លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

កម្រងលំហាត់ គណិតវិទ្យា

កម្រិតវិទ្យាល័យ

ភាគ ២- ពីជគណិត វិភាគ

សេរី ៥.០

មេសា ២០១១

ទំព័រទទេ

ទំព័រទទេ

លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

កម្រងលំហាត់

គណិតវិទ្យា

កម្រិតវិទ្យាល័យ

ភាគ ២- ពីជគណិត វិភាគ

ស៊េរី ៥.០

មេសា ២០១១

ភាគ១ - ទ្រឹស្តីនៃចំនួន

ភាគ២ - ពីជគណិត វិភាគ

ផ្សាយលើកទី១ : គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច -វិសមភាព ២០០៨

ផ្សាយលើកទី២ : កំរងលំហាត់គណិតវិទ្យា -ពីជគណិត វិភាគ កក្កដា ២០០៩

ផ្សាយលើកទី៣ : កំរងលំហាត់គណិតវិទ្យា -ពីជគណិត វិភាគ សីហា ២០០៩

ផ្សាយលើកទី៤ : កម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យា -ពីជគណិត វិភាគ មីនា ២០១០

ផ្សាយលើកទី៤.១ : កម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យា -ពីជគណិត វិភាគ ធ្នូ ២០១០

ដោយ លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

ទំនាក់ទំនង

- វែបសាយថ៍ http://www.dahlina.com/
- អ៊ីមែល lsvichet@yahoo.com

មាតិកា

១. និយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ 1

១.១ និមិត្តសញ្ញា 1

១.២ ផលបូកស៊ីមេទ្រី និង ស៊ីគ្លិច 2

១.៣ កន្សោមឆ្លុះឬស៊ីមេទ្រី 3

១.៤ ពហុធាអូម៉ូសែន 4

១.៥ អនុគមន៍ផត- ប៉ោង 4

១.៦ ពហុធាស៊ីមេទ្រីបឋម 6

១.៧ ច្បាប់ Viète 6

១.៨ ឯកលក្ខណភាពញូតុន 7

១.៩ អនុវត្តន៍ពេញ-ប្រកាន់-មួយទល់មួយ 7

១.១០ ស្វ៊ីតនៃចំនួនសនិទាន 15

១.១១ ភាពជាប់ 17

១.១២ ទំនាក់ទំនងកំណើនលីនេអ៊ែអូម៉ូសែន $U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$ 17

លំហាត់

២. អនុគមន៍ងាយ 19

៣. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត 69

៤. ត្រីកោណមាត្រ 83

៥. ពហុធា 105

៦. សមីការអនុគមន៍ 111

ចម្លើយ

២. អនុគមន៍ងាយ 121

៣. អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត.. 281
៤. ត្រីកោណមាត្រ.. 297
៥. ពហុធា 349
៦. សមីការអនុគមន៍.. 379

១

និយមន័យ និង ទ្រឹស្តីបទ

១.១ និមិត្តសញ្ញា

$x \in [a;b]$ មានន័យថា $a \leq x \leq b$

$x \in (a;b)$ មានន័យថា $a < x < b$

$x \in [a;b)$ មានន័យថា $a \leq x < b$

$\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

$\mathbb{N}$ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលមានទាំងលេខសូន្យ $\mathbb{N} = \{0;\ 1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{N}^*$ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{Z}$ សំណុំចំនួនគត់ $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2;\ -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{Z}^*$ សំណុំចំនួនគត់មិនសូន្យ $\mathbb{Z}^* = \{\dots; -3; -2;\ -1; 1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{Z}^+$ សំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានឬសូន្យ $\mathbb{Z}^+ = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

$\mathbb{R}$ សំណុំចំនួនពិត

$\mathbb{R}^+$ សំណុំចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $\mathbb{R}^+ = \{x | x \geq 0\}$

សញ្ញាបូក

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n$$

$$\sum_{1\le i<j\le 5} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5$$

$$\sum_{1\le i<j\le 3} \frac{x_i}{x_i + x_j} = \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_1}{x_1 + x_3} + \frac{x_2}{x_2 + x_3}$$

$$\sum_{1\le i\ne j\le 3} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3x_2 = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

១.២ និយមន័យ: ផលបូកស៊ីមេទ្រី និង ស៊ីគ្លិច

តាង $P(x,y,z)$ ជាអនុគមន៍មានបីអថេរ x,y,z ។ តាង

$$\sum_{\text{cyclic}} P(x,y,z) = P(x,y,z) + P(y,z,x) + P(z,x,y)$$

$$\sum_{\text{sym}} P(x,y,z) = P(x,y,z) + P(x,z,y) + P(y,x,z) + P(y,z,x) + P(z,x,y) + P(z,y,x)$$

ឧទាហរណ៍

$$\sum_{\text{cyclic}} x^3y = \sum_{\text{cyclic}} x^3y\,z^0 = x^3yz^0 + y^3zx^0 + z^3xy^0 = x^3y + y^3z + z^3x$$

$$\sum_{\text{sym}} x^3 = \sum_{\text{sym}} x^3y^0z^0$$

$$= x^3y^0z^0 + x^3z^0y^0 + y^3x^0z^0 + y^3z^0x^0 + z^3x^0y^0 + z^3y^0x^0$$
$$= 2(x^3 + y^3 + z^3)$$

$$\sum_{\text{sym}} x^3y^2z = x^3y^2z + x^3z^2y + y^3x^2z + y^3z^2x + z^3x^2y + z^3y^2x$$

$$\sum_{\text{sym}} x^2y = \sum_{\text{sym}} x^2y^1z^0$$
$$= x^2y^1z^0 + x^2z^1y^0 + y^2x^1z^0 + y^2z^1x^0 + z^2x^1y^0 + z^2y^1x^0$$
$$= x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$$

$$\sum_{\text{sym}} xyz = xyz + xzy + yxz + yzx + zxy + zyx = 6xyz$$

១.៣ កន្សោមមួយមានលក្ខណៈឆ្លុះ ឬ ស៊ីមេទ្រី

កន្សោមមួយ មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី បើយើងឆ្លាស់អញ្ញាតណាមួយនឹងអញ្ញាតណាមួយផ្សេងទៀត កន្សោមនោះនៅដដែល ។ ឧទាហរណ៍ $P = x + y + z,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}$ មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x, y, z ដោយសារបើយើងជំនួស x ដោយ y និង y ដោយ x វិញ វានៅដដែល ។ បើយើងជំនួស x ដោយ z និង z ដោយ x វិញ វានៅដដែល ។ បើយើងជំនួស y ដោយ z និង z ដោយ y វិញ វានៅដដែល ។

ពហុធា $P = x^3 + y^3 + z$ មិនមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីទេ ព្រោះ បើយើងជំនួស z ដោយ x និង x ដោយ z យើងទាញបាន $P' = z^3 + y^3 + x \neq x^3 + y^3 + z$ ។

ចំពោះកន្សោមស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $x \geq y \geq z$ ឬ $x \leq y \leq z$ បាន បើទោះជាគេមិនប្រាប់បែបនេះក៏ដោយ ឬមួយជាទូទៅ x, y, z មិនចាំបាច់ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌបែបនេះក៏ដោយ លើកលែងតែមានសម្មតិកម្មមកស្រាប់ផ្សេងពីនេះ ។ ហេតុអ្វីក៏យើងអាចសន្មតបានបែបនេះ? ។ ព្រោះ x អាចដើរតួជំនួស y, z បាន y អាចដើរតួជំនួស x, z បាន និង z អាចដើរតួជំនួស x, y បាន ។ បើមានមួយក្នុងចំនួនទាំងបីធំជាងគេ យើងតាងវា

ដោយ x_1 ចំនួនធំបន្ទាប់ដោយ y_1 និងតូចជាងគេដោយ z_1 ។ ដូច្នេះ $x_1 \geq y_1 \geq z_1$ ។ ដូច្នេះកន្សោមស៊ីមេទ្រី ដូចជា $P = x + y + z = x_1 + y_1 + z_1$ ។ ដូច្នេះកន្សោម P នៅតែដដែលគ្រាន់តែថែមសន្ទស្សន៍ 1 ពីក្រោមតែប៉ុណ្ណោះ ។

១.៤ ពហុធាអូម៉ូសែន

ពហុធាអូម៉ូសែន ជាពហុធាមួយដែលមានតួនីមួយៗរបស់វា មានដឺក្រេសរុបស្មើគ្នា ។ ឧទាហរណ៍ $x^5 + 2x^3y^2 + 9xy^4$ ជាពហុធាអូម៉ូសែននៃ x, y ព្រោះតួទីមួយមានដឺក្រេស្មើ 5 ; តួទីពីរមានដឺក្រេស្មើ $3 + 2 = 5$ និង តួទីបី មានដឺក្រេ $1 + 4 = 5$ ។

១.៥ អនុគមន៍ផត-អនុគមន៍ប៉ោង

អនុគមន៍មួយផតចន្លោះចំណុច A និង B បើ ខ្សែកោងអនុគមន៍នោះឋិតនៅក្រោមបន្ទាត់ភ្ជាប់*គ្រប់ចំណុចទាំងអស់*ឋិតនៅចន្លោះ A និង B ។ វាប៉ោងបើវានៅខាងលើ ។

* អនុគមន៍ f មួយ ដែលកំណត់លើ $I \in \mathbb{R}$ ហៅថា ផត បើ ចំពោះគ្រប់ $\lambda \in [0;1]$ និង គ្រប់ $x, y \in I$ គេមាន

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

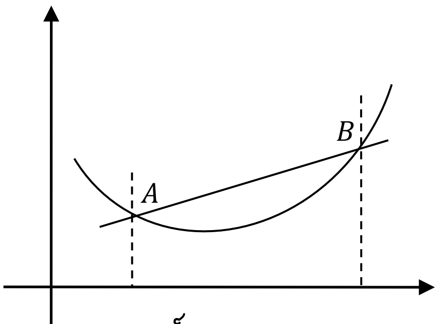
* អនុគមន៍មួយផតលើ $[a, b]$ បើ $f''(x) > 0, \forall x \in [a, b]$

* បើ f ផតចន្លោះ A, B នោះ តម្លៃធំបំផុតរបស់ f បើមិននៅត្រង់ A គឺនៅត្រង់ B : $f_{max} = \max(f_A, f_B)$

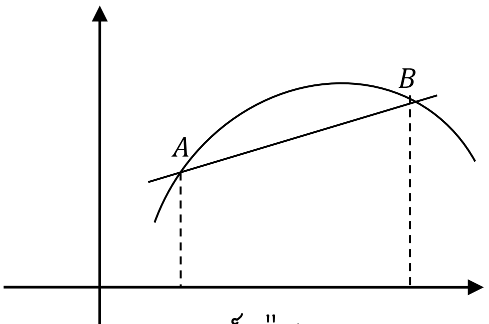
* បើ f ប៉ោងចន្លោះ A, B នោះ តម្លៃតូចបំផុតរបស់ f បើមិននៅត្រង់ A គឺនៅត្រង់ B : $f_{min} = \min(f_A, f_B)$

សម្គាល់

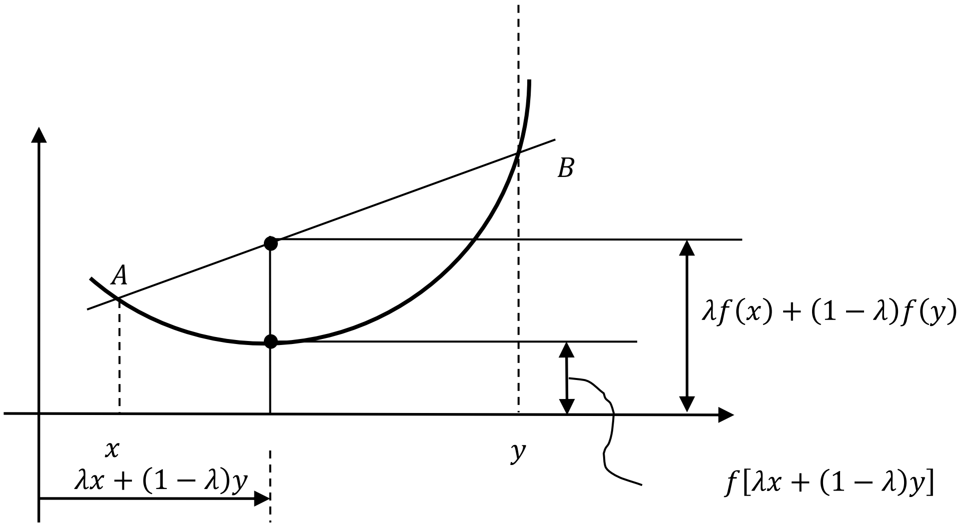
និយមន័យដែលប្រើជាអន្តរជាតិ គេកំណត់ភាពប៉ោងផតផ្ទុយពីការកំណត់របស់កម្ពុជា ។ ករណីដែលកម្ពុជាហៅថា ប៉ោង គេហៅថាផត (concave) ។ ករណីដែលកម្ពុជាហៅថា ផត គេហៅថាប៉ោង (convex) ។ ប៉ុន្តែ ទាំងកម្ពុជា និង អន្តរជាតិ បានកំណត់ហៅភាពប៉ោងផតដូចគ្នាចំពោះពហុកោណ ។



អនុគមន៍ផតចន្លោះ AB



អនុគមន៍ប៉ោងចន្លោះ AB



លក្ខណៈអនុគមន៍ផត

១.៦ ពហុធាស៊ីមេទ្រីបឋម

ពហុធាស៊ីមេទ្រីបឋមទី k នៃ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ តាងដោយ $e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ជាផលបូកនៃផលគុណផ្សេងគ្នាទាំងអស់ដែលអាចមាននៃអថេរខុសៗគ្នាចំនួន k ។ យើងមាន

$$
\begin{aligned}
&e_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1\\
&e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n\\
&e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
&\qquad = (x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n)\\
&\qquad + \cdots + x_{n-1}x_n\\
&\vdots\\
&e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 \ldots x_n
\end{aligned}
$$

ជាពិសេស $e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ បើ $k > n$ ។

១.៧ ច្បាប់ Viète

តាង $p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n មានឫសចំនួន n តាងដោយ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ។ ឫសទាំងនេះជាចំនួនពិតឬកុំផ្លិច ។ មេគុណ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ អាចជាចំនួនពិតឬកុំផ្លិច ដោយ $a_n \neq 0$ ។ ច្បាប់ Viète ចែងថា

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\\
(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n) + \cdots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}\\
\vdots\\
x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}
\end{cases}
$$

ដោយប្រើពហុធាស៊ីមេទ្រីបឋម

$$\begin{cases} e_1(x_1,x_2,..,x_n) = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ e_2(x_1,x_2,..,x_n) = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ e_n(x_1,x_2,..,x_n) = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

១.៨ ឯកលក្ខណភាព ញូតុន ឬ រូបមន្ត Newton- Girard

តាង $p_k(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ ។ឯកលក្ខណភាពញូតុនចែងថា

$$ke_k(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}e_{k-i}(x_1,x_2,\dots,x_n)p_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

ដែល $e_k(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ជាពហុធាស៊ីមេទ្រីបឋមទី k នៃ $x_1,x_2,\dots,x_n$ ។

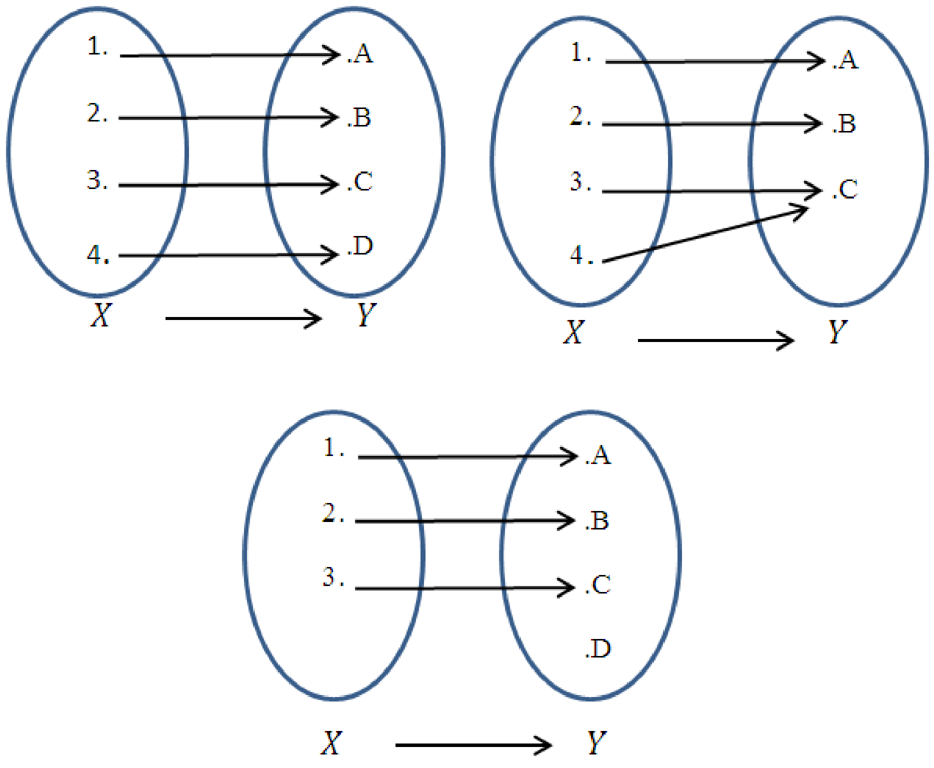
ចំពោះ $k = 1,2,3,4$ យើងមាន

$$\begin{aligned} &e_1 = p_1 \\ &2e_2 = e_1p_1 - p_2 \\ &3e_3 = e_2p_1 - e_1p_2 + p_3 \\ &4e_4 = e_3p_1 - e_2p_2 + e_1p_3 - p_4 \end{aligned}$$

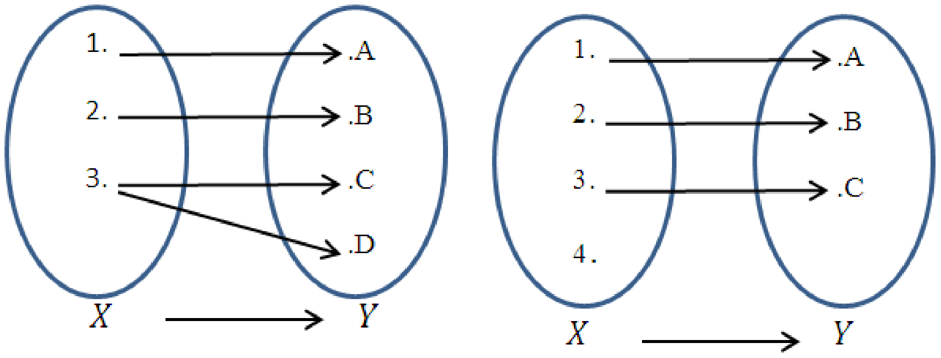
១.៩ អនុវត្តន៍

១.៩.១ និយមន័យ

$f: X \to Y$ ហៅថា អនុគមន៍អនុវត្តពី X ទៅ Y បើគ្រប់ធាតុ $x \in X$ គេមានរូបភាព $f(x) \in Y$ យ៉ាងតិចមួយនិងតែមួយគត់ ។



រូបទី១ អនុវត្តន៍ពី X ទៅ Y



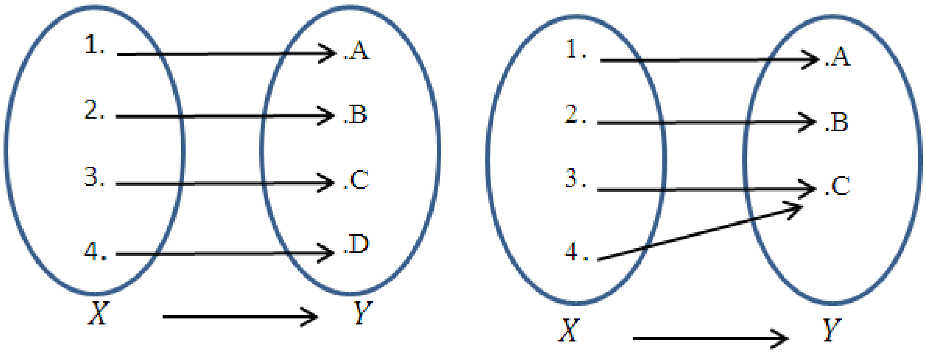
រូបទី២ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ពី X ទៅ Y ៖ រូបក) យើងមាន 3 ឱ្យរូបភាពពីរក្នុង Y និងក្នុង រូបខ) 4 គ្មានរូបភាពក្នុង Y

យើងមានអនុវត្តន៍៣ប្រភេទ៖

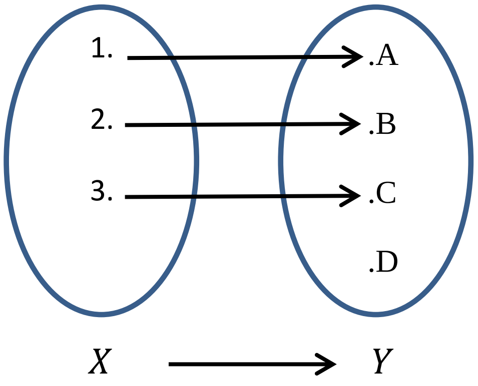
- Surjective(អនុវត្តន៍ពេញ)
- Injective(អនុវត្តន៍ប្រកាន់)
- Bijective (អនុវត្តន៍មួយទល់មួយ)

១.៩.២ អនុវត្តន៍ពេញ

គេមាន $f: X \to Y$ ។ គេថា f ជាអនុវត្តន៍ពេញពី X ទៅ Y ទាល់តែ $\forall y \in Y, \exists x \in X$ ដែល $y = f(x)$ ។



រូបទី៣ អនុវត្តន៍ពេញ



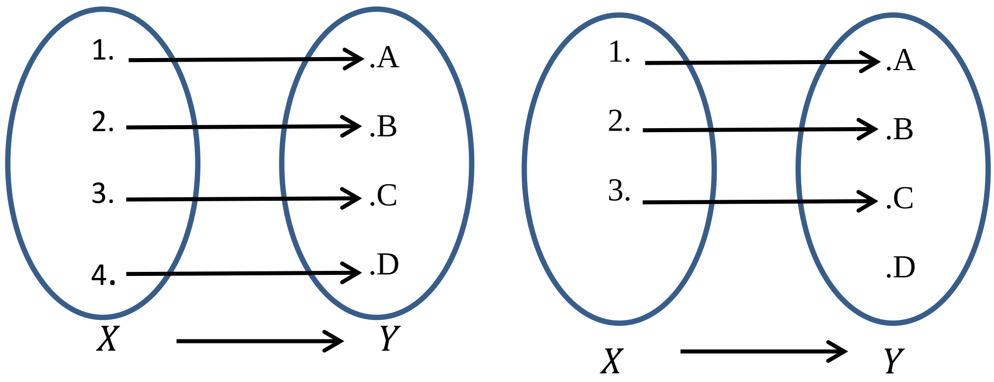
រូបទី៨ អនុវត្តន៍មិនពេញ៖ មិនអាចរកបាន $x \in X$ ដែល $f(x) = D$ បានទេ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ $f(x) = x$ ជាអនុវត្តន៍ពេញពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។

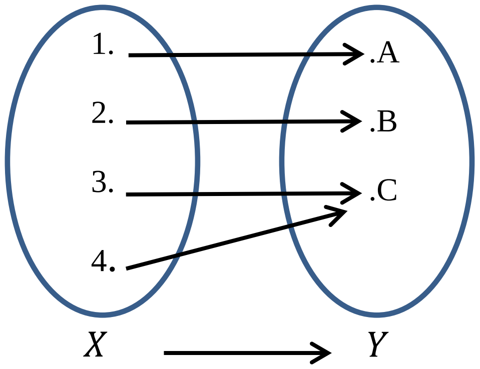
ឧទាហរណ៍ ៖ $f(x) = x^2$ ជាអនុវត្តន៍ពេញពី $X = \mathbb{R}$ ទៅ $Y = \mathbb{R}+$ តែជាអនុវត្តន៍មិនពេញពី $X = \mathbb{R}$ ទៅ $Y = \mathbb{R}$ ព្រោះ ឧទាហរណ៍យើងមិនអាចរក x ដែល $f(x) = -1$ បានទេ (យើងមាន $-1 \in Y$ ព្រោះ $Y = \mathbb{R}$) ។

១.៩.៣ អនុវត្តន៍ប្រកាន់

គេមាន $f: X \to Y$ ។ គេថា f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ពី X ទៅ Y ទាល់តែ $\forall x, y \in X$ បើ $f(x) = f(y)$ នោះ $x = y$ ឬ បើ $x \neq y$ នោះ $f(x) \neq f(y)$ ។



រូបទី៥ អនុវត្តន៍ប្រកាន់

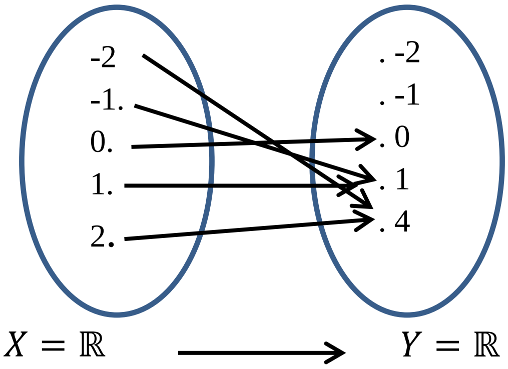


រូបទី៦ អនុវត្តន៍មិនប្រកាន់

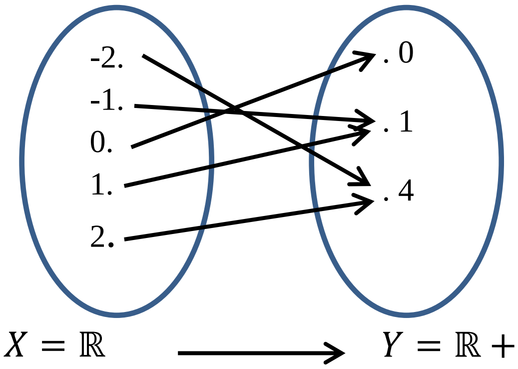
ឧទាហរណ៍ ៖ $f(x) = x$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ $f(x) = x^2$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ពី $\mathbb{R}+$ ទៅ $\mathbb{R}+$ ។

$f(x) = x^2$ ជាអនុវត្តន៍មិនប្រកាន់ពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ព្រោះ $-2 \neq 2$, តែ $f(-2) = f(2) = 4, \dots$ ។

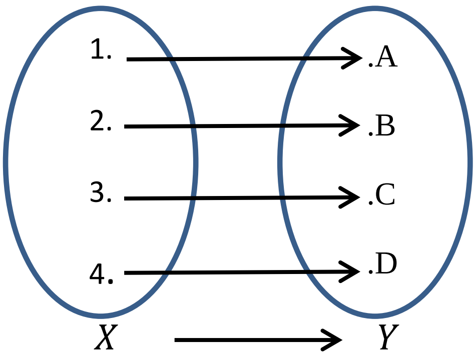


$f(x) = x^2$ ជាអនុវត្តន៍មិនប្រកាន់ពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}+$ ព្រោះ $-2 \neq 2$, តែ $f(-2) = f(2) = 4, \ldots$ ។

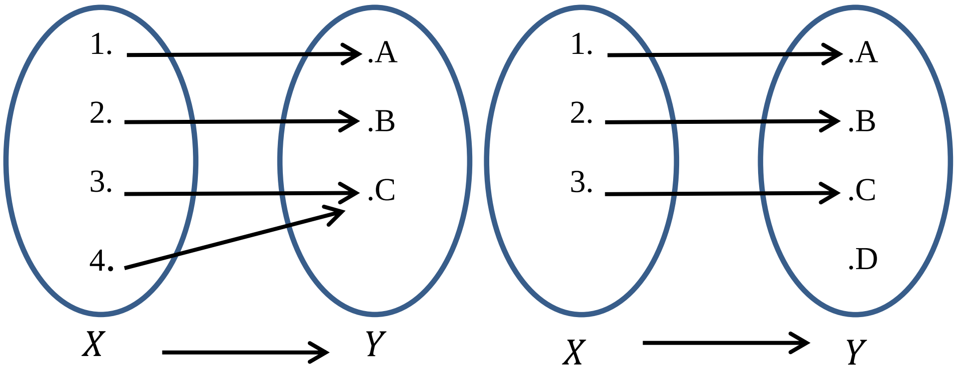


១.៩.៤ អនុវត្តន៍មួយទល់មួយ

គេមាន $f: X \to Y$ ។ គេថា f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី X ទៅ Y ទាល់តែ $\forall y \in Y$ មាន $x \in X$ មួយនិងតែមួយគត់ ដែល $f(x) = y$ ។



រូបទី៧ អនុវត្តន៍មួយទល់មួយ

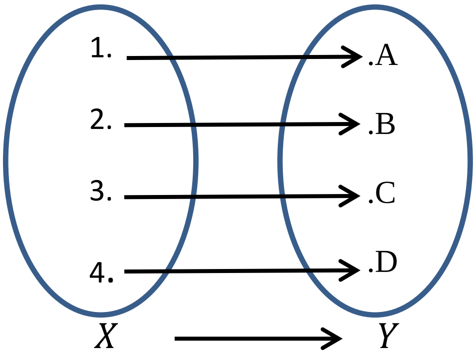


រូបទី៨ អនុវត្តន៍មិនមែនមួយទល់មួយ

ឧទាហរណ៍ ៖ $f(x) = x$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។

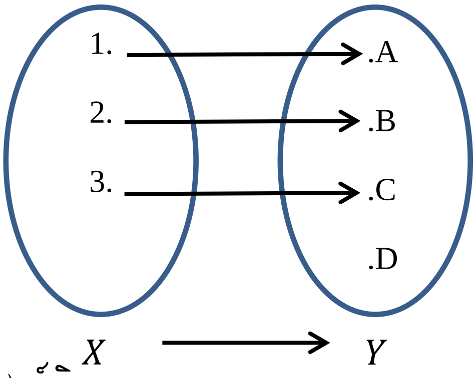
ឧទាហរណ៍ ៖ $f(x) = x^2$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី $\mathbb{R}+$ ទៅ $\mathbb{R}+$ ។

១.៩.៥ សង្ខេប



ជាអនុវត្តន៍ពេញ, ប្រកាន់ និងមួយទល់មួយ

ឧទា. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x$

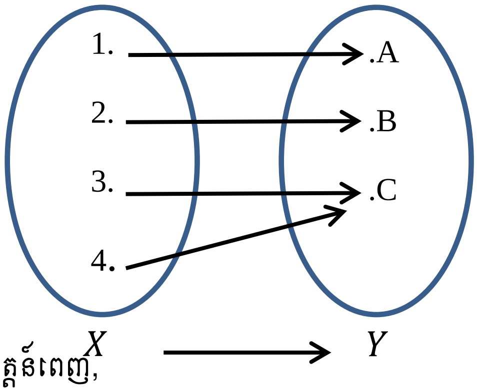


ជាអនុវត្តន៍មិនពេញ,

ប្រកាន់

និងមិនមែនមួយទល់មួយ

ឧទា. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$



ជាអនុវត្តន៍ពេញ,

មិនប្រកាន់

និងមិនមែនមួយទល់មួយ

ឧទា. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}+,\ f(x) = x^2$

១.១០ ទ្រឹស្តីបទស្វ៊ីតចំនួនសនិទាន

គ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់សុទ្ធតែជាលីមីតនៃស្វ៊ីតសនិទានកើនណាមួយ និងជាលីមីតនៃស្វ៊ីតសនិទានចុះណាមួយ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីគន្លឹះខ្ទះៗក្នុង 1,2,3 សិន បន្ទាប់មកនឹងស្រាយបញ្ជាក់សំណើក្នុងចំណុចទី4) ។

1) តាង $\lfloor a \rfloor$ ជាផ្នែកគត់នៃចំនួនពិត a ។ យើងមាន

$$a = \lfloor a \rfloor + \{a\}, 0 \le \{a\} < 1, \{a\} < \lfloor a \rfloor$$
$$\lfloor a \rfloor \le a \le \lfloor a \rfloor + 1$$

ដូច្នេះ

$$1 = \frac{\lfloor a \rfloor}{a} + \frac{\{a\}}{a};$$
$$\lim_{a\to\infty} \frac{\{a\}}{a} = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{a\to+\infty} \frac{\lfloor a \rfloor}{a} = 1$$
$$\Rightarrow \lim_{a\to-\infty} \frac{\lfloor a \rfloor}{a} = 1$$

2) ក្នុង 1) យក $a = 10^n x$ យើងទាញបាន

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = x$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} = x$$

3) ចំពោះចំនួនពិត x យើងមាន

$$\lfloor 10x \rfloor \geq 10\lfloor x \rfloor$$
$$\lfloor 10x \rfloor - 10\lfloor x \rfloor - 9 \leq 0$$

ព្រោះ ៖ តាង $x = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots$ ដែល $0 \leq a_1, a_2, \ldots \leq 9$ និង n ជាចំនួនគត់

យើងទាញបាន

$$10x = 10n + a_1 + \frac{a_2}{10} + \cdots$$
$$\lfloor x \rfloor = n; 10\lfloor x \rfloor = 10n$$
$$\lfloor 10x \rfloor = \left\lfloor 10n + a_1 + \frac{a_2}{10} + \cdots \right\rfloor = 10n + a_1 \leq 10n + 9$$
$$\Rightarrow \ \lfloor 10x \rfloor - 10\lfloor x \rfloor = a_1 \geq 0$$
$$\Rightarrow \ \lfloor 10x \rfloor - 10\lfloor x \rfloor - 9 = a_1 - 9 \leq 0$$

4) តាង x ជាចំនួនពិតមួយ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n > 0$ តាង

$$x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}; x'_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

យើងមាន

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \ \Rightarrow x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < x'_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

យើងមាន $x_n, x'_n \in \mathbb{Q}$ និង

$$x_{n+1}-x_n=\frac{\lfloor 10^{n+1}x\rfloor}{10^{n+1}}-\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}=\frac{\lfloor 10^{n+1}x\rfloor-10\lfloor 10^n x\rfloor}{10^{n+1}}\geq 0$$

$$x'_{n+1}-x'_n=\frac{\lfloor 10^{n+1}x\rfloor+1}{10^{n+1}}-\frac{\lfloor 10^n x\rfloor+1}{10^n}=\frac{\lfloor 10^{n+1}x\rfloor+1-10\lfloor 10^n x\rfloor-10}{10^{n+1}}$$

$$=\frac{\lfloor 10^{n+1}x\rfloor-10\lfloor 10^n x\rfloor-9}{10^{n+1}}\leq 0$$

ដូច្នេះ (x_n) ជាស៊ីតសនិទានកើន និង (x'_n) ជាស៊ីតសនិទានចុះ ហើយតាម 2) យើងទាញបាន

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x;\ \lim_{n\to+\infty} x'_n = x$$

ដូច្នេះគ្រប់ចំនួនពិតសុទ្ធតែជាលីមីតនៃស៊ីតសនិទានកើននិងចុះ ឧទាហរណ៍ស៊ីតសនិទានកើនគឺ $x_n=\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ និង ស៊ីតសនិទានចុះគឺ $x'_n=\frac{\lfloor 10^n x\rfloor+1}{10^n}$ ។

១.១១ និយមន័យ : ភាពជាប់

តាង $f\colon \mathrm{I}\to\mathbb{R}$ ។ តាង $a\in \mathrm{I}$ ។ អនុគមន៍ f ហៅថា ជាប់ត្រង់ a បើ $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ ។

១.១២ ទំនាក់ទំនងកំណើនលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

តាង (U_n) ជាស៊ីតមួយ និង a,b ជាចំនួនពិតពីរ ដែល ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\in\mathbb{N}$ គេមាន

$$U_{n+2}=aU_{n+1}+b\,U_n$$

បើ សមីការ $r^2=ar+b$ មានឫសពីរ តាងដោយ α និង β នោះ (U_n) ជាចម្លើយរបស់សមីការស៊ីត បើនិងមានតែបើ $U_n=\lambda\,\alpha^n+\mu\,\beta^n$ ដែល λ និង μ ជាចំនួនថេរ ។

បើ សមីការ $r^2 = ar + b$ មានឫសឌុប តាងដោយ α នោះ (U_n) ជាចម្លើយរបស់សមីការស្ទីត បើនិងមានតែបើ $U_n = (\lambda n + \mu)\,\alpha^n$ ដែល λ និង μ ជាចំនួនថេរ ។

ស្រាយបញ្ជាក់

❶ បង្ហាញថា $U_n = \lambda\,\alpha^n + \mu\,\beta^n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការស្ទីត (បើ...)

បើ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $r^2 = ar + b$ នោះ

$$\alpha^2 = a\,\alpha + b \implies \alpha^{n+2} = a\,\alpha^{n+1} + b\,\alpha^n$$
$$\beta^2 = a\,\beta + b \implies \beta^{n+2} = a\,\beta^{n+1} + b\,\beta^n$$

$$\implies (\lambda\alpha^{n+2} + \mu\beta^{n+2}) = a(\lambda\alpha^{n+1} + \mu\beta^{n+1}) + b(\lambda\alpha^n + \mu\beta^n)$$
$$\iff U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$$

❷ បង្ហាញថា បើ U_n ជាចម្លើយ នោះវាត្រូវតែមានរាង $\lambda\,\alpha^n + \mu\,\beta^n$ (មានតែបើ...)

យើងមាន $U_3 = a\,U_2 + bU_1$ ។ បើយើងស្គាល់ U_1 និង U_2 នោះយើងអាចកំណត់បាន U_3 តែមួយបែបគត់ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបាន $U_4, U_5, \dots, U_n$ មានតែមួយបែបគត់ ។ ករណីនេះ ដោយយើងដឹងថា $\lambda\,\alpha^n + \mu\,\beta^n$ ជាចម្លើយ ហើយចម្លើយមានតែមួយគត់ ដូច្នេះ ចម្លើយមានតែ $\lambda\,\alpha^n + \mu\,\beta^n$ មួយនេះគត់ ។

ករណីសមីការមានឫសឌុប យើងស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នា ដោយដឹងថា $\alpha = a/2$ ។

២

អនុគមន៍ងាយ

២.១ គណនា

1. គណនា $a^4+b^4+c^4$ ដោយដឹងថា $a+b+c=0$ និង $a^2+b^2+c^2=1$

គណនា

2. $$S_n = 1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}, n\in\mathbb{N}$$

3. $$S_n = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3, n\in\mathbb{N}$$

4. តាង $S=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{1024}+1)+1$ ។

ចូរគណនា $S^{1/1024}$ ។

5. (កាណាដា ១៩៦៩)

គណនា $1.1!+2.2!+3.3!+\cdots+(n-1).(n-1)!+n.n!$

ដែល $n!=n.(n-1)\dots3.2.1$ ។

6. គណនា

$$S=\frac{1}{1!\,1999!}+\frac{1}{3!\,1997!}+\cdots+\frac{1}{1997!\,3!}+\frac{1}{1999!\,1!}$$

7. គណនាផលបូកខាងក្រោម

(a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$

(b) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{(n-2)(n-1)n}$

(c) $$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\cdots+\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

8. (ភ្នំពេញ ២០១១)

គណនាផលបូក

$$S=\frac{1}{2^1}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\cdots-\frac{2010}{2^{2010}}+\frac{2011}{2^{2011}}$$

9. គេឱ្យចំនួនពិត u,v,s,t ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$u+v+s+t=u^7+v^7+s^7+t^7=0$$

ចូរគណនា $P=t(t+u)(t+v)(t+s)$

10. គណនា

$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$$

ដែល $a\geq 0,b\geq 0,c\geq 0$ ។

11. គណនាតម្លៃរបស់

$$(1-ax)(1+ax)^{-1}(1+bx)^{\frac{1}{2}}(1-bx)^{-\frac{1}{2}}$$

នៅត្រង់

$$x=a^{-1}\left(2\frac{a}{b}-1\right)^{\frac{1}{2}},\quad (0<a<b<2a)$$

12. (ភ្នំពេញ ២០១១)

ក) រកតម្លៃនៃ $A=2011^3-2010.2011^2-2010^2.2011+2010^3$

ខ) រកតម្លៃនៃ $B=403^5-402^2(403^3+2.403^2+3.403+4)$

13. បើ $a+b+c=0$ ចូរគណនា

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$

14. សម្រួលកន្សោម

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)$$

15. (JBMO 1997)

គេឱ្យចំនួនពិត x,y ដែល

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k$$

ចូរគណនា

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}-\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$$

ជាអនុគមន៍នៃ k ។

16. (ភ្នំពេញ ២០១១)

តាង $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត ដែលបំពេញទំនាក់ទំនងខាងក្រោម

$$(3-u_{n+1})(6+u_n)=18;\ \ u_0=3$$

គណនា

$$\sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{u_k}$$

17. (រ៉ូម៉ានី ២០០២)

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តាង $f(n)$ ជា

$$f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

គណនា $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40)$ ។

18. (ភ្នំពេញ ២០១១)

គេឱ្យ

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}}, \forall n\in\mathbb{N}$$

គណនាផលបូក

$$S=f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(10^6-3)+f(10^6-1)$$

២.២ សមភាព

ចូរបង្ហាញថា

19. $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n\in\mathbb{N}$$

20. $$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}, n\in\mathbb{N}$$

21. ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ

$$1.2+2.5+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$$

22. ចូរបង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

23. តាង a,b,c ជាចំនួនពិត ខុសពី -1 និង 1 ដែល $a+b+c=abc$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

24. (កាណាដា ១៩៦៩)

ចូរបង្ហាញថា បើ $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$ និង $p_1;p_2;p_3$ មិនសូន្យទាំងអស់ព្រមគ្នា នោះ

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n=\frac{p_1a_1^n+p_2a_2^n+p_3a_3^n}{p_1b_1^n+p_2b_2^n+p_3b_3^n}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

25. ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព

$$\begin{aligned}&a+b(1+a)+c(1+a)(1+b)+d(1+a)(1+b)(1+c)\\&+\cdots+l(1+a)(1+b)\dots(1+k)\\&=(1+a)(1+b)(1+c)\dots(1+l)-1\end{aligned}$$

ចូរពិនិត្យករណី $a=b=c=\cdots=l$ ។

26. ចូរបង្ហាញថា បើ $a+b+c=0$ នោះ $a^3+b^3+c^3=3abc$ ។

27. (JBMO សតលីស ២០០០)

ពិនិត្យស្ទីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន x_n ដែល

$$x_{2n+1}=4x_n+2n+2$$

$$x_{3n+2} = 3x_{n+1} + 6x_n$$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$x_{3n+1} = x_{n+2} - 2x_{n+1} + 10x_n$$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

28. ចូរបង្ហាញថា

$$(n+1)(n+2)(n+3)\dots(2n-1)2n = 2^n.1.3.5\dots(2n-3)(2n-1)$$

29. ចូរបង្ហាញថា

$$1.2.3\dots p + 2.3\dots p(p+1) + \cdots + n(n+1)\dots(n+p-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)}{p+1}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន p ។

30. បង្ហាញថា

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2 = 2$$

31. គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន A, B, C, D, a, b, c, d ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}$$

បង្ហាញថា

$$\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd} = \sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}$$

32. បង្ហាញថា

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$$

បើ $ax^3 = by^3 = cz^3$ និង

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

២.៣ សមីការ

ដោះស្រាយសមីការ

33. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

34. $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

35. $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$

36. $x^3 + x^2 - 3 = 0$

37. $6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$

38. $2x^3 + x^2 + 5x - 3 = 0$

39. $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$

40. $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

41. $(x-1)^4 + (x+1)^4 = 16$

42. $(2x-3)^4 + (2x-5)^4 = 2$

43. $\dfrac{1}{2x^2 - x + 1} + \dfrac{3}{2x^2 - x + 3} = \dfrac{10}{2x^2 - x + 7}$

44. $(x-a)x(x+a)(x+2a) = 3a^4$

45. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35$

46. $x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 8\left(x - \dfrac{2}{x}\right) - 4 = 0$

47. $4x^4 + 6x^3 - 10x^2 - 9x + 9 = 0$

48. $\dfrac{(x+1)^5}{x^5+1} = \dfrac{81}{11}$

49. $(x^2 - 6x - 9)^2 = x^3 - 4x^2 - 9x$

50. $x^2 + \dfrac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$

51. $(x^2 - 16)(x-3)^2 + 9x^2 = 0$

52. $x^4 + 4x - 1 = 0$

53. $x^4 - 4x^3 - 1 = 0$

54. $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$

55. $(x^3 - 2x) - (x^2 + 2)a - 2a^2x = 0$

56. $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$

57. ដោះស្រាយសមីការ $x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 37x - 14 = 0$ ដោយដឹងថាអង្គខាងឆ្វេងអាចដាក់ជាផលគុណដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់បាន ។

58. សមីការ $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ដែល a, b, c ជាចំនួនគត់ មានឫសសនិទានមួយ តាងដោយ x_1 ។

ចូរបង្ហាញថា x_1 ជាចំនួនគត់ និងថា c ចែកដាច់នឹង x_1 ។

59. សមីការ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ ដែល a,b,c,d ជាចំនួនគត់ មានឫសសនិទានមួយ តាងដោយ x_1 ។ ចូរបង្ហាញថា x_1 ជាចំនួនគត់ និងថា d ចែកដាច់នឹង x_1 ។

60. សន្មតថា x_1,x_2,x_3 ជាឫសនៃសមីការ $ax^3+bx^2+cx+d=0, a\neq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$x_1+x_2+x_3=-b/a$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=c/a$$
$$x_1x_2x_3=-d/a$$

61. គេឱ្យសមីការ $x^3+px+q=0$ ។ ចូរគណនាផលបូកការេនៃឫសរបស់វា ។

62*. ដោះស្រាយសមីការ $x^3+3x-3=0$ ។

ចូររកឫសសនិទាននៃសមីការ

63. $x^4+2x^3-16x^2-2x+15=0$

64. $x^4-7x^3+5x^2+4x+12=0$

65. $x^4+x^3-5x-5=0$

66. $x^4+x^3-1=0$

67. $6x^4-x^3+5x^2-x-1=0$

ដោះស្រាយសមីការ

68. $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-2}=6$

69. $\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1$

70. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$

71. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$

72. $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$

73. $\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+5x-2}=1$

74. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$

75. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5$

76. $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$

77. $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6}=7$

78. $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$

79. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4}$

80. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$

81. $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=|5-x|$

82. $x+12\sqrt{x}-64=0$

83. $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$

84. $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$

85. $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$

86. $x\sqrt{x^2+15}-2=\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}$

87. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$

88. $\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}+2\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}=3$

89. $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$

90. $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x)$

91. $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-3}=a$

92*. $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$

93. $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$

94. $\sqrt{2x-1}-x+a=0$

95. $\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}=a-x$

96. $\sqrt{x-\sqrt{x-a}}=a$

97. $\sqrt{x+\sqrt{a^2+2a-3}}+\sqrt{x+a+\sqrt{2-2a+2a^2-a^3}}=a\sqrt{1-x}$

98. $(x-1)^2+(y+5)^2=0$

99. $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

100. $(x+y-a)^2+(y-1)^2+(x+3)^2=0$

101*. (ទួរគី ១៩៩៨)

តាង $\{a_n\}$ ជាស្វីតនៃចំនួនពិត កំណត់ដោយ $a_1=t$ និង

$$a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។ តើតម្លៃរបស់ t ខុសៗគ្នាចំនួនប៉ុន្មាន ដែល $a_{1998}=0$?

102*. (MOSP ២០០១)

ចូរកំណត់គ្រប់ត្រីធាតុនៃចំនួនពិត (a,b,c) ដែល

$$a^2-2b^2=1, 2b^2-3c^2=1 \text{ និង } ab+bc+ca=1$$

103*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៣)

ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt{x^2-p}+\ 2\sqrt{x^2-1}=x$ ដែល p ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និងជាចំនួនពិត ។

104*. (អន្តរជាតិឡុងលីស ១៩៦៧)

គេឱ្យសមីការ

$x^5+5\lambda x^4-x^3+(\lambda\alpha-4)x^2-(8\lambda+3)x+\lambda\alpha-2=0$

ក) កំណត់ α ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសដែលមិនអាស្រ័យនឹង λ តែមួយគត់ ។

ខ) កំណត់ α ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសដែលមិនអាស្រ័យនឹង λ តែពីរគត់ ។

105*. (អន្តរជាតិ ១៩៥៩)

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

ខ) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$

គ) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$

106*. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

107*. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}=x$$

(មានរ៉ាឌីកាល់ចំនួន n ដង)

108. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=a$$

109. ដោះស្រាយសមីការ $(a-x)^5+(x-b)^5=(a-b)^5;\ \ a\neq b$ ។

110. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមចំពោះ $x\geq -1$

$$2x^2+4x=\sqrt{\frac{x+3}{2}}$$

111. គេឱ្យសមីការ $x^2-3x+1=m\sqrt{x^4+x^2+1}$ (*) ដែលក្នុងនោះ m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង x ជាអញ្ញាត ។

ក) ដោះស្រាយសមីការករណី $m=-\sqrt{3}/3$ ។

ខ) ចូរកំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ សមីការ(*) មានឫសចំនួនមួយ ។

112. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$$

113. ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{\sqrt{1+x^3}}{x^2+2}=\frac{2}{5}$$

114. ដោះស្រាយសមីការ

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\ddots}{1+\cfrac{1}{x}}}}}=x$$

ក្នុងកន្សោមនៃអង្គខាងឆ្វេង ប្រភាគមានចំនួន n ជង ។

115. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៦៨)

ចូរកំណត់ $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោម

$$1+\frac{1}{x_1}+\frac{x_1+1}{x_1x_2}+\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{x_1x_2x_3}+\cdots+\frac{(x_1+1)\dots(x_{n-1}+1)}{x_1x_2\dots x_n}=0$$

116. (JBMO 1999)

តាង a,b,c,x,y ជាចំនួនពិតប្រាំដែល $a^3+ax+y=0, b^3+bx+y=0$ និង $c^3+cx+y=0$ ។ បើ a,b,c ជាចំនួនខុសគ្នាទាំងអស់ ចូរបង្ហាញថា ផលបូករបស់វាស្មើសូន្យ ។

117. (JBMO 2000)

តាង x និង y ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល

$$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$$

ចូរបង្ហាញថា $x+y=10$ ។

118. (JBMO 2007)
តាង a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a^3=6(a+1)$ ។ ចូរបង្ហាញថា សមីការ
$x^2+ax+a^2-6=0$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតទេ ។

119. ចូរបង្ហាញថា ត្រីធា x^3+px+q ស្មើសូន្យ នៅត្រង់

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

120. ក) ដាក់ជាកត្តាផលគុណ $a^3+b^3+c^3-3abc$
ខ) ចូរបំលែងសមីការ $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ ទៅជាសមីការ ដែលមាន
រាង $x^3+px+q=0$ ។ ចូរកំណត់ p,q ជាអនុគមន៍នៃ A,B,C ។
ខ) ដោះស្រាយសមីការ $x^3+px+q=0$

121. ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{\dots+\sqrt{4^{2008}x+3}}}}}-\sqrt{x}=1$$

122. (រុស្ស៊ី ២០១០)
តាង $a\neq b, a,b\in\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$(x^2+20ax+10b)(x^2+20bx+10a)=0$$

គ្មានឫស សម្រាប់ x ។ បង្ហាញថា $20(b-a)$ មិនមែនជាចំនួនគត់ ។

២.៤ ប្រព័ន្ធសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

123. $\begin{cases}x^2-xy+3y^2+2x-5y-4=0\\x+2y=4\end{cases}$

124. $\begin{cases}2xy-y^2+5x+20=0\\3x+2y-3=0\end{cases}$

125. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 200 \\ x + 2y = 100 \end{cases}$

126. $\begin{cases} x^2 + 9y^2 + 6xy - 6x - 18y - 40 = 0 \\ x + 30 = 2y \end{cases}$

127. $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

128. $\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = -4 \end{cases}$

129. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$

130. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ x + y = 3 \end{cases}$

131. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$

132. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$

133. $\begin{cases} x^5 + y^5 = 275 \\ x + y = 5 \end{cases}$

134. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 63 \\ xy = 4 \end{cases}$

135. $\begin{cases} x + y + xy = -11 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$

136. $\begin{cases} x^2y - xy^2 = 30 \\ x + xy - y = 13 \end{cases}$

137. $\begin{cases} (x + 0{,}2)^2 + (y + 0{,}3)^2 = 1 \\ x + y = 0{,}9 \end{cases}$

138. $\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{(x + y)x}{y} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

139. $\begin{cases} x^3y + x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y^3 + xy^3 = 30 \\ x^2y + xy + x + y + xy^2 = 11 \end{cases}$

140. $\begin{cases} 2x^2 + xy - 45y^2 = 0 \\ 2x + 9y^2 = 4 \end{cases}$

141. $\begin{cases} x^2 - 5xy = 16 \\ 2xy + y^2 = 3 \end{cases}$

142. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12 \\ (x + y)^2 - \dfrac{1}{2}y^2 = 7 \end{cases}$

143. $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10 \\ x^2y - y^3 = -3 \end{cases}$

144. $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$

145. $\begin{cases} y^2(x^2-3)+xy+1=0 \\ y^2(3x^2-6)+xy+2=0 \end{cases}$

146. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x+y-2)=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{y}{x}(x+y-1)=9 \end{cases}$ **147.** $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

148. $\begin{cases} y^2-|xy|+2=0 \\ 8-x^2=(x+2y)^2 \end{cases}$ **149.** $\begin{cases} |xy-2|=6-x^2 \\ 2+3y^2=2xy \end{cases}$

150. $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 3x-4y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=6 \end{cases}$ **151.** $\begin{cases} 2u+v+w=6 \\ 3u+2v+w=9 \\ 3u^3+2v^3+w^3=27 \end{cases}$

152. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ xy+yz+zx=-5 \\ x^2+y^2-z^2=12 \end{cases}$ **153.** $\begin{cases} xy+x+y=7 \\ yz+y+z=-3 \\ xz+x+z=-5 \end{cases}$

154. $\begin{cases} x^2-yz=14 \\ y^2-xz=28 \\ z^2-xy=-14 \end{cases}$ **155.** $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y^2+yz+z^2=7 \\ z^2+zx+x^2=19 \end{cases}$

156. $\begin{cases} xy+xz=8 \\ yz+xy=9 \\ xz+yz=-7 \end{cases}$ **157.** $\begin{cases} \dfrac{5xy}{x+y}=1 \\ \dfrac{7yz}{y+z}=1 \\ 6xz=x+z \end{cases}$

158. $\begin{cases} 4xy+y^2+2z^2=-3 \\ 4xz+x^2+2z^2=1 \\ 8yz+y^2+2z^2=1 \end{cases}$ **159**. $\begin{cases} y^3=9x^2-27x+27 \\ z^3=9y^2-27y+27 \\ x^3=9z^2-27z+27 \end{cases}$

160. $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}}+\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$

161. $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-y}-\sqrt[4]{x+y}}=1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}+\dfrac{4}{\sqrt[4]{x-y}-\sqrt[4]{x+y}}=\dfrac{9}{4} \end{cases}$

162. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2x-1}}+4\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+y}}=5 \\ x=y+1 \end{cases}$

163. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{10}{3}\\ xy-2x-2y=2\end{cases}$

164. $\begin{cases}x+y+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y}\\ xy=15\end{cases}$

165. $\begin{cases}y\sqrt{x^2+y^2}-2ay-3=0\\ x\sqrt{x^2+y^2}=2ax\end{cases}$

166. $\begin{cases}x+y=2\\ xy-z^2=1\end{cases}$

167. ចូរកំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមមានឫសតែមួយគត់

$$\begin{cases}\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\\ y=ax+1\end{cases}$$

168*. គេឱ្យប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{5}y+\dfrac{5}{6}z=61\\ x+y+z=79\end{cases}$$

ក) ចូរគណនាផលបូក $2y/5+z/2$;

ខ) ក្នុងចំណោមឫសជាចំនួនគត់ធម្មជាតិទាំងអស់របស់ប្រព័ន្ធ ចូរកំណត់ឫសដែលមានតម្លៃ x ធំបំផុត ។

169*. (អន្តរជាតិ ១៩៦១)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}x+y+z=a\\ x^2+y^2+z^2=b^2\\ xy=z^2\end{cases}$$

ដែល a និង b ជាចំនួនពិតដែលគេឱ្យ ។ ចូរកំណត់លក្ខខណ្ឌលើ a និង b ដើម្បីឱ្យចម្លើយវិជ្ជមាននិងមានតម្លៃខុសគ្នា ។

170*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៣)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5 \end{cases}$$

ដែលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ y ជាចំនួនពិត ។

171*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៥)

គេឱ្យប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

ដែលមានមេគុណផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

ក) a_{11}, a_{22}, a_{33} ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ខ) មេគុណផ្សេងទៀតអវិជ្ជមានទាំងអស់

គ) សមីការនីមួយៗមានផលបូកមេគុណជាចំនួនវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ជាចម្លើយតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធ ។

172*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៥)

ចូរកំណត់ចំនួនពិត x_1, x_2, x_3, x_4 ដែល

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_3x_4 = 2 \\ x_2 + x_1x_3x_4 = 2 \\ x_3 + x_1x_2x_4 = 2 \\ x_4 + x_1x_2x_3 = 2 \end{cases}$$

173*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៦)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_3 + |a_3 - a_4|x_4 = 1 \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_3 + |a_4 - a_3|x_3 = 1 \end{cases}$$

ដែល a_1, a_2, a_3 និង a_4 ជាចំនួនពិតខុសគ្នាពីរៗ ។

174*. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស១៩៦៧)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x^2+x-1=y \\ y^2+y-1=z \\ z^2+z-1=x \end{cases}$$

175. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស១៩៦៧)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} |x+y|+|1-x|=6 \\ |x+y+1|+|1-y|=4 \end{cases}$$

176*. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស១៩៦៧)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=a \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=a^2 \\ \dots\dots \\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=a^n \end{cases}$$

177. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស១៩៦៧)

តើក្នុងករណីណា ដែលប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} x+y+mz=a \\ x+my+z=b \\ mx+y+z=c \end{cases}$$

មានចម្លើយ? ចូរកំណត់លក្ខខណ្ឌដែលចម្លើយតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធខាងលើ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

178*. (អន្តរជាតិ ១៩៦៧)

គេឱ្យស្វ៊ីត (c_n) :

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1+a_2+\cdots+a_8 \\ c_2 &= a_1^2+a_2^2+\cdots+a_8^2 \\ &\dots \quad \dots\dots \\ c_n &= a_1^n+a_2^n+\cdots+a_8^n \\ &\dots \quad \dots\dots \end{aligned}$$

ដែល $a_1, a_2, \dots, a_8$ ជាចំនួនពិត ដែលមិនសូន្យទាំងអស់គ្នា ។ ដោយដឹងថា ក្នុងចំណោម (c_n) មានចំនួនដែលស្មើសូន្យច្រើនរាប់មិនអស់ ចូរកំណត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ $c_n = 0$ ។

179*. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x^2 = 2x - y \\ y^2 = 2y - z \\ z^2 = 2z - t \\ t^2 = 2t - x \end{cases}$$

180*. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x_1^2 + ax_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_2 \\ x_2^2 + ax_2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1000}^2 + ax_{1000} + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_1 \end{cases}$$

ដែល a ជាចំនួនពិត ។

181*. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 2x_n - 5x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

ដែល n ជាចំនួនគត់ ≥ 3 ។

182*. តាង (x, y, z) ជាចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x = y(4-y) \\ y = z(4-z) \\ z = x(4-x) \end{cases}$$

ចូរកំណត់តម្លៃរបស់ផលបូក $S = x + y + z$ ។

183. (កាណាដា ១៩៧០)

ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{cases} x + yz = 2 \\ y + zx = 2 \\ z + xy = 2 \end{cases}$$

184. (អន្តរជាតិ ១៩៦៨)

គេឱ្យប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ ay^2 + by + c = z \\ az^3 + bz + c = x \end{cases}$$

ដែលក្នុងនោះ $a \neq 0$ ។ តាង $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$ ។ ចូរបង្ហាញថាបើ $\Delta < 0$ នោះប្រព័ន្ធសមីការគ្មានឫស ។

185. ចូរកំណត់ $a \in \mathbb{R}$ ដើម្បីឱ្យប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} x^3 - ay^3 = \frac{1}{2}(a+1)^2 \\ x^3 + ax^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$$

មានឫសផ្ទៀងផ្ទាត់ $x + y = 0$

186. ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{cases} (2-x)(3x-2z) = 3 - z & (1) \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2 & (2) \\ y^2 + z^2 = 6z & (3) \\ z \leq 3 & (4) \end{cases}$$

187. គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ។ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{b}{z} = c - zx \\ \frac{b}{y} - \frac{c}{x} = a - xy \\ \frac{c}{z} - \frac{a}{y} = b - yz \end{cases}$$

188. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$$

189. (ឥណ្ឌា ២០១០)

ចូរកំណត់ចំនួនពិតមិនសូន្យ x, y, z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) = xyz \\ (x^4 + x^2y^2 + y^4)(y^4 + y^2z^2 + z^4)(z^4 + z^2x^2 + x^4) = x^3y^3z^3 \end{cases}$$

190. (វៀតណាម ២០០៩)

ដោះស្រាយសមីការ ចំពោះគ្រប់ $(x, y) \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}}\\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9}\end{cases}$$

191. (វៀតណាម ២០០២)

ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}=\sqrt{x+2002}\\ x\ge 2\end{cases}$$

192. (វៀតណាម ២០០២)

គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលខុសគ្នាពីរៗ ។ ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{cases}x^2-yz=a\\ y^2-xz=b\\ z^2-xy=c\end{cases}$$

193. គេឱ្យប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases}x+y+xy=m\\ x^2+y^2=m\end{cases}$$

1) ដោះស្រាយប្រព័ន្ធចំពោះ $m=5$ ។

2) ចូរកំណត់ m ដើម្បីឱ្យប្រព័ន្ធមានឫស ។

194. (JBMO 2008)

ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c,d ដែល

$$\begin{cases}a+b+c+d=20\\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=150\end{cases}$$

195. (អាមេរិច AIME 2010)

តាង (a,b,c) ជាឫសពិតរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}x^3-xyz=2\\ y^3-xyz=6\\ z^3-xyz=20\end{cases}$$

តម្លៃធំបំផុតរបស់ $a^3+b^3+c^3$ អាចសរសេរជារាង m/n ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមគ្នា ។ គណនា $m+n$ ។

196. តើប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមមានឫសពិតចំនួនប៉ុន្មាន?

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy-z^2=1 \end{cases}$$

197. (Baltic Way 2010)

កំណត់ចំនួនពិត (a,b,c,d) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} (b+c+d)^{2010}=3a \\ (a+c+d)^{2010}=3b \\ (a+b+d)^{2010}=3c \\ (a+b+c)^{2010}=3d \end{cases}$$

198. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៩៥)

តាង a,b និង c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x,y និង z ដែល

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ 4xyz-(a^2x+b^2y+c^2z)=abc \end{cases}$$

199. កំណត់លក្ខខណ្ឌចំពោះ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ ដើម្បីឱ្យប្រព័ន្ធសមីការដែលមាន ៦ សមីការ មានអញ្ញាត ៤ ខាងក្រោមមានឫស ៖

$$\begin{cases} x_1+x_2=\alpha_1\alpha_2 \\ x_1+x_3=\alpha_1\alpha_3 \\ x_1+x_4=\alpha_1\alpha_4 \\ x_2+x_3=\alpha_2\alpha_3 \\ x_2+x_4=\alpha_2\alpha_4 \\ x_3+x_4=\alpha_3\alpha_4 \end{cases}$$

គណនាតម្លៃរបស់អញ្ញាត x_1,x_2,x_3,x_4 ក្នុងករណីនោះ ។

២.៥ វិសមភាព

ចូរបង្ហាញថា

200. $$\frac{1}{10\sqrt{2}}<\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$$

201. $$\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}}<\binom{100}{50}<\frac{2^{100}}{10}$$

202. $$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}},n\in\mathbb{N}$$

203. $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{12}$

204. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 1$ វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$$

205. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

206. តើមួយណាធំជាង $(1{,}000001)^{1.000.000}$ ឬ 2 ? ។

207. តើមួយណាធំជាង $1\,000^{1\,000}$ ឬ 1001^{999} ? ។

208. (a) តើមួយណាធំជាង ?

$$\frac{2{,}000\,000\,000\,04}{(1{,}000\,000\,000\,04)^2 + 2{,}000\,000\,000\,04};$$
$$\frac{2{,}000\,000\,000\,02}{(1{,}000\,000\,000\,02)^2 + 2{,}000\,000\,000\,02}$$

(b) បើ $a > b > 0$ ។ តើមួយណាធំជាង ?

$$\frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}}{1 + a + a^2 + \cdots + a^n};$$
$$\frac{1 + b + b^2 + \cdots + b^{n-1}}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n}$$

209. (កាណាដា ១៩៦៩)

តើមួយណាធំជាង $\sqrt{c+1} - \sqrt{c}$ ឬ $\sqrt{c} - \sqrt{c-1}$ ចំពោះ $c \geq 1$? ។

210. ផលគុណនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានចំនួន n មានតម្លៃស្មើមួយ ។ ចូរបង្ហាញថាផលបូករបស់វា មិនមានតម្លៃតូចជាង n ទេ ។

211. សន្មតថា $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ជាចំនួនពិតមានសញ្ញាដូចគ្នា មានតម្លៃធំជាង -1 ។ ចូរបង្ហាញថា $(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ។

212. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 6$ វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$$

213. គេឱ្យ $f(x) = ax^2 + 1998x + c$ ដែល $a; c \in \mathbb{Z}; |a| < 2000; |c| < 2000$ ហើយ f មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x_1; x_2$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|x_1 - x_2| \geq 1/998$ ។

214. គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, x, y ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$a + b = 1; ax + by = 2; ax^2 + by^2 = 3$$

ចូរបង្ហាញថា $4 < ax^3 + by^3 < 4{,}5$

215. គណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ

$$S = |x| + \left|\frac{2x - 1}{x + 3}\right|$$

216. ចូរកំណត់ a, b, c ដើម្បីឱ្យ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|f(x)| \leq 1$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [-1; 1]$ និងដែល $K = \frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ មានតម្លៃធំបំផុត ។

217. គេឱ្យចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$ ដែល$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\min_{i \neq j}(a_i - a_j)^2 \leq \frac{1}{100}; \quad \min_{i \neq j}|a_i^2 - a_j^2| \leq \frac{1}{36}$$

218. តាង a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} < 2$$

ចំណាំ

បើជួបលក្ខខណ្ឌ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងត្រីកោណ ចូរសាកល្បងតាង

$$a = x + y, b = y + z, c = z + x$$

219. គេឱ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$$

220. តាង a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2c^2 + 2a^2 - b^2) \leq (2a^2 + bc)(2b^2 + ca)(2c^2 + ab)$$

221. ដោយដឹងថា $f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}; a < b$ ។

គណនា $\min F$ ដែល

$$F=\frac{a+b+c}{b-a}$$

222. (អន្តរជាតិ ១៩៦១)

តាង a,b និង c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ដែលមានក្រលាផ្ទៃ S ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2+b^2+c^2\geq 4S\sqrt{3}$$

តើពេលណាយើងមានសមភាព? ។

223. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស១៩៦៧)

ចូរបង្ហាញថា គ្រប់គូវ៉ិចទ័រ f និង g ស្ថិតក្នុងប្លង់ , វិសមភាព

$$af^2+bfg+cg^2\geq 0$$

ពិត បើនិងមានតែបើ លក្ខខណ្ឌដូចតទៅនេះត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$a\geq 0; c\geq 0; 4ac\geq b^2$$

224. គេឱ្យចំនួនគត់ $n\geq 2$ និង ចំនួនពិត $a_1;a_2;\dots;a_n$ ដែល $\sum_{i=1}^{n}a_i=0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i<j}\left|a_i-a_j\right|\geq\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i|$$

225. (អន្តរជាតិ ២000)

គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$$

226. (ហុងគ្រី ១៩៩៦)

តាង a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a+b=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\geq\frac{1}{3}$$

227. (JBMO 2009)

តាង x,y,z ជាចំនួនពិត ដែល $0<x,y,z<1$ និង

$$xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$$

ចូរបង្ហាញថាក្នុងចំណោម $(1-x)y, (1-y)z, (1-z)x$ មានយ៉ាងហោច ណាស់មួយដែលធំជាងឬស្មើ $1/4$ ។

228. (វៀតណាម 2011)

ចូរបង្ហាញថា បើ $x > 0$ និង $n \in \mathbb{N}^*$ នោះយើងមាន

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}$$

229. (ទ្រឹស្តីបទ)

ចូរបង្ហាញថា

ក) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a, b គេមាន $a^2+b^2 \geq 2ab$ និង $4ab \leq (a+b)^2$ វាស្មើគ្នា បើ $a=b$ និង ច្រាសមកវិញ ។

ខ) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x > 0$ គេមាន $x + 1/x \geq 2$ ។ វាស្មើគ្នា បើ $x = 1$ និង ច្រាសមកវិញ ។

230. (JBMO សតលីស ២០០០)

តាង x, y, a, b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x \neq y, x \neq 2y, y \neq 2x, a \neq 3b$ និង

$$\frac{2x-y}{2y-x} = \frac{a+3b}{a-3b}$$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \geq 1$$

231. (JBMO សតលីស ២០០០)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនពិត (x, y, z) ដែល

$$2x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{z-1} + 2z\sqrt{x-1} \geq xy + xz + yz$$

232. (កាណាដា ១៩៧១)

តាង x និង y ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $x + y = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$$

233. គេឱ្យ២ចំនួនពិត a,b មិនសូន្យ ។ ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ

$$\frac{a^6}{b^6}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^6}{a^6}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^2}{a^2}$$

234. (រុស្ស៊ី ១៩៩៥)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x,y>0$

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4}\le\frac{1}{xy}$$

235. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y គេមាន

$$x^2+y^2+1>x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$$

236. គេឱ្យ $x,y,z>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}$$

237. ចូរបង្ហាញថា បើ $a+b=1$ ដែល a និង b ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះ

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge\frac{25}{2}$$

ចូរកំណត់ a និង b ដើម្បីឱ្យអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ។

238. ចូរបង្ហាញថា បើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ នោះគេមាន
$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

239. គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន x,y,z ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}\ge 0$$

ចូរកំណត់ករណីសមភាព ។

240. (អាស៊ីប៉ាស៊ីភិច ១៩៩៦)

គេឱ្យ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

241. (អាមេរិច ១៩៩៧)

គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

242. (អន្តរជាតិសតលីស ១៩៩៦)

គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $abc = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le 1$$

243. (វិសមភាពកូស៊ីស្វាត)

ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនពិត $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ គេមាន

$$(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)\ge(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា បើ វ៉ិចទ័រ $(a_1, \dots, a_n)$ និង $(b_1, \dots, b_n)$ កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា ។

សម្គាល់

ក្នុងគណិតវិទ្យា វិសមភាពកូស៊ី–ស្វាត អ្នកខ្លះហៅថាវិសមភាពស្វាត វិសមភាពកូស៊ី ឬក៏ វិសមភាពកូស៊ី–ប៊ុន្យាកូវស្គី–ស្វាត (គឺហៅតាមឈ្មោះ អូគុស្តាំង លួីសកូស៊ី(Augustin Louis Cauchy), វិចទ័រ យ៉ាកូលេវិច ប៊ុន្យាកូវស្គី (Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, គណិតវិទូរុស្ស៊ី,១៨០៤–១៨៨៩)និង ហ៊ែរម៉ាន អាម៉ានឌុស ស្វាត(Hermann Amandus Schwarz, គណិតវិទូអាល្លឺម៉ង់,១៨៤៣–១៩២១)) ។

244. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ គេមាន

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\ge n^2$$

245. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $a, b, c > 0$ គេមាន

$$\frac{(a+2b+3c)^2}{a^2+2b^2+3c^2}\le 6$$

246. គេឱ្យចំនួនពិត a, b, c វិជ្ជមានដាច់ខាត ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\ge\frac{100}{3}$$

247. (អាមេរិច ១៩៧៨)

គេឱ្យចំនួនពិត a, b, c, d, e ដែល

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=8 \\ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16 \end{cases}$$

ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតរបស់ e ។

248. (JBMO 2003)

គេឱ្យ $x, y, z > -1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2$$

249. (JBMO 2004)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង y ដែលមិនស្មើសូន្យទាំងពីរព្រមគ្នា ។

250. (អូស្ត្រាលី ១៩៩៣)

គេឱ្យចំនួនគត់ $n > 1$, ចំនួនពិត $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ និង

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s}{s-a_i} \geq \frac{n^2}{n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{s-a_i}{a_i} \geq n(n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} \geq \frac{n}{n-1}$$

251. (ចិន ១៩៨៧ ១៩៨៨)

ក) គេឱ្យ $a_1, a_2, a_3 > 0$ ដែល $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2 > 2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)$ ។

ចូរបង្ហាញថា a_1, a_2, a_3 ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ខ) គេឱ្យចំនួនគត់ $n \geq 3$ និង $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ដែល

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)$$

ចូរបង្ហាញថា គ្រប់ i,j,k ខុសគ្នាពីរៗ ចំនួន a_i,a_j,a_k ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

252. គេឱ្យ $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ ។ តាង $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$ និង

$$S_2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$

បង្ហាញថា

$$\frac{S_2-a_1^2}{S_1-a_1}+\frac{S_2-a_2^2}{S_1-a_2}+\cdots+\frac{S_2-a_n^2}{S_1-a_n}\geq S_1$$

253. (សិង្ហបុរី ២០០០)

គេឱ្យ $a,b,c,d>0$ ដែល $a^2+b^2=(c^2+d^2)^3$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}\geq 1$$

254. គេឱ្យ $x,y,z>1$ ដែល $1/x+1/y+1/z=2$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

255. (ឥណ្ឌា ២០០១)

គេឱ្យ $x,y,z>0$ ដែល $xyz\geq xy+yz+zx$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$xyz\geq 3(x+y+z)$$

256. គេឱ្យ a,b,c ដែល $a+b+c=abc$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\max(a,b,c)\geq\sqrt{3}$$

ចំណាំ

បើជួបលក្ខខណ្ឌ $a,b,c>0$ និង $a+b+c=abc$ ចូរតាង

$$a=\tan x,b=\tan y,c=\tan z$$

ដូច្នេះ x,y,z អាចចាត់ទុកជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណស្រួចបាន មានន័យថា $x,y,z\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ និង $x+y+z=\pi$ ។

257. (អន្តរជាតិ ១៩៩៩)

គេឱ្យចំនួនគត់ $n\geq 2$ ។

ក) ចូរកំណត់ចំនួនថេរ C តូចបំផុត ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$; គេមាន

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j\left(x_i^2 + x_j^2\right) \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4$$

ខ) ចំពោះចំនួនថេរ C នេះ ចូរកំណត់ករណីសមភាព ។

258. គេឱ្យចំនួនពិត x, y, z, t ដែល

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1 \end{cases}$$

ចូរគណនាតម្លៃធំបំផុតនិងតូចបំផុតនៃ $P = xy + yz + zt + tx$ ។

259. (អន្តរជាតិសតលីស ២០០១)

តាង $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាចំនួនពិត ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2} < \sqrt{n}$$

260. (អ៊ីរ៉ង់ ១៩៩៨)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x; y; z > 1$ ដែល $1/x + 1/y + 1/z = 2$ គេមាន

$$\sqrt{x + y + z} \geq \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 1}$$

261. (វិសមភាពតំរៀប)

គេឱ្យ $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ និង $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ ជាស៊ីតនៃចំនួនពិត កើនពីរ ។

តាង σ ជាចំលាស់នៃ$\{1,2, \dots, n\}$ ។

ចូរបង្ហាញថា ផលបូក $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$ មានតម្លៃធំបំផុត ពេល $\sigma(i) = i$ និង តូចបំផុតពេល $\sigma(i) = n - i$ ចំពោះគ្រប់ i ។

មានន័យថា S_σ មានតម្លៃធំបំផុតពេល ស៊ីតទាំង២រៀបតាមលំដាប់ដូចគ្នា ហើយតូចបំផុតបើរៀបតាមលំដាប់ផ្ទុយគ្នា ។

262. (អន្តរជាតិ ១៩៧៥)

គេឱ្យចំនួនពិត $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ និង $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ ។ តាង $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ជាចំលាស់នៃ $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

263. ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតរបស់

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

ចំពោះ $x \in (0, \pi/2)$ ។

264. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a, b, c \ge 0$ គេមាន

$$a^3 + b^3 + c^3 \ge a^2b + b^2c + c^2a \ge 3abc$$

265. (អន្តរជាតិ ១៩៧៨)

គេឱ្យ $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ ហើយមានតួខុសគ្នាពីរៗ ។

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ គេមាន

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

266. (ចិន ១៩៨៤/១៩៨៥)

គេឱ្យ $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \ge a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

267. គេឱ្យចំនួនមិនអវិជ្ជមាន p, q, x, y, z ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^{2000}}{py + qz} + \frac{y^{2000}}{pz + qx} + \frac{z^{2000}}{px + qy} \ge \frac{x^{1999} + y^{1999} + z^{1999}}{p + q}$$

268. (វិសមភាព Chebyshev)

ចំពោះគ្រប់ស្វ៊ីតកើននៃចំនួនពិតពីរ តាងដោយ $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ និង

$b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ គេមាន

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \le \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}$$

ផ្ទុយទៅវិញ បើ $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$ នោះ

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \ge \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}$$

Pafnuty Lvovich Chebyshev
គណិតវិទូរុស្ស៊ី,១៨២១–១៨៩៤

269. (វិសមភាពនៃសប៊ីត)

គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

270. គេឱ្យ $a, b, c, d \geq 0$ ដែល $ab+bc+cd+da=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា
$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$$

271. គេឱ្យ $a, b, c > 0$ និង $n \in \mathbb{N}^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា
$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$$

272. គេឱ្យ $x, y, z > 0$ ដែល $xyz=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា
$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}$$

273.** (វិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រ មន-មធ ឬ វិសមភាពកូស៊ី)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1, a_2, \dots, a_n$ ឬសូន្យ គេមាន
$$\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

ដោយសមភាពកើតមាន ទាល់តែ និងមានតែ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ តែប៉ុណ្ណោះ ។

274. (អន្តរជាតិ ១៩៦៤)

តាង a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

275. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស១៩៦៧)

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6} \geq (n!)^{\frac{2}{n}}$$

(n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន) ហើយបង្ហាញថាសមភាពអាចតែក្នុងករណី $n = 1$ មួយតែប៉ុណ្ណោះ ។

276. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស១៩៦៧)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3}$$

277. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស ១៩៦៧)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

$$x_1x_2 \dots x_k\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_k^{n-1}\right)$$
$$\leq x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \cdots + x_k^{n+k-1}$$

ដែល $x_i > 0\ (i = 1,2,\dots,k), k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ ។

278. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ គេមាន

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

279. (JBMO 2002)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

280.** (រុស្ស៊ី ២000)

គេឱ្យ $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ដែល $xyz = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z\geq 2(xy+yz+zx)$$

281. (សូវៀត ១៩៦២)

គេឱ្យ $a,b,c,d>0$ ដែល $abcd=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd\geq 10$$

282. គេឱ្យ $a,b,c\geq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(a+b+c)^3\geq a^3+b^3+c^3+24abc$$

283. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$abc\geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

284. គេឱ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}^+$ ដែល $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\prod_{k=1}^{n}a_k(1-a_k)\leq\frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$$

285. (អូទ្រីស ២០០០)

គេឱ្យចំនួនពិត a,b ដែល $a\neq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\geq\sqrt{3}$$

286. ចំពោះ $n\in\mathbb{N}^*$ តាង

$$U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ ;\ V_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ចូរបង្ហាញថា ស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតកើន ហើយស្វ៊ីត (V_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

287.** (សូវៀត ១៩៦៩)

គេឱ្យចំនួនគត់ $n\geq 3$ និង $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}^{+*}$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}>\frac{n}{4}$$

288. (ចិន ១៩៨៩/១៩៩០)

គេឱ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n>0$ ដែល $a_1a_2\dots a_n=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(2+a_1)(2+a_2)\dots(2+a_n)\geq 3^n$$

289.** តាង a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\geq\frac{2}{\sqrt{1+ab}}$$

បើ (1) $0<a,b\leq 1$ ឬក៏ (2) $ab\geq 3$ ។

290. គេឱ្យ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} > 0$ ដែល

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_{n+1}} = 1$$

ចូរបង្ហាញថា $x_1 x_2 \dots x_{n+1} \geq n^{n+1}$ ។

291. គេឱ្យចំនួនគត់ $n > 1, x_1 x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ និង $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ ។ តាង $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ។ ចូរកំណត់ចំនួនថេរ $C(n)$ ធំបំផុត ដែល

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j(s - x_j)}{x_j} \geq C(n) \left[\prod_{j=1}^{n} a_j \right]^{\frac{1}{n}}$$

292. គេឱ្យ $x, y, z > 0$ ដែល $x + y + z = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64$$

293.* (រូម៉ានី ១៩៩៧)

គេឱ្យ ចំនួនគត់ $n \geq 2$ និង $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ដែល $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ ។

ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតរបស់

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i^9 + x_j^9}{x_i^6 + x_i^3 x_j^3 + x_j^6}$$

294.* (អន្តរជាតិសតលីស ១៩៩៣)

គេឱ្យ $a, b, c, d \geq 0$ ដែល $a + b + c + d = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27} abcd$$

295.* គេឱ្យ $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{n^{n-3}} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} \geq n^2(n-1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

296. គេឱ្យ $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n (1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n)}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}$$

297. (អាមេរិចសតលីស ២០០២)

ចូរគណនាតម្លៃធំបំផុតរបស់ $S = (1 - x_1)(1 - y_1) + (1 - x_2)(1 - y_2)$

បើដឹងថា $x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2=c^2$ ។

298. (អន្តរជាតិ ១៩៩៥)

តាង abc ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $abc=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

299. (អន្តរជាតិ ២០០១)

តាង a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

300. តាង a,b,c ជាចំនួនពិត ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(ab+bc+ca-1)^2\leq(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$

301. (អន្តរជាតិ ១៩៨៤)

តាង x,y,z ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $x+y+z=1$ ។ បង្ហាញថា

$$0\leq xy+yz+zx-2xyz\leq\frac{7}{27}$$

302. គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន x,y,z ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2\left(1+\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)$$

303. គេឱ្យចំនួនពិតបួនផ្សេងគ្នា a,b,c,d ដែល

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4;\quad ac=bd$$

ចូរគណនាតម្លៃធំបំផុតនៃ

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}$$

304. គេឱ្យ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយមានបរិមាត្រ ស្មើ 2 ។ បង្ហាញថា

$$\frac{52}{27}\leq a^2+b^2+c^2+2abc<2$$

305. ចំពោះគ្រប់ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)}$$
$$\geq abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}$$

306. 1) ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន p, q ដែល $p+q=1$ គេមាន

$$pa+qb \geq a^p b^q;\ \forall\, a, b>0$$

2) ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន p, q ដែល $p+q=1$ គេមាន

$$px+qy \geq x^p y^q;\ \forall\, x, y>0$$

3) (វិសមភាពមធ្យមទូទៅ)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a_1, a_2, \ldots, a_n>0$ ដែល

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$$

គេមាន

$$a_1 x_1+a_2 x_2+\cdots+a_n x_n \geq x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n};\quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n>0$$

4) (វិសមភាព Hölder)

តាង $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n; \ldots; l_1, l_2, \ldots, l_n$ ជាស្វ៊ីតចំនួន k នៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានចំនួន k ដែល

$$\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1$$

ចូរបង្ហាញថា

$$a_1^\alpha b_1^\beta \ldots l_1^\lambda+a_2^\alpha b_2^\beta \ldots l_2^\lambda+\cdots+a_n^\alpha b_n^\beta \ldots l_n^\lambda$$
$$\leq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^\alpha (b_1+b_2+\cdots+b_n)^\beta \ldots (l_1+l_2+\cdots+l_n)^\lambda$$

307. គេឱ្យ $a, b \geq 0$ និង $p, q>1$ ដែល $1/p+1/q=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geq ab$$

308. (ប៉ូឡូញ ១៩៩៥)

គេឱ្យចំនួនគត់ $n \geq 1$ ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតរបស់ផលបូក

$$x_1+\frac{x_2^2}{2}+\cdots+\frac{x_n^n}{n}$$

ដែល $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ជាចំនួនពិត ដែល

$$1/x_1+1/x_2+\cdots+1/x_n=n$$

309. (ឥណ្ឌូនេស៊ី ២០១០)

តាង a,b,c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន និង តាង x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a+b+c=x+y+z$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c$$

310. តាង $a_1,a_2,\dots,a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានចំនួន n ។ បង្ហាញថា

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\geq\left(1+\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\right)^n$$

311. ចូរបង្ហាញថាបើ $a_1,a_2,\dots,a_n;b_1,b_2,\dots,b_n;\dots;l_1,l_2,\dots,l_n$ ជាស្វ៊ីតចំនួន k នៃចំនួនវិជ្ជមាន នោះវិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\dots b_n}+\cdots+\sqrt[n]{l_1l_2\dots l_n}$$
$$\leq\sqrt[n]{(a_1+b_1+\cdots+l_1)(a_2+b_2+\cdots+l_2)\dots(a_n+b_n+\cdots+l_n)}$$

312. (វិសមភាព Minkowski)

តាង $p\in[1;+\infty)$ ហើយ $a_1,a_2,\dots,a_n;\ b_1,b_2,\dots,b_n;\dots;l_1,l_2,\dots,l_n$ ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា

$$\sqrt[p]{|a_1+b_1+\cdots+l_1|^p+|a_2+b_2+\cdots+l_2|^p+\cdots+|a_n+b_n+\cdots+l_n|^p}$$
$$\leq\sqrt[p]{|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p}+\sqrt[p]{|b_1|^p+|b_2|^p+\cdots+|b_n|^p}+\cdots$$
$$+\sqrt[p]{|l_1|^p+|l_2|^p+\cdots+|l_n|^p}$$

ដែលអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា បើ និង ទាល់តែបើ

$$m_a.(a_1,a_2,\dots,a_n)=m_b.(b_1,b_2,\dots,b_n)=\cdots=m_l.(l_1,l_2,\dots,l_n)$$

ចំពោះចំនួនថេរវិជ្ជមាន $m_a,m_b,\dots,m_l$ ។

313. គេឱ្យ $x,y,z>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}(x+z)^{\frac{2}{3}}}+\frac{y^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}+(y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}(y+x)^{\frac{2}{3}}}$$
$$+\frac{z^{\frac{4}{3}}}{z^{\frac{4}{3}}+(z^2+x^2)^{\frac{1}{3}}(z+y)^{\frac{2}{3}}}\leq 1$$

314. គេឱ្យចំនួនពិត a,b,c,d ។ ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតរបស់

$$S = \sqrt{(a+1)^2 + 2(b-2)^2 + (c+3)^2}$$
$$+\sqrt{(b+1)^2 + 2(c-2)^2 + (d+3)^2}$$
$$+\sqrt{(c+1)^2 + 2(d-2)^2 + (a+3)^2}$$
$$+\sqrt{(d+1)^2 + 2(a-2)^2 + (b+3)^2}$$

315. តាង x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

1) ចូរបង្ហាញថា បើ $x + y + z = xyz$ នោះ

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

2) ចូរបង្ហាញថា បើ $0 < x, y, z < 1$ និង $xy + yz + zx = 1$ នោះ

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

316. (បែលារុស ១៩៩៩)

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតពីរ $x_1, x_2, \dots$ និង $y_1, y_2, \dots$ កំណត់ដោយ

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}; x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}; y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}$$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា $2 < x_n y_n < 3$ ចំពោះគ្រប់ $n > 1$ ។

317. តាង $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាចំនួនពិតខុសៗគ្នាចំនួន n ឋិតក្នុងចន្លោះ $[-1; 1]$ ដែល $n \geq 2$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \geq 2^{n-2}$$

ដែល $t_i = \prod_{j \neq i} |x_j - x_i|$ ។

318. យើងយកចំនួនពិតបួននៅក្នុងចន្លោះ $\left[(\sqrt{2} - \sqrt{6})/2 ; (\sqrt{2} + \sqrt{6})/2\right]$ ដោយមិនបាច់រើស ។ ចូរបង្ហាញថា ត្រូវតែមានពីរក្នុងចំណោមនោះ តាងដោយ a និង b ដែល

$$\left| a\sqrt{4 - b^2} - b\sqrt{4 - a^2} \right| \leq 2$$

319. (វិសមភាពយិនសិន)

តាង $n \geq 1$ ជាចំនួនគត់ ហើយ f ជាអនុគមន៍ផត លើដែន I ។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $l_1 + l_2 + \dots + l_n = 1$ គេមាន

$$f(l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_nx_n) \leq l_1f(x_1) + l_2f(x_2) + \dots + l_nf(x_n);$$
$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I$$

ហើយ បើ f ផតដាច់ខាត នោះកន្សោមខាងលើក្លាយជាសមភាព ពេល

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

ករណី f ជាអនុគមន៍ប៉ោង :

$$f(l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_nx_n) \geq l_1f(x_1) + l_2f(x_2) + \dots + l_nf(x_n);$$
$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in I$$

យ៉ូហាន យិនសិន

(Johan Jensen)

ឈ្មោះពេញ យ៉ូហាន លុយឌ្វិច វីលាម វ៉ាល់ដឺមែរ យិនសិន

(Johan Ludwig William Valdemar Jensen)

(ឧសភា ១៨៥៩ - កុម្ភៈ ១៩២៥) គណិតវិទូ និង វិស្វករជាតិដាណឺម៉ាក ។ គេស្គាល់គាត់ដោយសារវិសមភាពយិនសិន ។ ក្នុងឆ្នាំ ១៩១៥ គាត់បាន បង្ហាញថា រូបមន្តវិសមភាពរបស់គាត់អាចប្រើបានលើ វិភាគកុំផ្លិច ។

320. (កូរ៉េ ១៩៩៨)

គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $a + b + c = abc$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

321. ចូរកំណត់ចំនួនថេរ M តូចបំផុត ដែលចំពោះគ្រប់ $a, b > 0$ គេមាន

$$a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \leq M(a+b)^{\frac{1}{3}}$$

322. គេឱ្យ $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

323. (អូទ្រីស ២០០០)

គេឱ្យ $a, b > 0$ និង $n \in \mathbb{Z}$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$$

324. (អន្តរជាតិ ២០០១)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $l \geq 8$ និង $a, b, c > 0$ គេមាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$$

325. គេឱ្យចំនួនគត់ $n \geq 1$ ។ តាង $\alpha, t \in [1; +\infty)$ និង $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$ ។

តាង $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$ ដែល $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^\alpha + \frac{1}{a_i^\beta}\right)^t \geq n\left(\frac{1}{n^\alpha} + n^\beta\right)^t$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងនាំឱ្យ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1/n$ ។

326. (អន្តរជាតិសតលីស ១៩៩៨)

គេឱ្យ $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_n+1} \geq \frac{n}{1+(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}}$$

327. (អាមេរិច ១៩៨០)

គេឱ្យ $a, b, c \in [0; 1]$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

328. (អាមេរិច ១៩៧៧)

គេឱ្យ $0 < p \leq a, b, c, d, e \leq q$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \le 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

329. (អាស៊ីប៉ាស៊ីភិច ២០០៤)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b,c>0$

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 9(ab+bc+ca)$$

330. (អន្តរជាតិ ១៩៨៣)

តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \ge 0$$

331. និយមន័យ- គេឱ្យ ចំនួនគត់ $n \ge 2$ បណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1,a_2,\ldots,a_n$ និង បណ្តាចំនួនពិតវិជ្ជមាន $l_1,l_2,\ldots,l_n$ ដែល $\sum_{i=1}^{n} l_i = 1$ ។ យើងកំណត់អនុគមន៍ M លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ

$$M(\alpha)=\left[\sum_{i=1}^{n} l_i a_i^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

គេហៅ $M(\alpha)$ ថា មធ្យមលំដាប់ α នៃបណ្តាចំនួន a_i ផ្សំនឹងមេគុណ l_i ។

ទ្រឹស្តីបទ វិសមភាពមធ្យមលំដាប់ α

គេឱ្យ $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ មិនស្មើគ្នាទាំងអស់ និង $l_1,l_2,\ldots,l_n>0$ ដែល $l_1+l_2+\cdots+l_n=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា អនុគមន៍ $M(\alpha)$ កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ មានន័យថា

ចំពោះគ្រប់ $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ និង $\alpha<\beta$ គេមាន $M(\alpha) \le M(\beta)$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងនាំឱ្យ $a_1=a_2=\cdots=a_n$ ។

332. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះ $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ គេមាន

$$\min\{a_1,a_2,\ldots,a_n\} \le M(-1) \le M(0) \le M(1)$$
$$\le M(2) \le \max\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$$

ឬ

$$\min\{a_1,a_2,\ldots,a_n\} \le \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \le (a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

ហើយសមភាពកើតមាន ពេល $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ។

333. (អ៊ីរ៉ង់ ១៩៩៨)

គេឱ្យ $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$ ដែល $x_1x_2x_3x_4 = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i\,;\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i}\right\}$$

334. គេឱ្យ $x, y, z \geq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$8(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geq 9(x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy)$$

335. គេឱ្យចំនួនគត់ $n > 1$ និង $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ដែល $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1 - x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n - 1}}$$

336. (ទួរគី ១៩៩៧)

គេឱ្យចំនួនគត់ $n \geq 2$ ។ ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_1 + x_3 + \cdots + x_n} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}$$

ដែល $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ហើយ $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ ។

337. (អន្តរជាតិសតលីស ១៩៨៧)

ចូរបង្ហាញថា បើ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ និង បើ

$2S = a + b + c$ នោះ៖

$$\frac{a^n}{b + c} + \frac{b^n}{c + a} + \frac{c^n}{a + b} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} S^{n-1}, n \geq 1$$

338. (វិសមភាព Schur)

តាង $x; y; z$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $r > 0$ យើង

មាន

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\geq 0$$
ឬ
$$\sum_{\text{cyclic}} x^r(x-y)(x-z)\geq 0$$

339. 1) គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា
$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3+3abc &\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\\ &\geq 2\left[(ab)^{3/2}+(bc)^{3/2}+(ca)^{3/2}\right]\end{aligned}$$
2) តាង $t\in(0;3]$ ។ ចំពោះគ្រប់ $a,b,c\geq 0$ ចូរបង្ហាញថា
$$(3-t)+t(abc)^{2/t}+a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc+ca)$$
3) បង្ហាញថា
$$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(abc)^4+a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc+ca)$$
$$2+(abc)^2+a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc+ca)$$
$$1+2abc+a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc+ca)$$

340. (វៀតណាម ២០០៩)
ចូរកំណត់ k ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់
$$\left(k+\frac{a}{b+c}\right)\left(k+\frac{b}{c+a}\right)\left(k+\frac{c}{a+b}\right)\geq\left(k+\frac{1}{2}\right)^3$$
ចំពោះគ្រប់ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

341. គេឱ្យ $a,b,c>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

1) $$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

2) $$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq a+b+c$$

342. 1) តាង a_1,a_2,b_1,b_2 ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a_1+a_2=b_1+b_2$ និង $\max(a_1,a_2)\geq\max(b_1,b_2)$ ។ តាង x និង y ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា
$$x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}\geq x^{b_1}y^{b_2}+x^{b_2}y^{b_1}$$

2) (វិសមភាព Muirhead)

តាង $a_1;a_2;a_3;b_1;b_2;b_3$ ជាចំនួនពិត ដែល

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0; b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq 0;$$
$$a_1 \geq b_1; a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2;$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$$

ករណីនេះ គេថាស្វ៊ីត $(a_1; a_2; a_3)$ *លប់* លើស្វ៊ីត $(b_1; b_2; b_3)$ ។

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x; y; z$ គេមាន

$$\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geq \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$$

343. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $abc = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1$$

344. គេឱ្យ $a, b, c, d > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{3}{2}(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)$$
$$\geq ab\sqrt{cd} + ac\sqrt{bd} + ad\sqrt{bc} + bc\sqrt{da} + bd\sqrt{ca} + cd\sqrt{ab}$$

345. (អ៊ីរ៉ង់ ១៩៩៦)

តាង $x; y; z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

346. តាង $x; y; z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $xy + yz + zx = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{5}{2}$$

347. (អន្តរជាតិសតលីស ១៩៩០)

ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a, b, c យើងមាន

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3$$

348. (ជប៉ុន ១៩៩៧)

គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}$$

២.៦ វិសមីការ

ដោះស្រាយវិសមីការ

349. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 > 0$

350. $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \leq 0$

351. $2x^3 - 3x^2 + 7x - 3 > 0$

352. $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \geq 0$

353. $x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 5 < 0$

354. $3x^4 - 10x^2 + 3 > 0$

355. $3x^2(x-4)^2 < 32 - 5(x-2)^2$

356. $(x^2 - x)^2 + (x^2 - x) + 2 \geq 0$

357. $x(x+1)(x+2)(x+3) < 48$

358. $(x+1)^4 > 2(1 + x^4)$

359. $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 < 0$

360. $\frac{1}{x} < \frac{2}{x-2}$ **361.** $\frac{x+4}{x-2} < \frac{2}{x+1}$

362. $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$

363. $\frac{x^2 - x + 1}{x-1} + \frac{x^2 - 3x + 1}{x-3} > 2x - \frac{1}{4x-8}$

364. $\frac{x^3 - 2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$

365. $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+7} > 0$

366. $\frac{1}{x^2 + x} \leq \frac{1}{2x^2 + 2x + 3}$

367. $\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x-4} < \frac{1}{30}$

368. $\frac{4x-17}{x-4} + \frac{10x-13}{2x-3} > \frac{8x-30}{2x-7} + \frac{5x-4}{x-1}$

369. $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} < \frac{5}{4}$ **370.** $x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} \leq 5$

371. $\frac{(x+1)^4}{x(x^2+1)} > \frac{128}{15}$

372. $x^3 - \frac{1}{x^3} \geq 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$

373. $\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2<\frac{2x^2+72}{x^2-36}$

374. $|x^3-x|\le x$

375. $\frac{4}{|x+1|-2}\ge |x-1|$

376. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$

377. $\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}}>-1$

378. $\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x}\ge 0$

379. $(1-a)\sqrt{2x+1}<1$

380. $\sqrt{x+1}>\sqrt{3-x}$

381. $\sqrt{x+2}\ge\sqrt{x-a}$

382. $\sqrt{24-10x}>3-4x$

383. $x>\sqrt{1-x}$

384. $x>\sqrt{24-5x}$

385. $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

386. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$

387. $\sqrt{x^2+x-12}<x$

388. $1-\sqrt{13+3x^2}\le 2x$

389. $\sqrt{x^2+x}>1-2x$

390. $4-x<\sqrt{x^2-2x}$

391. $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$

392. $\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}<4$

393. $\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}>-\frac{1}{3}$

394. $\sqrt{x+2}-\sqrt{5x}>4x-2$

395. $\sqrt{x+1}+1<4x^2+\sqrt{3x}$

396. $\frac{\sqrt{24+2x-x^2}}{x}<1$

397. $$2\left(x+\sqrt{x^2+4x+3}\right) < 3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}-2\right)$$

398. ចូរបង្ហាញថាពហុធា $P(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ ។

399. សន្មតថា $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$ និង
$Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, Q(x) \not\equiv 0$
ចូរបង្ហាញថាវិសមភាព $P(x)/Q(x) > 0$ និង $P(x)Q(x) > 0$ សមមូលគ្នា ។

400. ដោយដឹងថា $f(-1) < 1, f(1) > -1, f(3) < -4$ ដែល $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ចូរកំណត់សញ្ញារបស់ a ។

401. (អន្តរជាតិ ១៩៦០)
ដោះស្រាយវិសមីការ
$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x + 9$$

402. (អន្តរជាតិ ១៩៦២)
ដោះស្រាយវិសមីការ
$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

403. ដោះស្រាយវិសមីការ
$$\sqrt{9x^2+16} \geq 2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x}$$

២.៧ ប្រព័ន្ធវិសមីការ

404*. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ
$$\begin{cases} x + y \leq 2, \\ x + y \geq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$$
ដែលក្នុងនោះ $z = 2x + 3y$ មានតម្លៃធំបំផុត ។

405. ចូរកំណត់ឫសគត់ធម្មជាតិរបស់ប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ xy \le 17 \\ \dfrac{y+1}{x+2} < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

406. ចូរកំណត់តម្លៃរបស់ a ដែលសំណុំ

$$\{(x;y)|x^2 + y^2 + 2x \le 1\} \cap \{(x;y)|x - y + a \ge 0\}$$

មានចំណុចតែមួយគត់ ។ ចូរកំណត់ចំណុចនោះ ។

407. ចូរកំណត់$(x;y)$ ដែល

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 12 = 0 \\ x^2 + 4y^2 \le 60 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

408. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ

$$\begin{cases} \sqrt{4 - 3x} \ge x \\ \sqrt{x} + \sqrt{x - 1} < 5 \end{cases}$$

409. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x^3 + x^2(13 - y - z) + x(2y + 2z - 2yz - 26) + 5yz - 7y - 7z + 30 = 0 & (1) \\ x^3 + x^2(17 - y - z) - x(2y + 2z + 2yz - 26) - 3yz + y + z - 2 = 0 & (2) \\ x^2 - 11x + 28 \le 0 & (3) \end{cases}$$

410. ចូរកំណត់ a ដើម្បីឱ្យប្រព័ន្ធខាងក្រោមមានឫស

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \ge \dfrac{1-a}{a+1} \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \le -2 \end{cases}$$

២.៨ លីមីត

411. (វៀតណាម 2011)

តាង $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត ដែលកំណត់ដោយ

$$x_1 = 1;\ \ x_n = \frac{2n}{(n-1)^2}\,(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})$$

ចូរបង្ហាញថាស្វ៊ីត $y_n = x_{n+1} - x_n$ មានលីមីតកំណត់ ពេល $n \to \infty$ ។

២.៩ សិក្សាអនុគមន៍

412. 1) សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោង(C) នៃអនុគមន៍

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

2) ចូរកំណត់ចំណុចស្ថិតនៅលើអ័ក្ស Oy ដែលគេអាចគូសបានបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង(C) យ៉ាងហោចណាស់មួយចេញពីចំណុចនោះ ។

3) ចូរកំណត់ a ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង(C) ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូល $y = x^2 + a$ ។

២.១០ អាំងតេក្រាល

413. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់និងជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។ កំណត់អនុគមន៍ g មួយដោយ

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt\,; \forall x \in \mathbb{R}$$

ក) ចូរបង្ហាញថា បើ f កើននោះ $g(x)$ ក៏កើនដែរ តែបើ f ចុះនោះ $g(x)$ ក៏ចុះដែរ ។

ខ) ចូរបង្ហាញថា បើ f ជាអនុគមន៍ខួប មានខួបស្មើ១ នោះ g ជាអនុគមន៍ថេរលើ $\mathbb{R}$ ។

៣

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល-លោការីត

៣.១ គណនា

គណនា

414. $25^{\log_5 3}$ **415.** $e^{\ln\ln 3}$ **416.** $\ln ab - \ln|b|$

417. $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$ **418.** $2^{\frac{1}{\log_3 2}}$

419. $\dfrac{\log_2 25}{\log_2 5}$ **420.** $\log_3 5 . \log_4 9 . \log_5 2$

421. $\sqrt{\log_{0,5}^2 4}$ **422.** $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$

423. ចូរគណនា $\log_{30} 8$ បើ $\log_{30} 3 = c, \log_{30} 5 = d$ ។

424. ចូរគណនា $\log_9 40$ បើ $\log 15 = c, \log_{20} 50 = d$ ។

425. ចូរគណនា $\log(0,175)^4$ បើ $\log 196 = c, \log 56 = d$ ។

426. គណនា

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$$

427. (វៀតណាម ២០០២)

គេឱ្យស្វ៊ីត $u_1; u_2; \dots; u_{2n}$ កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} u_i \neq 0; i = 1; 2; \dots; 2n \\ u_{n+2} = \dfrac{u_n u_{n+1}}{2u_n - u_{n+1}} \\ S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \dfrac{1}{u_i} = n \end{cases} \quad \text{និង} \quad f(x) = \frac{1}{2002^{2x-1} + 1}$$

គណនា

$$\sum_{i=1}^{2n} f\left(\frac{1}{u_i}\right)$$

428. (អាមេរិច AIME 2010)

សន្មតថា $y = 3x/4$ និង $x^y = y^x$ ។ ផលបូក $x + y$ អាចសរសេរជារាង សនិទាន r/s ដែល r បឋមនឹង s ។ គណនា $r + s$ ។

៣.២ សមភាព

429. ចូរបង្ហាញថា បើ $a = \log_{12} 18, b = \log_{24} 54$ នោះ $ab + 5(a - b) = 1$ ។

430. ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \frac{1}{\log_4 N} + \dots + \frac{1}{\log_{100} N} = \frac{1}{\log_{100!} N}$$

ដែល $100! = 1.2.3 \dots 100$ ។

431. គេឱ្យ $a^2 + b^2 = c^2$ ។ បង្ហាញថា

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \log_{c-b} a$$

432. គេឱ្យ

$$y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}, \qquad z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$$

បង្ហាញថា

$$x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$$

៣.៣ សមីការ

ដោះស្រាយសមីការ

433. $4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}$

434. $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} = 34.15^{2x-x^2}$

435. $2^{2x^2} + 2^{x^2+2x+2} = 2^{5+4x}$

436. $\left(\sqrt{5\sqrt{2}-7}\right)^x + 6\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x = 7$

437. $3^{2x^2} - 2.3^{x^2+x+6} + 3^{2(x+6)} = 0$

438. $x^2.2^{\sqrt{2x+1}-1} + 2^x = 2^{\sqrt{2x+1}+1} + x^2.2^{x-2}$

439. $4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5} = 50$

440. $x^{\log_x(1-x)^2} = 9$

441. $\log_3(x^2+4x+12) = 2$

442. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$

443. $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3$

444. $\log(x-3) + \log(x+6) = \log 2 + \log 5$

445. $\log(x-4) + \log(x+3) = \log(5x+4)$

446. $\ln(x^3+1) - 0,5\ln(x^2+2x+1) = \ln 3$

447. $\log_5(x-2) + 2\log_5(x^3-2) + \log_5(x-2)^{-1} = 4$

448. $2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$

449. $\log_2(x+2)^2 + \log_2(x+10)^2 = 4\log_2 3$

450. $\log_2\dfrac{x-2}{x-1} - 1 = \log_2\dfrac{3x-7}{3x-1}$

451. $2\log_2\dfrac{x-7}{x-1} + \log_2\dfrac{x-1}{x+1} = 1$

452. $\log_3(5x-2) - 2\log_3\sqrt{3x+1} = 1 - \log_3 4$

453. $\log(3x-2) - 2 = \dfrac{1}{2}\log(x+2) - \log 50$

454. $\log^2\left(1+\dfrac{4}{x}\right) + \log^2\left(1-\dfrac{4}{x+4}\right) = 2\log^2\left(\dfrac{2}{x-1} - 1\right)$

455. $\log_2 x^4 + \log_a x^2 = 1$

456. $\log_2(x-1) - \log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+3} = \log_8(x-a)^3 + \log_{1/2}(x-3)$

457. $\log_2(6x^2+25x) = 1 + \log_2(ax+4a-2)$

458. $\log_3 x \log_4 x \log_5 x = \log_3 x \log_4 x + \log_4 x \log_5 x + \log_5 x \log_3 x$

459. $\left(\log_3 \frac{3}{x}\right) \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$

460. $\log(10x^2) \log x = 1$

461. $\frac{\log_2 x - 1}{\log_2 \frac{x}{2}} = 2\log_2 \sqrt{x} + 3 - \log_2^2 x$

462. $2\log_9 x + 9\log_x 3 = 10$

463. $\log_x(125x) \log_{25}^2 x = 1$

464. $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x = \frac{9}{4} + \log_x^2 \sqrt{5}$

465. $\log(\log x) + \log(\log x^3 - 2) = 0$

466. $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) = 4 - \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21)$

467. $\log^2(4 - x) + \log(4 - x)\log\left(x + \frac{1}{2}\right) - 2\log^2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$

468. $(x^2 \log_x 27) \log_9 x = x + 4$

469. $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$

470. $\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$

471. $4\log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} + 2\log_{4x} x^2 = 3\log_{2x} x^3$

472. $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + \log_3^2 x = 1$

473. $\left(\log_{1/\sqrt{1+x}} 10\right) \log(x^2 - 3x + 2) = (\log(x - 3)) \log_{1/\sqrt{1+x}} 10 - 2$

474. $\frac{\log_x(2a - x)}{\log_x 2} + \frac{\log_a x}{\log_a 2} = \frac{1}{\log_{a^2-1} 2}$

475. $\dfrac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + (\log_{ax} a)\log_{\frac{1}{a}} 2x = 0$

476. $\sqrt{1+\log_{0,04} x} + \sqrt{3+\log_{0,2} x} = 1$

477. $\sqrt{2-\log_x 9} = -\dfrac{\sqrt{12}}{\log_3 x}$

478. $\log_x(x^2+1) = \sqrt{\log_{\sqrt{x}}\big(x^2(1+x^2)\big)+4}$

479. $\sqrt{\log_2 x} - 0,5 = \log_2\sqrt{x}$

480. $\log(3^x - 2^{4-x}) \ = 2 + \dfrac{1}{4}\log 16 - \dfrac{x}{2}\log 4$

481. $\log_3\left(\log_9 x + \dfrac{1}{2} + 9^x\right) = 2x$

482. $\log_3\left(3^{x^2-13x+28} + \dfrac{2}{9}\right) = \log_5 0,2$

483. $\log 2 + \log(4^{x-2}+9) = 1 + \log(2^{x-2}+1)$

484. $\log(6.5^x + 25.20^x) = x + \log 5$

485. $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6) - \log_5(2^x-2)^2 = 2$

486. $x(1-\log 5) = \log(4^x - 12)$

487. $\log_2(4^x+1) = x + \log_2(2^{x+3}-6)$

488. $\log_3(9^x+9) = x - \log_{\frac{1}{3}}(28 - 2.3^x)$

489. $\log_2\left(\dfrac{8}{2^x} - 1\right) = x - 2$

490. $\log_{1/3}\left(2\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 1\right) = \log_{1/3}\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^x - 4\right)$

491. $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$

492. $x^{\frac{\log x+5}{3}} = 10^{5+\log x}$

493. $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$

494. $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\log(3-x)}$

495. $|x - 1|^{\log^2 x - \log x^2} = |x - 1|^3$

496. $\left(3^{x^2-7,2x+3,9} - 9\sqrt{3}\right)\log(7 - x) = 0$

497. $3.2^{\log_x(3x-2)} + 2.3^{\log_x(3x-2)} = 5.6\text{^}\log_{x^2}(3x - 2)$

498. $\left|1 - \log_{1/5} x\right| + 2 = \left|3 - \log_{1/5} x\right|$

499. $\log_4\left(6 + \sqrt{x} - \left|\sqrt{x} - 2\right|\right) = \dfrac{1}{2} + \log_2\left|\sqrt{x} - \left|\sqrt{x} - 2\right|\right|$

500. $5^x + 12^x = 13^x$ **501.** $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$

502. $2^x = 1 - x$ **503.** $\log_2(4 - x) = x - 3$

504. ដោយដឹងថា $x = 9$ ជាឫសមួយនៃសមីការ

$$\log_\pi(x^2 + 15a^2) - \log_\pi(a - 2) = \log_\pi \frac{8ax}{a - 2}$$

ចូរកំណត់ឫសផ្សេងទៀតនៃសមីការនេះ ។

505. (វៀតណាម ២០០២)

ដោះស្រាយសមីការ

$$2002.2003^{2(\log_{2002} x - 1)} = x^{1+\log_{2002} 2003} - x^2$$

506. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស ១៩៦៧)

កំណត់ឫសវិជ្ជមានរបស់សមីការ $x^x = 1/\sqrt{2}$

៣.៤ ប្រព័ន្ធសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

507.
$$\begin{cases}\log_{a^2} x - \log_{a^4} y = 3\\ \log_{a^6} x + \log_{a^8} y = 4\end{cases}$$

508.
$$\begin{cases}2^{x+y-1} + 2^{x-y+1} = 3\\ \frac{1}{7}.3^{x\log_3 2 + y\log_3 2-2} + 3^{x\log_3 2 - y\log_3 2-2} = \frac{1}{7}\end{cases}$$

509.
$$\begin{cases}10^{1+\log(x+y)} = 50\\ \log(x-y) + \log(x+y) = 2 - \log 5\end{cases}$$

510.
$$\begin{cases}x^{\log_x 2} = \log_3(x+y)\\ x^2 + y^2 = 65\end{cases}$$

511.
$$\begin{cases}\log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1\\ x^2 - y^2 = 2\end{cases}$$

512.
$$\begin{cases}(3y^2+1)\log_3 x = 1\\ x^{2y^2+10} = 27\end{cases}$$

513.
$$\begin{cases}4^{-y}\log_2 x = 4\\ \log_2 x + 2^{-2y} = 4\end{cases}$$

514.
$$\begin{cases}y + \log x = 1\\ x^y = 0{,}01\end{cases}$$

515.
$$\begin{cases}x^{\log y} = 2\\ xy = 20\end{cases}$$

516.
$$\begin{cases}2^x.8^{-y} = 2\sqrt{2}\\ \log_9 \frac{1}{x} + 0{,}5 = \frac{1}{2}\log_3 9y\end{cases}$$

517.
$$\begin{cases}(\log_a(xy)-2)\left(\log_a\frac{4}{9}\right)^{-1}=-1\\ x+y=5a\end{cases}$$

518.
$$\begin{cases}2\left(\log_y x+\log_x y\right)=5\\ xy=8\end{cases}$$

519.
$$\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2{,}5\\ x+y=a^2+a\end{cases}$$

520.
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=28\\ \log_9 x-\log_{\frac{1}{9}} y=1{,}5\end{cases}$$

521.
$$\begin{cases}\log_2 y=\log_4(xy-2)\\ \log_9 x^2+\log_3(x-y)=1\end{cases}$$

522.
$$\begin{cases}2^{x^2+y}=4^{\frac{y^2+x}{2}}\\ \sqrt{xy}=2\end{cases}$$

523.
$$\begin{cases}4^{\frac{x}{y}-3y/x}=16\\ \sqrt{x}-\sqrt{2y}=\sqrt{12}-\sqrt{8}\end{cases}$$

524.
$$\begin{cases}x+y=4+\sqrt{y^2+2}\\ \log x-2\log 2=\log(1+0{,}5y)\end{cases}$$

525.
$$\begin{cases}\log_3(\log_2 x)+\log_{1/3}\left(\log_{1/2} y\right)=1\\ xy^2=4\end{cases}$$

526.
$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}\sqrt[y]{9}=9^{\frac{x}{2y}}\\ \dfrac{x+3y}{x}=\dfrac{2x}{y}-4\end{cases}$$

527. (វៀតណាម ២០០២)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases}2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^y=-xy-\dfrac{3}{2} & (1)\\ (x^2y+2x)^2-2x^2y+1-4x=0 & (2)\end{cases}$$

៣.៥ វិសមភាព

528. តើមួយណាធំជាង រវាង 2^{300} និង 3^{200} ?

529. ចូរបង្ហាញថា

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 1$ ។

530. ដោយមិនប្រើតារាង ចូរបង្ហាញថា $\log_4 9 > \log_9 25$ ។

531. គេឱ្យ $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$x_1^{x_1}.x_2^{x_2}\dots x_n^{x_n} \geq (x_1.x_2\dots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}$$

532. (អាមេរិច សតលីស ១៩៩៩)

គេឱ្យ $x, y, z > 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy} \geq (xyz)^{xy+yz+zx}$$

533. តើរវាង $99^n + 100^n$ និង 101^n (ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ) មួយណាធំជាង?

534. ចូរបង្ហាញថា បើ $m > n$ (ដែល m, n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន) នោះ

(a) $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

(b) $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$; $(n \geq 2)$

៣.៦ វិសមីការ

ដោះស្រាយវិសមីការ

535. $\log_{1/5}(2x^2 + 5x + 1) < 0$

536. $\log_{1/3}(x^2 + 2x) > 0$

537. $\log_{1/2}(x^2 - 4x + 6) < -2$

538. $\log_{1/3}\frac{3x-1}{x+2} < 1$

539. $\log_{0,25}\dfrac{35-x^2}{x}\geq-\dfrac{1}{2}$

540. $\log_5(2x-4)<\log_5(x+3)$

541. $\log_{0,1}(x^2+x-2)>\log_{0,1}(x+3)$

542. $\log\sqrt{x^2-3x+4}-\log\sqrt{x+1}>0$

543. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\leq\log_2(2-x)$

544. $\log_{1/2}\dfrac{x^2+6x+9}{2(x+1)}<-\log_2(x+1)$

545. $\log(x-2)+\log(27-x)<2$

546. $\log(x-1)+\log(x-2)<\log(x+2)$

547. $\log_2(2-x)+\log_{1/2}(x-1)>\log_{\sqrt{2}}3$

548. $\log_{1/5}(2x+5)-\log_{1/5}(16-x^2)\leq 1$

549. $\log_2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\log_{1/2}\left(1+\dfrac{x}{4}\right)\geq 1$

550. $\log_7 x-\log_7(2x-5)\leq\log_7 2-\log_7(x-3)$

551. $\log_{1/3}(x-1)+\log_{1/3}(x+1)+\log_{\sqrt{3}}(5-x)<1$

552. $\log_2 x^2+\log_2(x-1)^2>2$

553. $\log^2 x+3\log x-4\geq 0$

554. $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leq\dfrac{1}{2}$

555. $\log_{1/3}x>\log_x 3-\dfrac{5}{2}$

556. $(\log_2 x)^4-\left(\log_{1/2}\dfrac{x^5}{4}\right)^2-20\log_2 x+148<0$

557. $(2\log_3^2 x-3\log_3 x-8)(2\log_3^2 x-3\log_3 x-6)\geq 3$

558. $(\log_2^2 x + 3\log_2 x + 1)(\log_2^2 x + 3\log_2 x - 3) < 5$

559. $(1{,}25)^{1-(\log_2 x)^2} < (0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$

560. $2^{2x+1} - 21.\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$

561. $0{,}1^{x+1} < 0{,}8 + 2.10^x$

562. $2^x + 2^{-x} < 3$

563. $3^{4-3x} - 35.3^{3x-2} + 6 \geq 0$

564. $\frac{6}{2^x - 1} < 2^x$

565. $3^{\log x + 2} < 3^{\log x^2 + 5} - 2$

566. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log x^2} + 2 > 3.2^{-\log(-x)}$

567. $\log_2(4^x - 5.2^x + 2) > 2$

568. $\log_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$

569. $\log_{\sqrt{2}}(5^x - 1)\log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{5^x - 1} > 2$

570. $\log(1 + 2^{x+1}) > \frac{(x\log 2)\log 4}{\log 8} + \log 3$

571. $\sqrt{\log_2 \frac{3 - 2x}{1 - x}} < 1$

572. $\sqrt{\log_3(9x - 3)} \leq \log_3\left(x - \frac{1}{3}\right)$

573. $\sqrt{9^x + 3^x - 2} \geq 9 - 3^x$

574. $\log_{1/3}(\log_4(x^2-5))>0$

575. $0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1$ **576.** $\log_{4/3}\left(\sqrt{x+3}-x\right)>0$

577. $\log_{1/2}\left(\sqrt{5-x}-x+1\right)>-3$

578. $x^{\log_2 x-2}>\frac{x}{4}$ **579.** $x^{(\log x)^2-3\log x+1}>1000$

580. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}\geq 2$ **581.** $\log_a(x-1)+\log_a x>2$

582. $\frac{1}{5-\log_a x}+\frac{2}{1+\log_a x}<1, 0<a<1$

583. $\frac{3\log_a x+6}{\log_a^2 x+2}>1$ **584.** $\log_a(1-8a^{-x})\geq 2(1-x)$

585. $\log_{x-3}(x-1)<2$ **586.** $\log_x(x+2)>2$

587. $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$

588. $\log_{x+3}(x^2-x)<1$

589. $\log_{3x+5}(9x^2+8x+2)>2$

590. $\log_{2x+4}(x^2+1)\leq 1$ **591.** $\log_x\frac{15}{1-2x}<-2$

592. $\log_{x^2}(3-2x)>1$

593. $\log_{x^2+3x}(x+3)<1$ **594.** $\log_{\frac{2}{3}|x-2|}2^{1-x^2}\geq 0$

595. $\log_{\log_2\left(\frac{1}{2}x\right)}(x^2-10x+22)>0$

596. $|x|^{x^2-x-2} < 1$

597. $\left|\log_2 \frac{x}{6}\right|^{x^2-18x+56} > 1$

598. $\frac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x} < 0$

599. $-\frac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{2x-x^2+8}} \geq 0$

600. $\frac{\log_{0,5} x + 2}{\sqrt{2x-1}} > 0$

601. $\frac{3x^2-2x-1}{\log_3(x-1)} < 0$

602. $25.2^x - 10^x + 5^x > 25$

603. $\log_5 x + \log_x \frac{x}{3} > \frac{(\log_5 x)(2-\log_3 x)}{\log_3 x}$

604. $\frac{1}{\log_4 \frac{x+1}{x+2}} \leq \frac{1}{\log_4(x+3)}$

៣.៧ ប្រព័ន្ធវិសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ

605.
$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-8)(2-x)}}{\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)} \geq 0 \\ 2^{x-3} - 31 > 0 \end{cases}$$

606.
$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2}}{\log_5\left(\frac{1}{3}(\log_3 5-1)\right)} \geq 0 \\ x - \sqrt{x} - 2 \geq 0 \end{cases}$$

607.
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{81}\right)^{8+\log_a x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_a^2 x} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

៣.៨ អាំងតេក្រាល

608. គេឱ្យចំនួនពិត $a > 1$ ។ តាង

$$I_a = \int_1^a \frac{2x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$$

គណនា $\lim_{a\to\infty} I_a$

609. តាង

$$I_n = \int_n^{n+1} (x+1)e^{-x} dx \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

ក) គណនា I_n

ខ) ចូរបង្ហាញថា $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

គ) តាង $S_n = I_0 + I_1 + \cdots + I_n$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

៤

ត្រីកោណមាត្រ

៤.១ គណនា

610. ដោយដឹងថា $\sin\alpha + \cos\alpha = a$ គណនា

ក) $|\sin\alpha - \cos\alpha|$; ខ) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$

611. ដោយដឹងថា $\tan\alpha + \cot\alpha = p$ គណនា

ក) $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$; ខ) $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha$

612. គណនា $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ បើ $\tan\alpha = -\frac{3}{4}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ។

613. គណនា $\cos(70° + \alpha)$ បើ $\sin(40° + \alpha) = b, 0 < \alpha < 45°$ ។

614. គណនា $\sin(\alpha + \beta - \gamma)$ បើ

$$\sin\alpha = \frac{12}{13}, \cos\beta = \frac{8}{17}; \sin\gamma = \frac{4}{5};\ 0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$$

615. គណនា $\sin 3\alpha, \cos 3\alpha, \tan 3\alpha$ បើ $\cot\alpha = 4/3, \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ ។

គណនា

616. $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha}$

617. $\dfrac{\cos 4\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$

618. $\dfrac{\sin\alpha - 3\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 3\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$

619. $\dfrac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha}$

620. $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$

621. $\cos 0 + \cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cdots + \cos\dfrac{6\pi}{7}$

622. ឱ្យ $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4, 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ ។ គណនា $\tan\frac{\alpha}{2}$ ។

623. មុំស្រួចវិជ្ជមាន α,β,γ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}\cot\frac{\alpha}{2},\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(3\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\right)$$

គណនា $\alpha+\beta+\gamma$ ។

គណនាដោយមិនប្រើតារាង

624. $\cos 292°30'$

625. $\operatorname{cosec}10°-\sqrt{3}\sec 10°$

626. $\dfrac{2\cos 40°-\cos 20°}{\sin 20°}$

627. $-2\sqrt{2}\sin 10°\left(2\sin 35°-\dfrac{\sec 5°}{2}-\dfrac{\cos 40°}{\sin 5°}\right)$

628. $\cos^2 73°+\cos^2 47°+\cos 73°\cos 47°$

629. $\sin 6°-\sin 42°-\sin 66°+\sin 78°$

630. $\dfrac{\cos^2 33°-\cos^2 57°}{\sin 21°-\cos 21°}$

631. $6\cos 40°-8\cos^3 40°$

632. $\tan^6 20°-33\tan^4 20°+27\tan^2 20°-3$

633. $\cot^2 36°\cot^2 72°$

634. គណនា

$$A=\tan^6\frac{\pi}{18}+\tan^6\frac{5\pi}{18}+\tan^6\frac{7\pi}{18}$$

635. គណនា

$$P=\left(1-4\cos^2\frac{\pi}{1999}\right)\left(1-4\cos^2\frac{2\pi}{1999}\right)\left(1-4\cos^2\frac{3\pi}{1999}\right)\dots\left(1-4\cos^2\frac{999\pi}{1999}\right)$$

636. សម្រួលកន្សោម

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\dots\cos 2^n\alpha$$

637. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៦៧)

គណនាផលគុណដោយមិនប្រើតារាង

$$P=\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}$$

638. (អាមេរិច AMC12 ១៩៩៩)

តាង x ជាចំនួនពិតដែល $\sec x - \tan x = 2$ ។ ចូរគណនា $\sec x + \tan x$ ។

639. (អាមេរិច AMC12 ២០០២)

ចូរសម្រួលកន្សោម

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$$

640. បើ $\sin\alpha\cos\beta = -1/2$ ចូរគណនា $\cos\alpha\sin\beta$ ។

641. (អាមេរិច AMC ២០០២)

គេឱ្យ

$$(1+\tan 1°)(1+\tan 2°)\ldots(1+\tan 45°) = 2^n$$

ចូរគណនា n ។

642. ចូរគណនា

$$\cos a\cos 2a\cos 3a\ldots\cos 999a$$

ដែល $a = 2\pi/1999$ ។

643. គណនា

$$P = \sin\left(\frac{2\pi}{4025}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{4025}\right)\sin\left(\frac{6\pi}{4025}\right)\ldots\sin\left(\frac{4024\pi}{4025}\right)$$

644. ចូរសរសេរ

$$\sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x)$$

ជាឯកធា ។

645. (អាមេរិច AMC12 ១៩៩៩)

ត្រីកោណ ABC មួយមាន

$$3\sin A + 4\cos B = 6$$
$$4\sin B + 3\cos A = 1$$

ចូរគណនាមុំ C ។

646. គណនា

(a) $\sin\frac{\pi}{12}, \cos\frac{\pi}{12}, \tan\frac{\pi}{12}$

(b) $\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24}$

(c) $\cos 36° - \cos 72°$
(d) $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$

647. គណនា

(a) $\sin 18°$; $\cos 18°$

(b) $\sin 6°$; $\cos 6°$

648. តំបន់ $\mathcal{R}$ មួយមានគ្រប់ចំណុច (x, y) ដែល $x^2 + y^2 \leq 100$ និង $\sin(x + y) \geq 0$ ។ ចូរគណនាក្រលាផ្ទៃរបស់ $\mathcal{R}$ ។

649. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៦៧)

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ u ដើម្បីឱ្យកន្សោម

$$y = \frac{\tan(x - u) + \tan x + \tan(x + u)}{\tan(x - u) \tan x \tan(x + u)}$$

មិនអាស្រ័យនឹង x ។

៤.២ សមភាព

បង្ហាញសមភាព

650. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1$

651. $\dfrac{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha} = \tan^6 \alpha$

652. ឱ្យ α, β, γ ជាមុំនៃត្រីកោណ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sin \alpha \sin \beta - \cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$$

បង្ហាញសមភាព

653. $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$

654. $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$

655. $\dfrac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{2 \cot\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 1$

656. $\dfrac{1-2\sin^2\beta}{1+\sin 2\beta}=\dfrac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}$

657. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

658. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan 2\alpha+\sec 2\alpha$

659. $\dfrac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{\tan 2\alpha-1}=\cos 2\alpha$

660. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{1-\tan^2\alpha\cot^2\beta}=-\cos^2\alpha\sin^2\beta$

661. $3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=8\sin^4\alpha$

662. $\cos^4\alpha=\dfrac{1}{8}\cos 4\alpha+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{3}{8}$

663. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos^2 2\alpha)$

664. $4(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=1+3\cos^2 2\alpha$

665. $8\left(\sin^8\dfrac{\alpha}{2}+\cos^8\dfrac{\alpha}{2}\right)=1+6\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

បង្ហាញសមភាព

666. $\dfrac{2\sin\alpha+\sin 4\alpha}{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}=\tan 2\alpha\cos\alpha$

667. $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$

668. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{3}{2}$

669. $\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}$

670. $\log_{1/3}[\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta]=0$

671. $\dfrac{\cot^2 2\alpha-1}{2\cot 2\alpha}-\cos 8\alpha\cot 4\alpha=\sin 8\alpha$

672. $16\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°=1$

673. $\sin^2\alpha\cos^4\alpha=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2\alpha-\frac{1}{16}\cos 4\alpha-\frac{1}{32}\cos 6\alpha$

674. $\sin 9\alpha+3\sin 7\alpha+3\sin 5\alpha+\sin 3\alpha=8\sin 6\alpha\cos^3\alpha$

675. $\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)$
$=\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)$

676. $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}; 0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$

677. ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{p}{2^n+1}$$

(ក្នុងនោះមានឫសការេ n ដង) ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ ។

678. គេឱ្យ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ចូរបង្ហាញថា មានពហុធា T_n មួយ ដែល $\cos nx=T_n(\cos x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ពហុធា T_n នេះ គេហៅថា ពហុធា Tchebychev ។

679. គេឱ្យចំនួនពិត x ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{2}-1\right)^x+3$$

ចូរបង្ហាញថា $\left(\sqrt{2}+1\right)^x=2\cos\frac{\pi}{9}$

680. ចូរបង្ហាញថា

$$\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{7}{4}$$

681. (IMO 1959)
គេឱ្យ x ជារង្វាស់មុំ និងចំនួនពិត a, b, c ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$$

ចូរសរសេរសមីការដឺក្រេទី២នៃ $\cos 2x$ ស្រដៀងគ្នា ដែលមាន a, b, c ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។ ចូរប្រៀបធៀបសមភាពដែលឱ្យ និង សមភាពដែលទទួលបានករណី $a = 4, b = 2, c = -1$ ។

682. (វៀតណាម ២០០២)
ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ចំនួនខាងក្រោម

$$A = \frac{1}{\cos^n \frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^n \frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^n \frac{5\pi}{7}}$$

ជាចំនួនសនិទាន ។

683. **(អន្តរជាតិ ឡុងលីស ១៩៦៧)**
បើ x, y, z ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $x + y + z = 1$ និង

$$\operatorname{atan} x + \operatorname{atan} y + \operatorname{atan} z = \pi/4$$

ចូរបង្ហាញថា

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 1$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

684. (អន្តរជាតិ ១៩៦៦)
ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

ដែល $n \in \mathbb{N}$ និង $x \in \pi\mathbb{Z}/2^k$ ចំពោះគ្រប់ $k \in \mathbb{N}$ ។

685. (អន្តរជាតិ ១៩៦៣)
ចូរបង្ហាញថា

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

686. ចូរបង្ហាញថា

$$1-\cot 23^\circ = \frac{2}{1-\cot 22^\circ}$$

687. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៦៧)

បង្ហាញថា

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{2k}\left[1+2^k\frac{1}{\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)^k}\right]=\sec^{2n}\frac{x}{2}+\sec^n x$$

688. តាង

$$f_k(x)=\frac{1}{k}\left(\sin^k x+\cos^k x\right)$$

ចំពោះ $k=1,2,\dots$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{12}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

689. ចូរបង្ហាញថា

$$(4\cos^2 9^\circ-3)(4\cos^2 27^\circ-3)=\tan 9^\circ$$

690. (អាមេរិច ១៩៩៦)

ចូរបង្ហាញថាតម្លៃមធ្យមរបស់

$$2\sin 2^\circ, 4\sin 4^\circ, 6\sin 6^\circ, \dots, 180\sin 180^\circ$$

ស្មើនឹង $\cot 1^\circ$ ។

691. មុំស្រួចពីរ A, B នៃត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$\tan^2 A+\tan^2 B=2\tan^2\frac{A+B}{2}$$

ចូរបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

692. ចូរបង្ហាញថា

$$\tan 3a-\tan 2a-\tan a=\tan 3a\tan 2a\tan a$$

ចំពោះគ្រប់ $a\neq k\pi/2$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$ ។

693. តាង a,b,c,d ជាចំនួនពិតបិតក្នុងចន្លោះ $[0,\pi]$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\sin a+7\sin b=4(\sin c+2\sin d)$$
$$\cos a+7\cos b=4(\cos c+2\cos d)$$

បង្ហាញថា $2\cos(a-d)=7\cos(b-c)$ ។

694. តាង ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា
$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$$
ច្រាសមកវិញ បង្ហាញថា បើ x,y,z ជាចំនួនពិតដែល $xy+yz+zx=1$ នោះ មានត្រីកោណ ABC ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\cot A=x,\cot B=y$ និង $\cot C=z$ ។

៤.៣ សមីការ

ដោះស្រាយសមីការ

695. $\cos(1{,}5\pi+x)=\sqrt{2}\sin(x+\pi)\cos x$

696. $2\sin x\cos x+\sqrt{3}-2\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$

697. $\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$

698. $\tan^3 3x-2\sin^3 3x=0$

699. $2\tan x\cos x+1=2\cos x+\tan x$

700. $\sin x+\cos^2 x=1/4$

701. $3\cos x=2\sin^2 x$

702. $6\cos^2 x+13\sin x=12$

703. $3\cos^2 x-4\cos x-\sin^2 x-2=0$

704. $\cos^4\frac{x}{5}+\sin^2\frac{x}{5}=1$

705. $\sin x-\frac{|2\cos x-1|}{2\cos x-1}\sin^2 x=\sin^2 x$

706. $\tan^2 x-4\tan x+3=0$

707. $2\tan x-2\cot x=3$

708. $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}=4\tan x$

709. $\frac{1}{\sin^2 x}=\cot x+3$

710. $2\cos x\left(\cos x-\sqrt{8}\tan x\right)=5$

711. $\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\right)(\sec x+\tan x)=\sin\frac{\pi}{4}\cos x$

712. $\log_2(3\sin x)-\log_2\cos x-\log_2(1-\tan x)-\log_2(1+\tan x)=1$

713. $\sin^4 2x+\cos^4 2x=\sin 2x\cos 2x$

714. $\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=0$

715. $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0$

716. $\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{2}{\sin x\cos x}-4=0$

717. $\tan 5x+2\sin 10x=5\sin 5x$

718. $\cos 2x - 3\sin x + 2 = 0$

719. $\cos(10x + 12) + 4\sqrt{2}\sin(5x + 6) = 4$

720. $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$

721. $\cos^3 x + \cos^2 x - 4\cos^2 \frac{x}{2} = 0$

722. $4\cos x\,(2 - 3\sin^2 x) = -(1 + \cos 2x)$

723. $\tan^3 x - 1 + \frac{1}{\cos^2 x} - 3\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3$

724. $8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

725. $\sin x = 5\cos x$

726. $\sin x - \cos x = 0$

727. $\sin x + \cos x = 0$

728. $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$

729. $\cos^2 x - 4\sin x\cos x = 0$

730. $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$

731. $\sin 2x - \sin^2 x = 2\sin x - 4\cos x$

732. $\tan x + \sin(\pi + x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

733. $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = \cos x + \sin x$

734. $3(\cos x - \sin x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$

735. $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

736. $2\cos^2 x + 3\sin 2x - 8\sin^2 x = 0$

737. $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x - 4\sin 2x = 0$

738. $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = -2$

739. $\frac{1}{\cos x} = 4\sin x + 6\cos x$

740. $\sin^3 x + 4\cos^3 x = 0$

741. $\sin^2 x\,(1+\tan x) = 3\sin x\,(\cos x - \sin x) + 3$

742. $\sin^4 x + \sin^3 x\cos x + \sin^2 x\cos^2 x + \sin x\cos^3 x + \cos^4 x = 1$

743. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **744.** $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

745. $\sin 5x = \sqrt{3}(1+\cos 5x)$ **746.** $\cos x + \sin x = 1$

747. $\sin x + \cos x\cot\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$ **748.** $\sin|x|\tan 5x = \cos x$

749. $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$

750. $\cos 6x + \tan^2 x + \cos 6x\tan^2 x = 1$

751. $\frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x\tan x} = -1$ **752.** $\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x\tan 2x} = 1$

753. $2\tan 3x - 3\tan 2x = \tan^2 2x\tan 3x$

754. $\cot x + \cot 15° + \cot(x + 25°) = \cot 15°\cot x\cot(x + 25°)$

755. $\sin x + \tan\frac{x}{2} = 0$ **756.** $1 + \cos x + \tan\frac{x}{2} = 0$

757. $\tan 2x + \cot x = 4\sin 2x$

758. $15\cot\frac{x}{2} + 130\sin x = \frac{53}{3}\tan\frac{x}{2}$

759. $\frac{59}{4}\cos x + 6\sin x\tan\frac{x}{2} = 4\tan x\cot\frac{x}{2}$

760. $2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \tan x$

761. $\cos 3x = -2\cos x$ **762.** $\cos 9x - 2\cos 6x = 2$

763. $\cos 4x = \cos^2 3x$ **764.** $3\sin\frac{x}{3} = \sin x$

765. $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x$ **766.** $\sin\frac{3}{2}x + 3\sin x = 3\sin\frac{x}{2}$

767. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

768. $3\cos x + 3\sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$

769. $a\cos x + b\sin x = c,\ a^2 + b^2 \neq 0$

770. $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ **771.** $\sin 4x - \sin 2x = 0$

772. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$ **773.** $\cos 2x - \cos 6x = 0$

774. $\cos(3x - 4\pi) = \sin(\pi - x)$ **775.** $\sin \pi x^2 = \sin \pi(x^2 + 2x)$

776. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

777. $1 + \sin 2x = (\sin 3x - \cos 3x)^2$

778. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$

779. $\cos x - \cos 3x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$

780. $\sin x + \sin 3x + 4\cos^3 x = 0$

781. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$

782. $\sin x + 2\sin 2x = -\sin 3x$

783. $\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1$ **784.** $\sqrt{2}\sin 10x + \sin 2x = \cos 2x$

785. $\cot x \sin 2x - \cos 2x = 1$

786. $\tan 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}\sin 5x = 0$

787. $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$

788. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

789. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$

790. $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$

791. $\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x$

792. $\cos 2x - \sin 3x - \cos 8x = \sin 10x - \cos 5x$

793. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

794. $5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0$

795. $\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} 2x = \operatorname{cosec} 4x$

796. $\tan 3x - \tan x = 0$ **797.** $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

798. $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$

799. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$

800. $\cos 3x \sin 7x = \cos 2x \sin 8x$

801. $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \sin 2x$

802. $\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$

803. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$

804. $\cos^2 x + \cos^2 2x \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

805. $\sin 7x + \sin 9x = 2\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right]$

806. $\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{9}{16}$

807. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$

808. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = -0{,}5$

809. $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0{,}375 = 0$

810. $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

811. $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{8}$

812. $8\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 1 = 0$

813. $\tan x \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

814. $\sin 3x = 4\sin x \cos 2x$ **815.** $\sin 3x \cos x = 1{,}5\tan x$

816. $\tan x \cot 3x = 4$ **817.** $6\tan x + \frac{5}{\tan 3x} = \tan 2x$

818. $\sin x \cos x \sin 3x - \cos 3x \sin^2 x = 6\cot x$

819. $2\sin 3x \sin x + \left(3\sqrt{2} - 1\right)\cos 2x = 3$

820. $2\cos 4x + 5\cos 2x - 1 = 2\sin^2 x$

821. $2 + \cos 4x = 5\cos 2x + 8\sin^6 x$

822. $\tan^2 x + \cos 4x = 0$

823. $\tan x + \cot x - \cos 4x = 3$

824. $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

825. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$

826. $1+\tan x = 2\sqrt{2}\sin x$

827. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sin x\cos x)$

828. $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$

829. $\sin\frac{\sqrt{x}}{2} + \cos\frac{\sqrt{x}}{2} = \sqrt{2}\sin\sqrt{x}$

830. $\sin^2 x + 2\tan^2 x + \frac{4}{\sqrt{3}}\tan x - \sin x + \frac{11}{12} = 0$

831. $8\cos x + 6\sin x - \cos 2x - 7 = 0$

832. $\sin^4 x + \sin^4\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4 x = 0{,}5\sin^2 2x$

833. $\left(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x\right)\sin x + \left(1+\sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right)\cos x = 0$

834. $3\sin 3x = \cos 4x - \sin 9x - \cos 10x$

835. $\tan x + \frac{1}{9}\cot x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1$

836. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2+\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}$

837. $\sqrt{2\cos 2x + 2} = \frac{3}{\sqrt{1+4\cos 2x}}$

838. $\sqrt{\sin x} + \sqrt[4]{2}\cos x = 0$ **839.** $\sin x + \sqrt{\cos x} = 0$

840. $2\cos x = \sqrt{2+2\sin 2x}$ **841.** $\sqrt{\cos^2 x - \cos^2 3x} = \sin 2x$

842. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{0{,}5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}$

843. $\sqrt{1+4\sin x\cos x} = \cos x - \sin x$

844. $\sqrt{\cos 2x - \sin 4x} = \sin x - \cos x$

845. $\sqrt{\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}} = \sin x + \cos x$

846. $4\sin 3x + 3 = \sqrt{2\sin 3x + 2}$

847. $\sqrt{13 - 18\tan x} = 6\tan x - 3$

848. $\sqrt{1 + 8\sin 2x \cos^2 2x} = 2\sin(3x + \pi/4)$

849. $2\sqrt{3}\sin x = \dfrac{3\tan x}{2\sqrt{\sin x} - 1} - \sqrt{3}$

850. $\sqrt{\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2} + \sqrt{\cot 3x + \sin^2 x - \dfrac{1}{4}} = \sin\dfrac{3x}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

851. $\log_5 \tan x = (\log_5 4)\log_4(3\sin x)$

852. $\log_9 \sin 2x = \log_3 \sqrt{\dfrac{\sin x}{5}}$ **853.** $2^{\cos 2x} = 3.2^{\cos^2 x} - 4$

854. $\cot 2^x = \tan 2^x + 2\tan 2^{x+1}$ **855.** $x^{3\sin 2x + 2} = \sqrt{x}$

856. តើសមីការ $1 + \cos 2x + \sin 2x = 0$ និងសមីការ

$$1 + \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} + \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = 0$$

ដូចគ្នាដែរឬទេ?

857. ចូរកំណត់តម្លៃ p ដើម្បីឱ្យសមីការ $\sqrt{p}\cos x - 2\sin x = \sqrt{2} + \sqrt{2-p}$ មានចម្លើយ ។

858. ចូរកំណត់តម្លៃ a, b ដើម្បីឱ្យសមីការខាងក្រោមពិតចំពោះគ្រប់ x

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$$

859. (អន្តរជាតិ ១៩៦១)

ដោះស្រាយសមីការ $\cos^n x - \sin^n x = 1$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

860. (អន្តរជាតិ ១៩៦២)

ដោះស្រាយសមីការ

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

861. ចូរកំណត់គ្រប់គូចំនួនពិត (x, y) ដែល $0 < x < \pi/2$ ដែល

$$\frac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{\frac{y^2}{2}}} + \frac{(\cos x)^{2y}}{(\sin x)^{\frac{y^2}{2}}} = \sin 2x$$

862. ចូរកំណត់គ្រប់ $x \in (0, \pi/2)$ ដែល

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3} + 1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$$

៤.៤ ប្រព័ន្ធសមីការ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

863. $\begin{cases} x - y = 6{,}5\pi \\ 3\cos^2 x - 12\cos y = -4 \end{cases}$

864. $\begin{cases} x + y = \dfrac{2}{3}\pi \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2 \end{cases}$

865. $\begin{cases} x + y = \pi/4 \\ \cos x + \cos y = a \end{cases}$

866. $\begin{cases} \sin 3x \cos 2y = 2^a - \cos 3x \sin 2y \\ \cos(x - y) = 0{,}5 \end{cases}$

867. $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

868. $\begin{cases} \tan x + \tan y = 2 \\ \cos x \cos y = 0{,}5 \end{cases}$

869. $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{4} \\ 3\tan x = \tan y \end{cases}$

870. $\begin{cases} \tan x - 2\sin y = -2 \\ 5\tan x + 2\sin y = -4 \end{cases}$

871. $\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$

872. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \cos y = \dfrac{a+3}{3} \\ \sin x \cos y = -\dfrac{a}{3} \end{cases}$

873. $\begin{cases}\dfrac{1}{\cos x}-\tan y=2a+2\\ \tan y+(a^2+2a)\cos x=0\end{cases}$

874. $\begin{cases}\sin^2(-2x)-\left(3-\sqrt{2}\right)\tan 5y=\left(3\sqrt{2}-1\right)/2\\ \left(3-\sqrt{2}\right)\sin(-2x)+\tan^2 5y=\left(3\sqrt{2}-1\right)/2\end{cases}$

875. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 z=m^2\\ \tan^3 x+\tan^3 y+\tan^3 z=m^3\end{cases}$$

៤.៥ វិសមភាព

876. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $0\le x\le \frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}$ គេមាន

$$\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)+\tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)>1$$

877. គេឱ្យត្រីកោណមិនកែង ABC ។ ចូរបង្ហាញថា

$$3\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C-5(\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C)\\ \le 9+\tan^2 B\tan^2 C+\tan^2 C\tan^2 A$$

878. ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1-\sin\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}}>\sqrt{3\cos\frac{\pi}{7}}$$

879. គេឱ្យ $2n$ ចំនួនពិត $x_1;x_2;\dots;x_{2n}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $n\in\mathbb{N}^*$ ដែល

$$Y=\left(\sum_{i=1}^{2n}\sin x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\sin x_i}\right)=1800$$

880. គណនាតម្លៃធំបំផុតនៃ

$$T=\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$

ដែល A,B,C ជាមុំបីនៃត្រីកោណមួយ ។

881. តាង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និងចំនួនពិត x ដែល $0<(n+1)x<\pi/2$

ចូរបង្ហាញថា

$$(1-\cos^n x)(1+\cos^n x) < \tan nx \sin x$$

882. គេឱ្យ A, B, C ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$27\left(\tan\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}\right) < 4\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

883. តាង A, B, C ជាមុំនៃត្រីកោណ ABC ។ គណនាតម្លៃធំបំផុតនៃ $\sin C$ បើ

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=m, \qquad m>\frac{1}{2}$$

884. គេឱ្យ អនុគមន៍ $f(x)$ ដែល $f(\tan 2x)=\tan^4 x+\cot^4 x$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$f(\sin x)+f(\cos x)\geq 196$$

885. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មាន $A>B>C$ ។ គណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ

$$y=\sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}}+\sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}}-1$$

886. (វៀតណាម ២០០២)

គេឱ្យ ϕ ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់

$$f(x)=\frac{2000}{2001}\cos 2x+\frac{2003}{2000}\cos(x-\phi)+1\geq 0; \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

ចូរបង្ហាញថា $f(x)\leq 3; \ \forall x\in\mathbb{R}$ ។

887. តាង $0°<\theta<45°$ ។ ចូររៀប

$$t_1=(\tan\theta)^{\tan\theta}, \quad t_2=(\tan\theta)^{\cot\theta}$$
$$t_3=(\cot\theta)^{\tan\theta}, \quad t_4=(\cot\theta)^{\cot\theta}$$

តាមលំដាប់ចុះ ។

888. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៦៧)

ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពត្រីកោណមាត្រ

$$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}$$

ដែល $x\in(0,\pi/2)$ ។

889. ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ ចូរបង្ហាញថា

$$\sin\frac{A}{2}\leq\frac{a}{b+c}$$

890. បង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right)\geq\left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a, b, x ដែល $a, b \geq 0$ និង $0 < x < \pi/2$ ។

891. តាង ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

(a) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

(b) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$

892. តាង ABC ជាត្រីកោណស្រួចមួយ ។ បង្ហាញថា

(a) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

(b) $\tan A\tan B\tan C\geq 3\sqrt{3}$

893. (ហុងកុង ២០០៨)

តាង $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2008}$ ជាចំនួនពិត ។ គណនាតម្លៃធំបំផុតនៃ

$$\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_2\cos\alpha_3+\cdots+\sin\alpha_{2007}\cos\alpha_{2008}+\sin\alpha_{2008}\cos\alpha_1$$

894. (Baltic Way 2010)

តាង x ជាចំនួនពិត ដែល $0 < x < \pi/2$ ។ បង្ហាញថា

$$\cos^2 x\cot x+\sin^2 x\tan x\geq 1$$

៤.៦ វិសមីការ

ដោះស្រាយវិសមីការ

895. $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-3>0$

896. $\cos 2x+5\cos x+3\geq 0$

897. $\tan^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\tan x-2\sqrt{3}<0$

898. $\cot^2 x+\cot x\geq 0$

899. $2\left(\sqrt{2}-1\right)\sin x-2\cos 2x+2-\sqrt{2}<0$

900. $\cos\pi x+\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)>0$

901. $\cos^3 x\sin 3x+\cos 3x\sin^3 x<\frac{3}{8}$

902. $\cos x\cos 2x\cos 3x\leq 0$

903. $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}>\frac{1}{2}$

904. $\sin^6 x+\cos^6 x>\frac{5}{8}$

905. $8\sin^6 x-\cos^6 x>0$

906. $\tan x\tan 3x<-1$

907. $3\sin 2x-1>\sin x+\cos x$

908. $\sin 2x>\sqrt{2}\sin^2 x+\left(2-\sqrt{2}\right)\cos^2 x\,, 0<x<2\pi$

909. $|\sin x|>\cos^2 x$

910. $\sqrt{5-2\sin x}\geq 6\sin x-1$

911. $1-\cos x<\tan x-\sin x$

912. $9^{1+\sin^2\pi x}+30.9^{\cos^2\pi x}\leq 117$

913. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស ១៩៦៧)

ចូរកំណត់ x ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n>0$ គេមាន

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

914. គេឱ្យវិសមីការ

$$x^2+2x(\cos y+\sin y)+1\geq 0$$

1) ចូរកំណត់x ដើម្បីឱ្យវិសមីការពិតចំពោះគ្រប់ y ។

2) ចូរកំណត់ y ដើម្បីឱ្យវិសមីការពិតចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$ ។

915. (អន្តរជាតិ ១៩៦៥)

ចូរកំណត់ចំនួនពិត $x\in[0,2\pi]$ ដែល

$$2\cos x\leq\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|\leq\sqrt{2}$$

៤.៧ ប្រព័ន្ធវិសមីការ

916. ចូរកំណត់ m ដើម្បីឱ្យប្រព័ន្ធមានឫសតែមួយគត់

$$\begin{cases}(4-6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x\cos x - (4m-3)\cos x = 0\\ 0 \le x \le \pi/4\end{cases}$$

៤.៨ អាំងតេក្រាល

917. ចូរកំណត់ចំនួនថេរ A, B, C ដើម្បីឱ្យ

$$\sin x - \cos x + 1 = A(\sin x + 2\cos x + 3) + B(\cos x - 2\sin x) + C$$

ចូរគណនា

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + 2\cos x + 3}\,dx$$

៥

ពហុធា

918. កំណត់ពហុធា $P(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$P(u^2 - v^2) = P(u+v).P(u-v)$$

ចំពោះគ្រប់ $u, v \in \mathbb{R}$ ។

919. កំណត់ពហុធា $P(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1$$

ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

920. កំណត់ពហុធា $P(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$P((x+1)^2) = P(x^2) + 2x + 1$$

ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

921. (កាណាដា ១៩៧០)

គេឱ្យពហុធា

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

ដែលមានមេគុណ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ជាចំនួនគត់ ហើយដោយដឹងថាមានចំនួនគត់បួនផ្សេងគ្នា a, b, c និង d ដែល

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$$

ចូរបង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់ k មួយដែល $f(k) = 8$ ។

922. គេឱ្យពហុធាដឺក្រេទី $n \geq 1$ មានមេគុណមិនអវិជ្ជមាន និង $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$

បង្ហាញថា

$$\left[P\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right]^2 + \left[P\left(\frac{x_3}{x_2}\right)\right]^2 + \cdots + \left[P\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\right]^2 + \left[P\left(\frac{x_1}{x_n}\right)\right]^2 \geq n[P(1)]^2$$

923. (ភ្នំពេញ ២០១០)

គេឱ្យពហុធា $P(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{2010})^2 - x^{2010}$ ។

ចូរដាក់ $P(x)$ ជាផលគុណនៃពហុធាពីរ ។

924. គណនាផលបូកមេគុណរបស់ពហុធាដែលជាពន្លាតនៃ

$$(1 - 3x + 3x^2)^{743}(1 + 3x - 3x^2)^{744}$$

925. តើរវាង $(1 + x^2 - x^3)^{1000}$ និង $(1 - x^2 + x^3)^{1000}$ មួយណាមានមេគុណរបស់ x^{20} ធំជាងគេ បន្ទាប់ពីពន្លាតហើយផ្តុំតួរួច?

926. ចូរបង្ហាញថាផលគុណ

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{99} + x^{100})$$

បន្ទាប់ពីពន្លាតនិងផ្តុំតួរួច តួដែលមានស្វ័យគុណសេសនឹងបាត់អស់ ។

927. គណនាមេគុណរបស់ x^{50} នៅក្នុងពហុធាខាងក្រោម

a) $(1 + x)^{1000} + x(1 + x)^{999} + x^2(1 + x)^{998} + \cdots + x^{1000}$

b) $(1 + x) + 2(1 + x)^2 + 3(1 + x)^3 + \cdots + 1000(1 + x)^{1000}$

928. គណនាមេគុណរបស់ x^2 របស់ពហុធាខាងក្រោមក្រោយពន្លាតរួច

$$\underbrace{(\ldots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\cdots-2)^2}_{n \text{ ដង}}$$

929. គណនាសំណល់ពេលចែក $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$

a) ជាមួយ $x - 1$

b) ជាមួយ $x^2 - 1$

930. ពហុធាមួយសល់សំណល់ស្មើ 2 ពេលចែកនឹង $(x - 1)$ និង សល់សំណល់ស្មើ 1 ពេលចែកនឹង $(x - 2)$ ។ គណនាសំណល់ពេលចែកពហុធាមួយនោះនឹង $(x - 1)(x - 2)$ ។

931. បើពហុធា $x^{1951} - 1$ ចែកនឹង $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ នោះគេទទួលបានផលចែកនិងសំណល់ ។ គណនាមេគុណរបស់ x^{14} នៅក្នុងផលចែក ។

932. កំណត់សមីការដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ ហើយមានឫសមួយស្មើ

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$

933. ចូរបង្ហាញថា បើ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $x^2+px+1=0$ និង γ និង δ ជាឫសរបស់សមីការ $x^2+qx+1=0$ នោះ $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2$ ។

934. តាង α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $x^2+px+q=0$ និង γ និង δ ជាឫសរបស់សមីការ $x^2+Px+Q=0$ ។ គណនា $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)$ ជាអនុគមន៍នៃ p,q,P,Q ។

935. គេឱ្យពហុធាពីរ

$$x^2+ax+1=0$$
$$x^2+x+a=0$$

កំណត់មេគុណ a ដើម្បីឱ្យសមីការទាំងពីរមានឫសរួមយ៉ាងតិចមួយ ។

936. ចូរកំណត់ចំនួនគត់ a ដែលពហុធា $(x-a)(x-10)+1$ អាចសរសេរជារាង $(x+b)(x+c)$ បាន ចំពោះចំនួនគត់ b និង c ណាមួយ ។

937. (ភ្នំពេញ ២០១០)

រកតម្លៃ $p\in\mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $(x-p)(x-2011)+1=(x+m)(x+n)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ និងចំពោះតម្លៃ $m,n\in\mathbb{Z}$ ណាមួយ ។

938. កំណត់ចំនួនគត់មិនសូន្យខុសៗគ្នា a,b និង c ដែលពហុធាដឺក្រេទីបួនមានមេគុណជាចំនួនគត់ខាងក្រោម អាចដាក់ជាកត្តាផលគុណនៃពហុធាពីរដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$$

939. តើចំនួនគត់ $a_1,a_2,\dots,a_n$ ខុសគ្នាពីរៗ ណាខ្លះដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់ខាងក្រោមអាចបំបែកជាផលគុណនៃពហុធាពីរមានមេគុណជាចំនួនគត់?

(a) $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)-1$
(b) $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)+1$

940. ចូរបង្ហាញថា បើចំនួនគត់ $a_1,a_2,\dots,a_n$ សុទ្ធតែខុសគ្នាពីរៗ នោះពហុធា

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1$$

មិនអាចសរសេរជាផលគុណនៃពហុធាពីរទៀតដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់បានទេ ។

941. ចូរបង្ហាញថាបើពហុធា
$P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$
ដឺក្រេទី៧ មានមេគុណជាចំនួនគត់, មានតម្លៃ $+1$ ឬបើមិនអ៊ីចឹង -1 ចំពោះចំនួនគត់ x ប្រាំពីរផ្សេងគ្នា, នោះពហុធានេះមិនអាចបំបែកជាផលគុណនៃពហុធាពីរដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់បានទេ ។

942. ចូរបង្ហាញថាបើពហុធា
$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
ដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ មានតម្លៃសេសចំពោះ $x = 0$ និង $x = 1$ នោះសមីការ $P(x) = 0$ មិនអាចមានឫសគត់បានទេ ។

943. ចូរបង្ហាញថាបើពហុធា
$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
ដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់, មានតម្លៃដាច់ខាតស្មើ 1 ចំពោះចំនួនគត់ x ពីរតាងដោយ $x = p$ និង $x = q$ $(p > q)$ និងបើសមីការ $P(x) = 0$ មានឫសសនិទាន a, នោះ $p - q$ ស្មើ 1 ឬ 2 និង $a = \frac{p+q}{2}$ ។

944. ចូរបង្ហាញថាពហុធាខាងក្រោមមិនអាចបំបែកជាកត្តាផលគុណរវាងពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់បានទេ

(ក) $x^{2222} + 2x^{2220} + 4x^{2218} + 6x^{2216} + 8x^{2214} + \cdots + 2218x^4 + 2220x^2 + 2222$;

(ខ) $x^{250} + x^{249} + x^{248} + \cdots + x^2 + x + 1$

945. តាង $P(x) = A(x)B(x)$ ដែលជា $P(x), A(x)$ និង $B(x)$ ជាពហុធាពីរដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។ ចូរបង្ហាញថា បើមេគុណរបស់ពហុធា $P(x)$ ជាចំនួនគូ និងចែកមិនដាច់នឹង 4 គ្រប់គ្នាទេ, នោះមានពហុធាមួយក្នុងចំណោម $A(x)$ និង $B(x)$ មានមេគុណទាំងអស់ជាចំនួនគូ និងពហុធាមួយទៀត មិនអាចមានមេគុណគូទាំងអស់បានទេ ។

946. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ឫសសនិទានទាំងអស់របស់ពហុធា

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

ដែលមានគុណទាំងអស់ជាចំនួនគត់ និងមេគុណដំបូងស្មើ 1 , ជាចំនួនគត់ ។

947. ចូរបង្ហាញថា គ្មានពហុធា

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

ដែល $P(0), P(1), P(2), \ldots.$ សុទ្ធតែជាចំនួនបឋមបានទេ ។

សម្គាល់ ៖ សំណើក្នុងសំនួរនេះត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់លើកដំបូងដោយ លេអុន ហាដ អយល័រ ។ គាត់បានរកឃើញផងដែរនូវពហុធាដែលមានតម្លៃជាចំនួនបឋមចំពោះចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នាមួយចំនួន ។ ដូចជា $P(x) = x^2 - 79x + 1601$ ដែល $P(0), P(1), \ldots, P(79)$ សុទ្ធតែជាចំនួនបឋម ។

948. ក) ចូរបង្ហាញថា បើពហុធា

$$P(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}x + A_n$$

មានតម្លៃគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x , នោះគេអាចសរសេរពហុធានេះជាផលបូកនៃបណ្ដាពហុធា

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{x(x-1)}{1.2}, \ldots, P_n(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

ដែលពហុធាទាំងនេះមានតម្លៃគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x, ក្រោមទម្រង់

$$P(x) \equiv b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x) + \cdots + b_1P_1(x) + b_0P_0(x)$$

បាន ដែល $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ជាចំនួនគត់ ។

ខ) ចូរបង្ហាញបើពហុធាដឺក្រេទី n , $P(x)$ មានតម្លៃគត់ចំពោះ $x = 0,1,2, \ldots, n$ នោះវាមានតម្លៃគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ។

គ) ចូរបង្ហាញថាបើពហុធា $P(x)$ មានដឺក្រេ n មានតម្លៃគត់ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ចំនួន $n+1$ តជាប់គ្នា, នោះពហុធានេះមានតម្លៃគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ។

ឃ) ចូរបង្ហាញថាបើពហុធា $P(x)$ មានដឺក្រេ n មានតម្លៃគត់ចំពោះ $x = 0,1,4,9,16,\dots,n^2$ នោះវាមានតម្លៃគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ដែលជាចំនួនការេ (តែមិនបាច់គត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ក៏បាន) ។

ចូររកឧទាហរណ៍ពហុធាដែលមានតម្លៃជាចំនួនគត់ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ការេ x, តែចំពោះតម្លៃ x ផ្សេងទៀត, មានតម្លៃសនិទាន (មិនទាំងអស់ទេ) ។

949. (វៀតណាម ២០០២)

ចូរកំណត់ពហុធាមានដឺក្រេទាបបំផុត មានមេគុណជាចំនួនគត់ និងមានឫសមួយស្មើ $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

950. (វៀតណាម ២០០២)

តើពហុធា

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

មានឫសពិតចំនួនប៉ុន្មាន?

951. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៩៦)

តាង $P(x)$ ជាពហុធានៃចំនួនពិតមួយ កំណត់ដោយ $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ។ ចូរបង្ហាញថា បើ $|P(x)| \le 1$ ចំពោះគ្រប់ x ដែល $|x| \le 1$ នោះ

$$|a| + |b| + |c| + |d| \le 7$$

952. a) ដាក់ជាកត្តាផលគុណ

$$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$$

b) ចូរបង្ហាញថា

$$(a + b + c)^{333} - a^{333} - b^{333} - c^{333}$$

ចែកដាច់នឹង $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

953. បំបែកជាផលគុណកត្តា $a^{10} + a^5 + 1$

៦

សមីការអនុគមន៍

954. ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$f(f(x)+1) = 1 - x$$
$$f\big(f(x)\big) = x$$

ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

955. ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ f កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ដែលចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ គេមាន

$$f\big(f(x)\big) = x$$

956. គេឱ្យអនុគមន៍$f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

a) $f(1) = 2$

b) ចំពោះគ្រប់ $n > 1$

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$$

ចូរកំណត់ $f(n)$ ។

957. (អូស្ត្រាលី ១៩៩០)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែលចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ គេមាន

$$f(2x) = f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right)\right) + f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}y\right)\right)$$
$$f(x^2 - y^2) = (x+y)f(x-y) + (x-y)f(x+y)$$

958. គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$f\big(xf(y)\big) = x^n f\big(f(y)\big)$$

ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ ។

959. គេឱ្យថេរចំនួនពិតបី a, b, c ដែលមិនសូន្យទាំងបីព្រមគ្នា ។ ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែល

$$af(x^2 + yz) + bf(y^2 + zx) + cf(z^2 + xy) = 0$$

ចំពោះគ្រប់ $x, y, z \in \mathbb{R}$ ។

960. ចូរកំណត់លក្ខខណ្ឌលើចំនួនពិតវិជ្ជមាន p, q ដើម្បីឱ្យគេអាចរកបាននូវអនុគមន៍ $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ដែល

$$f\big(xf(y)\big) = x^p y^q$$

ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}^+$ ។

961. ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ដែល

$$f(m+19) \geq f(m) + 19$$
$$f(m+99) \leq f(m) + 99$$

ចំពោះគ្រប់ $m \in \mathbb{Z}$ ។

962. ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$xf(x+y) + yf(y-x) = f^2(x) + f^2(y)$$

ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$ ។

963. ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

1) $f(1) = 1$
2) $f(x+y)[f(x) - f(y)] = f(x-y)[f(x) + f(y)]$

ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{Z}$ ។

964. (កាណាដា ១៩៦៩)

តាង f ជាអនុគមន៍មួយដែលមានលក្ខណៈដូចតទៅនេះ

a) $f(n)$ មានន័យចំពោះគ្រប់ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ;

b) $f(n)$ ជាចំនួនគត់;

c) $f(2) = 2$;

d) $f(mn) = f(m)f(n)$ ចំពោះគ្រប់ m និង n ;

e) $f(m) > f(n)$ ចំពោះគ្រប់ $m > n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $f(n) = n$ ។

965. គេឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$0 < 2f^2(xy) \leq f(x)f(y^3) + f(x^3)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$f(1999) > 0$$

ចូរបង្ហាញថា $f(2000) > 0$ ។

966. (អន្តរជាតិ ២០១០)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ គេមាន

$$f(\lfloor x\rfloor y)=f(x)\lfloor f(y)\rfloor$$

ដែល $\lfloor a\rfloor$ តាងឱ្យចំនួនគត់ធំបំផុតតែមិនធំជាង a ។

967. (អន្តរជាតិ ១៩៦៨)

តាង a ជាចំនួនពិតមួយ ។ តាង $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍មួយ ដែល $\forall x\in\mathbb{R}$ គេមាន

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-\left(f(x)\right)^2}$$

ក) ចូរបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ខួប

ខ) ចំពោះ $a=1$ ចូរឱ្យឧទាហរណ៍មួយនៃអនុគមន៍បែបនេះ ។

968. (ស្លូវេនៀ ១៩៩៩)

ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែល

$$f\left(x-f(y)\right)=1-x-y$$

969. ចូរកំណត់គ្រប់ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែល

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=a$$

ដែល a ជាចំនួនពិតថេរ និង $x\neq y$ ។

970. ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែល $\forall x,y\in\mathbb{R}$

$$f(x+y)=x+f(y)$$

971. ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ ដែល $\forall x,y\in\mathbb{Q}$

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

972. ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ជាប់ (ដូចគ្នាករណី ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូន) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែល ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ គេមាន

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

973. (សមីការ Jensen)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ជាប់ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

974. (ស៊ុយអែត ១៩៦២)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង គ្រប់ចំនួនសនិទាន r គេមាន

$$|f(x)-f(r)|\le 7(x-r)^2$$

975. ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែល

(i) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y គេមាន

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

976. ចូរបង្ហាញថា អនុគមន៍ $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ជាអនុគមន៍អាភីន បើចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n គេមាន

$$f(n+1)-f(n)=f(n)-f(n-1)$$

និងច្រាសមកវិញ ។

977. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៨៨)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ ដែលចំពោះគ្រប់ $m,n\in\mathbb{N}^*$:

$$f\big(f(n)+f(m)\big)=n+m$$

978. (Putnam 1963)

ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ កើនដាច់ខាត ដែល $f(2)=2$ និងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ m,n ដែលបឋមនឹងគ្នា

$$f(mn)=f(m)f(n)$$

979. (រ៉ូម៉ានី ១៩៨៦)

តាង $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ និង $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ដែលចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេមាន $f(n)\ge g(n)$ ។ ចូរបង្ហាញថា $f\equiv g$ ។

980. តាង $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ។ ចូរបង្ហាញថាមានចំនួនគត់ធម្មជាតិចំនួនបី a,b,c ដែល $a<b<c$ និង $f(a)+f(c)=2f(b)$ ។

981. (ប៊ុលការី ១៩៩៧)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ជាប់ $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

$$f(x)=f\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$$

982. ចូរកំណត់អនុគមន៍ f: ℝ → ℝ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

$$f(x^3+x)\le x\le f^3(x)+f(x)$$

983. តាង $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y ៖

$$f(x+y)f(x-y)=[f(x)]^2$$

ចូរបង្ហាញថា $f\equiv 0$ ឬមិនអ៊ីចឹងទេ f មិនមានតម្លៃសូន្យ ។

984. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៩៦)

តាង $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេមាន $|f(x)|\le 1$ និង

$$f\left(x+\frac{13}{42}\right)+f(x)=f\left(x+\frac{1}{6}\right)+f\left(x+\frac{1}{7}\right)$$

ចូរបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ខួប ។

985. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស 1989)

តាង f: ℕ → ℕ ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

(i) f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត

(ii) $f(mn)=f(m)f(n)$ ចំពោះគ្រប់ $m,n\in\mathbb{N}$

(iii) បើ m ≠ n ផ្ទៀងផ្ទាត់ $m^n=n^m$ នោះ $f(m)=n$ ឬ $f(n)=m$

គណនា $f(30), f\left(30^{30^{30^{30}}}\right)$

986. (ភ្នំពេញ ២០១០)

តាង $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ ដែល $f(0)=1$ និង

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$$

គណនា $f(2010)$ ។

987. (ភ្នំពេញ ២០១០)

គេឱ្យអនុគមន៍ f ដោយ $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Z}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម

$$\begin{cases} f(1,1) = 2 \\ f(m+1,n) = f(m,n) + m \ ; \ \forall m,n \in \mathbb{N} \\ f(m,n+1) = f(m,n) - n \end{cases}$$

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន (a,b) ដែល $f(a,b) = 2013$ ។

988. (អន្តរជាតិ ១៩៨១; កម្ពុជា ២០០៩)

អនុគមន៍ $f(x;y)$ មួយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x និង :

(i) $f(0;y) = 1 + y$

(ii) $f(x+1;0) = f(x;1)$

(iii) $f(x+1;y+1) = f\big(x; f(x+1;y)\big)$

ក. គណនា $f(1;n)$, $f(2;n)$ និង $f(3;n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n

ខ. គណនា $f(4;2009)$

989. (អាយឡិន្ត ១៩៩៩)

តាង $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ ដែល

(i) ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a និង b ដែលបឋមរវាងគ្នា គេមាន

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

(ii) ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម p, q គេមាន $f(p+q) = f(p) + f(q)$

ចូរបង្ហាញថា $f(2) = 2, f(3) = 3$ និង $f(1999) = 1999$ ។

990. (អន្តរជាតិ សតលីស ២០០៩)

តាង f ជាអនុវត្តន៍ពីសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានទៅសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ x និង y គេមានត្រីកោណមិនសូន្យដែលមានរង្វាស់ជ្រុង $x, f(y), f(y+f(x)-1)$ ។

១) ចូរបង្ហាញថា $f(1) = 1$ ។

២) ចូរបង្ហាញថា $f\big(f(z)\big) = z$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន z ។

៣) តាង $w \geq z \geq 2$ និង $M = \max\{f(1), f(2), \dots, f(w)\}$ ។ ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $t \geq 1$ គេមាន

$$f(t) \leq \frac{z-1}{w}t + M$$

៤) ចូរបង្ហាញថា $f(z) \leq z$ ចំពោះគ្រប់ $z \geq 1$ ។

៥) ចូរកំណត់ $f(z)$ ជាអនុគមន៍នៃ z ។

991. (អន្តរជាតិ ឡុងលីស ១៩៨៧)

តាង $f: \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍មួយដែល ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x > 0$ គេមាន $f(x) = f(1/x)$ ។ ចូរបង្ហាញថា មានអនុគមន៍ $u: [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ ដែល

$$u\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) = f(x)$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x > 0$ ។

992. (កូរ៉េ ១៩៩៩)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែល ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq \pm 1$:

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$$

993. (អន្តរជាតិ ១៩៨២)

តាង $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

(i) ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $m, n > 0$ គេមាន

$$f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0,1\}$$

(ii) $f(2) = 0; f(3) > 0$ និង $f(9\,999) = 3\,333$

គណនា $f(1982)$ ។

994. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៩១)

គេមានអនុគមន៍ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ និង $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ដែល ៖

(i) $f\Big(m + f\big(f(n)\big)\Big) = -f\big(f(m+1)\big) - n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ m, n

(ii) g ជាអនុគមន៍ពហុធា មានមេគុណជាចំនួនគត់ និង $g(n) = g\big(f(n)\big)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។

គណនា $f(1991)$ និង កំណត់រាងទូទៅរបស់ g ។

995. (អ៊ីរ៉ង់ ១៩៩៩)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

996. (អន្តរជាតិ ១៩៩២)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y គេមាន

$$f\big(x^2 + f(y)\big) = y + \big(f(x)\big)^2$$

997. (ស្វីស ១៩៩៩)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនសូន្យ x

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

998. (វៀតណាម ១៩៩៩)

តាង $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

(i) $f(0) = f(1) = 0$

(ii) $\forall x, y \in [0,1]; \quad 2f(x) + f(y) = 3f\left(\frac{2x+y}{3}\right)$

ចូរបង្ហាញថា $f(x) = 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [0,1]$ ។

999. (អូទ្រីស-ប៉ូឡូញ ១៩៩៧)

ចូរបង្ហាញថា គ្មានអនុគមន៍ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ដែល ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x, y

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) - y$$

1000. (អន្តរជាតិ ១៩៨៦)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ f អនុវត្តន៍ពីសំណុំចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ទៅសំណុំចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល

(i) $f\big(xf(y)\big)\, f(y) = f(x + y)$

(ii) $f(2) = 0$ តែ $f(x) \neq 0$ ចំពោះ $0 \leq x < 2$

1001. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៨៧)

តាង f ជាអនុគមន៍មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

(i) បើ $x > y$ និង $f(y) - y \geq v \geq f(x) - x$ នោះ $f(z) = v + z$ ចំពោះចំនួនពិតខ្លះឋិតនៅចន្លោះ x និង y ។

(ii) សមីការ $f(x)=0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយ ហើយក្នុងចំណោមឫសនៃសមីការនេះ មានឫសមួយដែលមិនតូចជាងឫសណាមួយផ្សេងទៀត ។

(iii) $f(0)=1$

(iv) $f(1987)\leq 1988$

(v) $f(x)f(y)=f(xf(y)+yf(x)-xy)$

គណនា $f(1987)$ ។

1002. (អន្តរជាតិ ១៩៨៧)

តើមានអនុគមន៍ $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ ដែល $f\big(f(n)\big)=n+1987$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n>0$ ដែរឬទេ?

1003. (ក្រូអាត ១៩៩៦)

គេឱ្យ $t\in(0,1)$ ។ ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលជាប់ត្រង់ 0 និងដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x :

$$f(x)-2f(tx)+f(t^2x)=x^2$$

1004. (អន្តរជាតិ សតលីស ១៩៩២)

គេឱ្យចំនួនពិត $a,b>0$ ។ ចូរបង្ហាញថា មានអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ តែមួយគត់ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\geq 0$

$$f\big(f(x)\big)+af(x)=b(a+b)x$$

1005. ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:[0,1]\to[0,1]$ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\in[0,1]$ គេមាន

$$f\big(2x-f(x)\big)=x$$

1006. (អន្តរជាតិ ១៩៨៣)

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}^{+*}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

(i) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y : $f\big(xf(y)\big)=yf(x)$

(ii) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

1007. (ភ្នំពេញ ២០១១)

រកអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}-\{2/3\}\to\mathbb{R}$ ដែលបំពេញសមីការអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)+f(x)=503x$$

1008. តាង I ជាចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ ។ ចូរកំណត់អនុគមន៍ f កំណត់លើ $[-1,1]$ ដែល $f(\sin 2x)=\sin x+\cos x$ ។ ចូរសម្រួល $f(\tan^2 x)$ ចំពោះ $x\in I$ ។

២

អនុគមន៍ងាយ

២.១ គណនា

1. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2=1 \Rightarrow a^2+b^2=1-c^2\\
&a+b+c=0 \Leftrightarrow a+b=-c\\
&\qquad\Rightarrow (a+b)^2=c^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=c^2;\\
&\qquad\Rightarrow 1-c^2+2ab=c^2 \Rightarrow ab=\frac{2c^2-1}{2}\\
a^4+b^4+c^4&=(a^2+b^2)^2+c^4-2(ab)^2\\
&=(1-c^2)^2+c^4-2\left(\frac{2c^2-1}{2}\right)^2\\
&=c^4-2c^2+1-2c^4+2c^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. $n(n+1)(n+2)/6$

3. $(n(n+1)/2)^2$▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}
(1+1)^4&=2^4=1^4+4.1^3.1+6.1^2.1^2+4.1.1^3+1^4\\
(2+1)^4&=3^4=2^4+4.2^3.1+6.2^2.1^2+4.2.1^3+1^4\\
&\dots\\
(n+1)^4&=n^4+4.n^3.1+6.n^2.1^2+4.n.1^3+1^4
\end{aligned}$$

បូកសមភាពទាំងអស់នេះចូលគ្នា យើងទាញបានផលបូកដែលចង់បាន ។

4. ▲ គុណ S នឹង $(2-1)$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
S&=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{1024}+1)+1\\
&=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{1024}+1)+1
\end{aligned}$$

$$= (2^4-1)(2^4+1)\dots(2^{1024}+1)+1$$

$$\vdots$$

$$= (2^{1024}-1)(2^{1024}+1)+1$$

$$= 2^{2048}-1+1 = 2^{2048}$$

ដូច្នេះ $S^{1/1024} = 4$ ។

5. ▲ យើងមាន $k.k! = (k+1)! - k!$ ចំពោះ $k = 1,2,3\dots$ ។ ដូច្នេះ

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + (n-1).(n-1)! + n.n!$$
$$= (2!-1!) + (3!-2!) + (4!-3!) + \cdots + (n! - (n-1)!) + \big((n+1)! - n!\big)$$
$$= (n+1)! - 1$$

6. ▲ យើងមាន

$$S.2000! = \binom{2000}{1} + \binom{2000}{3} + \cdots + \binom{2000}{1997} + \binom{2000}{1999}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2000}\binom{2000}{i} = \frac{1}{2}(1+1)^{2000} = 2^{1999}$$
$$S = \frac{2^{1999}}{2000!}$$

7. ▲(a) ដោយប្រើសមភាព

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

យើងទទួលបាន

$$\frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$
$$\frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

បូកសមភាពទាំងនេះ បញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}$$

(b) ដោយប្រើសមភាព

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

យើងទាញបាន

$$\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right),$$
$$\frac{1}{2.3.4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right),$$
$$\frac{1}{3.4.5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right),$$
$$\cdots$$
$$\frac{1}{(n-2).(n-1).n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-2).(n-1)}-\frac{1}{(n-1).n}\right),$$

បូកសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n-1)n}\right]$$

(c) ដោយប្រើសមភាព

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right]$$

យើងទាញបាន

$$\frac{1}{1.2.3.4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}\right),$$
$$\frac{1}{2.3.4.5}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}\right),$$
$$\frac{1}{3.4.5.6}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3.4.5}-\frac{1}{4.5.6}\right),$$
$$\cdots$$
$$\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right]$$

បូកសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\cdots+\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right]$$

8. ▲យើងមាន

$$S=\frac{1}{2^1}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\cdots-\frac{2010}{2^{2010}}+\frac{2011}{2^{2011}}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} - \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} - \frac{4}{2^5} + \cdots - \frac{2010}{2^{2011}} + \frac{2011}{2^{2012}}$$

$$\Rightarrow S + \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \cdots - \frac{1}{2^{2010}} + \frac{1}{2^{2011}} + \frac{2011}{2^{2012}}$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2010}} + \frac{1}{2^{2012}} + \frac{2012}{2^{2012}}$$

$$= \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2010}}\right) + \frac{2012}{2^{2012}}$$

$$= \frac{1}{2^2}\frac{1 - \left(\frac{1}{2^2}\right)^{1006}}{1 - \frac{1}{2^2}} + \frac{2012}{2^{2012}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{2012}}\right) + \frac{2012}{2^{2012}}$$

$$= \frac{2^{2012} + 6035}{3.2^{2012}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{2^{2012} + 6035}{9.2^{2011}}$$

9. ▲ សន្មតថា u, v, s, t ជាឫសបួននៃពហុធា

$$f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀែត យើងទាញបាន

$$u + v + s + t = a; uv + vs + st + tu + us + vt = b; uvs + vst + stu = c, uvst = d$$

ដោយ $u + v + s + t = 0$ នោះ $a = 0$ ។ ដូច្នេះ $f(x) = x^4 + bx^2 - cx + d$ ។

តាង

$$S_n = u^n + v^n + s^n + t^n$$

យើងមាន

$$S_1 = u + v + s + t = 0;$$
$$S_2 = u^2 + v^2 + s^2 + t^2 = (u + v + s + t)^2 - 2(uv + vs + st + tu + us + vt) = -2b$$

ដើម្បីគណនា S_3 យើងពិនិត្យករណី២ខាងក្រោម ។

- ករណី u, v, s, t សុទ្ធតែខុសពីសូន្យទាំងអស់ ។ ដូច្នេះ

$$u^3 + bu - c + \frac{d}{u} = 0; \;\; v^3 + bv - c + \frac{d}{v} = 0$$

$$s^3+bs-c+\frac{d}{s}=0;\ t^3+bt-c+\frac{d}{t}=0$$
$$\Longrightarrow\quad S_3+bS_1-4c+d\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\right)=0$$
$$\Longrightarrow\quad S_3-4c+d\frac{c}{d}=0$$
$$\Longrightarrow\quad S_3=3c$$

- ករណីក្នុងចំណោម u,v,s,t មានមួយស្មើសូន្យ ។ សន្មតថាជា u ។ ដូច្នេះ $d=0$ ហើយ

$$f(x)=x^4+bx^2-cx=x(x^3+bx-c)$$

ដូច្នេះ v,s,t ជាឫសនៃសមីការ $x^3+bx-c=0$ ។ ដូច្នេះ

$$v^3+bv-c=0;s^3+bs-c=0;t^3+bt-c=0$$
$$\Longrightarrow S_3+b(u+v+s+t)-3c=0;$$
$$\Longrightarrow S_3=3c$$

ក្នុងករណីទាំងពីរ យើងមាន $S_3=3c$ ។

យើងមាន

$$u^4+bu^2-cu+d=0;v^4+bv^2-cv+d=0;$$
$$s^4+bs^2-cs+d=0;t^4+bt^2-ct+d=0$$
$$\Longrightarrow S_4+bS_2-cS_1+d=0$$
$$\Longrightarrow S_4=2b^2-4d$$

យើងមាន $x^4+bx^2-cx+d=0$ ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង x^n យើងទាញបាន

$$x^{n+4}+bx^{n+2}-cx^{n+1}+dx^n=0$$
$$\Longrightarrow\quad S_{n+4}+bS_{n+2}-cS_{n+1}+dS_n=0$$

យើងទាញបាន

$$S_5=-bS_3+cS_2+dS_1=-5bc$$
$$S_7=-bS_5+cS_4-dS_3=7c(b^2-d)$$

ដោយ $S_7=0$ នោះ $c=0$ ឬ $b^2=d$ ។

- ករណី $b^2=d$ យើងទាញបាន

$$0\le S_4=2b^2-4d=-2b^2\le 0\ \Longrightarrow b=0\ \Longrightarrow d=0$$
$$\Longrightarrow S_4=0\ \Longrightarrow u=v=s=t=0\ \Longrightarrow P=0$$

- ករណី $c=0$ នោះ u,v,s,t ជាឫសទាំងបួននៃសមីការ $x^4+bx^2+d=0$

  ដូច្នេះវាត្រូវតែ $t=-u$ ឬ $t=-v$ ឬ $t=-s$ ។ ដូច្នេះ $P=0$ ។

10. ▲ តាង

$$S=\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$$
$$A=a+b+c$$
$$B=4ac+4bc$$
$$\begin{aligned}A^2-B&=(a+b+c)^2-4ac-4bc\\&=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac\\&=(a+b-c)^2\end{aligned}$$
$$S^2=2(a+b+c)+2\sqrt{A^2-B}$$

បើ $a+b-c>0$ នោះ $\sqrt{A^2-B}=a+b-c$ និង

$$S^2=2(a+b+c)+2(a+b-c)=4(a+b)$$
$$\Longrightarrow S=2\sqrt{a+b}$$

បើ $a+b-c<0$ នោះ $\sqrt{A^2-B}=c-a-b$ និង

$$S^2=2(a+b+c)+2(-a-b+c)=4c$$
$$\Longrightarrow S=2\sqrt{c}$$

បើ $a+b=c$ នោះ $S=2\sqrt{a+b}=2\sqrt{c}$ ។

11. ▲ យើងមាន

$$x=a^{-1}\left(2\frac{a}{b}-1\right)^{\frac{1}{2}}\ \Longrightarrow ax=\sqrt{\frac{2a-b}{b}}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}\frac{1-ax}{1+ax}=\frac{1-\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1+\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}&=\frac{\left(1-\sqrt{\frac{2a-b}{b}}\right)^2}{1-\frac{2a-b}{b}}\\&=\frac{b}{2(b-a)}\left(1-2\sqrt{\frac{2a-b}{b}}+\frac{2a-b}{b}\right)\\&=\frac{a-b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{b-a}\end{aligned}$$

និង

$$\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=\sqrt{\frac{1+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1-\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}}=\frac{1+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}.\frac{2a-b}{b}}}$$

$$=\frac{a+b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}=\frac{a+b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{\sqrt{(b-a)^2}}$$

$$=\frac{a+b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{b-a}$$

(ព្រោះ $b-a>0$) ។ ដូច្នេះ

$$\frac{1-ax}{1+ax}.\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=\frac{a-b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{b-a}.\frac{a+b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{b-a}$$

$$=\frac{a^2-b^2\frac{2a-b}{b}}{(b-a)^2}=\frac{a^2-2ab+b^2}{(b-a)^2}=1$$

12. ▲ ក) យើងមាន

$$\begin{aligned}A&=2011^3-2010.2011^2-2010^2.2011+2010^3\\&=2011^2(2011-2010)+2010^2(2010-2011)\\&=2011^2-2010^2\\&=(2011-2010)(2011+2010)\\&=4021\end{aligned}$$

ខ) យើងមាន

$$\begin{aligned}B&=403^5-402^2(403^3+2.403^2+3.403+4)\\&=403^5-(403-1)^2(403^3+2.403^2+3.403+4)\\&=403^5-(403^2-2.403+1)(403^3+2.403^2+3.403+4)\\&=403^5-(403^5+2.403^4+3.403^3+4.403^2-2.403^4-4.403^3-6.403^2\\&\qquad-8.403+403^3+2.403^2+3.403+4)\\&=-(-5.403+4)\\&=2011\end{aligned}$$

13.▲ យើងមាន

$$\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}=\frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{abc}$$
$$=\frac{c^2(a-b)+ab(a-b)-(ac+bc)(a-b)}{abc}$$
$$=\frac{(a-b)(c^2+ab-ac-bc)}{abc}$$
$$=\frac{(a-b)[c(c-a)-b(c-a)]}{abc}=\frac{(a-b)(c-b)(c-a)}{abc}$$
$$=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\quad(*)$$

តាង $a'=b-c, b'=c-a$ និង $c'=a-b$ ។ ដូច្នេះ

$$b'-c'=c-a-(a-b)=b+c-2a$$

តាមលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=0$ យើងទាញបាន $b'-c'=-3a$ ។ ដូច្នេះ

$$a=-\frac{b'-c'}{3}$$

ដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$b=-\frac{c'-a'}{3}$$
$$c=-\frac{a'-b'}{3}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=-\frac{1}{3}\left(\frac{b'-c'}{a'}+\frac{c'-a'}{b'}+\frac{a'-b'}{c'}\right)$$

តាម (*) យើងទាញបាន

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=-\frac{1}{3}\left[-\frac{(a'-b')(b'-c')(c'-a')}{a'b'c'}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\frac{(-3c)(-3a)(-3b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=-9\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

ដូច្នេះ យើងទាញបានថា បើ $a+b+c=0$ នោះ

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$$

14.▲ តាង

$$P=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\dots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)$$

គុណ P នឹង $\left(1-\frac{1}{3}\right)$ យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned}P\left(1-\frac{1}{3}\right) &= \left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\right]\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\dots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)\\ &= \left[\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\right]\left(1+\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\dots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)\\ &= \left[\left(1-\frac{1}{81}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\right]\left(1+\frac{1}{3^8}\right)\dots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)=\cdots\\ &= \left(1-\frac{1}{3^{2^n}}\right)\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)=1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$P=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right)$$

15. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}k &= \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\\ &= \frac{2x^4+2y^4}{x^4-y^4}\\ \Rightarrow \frac{k}{2} &= \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}\\ \Rightarrow \frac{k}{2}+\frac{2}{k} &= \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}+\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}\\ &= 2\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}\\ \Rightarrow \frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} &= \frac{k}{4}+\frac{1}{k}=\frac{k^2+4}{4k}\\ \Rightarrow \frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}-\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8} &= \frac{k^2+4}{4k}-\frac{4k}{k^2+4}\\ &= \frac{k^4+8k^2+16-16k^2}{4k(k^2+4)}\\ &= \frac{k^4-8k^2+16}{4k(k^2+4)}\\ &= \frac{(k^2-4)^2}{4k(k^2+4)}\end{aligned}$$

16. ▲ តាង $t_k=1/u_k$ ។ ដូច្នេះ $t_0=1/3$ និង

$$\begin{aligned}&\left(3-\frac{1}{t_{n+1}}\right)\left(6+\frac{1}{t_n}\right)=18 \iff \frac{3}{t_n}-\frac{6}{t_{n+1}}-\frac{1}{t_nt_{n+1}}=0\\ &\iff 3t_{n+1}-6t_n-1=0 \quad (*)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t_{n+1} = 2t_n + \frac{1}{3}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} t_1 &= 2t_0 + \frac{1}{3} \quad \times 2^{n-1} \\ t_2 &= 2t_1 + \frac{1}{3} \quad \times 2^{n-2} \\ &\dots \\ t_{n-2} &= 2t_{n-3} + \frac{1}{3} \quad \times 2^2 \\ t_{n-1} &= 2t_{n-2} + \frac{1}{3} \quad \times 2^1 \\ t_n &= 2t_{n-1} + \frac{1}{3} \quad \times 2^0 \end{aligned}$$

គុណសមភាពទី១ ទី២ .... ទី $(n-2)$ ទី $(n-1)$ និង ទី n នឹង $2^{n-1}, 2^{n-2}, \dots, 2^2, 2^1, 2^0$ រួចបូកសមភាពទទួលបានបញ្ចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned} t_n &= 2^n t_0 + \frac{1}{3}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) \\ &= \frac{1}{3}.2^n + \frac{1}{3}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) \\ &= \frac{1}{3}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + 2^n) \\ &= \frac{1}{3}\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត តាមសមភាព (*) ដោយ យក $n = 0,1,2,\dots$ យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned} 3(t_1 - t_0) &= 3t_0 + 1 \\ 3(t_2 - t_1) &= 3t_1 + 1 \\ 3(t_3 - t_2) &= 3t_2 + 1 \\ &\dots \\ 3(t_{n+1} - t_n) &= 3t_n + 1 \end{aligned}$$

បូកសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$3S_n + n + 1 = 3(t_{n+1} - t_0)$$
$$\Rightarrow S_n = \frac{2^{n+2} - n - 3}{3}$$

ដែល

$$S_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$$

យក $n = 2011$ យើងទទួលបាន

$$\sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{u_k} = \frac{2^{2013}-2014}{3}$$

17. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{(2n+1)^2}+\sqrt{(2n-1)^2}+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{(2n+1)^2}+\sqrt{(2n-1)^2}+\sqrt{4n^2-1}\right)}{\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2n+1}\right)^3-\left(\sqrt{2n-1}\right)^3}{2} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} &f(1)+f(2)+\cdots+f(40) \\ &\qquad = \frac{\left(\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3}\right)+\left(\sqrt{5^3}-\sqrt{3^3}\right)+\cdots+\left(\sqrt{81^3}-\sqrt{79^3}\right)}{2} \\ &\qquad = \frac{\sqrt{81^3}-\sqrt{1^3}}{2} = 364 \end{aligned}$$

18. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{n+1}.\sqrt[3]{n-1}+\left(\sqrt[3]{n-1}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}}{\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right)\left(\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{n+1}.\sqrt[3]{n-1}+\left(\sqrt[3]{n-1}\right)^2\right)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2}-0\right) \\ f(3) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right) \\ f(5) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}\right) \end{aligned}$$

$$\ldots$$
$$f(10^6-3)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{10^6-2}-\sqrt[3]{10^6-4}\right)$$
$$f(10^6-1)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{10^6}-\sqrt[3]{10^6-2}\right)$$
ដូច្នេះ ដោយបូកសមភាពខាងលើបញ្ចូលគ្នា យើងទទួលបាន
$$S=\frac{1}{2}.\sqrt[3]{10^6}=50$$

២.២ សមភាព

19. ▲ ចំពោះ $n=1$ យើងទាញបាន $1^2=1.2.3/6$ ពិត ។ សន្មតថាពិតដល់ k មានន័យថា $1^2+2^2+\cdots+k^2=k(k+1)(2k+1)/6$ ។ យើងទាញបាន
$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=k(k+1)(2k+1)/6+(k+1)^2\\&=(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)/6\end{aligned}$$
ដូច្នេះតាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបានសមមភាពពិតចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

20. ● ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំណើន ។

21. ● ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំណើន ។

22. ● ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំណើន ។

23. ▲ តាង $a=\tan x, b=\tan y, c=\tan z$ ដែល $x,y,z\neq k\pi/4$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k ។ លក្ខខណ្ឌ $a+b+c=abc$ ក្លាយជា $\tan(x+y+z)=0$ ។យើងមាន
$$\tan(2x+2y+2z)=\frac{2\tan(x+y+z)}{1-\tan^2(x+y+z)}=0$$
ដូច្នេះ
$$\begin{aligned}&\tan 2x+\tan 2y+\tan 2z=\tan 2x\tan 2y\tan 2z\\ \Longrightarrow\ &\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}+\frac{2\tan y}{1-\tan^2 y}+\frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}\\ &=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\frac{2\tan y}{1-\tan^2 y}\frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}\end{aligned}$$

ដូច្នេះសមភាពពិត ។

24. ▲ តាង $k = a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$ នោះ

$$\begin{aligned} p_1a_1^n + p_2a_2^n + p_3a_3^n &= k^n(p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n) \\ &= \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n (p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n) \end{aligned}$$

នាំឱ្យសមភាពពិត ។

25. ▲ អង្គខាងឆ្វេងនៃសមភាពបូក 1 ស្មើនឹង

$$\begin{aligned} &[(1+a) + b(1+a)] + c(1+a)(1+b) + d(1+a)(1+b)(1+c) + \cdots \\ &\qquad + l(1+a)(1+b)\dots(1+k) \\ &= [(1+a)(1+b) + c(1+a)(1+b)] + d(1+a)(1+b)(1+c) + \cdots \\ &\qquad + l(1+a)(1+b)\dots(1+k) \\ &= [(1+a)(1+b)(1+c) + d(1+a)(1+b)(1+c)] + \cdots \\ &\qquad + l(1+a)(1+b)\dots(1+k) \\ &= \cdots = (1+a)(1+b)(1+c)\dots(1+l) \end{aligned}$$

ដូច្នេះសមភាពពិត ។

ករណី $a = b = c = \cdots = l$ យើងទាញបាន

$$a + a(1+a) + a(1+a)^2 + a(1+a)^3 + \cdots + a(1+a)^{n-1} = (1+a)^n - 1$$

ដែល n ជាចំនួននៃចំនួនគត់ $a, b, c, \dots, l$ ។ តាង $1 + a = x \Rightarrow a = x - 1$ យើងទាញបាន

$$(x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = x^n - 1$$

26. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} 0 &= (a+b+c)^3 \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a \\ &\quad + 3c^2b + 6abc \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc - 3abc - 3abc + 6abc \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ ។

27. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} x_{6n+5} = x_{2(3n+2)+1} &= 4x_{3n+2} + 2(3n+2) + 2 \\ &= 4(3x_{n+1} + 6x_n) + 6n + 6 \\ &= 6(2x_{n+1} + 4x_n + n + 1) \\ x_{6n+5} = x_{3(2n+1)+2} &= 3x_{2n+2} + 6x_{2n+1} \\ &= 3x_{2n+2} + 6(4x_n + 2n + 2) \end{aligned}$$

$$= 3(x_{2n+2} + 8x_n + 4n + 4)$$
$$\Longrightarrow \quad x_{2n+2} + 8x_n + 4n + 4 = 2(2x_{n+1} + 4x_n + n + 1)$$
$$\Leftrightarrow \quad x_{2(n+1)} = 4x_{n+1} - 2(n+1)$$
$$\Leftrightarrow \quad x_{2n} = 4x_n - 2n$$

ចំពោះ $n = 0$ យើងទាញបាន $x_0 = 0$ ។

$$x_{2n+1} = 4x_n + 2n + 2;\ x_{2n} = 4x_n - 2n$$
$$\Longrightarrow x_{2n+1} - x_{2n} = 4n + 2 \Longrightarrow x_{n+1} - x_n = 2(n+1)$$

ជំនួស n ដោយ $0, 1, 2, \dots, n-1$ យើងទទួលបាន

$$x_1 - x_0 = 2(1)$$
$$x_2 - x_1 = 2(2)$$
$$\dots$$
$$x_n - x_{n-1} = 2(n)$$

បូកសមភាពទាំងនេះចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$x_n = 2(1 + 2 + \cdots + n) = n(n+1)$$

ដូច្នេះ

$$x_{3n+1} = (3n+1)(3n+2) = 9n^2 + 9n + 2$$
$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 10x_n = (n+2)(n+3) - 2(n+1)(n+2) + 10n(n+1)$$
$$= n^2 + 5n + 6 - 2n^2 - 6n - 4 + 10n^2 + 10n$$
$$= 9n^2 + 9n + 2$$

ដូច្នេះ $x_{3n+1} = x_{n+2} - 2x_{n+1} + 10x_n$ ពិត ។

28. ▲ តាង $A = (n+1)(n+2)(n+3)\dots(2n-1)2n$ និង $B = 2^n.1.3.5\dots(2n-3)(2n-1)$ ។ យើងមាន

$$n!.A = 1.2.3\dots n.A = (2n)!$$
$$n!.B = (2^n.n!).[1.3.5\dots(2n-1)]$$
$$= (2.4.6\dots 2n)[1.3.5\dots(2n-1)] = (2n)!$$

ដូច្នេះ $A = B$ ពិត ។

29. ▲ យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារដោយកំណើនតាម n ។ ចំពោះ $n = 1$ យើងមាន

$$1.2.3\dots p = \frac{1.2.3\dots p(p+1)}{p+1}$$

ពិត ។ ពេលនេះសន្មតថា សំណើពិតរហូតដល់ n គឺ

$$1.2.3\ldots p+2.3\ldots p(p+1)+\cdots+n(n+1)\ldots(n+p-1)=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}$$

ពិត ។ យើងនឹងបង្ហាញថា សំណើពិតរហូតដល់ $n+1$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}1.2.3\ldots p&+2.3\ldots p(p+1)+\cdots+n(n+1)\ldots(n+p-1)\\&+(n+1)\ldots(n+p)\\&=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}+(n+1)\ldots(n+p)\\&=\frac{n(n+1)\ldots(n+p)+(p+1)(n+1)\ldots(n+p)}{p+1}\\&=\frac{(n+1)\ldots(n+p)(n+p+1)}{p+1}\end{aligned}$$

ដូច្នេះសំណើពិតរហូតដល់ $n+1$ ។ មានន័យថា សមភាពពិតចំពោះគ្រប់ n ។

30. ▲ យើងមាន

$$2+\sqrt{3}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+2.\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

$$2-\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

$$\begin{aligned}\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}&=\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{2}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}\\&=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}&=\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\sqrt{2}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}\\&=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2&=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}\right)^2\\&=\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2=2\end{aligned}$$

31. ▲ តាង

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}=\lambda$$
$$\Longrightarrow A=a\lambda, B=b\lambda, C=c\lambda, D=d\lambda$$

ដូច្នេះ

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{\lambda}(a+b+c+d)$$
$$A+B+C+D=\lambda(a+b+c+d)$$

និង

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}&=\sqrt{(a+b+c+d).\lambda(a+b+c+d)}\\&=\sqrt{\lambda}(a+b+c+d)\end{aligned}$$

ដូច្នេះសមភាពពិត ។

32. ▲ តាង $A=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}A=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}&=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{ax^3}{y}+\frac{ax^3}{z}}\\&=\sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=x\sqrt[3]{a}\end{aligned}$$

ព្រោះ $ax^3=by^3=cz^3$ និង $1/x+1/y+1/z=1$ ។

ដូចគ្នា យើងទាញបានថា $A=x\sqrt[3]{a}=y\sqrt[3]{b}=z\sqrt[3]{c}$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{A}{x}=\sqrt[3]{a},\quad \frac{A}{y}=\sqrt[3]{b},\quad \frac{A}{z}=\sqrt[3]{c}$$

បូកសមភាពទាំងនេះ បញ្ចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$\frac{A}{x}+\frac{A}{y}+\frac{A}{z}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$
$$\Leftrightarrow A\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$
$$\Leftrightarrow A=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

ពិត ។

២.៣ សមីការ

33. $\{-2;-1;1\}$. **34.** $\{-3;2\}$. **35.** $\{3\}$.
36. $\{1\}$. **37.** $\{-1;-1/2;1/3\}$. **38.** $\{1/2\}$.
39. $\{-\sqrt{2};-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2};\sqrt{2}\}$. ● តាង $x^2=y$ ។
40. $\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$. **41.** $\{-1;1\}$.
42. ▲ តាង $2x-3=y+c$ និង $2x-5=y-c$ ។យើងទាញបាន $c=1$ ។ ជំនួសចូលសមីការ យើងទាញបាន $(y+1)^4+(y-1)^4=2$ សមមូលនឹង $y^4+6y^2=0$ ។ យើងទាញបាន $y=0$ នាំ ឱ្យ $x=2$ ។
43. $\{-1/2;1\}$.
44. $\{-a(\sqrt{13}+1)/2;a(\sqrt{13}-1)/2 \mid a\in\mathbb{R}\}$. ● តាង $x^2+ax=y$ ។
45. $\{-(\sqrt{21}+5)/6;(\sqrt{21}-5)/6\}$
46. $\{-\sqrt{2};4-\sqrt{18};\sqrt{2};4+\sqrt{18}\}$. ● តាង $x-\frac{2}{x}=y$ ។ សមីការសមមូលនឹង $y^2-8y=0$ ។
47. $\{-3/2;-(\sqrt{7}+1)/4;(\sqrt{7}-1)/4;1\}$. ● ចែកអង្គទាំងពីរនឹង x^2 បន្ទាប់មកតាង $2x-3/x=y$ ។
48. $\{1/2;2\}$
49. $\{-1;9;(5-\sqrt{61})/2;(5+\sqrt{61})/2\}$. ● ចែកអង្គទាំងពីរនឹង x^2 បន្ទាប់មកតាង $x-9/x=y$ ។
50. $\{(1-\sqrt{21})/2;(1+\sqrt{21})/2\}$. ● ដកអង្គទាំងពីរនឹង $10x^2/(x+5)$ យើងទាញបាន

$$\left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2+10\frac{x^2}{x+5}-11=0$$

51. $\{-\sqrt{7}-1;\sqrt{7}-1\}$. ● បង្រួមសមីការជារាង

$$\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2-6\frac{x^2}{x-3}-16=0$$

52. $\left\{-\left(\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right)/\sqrt{2}\,;\left(\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1\right)/\sqrt{2}\right\}$.● បង្រួមសមីការជា $(x^2+1)^2-2(x-1)^2=0$ ។

53. $\left\{\sqrt{2}/\left(\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1\right);\sqrt{2}/\left(\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1\right)\right\}$. ● តាង $x=1/y$ ។

54. $\{-9;11\}$. ● បូក $4x^2+400x+1$ ទៅអង្គទាំងពីរនៃសមីការ ។

55. $\{-a;a-\sqrt{a^2+2};a+\sqrt{a^2+2}|a\in\mathbb{R}\}$. ▲ យើងទាញរក a យើងទាញបាន $a=(x^2-2)\,/2x$ ឬ $a=-x$ ។ ទាញរក x យើងទាញបានចម្លើយ ។

56. $\{-1-\sqrt{3+a};-1+\sqrt{3+a}\}$ ចំពោះ $a\in[-3;-1)$; $\{-1-\sqrt{3+a};-1+\sqrt{3+a};-1-\sqrt{1+a};-1+\sqrt{1+a}\}$ ចំពោះ $a\in[-1;\infty)$; គ្មានឫសចំពោះ $a\in(-\infty;-3)$.▲ ដោះស្រាយរក a ដោយសន្មតថា x ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ : $a^2-2(x^2-1)a+x^4-6x^2+4x=0$; យើងទាញបាន $a=x^2+2x-2$ ឬ $a=x^2-2x$ ។

57. $\{(-1-\sqrt{29})/2\,;(5-\sqrt{17})/2\,;(-1+\sqrt{29})/2\,;(5+\sqrt{17})/2\}$.▲ យើងសរសេរអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការជា $(x^2+ax+c)(x^2+bx+d)=0$ ដូច្នេះ $x^4+(a+b)x^3+(ab+c+d)x^2+(bc+ad)x+cd\equiv x^4-4x^3-10x^2+37x-14$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{cases}a+b=-4\\ab+c+d=-10\\bc+ad=37\\cd=-14\end{cases}$$

ដោយដឹងថា a,b,c,d ជាចំនួនគត់ នោះ ពីសមីការចុងក្រោយគេ យើងទាញបាន $(c;d)=\{(-1;14);(1;-14);(-2;7);(2;-7)\}$ ។ យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ឃើញថា $(c;d)=(2;-7)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ យើងទាញបាន $a=-5;b=1$ ។ ដូច្នេះសមីការសមមូលនឹង $x^2-5x+2=0$ ឬ $x^2+x-7=0$ ។

58. ▲ សន្មតថា $x_1=p/q$ ដែល $p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}$ និង p និង q ជាចំនួនបឋមនឹងគ្នា ។ ដូច្នេះ

$$\frac{p^3}{q^3}+a\frac{p^2}{q^2}+b\frac{p}{q}+c=0 \iff p(p^2+apq+bq^2)=-cq^3$$

អង្គខាងស្តាំនៃសមភាពនេះចែកដាច់នឹង q ។ អង្គខាងឆ្វេងចែកដាច់នឹង q នាំឱ្យនិងមានតែ $q\equiv 1$ តែប៉ុណ្ណោះ ព្រោះ $p^2+apq+bq^2$ ចែកមិនដាច់នឹង q ។ ដូច្នេះសមភាពមានរាង $p(p^2+ap+b)=-c$ យើងទាញបាន c ជាពហុគុណនៃ $p=x_1$ ។

59.

60. ● ប្រើសមភាព $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

61. $-2p$.

62. $\left\{\sqrt[3]{(\sqrt{13}+3)/2}-\sqrt[3]{(\sqrt{13}-3)/2}\right\}$ ● តាង $x=y-1/y$ ។ សមីការទៅជា

$$y^3-\frac{1}{y^3}-3\left(y-\frac{1}{y}\right)+3\left(y-\frac{1}{y}\right)-3=0 \iff y^3-\frac{1}{y^3}-3=0$$

តាង $y^3=t$ យើងទាញបាន $t^2-3t-1=0$ ។

63. $\{-5;-1;1;3\}$. **64.** $\{2;6\}$. **65.** $\{-1\}$.

66. គ្មានឫសសនិទាន

67. $\{-1/3\,;1/2\}$.

68. ▲ គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\sqrt{x+10}-\sqrt{x-2}\neq 0$ យើងទាញបាន

$$\begin{cases}\sqrt{x+10}+\sqrt{x-2}=6\\ \sqrt{x+10}-\sqrt{x-2}=2\end{cases}$$

បូកអង្គទាំងពីរចូលគ្នា យើងទាញបាន $x=6$ ។

69. សមីការគ្មានឫស ។

70. $\{-1\}$. **71.** $\{12\}$.

72. $\{-(1/a-a)^2/4\,;(1/a-a)^2/4\}$ ចំពោះ $a\in(0;1]$ ហើយគ្មានឫសចំពោះតម្លៃ a ផ្សេងទៀត ។

73. $\{-6;1\}$. **74.** $\{-1;3\}$. **75.** $\{3\}$.
76. $\{2\}$ **77.** $\{5\}$. **78.** $\{20\}$.
79. $\{-4/3\}$. **80.** $\{-1;0\}$. **81.** $\{5\}$.
82. $\{16\}$. **83.** $\{9\}$.

84. $\{-3;6\}$. ● តាង $y=\sqrt{x^2-3x+7}$ ។

85. $\{-9/2;3\}$.

86. $\{1\}$. ● តាង $y=\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}$ ។

87. $\{5/3\}$.

88. $\{5a/3\}$ ចំពោះ $a\neq 0$; $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ ចំពោះ $a=0$ ។

89. $\{1\}$. **90.** $\{3;9\left(9-\sqrt{97}\right)/8\}$.

91. $\left\{5\pm a\sqrt{8-a^2/2}\right\}$ ចំពោះ $a\in\left[2;2\sqrt{2}\right]$; គ្មានឫសចំពោះតម្លៃ a ផ្សេងពីនេះ ។

▲ តាង $u=\sqrt{7-x}, v=\sqrt{x-3}$ ។ យើងមានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} u+v=a \\ 7-x+x-3=u^2+v^2=4,(u\geq 0, v\geq 0) \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{a+\sqrt{8-a^2}}{2} \\ v_1=\dfrac{a-\sqrt{8-a^2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2=\dfrac{a-\sqrt{8-a^2}}{2} \\ v_2=\dfrac{a+\sqrt{8-a^2}}{2} \end{cases}$$

92. ▲ តាង $\sqrt[4]{x-2}=u\geq 0, \sqrt[4]{4-x}=v\geq 0$ យើងទាញបានប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} u+v=2 \\ u^4+v^4=2 \end{cases}$$

លើកសមីការទីមួយជាស្វ័យគុណ៤ និងប្រើសមីការទី២ យើងទាញបាន $uv(2(u+v)^2-uv)=7$ ហើយដោយ $u+v=2$ យើងទាញបាន $(uv)^2-8(uv)+7=0$ ។ ដូច្នេះ $(uv)_1=1;(uv)_2=7$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} u+v=2 \\ uv=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u+v=2 \\ uv=7 \end{cases}$$

ប្រព័ន្ធសមីការទីមួយមានឫស $u=v=1$ ។ ត្រូវនឹង $x=3$ ។ ប្រព័ន្ធទី២គ្មានឫស ។

93. $\{(2a+1)/(a-2)\}$ ចំពោះ$a\in(-\infty;3]\cup(2;\infty)$; $\emptyset$ចំពោះ$a\in(1/3\,;2]$.

94. $\left\{a+1+\sqrt{2a};a+1-\sqrt{2a}\right\}$ ចំពោះ $a\in[0;1/2]$, $\left\{a+1+\sqrt{2a}\right\}$ ចំពោះ $a\in(1/2\,;\infty)$, $\emptyset$ ចំពោះ $a\in(-\infty;0)$.

95. $(-\infty;0)$ ចំពោះ $a=0$, $\{0;3a/4\}$ ចំពោះ $a\in(0;\infty)$, $\emptyset$ ចំពោះ $a\in(-\infty;0)$.

96. $\{a^2+a;a^2-a+1\}$ ចំពោះ $a\in[0;1]$, $\{a^2+a\}$ ចំពោះ $a\in(1;\infty)$, $\emptyset$ ចំពោះ $a\in(-\infty;0)$.

97. $\{0\}$ ចំពោះ $a=1$, $\emptyset$ ចំពោះ $a\neq 1$.

98. $\{(1;-5)\}$. **99.** $\{(1;-3)\}$.

100. $\{(-3;1)\}$ ចំពោះ $a\in\{-2\}$; $\emptyset$ ចំពោះ $a\notin\{-2\}$.

101. ▲ តាង $f(x)=4x(1-x)=1-(2x-1)^2$ ។ យើងឃើញថា បើ $0\le f(x)\le 1$ នោះ $0\le x\le 1$ ។ ដូច្នេះ បើ $\mathrm{a}_{1998}=0$ នោះ ត្រូវតែ $0\le t\le 1$ ។ ឥលូវ យើងយក $0\le\theta\le\pi/2$ ដែល $\sin\theta=\sqrt{t}$ ។ យើងសង្កេតឃើញថា ចំពោះគ្រប់ $\phi\in\mathbb{R}$ យើងមាន

$$f(\sin^2\phi)=4\sin^2\phi\,(1-\sin^2\phi)=4\sin^2\phi\cos^2\phi=\sin^2 2\phi$$

ដោយ $a_1=\sin^2\theta$ នោះ យើងទាញបាន

$$a_2=\sin^2 2\theta\,,a_3=\sin^2 4\theta\,,\cdots,a_{1998}=\sin^2 2^{1997}\theta$$

ដូច្នេះ $a_{1998}=0$ ទាល់តែនិងនាំឱ្យ $\sin 2^{1997}\theta=0$ ។ មានន័យថា $\theta=k\pi/2^{1997}$ ចំពោះចំនួនគត់ k ខ្លះ ហើយ តម្លៃរបស់ t ដែល $a_{1998}=0$ ស្មើនឹង $\sin^2(k\pi/2^{1997})$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$ ។ ដូច្នេះយើងមានតម្លៃរបស់ t បែបនេះ ចំនួន $2^{1996}+1$ គឺមានតម្លៃ $\sin^2(k\pi/2^{1997})$ ចំពោះ $k=0,1,2,\cdots,2^{1996}$ ។

102. ▲ ដោយ $a^2-2b^2=1$ នោះ $a\neq 0$ ។ ដោយ $2b^2-3c^2=1$ នោះ $b\neq 0$ ។ បើ $c=0$ នោះ $b=1/\sqrt{2}$ និង $a=\sqrt{2}$ ។ $(a,b,c)=\left(\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)$ ជាចម្លើយមួយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា គ្មានចម្លើយណាផ្សេងទៀតទេ ។ យើងសន្មតថា មានចំនួនពិត (a,b,c) ដោយ $abc\neq 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ។ យើងឃើញថា បើ (a,b,c) ជាចម្លើយ នោះ $(-a,-b,-c)$ ក៏ជាចម្លើយដែរ ។ ដូច្នេះត្រូវតែមានចំនួនវិជ្ជមានពីរក្នុងចំណោម(a,b,c) ឬ $(-a,-b,c)$ ។ សន្មតថា a,b វិជ្ជមាន ។ តាង $a=\cot A\,,b=\cot B$ និង $c=\cot C$ ដែល $0<A,B<\pi/2\,,0<C<\pi$ ។ ដោយ $ab+bc+ca=1$ នោះ

$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$$

$$\cot C=\frac{1-\cot A\cot B}{\cot A+\cot B}=-\cot(A+B)=\cot(\pi-A-B)$$

$$A+B+C=\pi$$

ដូច្នេះ A, B, C ជាមុំក្នុងត្រីកោណ ។ យើងមាន

$$a^2+1=2(b^2+1)=3(c^2+1)$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{\sin^2 A}=\frac{2}{\sin^2 B}=\frac{3}{\sin^2 C}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}$$

តាមច្បាប់ស៊ីនុស យើងទាញបានថា ជ្រុងឈមនឹងមុំ A, B, C មានរង្វាស់ $k, k\sqrt{2}, k\sqrt{3}$ រៀងគ្នា ចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមាន k ខ្លះ ។ ដូច្នេះត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ C នាំឱ្យ $c=\cot C=0$ ផ្ទុយពីសន្មត ដែល $c\neq 0$ ។ ដូច្នេះការសន្មតរបស់យើងខុស ហើយ $(a,b,c)=\left(\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right)$ ជាចម្លើយតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធ ។

103. $\left\{(4-p)/\left(2\sqrt{4-2p}\right)\right\}$ ចំពោះ $4/3\leq p\leq 2$. ▲ យើងមាន $x\geq 0$ ។ លើកអង្គទាំងពីរជាការេយើងទាញបាន

$$5x^2-p-4+4\sqrt{(x^2-1)(x^2-p)}=x^2$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{(x^2-1)(x^2-p)}=(p+4)-4x^2$$

បើ $4x^2\leq p+4$ យើងលើកអង្គទាំងពីរនៃសមីការជាការេម្តងទៀត យើងទាញបាន

$$-16(p+1)x^2+16p=-8(p+4)x^2+(p+4)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{(4-p)^2}{4(4-2p)}\ \Longrightarrow\ x=\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$$

ដើម្បីឱ្យតម្លៃនេះជាចម្លើយនៃសមីការទាល់តែ $p\leq 2$ និង

$$\frac{(4-p)^2}{4-2p}=4x^2\leq p+4$$

សមមូលនឹង $4/3\leq p\leq 2$ ។ ក្រៅពីនេះសមីការគ្មានចម្លើយ ។

104. ▲ យើងសរសេរសមីការដែលឱ្យជារាង

$$x^5-x^3-4x^2-3x-2+\lambda(5x^4+\alpha x^2-8x+\alpha)=0$$

ឫសរបស់សមីការនេះមិនអាស្រ័យនឹង λ នាំឱ្យនិងបើ វាជាឫសរួមរបស់សមីការ

$$x^5-x^3-4x^2-3x-2=0 \text{ និង } 5x^4+\alpha x^2-8x+\alpha=0$$

សមីការទីមួយសមមូលនឹង $(x-2)(x^2+x+1)^2=0$ ហើយមានឫសផ្សេងគ្នាចំនួនបី $x_1=2;\ x_{2,3}=\left(-1\pm i\sqrt{3}\right)/2$ ។

ក) ចំពោះ $\alpha = -64/5$ យើងមាន $x_1 = 2$ ជាឫសតែមួយគត់ ដែលមិនអាស្រ័យនឹង λ

ខ) ចំពោះ $\alpha = -3$ យើងមានឫសចំនួនពីរដែលមិនអាស្រ័យនឹង λ គឺ $x_1 = \omega$ និង $x_2 = \omega^2$ ។

105. ▲ លក្ខខណ្ឌ $2x-1\geq 0, \Rightarrow x \geq 1/2$ និង $x \geq \sqrt{2x-1} \Rightarrow (x-1)^2 \geq 0$ ពិតជានិច្ច ។ យើងមាន $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = c \Leftrightarrow c^2 = 2x + 2|x-1| = \begin{cases} 2, & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 4x-2, & x \geq 1 \end{cases}$

ក) $c^2 = 2$ ។ សមីការមានឫស $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ។

ខ) $c^2 = 1$ ។ សមីការគ្មានឫស ។

គ) $c^2 = 4$ ។ សមីការទៅជា $4x-2=4, \Rightarrow x = 3/2$ ។

106. $\{[5;10]\}$ ▲ យើងមាន

$$x+3-4\sqrt{x-1} = x-1-4\sqrt{x-1}+4 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 4\sqrt{x-1}+4 = \left(\sqrt{x-1}-2\right)^2$$

$$x+8-6\sqrt{x-1} = x-1-6\sqrt{x-1}+9 = \left(\sqrt{x-1}-3\right)^2$$

ដូច្នេះសមីការទៅជា

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2} = 1 \Rightarrow \left|\sqrt{x-1}-2\right| + \left|\sqrt{x-1}-3\right| = 1$$

បើ $\sqrt{x-1} \geq 3$ នោះ

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3 = 1 \Rightarrow x = 10$$

បើ $\sqrt{x-1}-2 \geq 0$ និង $\sqrt{x-1}-3 \leq 0 \Rightarrow 5 \leq x \leq 10$នោះ

$$\sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

បើ $\sqrt{x-1}-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 5$ នោះ

$$-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3 = 1 \Rightarrow x = 5$$

107. $\{0;3\}$▲ តាង

$$3x = x+2x = y_1^2$$
$$x+2y_1 = y_2^2$$
$$x+2y_2 = y_3^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x + 2y_{n-2} = y_{n-1}^2$$
$$x + 2y_{n-1} = y_n^2$$

ដែល $y_1, y_2, \dots, y_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ សមីការដែលឱ្យមានរាង

$$y_n = x$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $y_1 = x$ ។ សន្មតថា $x > y_1$ ។ ដូច្នេះ $y_1 > y_2 > \cdots > y_n$ ។ មានន័យថា បើ $x > y_1$ នោះ $x > y_n$ ផ្ទុយពីសមីការ $x = y_n$ ។ ដូចគ្នាចំពោះករណី $x < y_1$ ។ ដូច្នេះ $x = y_1$ ។ ដោយ $y_1^2 = 3x$ នោះ $3x = x^2$ យើងទាញបាន $x = 0; x = 3$ ។

108. ▲ សមីការសមមូលនឹង

$$\left|\sqrt{x-4} - 1\right| + \left|\sqrt{x-4} - 2\right| = a$$

តាង $y = \sqrt{x-4} \geq 0$ ។ សមីការទៅជា $|y-1| + |y-2| = a$ ។ បើ $a = 0$ នោះ $y = 1$ និង $y = 2$ មិនអាច ។ ដូច្នេះ $a > 0$ ។

បើ $0 \leq y < 1$ នោះ $1 - y + 2 - y = a; \Rightarrow y = (3-a)/2$ ។ ដោយ $0 \leq y = (3-a)/2 < 1$ នោះ $1 < a \leq 3$ ។ យើងទាញបាន $x = 4 + \left(\frac{3-a}{2}\right)^2$ ។

បើ $1 \leq y \leq 2$ នោះ $y - 1 - y + 2 = a; \Rightarrow a = 1$ ។ $1 \leq y \leq 2$ ត្រូវនឹង $5 \leq x \leq 8$ ។

បើ $y > 2$ នោះ $y - 1 + y - 2 = a; \Rightarrow y = (a+3)/2$ ។ $y > 2 \Rightarrow a > 1$ ។ យើងទាញបាន $x = 4 + \left(\frac{a+3}{2}\right)^2$

ជាសរុប

បើ $a < 1$ សមីការគ្មានឫស ។

បើ $a = 1$ សមីការមានឫស $5 \leq x \leq 8$ ។

បើ $1 < a \leq 3$ សមីការមានឫស $x = 4 + \left(\frac{3-a}{2}\right)^2$ ឬ $x = 4 + \left(\frac{a+3}{2}\right)^2$ ។

បើ $a > 3$ សមីការមានឫស $x = 4 + \left(\frac{a+3}{2}\right)^2$ ។

109. ▲ តាង $u = a - x; v = x - b$ ។ ដូច្នេះ $u^5 + v^5 = (a-b)^5; u + v = a - b$ ។ យើងមាន

$$u^5 + v^5 = (u+v)\{[(u+v)^2 - 2uv]^2 - uv(u+v)^2 + u^2v^2\}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^5 = (a-b)\{[(a-b)^2 - 2uv]^2 - uv(a-b)^2 + u^2v^2\}$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^4 = (a-b)^4 + 5u^2v^2 - 5uv(a-b)^2$$
$$\Leftrightarrow 5(uv)^2 - 5uv(a-b)^2 = 0$$

ដូច្នេះ $uv = 0$ ឬ $uv = a - b$ ។

ករណី $uv = 0$ នោះ $u = 0$ ឬ $v = 0$ ។ បើ $u = 0$ នោះ $x = a$ ។បើ $v = 0$ នោះ $x = b$ ។

ករណី $uv = a - b$ នោះ យើងមាន

$$\begin{cases} u + v = a - b \\ uv = a - b \end{cases}$$

(u, v) ជាឫសនៃសមីការ $t^2 - (a-b)t + (a-b) = 0$ គ្មានឫស ។

ដូច្នេះសមីការមានឫសពីរ គឺ $x_1 = a; x_2 = b$ ។

110. ▲ តាង

$$y = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1 \Rightarrow y \geq 0; y + 1 = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$$
$$\Rightarrow 2y^2 + 4y + 2 = x + 3$$
$$\Rightarrow x = 2y^2 + 4y - 1$$

ដូច្នេះ ចំពោះ $x \geq -1$ យើងទាញបានថា អនុគមន៍ $y = 2x^2 + 4x - 1$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $y = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1$ ម្យ៉ាងវិញទៀត អនុគមន៍ $y = 2x^2 + 4x - 1$ កើនលើ $(-1; \infty)$ (អនុគមន៍ទាំងពីរឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$) ដូច្នេះ

$$2x^2 + 4x - 1 = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 1 = x$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

111. ▲ យើងមាន

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > 0$$
$$x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)$$

តាង

$$t=\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$$

សមីការទៅជា

$$2t^2-mt-1=0 \quad (1)$$

ពី $t=\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} t^2(x^2+x+1)&=x^2-x+1\\ (t^2-1)x^2+(t^2+1)x+t^2-1&=0 \quad (2)\\ \Delta&=(t^2+1)^2-4(t^2-1)^2\\ &=(3-t^2)(3t^2-1)\geq 0\\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}&\leq t\leq\sqrt{3} \end{aligned}$$

ក) ករណី $m=-\sqrt{3}/3$

ពី (១) យើងទាញបាន

$$t_1=-\frac{3}{2\sqrt{3}};t_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

យើងយក $t=1/\sqrt{3}$ ។ ពី (២) យើងទាញបាន $x=1$ ។

ខ) ក្នុងសមីការ(១) យើងមាន $\Delta=m^2+8>0$ ដូច្នេះ(១)មានឫសពីរ $t_1;t_2$ ។ ដោយ $t_1t_2=-1/2<0$ នោះ $t_1<0<t_2$ ។ មានតែឫស t_2 មួយគត់ ដែលអាចឱ្យសមីការ(២) មានឫស ព្រោះ $\sqrt{3}/3\leq t\leq\sqrt{3}$ ។ សមីការ(*) មានឫសតែមួយគត់ បើ សមីការ(២)មានឫសតែមួយគត់ដែរ ។

បើ $t=1$ នោះ (១)នាំឱ្យ $m=1$ ហើយ (២) នាំឱ្យ $x=0$ ។

បើ $t^2-1\neq 0$ នោះ $\Delta=(3-t^2)(3t^2-1)=0 \Rightarrow t_1=\sqrt{3}/3\,;t_2=\sqrt{3}$ ។

បើ $t=\sqrt{3}/3\,;(1)\Rightarrow m=-\sqrt{3}/3 \Rightarrow x=1$

បើ $t=\sqrt{3};(1)\Rightarrow m=5\sqrt{3}/3 \Rightarrow x=1$

ដូច្នេះ $m=\{-\sqrt{3}/3\,;\ 1;5\sqrt{3}/3\}$ ។

112. ▲ តាង $y=\sqrt[3]{7x+1};z=-\sqrt[3]{x^2-x-8};t=\sqrt[3]{x^2-8x-1}$ ។ ដូច្នេះ

$$y+z+t=2$$

$$\Longrightarrow \quad (y+z+t)^3 = 8 \quad (1)$$

យើងមាន

$$y^3+z^3+t^3 = (7x+1)-(x^2-x-8)+(x^2-8x-1) = 8 \quad (2)$$

ពី (១) និង (២) យើងទាញបាន

$$(y+z+t)^3-(y^3+z^3+t^3) = 3(y+z)(z+t)(t+y) = 0$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} y+z=0 \\ z+t=0 \\ t+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-z \\ z=-t \\ t=-y \end{array}\right.$$

$$\sqrt[3]{7x+1} = \sqrt[3]{x^2-x-8} \quad \Leftrightarrow \quad 7x+1 = x^2-x-8 \Leftrightarrow x=-1\ ; x=9$$

$$\sqrt[3]{x^2-x-8} = \sqrt[3]{x^2-8x-1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x-8 = x^2-8x-1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1\sqrt[3]{7x+1} = -\sqrt[3]{x^2-8x-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7x+1 = -(x^2-8x-1)$$

$$\Leftrightarrow x=0; x=1$$

113. ▲ តាង $u=\sqrt{x+1}\geq 0; v=\sqrt{x^2-x+1}>0$ ។ សមីការសមមូលនឹង

$$5uv = 2(v^2+v^2) \Leftrightarrow 5\frac{u}{v} = 2\left(\frac{u}{v}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{u}{v}=2 \\ \frac{u}{v}=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\frac{u}{v}=2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x>-1 \\ 4x^2-5x+3=0 \end{array}\right. : \text{ គ្មានឫស}$$

$$\frac{u}{v}=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>-1 \\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2} \end{array}\right.$$

សមីការមានឫសពីរ $x = \left(5\pm\sqrt{37}\right)/2$ ។

114. ▲ យើងមាន

$$1+\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x};$$

$$1+\frac{1}{\frac{x+1}{x}} = 1+\frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1};$$

$$1+\cfrac{1}{\cfrac{2x+1}{x+1}}=1+\frac{x+1}{2x+1}=\frac{3x+2}{2x+1};$$
$$1+\cfrac{1}{\cfrac{3x+2}{2x+1}}=1+\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{5x+3}{3x+2};$$
$$\dots$$

ជាបញ្ចប់យើងទទួលបានសមីការដែលមានរាង

$$\frac{ax+b}{cx+d}=x \quad (*)$$

ដែល a, b, c, d ជាចំនួនគត់ដែលអាស្រ័យនឹងចំនួនគត់ n ។ សមីការ (*) សមមូលនឹងសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax+b=x(cx+d)$ ដែលមានឫសយ៉ាងច្រើនចំនួនពីរ ។

យើងដឹងថា បើ

$$1+\frac{1}{x}=x$$

នោះយើងអាចសម្រួលតួនីមួយៗក្នុងប្រភាគនៃអង្គខាងឆ្វេងរបស់សមីការម្តងមួយៗ ដូចខាងក្រោម

$$1+\frac{1}{x}\longrightarrow x$$
$$1+\frac{1}{x}\longrightarrow x$$
$$\dots.$$

ទីបំផុតយើងទទួលបាន $x=x$ ។ ដូច្នេះ បើ $1+\frac{1}{x}=x$ នោះសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ ករណីនេះ យើងទាញបាន

$$1+\frac{1}{x}=x \iff x^2-x-1=0$$
$$\Longrightarrow \quad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

ដោយសមីការដែលត្រូវដោះស្រាយមានឫសតែពីរ ហើយ $x_{1,2}=\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការនោះ ដូច្នេះមានន័យថា សមីការមានឫសពីរនេះគឺ $x_{1,2}=\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2$ ។

115. ▲ តាង $y_i=1/x_i$ ។ យើងបំលែងសមីការជា

$$0=1+y_1+(1+y_1)y_2+\cdots+(1+y_1)\dots(1+y_{n-1})y_n$$

$= (1 + y_1)(1 + y_2) \dots (1 + y_n)$
ចម្លើយរបស់សមីការនេះគឺ $(y_1, \dots, y_n)$ ដែល $y_i \neq 0$ ចំពោះគ្រប់ i និង $y_j = -1$ ចំពោះសន្ទស្សន៍ j យ៉ាងហោចណាស់មួយ ។ យើងទាញបានឫសសមីការដើម ជា $(x_1, \dots, x_n)$ ដែល $x_i \neq 0$ ចំពោះគ្រប់ i និង $x_j = -1$ ចំពោះសន្ទស្សន៍ j យ៉ាងហោចណាស់មួយ ។

116. ▲ដោយ a, b, c ជាចំនួនពិតខុសៗគ្នា ដូច្នេះពួកវាជាឫសពិតនៃសមីការ $t^3 + xt + y = 0$ ។ ផលបូកឫសទាំងបីនៃសមីការនេះស្មើសូន្យ ។ ដូច្នេះ $a + b + c = 0$ ។

117. ▲សមមូលភាពសមមូលនឹង

$$[x^3 + y^3 - 10^3 + 30xy] + [(x + y)^3 - 10^3] = 0$$

ដោយដឹងថា

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 10^3 + 30xy &= (x + y)^3 - 10^3 - 3xy(x + y) + 30xy \\ &= (x + y - 10)[(x + y)^2 + 10(x + y) + 100] \\ &\quad - 3xy(x + y - 10) \\ &= (x + y - 10)[(x + y)^2 + 10(x + y) + 100 - 3xy] \end{aligned}$$

$$(x + y)^3 - 10^3 = (x + y - 10)[(x + y)^2 + 10(x + y) + 100]$$

$$\begin{aligned} &[x^3 + y^3 - 10^3 + 30xy] + [(x + y)^3 - 10^3] \\ &= (x + y - 10)[2(x + y)^2 + 20(x + y) + 200 - 3xy] \\ &= (x + y - 10)[2x^2 + 2y^2 + 20(x + y) + xy + 200] \end{aligned}$$

យើងមាន $2x^2 + 2y^2 + 20(x + y) + xy + 200 > 0$ ព្រោះ x, y វិជ្ជមាន ។ ដូច្នេះ ផលគុណ $(x + y - 10)[2x^2 + 2y^2 + 20(x + y) + xy + 200]$ ស្មើសូន្យទាល់តែ $x + y = 10$ ។

118. ▲យើងមាន $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 6) = 3(8 - a^2)$ ។ សមីការមានឫសពិតទាល់តែ

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow a \leq 2\sqrt{2}$$

ករណី $a \leq 2\sqrt{2}$ យើងទាញបាន

$$a^3 = 6(a + 1)$$

$$\Longrightarrow 6 = a(a^2-6)$$

តាង $y = a(a^2-6)$ ។ យើងមាន $y' = 3a^2 - 6 = 3(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})$ ។ ចំពោះ $a \le 2\sqrt{2}$ យើងទាញបាន $6 = y \le 2\sqrt{2}(8-6) = 4\sqrt{2}$ មិនពិត ។

a		$-\sqrt{2}$				$\sqrt{2}$	
y'	$+$		$-$	¦	$-$		$+$
y	↗		↘	○	↘		↗

119. ▲ តាង

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = u, \qquad \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = v$$

ដូច្នេះ $x = u + v$ ។ ដូច្នេះ

$$x^3 = (u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = u^3 + v^3 + 3uvx$$

តែ

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad uv = -\frac{p}{3}$$

ដូច្នេះ

$$x^3 = -q + 3\left(-\frac{p}{3}\right)x \iff x^3 + px + q = 0$$

ពិត ។

120. ▲ ក) យើងមាន

$$\begin{aligned}
&a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
&= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) - 3abc \\
&= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) \\
&= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab] \\
&= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)
\end{aligned}$$

ខ) តាង $x = y + t$ ។ ជំនួសចូលសមីការ $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
&y^3 + 3ty^2 + 3t^2y + t^3 + A(y^2 + 2yt + t^2) + B(y+t) + C = 0 \\
&\iff y^3 + (3t+A)y^2 + (3t^2 + 2At + B)y + t^3 + At^2 + Bt \\
&+ C = 0
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ បើយើងយក $3t + A = 0 \Rightarrow t = -A/3$ នោះ យើងទាញបានសមីការ

$$y^3 + \left(3\frac{A^2}{9} - 2\frac{A^2}{3} + B\right)y + \left(-\frac{A^3}{27} + \frac{A^3}{9} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + \left(-\frac{A^2}{3} + B\right)y + \left(\frac{2}{27}A^3 - \frac{1}{3}AB + C\right) = 0$$

ដូច្នេះ សមីការ $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ អាចបំលែងទៅជា សមីការ

$y^3 + px + q = 0$ ដែល

$$p = -\frac{A^2}{3} + B;\ \ q = \frac{2}{27}A^3 - \frac{1}{3}AB + C$$

គ) ដំបូងយើងកំណត់ a, b ដែល $x^3 + px + q = x^3 + a^3 + b^3 - 3abx$ ។ ដូច្នេះ យើងមាន

$$a^3 + b^3 = q;\ ab = -\frac{p}{3} \ \Leftrightarrow\ a^3 + b^3 = q; a^3b^3 = -\frac{p^3}{27}$$

ដូច្នេះ a^3 និង b^3 ជាឫសនៃសមីការ $z^2 - qz - \frac{p^3}{27} = 0$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\ \ b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

យើងឃើញថា បើ $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$ នោះ a, b ជាចំនួនពិត តែបើ $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ នោះ a, b ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

យើងមាន

$$x^3 + a^3 + b^3 - 3abx = (x + a + b)(x^2 + a^2 + b^2 - xa - ab - bx)$$

យើងទាញបាន ឫសរបស់សមីការដឺក្រេទី៣ កំណត់ដោយ

$$x_1 = -a - b = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, -\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

និង ឫសរបស់សមីការ

$$x^2 - (a + b)x + a^2 + b^2 - ab = 0$$

ដែលមានឫស

$$x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2} i,$$
$$x_3 = \frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2} i$$

ឧទាហរណ៍ ដោះស្រាយសមីការ $x^3 - 6x + 4 = 0$ ។

យើងមាន

$$p = -6, q = 4, \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -4 = (2i)^2$$
$$a = \sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{2}\,\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right)$$
$$b = \sqrt[3]{2-2i} = \sqrt{2}\,\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2l\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2l\pi}{3}\right)\right)$$

ដែល $k, l \in \mathbb{Z}$ ។

យើងឃើញថា a, b អាចមានតម្លៃច្រើនយ៉ាង ដើម្បីឱ្យសមភាព $x^3 + px + q = x^3 + a^3 + b^3 - 3abx$ ពិត ។ តែ យើងអាចជ្រើសរើសយកគូ a, b ណាក៏បាន ។ យើងយក

$$a = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right);\ \ b = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

ដូច្នេះសមីការដឺក្រេទី៣ $x^3 - 6x + 4 = 0$ សមមូលនឹង

$$\left(x + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}\right)\left(x^2 - 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}x + 4\left(\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}\right) - 2\right) = 0$$

សមីការនេះមានឫស

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} \\ x_2 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\frac{\pi}{12} \\ x_3 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\frac{\pi}{12} \end{array}\right.$$

121. ▲ តាង $y_1 = \sqrt{4x + \sqrt{16x + \sqrt{\ldots + \sqrt{4^{2008}x + 3}}}}$ ដូច្នេះ

$$\sqrt{x + y_1} - \sqrt{x} = 1 \implies \sqrt{x + y_1} = \sqrt{x} + 1 \implies y_1 = 2\sqrt{x} + 1$$

តាង $y_2 = \sqrt{16x + \sqrt{\ldots + \sqrt{4^{2008}x + 3}}}$ ដូច្នេះ

$$y_1 = \sqrt{4x + y_2} \implies \sqrt{4x + y_2} = 2\sqrt{x} + 1 \implies y_2 = 2^2\sqrt{x} + 1$$

...

ធ្វើរបៀបដូចគ្នានេះ ជាបន្តបន្ទាប់ យើងទទួលបាន $y_{2007} = 2^{2007}\sqrt{x} + 1$ ដែល

$$y_{2007} = \sqrt{4^{2007}x + \sqrt{4^{2008}x + 3}}$$

ដូច្នេះ

$$\sqrt{4^{2007}x + \sqrt{4^{2008}x + 3}} = 2^{2007}\sqrt{x} + 1$$
$$\implies \sqrt{4^{2008}x + 3} = 2^{2008}\sqrt{x} + 1$$
$$\implies 3 = 2^{2009}\sqrt{x} + 1$$
$$\implies x = \frac{1}{2^{4016}}$$

122. ▲ សន្មតថា $20(b - a)$ ជាចំនួនគត់ និង $b > a$ ។ ដូច្នេះ

$$20(b - a) > 0 \iff 20(b - a) \geq 1$$
$$\implies b - a \geq \frac{1}{20}$$
$$\implies a \leq b - \frac{1}{20}$$

ដើម្បីឱ្យសមីការ

$$(x^2 + 20ax + 10b)(x^2 + 20bx + 10a) = 0$$

គ្មានឫស នោះត្រូវតែ

$$\Delta = 100b^2 - 10a < 0 \implies 10b^2 < a$$
$$\implies 10b^2 < a \leq b - \frac{1}{20}$$
$$\implies 10b^2 - b + \frac{1}{20} < 0$$

តែ $10b^2 - b + 1/20 > 0$ ចំពោះគ្រប់ b ព្រោះ $\Delta = 1 - 4(10)(1/20) = -1 < 0$ ។ ដូច្នេះ ការសន្មតមិនអាចពិត មានន័យថា $20(b - a)$ មិនអាចជាចំនួនគត់ទេ ។

២.៤ ប្រព័ន្ធសមីការ

123. $\{(-4/9\,;20/9);(2;1)\}$. **124.** $\{(-1;3);(71/21\,;-25/7)\}$.

125. $\{(51;24{,}5)\}$.

126. $\{\,(-19{,}6\,;5{,}2);\ (-14;8)\}$.● ដាក់អង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការទីមួយជារាង $(x+3y)^2-6(x+3y)-40$ ហើយតាង $x+3y=t$ ។

127. $\{(2;3);(3;2)\}$. **128.** $\{(4;-1);(1;-4)\}$.
129. $\{(1;3);(3;1)\}$. **130.** $\{(1;2);(2;1)\}$
131. $\{(-1/2\,;-1/3);(1/3;1/2)\}$. **132.** $\{(-1;2);(2;-1)\}$
133. $\{(3;2);(2;3)\}$ **134.** $\{(-1;-4);(4;1)\}$.
135. $\{(-3;4);(4;-3)\}$.
136. $\{(5+\sqrt{28};-5+\sqrt{28});(5-\sqrt{28};-5-\sqrt{28});(5;2);(-2;-5)\}$.
137. $\{(0{,}6;0{,}3);(0{,}4;0{,}5)\}$. **138.** $\{(-1;2);(-1/4\,;-1/4)\}$
139. $\left\{\begin{matrix}(2;1);(1;2);\left((5+\sqrt{21})/2\,;(5-\sqrt{21})/2\right);\\ \left((5-\sqrt{21})/2\,;(5+\sqrt{21})/2\right)\end{matrix}\right\}$.● តាង $x+y=u, xy=v$ បន្ទាប់មក $-u+v=z$ និង $uv=t$ ។

140. $\left\{\begin{matrix}\left(-(25+5\sqrt{61})/9\,;(5+\sqrt{61})/9\right);\\ \left((-25+5\sqrt{61})/9\,;(5-\sqrt{61})/9\right);(-6;-4/3);(3/2;1/3)\end{matrix}\right\}$. ● តាង $x=yt$.

141. $\{(-1;3);(1;-3);\left(16/\sqrt{11};1/\sqrt{11}\right);\left(-16/\sqrt{11}\,;-1/\sqrt{11}\right)\}$.

142. $\{(1;2);(-1;-2);(\sqrt{2};\sqrt{2});(-\sqrt{2};-\sqrt{2})\}$.

143. $\left\{\begin{matrix}\left((2+\sqrt{19})/\sqrt[3]{14+4\sqrt{19}}\,;-3/\sqrt[3]{14+4\sqrt{19}}\right);\\ \left((-2+\sqrt{19})/\sqrt[3]{-14+4\sqrt{19}}\,;3/\sqrt[3]{-14+4\sqrt{19}}\right);(2;-1)\end{matrix}\right\}$.

144. $\{(2;1)\}$. ▲ គុណសមីការទីពីរនឹង 2 រួចបូកចូលសមីការទីមួយ បន្ទាប់មកគុណសមីការទីពីរជាដែលនឹង -2 រួចបូកចូលសមីការទីមួយចាស់ យើងទាញបានប្រព័ន្ធថ្មី

$$\begin{cases}16x^2+8xy+y^2-72x-18y+81=0\\4x^2-12xy+9y^2-4x+6y+1=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(4x+y)^2-18(4x+y)+81=0\\(2x-3y)^2-2(2x-3y)+1=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x+y=9\\2x-3y=1\end{cases}$$

145. $\{(0;1/\sqrt{3});(0;-1/\sqrt{3});(1;1);(-1;-1)\}$.

146. $\{(2/7\,;-9/7);(1;3)\}$.

147. $\{(2;6);(1;3)\}$. **148.** $\{(2\sqrt{2};-\sqrt{2});(-2\sqrt{2};\sqrt{2})\}$.

149. $\{(\sqrt{6};\sqrt{6}/3);(-\sqrt{6};-\sqrt{6}/3)\}$

150. $\{(2;1;-1);(31/15\,;17/15\,;-2/3)\}$.

151. $\{(1;2;2);(2;1;1)\}$

152. $\left\{\begin{matrix}(3;-2;1);(-2;3;1);\left((3+\sqrt{17})/2\,;(3-\sqrt{17})/2\,;-1\right);\\ \left((3-\sqrt{17})/2\,;(3+\sqrt{17})/2\,;-1\right)\end{matrix}\right\}$.

153. $\{(3;1;-2);(-5;-3;0)\}$.

154. $\{(3;5;-1);(-3;-5;1)\}$

155. $\left\{\begin{matrix}(2;-1;3);(-2;1;-3);\left(-7/\sqrt{13}\,;5/\sqrt{13}\,;-11/\sqrt{13}\right);\\ \left(7/\sqrt{13}\,;-5/\sqrt{13}\,;11/\sqrt{13}\right)\end{matrix}\right\}$.

156. $\{(-4;-3;1);(4;3;-1)\}$. **157.** $\{(1/2;1/3;1/4)\}$.

158. $\{(-1;1;0);(1;-1;0)\}$. **159.** $\{(3;3;3)\}$.

160. $\{(16;30)\}$. **161.** $\{(41;40)\}$.

162. $\{(c;c-1)|c\in\mathbb{R}\setminus\{1/2\}\}$. **163.** $\{(-1/2\,;-2/5);(5;4)\}$.

164. $\left\{\left(\sqrt{(3\sqrt{109}+9)/2}\,;\sqrt{(3\sqrt{109}-9)/2}\right);(-5;-3)\right\}$.

165. $\{(0;a+\sqrt{a^2+3})\}$ ចំពោះ $a\in(-\infty;\sqrt{3})$; $\{(0;a+\sqrt{a^2+3});(0;-a-\sqrt{a^2-3});\ (0;-a+\sqrt{a^2-3})\}$ ចំពោះ $a\in[\sqrt{3};\infty)$ ។

166. $\{(1;1;0)\}$. ▲ សមីការទីមួយ យើងទាញបាន $x=2-y$ ។ ជំនួសចូលសមីការទីពីរ យើងទាញបាន

$$\begin{gathered}2y-y^2-z^2=1\\ \Rightarrow\ \ z^2+(y-1)^2=0\\ \Rightarrow z=0;y=1\end{gathered}$$

167. $\{-1/4\}\cup[0;\infty)$.

168. ក) 25. ▲ គុណសមីការទីមួយនឹង α និងសមីការទីពីរនឹង β ដែល $\alpha\beta\neq 0$ បន្ទាប់មកបូកចូលគ្នា យើងទាញបាន ៖

$$\left(\frac{2\alpha}{3}+\beta\right)x+\left(\frac{4\alpha}{5}+\beta\right)y+\left(\frac{5\alpha}{6}+\beta\right)z=61\alpha+79\beta$$

យើងយក $2\alpha/3+\beta=0;4\alpha/5+\beta=2/5\,;\ 5\alpha/6+\beta=1/2$ ។ យើងទាញបាន $\alpha=3,\beta=-2$ ។ ដូច្នេះ $2/5\,y+z/2=61\alpha+79\beta=15$ ។

ខ) $\{(27;10;42)\}$. ▲ ដោយសារ x,y,z ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះ $x=3k;y=5l;z=6m$ ដែល $k;l;m\in\mathbb{N}$ ។ ប្រព័ន្ធសមីការសមមូលនឹង

$$\begin{cases}4l+5m=61-2k\\5l+6m=79-3k\end{cases}$$

យើងទាញបាន $l=29-3k$ និង $m=2k-11$ ។ ដោយ $k;l;m\in\mathbb{N}$នោះ

$$\begin{cases}k>0\\29-3k>0\\2k-11>0\end{cases}$$

យើងទាញបាន $k=9$ ។

169. ▲ ចំពោះ $a=0$ យើងទាញបាន $(x,y,z)=(0,0,0)$ ។ ចំពោះ $a\neq 0$ យើងទាញបាន $(x,y,z)\in\{(t_1,t_2,z_0);(t_2,t_1,z_0)\}$ ដែល

$$z_0=\frac{a^2-b^2}{2a};\ t_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4a}$$

ដើម្បីឱ្យចម្លើយវិជ្ជមាននិងខុសគ្នា លក្ខខណ្ឌចាំបាច់នឹងគ្រប់គ្រាន់គឺ $3b^2>a^2>b^2$ និង $a>0$ ។

170. ▲ បូកសមីការទាំងអស់បញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន $2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=y(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$ ។ បើ $y=2$ នោះយើងទាញបាន $x_1-x_2=x_2-x_3=\cdots=x_5-x_1$ ដូច្នេះ $x_1=x_2=\cdots=x_5$ ជាចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធ ។ បើ $y\neq 2$ នោះ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$ ។ បូកសមីការទីបីខាងដើមចូលគ្នា យើងទាញបាន $x_2=y(x_1+x_2+x_3)$ ។ ដោយ $x_1+x_3=yx_2$ នោះ $x_2=(y^2+y)x_2,\Rightarrow(y^2+y-1)x_2=0$ ។ បើ $y^2+y-1\neq 0$ នោះ $x_2=0$ ដូចគ្នា យើងទាញបាន $x_1=x_2=\cdots=x_5=0$ ។ បើ $y^2+y-1=0$ នោះ បូកសមីការទីមួយនិងទីពីរ យើងទាញបាន $x_5+x_2+x_1+x_3=yx_1+yx_2\Rightarrow x_3+x_5=yx_1+yx_2-x_2-x_1\Rightarrow x_3+x_5=-y^2x_2-y^2x_1\Rightarrow x_3+x_5=-y(x_1+x_3)-y(x_5+x_2)\Rightarrow x_3+x_5=yx_4$ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបានសមីការទី៥ ។ មានន័យថា សមីការទី៤និងទី៥ អាស្រ័យលីនេអ៊ែរនឹងសមីការបីខាងលើ ។ យក $x_1=u;x_5=v$ ។ យើងទាញបាន $x_2=yu-v;x_3=y^2u-yv-u;x_4=y^3u-y^2v-2yu+v$ ។

171. ▲ សន្មតថា (x_1, x_2, x_3) ជាចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធ ។ យើងអាចសន្មតថា $|x_1| \ge |x_2| \ge |x_3|$ ។ សន្មតថា $|x_1| > 0$ ។ ពីសមីការទីមួយ យើងទាញបាន

$$0 = |x_1|.\left|a_{11} + a_{12}\frac{x_2}{x_1} + a_{13}\frac{x_3}{x_1}\right| \ge |x_1|.(a_{11} - |a_{12}| - |a_{13}|) > 0$$

មិនអាច ។ ដូច្នេះ $|x_1| = 0$ នាំឱ្យ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ។

172. ▲ បើមានចំនួនណាមួយស្មើសូន្យ ឧបមាថា $x_1 = 0$ នោះ $x_1 + x_2x_3x_4 = 2 \Longrightarrow x_2x_3x_4 = 2; x_2 + x_1x_3x_4 = 2 \Longrightarrow x_2 = 2; \dots; x_3 = x_4 = 2$ មិនអាច ។ ដូច្នេះគ្មានចំនួនណាមួយអាចស្មើសូន្យបានទេ ។ តាង $x_1x_2x_3x_4 = p$ ។ សម្មតិកម្មសមមូលនឹង $x_i + p/x_i = 2, i = 1,2,3,4$ ។ សមីការ $x + p/x = 2$ មានឫសយ៉ាងច្រើនចំនួនពីរ តាងដោយ y និង z ។ ដូច្នេះ x_i នីមួយៗអាចស្មើ y ឬស្មើ z ។ យើងមានបីករណី ៖

❶ $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = y$ ។ ដូច្នេះ $y + y^3 = 2$ នាំឱ្យ $y = 1$ ។

❷ $x_1 = x_2 = x_3 = y, x_4 = z$ ។ ដូច្នេះ $z + y^3 = y + y^2z = 2$ ។ យើងទាញបាន $(y; z) = \{(-1; 3); (1; 2)\}$

❸ $x_1 = x_2 = y, x_3 = x_4 = z$ ។ ករណីនេះយើងទាញបាន $y = z = 1$ ។

ដូច្នេះឫស $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ គឺ $\{(1; 1; 1; 1); (-1; -1; -1; 3)\}$ និងចំលាស់របស់វា ។

173. ▲ តាង $L_1 = |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4$ និងដូចគ្នាចំពោះ L_2, L_3 និង L_4 ។ សន្មតថា $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ។ នៅក្នុងករណីនេះ

$$\begin{aligned} 2|a_1 - a_2||a_2 - a_3|x_2 &= |a_3 - a_2|L_1 - |a_1 - a_3|L_2 + |a_1 - a_2|L_3 \\ &= |a_3 - a_2| - |a_1 - a_3| + |a_1 - a_2| = 0 \\ 2|a_2 - a_3||a_3 - a_4|x_3 &= |a_4 - a_3|L_2 - |a_2 - a_4|L_3 + |a_2 - a_3|L_4 \\ &= |a_4 - a_3| - |a_2 - a_4| + |a_2 - a_3| = 0 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងទាញបាន $x_2 = x_3 = 0$ ហើយនាំឱ្យ $x_1 = x_4 = 1/|a_1 - a_4|$ ។ ឫសនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការដែលឱ្យ ។ ចម្លើយផ្សេងទៀតជាចំលាស់នៃចម្លើយមួយនេះ ។

174. ▲ បើមួយក្នុងចំណោម x, y, z ស្មើ 1 ឬ -1 នោះ $(-1, -1, -1)$ និង $(1,1,1)$ ។ ប្រព័ន្ធគ្មានចម្លើយផ្សេងពីនេះទេ ។ តាង $f(t) = t^2 + t - 1$ ។ បើក្នុងចំណោម x, y, z

មានមួយធំជាង 1 សន្មតថា $x > 1$ យើងមាន $x < f(x) = y < f(y) = y < f(y) = z < f(z) = x$ មិនអាច ។ ដូច្នេះ $x, y, z \leq 1$ ។

ឥលូវសន្មតថា មានមួយក្នុងចំណោម x, y, z សន្មតថា x មានតម្លៃតូចជាង -1 ។ ដោយ $\min f = -5/4$ នោះ យើងមាន $x = f(z) \in [-5/4; -1)$ ។ ដោយ

$f([-5/4; -1)) = (-1; -11/16) \subseteq (-1; 0)$ និង $f((-1; 0)) = [-5/4; -1)$

ដូច្នេះ $y = f(x) \in (-1; 0), z = f(y) \in [-5/4; -1)$ និង $x = f(z) \in (-1,0)$

ផ្ទុយពីការសន្មត ។ ដូច្នេះ $-1 \leq x, y, z \leq 1$ ។

បើ $-1 < x, y, z < 1$ នោះ $x > f(x) = y > f(y) = z > f(z) = x$ មិនអាច ។

175. $(-2; -1); (-14/3; 13/3)$.

176. ▲ តាង $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ និង តាង $\sigma_k, k = 1,2, \ldots, n$ ជាពហុធាស៊ីមេទ្រីបឋមទីk នៃ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ។ ប្រព័ន្ធសមីការដែលឱ្យ $S_k = a^k, k = 1,2, \ldots, n$ ។

តាមរូបមន្តញូតុន យើងទាញបាន

$$k\sigma_k = S_1\sigma_{k-1} - S_2\sigma_{k-2} + \cdots + (-1)^k S_{k-1}\sigma_1 + (-1)^{k-1} S_k, k = 1,2, \ldots, n$$

$$\sigma_1 = a$$

$$k\sigma_2 = S_1\sigma_1 + (-1)^1 S_2 = a.a - a^2 = 0, \sigma_2 = 0$$

$$\ldots$$

$$\Longrightarrow \sigma_1 = a; \;\; \sigma_k = 0 \text{ ចំពោះ } k = 2, \ldots, n$$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀត $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ជាឫសនៃពហុធា $x^n - ax^{n-1}$ មានន័យថា ឫសទាំងនោះស្មើនឹង $a, 0, \ldots, 0$ និងចំលាស់ទាំងអស់ ។

177. ▲ បើ $m \notin \{-2; 1\}$ នោះប្រព័ន្ធមានឫសតែមួយគត់

$$x = \frac{b + a - (1+m)c}{(2+m)(1-m)}; y = \frac{a + c - (1+m)b}{(2+m)(1-m)}; z = \frac{b + c - (1+m)a}{(2+m)(1-m)}$$

ចំនួន x, y, z ជាស៊ីតនព្វន្ត បើនិងមានតែបើ a, b, c ជាស៊ីតនព្វន្តដែរ ។

បើ $m = 1$ នោះប្រព័ន្ធមានចម្លើយ បើនិងមានតែបើ $a = b = c$ ។ ករណី $m = -2$ ប្រព័ន្ធមានចម្លើយ បើនិងមានតែបើ $a + b + c = 0$ ។ នៅក្នុងករណីទាំងពីរនេះ ប្រព័ន្ធមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់ ។

178. ▲ យើងមាន $c_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ n គូ ។ ដូច្នេះ $c_n = 0$ អាចបានតែចំពោះ n សេសតែប៉ុណ្ណោះ ។ សន្មតថា $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_8$ ហើយថា $a_1 \leq 0 \leq a_8$ ។ បើ $|a_1| < |a_8|$ នោះមាន n_0 ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនសេស $n > n_0$ យើងមាន $7|a_1|^n < a_8^n$ ។ ដូច្នេះ $a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n > 7a_1^n + a_8^n > 0$ ផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌដែលថា $c_n = 0$ ចំពោះតំលៃ n ច្រើនរាប់មិនអស់ ។ ដូចគ្នាករណី $|a_1| > |a_8|$ ក៏មិនអាចដែរ ។ យើងទាញបាន $a_1 = -a_8$ ។ តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបាន $a_2 = -a_7; a_3 = -a_6$ និង $a_4 = -a_5$ ។ ហើយ $c_n = 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនសេស n ។

179. ▲ តាង $X = 1 - x; Y = 1 - y; Z = 1 - z; T = 1 - t$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} X^2 = Y \\ Y^2 = Z \\ Z^2 = T \\ T^2 = X \end{cases}$$

យើងទាញបាន $X^4 = Y^2 = Z \implies X^8 = Z^2 = T \implies X^{16} = T^2 = X \implies X(X^{15} - 1) = 0$ ។ យើងទាញបាន

- $X = 0; \implies Y = Z = T = 0 \implies x = y = z = t = 1$

- $X = 1; \implies Y = Z = T = 1 \implies x = y = z = t = 0$

180. ▲ បូកសមីការទាំងអស់បញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$0 = \sum_{i=1}^{1000} \left(x_i^2 + 2\left(\frac{a-1}{2}\right) x_i + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 \right) = \sum_{i=1}^{1000} \left(x_i + \frac{a-1}{2} \right)^2$$

យើងទាញបាន $x_1 = x_2 = \cdots = x_{1000} = (a-1)/2$ ។

181. ▲ តាង $t_1 = x_1 - x_2; t_2 = x_2 - x_3; \ldots; t_n = x_n - x_1$ ។ ប្រព័ន្ធសមីការសមមូលនឹង

$$\begin{cases} 2t_1 = 3t_2 \\ 2t_2 = 3t_3 \\ \quad \ldots\ldots \\ 2t_n = 3t_1 \end{cases}$$

គុណអង្គនឹងអង្គនៃសមីការ យើងទាញបាន $2^n t_1 t_2 \dots t_n = 3^n t_1 t_2 \dots t_n \Rightarrow$ $t_1 t_2 \dots t_n = 0$ ។ ដូច្នេះត្រូវមាន t_i មួយដែលស្មើសូន្យ ។ ហើយដោយ $2t_i = 3t_{i+1}$ នោះ យើងទាញបាន $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$ ហើយ $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ។

182. ▲ យើងមាន $3S = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0 \Rightarrow S = x + y + z \geq 0$ ។ ដូច្នេះក្នុងចំណោម x, y, z ត្រូវតែមានមួយជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។ សន្មតថា $x \geq 0$ ។ យើងទាញបាន

$$y(4 - y) = x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq 4$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន $0 \leq x, y, z \leq 4$ ។ តាង $x = 4\sin^2\alpha$ ដែល $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ។ យើងទាញបាន $z = 4\sin^2 2\alpha\,; y = 4\sin^2 4\alpha$ ។ ហើយ $x = 4\sin^2 8\alpha$ ។ ដូច្នេះ

$$4\sin^2 8\alpha = 4\sin^2\alpha \Rightarrow \cos 16\alpha = \cos 2\alpha$$

នាំឱ្យ

1) $16\alpha = 2\alpha + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{7}\ (k \in \mathbb{Z});$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \{0; 1; 2; 3\}$$

- $k = 0$

$$x = y = 0; \Rightarrow S = 0$$

-$k = 1; 2; 3$

$$\Rightarrow S = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{3\pi}{7}\right) = 7$$

2) $16\alpha = -2\alpha + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{9}\ (k \in \mathbb{Z});$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

- $k = 0$

$$x = y = 0; \Rightarrow S = 0$$

- $k = 1; 2; 4$

$$\Rightarrow S = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{4\pi}{9}\right) = 6$$

- $k = 3$

$$\Rightarrow S = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{2\pi}{3} + \sin^2\frac{4\pi}{3}\right) = 9$$

183. $\{(1;1;1);(-2;-2;-2)\}$ ▲ យកសមីការទីមួយដកសមីការទីពីរ សមីការទីពីរដកសមីការទីបី យើងទាញបាន

$$(x-y)(1-z)=0; \quad (1)$$
$$(y-z)(1-x)=0 \quad (2)$$

$(1) \Longrightarrow \ x=y$ ឬ $z=1$

$(2) \Longrightarrow \ y=z$ ឬ $x=1$

យើងទាញបានបួនករណី

$$(x=y=z);(x=y;x=1);(z=1;y=z);(z=1;x=1)$$

ករណីទាំងបួននេះ ត្រូវនឹង $x=y=z=1$ ឬ $x=y=z=-2$ ។

184. ▲ យើងសិក្សាករណី $a>0$ ព្រោះ $a\neq 0$ ។ ករណី $a<0$ គុណអង្គសមីការនឹងសញ្ញាដក ។

បូកសមីការទាំងបីនៃប្រព័ន្ធបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$[ax^2+(b-1)x+c]+[ay^2+(b-1)y+c]+[az^2+(b-1)z+c]=0$$

តាង $f(t)=at^2+(b-1)t+c$ ។ យើងមាន

$$f(x)+f(y)+f(z)=0 \qquad (*)$$

បើ $\Delta=(b-1)^2-4ac<0$ នោះ $f(t)>0$ ចំពោះគ្រប់ $t\in\mathbb{R}$ ព្រោះ $a>0$ ។

ដូច្នេះ

$$f(x)+f(y)+f(z)>0$$

ផ្ទុយពីសមីការ(*) ។

185. ▲ ជំនួស $y=-x$ ចូលក្នុងប្រព័ន្ធ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} x^3+ax^3=\frac{1}{2}(a+1)^2 & (1)\\ 2x^3-ax^3=1 & (2)\end{cases}$$

សមីការទី២ យើងទាញបាន $x\neq 0$ ។ បូកសមីការទាំងពីរចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$3x^3=\frac{1}{2}(a+1)^2+1>0; \Rightarrow x>0$$

យកសមីការទី១ចែកនឹងសមីការទី២ យើងទាញបាន

$$\frac{a+1}{2-a}=\frac{1}{2}(a+1)^2 \ \Rightarrow a=0;\ -1;1$$

ចំពោះ $a = 0$ យើងមាន

$$\begin{cases} x^3 = \dfrac{1}{2} \\ x^3 + xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

ឫសដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គឺ $x = 1/\sqrt[3]{2}\,; y = -1/\sqrt[3]{2}$ ។

ចំពោះ $a = -1$ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - x^2y + xy^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases}$$

ចំពោះ $a = 1$ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 2 \\ x^3 + x^2y + xy^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 2 \\ 2x^3 + 2x^2y + 2xy^2 = 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = 0$$
$$\Rightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) + 2xy(x+y) = 0$$
$$\Rightarrow (x+y)(x^2 + xy + y^2) = 0$$
$$\Rightarrow x + y = 0$$
$$\Rightarrow x = 1; y = -1$$

ដូច្នេះ $a = \{-1; 0; 1\}$ ប្រព័ន្ធមានឫសផ្ទៀងផ្ទាត់ លក្ខខណ្ឌ ។

186. ▲ប្រព័ន្ធសមមូលនឹង

$$\begin{cases} 3x^2 - 2(3+z)x + 3z + 3 = 0 \quad (1) \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2 \quad (2) \\ y^2 = -z^2 + 6z \quad (3) \\ z \le 3 \quad (4) \end{cases}$$

សមីការ(១) មានឫស បើ $\Delta' = (3+z)^2 - 3(3z+3) \ge 0 \quad \Rightarrow z \le 0\,; z \ge 3$ (៥) ។ សមីការទីពីរមានឫសបើ $-z^2 + 6z \ge 0 \quad \Rightarrow 0 \le z \le 6$ (៦) ។ ពី(៤) (៥)(៦)យើងទាញបាន $z = 0; z = 3$ ។

បើ $z = 0$ នោះ តាម(៣) យើងទាញបាន $y = 0;$ និងពី(២) យើងទាញបាន $x = 1; x = 2$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់តាម(១) យើងទាញបាន $x = 1$ ។

បើ $z=3$ នោះ តាម(៣) យើងទាញបាន $y=\pm 3$ ។ ពី(១) យើងទាញបាន $x=2$ ។

ចំពោះ $x=2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់តាម(២) យើងទាញបាន $y=-3$ ។ ដូច្នេះ

$$(x;y;z)=\{(1;0;0);(2;-3;3)\}$$

187. ▲ គុណសមីការទីមួយទីពីរនិងទីបី នឹង c,a,b រៀងគ្នា យើងទាញបាន

$$\begin{cases}\dfrac{ac}{x}-\dfrac{bc}{z}=c^2-czx\\ \dfrac{ab}{y}-\dfrac{ac}{x}=a^2-axy\\ \dfrac{bc}{z}-\dfrac{ab}{y}=b^2-byz\end{cases}$$

បូកសមីការទាំងបីបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$a^2+b^2+c^2=axy+bzy+cxz \qquad (1)$$

បំបាត់ភាគបែងនៃប្រព័ន្ធដើម

$$\begin{cases}az-bx=cxz-z^2x^2\\ bx-cy=axy-x^2y^2\\ cy-az=bzy-y^2z^2\end{cases}$$

បូកបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=axy+bzy+cxz \qquad (2)$$

បូក(១)នឹង(២) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=2(axy+bzy+cxz)\\ \Longrightarrow\ &(xy-a)^2+(zy-b)^2+(xz-c)^2=0\\ \Longrightarrow\ &\begin{cases}xy=a\\ zy=b\\ xz=c\end{cases}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\quad (x;y;z)=\left\{\left(\sqrt{\frac{ac}{b}};\sqrt{\frac{ab}{c}};\sqrt{\frac{bc}{a}}\right);\left(-\sqrt{\frac{ac}{b}};-\sqrt{\frac{ab}{c}};-\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)\right\}$$

188. ▲ ប្រព័ន្ធមានឫសងាយ $(0;0;0)$ ។ បើ $x=\pm 1$ នោះ $\pm 2+y=y$ មិនអាច ។

ដូចគ្នាយើងទាញបាន $x\neq\pm 1; y\neq\pm 1; z\neq\pm 1$ ។ យើងមាន

$$\begin{cases}2x+x^2y=y\\2y+y^2z=z\\2z+z^2x=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{2x}{1-x^2}\quad(4)\\z=\dfrac{2y}{1-y^2}\quad(5)\\x=\dfrac{2z}{1-z^2}\quad(6)\end{cases}$$

តាង $x=\tan\alpha\neq\pm1\ \Rightarrow\alpha\neq\pm\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$ ។ ពី(៤) យើងទាញបាន $y=\tan2\alpha$ និងពី(៥) យើងទាញបាន $z=\tan4\alpha$ ហើយជាចុងក្រោយ $x=\tan8\alpha=\tan\alpha$ ។ ដូច្នេះ

$$8\alpha=\alpha+n\pi\ \Rightarrow\ \alpha=n\frac{\pi}{7}\ ;(n\in\mathbb{Z})$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធមានឫស $(x;y;z)=\{(\tan n\pi/7\,;\tan n\,2\pi/7\,;\tan n\,4\pi/7)|n\in\mathbb{Z}\}$

189. ▲តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត

$$(x^4+x^2y^2+y^4)(1+1+1)\geq(x^2+xy+y^2)^2$$
$$(y^4+y^2z^2+z^4)(1+1+1)\geq(y^2+yz+z^2)^2$$
$$(z^4+z^2x^2+x^4)(1+1+1)\geq(z^2+zx+x^2)^2$$
$$\Rightarrow27(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)(z^4+z^2x^2+x^4)$$
$$\geq[(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)]^2$$
$$=[xyz]^2$$
$$\Rightarrow27\,x^3y^3z^3\geq x^2y^2z^2$$

$$\Rightarrow xyz\geq\frac{1}{27}\qquad(1)$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $|x|=|y|=|z|$ ។ យើងឃើញថា ផលគុណ xyz វិជ្ជមាន ។ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$x^4+x^2y^2+y^4\geq3\sqrt[3]{x^6y^6}=3x^2y^2$$
$$y^4+y^2z^2+z^4\geq3y^2z^2$$
$$z^4+z^2x^2+x^4\geq3z^2x^2$$
$$\Rightarrow\ (x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)(z^4+z^2x^2+x^4)\geq27x^4y^4z^4$$
$$\Rightarrow x^3y^3z^3\geq27\,x^4y^4z^4$$

ដោយ $xyz>0$ នោះ

$$\Rightarrow xyz\leq\frac{1}{27}\qquad(2)$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $|x|=|y|=|z|$ ។

តាម (1) និង (2) យើងទាញបាន $xyz = 1/27$ និង $|x| = |y| = |z|$ ។

ករណីចំនួនទាំងបីសុទ្ធតែវិជ្ជមាន យើងទាញបាន $x = y = z = 1/3$ ។

ករណីមានពីរ អវិជ្ជមាន សន្មតថា x, y អវិជ្ជមាន ។ យើងទាញបាន $z = 1/3, x = y = -1/3$ ។ ជំនួសចូលសមីការទីមួយនៃប្រព័ន្ធ យើងទាញបាន

$$\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] = \frac{1}{27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}.\frac{1}{9}.\frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការមានឫស $(x, y, z) = (1/3, 1/3, 1/3)$ ។

190. ▲ក) យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+ab}}; \ \forall a, b \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេ យើងទាញបាន

$$\frac{2}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{4}{1+ab} \le 0 \qquad (*)$$

យើងមានវិសមភាព

$$\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} \ge 1 + ab$$
$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} \le \frac{2}{1+ab}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} - \frac{2}{1+ab} \le 0 \qquad (**)$$

យើងមានវិសមភាព

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} = \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+a^2)(1+b^2)} \le 0 \quad (***)$$

ព្រោះ $\forall a, b \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ និង $ab < 1$ ។ តាម(**) និង (***) យើងទាញបាន (*) ពិត ។

ខ) ដែនកំណត់របស់សមីការ

$$\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 0 \le y \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\Longrightarrow\quad \sqrt{2}x,\sqrt{2}y\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right],\sqrt{2}x.\sqrt{2}y<1$ ។ ជំនួស $a=\sqrt{2}x,b=\sqrt{2}y$ ចូលក្នុង វិសមភាព (*) យើងទាញបាន

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាទាល់តែ $x=y$ ។ ជំនួសចូលសមីការទីពីរ យើងទាញបាន

$$x=y=\frac{9+\sqrt{73}}{36};\ \ x=y=\frac{9-\sqrt{73}}{36}$$

191. ▲ តាង

$$A=\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$$

យើងមាន $A^3=x^3-3x+3AB$ ដែល

$$B=\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}.\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{(x^3-3x)^2-(x^2-1)^2(x^2-4)}{4}}=1$$

ដូច្នេះ $\quad A^3-x^3-3x+3A=0$

$$\Leftrightarrow(A-x)(A^2+Ax+x^2-3)=0$$

ដោយ $A>0;x\ge 2;x^2-3>0$ នោះ $A=x$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{cases}x=\sqrt{x+2002}\\x\ge 2\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-x-2002=0\\x\ge 2\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad x=\frac{1+\sqrt{8009}}{2}$$

192. ▲ យើងមាន $\quad a^2-bc=(x^2-yz)^2-(y^2-xz)(z^2-xy)=$ $x(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

$$b^2-ca=y(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$
$$c^2-ab=z(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

តាង $k=x^3+y^3+z^3-3xyz$ ។ យើងមាន

$$(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)=a(a^3+b^3+c^3-3abc)$$
$$\Longrightarrow\quad k^2(x^2-yz)=a(a^3+b^3+c^3-3abc)$$
$$\Longrightarrow k=\pm\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធមានឫស

$$x=\frac{a^2-bc}{k};y=\frac{b^2-ca}{k};z=\frac{c^2-ab}{k}$$

193.▲ តាង $S=x+y;P=xy$ ។ យើងមាន

$$\begin{cases} S+P=m \\ S^2-2P=m \end{cases}$$

1) ចំពោះ $m=5$ យើងមាន

$$\begin{cases} S+P=5 \\ S^2-2P=5 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \ S=\left[\begin{matrix}-5 \\ 3\end{matrix}\right.$$

ចំពោះ $S=-5; \Rightarrow P=10$ ។ យើងមាន $\Delta=S^2-4P=25-40=-15<0$

គ្មានឫស ។

ចំពោះ $S=3; \Rightarrow P=2$ នាំឱ្យ

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases};\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

2) សមីការទី១នាំឱ្យ $P=m-S$ ជំនួសចូលសមីការទី២ យើងទាញបាន

$$S^2+2S-3m=0 \quad (*)$$

ដើម្បីឱ្យវាមានឫស នោះចាំបាច់ត្រូវតែ

$$\Delta'=1+3m\geq 0 \ \Rightarrow m\geq -\frac{1}{3}$$

ក្នុងករណីនេះ(*) មានឫសពីរ $S_1;S_2$ ដែល

$$S_1=-1-\sqrt{1+3m};\ S_2=-1+\sqrt{1+3m}$$

ក) ចំពោះ $S=S_1 \ \Rightarrow P=m-S$ ។ លក្ខខណ្ឌ $S^2\geq 4P$ សមមូលនឹង

$$\left(1+\sqrt{1+3m}\right)^2\geq 4\left(m+1+\sqrt{1+3m}\right) \ \Rightarrow \ -(m+2)\geq 2\sqrt{1+3m}$$

គ្មានឫសព្រោះ $m\geq -\frac{1}{3} \ \Rightarrow m+2>0$ ។

ខ) ចំពោះ $S=S_2 \ \Rightarrow P=m-S$ ។ លក្ខខណ្ឌ $S^2\geq 4P$ សមមូលនឹង

$$\left(-1+\sqrt{1+3m}\right)^2\geq 4\left(m+1-\sqrt{1+3m}\right) \ \Rightarrow \ 2\sqrt{1+3m}\geq m+2>0$$
$$\Rightarrow 4(1+3m)\geq m^2+4m+4 \ \Rightarrow 0\geq m^2-8m \ \Rightarrow 0\leq m\leq 8$$

194.▲ យើងមាន

$$(a+\ b+c+d)^2\ =a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$\Rightarrow 20^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(150)$$

$\Longrightarrow\ a^2+b^2+c^2+d^2=100$

តែ

$$\begin{aligned}100 &= \frac{1}{3}[(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(a^2+d^2)+(b^2+c^2)+(b^2+d^2)\\ &\qquad +(c^2+d^2)]\\ &\geq \frac{2}{3}[ab+ac+ad+bc+bd+cd]\\ &= \frac{2}{3}(150)=100\end{aligned}$$

ដូច្នេះ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាបើនិងមានតែ $a=b=c=d\ \Longrightarrow a=b=c=d=5$ ។

195. ▲ ជំនួស a,b,c ចូលក្នុងប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}a^3-abc=2\\ b^3-abc=6\\ c^3-abc=20\end{cases}\quad (*)$$

តាង $abc=p$ យើងទាញបាន

$$a=\sqrt[3]{2+p};b=\sqrt[3]{6+p};c=\sqrt[3]{20+p}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}&p=abc=\sqrt[3]{2+p}.\sqrt[3]{6+p}.\sqrt[3]{20+p}\\ &\Longrightarrow p^3=(2+p)(6+p)(20+p)\\ &\Longrightarrow p=\left\{-4;\ -\frac{15}{7}\right\}\end{aligned}$$

រួចបូកសមភាព (*) ចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$a^3+b^3+c^3=28+3abc=28+3p$$

ចំពោះ $p=-15/7$ ($a^3+b^3+c^3$ ធំបំផុត) យើងមាន

$$a^3+b^3+c^3=28+3\left(-\frac{15}{7}\right)=\frac{151}{7}=\frac{m}{n}$$

ដូច្នេះ $m+n=151+7=158$ ។

196. ▲ ពីសមីការទីមួយ យើងមាន $x=2-y$ ជំនួសចូលសមីការទីពីរ យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned}&2y-y^2-z^2=1\ \Leftrightarrow z^2+y^2-2y+1=0\\ &\Leftrightarrow z^2+(y-1)^2=0\end{aligned}$$

តួនីមួយៗក្នុងសមីការក្រោយនេះ សុទ្ធតែជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ដូច្នេះតួនីមួយៗ ត្រូវតែស្មើសូន្យ ។ ដូច្នេះ $z = 0$ និង $y = 1$ នាំឱ្យ $x = 1$ ។

ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយមួយគត់ គឺ $(x, y, z) = (1,1,0)$ ។

197. ▲ ប្រព័ន្ធសមីការមានលក្ខណៈឆ្លុះធៀបនឹង a, b, c, d មានន័យថា បើយើងជំនួស a ដោយ b និង b ដោយ a យើងទទួលបានប្រព័ន្ធសមីការដដែល ។ល។ ដូច្នេះយើងអាចសន្មតថា $a \geq b \geq c \geq d$ សិន បាន ។ យើងឃើញថា $a, b, c, d \geq 0$ ។ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}&(b + c + d)^{2010} \leq (a + c + d)^{2010} \leq (a + b + d)^{2010} \leq (a + b + c)^{2010}\\ &\Rightarrow 3a \leq 3b \leq 3c \leq 3d\\ &\Rightarrow a \leq b \leq c \leq d\end{aligned}$$

តែ $a \geq b \geq c \geq d$ ដូច្នេះ មានតែ $a = b = c = d$ ។ យើងទាញបាន

$$(3a)^{2010} = 3a \Rightarrow a = 0; a = \frac{1}{3}$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការមានឫស $(a, b, c, d) = \{(0,0,0,0); (1/3, 1/3, 1/3, 1/3)\}$ ។

198. ▲❶ វិធីទី១

សមីការទីពីរសមមូលនឹង

$$\frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz} = 4$$

តាង

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{yz}}, y_1 = \frac{b}{\sqrt{zx}}, z_1 = \frac{c}{\sqrt{xy}}$$

ដូច្នេះ

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1y_1z_1 = 4 \quad (*)$$

ដូច្នេះ $0 < x_1, y_1, z_1 < 2$ ។ យើងចាត់ទុកសមីការ (*) ជាសមីការដឺក្រេទី២អញ្ញាត z_1 ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}\Delta &= (x_1y_1)^2 - 4(x_1^2 + y_1^2 - 4) = 16 - 4x_1^2 - 4y_1^2 + (x_1y_1)^2\\ &= (4 - x_1^2)(4 - y_1^2)\end{aligned}$$

តាង $x_1 = 2\sin u, y_1 = 2\sin v$ ដូច្នេះ $0 < u, v < \pi/2$ ។ ដូច្នេះ

$$\Delta = 16\cos^2 u \cos^2 v$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{-x_1y_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-4\sin u \sin v \pm 4\cos u \cos v}{2}$$

តែ $z > 0$ ដូច្នេះ

$$z_1 = \frac{-4\sin u \sin v + 4\cos u \cos v}{2} = 2(\cos u \cos v - \sin u \sin v)$$

ដូច្នេះ

$$a = x_1\sqrt{yz} = 2\sqrt{yz}\sin u$$
$$b = y_1\sqrt{zx} = 2\sqrt{zx}\sin v$$
$$c = z_1\sqrt{yx} = 2\sqrt{yx}(\cos u \cos v - \sin u \sin v)$$

តាមសម្មតិកម្ម

$x + y + z = a + b + c$

$\Rightarrow x + y + z = 2\sqrt{yz}\sin u + 2\sqrt{zx}\sin v + 2\sqrt{yx}(\cos u \cos v - \sin u \sin v)$

$\Leftrightarrow x(\cos^2 v + \sin^2 v) + y(\cos^2 u + \sin^2 u) + z$

$\qquad = 2\sqrt{yz}\sin u + 2\sqrt{zx}\sin v + 2\sqrt{yx}(\cos u \cos v - \sin u \sin v)$

$\Leftrightarrow x\cos^2 v + 2\sqrt{xy}\cos u \cos v + y\cos^2 u + x\sin^2 v + y\sin^2 u + z$

$\qquad - 2\sqrt{yz}\sin u - 2\sqrt{zx}\sin v + 2\sqrt{yx}\sin u \sin v = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u\right)^2 + \left(\sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u - \sqrt{z}\right)^2 = 0$

ដូច្នេះ

$$\begin{cases} \sqrt{x}\cos v = \sqrt{y}\cos u & (1) \\ \sqrt{z} = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u & (2) \end{cases}$$

សមីការ (2) នាំឱ្យ

$$\sqrt{z} = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u = \sqrt{x}.\frac{y_1}{2} + \sqrt{y}.\frac{x_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}.\frac{b}{\sqrt{zx}} + \sqrt{y}.\frac{a}{\sqrt{yz}}\right)$$

$$\Rightarrow z = \frac{a+b}{2}$$

ដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$x = \frac{b+c}{2}; y = \frac{c+a}{2}$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ

$$(x, y, z) = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

❷ វិធីទី២

តាង

$$x=\frac{b+c}{2}-u; y=\frac{c+a}{2}-v; z=\frac{a+b}{2}-w$$
$$\Rightarrow u<\frac{b+c}{2};\ \ v<\frac{c+a}{2};\ \ w<\frac{a+b}{2}$$

តាមសម្មតិកម្ម

$$x+y+z=a+b+c\ \Rightarrow u+v+w=0$$

និង

$$abc+a^2x+b^2y+c^2z=4xyz$$
$$\Leftrightarrow abc+a^2\left(\frac{b+c}{2}-u\right)+b^2\left(\frac{c+a}{2}-v\right)+c^2\left(\frac{a+b}{2}-w\right)$$
$$=4\left(\frac{b+c}{2}-u\right)\left(\frac{c+a}{2}-v\right)\left(\frac{a+b}{2}-w\right)$$
$$\Leftrightarrow abc+\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{2}a^2c-a^2u+\frac{1}{2}b^2c+\frac{1}{2}ab^2-b^2v+\frac{1}{2}ac^2+\frac{1}{2}bc^2-c^2w$$
$$=\frac{1}{2}(b+c-2u)(c+a-2v)(a+b-2w)$$
$$\Leftrightarrow 2abc+a^2b+a^2c-2a^2u+b^2c+ab^2-2b^2v+ac^2+bc^2-2c^2w$$
$$=(bc+ab-2bv+c^2+ac-2cv-2cu-2au+4uv)(a+b-2w)$$
$$\Leftrightarrow 2abc+a^2b+a^2c-2a^2u+b^2c+ab^2-2b^2v+ac^2+bc^2-2c^2w$$
$$=abc+b^2c-2bcw+a^2b+ab^2-2abw-2abv-2b^2v+4bvw+ac^2+bc^2-2c^2w+a^2c+abc-2acw-2acv-2bcv+4cvw-2acu-2bcu+4cuw-2a^2u-2abu+4auw+4auv+4buv-8uvw$$
$$\Leftrightarrow 0=-2bcw-2abw-2abv+4bvw-2acw-2acv-2bcv+4cvw-2acu-2bcu+4cuw-2abu+4auw+4auv+4buv-8uvw$$
$$\Leftrightarrow 0=-2bc(u+v+w)-2ab(u+v+w)+4bvw-2ac(u+v+w)+4cvw+4cuw+4auw+4auv+4buv-8uvw$$
$$\Leftrightarrow 0=4bvw+4cvw+4cuw+4auw+4auv+4buv-8uvw$$
$$\Leftrightarrow 0=4bv(u+w)+4cw(u+v)+4au(v+w)-8uvw$$
$$\Leftrightarrow 0=-4bv^2-4cw^2-4au^2-8uvw$$
$$\Leftrightarrow 0=au^2+bv^2+cw^2+2uvw\qquad(*)$$

សមភាពនេះអាចពិតទៅរួច ទាល់តែ $uvw\le 0$ ។ ដូច្នេះក្នុងចំណោម u,v,w ត្រូវតែមានយ៉ាងណាស់ពីរ ដែលមានតម្លៃមិនអវិជ្ជមាន, សន្មតថា $u,v\ge 0$ ។ ជំនួស $w=-u-v$ ចូលក្នុងសមភាព(*) យើងទាញបាន

$$au^2+bv^2+c(-u-v)^2+2uv(-u-v)=0$$

$$\Leftrightarrow au^2+bv^2+cu^2+cv^2+2cuv-2u^2v-2uv^2=0$$
$$\Leftrightarrow (a+c-2v)u^2+(b+c-2u)v^2+2cuv=0$$

ដោយ $a+c-2v>0; b+c-2u>0; c>0$ ដូច្នេះ មានតែ $u=v=0$ ។

យើងទាញបាន

$$x=\frac{b+c}{2}; y=\frac{a+c}{2}; z=\frac{a+b}{2}$$

199. ▲ យកសមីការទី ១ ដកសមីការទី ២ និង សមីការទី ៥ ដកសមីការទី ៦ យើងទទួលបាន

$$\begin{cases}x_2-x_3=\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)\\ x_2-x_3=\alpha_4(\alpha_2-\alpha_3)\end{cases}$$
$$\Rightarrow \alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)=\alpha_4(\alpha_2-\alpha_3)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)=0 \quad (1)$$

យកសមីការទី ២ ដកសមីការទី ៤ និង សមីការទី ៣ ដកសមីការទី ៥ យើងទទួលបាន

$$\begin{cases}x_1-x_2=\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)\\ x_1-x_2=\alpha_4(\alpha_1-\alpha_2)\end{cases}$$
$$\Rightarrow \alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)=\alpha_4(\alpha_1-\alpha_2)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)=0 \quad (2)$$

សមីការ (1) នាំឱ្យ $\alpha_1=\alpha_4$ ឬ $\alpha_2=\alpha_3$ (អាចថា $\alpha_1=\alpha_4$ និង $\alpha_2=\alpha_3$ ដែរ) ។

យើងសន្មតថា $\alpha_2=\alpha_3=\alpha$ ។ ជំនួសចូល (2) យើងទទួលបាន

$$(\alpha_1-\alpha)(\alpha-\alpha_4)=0$$

ដូច្នេះ $\alpha_1=\alpha$ ឬ $\alpha_4=\alpha$ ។ ដូច្នេះ បើ $\alpha_2=\alpha_3=\alpha$ និង $\alpha_1=\alpha$ ឬមិនអ៊ីចឹងទេ $\alpha_4=\alpha$ នោះ (1) និង (2) ក្លាយជាសមភាព មានន័យថាសមីការទាំង៦ របស់ប្រព័ន្ធសមីការ ត្រូវគ្នា (សមីការ ៤ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការទី៥ និង ទី៦ ផ្សេងទៀត) ដូច្នេះប្រព័ន្ធមានឫស ។ ដូច្នេះដើម្បីឱ្យប្រព័ន្ធសមីការ មានឫស ចាំបាច់ត្រូវតែមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រយ៉ាងតិច ៣ ក្នុងចំណោម $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ ដែលត្រូវតែស្មើគ្នា ។

ពេលនេះយើងសន្មតថា $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$ និង $\alpha_4=\beta$ ។ ដោយ $x_2-x_3=\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)$ និង $x_1-x_2=\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)$ នោះ $x_1=x_2=x_3$ ។

តាង $x_1=x_2=x_3=x$ និង $x_4=y$ ។ ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការទៅជា

$$\begin{cases} 2x = \alpha^2 \\ 2x = \alpha^2 \\ x + y = \alpha\beta \\ 2x = \alpha^2 \\ x + y = \alpha\beta \\ x + y = \alpha\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \alpha^2 \\ x + y = \alpha\beta \end{cases}$$

ដូច្នេះ

$$x = \frac{\alpha^2}{2}$$
$$y = \alpha\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)$$

ដូច្នេះមានបីក្នុងចំណោម x_1, x_2, x_3, x_4 ដែលស្មើ $\alpha^2/2$ និងមួយទៀត ស្មើនឹង $\alpha(\beta - \alpha/2)$ ។

២.៥ វិសមភាព

200. ▲ តាង $A = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\dots.\frac{99}{100}; B = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}\dots\frac{98}{99}$ ។ ដោយ

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}; \frac{4}{5} > \frac{3}{4}; \frac{6}{7} > \frac{5}{6}; \dots; \frac{98}{99} > \frac{97}{98}; 1 > \frac{99}{100}$$

នោះ $B > A$ ។ យើងមាន

$$AB = \left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}.\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{6}.\frac{6}{7}\right)\dots\left(\frac{98}{99}.\frac{99}{100}\right) = \frac{1}{100}$$

ដូច្នេះ $A^2 < AB = \frac{1}{100} \Rightarrow A < \frac{1}{10}$ ។

បន្ទាប់មកទៀត

$$B < 2A = \frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}\dots\frac{99}{100}$$

ព្រោះ $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}; \frac{4}{5} < \frac{5}{6}; \frac{6}{7} < \frac{7}{8}; \dots; \frac{98}{99} < \frac{99}{100}$ ។ ដូច្នេះ

$$A.2A > AB = \frac{1}{100} \quad \Rightarrow A > \frac{1}{10\sqrt{2}}$$

201. ▲ យើងមាន

$$\frac{1}{2^{100}} C_{100}^{50} = \frac{1.2.3 \dots 100}{2^{50}(1.2.3 \dots 50).2^{50}(1.2.3 \dots 50)}$$

$$= \frac{1.2.3\ldots100}{(2.4.6\ldots100)(2.4.6\ldots100)} = \frac{1.3.5..99}{2.4.6\ldots100}$$

ហើយតាមសំនួរ **200.** យើងទាញបានវិសមភាពពិត ។

202. ▲ ដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ យើងមាន

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

ចំពោះ $n = 1$ យើងមាន $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3.1+1}}$ ។ បន្ទាប់មកទៀតសន្មតថាពិតដល់ n មានន័យថា

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

យើងគុណអង្គសង្ខាងនៃវិសមភាពនេះនឹង $\frac{2n+1}{2n+2}$ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}$$

យើងមាន

$$\left[\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}\right]^2 = \frac{(2n+1)^2}{12n^3+28n^2+20n+4}$$
$$= \frac{(2n+1)^2}{(12n^3+28n^2+19n+4)+n}$$
$$= \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2(3n+4)+n} < \frac{1}{3n+4}$$
$$\Rightarrow \frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

203. ▲ អនុវត្តន៍វិសមភាពក្នុងសំនួរទី **202.** ចំពោះ $n = 50$ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2\times50-1}{2\times50} < \frac{1}{\sqrt{3\times50+1}}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{\sqrt{151}} = \frac{1}{12{,}288} < \frac{1}{12}$$

ពិត ។

204. ● ស្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារដោយកំណើន ។

205. ▲ ជាដំបូង យើងនឹងបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $k \leq n$ យើងមាន

$$1+\frac{k}{n}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^k<1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$$

ចំពោះ $k=1$ វិសមភាពពិត ។ សន្មតថាវិសមភាពពិតចំពោះតម្លៃ k ណាមួយ ។ យើងមាន

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right)\ge\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{k}{n^2}>1+\frac{k+1}{n}$$

ពិត (មិនចាំបាច់ទាល់តែ $k\le n$ ទេ) ។

យើងមាន

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2+2k+1}{n^2}-\frac{k+1}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}$$
$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{n(k+1)-k^2}{n^3}$$
$$<1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}$$

ព្រោះ $n(k+1)>k^2$ បើ $n\ge k$ ។ ដូច្នេះដោយយក $k=n$ យើងទាញបាន

$$2=1+\frac{1}{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{n}{n}+\frac{n^2}{n^2}=3$$

206. ▲ តាមសំនួរ **205**. យើងទាញបាន

$$(1{,}000\,001)^{1\,000\,000}=\left(1+\frac{1}{1\,000\,000}\right)^{1\,000\,000}>2$$

207. ▲យើងមាន

$$\frac{1001^{999}}{1000^{1000}}=\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000}.\frac{1}{1001}=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}.\frac{1}{1001}$$
$$<\frac{3.1}{1001}<1$$

(តាមសំនួរ **205**.) ។ ដូច្នេះ $1000^{1\,000}>1001^{999}$ ។

208. ▲ តាង $a=1{,}000\,000\,000\,04$ និង $b=1{,}000\,000\,000\,02$ ។ ដូច្នេះ អ្វីដែលយើងត្រូវប្រៀបធៀប គឺ

$A=\frac{a+1}{a^2+a+1}$ និង $B=\frac{b+1}{b^2+b+1}$ ។

$$\frac{1}{A}=\frac{a^2+a+1}{a+1}=1+\frac{a^2}{a+1}=1+\frac{1}{\frac{a+1}{a^2}}=1+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}$$

$$\frac{1}{B}=1+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}}$$

យើងមាន $a>b$ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}<\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b}\ \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}>\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}}\ \Rightarrow \frac{1}{A}>\frac{1}{B}\ \Rightarrow A<B$$

(b) តាង

$$A=\frac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{1+a+a^2+\cdots+a^n}$$
$$B=\frac{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$$

យើងមាន

$$\frac{1}{A}=1+\frac{a^n}{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}=1+\frac{1}{\frac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{a^n}}$$
$$=1+\frac{1}{\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{a}};$$
$$\frac{1}{B}=1+\frac{1}{\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{b}}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{1}{A}>\frac{1}{B}\ \Rightarrow B>A$$

209. ▲យើងមាន

$$\begin{aligned}&\sqrt{c+1}-\sqrt{c}<\sqrt{c}-\sqrt{c-1}\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{c+1}-\sqrt{c-1}<2\sqrt{c}\\ \Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{c+1}-\sqrt{c-1}\right)^2<4c\\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{c^2-1}<c\end{aligned}$$

ពិត ។

210. ▲តាងចំនួនពិតទាំងនោះដោយ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ដែល $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ ។ ចំពោះ $n = 1$ វិសមភាពពិត ។ សន្មតថាពិតចំពោះ $n = k$ មានន័យថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x_1, x_2, \dots, x_k$ ដែល $x_1 x_2 \dots x_k = 1$ យើងមាន $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k$ ។ ចំពោះ $n = k + 1$ បើ $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$ នោះ$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} \geq k + 1$ វិសមភាពពិត ។ ករណីផ្សេងពីនេះ ដោយសារ ផលគុណនៃចំនួនទាំងនេះមានតម្លៃស្មើមួយ ហើយចំនួនទាំងនេះមិនមានតំលៃស្មើមួយដូចគ្នាទាំងអស់ ដូច្នេះមានចំនួនខ្លះតូចជាងមួយចំនួនខ្លះធំជាងមួយ ។ សន្មត $x_1 < 1, x_{k+1} > 1$ ។ តាង $y_1 = x_1 x_{k+1}$ ។ យើងមាន $y_1 x_2 \dots x_k = 1$ ដូច្នេះ $y_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} &= (y_1 + x_2 + \cdots + x_k) - y_1 + x_1 + x_{k+1} \\ &\geq k - y_1 + x_1 + x_{k+1} = (k+1) - 1 - x_1 x_{k+1} + x_1 + x_{k+1} \\ &= k + 1 + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > k + 1 \end{aligned}$$

វិសមភាពពិតដល់ $k + 1$ ។

211. ▲ ស្រាយបញ្ជាក់តាមកំណើន ។ ចំពោះ $n = 1$ វិសមភាពពិត ។ សន្មតថាពិតចំពោះ $n = k$ មានន័យថា $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ ។ គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភពនឹង $(1 + x_{k+1})$ យើងទាញបាន $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(1 + x_{k+1})$ ។ យើងមាន $(1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_{k+1} \Leftrightarrow (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)x_{k+1} \geq 0$ ពិតព្រោះ $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ។ ដូច្នេះ $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_{k+1}$ ។

212. ▲ ចំពោះ $n = 6$ យើងមាន $2^6 = 64 < 6! = 720 < 3^6 = 729$

សន្មតថាវិសមភាពពិតចំពោះ ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មួយ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា ពិតចំពោះ $n + 1$ ដែរ ។ យើងមាន

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$$
$$\Rightarrow (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n > (n+1)! > (n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} > (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n \text{ និង } \left(\frac{n}{3}\right)^n (n+1) > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$$

ជាការស្រេច ។ វិសមភាពទាំងពីរសមមូលនឹង

$$\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{2}\right)^n} > n+1 > \frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{3}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n} > 1 > \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{3}\right)^n}{\left(\frac{n}{3}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 > \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow 2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

ពិត តាមសំនួរ **205.** ។

213. ▲ យើងមាន $\Delta' = 999^2 - ac > 0$; $\Delta' \in \mathbb{Z}$ ព្រោះ $a, c \in \mathbb{Z}$ និង $|x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}$ ។

បើ $\Delta' \geq 2$ នោះ

$$|x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} > \frac{2\sqrt{\Delta'}}{2000} \geq \frac{2\sqrt{2}}{2000} > \frac{1}{998}$$

បើ $\Delta' = 1$ នោះ $ac = 999^2 - 1 = 998.1000 = 2^4.5^3.449$ ។ យើងមាន $2^2.5^3.449 = 1996 < 2000$ ជាតួចែកមួយនៃ $2^4.5^3.449 = ac \Rightarrow$ តួចែកធំបំផុតនៃ $ac = 2^4.5^3.449$ ហើយដែលតូចជាង 2000 ស្មើនឹង 1996 ។ ដូច្នេះ $a \leq 1996$ (ហេតុអ្វីបានយកតួចែកតូចជាង2000 ? ព្រោះ $|a| < 2000, |c| < 2000$) ។ យើងទាញបាន

$$|x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|} = \frac{2}{|a|} \geq \frac{1}{998}$$

214. ▲ លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ នាំឱ្យ $x \neq y$ និង

$$a = \frac{y-2}{y-x}; b = \frac{2-x}{y-x}$$

ជំនួសចូលលក្ខខណ្ឌទីបី យើងទាញបាន

$$3 = ax^2 + by^2 = \frac{(y-2)x^2}{y-x} + \frac{(2-x)y^2}{y-x} = 2(x+y) - xy \quad (1)$$

តាង $C = ax^3 + by^3 > 0$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} C &= \frac{y-2}{y-x}x^3 + \frac{2-x}{y-x}y^3 \\ &= -xy(x+y) + 2(x^2+xy+y^2) \\ &= -xy\,(x+y) + 2(x+y)^2 - 2xy \\ &= (x+y)[-xy + 2(x+y)] - 2xy \\ &= 3(x+y) - 2xy; \qquad \text{តាម } (1) \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{cases} 2(x+y) - xy = 3 \\ 3(x+y) - 2xy = C \end{cases}$$

យើងទាញបាន $x + y = 6 - C; xy = 9 - 2C$ ។

យើងមាន $(x+y)^2 > 4xy \implies (6-C)^2 > 4(9-2C) \implies C > 4$ ។

យើងមាន $xy > 0 \implies 9 - 2C > 0; \implies C < 4{,}5$ ។

215. ▲ ● ករណី $x < -3$ នោះ

$$S = |x| + \left|\frac{2x-1}{x+3}\right| > |x| > 3$$

● ករណី $-3 < x < 0$

ករណីនេះ $\frac{2x-1}{x+3} < 0$ ដូច្នេះ

$$S \geq \frac{2x-1}{x+3} = -2 + \frac{7}{x+3} > -2 + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}$$

● ករណី $x > 1/2$

យើងមាន

$$S = |x| + \left|\frac{2x-1}{x+3}\right| \geq |x| > \frac{1}{2}$$

● ករណី $0 \leq x \leq 1/2$

ករណីនេះយើងមាន $S \geq 1/3$ ព្រោះ

$$S = x - \frac{2x-1}{x+3} = \frac{x^2+x+1}{x+3}$$

$$S \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x+1}{x+3} \geq \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+3x+3 \geq x+3 \quad \Leftrightarrow x \geq 0$$

ពិត ។ សញ្ញាស្មើកើតមាន ពេល $x = 0$ ។

ដូច្នេះ $\min S = 1/3$ ពេល $x = 0$ ។

216. ▲ សន្មតថា $a \geq 0$ ។ បើ $a < 0$ នោះគុណពហុធា $f(x)$ នឹង (-1) យើងទាញបានពហុធាដែលមេគុណវិជ្ជមាន ហើយនៅតែផ្ទៀងផ្ទាត់សម្មតិកម្មដដែល ។ យើងសន្មតផងដែរថា $b \geq 0$ ។ បើ $b < 0$ នោះយើងយក $f(-x)$ ព្រោះសម្មតិកម្មស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x ។

ជំនួស $x = 0; x = \pm 1$ ចូល$f(x)$ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} -1 \leq c \leq 1 \ (1) \\ -1 \leq a+b+c \leq 1 \ (2) \\ -1 \leq a-b+c \leq 1 \ (3) \end{cases}$$

(2) និង(3) នាំឱ្យ

$$\begin{cases} -1-c \leq a+b \leq 1-c \\ -1-c \leq a-b \leq 1+c \end{cases}$$

ដោយ $a \geq 0; b \geq 0; |c| \leq 1$ នោះ

$$\begin{cases} 0 \leq a+b \leq 2 \\ -2 \leq a-b \leq 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+2ab+b^2 \leq 4 \\ a^2-2ab+b^2 \leq 4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \ a^2+b^2 \leq 4 \quad (4)$$

យើងមាន

$$K = \frac{8}{3}(a^2+b^2) - \frac{2}{3}b^2 \leq \frac{8}{3}(a^2+b^2) \leq \frac{8}{3}.4 = \frac{32}{3}$$

K មានតំលៃធំបំផុតពេល $b = 0; a^2+b^2 = 4 \Rightarrow b = 0; a = \pm 2$ ។

បើ $b = 0; a = 2; (2) \Rightarrow c = -1$ ។

បើ $b = 0; a = -2; (2) \Rightarrow c = 1$ ។

ដូច្នេះ $(a,b,c) = \{(2;0;-1);(-2;0;1)\}$ ។

217. ▲ សន្មតថា $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$ ។ សន្មតថា $\min_{i\neq j}\left(a_i - a_j\right)^2 > \frac{1}{100}$ នោះ

$$a_2 - a_1 > \frac{1}{10} \Rightarrow a_2 > \frac{1}{10}$$
$$a_3 - a_2 > \frac{1}{10} \Rightarrow a_3 > \frac{2}{10}$$
$$a_4 - a_3 > \frac{1}{10} \Rightarrow a_4 > \frac{3}{10}$$
$$a_5 - a_4 > \frac{1}{10} \Rightarrow a_2 > \frac{4}{10}$$
$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > \frac{1+2+3+4}{10} = 1$$

មិនត្រឹមត្រូវ ។

សន្មតថា $\min_{i\neq j}\left|a_i^2 - a_j^2\right| > \frac{1}{36}$ នោះ

$$a_2^2 - a_1^2 > \frac{1}{36} \Rightarrow a_2 > \frac{1}{6}$$
$$a_3^2 - a_2^2 > \frac{1}{36} \Rightarrow a_3 > \frac{\sqrt{2}}{6}$$
$$a_4^2 - a_3^2 > \frac{1}{36} \Rightarrow a_4 > \frac{\sqrt{3}}{6}$$
$$a_5^2 - a_4^2 > \frac{1}{36} \Rightarrow a_5 > \frac{\sqrt{4}}{6}$$
$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{10} > 1$$

មិនត្រឹមត្រូវ ។

218. ▲ ❶ ដំណោះស្រាយទី១

យើងមាន

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$
$$= \frac{2a}{(b+c)+(b+c)} + \frac{2b}{(c+a)+(c+a)} + \frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$
$$< \frac{2a}{a+(b+c)} + \frac{2b}{b+(c+a)} + \frac{2c}{c+(a+b)} = 2$$

❷ ដំណោះស្រាយទី២

តាង $a = x + y; b = y + z; c = z + x$ ។

$$a+b>c \Leftrightarrow x+y+y+z>z+x \Rightarrow y>0$$
$$a+c>b \Leftrightarrow x+y+z+x>y+z \Rightarrow x>0$$
$$b+c>a \Leftrightarrow y+z+z+x>x+y \Rightarrow z>0$$

ដូច្នេះ យើងបំលែង លក្ខខណ្ឌ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងត្រីកោណមក $x,y,z>0$ ។

យើងមាន

$$\frac{x+y}{y+z+z+x}+\frac{y+z}{z+x+x+y}+\frac{z+x}{x+y+y+z}$$
$$<\frac{x+y}{y+z+x}+\frac{y+z}{z+x+y}+\frac{z+x}{x+y+z}=2$$

ពិត ។

219. ▲ តាង $a=x+y; b=y+z; c=z+x$ នោះ $x;y;z>0$ ។

វិសមភាពខាងឆ្វេងសមមូលនឹង

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow\ & 4(x+y+z)^2 \geq 3[(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)] \\ \Leftrightarrow\ & x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2] \geq 0 \end{aligned}$$

ពិត ។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $x=y=z$ មានន័យថា $a=b=c$ ។

ដូចគ្នាវិសមភាពខាងស្តាំសមមូលនឹង $xy+yz+zx>0$ ពិត ព្រោះ $x,y,z>0$ ។

220. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} & a^2+b^2>2ab \\ & a+b>c \quad \Rightarrow a^2+b^2+2ab>c^2 \\ \Rightarrow\ & a^2+b^2+(a^2+b^2)>a^2+b^2+2ab>c^2 \\ \Rightarrow\ & 2a^2+2b^2-c^2>0 \end{aligned}$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន

$$2b^2+2c^2-a^2>0$$
$$2c^2+2a^2-b^2>0$$

យើងនឹងបង្ហាញថា

$$(2a^2+2b^2-c^2)(2c^2+2a^2-b^2) \leq (2a^2+bc)^2$$

យើងមាន

$$\begin{aligned} & (2a^2+bc)^2-(2a^2+2b^2-c^2)(2c^2+2a^2-b^2) \\ & =4a^2bc-2a^2(b^2+c^2)-4b^2c^2+2b^4+2c^4 \\ & =2(b^2-c^2)^2-2a^2(b-c)^2 \end{aligned}$$

$$= 2(b-c)^2(b+c+a)(b+c-a) \geq 0$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន

$$0 < (2a^2+2b^2-c^2)(2c^2+2a^2-b^2) \leq (2a^2+bc)^2$$
$$0 < (2b^2+2c^2-a^2)(2a^2+2b^2-c^2) \leq (2b^2+ac)^2$$
$$0 < (2c^2+2a^2-b^2)(2b^2+2c^2-a^2) \leq (2c^2+ab)^2$$

គុណអង្គនឹងអង្គយើងទាញបានវិសមភាព ។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $a = b = c$ ។

221. ▲យើងទាញបាន

$$a \geq 0; b^2 - 4ac \leq 0 \implies b^2 \leq 4ac = 4.2a.\frac{c}{2} \leq \left(2a + \frac{c}{2}\right)^2$$
$$\implies 2b \leq 4a + c$$
$$\implies 2b - 4a \leq c$$
$$\implies 3b - 3a \leq a + b + c$$
$$\implies \frac{a+b+c}{b-a} \geq 3$$
$$\implies \min F = 3$$

222. ▲ យើងមាន

$$S = bc\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$\frac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha}{2} = \cos(\alpha - 60°)$$

យើងមាន

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3} \iff b^2+c^2 \geq bc\left(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha\right)$$
$$\iff (b-c)^2 + 2bc(1-\cos(\alpha-60°)) \geq 0$$

យើងមានសមភាពទាល់តែ $b = c$ និង $\alpha = 60°$ មានន័យថា ត្រីកោណជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

223. ▲ សន្មតថា $a \geq 0; c \geq 0; 4ac \geq b^2$ ។ បើ $a = 0$ នោះ $b = 0$ ហើយវិសមភាពទៅជា $cg^2 \geq 0$ ។ បើ $a > 0$ នោះ

$$af^2 + bfg + cg^2 = a\left(f + \frac{b}{2a}g\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}g^2 \geq 0$$

ឥឡូវយើងសន្មតថា $af^2 + bfg + cg^2 \geq 0$ ចំពោះគ្រប់គូរ៉ិចទ័រ f, g ។ ជំនួស f ដោយ tg $(t \in \mathbb{R})$ យើងទាញបាន $(at^2 + bt + c)g^2 \geq 0$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត t ដូច្នេះនាំឱ្យ $a \geq 0, c \geq 0, 4ac \geq b^2$ ។

224. ▲ យើងមាន

$$-a_i = \sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_j$$

$$n\,|a_i| = |(n-1)a_i - (-a_i)| = \left|\sum_{j=1;j\neq i}^{n}(a_i - a_j)\right|$$

$$= \left|\sum_{i\neq j}(a_i - a_j)\right| \leq \sum_{i\neq j}|a_i - a_j|$$

$$\Rightarrow \quad n\sum_{i=1}^{n}|a_i| \leq 2\sum_{i<j}|a_i - a_j|$$

$\Rightarrow$ វិសមភាពពិត ។

ចំពោះ $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = x$ និង $a_n = -(n-1)x$ យើងទាញបានអង្គទាំង២ ស្មើគ្នា ។ ដូច្នេះវិសមភាពជាវិសមភាពតូចជាងឬស្មើ ។

225. ▲ ❶ ដំណោះស្រាយទី១

ជាដំបូងយើងសន្មតថា កត្តានីមួយៗនៃអង្គខាងស្តាំរបស់វិសមភាពមានតម្លៃវិជ្ជមានឬសូន្យ ។

យើងមាន

$$b - 1 + \frac{1}{c} = b\left(1 - \frac{1}{b} + \frac{1}{bc}\right) = b\left(1 - \frac{1}{b} + a\right)$$

$$\Rightarrow \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) = b\left[a - \left(1 - \frac{1}{b}\right)\right]\left[a + \left(1 - \frac{1}{b}\right)\right]$$

$$= b\left[a^2 - \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2\right]$$

$$\leq ba^2$$

ដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq cb^2$$

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq ac^2$$

$$\Rightarrow \left[\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)\right]^2 \leq (abc)^2 = 1$$

ពិត ។

ករណីមានកត្តាណាមួយអវិជ្ជមាន ឧទាហរណ៍ $a-1+\frac{1}{b}<0$ នោះ $a<1$ ហើយ $b>1$ ។ ក្នុងករណីនេះ $b-1+\frac{1}{c}>0$ និង $c-1+\frac{1}{a}>0$ ។ ដូច្នេះបើមានកត្តាណាមួយអវិជ្ជមាន នោះ មានតែកត្តាមួយនោះប៉ុណ្ណោះ ដែលអវិជ្ជមាន ដូច្នេះផលគុណនៃកត្តាទាំងបីនេះអវិជ្ជមាន ដូច្នេះតូចជាង១ ។

❷ ដំណោះស្រាយទី២

វិសមភាពដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$\left(a-(abc)^{\frac{1}{3}}+\frac{(abc)^{\frac{2}{3}}}{b}\right)\left(b-(abc)^{\frac{1}{3}}+\frac{(abc)^{\frac{2}{3}}}{c}\right)\left(c-(abc)^{\frac{1}{3}}+\frac{(abc)^{\frac{2}{3}}}{a}\right)\leq abc$$

ជំនួស $a=x^3;b=y^3;c=z^3$ ដែល $x,y,z>0$ យើងទាញបាន

$$\left(x^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{y^3}\right)\left(y^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{z^3}\right)\left(z^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{x^3}\right)\leq x^3y^3z^3$$

$$\Leftrightarrow\quad (x^2y-y^2z+z^2x)(y^2z-z^2x+x^2y)(z^2x-x^2y+y^2z)\leq x^3y^3z^3$$

$$\Leftrightarrow\quad 3x^3y^3z^3+\sum_{\text{cyclic}}x^6y^3\geq\sum_{\text{cyclic}}x^4y^4z+\sum_{\text{cyclic}}x^5y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 3(x^2y)(y^2z)(z^2x)+\sum_{\text{cyclic}}(x^2y)^3\geq\sum_{\text{sym}}(x^2y)^2(y^2z)$$

តាង $u=x^2y;v=y^2z;w=z^2x$ ។ យើងមាន $u,v,w>0$

$$\Longrightarrow\quad 3uvw+\sum_{\text{cyclic}}u^3\geq\sum_{\text{sym}}u^2v$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{\text{cyclic}}u(u-v)(u-w)\geq 0$$

ពិត តាមវិសមភាព Schur ។

226.▲ ដោយប្រើលក្ខខណ្ឌ $a+b=1$ យើងបំលែងវិសមភាពដែលឱ្យ ទៅជាវិសមភាពអូម៉ូសែន

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{(a+b)(a+(a+b)} + \frac{b^2}{(a+b)\big(b+(a+b)\big)} \Leftrightarrow a^2b+ab^2 \leq a^3+b^3$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$$

ពិត ។ សមភាពកើតមាន ពេល $a=b=1/2$ ។

227.▲ សន្មតផ្ទុយមកវិញថា $(1-x)y<1/4, (1-y)z<1/4,$ $(1-z)x<1/4$ ។ យើងទាញបាន

$$(1-x)(1-y)(1-z)xyz = x^2y^2z^2 < \frac{1}{64}$$
$$\Rightarrow xyz < \frac{1}{8} \qquad (1)$$

និង

$$(1-x)y+(1-y)z+(1-z)x < \frac{3}{4}$$
$$x+y+z-xy-yz-zx < \frac{3}{4} \qquad (2)$$

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន

$$\begin{aligned} xyz &= (1-x)(1-y)(1-z) \\ &= (1-y-x+xy)(1-z) \\ &= 1-z-y+yz-x+xz+xy-xyz \end{aligned}$$
$$\Rightarrow x+y+z-xy-yz-zx = 1-2xyz \qquad (3)$$

ជំនួស(3) ចូលក្នុង(2) យើងទាញបាន

$$1-2xyz < \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow xyz > \frac{1}{8} \qquad (4)$$

យើងឃើញថា (1) ផ្ទុយនឹង(4) ។ ដូច្នេះការសន្មតថា $(1-x)y<\frac{1}{4}, (1-y)z<\frac{1}{4},$ $(1-z)x<\frac{1}{4}$ មិនអាចពិតទេ ។ វាត្រូវតែមានមួយដែលស្មើ1/4 ឬធំជាង ។

228.▲ ចំពោះ $n=1$ យើងមាន

$$\frac{x(x^2+1)}{x+1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 8x(x^2+1) \leq (x+1)^4$$
$$\Leftrightarrow 8x^3+8x \leq x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$

$$\Leftrightarrow x^4-4x^3+6x^2-4x+1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^4\ge 0$$

ពិត ។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x=1$ ។

សន្មតថា សមភាពពិតរហូតដល់ n គឺ

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1}\le\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1} \qquad (1)$$

យើងនឹងបង្ហាញថា

$$\frac{x^{n+1}(x^{n+2}+1)}{x^{n+1}+1}\le\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+3} \qquad (2)$$

ពិត ។

គុណ (1) នឹង $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ យើងទទួលបាន

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\le\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+3}$$

យើងនឹងបង្ហាញថា (2) ពិត ដោយគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\frac{x^{n+1}(x^{n+2}+1)}{x^{n+1}+1}\le\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \qquad (3)$$

ជាការគ្រប់គ្រាន់ ។ វិសមភាព (3) សមមូលនឹង

$$4x^{n+1}(x^{n+2}+1)(x^n+1)\le(x^{n+1}+1)x^n(x^{n+1}+1)(x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^{n+1}(x^{2n+2}+x^{n+2}+x^n+1)\le x^n(x^{2n+2}+2x^{n+1}+1)(x^2+2x+1)$$
$$\Leftrightarrow 4(x^{2n+3}+x^{n+3}+x^{n+1}+x)$$
$$\le x^{2n+4}+2x^{2n+3}+x^{2n+2}+2x^{n+3}+4x^{n+2}+2x^{n+1}+x^2+2x+1$$
$$\Leftrightarrow x^{2n+4}-2x^{2n+3}+x^{2n+2}-2x^{n+3}+4x^{n+2}-2x^{n+1}+x^2-2x+1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^{2n+2}(x^2-2x+1)-2x^{n+1}(x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^{2n+2}-2x^{n+1}+1)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^{n+1}-1)^2\ge 0$$

ពិតជានិច្ច ហើយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x=1$ ។

229.

230. ▲ យើងមាន

$$\frac{2x-y}{2y-x}=\frac{a+3b}{a-3b}\ \Leftrightarrow\frac{2x-y}{a+3b}=\frac{2y-x}{a-3b}=\frac{2x-y+2y-x}{a+3b+a-3b}=\frac{x+y}{2a}=k$$
$$\frac{2x-y}{2y-x}=\frac{a+3b}{a-3b}\ \Leftrightarrow\frac{2x-y}{a+3b}=\frac{2y-x}{a-3b}=\frac{2x-y-2y+x}{a+3b-a+3b}=\frac{x-y}{2b}=k$$

$\Rightarrow x+y=2ka; x-y=2kb \ \Rightarrow x=k(a+b)\,; y=k(a-b)$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{k^2(a+b)^2+k^2(a-b)^2}{k^2(a+b)^2-k^2(a-b)^2}=\frac{a^2+b^2}{2ab}\geq 1$$

231. ▲ យើងមាន $x,y,z\geq 1$ ។ វិសមភាពដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$\begin{aligned}&\left(xy-2x\sqrt{y-1}\right)+\left(yz-2y\sqrt{z-1}\right)+\left(zx-2z\sqrt{x-1}\right)\leq 0\\ &\Leftrightarrow\ x\left(y-1-2\sqrt{y-1}+1\right)+y\left(z-1-2\sqrt{z-1}+1\right)\\ &\qquad +z\left(x-1-2\sqrt{x-1}+1\right)\leq 0\\ &\Leftrightarrow x\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2+y\left(\sqrt{z-1}-1\right)^2+z\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\leq 0\end{aligned}$$

ដោយ x,y,z សុទ្ធតែវិជ្ជមាន ដូច្នេះ $\sqrt{y-1}-1=0;\ \sqrt{z-1}-1=0;\ \sqrt{x-1}-1=0\ \Rightarrow x=y=z=2$ ។

232. ▲ ដោយ $0<x<1$ នោះវិសមភាពដែលឱ្យ អាចសរសេរជា

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{1-x}\right)\geq 9\\ &(x+1)(1-x+1)\geq 9x(1-x)\\ &2+x-x^2\geq 9x-9x^2\\ &(2x-1)^2\geq 0\end{aligned}$$

ពិត ។

233. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}&\frac{a^6}{b^6}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^6}{a^6}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{a^6}{b^6}+\frac{b^6}{a^6}\right)+\left(\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)\\ &\geq 2+2+2=6\end{aligned}$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $a=b$ ។

234. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4}&\leq\frac{x}{2\sqrt{x^4y^2}}+\frac{y}{2\sqrt{x^2y^4}}\\ &\leq\frac{x}{2x^2y}+\frac{y}{2xy^2}=\frac{1}{xy}\end{aligned}$$

235. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}&0\leq\left(x-\sqrt{y^2+1}\right)^2+\left(y-\sqrt{x^2+1}\right)^2\\ &\Rightarrow x^2+y^2+1\geq x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\end{aligned}$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា បើ

$$\begin{cases} x = \sqrt{y^2+1} \\ y = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2$ មិនអាច ។ ដូច្នេះអង្គទី១ធំជាងអង្គទី២ដាច់ខាត មានន័យថា

$$x^2 + y^2 + 1 > x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$$

236. ▲ យើងមាន

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{z} + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 - 2\frac{y}{x} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 - 2\frac{z}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 \geq 0$$

ពិតជានិច្ច ។ អង្គទាំង២ស្មើគ្នា មានតែ$x = y = z$ ។

237. ▲ យើងមាន

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

ព្រោះ សមភាពនេះសមមូលនឹង

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{2xy}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{4} - \frac{2xy}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

ពិត ។ ដូច្នេះ ដោយយក

$$x = a + \frac{1}{a};\ \ y = b + \frac{1}{b}$$

យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} \frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} &\geq \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{a+b}{ab}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2 \end{aligned}$$

យើងមាន

$$(a-b)^2 \geq 0 \ \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \ \Rightarrow a^2+b^2+2ab \geq 4ab \ \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \ \Rightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{4} \ \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq 4 \ \Rightarrow 1+\frac{1}{ab} \geq 5$$

ដូច្នេះ

$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \geq \frac{1}{4}5^2 = \frac{25}{4}$$
$$\Rightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

សមភាពកើតមានពេល $a=b=1/2$ ។

238. ▲ តាង $a=x+y, b=y+z, c=z+x$ នោះ $x,y,z>0$ ។

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$(x+2y+z)(x+y+2z)(2x+y+z) \geq 64xyz$$

យើងមាន

$$\begin{aligned} x+2y+z &= (x+y)+(y+z) \\ &\geq 2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz} \\ &\geq 4(xy^2z)^{1/4} \end{aligned}$$

ដូចគ្នា

$$x+y+2z \geq 4(xyz^2)^{\frac{1}{4}}$$
$$2x+y+z \geq 4(x^2yz)^{1/4}$$

ដូច្នេះ

$$(x+2y+z)(x+y+2z)(2x+y+z) \geq 64(xy^2z.xyz^2.x\text{^}2yz)^{\frac{1}{4}} = 64xyz$$

ពិត ។

239. ▲ តាង $a=x+y; b=y+z; c=z+x$ នោះ $a;b;c>0$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} \frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{zx^2-y^2}{x+y} &= \frac{(a-b)c}{b}+\frac{(b-c)a}{c}+\frac{(c-a)b}{a} \\ &= \frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}+\frac{bc}{a}-a-b-c \end{aligned}$$

តែថា

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}\right) = a\frac{b^2+c^2}{2bc} \geq a$$

ទៅជាស្មើគ្នា ទាល់តែ $b = c$ ។ ដូចគ្នាដែរ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\right) \geq c$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{ba}{c}+\frac{bc}{a}\right) \geq b$$

បូកអង្គនៃវិសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន $\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}+\frac{bc}{a}-a-b-c \geq 0$ ។ ដូច្នេះវិសមភាពពិត ។ សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $a = b = c$ មានន័យថា $x = y = z$ ។

240. ▲ តាង $x = a+b-c, y = b+c-a, z = c+a-b$ ។

ដូច្នេះ $x, y, z > 0$ និង $a = \frac{x+z}{2}, b = \frac{y+x}{2}, c = \frac{z+y}{2}$ ។ យើងមាន

$$2(x+y) = (x+y)+(x+y) \geq x+y+2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq \sqrt{2}.\sqrt{x+y}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា បើ $x = y$ ។

ដូច្នេះ

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq \sqrt{2}.\sqrt{x+y} = 2\sqrt{b}$$

ដូចគ្នា

$$\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq 2\sqrt{c}$$
$$\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c} \leq 2\sqrt{a}$$

បូកអង្គនិងអង្គនៃវិសមភាព យើងទាញបានវិសមភាពពិត ។

សមភាពកើតមាន លុះត្រាតែ $x = y = z$ មានន័យថា $a = b = c$ ។

241. ▲ ❶ ដំណោះស្រាយទី ១

យើងមាន $(a-b)(a^2-b^2) \geq 0 \Rightarrow a^3+b^3 \geq ab(a+b)$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ និងមានតែ $a = b$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{ab(a+b)+abc} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$$
$$\frac{1}{b^3+c^3+abc} \leq \frac{a}{abc(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{b}{abc(a+b+c)}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{c+b+a}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc}$$

❷ ដំណោះស្រាយទី ២

វិសមភាពនេះសមមូលនឹង

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{sym}}(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)abc \\ &\qquad \le 2(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)(c^3+a^3+abc) \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{\text{sym}}(a^7bc+3a^4b^4c+4a^5b^2c^2+a^3b^3c^3) \\ &\qquad \le \sum_{\text{sym}}(a^3b^3c^3+2a^6b^3+3a^4b^4c+a^7bc+2a^5b^2c^2) \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{\text{sym}}(2a^6b^3-2a^5b^2c^2) \ge 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{\text{sym}} a^6b^3c^0 \ge \sum_{\text{sym}} a^5b^2c^2 \end{aligned}$$

ពិតតាមវិសមភាព Muirhead ព្រោះ $(6;3;0)$ លុបលើ $(5;2;2)$ ។ ស្ទីត $(6;3;0)$ លុបលើ $(5;2;2)$ ព្រោះ $6>5; 6+3=9>5+2=7; 6+3+0=5+2+2$ ។

242. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} a^5+b^5 &= (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4) \\ &= (a+b)[(a-b)(a^3-b^3)+a^2b^2] \\ &\ge (a+b)a^2b^2 \end{aligned}$$

ព្រោះ $(a-b)(a^3-b^3) \ge 0$ ។

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{ab}{a^5+b^5+ab} &\le \frac{ab}{(a+b)a^2b^2+ab} \\ &= \frac{1}{ab(a+b)+1} \\ &= \frac{1}{ab(a+b)+abc} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{ab(a+b+c)}$$
$$= \frac{c}{a+b+c}$$

តាមរបៀបដូចគ្នា ចំពោះតួផ្សេងទៀត ។ យើងទាញបាន

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}$$
$$\le \frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}=1$$

សមភាពកើតមានពេល $a=b=c$ ។

243.▲ តាង

$$A=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$
$$B=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$
$$A-B=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2+\sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2-\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n} a_i b_i a_j b_j\right]$$
$$=\sum_{i\neq j} a_i^2 b_j^2-2\sum_{1\le i<j\le n} a_i b_i a_j b_j$$
$$=\left[\sum_{1\le i<j\le n} a_i^2 b_j^2+\sum_{1\le i<j\le n} a_j^2 b_i^2\right]-2\sum_{1\le i<j\le n} a_i b_i a_j b_j$$
$$=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i^2 b_j^2+a_j^2 b_i^2-2a_i b_i a_j b_j\right)$$
$$=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i b_j-a_j b_i\right)^2\ge 0$$

$\Longrightarrow$ សំណើពិត ។

244.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\ge\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}.\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2=n^2$$

245.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត

$$(a+b+b+c+c+c)^2 \le (1+1+1+1+1+1)(a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+c^2)$$
$$\Rightarrow \frac{(a+2b+3c)^2}{a^2+2b^2+3c^2} \le 6$$

246.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត

$$\Rightarrow 3\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\right] \ge \left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\right]^2$$
$$=\left(a+b+c+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)^2=\left(1+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)^2$$
$$\ge \left(1+\frac{3}{(abc)^{\frac{1}{3}}}\right)^2$$ តាមវិសមភាពកូស៊ី
$$\ge \left(1+\frac{9}{a+b+c}\right)^2$$ តាមវិសមភាពកូស៊ី
$$=(1+9)^2=100$$
$$\Rightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \ge \frac{100}{3}$$

247.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$(a+b+c+d)^2 \le (1+1+1+1)(a^2+b^2+c^2+d^2) = 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$$
$$\Rightarrow \quad (8-e)^2 \le 4(16-e^2)$$
$$\Rightarrow \quad e(5e-16) \le 0$$
$$\Rightarrow \quad 0 \le e \le \frac{16}{5}$$

ដើម្បីឱ្យ $e=16/5$ លក្ខខណ្ឌគឺ $a=b=c=d$ និង $a+b+c+d=24/5 \Rightarrow$ $a=b=c=d=6/5$ ។

248.▲ យើងមាន

$$(1-y)^2 \ge 0 \quad \Rightarrow \frac{1+y^2}{2} \ge y$$
$$\Rightarrow \quad 0 \le 1+y+z^2 \le \frac{1+y^2}{2}+(1+z^2)$$
$$\Rightarrow \frac{1+x^2}{1+y+z^2} \ge \frac{1+x^2}{\frac{1+y^2}{2}+(1+z^2)} = \frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)}$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន

$$\frac{1+y^2}{1+z+x^2} \geq \frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)}$$

$$\frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)}$$

យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)}+\frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)}+\frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)} \geq 2$$

តាង $a=1+x^2; b=1+y^2; c=1+z^2$ ។ ដូច្នេះ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{2a}{b+2c}+\frac{2b}{c+2a}+\frac{2c}{a+2b} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} \geq 1$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត

$$[(ab+2ac)+(cb+2ab)+(ac+2bc)]\left[\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\right] \geq (a+b+c)^2 \ (*)$$

ហើយ

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

ព្រោះ

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow \ a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 0$$

ពិត ។ ដូច្នេះ (*) នាំឱ្យ

$$3(ab+bc+ca)\left[\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\right] \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow \ \frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} \geq 1$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $a=b=c$ ។

249.▲ យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពក្នុងករណី $x, y \geq 0$ សិន ។ ក្នុងករណីនេះ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$(x+y)\sqrt{x^2+y^2} \le 2\sqrt{2}(x^2-xy+y^2)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត យើងមាន

$$(x+y)^2 \le (1+1)(x^2+y^2)$$
$$\Longrightarrow (x+y) \le \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$\Longrightarrow\ (x+y)\sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{2}(x^2+y^2)$

យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $\sqrt{2}(x^2+y^2) \le 2\sqrt{2}(x^2-xy+y^2)$

$$\Leftrightarrow\ x^2+y^2 \le 2(x^2-xy+y^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$$

ពិត ។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $x=y$ ។

បើ $x+y \le 0$ នោះយើងអាចមានករណី x,y តូចជាងសូន្យទាំងពីរ ឬ មានមួយតូចជាងសូន្យ មួយទៀតធំជាងសូន្យ ។ បើវាតូចជាងឬស្មើសូន្យទាំងពីរនោះ $(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2+y^2-xy \ge xy \ge 0$ នោះអង្គខាងឆ្វេងអវិជ្ជមាន តែអង្គខាងស្តាំវិជ្ជមាន ។ ដូច្នេះវិសមភាពពិត ។ បើមានមួយតូចជាងសូន្យ មួយធំជាងសូន្យនោះ $x^2-xy+y^2>0$ នោះអង្គខាងឆ្វេងអវិជ្ជមាន តែអង្គខាងស្តាំវិជ្ជមាន ។

បើ $x+y>0$ តែ $y \le 0$ នោះ $x+y \le x+|y|$ និង $x^2-xy+y^2 \ge x^2-x|y|+y^2>0$ ដូច្នេះ

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \le \frac{x+|y|}{x^2-x|y|+y^2}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ករណី $y \ge 0$ យើងទាញបាន

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \le \frac{x+|y|}{x^2-x|y|+y^2} \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ពិត ។

250.▲ ❶ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{s}\right) \ge n^2$$

យើងមាន

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{s}=\sum_{i=1}^{n}1-\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}a_i=n-1 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\right)\geq\frac{n^2}{n-1}$$ ពិត ។

❷ ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{a_i}=-n+\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i} \quad (*)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី–ស្វាត

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s}\right)\geq n^2$$

ដោយ

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i/s\right)=1 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}\right)\geq n^2\ ;(*) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{a_i}\geq -n+n^2 = n(n-1)$$

ពិត ។

❸ យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\geq\frac{s^2}{n}$$

តែថា

$$\left(\sum_{i=1}^{n}[a_i(s-a_i)]\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=s^2$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\right)\geq\frac{s^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}[a_i(s-a_i)]\right)}=\frac{s^2}{s\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

$$\geq\frac{s^2}{s^2-\frac{s^2}{n}}=\frac{n}{n-1}$$

ពិត ។

251.▲ ក) សំនួរនេះគ្មានលក្ខណៈពិសេសណាលើលំដាប់ $a_1;a_2;a_3$ ទេ មានន័យថា បើយើងផ្លាស់ a_1 ទៅ a_2; a_2 ទៅ a_1 ។ល ។នោះសម្មតិកម្មនៅដដែលគ្មានប្រែប្រួល ។ តាម

លក្ខណៈនេះ យើងអាចសន្មតថា $a_1 \le a_2 \le a_3$ ។ ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $a_1 + a_2 > a_3$ ទៅបានហើយ ។ យើងមាន

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 > 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)$$
$$\Leftrightarrow \quad (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3)(-a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3) > 0$$

កត្តានីមួយៗសុទ្ធតែវិជ្ជមាន លើកលែងតែ $(a_1 + a_2 - a_3)$ ដែលមិនទាន់ដឹង ។ តែ ផលគុណរបស់កត្តាទាំងអស់វិជ្ជមាន ដូច្នេះ$(a_1 + a_2 - a_3)$ ត្រូវតែវិជ្ជមាន ។

ខ) ករណី $n = 3$ បានស្រាយបញ្ជាក់រួចក្នុងសំនួរក) ។ យើងសន្មតថា $n \ge 4$ ។ តាមដូចរៀបរាប់ក្នុងសំនួរក) យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $a_1; a_2; a_3$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ជាការគ្រប់គ្រាន់ហើយ ។

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$(n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4) < (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2$$
$$= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + \sum_{k=4}^{n} a_k^2\right)^2$$
$$\le (n-1)\left(\frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2}{4} + \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2}{4} + \sum_{k=4}^{n} a_k^4\right)$$

$\Leftrightarrow \quad 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4) < (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2$ ហើយតាម សំនួរ ក) យើងទាញបានថា សំណើពិត ។

252.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$S_2 - a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + \cdots + a_n^2$$
$$\ge \frac{1}{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n)^2$$
$$= \frac{1}{n-1}(S_1 - a_i)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{S_2 - a_i^2}{S_1 - a_i} \ge \frac{1}{n-1}(S_1 - a_i)$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{S_2 - a_i^2}{S_1 - a_i} \ge \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(S_1 - a_k) = S_1$$

253.▲ តាង $E=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^+/a^2+b^2=(c^2+d^2)^3\}$ និង f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ E ដោយ

$$f(a,b,c,d)=\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}-1$$

យើងឃើញថា ចំពោះ $\forall\lambda\in\mathbb{R}^+:(a,b,c,d)\in E$ និង $f(a,b,c,d)\geq 0$

$$a^2+b^2=(c^2+d^2)^3 \iff (\lambda^3a)^2+(\lambda^3b)^2=[(\lambda c)^2+(\lambda d)^2]^3$$
$$\iff a_1^3+b_1^3=(c_1^2+d_1^2)^3$$
$$f(a,b,c,d)=\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}-1=\frac{(\lambda c)^3}{\lambda^3a}+\frac{(\lambda d)^3}{\lambda^3b}-1=f(\lambda^3a,\lambda^3b,\lambda c,\lambda d)$$
$$=f(a_1,b_1,c_1,d_1)$$

នោះ $(a_1=\lambda^3a,b_1=\lambda^3b,c_1=\lambda c,d_1=\lambda d)\in E$ និង $f(a,b,c,d)\geq 0\iff f(a_1,b_1,c_1,d_1)\geq 0$ ។ លក្ខណៈខាងលើនេះពិតចំពោះ$\forall\lambda\in\mathbb{R}^+$ ដូច្នេះយើងអាចជ្រើសរើសយក λ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1^2+b_1^2=1$ ។ តែយើងអាចជំនួសសំណេរ a_1,b_1,c_1,d_1 ដោយ a,b,c,d ដោយគ្មានបញ្ហាអ្វីទាំងអស់ ។ ដូច្នេះ មានន័យថាយើងអាចយក $(a,b,c,d)\in E$ និង $a^2+b^2=1$ ដោយមិនធ្វើឱ្យបាត់ភាពទូទៅឡើយ ។ ដូច្នេះ $c^2+d^2=1$ ។

តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត នាំឱ្យ

$$\left(\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}\right)(ac+bd)\geq(c^2+d^2)^2=1$$

តែយើងមាន

$$ac+bd\leq\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+d^2}{2}=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)=1$$
$$\Rightarrow\quad \frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b}\geq\frac{1}{ac+bd}\geq 1$$

254.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2\leq(x+y+z)\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)$$
$$\iff\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\leq\sqrt{x+y+z}\sqrt{\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}}$$

យើងមាន

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$$

ដូច្នេះ

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\le\sqrt{x+y+z}\sqrt{\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}}$$
$$=\sqrt{x+y+z}$$

វិសមភាពពិត ។

យើងមានសមភាព លុះត្រាតែ

$$\frac{x-1}{x^2}=\frac{z-1}{z^2}=\frac{z-1}{z^2};\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \implies x=y=z=\frac{3}{2}$$

255.▲ តាង $a=1/x\,;b=1/y\,;c=1/z$ ។ លក្ខខណ្ឌ

$$xyz\ge xy+yz+zx \iff \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le 1 \implies a+b+c\le 1$$

វិសមភាព

$$xyz\ge 3(x+y+z) \iff ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$$

យើងមាន

$$1\ge(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

ហើយតាមវិសមភាពកូស៊ី– ស្វាត យើងមាន

$$ab+bc+ca\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2+a^2}\implies a^2+b^2+c^2$$
$$\ge ab+bc+ca$$

ដូច្នេះ នាំឱ្យ $1\ge 3(ab+bc+ca)$ ពិត ។

256.▲ តាង $a=\tan x\,;b=\tan y\,;c=\tan z$ នោះ x,y,z ជាមុំនៃត្រីកោណស្រួច ។ ដូច្នេះវិសមភាពសមមូលនឹង $\max(\tan x,\tan y,\tan z)\ge\sqrt{3}$ ។ តែថា មានមុំមួយរបស់ត្រីកោណ ឧទាហរណ៍ x ដែលធំជាងឬស្មើ $\pi/3$ (បើ តូចជាង $\pi/3$ ទាំងអស់គ្នា នោះ ផលបូកមុំក្នុងត្រីកោណ មានតំលៃតូចជាង π) ។ ដោយអនុគមន៍ tan កើនលើ $[0,\pi/2)$ នោះ $\tan x\ge\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ ។

257.▲ យើងមាន

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^4=[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+(2x_1x_2+2x_1x_3+\cdots)]^2$$
$$\geq 4(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(2x_1x_2+2x_1x_3+\cdots)\quad \left(\text{វិសមភាពកូស៊ី}\right)\quad (1)$$
$$=8\,(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\left(\sum_{i<j}x_ix_j\right)$$
$$=8\sum_{i<j}\left[x_ix_j(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\right]$$
$$\geq 8\sum_{i<j}\left[x_ix_j\left(x_i^2+x_j^2\right)\right]\quad (2)$$

យើងមានសមភាព (2) ទាល់តែនិងមានតែ មានយ៉ាងហោចណាស់ x_i ចំនួន $(n-2)$ ដែលស្មើសូន្យ ។ ឧទាហរណ៍ $x_3=\cdots=x_n=0$ ។ ក្នុងលក្ខខណ្ឌនេះ យើងមានសមភាព (1) ទាល់តែនិងមានតែ $2x_1x_2=x_1^2+x_2^2$ មានន័យថា $x_1=x_2$ ។

ដូច្នេះ $C=1/8$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងមានតែ មានយ៉ាងហោចណាស់ x_i ចំនួន $(n-2)$ តួ ដែលស្មើសូន្យ ហើយតួពីរទៀតស្មើគ្នា ។

258.▲ យើងមាន

$$P^2=(xy+yz+zt+tx)^2\leq(x^2+y^2+z^2+t^2)(y^2+z^2+t^2+x^2)\ =1$$

ដូច្នេះ $-1\leq P\leq 1$ ។

បើ $x=z=\frac{1}{2};y=t=-\frac{1}{2}$ នោះ $x+y+z+t=0;x^2+y^2+z^2+t^2=1$ ។

ហើយ $P=\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ ។ ដូច្នេះ $P_{\min}\ =-1$ ។

យើងមាន $P=(x+z)(y+t)=-(y+t)^2\leq 0$ ។ បើ $x=y=1/2\,;z=t=-1/2$ នោះ $P=0$ ។ ដូច្នេះ $P_{\max}\ =0$ ។

ជាសរុប $P_{\min}=-1$ ឧទាហរណ៍ត្រង់ $x=z=1/2\,;y=t=-1/2$ ។

$P_{\max}=0$ ឧទាហរណ៍ត្រង់ $x=y=1/2\,;z=t=-1/2$ ។

259.▲ យើងតាង $x_1 = \tan\alpha_1, x_2 = \sec\alpha_1 \tan\alpha_2$ និង

$$x_k = \sec\alpha_1 \sec\alpha_2 \ldots \sec\alpha_{k-1} \tan\alpha_k$$

ដោយ $-\frac{\pi}{2} < \alpha_k < \frac{\pi}{2}, 1 \le k \le n$ ។ យើងគួរកត់សម្គាល់ថាការជំនួសនេះព្រោះលំដាប់របស់ $\tan\alpha$ គឺ $(-\infty, \infty)$ និង $\sec\alpha$ ខុសពីសូន្យជានិច្ច ។ ដូច្នេះតួទី k របស់អង្គខាងឆ្វេងនៃវិសមភាពស្មើនឹង

$$\frac{\sec\alpha_1 \ldots \sec\alpha_{k-1} \tan\alpha_k}{1 + \tan^2\alpha_1 + \cdots + \sec^2\alpha_1 \ldots \sec^2\alpha_{n-1} \tan^2\alpha_n}$$
$$= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_k \sin\alpha_k$$

ដូច្នេះវិសមភាពដែលឱ្យ សមមូលនឹង

$$\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n \sin\alpha_n < \sqrt{n}$$
$$\Leftrightarrow c_1 s_1 + c_1 c_2 s_2 + \cdots + c_1 c_2 \ldots c_n s_n < \sqrt{n}$$

ដែល $c_i = \cos\alpha_i$ និង $s_i = \sin\alpha_i$ ចំពោះ $1 \le i \le n$ ។ ចំពោះ $2 \le i \le n$ ដោយសារ $c_i^2 + s_i^2 = \cos^2\alpha_i + \sin^2\alpha_i = 1$ យើងទាញបានថា

$$c_1^2 c_2^2 \ldots c_{i-1}^2 s_i^2 + c_1^2 c_2^2 \ldots c_{i-1}^2 c_i^2 = c_1^2 c_2^2 \ldots c_{i-1}^2$$
$$\Longrightarrow \quad s_1^2 + c_1^2 s_2^2 + \cdots + c_1^2 s_2^2 \ldots c_{n-2}^2 s_{n-1}^2 + c_1^2 s_2^2 \ldots c_{n-1}^2 = 1 \quad (*)$$

តាម(*) និងតាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត យើងទាញបាន

$$c_1 s_1 + c_1 c_2 s_2 + \cdots + c_1 c_2 \ldots c_n s_n$$
$$\le \sqrt{s_1^2 + c_1^2 s_2^2 + \cdots + c_1^2 c_2^2 \ldots c_{n-2}^2 s_{n-1}^2 + c_1^2 c_2^2 \ldots c_{n-1}^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_{n-1}^2 + c_n^2 s_n^2}$$
$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_{n-1}^2 + c_n^2 s_n^2}$$
$$= \sqrt{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cdots + \cos^2\alpha_{n-1} + \cos^2\alpha_n \sin^2\alpha_n} \le \sqrt{n}$$

វិសមភាពចុងក្រោយ ក្លាយជាសមភាព នៅពេលដែល

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \cdots = \cos\alpha_{n-1} = \cos\alpha_n \sin\alpha_n = 1$$

សមភាពនេះមិនអាចទេ ព្រោះ $\cos\alpha_n \sin\alpha_n = \frac{1}{2}\sin 2\alpha_n < 1$ ។ ដូច្នេះ យើងមានវិសមភាពដាច់ខាត ។

260.▲ តាង $a = 1/x, b = 1/y, c = 1/z$ នោះ $a, b, c \in (0; 1)$ និង

$a + b + c = 2$ ។

វិសមភាពដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \ge \sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

$$\ge \sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-a}{a}}+\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-b}{b}}+\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-c}{c}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \ge \sqrt{\frac{b+c-a}{a}}+\sqrt{\frac{c+a-b}{b}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c}}$$

$$\Leftrightarrow [(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)]\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\ge \left(\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}+\sqrt{\frac{c+a-b}{b}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c}}\right)^2$$

ពិត តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត ។

261.▲ ដោយចំនួនចំលាស់នៃលំដាប់ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ មានចំនួនកំណត់ (ទាំងអស់មាន $n!$ របៀប) នោះ មានមួយបែបដែល S មានតម្លៃធំបំផុត (ដូចគ្នា តូចបំផុត) ។ តាង $i<j$ ជាសន្ទស្សន៍ពីរ, តាង σ ជាចំលាស់នៃ$\{1,2,\ldots,n\}$ ហើយសន្មតថា $\sigma(i)>\sigma(j)$ ។ ដូច្នេះ $b_{\sigma(j)} \ge b_{\sigma(i)}$ ព្រោះស្វ៊ីត (b_k) កើន ។ តាង σ' ជាចំលាស់នៃ$\{1,2,\ldots,n\}$ ដែលដូចគ្នានឹង σ ដែរ តែខុសត្រង់ i,j ដែល $\sigma'(j)=\sigma(i)$ និង $\sigma'(i)=\sigma(j)$ ។ ដូច្នេះ

$$S_{\sigma'}-S_\sigma=(a_j-a_i)(b_{\sigma(i)}-b_{\sigma(j)})$$

– បើ $a_i<a_j$ និង $b_{\sigma(j)}<b_{\sigma(i)}$ នោះ $S_{\sigma'}>S_\sigma$ មានន័យថា S_σ មិនមែនធំបំផុតទេ

– បើ $a_i=a_j$ ឬ $b_{\sigma(j)}=b_{\sigma(i)}$ នោះ $S_{\sigma'}=S_\sigma$

ដូច្នេះ ជំនួស σ ដោយ σ' ផលបូកមិនថយចុះទេ ឬក៏អាចធំជាងមុន ។

បើ $\sigma(1)\neq 1$ ឧទាហរណ៍ $\sigma=\{3;1;2;\ldots;n\}\,;\sigma(1)=3;\ \sigma(2)=1$ ។ យើងមានចំលាស់ σ' មួយដែល $\sigma'(1)=1$ ឧទាហរណ៍ $\sigma'=\{1;3;2;\ldots;n\}\,;\sigma'(1)=1;\sigma'(2)=3$ ដែលតួទាំងអស់ដូចគ្នានឹង σ លើកលែងតែតួទីមួយនឹងទីពីរចេញ ។ តាមលក្ខណៈខាង

លើ យើងទាញបាន $S_\sigma \le S_{\sigma'}$ ។ មានន័យថា រៀប $\sigma = \{3;1;2;\dots;n\}$ ជា $\sigma = \{1;3;2;\dots;n\}$ យើងទាញបាន S_σ ធំជាងមុន ។ មានន័យថាផលបូក

$$a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2 + \cdots + a_nb_n \le a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + \cdots + a_nb_n$$

បន្ទាប់មកទៀតយើងចាប់ផ្ដើម ផ្លាស់សន្ទស្សន៍ចាប់ពីទី២ទៅ ឧទាហរណ៍ $\sigma = \{1;3;2;\dots;n\}$ ។ យើងមាន $\sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2$ ។ យើងមានចំលាស់ σ' មួយដែល $\sigma'(2) = 2$ ឧទាហរណ៍ $\sigma' = \{1;2;3;\dots;n\}\,;\sigma'(2) = 2; \sigma'(3) = 3$ ដែលតួទាំងអស់ដូចគ្នា នឹង σ លើកលែងតែតួទីពីរនិងទីបីចេញ ។ តាមលក្ខណៈខាងលើ យើងទាញបាន $S_\sigma \le S_{\sigma'}$ ។ មានន័យថា រៀប $\sigma = \{1;3;2;\dots;n\}$ ជា $\sigma = \{1;2;3;\dots;n\}$ យើងទាញបាន S_σ ធំជាងមុន ។ មានន័យថាផលបូក

$$a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + \cdots + a_nb_n \le a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n$$

ដូចគ្នា ចំពោះ $i = 3, \dots, n-1$ យើងទាញបាន $\sigma'(i) = i$ ដែលពេលនោះផលបូកមានតំលៃធំ ។ ដូច្នេះផលបូកមានតំលៃធំបំផុត ពេល $\sigma(i) = i$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាករណីតូចបំផុត ។

262.▲ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_iy_i + y_i^2\right) \le \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_iz_i + z_i^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(-2x_iy_i + y_i^2\right) \le \sum_{i=1}^{n}\left(-2x_iz_i + z_i^2\right)$$

ដោយ $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$ នោះវិសមភាពសមមូលនឹង

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \ge \sum_{i=1}^{n} x_iz_i$$

វិសមភាពក្រោយនេះពិត តាមវិសមភាពតំរៀប ។

263.▲ មាន $x \in (0,\pi/2)$ ។ តាង $a_1 = \sin^3 x; a_2 = \cos^3 x$ និង $b_1 = 1/\cos x; b_2 = 1/\sin x$ ។ យើងឃើញថា បើ $a_1 \le a_2$ នោះ $b_1 \le b_2$ ហើយ បើ $a_1 \ge a_2$ នោះ $b_1 \ge b_2$ ។ ដូច្នេះតាមវិសមភាពតំរៀប

$$f(x) = a_1b_1 + a_2b_2 \ge a_1b_2 + a_2b_1 = \sin^3 x \frac{1}{\sin x} + \cos^3 x \frac{1}{\cos x}$$
$$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត យើងដឹងថា $f(\pi/4) = 1{,}0$ ដូច្នេះ តម្លៃតូចបំផុតរបស់ f គឺស្មើ 1 ។

264.▲ ដោយវិសមភាពនេះគ្មានលក្ខណៈពិសេសចំពោះតំរៀប a,b,c យើងអាចសន្មត ថា $a \ge b \ge c$ ។ ដូច្នេះ $a^2 \ge b^2 \ge c^2$ និង $ab \ge ac \ge bc$ ។ តាមវិសមភាពតំរៀប យើងទាញបាន

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2a + b^2b + c^2c \ge a^2b + b^2c + c^2a$$
$$a^2b + b^2c + c^2a = (ab)a + (ac)c + (bc)b \ge (ab)c + (ac)b + (bc)a$$
$$= 3abc$$

265.▲ គេឱ្យ $n \ge 1$ ។ តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$ មានតម្លៃតូចបំផុត ពេល $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ ។

នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌបែបនេះ $(a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n)$ ហើយ ដោយសារ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលខុសគ្នាពីរៗ នោះ យើងទាញបាន $a_i \ge i$ ចំពោះគ្រប់ i ។

ដូច្នេះ យើងទាញបាន

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

266.▲ ❶ របៀបទីមួយ

យើងរៀប a_i តាមលំដាប់មួយដែល $a_{k(1)} \le a_{k(2)} \le \cdots \le a_{k(n)}$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{a_{k(1)}} \ge \frac{1}{a_{k(2)}} \ge \cdots \ge \frac{1}{a_{k(n)}}$$

ដូច្នេះតាមវិសមភាពតំរៀប យើងទាញបាន

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}=a_1^2\frac{1}{a_2}+a_2^2\frac{1}{a_3}+\cdots+a_n^2\frac{1}{a_1}$$
$$\geq a_{k(1)}^2\frac{1}{a_{k(1)}}+a_{k(2)}^2\frac{1}{a_{k(2)}}+\cdots+a_{k(n)}^2\frac{1}{a_{k(n)}}$$
$$=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

❷ របៀបទីពីរ

ចំពោះគ្រប់ $i\in\{1,2,\dots,n\}$ យើងមាន

$$\frac{a_i^2}{a_{i+1}}+a_{i+1}\geq 2a_i$$
$$\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_{i+1}}+\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}\geq 2\sum_{i=1}^{n}a_i$$

ដោយយក $a_{n+1}=a_1$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}a_{i+1}=\sum_{i=1}^{n}a_i\ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_{i+1}}\geq\sum_{i=1}^{n}a_i$$

267.▲ យើងមាន

$$(x^{1999}+y^{1999}+z^{1999})^2$$
$$=\left[\sqrt{x^{1998}(py+qz)}.\sqrt{\frac{x^{2000}}{py+qz}}+\sqrt{y^{1998}(pz+qx)}.\sqrt{\frac{y^{2000}}{pz+qx}}\right.$$
$$\left.+\sqrt{z^{1998}(px+qy)}.\sqrt{\frac{z^{2000}}{px+qy}}\right]^2$$
$$\leq[x^{1998}(py+qz)+y^{1998}(pz+qx)$$
$$+z^{1998}(px+qy)].\left[\frac{x^{2000}}{py+qz}+\frac{y^{2000}}{pz+qx}+\frac{z^{2000}}{px+qy}\right]$$
$$=[p(x^{1998}y+y^{1998}z+z^{1998}x)+q(x^{1998}z+y^{1998}x+z^{1998}y)]\left[\frac{x^{2000}}{py+qz}\right.$$
$$\left.+\frac{y^{2000}}{pz+qx}+\frac{z^{2000}}{px+qy}\right]\qquad(1)$$

យើងមាន

$$x^{1998}y+y^{1998}z+z^{1998}x\leq x^{1999}+y^{1999}+z^{1999}\qquad(2)$$

ព្រោះតាមវិសមភាពតំរៀប និងដោយសារ(២)មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x,y,z

ដែលយើងអាចសន្មតថា $x\leq y\leq z$ បាន នោះ

$$a_1 = x^{1998} \le a_2 = y^{1998} \le a_3 = z^{1998};$$
$$b_1 = x \le b_2 = y \le b_3 = z$$

នោះដោយយក $b_{\sigma(i)} = \{b_2; b_3; b_1\}$ យើងទាញបាន

$$S_\sigma = \sum_1^3 a_i b_{\sigma(i)} = x^{1998}y + y^{1998}z + z^{1998}x \le a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
$$= x^{1999} + y^{1999} + z^{1999}$$

ពិត ។ ដូច្នេះវិសមភាព(១)ទៅជា

$$(x^{1999} + y^{1999} + z^{1999})^2$$
$$\le (p+q)(x^{1999} + y^{1999} + z^{1999})\left[\frac{x^{2000}}{py+qz} + \frac{y^{2000}}{pz+qx} + \frac{z^{2000}}{px+qy}\right]$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^{2000}}{py+qz} + \frac{y^{2000}}{pz+qx} + \frac{z^{2000}}{px+qy} \ge \frac{x^{1999} + y^{1999} + z^{1999}}{p+q}$$

268.▲ របៀបទី ១

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \ge a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1$$
$$\cdots$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \ge a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ យើងទាញបាន

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \ge (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

$\Longrightarrow$ វិសមភាពពិត ។

ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាករណីស្វ៊ីត (b_n) រៀបតាមលំដាប់ច្រាសមកវិញ ។

របៀបទី ២

យើងមាន

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$
$$= na_1b_1 - a_1(b_1 + \cdots + b_n) + na_2b_2 - a_2(b_1 + \cdots + b_n) + \cdots$$
$$+ na_nb_n - a_n(b_1 + \cdots + b_n)$$

និង

$$na_1b_1 - a_1(b_1 + \cdots + b_n)$$
$$= 0 + a_1(b_1 - b_2) + a_1(b_1 - b_3) + a_1(b_1 - b_4) + \cdots$$
$$+ a_1(b_1 - b_{n-1}) + a_1(b_1 - b_n)$$

$$na_2b_2 - a_2(b_1 + \cdots + b_n)$$
$$= -a_2(b_1 - b_2) + 0 + a_2(b_2 - b_3) + a_2(b_2 - b_4) + \cdots$$
$$+ a_2(b_2 - b_{n-1}) + a_2(b_2 - b_n)$$
$$na_3b_3 - a_3(b_1 + \cdots + b_n)$$
$$= -a_3(b_1 - b_3) - a_3(b_2 - b_3) + 0 + a_3(b_3 - b_4) + \cdots$$
$$+ a_3(b_3 - b_{n-1}) + a_3(b_3 - b_n)$$
$$\ldots$$
$$na_{n-1}b_{n-1} - a_{n-1}(b_1 + \cdots + b_2)$$
$$= -a_{n-1}(b_1 - b_{n-1}) - a_{n-1}(b_2 - b_{n-1}) - a_{n-1}(b_3 - b_{n-1})$$
$$- a_{n-1}(b_4 - b_{n-1}) - \cdots + 0 + a_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$$
$$na_nb_n - a_n(b_1 + \cdots + b_2)$$
$$= -a_n(b_1 - b_n) - a_n(b_2 - b_n) - a_n(b_3 - b_n) - a_n(b_4 - b_n)$$
$$- \cdots - a_n(b_{n-1} - b_n) + 0$$

បូកសមភាពទាំងនេះចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$[na_1b_1 - a_1(b_1 + \cdots + b_n)] + [na_2b_2 - a_2(b_1 + \cdots + b_n)]$$
$$+ [na_3b_3 - a_3(b_1 + \cdots + b_n)] + \cdots$$
$$+ [na_{n-1}b_{n-1} - a_{n-1}(b_1 + \cdots + b_2)]$$
$$+ [na_nb_n - a_n(b_1 + \cdots + b_2)]$$
$$= (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) + (a_1 - a_3)(b_1 - b_3) + (a_1 - a_4)(b_1 - b_4) + \cdots$$
$$+ (a_1 - a_{n-1})(b_1 - b_{n-1}) + (a_1 - a_n)(b_1 - b_n)$$
$$+ (a_2 - a_3)(b_2 - b_3) + (a_2 - a_4)(b_2 - b_4) + \cdots$$
$$+ (a_2 - a_{n-1})(b_2 - b_{n-1}) + (a_2 - a_n)(b_2 - b_n)$$
$$+ (a_3 - a_4)(b_3 - b_4) + \cdots + (a_3 - a_{n-1})(b_3 - b_{n-1})$$
$$+ (a_3 - a_n)(b_3 - b_n) + \cdots + (a_{n-1} - a_n)(b_{n-1} - b_n)$$

ដូច្នេះ

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$
$$= (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) + (a_1 - a_3)(b_1 - b_3)$$
$$+ (a_1 - a_4)(b_1 - b_4) + \cdots + (a_1 - a_{n-1})(b_1 - b_{n-1})$$
$$+ (a_1 - a_n)(b_1 - b_n) + (a_2 - a_3)(b_2 - b_3)$$
$$+ (a_2 - a_4)(b_2 - b_4) + \cdots + (a_2 - a_{n-1})(b_2 - b_{n-1})$$
$$+ (a_2 - a_n)(b_2 - b_n) + (a_3 - a_4)(b_3 - b_4) + \cdots$$
$$+ (a_3 - a_{n-1})(b_3 - b_{n-1}) + (a_3 - a_n)(b_3 - b_n) + \cdots$$
$$+ (a_{n-1} - a_n)(b_{n-1} - b_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

ដូច្នេះ បើ $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ និង $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ នោះ

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \ge 0$$
$$\Rightarrow \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}$$
$$\ge \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$$

តែ បើ $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ នោះ

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq 0$$
$$\Rightarrow \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$$

269.▲ ❶ របៀបទី១

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a \geq b \geq c$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c}$$

តាមវិសមភាព Chebyshev យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= a.\frac{1}{b+c} + b.\frac{1}{c+a} + c.\frac{1}{a+b}\\ &\geq \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)\\ &= \frac{1}{6}[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)\\ &\geq \frac{1}{6}.3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}.3\sqrt[3]{\frac{1}{b+c}\frac{1}{c+a}\frac{1}{a+b}}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

ពិត ។

❷ របៀបទី២

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a \geq b \geq c$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c}$$

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងទាញបាន

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = a.\frac{1}{b+c} + b.\frac{1}{c+a} + c.\frac{1}{a+b}$$
$$\geq a.\frac{1}{c+a} + b.\frac{1}{a+b} + c.\frac{1}{b+c}$$

និង

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq a.\frac{1}{a+b}+b.\frac{1}{b+c}+c.\frac{1}{a+c}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ យើងទាញបាន

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$
$$\geq a.\frac{1}{c+a}+b.\frac{1}{a+b}+c.\frac{1}{b+c}+a.\frac{1}{a+b}+b.\frac{1}{b+c}$$
$$+c.\frac{1}{a+c}=3$$

$\Longrightarrow$ វិសមភាពពិត ។

270.▲ តាង

$$S=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}$$
$$x=b+c+d, y=c+d+a, z=d+a+b, t=a+b+c$$
$$x+y+z+t=3(a+b+c+d)$$

ដោយផលបូក S មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a,b,c,d (ឧទាហរណ៍ ជំនួស a ដោយ b និង b ដោយ a យើងទាញបាន S នៅដដែល) នោះ យើងអាចសន្មតថា $a\geq b\geq c\geq d$ $\Longrightarrow a^n\geq b^n\geq c^n\geq d^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ និង

$$\frac{1}{x}\geq\frac{1}{y}\geq\frac{1}{z}\geq\frac{1}{t}$$

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន $a^2+b^2+c^2+d^2\geq ab+bc+cd+da=1$ ។

តាមវិសមភាព Chebyshov យើងមាន

$$S=a^3\frac{1}{x}+b^3\frac{1}{y}+c^3\frac{1}{z}+d^3\frac{1}{t}$$
$$\geq\frac{1}{4}(a^3+b^3+c^3+d^3)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$$

និង

$$a^3+b^3+c^3+d^3\geq\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a+b+c+d)$$
$$\geq\frac{1}{4}(1)(a+b+c+d)=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$$

$$\Longrightarrow\ S\geq\frac{1}{16}(a+b+c+d)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$$

$$\geq\frac{1}{48}(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\geq\frac{1}{48}.4\sqrt[4]{xyzt}.4\sqrt[4]{\frac{1}{x}\frac{1}{y}\frac{1}{z}\frac{1}{t}}=\frac{1}{3}$$

271.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a\geq b\geq c$ ។ ដូច្នេះ $a^n\geq b^n\geq c^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ និង

$$\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{a+c}\leq\frac{1}{b+c}$$

តាមវិសមភាពតំរៀប យើងមាន

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^n}{a+b}+\frac{b^n}{b+c}+\frac{c^n}{c+a}$$

និង

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^n}{c+a}+\frac{b^n}{a+b}+\frac{c^n}{b+c}$$

បូកអង្គនិងអង្គ យើងទាញបាន

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{a^n+b^n}{a+b}+\frac{b^n+c^n}{b+c}+\frac{c^n+a^n}{c+a}\right)$$

តាមវិសមភាព Chebyshev

$$a^n+b^n\geq\frac{1}{2}(a^{n-1}+b^{n-1})(a+b)\ \Longrightarrow\frac{a^n+b^n}{a+b}\geq\frac{1}{2}(a^{n-1}+b^{n-1})$$

ដូចគ្នា

$$\frac{b^n+c^n}{b+c}\geq\frac{1}{2}(b^{n-1}+c^{n-1})$$

$$\frac{c^n+a^n}{c+a}\geq\frac{1}{2}(c^{n-1}+a^{n-1})$$

$$\Longrightarrow\ \frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$$

272.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $x\leq y\leq z$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{(1+y)(1+z)}\leq\frac{1}{(1+z)(1+x)}\leq\frac{1}{(1+x)(1+y)}$$

តាមវិសមភាព Chebyshev យើងទាញបាន

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}$$
$$\geq \frac{x^3+y^3+z^3}{3}\left[\frac{1}{(1+y)(1+z)}+\frac{1}{(1+z)(1+x)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)}\right]$$
$$=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\frac{3+x+y+z}{(1+y)(1+z)(1+x)}$$

តាង $(x+y+z)/3=a$ ។ តាមវិសមភាព Chebyshev យើងមាន

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{x+y+z}{3}.\frac{x+y+z}{3}.\frac{x+y+z}{3}$$
$$=\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=a^3$$

និង តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$3a=x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$$
$$(1+y)(1+z)(1+x)\leq\left[\frac{(1+y)+(1+z)+(1+x)}{3}\right]^3=(1+a)^3$$

ដូច្នេះ

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq a^3\frac{6}{(1+a)^3}$$

ដូច្នេះ យើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\frac{6a^3}{(1+a)^3}\geq\frac{3}{4}$$

ដោយ $a^3\geq 1$ នោះ

$$f(a)=\frac{6a^3}{(1+a)^3}=6\left[1-\frac{1}{1+a}\right]^3$$

ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}^+$ ។ យើងមាន

$$f(a^3)\geq f(1)=\frac{3}{4}$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិត ។

273.▲ ❶ របៀបទីមួយ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត មិនអវិជ្ជមាន គេមាន

$$\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\geq 0\ \Rightarrow\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2}$$

ដូច្នេះ វិសមភាពខាងលើពិត ចំពោះ $n = 2$ ។ សន្មតថា វិសមភាពខាងលើពិត រហូតដល់ $n = 2^{k-1}, k > 2$ ។ ដូច្នេះ

$$\sqrt[2^{k-1}]{a_1 a_2 \dots a_{2^{k-1}}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}$$

តាង

$$x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}}$$
$$x_2 = \frac{a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}}{2^{k-1}}$$

យើងមាន

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} + \frac{a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}}{2^{k-1}}}{2}$$
$$\geq \sqrt{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k-1}}}{2^{k-1}} \cdot \frac{a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}}{2^{k-1}}}$$
$$\geq \sqrt{\sqrt[2^{k-1}]{a_1 a_2 \dots a_{2^{k-1}}} \cdot \sqrt[2^{k-1}]{a_{2^{k-1}+1} \dots a_{2^k}}} = \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \dots a_{2^k}}$$
$$\Longrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \dots a_{2^k}}$$

ដូច្នេះ វិសមភាពពិតចំពោះ គ្រប់ $n = 2^k, k \geq 1$ ។ ឥឡូវសន្មតថា $2^{k-1} < n < 2^k$ ។

តាង

$$y_1 = a_1, y_2 = a_2, \dots, y_n = a_n$$
$$y_{n+1} = y_{n+2} = \cdots = y_{2^k} = A$$
$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$
$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

យើងមាន

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{y_1 y_2 \dots y_{2^k}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + (2^k - n)A}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \dots a_n . A^{2^k - n}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{nA + (2^k - n)A}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{G^n A^{2^k - n}}$$
$$\Leftrightarrow A \geq G^{\frac{n}{2^k}} A^{1 - \frac{n}{2^k}}$$

$\Leftrightarrow A^{\frac{n}{2^k}} \geq G^{\frac{n}{2^k}}$
$\Leftrightarrow A \geq G$
$\Leftrightarrow \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$
ដូច្នេះវិសមភាពពិតចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។

❷ របៀបទីពីរ

អនុគមន៍ $f(x) = \ln x$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $\mathbb{R}^{+*}$ ។ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\ln\left(\frac{1}{n}a_1 + \frac{1}{n}a_2 + \cdots + \frac{1}{n}a_n\right) \geq \frac{1}{n}\ln a_1 + \frac{1}{n}\ln a_2 + \cdots + \frac{1}{n}\ln a_n$$
$$= \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$
$$\Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

274.▲ តាង $a = x + y, b = y + z, c = z + x$ $(x, y, z > 0)$ វិសមភាពដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$6xyz \leq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2$$

វិសមភាពនេះពិត ដោយប្រើវិសមភាពមធ្យមនព្វន្តមធ្យមធរណីមាត្រ សំរាប់ $x^2y, xy^2, x^2z, xz^2, y^2z, yz^2$ ។

275.▲ យើងមាន

$$(n!)^{2/n} = \left((1.2.\dots n)^{\frac{1}{n}}\right)^2 \leq \left(\frac{1 + 2 + \cdots + n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6}$$

276.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$8a^2b^3c^3 \leq 2a^8 + 3b^8 + 3c^8$$
$$8a^3b^2c^3 \leq 3a^8 + 2b^8 + 3c^8$$
$$8a^3b^3c^2 \leq 3a^8 + 3b^8 + 2c^8$$

បូកវិសមភាពអស់នេះបញ្ចូលគ្នា ហើយចែកនឹង $3a^3b^3c^3$ យើងទាញបានវិសមភាពដែលចង់បាន ។

277.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$(n+k-1)x_1^n x_2 \dots x_k \le n x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \cdots + x_k^{n+k-1}$$
$$(n+k-1)x_1 x_2^n \dots x_k \le x_1^{n+k-1} + n x_2^{n+k-1} + \cdots + x_k^{n+k-1}$$
$$\dots \quad \dots$$
$$(n+k-1)x_1 x_2 \dots x_k^n \le x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \cdots + n x_k^{n+k-1}$$

បូកវិសមភាពទាំងអស់បញ្ចូលគ្នា បន្ទាប់មកចែកនឹង $(n+k-1)$ យើងទាញបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ ។

278.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \ge n\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \ge n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\dots\frac{1}{x_n}}$$
$$\Rightarrow \ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \ge n^2$$

279.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\left(\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(a+c)}\right)^3 \ge \frac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3 \ge (a+b)(b+c)(c+a)$$
$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc$$
$$\Rightarrow abc(a+b)(b+c)(c+a) \le \frac{8}{27^2}(a+b+c)^6$$
$$\Rightarrow \frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \ge \frac{27^2}{8}.\frac{1}{(a+b+c)^6}$$
$$\Rightarrow \frac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \ge \frac{27^3}{2^3}.\frac{1}{(a+b+c)^6}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(a+c)}\right)^3 \ge \frac{27^3}{2^3}.\frac{1}{(a+b+c)^6}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(a+c)} \ge \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

ពិត ។

280.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $x \le y \le z$ ។ តាង
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2(xy + yz + zx)$$
យើងមាន
$$\begin{aligned} & f(x,y,z) - f\left(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}\right) \\ & = y^2 + z^2 + y + z - 2(xy + yz + zx) - 2\sqrt{yz} + 4x\sqrt{yz} \\ & = (y-z)^2 + \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 - 2x\left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 \\ & = \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 \left[\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2 + 1 - 2x\right] \\ & = \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 \left[y + z - 2x + 1 + 2\sqrt{yz}\right] \end{aligned}$$
ដោយ $x \le y \le z$ នោះ $y + z - 2x \ge 0 \Rightarrow f(x,y,z) - f\left(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}\right) \ge 0$

ហើយអង្គទាំង២ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $y = z$ ។ បន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងបង្ហាញថា

$f\left(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}\right) \ge 0$ ។

តាង $a = x$ និង $b = \sqrt{yz}$ ។ ដូច្នេះ $a, b > 0$ និង $ab^2 = 1$ ។ យើងមាន
$$\begin{aligned} f(a,b,b) &= a^2 + a + 2b - 4ab \\ &= \frac{1}{b^4} + \frac{1}{b^2} + 2b - \frac{4}{b} \\ &= \frac{1}{b^4}(2b^5 - 4b^3 + b^2 + 1) \\ &= \frac{1}{b^4}(b-1)^2(2b^3 + 4b^2 + 2b + 1) \ge 0 \end{aligned}$$
អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $b = 1$ ។ ដូច្នេះ $f(x,y,z) \ge f(a,b,b) \ge 0$ ហើយស្មើគ្នា

លុះត្រាតែ $y = z, b = 1, xyz = 1 \Rightarrow x = y = z = 1$ ។

281.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី
$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \\ & \qquad \ge 10\,(a^2b^2c^2d^2abacadbcbdcd)^{\frac{1}{10}} = 10\,(a^5b^5c^5d^5)^{\frac{1}{10}} = 10 \end{aligned}$$
អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ពេល $a = b = c = d = 1$ ។

282.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+6abc \\ &\quad +3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) \\ &\geq a^3+b^3+c^3+6abc+3.6\sqrt[6]{a^6b^6c^6} \\ &= a^3+b^3+c^3+24abc\end{aligned}$$

(តាមវិសមភាពកូស៊ី)

283.▲ ករណីអង្គខាងស្តាំនៃវិសមភាព អវិជ្ជមាន ឬ សូន្យ នោះវិសមភាពជាវិសមភាពជាច់ខាត ។ ករណីអង្គខាងស្តាំវិជ្ជមាន យើងសន្មតថា $a = \max(a,b,c)$ ។ ដូច្នេះ $a+b-c>0$ និង $c+a-b>0$ $\Rightarrow b+c-a>0$ ព្រោះអង្គខាងស្តាំវិជ្ជមាន ។ ដូច្នេះ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ។ ដូច្នេះ យើងតាង

$$a+b-c=x, b+c-a=y, c+a-b=z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x,y,z>0 \\ a=\dfrac{x+z}{2}, b=\dfrac{y+x}{2}, c=\dfrac{z+y}{2}\end{cases}$$

វិសមភាពទៅជា

$$(x+z)(y+x)(z+y) \geq 8xyz$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$(x+z)(y+x)(z+y) \geq 2\sqrt{xz}.2\sqrt{yx}.2\sqrt{zy} = 8xyz$$

ពិត ។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាទាល់តែនិងមានតែ $x=y=z$ មានន័យថា $a=b=c$ ។

284.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងមាន

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} a_k(1-a_k) &= \left[\prod_{k=1}^{n} a_k\right]\left[\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\right] \leq \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right]^n \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)\right]^n \\ &= \frac{1}{n^n}.\frac{(n-1)^n}{n^n} = \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}\end{aligned}$$

285.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a} &= \left[b+\frac{1}{2a}\right]^2 + a^2 + \frac{3}{4a^2} \\ &\geq a^2+\frac{3}{4a^2} \text{ ស្មើគ្នាទាល់តែ } b = -\frac{1}{2a}\end{aligned}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} \quad \text{តាមវិសមភាពកូស៊ី}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \geq \sqrt{3}$$

ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $a^4 = 3/4$ និង $b = -1/2a$ ។

286.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី ចំពោះ $n \geq 2$

$$\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{n}} < \frac{1+\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}{n}$$

$$= \frac{1+(n-1)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}{n} = 1+\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \quad \Rightarrow U_{n-1} < U_n$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{1+n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n}} < \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \Leftrightarrow \frac{1}{V_{n-1}} < \frac{1}{V_n} \Rightarrow V_n < V_{n-1}$$

287.▲ យើងតាង

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2}$$

ក្នុងសំណេរបន្ទាប់មកទៀតនេះ យើងសន្មតថា $a_{n+1} = a_1; a_{n+2} = a_2; a_{n+3} = a_3; \ldots$ ។

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_{n+1}} + \frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}$$

យើងសន្មតថា $a_1 = \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ។ តាង $i_1 = 1$ ។ តាង i_2 ជាសន្ទស្សន៍របស់ចំនួនធំបំផុតរវាង a_2 និង a_3 គឺ បើ $a_2 > a_3$ យក $i_2 = 2$ និងបើ $a_3 > a_2$ យក $i_2 = 3$ ហើយបើ $a_2 = a_3$ នោះយើងយក $i_2 = 2$ ។ ដូច្នេះ $i_2 \le i_1 + 2$ ។

យើងបង្កើតស្វ៊ីត (i_k) មួយ ដោយកំណើនដូចតទៅនេះ ៖

បើ បង្កើតបាន i_k រួចហើយ តាង i_{k+1} ជាសន្ទស្សន៍នៃចំនួនធំជាងគេរវាង a_{i_k+1} និង a_{i_k+2} ដោយ បើ $a_{i_k+1} = a_{i_k+2}$ យក $i_{k+1} = i_k + 1$ ។ ក្នុងលក្ខខណ្ឌនេះ

$i_{k+1} \le i_k + 2$ ។

ដោយ $i_1 = 1$ នោះ $i_{k+1} \le 1 + 2k$ ចំពោះគ្រប់ k ។

ដោយ $a_1 = a_{n+1} = \max(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max(a_n, a_{n+1})$ នោះ យើងមាន r ដែល $i_{r+1} = n + 1$ ជាសន្ទស្សន៍របស់ចំនួនធំបំផុតរវាង a_n និង a_{n+1} ដែលត្រូវនឹងចំនួនធំបំផុតរវាង a_{i_r+1} និង a_{i_r+2} ។ ដូច្នេះ $i_r = n - 1$ ឬ $i_r = n$ ។ ដូច្នេះ $n - 1 \le i_r \le 1 + 2(r - 1)$

$\Rightarrow r \ge n/2$ (1)

⊗[ដើម្បីពន្យល់អំណអំណាងខាងលើ ខ្ញុំសូមដាក់ឧទាហរណ៍មួយ សន្មតថា $n = 5; a_1$ ធំជាងគេនិង $a_3 > a_2; a_4 > a_5$ ។ យើងមាន $i_1 = 1; i_2$ ជាសន្ទស្សន៍របស់ចំនួនធំបំផុតរវាង $a_{i_1+1} = a_2$ និង $a_{i_1+2} = a_3$ ។ ដោយ $a_3 > a_2 \Rightarrow i_2 = 3; i_3$ ជាសន្ទស្សន៍របស់ចំនួនធំបំផុតរវាង $a_{i_2+1} = a_4$ និង $a_{i_2+2} = a_5$ ។ ដោយ $a_4 > a_5$ នោះ $i_3 = 4$។ i_4 ជាសន្ទស្សន៍របស់ចំនួនធំបំផុតរវាង $a_{i_3+1} = a_5$ និង $a_{i_3+2} = a_6 = a_1$ ។ ដោយ $a_1 > a_5$ នោះ $i_4 = 6$។ ករណីនេះយើងទាញបាន $r = 4$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) &= \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_5} + \frac{a_4}{a_5 + a_1} + \frac{a_5}{a_1 + a_2} \\ &> \frac{a_1}{a_2 + a_3} + 0 + \frac{a_3}{a_4 + a_5} + \frac{a_4}{a_5 + a_1} + 0 \ge \frac{a_1}{2a_2} + \frac{a_3}{2a_4} + \frac{a_4}{2a_1} \\ &= \frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}} + \frac{a_{i_3}}{2a_{i_4}} \end{aligned}$$

]☺

ដូច្នេះយើងទាញបាន

$$f(a_1,a_2,\dots,a_n) \ge \frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}} + \cdots + \frac{a_{i_r}}{2a_{i_{r+1}}} \quad (2)$$
$$\ge \frac{r}{2}\left(\frac{a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_r}}{a_{i_2}a_{i_3}\dots a_{i_{r+1}}}\right)^{\frac{r}{2}} \text{ (វិសមភាពកូស៊ី)}$$
$$= \frac{r}{2} \ge \frac{n}{4}$$

ដើម្បីឱ្យ $f(a_1,a_2,\dots,a_n) = n/4$ គេត្រូវតែមាន (1) និង (2) ជាសមភាព ។ តែសមភាព (2) នាំឱ្យ $r = n$ តែសមភាពនេះ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព (1) ។ ដូច្នេះ $f(a_1,a_2,\dots,a_n) > n/4$ ។

288.▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$2 + a_i = 1 + 1 + a_i \ge 3\, a_i^{\frac{1}{3}}$$
$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n}(2+a_i) \ge 3^n\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{3}} = 3^n$$

289.▲ ❶ ដោយ a, b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន នោះគេមាន x, y ដែល $0 < x, y < 90°$ ហើយដែល $\tan x = a; \tan y = b$ ។ វិសមភាពនេះពិត បើ $a = b$ ។ ដូច្នេះ យើងសន្មតថា $a \ne b$ ឬ សមមូលនឹង $x \ne y$ ។ ដូច្នេះ $1/\sqrt{1+a^2} = \cos x$; $1/\sqrt{1+b^2} = \cos y$ ។ យើងមាន

$$1 + ab = \frac{\cos x\cos y + \sin x\sin y}{\cos x\cos y} = \frac{\cos(x-y)}{\cos x\cos y}$$

ដូច្នេះវិសមភាពសមមូលនឹង

$$\cos x + \cos y \ge 2\sqrt{\frac{\cos x\cos y}{\cos(x-y)}} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x\cos y \le \frac{4\cos x\cos y}{\cos(x-y)}$$

ដោយ $0 < |x-y| < 90°$ នោះ $0 < \cos(x-y) < 1$ ។ ដូច្នេះ $2\cos x\cos y \le 2\cos x\cos y/\cos(x-y)$ ។ ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\cos^2 x + \cos^2 y \le \frac{2\cos x\cos y}{\cos(x-y)}$$

$\Leftrightarrow\ \cos(x-y)[\cos^2 x + \cos^2 y] \le 2\cos x\cos y$
$\Leftrightarrow\ \cos(x-y)[\cos^2 x + \cos^2 y + 2] \le 4\cos x\cos y$
$\Leftrightarrow\ \cos(x-y)[2\cos(x-y)\cos(x+y) + 2] \le 2[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$
$\Leftrightarrow\ \cos^2(x-y)\cos(x+y) \le \cos(x+y)$

ពិត ព្រោះ $0 < a, b \le 1$ យើងមាន $0 < x, y < \frac{\pi}{4}$ ដូច្នេះ $0 < x + y < \frac{\pi}{2}$ និង $\cos(x+y) > 0$ ។

❷ យើងបំលែងវិសមភាព(*) ជា

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \ge 2\sqrt{\frac{1/2[\cos(x+y) + \cos(x-y)\,]}{\cos(x-y)}}$$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}\cos(x-y) \ge 2[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
$\Leftrightarrow [1 + \cos(x+y)][1 + \cos(x-y)]\cos(x-y)$
$\qquad \ge 2[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

តាង $s = \cos(x+y)$ និង $t = \cos(x-y)$ ។ ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$(1+s)(1+t)t \ge 2(s+t)$$

$\Leftrightarrow\ \ 0 \le (1+s)t^2 + (s-1)t - 2s = (t-1)[(1+s)t + 2s]$

ដោយ $t \le 1$ ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $(1+s)t + 2s \le 0$

ដោយ $ab \ge 3$ នោះ $\tan x\tan y \ge 3$ ឬសមមូលនឹង $\sin x\sin y \ge 3\cos x\cos y$ ។ នាំឱ្យ

$$\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] \ge \frac{3}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)] \Longrightarrow t \le -2s$$

ដោយ $1 + s \ge 0$ នោះ $(1+s)t \le -(1+s)2s$ ។ យើងទាញបាន $(1+s)t + 2s \le -(1+s)2s + 2s = -2s^2 \le 0$ ដូចដែលចង់បាន ។

290.▲ ចំពោះគ្រប់ i តាង $a_i = 1/(1+x_i)$ ។ ដូច្នេះ $0 < a_i < 1, x_i = (1-a_i)/a_i$ និង $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = 1$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)}{\prod_{i=1}^{n+1} a_i}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$1-a_i=(a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+..+a_{n+1})$$
$$\geq n\,(a_1a_2\dots a_{i-1}a_{i+1}\dots a_{n+1})^{\frac{1}{n}}$$
$$\Leftrightarrow 1-a_i\geq n\left[\prod_{k\neq i}a_k\right]^{\frac{1}{n}}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នាបើ $a_k, k\neq i$ ស្មើគ្នាទាំងអស់ ។ ដូច្នេះ

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)\geq n^{n+1}\left[\prod_{k\neq 1}a_k\right]^{\frac{1}{n}}\dots\left[\prod_{k\neq n+1}a_k\right]^{\frac{1}{n}}=n^{n+1}\left[\prod_{i=1}^{n+1}a_i^n\right]^{\frac{1}{n}}=n^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}a_i$$
$$\Rightarrow\prod_{i=1}^{n+1}x_i=\frac{\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)}{\prod_{i=1}^{n+1}a_i}\geq n^{n+1}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ $a_1=a_2=\cdots=a_{n+1}=1/(n+1)\Rightarrow x_1=$ $x_2=\cdots=x_{n+1}=n$ ។

291.▲ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k,j តាង $\alpha_{k,j}=x_{j+k}/x_j$ ដែលក្នុងបណ្ដាសន្ទស្សន៍ទាំងអស់នេះ បើសន្ទស្សន៍ណាមួយ ធំជាង n យើងដក n ចេញ ។ ឧទាហរណ៍ $(n+1)$ ជំនួសដោយ 1; $(n+2)$ ជំនួសដោយ 2; $(2n+1)\to n+1\to 1$ ។ល ។

ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ k យើងមាន

$$\alpha_{k,1}\alpha_{k,2}\dots\alpha_{k,n}=\frac{x_{1+k}}{x_1}\frac{x_{2+k}}{x_2}\dots\frac{x_{n+k}}{x_n}=1$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_n=x_{1+j}+x_{2+j}+\cdots+x_{n+j}$$
$$x_{n+j}=x_j$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(s-x_j)}{x_j}&=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(x_1+x_2+\cdots+x_n-x_j)}{x_j}\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(x_{1+j}+x_{2+j}+\cdots+x_{n-1+j}+x_{n+j}-x_j)}{x_j}\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(x_{1+j}+x_{2+j}+\cdots+x_{n-1+j})}{x_j}\\&=\sum_{j=1}^{n}a_j\left(\frac{x_{j+1}}{x_j}+\frac{x_{j+2}}{x_j}+\cdots+\frac{x_{j+n-1}}{x_j}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}a_j\left(\alpha_{1,j}+\alpha_{2,j}+\cdots+\alpha_{n-1,j}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}a_j\alpha_{1,j}+\sum_{j=1}^{n}a_j\alpha_{2,j}+\cdots+\sum_{j=1}^{n}a_j\alpha_{n-1,j}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n}a_j\alpha_{k,j}\right]\geq\sum_{k=1}^{n-1}\left[n\left(\prod_{j=1}^{n}a_j\alpha_{k,j}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\left[n\left(\prod_{j=1}^{n}a_j\right)^{\frac{1}{n}}\right]=n(n-1)\left(\prod_{j=1}^{n}a_j\right)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

សមភាពកើតមាន ពេល $x_1=x_2=\cdots=x_n$ ។ ដូច្នេះ $C(n)=n(n-1)$ ។

292.▲ តាង

$$P=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right);\ Q=\frac{1}{(xyz)^{1/3}}$$

$$\Rightarrow\ P=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xyz}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3Q$$

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\geq 3Q^2$$

$$Q \geq \frac{3}{x+y+z} = 3$$
$$\frac{1}{xyz} = Q^3$$
$\Rightarrow P \geq 1 + 3Q + 3Q^2 + Q^3 = (1+Q)^3 \geq (1+3)^3 = 64$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ពេល $x = y = z = 1/3$ ។

293.▲ ជាដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $a, b > 0$ គេមាន
$$\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3}$$
ហើយអង្គទាំង២ស្មើគ្នា ទាល់តែ $a = b$ ។

យើងមាន

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3} \ \Leftrightarrow 3(a^2 - ab + b^2) \geq a^2 + ab + b^2 \ \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$
ពិត ។ អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ទាល់តែ $a = b$ ។ ■

តាង

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i^9 + x_j^9}{x_i^6 + x_i^3 x_j^3 + x_j^6}$$
$$\forall i, a_i = x_i^3$$

យើងមាន $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ ហើយ

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\dots,x_n) &= \sum_{1\le i<j\le n}\frac{x_i^9+x_j^9}{x_i^6+x_i^3x_j^3+x_j^6}=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{a_i^3+a_j^3}{a_i^2+a_ia_j+a_j^2}\\
&=\sum_{1\le i<j\le n}\left[(a_i+a_j)\frac{a_i^2-a_ia_j+a_j^2}{a_i^2+a_ia_j+a_j^2}\right]\ge\sum_{1\le i<j\le n}\left[(a_i+a_j)\frac{1}{3}\right]\\
&=\frac{1}{3}\sum_{1\le i<j\le n}(a_i+a_j)\\
&=\frac{1}{3}[(a_1+a_2)+(a_1+a_3)+\cdots+(a_1+a_n)+(a_2+a_3)\\
&+(a_2+a_4)+\cdots+(a_2+a_n)+\cdots.]\\
&=\frac{n-1}{3}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\ge\frac{n(n-1)}{3}(a_1a_2\dots a_n)^{1/n}\\
&=\frac{n(n-1)}{3}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow\quad f(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge\frac{n(n-1)}{3}$$

អង្គទាំង២ស្មើគ្នា ទាល់តែ $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ ។

294.▲ តាង

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c,d) &= abc+bcd+cda+dab-\frac{176}{27}abcd\\
&=bc(a+d)+ad\left[b+c-\frac{176}{27}bc\right]
\end{aligned}
$$

យើងឃើញថា f(a, b, c, d)ជាទំនាក់ទំនងឆ្លុះ (បើគេប្តូរ a ទៅ b និង b ទៅ a ។ល ។ នោះ f នៅដដែល) ។

1) ករណី $b+c-\frac{176}{27}bc\le 0$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$f(a,b,c,d)\le bc(a+d)\le\left[\frac{b+c+(a+d)}{3}\right]^3=\frac{1}{27}$$

$\Longrightarrow$ វិសមភាពពិត ។

2) ករណី $b+c-\frac{176}{27}bc>0$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$f(a,b,c,d) \le bc(a+d) + \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 \left[b + c - \frac{176}{27}bc\right]$$
$$= f\left(\frac{a+d}{2}, b, c, \frac{a+d}{2}\right)$$

ដូច្នេះ

$$f(a,b,c,d) \le f\left(\frac{a+d}{2}, b, c, \frac{a+d}{2}\right)$$
$$= f\left(b, \frac{a+d}{2}, \frac{a+d}{2}, c\right) \text{ ព្រោះ } f \text{ ជាអនុគមន៍ស៊ីមេទ្រី}$$
$$\le f\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = f\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$$
$$\le f\left(\frac{a+d+b+c}{4}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{a+d+b+c}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}, \frac{1}{4}\right)$$
$$= f\left(\frac{b+c}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{a+d}{2}\right) \le f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{27}$$

$\Longrightarrow$ វិសមភាពពិត ។

295.▲ តាង $E = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{+*} | a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1\}$ និង f ជាអនុគមន៍មួយ កំណត់លើ E ដោយ

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = n^2(n-1)\prod_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} P_k(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

ដែល

$$P_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{a_k}\prod_{i=1}^{n} a_i$$

បើ សិនជាគ្រប់ a_i សុទ្ធតែខុសគ្នាទាំងអស់ នោះគេមានពីរក្នុងចំណោមនោះ ឧទាហរណ៍ a_1, a_2 ដែល $a_1 < m < a_2$ ដែល $m = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n = 1/n$ ។

យើងមាន

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1 + a_2)A + a_1 a_2 B$$

ដែល

$$A = \prod_{i=3}^{n} a_i\,;\ \ B = n^2(n-1)\prod_{i=3}^{n} a_i + \sum_{i=3}^{n} \frac{P_i(a_1, a_2, \dots, a_n)}{a_1 a_2}$$

(បើ $n = 2$ យើងតាង $A = 1; B = n^2(n-1)$) ។ យើងទាញបាន

$$f(m, a_1 + a_2 - m, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = B[m(a_1 + a_2 - m) - a_1 a_2]$$
$$= B(m - a_1)(a_2 - m) > 0$$

ដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$f(m, a_1 + a_2 - m, \dots, a_n) < f(m, m, \dots, a_n) < \cdots < f(m, m, \dots, m)$$

ដូច្នេះ $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \le f(m, m, \dots, m)$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល

$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = m \implies m = 1/n$ ។ ចំពោះ $m = 1/n$

$$f(m, m, \dots, m) = \frac{n^2(n-1)}{n^n} + n\frac{1}{n^{n-1}} = \frac{n^3}{n^n} = \frac{1}{n^{n-3}}$$

$$\implies f(a_1, a_2, \dots, a_n) \le \frac{1}{n^{n-3}}$$

$$\Leftrightarrow\ n^2(n-1)\prod_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} P_k(a_1, a_2, \dots, a_n) \le \frac{1}{n^{n-3}}$$

$$\Leftrightarrow n^2(n-1)a_1 a_2 \dots a_n + a_1 a_2 \dots a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \le \frac{1}{n^{n-3}}$$

$$\Leftrightarrow n^2(n-1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \le \frac{1}{n^{n-3}} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1/n$ ។

296.▲ តាង $a_0 = 1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ ។ យើងមាន

$$a_0 > 0,$$
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = 1,$$
$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n(1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n)}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} = \frac{\prod_{k=0}^{n} a_k}{\prod_{k=0}^{n}(1 - a_k)}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីយើងមាន

$$1 - a_i = \left[\sum_{k=0}^{n} a_k\right] - a_i = \sum_{k \ne i} a_k \ge n\left[\prod_{k \ne i} a_k\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\implies \prod_{k=0}^{n}(1 - a_k) \ge n^{n+1}\left[\prod_{k \ne 0} a_k\right]^{\frac{1}{n}}\left[\prod_{k \ne 1} a_k\right]^{\frac{1}{n}} \dots \left[\prod_{k \ne n} a_k\right]^{\frac{1}{n}} = n^{n+1}\prod_{k=0}^{n} a_k$$

ព្រោះ a_i នីមួយៗមាន n ដង ។

$$\Rightarrow \frac{\prod_{k=0}^{n} a_k}{\prod_{k=0}^{n}(1-a_k)} \le \frac{1}{n^{n+1}}$$

ពិត ។ សមភាពកើតមាន ពេល $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 1/(n+1)$ ។

297.▲ តាមសម្មតិកម្ម $x_1; x_2$ និង $y_1; y_2$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុចស្ថិតលើរង្វង់កាំរង្វាស់ c មានផ្ចិតនៅត្រង់គល់តំរុយ ។ ដូច្នេះ $x_1 = c\cos\theta$; $x_2 = c\sin\theta$; $y_1 = c\cos\phi$; $y_2 = c\sin\phi$ ។ដូច្នេះ

$$S = 2 - c(\cos\theta + \sin\theta + \cos\phi + \sin\phi) + c^2(\cos\theta + \cos\phi + \sin\theta + \sin\phi)$$
$$= 2 - \sqrt{2}c\left[\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right)\right] + c^2\cos(\theta - \phi) \le 2 + 2\sqrt{2}c + c^2$$
$$= \left(\sqrt{2} + c\right)^2$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $\theta = \phi = 5\pi/4$ មានន័យថា $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = -c\sqrt{2}/2$ ។

298.▲ ❶ របៀបទី១

តាង $a = 1/x, b = 1/y, c = 1/z$ យើងទាញបាន $xyz = 1$ ។ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត

$$[(y+z) + (z+x) + (x+y)]\left[\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right] \ge (x+y+z)^2$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{x+y+z}{2}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\frac{x+y+z}{2} \ge \frac{3(xyz)^{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{3}{2}$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិត ។

❷ របៀបទី២

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2(abc)^{\frac{4}{3}}}$$

តាង $a=x^3, b=y^3, c=z^3$ ដែល $x,y,z>0$ នោះ

$$\frac{1}{x^9(y^3+z^3)}+\frac{1}{y^9(z^3+x^3)}+\frac{1}{z^9(x^3+y^3)}\geq\frac{3}{2x^4y^4z^4}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & 2y^9z^9(z^3+x^3)(x^3+y^3)+2x^9z^9(y^3+z^3)(x^3+y^3)\\
&+2x^9y^9(y^3+z^3)(z^3+x^3)\\
&\geq 3x^5y^5z^5(y^3+z^3)(z^3+x^3)(x^3+y^3)\\
\Leftrightarrow\ & 2y^9z^9(x^3z^3+z^3y^3+x^6+x^3y^3)+2x^9z^9(x^3y^3+y^6+x^3z^3+y^3z^3)\\
&+2x^9y^9(y^3z^3+x^3y^3+z^6+x^3z^3)\\
&\geq 3x^5y^5z^5(y^3z^3+x^3y^3+z^6+x^3z^3)(x^3+y^3)\\
\Leftrightarrow\ & 2x^3y^9z^{12}+2y^{12}z^{12}+2x^6y^9z^9+2x^3y^{12}z^9+2x^{12}y^3z^9+2x^9y^6z^9\\
&+2x^{12}z^{12}+2x^9y^3z^{12}+2x^9y^{12}z^3+2x^{12}y^{12}+2x^9y^9z^6\\
&+2x^{12}y^9z^3\\
&\geq 3x^5y^5z^5(x^3y^3z^3+y^6z^3+x^6y^3+x^3y^6+x^3z^6+y^3z^6\\
&+x^6z^3+x^3y^3z^3)\\
\Leftrightarrow\ & 2(x^{12}y^{12}+y^{12}z^{12}+z^{12}x^{12})\\
&+2(x^{12}y^9z^3+x^{12}y^3z^9+x^9y^{12}z^3+x^9y^3z^{12}+x^3y^{12}z^9\\
&+x^3y^9z^{12})+2(x^6y^9z^9+x^9y^6z^9+x^9y^9z^6)\\
&\geq 3x^8y^8z^8+3x^5y^{11}z^8+3x^{11}y^8z^5+3x^8y^{11}z^5+3x^8y^5z^{11}\\
&+3x^5y^8z^{11}+3x^{11}y^5z^8+3x^8y^8z^8\\
\Leftrightarrow\ & \sum_{\text{sym}}x^{12}y^{12}+2\sum_{\text{sym}}x^{12}y^9z^3+\sum_{\text{sym}}x^9y^9z^6\\
&\geq 3(x^{11}y^8z^5+x^{11}y^5z^8+x^8y^{11}z^5+x^8y^5z^{11}+x^5y^{11}z^8\\
&+x^5y^8z^{11}+6x^8y^8z^8\\
\Leftrightarrow\ & \sum_{\text{sym}}x^{12}y^{12}+2\sum_{\text{sym}}x^{12}y^9z^3+\sum_{\text{sym}}x^9y^9z^6\\
&\geq 3\sum_{\text{sym}}x^{11}y^8z^5+\sum_{\text{sym}}x^8y^8z^8\\
\Leftrightarrow\ & \left[\sum_{\text{sym}}x^{12}y^{12}-\sum_{\text{sym}}x^{11}y^8z^5\right]+2\left[\sum_{\text{sym}}x^{12}y^9z^3-\sum_{\text{sym}}x^{11}y^8z^5\right]\\
&+\left[\sum_{\text{sym}}x^9y^9z^6-\sum_{\text{sym}}x^8y^8z^8\right]\geq 0
\end{aligned}$$

-យើងមាន (12,12,0) លុបលើ (11,8,5) ព្រោះ

$$12 \geq 12 \geq 0; 11 \geq 8 \geq 5$$
$$12 \geq 11; 12 + 12 \geq 11 + 8$$
$$12 + 12 + 0 = 11 + 8 + 5$$

តាមវិសមភាព Muirhead យើងទាញបាន

$$\sum_{\text{sym}} x^{12}y^{12} - \sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5 \geq 0$$

-យើងមាន (12,9,3) លុបលើ (11,8,5) ព្រោះ

$$12 \geq 9 \geq 3; 11 \geq 8 \geq 5$$
$$12 \geq 11; 12 + 9 \geq 11 + 8$$
$$12 + 9 + 3 = 11 + 8 + 5$$

តាមវិសមភាព Muirhead យើងទាញបាន

$$\sum_{\text{sym}} x^{12}y^9z^3 - \sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5 \geq 0$$

-យើងមាន (9,9,6) លុបលើ (8,8,8) ព្រោះ

$$9 \geq 9 \geq 6; 8 \geq 8 \geq 8$$
$$9 \geq 8; 9 + 9 \geq 8 + 8$$
$$9 + 9 + 6 = 8 + 8 + 8$$

តាមវិសមភាព Muirhead យើងទាញបាន

$$\sum_{\text{sym}} x^9y^9z^6 - \sum_{\text{sym}} x^8y^8z^8 \geq 0$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិត ។

299.▲ ❶ របៀបទី១

យើងតាង

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}}, y = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}}, z = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}}$$

យើងឃើញថា $x, y, z \in (0; 1)$ ។ យើងត្រូវបង្ហាញថា $x + y + z \geq 1$ ។ យើងមាន

$$\frac{a^2}{8bc} = \frac{x^2}{1 - x^2}, \frac{b^2}{8ac} = \frac{y^2}{1 - y^2}, \frac{c^2}{8ac} = \frac{z^2}{1 - a^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{512} = \frac{x^2}{1 - x^2}\frac{y^2}{1 - y^2}\frac{z^2}{1 - z^2}$$
$$\Rightarrow (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) = 512\,(xyz)^2$$

ឧបមាថា $1 > x+y+z$ នោះ

$$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) > [(x+y+z)^2-x^2][(x+y+z)^2-y^2][(x+y+z)^2-z^2]$$
$$=(x+x+y+z)(y+z)(x+y+z+y)(x+z)(x+y+z+z)(x+y)$$
$$\geq 4(x^2yz)^{\frac{1}{4}}.2(yz)^{\frac{1}{2}}.4(xy^2z)^{\frac{1}{4}}.2(xz)^{\frac{1}{2}}.4(xyz^2)^{\frac{1}{4}}.2(xy)^{\frac{1}{2}}\ \left(\text{តាមវិសមភាពកូស៊ី}\right)$$
$$=512(xyz)^2$$

ផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌ ។ ដូច្នេះ $x+y+z \geq 1$ ។

❷ របៀបទី២

យើងជំនួស

$$x=\frac{a}{a+b+c}, y=\frac{b}{a+b+c}, z=\frac{c}{a+b+c}$$

វិសមភាពទៅជា

$$xf(x^2+8yz)+yf(y^2+8zx)+zf(z^2+8xy) \geq 1$$

ដែល $f(t)=1/\sqrt{t}$ ។

ដោយ f ជាអនុគមន៍ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ហើយ $x+y+z=1$ នោះដោយប្រើវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$xf(x^2+8yz)+yf(y^2+8zx)+zf(z^2+8xy) \geq f\big(x(x^2+8yz)+y(y^2+8zx)+z(z^2+8xy)\big)$$

យើងមាន $f(1)=1$ ។ ដោយអនុគមន៍ f ចុះដាច់ខាត នោះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$1 \geq x(x^2+8yz)+y(y^2+8zx)+z(z^2+8xy)$$

ជាការស្រេច ។ ដោយ $x+y+z=1$ នោះ វិសមភាពនេះសមមូលនឹង

$$(x+y+z)^3 \geq x(x^2+8yz)+y(y^2+8zx)+z(z^2+8xy)$$
$$\Leftrightarrow\ 3[x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2] \geq 0$$ ពិត ។

❸ របៀបទី៣

តាង $x=bc/a^2, y=ca/b^2, z=ab/c^2$ នោះ $xyz=1$ ។ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}} \geq 1$$
$$\Leftrightarrow\ \sqrt{(1+8x)(1+8y)}+\sqrt{(1+8y)(1+8z)}+\sqrt{(1+8z)(1+8x)} \geq \sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}$$

$$\Leftrightarrow (1+8x)(1+8y)+(1+8y)(1+8z)+(1+8z)(1+8x) + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z}\right) \geq (1+8x)(1+8y)(1+8z)$$

$$\Leftrightarrow 1+8x+8y+64xy+1+8y+8z+64yz+1+8x+8z+64xz + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z}\right) \geq (1+8x+8y+64xy)(1+8z)$$

$$\Leftrightarrow 3+16x+16y+16z+64xy+64yz+64xz + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z}\right) \geq 1+8z+8x+64xz+8y+64yz+64xy+512xyz$$

$$\Leftrightarrow 8(x+y+z) + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z}\right) \geq 510$$

ដោយ $xyz = 1$ នោះតាមវិសមភាពកូស៊ី

$x+y+z \geq 3$

$1+8x = 1+x+x+\cdots+x \geq 9\,(x^8)^{\frac{1}{9}} = 9x^{\frac{8}{9}}$

$1+8y = 1+y+y+\cdots+y \geq 9\,(y^8)^{\frac{1}{9}} = 9y^{\frac{8}{9}}$

$1+8z = 1+z+z+\cdots+z \geq 9\,(z^8)^{\frac{1}{9}} = 9z^{\frac{8}{9}}$

$\Longrightarrow\ (1+8x)(1+8y)(1+8z) \geq 9x^{\frac{8}{9}}.9y^{\frac{8}{9}}.9z^{\frac{8}{9}} = 729$

$$\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y}+\sqrt{1+8z} \geq \sqrt{9x^{\frac{8}{9}}}+\sqrt{9y^{\frac{8}{9}}}+\sqrt{9z^{\frac{8}{9}}} = 3\left(x^{\frac{4}{9}}+y^{\frac{4}{9}}+z^{\frac{4}{9}}\right) \geq 9\left(x^{\frac{4}{9}}y^{\frac{4}{9}}z^{\frac{4}{9}}\right)^{\frac{1}{3}} = 9$$

$$\Longrightarrow\ 8(x+y+z) + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x}+\sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z}\right) \geq 8.3+2.\sqrt{729}.9 = 510$$

$\Longrightarrow$ វិសមភាពពិត ។

300.▲ តាង $a=\tan x, b=\tan y, c=\tan z$ ដែល $-\frac{\pi}{2} < x,y,z < \frac{\pi}{2}$ ។ នោះ $a^2+1 = 1/\cos^2 x, b^2+1 = 1/\cos^2 y, c^2+1 = 1/\cos^2 z$ ។ គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពដោយ $\cos^2 x\cos^2 y\cos^2 z$ យើងទាញបាន

$$[(ab+bc+ca-1)\cos x\cos y\cos z]^2 \leq 1$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}(ab+bc)\cos x\cos y\cos z &= \sin x\sin y\cos z+\sin y\sin z\cos x\\ &= \sin y\sin(x+z)\end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}(ca-1)\cos x\cos y\cos z &= \sin z\sin x\cos y-\cos x\cos y\cos z\\ &= -\cos y\cos(x+z)\end{aligned}$$

ដូច្នេះយើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&[(ab+bc+ca-1)\cos x\cos y\cos z]^2\\ &\qquad = [\sin y\sin(x+z)-\cos y\cos(x+z)]^2\\ &\qquad\qquad = \cos^2(x+y+z)\le 1\end{aligned}$$

301.▲ ❶ របៀបទី១

តាង $f(x,y,z)=xy+yz+zx-2xyz$ ។ តាមលក្ខណៈឆ្លុះ យើងអាចសន្មតថា $0\le x\le y\le z\le 1$ ។ ដោយ $x+y+z=1$ នោះ $x\le 1/3$ ។ ដូច្នេះ

$$f(x,y,z)=(1-3x)yz+xyz+zx+xy\ge 0$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$yz\le\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\left(\frac{1-x}{2}\right)^2$$

ដោយ $1-2x>0$ នោះ

$$\begin{aligned}f(x,y,z)=x(y+z)+yz(1-2x)&\le x(1-x)+\left(\frac{1-x}{2}\right)^2(1-2x)\\ &=\frac{-2x^3+x^2+1}{4}\end{aligned}$$

បន្ទាប់មកទៀត យើងត្រូវរកតម្លៃធំបំផុតរបស់អនុគមន៍

$$F(x)=\frac{-2x^3+x^2+1}{4}$$

ដែល $x\in[0,1/3]$ ។ យើងមាន

$$F'(x)=\frac{3}{2}x\left(\frac{1}{3}-x\right)\ge 0;\ \forall x\in\left[0;\frac{1}{3}\right]$$

យើងទាញបាន $F(x)\le F(1/3)=7/27$; $\forall x\in[0;1/3]$ ។

❷ របៀបទី២

យើងបំលែងវិសមភាពទៅជា

$$0 \leq (xy+yz+zx)(x+y+z) - 2xyz \leq \frac{7}{27}(x+y+z)^3$$

យើងមាន

$$0 \leq (xy+yz+zx)(x+y+z) - 2xyz \iff 0 \leq xyz + \sum_{\text{sym}} x^2y$$

ពិត ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&(xy+yz+zx)(x+y+z) - 2xyz \leq \frac{7}{27}(x+y+z)^3 \\
&\iff 7\sum_{\text{cyclic}} x^3 + 15xyz - 6\sum_{\text{sym}} x^2y \geq 0 \\
&\iff \left(2\sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y\right) + 5\left(3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y\right) \geq 0
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$2\sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y \geq 0; \text{ និង } 3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y \geq 0$$

ជាការគ្រប់គ្រាន់ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}
2\sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y &= \sum_{\text{cyclic}} (x^3+y^3) - \sum_{\text{cyclic}} (x^2y + xy^2) \\
&= \sum_{\text{cyclic}} (x^3 + y^3 - x^2y - xy^2) \\
&= \sum_{\text{cyclic}} \left(x^2(x-y) - y^2(x-y)\right) \\
&= \sum_{\text{cyclic}} (x-y)^2(x+y) \geq 0
\end{aligned}$$

វិសមភាព

$$3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y \geq 0 \iff \sum_{\text{cyclic}} x(x-y)(x-z) \geq 0$$

ពិត តាមវិសមភាព Schur ករណី $r = 1$ ។

302. ▲ យើងមាន

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) = 2 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$$

$$= \left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+1\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+1\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\right)-1$$
$$\geq 3\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}+\sqrt[3]{\frac{y^2}{xz}}+\sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}}\right)-1$$
$$= 3\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)-1$$
$$= 2\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)+\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)-1$$
$$\geq 2\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)+3\left(\frac{\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{xyz}}\right)-1$$
$$= 2\left(\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)+2$$
$$= 2\left(1+\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)$$

303. ▲ តាង $a/b = p; b/c = q$ ។ ដូច្នេះ $d/c = a/b = p; a/d = b/c = q$ ។ យើងមាន

$$p+q+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=4 \quad (1)$$
$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=pq+\frac{p}{q}+\frac{q}{p}+\frac{1}{pq}=\left(p+\frac{1}{p}\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)$$

លក្ខខណ្ឌ a,b,c,d ជាចំនួនពិតខុសគ្នា នាំឱ្យ $p \neq 1; q \neq; pq \neq 1$ ។

បើ $p > 0; q > 0$ នោះ

$$p+\frac{1}{p}\geq 2;$$
$$q+\frac{1}{q}\geq 2$$

(1) នាំឱ្យ $p + 1/p = 2; q + 1/q = 2 \implies p = q = 1$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។ ដូច្នេះត្រូវមានមួយក្នុងចំណោម $p; q$ ជាចំនួនអវិជ្ជមាន សន្មតថា $p < 0$ ។ ដូច្នេះ

$$p+\frac{1}{p}\leq -2$$
$$(1) \implies q+\frac{1}{q}\geq 6;\ \left(p+\frac{1}{p}\right)\left(q+\frac{1}{q}\right)\leq -12$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $p = -1; q + 1/q = 6 \implies q = 3 \pm 2\sqrt{2}$ ។

យក $c=1;\frac{d}{c}=p=-1\Rightarrow d=-1$ ។ យក $q=3-2\sqrt{2}$ យើងទាញបាន

$$\frac{b}{c}=q=3-2\sqrt{2}\Rightarrow b=3-2\sqrt{2}$$
$$\frac{a}{b}=-1\ \Rightarrow a=-3+2\sqrt{2}$$

ដូច្នេះតម្លៃធំបំផុតស្មើ -12 ។ តម្លៃធំបំផុតនេះកើតមាន ឧទាហរណ៍នៅត្រង់ចំណុច

$$a=-3+2\sqrt{2};b=3-2\sqrt{2};c=1;d=-1$$

304. ▲ សន្មតថា $a\le b\le c$ ។ យើងមាន $c<a+b\ \Rightarrow 2c<a+b+c=2\ \Rightarrow$

$c<1$ ។

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+2abc&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+2abc\\&=4-2(ab+bc+ca)+2abc\end{aligned}$$
$$2-2(1-a)(1-b)(1-c)=4-2(ab+bc+ca)+2abc$$

ដូច្នេះ $a^2+b^2+c^2+2abc=2-2(1-a)(1-b)(1-c)<2$ ព្រោះ

$a<1;b<1;c<1$ ។

ដោយ $a\le b\le c<1$ នោះ $1-a,1-b,1-c$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។ តាមវិសមភាពកូ

ស៊ី យើងទាញបាន

$$\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}\ge\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

$\Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c)\le\dfrac{1}{27}$

$\Rightarrow\ a^2+b^2+c^2+2abc\ge 2-\dfrac{2}{27}=\dfrac{52}{27}$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $a=b=c$ ។

305.▲ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង abc យើងទាញបាន

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$$

តាង $x=a/b\,,y=b/c\,,z=c/a\ \Rightarrow xyz=1$ ។ ដូច្នេះវិសមភាពទៅជា

$$\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)+xyz} \geq 1+\sqrt[3]{\frac{(x+z)(y+x)(z+y)}{xyz}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)+1} \geq 1+\sqrt[3]{(x+z)(y+x)(z+y)}$$

តាង $p=\sqrt[3]{(x+z)(y+x)(z+y)}$ ។ វិសមភាពទៅជា

$\sqrt{p^3+1} \geq 1+p \Leftrightarrow p^3+1-(1+p)^2 \geq 0 \Leftrightarrow p(p+1)(p-2) \geq 0 \quad (*)$

យើងមាន

$$p \geq \sqrt[3]{2\sqrt{xz}.2\sqrt{yx}.2\sqrt{zy}}=2$$

ដូច្នេះ (*) ពិត ។

306.▲ ❶ យក $p=\frac{m}{m+n}; q=\frac{n}{m+n}$ ដែល m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ វិសមភាព

$$pa+qb \geq a^p b^q \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ma+nb}{m+n} \geq \sqrt[m+n]{a^m b^n}$$

ពិត តាមវិសមភាពកូស៊ី ។

❷ យើងជ្រើសរើសស្វ៊ីតនៃចំនួនសនិទាន $a_1, a_2, \dots, a_n, ..$ ដែល $\lim_{n\to\infty} a_n = p$ ។

តាង $b_i = 1 - a_i$ យើងទាញបាន $\lim_{n\to\infty} b_n = q$ ។

តាមសំនួរទីមួយ យើងទាញបាន

$$a_n x + b_n y \geq x^{a_n} y^{b_n}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x + b_n y \geq \lim_{n\to\infty} x^{a_n} y^{b_n} \Leftrightarrow px+qy \geq x^p y^q$$

❸ តាមវិសមភាពយ៉ិនស៊ិន យើងមាន

$$\ln(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n) \geq a_1\ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \cdots + a_n \ln x_n$$
$$= \ln\left(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}\right)$$
$$\Rightarrow a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \geq x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

❹ តាង

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a$$
$$b_1+b_2+\cdots+b_n=b$$
$$\dots$$
$$l_1+l_2+\cdots+l_n=l$$

ចែកវិសមភាពនឹង $a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda$ យើងទទួលបាន

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^\alpha\left(\frac{b_1}{b}\right)^\beta\dots\left(\frac{l_1}{l}\right)^\lambda+\dots+\left(\frac{a_n}{a}\right)^\alpha\left(\frac{b_n}{b}\right)^\beta\dots\left(\frac{l_n}{l}\right)^\lambda\le 1$$

តាមវិសមភាពមធ-មធ ទូទៅ យើងមាន

$$\left(\frac{a_k}{a}\right)^\alpha\left(\frac{b_k}{b}\right)^\beta\dots\left(\frac{l_k}{l}\right)^\lambda\le\alpha\frac{a_k}{a}+\beta\frac{b_k}{b}+\dots+\lambda\frac{l_k}{l}$$

ដោយបូកវិសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា ចំពោះ $k=1,2,..,n$ យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1}{a}\right)^\alpha\left(\frac{b_1}{b}\right)^\beta\dots\left(\frac{l_1}{l}\right)^\lambda+\dots+\left(\frac{a_n}{a}\right)^\alpha\left(\frac{b_n}{b}\right)^\beta\dots\left(\frac{l_n}{l}\right)^\lambda\\
&\le\left(\alpha\frac{a_1}{a}+\beta\frac{b_1}{b}+\dots+\lambda\frac{l_1}{l}\right)+\dots+\left(\alpha\frac{a_n}{a}+\beta\frac{b_n}{b}+\dots+\lambda\frac{l_n}{l}\right)\\
&=\alpha\frac{a_1+\dots+a_n}{a}+\beta\frac{b_1+\dots+b_n}{b}+\dots+\lambda\frac{l_1+\dots+l_n}{l}\\
&=\alpha+\beta+\dots+\lambda=1\end{aligned}$$

ពិត ។

យើងមានសមភាព បើនិងទាល់តែបើ

$$k_1(a_1,b_1,\dots,l_1)=k_2(a_2,b_2,\dots,l_2)=k_n(a_n,b_n,\dots,l_n)$$

ដែល $k_1,k_2,\dots,k_n$ ជាចំនួនថេរ ។

307.▲ តាមវិសមភាពមធ-មធទូទៅ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{p}\,a^p+\frac{1}{q}\,b^q\ge(a^p)^{\frac{1}{p}}(b^q)^{\frac{1}{q}}=ab$$

308.▲ តាង $H_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$ និង ចំពោះ $i=1,2,\dots,n$ តាង $w_i=1/(iH_n)$ ។

យើងមាន $w_i>0$ ហើយ

$$\sum_{i=1}^n w_i=\frac{1}{H_n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{i}=\frac{1}{H_n}H_n=1$$

តាង $S=x_1+\frac{x_2^2}{2}+\dots+\frac{x_n^2}{n}$ ។ យើងមាន

$$\frac{S}{H_n}=\sum_{i=1}^n w_ix_i^i\ge\prod_{i=1}^n\left(x_i^i\right)^{w_i}\qquad(\text{តាមវិសមភាពមធ – មធទូទៅ})$$

$$=\prod_{i=1}^{n} x_i^{iw_i}=\prod_{i=1}^{n} x_i^{1/H_n}=\left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{1/H_n}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\right)^n=1$$

ដូច្នេះ $S/H_n \geq 1$ ហើយស្មើគ្នា ពេល $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ ។

309.▲ តាមវិសមភាព Hölder ដោយយក $\alpha=\beta=\gamma=1/3$ និង

$$a_1=x, a_2=y, a_3=z$$
$$b_1=x, b_2=y, b_3=z$$
$$c_1=\frac{a^3}{x^2}, c_2=\frac{b^3}{y^2}, c_3=\frac{c^3}{z^2}$$

យើងទទួលបាន

$$(a_1+a_2+a_3)^{\alpha}(b_1+b_2+b_3)^{\beta}(c_1+c_2+c_3)^{\gamma}$$
$$\geq a_1^{\alpha}b_1^{\beta}c_1^{\gamma}+a_2^{\alpha}b_2^{\beta}c_2^{\gamma}+a_3^{\alpha}b_3^{\beta}c_3^{\gamma}$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^{\frac{1}{3}}(x+y+z)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\geq x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{a^3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\left(\frac{b^3}{y^2}\right)^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}\left(\frac{c^3}{z^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2\left(\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\right)\geq (a+b+c)^3$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c$$

ពិត ។

សមភាពកើតមាន បើនិងទាល់តែបើ

$$(x,y,z)=k^3\left(\frac{a^3}{x^2},\frac{b^3}{y^2},\frac{c^3}{z^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x=k^3\frac{a^3}{x^2};\ y=k^3\frac{b^3}{y^2};\ z=k^3\frac{c^3}{z^2}$$
$$\Leftrightarrow x=ka; y=kb; z=kc$$

តាមលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=x+y+z\ \Rightarrow k=1$ ។ ដូច្នេះ សមភាពកើតមាន បើនិង ទាល់តែបើ $x=a, y=b, z=c$ ។

310.▲ តាមវិសមភាព Hölder

$$a_1^{\alpha}b_1^{\beta}\dots l_1^{\lambda}+a_2^{\alpha}b_2^{\beta}\dots l_2^{\lambda}+\dots+a_n^{\alpha}b_n^{\beta}\dots l_n^{\lambda}$$
$$\le(a_1+a_2+\dots+a_n)^{\alpha}(b_1+b_2+\dots+b_n)^{\beta}\dots(l_1+l_2+\dots+l_n)^{\lambda}$$

ជំនួស

$$a_1=1; a_2=a_1$$
$$b_1=1; b_2=a_2;$$
$$\dots$$
$$\alpha=\beta=\dots=\frac{1}{n}$$

យើងទទួលបាន

$$(1+a_1)^{\frac{1}{n}}(1+a_2)^{\frac{1}{n}}\dots(1+a_n)^{\frac{1}{n}}\ge 1+a_1^{\frac{1}{n}}a_2^{\frac{1}{n}}\dots a_n^{\frac{1}{n}}$$
$$\Leftrightarrow(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\ge\left(1+\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\right)^n$$

ពិត ។ យើងមានសមភាព បើនិងទាល់តែបើ

$$k_1(1,a_1)=k_2(1,a_2)=\dots=k_n(1,a_n)\ \Leftrightarrow a_1=a_2=\dots=a_n$$

311.▲ តាមវិសមភាព Hölder

$$a_1^{\alpha}b_1^{\beta}\dots l_1^{\lambda}+a_2^{\alpha}b_2^{\beta}\dots l_2^{\lambda}+\dots+a_n^{\alpha}b_n^{\beta}\dots l_n^{\lambda}$$
$$\le(a_1+a_2+\dots+a_n)^{\alpha}(b_1+b_2+\dots+b_n)^{\beta}\dots(l_1+l_2+\dots+l_n)^{\lambda}$$

ដោយយក $n=k$ និង

$$(a_1,a_2,..,a_k)=(a_1,b_1,\dots,l_1)$$
$$(b_1,b_2,..,b_k)=(a_2,b_2,\dots,l_2)$$
$$\dots$$
$$\alpha=\beta=\dots=\frac{1}{n}$$

យើងទទួលបាន

$$a_1^{\frac{1}{n}}a_2^{\frac{1}{n}}\dots a_n^{\frac{1}{n}}+b_1^{\frac{1}{n}}b_2^{\frac{1}{n}}\dots b_n^{\frac{1}{n}}+\dots+l_1^{\frac{1}{n}}l_2^{\frac{1}{n}}\dots l_n^{\frac{1}{n}}$$
$$\le(a_1+b_1+\dots+l_1)^{\frac{1}{n}}(a_2+b_2+\dots+l_2)^{\frac{1}{n}}\dots(a_n+b_n+\dots+l_n)^{\frac{1}{n}}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\dots b_n}+\dots+\sqrt[n]{l_1l_2\dots l_n}$$
$$\le\sqrt[n]{(a_1+b_1+\dots+l_1)(a_2+b_2+\dots+l_2)\dots(a_n+b_n+\dots+l_n)}$$

ពិត ។ សមភាពកើតមាន បើនិងទាល់តែបើ

$$k_1.(a_1,b_1,\dots,l_1)=\cdots=k_n.(a_n,b_n,\dots,l_n)$$

312.▲ តាង $q>0$ ដែល

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\ \Rightarrow (p-1)q=p$$

តាង $S_i=a_i+b_i+\cdots+l_i$ ដែល $i=1,2,\dots,n$ ។ ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន

$$\begin{aligned}|a_i+b_i+\cdots+l_i|^p&=|a_i+b_i+\cdots+l_i|^{p-1}|a_i+b_i+\cdots+l_i|\\&\le |a_i||S_i|^{p-1}+|b_i||S_i|^{p-1}+\cdots+|l_i||S_i|^{p-1}\quad(1)\end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}|S_1|^p+|S_2|^p+\cdots+|S_n|^p\le{}&|a_1||S_1|^{p-1}+|b_1||S_1|^{p-1}+\cdots+|l_1||S_1|^{p-1}+\\&+|a_2||S_2|^{p-1}+|b_2||S_2|^{p-1}+\cdots+|l_2||S_2|^{p-1}+\\&+\cdots\\&+|a_n||S_n|^{p-1}+|b_n||S_n|^{p-1}+\cdots+|l_n||S_n|^{p-1}\end{aligned}$$

តាមវិសមភាព Hölder ចំពោះ $\alpha=1/p\,;\beta=1/q$ យើងមាន

$$\begin{aligned}&|a_1||S_1|^{p-1}+|a_2||S_2|^{p-1}+\cdots+|a_n||S_n|^{p-1}\\&\le(|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}\left(|S_1|^{(p-1)q}+|S_2|^{(p-1)q}+\cdots+|S_n|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\\&=(|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|S_1|^p+|S_2|^p+\cdots+|S_n|^p)^{\frac{1}{q}}\quad(2)\end{aligned}$$

ដូចគ្នា

$$\begin{aligned}&|b_1||S_1|^{p-1}+|b_2||S_2|^{p-1}+\cdots+|b_n||S_n|^{p-1}\\&\le(|b_1|^p+|b_2|^p+\cdots+|b_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|S_1|^p+|S_2|^p+\cdots+|S_n|^p)^{\frac{1}{q}}\quad(3)\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}&|S_1|^p+|S_2|^p+\cdots+|S_n|^p\\&\le(|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|S_1|^p+|S_2|^p+\cdots+|S_n|^p)^{\frac{1}{q}}+\\&+(|b_1|^p+|b_2|^p+\cdots+|b_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|S_1|^p+|S_2|^p+\cdots+|S_n|^p)^{\frac{1}{q}}+\\&+\cdots\\&+(|l_1|^p+|l_2|^p+\cdots+|l_n|^p)^{\frac{1}{p}}(|S_1|^p+|S_2|^p+\cdots+|S_n|^p)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow(|S_1|^p+|S_2|^p+\cdots+|S_n|^p)^{1-\frac{1}{q}}\le{}&(|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}+\\&+(|b_1|^p+|b_2|^p+\cdots+|b_n|^p)^{\frac{1}{p}}\\&+\cdots\end{aligned}$$

$$+(|l_1|^p+|l_2|^p+\cdots+|l_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow (|S_1|^p+|S_2|^p+\cdots+|S_n|^p)^{\frac{1}{p}} \le (|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}+$$
$$+(|b_1|^p+|b_2|^p+\cdots+|b_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\cdots$$
$$+(|l_1|^p+|l_2|^p+\cdots+|l_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

ពិត ។

យើងមាន (1) ក្លាយជាសមភាព បើ $a_i, b_i, \dots, l_i$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

យើងមាន (2) ក្លាយជាសមភាព បើ

$$k_a.(|a_1|^p, |a_2|^p, \dots, |a_n|^p) = (|S_1|^p, |S_2|^p, \dots, |S_n|^p) \quad (*)$$

ដោយ $a_1, b_1, \dots, l_1$ ត្រូវតែមានសញ្ញាដូចគ្នា, ..., និង $a_n, b_n, \dots, l_n$ ត្រូវតែមានសញ្ញាដូចគ្នា នោះ (*) សមមូលនឹង

$$k_a.a_i^p = (a_i+b_i+\cdots+l_i)^p, \forall\, i$$

ដូចគ្នា និង តាម (3) យើងទាញបាន

$$k_b.b_i^p = (a_i+b_i+\cdots+l_i)^p, \forall\, i$$
$$\dots\dots\dots$$
$$k_l.l_i^p = (a_i+b_i+\cdots+l_i)^p, \forall\, i$$

ដូច្នេះ $m_a.a_i = m_b.b_i = \cdots = m_l.l_i$ ចំពោះគ្រប់ i និង ដែល $m_a, \dots, m_l$ ជាចំនួនថេរ > 0 ។

ដូច្នេះសមភាពកើតមាន បើ និងទាល់តែបើ

$$m_a.(a_1, a_2, \dots, a_n) = m_b.(b_1, b_2, \dots, b_n) = \cdots = m_l.(l_1, l_2, \dots, l_n)$$

ចំពោះចំនួនថេរវិជ្ជមាន $m_a, m_b, \dots, m_l$ ។

313.▲ គាង

$$S = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}(x+z)^{\frac{2}{3}}} + \frac{y^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}+(y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}(y+x)^{\frac{2}{3}}}$$
$$+\frac{z^{\frac{4}{3}}}{z^{\frac{4}{3}}+(z^2+x^2)^{\frac{1}{3}}(z+y)^{\frac{2}{3}}}$$

$x=a^3; y=b^3; z=c^3$

តាមវិសមភាព Hölder យើងមាន

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}(x+z)^{\frac{2}{3}}=[(a^2)^3+(b^2)^3]^{\frac{1}{3}}\left[(c^2)^{\frac{3}{2}}+(a^2)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}\geq a^2c^2+b^2a^2$$
$$=(xy)^{\frac{2}{3}}+(xz)^{\frac{2}{3}}$$
$$\Longrightarrow \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}(x+z)^{\frac{2}{3}}}\leq\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+(xy)^{\frac{2}{3}}+(xz)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}$$

តាមរបៀបដូចគ្នា

$$\frac{y^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}+(y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}(y+x)^{\frac{2}{3}}}\leq\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}$$
$$\frac{z^{\frac{4}{3}}}{z^{\frac{4}{3}}+(z^2+x^2)^{\frac{1}{3}}(z+y)^{\frac{2}{3}}}\leq\frac{z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}}$$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃវិសមភាពបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន $S\leq 1$ ។

314.▲ យើងមាន $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ។ តាង $s=a+b+c+d$ ។ តាមវិសមភាព Minkowski

$$S_1=\sqrt{(a+1)^2+2(b-2)^2+(c+3)^2}+\sqrt{(b+1)^2+2(c-2)^2+(d+3)^2}$$
$$\geq\sqrt{(a+b+2)^2+2(b+c-4)^2+(c+d+6)^2}$$
$$S_2=\sqrt{(c+1)^2+2(d-2)^2+(a+3)^2}+\sqrt{(d+1)^2+2(a-2)^2+(b+3)^2}$$
$$\geq\sqrt{(c+d+2)^2+2(d+a-4)^2+(a+b+6)^2}$$
$$S=S_1+S_2\geq\sqrt{(s+4)^2+2(s-8)^2+(s+12)^2}=\sqrt{4s^2+288}\geq\sqrt{288}$$
$$=12\sqrt{2}$$

ចំពោះ $a=b=c=d=0$ យើងមាន $S=12\sqrt{2}$ ។ ដូច្នេះតម្លៃតូចបំផុតរបស់ S គឺ $12\sqrt{2}$ ។

315.▲ ❶ តាង $x=\tan A, y=\tan B,\ z=\tan C$ ដែល $0<A,B,C<\pi/2$ ។

លក្ខខណ្ឌ

$$x+y+z=xyz\iff\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$
$$\iff\tan A+\tan B=(\tan A\tan B-1)\tan C$$
$$\Longrightarrow\tan C=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=-\tan(A+B)=\tan(\pi-A-B)$$

$$\Longrightarrow C = \pi - A - B$$
$$\Longrightarrow A + B + C = \pi$$

ដោយ

$$\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}} = \sin A\,;\ \frac{\tan B}{\sqrt{1+\tan^2 B}} = \sin B\,;\ \frac{\tan C}{\sqrt{1+\tan^2 C}} = \sin C$$

វិសមភាពដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

អនុគមន៍ $y = \sin x$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ។ ដូច្នេះ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \le \sin\frac{A+B+C}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

នាំឱ្យវិសមភាពពិត ។

❷ តាង $x = \tan\frac{A}{2}; y = \tan\frac{B}{2}; z = \tan\frac{C}{2}$ ដែល $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$ ។ លក្ខខណ្ឌសមមូលនឹង

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = 1 \implies A + B + C = \pi$$

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3}$$

ពិតតាមវិសមភាពយិនសិន ។

316.▲ តាង $x_n = \tan a_n$ ដែល $0 < a_n < \pi/2$ ។ យើងមាន

$$x_{n+1} = \tan a_n + \sqrt{1+\tan^2 a_n} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a_n}{2}\right) = \tan a_{n+1}$$

ដូច្នេះ

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\pi}{4}$$

ចំពោះ $n = 1$ យើងមាន $x_1 = \tan a_1 = \sqrt{3} \Rightarrow a_1 = \pi/6$ ។ ជំនួស $n = 2,3,..,n$ យើងទទួលបាន

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{\pi}{4} \qquad \times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{\pi}{4} \qquad \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$
$$\cdots$$
$$a_{n-1} = \frac{1}{2}a_{n-2} + \frac{\pi}{4} \qquad \times \left(\frac{1}{2}\right)$$
$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{\pi}{4} \qquad \times 1$$

បូកសមភាពចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_1 + \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6.2^{n-1}}$$

ដូច្នេះ $x_n = \cot\theta_n$ ដែល $\theta_n = \frac{\pi}{6.2^{n-1}}$ ។ ដូចគ្នាយើងទាញបាន $y_n = \tan 2\theta_n$ ។ ដូច្នេះ $x_n y_n = \frac{2}{1-\tan^2\theta_n}$ ។ ដោយ $0 < \theta_n < \frac{\pi}{4}$ នោះយើងមាន $0 < \tan^2\theta_n < 1$ និង $x_n y_n > 2$ ។ ចំពោះ $n > 1$ យើងមាន $\theta_n < \pi/6$ ដូច្នេះ $\tan^2\theta_n < 1/3$ និង $x_n y_n < 3$ ។

317.▲ តាង T_n ជាពហុធា Chebyshev ទី n ។ យើងដឹងថា $T_n(\cos x) = \cos nx$ និង T_n កំណត់ដោយ $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), T_0(x) = 1$ និង $T_1(x) = x$ ។ ដូច្នេះមេគុណធំរបស់ T_n ស្មើនឹង 2^{n-1} ចំពោះ $n \geq 1$ ។

ប្រើរូបមន្តអាំងទែរប៉ូឡាស្យុងរបស់ Lagrange ទៅលើពហុធាដឺក្រេទី $T_{n-1}(x)$ និងចំពោះចំណុច$x_1, x_2, \cdots, x_n$ យើងមាន

$$T_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{n-1}(x_k)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

ផ្ទឹមមេគុណធំ យើងទាញបាន

$$2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{n-1}(x_k)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

យើងយក θ_k ដែល $\cos\theta_k = x_k$ ។ ដូច្នេះ $|T_{n-1}(x_k)| = |\cos(n-1)\theta_k| \le 1$ ។
ដូច្នេះ

$$2^{n-2} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{|T_{n-1}(x_k)|}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k}$$

នាំឱ្យវិសមភាពពិត ។

318.▲ ចែកអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង 4 យើងទាញបាន

$$\left|\frac{a}{2}\sqrt{1-\left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right| \le \frac{1}{2}$$

យើងជំនួស $\frac{a}{2} = \sin x$ និង $\frac{b}{2} = \sin y$ ។ វិសមភាពក្រោយនេះទៅជា

$$|\sin(x-y)| = |\sin x\cos y - \sin y\cos x| \le \sin\frac{\pi}{6} \qquad (*)$$

យើងចង់បាន t_1 និង t_2 ដែល $\sin t_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ និង $\sin t_2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ។
យើងទាញបាន $\cos 2t_1 = 1 - 2\sin^2 t_1 = 1 - \frac{8-4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$ និង $\cos 2t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6}$ ។ ព្រោះ $y = \sin x$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយពី $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ទៅ $[-1;1]$ នោះ $t_1 = -\frac{\pi}{12}$ និង $t_2 = \frac{5\pi}{12}$ ។
យើងចែកចន្លោះ $\left[-\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right]$ ជាចន្លោះដាច់បី ដែលនីមួយៗមានប្រវែង $\frac{\pi}{6}$ គឺ $I_1 = \left[-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right), I_2 = \left[\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4}\right)$ និង $I_3 = \left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{12}\right]$ ។ អនុគមន៍ $y = 2\sin x$ អនុវត្តចំពោះចន្លោះ I_1, I_2, I_3 មានរូបភាពមួយគត់លើចន្លោះ $I_1' = \left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}; 2\sin\frac{\pi}{12}\right), I_2' = \left[2\sin\frac{\pi}{12};\sqrt{2}\right), I_3' = \left[\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right]$ រៀងគ្នា ។ តាមគោលការណ៍រន្ធព្រាប ចន្លោះមួយនៃ I_1', I_2', I_3' មានចំនួនពីរនៃចំនួនដែលឱ្យចំនួនបួន តាងដោយ a និង b ។ យើងទាញបានចន្លោះមួយក្នុងចំណោម I_1, I_2, I_3 មានចំនួនពិត x និង y ដែល $a = 2\sin x$ និង $b = 2\sin y$ ។ ដោយចន្លោះ I_1, I_2, I_3 មានរង្វាស់ស្មើ $\pi/6$ ដូចគ្នា នោះ $|x - y| \le \pi/6$ ។ យើងទាញបានវិសមភាព(*) ពិត ។

319.▲ ចំពោះ $n=1: f(l_1x_1)\leq l_1f(x_1)$ សំណើពិត ។

ចំពោះ $n=2$ វាជានិយមន័យរបស់ភាពផត ។ សន្មតថាពិតរហូតដល់ n ។

យើងមាន

$$\sum_{k=1}^{n+1} l_kx_k=\sum_{k=1}^{n} l_kx_k+l_{n+1}x_{n+1}=(1-l_{n+1})y+l_{n+1}x_{n+1}$$

ដែល

$$y=\sum_{k=1}^{n}\frac{l_k}{1-l_{n+1}}x_k;\ \sum_{k=1}^{n}\frac{l_k}{1-l_{n+1}}=1$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}f\left(\sum_{k=1}^{n+1} l_kx_k\right)&=f\big((1-l_{n+1})y+l_{n+1}x_{n+1}\big)\leq(1-l_{n+1})f(y)+l_{n+1}f(x_{n+1})\\&=(1-l_{n+1})f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{l_k}{1-l_{n+1}}x_k\right)+l_{n+1}f(x_{n+1})\\&\leq(1-l_{n+1})\left[\frac{l_1}{1-l_{n+1}}f(x_1)+\frac{l_2}{1-l_{n+1}}f(x_2)+\cdots\right.\\&\left.+\frac{l_n}{1-l_{n+1}}f(x_n)\right]+l_{n+1}f(x_{n+1})=\sum_{k=1}^{n+1}l_k\,f(x_k)\end{aligned}$$

320.▲ តាង $a=\tan x, b=\tan y, c=\tan z$ ។ ដូច្នេះ x,y,z ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណស្រួចមួយ ។ យើងមាន

$$\cos x+\cos y+\cos z\leq\frac{3}{2}$$

វិសមភាពនេះពិត តាមវិសមភាពយិនសិន ។ យើងមានសមភាពពេល $a=b=c=\sqrt{3}$ ។

321.▲ អនុគមន៍ $f(x)=x^{1/3}$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $(0;+\infty)$ ។ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងមាន

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{2}\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\ \Rightarrow\ a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\leq\frac{2}{2^{\frac{1}{3}}}(a+b)^{\frac{1}{3}}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ និងនាំឱ្យ $a = b$ ។ ដូច្នេះចំនួនថេរ M តូចបំផុត គឺ $M = \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{1}{3}}$ ។

322.▲ អនុគមន៍ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ផតលើ $(1;+\infty)$ ។ ដោយ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ នោះតាមវិសមភាពយិនសិន

$$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n) \geq f(x_1.x_1 + x_2.x_2 + \cdots + x_n.x_n)$$

$$\Leftrightarrow\ x_1\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} + x_2\frac{1}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + x_n\frac{1}{\sqrt{1-x_n}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត យើងមាន

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/n$ ។

323.▲ បើ $n \geq 0$ អនុគមន៍ $f(x) = x^n$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $\mathbb{R}^{+*}$ ។ ដូច្នេះតាមវិសមភាពយិនសិន

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2\left(\frac{1+\frac{a}{b}+1+\frac{b}{a}}{2}\right)^n = 2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right)^n$$

តែថា $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ នោះ

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2(2)^n = 2^{n+1}$$

បើ $n < -1$ តាង $p = -n > 1$

$$\Rightarrow\ \left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}\ \Leftrightarrow \frac{b^p}{(a+b)^p} + \frac{a^p}{(a+b)^p} \geq \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^p + b^p}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^p$$

អនុគមន៍ $f(x) = x^p$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $\mathbb{R}^{+*}$ ។ ដូច្នេះតាមវិសមភាពយិនសិន

$$\frac{a^p + b^p}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^p$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិត ។ យើងឃើញថា អង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពស្មើគ្នា ទាល់តែ $n \in \{0;-1\}$ និង a,b យ៉ាងម៉េចក៏បាន ឬ $n \notin \{0;-1\}$ និង $a=b$ ។

324.▲ យើងឃើញថាវិសមភាពនៅដដែល បើយើងជំនួស (a,b,c) ដោយ $(\alpha a,\alpha b,\alpha c)$ (វិសមភាពអូម៉ូសែន) ។ ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $a+b+c=1$ (*) ។ អនុគមន៍ $f(x)=1/\sqrt{x}$ ជាអនុគមន៍ផត ដូច្នេះតាមវិសមភាពយិនសិន និង (*) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} &af(a^2+\lambda bc)+bf(b^2+\lambda ca)+cf(c^2+\lambda ab)\\ &\qquad \geq f[a(a^2+\lambda bc)+b(b^2+\lambda ca)+c(c^2+\lambda ab)]\\ &\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}}\\ &\qquad \geq \frac{1}{\sqrt{a(a^2+\lambda bc)+b(b^2+\lambda ca)+c(c^2+\lambda ab)}} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\begin{aligned} &a(a^2+\lambda bc)+b(b^2+\lambda ca)+c(c^2+\lambda ab)\leq\frac{1+\lambda}{9}\\ &\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3\lambda abc\leq\frac{1+\lambda}{9} \end{aligned}$$

យើងមាន

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3&=(a+b+c)^3\\ &\quad-3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+2abc) \end{aligned}$$

តាម(*) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} &a^3+b^3+c^3+3\lambda abc\\ &=1-3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2)+3(\lambda-2)abc\\ &\leq 1-3.6abc+3(\lambda-2)abc\ \ (\text{វិសមភាពកូស៊ី})\\ &=1+3(\lambda-8)abc\\ &\leq 1+3(\lambda-8)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\ \ (\text{វិសមភាពកូស៊ី និង ដោយសារ } \lambda\geq 8)\\ &=1+\frac{\lambda-8}{9}=\frac{1+\lambda}{9} \end{aligned}$$

ពិត ។ សមភាពកើតមានពេលវិសមភាពកូស៊ីទៅជាសមភាព មានន័យថា $a=b=c$ ។

325.▲ ដោយអនុគមន៍ $f(x)=x^t$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$នោះតាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\alpha}+\frac{1}{a_i^{\beta}}\right)^t \geq n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}+\frac{1}{a_i^{\beta}}\right]^t = n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{\beta}}\right]^t \quad (*)$$

តែ

ក) ដោយ $\alpha \geq 1$ នោះអនុគមន៍ $f(x)=x^{\alpha}$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ដូច្នេះ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} \geq \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right]^{\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha}}$$

ខ) ដោយ $\beta > 0$ នោះអនុគមន៍ $f(x)=1/x^{\beta}$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ដូច្នេះ យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^{\beta}} \geq \left[\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right]^{\beta} = n^{\beta}$$

តាម (*), ក) និង ខ) យើងទាញបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\alpha}+\frac{1}{a_i^{\beta}}\right)^t \geq n\left(\frac{1}{n^{\alpha}}+n^{\beta}\right)$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ $a_1=a_2=\cdots=a_n$ ។ ដោយ $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$

នោះ $a_1=a_2=\cdots=a_n=1/n$ ។

326.▲ អនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ ផតលើ $\mathbb{R}^+$ ព្រោះ

$$f''(x)=\frac{e^{2x}-e^x}{(1+e^x)^3} \geq 0$$

ចំពោះ $i=1,2,\ldots,n$ តាង $x_i=e^{y_i}$ ។ ដោយ $x_i \geq 1$ នោះ $y_i \geq 0$ ។

តាមវិសមភាពយិនសិន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e^{y_i}+1} \geq \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}+1}=\frac{1}{(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}+1}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \mathrm{L} = x_n$ ។

327.▲ តាង

$$f(a)=\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$$

ដោយចាត់ទុកថា b,c ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។ យើងឃើញថា f ជាអនុគមន៍ផតធៀបនឹង a

ដូច្នេះ តម្លៃធំបំផុតរបស់វា គឺនៅត្រង់ $a=0$ ឬ $a=1$ ។ តាមវិចារដូចគ្នា យើងទាញ

បានថា f មានតម្លៃធំបំផុត នៅត្រង់ចំណុចមួយ (ឬច្រើនជាងមួយ) ក្នុងចំណោមចំណុចទាំងប្រាំបី ដែលមាន
$(a,b,c) =$
$\{0;0;0\},\{0;0;1\},\{0;1;0\},\{0;1;1\},\{1;0;0\},\{1;1;0\},\{1;0;1\},\{1;1;1\})$ ។ យើងពិនិត្យឃើញថា ចំពោះត្រីធាតុនីមួយៗ តម្លៃរបស់អនុគមន៍ f ស្មើ 1 ។ ដូច្នេះវិសមភាពពិត ។

328.▲ អង្គខាងឆ្វេងជាអនុគមន៍ជត ចំពោះអថេរនីមួយៗ ដោយទប់អថេរផ្សេងទៀត ។ វាមានតម្លៃធំបំផុតនៅត្រង់ចំណុចមួយនៃបញ្ចធាតុ (a,b,c,d,e)ទាំង 32 ដែល $a,b,c,d,e \in \{p;q\}$ ។
តាង n ជាចំនួនអថេរ ដែលស្មើ p ហើយដូច្នេះអថេរចំនួន $5-n$ ផ្សេងទៀតស្មើ q ដែល $n \in \{0;1;2;3;4;5\}$ ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវរកតម្លៃធំបំផុតរបស់

$$f(n) = [np + (5-n)q]\left[\frac{n}{p} + \frac{5-n}{q}\right]$$

យើងមាន

$$\begin{aligned} f(n) &= n^2 + (5-n)^2 + n(5-n)\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) \\ &= n^2 + (5-n)^2 + n(5-n)\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 2 + 2\right) \\ &= n^2 + (5-n)^2 + 2n(5-n) + n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 \\ &= 25 + n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $f(n)$ ធំបំផុត បើ

$$n(5-n) = \frac{25}{4} - \left(n - \frac{5}{2}\right)^2$$

មានតម្លៃធំបំផុត មានន័យថា $n = 2$ ឬ $n = 3$ ។ ដូច្នេះ

$$f_{\max} = 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

329.▲ តាង $A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ និង $a = \sqrt{2}\tan A, b = \sqrt{2}\tan B$ និង $c = \sqrt{2}\tan C$ ។ តាមទំនាក់ទំនង $1 + \tan^2\theta = 1/\cos^2\theta$ វិសមភាពអាចសរសេរជា

$$\begin{aligned}&(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)\\ &\Leftrightarrow (2\tan^2 A + 2)(2\tan^2 B + 2)(2\tan^2 C + 2)\\ &\qquad \geq 9(2\tan A\tan B + 2\tan B\tan C + 2\tan C\tan A)\\ &\Leftrightarrow \frac{4}{9} \geq \cos A\cos B\cos C\,(\sin A\sin B\cos C + \sin B\sin C\cos A\\ &\qquad + \sin C\sin A\cos B)\end{aligned}$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}&\cos(A+B+C)\\ &\qquad = \cos A\cos B\cos C - \cos A\sin B\sin C - \sin A\cos B\sin C\\ &\qquad - \sin A\sin B\cos C\end{aligned}$$

ដូច្នេះវិសមភាពទៅជា

$$\frac{4}{9} \geq \cos A\cos B\cos C\,(\cos A\cos B\cos C - \cos(A+B+C))$$

តាង $q = \frac{A+B+C}{3}$ ។ តាមវិសមភាពកូស៊ី និង វិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\cos A\cos B\cos C \leq \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3 \leq \cos^3 q$$

យើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\frac{4}{9} \geq \cos^3 q\,(\cos^3 q - \cos 3q)$$

យើងមាន

$$\cos 3q = 4\cos^3 q - 3\cos q \implies \cos^3 q - \cos 3q = 3\cos q - 3\cos^3 q$$

ដូច្នេះវិសមភាពទៅជា

$$\frac{4}{27} \geq \cos^4 q\,(1 - \cos^2 q) \qquad (*)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\left[\frac{\cos^2 q}{2}.\frac{\cos^2 q}{2}.(1-\cos^2 q)\right]^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}\left[\frac{\cos^2 q}{2} + \frac{\cos^2 q}{2} + (1-\cos^2 q)\right] = \frac{1}{3}$$

$\Longrightarrow$ (*) ពិត ។ សមភាពកើតមាន ទាល់តែ

$$\tan A = \tan B = \tan C = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = b = c = 1$$

330.▲ ❶ ដំណោះស្រាយទី ១

តាង $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ ។

$$a + b > c \Rightarrow y + z + z + x > x + y \Rightarrow z > 0$$

ដូចគ្នា $x, y, z > 0$ ។

វិសមភាពខាងលើសមមូលនឹង

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$$

ដោយវិសមភាពខាងលើអូម៉ូសែន (បើយើងជំនួស (x, y, z) ដោយ tx, ty, tz) នោះវិសមភាពនៅដដែល)នោះយើងអាចសន្មតថា $x + y + z = 1$ ។ ដូច្នេះវិសមភាពសមមូលនឹង

$$yf\left(\frac{x}{y}\right) + zf\left(\frac{y}{z}\right) + xf\left(\frac{z}{x}\right) \geq 1$$

ដែល $f(t) = t^2$ ។ ដោយ f ផតលើ $\mathbb{R}$ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$yf\left(\frac{x}{y}\right) + zf\left(\frac{y}{z}\right) + xf\left(\frac{z}{x}\right) \geq f\left(y.\frac{x}{y} + z.\frac{y}{z} + x.\frac{z}{x}\right) = f(1) = 1$$

❷ ដំណោះស្រាយទី២

តាង $f(a, b, c) = a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a)$ ។ យើងឃើញថា f មិនប្រែប្រួលទេ ពេលយើងធ្វើចំលាស់ស៊ីគ្លិចនៃ (a, b, c) មានន័យថា ដូរ (a, b, c) ជា (b, c, a) ឬ (c, a, b) ។ ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $a = \max(a, b, c)$ (តែមិនអាចសន្មតថា $a \geq b \geq c$ បានទេ ព្រោះ f មិនស៊ីមេទ្រី) ។ យើងទាញបាន

$$f(a, b, c) = a(b - c)^2(b + c - a) + b(a - b)(a - c)(a + b - c) \geq 0$$

សមភាពកើតមានពេល $a = b = c$ ។

331.▲ បើគ្រប់ a_i ស្មើគ្នាទាំងអស់ នោះអនុគមន៍ M ថេរលើ $\mathbb{R}^*$ ។ ឥលូវនេះ យើងសន្មតថា បណ្តា a_i មិនស្មើគ្នាទាំងអស់ទេ ។ តាង $f(\alpha) = \ln[l_1a_1^\alpha + l_2a_2^\alpha + \cdots + l_na_n^\alpha]$ ។

យើងមាន

$$\ln M(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\ln[l_1a_1^\alpha + l_2a_2^\alpha + \cdots + l_na_n^\alpha] = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

យើងមាន $\lim_{\alpha\to 0} a_i^\alpha = 1$ ចំពោះគ្រប់ $a_i > 0$ ដូច្នេះ $\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha) = 0$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត ដោយ

$$f'(\alpha) = \frac{l_1a_1^\alpha \ln a_1 + l_2a_2^\alpha \ln a_2 + \cdots + l_na_n^\alpha \ln a_n}{l_1a_1^\alpha + l_2a_2^\alpha + \cdots + l_na_n^\alpha}$$

$$\Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0} f'(\alpha) = \frac{l_1 \ln a_1 + l_2 \ln a_2 + \cdots + l_n \ln a_n}{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}$$

$$= l_1 \ln a_1 + l_2 \ln a_2 + \cdots + l_n \ln a_n = \ln\left(a_1^{l_1}a_2^{l_2} \dots a_n^{l_n}\right)$$

តាមក្បួន អូពីតាល់ យើងទាញបាន

$$\lim_{\alpha\to 0} \ln M(\alpha) = \ln\left(a_1^{l_1}a_2^{l_2} \dots a_n^{l_n}\right) \Longrightarrow \lim_{\alpha\to 0} M(\alpha) = a_1^{l_1}a_2^{l_2} \dots a_n^{l_n}$$

ដូច្នេះ ដោយយក $M(0) = a_1^{l_1}a_2^{l_2} \dots a_n^{l_n}$ យើងទាញបាន M ជាប់ត្រង់ 0 ។

ក) ករណី $\alpha > 1$

អនុគមន៍ $f(x) = x^\alpha$ ផតដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}^{+*}$ ។ ដូច្នេះ

$$l_1a_1^\alpha + l_2a_2^\alpha + \cdots + l_na_n^\alpha > (l_1a_1 + l_2a_2 + \cdots + l_na_n)^\alpha$$

វិសមភាពនេះ ដាច់ខាត ព្រោះ បណ្ដា a_i មិនស្មើគ្នាទាំងអស់ទេ ។

ដូច្នេះ

$$M(\alpha) = (l_1a_1^\alpha + l_2a_2^\alpha + \cdots + l_na_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > l_1a_1 + l_2a_2 + \cdots + l_na_n = M(1)$$

ខ) ករណី $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ករណីទី១: $0 < \alpha < \beta$

តាង $t = \beta/\alpha > 1$ ។ ចំពោះគ្រប់ $i \in \{1, \dots, n\}$ យើងតាង $b_i = a_i^\alpha$ ។ តាម ក) យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^n l_ib_i^t\right)^{\frac{1}{t}} > \sum_{i=1}^n l_ib_i \quad \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n l_ia_i^\beta\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} > \sum_{i=1}^n l_ia_i^\alpha \quad \Rightarrow M(\beta) > M(\alpha)$$

ករណីទី២: $\alpha < \beta < 0$

តាង $t=\alpha/\beta>1$ ។ ចំពោះគ្រប់ $i\in\{1,\dots,n\}$ យើងតាង $b_i=a_i^{\beta}$ ។ តាម ក) យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n} l_i b_i^t\right)^{\frac{1}{t}} > \sum_{i=1}^{n} l_i b_i \ \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} l_i a_i^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} > \sum_{i=1}^{n} l_i a_i^{\beta} \ \Rightarrow M(\beta)>M(\alpha)$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ M កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}^{+*}$; $\mathbb{R}^{-*}$ ហើយជាប់ត្រង់ 0 ។ ដូច្នេះ វាកើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

332.▲ ● ចំពោះ $\alpha>0$:

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a_1=\max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ ។

ដូច្នេះ

$\ln M(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\ln[l_1a_1^{\alpha}+l_2a_2^{\alpha}+\cdots+l_na_n^{\alpha}]=\frac{1}{\alpha}\ln\left[a_1^{\alpha}\sum_{i=1}^{n}l_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\right]=\ln a_1+\frac{1}{\alpha}\ln\left[\sum_{i=1}^{n}l_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\right]$

ចំពោះគ្រប់ i យើងមាន $0<\frac{a_i}{a_1}\le 1$ ។ ដូច្នេះ $0<\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\le 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} l_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha} \le \sum_{i=1}^{n} l_i = 1$$

$$\ln M(\alpha)\le \ln a_1+\frac{1}{\alpha}\ln 1=\ln a_1$$

$$\Longrightarrow \lim_{\alpha\to+\infty}\ln M(\alpha)=\ln a_1$$

$$\Longrightarrow \lim_{\alpha\to+\infty} M(\alpha)=a_1=\max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$$

● ចំពោះ $\alpha<0$

លើកនេះយើងសន្មតថា $a_1=\min\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ ។ ដូចខាងលើ យើងមាន

$$\ln M(\alpha)=\ln a_1+\frac{1}{\alpha}\ln\left[\sum_{i=1}^{n} l_i\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\right]$$

ដែល $\frac{a_i}{a_1}\ge 1$ ចំពោះគ្រប់ i ។ ដូច្នេះ $0<\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{\alpha}\le 1$ ។

តាមវិចារដូចករណីខាងលើ យើងទាញបាន

$$\lim_{\alpha\to-\infty} M(\alpha)=a_1=\min\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$$

ដូច្នេះ

$$\lim_{\alpha\to+\infty} M(\alpha) = a_1 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$
$$\lim_{\alpha\to-\infty} M(\alpha) = a_1 = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

ហើយដោយអនុគមន៍ M កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $\alpha \in \mathbb{R}$ គេមាន

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} < M(\alpha) < \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

● យក $l_1 = l_2 = \cdots = l_n = \frac{1}{n}$ យើងទាញបាន

$$M(-1) = \left[\frac{1}{n}(a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1})\right]^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$
$$M(0) = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$$
$$M(1) = \left[\frac{1}{n}a_1 + \frac{1}{n}a_2 + \cdots + \frac{1}{n}a_n\right]^1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$
$$M(2) = \left[\frac{1}{n}a_1^2 + \frac{1}{n}a_2^2 + \cdots + \frac{1}{n}a_n^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

333.▲ តាង $A = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ និង $A_i = A - x_i^3 \implies A = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^4 A_i$ ។ តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$\frac{1}{3}A_1 \geq (x_2^3 x_3^3 x_4^3)^{1/3} = x_2 x_3 x_4 = 1/x_1$$

តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$\frac{1}{3}A_i \geq \frac{1}{x_i};\ \ \forall i = 1,2,3,4$$
$$\implies A \geq \sum_{i=1}^4 1/x_i \qquad (1)$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 x_i^3 \geq \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 x_i\right)^3 \qquad \text{(តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ 3 និង 1)}$$
$$= \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 x_i\right)\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 x_i\right)^2 \geq \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 x_i\right)$$

ព្រោះ

$$\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i\right) \geq (x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{4}} = 1 \quad \left(\text{តាមវិសមភាពកូស៊ី}\right)$$

$$\Rightarrow A \geq \sum_{i=1}^{4} x_i \quad (2)$$

(1) និង (2) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\{\sum_{i=1}^{4} x_i\,; \sum_{i=1}^{4} 1/x_i\}$ ។

334.▲ បើមានចំនួនណាមួយស្មើសូន្យ ឧទាហរណ៍ $z = 0$ នោះ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$8(x^6 + y^6 + 2x^3y^3) \geq 9x^3y^3$$

ពិត ហើយស្មើគ្នាពេល $x = y = z = 0$ ។

បើ $x, y, z > 0$ យើងមាន

$$\begin{aligned} 9(x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy) \\ &\leq \frac{9}{8}(2x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + 2y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + 2z^2) \\ &\leq \frac{9}{8}\left[\frac{4(x^2 + y^2 + z^2)}{3}\right]^3 \quad \left(\text{តាមវិសមភាពកូស៊ី}\right) \end{aligned}$$

$$= 9.8\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3 \leq 9.8\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}\right)^2 \left(\text{តាម មធ្យមលំដាប់ពានិង២}\right)$$

$$= 8(x^3 + y^3 + z^3)^2$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងនាំឱ្យ $x = y = z$ ។

335.▲ អនុគមន៍ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ ជាអនុគមន៍ផត ។ តាមវិសមភាពយិនសិន យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n}{n-1}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ 1 និង 1/2 យើងទាញបាន

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} \leq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}} \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$$

ពិត ។

336.▲ តាង $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ។ យើងមាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^5}{S - x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(S - x_i)\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^5}\right)^2 \quad \text{(តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត)}$$

$$= n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{5}{2}}\right)^2 \geq n^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{5}{2}} \quad \text{(តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ } \tfrac{5}{2} \text{ និង } 2\text{)}$$

$$= \frac{n^2}{n^{\frac{5}{2}}} \qquad (*)$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/\sqrt{n}$ ។

ម៉្យាងវិញទៀត

$$0 < \sum_{i=1}^{n}(S - x_i) = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i = n(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$$

$$\leq n(n-1)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(តាមវិសមភាពមធ្យមលំដាប់ 1 និង 2)}$$

$$= \frac{n(n-1)}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 0 < \sum_{i=1}^{n}(S - x_i) \leq \frac{n(n-1)}{\sqrt{n}} \qquad (**)$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/\sqrt{n}$ ។

(*) និង (**)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^5}{S - x_i}\right)\frac{n(n-1)}{\sqrt{n}} \geq \frac{n^2}{n^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^5}{S - x_i} \geq \frac{1}{n(n-1)}$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/\sqrt{n}$ ។

337.▲ សន្មតថា $a \geq b \geq c$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b}$$

តាមវិសមភាព Chebyshev យើងមាន

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{1}{3}(a^n + b^n + c^n)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \qquad (1)$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងមាន

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9$$

និងតាមវិសមភាពមធ្យម យើងមាន

$$\frac{a^n+b^n+c^n}{3}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$$

ដូច្នេះ វិសមភាព (1) នាំឱ្យ

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n\frac{9}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}s\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}s^{n-1}$$

338.▲ ដោយវិសមភាពស៊ីមេទ្រីធៀបនឹងអថេរទាំងបី យើងអាចសន្មតថា $x\geq y\geq z$ ដោយមិនបាត់បង់លក្ខណ:ទូទៅអ្វីទាំងអស់ ។ វិសមភាពដែលឱ្យ អាចសរសេរជា

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)[x^r(x-z)-y^r(y-z)]+z^r(x-z)(y-z)\geq 0$$

ពិត ព្រោះតួនីមួយៗ សុទ្ធតែវិជ្ជមានទាំងអស់ ។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ $x=y=z$ ។

339.▲ ❶ វិសមភាពខាងឆ្វេងដែលឱ្យមក សមមូលនឹង

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$
$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$$

ពិត តាមវិសមភាព Schur ករណី $r=1$ ។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែនិងមានតែ

$a=b=c$ ។

វិសមភាពខាងស្តាំសមមូលនឹង

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 2\left[(ab)^{\frac{3}{2}}+(bc)^{\frac{3}{2}}+(ca)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyclic}}(a^2b+ab^2)\geq\sum_{\text{cyclic}}2(ab)^{\frac{3}{2}}$$

ពិតតាមវិសមភាពកូស៊ី ។

❷ តាង $x=a^{2/3}, y=b^{2/3}, z=c^{2/3}$ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$(3-t)+t(abc)^{\frac{2}{t}}+a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca)$$
$$\Leftrightarrow (3-t)+t(xyz)^{3/t}+x^3+y^3+z^3\ge 2\left[(xy)^{\frac{3}{2}}+(yz)^{\frac{3}{2}}+(zx)^{\frac{3}{2}}\right]$$

តាមសំនួរទី❶ យើងមាន

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2\left[(xy)^{\frac{3}{2}}+(yz)^{\frac{3}{2}}+(zx)^{\frac{3}{2}}\right]$$

ដូច្នេះ ពេលនេះ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$(3-t)+t(xyz)^{\frac{3}{t}}\ge 3xyz$$
$$\Leftrightarrow \frac{3-t}{3}.1+\frac{t}{3}(xyz)^{\frac{3}{t}}\ge 1^{\frac{3-t}{3}}.\left[(xyz)^{\frac{3}{t}}\right]^{\frac{t}{3}}=xyz$$

ពិត តាមវិសមភាពមធ-មធទូទៅ ។ យើងឃើញថាអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល

$a=b=c=1$ ។

❸ ចំពោះ $t=\frac{1}{2};1;2$ យើងមាន

$$\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(abc)^4+a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca)$$
$$2+(abc)^2+a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca)$$
$$1+2abc+a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc+ca)$$

340.▲ ❶ លក្ខខណ្ឌចាំបាច់

យក $a=0, b=c=1$ វិសមភាពដែលឱ្យទៅជា

$$k(k+1)^2\ge\left(k+\frac{1}{2}\right)^3$$
$$k^3+2k^2+k\ge k^3+\frac{3}{2}k^2+\frac{3}{4}k+\frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{4}k-\frac{1}{8}\ge 0$$
$$4k^2+2k-1\ge 0$$

ដូច្នេះជាចាំបាច់ត្រូវតែ $4k^2+2k-1\ge 0$ ។

❷ លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់

វិសមភាពដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$[(b+c)k+a][(c+a)k+b][(a+b)k+c]$$
$$\ge (a+b)(b+c)(c+a)\left(k+\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \{(b+c)(c+a)k^2+[b(b+c)+a(c+a)]k+ab\}[(a+b)k+c] \geq (a+b)(b+c)(c+a)\left(k^3+\frac{3}{2}k^2+\frac{3}{4}k+\frac{1}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[c(c+b)(c+a)+a(a+c)(a+b)+b(b+c)(b+a) - \frac{3}{2}(a+b)(b+c)(c+a)\right]k^2 + \left[bc(b+c)+ac(c+a)+ab(a+b) - \frac{3}{4}(a+b)(b+c)(c+a)\right]k+abc - \frac{1}{8}(a+b)(b+c)(c+a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[2(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+a^2c+ac^2+ab^2+b^2c+bc^2)]k^2 + \frac{1}{4}[a^2b+a^2c+ac^2+ab^2+b^2c+bc^2-6abc]k+\frac{3}{4}abc - \frac{1}{8}(a^2b+a^2c+ac^2+ab^2+b^2c+bc^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\sum_{\text{sym}} a^3-\sum_{\text{sym}} a^2b\right]k^2+\frac{1}{4}\left[\sum_{\text{sym}} a^2b-\sum_{\text{sym}} abc\right]k - \frac{1}{8}\left[\sum_{\text{sym}} a^2b-\sum_{\text{sym}} abc\right] \geq 0 \quad (1)$$

តាមវិសមភាព Schur

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a(a^2-ac-ab+bc)+b(b^2-bc-ab+ac)+c(c^2-bc-ac+ab) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-a^2c-a^2b+3abc-b^2c-ab^2-bc^2-ac^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3+b^3+c^3)-2(a^2c+a^2b+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3+b^3+c^3)-(a^2c+a^2b+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) \geq (a^2c+a^2b+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)-6abc$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{sym}}(a^3-a^2b) \geq \sum_{\text{sym}}(a^2b-abc) \quad (2)$$

និងតាមវិសមភាពកូស៊ី

$$(a^2b+a^2c+ac^2+ab^2+b^2c+bc^2)-6abc$$

$$\geq 6\sqrt[6]{a^2b.a^2c.ac^2.ab^2.b^2c.bc^2}-6abc=0$$

ដូច្នេះ វិសមភាព(2) ទៅជា

$$\sum_{\text{sym}}(a^3-a^2b)\geq\sum_{\text{sym}}(a^2b-abc)\geq 0$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $a=b=c$ ។ តាមវិសមភាព(2) អង្គខាងឆ្វេងនៃវិសមភាព

(1)ទៅជា

$$S=\frac{1}{2}\left[\sum_{\text{sym}}a^3-\sum_{\text{sym}}a^2b\right]k^2+\frac{1}{4}\left[\sum_{\text{sym}}a^2b-\sum_{\text{sym}}abc\right]k$$
$$-\frac{1}{8}\left[\sum_{\text{sym}}a^2b-\sum_{\text{sym}}abc\right]$$
$$\geq\frac{1}{8}\left[\sum_{\text{sym}}a^2b-\sum_{\text{sym}}abc\right](4k^2+2k-1)$$

បើ $4k^2+2k-1\geq 0$ នោះ $S\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ a,b,c ។

តើមានតម្លៃk ណាផ្សេងទៀតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែរឬទេ? យើងដឹងថា ជាចាំបាច់ k ត្រូវតែ $4k^2+2k-1\geq 0$ ហើយចំពោះ k ផ្ទៀងផ្ទាត់ $4k^2+2k-1\geq 0$ យើងមាន វិសមភាពផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ a,b,c ។ ដូច្នេះ k ផ្ទៀងផ្ទាត់ $4k^2+2k-1\geq 0$ ជាចម្លើយ ។

យើងទាញបាន

$$k\leq\frac{-1-\sqrt{5}}{4};k\geq\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

341.▲ ❶ យើងមាន

$$\frac{1}{a}-\frac{b+c}{a^2+bc}=\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)}$$
$$\frac{1}{b}-\frac{c+a}{b^2+ca}=\frac{(b-c)(b-a)}{b(b^2+ca)}$$
$$\frac{1}{c}-\frac{a+b}{c^2+ab}=\frac{(c-a)(c-b)}{c(c^2+ab)}$$

ដូច្នេះវិសមភាពដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)}+\frac{(b-c)(b-a)}{b(b^2+ca)}+\frac{(c-a)(c-b)}{c(c^2+ab)}\geq 0 \quad (*)$$

វិសមភាពខាងលើស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a,b,c ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $a\leq b\leq c$ ។

ដូច្នេះ

$$\frac{(c-a)(c-b)}{c(c^2+ab)}\geq 0$$

ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $c=a$ ឬ $c=b$ ។

បន្ទាប់មកទៀត

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)}+\frac{(b-c)(b-a)}{b(b^2+ca)}=\frac{(b-a)^2(a+b)}{ab(a^2+bc)(b^2+ca)}[a(c-b)+cb]\geq 0$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a=b$ ។

ដូច្នេះវិសមភាព(*) ពិត ដោយ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $a=b=c$ ។

❷ តាមវិសមភាព Schur ចំពោះ $r=-1$ និង តាង $x=a+b, y=b+c$ និង $z=c+a$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}0&\leq\frac{1}{x}(x-y)(x-z)+\frac{1}{y}(y-z)(y-x)+\frac{1}{z}(z-x)(z-y)\\&=\frac{(a-c)(b-c)}{a+b}+\frac{(b-a)(c-a)}{b+c}+\frac{(c-b)(a-b)}{c+a}\\&=\frac{c^2+ab}{a+b}-c+\frac{a^2+bc}{b+c}-a+\frac{b^2+ca}{c+a}-b\\&\Longrightarrow\frac{c^2+ab}{a+b}+\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}\geq a+b+c\end{aligned}$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល $x=y=z$ ឬ $a=b=c$ ។

342.▲ ❶ យើងអាចសន្មតថា $a_1\geq a_2; b_1\geq b_2; a_1\geq b_1$ ដោយមិនធ្វើឱ្យបាត់បង់លក្ខណៈទូទៅទេ ។ បើ x ឬ y ស្មើសូន្យ នោះវិសមភាពពិត ។ ដូច្នេះ សន្មតថា x និង y មិនសូន្យទាំងពីរ ។ បន្ទាប់មកទៀត វិសមភាពស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x,y ដូច្នេះ សន្មតថា $x\geq y$ ។ ដោយ $a_1+a_2=b_1+b_2$ នោះ

$$a_1-a_2=(b_1-a_2)+(b_2-a_2)$$

$$\Longrightarrow x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}-x^{b_1}y^{b_2}-x^{b_2}y^{b_1}$$
$$=x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{a_1-a_2}+y^{a_1-a_2}-x^{b_1-a_2}y^{b_2-a_2}-x^{b_2-a_2}y^{b_1-a_2}\right)$$
$$=x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{b_1-a_2}-y^{b_1-a_2}\right)\left(x^{b_2-a_2}-y^{b_2-a_2}\right)$$
$$=x^{a_2}y^{a_2}\left(x^{a_1-b_2}-y^{a_1-b_2}\right)\left(x^{a_1-b_1}-y^{a_1-b_1}\right)$$
$$=x^{a_2}y^{a_2}y^{a_1-a_2}\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{a_1-b_2}-1\right]\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{a_1-b_1}-1\right]\geq 0$$

ពិត ។

❷ ក) ករណី $b_1\geq a_2$

ដោយ $a_1\geq a_1+a_2-b_1$ និង $a_1\geq b_1$ នោះ $a_1\geq \max(a_1+a_2-b_1,b_1)$

$\Longrightarrow \max(a_1,a_2)=a_1\geq \max(a_1+a_2-b,b_1)$ ។ យើងមាន $a_1+a_2-b_1\geq b_2\geq b_3$ និង $a_1+a_2-b_1\geq b_1+a_3-b_1=a_3$ ។

$$\Longrightarrow \max(a_1+a_2-b_1,a_3)\geq \max(b_2,b_3)$$

តាមសំនួរទី១ យើងទាញបាន

$$\sum_{\text{sym}}x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3}=\sum_{\text{cyclic}}z^{a_3}(x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1})$$
$$\geq\sum_{\text{cyclic}}z^{a_3}\left(x^{a_1+a_2-b_1}y^{b_1}+x^{b_1}y^{a_1+a_2-b_1}\right)$$
$$=\sum_{\text{sym}}x^{b_1}y^{a_1+a_2-b_1}z^{a_3}$$
$$=\sum_{\text{cyclic}}x^{b_1}\left(y^{a_1+a_2-b_1}z^{a_3}+y^{a_3}z^{a_1+a_2-b_1}\right)$$
$$\geq\sum_{\text{cyclic}}x^{b_1}\left(y^{b_2}z^{b_3}+y^{b_3}z^{b_2}\right)$$
$$=\sum_{\text{sym}}x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}$$

ខ) ករណី $b_1\leq a_2$

ដោយ $3b_1\geq b_1+b_2+b_3=a_1+a_2+a_3\geq b_1+a_2+a_3$ នោះ

$$b_1\geq a_2+a_3-b_1$$
$$a_1\geq a_2\geq b_1\geq a_2+a_3-b_1$$

ដូច្នេះ

$$\max(a_2,a_3)\geq \max(b_1,a_2+a_3-b_1)$$
$$\max(a_1,a_2+a_3-b_1)\geq \max(b_2,b_3)$$

តាមសំនួរទី១ យើងទាញបាន

$$\sum_{\text{sym}} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} = \sum_{\text{cyclic}} x^{a_1}(y^{a_2}z^{a_3} + y^{a_3}z^{a_2})$$
$$\geq \sum_{\text{cyclic}} x^{a_1}\left(y^{b_1}z^{a_2+a_3-b_1} + y^{a_2+a_3-b_1}z^{b_1}\right)$$
$$= \sum_{\text{cyclic}} y^{b_1}\left(x^{a_1}z^{a_2+a_3-b_1} + x^{a_2+a_3-b_1}z^{a_1}\right)$$
$$\geq \sum_{\text{cyclic}} y^{b_1}\left(x^{b_2}z^{b_3} + x^{b_3}z^{b_2}\right)$$
$$= \sum_{\text{sym}} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}$$

សមភាពកើតមាន ទាល់តែ និង មានតែ $x = y = z$ ។

343.▲ វិសមភាពដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$\frac{1}{a+b+(abc)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{b+c+(abc)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{c+a+(abc)^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{1}{(abc)^{\frac{1}{3}}}$$

តាង $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ ដែល $x, y, z > 0$ ។ វិសមភាពទៅជា

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz} + \frac{1}{y^3+z^3+xyz} + \frac{1}{z^3+x^3+xyz} \leq \frac{1}{xyz}$$
$$\Leftrightarrow xyz \sum_{\text{cyclic}} (x^3+y^3+xyz)(y^3+z^3+xyz)$$
$$\leq (x^3+y^3+xyz)(y^3+z^3+xyz)(z^3+x^3+xyz)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} x^6y^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^5y^2z^2$$

ពិតតាមវិសមភាព Muirhead ព្រោះស្វ៊ីត (6,3,0) លប់លើស្វ៊ីត (5,2,2) ។

344.▲ យើងមាន

$$\sum_{\text{sym}} a^3 = 6(a^3+b^3+c^3+d^3)$$
$$\sum_{\text{sym}} ab\sqrt{cd} = 4\left(ab\sqrt{cd} + ac\sqrt{bd} + ad\sqrt{bc} + bc\sqrt{da} + bd\sqrt{ca} + cd\sqrt{ab}\right)$$

ដូច្នេះវិសមភាព សមមូលនឹង

$$\sum_{\text{sym}} a^3 \geq \sum_{\text{sym}} ab\sqrt{cd} \quad \Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} a^3b^0c^0d^0 \geq \sum_{\text{sym}} a^1b^1c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}$$

ពិត តាមវិសមភាព Muirhead ព្រោះ (3,0,0,0) លប់លើ $\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ។

345.▲ វិសមភាពដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$4\sum_{\text{sym}} x^5y + 2\sum_{\text{cyclic}} x^4yz + 6x^2y^2z^2 - \sum_{\text{sym}} x^4y^2 - 6\sum_{\text{cyclic}} x^3y^3 - 2\sum_{\text{sym}} x^3y^2z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^4y^2\right] + 3\left[\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^3y^3\right] + 2xyz\left[3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y\right] \geq 0$$

តាមវិសមភាព Muirhead

$$\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^4y^2 \geq 0$$

$$\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^3y^3 \geq 0$$

តាមវិសមភាព Schur ចំពោះ $r = 1$

$$\sum_{\text{cyclic}} x(x-y)(x-z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyclic}} x(x^2 - xz - xy + yz) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyclic}} (\mathrm{x}^3 - \mathrm{x}^2\mathrm{z} - \mathrm{x}^2\mathrm{y} + \mathrm{xyz}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{cyclic}} (x^2z + x^2y) + \sum_{\text{cyclic}} xyz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y + 3\mathrm{xyz} \geq 0$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិត ព្រោះអង្គខាងឆ្វេងជាផលបូកនៃតួមិនអវិជ្ជមាន ។

346.▲ ដោយ $xy + yz + zx = 1$ យើងបំលែងវិសមភាពឱ្យទៅជាអូម៉ូសែន

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow (xy + yz + zx)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right)^2 \geq \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{\text{sym}} x^5y + \sum_{\text{sym}} x^4yz + 14\sum_{\text{sym}} x^3y^2z + 38x^2y^2z^2 \geq \sum_{\text{sym}} x^4y^2 + 3\sum_{\text{sym}} x^3y^3$$

$$\Leftrightarrow \left[\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^4y^2\right] + 3\left[\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^3y^3\right] + xyz\left[\sum_{\text{sym}} x^3 + 14\sum_{\text{sym}} x^2y + 38xyz\right] \geq 0$$

តាមវិសមភាព Muirhead វិសមភាពខាងលើពិត ។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ $x = y, z = 0$ ឬ $y = z, x = 0$ ឬ $z = x, y = 0$ ។ តែដោយ $xy + yz + zx = 1$ នោះ វាស្មើគ្នាពេល $(x, y, z) = \{(1,1,0); (1,0,1), (0,1,1)\}$ ។

347.▲ យើងមាន

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) = \sum_{\text{sym}} \left[\frac{1}{2}a^3b^3 + \frac{1}{2}a^2b^2c^2 + \frac{1}{2}a^4bc + 2a^3b^2c + a^4b^2\right]$$

ហើយ

$$(ab + bc + ca)^3 = \sum_{\text{sym}} \left[\frac{1}{2}a^3b^3 + a^2b^2c^2 + 3a^3b^2c\right]$$

ដូច្នេះ

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) - (ab + bc + ca)^3 = \sum_{\text{sym}} \left[\frac{1}{2}a^4bc + a^4b^2 - \frac{1}{2}a^2b^2c^2 - a^3b^2c\right]$$

តែថា ស្វ៊ីត (4,2,0) និង (4,1,1) លប់ស្វ៊ីត (2,2,2) និង (3,2,1) ។ ដូច្នេះតាមវិសមភាព Muirhead

$$\sum_{\text{sym}} \left[\frac{1}{2}a^4bc + a^4b^2 - \frac{1}{2}a^2b^2c^2 - a^3b^2c\right] \geq 0$$

348.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}(b+c-a)^2&[(c+a)^2+b^2][(a+b)^2+c^2]\\ &+(c+a-b)^2[(b+c)+a^2][(a+b)^2+c^2]\\ &+(a+b-c)^2[(b+c)^2+a^2][(c+a)^2+b^2]\\ &=\sum_{\text{sym}}\left[\frac{3}{2}a^6+2a^5b+a^4b^2+3a^4bc+2a^3b^3+3a^2b^2c^2\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(b+c)^2+a^2]&[(c+a)^2+b^2][(a+b)^2+c^2]\\ &=\sum_{\text{sym}}\left[\frac{1}{2}a^6+2a^5b+3a^4b^2+3a^4bc+2a^3b^3+8a^3b^2c\right.\\ &\left.+\frac{7}{3}a^2b^2c^2\right]\end{aligned}$$

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\sum_{\text{sym}}(3a^6+2a^5b-2a^4b^2+3a^4bc+2a^3b^3-12a^3b^2c+4a^2b^2c^2)\geq 0 \quad (1)$$

តែតាមវិសមភាព Schur

$$\sum_{\text{sym}}\left[\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}abc-a^2b\right]\geq 0 \quad (2)$$

ដោយគុណអង្គនីមួយៗនៃ (2) នឹង $4abc$ យើងទាញបាន

$$\sum_{\text{sym}}(4a^4bc-8a^3b^2a+4a^2b^2c^2)\geq 0 \quad (3)$$

ដូច្នេះយើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\sum_{\text{sym}}(3a^6+2a^5b-2a^4b^2-a^4b^2+2a^3b^3-4a^3b^2c)\geq 0 \quad (4)$$

តែស្វ៊ីត (6,0,0) លប់លើស្វ៊ីត (4,1,1) និង ស្វ៊ីត (3,2,1) ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}(3a^6-a^4bc-2a^3b^2c)\geq 0 \quad (5)$$

បន្ទាប់មកទៀតស្វ៊ីត (5,1,0) លប់លើស្វ៊ីត (4,2,0) ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}(2a^5b-2a^4b^2)\geq 0 \quad (6)$$

ហើយជាចុងក្រោយ ស្វ៊ីត(3,3,0) លប់លើស្វ៊ីត (3,2,1) ដូច្នេះ

$$\sum_{\text{sym}}(2a^3b^3 - 2a^3b^2c) \geq 0 \quad (7)$$

ដោយបូក (5), (6) និង (7) យើងទាញបាន (4) ។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ទាល់តែ $a = b = c$ ។

២.៦ វិសមីការ

349. $(-3;2)\cup(4;\infty)$. **350.** $(-\infty;-2]\cup\{-1\}$. **351.**$\left(\frac{1}{2};\infty\right)$. **352.**$(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$. **353.**$(-5;-1)$. **354.**$(-\infty;-\sqrt{3})\cup\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup(\sqrt{3};\infty)$. **355.**$(2-4/\sqrt{3};1)\cup(3;2+4/\sqrt{3})$. **356.**$(-\infty;\infty)$. **357.**$\left(-\frac{3+\sqrt{33}}{2};\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right)$.

358.$\left(-1+\sqrt{3}-\sqrt{3+2\sqrt{3}};1+\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}\right)$.▲ វិសមីការនេះសមមូលនឹង $p(x)=x^4-4x^3-6x^2-4x+1<0$ ។ យើងកំណត់ x ដែល $p(x)=0$ ។ ដោយ $x=0$ មិនមែនជាឫសនៃពហុធានេះ ដូច្នេះយើងចែក $p(x)=0$ នឹង x យើងទាញបាន $x^2+1/x^2-4(x+1/x)-6=0$ ។ តាង $y=x+1/x$ យើងទាញបាន $y^2-4y-8=0$ ។ ដូច្នេះ $y_1=2(1+\sqrt{3})$ និង $y_1=2(1-\sqrt{3})$ ។ ដូច្នេះពហុធា $p(x)$ អាចសរសេរជា $p(x)=\left(x^2-2(1+\sqrt{3})x+1\right)\left(x^2-2(1-\sqrt{3})x+1\right)$ ។ ដោយ $x^2-2(1-\sqrt{3})x+1>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ដូច្នេះវិសមីការសមមូលនឹង $x^2-2(1+\sqrt{3})x+1<0$ ។

359. $\left(-1-\sqrt{3};\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\sqrt{3}-1;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.● តាង $y=x-2/x$.

360.$(-2;0)\cup(2;\infty)$. **361.**$(-1;2)$.
362.$(-\infty;-1)\cup(0;1/2]\cup(1;2)$.
363.$(-1;5/8)\cup(2;7/3)\cup(3;\infty)$.
364. $(-2;-1)\cup[0;1]\cup[2;\infty)$.
365.$(-7;-\sqrt{37})\cup(-5;0)\cup(5;\sqrt{37})\cup(7;\infty)$.
366. $(-1;0)$. **367.** $(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(2;3)\cup(4;6)\cup(7;\infty)$.
368. $(-\infty;1)\cup(3/2;5/2)\cup(7/2;4)$.
369.$(-1/2;1)$. **370.**$[-2;1]$. **371.**$(0;1/3)\cup(0;\infty)$.
372.$\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2};-1\right]\cup\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right)\cup\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$.
373.$(-\infty;-6)\cup\left(\frac{6-6\sqrt{26}}{5};-4\right)\cup(-4;0)\cup\left(6;\frac{6+6\sqrt{26}}{5}\right)$.

374.$[0;\sqrt{2}]$. **375.**$\left[-1-2\sqrt{2};-3\right)\cup(1;3]$.
376.$\{-1\}\cup[2;\infty)$. **377.**$[0{,}5;2]$. **378.**$\left[-\sqrt{3};0\right)\cup(0;2]$.
379.$[-0{,}5;\infty)$ ចំពោះ $a\in[1;\infty)$; $\left[-0{,}5;-0{,}5\left(1-\frac{1}{(1-a)^2}\right)\right)$ ចំពោះ $a\in(-\infty;1)$.
380.$[1;3]$.
381.$[-2;\infty)$ ចំពោះ $a\in[-2;\infty)$; $\emptyset$ ចំពោះ $a\in(-\infty;-2)$.

382.$(-5/8\,;2{,}4]$. **383.**$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$. **384.**$(3;4{,}8]$.
385.$\left(1;2/\sqrt{3}\right]$. **386.**$\left(\frac{\sqrt{13}-5}{2};1\right]$. **387.**$[3;12)$.
388.$[-2;\infty)$. **389.**$\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6};\infty\right)$. **390.**$(8/3\,;\infty)$.
391.$\left[2;\frac{2}{3}\sqrt{21}\right)$. **392.**$[3/2;2)\cup(2;26)$.
393.$(-2;1)\cup(1;\infty)$. **394.**$[0;1/2)$. **395.**$(1/2\,;\infty)$.
396.$[-4;0)\cup(4;6)$.▲ លក្ខខណ្ឌរបស់វិសមីការ $24+2x-x^2\geq 0$ និង $x\neq 0$ នាំឱ្យយើងទាញបានចន្លោះពីរ $[-4;0)$ និង $(0;6]$ ។ យើងឃើញថា $x\in[-4;0)$ ជាចម្លើយរបស់វិសមីការ ព្រោះអង្គខាងឆ្វេងអវិជ្ជមាន ដែលតូចជាង ១ ជានិច្ច ។ ចំពោះចន្លោះទីពីរ យើងទាញបាន $\sqrt{24+2x-x^2}<x$ ។
397.$\left[-1;-\frac{3}{4}\right]$.▲ តាង $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}$ ។ យើងទាញបាន $y^2-3y+2<0$ ។ ដូច្នេះ $1<y<2$ សមមូលនឹង

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}>1\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}<2\\ x\geq -1\end{cases}$$

យើងពិនិត្យវិសមីការទីមួយ ។ វាសមមូលនឹង $2\sqrt{x^2+4x+3}>-3-2x$ ។ អង្គខាងស្តាំអវិជ្ជមានបើ $x\geq -1$ ។ ដូច្នេះ $x\in[-1;\infty)$ ជាចម្លើយរបស់វិសមីការ ។ លើកអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការទីពីរជាការេ សម្រួលរួចហើយ យើងទាញបាន $\sqrt{x^2+4x+3}<-x$ ។ វិសមីការនេះមានចម្លើយទាល់តែ $-1\leq x\leq 0$ (ដោយគិតលក្ខខណ្ឌវិសមីការទីមួយចូល) ។ លើអង្គទាំងពីរជាការេ យើងទាញបាន $4x+3<0$ ។

398.▲ យើងមាន

$$P(x) = (x-1)x(x^4(x^2+x+1)+1)+1 \qquad (1)$$

ឬ $$P(x) = (1-x)+x^2(1-x^3)+x^8 \qquad (2)$$

តាម(១) យើងមាន $P(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty)$ ហើយតាម(២) យើងមាន $P(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (0; 1)$ ។ ដូច្នេះ $P(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

399.▲ អនុគមន៍ $f(x) = P(x)/Q(x)$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ x លើកលែងតែចំចំណុច $x_k, k \in \mathbb{N}, k \le n$ ដែលជាចំណុចសូន្យរបស់ពហុធា $Q(x)$ ។ សន្មតថា x_0 ជាចម្លើយមួយរបស់វិសមីការ $f(x) > 0$ ។ ដូច្នេះ $P(x_0)$ និង $Q(x_0)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ដូច្នេះ $\phi(x_0) = P(x_0)Q(x_0) > 0$ មានន័យថា x_0 ក៏ជាឫសនៃ$\phi(x) = P(x)Q(x) > 0$ ។ ចំពោះ $x = x_k$ យើងមាន $\phi(x_k) = 0$ ។ ដូច្នេះ x_k មិនមែនជាឫសនៃ $\phi(x)$ ទេ ។ ដូច្នេះឫសទាំងអស់របស់ $f(x) > 0$ ក៏ជាឫសរបស់ $\phi(x) > 0$ ដែរ ។ យើងស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាថា ឫសរបស់ $\phi(x) > 0$ ក៏ជាឫសរបស់$f(x) > 0$ ដែរ ។ បើ$P(x)$ និង $Q(x)$ មានតម្លៃមានសញ្ញាផ្សេងគ្នា ចំពោះតម្លៃx ស្ថិតក្នុងដែនកំណត់របស់$f(x)$ នោះវិសមភាព $f(x) > 0$ និង $\phi(x) > 0$ គ្មានឫស ។ ដូច្នេះវិសមីការទាំងពីរសមមូលគ្នា ។

400. $a < 0$.

401. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{45}{8}\right) \setminus \{0\}$▲ អង្គខាងឆ្វេងកំណត់បើ $x \ge -\frac{1}{2}$ និង $x \ne 0$ ។ យើងមាន $\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} = \left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2$ ។ ដោយអនុគមន៍ $f(x) = \left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2 - 2x - 9 = 2\sqrt{1+2x} - 7$ កើន ហើយដោយ $f(45/8) = 0$ នោះ វិសមីការមានឫស $-\frac{1}{2} \le x < 45/8$ និង $x \ne 0$ ។

402. $\left[-1; 1-\sqrt{31}/8\right)$.▲ យើងមាន $f(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}$ មានន័យចំពោះ $-1 \le x \le 3$ ហើយជាអនុគមន៍ថយ ហើយជាប់នៅលើចន្លោះនេះ ។ យើងមាន $f(-1) = 2 > \frac{1}{2}$ និង $f\left(1-\frac{\sqrt{31}}{8}\right) = \frac{1}{2}$ ។ ដូច្នេះវិសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $-1 \le x < 1-\frac{\sqrt{31}}{8}$ ។

403. ▲ លក្ខខណ្ឌ

$$\begin{cases}2x+4\geq \\ 2-x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \quad -2\leq x\leq 2$$

ដោយអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការវិជ្ជមាន នោះលើកអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការជាការេ យើងទាញបាន

$$9x^2+16\geq 4(2x+4)+16(2-x)+16\sqrt{(2x+4)(2-x)}$$
$$9x^2+16\geq -8x+48+16\sqrt{-2x^2+8}$$
$$9x^2+8x-32-8\sqrt{-8x^2+32}\geq 0 \qquad (1)$$

តាង $t=\sqrt{-8x^2+32}\geq 0; t^2=-8x^2+32$ ។ វិសមីការសមមូលនឹង

$$-t^2-8t+x^2+8x\geq 0 \qquad (2)$$

យើងមាន $g(t)=-t^2-8t+x^2+8x$ មាន $\Delta=16+(x^2+8x)=(x+4)^2$ ។ ដូច្នេះ $g(t)$ មានឫស

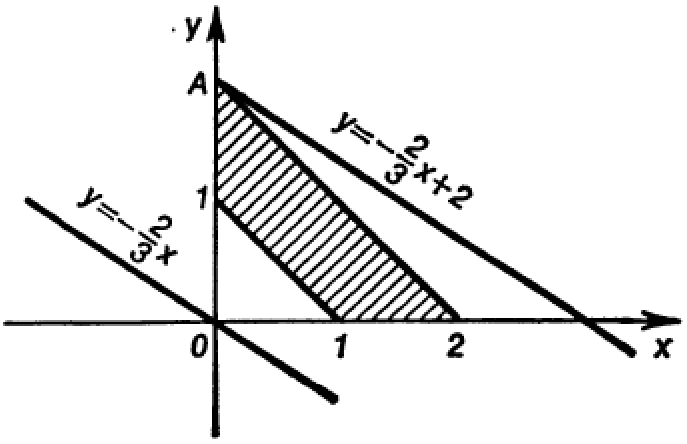
$$t_1=x; t_2=-x-8$$

វិសមីការ(២) សមមូលនឹង $\min(t_1;t_2)\leq t\leq \max(t_1;t_2)$ ។ យើងមាន $t_1-t_2=2x+8$ ដោយ $-2\leq x\leq 2$ នោះ $2x+8>0$ ។ ដូច្នេះ

$$-x-8\leq t\leq x \quad \Leftrightarrow t\leq x$$
$$\sqrt{-8x^2+32}\leq x \ \Rightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ x^2\geq \dfrac{32}{9}\end{cases}$$
$$\Rightarrow \ \frac{4\sqrt{2}}{3}\leq x\leq 2$$

២.៧ ប្រព័ន្ធវិសមីការ

404. $(0;2)$▲ ចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធស្ថិតនៅក្នុងផ្ទៃធូត ។ យើងសង់បន្ទាត់ $2x+3y=0$ ។ យើងចង់បានតម្លៃធំបំផុតនៃ $z=2x+3y$ ។ ចំពោះតម្លៃផ្សេងគ្នានៃ z យើងគូសបានបន្ទាត់ស្របនឹងបន្ទាត់$2x+3y=0$ ។ នៅពេលដែល z កាន់តែធំទៅៗ បន្ទាត់ត្រូវនឹងតម្លៃz ទាំងនោះឃ្លាតកាន់តែឆ្ងាយពីគល់តំរុយ ។ ដូច្នេះ z ធំបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធជាតម្លៃ z នៅពេលដែលបន្ទាត់ $z=2x+3y$ កាត់តាម A ។



405. $\{(3;1)\}$.

406. $a=-1$. ចំណុចចង់បានគឺ $(0;-1)$ ។

407. $\left\{\left(3;\frac{7}{2}\right);\left(-3;-\frac{7}{2}\right)\right\}$. **408.** $\{1\}$.

409. ▲ សមីការទី៣ នាំឱ្យ $4\le x\le 7$ ។ តាង $u=y+z; v=yz$ ។ សមីការ(១)និង (២) ទៅជា

$$\begin{cases}x^3+x^2(13-u)+x(2u-2v-26)+5v-7u+30=0\\x^3+x^2(17-u)-x(2u+2v-26)-3v+u-2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}u(-x^2+2x-7)+v(-2x+5)+x^3+13x^2-26x+30=0 & (4)\\u(-x^2-2x+1)+v(-2x-3)+x^3+17x^2+26x-2=0 & (5)\end{cases}$$

យកសមីការទី(៤)ដកទី(៥) យើងទាញបាន

$$u(4x-8)+8v-4x^2-52x+32=0$$
$$\Rightarrow\quad v=\frac{1}{2}[u(2-x)+x^2+13x-8]$$

ជំនួសចូលសមីការទី(៤) យើងទាញបាន

$$2u(-x^2+2x-7)+(-2x+5)(u(2-x)+x^2+13x-8)+2x^3+26x^2-52x+60=0$$
$$\Rightarrow\quad u(-5x-4)+29x+5x^2+20=0$$
$$\Rightarrow\quad u(5x+4)=(5x+4)(x+5)$$

ដោយ $4\le x\le 7$ នោះ $5x+4\ne 0$ ដូច្នេះ $u=x+5$ ។ យើងទាញបាន $v=5x+1$ ។ ដូច្នេះ

$$y+z=x+5; yz=5x+1$$

ដូច្នេះ y, z ជាឫសនៃសមីការ $t^2-(x+5)t+5x+1=0$ ។ សមីការនេះមានឫស បើឌីសគ្រីសមីណង់

$$\Delta=(x-3)(x-7)\geq 0$$
$$\Rightarrow x\leq 3 \quad \text{ឬ} \quad x\geq 7$$

តែ $4\leq x\leq 7$ ដូច្នេះ $x=7$ ។ យើងទាញបាន $y=z=6$ ។

410. ▲ គុណវិសមីការទីមួយនឹង (-2) រួចបូកចូលវិសមីការទីពីរ យើងទាញបាន

$$(x+3y)^2\leq -\frac{4}{a+1} \qquad (1)$$

ពី(១) យើងទាញបាន $-\frac{4}{a+1}>0 \Rightarrow a<-1$ ។

យើងមាន $\frac{1-a}{a+1}+1=\frac{2}{a+1}<0 \Rightarrow \frac{1-a}{a+1}<-1$ ។ ពិនិត្យប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2=-1 & (4)\\ 3x^2+10xy-5y^2=-2 & (5)\end{cases}$$

ដោយ $\frac{1-a}{a+1}<-1$ នោះ បើ (៤)និង(៥) មានឫស នោះប្រព័ន្ធវិសមីការក៏មានឫសដែរ ។ គុណសមីការទី ៤ នឹង(-2) បូកចូលសមីការទី៥ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2=-1 & (4)\\ (x+3y)^2=0 & (5)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3y\\ y^2=\dfrac{1}{y}\end{cases}$$

ប្រព័ន្ធនេះមានឫស ។ ដូច្នេះ $a<-1$ ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឱ្យប្រព័ន្ធមានឫស ។

២.៨ លីមីត

411. ▲ យើងមាន

$$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}=\frac{(n-1)^2}{2n}x_n$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=\frac{n^2}{2(n+1)}x_{n+1}$$

យកសមភាពទី២ ដក ទី ១ យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{n^2}{2(n+1)}x_{n+1} - \frac{(n-1)^2}{2n}x_n \\
&\Rightarrow \left(1 + \frac{(n-1)^2}{2n}\right)x_n = \frac{n^2}{2(n+1)}x_{n+1} \\
&\Leftrightarrow \frac{n^2+1}{2n}x_n = \frac{n^2}{2(n+1)}x_{n+1} \\
&\Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)x_n
\end{aligned}$$

ជំនួស n ដោយ $1,2,3,\dots,n$ យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned}
n = 1 &: \quad x_2 = \frac{2}{1}\left(1 + \frac{1}{1^2}\right)x_1 \\
n = 2 &: \quad x_3 = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)x_2 \\
&\dots \\
n \leftarrow n &: \quad x_{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)x_n
\end{aligned}$$

គុណសមភាពទាំងនេះចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$x_{n+1} = (n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

ដូច្នេះ

$$x_n = n\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

និង

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= (n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) - n\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \\
&= (n+1)\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) - n\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \\
&= \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)
\end{aligned}$$

យើងមាន

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$\dots$$
$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

បូកសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

ដូច្នេះ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < 2$$

យើងមាន

$$\ln(1+x) \leq x;\;\; \forall 0 \leq x$$

ដូច្នេះ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \;\;\Leftrightarrow \ln\left(\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < 2$$
$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) < e^2$$

ដូច្នេះ

$$\lim_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) < e^2$$

យើងទាញបាន ថា $x_{n+1} - x_n$ មានតម្លៃទាល់ ឬ តម្លៃកំណត់ (គឺមិនខិតទៅរក ∞) ពេល $n \to +\infty$ ។

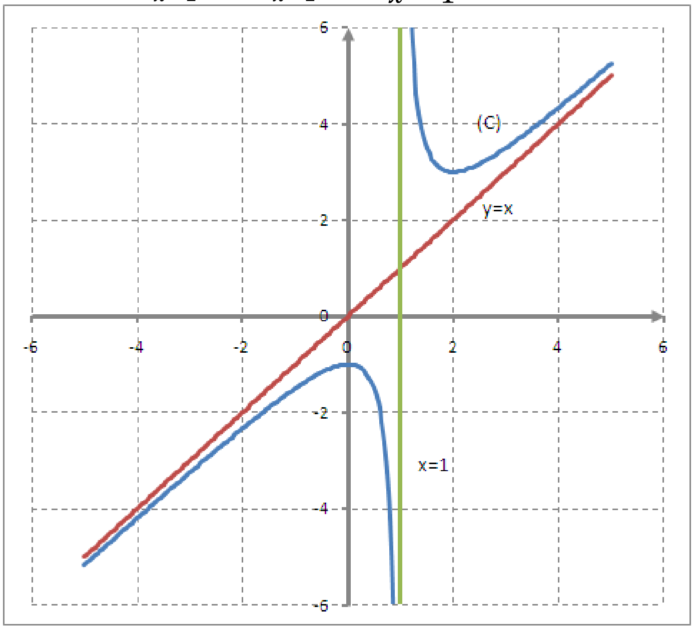
២.៩ សិក្សាអនុគមន៍

412. ▲ 1) យើងមាន

$$y' = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^2-3x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to 1+} y = \lim_{x\to 1+} x + \frac{1}{x-1} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1-} y = \lim_{x\to 1-} x + \frac{1}{x-1} = -\infty$$



2) តាង $A(0;b)$ ជាចំណុចស្ថិតលើអ័ក្ស Oy ។ បន្ទាត់កាត់តាម A មានសមីការ

$$y = kx + b$$

យើងសរសេរសមីការចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់នេះនឹងខ្សែកោង

$$\frac{x^2-x+1}{x-1}=kx+b$$
$$\Longrightarrow (1-k)x^2+(k-b-1)x+1+b=0$$

ដើម្បីឱ្យវាប៉ះគ្នា នោះសមីការត្រូវមានឫសឌុប

$$\begin{cases} k-1\neq 0 \\ \Delta=(k-b-1)^2-4(1-k)(1+b)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 1 \\ k^2+2k(b+1)+b^2-2b-3=0 \quad (*) \end{cases}$$

ដើម្បីឱ្យសមីការ $\Delta=0$ មានឫសk នោះ ត្រូវតែ

$$(b+1)^2-b^2+2b+3\geq 0$$
$$\Leftrightarrow\ 4(b+1)\geq 0 \quad \Longrightarrow b\geq -1$$

បើ $b=-1$ នោះ (*) នាំឱ្យ $k=0$ ។ បើ $b>-1$ នោះ(*) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ដូច្នេះ ត្រូវតែមានមួយដែលផ្សេងពី1 ។

ដូច្នេះ $b\geq -1$ ដើម្បីឱ្យគេអាចគូសបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង ចេញពីចំណុច$A(0;b)$ បាន ។

3) យើងសរសេរសមីការកំណត់ចំនុចប្រសព្វ និងសមីការកំណត់ចំនុចប៉ះរវាងប៉ារ៉ាបូលនិងខ្សែកោង

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x-1}=x^2+a \\ 1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=2x \end{cases}$$
$$\Longrightarrow\ x(2x^2-5x+4)=0 \Longrightarrow x=0 \Longrightarrow a=-1$$

២.១០ អាំងតេក្រាល

413.▲ ក) យើងមាន

$$g(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\int_x^0 f(t)\,dt+\int_0^{x+1} f(t)\,dt$$
$$=\int_x^{x+1} f(t)\,dt-\int_0^x f(t)\,dt$$
$$\Longrightarrow\ g'(x)=f(x+1)-f(x)$$

បើ f កើន នោះ$\forall x \in \mathbb{R}; f(x+1) > f(x) \implies g'(x) > 0 \implies g$ កើន ។ ដូចគ្នា បើ f ចុះនោះ g ចុះដែរ ។

ខ) បើ f មានខួបស្មើ១ នោះ

$$\begin{aligned} & f(x+1) = f(x) \\ \implies & g'(x) = 0 \\ \implies & g(x) = Cte \end{aligned}$$

៣

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល-លោការីត

៣.១ គណនា

414. 9. **415.** $\ln 3$. **416.** $\ln|a|$. **417.** $4\log_a|b|$.

418. 3. **419.** 2. **420.** 1 **421.** 2.

422. ▲ $a^{\sqrt{\log_a b}} = \left(a^{\sqrt{\log_a b}}\right)^{1/\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$, ដូច្នេះផលសងស្មើសូន្យ ។

423. $3(1-c-d)$; **424.** $\frac{5-d}{2(c-2d+cd+1)}$;

425. $5c-6d-4$.▲ យើងមាន $0,175 = 175/1000 = 7/40 = 7/(2^2.10)$. ។ ដូច្នេះ $\log 0,175 = \log 7 - 2\log 2 - 1$ ។ យើងមាន $\log 196 = \log 2^2.7^2 = 2\log 2 + 2\log 7 = c$; និង $\log 56 = \log 2^3.7 = 3\log 2 + \log 7 = d$ ។ យើងទាញបាន $\log 2 = (2d-c)/4$; $\log 7 = (3c-2d)/4$ ។ ដូច្នេះ $\log(0,175)^4 = 4(\log 7 - 2\log 2 - 1) = 5c - 6d - 4$.

426. 3 ▲ តាង $\log_2 12 = a$ យើងមាន $1/\log_{96} 2 = \log_2 2^3.12 = a + 3; \log_2 24 = 1 + a; \log_2 196 = a + 4$ និង $1/\log_{12} 2 = a$ ។ កន្សោមដែលឱ្យសមមូលនឹង $(a+1)(a+3) - a(a+4) = 3$ ។

427. ▲ តាង $v_n = 1/u_n$ ។ យើងមាន

$$u_{n+2}=\frac{u_n u_{n+1}}{2u_n-u_{n+1}} \quad \Rightarrow \frac{1}{v_{n+2}}=\frac{\frac{1}{v_n}\cdot\frac{1}{v_{n+1}}}{\frac{2}{v_n}-\frac{1}{v_{n+1}}} \Rightarrow v_{n+2}+v_n=2v_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad v_{n+2}-v_{n+1}=v_{n+1}-v_n=\cdots=v_2-v_1=q$$

ដូច្នេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ យើងទាញបាន

$$S_n=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{u_i}=\sum_{i=1}^{2n}v_i=n \quad \Leftrightarrow \frac{(v_1+v_{2n})2n}{2}=n$$

$$\Rightarrow \quad v_{2n}+v_1=1$$

$$\Rightarrow \quad v_{2n}+v_1=v_{2n-1}+v_2=\cdots=v_{n+1}+v_n=1$$

ចំពោះគ្រប់ $a+b=1$ យើងមាន

$$f(a)+f(b)=\frac{1}{2002^{2a-1}+1}+\frac{1}{2002^{2b-1}+1}$$

$$=\frac{2002^{2b-1}+1+2002^{2a-1}+1}{2002^0+2002^{2a-1}+2002^{2b-1}+1}=1$$

ដូច្នេះ

$$\sum_{i=1}^{2n}f(v_i)=[f(v_1)+f(v_{2n})]+[f(v_2)+f(v_{2n-1})]+\cdots+[f(v_n)+f(v_{n+1})]$$

$$=n$$

428. ▲ តាង $c=3/4$ ។ យើងមាន $y=cx$ ។ ដូច្នេះ

$$x^{cx}=(cx)^x \Rightarrow (x^x)^c=c^x.x^x$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង x^x យើងទាញបាន $(x^x)^{c-1}=c^x$ ។បំពាក់ឫសទី x ទៅលើអង្គសង្ខាងនៃសមីការនេះ យើងទទួលបាន

$$x^{c-1}=c \Rightarrow x=c^{\frac{1}{c-1}}$$

ជំនួស $c=3/4$ ចូល យើងទទួលបាន

$$x=\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}=\left(\frac{4}{3}\right)^4=\frac{256}{81} \Rightarrow y=\frac{64}{27} \Rightarrow x+y=\frac{256+192}{81}=\frac{448}{81}=\frac{r}{s}$$

ដូច្នេះ $r+s=448+81=529$ ។

៣.២ សមភាព

429. ▲ យើងមាន

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}$$
$$\log_{24} 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 24} = \frac{1 + 3\log_2 3}{3 + \log_2 3}$$

តាង $\log_2 3 = x$ យើងទាញបាន

$$ab + 5(a - b) = \frac{1 + 2x}{2 + x}\frac{1 + 3x}{3 + x} + 5\left(\frac{1 + 2x}{2 + x} - \frac{1 + 3x}{3 + x}\right)$$
$$= \frac{6x^2 + 5x + 1 + 5(-x^2 + 1)}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{x^2 + 5x + 6}{(x + 2)(x + 3)} = 1$$

430. ▲ យើងមាន

$$\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$$

ដូច្នេះ

$$\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \frac{1}{\log_4 N} + \cdots + \frac{1}{\log_{100} N}$$
$$= \log_N 2 + \log_N 3 + \log_N 4 + \cdots + \log_N 100$$
$$= \log_N(2.3.4 \ldots 100) = \log_N 100! = \frac{1}{\log_{100!} N}$$

431. ▲ យើងមាន

$$a^2 + b^2 = c^2 \iff a^2 = (c - b)(c + b)$$

យើងមាន

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = \frac{1}{\log_a(b + c)} + \frac{1}{\log_a(c - b)}$$
$$= \frac{\log_a(c - b) + \log_a(b + c)}{\log_a(b + c)\log_a(c - b)}$$
$$= [\log_a(c - b)(b + c)][\log_{c+b} a \log_{c-b} a]$$
$$= [\log_a a^2][\log_{c+b} a \log_{c-b} a]$$
$$= 2\log_{c+b} a \log_{c-b} a$$

ពិត ។

432. ▲ យើងមាន

$$y = 10^{\frac{1}{1-\log x}} \Rightarrow \log y = \frac{1}{1-\log x}$$

និង

$$\begin{aligned}
& z = 10^{\frac{1}{1-\log y}} \Rightarrow \log z = \frac{1}{1-\log y} \\
& \Rightarrow 1-\log z = 1-\frac{1}{1-\log y} = \frac{-\log y}{1-\log y} \\
& \Rightarrow \frac{1}{1-\log z} = \frac{1-\log y}{-\log y} = \frac{1-\frac{1}{1-\log x}}{-\frac{1}{1-\log x}} = \log x \\
& \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}
\end{aligned}$$

ពិត ។

៣.៣ សមីការ

433. $\{\log_{3/2} 2\,; 2\log_{3/2} 2\}$. **434.** $\{1-\sqrt{3}; 0; 2; 1+\sqrt{3}\}$.

435. $\{1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\}$.

436. $\left\{\log_{1\sqrt{5\sqrt{2}-7}} 6\,; 0\right\}$

437. ▲ $\{-2; 3\}$. តាង $3^{x^2} = u, 3^{x+6} = v$ ។ សមីការដែលឱ្យមានរាង

$u^2 - 2uv + v^2 = 0$ ឬ $(u-v)^2 = 0$ ។ ដូច្នេះ $3^{x^2} = 3^{x+6}$ ។ ... ។

438. ▲ $\{-2; 3\}$. តាង $2^{\sqrt{2x+1}} = y, 2^x = z$ យើងទទួលបាន $x^2y + z = 2y +$

$x^2z/4$ ឬ $(x^2/4 - 1)(2y - z) = 0$ ។ យើងទាញបាន $x_1 = 2$ ឬ $2y = z$ នាំឱ្យ

$x_4 = 4$ ។

439. $\{11\}$.▲ យើងបំលែងអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ

$4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5} = 4^{\log_4 3(x-3)}\left(2^{\log_2 5}\right)^2 = 5^2\left(4^{\log_4(x-3)}\right)^{1/3} = 25(x-3)^{1/3}$

យើងមាន $25(x-3)^{1/3} = 50, x-3 = 2^3, x = 11$ ។

440. $\{4\}$. **441.** $\{-3;\ -1\}$. **442.** $\{27\}$;

443. $\{-1\}$ ▲ យើងបង្រួមសមីការទៅជារាង $\log_2(3-x)(1-x) = \log_2 2^3$ នាំឱ្យ $x^2-4x-5=0$ នាំឱ្យ $x=-1$ ។

444. $\{4\}$; **445.** $\{8\}$; **446.** $\{2\}$;

447. $\{3\}$; **448.** $\{3; 3+\sqrt{2}\}$; **449.** $\{-11;\ -6-\sqrt{7}; -6+\sqrt{7};\ -1\}$;

450. $\{3\}$; **451.** $\{-17\}$; **452.** $\{1\}$;

453. $\{2\}$; **454.** $\{\sqrt{2}; \sqrt{6}\}$.

455. $\{-2^{1/\log_a 4a^4};\ 2^{1/\log_a 4a^4}\}$ ចំពោះ $a \in (0;\ 1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}\,; 1) \cup (1; \infty)$ ក្រៅពីនេះសមីការគ្មានឫស ។

456. $\{(3a+3)/(7-a)\}$ ចំពោះ $a \in (3;\ 7)$ ក្រៅពីនេះសមីការគ្មានឫស ។

457. $\{(2a-1)/6\}$ ចំពោះ $a \in (-\infty;\ -12) \cup (1/2\,; \infty)$ ក្រៅពីនេះសមីការគ្មានឫស ។

458. $\{1; 60\}$. ចំពោះ $x=1$ អង្គទាំងពីរនៃសមីការស្មើសូន្យ ដូច្នេះ $x=1$ ជាឫសមួយនៃសមីការនេះ ។ ឥឡូវនេះយើងរកឫសផ្សេងទៀតដែលផ្សេងពីមួយ ។ គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $1/(\log_3 x \log_4 x \log_5 x)$ យើងទាញបាន

$$1 = \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} = \log_x 3 + \log_x 4 + \log_x 5$$
$$\Rightarrow\ \log_x 3.4.5 = 1;\ \Rightarrow\ x = 60$$

459. $\{1; \sqrt{3}/8\}$. **460.** $\{1/10\,; \sqrt{10}\}$. **461.** $\{\frac{1}{2}; 4\}$.

462. $\{3; 3^9\}$. **463.** $\{1/625; 5\}$. **464.** $\{\sqrt[5]{5}; 5\}$.

465. $\{10\}$. **466.** $\{-1/4\}$. **467.** $\{0; 7/4\,; \frac{3+\sqrt{24}}{2}\}$.

468. $\{2\}$. **469.** $\{1/\sqrt[3]{4}\,; 8\}$. **470.** $\{1/\sqrt{2}\,; 1; 4\}$.

471. $\{1/8\,; 1; 4\}$. **472.** $\{1/9\,; 1; 3\}$. **473.** $\{5\}$.

474. $\{a-1; a+1\}$ ចំពោះ $a \in (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2) \cup (2; \infty)$; $\{3\}$ ចំពោះ $a=2$

475. $\{a^2\}$ ចំពោះ $a \in (0; 1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}; 1) \cup (1; \infty)$ ។

476. $\{25\}$ **477.** $\{1/9\}$ **478.** $\left\{\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}\right\}$

479. $\{2\}$ **480.** $\{3\}$ **481.** $\{1/3\}$

482. $\{3; 10\}$ **483.** $\{2; 4\}$ **484.** $\{\log_2(3/5)\,; \log_2(2/5)\}$
485. $\{2\}$ **486.** $\{2\}$ **487.** $\{0\}$
488. $\{-1; 2\}$ **489.** $\{2\}$ **490.** $\{-\log_2 3\}$
491. $\{-9/10\,; 99\}$ **492.** $\{-1/10^5\,; 10^3\}$ **493.** $\{1000\}$
494. $\{0\}$ **495.** $\{1/10\,; 2; 1000\}$ **496.** $\{0{,}2; 6\}$

497. $\{2\}$. ● តាង

$$2^{\log_{x^2}(3x-2)} = u, 3^{\log_{x^2}(3x-2)} = v$$

រួចហើយដោះស្រាយសមីការ $3u^2 - 5uv + 2v^2 = 0$ ជាអនុគមន៍នៃ u ឬ v ។

498. $[1/5\,; \infty)$

499. $\{1/16\} \cup [4; \infty)$.▲ តាង $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = y$ សមីការដែលឱ្យទៅជា $\log_2 \sqrt{y+6} = \log_2 \sqrt{2}|y|$ ឬ $2y^2 - y - 6 = 0$ ដែលមានឫស $y_1 = 2$ និង $y_2 = -3/2$ ។ ដូច្នេះ $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = y_1 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = |\sqrt{x} - 2| \Rightarrow x \geq 4$ ។ ជំនួស $\sqrt{x} - |\sqrt{x} - 2| = y_2 = -3/2 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 1/2 \Rightarrow x = 1/16$ ។

500. ▲ ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង 13^x យើងទាញបាន

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$$

យើងមាន $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$ ។ អនុគមន៍ $y_1 = (5/13)^x$ និង $y_2 = (12/13)^x$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។ ដូច្នេះ

- បើ $x < 2$ នោះ

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x < \left(\frac{5}{13}\right)^2 ; \left(\frac{12}{13}\right)^x < \left(\frac{12}{13}\right)^2$$
$$\Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x < \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$$

- បើ $x > 2$ នោះ

$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x > \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$$

ដូច្នេះសមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x = 2$ ។

501. $\{3\}$ **502.** $\{0\}$ **503.** $\{3\}$

504. $\{15\}$ ហើយ $a = 3$ ។

505. ▲ តាង $a = 2002; b = 2003$ ។ សមីការសរសេរជា

$$a.b^{2(\log_a x-1)} = x^{1+\log_a b} - x^2$$

យើងឃើញថា $x = 1$ មិនមែនជាឫសនៃសមីការនេះទេ ។ ចំពោះ $x \neq 1$ យើងទាញបាន

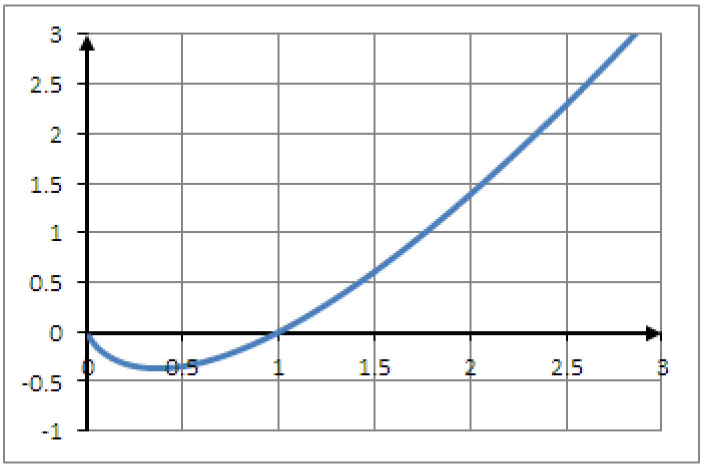
$$\begin{aligned} & a.b^{2(\log_a x-1)} = x^{\log_a x.\log_x(ab)} - a^{\log_a x^2} \\ \Longrightarrow\ & \frac{a}{b^2}.(b^2)^{\log_a x} = (ab)^{\log_a x} - (a^2)^{\log_a x} \\ \Longrightarrow\ & \frac{a}{b^2}.\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{\log_a x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\log_a x} - 1 \end{aligned}$$

តាង $t = \left(\frac{b}{a}\right)^{\log_a x}$ ។ យើងទាញបាន

$$\frac{a}{b^2}.t^2 = t - 1 \iff \left[\begin{array}{l} t = b \\ t = \dfrac{b}{a} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow\ x = \left[\begin{array}{l} 2002^{\frac{1}{1-\log_{2003} 2002}} \\ 2002 \end{array}\right.$$

506. ▲ តាង $f(x) = x\ln x$ ។ សមីការដែលឱ្យសមមូលនឹង $f(x) = f(1/2)$ ។ សមីការក្រោយនេះមានឫសងាយ $x_1 = 1/2$ និង $x_2 = 1/4$ ។ អនុគមន៍ f ចុះលើ $(0, 1/e)$ និងកើនលើ $(1/e, +\infty)$ ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានឫសក្រៅពីឫសងាយទាំងពីរនេះទេ ។



ខ្សែកោង $f(x) = x\ln x$

៣.៤ ប្រព័ន្ធសមីការ

507. $\{(|a|^{66/5}; |a|^{72/5})\}$ ចំពោះ $a \neq \{-1; 0; 1\}$ ។

508. $\{(1/2; 1/2)\}$ **509.** $\{(9/2; 1/2)\}$
510. $\{(8; 1)\}$ **511.** $\{(3/2; 1/2)\}$
512. $\{(\sqrt[4]{3}; -1); (\sqrt[4]{3}; 1)\}$ **513.** $\{(4; -1/2)\}$
514. $\{(0{,}1; 2); (100; -1)\}$ **515.** $\{(2; 10); (10; 2)\}$
516. $\{(2; 1/6)\}$

517. $\{(9a/2; a/2); (a/2; 9a/2)\}$ ចំពោះ $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ ។

518. $\{(2; 4); (4; 2)\}$

519. $\{(a^2; a); (a; a^2)\}$ ចំពោះ $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$;

$\{((a+1)^2; -(a+1)); (-(a+1); (a+1)^2)\}$ ចំពោះ $a \in (-\infty; -2) \cup$

$(-2; -1)$ ។

520. $\{(3; 9); (9; 3)\}$ **521.** $\{(3; 2)\}$
522. $\{(-2; -2); (2; 2)\}$
523. $\{(12; 4)\}$ **524.** $\{(5; 1/2)\}$
525. $\{(64; 1/4)\}$ **526.** $\{(-2; 4)\}$

527. ▲ លក្ខខណ្ឌ $x \neq 0$ ។

សមីការ(២)នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}&[x(xy+2)]^2 - 2[x(xy+2)] + 1 = 0\\ \Leftrightarrow\ &[x(xy+2) - 1]^2 = 0\\ \Leftrightarrow\ &x(xy+2) = 1\\ \Leftrightarrow\ &y = \frac{1-2x}{x^2} \qquad (3)\end{aligned}$$

ជំនួស(៣)ចូលក្នុង(១) យើងទាញបាន

$$2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \quad (4)$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}&\frac{1-x^2}{x^2} - \frac{1-2x}{x^2} = \frac{2}{x} - 1 = -2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)\\ \Rightarrow\ &\frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{1-2x}{2x^2} - \frac{1-x^2}{2x^2}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ (៤) នាំឱ្យ

$$2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^{\frac{1-2x}{x^2}}=\frac{1-2x}{2x^2}-\frac{1-x^2}{2x^2}$$
$$\Leftrightarrow\ 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}+\frac{1-x^2}{2x^2}=2^{\frac{1-2x}{x^2}}+\frac{1-2x}{2x^2}$$

ពិនិត្យអនុគមន៍

$$f(t)=2^t+\frac{t}{2}$$
$$f'(t)=2^t\ln 2+\frac{1}{2}>0;\forall t$$
$$\Rightarrow f(t)\ \text{កើនដាច់ខាត}$$
$$f\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)=f\left(\frac{1-2x}{x^2}\right)\ \Leftrightarrow\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{1-2x}{x^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x=0;\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\ \Rightarrow y=-\frac{3}{4}\end{array}\right.$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធមានឫស $(x;y)=(2;\ -3/4)$ ។

៣.៥ វិសមភាព

528.▲ យើងមាន $2^{300}=8^{100}<3^{200}=9^{100}$ ។

529.▲ យើងមាន $\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}>\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$ ។ ចំពោះ $n>1$ យើងមាន

$$\log_n\frac{n+1}{n}>\log_{n+1}\frac{n+1}{n}>\log_{n+1}\frac{n+2}{n+1}$$
$$\Rightarrow\log_n(n+1)-\log_n n>\log_{n+1}(n+2)-\log_{n+1}(n+1)$$

យើងទាញបាន $\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+1)$ ។

530.▲ ដោយ $27>25$ នោះ $\log_8 27=\log_4 9>\log_9 25$ ។

531.▲ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា ស្វ៊ីត (x_i) ជាស្វ៊ីតកើន ។ ដូច្នេះ ស្វ៊ីត $(\ln x_i)$ ក៏ជាស្វ៊ីតកើនដែរ ។ តាមវិសមភាព Chebyshev យើងទាញបាន

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\ln x_i\geq\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right]\ \Rightarrow\ln\left[\prod_{i=1}^{n}x_i^{x_i}\right]\geq\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]\ln\left[\prod_{i=1}^{n}x_i\right]$$

$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geq \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} x_i]}$$

532.▲ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$(x^2 + 2yz)\ln x + (y^2 + 2zx)\ln y + (z^2 + 2xy)\ln z$$
$$\geq (xy + yz + zx)(\ln x + \ln y + \ln z)$$
$$\Leftrightarrow (x - y)(x - z)\ln x + (y - z)(y - x)\ln y + (z - x)(z - y)\ln z \geq 0$$

យើងមាន $\ln x, \ln y, \ln z > 0$ ព្រោះ $x, y, z > 1$ ។

វិសមភាពខាងលើមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី (ជំនួស x ដោយ y ឬ ដោយ z គ្មានអ្វីប្រែប្រួល) ។ ដូច្នេះ យើងអាចសន្មតថា $x \geq y \geq z$ ។ ដូច្នេះ $(z - x)(z - y)\ln z \geq 0$ ។ បន្ទាប់មកទៀត អនុគមន៍ ln ជាអនុគមន៍កើន លើ $\mathbb{R}^{+*}$ យើងទាញបាន

$$(x - y)(x - z)\ln x \geq (y - z)(x - y)\ln y$$

ព្រោះ កត្តានីមួយៗ សុទ្ធតែ វិជ្ជមានឬសូន្យ ហើយកត្តានីមួយៗនៅអង្គខាងឆ្វេង ធំជាងកត្តានីមួយៗនៃអង្គខាងស្តាំ ។

533.▲ សំនួរនេះដូចគ្នានឹងការប្រៀបធៀបរវាង $101^n - 99^n$ និង 100^n ដែរ ។ យើងមាន

$$\frac{101^n - 99^n}{100^n} = \frac{(100+1)^n - (100-1)^n}{100^n}$$
$$= \frac{2\left(\binom{n}{1}100^{n-1} + \binom{n}{3}100^{n-3} + \cdots\right)}{100^n}$$
$$= 2\left(\frac{n}{100} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!.\,100^3} + \cdots\right)$$

យើងឃើញថា បើ $n \geq 50$ នោះប្រភាគខាងលើ មានតម្លៃធំជាង 1 ។ យើងបង្ហាញថា ប្រភាគនេះមានតម្លៃលើសពី 1 ដែរ ចំពោះ $n = 49$ ។ យើងមាន

$$2\left(\frac{49}{100} + \frac{49.48.47}{3!.\,100^3} + \cdots\right) > 2\left(\frac{49}{100} + \frac{18\ 424}{100^3}\right) > 2\left(\frac{49}{100} + \frac{100^2}{100^3}\right) = 1$$

ពេលនេះយើងនឹងបង្ហាញថា ប្រភាគនេះមានតម្លៃតូចជាង 1 ពេល $n = 48$ ។ យើងមាន

$$2\left(\frac{48}{100}+\frac{48.47.46}{3!.100^3}+\frac{48.47.46.45.44}{5!.100^5}+\cdots\right)$$
$$<2\left(\frac{48}{100}+\frac{48^3}{(1.2.3).100^3}+\frac{48^5}{(1.2.3)(2.3)100^5}+\frac{48^7}{(1.2.3)(2.3)(2.3)100^7}+\cdots\right)$$
$$=2\left(\frac{48}{100}+\frac{1}{6}\left(\frac{48}{100}\right)^3+\frac{1}{6^2}\left(\frac{48}{100}\right)^5+\cdots\right)<2\frac{\frac{48}{100}}{1-\frac{1}{6}\left(\frac{48}{100}\right)^2}$$
$$=\frac{9600}{9616}<1$$

យើងឃើញថា ចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលតូចជាង 48 , ប្រភាគនេះក៏មានតម្លៃតូចជាង 1 ដែរ ។

ដូច្នេះ 99^n+100^n ធំជាង 101^n បើ $n\le 48$ និង តូចជាង 101^n បើ $n>48$ ។

534.▲ (a) តាមរូបមន្តទ្វេធា យើងមាន

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^n}$$
$$=1+n.\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\dots 2}{(n-1)!}\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n(n-1)\dots 1}{n!}\frac{1}{n^n}$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

ដូចគ្នា

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

ដូច្នេះ

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (*)$$

ដោយ $m>n$ និង m,n ជាចំនួនគត់ នោះ $m\ge n+1$ ។ ដូច្នេះ (*) នាំឱ្យ

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(b) យើងសរសេរ

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{(n+1)^{n+1}(n-1)^n}{n^{2n+1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n}$$
$$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ចំពោះ $n \geq 2$ យើងមាន

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1 - n.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^6}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\frac{1}{n^8} - \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{n-1}{n^3}$$
$$- \left[\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n^3} - \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{n^4}\right]$$
$$- \cdots \leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^3}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^4} < 1$$

ដូច្នេះ

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \;\Rightarrow\; \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} < 1 \;\Rightarrow\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
$$< \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

ដូច្នេះ

$$\ldots < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} < \cdots < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

ពិត ។

៣.៦ វិសមីការ

535. $(-\infty;\ -2{,}5) \cup (0;\infty)$
536. $\left(-1-\sqrt{2};\ -2\right) \cup \left(0;\sqrt{2}-1\right)$
537. $\left(-\infty;\ 2-\sqrt{2}\right) \cup \left(2+\sqrt{2};\infty\right)$
538. $(-\infty;\ -2) \cup (5/8;\infty)$
539. $\left[-7;-\sqrt{35}\right) \cup \left[5;\sqrt{35}\right)$
540. $(2;7)$
541. $\left(-\sqrt{5};-2\right) \cup \left(1;\sqrt{5}\right)$
542. $(-1;1) \cup (3;\infty)$
543. $\left[\left(1-\sqrt{5}\right)/2\,;\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right]$
544. $\left(-1;1+2\sqrt{2}\right)$
545. $(2;7) \cup (22;27)$
546. $(2;4)$
547. $(1;11/10)$
548. $[-1;4)$
549. $\left(-4;-1-\sqrt{3}\right] \cup \left(0;\sqrt{3}-1\right]$
550. $(3;5]$
551. $(2;5)$
552. $(-\infty;-1) \cup (2;\infty)$
553. $(0;10^{-4}] \cup [10;\infty)$
554. $(0;1/2) \cup [\sqrt{2};\infty)$
555. $(0;1) \cup \left(\sqrt{3};9\right)$
556. $(1/16;1/8) \cup (8;16)$
557. $\left(0;1/\sqrt{27}\right] \cup \left[1/3\,;\sqrt{243}\right] \cup [27;\infty)$
558. $(1/16;1/4) \cup (1/2;2)$
559. $(0;1/2) \cup (32;\infty)$
560. $\left[\log_2\left(\sqrt{3}/2\right);\infty\right]$
561. $(-1;\infty)$
562. $\left(\log_2\frac{3-\sqrt{5}}{2};\log_2\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$
563. $\left(-\infty;1-\log_3\sqrt[3]{5}\right]$
564. $(-\infty;0) \cup (\log_2 3\,;\infty)$
565. $(0{,}01;\infty)$
566. $(-\infty;-1) \cup (-0{,}1;0)$
567. $\left(\log_2(5+\sqrt{33})-1;\infty\right)$
568. $(-\infty;0] \cup [\log_6 5\,;1)$
569. $\left(\log_5\left(\sqrt{2}+1\right);\log_5 3\right)$
570. $(-\infty;0] \cup (0;\infty)$
571. $[2;\infty)$
572. $[28/3;\infty)$
573. $[\log_3(83/19)\,;\infty)$
574. $\left(-3;-\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6};3\right)$
575. $(-1/2;2)$
576. $[-3;1)$
577. $\left(-4;\left(1+\sqrt{17}\right)/2\right)$
578. $(0;2) \cup (4;\infty)$
579. $(1000;\infty)$
580. $(0;1/4] \cup [4;\infty)$
581. $\left(\left(1+\sqrt{1+4a^2}\right)/2\,;\infty\right)$ ចំពោះ $a \in (1;\infty)$; $\left(1;\ \left(1+\sqrt{1+4a^2}\right)/2\right)$ ចំពោះ $a \in (0;1)$
582. $(0;a^5) \cup (a^3;a^2) \cup (1/a\,;\infty)$
583. $(1/a;a^4)$ ចំពោះ $a \in (1;\infty)$; $(a^4;1/a)$ ចំពោះ $a \in (0;1)$
584. $\left[\log_a\left(4+\sqrt{16+a^2}\right);3\log_a 2\right)$ ចំពោះ $a \in (0;1)$; $\left[\log_a\left(4+\sqrt{16+a^2}\right);\infty\right)$ ចំពោះ $a \in (1;\infty)$
585. $(3;4) \cup (5;\infty)$
586. $(1;2)$

587. $(0;1/2)\cup(1;2)\cup(3;6)$
588. $(-3;-2)\cup(-1;0)\cup(1;3)$
589. $(-4/3\,;-23/22)$ **590.** $(-2;-3/2)\cup[-1;3]$
591. $(1/5\,;1/2)$ **592.** $(-3;-1)$
593. $\left(0;\left(\sqrt{13}-3\right)/2\right)\cup(1;\infty)$ **594.** $[-1;1/2)\cup[1;2)\cup(2;7/2)$
595. $\left(3;5-\sqrt{3}\right)\cup(7;\infty)$ **596.** $(1;2)$
597. $(0;3)\cup(4;6)\cup(6;12)\cup(14;\infty)$
598. $(0;4)$ **599.** $[2;4)$ **600.** $(1/2\,;4)$
601. $(1;2)$ **602.** $(0;2)$
603. $\left(1/\sqrt{5};1\right)\cup(3;\infty)$
604. $(-1;\infty)$

៣.៧ ប្រព័ន្ធវិសមីការ

605. $\{8\}$ **606.** $\{4\}$
607. $(0;1/a^4)$ ចំពោះ $a\in(1;\infty)$, $(0;a^8)$ ចំពោះ $a\in(0;1)$ ។

៣.៨ អាំងតេក្រាល

608.▲ តាង

$$u=\ln x \implies du=\frac{dx}{x}$$
$$dv=\frac{2xdx}{(1+x^2)^2} \implies v=-\frac{1}{1+x^2}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}I_a=\int_1^a udv&=-\frac{\ln x}{1+x^2}\bigg|_1^a+\int_1^a\frac{1}{x(1+x^2)}dx\\&=-\frac{\ln a}{1+a^2}+\int_1^a\frac{dx}{x}-\int_1^a\frac{xdx}{(1+x^2)}\\&=-\frac{\ln a}{1+a^2}+\ln a-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\bigg|_1^a\\&=-\frac{\ln a}{1+a^2}+\ln a-\ln\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}\end{aligned}$$

$$= \ln\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}} - \frac{\ln a}{1+a^2};\quad a>0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{a\to\infty} I_a = \ln\sqrt{2} - \lim_{a\to\infty}\frac{\frac{1}{a}}{2a} \qquad \text{(ក្បួនអុសពីតាល់)}$$
$$= \ln\sqrt{2}$$

609.▲ តាង

$$\begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = \int (x+1)e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}dx$$
$$= -(x+2)e^{-x} + C$$

ក)

$$I_n = \frac{(e-1)n + 2e - 3}{e^{n+1}}$$

ខ) តាមក្បួនអុសពីតាល់

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{e-1}{e^{n+1}} = 0$$

គ) យើងមាន

$$S_n = \int_0^1 (x+1)e^{-x}dx + \int_1^2 (x+1)e^{-x}dx + \cdots + \int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}dx$$
$$= \int_0^n (x+1)e^{-x}dx + \int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}dx$$
$$= -(x+2)e^{-x}|_0^n + I_n$$
$$= 2 - \frac{n+2}{e^n} + I_n$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = 2$$

៤

ត្រីកោណមាត្រ

៤.១ គណនា

610. ក) $\sqrt{2-a^2}$; ខ) $1-\frac{(a^2-1)^2}{2}$ ● $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2$; $a^2=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$.

611. ក) p^2-2; ខ) p^3-3p

612. $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$;

613. $\frac{\sqrt{3(1-b^2)}-b}{2}$ ▲ តាង $40°+\alpha=\beta$ ។ $\cos(70°+\alpha)=\cos(30°+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta-\frac{1}{2}\sin\beta$ ។ ដោយ $0<\alpha<45°$ នោះ $\cos\beta>0$ ដូច្នេះ $\cos\beta=\sqrt{1-b^2}$ ។

614. 1073/1105;

615. $\sin 3\alpha=-\frac{117}{125}, \cos 3\alpha=\frac{44}{125}, \tan 3\alpha=-117/44$.

616. $\tan 2\alpha$; **617.** $-\tan\alpha$; **618.** $\tan 2\alpha$;

619. $\operatorname{cosec}\alpha$

620. $-1/2$. ▲

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\times\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$
$$=\frac{\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$
$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}$$

621. 1. ● បំលែងជា $\frac{\sin\frac{13}{14}\pi-\sin\left(-\frac{\pi}{14}\right)}{2\sin\frac{\pi}{14}}$

622. 1/3 ▲ $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}+\frac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}=1{,}4$ ។ ដូច្នេះ

$2{,}4\tan^2(\alpha/2)-2\tan(\alpha/2)+0{,}4=0 \implies \tan\alpha/2=1/3\,;\tan\alpha/2=1/2$ ។

យើងមាន $0<\alpha/2<\pi/8\,;\tan\pi/8=\sqrt{2}-1<1/2$ ។

623. π ▲ តាមសម្មតិកម្ម យើងទាញបាន $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{2}, 0<\frac{\beta+\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}, \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}<1$ ។ ដូច្នេះ

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}}{1-\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}=\frac{\frac{1}{3}\cot\frac{\alpha}{2}+\frac{2}{3\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{1}{3}\cot\frac{\alpha}{2}\frac{2}{3\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}}}=\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\implies \tan\frac{\beta+\gamma}{2}-\cot\frac{\alpha}{2}=0$$

$$\implies -\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=0$$

$$\implies \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$$

624. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ● $\cos 292°30'=\sin 22°30'=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}$;

625. 4 ▲ $\operatorname{cosec} 10°-\sqrt{3}\sec 10°=\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)}{\sin 10°\cos 10°}=\frac{4\sin(30°-10°)}{\sin 20°}=4$

626. $\sqrt{3}$ ▲

$$\frac{2\cos 40°-\cos 20°}{\sin 20°}=\frac{\cos 40°-2\sin 30°\sin 10°}{\sin 20°}=\frac{\sin 50°-\sin 10°}{\sin 20°}$$

$$=\frac{2\cos 30°\sin 20°}{\sin 20°}=\sqrt{3}$$

627. 4 ▲ យើងមាន

$$-2\sqrt{2}\sin 10°\left(2\sin 35°-\frac{\sec 5°}{2}-\frac{\cos 40°}{\sin 5°}\right)$$

$$=-2\sqrt{2}\left(2\sin 35°\sin 10°-\frac{\frac{1}{2}\sin 10°}{\cos 5°}-\frac{\cos 40°\sin 10°}{\sin 5°}\right)$$

$$=-2\sqrt{2}(2\sin 35°\sin 10°-\sin 5°-2\cos 40°\cos 5°)$$

$$=-2\sqrt{2}(-2\cos 45°-\sin 5°+\cos 25°-\cos 35°)$$

$$=-2\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}-\sin 5°+2\sin 30°\times\sin 5°\right)=4$$

628. 3/4 ▲ យើងមាន

$$
\begin{aligned}
\cos^2 73° + \cos^2 47° + \cos 73° \cos 47° \\
&= \frac{1+\cos 146°}{2} + \frac{1+\cos 94°}{2} + \frac{1}{2}(\cos 120° + \cos 26°) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \cos 146° + \cos 94° + \cos 26°\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \cos(180° - 146°) + 2\cos\frac{120°}{2}\cos\frac{68°}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \cos 34° + \cos 34°\right) = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

629. $-1/2$ ▲ យើងមាន

$$
\begin{aligned}
(\sin 6° - \sin 66°) + (\sin 78° - \sin 42°) \\
&= 2\cos 60° \sin 18° - 2\sin 30° \cos 36° = \sin 18° - \sin 54° \\
&= -\frac{2\cos 36° \sin 18°}{\cos 18°}\cos 18° = -\frac{2\cos 36° \sin 36°}{2\cos 18°} \\
&= -\frac{\sin 72°}{2\cos 18°} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

630. $-1/\sqrt{2}$; **631.** 1 ;

632. 0 ● $\tan^2 20° = \frac{1-\cos 40°}{1+\cos 40°}$

633. 1/5 ▲ យើងមាន

$$
\begin{aligned}
\cot^2 36° \cot^2 72° - 1 + 1 = 1 + \frac{\cos 108° \cos 36°}{\sin^2 36° \sin^2 72°} \\
&= 1 - (\cot 36° \cot 72°)^2 \frac{1}{\cos 36° \cos 72°} \\
&= 1 - \cot^2 36° \cot^2 72° \frac{2.2\sin 36°}{\sin 144°} \\
&= 1 \\
&- 4\cot^2 36° . \cot^2 72°; \implies 5\cot^2 36° \cot^2 72° \\
&= 1 \implies \cot^2 36° \cot^2 72° = \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

634. 433▲យើងមាន

$$
\begin{aligned}
\tan^2\left(3\frac{\pi}{18}\right) = \tan^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \\
\tan^2\left(3\frac{5\pi}{18}\right) = \tan^2\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{3} \\
\tan^2\left(3\frac{7\pi}{18}\right) = \tan^2\frac{7\pi}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះ $x_1=\frac{\pi}{18}; x_2=\frac{5\pi}{18}; x_3=\frac{7\pi}{18}$ ជាឫសបីនៃសមីការ $\tan^2 3x=\frac{1}{3}$ ។ សមីការនេះសមមូលនឹង

$$\left(\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}\right)^2=\frac{1}{3} \iff \frac{\tan^6 x-6\tan^4 x+9\tan^2 x}{9\tan^4 x-6\tan^2 x+1}=\frac{1}{3}$$
$$\iff 3\tan^6 x-25\tan^4 x+33\tan^2 x-1=0$$

តាង $t=\tan^2 x\geq 0$ នោះ $t_1=\tan^2\frac{\pi}{18};\ t_2=\tan^2\frac{5\pi}{18};\ t_3=\tan^2\frac{7\pi}{18}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $3t^3-27t^2+33t-1=0$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត យើងទាញបាន

$$t_1+t_2+t_3=\frac{27}{3}=9;$$
$$t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=\frac{33}{3}=11$$
$$t_1t_2t_3=\frac{1}{3}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}A&=t_1^3+t_2^3+t_3^3\\&=(t_1+t_2+t_3)^3-3(t_1+t_2+t_3)(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)+3t_1t_2t_3\\&=9^3-3.9.11+3.\frac{1}{3}=433\end{aligned}$$

635. ▲យើងមាន

$$\begin{cases}\sin 1999x=0\\0<x<\pi\end{cases}\iff x=\frac{k\pi}{1999}; k=1,2,\dots,1998 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}&2\sin x\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 1998x\right)\\&=\sin x+\sin(-x)+\sin 3x+\sin(-3x)+\sin 5x+\cdots+\sin(-1997x)\\&\qquad+\sin 1999x\\&=\sin 1999x\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sin 1999x}{\sin x}=2\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 1998x\right), \forall x\in(0,\pi) \quad (2)$$

យើងដឹងថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m យើងមាន $\cos mx$ ជាពហុធាដឺក្រេទី m នៃ $\cos x$ ហើយដែលមានមេគុណរបស់តួដឺក្រេទី m ស្មើ 2^{m-1} (ពហុធា Tchebyshev) ។

ដូច្នេះ

$$2\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 1998x\right)$$

ជាពហុធាដឺក្រេទី 1998 នៃ $\cos x$ ហើយដែលមានមេគុណរបស់តួដឺក្រេ1998 ស្មើ

$2.2^{1998-1} = 2^{1998}$ ។

(3)

ពី (១) (២) និង (៣) យើងទាញបាន

$$\frac{\sin 1999x}{\sin x} = 2\left(\frac{1}{2} + \cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 1998x\right)$$
$$= 2^{1998}\prod_{k=1}^{1998}\left(\cos x - \cos\frac{k\pi}{1999}\right)$$

តែយើងមាន $\cos\frac{1998\pi}{1999} = -\cos\frac{\pi}{1999}; \cos\frac{1997\pi}{1999} = -\cos\frac{2\pi}{1999}; \ldots; \cos\frac{1000\pi}{1999} = -\cos\frac{999\pi}{1999}$; នោះ

$$\frac{\sin 1999x}{\sin x} = 2^{1998}\prod_{k=1}^{1998}\left(\cos x - \cos\frac{k\pi}{1999}\right)$$
$$= 2^{1998}\prod_{k=1}^{999}\left(\cos^2 x - \cos^2\frac{k\pi}{1999}\right) \quad (4)$$

ក្នុង (៤) យើងយក $x = \pi/3$ យើងទាញបាន

$$\frac{\sin\frac{1999\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2^{1998}\prod_{k=1}^{999}\left(\frac{1}{4} - \cos^2\frac{k\pi}{1999}\right)$$
$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + 666\pi\right)}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2^{1998}\prod_{k=1}^{999}\left(\frac{1 - 4\cos^2\frac{k\pi}{1999}}{2^2}\right)$$
$$\prod_{k=1}^{999}\left(1 - 4\cos^2\frac{k\pi}{1999}\right) = 1$$

ដូច្នេះ $P = 1$ ។

636. ▲តាង $P = \cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha$ ។ គុណកន្សោមនេះ នឹង $\sin\alpha$ យើងទាញបាន

$$P\sin\alpha = (\sin\alpha\cos\alpha)\cos 2\alpha\cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 2\alpha\cos 2\alpha)\cos 4\alpha \ldots \cos 2^n\alpha$$
$$= \frac{1}{4}(\sin 4\alpha\cos 4\alpha)\ldots\cos 2^n\alpha = \cdots$$

$$= \frac{1}{2^n}\sin 2^n\alpha\cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}}$$

ដូច្នេះ

$$P = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$

637. ▲យើងមាន

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}$$
$$\cos 2x = \frac{\sin 4x}{2\sin 2x}$$
$$\vdots$$
$$\cos 2^{n-1}x = \frac{\sin 2^n x}{2\sin 2^{n-1}x}$$
$$\Longrightarrow \cos x\cos 2x \ldots \cos 2^{n-1}x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$$

ដោយប្រើទំនាក់ទំនងខាងលើ យើងទាញបាន

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15} = -\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15} = -\frac{\sin 2^4\frac{\pi}{15}}{2^4\sin\frac{\pi}{15}}$$
$$= \frac{1}{16}$$

$$\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15} = \frac{\sin 4\frac{3\pi}{15}}{4\sin\frac{3\pi}{15}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{15}\right)}{4\sin\frac{3\pi}{15}} = \frac{1}{4}$$

$$\cos\frac{5\pi}{15} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ

$$P = \left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{128}$$

638. ▲យើងមាន

$$1 = \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\sin x}{\cos x}\frac{1+\sin x}{\cos x} = \left[\frac{1}{\cos x} - \tan x\right]\left[\frac{1}{\cos x} + \tan x\right]$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1}{2}$$

639. ▲ កន្សោមដែលឱ្យ សមមូលនឹង

$$\sqrt{\sin^4 x + 4(1-\sin^2 x)} - \sqrt{\cos^4 x + 4(1-\cos^2 x)}$$
$$= \sqrt{(2-\sin^2 x)^2} - \sqrt{(2-\cos^2 x)^2}$$

$$= (2 - \sin^2 x) - (2 - \cos^2 x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

640. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}(\cos\alpha\sin\beta)^2 &= (1 - \sin^2\alpha)(1 - \cos^2\beta)\\ &= 1 - (\sin^2\alpha + \cos^2\beta) + \sin^2\alpha\cos^2\beta\\ &= \frac{5}{4} - (\sin^2\alpha + \cos^2\beta)\\ &= \frac{5}{4} - (\sin\alpha + \cos\beta)^2 + 2\sin\alpha\cos\beta\\ &= \frac{1}{4} - (\sin\alpha + \cos\beta)^2\end{aligned}$$

យើងទាញបាន

$$-\frac{1}{2} \le \cos\alpha\sin\beta \le \frac{1}{2}$$

តែយើងមិនទាន់ដឹងថាតើ គ្រប់តម្លៃលេខទាំងអស់ ឋិតក្នុងចន្លោះ $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ អាចជាតម្លៃនៃ $\cos\alpha\sin\beta$ ដែរឬអត់នោះទេ ។

តាង $x = \sin\alpha, y = \cos\beta$ ។ ដូច្នេះ $-1 \le x, y \le 1$ និង $xy = -1/2$ ។ តាង $s = x + y$ ។ ដូច្នេះ x, y ជាឫសនៃសមីការ

$$u^2 - su - \frac{1}{2} = 0 \quad (*)$$

ដូច្នេះ

$$\{x, y\} = \left\{\frac{s + \sqrt{s^2 + 2}}{2}, \frac{s - \sqrt{s^2 + 2}}{2}\right\}$$

ដោយប្រើលក្ខខណ្ឌ $-1 \le x, y \le 1$ នោះ យើងទាញបាន

$$-\frac{1}{2} \le s \le \frac{1}{2}$$

ដូច្នេះសមីការ (*) មានឫស (x, y) ដែល $-1 \le x, y \le 1$ ចំពោះគ្រប់ $s \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ ឬមានន័យថា បើ $-1 \le x, y \le 1$ និង $xy = -1/2$ នោះ $s = x + y$ ត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់ $-\frac{1}{2} \le s \le \frac{1}{2}$ ។

អនុគមន៍ស៊ីនុស និង កូស៊ីនុស ជាអនុវត្តន៍ពេញពី $\mathbb{R}$ ទៅ $[-1,1]$ ដូច្នេះ $s = \sin\alpha + \cos\beta$ អាចមានគ្រប់តម្លៃទាំងអស់ឋិតក្នុង $[-1,1]$ ឬនិយាយម្យ៉ាងទៀតថា ចំពោះគ្រប់

$t \in [-1,1]$ គេអាចរកបាន α, β ដែល $s = \sin\alpha + \cos\beta = t$ ។ តែដោយ $\sin\alpha\cos\beta = -1/2$ ដូច្នេះ $s = \sin\alpha + \cos\beta$ អាចមានគ្រប់តម្លៃទាំងអស់បិតក្នុង $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ។ ដូច្នេះ s^2 អាចមានគ្រប់តម្លៃទាំងអស់ក្នុងចន្លោះ $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ នាំឱ្យ $(\cos\alpha\sin\beta)^2 = \frac{1}{4} - s^2$ អាចមានគ្រប់តម្លៃទាំងអស់ក្នុងចន្លោះ $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ ។ ដូច្នេះ $\cos\alpha\sin\beta$ អាចមានគ្រប់តម្លៃទាំងអស់ក្នុងចន្លោះ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ។

641. ▲ យើងមាន

$$1 + \tan k^\circ = \frac{\sin k^\circ + \cos k^\circ}{\cos k^\circ} = \frac{\sqrt{2}\cos(45-k)^\circ}{\cos k^\circ}$$

$$\Rightarrow (1 + \tan k^\circ)(1 + \tan(45-k)^\circ) = \frac{\sqrt{2}\cos(45-k)^\circ}{\cos k^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2}\cos k^\circ}{\cos(45-k)^\circ} = 2$$

យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \dots (1 + \tan 45^\circ) \\ &= [(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 44^\circ)][(1 + \tan 2^\circ)(1 \\ &+ \tan 43^\circ)] \dots [(1 + \tan 22^\circ)(1 + \tan 23^\circ)](1 + \tan 45^\circ) \\ &= 2^{23}\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $n = 23$ ។

642. ▲ តាង

$$\begin{aligned}P &= \cos a \cos 2a \cos 3a \dots \cos 999a \\ Q &= \sin a \sin 2a \sin 3a \dots \sin 999a\end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}2^{999}PQ &= (2\sin a\cos a)(2\sin 2a\cos 2a) \dots (2\sin 999a\cos 999a) \\ &= \sin 2a \sin 4a \dots \sin 1998a \\ &= (\sin 2a \sin 4a \dots \sin 998a)(\sin 1000a \sin 1002a \dots \sin 1998a) \\ &= (\sin 2a \sin 4a \dots \sin 998a)[-\sin(2\pi - 1000a)][-\sin(2\pi \\ &- 1002a)] \dots [-\sin(2\pi - 1998a)] \\ &= (\sin 2a \sin 4a \dots \sin 998a)[\sin 999a][\sin 997a] \dots [\sin a] = Q\end{aligned}$$

ដោយ $Q \neq 0$ នោះ

$$P = \frac{1}{2^{999}}$$

643. ▲ ❶ យើងមាន

$$P=\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{6\pi}{2n+1}\right)\dots\sin\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right)$$

ដែល $n=2012$ ។ យើងបំបែកផលគុណ P ជាពីរផ្នែក ត្រង់កណ្ដាល យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned}P&=\left[\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)\dots\sin\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)\right]\\ &\times\left[\sin\left(\frac{n+2}{2n+1}\pi\right)\sin\left(\frac{n+4}{2n+1}\pi\right)\dots\sin\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right)\right]\\ &=\left[\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)\dots\sin\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)\right]\\ &\times\left[\sin\left(\pi-\frac{n+2}{2n+1}\pi\right)\sin\left(\pi-\frac{n+4}{2n+1}\pi\right)\dots\sin\left(\pi-\frac{2n\pi}{2n+1}\right)\right]\\ &=\left[\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)\dots\sin\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)\right]\\ &\times\left[\sin\left(\frac{n-1}{2n+1}\pi\right)\sin\left(\frac{n-3}{2n+1}\pi\right)\dots\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\right]\\ &=\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\dots\sin\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

❷ បើ $z=\cos\theta+i\sin\theta$ នោះ $z^{2n+1}=\cos(2n+1)\theta+i\sin(2n+1)\theta$ ។ ដូច្នេះសមីការ

$$z^{2n+1}-1=0$$

មានឫស $z_k=\cos\theta_k+i\sin\theta_k$ ដែល

$$(2n+1)\theta_k=2k\pi \implies \theta_k=\frac{2k\pi}{2n+1},k=0,1,2,\dots,2n$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}z_0&=1\\ z_{n+1}&=\cos\theta_{n+1}+i\sin\theta_{n+1}\\ &=\cos\frac{2(n+1)\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2(n+1)\pi}{2n+1}\\ &=\cos\left[2\pi-\frac{2(n+1)\pi}{2n+1}\right]-i\sin\left[2\pi-\frac{2(n+1)\pi}{2n+1}\right]\\ &=\cos\frac{2n\pi}{2n+1}-i\sin\frac{2n\pi}{2n+1}\\ &=\cos\theta_n-i\sin\theta_n\end{aligned}$$

ដូចគ្នា

$$z_{n+2} = \cos\theta_{n-1} - i\sin\theta_{n-1}$$
$$\dots$$
$$z_{2n} = \cos\theta_1 - i\sin\theta_1$$

ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $z \in \mathbb{C}$ យើងមាន

$$\begin{aligned} z^{2n+1} - 1 &= (z-1)(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)(z-z_{n+1})\dots(z-z_{2n}) \\ &= (z-1)[(z-z_1)(z-z_{2n})][(z-z_2)(z-z_{2n-1})]\dots[(z-z_n)(z-z_{n+1})] \\ &= (z-1)\prod_{k=1}^{n}(z-\cos\theta_k - i\sin\theta_k)(z-\cos\theta_k + i\sin\theta_k) \\ &= (z-1)\prod_{k=1}^{n}(z^2 - 2\cos\theta_k\, z + 1) \end{aligned}$$

យើងមាន

$$z^{2n+1} - 1 = (z-1)(z^{2n} + z^{2n-1} + \dots + z + 1)$$

ដូច្នេះ

$$(z-1)(z^{2n} + z^{2n-1} + \dots + z + 1) = (z-1)\prod_{k=1}^{n}(z^2 - 2\cos\theta_k\, z + 1)$$

ចំពោះគ្រប់ $z \in \mathbb{C}$ ។ នាំឱ្យ

$$z^{2n} + z^{2n-1} + \dots + z + 1 = \prod_{k=1}^{n}(z^2 - 2\cos\theta_k\, z + 1), \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

ដោយយក $z = 1$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} &1 + 1 + \dots + 1 + 1 = \prod_{k=1}^{n}(1 - 2\cos\theta_k + 1) \\ &\Leftrightarrow 2n+1 = \prod_{k=1}^{n}(2 - 2\cos\theta_k) \\ &\Leftrightarrow 2n+1 = \prod_{k=1}^{n}4\sin^2\frac{\theta_k}{2} \\ &\Rightarrow 2n+1 = 4^n \sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2}\dots\sin^2\frac{\theta_n}{2} \\ &\Rightarrow \left[\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\dots\sin\frac{\theta_n}{2}\right]^2 = \frac{2n+1}{4^n} \\ &\Leftrightarrow \left[\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\dots\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right]^2 = \frac{2n+1}{4^n} \end{aligned}$$

យើងមាន ចំពោះ $1 \le k \le n$:

$$0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$$
$$\Longrightarrow \sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1} > 0$$

ដូច្នេះ

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

❸ យើងទាញបាន

$$P = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

ចំពោះ $n = 2012$ នោះ

$$P = \frac{\sqrt{4025}}{2^{2012}}$$

644. ▲យើងមាន

$$\sin(x-y) + \sin(y-z) = 2\sin\frac{x-z}{2}\cos\frac{x+z-2y}{2}$$
$$\sin(z-x) = 2\sin\frac{z-x}{2}\cos\frac{z-x}{2}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}&\sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)\\ &= 2\sin\frac{x-z}{2}\left[\cos\frac{x+z-2y}{2} - \cos\frac{z-x}{2}\right]\\ &= -4\sin\frac{x-z}{2}\sin\frac{z-y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

645. ▲ លើកអង្គទាំងពីរនៃសមភាពជាការេ រួចបូកបញ្ចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned}&(3\sin A + 4\cos B)^2 + (4\sin B + 3\cos A)^2 = 36 + 1\\ &\Leftrightarrow 9\sin^2 A + 24\sin A\cos B + 16\cos^2 B + 16\sin^2 B + 24\sin B\cos A\\ &\qquad + 9\cos^2 A = 37\\ &\Leftrightarrow 24(\sin A\cos B + \sin B\cos A) = 12\\ &\Leftrightarrow \sin(A+B) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ដោយ $C = 180° - A - B$ នោះ

$$\sin C = \sin(A+B) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 30^\circ \text{ ឬ } C = 150^\circ$$

តែ បើ $C = 150^\circ$ នោះ $A < 30^\circ$

$$\Longrightarrow\ 3\sin A + 4\cos B < \frac{3}{2} + 4 < 6$$

ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។ ដូច្នេះ $C = 30^\circ$ ។

646. ▲ (a) យើងមាន

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$$

(b) យើងមាន

$$\cos^4\frac{\pi}{24} - \sin^4\frac{\pi}{24} = \left(\cos^2\frac{\pi}{24} + \sin^2\frac{\pi}{24}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{\pi}{24}\right)$$
$$= 1.\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(c) យើងមាន

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{2(\cos 36^\circ - \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}$$
$$= \frac{2\cos^2 36^\circ - 2\cos^2 72^\circ}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}$$
$$= \frac{\cos 72^\circ + 1 - \cos 144^\circ - 1}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}$$
$$= \frac{\cos 72^\circ - \cos 144^\circ}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}$$
$$= \frac{\cos 72^\circ + \cos(180^\circ - 144^\circ)}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)}$$
$$= \frac{\cos 72^\circ + \cos 36^\circ}{2(\cos 36^\circ + \cos 72^\circ)} = \frac{1}{2}$$

(d) យើងមាន

$8\sin 20°\sin 10°\sin 50°\sin 70°$
$$= 8\sin 20°\cos(90°-10°)\cos(90°-50°)\cos(90°-70°)$$
$$= 8\sin 20°\cos 20°\cos 40°\cos 80°$$
$$= 4\sin 40°\cos 40°\cos 80°$$
$$= 2\sin 80°\cos 80° = \sin 160° = \sin 20°$$

ដូច្នេះ

$$\sin 10°\sin 50°\sin 70° = \frac{1}{8}$$

647. ▲ a) យើងមាន

$$\sin 18° = \sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$$

និង

$$2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = \sin\frac{2\pi}{5}$$
$$2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{4\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}$$
$$\Longrightarrow \left(2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\right) = \left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)$$
$$\Longrightarrow \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = 2\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10} = 2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

តាង

$$\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5} = x, \qquad \cos\frac{\pi}{5} = y$$

ដូច្នេះ

$$y - x = \frac{1}{2}, xy = \frac{1}{4}$$

យើងមាន

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$
$$\Longrightarrow x + y = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ដូច្នេះ

$$\sin 18° = x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

យើងទាញបាន

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

b) យើងមាន

$$\sin 6^\circ = \sin(60^\circ - 54^\circ) = \sin 60^\circ \cos 54^\circ - \cos 60^\circ \sin 54^\circ$$

ប៉ុន្តែ

$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2\frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 54^\circ = \sqrt{1-\sin^2 54^\circ} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

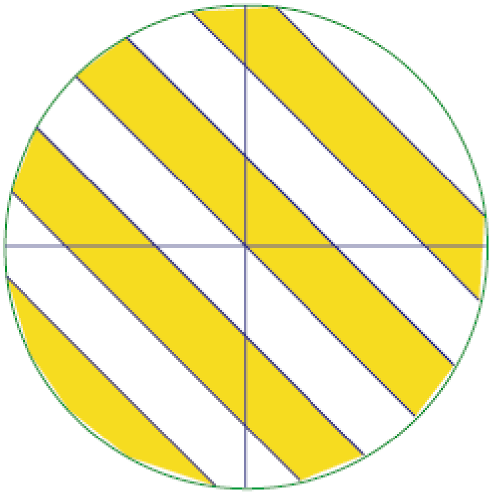
ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}\sin 6^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}.\frac{1+\sqrt{5}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\left(1+\sqrt{5}\right)}{8}\end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}\cos 6^\circ = \cos(60^\circ - 54^\circ) &= \cos 60^\circ \cos 54^\circ + \sin 60^\circ \sin 54^\circ\\ &= \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1+\sqrt{5}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{8}\end{aligned}$$

648. ▲ តាង $\mathcal{C}$ ជាថាស (x,y)ដែល $x^2+y^2 \le 100$ ។ ដោយ $\sin(x+y)=0$ ទាល់តែ $x+y=k\pi$ ចំពោះចំនួនគត់ k ដូច្នេះ ថាស $\mathcal{C}$ ត្រូវបានច្រៀកចោលជាបន្ទះៗដោយបណ្តាបន្ទាត់ស្របគ្នា $x+y=k\pi$ ហើយនៅចន្លោះបន្ទាត់ទាំងនោះមានតំបន់ខ្លះមានចំណុច (x,y)ដែល $\sin(x+y)>0$ និងខ្លះទៀត $\sin(x+y)<0$ ។ ដោយ $\sin(-x-y)=-\sin(x+y)$ នោះតំបន់នៃបណ្តាចំណុច (x,y) ដែល $\sin(x+y)>0$ ស៊ីមេទ្រីនឹងតំបន់នៃបណ្តាចំណុច (x,y) ដែល $\sin(x+y)<0$ ។ ដូច្នេះ ដូចបង្ហាញក្នុងរូប ៤.១ ក្រលាផ្ទៃរបស់តំបន់ $\mathcal{R}$ ស្មើពាក់កណ្តាលក្រលាផ្ទៃថាស $\mathcal{C}$ ដូច្នេះស្មើនឹង 50π ។



រូប ៤.១

649. ▲ យើងមាន

$$y = \frac{\tan(x-u) + \tan x + \tan(x+u)}{\tan(x-u)\tan x \tan(x+u)}$$
$$= \frac{\sin(x-u)\cos x\cos(x+u) + \sin x\cos(x-u)\cos(x+u)}{\sin(x-u)\sin x\sin(x+u)}$$
$$+ \frac{\sin(x+u)\cos x\cos(x-u)}{\sin(x-u)\sin x\sin(x+u)}$$

យើងមាន

$$\sin(x-u)\sin x\sin(x+u) = \frac{1}{2}\sin x\,[-\cos(2x) + \cos(2u)]$$
$$\sin(x-u)\cos x\cos(x+u) + \sin(x+u)\cos x\cos(x-u)$$
$$= \cos x\,[\sin(x-u)\cos(x+u) + \sin(x+u)\cos(x-u)]$$
$$= \cos x\sin(x-u+x+u)$$
$$= \cos x\sin 2x = 2\sin x\cos^2 x$$
$$= \sin x\,(\cos 2x + 1)$$
$$\sin x\cos(x-u)\cos(x+u) = \frac{1}{2}\sin x\,[\cos(2x) + \cos 2u]$$

ដូច្នេះ

$$y = \frac{\sin x\,(\cos 2x + 1) + \frac{1}{2}\sin x\,[\cos(2x) + \cos 2u]}{\frac{1}{2}\sin x\,[-\cos(2x) + \cos(2u)]}$$

$$= \frac{2\cos 2x + 2 + \cos 2x + \cos 2u}{\cos 2u - \cos 2x}$$
$$= \frac{-3(\cos 2u - \cos 2x) + 4\cos 2u + 2}{\cos 2u - \cos 2x}$$
$$= \frac{4\cos 2u + 2}{\cos 2u - \cos 2x} - 3$$

ដូច្នេះ y មិនអាស្រ័យនឹង x ទាល់តែ $\cos 2u = -1/2$ និងច្រាសមកវិញ ។ ដូច្នេះ

$$u = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

៤.២ សមភាព

650. 651.

652. ● $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Longrightarrow \alpha + \beta = \pi - \gamma$ ។

653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671.

672. ▲ យើងមាន

$$16\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70° = 8\cos 80°\cos 40°\cos 20°$$
$$= 4\cos 80°\cos 40°\frac{2\sin 20°\cos 20°}{\sin 20°}$$
$$= 2\cos 80°\frac{2\sin 40°\cos 40°}{\sin 20°} = \frac{2\cos 80°\sin 80°}{\sin 20°} = \frac{\sin 160°}{\sin 20°}$$
$$= \frac{\sin(180° - 160°)}{\sin 20°} = 1$$

673. ● ប្រើរូបមន្ត $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha, 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

674.

675. យើងមាន

$$\tan(\gamma - \alpha) = -\tan(\alpha - \beta + \beta - \gamma)$$
$$= \frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan(\beta - \gamma)}{\tan(\alpha - \beta)\tan(\beta - \gamma) - 1}$$
$$\Longrightarrow \tan(\alpha - \beta) + \tan(\beta - \gamma) = (\tan(\alpha - \beta)\tan(\beta - \gamma) - 1)\tan(\gamma - \alpha)$$
$$\Longrightarrow \tan(\alpha - \beta) + \tan(\beta - \gamma) + \tan(\gamma - \alpha)$$
$$= \tan(\alpha - \beta)\tan(\beta - \gamma)\tan(\gamma - \alpha)$$

ពិត ។

676. ● ប្រើរូបមន្ត $1 \pm \sin\alpha = \left(\sin\frac{\alpha}{2} \pm \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$

677. ▲ តាង $R_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n}$ ។ យើងមាន

$$R_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$$
$$R_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$$
$$\ldots$$
$$R_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

678. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\cos 2x = 2\cos^2 x - 1\\
&\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x\\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x\cos x\\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x\\
&\ldots\\
&\cos nx \ = T_n(\cos x)
\end{aligned}$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $\cos(n+1)x = T_{n+1}(\cos x)$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\cos(n+1)x = \cos nx\cos x - \sin nx\sin x\\
&\cos nx = \cos(n-1)x\ \cos x + \sin(n-1)x\ \sin x \ \Longrightarrow \sin(n-1)x\ \sin x\\
&\qquad = \cos nx - \cos(n-1)x\ \cos x\\
&\sin nx = \sin(n-1)x\cos x - \sin x\cos(n-1)x \ \Longrightarrow \sin nx\sin x\\
&\qquad = \sin(n-1)x\cos x\sin x - \sin x\cos(n-1)x\sin x\\
&\qquad = [\cos nx - \cos(n-1)x]\cos x - (1-\cos^2 x)\cos(n-1)x\\
&\qquad = \cos nx\cos x - \cos(n-1)x\cos x - \cos(n-1)x\\
&\qquad + \cos^2 x\cos(n-1)x\\
&\Longrightarrow \cos(n+1)x \ = (\cos^2 x + 1 - \cos^2 x)\cos(n-1)x\\
&\qquad = (1+\cos x - \cos^2 x)T_{n-1}(\cos x) = T_{n+1}(\cos x)
\end{aligned}$$

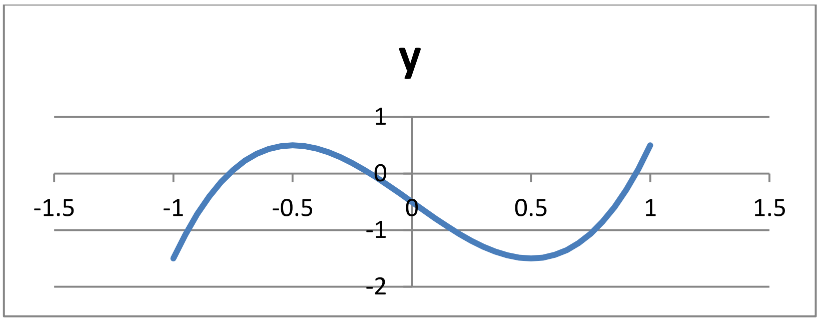
679. ▲ យើងមាន

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^x = \left(\sqrt{2}-1\right)^x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{2}+1\right)^{2x} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x} + 3 \quad (1)$$

តាង $2t = \left(\sqrt{2}+1\right)^x > 0$ ។ សមីការ(1) សមមូលនឹង

$$4t^2 = \frac{1}{2t} + 3 \quad \Leftrightarrow 4t^3 - 3t = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

អនុគមន៍ $f(t) = 4t^3 - 3t - \frac{1}{2}$ មាន ខ្សែកោងកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុចបីស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(-1;1)$ ។ មានន័យថាសមីការ(២)មានចម្លើយ $t \in (-1;1)$ ។ តាង $t = \cos\alpha$ ដែល$\alpha \in (0;\pi)$ ។



យើងទាញបាន

$$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\cos 3\alpha=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\quad\alpha=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

ដោយ $\alpha\in(0;\pi)$ នោះ $\alpha=\left\{\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9}\right\}$ ។ ដូច្នេះសមីការមានឬសបីគឺ $t_1=\cos\frac{\pi}{9};\ t_2=\cos\frac{5\pi}{9};t_3=\cos\frac{7\pi}{9}$ ។ យើងមាន $t_2;t_3<0$ ។ ដូច្នេះមានតែ $t_1=\cos\frac{\pi}{9}$ តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $t>0$ ។មានន័យថា$\left(\sqrt{2}+1\right)^x=2t=2\cos\frac{\pi}{9}$ ។

680. ▲ យើងមាន

$$\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}+1-\cos\frac{4\pi}{7}+1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

តាង $A=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$ នោះ

$$2\sin\frac{\pi}{7}.A=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$
$$2\sin\frac{\pi}{7}.A=\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}$$
$$2\sin\frac{\pi}{7}.A=-\sin\frac{\pi}{7}\quad\Rightarrow\quad A=-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\quad\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$$

681. ▲ គុណសមភាពដែលឱ្យនឹង $4(a\cos^2x-b\cos x+c)$ យើងទាញបាន

$$(a\cos^2x+b\cos x+c)4(a\cos^2x-b\cos x+c)=0$$
$$\Leftrightarrow 4a^2\cos^4x+2(4ac-2b^2)\cos^2x+4c^2=0$$

$$\Leftrightarrow 4a^2\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2+2(4ac-2b^2)\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)+4c^2=0$$

$$\Leftrightarrow a^2\cos^2 2x+(2a^2+4ac-2b^2)\cos 2x+(a^2+4ac-2b^2+4c^2)=0$$

ចំពោះ $a=4, b=2$ និង $c=-1$ យើងទាញបាន $4\cos^2 x+2\cos x-1=0$ និង

$16\cos^2 2x+8\cos 2x-4=0 \implies 4\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0$ ។

682. ▲ យើងមាន $\frac{\pi}{7};\frac{3\pi}{7};\frac{5\pi}{7}$ ជាឫសនៃសមីការ

$$\begin{aligned}
&\cos 3x+\cos 4x=0\\
&\Leftrightarrow\ 4\cos^3 x-3\cos x+2\cos^2 2x-1=0\\
&\Leftrightarrow\ 4\cos^3 x-3\cos x+2[2\cos^2 x-1]^2-1=0\\
&\Leftrightarrow\ 4\cos^3 x-3\cos x+2[4\cos^4 x-4\cos^2 x-1]-1=0\\
&\Leftrightarrow\ 4\cos^3 x-3\cos x+8\cos^4 x-8\cos^2 x-3=0\\
&\Leftrightarrow (\cos x+1)(8\cos^3 x-4\cos^2 x-4\cos x+1)=0
\end{aligned}$$

ដោយ $\cos\frac{\pi}{7}$; $\cos\frac{3\pi}{7}$; $\cos\frac{5\pi}{7}$ សុទ្ធតែខុសពី -1 នោះពួកវាជាឫសនៃ

$$8t^3-4t^2-4t+1=0$$

តាង $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$; ដែល $x_1=\cos\frac{\pi}{7}$; $x_2=\cos\frac{3\pi}{7}$; $x_3=\cos\frac{5\pi}{7}$ ។ យើងមាន

$$8S_{n+3}-4S_{n+2}-4S_{n+1}+S_n=0 \qquad (1)$$

យើងមាន $S_0=3; S_1=x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}; S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=\frac{1}{4}-2\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$ ។ ដោយ $S_0;S_1;S_2$ ជាចំនួនសនិទាន នោះ S_nក៏ជាចំនួនសនិទានដែរ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។ យើងមាន

$$A=\frac{(x_1x_2)^n+(x_2x_3)^n+(x_3x_1)^n}{(x_1x_2x_3)^n}=\frac{1}{2}\frac{S_n^2-S_{2n}}{\left(-\frac{1}{8}\right)^n}$$

ក៏ជាចំនួនសនិទានដែរ ។

683. ▲ តាង $\operatorname{atan} x=a; \operatorname{atan} y=b; \operatorname{atan} z=c$ ។ ដូច្នេះ $x=\tan a; y=\tan b; z=\tan c$ ។ យើងមាន

$$\tan(a+b)=\frac{x+y}{1-xy}$$

$$\tan(a+b+c)=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}=1$$

យើងទាញបាន $x+y+z-xyz=1-yz-zx-xy \iff (x-1)(y-1)(z-1)=0$ ។ ដូច្នេះត្រូវតែមាន មួយក្នុងចំណោម x,y,z ដែលស្មើ 1 ។ សន្មតថា $z=1$ ។ យើងមាន $x+y+z=1 \implies y=-x$ ។ ដូច្នេះ

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}=x^{2n+1}+(-x)^{2n+1}+1=1$$

684. ▲ យើងមាន

$$\cot x-\cot 2x=\cot x-\frac{\cot^2 x-1}{2\cot x}=\frac{\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2+1}{\frac{2\cos x}{\sin x}}=\frac{1}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin 2x}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x\\
&\frac{1}{\sin 4x}=\cot 2x-\cot 4x\\
&\vdots\\
&\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot 2^{n-1}x-\cot 2^n x
\end{aligned}$$

$$\implies \frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x$$

685. ▲ តាង $S=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$ ។ ដោយដឹង $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ យើងមាន

$$\begin{aligned}
S&=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\frac{3\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\\
S.\sin\frac{\pi}{7}&=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{3\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{3\pi}{7}\right)\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{5\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{5\pi}{7}\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}+\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{7}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}+\frac{1}{2}\sin\frac{6\pi}{7}-\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{7}\\
&=\frac{1}{2}\sin\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}
\end{aligned}$$

$$\implies S=\frac{1}{2}$$

686. ▲ ❶ របៀបទី ១

យើងមាន

$$(1-\cot 23°)(1-\cot 22°)=\left(1-\frac{\cos 23°}{\sin 23°}\right)\left(1-\frac{\cos 22°}{\sin 22°}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sin 23^\circ - \cos 23^\circ}{\sin 23^\circ} \cdot \frac{\sin 22^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 22^\circ} \\
&= \frac{\sqrt{2}\sin(23^\circ - 45^\circ)\sqrt{2}\sin(22^\circ - 45^\circ)}{\sin 23^\circ \sin 22^\circ} \\
&= \frac{2\sin(-22^\circ)\sin(-23^\circ)}{\sin 23^\circ \sin 22^\circ} = 2
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះ

$$1 - \cot 23^\circ = \frac{2}{1 - \cot 22^\circ}$$

❷ របៀបទី ២

យើងមាន

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cot 22^\circ \cot 23^\circ - 1}{\cot 22^\circ + \cot 23^\circ} = \cot(22^\circ + 23^\circ) = \cot 45^\circ = 1 \\
&\Longrightarrow \cot 22^\circ \cot 23^\circ - 1 = \cot 22^\circ + \cot 23^\circ \\
&\Longleftrightarrow 1 - \cot 22^\circ - \cot 23^\circ + \cot 22^\circ \cot 23^\circ = 2 \\
&\Longleftrightarrow (1 - \cot 23^\circ)(1 - \cot 22^\circ) = 2 \\
&\Longrightarrow 1 - \cot 23^\circ = \frac{2}{1 - \cot 22^\circ}
\end{aligned}
$$

687. ▲ យើងមាន

$$\frac{2\tan^2\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \cos x}{\cos x};$$

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

ដូច្នេះ

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\tan\frac{x}{2}\right)^{2k} \left[1 + 2^k \frac{1}{\left(1 - \tan^2\frac{x}{2}\right)^k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\tan^2\frac{x}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{2\tan^2\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\tan^2\frac{x}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x}\right)^k \\
&= \left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)^n + \left(1 + \frac{1 - \cos x}{\cos x}\right)^n
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\cos^{2n}\frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^n x} = \sec^{2n}\frac{x}{2} + \sec^n x$$

688. ▲ យើងត្រូវបង្ហាញថា

$$f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(\sin^4 x + \cos^4 x) - \frac{1}{6}(\sin^6 x + \cos^6 x) = \frac{1}{12}$$
$$\Leftrightarrow 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$$

យើងមាន

$$\begin{aligned}
&3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)\\
&= 3[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x]\\
&\qquad - 2(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)\\
&= 3 - 6\sin^2 x\cos^2 x - 2(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)\\
&= 3 - 6\sin^2 x\cos^2 x - 2[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x]\\
&= 3 - 2 = 1
\end{aligned}$$

ពិត ។

689. ▲ យើងមាន

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\Rightarrow 4\cos^2 x - 3 = \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

ចំពោះគ្រប់ $x \neq (2k+1).90°, k \in \mathbb{Z}$ ។ ដូច្នេះ

$$(4\cos^2 9° - 3)(4\cos^2 27° - 3) = \frac{\cos 27°}{\cos 9°}.\frac{\cos 81°}{\cos 27°} = \frac{\cos 81°}{\cos 9°} = \frac{\sin 9°}{\cos 9°}$$
$$= \tan 9°$$

690. ▲ តម្លៃមធ្យមរបស់

$$2\sin 2°, 4\sin 4°, 6\sin 6°, \dots, 180\sin 180°$$

ស្មើនឹង

$$\frac{2\sin 2° + 4\sin 4° + \dots + 178\sin 178° + 180\sin 180°}{90}$$
$$= \frac{2\sin 2° + 4\sin 4° + 6\sin 6° + \dots + 178\sin 178°}{90}$$

ដូច្នេះ យើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\frac{2\sin 2° + 4\sin 4° + 6\sin 6° + \dots + 178\sin 178°}{90} = \cot 1°$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 2° + 4\sin 4° + 6\sin 6° + \dots + 178\sin 178°$$
$$= 90\cot 1°$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2^\circ.\sin 1^\circ + 2(2\sin 4^\circ.\sin 1^\circ) + \cdots + 89(2\sin 178^\circ.\sin 1^\circ) = 90\cos 1^\circ$$

យើងមាន

$$2\sin k^\circ \sin 1^\circ = \cos(2k-1)^\circ - \cos(2k+1)^\circ$$

ដូច្នេះ

$$2\sin 2^\circ.\sin 1^\circ = \cos 1^\circ - \cos 3^\circ$$
$$2(2\sin 4^\circ.\sin 1^\circ) = 2(\cos 3^\circ - \cos 5^\circ)$$
$$\dots$$
$$89(2\sin 178^\circ.\sin 1^\circ) = 89(\cos 177^\circ - \cos 179^\circ)$$

បូកសមភាពទាំងនេះចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned}&2\sin 2^\circ.\sin 1^\circ + 2(2\sin 4^\circ.\sin 1^\circ) + \cdots + 89(2\sin 178^\circ.\sin 1^\circ)\\ &= \cos 1^\circ + \cos 3^\circ + \cdots + \cos 177^\circ - 89\cos 179^\circ\\ &= \cos 1^\circ + (\cos 3^\circ + \cos 177^\circ) + \cdots + (\cos 89^\circ + \cos 91^\circ) + 89\cos 1^\circ\\ &= \cos 1^\circ + 89\cos 1^\circ = 90\cos 1^\circ\end{aligned}$$

ដូច្នេះសមភាពពិត ។

691. ▲ យើងមាន

$$\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} = \frac{2\sin(A+B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)}$$
$$\geq \frac{2\sin(A+B)}{\cos(A+B)+1} = \frac{4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\cos^2\frac{A+B}{2}} = 2\tan\frac{A+B}{2}$$

ព្រោះ $0 < 2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B) \leq \cos(A+B) + 1$ ។

ដូច្នេះ

$$\tan^2 A + \tan^2 B = 2\tan^2\frac{A+B}{2} \leq \frac{1}{2}(\tan A + \tan B)^2$$
$$\Longrightarrow\ (\tan A - \tan B)^2 \leq 0$$
$$\Longrightarrow\ \tan A = \tan B\ \ \Longrightarrow A = B$$

692. ▲ យើងមាន

$$\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a\tan 2a\tan a$$
$$\Leftrightarrow \tan 3a\,(1 - \tan 2a\tan a) = \tan 2a + \tan a$$
$$\Leftrightarrow \tan 3a = \frac{\tan 2a + \tan a}{1 - \tan 2a\tan a} = \tan(2a + a)$$

ពិត ។

693. ▲ សមភាពទាំងពីរសមមូលនឹង

$$\begin{cases}\sin a - 8\sin d = 4\sin c - 7\sin b\\ \cos a - 8\cos d = 4\cos c - 7\cos b\end{cases}$$

លើកសមភាពទាំងពីរជាការេ រួចបូកបញ្ចូលគ្នា យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned}&(\sin a - 8\sin d)^2 + (\cos a - 8\cos d)^2\\ &\qquad = (4\sin c - 7\sin b)^2 + (4\cos c - 7\cos b)^2\\ &\Leftrightarrow 1 + 64 - 16(\sin a\sin d + \cos a\cos d)\\ &\qquad = 16 + 49 - 56(\sin c\sin b + \cos c\cos b)\\ &\Leftrightarrow 2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)\end{aligned}$$

694. ▲យើងមាន

$$\begin{aligned}&\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1\\ &\Leftrightarrow \cot C\,(\cot A + \cot B) = 1 - \cot A\cot B\\ &\Leftrightarrow \cot C = -\frac{\cot A\cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot(A+B) = -\cot(\pi - C) = \cot C\end{aligned}$$

ពិត ។

គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតដែល $xy + yz + zx = 1$ ។ គេឲ្យ A, B, C ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ ។ គេឲ្យ $x = \cot A, y = \cot B$ ដែល $0 < A, B < \pi$ ដូច្នេះ $x, y, z \in (-\infty, +\infty)$ ។ អនុគមន៍ $y = \cot x$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី $(0, \pi)$ ទៅ $(-\infty, +\infty)$ ដូច្នេះចំពោះគ្រប់ x និង y គេអាចរកបាន A មួយ និង B មួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x = \cot A$ និង $y = \cot B$ ជានិច្ច ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $z = \cot C$ ។យើងមាន

$$\begin{aligned}&xy + yz + zx = 1\\ &\Rightarrow z = \frac{1 - xy}{x + y} = \frac{1 - \cot A\cot B}{\cot A + \cot B} = -\cot(A+B) = \cot C\end{aligned}$$

៤.៣ សមីការ

695. $\{\pi n; 2\pi n \pm 3\pi/4 | n \in \mathbb{Z}\}$
696. $\{2\pi n \pm \pi/6\,; 2\pi n + \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$
697. $\{\pi n/2 + (-1)^n\,\pi/12\ | n \in \mathbb{Z}\}$
698. $\left\{\frac{\pi n}{3}; \frac{2\pi n}{3} \pm \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\ \middle|\ n \in \mathbb{Z}\right\}$
699. $\{\pi n + \pi/4; 2\pi n \pm \pi/3\ | n \in \mathbb{Z}\}$
700. $\{\pi n + (-1)^{n+1}\pi/6\ | n \in \mathbb{Z}\}$

701. $\{2\pi n \pm \pi/3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
702. $\left\{\pi n + (-1)^n \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
703. $\{2\pi n \pm 2\pi/3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
704. $\{\pi(5n + 2) + \pi/2\,; 5\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
705. $\{\pi n; 2\pi n + \pi/6 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
706. $\{\pi n + \pi/4; \pi n + \arctan 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
707. $\{\pi n - \arctan(1/2)\,; \pi n + \arctan 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
708. $\{\pi n + \pi/6; \pi n + \pi/3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
709. $\{\pi n + 3\pi/4; \pi n + \operatorname{arccot} 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
710. $\{\pi n + (-1)^{n+1}\pi/4; \pi n + \operatorname{arccot} 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
711. $\{\pi n + (-1)^n\pi/4 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
712. $\{2\pi n + \arctan(1/2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$
713. $\{\pi n/2 + \pi/8 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
714. $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\arcsin 2(2 - \sqrt{3}) \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
715. $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^n}{2}\arcsin(1 - \sqrt{3 + 2a}) \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$
716. $\left\{\frac{\pi n}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\frac{\pi}{12} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
717. $\left\{\frac{\pi n}{5}; \frac{2\pi n}{5} \pm \frac{1}{5}\arccos\frac{1}{4} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
718. $\left\{\pi n + (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{33}-3}{4} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
719. $\{\pi n/5 + (-1)^n\pi/20 - 6/5 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
720. $\{\pi n/2 + \pi/4 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
721. $\{\pi(2n + 1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$
722. $\left\{\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}; 2\pi n \pm (\pi - \arccos(2/3)) \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
723. $\{\pi n - \pi/4\,; \pi n \pm \pi/3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
724. $\left\{2\pi n; 2\pi n \pm 2\,\pi/3\,; 2\pi n \pm \arccos\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
725. $\{\pi n + \arctan 5 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
726. $\{\pi n + \pi/4 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
727. $\{\pi n - \pi/4 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
728. $\{2\pi n - \pi/4\,;\ 2\pi n + \pi/2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
729. $\{\pi n + \pi/2\,;\ \pi n + \arctan(1/4) \mid n \in \mathbb{Z}\}$
730. $\{\pi n + \pi/4\,;\ 2\pi n \pm 2\pi/3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
731. $\{\pi n + \arctan 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
732. $\{2\pi n; \pi n + \pi/4 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
733. $\{\pi n - \pi/4; \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
734. $\{\pi n + \pi/4 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
735. $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n - \arctan 2 \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
736. $\{\pi n + \pi/4\,; \pi n - \arctan(1/4) \mid n \in \mathbb{Z}\}$
737. $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4}; \pi n + \arctan(3/5) \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$

738. $\{\pi n + \arctan 2\,; \pi n - \arctan(3/4) |\ n \in \mathbb{Z}\}$ ● សរសេរអង្គខាងស្ដាំជា $-2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ រួចចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\cos^2 x$ ។

739. $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n + \arctan 5 \middle|\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

740. $\{\pi n - \arctan \sqrt[3]{4} |\ n \in \mathbb{Z}\}$

741. $\{\pi n - \pi/4\,; \pi n \pm \pi/3 |\ n \in \mathbb{Z}\}$ ● បំលែងអង្គខាងស្ដាំនៃសមីការជា

$$\begin{aligned} 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3 &= 3\sin x\cos x - 3\sin^2 x + 3(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 3\cos x(\sin x + \cos x) = 3\cos^2 x(\tan x + 1) \end{aligned}$$

742. $\{\pi n/2 |\ n \in \mathbb{Z}\}$ ● បំលែងអង្គខាងស្ដាំនៃសមីការជា $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x$

743. $\{2\pi n; 2\pi n + \pi/3 |\ n \in \mathbb{Z}\}$

744. $\{2\pi n + \pi/12\,; 2\pi n + 7\pi/12 |\ n \in \mathbb{Z}\}$

745. $\{2\pi n/5 - \pi/5\,; 2\pi n/5 + 2\pi/15 |\ n \in \mathbb{Z}\}$

746. $\{2\pi n; 2\pi n + \pi/2 |\ n \in \mathbb{Z}\}$

747. $\{2\pi n + 5\pi/3 |\ n \in \mathbb{Z}\}$

748. $\left\{\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}(2n+1); \frac{\pi}{8}(1-2n) \middle|\ n \in \mathbb{N}\right\}$

749. $\left\{\pi n + \frac{7\pi}{12} \middle|\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

750. $\{\pi n/4 |\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{4k + 2 | k \in \mathbb{Z}\}\}$

751. $\left\{\frac{\pi n}{3} - \frac{\pi}{12} \middle| n \in \mathbb{Z} \setminus \{1 + 3m | m \in \mathbb{Z}\}\right\}$

752. $\{\emptyset\}$

753. $\{\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$ ▲ បំលែងសមីការជា $2(\tan 3x - \tan 2x) = \tan 2x\,(1 + \tan 3x \tan 2x)$ (១) ។ បើ $1 + \tan 3x \tan 2x = 0$ នោះ

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3x \sin 2x + \cos 3x \cos 2x}{\cos 2x \cos 3x} = 0 &\Longrightarrow \frac{\cos x}{\cos 2x \cos 3x} = 0 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{\cos 2x\,(4\cos^2 x - 3)} = 0 \end{aligned}$$

មិនមានឫស ។ ដូច្នេះយើងអាចចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ(១) នឹង $1 + \tan 3x \tan 2x$ បាន ។ សមីការ(១)ទៅជា

$$\begin{aligned} &2\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = \tan 2x \\ &2\tan x = \tan 2x \\ &2\tan x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \\ &\tan x = 0 \end{aligned}$$

754. $\{90°n + 25° | n \in \mathbb{Z}\}$
755. $\{2\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$
756. $\{2\pi n - \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$
757. $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{6}; \pi n + \pi/2 \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
758. $\{2\pi n \pm 2\arctan 5 | n \in \mathbb{Z}\}$
759. $\left\{2\pi n \pm 2\arctan 3;\ 2\pi n \pm 2\arctan\sqrt{3/11} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
760. $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{4} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
761. $\left\{\pi n \pm \frac{\pi}{3}; \pi n + \pi/2 \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
762. $\{2\pi n/3 \pm 2\pi/9; \pi n/3 + \pi/6 | n \in \mathbb{Z}\}$● សរសេរសមីការជារាង $\cos 3(3x) - 2\cos 2(3x) = 2$
763. $\{\pi n; \pi n/2 \pm \pi/12 | n \in \mathbb{Z}\}$ ● សរសេរសមីការជារាង $2\cos 2(2x) = 1 + \cos 3(2x)$
764. $\{3\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$
765. $\left\{\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
766. $\{2\pi n; 4\pi n \pm 2\pi/3 | n \in \mathbb{Z}\}$
767. $\left\{\pi n + \frac{(-1)^n \pi}{6}; 2\pi n + \pi/2 \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$ ● ប្រើសមភាព

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}x\right) = \sin 3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

768. $\{\pi n - \pi/4 | n \in \mathbb{Z}\}$
769. $\left\{2\pi n \pm \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \arctan\frac{b}{a} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $c^2 \le a^2 + b^2$; $\{\emptyset\}$ ចំពោះ $c^2 > a^2 + b^2$ ▲ ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\sqrt{a^2+b^2}$ យើងទាញបាន

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (1)$$

យើងមាន

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

ហើយ

$$-1 \le \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \le 1$$

តាង $a/\sqrt{a^2+b^2}=\cos\phi$; $b/\sqrt{a^2+b^2}=\sin\phi$ ។ សមីការ(១) ទៅជា

$$\cos x\cos\phi+\sin x\sin\phi=\cos(x-\phi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad(2)$$

សមីការ(២) មានឫសបើ

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 1\ \Rightarrow c^2\le a^2+b^2$$

យើងទាញបាន

$$x-\phi=2\pi k\pm\arctan\left(c/\sqrt{a^2+b^2}\right),k\in\mathbb{Z}\quad(3)$$

ដែល $\phi=2\pi m+\arctan\frac{b}{a}$, $m\in\mathbb{Z}$ ។ ត្រង់នេះយើងសន្មតថា $a>0$ ។ ករណី $a=0$ សមីការទៅជា $b\sin x=c$ ។ ករណី $a<0$ គុណសមីការនឹង -1 ។

770. $\{\pi n-\pi/8|n\in\mathbb{Z}\}$
771. $\left\{\pi n;\frac{\pi n}{3}-\frac{\pi}{6}\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$
772. $\left\{\frac{4\pi n}{5}+\frac{2\pi}{5};\frac{4\pi n}{3}+\frac{2\pi}{3}\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$
773. $\left\{\frac{\pi n}{4}\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$
774. $\left\{\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{8};\pi n+\frac{3\pi}{4}\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$
775. $\left\{n;\frac{-1\pm\sqrt{4l+3}}{2}\middle|\,n\in\mathbb{Z};l\in\mathbb{Z}_0\right\};\mathbb{Z}_0=\{0;1;2;\dots\}$
776. $\{\pi n+\pi/4|n\in\mathbb{Z}\}$
777. $\{\pi n/4|n\in\mathbb{Z}\}$
778. $\left\{\frac{\pi n}{6}+\frac{\pi}{12};2\pi n\pm\frac{2\pi}{3}\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$
779. $\{\pi n;2\pi n\pm\pi/6|n\in\mathbb{Z}\}$
780. $\{\pi n-\pi/4;\pi n+\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$
781. $\{2\pi n/3;\pi n+\pi/4;2\pi n-\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$
782. $\{\pi n/2|n\in\mathbb{Z}\}$
783. $\{\pi n+\pi/2|n\in\mathbb{Z}\}$
784. $\left\{\frac{\pi n}{6}+\frac{\pi}{48};\frac{\pi n}{4}+\frac{3\pi}{32}\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$
785. $\mathbb{R}\setminus\{\pi n|n\in\mathbb{Z}\}$
786. $\{\pi n/5;\pi n\pm 3\pi/8|n\in\mathbb{Z}\}$
787. $\left\{4\pi n+\frac{17}{6}\pi;\frac{8\pi n}{3}-\frac{5}{18}\pi;\frac{8\pi n}{3}+\frac{\pi}{6}\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$
788. $\left\{\frac{2\pi n}{5};\pi n+\frac{\pi}{2};2\pi n+\pi\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$
789. $\left\{\frac{\pi n}{5};\frac{\pi n}{3}+\frac{\pi}{6}\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$
790. $\{\pi n+\pi/2;\pi n/6+\pi/24|n\in\mathbb{Z}\}$
791. $\{\pi n/4+\pi/8;\pi n/3+(-1)^{n+1}\pi/18|n\in\mathbb{Z}\}$
792. $\{\pi n/5+(-1)^{n+1}\pi/30;\pi n/4+\pi/16;\pi n+3\pi/4|n\in\mathbb{Z}\}$

793. $\{\pi n+\pi/2\,;\pi n+(-1)^n\pi/6\,;2\pi n\pm 2\pi/3|n\in\mathbb{Z}\}$
794. $\{\pi n/2;2\pi n\pm 2\pi/3|n\in\mathbb{Z}\}$
795. $\left\{\frac{\pi}{7}(2n+1)\middle|\, n\in\mathbb{Z}\setminus\{7l-4|\,l\in\mathbb{Z}\}\right\}$
796. $\{\pi n|n\in\mathbb{Z}\}$
797. $\left\{\frac{\pi n}{3}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$
798. $\left\{\frac{\pi n}{10}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$
799. $\{\pi n/3+\pi/6\,;\pi n/5+\pi/10|n\in\mathbb{Z}\}$
800. $\{\pi n;\pi n/5+\pi/10|n\in\mathbb{Z}\}$
801. $\{\pi n;\pi n/3+\pi/6|n\in\mathbb{Z}\}$
802. $\{n-5/12\,;n+1/4|n\in\mathbb{Z}\}$
803. $\{\pi n/2\,;\pi n\pm\pi/6|n\in\mathbb{Z}\}$▲ សមីការសមមូលនឹង $(1-\cos 2x)+2\sin^2 2x=(1-\cos 6x);\Leftrightarrow 2\sin^2 2x-(\cos 2x-\cos 6x)=0\;\Leftrightarrow$
$2\sin^2 2x-2\sin 2x\sin 4x=0$
804. $\left\{\pi n/2+\frac{\pi}{4};\frac{\pi n}{5}+\pi/10\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$
805. $\{\pi n+\pi/2\,;2\pi n/11+\pi/11\,;2\pi n/5|n\in\mathbb{Z}\}$
806. $\left\{\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$
807. $\left\{\frac{2\pi n}{7}+\frac{\pi}{7}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$
808. $\left\{\frac{2\pi n}{7}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\setminus\{7k|k\in\mathbb{Z}\}\right\}$
809. $\left\{\frac{\pi n}{4}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$▲ សមីការសមមូលនឹង $\sin x\cos 3x\,(1-\cos 2x)+\cos x\sin 3x\,(1+\cos 2x)=-\frac{3}{4};\Leftrightarrow(\sin x\cos 3x+\cos x\sin 3x)+\cos 2x-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 4x=-\frac{3}{4};\Leftrightarrow\sin 4x=-\frac{1}{2}$ ។
810. $\left\{\pi n\pm\frac{\pi}{8}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$
811. $\left\{\frac{\pi n}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{18}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$▲ បំបែកអង្គខាងស្តាំនៃសមីការ

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sin x\left(2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right)&=\frac{1}{2}\sin x\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3}\right)\\&=\frac{1}{4}(2\sin x\cos 2x+\sin x)=\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x+\sin x)\\&=\frac{1}{4}\sin 3x\end{aligned}$$

812. $\left\{\frac{2\pi n}{3}\pm\frac{2\pi}{9}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$
813. $\left\{\frac{\pi n}{3}-\frac{\pi}{9}\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$
814. $\{\pi n;\pi n\pm\pi/6\;|n\in\mathbb{Z}\}$
815. $\{\pi n;\pi n\pm\pi/6\;|n\in\mathbb{Z}\}$

816. $\left\{\pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{5}{6}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}\right\}$
817. $\left\{\pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right); \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}\right\}$
818. $\{\pi n + \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$
819. $\{\pi n \pm \pi/8 | n \in \mathbb{Z}\}$
820. $\{\pi n \pm \pi/6 | n \in \mathbb{Z}\}$
821. $\{\pi n/2 + \pi/4 ; \pi n + \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$
822. $\left\{\pi n/2 + \pi/4 ; \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
823. $\left\{\pi n + \frac{\pi}{4}; \pi n + \frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
824. $\left\{\frac{\pi(4n+1)}{2}; \pi(2n+1) \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$ ● តាង $\sin x - \cos x = y \implies 1 - \sin 2x = y^2$ ។
825. $\left\{\pi n - \frac{\pi}{4}; \frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
826. $\left\{2\pi n + \frac{\pi}{4}; 2\pi n + \frac{11\pi}{12}; 2\pi n - \frac{5\pi}{12}; \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
827. $\left\{2\pi n; 2\pi n + \frac{\pi}{2}; \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
828. $\left\{2\pi n - \frac{\pi}{2}; \pi n - \frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
829. $\{(4\pi n + \pi/2)^2; (4\pi n + 11\pi/6)^2 | n \in \mathbb{Z}_0 ;\ (4\pi m - 5\pi/6)^2 | m \in \mathbb{N}\}$
830. $\{2\pi n + 5\pi/6 | n \in \mathbb{Z}\}$ ▲ ដោះស្រាយសមីការរក $\tan x$ ជាអនុគមន៍នៃ $\sin x$ យើងទាញបាន

$$\tan x = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{-2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2}\right)/2$$

សមីការមានឫសទាល់តែ $\sin x = 1/2$ និង $\tan x = -1/\sqrt{3}$ ។

831. $\{2\pi n; 2\pi n + \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$
832. $\{2\pi n - \pi/4 | n \in \mathbb{Z}\}$
833. $\{2\pi(1 + 4n) | n \in \mathbb{Z}\}$ ▲ សម្រួលសមីការជា

$$\sin\frac{5x}{4} + \cos x = 2 \qquad (1)$$

ដោយ $\sin(5x/4) \leq 1, \cos x \leq 1$ នោះសមីការ(១) មានឫសទាល់តែ $\sin(5x/4) = 1$ និង $\cos x = 1$ ។

834. $\{\pi n/3 ; 2\pi n - \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$
835. $\left\{\pi n - \arctan\frac{1}{6}; \pi n - \arctan\frac{1}{3} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
836. $\left[2\pi n - \frac{\pi}{3}; 2\pi n + \frac{2\pi}{3}\right]; n \in \mathbb{Z}$

837. $\{\pi n \pm \pi/6 | n \in \mathbb{Z}\}$
838. $\{2\pi n + 3\pi/4 | n \in \mathbb{Z}\}$
839. $\left\{2\pi n - \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
840. $\{2\pi n + \pi/8\,; 2\pi n - 3\pi/8 | n \in \mathbb{Z}\}$
841. $\left\{\frac{\pi n}{2}; \pi n + \pi/6 \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
842. $\{2\pi n + \pi/2\,; 2\pi n - \pi/6 | n \in \mathbb{Z}\}$
843. $\{2\pi n; 2\pi n - \pi/2 | n \in \mathbb{Z}\}$
844. $\left\{2\pi n + \frac{3\pi}{8}; 2\pi n + 7\pi/8\,; 2\pi n + \pi; \pi n + \pi/4 \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
845. $\{2\pi n; \pi n - \pi/4 | n \in \mathbb{Z}\}$
846. $\{\pi n/3 + (-1)^{n+1}\pi/8 | n \in \mathbb{Z}\}$
847. $\left\{\pi n + \arctan\frac{2}{3} \middle| n \in \mathbb{Z}\right\}$
848. $\{2\pi n + \pi/12\,; 2\pi n - 7\pi/12 | n \in \mathbb{Z}\}$
849. $\{2\pi n + \pi/6\,; 2\pi l/3 + 5\pi/18 | n, l \in \mathbb{Z}\}$
850. $\{4\pi n + 13\pi/6 | n \in \mathbb{Z}\}$
851. $\{2\pi n + \arccos(1/3) | n \in \mathbb{Z}\}$
852. $\{2\pi n + \arccos(1/10) | n \in \mathbb{Z}\}$
853. $\{\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$
854. $\{\log_2(\pi n/4 + \pi/8) | n \in \mathbb{Z}_0\}$
855. $\left\{1; \frac{7}{12}\pi; \pi n - \frac{\pi}{12}; \pi n + \frac{7}{12}\pi \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$
856. សមីការទាំងពីរមិនដូចគ្នាទេ ។ សមីការទីមួយមានឫស $\{\pi n - \pi/4\,; \pi n + \pi/2 \,| n \in \mathbb{Z}\}$ សមីការទីពីរមានឫស$\{\pi n - \pi/4 \,| n \in \mathbb{Z}\}$ ។

857. $[\sqrt{5} - 1; 2]$

858.▲ យក $x = 0$ យើងទាញបាន $1 + b^2 = \cos(b^2)$ ។ នាំឱ្យ $b = 0$ ។ យើងទាញបាន

$$a(\cos x - 1) = \cos ax - 1 \quad (*)$$

បើ $a = 0$ នោះ (*) ពិតចំពោះគ្រប់ x ។ នោះយើងសិក្សាករណី $a \neq 0$ម្តង ។ ដោយ(*) ពិតជានិច្ច នោះ យក $x = 2\pi$ យើងទាញបាន $\cos 2a\pi = 1$ នាំអោយ $2a\pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ដូច្នេះ

$$a = k, a \neq 0$$

យក $x = \frac{2\pi}{a}$ ជំនួសចូល(*) យើងទាញបាន

$$a\left(\cos\frac{2\pi}{a} - 1\right) = 0$$

ដោយ $a \neq 0$ នោះ $\cos\frac{2\pi}{a} = 1; \frac{2\pi}{a} = 2m\pi; m \in \mathbb{Z}$ ។ យើងទាញបាន $a = \frac{1}{m}$ ។

ដោយ $a \in \mathbb{Z}$ នោះ $a = \pm 1$ ។

បើ $a = 1; b = 0$ នោះ $\cos x - 1 = \cos x - 1$ ពិតគ្រប់ x ។

បើ $a = -1; b = 0$ នោះ $-\cos x + 1 = \cos x - 1$ មិនពិតគ្រប់ x ។

ដូច្នេះសមីការពិតគ្រប់ x បើ $(a = 0; b = 0)$ ឬ $(a = 1; b = 0)$ ។

859.▲ ចំពោះ $n \geq 2$ យើងមាន

$$1 = \cos^n x - \sin^n x \leq |\cos^n x - \sin^n x| \leq |\cos^n x| + |\sin^n x| \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

ដូច្នេះ $\sin^2 x = |\sin^n x|$ និង $\cos^2 x = |\cos^n x|$ ។ យើងទាញបាន $\sin x, \cos x \in \{-1,0,1\}$ ។

ករណី n គូ នោះ ត្រូវតែ $\cos^n x = 1$ និង $\sin^n x = 0$ ។ យើងទាញបាន $\cos x = \pm 1$ និង $\sin x = 0$ ។ ដូច្នេះ $x = m\pi$ ដែល $m \in \mathbb{Z}$ ។

ករណី n សេស នោះត្រូវតែ $\cos^n x = 1$ និង $\sin^n x = 0$ ឬ $\cos^n x = 0$ និង $\sin^n x = -1$ ។ ករណីទីមួយ នាំឱ្យ $\cos x = 1$ និង $\sin x = 0$ ដូច្នេះ $x = 2m\pi$ ដែល $m \in \mathbb{Z}$ ។ ករណីទីពីរ នាំឱ្យ $\cos x = 0$ និង $\sin x = -1$ ដូច្នេះ $x = 2m\pi - \pi/2$ ដែល $m \in \mathbb{Z}$ ។

ចំពោះ $n = 1$ យើងមាន

$$1 = \cos x - \sin x = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x \in \left\{2m\pi, 2m\pi - \frac{\pi}{2} \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$$

860.▲ ដោយ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ និង $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ នោះ

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1 &\Leftrightarrow \frac{\cos 2x + 1}{2} + \frac{\cos 4x + 1}{2} + \cos^2 3x = 1\\ &\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 3x = 0\\ &\Leftrightarrow 2\cos 3x\cos x + 2\cos^2 3x = 0\\ &\Leftrightarrow 2\cos 3x\,(\cos x + \cos 3x) = 0\\ &\Leftrightarrow 4\cos 3x\cos 2x\cos x = 0\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $x \in \{\pi/2 + m\pi, \pi/4 + m\pi/2, \pi/6 + m\pi/3 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ ។

861.▲ តាមវិសមភាព $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ យើងមាន

$$\frac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{\frac{y^2}{2}}} + \frac{(\cos x)^{2y}}{(\sin x)^{\frac{y^2}{2}}} \geq 2\sqrt{\frac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{\frac{y^2}{2}}} . \frac{(\cos x)^{2y}}{(\sin x)^{\frac{y^2}{2}}}} = 2(\sin x \cos x)^{y-\frac{y^2}{4}} \quad (*)$$

$$\Longrightarrow 2\sin x \cos x = \sin 2x \geq 2(\sin x \cos x)^{y-\frac{y^2}{4}}$$

ដោយ $0 < \sin x \cos x < 1$ ដូច្នេះ

$$1 \leq y - \frac{y^2}{4} \Longrightarrow \left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 \leq 0 \Longrightarrow y = 2$$

និង

$$\frac{(\sin x)^{2y}}{(\cos x)^{\frac{y^2}{2}}} = \frac{(\cos x)^{2y}}{(\sin x)^{\frac{y^2}{2}}} \Longrightarrow \sin x = \cos x$$

(ដើម្បីឱ្យអង្គទាំងពីរនៃ * ទៅជាសមភាព) ។

ដូច្នេះ $x = \pi/4$ និង $y = 2$ ។

862.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} - 1 &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\\
\sqrt{3} + 1 &= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះសមីការសមមូលនឹង

$$\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x} + \frac{2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}}{\cos x} = 4\sqrt{2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x} + \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\cos x} = 2$$

បំបាត់ភាគបែងយើងទទួលបាន

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos x+\cos\frac{\pi}{12}\sin x=2\sin x\cos x$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)=\sin 2x$$

$\Longrightarrow \pi/12+x=2x$ ឬ $\frac{\pi}{12}+x=\pi-2x$ ។ ដូច្នេះ $x=\pi/12$ ឬ $x=11\pi/36$ ។

៩.៤ ប្រព័ន្ធសមីការ

863. $\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{\sqrt{57}-6}{3}+\frac{13\pi}{2};2\pi n\pm\arccos\frac{\sqrt{57}-6}{3}\right)|n\in\mathbb{Z}\right\}$

864. $\left\{\left(\pi n+\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}-\pi n\right)|n\in\mathbb{Z}\right\}$

865. $\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{a}{2\cos(\pi/8)}+\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}-2\pi n\pm\arccos\frac{a}{2\cos(\pi/8)}\right)|n\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in\left[-2\cos\frac{\pi}{8};2\cos\frac{\pi}{8}\right]$

866.
$\left\{\left(\frac{\pi}{5}(n+4k)\pm\frac{2\pi}{15}+\frac{(-1)^n}{5}\arcsin 2^a;\frac{\pi}{5}(n-6k)\pm\frac{\pi}{5}+\frac{(-1)^n}{5}\arcsin 2^a\right)|n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-\infty;0]$

867. $\left\{\left(\pi\left(n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{6};\pi\left(-n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right);\left(\pi\left(n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{3};\pi\left(-n+\frac{k}{2}\right)+\frac{\pi}{6}\right)|n,k\in\mathbb{Z}\right\}$

868. $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\pi(2n-m)+\frac{\pi}{4}\right)|n,m\in\mathbb{Z}\right\}$

869. $\left\{\begin{array}{c}\left(2\pi n+\frac{\pi}{6};2\pi k+\frac{\pi}{3}\right);\left(2\pi n+\frac{7\pi}{6};2\pi k+\frac{4\pi}{3}\right);\left(2\pi n-\frac{\pi}{6};2\pi k+\frac{2\pi}{3}\right);\\ \left(2\pi n+\frac{5\pi}{6};2\pi k+\frac{5\pi}{3}\right)|n,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}$

870. $\left\{\left(\pi n-\frac{\pi}{4};\pi m+(-1)^m\frac{\pi}{6}\right)|n,m\in\mathbb{Z}\right\}$

871. $\left\{\left(2\pi n\pm\frac{3\pi}{4};\pi m+(-1)^m\frac{\pi}{6}\right)|n,m\in\mathbb{Z}\right\}$

872. $\left\{\left(2\pi n+\frac{\pi}{2};2\pi k\pm\arccos\left(-\frac{a}{3}\right)\right)|n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-3;3]$;
$\left\{\left(2\pi n+\frac{\pi}{2};2\pi k\right);\left(2\pi n-\frac{\pi}{2};\pi(2k+1)\right)|n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a=-3$

873. $\left\{\begin{array}{c}\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a};\pi k-\arctan(a+2)\right);\\ \left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a+2};\pi k-\arctan a\right)\end{array}\middle| n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-\infty;-3]\cup[1;\infty)$;
$\left\{\left(2\pi n\pm\arccos\frac{1}{a};\pi k-\arctan(a+2)\right)\middle| n,k\in\mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a\in(-3;-1]$;

$\left\{\left(2\pi n \pm \arccos\frac{1}{a+2}; \pi k - \arctan a\right)\middle| n, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ចំពោះ $a \in (-1; 1)$

874. $\left\{\left(\frac{\pi k}{2} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}; \frac{\pi n}{5} - \frac{1}{5}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\middle| n, k \in \mathbb{Z}\right\}$

875.▲ តាង $a = \tan x; b = \tan y; c = \tan z$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = m^2 & (1) \\ a^3 + b^3 + c^3 = m^3 & (2) \end{cases}$$

ក) បើ $m = 0$ នោះ $a = b = c = 0$ យើងទាញបាន $(x; y; z) = (p\pi; h\pi; k\pi)$

ខ) បើ $m \neq 0$ លើកសមីការទី(២)ជាការេ យើងទាញបាន

$$m^6 = (a^3 + b^3 + c^3)^2$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} & m^6 = (a^3 + b^3 + c^3)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4) \\ & \Rightarrow \ m^6 \leq m^2(a^4 + b^4 + c^4) \\ & \Rightarrow \ m^4 \leq a^4 + b^4 + c^4 \qquad (4) \end{aligned}$$

សមីការទី(១) នាំឱ្យ

$$m^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

ហើយតាម(៤) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} & (a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \leq a^4 + b^4 + c^4 \\ & \Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq 0 \\ & \Rightarrow \begin{cases} a^2b^2 = 0 \\ b^2c^2 = 0 \\ c^2a^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a = m; b = c = 0); (a = 0; b = m; c = 0); (a = b = 0; c = m)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan m + p\pi; y = h\pi; z = k\pi \\ x = p\pi; y = \arctan m + h\pi; z = k\pi \\ x = p\pi; y = h\pi; z = \arctan m + k\pi \end{array}\right.$$

ដូច្នេះចំពោះគ្រប់ m សមីការមានចម្លើយ

$$\left[\begin{array}{l} x = \arctan m + p\pi; y = h\pi; z = k\pi \\ x = p\pi; y = \arctan m + h\pi; z = k\pi \\ x = p\pi; y = h\pi; z = \arctan m + k\pi \end{array}\right.$$

៤.៥ វិសមភាព

876.▲ ដោយ $\pi/6 < \alpha < \pi/3$ នោះ $1/\sin\alpha < 2$ និង $1/\cos\alpha < 2$ ។ ដូច្នេះ

$$0 \leq \frac{\pi \sin x}{4\sin\alpha} \leq \frac{\pi}{4\sin\alpha} < \frac{\pi}{2}; 0 \leq \frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha} \leq \frac{\pi}{4\cos\alpha} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow \ \tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)\geq 0;\ \tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)\geq 0$$

ករណី $x<\alpha$ នោះ $\cos x>\cos\alpha$ យើងទាញបាន

$$\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)+\tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)\ \geq\tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)\ >\tan\left(\frac{\pi\cos\alpha}{4\cos\alpha}\right)=1$$

ករណី $x=\alpha$ យើងទាញបាន

$$\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)+\tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)\ =\tan\left(\frac{\pi\sin\alpha}{4\sin\alpha}\right)+\tan\left(\frac{\pi\cos\alpha}{4\cos\alpha}\right)=2>1$$

ករណី $x>\alpha$ នោះ $\sin x>\sin\alpha$ យើងទាញបាន

$$\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)+\tan\left(\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha}\right)\ \geq\tan\left(\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha}\right)\ >\tan\left(\frac{\pi\sin\alpha}{4\sin\alpha}\right)=1$$

877.▲ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\begin{aligned}
&4\tan^2A\tan^2B\tan^2C-4(\tan^2A+\tan^2B+\tan^2C)-3\\
&\qquad\leq(1+\tan^2A)(1+\tan^2B)(1+\tan^2C)\\
&\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{\cos^2A}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2B}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^2C}-1\right)\\
&\qquad-4\left(\frac{1}{\cos^2A}+\frac{1}{\cos^2B}+\frac{1}{\cos^2C}-3\right)-3\\
&\qquad\leq\frac{1}{\cos^2A}\frac{1}{\cos^2B}\frac{1}{\cos^2C}\\
&\Leftrightarrow\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\geq\frac{3}{4}\\
&\Leftrightarrow\frac{1+\cos2A}{2}+\frac{1+\cos2B}{2}+\cos^2C\geq\frac{3}{4}\\
&\Leftrightarrow 2(\cos2A+\cos2B)+4\cos^2C+1\geq0\\
&\Leftrightarrow 4\cos(A+B)\cos(A-B)+4\cos^2C+1\geq0\\
&\Leftrightarrow 4\cos^2C-4\cos C\cos(A-B)+1\geq0\\
&\Leftrightarrow[2\cos C-\cos(A-B)]^2+\sin^2(A-B)\geq0
\end{aligned}$$

ពិត ។

878.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}
1-\sin\frac{\pi}{14}&=\sin\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{\pi}{14}+\sin\frac{5\pi}{14}-\sin\frac{3\pi}{14}+\sin\frac{7\pi}{14}-\sin\frac{5\pi}{14}\\
&=2\sin\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)\qquad(1)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1-\sin\frac{\pi}{14}}{2\sin\frac{\pi}{14}}=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\qquad(2)$$

$$\cos\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\qquad(3)$$

តាង $x=\cos\frac{\pi}{7};y=\cos\frac{2\pi}{7},z=\cos\frac{3\pi}{7}$ ។ តាម (២) និង (៣) វិសមភាពអាចសរសេរជា

$$x+y+z>\sqrt{3(xy+yz+zx)}\qquad(4)$$

ដោយ $x,y,z>0$ នោះ (៤) អាចសរសេរជា

$$(x+y+z)^2>3(xy+yz+zx)$$
$$\Leftrightarrow(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2>0\quad(5)$$

ដោយ x,y,z មានតម្លៃខុសគ្នា នោះវិសមភាព (៥) ពិត ។

879.▲ ដោយ $x_i\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ នោះ

$$\frac{1}{2}\le\sin x_i\le1\ \Leftrightarrow\ (\sin x_i-1)\left(\sin x_i-\frac{1}{2}\right)\le0;\quad(i=1;2;\dots 2n)$$
$$\Leftrightarrow\sin^2x_i-\frac{3}{2}\sin x_i+\frac{1}{2}\le0$$
$$\Leftrightarrow\sin x_i+\frac{1}{2\sin x_i}\le\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{2n}\sin x_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\sin x_i}\le\frac{3}{2}2n=3n$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងមាន

$$\sum_{i=1}^{2n}\sin x_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\sin x_i}\ge2\sqrt{\frac{1}{2}Y}$$

យើងទាញបាន $Y\le\frac{9}{2}n^2$ ។ យើងមាន $Y=1800;\Rightarrow n\ge20$ ។ សញ្ញាស្មើកើតមានទាល់តែ $\sin x_i=1$ ឬ $\sin x_i=\frac{1}{2}$ និង $\sum_{i=1}^{2n}\sin x_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{\sin x_i}$ ។ តាង α ជាចំនួន $\sin x_i=1$ និង β ជាចំនួន $\sin x_i=\frac{1}{2}$ ។ ដូច្នេះ

$$\alpha+\beta=2n;\alpha+\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}\alpha+\beta\ \Rightarrow\alpha=\beta=n$$

ដូច្នេះ n តូចបំផុតស្មើ $n=20$ ។

880.▲ យើងមាន

$$\tan\frac{A}{4}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B+C}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow \tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4} = 1+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីយើងទាញបាន

$$\tan\frac{A}{4}+\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{C}{4}\geq 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}$$

$$\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}+\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}+\tan\frac{C}{4}\tan\frac{A}{4}\geq 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\right)^2}$$

ដូច្នេះ

$$1+\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\geq 3\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}+3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\right)^2}$$

តាង $t=\sqrt[3]{\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}}>0$ ។ ដូច្នេះ

$$1+t^3\geq 3t+3t^2$$
$$\Longrightarrow t\leq 2-\sqrt{3};\text{ ឬ } t\geq 2+\sqrt{3}$$

ដោយ A,B,C ជារង្វាស់មុំក្នុងនៃត្រីកោណ នោះ $0<t<1$ ដូច្នេះ $t\leq 2-\sqrt{3}$ ។ មានន័យថា

$$\tan\frac{A}{4}\tan\frac{B}{4}\tan\frac{C}{4}\leq\left(2-\sqrt{3}\right)^3$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $\tan\frac{A}{4}=\tan\frac{B}{4}=\tan\frac{C}{4}=2-\sqrt{3}$ ឬពេល $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ ។ ដូច្នេះតម្លៃធំបំផុតគឺ $\max T=\left(2-\sqrt{3}\right)^3$ ។

881.▲ យើងមាន $0<(n+1)x<\pi/2$ ដូច្នេះ $0<nx<\frac{\pi}{2};0<x<\pi/2$ ។ វិសមភាពអាចសរសេរជា

$$\tan nx\sin x+\cos^{2n}x>1$$

តាង $f(n)=\tan nx\sin x+\cos^{2n}x$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា

$$f(k+1)>f(k),\forall k=0,1,2,\dots,n-1$$

យើងមាន $$f(k+1)>f(k)$$

$$\Longleftrightarrow \tan(k+1)x\sin x+\cos^{2(k+1)}x>\tan kx\sin x+\cos^{2k}x$$
$$\Longleftrightarrow \cos^{2k}x-\cos^{2k+2}x<\sin x\left(\tan(k+1)x-\tan kx\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^{2k} x \sin^2 x < \frac{\sin x \sin x}{\cos(k+1)x \cos kx}$$
$$\Leftrightarrow \cos^{2k} x < \frac{1}{\cos(k+1)x \cos kx}$$
$$\Leftrightarrow \cos^{2k} x \cos(k+1)x \cos kx < 1$$

ពិត ។ ដូច្នេះ $f(n) > f(n-1) > \cdots > f(0) = 1$ ពិត ។

882.▲ បើ A, B, C ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណ នោះ

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2};$$
$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

វិសមភាពសមមូលនឹង

$$27\left(\tan\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}\right) < 4\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(\tan\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}\right) < \frac{4}{27}$$

តាង $x = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}; y = \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}; z = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$ ។ ដូច្នេះ $x, y, z > 0; x + y + z = 1$ ហើយវិសមភាពសមមូលនឹង

$$x^2y + y^2z + z^2x < \frac{4}{27} \qquad (1)$$

តាង $P = x^2y + y^2z + z^2x$ ។ សន្មតថា $x \geq y > 0; x \geq z > 0 \implies y^2z \leq xyz; z^2x \leq x^2z$ ។ ដូច្នេះ

$$P = x^2y + y^2z + z^2x \leq x^2y + xyz + \frac{1}{2}z^2x + \frac{1}{2}x^2z$$
$$= xy(x+z) + \frac{1}{2}xz(x+z)$$
$$= x(x+z)\left(y + \frac{z}{2}\right) = 4.\frac{x}{2}\left(\frac{x+z}{2}\right)\left(y + \frac{z}{2}\right)$$

ប្រើវិសមភាពកូស៊ី ចំពោះគូ $\frac{x}{2}, \left(\frac{x+z}{2}\right), \left(y + \frac{z}{2}\right)$ ហើយដោយដឹងថា $\frac{x}{2} \neq \frac{x+z}{2}$ យើងទាញបាន

$$P < 4\left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x+z}{2} + y + \frac{1}{2}z}{3}\right)^3 = 4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

883.▲ តាង a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងឈមនឹងមុំ A, B, C ។ តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស យើងមាន

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \sin B = \frac{b}{2R}; \sin C = \frac{c}{2R}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{c^2} = m$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស យើងទាញបាន

$$a^2+b^2 = m(a^2+b^2+2ab\cos C)$$
$$\Rightarrow |\cos C| = \frac{|m-1|}{m}\frac{a^2+b^2}{2ab} \geq \frac{|m-1|}{m}$$
$$\Rightarrow \sin^2 C = 1-\cos^2 C \leq 1-\frac{(m-1)^2}{m^2} = \frac{2m-1}{m^2}$$
$$\Rightarrow \sin C \leq \frac{\sqrt{2m-1}}{m}$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $a=b$ ឬ $A=B$ ។ ដូច្នេះ $\max\sin C = \frac{\sqrt{2m-1}}{m}$ ។

884.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} f(\tan 2x) &= \tan^4 x + \cot^4 x = (\tan^2 x + \cot^2 x)^2 - 2\tan^2 x\cot^2 x \\ &= ((\tan x + \cot x)^2 - 2\tan x\cot x)^2 - 2 \\ &= \left(\frac{1}{\sin^2\cos^2 x} - 2\right)^2 - 2 \\ &= \left(\frac{4}{\sin^2 2x} - 4 + 2\right)^2 - 2 \\ &= \left(4\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} + 2\right)^2 - 2 \\ &= \left(\frac{4}{\tan^2 2x} + 2\right)^2 - 2 \\ &= \frac{16}{\tan^4 2x} + \frac{16}{\tan^2 2x} + 2 \end{aligned}$$

តាង $t = \tan 2x \implies f(t) = 16/t^4 + 16/t^2 + 2$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} f(\sin x) + f(\cos x) &= 16\left[\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right] + 4 \\ &= 16[4 + 3(\cot^2 x + \tan^2 x) + \cot^4 x + \tan^4 x] + 4 \end{aligned}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងមាន

$$\cot^2 x + \tan^2 x \geq 2$$
$$\cot^4 x + \tan^4 x \geq 2$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $\tan^2 x = 1$ ។ ដូច្នេះ

$$f(\sin x) + f(\cos x) \geq 16[4 + 3.2 + 2] + 4 = 196$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ \ (k \in \mathbb{Z})$ ។

885.▲ ជាដំបូងយើងបង្ហាញថាវិសមភាព

$$\frac{a}{b} \geq \frac{a-t}{b-t} \qquad (1)$$

ពិតចំពោះគ្រប់ $a,b,t \in \mathbb{R}$ ដែល $a < b; b > t \geq 0$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \geq \frac{a-t}{b-t} &\Leftrightarrow \quad a(b-t) \geq (a-t)b \\ &\Leftrightarrow \; ab - at \geq ab - bt \\ &\Leftrightarrow \; at \leq bt \\ \Leftrightarrow \quad 0 &\leq t(b-a) \end{aligned}$$

ពិត ។

ក្នុងត្រីកោណABC មួយ បើ $A > B > C$ នោះ $a > b > c$ ដែល a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងឈមនឹងមុំ A,B,C ។ យើងមាន $a = 2R\sin A > b = 2R\sin B > c = 2R\sin C$

ដូច្នេះ $\sin A > \sin B > \sin C$ ។

ដែនកំណត់របស់y :

$$\begin{cases} \dfrac{x-\sin A}{x-\sin C} \geq 0 \\ \dfrac{x-\sin B}{x-\sin C} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq \sin A \\ x < \sin C \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \sin B \\ x < \sin C \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \sin A \\ x < \sin C \end{array}\right.$$

ចំពោះ $x \geq \sin A$:

ប្រើវិសមភាព(១)ចំពោះ $t = x - \sin A \geq 0$

$$\frac{x-\sin A}{x-\sin C} \geq \frac{x-\sin A-(x-\sin A)}{x-\sin C-(x-\sin A)} = 0$$

$$\frac{x-\sin B}{x-\sin C} \geq \frac{x-\sin B-(x-\sin A)}{x-\sin C-(x-\sin A)} = \frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}$$

$$\Rightarrow \quad y \geq 0 + \sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}} - 1$$

សញ្ញាស្មើកើតមានពេល $x = \sin A$ ។ ហើយ

$$\sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}} - 1 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C} \leq 4$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \; \sin A - \sin B \leq 4\sin A - 4\sin C \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 3\sin A + \sin B - 4\sin C \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 3\,(\sin A - \sin B) + (\sin B - \sin C) \end{aligned}$$

ពិត ។

ចំពោះ $x < \sin C$: យើងមាន

$$y > \sqrt{1} + \sqrt{1} - 1 = 1$$

ដូច្នេះ $\min y = \sqrt{\frac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$ ពេល $x = \sin A$ ។

886.▲ យើងមាន

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \quad \cos 2x + \cos 2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 2\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) =$$
$$= \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀតយើងមាន

$$f(x) = \frac{2000}{2001}\cos 2x + \frac{2003}{2000}\cos(x - \phi) + 1$$
$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2000}{2001}\cos\left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) + \frac{2003}{2000}\cos\left(x - \phi + \frac{2\pi}{3}\right) + 1$$
$$f\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{2000}{2001}\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2003}{2000}\cos\left(x - \phi + \frac{4\pi}{3}\right) + 1$$
$$\Longrightarrow \quad f(x) + f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + f\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 3$$

ដោយ $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \geq 0;\ f\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) \geq 0$ នោះ $f(x) \leq 3$ ។

887.▲ ចំពោះ $a > 1$ អនុគមន៍ $y = a^x$ ជាអនុគមន៍កើន ។ ចំពោះ $0° < \theta < 45°$ យើងមាន $\cot\theta > 1 > \tan\theta > 0$ ។ ដូច្នេះ $t_3 = (\cot\theta)^{\tan\theta} < (\cot\theta)^{\cot\theta} = t_4$ ។

ចំពោះ $a < 1$ អនុគមន៍ $y = a^x$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។ ដោយ $\cot\theta > 1 > \tan\theta > 0$ នោះ $t_1 = (\tan\theta)^{\tan\theta} > (\tan\theta)^{\cot\theta} = t_2$ ។

ដោយ $\cot\theta > 1 > \tan\theta > 0$ នោះ $t_1 = (\tan\theta)^{\tan\theta} < (\cot\theta)^{\tan\theta} = t_3$ ។

ដូច្នេះ $t_4 > t_3 > t_1 > t_2$ ។

888.▲ តាងអនុគមន៍ $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \cos x$$

យើងមាន

$$f'(x) = -x + \frac{1}{4}x^3 + \sin x\,; f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -1 + \frac{3}{4}x^2 + \cos x\,;\; f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = \frac{3}{2}x - \sin x\,;\; f'''(0) = 0$$
$$f''''(x) = \frac{3}{2} - \cos x$$

ដោយ $f''''(x) > 0$ នោះ $f'''(x)$ កើន ។ ដោយ $f'''(0) = 0$ នោះ $f'''(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ។

ដូច្នេះ $f''(x)$ កើនចំពោះគ្រប់ $x \geq 0$ ។ ដោយ $f''(0) = 0$ នោះ $f''(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ។

ដូច្នេះ $f'(x)$ កើនចំពោះគ្រប់ $x \geq 0$ ។ ដោយ $f'(0) = 0$ នោះ $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 0$ ។

ដូច្នេះ $f(x)$ កើនចំពោះគ្រប់ $x \geq 0$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $0 < x < \pi/2$ យើងមាន

$$f(0) < f(x) \;\Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \cos x \;\Rightarrow \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$$

889.▲ តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b + c}{\sin B + \sin C}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b + c} = \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2}}$$
$$= \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{\pi - A}{2}\cos\frac{B - C}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B - C}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B - C}{2}}$$

យើងមាន $0 \leq |B - C| < 180°$ ដូច្នេះ $0 < \cos\frac{B-C}{2} \leq 1$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\geq\sin\frac{A}{2}$$

890.▲ យើងមាន

$$\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right)\geq\left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{ab}{\sin x\cos x}\geq 1+2ab+2\sqrt{2ab}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{ab}{\sin x\cos x}\geq 2ab+2\sqrt{2ab}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x\cos x}}$$

យើងមាន

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\leq\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x\cos x}}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=2\sqrt{2ab}$$

និង

$$\frac{ab}{\sin x\cos x}\geq\frac{ab}{\frac{1}{2}}=2ab$$

ដូច្នេះ

$$\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}+\frac{ab}{\sin x\cos x}\geq 2\sqrt{2ab}+2ab$$

ពិត ។

891.▲ (a) យើងមាន

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$
$$\Leftrightarrow \tan\frac{C}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}\right)=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{C}{2}=\frac{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{A+B}{2}}=\cot\frac{A+B}{2}$$
$$\Leftrightarrow \tan\frac{C}{2}=\cot\frac{\pi-C}{2}=\tan\frac{C}{2}$$

ពិត ។

(b) តាម (a) និង តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងមាន

$$\begin{aligned}1&=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\\&\geq 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2}\\&\Longrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{27}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

ពិត ។

892.▲ ដោយមុំទាំងអស់របស់ត្រីកោណសុទ្ធតែជាមុំស្រួច ដូច្នេះ $0<A,B,C<90^\circ$ ដូច្នេះ $\tan A,\tan B,\tan C$ សុទ្ធតែជាចំនួនកំណត់ និងមានតម្លៃវិជ្ជមាន ។

(a) យើងមាន

$$\begin{aligned}&\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C\\&\Leftrightarrow \tan A+\tan B=(\tan A\tan B-1)\tan C\\&\Leftrightarrow \frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=\tan C\\&\Leftrightarrow -\tan(A+B)=\tan C\\&\Leftrightarrow -\tan(\pi-C)=\tan C\\&\Leftrightarrow \tan C=\tan C\end{aligned}$$

ពិត ។

(b) តាមសមភាព (a) និង វិសមភាពកូស៊ី

$$\begin{aligned}&\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C\\&\geq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}\\&\Longrightarrow (\tan A\tan B\tan C)^3\geq 27\tan A\tan B\tan C\\&\Longrightarrow \tan A\tan B\tan C\geq 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

893.▲ យើងមាន $(x-y)^2\geq 0$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y ។ ដូច្នេះ

$$xy\leq\frac{x^2+y^2}{2}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y ។ ដូច្នេះ

$$\sin\alpha_1\cos\alpha_2 \le \frac{\sin^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2}{2}$$
$$\sin\alpha_2\cos\alpha_3 \le \frac{\sin^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3}{2}$$
$$\dots$$
$$\sin\alpha_{2007}\cos\alpha_{2008} \le \frac{\sin^2\alpha_{2007}+\cos^2\alpha_{2008}}{2}$$
$$\sin\alpha_{2008}\cos\alpha_1 \le \frac{\sin^2\alpha_{2008}+\cos^2\alpha_1}{2}$$

ដូច្នេះ

$$\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_2\cos\alpha_3+\cdots+\sin\alpha_{2007}\cos\alpha_{2008}+\sin\alpha_{2008}\cos\alpha_1$$
$$\le \frac{\sin^2\alpha_1+\cos^2\alpha_1}{2}+\frac{\sin^2\alpha_2+\cos^2\alpha_2}{2}+\cdots$$
$$+\frac{\sin^2\alpha_{2008}+\cos^2\alpha_{2008}}{2}=1004$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នា ពេល

$$\sin\alpha_1=\cos\alpha_2\,;\sin\alpha_2=\cos\alpha_3\,;\dots;\ \sin\alpha_{2008}=\cos\alpha_1$$

លក្ខខណ្ឌនេះ អាចផ្ទៀងផ្ទាត់ ឧទាហរណ៍ នៅត្រង់ $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{2008}=\pi/4$ ។ ដោយសារសំនួរ សួររកតែតម្លៃធំបំផុត ដោយមិនសួររកតម្លៃ α_i ដូច្នេះ យើងមិនចាំបាច់រកលក្ខខណ្ឌលើ α_i ផ្សេងពីនេះទៀតទេ ។ដូច្នេះតម្លៃធំបំផុត គឺ 1004 ។

894.▲ យើងមាន

$$\cos^2 x\cot x+\sin^2 x\tan x\ge 1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x\,\frac{\cos x}{\sin x}+\sin^2 x\frac{\sin x}{\cos x}\ge 1$$
$$\Leftrightarrow \cos^4 x+\sin^4 x\ge \sin x\cos x$$
$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x\ge \sin x\cos x$$
$$\Leftrightarrow\ -2\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos x+1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin^2 2x-\frac{1}{2}\sin 2x+1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2\le 0$$

ពិត ព្រោះ $\sin 2x \le 1, \sin^2 2x \le 1$ ។ សមភាពកើតមាន ពេល $\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \pi/2 + 2k\pi \Rightarrow x = \pi/4 + k\pi$ ។ ដោយ $0 < x < \pi/2$ ដូច្នេះ យកតែ $x = \pi/4$ ។

៤.៦ វិសមីការ

895. $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right); n \in \mathbb{Z}$;
896. $[2\pi n - 2\pi/3\,; 2\pi n + 2\pi/3]; n \in \mathbb{Z}$;
897. $(\pi n - \arctan 2\,; \pi n + \pi/3); n \in \mathbb{Z}$;
898. $(\pi n; \pi n + \pi/2] \cup [\pi n + 3\pi/4\,; \pi(n+1)); n \in \mathbb{Z}$
899. $(-\pi/4 + 2\pi n; \pi/6 + 2\pi n) \cup (5\pi/6 + 2\pi n; 5\pi/4 + 2\pi n); n \in \mathbb{Z}$
900. $\left(2n - \frac{1}{8}; 2n + 7/8\right); n \in \mathbb{Z}$
901. $\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{5\pi}{24}; \frac{\pi(n+1)}{2} + \frac{\pi}{24}\right); n \in \mathbb{Z}$ ● $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin 4x$
902. $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n\right\} \cup \left[\pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n - \pi/6\right] \cup \left[\pi n + \frac{\pi}{6}; \pi n + \pi/4\right]; n \in \mathbb{Z}$ ●
$\cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 2x \frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{\cos 2x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1)}{2}$
903. $\{\mathbb{R}\} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$
904. $\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right); n \in \mathbb{Z}$ ● $\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$
905. $\left(\pi n + \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}; \pi(n+1) - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right); n \in \mathbb{Z}$ ● $8\sin^6 x - \cos^6 x = (2\sin^2 x - \cos^2 x)(4\sin^4 x + 2\sin^2 x \,.\cos^2 x + \cos^4 x)$ បន្ទាប់មកទៀត

$$4\sin^4 x + 2\sin^2 x \,.\cos^2 x + \cos^4 x > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

906. $\left(\pi n - \frac{\pi}{4}; \pi n - \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\pi n + \frac{\pi}{6}; \pi n + \frac{\pi}{4}\right); n \in \mathbb{Z}$
907. $\left(2\pi n - \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}; 2\pi n + \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cup \left(\pi(2n+1); 2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right); n \in \mathbb{Z}$ ● តាង $\sin x + \cos x = y$
908. $\left(\arctan(\sqrt{2} - 1); \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\pi + \arctan(\sqrt{2} - 1)\,; \frac{5\pi}{4}\right)$
909. $\left(\pi n + \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \pi(n+1) - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right); n \in \mathbb{Z}$
910. $[2\pi n - 7\pi/6\,; 2\pi n + \pi/6]; n \in \mathbb{Z}$
911. $(\pi/4 + \pi n; \pi/2 + \pi n); n \in \mathbb{Z}$
912. $[n + 1/4\,; n + 3/4]; n \in \mathbb{Z}$

913. ▲ ជាបឋម យើងនឹងកំណត់ $x \in (0, 2\pi]$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាពពិតគ្រប់ n ។
❶ សន្មតថា $0 < x < 2\pi/3$ ។ បើ n ជាចំនួនគត់ធំបំផុត ដែល $nx \le {}^{2\pi}/_{3}$ ឬ $n = \left\lfloor \frac{2\pi}{3x} \right\rfloor$ នោះ $\frac{2\pi}{3} - x < nx \le 2\pi/3$ ។ បើ $x > \pi/3$ នោះ $nx > \pi/3$ ។ បើ $x < \pi/3$ នោះ $2\pi/3 - x > \pi/3 \implies nx > \pi/3$ ។ បើ $x = \pi/3$ នោះ $nx > 2\pi/3 - x = \pi/3$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន $\pi/3 < nx \le 2\pi/3$ ។ ដូច្នេះ $\sin nx \ge \sqrt{3}/2$ ។ នាំឱ្យ $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx > \sqrt{3}/2$ ។
❷ សន្មតថា $\frac{2\pi}{3} \le x \le 2\pi$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\sin x \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right]\\
&\sin 2x \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right]\\
&\vdots\\
&\sin nx \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right]
\end{aligned}$$

$$\implies \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

ដោយ $2\pi/3 \le x \le 2\pi \implies \pi/3 \le x/2 \le \pi \implies \cos\frac{2n+1}{2}x \ge -1$ និង $\cot\frac{x}{4} \le \sqrt{3}$ ។ ដូច្នេះ

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} \le \frac{\cos\frac{x}{2} + 1}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cot\frac{x}{4}}{2} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដូច្នេះវិសមភាពពិតចំពោះគ្រប់ n នោះ $2\pi/3 + 2k\pi \le x \le 2\pi + 2k\pi$ ចំពោះចំនួនគត់ k និងច្រាសមកវិញ ។

914. ▲ ១) បើ $x = 0$ នោះវិសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ y ។ បើ $x > 0$ នោះ $\cos y + \sin y \ge -\frac{1+x^2}{2x}$ ។ អនុគមន៍ $f(y) = \cos y + \sin y$ មានតម្លៃធំបំផុតស្មើ $\sqrt{2}$ និងតម្លៃតូចបំផុតស្មើ $-\sqrt{2}$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}
&-\sqrt{2} \ge -\frac{1+x^2}{2x} \iff x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \ge 0\\
&\implies 0 < x \le \sqrt{2} - 1; x \ge \sqrt{2} + 1
\end{aligned}$$

បើ $x<0 \;\Rightarrow \cos y+\sin y\le -\frac{1+x^2}{2x} \;\Rightarrow \sqrt{2}\le -\frac{1+x^2}{2x} \;\Rightarrow x\le -\sqrt{2}-1;\ -\sqrt{2}+1\le x<0$

ដូច្នេះជាសរុបគឺ $|x|\ge \sqrt{2}+1; |x|\le \sqrt{2}-1$ ។

២) យើងមាន $\Delta' = (\cos y+\sin y)^2-1=\sin 2y$ ។

ក) បើ $\sin 2y\le 0$ នោះ $f(x)\ge 0;\forall x\in\mathbb{R}$ ។ យើងទាញបាន $\frac{\pi}{2}+k\pi\le y\le (k+1)\pi;\quad (k\in\mathbb{Z})$ ។

ខ) បើ $\sin 2y>0$ នោះ $f(x)$ មានឫសពីរ តាងដោយ $x_1;x_2$ ដែល $x_1+x_2=-2(\cos y+\sin y); x_1x_2=1$ ។ យើងមាន $f(x)<0$ ចំពោះ x ស្ថិតនៅចន្លោះ x_1 និង x_2 ដូច្នេះ ដើម្បីឱ្យ $f(x)\ge 0;\forall x\ge 0$ នោះ $x_1\le 0; x_2\le 0 \;\Rightarrow\; -2(\cos y+\sin y)\le 0 \;\Rightarrow \cos y+\sin y\ge 0 \Rightarrow 2k\pi<y<\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ។

ផ្សំចូលគ្នារវាងក) និងខ) យើងទាញបាន

$$-\frac{\pi}{2}+2n\pi\le y\le (2n+1)\pi;\quad (n\in\mathbb{Z})$$

915.▲ តាង $S=\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|$ ។ យើងមាន $S^2=2-2\sqrt{1-\sin^2 2x}=2-2|\cos 2x|\le 2$ ។ យើងទាញបាន $S\le\sqrt{2}$ ។ ដូច្នេះវិសមីការខាងស្តាំពិតចំពោះគ្រប់ x ។

បើ $\pi/2\le x\le 3\pi/2$ នោះ $\cos x\le 0$ ដូច្នេះវិសមភាពខាងឆ្វេងពិត ។ សន្មតថា $\cos x>0$ នោះវិសមភាពខាងឆ្វេងសមមូលនឹង

$$2+2\cos 2x=4\cos^2 x\le S^2=2-2|\cos 2x| \;\Leftrightarrow\; \cos 2x\le 0$$
$$\Rightarrow x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]$$

ដូច្នេះសំណុំចម្លើយកំណត់ដោយ $\pi/4\le x\le 7\pi/4$ ។

៤.៧ ប្រព័ន្ធវិសមីការ

916. ▲ ដោយ $0 \leq x \leq \pi/4$ នោះ $\cos x \neq 0$ ។ ចែកសមីការទីមួយនឹង $\cos^3 x$ និង

តាង $\tan x = t$ យើងទាញបាន

$$(4-6m)t^3 + 3(2m-1)t(t^2+1) + 2(m-2)t^2 - (4m-3)(t^2+1) = 0$$
$$(4-6m)t^3 + (6m-3)t^3 + (6m-3)t + (2m-4)t^2 - (4m-3)t^2 - 4m + 3 = 0$$
$$t^3 - (1+2m)t^2 + 3(2m-1)t - 4m + 3 = 0$$
$$(t-1)(t^2 - 2mt + 4m - 3) = 0$$

យើងទាញបាន $t = 1$ ដែលត្រូវនឹង $x = \frac{\pi}{4}$ ជាឫសមួយនៃប្រព័ន្ធ ។ ដូច្នេះប្រព័ន្ធមានឫស

តែមួយគត់បើ លក្ខខណ្ឌមួយក្នុងចំណោមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមត្រូវបានបំពេញ

១) សមីការ $t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0$ មាន $\Delta = m^2 - 4m + 3 < 0 \Rightarrow 1 < m < 3$

២) សមីការ $t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0$ មានឫសមួយគត់ស្មើ 1 ។ ដូច្នេះ

$1 - 2m + 4m - 3 = 0; m = 1$ ។ បើ $m = 1$ នោះ $\Delta = 0$ សមីការមានឫសមួយ

គត់ ។

៣) សមីការ $t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0$ មានឫស $t_1 \leq t_2 < 0$ ដូច្នេះ

$$\Delta > 0; t_1 t_2 = 4m - 3 > 0; S = t_1 + t_2 = 2m < 0$$

វិសមីការនេះគ្មានឫស ។

ដូច្នេះដើម្បីឱ្យប្រព័ន្ធមានឫសមួយគត់ $1 \leq m < 3$ ។

៤.៨ អាំងតេក្រាល

917. ▲ យើងមាន

$$\sin x - \cos x + 1 = (A - 2B)\sin x + (2A + B)\cos x + 3A + C$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A - 2B = 1 \\ 2A + B = -1 \\ 3A + C = 1 \end{cases}$$
$$A = -\frac{1}{5}; B = -\frac{3}{5}; C = \frac{8}{5}$$

យើងទាញបាន

$$\frac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+2\cos x+3}=A+B\frac{(\sin x+2\cos x+3)'}{\sin x+2\cos x+3}+C\frac{1}{\sin x+2\cos x+3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x+1}{\sin x+2\cos x+3}dx$$

$$=\left(-\frac{x}{5}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x+3|+\frac{8}{5}\arctan\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{3\pi}{10}+\frac{3}{5}\ln\frac{5}{4}-\frac{8}{5}\arctan\frac{1}{2}$$

៥

ពហុធា

918. ▲ លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$P(xy) = P(x).P(y);\ \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

ក្នុង (1) យើងយក $x = y = 0$ យើងទាញបាន

$$P(0) = P^2(0)$$

ដូច្នេះ $P(0) = 1$ ឬ $P(0) = 0$ ។

១) បើ $P(0) = 1$ នោះ ក្នុង(1) យក $y = 0$ យើងទាញបាន $P(0) = P(x).P(0)$ នោះ

$$P(x) = 1;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

២) បើ $P(0) = 0$ នោះ $P(x) = xQ(x)$ ដែល $Q(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទាបជាង $P(x)$ មួយឯកតា ។ លក្ខខណ្ឌ(1) ទៅជា

$$xyQ(xy) = xyQ(x).Q(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

នោះ $Q(xy) = Q(x).Q(y);\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបាន $Q(x) = 1$ ឬ $Q(x) = x\,Q_1(x)$ ដែល $Q_1(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទាបជាង $Q(x)$ មួយឯកតា ។ ដូច្នេះ ជាសរុបយើងទាញបាន

$$P(x) = 1;\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$P(x) = x^n;\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

919. ▲ ដោយដឹងថា $2x + 1 = (x + 1)^2 - x^2$ នោះលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$P(x + 1) - (x + 1)^2 = P(x) - x^2$$

តាង $Q(x) = P(x) - x^2$ ។ ដូច្នេះ $Q(x) = Q(x + 1) = \cdots = Q(x + n) = \cdots$ ។

ដូច្នេះ $Q(0) = Q(1) = \cdots = Q(n) = \cdots$ ។ យើងទាញបាន $Q(x) - Q(0) \equiv 0$

ចំពោះ $x = 0, x = 1, \ldots, x = n, \ldots$ ។ ដូច្នេះ $Q(x) - Q(0) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ។ យើងទាញបាន

$$P(x) = x^2 + C$$

ដែល $C = Q(0) = P(0)$ ។ ជំនួសទំនាក់ទំនងដែលបានចូលលក្ខខណ្ឌដើម យើងទាញបាន

$$(x+1)^2 + C = x^2 + 2x + 1 + C$$

ពិតចំពោះគ្រប់ C ។ ដូច្នេះ

$$P(x) = x^2 + C$$

ដែល C ជាចំនួនថេរណាមួយ ។

920. ▲ យើងមាន

$$P((x+1)^2) - (x+1)^2 = P(x^2) - x^2$$

តាង $Q(t) = P(t) - t$ ។ យើងទាញបាន $Q(0) = Q(1) = \cdots = Q(n^2) = \cdots$ ។ ដូច្នេះ $Q(x) = Q(0)$ ។ យើងទាញបាន $P(x) = x + C$ ដែល $C = Q(0) = P(0)$ ។ ជំនួសចូលលក្ខខណ្ឌដើម យើងទាញបាន $P(x) = x + C$ ដែលC ជាចំនួនថេរណាមួយ ។

921. ▲ ពហុធា $f(x) - 5$ មានឫសជាចំនួនគត់ a, b, c, d ។ ដូច្នេះ

$$f(x) - 5 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x)$$

ដែល $g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m$ និង $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ជាចំនួនគត់ ។ សមីការ $f(x) = 8$ សមមូលនឹង

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x) = 3$$

ដូច្នេះបីក្នុងចំណោមចំនួនគត់បួន $x-a, x-b, x-c, x-d$ ស្មើ 1 ឬ -1 ។ ដូច្នេះត្រូវមានពីរដែលស្មើគ្នា ដែលករណីនេះមិនអាច ព្រោះចំនួនទាំងបួនខុស ។

922. ▲ តាង $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$ ដោយ $a_i \geq 0$ ចំពោះ $i < n$ និង $a_n > 0$ ។ យើងមាន $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ ។

តាង $x_{n+1} = x_1$ ។

បើ $n = 1$ យើងទាញបាន $[P(1)]^2 = 1.[P(1)]^2$ ពិត ។

បើ $n \geq 2$ យើងមាន

$$P^2(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i^2 X^{2i} + 2\sum_{i<j} a_i a_j X^{i+j}$$

ចំពោះ $p \in \mathbb{N}^*$ តាង

$$S_p = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^p$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$S_p \geq \left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^p\right]^{\frac{1}{n}} = 1$$

តែថា

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P^2\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i^2 S_{2i} + 2\sum_{i<j} a_i a_j S_{i+j} \geq \sum_{i=0}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j = P^2(1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} P^2\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right) \geq nP^2(1)$$

ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ ។

923. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} P(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{2010})^2 - (x^{1005})^2 \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{2010} - x^{1005})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{2010} + x^{1005}) \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{1004} + x^{1006} + \cdots + x^{2010})(1 + x + x^2 + \cdots \\ &\qquad + 2x^{1005} + \cdots + x^{2010}) \\ &= Q(x)R(x) \end{aligned}$$

924. ▲ តាង

$$(1 - 3x + 3x^2)^{743}(1 + 3x - 3x^2)^{744} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n \quad (1)$$

យើងចង់គណនា $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ (ដឺក្រេ n របស់ពហុធានេះស្មើនឹង $743.2 + 744.2 = 2974$) ។ ក្នុងទំនាក់ទំនង (1) យើងយក $x = 1$ យើងទាញបាន

$$1^{743}.1^{744} = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

ដូច្នេះផលបូកដែលចង់បានស្មើ 1 ។

925. ▲ សន្មតថាយើងពន្លាតកន្សោមពីរនេះរួចហើយ ហើយទទួលបានពហុធានៃ x ពីរ ។ បើយើងប្តូររបស់ x ទៅជា $-x$ នៅក្នុងពហុធាទាំងពីរ នោះមេគុណរបស់តួដែលស្វ័យគុណរបស់ x ជាចំនួនសេស ដូរសញ្ញា និង តួដែលមានស្វ័យគុណគូ នៅរក្សាសញ្ញាដដែល ។ តួ x^{20} មានស្វ័យគុណគូ ដូច្នេះវានៅរក្សាសញ្ញាដដែល ។ ដូច្នេះសញ្ញានិងតម្លៃរបស់មេគុណរបស់ x^{20} ក្រោយពន្លាត $(1+x^2-x^3)^{1000}$ ដូចគ្នានឹងពន្លាតរបស់កន្សោម $(1+x^2+x^3)^{1000}$ ដែរ ; សញ្ញានិងតម្លៃរបស់មេគុណរបស់ x^{20} ក្រោយពន្លាត $(1-x^2+x^3)^{1000}$ ដូចគ្នានឹងពន្លាតរបស់កន្សោម $(1-x^2-x^3)^{1000}$ ដែរ ។ កន្សោម $(1+x^2+x^3)^{1000}$ មានមេគុណទាំងអស់វិជ្ជមាន ដូច្នេះមេគុណរបស់ x^{20} ក្រោយពន្លាតរួចក៏វិជ្ជមានដែរ ។ កន្សោម $(1-x^2-x^3)^{1000}$ មានមេគុណខ្លះវិជ្ជមាន ខ្លះអវិជ្ជមាន ដូច្នេះមេគុណរបស់ x^{20} ក្រោយពន្លាតរួច ត្រូវមានតម្លៃតូចដោយវាត្រូវស៊ីសងគ្នារវាងមេគុណវិជ្ជមាននិង អវិជ្ជមាន ។ ដូច្នេះ មេគុណរបស់ x^{20} របស់ $(1+x^2-x^3)^{1000}$ ធំជាងរបស់ $(1-x^2+x^3)^{1000}$ ។

926. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&(1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{99}+x^{100})\\
&\qquad=[(1+x^2+x^4+\cdots+x^{100})-x(1+x^2+x^4+\cdots+x^{98})]\\
&\qquad\times[(1+x^2+x^4+\cdots+x^{100})+x(1+x^2+x^4+\cdots+x^{98})]\\
&\qquad=(1+x^2+x^4+\cdots+x^{100})^2-x^2(1+x^2+x^4+\cdots+x^{98})^2
\end{aligned}$$

927. ▲ a) តាមរូបមន្តផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
&(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+\cdots+x^{1000}\\
&=\frac{\frac{x^{1001}}{1+x}-(1+x)^{1000}}{\frac{x}{1+x}-1}=\frac{x^{1001}-(1+x)^{1001}}{x-1-x}=(1+x)^{1001}-x^{1001}\\
&\qquad=1+1001x+\binom{1001}{2}x^2+\binom{1001}{3}x^3+\cdots+1001x^{1000}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះមេគុណរបស់ x^{50} ស្មើនឹង

$$\binom{1001}{50}=\frac{1001!}{50!\,951!}$$

b) តាង $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \cdots + 1000(1+x)^{1000}$ ។

យើងមាន

$$\begin{aligned}(1+x)P(x) - P(x) &= [(1+x)^2 + 2(1+x)^3 + \cdots + 999(1+x)^{1000} \\ &+ 1000(1+x)^{1001}] \\ &- [(1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \cdots + 1000(1+x)^{1000}] \\ &= 1000(1+x)^{1001} \\ &- [(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^{1000}] \\ &= 1000(1+x)^{1001} - \frac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{1+x-1} \\ &= 1000(1+x)^{1001} - \frac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(x) &= \frac{1000(1+x)^{1001}}{x} - \frac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{x^2} \\ &= 1000\left(1001 + \binom{1001}{2}x + \binom{1001}{3}x^2 + \cdots + 1001x^{999} \right. \\ &\left. + x^{1000}\right) \\ &- \left(\binom{1001}{2} + \binom{1001}{3}x + \binom{1001}{4}x^2 + \cdots + 1001x^{998} \right. \\ &\left. + x^{999}\right)\end{aligned}$$

ដូច្នេះមេគុណរបស់ x^{50} ស្មើនឹង

$$\begin{aligned}1000\binom{1001}{51} - \binom{1001}{52} &= \frac{1000.1001!}{51!\,950!} - \frac{1001!}{52!\,950!} \\ &= \frac{1001!}{52!\,950!}[52.1000 - 950] = \frac{51050.1001!}{52!\,950!}\end{aligned}$$

928. ▲ តាង

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \underbrace{(\ldots(((x-2)^2-2)^2-2)^2 - \cdots - 2)^2}_{n \text{ ដង}} \\ &= Q_n(x)x^3 + B_n x^2 + A_n x + C_n\end{aligned}$$

ដែល $Q_n(x)$ ជាពហុធានៃ x ។ យក $x = 0$ យើងទាញបាន

$$C_n = \underbrace{(\dots(((0-2)^2-2)^2-2)^2-\dots-2)^2}_{n \text{ ដង}} = \underbrace{(\dots((4-2)^2-2)^2-\dots-2)^2}_{n \text{ ដង}}$$
$$= \underbrace{(\dots(4-2)^2-\dots-2)^2}_{(n-1) \text{ ដង}} = \dots = ((4-2)^2-2)^2 = (4-2)^2$$
$$= 4$$

ដូច្នេះ

$$\underbrace{(\dots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\dots-2)^2}_{n \text{ ដង}} = Q_n(x)x^3 + B_nx^2 + A_nx + 4$$

យើងមាន

$$\underbrace{(\dots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\dots-2)^2}_{n \text{ ដង}}$$
$$= \left[\underbrace{(\dots((x-2)^2-2)^2-\dots-2)^2}_{n-1 \text{ ដង}} - 2\right]^2$$
$$= [(Q_{n-1}x^3 + B_{n-1}x^2 + A_{n-1}x + 4) - 2]^2$$
$$= [Q_{n-1}x^3 + B_{n-1}x^2 + A_{n-1}x + 2]^2$$
$$= Q_{n-1}^2x^6 + 2Q_{n-1}B_{n-1}x^5 + (2Q_{n-1}A_{n-1}B_{n-1}^2)x^4$$
$$+ (4Q_{n-1} + 2B_{n-1}A_{n-1})x^3 + (4B_{n-1} + A_{n-1}^2)x^2 + 4A_{n-1}x$$
$$+ 4$$
$$\Longrightarrow \; A_n = 4A_{n-1}$$
$$B_n = A_{n-1}^2 + 4B_{n-1}$$

ដោយ $P_1(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow A_1 = -4; B_1 = 1$ ។ យើងទាញបាន

$A_2 = -4.4 = -4^2; A_3 = -4^3; \dots.$ ហើយជាទូទៅ $A_n = -4^n$ ។ យើងមាន

$$B_n = A_{n-1}^2 + 4B_{n-1} = A_{n-1}^2 + 4(A_{n-2}^2 + 4B_{n-2}) = A_{n-1}^2 + 4A_{n-2}^2 + 4^2B_{n-2}$$
$$= A_{n-1}^2 + 4A_{n-2}^2 + 4^2(A_{n-3}^2 + 4B_{n-3})$$
$$= A_{n-1}^2 + 4A_{n-2}^2 + 4^2A_{n-3}^2 + 4^3B_{n-3} = \cdots$$
$$= A_{n-1}^2 + 4A_{n-2}^2 + 4^2A_{n-3}^2 + \cdots + 4^{n-3}A_2^2 + 4^{n-2}A_1^2$$
$$+ 4^{n-1}B_1$$
$$= 4^{2n-2} + 4.4^{2n-4} + 4^2.4^{2n-6} + \cdots + 4^{k-2}.4^2 + 4^{n-1}.1$$
$$= 4^{2n-2} + 4^{2n-3} + 4^{2n-4} + \cdots + 4^{n+1} + 4^{n-1}$$
$$= \frac{4^{2n-1} - 4^{n-1}}{3}$$

929. ▲ a) របៀបទី ១ ៖ យើងដឹងថា $x^k - 1$ ចែកដាច់នឹង $x-1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។ យើងមាន

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$$
$$= (x-1) + (x^3-1) + (x^9-1) + (x^{27}-1) + (x^{81}-1)$$
$$+ (x^{243}-1) + 6$$

ដូច្នេះពេលចែកពហុធានេះនឹង $(x-1)$ គេសល់សំណល់ស្មើ 6 ។

របៀបទី ២ ៖ តាង $q(x)$ ជាផលចែក និង r ជាសំណល់ ។ យើងទាញបាន

$$x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}=(x-1)q(x)+r$$

យក $x=1$ យើងទាញបាន $r=6$ ។

b) តាង $q(x)$ ជាផលចែក និង r_1x+r_2 ជាសំណល់ ។ យើងទាញបាន

$$x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}=q(x)(x^2-1)+r_1x+r_2$$

យក $x=1 \Rightarrow r_1+r_2=6$

យក $x=-1 \Rightarrow -r_1+r_2=-6$

ដូច្នេះ $r_1=6$ និង $r_2=0$ ។ សំណល់ស្មើ $6x$ ។

930. ▲ តាង $P(x)$ ជាពហុធាក្នុងសម្មតិកម្ម ។ តាង $q(x)$ ជាផលចែក និង $r(x)=ax+b$ ជាសំណល់ចែករវាងពហុធានេះនឹង $(x-1)(x-2)$ ។ យើងមាន

$$P(x)=(x-1)(x-2)q(x)+ax+b \quad (*)$$

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន

$$P(x)=(x-1)q_1(x)+2$$
$$P(x)=(x-2)q_2(x)+1$$

ដូច្នេះ $P(1)=2; P(2)=1$ ។ ជំនួស $x=1$ និង $x=2$ ចូលក្នុង (*) យើងទាញបាន

$$2=P(1)=a+b$$
$$1=P(2)=2a+b$$

ដូច្នេះ $a=-1, b=3$ ។ សំណល់ស្មើនឹង $-x+3$ ។

931.▲ យើងមាន

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=(x^2+1)(x^2+x+1)$$
$$x^{12}-1=(x^6-1)(x^6+1)=(x^3-1)(x^3+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$$
$$=(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$$
$$\Rightarrow x^4+x^3+2x^2+x+1=\frac{x^{12}-1}{(x-1)(x^3+1)(x^4-x^2+1)}$$
$$=\frac{x^{12}-1}{x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1}$$

ដូច្នេះ ចែក $x^{1951}-1$ នឹង $x^4+x^3+2x^2+x+1$ គឺដូចគ្នានឹងចែក $x^{1951}-1$ នឹង $x^{12}-1$ រួចគុណនឹង $x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1$ ដែរ ។ យើងមាន

$$\frac{x^{1951}-1}{x^{12}-1}=\frac{x^7[(x^{12})^{162}-1]+x^7-1}{x^{12}-1}$$
$$=x^{1939}+x^{1927}+x^{1915}+x^{1903}+\cdots+x^{19}+x^7+\frac{x^7-1}{x^{12}-1}$$

ដូច្នេះមេគុណរបស់ x^{14} របស់ផលចែកស្មើនឹងមេគុណរបស់ x^{14} នៅក្នុងផលគុណ

$$\left(x^{1939}+x^{1927}+x^{1915}+x^{1903}+\cdots+x^{19}+x^7+\frac{x^7-1}{x^{12}-1}\right)$$
$$\times(x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1)$$

ដែលស្មើនឹង -1 ។

932.▲ a) តាង $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ។ ដូច្នេះ

$$x^2=2+2\sqrt{2}.\sqrt{3}+3=5+2\sqrt{6}$$
$$\Rightarrow x^2-5=2\sqrt{6}$$
$$\Rightarrow x^4-10x^2+25=24$$
$$\Rightarrow x^4-10x^2+1=0$$

b) តាង $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ ។ ដូច្នេះ

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$$
$$\Rightarrow x^2=2+2\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$$
$$\Rightarrow x^3=2\sqrt{2}+3.2.\sqrt[3]{3}+3.\sqrt{2}.\sqrt[3]{9}+3 \quad (*)$$

$$x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3} \ \Rightarrow\ \sqrt[3]{3}=x-\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow\ \sqrt[3]{9}=x^2-2-2\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}=x^2-2-2\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right)=x^2+2-2\sqrt{2x}$$

(*) $\Rightarrow x^3=2\sqrt{2}+3.2\left(x-\sqrt{2}\right)+3.\sqrt{2}.\left(x^2+2-2\sqrt{2x}\right)+3$

$$\Rightarrow x^3+6x-3=\sqrt{2}(3x^2+2)$$
$$\Rightarrow x^6+36x^2+9+12x^4-6x^3-36x=18x^4+24x^2+8$$
$$\Rightarrow x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0$$

933.▲ តាមទ្រឹស្តីបទវៀត

$$\alpha+\beta=-p,\alpha\beta=1$$
$$\gamma+\delta=-q,\gamma\delta=1$$

ដូច្នេះ

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=[(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)][(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)]$$
$$=(\alpha\beta+\alpha\delta-\beta\gamma-\gamma\delta)(\alpha\beta+\beta\delta-\alpha\gamma-\gamma\delta)$$
$$=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\beta\delta-\alpha\gamma)=\alpha\beta\delta^2-\alpha^2\gamma\delta-\beta^2\gamma\delta+\alpha\beta\gamma^2$$
$$=\delta^2-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2=[(\delta+\gamma)^2+2\delta\gamma]-[(\alpha+\beta)-2\alpha\beta]$$
$$=(q^2-2)-(p^2-2)=q^2-p^2$$

934.▲ ដោយ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $x^2+px+q=0$ នោះ $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+px+q$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)&=[(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)][(\alpha-\delta)(\beta-\delta)]\\&=[(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)][(\delta-\alpha)(\delta-\beta)]\\&=(\gamma^2+p\gamma+q)(\delta^2+p\delta+q)\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\gamma+\delta=-P;\gamma\delta=Q$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)&=(\gamma^2+p\gamma+q)(\delta^2+p\delta+q)\\&=\gamma^2\delta^2+p\gamma^2\delta+q\gamma^2+p\gamma\delta^2+p^2\gamma\delta+pq\gamma+q\delta^2+pq\delta\\&\quad+q^2\\&=(\gamma\delta)^2+p\gamma\delta(\gamma+\delta)+q[(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta]+p^2\gamma\delta\\&\quad+pq(\gamma+\delta)+q^2\\&=Q^2-pPQ+q(P^2-2Q)+p^2Q-pqP+q^2\\&=Q^2+q^2-pP(Q+q)+qP^2+p^2Q-2qQ\end{aligned}$$

935.▲ សមីការទី២នាំឱ្យ $a=-(x^2+x)$ ។ ជំនួសចូលសមីការទី១ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&x^2-(x^2+x)x+1=0\\&\Rightarrow x^3-1=0\\&\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0\\&\Rightarrow x_1=1;x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

បើ $x=1\Rightarrow a=-(x^2+x)=-2$

បើ $x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x^2+x=-1\Rightarrow a=1$

ដូច្នេះ $a\in\{-2,1\}$ ។

936.▲ ជំនួស $x=-b$ ចូល យើងទាញបាន $(b+a)(b+10)+1=0$ ។ ដូច្នេះ ជាចាំបាច់ត្រូវតែ $(b+a)(b+10)=-1$ ។ ដោយ a,b ជាចំនួនគត់ នោះ $(b+a)$ និង $(b+10)$ ជាចំនួនគត់ដែរ ។ តែ $-1=(1)(-1)=(-1)(1)$ នោះ

i) $b+10=1,b+a=-1\Rightarrow b=-9,a=8$ ។ យើងទាញបាន

$$(x-8)(x-10)+1=(x-9)^2$$

ii) $b+10=-1,b+a=1\Rightarrow b=-11,a=12$ ។ យើងទាញបាន

$$(x-12)(x-10)+1=(x-11)^2$$

937.▲ ជំនួស $x=-m$ ចូល យើងទាញបាន

$$(m+p)(m+2011)+1=0$$

ដូច្នេះជាចាំបាច់ត្រូវតែ $(m+p)(m+2011)=-1$ ។ ដោយ m,p ជាចំនួនគត់ នោះ $(m+p)$ និង $(m+2011)$ ជាចំនួនគត់ដែរ ។ តែ $-1=(1)(-1)=(-1)(1)$ នោះ

i) $m+2011=1, m+p=-1 \Rightarrow m=-2010, p=2009$

ii) $m+2011=-1, m+p=1 \Rightarrow m=-2012, p=2013$

938.▲ ពហុធាដឺក្រេទីបួនអាចដាក់ជាកត្តាផលគុណរវាងពហុធាដឺក្រេទីមួយ និងទីបី ឬរវាងពហុធាដឺក្រេទីពីរចំនួនពីរ ។ ដំបូងយើងពិនិត្យករណីទីមួយ ។ យើងមាន

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x+p)(x^3+qx^2+rx+s) \quad (1)$$

សម្គាល់ ៖ ដោយមេគុណរបស់ x^4 នៅអង្គខាងឆ្វេងស្មើ $+1$ នោះមេគុណរបស់ x និង x^3 នៃអង្គខាងស្តាំ អាចស្មើ $+1$ ឬ -1 ។ តែករណី $(-x+p_1)(-x^3+q_1x^2+r_1x+s_1)$ យើងនៅតែអាចបំលែងពហុធានេះឱ្យមានរាង $(x+p)(x^3+qx^2+rx+s)$ ដដែល ។

ជំនួស $x=0, x=a, x=b, x=c$ ចូលក្នុងសមភាព (1) យើងទាញបាន

$$\begin{cases}(0+p)(s)=1\\(a+p)(a^3+qa^2+ra+s)=1\\(b+p)(b^3+qb^2+rb+s)=1\\(c+p)(c^3+qc^2+rc+s)=1\end{cases} \quad (*)$$

ដោយដឹងថា $1=(1)(1)$ ឬ $1=(-1)(-1)$ មានន័យថា 1 អាចបំបែកជាផលគុណដែលកត្តាផលគុណរបស់វា មានតែពីរបែបតែប៉ុណ្ណោះ គឺ 1 ឬ -1 ។ តែតាម (*) ដោយ $p, a+p; b+p, c+p$ សុទ្ធតែមានតម្លៃខុសៗគ្នា ដូច្នេះតាម(*) យើងទទួលបានកត្តាផលគុណរបស់ 1 មានចំនួនច្រើនលើសពីពីរ : $p, a+p; b+p, c+p, \ldots$ ។ ដូច្នេះ (*) មិនអាចមានចម្លើយបានទេ ។

យើងពិនិត្យករណីទីពីរ ។ យើងមាន

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$$

ជំនួស $x=0, x=a, x=b, x=c$ ចូល យើងទាញបាន $(x^2+px+q)(x^2+rx+s)=1$ ចំពោះតម្លៃបួនផ្សេងគ្នានៃ x គឺ $x=0, x=a, x=b, x=c$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{cases} x^2+px+q=1 \\ x^2+rx+s=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+px+q=-1 \\ x^2+rx+s=-1 \end{cases}$$

ចំពោះ $x=0, x=a, x=b, x=c$ ។

យើងដឹងថា x^2+px+q មិនអាចស្មើ 1 ចំពោះតម្លៃ x ចំនួនបួនផ្សេងគ្នាបានទេ ព្រោះសមីការ $x^2+px+q=1$ មានឫសយ៉ាងច្រើនចំនួនពីរ ។ ដូចគ្នា x^2+px+q មិនអាចស្មើ -1 ចំពោះតម្លៃ x ចំនួនបួនផ្សេងគ្នាបានទេ ព្រោះសមីការ $x^2+px+q=-1$ មានឫសយ៉ាងច្រើនចំនួនពីរ ។ ដូច្នេះចំពោះ x ចំនួនពីរ យើងមាន $x^2+px+q=1$ និងចំពោះ x ពីរទៀត យើងមាន $x^2+px+q=-1$ ។

- សន្មតថា ចំពោះ $x=0$ និង $x=a$ យើងមាន $x^2+px+q=1$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន $q=1$ និង $a=-p$ ។ ដូច្នេះចំពោះ $x=b$ និង $x=c$ ពហុធា x^2+px+q ត្រូវតែស្មើ -1 ។ យើងទាញបាន

$$\begin{cases} b^2+pb+q=-1 \\ c^2+pc+q=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2-ab+1=-1 \\ c^2-ac+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(b-a)=-2 \\ c(c-a)=-2 \end{cases}$$

យកសមីការទីមួយដកសមីការទីពីរ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} & b(b-a)-c(c-a)=0 \\ \Leftrightarrow\ & b^2-ab-c^2+ac=0 \\ \Leftrightarrow\ & (b-c)(b+c)-a(b-c)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (b-c)(b+c-a)=0 \\ \Rightarrow\ & b+c-a=0 \\ \Rightarrow\ & b-a=-c; c-a=-b \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$b(b-a)=-2 \Rightarrow b(-c)=-2 \Rightarrow bc=2$$

- បើ $b=1$ នោះ $c=2; a=b+c=3$

$$\begin{aligned} x(x-a)(x-b)(x-c)+1 &= x(x-3)(x-1)(x-2)+1 \\ &= (x^2-3x+1)^2 \end{aligned}$$

- បើ $b=-1$ នោះ $c=-2; a=b+c=-3$

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1 = x(x+3)(x+1)(x+2)+1 = (x^2-3x+1)^2$$

- សន្មតថា ចំពោះ $x=0$ និង $x=a$ យើងមាន $x^2+px+q=-1$ និងចំពោះ $x=b$ និង $x=c$ យើងមាន $x^2+px+q=1$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}
&q=-1\\
&a^2+pa-1=-1\\
&b^2+pb-1=1\\
&c^2+pc-1=1
\end{aligned}$$

យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
&p=-a\\
&b(b-a)=2 \quad \text{(i)}\\
&c(c-a)=2 \quad \text{(ii)}\\
\text{(i)\& (ii)} &\Rightarrow (b-c)(b+c-a)=0\\
&\Rightarrow a=b+c \quad \text{(iii)}\\
\text{(i)\&(iii)} &\Rightarrow bc=-2
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}
&b=2\\
&c=-1\\
&a=b+c=1\\
&x(x-a)(x-b)(x-c)+1=x(x-1)(x-2)(x+1)+1\\
&=(x^2-x-1)^2
\end{aligned}$$

ឬ

$$\begin{aligned}
&b=1\\
&c=-2\\
&a=b+c=-1\\
&x(x-a)(x-b)(x-c)+1=x(x+1)(x-1)(x+2)+1\\
&=(x^2+x-1)^2
\end{aligned}$$

939.▲ (a) សន្មតថា

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)-1=p(x)q(x)$$

ដែល $p(x)$ និង $q(x)$ ជាពហុធាពីរដែលមានដឺក្រេ ≥ 1 ហើយមានមេគុណជាចំនួនគត់ និងផលបូកដឺក្រេនៃពហុធាពីរនេះបូកគ្នាស្មើ n ។ យើងសន្មតថា មេគុណរបស់តួនាំមុខ (តួមានដឺក្រេខ្ពស់បំផុត)របស់ពហុធាទាំងពីរស្មើ $+1$ ព្រោះមេគុណរបស់ x^n ស្មើ $+1$ ដែរ (វាអាចស្មើ -1 ទាំងពីរដូចគ្នា តែយើងនៅតែអាចបំលែងមកជា $+1$ ទាំងពីរបានដដែល ឧទាហរណ៍ $(x+1)(x+2)\equiv(-x-1)(-x-2)$) ។ បើយើងជំនួស $x=a_1, x=$

$a_2, x = a_3, \ldots, x = a_n$ ចូល ហើយដោយដឹងថា -1 អាចបំបែកជាកត្តាផលគុណបានតែ $-1 = 1(-1)$ នោះយើងឃើញថា ចំពោះតម្លៃ x នីមួយៗទាំងនេះ, យើងមាន $p(x) = 1$ និង $q(x) = -1$ ឬមិនអ៊ីចឹងទេ $p(x) = -1$ និង $q(x) = 1$ ។ ដូច្នេះផលបូក $p(x) + q(x) = 0$ ត្រង់ $x = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ហើយសមីការ $p(x) + q(x) = 0$ មានឫសចំនួន n ផ្សេងគ្នា គឺ $x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 = a_3, \ldots, x_n = a_n$ ។ ដូច្នេះ $p(x) + q(x)$ ចែកដាច់នឹង $x - a_1, x - a_2, \ldots, x - a_n$ ហើយនាំឱ្យចែកដាច់នឹង $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ ។ តែដឺក្រេរបស់ពហុធា $p(x) + q(x)$ មានតម្លៃត្រឹមតែដឺក្រេធំបំផុតរវាង $p(x)$ និង $q(x)$ តែប៉ុណ្ណោះ ហើយដឺក្រេរបស់ពហុធា $p(x)$ និង $q(x)$ មានតម្លៃតូចជាង n ដែល n ជាដឺក្រេរបស់ $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_n) - 1$ ។ ដូច្នេះ $p(x) + q(x)$ មិនអាចចែកដាច់នឹងផលគុណ $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ បានទេ ។ ដោយសារភាពផ្ទុយគ្នានេះ យើងសន្និដ្ឋានបានថាពហុធាមិនអាចបំបែកជាកត្តាផលគុណបានដូចការសន្មតទេ ។

(b) សន្មតថា

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_n) + 1 = p(x)q(x)$$

ដែល $p(x)$ និង $q(x)$ ជាពហុធាពីរដែលមានដឺក្រេ ≥ 1 ហើយមានមេគុណជាចំនួនគត់ និងផលបូកដឺក្រេនៃពហុធាពីរនេះចូលគ្នាស្មើ n ។ យើងសន្មតថា មេគុណរបស់តួនាំមុខរបស់ពហុធាទាំងពីរស្មើ $+1$ ។ បើយើងជំនួស $x = a_1, x = a_2, x = a_3, \ldots, x = a_n$ ចូល ហើយដោយដឹងថា 1 អាចបំបែកជាកត្តាផលគុណបានតែ $1 = 1.1 = (-1).(-1)$ នោះយើងឃើញថា ចំពោះតម្លៃ x នីមួយៗទាំងនេះ, យើងមាន $p(x) = 1$ និង $q(x) = 1$ ឬមិនអ៊ីចឹងទេ $p(x) = -1$ និង $q(x) = -1$ ។

ដោយ $p(x) - q(x)$ ស្មើសូន្យចំពោះតម្លៃ x ចំនួន n ផ្សេងគ្នា នោះយើងទាញបានថា $p(x) - q(x) \equiv 0 \Rightarrow p(x) \equiv q(x)$ ហើយនាំឱ្យ n ត្រូវតែជាចំនួនគូ ។ ដូច្នេះ $n = 2k$ ដែល k ជាដឺក្រេរបស់ $p(x)$ និង $q(x)$ ។ ដូច្នេះយើងអាចសរសេរសមភាពជា

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_n) = p^2(x) - 1$$

$$\Leftrightarrow\ (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)=[p(x)+1][p(x)-1]$$

ពេលនេះផលគុណ $[p(x)+1][p(x)-1]$ មានតម្លៃស្មើសូន្យត្រង់ $x=a_1, x=a_2,\dots,x=a_{2k}$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះតម្លៃ x នីមួយៗ, ត្រូវមានពហុធាយ៉ាងតិចមួយក្នុងចំណោម $p(x)+1$ និង $p(x)-1$ ដែលត្រូវស្មើសូន្យ ។ ដូច្នេះមានន័យថា $p(x)+1$ ឬមិនអ៊ីចឹងទេ $p(x)-1$ ឬទាំងពីរ ចែកដាច់នឹង $x-a_1$ ហើយដូចគ្នា យើងទាញបានភាពចែកដាច់នឹង $x-a_2, x-a_3,\dots$ ។ ពហុធាដឺក្រេ k មិនអាចចែកដាច់នឹងផលគុណដែលមានចំនួនកត្តាដែលមានរាង $x-a_i$ លើសពី k បានទេ ។ ដូច្នេះ ពហុធា $p(x)+1$ មានដឺក្រេ k ត្រូវមានចំនួនកត្តាស្មើ k ។ ដោយ $p(x)+1$ មានមេគុណនាំមុខស្មើ 1 ដូច្នេះ $p(x)+1$ ត្រូវតែស្មើនឹងផលគុណកត្តាដែលមានរាង $(x-a_i)$ ចំនួន k ។ ដូច្នេះ $p(x)+1$ ជាផលគុណនៃកត្តាចំនួនk ក្នុងចំណោម $(x-a_1),(x-a_2),\dots,(x-a_{2k})$ និង $p(x)-1$ ត្រូវស្មើនឹងផលគុណនៃកត្តាចំនួន k ទៀតដែលនៅសល់ ។ យើងសន្មតថា

$$p(x)+1=(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{2k-1})$$
$$p(x)-1=(x-a_2)(x-a_4)\dots(x-a_{2k})$$

យើងយកសមីការទីមួយដកសមីការទីពីរ យើងទទួលបានសមភាព

$$2=(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{2k-1})-(x-a_2)(x-a_4)\dots(x-a_{2k})$$

ពេលនេះយើងពិនិត្យករណីពិសេសមួយ បើយើងជំនួស $x=a_2$ យើងទាញបាន 2 ជាផលគុណនៃកត្តាចំនួន k ផ្សេងគ្នា

$$2=(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_{2k-1}) \quad (1)$$

តែដោយ 2 អាចដាក់ជាផលគុណនៃកត្តាយ៉ាងច្រើនចំនួន 3 ផ្សេងគ្នាតែប៉ុណ្ណោះ ឧទាហរណ៍ $2=1.(-1)(-2)$ ដូច្នេះត្រូវតែ $k\le 3$ ។ តែករណី $k=3$ មិនអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) បានទេព្រោះ បើ $k=3$ និងឧបមាថា $a_1<a_2<a_3$ នោះ $2=(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_5)$ ដែល $a_2-a_1>a_2-a_3>a_2-a_5$ ហើយដូច្នេះ $a_2-a_1=1, a_2-a_3=-1, a_2-a_5=-2$ ។ ជំនួស $x=a_4$ ចូលក្នុង

$$2=(x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)-(x-a_2)(x-a_4)(x-a_6)$$

យើងទាញបាន

$$2=(a_4-a_1)(a_4-a_3)(a_4-a_5)$$

ដែលដោយ $a_4-a_1>a_4-a_3>a_4-a_5$ នោះ $a_4-a_1=1, a_4-a_3=-1, a_4-a_5=-2 \Rightarrow a_4=a_2$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។

ដូច្នេះមានតែករណីចំនួនពីរតែប៉ុណ្ណោះដែលអាចគឺ $k=2$ និង $k=1$ ។

បើ $k=1$ យើងមាន

$$2(x-a_1)-(x-a_2) \ \Rightarrow a_2=a_1+2$$

តាង $a=a_2$ យើងបាន

$$\begin{aligned}(x-a_1)(x-a_2)+1&=(x-a)(x-a-2)+1\\&=(x-a-1)^2\end{aligned}$$

បើ $k=2$ យើងមាន

$$2=(x-a_1)(x-a_3)-(x-a_2)(x-a_4)$$

ដោយយើងនឹងសន្មតថា $a_1<a_3$ និង $a_2<a_4$ ។ យើងជំនួស $x=a_2$ ចូលក្នុងសមីការនេះ ហើយបន្ទាប់មកជំនួស $x=a_4$ ចូល យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned}2=(a_2-a_1)(a_2-a_3), a_2-a_1>a_2-a_3\\2=(a_4-a_1)(a_4-a_3), a_4-a_1>a_4-a_3\end{aligned}$$

តែ 2 អាចបំបែកជាផលគុណបានតែពីរបែបតែប៉ុណ្ណោះ $2=2.1$ និង $2=(-1).(-2)$ ។ ដោយ $a_2-a_1<a_4-a_1$ នោះ

$$\begin{aligned}a_2-a_1=-1, a_2-a_3=-2\\a_4-a_1=2, a_4-a_3=1\end{aligned}$$

តាង $a=a_1$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}a_2&=a-1\\a_3&=a+1\\a_4&=a+2\end{aligned}$$

និង

$$\begin{aligned}&(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+1\\&\quad=(x-a)(x-a+1)(x-a-1)(x-a-2)+1\\&\quad=[x^2-(2a-1)x+a^2+a-1]^2\end{aligned}$$

940.▲ សន្មតថា

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1\equiv p(x)\,q(x) \qquad (1)$$

ដែល $p(x)$ និង $q(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់ និងមានមេគុណនាំមុខស្មើ 1 ។ ដោយជំនួស $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ ចូលក្នុង (1) យើងទាញបាន $p(x) = 1$ និង $q(x) = 1$ ឬ $p(x) = -1$ និង $q(x) = -1$ ចំពោះ $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ ។

សន្មតថា $p(x) = 1$ ចំពោះ $x = a_i$ និង $p(x) = -1$ ចំពោះ $x = a_j$ ដែល $i \neq j$ ។ ដូច្នេះចំពោះតម្លៃ x ខ្លះដែលឋិតនៅចន្លោះ a_i និង a_j យើងមានពហុធា $p(x)$ មានតម្លៃស្មើសូន្យ ព្រោះ ពហុធាជាអនុគមន៍ជាប់ វាត្រូវតែកើតពី -1 ទៅ $+1$ ដោយកាត់តាមអ័ក្ស $y = 0$ ។ តែករណីនេះមិនអាចទេ ព្រោះអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ (1) ធំជាង 1 ជានិច្ច ដូច្នេះមិនអាចស្មើ 0 បានទេ ដូច្នេះ $p(x)$ ត្រូវតែខុសពីសូន្យដែរ ។ ដូច្នេះ $p(x)$ មានតម្លៃថេរស្មើ $+1$ ចំពោះគ្រប់ $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ ឬ $p(x)$ មានតម្លៃថេរស្មើ -1 ចំពោះគ្រប់ $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ ។ ដូចគ្នា $q(x)$ មានតម្លៃថេរស្មើ $+1$ ចំពោះគ្រប់ $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ ឬ $q(x)$ មានតម្លៃថេរស្មើ -1 ចំពោះគ្រប់ $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ ។ ដូច្នេះ $p(x)$ និង $q(x)$ មានតម្លៃថេរស្មើ $+1$ ចំពោះគ្រប់ $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ ឬ $p(x)$ និង $q(x)$ មានតម្លៃថេរស្មើ -1 ចំពោះគ្រប់ $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ ។

សន្មតថា $p(x)$ និង $q(x)$ មានតម្លៃថេរស្មើ $+1$ ចំពោះគ្រប់ $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ ។ ក្នុងករណីនេះ $p(x) - 1$ និង $q(x) - 1$ មានតម្លៃស្មើសូន្យ ចំពោះគ្រប់ $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ ។ដូច្នេះ $p(x) - 1$ និង $q(x) - 1$ ចែកដាច់នឹង $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ ។ តែដោយផលបូកដឺក្រេរបស់ពហុធា $p(x)$ និង $q(x)$ ត្រូវមានតម្លៃស្មើដឺក្រេរបស់ពហុធា $(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1$, ដែលស្មើ $2n$, នោះយើងសន្និដ្ឋានបានថា $p(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ និង $q(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ ។ យើងទាញបានសមភាព

$$\begin{aligned}
&(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1 \equiv p(x)\, q(x) \\
&\equiv [(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) + 1][(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) + 1] \\
&\equiv [(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) + 1]^2 \\
&\equiv (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 2(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) + 1 \\
&\qquad \Longrightarrow\ (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) \equiv 0
\end{aligned}$$

សមភាពនេះមិនអាចពិតចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ បានទេ ។ ដូច្នេះ $p(x)$ និង $q(x)$ មិនអាចមានតម្លៃស្មើ 1 ចំពោះគ្រប់ $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ បានទេ ។ ដូចគ្នា $p(x)$ និង $q(x)$ មិនអាចមានតម្លៃស្មើ -1 ចំពោះគ្រប់ $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ បានទេ ។

ដូច្នេះ គេមិនអាចបំបែក

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2 \dots (x-a_n)^2 + 1$$

ជាផលគុណនៃពហុធាពីរដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់បានទេ ។

941.▲ បើពហុធាដឺក្រេទី៧អាចដាក់ជាផលគុណនៃពហុធាពីរតាងដោយ p(x) និង q(x) ដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ នោះដឺក្រេរបស់ពហុធាមួយក្នុងចំណោមនេះធំមិនលើសពី 3 ទេ ។ សន្មតថា p(x) មានដឺក្រេធំមិនលើសពី 3 ។ យើងមាន $P(x) = p(x)q(x) = \pm 1$ ចំពោះតម្លៃ x គត់ចំនួនប្រាំពីរ ។ ដោយមេគុណរបស់ពហុធាសុទ្ធតែជាចំនួនគត់ នោះ p(x) មានតម្លៃ +1 ឬ −1 ចំពោះតម្លៃ x គត់ចំនួនប្រាំពីរដែរ ។ ក្នុងចំណោមតម្លៃ x គត់ទាំង 7 ត្រូវមានតម្លៃ x យ៉ាងតិចចំនួន 4 ដែល p(x) មានតម្លៃ +1 ឬមិនអ៊ីចឹងទេ ត្រូវមានតម្លៃ x យ៉ាងតិចចំនួន 4 ដែល p(x) មានតម្លៃ −1 ។ បើ $p(x) = +1$ ចំពោះតម្លៃ x យ៉ាងតិចចំនួន 4 នោះមិនពិត ព្រោះ $p(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបី ដែលយ៉ាងច្រើនមានឫសយ៉ាងច្រើនចំនួនបី ។ ករណី $p(x) = -1$ ដូចគ្នា ។ ដូច្នេះយើងមិនអាចបំបែក $P(x) = p(x)q(x)$ ។

942.▲ តាង p និង q ជាចំនួនគត់ពីរដែលគូទាំងពីរឬសេសទាំងពីរ ។ យើងមាន $p-q$ ជាចំនួនគូ និង

$$P(p) - P(q) = a_0(p^n - q^n) + a_1(p^{n-1} - q^{n-1}) + \dots + a_{n-2}(p^2 - q^2) + a_{n-1}(p-q)$$

ចែកដាច់នឹងចំនួនគូ $(p-q)$ ដូច្នេះ $P(p) - P(q)$ ជាចំនួនគូដែរ ។

ដូចគ្នាដែរ បើ p គូ នោះ $P(p) - P(0)$ គូដែរ ។ តែ $P(0)$ សេស ដូច្នេះ $P(p)$ ត្រូវតែសេសដែរ ព្រោះ $P(p) - P(0)$ គូ ។ ដោយ $P(p)$ សេស នោះត្រូវតែ $P(p) \neq 0$ ។

ដូចគ្នាដែរ បើ p សេស នោះ $P(p)-P(1)$ គូ ។ តែ $P(1)$ សេស ដូច្នេះ $P(p)$ ត្រូវតែសេសដែរ ព្រោះ $P(p)-P(1)$ គូ ។ ដោយ $P(p)$ សេស នោះត្រូវតែ $P(p)\neq 0$ ។ ដូច្នេះ P(x) មិនអាចស្មើសូន្យចំពោះទាំង x គូនិងសេស មានន័យថាពហុធានេះគ្មានឫស ។

943.▲ សន្មតថាសមីការ $P(x)=0$ មានឫសសនិទាន $x=\frac{k}{l}$ គឺ $P\left(\frac{k}{l}\right)=0$ ដែលក្នុងនេះសន្មតថាប្រភាគ $\frac{k}{l}$ ជាប្រភាគបង្រួមរួចហើយ (k បឋមនឹង $l, l>0$) ។ យើងសរសេរ P(x) ជាស្វ័យគុណនៃ (x − p) ក្រោមទម្រង់

$$P(x)=c_0(x-p)^n+c_1(x-p)^{n-1}+c_2(x-p)^{n-2}+\cdots+c_{n-1}(x-p)+c_n$$

ដែល $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ ជាចំនួនគត់អាស្រ័យនឹង $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (យើងមាន $c_0=a_0, c_1=$ មេគុណរបស់ x^{n-1} នៃ $P(x)-c_0(x-p)^n, \ldots$) ។ យក $x=p$ យើងទាញបាន $c_n=P(p)=\pm 1$ ។

យក $x=\frac{k}{l}$ យើងទាញបាន

$$l^nP\left(\frac{k}{l}\right)=c_0(k-pl)^n+c_1l(k-pl)^{n-1}+c_2l^2(k-pl)^{n-2}+\cdots+c_{n-1}l^{n-1}(k-pl)+c_nl^n=0$$

ដោយ $P\left(\frac{k}{l}\right)=0$ នោះ

$$c_nl^n=-c_0(k-pl)^n-c_1l(k-pl)^{n-1}-c_2l^2(k-pl)^{n-2}-\cdots-c_{n-1}l^{n-1}(k-pl)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_nl^n}{k-pl}=\frac{\pm l^n}{k-pl}=-c_0(k-pl)^{n-1}-c_1l(k-pl)^{n-2}-c_2l^2(k-pl)^{n-3}-\cdots-c_{n-2}l^{n-2}(k-pl)-c_{n-1}l^{n-1}$$

ជាចំនួនគត់ ។ ដោយ pl ចែកដាច់នឹង l ហើយ k បឋមនឹង l នោះ $k-pl$ បឋមនឹង l ដូច្នេះ k − pl បឋមនឹង l^n ។ ដូច្នេះ $\frac{\pm l^n}{k-pl}$ អាចជាចំនួនគត់បាន មានតែ $k-pl=\pm 1$ ។ តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបាន $k-ql=\pm 1$ ។

ដកសមភាព $k-pl=\pm1$ ជាមួយ $k-ql=\pm1$ យើងទាញបាន $(p-q)l=0$ ឬ $(p-q)l=\pm2$ ។ តែដោយ $(p-q)l>0$ ព្រោះ $p>q$ និង $l>0$ យើងទាញបាន $(p-q)l=2, k-pl=-1$ និង $k-ql=1$ ។

បើ $p-q>2$ នោះ $(p-q)l=2$ មិនអាចទៅរួច ដូច្នេះ $P(x)=0$ មិនអាចមានឫសសនិទានបានទេ ។

បើ $p-q=2$ នោះ $l=1, k=p-1$ ។ ដូច្នេះយើងអាចរកបាន k,p,q,l ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌបាន មានន័យថា $P(x)=0$ មានឫសសនិទាន ។ ដូចគ្នាចំពោះករណី $p-q=1$ ។

បូកសមភាព $k-pl=-1$ និង $k-ql=1$ ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$2k-(p+q)l=0$$
$$\Rightarrow a=\frac{k}{l}=\frac{p+q}{2}$$

ពិត ។

944.▲ (ក) សន្មតថាយើងបំបែកពហុធាជាផលគុណកត្តានៃពហុធាពីរមានមេគុណជាចំនួនគត់

$$x^{2222}+2x^{2220}+4x^{2218}+6x^{2216}+8x^{2214}+\cdots+2218x^4+2220x^2+2222$$
$$=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0)(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_0)$$

ដែល $m+n=2222$ និង $a_nb_m=1$ ។ ដូច្នេះ $a_0b_0=2222$: a_0 និង b_0 មិនអាចសេសទាំងពីរបានទេ ព្រោះ 2222 គូ ។ a_0 និង b_0 មិនអាចគូទាំងពីរបានទេ ព្រោះ 2222 គូតែចែកមិនដាច់នឹង 4 ។ ដូច្នេះក្នុងចំណោម a_0 និង b_0 ត្រូវមានមួយគូ មួយទៀតសេស ។ សន្មតថា a_0 គូ និង b_0 សេស ។ យើងនឹងបង្ហាញថា មេគុណទាំងអស់របស់ពហុធា $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ ត្រូវតែជាចំនួនគូ ។ សន្មតផ្ទុយថា មានមេគុណខ្លះជាចំនួនសេស ហើយសន្មតថា a_k ជាមេគុណសេសទីមួយរាប់ពីស្តាំមកឆ្វេង មានន័យថា

$a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ សុទ្ធតែគូ ។ a_k ជាមេគុណរបស់ x^k ក្នុងពហុធា $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_0$ ។ ដូច្នេះមេគុណរបស់ x^k នៃពន្លាតរបស់ផលគុណ

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0)(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_0)$$

កំណត់ដោយ

$$a_k b_0 + a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 + \cdots + a_0 b_k \tag{1}$$

(បើ $k > m$ នោះមេគុណនេះស្មើនឹង $a_k b_0 + a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 + \cdots + a_{k-m}b_m$) ។ មេគុណរបស់ x^k នេះស្មើនឹងមេគុណរបស់ x^k របស់ពហុធា

$$x^{2222} + 2x^{2220} + 4x^{2218} + 6x^{2216} + 8x^{2214} + \cdots + 2218x^4 + 2220x^2 + 2222$$

ដូច្នេះមេគុណនេះស្មើសូន្យ បើ k សេស និងជាចំនួនគូ បើ k គូ (មានតែមេគុណរបស់ x^{2222} ប៉ុណ្ណោះដែលសេស តែ $k \le n < 2222$) ។ តែយើងបានសន្មតថា $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ សុទ្ធតែគូ នោះតួទាំងអស់ក្នុង (1) សុទ្ធតែគូ លើកលែងតែតួទី១ ។ តែដោយសារផលបូកនេះគូ នោះតួទីមួយនេះគឺ $a_k b_0$ ត្រូវតែគូដែរ តែមិនអាចព្រោះ a_k និង b_0 សុទ្ធតែសេស ។ ដូច្នេះមេគុណទាំងអស់របស់

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_0$$

សុទ្ធតែគូ តែករណីនេះវាផ្ទុយនឹងលក្ខខណ្ឌដែល $a_n b_m$ ត្រូវតែស្មើ 1 ។ ដូច្នេះការសន្មតដែលថាពហុធាដើមអាចដាក់ជាផលគុណកត្តាបាន ជាការសន្មតមិនត្រឹមត្រូវ ។

(២) តាង $x = y + 1$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} x^{250} + x^{249} + x^{248} + \cdots + x^2 + x + 1 &= (y+1)^{250} + (y+1)^{249} + \cdots + (y+1) + 1 \\ &= \frac{(y+1)^{251} - 1}{(y+1) - 1} = \frac{1}{y}[(y+1)^{251} - 1] \\ &= y^{250} + 251y^{249} + \binom{251}{2}y^{248} + \binom{251}{3}y^{247} + \cdots \\ &\quad + \binom{251}{2}y + 251 \quad (*) \end{aligned}$$

យើងមាន

$$\binom{251}{k} = \frac{251.250.249 \ldots (251-k+1)}{1.2.3 \ldots k}$$

ជាចំនួនគត់ចែកដាច់នឹងចំនួនបឋម 251 ។ ដូច្នេះមេគុណទាំងអស់របស់ពហុធាលើកលែងតែតួទីមួយ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 251 ។ តាង

$$P(y) = c_{250}y^{250} + c_{249}y^{249} + \cdots + c_1 y + c_0$$
$$\equiv y^{250} + 251y^{249} + \binom{251}{2}y^{248} + \binom{251}{3}y^{247} + \cdots$$
$$+ \binom{251}{2}y + 251$$

សន្មតថា

$$P(y) \equiv (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0)(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_0)$$

ដែល $a_n b_m = 1, m+n = 250, a_0 b_0 = 251$ ។ ដោយ 251 ជាចំនួនបឋម នោះត្រូវមានមួយក្នុងចំណោម a_0 និង b_0 ដែលចែកដាច់នឹង 251 ។ សន្មតថា a_0 ចែកដាច់នឹង 251 ។ យើងនឹងបង្ហាញថាគ្រប់ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 251 ។ តែជំនួសយើងសន្មតថាមាន a_i ខ្លះដែលចែកមិនដាច់នឹង 251 ។ សន្មតថា a_k ចែកមិនដាច់នឹង 251 ដោយ $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 251 ។

យើងមានមេគុណ c_k នៃ y^k របស់ពហុធា $P(y)$ កំណត់ដោយ

$$c_k = a_k b_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_0 b_k \qquad (2)$$

ឬបើ $k > m$ យើងមាន $c_k = a_k b_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_{k-m}b_m$ ។ តួទាំងអស់ក្នុងផលបូក (2) សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 251 លើកលែងតែតួទីមួយ $a_k b_0$ ។ ដោយ $k \le n < 250$ នោះ c_k ចែកដាច់នឹង 251 ។ ដូច្នេះក្នុង (2), $a_k b_0$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 251 ដែរ ។ ដោយ b_0 ចែកមិនដាច់នឹង 251 នោះត្រូវតែ a_k ចែកដាច់នឹង 251 : ផ្ទុយពីការសន្មតដែល a_k ចែកមិនដាច់នឹង 251 ។ ដូច្នេះមានន័យថា $a_0, a_1, \ldots, a_n$ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 251 ។ យើងមាន $a_n b_m = 1$ ដែល a_n ចែកដាច់នឹង 251 : លក្ខខណ្ឌនេះមិនអាចទៅរួចទេ ។ ដូច្នេះពហុធាដើមមិនអាចបំបែកជាផលគុណកត្តាបានទេ ។

945.▲ តាង

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

ដោយមេគុណរបស់ពហុធា $P(x) = A(x)B(x)$ ចែកមិនដាច់នឹង 4 គ្រប់គ្នា នោះមេគុណរបស់ $A(x)$ និង $B(x)$ មិនអាចគូទាំងអស់គ្នាបានទេ ។ ដូច្នេះត្រូវតែមានពហុធាមួយក្នុងចំណោមនេះមិនមានមេគុណរបស់វាជាចំនួនគូទាំងអស់ព្រមគ្នា សន្មតថាពហុធានោះជា $B(x)$ ។ ដំបូងយើងសន្មតថា ពហុធា $A(x)$ មានមេគុណខ្លះជាចំនួនសេស ។ សន្មតថា a_s ជាមេគុណសេសទីមួយរបស់ $A(x)$ ដោយ $a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}$ សុទ្ធតែគូ ។ សន្មតថា b_k ជាមេគុណសេសទីមួយរបស់ $B(x)$ ដោយ $b_0, b_1, .., b_{k-1}$ សុទ្ធតែគូ ។ យើងពិនិត្យមេគុណរបស់ x^{k+s} របស់ពហុធា $P(x)$ តាមរយៈការគុណពន្លាតពហុធា $A(x)B(x)$; មេគុណនោះស្មើនឹងផលគុណមេគុណរបស់តួ x ដែលពេលគុណគ្នាបានស្វ័យគុណស្មើ $k + s$ ។ យើងទាញបាន មេគុណនោះស្មើនឹង

$$a_0b_{k+s} + a_1b_{k+s-1} + \cdots + a_{s-1}b_{k+1} + a_sb_k + a_{s+1}b_{k-1} + \cdots + a_{s+k}b_0$$

ក្នុងផលបូកនេះ គ្រប់តួទាំងអស់ដែលនៅមុខ a_sb_k សុទ្ធតែគូ ព្រោះ $a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}$ សុទ្ធតែគូ ។ គ្រប់តួទាំងអស់ដែលនៅបន្ទាប់ពី a_sb_k សុទ្ធតែគូ ព្រោះ $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ សុទ្ធតែគូ ។ តែផលគុណ a_sb_k សេស ព្រោះ a_s និង b_k សុទ្ធតែសេស ។ ដូច្នេះផលបូកនេះជាចំនួនសេស តែនេះផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌដែលមេគុណរបស់ $P(x)$ ទាំងអស់សុទ្ធតែគូ ។ ដូច្នេះការសន្មតថាពហុធា $A(x)$ មានមេគុណសេស ជាការសន្មតមិនត្រឹមត្រូវ ។ ដូច្នេះមេគុណរបស់ $A(x)$ ត្រូវតែជាចំនួនគូទាំងអស់ ។

946.▲ តាង $x = \frac{p}{q}$ ដែល p បឋមនឹង q មានន័យថាប្រភាគ p/q ត្រូវបានបង្រួមរួចហើយ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\
&= \frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n \\
&= \frac{p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \cdots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n}{q^n} \\
&= \frac{p^n + q(a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + \cdots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1})}{q^n}
\end{aligned}$$

យើងមាន p^n និង p សុទ្ធតែបឋមនឹង q ហើយ $q(a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}q+\cdots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1})$ ចែកដាច់នឹង q ។ ដូច្នេះ $p^n+q(a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}q+\cdots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1})$ ចែកមិនដាច់នឹង $q \Rightarrow$ ចែកមិនដាច់នឹង q^n ។ ដូច្នេះ $P\left(\frac{p}{q}\right)$ មិនអាចជាចំនួនគត់បានទេ ហើយក៏មិនអាចស្មើសូន្យដែរ ។ ដូច្នេះបើ p/q មិនអាចបង្រួមទៅជាចំនួនគត់ទេ វាក៏មិនអាចជាឫសរបស់ពហុធាដែរ ។

947.▲ តាង N ជាចំនួនគត់មួយ និង $P(N)=M$ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k យើងមាន

$$\begin{aligned}P(N+kM)-P(N)\\&=a_0[(N+kM)^n-N^n]+a_1[(N+kM)^{n-1}-N^{n-1}]+\cdots\\&+a_{n-1}[(N+kM)-N]\end{aligned}$$

ចែកដាច់នឹង kM ,ព្រោះ $(N+kM)^i-N^i$ ចែកដាច់នឹង $[(N+kM)-N=kM]$, ដូច្នេះចែកដាច់នឹង M ដែរ ។ ដូច្នេះចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k, យើងមាន $P(N+kM)$ ចែកដាច់នឹង M ។

ដើម្បីបង្ហាញថា $P(N+kM)$ មិនមែនជាចំនួនបឋម យើងត្រូវបង្ហាញថាក្នុងចំណោមតម្លៃ $P(N+kM),(k=0,1,2,\dots)$ មានតម្លៃខ្លះដែលខុសពី $\pm M$ (ព្រោះបើ M បឋម ហើយ $P(N+kM)=\pm M$ នោះ $P(N+kM)$ បឋមដែរ) ។ យើងមាន $P(x)$ មានដឺក្រេ n មានតម្លៃ A ណាមួយ ចំពោះបណ្ដាតម្លៃ x ខុសៗគ្នាចំនួន n យ៉ាងច្រើន (មានន័យថាសមីការ $P(x)-A=0$ មិនអាចមានឫសច្រើនជាង n ទេ) ។ ដូច្នេះក្នុងចំណោមបណ្ដាតម្លៃចំនួន $2n+1$ ដំបូងនៃ $P(N+kM)$ ដែល $k=0,1,2,\dots,2n$, ត្រូវតែមានតម្លៃយ៉ាងហោចមួយ ដែលខុសពី M ឬ $-M$ ។

948.▲ ក) ដំបូងយើងបង្ហាញថាគ្រប់ពហុធា $P(x)$ ដឺក្រេ n សុទ្ធតែអាចសរសេរជាផលបូកនៃបណ្ដាពហុធា

$$\begin{aligned}&P_0(x)=1,\\&P_1(x)=x,\\&P_2(x)=\frac{x(x-1)}{1.2},\dots,\\&P_n(x)=\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{1.2.3\dots n}\end{aligned}$$

សន្មតថា

$$
\begin{aligned}
P(x) &\equiv b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x) + \cdots + b_1P_1(x) + b_0P_0(x) \\
&\equiv \frac{b_n}{n!}x(x-1)\dots(x-n+1) + \frac{b_{n-1}}{(n-1)!}x(x-1)\dots(x-n+2) + \cdots \\
&\qquad + \frac{b_2}{2!}x(x-1) + b_1x + b_0 \\
&\equiv \frac{b_n}{n!}\left(x^n + c_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + c_{n,1}x + c_{n,0}\right) \\
&\qquad + \frac{b_{n-1}}{(n-1)!}\left(x^{n-1} + c_{n-1,n-2}x^{n-2} + \cdots + c_{n-1,1}x + c_{n-1,0}\right) \\
&\qquad + \cdots + \frac{b_2}{2!}(x^2 - x) + b_1x + b_0
\end{aligned}
$$

(ដែល $c_{i,j}$ ជាមេគុណរបស់ពហុធា $i!\,P_i$ ក្រោយពន្លាតរួច)

ដោយយក $b_n/n!$ មានតម្លៃស្មើមេគុណនៃ x^n របស់ $P(x)$ នោះយើងទាញបាន $P(x)$ និងពន្លាតនៃ $b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x) + \cdots + b_1P_1(x) + b_0P_0(x)$ មានមេគុណរបស់ x^n មានតម្លៃដូចគ្នា ។

ដោយយក $b_{n-1}/(n-1)!$ មានតម្លៃស្មើមេគុណនៃ x^{n-1} របស់ $P(x) - b_nP_n(x)$ គឺ $A_1 - \frac{b_n}{n!}c_{n,n-1}$ នោះយើងទាញបាន $P(x)$ និងពន្លាតនៃ $b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x) + \cdots + b_1P_1(x) + b_0P_0(x)$ មានមេគុណរបស់ x^{n-1} មានតម្លៃដូចគ្នា ។

ដោយយក $b_{n-2}/(n-2)!$ មានតម្លៃស្មើមេគុណនៃ x^{n-2} របស់ $P(x) - b_nP_n(x) - b_{n-1}P_{n-1}(x)$ គឺ $A_2 - \frac{b_n}{n!}c_{n,n-2} - \frac{b_{n-1}}{(n-1)!}c_{n-1,n-2}$ នោះយើងទាញបាន $P(x)$ និងពន្លាតនៃ $b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x) + \cdots + b_1P_1(x) + b_0P_0(x)$ មានមេគុណរបស់ x^{n-2} មានតម្លៃដូចគ្នា ។

យើងកំណត់មេគុណ $b_{n-3}, \dots, b_2, b_1, b_0$ តាមរបៀបដូចគ្នា ។ ដូច្នេះយើងអាចរកបាន $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P(x) \equiv b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x) + \cdots + b_1P_1(x) + b_0P_0(x)$ ។

បន្ទាប់មកទៀតយើងនឹងសរសេរពហុធាដែលមានដឺក្រេ n ហើយដែល

$P(0), P(1), \dots, P(n)$ ជាចំនួនគត់ ជារាង

$$P(x) \equiv b_n P_n(x) + b_{n-1} P_{n-1}(x) + \cdots + b_1 P_1(x) + b_0 P_0(x)$$

យើងមាន

$$\begin{aligned} P_1(0) &= P_2(0) = \cdots = P_n(0) \\ &= P_2(1) = P_3(1) = \cdots = P_n(1) = P_3(2) = \cdots = P_n(2) \\ &= \cdots = P_{n-1}(n-2) = P_n(n-2) = P_n(n-1) = 0 \\ P_0(0) &= P_1(1) = P_2(2) = \cdots = P_{n-1}(n-1) = P_n(n) = 1 \end{aligned}$$

$$x = 0 \implies P(0) = b_0 P_0(0) = b_0$$
$$\implies b_0 = P(0)$$
$$x = 1 \implies P(1) = b_0 P_0(1) + b_1 P_1(1) = b_0 P_0(1) + b_1$$
$$\implies b_1 = P(1) - b_0 P_0(1)$$
$$x = 2 \implies P(2) = b_0 P_0(2) + b_1 P_1(2) + b_2 P_2(2),$$
$$\implies b_2 = P(2) - b_0 P_0(2) - b_1 P_1(2)$$
$$\dots \dots$$

ដូច្នេះយើងទាញបាន

$$b_n = P(n) - b_0 P_0(n) - b_1 P_1(n) - \cdots - b_{n-1} P_{n-1}(n)$$

ដែលបណ្ដាមេគុណ $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ ជាចំនួនគត់ ។

ខ) តាមសំនួរ ក) គ្រប់ពហុធាដែលមានតម្លៃគត់ចំពោះ $x = 0,1,2,..,n$ អាចសរសេរជារាង

$$P(x) \equiv b_n P_n(x) + b_{n-1} P_{n-1}(x) + \cdots + b_1 P_1(x) + b_0 P_0(x)$$

ដែល $b_0, b_1, b_2, .., b_n$ ជាចំនួនគត់ និង ពហុធា $P_0, P_1, \dots, P_n$ មានតម្លៃគត់ចំពោះគ្រប់ x ។ ដូច្នេះ ពហុធា $P(x)$ នេះមានតម្លៃគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ។

គ) បើពហុធា $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ មានតម្លៃគត់ចំពោះ $x = k, k+1, k+2, \dots, k+n$ នោះពហុធា

$$Q(x) = P(x-k) = a_n (x-k)^n + a_{n-1} (x-k)^{n-1} + \cdots + a_1 (x-k) + a_0$$

មានតម្លៃគត់ចំពោះ $x = 0,1,2,3, \dots, n$ ។ តាមសំនួរ ខ) យើងទាញបាន ពហុធា $Q(x)$ មានតម្លៃគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ។ ច្រាសមកវិញ យើងទាញបាន $P(x) = Q(x-k)$ មានតម្លៃគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ។

ឃ) សន្មតថាពហុធា $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ មានតម្លៃគត់ចំពោះ $x = 0,1,4,9, \dots, n^2$ ។ ដូច្នេះពហុធា $Q(x) = P(x^2) = a_n(x^2)^n + a_{n+1}(x^2)^{n-1} + \cdots + a_1 x^2 + a_0$ មានដឺក្រេ $2n$, មានតម្លៃគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ចំនួន $2n + 1$ បន្តបន្ទាប់គ្នា ដែលមាន

$x = -n, -(n-1), -(n-2), \dots, -1,0,1, \dots, n-1, n$ ព្រោះ

$$\begin{aligned}
&Q(0) = P(0),\\
&Q(1) = Q(-1) = P(1),\\
&Q(2) = Q(-2) = P(4),\\
&Q(3) = Q(-3) = P(9),\\
&\dots\\
&Q(n) = Q(-n) = P(n^2)
\end{aligned}$$

សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ។ ដូច្នេះតាមសំនួរខ) យើងទាញបាន $Q(x)$ មានតម្លៃគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ។ យើងទាញបាន $P(k^2) = Q(k)$, ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ k, ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ ។

ជាឧទាហរណ៍ យើងអាចយក $P(x) = \frac{x(x-1)}{12}$ ដែល

$$\begin{aligned}
Q(x) = P(x^2) &= \frac{x^2(x^2-1)}{12} = \frac{x^2(x-1)(x+1)}{12}\\
&= 2\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{1.2.3.4} - \frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3}
\end{aligned}$$

ក្នុងនេះ $P(x)$ មានតំលៃជាចំនួនសនិទានចំព្រោះគ្រប់ចំនួនគត់ x និង ដោយ $Q(x)$ មានតម្លៃគត់ នោះ $P(x^2)$ មានតម្លៃគត់ មានន័យថា $P(x)$ មានតម្លៃគត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនការេ x ។

949.▲ យើងមាន $x = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow x(1 + \sqrt[3]{2}) = 1 - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4} + 2 = 3 \Rightarrow x\sqrt[3]{2} = 3 - x \Rightarrow 2x^3 = (3-x)^3 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0$ ។ ដូច្នេះ $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ ជាឫសនៃសមីការ

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0$$

បើ $f(x)$ មានឫសជាចំនួនសនិទាន តាងដោយ $\frac{m}{n}$ ។ សន្មតថាទម្រង់ $\frac{m}{n}$ ជាទម្រង់បង្រួមរួច មានន័យថា m បឋមនឹង n ។ ដូច្នេះ $m^3 - 3m^2n + 9mn^2 - 9n^3 = 0$ មិនអាចព្រោះតួទី១ ចែកមិនដាច់នឹង n តែតួផ្សេងទៀតចែកដាច់ ។ ករណី $n = \pm 1$ សមីការគ្មានឫសជាចំនួនគត់ទេ ។ ដូច្នេះសមីការគ្មានឫសជាចំនួនសនិទានទេ ។

សន្មតថាមានពហុធាដឺក្រេទី២ តាងដោយ $g(x)$ ដែលមានឫសដូចខាងលើ ។ ដូច្នេះ $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ដែល $\text{Deg}(r) < 2$ ហើយ $r(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 0; \Rightarrow$ $r(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)q(x)$ ។ $q(x)$ មានដឺក្រេស្មើ1 ដូច្នេះមានឫសជាចំនួនសនិទាន ។ ដូច្នេះ $f(x)$ មានឫសជាចំនួនសនិទាន ផ្ទុយពីការសន្និដ្ឋានខាងលើ ។ ដូច្នេះ $f(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបី ជាចម្លើយនៃសំនួរ ។

950.▲ តាង

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$
$$\Rightarrow \; f'(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$$

ក) បើ n គូ នោះយើងមាន

$$f'(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (-\infty; -1)$

$f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (-1; +\infty)$

$f'(-1) = 0$

ដូច្នេះ $f(x)$ មានចំនុចអប្បបរមាត្រង់ $x = -1$ ។ យើងមាន

$$f(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} > 0$$
$$\Rightarrow \; f(x) > 0; \; \forall x \in \mathbb{R}$$

ដូច្នេះសមីការគ្មានឫស ។

ខ) បើ n សេស នោះ $f'(x) > 0; \; \forall x \in \mathbb{R}$ ។ យើងមាន $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ។ ដូច្នេះសមីការមានឫសតែមួយគត់ ។

951.▲ យើងឃើញថា បើ $P(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌក្នុងសំនួរ នោះ $\pm P(\pm x)$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែរ ។ ដោយហេតុនេះ យើងអាចសន្មតថា $a, b \geq 0$ បាន (ឬនិយាយម្យ៉ាងទៀតថា ពិនិត្យតែករណី $a, b \geq 0$ ព្រោះថា ឧទាហរណ៍ បើ $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ នោះ ពហុធា $Q(x) = -P(x) = -x^3 - x^2 - 2x - 1$ និង $R(x) = -P(-x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែរ ។) ។ យើងមាន 4 ករណី

1) $c \geq 0, d \geq 0$ នោះ $|a| + |b| + |c| + |d| = a + b + c + d = P(1) \leq 1 < 7$

2) $c \geq 0, d < 0$ នោះ $|a| + |b| + |c| + |d| = a + b + c - d = P(1) - 2P(0) \leq 3 < 7$

3) $c < 0, d \geq 0$ នោះ

$$\begin{aligned}|a| + |b| + |c| + |d| &= a + b - c + d \\ &= \frac{4}{3}P(1) - \frac{1}{3}P(-1) - \frac{8}{3}P\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{8}{3}P\left(-\frac{1}{2}\right) \leq 7\end{aligned}$$

4) $c < 0, d < 0$ នោះ

$$\begin{aligned}|a| + |b| + |c| + |d| &= a + b - c + d \\ &= \frac{5}{3}P(1) - 4\,P\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{3}P\left(-\frac{1}{2}\right) \leq 7\end{aligned}$$

952.▲ a) យើងមាន

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 &= [(a+b+c)^3 - a^3] - (b^3 + c^3) \\ &= [(a+b+c) - a][(a+b+c)^2 + a(a+b+c) + a^2] \\ &\quad - (b+c)(b^2 - bc + c^2) \\ &= (b+c)\{[(a+b+c)^2 - b^2] + a(a+c) + (ab+bc) \\ &\quad + (a^2 - c^2)\} \\ &= (b+c)\{[(a+b+c) - b][(a+b+c) + b] + a(a+c) \\ &\quad + b(a+c) + (a+c)(a-c)\} \\ &= (b+c)(a+c)(a+b+c+b+a+b+a-c) \\ &= 3(b+c)(a+c)(a+b)\end{aligned}$$

b) តាមសំនួរ a) យើងមាន

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(b+c)(a+c)(a+b)$$

យើងដឹងថា $b+c, a+c, a+b$ បឋមនឹងគ្នាពីរៗ ។ ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$(a+b+c)^{333}-a^{333}-b^{333}-c^{333}$$

ចែកដាច់នឹង $(a+b), (a+c)$ និង $(b+c)$ ជាការគ្រប់គ្រាន់ ។ ជំនួស a ដោយ x យើងទាញបាន

$$(x+b+c)^{333}-x^{333}-b^{333}-c^{333}$$

ឱ្យ $x=-b$ យើងឃើញថាកន្សោមនេះស្មើសូន្យ ដូច្នេះ មានន័យថា $(x+b+c)^{333}-x^{333}-b^{333}-c^{333}$ ចែកដាច់នឹង $x+b$ ។ ជំនួស x ដោយ a ត្រលប់មកវិញ យើងទាញបាន $(a+b+c)^{333}-a^{333}-b^{333}-c^{333}$ ចែកដាច់នឹង $a+b$ ។ ដូចគ្នា យើងទាញបាន កន្សោមនេះ ចែកដាច់នឹង $b+c$ និង $c+a$ ។ ដូច្នេះសំណើពិត ។

953.▲ យើងមាន

$$\begin{aligned} a^{10}+a^5+1 &= \frac{(a^5)^3-1}{a^5-1}=\frac{a^{15}-1}{a^5-1}=\frac{(a^3)^5-1}{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)} \\ &= \frac{(a^3-1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)} \\ &= \frac{(a^2+a+1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{a^4+a^3+a^2+a+1} \end{aligned}$$

យើងមាន

$$\begin{aligned} & a^{12}+a^9+a^6+a^3+1 \\ &= a^8(a^4+a^3+a^2+a+1)-a^8(a^3+a^2+a+1)+a^9 \\ &\quad +a^6+a^3+1 \\ &= a^8(a^4+a^3+a^2+a+1)-a^{11}-a^{10}-a^8+a^6+a^3+1 \\ &= a^8(a^4+a^3+a^2+a+1)-a^7(a^4+a^3+a^2+a+1) \\ &\quad +a^7(a^3+a^2+a+1)-a^{10}-a^8+a^6+a^3+1 \\ &= a^8(a^4+a^3+a^2+a+1)-a^7(a^4+a^3+a^2+a+1)+a^9+a^7+a^6 \\ &\quad +a^3+1 \\ &= a^8(a^4+a^3+a^2+a+1)-a^7(a^4+a^3+a^2+a+1) \\ &\quad +a^5(a^4+a^3+a^2+a+1)-a^5(a^3+a^2+a+1)+a^7 \\ &\quad +a^6+a^3+1 \\ &= a^8(a^4+a^3+a^2+a+1)-a^7(a^4+a^3+a^2+a+1) \\ &\quad +a^5(a^4+a^3+a^2+a+1)-a^8-a^5+a^3+1 \\ &= a^8(a^4+a^3+a^2+a+1)-a^7(a^4+a^3+a^2+a+1) \\ &\quad +a^5(a^4+a^3+a^2+a+1)-a^4(a^4+a^3+a^2+a+1) \\ &\quad +a^4(a^3+a^2+a+1)-a^5+a^3+1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a^8(a^4+a^3+a^2+a+1) - a^7(a^4+a^3+a^2+a+1) \\
&\qquad + a^5(a^4+a^3+a^2+a+1) - a^4(a^4+a^3+a^2+a+1) \\
&\qquad + a^7 + a^6 + a^4 + a^3 + 1 \\
&= a^8(a^4+a^3+a^2+a+1) - a^7(a^4+a^3+a^2+a+1) \\
&\qquad + a^5(a^4+a^3+a^2+a+1) - a^4(a^4+a^3+a^2+a+1) \\
&\qquad + a^3(a^4+a^3+a^2+a+1) - a^5 + 1 \\
&= a^8(a^4+a^3+a^2+a+1) - a^7(a^4+a^3+a^2+a+1) \\
&\qquad + a^5(a^4+a^3+a^2+a+1) - a^4(a^4+a^3+a^2+a+1) \\
&\qquad + a^3(a^4+a^3+a^2+a+1) - a(a^4+a^3+a^2+a+1) \\
&\qquad + a(a^3+a^2+a+1) + 1 \\
&= a^8(a^4+a^3+a^2+a+1) - a^7(a^4+a^3+a^2+a+1) \\
&\qquad + a^5(a^4+a^3+a^2+a+1) - a^4(a^4+a^3+a^2+a+1) \\
&\qquad + a^3(a^4+a^3+a^2+a+1) - a(a^4+a^3+a^2+a+1) \\
&\qquad + (a^4+a^3+a^2+a+1) \\
&= (a^4+a^3+a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះ

$$a^{10} + a^5 + 1 = (a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)$$

៦

សមីការអនុគមន៍

954. ▲ តាមលក្ខខណ្ឌទី១យើងទាញបាន

$$f\big(f(f(x)+1)\big) = f(1-x)$$

តាមលក្ខខណ្ឌទី២ យើងទាញបាន

$$f(x)+1 = f(1-x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

ជំនួស $t = 1-x$ យើងទាញបាន

$$f(1-t)+1 = f(t)$$

ដូច្នេះ $f(1-x)+1 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ ជំនួសចូល(1) យើងទាញបានថា គ្មានអនុគមន៍ណាផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទេ ។

955. ▲ យើងអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានដោយងាយថា អនុគមន៍ $f(x) = x$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយមួយ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា សមីការនេះ មានចម្លើយតែមួយនេះគត់ ។ សន្មតថា f ជាចម្លើយមួយ ។ សន្មតថា មានចំនួនពិត a មួយដែល $f(a) \neq a$ ។

បើ $f(a) < a$, ដោយ f កើនដាច់ខាត នោះយើងមាន $f\big(f(a)\big) < f(a) \Rightarrow a < f(a)$ ផ្ទុយពីការសន្មត ។

បើ $f(a) > a$ នោះ $f\big(f(a)\big) > f(a) \Rightarrow a > f(a)$ ផ្ទុយពីការសន្មត ។

ដូច្នេះ សមីការមិនអាចមានចម្លើយខុសពី $f(a) = a$ ទេ ។

956. ▲ យើងមាន $f(1)+f(2) = 4f(2) \Rightarrow f(2) = \frac{f(1)}{3} = \frac{2}{3}$ (1) ។ ចំពោះ $n \geq 3$ យើងមាន

$$\begin{cases} f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n) = n^2 f(n) \\ f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1) = (n-1)^2 f(n-1) \end{cases}$$

យើងទាញបាន $$f(n)=n^2f(n)-(n-1)^2f(n-1)$$

$$\Rightarrow \quad f(n)=\frac{n-1}{n+1}f(n-1)$$

ដូច្នេះចំពោះ $n\geq 3$ យើងទាញបាន

$$f(n)=\frac{(n-1)(n-2)\dots 2}{(n+1)n\dots 4}f(2)=\frac{6}{n(n+1)}f(2)=\frac{4}{n(n+1)}$$

957. ▲- ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ យើងយក $y=0$ នោះលក្ខខណ្ឌទី១ទៅជា

$$f(2x)=2f\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)$$

- ជំនួស $y=2$ និង x ដោយ $-x$ នោះលក្ខខណ្ឌទី១ទៅជា

$$f(-2x)=f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}x+\pi\right)\right)+f\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}x-\pi\right)\right)=2f\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)=f(2x)$$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍គូ ។

- យក $x=0$ និង ចំពោះ $y\in\mathbb{R}$, លក្ខខណ្ឌទី២សរសេរជា

$$f(-y^2)=yf(-y)-yf(y)=yf(y)-yf(y)=0$$

ដូច្នេះ មានន័យថា លើ $\mathbb{R}^-$, f ជាអនុគមន៍ស្មើសូន្យ ។ ដោយ f ជាអនុគមន៍គូ នោះ f សូន្យលើ $\mathbb{R}$ ។

ច្រាសមកវិញ យើងឃើញថា $f\equiv 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំង២ ។ ដូច្នេះវាជាចម្លើយ ។

958. ▲ យើងនឹងបង្ហាញថា $f(x)=0$ ជាចម្លើយតែមួយគត់ ។ សន្មតថាចំណោទមានចម្លើយ $f(x)\neq 0$ ។ ដូច្នេះមានចំនួន $a\in\mathbb{R}$ ដែល $f(a)=b\neq 0$ ។ យើងយក $y=a$ យើងទាញបាន

$$f(xb)=x^nf(b)$$

តាង $t=xb$ ។ យើងទាញបាន

$$f(t)=\frac{f(b)}{b^n}t^n=Ct^n$$

ដែល C ជាចំនួនថេរ ។ ជំនួស $f(x)=Cx^n$ ចូលក្នុងលក្ខខណ្ឌ យើងទាញបាន $C=0$ ដូច្នេះ $f(x)=0$ ។

959. ▲ លក្ខខណ្ឌ $af(x^2+yz)+bf(y^2+zx)+cf(z^2+xy)=0$ (1) មានលក្ខណៈឆ្លុះធៀបនឹង x,y,z ។ ដូច្នេះដោយសារលក្ខណៈនេះ និងដោយសារ a,b,c មិនសូន្យទាំងបីព្រមគ្នា យើងអាចសន្មតថា $a\neq 0$ ។

យក $y=z=0$ យើងបាន $af(x^2)+(b+c)f(0)=0 \;\Rightarrow f(x^2)=-\frac{(b+c)f(0)}{a}$ ចំពោះគ្រប់ x ។

យក $x=0,z=1$ យើងបាន $af(y)+bf(y^2)+cf(0)=0$ ។ ដូច្នេះ

$$f(y)=-\frac{bf(y^2)+cf(0)}{a}=-\frac{-\frac{b+c}{a}f(0)+cf(0)}{a}=\frac{b^2+bc-ac}{a^2}.f(0)$$

ចំពោះគ្រប់ $y\in\mathbb{R}$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ថេរលើ $\mathbb{R}$ ។ តាង $f(x)=K$ ។ ជំនួសចូលក្នុង(1) យើងទាញបាន

$$(a+b+c)K=0$$

បើ $a+b+c\neq 0$ នោះ $K=0$ ដូច្នេះ $f(x)\equiv 0$ ។

បើ $a+b+c=0$ នោះ K ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

960. ▲ យក $y=1$ យើងទាញបាន $f\big(xf(1)\big)=x^p$ ។ $f(1)$ មិនអាចស្មើសូន្យបានទេ ព្រោះបើស្មើសូន្យ នោះ $f(0)=x^p$ ចំពោះគ្រប់ x មិនអាច ។ តាង $c=f(1)$ ដូច្នេះ $f(x)=x^p/c^p$ ។ ដូច្នេះ

$$x^py^q=f\big(xf(y)\big)=\frac{[xf(y)]^p}{c^p}=\frac{x^py^{p^2}}{c^{p+p^2}}$$

ពិតចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $c=1$ និង $q=p^2$ ។ បើ $q=p^2$ នោះយើងទាញបាន

$$f\big(xf(y)\big)=x^p[f(y)]^p=x^py^{p^2}=x^py^q$$

ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}^+$ ។

961. ▲ ពីលក្ខខណ្ឌទីមួយ ចំពោះគ្រប់ $m\in\mathbb{Z}$ និង $k\in\mathbb{N}$ យើងមាន

$$\begin{cases}f(m+k.19)\geq f(m)+k.19\\ f(m-k.19)\leq f(m)-k.19\end{cases}$$

ពីលក្ខខណ្ឌទីពីរ ចំពោះគ្រប់ $m \in \mathbb{Z}$ និង $k \in \mathbb{N}$ យើងមាន

$$\begin{cases} f(m+k.99) \leq f(m)+k.99 \\ f(m-k.99) \geq f(m)-k.99 \end{cases}$$

សមីការ $1 = 19x + 99y$ មានឫស $x = -26 + 99t; y = 5 - 19t, t \in \mathbb{Z}$ ។ ចំពោះ $t = 0; 1$ យើងទាញបាន $(x; y) = \{(-26; 5); (73; -14)\}$ ។

ចំពោះគ្រប់ $m \in \mathbb{Z}$ យើងមាន

$$\begin{aligned} f(m+1) &= f(m-19.26+99.5) \leq f(m+99.5)-19.26 \\ &\leq f(m)+99.5-19.26 = f(m)+1 \\ f(m+1) &= f(m+73.19-14.99) \geq f(m-14.99)+19.73 \\ &\geq f(m)-14.99+19.73 = f(m)+1 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $f(m+1) = f(m)+1$ ចំពោះ $m \in \mathbb{Z}$ ។ ដូច្នេះ $f(m+n) = f(m)+n$ ចំពោះគ្រប់ $m,n \in \mathbb{Z}$ ។ យក $m = 0$ យើងទាញបាន $f(n) = f(0)+n$ ។ តាង $a = f(0)$ ។ ដូច្នេះ $f(n) = a+n$ ។ ជំនួសចូលក្នុងលក្ខខណ្ឌដើមយើងទាញបាន $f(n) = n + a$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $a \in \mathbb{Z}$ ។

962. ▲ ឱ្យ $x = y = 0$ យើងទាញបាន $f(0) = 0$ ។ ឱ្យ $y = 0$ យើងទាញបាន $xf(x) = f^2(x) \implies f(x) = 0$ រឺ $f(x) = x$ ។ យើងឃើញថា $f(x) = 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ឬ $f(x) = x$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ សុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលអោយ ។ បន្ទាប់មកទៀតយើងបង្ហាញថា បន្សំនៃអនុគមន៍ទាំងពីរមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ទេ មានន័យថា អនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} 0; x \in D_1 \\ x; x \in D_2 \end{cases}$$

ដែល $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទេ។ ឧបមាផ្ទុយពីនេះថា មាន $x_1 \in D_1; x_2 \in D_2$ ដែល $f(x_1) = 0$ និង $f(x_2) = x_2$ ។ ចំពោះ $x_1 \in D_1$ ដែល $x_1 \neq 0$ គេអាចរកបាន មេគុណ a មួយដែល $ax_1 = x_2$ គឺ $a = x_2/x_1$ ។

ជំនួសy ដោយ x និង x ដោយ y យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} xf(x+y)+yf(y-x) &= yf(x+y)+xf(x-y) \\ (x-y)f(x+y) &= (x-y)f(x-y) \end{aligned}$$

ពិតចំពោះគ្រប់ $x,y \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ

$$f(x+y) = f(x-y)$$

តាង $t = x - y; \Rightarrow x = t + y$ ដូច្នេះ $f(t + 2y) = f(t)$ ចំពោះគ្រប់ $t, y \in \mathbb{R}$ ។

យក $y = bt$ ។ ដូច្នេះ $f\big((1 + 2b)t\big) = f(t)$ ។ តាង $K = 1 + 2b$ នោះ

$$f(Kt) = f(t)$$

ចំពោះគ្រប់ $K, t \in \mathbb{R}$ ។

ដូច្នេះ ដោយយក $K = a$; $f(ax_1) = f(x_1) \Rightarrow ax_1 = 0$ អាចតែករណី

$ax_1 = x_2 = 0$ មួយប៉ុណ្ណោះ ។ ដូច្នេះ

$$f(x) = 0 \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R} \text{ ឬ } f(x) = x \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R}$$

963. ▲ ឱ្យ $x = y$ យើងទាញបាន $f(0) = 0$ ។ ឱ្យ $y = 1$ យើងទាញបាន

$$f(x + 1)(f(x) - 1) = f(x - 1)[f(x) + 1] \qquad (1)$$

ឱ្យ $x = 2$ យើងទាញបាន $f(3)(f(2) - 1) = f(2) + 1$ ។ ដោយ $f(2) \neq 1$ នោះ

$$f(3) = \frac{f(2) + 1}{f(2) - 1} = 1 + \frac{2}{f(2) - 1}$$

ដោយ $f(2), f(3)$ ជាចំនួនគត់ នោះ $f(2) - 1$ ត្រូវតែជាតួចែកនៃ 2 ។ ដូច្នេះ

$f(2) - 1 = 2$ នោះ $f(2) = 3; f(3) = 2$

$f(2) - 1 = 1$ នោះ $f(2) = 2; f(3) = 3$

$f(2) - 1 = -1$ នោះ $f(2) = 0; f(3) = -1$

$f(2) - 1 = -2$ នោះ $f(2) = -1; f(3) = 0$

1) ករណី $f(2) = 3; f(3) = 2$

ក្នុង(១) ជំនួស $x = 3$ យើងទាញបាន $f(4) = 9$ ។ ជំនួស $x = 4$ យើងទាញបាន

$f(5) = \frac{5}{2}$ មិនយក ។

2) ករណី $f(2) = 2; f(3) = 3$ ។ តាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន

$$f(n) = n, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

3) ករណី $f(2) = 0; f(3) = -1$ ។ តាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 4k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ -1, & n = 4k - 1 \end{cases}$$

4) ករណី $f(2)=-1; f(3)=0$ ។ តាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន

$$f(n)=\begin{cases}0, & n=3k\\ 1, & n=3k+1 \quad (k\in\mathbb{Z})\\ -1, & n=3k-1\end{cases}$$

964. ▲ យើងមាន $f(1)=1; f(2)=2$ ។ សន្មតថា $f(k)=k$ ចំពោះ $k=1,2,\dots,n$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $f(n+1)=n+1$ ។

បើ $n+1=2j$ នោះ $1\le j<n$ ហើយ

$$f(n+1)=f(2j)=f(2)f(j)=2j=n+1$$

បើ $n+1=2j+1$ នោះ $1\le j<n$ ហើយ

$$2j=f(2j)<f(2j+1)<f(2j+2)=f(2)f(j+1)=2j+2$$

ដូច្នេះ $2j<f(2j+1)<2j+2$ ។ ដោយ $f(2j+1)$ ជាចំនួនគត់ នោះ $f(2j+1)=2j+1=n+1$ ។

965. ▲ យក $x=y$ យើងទាញបាន $0<2f^2(x^2)\le 2f(x)f(x^3)$ ដូច្នេះ $f(x)$ និង $f(x^3)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

យក $x=0$ យើងទាញបាន

$$0<2f^2(0)\le f(0)f(y^3)+f(0)f(y)$$
$$f(0)[2f(0)-f(y)-f(y^3)]\le 0$$

យើងទាញបាន

១) បើ $f(0)<0$ នោះ $0>2f(0)\ge f(y)+f(y^3)$ ហើយដោយ $f(y)$ និង $f(y^3)$ មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះ $f(y)<0$ ចំពោះគ្រប់ $y\in\mathbb{R}$ ។ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែល $f(1999)>0$ ។

២) បើ $f(0)>0$ នោះ $0<2f(0)\le f(y)+f(y^3); \forall y\in\mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $f(y)>0\,; \forall y\in\mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $f(2000)>0$ ។

៣) បើ $f(0)=0$ នោះ តាង $f(x)=x^n g(x)$ ដែល $g(0)\ne 0$ ។ ដោយ $f(x)$ និង $f(x^3)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា នោះ $x^n g(x)$ និង $(x^n)^3 g(x^3)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ។ ដោយ

x^n និង $(x^n)^3$ មានសញ្ញាដូចគ្នា នោះ $g(x)$ និង $g(x^3)$ ក៏ត្រូវតែមានសញ្ញាដូចគ្នាដែរ ។ យើងមាន

$$0 < 2x^{4n}g^2(x^2) \leq 2x^n g(x)x^{3n}g(x^3) = 2x^{4n}g(x)g(x^3); \forall x \in \mathbb{R}$$

ដូច្នេះ អាច $g(x) > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ ឬ $g(x) < 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ ។ តែដោយ $f(1999) > 0$ នោះ $g(x) > 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$ ។

ដូច្នេះ $f(2000) = 2000^n g(2000) > 0$ ។

966. ▲ យក $x = y = 0$ យើងទាញបាន

$$f(0) = f(0)\lfloor f(0)\rfloor$$

1) ករណី $\lfloor f(0)\rfloor = 1 \Rightarrow f(0) \neq 0$ ។ យក $y = 0$ យើងទាញបាន

$$f(0) = f(x)\lfloor f(0)\rfloor \Rightarrow f(x) = f(0) = \text{ថេរ}, \forall x \in \mathbb{R}$$

ជំនួសចូលសមីការដើម យើងទាញបាន

$$f(0) = f(0)\lfloor f(0)\rfloor \Rightarrow \lfloor f(0)\rfloor = 1$$

ដូច្នេះ $f(0) = c$ ដែល c ជាចំនួនថេរផ្ទៀងផ្ទាត់ $1 \leq c < 2$ ។ ដូច្នេះ $f(x) = c; 1 \leq c < 2, \forall x \in \mathbb{R}$ ។

2) ករណី $f(0) = 0$ ។ យក $x = y = 1$ យើងទាញបាន

$$f(1) = f(1)\lfloor f(1)\rfloor \Rightarrow f(1) = 0 \text{ ឬ } \lfloor f(1)\rfloor = 1$$

i) បើ $f(1) = 0$ ។ យក $x = 1$ យើងទាញបាន

$$f(\lfloor 1\rfloor y) = f(1)\lfloor f(y)\rfloor \Rightarrow f(y) = 0; \forall y \in \mathbb{R}$$

ii) បើ $\lfloor f(1)\rfloor = 1$

យក $y = 1$ យើងទាញបាន

$$f(\lfloor x\rfloor) = f(x)\lfloor f(1)\rfloor \Rightarrow f(\lfloor x\rfloor) = f(x) \quad (*)$$

យក $x = 2, y = \frac{1}{2}$ យើងទាញបាន

$$f\left(\lfloor 2\rfloor \frac{1}{2}\right) = f(2)\left\lfloor f\left(\frac{1}{2}\right)\right\rfloor \Rightarrow f(1) = f(2)\left\lfloor f\left(\frac{1}{2}\right)\right\rfloor \quad (**)$$

តាម (*) យើងមាន

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor\right) = f(0) = 0 \Rightarrow \left\lfloor f\left(\frac{1}{2}\right)\right\rfloor = 0$$

$(**) \Longrightarrow f(1) = 0$ តែ $\lfloor f(1) \rfloor = 1$ ដូច្នេះ មិនអាច ។

ដូច្នេះ

$$f(x) = \begin{cases} c, & \forall x \in \mathbb{R} \\ 0, & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ដែល c ជាចំនួនថេរ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $1 \le c < 2$ ។

967. ▲ (ក) ដើម្បីឱ្យសមីការមានន័យ នោះ ត្រូវតែ $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ។ តាង $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ ។ ដូច្នេះ $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \le g(x) \le \frac{1}{2}$ ។ តាមសមីការអនុគមន៍ដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$g(x+a) = \sqrt{\frac{1}{4} - \big(g(x)\big)^2}$$
$$g^2(x+a) = \frac{1}{4} - g^2(x)$$
$$g^2(x+2a) = \frac{1}{4} - g^2(x+a) = g^2(x)$$

ដោយ $g(x) \ge 0$ នោះ $g(x+2a) = g(x)$ មានន័យថា $f(x+2a) = f(x)$ ។ ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ខួបមានខួបស្មើ $2a$ ។

(ខ) ឧទាហរណ៍

$$f(x) = \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right| + \frac{1}{2}$$

968. ▲ យក $y = 0, x = a + f(0)$ យើងទាញបាន $f(a) = -a + 1 - f(0)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។ ដូច្នេះ f មានរាង $f(x) = -x + k$ ដែល k ជាចំនួនពិតថេរ ។

$$\Longrightarrow \; f\big(x - f(y)\big) = -\big(x - f(y)\big) + k = -x - y + 2k \equiv -x - y + 1$$
$$\Longrightarrow k = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow f(x) = -x + \frac{1}{2}$$

969. ▲ យើងមាន $f(x)-f(y)=a(x-y)$ ។ យក $y=0$ យើងទាញបាន $f(x)=ax+f(0)$ ។ ដូច្នេះ f មានរាង $f(x)=ax+b$ ដែល b ជាចំនួនថេរ ។ ជំនួសចូលក្នុងលក្ខខណ្ឌដើម យើងទាញបាន

$$\frac{ax+b-(ay+b)}{x-y}=a$$

ពិតជានិច្ច ។ ដូច្នេះ $f(x)=ax+b$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ ។

970. ▲ យក $y=0 \Rightarrow f(x)=x+f(0)$ ។ ដូច្នេះ f មានរាង $f(x)=x+c$ ។ ជំនួសចូលត្រលប់មកវិញ

$$f(x+y)=x+y+c\equiv x+f(y)=x+y+c$$

ពិតជានិច្ច ។ ដូច្នេះ $f(x)=x+c$ ដែល $c\in\mathbb{R}$ ។

971. ▲ យក $x=y=0$ យើងទាញបាន $f(0)=2f(0) \Rightarrow f(0)=0$ ។ តាង $a=f(1)$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&f(2)=f(1)+f(1)=2a\\&f(3)=f(2)+f(1)=3a\\&\dots\\&f(x+1)=f(x)+a, x\in\mathbb{Q}\end{aligned}$$

ដូច្នេះតាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន $f(n)=na$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 0$ ។

យក $y=-x$ យើងទាញបាន $f(0)=f(x)+f(-x)\Rightarrow f(x)=-f(-x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទាន x ។ ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍សេស ។ ដូច្នេះយើងទាញបាន $f(n)=an$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។

យក

$$\begin{aligned}&y=x, f(2x)=2f(x);\\&y=2x, f(3x)=f(x)+f(2x)=3f(x);\\&\dots.\end{aligned}$$

ដូច្នេះតាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន $f(nx)=nf(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 0$ និងចំនួនសនិទាន x ។ ដូច្នេះចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ p,q ដែល $q>0$ យើងមាន

$$f(p) = ap$$
$$f(p) = f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = a\frac{p}{q}$$

ដូច្នេះ $f(x) = ax$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{Q}$ ។

972. ▲ យក $x = y = 0$ យើងទាញបាន $f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ ។ យក $y = -x$ យើងទាញបាន $f(x) = -f(-x)$ ។

យក $y = x, 2x, \ldots, (n-1)x$ យើងទាញបាន

$$f(2x) = 2f(x)$$
$$f(3x) = f(x) + f(2x) = 3f(x)$$
$$\vdots$$
$$f(nx) = f(x) + f\big((n-1)x\big) = nf(x)$$

យក $x = 1$ នោះ $f(n) = n\,f(1) = an$ ដែល $a = f(1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n > 0$ ។ ដោយ f ជាអនុគមន៍សេស ដូច្នេះ $f(n) = n\,f(1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។

ក្នុងទំនាក់ទំនង $f(nx) = nf(x)$ យក $x = \frac{p}{n}$ យើងទាញបាន

$$f\left(n \times \frac{p}{n}\right) = n\,f\left(\frac{p}{n}\right) \Leftrightarrow f(p) = nf\left(\frac{p}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{p}{n}\right) = a\frac{p}{n}$$

ដូច្នេះចំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទាន q យើងមាន $f(q) = aq$ ។

❶ ករណី f ជាអនុគមន៍ជាប់

យើងដឹងថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេអាចរកស្វ៊ីតនៃចំនួនសនិទាន x_n មួយ ដែលរួមទៅ x គឺ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ។ ដោយ x_n ជាចំនួនសនិទាន ដូច្នេះ $f(x_n) = ax_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = ax$ ។ ដោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ x នោះយើងមាន $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន $f(x) = ax$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

❷ ករណី f ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូន

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេអាចរកបានស្វ៊ីតនៃចំនួនសនិទានកើន (x_n) មួយ និង ស្វ៊ីតនៃចំនួនសនិទានចុះ (x'_n) មួយ ដែលរួមទៅរក x គឺ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ និង $\lim_{n\to\infty} x'_n = x$ ។ ដូច្នេះចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 0$ គេមាន $x_n \leq x \leq x'_n$ ។

ករណី f ជាអនុគមន៍កើន គេមាន

$$ax_n = f(x_n) \leq f(x) \leq f(x'_n) = ax'_n$$

ឱ្យ $n \to \infty$ យើងទាញបាន $ax \leq f(x) \leq ax$ ដូច្នេះ $f(x) = ax$ ។

ដូចគ្នាចំពោះករណី f ជាអនុគមន៍ចុះ។

ច្រាសមកវិញ យើងឃើញថា $f(x) = ax$ ពិតជាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។

973. ▲ បើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត k អនុគមន៍ $f(x) + k$ ក៏ជាចម្លើយដែរ។ ដូច្នេះយើងអាចសន្មតជាបឋមថា $f(0) = 0$ ។

ចំពោះ $y = 0$ យើងទាញបាន $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ដោយប្រើទំនាក់ទំនងនេះ យើងទាញបាន

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x+y)$$
$$\Rightarrow \ f(x) + f(y) = f(x+y) \qquad (*)$$

យក $y = -x$ យើងទាញបាន $f(x) + f(-x) = f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(-x)$ ។ ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍សេស។

តាម (*) យើងទាញបាន $f(nx) = nf(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។ យក $x = 1$ យើងទាញបាន $f(n) = nf(1)$ ។ យក $x = \frac{p}{n}$ ដែល p ជាចំនួនគត់ យើងទាញបាន

$$f\left(n\frac{p}{n}\right) = n\,f\left(\frac{p}{n}\right) \Leftrightarrow f(p) = n\,f\left(\frac{p}{n}\right) \Leftrightarrow p\,f(1) = n\,f\left(\frac{p}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{p}{n}f(1)$$

ដូច្នេះចំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទាន q យើងមាន $f(q) = aq$ ដែល $a = f(1)$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេអាចរកបានស្វីតសនិទាន x_n មួយ ដែល $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ។ យើងមាន $f(x_n) = ax_n$ ព្រោះ x_n ជាចំនួនសនិទាន ដូច្នេះ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} ax_n = ax$ ។ ដោយ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ និង f ជាអនុគមន៍ជាប់ នោះ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ ។ ដូច្នេះ $f(x) = ax$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះជាទូទៅ ចម្លើយរបស់សមីការ Jensen កំណត់ដោយ $f(x) = ax + k$ ដែល k ជាថេរចំនួនពិតណាមួយ ។

974. ▲ តាង a, b ជាចំនួនសនិទានពីរ និង $n > 0$ ជាចំនួនគត់មួយ ។ ចំពោះ $i \in \{0,1,\dots,n\}$ តាង

$$a_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

យើងឃើញថា a_i សុទ្ធតែជាចំនួនសនិទាន និង $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$ ចំពោះ $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$ ។ យើងមាន

$$|f(a) - f(b)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) - f(a_i)\right|$$

តាមវិសមភាពត្រីកោណ ($|a+b| \le |a| + |b|$) យើងមាន

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) - f(a_i)\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$$

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \le 7\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)^2 = \frac{7(b-a)^2}{n}$$

ដូច្នេះ

$$|f(a) - f(b)| \le \frac{7(b-a)^2}{n}$$

ឱ្យ n ខិតទៅរកអនន្ត យើងទាញបាន $|f(a) - f(b)| \le 0 \Rightarrow f(a) = f(b)$ ។ ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ថេរលើ $\mathbb{Q}$ ។

គាង់ $c \in \mathbb{R}$ ដែល $f(r) = c$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទាន r ។ ចំពោះចំនួនពិត x ណាមួយ គាង់ $r_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ ។ ដោយ r_n ជាចំនួនសនិទាន ដូច្នេះ $f(r_n) = c$ ។ យើងមាន

$$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \le 10^n x \implies x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} \le x + \frac{1}{10^n} \implies -\frac{1}{10^n} \le x - r_n < 0$$
$$\implies |x - r_n| \le 1/10^n$$

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន

$$|f(x) - c| = |f(x) - f(r_n)| \le 7\,(x - r_n)^2 \le \frac{7}{10^{2n}}$$

ឱ្យ n ខិតទៅរក $+\infty$ យើងទាញបាន $|f(x) - c| \le 0 \implies f(x) = f(c)$ ។ ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ថេរលើ $\mathbb{R}$ ។

ប្រាសមកវិញ យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ឃើញថា អនុគមន៍ថេរពិតជាផ្ទៀងផ្ទាត់សម្មតិកម្ម ។

975. ▲ យក $a = x - y$ តាម i) យើងទាញបាន

$$f(a + 2y) + f(a) = 2f(a + y)f(y)$$

យើងទប់ a រួចឱ្យ y ខិតទៅរក ∞ និង តាមលក្ខខណ្ឌ ii), យើងទាញបាន $f(a) = 0$ ។ ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍សូន្យ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់

ប្រាសមកវិញ យើងឃើញថា $f(x) \equiv 0$ ពិតជាផ្ទៀងផ្ទាត់សម្មតិកម្ម ។

976. ▲ យក

$n = 1 : f(2) - f(1) = f(1) - f(0)$

$n = 2 : f(3) - f(2) = f(2) - f(1)$

$n = 3 : f(4) - f(3) = f(3) - f(2)$

…

$n = k - 1 : f(k) - f(k - 1) = f(k - 1) - f(k - 2)$

បូកសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$f(k) = f(k-1) + f(1) - f(0)$$

យក

$$k = 1 : f(1) = f(0) + [f(1) - f(0)]$$
$$k = 2 : f(2) = f(1) + [f(1) - f(0)]$$
$$\dots$$
$$k = n : f(n) = f(n-1) + [f(1) - f(0)]$$

បូកសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$f(n) = [f(1) - f(0)]n + f(0)$$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍អាភីន ។

ច្រាសមកវិញ បើ f ជាអនុគមន៍អាភីន នោះ $f(n) = an + b$ ។ យើងទាញបាន

$$f(n+1) - f(n) = a(n+1) + b - [an + b] = a$$
$$f(n) - f(n-1) = a(n) + b - [a(n-1) + b] = a$$

ដូច្នេះ $f(n+1) - f(n) = f(n) - f(n-1)$ ពិត ។

977. ▲ យើងនឹងបង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ មានន័យថាចំពោះគ្រប់ $m \neq n$ យើងមាន $f(m) \neq f(n)$ ។ សន្មតផ្ទុយថា មាន $m \neq n$ ដែល $f(m) = f(n)$ ។ ដូច្នេះ

$$f\big(f(n) + f(m)\big) = n + m$$
$$f\big(f(n) + f(m)\big) = f\big(f(n) + f(n)\big) = n + n$$
$$\Rightarrow n = m$$

មិនពិត ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ យើងមាន $f\big(f(n) + f(n)\big) = 2n$ និង $f\big(f(n+1) + f(n-1)\big) = (n+1) + (n-1) = 2n$ ដែរ ។ ដោយ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ដូច្នេះ $f(n) + f(n) = f(n+1) + f(n-1)$ ។ យើងទាញបាន

$$f(n+1) - f(n) = f(n) - f(n-1)$$

$n = 2 : f(3) - f(2) = f(2) - f(1)$

$n = 3 : f(4) - f(3) = f(3) - f(2)$

...

$n = k-1 : f(k) - f(k-1) = f(k-1) - f(k-2)$

បូកសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$f(k) = f(k-1) - f(1) + f(2)$$

$k = 2 : f(2) = f(1) + [f(2) - f(1)]$

$k = 3 : f(3) = f(2) + [f(2) - f(1)]$

...

$k = n : f(n) = f(n-1) + [f(2) - f(1)]$

បូកសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} f(n) = f(1) + (n-1)[f(2) - f(1)] &= [f(2) - f(1)]n + 2f(1) - f(2) \\ &= an + b \end{aligned}$$

ដែល $a = f(2) - f(1); b = 2f(1) - f(2)$ ។

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} & f\big(f(n) + f(n)\big) \equiv 2n \\ \Leftrightarrow\ & a[2f(n)] + b \equiv 2n \\ \Leftrightarrow\ & 2a[an + b] + b \equiv 2n \\ \Leftrightarrow\ & 2a^2n + 2ab + b \equiv 2n \end{aligned}$$

ដែលពិតចំពោះគ្រប់ n ។ ដូច្នេះ

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1, b = 0$$

យើងមិនយកករណី $a = -1$ ទេ ព្រោះ $f(n) = -n$ នោះ $f(n) \notin \mathbb{N}^*$ ។ ដូច្នេះ $f(n) = n$ ។

978. ▲ យើងមាន f មានតម្លៃជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និងកើនដាច់ខាត ដូច្នេះ $f(0) < f(1) < f(2) = 2 \Rightarrow f(0) = 0$ និង $f(1) = 1$ ។

តាង $f(3) = 3 + k$ ដែល $k \in \mathbb{N}$ ។ ដូច្នេះ $f(6) = f(3)f(2) = 6 + 2k$; ដោយ $f(5) < f(6) = 6 + 2k \Rightarrow f(5) \leq 5 + 2k$ ។ បន្ទាប់មកទៀត $f(10) = f(2)f(5) \leq 10 + 4k$ ។ ដូច្នេះ $f(9) \leq 9 + 4k$ និង $f(18) \leq 18 + 8k \Rightarrow f(17) \leq 17 + 8k; f(16) \leq 16 + 8k; f(15) \leq 15 + 8k$ ។ ដោយ $f(3) = 3 +$

$k \Rightarrow f(4) \geq 4 + k; f(5) \geq 5 + k$ ។ ដូច្នេះ $f(15) = f(3)f(5) \geq (3 + k)(5 + k) \Rightarrow (3 + k)(5 + k) \leq 15 + 8k \Rightarrow k = 0$ ។ ដូច្នេះ $f(3) = 3$ ។

យើងនឹងបង្ហាញតាមវិចារដោយកំណើនថា ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^* : f(2^n + 1) = 2^n + 1$ ។

ចំពោះ $n = 1$ សំណើនេះពិត ព្រោះ $f(3) = 3$ ។ សន្មតថាពិតដល់ n មានន័យថា $f(2^n + 1) = 2^n + 1$ ពិត ។ យើងមាន

$$f(2^{n+1} + 2) = f(2)f(2^n + 1) = 2^n + 2$$

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ដូច្នេះ $2^n + 1 < f(2^n + 2) < f(2^n + 3) < \cdots < f(2^n + 2^n) < f(2^n + 2^n + 1) < f(2^n + 2^n + 2) = 2^{n+1} + 2$ សុទ្ធតែខុសគ្នាពីរៗ ហើយមានតម្លៃក្នុងចំណោម $\{2^n + 2, 2^n + 3, \ldots, 2^{n+1} + 2\}$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបាន $f(2^n + i) = 2^n + i$ ចំពោះគ្រប់ $i \in \{2,3, \ldots, 2^n + 2\}$ មានន័យថា $f(2^{n+1} + 1) = 2^{n+1} + 1$ ។ ដូច្នេះសំណើពិត ។

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ដូច្នេះ $f(1) = 1 < f(2) < f(3) < \cdots < f(2^n + 1) = 2^n + 1$ ដែលតម្លៃរបស់ f ទាំងនេះសុទ្ធតែខុសគ្នាពីរៗ (មានចំនួនទាំងអស់ $2^n + 1$) ហើយឋិតនៅក្នុងចំណោម $\{1,2,3, \ldots, 2^n + 1\}$(មានចំនួនធាតុទាំងអស់ $2^n + 1$) ។ ដូច្នេះ $f(n) = n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

979. ▲ ក្នុងសំនួរនេះ ដំបូងយើងសន្មតផ្ទុយពីសំណើថា មានចំនួនគត់ a មួយ ដែល $f(a) \neq g(a)$ ។

ដូច្នេះសំណុំ $A = \{n / f(n) \neq g(n)\}$ ជាសំណុំរងមិនទទេនៃ $\mathbb{N}$ ហើយដូច្នេះសំណុំ $B = \{g(n), n \in A\}$ ក៏ជាសំណុំរងមិនទទេនៃ $\mathbb{N}$ ដែរ ។ ដូច្នេះសំណុំ B នេះត្រូវតែមានធាតុតូចបំផុត, តាងវាដោយ $g(b)$, ដែល $b \in A$ ។ ដូច្នេះ $g(b) < f(b)$ ។

ដោយ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ នោះយើងអាចរកបានចំនួនគត់ c មួយ ដែល $f(c) = g(b) < f(b)$ ។ ដូច្នេះ $c \neq b$ ។ ដោយ g ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ដូច្នេះ

$g(c) \neq g(b) = f(c) \Rightarrow c \in A$ ដែរ ។ ដូច្នេះ $g(c) < f(c) = g(b)$: តែនេះផ្ទុយពីការសន្មតដែលថា $g(b)$ តូចបំផុត ។

ដូច្នេះមានតែចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a, យើងមាន $f(a) = g(a)$ ។

980. ▲ ដោយ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ដូច្នេះ មាន $n \in \mathbb{N}$ ដែល $f(0) < f(n)$ (ព្រោះបើមិនអ៊ីចឹង តើយើងអាចបាន $k \in \mathbb{N}$ ដែល $f(k) = f(0) + 1$ ពីណាមក? ព្រោះថាបើ f អនុវត្តន៍ប្រកាន់ នោះត្រូវតែមាន k ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនេះ) ។

ដូច្នេះសំណុំ $E = \{n \in \mathbb{N} / f(0) < f(n)\}$ ជាសំណុំរងមិនទទេនៃ $\mathbb{N}^*$ ។ ដូច្នេះ E ត្រូវមានធាតុតូចបំផុត តាងដោយ b ។ យើងទាញបាន $0 < b$ និង $f(0) < f(b)$ ។

តាង $n = 2f(b) - f(0)$ ។ ដោយ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ នោះមានចំនួនគត់ c មួយ ដែល $f(c) = n$ ។ ដូច្នេះ $f(c) = 2f(b) - f(0) \Rightarrow f(c) + f(0) = 2f(b)$ ។ ដូច្នេះ $f(c) = f(b) + \big(f(b) - f(0)\big) > f(b) > f(0) \Rightarrow c \in E$ ។ ដោយ b តូចបំផុត ដូច្នេះ $b < c$ ។

ដោយ យក $a = 0$ យើងទាញបាន $a < b < c$ និង $f(a) + f(c) = 2f(b)$ ។

981. ▲ យើងឃើញថា f ជាអនុគមន៍គូ ព្រោះ $f(x) = f(-x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$ ។

តាង $g(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ ។ យើងមាន

$$\forall a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], a \leq g(a) \leq \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$\forall a \geq \frac{1}{2}, g(a) \geq a \geq \frac{1}{2} \qquad (2)$$

ចំពោះ $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ យើងពិនិត្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ $x_0 = x$ និង $x_{n+1} = g(x_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។ យើងមាន $f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow f(x_{n+1}) = f(x_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។ ដូច្នេះ ស្វ៊ីត $\big(f(x_n)\big)$ ជាស្វ៊ីតថេរ ។

ម្យ៉ាងវិញទៀត តាម (1) យើងមាន (x_n) ជាស្វ៊ីតកើនហើយទាល់ត្រឹម $1/2$ ។ ដូច្នេះស្វ៊ីតនេះរួមទៅរកលីមីត L មួយ : $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ និង $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$ ។ ដោយ g ជា

អនុគមន៍ជាប់ នោះ អនុគមន៍ g ក៏ជាប់ត្រង់ $x = L$ ដែរ ។ ដូច្នេះ $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(L) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L \Rightarrow g(L) = L \Rightarrow L = 1/2$ ។ ដោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់ ដូច្នេះវាជាប់ត្រង់ $x = 1/2$ ។ ដូច្នេះ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(1/2)$ ។ ដោយ $\left(f(x_n)\right)$ ជាស្វ៊ីតថេរ ដូច្នេះ $f(x) = f(x_0) = f(1/2)$ ។ យើងទាញបាន f ជាអនុគមន៍ថេរលើ $[-1/2, 1/2]$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នា យើងទាញបាន $f(x) = f(1/2)$ ថេរលើ $[1/2, +\infty)$ ។ យើងទាញបាន $f(x) = f(1/2)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [-1/2, +\infty)$ ។

ដោយសារ f ជាអនុគមន៍គូ ដូច្នេះ f ថេរលើ $\mathbb{R}$ ។

ច្រាសមកវិញ យើងឃើញថា ចំពោះគ្រប់អនុគមន៍ថេរ លក្ខខណ្ឌ $f(x) = f(x^2 + 1/4)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ច ។

982. ▲ តាង $g(x) = x^3 + x$ ។ អនុគមន៍ g ជាប់និងកើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ និង $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ g ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី $\mathbb{R}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។ តាង ចម្រាសរបស់វាដោយ g^{-1} ។

យើងមាន

$$f\left(g(x)\right) \le x \le g\left(f(x)\right)$$

បើ $X = g(x) \Rightarrow x = g^{-1}(X)$ ។ ដូច្នេះ

$$f\left(g(x)\right) \le x \Rightarrow f(X) \le g^{-1}(X), \forall X \in \mathbb{R} \quad (*)$$

យើងអាចជំនួស X ក្នុង (*) ដោយ x បានព្រោះ វិសមភាព (*) ពិតចំពោះគ្រប់ $X \in \mathbb{R}$ ។

ដូច្នេះ $f(x) \le g^{-1}(x)$ ។

បើ $X = g^{-1}(x) \Rightarrow x = g(X) = g\left(g^{-1}(x)\right)$ ។ ដូច្នេះ

$$x \le g\left(f(x)\right) \Rightarrow g\left(g^{-1}(x)\right) \le g\left(f(x)\right)$$

ដោយ g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត នោះ $g^{-1}(x) \le f(x)$ ។

ដូច្នេះយើងទាញបាន $g^{-1}(x) \le f(x) \le g^{-1}(x) \Rightarrow f(x) = g^{-1}(x)$ ។

ច្រាសមកវិញ បើ $f(x) = g^{-1}(x)$ នោះ $f(x^3 + x) = g^{-1}(x^3 + x)$ ។

$g(x) = x^3 + x = X \Rightarrow x = g^{-1}(X) = g^{-1}(x^3 + x)$ ។ ដូច្នេះ $f(x^3 + x) = x$ ។ ដូច្នេះវិសមភាពទីមួយពិត ។

យើងមាន $g(f(x)) = [f(x)]^3 + f(x)$ និង $g(f(x)) = g(g^{-1}(x)) = x \Rightarrow x = [f(x)]^3 + f(x)$ ដូច្នេះវិសមភាពទីពីរពិត ។

ដូច្នេះ $f(x) \equiv g^{-1}(x)$ ជាអនុគមន៍ដែលចង់បាន ដែលក្នុងនោះ $g(x) \equiv x^3 + x$ ។

983. ▲ បើ $f \equiv 0$ នោះលក្ខខណ្ឌផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ ដូច្នេះសំណើពិត ។

យើងនឹងបង្ហាញថា បើ $f \not\equiv 0$ នោះគ្មាន x ដែល $f(x) = 0$ ទេ ។ តាង f ជាអនុគមន៍ដែលមិនមែនជាអនុគមន៍ដែលស្មើសូន្យចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ចំពោះ $x = y$ យើងទាញបាន

$$f(2x)f(0) = [f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

បើ $f(0) = 0$ នោះ (*) $\Rightarrow f(x) \equiv 0$ ផ្ទុយពីការសន្មត ។ ដូច្នេះ $f(0) \neq 0$ ។ យើងសន្មតផ្ទុយពីការពិតថា មាន $a \in \mathbb{R}$ មួយដែល $f(a) = 0$ ។

យក $x = y = \frac{a}{2}$ យើងទាញបាន

$$0 = f(a)f(0) = \left[f\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow f\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

យក $x = y = \frac{a}{2^2}$ យើងទាញបាន

$$0 = f\left(\frac{a}{2}\right)f(0) = \left[f\left(\frac{a}{2^2}\right)\right]^2 \Rightarrow f\left(\frac{a}{2^2}\right) = 0$$

ដូច្នេះតាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 0$ ។

យើងមាន $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{2^n} = 0$ និង f ជាអនុគមន៍ជាប់ ដូច្នេះ $f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$ ។ តែនេះផ្ទុយពីការពិតដែល $f(0) \neq 0$ ។ ដូច្នេះមិនអាចមាន $a \in \mathbb{R}$ ដែល $f(a) = 0$ ទេ ។ ដូច្នេះសំណើពិត ។

984. ▲ យើងដឹងថា មានអនុគមន៍ f ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ឧទាហរណ៍ $f = k$ ថេរ ដែល $k \in [-1,1]$ ។

តាង $g(x) = f(x + 1/6) - f(x)$ ។ តាមសម្មតិកម្ម ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេមាន

$$g\left(x + \frac{1}{7}\right) = f\left(x + \frac{13}{42}\right) - f\left(x + \frac{1}{7}\right) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) - f(x) = g(x)$$

ដូច្នេះ អនុគមន៍ g មានខួបស្មើ $1/7$ ។ យើងទាញបានថា 1 ក៏ជាខួបរបស់ g ដែរ ព្រោះ $1 = 7 \times \frac{1}{7}$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x យើងមាន $g(x + 1) = g(x)$ មានន័យថា

$$f\left(x + 1 + \frac{1}{6}\right) - f(x + 1) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow f\left(x + 1 + \frac{1}{6}\right) - f\left(x + \frac{1}{6}\right) = f(x + 1) - f(x)$$

យើងទាញបានថា អនុគមន៍ $h(x) = f(x + 1) - f(x)$ មានខួបស្មើ $1/6$ ។ ដូច្នេះ $h(x)$ ក៏មានខួបស្មើ 1 ដែរ ។ យើងទាញបាន $h(x + 1) = h(x)$

$$\Longrightarrow\ f(x + 2) - f(x + 1) = f(x + 1) - f(x)$$

យក $x = a \in \mathbb{R}$ ហើយយើងទុក a មិនឱ្យប្រែប្រួល យើងទាញបាន

$$f(a + 1) - f(a) = f(a + 2) - f(a + 1) = \cdots = f(a + n) - f(a + n - 1)$$

ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ យើងឃើញថា $f(a + n) - f(a + n - 1)$ មិនអាស្រ័យនឹង n ទេ ។ តាង $c = f(a + n) - f(a + n - 1)$ ជាចំនួនថេរមួយ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
&f(a + 1) - f(a) = c\\
&f(a + 2) - f(a + 1) = c\\
&f(a + 3) - f(a + 2) = c\\
&\dots\\
&f(a + n) - f(a + n - 1) = c
\end{aligned}$$

បូកអង្គទាំងពីរនៃសមភាពខាងលើចូលគ្នា យើងទាញបាន $f(a + n) - f(a) = cn \Longrightarrow f(a + n) = cn + f(a)$ ។ យើងដឹងថា f ជាអនុគមន៍ទាល់ គឺ $-1 \leq f \leq 1$ ។ បើយើងឱ្យ $n \to +\infty$ នោះ $cn \to \infty$ បើ $c \neq 0$ ។ ករណីនេះ f មិនមែនជាអនុគមន៍ទាល់ទេ ។ ដូច្នេះមានតែ $c = 0$ ។ យើងទាញបាន $f(a + 1) - f(a) = 0 \Rightarrow f(a + 1) =$

$f(a)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។ ដូច្នេះមានន័យថា f ជាអនុគមន៍ខួប ដែលមានខួបស្មើ 1 ។

985. ▲ តាម (ii) យើងទាញបាន

$$f(2^2) = [f(2)]^2, f(2^3) = f(2^2)f(2) = [f(2)]^2 f(2) = [f(2)]^3, \dots, f(2^n) = [f(2)]^n$$

ដូចគ្នា $f(3^n) = [f(3)]^n; f(5^n) = [f(5)]^n$ ។

- យើងមាន $2^4 = 4^2$ ដូច្នេះតាម (iii) យើងទាញបាន $f(2) = 4$ ឬ $f(4) = 2$ ។

  តាម (ii) យើងមាន $f(2)f(2) = f(4) \Rightarrow [f(2)]^2 = f(4)$ ។

  បើ $f(4) = 2 \Rightarrow f(2) = \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ ដូច្នេះ $f(4) \neq 2$ ។

  ដូច្នេះ $f(2) = 4$ ។ ដូច្នេះ $f(2^n) = [f(2)]^n = 4^n = 2^{2n}$ ។

- ដោយ $9 > 8$ នោះតាម (i) យើងទាញបាន $f(9) > f(8) = f(2^3) = 2^6$ ។

  យើងមាន $f(9) = f(3)f(3) = [f(3)]^2$ ។ ដូច្នេះ

  $$[f(3)]^2 > 2^6 \Rightarrow f(3) > \sqrt{2^6} = 8$$

  តាម (ii) យើងទាញបាន $f(3^8) = [f(3)]^8$ ។

  តាម (i) ដោយ $3^8 < 2^{13} \Rightarrow f(3^8) < f(2^{13}) = 2^{2(13)} = 2^{26}$

  $$\Rightarrow [f(3)]^8 < 2^{26} \Rightarrow f(3) < 2^{\frac{26}{8}} = 2^{3,25} \cong 9,51 < 10$$
  $$\Rightarrow f(3) < 10$$

  ដូច្នេះ $8 < f(3) < 10$ ហើយដោយ $f(3) \in \mathbb{N}$ ដូច្នេះ $f(3) = 9$ ។ ដូច្នេះ

  $f(3^n) = [f(3)]^n = 9^n = 3^{2n}$ ។

- យើងមាន $5^3 < 2^7 \Rightarrow f(5^3) < f(2^7) = 2^{14} \Rightarrow f(5) < (2^{14})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

  $f(5) < 26$ ។

- យើងមាន $5^{11} > 3^{16} \Rightarrow f(5^{11}) = [f(5)]^{11} > f(3^{16}) = 3^{2\times 16} \Rightarrow$

  $f(5) > 3^{\frac{32}{11}} \cong 24,43$ ។

- ដូច្នេះ $24 < f(5) < 26 \Rightarrow f(5) = 25$ ។ ដូច្នេះ $f(5^n) = [f(5)]^n = 25^n = 5^{2n}$ ។

ដូច្នេះ $f(2^n) = 2^{2n}\,; f(3^n) = 3^{2n}\,; f(5^n) = 5^{2n}$ ។ យើងទាញបាន

$$f(6^n) = f(2^n.3^n) = f(2^n)f(3^n) = 6^{2n}$$
$$f(30^n) = f(6^n.5^n) = f(6^n)f(5^n) = 6^{2n}5^{2n} = 30^{2n}$$

ដូច្នេះ

$$f(30) = 30$$
$$f\left(30^{30^{30^{30}}}\right) = 30^{2\left(30^{30^{30}}\right)}$$

986. ▲ យក $x = 0, y = 0$ យើងទាញបាន

$$f(1) = f(0)f(0) - f(0) - 0 + 2 \Rightarrow f(1) = 2$$

យក $y = 1$

$$f(x+1) = f(x)f(1) - f(1) - x + 2 = 2f(x) - x \quad (1)$$

យក $x = 1$

$$f(y+1) = f(1)f(y) - f(y) - 1 + 2 = f(y) + 1 \Rightarrow f(x+1) = f(x) + 1 \;\; (2)$$

ជំនួសចូល (2) ចូលក្នុង (1) យើងទាញបាន

$$f(x) + 1 = 2f(x) - x \quad \Rightarrow f(x) = x + 1$$
$$f(2010) = 2011$$

987. ▲ យើងមាន

$$f(m+1,n) = f(m,n) + m$$
$$m \leftarrow 1: f(2,n) = f(1,n) + 1$$
$$m \leftarrow 2: f(3,n) = f(2,n) + 2$$
$$m \leftarrow 3: f(4,n) = f(3,n) + 3$$
$$\dots\dots\dots$$
$$m \leftarrow m-1: f(m,n) = f(m-1,n) + m - 1$$

$$\Rightarrow f(m,n) = f(1,n) + [1 + 2 + 3 + \cdots + (m-1)] = f(1,n) + \frac{(m-1)m}{2}$$

យើងមាន

$$f(1,n+1) = f(1,n) - n$$
$$n \longleftarrow 1: f(1,2) = f(1,1) - 1$$

$$n \longleftarrow 2: f(1,3) = f(1,2) - 2$$
$$n \longleftarrow 3: f(1,4) = f(1,3) - 3$$
$$\dots\dots\dots$$
$$n \longleftarrow n-1: f(1,n) = f(1,n-1) - (n-1)$$
$$\Rightarrow f(1,n) = f(1,1) - [1+2+3+\dots+(n-1)] = 2 - \frac{(n-1)n}{2}$$

ដូច្នេះ

$$f(m,n) = 2 + \frac{(m-1)m}{2} - \frac{(n-1)n}{2}$$
$$\Rightarrow f(a,b) = 2 + \frac{(a-1)a}{2} - \frac{(b-1)b}{2}; f(a,b) = 2013$$
$$\Rightarrow \frac{(a-1)a}{2} - \frac{(b-1)b}{2} = 2011$$
$$\Leftrightarrow a^2 - a - b^2 + b = 2(2011)$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b) - (a-b) = 2(2011)$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 2(2011)$$

យើងមាន 2011 ជាចំនួនបឋម, $a > b, a+b-1 > a-b$ ។ តាង $d = \mathrm{PGCD}(a-b, a+b-1)$ ដូច្នេះ $a-b = kd, a+b-1 = pd$ ដែល k បឋមនឹង p ។ ដូច្នេះ

$$kpd^2 = 2 \times 2011 \ (*)$$

អង្គខាងស្តាំនៃ $(*)$ គ្មានកត្តាមួយណា ដែលមានស្វ័យគុណធំជាងឬស្មើ 2 ទេ ដូច្នេះ $d = 1$ ។ ដូច្នេះ

$$kp = 2 \times 2011$$

ដែលក្នុងនោះ k បឋមនឹង p ។ យើងមាន $(2)(2011) = (1)(2 \times 2011)$ ។ ដូច្នេះ

$$\begin{cases} k = 1 \\ p = 2 \times 2011 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 2 \\ p = 2011 \end{cases}$$

ករណីទីមួយ យើងទាញបាន $a = b + 1 \Rightarrow 2b = 2 \times 2011 \Rightarrow b = 2011, a = 2012$ ។

ករណីទីមួយ យើងទាញបាន $a = b + 2 \Rightarrow 2b + 1 = 2 \times 2011$ មិនអាច ។

ដូច្នេះ $a = 2012; b = 2011$ ។

988. ▲ តើ $f(1,n)$ ជាចំនួនគត់ឬទេ?

យើងមាន

$$f(0;n)=1+n\ \ (*)$$
$$f(1;0)=f(0;1)=2$$
$$f(1;n+1)=f\big(0;f(1;n)\big)\ (**)$$

តាម (*) & (**) យើងទាញបាន $f(1;n+1)$ ជាចំនួនគត់ បើ $f(1;n)$ ជាចំនួនគត់ ។

ដោយ$f(1,1)=f\big(0;f(1;0)\big)=2$ ជាចំនួនគត់ នោះ $f(1;n)$ ជាចំនួនគត់ ។

តាម (*) & (**) យើងទាញបាន $f(1;n+1)=f\big(0;f(1;n)\big)=1+f(1;n)$ ។ ដូច្នេះ

$$f(1;2)=1+f(1;1)=3;$$
$$f(1;3)=1+f(1;2)=4;$$
$$\dots\dots$$
$$f(1;n)=n+1$$

❶ គណនា f(2; n)

$$f(2;n+1)=f\big(1;f(2;n)\big)$$

យើងទាញបាន $f(2;n+1)$ គត់ បើ $f(2;n)$ គត់ ។ ដោយ $f(2;0)=f(1;1)=$ $2; f(2;1)=f\big(1;f(2;0)\big)=f(1;2)=3$ ជាចំនួនគត់ នោះ $f(2;n)$ ជាចំនួនគត់ ។

ដូច្នេះ

$$f(2;n+1)=f\big(1;f(2;n)\big)=1+f(2;n)$$
$$\Longrightarrow\ f(2;1)=1+f(2;0)=3;$$
$$f(2;2)=1+f(2;1)=4;$$
$$\dots.$$
$$f(2;n)=n+2$$

❷ គណនា $f(3;n)$

$$f(3;n+1)=f\big(2;f(3;n)\big)=f(3;n)+2$$
$$f(3;0)=f(2;1)=3$$
$$f(3;1)=f(3;0)+2=3+2$$
$$f(3;2)=f(3;1)+2=3+2.2$$
$$\dots.$$
$$f(3;n)=f(3;n-1)+2=3+2n$$

❸ គណនា f(4; 2009)

$$f(4;n+1)=f\big(3;f(4;n)\big)=3+2f(4;n)$$
$$f(4;0)=f(3;1)=5$$

$f(4;1) = 3 + 2f(4;0)$ ………………….$\times 2^{2008}$
$f(4;2) = 3 + 2f(4;1)$ ………………….$\times 2^{2007}$
$f(4;3) = 3 + 2f(4;2)$ ………………….$\times 2^{2006}$
…
$f(4;2007) = 3 + 2f(4;2006)$ ………………….$\times 2^{2}$
$f(4;2008) = 3 + 2f(4;2007)$ ………………….$\times 2$
$f(4;2009) = 3 + 2f(4;2008)$

$$\Longrightarrow \; f(4;2009) = 3 + 3.2 + 3.2^2 + \cdots + 3.2^{2007} + 3.2^{2008} + 2^{2009}f(4;0)$$
$$= 3\left(\frac{2^{2009}-1}{2-1}\right) + 2^{2009}.5 = 8.2^{2009} - 3 = 2^{2012} - 3$$

989. ▲ យើងដឹងថា អនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌពិតជាមាន ឧទាហរណ៍ $f(n) = n$ ។ តាង f ជាអនុគមន៍មួយក្នុងចំណោមនោះ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ។ ចំពោះ $a = 2$ និង $b = 3$ និងតាមលក្ខខណ្ឌ (i) យើងទាញបាន $f(6) = f(2)f(3)$ ។ ចំពោះចំនួនបឋម $p = 3$ និង $q = 3$ លក្ខខណ្ឌទី (ii) ទៅជា $f(6) = 2f(3)$ ។ ដោយ $f(3) \neq 0$ (ព្រោះ $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$) នោះ យើងទាញបាន

$$f(6) = f(2)f(3) \Leftrightarrow 2f(3) = f(2)f(3) \Rightarrow f(2) = 2$$

ចំពោះ $p = 2$ និង $q = 2$ លក្ខខណ្ឌទី (ii) ទៅជា $f(4) = 2f(2) = 4$ ។

ចំពោះ $p = 2$ និង $q = 3$ លក្ខខណ្ឌទី (ii) ទៅជា $f(5) = f(2) + f(3) = 2 + f(3)$ ។

ចំពោះ $p = 5$ និង $q = 2$ លក្ខខណ្ឌទី (ii) ទៅជា $f(7) = f(5) + 2 = f(3) + 4$ ។

ចំពោះ $p = 5$ និង $q = 7$ លក្ខខណ្ឌទី (ii) ទៅជា $f(12) = f(7) + f(5) = 2f(3) + 6$ ។ ចំពោះ $a = 4$ និង $b = 3$ លក្ខខណ្ឌទី (i) ទៅជា $f(12) = 4f(3)$ ។ ដូច្នេះ $4f(3) = 2f(3) + 6 \Rightarrow f(3) = 3$ ។ យើងទាញបាន $f(5) = 5, f(7) = 7, f(12) = 12$ ។

យើងដឹងថា 1999 ជាចំនួនបឋម និង $1999 + 3 = 2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$ ។

ដូច្នេះ

$$f(2002) = f(1999 + 3) = f(1999) + f(3)$$
$$f(2002) = f(2 \times 7 \times 11 \times 13) = f(2)f(7)f(11)f(13)$$

ចំពោះ $a=5$ និង $b=3$ តាមលក្ខខណ្ឌទី (i) យើងទាញបាន $f(15)=f(3)f(5)=15$ ។

ចំពោះ $p=13$ និង $q=2$ តាមលក្ខខណ្ឌទី (ii) យើងទាញបាន $f(15)=f(13)+f(2)\Rightarrow f(13)=13$ ។

ចំពោះ $p=11$ និង $q=2$ តាមលក្ខខណ្ឌទី (ii) យើងទាញបាន $f(13)=f(11)+f(2)\Rightarrow f(11)=11$ ។

ដូច្នេះ $f(2002)=2002$ ។ យើងទាញបាន $f(1999)=f(2002)-f(3)=1999$ ។

990. ▲ ❶ យើងដឹងថា $f(1)\geq 1$ ព្រោះ f ជាអនុវត្តន៍ពីសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានទៅសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ សំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានជាសំណុំចំនួនគត់ដែល ≥ 1 ។

បើ $f(1)=1+m>1$ នោះយក $x=1$ យើងទាញបាន $1, f(y), f(y+f(1)-1)=f(y+m)$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមិនស្ងួនមួយ ។ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} &1+f(y+m)>f(y) \Rightarrow f(y+m)\geq f(y)\\ &1+f(y)>f(y+m) \Rightarrow f(y)\geq f(y+m)\\ &\Rightarrow f(y)=f(y+m)\end{aligned}$$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ខួបមានខួបស្មើ m ។ ដោយ $x, f(y), f(y+f(x)-1)$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណចំពោះគ្រប់ x, y នោះ យើងយកចំណុច y ដែល $f(y)=f(y+m)\leq B$ និង $x=1+km>2B$ ដែល k, B ជាចំនួនគត់ណាមួយ ។ យើងទាញបាន $f(y+f(x)-1)=f(y+f(1+km)-1)=f(y+f(1)-1)=f(y+m)\leq B$ ។ ដូច្នេះ $x>2B\geq f(y)+f(y+f(x)-1)$ នោះ $x, f(y), f(y+f(x)-1)$ មិនមែនជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ $\Rightarrow$ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។

ដូច្នេះមានតែ $f(1)=1$ ។

❷ ដោយ $x, f(y), f(y+f(x)-1)$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណចំពោះគ្រប់ x, y នោះ យក $x=z$ និង $y=1$ យើងទាញបាន $z, f(1), f(1+f(z)-1)$ ឬ $z, 1, f\big(f(z)\big)$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ។ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}&z+1>f\big(f(z)\big) \Rightarrow z \geq f\big(f(z)\big)\\&f\big(f(z)\big)+1>z \Rightarrow f\big(f(z)\big) \geq z\\&\Rightarrow f\big(f(z)\big)=z\end{aligned}$$

❸ យើងនឹងបង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន t ដែល

$$f(t)>\frac{z-1}{w} t+M \qquad (1)$$

ទេ ។ ដំបូងយើងសន្មតផ្ទុយទៅវិញថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន t ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព (1) ។ ក្នុងចំណោមចំនួនគត់ t ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព (1) តាង $t=t_0$ ជាតម្លៃ t ដែលតូចជាងគេបង្អស់ ។ យើងមាន $M=\max\{f(1), f(2), \ldots, f(w)\}$ និង $f(t_0)>M$ ដូច្នេះមានតែ $t_0>w$ ។យក $x=z$ និង $y=t_0-w$ ហើយដោយ $x, f(y), f(y+f(x)-1)$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}&x+f(y)>f(y+f(x)-1) \Leftrightarrow z+f(t_0-w)>f(t_0-w+f(z)-1)\\&\qquad\qquad=f(t_0-w+w+1-1)=f(t_0)\\&\Rightarrow f(t_0-w)>f(t_0)-z\\&\Rightarrow f(t_0-w) \geq f(t_0)-(z-1)>\frac{z-1}{w} t_0+M-(z-1)\\&\qquad\qquad=\frac{z-1}{w}(t_0-w)+M\end{aligned}$$

ដូច្នេះមានន័យថា មានតម្លៃ $t=t_0-w<t_0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព(1) ៖ តែនេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា t_0 តូចជាងគេ ក្នុងចំណោមបណ្ដាតម្លៃ t ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព(1) ។

ដូច្នេះវិសមភាព(1) មិនពិតគ្រប់ $t \geq 1$ ។ ដូច្នេះ

$$f(t) \leq \frac{z-1}{w} t+M \qquad (2)$$

❹ យើងនឹងបង្ហាញថា $f(z) \leq z$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $z \geq 1$ ។

យើងសន្មតផ្ទុយទៅវិញថាមានចំនួនគត់ $z = z_0 \geq 1$ មួយដែល $f(z_0) > z_0$ ។ តាង $f(z_0) = w + 1 > z_0$ ។ ដោយ $f(1) = 1$ ដូច្នេះ បើ $f(z_0) > z_0$ នោះត្រូវតែ $z_0 \neq 1$ ដូច្នេះ $z_0 \geq 2$ ។ ដោយ $w + 1 > z_0 \Rightarrow w \geq z_0$ ។ ដូច្នេះ $w \geq z_0 \geq 2$ ។ តាង $M = \max\{f(1), f(2), \dots, f(w)\}$ ។ ចំពោះ $z_0 \leq w \Rightarrow z_0 - 1 < w \Rightarrow (z_0 - 1)/w < 1$ ។ ដូច្នេះយើងអាចរកបានចំនួនគត់ t ដែលធំគ្រប់គ្រាន់មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$\left(\frac{z_0 - 1}{w}\right)^2 t + \left(\frac{z_0 - 1}{w} + 1\right) M < t$$

ប្រើវិសមភាព(2) ពីរដងយើងទាញបាន

$$f\big(f(t)\big) \leq \frac{z_0 - 1}{w} f(t) + M \leq \frac{z_0 - 1}{w}\left[\frac{z_0 - 1}{w} t + M\right] + M < t$$

តែវិសមភាពដែលទទួលបាននេះ ផ្ទុយនឹងអ្វីដែលយើងបានស្រាយបញ្ជាក់ក្នុងសំនួរទី២ ។ ដូច្នេះមានន័យថា គ្មានចំនួនគត់ z_0 ដែល $f(z_0) > z_0$ ទេ ។

❺ យោងតាមអ្វីដែលយើងបានស្រាយបញ្ជាក់ក្នុងជំហានទី២និងទី៤ យើងទាញបាន $z = f\big(f(z)\big) \leq f(z) \leq z \Rightarrow f(z) = z$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន z ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖ អនុគមន៍ $f(x) = x, \forall x \in Z^+$ ជាចម្លើយមួយនៃចំណោទនេះ ព្រោះ

- ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{Z}^+$ យើងមាន $x, y = f(y)$ និង $z = f(y + f(x) - 1) = x + y - 1$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមិនសូន្យ ព្រោះ
- ដោយ $x \geq 1, y \geq 1$ នោះ $z \geq \max\{x, y\} > |x - y|$ និង $z < x + y$ ។

991. ▲ តាមវិសមភាពកូស៊ី ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x > 0$ យើងមាន $x + 1/x \geq 2$ ។ ចំពោះ $x > 0$ តាង $y = \frac{x + \frac{1}{x}}{2}$ ដែលត្រូវនឹង $x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ បើ $x \geq 1$ និង $x = y - \sqrt{y^2 - 1}$ បើ $x \leq 1$ ។ យើងដឹងថា $\frac{1}{y - \sqrt{y^2 - 1}} = y + \sqrt{y^2 - 1}$ ។ យកអនុគមន៍ $u(t) = f\big(t + \sqrt{t^2 - 1}\big)$ ដែល $t \in [1; +\infty[$ ។ យើងទាញបាន

- ចំពោះ $x \geq 1$ យើងមាន

$$u\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)=f\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)=f(x)$$

- ចំពោះ $x\leq 1$ យើងមាន

$$u\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)=f\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$$

ដូច្នេះ យើងឃើញថា យ៉ាងហោចណាស់ មានអនុគមន៍ u មួយ ដូចខាងលើ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌចង់បាន ។

992. ▲ - តាង $t=\frac{x-3}{x+1}$ ដូច្នេះ $t\neq\pm 1$ និង $x=\frac{3+t}{1-t}$ ។ សមីការអនុគមន៍ទៅជា

$$f(t)+f\left(\frac{t-3}{t+1}\right)=\frac{3+t}{1-t}\quad(*)$$

ចំពោះគ្រប់ $t\neq\pm 1$ ។

- តាង $t=\frac{x+3}{1-x}$ ដូច្នេះ $t\neq\pm 1$ និង $x=\frac{t-3}{t+1}$ ។ សមីការអនុគមន៍ទៅជា

$$f\left(\frac{3+t}{1-t}\right)+f(t)=\frac{t-3}{t+1}\quad(**)$$

ចំពោះគ្រប់ $t\neq\pm 1$ ។

បូក (*) និង (**) ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$2f(t)+f\left(\frac{t-3}{t+1}\right)+f\left(\frac{3+t}{1-t}\right)=\frac{3+t}{1-t}+\frac{t-3}{t+1}$$

$$\Leftrightarrow 2f(t)+t=\frac{8t}{1-t^2}\Rightarrow f(t)=\frac{4t}{1-t^2}+\frac{t}{2}$$

ប្រាសមកវិញ អនុគមន៍ $f(x)=\frac{4x}{1-x^2}+\frac{x}{2}$ គឺពិតជាចម្លើយរបស់សមីការ ។

993. ▲តាមលក្ខខណ្ឌ (i) ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $m,n>0$ យើងមាន

$$f(m+n)\geq f(m)+f(n)\qquad(*)$$

ចំពោះ $m=n=1$ និងដឹងថា $f(2)=0$ យើងទាញបាន $f(2)\geq 2f(1)\ \Rightarrow f(1)\leq 0\ \Rightarrow f(1)=0$ ។ ចំពោះ $m=2$ និង $n=1$ យើងទាញបាន $f(3)=f(2)+f(1)+t=t$ ដែល $t\in\{0;1\}$ ។ តែដោយ $f(3)>0$ ដូច្នេះ $f(3)=1$ ។

យើងមាន

$$\begin{aligned}&f(3)=1\\&f(3\times 2)\geq f(3)+f(3)=2\\&f(3\times 3)\geq f(3\times 2)+f(3)\geq 2+1=3\\&\vdots\end{aligned}$$

សន្មតថាវិសមភាពទាំងនេះពិតរហូតដល់ n គឺ $f(3n)\geq n$ ។ យើងមាន $f[3(n+1)]\geq f(3n)+f(3)\geq n+1$ ។ ដូច្នេះ $f(3n)\geq n$ ពិតរហូតដល់ $n+1$ មានន័យថាពិតគ្រប់ចំនួនគត់ $n>0$ ។

សន្មតថា ក្នុងចំណោម $n\in\{0;1;\dots;3\,333\}$ មាន n ដែល $f(3n)>n$ ។ n នោះត្រូវតែ $n<3\,333$ ព្រោះ $f(3\times 3\,333)=3\,333$ ។ តែបើ $f(3n)>n$ ចំពោះ $n<3\,333$ នោះ

$$\begin{aligned}&f[3(n+1)]\geq f(3n)+f(3)>n+1\\&f[3(n+2)]\geq f[3(n+1)]+f(3)>n+2\\&\vdots\\&\Rightarrow f(3\times 3\,333)>3\,333\end{aligned}$$

ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $n\in\{0;1;\dots;3\,333\}$ យើងមាន

$$f(3n)=n\quad (**)$$

តាម (*) និង (**) យើងទាញបាន $1982=f(3\times 1982)\geq f(2\times 1982)+f(1982)\geq 3f(1982)$ ។ ដូច្នេះ $f(1982)\leq \frac{1982}{3}\Rightarrow f(1982)\leq 660$ ។

តាម (*) និង (**) យើងមាន $f(1982)\geq f(1980)+f(2)=f(1980)=f(3\times 660)=660$ ។

ដូច្នេះ ជាបញ្ចប់ $f(1982)=660$ ។

994. ▲ ក្នុង (i) យើងជំនួស m ដោយ $f(f(m))$ យើងទាញបាន

$$f\Big(f\big(f(m)\big)+f\big(f(n)\big)\Big)=-f\Big(f\big(f\big(f(m)\big)+1\big)\Big)-n \qquad (1)$$

ក្នុងទំនាក់ទំនងដែលទទួលបាននេះ យើងជំនួស m ដោយ n និង n ដោយ m យើងទាញបាន

$$f\Big(f\big(f(n)\big)+f\big(f(m)\big)\Big)=-f\Big(f\big(f\big(f(n)\big)+1\big)\Big)-m \qquad (2)$$

យកទំនាក់ទំនងទាំងពីរដែលទទួលបានខាងលើមកដកគ្នា យើងទទួលបាន

$$f\left(f\left(f\left(f(m)\right)+1\right)\right)-f\left(f\left(f\left(f(n)\right)+1\right)\right)=m-n \quad (3)$$

ក្នុង (i) យើងជំនួស $m=1$ យើងទាញបាន

$$f\left(f\left(f(n)\right)+1\right)=-n-f\left(f(2)\right)$$
$$\Rightarrow f\left(f\left(f\left(f(n)\right)+1\right)\right)=f\left(-n-f\left(f(2)\right)\right) \quad (4)$$

ជំនួស n ដោយ m ក្នុងទំនាក់ទំនង (4) យើងទាញបាន

$$\Rightarrow f\left(f\left(f\left(f(m)\right)+1\right)\right)=f\left(-m-f\left(f(2)\right)\right) \quad (5)$$

ជំនួស (4) និង (5) ចូលក្នុង (3) និង តាង $k=f\left(f(2)\right)$ យើងទាញបាន

$$f(-m-k)-f(-n-k)=m-n,\ \forall m,n\in\mathbb{Z} \quad (6)$$

ក្នុង (6) យក $-m-k=p;\ -n-k=0$ យើងទាញបាន $f(p)-f(0)=-p-k-(-k)=-p$ ។ ដូច្នេះ $f(p)=-p+f(0)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ p ។ យើងទាញបាន

$$f(m)=-m+f(0);$$
$$f\left(f(m)\right)=f\left(-m+f(0)\right)=-\left(-m+f(0)\right)+f(0)=m$$

ជំនួសទំនាក់ទំនងទាំងពីរនេះ ចូលក្នុង (i) យើងទាញបាន

$$f\left(m+f\left(f(n)\right)\right)=-f\left(f(m+1)\right)-n \ \Leftrightarrow -m-f(f(n))+f(0)$$
$$=-[-f(m+1)+f(0)]-n$$
$$\Leftrightarrow\ -m-n+f(0)$$
$$=-(m+1)+f(0)-f(0)-n\Longrightarrow\ f(0)=-1$$

ដូច្នេះ $f(m)=-m-1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ m ។

យើងទាញបាន $f(1991)=-1992$ ។

តាម (ii) យើងទាញបាន $g(n)=g(-n-1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។ ដោយ g ជាពហុធា នោះ ត្រូវតែ $g(x)=g(-x-1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ យើងសរសេរ g ជាពហុធានៃ $x+1/2$ គឺ $g(x)=h(x+1/2)$ ។ នោះ h ផ្ទៀងផ្ទាត់ $h(x+1/2)=h(-x-1/2)$ ដែលមានន័យថា $h(y)=h(-y)$ ។ ដូច្នេះ h ជាពហុធា នៃ y^2 ។ យើងទាញបាន g ជាពហុធា នៃ $(x+1/2)^2=x^2+x+1/4$ ។ ដូច្នេះ យើង

ទាញបាន $g(n) = p(n^2+n)$ (ដែល p ជាពហុធាដែលមានរាង៍ណាមួយ) ជាទម្រង់ទូទៅរបស់ g ។

995. ▲ យក $y = x^2$ យើង៍ទាញបាន $f(f(x)+x^2) = f(0) + 4x^2 f(x)$
យក $y = -f(x)$ យើង៍ទទួលបាន $f(0) = f\big(x^2 + f(x)\big) - 4\big(f(x)\big)^2$
បូកសមភាពទាំង៍ពីរដែលទទួលបានចូលគ្នា យើង៍ទាញបាន $\big(f(x)\big)^2 = x^2 f(x) \Leftrightarrow$ $f(x)(f(x)-x^2) = 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $f(x) = 0$ ឬ $f(x) = x^2$ ។ យើង៍អាចផ្ទៀង៍ផ្ទាត់បានថា អនុគមន៍ទាំង៍ពីរនេះ សុទ្ធតែជាចម្លើយរបស់សមីការ ។ តែបន្ទាប់មកទៀត យើង៍ត្រូវបង្ហាញថា អនុគមន៍មួយ ដែលស្មើសូន្យចំពោះ $x \in D_1$ និង៍ស្មើ x^2 ចំពោះ $x \in D_2$ ដែល $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}$ ជាចម្លើយឬមិនមែនជាចម្លើយរបស់សមីការ ។ យក $\{0\} \in D_1$ និង៍ $\{0\} \notin D_2$ ។
សន្មតថា មាន $a \in D_1$ ដែល $f(a) = 0$ ។
ជំនួស $x = a$ ចូលក្នុង៍សមីការដើម យើង៍ទទួលបាន $f(y) = f(a^2 - y)$ ចំពោះគ្រប់ $y \in \mathbb{R}$ ។ បើ $y \in D_2$ នោះ $f(y) = y^2 = f(a^2-y) \neq 0$ ដូច្នេះ $a^2 - y \in D_2 \implies f(a^2-y) = (a^2-y)^2 \implies y^2 = (a^2-y)^2$ ។ បើ $y \neq a^2/2$ នោះ $y^2 \neq (a^2-y)^2$ ។ ដូច្នេះ មានតែ $D_2 = \{a^2/2\}$ ដែលមានន័យថា $f(y) = 0$ ចំពោះគ្រប់ $y \neq a^2/2$ ។
យើង៍ជ្រើសរើសចំនួនពិត $y \neq 0$ ដែល $f(a^2/2) + y \neq a^2/2$ និង៍ $(a^2/2)^2 - y \neq a^2/2$ ។ ជំនួស $x = a^2/2$ ចូលក្នុង៍សមីការដើម យើង៍ទាញបាន

$$f\left(f\left(\frac{a^2}{2}\right)+y\right) = f\left(\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 - y\right) + 4yf\left(\frac{a^2}{2}\right) \Leftrightarrow 0 = 0 + 4yf\left(\frac{a^2}{2}\right)$$
$$\implies f\left(\frac{a^2}{2}\right) = 0$$

ដូច្នេះមានន័យថា បើមាន a ដែល $f(a)=0$ នោះ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ យើងមាន $f(x)=0$ ។

ដូច្នេះសមីការមានចម្លើយពីរ គឺ $f(x)\equiv 0;\forall x\in\mathbb{R}$ ឬ $f(x)\equiv x^2;\ \forall x\in\mathbb{R}$ ។

996. ▲ យក $x=0$ យើងទាញបាន $f(f(y))=y+\left(f(0)\right)^2$ ។ ចំពោះគ្រប់ $t\in\mathbb{R}$ បើ $f(x)=t$ នោះ $f(f(x))=f(t)=x+\left(f(0)\right)^2 \Rightarrow x=f(t)-\left(f(0)\right)^2$ ។ សមីការ $f(x)=t$ មានឫសជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $t\in\mathbb{R}$ និងមានឫសតែមួយគត់ ដូច្នេះ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ។

ជំនួស x ដោយ $-x$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
&f\left(x^2+f(y)\right)=y+\left(f(x)\right)^2\\
&f\left((-x)^2+f(y)\right)=y+\left(f(-x)\right)^2\\
&\Rightarrow y+\left(f(x)\right)^2=y+\left(f(-x)\right)^2\\
&\Rightarrow \left(f(x)\right)^2=\left(f(-x)\right)^2\\
&\Rightarrow f(x)=\pm f(-x)
\end{aligned}$$

តែដោយ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ នោះ $f(x)=-f(-x)$ ។

ដោយ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ ដូច្នេះ មាន $z\in\mathbb{R}$ ដែល $f(z)=0$ ។ ពីទំនាក់ទំនង $f(-z)=-f(z)=0$ និង ដោយ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ នោះត្រូវតែ $z=0$ ។ ដូច្នេះ $f(0)=0$ ។

ជំនួស $y=0$ យើងទាញបាន

$$f\left(x^2+f(0)\right)=\left(f(x)\right)^2 \quad \Leftrightarrow f(x^2)=\left(f(x)\right)^2$$

ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ យើងមាន $\left(f(x)\right)^2>0$ ដូច្នេះ $f(x^2)>0$ ។ យើងទាញបាន $f(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។ ដោយ $f(-x)=-f(x)$ នោះ $f(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ $x<0$ ។ ដូច្នេះ យើងទាញបាន $f(x)$ មានសញ្ញាដូច x ។

ជំនួស x ដោយ $\sqrt{x}$ និង $y=-x$ ជំនួសចូលសមីការដែលឱ្យ យើងទាញបាន

$$f\left(x-f(x)\right)=-x+\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)^2=-x+f(x)=-\left(x-f(x)\right)$$

តែដោយ $f(x-f(x))$ មានសញ្ញាដូច $x-f(x)$ នោះ មានតែ $x-f(x)=0 \Rightarrow$ $f(x)=x$ ចំពោះ $x>0$ ។ ដោយ $f(x)=-f(-x)$ នោះយើងទាញបាន $f(x)=x$ ចំពោះគ្រប់ x ។

ប្រាសមកវិញ ចំពោះ $f(x)=x$ យើងមាន

$$\begin{aligned} & f(x^2+f(y)) = x^2+f(y) = x^2+y \\ & y+(f(x))^2 = y+x^2 \\ & \Rightarrow (x^2+f(y)) = y+(f(x))^2 \end{aligned}$$

ពិត ។

997. ▲ យក $x=-a$ រួចគុណអង្គទាំងពីរនឹង a យើងទាញបាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a\neq 0$

$$f(a)-a\,f\left(-\frac{1}{a}\right)=a^2 \qquad (1)$$

ជំនួស x ដោយ $1/a$ យើងទាញបាន ចំពោះគ្រប់ $a\neq 0$,

$$af\left(-\frac{1}{a}\right)+f(a)=\frac{1}{a} \qquad (2)$$

បូក (1) និង (2) យើងទាញបាន

$$f(a)=\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{1}{a}\right)=\frac{a^3+1}{2a}$$

ប្រាសមកវិញ បើ $f(x)=\frac{x^3+1}{2x}$ នោះ

$$\frac{1}{x}f(-x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\left[\frac{-x^3+1}{-2x}\right]+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3+1}{2\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{x^3-1}{2x^2}+\frac{x^3+1}{2x^2}=x$$

ពិត ។

ដូច្នេះ $f(x)=\frac{x^3+1}{2x}$ គឺពិតជាចម្លើយនៃសមីការ ។

998. ▲ យក $x=0; y=1$ យើងទាញបាន $f(1/3)=0$ ។ យក $x=1; y=0$ យើងទាញបាន $f(2/3)=0$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $f\left(\frac{m}{3^k}\right)=0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $k\geq 0$ និងចំពោះគ្រប់ $0\leq m\leq 3^k$ ។ យើងបានបង្ហាញរួចហើយថា សំណើនេះពិត

ចំពោះ $k=1$ និង $m=0;1;2;3$ ។ សន្មតថាសំណើពិតរហូតដល់ $k-1$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថាសំណើពិតរហូតដល់ k ។

បើ $m\equiv 0 \pmod 3$ នោះ

$$f\left(\frac{m}{3^k}\right)=f\left(\frac{\frac{m}{3}}{3^{k-1}}\right)=0$$

ពិត ព្រោះ $\frac{m}{3}$ ជាចំនួនគត់ និងតាមវិចារ ។

បើ $m\equiv 1 \pmod 3$ នោះ $1\le m\le 3^k-2$ និង

$$3f\left(\frac{m}{3^k}\right)=2f\left(\frac{\frac{m-1}{3}}{3^{k-1}}\right)+f\left(\frac{\frac{m+2}{3}}{3^{k-1}}\right)=0+0=0$$

$$\Longrightarrow\ f\left(\frac{m}{3^k}\right)=0$$

បើ $m\equiv 2 \pmod 3$ នោះ $2\le m\le 3^k-1$ និង

$$3f\left(\frac{m}{3^k}\right)=2f\left(\frac{\frac{m+1}{3}}{3^{k-1}}\right)+f\left(\frac{\frac{m-2}{3}}{3^{k-1}}\right)=0+0=0$$

$$\Longrightarrow\ f\left(\frac{m}{3^k}\right)=0$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a\neq 0$ យើងមាន $a=\lfloor a\rfloor+\{a\}$ ដែល $0\le\{a\}<1$ ។ ដូច្នេះ

$$\frac{\lfloor a\rfloor}{a}+\frac{\{a\}}{a}=1\ \Rightarrow\ \lim_{a\to\infty}\frac{\lfloor a\rfloor}{a}=1$$

យក $a=3^kx$ ។ យើងទាញបាន

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\lfloor 3^kx\rfloor}{3^kx}=1\quad\Rightarrow\lim_{k\to+\infty}\frac{\lfloor 3^kx\rfloor}{3^k}=x$$

ដូច្នេះចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\in(0,1]$ យើងអាចរកបាននូវស្វ៊ីតមួយដែលមានរាង $\frac{m}{3^k}$ ដែលមានលីមីតស្មើ x ។

ដូច្នេះ $f\left(\frac{m}{3^k}\right)=0$ និង $\lim_{k\to\infty}\frac{m}{3^k}=x$ ហើយដោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់ នោះ $f(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[0,1]$ ។

999. ▲ យើងសន្មតផ្ទុយពីការពិតថា មានអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនោះ ។

ចំពោះ $x = 0$ យើងទាញបាន

$$f(f(y)) = -y + f(0) \qquad (*)$$

ចំពោះគ្រប់ $t \in \mathbb{Z}$ បើ $f(x) = t$ នោះ $f(f(x)) = f(t) = x + (f(0))^2 \Rightarrow x = f(t) - (f(0))^2$ ។ សមីការ $f(x) = t$ មានឫសជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $t \in \mathbb{Z}$ និងមានឫសតែមួយគត់ ដូច្នេះ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ។

ក្នុង (*) យក $y = 0$ យើងទាញបាន $f(f(0)) = f(0)$ ។ ដោយ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ នោះ $f(0) = 0$ ។ ដូច្នេះ $f(f(y)) = -y$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ y ។

ដោយ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ នោះ មានចំនួនគត់ a មួយ ដែល $f(a) = y$ ។ យើងទាញបាន $f(y) = f(f(a)) = -a$ ។ ដូច្នេះ

$$f(x + f(a)) = f(x) - a = f(x) + f(y)$$
$$f(x + f(a)) = f(x + y)$$
$$\Longrightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x, y ។ យក $y = -x$ យើងទាញបាន $f(x) = -f(-x)$ ។

យក $y = 1$ យើងទាញបាន $f(x + 1) = f(x) + f(1)$ ។ ដោយយក $x = 1,2,3, \dots, n$ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} &f(2) = f(1) + f(1) \\ &f(3) = f(2) + f(1) \\ &\vdots \\ &f(n) = f(n-1) + f(1) \end{aligned}$$

បូកអង្គនិងអង្គ យើងទាញបាន

$$f(n) = n\,f(1)$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n > 0$ ។

ដោយ $f(x) = -f(-x)$ នោះ $f(x) = xf(1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\begin{aligned} &f(f(x)) = -x \iff f(x)f(1) = -x \\ &\iff x(f(1))^2 = -x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(f(1)\right)^2 = -1$$

មិនអាច ។

1000. ▲ យក $x \geq 0$ និង $y = 2$ ជំនួសចូលក្នុង (i) យើងទាញបាន $f(x+2) = f\left(2f(y)\right)f(2) \Rightarrow f(x+2) = 0$ ។ ដូច្នេះ $f(x)$ ស្មើសូន្យចំពោះគ្រប់ $x \in [2; +\infty)$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $0 \leq y < 2$ និងចំនួនពិត $x \geq 0$ យើងមាន $f\left(xf(y)\right)f(y) = 0$ ទាល់តែនិងមានតែ $f(x+y) = 0$ មានន័យថា $x + y \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 - y$ ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត $f\left(xf(y)\right)f(y) = 0$ ទាល់តែនិងមានតែ $f\left(xf(y)\right) = 0$ មានន័យថា $xf(y) \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{f(y)}$ ។ ដូច្នេះយើងទាញបាន លក្ខខណ្ឌ $x \geq 2 - y$ និង $x \geq \frac{2}{f(y)}$ សមមូលគ្នា ។ ដូច្នេះមានន័យថា

$$2 - y = \frac{2}{f(y)} \Rightarrow f(y) = \frac{2}{2-y};\ \forall y \in [0; 2)$$

ដូច្នេះយើងទាញបានថាចម្លើយដែលអាចរបស់សមីការមានតែ

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-y};\ 0 \leq y < 2 \\ 0;\ y \geq 2 \end{cases}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់

ជំហានបន្ទាប់មកទៀត យើងត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់ថា ចម្លើយទាំងនេះពិតជាផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ (i) និង (ii) មែន ។

យើងឃើញថា លក្ខខណ្ឌទី (ii) ពិតជាផ្ទៀងផ្ទាត់មែន ។

តាង $x, y \geq 0$ ជាចំនួនពិតពីរ ។

❶ បើ $x + y \geq 2$ និង $xf(y) \geq 2$ នោះ អង្គខាងឆ្វេងនិងខាងស្តាំនៃ (i) សុទ្ធតែស្មើសូន្យទាំងពីរ ។ ដូច្នេះផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

❷ បើ $x + y \geq 2$ និង $xf(y) < 2$ ។ បើ $y \geq 2$ អង្គខាងឆ្វេងនិងខាងស្តាំនៃ (i) សុទ្ធតែស្មើសូន្យទាំងពីរ ។ ដូច្នេះផ្ទៀងផ្ទាត់ ។ បើ $y < 2$ នោះ $xf(y) < 2 \Leftrightarrow$

$x\frac{2}{2-y}<2\ \Rightarrow x+y<2$ តែវិសមភាពនេះផ្ទុយពីការសន្មតថា $x+y\geq 2$ ។ ដូច្នេះ មានន័យថា ករណីនេះមិនអាចមាន ។

❸ បើ $x+y<2$ និង $xf(y)<2$ នោះ $y<2$ ។ ដូច្នេះ

$$f(y)=\frac{2}{2-y}f\big(xf(y)\big)=\frac{2}{2-xf(y)}=\frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}}$$

$$\Rightarrow\ f\big(xf(y)\big)f(y)=\frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}}\,\frac{2}{2-y}=\frac{2}{2-x-y}=f(x+y)$$

❹ បើ $x+y<2$ និង $xf(y)\geq 2$ នោះ $x\frac{2}{2-y}\geq 2\ \Rightarrow x+y\geq 2$ ផ្ទុយពីការសន្មត ។

ដូច្នេះយើងឃើញថា លក្ខខណ្ឌ (i) ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ដែរ ។ ដូច្នេះ មានន័យថា f ពិតជាចម្លើយនៃសមីការ ។

1001. ▲ តាមលក្ខខណ្ឌ (ii) $f(x)=0$ មានយ៉ាងតិចឫសមួយ និងមានឫសមួយដែលធំជាងគេបង្អស់ តាងឫសនោះ ដោយ x_0 ។ តាមលក្ខខណ្ឌ (v) យើងមាន

$$0=f(x)f(x_0)=f(x\,f(x_0)+x_0f(x)-xx_0)=f\big(x_0(f(x)-x)\big)\quad(*)$$

ដូច្នេះ $x_0\geq x_0(f(x)-x)$ ។

សន្មតថា $x_0>0$ ។ យើងមាន $f(x_0)=0<x_0\ \Rightarrow\ f(x_0)-x_0<0$ ។ តាម (iii), $f(0)=1>0$ ។ ដូច្នេះ $f(x_0)-x_0<0<f(0)-0$ នោះ តាម (i), គេមាន z មួយ ឋិតនៅចន្លោះ 0 និង x_0 ដែល $f(z)=z$ ។ជំនួស $x=z$ ចូលក្នុង (*) , យើងទាញបាន $0=f\big(x_0(f(z)-z)\big)=f(0)=1$ តាម (iii) : មិនពិត ។

ដូច្នេះ $x_0<0$ ។ វិសមភាព $x_0\geq x_0\,(f(x)-x)$ នាំឱ្យ $f(x)-x\geq 1$ ចំពោះគ្រប់ x ។ ដូច្នេះ $f(1987)\geq 1988$ ។ ដូច្នេះ $f(1987)=1988$ ។

1002. ▲ សន្មតថាមានអនុគមន៍បែបនេះ ។

❶ បង្ហាញថា $f(n)$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់

ឧបមាថា $m \neq n$ តែ $f(m) = f(n)$ នោះ

$$n + 1987 = f\big(f(n)\big) = f\big(f(m)\big) = m + 1987 \Rightarrow m = n$$

ផ្ទុយពីការសន្មត ។ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $m \neq n$ យើងមាន $f(m) \neq f(n)$ ។

❷ យើងមាន

$$f(n + 1987) = f\Big(f\big(f(n)\big)\Big) = f(n) + 1987, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} &f(n + 1987) = f(n) + 1987 \\ &f(n + 2 \times 1987) = f(n + 1987) + 1987 = f(n) + 2 \times 1987 \\ &\vdots \\ &f(n + 1987t) = f(n) + 1987t \end{aligned}$$

ចំពោះគ្រប់ $n, t \in \mathbb{N}$ ។

ចំពោះគ្រប់ $r \in \{0,1, \dots, 1986\}$ តាង $f(r) = 1987k + l$ ដែល $k, l \in \mathbb{N}$ និង $l \leq 1986$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned} &r + 1987 = f\big(f(r)\big) = f(1987k + l) = f(l) + 1987k \\ &\Rightarrow r = f(l) + 1987(k - 1) \end{aligned}$$

យើងមាន $r \leq 1986$ ដូច្នេះ $k \leq 1$ ។ យើងមានពីរករណី

(i) $k = 1 \Rightarrow f(r) = 1987 + l$ និង $f(l) = r$ ។ ដូច្នេះ $r \neq l$ ។

(ii) $k = 0 \Rightarrow f(r) = l$ និង $f(l) = r + 1987$ ។ ដូច្នេះ $r \neq l$ ។

យើងបំបែកសំណុំ $\{0,1, \dots, 1986\}$ ជាសំណុំពីរគឺ S_1 និង S_2 ដែល បើ $r \in S_1$ នោះ $f(r) = 1987 + l$ និង $f(l) = r$ និង $r \in S_2$ នោះ $f(r) = l$ និង $f(l) = r + 1987$ ដែល $S_1 \cup S_2 = \{0,1, \dots, 1986\}$ និង $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ។ សន្មតថា $\mathrm{Card}(S_1) = k; \mathrm{Card}(S_2) = p$ ដែល $k + p = 1987$ ។

បើ $r_i \in S_1$ នោះ $f(r_i) = 1987 + l_i \geq 1987$ និង $f(l_i) = r_i \leq 1986$ ដែល $1 \leq i \leq k$ ។ យើងដឹងថា $l_i \neq r_i; \forall i = 1, .., k$ និង យើងមិនអាចរកបាន j ដែល $l_i = r_j$ បានទេ ព្រោះ $f(l_i) \leq 1986$ និង $f(r_j) \geq 1987$ ដូច្នេះ មានតែ $l_i \in S_2$ ចំពោះគ្រប់ $i = 1, \dots, k$ ។ ដូច្នេះ $k \leq p$ ។

បើ $r_i \in S_2$ នោះ $f(r_i) = l_i \leq 1986$ និង $f(l_i) = r_i + 1987 \geq 1987$ ដែល $1 \leq i \leq p$ ។ យើងដឹងថា $l_i \neq r_i; \forall i = 1,..,p$ និង យើងមិនអាចរកបាន j ដែល $l_i = r_j$ បានទេ ព្រោះ $f(l_i) \geq 1987$ និង $f(r_j) \leq 1986$ ដូច្នេះ មានតែ $l_i \in S_1$ ចំពោះគ្រប់ $i = 1, \dots, p$ ។ ដូច្នេះ $p \leq k$ ។

ដូច្នេះ យើងទាញបាន $k = p$ ។ នាំឱ្យ $k + p = 1987 \Leftrightarrow 2k = 1987 \Rightarrow k$ មិនមែនជាចំនួនគត់ ។

ដូច្នេះយើងមិនអាចរកបានអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌក្នុងសម្មតិកម្មបានទេ ។

1003. ▲ តាង $g(x) = f(x) - f(tx)$ ។ ដោយ f ជាប់ត្រង់ 0 ដូច្នេះ $g(x)$ ក៏ជាប់ត្រង់ x ដែរ ហើយយើងមាន $g(0) = 0$ ។ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ យើងមាន

$$\begin{aligned} & f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2 \\ \Leftrightarrow\ & f(x) - f(tx) - [f(tx) - f(t^2x)] = x^2 \\ \Leftrightarrow\ & g(x) - g(tx) = x^2 \end{aligned}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} & g(x) - g(tx) = x^2 \\ & g(tx) - g(t^2x) = t^2x \\ & \vdots \\ & g(t^{n-1}x) - g(t^nx) = t^{2(n-1)}x^2 \end{aligned}$$

បូកសមភាពទាំងនេះបញ្ចូលគ្នា និង ដោយដឹងថា $t^2 \neq 1$, យើងទទួលបាន

$$g(x) - g(t^nx) = x^2\left(1 + t^2 + \cdots + t^{2(n-1)}\right) = x^2\frac{1 - t^{2n}}{1 - t^2} \qquad (*)$$

ដោយ $0 < t < 1$ នោះឱ្យ $n \to +\infty$ និង ដឹងថា g ជាប់ត្រង់ 0 នោះ $\lim_{n\to+\infty} g(t^nx) = g(0) = 0$ ។ ក្នុង (*)ឱ្យ $n \to +\infty$ យើងទាញបាន

$$g(x) - g(0) = \frac{x^2}{1 - t^2} \Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{1 - t^2}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(tx) = \frac{x^2}{1 - t^2}$$

ដូច្នេះ

$$f(x) - f(tx) = x^2 \frac{1}{1-t^2}$$
$$f(tx) - f(t^2x) = x^2 \frac{t^2}{1-t^2}$$
$$\vdots$$
$$f(t^{n-1}x) - f(t^n x) = x^2 \frac{t^{2(n-1)}}{1-t^2}$$

បូកសមភាពចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$f(x) - f(t^n x) = \frac{x^2}{1-t^2}\left(1 + t^2 + \cdots + t^{2(n-1)}\right) = x^2 \frac{1-t^{2n}}{(1-t^2)^2}$$

ឱ្យ $n \to +\infty$ យើងទទួលបាន $f(x) - f(0) = \frac{x^2}{(1-t^2)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។ ដូច្នេះ $f(x) = \frac{x^2}{(1-t^2)^2} + k$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ ។

ច្រាសមកវិញ បើ $f(x) = \frac{x^2}{(1-t^2)^2} + k$ នោះ

$$\begin{aligned} f(x) &- 2f(tx) + f(t^2x) \\ &= \left[\frac{x^2}{(1-t^2)^2} + k\right] - 2\left[\frac{t^2x^2}{(1-t^2)^2} + k\right] + \left[\frac{t^4x^2}{(1-t^2)^2} + k\right] \\ &= \frac{x^2 - 2t^2x^2 + t^4x^2}{(1-t^2)^2} = x^2 \end{aligned}$$

ពិត ។

1004. ▲ យើងកំណត់ស្វ៊ីត (x_n) មួយដោយ $x_0 = x$ ដែល x ជាចំនួនពិត និងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 0$: $x_{n+1} = f(x_n)$ ។ យើងមាន

$$x_{n+2} + ax_{n+1} - b(a+b)x_n = 0$$

សមីការ $X^2 + aX - b(a+b) = 0$ មានឫសពីរ គឺ b និង $(-a-b)$ ។ ដូច្នេះ ចម្លើយទូទៅរបស់សមីការស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $x_n = \lambda\, b^n + \mu(-a-b)^n$ ដែល $n \geq 0$ ជាចំនួនគត់ ។ ដោយ $a, b > 0$ នោះ $b^n < |(-a-b)^n|$ ដូច្នេះ បើ $\mu \neq 0$ នោះ ចំពោះ n ធំគ្រប់គ្រាន់ណាមួយ គេនឹងបាន $\lambda\, b^n + \mu(-a-b)^n < 0 \Rightarrow x_n < 0$ តែ $x_n = f(x_{n-1}) \geq 0$ ។ ដូច្នេះ មានតែ $\mu = 0$ ។

ចំពោះ $n=0$ និង $n=1$ យើងទទួលបាន $x_0=\lambda=x$ និង $x_1=f(x)=\lambda b=bx$ ។ ដូច្នេះមានន័យថា $f(x)=bx$ ។

ច្រាសមកវិញ ចំពោះ $f(x)=bx$ នោះ

$$f\big(f(x)\big)+af(x)=b^2x+abx=b(a+b)x$$

ពិត ។

ដូច្នេះ សមីការអនុគមន៍មានឫសនិងមានឫសតែមួយគត់ កំណត់ដោយ $f(x)=bx$ ។

1005. ▲ យើងមាន f កំណត់លើ $[0,1]$ ហើយ ដោយ $x\in[0,1]$ នោះ $2x-f(x)\in[0,1]$ ។ តាង $g(x)=2x-f(x)$ ។ ដូច្នេះអនុគមន៍ g កំណត់លើ $[0,1]$ ។ តាមសម្មតិកម្ម ចំពោះគ្រប់ $x : f\big(g(x)\big)=x$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 0$ តាង

$g^2(x)=g\big(g(x)\big), g^3(x)=g\big(g^2(x)\big),\ldots,g^n(x)=g\big(g^{n-1}(x)\big)$ ។ ចំពោះគ្រប់ $x\in[0,1]$ គេមាន $g\big(g(x)\big)=2g(x)-f\big(g(x)\big)=2g(x)-x$ ។ តាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបានចំពោះគ្រប់ $x\in[0,1]$ និង $n\in\mathbb{N}$: $g^n(x)=n(g(x)-x)+x$ ។

សន្មតថា មាន $x_0\in[0,1]$ ដែល $g(x_0)=x_0$ ។ បើ $g(x_0)-x_0>0$ នោះ $\lim_{n\to+\infty}g^n(x_0)=\lim_{n\to+\infty}n(g(x_0)-x_0)+x_0=+\infty$ តែលទ្ធផលនេះផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌដែល g ជាអនុគមន៍ទាល់ ។ ដូចគ្នា ចំពោះករណី $g(x_0)-x_0<0$ ។ ដូច្នេះមានតែ ចំពោះគ្រប់ $x\in[0,1]$ គេមាន $g(x)=x$ ។ យើងទាញបាន $f(x)=x$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[0,1]$ ។

ច្រាសមកវិញ អនុគមន៍ $f(x)=x$ ពិតជាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f\big(2x-f(x)\big)=x$ ។

1006. ▲ ជំនួស $y=x$ ចូលក្នុង i) យើងទាញបាន $f\big(xf(x)\big)=xf(x)$ ។ តាង $z=x\,f(x)$ ដូច្នេះ $f(z)=z$ ។

យើងទាញបានថា $f(z) = z$ ចំពោះគ្រប់ $z = x\,f(x)$ ។ សន្មតថា a ជាតម្លៃមួយនៃ z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនេះ ។

យើងមាន $f(a^2) = f\big(af(a)\big) = af(a) = a^2$ ។ តាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន $f(a^n) = a^n$ ។ បើ $a > 1$ នោះ $a^n \to +\infty$ ពេល $n \to +\infty$ ដែលផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌ ii) ។

តាម i) យក $x = 1$ និង $y = a$ យើងទាញបាន $f\big(1.f(a)\big) = af(1) \Rightarrow f(a) = a\,f(1) \Rightarrow a = af(1) \Rightarrow f(1) = 1$ ។

តាម i) យក $x = 1/a\;; y = a$ យើងទាញបាន

$$f\left(\frac{1}{a}.f(a)\right) = af\left(\frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{a}.a\right) = a\,f\left(\frac{1}{a}\right)$$
$$\Leftrightarrow 1 = a\,f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$$

តាមវិចារដោយកំណើន យើងទាញបាន $f(1/a^n) = 1/a^n$ ។ បើ $a < 1$ នោះ $\frac{1}{a^n} \to +\infty$ ពេល $n \to +\infty$ ដែលផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌ ii) ។

ដូច្នេះមានតែ $a = 1$ ។ ដូច្នេះ $xf(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1/x$ ។

ច្រាសមកវិញ យើងឃើញថា ចំពោះ $f(x) = 1/x$ យើងមាន

$$f\big(xf(y)\big) = \frac{1}{xf(y)} = \frac{y}{x}$$
$$yf(x) = \frac{y}{x}$$
$$\Rightarrow f\big(xf(y)\big) = yf(x)$$

និង $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ ពិត ។

ដូច្នេះសមីការអនុគមន៍មានឫសមួយ គឺ $f(x) = 1/x$ ។

1007. ▲ យើងមាន

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right) + f(x) = 503x \quad (1)$$

ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R} - \{2/3\}$ ។

គាង

$$u = \frac{2x}{3x-2} \Longrightarrow x = \frac{2u}{3u-2}$$

ដែល $u \in \mathbb{R} - \{2/3\}$ ។ យើងឃើញថាចំពោះគ្រប់ u យើងអាចរកបាន x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងនេះជានិច្ច ។

ដូច្នេះ

$$\frac{1}{2}f(u) + f\left(\frac{2u}{3u-2}\right) = 503\,\frac{2u}{3u-2}$$

ចំពោះគ្រប់ $u \in \mathbb{R} - \{2/3\}$ ។ ជំនួស u ដោយ x យើងទទួលបាន

$$\frac{1}{2}f(x) + f\left(\frac{2x}{3x-2}\right) = 503\frac{2x}{3x-2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{4}f(x) + \frac{1}{4}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right) = \frac{503x}{3x-2} \quad (2)$$

យក (1) ដក (2) យើងទទួលបាន

$$\frac{3}{4}f(x) = 503x - \frac{503x}{3x-2} = \frac{503x(3x-3)}{3x-2}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{2012x(x-1)}{3x-2}$$

ច្រាសមកវិញ បើ $f(x) = \frac{2012x(x-1)}{3x-2}$ នោះ

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right) + f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{2012.\frac{2x}{3x-2}\cdot\left(\frac{2x}{3x-2}-1\right)}{3.\frac{2x}{3x-2}-2}\right] + \frac{2012x(x-1)}{3x-2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2012.2x.(2-x)}{4(3x-2)} + \frac{2012x(x-1)}{3x-2}$$

$$= \frac{503x}{3x-2}(2-x+4x-4)$$

$$= 503x$$

ពិត ។

ដូច្នេះ

$$f(x) = \frac{2012x(x-1)}{3x-2}, \forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

1008. ▲ យើងមាន

$$\begin{aligned}[f(\sin 2x)]^2 &= (\sin x + \cos x)^2 \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x \\ &= 1 + \sin 2x\end{aligned}$$

យើងដឹងថា $\sin 2x$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយពី I ទៅ $[-1,1]$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ $-1 \le t \le 1$ គេមាន x តែមួយគត់ក្នុង I ដែល $\sin 2x = t$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ $-1 \le t \le 1$, $[f(t)]^2 = 1 + t$ ។ ចំពោះ $x \in I$ យើងមាន $\sin x + \cos x \ge 0$ ដូច្នេះ $f(t) \ge 0$ ។ ដូច្នេះ $f(t) = \sqrt{1+t}$ ចំពោះ $-1 \le t \le 1$ ។

ចំពោះ $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ យើងមាន $-1 \le \tan x \le 1$ និង ដូច្នេះ $0 \le \tan^2 x \le 1$ ដូច្នេះ

$$f(\tan^2 x) = \sqrt{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

ឯកសារដើម

លំហាត់ក្នុងសៀវភៅនេះ ត្រូវបានដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅដូចតទៅនេះ ៖

1. Pierre Bornsztein, *Inégalité*, 2001

2. Hojoo Lee, *Topic in Inequalities-Theorems and Techniques*

3. A.I Prilepko, *Problem Book in High-School Mathematics*, MIR Moscow, 1985

4. D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov, I. M. Yaglom, *The USSR Olympiad Problem Book*, Dover Publications, INC. New York, 1993.

5. Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic, *The IMO Compendium*, Springer, 2006

6. GS. PHAN ĐỨC CHÍNH, *101 Bài Toán Chọn lọc*, Nhà Xuất Bản Trẻ,1996

7. *Tuyển Tập Đề thi olympic 30-4,Môn Toán*, Nhà Xuất Bản Giáo Dục, 1999.

8. Pierre Bornsztein, Moubinool Omarjee, *Cours- Equations Fonctionnelles*, 2003

កម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យា

កម្រិតវិទ្យាល័យ

ភាគ ២- ពីជគណិត វិភាគ

ដោយ លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

សៀវភៅកំណែលំហាត់ផ្នែកពីជគណិត ដែលរួមមានសមភាព សមីការ វិសមភាព វិសមីការ នៃអនុគមន៍ធម្មតា អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និង អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ។ សៀវភៅនេះប្រជុំដោយលំហាត់ងាយ និងពិបាក ជាង ១០០០ លំហាត់ ដកស្រង់ចេញពីការប្រឡងសិស្សពូកែនៅក្នុងប្រទេសនានាជុំវិញពិភពលោក ។ បើអ្នកចង់ក្លាយជាសិស្សពូកែម្នាក់ សៀវភៅមួយក្បាលនេះ អ្នកគួរតែមាន ៕