ក្រងវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និង មធ្យមសិក្សា

ពីឆ្នាំ ២០០២ ដល់ ២០១៧

www.document4khmer.wordpress.com

ចងក្រង និង ធ្វើកំណែដោយ ព្រឿស ដារ៉ា

ឯកសារទូទៅ
Facebook.com/document4khmer

ចែករំលែកចំណេះដឹង និង ឯកសារទូទៅ
document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ១៤ វិច្ឆិកា ២០០២

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ : $f(x)=\dfrac{\sin 2x-\sin x}{\sin 2x+\sin x}$ កាលណា x ខិតជិតសូន្យ ។

ខ. គណនាផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្ត នៃចំនួនកុំផ្លិច : $z=\dfrac{1+i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

II. សិក្សាភាពជាប់ និងភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ : $f(x)=\left|(x-1)(x^2-x)\right|$ ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=\left|(x-1)(x-2)\right|$ ។ គណនា $J=\int_0^2 f(x)dx$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(6,5,2)$ និង $D(7,7,5)$ ។

ក. បង្ហាញថា $ABCD$ ជាកំពូលនៃប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាមនេះ ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=2+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ដែលកំណត់ក្នុង $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ។

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។

ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x)=0$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់ ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 0 ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

www.document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០២

I. ក. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{\sin 2x+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\times\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\sin x}{x}}{2\times\frac{\sin 2x}{2x}+\frac{\sin x}{x}}$$

$$=\frac{2\times 1-1}{2\times 1+1}=\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{3}}$

ខ. គណនាផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្ត នៃចំនួនកុំផ្លិច z :

$$z=\frac{1+i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}=\frac{1+i}{\left[\left(1+i\sqrt{3}\right)^2\right]^2}$$

$$=\frac{1+i}{\left(1+2i\sqrt{3}+3i^2\right)^2}$$

$$=\frac{1+i}{\left(-2+2i\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1+i}{4\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1+i}{4\left(1-2i\sqrt{3}+3i^2\right)}$$

$$=\frac{1+i}{4\left(-2-2i\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{(1+i)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{8\left(-1-i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{-1+i\sqrt{3}-i-\sqrt{3}}{8\left(1-3i^2\right)}$$

$$=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{32}$$

ដូចនេះ z មានផ្នែកពិតស្មើ $\frac{-1-\sqrt{3}}{32}$ និងមានផ្នែកនិមិត្តស្មើ $\frac{\sqrt{3}-1}{32}$ ។

II. សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃ f ត្រង់ចំណុច $x=0$

យើងមាន $f(x)=\left|(x-1)\left(x^2-x\right)\right|$

$$=\left|x(x-1)^2\right|=|x|(x-1)^2$$

ព្រោះ $(x-1)^2\geq 0$ មិនចាំបាច់ដាក់តម្លៃដាច់ខាត

-សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$:

អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

• ចំពោះ $x\to 0^-$ នោះ $|x|=-x$ យើងបាន :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left[-x(x-1)^2\right]=-0\cdot 1=0$$

• ចំពោះ $x\to 0^+$ នោះ $|x|=x$ យើងបាន :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x(x-1)^2=0\cdot 1=0$$

• ចំពោះ $x=0$ នោះយើងបាន

$$f(0)=|0|(0-1)^2=0$$

យើងឃើញថា $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$

ដូចនេះ: f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ជាប្រាកដ ។

-សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំណុច $x=0$:

f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $f'_-(0)=f'_+(0)$

$$\bullet\ f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h}\ ,\ f(0)=0$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|(h-1)^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h(h-1)^2}{h}=-1$$

$$\bullet\ f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h}\ ,\ f(0)=0$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|(h-1)^2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(h-1)^2}{h}=1$$

ឃើញថា $f'_-(0)=-1\neq f'_+(0)=1$

ដូចនេះ: f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល $J=\int_0^2 f(x)dx$ ៖

យើងមាន $f(x)=|(x-1)(x-2)|=|x^2-3x+2|$

យើងនឹងសិក្សាសញ្ញានៃកន្សោម x^2-3x+2

ឱ្យ $x^2-3x+2=0$ មានឫស $x=1$, $x=2$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

យើងបានតម្លៃនៃ $f(x)=|x^2-3x+2|$ គឺ

-ចំពោះ $0<x<1$: $|x^2-3x+2|=x^2-3x+2$

-ចំពោះ $1<x<2$: $|x^2-3x+2|=-(x^2-3x+2)$

$$\mathbf{J}=\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^2 |x^2-3x+2|dx$$
$$=\int_0^1 (x^2-3x+2)dx-\int_1^2 (x^2-3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-0\right)-\left[\left(\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-\frac{8}{3}+\frac{12}{2}-4+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2=\boxed{1}$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{J=1}$ ។

IV. ក. បង្ហាញថា $ABCD$ ជាកំពូលនៃប្រលេឡូក្រាម

យើងមាន $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(6,5,2)$ និង $D(7,7,5)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$ និង $\overrightarrow{CD}=(1,2,3)$

ដោយចតុកោណ $ABCD$ មាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

ដូចនេះ: **ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម** ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ៖

តាមរូបមន្ត $S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ ដែល $\overrightarrow{AC}=(5,4,1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}=-10\vec{i}+14\vec{j}-6\vec{k}$$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\sqrt{(-10)^2+(14)^2+(-6^2)}=2\sqrt{70}$

ដូចនេះ: **ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមគឺ $S=2\sqrt{70}$ ឯកតាផ្ទៃ** ។

V. ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=2+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$ ដែល $x\neq -1$

គេបាន $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3}$
$$=\frac{-x-1+2}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{-x+1}{(x+1)^3}$$

ដូចនេះ: $\boxed{f'(x)=\frac{-x+1}{(x+1)^3}}$ ។

➢សិក្សាសញ្ញារបស់វា

ឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x+1}{(x+1)^3}=0$

គេបាន $\begin{cases}-x+1=0\\ x+1\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ x\neq -1\end{cases}$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)=\frac{-x+1}{(x+1)^3}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

ដូចនេះ: $f'(x)>0$ កាលណា $x\in(-1,1)$

$f'(x)<0$ កាលណា $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$f'(x)=0$ ចំពោះ: $x=1$

ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x)=0$

គេបាន $2+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=0$ (គុណនឹង $(x+1)^2$)

$$2(x+1)^2+(x+1)-1=0$$
$$2x^2+5x+2=0$$

មាន $\Delta=5^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{-5\pm 3}{4}=\left[\begin{array}{l}-2\\ -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

ដូនេះ: សមីការមានឫស $\boxed{x=-2\ ,\ x=-\frac{1}{2}}$ ។

www.documentkhmer.wordpress.com

គ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ f

• លីមីតតាមចុងដែនកំណត់ និងអាស៊ីមតូត

គេមាន $f(x)=2+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2+5x+2}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+5x+2}{(x+1)^2}=2$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{2x^2+5x+2}{(x+1)^2}\right)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{2x^2+5x+2}{(x+1)^2}\right)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

• បរមានៃអនុគមន៍ f : តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)$

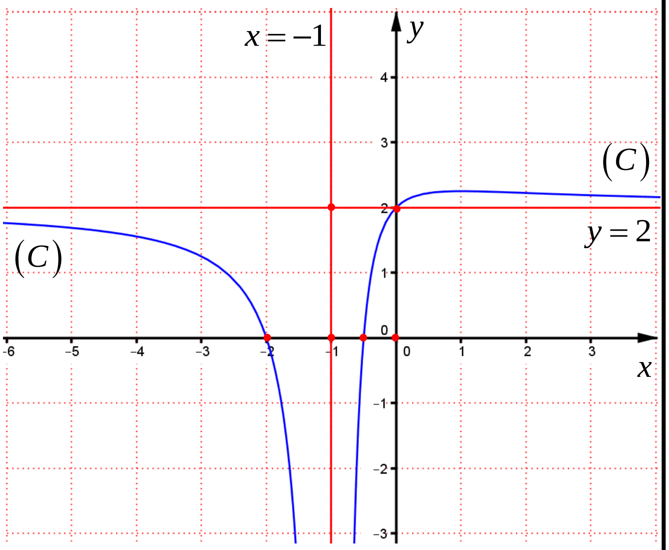
ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(1)=9/4$ ។

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$9/4$	↘	2

• **គូសខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f**



➤ **រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់**

ដោយ ឬសនៃដេរីវេទី២គឺជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចរបត់

គេមាន $f'(x)=\dfrac{-x+1}{(x+1)^3}$

$$f''(x)=\frac{-(x+1)^3-3(x+1)^2(-x+1)}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{-(x+1)-3(-x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2x-4}{(x+1)^4}$$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-4}{(x+1)^4}=0$, $\forall x\in D$,

$(x+1)^4>0$ នាំឱ្យ f'' មានសញ្ញាដូច $2x-4$

គេបាន $2x-4=0$ នោះ $x=2$

$$f(2)=2+\frac{1}{2+1}-\frac{1}{(2+1)^2}=\frac{20}{9}$$

តារាងសញ្ញា $f''(x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

ត្រង់ $x=2$, $f''(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញា នេះបញ្ជាក់ថា f ផ្លាស់ប្តូរភាពផតប៉ោង

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចរបត់គឺ $\left(2\,,\dfrac{20}{9}\right)$ ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង C

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x_0=0$

គេបាន $f'(x_0)=f'(0)=\dfrac{-0+1}{(0+1)^3}=1$

$$f(x_0)=f(0)=2+\frac{1}{0+1}-\frac{1}{(0+1)^2}=2$$

នាំឱ្យ $y=1(x-0)+2=x+2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរកបានគឺ $\boxed{y=x+2}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៤ វិច្ឆិកា ២០០៣

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ : $f(x)=(x^2+3x+5)e^{6x}$, $g(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ ។

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $h(x)=x\ln x+1$ ត្រង់ចំណុច $M(1,1)$ ។ (២ពិន្ទុ)

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ : $I=\int(2\sin x+3\cos x)dx$, $J=\int\dfrac{dx}{x^2-5x+6}$ ។

ខ. រកផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=x^2+2x$ និងបន្ទាត់ $y=x+2$ ។ (២ពិន្ទុ)

III. ដោះស្រាយសមីការ : $\dfrac{4-x}{1986}+\dfrac{3-x}{1987}+\dfrac{2-x}{1988}+\dfrac{1-x}{1989}=-4$ ។ (១ពិន្ទុ)

IV. គេមានបីចំណុច $A(-1,1,2)$, $B(0,2,4)$ និង $C(-1,3,1)$ ។

ក. គណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា ចំណុច A , B និង C មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

ខ. ចូររកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ (២ពិន្ទុ)

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{3-x}{x}$ ។

ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ ។

ខ. ចំណុច A និង B មានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា 1 និង 3 ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង C ។ ចូរកំណត់សមីការបន្ទាត់ AB រួចទាញរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ទាំងអស់ដែលស្របនឹងបន្ទាត់ AB ។ (៣ពិន្ទុ)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៣

I. **ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ :**

$f(x)=(x^2+3x+5)e^{6x}$

$f'(x)=(x^2+3x+5)'e^{6x}+(e^{6x})'(x^2+3x+5)$

$=(2x+3)e^{6x}+6e^{6x}(x^2+3x+5)$

$=\boxed{(6x^2+20x+33)e^{6x}}$

$g(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}=\ln(x+1)-\ln(x-1)$

$g'(x)=\dfrac{(x+1)'}{x+1}-\dfrac{(x-1)'}{x-1}$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-1-x-1}{x^2-1}=\boxed{-\dfrac{2}{x^2-1}}$

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ :

គេមាន $h(x)=x\ln x+1$ និងចំណុច $M(1,1)$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=h'(x_0)(x-x_0)+h(x_0)$

គេមាន បន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច $M(1,1)$

នោះ $x_0=1\,,\,h(x_0)=1$

ហើយ $h'(x)=x'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1$

$h'(x_0)=h'(1)=\ln 1+1=1$

នាំឱ្យ $y=1(x-1)+1=x$

ដូចនេះ: សមីការបន្ទាត់ប៉ះ: $\boxed{y=x}$ ។

II. **ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ :**

$\mathbf{I}=\int(2\sin x+3\cos x)dx$

$=-2\cos x+3\sin x+c\,,\,c$ ថេរ

ដូចនេះ: $\boxed{\mathbf{I}=-2\cos x+3\sin x+c\quad,c\text{ ថេរ}}$ ។

$\mathbf{J}=\int\dfrac{dx}{x^2-5x+6}=\int\dfrac{dx}{(x-2)(x-3)}$

$=\int\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}\right)dx=\int\left(\dfrac{(x-3)'}{x-3}-\dfrac{(x-2)'}{x-2}\right)dx$

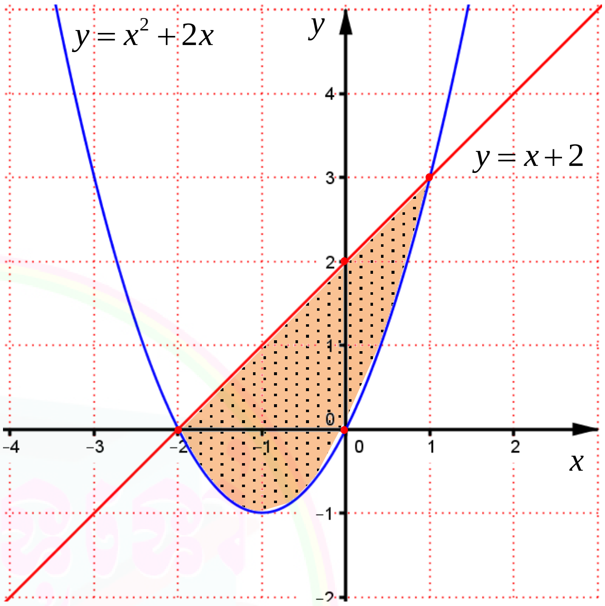
$=\ln|x-3|-\ln|x-2|+c\,,\,c$ ថេរ

ដូចនេះ: $\boxed{\mathbf{J}=\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|+c\quad,c\text{ ថេរ}}$ ។

ខ. រកផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង និងបន្ទាត់

គេមាន ខ្សែកោង $y=x^2+2x$ និងបន្ទាត់ $y=x+2$

គេសង់ក្រាបប៉ារ៉ាបូល និងបន្ទាត់ ដើម្បីដឹងទីតាំង និងប្រើរូបមន្ត



តាមក្រាបផ្ទៃក្រឡាប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបទាំងពីរគឺ

$S=\int_{-2}^{1}\left[(x+2)-(x^2+2x)\right]dx$

$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx$

$=\left[-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+2\right)-\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{4}{2}-4\right)=-3+\dfrac{3}{2}+6=\dfrac{9}{2}$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{ផ្ទៃគណនាបាន } S=4.5 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

III. ដោះស្រាយសមីការ :

$\dfrac{4-x}{1986}+\dfrac{3-x}{1987}+\dfrac{2-x}{1988}+\dfrac{1-x}{1989}=-4$

$\dfrac{4-x}{1986}+1+\dfrac{3-x}{1987}+1+\dfrac{2-x}{1988}+1+\dfrac{1-x}{1989}+1=0$

$\dfrac{1990-x}{1986}+\dfrac{1990-x}{1987}+\dfrac{1990-x}{1988}+\dfrac{1990-x}{1989}=0$

$(1990-x)\left(\dfrac{1}{1986}+\dfrac{1}{1987}+\dfrac{1}{1988}+\dfrac{1}{1989}\right)=0$

នាំឱ្យ $1990-x=0\Rightarrow x=1990$

ដូចនេះ: សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $\boxed{x=1990}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

IV. ក. គណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

គេមាន $A(-1,1,2)$, $B(0,2,4)$ និង $C(-1,3,1)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(1,1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(0,2,-1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=-5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}}$ ។

➤ ទាញបញ្ជាក់ថា ចំណុច A , B និង C មិនរត់ត្រង់គ្នា

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\neq\vec{0}$

ដូចនេះ **បីចំណុច A , B , C រត់មិនត្រង់ជួរ** ។

ខ. រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-5,1,2)$

គេបាន $S=\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+1^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{30}$

ដូចនេះ **ផ្ទៃនៃត្រីកោណគឺ $S=\frac{\sqrt{30}}{2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា** ។

V. ក. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ :

គេមាន $y=\frac{3-x}{x}=\frac{3}{x}-1$

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ មានន័យលុះត្រាតែ $x\neq0$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{0\}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព :

ដេរីវេ $y'=\left(\frac{3}{x}-1\right)'=-\frac{3}{x^2}<0$, $\forall x\in D$

នាំឱ្យ y ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ D និងគ្មានបរមាទេ

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}-1\right)=0-1=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}-1\right)=0-1=-1$$

$$\lim_{x\to0^-}y=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{3}{x}-1\right)=-\infty-1=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{3}{x}-1\right)=+\infty-1=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=-1$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

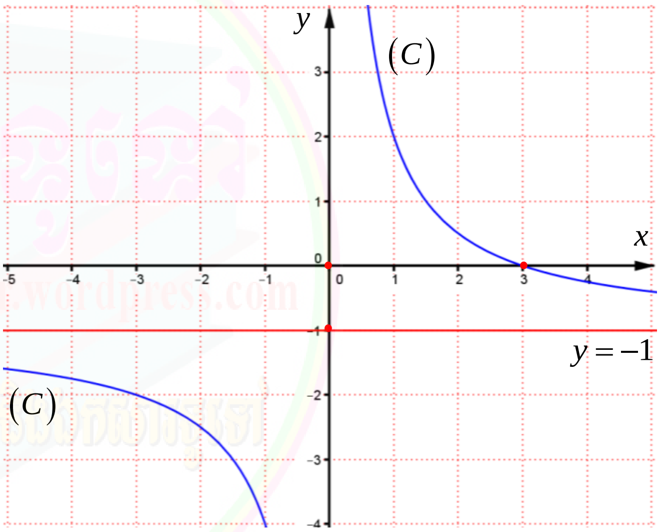
ដោយ $\lim\limits_{x\to0}y=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$ 0	0 $+\infty$
y'	$-$	$-$
y	-1 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ -1

• **សង់ខ្សែកោង (C)**

បើ $y=0\Leftrightarrow\frac{3-x}{x}=0\Rightarrow x=3$



ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ AB

គេមាន ចំណុច A និង B មានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា 1 និង 3 ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង C នោះគេបាន ៖

ចំពោះ $x=1$: $y(1)=\frac{3}{1}-1=2$

ចំពោះ $x=3$: $y(3)=\frac{3}{3}-1=0$

គេបាន កូអរដោនេចំណុច $A(1,2)$ និង $B(3,0)$

ដោយ $(AB):y=ax+b$ ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស

$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-2}{3-1}=-1$ និងកាត់ $A(1,2)$

គេបាន $2=(-1)(1)+b$ នាំឱ្យ $b=3$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់កំណត់បាន $\boxed{(AB):y=-x+3}$ ។

www.documentkhmer.wordpress.com

➤ទាញរកសមីការ បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ទាំងអស់ស្របនឹងបន្ទាត់ AB

បន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះស្របនឹងបន្ទាត់ (AB) គេបាន $y'(x_0)=-1$

នាំឱ្យ $-\dfrac{3}{x_0^2}=-1$ នោះ $x_0=\pm\sqrt{3}$

• ចំពោះ $x_0=-\sqrt{3}$

នាំឱ្យ $y(x_0)=y(-\sqrt{3})=\dfrac{3}{-\sqrt{3}}-1=-\sqrt{3}-1$

គេបាន $y=-1(x+\sqrt{3})-\sqrt{3}-1=-x-2\sqrt{3}-1$

• ចំពោះ $x_0=\sqrt{3}$

នាំឱ្យ $y(x_0)=y(\sqrt{3})=\dfrac{3}{\sqrt{3}}-1=\sqrt{3}-1$

គេបាន $y=-1(x-\sqrt{3})+\sqrt{3}-1=-x+2\sqrt{3}-1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះទាំងអស់ដែលរកបានគឺ ៖

$\boxed{y=-x-2\sqrt{3}-1\ ,\ y=-x+2\sqrt{3}-1}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៣ វិច្ឆិកា ២០០៤

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ចូរដោះស្រាយវិសមីការ :

ក. $\sin x+\sqrt{3}\cos x\ge 1$ បើ $-\pi<x<\pi$ ។

ខ. $\log_2(2-x)+\log_4(x+3)\le 1$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. កំណត់ចំនួនថេរ a និង b ដើម្បីឱ្យចំពោះគ្រប់ x គេបាន : $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x(x+1)}+\dfrac{b}{(x+1)(x+2)}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S=\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ រួចរកលីមីត S កាលណា $n\to+\infty$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. គេបង្កើតគណៈកម្មការមួយមានសមាជិក 5 នាក់ ក្នុងចំណោម 12 នាក់ ។ ចំពោះមនុស្សទាំងនេះ មានពីរនាក់ A និង B អាចចូលជាសមាជិកបានលុះត្រាតែចូលទាំងពីរនាក់ ។

ក. តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការនេះបានប៉ុន្មានរបៀប ?

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យ A និង B បានចូលជាសមាជិកគណៈកម្មការទាំងពីរនាក់ ។ **(២ពិន្ទុ)**

IV. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់នៃលំហគេឱ្យប្លង់ (P) និងស្វ៊ែ (S) មានសមីការរៀងគ្នា : $(P): x+2y+2z+5=0$ និង $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និងកាំ R នៃស្វ៊ែ (S) ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S) រួចរកសមីការបណ្តាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ រួចស្រាយថាខ្សែកោងនេះមានផ្ចិតឆ្លុះមួយ ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ដោយដឹងថាបន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់តាមចំណុច $A(0\,,\,2)$ ។

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃ S ផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=3$, $x=4$ ។ **(៣ពិន្ទុ)**

www.document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៤

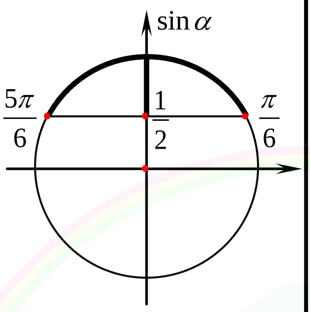
I. ដោះស្រាយវិសមីការ :

ក. $\sin x+\sqrt{3}\cos x\geq 1$ (បើ $-\pi<x<\pi$)

$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\geq\frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\geq\frac{1}{2}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\geq\frac{1}{2}$



$\frac{\pi}{6}\leq x+\frac{\pi}{3}\leq\frac{5\pi}{6}$

$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ វិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{-\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{\pi}{2}}$ ។

ខ. $\log_2(2-x)+\log_4(x+3)\leq 1$

វិសមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}2-x>0\\x+3>0\end{cases}\Rightarrow -3<x<2$

គេបាន $\log_2(2-x)+\frac{1}{2}\log_2(x+3)\leq 1$

$2\log_2(2-x)+\log_2(x+3)\leq 2$

$\log_2(2-x)^2+\log_2(x+3)\leq 2$

$\log_2(4-4x+x^2)(x+3)\leq\log_2 2^2$

$4x+12-4x^2-12x+x^3+3x^2\leq 4$

$x^3-x^2-8x+8\leq 0$

$x^2(x-1)-8(x-1)\leq 0$

$(x-1)(x^2-8)\leq 0$

ឱ្យ $x-1=0\Rightarrow x=1$ និង $x^2-8=0\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$; -3	-3 ; $-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$; 1	1 ; 2	2 ; $2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$; $+\infty$
$x-1$	−	−	− 0	+	+	+
x^2-8	+	+ 0	−	−	− 0	+
$(x-1)(x^2-8)\leq 0$	−	− 0	+ 0	−	− 0	+
$-3<x<2$		✓	✓	✓		
ចម្លើយ		✓		✓		

ដូចនេះ $\boxed{x\in\left(-3\,,-2\sqrt{2}\right]\cup\left[1\,,2\right)}$ ជាចម្លើយ ។

II. ក. កំណត់ចំនួនថេរ a និង b : (ដូចគ្រូមធ្យមឆ្នាំ 2009)

គេមាន $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x(x+1)}+\frac{b}{(x+1)(x+2)}$

$=\frac{a(x+2)+bx}{x(x+1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a}{x(x+1)(x+2)}$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}a+b=0\\2a=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក S

គេមាន $S=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+.......+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ហើយ $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1/2}{x(x+1)}+\frac{-1/2}{(x+1)(x+2)}$

$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right]$

យក $x=1\,,2\,,3\,,...\,,n$ គេបាន ៖

$$+\begin{cases}\frac{1}{1\cdot2\cdot3}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right]\\ \frac{1}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right]\\ \frac{1}{3\cdot4\cdot5}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\right]\\ \dots\dots\dots\dots\\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\end{cases}$$

$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)}$

➤រកលីមីត S កាលណា $n\to+\infty$

គេមាន $\lim_{n\to+\infty}S=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\lim_{n\to+\infty}S=\frac{1}{4}}$ ។

III. ក. តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការនេះបានប៉ុន្មានរបៀប ?

ដោយ មនុស្សទាំងអស់មាន 12 នាក់ ចង់បង្កើតគណៈកម្មការ មានគ្នា 5 នាក់ វាជាបន្សំនៃ 5 ធាតុយកពី 12 ធាតុ

គេតាង $n(s)=C(12\,,5)=\dfrac{12!}{(12-5)!\cdot 5!}$

$=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=792$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនួនគណៈកម្មការបង្កើតបាន 792 របៀប}}$ ។

ខ. រកប្រូបាប A និង B ចូលជាសមាជិកទាំងពីរនាក់

ដើម្បីជ្រើសរើសបាន A និង B ទាំងពីរនាក់ នោះគេត្រូវជ្រើសរើសមនុស្ស 3 ពី 10 នាក់ផ្សេងទៀត

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ជ្រើសបានទាំង A និង B

គេបាន $n(A)=C(2\,,2)\times C(10\,,3)$

$=1\times\dfrac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 3\cdot 2}=120$

នាំឱ្យ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{120}{792}=\dfrac{5}{33}$

ដូចនេះ ប្រូបាបរកបានគឺ $\boxed{P(A)=\dfrac{5}{33}}$ ។

IV. ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និងកាំ R នៃស្វ៊ែ (S)

គេបំលែងសមីការស្វ៊ែ (S) ជាទម្រង់ស្តង់ដា

$(S):\ x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$

$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2+4z)=0$

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+(z^2+4z+4)=9$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=3^2$

ផ្ទឹមនឹង $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

នាំឱ្យ ផ្ចិត $I(a\,,b\,,c)=I(1\,,2\,,-2)$, កាំ $r=3$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ស្វ៊ែនេះមានផ្ចិត } I(1\,,2\,,-2) \text{ និងកាំ } r=3}$ ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែ (S)

តាមរូបមន្ត $d(I\,,(P))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $I(1\,,2\,,-2)$ និង $(P):x+2y+2z+5=0$

នាំឱ្យ $d(I\,,(P))=\dfrac{|1\cdot 1+2\cdot 2+2(-2)+5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{|6|}{3}=2$

ដោយ $d=2<r=3$ នោះប្លង់ (P) ត្រូវកាត់ស្វ៊ែ (S)

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្លង់ } (P) \text{ ត្រូវកាត់ស្វ៊ែ } (S) \text{ ត្រូវបានបង្ហាញ}}$ ។

➢រកសមីការបណ្តាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S)

គេតាង សមីការប្លង់ត្រូវរកមានរាង ៖

$(\alpha):\ ax+by+cz+d=0$

ដោយ $(\alpha)\parallel(P)$ នោះ (α) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ដូច (P) គឺ $\vec{n}=(1\,,2\,,2)$ នោះគេបាន ៖

$(\alpha):\ x+2y+2z+d=0$

តែប្លង់ (α) ប៉ះស្វ៊ែ (S) នោះ $d(I\,,(\alpha))=r=3$

គេបាន $\dfrac{|1\cdot 1+2\cdot 2+2(-2)+d|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3 \Leftrightarrow \dfrac{|1+d|}{3}=3$

នាំឱ្យ $|1+d|=9 \Leftrightarrow 1+d=\pm 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=-10 \\ d=8\end{array}\right.$

ដូចនេះ បណ្តាសមីការប្លង់ត្រូវរកអាចសរសេរបានគឺ ៖

$\boxed{\begin{array}{l}(\alpha_1):\ x+2y+2z-10=0 \\ (\alpha_2):\ x+2y+2z+8=0\end{array}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

V. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}$

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $-2x-4\neq 0$

នាំឱ្យ $-2x\neq 4$ នោះ $x\neq -2$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{-2\}=(-\infty\,,-2)\cup(-2\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}\right)'$

$=\dfrac{(2x-2)(-2x-4)+2(x^2-2x+1)}{(2x+4)^2}$

$=\dfrac{2(x-1)(-2x-4)+2(x-1)^2}{(2x+4)^2}$

$=\dfrac{2(x-1)(-2x-4+x-1)}{(2x+4)^2}$

$=\dfrac{2(x-1)(-x-5)}{(2x+4)^2}$

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)(-x-5)}{(2x+4)^2}=0$

$\forall x\in D$, $\Leftrightarrow (2x+4)^2>0$

នាំឱ្យ $(x-1)(-x-5)=0$ នោះ $x=1$, $x=-5$

គេបាន $f(1)=\dfrac{1^2-2\cdot 1+1}{-2\cdot 1-4}=0$

$f(-5)=\dfrac{(-5)^2-2(-5)+1}{-2(-5)-4}=\dfrac{36}{6}=6$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

•ត្រង់ $x=-5$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(-5)=6$ ។

•ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(1)=0$ ។

•លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{-2x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-2x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+1}{-2x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-2x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2-2x+1}{-2(x+2)}=\frac{9}{-2\left(-2+0^- +2\right)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2-2x+1}{-2(x+2)}=\frac{9}{-2\left(-2+0^+ +2\right)}=-\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to-2} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}=-\dfrac{1}{2}x+2+\dfrac{9}{-2x-4}$

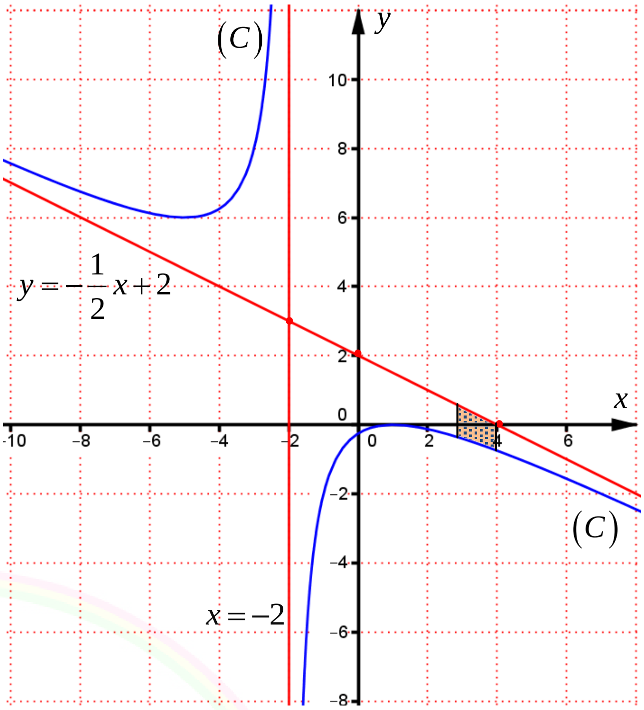
ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{9}{-2x-4}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=-\dfrac{1}{2}x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

•តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

➢សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



➢ស្រាយថាខ្សែកោងនេះមានផ្ចិតបំលែងឆ្លុះមួយ

របៀបទី១ តាមរូបមន្ត

ដោយ អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x=-2$ និង $y=-\dfrac{1}{2}x+2$

ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(-2\,,3)$ គេនឹងស្រាយថា

I ជាផ្ចិតបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប (C)

បើ $I(a\,,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C តាងអនុគមន៍ f លុះត្រាតែ វាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-4-x)+f(x)=6$

ដោយ $f(-4-x)=\dfrac{(-4-x)^2-2(-4-x)+1}{-2(-4-x)-4}$

$=\dfrac{16+8x+x^2+8+2x+1}{8+2x-4}$

$=\dfrac{x^2+10x+25}{2x+4}=\dfrac{-x^2-10x-25}{-2x-4}$

គេបាន $\dfrac{-x^2-10x-25}{-2x-4}+\dfrac{x^2-2x+1}{-2x-4}=\dfrac{-12x-24}{-2x-4}=6$

ដូចនេះ **ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $I(-2\,,3)$** ។

www.document4khmer.wordpress.com

របៀបទី២ តាមវិធីរំកិលអ័ក្ស

គេបំលែងកិលអ័ក្សពីតម្រុយ xoy ទៅតម្រុយថ្មី XIY

តាមរូបមន្ត បំលែងកិលអ័ក្ស $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$

ដោយ អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x = -2$ និង $y = -\frac{1}{2}x + 2$

ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(a\,,b) = I(-2\,,3)$

គេបាន $\begin{cases} x = -2 + X \\ y = 3 + Y \end{cases}$

គេមាន $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{-2x - 4}$

គេបាន $Y + 3 = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{-2x - 4}$

$$Y + 3 = \frac{(X-2)^2 - 2(X-2) + 1}{-2(X-2) - 4}$$

$$Y = \frac{X^2 - 4X + 4 - 2X + 4 + 1}{-2X} - 3$$

$$F(X) = \frac{X^2 + 9}{-2X} \quad , \quad Y = F(X)$$

ដោយ $\forall X \neq 0$ គេបាន ៖

$$F(-X) = \frac{(-X)^2 + 9}{2X} = -\frac{X^2 + 9}{-2X} = -F(X)$$

នាំឱ្យ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេសមាន $I(-2\,,3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

ដូចនេះ **ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $I(-2\,,3)$** ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C)

➢របៀបទី១

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

គេបាន $y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់តាមចំណុច $A(0\,,2)$

$$f'(x_0)\cdot 0 - f'(x_0)x_0 + f(x_0) = 2$$

$$-f'(x_0)x_0 + f(x_0) = 2$$

តែ $-f'(x_0)x_0 = \dfrac{-2(x_0 - 1)(-x_0 - 5)x_0}{(2x_0 + 4)^2}$

$$= \frac{(2x_0^2 - 2x_0)(x_0 + 5)}{(2x_0 + 4)^2}$$

$$= \frac{2x_0^3 + 8x_0^2 - 10x_0}{(2x_0 + 4)^2}$$

$$f(x_0) = \frac{x_0^2 - 2x_0 + 1}{-2x_0 - 4} = \frac{(x_0^2 - 2x_0 + 1)(-2x_0 - 4)}{(2x_0 + 4)^2}$$

$$= \frac{-2x_0^3 + 6x_0 - 4}{(2x_0 + 4)^2}$$

គេបាន $\dfrac{2x_0^3 + 8x_0^2 - 10x_0}{(2x_0 + 4)^2} + \dfrac{-2x_0^3 + 6x_0 - 4}{(2x_0 + 4)^2} = 2$

$$\frac{2x_0^3 + 8x_0^2 - 10x_0}{(2x_0 + 4)^2} + \frac{-2x_0^3 + 6x_0 - 4}{(2x_0 + 4)^2} = 2$$

$$8x_0^2 - 4x_0 - 4 = 2(2x_0 + 4)^2$$

$$8x_0^2 - 4x_0 - 4 = 2(4x_0^2 + 16x_0 + 16)$$

$$8x_0^2 - 4x_0 - 4 = 8x_0^2 + 32x_0 + 32$$

$$36x_0 = -36$$

$$x_0 = -1$$

នាំឱ្យ $f'(x_0) = f'(-1) = \dfrac{2(-1-1)(1-5)}{(-2+4)^2} = 4$

$$f(x_0) = f(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1) + 1}{-2(-1) - 4} = -2$$

នាំឱ្យ $y = 4(x+1) + (-2) = 4x + 2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរកបានគឺ **$y = 4x + 2$** ។

➢របៀបទី២

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $(T):\ y = ax + b$

ដោយ (T) កាត់ $A(0\,,2)$ នោះ $2 = 0\cdot a + b$ ឬ $b = 2$

គេបាន $(T):\ y = ax + 2$

ដោយ (T) ប៉ះ (C) គេផ្ទឹមបានសមីការអាប់ស៊ីស

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{-2x - 4} = ax + 2$$

$$x^2 - 2x + 1 = -2ax^2 - 4x - 4ax - 8$$

$$(1 + 2a)x^2 + (2 + 4a)x + 9 = 0$$

ដើម្បីឱ្យ (T) ប៉ះ (C) លុះត្រាសមីការមានឫសឌុប $\begin{cases} \Delta' = 0 \\ a \neq -1/2 \end{cases}$

គេបាន $(1 + 2a)^2 - 9(1 + 2a) = 0$

$$(1 + 2a)(2a - 8) = 0$$

$a = 4$, $a = -\dfrac{1}{2}$ មិនយក (ធ្វើឱ្យជាសមី.ដឺក្រេទី១)

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរកបានគឺ **$y = 4x + 2$** ។

www.document4khmer.wordpress.com

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃ S ផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=3$, $x=4$

តាមក្រាប នៅចន្លោះ $3\le x\le 4$ អាស៊ីមតូតទ្រេតនៅពីលើក្រាប

គេបាន ផ្ទៃកំណត់ដោយ $S=\int_3^4\left[y-(c)\right]dx$ គេបាន ៖

$$S=\int_3^4\left[-\frac{1}{2}x+2-\left(-\frac{1}{2}x+2+\frac{9}{-2x-4}\right)\right]dx$$

$$=\int_3^4\frac{9}{2x+4}dx$$

$$=\frac{9}{2}\int_3^4\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\frac{9}{2}\left[\ln|x+2|\right]_3^4$$

$$=\frac{9}{2}(\ln 6-\ln 5)$$

$$=\frac{9}{2}\ln\frac{6}{5}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃប្លង់កំណត់បាន $S=\frac{9}{2}\ln\frac{6}{5}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

www.document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ១៥ ធ្នូ ២០០៥

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច : $x^2-2x+5=0$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$ ។

គ. សរសេរ $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ **(២ពិន្ទុ)**

II. ចូរសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ : $f(x)=|x|$ រួចស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ តែគ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលពណ៌ស 12 និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅ 15 ។ គេចាប់យកពីក្នុងថង់នូវប៊ូលពីរជាមួយគ្នា ។ តើគេមានប៉ុន្មានរបៀបដើម្បីចាប់យកចេញឱ្យបានយ៉ាងតិចបំផុតប៊ូលពណ៌ ស មួយ ។ **(២ពិន្ទុ)**

IV. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(4,-2,0)$, $B(1,2,2)$, $C(2,-1,0)$ និង $D(2,-2,-1)$ ។

ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច B ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (CD) ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (P) ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $f_m(x)=\ln(x^2+4x+m)$ ។

ក. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍នេះមានដែនកំណត់ស្មើនឹងចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃនៃ $m=0$ ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=\ln(x+2)+\ln 2$ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $F(x)=2\left[(x+2)\ln|x+2|-x\right]$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x^2+4x+4)$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

www.document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៥

I. **ក. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច :**

គេមាន $x^2-2x+5=0$

$x^2-2x+1=-4$

$(x-1)^2=(2i)^2$

$x-1=\pm 2i$

$x=1\pm 2i$

ដូចនេះ សមីការមានឫសពីរគឺ $\boxed{x=1\pm 2i}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b

បើ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$

គេបាន $a(2-i)^2+b(2-i)-20=0$

$a(2-i)^2+b(2-i)-20=0$

$a(4-4i+i^2)+2b-bi-20=0$

$(3a+2b-20)+(-4a-b)i=0$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}3a+2b-20=0\\ -4a-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=16\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=-4\ ,\ b=16}$ ។

គ. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ ដែល $\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2}=i$

នាំឱ្យ $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3=i^3=-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

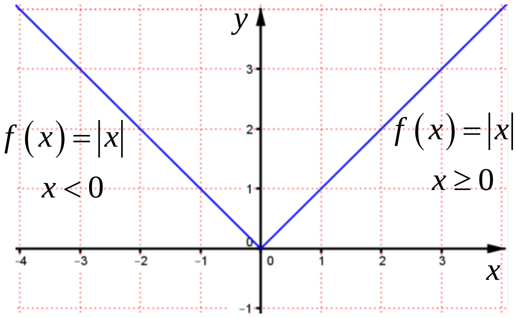
ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគឺ $\boxed{z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}}$ ។

II. **សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=|x|$** : (ដូចគ្រូបឋម២០០៩)

• ចំពោះ $x\ge 0$: $|x|=x$ នោះ $y=f(x)=x$

• ចំពោះ $x<0$: $|x|=-x$ នោះ $y=f(x)=-x$

គេសង់ក្រាបបាន តាមករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖



➤ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$

គេមាន $f(x)=|x|=\begin{cases}x & \text{បើ } x\ge 0\\ -x & \text{បើ } x<0\end{cases}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

$f(0)=0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ } x=0}$ ។

➤ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ គ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$

បើ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $f'_-(0)=f'_+(0)$

តាមនិយមន័យដេរីវេ $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

គេបាន $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1$

និង $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1$

ដោយ $f'_-(0)\ne f'_+(0)$ នោះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ គ្មានដេរីវេត្រង់ } x=0 \text{ ទេ}}$ ។

III. **រកចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុត :**

របៀបទី១

គេមាន ប៊ូលពណ៌ស 12 និងប៊ូលខ្មៅ 15 គេយកប៊ូលពីរ

នាំឱ្យ ចំនួនរបៀបចាប់ប៊ូលទាំងអស់ស្មើ $C(27\ ,\ 2)$ ដែល

$C(27\ ,\ 2)=\frac{27!}{(27-2)!\cdot 2!}=\frac{27\cdot 26\cdot 25!}{25!\cdot 2}=351$

ដោយ ព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុត បំពេញនឹងព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌ខ្មៅទាំងពីរ

ហើយ ព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌ខ្មៅទាំងពីរគឺ $C(15,\ 2)$

$C(15\ ,\ 2)=\frac{15!}{(15-2)!\cdot 2!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13!}{13!\cdot 2}=105$

គេបាន ចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុតស្មើ $C(27,\ 2)=C(15,\ 2)=351-105=246$ របៀប

ដូចនេះ $\boxed{\text{របៀបយកបានប៊ូលសយ៉ាងតិចមួយគឺ } 246 \text{ របៀប}}$ ។

របៀបទី២

ព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុតមានន័យថា យកបានប៊ូលសមួយ ឬប៊ូលសពីរ គេបាន ៖

ចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលសមួយយ៉ាងតិចបំផុតគឺ

$= C(12\,,1)C(15\,,1)+C(12\,,2)$

$= 12\times 15+\dfrac{12!}{(12-2)!\cdot 2!}$

$= 180+\dfrac{12\cdot 11\cdot 10!}{10!\cdot 2}=180+66=246$

ដូចនេះ: **របៀបយកបានប៊ូលសយ៉ាងតិចមួយគឺ 246 របៀប** ។

IV. ក. **កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) :**

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតមានរាង $(d):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\,,\ t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+ct\end{cases}$

ដោយ (d) កាត់តាមចំណុច $A(4\,,-2\,,0)$

នោះ: $x_0=4\,,\ y_0=-2\,,\ z_0=0$

ហើយ (d) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}=(0\,,-1\,,-1)$

នោះ: $a=0\,,b=-1\,,c=-1$

ដូចនេះ: សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $(d):\begin{cases}x=4\\ y=-2-t\,,\ t\in\mathbb{R}\\ z=-t\end{cases}$ ។

ខ. **សរសេរសមីការប្លង់ (P)**

សមីការប្លង់ $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (P) កាត់តាមចំណុច $B(1\,,2\,,2)$

នោះ: $x_0=1\,,\ y_0=2\,,\ z_0=2$

ហើយ (P) កែងនឹងបន្ទាត់ (CD) នាំឱ្យ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{CD}=(0\,,-1\,,-1)$

នោះ: $a=0\,,b=-1\,,c=-1$

គេបាន $(P):0(x-1)-(y-2)-(z-2)=0$

$(P):-(y-2)-(z-2)=0$

$(P): y+z-4=0$

ដូចនេះ: សមីការប្លង់ $(P): y+z-4=0$ ។

គ. **រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (P)**

គេមាន $(d):\begin{cases}x=4\\ y=-2-t\\ z=-t\end{cases}$ និង $(P): y+z-4=0$

គេបាន $(-2-t)-t-4=0$

$(-2-t)-t-4=0$

$-2t-6=0$

$t=-3$

ចំពោះ: $t=-3$ គេបាន $\begin{cases}x=4\,,\\ y=-2-(-3)\\ z=-(-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=1\\ z=3\end{cases}$

ដូចនេះ: **កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $(4\,,1\,,3)$** ។

V. ក. **កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ មានដែនកំណត់ស្មើ $\mathbb{R}$:**

គេមាន $f_m(x)=\ln\left(x^2+4x+m\right)$

របៀបទី១

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+4x+m>0$

គេបាន $\left(x^2+4x+4\right)+(m-4)>0$

$(x+2)^2+(m-4)>0\quad,\quad (x+2)^2\geq 0$

ដើម្បីឱ្យ វិសមីការពិតគ្រប់តម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ លុះត្រា $m-4>0$

នាំឱ្យ $m>4$

ដូចនេះ: **តម្លៃ m កំណត់បានគឺ $m>4$** ។

របៀបទី២

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+4x+m>0$

ដើម្បីឱ្យ វិសមីការពិតគ្រប់តម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ លុះត្រា $\begin{cases}a>0\\ \Delta'<0\end{cases}$

គេបាន $a=1>0\ ,\ 4-m<0$ នោះ: $m>4$

ដូចនេះ: **តម្លៃ m កំណត់បានគឺ $m>4$** ។

ខ. **ចំពោះតម្លៃនៃ $m=0$ ដោះស្រាយសមីការ**

គេមាន $f(x)=\ln(x+2)+\ln 2$

គេបាន $\ln\left(x^2+4x\right)=\ln(x+2)+\ln 2$

លក្ខខណ្ឌ សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}x^2+4x>0\\ x+2>0\end{cases}$

កន្សោម x^2+4x មានឫស $x=0\,,\ x=-4$

កន្សោម $x+2$ មានឫស $x=-2$

តារាងសញ្ញាដើម្បីទាញរកលក្ខខណ្ឌ

x	$-\infty$ -4	-2	0	$+\infty$
$x^2+4x>0$	$+$ 0	$-$	$-$ 0	$+$
$x+2>0$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
លក្ខខណ្ឌ				

ហេតុនេះ លក្ខខណ្ឌ $x>0$

គេបាន $\ln\left(x^2+4x\right)=\ln(2x+4)$

$x^2+4x=2x+4$

$x^2+2x-4=0$

មាន $\Delta'=1+4=5$

$x=-1+\sqrt{5}$, $x=-1-\sqrt{5}<0$ មិនយក

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=-1+\sqrt{5}}$ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

គេមាន $F(x)=2\left[(x+2)\ln|x+2|-x\right]$

$f(x)=\ln\left(x^2+4x+4\right)$

គេបាន $F'(x)=\left(2\left[(x+2)\ln|x+2|-x\right]\right)'$

$=2\left[(x+2)'\ln|x+2|+\left(\ln|x+2|\right)'(x+2)-1\right]$

$=2\left[\ln|x+2|+\dfrac{(x+2)'}{x+2}(x+2)-1\right]$

$=2\left[\ln|x+2|+1-1\right]=2\ln|x+2|$

$=\ln(x+2)^2=\ln\left(x^2+4x+4\right)=f(x)$

ដោយ $F'(x)=f(x)$

នាំឱ្យ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អនុគមន៍ } F(x) \text{ ជាព្រីមីទីវនៃ } f(x)}$ ។

www.documentkhmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ១៨ វិច្ឆិកា ២០០៦

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែល z , $\frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $|x|-x=1+2i$ ដែល x ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

គ. គេឱ្យបីចំនួន a , b និង c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $abc=1$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

II. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស និងជាអនុគមន៍កើន ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. ក. រកសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=\frac{e^x}{1-\sin x}$ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=0$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=2x+1+\ln(x-1)$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេមានការេមួយមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ a ។ នៅក្នុងការេនោះគេសង់ការេមួយទៀត ដែលមានកំពូលវាជាចំណុចកណ្ដាលនៃ ជ្រុងការេមុន ។ គេសង់ការេរបៀបនេះរហូតដល់ការេទី n ។

ក. គណនាផ្ទៃក្រឡាការេទី n ។

ខ. គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេទាំងអស់ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

V. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(3,2,0)$ និង $B(0,-1,3)$ ។

ក. រកសមីការប្លង់ (Q) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (AB) ។

ខ. គេឱ្យចំណុច $R(5,0,0)$, $S(0,5,0)$ និង $T(0,0,-5)$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុច R , S និង T ជាចំណុច ដែលស្ថិតនៅលើប្លង់ (Q) ។

គ. គណនាប្រវែង AB និងផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ RST ។ **(៣ពិន្ទុ)**

www.documentskhmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៦

I. **ក. កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច** z : (ដូចគ្រូមធ្យមឆ្នាំ ២០១១)

គេតាង $z=a+bi$

នាំឱ្យ $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$

$1-z=(1-a)-bi$

គេបាន $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$|1-z|=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$

ដោយ z , $\frac{1}{z}$ និង $1-z$ មានម៉ូឌុលស្មើគ្នា គេបាន ៖

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$$

នាំឱ្យ $\begin{cases} a^2+b^2=1 & (1) \\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2} & (2) \end{cases}$

តាម (2) $a^2+b^2=(1-a)^2+b^2$

$a^2=1-2a+a^2$ នាំឱ្យ $a=\frac{1}{2}$

តាម (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^2+b^2=1 \Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ កំណត់បានចំនួនកុំផ្លិច $\boxed{z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $|x|-x=1+2i$ ដែល x ជាចំនួនកុំផ្លិច

តាង $x=a+bi$ នាំឱ្យ $|x|=\sqrt{a^2+b^2}$

គេបាន $\sqrt{a^2+b^2}-(a+ib)=1+2i$

$\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)-bi=1+2i$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}-a=1 \\ -b=2 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} \sqrt{a^2+(-2)^2}-a=1 \\ b=-2 \end{cases}$

គេបាន $\sqrt{a^2+4}=1+a$ (លើកអង្គទាំងពីរជាការេ)

$a^2+4=1+2a+a^2 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{x=\frac{3}{2}-2i}$ ។

គ. ស្រាយថា $\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1$

គេមាន $abc=1$ នោះគេបាន ៖

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}$$

$$=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{a+ab+abc}+\frac{ab}{ab+abc+abca}$$

$$=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{ab+1+a}$$

$$=\frac{1+a+ab}{1+a+ab}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1}$ ។

II. **ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍** f : (ដូចគ្រូមធ្យមឆ្នាំ ២០១១)

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} 1+x^2\geq 0 & (1) \\ x+\sqrt{1+x^2}>0 & (2) \end{cases}$

តាម (1) $1+x^2\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

តាម (2) $x+\sqrt{1+x^2}>0$ ដោយ $\forall x\in\mathbb{R}$

$1+x^2>x^2$

$\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}$

$x+\sqrt{1+x^2}>x+|x|$

តែ $\forall x\in\mathbb{R}$, $x+|x|\geq 0$

នាំឱ្យ $x+\sqrt{1+x^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានដែនកំណត់ } D=\mathbb{R}}$ ។

ខ. ➢បង្ហាញថា f **ជាអនុគមន៍សេស**

គេមាន $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

នាំឱ្យ $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)$

$$=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$

$$=\ln\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}$$

$$= \ln\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$= \ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1}$$

$$= -\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = -f(x)$$

ដោយ $f(-x) = f(x)$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍សេស}}$ ។

➢បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើន

គេមាន $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

តាមរូបមន្ត $y = \ln(u) \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$

នាំឱ្យ $$f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\dfrac{\left(1+x^2\right)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$ នាំឱ្យ $f'(x) > 0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍កើន } \forall x \in \mathbb{R}}$ ។

III. ក. រកសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

គេមាន $y = \dfrac{e^x}{1-\sin x}$

$$y' = \frac{\left(e^x\right)'(1-\sin x)-(1-\sin x)'e^x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{e^x(1-\sin x)+e^x\cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{e^x(1-\sin x+\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

បន្ទាត់ប៉ះមានរាង $(T): y = y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

ដោយ (T) ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x = 0$

គេបាន $x = x_0 = 0$

$$y'(x_0) = y'(0) = \frac{e^0(1-0+1)}{(1-0)^2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$y(x_0) = y(0) = \frac{e^0}{1-\sin 0} = \frac{1}{1} = 1$$

នាំឱ្យ $(T): y = 2(x-0)+1 = 2x+1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះរកបានគឺ $\boxed{(T): y = 2x+1}$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M

គេមាន បន្ទាត់ (T) : $y = 2x+1$

ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y = 2x+1+\ln(x-1)$

នោះគេផ្ទឹមបានសមីការអាប់ស៊ីសដូចខាងក្រោម ៖

$2x+1+\ln(x-1) = 2x+1$

$\ln(x-1) = 0$

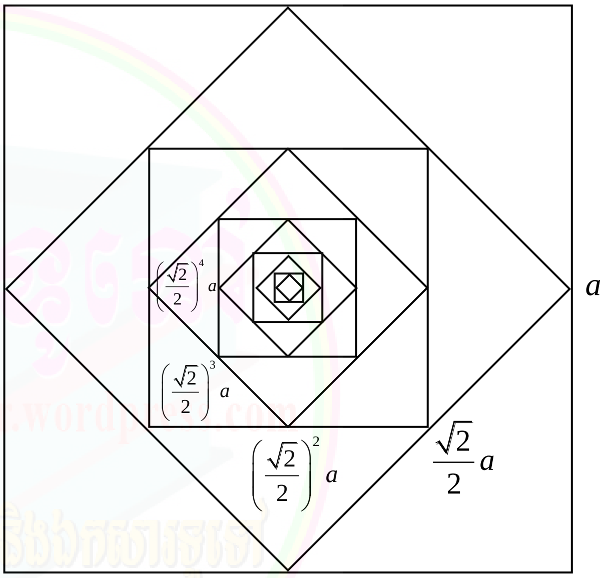
$x-1 = e^0$

$x = 2$

ចំពោះ $x = 2$: $y = 2\cdot 2+1 = 5$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $\boxed{x = 2\ ,\ y = 5}$ ។

IV. ក. គណនាផ្ទៃក្រឡាការេទី n :



គេបានជ្រុងនៃការេបន្តបន្ទាប់ ពីការេទី១ ទី២ ទី៣ ... ទី n គឺ៖

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 a\ ,\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 a\ ,\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 a\ ,\ \dots\ ,\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} a$$

ផ្ទៃការេទី១ $s_1 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{0\times 2} a^2$ ឬ $s_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 a^2$

ផ្ទៃការេទី២ $s_2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1\times 2} a^2$ ឬ $s_2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^1 a^2$

ផ្ទៃការេទី៣ $s_3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2\times 2} a^2$ ឬ $s_3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 a^2$

....

ផ្ទៃការេទី n $s_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{(n-1)\times 2} a^2$ នាំឱ្យ $s_n = \dfrac{a^2}{2^{n-1}}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាការេទី n គឺ $\boxed{s_n = \dfrac{a^2}{2^{n-1}}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ខ. គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេទាំងអស់

$S = s_1 + s_2 + s_3 + ... + s_n$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^0 a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a^2$

$= a^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

$= a^2\left(\frac{s_1(q^n-1)}{q-1}\right) = a^2\left[\frac{1\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2}-1}\right]$

$= 2a^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

ដូចនេះ គណនាបានផលបូក $\boxed{S = 2a^2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$ ។

V. ក. រកសមីការប្លង់ (Q) :

ប្លង់ (Q) រាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (Q) កាត់ $A(3, 2, 0)$

នោះ $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, $z_0 = 0$

ហើយ (Q) កែងនឹងវ៉ិចទ័រ (AB) នាំឱ្យ (Q) មានវ៉ិចទ័រ

ណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-3, -3, 3)$

នោះ $a=-3$, $b=-3$, $c=3$

នាំឱ្យ $(Q): -3(x-3)-3(y-2)+3(z-0)=0$

$(x-3)+(y-2)-(z-0)=0$

$x+y-z-5=0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់កំណត់បាន $\boxed{(Q): x+y-z-5=0}$ ។

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា R , S និង T ជាចំណុចស្ថិតនៅលើប្លង់ (Q)

គេមាន $R(5, 0, 0)$, $S(0, 5, 0)$, $T(0, 0, -5)$

និងប្លង់ $(Q): x+y-z-5=0$

បើចំណុច R, S, T ជាចំណុចស្ថិតនៅលើប្លង់ (Q) លុះត្រាតែកូអរដោនេចំណុចទាំងនេះផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការប្លង់ (Q) គេបាន ៖

• ចំពោះ $R(5, 0, 0)$ នោះ $(Q): 5+0-0-5=0$ ពិត

• ចំពោះ $S(0, 5, 0)$ នោះ $(Q): 0+5-0-5=0$ ពិត

• ចំពោះ $T(0, 0, -5)$ នោះ $(Q): 0+0+5-5=0$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{R \in (Q), S \in (Q), T \in (Q)}$ ។

គ. គណនាប្រវែង AB

ដោយ $\overrightarrow{AB} = (-3, -3, 3)$

នាំឱ្យ $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{AB = 3\sqrt{3}}$ ឯកតាប្រវែង ។

➤គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ RST

តាមរូបមន្ត $S_{RST} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{RS} = (-5, 5, 0)$, $\overrightarrow{RT} = (-5, 0, -5)$

គេបាន $\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -25\vec{i} - 25\vec{j} + 25\vec{k}$

នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}\right| = \sqrt{(-25)^2 + (-25)^2 + 25^2} = 25\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{RST} = \frac{25\sqrt{3}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

www.documentkhmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ១៦ វិច្ឆិកា ២០០៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គេឱ្យ $P(z)=z^2+2(2+i)z+3+4i$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។ បញ្ជាក់ថា $P(z)$ ជាការេនៃពហុធាដឺក្រេទី១ ។

ខ. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=1+i$ ។ បង្ហាញថា $z^3=-2+2i$ ។ ចំពោះតម្លៃនៃ z នេះ ចូររកចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា

$\frac{a}{1+z}+\frac{b}{1+z^3}=2i$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ : $I=\int x^2\ln x\,dx$, $J=\int\frac{\sin 2x-\cos x}{\cos x}dx$ ។

ខ. គេឱ្យ $g(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$ ។ កំណត់ចំនួនពិត m , n , p ដើម្បីឱ្យបាន $g(x)=m+\frac{n}{x+1}+\frac{p}{x-3}$ ចំពោះគ្រប់

$x\in(-1\,,3)$ រួចគណនា $\int_0^2 g(x)dx$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. គេចង់ជ្រើសរើសសិស្ស 3 នាក់ ក្នុងចំណោមសិស្ស 12 នាក់ ដែលក្នុងនោះមានសិស្សប្រុស 7 នាក់ និងសិស្សស្រី 5 នាក់ ។ រកប្រូបាបដែលគេជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស 2 នាក់ និងសិស្សស្រី 1 នាក់ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n ដើម្បីឱ្យ $F(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃ a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n ដែលរកឃើញក្នុងសំណួរខាងលើ បង្ហាញថា $f(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ គេឱ្យបន្ទាត់ពីរដែលមានសមីការ :

$(D_1):\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ និង $(D_2):\begin{cases}3x+y-5z+1=0\\2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (D_1) និងបន្ទាត់ (D_2) អរតូកូណាល់គ្នា ។

ខ. តើបន្ទាត់ (D_1) និង បន្ទាត់ (D_2) កាត់គ្នាឬទេ ?

គ. ប្លង់ (P) មួយមានសមីការ $2x+3y+z-12=0$ ។ រកចម្ងាយពីគល់តម្រុយ O ទៅប្លង់ (P) ។ **(៣ពិន្ទុ)**

www.documentkhmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៧

I. ក. បញ្ជាក់ថា $P(z)$ ជាការេនៃពហុធាដឺក្រេទី១ :

គេមាន $P(z)=z^2+2(2+i)z+3+4i$

$$\Delta'=(2+i)^2-(3+4i)$$
$$=4+4i+i^2-3-4i=0$$

នាំឱ្យ សមីការមានឫសឌុប $z_0=\frac{-b'}{a}=-(2+i)$

តាមទ្រឹស្តីបទផលគុណកត្តាគេអាចដាក់ $P(z)$ ជាផលគុណកត្តា

គេបាន $P(z)=(z-z_0)(z-z_0)=(z-z_0)^2$

នាំឱ្យ $P(z)=(z+2+i)^2$

ដូចនេះ $P(z)$ ជាការេនៃពហុធាដឺក្រេទី១ ។

ខ. បង្ហាញថា $z^3=-2+2i$

គេមាន $z=1+i$

នាំឱ្យ $z^3=(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=-2+2i$

ដូចនេះ $z^3=-2+2i$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

➤រកចំនួនពិត a និង b

គេមាន $\frac{a}{1+z}+\frac{b}{1+z^3}=2i$

ដោយ $z=1+i$ និង $z^3=-2+2i$

គេបាន
$$\frac{a}{1+1+i}+\frac{b}{1-2+2i}=2i$$
$$\frac{a}{2+i}+\frac{b}{-1+2i}=2i$$
$$\frac{a(2-i)}{2^2-i^2}+\frac{b(-1-2i)}{(-1)^2-(2i)^2}=2i$$
$$\frac{2a-ai}{5}+\frac{-b-2bi}{5}=2i$$
$$(2a-b)+(-a-2b)i=10i$$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}2a-b=0\\-a-2b=10\end{cases}\Big|\times 2 \Rightarrow \begin{cases}2a-b=0 & (1)\\-2a-4b=20 & (2)\end{cases}$

បូកអង្គនិងអង្គនៃ $(1)+(2)$ គេបាន $-5b=20$ ឬ $b=-4$

ចំពោះ $b=-4$ នាំឱ្យ $(1):2a-(-4)=0\Rightarrow a=-2$

ដូចនេះ ចំនួនពិតរកបាន $a=-2\,,\,b=-4$ ។

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ :

គេមាន $\mathbf{I}=\int x^2\ln x\,dx$

គេតាង $u=\ln x$ នោះ $du=\frac{1}{x}dx$

$dv=x^2dx$ នោះ $v=\frac{1}{3}x^3$

តាមរូបមន្ត អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

$$\mathbf{I}=\int x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^2dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+c\ ,\ c \text{ ថេរ}$$
$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+c$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\mathbf{I}=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+c$ ។

គេមាន $\mathbf{J}=\int\frac{\sin 2x-\cos x}{\cos x}dx$

$$=\int\frac{2\sin x\cos x-\cos x}{\cos x}dx$$
$$=\int(2\sin x-1)dx$$
$$=-2\cos x-x+c\ ,\ c \text{ ថេរ}$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\mathbf{J}=-2\cos x-x+c\ ,\ c$ ថេរ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត $m\,,n\,,p$

គេមាន $g(x)=m+\frac{n}{x+1}+\frac{p}{x-3}$

$$g(x)=\frac{m(x+1)(x-3)+n(x-3)+p(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$
$$=\frac{m(x^2-2x-3)+n(x-3)+p(x+1)}{x^2-2x-3}$$
$$=\frac{mx^2+(-2m+n+p)x+(-3m-3n+p)}{x^2-2x-3}$$

ផ្ទឹមនឹង $g(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$

គេបាន $\begin{cases}m=1\\-2m+n+p=1\\-3m-3n+p=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\n=3/2\\p=3/2\end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $m=1\,,\,n=\frac{3}{2}\,,\ p=\frac{3}{2}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

➤គណនា $\int_0^2 g(x)dx$

ចំពោះ $m=1\,,\; n=\dfrac{3}{2}\,,\;\; p=\dfrac{3}{2}$

គេបាន $g(x)=1+\dfrac{\frac{3}{2}}{x+1}+\dfrac{\frac{3}{2}}{x-3}$

នាំឱ្យ $\int_0^2 g(x)dx=1+\dfrac{\frac{3}{2}}{x+1}+\dfrac{\frac{3}{2}}{x-3}$

$$=\int_0^2\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3}\right]dx$$

$$=\left[x+\frac{3}{2}\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-3|\right]_0^2$$

$$=\left(2+\frac{3}{2}\ln x+0\right)-\left(0+0+\frac{3}{2}\ln 3\right)=2$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\int_0^2 g(x)dx=2}$ ។

III. **រកប្រូបាបជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស 2 នាក់ និងសិស្សស្រី 1 :**

គេមាន សិស្សប្រុស 7 នាក់ និងសិស្សស្រី 5 នាក់

គេចង់ជ្រើសរើសសិស្ស 3 នាក់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាចតាងដោយ៖

$$n(S)=C(12\,,\,3)=\frac{12!}{(12-3)^2\cdot 3!}$$

$$=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{9^2\cdot 3\cdot 2}=220$$

ដោយ ជ្រើសរើសបានសិស្សប្រុស 2 នាក់ និងស្រី 1 នាក់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីស្របតាងដោយ៖

$$n(A)=C(7\,,\,2)\times C(5\,,\,1)$$

$$=\frac{7!}{5!\times 2!}\times 5=105$$

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{105}{220}=\dfrac{21}{44}$

ដូចនេះ គណនាបានប្រូបាប $\boxed{P(A)=\dfrac{21}{44}}$ ។

IV. **ក. កំណត់តម្លៃ $a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,\ldots\,,\,a_n$:**

គេមាន $f(x)=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$

$$F(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$$

នាំឱ្យ $F'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}$

ដើម្បីឱ្យ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លុះត្រាតែ $F'(x)=f(x)$

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$$

ផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នានៃអថេរ x គេបាន ៖

$$\begin{cases}a_1=1\\ 2a_2=2\\ 3a_3=3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ na_n=n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\ a_2=1\\ a_3=1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_n=1\end{cases}$$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n=1}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

ចំពោះ $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n=1$

គេបាន $F(x)=x+x^2+x^3+\ldots+x^n$ (ផលបូកស្វ៊ីតធរ.)

$$=\frac{x(x^n-1)}{x-1}=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$$

នាំឱ្យ $F'(x)=\left(\dfrac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)'$

$$=\frac{\left[(n+1)x^n-1\right](x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(n+1)x^{n+1}-(n+1)x^n-x+1-x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

តែ $F'(x)=f(x)$ នោះ $f(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

V. **ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (D_1) និង (D_2) អរតូកូណាល់គ្នា :**

គេមាន $(D_1):\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$

មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}_1=(1\,,\,-2\,,\,3)$

ហើយ $(D_2):\begin{cases}3x+y-5z+1=0\\ 2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ យក $z=t$

គេបាន $(D_2):\begin{cases}3x+y=5t-1\\ 2x+3y=8t-3\end{cases}\Bigg|\times(-3)$

$$+\begin{cases}-9x-3y=-15t+3\\ 2x+3y=8t-3\end{cases}$$

$$-7x=-7t \qquad\Rightarrow x=t$$

ចំពោះ $x=t:\; 2t+3y=8t-3\;\Rightarrow\; y=2t-1$

www.document4khmer.wordpress.com

គេបាន $(D_2): x=t\ ,\ y=-1+2t\ ,\ z=t\ \ ,t\in\mathbb{R}$

មានមេគុណប្រាប់ទិស $\vec{u}_2=(1\ ,\ 2\ ,\ 1)$

ដោយ $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=(1)(1)+(-2)(2)+(3)(1)=0$

នាំឱ្យ $\vec{u}_1\perp\vec{u}_2$ មានន័យថា $(D_1)\perp(D_2)$

ដូចនេះ ស្រាយបានថា $\boxed{(D_1)\perp(D_2)}$ ។

ខ. តើបន្ទាត់ (D_1) និង បន្ទាត់ (D_2) កាត់គ្នាឬទេ ?

គេមាន $(D_1): \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$

$$(D_1):\begin{cases}x=t'\\ y=1-2t'\ ,\ t'\in\mathbb{R}\\ z=3t'\end{cases}$$

ហើយ $(D_2):\begin{cases}x=t\\ y=-1+2t\ \ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$

បើបន្ទាត់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នា គេបាន ៖

$$\begin{cases}t'=t & (1)\\ 1-2t'=-1+2t & (2)\\ 3t'=t & (3)\end{cases}$$

តាម (1) និង (3) ជាករណីមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នា

នាំឱ្យ បន្ទាត់ទាំងពីរគ្មានចំណុចប្រសព្វទេ

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ទាំងពីរ } (D_1) \text{ និង } (D_2) \text{ មិនកាត់គ្នាទេ}}$ ។

គ. រកចម្ងាយពីគល់តម្រុយ O ទៅប្លង់ (P)

គេមាន ប្លង់ (P): $2x+3y+z-12=0$

មាន $a=2\ ,\ b=3\ ,\ c=1\ ,\ d=-12$

ចំណុច គល់ $O(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ នោះ $x_0=y_0=z_0=0$

តាមរូបមន្ត $d\left(O,(P)\right)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

គេបាន $d\left(O\ ,(P)\right)=\dfrac{|0+0+0-12|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{14}}=\dfrac{6\sqrt{14}}{7}$

ដូចនេះ $\boxed{d\left(O\ ,(P)\right)=\dfrac{6\sqrt{14}}{7}}$ ឯកតាប្រវែង ។

www.documentkhmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ២០ វិច្ឆិកា ២០០៨

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=\log\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , y ជារបស់ $\mathbb{R}$ ។

គ. គេឱ្យសមីការ $x^2+ax+1=0$ ។ រកតម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា x_1 និង x_2 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^2+x_2^2>7$ ។ **(២ពិន្ទុ)**

II. ក. គណនាអាំងតេក្រាល : $I=\int(\tan x-\cot x)^2\,dx$, $J=\int\frac{1}{x^2-5x+6}dx$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y=x^3-x^2-2x$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ **(២ពិន្ទុ)**

III. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលស 7 និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅ 10 ។ គេចាប់យកចេញនូវប៊ូលពីរជាមួយគ្នា ។ តើគេមានប៉ុន្មានរបៀប ដើម្បីចាប់យកប៊ូលចេញឱ្យបានយ៉ាងតិចបំផុតនូវប៊ូលសមួយ ? **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេឱ្យស្វ៊ែមួយមានប្រវែងកាំ $9\,\text{dm}$ ។ កោណមួយចារឹកក្នុងស្វ៊ែនោះ ។ រកកម្ពស់នៃកោណ ដើម្បីឱ្យកោណនោះមានមាឌ អតិបរមា ។ **(២ពិន្ទុ)**

V. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$ និងមានខ្សែកោង (C) ។

ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។ បង្ហាញថា អនុគមន៍ f មានអតិបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃអតិបរមានោះ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេក នៃខ្សែកោង (C) ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៨

I. **ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍** :

គេមាន $y=\log\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)$ មានន័យលុះត្រាតែ

$$\begin{cases} 4-x^2\geq 0 & (1)\\ 1-\sqrt{4-x^2}>0 & (2)\end{cases}$$

តាម (1) ឱ្យ $4-x^2=0$ សមីការមានឫស $x=\pm 2$

តាម (2) ឱ្យ $1-\sqrt{4-x^2}=0$ ឬ $1=\sqrt{4-x^2}$

$4-x^2=1$ មានឫស $x=\pm\sqrt{3}$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$4-x^2\geq 0$	$-$	0 $+$	$+$	$+$ 0	$-$	
$1-\sqrt{4-x^2}>0$		$+$ 0	$-$ 0	$+$		
ចម្លើយ		✓		✓		

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=\left[-2\,,\,-\right)\cup\left(\sqrt{3}\,,\,2\right]}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា វិសមភាពពិតគ្រប់

គេមាន $x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0$

$x^2+2(1-2y)x+\left(5y^2-6y+3\right)>0$

វិសមីការនេះពិត ឬផ្ទៀងផ្ទាត់លុះត្រាតែ $\begin{cases} a>0\\ \Delta'<0\end{cases}$

គេមាន $a=1>0$

ហើយ $\Delta'=(1-2y)^2-\left(5y^2-6y+3\right)$

$=1-4y+4y^2-5y^2+6y-3$

$=-y^2+2y-2$

$=-\left(y^2-2y+1\right)-1$

$=-(y-1)^2-1<0\ ,\ \forall y\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{x^2+5y^2-4xy+2x-6y+3>0 \text{ ពិត គ្រប់តម្លៃនៃ } x\,,\,y\in\mathbb{R}}$ ។

គ. រកតម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា $x_1\,,\,x_2$

គេមាន សមីការ $x^2+ax+1=0$ មាន $S=-a$, $P=1$

សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^2+x_2^2>7$

លុះត្រាតែ $\begin{cases}\Delta>0\\ x_1^2+x_2^2>7\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a^2-4>0\\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-7>0\end{cases}$

គេបាន $\begin{cases}a^2-4>0\\ S^2-2P-7>0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a^2-4>0\\ (-a)^2-2\cdot 1-7>0\end{cases}$

$\begin{cases}a^2-4>0\\ a^2-9>0\end{cases}$

កន្សោម a^2-4 មានឫស $a=\pm 2$

កន្សោម a^2-9 មានឫស $a=\pm 3$

តារាងសញ្ញា

a	$-\infty$	-3	-2	2	3	$+\infty$
$a^2-4>0$	$+$	$+$ 0	$-$ 0	$+$	$+$	
$a^2-9>0$	$+$ 0	$-$	$-$	$-$ 0	$+$	
ចម្លើយ	✓				✓	

ដូចនេះ $\boxed{a\in(-\infty\,,\,-3)\cup(3\,,\,+\infty)}$ ។

II. **គណនាអាំងតេក្រាល** :

$\mathbf{I}=\int(\tan x-\cot x)^2\,dx$

$=\int\left(\tan^2 x-2\tan x\cot x+\cot x\right)dx$

$=\int\left(\tan^2 x-2+\cot^2 x\right)dx$

$=\int\left[\left(1+\tan^2 x\right)+\left(1+\cot^2 x\right)-4\right]dx$

$=\tan x-\cot x-4x+c\ ,\ c$ ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I}=\tan x-\cot x-4x+c}$, c ជាចំនួនថេរ ។

$\mathbf{J}=\int\dfrac{dx}{x^2-5x+6}$ (លំហាត់ដូចប្រឡងគ្រូមធ្យម ២០០៥)

$=\int\dfrac{dx}{(x-2)(x-3)}$

$=\int\dfrac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)}dx$

$=\int\dfrac{1}{(x-3)}dx-\int\dfrac{1}{(x-2)}dx$

$=\ln|x-3|-\ln|x-2|+c$

$=\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|+c$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{J}=\ln\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|+c}$, c ជាចំនួនថេរ ។

www.document4khmer.wordpress.com

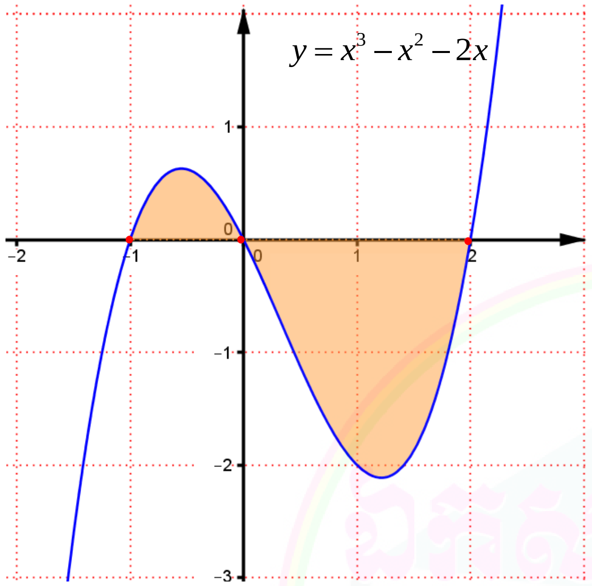
ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេមាន $y=x^3-x^2-2x$ ជាខ្សែកោង

តារាងតម្លៃលេខត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	0	0	-2	0

គេសង់ខ្សែកោងបានដូចខាងក្រោម ៖



តាមក្រាប ផ្ទៃក្រឡាមានពីរផ្នែក គេបាន ៖

$$S=\int_{-1}^{0}\left(x^3-x^2-2x\right)dx-\int_{0}^{2}\left(x^3-x^2-2x\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\left[0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)\right]-\left[\left(4-\frac{8}{3}-4\right)-0\right]$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាគណនាបាន $\boxed{S=\frac{37}{12}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

III. រកចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុត :

គេមាន ប៊ូលពណ៌ស 7 និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅ 10

ព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ូលពណ៌សមួយយ៉ាងតិចបំផុតមានន័យថា យកបានប៊ូលសមួយ ឬប៊ូលសពីរ គេបាន ៖

ចំនួនរបៀបយកបានប៊ូលសមួយយ៉ាងតិចបំផុតគឺ

$$=C(7\,,1)C(10\,,1)+C(7\,,2)$$

$$=7\times10+\frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!}=70+\frac{7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot2}=70+21=91$$

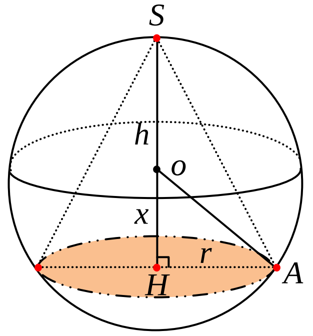
ដូចនេះ $\boxed{\text{របៀបយកបានប៊ូលសយ៉ាងតិចមួយគឺ 91 របៀប}}$ ។

IV. រកកម្ពស់នៃកោណ ដើម្បីឱ្យកោណនោះមានមាឌ អតិបរមា :

គេតាង h ជាកម្ពស់នៃកោណ

$x=OH$ ដែល $x<9$ ហើយ $h=9+x$

r ជាកាំបាតរបស់កោណ



មាឌកោណ $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ (តាមពីតាគ័រ $r^2=9^2-x^2$)

គេបាន $V(x)=\frac{1}{3}\pi\left(81-x^2\right)(x+9)$

$V(x)=\frac{\pi}{3}\left(-x^3-9x^2+81x+729\right)$

នាំឱ្យ $V'(x)=\frac{\pi}{3}\left(-3x^2-18x+81\right)$

$V'(x)=\pi\left(-x^2-6x+27\right)$

$V''(x)=\pi(-2x-6)$

ដើម្បីឱ្យមាឌ V អតិបរមា លុះត្រាតែ $\begin{cases}V'(x)=0\\V''(x)<0\end{cases}$

គេបាន $V'(x)=0 \Leftrightarrow \pi\left(-x^2-6x+27\right)=0$

$\Delta'=(-3)^2+27=36=6^2$

នោះ: $x=3$, $x=9$ មិនយក

ចំពោះ $x=3:\ V''(3)=\pi(-2\cdot3-6)=-12\pi<0$ ពិត

នាំឱ្យ $h=x+9=3+9=12\text{ dm}$

ដូចនេះ កម្ពស់កោណគឺ $\boxed{h=12\text{ dm}}$ ។

V. ក. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f :

គេមាន $x>0$, $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$ មានខ្សែកោង (C)

គេបាន $f'(x)=\frac{(x+\ln x)'x-x'(x+\ln x)}{x^2}$

$=\frac{x+1-x-\ln x}{x^2}$

$=\frac{1-\ln x}{x^2}$

ដូចនេះ គណនាបានដេរីវេ $\boxed{f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

➢បង្ហាញថា f មានអតិបរមាមួយ ដែលត្រូវរក

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$

ដោយ $\forall x>0\,,\ x^2>0$ គេបាន $1-\ln x=0$ នោះ $x=e$

គេបាន $f(e)=\dfrac{e-\ln e}{e}=\dfrac{e-1}{e}$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ត្រង់ $x=e$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពីរ $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយស្មើនឹង $f(e)=\dfrac{e-1}{e}$ ។

ខ. គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x+\ln x}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\ln x\right)$$

$$=1+(+\infty)(-\infty)=1-\infty=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=1+0=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty}$ និង $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=1}$ ។

កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេក នៃខ្សែកោង (C)

ដោយ $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ នៃខ្សែកោង (C) ។

ដោយ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក នៃខ្សែកោង (C) ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{e-1}{e}$	↘	1

www.document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៣ វិច្ឆិកា ២០០៩

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គណនាចំនួនកុំផ្លិច $z=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2002}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2001}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យវិសមីការ $\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$ ចំពោះគ្រប់ x ជារបស់ $\mathbb{R}$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ចូរសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=|x|$ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ និងគ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

III. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+\sin x}$ ។ កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=a+b\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$ រួចគណនា $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

IV. គេចង់បង្កើតគណៈកម្មការមួយដែលមានសមាជិក 5 នាក់ ក្នុងចំណោមមនុស្សទាំងអស់ 15 នាក់ ។ ក្នុងចំណោមមនុស្ស ទាំងនេះមានពីរនាក់ A និង B ដែលអាចចូលជាសមាជិកគណៈកម្មការបាន លុះត្រាតែចូលទាំងពីរនាក់ ។ តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការបានប៉ុន្មានរបៀប ? **(១ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ (P) មួយដែលកាត់តាមចំណុច $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ និង $C(0,0,3)$ ។

ក. គណនាចម្ងាយ $|OI|$ ពីគល់ O មកប្លង់ (P) ។

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\dfrac{1}{|OI|^2}=\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

VI. ឱ្យអនុគមន៍មួយកំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ f រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា ខ្សែកោងនេះមានផ្ចិតឆ្លុះមួយ ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង (C) ដោយដឹងថាបន្ទាត់ប៉ះនេះកាត់តាមចំណុច $A(0,2)$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S នៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=3$, $x=4$ ។ **(៣ពិន្ទុ)**

www.document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០០៩

I. ក. គណនាចំនួនកុំផ្លិច z :

គេមាន $z=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2002}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2001}$

$$=\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right]^{1001}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2001}$$

$$=\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{1001}+\left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^{2001}$$

$$=i^{1001}+i^{2001}=i^{1000}\cdot i+i^{2000}\cdot i=i+i=2i$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{z=2i}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យវិសមីការ ពិតគ្រប់ x ជារបស់ $\mathbb{R}$

គេមាន $\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0 \quad (E)$

ដោយ $x^2-8x+20$ មាន $\begin{cases} a=1>0 \\ \Delta'=(-4)^2-20=-4<0 \end{cases}$

នោះ $x^2-8x+20>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

ហេតុនេះ ដើម្បីឱ្យ (E) ផ្ទៀងផ្ទាត់លុះត្រាតែវាមានភាគបែង

$mx^2+2(m+1)x+9m+4<0$

គេបាន $\begin{cases} m<0 & (1) \\ \Delta'=(m+1)^2-m(9m+4)<0 & (2) \end{cases}$

តាម (2) $m^2+2m+1-9m^2-4m<0$

$-8m^2-2m+1<0$

គេឱ្យ $-8m^2-2m+1=0$ មានឫស $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{1}{4}$

តារាងសញ្ញា

x	0	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$-8m^2-2m+1<0$	$-$	0	$+$	0	$-$	

តាមតារាង $m\in\left(-\infty\,,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4}\,,+\infty\right) \quad (3)$

យក $(1)\cap(3)$ គេបានចម្លើយ $m\in\left(-\infty\,,-\dfrac{1}{2}\right)$

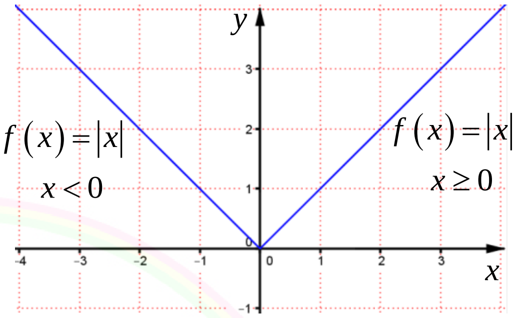
ដូចនេះ តម្លៃនៃកំណត់បានគឺ $\boxed{m<-\dfrac{1}{2}}$ ។

II. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=|x|$: (ដូចគ្រូបឋម២០០៥)

• ចំពោះ $x\geq 0$: $|x|=x$ នោះ $y=f(x)=x$

• ចំពោះ $x<0$: $|x|=-x$ នោះ $y=f(x)=-x$

គេសង់ក្រាបបាន តាមករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖



➢ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$

គេមាន $f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{បើ } x\geq 0 \\ -x & \text{បើ } x<0 \end{cases}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

$f(0)=0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ } x=0}$ ។

➢ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ គ្មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=0$

បើ f មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $f'_-(0)=f'_+(0)$

តាមនិយមន័យដេរីវេ $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

គេបាន $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x-0}{x-0}=-1$

និង $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

ដោយ $f'_-(0)\neq f'_+(0)$ នោះ f គ្មានដេរីវេត្រង់ $x=0$ ទេ

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ គ្មានដេរីវេត្រង់ } x=0 \text{ ទេ}}$ ។

III. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b :

គេមាន $f(x)=a+b\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$

$$=\frac{a\cos x+a\sin x+b\cos x-b\sin x}{\cos x+\sin x}$$

$$=\frac{(a+b)\cos x+(a-b)\sin x}{\cos x+\sin x}$$

ដោយ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+\sin x}$

ផ្ទឹមបាន $\begin{cases}a+b=0\\ a-b=1\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ: កំណត់បាន $\boxed{a=\dfrac{1}{2}\ ,\ b=-\dfrac{1}{2}}$ ។

➤គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

ចំពោះ $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{2}$ នោះ $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)$

គេបាន $\mathbf{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)\right]dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\cos x+\sin x)'}{\cos x+\sin x}\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left|\cos x+\sin x\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 1\right)-\left(0-\frac{1}{2}\ln 1\right)=\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ: គណនាបាន $\boxed{\mathbf{I}=\dfrac{\pi}{4}}$ ។

IV. រកចំនួនរបៀបនៃគណកម្មការដែលគេអាចបង្កើតបាន :

គេជ្រើសរើស 5 នាក់ ពីមនុស្សទាំងអស់ 15 នាក់ ដែល ពីរនាក់ A និង B ចូលទាំងពីរនាក់ នោះគេបាន ចំនួនគណកម្មការបង្កើតបានអាចជា ៖

- ជ្រើសរើស 5 នាក់ពីមនុស្ស 13 នាក់ មិនមែន A,B **ឬក៏**
- ជ្រើសរើស 3 នាក់ពីមនុស្ស 13 នាក់ និង 2 នាក់ទៀតគឺជា A និង B នោះគេបានចំនួនរបៀបទាំងអស់ស្មើនឹង

$$C(13,5)+C(13,3)\cdot C(2,2)$$

$$=\frac{13!}{8!\cdot 5!}+\frac{13!}{10!\cdot 3!}\cdot 1=1287+286=1573$$

ដូចនេះ: **ចំនួនគណកម្មការអាចបង្កើតបានគឺ 1573 របៀប** ។

V. ក. គណនាចម្ងាយ $|OI|$ ពីគល់ O មកប្លង់ (P) :

គេមាន $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ និង $C(0,0,3)$

ដោយ ប្លង់ (P) កាត់ A,B,C នោះ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ដែល

$\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&2&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$

នោះ $a=6, b=3, c=2$

ហើយ ប្លង់ (P) កាត់ $A(1,0,0)$

$x_0=1, y_0=0, z_0=0$

ប្លង់ (P) រាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

គេបាន $(P): 6(x-1)+3(y-0)+2(z-0)=0$

$(P): 6x+3y+2z-6=0$

នោះ $a=6, b=3, c=2, d=-6$

តាមរូបមន្ត $|OI|=d(O,(P))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $O(0,0,0)$ នោះ $x_0=y_0=z_0=0$

គេបាន $|OI|=d(O,(P))=\dfrac{|-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\dfrac{6}{7}$

ដូចនេះ: $\boxed{|OI|=\dfrac{6}{7}}$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\dfrac{1}{|OI|^2}=\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}$

គេមាន $\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{OB}=(0,2,0)$ និង $\overrightarrow{OC}=(0,0,3)$

នាំឱ្យ $|OA|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=1^2+0^2+0^2=1$

$|OB|^2=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=0^2+2^2+0^2=4$

$|OC|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=0^2+0^2+3^2=9$

គេបាន $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}$

$$=\frac{36+9+4}{36}=\frac{49}{36}=\frac{1}{\left(\frac{6}{7}\right)^2}=\frac{1}{|OI|^2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\dfrac{1}{|OI|^2}=\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}+\dfrac{1}{|OC|^2}}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

www.document4khmer.wordpress.com

VI. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍

គេមាន $y = f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}$

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $2x-4 \neq 0$

នាំឱ្យ $2x \neq 4$ នោះ $x \neq 2$

ដូចនេះ $\boxed{D = \mathbb{R}-\{2\} = (-\infty\,,\,2)\cup(2\,,\,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ
$$f'(x) = \left(\frac{x^2-2x+1}{2x-4}\right)'$$
$$= \frac{(2x-2)(2x-4)-2(x^2-2x+1)}{(2x-4)^2}$$
$$= \frac{2(x-1)(2x-4)-2(x-1)^2}{(2x-4)^2}$$
$$= \frac{2(x-1)(2x-4-x+1)}{(2x-4)^2}$$
$$= \frac{2(x-1)(x-3)}{(2x-4)^2}$$

គេឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)(x-3)}{(2x-4)^2}=0$

$\forall x \in D\ ,\ \Leftrightarrow (2x-4)^2 > 0$

នាំឱ្យ $(x-1)(x-3)=0$ នោះ $x=1\,,\,x=3$

គេបាន $f(1) = \dfrac{1^2-2\cdot1+1}{2\cdot1-4} = 0$

$f(3) = \dfrac{(3)^2-2(3)+1}{2(3)-4} = \dfrac{4}{2} = 2$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

• ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(1)=0$ ។

• ត្រង់ $x=3$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(3)=2$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x-4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x-4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}\frac{x^2-2x+1}{2(x-2)} = \frac{9}{2(2+0^- +2)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}\frac{x^2-2x+1}{2(x-2)} = \frac{9}{2(2+0^+ -2)} = +\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

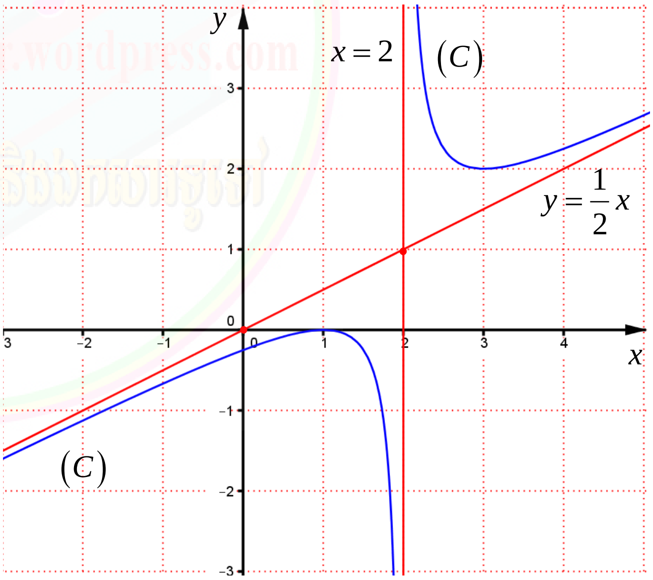
ម្យ៉ាងទៀត $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{2x-4} = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2x-4}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2x-4} = 0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=\dfrac{1}{2}x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

➤សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



www.document4khmer.wordpress.com

➤ស្រាយថាខ្សែកោងនេះមានផ្ចិតឆ្លុះមួយ

របៀបទី១ តាមរូបមន្ត

ដោយ អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x=2$ និង $y=\dfrac{1}{2}x$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(2\,,1)$ គេនឹងស្រាយថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)

បើ $I(a\,,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C តាងអនុគមន៍ f លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(4-x)+f(x)=2$

ដោយ $f(4-x)=\dfrac{(4-x)^2-2(4-x)+1}{2(4-x)-4}$

$$=\frac{16-8x+x^2-8+2x+1}{8-2x-4}$$

$$=\frac{x^2-6x+9}{-2x+4}=\frac{-x^2+6x-9}{2x-4}$$

គេបាន $\dfrac{-x^2+6x-9}{2x-4}+\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}=\dfrac{4x-8}{2x-4}=2$ ពិត

ដូចនេះ ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $I(2,1)$ ។

របៀបទី២ តាមវិធីរំកិលអ័ក្ស

គេបំលែងកិលអ័ក្សពីតម្រុយ xoy ទៅតម្រុយថ្មី XIY

តាមរូបមន្ត បំលែងកិលអ័ក្ស $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$

ដោយ អាស៊ីមតូតទាំងពីរ $x=-2$ និង $y=-\dfrac{1}{2}x+2$

ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $I(a,b)=I(2,1)$

គេបាន $\begin{cases} x=2+X \\ y=1+Y \end{cases}$

គេមាន $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}$

គេបាន $Y+1=\dfrac{x^2-2x+1}{2x-4}$

$$Y+1=\frac{(2+X)^2-2(2+X)+1}{2(2+X)-4}$$

$$Y=\frac{4+4X+X^2-4-2X+1}{2X}-1$$

$$F(X)=\frac{X^2+1}{2X} \quad , \quad Y=F(X)$$

ដោយ $\forall X\neq 0$ គេបាន ៖

$$F(-X)=\frac{(-X)^2+1}{2(-X)}=-\frac{X^2+1}{2X}=-F(X)$$

នាំឱ្យ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេសមាន $I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

ដូចនេះ ក្រាប (C) មានផ្ចិតឆ្លុះមួយគឺ $I(2,1)$ ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $(T):\ y=ax+b$

ដោយ (T) កាត់ $A(0,2)$ នោះ $2=0\cdot a+b$ ឬ $b=2$

គេបាន $(T):\ y=ax+2$

ដោយ (T) ប៉ះ (C) គេផ្ទឹមបានសមីការអាប់ស៊ីស

$$\frac{x^2-2x+1}{2x-4}=ax+2$$

$$x^2-2x+1=2ax^2+4x-4ax-8$$

$$(1-2a)x^2+(-6+4a)x+9=0$$

ដើម្បីឱ្យ (T) ប៉ះ (C) លុះត្រាសមីការមានឫសឌុប $\begin{cases} \Delta'=0 \\ a\neq \frac{1}{2} \end{cases}$

គេបាន $(-3+2a)^2-9(1-2a)=0$

$$9-12a+4a^2-9+18a=0$$

$$4a^2+6a=0$$

$$2a(2a+3)=0$$

នាំឱ្យ $a=0$, $a=-\dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរកបានមានពីរគឺ

$y=2$, $y=-\dfrac{3}{2}x+2$ ។

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃ S ផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=3$, $x=4$

តាមក្រាប នៅចន្លោះ $3\le x\le 4$ ក្រាបនៅពីលើអាស៊ីមតូតទ្រេត

គេបាន ផ្ទៃកំណត់ដោយ $S=\int_3^4\left[(C)-y\right]dx$ គេបាន ៖

$$S=\int_3^4\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x-4}\right)-\frac{1}{2}x\right]dx$$

$$=\int_3^4\frac{1}{2x-4}dx=\frac{1}{2}\int_3^4\frac{(x-2)'}{x-2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x-2|\right]_3^4=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{\ln 2}{2}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃប្លង់កំណត់បាន $S=\dfrac{\ln 2}{2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

www.document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ១២ វិច្ឆិកា ២០១០

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ក. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=x\cos x$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y''+y+2\sin x=0$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $4\cos^2 x-1=3\cos x-2\sin^2 x$ ។ **(១ពិន្ទុកន្លះ)**

II. ប្រអប់មួយមានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែង ដែលមានប្រវែងទ្រនុងទាំងបីគឺ x , y , $x+y$ (គិតជា cm) ។ គេដឹងថាទ្រនុងដែលវែងជាងគេមានប្រវែង $20\,\text{cm}$ ។ កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យប្រអប់នេះមានមាឌធំបំផុត ។ **(១ពិន្ទុ)**

III. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int\left(\frac{2010}{\sqrt{x}}-\frac{2011e^x}{2+e^x}\right)dx$ និង $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\cot x)^2\,dx$ ។ **(១ពិន្ទុ)**

IV. គេមានលេខ $0, 1, 2, 3, 4$ ។ គេយកលេខទាំងនេះទៅបង្កើតចំនួនដែលធំជាង 2000 និងក្នុងចំនួននីមួយៗគ្មានលេខដដែលពីរដងទេ ។ តើគេអាចបង្កើតចំនួនធំជាង 2000 បានប៉ុន្មាន ? **(២ពិន្ទុ)**

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ នៃលំហ គេឱ្យចំណុច $A(1,1,1)$ និង $B(2,2,0)$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{OA}$ ។

ខ. បន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំណុច B ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ ។ រកកូអរដោនេនៃ H ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ (D) រួចរកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (D) ។ **(២ពិន្ទុ)**

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=e^x$ និង $g(x)=\ln(x+1)+1$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា ខ្សែកោង (C_1) តាង $y=f(x)$ និង (C_2) តាង $y=g(x)$ មានចំណុចរួម $A(0,1)$ ។

ខ. គណនា $f'(0)$ និង $g'(0)$ រួចបង្ហាញថាខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមរវាងខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ។ **(២ពិន្ទុកន្លះ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១០

I. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y''+y+2\sin x=0$:

គេមាន $y=x\cos x$

នាំឱ្យ $y'=x'\cos x+(\cos x)'x=\cos x-x\sin x$

$y''=(\cos x)'-\left[x'\sin x+x(\sin x)'\right]$

$=-\sin x-(\sin x+x\cos x)$

$=-2\sin x-x\cos x$

គេបាន $y''+y+2\sin x$

$=(-2\sin x-x\cos x)+x\cos x+2\sin x=0$

ដូចនេះ $\boxed{y''+y+2\sin x=0}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

គេបាន $4\cos^2 x-1=3\cos x-2\sin^2 x$

$4\cos^2 x-1=3\cos x-2(1-\cos^2 x)$

$2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

សមីការមានមានគុណ $a+b+c=0$ នោះសមីការមានឫស

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\cos 0\\ \cos x=\cos\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.$$

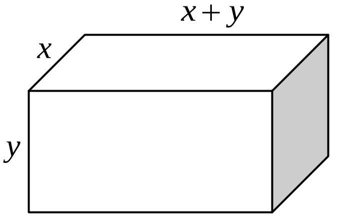
នាំឱ្យ $\left[\begin{array}{l}x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k'\pi\ ,\ k'\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{\left[\begin{array}{l}x=2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k'\pi\ ,\ k'\in\mathbb{Z}\end{array}\right.}$ ។

II. កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យប្រអប់នេះមានមាឌធំបំផុត :

គេមាន $x+y=20$

នាំឱ្យ $y=20-x$



រូបមន្តមាឌប្រអប់រាងជាប្រលេពីប៉ែតកែងគឺ ៖

$V=xy(x+y)=20xy$

$V(x)=20x(20-x)=400x-20x^2$

$V'(x)=400-40x$

$V''(x)=-40$

ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌអតិបរមាលុះត្រាតែ $\begin{cases}V'(x)=0\\ V''(x)<0\end{cases}$

គេបាន $V'(x)=0 \Leftrightarrow 400-40x=0 \Rightarrow x=10$

$V''(x)=-40<0$ ពិត

ចំពោះ $x=10$ នោះ $y=20-x=20-10=10$

ដូចនេះ $\boxed{x=y=10\text{ cm}}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល :

$$\mathbf{I}=\int\left(\frac{2010}{\sqrt{x}}-\frac{2011e^x}{2+e^x}\right)dx$$

$$=\int\left(2010x^{-\frac{1}{2}}-2011\frac{(2+e^x)'}{2+e^x}\right)dx$$

$$=2010\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-2011\ln(2+e^x)+c\ ,\ c\text{ ថេរ}$$

$$=\boxed{4020\sqrt{x}-2011\ln(2+e^x)+c\ ,\ c\text{ ថេរ}}$$

$$\mathbf{J}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\cot x)^2dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x+1+\cot^2 x\right)dx=\left[\tan x-\cot x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\tan\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{4}\right]-\left[\tan\frac{\pi}{6}-\cot\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=(1-1)-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

IV. រកចំនួនដែលបង្កើតបានធំជាង 2000 : (ដូចគ្រូមធ្យម២០០៥)

ដោយលេខតាមខ្ទង់ដែលត្រូវប្រើមាន៥លេខ 0 , 1 , 2 , 3 , 4

នោះចំនួនដែលធំជាង 2000 អាចជាលេខ 4 ខ្ទង់ ឬ 5 ខ្ទង់

• ចំពោះលេខ 4 ខ្ទង់ដែលធំជាង 2000 គឺ

ខ្ទង់ពាន់ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់រយ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ដប់ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់រាយ មាន 2 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $3\times4\times3\times2=72$ ចំនួន

• ចំពោះលេខ 5 ខ្ទង់ដែលធំជាង 2000 គឺ

ខ្ទង់ម៉ឺន មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ពាន់ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់រយ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់ដប់ មាន 2 ជម្រើស

ខ្ទង់រាយ មាន 1 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $4\times4\times3\times2\times1=96$ ចំនួន

សរុបចំនួនដែលធំជាង $2000=72+96=168$ ចំនួន

ដូចនេះ ចំនួនដែលអាចបង្កើតបានមាន 168 ចំនួន ។

V. ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) :

ប្លង់រាង $(P):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ (P) កាត់តាមចំណុច $A(1,1,1)$

នោះ $x_0=1,\ y_0=1,\ z_0=1$

ហើយ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$

នោះ $a=1, b=1, c=1$

នាំឱ្យ $(P):(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

$(P):x+y+z-3=0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(P):x+y+z-3=0$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃ H ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ (D)

បន្ទាត់រាង $(D):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+ct\end{cases}$

ដោយ (D) កាត់តាមចំណុច $B(2,2,0)$

នោះ $x_0=2,\ y_0=2,\ z_0=0$

ហើយ (D) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$

នោះ $a=1, b=1, c=1$

នាំឱ្យ $(D):\begin{cases}x=2+t\\ y=2+t\ ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$

គេមាន $(P):x+y+z-3=0$

គេបាន $(2+t)+(2+t)+t-3=0$ នោះ $t=-\frac{1}{3}$

នាំឱ្យ $H:\left(x=y=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}\ ,\ z=-\frac{1}{3}\right)$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វ $H\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$ ។

រួចរកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (D)

រូបមន្ត $d(A,(D))=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OA}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(1,1-1)$ និង $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OA}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-2\vec{j}+0\vec{k}$

នាំឱ្យ $d(A,(D))=\dfrac{\sqrt{2^2+2^2+0^2}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

ដូចនេះ $d(A,(D))=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ ឯកតាប្រវែង ។

VI. ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា (C_1) និង (C_2) មានចំណុចរួម $A(0,1)$:

គេមាន $(C_1):f(x)=e^x$

$(C_2):g(x)=\ln(x+1)+1$

ចំពោះ $A(0,1)$ គេបាន $(C_1):1=e^0$ ពិត

នោះខ្សែកោង (C_1) កាត់ចំណុច $A(0,1)$

ចំពោះ $A(0,1)$ គេបាន $(C_2):1=\ln(0+1)+1$ ពិត

នោះខ្សែកោង (C_2) កាត់ចំណុច $A(0,1)$

ដូចនេះ (C_1) និង (C_2) មានចំណុចរួម $A(0,1)$ ។

ខ. គណនា $f'(0)$ និង $g'(0)$

គេមាន $f(x)=e^x$ នោះ $f'(x)=e^x$

នាំឱ្យ $f'(0)=e^0=1$

ហើយ $g(x)=\ln(x+1)+1$

នោះ $g'(x)=\dfrac{(x+1)'}{(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$

នាំឱ្យ $g'(0)=\dfrac{1}{0+1}=1$

ដូចនេះ គណនាបាន $f'(0)=1\ ,\ g'(0)=1$ ។

បង្ហាញថាខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ត្រង់ចំណុច $A(0,1)$ មានតម្លៃស្មើគ្នាគឺ $f'(0)=g'(0)=1$

នាំឱ្យ ខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) មានបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ A

ដូចនេះ ខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ប៉ះគ្នាត្រង់ A ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះរួមរវាងខ្សែកោង (C_1) និង (C_2)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

ដោយ (T) កាត់តាមចំណុច $A(0, 1)$

នោះ $x_0 = 0$, $f(x_0) = 1$

ហើយ (T) មានមេគុណប្រាប់ទិស $f'(x_0) = f'(0) = 1$

គេបាន $(T): y = 1(x - 0) + 1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះរួមនៃខ្សែកោង (C_1) និង (C_2) ត្រង់ A គឺ

$\boxed{(T): y = x + 1}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com
ចែករំលែកចំណេះដឹង និងឯកសារទូទៅ

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ១៨ វិច្ឆិកា ២០១១

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ ។

ក. គណនា Z^5 រួចទាញរកតម្លៃនៃ $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4$ ។

ខ. សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

II. គេឱ្យសមីការ $(m+1)x^2-2mx+4(m+1)=0$ ។ កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫស x_1 និង x_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1<-1<x_2<1$ ។

III. រង្វង់មួយ និងការេមួយមានផលបូកប្រវែងបរិមាត្រស្មើនឹង 16 m ។ រកប្រវែងកាំរបស់រង្វង់ និងជ្រុងរបស់ការេ ដើម្បីឱ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡារង្វង់ និងផ្ទៃក្រឡាការេមានតម្លៃអប្បរមា ។

IV. គេប្រមៀលប៊ូលដែលមានសរសេរលេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 តម្រង់ទៅរន្ធ 6 ដែលមានសរសេរលេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ដែរ ។ គេឧបមាថាប៊ូលទាំង 6 ចូលរន្ធទាំង 6 ខុសៗគ្នាជានិច្ច ។

ក. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលលេខ 3 ចូលរន្ធលេខ 3 ។

ខ. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលនីមួយៗចូលរន្ធ ដែលមានលេខដូចរបស់វា ។

V. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,1,0)$, $B(0,0,2)$, $C(1,-2,3)$ និង $D(1,-2,0)$ ។ រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាមចំណុច A , B , C និង D ។

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ae^x+b$ មានខ្សែកោង (C) ។

ក. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) កាត់តាមគល់ O នៃតម្រុយអរតូណរមេ និងបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចនោះជាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ ចំពោះតម្លៃ a និង b ដែលរកឃើញ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=1$ ។

ឃ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច $x=1$ ។

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១១

I. ក. គណនា Z^5 :

គេមាន $Z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

តាមដឺម័រ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

គេបាន $Z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$

$$=\cos\left(5\cdot\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(5\cdot\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$

$$=\cos 0+i\sin 0$$

$$=1+0i$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{Z^5=1}$ ។

➤ទាញរកតម្លៃនៃ $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4$

តាមរូបមន្ត $1-Z^5=(1-Z)(1+Z+Z^2+Z^3+Z^4)$

គេបាន $(1-Z)(1+Z+Z^2+Z^3+Z^4)=1-1=0$

ដោយ $1-Z=1-\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\neq 0$

នាំឱ្យ $1+Z+Z^2+Z^3+Z^4=0$

ដូចនេះ $\boxed{1+Z+Z^2+Z^3+Z^4=0}$ ។

ខ. សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $1+Z=1+\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

$$=2\cos^2\frac{\pi}{5}+i2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

នាំឱ្យ $(1+Z)^4=\left[2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^4$

$$=16\cos^4\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រសរសេរបានគឺ

$$\boxed{(1+Z)^4=16\cos^4\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)}$$ ។

II. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1<-1<x_2<1$

គេមាន សមីការ $(m+1)x^2-2mx+4(m+1)=0$

គេតាង $f_m(x)=(m+1)x^2-2mx+4(m+1)$

ដើម្បីឱ្យ $f_m(x)$ មានឫស x_1 និង x_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់

$x_1<-1<x_2<1$ លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta'>0\\ af(-1)<0\\ af(1)>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m+1\neq 0\\ m^2-(m+1)^2>0\\ (m+1)(m+1+2m+4m+4)<0\\ (m+1)(m+1-2m+4m+4)>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m\neq -1\\ m^2-m^2-2m-1>0\\ (m+1)(7m+5)<0\\ (m+1)(3m+5)>0\end{cases}\text{ នាំឱ្យ }\begin{cases}m\neq -1\\ 2m+1<0\\ (m+1)(7m+5)<0\\ (m+1)(3m+5)>0\end{cases}$$

គេបាន $2m+1$ មានឫស $m=-\frac{1}{2}$

$(m+1)(7m+5)$ មានឫស $m=-1$, $m=-\frac{5}{7}$

$(m+1)(3m+5)$ មានឫស $m=-1$, $m=-\frac{5}{3}$

តារាងសញ្ញា 0

m	$-\infty$ $-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$m+1\neq 0$	-	-	+	+	+
$2m+1<0$	-	-	-	- 0	+
$(m+1)(7m+5)<0$	+	+ 0	- 0	+	+
$(m+1)(3m+5)>0$	+ 0	- 0	+	+	+
ចម្លើយ					

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បាន $\boxed{m\in\left(-1,-\frac{5}{7}\right)}$ ។

III. រកប្រវែងកាំរបស់រង្វង់ និងជ្រុងរបស់ការេ

គេតាង a ជាជ្រុងនៃការេ និង r ជាកាំនៃរង្វង់ , $a, r > 0$

គេមាន បរិមាត្ររង្វង់ + បរិមាត្រការេ $= 16$

គេបាន $2\pi r + 4a = 16$ នាំឱ្យ $a = 4 - \dfrac{\pi}{2} r$

ផលបូកផ្ទៃក្រឡារង្វង់ និងការេគឺ $S = \pi r^2 + a^2$

គេបាន $S(r) = \pi r^2 + \left(4 - \dfrac{\pi}{2} r\right)^2$

$= \pi r^2 + 16 - 4\pi r + \dfrac{\pi^2}{4} r^2$

$= \left(\pi + \dfrac{\pi^2}{4}\right) r^2 - 4\pi r + 16$

នាំឱ្យ $S'(r) = 2\left(\pi + \dfrac{\pi^2}{4}\right) r - 4\pi$

$S''(r) = 2\left(\pi + \dfrac{\pi^2}{4}\right)$

ដើម្បីឱ្យ S មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $\begin{cases} S'(r) = 0 \\ S''(r) > 0 \end{cases}$

គេបាន $S'(r) = 0 \Leftrightarrow 2\left(\pi + \dfrac{\pi^2}{4}\right) r - 4\pi = 0$

$\left(\pi + \dfrac{\pi^2}{4}\right) r = 2\pi$

$\dfrac{4+\pi}{4} r = 2 \Rightarrow r = \dfrac{8}{4+\pi}$

ហើយ $S''(r) = 2\left(\pi + \dfrac{\pi^2}{4}\right) > 0$ ពិត

នាំឱ្យ $a = 4 - \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{8}{4+\pi} = 4 - \dfrac{4\pi}{4+\pi} = \dfrac{16}{4+\pi}$

ដូចនេះ $\boxed{r = \dfrac{8}{4+\pi}\ ,\ a = \dfrac{16}{4+\pi}}$ ឯកតាប្រវែង ។

IV. ក. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលលេខ 3 ចូលរន្ធលេខ 3

គេមាន រន្ធ 6 ដែលសរសេរលេខ $1, 2, 3, 4, 5, 6$

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច $n(S) = 6$

ហើយ ប៊ូលទាំងអស់ $1, 2, 3, 4, 5, 6$ មានប៊ូល

លេខ 3 ចំនួន 1 នាំឱ្យ ចំនួនករណីស្រប $n(A) = 1$

គេបាន $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$

ដូចនេះ ប្រូបាបប៊ូលលេខ 3 ចូលរន្ធលេខ 3 គឺ $\boxed{P(A) = \dfrac{1}{6}}$

ខ. គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យប៊ូលនីមួយៗចូលរន្ធដែលមានលេខដូចរបស់វា

ដោយ ប៊ូលមាន 6 ចូលរន្ធទាំង 6 ខុសៗគ្នាជានិច្ច

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S) = P(6\,,\,6)$ ដែល

$P(6\,,\,6) = \dfrac{6!}{(6-6)!} = 6! = 720$ របៀប

ហើយ ចំនួនករណីដែលប៊ូលនីមួយៗចូលរន្ធ ដែលមានលេខដូចរបស់វាមានមួយករណី នោះ $n(B) = 1$

គេបាន $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{1}{720}$

ដូចនេះ ប្រូបាបប៊ូលចូលរន្ធដូចលេខរបស់វា $\boxed{P(B) = \dfrac{1}{720}}$ ។

V. រកសមីការស្វ៊ែដែលកាត់តាម 4 ចំណុច : (ដូចគ្រូអនុ. 2006)

គេមាន $A(1\,,1\,,0)\,,\ B(0,\,2\,,\,2)\,,$

$C(1,-2,\,3)$ និង $D(1\,,-2\,,\,0)$

សមីការស្វ៊ែរាង $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

$(S) \cap A$ គេបាន $(1-a)^2 + (1-b)^2 + c^2 = r^2$ (1)

$(S) \cap B$ គេបាន $a^2 + (2-b)^2 + (2-c)^2 = r^2$ (2)

$(S) \cap C$ គេបាន $(1-a)^2 + (2+b)^2 + (3-c)^2 = r^2$ (3)

$(S) \cap D$ គេបាន $(1-a)^2 + (2+b)^2 + c^2 = r^2$ (4)

គេយក $(3)-(4)$ គេបាន $(3-c)^2 - c^2 = 0$

$(3-c-c)(3-c+c) = 0 \Rightarrow c = \dfrac{3}{2}$

គេយក $(1)-(4)$ គេបាន $(1-b)^2 - (2+b)^2 = 0$

$(1-b+2+b)(1-b-2-b) = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2}$

តាម (2) $a^2 + \left(2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \dfrac{3}{2}\right)^2 = r^2$

$a^2 + \dfrac{25}{4} + \dfrac{1}{4} = r^2$ នោះ $a^2 + \dfrac{13}{2} = r^2$ (5)

តាម (1) $(1-a)^2 + \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = r^2$

$1 - 2a + a^2 + \dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{4} = r^2 \Leftrightarrow -2a + a^2 + \dfrac{11}{2} = r^2$ (6)

យក $(5)-(6)$ $2a + 1 = 0$ នាំឱ្យ $a = -\dfrac{1}{2}$

តាម (5) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{13}{2} = r^2$ នាំឱ្យ $r^2 = \dfrac{27}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{(S): \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{27}{4}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

VI. ក. កំណត់តម្លៃនៃ a និង b

គេមាន $f(x)=ae^x+b$ មានខ្សែកោង (C)

$f'(x)=ae^x$

ដោយ ខ្សែកោងកាត់គល់ O និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចនោះ មានសមីការ $y=x$

គេបាន $\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae^0+b=0 \\ ae^0=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បាន $\boxed{a=1\,,\,b=-1}$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

ចំពោះ $a=1\,,\,b=-1$ គេបាន $f(x)=e^x-1$

• ដែនកំណត់ : ដោយ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)}$

• ទិសដៅអថេរភាព :

ដេរីវេ $f'(x)=ae^x=e^x$

ដោយ $e^x>0\,,\,\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

• បរមា : ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$

នោះ f គ្មានបរមាទេ ។

• លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-1\right)=+\infty-1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)=0-1=-1$

• អាស៊ីមតូត :

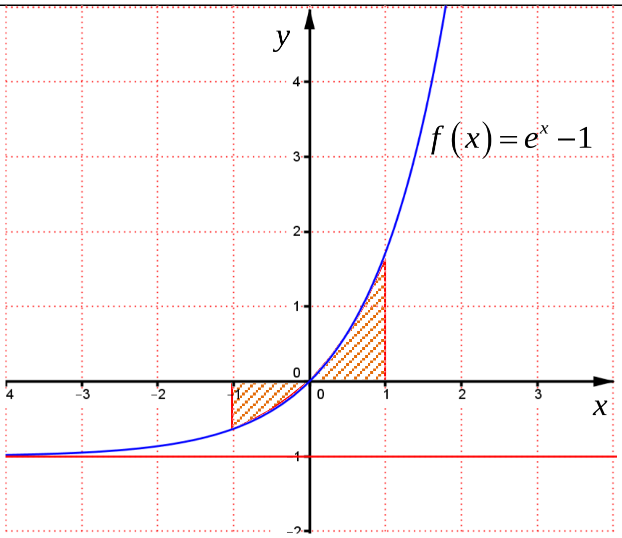
ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ខាង $-\infty$ ។

• តារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 ↗ $-\infty$

• សង់ក្រាប :



គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=1$

តាមក្រាបនៅចន្លោះ $-1\le x\le 1$ មានផ្ទៃក្រឡាពីរផ្នែកគឺ

• ចន្លោះ $-1\le x\le 0$ ក្រាប C នៅខាងក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស

• ចន្លោះ $0\le x\le 1$ ក្រាប C នៅខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេបាន $S=-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx$

$=-\int_{-1}^{0}\left(e^x-1\right)dx+\int_{0}^{1}\left(e^x-1\right)dx$

$=-\left[e^x-x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x-x\right]_{0}^{1}$

$=-\left[\left(e^0-0\right)-\left(e^{-1}+1\right)\right]+\left[\left(e^1-1\right)-\left(e^0-0\right)\right]$

$=-\left[1-\frac{1}{e}-1\right]+\left[e-1-1\right]$

$=\frac{1}{e}+e-2$

ដូចនេះ $\boxed{S=\frac{1}{e}+e-2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ឃ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច $x=1$

បន្ទាត់ប៉ះមានរាង $T: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ T ប៉ះក្រាប C ត្រង់ $x=1$ នោះ $x_0=1$

$f'(x_0)=f'(1)=e^1=e$

$f(x_0)=f(1)=e^1-1=e-1$

នាំឱ្យ $T: y=e(x-1)+(e-1)$

$y=ex-e+e-1=ex-1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $\boxed{T: y=ex-1}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ២៣ វិច្ឆិកា ២០១២

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. គេឱ្យ z ជាចំនួនកុំផ្លិច ដែល $z=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួច z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. គណនា $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

II. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ ហើយមាន $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$ ។

កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

III. ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ខៀវ 7 គ្រាប់ និងពណ៌ក្រហម 5 គ្រាប់ ។ គេចាប់យកឃ្លី 4 គ្រាប់ដោយចៃដន្យ ។

ក. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំង 4 គ្រាប់ ។

ខ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវ 3 និងឃ្លីពណ៌ក្រហម 1 ។

គ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមយ៉ាងតិច 1 ។

IV. ប្រអប់មួយមានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែងដែលមានវិមាត្រ x , $2x$ និង h គិតជាម៉ែត្រ ហើយមានផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់ 1m^2 ។

ក. គណនា h ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ. គណនាមាឌប្រអប់ជាអនុគមន៍នៃ x ។ កំណត់តម្លៃនៃ x ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត ។

V. ក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មាន $A(2,0,1)$, $B(0,1,-3)$ និង $C(1,2,0)$ ។

ក. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។

VI. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ ។ បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ និងអប្បរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃបរមាទាំងនោះ ។

ខ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. សិក្សាទីតាំងរវាង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃក្រាប (C) ។

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១២

I. **ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត :**

គេមាន $z=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}i^2$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i}$ ។

➤សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$$

នាំឱ្យ $z^2=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

ដូចនេះ $\boxed{z^2=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]}$ ។

ខ. គណនា $\cos\frac{5\pi}{12}$ **និង** $\sin\frac{5\pi}{12}$

គេមាន $z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

និង $z=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$$=2\cos\frac{5\pi}{12}-i2\sin\frac{5\pi}{12}$$

គេផ្ទឹមផ្នែកពិត និងផ្នែកពិត រួចផ្នែកនិមិត្ត និងផ្នែកនិមិត្ត

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=2\cos\frac{5\pi}{12}\\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=2\cos\frac{5\pi}{12}\end{cases}\text{ នោះ: }\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ ,\ \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ ។

II. **កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$:**

គេមាន $f(x)=\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ: $x\neq 0$

ហើយ $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$

ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ វាផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}=\ln\sqrt{a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}+1}{x-\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\ln\sqrt{a}$$

$$\frac{1+1}{0-1}=\frac{1}{2}\ln a$$

$$-4=\ln a\quad\Rightarrow\quad a=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$$

ដូចនេះ: កំណត់បាន $\boxed{a=e^{-4}=\frac{1}{e^4}}$ ។

III. គេមាន ឃ្លីខៀវ 7 និងក្រហម 5 ហើយគេចាប់យក 4 គ្រាប់

នាំឱ្យ ចំនួនករណីអាច គឺ $n(s)=C(12\ ,\ 5)$ ដែល

$$C(12\ ,\ 4)=\frac{12!}{(12-4)!\cdot 4!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 4!}=495$$

ក. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំង 4 គ្រាប់ :

ចំនួនករណីស្របតាងដោយ $n(A)=C(7,\ 4)$ ដែល

$$C(7,\ 4)=\frac{7!}{(7-4)!\cdot 3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3!\cdot 4!}=35$$

នាំឱ្យ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{35}{495}=\frac{7}{99}$

ដូចនេះ: ប្រូបាបចាប់បានឃ្លីខៀវទាំង 4 គឺ $\boxed{P(A)=\frac{35}{99}}$ ។

ខ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវ 3 **និងឃ្លីពណ៌ក្រហម**1

ចំនួនករណីស្របតាងដោយ $n(B)=C(7,3)\times C(5,1)$

$$C(7,3)\times C(5,1)=\frac{7!}{4!\cdot 3!}\times 5=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3!}\times 5=175$$

នាំឱ្យ $P(B)=\frac{175}{495}=\frac{35}{99}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{35}{99}}$ ។

គ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមយ៉ាងតិច 1

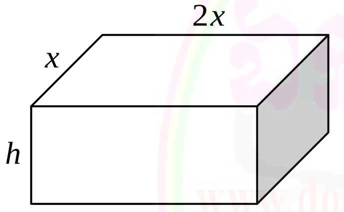
តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីក្រហមយ៉ាងតិច 1

ដោយ C ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនឹងព្រឹត្តិការណ៍ A

គេបាន $P(C)=1-P(A)=1-\frac{35}{99}=\frac{65}{99}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{65}{99}}$ ។

IV. ក. គណនា h ជាអនុគមន៍នៃ x :



ផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់ តាងដោយ S_t ដែល

$$S_t=2(x\cdot 2x+x\cdot h+2x\cdot h)=4x^2+6xh$$

តែតាមបម្រាប់ $S_t=1\text{ m}^2$

គេបាន $4x^2+6xh=1$ នាំឱ្យ $h=\frac{1-4x^2}{6x}\ (\text{m})$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{h=\frac{1-4x^2}{6x}\ (\text{m})}$ ។

ខ. គណនាមាឌប្រអប់ជាអនុគមន៍នៃ x

មាឌប្រអប់ $V=x\cdot 2x\cdot h=2x^2h$

$$V(x)=2x^2\cdot\frac{1-4x^2}{6x}=\frac{1}{3}(x-4x^3)$$

ដូចនេះ $\boxed{V(x)=\frac{1}{3}(x-4x^3)\quad(\text{m}^3)}$ ។

➤កំណត់តម្លៃនៃ x ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត

គេមាន $V(x)=\frac{1}{3}(x-4x^3)$

នាំឱ្យ $V'(x)=\frac{1}{3}(1-12x^2)$ និង $V''(x)=-8x$

ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុតលុះត្រាតែ $\begin{cases}V'(x)=0\\ V''(x)<0\end{cases}$

ឱ្យ $V'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(1-12x^2)=0$ នោះ $x=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$

ចំពោះ: $x=-\frac{1}{2\sqrt{3}}<0$ មិនយក

ចំពោះ: $x=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$: $V''\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=-8\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}<0$ ពិត

ដូចនេះ តម្លៃនៃ x គណនាបានគឺ $\boxed{x=\frac{\sqrt{3}}{6}\ (\text{m})}$ ។

V. ក. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

គេមាន $A(2,0,1)$, $B(0,1,-3)$ និង $C(1,2,0)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(-2,1,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,2,-1)$

គេបាន $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & -4\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=7\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$

ដូចនេះ: គណនាបាន $\boxed{\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=7\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

ដោយ $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{7^2+2^2+(-3)^2}=\frac{\sqrt{62}}{2}$

ដូចនេះ: ផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $\boxed{S=\frac{\sqrt{62}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

VI. ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f :

គេមាន $f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}$ មានក្រាប (C)

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x-1\neq 0$ នោះ: $x\neq 1$

ដូចនេះ: $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)}$ ។

➤គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

ដោយ $f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}$

នាំឱ្យ $f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}}$ ។

ឱ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}=0$, $(x-1)^2>0$

នោះ $(x-3)(x+1)=0$ នោះ $x=-1$, $x=3$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

ដូចនេះ $f'(x)>0$ កាលណា $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

$f'(x)=0$ ចំពោះ $x=-1$, $x=3$

$f'(x)<0$ កាលណា $x\in(-1,1)\cup(1,3)$

➢ **បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃបរមាទាំងនោះ**

• ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាមួយស្មើ $f(-1)$ ដែល

$f(-1)=-1+2+\frac{4}{-1-1}=-1$ ។

• ត្រង់ $x=3$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាមួយស្មើ $f(3)$ ដែល

$f(3)=3+2+\frac{4}{3-1}=7$ ។

ខ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C)

គេមាន $f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)=1+2+\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)=1+2+\frac{4}{0^+}=+\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ នៃក្រាប (C) ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x-1}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. សិក្សាទីតាំងរវាង អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

សិក្សាផលដករវាង សមីការ $f(x)$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត y

$$f(x)-y=\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)-(x+2)=\frac{4}{x-1}$$

• បើ $x<1$ នោះ $\frac{4}{x-1}<0$ មានន័យថា $f(x)-y<0$

គេបានក្រាប (C) នៅពីខាងក្រោមបន្ទាត់អាស៊ីមតូតទ្រេត ។

• បើ $x>1$ នោះ $\frac{4}{x-1}>0$ មានន័យថា $f(x)-y>0$

គេបានក្រាប (C) នៅពីខាងលើបន្ទាត់អាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃក្រាប (C)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)=-\infty+2+0=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2+\frac{4}{x-1}\right)=+\infty+2+0=+\infty$$

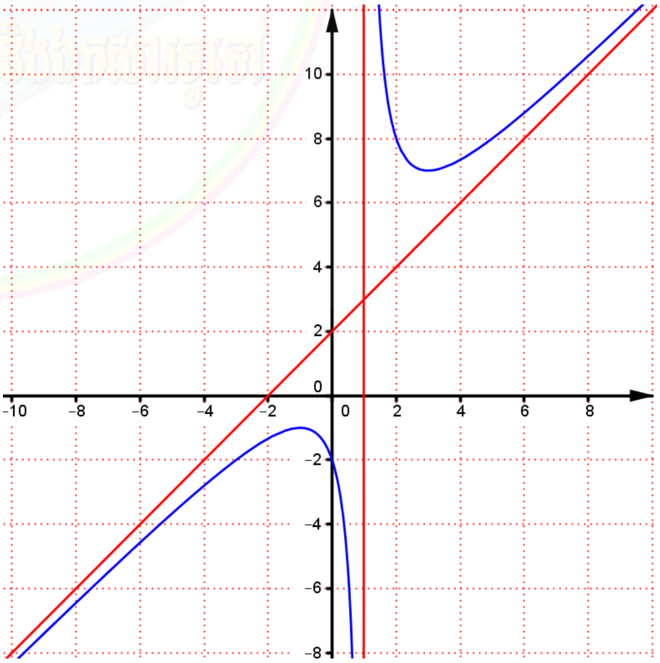
តារាងអថេរភាពនៃក្រាប (C)

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

www.document4khmer.wordpress.com

ចប់ត្រឹមនេះ៖

ខ្ញុំសូមបន្ថែមក្រាបដើម្បីធ្វើការផ្ទៀងផ្ទាត់



ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ២១ វិច្ឆិកា ២០១៣

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\int \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx$ (កន្លះពិន្ទុ)

ខ. $\int \frac{3x-11}{x^2-6x+9}dx$ (កន្លះពិន្ទុ) ។

II. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2+2x$ និង $g(x)=-x+4$ ។ គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់ដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$ នៃផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ ។ (២ ពិន្ទុ)

III. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{2x-2}$

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (២ ពិន្ទុ)

ខ. $M(x_0,y_0)$ ជាចំណុចមួយនៅលើក្រាប (C) ។ បន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច M ហើយកាត់បន្ទាត់អាស៊ីមតូតឈរត្រង់ចំណុច A និងអាស៊ីមតូតទ្រេតត្រង់ B ។

១. ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (d) ។ (១ ពិន្ទុ)

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B រួចបង្ហាញថា M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$ ។ (១ ពិន្ទុ)

IV. គេមានប៉ារ៉ាបូលមួយ មានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ ជាគល់នៃអ័ក្ស និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ ដោយដឹងថាក្រាបរបស់វាកាត់ចំណុច $A_1(-2,4)$ ។ (១ ពិន្ទុ)

ខ. រកតម្លៃនៃ y_2 បើចំណុច $A_2(-3,y_2)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ ។ (១ ពិន្ទុ)

គ. ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) របស់ប៉ារ៉ាបូល ។ (១ ពិន្ទុ)

www.document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៣

I. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $\int \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\times\frac{x^{2000}}{(1+x^2)^{1000}}dx$

$= \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\times\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1000} dx \quad (1)$

គេតាង $t=\frac{x^2}{1+x^2}$

នាំឱ្យ $dt=\frac{(x^2)'(1+x^2)-(1+x^2)'x^2}{(1+x^2)^2}dx$

$=\frac{2x+2x^3-2x^3}{(1+x^2)^2}dx=\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx$

នោះ (1) អាចសរសេរ

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{(1+x^2)^2}\times\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1000}dx$

$=\frac{1}{2}\int t^{1000}dt=\frac{1}{2}\times\frac{t^{1001}}{1001}+c$

$=\frac{1}{2002}t^{1001}+c=\frac{1}{2002}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1001}+c$, ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{\int\frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx=\frac{1}{2002}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1001}+c \text{ , ថេរ}}$ ។

ខ. $\int\frac{3x-11}{x^2-6x+9}dx=\int\frac{3x-9-2}{(x-3)^2}dx$

$=3\int\frac{1}{(x-3)}dx-2\int\frac{1}{(x-3)^2}dx$

$=3\ln|x-3|+c_1+2\cdot\frac{1}{(x-3)}+c_2$

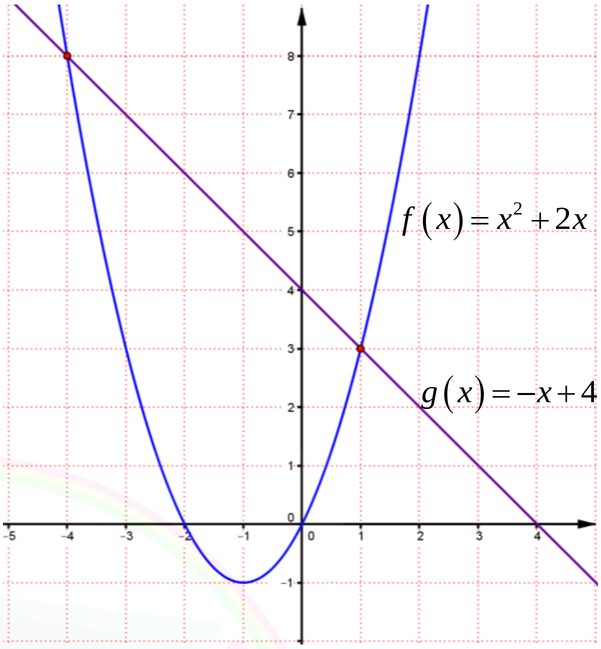
$=3\ln|x-3|+\frac{2}{(x-3)}+c \quad , \quad c_1+c_2=c$ ថេរ

ដូចនេះ $\boxed{\int\frac{3x-11}{x^2-6x+9}dx=3\ln|x-3|+\frac{2}{(x-3)}+c}$ ។

II. គណនាមាឌនៃសូលីតបរិវត្ត :

គេមាន $f(x)=x^2+2x$ និង $g(x)=-x+4$

គេសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរដើម្បីរកមើលចំណុចប្រសព្វ



ផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងទាំងពីរនៅចន្លោះ $[-4\ ,1]$ នោះគេបាន មាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលកំណត់ដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីស នៃផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ គឺ

$V=\pi\int_a^b[g(x)]^2dx-\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$

$=\pi\int_a^b(-x+4)^2dx-\pi\int_a^b(x^2+2x)^2dx$

$=\pi\int_{-4}^1(x^2-8x+16)dx-\pi\int_{-4}^1(x^4+4x^3+4x^2)dx$

$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-4x^2+16x\right]_{-4}^1-\pi\left[\frac{x^5}{5}+x^4+\frac{4x^3}{3}\right]_{-4}^1$

$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-4x^2+16x-\frac{x^5}{5}-x^4-\frac{4x^3}{3}\right]_{-4}^1$

$=\pi\left[-\frac{x^5}{5}-x^4-x^3-4x^2+16x\right]_{-4}^1$

$=\pi\left[\left(-\frac{1}{5}-1-1-4+16\right)-\left(\frac{1024}{5}-256+64-64-64\right)\right]$

$=\pi\left[\left(10-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1024}{5}-320\right)\right]$

$=\pi\left(330-\frac{1025}{5}\right)=\pi(330-205)=125\pi$

ដូចនេះ មាឌសូលីត $\boxed{V=125\pi}$ ។

III. ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$:

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{2x-2}$

• ដែនកំណត់ :

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $2x-2\neq 0$ ឬ $x\neq 1$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty\,,1)\cup(1\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព :

ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(2x-3)(2x-2)-2(x^2-3x+4)}{(2x-2)^2}$

$=\dfrac{4x^2-4x-6x+6-2x^2+6x-8}{4(x-1)^2}$

$=\dfrac{2x^2-4x-2}{4(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{2(x-1)^2}$

ចំពោះ $\forall x\in D$ ឱ្យ $f'(x)=0$ សមមូល $\dfrac{x^2-2x-1}{2(x-1)^2}=0$

នាំឱ្យ $x^2-2x-1=0$

$x^2-2x+1=2$

$(x-1)^2=2 \quad\Rightarrow\quad x=1\pm\sqrt{2}$

គេបាន $f(1-\sqrt{2})=\dfrac{(1-\sqrt{2})^2-3(1-\sqrt{2})+4}{2(1-\sqrt{2})-2}$

$=\dfrac{3-2\sqrt{2}-3+3\sqrt{2}+4}{-2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{4+\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}=-\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$

$f(1+\sqrt{2})=\dfrac{(1+\sqrt{2})^2-3(1+\sqrt{2})+4}{2(1+\sqrt{2})-2}$

$=\dfrac{3+2\sqrt{2}-3-3\sqrt{2}+4}{2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$

• ត្រង់ $x=1-\sqrt{2}$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង

$f(1-\sqrt{2})=-\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\approx -1.9$ ។

• ត្រង់ $x=1+\sqrt{2}$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង

$f(1+\sqrt{2})=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\approx 0.9$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{2x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-3x+4}{2x-2}=\dfrac{1-3+4}{2+0^--2}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-3x+4}{2x-2}=\dfrac{1-3+4}{2+0^+-2}=+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{2x-2}=\dfrac{1}{2}x-1+\dfrac{2}{2x-2}$

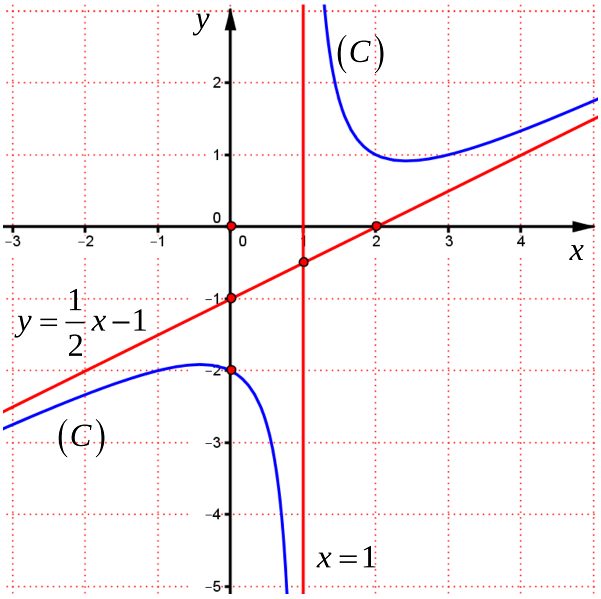
ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{2x-2}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=\dfrac{1}{2}x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-1.9	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0.9	↗ $+\infty$

➤សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



ខ. ១. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (d)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $(d): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

ដោយ (d) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច $M(x_0\ ,\ y_0)$

គេបាន $f'(x_0) = \dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}$

$$f(x_0) = \frac{x_0^2 - 3x_0 + 4}{2x_0 - 2}$$

នាំឱ្យ

$$y = \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}x \underbrace{- \frac{x_0^3 - 2x_0^2 - x_0}{2(x_0-1)^2} + \frac{x_0^2 - 3x_0 + 4}{2(x_0-1)}}_{\text{តាង X}}$$

$$\mathrm{X} = \frac{-x_0^3 + 2x_0^2 + x_0 + (x_0^2 - 3x_0 + 4)(x_0 - 1)}{2(x_0-1)^2}$$

$$= \frac{-x_0^3 + 2x_0^2 + x_0 + x_0^3 - 3x_0^2 + 4x_0 - x_0^2 + 3x_0 - 4}{2(x_0-1)^2}$$

$$= \frac{-2x_0^2 + 8x_0 - 4}{2(x_0-1)^2} = \frac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{(d): y = \left(\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}\right)x + \left(\dfrac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2}\right)}$

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B

ដោយ (d) កាត់បន្ទាត់អាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$ ត្រង់ចំណុច A នោះ $x_A = 1$ គេបាន $A(1\ ,\ y_A)$

គេបាន $y_A = \left(\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}\right)\cdot 1 + \left(\dfrac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2}\right)$

$$y_A = \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1 - 2x_0^2 + 8x_0 - 4}{2(x_0-1)^2} = \frac{-x_0^2 + 6x_0 - 5}{2(x_0-1)^2}$$

$$= \frac{(x_0-1)(-x_0+5)}{2(x_0-1)^2} = \frac{-x_0 + 5}{2(x_0-1)}$$

ដូចនេះ កូអរដោនេ $\boxed{A\left(1\ ,\ \dfrac{5 - x_0}{2(x_0-1)}\right)}$ ។

ដោយ (d) កាត់បន្ទាត់អាស៊ីមតូតទ្រេត $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ ត្រង់ចំណុច B នោះ $y_B = \dfrac{1}{2}x_B - 1$

គេបាន $y_B = \left(\dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}\right)x_B + \left(\dfrac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2}\right)$

$$\frac{1}{2}x_B - 1 = \left(\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}\right)x_B + \left(\frac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2}\right)$$

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0-1)^2}\right]x_B = \frac{-x_0^2 + 4x_0 - 2}{(x_0-1)^2} + 1$$

$$\frac{(x_0-1)^2 - x_0^2 + 2x_0 + 1}{2(x_0-1)^2}x_B = \frac{-x_0^2 + 4x_0 - 2 + (x_0-1)^2}{(x_0-1)^2}$$

$$\frac{2}{2(x_0-1)^2}x_B = \frac{2x_0 - 1}{(x_0-1)^2}$$

$$x_B = 2x_0 - 1$$

នាំឱ្យ $y_B = \dfrac{1}{2}x_B - 1 = \dfrac{1}{2}(2x_0 - 1) - 1 = x_0 - \dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ កូអរដោនេ $\boxed{B\left(2x_0 - 1\ ,\ x_0 - \dfrac{3}{2}\right)}$ ។

➤បង្ហាញថា M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$

ដោយ $\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1 + 2x_0 - 1}{2} = x_0$

$$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\dfrac{5 - x_0}{2(x_0-1)} + x_0 - \dfrac{3}{2}}{2}$$

$$= \frac{5 - x_0 + 2x_0(x_0-1) - 3(x_0-1)}{4(x_0-1)}$$

$$= \frac{5 - x_0 + 2x_0^2 - 2x_0 - 3x_0 + 3}{4(x_0-1)}$$

$$= \frac{2x_0^2 - 6x_0 + 8}{4(x_0-1)} = \frac{x_0^2 - 3x_0 + 4}{2x_0 - 2} = y_0$$

នាំឱ្យ $M(x_0\ ,\ y_0)$ ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ AB

ដូចនេះ $\boxed{M(x_0\ ,\ y_0) \text{ ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ } AB}$ ។

IV. ក. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ :

ដោយ ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល $O(0,0)$ និងមានកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$ នោះវាមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$

គេបាន សមីការស្តង់ដា $y^2 = 4px$

ដោយ ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A_1(-2,4)$

គេបាន $4^2 = 4p(-2)$ ឬ $16 = -8p$ នាំឱ្យ $p = -2$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដា $\boxed{y^2 = -8x}$ ។

ខ. រកតម្លៃនៃ y_2

ដោយ ចំណុច $A_2(-3,y_2)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ

គេបាន $y_2^2=-8(-3)$ ឬ $y_2^2=24$ នោះ $y_2=\pm2\sqrt{6}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{y_2=\pm2\sqrt{6}}$ ។

គ. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) របស់ប៉ារ៉ាបូល

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) របស់ប៉ារ៉ាបូល (P) មានរាង

$(\Delta):x=-p$ នោះ $x=-(-2)$ ឬ $x=2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសគឺ $\boxed{(\Delta):x=2}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

លេខបន្ទប់ : ....

លេខតុ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ០៧ ធ្នូ ២០១៤

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

ផ្នែកពីជគណិត

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $A=\lim\limits_{x\to1^+}|x+1|+2$ $\quad B=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+1}{x^3-2x^2+5}$ **(កន្លះពិន្ទុ)**

ខ. $C=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ $\quad D=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|x+3|}$ **(កន្លះពិន្ទុ)**

II. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $A=\int_1^2\left(x^2+3x+2\right)dx$ $\quad B=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{(\cos x+\sin x)}\right)dx$ **(មួយពិន្ទុ)**

ខ. $C=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin^2x}{\cos x}\right)dx$ $\quad D=\int_2^1\left(\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$ **(មួយពិន្ទុ)**

III. ដោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $9^{-2|x|}=\dfrac{1}{81}$ (កន្លះពិន្ទុ) $\quad$ ខ. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{-x^2+1}{2}}>256$ **(កន្លះពិន្ទុ)**

IV. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-mx+m}{x-1}$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យចំណុច $A(1,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង (C) នៃ $f(x)$ ។ **(កន្លះពិន្ទុ)**

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ចំពោះ $m=0$ ។ **(មួយពិន្ទុ)**

គ. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y=k$ កាត់ខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច B និង C ដែល $BC=\sqrt{5}$ ។ **(កន្លះពិន្ទុ)**

ផ្នែកធរណីមាត្រ

V. គេមានសមីការ $25x^2+9y^2=225$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប រួចបញ្ជាក់ទីតាំងផ្ចិត និងអ័ក្សធំរបស់វាផង ។ **(មួយពិន្ទុ)**

ខ. រកប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូច នៃអេលីបនេះ រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចកំពូល និងកំណុំទាំងពីររបស់វា ។ **(មួយពិន្ទុ)**

VI. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានគេមានបីចំណុច $A(1,0,-2)$, $B(2,1,-1)$ និង $C(1,-2,2)$ ។

ក. គណនាប្រវែងជ្រុង AB និង BC នៃត្រីកោណ ABC ។ **(មួយពិន្ទុ)**

ខ. M និង N ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃជ្រុង AB និង BC ។ ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N ។ **(មួយពិន្ទុ)**

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៤

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $A=\lim_{x\to 1^+}|x+1|+2=|1+1|+2=\boxed{4}$

$B=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+1}{x^3-2x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3}=\boxed{2}$

ខ. $C=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\boxed{6}$

$D=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x+3|}=\frac{\sqrt{(-3)^2-1}}{0^+}=\boxed{+\infty}$

II. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម :

ក. $A=\int_1^2\left(x^2+3x+2\right)dx$

$=\int_1^2\left(x^2+3x+2\right)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2$

$=\left(\frac{8}{3}+6+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+2\right)$

$=\frac{38}{3}-\frac{23}{6}=\boxed{\frac{53}{6}}$

$B=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2x-\sin^2x}{(\cos x+\sin x)}\right)dx$

$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)}\right)dx$

$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx=[\sin x+\cos x]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}$

$=(1+0)-(0-1)=\boxed{2}$

ខ. $C=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin^2x}{\cos x}\right)dx$

$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2x}{\cos x}\right)dx=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{1}$

$D=\int_2^1\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_2^1\left(x^{-4}+x^{-2}\right)dx$

$=\left[\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^1=\left[-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}\right]_2^1$

$=\left(-\frac{1}{3}-1\right)-\left(-\frac{1}{24}-\frac{1}{2}\right)=\frac{-4}{3}+\frac{13}{24}=\boxed{-\frac{19}{24}}$

III. ដោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $9^{-2|x|}=\frac{1}{81}$

$9^{-2|x|}=9^{-2}$

$-2|x|=-2$

$|x|=1$ នាំឱ្យ $x=\pm1$

ដូចនេះ: សមីការមានឫស $\boxed{x=\pm1}$ ។

ខ. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{-x^2+1}{2}}>256$

$4^{-\frac{-x^2+1}{2}}>4^4$

គេបាន $-\frac{-x^2+1}{2}>4$ ឬ $x^2-1>8$ ឬ $x^2-9>0$

ឱ្យ $x^2-9=0$ នោះ: $x=\pm3$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
$x^2-9>0$	$+$	0	$-$	0	$+$

ដូចនេះ: វិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)}$ ។

IV. ក. កំណត់តម្លៃ m :

ដើម្បីឱ្យចំណុច $A(1,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង (C) នៃ $f(x)$ លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2a-x)+f(x)=2b$ ឬ

$f(2-x)+f(x)=4$

ដោយ $f(x)=\frac{x^2-mx+m}{x-1}$

នោះ: $f(2-x)=\frac{(2-x)^2-m(2-x)+m}{(2-x)-1}$

$=\frac{4-4x+x^2-2m+mx+m}{-x+1}$

$=\frac{x^2+(m-4)x-m+4}{-(x-1)}$

$=\frac{-x^2-(m-4)x+m-4}{x-1}$

គេបាន $\frac{x^2-mx+m}{x-1}+\frac{-x^2-(m-4)x+m-4}{x-1}=4$

$$\frac{-(2m-4)x+2m-4}{x-1}=4$$
$$-(2m-4)x+2m-4=4x-4$$
$$-(2m-4)x+2m=4x$$
$$\begin{cases}-(2m-4)=4\\ 2m=0\end{cases}\Rightarrow\ m=0$$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ $\boxed{m=0}$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ចំពោះ $m=0$ នោះ $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

• ដែនកំណត់

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x-1\neq 0$ នោះ $x\neq 1$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty\,,1)\cup(1\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(x^2)'(x-1)-(x-1)'x^2}{x-1}$

$$=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

គេឱ្យ $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$

ដោយ $\forall x\in D\,,(x-1)^2>0$

នាំឱ្យ $x^2-2x=0$ នោះ $x=0\,,x=2$

ចំពោះ $x=0:\ f(0)=\dfrac{0^2}{0-1}=0$

ចំពោះ $x=2:\ f(2)=\dfrac{2^2}{2-1}=4$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

• ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(0)=0$ ។

• ត្រង់ $x=2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(2)=4$ ។

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{1+0^- -1}=-\infty$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{1+0^+ -1}=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$

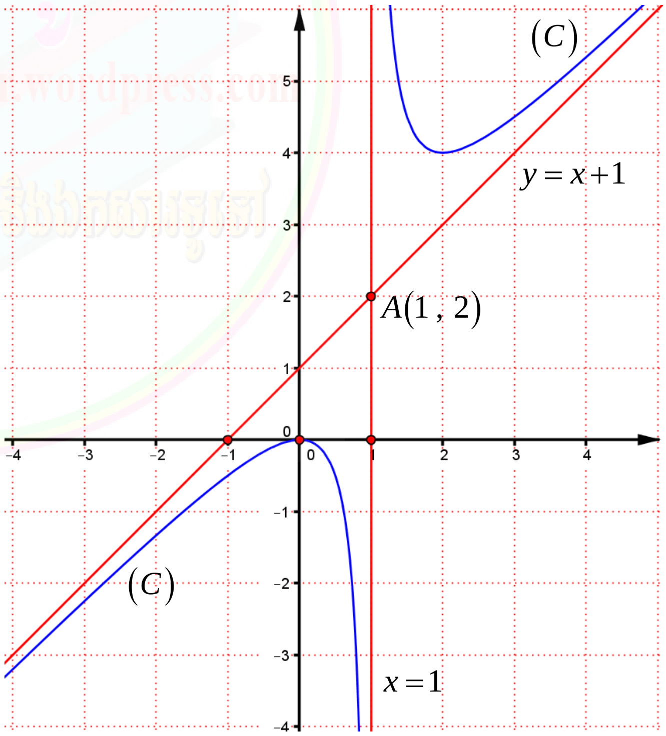
ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

➤ **សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$**



គ. កំណត់តម្លៃ k

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ និង $y=k$

គេបាន សមីការអាប់ស៊ីស $\dfrac{x^2}{x-1}=k$ ឬ $x^2=kx-k$

ឬ $x^2-kx+k=0$ ទាញបាន $\begin{cases}x_1+x_2=k\\ x_1x_2=k\end{cases}$

ដែល x_1 និង x_2 ជាអាប់ស៊ីសរៀងគ្នានៃចំណុច B និង C

ដោយ $BC=\sqrt{5}$

គេបាន $|x_2-x_1|=\sqrt{5}$

$$\left(|x_2-x_1|\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$x_2^2-2x_2x_1+x_1^2=5$$

$$x_2^2+2x_2x_1+x_1^2-4x_2x=5$$

$$\left(x_2+x_1\right)^2-4x_2x=5$$

$$k^2-4k-5=0$$

សមីការមាន $a-b+c=0$ នោះ $k=-1$, $k=5$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ $\boxed{k=-1\ ,\ k=5}$ ។

V. **ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប :**

គេមាន $25x^2+9y^2=225$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 225)

$$\frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=1$$

$$\frac{(x-0)^2}{3^2}+\frac{(y-0)^2}{5^2}=1$$

ជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីប

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការនេះជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីប}}$ ។

បញ្ជាក់ទីតាំងផ្ចិត និងអ័ក្សធំរបស់វាផង

គេមាន $\dfrac{(x-0)^2}{3^2}+\dfrac{(y-0)^2}{5^2}=1$

គេអាចសន្និដ្ឋានបានថា វាមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយ និងមានអ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរនៅលើអ័ក្សអរដោនេ

ដូចនេះ

អេលីបមានផ្ចិត $(0\ ,\ 0)$ និងអ័ក្សធំ ជាអ័ក្សឈរនៅលើអ័ក្សអរដោនេ

។

ខ. រកប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូច នៃអេលីបនេះ រួចរកកូអរដោនេ នៃចំណុចកំពូល និងកំណុំទាំងពីររបស់វា

គេមាន $\dfrac{(x-0)^2}{3^2}+\dfrac{(y-0)^2}{5^2}=1$

ផ្ទឹមនឹង $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

គេបាន $h=0\ ,\ k=0\ ,\ a=5\ ,\ b=3$

នាំឱ្យ $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

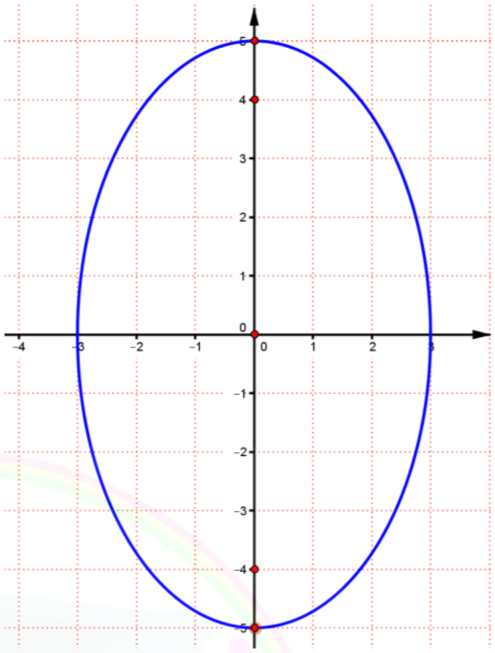
ដូចនេះ ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=10$

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=6$

កំពូល $V(0\ ,\pm a)$ នោះ $V_1(0,5)$ និង $V_2(0,-5)$

កំណុំ $F(0\ ,\pm c)$ នោះ $F_1(0,4)$ និង $F_2(0,-4)$

(ប្រធានគ្មានឱ្យសង់អេលីបទេ តែខ្ញុំសង់ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់)



VI. **ក. គណនាប្រវែងជ្រុង AB និង BC នៃត្រីកោណ ABC :**

គេមាន $A(1\ ,0\ ,-2)$, $B(2\ ,1\ ,-1)$ និង $C(1,-2\ ,\ 2)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=(1\ ,1\ ,1)$ និង $\overrightarrow{BC}=(-1\ ,-3\ ,3)$

គេបាន $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{19}$

ដូចនេះ

ប្រវែងជ្រុង $AB=\sqrt{3}$ ឯកតាប្រវែង
ប្រវែងជ្រុង $BC=\sqrt{19}$ ឯកតាប្រវែង

។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N

គេមាន $A(1\ ,0\ ,-2)$, $B(2\ ,1\ ,-1)$ និង $C(1,-2\ ,\ 2)$

ដោយ M និង N ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ AB និង BC

គេបាន $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ,\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\ ,\ \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

$$M\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,-\frac{3}{2}\right)$$

ហើយ $N\left(\dfrac{x_B+x_C}{2}\ ,\ \dfrac{y_B+y_C}{2}\ ,\ \dfrac{z_B+z_C}{2}\right)$

$$N\left(\frac{3}{2}\ ,-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{M\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,-\frac{3}{2}\right)\ ,\ N\left(\frac{3}{2}\ ,-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)}$ ។

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....
លេខបន្ទប់ : ....
លេខតុ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ០៦ វិច្ឆិកា ២០១៥

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2-2x-1\right)}{\left(x^2+1\right)} \qquad B=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)(2x+1)}$$ (១ពិន្ទុ)

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$A=\int\left(x^2-2x+1\right)dx \qquad B=\int_0^1\left(3x^3-\frac{1}{4}x\right)dx$$ (១ពិន្ទុ)

3. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (កន្លះពិន្ទុ)

ខ. ចូរគណនា Z^2 រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (កន្លះពិន្ទុ)

4. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\left(kx^2-5x+7\right)}{(kx-2)}$ ។

ក. ចូរសិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ចំពោះ $k=1$ ។ (២ពិន្ទុ)

ខ. ចូរកំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ប៉ះបន្ទាត់ $y=1$ ។ (១ពិន្ទុ)

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ នៃលំហ គេមានបីចំណុច $A(1,2,1)$, $B(2,0,3)$ និង $C(-1,2,0)$ ។

ក. ចូរគណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថា ចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ (១ពិន្ទុ)

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ (១ពិន្ទុ)

2. ប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $(0,0)$ និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'x)$ ។

ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល ដោយដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A(4,8)$ ។ (១ពិន្ទុ)

ខ. គេមានចំណុច $B(x_1,4)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ ។ ចូរគណនាតម្លៃ x_1 ។ (១ពិន្ទុ)

www.document4khmer.wordpress.com

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៥

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2-2x-1\right)}{\left(x^2+1\right)}\quad \text{(រាងមិនកំណត់ } \frac{\infty}{\infty}\text{)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2-0-0}{1+0}=\boxed{2}$$

$$B=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)(2x+1)}\quad \text{(រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}\text{)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1}{2x+1}=\frac{3}{-1}=\boxed{-3}$$

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$A=\int\left(x^2-2x+1\right)dx=\boxed{\frac{x^3}{3}-x^2+x+c}$$ ដែល c ថេរ

$$B=\int_0^1\left(3x^3-\frac{1}{4}x\right)dx=\left[\frac{3x^4}{4}-\frac{x^2}{8}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)-(0-0)=\boxed{\frac{5}{8}}$$

3. ក. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$ ។

ខ. គណនា Z^2 រួចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $Z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

តាមដឺម៉ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

នាំឱ្យ $Z^2=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$ ។

4. ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោង (C)

គេមាន $f(x)=\frac{\left(kx^2-5x+7\right)}{(kx-2)}$

ចំពោះ $k=1$ គេបាន $f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$

• ដែនកំណត់

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x-2\neq0\Rightarrow x\neq2$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=(-\infty\,,\,2)\cup(2\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

$$f'(x)=\frac{\left(x^2-5x+7\right)'(x-2)-(x-2)'\left(x^2-5x+7\right)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(2x-5)(x-2)-\left(x^2-5x+7\right)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-4x-5x+10-x^2+5x-7}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x+10-7}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

ឱ្យ $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0$

ដោយ $\forall\in D\ ,\ (x-2)^2>0$

នាំឱ្យ $x^2-4x+3=0$ មានឫសងាយ $x=1\,,\ x=3$

ចំពោះ $x=1:\ f(1)=\frac{1^2-5+7}{1-2}=-3$

$x=3:\ f(3)=\frac{3^2-5\cdot3+7}{3-2}=1$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	||	−	0	+

• ត្រង់ $x=1\,,\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(1)=-3$ ។

• ត្រង់ $x=3\,,\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើនឹង $f(3)=1$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

• លីមីត និងអាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\frac{4-10+7}{2+0^--2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\frac{4-10+7}{2+0^+-2}=+\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to2} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

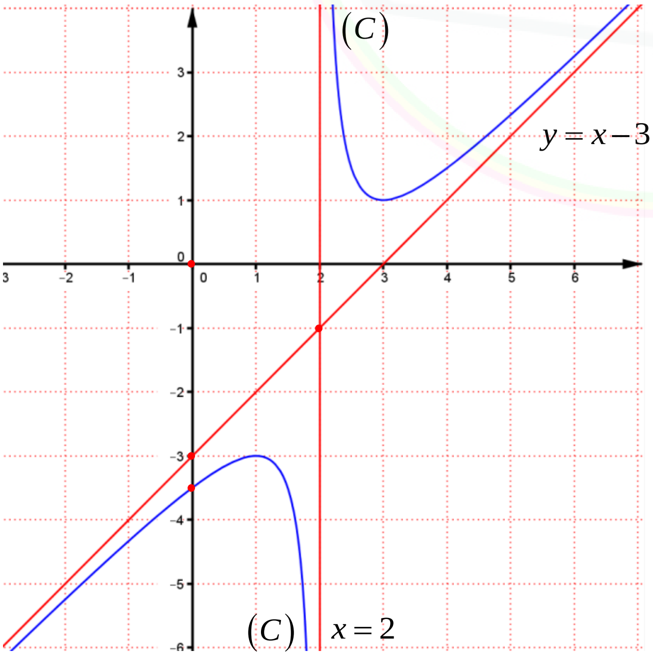
ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

• តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	− ‖ −	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-3	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

➢សង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍



• ផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ f

ដោយ អាស៊ីមតូតឈរ $x=2$ និងទ្រេត $y=x-3$ ប្រសព្វគ្នា

ត្រង់ចំណុច $I(2,-1)$ នាំឱ្យ $I(2,-1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)

ខ. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) ប៉ះបន្ទាត់ $y=1$

គេមាន $f(x)=\dfrac{(kx^2-5x+7)}{(kx-2)}$ និងបន្ទាត់ $y=1$

គេបាន សមីការអាប់ស៊ីស

$$\frac{kx^2-5x+7}{kx-2}=1$$

$$kx^2-5x+7=kx-2$$

$$kx^2+(-5-k)x+9=0$$

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y=1$ លុះត្រាតែ $\begin{cases}a\neq0\\ \Delta=0\end{cases}$

នាំឱ្យ $a=k\neq0$

$$kx^2+(-5-k)x+9=0$$

$$\Delta=(-5-k)^2-36k=0$$

$$25+10k+k^2-36k=0$$

$$k^2-26k+25=0$$

សមីការមានឫសងាយ $k=1$, $k=25$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ $\boxed{k=1\,,\,k=25}$ ។

II. ចម្លើយផ្នែកជរណីមាត្រ

1. ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ៖

គេមាន $A(1,2,1)$, $B(2,0,3)$ និង $C(-1,2,0)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,0,-1)$

នាំឱ្យ $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & -2 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{vmatrix}=2\vec i-3\vec j-4\vec k$$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec i-3\vec j-4\vec k}$ ។

➢បង្ហាញថា ចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec i-3\vec j-4\vec k\neq\vec 0$

នាំឱ្យ បីចំណុច A , B , C មិនរត់ត្រង់ជួរ

ដូចនេះ **ចំណុច A , B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ** ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃត្រីកោណ $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

2. ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

គេមាន ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $(0\ ,\ 0)$

និងកំណុំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'x)$

នោះ ប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

នាំឱ្យ ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការស្តង់ដា $y^2 = 4px$

ដោយ ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A(4\ ,\ 8)$

គេបាន $8^2 = 16p \Rightarrow p = 4$ នោះ $y^2 = 4 \cdot 4x$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $\boxed{y^2 = 16x}$ ។

ខ. គណនាតម្លៃ x_1

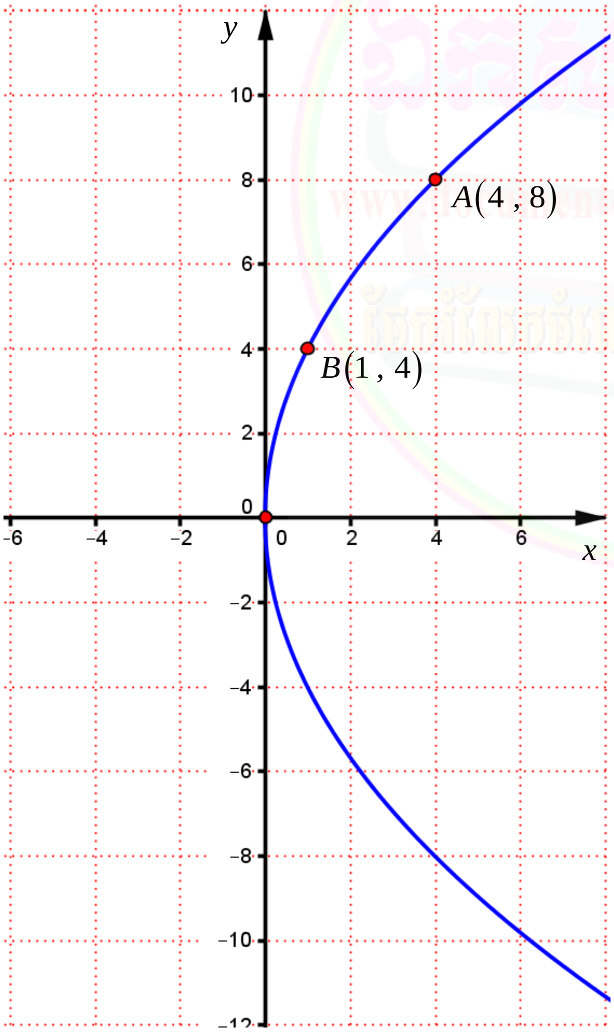
គេមាន ចំណុច $B(x_1\ ,\ 4)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនោះ

គេបាន $y^2 = 16x$ ទៅជា $4^2 = 16x_1$ នោះ $x_1 = 1$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{x_1 = 1}$ ។

ចប់ត្រឹមនេះ

ខ្ញុំសូមបន្ថែមក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូលដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់



www.math4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឈ្មោះ : ....

បន្ទប់លេខ : ....

តុលេខ : ....

ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "

សម័យប្រឡង : ២៦ វិច្ឆិកា ២០១៦

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖ (**១ពិន្ទុ**)

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-3x+2)}{(x^2-x-2)}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖ (**១ពិន្ទុ**)

ក. $\int\frac{1}{(x^2+x-6)}dx$ ខ. $\int x\sin(4-x^2)dx$

3. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច ៖ (**១ពិន្ទុ**)

ក. $-3x^2+2x-1=0$ ខ. $x^4-2x^2-15=0$

4. អ្នកគ្រូបុប្ផាធ្វើប័ណ្ណលេខចំនួន 9 សន្លឹក ដែលសន្លឹកនីមួយៗសរសេរតែមួយលេខខុសៗគ្នា ក្នុងចំណោមពីលេខ 1 ដល់លេខ 9 ។ ក្នុងការពង្រឹងវិធីគុណ ដែលមានតួគុណនីមួយៗជាលេខ 1 ខ្ទង់ គាត់បានឱ្យក្រុមសិស្សនីមួយៗ ចាប់យកប័ណ្ណលេខចំនួន 2 សន្លឹក រួចគណនាផលគុណនៃលេខក្នុងប័ណ្ណទាំងពីរនោះ ។ រកប្រូបាបនៃការចាប់បានប័ណ្ណលេខ 2 សន្លឹក ដែលផលគុណនៃលេខរបស់វាជាចំនួនគូ ។ (**១ពិន្ទុ**)

5. គេមានអនុគមន៍ $f(x): y=x^3-3x+1$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. ប្រើប្រាស់ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ចូរពិភាក្សាតាមតម្លៃ m នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ $x^3-3x+1-m=0$ ។ (**១ពិន្ទុ**)

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. គេមានអេលីប (E) ដែលមានចំណុចកំណុំ $F_1(1,-3)$, $F_2(1,1)$ និងកាត់តាមចំណុច $A(-\sqrt{2}+1,1)$ ។

ក. ចូររកចម្ងាយពីផ្ចិតអេលីប (E) ទៅចំណុចកំណុំរបស់អេលីបនោះ ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. គណនាប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូចរបស់អេលីប (E) រួចសរសេរសមីការស្តង់ដានៃអេលីបនោះ ។ (**១ពិន្ទុ**)

2. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ មានទិសដៅអវិជ្ជមាន គេមាន 4 ចំណុច $I(3,-1,5)$, $M(4,2,-1)$, $N(1,-2,3)$ និង $A(1,1,3)$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ (P) កាត់តាម 3 ចំណុច I, M និង N ។ (**១ពិន្ទុ**)

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IMN និងសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) កាត់តាមចំណុច A និងកាត់ប្លង់ (P) ត្រង់ចំណុច M ។ (**១ពិន្ទុ**)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៦

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត

1. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-3x+2)}{(x^2-x-2)}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$)

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2-1}{2+1}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$)

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\times\dfrac{3x}{\sin 3x}\times\dfrac{2}{3}\right)$

$=1\times 1\times\dfrac{2}{3}=\boxed{\dfrac{2}{3}}$

2. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+x-6)}dx$

$=\displaystyle\int\frac{1}{(x-2)(x+3)}dx$

$=\displaystyle\int\frac{1}{5}\left[\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x+3)}\right]dx$

$=\dfrac{1}{5}\left[\ln|x-2|-\ln|x+3|\right]+c$, c ថេរ

$=\boxed{\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+3}\right|+c}$

ខ. $\displaystyle\int x\sin(4-x^2)\,dx$

គេតាង $t=4-x^2$ នោះ $dt=-2xdx$ គេបាន ៖

$\displaystyle\int x\sin(4-x^2)\,dx=-\frac{1}{2}\int\sin(4-x^2)\cdot(-2xdx)$

$=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\sin(4-x^2)\cdot(-2xdx)$

$=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\sin t\,dt=-\dfrac{1}{2}(-\cos t)+c$, c ថេរ

$=\boxed{\dfrac{1}{2}\cos(4-x^2)+c}$

3. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំនៃចំនួនកុំផ្លិច ៖

ក. $-3x^2+2x-1=0$ មាន $a=-3$, $b=2$, $c=-1$

ដោយ $\Delta'=1-3=-2$

នាំឱ្យ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-2}}{-3}=\dfrac{1}{3}\mp i\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x=\dfrac{1}{3}-i\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ ,\ x=\dfrac{1}{3}+i\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$ ជាឫស ។

ខ. $x^4-2x^2-15=0$

គេតាង $t=x^2$ គេបាន ៖ $t^2-2t-15=0$

ដោយ $\Delta'=(-1)^2+15=16$

នាំឱ្យ $t=\dfrac{1\pm\sqrt{16}}{1}=\left[\begin{array}{l}5\\-3\end{array}\right.$

ចំពោះ $t=5$ សមមូល $x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

ចំពោះ $t=-3$ សមមូល $x^2=-3\Rightarrow x=\pm\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x=\pm\sqrt{5}\ ,\ x=\pm i\sqrt{3}}$ ជាឫសនៃសមីការ ។

4. រកប្រូបាបចាប់បានប័ណ្ណ មានផលគុណនៃលេខរបស់វាជាចំនួនគូ

គេមាន ប័ណ្ណ 9 មានចុះលេខពីលេខ 1 ដល់លេខ 9

ដើម្បីឱ្យផលគុណនៃប័ណ្ណទាំងពីរជាចំនួនគូលុះត្រាតែ គេចាប់បានប័ណ្ណមានលេខគូមួយយ៉ាងតិច មានន័យថា គូមួយ ឬគូពីរ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប័ណ្ណមានផលគុណជាលេខគូ

គេបាន $P(A)=P(\text{គូ សេស})+P(\text{គូ គូ})+P(\text{សេស គូ})$

$=\left(\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{5}{8}\right)+\left(\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{3}{8}\right)+\left(\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{4}{8}\right)$

$=\dfrac{20}{72}+\dfrac{12}{72}+\dfrac{20}{72}=\dfrac{52}{72}=\dfrac{13}{18}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{13}{18}=0.72}$ ។

5. ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $y=f(x)=x^3-3x+1$ (ដូចគ្រូអនុ. 2013)

• ដែនកំណត់

ដោយ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ពហុធា មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\ ,\ +\infty)}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

• ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=x^3-3x+1$

ដេរីវេ : $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$3(x-1)(x+1)=0$ នោះ $x=1\,,\,x=-1$

គេបាន $f(1)=1^3-3\cdot1+1=-1$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+1=3$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• បរមា

-ត្រង់ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-1)=3$ ។

-ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(1)=-1$ ។

• លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x+1\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x+1\right)=+\infty$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

• ភាពប៉ោងផត និងចំណុចរបត់

ដេរីវេទី២ $f''(x)=\left(3x^2-3\right)'=6x$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0$ នោះ $x=0$

- បើ $x>0$ នោះ $f''(x)>0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x<0$ នោះ $f''(x)<0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងក្រោម

- បើ $x=0$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់ $I(0,f(0))=I(0,1)$

• ផ្ចិតឆ្លុះ

គេនឹង បង្ហាញថា ចំណុចរបត់ $I(0\,,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង

បើ $I(a\,,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះលុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(-x)+f(x)=2$

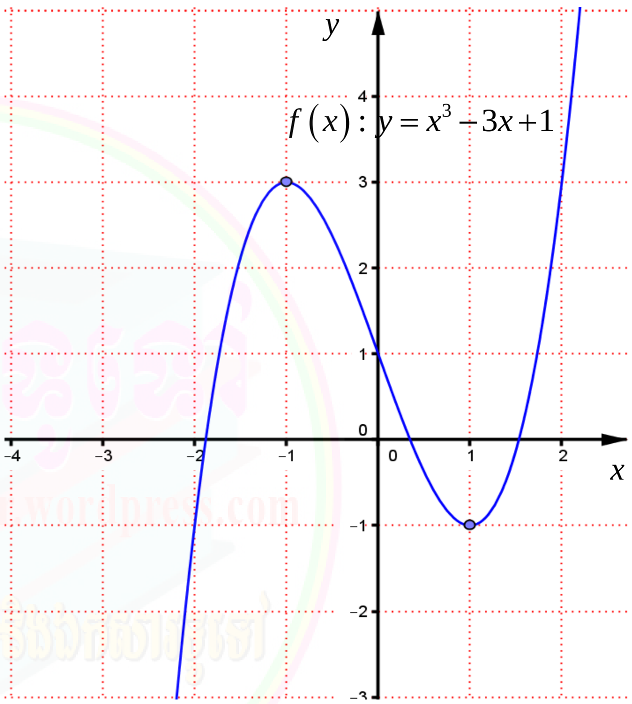
ដោយ $f(-x)+f(x)$

$=(-x)^3-3(-x)+1+x^3-3x+1$

$=-x^3+3x+1+x^3-3x+1=2$ ពិត

ដូចនេះ $I(0\,,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ f

• សង់ក្រាប



ខ. ពិភាក្សាតាមតម្លៃ m នូវចំនួនឫសរបស់សមីការ

គេមាន សមីការ $x^3-3x+1-m=0$

គេបាន $m=x^3-3x+1$

ឫសនៃសមីការនេះបានពីប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ដេក $y=m$ និង

ក្រាប C ។ តាមក្រាបគេបានអត្ថិភាពនៃឫសដូចខាងក្រោម ៖

• $m\in(-\infty,-1)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $x_1<0$

• $m=-1$: សមីការមានឫសបី $x_1=-2\,,\,x_2=x_3=1$

• $m\in(-1\,,3)$: សមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា

• $m=3$: សមីការមានឫសបី $x_1=x_2=-1\,,\,x_3=2$

• $m\in(3\,,+\infty)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $0<x_1$

II. ចម្លើយផ្នែកគណិតវិទ្យា

1. ក. រកចម្ងាយពីផ្ចិតអេលីប (E) ទៅចំណុចកំពូលរបស់អេលីបនោះ

ដោយ ផ្ចិតជាចំណុចកណ្ដាលនៃ កំណុំទាំងពីរ

គេបាន $2c = F_1F_2$ ឬ $c = \dfrac{F_1F_2}{2}$

ដោយ $F_1(1,-3)$, $F_2(1,1)$

នោះ $F_1F_2 = \sqrt{(1-1)^2+(1+3)^2} = \sqrt{0+4^2} = 4$

នាំឱ្យ $c = \dfrac{F_1F_2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំគឺ $\boxed{c=2}$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. គណនាប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ័ក្សតូចរបស់អេលីប (E)

ដោយ អេលីប (E) កាត់តាមចំណុច $A\left(-\sqrt{2}+1,1\right)$

តាមនិយមន័យអេលីប ដែលមាន $2a$ ជាប្រវែងអ័ក្សធំ

គេបាន $AF_1 + AF_2 = 2a$

ដោយ $AF_1 = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}-1\right)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$AF_2 = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}-1\right)^2+(1-1)^2} = \sqrt{2}$

នាំឱ្យ $2a = 3\sqrt{2}+\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

ដូចនេះ ប្រវែងអ័ក្សធំ $\boxed{2a = 4\sqrt{2}}$ ឯកតាប្រវែង ។

ដោយ $b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-2^2} = 2$

ដូចនេះ ប្រវែងអ័ក្សតូច $\boxed{2b=4}$ ឯកតាប្រវែង ។

➤សរសេរសមីការស្តង់ដានៃអេលីបនោះ

ដោយ $F_1(1,-3)$, $F_2(1,1)$ មានអាប់ស៊ីសដូចគ្នា

នោះ (E) ជាអេលីបមានអ័ក្សធំស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស

សមីការ ស្តង់ដា (E) : $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

ដោយ ផ្ចិត I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ កំណុំទាំងពីរ

$I(h,k) = I\left(\dfrac{1+1}{2},\dfrac{-3+1}{2}\right) = I(1,-1)$

គេបាន $h=1$, $k=-1$

នាំឱ្យ សមីការស្តង់ដានៃអេលីបអាចសរសេរបានគឺ៖

$(E): \dfrac{(x-1)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{(y+1)^2}{2^2}=1$

ដូចនេះ $\boxed{(E): \dfrac{(x-1)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{(y+1)^2}{2^2}=1}$ ។

2. ក. សរសេរសមីការទូទៅនៃប្លង់ (P) កាត់ I , M និង N

ប្លង់រាង $(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ ប្លង់ (P) កាត់តាមបីចំណុច I , M និង N

នោះប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $I(3,-1,5)$ និង

មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{IM}\times\overrightarrow{IN}$

គេមាន $I(3,-1,5)$, $M(4,2,-1)$, $N(1,-2,3)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{IM} = (1,3,-6)$, $\overrightarrow{IN} = (-2,-1,-2)$

នោះ $\vec{n} = \overrightarrow{IM}\times\overrightarrow{IN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -12\vec{i}+14\vec{j}+5\vec{k}$

គេបាន $(P): -12(x-3)+14(y+1)+5(z-5)=0$

$-12x+14y+5z+36+14-25=0$

$-12x+14y+5z+25=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P): -12x+14y+5z+25=0}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IMN

រូបមន្ត $S_{IMN} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{IM}\times\overrightarrow{IN}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+14^2+5^2}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{365} = \dfrac{\sqrt{365}}{2}$

ដូចនេះ គណនាបាន $\boxed{S_{IMN} = \dfrac{\sqrt{356}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

➤សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d)

សមីការការប៉ារ៉ាម៉ែតមានរាង $(d): \begin{cases} x = x_0+at \\ y = y_0+bt \ , t\in\mathbb{R} \\ z = z_0+ct \end{cases}$

ដោយ (d) កាត់តាមចំណុច $A(1,1,3)$ និងកាត់តាម

ចំណុច $M(4,2,-1)$ នោះបន្ទាត់ (d) មាន

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AM} = (3,1,-4)$

នាំឱ្យ $(d): \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1+t \ \ , t\in\mathbb{R} \\ z = 3-4t \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{(d): \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1+t \ \ , t\in\mathbb{R} \\ z = 3-4t \end{cases}}$ ។

www.document4khmer.wordpress.com

ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
ឈ្មោះ : ....
បន្ទប់លេខ : ....
តុលេខ : ....
ហត្ថលេខា : ....

ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូ បឋមសិក្សា និងមត្តេយ្យសិក្សា " ១២ + ២ "
សម័យប្រឡង : ២៥ វិច្ឆិកា ២០១៧

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយៈពេល : ១២០ នាទី ពិន្ទុ : ១០

I. ផ្នែកពីជគណិត

1. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{\dfrac{|x|-1}{2-|x|}}$ ។ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (១ពិន្ទុ)

2. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖ (0.៥0ពិន្ទុ)

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+1}{x^3-x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2-3x+2}$ ។

3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖ (១ពិន្ទុ)

ក. $\int_0^1\dfrac{x}{x+2}dx$ ខ. $\int_0^2\dfrac{x^2-3}{x+1}dx$ ។

4. គេមានសមីការ $z^2-6z+12=0$ ។

ក. រកឫសកុំផ្លិច z_1 និង z_2 នៃសមីការនេះ ដោយដឹងថាឫស z_1 មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន ។ (0.៥0ពិន្ទុ)

ខ. សរសេរឫស z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ (0.៥0ពិន្ទុ)

5. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^3+3x^2-2$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ (១.៥0ពិន្ទុ)

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំណុចរបត់ I ។ (0.៥0ពិន្ទុ)

គ. ប្រើប្រាស់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ ចូរពិភាក្សាចំនួនឫសរបស់សមីការ $x^3+3x^2-2=m$ ទៅតាមតម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។ (0.៥0ពិន្ទុ)

II. ផ្នែកធរណីមាត្រ

1. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(3,-1,2)$, $B(0,-4,2)$ និង $C(-3,2,1)$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ និងគណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។ (១ពិន្ទុ)

ខ. កំណត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC និងគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនេះ ។ (១ពិន្ទុ)

2. គេមានប៉ារ៉ាបូល (P) មួយដែលមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ និងមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ក. រកកូអរដោនេកំណុំ F និងសរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ ដោយដឹងថាក្រាភិចវាកាត់តាម $A(2,4)$ ។ (១ពិន្ទុ)

ខ. រកតម្លៃ x_1 និងកំណត់ចំណុច B ដោយដឹងថាចំណុច $B(x_1,8)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល (P) ។ (0.៥0ពិន្ទុ)

គ. ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលនៅត្រង់ចំណុច A ខាងលើ ។ (0.៥0ពិន្ទុ)

ចម្លើយ វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ប្រឡងជ្រើសរើសគ្រូបឋម និងមត្តេយ្យសិក្សា ឆ្នាំ ២០១៧

I. ចម្លើយផ្នែកពីជគណិត

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=\sqrt{\dfrac{|x|-1}{2-|x|}}$ មានន័យលុះត្រា $\begin{cases} 2-|x|\neq 0 & (1) \\ \dfrac{|x|-1}{2-|x|}\geq 0 & (2) \end{cases}$

តាម $(1): 2-|x|\neq 0$ នោះ $x\neq \pm 2$

តាម $(2): \dfrac{|x|-1}{2-|x|}\geq 0$ គេនឹងសិក្សាសញ្ញារបស់វា

• ឫសនៃភាគយក $|x|-1=0$ នោះ $x=\pm 1$

• ឫសនៃភាគបែង $2-|x|=0$ នោះ $x=\pm 2$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$\lvert x\rvert-1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\lvert x\rvert$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{\lvert x\rvert-1}{2-\lvert x\rvert}\geq 0$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $\boxed{D=(-2,-1]\cup[1\,,2)}$ ។

2. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+1}{x(x-1)(x+1)}$

• បើ $x\to 1^-$ នោះ $x-1\to 0^-$

គេបាន $\dfrac{1^2-3\cdot 1+1}{1\cdot 0^-\cdot(1+1)}=\dfrac{-1}{0^-}\to +\infty$

• បើ $x\to 1^+$ នោះ $x-1\to 0^+$

គេបាន $\dfrac{1^2-3\cdot 1+1}{1\cdot 0^+\cdot(1+1)}=\dfrac{-1}{0^+}\to -\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+1}{x^3-x}=\begin{cases}+\infty & \text{បើ } x\to 1^- \\ -\infty & \text{បើ } x\to 1^+\end{cases}}$ ។

ខ. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^2-3x+2}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{\infty}{\infty}$)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{3-0+0}{2-0+0}=\boxed{\frac{3}{2}}$$ ។

3. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

ក. $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x+2}dx=\int_0^1\frac{x+2-2}{x+2}dx=\int_0^1\left(1-2\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx$

$\displaystyle=\int_0^1\left(1-2\cdot\frac{(x+2)'}{x+2}\right)dx$

$=\left[x-2\ln|x+2|\right]_0^1$

$=(1-2\ln 3)-(0-2\ln 2)=\boxed{1-2\ln\dfrac{3}{2}}$

ខ. $\displaystyle\int_0^2\frac{x^2-3}{x+1}dx=\int_0^2\frac{x^2-1-2}{x+1}dx$

$\displaystyle=\int_0^2\left(\frac{x^2-1}{x+1}-2\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$

$\displaystyle=\int_0^2\left(x-1-2\cdot\frac{(x+1)'}{x+1}\right)dx$

$=\left[\dfrac{x^2}{2}-x-2\ln|x+1|\right]_0^2$

$=(2-2-2\ln 3)-2\ln 1=\boxed{-2\ln 3}$

4. ក. រកឫសកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ដែល z_1 មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន៖

គេមាន $z^2-6z+12=0$, $\Delta'=9-12=-3$

នាំឱ្យ $z_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{-3}}{1}=3+i\sqrt{3}$

$z_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{-3}}{1}=3-i\sqrt{3}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $\boxed{z_1=3+i\sqrt{3}\ ,\ z_2=3-i\sqrt{3}}$ ។

ខ. សរសេរឫស z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$z_1=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$=\boxed{2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$

$z_2=3-i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$

$=\boxed{2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)}$

www.documentkhmer.wordpress.com

5. **ក. សិក្សាអថេរភាព និងគូសក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$**

គេមាន $f(x)=x^3+3x^2-2$ **(ប្រហែលគ្រូអនុ.២០១៧)**

• ដែនកំណត់ : អនុគមន៍ f មានន័យគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\boxed{D=\mathbb{R}=(-\infty\,,+\infty)}$ ។

• ទិសដៅអថេរភាព

គេមាន $f(x)=x^3+3x^2-2$

ដេរីវេ : $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

គេឱ្យ $f'(x)=0$

$3x(x+2)=0$ នោះ $x=0\,,\,x=-2$

គេបាន $f(0)=0^3+3\cdot 0^2-2=-2$

$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-2=2$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• បរមា

-ត្រង់ $x=-2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

បញ្ជាក់ថា f មានអតិបរមាធៀបមួយស្មើ $f(-2)=2$ ។

-ត្រង់ $x=0$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

បញ្ជាក់ថា f មានអប្បបរមាធៀបមួយស្មើ $f(0)=-2$ ។

• លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2-2)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+3x^2-2)=+\infty$

• តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

• ភាពប៉ោង និងភាពផត

ដេរីវេទី២ $f''(x)=(3x^2+6x)'=6x+6$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x+6=0$ នោះ $x=-1$ ជាឫស

- បើ $x>-1$ នោះ $f''(x)>0$

នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផតទៅខាងលើ

- បើ $x<-1$ នោះ $f''(x)<0$

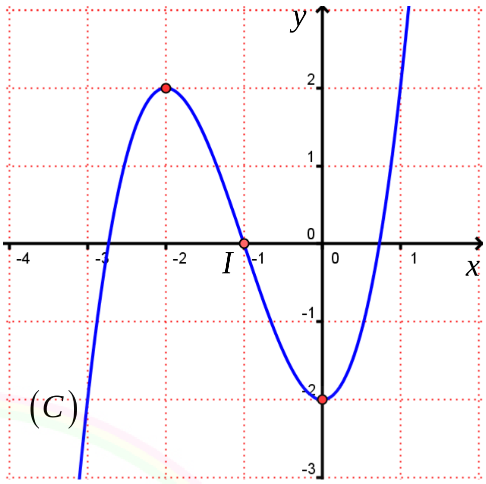
នាំឱ្យ ខ្សែកោងបែរភាពផត ចុះខាងក្រោម

- បើ $x=-1$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា

នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់មួយតាងដោយ I ដែល

$I(-1,f(-1))$ ឬ $I(-1,0)$

• សង់ក្រាប



ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចរបត់ I

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $T: y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

ដោយ T ប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុចរបត់ $I(-1,0)$

នាំឱ្យ $x_0=-1$, $y_0=0$

នោះ $f'(x_0)=f'(-1)=3(-1)^2+6(-1)=-3$

$f(x_0)=f(-1)=(-1)^3+3(-1)^2-2=0$

គេបាន $T: y=-3(x+1)+0=-3x-3$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $\boxed{T: y=-3x-3}$ ។

គ. ប្រើប្រាស់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ពិភាក្សាចំនួនឫស របស់សមីការ $x^3+3x^2-2=m$ តាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m

គេមាន សមីការ $x^3+3x^2-2=m$

ឫសនៃសមីការនេះបានពីប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ដេក $y=m$ និង ក្រាប C ។ តាមក្រាបគេបានអត្ថិភាពនៃឫសដូចខាងក្រោម ៖

• $m\in(-\infty,-2)$: សមីការមានឫសតែមួយគត់ $x_1<0$

• $m=-2$: សមីការមានឫសបី $x_1=-3\,,x_2=x_3=0$

• $m\in(-2\,,\,2)$: មានឫសបីផ្សេងគ្នា $x_1<x_2<0<x_3$

• $m=2$: សមីការមានឫសបី $x_1=x_2=-2\,,\,x_3=1$

• $m\in(2\,,+\infty)$: សមីការមានឫសវិជ្ជមានតែមួយគត់ $0<x_1$

www.documentkhmer.wordpress.com

II. ចម្លើយផ្នែកគណិតវិទ្យា

1. **ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$

គេមាន $A(3,-1,2)$, $B(0,-4,2)$, $C(-3,2,1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\ ,\ y_B-y_A\ ,\ z_B-z_A)$

$=(0-3\ ,\ -4+1\ ,\ 2-2)$

$=\boxed{(-3\ ,\ -3\ ,\ 0)}$

$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A\ ,\ y_C-y_A\ ,\ z_C-z_A)$

$=(-3-3\ ,\ 2+1\ ,\ 1-2)$

$=\boxed{(-6\ ,\ 3\ ,\ -1)}$

$\overrightarrow{BC}=(x_C-x_B\ ,\ y_C-y_B\ ,\ z_C-z_B)$

$=(-3-0\ ,\ 2+4\ ,\ 1-2)$

$=\boxed{(-3\ ,\ 6\ ,\ -1)}$

គណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(-3\ ,\ -3\ ,\ 0)$

$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2}=3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC}=(-6\ ,\ 3\ ,\ -1)$

$AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-6)^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{46}$

$\overrightarrow{BC}=(-3\ ,\ 6\ ,\ -1)$

$BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-3)^2+6^2+(-1)^2}=\sqrt{46}$

នាំឱ្យ បរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

$P=AB+AC+BC=3\sqrt{2}+\sqrt{46}+\sqrt{46}$

ដូចនេះ $\boxed{P=3\sqrt{2}+2\sqrt{46}}$ ឯកតាប្រវែង ។

ខ. កំណត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

ដោយ ត្រីកោណ ABC មានប្រវែងជ្រុង $AC=BC=\sqrt{46}$

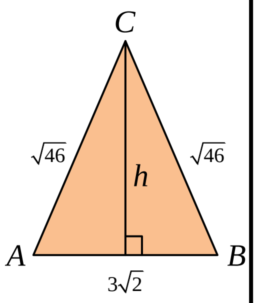
ដូចនេះ $\boxed{ABC \text{ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល } C}$ ។

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនេះ (របៀបទី១)

$h=\sqrt{\sqrt{46}^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{166}}{2}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{166}}{2}\right)$

$=\frac{3\sqrt{83}}{2}$



ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\frac{3\sqrt{83}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនេះ (របៀបទី២)

រូបមន្ត $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}\right|$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -3 & 0\\ -6 & 3 & -1\end{vmatrix}=3\vec{i}-3\vec{j}-27\vec{k}$$

$S=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+(-3)^2+(-27)^2}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{1+1+9^2}=\frac{3\sqrt{83}}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\frac{3\sqrt{83}}{2}}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

2. **ក. រកកូអរដោនេកំណុំ** F

ដោយ ប៉ារ៉ាបូល (P) មានកំពូល $O(0\ ,\ 0)$ និងមានអ័ក្ស ឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេបាន សមីការស្តង់ដាមានរាង $y^2=4px$

បម្រាប់ ក្រាភិចប៉ារ៉ាបូល (P) កាត់តាម $A(2\ ,\ 4)$

គេបាន $4^2=4p\cdot 2$ នោះ $p=2$

ដូចនេះ កូអរដោនេកំណុំ $\boxed{F(p\ ,\ 0)=F(2\ ,\ 0)}$ ។

សរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ

ដោយ សមីការស្តង់ដាមានរាង $y^2=4px$ ដែលមាន $p=2$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាសរសេរបាន $\boxed{(P):y^2=8x}$ ។

ខ. រកតម្លៃ x_1 **និងកំណត់ចំណុច** B

ដោយដឹងថាចំណុច $B(x_1\ ,\ 8)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល (P)

គេបាន $y^2=8x$ ទៅជា $8^2=8x_1$ នោះ $x_1=8$

ដូចនេះ $\boxed{x_1=8\ ,\ B(8\ ,\ 8)}$ ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (d) **ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលត្រង់ចំណុច** A

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរាង $(d):\ y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$

ដោយ (d) ប៉ះ (P) ត្រង់ $A(2,4)$ នោះ $x_0=2, y(x_0)=4$

ហើយ $y^2=8x$ នោះ $2yy'=8$ នោះ $y'=\frac{4}{y}$

នាំឱ្យ $y'(x_0)=\frac{4}{y(x_0)}=\frac{4}{4}=1$

គេបាន $(d):\ y=1(x-2)+4$ ឬ $y=x+2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះសរសេរបាន $\boxed{(d):\ y=x+2}$ ។