែកវិជ្ជមាន a នីមួយៗនៃ n យើងតែងតែអាចរកបានតួចែកមួយទៀតរបស់ n ដែលស្មើនឹង $a' = n/a$ ។ ដោយ $n = aa'$ នោះ ត្រូវតែមានមួយក្នុងចំណោម a និង a' ដែល $\le \sqrt{n}$ ព្រោះបើ $a > \sqrt{n}$ និង $a' > \sqrt{n}$ នោះ $n = aa' > n$ មិនពិត ។

តាង $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ ជាតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n ដែលធំមិនលើសពី $\sqrt{n}$ ។ តួចែករបស់ n ផ្សេងទៀតគឺ

$$\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \dots, \frac{n}{d_k}$$

ដោយ $d_k \le \sqrt{n}$ នោះ $k \le \sqrt{n}$ ។ យើងមាន $d(n) \le 2k \implies d(n) \le 2\sqrt{n}$ ។ល។

■ឧទាហរណ៍ : ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនគត់ n ដែល $d(n) = 6$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $d(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1) = 6 = 2.3 = 6.1$ ។ បើ n មានកត្តាបឋមផ្សេងគ្នាច្រើនលើសពីពីរ នោះ $d(n) \ge (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1) \ge 2.2.2 = 8 > 6$ ។ ដូច្នេះ n ត្រូវតែមានកត្តាបឋមខុសគ្នាតែ២ប៉ុណ្ណោះ គឺ p និង q ។ដូច្នេះ $n = p^\alpha q^\beta$ និង

$$\begin{cases}1+\alpha=3; 1+\beta=2\\1+\alpha=6; 1+\beta=1\end{cases}$$

ដូច្នេះ n ត្រូវតែមានរាង $n=p^2q$ ឬក៏ $n=p^5$ ដែល p,q ជាចំនួនបឋមខុសគ្នា ។ ៧៚

■ឧទាហរណ៍ : ចូរបង្ហាញថា

$$d(1)+d(2)+\cdots+d(n)=\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor$$

ចម្លើយ

យើងមាន

$$d(k)=\sum_{j|k}1=\sum_{\substack{1\le j\le k\\k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ j)}}1=\sum_{1\le j\le k}a(k,j)$$

ដែល $a(k,j)=1$ បើ $j|k$ និង $=0$ បើ j ចែក k មិនដាច់ ។

$$\sum_{k=1}^{n}d(k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le j\le k}a(k,j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\le k\le n}a(k,j)$$

$\sum_{j\le k\le n}a(k,j)$ ស្មើនឹងចំនួនចំនួនគត់ដែលមានរាង $j,2j,3j,\ldots.,mj\le n$ ។

យើងមាន

$$\left\lfloor\frac{n}{j}\right\rfloor=\sum_{j\le k\le n}a(k,j)\qquad(*)$$

ព្រោះ$\left\lfloor\frac{n}{j}\right\rfloor$ ជាផលចែកគត់ ដែលបានមកដោយចែកចំនួនគត់ n នឹង j និង $\sum_{j\le k\le n}a(k,j)=$ ចំនួនចំនួនគត់ពី j ដល់ n ដែលមានរាង mj ដូចជា $j,2j,3j,\ldots.$ ។ បើយើងពិនិត្យលើរបៀបចែកសន្លឹកបៀចំនួន n សន្លឹកដល់មនុស្ស j នាក់ មានន័យថា ចែកគ្នាម្តងមួយសន្លឹកៗរហូតដល់គ្រប់គ្នា រួចចែកម្តងមួយសន្លឹកទៀត ចែករហូតដល់សល់បៀចែកលែងកើត យើងទាញបានផលចែកនិងចំនួនចំនួនគត់ដែលមានរាង mj ស្មើគ្នា ។ ឧទាហរណ៍ ចែកបៀ៩សន្លឹកដល់មនុស្ស៤នាក់ ។ ចែកមួយសាអស់បៀចំនួន $1.4=4$ សន្លឹក បានម្នាក់មួយសន្លឹក នៅសល់បៀ 5 សន្លឹក ។ ចែកមួយសារទៀតអស់បៀសរុបគិតទាំងលើកមុនចំនួន $2.4=8$ បានម្នាក់មួយសន្លឹកទៀត ហើយសល់បៀមួយសន្លឹក ។ ដូច្នេះ

ជាសរុបចែកបានពីរសា (ស្មើចំនួនចំនួនដែលមានរាង 1.4, 2.4) បានម្នាក់ពីរសន្ទឹកដែរ (ផលចែក) ។ ដូច្នេះ $(*)$ ពិត ។

យើងទាញបាន

$$\sum_{j=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{j}\right\rfloor=\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\le k\le n}a(k,j)$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{j}\right\rfloor=\sum_{k=1}^{n}d(k)$$

■ឧទាហរណ៍ : ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ x និង y ដែល $x-y\ge n$ និង $\sigma(x^2)=\sigma(y^2)$ ។

ចម្លើយ

តាង $s\ge n, \mathrm{PGCD}(s,10)=1$ ។ យើងយក $x=5s, y=4s \Rightarrow x-y=s\ge n$ ។

យើងមាន

$$\sigma(x^2)=\sigma(5^2s^2)=\sigma(s^2).\frac{5^{2+1}-1}{5-1}=31\sigma(s^2)$$
$$\sigma(y^2)=\sigma(2^4s^2)=\sigma(s^2).\frac{2^{4+1}-1}{2-1}=31\sigma(s^2)$$

(សូមអានសេចក្តីពន្យល់ក្នុងទ្រឹស្តីបទ 7.2)

$\Rightarrow \sigma(x^2)=\sigma(y^2)=31\sigma(s^2)$ ។ ដូច្នេះ មានន័យថា មាន x,y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ។ល។

៧.៣ ទ្រឹស្តីបទអយល័រ

បើ $\mathrm{PGCD}(a,n)=1$ នោះ $a^{\phi(n)}\equiv 1 \pmod n$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $n > 1$ ។ តាង $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{\phi(n)} = n - 1 < n$ ជាបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមាន តូចជាង n ហើយបឋមនឹង n ដែល $n > 1$ ។ គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ដែលបឋមនឹង n ពេលចែកនឹង n សល់សំណល់ជា a_i មួយក្នុងចំណោម $a_i, 1 \le i \le \phi(n)$ [*] ។

ដោយ $\text{PGCD}(a, n) = 1$ នោះ $aa_1, aa_2, \dots, aa_{\phi(n)}$ ក៏បឋមនឹង n ដែរ ។ ដូច្នេះ

$$\forall\, i = 1,2,\dots,\phi(n) :\ \ aa_i \equiv a_j \pmod n$$
$$a_j \in \{a_1, a_2, \dots, a_{\phi(n)}\}$$

ហើយ បើ $i \neq j$ នោះ $aa_i \equiv a_k \pmod n$ និង $aa_j \equiv a_l \pmod n$ ដែល $a_k \neq a_l$ ព្រោះបើមាន $aa_i \equiv a_k \pmod n$ និង $aa_j \equiv a_k \pmod n$ នោះ $a_j(aa_i) \equiv a_j a_k \pmod n \Rightarrow a_i(aa_j) \equiv a_j(a_k) \pmod n \ \Rightarrow\ a_i(a_k) \equiv a_j(a_k) \pmod n \ \Rightarrow\ a_i \equiv a_j \pmod n \ \Rightarrow a_i = a_j$ ព្រោះ $a_i, a_j < n$ ។

ដូច្នេះ

$$aa_1.aa_2 \dots .aa_{\phi(n)} \equiv a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)} \pmod n$$
$$\Rightarrow a^{\phi(n)} a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)} \equiv a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)} \pmod n$$
$$\Rightarrow \left(a^{\phi(n)} - 1\right) a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)} \equiv 0 \pmod n$$

ដោយ $\text{PGCD}\left(a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)}, n\right) = 1$ នោះ $\left(a^{\phi(n)} - 1\right) \equiv 0 \pmod n$ ។

សេចក្តីពន្យល់បន្ថែម

ត្រង់ចំណុច [*] ដែលនិយាយថា «គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ដែលបឋមនឹង n ពេលចែកនឹង n សល់សំណល់ជា a_i មួយក្នុងចំណោម $a_i, 1 \le i \le \phi(n)$ »

ឧទាហរណ៍ ចំពោះ $n = 9$ យើងមាន $a_1 = 1 < a_2 = 2 < a_3 = 4 < a_4 = 5 < a_5 = 7 < a_6 = 8$ ជាចំនួនបឋមនឹង $n = 9$ ។ ដូច្នេះ $\phi(9) = 6$ ។ យើងមាន 20 បឋមនឹង 9 ហើយ $20 = 9.2 + 2 \ \Rightarrow 20 \equiv 2 \pmod 9, 2 = a_2$ ។ យើងមាន 22 បឋមនឹង 9 ហើយ $22 = 9.2 + 4 \ \Rightarrow 20 \equiv 4 \pmod 9, 4 = a_3$ ។ យើងអាចពន្យល់លក្ខណៈនេះជាទូទៅ ដោយ តាងចំនួនគត់មួយដោយ $N = kn + p, p \le n - 1$ ។ បើ N និង n បឋមគ្នា នោះ n ត្រូវតែបឋមនឹង p ដែរ។ ព្រោះថា បើមាន q ជាតួចែករួមរវាង n និង p នោះ q ក៏ជា

តួចែករបស់ N ដែរ។ ដូច្នេះនាំឱ្យ N និង n មិនបឋមគ្នា។ ដូច្នេះ n ត្រូវតែបឋមនឹង p ។ ដោយ p បឋមនឹង n ហើយ $p \leq n-1$ នោះ p ត្រូវតែជាចំនួនមួយក្នុងចំណោម a_i ។

៧.៤ ទ្រឹស្តីបទ

តាង k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $a^k \equiv 1 \pmod m$ ។ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ដែល $a^x \equiv 1 \pmod m$បាន បើ x ជាពហុគុណនៃ k និងច្រាសមកវិញ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ x ជាពហុគុណនៃ k នោះ $x = kl$ ។ ដោយ $a^k \equiv 1 \pmod m$ នោះ $\left(a^k\right)^l \equiv 1 \pmod m$ ពិត ។

ច្រាសមកវិញ សន្មតថា $a^x \equiv 1 \pmod m$ ។ យក $x = kl + p, 0 \leq p < k$ ។ ដូច្នេះ $p = x - kl$ ។ យើងមាន

$$a^p = a^{x-kl} = a^x a^{-kl} \equiv 1.1^{-l} = 1 \pmod m$$

បើ $p > 0$ នោះ មាន $p < k$ ដែល $a^p \equiv 1 \pmod m$ ។ ដូច្នេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា k តូចជាងគេ ។ ដូច្នេះ $p = 0$ ។ ដូច្នេះ $x = kl \Longrightarrow x$ ជាពហុគុណនៃ k ។ល។

៧.៥ ទ្រឹស្តីបទ

តាង a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានពីរដែលបឋមគ្នា នោះ $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយដែល $n = ab, PGCD(a,b) = 1$ ។ យើងតំរៀបចំនួនគត់ចំនួន ab គឺ $1,2,3,\ldots,ab$ ដូចខាងក្រោម

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & a \\
a+1 & a+2 & a+3 & \dots & a+k & \dots & 2a \\
2a+1 & 2a+2 & 2a+3 & \dots & 2a+k & \dots & 3a \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
(b-1)a+1 & (b-1)a+2 & (b-1)a+3 & \dots & (b-1)a+k & \dots & ba
\end{array}$$

ចំនួនគត់ r មួយ បឋមនឹង n បើ វាបឋមនឹង a និងនឹង b និងច្រាសមកវិញ ។ ជាដំបូងយើងនឹងកំណត់ចំនួននៃចំនួនគត់ក្នុងតារាងខាងលើ ដែលបឋមនឹង a និងបន្ទាប់មកគណនាឱ្យឃើញថា តើមានចំនួនប៉ុន្មានក្នុងចំណោមនោះដែលបឋមនឹង b ។

មានចំនួនគត់ចំនួន $\phi(a)$ នៅក្នុងបន្ទាត់ដេកទី១ដែលបឋមនឹង 1 ។ ឥលូវយើងមើលបន្ទាត់ឈរទី k ដែល $1 \leq k \leq a$ ។ ចំនួនគត់នីមួយៗឋិតនៅក្នុងជួរឈរមួយនេះ មានរាង $ma+k, 0 \leq m \leq b-1$ ។ ដោយ $k \equiv ma+k \pmod a$ នោះ k មានតួចែកមួយជាមួយ a បើ $ma+k$ មានតួចែករួមមួយជាមួយ a ដែរនិងច្រាសមកវិញ ។ ដូច្នេះ បើ k បឋមនឹង a នោះគ្រប់ចំនួនគត់ផ្សេងទៀតឋិតនៅក្នុងជួរឈរជាមួយ k ក៏បឋមនឹង a ដែរ ។ ដូច្នេះមានចំនួនគត់ចំនួន $\phi(a)$ ជួរឈរដែលបឋមនឹង a ។ បន្ទាប់មកយើងកំនត់ថា តើមានចំនួនគត់ចំនួនប៉ុន្មានក្នុងចំណោមនេះ ដែលបឋមនឹង b ។

យើងនិយាយថា មិនអាចមានចំនួនគត់ពីរក្នុងចំណោម $k, a+k, \dots, (b-1)a+k$ នៅលើបន្ទាត់ឈរទី k សមមូលគ្នាតាម b ទេ ។ បើមិនអញ្ចឹងទេ បើ $ia+k \equiv ja+k \pmod b$ នោះ $a(i-j) \equiv 0 \pmod b$ ។ ដោយ $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$ នោះ $i-j \equiv 0 \pmod b$ ។ ដោយ $0 \leq i,j \leq b-1$ នោះ $i=j$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបានថា បណ្តា bចំនួនគត់ឋិតនៅក្នុងជួរឈរតែមួយ ក្នុងចំនោមជួរឈរនីមួយៗនៃជួរឈរទាំងអស់ចំនួន $\phi(a)$ សមមូលទៅនឹង $0,1,\dots,b-1$ ។ តែមានតែចំនួនគត់ចំនួន $\phi(b)$ ក្នុងចំនោមនេះប៉ុណ្ណោះដែលបឋមនឹង b ។ មានន័យថា មានចំនួនគត់តែ $\phi(a)\phi(b)$ប៉ុណ្ណោះ នៅក្នុងតារាងនេះ ដែលបឋមនឹង ab ៕៚

សម្គាល់

- បើ p ជាចំនួនបឋម និង m ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះចំនួនគត់ $p, 2p, 3p, \dots, p^{m-1}p$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតែមួយបែបគត់ដែល $\leq p^m$ និងមានកត្តារួមជាមួយ p^m ។ ដូច្នេះ $\phi(p^m) = p^m - p^{m-1}$ ។

–បើ $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ជាផលគុណកត្តាបឋមរបស់ n នោះ

$$\phi(n) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \dots \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right)$$

៧.៦ ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន $\sum_{d|n} \phi(d) = n$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងពិនិត្យសំណុំនៃចំនួនសនិទាន

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$$

យើងដឹងថា សំណុំនេះមានធាតុទាំងអស់ចំនួន n ។ ក្រោយសម្រួលប្រភាគនេះហើយ យើងនឹងទទួលបានសំណុំថ្មី ដែលភាគបែងនិងភាគយក បឋមនឹងគ្នា ។ បណ្តាភាគបែងក្នុងសំណុំថ្មីសុទ្ធតែជាតួចែករបស់ n ។ តាង d ជាភាគបែងមួយ ។ នោះ ក្នុងសំណុំថ្មី មានធាតុចំនួន $\phi(d)$ ដែលមាន d ជាភាគបែង ។ ដូច្នេះ សំណុំថ្មីមានធាតុទាំងអស់ចំនួន $\sum_{d|n} \phi(d)$ ។ ដោយសំណុំទាំងពីរមានចំនួនតួស្មើគ្នា នោះ យើងទាញបានសំណើពិត ។៚

■ឧទាហរណ៍ :   តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

(1) គណនាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន តូចជាង n ហើយបឋមនឹង n ។

(2) គណនាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន តូចជាង $2n$ ហើយបឋមនឹង n ។

ចម្លើយ

គាង៍

$$S_1 = \sum_{\substack{d<n \\ PGCD(d,n)=1}} d\, ;\, S_2 = \sum_{\substack{d<2n \\ PGCD(d,n)=1}} d$$

គាង៍ $d_1 < d_2 < \cdots < d_{\phi(n)}$ ជាបណ្តាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចជាង៍ n ហើយបឋមនឹង៍ n ។ យើង៍មាន PGCD$(d,n) = 1$ ទាល់តែ PGCD$(n-d,n) = 1$ ។ យើង៍មាន $d_{\phi(n)}$ ធំជាង៍គេ ហើយបឋមនឹង៍ n ដូច្នេះ $n - d_{\phi(n)}$ បឋមនឹង៍ n ដែរ តែតូចជាង៍គេ ដូច្នេះ $n - d_{\phi(n)}$ ត្រូវតែជា d_1 ។ យើង៍ទាញបាន

$$\begin{aligned} &d_1 + d_{\phi(n)} = n, \\ &d_2 + d_{\phi(n)-1} = n \\ &\ldots. \\ &d_{\phi(n)} + d_1 = n \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$S_1 = \frac{n\,\phi(n)}{2}$$

ម្យ៉ាង៍វិញទៀត យើង៍មាន

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n<d<2n \\ PGCD(d,n)=1}} d &= \sum_{\substack{d<n \\ PGCD(d,n)=1}} (n+d) = n\phi(n) + \sum_{\substack{d<n \\ PGCD(d,n)=1}} d \\ &= n\,\phi(n) + \frac{n\phi(n)}{2} = \frac{3n\phi(n)}{2} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$S_2 = \frac{n\,\phi(n)}{2} + \frac{3n\phi(n)}{2} = 2n\phi(n)$$

■ឧទាហរណ៍ : ចូរឱ្យឧទាហរណ៍ចំនួនគត់ n ដែល $10|\phi(n)$ ។

ចម្លើយ

យក $n = 11^k, k = 1,2,\ldots$ នោះ $\phi(11^k) = 11^k - 11^{k-1} = 10.11^{k-1}$ ។ល។

■ឧទាហរណ៍ :   បើ $p-1$ និង $p+1$ ជាចំនួនបឋម និង $p>4$ ចូរបង្ហាញថា $3\phi(p)\le p$ ។

ចម្លើយ

សង្កេតឃើញថា បើ $p>4$ នោះ p អាចមានរាង $6k, 6k+1, 6k+2, .., 6k+5$ ។ មានតែករណី $p=6k$ មួយតែប៉ុណ្ណោះ ដែល $p-1$ និង $p+1$ អាចជាចំនួនបឋមទាំងពីរបាន ។ ដូច្នេះ

$$p=2^a3^bm; a,b\ge 1, \mathrm{PGCD}(m,6)=1$$

$$\begin{aligned}\phi(p)&=\phi(2^a3^bm)=\phi(2^a)\phi(3^b)\phi(m)\\&=(2^a-2^{a-1})(3^b-3^{b-1})\phi(m)\\&=2^a\left(\frac{1}{2}\right)3^b\left(\frac{2}{3}\right)\phi(m)=\frac{1}{3}2^a3^b\phi(m)\le\frac{1}{3}2^a3^bm=p/3\end{aligned}$$

៧.៧ ទ្រឹស្តីបទឡឺសង់

តាង p ជាចំនួនបឋម និងតាង $n=a_0p^k+a_1p^{k-1}+\cdots+a_{k-1}p+a_k$

ជាពន្លាតរបស់ n ក្នុងគោល p ។ ចំនួនគត់ m ធំបំផុតដែល p^m ចែកដាច់ $n!$ កំណត់ដោយ

$$m=\frac{n-(a_0+a_1+\cdots+a_k)}{p-1}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមទ្រឹស្តីបទ**ឌីប៉ូលីញ៉ាក់**

$$m=\sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$$

យើងមាន

$$\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor=a_0p^{k-1}+a_1p^{k-2}+\cdots+a_{k-2}p+a_{k-1}$$

$$\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor = a_0 p^{k-2} + a_1 p^{k-3} + \cdots + a_{k-2} p$$
$$\ldots$$
$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = a_0$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor &= a_0\left(1 + p + \cdots + p^{k-1}\right) + a_1\left(1 + p + \cdots + p^{k-2}\right) + \cdots \\ &\quad + a_{k-1}(1 + p) + a_k \\ &= a_0 \frac{p^k - 1}{p - 1} + a_1 \frac{p^{k-1} - 1}{p - 1} + \cdots + a_{k-1} \frac{p^2 - 1}{p - 1} + a_k \frac{p - 1}{p - 1} \\ &= \frac{a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \cdots + a_k - (a_0 + a_1 + \cdots + a_k)}{p - 1} \\ &= \frac{n - (a_0 + a_1 + \cdots + a_k)}{p - 1}\end{aligned}$$

៧.៨ ទ្រឹស្តីបទខាំម័រ

(Kummer)

តាង p ជាចំនួនបឋម ។ ចំនួនគត់ m ធំបំផុតដែល p^m ចែកដាច់មេគុណទ្វេធា $\binom{a+b}{a}$ ស្មើនឹងផលបូកចំនួនត្រាទុកក្នុងប្រមាណវិធីបូករបស់ a និង b សរសេរក្នុងគោល p ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $a = a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k, b = b_0 + b_1 p + \cdots + b_k p^k; 0 \leq a_j, b_j \leq p - 1$ និង $a_k + b_k > 0$ ។ តាង

$$S_a = \sum_{j=0}^{k} a_j\,;\; S_a = \sum_{j=0}^{k} b_j$$

យក c_j ដែល $0 \leq c_j \leq p - 1$ និង $\epsilon_j = \{0,1\}$ កំណត់ដោយ

$$\begin{aligned}&a_0 + b_0 = \epsilon_0 p + c_0 \\ &\epsilon_0 + a_1 + b_1 = \epsilon_1 p + c_1 \\ &\epsilon_1 + a_2 + b_2 = \epsilon_2 p + c_2 \\ &\ldots\end{aligned}$$

$$\epsilon_{k-1} + a_k + b_k = \epsilon_k p + c_k \quad (*)$$

ផលបូកនៃចំនួនត្រាទុកកំណត់ដោយ $\epsilon_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k$ ។ គុណសមភាពទាំងអស់នេះបន្តបន្ទាប់គ្នានឹង $1, p, p^2, \ldots$ រួចបូកអង្គនិងអង្គ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} a + b + \epsilon_0 p + \epsilon_1 p^2 + \cdots + \epsilon_{k-1} p^k \\ &= \epsilon_0 p + \epsilon_1 p^2 + \cdots + \epsilon_{k-1} p^k + \epsilon_k p^{k+1} + c_0 + c_1 p + \cdots \\ &+ c_k p^k \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad a + b = c_0 + c_1 p + \cdots + c_k p^k + \epsilon_k p^{k+1}$$

$$\Longrightarrow \quad S_{a+b} = \epsilon_k + \sum_{j=0}^{k} c_j$$

ដោយបូកសមភាព(*)បញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} S_a + S_b + (\epsilon_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{k-1}) &= (\epsilon_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k)p + (c_0 + c_1 + \cdots + c_k) \\ &= (\epsilon_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k)p + S_{a+b} - \epsilon_k \end{aligned}$$

តាមទ្រឹស្តីបទ**ឡឺសង់** ចំនួនគត់ m ធំបំផុតដែល p^m ចែកដាច់

$$\binom{a+b}{a} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

កំណត់ដោយ

$$\begin{aligned} m &= \frac{(a+b) - S_{a+b} - [a - S_a + b - S_b]}{p-1} \\ &= \frac{S_a + S_b - S_{a+b}}{p-1} \\ &= \frac{(\epsilon_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k)p - (\epsilon_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k)}{p-1} \\ &= \frac{(\epsilon_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k)(p-1)}{p-1} \\ &= (\epsilon_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k) \end{aligned}$$

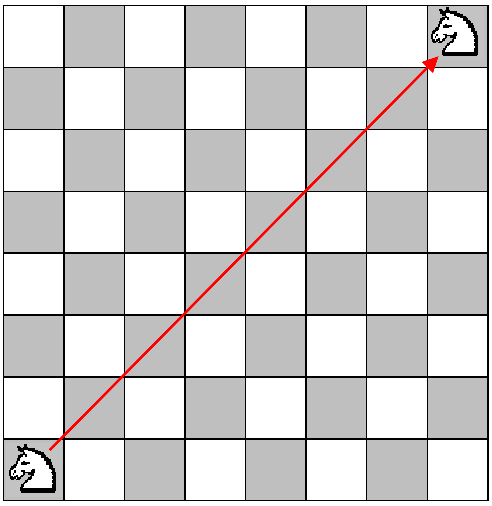
តក្កវិទ្យា

1. គ្រប់មនុស្សនៅរស់ទាំងអស់សុទ្ធតែធ្លាប់ចាប់ដៃជាមួយអ្នកដទៃទៀតមិនដឹងជាប៉ុន្មានដង ។ ចូរបង្ហាញថា ចំនួនមនុស្សដែលធ្លាប់ចាប់ដៃគេចំនួនសេសដង ជាចំនួនគូ ។

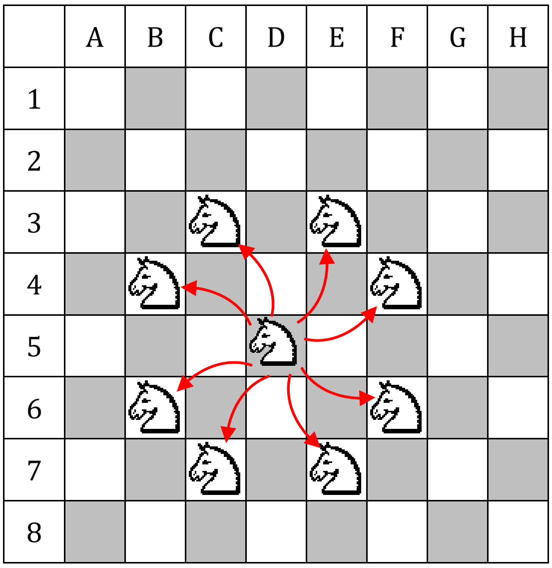
2. (អាមេរិច AHSME ១៩៧៨)

ក្នុងបន្ទប់មួយមានមនុស្ស N នាក់ ដែល N > 3, មានយ៉ាងហោចណាស់មនុស្សម្នាក់ដែលមិនបានចាប់ដៃជាមួយអ្នកផ្សេងទៀតក្នុងបន្ទប់ឱ្យបានគ្រប់គ្នា ។ តើមានមនុស្សច្រើនបំផុតចំនួនប៉ុន្មាននាក់នៅក្នុងបន្ទប់ដែលបានចាប់ដៃជាមួយអ្នកផ្សេងទៀតបានគ្រប់គ្នា?

3. លើក្តារអុក តើគេអាចផ្លាស់ទីសេះ(តាមក្បួនអុក) ចេញពីជ្រុងខាងក្រោមឆ្វេងដៃបង្អស់របស់ក្តារអុកទៅកាន់ ជ្រុងខាងលើស្តាំដៃបង្អស់ ដោយជាន់គ្រប់ក្រលាទាំងអស់ហើយជាន់តែម្តងបានដែរឬទេ?



តាមក្បួនអុក ឧបមាបើសេះនៅត្រង់ D5 នោះសេះនេះអាចលោតទៅក្រលាណាមួយក្នុងចំណោមក្រលាទាំងនេះបាន E3, F4, F6, E7, C7, B6, B5, C3 ។



4. (ក) គេមានកាក់ចំនួន 80 ដែលមានប្រភេទដូចគ្នា ។ គេដឹងថាមានកាក់មួយក្លែងក្លាយ ដែលស្រាលជាងកាក់ដទៃទៀត ។ ចូររកកាក់ក្លែងក្លាយនោះ ដោយថ្លឹងយ៉ាងច្រើន 4 ដង ដោយប្រើជញ្ជីងត្រាជូ ។

(ខ) គេដឹងថាមានកាក់ក្លែងក្លាយមួយក្នុងចំណោមកាក់ដូចៗគ្នាចំនួន n ហើយកាក់មួយក្លែងក្លាយស្រាលជាងកាក់ដទៃទៀត ។ ។ តើគេត្រូវថ្លឹងប្រើជញ្ជីងត្រាជូតិចបំផុតប៉ុន្មានដងទើបរកកាក់ក្លែងក្លាយឃើញ ។

ជញ្ជីងត្រាជូ

5. លោហៈ 20 ដុំ មានទំហំប៉ុនគ្នា និងរូបរាងខាងក្រៅដូចគ្នា មានខ្លះធ្វើពីអាលុយមីញ៉ូម ហើយក្រៅពីនេះធ្វើពីដែកឌុយរ៉ា ដែលដែកឌុយរ៉ាធ្ងន់ជាងអាលុយមីញ៉ូម (ដែកឌុយរ៉ា អាចមានឬគ្មាន) ។ បើជញ្ជីងត្រាជូថ្លឹងយ៉ាងច្រើន 11 ដង តើគេអាចកំណត់ចំនួនដុំអាលុយមីញ៉ូមបានយ៉ាងម៉េច? (យើងចង់ដឹងតែចំនួនតែប៉ុណ្ណោះ មិនបាច់ដឹងថាដុំណាជាឌុយរ៉ា ដុំណាជាអាលុយមីញ៉ូមក៏បាន)

6. សិស្ស 200 នាក់តំរៀបគ្នាជា 10 ជួរបណ្តោយ ដោយមួយជួរៗមានសិស្ស 20 នាក់ ។ ពីក្នុងចំណោមជួរទទឹង នីមួយៗនៃជួរទទឹងទាំង 20 ដែលទទួលបាននេះ គេយកសិស្សទាបជាងគេម្នាក់ បន្ទាប់មកគេយកសិស្សខ្ពស់ជាងគេពីក្នុងចំណោមសិស្សទាបៗទាំង 20 នាក់នោះ ហើយហៅវាថា A ។ សិស្សទាំងអស់នេះត្រលប់ទៅកាន់ទីកន្លែងដើមរបស់វាវិញ ។ បន្ទាប់មកទៀត គេយកសិស្សខ្ពស់ជាងគេក្នុងជួរបណ្តោយនីមួយៗ រួចហើយក្នុងចំណោមអ្នកទាំង 10 នាក់ខ្ពស់ៗនោះ គេហៅសិស្សទាបជាងគេថា B ។ តើ A និង B មួយណាខ្ពស់ជាង? (បើ A និង B ជាមនុស្សពីរនាក់ផ្សេងគ្នា) ។

7. ពិនិត្យលេខត្រីកោណខាងក្រោម

			1			
		1	1	1		
	1	2	3	2	1	
1	3	6	7	6	3	1
.	.	.	.	.	.	.

លេខនីមួយៗ ជាផលបូកនៃលេខចំនួនបី ឋិតនៅជួរដេកខាងលើជាប់វា ដែលមានលេខនៅចំពីលើ លេខនៅពីលើខាងស្តាំ និង លេខនៅពីលើខាងឆ្វេង ។ បើទីតាំងណាមួយក្នុងទីតាំងដូចបានបញ្ជាក់ខាងលើ គ្មានលេខទេ នោះសន្មតថា ស្មើសូន្យ ។ ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ជួរដេកទាំងអស់ ដោយចាប់ពីជួរដេកទី៣ទៅ មានចំនួនគត់គូយ៉ាងតិចមួយ ។

8. នាយសំពៅប្រាំនាក់ គ្រោងនឹងចែកផ្លែដូងមួយគំនរនៅព្រឹកស្អែក ។ នៅយប់នោះ ម្នាក់ក្នុងចំណោមពួកគាត់បានភ្ញាក់ឡើង ហើយសម្រេចចិត្តទៅយកចំណែករបស់គាត់ ។ គាត់ចែកដូងជាប្រាំចំណែកស្មើ រួចហើយក៏សល់ដូងមួយ ។ គាត់ក៏

បោះដូងមួយនៅសល់នោះទៅឱ្យស្វាស៊ី ។ គាត់យកដូងជាចំណែករបស់គាត់ទៅទុកដោយគ្មាននរណាដឹង ហើយដូងនៅសល់ទុកឱ្យអ្នកប្អូននាក់ផ្សេងទៀតចែកគ្នាព្រឹកឡើង ។ គាត់គរដូងនៅសល់ជាគំនរដូចដើម រួចត្រលប់ទៅដេកវិញ ។ អ្នកប្អូននាក់ទៀតក៏ធ្វើដូច្នេះម្តងម្នាក់ៗដែរ ដោយម្នាក់ៗ ចែកដូងជាប្រាំចំណែក នៅសល់ដូងមួយបោះឱ្យស្វាស៊ី រួចទុកដូងបួនភាគទៀតឱ្យអ្នកប្អូននាក់ផ្សេងទៀតចែកគ្នានៅពេលព្រឹកឡើង ។ តែព្រឹកឡើង នាយទាំងប្រាំនាក់ បានចែកដូងជាប្រាំភាគស្មើគ្នាម្តងទៀត ហើយសល់ដូងមួយ ពួកគេបោះឱ្យស្វាស៊ី ។ តើមានដូងតិចបំផុតចំនួនប៉ុន្មាននៅក្នុងគំនរនោះ?

9. បងប្អូនពីរនាក់លក់ចៀមមួយហ្វូង ។ ចៀមមួយក្បាលថ្លៃគិតជារៀល ស្មើនឹងចំនួនចៀមក្នុងហ្វូងពីដំបូងមុនបើកលក់ ។ បន្ទាប់ពីលក់ចៀមអស់ហើយ ពួកគេចែកលុយគ្នាដូចតទៅ ។ ដំបូងបងគេយក១០រៀល បន្ទាប់មកទៀតប្អូនយក១០រៀល រួចហើយបងយក១០រៀលទៀត ហើយចែករបៀបនេះបន្តបន្ទាប់មកទៀត ។ ពេលចែកដៃចុងក្រោយបង្អស់ ដែលត្រូវវេនប្អូនទទួលយកចំណែក លុយនៅសល់មានតិចជាង១០រៀល ហើយវាក៏យកលុយនៅសល់នោះទាំងអស់ទៅ ។ ដើម្បីឱ្យចំណែកមានភាពយុត្តិធម៌ បងប្រុសឱ្យកូនកាំបិតមួយទៅប្អូន ។ តើកូនកាំបិតនោះថ្លៃប៉ុន្មាន?

10. គូបឯកតាចំនួនមួយពាន់ត្រូវបានគេយកមកផ្គុំគ្នាដើម្បីបង្កើតបានជាគូបធំមួយដែលមានរង្វាស់10 ឯកតា ។ គេលាបពណ៌មុខទាំងអស់របស់គូបធំនេះ បន្ទាប់មកគេបំបែកវាអោយទៅគូបតូចៗដូចដើមវិញ ។ តើមានគូបឯកតាចំនួនប៉ុន្មានដែលមានមុខលាបពណ៌យ៉ាងហោចណាស់មួយ?

11. តាង n ជាចំនួនគត់សេសធំជាង 1 ។ ចូរបង្ហាញថាស្វ៊ីត

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

មានចំនួនសេសចំនួនសេសដង ។

12. តាង s ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា គ្រប់អង្កត់$[s,2s]$មានចំនួនស្វ័យគុណគោល២ ជានិច្ច ។ (ចំនួនស្វ័យគុណគោល២ ជាចំនួនដែលមានរាង 2^x)

13. តាង Mជាសំណុំមិនទទេ នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល " បើ x ជាធាតុរបស់ M នោះ $4x$ និង $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ ក៏ជាធាតុរបស់ M ដែរ "។ ចូរបង្ហាញថា M ជាសំណុំនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ក្នុងនេះ $\lfloor a\rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់នៃ a ។

14. ចូរបង្ហាញថា ក្នុងចំណោមបណ្ដា 7 ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលធំមិនលើសពី 126 គេអាចរកបានចំនួនពីរក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនេះ កំណត់ដោយ a និង b ដែល $b < a \leq 2b$ ។

15. ចូរកំណត់ចំនួនរបៀបក្នុងការជ្រើសរើសចំនួនគត់ប្រាំចេញពីចំនួនគត់វិជ្ជមានចំនួន 18 ដំបូង : $1,2,3,\dots,18$ ដែលផលសងពីរៗនៃចំនួនដែលបានជ្រើសរើស មានតម្លៃធំជាងឬស្មើ 2 ។

16. គេឱ្យសំណុំ S មួយមានធាតុចំនួន 10 ផ្សេងគ្នា ។ ធាតុទាំង 10 នេះជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលគេជ្រើសរើសដោយសេរីពីក្នុងចំណោមចំនួនគត់ចាប់ពី 1ដល់ 99 ។ ចូរបង្ហាញថា គេអាចរកបាន សំណុំរងមិនទទេខុសគ្នាពីរនៃ S ដែលមានផលបូកធាតុរបស់វាស្មើគ្នា ។

17. គេជ្រើសរើស 55 ចំនួនគត់ ដោយសេរីចេញពី $\{1,2,\dots,100\}$ ។ ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់ពីរក្នុងចំណោមចំនួនទាំង 55 ដែលមានផលសងស្មើ 10 ។

18. (អាមេរិច AIME 2001)
សំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយមានលក្ខណៈត្រីកោណ បើ វាមានធាតុបីផ្សេងគ្នា ដែលជារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណមួយដែលមានក្រលាផ្ទៃវិជ្ជមាន ។ យើងពិនិត្យសំណុំ $\{4,5,6,\dots,n\}$ នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានបន្តបន្ទាប់គ្នា ដែលគ្រប់សំណុំរងមាន១០ធាតុរបស់វា មានលក្ខណៈត្រីកោណ ។ ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ n ។

19. (MSOP 1997)

តាង A និង B ជាសំណុំពីរដាច់គ្នាដែលប្រជុំរបស់ពួកវាជាសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គេមានចំនួនគត់ពីរផ្សេងគ្នា $a, b > n$ ដែល

$$\{a, b, a+b\} \subseteq A \quad \text{ឬ} \quad \{a, b, a+b\} \subseteq B$$

20. (អាមេរិច ១៩៩៤)

គេបិទស្លាកលេខថាសចំនួនមួយ ដោយលេខ១, ថាសចំនួន2 ដោយលេខ២, ថាសចំនួន3 ដោយលេខ៣,..., ថាសចំនួន50 ដោយលេខ៥0 ។ គេដាក់ថាសដែលបិទស្លាកទាំង $1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = 1275$ នេះ ទៅក្នុងប្រអប់មួយ ។ គេទាញយកថាសម្តងមួយៗ ចេញពីប្រអប់នេះ ដោយចៃដន់ ដោយមិនដាក់ចូលវិញ ។ តើថាសតិចបំផុតចំនួនប៉ុន្មាន ដែលត្រូវទាញចេញ មកដើម្បីឱ្យប្រាកដថា មានយ៉ាងតិចថាសចំនួន10 មានស្លាកដូចគ្នា? ។

21. (អន្តរជាតិ ១៩៦៤)

មនុស្ស 17 នាក់ ទាក់ទងគ្នាតាមសំបុត្រ ដោយមនុស្សម្នាក់ៗ សរសេរទៅកាន់មនុស្ស 16 នាក់ទៀតដែលនៅសល់ ។ពួកគេ ទាក់ទងគ្នា លើប្រធានបទចំនួន3 តែប៉ុណ្ណោះ ។ រាល់បណ្តា មនុស្សពីរនាក់ សរសេរទៅគ្នាទៅវិញទៅមក លើប្រធានបទតែមួយ ប៉ុណ្ណោះ ។ ចូរបង្ហាញថា មានយ៉ាងតិចមនុស្សចំនួន៣នាក់ ដែលសរសេរសំបុត្រទៅកាន់អ្នកដទៃពីប្រធានបទតែមួយដូចគ្នា ។

22. សុខ និង សៅលេងល្បែងដូចតទៅ ។ ពួកវាចាប់ផ្តើមដោយជ្រើសរើសចំនួនគត់ $n > 0$ មួយ ។ បន្ទាប់មកទៀត សុខជ្រើសរើសយកចំនួនគត់ m មួយជាសម្ងាត់ ដែល $0 < m < n$ ។

សៅជាអ្នកទាយលេខសម្ងាត់នេះ ។ ដើម្បីឱ្យសៅអាចទាយបាន សៅប្រាប់លេខ k មួយទៅសុខ ហើយសុខឆ្លើយមកវិញថា $m + k$ ជាចំនួនបឋមឬអត់ ។ ចូរបង្ហាញថា សៅអាចកំណត់លេខសម្ងាត់របស់សុខបានដោយប្រាប់សុខយ៉ាងច្រើន $n - 2$ ដង ។

23. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ឆ្នាំទាំងអស់ មានថ្ងៃសុក្រទី១៣ យ៉ាងហោចណាស់ម្តង ។

24. គេជ្រើសរើសយក 51 ចំនួនគត់ចេញពី 1,2, … ,100 ។ ចូរបង្ហាញថា បើទោះជាគេជ្រើសរើសយ៉ាងម៉េចក៏ដោយ ក៏គេគង់ទទួលបានចំនួនពីរដែលបឋមរវាងគ្នាដែរ ។

25. (អាមេរិច AHSME 1999)

ទូដាក់អីវ៉ាន់នៅផ្សារមួយត្រូវបានគេបិទស្លាកលេខចាប់ពីលេខ១ទៅ ។ តួលេខប្លាស្ទិចដែលប្រើសម្រាប់ធ្វើជាស្លាកលេខបិទលើទូទាំងនោះ មានតម្លៃពីរសេនក្នុងមួយលេខ ។ ដូច្នេះដើម្បីបិទលេខ៩ គេត្រូវចំណាយអស់ ពីរសេន ហើយដើម្បីបិទលេខ១០ គេត្រូវចំណាយអស់បួនសេន ។ បើសិនជាគេត្រូវចំណាយអស់ 137,94$ ដើម្បីបិទស្លាកលេខ តើមានទូទាំងអស់ចំនួនប៉ុន្មាន? ។

26. (អាមេរិច AMC12 2001)

តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមានចំនួនប៉ុន្មានដែលមិនលើសពី2001 ហើយជាពហុគុណនៃ 3 ឬ 4 តែមិនមែនពហុគុណនៃ 5 ។

27. ក្មេងប្រុស២៥នាក់និងក្មេងស្រី២៥នាក់អង្គុយជុំវិញតុមូលមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា ទោះជាអង្គុយបែបណា ក៏គង់មានក្មេងម្នាក់ដែលអ្នកនៅសង្ខាងវាជាក្មេងស្រីទាំងពីរនាក់ដែរ ។

28. (អាមេរិច AMC12 2001)

ពីងពាងមានស្រោមជើងមួយនិងស្បែកជើងមួយសម្រាប់ជើងនីមួយៗ នៃជើងទាំងប្រាំបីរបស់វា ។ តើពីងពាងអាចពាក់ស្រោមជើងនិងស្បែកជើងទាល់តែគ្រប់ជើង តាមលំដាប់លំដោយបានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា បើដឹងថា រាល់ជើងនីមួយៗរបស់វា វាត្រូវពាក់ស្រោមជើងមុនស្បែកជើង?

29. (អាមេរិច AHSME 1986)

ថតតុបិតក្នុងបន្ទប់ងងិតមួយមានស្រោមជើងក្រហម 100 គូ ស្រោមជើងបៃតង 80 គូ ស្រោមជើងខៀវ 60 គូ និងស្រោមជើងខ្មៅ 40 គូ ។ យុវជនម្នាក់យក

ស្រោមជើងមួយម្តងចេញពីថតតុនេះ តែវាមិនអាចស្គាល់ពណ៌របស់ស្រោមជើងទាំងនោះបានទេ ។ តើយុវជននោះត្រូវយកស្រោមជើងចេញយ៉ាងតិចចំនួនប៉ុន្មានដើម្បីឱ្យវាទទួលបានស្រោមជើងយ៉ាងហោចណាស់ 10 គូ? ដោយដឹងថាស្រោមជើងមួយគូ ជាស្រោមជើងពីរដែលមានពណ៌ដូចគ្នា ។ ស្រោមជើងមួយមិនអាចឱ្យរាប់នៅក្នុងគូស្រោមជើងលើសពីមួយបានទេ ។)

30. (អាមេរិច ១៩៩១)

គេឱ្យចំនួនសនិទានមួយ គេសរសេរវាជាទម្រង់បង្រួមរួច បន្ទាប់មកគេគណនាផលគុណនៃភាគយកនឹងភាគបែង ។ តើមានចំនួនសនិទានចំនួនប៉ុន្មានដែលឋិតនៅចន្លោះ 0និង 1 ដែលមានផលគុណស្មើ 20! ។

31. (អាមេរិច ១៩៩៨)

ចូរកំណត់ចំនួនចតុធាតុ $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស ដែល

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98; x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$$

32. (អាមេរិច AIME 1992)

តើមានគូនៃចំនួនគត់*បន្តបន្ទាប់គ្នា* ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលឋិតនៅក្នុងសំណុំ

$$\{1000; 1001; 1002; \dots; 2000\}$$

ហើយដែលមិនត្រូវការត្រាទុក ពេលធ្វើប្រមាណវិធីបូកនៃចំនួនគត់ទាំងពីរ?

33. (អាមេរិច AHSME 1994)

កៅអីប្រាំបួនក្នុងជួរមួយ សំរាប់ទុកឱ្យសិស្ស៦នាក់ និងសាស្ត្រាចារ្យអាល់ផា បែតា និងកាមា អង្គុយ ។ សាស្ត្រាចារ្យទាំងបីមកដល់មុនសិស្សទាំង៦នាក់ ហើយសំរេចចិត្តជ្រើសរើសកៅអី យ៉ាងណាអោយសាស្ត្រាចារ្យម្នាក់ៗស្ថិតនៅចន្លោះសិស្ស២នាក់ ។ តើសាស្ត្រាចារ្យអាល់ផា បែតា និងកាមា អាចជ្រើសរើសកៅអីខ្លួនបានប៉ុន្មានរបៀប?

34. ចូរបង្ហាញថាក្នុងចំណោមចំនួនគត់វិជ្ជមាន១៦ផ្សេងគ្នា មានតម្លៃមិនលើសពី១០០ មានចំនួនគត់៤ផ្សេងគ្នា a, b, c, d ដែល $a + b = c + d$ ។

35. (អាមេរិច ១៩៨៩)

កុមារម្នាក់មានឥដ្ឋមួយសំណុំមាន៩៦ដុំផ្សេងៗគ្នា ។ ដុំនីមួយៗអាចធ្វើពីប្លាស្ទិចឬឈើ អាចមានទំហំតូច មធ្យមឬធំ អាចមានពណ៌ខៀវ បៃតង ក្រហម ឬលឿង និងអាចមានជ្រុងជារង្វង់ ឆកោណ ការេ ឬត្រីកោណ ។

តើមានដុំឥដ្ឋប៉ុន្មានដុំ ដែលមានលក្ខណៈខុសពីឥដ្ឋប្លាស្ទិច ទំហំមធ្យមពណ៌ក្រហមរាងរង្វង់ ត្រង់ពីរចំណុចគត់? (ឥដ្ឋឈើទំហំមធ្យមពណ៌ក្រហមរាងការេ ជាឧទាហរណ៍មួយ) ។

36. (អាមេរិច ១៩៩៨)

គេហៅលេខទូរសព្ទ៧ខ្ទង់ $\overline{d_1d_2d_3} - \overline{d_4d_5d_6d_7}$ ថាជាលេខពិសេស បើលំដាប់លំដោយ $\overline{d_1d_2d_3}$ ដូចគ្នានឹង $\overline{d_4d_5d_6}$ ឬ $\overline{d_5d_6d_7}$ (ដូចទាំងពីរក៏បាន) ។ ឧទាហរណ៍ 023.0237; 032.7032 សុទ្ធតែជាលេខពិសេស ។ សន្មតថា d_i នីមួយៗអាចមានតម្លៃជាលេខ $0; 1; 2; \dots; 9$ ។ ចូរកំណត់ចំនួនលេខពិសេសទាំងអស់ដែលអាចមាន ។

37. (អាមេរិច ១៩៩៦)

ក្រឡាពីរនៃក្រឡាទាំង$7 \times 7 = 49$ របស់ក្ដារអុកមួយ ត្រូវបានគេលាបពណ៌លឿង ហើយក្រឡានៅសល់ត្រូវលាបពណ៌បៃតង ។ ក្ដារអុកពណ៌ពីរ ដែលលាបពណ៌តាមរបៀបនេះ សមមូលគ្នា បើក្ដារពណ៌មួយអាចទទួលបានដោយបង្វិលក្ដារពណ៌មួយទៀតក្នុងប្លង់ក្ដារអុក ។ តើអាចមានក្ដារអុកពណ៌មិនសមមូលគ្នាចំនួនប៉ុន្មាន? ។

38. តើគេមានវិធីរៀបលេខ $21; 31; 41; 51; 61; 71$ និង 81 ចំនួនប៉ុន្មានរបៀប ដើម្បីឱ្យផលបូកលេខ៤នៅជាប់គ្នាចែកដាច់នឹង៣? ។

39. (អាមេរិច ១៩៩៣)

តាង S ជាសំណុំមួយមានធាតុ៦ ។ តើគេមានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងគ្នាក្នុងការជ្រើសរើសសំណុំរងពីរនៃ S ដែលមិនចាំបាច់ខុសគ្នាក៏បាន ហើយដែលប្រជុំនៃសំណុំរងទាំងពីរជា S ? លំដាប់នៃការជ្រើសរើសមិនសំខាន់ទេ ឧទាហរណ៍ គូ

សំណុំរង $\{a;c\};\{b;c;d;e;f\}$ ដូចគ្នានឹងការជ្រើសរើសគូ

$\{b;c;d;e;f\};\{a;c\}$ ដែរ ។

40.* (ឥណ្ឌា ១៩៩៨)

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន M ។ តាង

$$S = \{n \in \mathbb{N}, M^2 \leq n < (M+1)^2\}$$

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $a, b \in S$ បណ្ដាផលគុណ ab សុទ្ធតែមានតម្លៃខុសគ្នាទាំងអស់ ។

41. ល្បែងបើកបៀក្នុងកុំព្យូទ័រមួយគេលេងតែម្នាក់ឯង ដូចតទៅ ។ ក្រោយលេងជាប់មួយលើកៗ ទៅតាមលទ្ធផលដែលទទួលបាន អ្នកលេងទទួលបាន a ឬ b ពិន្ទុ $(a, b \in \mathbb{N}, a > b)$ ហើយពិន្ទុរបស់គាត់កើនឡើងដោយបូកបន្ថែមនឹងពិន្ទុលើកមុន ។ គេដឹងថា មានពិន្ទុចំនួន 35 ប្រភេទដែលគេមិនអាចទទួលបាន ហើយក្នុងចំណោមនោះ មានមួយស្មើ 58 ។ ចូរគណនា a និង b ។

42. (អាមេរិច ១៩៩៤)

គេមានឥដ្ឋចំនួន 94 ដុំ ។ មួយដុំៗមានរង្វាស់ $4 \times 10 \times 19$ គេយកមកតំរៀបពីលើគ្នាជាបង្គោលមួយមានកម្ពស់ 94 ដុំឥដ្ឋ ។ ឥដ្ឋនីមួយៗអាចតំរៀបដោយយកជ្រុង 4 ឬ 10 ឬ 19 ស្របនឹងកម្ពស់របស់បង្គោល ។ តើមានកម្ពស់បង្គោលសរុបប៉ុន្មានប្រភេទដែលគេអាចធ្វើបានដោយប្រើឥដ្ឋទាំង 94 ដុំនេះ? ។

43. (អន្តរជាតិ ១៩៧០)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលធ្វើឱ្យសំណុំ

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$$

អាចជាបំបែកជាសំណុំរងពីរ ដែលផលគុណនៃបណ្ដាចំនួនទាំងអស់នៅក្នុងសំណុំមួយ ស្មើនឹង ផលគុណនៃបណ្ដាចំនួនទាំងអស់នៅក្នុងសំណុំមួយទៀត ។

44. តើគេត្រូវចែកប៊ូលចំនួន n ទៅក្នុងប្រអប់ចំនួន k យ៉ាងម៉េច ដើម្បីឱ្យ ផលបូកនៃចំនួនបន្សំប៊ូលពីរៗក្នុងប្រអប់នីមួយៗ បូកចូលគ្នានឹងប្រអប់ទាំងអស់ផ្សេងទៀត មានចំនួនតិចបំផុត?

45. (អាមេរិច AIME 1997)

បៀគ្រប់សន្លឹកទាំងអស់នៅលើតុមួយមានរូបមួយក្នុងចំណោមរូបជា រង្វង់ ការេ ឬត្រីកោណ ដែលមានពណ៌មួយក្នុងចំណោមពណ៌ ក្រហម ខៀវ ឬបៃតង ។ ជាងនេះទៅទៀត ពណ៌នីមួយៗ ត្រូវបានគេលាបជាមួយក្នុងកម្រិត បីប្រភេទទៀតគឺ ស្រាល មធ្យម ឬដិត(ឧទាហរណ៍ ក្រហមដិត ក្រហមស្រាល ខៀវដិត...) ។ តុនោះមានបៀ ២៧ សន្លឹក ដែលប្រើបន្សំ រូប-ពណ៌-កម្រិតពណ៌ ទាំងអស់ដែលអាចមាន ។ សំណុំបៀបីសន្លឹកយកចេញពីតុនេះ មានឈ្មោះថា កុំប្លេម៉ង់ បើសំណើខាងក្រោមពិតទាំងអស់ ៖

(ក) បៀទាំងបីសន្លឹកមានរូបខុសគ្នាឬបៀទាំងបីសន្លឹកមានរូបដូចគ្នា ។

(ខ) បៀទាំងបីសន្លឹកមានពណ៌ខុសគ្នាឬបៀទាំងបីសន្លឹកមានពណ៌ដូចគ្នា ។

(គ) បៀទាំងបីសន្លឹកមានកម្រិតពណ៌ខុសគ្នាឬបៀទាំងបីសន្លឹកមានកម្រិតពណ៌ដូចគ្នា ។

តើមានសំណុំបៀកុំប្លេម៉ង់ចំនួនប៉ុន្មាន? ។

46. (អាមេរិច AHSME 1989)

សន្មតថាក្មេងប្រុស៧នាក់និងក្មេងស្រី១៣នាក់ឈរបន្តគ្នាជាមួយជួរ ។ តាងS ជាចំនួនកន្លែងក្នុងជួរនេះដែលក្មេងប្រុសម្នាក់និងក្មេងស្រីម្នាក់ឈរនៅបន្ទាប់គ្នា ។ ឧទាហរណ៍

$G_1B_2B_3G_4G_5G_6B_7G_8B_9G_{10}G_{11}G_{12}B_{13}G_{14}B_{15}G_{16}G_{17}B_{18}G_{19}G_{20}$ មាន $S=12$ (រាប់ពីឆ្វេងមកស្តាំយើងឃើញ ៖G_1B_2 រាប់ថា១ B_2B_3អត់រាប់ B_3G_4 រាប់ថា១.....ជាសរុប១២) ។ ចូរគណនាតំលៃមធ្យមរបស់ S (បើគេពិនិត្យលើគំរៀបទាំងអស់ដែលអាចមាននៃក្មេងទាំង២០នាក់នេះ) ។

47. (ចិន ១៩៩០)

ក្នុងស្ពាតមួយ មាន ១៩៩ កៅអីក្នុងមួយជួរ ។ ថ្ងៃមួយសិស្ស ១៩៩០ នាក់ បានមកទស្សនាការប្រកួតបាល់ទាត់ ។ គេដឹងថា មានសិស្សយ៉ាងច្រើន ៣៩ នាក់ ដែលមកពីសាលាដូចគ្នា ។ បើសិស្សមកពីសាលាដូចគ្នាត្រូវតែអង្គុយក្នុងជួរជាមួយគ្នា ចូរកំណត់ចំនួនជួរអប្បបរមានៃកៅអី ដែលត្រូវត្រៀមទុកសម្រាប់កូនសិស្សទាំងនេះ ។

48. (ក) ក្នុងចំណោមកាក់១២ស្រដៀងគ្នា មានមួយជាកាក់ក្លែងក្លាយ ។ គេមិនដឹងថា កាក់ក្លែងក្លាយធ្ងន់ជាងឬស្រាលជាងកាក់សុទ្ធទេ (គ្រប់កាក់សុទ្ធទាំងអស់មានទម្ងន់ស្មើគ្នា) ។ ដោយថ្លឹងតែ៣ដង តើគេអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបានយ៉ាងដូចម្តេច ហើយធ្វើម៉េចទើបដឹងថាធ្ងន់ជាង ឬ ស្រាលជាងកាក់សុទ្ធ? ។

(ខ) មានកាក់ក្លែងក្លាយមួយក្នុងចំណោមកាក់ទាំងអស់១០០០ដូចគ្នា ។ គេមិនដឹងថា កាក់ក្លែងក្លាយធ្ងន់ជាង ឬ ស្រាលជាងកាក់សុទ្ធទេ (គ្រប់កាក់សុទ្ធទាំងអស់មានទម្ងន់ស្មើគ្នា) ។ តើត្រូវថ្លឹងប្រើជញ្ជីងត្រាជូតិចបំផុតប៉ុន្មានដង ទើបដឹងថាកាក់ណាក្លែងក្លាយ ហើយអាចកំណត់បានថាមួយណាធ្ងន់ជាង? ។

សម្គាល់ ៖ ដោយប្រើលក្ខខណ្ឌរបស់សំនួរ (ក) គេអាចកំណត់បានកាក់ក្លែងក្លាយពីក្នុងចំណោមកាក់ទាំងអស់ចំនួន១៣ ដោយថ្លឹងតែ ៣ ដង តែគេមិនអាចដឹងថាតើវាធ្ងន់ជាង ឬ ស្រាលជាងទេ ។ បើកាក់មាន ១៤ គេចាំបាច់ត្រូវថ្លឹងយ៉ាងតិច ៤ ដង ។ ដូច្នេះបើមិនចាំបាច់រកថាស្រាលជាង ឬ ធ្ងន់ជាងទេ ចំណុចនេះគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរក្នុងការកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយពីក្នុងចំណោមកាក់ទាំង ១០០០ ។

49. (JBMO 1997)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់បណ្តាចំណុចចំនួនប្រាំបួន ឋិតខាងក្នុងការេមួយមានជ្រុងរង្វាស់មួយឯកតា គេតែងតែអាចរកបាននូវចំនុចបី ដែលជាកំពូលរបស់ត្រីកោណមួយមានក្រលាផ្ទៃតូចជាង 1/8 ។

50. (JBMO 2000)
ការប្រកួតតេន្នីសមួយ មានប្រុស $2n$ នាក់ និងស្រី n នាក់ចូលរួមលេង ។ កីឡាករម្នាក់ៗប្រកួតជាមួយគ្រប់កីឡាករផ្សេងទៀត ។ ប្រុសឈ្នះ 5/7 ដងធៀបនឹងស្រី ។ ដោយដឹងថា គ្មានគូប្រកួតណាស្មើគ្នាទេ ។ ចូរកំណត់ n ។

51. (JBMO 2003)
សន្មតថា មានចំណុចចំនួន n ឋិតក្នុងប្លង់មួយ ដែលគ្មានចំណុចបីណារត់ត្រង់គ្នា ហើយមានលក្ខណៈ
« បើគេដាក់ប្លាកចំណុចទាំងនោះដោយ $A_1, A_2, \dots, A_n$ តាមរបៀបណាក៏បាន នោះអង្កត់កាច់ចុះកាច់ឡើង $A_1A_2\dots A_n$ មិនប្រសព្វខ្លួនឯងទេ ។ »
ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតរបស់ n ។

52. (JBMO 2004)
យើងពិនិត្យពហុកោណប៉ោងមួយ ដែលមានកំពូលចំនួន $n \geq 4$ ។ យើងបំបែកពហុកោណ ជាត្រីកោណដែលមានកំពូលទាំងអស់ជាកំពូលរបស់ពហុកោណ ដែលគ្មានត្រីកោណពីរដែលមានចំណុចក្នុងរួមគ្នាទេ ។ យើងលាបដោយពណ៌ខ្មៅ ចំពោះត្រីកោណណាដែលមានជ្រុងពីរជាជ្រុងរបស់ពហុកោណ ដោយពណ៌ក្រហមបើត្រីកោណមានជ្រុងតែមួយគត់ជាជ្រុងរបស់ពហុកោណ ហើយលាបពណ៌សចំពោះត្រីកោណណាដែលគ្មានជ្រុងរួមនឹងពហុកោណ ។ ចូរបង្ហាញថា ត្រីកោណខ្មៅច្រើនជាងត្រីកោណសចំនួនពីរ ។

53. (JBMO 2005)
ចូរបង្ហាញថា
a) មានចំណុច 5 ឋិតលើប្លង់មួយ ដែលក្នុងចំណោមត្រីកោណទាំងអស់ដែលមានកំពូលឋិតក្នុងចំណោមចំណុចទាំងនោះ មានត្រីកោណកែងចំនួន 8 ។
b) មានចំណុច 64 ឋិតលើប្លង់មួយ ដែលក្នុងចំណោមត្រីកោណទាំងអស់ដែលមានកំពូលឋិតក្នុងចំណោមចំណុចទាំងនោះ មានត្រីកោណកែងចំនួន 2005 ។

54. (JBMO 2007)

គេឱ្យចំណុច 50 ក្នុងប្លង់មួយ ផ្ទៀងផ្ទាត់គ្មានចំណុចបីណាដែលឋិតលើបន្ទាត់តែមួយនោះទេ ។ ចំណុចនីមួយៗត្រូវលាបដោយពណ៌មួយក្នុងចំណោមពណ៌បួន ។ ចូរបង្ហាញថា មានពណ៌មួយ ហើយយ៉ាងហោចណាស់ ត្រីកោណស្កាលែនចំនួន 130 ដែលមានកំពូលទាំងបីមានពណ៌មួយនោះ ។ ត្រីកោណស្កាលែនជាត្រីកោណដែលមានជ្រុងទាំងបីមិនស្មើគ្នា ។

55. (JBMO 2008)

គេចែកតុទំហំ 4×4 មួយ ជាក្រឡាការេឯកតាពណ៌សចំនួន 16 ។ គេថា ក្រឡាមួយនៅជាប់គ្នា បើវាមានជ្រុងរួមមួយ ។ ចលនាមួយ ជាការជ្រើសរើសក្រឡាមួយ ហើយនិងការប្តូរពណ៌របស់ក្រឡាមួយនោះ និង គ្រប់ក្រឡានៅជាប់នឹងក្រឡាមួយនោះ ពីសទៅខ្មៅ ឬ ពីខ្មៅទៅស ។ បន្ទាប់ពី គេធ្វើចលនាចំនួន n ដងមក ក្រឡាទាំង 16 មានពណ៌ខ្មៅទាំងអស់ ។ ចូរកំណត់គ្រប់តម្លៃដែលអាចមាននៃ n ។

56. (JBMO 2009)

គ្រប់ចំណុចផ្សេងគ្នាទាំង 2009 ឋិតក្នុងប្លង់មួយ ត្រូវបានគេលាបដោយពណ៌ខៀវ ឬក្រហម ដែលយ៉ាងណាឱ្យរាល់រង្វង់ឯកតាផ្ចិតពណ៌ខៀវ មានចំណុចក្រហមចំនួនពីរគត់ឋិតនៅលើ ។ ចូរគណនាចំនួនចំណុចពណ៌ខៀវច្រើនបំផុត ។

57. (អន្តរជាតិ ១៩៦៤)

ចំណុច ៥ ឋិតនៅលើប្លង់មួយ ។ ក្នុងចំណោមបន្ទាត់ដែលភ្ជាប់ចំណុចទាំង ៥ នេះ គ្មានបន្ទាត់ណាត្រួតគ្នាទេ និង គ្មានគូបន្ទាត់ណាដែលស្របឬកែងគ្នាទេ ។ ចេញពីចំណុចនីមួយៗ គេគូសបន្ទាត់កែងទៅនឹងបន្ទាត់នីមួយៗផ្សេងទៀត ។ ចូរកំណត់ចំនួនចំណុចប្រសព្វអតិបរមារវាងបន្ទាត់កែងទាំងនេះ (ដោយដកចំណុចទាំង ៥ ដំបូងនេះចេញ) ។

58. អ្នកទោសឧក្រិដ្ឋ ៤ នាក់ ត្រូវបានគេកាត់ទោសឱ្យជាប់គុក តែដោយសារគុកពេញ ឆ្មាំគុកសម្រេចចិត្តឱ្យអ្នកទោសទាំង ៤ នាក់ដោះស្រាយប្រស្នាមួយ ។ បើ

ដោះស្រាយចេញ នឹងដោះលែងឱ្យមានសេរីភាពវិញទាំង ៤ នាក់ តែបើដោះស្រាយមិនចេញ នឹងយកទៅសម្លាប់ចោល ។
ឆ្មាំគុកឱ្យអ្នកទោសទាំង៤នាក់ពាក់មួក អ្នកទោសពីរនាក់ពាក់មួកខៀវ អ្នកទោសពីរនាក់ទៀតពាក់មួកក្រហម ។ អ្នកទោសទាំង ៤ នាក់មិនដឹងថាខ្លួនពាក់មួយពណ៌អ្វីនោះទេ តែដឹងថា មានមួកពីរមានពណ៌ខៀវ និង មួកពីរទៀតមានពណ៌ក្រហម ។ ឆ្មាំគុកឱ្យអ្នកទោស ៣ នាក់ឈររៀបគ្នាជា ១ ជួរពីក្រោយគ្នា ។ អ្នកទោសទី៤ គេយកទៅលាក់ក្នុងបន្ទប់មួយ ។ អ្នកទោសទី១ ឈរបែរមុខទៅជញ្ជាំង មើលមិនឃើញមួកអ្នកទោសទី២ និង ទី៣ នោះទេ ។ អ្នកទោសទីពីរ ឈរពីក្រោយអ្នកទោសទី១ អាចមើលឃើញមួករបស់អ្នកទោសទី១ តែមើលមិនឃើញមួករបស់អ្នកទោសទី៣ នោះទេ ។ អ្នកទោសទី៣ ឈរពីក្រោយអ្នកទោសទី១ និង ទី២ ដូច្នេះអាចមើលឃើញមួករបស់អ្នកទោសទី១ និងទី២ បាន ។ ប្រស្នានោះគឺ បើអ្នកទោសណាម្នាក់អាចប្រកាសក្លែងៗ (ឮទាំងអស់គ្នា) ប្រាប់ពណ៌មួករបស់ខ្លួនបានត្រឹមត្រូវ នោះអ្នកទោសទាំង ៤ នាក់នឹងត្រូវដោះលែង ។ សន្មតថា អ្នកទោសទាំង៤នាក់នេះ ចេះតក្កវិទ្យា ។ តើពួកគេអាចដោះស្រាយប្រស្នានេះចេញតាមរបៀបណា?

59. (អន្តរជាតិ ១៩៦៦)
សំនួរចំនួនបី A, B និង C ត្រូវបានស្នើឡើងក្នុងការប្រលងសិស្សពូកែមួយ ។ សិស្សទាំង ២៥ នាក់ បានដោះស្រាយចេញយ៉ាងហោចណាស់ ១ សំនួរ ។ ចំនួនសិស្សឆ្លើយសំនួរ B ចេញ តែឆ្លើយសំនួរ A មិនចេញ មានចំនួនពីរដងចំនួនសិស្សដែលឆ្លើយសំនួរ C ចេញ តែឆ្លើយសំនួរ A មិនចេញ ។ ចំនួនសិស្សដែលឆ្លើយចេញតែសំនួរ A ច្រើនជាងចំនួនសិស្សដែលឆ្លើយចេញសំនួរ A និងសំនួរផ្សេងទៀតយ៉ាងតិចមួយសំនួរ ចំនួនម្នាក់ ។ ក្នុងចំណោមសិស្សដែលឆ្លើយចេញតែមួយសំនួរ មានពាក់កណ្តាលឆ្លើយចេញសំនួរ A ។ ចូរកំណត់ចំនួនសិស្សឆ្លើយចេញតែសំនួរ B ។

ប្រព័ន្ធរាប់.ចំនួនគត់ ភាពចែកដាច់

ប្រព័ន្ធរាប់

60. (ភ្នំពេញ ២០១០)

គេឱ្យ

$$N = 1 + 10^3 + \frac{10^3(10^3-1)}{1.2} + \frac{10^3(10^3-1)(10^3-2)}{1.2.3} + \cdots + \frac{10^3(10^3-1)}{1.2} + 10^3 + 1$$

តើ N មានប៉ុន្មានខ្ទង់? បើដឹងថា $\log 2 \approx 0{,}3010$ ។

61. ក្រោយគុណពន្លាតរួច តើ 2^{100} មានលេខប៉ុន្មានខ្ទង់?

62. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស ១៩៦៧ ; ភ្នំពេញ ២០១០)

គេឱ្យចំនួនគត់

$$A = \frac{1}{3}\left(\underbrace{11\ldots1}_{2010}\,0\,\underbrace{77\ldots7}_{2010}\,8\,\underbrace{11\ldots1}_{2010}\right)$$

គណនា $\sqrt[3]{A}$ ។

63. ចូរគណនា លេខ២ខ្ទង់ចុងគេរបស់ 3^{1000} ។

64. ចូរគណនា លេខ២ខ្ទង់ចុងគេរបស់ $7^{7^{1000}}$ ។

65. ចំនួនគត់មួយថយចុះជាគត់ដង ពេលគេលុបតួលេខខាងចុងគេចោល ។ ចូរគណនាចំនួនបែបនេះ ។

66. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលផ្តើមដោយលេខ 6 និង ថយចុះ 25 ដង បើលេខ 6 នេះត្រូវបានលុបចោល ។

67. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល ក្រោយដូរលេខខ្ទង់ទី១ទៅចុង នោះ ចំនួនគត់នោះធំជាងមុន 5, 6 ឬ 8 ដង ។

68. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលធំជាងមុន២ដង ពេលដូរលេខខ្ទង់ទី១ ទៅចុង ទេ ។

69. (ក) ចូរកំណត់ចំនួនមានលេខ៦ខ្ទង់ ដែល កើនឡើង៦ដង បើគេដកលេខ៣ខ្ទង់ ខាងចុង ហើយយកមកដាក់នៅខាងដើមវិញ (ដោយមិនប្តូរលំដាប់លំដោយ) ។

(ខ) ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនមានលេខ៨ខ្ទង់ ដែលកើនឡើង៦ដង ពេល គេដក លេខ៤ខ្ទង់ខាងចុង ហើយយកមកដាក់នៅខាងដើមវិញ (ដោយមិនប្តូរលំដាប់ លំដោយ)ទេ ។

70. (ក) គណនាគ្រប់ចំនួនគត់ ដែលមានលេខខាងដើមស្មើ ៦ ហើយដែលមាន លក្ខណៈ ៖ បើ គេលុបលេខខាងដើមនេះចោល ចំនួនដែលទទួលបាន ស្មើនឹង 1/25 នៃចំនួនដំបូង ។

(ខ) ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ណា ដែលមានលក្ខណៈដូចតទៅនេះទេ ៖ បើគេ លុបតួលេខខាងដើមរបស់វា នោះ ចំនួនទទួលបាន ស្មើនឹង 1/35 នៃចំនួនមុន លុប ។

71. (អន្តរជាតិ ១៩៦២)

ចូរកំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n តូចបំផុត ដែល

i) ក្នុងប្រព័ន្ធគោល១០ វាមានលេខ ៦ នៅខាងចុង

ii) បើយើងរំកិលលេខខ្ទង់នេះទៅដាក់នៅខាងដើមគេ យើងទទួលបានចំនួនដែល ធំជាងមុន ៤ ដង ។

72. (ភ្នំពេញ ២០១០)

ផលគុណនៃ 7 នឹងចំនួនដែលមាន 6ខ្ទង់ $\overline{abcdef}$ ស្មើនឹងផលគុណនៃ 6 នឹងចំនួន ដែលមាន 6 ខ្ទង់ $\overline{defabc}$ ។ រកចំនួនដែលមាន 6 ខ្ទង់ទាំងពីរ ។

73. (អន្តរជាតិ ១៩៦៨)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ផលគុណនៃតួលេខខ្ទង់នីមួយៗរបស់វា (នៅក្នុងគោលដប់) ស្មើនឹង $x^2 - 10x - 22$ ។

74. (អាមេរិច ១៩៩២)

តាង S ជាសំណុំនៃគ្រប់ចំនួនសនិទាន r ដែល $0 < r < 1$ ហើយដែលមានតួលេខជាខួបរាង

$$0, abcabcabc \dots = 0, \overline{abc}$$

ដែលតួលេខ a, b, c មិនចាំខុសគ្នាក៏បាន ។ បើប្រភាគនីមួយៗដែលជាធាតុរបស់ S សម្រួលរួចហើយ តើមានភាគយកខុសៗគ្នាចំនួនប៉ុន្មាន? ។

75. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន តែងមានពហុគុណរបស់វាមួយ ដែលលេខរបស់វាក្នុងប្រព័ន្ធទសភាគ (ប្រព័ន្ធគោល 10) មានគ្រប់តួលេខពី 0 ដល់ 9 ។

76. (អាមេរិច AHSME 1983)

តាង

$$x = 0{,}123456789101112 \dots 998\,999$$

ដែលលេខក្នុងខ្ទង់នីមួយៗបានមកពីចុះលេខគត់ពី1 ដល់999 តាមលំដាប់ ។ ចូរកំណត់ខ្ទង់ទី1983 ក្រោយក្បៀស ។

77. លេខ 12345678910111213141516171819202122 … ទទួលបានដោយរៀបចំនួនគត់តរៀងគ្នាបន្តបន្ទាប់គ្នា ។ យើងតាង $f(n) = m$ ជាអនុគមន៍ដែលខ្ទង់ទី 10^n របស់លេខដែលឱ្យ ឋិតនៅចំចំណុចដែលគេបន្ថែមលេខមាន m ខ្ទង់ ។ ឧទាហរណ៍ $f(2) = 2$ ព្រោះ ខ្ទង់ទី$10^2 = 100$ ស្ថិតនៅចំលេខ 55 ដែលមាន 2 ខ្ទង់ ។ ចូរគណនា $f(1987)$ ។

78. ចូរសរសេរ 5213 នៅក្នុងគោល 7 ។

79. ចូរសរសេរចំនួនទសភាគ 13/16 នៅក្នុងគោល 6 ។

80. (អាមេរិច ១៩៩៤)

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន n, តាង $p(n)$ ជាផលគុណនៃតួលេខខុសពីសូន្យរបស់ n ។(បើ n មានតែមួយខ្ទង់ នោះ $p(n) = n$) ។ តាង

$$S = p(1) + p(2) + \cdots + p(999)$$

ចូរកំណត់កត្តាបឋមធំបំផុតរបស់ S ។

81. (អន្តរជាតិ ១៩៧៨)

តាង m, n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $1 \leq m < n$ ។ នៅក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 10 លេខបី ខ្ទង់ចុងគេរបស់ 1978^m ស្មើនឹងលេខបីខ្ទង់ចុងគេរបស់ 1978^n ។ ចូរគណនា m, n ពេល $m + n$ មានតម្លៃតូចបំផុត ។

82. ចូរបង្ហាញថា លេខមួយពាន់ខ្ទង់ដំបូងក្រោយក្បៀសរបស់ $(6 + \sqrt{35})^{1980}$ សុទ្ធតែជាលេខ 9ទាំងអស់ ។

83. (អន្តរជាតិ១៩៧៥)

ពេលគេសរសេរ 4444^{4444} នៅក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10, គេទទួលបានផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់នីមួយៗរបស់វា ស្មើ A ។ តាង B ជាផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់នីមួយៗរបស់ A ។ ចូរគណនា ផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់នីមួយៗរបស់ B ។ (A, B សរសេរនៅក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10) ។

84. បើ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន តាង $S(n)$ ជាផលបូកតួលេខក្នុងខ្ទង់នីមួយៗរបស់ n ។ យើងនិយាយថា n ជាចំនួនរុចិរ[1] បើមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $x; y > 1$ ដែល

---

[1] រុចិរ (គុ.) រុងរឿង; ល្អ, សមរម្យ; ជាទីពេញចិត្ត; ពីរោះ,... (ព. កា.) ។ រុចិរភាសា ឬ--វាចា សម្តីពីរោះ ។ រុចិរសព្ទ សូរ, សំឡេងពីរោះ ។ រុចិរាភា, រុចិរោភាស (<រុចិរ+អាភា, ឱភាស) ពន្លឺរុងរឿង ។ល ។ - *វចនានុក្រមខ្មែរ*

ចំនួនរុចិរ ជាឈ្មោះលេខពិសេសមួយ ដែលខ្ញុំបានសន្មត ឱ្យត្រូវគ្នានឹងពាក្យអង់គ្លេសថា Zesty number ។

$xy = n$ និង $S(x)S(y) = S(n)$ ។ តើមានចំនួនរុចិរមានលេខពីរខ្ទង់ចំនួនប៉ុន្មាន?

85. គណនាចំនួនគត់ x តូចបំផុត ដែល x^2 មានលេខបីខ្ទង់ខាងចុងដូចលេខបីខ្ទង់ខាងចុងរបស់ x ។

86. ចូរកំណត់ចំនួនមានលេខ១ខ្ទង់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ពេលគុណចំនួននេះនឹង ២,៣,៤,៥ ឬ ៦ គេទទួលបានលេខមានតួលេខដូចគ្នានឹងចំនួនមុនគុណ (តែមានលំដាប់លំដោយខុសគ្នា) ។

87. (JBMO 2005)
ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់មានលេខបីខ្ទង់ $\overline{abc}$ ដែល

$$\overline{abc} = abc(a + b + c)$$

ដែល $\overline{abc}$ ជាលេខក្នុងប្រព័ន្ធគោលដប់របស់ចំនួននោះ ។

88. ចំនួនគត់ A មួយមានលេខ ៣ ចំនួន ៦៦៦ ដង និង ចំនួនគត់ B មានលេខ ៦ ចំនួន ៦៦៦ ដង ។ តើលេខអ្វីខ្លះមានក្នុងផលគុណ $A.B$?

89. ចូរបង្ហាញថា បើ α ក្នុងប្រព័ន្ធគោលដប់ ជាចំនួនទសភាគ ដែលមានរាង 0,999 … ដែលក្នុងនោះតួលេខក្រោយក្បៀស ផ្តើមដោយលេខ ៩ យ៉ាងតិច ១០០ ដង នោះ $\sqrt{\alpha}$ មានតួលេខក្រោយក្បៀស ផ្តើមដោយលេខ ៩ យ៉ាងតិច ១០០ ដងដែរ ។

90. គ្រប់ចំនួនគត់ ចាប់ពីលេខ១ ឡើងទៅ ត្រូវបានគេយកមកតំរៀបគ្នាតាម លំដាប់លំដោយ ។ គេទទួលបានលេខ 1234567891011121314 … ។ តើលេខខ្ទង់ទី 206 788 ជាលេខប៉ុន្មាន? ។

91. តើលេខ 0,1234567891011121314 … ដែលបានមកដោយសរសេរគ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់បន្តបន្ទាប់គ្នា ជាចំនួនសនិទាន(គឺចំនួនទសភាគខួប)ឬទេ?

92. (JBMO សតលីស ២០០០)
ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ដែលមានរាង $\overline{abcd}$ ក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10 និងមានរាង $\overline{dcba}$ ក្នុងប្រព័ន្ធគោល 7 ។

93. ចូរបង្ហាញថា បើចំនួនគត់ n បឋមនឹង 10 នោះ n^{101} មានលេខខាងចុងពាខ្ទង់ដូចគ្នានឹង n ដែរ ។ (ឧទាហរណ៍ 1233^{101} មានលេខពាខ្ទង់ខាងចុង 233 និង 37^{101} មានលេខពាខ្ទង់ខាងចុង 037 ។)

ចំនួនគត់

94. ចូរបង្ហាញថា

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

95. តាង $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ ដែល n_i ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

ជាចំនួនគត់ ។

96. ចូរបង្ហាញថា ផលបូក

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

មិនអាចជាចំនួនគត់ទេ ។

97. (អាមេរិច ១៩៩៣)

តើមាន n ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលពហុកោណនិយ័តមួយ មាន n ជ្រុង មានមុំក្នុងជាចំនួនគត់គិតជាដឺក្រេ? ។

98. (JBMO 1997)

តាង $n_1, n_2, \dots, n_{1998}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល

$$n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{1997}^2 = n_{1998}^2$$

ចូរបង្ហាញថា ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនេះ មានលេខគូយ៉ាងហោចណាស់ពីរ ។

99. (JBMO សតលីស ២០០០)

ចូរកំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់ (m,n) ដែល

$$A = n^2 + 2mn + 3m^2 + 3n, B = 2n^2 + 3mn + m^2, C = 3n^2 + mn + 2m^2$$

ជាចំនួនគត់ដែលនៅបន្តគ្នាតាមលំដាប់ណាមួយ ។ (ឧទាហរណ៍ $2; 3; 4$ ជាចំនួនគត់នៅបន្តគ្នា ។ ក្នុងសំនួរនេះ មិនចាំបាច់តែលំដាប់ $A; B; C$ បានយកនោះទេ)

100. (រ៉ូម៉ានី ១៩៩៨)

តាង

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{1997.1998}$$
$$B = \frac{1}{1000.1998} + \frac{1}{1001.1997} + \cdots + \frac{1}{1998.1000}$$

បង្ហាញថា A/B ជាចំនួនគត់ ។

101. ចូរបង្ហាញថា

$$m^5 + 3m^4n - 5m^3b^2 - 15m^2n^3 + 4mn^4 + 12n^5$$

មិនអាចមានតម្លៃ ៣៣ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m និង n ។

ភាពចែកដាច់

102. តើមានចំនួនគត់ណាខ្លះ ដែលមានលក្ខណៈដូចតទៅ ៖ បើគេលុបតួលេខខាងចុងចោល នោះ ចំនួនដែលទទួលបានចែកដាច់ចំនួនមុនលុប ។

103. (អន្តរជាតិ ១៩៦០)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន N មានលេខ៣ខ្ទង់ ដែល N ចែកដាច់នឹង 11 និង $N/11$ ស្មើនឹងផលបូកការេនៃតួលេខក្នុងខ្ទង់នីមួយៗរបស់ N ។

104. ចំនួនគត់មួយថយចុះ 9 ដង បើ គេលុបតួលេខខ្ទង់ណាមួយនោះរបស់វា ហើយលេខដែលទទួលបានចែកដាច់នឹង ៩ ។

(ក) ចូរបង្ហាញថា ពេលចែកនៃចំនួនគត់ដែលទទួលបាននេះ នឹង ៩ នោះគេទទួលបានចំនួនគត់ថ្មី ដែលស្មើនឹងចំនួនគត់ចាស់ លុបខ្ទង់ណាមួយចោល ។

(ខ) ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនៃសំនួរនេះ ។

105. ចូរបន្ថែមលេខ ៣ ខ្ទង់បន្ថែមទៀត បន្តពីលេខ 523 ... ដើម្បីឱ្យចំនួនទទួលបាន ដែលមានលេខ ៦ ខ្ទង់ ចែកដាច់នឹង ៧, ៨ និង ៩ ។

106. ចូរបង្ហាញថា បើ n សេស នោះ

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

ដូច្នេះ បើ n សេស នោះ $x+y$ ចែកដាច់ $x^n + y^n$ ។

107. ចូរបង្ហាញថា 1001 ចែកដាច់ $1^{1993} + 2^{1993} + 3^{1993} + \cdots + 1000^{1993}$

108. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មួយ គេមាន ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x មួយទៀត ដែលតួនីមួយៗរបស់ស្វ៊ីត $x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, \ldots$ ចែកដាច់នឹង n ។

109. គណនាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $n+1$ ចែកដាច់ n^2+1

110. បើ 7 ចែកដាច់ $3x+2$ ចូរបង្ហាញថា 7 ចែកដាច់ $15x^2 - 11x - 14$ ។

111. ចូរបង្ហាញថា បើ $2x+3$ ជាពហុគុណនៃ 11 នោះ $5x+2$ ជាពហុគុណនៃ 11 ដែរ និង ច្រាសមកវិញ ។

112. គណនាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $5^{n-1} + 3^{n-1}$ ចែកដាច់ $5^n + 3^n$ ។

113. ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $3n+7$ ចែកដាច់ $5n+13$ ។

114. ចូរបង្ហាញថា $\mathrm{n}^2 + 23$ ចែកដាច់នឹង 24 ចំពោះចំនួនគត់ n ច្រើនរាប់មិនអស់ ។

115. ចូរបង្ហាញថា បើ $p > 3$ ជាចំនួនបឋម នោះ 24 ចែកដាច់ $(p^2 - 1)$ ។

116. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}, n^2$ ចែកដាច់ $(n+1)^n - 1$ ។

117. ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃ n ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា ចែកដាច់នឹង $n!$ ។

118. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n

ក) $n^3 - n$ ចែកដាច់នឹង 3 ;

ខ) $n^5 - n$ ចែកដាច់នឹង 5;

គ) $n^7 - n$ ចែកដាច់នឹង 7;

ឃ) $n^{11} - n$ ចែកដាច់នឹង 11;

ង) $n^{13} - n$ ចែកដាច់នឹង 13;

119. ចូរបង្ហាញថា 6 ចែកដាច់ $n^3 - n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។

120. ចូរបង្ហាញថា

ក) $3^{6n} - 2^{6n}$ ចែកដាច់នឹង 35 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ;

ខ) $n^5 - 5n^3 + 4n$ ចែកដាច់នឹង 120 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n;

121. តាង $p > 3$ ជាចំនួនបឋម ។ ចូរបង្ហាញថា $p^2 - 1$ ជាពហុគុណនៃ 12 ។

122. ចូរបង្ហាញថា ពីក្នុងចំណោមចំនួនគត់បីណាក៏ដោយ គេអាចជ្រើសរើសយកពីរ តាងដោយ a, b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^3b - ab^3$ ចែកដាច់នឹង 10 ។

123. ចូរបង្ហាញថា បើ 3 ចែកដាច់ $(a^2 + b^2)$ នោះ 3 ចែកដាច់ a ផងនិង b ផង ។

124. តាង a ជាចំនួនគត់ ។ បង្ហាញថា a ចែកមិនដាច់នឹង 3 បើ $a^2 - 1$ ចែកដាច់នឹង 3 និងច្រាសមកវិញ ។

125. ចូរបង្ហាញថា $n^2 + 3n + 5$ ចែកមិនដាច់នឹង 121 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

126. (ហុងគ្រី ១៨៩៩)

ចូរបង្ហាញថា $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

127. ចូរបង្ហាញថា $3^{3n+3} - 26n - 27$ ជាពហុគុណ នៃ 169 ចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

128. ចូរបង្ហាញថា បើ k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស នោះ 2^{n+2} ចែកដាច់ $k^{2^n} - 1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

129. ចូរបង្ហាញថា $2222^{5555} + 5555^{2222}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

130. ចូរបង្ហាញថា $11^{10} - 1$ ចែកដាច់នឹង ១០០ ។

131. ចូរបង្ហាញថា $27\,195^8 - 10\,887^8 + 10\,152^8$ ចែកដាច់នឹង 26 460 ។

132. **(អន្តរជាតិ ១៩៦៤)**

ក) ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល $2^n - 1$ ចែកដាច់នឹង 7

ខ) ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ចំនួន 2^n+1 ចែកមិនដាច់នឹង 7 ។

133. (រុស្ស៊ី ១៩៩៥)

ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់ពហុគុណ n ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល n ចែកដាច់ $3^{n-1}-2^{n-1}$ ។

134. តាង A ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង A' ជាចំនួនមួយដែលសរសេរដោយប្រើតួលេខនិងចំនួនខ្ទង់ដូច A តែតាមលំដាប់លំដោយមួយផ្សេងទៀត ។ ចូរបង្ហាញថា បើ $A+A'=10^{10}$ នោះ A ចែកដាច់នឹង 10 ។

135. (អាមេរិច ១៩៩២)

បណ្ដាលេខមានពីរខ្ទង់ ចាប់ពី 19 ទៅ 92 ត្រូវបានគេយកទៅសរសេរបន្តបន្ទាប់គ្នា ដើម្បីបង្កើតបានជាចំនួនគត់

$$192021222324\ldots89909192$$

កំណត់ k ធំបំផុត ដែល 3^k ចែកដាច់ចំនួននេះ ។

136. បង្ហាញថា បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ p ចែកដាច់ 2^p-2 ។

137. ចូរបង្ហាញថា បើ p ជាចំនួនសេសបឋម ហើយបើ

$$\frac{a}{b}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}$$

នោះ p ចែក a ដាច់ ។

138. ចូរកំណត់បណ្ដាចំនួនគត់ $a,b,c>1$ ដែល a ចែកដាច់ $bc-1, b$ ចែកដាច់ $ca-1$ និង c ចែកដាច់ $ab-1$ ។

139. (អន្តរជាតិ ១៩៩៤)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត (m,n) ដែល

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

ជាចំនួនគត់ ។

140. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ n ដែល $1+\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ ចែកដាច់ $2n$ ។

141. (បាល់កង់ ១៩៩៦)

គេឱ្យចំនួនបឋម $p > 5$ ។ គេកំណត់

$$S = \{p - n^2 |\ n \in \mathbb{N}, n^2 < p\}$$

ចូរបង្ហាញថា មាន a និង b ជាធាតុរបស់ S ដែល $1 < a < b$ ហើយ a ចែកដាច់ b ។

142. បង្ហាញថា $\mathrm{n} = 24$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុតដែលចែកដាច់នឹងគ្រប់ចំនួនគត់ a ដែល $1 \le a \le \sqrt{n}$

143. ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n មានលក្ខណៈ

<<ចំពោះគ្រប់ $0 < l < m < n$, គេមាន $S = l + (l + 1) + \cdots + m$ ចែកមិនដាច់នឹង n>>

ចូរបង្ហាញថា លក្ខណៈនេះ អាចកើតមានតែក្នុងករណី n ជាស្វ័យគុណនៃ 2 មួយតែប៉ុណ្ណោះ ។

144. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល 2^n ចែកដាច់ $3^n - 1$ ។

145. (អន្តរជាតិ ១៩៩២)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ a, b, c ដែល $1 < a < b < c$ និង

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$$

ចែកដាច់ $abc - 1$ ។

146. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់គូវិជ្ជមាន n យើងមាន $n^2 - 1$ ចែកដាច់ $2^{n!} - 1$ ។

147. ចូរបង្ហាញថាផលបូក

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

ដែល n ជាចំនួនគត់ណាមួយ និង k ជាចំនួនសេស, ចែកដាច់នឹង

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

148. (អន្តរជាតិ ១៩៨៤)

ចូរឱ្យឧទាហរណ៍គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន (a, b) មួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំងពីរខាងក្រោម

(i) $ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

(ii) $(a+b)^7-a^7-b^7$ ចែកដាច់នឹង 7^7

ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយទទួលបាន ។

149. តាង p ជាចំនួនបឋម ។ ចូរបង្ហាញថា p ចែកដាច់ ab^p-ba^p ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a និង b ។

150. គេឱ្យចំនួនបឋម $p\geq 7$ ។ ចូរបង្ហាញថា $11\ldots 1$, ដែលមានលេខ 1 ចំនួន $p-1$ ដង, ជាចំនួនចែកដាច់នឹង p ។

151. បង្ហាញថា $\forall m,n\in\mathbb{Z}$ គេមាន $mn(m^{60}-n^{60})$ ចែកដាច់នឹង 56786730 ជានិច្ច ។

152. គេឱ្យចំនួនបឋមសេស p ។ ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនគត់ n ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល p ចែកដាច់ $n2^n+1$ ។

153. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ $n>1$ ដែល n ចែកដាច់ 2^n-1 ទេ ។

154. តើ 7 ចែកដាច់ $\binom{1000}{500}$ ឬទេ? ។

155. គេជ្រើសរើសយកចំនួនគត់ចំនួន 51 ពីក្នុងចំណោម $1,2,\ldots,100$ ។ ចូរបង្ហាញថា ទោះគេជ្រើសរើសចំនួនគត់ទាំង 51 នោះយ៉ាងម៉េចក៏ដោយ ក៏គេគង់ទទួលបាន ចំនួនមួយក្នុងចំណោមនោះ ចែកដាច់ចំនួនមួយទៀតដែរ ។

156. (ភ្នំពេញ ២០១០)

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំនួនគត់តូចបំផុតដែលធំជាង $\left(\sqrt{3}+1\right)^{4020}$ ចែកដាច់នឹង 2^{2011} ។

157. (ឥណ្ឌា ២០១០)

កំណត់ស្វ៊ីត $\{a_n\}_{n\geq 0}$ មួយដោយ $a_0=0, a_1=1$ និង

$$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$$

ចំពោះ $n\geq 2$ ។

a) ចំពោះគ្រប់ $m>0$ និង $0\leq j\leq m$ ចូរបង្ហាញថា $2a_m$ ចែកដាច់ $a_{m+j}+(-1)^j a_{m-j}$ ។

b) សន្មតថា n និង k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែល 2^k ចែកដាច់ n ។

ចូរបង្ហាញថា 2^k ចែកដាច់ a_n ។

158. (វៀតណាម ២០១១)

គេកំណត់ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ នៃចំនួនគត់មួយ ដោយ

$$a_0 = 1, a_1 = -1, a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}; \forall n \geq 2$$

ចូរបង្ហាញថា $a_{2012} - 2010$ ចែកដាច់នឹង 2011 ។

159. (JBMO សតលីស ២០០០)

គណនាចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ធំបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ 23^{6+x} ចែកដាច់ $2000!$ ។

160. ចូរបង្ហាញថា បើ x_1 និង x_2 ជាឫសរបស់សមីការ $x^2 - 6x + 1 = 0$ នោះ $x_1^n + x_2^n$ ជាចំនួនគត់ចែកមិនដាច់នឹង 5 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

សំណល់. ភាពសមមូល

161. តាង p ជាចំនួនបឋមមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា

i) $$\binom{p-1}{n} \equiv (-1)^n \pmod{p}, \qquad 1 \leq n \leq p-1$$

ii) $$\binom{p+1}{n} \equiv 0 \pmod{p}, \qquad 2 \leq n \leq p-1$$

162. តាង p ជាចំនួនបឋម ដែល $p > 5$ ។ ចូរបង្ហាញថា $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$ ។

163. (អាមេរិច ១៩៩៨)

តាង r ជាសំណល់នៃវិធីចែក $1059; 1417$ និង 2312 នឹង $d > 1$ ។

គណនា $d - r$ ។

164. (អាមេរិច ២០១០)

គណនាសំណល់ពេលចែក

$$9 \times 99 \times 999 \times \dots \times \underbrace{99\dots9}_{\text{មានលេខ 9 ចំនួន999 ដង}}$$

នឹង 1000 ។

165. (JBMO 1998)
តើអាចមានឬទេនូវ លេខបីខ្ទង់ចំនួន 16 ផ្សេងគ្នា ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ចំនួនទាំង 16 មានសំណល់ផ្សេងគ្នាទាំងអស់ពេលចែកនឹង 16 និង ចំនួនទាំង16 នេះ ប្រើតែតួលេខ ចំនួនបីតែប៉ុណ្ណោះ ។

166. គេចែកចំនួនគត់មួយ ដែលជាលេខ ៧ ចំនួន ១០០១ ខ្ទង់ នឹង ១០០១ ។ គណនាផលចែក និង សំណល់ ។

167. (អាមេរិច AIME 2010)

តាង N ជាចំនួនគត់ធំបំផុត ដែលជាពហុគុណនៃ ៣៦ ហើយដែលមានតួលេខក្នុងខ្ទង់នីមួយៗរបស់វា សុទ្ធតែជាលេខគូ ។ លេខក្នុងខ្ទង់នីមួយៗរបស់ N សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ ។ គណនាសំណល់ ពេលចែក N នឹង 1000 ។

168. ចូរកំណត់ចំនួនគត់មានលេខ ៤ ខ្ទង់ ដែលពេលចែកនឹង ១៣១ សល់សំណល់ ១១២ និង ពេលចែកនឹង ១៣២ សល់សំណល់ ៩៨ ។

169. ចូរកំណត់សំណល់នៃវិធីចែកនឹង 7 នៃ

$$10^{10} + 10^{10^2} + \dots + 10^{10^{10}}$$

170. តើស្វ័យគុណទី១០០នៃចំនួនគត់មួយសល់សំណល់ប៉ុន្មាន ពេលចែកនឹង ១២៥? ។

ចំនួនការេ

171. ចូរបង្ហាញថា ចំនួនការេមានរាង $4k$ ឬ $4k+1$ ។

172. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់នៅក្នុងស្វ៊ីត $11, 111, 1111, \dots$ ជាចំនួនការេទេ ។

173. ចូរបង្ហាញថា គេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មួយគត់ ដែល $2^8 + 2^{11} + 2^n$ ជាចំនួនការេ ។

174. (JBMO 1998)
ចូរបង្ហាញថា ចំនួន $\underbrace{111\ldots11}_{1997}\underbrace{22\ldots22}_{1998}5$ (ដែលមានលេខ 1 ចំនួន 1997 ដង និង លេខ 2 ចំនួន 1998 ដង) ជាចំនួនការេ ។

175. បង្ហាញថាក្នុងគ្រប់ប្រព័ន្ធរាប់ទាំងអស់ 4,41 សុទ្ធតែជាការេនៃចំនួនសនិទាន ។

176. (JBMO 2003)
តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ចំនួន A មួយមាន $2n$ ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់នីមួយៗជាលេខ 4 និង ចំនួន B មួយមាន n ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់នីមួយៗជាលេខ 8 ។
ចូរបង្ហាញថា $A + 2B + 4$ ជាចំនួនការេ ។

177. (JBMO 2004)
បើចំនួនគត់វិជ្ជមាន x និង y ដែល $3x + 4y$ និង $4x + 3y$ ជាចំនួនការេទាំងពីរ ចូរបង្ហាញថា ទាំង x និង y សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 7 ។

178. ចូរកំណត់ចំនួនគត់ x ដែល $x^2 - x + 2$ ជាចំនួនការេ ។

179. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x ដែល $1 + \mathrm{x} + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^4$ ជាចំនួនការេ ។

180. (JBMO 2000)
ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ ដែល $n^2 + 3^n$ ជាចំនួនការេ ។

181. (អន្តរជាតិ ១៩៨៨)
បើ a, b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល

$$\frac{a^2 + b^2}{1 + ab}$$

ជាចំនួនគត់ នោះ $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ ជាចំនួនការេ ។

182. គេឱ្យ $a < b \leq c < d$ ជាចំនួនគត់ ដែល $ad = bc$ និង $\sqrt{d} - \sqrt{a} \leq 1$ ។
ចូរបង្ហាញថា a ជាចំនួនការេ ។

183. ក) ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃចំនួនគត់ពីរតគ្នាមិនអាចជាចំនួនគត់ការេទេ ។
ខ) ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃចំនួនគត់បីតគ្នាមិនអាចជាចំនួនការេទេ ។
គ) ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃចំនួនគត់បួនតគ្នាមិនអាចជាចំនួនការេទេ ។

184. ចូរបង្ហាញថា ផលគុណនៃចំនួនគត់បីតរៀងគ្នា មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ (មានន័យថា មិនអាចជាចំនួនការេ, ចំនួនគូប ។ល ។)

185. ចូរកំណត់ចំនួនមិនការេទី n ។ឧទាហរណ៍ 2 ជាចំនួនមិនការេទី 1, 3 ជាចំនួនមិនការេទី 2, 5 ជាចំនួនមិនការេទី 3 ។ល ។

186. តាង $f(n) = n + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ ។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m, ស៊ីត

$$m, f(m), f(f(m)), f\left(f(f(m))\right), \ldots$$

មានចំនួនការេយ៉ាងហោចណាស់មួយ ។

187. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ a, b ដែល $a^4 + (a+b)^4 + b^4$ ជាចំនួនការេ ។

188. ចូរបង្ហាញថា នៅក្នុងគ្រប់សំណុំទាំងអស់ដែលមាន 33 ធាតុ, ដែលធាតុនីមួយៗជាចំនួនគត់ខុសៗគ្នា ហើយចំនួនគត់នីមួយៗមានកត្តាបឋមជាធាតុរបស់សំណុំ $\{5; 7; 11; 13; 23\}$; គេមានធាតុពីរដែលផលគុណរបស់វាជាចំនួនការេ ។

189. (អន្តរជាតិ ១៩៨៥)

គេឱ្យសំណុំ M មាន 1985 ធាតុជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសៗគ្នា ។ គ្មានធាតុណាមួយមានកត្តាបឋមធំជាង 26 ទេ ។ ចូរបង្ហាញថា M មានសំណុំរងមួយ ដែលមាន 4 ធាតុខុសៗគ្នា ដែលផលគុណជាចំនួនស្វ័យគុណទី 4 ។

ចំនួនដែលមានរាងណាមួយ

190. (JBMO សតលីស ២០០០)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគូបដែលចែកមិនដាច់នឹង 10 ហើយដែលលេខបានមកដោយការលុបលេខបីខ្ទង់ខាងចុងរបស់ចំនួនទាំងនេះចេញក៏ជាចំនួនគូបដែរ ។

191. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៦៧)

តើមានចំនួនគត់ ដែលគូបរបស់វាស្មើនឹង $3n^2 + 3n + 7$ ដែល n ជាចំនួនគត់ដែរឬទេ?

192. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 6$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជាផលបូកនៃចំនួនគត់ពីរធំជាង 1 និង បឋមរវាងគ្នា ។

193. (អាមេរិច AIME ២០១០)

តាង N ជាចំនួនរបៀបក្នុងការសរសេរ 2010 ជារាង

$$2010 = a_3.10^3 + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$$

ដែលបណ្ដា a_i ជាចំនួនគត់ និង $0 \le a_i \le 99$ ។ ឧទាហរណ៍មួយនៃការសរសេរជារាងបែបនេះ គឺ $1.10^3 + 3.10^2 + 67.10^1 + 40.10^0$ ។

គណនា N ។

194. (អាមេរិច ២០០១)

តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលជាពហុគុណនៃ 1001 ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលអាចសរសេរជារាង $10^j - 10^i$ បាន ដែល i និង j ជាចំនួនគត់ ហើយ $0 \le i < j \le 99$? ។

195. (អាមេរិច ១៩៨៦)

ស្វ៊ីតកើន

$$1,3,4,9,10,12,13,\ldots$$

មានគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលជាស្វ័យគុណនៃ 3 ឬជាផលបូកនៃស្វ័យគុណនៃ 3ផ្សេងគ្នា ។ ចូរគណនា តួទី 100 នៃស្វ៊ីតនេះ ។

196. (អាមេរិច ១៩៧៨)

ចំនួនគត់ n គេហៅវាថាជាលេខពិសេស បើគេអាចសរសេរជា

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

បាន ដោយ $a_1, \ldots, a_k$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន(មិនចាំបាច់ខុសគ្នាក៏បាន) ដែល

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1$$

ដោយដឹងថា ចំនួនគត់ចាប់ពី 33 ដល់ 73 សុទ្ធតែជាលេខពិសេសទាំងអស់ ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ ដែល ≥ 33 សុទ្ធតែជា លេខពិសេស ។

197. (អន្តរជាតិ ១៩៨៣)

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន a, b និង c បឋមនឹងគ្នាពីរៗ ។ ចូរបង្ហាញថា $2abc - ab - bc - ca$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុត ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $xbc + yca + zab$ បាន ដែលក្នុងនោះ x, y, z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានឬសូន្យ ។

198. ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង

$$\frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}$$

បានទាំងអស់ ចំពោះចំនួនគត់ a, b, c, d វិជ្ជមាន ។

199. (ភ្នំពេញ ២០១០)

ចូរពិនិត្យស្វ៊ីតខាងក្រោម

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 3 + 5 \\ u_3 &= 7 + 9 + 11 \\ u_4 &= 13 + 15 + 17 + 19 \\ &\dots \end{aligned}$$

ចូរបង្ហាញថា គ្រប់តួទាំងអស់នៃ $\{u_n\}$ ជាចំនួនគូប ។

200. (អ៊ីរ៉ង់ ២០០៨)

តាង u ជាចំនួនសេស ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{3^{3u} - 1}{3^u - 1}$$

អាចសរសេរជាផលបូកនៃចំនួនការេពីរ ។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត. តួចែករួមធំបំផុត

ចំនួនបឋម

201. (ចំនួនមែរសែន)

ចូរបង្ហាញថា បើ $2^n - 1$ ជាចំនួនបឋម នោះ n ក៏ជាចំនួនបឋមដែរ ។

202. ចូរបង្ហាញថា មានគូ (m, n) ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល m និង n មានកត្តាបឋមរួម ហើយ $(m-1)$ និង $(n-1)$ មានកត្តាបឋមរួមគ្នាដែរ ។

203. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនបឋមដែលមានរាង $n^3 - 1$ ចំពោះចំនួនគត់ $n > 1$ ។

204. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះ $n \in \mathbb{N}, n^4 + 4$ ជាចំនួនបឋម តែក្នុងករណី $n = 1$ មួយ តែប៉ុណ្ណោះ ។

205. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ ដែល $n^4 + 4^n$ ជាចំនួនបឋម ។

206. គេដឹងថា 1002004008016032 មានកត្តាបឋម $p > 250000$ ។

គណនា កត្តាបឋមនេះ ។

207. ចូរគណនាចំនួននៃចំនួនបឋមដែល ≤ 100 ។

208. (រ៉ូម៉ានី ២០០៣)

គេឱ្យចំនួនបឋម $n_1 < n_2 < \cdots < n_{31}$ ។ ចូរបង្ហាញថា បើ 30 ចែកដាច់

$$n_1^4 + n_2^4 + \cdots + n_{31}^4$$

នោះក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនោះគេអាចរកបានចំនួនបឋមបីតរៀងគ្នា ។

209. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k គេអាចរកបានចំនួនគត់ n មួយ ដែលបណ្ដាចំនួន $n+1, \ldots, n+k$ សុទ្ធតែជាចំនួនពហុគុណ ។

210. តាង p ជាចំនួនបឋមធំជាង 5 ។ ចូរបង្ហាញថា $p-4$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណ ៤ បានទេ ។

211. (JBMO 2007)
ចូរបង្ហាញថា បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ $7p+3^p-4$ មិនមែនជាចំនួនការេនោះទេ ។

212. (JBMO 2006)
បើ $n>4$ ជាចំនួនពហុគុណ ចូរបង្ហាញថា $2n$ ចែកដាច់ $(n-1)!$ ។

213. (JBMO 2008)
ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p,q,r ដែល

$$\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1$$

214. ចូរបង្ហាញថា ការេនៃបណ្តាចំនួនបឋមធំដែលជាង ៣ មានសំណល់ស្មើ ១ ពេលចែកនឹង ១២ ។

215. (JBMO សតលីស ២០០០)
ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b ដែល a^4+4b^4 ជាចំនួនបឋម ។

216. (អន្តរជាតិ ១៩៨៧)
តាង $f(x)=x^2+x+p, p\in\mathbb{N}^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា បើ

$$f(0),f(1),\dots,f\left(\left\lfloor\sqrt{\frac{p}{3}}\right\rfloor\right)$$

ជាសុទ្ធតែជាចំនួនបឋម នោះគ្រប់ $f(0),f(1),\dots,f(p-2)$ សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម ។

217. ចូរបង្ហាញថា បើមានមួយក្នុងចំណោម 2^n-1 និង 2^n+1 ជាចំនួនបឋម ដែលក្នុងនោះ $n>2$ នោះចំនួនមួយទៀតជាចំនួនពហុគុណ ។

218. (ក) ចូរបង្ហាញថា បើ p និង $8p-1$ បឋមទាំង២ នោះ $8p+1$ ជា ចំនួនពហុគុណ ។

(ខ) ចូរបង្ហាញថា បើp និង $8p^2+1$ បឋមទាំង២ នោះ $8p^2-1$ ក៏ជាចំនួនបឋមដែរ ។

219. (JBMO សតលីស ២០០០)

ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនពហុគុណវិជ្ជមានយ៉ាងតិចចំនួន 666 ដែលមានលេខ 2006 ខ្ទង់ មានតួលេខខ្ទង់មួយស្មើ 7 និង តួលេខខ្ទង់ផ្សេងទៀតស្មើ 1 ទាំងអស់ ។

220. ចូរបង្ហាញថា បណ្ដាចំនួនគត់ខាងក្រោម

$$10001, 100010001, 1000100010001, \dots$$

(មានលេខ០ ចំនួនបីចន្លោះលេខ១) ជា ចំនួនពហុគុណ ។

221. (ភ្នំពេញ ២០១១)

បង្ហាញថា ចំនួនគត់ $N = 5^{5^{2011}} + 5^{5^{2010}} + 1$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត តួចែករួមធំបំផុត

222. តាង $\text{PGCD}(a, b) = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា $\text{PGCD}(a + b, a^2 - ab + b^2) = 1$ ឬ $= 3$ ។

223. តាង $a, a \neq 1, m, n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\text{PGCD}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{PGCD}(m,n)} - 1$$

224. (អាមេរិច ១៩៨៥)

បណ្ដាចំនួននៅក្នុងស្វ៊ីត $101; 104; 109; 116; \dots$ មានរាង $a_n = 100 + n^2, n = 1,2, \dots$ ចំពោះ n នីមួយៗ តាង $d_n = \text{PGCD}(a_n, a_{n+1})$ ។ គណនា $\max_{n \geq 1} d_n$ ។

225. ចូរបង្ហាញថា បើ m និង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយ m ជាចំនួនសេស នោះ

$$\text{PGCD}(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$$

226. ចូរបង្ហាញថា មានស្វ៊ីតនព្វន្តវែងមួយ ដែលតួរបស់វានីមួយៗបឋមរវាងគ្នាពីរៗ ។

227. តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន ≤ 1260 ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលបឋមនឹង 1260 ? ។

228. តាង a និង b ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា ។ ចូរបង្ហាញថា ab និង $a + b$ ក៏បឋមនឹងគ្នាដែរ ។

229. គេកំណត់ ចំនួនហ្វែម៉ាទី n ដោយរូបមន្ត $F_n = 2^{2^n} + 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា ចំនួន F_n ទាំងអស់បឋមនឹងគ្នាពីរៗ ។

230. (អន្តរជាតិ ២០០៥)

គេឱ្យស្វ៊ីត $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots$ កំណត់ដោយ

$$\mathrm{a_n} = 2^\mathrm{n} + 3^\mathrm{n} + 6^\mathrm{n} - 1$$

ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលបឋមនឹងគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីត ។

231. គណនាគូ (a, b) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានចំនួនប៉ុន្មាន ដែល

$$\mathrm{PPCM}(a, b) = 2^3 5^7 11^{13}$$

232. (កូរ៉េ ១៩៩៨)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន l, m, n បឋមនឹងគ្នាពីរៗ ដែល

$$(l + m + n)\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

ជាចំនួនគត់ ។

233. គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n > 3$ ។ ចូរបង្ហាញថា PPCM របស់បណ្តាផលគុណ $x_1 x_2 \ldots x_k$ $(k \geq 1)$ មានតម្លៃតូចជាង $n!$ ។ ក្នុងនេះ x_i និង k ជាអថេរ និង x_i ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$$

234. (អន្តរជាតិ ១៩៥៩)

ចូរបង្ហាញថា ប្រភាគ

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

ជាប្រភាគមិនអាចសម្រួលបានចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

235. (អាមេរិច ១៩៧២)

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{[\mathrm{PPCM}(a, b, c)]^2}{\mathrm{PPCM}(a, b)\,\mathrm{PPCM}(b, c)\,\mathrm{PPCM}(c, a)} = \frac{[\mathrm{PGCD}(a, b, c)]^2}{\mathrm{PGCD}(a, b)\mathrm{PGCD}(b, c)\mathrm{PGCD}(c, a)}$$

236. ចូរគណនាចំនួននៃចតុធាតុ (a, b, c, d) ដែល

$$3^r 7^s = \mathrm{PPCM}(a, b, c) = \mathrm{PPCM}(b, c, d) = \mathrm{PPCM}(c, d, a) = \mathrm{PPCM}(d, a, b)$$

237. (JBMO 1999 ; ភ្នំពេញ ២០១១)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n យើងតាង

$$I_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$$

ចូរកំណត់តួចែករួមធំបំផុតរបស់ $I_0, I_1, \ldots, I_{1999}$ ។

238. (JBMO សតលីស ២០០០)

ចូរកំណត់គូចំនួនគត់ (m, n) ដែល

$$A = n^2 + 2mn + 3m^2 + 2;$$
$$B = 2n^2 + 3mn + m^2 + 2;$$
$$C = 3n^2 + mn + 2m^2 + 1$$

មានតួចែករួមធំជាង 1 ។

បំបែកជាកត្តាបឋម

239. គណនាផលគុណនៃគ្រប់បណ្តាតួចែកវិជ្ជមានរបស់ $n = 420^4$ ។

240. គណនាផលបូកនៃតួចែកវិជ្ជមានគូរបស់ 10 000 ។

241. (អាមេរិច ១៩៨៨)

ចូរគណនាប្រូបាប៊ីលីតេ ក្នុងការជ្រើសរើសដោយចៃដន្យនូវតួចែកវិជ្ជមានរបស់ 10^{99} បានជាចំនួនពហុគុណនៃ 10^{88} ។

242. យើងហៅថាចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយជា*សម្បូណ្ណលេខ* (perfect number) បើចំនួននោះស្មើនឹងផលបូកតួចែកវិជ្ជមានរបស់វា ក្រៅពីខ្លួនវា ។ ឧទាហរណ៍ 6 ជាសម្បូណ្ណលេខ ព្រោះ $6 = \sum_{d|6, d\neq 6} d = 1 + 2 + 3$ ។

ចូរបង្ហាញថា ចំនួនគូមួយជាសម្បូណ្ណលេខ លុះត្រាតែ វាមានរាង $2^{p-1}(2^p - 1)$ ដែល p និង $2^p - 1$ ជាចំនួនបឋម, និងច្រាសមកវិញ ។

243. (JBMO 2006)

យើងហៅ n មួយជាសម្បូណ្ណលេខ បើផលបូកនៃតួចែកវិជ្ជមានរបស់វា (គិតទាំង 1 និង n) ស្មើ $2n$ ។ ចូរកំណត់គ្រប់សម្បូណ្ណលេខ n ដែល $n - 1$ និង $n + 1$ ជាចំនួនបឋម ។

244. (អាមេរិច AIME ២០១០)

ម៉ាយ៉ាធ្វើបញ្ជីតួចែកវិជ្ជមានទាំងអស់របស់ 2010^2 ។ បន្ទាប់មក នាងជ្រើសរើសដោយចៃដន់នូវតួចែកពីរផ្សេងគ្នាចេញពីបញ្ជីនេះ ។ តាង p ជាប្រូបាប៊ីលីតេដែលក្នុងចំណោមតួចែកទាំងពីរនោះ មានតួចែកមួយនិងតែមួយគត់ដែលជាចំនួនការេ ។ ប្រូបាប៊ីលីតេ p នេះអាចសរសេរជារាង $\frac{m}{n}$ បាន ដែលក្នុងនេះ m បឋមនឹង n ហើយជាចំនួនគត់វិជ្ជមានទាំងពីរ ។ គណនា $m + n$ ។

245. (អាមេរិច AIME ១៩៩៥)

តាង $n = 2^{31}3^{19}$ ។ តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមានចំនួនប៉ុន្មានដែលជាតួចែករបស់ n^2 ហើយមានតម្លៃតូចជាង n និងចែក n មិនដាច់?

246. (JBMO 2002)

ចូររកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន N ដែលមានតួចែកវិជ្ជមានចំនួន 16 គត់ គឺ

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{16} = N$$

ដែលតួចែក d_k ស្មើនឹង $(d_2 + d_4)d_6$ ចំពោះ $k = d_5$ ។

247. ចូរបង្ហាញថា កន្សោម

$$\frac{a^3 + 2a}{a^4 + 3a^2 + 1}$$

ដែល a ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ជាប្រភាគដែលបង្រួមមិនបាន ។

248. (JBMO សតលីស ២000)

ចូរកំណត់ចំនួនមានលេខបួនខ្ទង់ដែល ពេលបំបែកជាផលគុណកត្តាបឋម វាមានផលបូកកត្តាបឋមស្មើនឹងផលបូកស្វ័យគុណរបស់កត្តាបឋមនោះ មានន័យថា បើ $\overline{abcd} = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$ លក្ខខណ្ឌនោះគឺ $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ ដែល $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ជាចំនួនបឋម ។

ផ្នែកគត់

249. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ គេមាន $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$

250. គណនាផ្នែកគត់របស់

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$$

251. ចូរបង្ហាញថា តួរបស់ស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ $\left\lfloor\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right\rfloor$ ដែល $n=0;1;2;\ldots$ ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ជាចំនួនគូនិងសេសឆ្លាស់គ្នា ។

252. (អាមេរិច ១៩៨៧)

ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ធំបំផុត ដើម្បីឱ្យគេមានចំនួនគត់ k មួយគត់ដែល

$$\frac{8}{15}<\frac{n}{n+k}<\frac{7}{13}$$

253. (អាមេរិច ១៩៩៧)

សន្មតថា a ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $\{a^{-1}\}=\{a^2\}$ និង $2<a^2<3$ ។ ចូរគណនា

$$a^{12}-144\,a^{-1}$$

254. (អាមេរិច ២០០៣)

គណនាចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $1/n$ នៅជិត $\{\sqrt{123456789}\}$ បំផុត ។

255. កំណត់ពហុធាមិនសូន្យ $P(x,y)$ មួយ ដែល $P(\lfloor 2t\rfloor,\lfloor 3t\rfloor)=0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត t ។

256. (អន្តរជាតិ ១៩៦៨)

ចូរគណនា

$$\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+4}{2}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right\rfloor+\cdots$$

257. (សមភាពហ៊ែរមីត)

ចូរបង្ហាញថា បើ x ជាចំនួនពិត និង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

258. (អាមេរិច ១៩៨៥)

តើក្នុងចំណោម 1000 ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង តើមានប៉ុន្មានដែលអាចសរសេរជារាង $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor$ បាន?

259. (អាមេរិច ១៩៩១)

សន្មតថា r ជាចំនួនពិត ដែល

$$\left\lfloor r + \frac{19}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{20}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{21}{100} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor r + \frac{91}{100} \right\rfloor = 546$$

ចូរគណនា $\lfloor 100r \rfloor$ ។

260. ចូរកំណត់ចំនួនតួដែលមានតម្លៃខុសគ្នាក្នុងស្វ៊ីតខាងក្រោម

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2005} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2005} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2005^2}{2005} \right\rfloor$$

261. តាង $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \le 2n$ ជាចំនួនគត់ដែលពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃរាល់បណ្តា a_i ពីរៗមានតម្លៃធំជាង $2n$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a_1 > \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$$

262. តើមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល $(2+\sqrt{2})^n - \left\lfloor (2+\sqrt{2})^n \right\rfloor$ មានតម្លៃលើសពី 0,999 999 ឬទេ?

263. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n គេមាន $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$ ជាចំនួនសេស ។

264. គណនាចំនួនគត់ m ធំបំផុត ដែល 2^m ចែកដាច់ចំនួនគត់ $\left\lfloor (1+\sqrt{3})^n \right\rfloor$ ។

265. (JBMO សតលីស ២000)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n គេអាចរកបានចំនួនគត់ a និង b ដែល

$$n = \lfloor a\sqrt{2} \rfloor + \lfloor b\sqrt{3} \rfloor$$

ដែល $\lfloor x \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់នៃ x ។

សមីការឌីយ៉ូផង់

266. ចូរគណនាចំនួនគត់ x, y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $23x + 29y = 1$

267. គណនាចម្លើយសមីការឌីយ៉ូផង់ : $23x + 29y = 7$

268. តើមានចំនួនគត់ x, y ដែល $3456x + 246y = 73$ ឬទេ? ។

269. ចូររកចម្លើយជាចំនួនគត់ នៃសមីការ $3456x + 246y = 234$

270. ចូរបង្ហាញថា សមីការ $x^2 - y^2 = 1$ គ្មានឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមានទេ ។

271. សន្មតថា a, b, c ជាចំនួនគត់ ដែល $a^6 + 2b^6 = 4c^6$ ។ ចូរបង្ហាញថា $a = b = c = 0$ ។

272. គណនាចំនួនគត់ (a, b, c) ដែល $a^3 + 2b^3 = 4c^3$ ។

273. ចូរបង្ហាញថា សមភាព $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ អាចពិតចំពោះបណ្ដាចំនួនគត់ (x, y, z) តែករណី ដែល $x = y = z = 0$ ប៉ុណ្ណោះ ។

274. ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ដែល $x^2 - 5y^2 = 2$ ទេ ។

275. (អាមេរិច ១៩៧៩)

ចូរកំណត់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន $(n_1, n_2, \ldots, n_{14})$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោម

$$n_1^4 + n_2^4 + \cdots + n_{14}^4 = 1599$$

276. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនគត់

$$x^2 = 2 + 6y^2 + y^4$$

277. (JBMO សតលីស ២០០០)

ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ x, y, z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោមទេ

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 2000$$

278. (ភ្នំពេញ ២០១១)

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

$$x^2 + x + 503 = y^2$$

279. (ហុងគ្រី ១៩៩៧)

ចូរកំណត់ចម្លើយជាចំនួនគត់នៃសមីការ

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+\cdots+(x+7)^3=y^3$$

280. ចូរកំណត់ចំនួនគត់ x,y ដែល

$$x^2=y^5-4$$

281. ចូរកំណត់ចំនួនគត់ x,y,z ដែល $x^3+9y^3=3z^3$

282. (អ៊ីតាលី ១៩៩៤)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x,y ដែល

$$y^2=x^3+16$$

283. (អាយឡិន្ត ១៩៩៥)

ចូរកំណត់ចំនួនគត់ a ដើម្បីឱ្យសមីការ

$$x^2+axy+y^2=1$$

មានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុង $\mathbb{Z}$? ។

284. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x,y,z ដែល $x^2+y^2=7z^2$ ។

285. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានឬសូន្យ a,b,c,d ដែល

$$a^2+5b^2-2c^2-2cd-3d^2=0$$

286. (អន្តរជាតិ សតលីស ២០០៣)

ចូរកំណត់ចំនួនគត់ t តូចបំផុត ដែល គេមានចំនួនគត់ $x_1,\ldots,x_t$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x_1^3+\cdots+x_t^3=2002^{2002}$$

287. (តៃវ៉ាន់ ១៩៩៨)

តើសមីការខាងក្រោម

$$x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=xyzuv-65$$

ដែល x,y,z,u,v ជាចំនួនគត់ធំជាង 1998 មានឫសឬទេ? ។

288. (JBMO 2001)

ដោះស្រាយសមីការ $a^3+b^3+c^3=2001$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

289. (JBMO 2005)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$9\left(x^2+y^2+1\right)+2(3xy+2)=2005$$

290. (JBMO សតលីស ២០០០)

ចូរកំណត់គ្រប់ត្រីធាតុ (x,y,z) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល

$$xy+yz+zx-xyz=2$$

291. (អន្តរជាតិ ១៩៨១)

គណនាតម្លៃធំបំផុតរបស់ m^2+n^2 ដែលក្នុងនេះ m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $m,n\in\{1,2,3,\dots,1981\}$ និង $(n^2-mn-m^2)^2=1$ ។

292. ចូរបង្ហាញថា $m^5+3m^4n-5m^3n^2-15m^2n^3+4mn^4+12n^5$ មិនអាចស្មើ 33 ទេ ។

293. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y ដែល $x+y^2+z^3=xyz$ ដែល $\mathrm{z}=\mathrm{PGCD}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ ។

294. ទ្រឹស្តីបទ–ត្រីធាតុពីតាករ

តាង x,y,z ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលមានតួចែករួមធំបំផុតស្មើ 1 ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x^2+y^2=z^2$$

ចូរបង្ហាញថា x ឬក៏មិនអ៊ីចឹងទេ y ជាចំនួនគូ ។ ក្នុងករណីដែល x ជាចំនួនគូ ចូរបង្ហាញថា គេមានចំនួនគត់ m និង n ដែលបឋមនឹងគ្នា ហើយមានភាពគូសេសផ្ទុយគ្នា ដែល

$$x=2mn,y=m^2-n^2,z=m^2+n^2$$

295. ក) ចូរកំណត់ត្រីកោណកែងដែលមានរង្វាស់ជ្រុងជាចំនួនគត់ហើយមានក្រឡាផ្ទៃជាចំនួនការេ ។

ខ) ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y,z ដែល $x^4-y^4=z^2$ ។

296. ចូរបង្ហាញថា គ្មានត្រីធាតុនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ដែល $x^4+y^4=z^2$ ទេ ។

297. គណនាឫសសនិទាន x,y ដែល $x^2+y^2=1$ ។

298. ចូរកំណត់ចំនួនសនិទាន x និង y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+3y^2=1$ ។

299. (អាមេរិច AIME ២០១០)

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c និង d ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a>b>c>d$ និង

$$\begin{cases} a+b+c+d=2010 \\ a^2-b^2+c^2-d^2=2010 \end{cases}$$

គណនាចំនួនតម្លៃនៃ a ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ។

300. ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y,z ដែល

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

301. (ឥណ្ឌូនេស៊ី ២០១០)

តាង x,y,z ជាចំនួនគត់ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$\frac{2008}{41y^2}=\frac{2z}{2009}+\frac{2007}{2x^2}$$

ចូរគណនាតម្លៃធំបំផុត ដែល z អាចមាន ។

302. ក) ចូរកំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a,b,c ដែល

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

ខ) ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដើម្បីឱ្យគេអាចរកបាន n ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $x_1,x_2,\dots,x_n$ ដែល

$$1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2}$$

303. តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y ដែល $x^3=2^y+15$ ឬទេ?

304. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនគត់

$$2^n+1=x^2$$

305. ក) ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង a ដែល $5^n=a^2$ ។

ខ) ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង a ដែល $5^n=a^2-1$ ។

គ) ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង a ដែល $5^n=a^2-2$ ។

306. ចូរបង្ហាញថា គេមានត្រីធាតុសនិទានមិនគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ច្រើនរាប់មិនអស់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\{x^3\}+\{y^3\}=\{z^3\}$ ដែល $\{t\}=t-\lfloor t\rfloor$ និង $\lfloor t\rfloor$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុតដែលតូចជាងឬស្មើ t ។

307. (ហុងគ្រី ១៩៩៨)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y, z ដែល $z \geq 2$ និង

$$(x+1)^2 + \cdots + (x+99)^2 = y^z$$

308. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y ដែល $x^y = y^x$ ។

309. (រ៉ូម៉ានី ១៩៩៨)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x និង y ដែល

$$(x+1)(x+2)(x+3) + x(x+2)(x+3) + x(x+1)(x+3) + x(x+1)(x+2) = y^{2^x}$$

310. (រ៉ូម៉ានី ២០០០)

រកឫសគត់របស់សមីការ

$$9^x - 3^x = y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y$$

311. (លីថួនី ១៩៩៤)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m, n, k ដែល $k \geq 2$ និង

$$1! + 2! + 3! + \cdots + n! = m^k$$

312. តាង x, y, z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $2x^x + y^y = 3z^z$ ។

ចូរបង្ហាញថា $x = y = z$ ។

313. (ឥណ្ឌា ១៩៩៨)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y, n ដែល $PGCD(x, n+1) = 1$ និង

$$x^n + 1 = y^{n+1}$$

314. (អន្តរជាតិ ១៩៩៧)

ចូរកំណត់គ្រប់គូ (a, b) នៃចំនួនគត់ ដែល $a \geq 1, b \geq 1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$a^{b^2} = b^a$$

315. យើងពិនិត្យសមីការ

$$(a^a)^n = b^b \quad (*)$$

ក) ចំពោះចំនួនគត់ណាខ្លះនៃ n ដែលសមីការ (*) មានចម្លើយ (a, b) គត់ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a, b > 1$ ។

ខ) ដោះស្រាយសមីការ $(*)$ ចំពោះ $n = 5$ ។

316. តាង $\lfloor x\rfloor$ ជាផ្នែកគត់នៃ x ។ តើសមីការ
$$\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 4x\rfloor+\lfloor 8x\rfloor+\lfloor 16x\rfloor+\lfloor 32x\rfloor=12345$$
មានឫសឬទេ? ។

317. ដោះស្រាយសមីការ
$$\lfloor x^2-x-2\rfloor=\lfloor x\rfloor, x\in\mathbb{R}$$

318. ដោះស្រាយសមីការ
$$4x^2-40\lfloor x\rfloor+51=0, x\in\mathbb{R}$$

319. (អូស្ត្រាលី ១៩៩៩)

ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ
$$\begin{cases} x+\lfloor y\rfloor+\{z\}=200\\ \{x\}+y+\lfloor z\rfloor=190,1\\ \lfloor x\rfloor+\{y\}+z=178,8\end{cases}$$

320. តាង $0<a_1<a_2<\cdots<a_k\leq n$ ជាចំនួនគត់ ដែល $k>\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a_1+a_j=a_r$ មានចម្លើយ ។

321. (អន្តរជាតិ ១៩៨៤)

តាង a,b,c និង d ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស ដែល $a<b<c<d, ad=bc$ និង $a+d=2^k, b+c=2^m$ ដែល k,m ជាចំនួនគត់ពីរ ។ ចូរបង្ហាញថា $a=1$ ។

322. (អាយឡិន្ត ១៩៩៦)

តាង p ជាចំនួនបឋម និង a,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា បើ $2^p+3^p=a^n$ នោះ $n=1$ ។

323. ចូរកំណត់តម្លៃវិជ្ជមានតូចបំផុត នៃ 12^m-5^n ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m និង n ។

324. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p,q និង ចំនួនគត់ $r,s\geq 2$ ដែល $|p^r-q^s|=1$

325. តាង (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ពីរ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ស្វ៊ីត (a_n+b_n) និង (a_nb_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ ចូរបង្ហាញថា មានចំនួនថេរ c មួយដែលចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$ យើងមាន $a_n=c$ ឬ $b_n=c$ ។

326. តាង

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

ជាពហុធាដឺក្រេទី n ហើយមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។ បើ $a_0, a_n, f(1)$ សុទ្ធតែជាចំនួនសេស ចូរបង្ហាញថា $f(x) = 0$ គ្មានឫសជាចំនួនសនិទានទេ ។

327. ចូរបង្ហាញថា បើពហុធា $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ និង មានតម្លៃស្មើ 7 ត្រង់ 4 ចំនួនគត់ផ្សេងគ្នានៃ x នោះ គ្មានតម្លៃ x ណា ដែលពហុធានេះ មានតម្លៃស្មើ 14 ទេ ។

328. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៩១)

គណនាឫសគត់វិជ្ជមាន x, y, z របស់សមីការ $3^x + 4^y = 5^z$ ។

329. (JBMO 1998)

ចូរគណនាគ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x, y) ដែល

$$x^y = y^{x-y}$$

330. (JBMO 2009)

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន

1) $$2^x + 1 = 3^y$$

2) $$2^x - 1 = 3^y$$

3) $$2^a 3^b + 9 = c^2$$

តក្កវិទ្យា

1.▲ តាង N ចំនួនចាប់ដៃសរុប គឺក្រោយការចាប់ដៃគ្នាចប់សព្វគ្រប់ ។ ចំនួន N នេះត្រូវតែជាចំនួនគូ ព្រោះការចាប់ដៃនីមួយៗត្រូវមានមនុស្សពីរនាក់ចាប់ដៃគ្នាទៅវិញទៅមក ដូច្នេះ N ត្រូវកើនឡើងចំនួន 2 រាល់លើកដែលការចាប់ដៃរវាងមនុស្សពីរនាក់ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀតចំនួនចាប់ដៃសរុប N ស្មើនឹងផលបូកចំនួនដែលមនុស្សម្នាក់ៗបានចាប់ដៃ ។ តាង m ជាចំនួនមនុស្សដែលបានចាប់ដៃអ្នកដទៃចំនួនសេសដង (តាងចំនួនដងទាំងនោះដោយ $2k_i + 1, i = 1,2,\dots,m$) និង n ជាចំនួនមនុស្ស ដែលបានចាប់ដៃអ្នកដទៃចំនួនគូដង (តាងចំនួនដងនោះដោយ $2l_i, i = 1,2,..,n$) ។ ដូច្នេះ

$$
\begin{aligned}
N &= [(2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + .. + (2k_m + 1)] + [2l_1 + 2l_2 + \cdots + 2l_n] \\
&= 2(k_1 + k_2 + \cdots + k_m + l_1 + l_2 + \cdots + l_n) + m
\end{aligned}
$$

ដោយ N ជាចំនួនគូ នោះ m ត្រូវតែជាលេខគូដែរ ។

2. ▲ សន្មតថា មាន A មិនបានចាប់ដៃអ្នកផ្សេងឱ្យបានគ្រប់គ្នា ។ សន្មតថា A បានចាប់ដៃគេគ្រប់គ្នាលើកលែងតែជាមួយ B ហើយ B ចាប់ដៃជាមួយគេគ្រប់គ្នាលើកលែងតែ A ។ សន្មតថា អ្នកផ្សេងទៀតសុទ្ធតែបានចាប់ដៃគេបានគ្រប់គ្នាទាំងអស់ ។ ដូច្នេះអ្នកដែលមិនបានចាប់ដៃគេឱ្យបានគ្រប់គ្នា មានយ៉ាងហោចណាស់ពីរនាក់គឺ A និង B ហើយអ្នកដែលបានចាប់ដៃគេគ្រប់គ្នាទាំងអស់មានចំនួនយ៉ាងច្រើន $n - 2$ នាក់ ។

3. ▲ ដើម្បីឱ្យសេះដើរកាត់ក្តារអុក ដោយជាន់គ្រប់ក្រឡាទាំងអស់បាន ហើយជាន់ក្រឡានីមួយៗតែម្តង សេះត្រូវដើរចំនួន 63 ដង (ក្តារអុកមាន 64 ក្រឡា) ។ នៅពេលសេះដើរម្តងៗ វាលោតពីក្រឡាពណ៌ស ទៅខ្មៅ ឬខ្មៅទៅស ។ ដូច្នេះក្រោយពីសេះលោតបានចំនួនគូដង សេះលោតជាន់ក្រឡាមានពណ៌ដដែល ហើយបើសេះលោតបានចំនួនសេសដង សេះនឹងមកដល់ក្រឡាដែលមានពណ៌ខុសពីពណ៌ក្រឡាដែលវាចេញដំណើរ ។ ដោយចំនួនដង

ដែលសេះត្រូវលោតមាន 63 ដង ជាចំនួនសេស ; ក្រលាដែលសេះនៅពីដំបូងមានពណ៌ខ្មៅ និង ក្រលាដែលវាត្រូវទៅដល់ មានពណ៌ខ្មៅដែរ ដូច្នេះសេះមិនអាចដើរដូច្នេះបានទេ ព្រោះដើម្បីចេញដំណើរពីក្រលាពណ៌ខ្មៅទៅក្រលាពណ៌ខ្មៅដដែលវាត្រូវលោតចំនួនគូដង ។

4. ▲ ក) យើងចែកកាក់ជាបីក្រុម ៖ ពីរក្រុមមានកាក់២៧ក្នុងមួយក្រុម និងក្រុមមួយទៀតមានកាក់២៦ ។ ថ្លឹងលើកទីមួយ ៖ ដាក់ក្រុមមានកាក់២៧ទាំងពីរនេះ នៅលើថាសមួយម្នាក់ ។ បើថាសជញ្ជីងបះ នោះកាក់ក្លែងក្លាយឋិតនៅខាងថាសបះ ។ បើថាសអស់បះ នោះកាក់ក្លែងក្លាយឋិតនៅក្នុងចំណោមកាក់ទាំង២៦ ។ ក្នុងករណីទីមួយ យើងត្រូវថ្លឹងយ៉ាងច្រើនបីដងដើម្បីរកឱ្យឃើញកាក់ក្លែងក្លាយមួយពីក្នុងចំណោមកាក់ចំនួន២៧ ។ ករណីទីពីរ យើងត្រូវថ្លឹងយ៉ាងច្រើនបីដងដើម្បីរកឱ្យឃើញកាក់ក្លែងក្លាយមួយពីក្នុងចំណោមកាក់ចំនួន២៦ ។ តែករណីទីពីរនេះ យើងយកកាក់សុទ្ធមួយចេញពីក្រុមមានកាក់២៧(បើចូលករណីទីពីរនេះ មានន័យថា កាក់ទាំងអស់ក្នុងក្រុមមានកាក់២៧ទាំងពីរសុទ្ធតែជាកាក់សុទ្ធ) បោះចូលកាក់២៦ ដើម្បីបង្គ្រប់ជា២៧ ។ ដូច្នេះករណីណាក៏ដោយ ដំណោះស្រាយបន្ទាប់មកទៀតគឺ យើងត្រូវថ្លឹងយ៉ាងច្រើនបីដងដើម្បីរកឱ្យឃើញកាក់ក្លែងក្លាយមួយពីក្នុងចំណោមកាក់ចំនួន២៧ ។

ក្នុងចំណោមកាក់២៧ដែលត្រូវពិនិត្យនេះ យើងចែកវាជាបីក្រុម ដែលមួយក្រុមៗមានកាក់ចំនួន៩ ។ យើងថ្លឹងលើកទីពីរ ។ ដាក់កាក់ក្រុម១លើថាសមួយ កាក់ក្រុម២លើថាសមួយទៀត ។ បើថាសជញ្ជីងនៅស្មើ នោះកាក់ក្លែងក្លាយនៅក្រុមទីបី ។ បើថាសជញ្ជីងបះ នោះកាក់ក្លែងក្លាយនៅលើថាសដែលបះ ។

បន្ទាប់មកទៀត យើងពិនិត្យក្រុមដែលមានកាក់ចំនួន៩ មានកាក់មួយក្លែងក្លាយនោះ ។ យើងចែកវាជាបីក្រុមទៀត ដែលក្រុមនីមួយៗមានកាក់បី ។ យើងថ្លឹងលើកទីបីម្ដងទៀត យើងទាញបានក្រុមដែលមានកាក់ក្លែងក្លាយ ។

នៅពេលថ្លឹងលើកទីបួន យើងមានកាក់ចំនួនបី ដែលត្រូវពិនិត្យ ។ ដាក់កាក់មួយលើថាសមួយ និង កាក់មួយទៀតលើថាសមួយទៀត ។ បើថាសជញ្ជីងអត់បះ នោះកាក់នៅសល់ជាកាក់ក្លែងក្លាយ ។ បើថាសជញ្ជីងបះ នោះកាក់ក្លែងក្លាយនៅខាងថាសបះ ។

ខ) តាង k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព $3^k \geq n$ និង $3^{k-1} < n$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថាចំនួនគត់ k បែបនេះផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌរបស់សំនួរ ។

ដំបូងយើងបង្ហាញថាយើងថ្លឹងយ៉ាងច្រើនត្រឹម k ដង នោះគ្រប់គ្រាន់នឹងដឹងថាកាក់មួយណាក្លែងក្លាយហើយ ។ យើងចែកកាក់ជាបីក្រុម ដែលពីរក្រុមៗ មានកាក់ចំនួន $3^{\mathrm{k}-1}$ ក្នុងមួយក្រុម និង ក្រុមមួយទៀតមានកាក់នៅសល់ទាំងអស់ ។ ក្រុមទីបីមានកាក់មិនលើសពី $3^{\mathrm{k}-1}$ ទេ ព្រោះ $\mathrm{n} \leq 3^{\mathrm{k}}$ ។ យើងថ្លឹងកាក់ក្រុមទីមួយជាមួយកាក់ក្រុមទីពីរ ព្រោះវាមានចំនួនស្មើគ្នា ។ បើថាសជញ្ជីងបះខាងណា ខាងនោះមានកាក់ក្លែងក្លាយ ។ បើថាសជញ្ជីងអត់បះ នោះកាក់ក្លែងក្លាយឋិតនៅក្នុងចំណោមកាក់ក្នុងក្រុមទីបី ។ ករណីទីពីរនេះ យើងដកយកកាក់ពីក្រុមទីមួយឬទីពីរមកបង្គ្រប់កាក់ក្រុមទីបីឱ្យមានចំនួន $3^{\mathrm{k}-1}$ ដូចគេដែរ ។ ដូច្នេះទាំងករណីទីមួយនិងទីពីរ ជំហានបន្ទាប់មកទៀតគឺរកកាក់ក្លែងក្លាយមួយក្នុងចំណោមកាក់ចំនួន $3^{\mathrm{k}-1}$ ។ កាក់ចំនួន $3^{\mathrm{k}-1}$ យើងចែកជាបីក្រុម យើងទាញបានមួយក្រុមៗមានកាក់ចំនួន $3^{\mathrm{k}-2}$ ។ យើងថ្លឹងពីរក្រុម យើងទាញបានក្រុមមួយមានកាក់ក្លែងក្លាយក្នុងចំណោមក្រុមទាំងបី ។ យើងបន្តចែកកាក់ជាបីក្រុមរួចថ្លឹងបែបនេះបន្តបន្ទាប់ ទីបំផុតដោយថ្លឹងចំនួន k ដង យើងរកឃើញកាក់ក្លែងក្លាយ ។

ពេលនេះយើងនឹងបង្ហាញថា k ជាចំនួនដងតិចបំផុតដែលគេត្រូវថ្លឹងដើម្បីរកឱ្យឃើញកាក់ក្លែងក្លាយ ។ គួរកត់សម្គាល់ថា ពេលខ្លះជាចៃដន្យ យើងអាចថ្លឹងតិចដងជាងនេះតែអាចរកឃើញកាក់ក្លែងក្លាយ ។ ឧទាហរណ៍ យើងចាប់យកកាក់ពីរមកថ្លឹង ដោយចៃដន្យចាប់ចំកាក់ក្លែងក្លាយមួយ ។ ដូច្នេះថ្លឹងតែម្តង យើងរកឃើញកាក់ក្លែងក្លាយនោះ ។ តែក្នុងជំណោះ

ស្រាយនេះ យើងនិយាយអំពីរបៀបទូទៅដែលមិនផ្អែកលើភាពចៃដន់ ដែលមានភាពប្រាកដប្រជាថានឹងរកឃើញកាក់ក្លែងក្លាយ ។

ពេលនេះយើងចែកកាក់ជាបីក្រុមស្មើ កាក់នៅសល់ដាក់ចូលក្រុមទីបី (ឧទាហរណ៍ បើកាក់មាន៧ នោះ ៧ ចែកជាបី $7 = 2 \times 3 + 1$: ក្រុមទីមួយនិងទីពីរមានកាក់ចំនួនពីរ និងក្រុមទីបីមានកាក់ចំនួនបី) ។ ដូច្នេះក្រុមទីបីជាក្រុមដែលមានកាក់ច្រើនជាងគេ ។ យើងដាក់កាក់ក្រុមទីមួយលើថាសមួយ និងកាក់ក្រុមទីពីរលើថាសមួយទៀត ដើម្បីថ្លឹងគ្នា ។ បើថាសជញ្ជីងអត់បះ នោះកាក់ក្លែងក្លាយនៅក្នុងក្រុមទីបី ។ បើថាសបះ នោះកាក់ក្លែងក្លាយនៅខាងថាសដែលបះនោះ ។

សន្មតថារាល់ពេលថ្លឹងម្តងៗ យើងជួបតែករណីមិនប្រកបបំផុត មានន័យថា កាក់ក្លែងក្លាយឋិតនៅក្នុងចំណោមក្រុមដែលមានកាក់ច្រើនជាងគេរហូត គឺក្រុមទីបី ។ ដូច្នេះបន្ទាប់ពីថ្លឹងម្តងៗ កាក់ក្លែងក្លាយឋិតនៅក្នុងក្រុមទីបីដែលមានចំនួនកាក់មិនតិចជាង 1/3 នៃកាក់សរុបទេ (បន្ទាប់ពីចែកជាបីក្រុម ត្រូវតែមានក្រុមមួយមានកាក់មិនតិចជាង 1/3 ព្រោះបើតិចជាង 1/3 ទាំងបីក្រុម នោះសរុបចូលគ្នាវិញបានកាក់តិចជាងកាក់សរុប) ។

ដូច្នេះបន្ទាប់ពីថ្លឹងលើកទីមួយ កាក់ក្លែងក្លាយឋិតក្នុងចំណោមកាក់ក្រុមទីបីដែលមានចំនួនមិនតិចជាង $n/3$ ។ បន្ទាប់ពីថ្លឹងលើកទី 2 កាក់ក្លែងក្លាយឋិតក្នុងចំណោមកាក់ក្រុមទីបីដែលមានចំនួនមិនតិចជាង $n/3^2$ ។ បន្ទាប់ពីថ្លឹងលើកទី 3 កាក់ក្លែងក្លាយឋិតក្នុងចំណោមកាក់ក្រុមទីបីដែលមានចំនួនមិនតិចជាង $n/3^3$ ។ ... ។ បន្ទាប់ពីថ្លឹងលើកទី $k-1$ កាក់ក្លែងក្លាយឋិតក្នុងចំណោមកាក់ក្រុមទីបីដែលមានចំនួនមិនតិចជាង $n/3^{k-1}$ ។ តែដោយ $n > 3^{k-1}$ នោះ $n/3^{k-1} > 1$ នោះ មិនអាចរកឃើញកាក់ក្លែងក្លាយដោយថ្លឹងចំនួន $k-1$ ដងនោះទេ ។

5. ▲យើងផ្គូលោហៈទាំង២០ដុំជា១០គូ ។ យកលោហៈគូទីមួយ មកដាក់នៅលើថាសជញ្ជីងម្ខាងម្នាក់ មួយដុំនៅលើថាសមួយ មួយដុំទៀតនៅលើថាសមួយទៀត ។ យើងអាចមានពីរករណី ៖

នៅពេលថ្លឹងលើកទីមួយនេះ ថាសជញ្ជីងបានបះ ។ ក្នុងករណីនេះលោហៈនៅខាងថាសបះជាអាលុយមីញ៉ូម ហើយមួយទៀតជាដែកឧយ៉ា ។ ពេលនេះយើងដាក់លោហៈទាំងពីរដុំរបស់គូទី១លើថាសតែម្ខាង រួចយកលោហៈធាតុពីរដុំក្នុងគូទី២មកដាក់នៅលើថាសម្ខាងទៀត ។ បើថាសជញ្ជីងមិនបះ នោះគូទី២ មានឧយ៉ាមួយដុំ និងអាលុយមីញ៉ូមមួយដុំ ។ តែបើថាសថ្មីបះ នោះគូទី២ មានអាលុយមីញ៉ូមពីរដុំ ។ បើថាសថ្មីធ្លាក់ចុះ នោះគូទី២មានឧយ៉ាពីរដុំ ។ យើងយកលោហៈធាតុគូទី២ នេះទៅទុកម្ខុំ រួចយកលោហៈធាតុគូទី៣មកថ្លឹងតាមរបៀបដូចមុន គឺយកលោហៈធាតុគូទី៣នេះមកដាក់លើថាសថ្មីតែមួយជាមួយគ្នា និងលោហៈធាតុគូទី១ នៅលើថាសម្ខាងទៀត ។ ដូច្នេះយើងធ្វើរបៀបនេះយ៉ាងច្រើន១០ដង នោះយើងនឹងកំណត់បានថាអាលុយមីញ៉ូមមានប៉ុន្មានដុំ ។

នៅពេលថ្លឹងលើកទីមួយនេះ ថាសជញ្ជីងនៅស្មើ ។ ក្នុងករណីនេះលោហៈក្នុងគូទី១ អាចជាអាលុយមីញ៉ូមទាំងពីរដុំ ឬឧយ៉ាទាំងពីរដុំ ។ យើងយកលោហៈគូទី១នេះមកដាក់នៅលើថាសម្ខាង រួចយកលោហៈគូទី២ មកដាក់នៅលើថាសម្ខាងទៀត ។ សន្មតថាថាសជញ្ជីងនៅស្មើរហូតដល់គូទី k ($2 \leq k \leq 10$ ដោយយើងប្រៀបធៀបគូទី $2,3,4,\ldots$ ជាមួយគូទី ១)ហើយគូទី $(k+1)$ ថាសជញ្ជីងបានបះ ។ បើ $k = 10$ នោះមានន័យថា លោហៈទាំងអស់សុទ្ធតែជាអាលុយមីញ៉ូម គ្មានដែកឧយ៉ាទេ ។ សន្មតថា គូទី $(k+1)$ ធ្ងន់ជាងគូទី 1 (យើងបកស្រាយដូចគ្នាករណីវាស្រាលជាង) ។ ដូច្នេះគូទី $1,2,\ldots,k$ សុទ្ធតែជាអាលុយមីញ៉ូម ហើយយើងថ្លឹងបាន $1+(k+1-1)=k+1$ ដងរួចមកហើយ ។ ពេលនេះយើងប្រៀបធៀបដុំលោហៈធាតុគូទី$(k+1)$ នេះ ដោយថ្លឹងលើកទី $(k+1)+1=k+2$ ។ បើលោហៈធាតុទាំងពីរដុំមានទម្ងន់ស្មើគ្នា នោះលោហៈធាតុទាំងពីរដុំនេះជាឧយ៉ា ។ បើ

មានទម្ងន់មិនស្មើគ្នាទេ នោះមានមួយដុំជាឧយ៉រ៉ា និងមួយដុំទៀតជាអាលុយមីញ៉ូម ។ ដូច្នេះបន្ទាប់ពីថ្លឹងលើកទី $(k+2)$ នេះរួចមក យើងអាចជ្រើសរើសយកលោហៈធាតុពីរដុំដែលមួយដុំជាឧយ៉រ៉ា និងមួយដុំទៀតជាអាលុយមីញ៉ូម ។ ចំនួនដងច្រើនបំផុតនៅសល់ដែលអាចថ្លឹងបានមាន $11-(k+2)=9-k$ និងចំនួនដុំលោហៈនៅសល់មាន $20-2(k+1)=18-2k$ ត្រូវជា $9-k$ គូ ។ ដោយប្រើបច្ចេកទេសថ្លឹងដូចក្នុងករណីទីមួយ <<*នៅពេលថ្លឹងលើកទីមួយនេះ ជាសជញ្ជីងបានបះ*>> នោះយើងត្រូវថ្លឹងតែ $9-k$ ដងទៀតប៉ុណ្ណោះ ដូច្នេះត្រឹមត្រូវតាមការកំណត់ ។

6. ▲ បើ A និង B ឋិតនៅក្នុងជួរបណ្តោយតែមួយ នោះ B ខ្ពស់ជាង A ព្រោះ B ខ្ពស់ជាងគេក្នុងជួរបណ្តោយ ។ បើ A និង B ឋិតនៅក្នុងជួរទទឹងតែមួយ នោះ B ខ្ពស់ជាង A ព្រោះ A ទាបជាងគេក្នុងជួរទទឹង ។ បើ A និង B នៅក្នុងជួរទាំងបណ្តោយនិងទទឹងផ្សេងគ្នា យើងតាង C ជាសិស្សនៅជួរទទឹងជាមួយ A និងនៅក្នុងជួរបណ្តោយជាមួយ B ។ យើងមាន B ខ្ពស់ជាង C ព្រោះ B ខ្ពស់ជាងគេក្នុងជួរបណ្តោយ និង C ខ្ពស់ជាង A ព្រោះ A ទាបជាងគេក្នុងជួរទទឹង ។ ដូច្នេះគ្រប់ករណីទាំងអស់ B ខ្ពស់ជាង A ។

7. ▲ ចាប់ពីជួរដេកទីបី យើងសរសេរលេខក្នុងត្រីកោណដែលឱ្យមកឡើងវិញ ដោយក្នុងជួរដេកនីមួយៗ យើងទុកតែលេខបួនដំបូងគេ ហើយបើលេខណាគូ យើងជំនួសដោយអក្សរ p និង បើលេខណាសេស យើងជំនួសដោយអក្សរ i ។ យើងទាញបាន

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & i & p & i & p \\
 & & & & & i & i & p & i & \\
 & & & & i & p & p & p & & \\
 & & & i & i & i & p & & & \\
 & & i & p & i & p & & & & \\
 & . & . & . & . & & & & & \\
. & . & . & . & & & & & &
\end{array}$$

យើងដឹងលេខក្នុងប្រលោះណាមួយស្មើនឹងផលបូកលេខបីទៀតនៅខាងលើវា ។ ភាពគូសេសរបស់ចំនួននេះអាស្រ័យនឹងភាពគូសេសរបស់ចំនួនទាំងបី ។ បើចំនួនទាំងបីជាចំនួនគូឬមានមួយគូពីរទៀតសេស នោះបូកចូលគ្នាយើងទាញបានចំនួនគូ ។ បើចំនួនទាំងបីមានមួយសេសពីរទៀតគូ ឬ សេសទាំងបី នោះបូកចូលគ្នាយើងទាញបានចំនួនសេស ។ ដូច្នេះលក្ខណៈគូសេសរបស់ចំនួនបិតនៅក្នុងប្រលោះណាមួយនោះ អាស្រ័យតែនឹងលក្ខណៈគូសេសរបស់ចំនួនដែលនៅខាងលើវាតែប៉ុណ្ណោះ ។ ឧទាហរណ៍លេខ 6 ក្នុងជួរដេកទី៤ កំណត់ដោយ $6 = 1 + 2 + 3$ ឬ គូ=សេស+គូ+សេស ។ ដូច្នេះ ភាពគូសេសក្នុងជួរដេកទីពីរកំណត់ដោយភាពគូសេក្នុងជួរដេកទីមួយ ; ភាពគូសេសក្នុងជួរដេកទីបីកំណត់ដោយភាពគូសេក្នុងជួរដេកទីពីរ ; ភាពគូសេសក្នុងជួរដេកទីបួនកំណត់ដោយភាពគូសេក្នុងជួរដេកទីបី; ... ។

ក្នុងតារាងថ្មី យើងឃើញថា ភាពគូសេសក្នុងជួរដេកទីប្រាំ ដូចគ្នានឹងភាពគូសេសក្នុងជួរដេកទីមួយ ។ ដូច្នេះភាពគូសេសក្នុងជួរដេកទី៦ ត្រូវតែដូចគ្នានឹងភាពគូសេសក្នុងជួរដេកទី២; ភាពគូសេសក្នុងជួរដេកទី៧ ត្រូវតែដូចគ្នានឹងភាពគូសេសក្នុងជួរដេកទី៣;... ។ ដូច្នេះភាពគូសេសក្នុងជួរដេកនីមួយៗលេចឡើងជាខួបបួនជួរម្តង ។ ដោយជួរដេក៤ដំបូង សុទ្ធតែចំនួនគូមួយ នោះគ្រប់ជួរដេកទាំងអស់ត្រូវតែមានចំនួនគូមួយយ៉ាងតិច ។

8. ▲ តាង n ជាចំនួនដូងដែលនាយសំពៅម្នាក់ៗទទួលបានបន្ថែមនៅពេលចែកដូងគ្នានាពេលព្រឹកឡើង ។ ដូច្នេះគំនរដូងនៅពេលព្រឹកនោះមានដូងចំនួន $5n + 1$ ។ តាង p_5 ជាចំនួនដូងដែលនាយទីប្រាំបានដកយកកាលពីយប់ ។ មុននាយទីប្រាំបោះដូងមួយឱ្យស្វា និងដកយកចំណែករបស់គាត់ (គឺក្រោយនាយទីបួនទទួលយកចំណែករបស់គាត់រួចហើយ) ដូងត្រូវមានចំនួន $5p_5 + 1$ ។ គាត់បានយក 1 បោះឱ្យស្វាស៊ី រួចចែកជាប្រាំ និងដកយកចំណែករបស់គាត់មួយចំណែក ដូច្នេះដូងនៅសល់ចំនួន $4p_5$ ។ ដូច្នេះដូងចំនួន $4p_5$ ដែលនៅសល់នេះ ជាដូងដែលនាយទីប្រាំបានគ្រោងសម្រាប់នាយបួននាក់ទៀតចែកគ្នាស្មើ

ដោយម្នាក់ៗទទួលបានដូងចំនួន p_5 ដូចគាត់ដែរ ។ ដូច្នេះ $4p_5 = 5n + 1$ ។ ដូច្នេះនាយទីប្រាំទទួលបានដូងចំនួន $p_5 = \frac{5n+1}{4}$ កាលពីយប់ និង $5p_5 + 1 = 5\frac{5n+1}{4} + 1 = \frac{25n+9}{4}$ ។ តាង p_4 ជាចំនួនដូងដែលនាយទីបួនបានដកយកកាលពីយប់ ។ ដូច្នេះមុននាយទីបួនបោះដូងមួយឱ្យស្វា ដូងមានចំនួន $5p_4 + 1$ ។ បន្ទាប់ពីនាយទីបួនដកដូងមួយបោះឱ្យសត្វស្វាស៊ី រួចយកចំណែករបស់គាត់ទៅទុក ដូងនៅសល់ចំនួន $4p_4$ ដែល $4p_4 = \frac{25n+9}{4}$ ។ ដូច្នេះ $p_4 = \frac{25n+9}{16}$ និង $5p_4 + 1 = \frac{125n+61}{16}$ ។ តាង p_3 ជាចំនួនដូងដែលនាយទីបីបានដកយកកាលពីយប់ ។ ដូច្នេះមុននាយទីបីបោះដូងមួយឱ្យស្វា ដូងមានចំនួន $5p_3 + 1$ ។ បន្ទាប់ពីនាយទីបីដកដូងមួយបោះឱ្យសត្វស្វាស៊ី រួចយកចំណែករបស់គាត់ទៅទុក ដូងនៅសល់ចំនួន $4p_3$ ដែល $4p_3 = \frac{125n+61}{16}$ ។ ដូច្នេះ $p_3 = \frac{125n+61}{64}$ និង $5p_3 + 1 = \frac{625n+369}{64}$ ។ តាង p_2 ជាចំនួនដូងដែលនាយទីពីរបានដកយកកាលពីយប់ ។ ដូច្នេះមុននាយទីពីរបោះដូងមួយឱ្យស្វា ដូងមានចំនួន $5p_2 + 1$ ។ បន្ទាប់ពីនាយទីពីរដកដូងមួយបោះឱ្យសត្វស្វាស៊ី រួចយកចំណែករបស់គាត់ទៅទុក ដូងនៅសល់ចំនួន $4p_2$ ដែល $4p_2 = \frac{625n+369}{64}$ ។ ដូច្នេះ $p_2 = \frac{625n+369}{256}$ និង $5p_2 + 1 = \frac{3125n+2101}{256}$ ។ តាង p_1 ជាចំនួនដូងដែលនាយទីមួយបានដកយកកាលពីយប់ ។ ដូច្នេះមុននាយទីមួយបោះដូងមួយឱ្យស្វា ដូងមានចំនួន $5p_1 + 1$ ។ បន្ទាប់ពីនាយទីមួយដកដូងមួយបោះឱ្យសត្វស្វាស៊ី រួចយកចំណែករបស់គាត់ទៅទុក ដូងនៅសល់ចំនួន $4p_1$ ដែល $4p_1 = \frac{3125n+2101}{256}$ ។ ដូច្នេះ $p_1 = \frac{3125n+2101}{1024}$ និង $5p_1 + 1 = \frac{15625n+11529}{1024}$ ។ ដូច្នេះជាសរុបពីដំបូងដូងក្នុងគំនរនោះមានចំនួន

$$N = \frac{15625n + 11529}{1024} = 15n + 11 + \frac{265n + 265}{1024}$$

ដោយ N ជាចំនួនគត់ នោះ $265n + 265 = 265(n + 1)$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 1024 ។ ដោយ 265 បឋមនឹង 1024 នោះ $n + 1$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 1024 ។ n តូចបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនេះ គឺ $n + 1 = 1024 \Rightarrow n = 1023$ ។ ដូច្នេះជាសរុបផ្លែដូងមានចំនួន

$$N = 15(1023) + 11 + 265 = 15621$$

9. ▲ តាង n ជាចំនួនចៀមសរុប ។ ដូច្នេះចៀមមួយក្បាលថ្លៃ n រៀល ។ ពេលលក់ចៀមអស់ពួកគេទទួលបានលុយ $N = n.n = n^2$ រៀល ។ តាង $n = 10d + e$ ដែល d ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង $0 \leq e \leq 9$ ។ ដូច្នេះ

$$N = (10d + e)^2 = 100d^2 + 20de + e^2$$

គេចែកលុយម្តង ១០រៀល ហើយដោយបងប្រុសទទួលបាន១០រៀលលើសប្អូនមួយដង នោះមានន័យថា N អាចចែកជា 10 បានចំនួនសេសដង ហើយនៅសល់លុយខ្លះទៀតតិចជាង 10 រៀល ។ យើងមាន $100d^2 + 20de = 20d(5d + e)$ ចែកនឹង 10 បាន 10 ចំនួនគូដង ។ ដូច្នេះ e^2 ត្រូវតែចែកនឹង 10 បាន 10 ចំនួនសេសដង ។ ដោយ $e < 10$ នោះតម្លៃដែលអាចមាននៃ e^2 មាន $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64$ និង 81 (ចំពោះ $e = 1,2,3, \ldots, 9$) ។ ក្នុងចំណោមតម្លៃទាំងនេះ 1,4,9 ចែកនឹង 10 បាន 10 ចំនួនសូន្យដង មិនយក; $25, 49, 64, 81$ ចែកនឹង 10 បាន 10 ចំនួន $2, 4, 6, 8$ ដង មិនយកព្រោះគូដង ។ ដូច្នេះ មានតែ $e^2 = 16$ ឬ 36 ប៉ុណ្ណោះ ដែលត្រូវយកមកពិចារណាបន្ត ។ ក្នុងករណីទាំងពីរ សំណល់ក្រោយចែកនឹង 10 សល់សំណល់ 6 ទាំងពីរ ។ ដូច្នេះប្អូនប្រុសទទួលបានលុយ 6 រៀល ក្នុងពេលដែលបងប្រុសទទួលបាន 10 រៀល ។ ដូច្នេះមានន័យថាបងប្រុសបានលើសប្អូន 4 រៀល ។ ដើម្បីឱ្យចំណែកស្មើគ្នា លើកចុងក្រោយនេះពួកគេត្រូវបាន 8 រៀលម្នាក់ ។ ដូច្នេះមានន័យថា បងប្រុសត្រូវឱ្យទៅប្អូន 2 រៀលវិញ ។ ដូច្នេះ 2 រៀលនោះជាតម្លៃកាំបិតដែលបងបានឱ្យទៅប្អូននោះ * ។ សម្គាល់ ៖ ប្រយ័ត្នកុំច្រលំ កាំបិតនេះ មិនមែនថ្លៃ 4 រៀលទេ ។ ឧបមាថាបើចុងក្រោយ បងដកលុយ 4 រៀលទៅឱ្យប្អូន នោះប្អូនបាន 10 រៀលដូចបងដែរ តែលុយ 4 រៀល ដែលបងដកឱ្យប្អូននេះ មិនមែនលុយរួមទេ មានន័យថា បងខាត 4 រៀលទទេ ។

10. ▲គូបដែលគ្មានលាបពណ៌សោះ ឋិតនៅខាងក្នុង ហើយបង្កើតបានជាគូប $8 \times 8 \times 8$ ។ ដូច្នេះ ចំនួនគូបដែលមានមុខយ៉ាងហោចណាស់មួយត្រូវបានលាបពណ៌ មានចំនួន $10^3 - 8^3 = 488$ ។

11. ▲ ផលបូកនៃបណ្តាចំនួនក្នុងស៊ីតដែលឱ្យ ស្មើនឹង

$$\frac{1}{2}\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots, + \binom{n}{n-1}\right] = \frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$$

ជាចំនួនសេស ដូច្នេះវាមានគូសេសចំនួនសេសដង ។

12. ▲បើ s ជាស្វ័យគុណគោល២ នោះសំណើពិត ដោយមិនចាំបាច់ស្រាយបញ្ជាក់ ។ បើ s មិនមែនជាស្វ័យគុណគោល២ នោះវាត្រូវនៅចន្លោះ ស្វ័យគុណគោល២ ពីរតរៀងគ្នា មានន័យថា $2^r < s < 2^{r+1}$ ។ នាំឱ្យ $2^{r+1} < 2s$ នាំឱ្យ $s < 2^{r+1} < 2s$ មានន័យថាមានចំនួនស្វ័យគុណគោល២ នៅចន្លោះ $[s, 2s]$ (ស្មើនឹង 2^{r+1}) ។

13. ▲យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារដោយកំណើន ។

ដោយសារ M ជាសំណុំមិនទទេនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ M មានធាតុដែលតូចបំផុត តាងដោយ a ។ តាមសម្មតិកម្ម $\lfloor\sqrt{a}\rfloor$ ជាធាតុរបស់ M តែ $\lfloor\sqrt{a}\rfloor \le \sqrt{a} \le a$ តែ a ជាធាតុតូចជាងគេ ដូច្នេះ ទាល់តែ $a = 1$ ។ មានន័យថា 1 ជាធាតុមួយរបស់ M ។

ដោយ 1 ជាធាតុមួយរបស់ M នោះ 4 ក៏ជាធាតុរបស់ M ដែរ ហើយដូចគ្នាដែរ $4.4 = 4^2$ ។ល។ ដូច្នេះ គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលមានរាង $4^n = 2^{2n}, n = 1,2,\ldots$ ជាធាតុរបស់ M ។ បន្ទាប់មកទៀត $\lfloor\sqrt{2^{2n}}\rfloor = 2^n$ ក៏ជាធាតុរបស់ M ដែរ មានន័យថា គ្រប់ចំនួនស្វ័យគុណគោល២ទាំងអស់សុទ្ធតែជាធាតុរបស់ M ។

ឥឡូវយើងសន្មតថា មាន $n \in \mathbb{N}$ មួយដែលមិនមែនជាធាតុរបស់ M ។ ដូច្នេះ n មិនមែនជាស្វ័យគុណគោល២ ទេ ។ ដោយ $n \notin M$ នោះ គ្មានចំនួនគត់ណាមួយ នៅចន្លោះ $A_1 = [n^2, (n+1)^2)$ ដែលជាធាតុរបស់ M ទេ ព្រោះ $\forall y \in A_1$ គេមាន $\lfloor\sqrt{y}\rfloor = n$

ដែល $n \notin M$ ដូច្នេះ $\lfloor\sqrt{y}\rfloor \notin M$ $y \notin M$ (ព្រោះ បើ $y \in M$ នោះ $\lfloor\sqrt{y}\rfloor$ ក៏ជាធាតុរបស់ M ដែរ) ។

ដូចគ្នាដែរ ចំពោះ $A_2 = [n^4, (n+1)^4)$ គ្មានចំនួនគត់ $z \in A_2$ ណាមួយជាធាតុរបស់ M ទេ ព្រោះ បើ $n^4 \le z < (n+1)^4 \Rightarrow n^2 \le \sqrt{z} < (n+1)^2 \Rightarrow n^2 \le \lfloor\sqrt{z}\rfloor < (n+1)^2$; $\lfloor\sqrt{z}\rfloor \in A_1$ ។ ដោយ $\lfloor\sqrt{z}\rfloor \in A_1$ នោះ $\lfloor\sqrt{z}\rfloor$ មិនមែនជាធាតុរបស់ $M \Rightarrow z$ មិនមែនជាធាតុរបស់ M ដែរ ។

តាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបានថា គ្មានធាតុណាមួយ ដែលឋិតនៅចន្លោះ $A_r = \left[n^{2^r}, (n+1)^{2^r}\right)$ ជាធាតុរបស់ M ទេ ។

បន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងបង្ហាញថា ចន្លោះនេះធំណាស់ដែលត្រូវតែមានចំនួនស្វ័យគុណគោល២ នៅក្នុងនោះ ។ បើដូច្នេះមែន នោះវាផ្ទុយពីការសន្មតដែលថា គ្មានធាតុណាមួយរបស់ A_r ដែលជាធាតុរបស់ M នោះទេ ។

អនុគមន៍ $f(x) = \log_2 x$ ជាអនុគមន៍កើន ចំពោះ $x \in \mathbb{R}^+$ ។ ដូច្នេះ $\log_2(n+1) - \log_2 n > 0$ ។ ដោយអនុគមន៍ $f(x) = 2^{-x}$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\mathbb{R}$ នោះ គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមានធំគ្រប់គ្រាន់ k មួយ ដែល

$$2^{-k} < \log_2(n+1) - \log_2 n \Rightarrow (n+1)^{2^k} > 2n^{2^k}$$

$\Rightarrow \left[n^{2^k}, 2n^{2^k}\right] \subset \left[n^{2^k}, (n+1)^{2^k}\right)$ ។ តែគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន s ចន្លោះ $[s, 2s]$ សុទ្ធតែមានចំនួនស្វ័យគុណគោល២ ជានិច្ច ។ ដូច្នេះ ត្រូវតែមានចំនួនស្វ័យគុណគោលពីរដែលជាធាតុរបស់ $A_r = \left[n^{2^k}, (n+1)^{2^k}\right)$ ។ ដោយចំនួនស្វ័យគុណគោលពីរជាធាតុរបស់ M នោះ យើងទាញបានភាពផ្ទុយនឹងការឧបមាដែលយើងចង់បាន ។ ដូច្នេះសំណើពិត ។៕

14. ▲ចែក $\{1,2,\ldots,126\}$ ជាសំណុំប្រាំមួយ

$$\{1,2\};\{3,4,5,6\};\{7,\ldots,14\},\{15,\ldots,30\},\{31,\ldots,62\} \text{ និង } \{63,\ldots,126\}$$

សំណុំទាំងប្រាំមួយនេះមានលក្ខណៈពិសេសត្រង់ បើចំនួនគត់ពីរឋិតក្នុងសំណុំតែមួយនោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $b < a \leq 2b$ ។ *ឧទាហរណ៍* $\{1,2\} \in \{1,2\}$ *យើងមាន* $1 < 2 \leq 2.1$ ។ *ឧទាហរណ៍* $3,5 \in \{3,4,5,6\}$ *យើងមាន* $3 < 5 < 2.3$ ។ *ឧទាហរណ៍* $8,13 \in \{7,\dots,14\}$ *យើងមាន* $8 < 13 < 2.8 = 16$ ។ *សំណុំខ្លះដូចជា* $\{3,4,5,6,7\}$ *គ្មានលក្ខណៈពិសេសបែបនេះទេ ព្រោះបើយើងយកចំនួនគត់ពីរមាន* 3,7 *យើងទាញបាន* $3 < 2.3 = 6 < 7$ ។

យើងត្រូវជ្រើសរើសយកចំនួនគត់ប្រាំពីរស្រេចតែចិត្ត ចេញពីសំណុំទាំងប្រាំមួយខាងលើ ។ តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប ត្រូវតែមានចំនួនគត់ពីរក្នុងចំណោមចំនួនគត់ទាំងប្រាំពីរនោះដែលឋិតនៅក្នុងសំណុំតែមួយក្នុងចំណោមសំណុំទាំងប្រាំមួយខាងលើ ។ ដូច្នេះ ចំនួនគត់ពីរនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ $b < a \leq 2b$ ។

ឧទាហរណ៍ យើងជ្រើសរើសស្រេចតែចិត្ត ឧទាហរណ៍សំណុំមួយយើងយកចំនួនគត់មួយ ចំនួនប្រាំមួយដំបូងមាន 1,4,7,15,31,63 *ហើយចំនួនមួយទៀតដើម្បីគ្រប់ប្រាំពីរឧទាហរណ៍យកលេខ* 5 ។ *យើងទាញបាន* 4 *និង* 5 *ឋិតក្នុងសំណុំតែមួយហើយវាផ្ទៀងផ្ទាត់* $4 < 5 < 2.4 = 8$ ។

15. ▲ តាង $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ ជាចំនួនទាំង 5 ដែលគេជ្រើសរើស ។ យើងមាន

$$a_2 - a_1 \geq 2;\ a_3 - a_2 \geq 2;\ a_4 - a_3 \geq 2;\ a_5 - a_4 \geq 2$$

តាង $b_1 = a_1; b_2 = a_2 - 1; b_3 = a_3 - 2; b_4 = a_4 - 3, b_5 = a_5 - 4$ ។ យើងទាញបាន

$$a_2 - a_1 \geq 2 \ \Rightarrow a_2 - 1 \geq a_1 + 1 \ \Rightarrow a_2 - 1 > a_1 \ \Rightarrow b_2 > b_1$$
$$\dots.$$
$$\Rightarrow b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$$

ដូច្នេះ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 ជាចំនួនគត់ប្រាំក្នុងចំណោមចំនួនគត់ 14 ដំបូង (បើ $a_5 = 18$ នោះ $b_5 = 14$) ។

ប្រាសមកវិញ បើក្នុងចំណោមចំនួនគត់ទាំង 14 ដំបូងគឺ 1,2, … , 14 ; យើងជ្រើសរើសយក ចំនួនគត់ខុសៗចំនួន 5 តាងដោយ $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$ នោះយើងអាចបង្កើតបាន ចំនួនគត់ $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (b_1, b_2 + 1, b_3 + 2, b_4 + 3, b_5 + 4)$ ដែលជាចំនួន ទាំងប្រាំដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ។ យើងមាន $\binom{14}{5} = 2002$ របៀបក្នុងការជ្រើសរើស ចំនួនគត់ប្រាំខុសៗគ្នាចេញពីចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូងទាំង 14 ។ ដូច្នេះ យើងមាន 2002 របៀបក្នុងការជ្រើសរើសចំនួនគត់ប្រាំខុសៗគ្នាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ផលសងរវាងចំនួនគត់ទាំង នោះពីរៗមានតម្លៃធំជាងឬស្មើ 2 ចេញពីចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូងទាំង 18 ។

16. ▲ ពីសំណុំមួយដែលមាន១០ធាតុ គេអាចបង្កើតបាននូវសំណុំរងមិនទទេខុសៗគ្នាចំនួន

$$\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \cdots + \binom{10}{10} = (1+1)^{10} - 1 = 2^{10} - 1 = 1023$$

(តាមរូបមន្ត

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

)

សំណុំរងដែលមានផលបូកធាតុមានតម្លៃធំបំផុតគឺ {90,91, … ,99} ហើយមានផលបូកស្មើ

$$90 + 91 + \cdots + 99 = 945 < 1023$$

យើងមានសំណុំរងទាំងអស់ចំនួន 1023 ។ ផលបូកធាតុរបស់សំណុំរងនិមួយៗទាំងនោះ ត្រូវមានតម្លៃ ចាប់ពី 1 ដល់ 945 ។ ដូច្នេះវាត្រូវតែមានសំណុំរងពីរដែលមានផលបូកស្មើ គ្នា ។

17. ▲យើងសង្កេតឃើញថា បើយើងជ្រើសរើស $n+1$ ចំនួនគត់ ចេញពី $2n$ ចំនួនគត់បន្ត បន្ទាប់គ្នា នោះគេត្រូវតែទទួលបានចំនួនពីរ ដែលមានផលសង ស្មើ n ។ ព្រោះ យើងអាច ចាប់ផ្គូ $2n$ ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា $\{a+1, a+2, a+3, \dots, a+2n\}$ ទៅជា n សំណុំ

$$\{a+1, a+n+1\}, \{a+2, a+n+2\}, \dots, \{a+n, a+2n\}$$

ដូច្នេះ បើយើងត្រូវជ្រើសរើស យក $n+1$ ចំនួនគត់ចេញពី n សំណុំ នោះ វាត្រូវមានចំនួន គត់ពីរ ដែលឋិតនៅក្នុងសំណុំតែមួយ ហើយមានផលសងស្មើ n ។

ឥលូវ យើងបង្កើតសំណុំ 5 ដែលមាន 20 ធាតុ ដូចខាងក្រោម

$\{1,2,..,20\};\{21,22,..,40\},\{41,42,..,60\};\{61,62,..,80\};\{81,82,..,100\}$
យើងត្រូវជ្រើសរើសយក 55 ចំនួនគត់ ចេញពី សំណុំ 5 ខាងលើ ដូច្នេះត្រូវមានចំនួនគត់យ៉ាងតិច 11 ឋិតក្នុងសំណុំតែមួយ ។ សំណុំនីមួយៗមានធាតុចំនួន 20 ជាចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា ។ ដូច្នេះត្រូវតែមានចំនួនគត់ពីរដែលមានផលសងស្មើ 10 ។

18. ▲ ចំនួនបីជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណបើផលបូកចំនួនពីរធំជាងចំនួនទីបី ។ សំណុំ $\{4,5,9,14,23,37,60,97,157,254\}$ ជាសំណុំរងមាន 10 ធាតុនៃ $\{4,5,6,\dots,254\}$ ដែលមិនមានលក្ខណៈត្រីកោណ (យើងសំណុំ $\{4,5,9,14,23,37,60,97,157,254\}$ ដោយដំបូងជ្រើសរើសលេខ 4 និងលេខ 5 ។ បន្ទាប់មកយកលេខមួយទៀតដែលស្មើនឹង $4+5=9$ ។ បើចំនួនទាំងបីជាចំនួនត្រីកោណ នោះ $4+5>$ចំនួនទីបី) ។ តាង N ជាចំនួនគត់តូចបំផុតដែល $\{4,5,6,\dots,N\}$ មានសំណុំរងមាន 10 ធាតុមួយដែលគ្មានលក្ខណៈត្រីកោណ ។ តាង $\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_{10}\}$ ជាសំណុំរងបែបនេះ ដែល $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{10}$ ។ ដោយគ្មានធាតុបីណាផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈត្រីកោណ នោះវាត្រូវតែ

$$\begin{aligned}N \ge a_{10} \ge a_9+a_8 &\ge (a_8+a_7)+a_8 = 2a_8+a_7 \ge 2(a_7+a_6)+a_7\\ &= 3a_7+2a_6 \ge 3(a_6+a_5)+2a_6 = 5a_6+3a_5 \ge 8a_5+5a_4\\ &\ge 13a_4+8a_3 \ge 21a_3+13a_2 \ge 34a_2+21a_1 \ge 34.5+21.4\\ &= 254\end{aligned}$$

ដូច្នេះតម្លៃធំបំផុតរបស់ n គឺ $N-1=253$ ។

19. ▲ ឧទាហរណ៍លើប្រធានលំហាត់ $A=\{1;2\}; B=\{3;4;\dots\}$ ។ ចំពោះ $n=1$ យើងមាន $a=3; b=4; a+b=7\subseteq \mathbf{B}$ ។

យើងនឹងស្វែងរកចំនួន $a,b>n$ ដែល $a+b$ ឋិតក្នុងសំណុំតែមួយជាមួយ a និង b ។ ដំបូងសន្មតថា card $\mathbf{A}$ មានកំណត់ ហើយថា m ជាធាតុធំបំផុត ។ ដូច្នេះ $a=n+1, b=n+2$ និង $2n+3=(n+1)+(n+2)=a+b$ ឋិតក្នុងសំណុំ $\mathbf{B}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge m$ ។ សំណើពិត ។

ពេលនេះយើងសន្មតថា card $\mathbf{A}$ និង card $\mathbf{B}$ មិនកំណត់ទាំងពីរ ។ យើងសន្មតថាសំណើមិនពិតគឺ សន្មតថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលចំពោះគ្រប់ $a,b>n, \{a,b,a+b\}\not\subset \mathbf{A}$

និង $\{a, b, a+b\} \not\subset \mathbf{B}$ ។ ពេលនេះយើងយក x, y និង z ជាធាតុរបស់ $\mathbf{A}$ ដែល $x > y > z > n$ និង $y - z > n$ ។ យើងអាចជ្រើសរើសបែបនេះបាន ព្រោះសំណុំ A មិនកំណត់ ដូច្នេះវាមិនទាល់ទេ ។ ដោយ $\{x, y\} \subset A$ នោះ $\{x + y\} \subset B$ ។ ដូចគ្នា $\{y + z, z + x\} \subset B$ ។ ដូច្នេះ $\{x + y, y + z, z + x\} \subset B$ ។ បើ $\{y - z\} \subset A$ នោះ $\{x, y = z + (y - z), z, y - z\} \subset A$ នោះមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ការសន្មត ។ បើ $\{y - z\} \subset B$ នោះ$\{x + y = (z + x) + (y - z), y + z, z + x, y - z\} \subset B$ នោះមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ការសន្មត ។ ដូច្នេះការសន្មតមិនអាច ។ ដូច្នេះសំណើពិត ។

20. ▲ឧបមាថា យើងទាញថាសចេញមួយចំនួនដំបូងមានលេខខុសគ្នាទាំងអស់ ដោយមិនមានថាសណាមានលេខដូចគ្នាដល់ទៅ 10 ដងទេ ។ ដូច្នេះ សន្មតថាយើងទាញចេញថាសមានលេខ១ដល់លេខ៩ ទាំងអស់ ដូច្នេះ មានទាំងអស់ $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ ថាស ។ ដូច្នេះ ថាសនៅសល់មានតែ លេខ១០ដល់លេខ៥០ ។

បន្ទាប់មកទៀត សន្មតថា យើងទាញយកថាសពីក្នុងចំណោម ថាសលេខ ១០ដល់លេខ៥០ មួយមុខចំនួន 9 (ដើម្បីកុំឱ្យទាន់មានថាសចំនួន 10 មានស្លាកដូចគ្នា) ។ ដូច្នេះ យើងយកថាសចេញបាន ចំនួន $45 + 9.41 = 414$ ហើយ ។

ថាសដែលទាញចេញលើកទី 415 នឹងធ្វើឱ្យមានថាសចំនួន 10 មានលេខដូចគ្នា ។

21. ▲សន្មតថាសុខជាមនុស្សម្នាក់នៅក្នុងមនុស្សទាំង១៧នាក់នោះ ។ គាត់សរសេរសំបុត្រទៅមនុស្ស១៦ នាក់ទៀត ។ តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប មានប្រធានបទមួយ ក្នុងចំណោមប្រធានបទទាំង៣ ដែលសុខសរសេរទៅកាន់មនុស្សយ៉ាងតិច៦នាក់ផ្សេងគ្នាដែរ ។ ហៅប្រធានបទនោះថា ប្រធានបទលេខ១ ។ បើសិនជាមាន២នាក់ក្នុងចំណោម៦នាក់នេះ សរសេរទៅកាន់គ្នាទៅវិញទៅមកនិងទៅសុខ ពីប្រធានបទលេខ១ ដែរ នោះ មានន័យថា មាន

យ៉ាងតិចមនុស្សចំនួន៣នាក់ ដែលសរសេរសំបុត្រទៅកាន់អ្នកដទៃពីប្រធានបទតែមួយដូចគ្នា ។

ផ្ទុយទៅវិញ សន្មតថា អ្នកទាំង៦នាក់នេះ សរសេរទៅកាន់គ្នាទៅវិញទៅមក តែលើប្រធានបទលេខ២ ឬលេខ៣ ប៉ុណ្ណោះ ។ សន្មតថា សៅនៅក្នុងចំណោមអ្នកទាំង៦នាក់នេះ ។ តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប មានប្រធានបទមួយ ក្នុងចំណោមប្រធានបទ២ ឬ៣ ដែលសៅសរសេរទៅកាន់មនុស្សយ៉ាងតិច៣នាក់ផ្សេងគ្នាដែរ ក្នុងចំណោមមនុស្សទាំង៥នាក់ទៀត ។ ហៅប្រធានបទនេះ ថា ប្រធានបទលេខ២ ។ បើសិនជាមាន២នាក់ ក្នុងចំណោម៣នាក់នេះ សរសេរទៅកាន់គ្នាទៅវិញទៅមក និងទៅសៅ ពីប្រធានបទ លេខ២នេះ នោះ មានន័យថា មានយ៉ាងតិចមនុស្សចំនួន៣នាក់ ដែលសរសេរសំបុត្រទៅកាន់អ្នកដទៃពីប្រធានបទតែមួយដូចគ្នា ។

ផ្ទុយទៅវិញ បើអ្នកទាំង៣នាក់ នេះ សរសេរទៅកាន់គ្នាទៅវិញទៅមក តែពីប្រធានលេខ៣ នោះក៏ មានន័យថា មានយ៉ាងតិចមនុស្សចំនួន៣នាក់ ដែលសរសេរសំបុត្រទៅកាន់អ្នកដទៃពីប្រធានបទតែមួយដូចគ្នា ។

22. ▲យើងដឹងថា ចំពោះ $l = (n+1)! + 1$ យើងមាន $l+1, l+2, \dots, l+n$ សុទ្ធតែជាចំនួនពហុគុណ ។ ដូច្នេះ យើងអាចរកបានចំនួនបឋម p មួយដែល $p \leq l$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $p+1, \dots, p+n$ សុទ្ធតែជាចំនួនពហុគុណ ។
សៅត្រូវគណនាចំនួនបឋម p នេះសិន ។
សៅប្រាប់លេខ $k = p - 1$ ទៅសុខ ។ បើ $m = 1$ នោះ $k + m = p$ ជាចំនួនបឋម ។ តែបើ $2 \leq m \leq n - 1$ នោះ $p + 1 \leq k + m \leq p + n - 2$ មានន័យថា $k + m$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។ ដូច្នេះបើសុខឆ្លើយថា $k + m$ ជាចំនួនបឋម នោះមានន័យថា $m = 1$ ។ តែបើសុខឆ្លើយថា $k + m$ មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ នោះសៅដឹងថា $m > 1$ ហើយត្រូវឱ្យលេខផ្សេងទៀតទៅសុខ ។

ពេលនេះសៅឱ្យលេខ $k = p - 2$ ។ បើ $m = 2$ នោះ $k + m = p$ ជាចំនួនបឋម ។ តែបើ $3 \le m \le n - 1$ នោះ $p + 1 \le k + m \le p + n - 3$ មានន័យថា $k + m$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។ ដូច្នេះបើសុខឆ្លើយថា $k + m$ ជាចំនួនបឋម នោះមានន័យថា $m = 2$ ។ តែបើសុខឆ្លើយថា $k + m$ មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ នោះសៅដឹងថា $m > 2$ ហើយត្រូវឱ្យលេខផ្សេងទៀតទៅសុខ ។

បើសិនជាខុសរហូត សៅត្រូវសាកតាមវិធីនេះរហូតដល់ករណី ថាតើ m ស្មើ $n - 2$ ឬអត់? ពេលនេះសៅឱ្យលេខ $k = p - (n - 2)$ ។ បើ $m = n - 2$ នោះ $k + m = p$ ជាចំនួនបឋម ។ តែបើ $n - 1 = m$ នោះ $k + m = p + n - 1$ មានន័យថា $k + m$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។ ដូច្នេះបើសុខឆ្លើយថា $k + m$ ជាចំនួនបឋម នោះមានន័យថា $m = n - 2$ ។ តែបើសុខឆ្លើយថា $k + m$ មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ នោះសៅដឹងថា $m > n - 2$ មានន័យថា $m = n - 1$ ។

ដូច្នេះយើងសន្និដ្ឋានបានថា សៅត្រូវសួរយ៉ាងច្រើន $n - 2$ សំនួរ ។

23. ▲សំនួរខាងលើសមមូលនឹងសំណើ "បើឆ្នាំណាមួយមានថ្ងៃសុក្រទី១៣ នោះត្រូវមានថ្ងៃអាទិត្យទី១" ។

តារាងខាងក្រោមគណនាថ្ងៃទី១នៃខែនីមួយៗ តើត្រូវនឹងថ្ងៃអ្វី ។ ក្នុងតារាងនេះ

- ជួរដេកទី 1ជួរឈរទី 2 : លេខ 1 ជាថ្ងៃទីមួយ នៃឆ្នាំថ្មី ។ ជួរឈរទី 3 សំណល់នៃ 1 ចែកនឹង 7

- ជួរដេកទី 2 ជួរឈរទី 2 : ខែមករាមាន 31 ថ្ងៃ ដូច្នេះថ្ងៃទី 1 នៃកុម្ភៈត្រូវនឹងថ្ងៃទី 32 គិតពីដើមឆ្នាំមក ។ ជួរឈរទី 3 សំណល់នៃ 32 ចែកនឹង 7

- ជួរដេកទី 3 ជួរឈរទី 2 : ខែមករាមាន 31 ថ្ងៃ ខែកុម្ភៈអាច 28 ឬ 29 ថ្ងៃ ដូច្នេះថ្ងៃទី 1 នៃមីនាត្រូវនឹងថ្ងៃទី 60 ឬ 61 គិតពីដើមឆ្នាំមក ។ ជួរឈរទី 3 សំណល់នៃ 60 ឬ 61 ចែកនឹង 7

……

តាមរយៈតម្លៃក្នុងជួរឈរទី 3 យើងឃើញថា ដោយចែកលំដាប់ថ្ងៃនៃដើមខែនីមួយៗ គិតពីដើមឆ្នាំមក យើងទទួលបានសំណល់មានតាំងពីលេខ 0 ដល់លេខ 6 ។ មានន័យថា ថ្ងៃទីមួយនៃខែនីមួយៗ ធ្លាក់ចំថ្ងៃណាមួយ គ្រប់ថ្ងៃទាំង 7 ។ ដូច្នេះវាត្រូវតែមានថ្ងៃអាទិត្យទី 1 ក្នុងខែណាមួយ ។ ខែនោះជាខែដែលមានថ្ងៃសុក្រទី 13 ។

	1	2	3
	ខែ	លំដាប់ថ្ងៃដើមខែនីមួយៗគិតពីដើមឆ្នាំមក	(mod 7)
1	មករា	1	1
2	កុម្ភៈ	32 (= ១ កុម្ភៈ)	4
3	មីនា	60 ឬ 61 (=១មីនា)	4 ឬ 5
4	មេសា	91 ឬ 92	0 ឬ 1
5	ឧសភា	121 ឬ 122	2 ឬ 3
6	មិថុនា	152 ឬ 153	5 ឬ 6
7	កក្កដា	182 ឬ 183	0 ឬ 1
8	សីហា	213 ឬ 214	3 ឬ 4
9	កញ្ញា	244 ឬ 245	6 ឬ 0
10	តុលា	274 ឬ 275	1 ឬ 2
11	វិច្ឆិកា	305 ឬ 306	4 ឬ 5
12	ធ្នូ	335 ឬ 336	6 ឬ 0

24. ▲យើងតំរៀប 100ចំនួនគត់ជា 50 សំណុំ ដូចខាងក្រោម

$$\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\dots,\{99,100\}$$

សំណុំនិមួយៗមានធាតុរបស់វាបឋមនឹងគ្នា ។ ដោយគេត្រូវជ្រើសរើស 51 ចំនួនគត់ នោះគេត្រូវតែបានចំនួនគត់ពីរដែលនៅក្នុងសំណុំតែមួយ ។ មានន័យថា ត្រូវតែទទួលបានចំនួនពីរដែលបឋមរវាងគ្នា ។

25. ▲គេត្រូវការប្រើលេខចំនួន $137{,}94/0{,}02 = 6897$ ។ ទំពីលេខ១ ដល់លេខ៩ ត្រូវប្រើលេខចំនួន៩លេខ ។ ពីលេខ១០ដល់លេខ៩៩ ត្រូវប្រើលេខ $2(90) = 180$ លេខ ហើយទំពីលេខ១០០ដល់លេខ៩៩៩ ត្រូវប្រើលេខចំនួន $3(900) = 2700$ ។ ទំនៅសល់ត្រូវការតួលេខចំនួន $6897 - 2700 - 180 - 9 = 4008$ ។ ដូច្នេះត្រូវមានទំចំនួន $4008/4 = 1002$ ទៀត ដែលទំនិមួយៗប្រើលេខ៤ខ្ទង់ ។ ដូច្នេះជាសរុបមានទំចំនួន $1002 + 999 = 2001$ ។

26. ▲ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ដែលធំមិនលើសពី 2001, ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 3 មានចំនួន $\lfloor 2001/3 \rfloor = 667$; ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ4 មានចំនួន $\lfloor 2001/4 \rfloor = 500$; ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ $12 = 3 \times 4$ មានចំនួន $\lfloor 2001/12 \rfloor = 166$ ។ ដូច្នេះចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 3 ឬ 4 មានចំនួន $667 + 500 - 166 = 1001$(ដក 166 ចេញ ព្រោះរាប់ច្រំដែលប៉ុណ្ណឹងដង) ។

បន្ទាប់មកយើងត្រូវដកចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ៥ ដែលពហុគុណនឹង៣ ឬនឹង៤ ចេញ ។ ចំនួនពហុគុណនឹង៥ផងនឹង៣ផងមានចំនួន $\lfloor 2001/15 \rfloor = 133$ ។ ចំនួនពហុគុណនឹង៥ផងនឹង៤ផងមានចំនួន $\lfloor 2001/20 \rfloor = 100$ ។ ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ៣ ៤និង៥ មានចំនួន $\lfloor 2001/60 \rfloor = 33$ ។ ដូច្នេះចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ៥ ដែលពហុគុណនឹង៣ ឬនឹង៤ មានចំនួន $100 + 133 - 33 = 200$ ។

ដូច្នេះចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ៣ឬនៃ៤ តែមិនមែនជាពហុគុណនៃ៥មានចំនួន $1001 - 200 = 801$ ។

27. ▲សន្មតផ្ទុយទៅវិញថា មានរបៀបអង្គុយដែលគ្មានក្មេងស្រីនៅអមសង្ខាងក្មេងប្រុស ។
យើងកំណត់ប្លុកមួយដោយ ក្មេងស្រីម្នាក់ឬពីរនាក់អង្គុយជាប់គ្នា ហើយមានក្មេងប្រុសអង្គុយសង្ខាង

...ប្រុស.ស្រី.(ស្រី).ប្រុស....

ដើម្បីកុំឱ្យមានក្មេងម្នាក់ដែលអ្នកនៅសង្ខាងវា ជាក្មេងស្រីនោះទាល់តែប្លុកនីមួយៗមានក្មេងស្រីនៅកណ្តាលយ៉ាងច្រើនពីរនាក់ ហើយត្រូវមានក្មេងប្រុសអង្គុយអមយ៉ាងតិចពីរនាក់ ។ ដូច្នេះប្លុកបែបនេះ មានយ៉ាងហោចណាស់ចំនួន $[25/2] = 13$ ហើយត្រូវការក្មេងប្រុសយ៉ាងហោចណាស់ចំនួន $2.13 = 26$ នាក់ដែរដើម្បីអង្គុយនៅរវាងប្លុកនិមួយៗ ។ ប៉ុន្តែយើងមានក្មេងប្រុសតែ២៥នាក់តែប៉ុណ្ណោះ ។ ដូច្នេះការសន្មតរបស់យើងមិនអាចទៅរួចទេ ។

28. ▲គាងលេខជើងនីមួយៗរបស់ពីងពាងដោយលេខ១ដល់លេខ៨ ។ គាង a_k និង b_k ជាស្រោមជើងនិងស្បែកជើង ដែលស្ថិតនៅជើងទី k ។ តំរៀបដែលអាចនៃស្រោមជើងនិងស្បែកជើង ជាចំលាស់នៃ $a_1; b_1; \dots; a_8; b_8$ ដែល a_k ត្រូវនៅមុខ b_k ចំពោះ $1 \leq k \leq 8$ ។មានចំលាស់នៃចំនួនទាំង១៦នេះ ចំនួន $16!$ ហើយa_1 នៅមុខ b_1 ចំលាស់មានចំនួនពាក់កណ្តាលគឺ $16!/2$ ។ ដូចគ្នាដែរ ចំនួនចំលាស់ដែលa_2 នៅមុខ b_2 មានចំនួនពាក់កណ្តាលនៃចំនួនក្រោយនេះគឺ $16!/2^2$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបានចំនួនចំលាស់ដែលមាន a_k នៅមុខ b_k ដែល $1 \leq k \leq 8$ មានចំនួន $16!/2^8$ ។

29. ▲សន្មតថាយុវជននោះយកស្រោមជើង៤ដំបូងមានពណ៌ខុសគ្នាទាំងអស់ ។ ដូច្នេះវាចាប់មិនទាន់បានមួយគូទេ ។ វាយកស្រោមជើងមួយទៀត ។ ទោះជាស្រោមជើងនេះពណ៌អីក៏ដោយ ក៏គង់ទទួលបានស្រោមជើងមានពណ៌ដូចគ្នាមួយគូដែរ ។ សន្មតថាពណ៌ខៀវ ។ ដូច្នេះយុវជននេះចាប់បានស្រោមជើងពណ៌ខៀវ២ ក្រហម១ បៃតង១ និងខ្មៅ១ ។

វាចាប់យកថែមមួយទៀត ។ ករណីអន់បំផុតគឺវាយកបានស្រោមជើងមួយទៀត ដែលមានពណ៌ខៀវ ព្រោះមិនអាចផ្សំបានស្រោមជើងមួយគូថែមទៀតទេ ។ ដូច្នេះស្រោមជើងដែលយកចេញហើយមាន ខៀវ៣ ក្រហម១ បៃតង១ និងខ្មៅ១ ។
វាយកស្រោមជើងមួយបន្ថែមទៀត ។ ពេលនេះទោះជាយកពណ៌អីក៏គង់ផ្សំបានស្រោមជើងមួយគូទៀតដែរ ។ សន្មតថាវាចាប់ចំពណ៌ខៀវដដែល ។ ដូច្នេះវាទាញស្រោមជើងចេញមកក្រៅបាន ពណ៌ខៀវ៤ ក្រហម១ បៃតង១ និងខ្មៅ១ ។
តាមរបៀបដូចគ្នា វាយកស្រោមជើងចេញបាន ពណ៌ខៀវចំនួន២០ ក្រហម១ បៃតង១ និងខ្មៅ១ ។ មានន័យថាវាត្រូវយកស្រោមជើងចេញចំនួន២៣ ។

30. ▲ប្រភាគមួយដែលគេបង្រួមរួច មានភាគបែងនិងភាគយកបឋមនឹងគ្នា ។ ដូច្នេះកត្តាបឋមមួយមិនអាចស្ថិតនៅក្នុងភាគយកផងភាគបែងផងបានទេ ។ កត្តាបឋមរបស់ $20!$ មានចំនួន៨ គឺ $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17$ និង 19 ។ កត្តាបឋមនិមួយៗក្នុងចំណោមនេះ ត្រូវឋិតនៅលើភាគយកឬនៅលើភាគបែងបានតែម្តង តែមិនអាចឋិតនៅលើភាគយកផងភាគបែងផងបានទេ ។ ដូច្នេះគេមាន $2^8 = 256$ របៀប ។ តែចំនួនទាំង256 ដែលទទួលបាននោះត្រូវធ្វើឱ្យប្រភាគមានតម្លៃតូចជាង១ ។ ក្នុងចំនោមប្រភាគទាំង២៥៦នោះ យើងអាចចែកជាប្រភាគចំនួន១២៨គូ ដែលគូនីមួយៗគុណគ្នាស្មើ១ ឬក្នុងគូនីមួយៗមានប្រភាគមួយមានតម្លៃតូចជាង១ ។ ដូច្នេះចំនួនសនិទានដែលមានលក្ខណៈចង់បានមានចំនួន ១២៨ ។

31. ▲ចំនួនគត់សេស x_i នីមួយៗអាចជំនួសដោយ $2y_i - 1$ ដែល y_i ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ដោយ

$$98 = \sum_{i=1}^{4}(2y_i - 1) = 2\left(\sum_{i=1}^{4} y_i\right) - 4$$

ដូច្នេះ $51 = \sum_{i=1}^{4} y_i$ ។ ចតុធាតុ $(y_1; y_2; y_3; y_4)$ មានដូចជា $(17; 5; 11; 18)$ ដូចគ្នានឹងលេខ១ចំនួន១៧ ខណ្ឌដោយលេខ០ បន្ទាប់មកលេខ១ចំនួន៥ ខណ្ឌដោយលេខ០ បន្ទាប់មកលេខ១ចំនួន១១ ខណ្ឌដោយលេខ០ បន្ទាប់មកលេខ១ចំនួន១៨

$$\underbrace{11111111111111111}_{17}0\underbrace{11111}_{5}0\underbrace{11111111111}_{11}0\underbrace{111111111111111111}_{18}$$

ដូច្នេះចតុធាតុនេះដូចគ្នានឹងលេខ១ចំនួន៥១ ត្រូវចែកជាបួនក្រុមខណ្ឌដោយលេខ០ ។ គេមាន $\binom{50}{3} = 19600$ របៀបក្នុងការសកលេខ០ចូលក្នុងចន្លោះទាំង៥០រវាងលេខ១ទាំងអស់៥១ ។

32. ▲សន្មតថា n មានទម្រង់ទសភាគជា $1abc$ ។ បើមួយក្នុងចំណោម $a; b$ ឬ c ជាលេខ $5; 6; 7$ ឬ 8 នោះនឹងមានត្រាទុក ពេល n បូកនឹង $n + 1$ ។ បើ $b = 9$ និង $c \neq 9$ ឬ បើ $a = 9$ និង b ឬ $c \neq 9$ នោះក៏នឹងមានត្រាទុកដែរ ពេល n បូកនឹង $n + 1$ ។

បើ n ជាចំនួនគត់ដែលមានលក្ខណៈខាងលើ នោះវាត្រូវមានរាងមួយខាងក្រោម

$$1abc; \quad 1ab9; \quad 1a99; \quad 1999$$

ដែល $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ ។ n ទាំងនេះមិនត្រូវការត្រាទុកទេ ពេលយើងបូក n នឹង $n + 1$ ។ តម្លៃ n បែបនេះ មានទាំងអស់ចំនួន $5^3 + 5^2 + 5 + 1 = 156$ ។ ដូច្នេះមានចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នាទាំងអស់156 គូ ដែលផលបូកគូនីមួយៗមិនត្រូវការត្រាទុក ។

33. ▲កៅអីខាងចុងទាំងពីរត្រូវតែសម្រាប់សិស្សអ្នកអង្គុយ ដូច្នេះសាស្ត្រាចារ្យមានកៅអីក្នុងចំនួន៧សម្រាប់ជ្រើសរើស ដោយមិនឱ្យអង្គុយនៅជាប់គ្នា ។ បើកៅអីទាំងនេះត្រូវតាងដោយលេខ២ដល់លេខ៨ នោះកៅអីទាំងបីសម្រាប់សាស្ត្រាចារ្យមាន

$(2; 4; 6)$ $(2; 4; 7)$ $(2; 4; 8)$ $(2; 5; 7)$ $(2; 5; 8)$ $(2; 6; 8)$ $(3; 5; 7)$ $(3; 5; 8)$ $(3; 6; 8)$ $(4; 6; 8)$

ក្នុងត្រីធាតុនីមួយៗ សាស្ត្រាចារ្យអាចផ្លាស់ប្តូរកន្លែងគ្នា បាន$3! = 6$ របៀប ។ ដូច្នេះជាសរុបមាន $10 \times 6 = 60$ ។

34. ▲តាង $a_1 < a_2 < \cdots < a_{16}$ ជាចំនួនគត់ទាំង១៦នោះ ។ យើងពិនិត្យគូផ្សេងៗគ្នានៃចំនួនគត់ទាំងនេះ ។ គេអាចផ្សំបានគូបែបនេះចំនួន $\binom{16}{2} = 120$ គូ ។

តាង $(a_i; a_j)$ ជាគូមួយ ដែល $a_i > a_j$ ។ បើយើងមានគូពីរផ្សេងគ្នា $(a_{i_1};\ a_{i_2})$ និង $(a_{i_3}; a_{i_4})$ ដែល $a_{i_1} - a_{i_2} = a_{i_3} - a_{i_4}$ នោះយើងទាញបានចតុធាតុដែលចង់បាន $(a; b; c; d) = (a_{i_1}; a_{i_2}; a_{i_3}; a_{i_4})$ លើកលែងតែករណី $a_{i_2} = a_{i_3}$ ។

យើងថា a *មិនបានការ* ចំពោះគូពីរ គឺ $(a_{i_1}; a)$ និង $(a; a_{i_2})$ បើ $a_{i_1} - a = a - a_{i_2}$ (ឬ $2a = a_{i_1} + a_{i_2}$) ។ យើងសម្គាល់ឃើញថា សំនើពិត បើ a មិនបានការចំពោះគូពីរនៃគូចំនួនគត់ ព្រោះថា បើa មិនបានការចំពោះ $(a_{i_1}; a), (a; a_{i_2})$ និង $(a_{i_3}; a), (a; a_{i_4})$ នោះ $a_{i_1} + a_{i_2} = 2a = a_{i_3} + a_{i_4}$ ។

ជាចុងក្រោយយើងសន្មតថា a_i នីមួយៗ មិនបានការ ច្រើនបំផុតនៅក្នុងគូមួយនៃគូចំនួនគត់ ។ ចំពោះគូនៃគូចំនួនគត់នីមួយៗទាំងនេះ យើងដកគូនៃចំនួនគត់មួយចេញ ។ ដូច្នេះគ្មានចំនួនមិនបានការទៀតទេ ។ ដូច្នេះយើងនៅសល់យ៉ាងហោចណាស់$120 - 16 = 104$ គូនៃចំនួនគត់ដែលនៅសល់ ។ ផលសងនៃចំនួននៅក្នុងគូនៅសល់នីមួយៗ មានតម្លៃពី១ ដល់៩៩ ។ តាមគោលការណ៍ទ្រុងព្រាប មានផលសងខ្លះមានតម្លៃដូចគ្នា ។ សន្មតថា $a_{i_1} - a_{i_2} = a_{i_3} - a_{i_4}$ ដូច្នេះ $(a_{i_1}; a_{i_2}; a_{i_3}; a_{i_4})$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌសំនួរ ។

35. ▲ដើម្បីឱ្យឥដ្ឋមួយដុំមានលក្ខណៈខុសពីឥដ្ឋមួយដុំទៀត គេមានជម្រើសមួយទៅលើសម្ភារៈ ជម្រើសពីរទៅលើទំហំ ជម្រើសបីទៅលើពណ៌ និងជម្រើសបីទៅលើទ្រង់ទ្រាយ ។ មាន $\binom{4}{2} = 6$ របៀបដែលឥដ្ឋមួយដុំខុសពីឥដ្ឋមួយដុំទៀត ត្រង់ពីរចំណុចគត់ គឺ

១) សម្ភារៈនិងទំហំ ៖ មានឥដ្ឋ ចំនួន $1 \times 2 = 2$ ដុំផ្សេងគ្នា

២) សម្ភារៈនិងពណ៌ ៖ មានឥដ្ឋ ចំនួន $1 \times 3 = 3$ ដុំផ្សេងគ្នា

៣) សម្ភារៈនិងទ្រង់ទ្រាយ ៖ មានឥដ្ឋ ចំនួន $1 \times 3 = 3$ ដុំផ្សេងគ្នា

៤) ទំហំនិងពណ៌ ៖ មានឥដ្ឋ ចំនួន $2 \times 3 = 6$ ដុំផ្សេងគ្នា

៥) ទំហំនិងទ្រង់ទ្រាយ ៖ មានឥដ្ឋ ចំនួន $2 \times 3 = 6$ ដុំផ្សេងគ្នា

៦) ពណ៌និងទ្រង់ទ្រាយ ៖ មានឥដ្ឋ ចំនួន $3 \times 3 = 9$ ដុំផ្សេងគ្នា

ដូច្នេះជាសរុបមាន ឥដ្ឋចំនួន $2 + 3 + 3 + 6 + 6 + 9 = 29$ ដុំ ដែលមានលក្ខណៈខុសពីដុំមួយដុំដែលឱ្យត្រង់ពីរចំណុចគត់ ។

36. ▲ចំនួនលេខដែល អាចបង្កើតបានដោយប្រើលេខ០ដល់៩ ជារាង $\overline{d_1d_2d_3}$ មានចំនួន $10.10.10 = 1000$ ។ ដូច្នេះយើងមានករណី $\overline{d_1d_2d_3} = \overline{d_4d_5d_6}$ (សំណុំ A)ចំនួន $1000 \times 10 = 10\,000$ ករណី និង ករណី $\overline{d_1d_2d_3} = \overline{d_5d_6d_7}$ (សំណុំ B)ចំនួន $1000 \times 10 = 10\,000$ករណី ។ ករណី $\overline{d_1d_2d_3} = \overline{d_4d_5d_6} = \overline{d_5d_6d_7}$ អាចតែពេល $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7$ តែប៉ុណ្ណោះ(សំណុំ $A \cap B$) ។ ករណីបែបនេះមាន10 ករណី ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(A \cup B) &= \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)\\ &= 10\,000 + 10\,000 - 10\\ &= 19990\end{aligned}$$

37. ▲គេមាន $\binom{49}{2} = 1176$ របៀបក្នុងការជ្រើសរើសទីតាំងនៃក្រឡាពណ៌លឿង ។ ដោយសារគេអាចបង្វិលក្តារអុក៩០ដឺក្រេ នោះក្តារពណ៌មិនសមមូលគ្នាមានតិចជាងហ្នឹង ។ ក្តារពណ៌ដែលមានពណ៌លឿង**មិន**ឋិតនៅឈមគ្នាជាអង្កត់ផ្ចិត មានទំរង់សមមូល៤បែប ។ ក្តារពណ៌ដែលក្រឡាពណ៌លឿងពីរឈមគ្នាជាអង្កត់ផ្ចិត មានទម្រង់សមមូលពីរ ហើយយើងមានគូក្រឡាពណ៌លឿងបែបនេះចំនួន $\frac{49-1}{2} = 24$ ។ ដូច្នេះចំនួនក្តារអុកពណ៌មិនសមមូលគ្នាមានចំនួន

$$\frac{1176 - 24}{4} + \frac{24}{2} = 300$$

Y1						
		Y2				

			x			
				Y2		
						Y1

ក្រឡាY1 ឈមគ្នាជាអង្កត់ផ្ចិត ។ ក្រឡាY2 ឈមគ្នាជាអង្កត់ផ្ចិត ។

38. ▲ដោយយើងចង់សិក្សាសំនួរនេះ តាមរយៈសមមូលតាម៣ ដូច្នេះយើងសរសេរលេខ $21; 31; 41; 51; 61; 71$ និង 81 ជា $0; 1; 2; 0; 1; 2; 0$ ។ សន្មតថា $a_1; a_2; \dots; a_7$ ជាតំរៀបដែលយើងចង់បាន ។ យើងឃើញថា $0 \equiv (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \equiv (a_1 + a_2 + \cdots a_7) + a_4 \equiv (0 + 1 + 2 + 0 + 1 + 2 + 0) + a_4 \equiv a_4 \pmod 3$ ។ ដូច្នេះ $a_1; a_2; a_3$ ត្រូវតែជាតំរៀបនៃ $0; 1; 2$ ព្រោះ $a_1 + a_2 + a_3 \equiv a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \equiv 0 \pmod 3$ ។ ដោយ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \equiv a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \equiv 0 \pmod 3$ នោះ $a_1 \equiv a_5 \pmod 3$ ។ តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបានថា លំដាប់របស់ $a_5; a_6; a_7$ កំណត់ដោយ $a_1; a_2; a_3$ តែមួយគត់ ។ ដូច្នេះយើងមាន $3 \times 2^3 \times 3! = 144$ របៀប (ដើម្បីជ្រើសរើសa_4 យើងមាន 3របៀប ។ សន្មតថាដំបូងជ្រើសរើសយក$a_1 \equiv 0 \pmod 3); a_2 \equiv 1 \pmod 3); a_3 \equiv 2 \pmod 3)$ ដូច្នេះ ដើម្បីជ្រើសរើស a_1យើងមាន2 របៀប ដើម្បីជ្រើសរើស a_2 យើងមាន2 របៀប ដើម្បីជ្រើសរើស a_3 យើងមាន2 របៀប ដូច្នេះយើងមាន 2^3 របៀបក្នុងការជ្រើសរើស$a_1; a_2; a_3$ ។ បន្ទាប់មកចំលាស់របស់វាមាន 3!) ។

39. ▲ដើម្បីឱ្យ $A \cup B = S$ នោះចំពោះធាតុនីមួយៗ s របស់ S គេមានសំណើមួយគត់ក្នុងចំណោមសំណើទាំងបីខាងក្រោមដែលពិត

$$(i)\ s \in A\ \wedge s \notin\ B; \quad (ii)\, s \notin A \wedge s \in B; \quad (iii) s \in A \wedge s \in B$$

ដូច្នេះបើ S មាន n ធាតុ នោះមាន 3^n ក្នុងការជ្រើសរើសសំណុំ A និង B ។ ក្រៅពីករណី $A = B$ យើងរាប់ជាប់គ្នាពីរដង ព្រោះឧទាហរណ៍ គូសំណុំរង $\{a;c\};\{b;c;d;e;f\}$ និងគូ $\{b;c;d;e;f\};\{a;c\}$ ត្រូវរាប់តែម្តង ។ ដោយ $A \cup B = S$ នោះ $A = B$ ទាល់តែ $A = B = S$ ។ ដូច្នេះចំនួនគូនៃសំណុំរងដែលមានប្រជុំរបស់វាជា S ស្មើនឹង

$$\frac{3^n - 1}{2} + 1$$

ដែលស្មើ 365 ពេល $n = 6$ ។

40. ▲សន្មតថាផ្ទុយមកវិញថា មានចំនួនគត់បួនផ្សេងគ្នា $\{a,b,c,d\} \in S$ ដែល $ab = cd$ ។ តាង

$$A = M^2 + M, a = A + x, b = A + y, c = A + z, d = A + t$$

ដែល x,y,z,t ជាចំនួនគត់ ។

$$M^2 \le a,b,c,d < (M+1)^2 = M^2 + 2M + 1$$
$$\Rightarrow M^2 \le M^2 + M + x < M^2 + 2M + 1 \Rightarrow -M \le x < M + 1 \Rightarrow -M \le x \le M$$

ដូចគ្នា យើងទាញបាន $|x|,|y|,|z|,|t| \le M \quad (*)$ ។

យើងមាន

$$ab = cd \Leftrightarrow (x+y)A + xy = (z+t)A + zt \quad (**)$$

បើ $x + y = z + t$ នោះ $xy = zt \Rightarrow \{x,y\} = \{z,t\} \Rightarrow (a = c, b = d)$ ឬ $(a = d, b = c)$ ។ តែយើងត្រូវសិក្សាករណី $a \neq c, a \neq d, \dots$ ដូច្នេះយើងមិនផាត់ចោលករណីនេះ ។ ដូច្នេះ $x + y \neq z + t$ ។ យើងទាញបាន

$$(*) \Rightarrow |xy - zt| \le 2M^2$$
$$(**) \Rightarrow |xy - zt| = |(x+y) - (z+t)|A$$
$$= |(x+y) - (z+t)|(M^2 + M) > |(x+y) - (z+t)|M^2$$
$$\Rightarrow |(x+y) - (z+t)| < 2 \Rightarrow |(x+y) - (z+t)| \le 1$$

ដោយ $(x+y) - (z+t) \neq 0 \Rightarrow x + y - (z+t) = \pm 1$ ព្រោះ x,y,z,t សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ។

ករណី $x + y = z + t + 1 \Rightarrow xy = zt - A$ ។ ដូច្នេះ x,y ជាឬសនៃសមីការ

$$X^2-(z+t+1)X+(zt-A)=0$$

សមីការនេះមានឫស

$$x,y=\frac{z+t+1\mp\sqrt{\Delta}}{2}$$

ដែល

$$\begin{aligned}\Delta&=(z+t+1)^2-4zt+4A\\&=(z-t+1)^2+4t+4A\\&=(z-t+1)^2+4d\geq 4d\geq 4M^2\end{aligned}$$

យើងមាន $\Delta=4M^2$ ទាល់តែ $d=M^2$ និង $z-t+1=0$ ព្រោះ $d\geq M^2$ ។ ដូច្នេះ

$\Rightarrow t=-M,z=-M-1$ តែមិនអាចព្រោះ $|z|\leq M$ ។ ដូច្នេះ $\Delta>4M^2$ ។

បើ $z+t+1\geq 0$ នោះ $\frac{z+t+1+\sqrt{\Delta}}{2}>M$

បើ $z+t+1\leq 0$ នោះ $\frac{z+t+1-\sqrt{\Delta}}{2}<-M$

ក្នុងករណីទាំងពីរ យើងមាន x ឬ yមានតម្លៃដាច់ខាតធំជាង M ដែលករណីនេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។

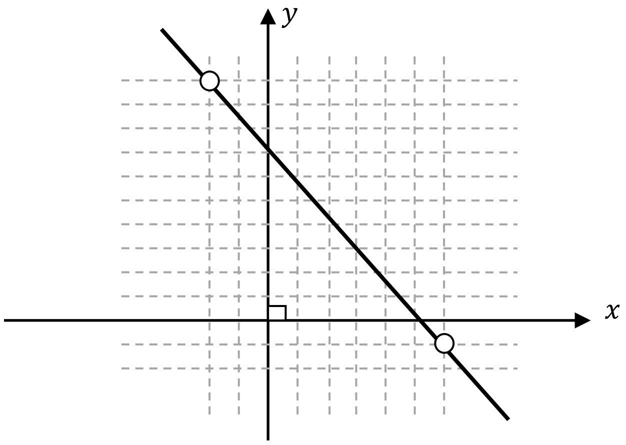
ដូចគ្នាចំពោះករណី $x+y+1=z+t$ ។

41. ▲ពិន្ទុដែលគេអាចធ្វើបាន ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមានដែលមានរាង $ax+by$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ Bachet-Bézout បើ $ax+by=c$ នោះ $PGCD(a,b)$ ត្រូវតែចែក c ដាច់ ។ បើ $PGCD(a,b)>1$ នោះមានចំនួនគត់ c ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែលចែកមិនដាច់នឹង $PGCD(a,b)$ ។ ដូច្នេះមានពិន្ទុច្រើនរាប់មិនអស់ដែលគេមិនអាចទទួលបាន ករណីនេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលមានតែពិន្ទុចំនួន 35 ប៉ុណ្ណោះដែលគេមិនអាចទទួលបាន ។ ដូច្នេះ $PGCD(a,b)=1$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទប្រូបិន ចំនួនពិន្ទុដែលមិនអាចទទួលបានមាន ចំនួន $(a-1)(b-1)/2$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2}=35\ \Rightarrow(a-1)(b-1)=70=7(10)$$

លក្ខខណ្ឌ $a>b$ និង $PGCD(a,b)=1$ នាំឱ្យយើងទាញបានពីរករណី $(a-1=70,b-1=1)$ និង $(a-1=10,b-1=7)\ \Rightarrow(a=71,b=2);(a=11,b=8)$ ។

ដោយ $58 = 0.71 + 2.29$ ហើយ 58 ជាពិន្ទុដែលគេមិនអាចទទួលបាន ដូច្នេះករណីទី១ មិនត្រឹមត្រូវ ។ បន្ទាត់ $11x + 8y = 58$ កាត់តាមចំណុច $(6, -1)$ និង $(-2,10)$ ។ បន្ទាត់នេះមិនកាត់តាមចំណុចគត់ (x, y)ណាមួយនៅក្នុងការដ្រង់ទី១ទេ ។ ដូច្នេះមិនមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការនេះទេ ។



ដូច្នេះចម្លើយមានតែមួយគត់គឺ $a = 11, b = 8$ ។

42. ▲តាង x, y, z ជាចំនួនដុំឥដ្ឋដែលតំរៀបជាកម្ពស់ 4,10 និង 19 រៀងគ្នា ។ យើងចង់ដឹងថាតើផលបូក $4x + 10y + 19z$ មានប៉ុន្មានប្រភេទខុសគ្នា ដោយឱ្យលក្ខខណ្ឌ $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 94$ ។

យើងមាន $4x + 10y + 19z \leq 19.94 = 1786$ ។ ដោយយក $x = 94 - y - z$ យើងរាប់ចំនួនចម្លើយមិនអវិជ្ជមានរបស់វិសមភាព

$$376 + 3(2y + 5z) \leq 1786, y + z \leq 94$$
$$\Longrightarrow 2y + 5z \leq 470, y + z \leq 94$$

តាមទ្រឹស្តីបទប្រ្រូបិន គ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq (2 - 1)(5 - 1)$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $n = 2y + 5z$ បាន ហើយតាមទ្រឹស្តីបទប្រ្រូបិន ចំនួននៃ n ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $n = 2y + 5z$ បាន មានចំនួន $\frac{(2-1)(5-1)}{2} = 2$ ។ យើងមានករណី $n = 1$ និង $n = 3$

ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $n=2y+5z$ បាន ។ ដូច្នេះ ក្នុងចំណោម 471 ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ដែល $n\le 470$ យើងឃើញថា មាន 469 ចំនួនគត់ដែលអាចសរសេរជារាង $n=2y+5z$ បាន ។

យក $z=94-x-y$ យើងទាញបាន $470-n=470-2y-5z=470-2y-5(94-x-y)=5x+3y$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទប្រូបិន បណ្តា $m=470-n$ ដែលមិនអាចសរសេរជារាង $m=3x+5z$ បាន មានចំនួន $\frac{(3-1)(5-1)}{2}=4$ ករណី ។ ហើយតាមទ្រឹស្តីបទប្រូបិន បណ្តា m ទាំងនោះត្រូវតែ $\le 3.5-3-5=7$ ដែលក្នុងនោះមាន $m=1,2,4,7$ ដូច្នេះត្រូវនឹង $n=463,\ 466,468,469$ ។ ដូច្នេះគ្រប់ចំនួនគត់ $n, 0\le n\le 470$ លើកលែងតែករណី $n=1,3,463,\ 466,\ 468,469$ ចេញ អាចសរសេរជារាងខាងលើបាន ដូច្នេះចំនួនផលបូកខុសៗគ្នាមានចំនួន $471-6=465$ ។

43. ▲យើងនឹងបង្ហាញថា គេមិនអាចបំបែកសំណុំខាងលើជាពីរដូចរៀបរាប់ទេ ។ សន្មតផ្ទុយទៅវិញថាគេអាចបំបែកវាជាពីរបាន ដោយសន្មតថា ផលគុណនៃបណ្តាធាតុរបស់សំណុំមួយស្មើ A ហើយនិងផលគុណនៃបណ្តាធាតុរបស់សំណុំមួយទៀតស្មើ B ។ ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ចំនួន 6 បន្តបន្ទាប់គ្នា យើងយើងអាចមាន២ករណីគឺ ករណីមានចំនួនមួយគត់ក្នុងចំណោមនោះដែលចែកដាច់នឹង 7 និងករណីមួយទៀត គ្មានចំនួនណាមួយចែកដាច់នឹង 7 ទេ ។

ករណីទី១ ៖ មានតែមួយគត់ក្នុងចំណោម $\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\}$ ដែលចែកដាច់នឹង7 ។ ក្នុងករណីនេះមានតែ A ឬ B មួយប៉ុណ្ណោះដែលចែកដាច់នឹង 7 ។ ឧទាហរណ៍ បើ A ចែកដាច់នឹង 7 នោះ B ចែកមិនដាច់នឹង 7 ទេ ដូច្នេះ A មិនអាចស្មើ B ទេ ។

ករណីទី២ ៖ គ្រប់ធាតុទាំងអស់សុទ្ធតែបឋមនឹង 7 ។ ក្នុងករណីនេះ យើងមាន

$$n(n+1)\dots(n+6) \equiv 1.2\dots.6 \equiv A.B \equiv -1 \pmod 7$$

តែបើ $A = B$ នោះ សមមូលខាងលើទៅជា $A^2 \equiv -1 \equiv 6 \pmod 7$ ។ ចំនួនការេសមមូលនឹង 1,2,4 mod 7 ដូច្នេះ $A^2 \equiv -1 \equiv 6 \pmod 7$ មិនអាច ។

44.▲ ឧបមាថា $n_1, n_2, \dots, n_k$ ជាចំនួនប៊ូលក្នុងប្រអប់លេខ $1,2,\dots,k$ ។ យើងមាន $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ។ ចំនួនបន្សំគូប៊ូលក្នុងប្រអប់ i មានចំនួន $\binom{n_i}{2}$ ។ ដូច្នេះ ជាសរុបស្មើនឹង $\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \dots + \binom{n_k}{2}$ ដែលយើងចង់ឱ្យវាតិចបំផុត ។ យើងរំលែកប៊ូលតាមវិធីដូចតទៅនេះដើម្បីចំនួនបន្សំគូប៊ូលថយចុះរហូតដល់តិចបំផុត ។

បើមាន i, j ដែល $n_i - n_j \geq 2$ នោះ ដោយដកប៊ូលមួយចេញពីប្រអប់លេខ i ហើយយកទៅដាក់ក្នុងប្រអប់លេខ j យើងទាញបាន ចំនួនគូប៊ូលថយចុះ

$$\binom{n_i}{2} + \binom{n_j}{2} - \binom{n_i - 1}{2} - \binom{n_j + 1}{2} = n_i - n_j - 1 > 0$$

បន្តបន្ទាប់មកទៀត យើងបន្ថយចំនួនគូប៊ូលតាមរបៀបបែបនេះ ដោយធ្វើយ៉ាងណាឱ្យចំនួនប៊ូលក្នុងប្រអប់ពីរផ្សេងគ្នា មានចំនួនប៊ូលច្រើនជាងគ្នាមិនលើសពីមួយទេ ។ ដូច្នេះ ជាបញ្ចប់ ប្រអប់នីមួយមានប៊ូលចំនួន $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ ឬ $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1$ ប៊ូល ។ នៅខណៈនោះ ចំនួនបន្សំគូប៊ូលនៅតិចបំផុត ។

45.▲ យើងពិនិត្យបៀពីរសន្លឹកបិតនៅលើគុ ។ យើងបង្ហាញថាមានបៀតែមួយសន្លឹកគត់ដែលអាចបន្ថែមទៅលើគូនេះ ដើម្បីបង្កើតសំណុំកុំប្លេម៉ង់ ។ បើបៀក្នុងគូនេះ មានរូបដូចគ្នា នោះបៀទីបីត្រូវតែមានរូបមួយនេះដែរ តែបើបៀទាំងពីរមានរូបខុសគ្នាវិញ នោះបៀទីបីត្រូវតែមានរូបមួយដែលខុសពីបៀពីរនេះ ។ ក្នុងករណីទាំងពីរ បៀសន្លឹកទីបីមានជម្រើសតែមួយបែបគត់ ។ តាមរបៀបដូចគ្នា ពណ៌និងកម្រិតពណ៌របស់សន្លឹកបៀទីបី មានជម្រើសតែមួយបែបគត់ ។ បៀសន្លឹកទីបី កំណត់ដោយបៀពីរសន្លឹកដំបូង មិនអាចជា

សន្ទឹកបៀណាមួយក្នុងចំណោមបៀពីរសន្ទឹកដំបូងទេ ។ ដូច្នេះយើងអាចរាប់ចំនួនសំណុំកុំប្លេម៉ង់ ដោយរាប់ចំនួនគូបៀ បន្ទាប់មកចែកនឹងបី ព្រោះសំណុំបៀកុំប្លេម៉ង់ត្រូវបានរាប់បីដងតាមរបៀបនេះ (ព្រោះយើងមានបន្សំបៀទី១និងទី២ ទី១និងទី៣ ទី២និងទី៣ ដូច្នេះបន្សំបី តែតាមពិតយកតែបន្សំរវាង ១និង២ តែប៉ុណ្ណោះ) ។ ដូច្នេះចំនួនសំណុំបៀកុំប្លេម៉ង់ស្មើនឹង

$$\frac{1}{3}\binom{27}{2} = \frac{1}{3}.\frac{27.26}{2} = 117$$

46.▲ សន្មតថា ធននិងនារីជាក្មេងពីរនាក់ក្នុងចំណោមនោះ ។ ចំពោះ $i = 1,2,\ldots,19$ តាង C_i និង N_i ជាចំនួនតំរៀប(ក្នុងចំណោមតំរៀបទាំងអស់ទាំង 20!) ដែលក្មេងទី i និងទី $i+1$ ជា ធននិងនារី និងនារីនិងធន រៀងគ្នា ។ ដូច្នេះ $C_i = N_i = 18!$ ជាចំនួនតំរៀបក្មេងផ្សេងទៀត ។

ចំពោះ $i = 1,2,\ldots,19$ តាង M_i ជាចំនួនដងនៃគូក្មេងប្រុសក្មេងស្រី ឬក្មេងស្រីក្មេងប្រុសឋិតនៅទីតាំង i និង $i+1$ ។ ដោយមានក្មេងប្រុស ៧ នាក់ និងក្មេងស្រី ១៣ នាក់ នោះ $M_i = 7.13.(C_i + N_i)$ ។ ដូច្នេះតម្លៃមធ្យមនៃ S គឺ

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_{19}}{20!} = \frac{19[7.13.(18! + 18!)]}{20!} = \frac{91}{10}$$

47.▲ ★ បង្ហាញថា ករណីខ្វះត្រូវការកៅអីយ៉ាងតិច ១២ ជួរ

ដោយ 199 ជាចំនួនបឋម យើងពិនិត្យលេខ 200 ។ តួចែកធំបំផុតរបស់ 200 មិនលើសពី 39 គឺ 25 ។ យើងដឹងថា $1990 = 79 \times 25 + 15$ ។ បើសាលាចំនួន 79 បញ្ជូនសិស្ស 25 នាក់ក្នុង១សាលា និង សាលាមួយទៀត បញ្ជូនសិស្ស 15 នាក់ នោះ គេត្រូវការកៅអីយ៉ាងតិច

$$\left\lceil \frac{79}{\left\lfloor \frac{199}{25} \right\rfloor} \right\rceil = 12$$

ជួរ ដើម្បីដាក់សិស្សទាំងអស់ ។

✶ យើងនឹងបង្ហាញថា កៅអី 12 ជួរ គ្រប់គ្រាន់សម្រាប់កូនសិស្សក្នុងគ្រប់ករណីទាំងអស់ ។

យើងដាក់សិស្សឱ្យចូលអង្គុយម្តងមួយសាលាៗ និងម្តងមួយជួរៗ ដោយបំពេញកៅអី ១០ ជួរជំបូងឱ្យអស់ ដោយមិនខ្វល់ថាសិស្សមកពីសាលាតែមួយអង្គុយបែកជួរគ្នាទេ ។ យើងឃើញថា មានសិស្សសាលាមកពីសាលាយ៉ាងច្រើនចំនួន ៩ ដែលអង្គុយបែកគ្នា ។ យើងដាក់សិស្សទាំង ៩ សាលានេះ ក្នុងជួរ ២ ផ្សេងទៀត ។ ដូច្នេះ សរុបទាំងអស់មាន ១២ ជួរ ។ យើងអាចដាក់សិស្សមកពី ៩ សាលាផ្សេងគ្នា ក្នុងកៅអី ២ ជួរបាន ព្រោះ កៅអីមួយជួរ ដាក់សិស្សបានយ៉ាងតិច $\left\lfloor \frac{199}{39} \right\rfloor = 5$ សាលា ។

48.▲ ➊ (ក) ចែកកាក់ជា៣ក្រុម ដែលមួយក្រុមមានកាក់៤ ។ ថ្លឹងលើកទី១ យើងដាក់កាក់ក្រុមទី១លើថាសមួយ កាក់ក្រុមទី២លើថាសមួយទៀត ។ យើងមានករណីពីរ ៖

(1) ថាសជញ្ជីងមិនបះ

(2) ថាសជញ្ជីងបះ

ថាសជញ្ជីងមិនបះ ។ ករណីនេះកាក់ក្លែងក្លាយឋិតក្នុងក្រុមទី៣ ហើយកាក់ទាំង៨ក្នុងក្រុមទី១និងទី២សុទ្ធតែជាកាក់សុទ្ធ ។ យើងតាងលេខកាក់ក្នុងក្រុម៣ ដោយលេខ១ លេខ២ លេខ៣ និងលេខ៤ ។ យើងដាក់កាក់លេខ១ លេខ២ និងលេខ៣លើថាសម្ខាង និងកាក់៣ផ្សេងទៀតនៃក្រុមទីមួយដែលជាកាក់សុទ្ធទាំងអស់ក្នុងក្រុមម្ខាង ។ យើងមានករណីពីរ ៖

(a) ថាសជញ្ជីងមិនបះ ។ ករណីនេះ កាក់លេខ៤ ជាកាក់ក្លែងក្លាយ ។ ដោយថ្លឹងលើកទី៣រវាងកាក់ក្លែងក្លាយនិងកាក់សុទ្ធ យើងទាញបានថាមួយណាធ្ងន់ជាង ។

(b) ថាសជញ្ជីងបះ ។ ក្នុងករណីនេះកាក់ក្លែងក្លាយឋិតក្នុងចំណោមកាក់លេខ១ លេខ២ ឬ លេខ៣ ។ បើថាសរបស់កាក់សុទ្ធធ្លាក់ចុះ មានន័យថាកាក់ក្លែងក្លាយស្រាលជាងកាក់សុទ្ធ ។ តែបើថាសរបស់កាក់សុទ្ធបះឡើង មានន័យថាកាក់ក្លែងក្លាយធ្ងន់ជាងកាក់សុទ្ធ ។ ពេលថ្លឹងលើកទី៣ យើងថ្លឹងកាក់លេខ១ និងលេខ២ ។ បើថាសជញ្ជីងមិនបះ នោះកាក់លេខ៣ ជាកាក់ក្លែងក្លាយ ។ បើថាសជញ្ជីងបះ នោះយើងកំណត់បានថាកាក់លេខ១ ឬលេខ២ ជាកាក់ក្លែងក្លាយ ព្រោះយើងដឹងថាកាក់ក្លែងក្លាយធ្ងន់ជាងឬស្រាលជាងរួចទៅហើយនោះ ។

ថាសជញ្ជីងបះ ។ ករណីនេះ កាក់ក្រុមទី៣ ជាកាក់សុទ្ធទាំងអស់ ។ សន្មតថាក្រុមទី១ ធ្ងន់ជាងក្រុមទី២ ។ កត់លេខកាក់ក្រុមទី១ ដោយលេខ១ លេខ២ លេខ៣ លេខ៤ (បើមានមួយក្នុងចំណោមកាក់ទាំងនេះជាកាក់ក្លែងក្លាយ នោះកាក់ក្លែងក្លាយធ្ងន់ជាងកាក់សុទ្ធ) ហើយតាងលេខកាក់ក្រុមទី២ ដោយលេខ ៥ លេខ៦ លេខ៧ លេខ៨ (បើមានមួយក្នុងចំណោមកាក់ទាំងនេះជាកាក់ក្លែងក្លាយ នោះកាក់ក្លែងក្លាយស្រាលជាងកាក់សុទ្ធ) ។ យើងថ្លឹងលើកទី២ ដោយដាក់កាក់លេខ១ លេខ២ និងលេខ៥ នៅលើថាសមួយ និងកាក់លេខ៣ លេខ៤ និងលេខ៦លើថាសមួយទៀត ។ យើងមានករណី៣ ៖

(a) ថាសជញ្ជីងមិនបះ ។ ករណីនេះកាក់ក្លែងក្លាយអាចជាកាក់លេខ៧ ឬលេខ៨ (ដូច្នេះកាក់ក្លែងក្លាយស្រាលជាងកាក់សុទ្ធ) ។ យើងថ្លឹងលើកទី៣ យើងទាញបានកាក់មួយណាជាកាក់ក្លែងក្លាយ ហើយកាក់ក្លែងក្លាយស្រាលជាងកាក់សុទ្ធ ។

(b) ថាសមានកាក់លេខ១ លេខ២ និងលេខ៥ ធ្ងន់ជាង ។ ក្នុងករណីនេះកាក់លេខ៧ លេខ ៨ ជាកាក់សុទ្ធ ។ បើកាក់ក្លែងក្លាយឋិតក្នុងចំណោមកាក់លេខ៣ឬលេខ៤ នោះមានន័យថាកាក់ក្លែងក្លាយធ្ងន់ជាងកាក់សុទ្ធ(ព្រោះពេលថ្លឹងលើកទី២ ថាសខាងកាក់លេខ១ លេខ២ លេខ៣ លេខ៤ ធ្លាក់ចុះ), តែពេលដាក់កាក់លេខ៣ និងលេខ៤ នៅថាសម្ខាងជាមួយកាក់លេខ៦ ថាសបះខាងកាក់លេខ៣ លេខ៤ និងលេខ៦ ដូច្នេះមិនអាច មានន័យថាកាក់លេខ៣ និងលេខ៤ ជាកាក់សុទ្ធ ។ បើកាក់ក្លែងក្លាយជាកាក់លេខ៥ នោះកាក់ក្លែងក្លាយស្រាល

ជាងកាក់សុទ្ធ ។ តែថាសមានកាក់លេខ១ លេខ២ និងលេខ៥ ធ្ងន់ជាង, បែបនេះមិនអាចទេ មានន័យថាកាក់លេខ៥ជាកាក់សុទ្ធ ។ ដូច្នេះកាក់ក្លែងក្លាយអាចជាកាក់លេខ១ លេខ២ (នោះកាក់ធ្ងន់ជាកាក់ក្លែងក្លាយ) ឬលេខ៦(នោះកាក់ស្រាលជាកាក់ក្លែងក្លាយ) ។ យើងថ្លឹងលើកទី៣ ដោយដាក់កាក់លេខ១លើថាសមួយ កាក់លេខ២ លើថាសមួយទៀត ។ បើថាសជញ្ជីងមិនបះ នោះកាក់លេខ៦ ជាកាក់ក្លែងក្លាយ ហើយកាក់ក្លែងក្លាយជាកាក់ស្រាល ។ បើថាសជញ្ជីងបះ នោះកាក់នៅខាងថាសដែលធ្លាក់ចុះជាកាក់ក្លែងក្លាយ ហើយកាក់ក្លែងក្លាយជាកាក់ធ្ងន់ ។

(c) ថាសមានកាក់លេខ៣ លេខ៤ និងលេខ៦ ធ្ងន់ជាង ។ ក្នុងករណីនេះកាក់លេខ៧ លេខ៨ ជាកាក់សុទ្ធ ។ បើកាក់ក្លែងក្លាយឋិតក្នុងចំណោមកាក់លេខ១ឬលេខ២ នោះមានន័យថាកាក់ក្លែងក្លាយធ្ងន់ជាងកាក់សុទ្ធ (ព្រោះពេលថ្លឹងលើកទី២ ថាសខាងកាក់លេខ១ លេខ២ លេខ៣ លេខ៤ ធ្លាក់ចុះ), តែពេលដាក់កាក់លេខ៣ និងលេខ៤ នៅថាសម្ខាងជាមួយកាក់លេខ៦ ថាសបះខាងកាក់លេខ១ លេខ២ និងលេខ៥, បែបនេះមិនអាចទេ មានន័យថាកាក់លេខ១ និងលេខ២ ជាកាក់សុទ្ធ ។ បើកាក់ក្លែងក្លាយជាកាក់លេខ៦ នោះកាក់ក្លែងក្លាយស្រាលជាងកាក់សុទ្ធ ។ តែថាសមានកាក់លេខ៣ លេខ៤ និងលេខ៦ ធ្ងន់ជាង ដូច្នេះមិនអាច មានន័យថាកាក់លេខ៦ជាកាក់សុទ្ធ ។ ដូច្នេះកាក់ក្លែងក្លាយអាចជាកាក់លេខ៣ លេខ៤ (នោះកាក់ធ្ងន់ជាកាក់ក្លែងក្លាយ) ឬលេខ៥(នោះកាក់ស្រាលជាកាក់ក្លែងក្លាយ) ។ យើងថ្លឹងលើកទី៣ ដោយដាក់កាក់លេខ៣លើថាសមួយ កាក់លេខ៤ លើថាសមួយទៀត ។ បើថាសជញ្ជីងមិនបះ នោះកាក់លេខ៥ ជាកាក់ក្លែងក្លាយ ហើយកាក់ក្លែងក្លាយជាកាក់ស្រាល ។ បើថាសជញ្ជីងបះ នោះកាក់នៅខាងថាសដែលធ្លាក់ចុះជាកាក់ក្លែងក្លាយ ហើយកាក់ក្លែងក្លាយជាកាក់ធ្ងន់ ។

❷ (ខ) យើងនឹងបង្ហាញថា បើចំនួនកាក់ $N \le (3^n - 3)/2$ នោះ គេអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបាន និងដឹងថាធ្ងន់ ឬ ស្រាលជាងកាក់សុទ្ធ ដោយថ្លឹងចំនួន n ដង និង បើ

$N > (3^n - 3)/2$ នោះ ដោយថ្លឹង n ដង គេនឹងមិនប្រាកដថា រកឃើញកាក់ក្លែងក្លាយទេ ។ មុនស្រាយបញ្ហាក់សំណើនេះ យើងស្រាយបញ្ហាក់សំណើក្នុង (A), (B) និង (C) សិន ។

(A) សន្មតថា គេមានកាក់ចំនួន N ដែលត្រូវបានចែកជា ២ ក្រុមជាស្រេច តាងដោយ X និង Y ។ ក្រុម X និង Y មិនចាំបាច់ត្រូវតែមានកាក់ចំនួនស្មើគ្នាទេ ហើយ ក្រុមណាមួយ គ្មានកាក់សោះក៏បាន ។ មានកាក់ក្លែងក្លាយមួយ ឋិតនៅក្នុងចំណោមកាក់ចំនួន N នោះ ។ ដោយដឹងថា បើកាក់ក្លែងក្លាយឋិតក្នុងចំណោម X នោះកាក់ក្លែងក្លាយស្រាលជាងកាក់សុទ្ធ តែបើវាឋិតក្នុងចំណោមកាក់ Y នោះវាធ្ងន់ជាងកាក់សុទ្ធ ។ ចូរបង្ហាញថា បើ $2 < N \leq 3^n$ នោះ គេអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបាន ដោយថ្លឹងចំនួន n ដង និង បើ $N > 3^n$ នោះ ដោយថ្លឹងចំនួន n ដង គេមិនប្រាកដថាអាចរកកាក់ក្លែងក្លាយបានទេ ។ ក្នុងករណី ក្រុម Y គ្មានកាក់ នោះ ចំណោទក្លាយជា "មានកាក់ក្លែងក្លាយមួយក្នុងចំណោមកាក់ចំនួន N ។ ដឹងថា កាក់ក្លែងក្លាយស្រាលជាងកាក់សុទ្ធ ។ បង្ហាញថា បើ $2 < N \leq 3^n$ នោះ គេអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបាន ដោយថ្លឹងចំនួន n ដង និង បើ $N > 3^n$ នោះ ដោយថ្លឹងចំនួន n ដង គេមិនប្រាកដថាអាចរកកាក់ក្លែងក្លាយបានទេ ។ "

យើងនឹងស្រាយបញ្ហាក់សំណើនេះ តាមវិចារដោយកំណើន ។ បើ $N = 3$ នោះ

- បើកាក់ទាំង ៣ ឋិតក្នុងសំណុំ X នោះ ដោយថ្លឹងកាក់ ២ យើងឃើញថា បើកាក់ទាំង២ ថ្លឹងស្មើគ្នា នោះកាក់ទី៣ ជាកាក់ក្លែងក្លាយ និងជាកាក់ស្រាល ។ បើមិនស្មើគ្នា នោះកាក់ដែលស្រាល ជាកាក់ក្លែងក្លាយ ។

- បើមានកាក់២ ក្នុងសំណុំ X នោះដោយថ្លឹងកាក់ពីរនេះ យើងឃើញថា បើកាក់ទាំង២ ថ្លឹងស្មើគ្នា នោះកាក់ទី៣ ក្នុងសំណុំ Y ជាកាក់ក្លែងក្លាយ និងជាកាក់ធ្ងន់ ។ បើមិនស្មើគ្នា នោះកាក់ដែលស្រាល ជាកាក់ក្លែងក្លាយ ។

- ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នា ករណីមាកាក់ ២ ឬ ៣ នៅក្នុងសំណុំ Y ។

សន្មតថាសំណើពិតរហូតដល់ $2 < N \leq 3^{n-1}$ គឺមានន័យថា គេអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបានដោយថ្លឹងចំនួន $n-1$ ដង ។ ពេលនេះ យើងពិនិត្យ ករណី $N \leq 3^n$ ។ យើងយក កាក់ចំនួន x មកពីក្រុម X និង កាក់ចំនួន y មកពីក្រុម Y នៅថាសម្ខាង និង កាក់ចំនួន x មកពីក្រុម X និង កាក់ចំនួន y មកពីក្រុម Y នៅលើថាសម្ខាងទៀត; ដែល x និង y ត្រូវបានជ្រើសរើស ឱ្យផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព

$$x + y \leq 3^{n-1}$$
$$N - 2(x + y) \leq 3^{n-1}$$

វិសមភាពទាំងពីរខាងលើ នាំឱ្យ $(N - 3^{n-1})/2 \leq x + y \leq 3^{n-1}$ ។ ចំពោះ $N \leq 3^n$ យើងអាចរកបាន x, y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនេះ ។ បើថាសជញ្ជីង មិនបះ នោះកាក់ក្លែងក្លាយ ឋិតក្នុងចំណោមកាក់ $N - 2(x + y)$ ដែលមិនបានយកមកថ្លឹង ។ បើថាសជញ្ជីងមិនបះ នោះកាក់ក្លែងក្លាយអាចឋិតក្នុងចំណោមកាក់ x ក្នុងក្រុម X ដែលនៅខាងថាសស្រាល ឬ ក្នុងចំណោមកាក់ y របស់ក្រុម Y ដែលនៅខាងថាសធ្ងន់ ។ ករណីថាសជញ្ជីងមិនបះ និងដោយដឹងថា $N - 2(x + y) \leq 3^{n-1}$ នោះតាមសម្មតិកម្មរបស់វិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន យើងត្រូវថ្លឹងចំនួន $n - 1$ ដង នឹងអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបានហើយ ។ ករណីថាសជញ្ជីងបះ និងដោយដឹងថា $(x + y) \leq 3^{n-1}$ នោះតាមសម្មតិកម្មរបស់វិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន យើងត្រូវថ្លឹងចំនួន $n - 1$ ដង នឹងអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបានហើយ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបានថា បើ $N \leq 3^n$ នោះ ដោយថ្លឹងចំនួន n យើងនឹងអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបាន ។

ពេលនេះ យើងនឹងបង្ហាញថា បើ $N > 3^n$ នោះ ជាទូទៅ គេមិនអាចកំណត់បាននូវកាក់ក្លែងក្លាយ ដោយថ្លឹងតែ n ដងទេ ។ យើងបន្ថែមសម្មតិកម្មថា យើងមានកាក់សុទ្ធមួយចំនួ

ន ។ ហៅកាក់ទាំងនោះថាក្រុម Z ។ យើងនឹងបង្ហាញថា ដោយប្រើជំនួយកាក់សុទ្ធក្នុងក្រុម Z ជាទូទៅ គេមិនអាចកំណត់បានកាក់ក្លែងក្លាយដោយថ្លឹងចំនួន n ដង ទេ ។

បើ $n = 1$ នោះ បើ $N > 3$ គេមិនអាចថ្លឹងតែម្តង អាចរកឃើញកាក់ក្លែងក្លាយបានទេ ។ ពេលនេះសន្មតថាសំណើពិតរហូតដល់ចំនួនកាក់ក្នុងក្រុម X និង Y លើសពី 3^{n-1} គឺថា គេមិនអាចថ្លឹងតែ $n-1$ ដង ហើយអាចរកឃើញកាក់ក្លែងក្លាយដែលមានចំនួនលើសពី 3^{n-1} បានទេ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា បើចំនួនកាក់ $N > 3^n$ នោះគេមិនអាចរកឃើញកាក់ក្លែងក្លាយដោយថ្លឹងចំនួន n ដងបានទេ ។ សន្មតថា ពេលថ្លឹងដំបូង យើងដាក់កាក់ចំនួន x មកពីក្រុម X, កាក់ចំនួន y មកពីក្រុម Y និង កាក់បន្ថែមចំនួន z មកពីក្រុម Z នៅលើថាសម្ខាង និងនៅលើថាសម្ខាងទៀត យើងដាក់កាក់ចំនួន x' មកពីក្រុម X, កាក់ចំនួន y' មកពីក្រុម Y ដែល $x + y + z = x' + y'$ (យើងមិនចាំបាច់ដាក់កាក់មកពីក្រុម Z នៅថាសទាំងពីរទេ) ។ តាង w ជាចំនួនកាក់របស់ក្រុម X និង Y នៅសល់ មិនបានយកទៅដាក់លើថាស $(x + x' + y + y' + w = N)$ ។ យើងឃើញថា បើថាសជញ្ជីងមិនបះ នោះកាក់ក្លែងក្លាយឋិតនៅក្នុងចំណោមកាក់ដែលមិនយកទៅថ្លឹង ។ បើ w ធំជាង 3^{n-1} នោះ ដោយថ្លឹងចំនួន $n-1$ ដងថែមទៀត គេមិនអាចកំណត់បានកាក់ក្លែងក្លាយនោះទេ ។ ដូច្នេះ ពេលថ្លឹងលើកដំបូងនេះ ដើម្បីឱ្យធានាអាចរកឃើញកាក់ក្លែងក្លាយដោយថ្លឹងចំនួន n ដង ចាំបាច់ត្រូវតែ $w \le 3^{n-1}$ ។ ដូច្នេះពេលថ្លឹងលើកទីមួយនេះ យើងមាន

$$x + y + x' + y' = N - w > 3^n - 3^{n-1} = 2.3^{n-1}$$

បើថាសជញ្ជីងបះ នោះវាបះបណ្តាលមកពីកាក់ក្លែងក្លាយដែលស្រាលឋិតក្នុងចំណោមកាក់ X ឬ កាក់ក្លែងក្លាយដែលធ្ងន់ឋិតក្នុងចំណោមកាក់ Y ។ ដូច្នេះ បើថាសមានកាក់ $x + y + z$ ស្រាលជាងគេ យើងត្រូវរកកាក់ក្លែងក្លាយក្នុងចំណោមកាក់ $x + y'$ តែបើថាសនេះធ្ងន់ជាង យើងត្រូវរកកាក់ក្លែងក្លាយក្នុងចំណោម $x' + y$ ។ តែដោយ

$x+y+x'+y' > 2.3^{n-1}$ នោះមានមួយក្នុងចំណោម $x+y'$ និង $x'+y$ ត្រូវតែមានតម្លៃលើសពី 3^{n-1} ។ ក្នុងករណីដែលកាក់ក្លែងក្លាយឋិតនៅក្នុងចំណោម $x+y'$ ឬ $x'+y$ ដែលធំជាង 3^{n-1} នោះដោយថ្លឹង $n-1$ ដងបន្ថែមទៀត គេមិនអាចរកឃើញកាក់ក្លែងក្លាយបានទេ ។ ដូច្នេះសំណើពិត ។

(B) សំណើ ៖ គេមានកាក់ចំនួន N ដែលក្នុងនោះមានកាក់មួយជាកាក់ក្លែងក្លាយ ។ គេមិនដឹងថា កាក់ក្លែងក្លាយធ្ងន់ជាង ឬ ស្រាលជាងកាក់សុទ្ធនោះទេ ។ សន្មតថា គេឱ្យកាក់មួយបន្ថែមទៀត ដែលជាកាក់សុទ្ធ ។ ចូរបង្ហាញថា បើ

$$N \leq \frac{3^n-1}{2}$$

នោះជាទូទៅ ដោយថ្លឹងសាកចំនួន n ដង គេអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបាន ហើយដឹងថាកាក់ក្លែងក្លាយនោះ ធ្ងន់ជាងឬស្រាលជាងកាក់សុទ្ធ ។ ចំពោះ

$$N > \frac{3^n-1}{2}$$

និង $N > 2$ នោះជាទូទៅ ដោយថ្លឹងសាកចំនួន n ដង គេមិនអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបានទេ ។

ដំបូងយើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ករណី $N \leq \frac{3^n-1}{2}$ ។ បើ $n=1$ នោះ $N=1$ ដូច្នេះថ្លឹងតែម្តងនឹងដឹងថាកាក់ក្លែងក្លាយធ្ងន់ជាងឬស្រាលជាង ។ សន្មតថា ចំពោះ

$$N \leq \frac{3^{n-1}-1}{2}$$

ដោយថ្លឹងសាកចំនួន $n-1$ ដង គេអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបាន ។ យើងនឹងបង្ហាញថា ចំពោះ

$$N \leq \frac{3^n-1}{2}$$

ដោយថ្លឹងសាកចំនួន n ដង គេអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបាន ។ នៅលើថាសម្ខាង យើងដាក់កាក់ចំនួន x នៃកាក់ N ជាមួយកាក់សុទ្ធបន្ថែម ហើយនៅលើថាសម្ខាងទៀត យើងដាក់កាក់ចំនួន $x+1$ ។ កាក់នៅសល់មានចំនួន $N-2x-1$ ។ យើងជ្រើសរើស x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$2x+1 \leq 3^{n-1}$$
$$N-2x-1 \leq \frac{3^{n-1}-1}{2}$$

យើងឃើញថា វិសមភាពនេះមានចម្លើយ បើ $N \leq \frac{3^{n}-1}{2}$ (ព្រោះ បើ $N \leq \frac{3^{n}-1}{2} \Rightarrow N - \frac{3^{n-1}-1}{2} \leq \frac{3^{n}-1}{2} - \frac{3^{n-1}-1}{2} = 3^{n-1}$) ។ បើថាសជញ្ជីងមិនបះ នោះកាក់នៅសល់ចំនួន

$$N-2x-1 \leq \frac{3^{n-1}-1}{2}$$

មានកាក់មួយជាកាក់ក្លែងក្លាយ ។ តាមការសន្មតរបស់វិចារដោយកំណើន នោះយើងអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបានដោយថ្លឹងយ៉ាងច្រើន $n-1$ ដងទៀត ។ បើថាសជញ្ជីងបះ កាក់ចំនួន x ឋិតនៅលើថាសម្ខាង កាក់ចំនួន $x+1$ នៅលើថាសម្ខាងទៀត បង្កើតបានក្រុមពីរ ដែលមានកាក់សរុបចំនួន $2x+1 \leq 3^{n-1}$ ។ តាម (A) យើងឃើញថា បើបណ្ដាកាក់ចំនួន x នៅថាសតែមួយជាមួយកាក់សុទ្ធបះទៅលើ នោះបើមានកាក់មួយក្នុងចំណោមនោះជាកាក់ក្លែងក្លាយ នោះកាក់ក្លែងក្លាយនោះជាកាក់ស្រាល ។ ដូច្នេះ ករណីនេះកាក់ x ទាំងនេះជាកាក់ក្រុម X និង កាក់ $x+1$ នៅលើថាសម្ខាងទៀត ជាកាក់ក្រុម Y (ដូចកំណត់ក្នុង (A)) ។ តែបើថាស ខាងកាក់សុទ្ធធ្លាក់ចុះក្រោម នោះមានន័យថា បើកាក់ក្លែងក្លាយនៅលើថាសជាមួយកាក់សុទ្ធ នោះកាក់ក្លែងក្លាយធ្ងន់ជាងកាក់សុទ្ធ ដូច្នេះ កាក់ x ទាំងនេះ ឋិតក្នុងក្រុម Y និង កាក់ $x+1$ នៅលើថាសមួយទៀត ជាកាក់ក្រុម X ។ ដូច្នេះ តាម (A) យើងទាញបានថា យើងថ្លឹងយ៉ាងច្រើន $n-1$ ដងទៀត យើងនឹងកំណត់បានកាក់ក្លែងក្លាយ ។ ដូច្នេះសំណើពិត ។

ពេលនេះ យើងនឹងបង្ហាញថា បើ $N > 2$ និង

$$N > \frac{3^n - 1}{2}$$

នោះគេមិនអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបាន ដោយថ្លឹងតែ n ដងនោះទេ ។

ចំពោះ $n = 1$ យើងទាញបាន $N > 1$ ។ ដោយ $N > 2$ នោះ $N \geq 3$ ។ យើងឃើញថា ដោយថ្លឹងតែម្ដង យើងមិនអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបានទេ ។ សន្មតថាសំណើពិតរហូតដល់

$$N > \frac{3^{n-1} - 1}{2}$$

ដែល គេមិនអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបានដោយថ្លឹងតែ $n - 1$ ដង ។ យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ករណី

$$N > \frac{3^n - 1}{2}$$

យើងដាក់កាក់ចំនួន x នៃកាក់ចំនួន N និង កាក់សុទ្ធបន្ថែមចំនួន z (ត្រង់ចំណុចនេះ យើងសន្មតថា គេបន្ថែមកាក់សុទ្ធច្រើនជាងមួយ) ។ យើងដាក់កាក់ចំនួន $x + z$ ដែលយកចេញពីកាក់ N ទៅលើថាសម្ខាងទៀត ។ តាង w ជាចំនួនកាក់របស់ N ដែលនៅសល់ ។ បើថាសជញ្ជីងមិនបះ នោះមានន័យថា កាក់ក្លែងក្លាយឋិតក្នុងចំណោមកាក់ w ។ ដើម្បីឱ្យគេអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបានដោយថ្លឹងចំនួន $n - 1$ ដង ថែមទៀត នោះត្រូវតែ $w \leq \frac{3^{n-1}-1}{2}$ ។ ក្នុងករណី $w \leq \frac{3^{n-1}-1}{2}$ ដោយ $2x + z + w = N > \frac{3^n-1}{2}$ នោះ $2x + z > 3^{n-1}$ ។ តែបើថាសជញ្ជីងបះវិញ នោះកាក់ក្លែងក្លាយត្រូវឋិតនៅក្នុងចំណោមកាក់ $2x + z$ ដែលនៅលើថាសជញ្ជីង ។ យើងអាចបែងចែកកាក់នៅលើថាសទាំងពីរជាកាក់ក្រុម X និង កាក់ក្រុម Y ។ តាម (A) គេមិនអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយមួយពីក្នុង

ចំណោមកាក់ចំនួន $2x+z>3^{n-1}$ ដោយថ្លឹង ចំនួន $n-1$ ដងបានទេ ។ ដូច្នេះជាសរុប គេមិនអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបាន ដោយថ្លឹងចំនួន n ដងនោះទេ ។ សំណើពិត ។

(C) សំណើ ៖ គេមានកាក់ចំនួន N ដែល

$$2<N\leq \frac{3^n-3}{2}$$

ក្នុងចំណោមនោះ មានកាក់មួយជាកាក់ក្លែងក្លាយ ។ គេមិនដឹងថា កាក់ក្លែងក្លាយ ធ្ងន់ជាងឬស្រាលជាងកាក់សុទ្ធនោះទេ ។ បង្ហាញថា គេអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបានដោយថ្លឹងយ៉ាងច្រើនចំនួន n ដង និងជាមួយគ្នានេះ គេអាចកំណត់បានថា វាស្រាលឬធ្ងន់ជាងកាក់សុទ្ធ ។

បើយើងដាក់កាក់ចំនួន x នៅលើថាសនីមួយៗ នោះគេនៅសល់កាក់ $N-2x$ ដែលមិននៅលើថាស ។ យើងជ្រើសរើស x ដែល

$$2x\leq 3^{n-1}$$
$$N-2x\leq \frac{3^{n-1}-1}{2}$$

បើថាសជញ្ជីងមិនបះ នោះកាក់ក្លែងក្លាយឋិតក្នុងចំណោមកាក់

$$N-2x\leq \frac{3^{n-1}-1}{2}$$

ដែលយើងមិនបានយកមកថ្លឹង ។ ករណីនេះ យើងមានកាក់ចំនួន $2x$ ឋិតនៅលើថាសជញ្ជីង ដែលសុទ្ធតែជាកាក់សុទ្ធ ។ តាម (B) ដោយថ្លឹងចំនួន $n-1$ ដងថែមទៀត យើងអាចកំណត់បានកាក់ក្លែងក្លាយ ។

បើថាសជញ្ជីងបះ នោះតាម (A) និង ដោយ $2x\leq 3^{n-1}$ គេអាចកំណត់កាក់ក្លែងក្លាយបានដោយថ្លឹងចំនួន $n-1$ ដងបន្ថែមទៀត ។

ដូច្នេះ យើងទាញបានថា បើ

$$2 < N \leq \frac{3^n - 3}{2}$$

នោះដោយថ្លឹងយ៉ាងច្រើន n ដង គេអាចកំណត់បានកាក់ក្លែងក្លាយ ។

ពេលនេះ យើងនឹងបង្ហាញថា បើ

$$N > \frac{3^n - 3}{2}$$

នោះថ្លឹងសាកចំនួន n មិនគ្រប់គ្រាន់នឹងរកកាក់ក្លែងក្លាយឃើញទេ ។ នៅពេលថ្លឹងលើកដំបូង យើងដាក់កាក់ចំនួន x នៅលើថាសសន្លាង ដោយទុកកាក់ចំនួន w ចោលមួយដុំ ។ បើថាសមិនបះ នោះ កាក់ក្លែងក្លាយឋិតក្នុងចំណោម w ។ តាម (B) ដោយថ្លឹងថែមចំនួន $n-1$ ដងទៀត គេមិនអាចរកឃើញ កាក់ក្លែងក្លាយបានទេ បើ $w > \frac{3^{n-1}-1}{2}$ ។ ដូច្នេះ ត្រូវតែ $w \leq \frac{3^{n-1}-1}{2}$ ។ យើងមាន

$$2x + w = N > \frac{3^n - 3}{2} \Rightarrow 2x > \frac{3^n - 3}{2} - \frac{3^{n-1} - 1}{2} = \frac{2.3^{n-1} - 2}{2} = 3^{n-1} - 1$$

ដោយ $2x$ ជាចំនួនគូ ដូច្នេះ $2x > 3^{n-1}$ ។ តែបើថាសជញ្ជីងបះ នោះតាម (A) យើងទាញបានថា ដោយថ្លឹង$n-1$ ដង បន្ថែមទៀត គេមិនអាចរកឃើញកាក់ក្លែងក្លាយបានទេ ។

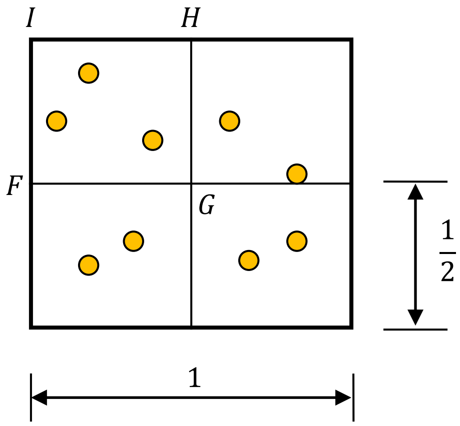
អនុវត្តទ្រឹស្តីខាងលើ ចំពោះចំនួនកាក់ ១០០០ ។ យើងមាន

$$363 = \frac{3^6 - 3}{2} < 1000 < \frac{3^7 - 3}{2} = 1092$$

យើងឃើញថា ដោយថ្លឹងចំនួន 6 ដង នោះគេអាចកំណត់បានកាក់ក្លែងក្លាយមួយពីក្នុងចំណោមកាក់យ៉ាងច្រើន ៣៦៣ ; ដោយថ្លឹងចំនួន ៧ ដង នោះគេអាចកំណត់បានកាក់ក្លែង

ក្បាលមួយពីក្នុងចំណោមកាក់យ៉ាងច្រើន ១ ០៩២ ។ ដូច្នេះ គេត្រូវការថ្លឹង ៧ ដង ដើម្បីកំណត់កាក់ក្លែងក្បាលមួយពីក្នុងចំណោមកាក់ក្លែងក្បាលចំនួន ១ ០០០ ។

49.▲ យើងចែកការេនោះជាការេតូចៗចំនួនបួនស្មើគ្នា ដូចក្នុងរូបទី 1 ។ ការេនីមួយៗមានរង្វាស់ជ្រុង 1/2 ។



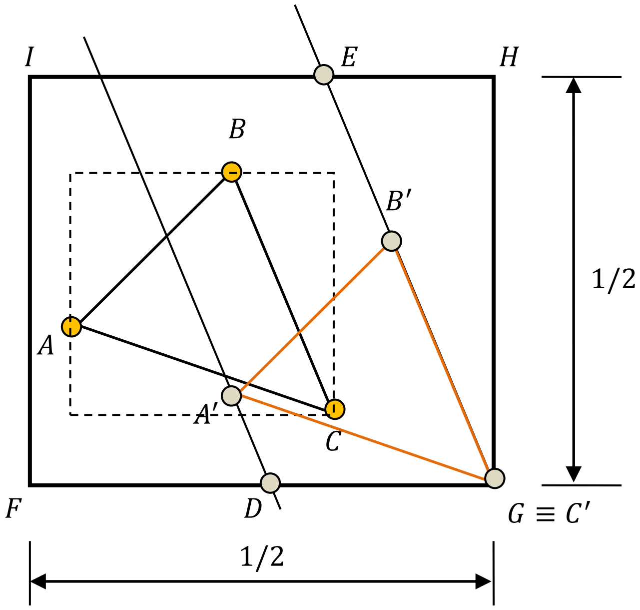
រូបទី 1 : ការបែងចែកចំណុចនៅក្នុងការេតូច

ក្នុងចំណោមការេតូចៗទាំងនេះ ត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ការេមួយដែលមានចំណុចយ៉ាងតិចចំនួន 3 ។ យើងពិនិត្យលើការេមានចំណុចចំនួនបី ដូចក្នុងរូបទី 2 ។

តាងចំណុចនោះដោយ A, B, C ។ យើងគូសប្រអប់ចតុកោណកែងមួយចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។ បើកំពូលណាមួយឋិតនៅចំកំពូលរបស់ប្រអប់ យើងទាញត្រីកោណអោយកំពូលនោះមកត្រូតនឹងកំពូលរបស់ការេក្រៅ ។ ករណីនេះជាកំពូល C ។ ដូច្នេះត្រីកោណ ABC មកជា $A'B'C'$ ។ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $A'B'C'$ ស្មើ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $DB'C'$ ដែល $A'D \parallel B'C'$ ។ យើងមាន

$$S_{DB'C'} < S_{FB'C'} < S_{FC'E} = \frac{1}{8}$$

ដូច្នេះ ក្រឡាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណABC តូចជាង 1/8 ហើយស្មើនឹង 1/8 ទាល់តែ មានកំពូលពីរឋិតលើកំពូលរបស់ការេ និងមួយទៀតស្ថិតលើជ្រុងឈមរបស់ការេ ។ តែករណីនេះមិនអាចព្រោះចំណុចទាំងប្រាំបួនឋិតនៅខាងក្នុងការេធំ ទាំងអស់ ។



រូបទី 2 : ការេដែលមានចំណុចបី

50.▲ កីឡាករសរុបមានចំនួន $3n$ នាក់ ។ ចំនួនប្រកួតសរុបមាន

$$\binom{3n}{2} = \frac{3n(3n-1)}{2}$$

យើងដឹងថា ក្នុង 12 ប្រកួតប្រុសឈ្នះ 5 ដង ស្រីឈ្នះ 7 ដង ។ ដូច្នេះចំនួនប្រកួតដែលប្រុសឈ្នះមានចំនួន

$$\frac{5}{12}\frac{3n(3n-1)}{2} = \frac{5n(3n-1)}{8}$$

ចំនួនប្រកួតប្រុសនឹងប្រុសមានចំនួន

$$\binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$$

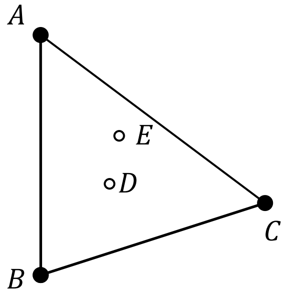
ក្នុងការប្រកួតមួយរវាងប្រុសនឹងប្រុស ត្រូវតែមានប្រុសម្នាក់ឈ្នះ ព្រោះគ្មានអ្នកស្មើ ។ ដូច្នេះក្នុងការប្រកួតរវាងប្រុសនឹងប្រុស ទាំង $n(2n-1)$ ប្រកួតនេះ មានប្រុសឈ្នះទាំងអស់ ។ ដូច្នេះ

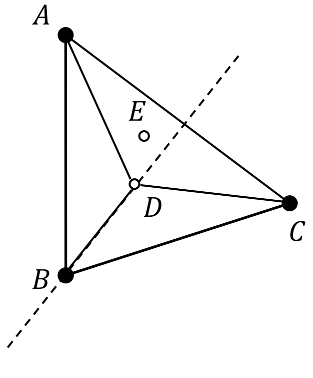
$$\begin{aligned} &\frac{5n(3n-1)}{8} \geq n(2n-1) \\ &\Rightarrow 15n-5 \geq 16n-8 \\ &\Rightarrow n \leq 3 \end{aligned}$$

បន្ទាប់មកទៀត យើងដឹងថា $5n(3n-1)/8$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះ មានតែ $n=3$ ។ ដូច្នេះមានប្រុសចំនួន 6 នាក់ និងស្រី 3 នាក់ ហើយជាសរុបមានកីឡាករ 9 នាក់ ។

51.▲ ក្នុងចំណោមចំណុច 5 នៅក្នុងប្លង់មួយ ដែលគ្មានចំណុច 3 ណារត់ត្រង់គ្នា គេអាចរកបានចំណុច4 ដែលបង្កើតបានចតុកោណប៉ោងជានិច្ច ។ ព្រោះ ៖

យើងពិនិត្យចំណុច 5 នៅក្នុងប្លង់មួយ ។ ដំបូងយើងពិនិត្យចំណុចបីក្នុងចំណោមចំណុចទាំងប្រាំនេះសិន ។ យើងគូសបន្ទាត់ភ្ជាប់ចំណុចទាំងបី $A;B;C$ ជាត្រីកោណមួយ ។ តាងចំណុចទីបួន និងទីប្រាំដោយ $D;E$ ។ បើមានមួយក្នុងចំណោម D ឬ E ឋិតនៅក្រៅត្រីកោណ, ឧបមាថា D នោះយើងអាចបង្កើតបានចតុកោណប៉ោង $ABCD$ ។ ដូច្នេះយើងពិនិត្យករណីវាឋិតនៅក្នុងត្រីកោណទាំងពីរ ។

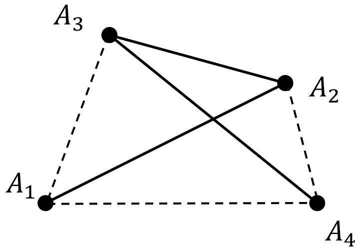




រូបទី 1 : ចំណុចប្រាំក្នុងប្លង់

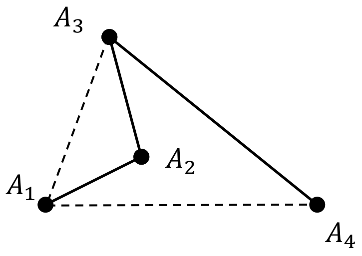
យើងសង់ត្រីកោណ $ADB; BDC; CDA$ ។ ដោយគ្មានចំណុចបីរត់ត្រង់គ្នានោះ E ត្រូវឋិតនៅខាងក្នុងត្រីកោណមួយក្នុងចំណោមនេះ ។ យើងសន្មតថា វាឋិតនៅក្នុងត្រីកោណ ADC ។ យើងគូសបន្ទាត់ (BD) ។ ដោយគ្មានចំណុចបីរត់ត្រង់គ្នានោះ E មិនត្រូវឋិតនៅលើបន្ទាត់ (BD) ទេ ។ សន្មតថាវាឋិតនៅខាងម្ខាងដូចរូប ។ ក្នុងករណីនេះ យើងសង់បានចតុកោណប៉ោង $ABDE$ ។ ដូច្នេះសំណើពិត ។

បន្ទាប់មកទៀតចំពោះគ្រប់ចតុកោណប៉ោងទាំងអស់ យើងអាចគូសអង្កត់ភ្ជាប់កំពូលរបស់វា ដែលកាត់គ្នាជានិច្ច ។ អង្កត់នោះជាអង្កត់ទ្រូងរបស់ចតុកោណ ។



រូបទី 2 : ករណីអង្កត់ $A_1A_2A_3A_4$ កាត់ខ្លួនវា

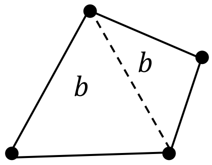
ដូច្នេះចំនួនចំណុចមិនអាចលើសពីបួនបានទេ ។ ក្នុងករណីចំណុចបួន បើចំណុចទាំងនោះបង្កើតបានជាចតុកោណប៉ោងនោះវាក៏មិនអាចដែរ ។ ករណីចំណុចទាំងបួនបង្កើតបានជាចតុកោណផត ដូចជាករណីចំណុចទីបួនដាក់នៅចំផ្ចិតត្រីកោណសម័ង្សមួយ នោះទោះជាយើងដៅអក្សរ $A_1A_2A_3A_4$ តាមលំដាប់ណាក៏វាមិនកាត់គ្នាដែរ ។



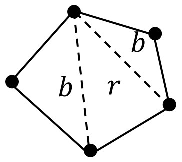
រូបទី 3 : ករណីអង្កត់ $A_1A_2A_3A_4$ មិនកាត់ខ្លួនវា

ដូច្នេះ n ធំបំផុតស្មើ 4 ។

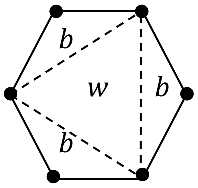
52.▲ តាង b,r,w ជាចំនួនត្រីកោណខ្មៅ ក្រហម និងស រៀងគ្នា ។ ដោយគ្មានត្រីកោណកាត់ពីលើគ្នា នោះពហុកោណប៉ោងមានកំពូលចំនួន n បង្កើតបានត្រីកោណបែបនេះចំនួន $n-2$ ។



កំពូល៤ ត្រីកោណខ្មៅ២



កំពូល៥ ត្រីកោណខ្មៅ២ ក្រហម១



កំពូល៤ ត្រីកោណខ្មៅ២ ស១

យើងមាន

$$b+r+w=n-2$$

ជ្រុងមួយរបស់ពហុកោណមិនមែនជាជ្រុងរួមនៃត្រីកោណណាមួយនោះទេ ព្រោះបើមិនអ៊ីចឹងនឹងមានត្រីកោណកាត់គ្នា ។ ដូច្នេះ

$$2b+r=n$$

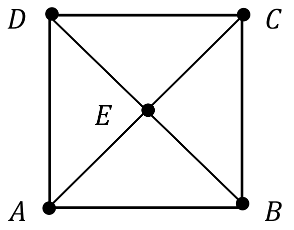
យើងទាញបាន

$$w = b - 2$$

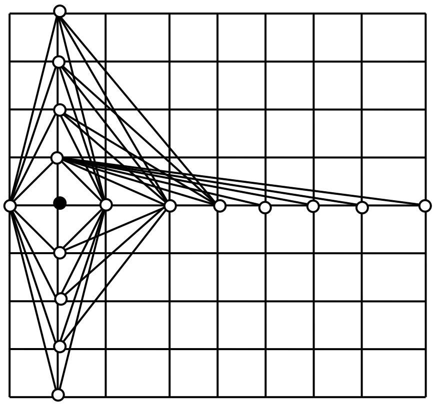
ដូច្នេះចំនួនត្រីកោណពណ៌ស តិចជាងត្រីកោណខ្មៅចំនួនពីរ ។

53.▲ a) យើងពិនិត្យចំណុច៤ដែលជាកំពូលរបស់ការេមួយ និងចំណុចមួយទៀតឋិតនៅចំផ្ចិត ។យើងមានត្រីកោណកែងចំនួនប្រាំបីគឺ

$ABC; ABD; ACD;\ BCD; AED; EAB; EBC; ECD$ ។



b) យើងពិនិត្យក្រឡា 8×8 ។ ចំពោះចំណុចមួយនៃក្រឡានេះ យើងពិនិត្យចំណុច៧ផ្សេងទៀតដែលឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយនិងចំណុច៧ផ្សេងទៀតដែលឋិតនៅលើកូឡោនតែមួយ ។ ពីចំណុចអស់នេះយើងសង់បានត្រីកោណកែងចំនួន $7 \times 7 = 49$ ។ ចំណុចទាំងអស់មានចំនួន 64 ដូច្នេះយើងសង់បានត្រីកោណកែងបែបនេះចំនួន $49 \times 64 = 3136 > 2005$ ។ ដូច្នេះមានត្រីកោណកែងយ៉ាងហោចណាស់ចំនួន 2005 ។



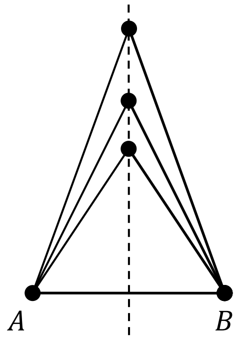
បណ្ដាត្រីកោណខ្លះក្នុងចំណោមត្រីកោណទាំង៤៩ សង់ចេញពីបណ្ដាចំណុចឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយនិងកូឡោនតែមួយ

54.▲ សំណើ : ក្នុងចំណោមចំណុចចំនួន n ឋិតក្នុងប្លង់មួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គ្មានចំណុចបីណារត់ត្រង់គ្នា យើងមានយ៉ាងហោចណាស់ត្រីកោណស្កាលែនចំនួន $\frac{n(n-1)(n-8)}{6}$ ។

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>

អង្កត់មួយដែលភ្ជាប់ចំណុចពីរអាចជាបាតនៃត្រីកោណសមបាតយ៉ាងច្រើនពីរ ព្រោះបើមិនអ៊ីចឹងទេនឹងមានចំណុចបីរត់ត្រង់គ្នាកែងនឹងអង្កត់នោះ (រូបទី 2) ។ ដូច្នេះយើងមានត្រីកោណសមបាតយ៉ាងច្រើន $2\binom{n}{2}$ ។ ដូច្នេះមានត្រីកោណស្កាលែនយ៉ាងហោចណាស់ ចំនួន

$$\binom{n}{3} - 2\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}$$



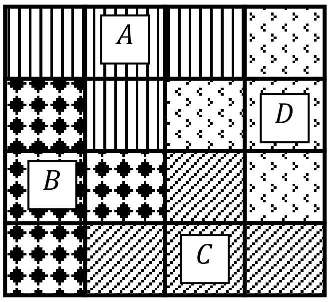
ករណីអង្កត់មួយជាបាតនៃត្រីកោណសមបាតចាប់ពីបីទៅ គេនឹងមានចំណុចយ៉ាងតិចបីរត់ត្រង់គ្នា ។

ក្នុងសំនួរនេះយើងមានចំណុច 50 លាបដោយពណ៌បួន ។ យើងមាន $50/4 = 12{,}5$ ដូច្នេះមានចំណុចយ៉ាងហោចណាស់ 13 ដែលមានពណ៌តែមួយ ។ ព្រោះបើពណ៌នីមួយៗមានតែ 12 ចំណុចទេ នោះជាសរុប យើងមាន $4 \times 12 = 48 < 50$ ។ ក្នុងចំណោមចំណុចទាំង13 នេះ យើងមានត្រីកោណស្កាលែនយ៉ាងហោចណាស់ចំនួន $\frac{13(13-1)(13-8)}{6} = 130$ ។

55.▲ យើងមានទាំងអស់ 16 ក្រឡា ។ ពេលយើងជ្រើសរើសយកក្រឡាមួយ ហើយដូរពណ៌ក្រឡានេះ និងពណ៌ក្រឡានៅជាប់គ្នា នោះម្តងនេះ យើងដូរបាន 5 ក្រឡា ។ ម្តងដូរបានពណ៌ 5 ក្រឡា ដូច្នេះយើងត្រូវការចលនាយ៉ាងតិច 4 ដង ដែលដូរបាន 20 ក្រឡា ។

បន្ទាប់ពីធ្វើចលនាបាន n ដង នោះ យើងដូរពណ៌បាន $5n$ ក្រឡា តាង $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ ជាចំនួនដងដែលក្រឡានីមួយៗដូរពណ៌ ។ ដោយពីដំបូងក្រឡាទាំងអស់មានពណ៌សក្រោយមកមានពណ៌ខ្មៅ ដូច្នេះ $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ ជាចំនួនសេស ហើយ ធំជាងឬស្មើ 1 ។ តាង $a_i = 2b_i + 1$ ។ ដូច្នេះ $2\sum_i b_i + 16 = 5n$ ។ ដូច្នេះ n ត្រូវតែជាចំនួនគូ ។

យើងមាន ចលនា 4 ដង ដែលអាចប្តូរពណ៌ក្រឡាទាំងអស់ជាខ្មៅបាន ដូចបង្ហាញក្នុងរូបទី 2 ។



ដំបូងយើងយកក្រឡា A រួចដូរពណ៌ក្រឡានេះនិងក្រឡាទាំងបីនៅជុំវិញ ពីសទៅខ្មៅ ។
បន្ទាប់មកទៀតយកក្រឡា B រួចដូរក្រឡាទាំងបួន បន្ទាប់មកទៀត C,D ។ល ។

បន្ទាប់មកទៀត ក្រឡាទាំងអស់បន្ទាប់ពីចលនា4ដង ដែលដូរពណ៌ក្រឡាជាខ្មៅទាំងអស់ ហើយ យើងអាចជ្រើសរើសយកក្រឡាណាមួយ រួចដូរពណ៌វាពីរដង នោះយើងបានក្រឡាមានពណ៌ខ្មៅទាំងអស់ដដែល ។ ដូច្នេះ បណ្ដា ចលនាចំនួន $2m$ ដង ដែល $m \geq 2$ អាចប្ដូរពណ៌ក្រឡាទាំងអស់ជាខ្មៅបាន ។ ដូច្នេះ $n = 2m \geq 4$ ។

56.▲ តាង r ជាចំនួនចំណុចពណ៌ក្រហម ។ តាង b ជាចំនួនចំណុចពណ៌ខៀវ ។ យើងមាន $b + r = 2009$ ។

យើងដឹងថា គូចំណុចពណ៌ក្រហមមួយគូដែលឋិតនៅលើរង្វង់ឯកតាណាមួយ វាអាចឋិតនៅលើរង្វង់ឯកតាបានតែ 2 ផ្សេងគ្នាប៉ុណ្ណោះ ។ ចំណុចពណ៌ក្រហមមានចំនួន r ដូច្នេះ អាចបង្កើតបានគូចំណុចចំនួន

$$\binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$$

ផ្សេងគ្នា ។ ដូច្នេះមានចំណុចពណ៌ខៀវយ៉ាងច្រើន

$$2.\frac{r(r-1)}{2} = r(r-1)$$

ដូច្នេះ $b \le r(r-1)$ ។ យើងទាញបាន

$$2009 = b + r \le r(r-1) + r = r^2 \;\; \Rightarrow r \ge 45$$

យើងមាន b ធំបំផុតពេល r តូចបំផុត ដូច្នេះពេល $r = 45 \; \Rightarrow b = 2009 - 45 = 1964$ ។

57.▲ ដំបូងយើងគណនាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់កែងដែលកាត់តាមចំណុចពីរផ្សេងគ្នា B និង C សិន ។ បន្ទាត់គូសចេញពី B កែងនឹងបន្ទាត់កាត់តាម C ក្រៅពី (BC) កាត់គ្រប់បន្ទាត់កែងគូសចេញពី C ដែលមានចំណុចប្រសព្វទាំងអស់ចំនួនរហូតដល់ $3.6 = 18$ ។ បន្ទាត់កែងនីមួយៗគូសចេញពី B ទៅកាន់បន្ទាត់ ៣ ទៀតដែលមិនកាត់តាម C អាចប្រសព្វនឹងបន្ទាត់កែងកាត់តាម C យ៉ាងច្រើនចំនួន ៥ ដែលនាំឱ្យមានចំនួនប្រសព្វ $3.5 = 15$ បន្ថែមទៀត ។ ដូច្នេះមានចំណុចប្រសព្វចំនួន $18 + 15 = 33$ ត្រូវនឹងចំណុច B, C ។

ដូច្នេះចំនួនចំណុចប្រសព្វសរុបមានទាំងអស់យ៉ាងច្រើន $10.33 = 330$ ។ ប៉ុន្តែចំណុចប្រសព្វខ្លះ ដែលជាអរតូសង់របស់ត្រីកោណ ដែលមានកំពូលជាចំណុចបិតនៅចំចំណុចទាំង ៥ ត្រូវបានរាប់ចំនួនបីដង ។ មានចំណុចបែបនេះចំនួន 10 ។ ដូច្នេះចំនួនចំណុចប្រសព្វច្រើនបំផុតគឺ $330 - 2.10 = 310$ ។

58.▲ យើងដឹងថា អ្នកទោសទី៣ អាចមើលឃើញពណ៌មួករបស់អ្នកទោសទី១ និងទី២ ។ ដូច្នេះ បើអ្នកទោសទី១ និង ទី២ មានមួកពណ៌ដូចគ្នា នោះអ្នកទោសទី៣ ត្រូវតែមានមួកមានពណ៌ផ្ទុយពីនេះ ព្រោះមានមួកតែ២ ប៉ុណ្ណោះដែលមានពណ៌ដូចគ្នា ។

តែបើអ្នកទោសទី១ និងទី២ មានមួកពណ៌ខុសគ្នា ដូចជាអ្នកទោសទី១ មានមួកពណ៌ខៀវ រីឯអ្នកទោសទី២ មានមួកពណ៌ក្រហម នោះអ្នកទោសទី៣ មិនដឹងថាមួកខ្លួនពណ៌ក្រហមឬខៀវនោះទេ ។

ក្នុងករណីបែបនេះ អ្នកទោសទី៣ និយាយមិនចេញ ។ នៅពេលដែលអ្នកទោសទី២ ដឹងថា អ្នកទោសទី៣ និយាយមិនចេញ នៅពេលនោះ អ្នកទោសទី២ ដឹងថា មួករបស់ខ្លួនត្រូវតែមានពណ៌ខុសពីមួករបស់អ្នកទោសទី១ ។ ដូច្នេះ អ្នកទោសទី២ អាចប្រកាសពីពណ៌មួករបស់ខ្លួនបាន ដោយត្រឹមត្រូវ ។

59.▲ តាង

N_a ជាចំនួនសិស្សដែលឆ្លើយចេញតែសំនួរ A

N_b ជាចំនួនសិស្សដែលឆ្លើយចេញតែសំនួរ B

N_c ជាចំនួនសិស្សដែលឆ្លើយចេញតែសំនួរ C

N_{ab} ជាចំនួនសិស្សដែលឆ្លើយចេញពីរសំនួរគឺ សំនួរ A និង សំនួរ B

N_{ac} ជាចំនួនសិស្សដែលឆ្លើយចេញពីរសំនួរគឺ សំនួរ A និង សំនួរ C

N_{bc} ជាចំនួនសិស្សដែលឆ្លើយចេញពីរសំនួរគឺ សំនួរ B និង សំនួរ C

N_{abc} ជាចំនួនសិស្សដែលឆ្លើយចេញទាំងបីសំនួរ ។

យើងមាន

$$N_a + N_b + N_c + N_{ab} + N_{bc} + N_{ac} + N_{abc} = 25 \quad (1)$$
$$N_b + N_{bc} = 2(N_c + N_{bc}) \quad (2)$$
$$N_a - 1 = N_{ac} + N_{abc} + N_{ab} \quad (3)$$
$$N_a = N_b + N_c \quad (4)$$

ពីសមីការទីមួយនិងទីបី យើងទាញបាន

$$2N_a + N_b + N_c + N_{bc} = 26 \quad (5)$$

ជំនួសសមីការ (4) ចូលសមីការ (5) យើងទាញបាន

$$3(N_b + N_c) + N_{bc} = 26 \implies N_{bc} = 26 - 3(N_b + N_c) \quad (6)$$

ជំនួស (6) ចូលក្នុង (2) យើងទទួលបាន

$$N_b + 26 - 3(N_b + N_c) = 2N_c + 52 - 6(N_b + N_c) \implies 4N_b + N_c = 26 \implies N_b \leq 6$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត តាមសមីការទី (2) យើងមាន

$$N_b + N_{bc} = 2(N_c + N_{bc}) \implies N_b = 2N_c + N_{bc} \implies N_b \geq 2N_c \implies N_c \leq N_b/2$$

ដូច្នេះ

$$4N_b + N_c = 26 \implies 26 \leq 4N_b + \frac{N_b}{2} = \frac{9N_b}{2} \implies N_b \geq 6$$

ដូច្នេះ មានតែ $N_b = 6$ ។

ប្រព័ន្ធរបាប់.ចំនួនគត់ ភាពចែកដាច់

ប្រព័ន្ធរបាប់

60. ▲ យើងមាន

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$
$$= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n$$

យក $x = y = 1, n = 10^3$ យើងទាញបាន

$$N = 2^{10^3}$$
$$\log N = 1000 \log 2 \approx 301{,}0$$

យើងទាញបាន $301 < \log N < 302 \Rightarrow 10^{301} < N < 10^{302}$ ។ 10^{301} មាន 302 ខ្ទង់ និង 10^{302} មាន 303 ខ្ទង់ ដូច្នេះ N មាន 302 ខ្ទង់ * ។

* ឧទាហរណ៍ លេខធំជាង 100 តូចជាង 1000 សុទ្ធតែជាលេខបីខ្ទង់ ។

61. ▲យើងមាន $2^{10} = 1024$ ដូច្នេះ $2^{100} = 1024^{10}$ ។ យើងដឹងថា $1000^{10} = 10^{30}$ ដូច្នេះ ក្រោយពន្លាតរួច 1000^{10} ជាលេខផ្តើមដោយលេខ 1 និង បន្តដោយលេខ 0 ចំនួន 30 ។ ដោយ $1024^{10} > 1000^{10}$ ដូច្នេះ $2^{100} = 1024^{10}$ មិនអាចមានចំនួនខ្ទង់តិចជាង 31 បានទេ ។ យើងមាន

$$\frac{1024^{10}}{1000^{10}} < \left(\frac{1025}{1000}\right)^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} = \frac{41}{40}.\frac{41}{40}.\frac{41}{40}.\frac{41}{40}.\frac{41}{40}.\frac{41}{40}.\frac{41}{40}.\frac{41}{40}.\frac{41}{40}.\frac{41}{40}$$
$$< \frac{41}{40}.\frac{40}{39}.\frac{39}{38}.\frac{38}{37}.\frac{37}{36}.\frac{36}{35}.\frac{35}{34}.\frac{34}{33}.\frac{33}{32}.\frac{32}{31} = \frac{41}{31} < 10$$

ព្រោះ

$$\frac{41}{40} = 1 + \frac{1}{40} < \frac{40}{39} = 1 + \frac{1}{39} < \frac{39}{38} = 1 + \frac{1}{38} < \cdots$$

ដូច្នេះ

$$2^{100} = 1024^{10} < 10.1000^{10}$$

ដូច្នេះ 2^{100} មានលេខតិចជាង 32 ខ្ទង់ ។ ដូច្នេះ 2^{100} មានលេខ 31 ខ្ទង់ ។

សម្គាល់ ៖ តាមលោការីត គេអាចកំណត់ចំនួនខ្ទង់បានយ៉ាងងាយ ។ ដោយដឹងថា $\log 2 = 0{,}30103\ldots$ នោះ $\log 2^{100} = 30{,}103\ldots$ ។ ដូច្នេះ $10^{30} < 2^{100} = 10^{30{,}103\ldots} < 10^{31}$ ដូច្នេះ 2^{100} មានលេខ 31 ខ្ទង់ ។

62. ▲យើងមាន

$$\begin{aligned}
3A &= 11\ldots1 \times 10^{4022} + 7 \times 11\ldots1 \times 10^{2011} + 8 \times 10^{2010} + 11\ldots1 \\
&= \frac{99\ldots9}{9}\,10^{4022} + 7\,\frac{99\ldots9}{9}10^{2011} + 8.\,10^{2010} + \frac{99\ldots9}{9} \\
&= \frac{10^{2010}-1}{9}10^{4022} + 7\,\frac{10^{2010}-1}{9}10^{2011} + 8.10^{2010} + \frac{10^{2010}-1}{9} \\
&= \frac{10^{6032} - 10^{4022} + 7.10^{4021} - 7.10^{2011} + 72.10^{2010} + 10^{2010} - 1}{9} \\
&= \frac{10^{6032} - 3.\,10^{4021} + 3.10^{2010} - 1}{9} \\
&= \frac{(10^{2010}-1)^3}{9}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{10^{2010}-1}{3}\right)^3 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{A} = \frac{10^{2010}-1}{3} = \underbrace{33\ldots3}_{2010}$$

63. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&3^5 = 243 \equiv 43 \pmod{100}, \\
&3^{10} = (3^5)^2 \equiv 43^2 = 1849 \equiv 49 \pmod{100} \\
&3^{20} \equiv 49^2 = 2401 \equiv 1 \pmod{100} \\
&3^{40} \equiv 1 \pmod{100}
\end{aligned}$$

ឬតាមរបៀបមួយបែបទៀត ដោយ $\phi(100)=\phi(2^2 5^2)=(2^2-2)(5^2-5)=40$ នោះ តាមទ្រឹស្តីបទអយល័រ យើងទាញបាន $3^{40}\equiv 1 \pmod{100}$ ។

ដូច្នេះ

$$3^{1000}=(3^{40})^{25}\equiv 1 \pmod{100}$$

យើងទាញបានលេខពីរខ្ទង់ចុងគេគឺ 01 ។

ទ្រឹស្តីបទអយល័រ

បើ $\mathrm{PGCD}(a,n)=1$ នោះ $a^{\phi(n)}\equiv 1 \pmod{n}$ ។

ដែល $\phi(n)$ ជាចំនួននៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលធំមិនលើសពី n និងបឋមនឹង n ។

ទ្រឹស្តីបទ 6.5

បើ $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ ជាផលគុណកត្តាបឋមរបស់ n នោះ

$$\phi(n)=\left(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\dots\left(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1}\right)$$

64. ▲យើងមាន $\phi(100)=\phi(2^2 5^2)=(2^2-2)(5^2-5)=40$ ។ ដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទអយល័រ $7^{40}\equiv 1 \pmod{100}$ ។ យើងមាន $\phi(40)=\phi(2^3 5)=(2^3-2^2)(5-1)=16$ ដូច្នេះ $7^{16}\equiv 1 \pmod{40}$ ។ យើងមាន $1000=16(62)+8$ ។ ដូច្នេះ

$$7^{1000}=(7^{16})^{62}7^8\equiv 1^{62}7^8=(7^4)^2\equiv 1 \pmod{40}$$

មានន័យថា $7^{1000}=1+40t$ ចំពោះចំនួនគត់ t មួយ ។ យើងទាញបាន

$$7^{7^{1000}}=7^{1+40t}=7(7^{40})^t\equiv 7 \pmod{100}$$

មានន័យថា លេខ២ខ្ទង់ចុងគេគឺ 07 ។

65. ▲តាងចំនួននោះមុនលុបលេខខាងចុងចោលដោយ $\overline{xy}$ ដែល x ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយអាចមានលេខចាប់ពីមួយខ្ទង់ឡើងទៅ និង $0\le y\le 9$ ។ តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន

$$10x+y=mx$$

ដែល m ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ដូច្នេះ $10+\frac{y}{x}=m$ ជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះ $x|y$ ។

បើ $y=0$ នោះ គ្រប់ចំនួនគត់ x ចែកដាច់ y ។

បើ $y=1$ នោះ $x=1$ យើងទាញបាន ចំនួននោះគឺ 11 ។

បើ $y = 2$ នោះ $x = 1$ ឬ $x = 2$ យើងទាញបានចំនួននោះគឺ 12 និង 22 ។

តាមរបៀបដូចនេះ យើងទាញបាន ចំនួនដែលត្រូវរកមាន ៖

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 26, 28, 33, 36, 39, 44, 48, 55, 66, 77, 88, 99 និងលេខជាពហុគុណនៃ 10 ។

66. ▲ សន្មតថា ចំនួនទាំងនោះមាន $n + 1$ ខ្ទង់ ។ ដូច្នេះចំនួននេះអាចសរសេរជា $6.10^n + y$ ដែល y ជាលេខមាន n ខ្ទង់ (វាអាចផ្តើមដោយលេខសូន្យមួយឬច្រើនជាង នេះ) ។ តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន

$$6.10^n + y = 25y \ \Rightarrow y = \frac{6.10^n}{24}$$

ចំពោះ $n = 1$ យើងទាញបាន y មិនមែនជាចំនួនគត់ ។

ចំពោះ $n \geq 2$ យើងទាញបាន $y = 25.10^{n-2}$ មានន័យថា y មានរាង $250 \dots 0$ (មានលេខសូន្យចំនួន $n - 2$) ។ យើងទាញបាន ចំនួនដែលត្រូវរកមានរាង $625\underbrace{0 \dots 0}_{n-2}$ ។

67. ▲ យើងដឹងថា ក្រោយពីផ្លាស់លេខខ្ទង់ទីមួយទៅដាក់នៅខាងចុងវិញ ចំនួនទទួលបាននៅតែមានចំនួនខ្ទង់ដូចមុនដដែល, តែចំនួនក្រោយនេះធំជាងមុន 5 ដង ។ ចំនួនមួយគុណនឹង5 ទទួលបានចំនួនមួយទៀតដែលមានចំនួនខ្ទង់ដូចគ្នា ដូច្នេះលេខខ្ទង់ទីមួយរបស់ចំនួននោះមិនអាចខុសពីលេខ 1 បានទេ ។ នៅពេលយើងយកលេខ 1 នេះមកដាក់នៅខាងចុង យើងទាញបានចំនួនមួយដែលធំជាងមុន 5 ដង ។ យើងទាញបានថាចំនួនក្រោយនេះត្រូវតែចែកដាច់នឹង 5, តែចំនួនគត់មានលេខ 1 នៅខាងចុង មិនអាចចែកដាច់នឹង 5 បានទេ ។ ដូច្នេះមិនអាចមានចំនួនគត់ដែលមានលក្ខណៈដូចលើកឡើងនោះទេ ។

បកស្រាយដូចគ្នាករណី 6 ដង និង 8 ដង ។

68. ▲ ពេលដូរលេខខ្ទង់ទី១ទៅចុង ចំនួនខ្ទង់នៅដដែល តែកើនឡើងពីរដង ។ លេខមួយពេលគុណនឹង 2 មានចំនួនខ្ទង់នៅដដែល នោះខ្ទង់ទីមួយមិនអាចធំលើសពី 4 បានទេ ។ ដោយចំនួនក្រោយនេះធំជាងចំនួនមុន 2 ដង ដូច្នេះមានន័យថាចំនួនក្រោយជាចំនួនគូ ។ ដោយចំនួនក្រោយជាចំនួនគូ នោះលេខខ្ទង់ខាងក្រោយរបស់ចំនួនគូនេះត្រូវតែជាចំនួន

គូ ។ លេខខ្ទង់ខាងក្រោយនេះជាលេខខ្ទង់ទីមួយរបស់ចំនួនមុន ។ ដោយលេខនេះតូចជាងឬស្មើ 4 នោះវាអាចជា 2 ឬ 4 ។

តាង N ជាចំនួនគត់ ដែលមាន A ជាលេខខ្ទង់ទីមួយ និង B ជាលេខខ្ទង់ផ្សេងទៀតនៅសល់ ។ សន្មតថា B មានលេខ m ខ្ទង់ ។ ដូច្នេះ

$$N = \overline{A\underbrace{x_1x_2\dots x_m}_{B}}$$
$$\Longrightarrow (A.10^m + B)2 = 10B + A$$
$$\Longrightarrow B = A\frac{2.10^m - 1}{8}$$

យើងមាន $2.10^m - 1$ ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ A ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 8 ។ តែមិនអាចព្រោះ $A = 2$ ឬ 4 មិនអាចចែកដាច់នឹង 8 ទេ ។

69. ▲ (ក) តាង N ជាចំនួននោះ ។ តាងលេខពាខ្ទង់ខាងដើមរបស់ N ដោយ p និង លេខពាខ្ទង់ខាងចុងដោយ q ។ តាមសម្មតិកម្ម

$$6(1000p + q) = 1000q + p = 6N$$
$$\Longrightarrow (1000q + p) - (1000p + q) = 5(1000p + q) = 5N$$

យើងមាន

$$(1000q + p) - (1000p + q) = 999(q - p)$$
$$\Longrightarrow 999(q - p) = 5N$$

ដូច្នេះ N ចែកដាច់នឹង 999 ព្រោះ 999 បឋមនឹង 5 ។

យើងមាន $p + q = (1000p + q) - 999p = N - 999p$, ដូច្នេះមានន័យថា $p + q$ ក៏ចែកដាច់នឹង 999 ដែរ ។ យើងមាន $p, q \leq 999 \implies p + q \leq 2(999)$ ។ ដើម្បីឱ្យ $p + q$ ចែកដាច់នឹង 999 នោះត្រូវតែ $p + q = 999$ ឬ $2(999)$ ។ ដើម្បីឱ្យ $p + q = 2(999)$ ទាល់តែ $p = q = 999$, តែមិនអាច ព្រោះ $999(q - p) = 5N$ ។

ដូច្នេះ $p + q = 999$ ។

យើងមាន

$$(1000q + p) + (1000p + q) = 1001(p + q) = 1001(999)$$
$$(1000q + p) + (1000p + q) = 7N$$
$$\Longrightarrow 7N = 1001(999) \Longrightarrow N = 142\,857$$

(ខ) តាង p ជាលេខ៤ខ្ទង់ដំបូងរបស់ N និង q ជាលេខ៤ខ្ទង់ខាងចុងរបស់ N ។ យើងមាន

$$6(10000p+q) = 10000q+p = 6N \qquad (*)$$

$(*) \Rightarrow (10000q+p)-(10000p+q) = 9999(q-p) = 5N; \Rightarrow N$ ចែកដាច់នឹង 9999 និង $p \neq q$ ។

យើងមាន $p+q = (10000p+q)-9999p = N-9999p \;\Rightarrow (p+q)$ ចែកដាច់នឹង 9999 ។ ដូច្នេះ $(p+q) = 9999$ ឬ $2(9999)$ ។ តែ $p \neq q$ ដូច្នេះ $p+q = 9999$ ។

$$(*) \Rightarrow\; (10000p+q)+(10000q+p) = 7N$$
$$\Leftrightarrow 10001(p+q) = 7N \;\;\Rightarrow 7N = 10001(9999)$$

$\Rightarrow N = 14\,285\,714{,}14$ មិនមែនជាចំនួនគត់ ។

70. ▲ ក) សន្មតថាចំនួននោះមានលេខ $k+1$ ខ្ទង់ ។ ចំនួននោះ អាចសរសេរជារាង 6.10^k+y ដែល y តួលេខ k ខ្ទង់ ខាងចុង ។ តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន

$$6.10^k+y = 25y \;\;\Rightarrow y = \frac{6.10^k}{24} = \frac{10^k}{4}$$

យើងដឹងថា y ជាចំនួនគត់ ។ ចំពោះ $k=1$ យើងទាញបាន $y = 60/24$ មិនយក ។ ចំពោះ $k \geq 2$ យើងទាញបាន $y = \frac{10^k}{4} = \frac{100.10^{k-2}}{4} = 25.10^{k-2}$ មានន័យថា y មានរាង $250\ldots0$ ដែលមានលេខសូន្យនៅខាងចុងចំនួន $k-2$ ។ យើងទាញបានថា ចំនួនដែលចង់បាន ជាចំនួនដែលមានរាង $6250\ldots0$ ដែលមានលេខសូន្យនៅខាងចុងចំនួន n ដែល $n = 0,1,2,3,\ldots.$ ។

ខ) សន្មតផ្ទុយពីសំណើ ថាមានចំនួនគត់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ។ សន្មតថាចំនួននោះមានលេខ $k+1$ ខ្ទង់ និង តាងតួលេខខ្ទង់ទីមួយដោយ a និង លេខ k ខ្ទង់ផ្សេងទៀតដោយ y ។ យើងមាន

$$a.10^k+y = 35y \;\;\Rightarrow\; y = \frac{a.10^k}{34}$$

ដោយ $a \leq 9$ នោះ $a.10^k/34$ មិនអាចជាចំនួនគត់ បានទេ ។ ដូច្នេះ ការសន្មតមិនពិត នាំឱ្យសំណើពិត ។

71. ▲ តាង $n = \overline{a_1a_2\dots a_m6} = \overline{a_1a_2\dots a_m} \times 10 + 6 = 10x + 6$ ដែល $x = \overline{a_1a_2\dots a_m}$ ជាចំនួនគត់ ។ តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន $4n = \overline{6a_1a_2\dots a_m} = 6.10^m + \overline{a_1a_2\dots a_m} = 6.10^m + x$ ។ បំបាត់ x ចេញពីទំនាក់ទំនងទាំងពីរ យើងទាញបាន

$$40n = 6.10^{m+1} + n - 6 \Rightarrow n = \frac{2(10^{m+1} - 1)}{13}$$

ដូច្នេះ យើងត្រូវរកចំនួនគត់ m តូចបំផុត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ n ជាចំនួនគត់ ។ យើងជំនួសលេខម្តងមួយៗ យើងទទួលបាន

$$m = 0:\ n = \frac{18}{13}$$
$$m = 1: n = \frac{2 \times 99}{13}$$
$$\vdots$$
$$m = 6: n = \frac{2 \times (10^7 - 1)}{13} = 153846$$

ដូច្នេះ $n = 153846$ ។

72. ▲ តាង $x = \overline{abc}, y = \overline{def} \Rightarrow x, y \le 999$ ។ យើងមាន

$$\overline{abcdef} = \overline{abc} \times 1000 + \overline{def} = 1000x + y$$
$$\overline{defabc} = \overline{def} \times 1000 + \overline{abc} = 1000y + x$$
$$7 \times \overline{abcdef} = 6 \times \overline{defabc} \Rightarrow 7(1000x + y) = 6(1000y + x)$$
$$\Rightarrow 6994x = 5993y$$
$$\Rightarrow y = \frac{6994}{5993}x = \frac{5993 + 1001}{5993}x = x + \frac{1001}{5993}x = x + \frac{77 \times 13}{461 \times 13}x$$
$$= x + \frac{77}{461}x$$

461 ជាចំនួនបឋម ហើយដោយ y ជាចំនួនគត់ 461 ត្រូវចែកដាច់ x ។ ដូច្នេះ $x = 461k, k = 1,2,..$ ។ តែ $x \le 999 \Rightarrow x = 461, 922$ ។

ចំពោះ $x = 461$ យើងទាញបាន $y = 461 + 77 = 538$

ចំពោះ $x = 922$ យើងទាញបាន

$$y = 922 + 77.2 = 1076 > 999$$

ដូច្នេះ $x = 461, y = 538 \Rightarrow$ ចំនួនដែលរកគឺ $\overline{abcdef} = 461538$ ។

73. ▲ សន្មតថា x មានរាង

$$x = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_{n-1}10^{n-1}, 0 \le a_k \le 9, a_{n-1} \ne 0$$

តាង $P(x)$ ជាផលគុណតួលេខខ្ទង់នីមួយៗរបស់ x ដូច្នេះ

$$P(x) = x^2 - 10x - 22$$

យើងមាន

$$P(x) \ge 0 \Rightarrow x \ge 12$$
$$P(x) = a_0 a_1 \dots a_{n-1} \le 9^{n-1} a_{n-1} \le 10^{n-1} a_{n-1} \le x$$

ដូច្នេះ $x^2 - 10x - 22 \le x$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល x មានលេខមួយខ្ទង់

$\Rightarrow x < 13$ ។ ដូច្នេះ $12 \le x < 13 \Rightarrow x = 12$ ។ យើងមាន ចំពោះ $x = 12, 12^2 - 10(12) - 22 = 2 = 1(2)$ ។ ដូច្នេះ $x = 12$ ។

74. ▲ យើងឃើញថា $0,\overline{abc} = \frac{abc}{999}$ និង $999 = 3^3 37$ ។ បើ abc ចែកមិនដាច់នឹង 3 ហើយនិងនឹង 37 នោះប្រភាគនេះជាប្រភាគសម្រួលរួចហើយ ។

ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 3 ហើយតូចជាងឬស្មើ 999 មានចំនួន 333 ។

ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 37 មានចំនួន 27 ។

ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 3 ផងនិង 37 ផង មានចំនួន $\frac{999}{3(37)} = 9$ ។

ដូច្នេះ ចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 3 ឬ 37 មានចំនួន $333 + 27 - 9 = 351$ ។

ចំនួនដែលមិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 និងនៃ 37 មានចំនួន $999 - 351 = 648$ ។

ប្រភាគមានរាង $s/37$ ដែល $3|s$ និង $37 \nmid s$ ឋិតនៅក្នុងសំណុំ S ។ គេមានប្រភាគបែបនេះចំនួន 12 បែប ។

គួរសម្គាល់ថា យើងមិនយកប្រភាគមានរាង $l/3^3$ ដែល $37|l$ និង $3 \nmid l$ ទេ ព្រោះប្រភាគអស់នេះ ធំជាង 1 ដែលមិនមែនជាធាតុរបស់ S ។

ដូច្នេះចំនួនភាគយកខុសៗគ្នាសរុប នៅក្នុងសំណុំនេះក្រោយសម្រួលរួច មានចំនួន $648 + 12 = 660$ ។

75. ▲ តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលមាន kខ្ទង់ ។ តាង $m = 123456789.10^k$ ។ ដូច្នេះគ្រប់ nចំនួនគត់តគ្នា $m + 1, m + 2, \dots, m + n$ សុទ្ធតែចាប់ផ្ដើមដោយលេខ

1234567890 និងមានមួយក្នុងចំណោមនោះចែកដាច់នឹង n ។ ដូច្នេះ ចំនួននោះជាពហុគុណនៃ n ហើយមានគ្រប់តួលេខពី 0 ដល់ 9 ។

76. ▲តាង z ជាលេខខ្ទង់ទី១៩៨៣ ។ យើងកាត់តួលេខក្រោយក្បៀសរបស់x ត្រឹមខ្ទង់ទី១៩៨៣ជា

$$\underbrace{123456789}_{A}\underbrace{101112\ldots 99}_{B}\underbrace{100101\ldots z}_{C}$$

A មានលេខ៩ខ្ទង់ ។ B មានលេខ $2\times 90 = 180$ ខ្ទង់ ។ ដូច្នេះC ត្រូវមានលេខ $1983 - 189 = 1794$ ខ្ទង់ ។ យើងមាន $1794 = 598\times 3 + 0$ ។ ដូច្នេះ C មានលេខ៣ខ្ទង់ដំបូងចំនួន598 ។ លេខ៣ខ្ទង់ទីមួយស្មើ១០០ ទីពីរស្មើ១០១....ទី៥៩៨ស្មើ $598 + 99 = 697$ ។ ដូច្នេះខ្ទង់ទី១៩៨៣ស្មើ $z = 7$ ។

77. ▲ នៅក្នុងលេខដែលឱ្យមកនេះ គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមានមាន jខ្ទង់ចំនួន 9.10^{j-1} ។ ចំនួនខ្ទង់សរុបរបស់លេខនេះពេលគេយកត្រឹមលេខមាន r ខ្ទង់យ៉ាងច្រើន មករៀប កំណត់ដោយ

$$g(r) = \sum_{j=1}^{r} j.\,9.10^{j-1} = r.\,10^r - \frac{10^r - 1}{9}$$

ដោយ $0 < \frac{10^r-1}{9} < 10^r$ យើងទាញបាន $(r-1)10^r < g(r) < r.\,10^r$ ។ ដូច្នេះ $g(1983) < 1983.10^{1983} < 10^4.\,10^{1983} = 10^{1987}$ និង $g(1984) > 1983.10^{1984} > 10^3.\,10^{1984} = 10^{1987}$ ។ ដូច្នេះ $g(1983) < 10^{1987} < g(1984)$ មានន័យថា ចំនួនខ្ទង់របស់លេខនេះបង្កើតដោយប្រើត្រឹមលេខមាន 1983ខ្ទង់, មានតិចជាង 10^{1987}ខ្ទង់ ហើយដោយប្រើត្រឹមលេខមាន 1984 ខ្ទង់, មានច្រើនជាង 10^{1987} ខ្ទង់ ។ ដូច្នេះ ទីតាំងខ្ទង់ទី 10^{1987} ឋិតនៅត្រឹមយកលេខមាន 1984 ខ្ទង់មកប្រើ ដូច្នេះ $f(1987) = 1984$ ។

78. ▲ យើងឃើញថា $5213 < 7^5$ ។ ដូច្នេះ យើងគណនា $0 \le a_0, \ldots, a_4 \le 6, a_4 \ne 0$ ដែល $5213 = a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0$ ។ យើងមាន

$$5213 = 2.7^4 + 411$$
$$411 = 1.7^3 + 68$$
$$68 = 1.7^2 + 19$$
$$19 = 2.7 + 5$$

ដូច្នេះ $5213 = 2.7^4 + 1.7^3 + 1.7^2 + 2.7^1 + 5.7^0 \Rightarrow 5213_{10} = 21125_7$ ។

79. ▲ យើងត្រូវសរសេរ

$$\frac{13}{16} = \frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{6^2} + \frac{a_3}{6^3} + \cdots$$

យើងមាន

$$\frac{13}{16} \times 6 = 4 + \frac{14}{16} \Rightarrow \frac{13}{16} = \frac{4}{6} + \frac{14}{96}$$
$$\frac{14}{96} \times 6^2 = 5 + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{14}{96} = \frac{5}{6^2} + \frac{1}{144}$$
....

យើងទាញបាន $\frac{13}{16} = 0{,}4513_6$ ។

80. ▲ យើងដឹងថា $p(\overline{a_1a_2 \dots a_n}) = p(\overline{a_1})p(\overline{a_2}) \dots p(\overline{a_n})$ ដែល $p(0) = 1$ ។ យើងមាន

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(9) = 1 + 2 + \cdots + 9 = 45 = A;$$
$$[p(10) + \cdots + p(19)] + [p(20 + \cdots + p(29)] + \cdots + [p(90) + \cdots + p(99)]$$
$$= (A + 1) + 2(A + 1) + \cdots + 9(A + 1) = A(A + 1);$$
$$\Rightarrow p(1) + \cdots + p(99) = A^2 + 2A;$$
$$[p(100) + \cdots + p(199)] + [p(200) + \cdots + p(299)] + \cdots$$
$$+ [p(900) + \cdots + p(999)]$$
$$= [p(1) + p(2) + \cdots + p(9)][p(00) + p(01) + \cdots + p(99)]$$
$$= A(A^2 + 2A + 1) = A(A + 1)^2;$$
$$\Rightarrow p(1) + p(2) + \cdots + p(999) = A^2 + 2A + A(A + 1)^2 = 45(2163)$$
$$= (3^3)(5)(7)(103)$$

ដូច្នេះ ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ 103 ។

81. ▲ យើងមាន $m + n = n - m + 2m$ ។ ដូច្នេះ $m + n$ តូចបំផុត ពេល $n - m$ និង $2m$ តូចបំផុត ។

យើងមាន $1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1)$ ចែកដាច់នឹង $1000 = 2^3 5^3$ ព្រោះលេខបីខ្ទង់ខាងចុងរបស់ 1978^n និង 1978^m មានតម្លៃដូចគ្នា ។ ដោយកត្តាទីពីរជា

ចំនួនសេស នោះ 2^3 ត្រូវតែចែកដាច់ 1978^m ដូច្នេះ $m \geq 3$ ។ ដូចគ្នា 5^3 ត្រូវតែចែកដាច់ $1978^{n-m} - 1$ ។ ដូច្នេះ មានចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត s មួយ ដែល

$$1978^s \equiv 1 \pmod{125}$$

ដោយ $125 = 5^3 \Rightarrow \phi(125) = 5^3 - 5^2 = 100$ ហើយតាមទ្រឹស្តីបទអយល័រ $1978^{100} \equiv 1 \pmod{125}$ ។ ដូច្នេះ $s|100$ ។

ដោយ $125|(1978^s - 1) \Rightarrow 5|(1978^s - 1) \Rightarrow 3^s \equiv 1978^s \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow s$ ជាពហុគុណនៃ 4 ។ ដោយ $s|100$ នោះនាំឱ្យ $s = 4,20,100$ ។ យើងពិនិត្យករណីនីមួយៗ ។

ករណី $s = 4$ យើងមាន

$$1978^4 \equiv (-22)^4 = 2^4 11^4 = (4.121)^2 \equiv (-16)^2 \equiv 6 \pmod{125}$$

មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ មានន័យថា $s \neq 4$ ។ ដូចគ្នាដែរ

$$1978^{20} = 1978^4(1978^4)^4 \equiv 6.6^4 \equiv 26 \pmod{125}$$

មានន័យថា $s \neq 20$ ។ ដូច្នេះមានតែ $s = 100$ ។ ដោយ s ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដែល

$1978^s \equiv 1 \pmod{125}$ នោះ យើងយក $n - m = s = 100$ និង $m = 3$ មានន័យថា $n = 103, m = 3$ ។ យើងទាញបាន $m + n = 106$ ។

82. ▲យើងដឹងថា $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1980} + \left(6-\sqrt{35}\right)^{1980} = 2k$ ជាចំនួនគត់គូ ។ យើងមាន $0 < 6 - \sqrt{35} < \frac{1}{10}$ (ព្រោះបើ $6 - \sqrt{35} > \frac{1}{10} \Rightarrow 3500 < 3481$)

$$\Rightarrow \left(6-\sqrt{35}\right)^{1980} < 10^{-1980}$$

$$\Rightarrow 2k - 1 + 0,\underbrace{99\ldots9}_{1979\text{ ដង}} = 2k - \frac{1}{10^{1980}} < \left(6+\sqrt{35}\right)^{1980} < 2k$$

$\Rightarrow$ 1979 ខ្ទង់ដំបូងក្រោយក្បៀសរបស់ $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1980}$ សុទ្ធតែជាលេខ 9 ។

83. ▲ យើងមាន $4444 \equiv 7 \pmod 9$

$$\Rightarrow 4444^3 \equiv 7^3 \equiv 1 \pmod 9$$

$\Rightarrow 4444^{4444} = 4444^{3.1481}4444 \equiv 7 \pmod 9$

តាង C ជាផលបូកលេខខ្ទង់នីមួយៗរបស់B ។ តាមទ្រឹស្តីបទនៃភាពចែកដាច់នឹង 9 យើងទាញបាន

$$7 \equiv 4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C \pmod 9$$

យើងមាន

$$4444 \log_{10} 4444 < 4444 \log_{10} 10^4 = 17776$$

មានន័យថា 4444^{4444} មានយ៉ាងច្រើន 17776 ខ្ទង់ ។ ដូច្នេះ ផលបូក តួលេខខ្ទង់នីមួយៗរបស់ 4444^{4444} យ៉ាងច្រើនស្មើ $9(17776) = 159984$ ដូច្នេះ $A \leq 159984$ ។ ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ធម្មជាតិទាំងអស់ ដែល≤ 159984, ចំនួនដែលមានផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់នីមួយៗរបស់វាធំបំផុត គឺ99 999 ដូច្នេះ $B \leq 45$ ។ ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ធម្មជាតិទាំងអស់ ដែល ≤ 45, ចំនួនដែលមានផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់នីមួយៗរបស់វាធំបំផុត គឺ 39 ដែលផលបូកតួលេខស្មើ 12 ។ ដូច្នេះ ផលបូកតួលេខរបស់ B យ៉ាងច្រើនស្មើ 12 ។ តែដោយ $C \equiv 7 \pmod 9$ នោះមានន័យថា $C = 7$ ។

84. ▲ យើងត្រូវរកចំនួនរុចិរមានលេខពីរខ្ទង់ ដូច្នេះតាង $n = \overline{ab}$ ដែល $1 \leq a \leq 9$ និង $0 \leq b \leq 9$ ។ យើងមាន $n = xy$ ដែល $x, y > 1 \Leftrightarrow x, y \geq 2$ ។ យើងទាញបាន

$$xy = 10a + b; S(n) = a + b$$

សន្មតថា $x \leq y$ ។ បើ x មានលេខពីរខ្ទង់នោះ $y \geq x \geq 10 \Rightarrow xy \geq 100$ មានលេខបីខ្ទង់ ដូច្នេះធំជាង n ។ ដូច្នេះ x ត្រូវតែមានលេខតែមួយខ្ទង់តែប៉ុណ្ណោះ ។ ដូច្នេះ

$$S(x) = x$$

បើ y មានលេខមួយខ្ទង់ នោះ $S(y) = y$ ។ លក្ខខណ្ឌ

$$S(x)S(y) = S(n) \Rightarrow xy = a + b \Rightarrow 10a + b = a + b \Rightarrow a = 0$$

មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ ដូច្នេះ y ត្រូវមានលេខពីរខ្ទង់ ។

តាង $y = \overline{cd} = 10c + d$ ដែល $1 \leq c \leq 9$ និង $0 \leq d \leq 9$ ។ ដូច្នេះ $S(y) = c + d$ ។ ដូច្នេះ

$$S(x)S(y) = S(n) \Rightarrow x(c + d) = a + b$$
$$xy = 10a + b \Rightarrow x(10c + d) = 10a + b \Rightarrow a = xc; b = xd$$

ដូច្នេះ ដើម្បីឱ្យ $n=\overline{ab}$ ជាចំនួនរុចិរ គឺ $a=xc;b=xd$ ដែល $2\le x\le 9;1\le c\le 9;0\le d\le 9;1\le a\le 9;0\le b\le 9$ ។ លក្ខខណ្ឌនេះមានន័យថា បើ a ជាពហុគុណនៃ x នោះ b ត្រូវតែជាពហុគុណនៃ x ដែរ ។

ដើម្បីកំណត់ចំនួននៃចំនួនរុចិរ យើងពិនិត្យម្តងមួយៗលើករណី $x=2;3;4;5;6;7;8;9$ ។ យើងមិនបាច់សិក្សាករណី $x=4;6;8$ ទេ ព្រោះ បើ a,b ជាពហុគុណនៃ $4;6;8$ នោះវាក៏ជាពហុគុណនៃ 2 ដែរ ដែលយើងបានរាប់ចូលក្នុងករណី $x=2$ រួចហើយ ។ ដូចគ្នា យើងមិនបាច់សិក្សាករណី $x=9$ ទេ ព្រោះវាជាពហុគុណនៃ 3 ។ ដូច្នេះយើងត្រូវសិក្សាករណី $x=2;3;5;7$ ។

ចំពោះ $x=2$ យើងទាញបាន $a=\{2;4;6;8\};b=\{0;2;4;6;8\}$ ។ យើងទាញបាន $n=20;22;24;26;28;40;42;\ldots;60;\ldots;66;\ldots$ មានទាំងអស់ចំនួន 20 ។

ចំពោះ $x=3$ យើងទាញបាន $a=\{3;6;9\};b=\{0;3;6;9\}$ ។ យើងទាញបាន $n=30;33;36;39;60;63;66;69;90;93;96;99$ មានទាំងអស់ចំនួន 12 តែត្រូវដកចំនួនពីរចេញ ព្រោះរាប់ $60;66$ ពីរដង ដោយសារបានគិតចំនួនពីរនេះចូលក្នុងករណី $x=2$ រួចម្តងហើយ ។

ចំពោះ $x=5$ យើងទាញបាន $a=\{5\};b=\{0;5\}$ ។ យើងទាញបាន $n=50;55$ មានទាំងអស់ចំនួន 2 ។

ចំពោះ $x=7$ យើងទាញបាន $a=\{7\};b=\{0;7\}$ ។ យើងទាញបាន $n=70;77$ មានទាំងអស់ចំនួន 2 ។

ដូច្នេះជាសរុបមានលេខរុចិរពីរខ្ទង់ចំនួន $20+10+2+2=34$ ។

85. ▲ ដោយ $x=1000;x^2=1000000$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ នោះដោយសារយើងចង់បានx យើងនឹងរកមើលតែចំនួនគត់ x ដែលមានលេខបីខ្ទង់តែប៉ុណ្ណោះ ។ ដូច្នេះ $x\le 999$ ។

តាង $x=\overline{a_3a_2a_1}\ \Rightarrow x=100a_3+10a_2+a_1;0\le a_1;a_2;a_3\le 9$

$$\Rightarrow x^2=10^4a_3^2+10^2a_2^2+a_1^2+2000a_2a_3+200a_1a_3+20a_1a_2\quad (*)$$

តាមសម្មតិកម្ម

$$x^2 = \overline{\dots b_5 b_4 a_3 a_2 a_1}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \equiv a_1 \pmod{10} & (1) \\ x^2 \equiv \overline{a_2 a_1} \pmod{100} & (2) \\ x^2 \equiv \overline{a_3 a_2 a_1} \pmod{1000} & (3) \end{cases}$$

ដូច្នេះយើងទាញបាន

■(1) $\Leftrightarrow\ a_1^2 \equiv a_1 \pmod{10}$

យើងមាន

$0^2 \equiv 0 \pmod{10}; 1^2 \equiv 1 \pmod{10};\ 2^2 \equiv 4 \pmod{10};\ 3^2 \equiv 9 \pmod{10};\ 4^2 \equiv 6 \pmod{10};\ 5^2 \equiv 5 \pmod{10};\ 6^2 \equiv 6 \pmod{10};\ 7^2 \equiv 9 \pmod{10};\ 8^2 \equiv 4 \pmod{10};\ 9^2 \equiv 1 \pmod{10}$

ដូច្នេះ $a_1 = \{0; 1; 5; 6\}$ ។

■(2) $\Leftrightarrow\ a_1^2 + 20a_1a_2 \equiv \overline{a_2 a_1} = 10a_2 + a_1 \pmod{100}$

បើ $a_1 = 0$ នោះ $0 \equiv 10a_2 \pmod{100} \Rightarrow a_2 = 0$

បើ $a_1 = 1$ នោះ

$$1 + 20a_2 \equiv 10a_2 + 1 \pmod{100}$$
$$\Rightarrow 10a_2 \equiv 0 \pmod{100}$$
$$\Rightarrow a_2 = 0$$

បើ $a_1 = 5$ នោះ

$$25 + 100a_2 \equiv 10a_2 + 5 \pmod{100}$$
$$\Rightarrow 90a_2 + 20 \equiv 0 \pmod{100}$$
$$\Rightarrow a_2 = 2$$

បើ $a_1 = 6$ នោះ

$$36 + 120a_2 \equiv 10a_2 + 6 \pmod{100}$$
$$\Rightarrow 110a_2 + 30 \equiv 0 \pmod{100}$$
$$\Rightarrow a_2 = 7$$

$\Rightarrow (a_1; a_2) = \{(0; 0); (1; 0); (5; 2); (6; 7)\}$

■(3) $\Leftrightarrow\ 100a_2^2 + a_1^2 + 200a_1a_3 + 20a_1a_2 \equiv \overline{a_3 a_2 a_1} \pmod{1000}$

$\Leftrightarrow\ 100a_2^2 + a_1^2 + 200a_1a_3 + 20a_1a_2 \equiv 100a_3 + 10a_2 + a_1 \pmod{1000}$

បើ $a_1 = 0; a_2 = 0$ នោះ $0 \equiv 100a_3\ (mod\ 1000) \Rightarrow a_3 = 0$

បើ $a_1 = 1; a_2 = 0$ នោះ

$$1 + 200a_3 \equiv 100a_3 + 1 \pmod{1000}$$
$$\Rightarrow 100a_3 \equiv 0 \pmod{1000}$$
$$\Rightarrow a_3 = 0$$

បើ $a_1 = 5; a_2 = 2$ នោះ

$$400 + 25 + 1000a_3 + 200 \equiv 100a_3 + 20 + 5 \pmod{1000}$$
$$\Longrightarrow 600 \equiv 100a_3 \pmod{1000}$$
$$\Longrightarrow a_3 = 6$$

បើ $a_1 = 6; a_2 = 7$ នោះ

$$4900 + 36 + 1200a_3 + 840 \equiv 100a_3 + 70 + 6 \pmod{1000}$$
$$\Longrightarrow 1100a_3 + 5700 \equiv 0 \pmod{1000}$$
$$\Longrightarrow a_3 = 3$$

ដូច្នេះ យើងទាញបាន $x = 0;\ 1;\ 625; 376$ ។ យើងមិនយក $0; 1$ ព្រោះមានតែមួយខ្ទង់ ។ ដូច្នេះចំនួនដែលរកគឺ 376 ដែល $376^2 = 141376$ ។

86. ▲ តាង x ជាចំនួនដែលត្រូវរក ។ យើងមាន $6x$ មានចំនួនខ្ទង់ដូច x ដែរ ដូច្នេះលេខខ្ទង់ទីមួយរបស់ x ត្រូវតែមានតម្លៃតូចជាង ២ (ព្រោះ $2 \times 6 = 12$ មាន២ខ្ទង់ នាំឱ្យផលគុណកើនឡើងមួយខ្ទង់) ។ ដូច្នេះលេខខ្ទង់ទី១របស់ x មានតម្លៃស្មើ១ ។ លេខខ្ទង់ទី២ត្រូវតែមានតម្លៃតូចជាង៧ ព្រោះ បើគេគុណលេខផ្ដើមដោយលេខ១៧ នឹង៦ នោះគេនឹងបានលេខដែលមានចំនួនខ្ទង់កើនឡើងមួយខ្ទង់ $(17 \times 6 = 102)$ ។ ដូច្នេះ លេខខ្ទង់ទី២ត្រូវតែមានតម្លៃតូចជាងឬស្មើ៦ ។ យើងទាញបាន

លេខខ្ទង់ទី១ របស់ $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ និង $6x$ សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ ព្រោះ

លេខខ្ទង់ទី១របស់ x ខុសពីលេខខ្ទង់ទី១របស់ $2x$ ព្រោះ លេខខ្ទង់ទី១របស់ x ស្មើ 1 ដូច្នេះ $x \geq 10^5$ (ព្រោះវាមានលេខ៦ខ្ទង់) ។ ដូច្នេះ $2x \geq 2.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ២យ៉ាងតិច ។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន លេខខ្ទង់ទី១របស់ x ខុសពីលេខខ្ទង់ទី១របស់ $3x, 4x, 5x, 6x$ ។ លេខខ្ទង់ទី១របស់ $2x$ និង $3x$ ខុសគ្នា ព្រោះបើ $2x$ ផ្ដើមដោយលេខ២ នោះ $2x \geq 2.10^5$ (ព្រោះវាមានលេខ៦ខ្ទង់) នោះ $3x \geq 3.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ៣យ៉ាងតិច ។ បើ $2x$ ផ្ដើមដោយលេខ៣ នោះ $2x \geq 3.10^5$ នោះ $3x > 4.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ៤យ៉ាងតិច ។ $2x$ មិនអាចផ្ដើមដោយលេខ៤បានទេ ព្រោះដើម្បីឱ្យវាផ្ដើមដោយលេខ៤ ទាល់តែពេលគុណខ្ទង់ទី២នៃx នឹង២ យើងមានត្រាទុក២ ។ ដើម្បីឱ្យបានត្រាទុក២ ពេលគុណខ្ទង់ទី២ ទាល់តែផលគុណខ្ទង់ទី២ បូកនឹងត្រាទុកបានមកពីខ្ទង់ទី៣មានតម្លៃចាប់ពី២០ឡើងទៅ ។ តែខ្ទង់ទី២

មានតម្លៃធំបំផុតស្មើ៦ ពេលគុណនឹង២ បានយ៉ាងច្រើន១២ ត្រូវការ៨ ថែមទៀតទើបគ្រប់ ២០ ។ តែពេលគុណខ្ទង់ទី៣នឹង២ យើងទទួលបានត្រាទុកយ៉ាងច្រើនស្មើ២ ។ ដូច្នេះយើងមិន អាចរកត្រាទុកមកបូកនឹង១២ ឱ្យគ្រប់២០បានទេ ។ ដូចគ្នាយើងទាញបានលេខខ្ទង់ទី១របស់ $2x$ ខុសពីលេខខ្ទង់ទី១របស់ $4x, 5x, 6x$ ។

លេខខ្ទង់ទី១របស់ $3x$ និង $4x$ ខុសគ្នា ព្រោះបើ $3x$ ផ្ដើមដោយលេខ៣ នោះ $3x \geq 3.10^5$ នោះ $4x \geq 4.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ៤យ៉ាងតិច ។ បើ $3x$ ផ្ដើមដោយលេខ៤ នោះ $3x \geq 4.10^5$ នោះ $4x > 5.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ៥ យ៉ាងតិច ។ បើ $3x$ ផ្ដើមដោយលេខ៥ នោះ $3x \geq 5.10^5$ នោះ $4x > 6.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ៦ យ៉ាងតិច ។ $3x$ មិនអាចផ្ដើម ដោយលេខ៦ បានទេ(បកស្រាយដូចខាងលើ) ។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន លេខខ្ទង់ទី១របស់ $3x$ ខុសពីលេខខ្ទង់ទី១របស់ $5x, 6x$ ។

លេខខ្ទង់ទី១របស់ $4x$ និង $5x$ ខុសគ្នា ព្រោះបើ $4x$ ផ្ដើមដោយលេខ៤ នោះ $4x \geq 4.10^5$ នោះ $5x \geq 5.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ៥យ៉ាងតិច ។ បើ $4x$ ផ្ដើមដោយលេខ៥ នោះ $4x \geq 5.10^5$ នោះ $5x > 6.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ៦ យ៉ាងតិច ។ បើ $4x$ ផ្ដើមដោយលេខ៦ នោះ $4x \geq 6.10^5$ នោះ $5x > 7.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ៧ យ៉ាងតិច ។ $4x$ មិនអាចផ្ដើម ដោយលេខ៧ បានទេ(បកស្រាយដូចខាងលើ) ។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន លេខខ្ទង់ទី១របស់ $4x$ ខុសពីលេខខ្ទង់ទី១របស់ $6x$ ។

លេខខ្ទង់ទី១របស់ $5x$ និង $6x$ ខុសគ្នា ព្រោះបើ $5x$ ផ្ដើមដោយលេខ៥ នោះ $5x \geq 5.10^5$ នោះ $6x \geq 6.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ៦យ៉ាងតិច ។ បើ $5x$ ផ្ដើមដោយលេខ៦ នោះ $5x \geq 6.10^5$ នោះ $6x > 7.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ៧ យ៉ាងតិច ។ បើ $5x$ ផ្ដើមដោយលេខ៧ នោះ $5x \geq 7.10^5$ នោះ $6x > 8.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ៨ យ៉ាងតិច ។ បើ $5x$ ផ្ដើមដោយ លេខ៨ នោះ $5x \geq 8.10^5$ នោះ $6x > 9.10^5$ ផ្ដើមដោយលេខ៩ ។ $5x$ មិនអាចផ្ដើម ដោយលេខ៩ បានទេ(បកស្រាយដូចខាងលើ) ។

ដោយសារ លេខខ្ទង់ទី១នៃ $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ និង $6x$ សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ ហើយ $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ និង $6x$ សុទ្ធតែមានលេខ៦ខ្ទង់ និងប្រើតួលេខតែមួយជាមួយ x ដូច្នេះ x ផ្សំពីលេខខ្ទង់ទី១នៃ $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ និង $6x$ ។

ដោយ x ផ្សំពីលេខខ្ទង់ទី១នៃ $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ និង $6x$ ដូច្នេះ លេខក្នុងខ្ទង់នីមួយៗរបស់ x សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ ។

មិនអាចមានលេខក្នុងខ្ទង់ណាមួយនៃ $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ និង $6x$ ដែលជាលេខ 0 បានទេ ព្រោះបើមិនអ៊ីចឹងទេ ត្រូវតែមានមួយក្នុងចំណោម $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ និង $6x$ ត្រូវផ្ដើមដោយលេខ 0 ។ ពេលនោះលេខមួយនោះមានតែ៥ខ្ទង់ប៉ុណ្ណោះ ។

លេខខាងចុងរបស់ x មិនអាចជាលេខគូបានទេ ព្រោះបើមិនអ៊ីចឹង ពេលគុណនឹង 5 យើងនឹងបានលេខ 0 នៅខាងចុង ។

លេខខាងចុងរបស់ x មិនអាចស្មើ 5 បានទេ ព្រោះបើមិនអ៊ីចឹង ពេលគុណនឹង 2 យើងនឹងបានលេខ 0 នៅខាងចុង ។

ដូច្នេះលេខខ្ទង់ខាងចុងរបស់ x អាចជា $1, 3, 7, 9$ ។ គុណលេខទាំងនេះនឹង 1,2,3,4,5 នឹង 6 យើងទាញបានថា លេខខ្ទង់ខាងចុងរបស់ $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ និង $6x$ សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ ។

ដោយ $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ និង $6x$ សុទ្ធតែមានលេខ៦ខ្ទង់ និងប្រើតួលេខតែមួយជាមួយ x និង លេខខ្ទង់ខាងចុងរបស់ $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ និង $6x$ សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ ដូច្នេះ លេខទាំងនោះត្រូវតែឋិតនៅក្នុងចំណោមលេខក្នុងខ្ទង់នីមួយៗរបស់ x ។ ដូច្នេះត្រូវតែមានលេខខាងចុងមួយដែលមានតម្លៃស្មើ 1 (ជាលេខខ្ទង់ទី១ របស់ x) ។ ដោយលេខខ្ទង់ខាងចុងរបស់ x អាចជា $1, 3, 7, 9$ នោះលេខខ្ទង់ខាងចុងរបស់ $5x$ ជាលេខ៥ជានិច្ច ។

មានតែ $3x$ មួយប៉ុណ្ណោះដែលអាចមានលេខខ្ទង់ខាងចុងជាលេខ១ ព្រោះ $2x, 4x, 6x$ សុទ្ធតែជាលេខគូ ហើយ x មានលេខ១ ជាលេខខ្ទង់ទី១រួចហើយ ។

ដោយ $3x$ បញ្ចប់ដោយលេខ ១ នោះ x ត្រូវបញ្ចប់ដោយលេខ ៧ ។ ដូច្នេះ $2x$ បញ្ចប់ដោយលេខ៤ ; $4x$ បញ្ចប់ដោយលេខ៨ ; $5x$ បញ្ចប់ដោយលេខ៥ ; $6x$ បញ្ចប់ដោយលេខ ២ ។

ដូច្នេះតួលេខរបស់ $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ និង $6x$ ត្រូវតែផ្សំពី $1, 2, 4, 5, 7, 8$ ។ យើងដឹងថា លេខខ្ទង់ទី១នៃ $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ និង $6x$ សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ ហើយឋិតនៅក្នុងចំណោម $1, 2, 4, 5, 7, 8$ និង $x < 2x < 3x < 4x < 5x < 6x$ ដូច្នេះ x ត្រូវផ្ដើមដោយលេខ១ ; $2x$ ត្រូវផ្ដើមដោយលេខ២ ; $3x$ ត្រូវផ្ដើមដោយលេខ៤ ; $4x$ ត្រូវផ្ដើមដោយលេខ ៥ ; $5x$ ត្រូវផ្ដើមដោយលេខ៧ ; $6x$ ត្រូវផ្ដើមដោយលេខ៨ ។ យើងអាចសរសេរជា

$$x.1 = 1 **** 7,$$
$$x.2 = 2 **** 4,$$
$$x.3 = 4 **** 1,$$
$$x.4 = 5 **** 8,$$
$$x.5 = 7 **** 5,$$
$$x.6 = 8 **** 2$$

ដែល $*$ ជាតួលេខដែលយើងមិនទាន់ស្គាល់ ។

ក្នុងសមីការខាងលើជួរដេកនីមួយៗមានគ្រប់តួលេខ 1,2,4,5,7 និង 8 ហើយមានតែម្ដងតែប៉ុណ្ណោះ ។ ជួរឈរនីមួយៗត្រូវតែមានលេខមួយក្នុងចំណោម 1,2,4,5,7 និង 8 ។ យើងមាន $x.3 - x.2 = x.1$ ។ ឧបមាថា $x.3$ និង $x.2$ មានតួលេខដូចគ្នាក្នុងខ្ទង់ណាមួយដែលយើងសន្មតថាជាខ្ទង់ទី៣ ។ ដូច្នេះ $x.1 = x.3 - x.2$ នឹងមានលេខខ្ទង់ទី៣អាចជាលេខ០ ឬលេខ៩ ព្រោះត្រាទុកមានតម្លៃធំបំផុតស្មើ១ ។ តែ $x.1$ មិនអាចមានលេខក្នុងខ្ទង់ណាមួយជាលេខ០ ឬលេខ៩បានទេ ។ ដូច្នេះរវាង $x.3$ និង $x.2$ មិនអាចមានលេខក្នុងខ្ទង់ណាមួយដែលដូចគ្នាបានទេ ។ តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបាន * ក្នុងជួរឈរនីមួយៗមានគ្រប់តួលេខ 1,2,4,5,7 និង 8 ហើយផ្សេងគ្នាទាំងអស់ ។ យើងទាញបានផលបូកតួលេខក្នុងជួរឈរនីមួយៗស្មើនឹង $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$ ។ ដូច្នេះ

$$x.1 + x.2 + x.3 + x.4 + x.5 + x.6$$
$$= 27.10^5 + 27.10^4 + 27.10^3 + 27.10^2 + 27.10^1 + 27$$
$$\Longrightarrow 21x = 2.999.997$$
$$\Longrightarrow x = 142.857$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x = 142.857, \quad 2x = 285.714$$
$$3x = 428.571, \quad 4x = 571.428$$
$$5x = 714.285, \quad 6x = 857.142$$

87. ▲ លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$100a + 10b + c = abc(a + b + c)$$
$$\Leftrightarrow 99a + 9b + (a + b + c) = abc(a + b + c)$$
$$\Leftrightarrow 99a + 9b = (abc - 1)(a + b + c)$$
$$\Leftrightarrow 9(11a + b) = (abc - 1)(a + b + c)$$

យើងដឹងថា a, b, c ជាតួលេខពី1 ដល់ 9 ។

ករណី $a + b + c = 9k$ ដែល $k = 1; 2; 3$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} a + b + c = 9k \\ 11a + b = k(abc - 1) \end{cases}$$
$$\Rightarrow 11a + b = kab(9k - a - b) - k$$
$$\Leftrightarrow kba^2 + [11 - kb(9k - b)]a + b + k = 0$$
$$\Delta = [11 - kb(9k - b)]^2 - 4kb(b + k)$$

ករណី $k = 1$: យើងមាន $1 \le a; b; c \le 7$ ។

b	1	2	3	4	5	6	7
$11 - kb(9k - b)$	3	−3	−7	−9	−9	−7	−3
Δ	1	−15	1	1	−39	−119	−215
a	−	−	1	1	−	−	−
c	−	−	5	4	−	−	−

$$\Rightarrow (a, b, c) = \{(1; 3; 5); (1; 4; 4)\}$$

ករណី $k = 2$: យើងមាន $a + b + c = 18 \Rightarrow$ ។

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$11 - kb(9k - b)$	−23	−53	−79	−101	−119	−133	−143	−149	−151
Δ	505	2745	6121	10009	13881	17305	19945	21561	22009
$\sqrt{\Delta}$	22,4	52.39	78.23	100.04	117.81	131.54	141.22	146.83	148.35
a	−	−	−	−	−	−	−	−	−

គ្មានចម្លើយ ។

ករណី $k = 3 \Rightarrow a + b + c = 27 \Rightarrow a = b = c = 9$ ។លក្ខខណ្ឌទីពីរ

$$11.9 + 9 = 3(9.9.9 - 1) \Leftrightarrow 108 = 2184\text{: មិនពិត}$$

ករណី $abc - 1 = 9m \Rightarrow abc = 9m + 1 \Rightarrow 11a + b = m(a + b + c)$

យើងរក a, b, c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc = 9m + 1$ សិន ។ សន្មតថា $a \le b \le c$ (សន្មត បែបនេះបាន ព្រោះពេលនេះយើងគ្រាន់តែរក a, b, c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc = 9m + 1$

សិន) ។ បើមានមួយក្នុងចំណោម a,b,c ចែកដាច់នឹង 3 នោះ abc ចែកដាច់នឹង 3 តែ $9m+1$ ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ដូច្នេះ យើងពិនិត្យ $a,b,c \in \{1;2;4;5;7;8\}$ ។ បន្ទាប់មកទៀតយើងមិនពិនិត្យករណី $a.b$; ឬ $a.c$ ឬ $b.c$ ចែកដាច់នឹង 10 ទេ ព្រោះបើដូច្នេះ $abc(a+b+c)$ ត្រូវមានលេខសូន្យនៅខ្ទង់ ហើយ $=\overline{abc} \Rightarrow c=0 \Rightarrow abc(a+b+c)=0$ ។ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\overline{abc} = abc(a+b+c) \leq 999$$
$$\Rightarrow a.a.a(3a) \leq abc(a+b+c) \leq 999$$
$$\Rightarrow a \leq 4$$

បើ $a=1; b=1; c=\{1;...;9\} \Rightarrow m=$ មិនគត់ $\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1; b=4; \Rightarrow c=7 \Rightarrow m=3 \Rightarrow abc(a+b+c)=336 \Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1; b=5; c=\{5;7\} \Rightarrow m=$ មិនគត់ $\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1; b=7; c=\{7;8\} \Rightarrow m=$ មិនគត់ $\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=2; b=2; c=7 \Rightarrow m=3 \Rightarrow abc(a+b+c)=308$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ព្រោះផលគុណនេះប្រើតួលេខ 0; 3; 8 ដែលផ្សេងពី 2; 7 ឬនិយាយតាមមួយបែបទៀត ទោះបីជាយើងផ្លាស់តួលេខ (2; 2; 7) យ៉ាងម៉េចក៏មិនអាចផ្គុំបានលេខ 308 ដែរ ។

បើ $a=2; b=4; c=8 \Rightarrow m=7 \Rightarrow abc(a+b+c)=896$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=2; b=7; c=\{7;8\} \Rightarrow m=$ មិនគត់ $\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=2; b=8; \Rightarrow m=$ មិនគត់ $\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=4; b=4; c=4 \Rightarrow m=7 \Rightarrow abc(a+b+c)=768$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=4; b=7; c=\{7;8\} \Rightarrow m=$ មិនគត់ $\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=4; b=8; c=\{8\} \Rightarrow m=$ មិនគត់ $\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូច្នេះករណី $abc-1=9m$ យើងមិនអាចរកបានតម្លៃ a,b,c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌបានទេ ។

ករណី $a+b+c=3n; abc-1=3l$

យើងរក a,b,c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌពីរនេះសិន ។ ដូច្នេះយើងអាចសន្មតថា a តូចជាងគេ ។ ដូច្នេះ $a\leq 4$ ។ សន្មតថា c ធំជាងគេ ដូច្នេះ

$$\overline{abc}=abc(a+b+c)\geq 111$$
$$\Rightarrow 3c^4\geq 111\ \Rightarrow c\geq 3$$

បន្ទាប់មកទៀតក្នុងចំណោម $a;b,c$ គ្មានលេខមួយណាចែកដាច់នឹង 3 ទេ ព្រោះ $abc=3l+1$ ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ហើយផលគុណ $a.b;$ ឬ $a.c$ ឬ $b.c$ គ្មានមួយណាចែកដាច់នឹង 10 ទេ ។ ដូច្នេះ យើងពិនិត្យ $a,b,c\in\{1;2;4;5;7;8\}$ ។

បើ $a=1; b=1; c=4\Rightarrow n=2, l=1\ \Rightarrow abc(a+b+c)=24$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1; b=2;\ \Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1; b=4; c=4\ \Rightarrow abc(a+b+c)=144$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1; b=4; c=7\Rightarrow abc(a+b+c)=336$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1; b=5;\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1; b=7; c=7\Rightarrow abc(a+b+c)=735$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1; b=8;\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=2; b=2;\ \Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=2; b=4;\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=2; b=7;\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=2; b=8;\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=4; b=4; c=4\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=4; b=7; c=7\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=4; b=8; c=8\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូច្នេះជាសរុបលេខដែលត្រូវរក មាន $\{135; 144\}$ ។

88. ▲ ដោយ $6 = 3.2$ ដូច្នេះ ផលគុណ $A.B$ ស្មើនឹងផលគុណរវាងចំនួនគត់ A_1 ដែលមានលេខ ៩ ចំនួន ៦៦៦ ដង និង ចំនួនគត់ B_1 ដែលមានលេខ ២ ចំនួន ៦៦៦ ដង ។ យើងមាន $A_1 = 10^{666} - 1$ ដូច្នេះ $A_1.B_1 = B_1.10^{666} - B_1$ ។ យើងមាន

$$B_1.10^6 = \underbrace{22\ldots2}_{666}\underbrace{00\ldots0}_{666}$$

$$B_1 = \underbrace{00\ldots0}_{666}\underbrace{22\ldots2}_{666}$$

ដូច្នេះ $B_1.10^{666} - B_1 = \underbrace{22\ldots2}_{665}1\underbrace{77\ldots7}_{665}8$ ។

89. ▲ បើចំនួនពិតវិជ្ជមាន α មានតម្លៃតូចជាង 1 នោះ $\sqrt{\alpha}$ ក៏មានតម្លៃតូចជាង 1 ដែរ ។ សន្មតថា លេខក្រោយក្បៀសរបស់ $\sqrt{\alpha}$ ផ្តើមដោយលេខ ៩ តិចជាង ១០០ ។ ដូច្នេះ

$$\sqrt{\alpha} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$$

លើកអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពជាការេ យើងទទួលបាន

$$\alpha < 1 - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{200}$$

តែ

$$1 - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{200} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$$

ដូច្នេះ

$$\alpha < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$$

មានន័យថា លេខក្រោយក្បៀសរបស់ α ផ្តើមដោយលេខ ៩ តិចជាង ១០០ ដង ៖ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។

90. ▲ យើងបែងចែកលេខដែលទទួលបានជាផ្នែកៗ ដូចខាងក្រោម

$$\underbrace{(1)(2)\ldots(9)}_{A}\underbrace{(10)(11)\ldots(99)}_{B}\underbrace{(100)(101)\ldots(999)}_{C}$$

$$\underbrace{(1000)(1001)\ldots(9999)}_{D}\underbrace{(10000)\ldots(99999)}_{E}\ldots$$

យើងមាន

A ផ្សំដោយលេខ ១ ខ្ទង់ បង្កើតបានលេខ ដែលមាន 9 ខ្ទង់ ។

B ផ្សំដោយលេខ ២ ខ្ទង់ បង្កើតបានលេខដែលមាន $2(99-10+1)=2(90)=180$ ខ្ទង់ ។

C ផ្សំដោយលេខ ៣ ខ្ទង់ បង្កើតបានលេខដែលមាន $3(999-100+1)=3(900)=2\,700$ ខ្ទង់ ។

D ផ្សំដោយលេខ ៤ ខ្ទង់ បង្កើតបានលេខ ដែលមាន $4(9000)=36\,000$ ខ្ទង់ ។

E ផ្សំដោយលេខ ៥ ខ្ទង់ បង្កើតបានលេខ ដែលមាន $5(90\,000)=450\,000$ ខ្ទង់ ។

ដូច្នេះ ដោយតំរៀប A,B,C,D ចូលគ្នា គេទទួលបានលេខ $\overline{ABCD}$ ដែលមានលេខ $9+180+2700+36000=38\,889<206\,788$ ខ្ទង់ ។ ដោយតំរៀបលេខ A,B,C,D,E ចូលគ្នា គេទទួលបានលេខ $\overline{ABCDE}$ ដែលមានលេខ $9+180+2700+36000+450\,000>206\,788$ ខ្ទង់ ។ ដូច្នេះលេខខ្ទង់ទី $206\,788$ ត្រូវឋិតនៅក្នុងចំណោមលេខ E ។

ដើម្បីទៅដល់ខ្ទង់ទី $206\,788$ គេត្រូវបន្ថែមទៅលើលេខ $\overline{ABCD}$ ចំនួន $206788-38889=167899$ ខ្ទង់បន្ថែមទៀត ។ លេខដែលត្រូវយកមកបន្ថែម ជាបណ្ដាលេខមានលេខ ៥ ខ្ទង់ ; យើងមាន $167899/5=33\,579{,}8$ ។ លេខ ៥ ខ្ទង់ទី ១ គឺ $10\,000$; លេខ ៥ ខ្ទង់ទី ២ គឺ $10\,001;\ldots$; លេខ ៥ ខ្ទង់ទី $33\,579$ គឺ $43\,578$ ។ ដូច្នេះ ពេលយើងបន្ថែមទៅលើលេខ $\overline{ABCD}$ នូវលេខ $10\,000$ ដល់ $43\,578$ គេទទួលបានលេខដែលមាន $38\,889+5(43\,578-10\,000+1)=206\,784$ ខ្ទង់ ។

$$\underbrace{(1)(2)(3)\ldots(43578)}_{206\,784\text{ ខ្ទង់}}\ldots.$$

យើងត្រូវការលេខខ្ទង់ទី $206\,788$ ដូច្នេះ យើងត្រូវបន្ថែមលេខមាន៥ ខ្ទង់មួយលេខទៀត គឺលេខ 43579 ។

$$\underbrace{(1)(2)(3)\ldots(43578)}_{206\,784\text{ ខ្ទង់}}(43\,579)$$

ដូច្នេះ ខ្ទង់ទី $206\,788$ ជាលេខ ៧ ។

91. ▲ សន្មតថា 0,1234 ... ជាចំនួនខួប មានខួបស្មើ A ដែលមានលេខ n ខ្ទង់ ។ តាង k ជាចំនួនខ្ទង់ មុនទីតាំងខួបចាប់ផ្តើមមាន ។

$$N = 0,\underbrace{1234\ldots}_{k\text{ ខ្ទង់}}\underbrace{(a_1a_2\ldots a_n)}_{\text{ខួប}}\ldots = 0,\underbrace{1234\ldots}_{k\text{ ខ្ទង់}}AAAAAAA\ldots$$

$$A = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$$

យើងឃើញថា គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ សុទ្ធតែត្រូវលេចឡើងនៅក្នុង 0,1234 ... ទាំងអស់ ។ យើងដឹងថា 10^m ផ្តើមដោយលេខ 1 និង បន្តដោយលេខ 0 ចំនួន m ខ្ទង់ ។ បើ m ធំខ្លាំង ; នៅពេលយើងបញ្ចូលលេខ 10^m នេះទៅក្នុង 0,1234 ... នោះ លេខសូន្យខ្ទះរបស់ 10^m នេះ នឹងទៅបំពេញក្នុង A ណាមួយ មិនខាន ព្រោះថា A មានតែ n ខ្ទង់ ដែល $n \ll m$ ។ ដូច្នេះ ខួបរបស់ 0,1234 ... មានសុទ្ធតែលេខ 0 ។ យើងទាញបានថា បើ 0,1234 ... មានខួប នោះខួបនោះជាលេខ 0 ។ តែករណីនេះមិនអាចទេ ព្រោះ 0,1234 ... បានមកដោយសរសេរចំនួនគត់ទាំងអស់បន្តបន្ទាប់គ្នា ។ ដូច្នេះ 0,1234 ... មិនមែនជាចំនួនសនិទានទេ ។

92. ▲ យើងមាន

$$\overline{abcd}_{(10)} = \overline{dcba}_{(7)} \Leftrightarrow 999a + 93b = 39c + 342d$$
$$\Leftrightarrow 333a + 31b = 13c + 114d$$

ដូច្នេះ $b \equiv c \pmod 3$ ។ ដោយ $b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ នោះ យើងមានករណី

i) $b = c$;
ii) $b = c + 3$
iii) $b + 3 = c$

ករណីទីមួយ យើងទាញបាន $333a + 18b = 114d \Rightarrow a = 2a'; d = 3d' \Rightarrow 37a' + b = 19d'$ ។ ដោយ $d = 1; \ldots; 6$ នោះ $d' = 1; 2$ ។ ដោយ $a = 1; \ldots; 6$ នោះ $a' = 1; 2; 3$ ។ បើ $d' = 1$ នោះ $37a' + b = 19$ មិនអាច ។ បើ $d' = 2$ នោះ $37a' + b = 38 \Rightarrow a' = 1; b = 1 \Rightarrow a = 2; d = 6; c = 1$ ហើយចំនួននោះគឺ 2116 ។

ករណី $b = c + 3$ យើងទាញបាន $333a + 31(c + 3) = 13c + 114d \Leftrightarrow 333a + 18c + 93 = 114d \Leftrightarrow 111a + 6c + 31 = 38d \Rightarrow a$ សេស ។ យើងពិនិត្យ

$a = 1; 3; 5$ ។

បើ $a = 1 \Rightarrow 142 + 6c = 38d \Rightarrow 71 + 3c = 19d \Rightarrow d \geq 4$ ។ ជំនួស

$d = 4; 5; 6$ យើងទាញបាន c មិនគត់ទាំងអស់ ។

បើ $a = 3 \Rightarrow 364 + 6c = 38d \Rightarrow 182 + 3c = 19d \Rightarrow d \geq 10$ ។ មិនត្រឹមត្រូវ ។ ករណី $a = 5$ ដូចគ្នា ។

ដូចគ្នា ករណី $b + 3 = c$ យើងទាញបាន $333a + 31b = 13(b + 3) + 114d \Leftrightarrow 333a + 18b = 3.13 + 114d \Leftrightarrow 111a + 6b = 13 + 38d \Rightarrow a$ សេស

$\Rightarrow a = 1; 3; 5$ ។

បើ $a = 1 \Rightarrow 98 + 6b = 38d \Rightarrow 49 + 3c = 19d \Rightarrow d \geq 3$ ។ ជំនួស

$d = 3; 4; 5; 6$ យើងទាញបាន c មិនគត់ទាំងអស់ ឬមានតម្លៃលើសពី 6 ។

បើ $a = 3 \Rightarrow 320 + 6b = 38d \Rightarrow 160 + 3b = 19d \Rightarrow d \geq 9$ ។ មិនត្រឹមត្រូវ ។ ករណី $a = 5$ ដូចគ្នា ។

ដូច្នេះ $\overline{abcd} = 2116$ ។

93. ▲ យើងដឹងថា បើ n^{101} មានលេខ ៣ខ្ទង់ខាងចុងដូច n នោះ $n^{101} - n$ ចែកដាច់នឹង 1000 ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវបង្ហាញថា បើ n បឋមនឹង 10 នោះ $n^{101} - n = n(n^{100} - 1)$ ចែកដាច់នឹង 1000 ដែលត្រូវនឹង បង្ហាញថា $n^{100} - 1$ ចែកដាច់នឹង 1000 (ព្រោះ n បឋមនឹង 10) ។ ដោយ n បឋមនឹង $10 = 2.5$ នោះ n បឋមនឹង 2 និង នឹង 5 ។ ដោយ n បឋមនឹង 2 (n សេស) នោះ $n^{100} - 1 = (n^{50} + 1)(n^{25} + 1)(n^{25} - 1)$ ចែកដាច់នឹង 8 ។ ដោយ n បឋមនឹង 5 នោះ n អាចមានរាង $5k, 5k \pm 1, 5k \pm 2$ ។ តាង $n = 5k + r$ ដែល $r = \{\pm 1; \pm 2\}$ ។ យើងមាន

$$n^{100} = (5k+r)^{100}$$
$$= (5k)^{100} + \binom{100}{1}(5k)^{99}r + \cdots + \binom{100}{97}(5k)^3 r^{97} + \binom{100}{98}(5k)^2 r^{98} + \binom{100}{97}(5k)r^{99} + r^{100}$$

យើងមាន

$(5k)^{100}, \binom{100}{1}(5k)^{99}r, .., \binom{100}{97}(5k)^3 r^{97}, \binom{100}{98}(5k)^2 r^{98}, \binom{100}{97}(5k)r^{99}$ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង $5^3 = 125$ ។

ដូច្នេះ n^{100} ពេលចែកនឹង 125 សល់សំណល់ r^{100} ។

បើ $r = 0$ នោះ n^{100} ចែកដាច់នឹង 125 ។

បើ $r = \pm 1$ នោះ ដូច្នេះ n^{100} ពេលចែកនឹង 125 សល់សំណល់ 1 ។

បើ $r = \pm 2$ នោះ ដូច្នេះ n^{100} ពេលចែកនឹង 125 សល់សំណល់ 2^{100} ។ យើងមាន

$$2^{100} = 4^{50} = (5-1)^{50}$$
$$= 5^{50} + \binom{50}{1}(5)^{49}(-1) + \cdots + \binom{50}{47}5^3(-1)^{47} + \binom{50}{48}5^2(-1)^{48} + \binom{50}{49}5(-1)^{49} + (-1)^{50}$$

យើងមាន $5^{50}, \binom{50}{1}(5)^{49}(-1), \ldots, \binom{50}{47}5^3(-1)^{47}, \binom{50}{48}5^2(-1)^{48}, \binom{50}{49}5(-1)^{49}$ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 5^3 ។ ដូច្នេះ 2^{100} ចែកនឹង 125 សល់សំណល់ 1 ។ យើងទាញបាន ករណី $r = \pm 2$ គេមាន n^{100} ចែកនឹង 125 សល់សំណល់ 1 ។

ដូច្នេះក្នុងគ្រប់ករណីដែល n បឋមនឹង 5 គេមាន n^{100} ចែកនឹង 125 សល់សំណល់ 1 ។ នាំឱ្យ $n^{100} - 1$ ចែកដាច់នឹង 125 ។

យើងមាន $n^{100} - 1$ ចែកដាច់នឹង $2^3 = 8$ និង នឹង $5^3 = 125$ ។ ដោយ 2^3 បឋមនឹង 5^3 ដូច្នេះ $n^{100} - 1$ ចែកដាច់នឹង $2^3 5^3 = 1000$ ។

ចំនួនគត់

94. ▲ យើងមាន

$$\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n+1}{n+1}$$

ដោយ $2n+1$ និង $n+1$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ហើយដោយផ្នែកខាងស្ដាំរបស់សមភាព ខាងលើជាចំនួនគត់ នោះ វាត្រូវតែ $(n+1)$ ចែកដាច់ $\binom{2n}{n}$ ។

95. ▲យើងដឹងថា បើ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ នោះ $\lfloor\alpha\rfloor+\lfloor\beta\rfloor\le\lfloor\alpha+\beta\rfloor\le\lfloor\alpha\rfloor+\lfloor\beta\rfloor+1$ ។ ដូច្នេះតាមកំណើនយើងទាញបាន

$$\lfloor a_1\rfloor+\lfloor a_2\rfloor+\cdots+\lfloor a_l\rfloor\le\lfloor a_1+a_2+\cdots+a_l\rfloor$$

តាមទ្រឹស្ដីបទឌឺប៉ូលីញ៉ាក់ ចំពោះចំនួនបឋម p មួយ ស្វ័យគុណ m ធំបំផុតនៃ p ដែល p^m ចែកដាច់ $n!$ កំណត់ដោយ

$$\sum_{j\ge1}\left\lfloor\frac{n}{p^j}\right\rfloor=\sum_{j\ge1}\left\lfloor\frac{n_1+n_2+\cdots+n_k}{p^j}\right\rfloor$$

ស្វ័យគុណ m ធំបំផុតនៃ p ដែល p^m ចែកដាច់ $n_1!\,n_2!\ldots n_k!$ កំណត់ដោយ

$$\sum_{j\ge1}\left\lfloor\frac{n_1}{p^j}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n_2}{p^j}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{n_k}{p^j}\right\rfloor$$

ដោយ

$$\left\lfloor\frac{n_1}{p^j}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n_2}{p^j}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{n_k}{p^j}\right\rfloor\le\left\lfloor\frac{n_1+n_2+\cdots+n_k}{p^j}\right\rfloor$$

នោះ ស្វ័យគុណធំបំផុត m នៃចំនួនបឋម p ណាមួយ ដែល p^m ចែកដាច់ភាគបែងរបស់ប្រភាគ

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

មានតម្លៃតូចជាងឬស្មើ ស្វ័យគុណធំបំផុត m នៃចំនួនបឋម p ណាមួយ ដែល p^m ចែកដាច់ភាគយករបស់ប្រភាគ ។ មានន័យថាប្រភាគនេះជាចំនួនគត់ ។

96. ▲ យើងកំណត់យក n មួយ ។ តាង k ជាចំនួនគត់ធំបំផុតដែល $2^k\le n$ និង តាង P ជាផលគុណនៃគ្រប់ចំនួនគត់សេសធំមិនលើសពី n ។ យើងមាន

$$2^{k-1}PS = \frac{2^{k-1}P}{2} + \frac{2^{k-1}P}{3} + \frac{2^{k-1}P}{4} + \cdots + \frac{2^{k-1}P}{2^k} + .. + \frac{2^{k-1}P}{n}$$

ជាផលបូក ដែលតួនីមួយៗជាចំនួនគត់ទាំងអស់ លើកលែងតែ $\frac{2^{k-1}P}{2^k} = \frac{P}{2}$ ។ ដូច្នេះ $2^{k-1}PS$ មិនអាចជាចំនួនគត់ទេ $\Rightarrow S$ មិនអាចជាចំនួនគត់ទេ ។

ទ្រឹស្តីបទ

បើផលគុណកត្តាបឋមរបស់ n មានរាង $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ នោះ យើងមាន

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_k + 1)$$

ដែល d(n) ជាចំនួនតួចែកវិជ្ជមានរបស់ n ។

97. ▲ រង្វាស់មុំក្នុងរបស់ពហុកោណនិយ័តមួយដែលមាន n ជ្រុង ស្មើនឹង $\frac{(n-2)180°}{n}$ ។ ដូច្នេះមានន័យថា n ត្រូវតែចែកដាច់ $(n-2)180$ ។ ដោយ $180 = 2^2 3^2 5$ នោះ បើ n បឋមនឹង 180 នោះ n បឋមនឹង $n-2$ ដែរ ។ យើងមាន $180 = 2^2 3^2 5$ មានតួចែកចំនួន $(1+2)(1+2)(1+1) = 18$ នោះ ចម្លើយគឺ 16 ព្រោះ $n \geq 3$ ដូច្នេះយើងមិនគិតតួចែកលេខ 1 និងលេខ 2 ។

98. ▲ បើមានពីរក្នុងចំណោម $n_1, n_2, \dots, n_{1997}$ ជាលេខគូ នោះសំណើពិត ។ បើមានតែមួយក្នុងចំណោម $n_1, n_2, \dots, n_{1997}$ ជាលេខគូ នោះ យើងមានចំនួនសេសចំនួន 1996 និងចំនួនគូមួយ ដូច្នេះបូកចូលគ្នា បានជាលេខគូ $\Rightarrow$ n_{1998} ជាលេខគូ ដូច្នេះសំណើពិត ។ បន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងបង្ហាញថា បណ្តា$n_1, n_2, \dots, n_{1997}$ មិនអាចជាលេខសេសទាំងអស់ទេ ។ ករណីវាសេសទាំងអស់ យើងទាញបាន n_{1998} ជាលេខសេស ។ យើងដឹងថា ការេនៃចំនួនសេសមួយ ចែកនឹង 8 សល់សំណល់មួយជានិច្ចព្រោះ បណ្តាការេនៃចំនួនសេសដែលមានរាង $8m+1; 8m+3; 8m+5; 8m+7$ មាន

$$(8m+1)^2 = 64m^2 + 16m + 1 \equiv 1 \pmod 8$$
$$(8m+3)^2 = 64m^2 + 48m + 9 \equiv 1 \pmod 8$$
$$(8m+5)^2 = 64m^2 + 80m + 25 \equiv 1 \pmod 8$$
$$(8m+7)^2 = 64m^2 + 112m + 49 \equiv 1 \pmod 8$$

ដូច្នេះ

$$n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{1997}^2 \equiv 1997 \equiv 5 \pmod 8$$
$$n_{1998}^2 \equiv 1 \pmod 8$$

ដូច្នេះសមភាព $n_1^2+n_2^2+\cdots+n_{1997}^2=n_{1998}^2$ មិនអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានទេ ។ មានន័យថា $n_1,n_2,\ldots,n_{1997}$ មិនអាចជាលេខសេសទាំងអស់ទេ ។

99. ▲ តាង $D=\frac{A+B+C}{3}=2n^2+2mn+n$ ។ យើងពិនិត្យបណ្ដាករណី

1° $D=A$ នោះ $m^2+1=(n-1)^2$ ចំនួនការេមួយស្មើចំនួនការេមួយទៀតបូកមួយ មានតែ $m=0,n=0$ ឬ $m=0,n=2\Longrightarrow(A=0;B=0;C=0)$ ឬ $(A=10;B=8;C=12)$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ព្រោះ A,B,C មិនមែនជាចំនួនគត់បន្តគ្នា ។

2° $D=B$ នោះ $m^2=mn-n$ ។ យើងពិនិត្យករណី $(A=B-1,B,C=B+1)$ និង $(C=B-1,B,A=B+1)$ ។

ករណី $(A=B-1,B,C=B+1)\Longrightarrow$

$$\begin{cases}n^2+2mn+3m^2+3n=2n^2+3mn+m^2-1\\3n^2+mn+2m^2=2n^2+3mn+m^2+1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}2m^2+3n=n^2+mn-1\\n^2-2mn+m^2=1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow(n-m)^2=1\quad\Longrightarrow n-m=\pm1$$

បើ $n=m+1\Longrightarrow m^2=mn-n\Leftrightarrow m^2=m(m+1)-(m+1)\Leftrightarrow -1=0$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $n=m-1\Longrightarrow m^2=m(m-1)-(m-1)\Leftrightarrow m=1/2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ករណី $(C=B-1,B,A=B+1)\Longrightarrow$

$$\begin{cases}n^2+2mn+3m^2+3n=2n^2+3mn+m^2+1\\3n^2+mn+2m^2=2n^2+3mn+m^2-1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}2m^2+3n=n^2+mn+1\\n^2-2mn+m^2=-1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow(n-m)^2=-1$$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

3° $D=C\Longrightarrow 2n^2+2mn+n=3n^2+mn+2m^2\Longrightarrow n(n-m-1)=0$ ។

បើ $n=0$ នោះ $m=1$ ឬ $m=-1$ ។ ករណី $n=m+1$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}A&=n^2+2mn+3m^2+3n\\&=(m+1)^2+2m(m+1)+3m^2+3(m+1)\\&=6m^2+7m+4\\B&=6m^2+7m+2\\C&=6m^2+7m+3\end{aligned}$$

ដូច្នេះ B, C, A ជាចំនួនគត់បន្តគ្នា ។

គូ (m, n) ដែលចង់បានមាន $(1,0)$ និង $(m, m+1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ m ។

100. ▲ យើងមាន

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
A &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1997}-\frac{1}{1998}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1998}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{999}\\
&= (1-1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{999}\right)+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{1998}\\
&= \frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\cdots+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}
2A &= \left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{1998}\right)+\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{1997}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1998}+\frac{1}{1000}\right)\\
&= 2998.\left(\frac{1}{1000.1998}+\frac{1}{1001.1997}+\cdots+\frac{1}{1998.1000}\right)\\
&= 2998.B
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{A}{B} = 1499$$

ជាចំនួនគត់ ។

101. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&m^5+3m^4n-5m^3b^2-15m^2n^3+4mn^4+12n^5\\
&=(m-2n)(m-n)(m+n)(m+2n)(m+3n)
\end{aligned}$$

បើ $n \neq 0$ នោះគ្មានកត្តាណាដែលស្មើគ្នាទៅវិញទៅមកទេ មានន័យថា កន្សោមដែលឱ្យមក អាចបំបែកជាកត្តាចំនួន ៥ ផ្សេងគ្នា ។ ។ យើងមាន 33 អាចបំបែកជាផលគុណដែលមានយ៉ាងច្រើន៤កត្តា ផ្សេងគ្នា ដូចជា

$$33 = (-11).3.1.(-1)$$

ឬ

$$33 = 11.(-3).1.(-1)$$

ដូច្នេះចំនួនទាំងពីរ មិនអាចស្មើគ្នាបានទេ ។

បើ $n = 0$ នោះ កន្សោមដែលឱ្យមក ស្មើនឹង m^5 ដែលមិនអាចស្មើនឹង 33 បានទេ ។

ភាពចែកដាច់

102. ▲ តាងចំនួននោះ ដោយ N ។ សន្មតថា N ផ្ដើមដោយ y និង បញ្ចប់ដោយលេខ z ដែល $0 \leq z \leq 9$ ។

$$N = \underbrace{\overline{a_1 a_2 \dots . a_n}}_{y} \overline{z} = 10y + z$$

ដោយលុបតួ z នេះចេញពី N គេទទួលបាន $N' = y$ ។

បើ $z = 0$ នោះ $N = 10y$ ។ យើងមាន N' ចែកដាច់ N ។ ដូច្នេះ គ្រប់ចំនួនគត់ដែលមានលេខខ្ទង់ខាងចុងជាលេខ 0 សុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ។

បើ $z \geq 1$ នោះតាមសម្មតិកម្ម $N = kN'$ ដែល k ជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះ

$$10y + z = ky \implies k = 10 + \frac{z}{y} > 10$$

តាង $a = z/y$ ជាចំនួនគត់ ។ យើងមាន $k = 10 + a$ និង

$$10y + z = ky \iff 10y + z = (10 + a)y \iff z = ay$$

ដោយ $z < 10$ នោះ ត្រូវតែ $a < 10$ និង $y < 10$ ។ ដោយ a និង y ជាចំនួនគត់ នោះ $a \leq 9$ និង $y \leq 9$ ។

ដោយ $y \leq 9$ និង បើ $z \geq 1$ នោះមានន័យថា N ត្រូវតែជាចំនួនមានលេខ២ខ្ទង់ ។

បើ $z = 1$ នោះ $a = y = 1$ យើងទាញបាន $N = 11$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $z = 2$ នោះ $y = 1$ ឬ $y = 2$ យើងទាញបាន $N = 12$ ឬ $N = 22$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $z = 3$ នោះ $y = 1$ ឬ $y = 3$ យើងទាញបាន $N = 13$ ឬ $N = 33$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $z = 4$ នោះ $y = 1; 2; 4$ យើងទាញបាន $N = 14; 24; 44$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $z=5$ នោះ $y=1;5$ យើងទាញបាន $N=15;55$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $z=6$ នោះ $y=1;2;3;6$ យើងទាញបាន $N=16;26;36;66$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $z=7$ នោះ $y=1;7$ យើងទាញបាន $N=17;77$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $z=8$ នោះ $y=1;2;4;8$ យើងទាញបាន $N=18;28;48;88$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $z=9$ នោះ $y=1;3;9$ យើងទាញបាន $N=19;39;99$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ដូច្នេះចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សម្មតិកម្ម មាន

- ចំនួនដែលមានលេខសូន្យនៅខាងចុង

- និង $\left\{\begin{matrix} 11;12;13;14;15;16;17;18;19;22;24;26; \\ 28;33;36;39;44;48;55;66;77;88;99 \end{matrix}\right\}$

103. ▲ គេឱ្យចំនួនគត់មានលេខបីខ្ទង់ $\overline{acb}$ ។ ដោយ $11|\overline{acb}$ នោះ $c=a+b$ ឬ $c=a+b-11$ ។

❶ ក្នុងករណីទីមួយ យើងមាន

$$\frac{N}{11}=a^2+b^2+c^2 \iff \frac{100a+10c+b}{11}=a^2+b^2+c^2$$
$$\iff \frac{110a+11b}{11}=a^2+b^2+(a+b)^2$$
$$\Rightarrow 10a+b=a^2+b^2+(a+b)^2$$

បើ a,b គូ នោះ $a^2+b^2+(a+b)^2$ គូ ។ បើ a គូ b សេស នោះ $(a+b)^2$ សេស និង b^2 សេស ។ ដូច្នេះ $a^2+b^2+(a+b)^2$ គូ ។ បើ a សេស និង b សេស នោះ $(a+b)^2$ គូ ; a^2+b^2 គូ ដូច្នេះ $a^2+b^2+(a+b)^2$ គូ ។

ដូច្នេះ អង្គខាងស្តាំគូជានិច្ច ។ យើងទាញបានអង្គខាងឆ្វេងត្រូវតែគូដែរ ។ ដូច្នេះ មានតែ $b\in\{0,2,4,6,8\}$ ។

ចំពោះ $b=0$ នោះ $10a=a^2+a^2 \Rightarrow a=5; \Rightarrow c=5$ ។

ចំពោះ $b=2$ នោះ $10a+2=a^2+4+(a+2)^2 \Rightarrow a^2-3a+3=0$: គ្មានឫស ។

ចំពោះ $b=4$ នោះ $10a+4=a^2+16+(a+4)^2 \Rightarrow a^2-a+14=0$: គ្មានឫស ។

ចំពោះ $b=6$ នោះ $10a+6=a^2+36+(a+6)^2 \Rightarrow a^2+a+33=0$: គ្មានឫស ។

ចំពោះ $b=8$ នោះ $10a+8=a^2+64+(a+8)^2 \Rightarrow a^2+3a+60=0$: គ្មានឫស ។

❷ ក្នុងករណីទីពីរ យើងមាន

$$\frac{N}{11}=a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow \frac{100a+10c+b}{11}=a^2+b^2+c^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{110a+10(a+b-11)+b}{11}$$
$$=a^2+b^2+(a+b-11)^2$$
$$\Rightarrow 10(a-1)+b=a^2+b^2+(a+b-11)^2$$

បើ a,b គូ នោះ $a^2+b^2+(a+b-11)^2$ សេស ។ បើ a គូ b សេស នោះ $(a+b-11)^2$ គូ និង b^2 សេស ។ ដូច្នេះ $a^2+b^2+(a+b-11)^2$ សេស ។ បើ a សេស និង b សេស នោះ $(a+b-11)^2$ សេស ; a^2+b^2 គូ ដូច្នេះ $a^2+b^2+(a+b-11)^2$ សេស ។

ដូច្នេះ អង្គខាងស្តាំសេសជានិច្ច ។ យើងទាញបានអង្គខាងឆ្វេងត្រូវតែសេសដែរ ។ ដូច្នេះ មានតែ $b\in\{1,3,5,7,9\}$ ។

ចំពោះ $b=1$ នោះ $10(a-1)+1=a^2+1+(a+1-11)^2 \Rightarrow a^2-15a+55=0$: គ្មានឫសគត់ ។

ចំពោះ $b=3$ នោះ $10(a-1)+3=a^2+9+(a+3-11)^2 \Rightarrow a^2-13a+40=0$: $a_{1,2}=\frac{13\pm3}{2}=\{8;\ 5\}$ ។ បើ $a=8$ នោះ $c=8+3-11=0$ ។ បើ $a=5$ នោះ $c=5+3-11=-3<0$ មិនយក ។

ចំពោះ $b=5$ នោះ $10(a-1)+5=a^2+25+(a+5-11)^2 \Rightarrow a^2-11a+33=0$: គ្មានឫស ។

ចំពោះ $b=7$ នោះ $10(a-1)+7=a^2+49+(a+7-11)^2 \Rightarrow a^2-9a+34=0$: គ្មានឫស ។

ចំពោះ $b=9$ នោះ $10(a-1)+9=a^2+81+(a+9-11)^2 \Rightarrow a^2-7a+43=0$: គ្មានឫស ។

ដូច្នេះចំនួនដែលមានលេខ៣ខ្ទង់គឺ 550 ឬ 803 ។

104. ▲ ក) ដំបូងយើងបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ណាថយចុះ ៩ ដង ពេលលុបតួលេខក្នុងខ្ទង់មួយ ដែលនៅហួសពីខ្ទង់ទី ២ ទេ ។ តាង

$$N=\overline{a_0a_1a_2\dots a_{k-1}a_ka_{k+1}\dots a_n}$$
$$=a_0.10^n+a_1.10^{n-1}+\dots+a_{k-1}.10^{n-k+1}+a_k.10^{n-k}+a_{k+1}.10^{n-k-1}+\dots+a_n;\quad a_0\neq 0$$

តាង លេខទទួលបាន ដោយលុបខ្ទង់ណាមួយរបស់ N ដោយ N' ។

សន្មតថ្មយថា ដោយលុបតួលេខ a_k ដែល $k\geq 2$ យើងទទួលបានចំនួនថ្មី $N'=N/9$ ។ដូច្នេះ

$$N'=\overline{a_0a_1a_2\dots a_{k-1}a_{k+1}\dots a_n}$$
$$=a_0.10^{n-1}+a_1.10^{n-2}+a_2.10^{n-3}+\dots+a_{k-1}.10^{n-k}+a_{k+1}.10^{n-k-1}+\dots+a_n$$

យើងមាន

$$10N'-N=10\big(a_0.10^{n-1}+a_1.10^{n-2}+a_2.10^{n-3}+\dots+a_{k-1}.10^{n-k}+a_{k+1}.10^{n-k-1}+\dots+a_n\big)-\big(a_0.10^n+a_1.10^{n-1}+\dots+a_{k-1}.10^{n-k+1}+a_k.10^{n-k}+a_{k+1}.10^{n-k-1}+\dots+a_n\big)$$

$$\Leftrightarrow 10.\frac{N}{9}-N=\big(a_{k+1}.10^{n-k}+\dots+10a_n\big)-\big(a_k.10^{n-k}+a_{k+1}.10^{n-k-1}+\dots+a_n\big)$$
$$=10.\underbrace{\overline{a_{k+1}\dots a_n}}_{n-(k+1)+1\text{ ខ្ទង់}}-a_k.10^{n-k}-\underbrace{\overline{a_{k+1}\dots a_n}}_{n-(k+1)+1\text{ ខ្ទង់}}$$
$$=9.\overline{a_{k+1}\dots a_n}-a_k.10^{n-k}\leq 9.\overline{a_{k+1}\dots a_n}<9.10^{n-k}<10.10^{n-k}=10^{n-k+1}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{N}{9}<10^{n-k+1}$$

ដោយ $k \geq 2$ នោះ $10^{n-k+1} \leq 10^{n-2+1} = 10^{n-1}$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{N}{9} < 10^{n-1}$$

តែ

$$\frac{N}{9} > \frac{N}{10} = a_0.10^{n-1} + \cdots \geq 10^{n-1}$$

ដូច្នេះការសន្មតមិនពិត ។ មានន័យថា តួលេខដែលត្រូវលុបនោះ ត្រូវឋិតនៅខ្ទង់មិនលើស ពីខ្ទង់ទី២ ទេ ។

យើងដឹងថា ចំនួនគត់មួយ ចែកដាច់នឹង ៩ បើ ផលបូកតួលេខខ្ទង់នីមួយៗរបស់វា ចែកដាច់នឹង ៩ ។ យើងដឹងថា N ចែកដាច់នឹង ៩ និង N' ក៏ចែកដាច់នឹង ៩ ដែរ ។ សន្មតថា N' បានមកដោយលុបលេខខ្ទង់ទី ១ ចោល ។ ដោយផលបូកតួលេខរបស់ N និង N' សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង ៩ ដូច្នេះលេខខ្ទង់ទី១ ដែលលុបចោលនោះ ត្រូវតែជាលេខ ០ ឬលេខ ៩ ។ ដោយ $a_0 \neq 0$ នោះ ត្រូវតែ $a_0 = 9$ ។ តែបើ N ផ្ដើមដោយលេខ ៩ នោះ N និង $N/9$ ត្រូវតែមានចំនួនខ្ទង់ដូចគ្នា ។ តែ $N' = N/9$ បានមកដោយលុបលេខរបស់ N មួយខ្ទង់ចោល ដូច្នេះមិនអាចមានចំនួនខ្ទង់ដូចគ្នាទេ ។ ដូច្នេះ មានន័យថា N' មិនមែនបានមកដោយលុបលេខខ្ទង់ទី១ចោលទេ ។ អ៊ីចឹងមានតែ N' បានមកដោយលុបលេខខ្ទង់ទី២ របស់ N ចោល ។ ដូច្នេះ

$$\frac{N}{9} = N' = \overline{a_0 a_2 \ldots a_n} = a_0 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots + a_n$$

យើងមាន $N = \overline{a_0 a_1 a_2 \ldots a_n}$ ចែកដាច់នឹង ៩ និង $N' = \overline{a_0 a_2 \ldots a_n}$ ចែកដាច់នឹង ៩ ដូច្នេះ $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ និង $a_0 + a_2 + \cdots + a_n$ ចែកដាច់នឹង ៩ ទាំងពីរ ។ យើងទាញបាន $a_1 = 0$ ឬ $a_1 = 9$ ។

សន្មតថា $a_1 = 9$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} 10N' - N &= 10(a_0.10^{n-1} + a_2.10^{n-2} + \cdots + a_n) \\ &\quad - (a_0.10^n + a_1.10^{n-1} + a_2.10^{n-2} + \cdots + a_n) \\ &= 10\,\overline{a_2 \ldots a_n} - a_1.10^{n-1} - \overline{a_2 \ldots a_n} \\ &= 9\,\overline{a_2 \ldots a_n} - 9.10^{n-1} < 9.10^{n-1} - 9.10^{n-1} = 0 < 10^{n-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{9} = 10\frac{N}{9} - N < 10^{n-1}$$

តែ $N' = \frac{N}{9} = a_0 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \cdots + a_n \geq 10^{n-1}$ ។ ដូច្នេះ មិនពិត ។ នាំឱ្យមានតែ $a_1 = 0$ ។

យើងទាញបាន

$$
\begin{aligned}
N - \frac{N}{9} &= (a_0.10^n + a_2.10^{n-2} + \cdots + a_n) \\
&\qquad - (a_0.10^{n-1} + a_2.10^{n-2} + \cdots + a_n) \\
&= a_0.10^n - a_0 10^{n-1} \\
&= 9a_0 10^{n-1} \\
\Rightarrow \frac{N}{9} &= N - 9a_0 10^{n-1}
\end{aligned}
$$

ជាបញ្ចប់ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{9}.\frac{N}{9} = \frac{N}{9} - a_0 10^{n-1} \qquad (*)$$

ជាចំនួនគត់ ព្រោះ $\frac{N}{9}$ ជាចំនួនគត់ ។ មានន័យថា $N/9$ ក៏ចែកដាច់នឹង ៩ ដែរ ។ តាម (*) យើងសន្និដ្ឋានបានថា $\frac{1}{9}.\frac{N}{9}$ ជា $N/9$ ដោយលុបខ្ទង់ a_0 ចេញ ។ ដូច្នេះសំណើពិត ។

ខ) តាមសំនួរ ក) យើងទាញបាន

$$\frac{N}{9} = N - 9a_0 10^{n-1} \qquad (**)$$

ដូច្នេះ

$$N = \frac{81a_0 10^{n-1}}{8}$$

តាមការស្រាយបញ្ជាក់ក្នុងសំនួរ ក) យើងមាន $a_0 \neq 9$ និង លេខខ្ទង់ទី២ របស់ N ជាលេខ ០ ។ ដូច្នេះ a_0 មិនអាចស្មើ ៨ បានទេ ។

បើ $a_0 = 1$ នោះ

$$N = \frac{81.10^{n-1}}{8} = \frac{81.2^3.5^3.10^{n-4}}{8} = 10\,125\,.10^{n-4}$$

បើ $a_0 = 2$ នោះ

$$N = \frac{81.10^{n-1}}{4} = \frac{81.2^2.5^2.10^{n-3}}{4} = 2\,025\,.10^{n-3}$$

បើ $a_0 = 3$ នោះ

$$N=\frac{81.3.10^{n-1}}{8}=\frac{81.3.2^3.5^3.10^{n-4}}{8}=30\,375\,.10^{n-4}$$

បើ $a_0=4$ នោះ

$$N=\frac{81.10^{n-1}}{2}=\frac{81.2.5.10^{n-2}}{2}=405\,.10^{n-2}$$

បើ $a_0=5$ នោះ

$$N=\frac{81.5.10^{n-1}}{8}=\frac{81.5.2^3.5^3.10^{n-4}}{8}=50\,625\,.10^{n-4}$$

បើ $a_0=6$ នោះ

$$N=\frac{81.3.10^{n-1}}{4}=\frac{81.3.2^2.5^2.10^{n-3}}{4}=6\,075\,.10^{n-3}$$

បើ $a_0=7$ នោះ

$$N=\frac{81.7.10^{n-1}}{8}=\frac{81.7.2^3.5^3.10^{n-4}}{8}=70\,875\,.10^{n-4}$$

យើងទាញបាន បណ្ដាចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌមាន

$\{405.10^k;\ 2\,025.10^k; 6\,075.10^k;\ 10\,125.10^k;\ 30\,375.10^k; 50\,625.10^k;\ 70\,875.10^k\}$

ដែល $k=0;1;2;\ldots$ ។

105. ▲ យើងត្រូវកំណត់ចំនួនគត់ A មានលេខ ៦ ខ្ទង់ ផ្ដើមដោយ 523 ហើយចែកដាច់នឹង 7,8 និង 9 ។ ដោយ 7,8,9 បឋមគ្នាពីរៗ នោះ មានន័យថា A ត្រូវចែកដាច់នឹង $7.8.9=504$ ។តាង

$$A=523\,000+X$$

ដែល X ជាចំនួនគត់មានលេខ ៣ ខ្ទង់ ។ យើងមាន

$$523\,000=504.1037+352$$

ដូច្នេះ 523000 ចែកនឹង 504 សល់ 352 ។ 523000 បូកនឹង X ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 504 ដូច្នេះ មានតែ $X+352$ ចែកដាច់នឹង 504 ។ យើងទាញបាន $X+352=504.k$ ដែល k ជាចំនួនគត់ ។ យើងមាន X ជាលេខ ៣ ខ្ទង់ ដូច្នេះ $X<1000$ ។ ដូច្នេះ $X+352<1352 \Rightarrow k\le 2$ ។ ដូច្នេះ

$$k=1:\ X+352=504 \Rightarrow X=152$$
$$k=2:\ X+352=504.2=1008 \Rightarrow X=656$$

ដូច្នេះ ចំនួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌមាន 523152 និង 523656 ។

106. ▲ យើងមាន

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

ជំនួស $(-y)$ ទៅក្នុង y នៅក្នុងរូបមន្ត $x^n - y^n$ ហើយដោយដឹងថា $(-y)^n = -y^n$ ព្រោះ n សេស យើងទាញបានរូបមន្តដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ ។

107. ▲យើងមាន

$1^{1993} + 1000^{1993} = (1+1000)(1^{1992} - \cdots . + 1000^{1992})$ ចែកដាច់នឹង 1001

$2^{1993} + 999^{1993} = (2+999)(2^{1992} - \cdots . + 999^{1992})$ ចែកដាច់នឹង 1001

…………………………………………………

$500^{1993} + 501^{1993} = (500+501)(500^{1992} - \cdots . + 501^{1992})$ ចែកដាច់នឹង 1001

ដូច្នេះ ផលបូកចែកដាច់នឹង 1001 ។

108. ▲យក $x = 2n - 1$ ដូច្នេះ x សេស ។ យើងទាញបាន

$x + 1 = 2n$ ចែកដាច់នឹង n

$x^x + 1 = (x+1)(x^{x-1} - \cdots + 1)$ ចែកដាច់នឹង n

…

ដូច្នេះសំណើពិត ។

109. ▲យើងមាន

$$n^2 + 1 = n^2 - 1 + 2 = (n-1)(n+1) + 2$$

ដោយ $(n+1)|\,(n^2+1) \Longrightarrow (n+1)|2 \Longrightarrow n+1 = 1$ ឬ $n+1 = 2$ ។ ដូច្នេះ $n = \{0, 1\}$ ។ តែដោយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដូច្នេះ $n = 1$ ។

110. ▲ យើងមាន

$$15x^2 - 11x - 14 = (3x+2)(5x-7)$$

ដូច្នេះ មានន័យថា បើ $7|(3x+2)$ នោះ $7|15x^2 - 11x - 14$ ។

111. ▲ យើងមាន

$$5x + 2 = 8(2x+3) - 11(x+2)$$

ដូច្នេះ បើ $(2x+3)$ ចែកដាច់នឹង 11 នោះ $5x+2$ ចែកដាច់នឹង 11 ដែរ ។

ច្រាសមកវិញ ដោយ

$$2x+3=7(5x+2)-11(3x+11)$$

នោះ បើ $(5x+2)$ ចែកដាច់នឹង 11 នោះ $2x+3$ ចែកដាច់នឹង 11 ដែរ ។

112. ▲យើងមាន

$$3(3^{n-1}+5^{n-1})<3^n+5^n<5(3^{n-1}+5^{n-1})$$
$$\Rightarrow 3<\frac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}<5$$
$$\Rightarrow$$

ដោយ $(3^{n-1}+5^{n-1})|(3^n+5^n)$ នោះ $\frac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}$ ជាចំនួនគត់ ។ ចំនួនគត់ដែលធំជាង 3 ហើយតូចជាង 5 គឺ 4 ។ ដូច្នេះ

$$\frac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}=4$$
$$\Rightarrow 3^n+5^n=4(3^{n-1}+5^{n-1})$$
$$\Rightarrow 3^{n-1}=5^{n-1}$$
$$\Rightarrow n=1$$

113. ▲ យើងដឹងថា ផលធៀប $\frac{5n+13}{3n+7}$ ឋិតនៅចន្លោះ 0 និង 2 ដាច់ខាត ដោយវាជាចំនួនគត់ នោះវាត្រូវតែស្មើ 1 ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវដោះស្រាយសមីការ $5n+13=3n+7$ យើងទាញបាន $n=-3$ ។ ចំនួននេះមិនមែនជាចំនួនគត់វិជ្ជមានទេ ដូច្នេះ គ្មានចំនួនគត់ n ទេ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ ។

114. ▲ យើងមាន

$$n^2+23=n^2-1+24=(n-1)(n+1)+24$$

យក $n=24k\pm1, k=0,1,2,\ldots$ យើងទាញបាន n^2+23 ចែកដាច់នឹង 24 ។

115. ▲ ចំនួនគត់ទាំងអស់អាចមានរាងមួយ ក្នុងចំណោមរាងទាំង 6 ៖ $6k, 6k\pm1, 6k\pm2, 6k\pm3$ ។

បើ $p>3$ ជាចំនួនបឋម នោះវាត្រូវតែមានរាង $6k\pm1$ (ព្រោះផ្សេងទៀត ចែកដាច់នឹង 2 ឬនឹង 3) ។

$$p^2-1=(6k\pm1)^2-1=12k(3k\pm1)$$

បើ k ជាចំនួនគូ នោះ $24|12k(3k\pm1)=p^2-1$ ។

បើ k ជាចំនួនសេស នោះ $3k-1$ ជាចំនួនគូ $\Rightarrow 24|12k(3k\pm 1)=p^2-1$ ។

116. ▲ បើ $n=1$ នោះសំណើពិត ។ សន្មតថា $n>1$ ។ យើងមាន

$$(n+1)^n-1=\binom{n}{1}n+\binom{n}{2}n^2+\cdots+\binom{n}{n}n^n$$
$$=n^2+\binom{n}{2}n^2+\cdots+\binom{n}{n}n^n$$

គ្រប់តួទាំងអស់របស់ផលបូកនេះ ចែកដាច់នឹង n^2 ។ ដូច្នេះផលបូកចែកដាច់នឹង n^2 ។

117. ▲ ជាដំបូង យើងសន្មតថា បណ្ដា n ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា $m+1, m+2, \dots, m+n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ដោយដឹងថា មេគុណទ្វេធា ជាចំនួនគត់

$$\binom{m+n}{n}=\frac{(m+n)!}{n!\,m!}=\frac{(m+n)(m+n-1)\dots(m+1)}{n!}$$

ដូច្នេះ មានន័យថា ផលគុណ $(m+1)\dots(m+n)$ចែកដាច់នឹង $n!$ ។

បើមានមួយក្នុងចំណោមបណ្ដាចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នាទាំងអស់នេះ ស្មើ 0 នោះផលគុណស្មើ 0 ហើយចែកដាច់នឹង $n!$ ។

បើបណ្ដា ចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នាទាំងអស់នេះ សុទ្ធតែជាចំនួនអវិជ្ជមាន នោះ ផលគុណនោះស្មើនឹងផលគុណករណីវិជ្ជមាន គុណនឹង $(-1)^n$ ។ ដូច្នេះ វាក៏ចែកដាច់នឹង $n!$ ដែរ ។

118. ▲ ក) យើងមាន $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ ។ កត្តានៅអង្គខាងស្ដាំជាចំនួនគត់បីតជាប់គ្នា $(3k;3k+1;3k+2)$ ដូច្នេះ ត្រូវតែមានមួយចែកដាច់នឹង3 (ឧ. $10;11;12;\dots$) ។

ខ) យើងមាន $P=n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ ។

បើ $n=5k$ នោះ $P=5k.(n-1)(n+1)(n^2+1)$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

បើ $n=5k+1$ នោះ $P=n(5k)(n+1)(n^2+1)$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

បើ $n=5k+2$ នោះ $P=n(n-1)(n+1)(25k^2+20k+5)=5n(n-1)(n+1)(5k^2+4k+1)$ចែកដាច់នឹង 5 ។

បើ $n=5k+3$ នោះ $P=n(n-1)(n+1)(25k^2+30k+10)=5n(n-1)(n+1)(5k^2+6k+2)$ចែកដាច់នឹង 5 ។

បើ $n = 5k + 4$ នោះ $P = n(n-1)(5k+5)(n^2+1) = 5n(n-1)(k+1)(n^2+1)$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

គ) យើងមាន $P = n^7 - n = n(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$ ។

បើ $n = 7k; 7k+1; 7k+6$ នោះមានកត្តាមួយក្នុងចំនោមកត្តាបីដំបូង គឺ $n(n-1)(n+1)$ ដែលចែកដាច់នឹង 7 ។ ដូច្នេះផលគុណចែកដាច់នឹង៧ ។

បើ $n = 7k + 2$ នោះ $n^2 + n + 1 \equiv 4 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod 7$ នោះ P ចែកដាច់នឹង 7 ។

បើ $n = 7k + 3$ នោះ $n^2 - n + 1 \equiv 9 - 3 + 1 \equiv 0 \pmod 7$ នោះ P ចែកដាច់នឹង 7 ។

បើ $n = 7k + 4$ នោះ $n^2 + n + 1 \equiv 4^2 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod 7$ នោះ P ចែកដាច់នឹង 7 ។

បើ $n = 7k + 5$ នោះ $n^2 + n + 1 \equiv 5^2 - 5 + 1 \equiv 0 \pmod 7$ នោះ P ចែកដាច់នឹង 7 ។

ឃ) យើងមាន $P = n^{11} - n = n(n-1)(n+1)(n^8+n^6+n^4+n^2+1)$ ។

បើ $n = 11k; 11k+1; 11k+10$ នោះមានកត្តាមួយក្នុងចំនោម $n; n-1; n+1$ ចែកដាច់នឹង11 ។

បើ $n = 11k+2; 11k-2\ (\equiv 11k+9)$ នោះ $n^8+n^6+n^4+n^2+1 \equiv 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 \equiv 5^2 + 4(5) + 5 + 5 \equiv 55 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 11)$ (ព្រោះ $2^8 = (2^4)^2 = (16)^2 = (11+5)^2 \equiv (5)^2 \pmod{11}; \ldots$) ។ ដូច្នេះ $n^8+n^6+n^4+n^2+1$ ចែកដាច់នឹង11 ។ ដូច្នេះ P ចែកដាច់នឹង11 ។

យើងបង្ហាញតាមរបៀបដូចគ្នាចំពោះករណី $n = 11k \pm 3; 11k \pm 4; 11k \pm 5$ ។

ង) យើងមាន $n^{13} - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)(n^4-n^2+1)(n^4+n^2+1)$ ។

បើ $n = 13k; 13k \pm 1$ នោះមានកត្តាមួយក្នុងចំនោមកត្តាបីដំបូងចែកដាច់នឹង 13 ។

បើ $n = 13k \pm 5$ នោះ $n^2 + 1$ ចែកដាច់នឹង១៣ ។

បើ $n = 13k \pm 2; 13k \pm 6$ នោះ $n^4 - n^2 + 1$ ចែកដាច់នឹង១៣ ។

បើ $n = 13k \pm 3; 13k \pm 4$ នោះ $n^4 + n^2 + 1$ ចែកដាច់នឹង១៣ ។

119. ▲ យើងមាន

$$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$$

មានន័យថា $n^3 - n$ ជាផលគុណនៃចំនួនគត់បីតរៀងគ្នា ។ ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនោះដាច់ខាតត្រូវតែមាន

មួយជាពហុគុណនៃ 2 ព្រោះចំនួនគត់បីតរៀងគ្នាត្រូវឋិតនៅក្នុងចំណោមចំនួនដែលមានរាង $2k, 2k+1, 2k+2, \ldots$ ។ បើផ្តើមដោយ $2k$ នោះយើងមានចំនួនគូ $2k, 2k+2$ ។ បើផ្តើមដោយលេខសេស យើងមានចំនួនគូ $2k+2$ ។ ដូច្នេះយ៉ាងណាក៏ត្រូវតែចំនួនគូមួយដែរ ។

និងមួយទៀតជាពហុគុណនៃ 3 ព្រោះចំនួនគត់បីតរៀងគ្នា ត្រូវឋិតនៅក្នុងចំណោមចំនួនដែលមានរាង $3k, 3k+1, 3k+2, 3k+3, \ldots$ ។ បើផ្តើមដោយ $3k$ នោះយើងមានចំនួនពហុគុណនៃ 3 មាន $3k, 3k+3$ ។ បើផ្តើមដោយ $3k+1$ នោះយើងមានចំនួនពហុគុណនៃ 3 មាន $3k+3$ ។

ដូច្នេះ $n^3 - n$ ជាពហុគុណនៃ 2 ផង និងនៃ 3 ផង ។ ដោយ 2 បឋមនឹង 3 ដូច្នេះ $n^3 - n$ ជាពហុគុណនៃ $2 \times 3 = 6$ ។

120. ▲ ក) យើងមាន $3^{6n} - 2^{6n} = 27^{2n} - 8^{2n} = (4 \times 7 - 1)^{2n} - (7+1)^{2n} \equiv (-1)^{2n} - (1)^{2n} \equiv 0 \pmod 7$ និង $27^{2n} - 8^{2n} = (5 \times 5 + 2)^{2n} - (5+3)^{2n} \equiv (2)^{2n} - (3)^{2n} = 4^n - 9^n \equiv (-1)^n - (-1)^n = 0 \pmod 5$ ។ ដូច្នេះ $3^{6n} - 2^{6n}$ ចែកដាច់នឹង ៧ផង និងនឹង៥ផង ។ ហើយដោយ 7 បឋមនឹង5 នោះ $3^{6n} - 2^{6n}$ ចែកដាច់នឹង$7 \times 5 = 35$ ។

១) យើងមាន $n^5-5n^3+4n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ កន្សោមនេះជាផលគុណនៃចំនួនគត់៥តជាប់គ្នា ។ ដូច្នេះត្រូវតែមានកត្តាមួយដែលចែកដាច់នឹង៥;មានកត្តាមួយដែលចែកដាច់នឹង៣; មានកត្តាពីរដែលចែកដាច់នឹង២ ដែលក្នុងនោះមានមួយចែកដាច់នឹង៤ ។ ដូច្នេះកន្សោមនេះត្រូវចែកដាច់នឹង $5\times3\times2\times4=120$ ។

121. ▲ យើងមាន

$$p^2-1=(p-1)(p+1)$$

ដោយ $p>3$ ជាចំនួនបឋម នោះ p ជាចំនួនសេស ។ ដូច្នេះ $p-1$ និង $p+1$គូទាំងពីរ ដូច្នេះផលគុណរបស់វាជាពហុគុណនៃ 4 ។

ដោយ $p>3$ ដូច្នេះ p មិនអាចជាពហុគុណនៃ 3 ទេ ។ ដូច្នេះ p ត្រូវមានរាង $3k+1$ ឬ $3k+2$ ។ បើ $p=3k+1$ នោះ $p-1=3k$ ។ បើ $p=3k+2$ នោះ $p+1=3(k+1)$ ។ ដូច្នេះត្រូវតែមានមួយក្នុងចំណោម $p-1$ ឬ $p+1$ ជាពហុគុណនៃ 3 ។ ដូច្នេះ p^2-1 ជាពហុគុណនៃ 3 ។

ដូច្នេះ p^2-1 ជាពហុគុណនៃ 3 ផងនិង នៃ 4ផង ហើយដោយ 3 បឋមនឹង 4 នោះ p^2-1 ជាពហុគុណនៃ 12 ។

122. ▲ យើងមាន $a^3b-ab^3=ab(a-b)(a+b)$ ជាចំនួនគូ ជានិច្ចព្រោះ ក្នុងចំណោម $ab, a-b$ និង $a+b$ ត្រូវតែមានមួយជាចំនួនគូ ព្រោះបើមានមួយក្នុងចំណោម a,b គូ នោះ ab គូ, បើ a,b សេសទាំងពីរនោះ $a\pm b$ គូ ។

បើមានមួយក្នុងចំណោមចំនួនគត់ទាំងបី មានរាង $5k$ នោះ បើយើងយក $a=5k$ និង ដោយ $ab(a-b)(a+b)$ ជាចំនួនគូ នោះវាត្រូវមានរាង $10l$ ដូច្នេះចែកដាច់នឹង 10 ។ បើចំនួនគត់ទាំងបីសុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង 5 នោះ ពួកវាឋិតនៅក្នុងចំណោមក្រុមចំនួនមានរាង $5k\pm1$ ឬ $5k\pm2$ ។ ដោយគេមានចំនួនគត់បី នោះគេត្រូវតែមានចំនួនគត់ពីរដែលស្ថិតនៅក្នុងក្រុមតែមួយ (ក្រុម ដែលមានរាង $5k\pm1$ ឬ $5k\pm2$) ។ ផលបូកឬបើ

មិនអ៊ីចឹងទេ ផលសងនៃចំនួនពីរនោះ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 5 ។ ដោយ $ab(a-b)(a+b)$ ជាចំនួនគូ នោះវាត្រូវមានរាង $10l$ ដូច្នេះចែកដាច់នឹង 10 ។

123. ▲ បើ $a=3k\pm 1, b=3m\pm 1$ នោះ $a^2+b^2=3y+2$ មិនអាចចែកដាច់នឹង 3ទេ ។ បើ $a=3k\pm 1, b=3m$ ឬ $a=3k, b=3m\pm 1$ នោះ $a^2+b^2=3y+1$ មិនអាចចែកដាច់នឹង 3ទេ ។ ដូច្នេះ មានតែ a និង b ចែកដាច់នឹង 3 ទាំងពីរ ទើប $3|(a^2+b^2)$ ។

124. ▲ ជាដំបូងយើងបង្ហាញថា បើ a^2-1 ចែកដាច់នឹង 3 នោះ a ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ឧបមាថា 3 ចែកដាច់ $a^2-1=(a-1)(a+1)$ ។ ដោយ 3 ជាចំនួនបឋម នោះ $a-1$ ឬ $a+1$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 3 ។ ក្នុងករណីទាំងពីរ a ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ដូច្នេះ បើ a^2-1 ចែកដាច់នឹង 3 នោះ a ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។

ច្រាសមកវិញ យើងបង្ហាញថា បើ a ចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះ a^2-1 ចែកដាច់នឹង 3 ។ ដោយ a ចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះ $a=3q+1$ ឬ $a=3q+2$ ។ បើ $a=3q+1$ នោះ $a^2-1=3q(3q+2)$ ចែកដាច់នឹង 3 ។ បើ $a=3q+2$ នោះ $a^2-1=3(3q+2)(q+1)$ ចែកដាច់នឹង 3 ។ ដូច្នេះ បើ a ចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះ a^2-1 ចែកដាច់នឹង 3 ។

125. ▲ យើងមាន

$$n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33$$
$$121=11^2$$

បើ n^2+3n+5 ចែកដាច់នឹង 11 នោះ $(n+7)(n-4)$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 11 ដែរ ។ តែដោយ

$$(n+7)-(n-4)=11$$

នោះត្រូវតែ $n+7$ និង $n-4$ ចែកដាច់នឹង 11 ទាំងពីរឬមិនអ៊ីចឹងទេ ចែកមិនដាច់នឹង 11 ទាំងពីរ ។

បើ $n+7$ និង $n-4$ ចែកដាច់នឹង 11 ទាំងពីរ នោះ $(n+7)(n-4)$ ចែកដាច់នឹង $11^2=121$ តែ 33 ចែកមិនដាច់នឹង 121 ។ ដូច្នេះ $(n+7)(n-4)+33$ ចែកមិនដាច់នឹង 121 ។

បើ $n+7$ និង $n-4$ ចែកមិនដាច់នឹង 11 ទាំងពីរ នោះ $(n+7)(n-4)$ ចែកដាច់នឹង 11 តែ 33 ចែកដាច់នឹង 11 ។ ដូច្នេះ $(n+7)(n-4)+33$ ចែកមិនដាច់នឹង 11 $\Rightarrow$ ចែកមិនដាច់នឹង 121 ។

126. ▲យើងមាន

2903^n-803^n ចែកដាច់នឹង $2903-803=7(300)$

261^n-464^n ចែកដាច់នឹង $261-464=7(-29)$

មានន័យថា $2903^n-803^n-464^n+261^n$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដូចគ្នាដែរ

2903^n-464^n ចែកដាច់នឹង $2903-464=271(9)$

261^n-803^n ចែកដាច់នឹង $261-803=271(-2)$

មានន័យថា កន្សោមខាងលើចែកដាច់នឹង 271 ។

ដោយ 7 និង 271 មិនមានកត្តាបឋមរួមគ្នា នោះ កន្សោមខាងលើចែកដាច់នឹង $7(271)=1897$ ។

127. ▲ ករណី $n=1$ យើងមាន $3^6-26-27=169(4)$ ជាពហុគុណនៃ 169 ពិត ។ សន្មតថាវាពិត រហូតដល់ $n-1, n>1$ មានន័យថា $3^{3n}-26n-1=169N$ ចំពោះចំនួនគត់ N ណាមួយ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}3^{3n+3}-26N-27&=27.3^{3n}-26n-27\\&=27(3^{3n}-26n-1)+676n\\&=27(169N)+169(4n)\end{aligned}$$

ពហុគុណនៃ 169 ពិត ។

ដូច្នេះ $3^{3n+3}-26N-27$ ជាពហុគុណនៃ 169 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

128. ▲ករណី $n=1$

$$k^2-1=(k-1)(k+1)$$

ដោយ k ជាចំនួនសេស នោះ $k=2m+1$ ដែល m ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ដូច្នេះ

$$k-1=2m, k+1=2m+2$$

បើ m គូ នោះ $k-1$ ចែកដាច់នឹង 4 ហើយ $k+1$ ចែកដាច់នឹង 2 ។ ដូច្នេះ k^2-1 ចែកដាច់នឹង $8=2^{1+2}$ ។ បើ m សេស តាង $m=2q+1$ នោះ $k-1=2m$ ចែកដាច់នឹង 2 ហើយ $k+1=2m+2=4q+4$ ចែកដាច់នឹង 4 ដូច្នេះ k^2-1 ចែកដាច់នឹង $8=2^{1+2}$ ។ ដូច្នេះ ករណី $n=1$ សំណើពិត ។

ឧបមាថា សំណើពិតដល់ $n, n>1$ មានន័យថា 2^{n+2} ចែកដាច់ $k^{2^n}-1$ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $k^{2^{n+1}}-1$ ចែកដាច់នឹង 2^{n+3} ។ យើងមាន

$$k^{2^{n+1}}-1=\left(k^{2^n}-1\right)\left(k^{2^n}+1\right)$$

ដោយ $\left(k^{2^n}-1\right)$ ចែកដាច់នឹង 2^{n+2} នោះ យើងនឹងបង្ហាញថា $\left(k^{2^n}+1\right)$ ចែកដាច់នឹង 2 ។ ដោយ k សេស នោះ $\left(k^{2^n}+1\right)$ គូ ដូច្នេះចែកដាច់នឹង 2 ។ សំណើពិត ។

129. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}2222^{5555}+5555^{2222}\\ &=(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})\\ &-(4^{5555}-4^{2222})\end{aligned}$$

យើងមាន $(2222^{5555}+4^{5555})$ ចែកដាច់នឹង $2222+4=2226=7(138)$ ព្រោះ $a^n+b^n=(a+b)(\dots)$ ករណី n សេស ។ ដូច្នេះ $(2222^{5555}+4^{5555})$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

យើងមាន $(5555^{2222}-4^{2222})=(5555-4)(\dots)$ ចែកដាច់នឹង $5555-4=5551=7(793)$ ។ ដូច្នេះ $(5555^{2222}-4^{2222})$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

យើងមាន $(4^{5555}-4^{2222})=4^{2222}(4^{3333}-1)=4^{2222}(64^{1111}-1)$ ចែកដាច់នឹង $64-1=63=7(9)$ ។ ដូច្នេះ $(4^{5555}-4^{2222})$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដូច្នេះ $2222^{5555}+5555^{2222}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

130. ▲ យើងមាន

$$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + \cdots + 11 + 1)$$

យើងមាន $11^9, 11^8, \ldots, 11, 1$ សុទ្ធតែមានលេខ ១ នៅខាងចុង ពេលពន្លាតរួច ។ ដូច្នេះ ចំនួនទាំងនេះ សុទ្ធតែមានសំណល់ ១ ពេលចែកនឹង 10 ។ ដូច្នេះ ផលបូក $11^9 + 11^8 + 11^7 + \cdots + 11 + 1$ សល់សំណល់ 10 ពេលចែកនឹង 10 ត្រូវនឹងសំណល់ 0 ពេលចែកនឹង 10 ។ ដូច្នេះ $11^9 + 11^8 + 11^7 + \cdots + 11 + 1$ ចែកដាច់នឹង 10 ។ ដូច្នេះ $(11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + \cdots + 11 + 1)$ ចែកដាច់នឹង $10.10 = 100$ ។ យើងទាញបាន $11^{10} - 1$ ចែកដាច់នឹង 100 ។

131. ▲ តាង $N = 27\,195^8 - 10\,887^8 + 10\,152^8$ ។ យើងមាន $26\,460 = 2^2.3^3.5.7^2$ ។

យើងមាន $N = 27\,195^8 - (10\,887^8 - 10\,152^8)$ និង $27\,195 = 3.5.7^2.37$ ។ ដូច្នេះ $27\,195$ ចែកដាច់នឹង 5.7^2 ។ យើងមាន $(10\,887^8 - 10\,152^8)$ ចែកដាច់នឹង $10\,887 - 10\,152 = 735 = 3.5.7^2$ ។ យើងទាញបានថា N ចែកដាច់នឹង 5.7^2 ។

យើងមាន $N = (27\,195^8 - 10\,887^8) + 10\,152^8$ ។ ដោយ $10\,152 = 2^3.3^3.47$ ដូច្នេះ $10\,152$ ចែកដាច់នឹង $2^2.3^3$ ។ យើងមាន $(27\,195^8 - 10\,887^8)$ ចែកដាច់នឹង $27\,195 - 10\,887 = 16\,308 = 2^2.3^3.151$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន N ចែកដាច់នឹង $2^2.3^3$ ។

ដោយ N ចែកដាច់នឹង 5.7^2 ផង និង ចែកដាច់នឹង $2^2.3^3$ ផង ហើយដោយ 5.7^2 បឋមនឹង $2^2.3^3$ នោះមានន័យថា N ចែកដាច់នឹង $(5.7^2).(2^2.3^3) = 26\,460$ ។

132. ▲ តាង $n = 3k + r$ ដែល $0 \leq r \leq 2$ ។ យើងមាន

$$2^n = 2^{3k+r} = 8^k.2^r \equiv 2^r \pmod 7$$

ដូច្នេះ 2^n modulo 7 បាន 2^r ដែលស្មើនឹង 1,2 ឬ 4 បើ $r = 0,1$ ឬ 2 រៀងគ្នា ។ យើងទាញបាន $2^n - 1$ modulo 7 បាន 0,1 ឬ 3 បើ $r = 0,1$ ឬ 2 រៀងគ្នា ។ ដូច្នេះ $2^n - 1$ ចែកដាច់នឹង 7 បើ $r = 0$ គឺ $n = 3k$ ។

យើងមាន 2^n+1 modulo 7 បាន 2, 3 ឬ 5 បើ $r=0,1$ ឬ 2 រៀងគ្នា ។ ដូច្នេះ 2^n+1 មិនអាចចែកដាច់នឹង 7 ទេ ។

133. ▲យើងមាន

$$3^{kd}-2^{kd}=\left(3^d-2^d\right)\left(3^{(k-1)d}+3^{(k-2)d}2+\cdots+2^{(k-1)d}\right)$$

តាមសមភាពនេះ យើងទាញបានថា

i) បើ d ចែកដាច់ n នោះ 3^d-2^d ចែកដាច់ 3^n-2^n

ii) បើ d ជាចំនួនពហុគុណ នោះ 3^d-2^d ក៏ជាចំនួនពហុគុណដែរ ។

យើងនឹងបង្ហាញថា មាន d ច្រើនរាប់មិនអស់ដែលចែកដាច់ 3^d-2^d-1 ។ យើងយក $d=2^t$ ដូច្នេះយើងទាញបាន d ចែកដាច់ 2^d ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា d ចែកដាច់ 3^d-1 ទៀត ។ យើងនឹងបង្ហាញតាមវិចារដោយកំណើន ។

បើ $t=1$ នោះ $d=2$ ចែកដាច់ $3^2-1=8$ ពិត ។ សន្មតថា ពិតចំពោះចំនួនគត់ t មួយ ។ យើងមាន

$$3^{2^{t+1}}-1=\left(3^{2^t}-1\right)\left(3^{2^t}+1\right)$$

យើងមាន $\left(3^{2^t}-1\right)$ ចែកដាច់នឹង 2^t តាមកំនើន ហើយ $\left(3^{2^t}+1\right)$ ជាចំនួនគូ ដូច្នេះ $3^{2^{t+1}}-1$ ចែកដាច់នឹង 2^{t+1} ដូច្នេះសំណើពិត ។ ដូច្នេះ យើងបានបង្ហាញថា មាន $d=2^t$ ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល ចែកដាច់ 3^d-2^d-1 ។

យក $n=3^d-2^d=3^{2^t}-2^{2^t}$ ។

ដោយ $d=2^t$ ជាចំនួនពហុគុណ នោះ $n=3^d-2^d$ ក៏ជាចំនួនពហុគុណដែរ(តាម ii)) ។

ដោយ d ចែកដាច់ $n-1$ នោះ 3^d-2^d ចែកដាច់ $3^{n-1}-2^{n-1}$ (តាម i)) ។

ដូច្នេះជាសរុប យើងបានបង្ហាញថា មាន $n=3^d-2^d=3^{2^t}-2^{2^t}$ ដែល $t\geq 1$ ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល $n=3^d-2^d$ ចែកដាច់ $3^{n-1}-2^{n-1}$ ។

134. ▲ យើងឃើញថា A និង A' ត្រូវតែមានលេខ 10 ខ្ទង់ ។ តាង $A = \overline{a_{10}a_9 \dots a_1}$ និង $A' = \overline{a'_{10}a'_9 \dots a'_1}$ ។ ដូច្នេះ $A + A' = 10^{10}$ លុះត្រាតែ មាន j មួយ ដែល $0 \le j \le 9$ ហើយដែល

$$\begin{aligned} &a_1 + a'_1 = a_2 + a'_2 = \cdots = a_j + a'_j = 0 \\ &a_{j+1} + a'_{j+1} = 10 \\ &a_{j+2} + a'_{j+2} = a_{j+3} + a'_{j+3} = \cdots = a_{10} + a'_{10} = 9 \end{aligned}$$

ក្នុងផលបូកលើ បើ $j = 0$ មានន័យថា គ្មានគូ $a_k + a'_k = 0, 1 \le k \le 10$ ទេ ។

បើ $j = 9$ នោះ មានតែ $a_{10} + a'_{10} = 10$ ។

ដោយបូក ផលបូកទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$a_1 + a'_1 + a_2 + a'_2 + \cdots + a_{10} + a'_{10} = 10 + 9(9 - j)$$

ដោយ a'_s ជាចម្លាស់របស់ a_s នោះ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} &a_1 + a'_1 + a_2 + a'_2 + \cdots + a_{10} + a'_{10} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) \\ &\Rightarrow\ 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) = 91 - 9j \end{aligned}$$

ដូច្នេះ j ត្រូវតែជាចំនួនសេស $\Rightarrow j \ge 1$ ។ ដូច្នេះ $a_1 + a'_1 = \cdots = a_j + a'_j = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow A$ ចែកដាច់នឹង 10 ។

135. ▲ តាមទ្រឹស្តីបទនៃភាពចែកដាច់នឹង 9 ចំនួននេះ ចែកដាច់នឹង 9 បើ

$$19 + 20 + 21 + \cdots + 92 = 37^2(3)$$

ចែកដាច់នឹង 9 និង ច្រាសមកវិញ ។ តែចំនួននេះ ចែកដាច់នឹង 3 តែចែកមិនដាច់នឹង 9 ទេ ។ ដូច្នេះ k ធំបំផុត ដែល 3^{k} ចែកដាច់ចំនួននេះគឺ $\mathrm{k} = 1$ ។

136. ▲ យើងមាន

$$2^p - 2 = (1+1)^p - 2 = \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{p-1} \qquad (*)$$

ចំពោះ $0 < k < p$ យើងមាន

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} \Rightarrow k!\binom{p}{k} = p(p-1)\dots(p-k+1)$$

ដូច្នេះ នាំឱ្យ $p|k!\binom{p}{k}$ ។ ដោយ $k < p$ នោះ p ចែកមិនដាច់ $k!$ ។ ដូច្នេះត្រូវតែ $p|\binom{p}{k}$ ។ យើងទាញបាន p ចែកដាច់គ្រប់តួបូកទាំងអស់ក្នុង (*) ដូច្នេះ p ត្រូវចែកដាច់ $2^p - 2$ ។

137. ▲យើងរៀបផលបូកជា

$$\left(1+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right)$$

យើងមាន

$$1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1}$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}=\frac{p}{2(p-2)}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}=\frac{p}{\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{2}}$$

ដូច្នេះ ផលបូករបស់ប្រភាគនេះ មានកត្តារួមរបស់ភាគយកស្មើ p ។ តួនីមួយៗនៃផលបូកខាងលើមាន ភាគបែង ដែលមានកត្តាផលគុណដូចជា $2,3,\dots,p-1$ សុទ្ធតែតូចជាង p ។ ដោយ p ជាចំនួនបឋម នោះ គ្មានកត្តាណាមួយរបស់ភាគបែងអាចសម្រួល p បានទេ ។ ដូច្នេះ p នៅក្នុងភាគយកនៅរក្សាដដែល ក្រោយបូកប្រភាគទាំងអស់បញ្ចូលគ្នាមក ។ ដូច្នេះ p ចែក a ដាច់ ។

138. ▲ a ចែកដាច់ $bc-1$ នោះ មាន $m\geq 1$ ដែល $ma=bc-1$ ។ ដូច្នេះ $bc-ma=1$ ។ បើ k ជាតួចែករួមធំបំផុតរវាង a និង b នោះ $a=pk,b=qk$ ដែល p បឋមនឹង q ។ ដូច្នេះ $qkc-mpk=1 \Rightarrow qc-mp=\frac{1}{k}$ ។ អង្គខាងឆ្វេងនៃសមភាពនេះ ជាចំនួនគត់ ដូច្នេះមានតែ $k=1$ ។ ដូច្នេះ a និង b ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា ។ តាមរបៀបដូចគ្នាយើងទាញបាន a,b,c បឋមនឹងគ្នាពីរៗ ។

បើ a ចែកដាច់ $bc-1$ នោះ វាចែកដាច់ $bc+ac+ab-1$ ។ ដូចគ្នា b និង c ត្រូវតែចែកដាច់ $bc+ac+ab-1$ ។ ដោយ a,b,c បឋមនឹងគ្នាពីរៗ នោះយើងទាញបាន abc ចែកដាច់ $ab+bc+ca-1$ ។ យើងមាន

$$\frac{ab+bc+ca-1}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}\leq\frac{3}{2}$$

ដោយ $\frac{ab+bc+ca-1}{abc}\leq 3/2$ ជាចំនួនគត់ នោះ $\frac{ab+bc+ca-1}{abc}=1$ ។ ដូច្នេះ

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}=1 \quad (*)$$

ជាដំបូងយើងសន្មតថា $a \le b \le c$ ។ យើងទាញបាន

$$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{abc}=\frac{3}{a}-\frac{1}{abc}$$
$$\Rightarrow\frac{3}{a}\ge 1+\frac{1}{abc}>1$$
$$\Rightarrow a<3$$

ដោយ $a>1 \Rightarrow a=2$ ។ សមីការ (*)ទៅជា

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2bc}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2bc}\le\frac{1}{b}+\frac{1}{b}-\frac{1}{2bc}=\frac{2}{b}-\frac{1}{2bc}$$
$$\Rightarrow\frac{2}{b}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2bc}>\frac{1}{2}\Rightarrow b<4$$

ដោយ $a=2\le b<4 \Rightarrow b=2;3$ ។

បើ $b=2$ នោះ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{c}-\frac{1}{4c}=\frac{1}{2}$$

សមីការគ្មានចម្លើយ ។

បើ $b=3$ នោះ

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{c}-\frac{1}{6c}=\frac{1}{2}\Rightarrow c=5$$

យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ឃើញថា $(2;3;5)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ ។

ដូច្នេះជាសរុបសមីការមានចម្លើយ $(2;3;5)$ និង ចម្លាស់របស់វា ដែលមាន

$(2;5;3);(3;2;5);(3;5;2);(5;2;3);(5;3;2)$ ។

139. ▲ សន្មត (m,n) ជាគូចម្លើយដែលត្រូវរក ដែល $\frac{n^3+1}{mn-1}$ ជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះ

$$m^3\frac{n^3+1}{mn-1}=\frac{(mn)^3-1+m^3+1}{mn-1}$$
$$=(mn)^2+mn+1+\frac{m^3+1}{mn-1}$$

ជាចំនួនគត់ $\Rightarrow$ $\frac{m^3+1}{mn-1}$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ ។ មានន័យថា បើ (m,n) ជាចម្លើយ នោះ (n,m) ក៏ជាចម្លើយដែរ ។ ដូច្នេះជាដំបូងយើងរៀប $m\ge n$ សិន ។

គាង់ $K=\frac{n^3+1}{mn-1}\geq 1$ ។ យើងទាញបាន

$$n^3+1=K(mn-1)$$
$$n^3+Kmn+(K+1)=0$$

$\Rightarrow n$ ចែក $K+1$ ដាច់ ។

$\Rightarrow K+1=nx$ ចំពោះចំនួនគត់ $x\geq 1$ ណាមួយ ។

ចំពោះ $n>1$

$$nx-1=K=\frac{n^3+1}{mn-1}\leq\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1}\leq n+1$$

បើ $n\geq 3$ នោះ

$$nx-1\leq n+\frac{1}{n-1}<n+1$$
$$\Rightarrow n(x-1)<2$$
$$\Rightarrow n(x-1)=\{0;1\}$$
$$\Rightarrow n(x-1)=0 \text{ ព្រោះ } n\geq 3$$
$$\Rightarrow x-1=0\ \Rightarrow x=1$$
$$\Rightarrow n-1=\frac{n^3+1}{mn-1}$$
$$\Rightarrow m=n+1+\frac{2}{n-1}$$

$\Rightarrow n-1$ ចែក 2 ដាច់ ។ ដោយ $n\geq 3$ ដូច្នេះ មានតែ $n-1=2\ \Rightarrow n=3; m=5$ ។

បើ $n=2$ នោះ

$$K=\frac{9}{2m-1}\ \Rightarrow 2m-1=\{1;3;9\}\Rightarrow m=\{1;2;5\}$$

យើងយក $(m,n)=(2,2);(5,2)$ (ព្រោះយើងបានសន្មតថា $m\geq n$) ។

បើ $n=1$ នោះ

$$K=\frac{2}{m-1}\ \Rightarrow m-1=\{1;2\}\ \Rightarrow m=\{2;3\}$$

យើងទាញបាន $(m,n)=\{(2,1);(3,1)\}$ ។

ដូច្នេះជាសរុបចម្លើយគឺ $(m,n)=\{(2,1);(3,1);(2,2);(5,2);(5,3)\}$ និង ចម្លាស់របស់វា $\{(1,2);(1,3);(2,5);(3,5)\}$ ។

140. ▲ តាង $2n = m\left(1+\lfloor\sqrt{2n}\rfloor\right)$ ។

បើ $m \le \lfloor\sqrt{2n}\rfloor - 1$ នោះ $2n \le \left(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor - 1\right)\left(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor + 1\right) = \lfloor\sqrt{2n}\rfloor^2 - 1 \le 2n - 1 < 2n$ មិនពិត ។

បើ $m \ge \lfloor\sqrt{2n}\rfloor + 1$ នោះ $2n \ge \left(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor + 1\right)^2 \ge 2n + 1$ មិនពិត ។

ដូច្នេះ មានតែ $m = \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ ។ ដូច្នេះ $n = \frac{m(1+m)}{2}$ ដែល $m = \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ ។

ច្រាសមកវិញ បើ $n = \frac{m(1+m)}{2}$ នោះ

$$\begin{aligned}&\Rightarrow 2n = m(1+m)\\&\Rightarrow m < \sqrt{2n} < m+1\\&\Rightarrow m = \lfloor\sqrt{2n}\rfloor\\&\Rightarrow 2n = \lfloor\sqrt{2n}\rfloor\left(1+\lfloor\sqrt{2n}\rfloor\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow 2n$ ចែកដាច់នឹង $\left(1+\lfloor\sqrt{2n}\rfloor\right)$ ។

ដូច្នេះ ចំពោះ $m \in \mathbb{N}, n = \frac{m(m+1)}{2}$ នោះ $1 + \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ ចែកដាច់ $2n$ ។

141. ▲ ដំបូងយើងពិនិត្យករណី $1 \in S$ ។ ដូច្នេះ មានចំនួនគត់ n ដែល $p - n^2 = 1$ ។ ដោយ $p > 5$ នោះ $n > 2$ ។ ដោយ p សេស នោះ n គូ ។ តាង $a = p - (n-1)^2 = 2n, b = p - 1 = n^2$ ។ ដោយ $(n-1)^2 < n^2 < p$ និង $1 < p$ នោះ $a, b \in S$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $1 < a < b$ ហើយ a ចែកដាច់ b ព្រោះ n គូ ។

ម្តងនេះយើងសន្មតថា $1 \notin S$ ។ យក $n = \lfloor\sqrt{p}\rfloor \Rightarrow n \le \sqrt{p} < n + 1$ នោះ

$$n^2 \le p < (n+1)^2 \Rightarrow n^2 \le p \le (n+1)^2 - 1 = n(n+2)$$

តែដោយ p ជាចំនួនបឋម នោះ $n^2 < p < n(n+2) \Rightarrow n^2 + 1 \le p < n(n+2)$ ។ ដោយ $1 \notin S$ នោះ $n^2 + 1 < p < n(n+2)$ ។ តាង $a = p - n^2 \in S$ ។ យើងមាន $a - n = p - n(n+1) \neq 0$ ព្រោះ p ជាចំនួនបឋម និង

$$\begin{aligned}&a - n = p - n(n+1) < n(n+2) - n(n+1) = n\\&a - n = p - n(n+1) > n^2 + 1 - n(n+1) = -n + 1 > -n\\&\Rightarrow -n < a - n < n \Rightarrow (a-n)^2 < n^2\end{aligned}$$

តាង $b = p - (a-n)^2 \in S$ ។ យើងមាន $b = a(1 + 2n - a)$ ។ យើងមាន $a < 2n$ និង $1 + 2n - a > 1$ ព្រោះ $a < b$ ។ ដូច្នេះ a ចែក b ដាច់ ។

142. ▲ សន្មតថា n ចែកដាច់នឹងគ្រប់ចំនួនគត់ $\leq \sqrt{n}$ ។ តាង $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_l$ ជាបណ្តាចំនួនបឋម $\leq \sqrt{n}$ ហើយតាង k_j ជាចំនួនគត់មួយដែល $p_j^{k_j} \leq \sqrt{n} < p_j^{k_j+1}$ ។ ដូច្នេះ

$$n^{\frac{l}{2}} < p_1^{k_1+1} p_2^{k_2+1} \dots p_l^{k_l+1}$$

តាង $\mathrm{PPCM}(1,2,3,\dots,\lfloor\sqrt{n}-1\rfloor,\lfloor\sqrt{n}\rfloor) = K$

$$\Rightarrow K = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l}$$
$$\Rightarrow p_1^{k_1+1} p_2^{k_2+1} \dots p_l^{k_l+1} \leq K^2$$
$$\Rightarrow n^{\frac{l}{2}} < K^2$$

តាមសម្មតិកម្ម n ត្រូវចែកដាច់នឹងគ្រប់ចំនួនគត់ a ដែល $1 \leq \mathrm{a} \leq \sqrt{\mathrm{n}}$ ដូច្នេះ n ត្រូវចែកដាច់នឹង $K \Rightarrow K \leq n$ ។ ដូច្នេះ មានន័យថា $n^{\frac{l}{2}} < n^2 \Rightarrow l < 4$ ។ ដូច្នេះ $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ ជាបណ្តាចំនួនបឋមដែល $\leq \sqrt{n}$ ។ ដោយ $p_4 = 7 \Rightarrow n < 49$ ។ យើងពិនិត្យចំនួនគត់ម្តងមួយៗ ពី 1 ដល់ 48 យើងឃើញថា n ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $n = 2,4,6,8,12,24$ ។ ដូច្នេះ $n = 24$ ជាចំនួនធំបំផុតដែលចង់បាន ។

143. ▲ យើងមាន

$$2S = (l+m)(m-l+1); m-l+1 < l+m < 2n$$

ក្នុងចំណោម $(l+m)$ និង $(m-l+1)$ ត្រូវមានមួយគូ និងមួយទៀតសេស ។ កត្តាដែលគូ មានតម្លៃ $< 2n$ ។ តាង $n = 2^k s$ ដែល s ជាចំនួនសេស ។

បើ $s = 1$ នោះ $2S$ ដែលមានកត្តាលេខគូមានតម្លៃតូចជាង $2n$ មិនអាចចែកដាច់នឹង $2n$ ទេ ។ ដូច្នេះ S ចែកមិនដាច់នឹង n ។

តែបើ $s > 1$ នោះ S ចែកដាច់នឹង n ចំពោះ $0 < l < m < n$ ដែល

$$m = \frac{1}{2}(s + 2^{k+1} - 1); l = \begin{cases} 1 + m - 2^{k+1}, s > 2^{k+1} \\ 1 + m - s, s < 2^{k+1} \end{cases}$$

ដូច្នេះក្នុងករណីនេះ មានតម្លៃ l, m ដែល $0 < l < m < n$ ហើយ S ចែកដាច់នឹង n ដែលផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌ ។

144. ▲យើងមាន

$$3^n - 1 = 2(3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 1)$$

បើ n ជាចំនួនសេស នោះ $3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+1$ ជាផលបូកនៃចំនួនសេសចំនួន n ដូច្នេះផលបូកនេះជាចំនួនសេសដែរ ។ ដូច្នេះ 3^n-1 មិនអាចជាពហុគុណនៃ 2^2 បានទេ ។ ដូច្នេះមានតែ $n=1$ ។

បើ n ជាចំនួនគូ តាង $n=2k$ ។ លក្ខខណ្ឌទៅជា 2^{2k} ចែកដាច់ $3^{2k}-1=(3^k-1)(3^k+1)$ ។ ចំនួនទាំងពីរគឺ 3^k-1 និង 3^k+1 មានផលសងស្មើ 2 ដូច្នេះ PGCD របស់ចំនួនពីរនេះ ជាតួចែករបស់ 2 ។ ម៉្យាងវិញទៀតចំនួនទាំងនេះជាចំនួនគូ ដូច្នេះ $PGCD(3^k-1,3^k+1)=2$ ។ យើងទាញបានថា បើមិន 3^k-1 ក៏ 3^k+1 ដែរ ដែលចែកដាច់នឹង 2^{2k-1} ។ តែត្រូវតែ $3^k\pm1\geq 2^{2k-1}$ ។ វិសមភាពនេះមិនពិតទេ បើ $k\geq 3$ ។ យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយដៃឃើញថា $k=0,k=1,k=2$ ជាចម្លើយ ។ ដូច្នេះ ចម្លើយគឺ $n=\{1,2,4\}$ ។

145. ▲ តាង

$$q=\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}\quad (*)$$

ដោយ $(a-1)(b-1)(c-1)$ ចែកដាច់ $abc-1$ នោះ q ជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះ $q\geq 1$ ។

បើ $q=1$ នោះ

$$\begin{aligned}abc-1=(a-1)(b-1)(c-1)\ &\Rightarrow abc-1\\ &=abc-1-ab-ac+a-bc+b+c\Rightarrow a+b+c\\ &=ab+bc+ca>a+b+c\end{aligned}$$

មិនអាច ។ ដូច្នេះ $q\geq 2$ ។

ដោយដឹងថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\geq 5$ យើងមាន $x-1\geq\frac{x}{\sqrt[3]{2}}$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ $a\geq 5$ យើងមាន

$$2(a-1)(b-1)(c-1)\geq abc>abc-1\ \ (\text{ព្រោះ } c>b>a\geq 5)$$

បើ $abc-1$ ចែកដាច់នឹង $(a-1)(b-1)(c-1)$ នោះត្រូវតែ $abc-1=q(a-1)(b-1)(c-1)$ ដែល $q\geq 2$ ។ តែនេះ $2(a-1)(b-1)(c-1)>$

$abc-1$ ដូច្នេះ $abc-1$ មិនអាចចែកដាច់នឹង $(a-1)(b-1)(c-1)$ បានទេ ។

ដូច្នេះ $2 \le a \le 4$ ។

សន្មតថា $q = 2$ ។ ដូច្នេះ $abc-1 = 2(a-1)(b-1)(c-1)$ ជាចំនួនគូ មានន័យថា abc ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ a ត្រូវតែសេស ដូច្នេះ $a = 3$ ។ សមីការទៅជា

$$\begin{aligned}&(*) \Rightarrow 4(b-1)(c-1) = 3bc-1 \Rightarrow bc+5 = 4b+4c\\&\Rightarrow (b-4)(c-4) = 11\\&\Rightarrow b-4 = 1, c-4 = 11\\&\Rightarrow b = 5, c = 15\end{aligned}$$

ពេលនេះ សន្មតថា $q \ge 3$ ។

បើ $a = 2$

$$\begin{aligned}&(*) \Rightarrow q(bc-b-c+1) = 2bc-1\\&\Rightarrow (q-2)bc+(q+1) = qb+qc\\&\Rightarrow [(q-2)b-q][(q-2)c-q] = q+2\end{aligned}$$

ដោយ $a < b < c \Rightarrow b \ge a+1, c \ge b+1$ ដូច្នេះ $a = 2 \Rightarrow b \ge 3, c \ge 4$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow (q-2)b-q \ge 2q-6;\ \ (q-2)c-q \ge 3q-8\\&\Rightarrow q+2 = [(q-2)b-q][(q-2)c-q] \ge (2q-6)(3q-8)\end{aligned}$$

យើងមាន $(2q-6)(3q-8) > q+2$ ពេល $q \ge 4$ ។ ដូចនេះមានតែ $q = 3$ ។ ករណីនេះ

$$(b-3)(c-3) = 5 \Rightarrow b = 4; c = 8$$

បើ $a = 3 \Rightarrow b \ge 4, c \ge 5$

$$\begin{aligned}&(*) \Rightarrow 2q(bc-b-c+1) = 3bc-1\\&\Leftrightarrow (2q-3)bc+(2q+1) = 2qb+2qc\end{aligned}$$

ដោយ $b \ge 4 \Rightarrow (2q-3)bc \ge (8q-12)c \ge 4qc > 2qc+2qb$ ដូច្នេះគ្មានចម្លើយ ។

បើ $a = 4 \Rightarrow b \ge 5; c \ge 6$

$$(*) \Rightarrow (3q-4)bc+(3q+1) = 3qb+3qc$$

តែ $b > 4 \Rightarrow (3q-4)bc > (12q-16)c > 6qc > 3qb+3qc$ ដូច្នេះគ្មានចម្លើយទៀត ។

ជាសរុប ចម្លើយមានតែ $a = 2, b = 4, c = 8$ និង $a = 3, b = 5, c = 15$ ។

146. ▲ តាង $m=n+1$ នោះ m សេស ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $m(m-2)$ ចែកដាច់ $2^{(m-1)!}-1$ ។ យើងមាន $\phi(m)<m$ ដូច្នេះ $\phi(m)|(m-1)!\ \Rightarrow \left(2^{\phi(m)}-1\right)|\left(2^{(m-1)!}-1\right)$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទអយល័រ យើងទាញបាន $m|\left(2^{\phi(m)}-1\right) \Rightarrow m|\left(2^{(m-1)!}-1\right)$ ។

ដូចគ្នាយើងទាញបាន $(m-2)|\left(2^{(m-1)!}-1\right)$ ។ ដោយ m ជាចំនួនសេស នោះ $\text{PGCD}(m,m-2)=1$ ដូច្នេះ $m(m-2)|\left(2^{(m-1)!}-1\right)$ ។

147. ▲ យើងមាន

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ដូច្នេះយើងត្រូវបង្ហាញថា $S_k=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ ចែកដាច់នឹង $\frac{n(n+1)}{2}$ ។

យើងដឹងថាចំនួនគត់សេស k យើងមាន a^k+b^k ចែកដាច់នឹង $a+b$ ។

ករណី n គូ យើងទាញបាន S_k ចែកដាច់នឹង $n+1$ ព្រោះ

$$1^k+n^k,2^k+(n-1)^k,3^k+(n-2)^k,\dots,\left(\frac{n}{2}\right)^k+\left(\frac{n}{2}+1\right)^k$$

សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង $(n+1)=2+(n-1)=3+(n-2)=\cdots=\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ។

យើងមាន S_k ចែកដាច់នឹង $\frac{n}{2}$ ព្រោះ

$$1^k+(n-1)^k,2^k+(n-2)^k,3^k+(n-3)^k,\dots,\left(\frac{n}{2}-1\right)^k+\left(\frac{n}{2}+1\right)^k,\left(\frac{n}{2}\right)^k,n^k$$

សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង $\frac{n}{2}$ ។

ដោយ $n+1$ បឋមនឹង $\frac{n}{2}$ នោះ S_k ចែកដាច់នឹង $\frac{(n+1)n}{2}$ ។

ករណី n សេស យើងមាន S_k ចែកដាច់នឹង $\frac{n+1}{2}$ ព្រោះ

$$1^k+n^k,2^k+(n-1)^k,3^k+(n-2)^k,\dots,\left(\frac{n-1}{2}\right)^k+\left(\frac{n+3}{2}\right)^k,\left(\frac{n+1}{2}\right)^k$$

សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង $\frac{n+1}{2}$ ។ ដូចគ្នា S_k ចែកដាច់នឹង n ព្រោះ

$$1^k+(n-1)^k,2^k+(n-2)^k,3^k+(n-3)^k,\dots,\left(\frac{n-1}{2}\right)^k+\left(\frac{n+1}{2}\right)^k,n^k$$

សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង n ។

148. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}(a+b)^7-a^7-b^7 &= 7[a^6b+ab^6+3(a^5b^2+a^2b^5)+5(a^4b^3+a^3b^4)]\\ &= 7ab[a^5+b^5+3ab(a^3+b^3)+5a^2b^2(a+b)]\\ &= 7ab(a+b)(a^4+b^4-a^3b-ab^3+a^2b^2\\ &\quad +3ab(a^2-ab+b^2)+5ab)\\ &= 7ab(a+b)[a^4+b^4+2(a^3b+ab^3)+3a^2b^2]\\ &= 7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2\end{aligned}$$

តាមសម្មតិកម្ម (i) និង (ii) យើងទាញបានសម្មតិកម្មថ្មី

(i) $ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

(ii) a^2+ab+b^2 ចែកដាច់នឹង 7^3

ដោយ $(a+b)^2 > a^2+ab+b^2 \geq 7^3 \Rightarrow a+b \geq 19$ ។ ដោយសាកលេខម្តងមួយៗ យើងទាញបាន $a=1, b=18$ ជាចម្លើយមួយ ព្រោះ $1^2+1.18+18^2=343=7^3$ ។

149. ▲ យើងមាន

$$ab^p-ba^p=ab(b^{p-1}-a^{p-1})$$

បើ $p|ab$ នោះ $p|ab^p-ba^p$ ។

បើ $p \nmid ab$ ហើយដោយ p ជាចំនួនបឋម នោះ $\text{PGCD}(p,a)=\text{PGCD}(p,b)=1$ ។ ដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ា យើងទាញបាន $b^{p-1}\equiv a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ ។ ដូច្នេះ $p|\, b^{p-1}-a^{p-1} \Rightarrow p|ab^p-ba^p$ ។ ដូច្នេះ $p|ab^p-ba^p$ ចំពោះគ្រប់ p ។

150. ▲ យើងមាន

$$\underbrace{11\ldots1}_{(p-1)\times 1}=\frac{10^{p-1}-1}{9}$$

ដោយ p ជាចំនួនបឋម ហើយ $\text{PGCD}(p,10)=1$ នោះ តាមទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ា, p ចែកដាច់ $10^{p-1}-1$ ។ ដោយ $\text{PGCD}(p,9)=1$ ហើយ $\frac{10^{p-1}-1}{9}$ ជាចំនួនគត់ នោះ p ចែកដាច់ $\frac{10^{p-1}-1}{9}$ ។

151. ▲តាង $a = 56\,786\,730 = 2(3)(5)(7)(11)(13)(31)(61)$ ។ តាង

$$Q(x,y) = xy(x^{60} - y^{60})$$

យើងសង្កេតឃើញថា

$$\begin{aligned} &xy(x-y)|Q(x,y);\quad xy(x^2-y^2)|Q(x,y);\\ &xy(x^3-y^3)|Q(x,y);\ xy(x^4-y^4)|Q(x,y);\\ &xy(x^6-y^6)|Q(x,y);\ xy(x^{10}-y^{10})|Q(x,y);\\ &xy(x^{12}-y^{12})|Q(x,y);\ xy(x^{30}-y^{30})|Q(x,y); \end{aligned}$$

តាមទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ា ចំពោះចំនួនបឋម p មួយ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} &m^p - m \equiv 0 \pmod p; n^p - n \equiv 0 \pmod p\\ &\Rightarrow n(m^p - m) - m(n^p - n) \equiv 0 \pmod p\\ &\Rightarrow mn\,(m^{p-1} - n^{p-1}) \equiv 0 \pmod p \quad (*) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ (*) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} &2|\ mn(m-n)|Q(m,n);\\ &3|\ mn(m^2-n^2)|Q(m,n);\\ &5|\ mn(m^4-n^4)|Q(m,n);\\ &7|\ mn(m^6-n^6)|Q(m,n);\\ &11|\ mn(m^{10}-n^{10})|Q(m,n);\\ &13|\ mn(m^{12}-n^{12})|Q(m,n);\\ &31|\ mn(m^{30}-n^{30})|Q(m,n);\\ &61|\ mn(m^{60}-n^{60})|Q(m,n); \end{aligned}$$

ដោយ $2,3,5,7,\dots,61$ ទាំងអស់នេះសុទ្ធតែជាចំនួនបឋម នោះយើងទាញបាន

$a|Q(m,n)$ ។

152. ▲ ចំពោះចំនួនបឋមសេស p ណាមួយ តាមទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ា យើងមាន

$2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ ។ យើងយក $n = (p-1)^{2k+1}, k = 0,1,2,\dots$ នោះ

$$\begin{aligned} n2^n + 1 &= (p-1)^{2k+1}(2^{p-1})^{(p-1)^{2k}} + 1 \equiv (-1)^{2k+1}1^{(-1)^{2k}} + 1\\ &\equiv 0 \pmod p \end{aligned}$$

153. ▲ បើ $n|2^n - 1$ ចំពោះចំនួនគត់ $n > 1$ ណាមួយ នោះ n ត្រូវតែជាចំនួនសេស និង

មានតួចែកបឋមសេស p តូចបំផុត ។ យើងមាន p ចែកដាច់ n ហើយ n ចែកដាច់

$2^n - 1 \ \Rightarrow 2^n \equiv 1 \pmod p$ ។

តាង m ជាចំនួនគត់តូចបំផុត ដែល $2^m \equiv 1 \pmod p$ ។ តាង $n = xm + y, 0 \le y <$

m ។ ដូច្នេះ

$$2^y = 2^{n-xm} = 2^n(2^m)^{-x} \equiv 1.1^{-x} = 1 \pmod p$$

បើ $y > 0$ នោះ $2^y \equiv 1 \pmod p$ ដូច្នេះយើងមាន $y < m$ ដែល $2^y \equiv 1 \pmod p$ ផ្ទុយពីសន្មតិដែល ថា m តូចជាងគេ ។ ដូច្នេះ $y = 0$ មានន័យថា m ចែកដាច់ n ។ ដោយ n ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ m ក៏សេសដែរ ។

តាមទ្រឹស្តីបទ**ហ្វែម៉ា** យើងមាន $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ ។ ដោយ m ជាចំនួនតូចជាងគេដែល $2^m \equiv 1 \pmod p$ នោះ $m < p-1$ ។ ដូច្នេះ $m \le p-2 < p$ ។ ផ្ទុយពីសន្មតិដែល p ជាតួចែកតូចជាងគេរបស់ n ។

154. ▲ តាមទ្រឹស្តីបទ**ឌឺប៉ូលីញ៉ាក់** តម្លៃ k ធំបំផុត ដែល 7^k ចែកដាច់ $1000!$ ស្មើនឹង

$$\left\lfloor\frac{1000}{7}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{7^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{7^3}\right\rfloor = 142 + 20 + 2 = 164$$

ដូចគ្នាដែរ តម្លៃ k ធំបំផុត ដែល 7^k ចែកដាច់ $500!$ ស្មើនឹង $71 + 10 + 1 = 82$ ។ ដោយ

$$\binom{1000}{500} = \frac{1000!}{(500!)^2}$$

ដូច្នេះ តម្លៃ k ធំបំផុត ដែល 7^k ចែកដាច់ $\binom{1000}{500}$ ស្មើនឹង $164 - 2(82) = 0$ ។ ដូច្នេះ 7 ចែកមិនដាច់ $\binom{1000}{500}$ ទេ ។

155. ▲ គ្រប់ចំនួនគត់ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ទាំង 51នោះ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $2^a m$ បានទាំងអស់ ដែល m ជាចំនួនសេស ។ ឧទាហរណ៍ $1 = 2^0(1); 2 = 2^1(1); 3 = 2^0(3); 4 = 2^2(1); 5 = 2^0(5); 6 = 2(3); \dots$ ។ ចន្លោះ 1 និង 100, ចំនួនសេសមានចំនួនតែ 50 តែប៉ុណ្ណោះ មានន័យថាយើងមានចំនួនសេស m ផ្សេងគ្នាចំនួនតែ 50 តែប៉ុណ្ណោះ គឺ $m = \{1,3,5,7,9,\dots,99\}$ ។ ដូច្នេះ ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ទាំង 51 ដែលគេជ្រើសរើសនោះ ត្រូវតែមានចំនួនគត់ពីរ ដែលមាន m មានតម្លៃស្មើគ្នា ។ តាងចំនួនពីរនោះដោយ $2^a m$ និង $2^b m$ ដែល $a \le b$ ។ ដូច្នេះ ករណីនេះ $2^a m$ ចែកដាច់ $2^b m$ ។

156. ▲ យើងនឹងបង្ហាញជាទូទៅថា ចំនួនគត់តូចបំផុតដែលធំជាង $(\sqrt{3}+1)^{2n}$ ចែកដាច់នឹង 2^{n+1} ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ចំនួនគត់តូចបំផុតដែលធំជាង $(1+\sqrt{3})^{2n}$ ស្មើនឹង $\lfloor(1+\sqrt{3})^{2n}\rfloor+1$ ។ ដូច្នេះយើងត្រូវបង្ហាញថា $\lfloor(1+\sqrt{3})^{2n}\rfloor+1$ ចែកដាច់នឹង 2^{n+1} ។

យើងមាន

$$\begin{aligned}(1-x)^{2n} &= 1-\binom{2n}{1}x+\binom{2n}{2}x^2-\binom{2n}{3}x^3+\cdots+x^{2n}\\ \Rightarrow\ (1+\sqrt{3})^{2n} &= 1+\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^3+\cdots+(\sqrt{3})^{2n}\\ &= a_n+b_n\sqrt{3}\\ (1-\sqrt{3})^{2n} &= 1-\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^3+\cdots+(\sqrt{3})^{2n}\\ &= a_n-b_n\sqrt{3}\end{aligned}$$

ដែល a_n, b_n ជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះ

$$(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}=2a_n$$

ដោយ $|1-\sqrt{3}|<1\ \Rightarrow (1-\sqrt{3})^{2n}<1$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}\lfloor(1+\sqrt{3})^{2n}\rfloor &= (1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}-1=2a_n-1\\ \Rightarrow\quad \lfloor(1+\sqrt{3})^{2n}\rfloor+1 &= 2a_n\end{aligned}$$

ដូច្នេះយើងត្រូវបង្ហាញថា $2a_n$ ចែកដាច់នឹង 2^{n+1} ឬ a_n ចែកដាច់នឹង 2^n ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}&(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}=2(2+\sqrt{3})=2(l_1+m_1\sqrt{3})\\ &(1+\sqrt{3})^4=(1+\sqrt{3})^2(1+\sqrt{3})^2=2^2(l_2+m_2\sqrt{3})\\ &(1+\sqrt{3})^6=(1+\sqrt{3})^4(1+\sqrt{3})^2=2^3(l_3+m_3\sqrt{3})\\ &\vdots\\ &(1+\sqrt{3})^{2n}=(1+\sqrt{3})^{2n-2}(1+\sqrt{3})^2=2^n(l_n+m_n\sqrt{3})=a_n+b_n\sqrt{3}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $a_n=2^n l_n$ ចែកដាច់នឹង $2^n \Rightarrow$ សំណើពិត ។

157. ▲ a) យើងស្រាយបញ្ជាក់តាមកំណើន ។ $A_j=a_{m+j}+(-1)^j a_{m-j}$

ចំពោះ $j=0$ យើងទាញបាន $A_0=a_m+a_m=2a_m$ ដូច្នេះចែកដាច់នឹង $2a_m$ ។

ចំពោះ $j=1$ យើងទាញបាន $A_1=a_{m+1}-a_{m-1}$ ។ យើងមាន $a_{m+1}=2a_m+a_{m-1}\ \Rightarrow A_1=a_{m+1}-a_{m-1}=2a_m$ ។ ដូច្នេះ A_1 ចែកដាច់នឹង $2a_m$ ។

សន្មតថាពិតរហូតដល់ $j=k$ ។ យើងទាញបាន $A_k=a_{m+k}+(-1)^k a_{m-k}, A_{k-1}=a_{m+k-1}+(-1)^{k-1}a_{m-k+1}$ ចែកដាច់នឹង $2a_m$ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $A_{k+1}=a_{m+k+1}+(-1)^{k+1}a_{m-k-1}$ ចែកដាច់នឹង $2a_m$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}2A_k &= 2a_{m+k}+2(-1)^k a_{m-k}\\ &= a_{m+k+1}-a_{m+k-1}+(-1)^k[a_{m-k+1}-a_{m-k-1}]\\ &= a_{m+k+1}+(-1)^{k+1}a_{m-k-1}-[a_{m+k-1}—1)ka_{m-k+1}\\ &= a_{m+k+1}+(-1)^{k+1}a_{m-k-1}-[a_{m+k-1}+(-1)^{k-1}a_{m-k+1}]\\ &= A_{k+1}-A_{k-1}\\ &\Longrightarrow A_{k+1}=2A_k+A_{k-1}\end{aligned}$$

យើងទាញបាន ដោយ A_k, A_{k-1} ចែកដាច់នឹង $2a_m$ នោះ A_{k+1}ក៏ចែកដាច់នឹង $2a_m$ ដែរ ។

b) តាមសំនួរទីមួយ ដោយយក $j=m$ យើងទាញបាន $a_{2m}+(-1)^m a_0=a_{2m}$ (ព្រោះ $a_0=0$) ចែកដាច់នឹង $2a_m$ ។ ដូច្នេះ $a_{2m}=2\alpha_m a_m$ ចំពោះគ្រប់ m ដែល α_m ជាចំនួនគត់ (*) ។

ដោយ 2^k ចែកដាច់ n នោះ $n=p2^k$ ដែល p ជាចំនួនគត់ ។ តាម (*) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}a_n &= a_{p2^k}=2^1\,\alpha_{m_1}\,a_{p2^{k-1}}=2^2\,\alpha_{m_1}\alpha_{m_2}a_{p2^{k-2}}=\cdots\\ &= 2^k\alpha_{m_1}\alpha_{m_2}\ldots\alpha_{m_k}a_{p2^{k-k}}=2^k\alpha_{m_1}\alpha_{m_2}\ldots\alpha_{m_k}a_p\end{aligned}$$

ដែល $m_1=p2^{k-1}, m_2=p2^{k-2}, \ldots.$ ជាចំនួនគត់ ។ ដោយ $\alpha_{m_1}.\alpha_{m_2}\ldots.\alpha_{m_k}\,a_p$ ជាចំនួនគត់ នោះ a_n ជាពហុគុណនៃ 2^k ឬចែកដាច់នឹង 2^k ។

158. ▲ យើងកំណត់ ស្វ៊ីត $\{b_n\}$ មួយ ដោយ

$$\begin{aligned}&b_0=1, b_1=-1,\\ &b_n=6b_{n-1}+5b_{n-2}+2011b_{n-2}=6b_{n-1}+2016b_{n-2}\end{aligned}$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}&a_0\equiv b_0 \pmod{2011}\\ &a_1\equiv b_1 \pmod{2011}\\ &a_2=6a_1+5a_0\equiv 6b_1+5b_0 \pmod{2011}\end{aligned}$$

តែ $6b_1+5b_0\equiv 6b_1+5b_0+2011b_0=b_2 \pmod{2011}$ ដូច្នេះ $a_2\equiv b_2 \pmod{2011}$ ។ សន្មតថា ពិតរហូតដល់ n គឺ $a_n\equiv b_n \pmod{2011}$ និង $a_{n-1}\equiv b_{n-1} \pmod{2011}$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា

$$a_{n+1} \equiv b_{n+1} \pmod{2011}$$

យើងមាន

$$a_{n+1} = 6a_n + 5a_{n-1} \equiv 6b_n + 5b_{n-1} \pmod{2011}$$

តែ $6b_n + 5b_{n-1} \equiv 6b_n + 5b_{n-1} + 2011b_{n-1} = b_{n+1} \pmod{2011}$ ។ ដូច្នេះ $a_{n+1} \equiv b_{n+1} \pmod{2011}$ ។ ដូច្នេះ $a_n \equiv b_n \pmod{2011}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ដូច្នេះ បង្ហាញថា $a_{2012} - 2010$ ចែកដាច់នឹង 2011 គឺដូចគ្នានឹងបង្ហាញថា $b_{2012} - 2010$ ចែកដាច់នឹង 2011 ដែរ ។

សមីការ $x^2 - 6x - 2016 = 0$ មានឫស $x_1 = 48$ និង $x_2 = -42$ ។ ដូច្នេះ ស្វ៊ីត

$$b_n = 6b_{n-1} + 2016b_{n-2}$$

មានចម្លើយទូទៅ ដែលមានរាង $b_n = \alpha(48)^n + \beta(-42)^n$ ។ យើងមាន $b_0 = 1 = \alpha + \beta$ និង $b_1 = -1 = 48\alpha - 42\beta$ ។ ដូច្នេះ

$$\alpha = \frac{41}{90};\ \beta = \frac{49}{90}$$

និង

$$b_n = \frac{41}{90}(48)^n + \frac{49}{90}(-42)^n$$

ដូច្នេះ

$$b_{2012} = \frac{41}{90}(48)^{2012} + \frac{49}{90}(42)^{2012}$$

យើងមាន 2011 ជាចំនួនបឋម ។ តាមកូនទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ា ចំពោះចំនួនបឋម p និង ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a គេមាន

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

ដូច្នេះ $48^{2011} \equiv 48 \pmod{2011}$ និង $42^{2011} \equiv 42 \pmod{2011}$ ។ ដូច្នេះ

$$48^{2012} \equiv 48^2 = 2304 \equiv 293 \pmod{2011}$$
$$42^{2012} \equiv 42^2 = 1764 \pmod{2011}$$

ដូច្នេះ $41(48)^{2012} + 49(42)^{2012} \equiv 41(293) + 49(1764) = 98449 \equiv 1921 \pmod{2011}$ ។ ដូច្នេះ $90b_{2012} \equiv 1921 \pmod{2011}$ ។ យើងទាញបាន

$$90(b_{2012} - 2010) \equiv 1921 - 90(2010) = -178979 \equiv 0 \pmod{2011}$$

ដូច្នេះ $90(b_{2012}-2010)$ ចែកដាច់នឹង 2011 ។ ដោយ 90 បឋមនឹង 2011 ដូច្នេះត្រូវតែ $b_{2012}-2010$ ចែកដាច់នឹង 2011 ។ ដូច្នេះ $a_{2012}-2010$ ចែកដាច់នឹង 2011 ។

159. ▲ យើងមាន 23 ជាចំនួនបឋម វាចែកដាច់គ្រប់ចំនួនពហុគុណនៃ 23 ។ ក្នុងចំណោមលេខ 1 ដល់ 2000 មានលេខចែកដាច់នឹង 23 ចំនួន $\left\lfloor\frac{2000}{23}\right\rfloor = 86$ ។ ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនេះ មានបីគឺ $23^2 = 529; 2.23^2 = 1058; 3.23^2 = 1587$ ដែលចែកដាច់នឹង 23^2 ។ ដូច្នេះ $23^{86}.23.23.23 = 28^6 \mid 2000! \Rightarrow x = 89-6 = 83$ ។

160. ▲ ចំពោះ $n=1$ និង $n=2$ យើងមាន

$$x_1 + x_2 = 6$$
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6^2 - 2.1 = 34$$

សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ហើយចែកមិនដាច់នឹង 5 ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n &= (x_1+x_2)(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}) - x_1x_2(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}) \\ &= 6(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}) - 1.(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}) \\ &= 5(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}) + [(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2}+x_2^{n-2})] \quad (1) \end{aligned}$$

តាមវិចារដោយកំណើនតាម n យើងទាញបានថា ដោយសារ $x_1^{n-2}+x_2^{n-2}$ និង $x_1^{n-1}+x_2^{n-1}$ ជាចំនួនគត់ នោះ $x_1^n+x_2^n$ ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ពេលនេះយើងសន្មតថាមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល $x_1^n+x_2^n$ ចែកដាច់នឹង 5 ។ សន្មតថា ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ទាំងនោះ m ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាងគេដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^m+x_2^m$ ចែកដាច់នឹង 5 ។ សមភាព (1) ទៅជា

$$x_1^m + x_2^m = 5(x_1^{m-1}+x_2^{m-1}) + [(x_1^{m-1}+x_2^{m-1}) - (x_1^{m-2}+x_2^{m-2})]$$

ដោយ $x_1^m+x_2^m$ និង $5(x_1^{m-1}+x_2^{m-1})$ ចែកដាច់នឹង 5 ដូច្នេះ $[(x_1^{m-1}+x_2^{m-1}) - (x_1^{m-2}+x_2^{m-2})]$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 5 ដែរ ។

ក្នុងសមភាព (1) យើងជំនួស n ដោយ $m-1$ យើងទទួលបាន

$$x_1^{m-1}+x_2^{m-1} = 5(x_1^{m-2}+x_2^{m-2}) + [(x_1^{m-2}+x_2^{m-2}) - (x_1^{m-3}+x_2^{m-3})]$$
$$\Rightarrow (x_1^{m-3}+x_2^{m-3})$$
$$= 5(x_1^{m-2}+x_2^{m-2}) - [(x_1^{m-1}+x_2^{m-1}) - (x_1^{m-2}+x_2^{m-2})]$$

ដូច្នេះនាំឱ្យ $(x_1^{m-3}+x_2^{m-3})$ ចែកដាច់នឹង 5 ។ តែលក្ខខណ្ឌនេះផ្ទុយនឹងការសន្មត ដែលថា m ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាងគេ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^m+x_2^m$ ចែកដាច់នឹង 5 ។ ដូច្នេះយើងសន្និដ្ឋានបានថា គ្មានចំនួនគត់ធម្មជាតិណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^n+x_2^n$ ចែកដាច់នឹង 5 នោះទេ ។

សំណល់. ភាពសមមូល

161. ▲ i) យើងមាន

$$\binom{p-1}{n}=\frac{(p-1)!}{n!\,(p-1-n)!}=\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!}$$
$$(p-1)(p-2)\dots(p-n)\equiv(-1)(-2)\dots(-n)=(-1)^n n!\,(\mathrm{mod}\,p)$$
$$\Rightarrow\binom{p-1}{n}\equiv(-1)^n(\mathrm{mod}\,p)$$

ii) យើងមាន $(p+1)p(p-1)\dots(p-n+2)\equiv(1)(0)(-1)\dots(-n+2)=0\ (\mathrm{mod}\,p)$ ។ សំណើពិត ។

162. ▲យើងមាន $240=2^4(3)(5)$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ**ហ្វែម៉ា** យើងមាន $p^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$ និង $p^4\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$ ។

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានសេសសុទ្ធតែបឋមនឹង 2^4 ។ យើងមាន $\phi(2^4)=2^4-2^3=8$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ**អយល័រ** យើងទាញបាន $p^{\phi(2^4)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2^4)\ \Rightarrow p^8\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 16)$ ។ ដូច្នេះ $p^8\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,m)$ ចំពោះ $m=3,5$ និង 16 ។ ដោយ 3,5 និង 16 បឋមនឹងគ្នាពីរៗ នោះ នាំអោយ $p^8\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3\times5\times16)\ \Leftrightarrow\ p^8\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 240)$ ។

ទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ា

តាង p ជាចំនួនបឋមនិងសន្មតថា p ចែក a មិនដាច់ នោះ$a^{p-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$ ។

163. ▲តាមវិធីចែកបែបអឺគ្លីដ

$$1059=q_1d+r$$

$$1417 = q_2 d + r$$
$$2312 = q_3 d + r$$

ដែល q_1, q_2, q_3 ជាចំនួនគត់ ។

យើងទាញបាន

$$2(179) = 358 = 1417 - 1059 = d(q_2 - q_1)$$
$$7(179) = 1253 = 2312 - 1059 = d(q_3 - q_1)$$
$$5(179) = 895 = 2312 - 1417 = d(q_3 - q_2)$$

ដូច្នេះ មានន័យថា $d|\ 2(179); d|7(179)$ និង $d|5(179)$ ។ ដោយ $d > 1$ ដូច្នេះ $d = 179$ ។ ដោយ $1059 = 5(179) + 164$ នោះ $r = 164$ ។ ដូច្នេះ $d - r = 179 - 164 = 15$ ។

164. ▲ យើងមាន

$$999 \equiv -1 \text{ (mod 1000)},$$
$$9999 \equiv -1 \text{ (mod 1000)}, \dots,$$
$$\underbrace{99\dots9}_{\text{មានលេខ 9 ចំនួន999 ដង}} \equiv -1 \text{ (mod 1000)}$$

គុណសមីការសមមូលទាំង $999 - 3 + 1 = 997$ នេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$999 \times 9999 \times \dots \times 99\dots9 \equiv (-1)^{997} = -1 (\text{mod } 1000)$$
$$\Rightarrow 9 \times 99 \times 999 \times \dots \times \underbrace{99\dots9}_{\text{មានលេខ 9 ចំនួន999 ដង}} \equiv 9 \times 99 \times (-1) = -891$$
$$\equiv 1000 - 891 = 109 \text{ (mod 1000)}$$

ដូច្នេះសំណល់ដែលចង់បានស្មើ 109 ។

165. ▲ តាងតួលេខដែលយកមកបង្កើតចំនួនទាំង16 ដោយ x, y, z ។ ជាលេខពីលេខ 1 ដល់លេខ 9 ។ ចំនួនទាំង 16 ដែលបង្កើតឡើងដោយ x, y, z គឺ $\overline{xyz}$ ។ ចំនួនទាំង 16 នោះត្រូវតែមានរាង $16m_1, 16m_2 + 1, \dots, 16m_{16} + 15$ ដើម្បីឱ្យវាមានសំណល់ផ្សេងគ្នាពេលចែកនឹង 16 ។ យើងឃើញថា x, y, z មិនអាចសេសទាំងអស់ឬគូទាំងអស់បានទេ ព្រោះបើមិនអញ្ចឹងទេ យើងមិនអាចរកបានសំណល់ខុសគ្នាគ្រប់16 បានទេ(ព្រោះបើ x, y, z គូទាំងអស់ ចំនួនទាំងនេះត្រូវតែជាចំនួនគូ ដូច្នេះវាមានរាង $16m_1, 16m_2 + 2, \dots, 16m_{16} + 14$ អាចមានសំណល់ខុសគ្នាច្រើនបំផុតចំនួន 8 ។ បើសេសទាំងអស់ ចំនួនទាំងនេះត្រូវមាន រាង $16m_1 + 1, 16m_2 + 3, \dots, 16m_{16} + 15$ អាចមានសំណល់

ខុសគ្នាច្រើនបំផុតចំនួន8 ។) ។ ដូច្នេះក្នុងចំណោម x, y, z ត្រូវតែមានយ៉ាងហោចណាស់លេខគូមួយនិងយ៉ាងហោចលេខសេសមួយ ។ ជាដំបូងយើងសន្មតថាមានលេខសេសមួយនិងលេខគូពីរ ។ ដូច្នេះសំណល់ជាចំនួនសេសទាំង 8 (សំណល់ដែលស្មើ $1, 3, \ldots, 15$)ត្រូវតែបានមកពីលេខសេស ដែលកើតមកពីការដាក់តួលេខសេសមួយនេះនៅខាងចុង ។ តាងបណ្តាលេខបែបនេះដោយ $\overline{xyz}$ ដែល z ជាតួលេខសេស ។ យើងមាន $\overline{xyz} = \overline{xy}.10 + z$ ឱ្យសំណល់សេសចំនួន 8 ផ្សេងគ្នាពេលពេលចែកនឹង 16 ដូច្នេះ $\overline{xy}.10$ ត្រូវឱ្យសំណល់គូខុសៗគ្នាចំនួនយ៉ាងហោចណាស់ក៏ 8 ដែរ ពេលចែកនឹង16 ព្រោះ z ឱ្យសំណល់សេសរួចហើយ ។ យើងមាន 9 របៀបក្នុងការជ្រើសរើសលេខពីរខាងដើមមកផ្គុំជា $\overline{xy}$ (ព្រោះលេខខ្ទង់ទីមួយមានបីករណី គឺ x, y, z ហើយខ្ទង់ទីពីរបានបីករណីដែរគឺ x, y, z ។ លេខទាំងនោះមានដូចជា $\overline{xxz}, \overline{xyz}, \overline{zxz}$, ...) ។ ចំនួនទាំង9នោះត្រូវតែមានរាង $16n_1, 16n_2 + 2, \ldots, 16n_8 + 14$ ដើម្បីឱ្យវាមានសំណល់គូផ្សេងគ្នាយ៉ាងហោចណាស់ចំនួន 8 ពេលចែកនឹង 16 ។ ដូច្នេះបន្ទាប់ពីចែកនឹង 2 រួចហើយ ពួកវាមានរាង $8n_1, 8n_2 + 1, \ldots, 8n_8 + 7$ ។ មានន័យថា ក្នុងចំណោមចំនួនគូ9នោះ ត្រូវមាន4 ដែលឱ្យសំណល់សេសពេលចែកនឹង8 (សំណល់របស់ $8n_2 + 1, 8n_4 + 3, \ldots, 8n_8 + 7$) ។ មិនអាចព្រោះ $\overline{xy}$ គូ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាករណីមានលេខសេសពីរនិងលេខគូមួយ ។

166. ▲ តាង A ជាចំនួនគត់ ដែលមានលេខ ៧ ចំនួន ១០០១ ខ្ទង់ ។ យើងមាន $777\,777 = 777 \times 1001$ និង $996 = 6 \times 166$ ។ ដូច្នេះ

$$\underbrace{777\ldots7}_{996}00000$$

ពេលចែកនឹង 1001 គេទទួលបានផលចែក ស្មើនឹង

$$\underbrace{777\,000\,777\,000\ldots777\,000}_{777\,000 \text{ ចំនួន } 166 \text{ ដង}}00$$

ជាងនេះទៅទៀត $77\,777$ ឱ្យផលចែក 77 និង សំណល់ 700 ពេលចែកនឹង 1001 ។ យើងមាន

$$A = \underbrace{777\ldots7}_{996}00000 + 77\,777$$

ដូច្នេះ ពេលចែក A នឹង 1001 គេទទួលបានផលចែក ស្មើនឹង

$$\underbrace{777\,000\,777\,000\ldots 777\,000}_{777\,000\text{ ចំនួន }166\text{ ដង}}\,77$$

និង សំណល់ស្មើនឹង 700 ។

167. ▲ តួលេខក្នុងខ្ទង់នីមួយៗរបស់ N អាចជា 0,~~1~~,2,~~3~~,4,~~5~~,6,~~7~~,8,~~9~~ ។បើ N ចែកដាច់នឹង 36 នោះ N ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 3 ។ N ចែកដាច់នឹង ៣ បើផលបូកលេខក្នុងខ្ទង់នីមួយៗរបស់ N ចែកដាច់នឹង ៣ ។

បើ N ធំបំផុត ដោយប្រើគ្រប់តួលេខគូទាំងអស់គឺ 0,2,4,6,8 នោះ ផលបូកតួលេខក្នុងខ្ទង់នីមួយៗរបស់ N ស្មើនឹង $2+4+6+8=20$ ចែកមិនដាច់នឹង ៣ ។ ដូច្នេះ N មិនអាចប្រើគ្រប់លេខ 2,4,6,8 ទាំងអស់បានទេ ។

យើងចង់បាន N ធំបំផុត ។ ពេលនេះយើងសាកល្បងចំនួនធំបំផុត ដែលផ្សំពីលេខ 0,4,6,8 គឺ $N=8640$ ។ យើងឃើញថា N នេះចែកដាច់នឹង ៣៦ ត្រូវតាមសម្មតិកម្ម ។ ដូច្នេះ ៨៦៤០ ជាចំនួនគត់ធំបំផុត ដែលប្រើតែលេខគូ ហើយលេខខ្ទង់នីមួយៗសុទ្ធតែខុសគ្នា និងចែកដាច់នឹង ៣៦ ។ យើងមាន ៨៦៤០ ចែកនឹង ១០០០ សល់សំណល់ ៦៤០ ។

168. ▲ តាង N ជាចំនួនគត់ដែលមានលេខ ៤ ខ្ទង់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ។ តាមសម្មតិកម្ម

$$N=131k+112=132l+98$$

ដែល k និង l ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ដោយ N មានលេខ ៤ ខ្ទង់ នោះ

$$l=\frac{N-98}{132}<\frac{10\,000-98}{132}<75{,}02$$
$$\Rightarrow l\le 75$$

យើងមាន

$$131k+112=132l+98$$
$$\Rightarrow 131(k-l)=l-14$$

បើ $k=l$ នោះ $k=l=14$ នោះ $N=131(14)+112=1946=132(14)+98$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $k \neq l$ នោះ $k-l \neq 0$ ដូច្នេះ $l-14$ មានតម្លៃដាច់ខាតធំជាង 130 ។ តែករណី នេះ មិនអាច ព្រោះ $0 < l \leq 75$ ។ ដូច្នេះ ចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ មានតែ

$$N = 1946$$

169. ▲ យើងមាន $10^6 - 1 = 999\,999 = 7(142\,857)$ ចែកដាច់នឹង 7 ។ ដូច្នេះ បើ $N = 6q + r$ ដែល $0 \leq r < 6$ នោះ 10^N មានសំណល់ដូចគ្នានឹង 10^r ដែរ ពេល ចែកនឹង 7 ព្រោះថា

$$10^N - 10^r = 10^{6q+r} - 10^r = 10^r(10^{6q} - 1)$$

និង ដោយ $10^{6q} - 1 = (10^6)^q - 1$ ចែកដាច់នឹង $10^6 - 1$ ហើយ $10^6 - 1$ ចែក ដាច់នឹង 7 ។ ដូច្នេះ $10^N - 10^r$ ចែកដាច់នឹង 7 ។ មានន័យថា 10^N និង 10^r មាន សំណល់ដូចគ្នាពេលចែកនឹង 7 ។

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&10 \equiv 4 \pmod 6;\\
&10^2 \equiv 4 \times 10 \equiv 4 \pmod 6;\\
&10^3 \equiv 4 \times 10 \equiv 4 \pmod 6; \ldots;\\
&10^{10} \equiv 4 \times 10 \equiv 4 \pmod 6
\end{aligned}$$

ដោយ 10^N មានសំណល់ដូចគ្នានឹង 10^r ដែរ ពេលចែកនឹង 7 ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}
&10^{10} \equiv 10^4 \pmod 7;\\
&10^{10^2} \equiv 10^4 \pmod 7;\\
&10^{10^3} \equiv 10^4 \pmod 7;\\
&\ldots\\
&10^{10^{10}} \equiv 10^4 \pmod 7
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow 10^{10} + 10^{10^2} + \cdots + 10^{10^{10}} \equiv 10^4 + 10^4 + 10^4 + \cdots + 10^4 = 10^5 \pmod 7$$

យើងមាន $10^5 = 7(14285) + 5$ ។ ដូច្នេះ $10^{10} + 10^{10^2} + \cdots + 10^{10^{10}} \equiv 5 \pmod 7$ ។

ដូច្នេះ សំណល់ស្មើ 5 ។

170. ▲ ចំនួនគត់ n មួយ អាចមានរាង $5k, 5k \pm 1, 5k \pm 2$ ។ បើ $n = 5k$ នោះ n^{100} ចែកដាច់នឹង 125 ។

តាង $n = 5k + r$ ដែល $r = \{0; \pm1; \pm2\}$ ។ យើងមាន

$$n^{100} = (5k + r)^{100}$$
$$= (5k)^{100} + \binom{100}{1}(5k)^{99}r + \cdots + \binom{100}{97}(5k)^3 r^{97}$$
$$+ \binom{100}{98}(5k)^2 r^{98} + \binom{100}{97}(5k) r^{99} + r^{100}$$

យើងមាន

$(5k)^{100}, \binom{100}{1}(5k)^{99}r, .., \binom{100}{97}(5k)^3 r^{97}, \binom{100}{98}(5k)^2 r^{98}, \binom{100}{97}(5k) r^{99}$ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង $5^3 = 125$ ។

ដូច្នេះ n^{100} ពេលចែកនឹង 125 សល់សំណល់ r^{100} ។

បើ $r = 0$ នោះ n^{100} ចែកដាច់នឹង 125 ។

បើ $r = \pm1$ នោះ ដូច្នេះ n^{100} ពេលចែកនឹង 125 សល់សំណល់ 1 ។

បើ $r = \pm2$ នោះ ដូច្នេះ n^{100} ពេលចែកនឹង 125 សល់សំណល់ 2^{100} ។ យើងមាន

$$2^{100} = 4^{50} = (5 - 1)^{50}$$
$$= 5^{50} + \binom{50}{1}(5)^{49}(-1) + \cdots + \binom{50}{47}5^3(-1)^{47}$$
$$+ \binom{50}{48}5^2(-1)^{48} + \binom{50}{49}5(-1)^{49} + (-1)^{50}$$

យើងមាន $5^{50}, \binom{50}{1}(5)^{49}(-1), \dots, \binom{50}{47}5^3(-1)^{47}, \binom{50}{48}5^2(-1)^{48}, \binom{50}{49}5(-1)^{49}$ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 5^3 ។ ដូច្នេះ 2^{100} ចែកនឹង 125 សល់សំណល់ 1 ។ យើងទាញបាន ករណី $r = \pm2$ គេមាន n^{100} ចែកនឹង 125 សល់សំណល់ 1 ។

ដូច្នេះ បើ n ចែកដាច់នឹង 5 នោះ n^{100} ចែកដាច់នឹង 125 តែបើ n បឋមនឹង 5 នោះ n^{100} ចែកនឹង 125 សល់សំណល់ 1 ។

ចំនួនការេ

171. ▲ចំនួនគត់ទាំងអស់អាចមានរាងមួយ ក្នុងចំណោម $2m$ និង $2m + 1$ ។ ដោយលើកវាជាការេ យើងទាញបាន

$$(2m)^2 = 4(m^2) = 4k; k = m^2$$

$$(2m+1)^2 = 4(m^2+m)+1 = 4k+1; k = m^2+m$$

172. ▲ការេនៃចំនួនគត់មួយមានរាង $4k$ ឬ $4k+1$ ។ គ្រប់ចំនួនទាំងអស់នៅក្នុងស្វីត នេះ មានរាង $4k-1$

$$\begin{aligned}11 &= 4\times 3-1\\ 111 &= 4\times 28-1\\ 1111 &= 4\times 278-1\\ &\dots\end{aligned}$$

ដូច្នេះ វាមិនអាចជា ជាការេនៃចំនួនគត់មួយទេ ។

173. ▲បើ $k^2 = 2^8+2^{11}+2^n = 48^2+2^n$ នោះ

$$\begin{aligned}&k^2-48^2 = (k-48)(k+48) = 2^n\\ &\Rightarrow k-48 = 2^s, k+48 = 2^t, s+t = n\end{aligned}$$

តែ $2^t-2^s = (k+48)-(k-48) = 96 = 3(2^5) \Leftrightarrow 2^s(2^{t-s}-1) = 2^5 3$

ដោយ $2^{t-s}-1$ ជាចំនួនសេស នោះ $2^s = 2^5, 2^{t-s}-1 = 3 \Rightarrow s = 5, t = 7$ ។

ដូច្នេះ $n = t+s = 12$ ។

174. ▲ តាង

$$A = \underbrace{111\dots11}_{1997}\underbrace{22\dots22}_{1998}5$$

យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}A &= (10^{1996}+10^{1995}+\dots+10+1)\times 10^{1999}\\ &\qquad + 2(10^{1997}+10^{1996}+\dots+10+1)\times 10+5\\ &= 10^{1999}\frac{10^{19997}-1}{9}+20\frac{10^{1998}-1}{9}+5\\ &= \frac{(10^{1998})^2+10.10^{1998}+25}{9}\\ &= \left(\frac{10^{1998}+5}{3}\right)^2\end{aligned}$$

ដោយ A ជាចំនួនគត់ ដូច្នេះ $\frac{10^{1998}+5}{3}$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ដែរ ។ ដូច្នេះ A ជាចំនួនការេ ។

175. ▲ 4,41 នៅក្នុងគោល r កំណត់ដោយ

$$4{,}41 = 4+\frac{4}{r}+\frac{1}{r^2} = \left(2+\frac{1}{r}\right)^2$$

176. ▲ គេមាន $A=\underbrace{44\dots4}_{2n};B=\underbrace{88\dots8}_{n}$ ។ ដូច្នេះ

$$A=4(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\cdots+1)=4.\frac{10^{2n}-1}{9}$$

$$B=8(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1)=8\frac{10^{n}-1}{9}$$

$\Rightarrow A+2B+4=4\frac{10^{2n}-1}{9}+16\frac{10^{n}-1}{9}+4$

$=\frac{4}{9}(10^{2n}-1+4.10^{n}-4+9)$

$=\frac{4}{9}(10^{2n}+4.10^{n}+4)$

$=\left[\frac{2}{3}(10^{n}+2)\right]^{2}$

ដោយ $A+2B+4$ ជាចំនួនគត់ នោះ $\frac{2}{3}(10^{n}+2)$ ជាចំនួនគត់ $\Rightarrow A+2B+4$ ជាចំនួនការេ ។

177. ▲ គេមាន $a^2=3x+4y,b^2=4x+3y$ ដែល a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ យើងមាន $a^2+b^2=7x+7y$ ។ ដូច្នេះ a^2+b^2 ចែកដាច់នឹង 7 ។ គេមាន $a=7k+m;$ ដែល $m=0;1;\dots;6$ និង $b=7p+n$ ដែល $n=0;1;\dots;6$ ហើយ k,p ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។ យើងមាន

$$a^2+b^2=49k^2+14km+m^2+49p^2+14p+n^2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)$$
$$\Rightarrow\ m^2+n^2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

បើ $m=0$ នោះ មានតែ $n=0$ ។ បើ $m=1;2;..;6$ នោះដោយជំនួសលេខចូល យើងមិនអាចរកបាន n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $m^2+n^2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)$ ទេ ។ ដូច្នេះ $a=7k;b=7p$ ។ យើងទាញបាន

$$3x+4y=49k^2;4x+3y=49p^2$$

$$\Rightarrow x+y=7(k^2+p^2)$$
$$\Rightarrow y=49k^2-21(k^2+p^2)$$
$$\Rightarrow x=49p^2-21(k^2+p^2)$$

ដូច្នេះ x,y សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 7 ។

178. ▲ របៀបទី១

តាង $x^2-x+2=y^2$ ដែល y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}&4x^2-4x+8=4y^2\\ &\Leftrightarrow 4x^2-4x+1+7=4y^2\\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2+7=(2y)^2\\ &\Leftrightarrow 7=(2y)^2-(2x-1)^2\\ &\Leftrightarrow 7=(2y-2x+1)(2y+2x-1)\quad (*)\end{aligned}$$

យើងមាន $(2y)^2>(2x-1)^2 \Rightarrow 2y>|2x-1|$ ។ ដូច្នេះ $2y-2x+1>0$ និង $2y+2x-1>0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ។ ដោយ 7 ជាចំនួនបឋម ដូច្នេះយើងអាចបំបែក 7 ជាកត្តាផលគុណបាន ជា

$$7\times 1; 1\times 7; (-7)\times(-1); (-1)\times(-7)$$

ដោយ កត្តានីមួយៗ ក្នុង(*) សុទ្ធតែវិជ្ជមាន ដូច្នេះ យើងមិនបាច់យក ករណី $(-7)\times(-1)$ និង $(-1)\times(-7)$មកគិតទេ ។ យើងទាញបាន

I)

$$\begin{cases}2y-2x+1=7\\ 2y+2x-1=1\end{cases} \Rightarrow y=2; x=-1$$

II) ឬ

$$\begin{cases}2y-2x+1=1\\ 2y+2x-1=7\end{cases} \Rightarrow y=2; x=2$$

▲ របៀបទី២

បើ $x<0$ នោះ

$$\begin{aligned}&x^2-x+2>x^2+2>x^2\\ &x^2-x+2<x^2-2x+2\\ &\Rightarrow x^2<x^2-x+2<(x-1)^2+1\\ &\Rightarrow x^2<x^2-x+2\le (x-1)^2\end{aligned}$$

តាង $u=-x>0 \Rightarrow u^2<u^2+u+2\le (u+1)^2$ ។ ដូច្នេះ u^2+u+2 ជាការេនៃចំនួនគត់បិតនៅចន្លោះការេនៃចំនួនគត់ពីរតគ្នា ដូច្នេះ មានតែ $u^2+u+2=(u+1)^2 \Rightarrow u=1 \Rightarrow x=-1$ ។ ដូច្នេះ $x^2-x+2=1+1+2=2^2$ ។

បើ $x=0$ នោះ $x^2-x+2=2$ មិនមែនជាចំនួនការេ ។

បើ $x>0$ នោះ

$$\begin{aligned}&x^2-x+2>x^2-2x+2=(x-1)^2+1>(x-1)^2\\&x^2-x+2<x^2+2<(x+1)^2\\&\Longrightarrow\ (x-1)^2<x^2-x+2<(x+1)^2\\&\Longrightarrow x^2=x^2-x+2\\&\Longrightarrow x=2\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $x=-1; x=2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ x^2-x+2 ជាចំនួនការេ ។

179. ▲ចំពោះ $x\neq 0$ យើងមាន

$$\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2<1+x+x^2+x^3+x^4<\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2$$

បើ x ជាចំនួនគូ នោះ $1+x+x^2+x^3+x^4$ ឋិតនៅចន្លោះចំនួនការេពីរតគ្នា ដូច្នេះវាមិនអាចជាចំនួនការេបានទេ ។ បើ x ជាចំនួនសេស នោះចន្លោះ $x^2+\frac{x}{2}$ និង $x^2+\frac{x}{2}+1$ មានតែចំនួនគត់ $x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ មួយគត់ ដូច្នេះត្រូវតែ

$$\begin{aligned}&\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=1+x+x^2+x^3+x^4\\&\Longrightarrow x^2-2x-3=0\\&\Longrightarrow x=1, x=-3\end{aligned}$$

ដូច្នេះ ចម្លើយគឺ $x=0; x=1; x=-3$ ។

180. ▲ តាង $n^2+3^n=a^2\Longrightarrow 3^n=(a-n)(a+n)$ ។ តាង

$$a-n=3^x;\ a+n=3^y;\ x<y\ \Longrightarrow\begin{cases}n=x+y\\2n=3^y-3^x\end{cases}$$

យើងដឹងថា

$$\begin{cases}3^y-3^x\geq 3^y-3^{y-1}=2.3^{y-1}\\n=x+y\ \leq y-1\ +y\ =2y-1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow 2.3^{y-1}\leq 2n\ \leq 2(2y-1)\\&\Longrightarrow\ 3^{y-1}\leq 2y-1\end{aligned}$$

តាង $p=y-1$ ដូច្នេះ $3^p\leq\ 2p+1$ ។ តែតាមវិសមភាពប៊ែនូលី* ចំពោះ $p\ >\ 1$ យើងមាន $3^p\ >\ 2p+1$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ $p=1$ យើងទាញបាន $y=2$ ។ ចំពោះ $x=1$ យើងទាញបាន $n=3$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ ចំពោះ $x=0$ យើងទាញបាន $n=2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ចំពោះ $p=0$ យើងទាញបាន $y=1$ និង $x=0$ យើងទាញបាន $n=1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ចម្លើយ $n = 1; n = 3$ ។

*វិសមភាពប៊ែនូលី

ចំពោះគ្រប់ $x \geq -1$ និង ចំនួនគត់ $n \geq 0$ គេមាន $(1+x)^n \geq 1 + nx$ ។

181. ▲សន្មតថា $\frac{a^2+b^2}{1+ab} = k$ ដែល k ជាចំនួនគត់ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា k ជាចំនួនការេ ។ យើងសន្មតថា មានគូ (a,b) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ k ជាចំនួនគត់ ជ្រើសរើសយក a,b ជាគូដែលតូចជាងគេ ។

យើងអាចសន្មតថា $a \leq b$ ព្រោះ កន្សោមខាងលើមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a,b ។

បើ $a = b$ នោះ $0 < k = \frac{2a^2}{1+a^2} < 2$

$\Rightarrow$ បើ k ជាចំនួនគត់ នោះ $k = 1 = 1^2$ ជាចំនួនការេ ។

បើ $a < b$ នោះ

$$a^2 + b^2 - k(ab+1) = 0$$
$$b^2 - kab + (a^2 - k) = 0$$

ជាសមីការដឺក្រេទីពីរ ធៀបនឹង b ដែលមានផលបូកឬសស្មើ ka និង ផលគុណឬសស្មើ $a^2 - k$ (តាមទ្រឹស្តីបទវៀត) ។

តាង $b_1, b_2 = b$ ជាឬសរបស់វា ដូច្នេះ $b_1 + b = ka$ និង $b_1 b = a^2 - k$ ។ ដោយ b, ka ជាចំនួនគត់ នោះ b_1 ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ ។ យើងមាន a, k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយនិង $b > a > 0$ ។ b_1 មិនអាចធំជាងសូន្យបានទេ ព្រោះ បើមិនអ៊ីចឹងទេ

$b_1 = \frac{a^2-k}{b} < \frac{b^2-k}{b} < b$

មានន័យថា មាន b_1 ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន(តូចជាងឬធំជាង a ក៏បាន) ដែល $b_1 < b \Rightarrow b$ មិនមែនជាចំនួនគត់ដែលតូចជាងគេ ដែលផ្ទុយពីសន្មតិ ។ ដូច្នេះ $b_1 \leq 0$ ។ តែ

$$a^2 + b_1^2 = k(ab_1 + 1) \geq 0 \,;$$
$$\Rightarrow ab_1 + 1 \geq 0 \,;$$
$$\Rightarrow b_1 \geq -\frac{1}{a}$$

ដូច្នេះ $b_1 \leq 0$ និង $b_1 \geq -\frac{1}{a}$ ដែល $a > 0$ ហើយ b_1 ជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះ $b_1 = 0$ នាំអោយ $k = a^2$ ជាចំនួនការេ ។

182. ▲ យើងមាន $d - a > c - b$ ដោយលើកវិសមភាពនេះជាការេ យើងទាញបាន

$$a^2 - 2ad + d^2 > c^2 - 2bc + b^2$$

បូក $4ad = 4bc$ ចូលអង្គទាំង២ យើងទាញបាន $(a+d)^2 > (b+c)^2$ ដូច្នេះ

$$a + d \geq b + c + 1$$

បើ $\sqrt{d} - \sqrt{a} < 1$ នោះ យើងទាញបាន

$$a + d < 1 + 2\sqrt{ad} = 1 + 2\sqrt{bc} \leq 1 + b + c \leq a + d$$

មិនពិត ។

ដូច្នេះ $\sqrt{d} - \sqrt{a} = 1$ ។ ដូច្នេះ

$$a + d = 1 + 2\sqrt{ad} = 1 + 2\sqrt{bc} \leq 1 + b + c \leq a + d$$

ដូច្នេះសមភាពអាចកើតមាន ពេល $b = c$ ដូច្នេះ $ad = b^2$ ។ តាង p ជាតួចែកបឋមរួមរបស់ a និង d ។ ដូច្នេះ p ត្រូវតែចែកដាច់ b ហើយ p ចែកដាច់ $a + d = 2b + 1$ មិនអាចទេ បើ $p \neq 1$ ។ ដូច្នេះ a បឋមនឹង d ។ ដោយផលគុណរបស់វាជាចំនួនការេ នោះ a ក៏ត្រូវតែជាចំនួនការេដែរ ។

183. ▲ ក) សន្មតថា $n(n+1)$ ជាចំនួនការេ ។ ដោយ n និង $n+1$បឋមនឹងគ្នា នោះវាត្រូវតែជាចំនួនការេទាំងពីរ ។ តែមិនដែលមានចំនួនការេពីរខុសគ្នាមួយឯកតាទេ លើកលែងតែ 1 និង 0 ព្រោះ $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) > 1$ ។

ខ) សន្មតថា $(n-1)n(n+1)$ ជាចំនួនការេ ។ ដោយ n និង $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ បឋមនឹងគ្នា នោះវាត្រូវតែជាចំនួនការេទាំងពីរ ។ តែដើម្បីឱ្យ $n^2 - 1$ ជាការេនៃចំនួនគត់ ទាល់តែ $n = \pm 1$ តែពេលនោះ ផលគុណ $(n-1)n(n+1)$ ស្មើសូន្យ ។

គ) $(n-1)n(n+1)(n+2) = (n^2 + n - 1)^2 - 1$ អាចជាចំនួនការេ មានតែ $n^2 + n - 1 = \pm 1 \Longrightarrow (n-1)n(n+1)(n+2) = 0$ ។

184. ▲ ពិនិត្យចំនួនគត់ $(n-1)n(n+1) = n(n^2 - 1)$ ។ ដោយ n និង $n^2 - 1$ បឋមរវាងគ្នា នោះ ដើម្បីឱ្យផលគុណចំនួនទាំងពីរជាចំនួនស្វ័យគុណទី $k \geq 2$ នោះវាត្រូវ

តែ n^2-1 ជាចំនួនស្វ័យគុណទី k និង n ជាចំនួនស្វ័យគុណទី k ដែរ ។ ដូច្នេះ $n^2-1=p_1^k$ និង $n=p_2^k>1$ ដែល p_1 បឋមនឹង p_2 ។ យើងទាញបាន

$$p_2^{2k}-1=p_1^k$$
$$\Rightarrow p_2^{2k}-p_1^k=1$$
$$\Rightarrow (p_2^2-p_1)\left[(p_2^2)^{k-1}+(p_2^2)^{k-2}p_1+\cdots+p_1^{k-1}\right]=1$$

ចំពោះ $k\geq 2$ និង ចំពោះ $p_1\geq 1$ និង $p_2\geq 2$ យើងមានកត្តាទីពីរនៃអង្គខាងឆ្វេងធំជាង 1 ដូច្នេះ អង្គខាងឆ្វេងនិងស្តាំមិនអាចស្មើគ្នាបានទេ ។

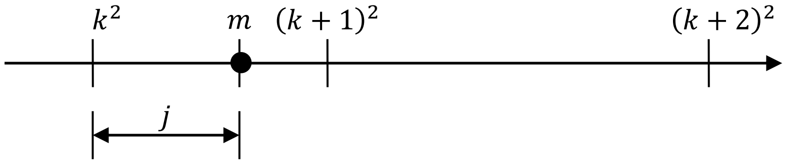
185. ▲ តាង T_n ជាចំនួនមិនការេទី n ។ គេមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ m ដែល $m^2<T_n<(m+1)^2$ ។ មានចំនួនការេចំនួន m ដែលតូចជាង T_n និង ចំនួនមិនការេចំនួន n មកត្រឹម T_n ដូច្នេះយើងឃើញថា $T_n=n+m$ ។ ដូច្នេះ

$$\Rightarrow m^2<n+m<(m+1)^2$$
$$\Rightarrow m^2-m<n<m^2+m+1$$

ដោយ $m^2-m;n;m^2+m+1$ សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ នោះវិសមភាពខាងលើទៅជា

$$m^2-m+\frac{1}{4}<n<m^2+m+\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \left(m-\frac{1}{2}\right)^2<n<\left(m+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow m<\sqrt{n}+\frac{1}{2}<m+1$$
$$\Rightarrow m=\left\lfloor\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right\rfloor$$
$$\Rightarrow T_n=n+\left\lfloor\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

186. ▲ តាង $m=k^2+j, 0\leq j\leq 2k$ មានន័យថា m ជាចំនួនមិនការេ ឃ្លាតពីចំនួនការេ k^2 ចំនួន j ។ បើ $j=0$ មានន័យថា m ជាចំនួនការេ ។



យើងចែក សំណុំនៃ m ជាសំណុំរងពីរ ដែលក្នុងនោះ

$$A = \{m = k^2 + j | 0 \le j \le k\}$$

ជាសំណុំនៃ m ដែលធំជាងចំនួនការេចំនួន j ដែល $0 \le j \le k$ ។

$$B = \{m = k^2 + j | k < j \le 2k\}$$

ជាសំណុំនៃ m ដែលធំជាងចំនួនការេចំនួន j ដែល $k < j \le 2k$ ។

យើងសង្កេតឃើញថា ទាំងករណី $m \in A$ និង $m \in B$ យើងមាន

$$k^2 \le m < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

សន្មតថា $m \in B$ ។ ដោយ $\lfloor \sqrt{m} \rfloor = k$ នោះ

$$k < j \le 2k$$
$$f(m) = k^2 + j + k = (k+1)^2 + j - k - 1$$

ដែល $0 \le j - k - 1 \le k - 1 < k < k + 1$ ។ ដូច្នេះ $f(m) \in A$ ។

ដូច្នេះ យើងចាប់ផ្តើមពីករណី $m \in A$ តែមួយក៏បាន ។ ករណីនេះ យើងមាន

$$0 \le j \le k;$$
$$k^2 < m + k = k^2 + k + j \le k^2 + k + k < k^2 + 2k + 1$$
$$\Longrightarrow k^2 < m + k < (k+1)^2$$
$$\Longrightarrow k < \sqrt{m+k} < k + 1$$
$$\Longrightarrow \lfloor \sqrt{m+k} \rfloor = k$$

ដូច្នេះ

$$f(m) = m + \lfloor \sqrt{m} \rfloor = m + k$$
$$f(f(m)) = f(m+k) = m + 2k = (k+1)^2 + j - 1$$

មានន័យថា $f(f(m)) \in A$ ព្រោះ $0 \le j - 1 < j \le k < k + 1$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា m ឃ្លាតពីចំនួនការេ k^2 ចំនួន j (ព្រោះ $m = k^2 + j$) បន្ទាប់មក $f(f(m))$ ឃ្លាតពីចំនួនការេ $(k+1)^2$ ចំនួន $(j-1)$ ។ ដូច្នេះ ជំហានបន្តបន្ទាប់មកទៀត តម្លៃដែលលើសនោះនឹងថយចុះកាន់តែតូចទៅៗ រហូតដល់ពេលមួយតម្លៃនេះស្មើសូន្យ ។ នៅពេលនោះ យើងនឹងទាញបានចំនួនការេ ។

187. ▲ តាង $(a, b, c) \neq (0,0,0)$ ជាចម្លើយតូចជាងគេបង្អស់របស់សមីការ

$$a^4 + (a+b)^4 + b^4 = c^2$$

បើ a និង b សុទ្ធតែគូ នោះ 2^4 ចែកដាច់អង្គខាងឆ្វេង ដូច្នេះ វាចែកដាច់ c^2 ដូច្នេះ c ជាពហុគុណនៃ 4 ។ ដូច្នេះ $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{4}\right)$ ជាចំនួនគត់ ហើយក៏ជាចម្លើយរបស់សមីការដែរ ។ ករណីនេះផ្ទុយពី ការសន្មត ។ ដូច្នេះ a ឬ b ជាចំនួនសេស ។

ឧបមាថា a គូ ហើយ b សេស នោះ

$$a^4+(a+b)^4+b^4 \equiv 0+1+1 \equiv 2 \pmod 4$$

មិនអាចជាចំនួនការេបានទេ ព្រោះចំនួនការេសមមូលនឹង 0 ឬ 1 តាម 4 ។ ដូច្នេះ a និង b ត្រូវតែសេសទាំងពីរ ។ ករណីនេះ

$$a^4+(a+b)^4+b^4 \equiv 1+0+1 \equiv 2 \pmod 4$$

មិនអាចជាចំនួនការេបានទេ ។

ដូច្នេះ គូ (a,b) ដែល $a^4+(a+b)^4+b^4$ ជាចំនួនការេ មានតែ $(0,0)$ មួយប៉ុណ្ណោះ ។

188. ▲ចំនួនដែលជាធាតុរបស់សំណុំនោះ មានរាង

$$5^a7^b11^c13^d23^f$$

ដូច្នេះ ធាតុនីមួយៗ មាន (a,b,c,d,f) មួយបែបម្នាក់ ។ បើគិតពីលក្ខណៈគូសេស នៃ a,b,c,d,f យើងមានបន្សំ a,b,c,d,f ចំនួន $2^5=32$ បែប ។ ឧទាហរណ៍ (គូ,សេស, សេស,គូ,សេស) ជាករណីមួយក្នុងចំណោមករណីទាំង 32 នោះ ។ ដោយយើងមានចំនួនគត់ចំនួន 33 នោះត្រូវតែមានចំនួនគត់ពីរ ដែលមាន (a,b,c,d,f) តំរៀបតាមលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា ។ ដូច្នេះផលគុណនៃចំនួនពីរនេះជាចំនួនការេ ។

189. ▲ ចំនួននីមួយៗឋិតនៅក្នុងសំណុំ M មានរាង

$$2^a3^b5^c7^d11^f13^g17^h19^j23^k$$

បើគិតតាមលក្ខណៈគូសេស យើងមាន (a,b,c,d,f,g,h,j,k) ចំនួន $2^9=512$ បែប ។ ដូច្នេះបើយើងចាប់យក 513 ធាតុ នោះ យើងនឹងទទួលបានធាតុពីរខុសគ្នាដែលមាន (a,b,c,d,f,g,h,j,k) មានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា ដូច្នេះធាតុពីរនេះមានផលគុណជាចំនួនការេ ។

ដោយយើងមាន $1985>513$ នោះយើងអាចរកបានចំនួនខុសគ្នាមួយគូ a_1,b_1 ដែល $a_1b_1=c_1^2$ ។ យើងដកមួយគូនេះចេញ ។ ពីក្នុងចំណោម $1983>513$ នៅសល់ យើង

អាចរកបានចំនួនខុសគ្នាមួយគូ a_2, b_2 ដែល $a_2b_2 = c_2^2$ ។ យើងដកមួយគូនេះចេញ ។ ពីក្នុងចំណោម $1981 > 513$ នៅសល់ យើងអាចរកបានចំនួនខុសគ្នាមួយគូ a_3, b_3 ដែល $a_3b_3 = c_3^2$ ។ យើងបន្តដកយករហូតបាន n គូ ដែល $1985 - 2n \geq 513$ មានន័យថា $n = 736$ ។ ដូច្នេះ យើងអាចប្រមូលបាន 737គូចំនួនគត់ខុសគ្នាដែល $a_kb_k = c_k^2$ ។ បន្ទាប់មកទៀតបណ្តាចំនួនគត់ c_k ទាំង 737 មានតួចែកបឋមរបស់វាតូចជាងឬស្មើ 26 ហើយដោយ $737 > 513$ នោះ យើងអាចរកបានចំនួនគត់ c_k ពីរខុសគ្នា តាងដោយ c_iនិង $c_j, i \neq j$ ដែល $c_ic_j = a^2$ ។ ដូច្នេះ $a_ib_ia_jb_j = a^4$ ជាចំនួនស្វ័យគុណទី៤ ។ ដូច្នេះមានន័យថា យើងអាចរកបានចំនួនគត់បួនដែលមានផលគុណរបស់ជាចំនួនស្វ័យគុណទី៤ ។

ចំនួនដែលមានរាងណាមួយ

190. ▲ ចំនួនគូបចែកមិនដាច់នឹង 10 ត្រូវមានរាង $(10m + n)^3$ ។ តាងចំនួននេះដោយ $\overline{a_1 \dots a_n x_1 x_2 x_3}$ ។ ដោយលុបលេខបីខ្ទង់ខាងចុងចេញ វានៅតែជាចំនួនគូបដដែល នោះ $\overline{a_1 \dots a_n} = a^3$ ។ តាង $b = \overline{x_1x_2x_3}$ ។ ដូច្នេះ $(10m + n)^3 = 1000a^3 + b$ ដែល $1 \leq n \leq 9$ និង $b \leq 999$ ។ សមភាពនេះ សមមូលនឹង

$$(10m + n)^3 - (10a)^3 = b < 1000$$
$$\Leftrightarrow \ (10m + n - 10a)[(10m + n)^2 + (10m + n).10a + 100a^2] < 1000 \ (*)$$

ដោយ $(10m + n)^2 + (10m + n).10a + 100a^2 > 100$

$$\Rightarrow 10m + n - 10a < 10 \quad (**)$$

បើ $m > a$ នោះ $m \geq a + 1 \Rightarrow 10m - 10a \geq 10 \Rightarrow (**)$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $m < a$ នោះ $m \leq a - 1 \Rightarrow 10m - 10a \leq -10 \Rightarrow 10m - 10a + n \leq n - 10 < 0$ មិនពិត ព្រោះ $(10m + n)^3 - (10a)^3 = b > 0$ ។

ដូច្នេះ $m = a$ ។

ដូច្នេះ $(*) \Rightarrow$

$$n[(10m + n)^2 + (10m + n).10m + 100m^2] < 1000$$
$$\Leftrightarrow \ n(300m^2 + 30mn + n^2) < 1000$$

បើ $m \geq 2$ នោះ $n(300m^2 + 30mn + n^2) > 1000$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ដូច្នេះ $m = 1$ និង $n(300 + 30n + n^2) < 1000 \Rightarrow n \leq 2$ ។ ចំពោះ $n = 2$ យើង ទាញបាន $12^3 = 1728$ ។ ចំពោះ $n = 1$ យើងទាញបាន $11^3 = 1331$ ។

ដូច្នេះចំនួនដែលចង់រកគឺ $\{1331; 1728\}$ ។

191. ▲ សន្មតថា មានចំនួនគត់ m និង n ដែល $m^3 = 3n^2 + 3n + 7$ ។ដូច្នេះ $m^3 = 3n^2 + 3n + 7 \equiv 1 \pmod 3$ នាំឱ្យ $m = 3k + 1$ ចំពោះចំនួនគត់ $k \in \mathbb{Z}$ ។ ជំនួសចូលសមីការដើម យើងទាញបាន

$$(3k + 1)^3 = 3n^2 + 3n + 7 \Leftrightarrow 3k(3k^2 + 3k + 1) = n^2 + n + 2$$

ដូច្នេះ $n^2 + n + 2$ ចែកដាច់នឹង 3 ។ តែថា

- បើ $n = 3p$ នោះ $n^2 + n + 2 = 9p^2 + 3p + 2$ ចែកមិនដាច់នឹង ៣
- បើ $n = 3p + 1$ នោះ $n^2 + n + 2 = 9p^2 + 9p + 3p + 4$ ចែកមិនដាច់នឹង ៣
- បើ $n = 3p + 2$ នោះ $n^2 + n + 2 = 9p^2 + 15p + 8$ ចែកមិនដាច់នឹង ៣

ដូច្នេះ $n^2 + n + 2$ មិនអាចចែកដាច់នឹង ៣ បានទេ ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានឫសគត់ទេ ។

192. ▲ បើ n ជាចំនួនសេស នោះយើងយក $a = 2, b = n - 2$ ។

បើ n គូ នោះ n អាចជា $4k$ ឬ $4k + 2$ ។

បើ $n = 4k$ នោះ យើងយក $a = 2k + 1; b = 2k - 1$ ។ ចំនួនពីរនេះបឋមរវាងគ្នា ព្រោះបើ $d = PGCD(2k + 1, 2k - 1)$ នោះ $d|\big(2k + 1 - (2k - 1)\big) = 2$ ដោយ d សេស នោះ $d = 1$ ។

បើ $n = 4k + 2, k > 1$ នោះ យើងយក $a = 2k + 3, b = 2k - 1$ ។

193. ▲ យើងមាន

$$2010 = 10(a_3.100^1 + a_1) + a_2.100^1 + a_0 = 10x + y$$

ដែល $x = a_3.100 + a_1$ និង $y = a_2.100 + a_0$ ។ យើងដឹងថា ចំពោះចំនួនគត់ x មួយ គេអាចសរសេរ x ជារាង $x = pq + r$, ដែល $0 \leq r < q$, បានតែមួយបែបគត់ ។ ដូច្នេះចំពោះចំនួនគត់ x, y មួយ គេមាន a_0, a_1, a_2, a_3 តែមួយបែបគត់ ។

យើងមាន $2010 = 10x + y \geq 10x \Rightarrow x \leq 201$ ។ យក $x = 0,1, \dots ,201$ យើងទាញបាន $y = 2010, 2000, \dots , 0$ ។ ដូច្នេះសមីការនេះ មានឫស (x, y) ចំនួន 202 ។ ដោយ x, y មួយត្រូវនឹង a_0, a_1, a_2, a_3 តែមួយរបៀប ដូច្នេះ $N = 202$ ។

194. ▲ យើងមាន $10^j - 10^i = 10^i(10^{j-i} - 1)$ និង 1001 បឋមនឹង 10^i ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរក i និង j ដែល $10^{j-i} - 1$ ចែកដាច់នឹង 1001 ។ យើងមាន $10^3 \equiv -1 \pmod{1001}$ ដូចនេះ $10^6 \equiv 1 \pmod{1001}$ ។ យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយការជំនួសលេខម្តងមួយៗឃើញថា 6 ជាចំនួនតូចជាងគេដែល $10^6 \equiv 1 \pmod{1001}$ ។ ដូច្នេះ $10^{j-i} \equiv 1 \pmod{1001}$ ទាល់តែ $j - i = 6n$ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ណាមួយ ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរាប់ចំនួនចម្លើយជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន របស់សមីការ

$$6n = j - i$$

ដែល $j \leq 99, i \geq 0$ ហើយ $n > 0$ ។ ដូច្នេះ $n \leq 16$ ។

ចំពោះ $n = 1$ សមីការទៅជា $j - i = 6$ ដូច្នេះ

$(j, i) \in \{(6,0); (7,1); (8,2); \dots ; (99,93)\}$ មាន 94 ចម្លើយ ។

ចំពោះ $n = 2$ សមីការទៅជា $j - i = 12$ ដូច្នេះ

$(j, i) \in \{(12,0); (13,1); (14,2); \dots ; (99,87)\}$ មាន 88 ចម្លើយ ។

......

ចំពោះ $n = 16$ សមីការទៅជា $j - i = 96$ ដូច្នេះ

$(j, i) \in \{(96,0); (97,1); (98,2); (99,3)\}$ មាន 4 ចម្លើយ ។

ដូច្នេះជាសរុប មាន $94 + 88 + 82 + \cdots + 4 = 784$ ចម្លើយ ។

195. ▲ ❶ របៀបទី១

តួនៃស៊ីតនេះអាចសរសេរជា

$1_{10}, 3_{10}, 4_{10}, 9_{10}, 10_{10}, 12_{10}, 13_{10}, \ldots$ គោល១០

(១)

$1_3, 10_3, 11_3, 100_3, 101_3, 110_3, 111_3, \ldots$ គោល៣

(២)

$1_2, 10_2, 11_2, 100_2, 101_2, 110_2, 111_2, \ldots$ សំនៅក្នុងគោល២ (៣)

$1_{10}, 2_{10}, 3_{10}, 4_{10}, 5_{10}, 6_{10}, 7_{10}, \ldots$ គោល១០

(៤)

ទំនាក់ទំនង(១) ជាតួរបស់ស៊ីតសរសេរក្នុងគោល១០ ។ (២) ជាតួរបស់ស៊ីតសរសេរក្នុងគោល៣ ដូចជា $9_{10} = 1.3^2 + 0.3 + 0 = 100_3$ មានន័យថា 9 ក្នុងគោល១០ ស្មើនឹង 100 ក្នុងគោល៣ ។

ទំនាក់ទំនង(៣) ជា(២) ប៉ុន្តែចាត់ទុកថាសំនៅនេះជាគោល២ ។ (៤)ជាតំលៃរបស់(៣)ក្នុងគោល១០ ។ ជារួមមានន័យថា (១)=(២) និង (៣)=(៤) ។

ដូច្នេះតួទី១០០នៃស៊ីតនេះ ជាលេខ១០០ក្នុង(៤) ។ យើងទាញរក តំលៃត្រូវគ្នានៃ១០០នេះក្នុងទំនាក់ទំនងទី(៣) ។ យើងសរសេរ១០០ នៅក្នុងគោល២គឺ $100 = 1100100_2$ ហើយបំលែងវាទៅជាគោល៣ គឺ $1100100_3 = 3^6 + 3^5 + 3^2 = 981$ ។ ដូច្នេះតួទី១០០របស់ស៊ីតស្មើនឹង 981 ។

❷ របៀបទី២

បើយើងប្រើតែ៦តួដំបូងគឺ $3^0 = 1, 3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 9, 3^4 = 81$ និង $3^5 = 243$ យើងអាចបង្កើតបានស៊ីតនេះចំនួន

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \cdots + \binom{6}{6} = 2^6 - 1 = 63$$

តួតែប៉ុណ្ណោះ ។ យើងត្រូវការយ៉ាងតិច១០០តួ ។ ស្វ័យគុណនៃ៣ធំបន្ទាប់គឺ $3^6 = 729$ ។ បន្ទាប់ពីតួទាំង៦៣ខាងលើ តួធំបន្ទាប់ជាបន្សំនៃ729 នឹង 1,3,9,81 ដែលមានទាំងអស់

ចំនួន $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\cdots+\binom{5}{5}=32$ ដូច្នេះយើងមានទាំងអស់ចំនួន$63+32=95$ តួ ។ ដើម្បីរកតួទី១០០ យើងត្រូវបន្ថែម 243 ទៀត ដូច្នេះតួទី $96,97,\dots,100$ គឺ $729+243, 729+243+1, 729+243+3, 729+243+3+1, 729+243+9=981$ ។

196. ▲តាង $P(n)$ ជាសំណើដែលថា «បណ្ដាចំនួនគត់ $n,n+1,\dots,2n+7$ សុទ្ធតែជាលេខពិសេស» ។ យើងមាន $P(33)$ ពិត ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $P(n+1)$ ក៏ពិតដែរ មានន័យថា «បណ្ដាចំនួនគត់ $n+1,n+2,\dots,2n+9$ សុទ្ធតែជាលេខពិសេស» ។ ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $2n+8$ និង $2n+9$ ជាលេខពិសេស ជាបន្ថែមទៀតបានហើយ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា បើ n ជាលេខពិសេស នោះ $2n+8$ និង $2n+9$ ក៏ជាលេខពិសេសដែរ ។ យើងមាន

$$\begin{cases} n=a_1+a_2+\cdots+a_k \\ \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_k}=1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+8=2a_1+2a_2+\cdots+2a_k+4+4 \\ \dfrac{1}{2a_1}+\dfrac{1}{2a_2}+\cdots+\dfrac{1}{2a_k}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=1 \end{cases}$$

ដូចគ្នាដែរ

$$\begin{cases} 2n+9=2a_1+2a_2+\cdots+2a_k+3+6 \\ \dfrac{1}{2a_1}+\dfrac{1}{2a_2}+\cdots+\dfrac{1}{2a_k}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=1 \end{cases}$$

ដូច្នេះ បើ n ជាលេខពិសេស នោះ $2n+8$ និង $2n+9$ ក៏ជាលេខពិសេសដែរ ។

197. ▲ ជាដំបូងយើងបង្ហាញថា $2abc-ab-bc-ca$ មិនអាចសរសេរជារាង $xbc+yca+zab$ បានទេ ។ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់នូវអំណះអំណាងនេះ ជាដំបូងយើងសន្មតថា អាចសរសេរបានសិន មានន័យថា

$$\begin{aligned} &2abc-ab-bc-ca=xbc+yca+zab \\ &\Rightarrow (x+1)bc=2abc-ab-ca-yca-zab \end{aligned}$$

ដោយ a, b និង c បឋមនឹងគ្នាពីរៗ នោះ a ត្រូវចែកដាច់ $x+1$ ។ $x+1$ មិនអាចស្មើសូន្យបានទេ ព្រោះ $x \geq 0$ ។ ដូច្នេះ $x \geq a-1$ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបានថា $y \geq b-1$ និង $z \geq c-1$ ។ តែបើដូច្នេះ នោះ

$$\begin{aligned} xbc + yca + zab &\geq (a-1)bc + (b-1)ac + (c-1)ab \\ &= 3abc - bc - ac - ab > 2abc - bc - ac - ab \end{aligned}$$

ផ្ទុយពីការសន្មត ។ ដូច្នេះ $2abc - ab - bc - ca$ មិនអាចសរសេរជារាង $xbc + yca + zab$ បានទេ ។

បន្ទាប់មកទៀត យើងបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ដែលធំជាង $2abc - ab - bc - ca$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $xbc + yca + zab$ បានទាំងអស់ ។

យើងនឹងបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ដែល ធំជាង $ab - a - b$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $xb + ya$ បានទាំងអស់ ។ ដោយ a បឋមនឹង b នោះគ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ពេលចែកនឹង a មានសំណល់មួយក្នុងចំណោម $\{0, b, 2b, \dots, (b-1)a\}$ ។ បើ $r > (a-1)b - a$ នោះ r ចែកនឹង a សល់ xb ដែល $0 \leq x \leq (a-1)$ ។ ដោយ $r > xb - a$ នោះ $r = xb + ya$ ដែល $y \geq 0$ ។ ដូច្នេះមានន័យថា គ្រប់ចំនួនគត់ធំជាង $ab - a - b$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $xb + ya$ បានទាំងអស់ ។

ដោយដឹងថា c និង ab បឋមនឹងគ្នា នោះគ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលធំជាង $abc - ab - c$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $tc + zab$ បានទាំងអស់ ដែល t និង z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ដូច្នេះ

$$abc - ab - c = tc + zab \ (*)$$

តាង $d = tc + zab$ ។ យើងមាន $ab - a - b + 1 + t > ab - a - b$ ដូច្នេះយើងអាចសរសេរជារាងខាងក្រោមបាន

$$ab - a - b + 1 + t = xb + ya$$

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន x និង y ខ្លះ ។ ដូច្នេះ

$$abc - ac - bc + c + tc = xbc + yac \ (**)$$

យើងទាញបាន (*) & (**)

$$xbc + yac + zab = (abc - ac - bc + c) + (tc + zab)$$
$$= abc - ac - bc + c + d$$

យើងមាន $d > abc - ab - c$ នោះ

$$abc - ac - bc + c + d > abc - ac - bc + c + abc - ab - c$$
$$= 2abc - ab - bc - ca$$

យើងបានបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនទាំងអស់ដែលមានរាង $abc - ac - bc + c + d > 2abc - ab - bc - ca$ សុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង $xbc + yca + zab$ បាន ។

198. ▲ តាង r ជាចំនួនសនិទាន ។ តាង $r = \frac{m}{n}$ ។ យើងយក

$$a = 2m - n, b = m + n, c = 2n - m, d = m + n$$
$$\Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3} = \frac{m}{n} = r$$

ជាចំនួនសនិទាន ។ ដោយ $a > 0 \Rightarrow \frac{m}{n} > \frac{1}{2}$ ។ ដោយ $c > 0 \Rightarrow \frac{m}{n} < 2$ ។ ដូច្នេះ $\frac{1}{2} < r < 2$ ។ មានន័យថា គ្រប់ r, $\frac{1}{2} < r < 2$ យើងមាន a, b, c, d ដែល

$$r = \frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}$$

ក្នុងករណីទូទៅ យើងសន្មតថា $r \geq 1$ ។ ដូច្នេះ គេមាន $n \geq 0$ ដែល

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3n} < r \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3n+3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} < r\left(\frac{2}{3}\right)^{3n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{16} < 2$$

ដូច្នេះ $r\left(\frac{2}{3}\right)^{3n}$ ជាចំនួនសនិទាននៅចន្លោះ $\frac{1}{2}$ និង 2 ។ តាមលទ្ធផលខាងលើ យើងទាញបាន

$$r\left(\frac{2}{3}\right)^{3n} = \frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}$$

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន a, b, c និង d ណាមួយ ។ យើងទាញបាន

$$r = \frac{(3^n a)^3 + (3^n b)^3}{(2^n c)^3 + (2^n d)^3}$$

យើងទាញបានថា សំណើពិត ។

199. ▲ តាងតួបូកទីមួយនៃតួ u_n ដោយ k_n និងតួបូកទីមួយៗ ដោយ s_i ដូចបង្ហាញខាងក្រោម ។ យើងសង្កេតឃើញថា

$u_1 = 1 = s_1$
$u_2 = (1 + 1.2) + (1 + 2.2) = s_2 + s_3$
$u_3 = (1 + 3.2) + (1 + 4.2) + (1 + 5.2) = s_4 + s_5 + s_6$
$u_4 = (1 + 6.2) + (1 + 7.2) + (1 + 8.2) + (1 + 9.2) = s_7 + s_8 + s_9 + s_{10}$

តួទីមួយក្នុងផលបូក $[u_2 = (\mathbf{1} + \mathbf{1.2}) + (1 + 2.2)]$ គឺ $k_2 = s_2 = 1 + 2$ គឺបានមកដោយបូកតួទីមួយនឹង 2 « មួយដង » ។

តួទីមួយក្នុងផលបូក $[u_3 = (\mathbf{1} + \mathbf{3.2}) + (1 + 4.2) + (1 + 5.2)]$ គឺ $k_3 = s_4 = 1 + 3.2$ គឺបានមកដោយបូក u_1 ទីមួយនឹង 2 ចំនួន « បីដង » ។ យើងឃើញថា « បីដង » នេះ ស្មើនឹង លេខរបស់សន្ទស្សន៍ s_3 ឬស្មើនឹងចំនួនតួបូក របស់បណ្ដាតួស៊ីតដែលនៅខាងលើ u_3 (ដែលមាន s_1, s_2, s_3 ដូច្នេះមានបីតួ) ។

តួទីមួយក្នុងផលបូក $[u_4 = (\mathbf{1} + \mathbf{6.2}) + (1 + 7.2) + (1 + 8.2) + (1 + 9.2)]$ គឺ $k_4 = s_7 = 1 + 6.2$ គឺបានមកដោយបូក u_1 ទីមួយនឹង 2 ចំនួន « ៦ដង » ។ យើងឃើញថា « ៦ដង » នេះ ស្មើនឹង លេខរបស់សន្ទស្សន៍ s_6 ឬស្មើនឹងចំនួនតួបូក របស់បណ្ដាតួស៊ីតដែលនៅខាងលើ u_4 (ដែលមាន $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ ដូច្នេះមាន៦តួ) ។ ។

ដូច្នេះយើងសន្និដ្ឋានបានថា តួបូកទីមួយនៃផលបូក u_n ស្មើនឹង 1 បូកនឹង 2 ដងនៃចំនួនតួបូកនៃបណ្ដាតួ $\{u_i\}$ ដែលនៅខាងលើ u_n ។ ចំនួនតួបូករបស់បណ្ដាតួដែលឋិតនៅខាងលើតួ u_n មានចំនួន ៖

1 ……….ជួរទីមួយមាន១តួ
+2 ……….ជួរទី២មាន២តួ
+3 ……….ជួរទី៣មាន៣តួ
…
$+(n-1)$ ……….ជួរទី(n − 1)មាន (n − 1)តួ

$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

ដូច្នេះតួបូកទីមួយរបស់តួ u_n ស្មើនឹង $k_n = 1 + 2.\frac{(n-1)n}{2} = 1 + n(n-1)$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖ ចំពោះ $n = 1, k_1 = 1$ ត្រឹមត្រូវ ។ ចំពោះ $n = 2, k_2 = 3$ ត្រឹមត្រូវ ព្រោះ $u_2 = \mathbf{3}^* + 5$ ។ ចំពោះ $n = 3, k_3 = 7$ ត្រឹមត្រូវ ព្រោះ $u_3 = \mathbf{7}^* + 9 + 11$ ។ ចំពោះ $n = 4, k_4 = 13$ ត្រឹមត្រូវ ព្រោះ $u_4 = \mathbf{13}^* + 15 + 17 + 19$ ។...

បន្ទាប់មកទៀត យើងសង្កេតឃើញថា

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1\\
u_2 &= 3 + (3 + 1.2)\\
u_3 &= 7 + (7 + 1.2) + (7 + 2.2)\\
u_4 &= 13 + (13 + 1.2) + (13 + 2.2) + (13 + 3.2)\\
&\ldots\ldots\\
u_n &= k_n + (k_n + 1.2) + (k_n + 2.2) + (k_n + 3.2) + \cdots + (k_n + (n-1)2)
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$u_n = nk_n + 2\big(1 + 2 + .. + (n-1)\big) = n[1 + n(n-1)] + 2.\frac{(n-1)n}{2} = n^3$$

$$\Longrightarrow\ u_n = n^3$$

ដូច្នេះគ្រប់តួទាំងអស់របស់ស៊ីតនេះជាចំនួនគូប ។

200. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}
\frac{3^{3u} - 1}{3^u - 1} &= 3^{2u} + 3^u + 1\\
&= (3^{2u} - 2.3^u + 1) + 3.3^u\\
&= (3^u - 1)^2 + 3^{u+1}\\
&= (3^u - 1)^2 + 3^{\frac{u+1}{2}.2}\\
&= (3^u - 1)^2 + \left(3^{\frac{u+1}{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

យើង u ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ $u + 1$ ជាចំនួនគូ ។ ដូច្នេះ $\frac{u+1}{2}$ ជាចំនួនគត់ $\Longrightarrow 3^{\frac{u+1}{2}}$ ជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះ $(3^{3u} - 1)/(3^u - 1)$ ជាផលបូកនៃចំនួនការេ $(3^u - 1)^2$ និង $\left(3^{\frac{u+1}{2}}\right)^2$ ។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត

តួចែករួមធំបំផុត

ចំនួនបឋម

201. ▲ សន្មតថា n ជាចំនួនពហុគុណ ហើយថា d ជាតួចែករបស់ n ខុសពីមួយ ។ យើងមាន $n = dd'$ និង

$$\begin{aligned} 2^n - 1 = 2^{dd'} - 1 &= \left(2^d\right)^{d'} - 1 \\ &= \left(2^d - 1\right)\left[\left(2^d\right)^{d'-1} + \left(2^d\right)^{d'-2} + \cdots + 1\right] \\ &= \left(2^d - 1\right)\left[2^{d(d'-1)} + 2^{d(d'-2)} + \cdots + 1\right] \end{aligned}$$

ដោយ $2^d - 1$ ខុសពី 1 នោះ $2^n - 1$ ជាចំនួនពហុគុណ ។ ដូច្នេះ បើ n មិនមែនជាចំនួនបឋម $\Rightarrow 2^n - 1$ មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ។

សម្គាល់

បើ n ជាចំនួនបឋម $\Rightarrow 2^n - 1$ អាចជាចំនួនបឋម ឬ មិនបឋម ។

បើ $2^n - 1$ ជាចំនួនបឋម $\Rightarrow n$ ក៏ជាចំនួនបឋមដែរ ។

202. ▲ យក $m = 2^k - 1, n = \left(2^k - 1\right)^2, k = 2,3, \dots . \Rightarrow m, n$ មានកត្តាបឋមរួមគ្នា ហើយ

$$\begin{aligned} m - 1 &= 2\left(2^{k-1} - 1\right) \\ n - 1 &= 2^{k+1}\left(2^{k-1} - 1\right) \end{aligned}$$

203. ▲ $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ ជាចំនួនបឋម ។ ដោយ n^2+n+1 ធំជាង 1 ជានិច្ចនោះ ដើម្បីឱ្យ n^3-1 ជាចំនួនបឋម មានតែ $n-1=1 \Rightarrow n=2$ ។ ករណី $n=2$ យើងមាន $n^3-1=7$ ជាចំនួនបឋម ។

204. ▲ ចំពោះ $n=1, n^4+4=5$ ជាចំនួនបឋម ។ ពិនិត្យ

$$\begin{aligned} n^4+4 &= n^4+4n^2+4-4n^2 \\ &= (n^2+2)^2-(2n)^2 \\ &= (n^2+2-2n)(n^2+2+2n) \\ &= ((n-1)^2+1)((n+1)^2+1) \end{aligned}$$

កត្តានីមួយៗ ធំជាង 1 ចំពោះ $n>1$ ដូច្នេះ n^4+4 មិនអាចជាចំនួនបឋមបានទេ ។

205. ▲ បើ n^4+4^n ជាចំនួនបឋម នោះ វាត្រូវតែជាចំនួនសេស ហើយនាំឱ្យ n សេស ។ ចំពោះ $n=1$ យើងមាន $n^4+4^n=5$ ជាចំនួនបឋម

ករណី $n \geq 3$

$$\begin{aligned} n^4+4^n &= n^4+2n^2 2^n+2^{2n}-2n^2 2^n \\ &= (n^2+2^n)^2-\left(n.2^{\frac{n+1}{2}}\right)^2 \\ &= \left(n^2+2^n+n.2^{\frac{n+1}{2}}\right)\left(n^2+2^n-n.2^{\frac{n+1}{2}}\right) \end{aligned}$$

យើងឃើញថា ករណី $n \geq 3$ ជាចំនួនសេស នោះ n^4+4^n អាចបំបែកជាផលគុណនៃចំនួនគត់ពីរ ដែលធំជាង 1 ដូច្នេះ វាមិនអាចជាចំនួនបឋមទេ ។

206. ▲ តាង $a=10^3, b=2$ ។

$$\begin{aligned} 1002004008016032 &= a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5 \\ &= \frac{a^6-b^6}{a-b} \\ &= (a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) \\ &= 1002(1002004)(998004) \\ &= 4(4)(1002)(250501)k \end{aligned}$$

ដែល $k<250000$ ។ ដូចនេះ $p=250501$ ។

207. ▲ យើងឃើញថា $\sqrt{100}=10$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ 4.10 គ្រប់ចំនួនពហុគុណទាំងអស់ដែល $10 \leq n \leq 100$ មានកត្តាបឋមមួយ ក្នុងចំណោម 2,3,5 ឬ 7 ។

ទ្រឹស្តីបទ 4.10

បើចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ជាចំនួនពហុគុណ នោះ វាមានកត្តាបឋម p មួយ ដែល $p \le \sqrt{n}$ ។

តាង A_m ជាសំណុំចំនួនពហុគុណនៃ m ដែល ≤ 100 ។ ដូច្នេះ

$$\text{Card}\,(A_2) = 50, \text{Card}\,(A_3) = 33, \text{Card}\,(A_5) = 20, \text{Card}\,(A_7) = 14,$$
$$\text{Card}\,(A_6) = 16, \text{Card}\,(A_{10}) = 10, \text{Card}\,(A_{14}) = 7, \text{Card}\,(A_{15}) = 6,$$
$$\text{Card}\,(A_{21}) = 4, \text{Card}\,(A_{35}) = 2, \text{Card}\,(A_{30}) = 3, \text{Card}\,(A_{42}) = 2,$$
$$\text{Card}\,(A_{70}) = 1, \text{Card}\,(A_{105}) = 0, \text{Card}\,(A_{210}) = 0$$

$$\begin{aligned}\text{Card}(A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7) &\\ &= \text{Card}\,(A_2) + \text{Card}\,(A_3) + \text{Card}\,(A_5) + \text{Card}\,(A_7)\\ &- [\text{Card}\,(A_6) + \text{Card}\,(A_{10}) + \text{Card}\,(A_{14}) + \text{Card}\,(A_{15})\\ &+ \text{Card}\,(A_{21}) + \text{Card}\,(A_{35})]\\ &+ [\text{Card}\,(A_{30}) + \text{Card}\,(A_{42}) + \text{Card}\,(A_{70}) + \text{Card}\,(A_{105})]\\ &- \text{Card}\,(A_{210})\end{aligned}$$
$$= 50 + 33 + 20 + 14 - (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2) + (3 + 2 + 1 + 0) - 0$$
$$= 78$$

$\text{Card}(A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7)$ ជាចំនួននៃចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 2,3,5 ឬ 7 ដែលក្នុងនេះ យើងរាប់ទាំង 2, 3, 5, 7 ដែលជាចំនួនបឋមចូលដែរ ។ ដូច្នេះ ចំនួននៃចំនួនដែលជាពហុគុណនៃ 2,3,5 ឬ 7 ហើយមិនមែនជាចំនួនបឋម មានចំនួន $78 - 4 = 74$ ។

ដូច្នេះ ចំនួនចំនួនបឋមដែល ≤ 100 គឺ

$$= 100 - 74 - 1 = 25$$

ក្នុងនោះ ដក 1 ព្រោះ 1 មិនមែនជាចំនួនបឋម ហើយក៏មិនមែនជាចំនួនពហុគុណដែរ ។

208. ▲ តាង $s = n_1^4 + n_2^4 + \cdots + n_{31}^4$ ។ យើងមាន $n_1 = 2$ ព្រោះបើមិនអ៊ីចឹងទេ គ្រប់ $n_i, 1 \le i \le 31$ ជាចំនួនសេសទាំងអស់ $\Rightarrow s$ ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ 30 មិនអាចចែកដាច់ s ទេ ដូច្នេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។

បន្ទាប់មកទៀតយើងសន្និដ្ឋានថា $n_2 = 3$ ។ ព្រោះបើ $n_2 \ne 3$ នោះ ដោយ n_i ជាចំនួនបឋម ហើយ $n_i \ne 3$ នោះ n_i ត្រូវតែមានរាង $3k \pm 1$ ដូច្នេះ $n_i^4 \equiv 1 \pmod 3$ ចំពោះគ្រប់ $1 \le i \le 31$ ។ $\Rightarrow s \equiv 31 \pmod 3$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។

ជាចុងក្រោយយើងនឹងបង្ហាញថា $n_3 = 5$ ។ បើ $n_3 \neq 5$ នោះ $n_i^2 \equiv \pm 1 \pmod 5 \implies n_i^4 \equiv 1 \pmod 5$ ចំពោះគ្រប់ $1 \le i \le 31$ ។ $\Rightarrow s \equiv 31 = 1 \pmod 5$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។

ដូច្នេះយើងសន្និដ្ឋានបានថា ចំនួនបឋមពាតរៀងគ្នា គឺ 2,3,5 ឋិតនៅក្នុងចំណោមចំនួនដែលឱ្យ ។

209. ▲ ពិនិត្យ $n = (k+1)! + 1$ ។ករណីនេះ បណ្ដាចំនួន $n+1, \dots, n+k$ សុទ្ធតែជាចំនួនមិនបឋម ។

210. ▲ សន្មតថា $p - 4 = q^4$ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន $q > 1$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} p = q^4 + 4 \implies p &= q^4 + 4q^2 + 4 - 4q^2 \\ &= (q^2+2)^2 - (2q)^2 \\ &= (q^2 - 2q + 2)(q^2 + 2q + 2) \end{aligned}$$

យើងមាន

$$\begin{aligned} q^2 - 2q + 2 = (q-1)^2 + 1 > 1 \\ q^2 + 2q + 2 = (q+1)^2 + 1 > 1 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ p ជាផលគុណនៃចំនួនគត់ពីរ ដែលធំជាង ១ ។ តែនេះផ្ទុយនឹងសម្មតិកម្មដែលថា p ជាចំនួនបឋម ។ ដូច្នេះ $p - 4$ មិនអាចសរសេរជារាង q^4 បានទេ ។

211. ▲ បើ $p = 2$ នោះ $7p + 3^p - 4 = 19$ ពិត ។

តាមទ្រឹស្តីបទ Fermat:

1. បើ p ជាចំនួនបឋម នោះចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a គេមាន $a^p \equiv a \pmod 4$

2. បើ p ជាចំនួនបឋម នោះចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a ដែលបឋមនឹង p គេមាន $a^{p-1} \equiv 1 \pmod 4$

តាមទ្រឹស្តីបទ (1) យើងទាញបាន $3^p \equiv 3 \pmod p$ ដូច្នេះ

$$7p + 3^p - 4 \equiv 3 - 4 = -1 \pmod p$$

តាង $7p + 3^p - 4 = x^2$ ដូច្នេះ $x^2 \equiv -1 \pmod p$ មានន័យថា x បឋមនឹង p ។

ដូច្នេះតាមទ្រឹស្តីបទ(2) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} x^{p-1} \equiv 1 \pmod p \\ \Leftrightarrow (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$$
$$\Rightarrow \frac{p-1}{2} = 2k$$
$$\Rightarrow p = 4k+1$$

ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ករណី $p = 4k+1$ នោះ

$$7p + 3^p - 4 = 28k + 7 + 3^{4k+1} - 4 \equiv 3 + (-1)^{4k+1} = 2 \pmod 4$$

មិនអាចជាចំនួនការេបានទេ ព្រោះចំនួនការេ $\equiv 0; 1 \pmod 4$ ។

212. ▲ ដោយ n ជាចំនួនពហុគុណ យើងមាន $n = a.b; a \geq 2; b \geq 2$ ។ សន្មតថា $a \leq b$ ។ ដូច្នេះ

$$(n-1)! = (ab-1)! = 1.2 \dots a \dots . (b-1)b \dots (ab-1)$$

ដូច្នេះ $(n-1)!$ ចែកដាច់នឹង $2n = 2ab$ ។

213. ▲ លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យអាចសរសេរជា

$$p(r+1) - 4q = q(r+1)$$
$$\Leftrightarrow p(r+1) = q(r+5) \qquad (1)$$

ដោយ p, q ជាចំនួនបឋមនោះ យើងមានករណី $p = q$ ឬ p ចែក $r+5$ ដាច់ ។ ករណី $p = q$ នោះ $r+1 = r+5$ មិនអាច ។ ដូច្នេះ p និង q បឋមនឹងគ្នា ហើយ p ចែក $r+5$ ដាច់ និង q ចែក $r+1$ ដាច់ ។ តាង $d = \text{PGCD}(r+1, r+5) \Rightarrow d$ ចែកដាច់ $r+5-(r+1) = 4 \Rightarrow d = 1; 2; 3; 4$ ។ យើងមាន $(r+1)/d$ បឋមនឹង $(r+5)/d$ ។ សមីការ (1) សមមូលនឹង

$$p\frac{r+1}{d} = q\frac{r+5}{d}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{r+5}{d} \\ q = \dfrac{r+1}{d} \end{cases}$$
$$\Rightarrow p - q = \frac{4}{d}$$

យើងទាញបានថា $d \neq 3$ ។

បើ $d=4$ នោះ $p-q=1$ ជាចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា ហើយជាចំនួនបឋមទាំងពីរ ដូច្នេះមានតែ $p=3,q=2 \Rightarrow\ r=7$ ។

បើ $d=2$ នោះ $p-q=2$ ។ ដូច្នេះ $r=2p-5=2q-1$ ហើយ p និង q បឋមសេសទាំងពីរ (ព្រោះផលសងវាគូ) ។ បើ p និង q សុទ្ធតែខុសពី 3 នោះ p,q មានរាង $6m+1,6m+5$ ។ ដោយ $p-q=2$ នោះផលសងនេះចែកនឹង 3 សល់សំណល់ 2 ។ ដូច្នេះ យើងយក $p=6m+5,q=6n+1$:

$$\Rightarrow p-q=6(m-n)+4=2$$
$$\Rightarrow m-n=-\frac{1}{3}$$

មិនអាច ។

បើមានមួយក្នុងចំណោម p,q ដែលស្មើ 3 នោះ គឺ $q=3$ (ព្រោះ $p>q$) $\Rightarrow\ p=5$ ។

បើ $d=1$ នោះ $p=r+5;q=r+1\ \Rightarrow\ p\ -\ q\ =\ 4\ \Rightarrow p,q$ សេសទាំងពីរ ។

ដោយ $r=q-1$ នោះ r គូ $\Rightarrow r=2\ \Rightarrow p=7,q=3$ ។

ដូច្នេះ $(p,q,r)=(3,2,7);(5,3,5);(7,3,2)$ ។

214.▲ តាង $p>3$ ជាចំនួនបឋម ។ p អាចមានរាង $6k,6k+1,6k+2,6k+3,6k+4,6k+5$ តែ $6k,6k+2,6k+3,6k+4$ មិនយកព្រោះមិនមែនបឋម ។ ដូច្នេះ p អាចមានរាង $6k+1,6k+5$ ។ ដូច្នេះការេរបស់ p មានរាង $36k^2+12k+1$ ឬ $36k^2+60k+25$ ។ រាងទាំងពីរនេះ ពេលចែកនឹង ១២ សល់សំណល់ស្មើ 1 ទាំងពីរ ។

215.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} a^4+4b^4 &= a^4+4b^4+4a^2b^2-4a^2b^2=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2 \\ &= (a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab) \\ &= [(a+b)^2+b^2][(a-b)^2+b^2] \end{aligned}$$

ដោយ $(a+b)^2+b^2>1$ នោះ a^4+4b^4 មិនអាចជាចំនួនបឋមបានទេបើ $(a-b)^2+b^2>1$ ។ ដូច្នេះទាល់តែ $(a-b)^2+b^2=1\ \Rightarrow a=b=1\ \Rightarrow a^4+4b^4=5$ ជាចំនួនបឋម ។

ដូច្នេះ $(a;b)=(1;1)$ ។

216. ▲ តាង y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $y\le p-2$ និង ដែល $f(y)$ ជាចំនួនពហុគុណ ។ តាង q ជាតួចែកបឋមតូចបំផុតរបស់ $f(y)$ ។ យើងនិយាយថា $y<q$ ។

សន្មតផ្ទុយពីនេះថា $y\ge q$ ។ តាង r ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $y\equiv r \pmod q$ ។ ដូច្នេះ $f(y)\equiv f(r)\equiv 0 \pmod q$ ហើយដោយ $q\le y\le p-2\le f(r)$ ដូច្នេះយើងសន្និដ្ឋានបានថា q ចែកដាច់ $f(r)$ តែសេចក្ដីសន្និដ្ឋាននេះ វាផ្ទុយពីការសន្មតដែលថា y ជាចំនួនគត់តូចបំផុតដែល $f(y)$ ជាចំនួនពហុគុណ ។ ដូច្នេះ $y\le q$ ។

ពេលនេះយើងនឹងបង្ហាញថា $2y<q$ ។ សន្មតផ្ទុយថា $2y\ge q$ ។ ដោយ

$$f(y)-f(x)=(y-x)(y+x+1)$$

ដូច្នេះ $f(y)-f(q-1-y)=(2y-q+1)q$ ។ ដោយ $f(y)$ ចែកដាច់នឹង q ដូច្នេះ $f(q-1-y)$ ចែកដាច់នឹង q ដែរ ។ ប៉ុន្តែតាមការសន្មត $q-1-y<y$ (ព្រោះ $q\le 2y$)នោះ $f(q-1-y)$ ត្រូវតែជាចំនួនបឋម ។ តែចំនួនបឋមនេះ ចែកដាច់នឹង q ដូច្នេះមានតែវាស្មើ q ដូច្នេះ $f(q-1-y)=q$ ។ តែវាមិនអាច ព្រោះ

$$f(q-1-y)=(q-1-y)^2+(q-1-y)+p>q+p-y-1\ge q$$

ដូច្នេះ $q\ge 2y+1$ ។

ដោយ $f(y)$ ជាចំនួនពហុគុណ មិនអាចមានតម្លៃស្មើ q (ព្រោះ q ជាចំនួនបឋម) និង q ជាតួចែកបឋមតូចបំផុតរបស់វា យើងសន្និដ្ឋានបានថា $f(y)\ge q^2$ ។ ដូច្នេះ

$$f(y)=y^2+y+p\ge q^2\ge(2y+1)^2=4y^2+4y+1 \Rightarrow 3(y^2+y)\le p-1$$

$$\Rightarrow 3y^2<3(y^2+y)\le p-1<p$$

$$\Rightarrow y<\sqrt{\frac{p}{3}}$$

$$\Rightarrow y\le\left\lfloor\sqrt{\frac{p}{3}}\right\rfloor$$

ដូច្នេះ $y \le \left\lfloor\sqrt{\frac{p}{3}}\right\rfloor$ តែ $f(y)$ ជាចំនួនពហុគុណ ដែលនេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលនិយាយថា គ្រប់ $f(0), f(1), \dots, f\left(\left\lfloor\sqrt{\frac{p}{3}}\right\rfloor\right)$ សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម ។ ដូច្នេះ មានតែ $y > p-2$ ដែលមានន័យថា គ្រប់

$$f(0), f(1), \dots, f(p-2)$$

ត្រូវតែជាចំនួនបឋម ។

217. ▲ ដោយ $n > 2$ ដូច្នេះ $2^n > 4$ ។ បើមានមួយក្នុងចំណោម $2^n - 1$ និង $2^n + 1$ ជាចំនួនបឋម នោះចំនួនបឋមនោះ ធំជាង 3 ។ យើងមាន 2^n ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ 2^n អាចមានរាង $3k, 3k+1, 3k+2$ ។ បើ 2^n មានរាង $3k+1$ នោះ $2^n - 1$ ចែកដាច់នឹង 3 ។ បើ 2^n មានរាង $3k+2$ នោះ $2^n + 1$ ចែកដាច់នឹង 3 ។ ដូច្នេះ ត្រូវតែមានមួយក្នុង ចំណោម $2^n - 1$ និង $2^n + 1$ ដែលចែកដាច់នឹង 3 ជានិច្ច ។ ដូច្នេះ ចំនួនទាំងនេះ មិនអាចជាចំនួនបឋមទាំងពីរបានទេ ។

218. ▲ (a) ចំនួនបឋម $p > 3$ អាចមានរាង $3k, 3k+1, 3k+2$ ។ បើ p មានរាង $3k+2$ នោះ $8p - 1 = 24k + 15$ ចែកដាច់នឹង 3 ។ ដូច្នេះ មានតែ $p = 3k+1$ ។ ករណីនេះ $8p + 1 = 34k + 9$ ចែកដាច់នឹង 3 ដូច្នេះជាចំនួនពហុគុណ ។ បើ $p = 3$ នោះ $8p + 1 = 25$ ជាចំនួនពហុគុណដែរ ។

(b) ចំនួនបឋម $p > 3$ អាចមានរាង $3k, 3k+1, 3k+2$ ។ ដូច្នេះ $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$ ឬ $9k^2 + 12k + 4$ ។ យើងទាញបាន $8p^2 + 1 = 72k^2 + 48k + 9$ ឬ $72k^2 + 96k + 33$ មានន័យថា $8p^2 + 1$ ចែកដាច់នឹង 3 ដូច្នេះ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។ បើ $p = 3$ នោះ $8p^2 = 73$ ជាចំនួនបឋម និង $8p^2 - 1 = 71$ ជាចំនួនបឋម ។

219. ▲ ចំនួនដែលឱ្យមានរាង

$$n_k = 111..17\underbrace{11\dots1}_{k\text{ ខ្ទង់}} = \underbrace{111\dots1}_{2006} + 6\underbrace{000\dots0}_{k} = \frac{1}{9}(10^{2006} - 1) + 6.10^k;$$
$k = 0,1,\dots,2005$

ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនេះ គ្មានលេខមួយណាចែកដាច់នឹង 2 ទេ ព្រោះលេខខ្ទង់ខាងចុងមិនមែនជាលេខ 0,2,4,6,8 ។ គ្មានលេខមួយណាចែកដាច់នឹង 3 ទេព្រោះផលបូកតួលេខនៃខ្ទង់ទាំងអស់ $= 2006 + 6 = 2012$ ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ វាចែកមិនដាច់នឹង 5 ទេ ព្រោះលេខខាងចុងរបស់វាខុសពី $0; 5$ ។ វាចែកមិនដាច់នឹង 11 ទេព្រោះ $\underbrace{111\ldots1}_{2006}$ ចែកដាច់នឹង 11 តែ 6.10^k ចែកមិនដាច់នឹង 11 ។ ដូច្នេះយើងសាកពិនិត្យមើលចំនួនពហុគុណនៃ 7 និង 13 ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} 9n_k &= 100.1000^{668} - 1 + 54.10^k \\ &\equiv 2.(-1)^{668} - 1 + (-2).10^k \\ &\equiv 1 - 2.10^k \equiv 1 - 2.3^k \pmod 7 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $7 \mid n_k$ បើ $3^k \equiv 4 \pmod 7$ ។ ករណីបែបនេះ ពិតចំពោះ $k = 4; 10; 16; \ldots; 2002$ ។ដូច្នេះ យើងមានចំនួនពហុគុណនៃ 7 ចំនួន 334 ។ យើងមាន

$$9n_k \equiv 7.(-1)^{668} - 1 + 2.10^k = 6 + 2.10^k \pmod{13}$$

ដូច្នេះ $13 \mid n_k$ បើ $10^k \equiv 10 \pmod{13}$ ។ យើងមានករណីបែបនេះ ចំពោះ $k = 1; 7; 13; 19; \ldots; 2005$ ដូច្នេះ យើងមានចំនួនពហុគុណនៃ 13 ចំនួន 335 ។ ដូច្នេះជាសរុបយើងរកបានចំនួនពហុគុណចំនួន 669 ។

220. ▲ ចំនួនទាំងនេះមានរាង

$$\begin{aligned} &10^4 + 1 \\ &10^8 + 10^4 + 1 \\ &10^{12} + 10^8 + 10^4 + 1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

ដូច្នេះរាងទូទៅរបស់វាគឺ $1 + 10^4 + 10^8 + \cdots + 10^{4k}$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} &10^{4k+4} - 1 = (10^4)^{k+1} - 1 = (10^4 - 1)(1 + 10^4 + 10^8 + \cdots + 10^{4k}) \\ &10^{2k+2} - 1 = (10^2)^{k+1} - 1 = (10^2 - 1)(1 + 10^2 + 10^4 + \cdots + 10^{2k}) \\ &10^{4k+4} - 1 = \left(10^{2k+2}\right)^2 - 1 = \left(10^{2k+2} - 1\right)\left(10^{2k+2} + 1\right) \\ &\frac{10^4 - 1}{10^2 - 1} = 10^2 + 1 = 101 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$(10^4-1)\left(1+10^4+10^8+\cdots+10^{4k}\right)$$
$$=(10^2-1)\left(1+10^2+10^4+\cdots+10^{2k}\right).\left(10^{2k+2}+1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(1+10^4+10^8+\cdots+10^{4k}\right).101$$
$$=\left(1+10^2+10^4+\cdots+10^{2k}\right).\left(10^{2k+2}+1\right)$$

● បើ $k>1$ និង $k+1$ ជាចំនួនសេស នោះ

$$10^{2k+2}+1=100^{k+1}+1$$
$$=(100+1)\left(100^k-100^{k-1}+..+1\right)=101.N$$

ដែល $N=100^k-100^{k-1}+..+1>1$ ចំពោះ $k>1$ ។

ដូច្នេះ

$$1+10^4+10^8+\cdots+10^{4k}=\left(1+10^2+10^4+\cdots+10^{2k}\right).N$$

ជាចំនួនពហុគុណ ។

● បើ $k>1$ និង $k+1$ ជាចំនួនគូ នោះ

$$1+10^2+10^4+\cdots+10^{2k}$$
$$=(1+10^2)+10^4(1+10^2)+\cdots+10^{2k-2}(1+10^2)$$
$$=101\left(1+10^4+\cdots+10^{2k-2}\right)=101.M$$

ដែល $M=1+10^4+\cdots+10^{2k-2}>1$ ចំពោះ $k>1$ ។

ដូច្នេះ

$$1+10^4+10^8+\cdots+10^{4k}=M.\left(10^{2k+2}+1\right)$$

ជាចំនួនពហុគុណ ។

● បើ $k=1$ នោះ

$$1+10^4=10001=73.137$$

ជាចំនួនពហុគុណ ។

221.▲ យើងមាន

$$N=5^{5^{2011}}+5^{5^{2010}}+1$$
$$=5^{5.5^{2010}}+5^{5^{2010}}+1$$
$$=\left(5^{5^{2010}}\right)^5+5^{5^{2010}}+1$$
$$=n^5+n+1$$

ដែល $n=5^{5^{2010}}>1$ ។ ដូច្នេះ

$$N=n^5+n+1$$
$$=n^3(n^2+n+1)-n^4-n^3+n+1$$
$$=n^3(n^2+n+1)-n^2(n^2+n+1)+n^2+n+1$$

$= (n^2 + n + 1)(n^3 - n^2 + 1)$

ដោយ $n > 1$ ដូច្នេះ $n^2 + n + 1 > 3$ និង $n^3 - n^2 + 1 > 1$ ។ ដូច្នេះ N ជាផលគុណនៃចំនួនគត់ពីរ ដែលធំជាង ១ ។ ដូច្នេះ N មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ។

ពហុគុណរួមតូចបំផុត. តួចែករួមធំបំផុត

222. ▲ តាង $d = \text{PGCD}(a + b, a^2 - ab + b^2)$ ។ ដូច្នេះ d ចែកដាច់ $(a + b)^2 - a^2 + ab - b^2 = 3ab$ ។ ដូច្នេះ d ចែកដាច់ $3b(a + b) - 3ab = 3b^2$ ។ ដូចគ្នា $d|\, 3a^2$ ។ ដូច្នេះ $d|\, \text{PGCD}(3a^2, 3b^2) = 3\, \text{PGCD}(a^2, b^2)$ ។ ដោយ $\text{PGCD}(a, b) = 1$ នោះ $\text{PGCD}(a^2, b^2) = [\text{PGCD}(a, b)]^2 = 1$ ។ ដូច្នេះ $d|3$ មានន័យថា $d = 1$ ឬ 3 ។

223. ▲ តាង $d = \text{PGCD}(m, n)$; $sd = m; td = n$ ដូច្នេះ

$a^m - 1 = \left(a^d\right)^s - 1$: ចែកដាច់នឹង $a^d - 1$ ។ ដូចគ្នា

$a^n - 1$ ចែកដាច់នឹង $a^d - 1$ ។

ដូច្នេះ $\left(a^d - 1\right)|\, \text{PGCD}(a^m - 1, a^n - 1)$ (*) ។

តាមទ្រឹស្តីបទ Bachet-Bézout គេអាចរកបានចំនួនគត់ x, y ដែល $mx + ny = d$ ។ គួរកត់សម្គាល់ថា x, y ត្រូវតែមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា ។ វាមិនអាចមានសញ្ញាដកទាំង២ទេ ព្រោះ $d \geq 0$ ។ វាមិនអាចសញ្ញាបូកទាំង២ទេ ព្រោះនាំឱ្យ $d \geq m + n$ ដែលតាមពិត $d \leq m, d \leq n$ ។ ដូច្នេះ យើងសន្មតថា $x > 0, y \leq 0$ ។ តាង $t = \text{PGCD}(a^m - 1, a^n - 1)$ ។ ដូច្នេះ $t|(a^{mx} - 1)$ និង $t|(a^{-ny} - 1)$ ។ ដូច្នេះ $t|\, [(a^m - 1) - (a^n - 1)] = a^d - 1$ (**) ។ (*) និង (**) $\Rightarrow t = d$ សំណើពិត ។

224. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} d_n &= \text{PGCD}(100 + n^2, 100 + (n + 1)^2) \\ &= \text{PGCD}(100 + n^2, 100 + n^2 + 2n + 1) \\ &= \text{PGCD}(100 + n^2, 2n + 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow d_n|[2(100+n^2)-n(2n+1)] = 200-n$
$\Rightarrow d_n|\,[2(200-n)+(2n+1)] = 401$
ដូច្នេះ មានន័យថា $d_n|401$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។ ដូច្នេះ d_n មិនអាចធំលើសពី 401 ទេ ។ តើ d_n អាចមានតម្លៃស្មើ 401 ឬទេ? ។ ឱ្យ $n=200$ នោះ

$$a_{200} = 100+200^2 = 100(401)$$
$$a_{201} = 100+201^2 = 101(401)$$

ដូច្នេះ d_n អាចមានតម្លៃរហូតដល់ 401 ។ មានន័យថា $\max_{n\geq 1} d_n = 401$ ។

225. ▲ តាង $d = \mathrm{PGCD}(2^m-1, 2^n+1)$ ។ ដូច្នេះ d ត្រូវតែជាចំនួនសេស និង $2^m-1=kd$ និង $2^n+1=ld$ ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ k,l ។

ដូច្នេះ $2^{mn}=(kd+1)^n = td+1$ ដែល $t=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}k^{n-j}d^{n-j-1}$ ។

ដូចគ្នា $2^{mn}=(ld-1)^m = ud-1$ បើសិនជា m ជាចំនួនសេស ។ ដោយ $td+1=ud-1$ នោះ $d|2$ ហើយដោយ d ជាចំនួនសេស នោះ $d=1$ ។

226. ▲បណ្ដាចំនួនដែលមានរាង $k(m!)+1, k=1,2,\dots,m$ បង្កើតបានជាស្វីតទព្វន្ត ដែលមានតួចំនួន m និង មានផលសងរួម $m!$ ។ សន្មតថា $d|(l.m!+1), d|(s.m!+1), 1\leq l<s\leq m$ ។ $\Rightarrow d|\,[s(l.m!+1)-l(s.m!+1)] = s-l<m \;\Rightarrow 1\leq d<m$
$d|\,(s-l)<m \;\Rightarrow d|m!$
ដូច្នេះ $d|(s.m!+1), d|m! \;\Rightarrow d|(s.m!+1-m!) = 1$ ។ មានន័យថា តួពីរៗនៃស្វីតនេះ បឋមរវាងគ្នា ។

227. ▲យើងមាន $1260=(2^2)(3^2)(5)(7)$ ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរកចំនួននៃចំនួនវិជ្ជមាន ដែល ≤ 1260 ហើយដែលចែកមិនដាច់នឹង $2,3,5$ និងនឹង 7 ។ តាង A ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ ≤ 1260 ដែលជាពហុគុណនៃ 2, តាង B ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ ≤ 1260 ដែលជាពហុគុណនៃ 3 ,... ។ល ។
យើងដឹងថា
$\mathrm{card}(A\cup B\cup C\cup D)$

$$\begin{aligned}&= \operatorname{card} A + \operatorname{card} B + \operatorname{card} C + \operatorname{card} D - \operatorname{card}(A\cap B) - \operatorname{card}(A\cap C)\\&\quad - \operatorname{card}(A\cap D) - \operatorname{card}(B\cap C) - \operatorname{card}(B\cap D) - \operatorname{card}(C\cap D)\\&\quad + \operatorname{card}(A\cap B\cap C) + \operatorname{card}(A\cap B\cap D) + \operatorname{card}(A\cap C\cap D)\\&\quad + \operatorname{card}(B\cap C\cap D) - \operatorname{card}(A\cap B\cap C\cap D)\\&= 630+420+252+180-210-126-90-84-60-36+42+30\\&\quad +18+12-6\\&= 972\end{aligned}$$

ដូច្នេះចំនួនចំនួនគត់ដែលរកគឺ $1260-972=288$ ។

228. ▲តាង d ជាតួចែករបស់រួមរបស់ ab និង $a+b$ ។ ដូច្នេះ d ចែកដាច់ $a(a+b)-ab=a^2$ ។ ដូចគ្នា d ចែក b^2 ដាច់ ។ ដោយ a និង b បឋមនឹងគ្នា នោះ a^2 និង b^2 ក៏បឋមនឹងគ្នាដែរ ។ ដូច្នេះ $d=\pm 1$ ។

229. ▲យើងដឹងថា

$$\begin{aligned}F_{n+1}-2 &= 2^{2^{n+1}}-1=\left(2^{2^n}-1\right)\left(2^{2^n}+1\right)\\&=\left(2^{2^{n-1}}-1\right)\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^n}+1\right)\\&=F_0F_1\dots F_n\end{aligned}$$

តាង d ជាតួចែករួមរវាង F_n និង F_m ។ សន្មតថា $n<m$ ។ តាមទំនាក់ទំនងខាងលើ ដោយសារ d ចែក F_n ដាច់ នោះ d ក៏ចែក F_m-2 ដាច់ដែរ ។ ដោយសារ d ចែក F_m ដាច់ នោះ d ចែក 2 ដាច់ ។ ដោយសារ F_n និង F_m ជាចំនួនសេស នោះ d ជាតួចែកក៏សេសដែរ ហើយចែក 2 ដាច់ មានន័យថា $|d|=1$ ។

230. ▲យើងមាន $p=2$ និង $p=3$ ចែកដាច់នឹង $a_2=2^2+3^2+6^2-1=48$ ។ សន្មតថា $p\geq 5$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ**ហ្វែម៉ា** យើងមាន

$$2^{p-1}\equiv 3^{p-1}\equiv 6^{p-1}\equiv 1 \pmod p$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}&3.2^{p-1}+2.3^{p-1}+6^{p-1}\equiv 3+2+1=6 \pmod p\\&\Longrightarrow 6(2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1)\equiv 0 \pmod p\end{aligned}$$

មានន័យថា $6a_{p-2}$ ចែកដាច់នឹង p ។ ដោយ p បឋមនឹង 6 នោះ a_{p-2} ចែកដាច់នឹង p ។

ទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ា

តាង p ជាចំនួនបឋមនិងសន្មតថា p ចែក a មិនដាច់ នោះ$a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ ។

ដូច្នេះ គ្រប់ចំនួនបឋមទាំងអស់ចែកដាច់យ៉ាងតិចតួមួយរបស់ស្វ៊ីតនេះ ។ មានន័យថា មិនអាចមានចំនួនណាមួយក្រៅពី 1 ដែលបឋមនឹងគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីតនេះទេ ។

231. ▲ a និង b ជាតួចែករបស់ $2^3 5^7 11^{13}$ ដូច្នេះ $a = 2^x 5^y 11^z$ និង $b = 2^s 5^t 11^u$ ចំពោះ ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x, y, z, s, t, u ខ្លះ ។ ដោយ $2^3 5^7 11^{13}$ ជា PPCM នៃ a, b ដូច្នេះ $\max(x, s) = 3, \max(y, t) = 7$ និង $\max(z, u) = 13$ ។

ដូច្នេះ (x, s) អាចជា $(0,3), (1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1), (3,0)$ ។ ដូច្នេះយើងមាន (x, s) ចំនួន 7បែប ។ ដូចគ្នាយើងមាន (y, t) និង (z, u) ចំនួន 15 និង 27 បែប ។ ដូច្នេះ យើងមាន $7 \times 15 \times 27 = 2835$ បែបនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (a, b) ដែលមាន $\text{PPCM} = 2^3 5^7 11^{13}$ ។

232. ▲យើងមាន

$$(l+m+n)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) = (l+m+n)\frac{mn+ln+lm}{lmn}$$

ជាចំនួនគត់ បើ lmn ចែកដាច់ $(l+m+n)(mn+ln+lm) = l(mn+ln+lm) + (m+n)(mn+ln+lm)$ ។ ដោយ l, m, n បឋមនឹងគ្នាពីរៗ នោះ l ចែកដាច់

$$(l+m+n)(mn+ln+lm) = l(mn+ln+lm) + (m+n)(mn+ln+lm)$$

ដូចនេះ lចែកដាច់ $(m+n)(mn+ln+lm) = mn(m+n) + l(m+n)^2 \Rightarrow l$ ចែកដាច់ $mn(m+n)$ ។ ដោយ l បឋមនឹង m, n ដូច្នេះ l ចែកដាច់ $m+n$ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបាន m ចែកដាច់ $l+n$ និង n ចែកដាច់ $l+m$ ។ ដោយអថេរទាំងអស់នេះ មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី នោះយើងអាចសន្មតថា n ធំជាងគេ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន $l+m \le 2n$ ។ ដោយ n ចែកដាច់ $l+m$ ដូច្នេះ $l+m=n$ ឬក៏ $l+m=2n$ ។

ករណី $l+m=2n$ អាចមានតែពេលណា $l=m=n$ (ព្រោះ $l, m \le n$) ។ ដោយ l, m, n បឋមនឹងគ្នាពីរៗ នោះ $l=m=n=1$ ។

ករណី $l+m=n$ លក្ខខណ្ឌទៅជា

$$2(l+m)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{l+m}\right) = 2\frac{(l+m)^2+lm}{lm} = 2+2\frac{(l+m)^2}{lm}$$

ជាចំនួនគត់ សមមូលនឹង $2\frac{(l+m)^2}{lm}$ ជាចំនួនគត់ ។

ដោយ l បឋមនឹង m នោះក្នុងចំណោមចំនួនពីរនេះ ត្រូវមានមួយជាចំនួនសេស ។ យើងអាចសន្មតថា l សេស ។ ដូច្នេះ l ចែកដាច់ $(l+m)^2 = l^2 + 2lm + m^2$ សមមូលនឹង l ចែកដាច់ m^2 ។ ករណីនេះអាចតែពេលណា $l = 1$ ប៉ុណ្ណោះ (ព្រោះ l បឋមនឹង m) ។ រួចហើយ m ចែក 2 ដាច់ ។ ដូច្នេះ $m = 1$ ឬ $m = 2$ ។

បើ $m = 1$ យើងទាញបាន $n = 2$ ។

បើ $m = 2$ យើងទាញបាន $n = 3$ ។

ដូច្នេះជាសរុបចម្លើយមាន $(l,m,n) = \{(1,1,1);(1,1,2);(1,2,3)\}$ និង ចំលាស់ទាំងអស់ដែលអាចមាននៃចម្លើយនេះ ។

233. ▲ យើងពិនិត្យផលគុណ $x_1x_2\dots x_k$ ណាមួយ និងចំនួនបឋម p ណាមួយ ។ សន្មតថា $p^{\alpha_j}|x_j, p^{\alpha_j+1}\nmid x_j$ ។ ដោយ $x_1+x_2+\cdots+x_k\le n \Rightarrow p^{\alpha_1}+p^{\alpha_2}+\cdots p^{\alpha_k}\le n$ និងដោយ $p^\alpha \ge \alpha p$ នោះ

$$\begin{aligned} &p(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)\le p^{\alpha_1}+p^{\alpha_2}+\cdots p^{\alpha_k}\le n\\ &\Rightarrow\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k\le\frac{n}{p}\\ &\Rightarrow\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k\le\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\end{aligned}$$

ដូច្នេះមានន័យថា ស្វ័យគុណ α នៃចំនួនបឋម p ណាមួយដែល $p^\alpha|x_1x_2\dots x_k$, មានតម្លៃធំមិនលើសពី $\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor$ទេ មានន័យថា $\alpha\le\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor$ ។ តែក្នុងករណី $x_1=x_2=\cdots=x_k=p, k=\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor$ នោះ $\alpha=\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor$ មានន័យថា ក្នុងចំណោមបណ្ដាផលគុណរបស់ $x_1x_2\dots x_k$ ទាំងអស់មានយ៉ាងហោចណាស់ផលគុណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\alpha=\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor$ ។ ដូច្នេះ ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃបណ្ដាផលគុណក្នុងសំនួរ $(x_1x_2\dots x_k)$ កំណត់ដោយ

$$\prod_{p,p\ \text{បឋម}} p^{\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor}$$

តាមរូបមន្តឌឺប៉ូលីញ៉ាក់ ស្វ័យគុណធំបំផុត α នៃ p ដែល p^α ចែកដាច់ $n!$ កំណត់ដោយ

$$\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\cdots$$

$$\Rightarrow \prod_{p,p \text{ បឋម}} p^{\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\cdots} = n!$$

ដូច្នេះ

$$\prod_{p,p \text{ បឋម}} p^{\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor} \leq \prod_{p,p \text{ បឋម}} p^{\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\cdots} = n!$$

234. ▲ យើងមាន $2(21n+4)-3(14n+3)=-1$ ដូច្នេះ ភាគយកនិងភាគបែង របស់ប្រភាគនេះ មិនអាចមានកត្តារួមធំជាង 1 ទេ ។ មានន័យថា វាមិនអាចសម្រួលបាន ឡើយ ។

235. ▲តាង

$$a=\prod p_k^{\alpha_k}, b=\prod p_k^{\beta_k}, c=\prod p_k^{\gamma_k}$$

ដែល p_k ជាចំនួនបឋម ។ យើងមាន

$$\mathrm{PPCM}(a,b)=\prod p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}, \ldots$$
$$\mathrm{PPCM}(a,b,c)=\prod p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)}$$
$$\mathrm{PGCD}(a,b,c)=\prod p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)}, \ldots$$

$$\frac{[\mathrm{PPCM}(a,b,c)]^2}{\mathrm{PPCM}(a,b)\,\mathrm{PPCM}(b,c)\,\mathrm{PPCM}(c,a)}=\frac{[\mathrm{PGCD}(a,b,c)]^2}{\mathrm{PGCD}(a,b)\mathrm{PGCD}(b,c)\mathrm{PGCD}(c,a)}$$
$$\Leftrightarrow 2\max(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)-\max(\alpha_k,\beta_k)-\max(\alpha_k,\gamma_k)-\max(\beta_k,\gamma_k)$$
$$=2\min(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)-\min(\alpha_k,\beta_k)-\min(\alpha_k,\gamma_k)$$
$$-\min(\beta_k,\gamma_k)$$

យើងសន្មតថា $\alpha_k \geq \beta_k \geq \gamma_k$ ។ សមភាពខាងលើទៅជា $2\alpha_k-\alpha_k-\alpha_k-\beta_k=2\gamma_k-\beta_k-\gamma_k-\gamma_k$ ពិត ។

236. ▲ តាមទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃចំនួនគត់ យើងទាញបាន a,b,c,d ត្រូវតែមានរាង $3^m7^n, 0\leq m\leq r, 0\leq n\leq s$ ។ ជាងនេះទៅទៀត ត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ធាតុពីរ ក្នុងចំណោមធាតុទាំងបួន ដែល m ត្រូវស្មើនឹង r ហើយនិង ត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ធាតុ ពីរក្នុងចំណោមធាតុទាំងបួន ដែល n ត្រូវស្មើនឹង s ។

យើងពិនិត្យករណី m សិន ។ យើងមាន

ករណី (1) a,b,c,d ទាំងបួនមាន $m=r$ ដូចគ្នា (យើងមាន មួយករណី) ។
ករណី (2) មានបីក្នុងចំណោម a,b,c,d មាន $m=r$ ហើយមួយទៀត មាន $0\le m<r$ ។ ករណីនេះ យើងមាន $3r$ របៀប ព្រោះក្នុងការជ្រើសរើសចំនួនទីបួននីមួយៗដែល $0\le m<r$, យើងមាន r របៀប, ហើយក្នុងការជ្រើសរើស យកបីក្នុងចំណោមបួន ដែល $m=r$, យើងមាន $\binom{4}{3}=3$ របៀប ។ ដូច្នេះសរុបមាន $3r$ របៀប ។
ករណី (3) មានពីរក្នុងចំណោម a,b,c,d មាន $m=r$ ហើយពីរទៀត មាន $0\le m<r$ ។ ករណីនេះ យើងមាន $6r^2$ របៀប ព្រោះ ក្នុងការជ្រើសរើសចំនួនទីបី និង បួននីមួយៗ ដែល $0\le m<r$, យើងមាន r^2 របៀប ហើយក្នុងការជ្រើសរើស យកពីរក្នុងចំណោមបួន ដែល $m=r$ យើងមាន $\binom{4}{2}=6$ របៀប ។ ដូច្នេះសរុបមាន $6r^2$ របៀប ។
សរុបករណីទាំងបីបញ្ចូលគ្នា យើងមានទាំងអស់ $1+4r+6r^2$ បែបក្នុងការជ្រើសរើសឱ្យបានយ៉ាងហោចណាស់ ពីរក្នុងចំណោមធាតុបួន ដើម្បីឱ្យបានស្វ័យគុណ r ។ ដូចគ្នាដែរ មានទាំងអស់ $1+4s+6s^2$ បែបក្នុងការជ្រើសរើសឱ្យបានយ៉ាងហោចណាស់ពីរក្នុងចំណោមបួន ដើម្បីឱ្យបានស្វ័យគុណ s ។
ដូច្នេះជាសរុបគេមានចតុធាតុទាំងអស់ចំនួន $(1+4r+6r^2)(1+4s+6s^2)$ ។

237. ▲ របៀបទី១

យើងមាន $I_0=35 = 7.5,\ I_1=2^3+3^8+5^8\equiv 3+1=4 \pmod 5$ ។ ដូច្នេះ 5 មិនមែនជាតួចែករបស់ I_1 ទេ ។ យើងមាន

$$5^{6n}= 25^{3n}\equiv 4^{3n}=64^n\equiv 1 \pmod 7$$
$$3^{6n}= 27^{2n}\equiv 1 \pmod 7$$

ដូច្នេះ $I_n\equiv 1+9+25 = 35\equiv 0 \pmod 7$ មានន័យថា 7 ជាតួចែករបស់គ្រប់ I_n ។ ដូច្នេះ$PGCD$ របស់ចំនួនអស់នេះស្មើនឹង 7 ។

▲ របៀបទី២

យើងមាន

$$I_0=1+9+25=35=7\times 5$$
$$I_1=8+9^4+25^4$$

យើងមាន

$$8 = 5 + 3;$$
$$9^4 = (10-1)^4 = 10^4 - \binom{4}{3}10^3 + \cdots + 1 = 5k + 1$$

ដែល k ជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះ $I_1 = 8 + 9^4 + 25^4 = 25^4 + 5(k+1) + 4$ ចែកនឹង 5 សល់សំណល់ $3 + 1 = 4$ ។

ចំពោះ $n \geq 1$ យើងមាន

$$8^n = (7+1)^n = 7m + 1$$
$$9^{3n+1} = (7+2)^{3n+1} = 7p + 2^{3n+1} = 7p + 2.8^n = 7p + 2(7m+1)$$
$$25^{3n+1} = (7 \times 3 + 4)^{3n+1} = 7r + 4^{3n+1} = 7r + 4.8^{2n} = 7r + 4(7s+1)$$

ដែល m, p, q, r, s ជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះ

$$I_n = 21m + 7p + 7r + 28s + 7$$

ចែកដាច់នឹង 7 ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ដូច្នេះ យើងមាន I_0 ចែកដាច់នឹង 5 និងនឹង 7 តែ I_1 ចែកមិនដាច់នឹង 5 និង I_n ចែកដាច់នឹង 7 ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ដូច្នេះ $\gcd(I_0, I_1, I_2, \ldots, I_{1999}) = 7$ ។

238. ▲ យើងមាន

$$A + B + C = 6n^2 + 6m^2 + 6mn + 5$$

ដូច្នេះ 2; 3 មិនមែនជាតួចែករួមរបស់ A, B, C ទេ ។

តួចែករួម d របស់ A, B, C ក៏ជាតួចែករបស់ $D = 2A - B, E = 3A - C, F = 5E - 7D, G = 5D - E, H = 18A - 2F - 3E, I = nG - mF$ និង $126 = 18nI - 5H + 11F = 2.3^2.7$ ដែរ ។ ដោយ 2; 3 មិនមែនជាតួចែករួម នោះ $d = 7$ ។ យើងពិនិត្យករណី $n = 7a; 7a+1; 7a+2; ..; 7a+6$ ។

បើ $n = 7a$ នោះ

$$A \equiv 3m^2 + 2 \pmod 7;$$
$$B \equiv m^2 + 2 \pmod 7;$$
$$C \equiv 2m^2 + 1 \pmod 7 \Rightarrow B + C - A \equiv 1 \pmod 7$$

មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ព្រោះ តាមត្រូវ $B + C - A \equiv 0 \pmod 7$ ដោយសារ 7 ជាតួចែករួម ។

បើ $n = 7a + 1$ នោះ

$A \equiv 3m^2 + 2m + 3 \pmod 7$;
$B \equiv m^2 + 3m + 4 \pmod 7$;
$C \equiv 2m^2 + m + 4 \pmod 7 \Rightarrow B + C - A \equiv 2m + 5 \pmod 7$
$\Rightarrow m \equiv 1 \pmod 7$

មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ព្រោះ $A \equiv 3 + 2 + 3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$ បើត្រូវត្រូវស្មើ $\equiv 0$ ។

បើ $n = 7a + 2$ នោះ

$A \equiv 3m^2 + 4m + 6 \pmod 7$;
$B \equiv m^2 + 6m + 3 \pmod 7$;
$C \equiv 2m^2 + 2m + 6 \pmod 7 \Rightarrow B + C - A \equiv 4m + 3 \pmod 7$
$\Rightarrow m \equiv 1 \pmod 7$

មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

បើ $n = 7a + 3$ នោះ

$A \equiv 3m^2 + 6m + 4 \pmod 7$;
$B \equiv m^2 + 9m + 6 \pmod 7$;
$C \equiv 2m^2 + 3m \pmod 7 \Rightarrow B + C - A \equiv 6m + 2 \pmod 7$
$\Rightarrow m \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow A \equiv 28 \equiv 0 \pmod 7; \ldots$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបាន $n = 7a + 4; m = 7b + 5$ មួយករណីទៀត ។ ដូច្នេះ

$$(m, n) = \{(7a + 2; 7b + 3); (7a + 5; 7b + 4)\}$$

បំបែកជាកត្តាបឋម

239. ▲យើងមាន $n = (2^2.3.5.7)^4$ ។ ដូច្នេះ d ជាតួចែករបស់ n លុះត្រាតែ d អាចសរសេរជារាង $2^a 3^b 5^c 7^d$ បាន ដែល $0 \le a \le 8, 0 \le b \le 4, 0 \le c \le 4$ និង $0 \le d \le 4$ ។ ដូច្នេះ យើងមាន a, b, c និង d រៀងគ្នា ចំនួន $9, 5, 5$ និង 5 ផ្សេងគ្នា ។ ដូច្នេះ n មានតួចែកវិជ្ជមានចំនួន $9(5)(5)(5) = 1125$ ។ បើ $d \ne 420^2$ នោះ $\frac{420^4}{d}$ ក៏ជាតួចែករបស់ n ដែរ ហើយផលគុណនៃតួចែកទាំងពីរស្មើ 420^4 ។ ដូច្នេះ យើងអាចចែកតួចែកទាំង 1125

របស់ n លើកលែងតែ 420^2 ចេញ ជា 562គូតួចែក ដែលមានរាង $\left(d,\frac{n}{d}\right)$ ហើយផលគុណនៃតួចែកពីរនេះ ស្មើ 420^4 ។ ដូច្នេះចម្លើយគឺ $(420^4)^{562}\,(420^2) = 420^{2250}$ ។

240. ▲តួចែកគូរបស់ 10 000 មានរាង 2^a5^b ដែល a និង b ជាចំនួនគត់ ដែល $1 \le a \le 5$ និង $0 \le b \le 5$ ។ ផលបូកតួចែកគូវិជ្ជមានរបស់ 10 000 ស្មើនឹង

$$(2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+5+5^2+5^3+5^4+5^5) = 62.\frac{5^6-1}{5-1} = 242172$$

241. ▲យើងមាន $10^{99} = 2^{99}5^{99}$ ។ ដូច្នេះតួចែករបស់ 10^{99} មានរាង 2^a5^b ដែល a និង b ជាចំនួនគត់ដែល $0 \le a,b \le 99$ ។ ចំពោះ a,b នីមួយៗ យើងមានជម្រើសចំនួន 100 យ៉ាង ដូច្នេះ 10^{99} មានតួចែកគត់វិជ្ជមានចំនួន $100(100) = 10^4$ ។ ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនេះ បណ្តាពហុគុណនៃ $10^{88} = 2^{88}5^{88}$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $88 \le a,b \le 99$ ។ ដូច្នេះយើងមានជម្រើស a,b ចំនួន12 បែប ដូច្នេះ មាន $12(12) = 144$បែប ក្នុងចំណោមតួចែកចំនួន 10^4នៃ 10^{99} ដែលជាពហុគុណនៃ 10^{88} ។ ដូច្នេះប្រូបាបីលីតេដែលចង់បានគឺ $\frac{144}{10^4} = \frac{9}{625}$ ។

242. ▲ តាង $\sigma(n)$ ជាផលបូកតួចែកវិជ្ជមានទាំងអស់របស់ n ។

1) បង្ហាញថា បើ $N = 2^{p-1}(2^p-1)$ នោះ $\sigma(N) - N = N$ ។

សន្មតថា $p, 2^p-1$ ជាចំនួនបឋម នោះ $\sigma(2^p-1) = 1 + 2^p - 1$ ។ ដោយ $\text{PGCD}(2^{p-1}, 2^p-1) = 1$ នោះ

$$\begin{aligned}\sigma\big(2^{p-1}(2^p-1)\big) &= \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p-1)\\ &= (1+2+2^2+\cdots+2^{p-1})(1+2^p-1) = (2^p-1)2(2^{p-1})\end{aligned}$$

ដូច្នេះ ផលបូកតួចែករបស់ $2^{p-1}(2^p-1)$ ក្រៅពីខ្លួនវា ស្មើនឹង

$$\sigma\big(2^{p-1}(2^p-1)\big) - 2^{p-1}(2^p-1) = 2^{p-1}(2^p-1)$$

ដូច្នេះ $2^{p-1}(2^p-1)$ ជាចំនួនសម្បូណ៌លេខ ។

2) បង្ហាញថា បើ $\sigma(N) - N = N$ នោះ $N = 2^{p-1}(2^p-1)$ ។

ច្រាសមកវិញ តាង n ជាចំនួនគត់គូ ។ តាង $n = 2^s m, m$ សេស នោះ

$$\sigma(n) = \sigma(2^s)\sigma(m) = (2^{s+1}-1)\sigma(m)$$

ដោយ n ជាសម្បូណ៌លេខ នោះ $\sigma(n) = 2n = 2^{s+1}m$ ។ ដូច្នេះ $(2^{s+1}-1)\sigma(m) = 2^{s+1}m \Rightarrow 2^{s+1}|\sigma(m) \Rightarrow \sigma(m) = 2^{s+1}b$ ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ b ណាមួយ ។ ដូច្នេះ $(2^{s+1}-1)b = m \Rightarrow b|m, b \neq m$ ។

យើងចង់បង្ហាញថា $b = 1$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា

$$b + m = b + (2^{s+1}-1)b = 2^{s+1}b = \sigma(m)$$

បើ $b \neq 1$ នោះ មានយ៉ាងតិចតួចែករបស់ m ចំនួន៣ គាងដោយ $1, b, m$ ហើយនាំឱ្យ $\sigma(m) \geq 1 + b + m$ ផ្ទុយពីការពិតដែល $\sigma(m) = b + m$ ។ ដូច្នេះ $b = 1$ ។

យើងទាញបាន $m = (2^{s+1}-1)b = 2^{s+1}-1$ និង $\sigma(m) = m + 1$ ដូច្នេះ m ត្រូវតែជាចំនួនបឋម ។ បើ $s+1$ មិនមែនជាចំនួនបឋម នោះ $s + 1 = kl$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} 2^{s+1} - 1 = \left(2^k\right)^l - 1 &= \left(2^k - 1\right)\left(1 + 2^k + \cdots + 2^{k(l-1)}\right) \\ &= \left(1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}\right)\left(1 + 2^k + \cdots + 2^{k(l-1)}\right) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $m = 2^{s+1} - 1$ មិនអាចជាចំនួនបឋមទេ ។ ដូច្នេះ $s + 1 = p$ ត្រូវតែជាចំនួនបឋម $\Rightarrow p$ និង $2^p - 1$ ជាចំនួនបឋម ហើយ $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ ។

243. ▲ យើងពិនិត្យបណ្តាចំនួនដែលមានរាង $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$ ។ យើងមិនយក $n = 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+5$ ទេ ព្រោះវា $n + 1 = 6k+2, 6k+3,\ 6k+4, 6k+6$ វាមិនមែនជាចំនួនបឋម ។ យើងមិនយក $n = 6k+4$ ទេព្រោះ $n - 1 = 6k+3$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។ ដូច្នេះ n ត្រូវមានរាង $6k$ ។ យើងពិនិត្យតួចែកខ្លះរបស់$6k$ គឺ $1, k, 2k, 3k, 6k$ ។ បើ $k > 1$ នោះផលបូកតួចែកទាំងនេះស្មើនឹង $1 + k + 2k + 3k + 6k = 12k + 1 > 2n = 12k$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ ដូច្នេះ $k = 1$ និង $n = 6$ ។

ដូច្នេះ $n = 6$ ជាសម្បូណ៌លេខតែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ។

244. ▲ យើងមាន

$$2010^2 = 2^2.3^2.5^2.67^2$$

ដូច្នេះយើងអាចបង្កើតបានចំនួនតួចែកវិជ្ជមានទាំងអស់ចំនួន

$$3.3.3.3 = 3^4$$

2^0	3^0	5^0	67^0
2^1	3^1	5^1	67^1
2^2	3^2	5^2	67^2
3 ករណី	3 ករណី	3 ករណី	3 ករណី

(ឧទាហរណ៍ $2^0.3^0.5^0.67^0 = 1;\ 2^0.3^0.5^0.67^1 = 67, ...$)

តួចែកការេមានចំនួន

$$2.2.2.2 = 2^4$$

2^0	3^0	5^0	67^0
2^2	3^2	5^2	67^2
2 ករណី	2 ករណី	2 ករណី	2 ករណី

(ឧទាហរណ៍ $2^2.3^0.5^0.67^0 = 4;\ 2^2.3^2.5^0.67^0 = 36, ...$ ករណីតួចែកដូចជា $2^2.3^1.5^0.67^0 = 12$ មិនរាប់ចូលព្រោះមិនមែនជាចំនួនការេ) ។ ដើម្បីឱ្យតួចែកជាចំនួនការេ ទាល់តែស្វ័យគុណរបស់កត្តាបឋមនីមួយៗជាលេខសូន្យឬលេខគូ ។

ការចាប់យកចំនួនពីរចេញពីចំនួនទាំងអស់ 3^4 មាន $3^4(3^4-1)$ ករណី ។

ការចាប់បានចំនួនទីមួយជាតួចែកការេ និងចំនួនទីពីរជាតួចែកមិនការេ មានចំនួន $2^4(3^4-2^4)$ ករណី ។

ការចាប់បានចំនួនទីមួយជាតួចែកមិនការេ និងចំនួនទីពីរជាតួចែកការេ មានចំនួន $(3^4-2^4)2^4$ ករណី ។

ដូច្នេះការចាប់បានតួចែកមួយមិនការេ និងតួចែកមួយទៀតការេ មានចំនួន $2.2^4(3^4-2^4)$ ករណី ។

ដូច្នេះប្រូបាប

$$p = \frac{2.2^4(3^4 - 2^4)}{3^4(3^4 - 1)} = \frac{26}{81} = \frac{m}{n}$$
$$\Rightarrow m + n = 26 + 81 = 107$$

245. ▲ តាង $n = p^r q^s$ ដែល p និង q ជាចំនួនបឋមពីរផ្សេងគ្នា ។ យើងមាន $n^2 = p^{2r} q^{2s}$ ។ ដូច្នេះ n^2 មានតួចែកចំនួន $(2r+1)(2s+1)$ ដែលតួចែកទាំងនោះមាន ៖ $p^0q^0, p^1q^0, \dots, p^{2r}q^0, p^0q^1, p^1q^1, \dots$ ។ យើងដឹងថា បើ d ជាតួចែកចែករបស់ n^2 នោះ $d' = \frac{n^2}{d}$ ក៏ជាតួចែករបស់ n^2 ដែរ ។ បើ $d < n$ នោះ $d' > n$ ។ យើងទាញបានថា ចំនួនតួចែកតូចជាង n ស្មើនឹងចំនួនតួចែកធំជាង n ដូច្នេះតួចែកតូចជាង n មានចំនួន

$$\frac{(2r+1)(2s+1) - 1}{2} = 2rs + r + s$$

ដោយ $n = p^r q^s$ នោះ n មានតួចែកវិជ្ជមានចំនួន $(r+1)(s+1)$ ដោយរាប់បញ្ចូលទាំង n ខ្លួនវា ។ ដោយមិនគិតខ្លួនវាចូល ចំនួនតួចែករបស់ n មានចំនួន $(r+1)(s+1) - 1$ ។ យើងដឹងថា គ្រប់តួចែករបស់ n សុទ្ធតែជាតួចែករបស់ n^2 ។ ដូច្នេះតួចែករបស់ n^2 ដែលតូចជាង n ហើយមិនមែនជាតួចែករបស់ n មានចំនួន

$$2rs + r + s - [(r+1)(s+1) - 1] = rs$$

ជំនួស $r = 31$ និង $s = 19$ ចូល យើងទាញបាន $rs = 589$ ។

246. ▲ បើ N មានតួចែកបឋមចំនួនបួនផ្សេងគ្នា នោះចំនួនតួចែកសរុបរបស់ N ស្មើនឹង $1 + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ ដែលក្នុងនេះ 1 ជា $d_1 = 1$ ។ ដោយ N មានតួចែកតែ 16 ដូច្នេះ N មានតួចែកបឋមច្រើនមិនលើសពីបួនទេ ។

បើ $d > 2$ ជាចំនួនគូ ជាតួចែករបស់ N នោះ 2 ក៏ជាតួចែកមួយរបស់ N ដែរ ដូច្នេះ $d_2 = 2$ ព្រោះ d_2 តូចជាងគេហើយធំជាង 1 ។

បើគ្រប់តួចែករបស់ N ជាចំនួនសេស នោះ $d_k = (d_2 + d_4)d_6$ ជាចំនួនគូ ផ្ទុយការសន្មត ។ ដូច្នេះ $d_2 = 2$ ។

ដោយ $d_k = (d_2 + d_4)d_6 \Rightarrow d_k > d_6 \Rightarrow k > 6 \Rightarrow d_5 = k > 6 \Rightarrow d_5 \geq 7$ ។ $(d_2 + d_4)$ ជាតួចែករបស់ d_k ដូច្នេះក៏ជាតួចែករបស់ N ដែរ ។ បើ $(d_2 + d_4) < d_5$ នោះយើងមានតួចែករបស់ N ដែល $d_4 < d_2 + d_4 < d_5$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ដែលគ្មានតួចែកផ្សេងទៀតចន្លោះ d_4 និង d_5 ។ ដូច្នេះ $(d_2 + d_4) \geq d_5$ ។ យើងទាញបាន

$$d_2 + d_4 = 2 + d_4 \geq d_5 \geq 7$$
$$d_4 \geq 5$$

យើងមាន $d_4 < d_5 \Rightarrow d_4 + 1 \leq d_5 \leq d_4 + 2 \Rightarrow d_5 = d_4 + 1$ ឬ $d_5 = d_4 + 2$ ។

ករណី $d_5 = d_4 + 1$ យើងទាញបាន $d_k = (d_5 + 1)d_6$ ដូច្នេះ $(d_5 + 1)$ ជាតួចែករបស់ d_k ក៏ជាតួចែកមួយរបស់ N ដែរ ។ ដោយ $d_5 < d_6 \Leftrightarrow d_5 < d_5 + 1 \leq d_6$ ហើយតួចែករបស់ N មាន $\ldots < d_4 < d_5 < d_6 < d_7 < \cdots$ នោះ $d_6 = d_5 + 1$ ។ យើងទាញបាន $d_6 = d_4 + 2$ ។ ដូច្នេះ $d_4, d_5 = d_4 + 1, d_6 = d_4 + 2$ ជាចំនួនគត់បីបន្តបន្ទាប់គ្នា ហើយជាតួចែករបស់ N ។ ត្រូវតែមានមួយក្នុងចំណោមតួចែកអស់នេះដែលចែកដាច់នឹង 3 ។ ដូច្នេះ 3 ក៏ជាតួចែករបស់ N ដែរ ។ ដូច្នេះ $d_3 = 3$ ។ ដោយ $d_2 = 2$ និង $d_3 = 3$ ជាតួចែករបស់ N នោះ $6 = 2.3$ ក៏ជាតួចែករបស់ N ដែរ ។ ដោយ $d_6 > d_5 \geq 7$ នោះមានតែ $d_4 = 6 \Rightarrow d_5 = 7; d_6 = 8 = 4.2$ នោះ 4 ក៏ជាតួចែករបស់ N ដែរ ដូច្នេះ $d_4 = 4 \neq 6$ ផ្ទុយពីការសន្មត ។

ករណី $d_5 = d_4 + 2$

i) ករណី $4|N$ ។ ដោយ $d_4 \geq 5$ នោះ $d_3 = 4 \Rightarrow 8|N$ ។ ដោយ $d_6 \geq 8$ នោះ $d_4 = 8;$ ឬ $d_5 = 8$ ឬ $d_6 = 8$ ។

បើ $d_4 = 8$ នោះ $d_5 = 10 \Rightarrow 5|N \Rightarrow d_4 = 5 \neq 8$ ខុស ។

បើ $d_5 = 8$ នោះ $d_4 = 6 \Rightarrow 3|N \Rightarrow d_3 = 3 \neq 4$ ខុស ។

បើ $d_6 = 8$ នោះ $d_5 = 7; d_4 = 5 \Rightarrow 10|N$ ។ យើងមាន $d_k = (d_2 + d_4)d_6\,; k = d_5 = 7 \Rightarrow d_7 = (d_2 + d_4)d_6 \Leftrightarrow d_7 = (2+5)8 = 56 > 10$ ផ្ទុយនឹង $10|N$ ។

ដូច្នេះ 4 មិនមែនជាតួចែករបស់ N ទេ ។

ii) ករណី $3|N$ យើងទាញបាន $d_3 = 3$ ។ ដូច្នេះ $6|N$ ។ ដោយ $d_5 \geq 7$ នោះ $d_4 = 6 \Rightarrow d_5 = 8 \Rightarrow 4|N$ ខុស ។

ដូច្នេះ 3 និង 4 ចែក N មិនដាច់ $\Rightarrow d_3 \geq 5$ និង $d_4 \geq 7$ (ព្រោះ 6 មិនមែនជាតួចែក) ។

ដោយ N និង $2 + d_4$ មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 ហើយ $d_2 = 2$ នោះយើងទាញបាន $2 + d_4$ ជាចំនួនសេស ។ ដោយ $2 + d_4$ និង d_4 ចែកមិនដាច់នឹង 3 យើងទាញបាន $d_4 = 3k + 2$ ដែល k ជាចំនួនគត់ ។ ដោយ d_4 ជាចំនួនសេស នោះ $d_4 = 6l + 5$ ដែល l ជាចំនួនគត់ ។ ដោយ $d_5 \leq 16$ យើងទាញបាន $d_4 + 2 \leq 16 \Rightarrow d_4 \leq 14 \Rightarrow 7 \leq d_4 \leq 16 \Rightarrow 7 \leq 6l + 5 \leq 16 \Rightarrow 0{,}33 \leq l \leq 1{,}83 \Rightarrow l = 1 \Rightarrow d_4 = 11 \Rightarrow d_5 = 13$ ។

ដោយ $2.d_3$ ជាតួចែករបស់ N ហើយធំជាងឬស្មើ $d_4 = 11 \Rightarrow d_3 \geq 5{,}5 \Rightarrow d_3 \geq 6$ ។ ជាងនេះទៅទៀត $d_3 < d_4 = 11 \Rightarrow d_3 = \{7; 10\}$ ។ ដោយ d_3 មិនអាចស្មើ 10 ទេព្រោះបើមិនអញ្ចឹង $5 < d_3$ ក៏ជាតួចែករបស់ N ដែរ ។ ដូច្នេះ $d_3 = 7$ ។

យើងទាញបាន $d_1 = 1; d_2 = 2; d_3 = 7; d_4 = 11; d_5 = 13$ ។ ដូច្នេះ $N = 2.7.11.13 = 2002$ ។

តួចែកផ្សេងទៀតមាន $d_6 = 14; d_7 = 22; d_8 = 26; d_9 = 77; d_{10} = 91; \ldots$ ។

247. ▲ បើប្រភាគមួយបង្រួមបាន នោះចម្រាសរបស់ប្រភាគនោះក៏បង្រួមបានដែរ ។ ច្រាសមកវិញ បើចម្រាសរបស់ប្រភាគមួយបង្រួមបាន នោះប្រភាគនោះក៏បង្រួមបានដែរ ។ ដូច្នេះ យើងនឹងបង្ហាញថា ប្រភាគ

$$\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}=a+\frac{a^2+1}{a^3+2a}$$

ប្រភាគនេះបង្រួមបាន បើ $\frac{a^2+1}{a^3+2a}$ បង្រួមបាន ។ $\frac{a^2+1}{a^3+2a}$ បង្រួមបាន បើចម្រាសរបស់វាអាចបង្រួមបាន ។ យើងមាន

$$\frac{a^3+2a}{a^2+1}=a+\frac{a}{a^2+1}$$

ប្រភាគក្រោយនេះ បង្រួមបាន បើ $\frac{a}{a^2+1}$ អាចបង្រួមបាន ។ $\frac{a}{a^2+1}$ អាចបង្រួមបាន បើ $\frac{a^2+1}{a}$ គេអាចបង្រួមបានដែរ ។ យើងមាន

$$\frac{a^2+1}{a}=a+\frac{1}{a}$$

មិនអាចបង្រួមបាន ព្រោះ $1/a$ គេមិនអាចបង្រួមបាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a ។

248. ▲ តាង n ជាចំនួនដែលត្រូវរក មានលេខបួនខ្ទង់ ។

$1°$ បើ n មានតួចែកបឋមចំនួន 4 នោះ $n \geq 2^{14}.3.5.7 > 9999$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែល n មានតែ4 ខ្ទង់ ។ (ក្នុងនេះ យើងយក $2^{14}.3.5.7$ មកនិយាយព្រោះវាជាតួចែកបឋមដែលតូចបំផុត ហើយលេខ 14 នោះ គឺមកពីលក្ខខណ្ឌ $2+3+5+7=14+1+1+1$ ។ យើងយកស្វ័យគុណ 1 លើ $3; 5; 7$ ដើម្បីឱ្យបានផលគុណតូចបំផុត ។)

$2°$ បើ n មានតួចែកបឋមចំនួន 3 ។ បើតួចែកបឋមទាំងនោះ មានមួយធំជាង 5 នោះយើងមាន $n \geq 2^{10}.3.7 > 9999$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ ដូច្នេះតួចែកបឋមអស់នោះត្រូវតែតូចជាងឬស្មើ 5 ។ យើងមាន $n=2^{\alpha_1}.3^{\alpha_2}.5^{\alpha_3}$ និង $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2+3+5=10$ ។ យើងមាន

$$2^8.3.5=3840;$$
$$2^7.3^2.5=5760;$$
$$2^6.3^3.5=8640;$$
$$2^7.3.5^2=9600;$$

$$2^6.3^2.5^2 = 14440 > 9999 \text{ មិនយក}$$

3° បើ n មានតួចែកបឋមចំនួន 2 ។ បើតួចែកបឋមនិមួយៗសុទ្ធតែធំជាង 2 នោះ $n \geq 3^7.5^1 = 10935 > 9999$ ។ដូច្នេះត្រូវមានតួចែកបឋមមួយដែលស្មើ 2 ។ បើតួចែកបឋមមួយទៀតស្មើ 11 នោះ $n \geq 2^{12}.11 > 9999$ ។ ដូច្នេះតួចែកបឋមមួយទៀតត្រូវតូចជាងឬស្មើ 7 ។ យើងមាន

$$2^4.5^3 = 2000;\ \ 2^3.5^4 = 5000; 2^8.7 = 1792; 2^7.7^2 = 6272$$

4° បើ n មានតួចែកបឋមតែមួយ នោះ $5^5 = 3125$ ។

ដូច្នេះចំនួនដែលចង់បានមាន

$\{1792; 2000; 3125; 3840; 5000; 5760; 6272; 8640; 9600\}$ ។

ផ្នែកគត់

249. ▲ យើងដឹងថា $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 0$ ។ ព្រោះ

$$\begin{aligned}\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2} &\Leftrightarrow 2n+1+2\sqrt{n^2+n}<4n+2\\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{n^2+n}<2n+1\\ &\Leftrightarrow 4(n^2+n)<4n^2+4n+1\end{aligned}$$

ពិត ។

បន្ទាប់មកទៀតយើងនឹងបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ k ដែល $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<k\leq\sqrt{4n+2}$ ទេ ។

លើកវិសមភាពជាការេ $\Rightarrow 2n+1+2\sqrt{n^2+n}<k^2\leq 4n+2$

យើងដឹងថា $4n+1<2n+1+2\sqrt{n^2+n}$ ដូច្នេះ $4n+1<k^2\leq 4n+2$ ។

ដោយសារ k ជាចំនួនគត់ ដូច្នេះ $k^2=4n+2$ ។ តែយើងដឹងថា $4n+2$ មិនអាចជាការេនៃចំនួនគត់បានទេ ។ ព្រោះ បើ $k=2m$ នោះ $k^2\equiv 0 \pmod 4$ ។ តែបើ $k=2m+1$ នោះ $k^2\equiv 1 \pmod 4$ ។ តែ $k^2=4n+2\equiv 2 \pmod 4$ មានន័យថា k^2 មិនអាចស្មើ $4n+2$ ទេ ។ ដូច្នេះ k មិនអាចជាចំនួនគត់បានទេ ។

ដូច្នេះ $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor=\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$ ពិត ។

250. ▲ អនុគមន៍ $f(x)=1/\sqrt{x}$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។ ដូច្នេះ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន k និង $x\in[k,k+1]$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}}\leq\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}}\leq\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}\leq\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\sum_{k=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}} < \int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}} < \sum_{k=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

យើងមាន

$$\int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 1998;\ \sum_{k=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}} = -1+\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}},\ \sum_{k=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{10^3}$$

$$\Rightarrow\ -1+\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}} < 1998 < \sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{10^3}$$

$$\Leftrightarrow 1998+\frac{1}{10^3} < \sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}} < 1999$$

ដូច្នេះ

$$\left\lfloor\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}\right\rfloor = 1998$$

251. ▲ យើងមាន

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n = 2\sum_{0\le k\le\frac{n}{2}}2^k\binom{n}{2k} = 2N$$

ជាចំនួនគត់គូ ។

ដោយ $-1 < 1-\sqrt{2} < 0$ នោះ

- ករណី n ជាចំនួនសេស នោះ

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n-1 < \left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n < \left(1+\sqrt{2}\right)^n$$
$$\Rightarrow\ \left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n = \left\lfloor\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right\rfloor$$
$$\Rightarrow\ \left\lfloor\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right\rfloor = 2N$$

ជាចំនួនគត់គូ

- ករណី n ជាចំនួនគូ នោះ

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n = \left\lfloor\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right\rfloor+1$$
$$\Rightarrow\ \left\lfloor\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right\rfloor = 2N-1$$

ជាចំនួនសេស ។

ដូច្នេះមានន័យថា ចំពោះ $n = 1,2,3 \dots$ នោះ $\left\lfloor (1+\sqrt{2})^n \right\rfloor$ មានតម្លៃសេស,គូ,សេស,... ឆ្លាស់គ្នារហូត ។

252. ▲ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{6}{7}n < k < \frac{7}{8}n$$

ដើម្បីឱ្យមាន k តែមួយគត់ទាល់តែ $\frac{7}{8}n - \frac{6}{7}n \leq 2 \implies n = 112$ ។ ចំពោះ $n = 112$ យើងទាញបាន $96 < k < 98$ ដូច្នេះ មានតែ $k = 97$ មួយគត់ ។

253. ▲ ដោយ $a > 1$ នោះ $0 < a^{-1} < 1 \implies \{a^{-1}\} = a^{-1}$ ។ ដោយ $2 < a^2 < 3$ នោះ $\lfloor a^2 \rfloor = 2$ ។ ដូច្នេះ $\{a^2\} = a^2 - \lfloor a^2 \rfloor = a^2 - 2$ ។ ដូច្នេះ $\{a^{-1}\} = \{a^2\} \implies$ $a^{-1} = a^2 - 2 \implies a^3 - 2a - 1 = 0$ ។ ដូច្នេះ

$$(a+1)(a^2 - a - 1) = 0$$

ដែល មានឫសវិជ្ជមានតែមួយគត់គឺ $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះតម្លៃ a នេះ យើងមាន $a^2 = a + 1$ និង $a^3 = 2a + 1$ ។ យើងទាញបាន

$$a^6 = 8a + 5, a^{12} = 144a + 89, a^{13} = 233a + 144$$
$$\implies a^{12} - 144a^{-1} = \frac{a^{13} - 144}{a} = 233$$

254. ▲ យើងមាន

$$11111,11^2 = 123456765,4321 < 123456789 < 123456789,87654321 = 11111,1111^2$$

ដូច្នេះ

$$\lfloor \sqrt{123456789} \rfloor = 11111 \implies \frac{1}{10} < 0,11 < \{\sqrt{123456789}\} < 0,1111 < \frac{1}{9}$$

កណ្តាលនៃ $\frac{1}{10}$ និង $\frac{1}{9}$ គឺ $\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9}\right)/2 = 0,105 < 0,11$ ។ ដូច្នេះ $\frac{1}{9}$ នៅជិត $\{\sqrt{123456789}\}$ ជាង ។ ដូច្នេះ $n = 9$ ។

255. ▲ តាង

$$f(t) = 3\lfloor 2t \rfloor - 2\lfloor 3t \rfloor$$
$$f(t+1) = 3\lfloor 2t+2 \rfloor - 2\lfloor 3t+3 \rfloor = 3\lfloor 2t \rfloor + 6 - 2(\lfloor 3t \rfloor + 6) = f(t)$$

ដូច្នេះយើងនឹងគណនាតម្លៃរបស់ $f(t)$ តែក្នុងករណី $t \in [0;1)$ ។

យើងមាន

$$[0;1)=\left[0;\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)\cup\left[\frac{2}{3};1\right)$$

បើ $t\in\left[0;\frac{1}{3}\right)$ នោះ $\lfloor 2t\rfloor=\lfloor 3t\rfloor=0$ ដូច្នេះ $f(t)=0$

បើ $t\in\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$ នោះ $\lfloor 2t\rfloor=0;\ \lfloor 3t\rfloor=1$ ដូច្នេះ $f(t)=-2$

បើ $t\in\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$ នោះ $\lfloor 2t\rfloor=1;\ \lfloor 3t\rfloor=1$ ដូច្នេះ $f(t)=1$

បើ $t\in\left[\frac{2}{3};1\right)$ នោះ $\lfloor 2t\rfloor=1;\ \lfloor 3t\rfloor=2$ ដូច្នេះ $f(t)=-1$

ដូច្នេះ

$$P(x,y)=(3x-2y)(3x-2y-1)(3x-2y+1)(3x-2y+2)K(x,y)$$

256. ▲ យើងឃើញថា នៅក្នុងផលបូកខាងលើ ចំនួនតួដែលខុសពី 0 មានចំនួនកំណត់ គឺថា $\left\lfloor\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right\rfloor$ ស្មើសូន្យពេលដែល $2^{k+1}>n+2^k \Rightarrow 2^k>n$ ។

សំណើ ៖ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេមាន $\lfloor 2x\rfloor=\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖ បើ $n\le x<n+\frac{1}{2}$ នោះ $\lfloor x\rfloor=n=\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$ និង $\lfloor 2x\rfloor=2n$ ។ បើ $n+\frac{1}{2}\le x<n+1$ នោះ $\lfloor x\rfloor=n;\ \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=n+1$ និង $\lfloor 2x\rfloor=n+1$ ។

ដូច្នេះ

$$\left\lfloor\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n}{2^k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{2^{k+1}}\right\rfloor$$

$$\Rightarrow \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+4}{2}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right\rfloor+\cdots$$
$$=\left(\lfloor n\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor\right)+\left(\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{8}\right\rfloor\right)+\cdots=\lfloor n\rfloor$$

257. ▲ បើ x ជាចំនួនគត់នោះ យើងឃើញថា សមភាពពិត ។ យើងសន្មតថា x មិនមែនជាចំនួនគត់ មានន័យថា $0<\{x\}<1$ ។ យក $i=\lfloor n-n\{x\}\rfloor$ ដូច្នេះ

$$1\le i\le n-1;\{x\}+\frac{i-1}{n}<1;\{x\}+\frac{i}{n}\ge 1\quad(*)$$
$$\Rightarrow\frac{n-i}{n}\le\{x\}<\frac{n-i+1}{n}\Rightarrow(n-i)\le n\{x\}<n-i+1$$
$$\Rightarrow n\lfloor x\rfloor+n-i\le n\lfloor x\rfloor+n\{x\}=nx<n\lfloor x\rfloor+n-i+1$$
$$\Rightarrow\ \lfloor nx\rfloor=n\lfloor x\rfloor+n-i\qquad(**)$$

តាម (*) យើងទាញបាន

$$\lfloor x\rfloor=\lfloor x\rfloor;\ \left\lfloor x+\frac{1}{n}\right\rfloor=\left\lfloor \lfloor x\rfloor+\{x\}+\frac{1}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor;\ldots;\ \left\lfloor x+\frac{i-1}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$$

$$\left\lfloor x+\frac{i}{n}\right\rfloor=\cdots=\left\lfloor x+\frac{n-1}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor+1$$

ដូច្នេះ

$$\lfloor x\rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{n}\right\rfloor+\left\lfloor x+\frac{2}{n}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor x+\frac{n-1}{n}\right\rfloor=i\lfloor x\rfloor+(n-i)(\lfloor x\rfloor+1)$$
$$=n\lfloor x\rfloor+n-i=\lfloor nx\rfloor$$

តាម (**) ។

258. ▲ តាង $f(x)=\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 4x\rfloor+\lfloor 6x\rfloor+\lfloor 8x\rfloor$ ។ យើងឃើញថា បើ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $f(x+n)=f(x)+20n$ ។ យើងទាញបានថា បើចំនួនគត់ k មួយអាចសរសេរជារាង $f(x_0)$ បានដែល x_0 ជាចំនួនគត់ នោះចំពោះ $n=1,2,3,\ldots$ គេអាចសរសេរ $k+20n$ ជារាងដែលចង់បាន បានដូចគ្នា មានន័យថា $k+20n=f(x_0)+20n=f(x_0+n)$ ។ ដោយហេតុនេះហើយ ជាដំបូងយើងគ្រាន់តែកំណត់ថាតើក្នុងចំណោម២០ចំនួនគត់ដំបូងមួយណាដែលអាចជាតម្លៃរបស់ $f(x)$ ចំពោះ $x\in(0;1]$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា ពេល x កើន តម្លៃរបស់ $f(x)$ ប្តូរជាតម្លៃថ្មីតែពេលណាដែល $2x,4x,6x$ ឬ $8x$ មានតម្លៃគត់ប៉ុណ្ណោះ ហើយពេលនោះតម្លៃរបស់ $f(x)$ កើនជាងមុន ។ ពេល x ប្រែប្រួលចន្លោះ $(0;1]$ កំណើន $f(x)$ បែបនេះ កើតមានតែពេលណាដែល x មានរាង m/n ដែល $1\le m\le n$ និង $n=2,4,6$ ឬ 8 ។ ប្រភាគបែបនេះមានចំនួន១២យ៉ាងគឺ

$$\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8},1$$

ត្រូវនឹង $f(x)$ មានតម្លៃ

$$1,2,4,5,6,13,\ldots,20$$

ដូច្នេះក្នុងចំនោម ២០ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូងមានតែចំនួន១២ប៉ុណ្ណោះដែលអាចសរសេរតាមរាងចង់បាន ។ ដោយ $1000=50.20$ ដូច្នេះមាន $50.12=600$ ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលអាចសរសេរជារាងចង់បាន ។

259. ▲ ផលបូកដែលឱ្យមាន $91-19+1=73$ តួ ដែលតួនីមួយៗ ស្មើនឹង $\lfloor r \rfloor$ រឺក៏ $\lfloor r \rfloor + 1$ ។ តែ $73.7 < 546 < 73.8$ ដូច្នេះមានន័យថា $\lfloor r \rfloor = 7$ ។

តាង k ជាចំនួនតួដែលស្មើ $\lfloor r \rfloor$ ដូច្នេះចំនួនតួដែលស្មើ $\lfloor r \rfloor + 1$ មាន $73-k$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} k\lfloor r \rfloor + (73-k)(\lfloor r \rfloor + 1) = 546 &\Rightarrow k\lfloor r \rfloor + 73\lfloor r \rfloor + 73 - k\lfloor r \rfloor - k = 546 \\ &\Rightarrow 73\lfloor r \rfloor - 473 = k \\ &\Rightarrow k \equiv -473 \pmod{73} \\ &\Rightarrow k \equiv 38 \pmod{73} \end{aligned}$$

ដោយ $k \le 73$ ដូច្នេះ $k = 38 \Rightarrow \lfloor r \rfloor = 7$ ។ ដូច្នេះ 38 តួដំបូងស្មើ 7 និង $73-38=35$ តួបន្ទាប់ស្មើ 8 ។ តួទី 38 គឺ $\left\lfloor r + \frac{56}{100} \right\rfloor = 7$ និង តួទី 39 គឺ $\left\lfloor r + \frac{57}{100} \right\rfloor = 8$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{gathered} r + \frac{56}{100} - 1 < 7 \le r + \frac{56}{100};\ r + \frac{57}{100} - 1 < 8 \le r + \frac{57}{100} \\ \Rightarrow 7{,}43 \le r < 7{,}44 \Rightarrow 743 \le 100r < 744 \Rightarrow \lfloor 100r \rfloor = 743 \end{gathered}$$

260. ▲ ចំពោះ $1 \le i \le 2005$ តាង

$$a_i = \left\lfloor \frac{i^2}{2005} \right\rfloor$$

ដោយ $44^2 = 1936 < 2005 < 2025 = 45^2$ នោះ $a_1 = a_2 = \cdots = a_{44} = 0$ ។

ចំពោះចំនួនគត់ m ដែល $m \ge 1002$ ដោយ

$$\frac{(m+1)^2}{2005} - \frac{m^2}{2005} = \frac{2m+1}{2005} \ge 1$$

នោះ $a_m < a_{m+1}$ ។ ដូច្នេះ $a_{1002}, a_{1003}, \dots, a_{2005}$ មានតម្លៃខុសៗគ្នា ។

ចំពោះចំនួនគត់ m ដែល $m < 1002$ ដោយ

$$\frac{(m+1)^2}{2005} - \frac{m^2}{2005} = \frac{2m+1}{2005} < 1$$

នោះ $a_{m+1} \le a_m + 1$ ។ ដោយដឹងថា ស្វីតនេះមិនមែនជាស្វីតថយ នោះមានន័យថា $a_m \le a_{m+1} \le a_m + 1$ ។ដូច្នេះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានទាំងអស់ដែលមានតម្លៃតូចជាង a_{1001} ជាតួនៃស្វីតនេះ ។

យើងមាន $a_{1001} = 499$ និង $a_{1002} = 500$ ។ ដូច្នេះចំនួនតួដែលមានតម្លៃខុសគ្នាគឺ $500 + 1004 = 1504$ (តម្លៃទាំងនោះគឺ $0, 1, \dots, 499, a_{1002}, a_{1003}, \dots, a_{2005}$) ។

261. ▲ យើងឃើញថា គ្មានតួណាមួយក្នុងចំណោម a_i ដែលចែកដាច់តួមួយទៀតទេ ព្រោះបើមិនអ៊ីចឹងទេ យើងនឹងមាន $PPCM \leq 2n$ ។ ដូច្នេះ $a_k = 2^{t_k} A_k$ ដែល A_k ជាចំនួនសេស ។ យើងឃើញថា A_k ខុសគ្នាទាំងអស់ ។ ដោយយើងមាន A_k ទាំងអស់ចំនួន n ដូច្នេះ សំណុំរបស់ A_k ជាសំណុំចំនួនគត់សេសវិជ្ជមាន ដែលតូចជាង $2n$ ។

ឥឡូវយើង យើងពិនិត្យ $a_1 = 2^{t_1} A_1$ ។ បើ $a_1 \leq \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$ នោះ $3a_1 = 2^{t_1} 3A_1 \leq 2n$ និង $3A_1 < 2n$ ។ ដូច្នេះ $3A_1$ ជាចំនួនសេសដែល $< 2n$ ដូច្នេះ $3A_1 = A_j$ ចំពោះតម្លៃ j ណាមួយ និង $a_j = 2^{t_j} 3A_1$ ។ ដូច្នេះ $PPCM(a_1, a_j) = 2^{t_1} 3A_1 = 3a_1 \leq 2n$ ឬក៏ $PPCM(a_1, a_j) = 2^{t_j} 3A_1 = a_j \leq 2n$ ។ ដូច្នេះវាផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ដែល $PPCM > 2n$ ។

262. ▲ តាមរូបមន្តទ្វេធា

$$
\begin{aligned}
\left(2+\sqrt{2}\right)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{n-i} \left(\sqrt{2}\right)^i \\
&= 2^n + \binom{n}{1} 2^{n-1}\left(\sqrt{2}\right) + \binom{n}{2} 2^{n-2}\left(\sqrt{2}\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{2}\right)^n \\
&= \left[2^n + \binom{n}{2} 2^{n-2}\left(\sqrt{2}\right)^2 + \cdots\right] \\
&\quad + \left[\binom{n}{1} 2^{n-1}\left(\sqrt{2}\right) + \binom{n}{3} 2^{n-3}\left(\sqrt{2}\right)^3 + \cdots\right] \\
&= \left[2^n + \binom{n}{2} 2^{n-2}(2) + \cdots\right] + \left[\binom{n}{i} 2^{n-1} + \binom{n}{3} 2^{n-3}(2) + \cdots\right]\sqrt{2} \\
&= a_n + b_n\sqrt{2} \\
\left(2-\sqrt{2}\right)^n &= a_n - b_n\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

ដែល a_n និង b_n ជាចំនួនគត់។ យើងទាញបាន $\left(2+\sqrt{2}\right)^n + \left(2-\sqrt{2}\right)^n = 2a_n$ ជាចំនួនគត់ ។

យើងមាន $0 < \left(2-\sqrt{2}\right)^n < 1$ និង $\left(2+\sqrt{2}\right)^n + \left(2-\sqrt{2}\right)^n - 1$ ជាចំនួនគត់ និង

$$\left(2+\sqrt{2}\right)^n - 1 < \left\lfloor \left(2+\sqrt{2}\right)^n \right\rfloor \leq \left(2+\sqrt{2}\right)^n$$

$$\left(2+\sqrt{2}\right)^n - 1 < \left(2+\sqrt{2}\right)^n + \left(2-\sqrt{2}\right)^n - 1 < \left(2+\sqrt{2}\right)^n$$

ដូច្នេះ

$$\lfloor(2+\sqrt{2})^n\rfloor = (2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n - 1$$

និង នាំឱ្យ

$$(2+\sqrt{2})^n - \lfloor(2+\sqrt{2})^n\rfloor = 1 - (2-\sqrt{2})^n$$

ដោយ $(2-\sqrt{2}) < 1$ នោះ ពេល n ចេះតែធំទៅៗ គេមាន $(2-\sqrt{2})^n$ ចេះតែតូចទៅៗ ។ ដូច្នេះ គេមាន n ធំចាប់ពីត្រឹមណាមួយទៅ ដែល $(2-\sqrt{2})^n < 0,000\,001$ ។ នៅពេលនោះ យើងទាញបាន

$$(2+\sqrt{2})^n - \lfloor(2+\sqrt{2})^n\rfloor = 1 - (2-\sqrt{2})^n > 0,999\,999$$

263. ▲ តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុន យើងមាន

$$(2+\sqrt{3})^n = 2^n + \binom{n}{1}2^{n-1}(\sqrt{3}) + \binom{n}{2}2^{n-2}(\sqrt{3})^2 + \cdots + (\sqrt{3})^n$$
$$(2-\sqrt{3})^n = 2^n - \binom{n}{1}2^{n-1}(\sqrt{3}) + \binom{n}{2}2^{n-2}(\sqrt{3})^2 - \cdots + (-1)^n(\sqrt{3})^n$$

ដូច្នេះ

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2\left(2^n + \binom{n}{2}2^{n-2}(\sqrt{3})^2 + \binom{n}{4}2^{n-4}(\sqrt{3})^4 + \cdots\right)$$
$$= 2\left(2^n + \binom{n}{2}2^{n-2}.3 + \binom{n}{4}2^{n-4}.3^2 + \cdots\right)$$

ដូច្នេះ $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ ជាចំនួនគត់គូ ។ យើងមាន

$$0 < (2-\sqrt{3})^n < 1 \Rightarrow -1 < (2-\sqrt{3})^n - 1 < 0$$
$$\Rightarrow (2+\sqrt{3})^n - 1 < (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1 < (2+\sqrt{3})^n$$

យើងមាន ចន្លោះ $(2+\sqrt{3})^n - 1$ និង $(2+\sqrt{3})^n$ មានតែចំនួនគត់មួយគត់គឺ $\lfloor(2+\sqrt{3})^n\rfloor$ ។ ដូច្នេះ

$$\lfloor(2+\sqrt{3})^n\rfloor = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1$$

ដោយ $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ ជាចំនួនគត់គូ ដូច្នេះ $\lfloor(2+\sqrt{3})^n\rfloor$ ជាចំនួនសេស ។

264. ▲ យើងមាន

$$(1+\sqrt{3})^n = 1 + \binom{n}{1}(\sqrt{3})^1 + \binom{n}{2}(\sqrt{3})^2 + \cdots + (\sqrt{3})^n$$
$$(1-\sqrt{3})^n = 1 - \binom{n}{1}(\sqrt{3})^1 + \binom{n}{2}(\sqrt{3})^2 - \cdots + (-1)^n(\sqrt{3})^n$$

ដូច្នេះ

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)^n=2\left(1+\binom{n}{2}\left(\sqrt{3}\right)^2+\cdots\right)=2\left(1+\binom{n}{2}3+\cdots\right)$$

ជាចំនួនគត់គូ ។

● បើ n ជាចំនួនគូ នោះ

$$0<\left(1-\sqrt{3}\right)^n<1$$
$$\Rightarrow\ -1<\left(1-\sqrt{3}\right)^n-1<0$$
$$\Rightarrow\ \left(1+\sqrt{3}\right)^n-1<\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)^n-1<\left(1+\sqrt{3}\right)^n$$

នោះចន្លោះ $\left(1+\sqrt{3}\right)^n-1$ និង $\left(1+\sqrt{3}\right)^n$ មានចំនួនគត់តែមួយគត់គឺ $\left\lfloor\left(1+\sqrt{3}\right)^n\right\rfloor$ ។ ដោយ $\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)^n-1$ ជាចំនួនគត់ ដូច្នេះ

$$\left\lfloor\left(1+\sqrt{3}\right)^n\right\rfloor=\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)^n-1$$

តាង $n=2k$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}\left\lfloor\left(1+\sqrt{3}\right)^{2k}\right\rfloor&=\left(1+\sqrt{3}\right)^{2k}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2k}-1\\&=\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^2\right]^k+\left[\left(1-\sqrt{3}\right)^2\right]^k-1\\&=\left(4+2\sqrt{3}\right)^k+\left(4-2\sqrt{3}\right)^k-1\\&=2^k\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]-1\end{aligned}$$

ដោយ $N=\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k$ ជាចំនួនគត់ ដូច្នេះ $\left\lfloor\left(1+\sqrt{3}\right)^{2k}\right\rfloor=2^kN-1$ ជាចំនួនសេស ។ ដូច្នេះ ចំនួនគត់ m ធំបំផុត ដែល 2^m ចែកដាច់ $\left\lfloor\left(1+\sqrt{3}\right)^{2k}\right\rfloor$, មានតម្លៃស្មើ 0 ។

● បើ n ជាចំនួនសេស នោះ

$$-1<\left(1-\sqrt{3}\right)^n<0$$
$$\Rightarrow\left(1+\sqrt{3}\right)^n-1<\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)^n<\left(1+\sqrt{3}\right)^n$$

ដូច្នេះ

$$\left\lfloor\left(1+\sqrt{3}\right)^n\right\rfloor=\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

តាង $n=2k+1$ ។ យើងមាន

$$\left\lfloor\left(1+\sqrt{3}\right)^{2k+1}\right\rfloor=\left(1+\sqrt{3}\right)^{2k+1}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2k+1}$$
$$=\left(4+2\sqrt{3}\right)^k\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(4-2\sqrt{3}\right)^k\left(1-\sqrt{3}\right)$$

$$= 2^k\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\left(1-\sqrt{3}\right)\right]$$
$$= 2^k\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k+\sqrt{3}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^k-\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right)\right]$$

តាង $\left(2+\sqrt{3}\right)^k = a_k + b_k\sqrt{3}$ ដែល a_k និង b_k ជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះ $\left(2-\sqrt{3}\right)^k = a_k - b_k\sqrt{3}$ ។ ដូច្នេះ

$$\left\lfloor\left(1+\sqrt{3}\right)^{2k+1}\right\rfloor$$
$$= 2^k\left[a_k + b_k\sqrt{3} + a_k - b_k\sqrt{3} + \sqrt{3}\left(a_k + b_k\sqrt{3} - a_k + b_k\sqrt{3}\right)\right]$$
$$= 2^k\left[2a_k + \sqrt{3}\left(2b_k\sqrt{3}\right)\right] = 2^{k+1}(a_k + 3b_k)$$

យើងមាន

$$\left(a_k + b_k\sqrt{3}\right)\left(a_k - b_k\sqrt{3}\right) = \left(2+\sqrt{3}\right)^k\left(2-\sqrt{3}\right)^k$$
$$\Leftrightarrow a_k^2 - 3b_k^2 = 1$$

និង

$$(a_k + 3b_k)(a_k - 3b_k) = a_k^2 - 9b_k^2$$
$$= \left(a_k^2 - 3b_k^2\right) - 6b_k^2 = 1 - 6b_k^2$$

ដូច្នេះ មានន័យថា ផលគុណ $(a_k + 3b_k)(a_k - 3b_k)$ ជាចំនួនសេស ។ ដូច្នេះ $(a_k + 3b_k)$ ត្រូវតែជាចំនួនសេស ។ ដូច្នេះ $\left\lfloor\left(1+\sqrt{3}\right)^{2k+1}\right\rfloor = 2^{k+1}(a_k + 3b_k)$ នាំឱ្យយើងសន្និដ្ឋានបានថា ចំនួនគត់ m ធំបំផុតដែល 2^m ចែក $\left\lfloor\left(1+\sqrt{3}\right)^{2k+1}\right\rfloor$ ដាច់, ស្មើនឹង $k+1$ ។ យើងមាន

$$n = 2k+1 \Rightarrow k = \frac{n-1}{2}$$
$$\Rightarrow m = k+1 = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2} = \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1$$

265. ▲ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n គេអាចរកបានចំនួនគត់ b ដែល

$$\sqrt{2} + b\sqrt{3} - 2 < n \le \sqrt{2} + b\sqrt{3}$$

ក្នុងករណីនេះ យើងមានករណី $n = \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor b\sqrt{3}\rfloor$; $\lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor b\sqrt{3}\rfloor + 1$ ឬ $\lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor b\sqrt{3}\rfloor - 1$ ។

$1°$ បើ $n = \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor b\sqrt{3}\rfloor$ នោះ យើងទាញបាន $a = 1$ សំណើពិត ។

2° បើ $n=\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor b\sqrt{3}\rfloor+1 \Rightarrow n=\lfloor 2\sqrt{2}\rfloor+\lfloor b\sqrt{3}\rfloor$ ព្រោះ $\sqrt{2}=1{,}41;\ \lfloor\sqrt{2}\rfloor+1=2=\lfloor 2\sqrt{2}\rfloor=\lfloor 2{,}82\rfloor$ ។ ដូច្នេះ $a=2$ សំណើពិត ។

3° បើ $n=\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor b\sqrt{3}\rfloor-1 \Rightarrow n=\lfloor 0\sqrt{2}\rfloor+\lfloor b\sqrt{3}\rfloor$ ដូច្នេះ $a=0$ សំណើពិត ។

សមីការដ្យូផង់

266. ▲ សមីការដែលចម្លើយរបស់វាជាចំនួនគត់ហៅថាសមីការដ្យូផង់ ។ យើងឃើញថា សមីការដ្យូផង់

$$ax + by = c$$

មានចម្លើយជាចំនួនគត់ តែក្នុងករណី $PGCD(a,b)|c$ ប៉ុណ្ណោះ ។ ប្រមាណវិធីរបស់អឺគ្លីដជាមធ្យោបាយដ៏មានប្រសិទ្ធិភាពមួយ ក្នុងការស្វែងរកចម្លើយរបស់សមីការនេះ ។

យើងមាន

$$\begin{aligned} 1 &= 6 - 1(5) \\ 5 &= 23 - 3(6) \\ 6 &= 29(1) - 23 \\ \Rightarrow\ 1 &= 6 - 1(5) = 6 - 1\big(23 - 3(6)\big) \\ &= 4(6) - 23 \\ &= 4(29 - 23) - 23 \\ &= 4(29) - 5(23) \end{aligned}$$

ដូច្នេះចម្លើយងាយរបស់សមីការនេះ គឺ $x_0 = -5, y_0 = 4$ ។ យើងឃើញថា $x = -5 + 29t, y = 4 - 23t\ , t \in\ \mathbb{Z}$ ក៏ជាចម្លើយរបស់សមីការនេះដែរ ។ សមីការនេះគ្មានចម្លើយផ្សេងពីនេះទេ (សូមអានទ្រឹស្តីបទក្នុងមេរៀនទី៣) ។

267. ▲ យើងមាន

$$23(-5) + 29(4) = 1$$

គុណអង្គសង្ខាងនៃសមីការនឹង 7 យើងទាញបាន

$$23(-35) + 29(28) = 7$$

ដូច្នេះ $x = -35 + 29t, y = 28 - 23t, t \in \mathbb{Z}$ ។

268. ▲ ដោយ $PGCD(3456{,}246) = 2$ មានន័យថា អង្គខាងឆ្វេងចែកដាច់នឹង 2 តែអង្គខាងស្តាំចែកមិនដាច់នឹង២ ដូច្នេះសមីការគ្មានចម្លើយជាចំនួនគត់ ។

269. ▲ យើងមាន $3456(-1) + 246(15) = 234$ ។ យើងទាញបាន $x = -1 + 123t, y = 15 - 1728t, t \in \mathbb{Z}$ ។

270. ▲ សន្មតផ្ទុយទៅវិញថា សមីការមានឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ដូច្នេះ

$$(x-y)(x+y)=1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

ករណីទី១ យើងទាញបាន $x=-1, y=0$ មិនយកព្រោះ x, y ត្រូវតែជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ករណីទី២ យើងទាញបាន $x=1, y=0$ មិនយកព្រោះ x, y ត្រូវតែជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន $(x, y \geq 1)$ ។

271. ▲ សន្មតថា សមីការមានចម្លើយវិជ្ជមាន ខុសពីសូន្យ ផ្សេងទៀត ហើយយើងតាង (a, b, c) ជាចម្លើយដែលតូចជាងគេ ។

$a^6+2b^6=4c^6 \Rightarrow a$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ $\Rightarrow a=2a_1$

$2^5a_1^6+b^6=2c^6 \Rightarrow b$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ $\Rightarrow b=2b_1$

$2^4a_1^6+2^5b^6=c^6 \Rightarrow c$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ $\Rightarrow c=2c_1$

$$\Rightarrow \quad a_1^6+2b^6=4c_1^6$$

យើងឃើញថា (a_1, b_1, c_1) ក៏ជាចម្លើយរបស់សមីការនេះដែរ ដែល $a_1<a, b_1<b, c_1<c$ ។ ដូច្នេះ ផ្ទុយពីការសន្មត ។ ដូច្នេះ សមីការមិនមានចម្លើយ ក្រៅពី $a=b=c=0$ ទេ ។

272.273.

274. ▲ បើ $x^2=2+5y^2 \Rightarrow x^2 \equiv 2 \pmod 5$ ។ យើងពិនិត្យករណី $x=5k, 5k+1, 5k+2,\ 5k+3, 5k+4$ ។

$$x=5k, x^2 \equiv 0 \pmod 5$$
$$x=5k+1, x^2 \equiv 1 \pmod 5$$
$$x=5k+2, x^2 \equiv 4 \pmod 5$$
$$x=5k+3, x^2 \equiv 4 \pmod 5$$
$$x=5k+4, x^2 \equiv 1 \pmod 5$$

ដូច្នេះគ្មានចំនួនគត់ x ដែលការេរបស់វាសមមូលនឹង 2 តាម 5 ទេ ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចម្លើយ ។

275. ▲ គ្រប់ចំនួនស្វ័យគុណបួនសុទ្ធតែសមមូលនឹង $0; 1 \pmod{16}$ ។ មានន័យថា $n_1^4+n_2^4+\cdots+n_{14}^4$ យ៉ាងច្រើនសមមូលនឹង $14 \pmod{16}$ ។ តែ $1599 \equiv$

15 (mod 16) ។ ដូច្នេះ សមីការ $n_1^4 + n_2^4 + \cdots + n_{14}^4 = 1599$ មិនអាចមានចម្លើយទេ ។

276. ▲ សមីការនេះអាចសរសេរទៅជា

$$x^2 = (y^2+3)^2 - 7 \Rightarrow x = (y^2+3)\sqrt{1 - \frac{7}{(y^2+3)^2}} < y^2 + 3$$

ជាមួយគ្នានេះដែរ យើងមាន

$$x^2 = (y^2+2)^2 + 2y^2 - 2$$

ដូច្នេះ បើ $2y^2 - 2 > 0$ នោះ យើងទាញបាន $x > y^2 + 2 \Rightarrow y^2 + 2 < x < y^2 + 3$ សមីការគ្មានឫស ។

ដូច្នេះទាល់តែ $2y^2 - 2 \le 0$ មានន័យថា $y = -1,0,1$ ។ ករណី $y = \pm 1$ យើងទាញបាន $x = \pm 3$ ។ ករណី $y = 0 \Rightarrow x$ មិនមែនជាចំនួនគត់ ។

277. ▲ ដំបូងយើងសន្មតថា សមីការមានឫសជាចំនួនគត់ ។ ដោយជំនួស $x;y;z$ ដោយ $-x;-y;-z$ យើងទាញបានសមីការដដែល ដូច្នេះ យើងសន្មតថា $x;y;z \ge 0$ សិន ។ ដោយឆ្លាស់ $x;y;z$ យើងទាញបានសមីការនៅដដែល (ប្តូរ x ទៅ $y;y$ ទៅ $x;\ldots$) ។ ដូច្នេះយើងអាចសន្មតថា $x \ge y \ge z$ ជាមុនសិនបាន ។

ករណី $y = z$ យើងទាញបាន $x^4 - 4x^2y^2 = 2000 \Rightarrow x$ គូ ។ តាង $x = 2t$ យើងទាញបាន

$$t^2(t^2 - y^2) = 25$$

$\Rightarrow t^2 = 25, y^2 = 20$: មិនអាច ។

ដូចគ្នាចំពោះករណី $y = x; x = z$ ។ ដូច្នេះ បើ $x;y;z$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ វាត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់ $x \ne y \ne z$ ។ ដូច្នេះ $x > y > z$ ។

ដោយ $x^4 + y^4 + z^4$ ជាចំនួនគូ នោះត្រូវមានមួយក្នុងចំណោម $x;y;z$ ត្រូវតែជាលេខគូ ហើយពីរទៀតមានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា ។ យើងសង្កេតឃើញថា

$$\begin{aligned} &x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)z^2 + z^4 - 4y^2z^2 \\ &= (x^2 - y^2 - 2yz)(x^2 - y^2 - z^2 + 2yz) \end{aligned}$$

$$= (x+y+z)(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)$$

យើងមានកត្តានីមួយៗជាលេខគូ ព្រោះមានមួយក្នុងចំណោម $x;y;z$ ត្រូវតែជាលេខគូ ហើយពីរទៀតមានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា ។ ដោយ $2000 = 16.125 = 2^4.125$ យើងទាញបានកត្តានីមួយៗចែកដាច់នឹង 2 តែចែកមិនដាច់នឹង 4 ទេ (ព្រោះបើមានកត្តាណាមួយចែកដាច់នឹង 4 នោះផលគុណរបស់វាត្រូវចែកដាច់នឹង $4.2.2.2 = 2^5$ តែតាមពិតផលគុណស្មើនឹង $2^4.125$ ចែកមិនដាច់នឹង 2^5) ។ ជាងនេះទៅទៀត កត្តានិមួយៗ សុទ្ធតែខុសគ្នា

$$x+y+z > x+y-z > x-y+z > x-y-z$$

សូមរំលឹកថា ដោយសារ $(x+y+z)(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z) = 2000$ ដូច្នេះ $x+y+z; x+y-z; x-y+z; x-y-z$ ជាតួចែករបស់ 2000 ។ តួចែកទាំងនេះជាចំនួនគូចែកមិនដាច់នឹង 4 ហើយសុទ្ធតែខុសគ្នា ។ តួចែកគូរបស់ $2000 = 2^4.5^3$ ដែលចែកមិនដាច់នឹង 4 តូចបំផុតចំនួន 4 រួមមាន $2;\ 2.5 = 10,; 2.25 = 50,; 2.125 = 250$ តែ $2.10.50.250 > 2000$ ដូច្នេះមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានឬសជាចំនួនគត់ ។

278.▲ របៀបទី១

យើងមាន

$$x^2 + x + 503 = y^2 \iff 4x^2 + 4x + 2012 = 4y^2$$
$$\iff (2x+1)^2 + 2011 = (2y)^2$$
$$\iff 2011 = (2y-2x-1)(2y+2x+1)$$

យើងមាន 2011 ជាចំនួនបឋម ដូច្នេះ យើងអាចបំបែកចំនួននេះជាកត្តាបឋមបានជា

$$2011 = 1 \times 2011, 2011 \times 1, (-1) \times (-2011), (-2011) \times (-1)$$

ដូច្នេះ យើងទាញបាន

I)

$$\begin{cases} 2y-2x-1 = 1 \\ 2y+2x+1 = 2011 \end{cases} \Rightarrow y = 503; x = 502$$

II)

$$\begin{cases} 2y-2x-1 = 2011 \\ 2y+2x+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 503; x = -503$$

III)

$$\begin{cases} 2y-2x-1=-1 \\ 2y+2x+1=-2011 \end{cases} \Rightarrow y=-503; x=-503$$

IV)

$$\begin{cases} 2y-2x-1=-2011 \\ 2y+2x+1=-1 \end{cases} \Rightarrow y=-503; x=502$$

ដូច្នេះសមីការមានឫស $(x,y)=\{(-503,\pm 503);(502,\pm 503)\}$ ។

▲របៀបទី២

បើយើងជំនួស y ដោយ $-y$ នោះសមីការដែលឱ្យរក្សាទ្រង់ទ្រាយដដែល ។ ដូច្នេះ សមីការមានលក្ខណៈឆ្លុះធៀបនឹង y ។ ដូច្នេះ យើងដោះស្រាយសមីការ តែក្នុងករណី $y \geq 0$ ជាការស្រេច ។ យើងមាន

$$x^2+x+503=y^2 \Leftrightarrow x^2+x+(503-y^2)=0$$

យើងចាត់ទុកសមីការជាសមីការដឺក្រេទី២ អញ្ញាត x ។ យើងមាន

$$\Delta = 1^2-4(503-y^2)=4y^2-2011$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{\Delta}}{2}$$

ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសជាចំនួនគត់ ទាល់តែ $\sqrt{\Delta}$ ជាចំនួនគត់ ដែលមានន័យថា $4y^2-2011$ ជាចំនួនការេ ។ តាង

$$4y^2-2011=l^2$$

ដែល l ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ឬសូន្យ ។ ដូច្នេះ

$$4y^2-l^2=2011$$
$$\Leftrightarrow (2y-l)(2y+l)=2011$$

យើងដឹងថា 2011 ជាចំនួនបឋម និង $2y-l<2y+l$ ដូច្នេះ

$$(2y-l)(2y+l)=2011=1\times 2011$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2y-l=1 \\ 2y+l=2011 \end{cases}$$
$$\Rightarrow y=503, l=1005$$

ដូច្នេះ

$$x=\frac{-1\pm 1005}{2}=\{502,-503\}$$

ប្រាសមកវិញ បើ $x=502$ និង $y=503$ នោះ

$$x^2+x+503=y^2 \Leftrightarrow 502^2+502+503=503^2$$
$$\Leftrightarrow (503-1)^2+503-1+503=503^2$$

$\Leftrightarrow 503^2 = 503^2$

ពិត ។ បើ $x = -503$ និង $y = 503$ នោះ

$$x^2 + x + 503 = y^2 \Leftrightarrow 503^2 - 503 + 503 = 503^2$$
$$\Leftrightarrow 503^2 = 503^2$$

ពិត ។ ដូច្នេះសមីការមានឫស $(x, y) = \{(502,503); (-503,503)\}$ ។ ដោយគិតទាំងតម្លៃរបស់ y ក្នុងករណី $y \le 0$ ដែលឆ្លុះនឹង $y \ge 0$ ថែមទៀត យើងទាញបាន សមីការមានឫសសរុប

$$(x, y) = \{(502,503); (-503,503);\ (502, -503); (-503, -503)\}$$

279. ▲ តាង $P(x) = x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + \cdots + (x+7)^3 = 8x^3 + 84x^2 + 420x + 784$ ។

បើ $x \ge 0$ នោះ

$$(2x+7)^3 = 8x^3 + 84x^2 + 294x + 343$$
$$< P(x) < 8x^3 + 120x^2 + 600x + 1000 = (2x+10)^3$$
$$\Longrightarrow 2x + 7 < y < 2x + 10 \Longrightarrow y = 2x + 8; y = 2x + 9$$

ជំនួសតម្លៃ y ទាំងនេះចូល យើងទាញបាន

$$\left[\begin{array}{l} P(x) - (2x+8)^3 = -12x^2 + 36x + 272 = 0 \\ P(x) - (2x+9)^3 = -24x^2 - 66x + 55 = 0 \end{array}\right.$$

គ្មានចម្លើយជាចំនួនគត់ទាំងពីរ ។ ដូច្នេះ $x \ge 0$ សមីការគ្មានចម្លើយ ។

យើងមាន $P(-x-7) = -P(x)$ ដូច្នេះ (x, y) ជាចម្លើយ ទាល់តែ $(-x-7, -y)$ ជាចម្លើយដែរ ។ តែសមីការគ្មានចម្លើយចំពោះ $-x - 7 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -7$ ទេ ។ ដូច្នេះ បណ្តាចម្លើយ (x, y) ត្រូវតែ $-6 \le x \le -1$ ។

យើងមាន $P(-1) = 440$ មិនមែនជាចំនួនគូប ។ $P(-2) = 216 = 6^3$ និង $P(-3) = 64 = 4^3$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបានចម្លើយ $(x = -2, y = 6)$ និង $(x = -3, y = 4)$ ។ ហើយគូចម្លើយផ្សេងទៀតគឺ $(x = 2 - 7 = -5, y = -6)$ និង $(x = 3 - 7 = -4, y = -4)$ ។

280. ▲ យើងមាន $y^5 \equiv 0,1,-1 \pmod{11}$ ចំពោះគ្រប់ $y \Rightarrow y^5 \equiv 7,8,6 \pmod{11}$ ។ តែយើងមាន $x^2 \equiv 0,1,4,9,5,3 \pmod{11}$ ចំពោះគ្រប់ x ។ ដូច្នេះសមីការនេះគ្មានឫស ។

281. ▲ សន្មតថាសមីការមានចម្លើយ ។ សន្មតថា (x,y,z) ជាចម្លើយវិជ្ជមានឬសូន្យដែលតូចជាងគេ ក្នុងចំណោមចម្លើយដែលអាចមាននៃសមីការ ។ $x^3+9y^3=3z^3 \Rightarrow x^3$ ជាពហុគុណនៃ 3 ដូច្នេះ x ជាពហុគុណនៃ 3 ។ តាង $x=3x_1$ ។ យើងទាញបាន

$$27x_1^3+9y^3=3z^3 \Leftrightarrow 9x_1^3+3y^3=z^3 \Rightarrow z=3z_1$$
$$\Rightarrow 9x_1^3+3y^3=27z_1^3 \Leftrightarrow 3x_1^3+y^3=9z_1^3 \Rightarrow y=3y_1$$
$$\Rightarrow x_1^3+9y_1^3=3z_1^3$$

ដូច្នេះ (x_1,y_1,z_1) ដែល $x_1<x; y_1<y; z_1<z$ ក៏ជាឫសរបស់សមីការ $x^3+9y^3=3z^3$ ដែរ ។ តែយើងបានសន្មតថា (x,y,z) ជាចម្លើយដែលតូចជាងគេ ដូច្នេះ មានតែ $(x,y,z)=(0,0,0)$ ។

282. ▲ តាង (x,y) ជាចម្លើយរបស់សមីការ បើសិនជាមាន ។ យើងមាន

$$(y-4)(y+4)=x^3$$

បើ y ជាចំនួនសេស នោះ $y-4$ និង $y+4$ បឋមនឹងគ្នា ហើយជាចំនួនគូបពីរដែលខុសគ្នា 8 ឯកតា ។ ករណីនេះមិនអាចមាន ។ ដូច្នេះ $y=2y'$ ជាចំនួនគូ $\Rightarrow x=2x'$ ជាចំនួនគូដែរ ។ សមីការទៅជា

$$(y'+2)(y'-2)=2(x')^3$$
$$\Rightarrow (y'+2)^2-4(y'+2)=2(x')^3$$
$$\Rightarrow (y'+2)^2 \equiv 0 \pmod 2$$
$$\Rightarrow (y')^2 \equiv 0 \pmod 2$$

ដូច្នេះ y' ជាចំនួនគូ ។ ដូច្នេះយើងទាញបាន $y'=2s \Rightarrow 4(s+1)^2-8(s+1)=2(x')^3 \Rightarrow x'=2t$ ។ ដូច្នេះ

$$(s+1)(s-1)=4t^3$$

ដូច្នេះ $s+1$ និង $s-1$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ នាំឱ្យ $s=2u+1$ ជាចំនួនសេស ។ ដូច្នេះ

$$u(u+1)=t^3$$

ដោយ u និង $u+1$ បឋមនឹងគ្នា នោះ វាត្រូវតែគូបទាំងពីរ ដូច្នេះ $u=\{-1;0\}$ ហើយ $t=0$ ។

ដូច្នេះ សមីការមានចម្លើយពីរគត់ គឺ $(x,y)=(0,\pm 4)$ ។

283. ▲ យើងដឹងថា $x=1, y=-a$ ជាចម្លើយរបស់សមីការជានិច្ច ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បើ (x,y) ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ $x^2+axy+y^2=1$ (*)នោះ x ជាឫសរបស់ពហុធា

$$X^2+ayX+(y^2-1)=0$$

ហើយ ឫសមួយទៀតរបស់ពហុធានេះ គឺ $-ay-x$ (ព្រោះ $x_1+x_2=-ay$) ។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន សមីការ(*)មានឫស $(-ay-x,y)$ ។ ដូចគ្នា សមីការ(*)មានឫស $(x,-ax-y)$ ។ ជាសរុបយើងទាញបានឫសរបស់សមីការ(*) មាន $\{(x,y),(-ay-x,y),(x,-ax-y)\}$ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត បើ $|a|>2$ ហើយបើ $x\neq 0$ និង $y\neq 0$ យើងមាន

- បើ $|x|\le|y|$ នោះ

$|-ay-x|=|ay+x|\ge|ay|-|x|=|a||y|-|x|\ge(|a|-1)|y|>|y|\ge|x|$

មានន័យថា បើ (x,y) ជាចម្លើយ នោះ យើងអាចរកបាន ចម្លើយផ្សេងមួយទៀត កំណត់ដោយ $(-ay-x,y)$ ដែល $|-ay-x|>|y|\ge|x|$ ។

- បើ $|x|\ge|y|$ នោះ $|-ay-x|>|x|\ge|y|$ មានន័យថា បើ (x,y) ជាចម្លើយ នោះ យើងអាចរកបាន ចម្លើយផ្សេងមួយទៀត កំណត់ដោយ $(x,-ax-y)$ ដែល $|-ay-x|>|x|\ge|y|$ ។

តាង $x_0=1$ និង $y_0=-a$ ។ តាមលក្ខណៈ ដូចដែលយើងបានរៀបរាប់ពីខាងដើម យើងទាញរកស្វ៊ីតនៃចម្លើយ (x_n,y_n) ដែល

$(x_0,y_0); |y_0|>|x_0| \Rightarrow (x_1=-ay_0-x_0, y_1=y_0)$ ដោយ $|x_1|>|y_1|\ge|x_0|$

$(x_1,y_1); |x_1|>|y_1| \Rightarrow (x_2=x_1,y_2)$ ដោយ $|y_2|>|x_2|\ge|y_1|$

$(x_2,y_2); |y_2|>|x_2| \Rightarrow (x_3,y_3=y_2)$ ដោយ $|x_3|>|y_3|\ge|x_2|$

....

$|x_0|<|x_1|=|x_2|<|x_3|\ldots$

លក្ខខណ្ឌចុងក្រោយនេះ ធានាថា ចម្លើយទាំងអស់របស់សមីការខុសគ្នាពីរៗ ។ ក្នុងករណី នេះសមីការមានឫសច្រើនរាប់មិនអស់ ។

បើ $a = 2$ សមីការសរសេរទៅជា $(x-y)^2 = 1$ មានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់ ។

ដូចគ្នាករណី $a = -2$ ។

បើ $a = 1$ នោះសមីការ ទៅជា $x^2 + y^2 = 1 - xy \Rightarrow (x+y)^2 = 1 + xy$ ។ បណ្ដា ចំនួន $1 - xy$ និង $1 + xy$ ត្រូវតែជាចំនួនវិជ្ជមាន $\Rightarrow |xy| \le 1$ ។ ដូច្នេះ សមីការមាន ឫសគត់ (x, y)រាប់មិនអស់ទេ ។ ដូចគ្នា ពេល $a = -1$ ។

ជាចុងក្រោយ បើ $a = 0$ នោះសមីការទៅជា

$$x^2 + y^2 = 1$$

ដែលឫសរបស់សមីការនេះមានតែ $\{(0, \pm1); (\pm1, 0)\}$ មានចម្លើយមានចំនួនកំណត់ ។

ដូច្នេះ ដើម្បីឱ្យសមីការមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់ សំណុំចំនួនគត់, a ត្រូវតែ $|a| \ge 2$ ។

284. ▲ យើងឃើញថា សមីការមានឫស $(0,0,0)$ ។ សន្មតថា សមីការមានចម្លើយផ្សេង ទៀត ។ តាង (x, y, z) ជាចម្លើយតូចបំផុតរបស់សមីការដែលខុសពីសូន្យ ។

- បើ 7 ចែកដាច់ x ឬ y នោះ 7 ត្រូវតែចែកដាច់ x និង y ទាំងពីរ ដូច្នេះ $x^2 + y^2$ ចែក ដាច់នឹង 7^2 ។ ដូច្នេះ 7 ចែកដាច់ z ។ តាង $x = 7x_1; y = 7y_1; z = 7z_1$ ។ ដូច្នេះ $x_1^2 + y_1^2 = 7z_1^2$ ។ ដូច្នេះ (x_1, y_1, z_1) តូចជាង (x, y, z) ក៏ជាចម្លើយសមីការដែរ ។ ករណីនេះផ្ទុយពីការសន្មតដែល (x, y, z) ជាចម្លើយតូចបំផុត ។

- ដូច្នេះ x និង y ត្រូវតែបឋមនឹង 7 ។ យើងមាន

$$x^2 + y^2 = 7z^2 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv -y^2 \pmod 7$$

តាមទ្រឹស្ដីបទ Bachet-Bézout យើងអាចរកបាន y' និង β ដែល $yy' + 7\beta = PGCD(y, 7) = 1$ ។ ដូច្នេះ $yy' \equiv 1 \pmod 7$ ។ ដូច្នេះ $(xy')^2 \equiv -1 \pmod 7$ ។ តែ ចំនួនការេ មិនអាចសមមូលនឹង -1 តាម 7 ទេ ។ ដូច្នេះសមីការមានចម្លើយតែមួយគត់គឺ $(0,0,0)$ ។

285. ▲ សន្មតថា(a, b, c, d) ជាសំណុំចម្លើយដែលតូចជាងគេ ។

$$a^2+5b^2-2c^2-2cd-3d^2=0$$

$$\Leftrightarrow a^2+5b^2=2c^2+2cd+3d^2=2\left(c+\frac{d}{2}\right)^2+\frac{5}{2}d^2$$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង 4 យើងទាញបាន

$$4a^2+20b^2=2(2c+d)^2+10d^2 \quad (*)$$

គណនាសមមូលតាម 5 សមីការនេះទៅជា

$$4a^2\equiv 2(2c+d)^2 \pmod 5$$

ដោយចំនួនការេ តាម 5 សមមូលនឹង 0; 1; 4 នោះ

$$4a^2\equiv 0,1,4 \pmod 5;\ 2(2c+d)^2\equiv 0,2,3 \pmod 5$$

ដូច្នេះមានតែ $4a^2\equiv 0 \pmod 5$; $2(2c+d)^2\equiv 0 \pmod 5$ ។ ដូច្នេះ a និង $2c+d$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 5 ។ យើងមាន

$$(*)\ \Rightarrow 4a^2-2(2c+d)^2=10d^2-20b^2$$
$$=2(5)(d^2-2b^2)$$

ដោយអង្គខាងឆ្វេងចែកដាច់នឹង 25 ដូច្នេះត្រូវតែ $d^2-2b^2\equiv 0 \pmod 5$ ។ យើងមាន

$$d^2\equiv 0,1,4 \pmod 5;\ 2b^2\equiv 0,2,8 \pmod 5$$
$$\Rightarrow d^2\equiv 0 \pmod 5;\ 2b^2\equiv 0 \pmod 5$$

ដូច្នេះ 5 ត្រូវតែចែកដាច់ b និង d ។ ដូច្នេះ 5 ចែកដាច់ a,b,c,d ។ យើងទាញបាន $\left(\frac{a}{5},\frac{b}{5},\frac{c}{5},\frac{d}{5}\right)$ ជាចម្លើយមួយទៀតរបស់សមីការដែលតូចជាងមុន ។ ករណីនេះផ្ទុយពីការសន្មត ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចម្លើយផ្សេងពីសូន្យទេ ។

286. ▲ យើងមាន

$$2002^{2002}=2002^{2001}(2002)=(2002^{667})^3(10^3+10^3+1^3+1^3)$$

ដូច្នេះ 2002^{2002} អាចសរសេរជាផលបូកនៃចំនួនគូបបួន ។ យើងមាន

$$2002^{2002}\equiv 4^{2002}\equiv 4^{6(333)+4}\equiv 4^4\equiv 4 \pmod 9$$

ព្រោះ $4^6\equiv 1 \pmod 9$ ។ តែថាគ្រប់ចំនួនគូបសុទ្ធតែសមមូលនឹង $0,\pm 1$ តាម 9 ។ ដូច្នេះយើងទាញបានថា ផលបូកនៃចំនួនគូបបីឬតិចជាងនេះ មិនអាចសមមូលនឹង 4 តាម 9 ទេ ។

ដូច្នេះ $t=4$ ។

287. ▲ សមីការ

$$x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=xyzuv-65 \quad (*)$$

មានឫសងាយ (1,2,3,4,5) ព្រោះ

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55=1.2.3.4.5-65$$

សន្មតថាសមីការមានចម្លើយផ្សេងទៀត (x,y,z,u,v) ។ សមីការមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី ។

សន្មតថា $x\le y\le z\le u\le v$ ។

បើ $x=y=1$ នោះ $xyzuv\ge 65\ \Leftrightarrow zuv\ge 65$ ។

បើ $y\ge 2$ នោះ $2\le z\le u\le v\ \Rightarrow zuv\ge 8$ ។

ដូច្នេះ $zuv\ge 8\ (**)$ ។ យើងសរសេរសមីការ(*)ជាសមីការដឺក្រេទី២ធៀបនឹង x ។ យើងទាញបានថា បើ x ជាឫសមួយ នោះ $(yzuv-x,y,z,u,v)$ ជាឫសមួយទៀត ។ តាម (**) យើងមាន $yzuv\ge 8y\ge 8x$ ដូច្នេះ $yzuv-x\ge 7x>x$ ជាចម្លើយមួយទៀតដែលធំជាងមុន (គឺ x) ។ ឧទាហរណ៍ (1,2,3,4,5) ជាឫសមួយរបស់សមីការ នោះឫសមួយទៀតកំណត់ដោយ $x=2(3)(4)(5)-1=119;\Rightarrow$ (119,2,3,4,5) ជាឫសរបស់សមីការ(*) ។ ត្រឹមជំហាននេះ ឫសរបស់សមីការ(*) មិនមែនមានតែ (1,2,3,4,5) និង (119,2,3,4,5) តែតាមពិត ចម្លាស់របស់ឫសនេះក៏ជាឫសរបស់សមីការដែរ ដូចជា (2,1,3,4,5), (2,119,3,4,5), ……, (2,3,4,5,119) ។

បន្ទាប់មកទៀត ចំពោះចម្លើយថ្មីនេះ គឺ (119,2,3,4,5) យើងរៀបឫសសមីការនេះតាម $x\le y\le z\le u\le v$ មានន័យថា (2,3,4,5,119) ក៏ជាឫសរបស់សមីការដែរ ។ ចំពោះ $x=2$ យើងទាញបានឫសថ្មីមួយទៀតដែលធំជាងមុន គឺ $x=3(4)(5)(119)-2=7138$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបានឫសបន្ថែមរបស់សមីការ (*) មាន (7138,3,4,5,119) និងចម្លាស់របស់ឫសនេះ ដែលក្នុងនោះមាន (3,4,5,119,7138) ដែរ ។ ដូច្នេះជាបន្តបន្ទាប់យើងទាញបានជាគុត្តូចជាងគេចេះតែកើនទៅៗ ។ ដូច្នេះជាចុងក្រោយ នៅបន្ទាប់ពីប៉ុន្មានជំហានក្រោយមកយើងនឹងទាញបានចម្លើយដែលមាន (x,y,z,u,v) ដែលនីមួយៗធំជាង 1998 ទាំងអស់ ។

288. ▲ ដោយសមីការគ្មានលក្ខណៈពិសេសណាមួយទាក់ទងនឹងលំដាប់របស់ a, b, c ដំបូងយើងសន្មតថា $a \leq b \leq c$ ។ យើងមាន $1^3 + 10^3 + 10^3 = 2001$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $(1,10,10)$ ជាឫសតែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a \leq b \leq c$ ។

ជាដំបូងយើងស្រាយបញ្ជាក់បទគន្លឹះមួយសិន

បទគន្លឹះ ៖ បើ n ជាចំនួនគត់ នោះ n^3 ពេលចែកនឹង 9 សល់ 0,1 ឬ -1 ។

បើ $n = 3k$ នោះ $9|n^3$ ។

បើ $n = 3k \pm 1$ នោះ $n^3 = 27k^3 \pm 27k^2 + 9k \pm 1 \equiv \pm 1 \pmod 9$

ដោយ $2001 = 9.222 + 3 \equiv 3 \pmod 9$ នោះ $a^3 + b^3 + c^3 = 2001 \Rightarrow a^3 \equiv 1 \pmod 9$; $b^3 \equiv 1 \pmod 9$; $c^3 \equiv 1 \pmod 9$; ។ ដូច្នេះ a, b, c ជាចំនួនដែលមានរាង $3k + 1$ ។ យើងនឹងតម្លៃរបស់ a, b, c ក្នុងសំណុំ $\{1,4,7,10,13,\dots\}$ ។

បើ $c \geq 13$ នោះ $c^3 \geq 2197 > 2001 = a^3 + b^3 + c^3$ មិនពិត ។

បើ $c \leq 7$ នោះ $2001 = a^3 + b^3 + c^3 \leq 3.7^3 = 1029$ មិនពិត ។ ដូច្នេះ $c = 10$ ។ យើងទាញបាន $a^3 + b^3 = 1001$ ។ បើ $b < c = 10$ នោះ $a \leq b \leq 7$ នោះ $1001 = a^3 + b^3 \leq 2.7^3 = 686$ មិនពិត ។ ដូច្នេះ $b = 10$ ហើយ $a = 1$ ។

ដូច្នេះ $(a, b, c) \in \{(1,10,10), (10,1,10), (10,10,1)\}$ ។

289. ▲ យើងមាន

$$9(x^2 + y^2 + 1) + 2(3xy + 2) = 2005$$
$$\Leftrightarrow \; 9((x + y)^2 - 2xy + 1) + 2(3xy + 2) = 2005$$

តាង $k = x + y; l = xy$ ។ សមីការទៅជា

$$9(k^2 - 2l + 1) + 2(3l + 2) = 2005$$
$$\Leftrightarrow 9k^2 - 12l + 13 = 2005$$
$$\Leftrightarrow \; 9k^2 = 12l + 1992$$
$$\Leftrightarrow 3k^2 = 4l + 664 = 4(l + 166)$$

$\Rightarrow k$ ជាចំនួនគូ ។

$$3k^2 = 4l + 664$$
$$\Leftrightarrow \; 2k^2 - 664 + k^2 - 4l = 0 \qquad (*)$$

ដោយ $k = x + y; l = xy$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត សមីការ $a^2 - ka + l = 0$ មានឫស x, y ។ ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឫស ឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta = k^2 - 4l \geq 0$ ។ សមីការ (*) ទៅជា

$$\begin{aligned} &2k^2 - 664 = -(k^2 - 4l) \leq 0 \\ &\Rightarrow 2k^2 - 664 \leq 0 \\ &\Rightarrow k^2 \leq 332 \\ &\Rightarrow k \leq 18{,}22 \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\begin{aligned} &3k^2 = 4l + 664 \\ &\Rightarrow 3k^2 \geq 664 \\ &\Rightarrow k^2 \geq 221{,}33 \\ &\Rightarrow k \geq 14{,}87 \end{aligned}$$

ដោយ k ជាចំនួនគូ យើងទាញបាន $k = 16; 18$ ។

បើ $k = 16 \Rightarrow l = 26 \Rightarrow k^2 - 4l = 152$ មិនមែនជាចំនួនការេ ដូច្នេះ មិនអាចរកបាន x, y ជាចំនួនគត់ ។

បើ $k = 18 \Rightarrow l = 77 \Rightarrow k^2 - 4l = 16 \Rightarrow x; y = \frac{18 \pm 4}{2} = \left[\begin{matrix} 11 \\ 7 \end{matrix}\right.$

ដូច្នេះ $(x, y) = \{(11; 7); (7; 11)\}$ ។

290. ▲ ពេលយើងឆ្លាស់ $x; y; z$ ក្នុងសមីការនេះ យើងទាញបានសមីការដដែល ។ ដូច្នេះដំបូងយើងរៀបរាជា $x \leq y \leq z$ សិន ។ យើងពិនិត្យករណីដូចតទៅនេះ

$1°$ ចំពោះ $x = 1$ យើងទាញបាន $y + z = 2$ ដូច្នេះ

$$(x, y, z) = (1,1,1)$$

$2°$ បើ $x = 2$ នោះ $2y + 2z - yz = 2 \Leftrightarrow (z - 2)(y - 2) = 2$ ។ យើងទាញបាន $(z = 4, y = 3)$ ឬ $(z = 3, y = 4)$ ។

$3°$ បើ $x \geq 3, y \geq 3, z \geq 3 \Rightarrow xyz \geq 3yz, xyz \geq 3xz, xyz \geq 3xy$ ។ ដូច្នេះ $xy + xz + yz - xyz \leq 0$ ដូច្នេះគ្មានចម្លើយ ។

ដោយដកលក្ខខណ្ឌ $x \leq y \leq z$ ចេញវិញ យើងទាញបានចម្លើយរបស់សមីការមាន

$$(x, y, z) = \{(1; 1; 1), (2; 3; 4), (2; 4; 3), (3; 2; 4), (3; 4; 2), (4; 2; 3), (4; 3; 2)\}$$

291. ▲ យើងតាង (m,n)ជាគូតម្លៃ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ។ បើ $m=1$ នោះមានតែ $(1,1)$ និង $(1,2)$ ប៉ុណ្ណោះ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ។

ឥលូវយើងសន្មតថា $(m>1,n)$ ជាគូតម្លៃដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ។

ដោយ $n(n-m)=m^2\pm 1>0$ នោះត្រូវតែ $n>m$ ។

តាង $k=m+n$ ។ ដូច្នេះ $k>n>m$ ហើយ

$$\begin{aligned}1&=(n^2-nm-m^2)^2=(n^2-n(k-n)-(k-n)^2)^2\\&=(n^2-kn+n^2-k^2+2kn-n^2)^2\\&=(n^2-k^2+kn)^2\\&=(k^2-kn-n^2)^2\end{aligned}$$

ដូច្នេះ (n,k) ក៏ជាគូតម្លៃដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែរ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបានគូ (m,n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់មាន

$$(m,n)=\begin{Bmatrix}(1,1);\ (1,2);(2,3);(3,5);(5,8);(8,13);(13,21);(21,34);(34,55);(55,89);\\(89,144);(144,233);(233,377);(377,610);(610,987);(987,1597)\end{Bmatrix}$$

(គូបន្ទាប់មកទៀត គឺ $(1597,2584)$ មិនយកព្រោះមានតំលៃធំជាង 1981) ។ ហើយ តម្លៃធំបំផុតរបស់ m^2+n^2 គឺ 1597^2+987^2 ។

តើយើងធ្វើដូចម្តេច ទើបដឹងថាគ្មានគូតម្លៃ (m,n) ផ្សេងទៀត ក្រៅពីគូតម្លៃខាងលើនេះ ។ សន្មតថាមានគូតម្លៃ $(m>1,n>1)$ ផ្សេងទៀត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែរ ។ សន្មត $n>m$ ។ យើងតាង $k=n-m$ ។ យើងអាចបង្ហាញថា (k,m) ក៏ជាគូតម្លៃ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែរ ។ មានន័យថា បើមាន (m,n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ នោះ $(n-m,m)$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ដែរ ។ ដូច្នេះមានបណ្តាគូតម្លៃ (m,n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ នឹងមានតម្លៃកាន់តែតូចទៅៗ ហើយត្រូវចប់នៅត្រឹម គូ $(1,n)$ ។ តែគូតម្លៃ $(1,n)$ មានតែ $(1,1)$ និង $(1,2)$ តែប៉ុណ្ណោះ ។ ដូច្នេះ មានន័យថា មិនអាចមានគូចម្លើយ ណាក្រៅអំពី គូចម្លើយ (m,n)ដែលបានរៀបរាប់ខាងលើទេ ។

292. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}m^5+3m^4n-5m^3n^2-15m^2n^3+4mn^4+12n^5\\=(m-2n)(m-n)(m+n)(m+2n)(m+3n)\end{aligned}$$

បើ $n \neq 0$ នោះ កត្តាផលគុណខាងលើខុសគ្នាទាំងអស់ ។ ដូច្នេះយើងមានទាំងអស់៥កត្តា ។

យើងមាន $33 = (-11)(3)(1)(-1)$ មានន័យថា 33 អាចបំបែកបានជាផលគុណនៃយ៉ាងច្រើនចំនួនគត់ 4 ផ្សេងគ្នា ។ ដូច្នេះ វាមិនអាចស្មើគ្នាទេ ។

បើ $n = 0$ កន្សោមខាងលើទៅជា m^5 ហើយវាក៏មិនអាចស្មើ 33 ដែរ ។

293. ▲ តាង $x = zc$ និង $y = zb$ ដែល b និង c ជាចំនួនគត់បឋមនឹងគ្នា ។ សមីការទៅជា

$$c + zb^2 + z^2 = z^2cb$$

យើងទាញបានថា z ចែកដាច់ c ដូច្នេះ $c = za$ ចំពោះចំនួនគត់ a ។ សមីការបំលែងទៅជា

$$a + b^2 + z = z^2ab \ \ (*)$$

$$\Rightarrow a = \frac{b^2 + z}{z^2b - 1} \ \Rightarrow z^2a = b + \frac{b + z^3}{z^2b - 1}$$

$\Rightarrow \frac{b+z^3}{z^2b-1}$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ ហើយដោយវាជាចំនួនវិជ្ជមាន

$$\Rightarrow \frac{b + z^3}{z^2b - 1} \geq 1 \ \Rightarrow b + z^3 \geq z^2b - 1 \ \Rightarrow b \leq \frac{z^2 - z + 1}{z - 1}$$

តំលៃរបស់ $\frac{z^2-z+1}{z-1}$ តូចជាង $z + 1$ ដាច់ខាត ពេល $z \geq 3$ ។ ដូច្នេះ បើ $z \geq 3$ នោះ $b \leq z$

$$\Rightarrow a = \frac{b^2 + z}{z^2b - 1} \leq \frac{z^2 + z}{z^2 - 1} < 2 \ \Rightarrow a = 1$$

ហើយសមីការ (*) ទៅជា

$$1 + b^2 + z = z^2b$$

ជាសមីការដឺក្រេទី២ធៀបនឹង b ដែលមាន $\Delta = z^4 - 4z - 4$ ។ Δ មិនអាចជាចំនួនការេបានទេ ព្រោះ $(z^2 - 1)^2 < \Delta < (z^2)^2$ ។ ដូច្នេះ ករណីនេះ គ្មានចម្លើយ ។

ដូច្នេះនៅសល់ករណី $z = 1$ និង $z = 2$ ទៀត ។

ចំពោះ $z = 1$ យើងមាន

$$a = \frac{b^2+1}{b-1} = b + 1 + \frac{2}{b-1} \Rightarrow b \in \{2;3\}$$

ដូច្នេះ យើងទទួលបានចម្លើយពីរគឺ $(x,y) \in \{(5,2);(5,3)\}$ ។

បើ $z = 2$ យើងទាញបាន

$$a = \frac{b^2+z}{z^2b-1} \Leftrightarrow 16a = \frac{16b^2+32}{4b-1} = 4b + 1 + \frac{33}{4b-1}$$

ដូច្នេះ $b \in \{1;3\}$ ។ យើងទទួលបានចម្លើយពីរទៀតគឺ $(x,y) \in \{(4,2);(4,6)\}$ ។

សរុបសមីការមានចម្លើយគឺ $(x,y) \in \{(5,2);(5,3);(4,2);(4,6)\}$ ។

294. ▲ បើ d ជាតួចែករួមរបស់ x និង y នោះ d^2 ចែកដាច់ x^2+y^2 ដូច្នេះ ចែកដាច់ z^2 ។ ដូច្នេះ d ចែកដាច់ z ហើយ d ជាតួចែករួមរបស់ x,y,z ។ តាមសម្មតិកម្ម $d = 1$ ។ ដូច្នេះ x,y បឋមនឹងគ្នា ។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន x,y,z បឋមនឹងគ្នាពីរៗ ។

បើ x និង y សេសទាំងពីរ នោះ យើងមាន $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$ មិនអាច ព្រោះចំនួនការេសមមូលនឹង $0;1$ តាម 4 ។ ដូច្នេះត្រូវតែមានមួយជាចំនួនគូ ។

សន្មតថា x ជាចំនួនគូ ។ តាង $x = 2x'$ ។ សមីការទៅជា

$$4x'^2 = (z-y)(z+y)$$

ដោយ x ជាចំនួនគូ នោះបើ y គូ យើងទាញបាន z គូដែរ, តែបើ y សេស នោះ z សេសដែរ ។ កត្តាទាំងពីរ $(z-y)$ និង $(z+y)$ គូទាំងពីរដូចគ្នា ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បើ d ជាតួចែករួមធំបំផុតរបស់ $z-y$ និង $z+y$ នោះ d ចែកដាច់ផលបូកនិងផលសងនៃចំនួនទាំង២ មានន័យថា ចែកដាច់ $2z$ និង $2y$ ។ ដូច្នេះ d ចែក 2 ដាច់ ព្រោះ y,z បឋមនឹងគ្នា ។ មានន័យថា $d \in \{1;2\}$ ។ តែដោយ $(z-y)$ និង $(z+y)$ គូទាំងពីរដូចគ្នា នោះមានន័យថា $d = 2$ ។ យើងទាញបាន ចំនួនគត់ $\frac{z-y}{2}$ និង $\frac{z+y}{2}$ ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា ។ ដោយផលគុណរបស់វាជាចំនួនការេ នោះវាត្រូវតែជាចំនួនការេទាំងពីរ

$$\frac{z-y}{2} = n^2; \frac{z+y}{2} = m^2 \Rightarrow y = m^2 - n^2; z = m^2 + n^2$$

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន m,n បឋមរវាងគ្នា ។ ដោយជំនួសចូលក្នុងសមីការ យើងទាញបាន $x^2 = 4m^2n^2 \Rightarrow x = 2mn$ (ព្រោះសន្មតថា x វិជ្ជមាន) ។ ជាបញ្ចប់ m និង n មានលក្ខណៈគូសេសខុសគ្នា ព្រោះបើ m,n សេសទាំងពីរ នោះ y,z នឹងជាចំនួនគូទាំងពីរ តែ y បឋមនឹង z ។

295. ▲ ក) តាង x,y,z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $x^2+y^2=z^2$ និង $\frac{xy}{2}$ ជាចំនួនការេ ។ សន្មតថា x,y,z ជាចម្លើយតូចបំផុត ដូច្នេះ ពួកបឋមរវាងគ្នាពីរៗ ។ តាមទ្រឹស្តីបទពីតាករ យើងអាចរកបាន u,v ដែល

$$x = u^2 - v^2; y = 2uv \ \Rightarrow z = u^2 + v^2$$

ដែល u និង v ជាចំនួនវិជ្ជមាន និង បឋមនឹងគ្នា ហើយមានលក្ខណៈគូសេសផ្ទុយគ្នា ។ ដូច្នេះក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណទៅជា $uv(u-v)(u+v)$ ។ ដោយ u និង v មានលក្ខណៈគូសេសផ្ទុយគ្នា នោះ $u+v$ និង $u-v$ សេសទាំង២ ដូច្នេះបឋមនឹងគ្នាដែរ ។ ដូច្នេះ កត្តាទាំង៤សុទ្ធតែបឋមនឹងគ្នា២ៗ ហើយនីមួយៗជាចំនួនការេ ។ ដូច្នេះ មានចំនួនគត់ a,b និងចំនួនគត់សេស c,d ដែល

$$u = a^2, v = b^2, u+v = c^2, u-v = d^2 \quad (*)$$

យើងមាន $2b^2 = c^2 - d^2 \equiv 0 \pmod 4$ ព្រោះ c,d សេសទាំងពីរ ។ ដូច្នេះ b ជាចំនួនគូ ។ តាង $b = 2b'$ នោះ

$$\left(\frac{c+d}{2}\right)\left(\frac{c-d}{2}\right) = 2b'^2$$

ដូច្នេះត្រូវតែមានយ៉ាងហោចមួយក្នុងចំណោម $\left(\frac{c+d}{2}\right)$ និង $\left(\frac{c-d}{2}\right)$ ជាចំនួនគូ ។ ដោយ c និង d សេសទាំង២ នោះ មានតែមួយប៉ុណ្ណោះក្នុងចំណោម $\left(\frac{c+d}{2}\right)$ និង $\left(\frac{c-d}{2}\right)$ ដែលជាចំនួនគូ ។

បើ $\left(\frac{c+d}{2}\right)$ ជាចំនួនគូនោះ

$$\left(\frac{c+d}{2}\right)\left(\frac{c-d}{2}\right) = b'^2$$

ដោយ $\left(\frac{c+d}{2}\right)$ និង $\left(\frac{c-d}{2}\right)$ បឋមនឹងគ្នា នោះ មាន r,s ដែល

$$\frac{c+d}{2} = 4s^2;\ \frac{c-d}{2} = r^2 \ \Rightarrow c = 4s^2 + r^2; d = 4s^2 - r^2$$

$$c+d=4s^2;c-d=2r^2$$

(*) $\Rightarrow 2u=c^2+d^2 \Rightarrow 2a^2=32s^4+2r^4 \Rightarrow a^2=16s^4+r^4=(4s^2)^2+(r^2)^2$

ដូច្នេះ ត្រីធាតុ $(r^2,4s^2,a)$ ជាចម្លើយមួយទៀតដែរ ដែល $a<z$ ។ ផ្ទុយពីការសន្មត ដែលថា z តូចបំផុត ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចំលើយ ។

ខ) តាង x,y,z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត ដែល

$$x^4-y^4=z^2$$

តាង $X=x^4-y^4, Y=2x^2y^2$ និង $Z=x^4+y^4$ ។ យើងមាន

$$X^2+Y^2=Z^2$$
$$\frac{1}{2}XY=\frac{1}{2}(x^4-y^4)2x^2y^2=(xyz)^2$$

ដូច្នេះ X,Y និង Z ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណកែងមួយ ដែលមានក្រលាផ្ទៃជាចំនួនការេ ។ តាមសំនួរ ក) ករណីនេះអាចទៅរួចលុះត្រាតែ $X=0 \Rightarrow x=y$ និង $z=0$ ។ តែ $x,y,z\geq 1$ ដូច្នេះចំណោទគ្មានចម្លើយ ។

296. ▲ សន្មតថា ត្រីធាតុបែបនោះមាន ។ ក្នុងចំណោមចម្លើយទាំងនោះ យើងយក (x,y,z) ដែល $d=PGCD(x,y,z)=1$ ឬក៏ជាចម្លើយដែលតូចជាងគេបង្អស់ ។ នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌអស់នេះ តាមទ្រឹស្តីបទត្រីធាតុពីតាករ $x^4+y^4=z^2 \Rightarrow$នោះគេមានចំនួនគត់ m,n ដែលបឋមនឹងគ្នា ដែល

$$x^2=2mn;y^2=m^2-n^2;z=m^2+n^2$$

ដូច្នេះ $m^2=n^2+y^2$ និង ចំនួនគត់ m,n,y មានតួចែករួមធំបំផុតស្មើ 1 ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត y ជាចំនួនសេស (ព្រោះ x ជាចំនួនគូ) ហើយដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទដដែល គេមានចំនួនបឋមនឹងគ្នា u,v ដែល

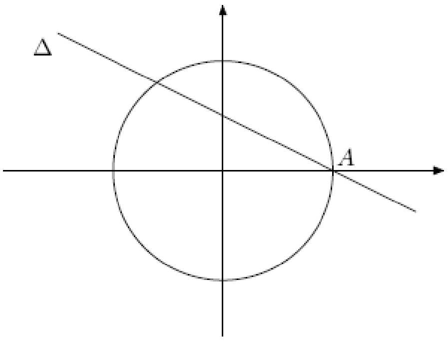
$$n=2uv;\ y=u^2-v^2,m=u^2+v^2$$

$\Rightarrow x^2=2mn=4uv(u^2+v^2)$ ។ បើ d ជាតួចែករួមធំបំផុតរវាង u និង u^2+v^2 នោះ d ចែក v^2 ជាច់ ។ តែ u បឋមនឹង v ដូច្នេះ $d=1$ ។ ដូច្នេះ u,v,u^2+v^2 បឋមរវាងគ្នាពីរៗ ហើយ $uv(u^2+v^2)$ ជាចំនួនការេ ។ ដូច្នេះ ចំនួននីមួយៗត្រូវតែជាចំនួនការេ មានន័យថា

$$u = x'^2, v = y'^2, u^2 + v^2 = z'^2$$

យើងទាញបានថា $x'^4 + y'^4 = z'^2 \implies (x', y', z')$ ជាឫសរបស់សមីការដែរ ដែល $x' < x, y' < y, z' < z$ ។ ដូច្នេះវាផ្ទុយពីការសន្មត ដែលថា x, y, z ជាចម្លើយវិជ្ជមានដែលតូចជាងគេ ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចម្លើយគត់វិជ្ជមានទេ ។

297. ▲ ចំណោទនេះសមមូលនឹង ការកំណត់គ្រប់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន ឋិតនៅលើរង្វង់មួយដែលមានកាំរង្វាស់មួយឯកតា ។ នៅលើរង្វង់នេះ យើងយកចំណុច $A(1,0)$ ដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន ។ យើងគូសបន្ទាត់ (Δ) មួយ(មិនឈរ)កាត់តាម A ។ បន្ទាត់នេះកាត់រង្វង់ត្រង់ចំណុច B មួយទៀត ។



តាមពិតទៅចំណុច B មានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន លុះត្រាតែ មេគុណប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់នេះជាចំនួនសនិទាន ។ ព្រោះ បើ (Δ) មិនមែនជាបន្ទាត់ឈរទេ សមីការបន្ទាត់ (Δ) មានរាង

$$y = t(x - 1)$$

ចំណុចប្រសព្វរវាង (Δ) ជាមួយរង្វង់ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$x^2 + y^2 = 1, y = t(x - 1)$$
$$\implies x^2 + t^2(x-1)^2 = 1 \iff (1 + t^2)x^2 - 2xt^2 + (t^2 - 1) = 0$$

សមីការនេះមានឫសមួយស្មើ $x = 1$ ។ ផលបូកឫសទាំង២របស់សមីការ ស្មើ $\frac{2t^2}{1+t^2}$ ។ ឫសមួយទៀតមានតម្លៃ

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

អរដោនេ y កំណត់ដោយ

$$y = t(x-1) = -\frac{2t}{t^2+1}$$

ចំនួនពីរនេះជាចំនួនសនិទានបើ t ជាចំនួនសនិទានដែរ ។

ច្រាសមកវិញ យើងឃើញថា បើចំណុច A និង B មានកូអរដោនេជាចំនួនសនិទាន នោះបន្ទាត់ (AB)ជាមេគុណប្រាប់ទិសជាចំនួនសនិទាន ។ ដូច្នេះ យើងបានបង្ហាញថា គ្រប់ចម្លើយសនិទាន ក្រៅពី $x=1, y=0$ កំណត់ដោយ

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, y = -\frac{2t}{t^2+1}$$

298. ▲ យើងឃើញថា $x=1$ និង $y=0$ ជាចម្លើយមួយ ។ តាង t ជាចំនួនសនិទានដែល $y = t(x-1)$ ។ សមីការទៅជា

$$x^2 + 3t^2(x-1)^2 = 1$$

ចម្លើយរបស់សមីការនេះគឺ $x=1$ និង $x = \frac{3t^2-1}{3t^2+1}$ ។ តម្លៃ y ត្រូវគ្នា $y = -\frac{2t}{3t^2+1}$ ។ ជាបញ្ចប់ចម្លើយរបស់សមីការគឺ

$$\left(\frac{3t^2-1}{3t^2+1}, -\frac{2t}{3t^2+1}\right); (1,0)$$

ចំពោះគ្រប់ t ជាចំនួនសនិទាន ។

299. ▲ យើងមាន $a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow a - b \geq 1$ (ព្រោះ a, b ជាចំនួនគត់) ។ ដូចគ្នា $c - d \geq 1$ ។ យើងមាន

$$2010 = (a^2-b^2) + (c^2-d^2) = (a+b)(a-b) + (c+d)(c-d)$$
$$\geq (a+b).1 + (c+d).1 = a+b+c+d = 2010$$

ដូច្នេះ ត្រូវតែ $a - b = 1$ និង $c - d = 1$ ។យើងទាញបាន $b = a - 1$ និង $d = c - 1$ ។ ដូច្នេះ

$$a + a - 1 + c + c - 1 = 2010 \ \Rightarrow a + c = 1006$$

យើងមាន a, b, c និង d ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដូច្នេះ $d \geq 1$ ។ យើងមាន $c > d$ ដូច្នេះ $c \geq 2$ ។ដោយ $a + c = 1006$ នោះ $a = 1006 - c \leq 1004$ ។

យើងមាន

$$2010 = a+b+c+d \leq a+b+c+c-1 \leq a+b+2(b-1)-1$$

$$\leq a+3(a-1)-3=4a-6$$

$$\Rightarrow a\geq 504$$

ដូច្នេះ $504\leq a\leq 1004$ ។ ដូច្នេះចតុធាតុ (a,b,c,d) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌមាន

$$\{(504,503,502,501);(505,504,501,500);\ldots;(1004,1003,2,1)\}$$

ដូច្នេះចំនួនតម្លៃនៃ a ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌមានចំនួន $1004-504+1=501$ ។

300. ▲ ដោយ x,y,z មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីនឹងគ្នា នោះយើងអាចសន្មតថា $0<x\leq y\leq z$ សិន ។ តាមលក្ខខណ្ឌនេះ យើងមាន

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{3}{x}\Rightarrow x\leq 3\ \Rightarrow x=1,2,3$$

បើ $x=1$ នោះ $1/y+1/z=0$ មិនអាចព្រោះ $y,z>0$ ។

បើ $x=2$ នោះ $1/y+1/z=1/2$ ។ ដោយ $y\leq z$ នោះ

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\Rightarrow y\leq 4$$

ដោយ $x=2$ ដូច្នេះ $2=x\leq y\leq 4$ ។ ដូច្នេះ $y=2,3,4$ ។ $y=2$ មិនអាចមាន z ។ បើ $y=3$ នោះ $z=6$ ។ បើ $y=4$ នោះ $z=4$ ។

បើ $x=3$ នោះ

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{2}{y}\Rightarrow y\leq 3\ \Rightarrow 3=x\leq y\leq 3\ \Rightarrow y=3$$

ដូច្នេះ $z=3$ ។

ដូច្នេះជាសរុប ចម្លើយរបស់សមីការមាន $(2,3,6);(2,4,4);(3,3,3)$ និងគ្រប់គំរៀបទាំងអស់ដែលអាចមាននៃត្រីធាតុទាំងអស់នេះ $((2,6,3);(3,2,6);\ldots)$ ។

301. ▲យើងមាន

$$\frac{2008}{41y^2}=\frac{2z}{2009}+\frac{2007}{2x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2008(2009)(2x^2)=2z(41y^2)(2x^2)+2007(2009)(41y^2)$$

$$\Leftrightarrow 251.49.16x^2=4x^2y^2z+2007.2009y^2$$

យើងមាន $251.49.16x^2$ និង $4x^2y^2z$ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 4 ដូច្នេះ $2007.2009.y^2$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 4 ដែរ ។ ដោយ 2007.2009 ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ y^2 ត្រូវតែចែក

ជាច់នឹង 4 ។ យើងទាញបាន y ជាចំនួនគូ ។ តាង $y=2y_1$ ដែល y_1 ជាចំនួនគត់ ។

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}&251.49.16.x^2 = 4.x^2y^2z + 2007.2009.y^2\\ \Leftrightarrow\ &251.49.16.x^2 = 16.x^2y_1^2z + 2007.2009.4.y_1^2\\ \Leftrightarrow\ &251.49.4.x^2 = 4.x^2y_1^2z + 2007.2009.y_1^2\end{aligned}$$

យើងមាន $251.49.4.x^2$ និង $4.x^2y_1^2z$ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 4 ដូច្នេះ $2007.2009.y_1^2$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 4 ដែរ ។ដោយ 2007.2009 ជាចំនួនសេស ដូច្នេះ y_1^2 ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 4 ។ យើងទាញបាន y_1 ជាចំនួនគូ ។ តាង $y_1=2y_2$ ដែល y_2 ជាចំនួនគត់ ។ដូច្នេះ

$$251.49.x^2 = 4.x^2y_2^2z + 2007.2009.y_2^2$$

ដោយ $251.49.x^2$ និង $4.x^2y_2^2z$ ចែកដាច់នឹង x^2 ដូច្នេះ $2007.2009.y_2^2$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង x^2 ដែរ ។ យើងមាន

$$(2007)(2009)y_2^2 = (223)(9)(41)(49)y_2^2 = (41)(223)(3^2)(7^2)y_2^2$$

ដូច្នេះ x^2 ធំបំផុត ស្មើនឹង $3^2.7^2.y_2^2$ (ព្រោះ $2007.2009.y_2^2$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង x^2 និង $41,223$ ជាចំនួនបឋម) ។ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}&\frac{2007.2009}{x^2} \geq \frac{2007.2009}{3^2.7^2.y_2^2} = \frac{223.41}{y_2^2}\\ \Leftrightarrow\ &-\frac{2007.2009}{x^2} \leq -\frac{223.41}{y_2^2}\end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}&251.49.x^2 = 4.x^2y_2^2z + 2007.2009.y_2^2\\ &\Leftrightarrow 4z = \frac{49.251}{y_2^2} - \frac{2007.2009}{x^2} \leq \frac{49.251}{y_2^2} - \frac{223.41}{y_2^2} = \frac{3156}{y_2^2}\\ &\Leftrightarrow z \leq \frac{789}{y_2^2}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ z ធំបំផុត បើ y_2 តូចបំផុត ។ យក $y_2=1$ យើងទទួលបាន $z=789$ និង $x^2=3^2.7^2$ នាំឱ្យ $x=21$ ។ ចំពោះ $y_1=1 \Rightarrow y=4$ ។

ដូច្នេះ តម្លៃធំបំផុតរបស់ z ដែលអាចមានគឺ $z_{\max} = 789$ ដែលតម្លៃធំបំផុតនេះ កើតមាន ឧទាហរណ៍នៅពេលដែល $x = 21$ និង $y = 4$ ។

302. ▲ ក) ដំបូងយើងសន្មតថា $a \le b \le c$ ។ យើងទាញបាន $\frac{1}{4} \le \frac{3}{a^2} \Rightarrow a^2 \le 12 \Rightarrow a = 1,2,3$ ។ a មិនអាចស្មើ 1 ឬ 2 ទេ ។ បើ $a = 3$ សមីការទៅជា

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36} \Rightarrow b^2 \le \frac{72}{5} \Rightarrow b = 3 \Rightarrow c = 6$$

ដូច្នេះ ចម្លើយរបស់សមីការ គឺ $(a,b,c) = \{(3,3,6),(3,6,3),(6,3,3)\}$ ។

ខ) តាមរបៀបដូចខាងលើ យើងទាញបានករណី $n = 2$ និង $n = 3$ សមីការគ្មានឫស ។

ចំពោះ $n = 4$ យើងយក $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ ។

យើងនឹងបង្ហាញថា $n = 5$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ ។ ព្រោះបើ (a,b,c,d,e) ផ្ទៀងផ្ទាត់ ដោយ $a \le b \le c \le d \le e$ នោះ យើងទាញបាន $1 < a^2 \le 5$ ដូច្នេះ $a = 2$ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបាន $b = 2, c = 2, d = 2$ រួចហើយ $\frac{1}{e^2} = 0$ មិនអាច ។

ដោយដឹងថា $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{1}{4}$ នោះ

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

ដូច្នេះ $(2,2,2,3,3,6)$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការករណី $n = 6$ ។

យើងមាន $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{18^2}$ ដូច្នេះ $(2,2,2,3,3,9,9,18)$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ ករណី $n = 8$ ។

យើងដឹងថា បើ $(x_1, \ldots, x_n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ នោះ $(2x_1, 2x_1, 2x_1, 2x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការដែរ មានន័យថា បើ n ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌសមីការមានឫស នោះ $n + 3$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ដែរ ។

ដូច្នេះ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ខុសពី $2,3,5$ សុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំងអស់ ។

303. ▲ ចំនួនគូបសមមូលនឹង 0,1,6 (mod 7) ។ ចំនួនស្វ័យគុណនៃ២ (គឺចំនួនដែលមានរាង 2^k) សមមូលនឹង 1,2,4 (mod 7) ។ ដូច្នេះ $2^y + 15 \equiv 2,3,5 \pmod 7$ ។ ដូច្នេះអង្គទាំង២មិនអាចស្មើគ្នាទេ ។

304. ▲ សមីការសមមូលនឹង

$$2^n = (x+1)(x-1)$$

ដូច្នេះ $(x+1)$ និង $(x-1)$ ត្រូវតែជាស្វ័យគុណនៃ 2 ទាំងពីរ ។ យើងដឹងថាចំនួនស្វ័យគុណនៃ 2 ដែលខុសគ្នាចំនួន 2 ឯកតា $(x+1-(x-1)=2)$ មានតែ 2 និង $2^2 = 4$ ប៉ុណ្ណោះ ។ ដូច្នេះ $x = 3$ ជាចម្លើយតែមួយគត់ ហើយ $n = 3$ ។

305. ▲ ក) $5^n = a^2 \implies a$ ត្រូវតែជាចំនួនស្វ័យគុណនៃ 5 ដូច្នេះ $a = 5^k$ ។ សមីការទៅជា $2k = n$ ដូច្នេះ n ជាចំនួនគូ ។ ដូច្នេះ n ជាចំនួនគូ ហើយ $a = 2^{n/2}$ ។

ខ) $5^n = (a-1)(a+1)$ ។ ដោយ $a-1$ បឋមនឹង $a+1$ បើ $a \neq 2$ នោះ $a-1$ និង $a+1$ ត្រូវតែជាស្វ័យគុណនៃ 5 ទាំងពីរ ។ តែមិនដែលមានស្វ័យគុណនៃ 5 ដែលខុសគ្នាចំនួន2 ឯកតាទេ ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចម្លើយ ។

គ) ដោយ $5 \equiv 1 \pmod 4 \Longrightarrow 5^n \equiv 1 \pmod 4 \Longrightarrow a^2 \equiv 3 \pmod 4$ ។ តែយើងដឹងថាចំនួនការេ សមមូលនឹង 0 ឬ 1 (mod 4) ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចម្លើយ ។

306. ▲ សមីការមានឫសងាយ $x_0 = \frac{3}{5}, y_0 = \frac{4}{5}$ និង $z_0 = \frac{6}{5}$ ។

ភាគបែងរបស់ x_0^3, y_0^3, z_0^3 ស្មើនឹង $5^3 = 125$ ។ បើយើងគុណ x_0, y_0, z_0 នឹង $(125k+1)$ ដែល k ជាចំនួនគត់ នោះយើងទទួលបានផ្នែកទសភាគរបស់ x_0, y_0, z_0 នៅរក្សាតម្លៃដើមដដែល ។ ព្រោះ

$$x = x_0(125k+1), x^3 = x_0^3(125^3k^3 + 3(125^2k^2) + 3(125k) + 1)$$
$$= \underbrace{3^3(125^2k^3) + 3^4(125)k^2 + 3^4k}_{\text{គត់}} + 3^3/5^3$$

ដូច្នេះ បណ្ដាចំនួន

$$x = x_0(125k+1); y = y_0(125k+1)\,; z = z_0(125k+1)$$

សុទ្ធតែជាចម្លើយរបស់សមីការ ។ ដូច្នេះសមីការមានឫសច្រើនរាប់មិនអស់ ។

307. ▲យើងមាន

$$(x+1)^2+\cdots+(x+99)^2=99x^2+99(2x)+(1^2+2^2+\cdots+99^2)$$

និង

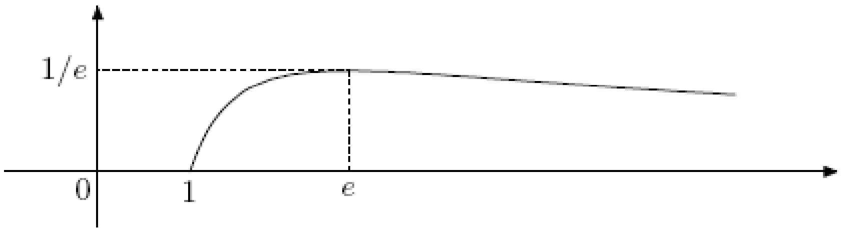
$$(1^2+2^2+\cdots+99^2)=\frac{99(99+1)(2\times 99+1)}{6}=328350=36483(9)+3$$

ដូច្នេះ $(x+1)^2+\cdots+(x+99)^2\equiv 3\ (mod\ 9)$ និង $\equiv 0\ (mod\ 3)$ ។ ដូច្នេះ $y^z\equiv 3\ (mod\ 3^2)$ និង $y^z\equiv 0\ (mod\ 3)$ ។ ដូច្នេះ $y^z=3p$ ដែល p ជាចំនួនគត់ដែលចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ដោយ $z\geq 2$ នោះសមីការ $y^z=3p$ មិនអាចមានចម្លើយទេ ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចម្លើយ ។

308. ▲ សមីការអាចសរសេរទៅជា

$$y\log x=x\log y\ \Leftrightarrow \frac{\log x}{x}=\frac{\log y}{y}$$

ដោយសិក្សាទៅលើអនុគមន៍ $f(t)=\frac{\log t}{t}$ យើងទាញបានថា អនុគមន៍នេះជាអនុគមន៍កើនលើ $[1,e]$ ហើយចុះលើ $[e,+\infty[$ ។



ដូច្នេះ យើងទាញបានថា បើ x និង y ជាចំនួនគត់ពីរខុសគ្នា(សន្មតថា $x<y$) ដែល $\frac{\log x}{x}=\frac{\log y}{y}$ នោះ វាត្រូវតែ $x<e$ និង $y>e$ ។ ចន្លោះ 1 ទៅ e យើងមានចំនួនគត់តែ $x=2$ មួយគត់ ។ ដូច្នេះ $x=2$ និង $y=4$ ។ សរុបសមីការមានចម្លើយ $(x,y)=\{(2,4);(4,2)\}$ ។

309. ▲ i) បើ $x\geq 1$ នោះ y^{2^x} ជាចំនួនការេ ។ ក្នុងចំណោម $x,x+1,x+2,x+3$ ត្រូវមានមួយដែលមានរាង $4k$; មួយទៀតមានរាង $4k+1$; មួយទៀតមានរាង $4k+2$ និង មួយទៀតមានរាង $4k+3$ ។ ដូច្នេះក្នុងចំណោម $(x+1)(x+2)(x+$

3); $x(x+2)(x+3)$; $x(x+1)(x+3)$; $x(x+1)(x+2)$ ត្រូវមានតួបីដែលចែកដាច់នឹង ៤ (គឺតួដែលមានកត្តា $4k$) ។ តួមួយទៀត ដែលចែកមិនដាច់នឹង ៤ ត្រូវមានរាង $(4k+1)(4k+2)(4k+3)$ ដែលចំនួននេះពេលចែកនឹង ៤ សល់សំណល់ ២ ។ដូច្នេះ អង្គខាងឆ្វេងចែកនឹង ៤ សល់សំណល់ ២ ។ តែអង្គខាងស្តាំ ជាចំនួនការេ ពេលចែកនឹង ៤ អាចសល់សំណល់ ០ ឬ ១ តែប៉ុណ្ណោះ (បើចំនួនការេនោះជា $(2k)^2$ នោះវាចែកដាច់នឹង ៤ តែបើចំនួនការេនោះជា $(2k+1)^2=4k^2+4k+1$ នោះពេលចែកនឹង ៤ វាសល់សំណល់ ១) ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានឫសគត់ ។

ii) បើ $x\le -4$ នោះអង្គខាងឆ្វេងមានតម្លៃអវិជ្ជមាន តែអង្គខាងស្តាំវិជ្ជមាន ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានឫស ។

បើ $x=-3$ នោះ $-3(-2)(-1)=y^{2^{-3}}=\sqrt[8]{y}$ គ្មានឫស ។

បើ $x=-2$ នោះ $-2(-1)(1)=y^{2^{-2}}=\sqrt[4]{y}\Rightarrow y=16$ ។

បើ $x=-1$ នោះ $-1(1)(2)=y^{2^{-1}}=\sqrt{y}$ គ្មានឫស ។

បើ $x=0$ នោះ $1(2)(3)=y^{2^{0}}=y\Rightarrow y=6$ ។

ដូច្នេះសមីការមានឫស $(x,y)\in\{(-2,16);(0,6)\}$ ។

310. ▲ដោយ y ជាចំនួនគត់ នោះ $y^4+2y^3+y^2+2y$ ជាចំនួនគត់ដែរ ។ ដូច្នេះ 9^x-3^x ត្រូវតែជាចំនួនគត់ដែរ ។ ដូច្នេះ ទាល់តែ $x\ge 0$ ។ដូច្នេះ $9^x-3^x\ge 0$ ។ដូច្នេះ $y^4+2y^3+y^2+2y=(y^2+1)(y^2+2y)\ge 0$ ដូច្នេះ $y\le -2$ ឬ $y\ge 0$ ។

សមីការសមមូលនឹង

$$4((3^x)^2-3^x)+1=4y^4+8y^3+4y^2+8y+1$$
$$\Rightarrow (2t-1)^2=4y^4+8y^3+4y^2+8y+1$$

ដែល $3^x=t\ge 1$ ។

● ករណី $y\ge 0$

យើងមាន

$$4y \le 4y^2$$
$$\Longrightarrow\ 4y^4+8y^3+4y^2+8y+1 \le 4y^4+4y^2+1+8y^3+4y^2+4y$$
$$\Leftrightarrow\ 4y^4+8y^3+4y^2+8y+1 \le (2y^2+2y+1)^2$$

និង

$$4y^4+8y^3+4y^2 < 4y^4+8y^3+4y^2+8y+1$$
$$\Leftrightarrow (2y^2+2y)^2 < 4y^4+8y^3+4y^2+8y+1$$

ដូច្នេះ

$$(2y^2+2y)^2 < (2t-1)^2 = 4y^4+8y^3+4y^2+8y+1 \le (2y^2+2y+1)^2$$

ដូច្នេះមានតែ

$$(2t-1)^2 = 4y^4+8y^3+4y^2+8y+1 = (2y^2+2y+1)^2$$
$$\Longrightarrow 4y^2 = 4y$$
$$\Longrightarrow y=0; y=1$$

បើ $y=0$ នោះ $t=1 \Longrightarrow x=0$

បើ $y=1$ នោះ $t=3 \Longrightarrow x=1$

● ករណី $y \le -2$

យើងមាន

$$4y^4+8y^3+4y^2 > 4y^4+8y^3+4y^2+8y+1$$
$$\Leftrightarrow (2y^2+2y)^2 > 4y^4+8y^3+4y^2+8y+1$$

បើ $y \le -3$ នោះ

$$4y(y+3) \ge 0$$
$$\Longrightarrow (2y^2+2y-1)^2 \le 4y^4+8y^3+4y^2+8y+1$$

ដូច្នេះ $(2y^2+2y-1)^2 \le 4y^4+8y^3+4y^2+8y+1 = (2t-1)^2 <$ $(2y^2+2y)^2$ ។ ដូច្នេះ មានតែ

$$(2y^2+2y-1)^2 = 4y^4+8y^3+4y^2+8y+1 = (2t-1)^2$$
$$\Longrightarrow y=-3 \Longrightarrow t=6 \Longrightarrow x : \text{មិនគត់}$$

បើ $y=-2$ នោះ $x=0$ ។

ដូច្នេះសមីការមានឫស $(x,y) \in \{(0,0);(0,-2);(1,1)\}$ ។

311. ▲ តាង $a_n = 1!+2!+3!+\cdots+n!$ ។ យើងមាន

$$a_8 = 46233 \equiv 0 \pmod{3^2}$$

$$a_8 \equiv 9 \pmod{3^3}$$

ចំពោះ $n \geq 9$ យើងមាន

$$a_n = a_8 + 9! + 10! + \cdots + n! \equiv a_8 \equiv 9 \pmod{3^3}$$

ដូច្នេះមានន័យថា ចំពោះ $n \geq 8$ គេមាន a_n ចែកដាច់នឹង $3^2 = 9$ តែចែកមិនដាច់នឹង 3^3 $\Rightarrow a_n = 3^2 q$ ដែល q ជាចំនួនគត់ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ដោយ $a_n = m^k$ នោះ ត្រូវតែ $k = 2$ ព្រោះ $k \geq 2$ ។ យើងមាន $m^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod 5$ ។ ចំពោះ $n \geq 8$ យើងមាន

$$a_n \equiv 1 + 2 + 2.3 + 2.3.4 = 33 \equiv 3 \pmod 5$$

ដូច្នេះ m^2 មិនអាចស្មើ a_n បានទេ ។ យើងទាញបាន ថា សមីការគ្មានចម្លើយទេ ពេល $n \geq 8$ ។

យើងពិនិត្យករណីនីមួយៗខាងក្រោម

$a_1 = 1 = 1^k, \forall k \Rightarrow$ ចម្លើយសមីការ $(m, n, k) = (1,1,k)$

$a_2 = 3 = m^k, k \geq 2$: គ្មានចម្លើយ

$a_3 = 9 = 3^2 \Rightarrow$ ចម្លើយសមីការ $(m, n, k) = (3,3,2)$

$a_4 = 33 = 3(11)$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

$a_5 = 153 = 9(17)$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

$a_6 = 873 = 9(97)$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

$a_7 = 5913 = 81(73)$ មិនអាចជាចំនួនស្វ័យគុណទេ

312. ▲ បើ $z = 1$ នោះ យើងទាញបាន $x = y = 1$ ។ សន្មតថា $z \geq 2$ ។ បើគេមិនមាន $x = y = z$ ទេ នោះមានមួយក្នុងចំណោម x និង y ដែលត្រូវតែធំជាង z ដាច់ខាត(និងមួយទៀតតូចជាងដាច់ខាត) ដូច្នេះ ធំជាងឬស្មើ $z + 1$ ។

បើសិនជាមួយនោះជា x យើងទាញបាន

$$2x^x \geq 2(z+1)^{z+1} > 2z^{z+1} \geq 4z^z$$

ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។

បើសិនជាមួយនោះជា y នោះយើងទាញបាន

$$y^y \geq (z+1)^{z+1} > z^{z+1} + (z+1)z^z = (2z+1)z^z \geq 5z^z$$

ក៏ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែរ ។

313. ▲ $x^n + 1 = y^{n+1} \Rightarrow x^n = (y-1)(1 + y + \cdots + y^n)$ $(*)$
បើ p ជាតួចែកបឋមរបស់ $y - 1$ នោះ p ចែកដាច់ x ហើយចែកមិនដាច់ $n + 1$ ទេ ព្រោះ $n + 1$បឋមនឹង x ។ តែយើងមាន

$$1 + y + \cdots + y^n \equiv n + 1 \pmod{(y-1)}$$

ដូច្នេះ p ក៏ចែកមិនដាច់ $1 + y + \cdots + y^n$ ដែរ ។ ដូច្នេះ $y - 1$បឋមនឹង $1 + y + \cdots + y^n$ ។ ដូច្នេះ តាមទំនាក់ទំនង (*) យើងទាញបាន $1 + y + \cdots + y^n$ ជាចំនួនមានរាង k^n ។ តែវាមិនអាចមានទេ ព្រោះ $y^n < 1 + y + \cdots + y^n < (y+1)^n$ ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានចម្លើយ ។

314. ▲ បើ $a \ge b$ នោះ $a^{b^2} = b^a \le a^a \Rightarrow a \ge b^2$ ។ ដូច្នេះ $a^{2b^2} = b^{2a} \le a^a \Rightarrow a \ge 2b^2$ ។ តាង $x = a/b^2$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា x ជាចំនួនគត់ ។ យើងមាន

$$x^{b^2} = \frac{a^{b^2}}{b^{2b^2}} = b^{a-2b^2}$$

ជាចំនួនគត់ $\Rightarrow x$ ជាចំនួនគត់ (ព្រោះ x ជាចំនួនសនិទាន) ។
យើងមាន

$$a = b^2x \Rightarrow b^a = b^{b^2x} \Rightarrow a^{b^2} = b^{b^2x} \Rightarrow a = b^x \Rightarrow x = b^{x-2}\ (*)$$

បើ $b = 1$ យើងទាញបាន $x = 1$ ។ បើ $b \ge 2$ នោះសមភាព (*) មិនមានទេ ពេល $x > 4$ ។ ចំពោះ $x = 3$ យើងទាញបាន $b = 3$ ហើយចំពោះ $x = 4$ យើងទាញបាន $b = 2$ ។ ចម្លើយរបស់សមីការគឺ $(a, b) = \{(1,1); (16,2); (27,3)\}$ ។
បើ $a \le b$ នោះយើងមាន $a^{b^2} = b^a \le b^b$ ដូច្នេះ $a^b \le b$ វិសមភាពនេះមិនអាចពិតទេ បើ $a \ge 2$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបានចម្លើយសមីការ $(a, b) = (1,1)$ ។
ជាសរុបសមីការមានចម្លើយ $(a, b) = \{(1,1); (16,2); (27,3)\}$ ។

315. ▲ ក) គ្រប់ចំនួនគត់ $n \ge 1$ សុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់ទាំងអស់ លើកលែងតែករណី $n = 2$ ចេញ ។ ព្រោះ បើ $n = 1$ យើងយក $a = b \ge 2$ ។ បើ $n \ge 3$ យើងយក $a =$

$(n-1)^{n-1}$ និង $b=(n-1)^n$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $n=2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ ។ យើងសន្មតផ្ទុយថា មានចំនួនគត់ $a,b\geq 2$ ដែល

$$(a^a)^a=b^b \quad (**)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនបឋមដែលចែក a ដាច់ សុទ្ធតែចែក b ដាច់ទាំងអស់ ។ យើងឃើញថា បើ $b\leq a$ នោះ $b^b\leq a^a<(a^a)^2$ ហើយ បើ $b\geq 2a$ នោះ $b^b\geq (2a)^{2a}=2^{2a}(a^a)^2>(a^a)^2$ ។ ដូច្នេះវាត្រូវតែ $a<b<2a$ ។

តាង p ជាចំនួនបឋម ដែលចែកដាច់ b ដូច្នេះចែកដាច់ b ដែរ ។ តាង $a=p^\alpha k, b=p^\beta l$ ។ យើងមាន

$$(a^a)^2=b^b \Rightarrow a^{2a}=b^b \Rightarrow p^{2a\alpha}k^{2a}=p^{b\beta}l^b \Rightarrow 2a\alpha=b\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{b}{2a} < 1$$

$$\Rightarrow \alpha<\beta$$

បន្ទាប់មកទៀត ដោយដឹងថា គ្រប់ចំនួនបឋម ដែលចែកដាច់ a សុទ្ធតែចែក b ដាច់ដែរ ហើយ $\alpha<\beta$ នោះយើងទាញបានថា b ជាពហុគុណនៃ a តែវាមិនអាចព្រោះ $a<b<2a$ ។ ដូច្នេះ $n=2$មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ខ) សមីការមានឫសឯាយ $(1,1)$ ។ សន្មតថា $a,b\geq 2$ ជាចំនួនគត់ ដែល

$$(a^a)^5=b^b$$

តាមរបៀបស្រាយបញ្ជាក់ដូចក្នុងសំនួរក) យើងទាញបានថា $a<b<5a$ ហើយថា a ចែកដាច់ b ។ ដូច្នេះ $b=ka$ ដែល $k\in\{2;3;4\}$ ។ សមីការទៅជា

$$a^{5a}=(ka)^{ka} \Rightarrow a^{5-k}=k^k$$

ចំពោះ $k=2$ យើងមាន $a^3=4$ មិនអាច ។

ចំពោះ $k=3$ យើងទាញបាន $a^2=27$ មិនអាច ។

ចំពោះ $k=4$ យើងទាញបាន $a=4^4 \Rightarrow b=4^5$ ។ យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ថាវាជាចម្លើយរបស់សមីការ ។

ដូច្នេះសមីការមានចម្លើយ $(a,b)=\{(1,1);(4^4,4^5)\}$ ។

316. ▲ យើងនឹងបង្ហាញថា សមីការនេះគ្មានឫសទេ ។ យើងដឹងថា $x-1<\lfloor x\rfloor\le x$ ។ ដូច្នេះ

$$x-1+2x-1+4x-1+\cdots+32x-1$$
$$<\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 4x\rfloor+\lfloor 8x\rfloor+\lfloor 16x\rfloor+\lfloor 32x\rfloor$$
$$\le x+2x+4x+\cdots+32x$$
$$\Longrightarrow 63x-6<12345\le 63x \ \Longrightarrow 195<x<196$$

យើងសរសេរ x នៅក្នុងគោល២

$$x=\overline{195,x_1x_2x_3\ldots}_{10}=\overline{11000011,a_1a_2a_3\ldots}_2=2^7+2^6+2+2^0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots=195+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots$$

ដោយ $a_k=0$ ឬ 1 ។ ដូច្នេះ

$$\lfloor 2x\rfloor=2(195)+a_1$$
$$\lfloor 4x\rfloor=4(195)+2a_1+a_2$$
$$\lfloor 8x\rfloor=8(195)+4a_1+2a_2+a_3$$
$$\lfloor 16x\rfloor=16(195)+8a_1+4a_2+2a_3+a_4$$
$$\lfloor 32x\rfloor=32(195)+16a_1+8a_2+4a_3+2a_4+a_5$$

បូកសមភាពទាំងអស់នេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 4x\rfloor+\lfloor 8x\rfloor+\lfloor 16x\rfloor+\lfloor 32x\rfloor$$
$$=63(195)+31a_1+15a_2+7a_3+3a_4+a_5=12345$$
$$\Longrightarrow 31a_1+15a_2+7a_3+3a_4+a_5=60$$

សមីការនេះមិនអាចមានចម្លើយទេព្រោះ

$$31a_1+15a_2+7a_3+3a_4+a_5\le 31+15+7+3+1=57<60$$

317. ▲ $\lfloor a\rfloor=\lfloor b\rfloor$ លុះត្រាតែ $\exists k\in\mathbb{Z}$ ដែល $a,b\in[k,k+1)$ និងច្រាសមកវិញ ហើយករណីនេះកើតមានបើ $|a-b|<1$ និងច្រាសមកវិញ ។ ដូច្នេះ សមីការដែលឱ្យមានឫសលុះត្រាតែ $|x^2-2x-2|<1$ ។ វិសមភាពនេះមានចម្លើយ

$$x\in\left(-1,\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right]\cup\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{17}\right),\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right)\right)$$

318. ▲ យើងមាន

$$(2x-3)(2x-17)=4x^2-40x+51\le 4x^2-40\lfloor x\rfloor+51=0$$
$$\Longrightarrow \frac{3}{2}\le x\le\frac{17}{2} \ \Longrightarrow 1\le\lfloor x\rfloor\le 8$$
$$\Longrightarrow x=\frac{\sqrt{40\lfloor x\rfloor-51}}{2}$$

សាក$\lfloor x\rfloor = 1; 2; 3; \dots 8$ ម្តងមួយៗ យើងឃើញថា មានតែ $\lfloor x\rfloor = \{2,6,7,8\}$ តែប៉ុណ្ណោះ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ ដូច្នេះ ឫសសមីការគឺ $x = \left\{\frac{\sqrt{29}}{2}; \frac{\sqrt{189}}{2}; \frac{\sqrt{229}}{2}; \frac{\sqrt{269}}{2}\right\}$ ។ ច្រាសមកវិញ យើងយកចម្លើយទាំងនេះ ទៅផ្ទៀងផ្ទាត់សារឡើងវិញក្នុងសមីការ យើងនឹងឃើញថា ឫសទាំងនេះជាចម្លើយពិតប្រាកដ ។

319. ▲ យើងមាន $x = \lfloor x\rfloor + \{x\}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ បូកអង្គនិងអង្គនៃសមីការ យើងទាញបាន

$$2x + 2y + 2z = 568{,}9 \iff x + y + z = 284{,}45$$

ដកសមីការក្រោយនេះចូលក្នុងសមីការទាំង៣ដែលឱ្យ

$$\begin{cases} \{y\} + \lfloor z\rfloor = 84{,}45 \\ \lfloor x\rfloor + \{z\} = 94{,}35 \\ \{x\} + \lfloor y\rfloor = 105{,}65 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 84 = \lfloor 84{,}45\rfloor = \lfloor \{y\} + \lfloor z\rfloor \rfloor = \lfloor z\rfloor \;\Rightarrow\; \lfloor z\rfloor = 84, \{y\} = 0{,}45$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន $\lfloor y\rfloor = 105 \;\Rightarrow y = 105{,}45$ ។ ដូចគ្នា $x = 94{,}65; z = 84{,}35$ ។

320. ▲ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a_i, 1 \le i \le k$ មានចំនួន k ។ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $x_i = a_i - a_1, 2 \le i \le k$ សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ ហើយមានចំនួនសរុប $k-1$ ។ សំណុំ $\{a_i, x_i\}$ មានធាតុសរុបចំនួន $2k-1$ ។ យើងមាន $2k - 1 > n$ ព្រោះ $k \ge \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ ។ ធាតុនីមួយៗនៃសំណុំនេះ មានតម្លៃធំមិនលើសពី n ទេ ដូច្នេះវាត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ធាតុពីរដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ។ ដោយ x_i សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ និង a_i សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ដែរ នោះ ធាតុពីរដែលស្មើគ្នានោះ ត្រូវតែជា a_j ណាមួយ និង x_r ណាមួយ ។ ដូច្នេះ $x_r = a_r - a_1 = a_j \;\Rightarrow a_1 + a_j = a_r$ ។

ស្មិត $a_1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, a_2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2, \dots, a_k = n$ ដែល $k = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សម្មតិកម្ម ។ យើងមាន $2a_1 = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$ ។

បើ $n = 2m$ នោះ $2a_1 = 2m + 2 > n = 2m$ ។ ដោយ $a_1 + a_j > 2a_1 > n, a_r \le n$ ដូច្នេះសមីការ $a_1 + a_j = a_r$ គ្មានចម្លើយ ។

បើ $n = 2m + 1$ នោះ $2a_1 = 2m + 2 > 2m + 1 = n \Longrightarrow$ សមីការ $a_1 + a_j = a_r$ គ្មានចម្លើយដែរ ។

ដូច្នេះករណី $k = \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$ សមីការគ្មានចម្លើយ ។ ដូច្នេះហើយវាត្រូវតែ $k > \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$ ។

321. ▲យើងមាន

$$(b-a)(b+a) = b^2 - a^2 = (b^2 + bc) - (a^2 + ad) = 2^m b - 2^k a$$

ម៉្យាងវិញទៀត យើងមាន $k > m$ ព្រោះ $a + d > b + c$ ពីព្រោះ $a(a + d - b - c) = (a - b)(a - c) > 0$ ។ ដូច្នេះ $(b - a)(b + a)$ ជាពហុគុណនៃ 2^m ។ ដោយ b សេស នោះ $(b - a) + (b + a) = 2b$ មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 ទេ ដូច្នេះ $(b - a)$ និង $(b + a)$ មិនអាចជាពហុគុណនៃ 4 ទាំងពីរបានទេ ។ យើងទាញបានថា មានមួយក្នុងចំណោមចំនួនពីរនេះ ចែកដាច់នឹង 2^{m-1} ។ តែ

$$0 < b - a < b < \frac{b+c}{2} = 2^{m-1}$$

ដូច្នេះ មានតែ $(a + b)$ ជាពហុគុណ នៃ 2^{m-1} ។ យើងមានវិសមភាពមួយផ្សេងទៀត

$$b + a < b + c = 2^m$$

ដូច្នេះ $b + a = 2^{m-1}$ ។

បើ $d = PGCD(a, b)$ នោះ d ត្រូវតែចែកដាច់ $a + b$ ដូច្នេះ d ត្រូវតែមានរាង 2^k ។ ដោយ a និង b សុទ្ធតែជាចំនួនសេសទាំងពីរ នោះ $d = 1$ មានន័យថា a និង b បឋមនឹងគ្នា ។

តាមរបៀបដូចគ្នា យើងបង្ហាញថា a និង c បឋមនឹងគ្នា តាមរយៈ $c - a = (c + b)(b + a) = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1}$ ។

ជាបញ្ចប់ a ចែកដាច់ bc ហើយបឋមនឹង b និង នឹង c ។ ដូច្នេះ $a = 1$ ។

322. ▲ បើ $p = 2$ នោះ $2^2 + 3^2 = 13^1$ សំណើពិត ។

បើ $p > 2$ នោះ p ជាចំនួនបឋមសេស ។ ចំពោះចំនួនសេស p យើងមាន

$$2^p + 3^p = 5(2^{p-1} - 3(2^{p-2}) + \cdots + 3^{p-1})$$

$\Longrightarrow 5$ ចែកដាច់ $2^p + 3^p = a^n$ ។

បើ $n \geq 2$ នោះ 25 ក៏ចែកដាច់ $2^p + 3^p = a^n$ ដែរ ។ ដូច្នេះ $(2^{p-1} - 3(2^{p-2}) + \cdots + 3^{p-1})$ ចែកដាច់នឹង 5 ។ ដោយ $3 \equiv -2 \pmod 5$ ដូច្នេះ $(2^{p-1} - 3(2^{p-2}) + \cdots + 3^{p-1}) \equiv p2^{p-1} (\bmod 5)$

$\Rightarrow$ 5 ចែកដាច់ p មានន័យថា $p = 5$ ព្រោះ p ជាចំនួនបឋម ។ តែ $2^5 + 3^5 = 275 = 5^2.11$ មិនមែនជាចំនួនស្វ័យគុណទេ ។ ដូច្នេះ សំណើពិត ។

323. ▲ តាង $x = 12^m - 5^n$ ជាតម្លៃតូចបំផុតដែលយើងត្រូវកំណត់ ។ យើងមាន $x \equiv -5^n \ (\bmod 2; 3)$ ។ ដូច្នេះ x ចែកមិនដាច់នឹង 2 ផង និងនឹង 3 ផង ។ ដូចគ្នាដែរ x ចែកមិនដាច់នឹង 5 ។ ដូច្នេះយើងទាញបាន $x = 1$ ឬក៏ $x \geq 7 = 12 - 5$ ។ ករណី $x = 1$ មិនអាចទៅកើតទេ ព្រោះ

$$12^m - 5^n \equiv -1 \neq 1 (\bmod 4)$$

ដូច្នេះ $x = 7$ (ពេល $m = 1, n = 1$) ។

324. ▲ យើងមាន $|p^r - q^s| = 1$ ជាចំនួនសេស ។ ដូច្នេះត្រូវមានមួយក្នុងចំណោម p^r និង q^s គូ និង មួយទៀតសេស ។ ដោយ p និង q សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម នោះត្រូវតែមានមួយស្មើ 2 ។ ជាដំបូងយើងសន្មតថា $q = 2$ ។ បន្ទាប់មកទៀត p ជាចំនួនបឋមសេសដែល

$$p^r \pm 1 = 2^s$$

បើ r ជាចំនួនសេស នោះ

$$p^r - 1 = (p-1)(p^{r-1} + p^{r-2} + \cdots + 1)$$
$$p^r + 1 = (p+1)(p^{r-1} - p^{r-2} + \cdots + 1)$$

ដូច្នេះ $p^r \pm 1$ ជាពហុគុណនៃ $p^{r-1} \mp p^{r-2} + \cdots + 1$ ដែលជាចំនួនសេសធំជាង 1 ដាច់ខាត ។ ដូច្នេះវាមិនអាចជា 2^s ទេ ។ យើងទាញបានថា r ជាចំនួនគូ ។ តាង $\mathrm{r} = 2\mathrm{t}$ ។

ករណី $p^r + 1 = 2^s$: p^{2t} ជាការេនៃចំនួនសេស ដូច្នេះ វាសមមូលនឹង $1 \ (\bmod 14)$ ។ ដូច្នេះ $p^r + 1 \equiv 2 \ (\bmod 4) \Rightarrow p^r + 1 = 2^s \Rightarrow s = 1$ ។ តម្លៃ s នេះយើងមិនយក ព្រោះ $s \geq 2$ ។

ករណី $p^r - 1 = 2^s$: ផលគុណ $(p^t - 1)(p^t + 1)$ ជាស្វ័យគុណនៃ 2 ដូច្នេះ កត្តានីមួយៗត្រូវតែជាស្វ័យគុណនៃ 2 ដែរ ។ ចំនួនស្វ័យគុណនៃ 2 ចំនួនពីរ ដែលខុសគ្នា 2 ឯកតា មិនមានអ្វីក្រៅតែពី 2 និង 4 ទេ ។ ដូច្នេះ $p = 3, t = 1$ និង $s = 3$ ដូច្នេះ $r = 2$ ។

ដូច្នេះសមីការមានចម្លើយ $(p, q, r, s) = \{(3,2,2,3); (2,3,3,2)\}$ ។

325. ▲ ដោយ $(a_n + b_n)$ និង $(a_n b_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត គេបាន $a_n + b_n = \alpha + nr$ និង $a_n b_n = \beta + ns$ ដែល α, β, r និង s ជាចំនួនគត់ ។ r និង s ជាផលសងរួមរបស់ស្វ៊ីត $(a_n + b_n)$ និង $(a_n b_n)$ រៀងគ្នា ។ បើ $r = 0$ នោះ $(a_n + b_n)$ ជាស្វ៊ីតថេរ ។

ចំពោះគ្រប់ n គេមាន a_n និង b_n ជាចម្លើយរបស់សមីការ

$$X^2 - (\alpha + nr)X + (\beta + ns) = 0$$

ដូច្នេះ ឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta_n = (\alpha + nr)^2 - 4(\beta + ns)$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ការេ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 0$ ។ យើងមានសមភាព

$$r^2 \Delta_n = (nr^2 + \alpha r - 2s)^2 + d$$

ដែល $d = -4s^2 + 4rs\alpha - 4\beta r^2$ មិនអាស្រ័យនឹង n ។ ដូច្នេះបើ $r \neq 0$ ចំពោះ n ធំគ្រប់គ្រាន់ណាមួយ នោះយើងមានវិសមភាព

$$(nr^2 + \alpha r - 2s - 1)^2 < r^2 \Delta_n < (nr^2 + \alpha r - 2s + 1)^2$$

តែដោយ $r^2 \Delta_n$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ការេ ចំពោះគ្រប់ n (ទោះធំគ្រប់គ្រាន់ឬមិនគ្រប់គ្រាន់) នោះ

$$r^2 \Delta_n = (nr^2 + \alpha r - 2s)^2$$

ដូច្នេះ $d = 0$ ។ ដូច្នេះសមីការខាងលើ មានឫសស្មើនឹង $c = \frac{s}{r}$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ n យើងមាន $a_n = c$ ឬ $b_n = c$ ។

326. ▲ សន្មតថាផ្ទុយថា មាន a និង b ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា ដែល $f\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ ។ ដូច្នេះ

$$0 = b^n f\left(\frac{a}{b}\right) = a_0 b^n + a_1 b^{n-1} a + \cdots + a_{n-1} b a^{n-1} + a_n a^n \quad (*)$$

$\Rightarrow$អង្គខាងស្តាំត្រូវតែចែកដាច់នឹង a និង នឹង b ។

ដោយ a និង b ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា ដូច្នេះ a ត្រូវតែចែកដាច់ a_0 និង b ត្រូវតែចែកដាច់ a_n ។ ដោយ a_0, a_n សុទ្ធតែជាចំនួនសេស នោះ a និង b ត្រូវតែជាចំនួនសេសដែរ ។ ដូច្នេះ

$$a_0b^n + a_1b^{n-1}a + \cdots + a_{n-1}ba^{n-1} + a_na^n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n \pmod 2$$

ដោយ $f(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ជាចំនួនសេស នោះ $a_0 + a_1 + \cdots + a_n \equiv 1 \pmod 2$ ។

ដូច្នេះ $a_0b^n + a_1b^{n-1}a + \cdots + a_{n-1}ba^{n-1} + a_na^n \equiv 1 \pmod 2$ តែផ្ទុយពី (*) ។ ដូច្នេះការសន្មតមិនពិត $\Longrightarrow$ សមីការគ្មានឫសសនិទាន ។

327. ▲យើងមាន $7 = -7(1)(-1)$ ។ សន្មតថា $p(x_k) - 7 = 0$ ចំពោះតម្លៃខុសៗគ្នានៃ $x_k, 1 \le k \le 4$ ។ ដូច្នេះ

$$p(x) - 7 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)q(x)$$

ដែលក្នុងនោះ ពហុធា q មានមេគុណជាចំនួនគត់ ។ សន្មតថា មានចំនួនគត់ m ដែល $p(m) = 14$ ។ ដូច្នេះ

$$7 = p(m) - 7 = (m - x_1)(m - x_2)(m - x_3)(m - x_4)q(m)$$

ដោយកត្តា $(m - x_k)$ មានតម្លៃខុសគ្នាទាំងអស់ នោះ 7 ត្រូវតែអាចបំបែកជាផលគុណនៃយ៉ាងហោចណាស់ 4 ចំនួនគត់ខុសគ្នាដែរ ។ តែវាមិនអាច ព្រោះ 7ជាចំនួនបឋម អាចបំបែកបាន តែពីរកត្តាប៉ុណ្ណោះ គឺ 7(1) ។

328. ▲ យើងពិនិត្យភាពសមមូលតាម 3 ក្នុងសមីការ $3^x + 4^y = 5^z$ យើងទាញបាន $5^z \equiv 1 \pmod 3$ ។ ដូច្នេះ z ជាចំនួនគូ តាង $z = 2z_1$ ។ សមីការទៅជា

$$3^x = 5^{2z_1} - 4^y = (5^{z_1} - 2^y)(5^{z_1} + 2^y)$$

ដូច្នេះ $(5^{z_1} - 2^y)$ និង $(5^{z_1} + 2^y)$ ត្រូវតែជាស្វ័យគុណនៃ 3 ទាំងពីរ ។ ដូច្នេះ

$$5^{z_1} - 2^y = 3^p \ (1)$$
$$5^{z_1} + 2^y = 3^q \ (2)$$

យើងមាន $q > p$ ។យក (1) បូក (2) យើងទាញបាន $2.5^{z_1} = 3^q + 3^p$ ។ បើ $p \ge 1$ នោះ $3^q + 3^p$ ចែកដាច់នឹង 3 តែ 2.5^{z_1} ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ដូច្នេះមានតែ $p = 0; q = x$ ។ ដូច្នេះ

$$5^{z_1} - 2^y = 1 \quad (3)$$
$$5^{z_1} + 2^y = 3^x \ (4)$$

យើងមាន $5 \equiv -1 \pmod 3$; $2 \equiv -1 \pmod 3$ ដូច្នេះ (3) និង (4) ទៅជា

$$(-1)^{z_1} - (-1)^y \equiv 1 \pmod 3 \quad (5)$$
$$(-1)^{z_1} + (-1)^y \equiv 0 \pmod 3 \quad (6)$$

ក្នុង (6) បើ z_1 គូ នោះ y ត្រូវតែសេស និង បើ z_1 សេស នោះ y ត្រូវតែគូ ។ ក្នុង (5) បើ z_1 គូ និង y សេស នោះ យើងទាញបាន $2 \equiv 1 \pmod 3$ មិនពិត ។ ក្នុង (5) បើ z_1 សេស និង y គូ នោះ យើងទាញបាន $-2 \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow 3 - 2 \equiv 1 \pmod 3$ ពិត ។ ដូច្នេះ z_1 សេស និង y គូ ។ ដោយ $y > 0$ ដូច្នេះ $y \geq 2$ ។

ដោយ $y \geq 2$ នោះតាមសមីការ (4) យើងទាញបាន

$$5^{z_1} \equiv 3^x \pmod 4 \Rightarrow 3^x \equiv 1 \pmod 4$$
$$\Rightarrow (-1)^x \equiv 1 \pmod 4$$

ដូច្នេះ x ជាចំនួនគូ ។ ដោយ $x > 0$ ដូច្នេះ $x \geq 2$ ។ ចំពោះ $m > 0$ យើងមាន $3^{2m} = 9^m \equiv 1 \pmod 8$ ។ ដូច្នេះ $3^x = 3^{2m} \equiv 1 \pmod 8$ ។

យើងមាន $5^{2k} = 25^k \equiv 1 \pmod 8$ ។ ដូច្នេះ ដោយ $z_1 = 2k + 1$ នោះ $5^{z_1} = (5^{2k})(5) \equiv 5 \pmod 8$ ។

បើ $y > 2$ នោះតាមសមីការ (4) យើងទាញបាន

$$2^y = 3^x - 5^{z_1} \ \Rightarrow 0 \equiv 3^x - 5^{z_1} \pmod 8$$
$$\Rightarrow 3^x \equiv 5^{z_1} \pmod 8 \quad (7)$$

តែ $3^x \equiv 1 \pmod 8$ និង $5^{z_1} \equiv 5 \pmod 8$ ដូច្នេះ (7) មិនពិត ។

ចំពោះ $y = 2$ តាមសមីការ (3) យើងទាញបាន $z_1 = 1$ ។ ដូច្នេះសមីការដែលឱ្យមានឫស

$$x = y = z = 2$$

329. ▲ ដោយ $x^y \in \mathbb{N}$ នោះ $x^y = y^{x-y} \Rightarrow x \geq y$ ។ ករណី $x = y$ យើងទាញបាន $x = y = 1$ ។ ករណី $x > y$ និង ចំពោះ $x, y \neq 1 \Rightarrow x > y \geq 2$ យើងមាន x មានរាង $x = y^n$ ដែល $n \in \mathbb{N}, n > 1$ ។ យើងទាញបាន

$$y^{yn} = y^{y(y^{n-1}-1)}$$

$$\Rightarrow\ n = y^{n-1} - 1$$
$$\Rightarrow\ n + 1 = y^{n-1} \geq 2^{n-1}$$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 4$ យើងមាន $n + 1 \leq 2^{n-1}$ ដូច្នេះ $n < 4$ ។

ចំពោះ $n = 3$ យើងទាញបាន $y = 2;\ x = 8$

ចំពោះ $n = 2$ យើងទាញបាន $y = 3;\ x = 9$

ដូច្នេះសមីការមានចម្លើយ $(x, y) = (1,1); (8,2); (9,2)$ ។

330. ▲ 1) សមីការ $2^x + 1 = 3^y$

$$\Rightarrow 2^x = 3^y - 1 = 2.(3^{y-1} + 3^{y-2} + \cdots + 1)$$
$$\Rightarrow x \geq 1, 2^{x-1} = 3^{y-1} + 3^{y-2} + \cdots + 1$$

បើ $y = 1$ នោះ $x = 1$

បើ $y \geq 2$ សេស នោះ $3^{y-1} + 3^{y-2} + \cdots + 1$ ជាចំនួនសេស ដូច្នេះវាមិនអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ $2^{x-1} = 3^{y-1} + 3^{y-2} + \cdots + 1$ ទេ ព្រោះម្ខាងជាចំនួនស្វ័យគុណនៃពីរ ម្ខាងទៀតជាចំនួនសេស ។ ដូច្នេះ $y \geq 2$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ ។ តាង $y = 2s$ ។ យើងមាន

$$2^x + 1 = 3^y \Rightarrow 2^x = (3^s - 1)(3^s + 1)$$
$$\Rightarrow 3^s - 1 = 2^m, 3^s + 1 = 2^n, m + n = x, m < n$$
$$\Rightarrow n > m \geq 1$$
$$\Rightarrow 2^n - 2^m = 2$$
$$\Rightarrow 2^m(2^{n-m} - 1) = 2$$
$$\Rightarrow m = 1, n = 2$$
$$x = 3, y = 2$$

សមីការមានចម្លើយ $(x, y) = \{(1,1); (3,2)\}$ ។

2) សមីការ $2^x - 1 = 3^y$

បើ $y = 1$ នោះ $x = 2$

បើ $y \geq 2$ ជាចំនួនសេស នោះ

$$2^x = 3^y + 1 = (3 + 1)(3^{y-1} - 3^{y-2} + \cdots + 1)$$
$$= 4(3^{y-1} - 3^{y-2} + \cdots + 1)$$
$$\Rightarrow x \geq 2, 2^{x-2} = 3^{y-1} - 3^{y-2} + \cdots + 1$$

ករណី y សេស នោះ $3^{y-1} - 3^{y-2} + \cdots + 1$ ដូច្នេះមិនអាចមានរាង 2^{x-2} បានទេ ។

ដូច្នេះ y ត្រូវតែគូ ។ តាង $y = 2s$ ។

$$2^x - 1 = 3^y \Rightarrow 2^x = 3^{2s} + 1$$

យើងមាន $9^s \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 9^s + 1 \equiv 2 \pmod 4$ ។ ដូច្នេះ $x \leq 1$ ព្រោះបើ $x \geq 2$ នោះ $2^x \equiv 0 \pmod 4$ ។ បើ $x = 1 \Rightarrow y = 0$ ។

សមីការមានចម្លើយ $(x, y) = \{(1,0); (2,1)\}$ ។

3) សមីការ $2^a 3^b + 9 = c^2$

i) $b = 0 \Rightarrow 2^a + 9 = c^2 \Rightarrow 2^a = (c-3)(c+3)$ ។ តាង $a = x + y, x < y, 2^x = c - 3, 2^y = c + 3$

$$\Rightarrow 2^y - 2^x = 6$$
$$\Rightarrow 2^x(2^{y-x} - 1) = 2 \times 3$$
$$\Rightarrow 2^x = 2, 2^{y-x} - 1 = 3 \Rightarrow (x = 1, y = 3) \Rightarrow c = 5, a = 4$$

ii) $b \geq 1 \Rightarrow c^2 = 2^a 3^b + 9 \Rightarrow c = 3q$ ដែល q ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ដូច្នេះ

$$2^a 3^b = 9q^2 - 9 = 9(q-1)(q+1)$$
$$\Rightarrow b \geq 2$$
$$\Rightarrow 2^a 3^{b-2} = (q-1)(q+1)$$

បើ $a = 0$ នោះ $3^{b-2} = (q-1)(q+1)$ ។

បើ $q = 3k, (q-1)(q+1) = 9k^2 - 1$ មិនអាចជាស្វ័យគុណនៃ3 ។

បើ $q = 3k + 1, (q-1)(q+1) = 3k(3k+2)$ មិនអាចជាស្វ័យគុណនៃ3 ។

បើ $q = 3k + 2, (q-1)(q+1) = 3(3k+1)(k+1)$ ជាស្វ័យគុណនៃ3 តែក្នុងករណី $k = 0$ តែប៉ុណ្ណោះ $\Rightarrow q = 2, c = 6, b = 3$ ។

បើ $a \geq 1$:

បើ $q = 2k$ នោះ $2^a 3^{b-2} = (q-1)(q+1) = (2k-1)(2k+1)$ កត្តាទាំងពីរសុទ្ធតែជាចំនួនសេស ៖ គ្មានឫស ។

បើ $q = 2k + 1$ នោះ $2^a 3^{b-2} = (q-1)(q+1) = (2k)(2k+2) = 4k(k+1)$

$$\Rightarrow a \geq 2$$
$$\Rightarrow 2^{a-2} 3^{b-2} = k(k+1)$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{a-2} = k, 3^{b-2} = k+1 \\ 2^{a-2} = k+1, 3^{b-2} = k \end{array}\right.$$

តាង $a-2=x, b-2=y$ យើងទាញបាន $2^x \pm 1 = 3^y$ ។ តាមសំនួរ(1) និង (2)

យើងទាញបាន $(x,y)=\{(1,1);(3,2);(1,0);(2,1)\}$

$\Rightarrow (a,b,k)=\{(3,3,2);(5,4,8);(3,2,1);(4,3,3)\}$ ។

$$\Rightarrow a=3, b=3, k=2, q=5, c=15$$
$$a=5, b=4, k=8, q=17, c=51$$
$$a=3, b=2, k=1, q=3, c=9$$
$$a=4, b=3, k=3, q=7, c=21$$

ជាសរុបសមីការមានឫស

$$(a,b,c)=\{(4,0,5);(0,3,6);(3,3,15);(5,4,51);(3,2,9);(4,3,21)\}$$

ឯកសារដើម

សៀវភៅនេះដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅខាងក្រោមនេះ

1. Pierre Bornsztein, Xavier Caruso, Pierre Nolin, Mehdi Tibouchi, *Inégalité Cours d'Arithmétique*, 2004

2. David A. Santos, *Number Theory for Mathematical Contests,* 2005

3. D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov, I. M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book*, Dover Publications, INC. New York, 1993.

4. Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic, *The IMO Compendium*, Springer, 2006

5. Dan Brânzei, Ioan Şerdean, Vasile Şerdean, *Junior Balkan Mathematical Olympiads*, Plus Publishing House, 2003

កម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យា

កម្រិតវិទ្យាល័យ

ភាគ ១- នព្វន្ត

ដោយ លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

សៀវភៅកំណែលំហាត់ផ្នែកនព្វន្ត ជាសៀវភៅដែលនិយាយអំពី កំណែលំហាត់លើបន្សំ តក្កវិទ្យា និងទ្រឹស្តីនៃចំនួន ដែលនិយាយអំពីភាពចែកដាច់ តួចែករួមធំបំផុត ពហុគុណរួមតូចបំផុត ចំនួនបឋម សមីការមានឫសជាចំនួនគត់ ។ល ។ សៀវភៅនេះប្រជុំដោយលំហាត់ងាយ និងពិបាកជាង ៣០០ លំហាត់ ដកស្រង់ចេញពីការប្រឡងសិស្សពូកែនៅប្រទេសនានាជុំវិញពិភពលោក ។ បើអ្នកចង់ក្លាយជាសិស្សពូកែម្នាក់ សៀវភៅមួយក្បាលនេះ ជាសៀវភៅដែលអ្នកគួរតែមាន ។៚