វិញ្ញាសា

គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី១២

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

រៀបរៀងដោយលោកគ្រូ តាន គីមលាន

វិញ្ញាសាទី ១

I គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $A=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$ និង $B=\dfrac{x+iy}{1+i}$ ដែល $x;y$ ជាចំនួនពិត ។

១ សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត និងជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

២ សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ រក x និង y ដោយដឹងថា $2\overline{B}-A^2=0$ ($\overline{B}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B)

II គណនាលីមីតខាងក្រោម

១ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+e^x-1}{x^2+x}$ ២ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x+2}{x+1}$

III ១ កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យបាន

$$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+2}$$ ចំពោះគ្រប់ x ដែល $x\neq -2; x\neq 1$ ។

២ គណនាអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int_{-4}^{0}\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}dx$ ។

IV រកចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ $M(1,0)$ ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប (C) តាងអនុគមន៍ $y=g(x)=px^3+qx^2+\dfrac{2}{3}$ ។

V អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=x-1+2e^{-x}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

១ រក $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត (L_1) នៃក្រាប (C) ។ បង្ហាញថា f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=\ln 2$ ។

២ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។ រកសមីការបន្ទាត់ (L_2) ប៉ះ (C) ត្រង់ $A(0,1)$

៣ សង់បន្ទាត់ $(L_1),(L_2)$ និង (C) នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ ។ គេឱ្យ $\ln 2=0.7$

៤ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយអាស៊ីមតូត (L_1) និងក្រាប (C) បន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=1$ ។

VI នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(1,2,4)$,$B(2,-1,3)$ និង $C(-2,3,-2)$ ។

១ រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត A និងកាំ $r=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$ ។

រកសមីការទូទៅនៃប្លង់ (P) ដែលមានវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់ $\overrightarrow{AC}$ ហើយកាត់តាមចំណុច B ។ រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃ

បន្ទាត់ (D) ដែលកាត់តាមចំណុច C ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB}$ ។

២ រកចម្ងាយពីចំណុច B ទៅ A ។ រកចម្ងាយពីចំណុច B ទៅបន្ទាត់ (D) ។ រកចម្ងាយពីចំណុច $D(3,-3,-3)$ ទៅប្លង់ (P) ។

៣ រកក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាមនិងក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។

អត្រាកំណែ

I ១ • សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $A=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$

$$A^2=\left[\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right]^2$$
$$=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2i\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)+i^2\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$
$$=\left(3-2\sqrt{3}+1\right)+2i(3-1)-\left(3+2\sqrt{3}+1\right)$$
$$=4-2\sqrt{3}+4i-4-2\sqrt{3}$$
$$=-4\sqrt{3}+4i$$

ដូចនេះ $A^2=-4\sqrt{3}+4i$

• សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $A^2=-4\sqrt{3}+4i$

$$=8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$=8\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $A^2=8\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

២ • សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $B=\dfrac{x+iy}{1+i}$

$$=\frac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{x-xi+yi+y}{1-i^2}$$

$$=\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{2}i$$

ដូចនេះ $B=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y-x}{2}i$

• រក x និង y ដោយដឹងថា $2\overline{B}-A^2=0$

ដោយ $B=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y-x}{2}i$ នោះ $\overline{B}=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}i$

$A^2=-4\sqrt{3}+4i$

យើងបាន $2\overline{B}-A^2=0$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)i-\left(-4\sqrt{3}+4i\right)=0$$

$$(x+y)+(x-y)i=-4\sqrt{3}+4i$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x+y=-4\sqrt{3} & (1)\\ x-y=4 & (2)\end{cases}$$

យក (1) បូក (2) នោះ $2x=-4\sqrt{3}+4$

$$x=-2\sqrt{3}+2$$

យក (1) ដក (2) នោះ $2y=-4\sqrt{3}-4$

$$y=-2\sqrt{3}-2$$

ដូចនេះ $x=-2\sqrt{3}+2$ និង $y=-2\sqrt{3}-2$

II គណនាលីមីតខាងក្រោម

១ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+e^x-1}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x(x+1)}+\frac{e^x-1}{x(x+1)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{x+1}+\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=1 \qquad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to}\frac{\sin x}{x}=1; \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1)$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+e^x-1}{x^2+x}=1$

២ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x\left(1+\frac{2}{\ln x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]$

$$=0 \qquad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0)$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+2}{x+1}=0$

III ១ កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c

យើងមាន $\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+2}$

$$=\frac{a(x-1)(x+2)+b(x+2)+c(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\frac{a(x^2+2x-x-2)+bx+2b+c(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\frac{ax^2+ax-2a+bx+2b+cx^2-2cx+c}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$=\frac{(a+c)x^2+(a+b-2c)x^2+(-2a+2b+c)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a+c=1 & (1)\\ a+b-2c=-2 & (2)\\ -2a+2b+c=-2 & (3)\end{cases}$$

យក $(1)\Rightarrow a=1-c$ ជំនួសក្នុង (2) និង (3)

$$\Rightarrow\begin{cases} 1-c+b-2c=-2\\ -2+2c+2b+c=-2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-3c=-3 & (4) \\ 2b+3c=0 & (5) \end{cases}$$

យក (4) បូក (5) $\Rightarrow 3b=-3$

$b=-1$ ជំនួសក្នុង (5)

$\Rightarrow -2+3c=0$

$c=\frac{2}{3}$ ជំនួសក្នុង (1)

$\Rightarrow a=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $a=\frac{1}{3};b=-1$ និង $c=\frac{2}{3}$

២ គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{-4}^{0}\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}dx$

យើងមាន $\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3(x+2)}$

$$\Rightarrow I=\int_{-4}^{0}\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2(x+2)}dx$$

$$=\int_{-4}^{0}\left(\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3(x+2)}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3}\ln|x+2|\right]_{-4}^{0}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\ln 1-1+\frac{2}{3}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{3}\ln 5-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\ln 2\right)$$

$$=-1+\frac{2}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln 5+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\ln 2$$

$$=-\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\ln 5$$

ដូចនេះ $I=-\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\ln 5$

IV រកចំនួនពិត p និង q

យើងមាន $g(x)=px^3+qx^2+\frac{2}{3}$

$g'(x)=3px^2+2qx$

$g''(x)=6px+2q$

ដើម្បីឱ្យ $M(1,0)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាង g កាលណា

$$\begin{cases} g''(1)=0 \\ g(1)=0 \end{cases}$$

ដោយ $g(1)=p+q+\frac{2}{3}$ និង $g''(1)=6p+2q$

$$\Rightarrow \begin{cases} p+q+\frac{2}{3}=0 & (1) \\ 6p+2q=0 & (2) \end{cases}$$

$(1)\Rightarrow p=-q-\frac{2}{3}$ ជំនួសក្នុង (2)

$$\Rightarrow 6\left(-q-\frac{2}{3}\right)+2q=0$$

$$-6q-4+2q=0$$

$$-4q=4$$

$q=-1$ ជំនួសក្នុង (1)

$$\Rightarrow p=-(-1)-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ: $p=\frac{1}{3}$ និង $q=-1$

V ១ • រក $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-1+2e^{-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}}-\frac{1}{e^{-x}}+2\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(xe^{x}-e^{x}+2\right)$$

$=+\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0; \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-1+2e^{-x}\right)$$

$$= +\infty \qquad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0)$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

• រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត (L_1) នៃក្រាប (C)

យើងមាន $f(x) = x-1+2e^{-x}$

ដោយ $\lim_{x\to+\infty} 2e^{-x} = 0$

នោះ បន្ទាត់ $y = x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបខាង $+\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

• បង្ហាញថា f មានអប្បបរមាត្រង់ $x = \ln 2$

យើងមាន $f(x) = x-1+2e^{-x}$

$f'(x) = 1-2e^{-x}$

$f'(x) = 0$ ឬ $1-2e^{-x} = 0$

$$e^{-x} = \frac{1}{2}$$

$$-x = \ln\frac{1}{2}$$

$$x = -\ln(2)^{-1}$$

$$x = \ln 2$$

សិក្សាសញ្ញា f'

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា f' ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x = \ln 2$

នោះ អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x = \ln 2$ ដែល $f(\ln 2) = \ln 2$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x = \ln 2$

២ • សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↗	$+\infty$

- រកសមីការបន្ទាត់ (L_2)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

ដោយបន្ទាត់ (L_2) ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ $A(0,1)$

នោះ $x_0 = 0$ និង $y_0 = 1$

$\Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = -1$

យើងបាន $(L_2): y = -1(x - 0) + 1$

$= -x + 1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ $(L_2): y = -x + 1$

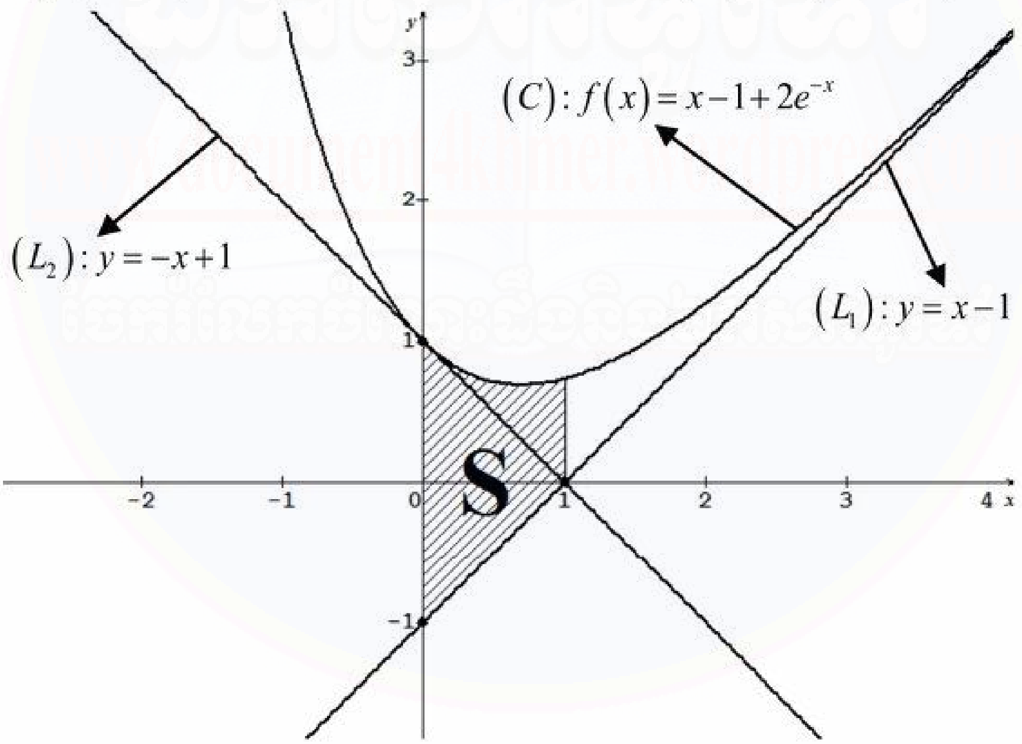
៣ សង់បន្ទាត់ $(L_1),(L_2)$ និង (C) នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេតែមួយ

$(L_1): y = x - 1$

x	0	1
y	−1	0

$(L_2): y = -x + 1$

x	0	1
y	1	0



៤ គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់

តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់

យើងបាន $S = \int_0^1 \left[f(x) - y \right] dx$

$= \int_0^1 \left[\left(x - 1 + 2e^{-x} \right) - (x - 1) \right] dx$

$$= \int_0^1 2e^{-x}dx$$

$$= \left(-2e^{-x}\right)_0^1$$

$$= \left(-2e^{-1}\right) - \left(-2e^{0}\right)$$

$$= 2 - \frac{2}{e}$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃផ្ទៃកប្លង់ $S = 2 - \frac{2}{e}$ (ឯកតាផ្ទៃ)

VI ១ • រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ (S)

សមីការស្វ៊ែមានរាង $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $A(1,2,4)$

ដោយ $\overrightarrow{BC} = (-4,4,-5)$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (4)^2 + (-5)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{57}$$

យើងបាន សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $A(1,2,4)$ និងកាំ $r = \frac{\sqrt{57}}{2}$ គឺ

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = \frac{57}{4}$$

ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែ $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = \frac{57}{4}$

• រកសមីការទូទៅនៃប្លង់ (P)

$\overrightarrow{AC} = (-3,1,-6)$

យើងបាន សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $B(2,-1,3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់ $\overrightarrow{AC} = (-3,1,-6)$ គឺ

$$(P): -3(x-2) + 1(y+1) - 6(z-3) = 0$$

$$-3x + 6 + y + 1 - 6z + 18 = 0$$

$$-3x + y - 6z + 25 = 0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(P): -3x + y - 6z + 25 = 0$

• រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D)

$\overrightarrow{AB}=(1,-3,-1)$

យើងបាន សមីការបន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំណុច $C(-2,3,-2)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB}=(1,-3,-1)$ គឺ

$$(D):\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t-2 \\ y=-3t+3 \\ z=-t-2 \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$$

២ • រកចម្ងាយពីចំណុច B ទៅ A ។

យើងបាន $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

$$=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2+(3-4)^2}$$

$$=\sqrt{1+9+1}$$

$$=\sqrt{11}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីចំណុច B ទៅ A គឺ $\sqrt{11}$ (ឯកតាប្រវែង)

• រកចម្ងាយពីចំណុច B ទៅបន្ទាត់ (D)

ដោយ $C\in(D)$

តាមរូបមន្ត $d(B,(D))=\dfrac{\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}$

យើងមាន $\overrightarrow{BA}=(-1,3,1)$ និង $\overrightarrow{BC}=(-4,4,-5)$

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 1\\ -4 & 4 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -4 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -4 & 4\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-15-4)\vec{i}-(5+4)\vec{j}+(-4+12)\vec{k}$$

$$=-19\vec{i}-9\vec{j}+8\vec{k}$$

$$\Rightarrow d(B,(D))=\frac{\sqrt{(-19)^2+(-9)^2+(8)^2}}{\sqrt{(-1)^2+(3)^2+(1)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{361+81+64}}{\sqrt{1+9+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{506}}{\sqrt{11}}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយពី B ទៅ (D) គឺ $d(B,(D))=\sqrt{\frac{506}{11}}$ (ឯកតាប្រវែង)

- រកចម្ងាយពីចំណុច $D(3,-3,-3)$ ទៅប្លង់ (P)

តាមរូបមន្ត $d(D,(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយប្លង់ $(P):-3x+y-6z+25=0$ និង $D(3,-3,-3)$

$$\Rightarrow d(D,(P))=\frac{|-3(3)+(-3)-6(-3)+25|}{\sqrt{(-3)^2+(1)^2+(-6)^2}}$$

$$=\frac{|-9-3+18+25|}{\sqrt{9+1+36}}$$

$$=\frac{31}{\sqrt{46}}$$

$$=\frac{31\sqrt{46}}{46}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយពី D ទៅ (P) គឺ $d(D,(P))=\frac{31\sqrt{46}}{46}$ (ឯកតាប្រវែង)

៣ តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម និង S' ជាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ

- រកក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម

យើងបាន $S=\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(-19,-9,8)$

$$\Rightarrow S=\sqrt{(-19)^2+(-9)^2+(8)^2}$$

$$=\sqrt{506}$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $S=\sqrt{506}$ (ឯកតាផ្ទៃ)

- រកក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ

$$\Rightarrow S'=\frac{1}{2}S=\frac{\sqrt{506}}{2}$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $S'=\frac{\sqrt{506}}{2}$ (ឯកតាផ្ទៃ)

វិញ្ញាសាទី ២

I គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

១ គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$

២ សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រហើយបង្ហាញថា $C=x^{2015}+y^{2015}$ ជាចំនួនពិត។

II h ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $h(x)=\frac{x^2}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}$ និង $x\neq 1$ ។

១ កំណត់រក a,b និង c ដើម្បីឲ្យ $h(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$

២ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) តំណាង h ។

III គេឲ្យអនុគមន៍ $y=g(x)=xe^{2x}$ ។

១ រកដេរីវេ $g'(x)$ និង $g''(x)$ ។ ទាញបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x=-0.5$ ។

២ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y=g(x)$ ត្រង់ $x=1$ ។

IV ក្នុងថង់មួយមានប៊ិចក្រហម 8 និងប៊ិចខៀវ 6 ។ គេចាប់យកប៊ិច 5 ព្រមគ្នាចេញពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាបខាងក្រោមៈ

១ A "ប៊ិចទាំង 5 ពណ៌ក្រហម"

២ B "ប៊ិច 3 ពណ៌ក្រហមនិងប៊ិច 2 ពណ៌ខៀវ"

៣ C "មានប៊ិចពណ៌ខៀវមួយយ៉ាងតិចក្នុងបំណោមប៊ិចទាំង 5 " ។

V ១ អេលីប E មួយមានសមីការ $25x^2+16y^2-150x+64y=111$ ។

ក រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំរបស់អេលីប E

ខ សង់អេលីប E ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ។

២ ចំណុច $M(-1,0,1);N(0,1,2)$ និង $P(1,2,-1)$ ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ ។ ប្លង់ (α) មួយមានសមីការ $x-2y+z-4=0$ ។

ក រកកូអរដោនេនៃ $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$ ហើយទាញរកសមីការប្លង់ (Q) ដែលកាត់តាមចំណុច M,N និង P ។

ខ រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ (S) មួយដែលមានផ្ចិត M ហើយកាត់តាម N ។ តើប្លង់ (α) ជួបនឹងស្វ៊ែ (S) ឬទេ?

VI គេឲ្យ $y=f(x)=x\ln x-x+1$, x ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

១ រកលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

២ គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ គណនាតម្លៃបរមានៃ f

៣ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

៤ គណនា $f(2)$ ។ រក x បើ $f(x)=1$ ។ (គេឲ្យ $\ln 2=0.69$)

៥ សង់ក្រាបនៃ f នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។

អត្រាកំណែ

I ១ គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$

យើងមាន $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

យើងបាន

$$\begin{aligned}A&=x-y^2\\&=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\&=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{4}-2i\frac{\sqrt{3}}{4}+i^2\frac{3}{4}\right)\\&=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=x^2+x+1\\&=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+1\\&=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+1\\&=0\end{aligned}$$

ដូចនេះ $A=0$ និង $B=0$

២ • សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

$y=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

ដូចនេះ $x=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$ និង $y=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

• បង្ហាញថា $C=x^{2013}+y^{2013}$ ជាចំនួនពិត

យើងមាន $x=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$ និង $y=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow C=x^{2015}+y^{2015}$

$$=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{2015}+\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{2015}$$

$$=\left(\cos\frac{8060\pi}{3}+i\sin\frac{8060\pi}{3}\right)+\left(\cos\frac{4030\pi}{3}+i\sin\frac{4030\pi}{3}\right)$$

$$=\left[\cos\left(1343\pi+\frac{2\pi}{2}\right)+i\sin\left(1343\pi+\frac{2\pi}{2}\right)\right]$$

$$+\left[\cos\left(671\pi+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(671\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$=-1$ ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ $C=x^{2013}+y^{2013}$ ជាចំនួនពិត

II ១ កំណត់រក a,b និង c

យើងមាន $h(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$

$$= \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}$$

$$= \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$$

$$= \frac{ax^2 + (-a+b)x + (-b+c)}{x-1}$$

ដោយ $h(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -a+b=0 \\ -b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $a=1, b=1$ និង $c=1$

២ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) តំណាង h

យើងមាន $h(x) = x+1+\dfrac{1}{x-1}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

នោះ បន្ទាត់ $y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C)

III ១ • រកដេរីវេ $g'(x)$ និង $g''(x)$

យើងមាន $g(x) = xe^{2x}$

$$\Rightarrow g'(x) = (x)'e^{2x} + x(e^{2x})'$$

$$= e^{2x} + 2xe^{2x}$$

$$= (2x+1)e^{2x}$$

$$\Rightarrow g''(x) = (2x+1)'e^{2x} + (2x+1)(e^{2x})'$$

$$= 2e^{2x} + 2(2x+1)e^{2x}$$

$$= 2e^{2x} + (4x+2)e^{2x}$$

$$= (4x+4)e^{2x}$$

ដូចនេះ $g'(x) = (2x+1)e^{2x}$ និង $g''(x) = (4x+4)e^{2x}$

• ទាញបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x=-0.5$

អនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x=-0.5$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} g'(-0.5)=0 \\ g''(-0.5)>0 \end{cases}$

ដោយ $g'(x)=(2x+1)e^{2x}$

$\Rightarrow g'(-0.5)=(-1+1)e^{0}=0 \ (1)$

$g''(x)=(4x+3)e^{2x}$

$\Rightarrow g''(-0.5)=(-2+3)e^{-1}=\frac{1}{e}>0 \ (2)$

តាម (1) និង (2)

ដូចនេះ អនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x=-0.5$

២ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y=g(x)$ ត្រង់ $x=1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=g'(x)(x-x_0)+y_0$

ចំពោះ $x_0=1 \Rightarrow y_0=g(1)=e^2$

$\Rightarrow g'(x_0)=g'(1)=3e^2$

នោះ បន្ទាត់ប៉ះ $y=3e^2(x-1)+e^2$

$=3e^2x-2e^2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $y=e^2(3x-2)$

IV ១ A "ប៊ិចទាំង 5 ពណ៌ក្រហម"

ក្នុងថង់មានប៊ិចចំនួន 14 ត្រូវចាប់យកចំនួន 5

ករណីអាច $n(S)=C(14,5)=\frac{14!}{5!9!}$

$=\frac{14\times 13\times 12\times 11\times 10}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}$

$=2002$

ដោយប៊ិចក្រហមមានចំនួន 8 ត្រូវចាប់យកចំនួន 5

ករណីស្រប $n(A)=C(8,5)=\frac{8!}{5!3!}$

$=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}$

$=56$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{56}{2002}=\frac{28}{1001}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\frac{28}{1001}$

២ B" ប៊ិច 3 ពណ៌ក្រហមនិងប៊ិច 2 ពណ៌ខៀវ"

ដោយប៊ិចក្រហមចំនួន 8 ត្រូវចាប់យកចំនួន 3 និងប៊ិចខៀវចំនួន 6 ត្រូវចាប់យកចំនួន 2

ករណីស្រប $n(B)=C(8,3)\times C(6,2)=\frac{8!}{3!5!}\times\frac{6!}{2!4!}$

$$=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}\times\frac{6\times5}{2\times1}$$

$$=56\times15=840$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{840}{2002}=\frac{420}{1001}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\frac{420}{1001}$

៣ C" មានប៊ិចពណ៌ខៀវមួយយ៉ាងតិចក្នុងបំណោមប៊ិចទាំង 5 "

(C ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃព្រឹត្តិការណ៍ A)

$$\Rightarrow P(C)=1-P(A)$$

$$=1-\frac{28}{1001}=\frac{973}{1001}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ $P(C)=\frac{973}{1001}$

V ១ ក រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំរបស់អេលីប E

យើងមានសមីការ $25x^2+16y^2-150x+64y=111$

$$\left(25x^2-150x\right)+\left(16y^2+64y\right)=111$$

$$25\left(x^2-6x\right)+16\left(y^2+4y\right)=111$$

$$25\left(x^2-6x+9\right)+16\left(y^2+4y+4\right)=111+225+64$$

$$25(x-3)^2+16(y+2)^2=400$$

$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$$

សមីការមានរាង $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

ដែល $h=3, k=-2, a=5, b=4, c=\sqrt{25-16}=3$

យើងបាន ផ្ចិត $S(h,k)=(3,-2)$

កំពូល $V_1(h,k+a)=(3,3)$

$V_2(h,k-a)=(3,-7)$

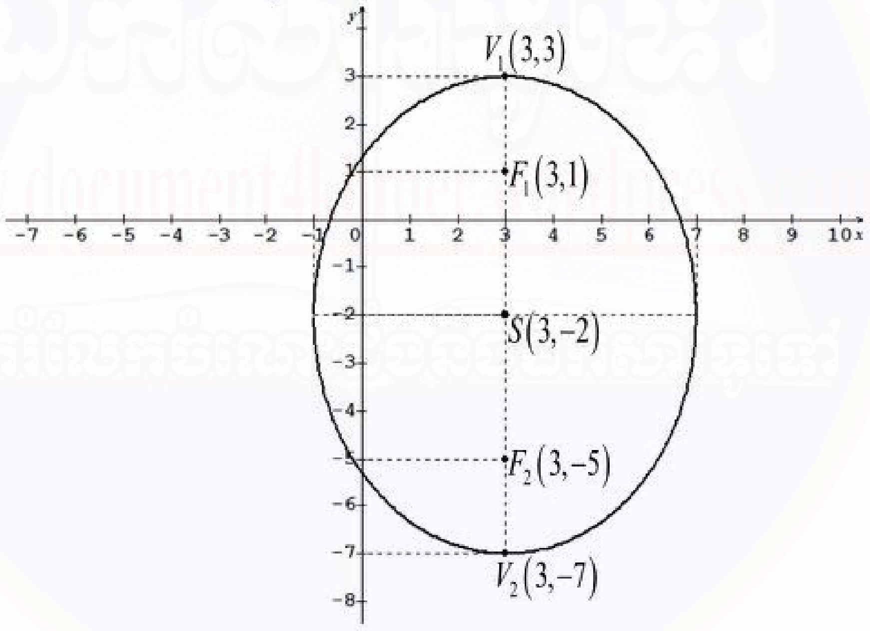
កំណុំ $F_1(h,k+c)=(3,1)$

$F_2(h,k-c)=(3,-5)$

ដូចនេះ អេលីប E មានផ្ចិត $S(3,-2)$ កំពូល $V_1(3,3)$ និង $V_2(3,-7)$

កំណុំ $F_1(3,1)$ និង $F_2(3,-5)$

ខ សង់អេលីប E ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ



២ ក • រកកូអរដោនេនៃ $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$

យើងមាន $\overrightarrow{MN}=(1,1,1)$ និង $\overrightarrow{MP}=(2,2,-2)$

$$\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-2-2)\vec{i}-(-2-2)\vec{j}+(2-2)\vec{k}$$

$$=-4\vec{i}+4\vec{j}$$

ដូចនេះ កូអរដោនេ $\vec{n}=(-4,4,0)$

• រកសមីការប្លង់ (Q)

ដោយ ប្លង់ (Q) កាត់តាមចំណុច M,N និង P

នោះ ប្លង់ (Q) កែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$

យើងបាន សមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមចំណុច $M(-1,0,1)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រ

ណរម៉ាល់ $\vec{n}=(-4,4,0)$ គឺ

$$(Q):-4(x+1)+4(y-0)+0(z-1)=0$$

$$-4x-4+4y=0$$

$$-x+y-1=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(Q):-x+y-1=0$

ខ • រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ (S)

ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $M(-1,0,1)$

ដោយ ស្វ៊ែ (S) កាត់តាមចំណុច N

នោះ ស្វ៊ែ (S) មានកាំ $r=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

យើងបាន សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $M(-1,0,1)$ និងកាំ $r=\sqrt{3}$ គឺ

$$(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$$

ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែ $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$

• តើប្លង់ (α) ជួបនឹងស្វ៊ែ (S) ឬទេ?

រកចម្ងាយពីចំណុច M ទៅប្លង់ (α)

តាមរូបមន្ត $d\left[M,(\alpha)\right]=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $M(-1,0,1)$ និងប្លង់ $(\alpha):x-2y+z-4=0$

$$\Rightarrow d\left[M,(\alpha)\right]=\frac{|(-1)-2(0)+(1)-4|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(1)^2}}$$

$$=\frac{4\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

ដោយ $d\left[M,(\alpha)\right]<r$ នោះប្លង់ (α) កាត់ស្វ៊ែ (S)

ដូចនេះ ប្លង់ (α) ជួបស្វ៊ែ (S)

VI ១ រកលីមីត $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x\ln x - x + 1)$$

$$= 1 \qquad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\left(\ln x - 1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= +\infty$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

២ • គណនាដេរីវេ $f'(x)$

យើងមាន $f(x) = x\ln x - x + 1$

$$\Rightarrow f'(x) = (x)'\ln x + x(\ln x)' - 1$$

$$= \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) - 1$$

$$= \ln x$$

ដូចនេះ $f'(x) = \ln x$

• សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

យើងមាន $f'(x) = \ln x$

$f'(x) = 0$ ឬ $\ln x = 0$

$$x = 1$$

សិក្សាសញ្ញា f'

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញាប្ដូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x = 1$

នោះ អនុគមន៍មានអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$

ដូចនេះ អនុគមន៍មានអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$

• គណនាតម្លៃបរមានៃ f

$f(1) = 1\ln 1 - 1 + 1 = 0$

ដូចនេះ $f(1) = 0$ ជាតម្លៃអប្បបរមា

៣ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

៤ • គណនា $f(2)$

$f(x)=x\ln x-x+1$

$\Rightarrow f(2)=2\ln 2-2+1=2\ln 2-1=0.38$

ដូចនេះ $f(2)=0.38$

• រក x បើ $f(x)=1$

$f(x)=1$

$x\ln x-x+1=1$

$x\ln x-x=0$

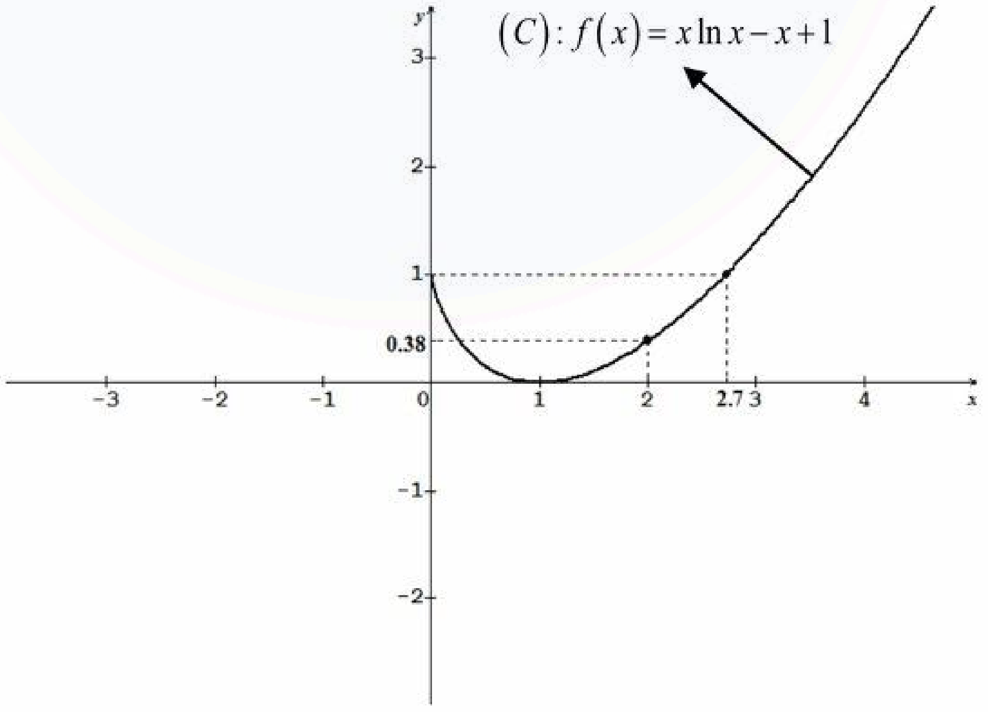
$x(\ln x-1)=0$

$\ln x=1$

$x=e$

ដូចនេះ $x=e$

៥ សង់ក្រាបនៃ f នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ



វិញ្ញាសាទី ៣

I អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ ចំពោះ $x\neq 0$ ហើយ $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$ ។ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

II ១ គេឱ្យ $g(x)=\dfrac{3x^2-10x-5}{(x-1)^2(x+2)}$ ។ រក a និង b ដើម្បីឱ្យ

$$g(x)=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{(x-1)^2}$$ ចំពោះ $x\neq -2; x\neq 1$ ។

២ គណនា $I=\int g(x)dx$ ដោយដឹងថា $I(0)=-4$ ។

III ១ កំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ (d) ដែលប៉ះនឹងក្រាប (C_1) នៃ $y=1-x\ln x$ នៅត្រង់ចំណុច $M(1,1)$

២ កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ N រវាងបន្ទាត់ (d) និងក្រាប (C_2) នៃ $y=e^x+1-x$ ។

IV ១ រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល $(P): 2y^2+8y+3x-4=0$

២ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល (P) និងបន្ទាត់មានសមីការ $x=-2$

៣ សង់ប៉ារ៉ាបូល (P) ។

V អនុគមន៍ h កំណត់ដោយ $h(x)=(x+m)e^{-x}$ ហើយមានក្រាប (H) និង m ជាចំនួនថេរ ។

១ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (H) កាលណា $x\to+\infty$

២ គណនាដេរីវេទីមួយ $h'(x)$ និងដេរីវេទីពីរ $h''(x)$

៣ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ h មានអតិបរមាត្រង់ $x=0$ ។

VI អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\neq 1$ ដោយ $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$ និងមានក្រាប (C) ។

១ រកចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$

២ រកតម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃអនុគមន៍ f

៣ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C) ។ សិក្សាទីតាំងរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត និងក្រាប (C)

៤ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប (C) ។

VII ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន ។ គេឱ្យចំណុច $A(1,0,2);B(2,0,1)$ និង $C(1,2,4)$ ។

១ គណនា $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$ ។ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

២ សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច C ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}$ ។ បង្ហាញថាប្លង់ (P) កែងនឹងប្លង់ (ABC)

៣ គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាមាឌចតុមុខ $OABC$ ។

អត្រាកំណែ

I កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$ និង $f(0)=\ln\left(\sqrt{a}\right)$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x+x^2}{x^3-\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x\sin x+x^2}{x^2}}{\dfrac{x^3-\sin^2 x}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}+1}{x-\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}=\frac{1+1}{0-1}=-2$$

ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$$

$$\ln\left(\sqrt{a}\right)=-2$$

$$\sqrt{a}=e^{-2}$$

$$a=e^{-4}$$

ដូចនេះ $a=e^{-4}$ នោះ f ជាប់ត្រង់ $x=0$

II ១ រក a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x)=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{(x-1)^2}$ ចំពោះ $x\neq -2; x\neq 1$

យើងមាន
$$g(x)=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{a(x-1)^2+b(x+2)}{(x+2)(x-1)^2}$$
$$=\frac{a(x^2-2x+1)+bx+2b}{(x+2)(x-1)^2}$$
$$=\frac{ax^2-2ax+a+bx+2b}{(x+2)(x-1)^2}$$
$$=\frac{ax^2+(-2a+b)x+(a+2b)}{(x+2)(x-1)^2}$$

ដោយ $g(x)=\frac{3x^2-10x-5}{(x-1)^2(x+2)}$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=3 \\ -2a+b=-10 \\ a+2b=-5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=3 \\ b=-4 \\ b=-4 \end{cases}$$

ដូចនេះ $a=3, b=-4$

២ គណនា $I=\int g(x)dx$ ដោយដឹងថា $I(0)=-4$

ចំពោះ $a=3, b=-4$ នោះ $g(x)=\frac{3}{x+2}-\frac{4}{(x-1)^2}$

យើងបាន
$$I=\int g(x)dx=\int\left(\frac{3}{x+2}-\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx$$
$$=3\int\frac{1}{x+2}dx-4\int\frac{1}{(x-1)^2}dx$$
$$=3\ln|x+2|-4\left(-\frac{1}{x-1}\right)+c$$
$$=3\ln|x+2|+\frac{4}{x-1}+c \quad ; (c\in\mathbb{R})$$

ដោយ $I(0)=-4$

$\Rightarrow 3\ln 2-4+c=-4$

$c=-3\ln 2$

ដូចនេះ $I=3\ln|x+2|+\dfrac{4}{x-1}-3\ln 2$

III ១ កំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ (d)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=y_0'(x-x_0)+y_0$

ដោយបន្ទាត់ (d) ប៉ះក្រាប (C_1) ត្រង់ $M(1,1)$

នោះ $x_0=1$ និង $y_0=1$

យើងមាន $(C_1): y=1-x\ln x$

$y'=-\left[(x)'\ln x+x(\ln x)'\right]$

$=-\left[\ln x+x\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$

$=-(\ln x+1)$

$\Rightarrow y_0'=-(\ln 1+1)=-1$

សមីការបន្ទាត់ $(d): y=-1(x-1)+1=-x+2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(d): y=-x+2$

២ កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ N

យើងមាន ក្រាប $(C_2): y=e^x+1-x$ និងបន្ទាត់ $(d): y=-x+2$

ដោយ ក្រាប (C_2) ប្រសព្វនិងបន្ទាត់ (d)

$\Rightarrow e^x+1-x=-x+2$

$e^x=1$

$x=\ln 1=0$

$x=0\Rightarrow y=2$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ $N(0,2)$

IV ១ រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល

យើងមានប៉ារ៉ាបូល $(P): 2y^2+8y+3x-4=0$

$2y^2+8y=-3x+4$

$$2\left(y^2+4y\right)=-3x+4$$
$$2\left(y^2+4y+4\right)=-3x+4+8$$
$$2\left(y+2\right)^2=-3x+12$$
$$\left(y+2\right)^2=-\frac{3}{2}\left(x-4\right)$$

សមីការប៉ារ៉ាបូលមានរាង $\left(y-k\right)^2=4p\left(x-h\right)$

ដែល $h=4,k=-2,4p=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow p=-\frac{3}{8}$

យើងបាន កំពូល $V\left(h,k\right)=\left(4,-2\right)$

កំណុំ $F\left(h+p,k\right)=\left(4-\frac{3}{8},-2\right)=\left(\frac{29}{8},-2\right)$

បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=h-p=4-\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{35}{8}$

ដូចនេះ កំពូល $V\left(4,-2\right)$ កំណុំ $F\left(\frac{29}{8},-2\right)$ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=\frac{35}{8}$

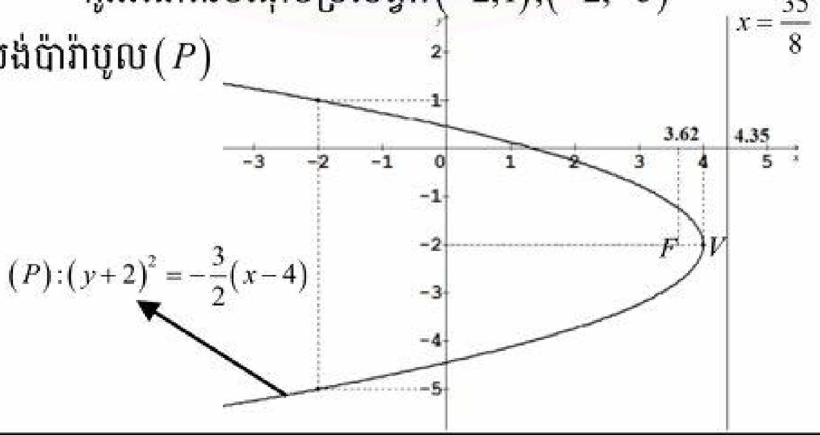
២ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល (P) និងបន្ទាត់មានសមីការ $x=-2$

យើងបាន $x=-2\Rightarrow\left(y+2\right)^2=-\frac{3}{2}\left(-2-4\right)$

$$\left(y+2\right)^2=9$$
$$y+2=\pm3$$
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y+2=3\\y+2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-5\end{array}\right.$$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $(-2,1);(-2,-5)$

៣ សង់ប៉ារ៉ាបូល (P)



V ១ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (H) កាលណា $x \to +\infty$

យើងមាន $h(x) = (x+m)e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+m)e^{-x} = 0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$)

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

$\Rightarrow$ បន្ទាត់ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

២ គណនាដេរីវេទីមួយ $h'(x)$ និងដេរីវេទីពីរ $h''(x)$

យើងមាន $h(x) = (x+m)e^{-x}$

$$\Rightarrow h'(x) = (x+m)'e^{-x} + (x+m)(e^{-x})'$$
$$= e^{-x} - (x+m)e^{-x}$$
$$= (1-x-m)e^{-x}$$
$$\Rightarrow h''(x) = (1-x-m)'e^{-x} + (1-x-m)(e^{-x})'$$
$$= -e^{-x} - (1-x-m)e^{-x}$$
$$= (-1-1+x+m)e^{-x}$$
$$= (x+m-2)e^{-x}$$

ដូចនេះ $h'(x) = (1-x-m)e^{-x}$ និង $h''(x) = (x+m-2)e^{-x}$

៣ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ h មានអតិបរមាត្រង់ $x = 0$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ h មានអតិបរមាត្រង់ $x = 0$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} h'(x) = 0 & (1) \\ h''(x) < 0 & (2) \end{cases}$

យើងមាន $h'(x) = (1-x-m)e^{-x}$

$$\Rightarrow h'(0) = 1-m$$

$(1) \Rightarrow 1-m = 0$ ឬ $m = 1$

$$h''(x) = (x+m-2)e^{-x}$$
$$\Rightarrow h''(0) = m-2$$

$(2) \Rightarrow 2-m < 0$ ឬ $m < 2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ អនុគមន៍ h មានអតិបរមាត្រង់ $x = 0$ កាលណា $m = 1$

VI ១ រកចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ ចំពោះ $x\neq 1$

យើងមាន $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

$$=\frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}$$

$$=\frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}$$

$$=\frac{ax^2+(-a+b)x+(-b+c)}{x-1}$$

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\-a+b=-3\\-b+c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=4\end{cases}$$

ដូចនេះ $a=1,b=-2$ និង $c=4$

២ រកតម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x-1}$

$$\Rightarrow f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x+1-4}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0$ ឬ $\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0$

$$x^2-2x-3=0$$

$$x=-1;x=3$$

សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញាយើងបាន

- $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=-1$
  នោះអនុគមន៍ f មានអតិបរមាត្រង់ $x=-1$ ដែល $f(-1)=-5$
- $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=3$
  នោះអនុគមន៍ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=3$ ដែល $f(3)=3$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមា $f(-1)=-5$ និងតម្លៃអប្បបរមា $f(3)=3$

៣ • រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងទ្រេតនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(x-2+\frac{4}{x-1}\right)=\pm\infty$

នោះ បន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

យើងមាន $f(x)=x-2+\frac{4}{x-1}$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x-1}=0$

នោះ បន្ទាត់ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

បន្ទាត់ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

• សិក្សាទីតាំងរវាងអាស៊ីមតូតទ្រេត និងក្រាប (C)

យើងមានក្រាប (C): $f(x)=x-2+\frac{4}{x-1}$

អាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x-2$

$$f(x)-y=\left(x-2+\frac{4}{x-1}\right)-(x-2)=\frac{4}{x-1}$$

ចំពោះ $x<1\Rightarrow f(x)-y<0$

នោះ ខ្សែកោង (C) នោះក្រោមអាស៊ីមតូតទ្រេត

ចំពោះ $x>0\Rightarrow f(x)-y>0$

នោះ ខ្សែកោង (C) នៅលើអាស៊ីមតូតទ្រេត

៤ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់ក្រាប (C) ។

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-2+\frac{4}{x-1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-2+\frac{4}{x-1}\right) = +\infty$$

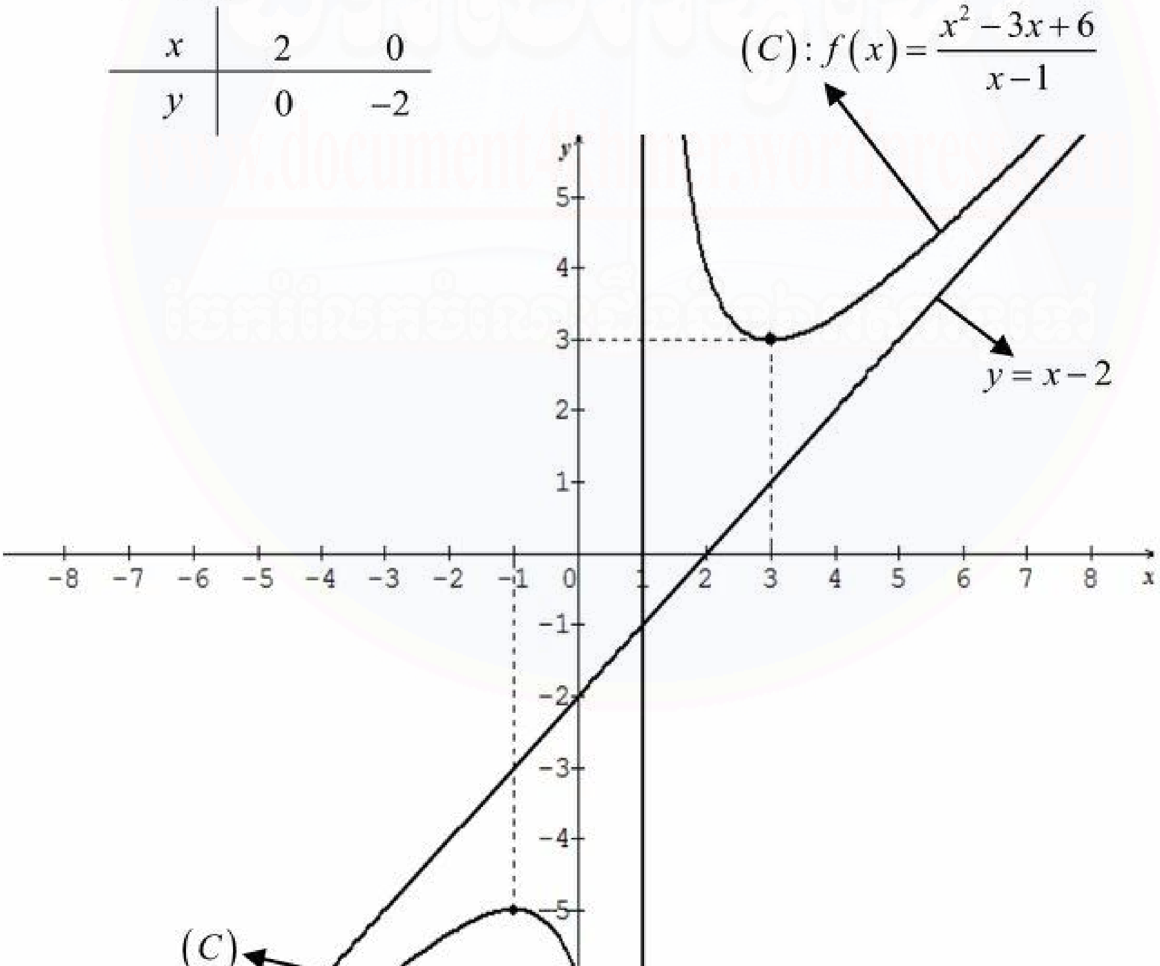
- សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

- សង់ក្រាប (C)

$y = x-2$

x	2	0
y	0	-2



VII ១ • គណនា $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$

យើងមាន $\overrightarrow{BA}=(1-2,0-0,2-1)=(-1,0,1)$

$\overrightarrow{BC}=(1-2,2-0,4-1)=(-1,2,3)$

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(0-2)\vec{i}-(-3+1)\vec{j}+(-2-0)\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(-2,2,-2)$

• សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ដោយប្លង់ (ABC) កាត់តាមបីចំណុច A,B និង C

នោះប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$

យើងបាន សមីការប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច $A(1,0,2)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(-2,2,-2)$ គឺ

$$(ABC):-2(x-1)+2(y-0)-2(z-2)=0$$

$$-2x+2+2y-2z+4=0$$

$$-2x+2y-2z+6=0$$

$$-x+y-z+3=0$$

ដូចនេះ $(ABC):-x+y-z+3=0$

២ • សរសេរសមីការប្លង់ (P)

ដោយ $\overrightarrow{BA}=(-1,0,1)$ និង $C(1,2,4)$

យើងបាន សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច $C(1,2,4)$ ហើយវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{BA}=(-1,0,1)$ គឺ

$$(P):-(x-1)+0(y-2)+1(z-4)=0$$

$$-x+1+z-4=0$$

$$-x+z-3=0$$

ដូចនេះ $(P):-x+z-3=0$

• បង្ហាញថាប្លង់ (P) កែងនឹងប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$

ប្លង់ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{BA}$

ដោយ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{BA}$

នោះ ប្លង់ (ABC) កែងប្លង់ (P)

ដូចនេះ ប្លង់ (P) កែងនឹងប្លង់ (ABC)

៣ • គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(-2,2,-2)$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(-2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{12}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{3}$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$ (ឯកតាផ្ទៃ)

• គណនាមាឌចតុមុខ $OABC$

តាមរូបមន្ត $V_{OABC}=\frac{\left|\left(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BO}\right|}{6}$

ដោយ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(-2,2,-2)$ និង $\overrightarrow{BO}=(-2,0,-1)$

$$\Rightarrow V_{OABC}=\frac{\left|(-2)(-2)+(2)(0)+(-2)(-1)\right|}{6}$$

$$=\frac{|4+0+2|}{6}$$

$$=1$$

ដូចនេះ មាឌចតុមុខ $OABC$ គឺ $V_{OABC}=1$ (ឯកតាមាឌ)

វិញ្ញាសាទី ៤

I គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = 2 + \sqrt{3} + i$ ។

១ ផ្ទៀងផ្ទាត់ម៉ូឌុលនៃ $|Z| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

២ បង្ហាញថា $Z = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ រួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z

៣ ទាញបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

II គេឱ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $f(x) = \frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ដែល $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ និង $f(0) = a^2 + a$ ។

១ គណនា $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

២ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ 0

III ពងមាន់ 10 មាន 4 ស្អុយយើងជ្រើសរើសដោយចៃដន្យនូវពងមាន់ 3 ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម

១ A : ពងមាន់ទាំងអស់ស្អុយ

២ B : យ៉ាងតិចពងមាន់មួយល្អ

៣ C : ពងមាន់ពីរល្អ

IV ១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 4y' + 4y = 0$

២ គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): y'' + 4y' + 4y = -4x$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x) = ax + b$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (F)

៣ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F)

V គេឱ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

អនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

១ f' ជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។ គណនា $f'(x)$

២ ដោយប្រើតារាងអថេរភាពខាងលើ ចូរកំណត់មេគុណ a,b និង c

៣ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y = x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) តាង f កាលណា x ខិតជិត $\pm\infty$

៤ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (Δ)

៥ ប្រើតារាងអថេរភាពខាងលើ ចូរសង់ខ្សែកោង (C)

៦ គណនាក្រឡាផ្ទៃ S ផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=2, x=3$

VI នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន ។ គេមានចំណុច $I(1,0,1); A(-2,4,0); B(2,4,2)$ និង $C(2,3,1)$ ។

១ កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត I និងកាំ $r = 3\sqrt{2}$

២ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D) កាត់តាម A និង B

៣ គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (D) និងស្វ៊ែ (S)

៤ បង្ហាញថា I, A, B មិនរត់ត្រង់គ្នា រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ IAB

៥ បង្ហាញថាចំណុច C មិននៅក្នុងប្លង់ (IAB) រួចគណនាមាឌចតុមុខ $IABC$

<u>អត្រាកំណែ</u>

I ១ ផ្ទៀងផ្ទាត់ម៉ូឌុលនៃ $|Z| = \sqrt{6}+\sqrt{2}$

យើងមាន $Z = 2+\sqrt{3}+i$

$$\Rightarrow |Z| = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{4+4\sqrt{3}+3+1}$$

$$= \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{6+2\sqrt{12}+2}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\sqrt{6}\times\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $|Z| = \sqrt{6}+\sqrt{2}$

២ • បង្ហាញថា $Z=2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

យើងមាន $Z=2+\sqrt{3}+i$

$$=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$=2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $Z=2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

• រកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z

យើងមាន $Z=2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=2\left(2\cos^2\frac{\pi}{12}+2i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

តាមរូបមន្ត $\left(1+\cos a=2\cos^2\frac{a}{2};\sin a=2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\right)$

ដូចនេះ $Z=4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

៣ បង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

យើងមាន $Z=4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

នោះ $|Z|=4\cos\frac{\pi}{12}$

តែ $|Z|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

$$\Rightarrow 4\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

II ១ គណនា $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$=2$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$

២ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ 0

ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ 0 កាលណា $f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$

ដោយ $f(0)=a^2+a$ និង $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$

$$\Rightarrow a^2+a=2$$

$$a^2+a-2=0$$

$$(a+2)(a-1)=0$$

$$a=-2, a=1$$

ដូចនេះ $a=-2, a=1$

III ១ A: ពងមាន់ទាំងអស់ស្អុយ

ពងមាន់ 10 ត្រូវចាប់យក 3

ករណីអាច $n(S)=C(10,3)=\frac{10!}{3!7!}$

$$=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}$$

$$=120$$

ពងមាន់ស្អុយមានចំនួន 4 ត្រូវចាប់យក 3

ករណីស្រប $n(A)=C(4,3)=\frac{4!}{3!1!}$

$=4$

$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{1}{30}$

២ B: យ៉ាងតិចពងមាន់មួយល្អ(B ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃ A)

$\Rightarrow P(B)=1-P(A)$

$=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{29}{30}$

៣ C: ពងមាន់ពីរល្អ

ពងមាន់ល្អចំនួន 6 ត្រូវចាប់យក 2 និងពងមាន់ស្អុយចំនួន 4 ត្រូវចាប់យក 1

ករណីស្រប $n(C)=C(6,2)\times C(4,1)=\frac{6!}{2!4!}\times\frac{4!}{1!3!}$

$=\frac{6\times 5}{2}\times 4$

$=60$

$\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $P(C)=\frac{1}{2}$

IV ១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y'+4y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2+4r+4=0$

$(r+2)^2=0$

$r+2=0$

$r=-2$

$\Rightarrow y_c=(Ax+B)e^{-2x}$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ $y_c=(Ax+B)e^{-2x}\quad ;(A,B\in\mathbb{R})$

២ កំណត់ចំនួនពិត a និង b

យើងមាន $g(x) = ax + b$

$$g'(x) = a$$

$$g''(x) = 0$$

ដោយ g ជាចម្លើយនៃសមីការ $(F): y'' + 4y' + 4y = -4x$

នោះ $g''(x) + 4g'(x) + 4g(x) = -4x$

$$0 + 4(a) + 4(ax + b) = -4x$$

$$4a + 4ax + 4b = -4x$$

$$ax + a + b = -x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $a = -1$ និង $b = 1$

៣ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F)

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y = y_c + g(x)$

ដោយ $y_c = (Ax + B)e^{-2x}$ និង $g(x) = -x + 1$

$$\Rightarrow y = (Ax + B)e^{-2x} - x + 1$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ $y = (Ax + B)e^{-2x} - x + 1 \ (A, B \in \mathbb{R})$

V ១ គណនា $f'(x)$

យើងមាន $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$

$$\Rightarrow f'(x) = a - \frac{c}{(x-1)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x) = a - \dfrac{c}{(x-1)^2}$

២ ដោយប្រើតារាងអថេរភាពខាងលើ ចូរកំណត់មេគុណ a, b និង c

តាមតារាងអថេរភាយើងបាន $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = 5 \\ f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$

ដោយ $f(0)=b-c; f(2)=2a+b+c; f'(0)=a-c$ និង $f'(2)=a-c$

$$\Rightarrow\begin{cases} b-c=1 & (1)\\ 2a+b+c=5 & (2)\\ a-c=0 & (3)\end{cases}$$

យក $(1)\Rightarrow b=1+c$ ជំនួសក្នុង (2)

$\Rightarrow 2a+(1+c)+c=5$

$2a+2c=4$

$a+c=2 \quad (4)$

យក (4) បូក $(3)\Rightarrow 2a=2$

$a=1$ ជំនួសក្នុង (3)

$\Rightarrow c=1$ ជំនួសក្នុង (1)

$\Rightarrow b=1+1=2$

ដូចនេះ $a=1, b=2$ និង $c=1$

៣ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

យើងមាន $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x-1}$ និង $(\Delta): y=x+2$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(x+2+\frac{1}{x-1}\right)-(x+2)\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$=0$$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-y\right]=0$

នោះ បន្ទាត់ $(\Delta): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(\Delta): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

៤ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (Δ)

$(C): f(x)=x+2+\dfrac{1}{x-1}$ និង $(\Delta): y=x+2$

$$f(x)-y=\left[\left(x+2+\frac{1}{x-1}\right)-(x+2)\right]=\frac{1}{x-1}$$

ចំពោះ: $x<1 \Rightarrow f(x)-y<0$

នោះ: ខ្សែកោង (C) នៅក្រោមបន្ទាត់ (Δ)

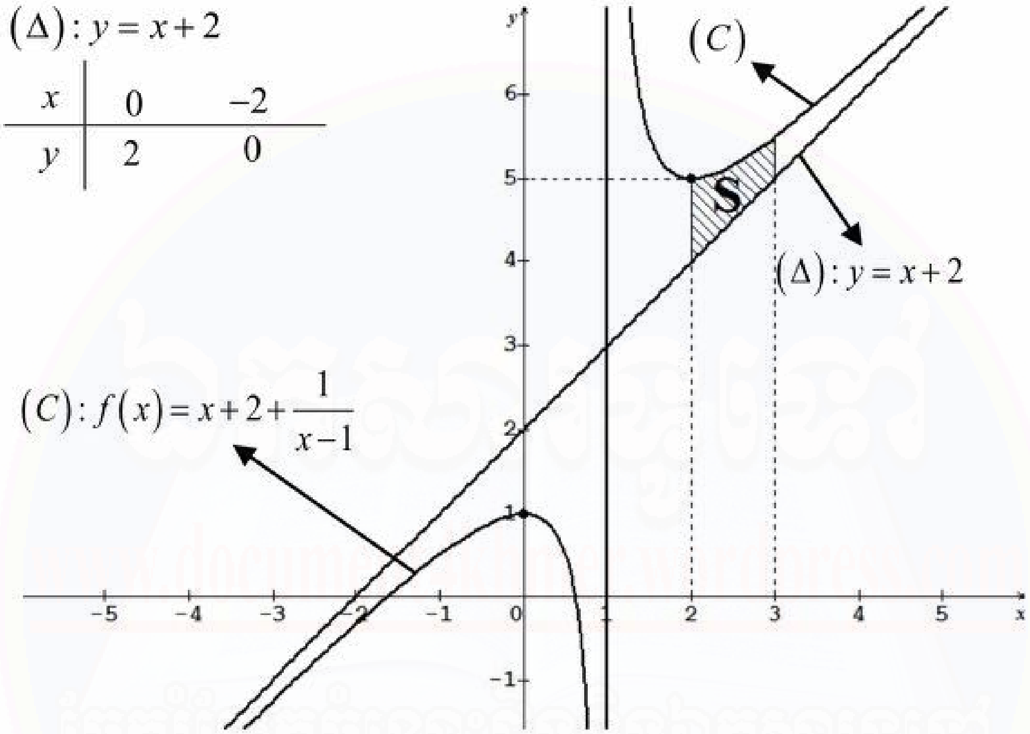
ចំពោះ: $x>1 \Rightarrow f(x)-y>0$

នោះ: ខ្សែកោង (C) នៅលើបន្ទាត់ (Δ)

៥ ប្រើតារាងអថេរភាពខាងលើ ចូរសង់ខ្សែកោង (C)

$(\Delta): y=x+2$

x	0	-2
y	2	0



៦ គណនាក្រឡាផ្ទៃ S ផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ $x=2, x=3$

យើងបាន $S=\int_2^3 [f(x)-y]dx$

$$=\int_2^3\left[\left(x+2+\frac{1}{x-1}\right)-(x+2)\right]dx$$

$$=\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=\left(\ln|x-1|\right)_2^3$$

$$=\ln 2-\ln 1$$

$$=\ln 2$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃ $S=\ln 2$ (ឯកតាផ្ទៃ)

VI ១ កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S)

សមីការស្វ៊ែមានរាង $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

យើងបាន សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(1,0,1)$ និងកាំ $r=3\sqrt{2}$ គឺ

$$(S):(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=18$$

ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែ $(S):(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=18$

២ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D)

ដោយ បន្ទាត់ (D) កាត់តាម A និង B

នោះ $\overrightarrow{AB} \parallel (D)$ ដែល $\overrightarrow{AB}=(4,0,2)$

យើងបាន សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំណុច $B(2,4,2)$ ហើយ

មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB}=(4,0,2)$ គឺ

$$(D):\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4t+2 \\ y=4 \\ z=2t+2 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(D): x=4t+2, y=4, z=2t+2\ ;(t\in\mathbb{R})$

៣ គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (D) និងស្វ៊ែ (S)

សមីការស្វ៊ែ $(S):(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=18$

យក $(D): x=4t+2, y=4, z=2t+2$ ជំនួសក្នុងស្វ៊ែ (S)

$$\Rightarrow [(4t+2)-1]^2+(4)^2+[(2t+2)-1]^2=18$$

$$(4t+1)^2+16+(2t+1)^2=18$$

$$(16t^2+8t+1)+16+(4t^2+4t+1)-18=0$$

$$20t^2+12t=0$$

$$4t(5t+3)=0$$

$$t=0, 5t+3=0$$

$$t=-\frac{3}{5}$$

ចំពោះ $t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases}$

ចំពោះ $t=-\frac{3}{5}\Rightarrow\begin{cases}x=4\left(-\frac{3}{5}\right)+2=-\frac{2}{5}\\ y=4\\ z=2\left(-\frac{3}{5}\right)+2=\frac{4}{5}\end{cases}$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រព្វគឺ $(2,4,2)$ និង $\left(-\frac{2}{5},4,\frac{4}{5}\right)$

៤ • បង្ហាញថា I,A,B មិនរត់ត្រង់គ្នា

យើងមាន $\overrightarrow{IA}=(-3,4,-1)$ និង $\overrightarrow{IB}=(1,4,1)$

$$\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&4&-1\\1&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-1\\4&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3&-1\\1&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3&4\\1&4\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(4+4)\vec{i}-(-3+1)\vec{j}+(-12-4)\vec{k}$$

$$=8\vec{i}+2\vec{j}-16\vec{k}$$

ដោយ $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=(8,2,-16)\neq 0$

នោះ I,A,B មិនរត់ត្រង់គ្នា

ដូចនេះ I,A,B មិនរត់ត្រង់គ្នា

• គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ IAB

តាមរូបមន្ត $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=(8,2,-16)$

$$\Rightarrow S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}\sqrt{8^2+2^2+(-16)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{64+4+256}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{324}$$

$$=\frac{18}{2}$$

$$=9$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $S_{\Delta IAB}=9$ (ឯកតាផ្ទៃ)

៥ • បង្ហាញថាចំណុច C មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (IAB)

$\rightarrow$ រកសមីការប្លង់ (IAB)

យើងបាន សមីការប្លង់ (IAB) កាត់តាម $I(1,0,1)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=(8,2,-16)$ គឺ

$$(IAB):8(x-1)+2(y-0)-16(z-1)=0$$

$$8x-8+2y-16z+16=0$$

$$8x+2y-16z+8=0$$

$$4x+y-8z+4=0$$

យក $C(2,3,1)$ ជំនួសក្នុងប្លង់ (IAB)

$\Rightarrow 4(2)+(3)-8(1)+4=0$

$7=0$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ ចំណុច C មិននៅលើប្លង់ (IAB)

• គណនាមាឌចតុមុខ $IABC$

តាមរូបមន្ត $V_{IABC}=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{IC}\right|}{6}$

យើងមាន $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=(8,2,-16)$ និង $\overrightarrow{IC}=(1,3,0)$

$$\left(\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{IC}=(8)(1)+(2)(3)+(-16)(0)$$

$$=8+6+0$$

$$=14$$

$$\Rightarrow V_{IABC}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

ដូចនេះ មាឌចតុមុខ $IABC$ គឺ $V_{IABC}=\dfrac{7}{3}$ (ឯកតាមាឌ)

វិញ្ញាសាទី ៥

I ១ កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$

២ សរសេរ $Z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

II គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^4 x dx$

III អនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

១ គណនាដេរីវេទីមួយ $g'(x)$ និងដេរីវេទីពីរ $g''(x)$

២ កំណត់តម្លៃ a,b និង c បើ $g(0)=-1; g'(0)=0$ និង $g''(0)=3$

IV ១ ដោះស្រាយសមីការ $(E): g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0$

២ កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E) ដែល $g(0)=0$ និង $g'(0)=1$

V គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$ $; x\neq -2, x\neq -3$ ។

១ សរសេរអនុគមន៍ជារាង $f(x)=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x+3}$ ដែល a និង b ជាចំនួនដែលត្រូវរក

២ គណនាដេរីវេ f', f'', f''' និង $f^{(4)}$

VI f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=e^{1-x}$ ហើយ (C) ជាក្រាបនៃ f ។

១ បញ្ជាក់ដែនកំណត់នៃ f រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\mathbb{R}$

២ គណនា $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

៣ ចូរគូសតារាងអថេរភាពនៃ f

៤ កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងអ័ក្សអរដោនេ ។ (គេឱ្យ $e=2.7$)

៥ សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (D) ដែលប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ $x=1$

៦ សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (D) នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរមេតែមួយ ។

VII នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច

$A(1,1,0); B(0,2,2)$ និង $C(1,-2,3)$ ។

១ គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាចំណុច A,B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

២ រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A,B និង C

៣ រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមចំណុច $D(1,-2,0)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ (L)

អត្រាកំណែ

I ១ កំណត់តម្លៃ a និង b

យក $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx-20=0$

នោះ $a(2-i)^2+b(2-i)-20=0$

$$a\left(4-4i+i^2\right)+2b-bi-20=0$$

$$4a-4ai-a+2b-bi-20=0$$

$$(-4a-b)i+(3a+2b-20)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-4a-b=0 & (1)\\ 3a+2b-20=0 & (2)\end{cases}$$

$(1)\Rightarrow b=-4a$ ជំនួសក្នុង (2)

$\Rightarrow 3a-8a-20=0$ ឬ $-5a-20=0$ ឬ $a=-4$

$\Rightarrow b=-4(-4)=16$

ដូចនេះ $a=-4; b=16$

២ សរសេរ $Z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $Z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$

$$=\left[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^3$$

$$=\left(\frac{1+2i+i^2}{1+1}\right)^3$$

$$=\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^3$$

$$=(i)^3$$

$$=-i$$

$$=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$$

ដូចនេះ $z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

II គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$=\ln|x|-\frac{4}{x}+5\cot x+c\ ;\ (c\in\mathbb{R})$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^4 x dx$$

តាង $u=\sin x \quad \Rightarrow du=\cos x dx$

ដោយ $x=0$ នោះ $u=\sin 0=0$

$x=\frac{\pi}{2}$ នោះ $u=\sin\frac{\pi}{2}=1$

$$\Rightarrow J=\int_0^1 u^4 du$$

$$=\left(\frac{1}{5}u^5\right)\Big|_0^1=\frac{1}{5}(1)^5-\frac{1}{5}(0)^5=\frac{1}{5}$$

ដូចនេះ $I=\ln|x|-\frac{4}{x}+5\cot x+c;(c\in\mathbb{R})$ និង $J=\frac{1}{5}$

III ១ គណនាដេរីវេទីមួយ $g'(x)$ និងដេរីវេទីពីរ $g''(x)$

យើងមាន $g(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$

$$\Rightarrow g'(x)=\left(ax^2+bx+c\right)'e^x+\left(ax^2+bx+c\right)\left(e^x\right)'$$

$$=(2ax+b)e^x+\left(ax^2+bx+c\right)e^x$$

$$=\left(ax^2+2ax+bx+b+c\right)e^x$$

$$\Rightarrow g''(x)=\left(ax^2+2ax+bx+b+c\right)'e^x+\left(ax^2+2ax+bx+b+c\right)\left(e^x\right)'$$

$$=(2ax+2a+b)e^x+\left(ax^2+2ax+bx+b+c\right)e^x$$

$$=\left(ax^2+4ax+bx+2a+2b+c\right)e^x$$

ដូចនេះ $g(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$

$$g'(x)=\left(ax^2+2ax+bx+b+c\right)e^x$$

$$g''(x)=\left(ax^2+4ax+bx+2a+2b+c\right)e^x$$

២ កំណត់តម្លៃ a,b និង c

យើងមាន $g(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$

$$g'(x)=\left(ax^2+2ax+bx+b+c\right)e^x$$

$$g''(x)=\left(ax^2+4ax+bx+2a+2b+c\right)e^x$$

ដោយ $g(0)=-1;g'(0)=0$ និង $g''(0)=3$

ហើយ $g(0)=c;g'(0)=b+c;g''(0)=2a+2b+c$

យើងទាញបាន $\begin{cases} c=-1 \\ b+c=0 \\ 2a+2b+c=3 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} c=-1 \\ b=1 \\ a=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $a=1,b=1$ និង $c=-1$

IV ១ ដោះស្រាយសមីការ $(E): g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2-5r+6=0$

$$(r-2)(r-3)=0$$

$$r_1=2;r_2=3$$

$$\Rightarrow y=Ae^{2x}+Be^{3x}\ ;\ (A,B\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{2x}+Be^{3x};(A,B\in\mathbb{R})$

២ កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E)

យើងមាន $y=Ae^{2x}+Be^{3x};(A,B\in\mathbb{R})$

$$\Rightarrow y'=A(2x)'e^{2x}+B(3x)'e^{3x}$$

$$=2Ae^{2x}+3Be^{3x}$$

ដោយ $g(0)=0$ និង $g'(0)=1$

ហើយ $g(0)=y(0)=Ae^0+Be^0=A+B$

$g'(0)=y'(0)=2Ae^0+3Be^0=2A+3B$

យើងទាញបាន $\begin{cases} A+B=0 & (1) \\ 2A+3B=1 & (2) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow A=-B$ ជំនួសក្នុង (2)

(2) $\Rightarrow -2B+3B=1$ ឬ $B=1$ ជំនួសក្នុង (1)

$\Rightarrow A=-1$

នោះ $g(x)=-e^{2x}+e^{3x}$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺ $g(x)=e^{3x}-e^{2x}$

V ១ សរសេរអនុគមន៍ជារាង $f(x)=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x+3}$ ដែល a និង b ជាចំនួនដែលត្រូវរក

យើងមាន $f(x)=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x+3}$

$=\dfrac{a(x+3)+b(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{ax+3a+bx+2b}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{(a+b)x+(3a+2b)}{(x+2)(x+3)}$

ដោយ $f(x)=\dfrac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b=2 & (1) \\ 3a+2b=5 & (2) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow b=2-a$ ជំនួសក្នុង (2)

(2) $\Rightarrow 3a+2(2-a)=5$

$3a+4-2a=5$

$a=1$

$\Rightarrow b=2-1=1$

ដូចនេះ $a=1$ និង $b=1$

២ គណនាដេរីវេ $f^{'}, f^{''}, f^{'''}$ និង $f^{(4)}$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}$

$$\Rightarrow f^{'}(x)=-\frac{(x+2)^{'}}{(x+2)^2}-\frac{(x+3)^{'}}{(x+3)^2}$$

$$=-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow f^{''}(x)=\frac{\left[(x+2)^2\right]^{'}}{\left[(x+2)^2\right]^2}+\frac{\left[(x+3)^2\right]^{'}}{\left[(x+3)^2\right]^2}$$

$$=\frac{2(x+2)^{'}(x+2)}{(x+2)^4}+\frac{2(x+3)^{'}(x+3)}{(x+3)^4}$$

$$=\frac{2(x+2)}{(x+2)^4}+\frac{2(x+3)}{(x+3)^4}$$

$$=\frac{2}{(x+2)^3}+\frac{2}{(x+3)^3}$$

$$\Rightarrow f^{'''}(x)=-\frac{2\left[(x+2)^3\right]^{'}}{\left[(x+2)^3\right]^2}-\frac{2\left[(x+3)^3\right]^{'}}{\left[(x+3)^3\right]^2}$$

$$=-\frac{2\times 3(x+2)^{'}(x+2)^2}{(x+2)^6}-\frac{2\times 3(x+3)^{'}(x+3)^2}{(x+3)^6}$$

$$=-\frac{6(x+2)^2}{(x+2)^6}-\frac{6(x+3)^2}{(x+3)^6}$$

$$=-\frac{6}{(x+2)^4}-\frac{6}{(x+3)^4}$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x)=\frac{6\left[(x+2)^4\right]^{'}}{\left[(x+2)^4\right]^2}+\frac{6\left[(x+3)^4\right]^{'}}{\left[(x+3)^4\right]^2}$$

$$=\frac{6\times 4(x+2)'(x+2)^3}{(x+2)^8}+\frac{6\times 4(x+3)'(x+3)^3}{(x+3)^8}$$

$$=\frac{24(x+2)^3}{(x+2)^8}+\frac{24(x+3)^3}{(x+3)^8}$$

$$=\frac{24}{(x+2)^5}+\frac{24}{(x+3)^5}$$

ដូចនេះ $f'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+3)^2}$ $f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}+\frac{2}{(x+3)^3}$

$f'''(x)=-\frac{6}{(x+2)^4}-\frac{6}{(x+3)^4}$ $f^{(4)}(x)=\frac{24}{(x+2)^5}+\frac{24}{(x+3)^5}$

VI ១ • បញ្ជាក់ដែនកំណត់នៃ f

យើងមាន $f(x)=e^{1-x}$

ដោយ $e^{1-x}>0$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

• ស្រាយថា f ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\mathbb{R}$

យើងមាន $f(x)=e^{1-x}$

$\Rightarrow f'(x)=(1-x)'e^{1-x}$

$=-e^{1-x}$

ដោយ $e^{1-x}>0$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x

នោះ $f'(x)<0$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\mathbb{R}$

២ • គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}=0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

• រកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

នោះ បន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

៣ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

៤ កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងអ័ក្សអរដោនេ

ក្រាប (C) ប្រសព្វនិងអ័ក្សអរដោនេនោះ $x=0 \Rightarrow f(0)=e^{1-0}=e$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $(0,e)$

៥ សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (D) ដែលប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ $x=1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ $x=1$

យើងបាន $x_0=1 \Rightarrow y_0=f(1)=e^{1-1}=e^0=1$

$\Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=-e^{1-1}=-1$

នោះ បន្ទាត់ $(D): y=-1(x-1)+1$

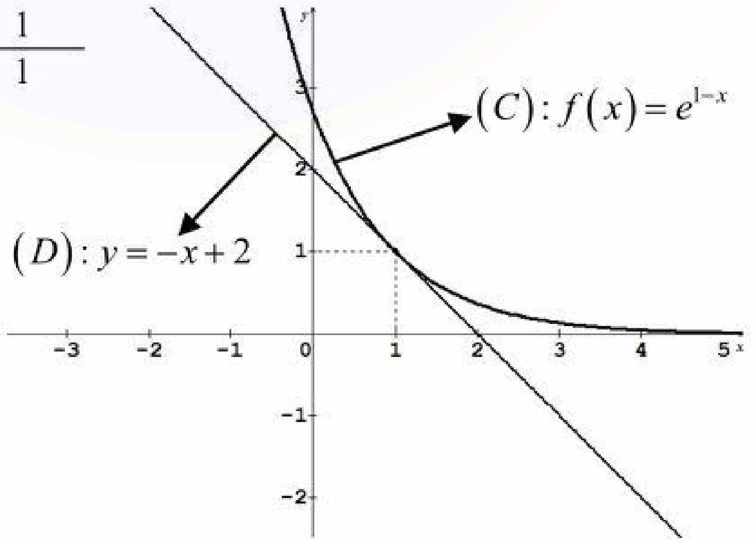
$=-x+2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(D): y=-x+2$

៦ សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (D) នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរមេតែមួយ

$(D): y=-x+2$

x	0	1
y	2	1



VII ១ • គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(0-1,2-1,2-0)$

$=(-1,1,2)$

$\overrightarrow{AC}=(1-1,-2-1,3-0)$

$=(0,-3,3)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & 3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(3+6)\vec{i}-(-3-0)\vec{j}+(3-0)\vec{k}$$

$$=9\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(9,3,3)$

• ទាញថាចំណុច A,B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$

នោះ A,B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដូចនេះ ចំណុច A,B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

២ រកសមីការប្លង់ (P)

ដោយ ប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A,B និង C

នោះ ប្លង់ (P) កែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)

យើងបាន សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $C(1,-2,3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រ នរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(9,3,3)$ គឺ

$$(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$9(x-1)+3(y+2)+3(z-3)=0$$

$$3(x-1)+(y+2)+(z-3)=0$$

$$3x-3+y+2+z-3=0$$

$$3x+y+z-4=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(P): 3x+y+z-4=0$

៣ • រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L)

យើងមាន ប្លង់ $(P): 3x+y+z-4=0$

$\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ដែល $\vec{n}=(3,1,1)$

ដោយ $\left.\begin{array}{l}\vec{n}\perp(P)\\(L)\perp(P)\end{array}\right| \Rightarrow \vec{n}\parallel(L)$

នោះ $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L)

យើងបាន សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច $D(1,-2,0)$ ហើយ

មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}=(3,1,1)$ គឺ

$$(L):\begin{cases}x=at+x_0\\y=bt+y_0\\z=ct+z_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3t+1\\y=t-2\\z=t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ $(L): x=3t+1, y=t-2, z=t;(t\in\mathbb{R})$

• រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ (L)

យើងមាន ប្លង់ $(P): 3x+y+z-4=0$

បន្ទាត់ $(L): x=3t+1, y=t-2, z=t;(t\in\mathbb{R})$

យក $x=3t+1, y=t-2, z=t$ ជំនួសក្នុងប្លង់ (P)

$$\Rightarrow 3(3t+1)+(t-2)+(t)-4=0$$

$$9t+3+t-2+t-4=0$$

$$11t-3=0 \quad \text{ឬ} \quad t=\frac{3}{11}$$

យក $t=\frac{3}{11}$ ជំនួសក្នុងបន្ទាត់ (L)

$$\Rightarrow\begin{cases}x=3\left(\frac{3}{11}\right)+1\\y=\frac{3}{11}-2\\z=\frac{3}{11}\end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases}x=\frac{20}{11}\\y=-\frac{19}{11}\\z=\frac{3}{11}\end{cases}$$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ $M\left(\frac{20}{11},-\frac{19}{11},\frac{3}{11}\right)$

វិញ្ញាសាទី ៦

I គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_0 = -2 + 2i\sqrt{3}$ ។

១ រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច Z_0 ។ ទាញរក Z_0^2 និង Z_0^3

២ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ នូវសមីការ $Z^2 = Z_0$ ។

II យើងមានសមីការ $(E): y' - y\ln 3 = 0$ ។

១ រកសំណុំចម្លើយនៃសមីការ (E)

២ កំណត់ f ដែលជាចម្លើយនៃ (E) ដោយដឹងថា $f(1) = 2$

៣ បង្ហាញថា $g(x) = 3^{x-1}$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

III ក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ូលក្រហមចំនួន 7 គ្រាប់ និងប៊ូលខៀវចំនួន 5 គ្រាប់ ។ គេចាប់យកប៊ូលចំនួន 4 គ្រាប់ចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ ។

១ រកប្រូបាបដែលគេចាប់បាន ប៊ូលក្រហមទាំង 4 គ្រាប់

២ រកប្រូបាបដែលគេចាប់បាន ប៊ូលខៀវយ៉ាងតិច 1 គ្រាប់ ។

IV គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{(3x^2+1)^2}{x^2}$ ។

១ រក a, b និង c ដើម្បីឱ្យ $f(x) = ax^2 + b + \dfrac{c}{x^2}$

២ គណនា $\int f(x)dx$ ។

V គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \ln(ax+b)$ មានខ្សែកោង (C) ។

១ កំណត់តម្លៃនៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ f កាត់អ័ក្ស $(x'ox)$ ត្រង់ $x = -1$ និងកាត់អ័ក្ស $(y'oy)$ ត្រង់ $y = \ln 2$

២ ចំពោះតម្លៃ a និង b ដែលរកឃើញ

ក រកដែនកំណត់ និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់

ខ គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

គ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

ឃ សង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f

ង គណនាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយ ខ្សែកោង (C) អ័ក្ស $(x'ox)$ បន្ទាត់ $x = -\dfrac{3}{2}$ និង $x = 0$ ។

VI ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឱ្យចំណុច $A(-2,4,2)$; $B(2,-12,-2)$; $C(4,4,4)$; $I(0,2,-2)$; $J(-4,0,0)$ និង $K(2,0,2)$ ។

១ គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A,B និង C

២ សរសេរសមីការប្លង់ (Q) ដែលជាប្លង់នៃតម្រុយ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) ដែលជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q)

៣ រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត I និងកាំ $r=4$ ។ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (JK) ដែលកាត់តាមចំណុច K ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{JK}$ ។

អត្រាកំណែ

I ១ • រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច Z_0

យើងមាន $Z_0=-2+2i\sqrt{3}$

$$=4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow|Z_0|=4\quad\arg(Z_0)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi;(k\in\mathbb{Z})$$

ដូចនេះ $|Z_0|=4$ និង $\arg(Z_0)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi;(k\in\mathbb{Z})$

• ទាញរក Z_0^2 និង Z_0^3

យើងមាន $Z_0=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow Z_0^2=\left[4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^2$$

$$=16\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= -8 - 8i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow Z_0^3 = \left[4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3$$

$$= 64\left(\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}\right)$$

$$= 64(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$$

$$= 64(1 + i \times 0)$$

$$= 64$$

ដូចនេះ $Z_0^2 = -8 - 8i\sqrt{3}$ និង $Z_0^3 = 64$

២ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ នូវសមីការ $Z^2 = Z_0$

យើងមាន $Z_0 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow Z = \sqrt{4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

តាមរូបមន្តឬសទី n នៃ Z គឺ

$$Z_k = 2\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right) \; ; \; k = 0,1$$

ចំពោះ $k = 0 \Rightarrow Z_0 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}\right)$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 1 + i\sqrt{3}$$

$k = 1 \Rightarrow Z_1 = 2\left(\cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6}\right)$

$$= 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$= -1 - i\sqrt{3}$

ដូចនេះ សមីការមានឫសពីរ $Z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ និង $Z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

II ១ រកសំណុំចម្លើយនៃសមីការ (E)

យើងមាន $(E): y' - y\ln 3 = 0$

$\Rightarrow y = Ae^{x\ln 3}$; $(A \in \mathbb{R})$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = Ae^{x\ln 3}$; $(A \in \mathbb{R})$

២ កំណត់ f ដែលជាចម្លើយនៃ (E) ដោយដឹងថា $f(1) = 2$

យើងមាន $y = Ae^{x\ln 3}$; $(A \in \mathbb{R})$

ដោយ $f(1) = 2$

$\Rightarrow Ae^{\ln 3} = 2$

$3A = 2$

$A = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{2}{3}e^{x\ln 3}$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ $f(x) = \dfrac{2}{3}e^{x\ln 3}$

៣ បង្ហាញថា $g(x) = 3^{x-1}$ ជាចម្លើយនៃ (E)

យើងមាន $g(x) = 3^{x-1}$

$\Rightarrow g'(x) = 3^{x-1}\ln 3$

យក $g(x)$ និង $g'(x)$ ជំនួសក្នុងសមីការ (E)

$\Rightarrow g'(x) - g(x)\ln 3 = 0$

$3^{x-1}\ln 3 - 3^{x-1}\ln 3 = 0$

$0 = 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $g(x) = 3^{x-1}$ ជាចម្លើយនៃ (E)

III ១ រកប្រូបាបដែលគេចាប់បាន ប៊ូលក្រហមទាំង 4 គ្រាប់

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បាន ប៊ូលក្រហមទាំង 4 គ្រាប់

ដោយ ប៊ូលទាំងអស់មាន 12 គ្រាប់ចាប់យក 4 គ្រាប់

យើងបាន $n(S)=C(12,4)=\dfrac{12!}{(12-4)!4!}$

$=\dfrac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}$

$=495$

ដោយ ប៊ូលក្រហមមាន 7 គ្រាប់ចាប់យក 4 គ្រាប់

យើងបាន $n(A)=C(7,4)=\dfrac{7!}{(7-4)!4!}$

$=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$

$=35$

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{35}{495}=\dfrac{7}{99}$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{7}{99}$

២ រកប្រូបាបដែលគេចាប់បាន ប៊ូលខៀវយ៉ាងតិច 1 គ្រាប់

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បាន ប៊ូលខៀវយ៉ាងតិច 1 គ្រាប់

(B ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃ A)

យើងបាន $P(B)=1-P(A)=1-\dfrac{7}{99}=\dfrac{92}{99}$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{92}{99}$

IV ១ រក a,b និង c ដើម្បីឱ្យ $f(x)=ax^2+b+\dfrac{c}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=ax^2+b+\dfrac{c}{x^2}$

$=\dfrac{(ax^2+b)(x^2)+c}{x^2}$

$=\dfrac{ax^4+bx^2+c}{x^2}$

ដោយ $f(x)=\dfrac{(3x^2+1)^2}{x^2}$

$$=\frac{\left(3x^2\right)^2+2\left(3x^2\right)(1)+(1)^2}{x^2}$$

$$=\frac{9x^4+6x^2+1}{x^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=9\\b=6\\c=1\end{cases}$$

ដូចនេះ $a=9,b=6$ និង $c=1$

២ គណនា $\int f(x)dx$

ចំពោះ $a=9,b=6$ និង $c=1$

$$\Rightarrow f(x)=9x^2+6+\frac{1}{x^2}$$

យើងបាន $\int f(x)dx=\int\left(9x^2+6+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$=9\left(\frac{1}{3}x^3\right)+6x-\frac{1}{x}+c$$

$$=3x^3+6x-\frac{1}{x}+c\ ;\ (c\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ $\int f(x)dx=3x^3+6x-\frac{1}{x}+c\ ;\ (c\in\mathbb{R})$

V ១ កំណត់តម្លៃ a និង b

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ f កាត់អ័ក្ស $(x'ox)$ ត្រង់ $x=-1$ និងកាត់អ័ក្ស $(y'oy)$ ត្រង់ $y=\ln 2$ លុះត្រាតែ

$f(-1)=0$ និង $f(0)=\ln 2$

យើងមាន $f(x)=\ln(ax+b)$

ដោយ $f(-1)=\ln(-a+b)$

$f(0)=\ln b$

យើងបាន $f(0)=\ln b=\ln 2$

$$\Rightarrow b=2$$

$f(-1)=\ln(-a+b)=0$

$$\Rightarrow \ln(-a+2)=0$$

$$-a+2=1$$

$$a=1$$

ដូចនេះ $a=1$ និង $b=2$

២ ក • រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

ចំពោះ $a=1$ និង $b=2$ នោះ $f(x)=\ln(x+2)$

f មានន័យកាលណា $x+2>0$

$$x>-2$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=(-2,+\infty)$

• គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\ln(x+2)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x+2)=+\infty$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ដោយ $\lim_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$

នោះ បន្ទាត់ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ខ • គណនា $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=\ln(x+2)$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(x+2)'}{x+2}$$

$$=\frac{1}{x+2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}$

• សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}>0$ ចំពោះ $x\in D$

ដូចនេះ $f'(x)>0$

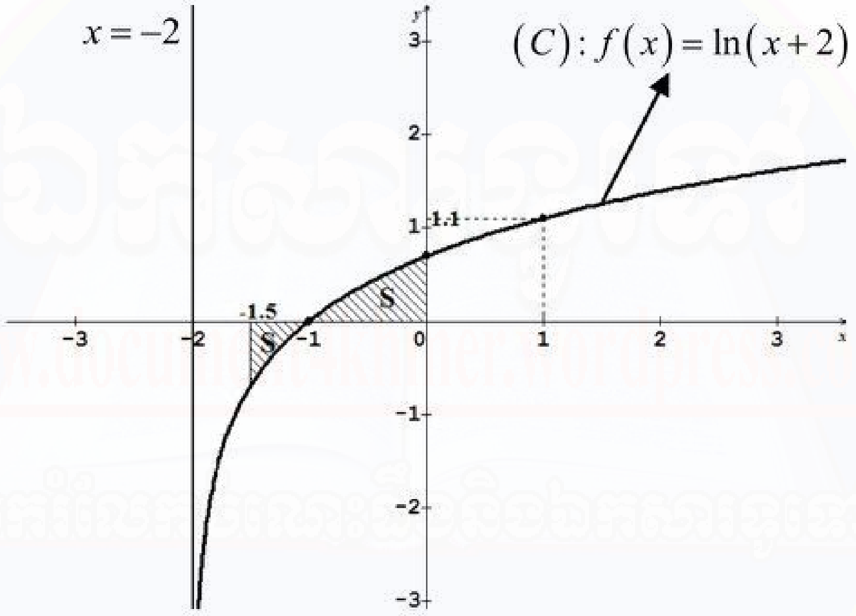
គ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

x	-2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

ឃ សង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f

$f(x)=\ln(x+2)$

ចំពោះ: $x=1$ នោះ $f(1)=\ln 3=1.1$



ង គណនាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C)

អ័ក្ស $(x'ox)$ បន្ទាត់ $x=-\frac{3}{2}$ និង $x=0$

យើងបានក្រឡាផ្ទៃ $S=-\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{0} f(x)dx$

$$=-\int_{-\frac{3}{2}}^{-1}\ln(x+2)dx+\int_{-1}^{0}\ln(x+2)dx$$

$*$ គណនា $\int \ln(x+2)dx$

តាង $u=\ln(x+2)\Rightarrow du=\frac{1}{x+2}dx$

$dv=dx\Rightarrow v=\int dx=x$

$$\Rightarrow \int \ln(x+2)dx = x\ln(x+2) - \int x\left(\frac{1}{x+2}dx\right)$$

$$= x\ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}dx$$

$$= x\ln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2}dx$$

$$= x\ln(x+2) - \int\left(1 - \frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$= x\ln(x+2) - \left[x - 2\ln(x+2)\right] + c$$

យើងបាន

$$S = -\left\{x\ln(x+2) - \left[x - 2\ln(x+2)\right]\right\}_{-\frac{3}{2}}^{-1} + \left\{x\ln(x+2) - \left[x - 2\ln(x+2)\right]\right\}_{-1}^{0}$$

$$= -\left\{\left[-\ln 1 - (-1 - 2\ln 1)\right] - \left[-\frac{3}{2}\ln\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2} - 2\ln\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$$

$$+\left\{\left[0\ln 2 - (0 - 2\ln 2)\right] - \left[-\ln 1 - (-1 - 2\ln 1)\right]\right\}$$

$$= -\left[(1) - \left(\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{2} - 2\ln 2\right)\right] + \left[(2\ln 2) - (1)\right]$$

$$= -\left(1 - \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{3}{2} + 2\ln 2\right) + (2\ln 2 - 1)$$

$$= -1 + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{3}{2} - 2\ln 2 + 2\ln 2 - 1$$

$$= -2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\ln 2$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln 2$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់ $S = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln 2$ (ឯកតាផ្ទៃ)

VI ១ • គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

យើងមាន $\overrightarrow{AB} = (2+2, -12-4, -2-2)$

$= (4, -16, -4)$

$\overrightarrow{AC} = (4+2, 4-4, 4-2)$

$= (6, 0, -2)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -16 & -4\\ 6 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-16 & -4\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & -4\\ 6 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & -16\\ 6 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-32-0)\vec{i}-(8+24)\vec{j}+(0+96)\vec{k}$$

$$=-32\vec{i}-32\vec{j}+96\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-32,-32,96)$

- សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A,B និង C

ដោយ ប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A,B និង C

នោះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ជាវិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)

យើងបាន សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A(-2,4,2)$ ហើយមានវិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-32,-32,96)$ គឺ

$$(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$-32(x+2)-32(y-4)+96(z-2)=0$$

$$(x+2)+(y-4)-3(z-2)=0$$

$$x+2+y-4-3z+6=0$$

$$x+y-3z+4=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(P): x+y-3z+4=0$

២ • សរសេរសមីការប្លង់ (Q) ដែលជាប្លង់នៃតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$

ប្លង់នៃតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ កាត់តាមគល់ O ហើយកែងវិចទ័រ $\vec{k}$

យើងបាន សមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមចំណុច $O(0,0,0)$ ហើយមានវិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{k}=(0,0,1)$ គឺ

$$(Q): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0$$

$$z=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(Q): z=0$

- កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q)

យើងមាន ប្លង់ $(P): x+y-3z+4=0$

ប្លង់ $(Q): z=0$

យក $x=t$ ដែល $t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow t+y+4=0$

$y=-t-4$

នោះ សមីការបន្ទាត់ $(\Delta):\begin{cases} x=t \\ y=-t-4 \\ z=0 \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ $(\Delta): x=t, y=-t-4, z=0$; $(t\in\mathbb{R})$

៣ • រកសមីការស្វ៊ែ (S)

យើងបាន សមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត $I(0,2,-2)$ និងកាំ $r=4$ គឺ

$(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$x^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$

ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែ $(S): x^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$

• សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (JK)

យើងមាន $K(2,0,2)$ និង $J(-4,0,0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{JK}=(2+4,0-0,2-0)$

$=(6,0,2)$

យើងបាន សមីការបន្ទាត់ (JK) ដែលកាត់តាមចំណុច $K(2,0,2)$ ហើយ

មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{JK}=(6,0,2)$ គឺ

$$(JK):\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6t+2 \\ y=0 \\ z=2t+2 \end{cases} ;\ (t\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ $(JK): x=6t+2, y=0, z=2t+2$; $(t\in\mathbb{R})$

វិញ្ញាសាទី ៧

I គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ ។

១ គណនា $z_1 + z_2\,;\, z_1 - z_2\,;\, z_1 \times z_2$

២ សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z_2\,;\, z_1 \times z_2$ ។

II គណនាលីមីត

១ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2}$ ២ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

៣ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{x}$

III ក្នុងស្បោងមួយមាមប៊ូលពណ៌ស 3 ប៊ូលពណ៌ខៀវ 3 និងប៊ូលពណ៌ក្រហម 2 ។ គេចាប់យកប៊ូលម្តង 3 ក្នុងពេលតែមួយចេញពីស្បោងដោយចៃដន្យ ។ គេសន្និដ្ឋានថាប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលនីមួយៗជាសមប្រូបាប ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A "យ៉ាងតិចមានប៊ូលពីរពណ៌ខៀវ"

B "ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ខុសៗគ្នា"

IV គណនាអាំងតេក្រាល

ក $I = \int_1^2 \left(\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{2} + 3\right)dx$

ខ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = -\dfrac{2-x}{(x-1)^2}$ ។

បង្ហាញថា $f(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1}$ រួចគណនា $K = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

V ១ គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\,;\, \vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\,;\, \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ។ រកវ៉ិចទ័រ

ក $\vec{u} + \vec{v}$ ខ $\vec{w} \times \vec{u}$ គ $\vec{w} \times \vec{v}$

២ រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំពុំមួយជាចំណុចមានកូអរដោនេ $(-1,0)$ និងចំណុចកំពូលពីរ មានកូអរដោនេ $(-3,0)$ និង $(3,0)$ ។ សង់អេលីបនេះ។

VI គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 2y = 2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

១ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=e^{-2x}\ln\left(1+2e^{x}\right)$ ជាចម្លើយនៃ (E)

២ បង្ហាញថាអនុគមន៍ φ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(\varphi-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $\left(E'\right): y'+2y=0$ ។

VII *A* គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x^{2}+\ln x$ ។

១ ក បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$

ខ គណនា $g(1)$

២ ក ទាញយកលទ្ធផលពីសំណួរទី១បញ្ជាក់លទ្ធផល បើ $x\geq 1$ នោះ $x^{2}+\ln x\geq 1$ នឹងបើ $0<x\leq 1$ នោះ $x^{2}+\ln x\leq 1$

ខ កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^{2}+\ln x-1$ កាលណា x នៅលើ $(0,+\infty)$

B គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$ និងតាងដោយ C ក្រាបរបស់វាក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

១ សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ($\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$)

២ បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\dfrac{x^{2}+\ln x-1}{x^{2}}$

៣ ប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $(0,+\infty)$

៤ ក បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

ខ សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ និងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ I រវាងក្រាប C និង Δ ។ សង់ Δ និង C ។

អត្រាកំណែ

I ១ គណនា $z_1+z_2\,;z_1-z_2\,;z_1\times z_2$

យើងមាន $z_1=-1+i\sqrt{3}$ និង $z_2=1-i\sqrt{3}$

$$z_1+z_2=\left(-1+i\sqrt{3}\right)+\left(1-i\sqrt{3}\right)$$

$$= 0$$

$$z_1 - z_2 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right) - \left(1 - i\sqrt{3}\right)$$

$$= -1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}$$

$$= -2 + 2i\sqrt{3}$$

$$z_1 \times z_2 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right)$$

$$= -1 + i\sqrt{3} + i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3}^2$$

$$= -1 + i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + 3$$

$$= 2 + 2i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $z_1 + z_2 = 0; z_1 - z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}; z_1 \times z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

២ សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z_2 ; z_1 \times z_2$

យើងមាន $z_1 - z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$

$$= 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z_1 \times z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$= 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $z_1 - z_2 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right); z_1 \times z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

II គណនាលីមីត

១ $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3 - 8\right)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}{\left(\sqrt{x+2} - 2\right)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}{x + 2 - 4}$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\left(x^2 + 2x + 4\right)\left(\sqrt{x+2} + 2\right)\right]$$

$$=(4+4+4)(2+2)=48$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2}=48$

២ $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{-1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=-\frac{1}{2}$

៣ $$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\times 9\right)$$

$$=9$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{x}=9$

III A "យ៉ាងតិចមានប៊ូលពីរពណ៌ខៀវ"

ដោយប៊ូលទាំងអស់មានចំនួន 8 ត្រូវចាប់យក 3

ករណីអាច $n(S)=C(8,3)=\frac{8!}{3!(8-3)!}$

$$=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2}$$

$$=56$$

គេចាប់យកប៊ូលយ៉ាងតិចខៀវពីរមានន័យថាត្រូវចាប់យកប៊ូលពណ៌ខៀវពីរប៊ូលពណ៌ផ្សេងមួយ ហើយត្រូវចាប់យកប៊ូលពណ៌ខៀវទាំងបី

- ប៊ូលខៀវពីរប៊ូលផ្សេងមួយគឺ ប៊ូលខៀវ 3 ត្រូវចាប់ 2 ប៊ូលពណ៌ផ្សេង 5 ត្រូវចាប់ 1
- ប៊ូលខៀវទាំងបីគឺ ប៊ូលខៀវ 3 ត្រូវចាប់យក 3

យើងបាន $n(A)=C(3,2)\times C(5,1)+C(3,3)$

$$=\frac{3!}{2!(3-2)!}\times\frac{5!}{1!(5-1!)}+\frac{3!}{3!(3-3)!}$$

$$=3\times5+1$$

$$=16$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{16}{56}=\frac{2}{7}$$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{2}{7}$

B "ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ខុសៗគ្នា"

ប៊ូលទាំងបីខុសគ្នាគឺប៊ូលពណ៌ស 3 ត្រូវចាប់យក 1 ប៊ូលពណ៌ខៀវ 3 ត្រូវចាប់យក 1 និងប៊ូលពណ៌ក្រហម 2 ត្រូវចាប់យក 1

យើងបាន $n(B)=C(3,1)\times C(3,1)\times C(2,1)$

$$=\frac{3!}{1!(3-1)!}\times\frac{3!}{1!(3-1)!}\times\frac{2!}{1!(2-1)!}$$

$$=3\times3\times2$$

$$=18$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{18}{56}=\frac{9}{28}$$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{9}{28}$

IV គណនាអាំងតេក្រាល

ក $I=\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+3\right)dx=\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{4}x^2+3x\right)_1^2$

$$=\left(\frac{8}{9}-\frac{4}{4}+6\right)-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+3\right)$$

$$=\frac{8}{9}+5-\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-3$$

$$=\frac{7}{9}+2+\frac{1}{4}$$

$$= \frac{28+72+9}{36}$$

$$= \frac{109}{36}$$

ដូចនេះ $I = \frac{109}{36}$

ខ បង្ហាញថា $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

យើងមាន $f(x) = -\frac{2-x}{(x-1)^2}$

$$= \frac{-(2-x)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1-1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

ដូចនេះ $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

- គណនា $K = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

យើងមាន $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

នោះ $K = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \left[-\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} \right] dx$

$$= \left(\frac{1}{x-1} + \ln|x-1| \right)_{-1}^{0}$$

$$= (-1 + \ln 1) - \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 \right)$$

$$= -1 + \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$= -\frac{1}{2} - \ln 2$$

ដូចនេះ $K = -\frac{1}{2} - \ln 2$

V ១ រកវ៉ិចទ័រ

យើងមាន $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ និង $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

ក $\vec{u} + \vec{v} = \left(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right) + \left(-\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$

$$= \vec{j} + 4\vec{k}$$

ដូចនេះ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{j} + 4\vec{k}$

ខ $\vec{w} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$$= (2-2)\vec{i} - (2+2)\vec{j} + (-1-1)\vec{k}$$

$$= -4\vec{j} - 2\vec{k}$$

ដូចនេះ $\vec{w} \times \vec{u} = -4\vec{j} - 2\vec{k}$

គ $\vec{w} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$

$$= (2+4)\vec{i} - (2-2)\vec{j} + (2+1)\vec{k}$$

$$= 6\vec{i} + 3\vec{k}$$

ដូចនេះ $\vec{w} \times \vec{v} = 6\vec{i} + 3\vec{k}$

២ រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប

ដោយកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំ មានអរដោនេដូចគ្នា

នោះសមីការស្តង់ដាអេលីបមានរាង $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

យើងមានកំពូល $V_1(h+a,k) = (3,0)$

$\Rightarrow k = 0, h + a = 3 \;(1)$

$V_2(h-a,k)=(-3,0)$

$\Rightarrow k=0, h-a=-3\ (2)$

តាម (1) និង (2) យើងបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} h+a=3 & (1) \\ h-a=-3 & (2) \end{cases}$

យក (1) បូក $(2) \Rightarrow 2h=0$ ឬ $h=0$

យក (1) ដក $(2) \Rightarrow 2a=6$ ឬ $a=3$

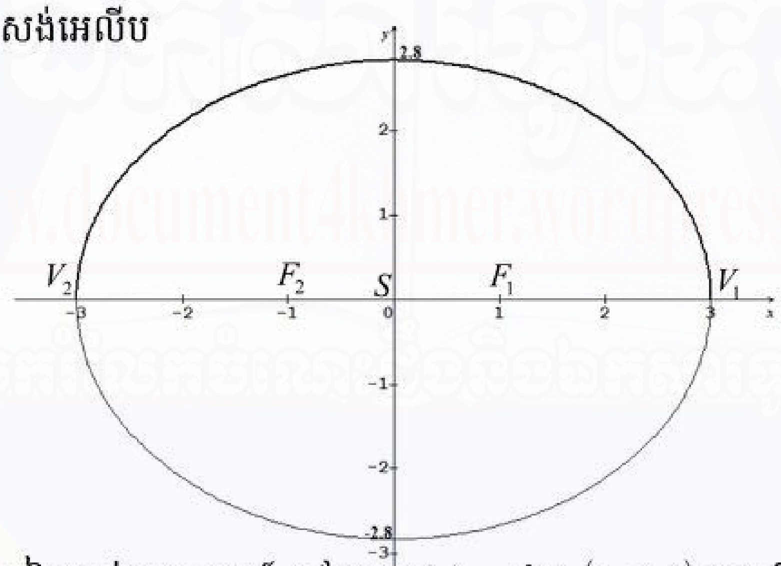
កំណុំ $F_2(h-c,k)=(-1,0)$

$\Rightarrow k=0, h-c=-1$ ឬ $c=h+1=1$

ដោយ $a^2-b^2=c^2$ នោះ $b^2=a^2-c^2=3^2-1^2=8$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃអេលីបគឺ $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$

- សង់អេលីប



VI ១ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=e^{-2x}\ln(1+2e^x)$ ជាចម្លើយនៃ (E)

យើងមាន $f(x)=e^{-2x}\ln(1+2e^x)$

$$f'(x)=\left(e^{-2x}\right)'\ln\left(1+2e^x\right)+e^{-2x}\left[\ln\left(1+2e^x\right)\right]'$$

$$=-2e^{-2x}\ln\left(1+2e^2\right)+e^{-2x}\frac{\left(1+2e^x\right)'}{1+2e^x}$$

$$=-2e^{-2x}\ln\left(1+2e^x\right)+e^{-2x}\frac{2e^x}{1+2e^x}$$

$$=-2e^{-2x}\ln\left(1+2e^x\right)+\frac{2e^{-x}}{1+2e^x}$$

យក $f(x)$ និង $f'(x)$ ជំនួសក្នុងសមីការ (E)

$$\Rightarrow f'(x)+2f(x)=2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$$

$$-2e^{-2x}\ln\left(1+2e^{x}\right)+\frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}+2e^{-2x}\ln\left(1+2e^{x}\right)=2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$$

$$\frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}=\frac{2e^{-x}}{1+2e^{x}}$$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ (E)

២ បង្ហាញថាអនុគមន៍ φ ជាចម្លើយនៃ (E)

យើងមាន $(\varphi-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): y'+2y=0$

$$\Rightarrow(\varphi-f)'+2(\varphi-f)=0$$

$$\varphi'-f'+2\varphi-2f=0$$

$$\varphi'+2\varphi=f'+2f$$

ដោយ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) នោះ $f'+f=2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

$$\Rightarrow\varphi'+2\varphi=2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (E)

ដូចនេះ អនុគមន៍ φ ជាចម្លើយនៃ (E)

VII A ១ ក បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$

យើងមាន $g(x)=x^2+\ln x$

$$g'(x)=2x+\frac{1}{x}$$

$$=\frac{2x^2+1}{x}>0$$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(0,+\infty)$

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$

ខ គណនា $g(1)$

$$g(1)=1^2+\ln 1=1$$

ដូចនេះ $g(1)=1$

២ ក ទាញយកលទ្ធផលពីសំណួរទី១ បញ្ជាក់លទ្ធផល

បើ $x\geq 1$ នោះ $x^2+\ln x\geq 1$ នឹងបើ $x<1$ នោះ

$$x^2+\ln x<1$$

ដោយ $g(x)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតនិង $g(1)=1$

ចំពោះ $x\ge 1$ គេបាន $g(x)\ge g(1)$

$$x^2+\ln x\ge 1$$

ចំពោះ $0<x\le 1$ គេបាន $g(x)\le g(1)$

$$x^2+\ln x\le 1$$

ដូចនេះ $x\ge 1$ នោះ $x^2+\ln x\ge 1$ ហើយ $0<x\le 1$ នោះ $x^2+\ln x\le 1$

ខ កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2+\ln x-1$ កាលណា x នៅលើ $(0,+\infty)$

ចំពោះ $x\ge 1$ គេបាន $x^2+\ln x\ge 1$

$$x^2+\ln x-1\ge 0$$

ចំពោះ $0<x\le 1$ គេបាន $x^2+\ln x\le 1$

$$x^2+\ln x-1\le 0$$

$g(1)=1$ ឬ $x^2+\ln x=1\Leftrightarrow x^2+\ln x-1=0$

យើងទាញបាន $x^2+\ln x-1>0$ ចំពោះ $x>1$

$x^2+\ln x-1=0$ ចំពោះ $x=1$

$x^2+\ln x-1<0$ ចំពោះ $0<x<1$

B ១ សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$=+\infty \quad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}=-\infty)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$=+\infty \quad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0)$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

២ បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$

$$f'(x)=1-\frac{(\ln x)'x-(x)'\ln x}{x^2}$$

$$=1-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-\ln x}{x^2}$$

$$=1-\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-(1-\ln x)}{x^2}$$

$$=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$

៣ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើ $(0,+\infty)$

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$

ដោយ $x^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(0,+\infty)$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x^2+\ln x-1$

យើងទាញបាន បើ $x>1$ នោះ $f'(x)>0$

បើ $x=1$ នោះ $f'(x)=0$

បើ $x<1$ នោះ $f'(x)<0$

សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

- សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $(0,+\infty)$

$$f(1)=1+1-\frac{\ln 1}{1}=2$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

៤ ក បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

យើងមាន $f(x) = x+1-\dfrac{\ln x}{x}$ និងបន្ទាត់ $\Delta : y = x+1$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)-(x+1)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= 0$$

ដោយ $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right] = 0$

នោះ បន្ទាត់ $\Delta : y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ C ត្រង់ $+\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\Delta : y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ C ត្រង់ $+\infty$

ខ សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ និងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ I រវាងក្រាប C និង Δ

យើងមានខ្សែកោង $C : f(x) = x+1-\dfrac{\ln x}{x}$ និងបន្ទាត់ $\Delta : y = x+1$

$$f(x)-y = \left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)-(x+1)$$

$$= -\frac{\ln x}{x}$$

$f(x)-y = 0$ ឬ $-\dfrac{\ln x}{x} = 0$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1$$

ចំពោះ $0 < x < 1 \Rightarrow f(x)-y > 0$ ឬ $f(x) > y$

នោះ ខ្សែកោង C នៅលើបន្ទាត់ Δ

ចំពោះ $x > 1 \Rightarrow f(x)-y < 0$ ឬ $f(x) < y$

នោះ ខ្សែកោង C នៅក្រោមបន្ទាត់ Δ

ចំពោះ $x = 1 \Rightarrow f(x)-y = 0$ ឬ $f(x) = y$

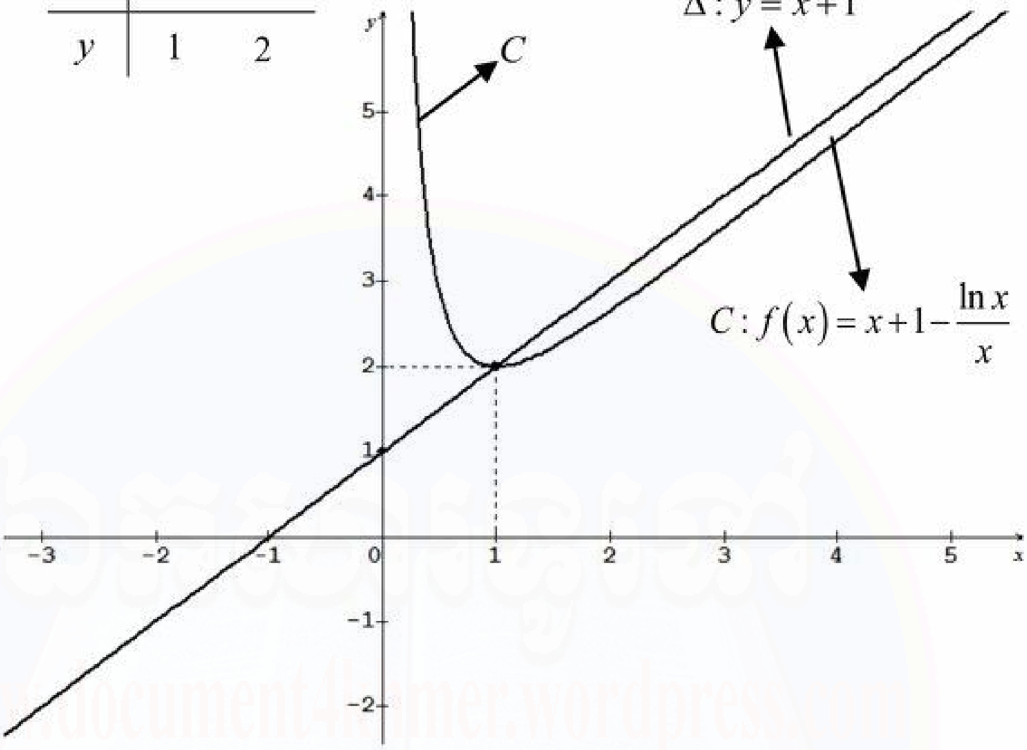
នោះ ខ្សែកោង C កាត់បន្ទាត់ Δ

ហើយ $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2$ នោះខ្សែកោង C កាត់បន្ទាត់ Δ ត្រង់ $(1,2)$

➢ សង់ Δ និង C

$\Delta : y = x+1$

x	0	1
y	1	2



វិញ្ញាសាទី ៨

I គណនាលីមីត

ក $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^2+2-3x}$ ខ $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}$

គ $\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{x}$

II គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{3}-i;z_2=\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i$ និង $z_3=-\frac{1}{2}$ ។ គណនា z_1+z_2 និង $\left(z_1+z_2\right)\times z_3$ ។ សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $z=\left(z_1+z_2\right)\times z_3$ ។ ទាញរកតម្លៃនៃ z^3 ។

III គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^2\left(6x^2-3x-1\right)dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sin^2 x\right)dx$ ។ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ $f(x)=-2\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$ ។ គណនា $K=\int_1^e f(x)dx$ ។ ($\ln e=1$)

IV ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 15 ដែលចែកជាប៊ូលពណ៌បៃតង ចំនួន 7 និងគេសរសេរលើប៊ូលនេះតាមលេខរៀងពី 1 ដល់ 7 រួចប៊ូលពណ៌ខៀវចំនួន 5 និងគេសរសេរលើប៊ូលទាំង 5 នេះតាមលេខរៀងពី 1 ដល់ 5 ចុងក្រោយប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 3 និងគេសរសេរលើប៊ូលទាំង 3 នេះតាមលេខរៀងពី 1 ដល់ 3 ។ គេចាប់យកប៊ូលមួយចេញពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោមៈ

A: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង

B: ប៊ូលដែលចាប់បានមានលេខសេស

C: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង និងលេខសេស ។

V ១ គេមានសមីការ $18x^2+10y^2=90$ ។

ក បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប ។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ ។

ខ សង់អេលីប ។

២ នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $M(2,3,4);N(3,5,6);P(4,6,7)$ និង $Q(3,4,5)$ ។

ក រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{QP}$

ខ ទាញបង្ហាញថា $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

VI ក ដោះស្រាយសមីការធីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 2y' - 3y = 0$ ។

ខ រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0) = 1$ និង $y'(1) = e$ ។(e ជាចំនួនពិតដែល $\ln e = 1$)

VII គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x + 3}$ ។ គេតាងដោយ C ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ។

១ *a.* គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

b. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប C ធៀននឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x + 2$ ។

២ *a.* ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$

b. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣ *a.* តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln 3$ ។

b. សិក្សាទីតាំងនៃ C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_2 ។

៤ *a.* បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ី

ស

សូន្យមានសមីការ $y = \dfrac{1}{4}x + 1$ ។

b. ដោយសន្មត់ថាចំណុច I ជាផ្ចិតឆ្លុះនសក្រាប C និងក្នុងតម្លៃប្រហែល $\ln 3$ ចូរសង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ប៉ះ d_1, d_2, d_3 ។ (នៅលើតម្រុយនេះមួយឯកតាស្មើ $2cm$)

អត្រាកំណែ

I គណនាលីមីត

ក $$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^2+2-3x} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{(x-2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x+1)}{x-2}$$

$$=2$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x^2+2-3x}=2$

ខ $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(x^3-27\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x+6-9}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}$$

$$=\frac{1}{(9+9+9)(3+3)}=\frac{1}{162}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}=\frac{1}{162}$

គ $\lim_{x\to0}\frac{5\sin5x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin5x}{5x}\times25\right)$

$$=25$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\frac{5\sin5x}{x}=25$

II • គណនា z_1+z_2

យើងមាន $z_1=\sqrt{3}-i$ និង $z_2=\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i$

$$z_1+z_2=\left(\sqrt{3}-i\right)+\left[\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i\right]$$

$$=\sqrt{3}-i+1-\sqrt{3}+i-i\sqrt{3}$$

$$=1-i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $z_1+z_2=1-i\sqrt{3}$

• គណនា $(z_1+z_2)\times z_3$

យើងមាន $z_1+z_2=1-i\sqrt{3}$ និង $z_3=-\frac{1}{2}$

$$(z_1+z_2)\times z_3=\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ដូចនេះ $(z_1+z_2)\times z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

• សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $z=(z_1+z_2)\times z_3$

យើងមាន $z=(z_1+z_2)\times z_3$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

ដូចនេះ $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

• រកតម្លៃនៃ z^3

យើងមាន $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

តាមដឺម័រ យើងបាន

$$z^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$

$$=1+0i=1$$

ដូចនេះ $z^3=1$

III • គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int_0^2\left(6x^2-3x-1\right)dx$$

$$=\left(2x^3-\frac{3}{2}x^2-x\right)\Big|_0^2$$

$$=\left(2\times 2^3-\frac{3}{2}\times 2^2-2\right)-\left(2\times 0^3-\frac{3}{2}\times 0^2-0\right)$$

$$=16-6-2=8$$

ដូចនេះ $I=8$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sin^2 x\right)dx$$

តាមរូបមន្ត $1-2\sin^2 x=\cos 2x$

$$\Rightarrow J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\sin 0\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $J=\frac{1}{2}$

- បង្ហាញថា $f(x)=-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=-2\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$

$$=\frac{-2x-2}{x^2}$$

$$=-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$$

ដូចនេះ $f(x)=-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$

- គណនា $K=\int_1^e f(x)dx$

យើងបាន $K=\int_1^e f(x)dx$

$$=\int_1^e\left(-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$= \left(-2\ln|x| + \frac{2}{x}\right)\Big|_1^e$$

$$= \left(-2\ln e + \frac{2}{e}\right) - \left(-2\ln 1 + \frac{2}{1}\right)$$

$$= -2 + \frac{2}{e} - 2 = -4 + \frac{2}{e}$$

ដូចនេះ $K = -4 + \frac{2}{e}$

IV រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោមៈ

A: បូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង

ដោយ បូលទាំងអស់មានចំនួន 15 ត្រូវចាប់យក 1

យើងបាន $n(S) = c(15,1) = 15$

ដោយ បូលពណ៌បៃតងមានចំនួន 7 ត្រូវចាប់យក 1

យើងបាន $n(A) = c(7,1) = 7$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{15}$$

ដូចនេះ $P(A) = \frac{7}{15}$

B: បូលដែលចាប់បានមានលេខសេស

ដោយ បូលដែលមានលេខសេសមានចំនួន 9 ត្រូវចាប់យក 1

យើងបាន $n(B) = c(9,1) = 9$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

ដូចនេះ $P(B) = \frac{3}{5}$

C: បូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង និងលេខសេស

ដោយ បូលដែលមានពណ៌បៃតង និងជាលេខសេសមានចំនួន 4 ត្រូវចាប់យក 1

យើងបាន $n(C) = c(4,1) = 4$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{15}$$

ដូចនេះ $P(C)=\frac{4}{15}$

V ១ ក • បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប

គេមានសមីការ $18x^2+10y^2=90$

$$\frac{18x^2}{90}+\frac{10y^2}{90}=\frac{90}{90}$$

$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ ជាសមីការអេលីបដែលមានផ្ចិតនៅគល់តម្រុយ

ដូចនេះ សមីការ $18x^2+10y^2=90$ ជាសមីការអេលីប

• រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ

សមីការអេលីប $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ មានរាង $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

ដែល $a=3, b=\sqrt{5}$ និង $c=\sqrt{9-5}=2$

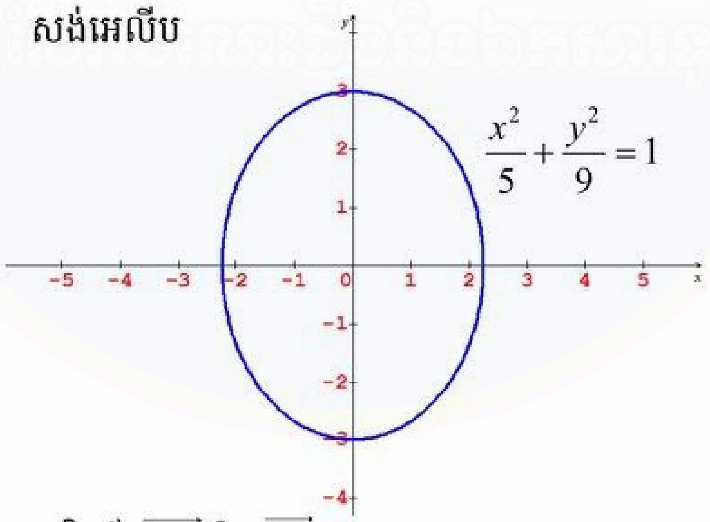
យើងបាន ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ $2a=6$

ប្រវែងអ័ក្សតូចគឺ $2b=2\sqrt{5}$

កូអរដោនេកំពូល $V_1(0,a)=(0,3)$

$V_2(0,-a)=(0,-3)$

ខ សង់អេលីប



២ ក រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{QP}$

យើងមាន $M(2,3,4); N(3,5,6); P(4,6,7)$ និង $Q(3,4,5)$

នោះ $\overrightarrow{MN}=(3-2, 5-3, 6-4)$

$=(1,2,2)$

$\overrightarrow{QP}=(4-3,6-4,7-5)$

$=(1,2,2)$

ដូចនេះ $\overrightarrow{MN}=(1,2,2)$ និង $\overrightarrow{QP}=(1,2,2)$

ខ ទាញបង្ហាញថា $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម

យើងមាន $\overrightarrow{MN}=(1,2,2)$ និង $\overrightarrow{QP}=(1,2,2)$

នោះ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$

ដូចនេះ $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម

VI ក ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+2y'-3y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2+2r-3=0$

$(r+3)(r-1)=0$

$r_1=1$ និង $r_2=-3$

$\Rightarrow y=Ae^{x}+Be^{-3x} \quad (A,B\in\mathbb{R})$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{x}+Be^{-3x} \quad (A,B\in\mathbb{R})$

ខ រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0)=1$ និង $y'(1)=e$ ។

យើងមាន $y=Ae^{x}+Be^{-3x} \quad (A,B\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow y'=Ae^{x}-3Be^{-3x}$

ដោយ $y(0)=1$ និង $y'(1)=e$

នោះ $\begin{cases} A+B=1 \\ Ae-3Be^{-3}=e \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} A+B=1 & (1) \\ A-3Be^{-4}=1 & (2) \end{cases}$

យក (1) ដក (2)

$\Rightarrow B+3Be^{-4}=0$ ឬ $B=0$ ជំនួសក្នុង (1)

$(1)\Rightarrow A=1$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការគឺ $y=e^{x}$

VII ១ *a.* គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

យើងមាន $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+1}\right)$

$= -\infty$ (ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\frac{4}{1+\frac{1}{e^x}}\right)$$

$= +\infty$ (ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$)

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x+2$

យើងមាន ក្រាប $(C): f(x) = x+2-\frac{4e^x}{e^x+1}$ និងបន្ទាត់ $d_1 : y = x+2$

$$f(x)-y = \left[\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+1}\right)-(x+2)\right]$$

$$= -\frac{4e^x}{e^x+1}$$

ដោយ $4e^x > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

$e^x+1>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)-y<0$ ឬ $f(x)<y$

នោះ ខ្សែកោង (C) នៅក្រោមបន្ទាត់អាស៊ីមតូត d_1

២ *a.* ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

យើងមាន $f(x) = x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}$

$$\Rightarrow f'(x)=1-4\frac{\left(e^x\right)'\left(e^x+3\right)-\left(e^x+3\right)'\left(e^x\right)}{\left(e^x+3\right)^2}$$

$$=1-4\frac{e^x\left(e^x+3\right)-e^x\left(e^x\right)}{\left(e^x+3\right)^2}$$

$$=1-4\frac{e^{2x}+3e^x-e^{2x}}{\left(e^x+3\right)^2}$$

$$=1-\frac{12e^x}{\left(e^x+3\right)^2}$$

$$=\frac{\left(e^x+3\right)^2-12e^x}{\left(e^x+3\right)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+6e^x+9-12e^x}{\left(e^x+3\right)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}-6e^x+9}{\left(e^x+3\right)^2}$$

$$=\frac{\left(e^x-3\right)^2}{\left(e^x+3\right)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

b. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

ដោយ $f'(x)=\left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$

បើ $f'(x)=0\Leftrightarrow\left(e^x-3\right)^2=0$

$\Rightarrow e^x=3$ ឬ $x=\ln 3$

ដែល $f(\ln 3)=\ln 3+2-\frac{4e^{\ln 3}}{e^{\ln 3}+3}=\ln 3+2-\frac{4(3)}{3+3}=\ln 3$

- សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 3$	↗	$+\infty$

៣ *a.* តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln 3$ ។

ចំពោះ $x=\ln 3 \Rightarrow f'(\ln 3)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $x=\ln 3$ ជាបន្ទាត់ដេក (បន្ទាត់ស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស) មានសមីការ $y=\ln 3$

b. សិក្សាទីតាំងនៃ C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_2

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ ហើយ d_2 ជាបន្ទាត់ដេកត្រង់ $x=\ln 3$

គេបាន

- $x<\ln 3$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ d_2
- $x=\ln 3$ នោះក្រាប C កាត់បន្ទាត់ d_2 ត្រង់ចំណុច $I(\ln 3,\ln 3)$
- $x>\ln 3$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ d_2

៤ *a.* បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីសសូន្យមានសមីការ $y=\frac{1}{4}x+1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

ចំពោះ $x_0=0 \quad \Rightarrow y_0=f(0)=0+2-\frac{4e^0}{e^0+3}=1$

$$\Rightarrow f'(x_0)=f'(0)=\left(\frac{e^0-3}{e^0+3}\right)^2=\frac{1}{4}$$

នោះ $d_3: y=\frac{1}{4}(x-0)+1=\frac{1}{4}x+1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះ $d_3: y=\frac{1}{4}x+1$

b. សង់ក្រាប C បន្ទាត់ប៉ះ d_2, d_3 និងអាស៊ីមតូត d_1, d_4

- រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត

យើងមាន $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+3}=0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$)

នោះ បន្ទាត់ $d_1: y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$

ម៉្យាងទៀត $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$

$$=x+2-\frac{4e^x+12-12}{e^x+3}$$

$$=x+2-\frac{4e^x+12}{e^x+3}+\frac{12}{e^x+3}$$

$$=x+2-\frac{4\left(e^x+3\right)}{e^x+3}+\frac{12}{e^x+3}$$

$$=x+2-4+\frac{12}{e^x+3}$$

$$=x-2+\frac{12}{e^x+3}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{12}{e^x+3}=0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$)

នោះ បន្ទាត់ $d_4: y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$

- សង់ក្រាប C បន្ទាត់ប៉ះ d_2, d_3 និងអាស៊ីមតូត d_1, d_4

$d_1: y=x+2$

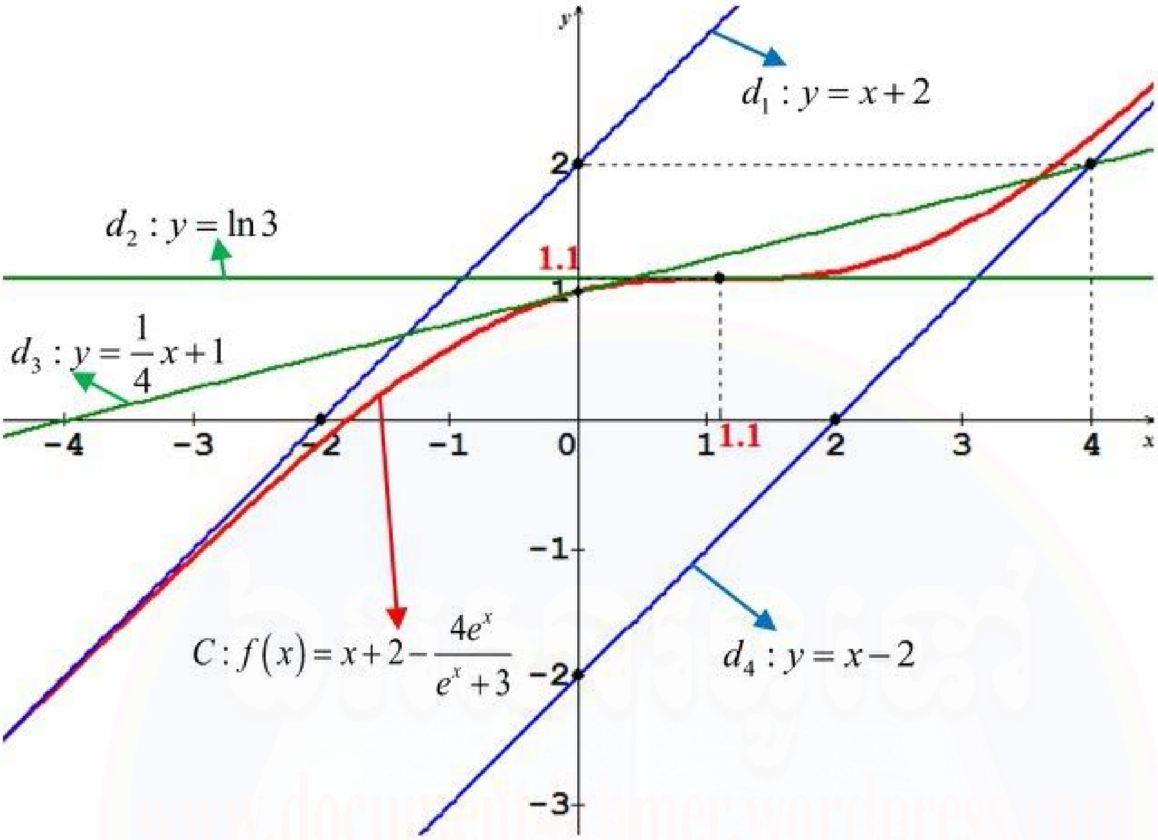
x	0	-2
y	2	0

$d_4: y=x-2$

x	0	2
y	-2	0

$d_3: y=\dfrac{1}{4}x+1$

x	0	4
y	1	2



www.documents-khmer.wordpress.com

វិញ្ញាសាទី ៩

I គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}\ ;\ B=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

II គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\dfrac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}}$ ។

១ សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

២ គេឱ្យ $Z^{'}=1+i$ សរសេរ $\left(\dfrac{Z}{Z^{'}}\right)^{2014}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

III គេឱ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$ ។

១ គណនា a និង b ដើម្បីឱ្យបាន $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$ ។ ទាញរកតម្លៃ

$F(t)=\int_1^t f(x)dx$

២ តាង $S_n=F(1)+F(2)+F(3)+...+\mathrm{F}(n)$ ។ គណនា S_n

IV ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយ មានសិស្ស 10 នាក់ ក្នុងនោះមានសិស្សនារី 6 នាក់ ។ លោកគ្រូឱ្យសិស្សទាំងអស់សរសេរឈ្មោះរបស់ខ្លួន ក្នុងក្រដាសតូចមួយ ដែលគាត់ចែកឱ្យម្នាក់មួយ រួចមូរឱ្យស្អាត ដាក់ក្នុងប្រអប់មួយ ហើយគាត់ចាប់យកឈ្មោះ 2 នាក់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ ដើម្បីឱ្យធ្វើជាប្រធានថ្នាក់ ។ រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់បានឈ្មោះសិស្ស:

១ នារី 2 នាក់

២ ប្រុស 2 នាក់

៣ ប្រុស 1 និងនារី 1

V គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 3y^{''}-4y^{'}+y=0$ ។

១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

២ កំណត់ចម្លើយ g នៃសមីការ (E) ដោយដឹងថាខ្សែកោង (C) តាង g មានបរមាមួយត្រង់ចំណុច $(-3\ln 2,-1)$

VI នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយ គេឱ្យចំណុច $A(1,0,1);B(1,1,0);C(1,0,0);D(-2,2,2)$ និង $E(-2,2,0)$

១ ដៅចំណុច A,B,C,D និង E

២ បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

៣ កំនត់កូអរដោនេនៃផ្ចិតស្វ៊ែចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC

៤ គណនា $\left(\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{CA}$ និង $\left(\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DE}$

៥ ពហុមុខ $ABCDE$ ផ្គុំដោយតេត្រាអ៊ែតពីរគឺ $ABCD$ និង $BCDE$ ។ រកមាឌនៃពហុមុខ $ABCDE$ ។

VII អនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f(x)=\dfrac{e^x-x}{x}$ ហើយ (C) ជាក្រាបតំណាង f ។

១ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f រួចរកលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)

២ បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាមួយ ។ គណនាតម្លៃអប្បបរមានោះ

៣ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

៤ គណនាតម្លៃ $f(-1),f(2),f(3)$ រួចសង់ក្រាប (C)

៥ ចូរពិភាក្សាតាមក្រាបនូវអត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសនៃសមីការ $e^x=(m+1)x$ ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ។

<u>អត្រាកំណែ</u>

I គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

$$A=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)+\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)+\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}\right)$$

+ចំពោះ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[2\times\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{1}{x^2}\times\frac{x^2}{4}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

+ចំពោះ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1+x^2}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)+\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2\left[\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)+\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)+\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}$$

$$= \frac{7}{6}$$

ដូចនេះ $A = \frac{7}{6}$

$$B = \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[2\times\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{x^2}{4}\times\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $B=\frac{1}{4}$

II ១ • សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $z=\frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}}$

$$= \frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(-2+2i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1-3i^2}$$

$$= \frac{-2+2i\sqrt{3}+2i\sqrt{3}-6i^2}{4}$$

$$= \frac{-2+4i\sqrt{3}+6}{4}$$

$$= \frac{4+4i\sqrt{3}}{4}$$

$$= 1+i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ ទម្រង់ពីជគណិត $z=1+i\sqrt{3}$

- សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $z = 1 + i\sqrt{3}$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

២ គេឱ្យ $Z' = 1 + i$ សរសេរ $\left(\frac{Z}{Z'}\right)^{2014}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$z' = 1 + i$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

គេបាន $\left(\frac{z}{z'}\right)^{2014} = \left[\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\right]^{2014}$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{2014}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]^{2014}$$

$$= 2^{1007}\left[\cos\left(\frac{4\pi - 3\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi - 3\pi}{12}\right)\right]^{2014}$$

$$= 2^{1007}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2014}$$

$$= 2^{1007}\left(\cos\frac{2014\pi}{12} + i\sin\frac{2014\pi}{12}\right)$$

$$= 2^{1007}\left(\cos\frac{1007\pi}{6} + i\sin\frac{1007\pi}{6}\right)$$

$$= 2^{1007}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$= 2^{1007}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2^{1006}\left(\sqrt{3} - i\right)$$

ដូចនេះ $\left(\frac{z}{z'}\right)^{2014} = 2^{1006}\left(\sqrt{3} - i\right)$

III ១ • គណនា a និង b

យើងមាន $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

$$= \frac{a(x+1) + bx}{x(x+1)}$$

$$= \frac{ax + a + bx}{x(x+1)}$$

$$= \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$$

ដោយ $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $a = 1$ និង $b = -1$

• រកតម្លៃ $F(t) = \int_1^t f(x)dx$

ចំពោះ $a = 1$ និង $b = -1$ នោះ $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

យើងបាន $F(t) = \int_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \left(\ln|x| - \ln|x+1|\right)_1^t$$

$$= \left(\ln|t| - \ln 1\right) - \left(\ln|t+1| - \ln 2\right)$$

$$= \ln|t| - \ln|t+1| + \ln 2$$

ដូចនេះ $F(t) = \ln|t| - \ln|t+1| + \ln 2$

២ គណនា S_n

យើងមាន $F(t) == \ln|t| - \ln|t+1| + \ln 2$

ចំពោះ $t = 1 \Rightarrow F(1) = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2$

$t = 2 \Rightarrow F(2) = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2$

$t = 3 \Rightarrow F(3) = \ln 3 - \ln 4 + \ln 2$

$\vdots$

$t = n \Rightarrow F(n) = \ln(n) - \ln(n+1) + \ln 2$

$\Rightarrow F(1) + F(2) + F(3) + ... + F(n) = \ln 1 - \ln(n+1) + n\ln 2$

ដោយ $S_n = F(1) + F(2) + F(3) + ... + \mathrm{F}(n)$

$\Rightarrow S_n = n\ln 2 - \ln(n+1)$

ដូចនេះ $S_n = n\ln 2 - \ln(n+1)$

IV រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់បានឈ្មោះសិស្ស:

១ នារី 2 នាក់

ដោយ ថ្នាក់រៀនមានសិស្ស 10 នាក់ ចាប់យកឈ្មោះសិស្ស 2 នាក់

យើងបាន $n(S) = C(10,2) = \dfrac{10!}{2!(10-2)!}$

$= \dfrac{10 \times 9}{2}$

$= 45$

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រូចាប់បាននារី 2 នាក់

ដោយ សិស្សនារីមាន 6 នាក់ គ្រូចាប់យក 2 នាក់

យើងបាន $n(A) = C(6,2) = \dfrac{6!}{2!(6-2)!}$

$= \dfrac{6 \times 5}{2}$

$= 15$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $P(A) = \dfrac{1}{3}$

២ បុរស 2 នាក់

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រូចាប់បានបុរស 2 នាក់

ដោយ សិស្សបុរសមាន 4 នាក់ គ្រូចាប់យក 2 នាក់

យើងបាន $n(B)=C(4,2)=\dfrac{4!}{2!(4-2)!}$

$$=\frac{4\times 3}{2}$$

$$=6$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{2}{15}$

៣ បុរស 1 និងនារី 1

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានបុរស 1 នាក់ និងនារី 1 នាក់

ដោយ សិស្សបុរសមាន 4 នាក់ ចាប់យក 1 នាក់

សិស្សនារី 6 នាក់ ចាប់យក 1 នាក់

យើងបាន $n(C)=C(4,1)\times C(6,1)$

$$=4\times 6$$

$$=24$$

$$\Rightarrow P(C)=\frac{n(c)}{n(S)}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{8}{15}$

V ១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

យើងមាន សមីការ $(E): 3y''-4y'+y=0$

សមីការសម្គាល់ $3r^2-4r+1=0$

$$\Rightarrow r_1=1, r_2=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y_c=Ae^{x}+Be^{\frac{1}{3}x}\ ,(A,B\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ $y_c = Ae^{\frac{1}{3}x} + Be^x \ ,(A, B \in \mathbb{R})$

២ កំណត់ចម្លើយ g នៃសមីការ (E)

យើងមាន $y_c = Ae^{\frac{1}{3}x} + Be^x \quad ,(A, B \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow y_c' = \frac{1}{3}Ae^{\frac{1}{3}x} + Be^x$$

ដើម្បីអោយអនុគមន៍ g មានបរមាត្រង់ $(-3\ln 2, -1)$ លុះត្រាតែ

$$g(-3\ln 2) = -1; g(-3\ln 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}A + \frac{1}{8}B = -1 (1) \\ \frac{1}{6}A + \frac{1}{8}B = 0 (2) \end{cases}$$

តាម $(1) \Rightarrow \frac{1}{2}A + \frac{1}{8}B = -1$

$$\frac{1}{2}A = -1 - \frac{1}{8}B$$

$A = 2\left(-1 - \frac{1}{8}B\right)$ ជំនួសចូល (2)

$$(2) \Rightarrow \frac{1}{6}\left(-2 - \frac{2}{8}B\right) + \frac{1}{8}B = 0$$

$$-\frac{1}{3} - \frac{1}{24}B + \frac{1}{8}B = 0$$

$$\frac{1}{12}B = \frac{1}{3}$$

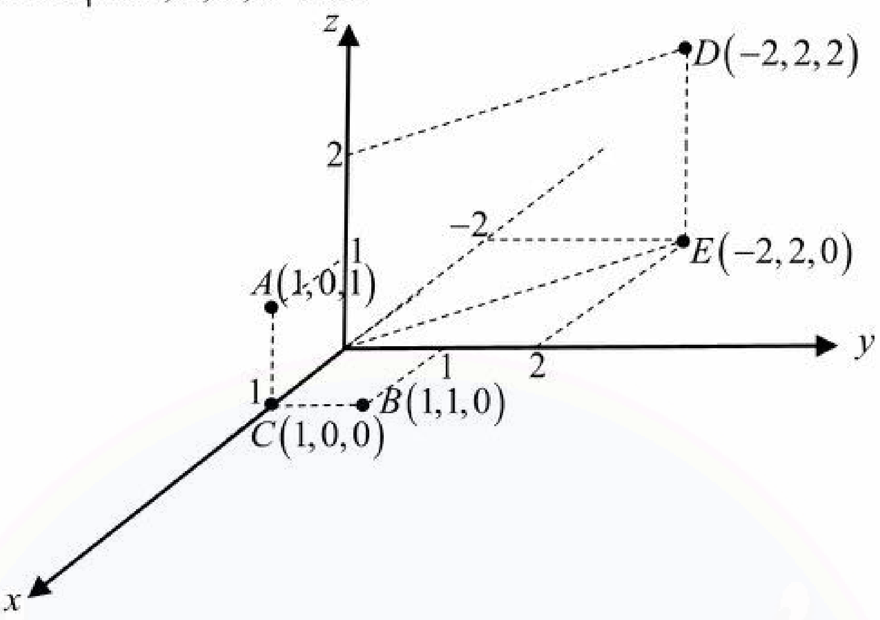
$\Rightarrow B = 4$ ជំនួសចូល (1)

$$\Rightarrow A = -3$$

$$\Rightarrow g(x) = -3e^{\frac{1}{3}x} + 4e^x$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ $g(x) = -3e^{\frac{1}{3}x} + 4e^x$

VI ១ ដៅចំណុច A,B,C,D និង E



២ បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C កាលណា $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

យើងមាន $\overrightarrow{CA}=(1-0,0-0,1-0)$

$=(1,0,1)$

$\overrightarrow{CB}=(1-1,1-0,0-0)$

$=(0,1,0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(1)(0)+(0)(1)+(1)(0)$

$=0$

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

៣ កំនត់កូអរដោនេនៃផ្ចិតស្វ៊ែចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC

ដោយ AB ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃស្វ៊ែ

$$\Rightarrow \text{ផ្ចិតស្វ៊ែ } I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{1+1}{2},\frac{0+1}{2},\frac{1+0}{2}\right)$$

$$I\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

ដូចនេះ កូអរដោនេផ្ចិតស្វ៊ែ $I\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

៤ គណនា $\left(\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{CA}$ និង $\left(\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DE}$

យើងមាន $\overrightarrow{CB}=(0,1,0)$ $\overrightarrow{CD}=(-3,2,2)$ $\overrightarrow{CA}=(0,0,1)$

$\overrightarrow{DC}=(3,-2,-2)$ $\overrightarrow{DB}=(3,-1,-2)$ $\overrightarrow{DE}=(0,0,-2)$

$$\left(\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-3&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\2&2\end{vmatrix}(0)-\begin{vmatrix}0&0\\-3&2\end{vmatrix}(0)-\begin{vmatrix}0&1\\-3&2\end{vmatrix}(1)$$

$$=(2-0)(0)-(0-0)(0)-(0+3)(1)$$

$$=3$$

ដូចនេះ $\left(\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=3$

$$\left(\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DE}=\begin{vmatrix}0&0&-2\\3&-2&-2\\3&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-2\\-1&-2\end{vmatrix}(0)-\begin{vmatrix}3&-2\\3&-2\end{vmatrix}(0)+\begin{vmatrix}3&-2\\3&-1\end{vmatrix}(-2)$$

$$=(4-2)(0)-(-6+6)(0)+(-3+6)(-2)$$

$$=-6$$

ដូចនេះ $\left(\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DE}=-6$

៥ រកមាឌនៃពហុមុខ $ABCDE$

តាម $V_{ABCDE}=V_{ABCD}+V_{BCDE}$

+រក V_{ABCD}

តាម $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{CA}\right|$

ដោយ $\left|\left(\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{CA}\right|=3$

$\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ (ឯកតាមាឌ)

+រក V_{BCDE}

តាម $V_{BCDE}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DE}\right|$

ដោយ $\left|\left(\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{DE}\right|=6$

$\Rightarrow V_{BCDE}=\frac{6}{6}=1$ (ឯកតាមាឌ)

$$\Rightarrow V_{ABCDE} = \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{3}{2} \quad (\text{ឯកតាមាឌ})$$

ដូចនេះ $V_{ABCDE} = \frac{3}{2}$ (ឯកតាមាឌ)

VII ១ • រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x) = \frac{e^x - x}{x}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x \neq 0$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$$

ដូចនេះ $D = \mathbb{R} - \{0\}$

• រកលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់

យើងមាន $f(x) = \frac{e^x - x}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - x}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)$$

$$= -1 \quad \left(\text{ព្រោះ } \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x - x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right)$$

$$= +\infty \quad \left(\text{ព្រោះ } \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{e^x - x}{x} \right)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x - x}{x}\right)$$

$$= +\infty$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

- រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

នោះ បន្ទាត់ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$

នោះ បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

២ • បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាមួយ

យើងមាន $f(x) = \dfrac{e^x - x}{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(e^x - x)' x - (x)'(e^x - x)}{(x)^2}$$

$$= \frac{(e^x - 1)x - (e^x - x)}{x^2}$$

$$= \frac{xe^x - x - e^x + x}{x^2}$$

$$= \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

$$= \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ ឬ $\dfrac{e^x(x-1)}{x^2} = 0$

$$e^x(x-1) = 0$$

$$x-1=0$$

$$x=1$$

សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)$ យើងបាន

$f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីរ $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=1$

នោះ អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=1$

ដូចនេះ f មានតម្លៃអប្បបរមាមួយ

- គណនាតម្លៃអប្បបរមានោះ

ចំពោះ $x=1 \Rightarrow f(1)=e-1$ ជាតម្លៃអប្បបរមា

ដូចនេះ $f(1)=e-1$ ជាតម្លៃអប្បបរមា

៣ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
	-1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$e-1$	↗ $+\infty$	

៤ • គណនាតម្លៃ $f(-1), f(2), f(3)$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{e^x-x}{x}$

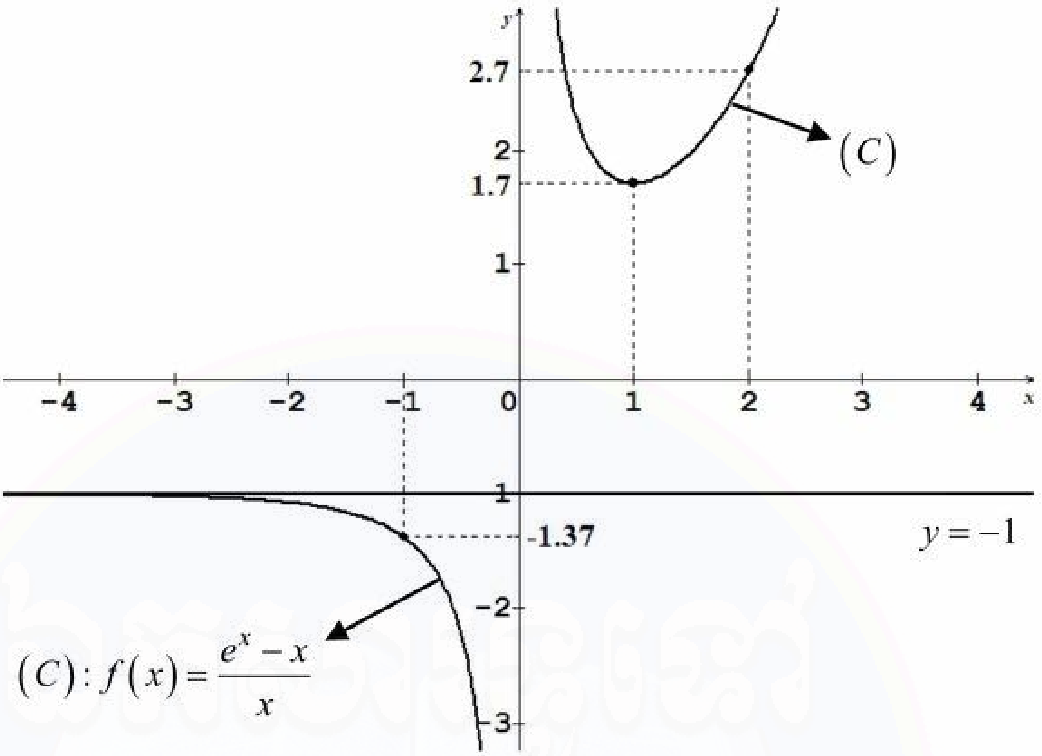
ចំពោះ $x=-1 \Rightarrow f(-1)=\dfrac{e^{-1}+1}{-1}=-1-e^{-1}$

$x=2 \Rightarrow f(2)=\dfrac{e^2-2}{2}$

$x=3 \Rightarrow f(3)=\dfrac{e^3-3}{3}$

ដូចនេះ $f(-1)=-1-e^{-1}; f(2)=\dfrac{e^2-2}{2}; f(3)=\dfrac{e^3-3}{3}$

- សង់ក្រាប (C)



៥ ចូរពិភាក្សាតាមក្រាបនូវអត្ថិភាពនិងសញ្ញាឫសនៃសមីការ $e^x = (m+1)x$ ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m

យើងមាន សមីការ $e^x = (m+1)x$

$$m+1=\frac{e^x}{x}$$

$$\Rightarrow m=\frac{e^x}{x}-1$$

$$m=\frac{e^x-x}{x}$$

គេបាន $m = f(x)$

តាមក្រាប (C) យើងបាន ចំពោះ $x_1 < x_2$

$m < -1$ នោះសមីការមានឫសមួយ $x < 0$

$m = -1$ នោះសមីការគ្មានឫស

$-1 < m < e-1$ នោះសមីការគ្មានឫស

$m = e-1$ នោះសមីការមានឫស $x = 1$

$m > e-1$ នោះសមីការមានឫសពីរ $x_2 > x_1 > 0$

វិញ្ញាសាទី១០

I គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=2+\sqrt{3}+i$ ។

១ ផ្ទៀងផ្ទាត់ម៉ូឌុលនៃ $|Z|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

២ បង្ហាញថា $Z=2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ រួចទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z

៣ ទាញបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

II គេឱ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $f(x)=\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ដែល $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ និង $f(0)=a^2+a$ ។

១ គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

២ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ 0

III ពងមាន់ 10 មាន 4 ស្អុយយើងជ្រើសរើសដោយចៃដន្យនូវពងមាន់ 3 ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម

១ A: ពងមាន់ទាំងអស់ស្អុយ

២ B: យ៉ាងតិចពងមាន់មួយល្អ

៣ C: ពងមាន់ពីរល្អ

IV ១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y'+4y=0$

២ គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): y''+4y'+4y=-4x$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (F)

៣ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F)

V ១ កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសប៉ារ៉ាបូល $(P): x^2-4x-4y+16=0$

២ រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល និងកំណុំរបស់អេលីប $(E): 9(x-3)^2+(y+2)^2=18$

VI នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន ។ គេមានចំណុច $I(1,0,1); A(-2,4,0); B(2,4,2)$ និង $C(2,3,1)$ ។

១ កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត I និងកាំ $r=3\sqrt{2}$

២ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D) កាត់តាម A និង B

៣ គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (D) និងស្វ៊ែ (S)

៤ បង្ហាញថា I,A,B មិនរត់ត្រង់គ្នា រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ IAB

៥ បង្ហាញថាចំណុច C មិននៅក្នុងប្លង់ (IAB) រួចគណនាមាឌចតុមុខ $IABC$

VII ១ គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=1+(1-x)e^{-x}$ ។

ក សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ g ។ រកតម្លៃបរមានៃ g

ខ បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន $g(x)>0$

២ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2+xe^{-x}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

ក រកលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ $(D): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

ខ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា។សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

គ សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតរបស់វា

<u>អត្រាកំណែ</u>

I ១ ផ្ទៀងផ្ទាត់ម៉ូឌុលនៃ $|Z|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

យើងមាន $Z=2+\sqrt{3}+i$

$$\Rightarrow |Z|=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1^2}$$

$$=\sqrt{2^2+2(2)\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2+1}$$

$$=\sqrt{4+4\sqrt{3}+4}$$

$$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{8+2\sqrt{12}}$$

$$=\sqrt{6+2\sqrt{6}\times\sqrt{2}+2}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

ដូចនេះ ម៉ូឌុលនៃ Z គឺ $|Z| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

២ • បង្ហាញថា $Z = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

យើងមាន $Z = 2 + \sqrt{3} + i$

$$= 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $Z = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

• ទាញរកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z

យើងមាន $Z = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$= 2\left(1 + \cos\frac{2\pi}{12} + \sin\frac{2\pi}{12}\right)$$

$$= 2\left(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1 + 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 2\left(2\cos^2\frac{\pi}{12} + 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $Z = 4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

៣ ទាញបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

យើងមាន $Z = 4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$$\Rightarrow |Z| = 4\cos\frac{\pi}{12}$$

$$|Z| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 4\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

II ១ គណនា $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

យើងមាន $f(x)=\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\times x\times\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\times\frac{2}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\times 2\right)$$

$$=2$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$

២ កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ 0

បើ f ជាប់ខាងស្តាំលុះត្រាតែ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

យើងមាន $f(0)=a^2+a$

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$

$$\Rightarrow a^2+a=2$$

$$a^2+a-2=0$$

$$(a+2)(a-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2=0 \\ a-1=0 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} a=-2 \\ a=1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $a=1; a-2$

III រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម

១ A: ពងមាន់ទាំងអស់ស្អុយ

បម្រាប់ពងមាន់ 10 មាន 4 ស្អុយគេចាប់ 3 ដោយចៃដន្យ

$\Rightarrow$ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10,3)=\dfrac{10!}{(10-3)!3!}$

$$=\frac{10\times 9\times 8}{2\times 3}$$

$$=120$$

ដោយ ពងមាន់ស្អុយមាន 4 ចាប់បាន 3

យើងបាន $n(A)=C(4,3)=\dfrac{4!}{3!(4-3)!}$

$$=4$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{1}{30}$

២ B: យ៉ាងតិចពងមាន់មួយល្អ

(B ជាព្រឹត្តការណ៍ផ្ទុយនៃ A)

$$\Rightarrow P(B)=1-P(A)$$

$$=1-\frac{1}{30}$$

$$=\frac{29}{30}$$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{29}{30}$

៣ C: ពងមាន់ពីរល្អ

ដោយ ពងមាន់ល្អមាន 6 ចាប់យក 2

ពងមាន់ស្អុយមាន 4 ចាប់យក 1

យើងបាន $n(C)=C(6,2)\times C(4,1)=\dfrac{6!}{2!(6-2)!}\times\dfrac{4!}{1!(4-1)!}$

$=15\times 4$

$=60$

$\Rightarrow P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{1}{2}$

IV ១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y'+4y=0$

យើងមាន $(E): y''+4y'+4y=0$

សមីការសំគាល់ $r^2+4r+4=0$

$(r+2)(r+2)=0$

$\Rightarrow r=-2$

យើងបាន ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ $y_c=(Ax+B)e^{-2x};(A,B\in\mathbb{R})$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ $y_c=(Ax+B)e^{-2x};(A,B\in\mathbb{R})$

២ កំណត់ចំនួនពិត a និង b

យើងមាន $(F): y''+4y'+4y=-4x$

ដោយ $g(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (F)

$g'(x)=a$

$g''(x)=0$

យក $g(x);\ g'(x)$ និង $g''(x)$ ជំនួសក្នុងសមីការ (F)

$\Rightarrow g''(x)+4g'(x)+4g(x)=-4x$

$0+4a+4(ax+b)=-4x$

$4a+4ax+4b=-4x$

$4ax+(4a+4b)=-4x$

$\Rightarrow\begin{cases}4a+4b=0\\4a=-4\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$

ដូចនេះ $a=-1;b=1$

៣ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F)

យើងមាន $y_c=(Ax+B)e^{-2x}\ (A,B\in\mathbb{R})$

$g(x)=-x+1$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (F)

យើងបាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F) គឺ

$$y=y_c+g(x)$$
$$=(Ax+B)e^{-2x}-x+1;(A,B\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F) គឺ

$$y=(Ax+B)e^{-2x}-x+1;(A,B\in\mathbb{R})$$

V ១ កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសប៉ារ៉ាបូល (P)

យើងមាន $(P):x^2-4x-4y+16=0$

$$x^2-4x=4y-16$$
$$(x^2-4x+2^2)=4y-16+4$$
$$(x-2)^2=4y-12$$
$$(x-2)^2=4(y-3)$$

សមីការមានរាង $(x-h)^2=4P(y-k)$

ដែល $h=2;k=3;4P=4\Rightarrow P=1$

យើងបាន កំណុំ $F(h,k+p)=(2,4)$

កំពូល $V(h,k)=(2,3)$

បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=k-p=3-1=2$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃកំពូល $V(2,3)$ កំណុំ $F(2,4)$

បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=2$

២ រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល និងកំណុំរបស់អេលីប (E)

យើងមាន $(E):\ 9(x-3)^2+(y+2)^2=18$

$$\frac{9(x-3)^2}{18}+\frac{(y+2)^2}{18}=\frac{18}{18}$$
$$\frac{(x-3)^2}{2}+\frac{(y+2)^2}{18}=1$$

សមីការមានរាង $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែល $(a>b>0)$

$\Rightarrow h=3;k=-2;a=3\sqrt{2};b=\sqrt{2};c=4$

យើងបាន ផ្ចិត $S(h,k)=(3,-2)$

កំពូល $V_1(h,k+a)=\left(3,-2+3\sqrt{2}\right)$

$V_2(h,k-a)=\left(3,-2-3\sqrt{2}\right)$

កំណុំ $F_1(h,k+c)=(3,2)$

$F_2(h,k-c)=(3,-6)$

ដូចនេះ ផ្ចិត $S(3,-2)$ កំណុំ $F_1(3,2)$ និង $F_2(3,-6)$

កំពូល $V_1\left(3,-2+3\sqrt{2}\right)$ និង $V_2\left(3,-2-3\sqrt{2}\right)$

VI ១ កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត I និងកាំ $r=3\sqrt{2}$

យើងមាន ផ្ចិត $I(1,0,1)$; $r=3\sqrt{2}$

យើងបាន សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(1,0,1)$ និង $r=3\sqrt{2}$ កំណត់ដោយ

$$(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

$$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=18$$

ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែ $(S):(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=18$

២ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D) កាត់តាម A និង B

ដោយ សមីការបន្ទាត់ (D) កាត់តាម A និង B

នោះ $\overrightarrow{AB}\parallel(D)$

$\overrightarrow{AB}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (D) ដែល $\overrightarrow{AB}=(4,0,2)$

យើងបាន សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (D) កាត់តាម $A(-2,4,0)$ ហើយមាន

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB}=(4,0,2)$ កំណត់ដោយ

$$(D):\begin{cases}x=at+x_0\\y=bt+y_0\\z=ct+z_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4t-2\\y=4\\z=2t\end{cases};\ (t\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់

$(D):x=4t-2;y=4;z=2t;(t\in\mathbb{R})$

៣ គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (D) និងស្វ៊ែ (S)

យើងមាន បន្ទាត់ $(D): x=4t-2; y=4; z=2t; (t\in\mathbb{R})$

ស្វ៊ែ $(S): (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=18$

យក បន្ទាត់ (D) ជំនួសក្នុងស្វ៊ែ (S)

$$\Rightarrow (4t-2-1)^2+4^2+(2t-1)^2=18$$

$$(4t-3)^2+16+(2t-1)^2=18$$

$$16t^2-24t+9+16+4t^2-4t+1=18$$

$$16t^2-24t+9+16+4t^2-4t+1-18=0$$

$$20t^2-28t+8=0$$

$$5t^2-7t+2=0$$

$$\Rightarrow t_1=1, t_2=\frac{2}{5}$$

+ចំពោះ $t=\frac{2}{5}$ ជំនួសក្នុងបន្ទាត់ (D)

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4\left(\frac{2}{5}\right)-2 \\ y=4 \\ z=2\left(\frac{2}{5}\right) \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x=-\frac{2}{5} \\ y=4 \\ z=\frac{4}{5} \end{cases}$$

+ចំពោះ $t=1$ ជំនួសក្នុងបន្ទាត់ (D)

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4(1)-2 \\ y=4 \\ z=2(1) \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases}$$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (D) និងស្វ៊ែ (S) គឺ

$\left(\frac{-2}{5}, 4, \frac{4}{5}\right)$ និង $(2,4,2)$

៤ • បង្ហាញថា I, A, B មិនរត់ត្រង់គ្នា

ចំណុច I, A, B រត់មិនត្រង់គ្នា កាលណា $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}\neq 0$

យើងមាន $\overrightarrow{IA}=(-3,4,-1)$

$\overrightarrow{IB}=(1,4,1)$

$$\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&4&-1\\1&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-1\\4&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3&-1\\1&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3&4\\1&4\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(4+4)\vec{i}-(-3+1)\vec{j}+(-12-4)\vec{k}$$

$$=8\vec{i}+2\vec{j}-16\vec{k}$$

$$=(8,2,-16)$$

ដោយ $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}\neq 0$

នោះ ចំណុច I,A,B រត់មិនត្រង់គ្នា

ដូចនេះ I,A,B រត់មិនត្រង់គ្នា

- គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ IAB

តាមរូបមន្ត $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\left|\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}\right|}{2}$

ដោយ $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=(8,2,-16)$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}\right|=\sqrt{8^2+2^2+(-16)^2}$$

$$=\sqrt{64+4+256}$$

$$=\sqrt{324}$$

$$=18$$

យើងបាន $S_{\Delta ABC}=\dfrac{18}{2}=9$ (ឯកតាផ្ទៃ)

ដូចនេះ $S_{\Delta ABC}=9$ (ឯកតាផ្ទៃ)

៥ • បង្ហាញថាចំណុច C មិននៅក្នុងប្លង់ (IAB)

ដោយ ប្លង់ (IAB) កាត់តាមបីចំណុច I,A,B

$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}\right)\perp(IAB)$$

ដែល $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=(8,2,-16)$

យើងបាន សមីការប្លង់ (IAB) កាត់តាម $I(1,0,1)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=(8,2,-16)$ កំណត់ដោយ

$$(IAB):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$8(x-1)+2(y)-16(z-1)=0$$

$$8x+2y-16z+16-8=0$$

$$8x+2y-16z+8=0$$

$$4x+y-8z+4=0$$

យក $C(2,3,1)$ ជំនួសក្នុងប្លង់ (IAB)

$$\Rightarrow 4(2)+(3)-8(1)+4=0$$

$$8+3-8+4=0$$

$7=0$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ ចំណុច C មិនស្ថិតក្នុងប្លង់ (IAB)

• គណនាមាឌចតុមុខ $IABC$

តាមរូបមន្ត $V_{IABC}=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{IC}\right|}{6}$

ដោយ $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=(8,2,-16)$

$\overrightarrow{IC}=(1,3,0)$

$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{IC}=(8)(1)+(2)(3)+(-16)(0)$$

$$=8+6+0$$

$$=14$$

យើងបាន $V_{IABC}=\dfrac{14}{6}=\dfrac{7}{3}$ (ឯកតាមាឌ)

ដូចនេះ $V_{IABC}=\dfrac{7}{3}$ (ឯកតាមាឌ)

VII ១ ក • សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ g

យើងមាន $g(x)=1+(1-x)e^{-x}$

ដោយ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

$$\Rightarrow g'(x)=(1-x)'e^{-x}+\left(e^{-x}\right)'(1-x)$$

$$=-e^{-x}-e^{-x}(1-x)$$

$$=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}$$

$$=xe^{-x}-2e^{-x}$$

$$=(x-2)e^{-x}$$

$g'(x)=0$ ឬ $(x-2)e^{-x}=0$; $e^{-x}>0$

$$x-2=0$$

$$x=2$$

សិក្សាសញ្ញា $g'(x)$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា យើងបាន

g ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $(-\infty,2)$

g ជាអនុគនមន៍កើនលើចន្លោះ $(2,+\infty)$

• រកតម្លៃបរមានៃ g

អនុគមន៍ g' ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=2$

នោះ អនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x=2$

ដែល $g(2)=1-e^{-2}$ ជាតម្លៃអប្បបរមា

ដូចនេះ $g(2)=1-e^{-2}$ ជាតម្លៃអប្បបរមា

ខ បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន $g(x)>0$

តាមតារាង អនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x=2$

នោះ $g(x)\geq g(2)$

ដោយ $g(2)=1-e^{-2}>0$

$\Rightarrow g(x)>0$

ដូចនេះ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន $g(x)>0$

២ ក • រកលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

យើងមាន $f(x)=x+2+xe^{-x}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+xe^{-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}}+\frac{2}{e^{-x}}+x\right)$$

$$=-\infty \quad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=0;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2+xe^{-x}\right)$$

$= +\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$)

ដូចនេះ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

• ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(D): y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

យើងមាន ខ្សែកោង (C) $f(x) = x + 2 + xe^{-x}$

បន្ទាត់ $(D): y = x + 2$

$$\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - (x+2)\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\left(x + 2 + xe^{-x}\right) - (x+2)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} xe^{-x}$$

$$= 0$$

ដោយ $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - (x+2)\right] = 0$

នោះ បន្ទាត់ $(D): y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(D): y = x + 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$

ខ • ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា

យើងមាន $f(x) = x + 2 + xe^{-x}$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + (x)'e^{-x} + x\left(e^{-x}\right)'$$

$$= 1 + e^{-x} - xe^{-x}$$

$$= 1 + (1 - x)e^{-x}$$

ដោយ $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x}$

$$\Rightarrow f'(x) = g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x}$$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$; $g(x) > 0$

ដូចនេះ $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា

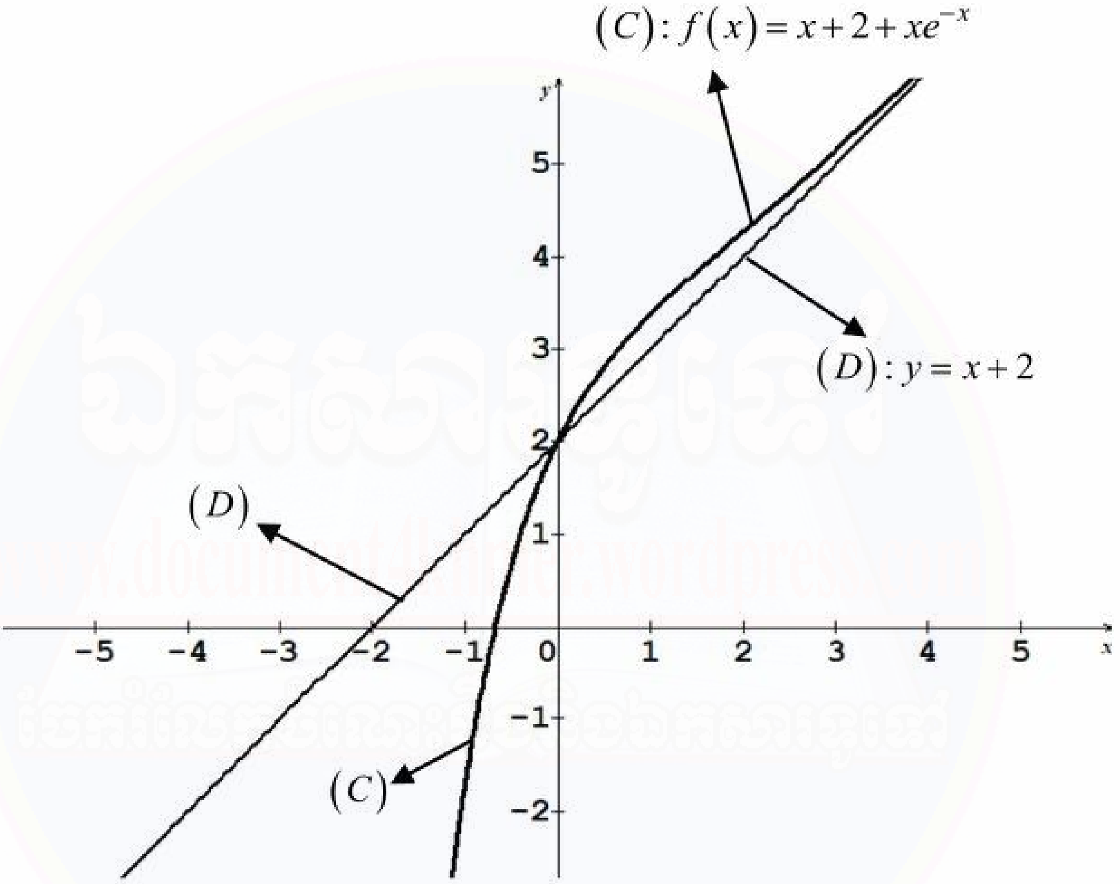
• សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

គ សង់ក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូត

$(D): y = x + 2$

x	0	-2
y	2	0



វិញ្ញាសាទី១១

I គេឱ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{e^{2015x}-1}{\ln(1+x)}$ ដែល $x\neq 0$ និង $f(0)=m$ ។

១ គណនា $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

២ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

II គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1=(2i+1)(1+i)^2(1-2i)$,$Z_2=\dfrac{(1-2i)(1+i)}{1-i}$ និង $Z=\dfrac{Z_1}{Z_2}+2$ ។

១ សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត

២ រកម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃ Z រួចសរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

III គេឱ្យអនុគមន៍ $h(x)=\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+2)}$ ដែល $x\neq -1$ និង $x\neq -2$ ។

១ កំណត់តម្លៃចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $h(x)=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}$

២ គណនា $I(x)=\int h(x)\,dx$ ដោយដឹងថា $I(0)=\ln 3$ ។

IV កូនសោរមួយចង្កោមមានកូនសោរបន្ទប់ A ចំនួន 3 បន្ទប់ B ចំនួន 4 និងបន្ទប់ C ចំនួន 5 ។ គេចាប់យកកូនសោរ 3 ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

១ កូនសោរបន្ទប់ A ទាំងបី

២ កូនសោរបន្ទប់ A មួយនិងបន្ទប់ B ចំនួន 2

៣ កូនសោរបន្ទប់ B មួយនិងបន្ទប់ C ចំនួន 2 ។

V ១ ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''+4y=0$ ដោយដឹងថា $y(0)=1$ និង $y'(0)=4$ ។

២ គេឱ្យ $f(x)=2015e^{-x}$ ។ បង្ហាញថា $S=y'''+y''+y'+y+2015$ មានតម្លៃថេរ ។

VI រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃអ៊ីពែបូលដែលមានសមីការ $16x^2-9y^2-32x-36y-164=0$ រួចសង់អ៊ីពែបូល។

VII ក្នុងលំហមួយគេឱ្យបួនចំណុច $A(0,1,1);B(1,0,0);C(-1,2,1)$ និង

$D(0,1,2)$ ។

១ គណនា $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$ ។ ទាញបញ្ជាក់ថា A,B,C និង D ស្ថិតនៅលើប្លង់តែមួយ

២ កំណត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A,B និង C ។ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

៣ ក បង្ហាញថា $E(2,3,-1)$ មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (ABC)

ខ គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $EABC$

គ ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច E ទៅប្លង់ (ABC) ។

VIII អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=2+\dfrac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាប (C) ។

១ រក $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

២ គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍

៣ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីមតូតដេក ។

៤ សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។ ($e=2.7, e^{0.5}=1.65$)

៥ គណនាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e^{0.5}$ ។

អត្រាកំណែ

I ១ គណនា $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{e^{2015x}-1}{\ln(1+x)}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2015x}-1}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2015x}-1}{2015x}\times 2015x\times\frac{x}{\ln(1+x)}\times\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2015x}-1}{2015x}\times\frac{x}{\ln(1+x)}\times 2015\right)$$

$= 2015$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0} f(x) = 2015$

២ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$

លុះត្រាតែ $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$

យើងមាន $f(0)=m$ និង $\lim_{x\to 0} f(x) = 2015$

$\Rightarrow m = 2015$

ដូចនេះ $m = 2015$

II ១ សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $z_1=(2i+1)(1+i)^2(1-2i)$ និង $z_2=\dfrac{(1-2i)(1+i)}{1-i}$

ដោយ $z=\dfrac{z_1}{z_2}+2=\dfrac{(2i+1)(1+i)^2(1-2i)}{\dfrac{(1-2i)(1+i)}{1-i}}+2$

$$=(2i+1)(1+i)^2(1-2i)\frac{1-i}{(1-2i)(1+i)}+2$$

$$=(2i+1)(1+i)(1-i)+2$$

$$=(2i+1)(2)+2$$

$$=4i+2+2$$

$$=4+4i$$

ដូចនេះ $z=4+4i$

២ • រកម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃ Z និងសរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $z=4+4i$

$$=4(1+i)$$

$$=4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

យើងបាន អាគុយម៉ង់ $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi ;(k \in z)$

ម៉ូឌុល $r = 4\sqrt{2}$

ដូចនេះ $z = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$r = 4\sqrt{2}$ និង $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi ;(k \in z)$

III ១ កំណត់តម្លៃចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $h(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

យើងមាន $h(x) = \frac{3x+5}{(x+1)(x+2)}$

$$\Rightarrow \frac{3x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow 3x+5 = Ax + 2A + Bx + B$$

$$3x+5 = (A+B)x + 2A + B$$

$$\begin{cases} A+B=3 & (1) \\ 2A+B=5 & (2) \end{cases}$$

$(1): A+B=3$ ឬ $A=3-B$ ជំនួសចូល (2)

$(2) \Rightarrow 2(3-B) + B = 5$

$6 - 2B + B = 5$

$-B = -1$

$\Rightarrow B = 1$

យក $B=1$ ជំនួសចូល (1)

$(1) \Rightarrow A = 3-1$

$= 2$

ដូចនេះ $A = 2$ និង $B = 1$

២ គណនា $I(x) = \int h(x)dx$ ដោយដឹងថា $I(0) = \ln 3$

យើងមាន $h(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2}$

$$\Rightarrow I(x)=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=2\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{1}{x+2}dx$$
$$=2\ln|x+1|+\ln|x+2|+c;(c\in\mathbb{R})$$

ដោយ $I(0)=\ln 3$

$$\Rightarrow \ln 3=2\ln 1+\ln 2+c$$
$$\ln 3=\ln 2+c$$
$$c=\ln 3-\ln 2$$
$$=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$\Rightarrow I(x)=2\ln|x+1|+\ln|x+2|+\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

ដូចនេះ $I(x)=2\ln|x+1|+\ln|x+2|+\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

IV រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

១ កូនសោរបន្ទប់ A ទាំងបី

ដោយ កូនសោរបន្ទប់ទាំងអស់ 12 ត្រូវចាប់យក 3

$\Rightarrow$ ករណីអាច $n(S)=C(12,3)=\dfrac{12!}{(12-3)!3!}$

$$=\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2}$$
$$=220$$

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានសោរបន្ទប់ A ទាំង 3

ដោយ បន្ទប់ A មានកូនសោរ 3 ត្រូវចាប់យក 3

យើងបាន $n(A)=C(3,3)=\dfrac{3!}{3!(3-3)!}$

$$=1$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$
$$=\frac{1}{220}$$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{1}{220}$

២ កូនសោរបន្ទប់ A មួយនិងបន្ទប់ B ចំនួន 2

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានសោរបន្ទប់ A មួយនិងបន្ទប់ B ពីរ

ដោយ បន្ទប់ A មានកូនសោរ 3 ត្រូវចាប់យក 1

បន្ទប់ B មានកូនសោរ 4 ត្រូវចាប់យក 2

យើងបាន $n(B)=C(3,1)\times C(4,2)=\frac{3!}{1!(3-1)!}\times\frac{4!}{2!(4-2)!}$

$=3\times\frac{4\times 3}{2}$

$=18$

$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$

$=\frac{18}{220}$

$=\frac{9}{110}$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{9}{110}$

៣ កូនសោរបន្ទប់ B មួយនិងបន្ទប់ C ចំនួន 2

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានកូនសោរបន្ទប់ B មួយនិងបន្ទប់ C ពីរ

ដោយ បន្ទប់ B មានកូនសោរ 4 ត្រូវចាប់យក 1

បន្ទប់ C មានកូនសោរ 5 ត្រូវចាប់យក 2

យើងបាន $n(C)=C(4,1)\times C(5,2)=\frac{4!}{1!(4-1)!}\times\frac{5!}{2!(5-2)!}$

$=4\times\frac{5\times 4}{2}$

$=40$

$\Rightarrow P(C)=\frac{40}{220}$

$=\frac{2}{11}$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{2}{11}$

V ១ ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''+4y=0$

យើងមាន $(E): y''+4y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2+4=0$

$$r^2=-4$$

$$\Rightarrow r=\pm\sqrt{-4}$$

$$=\pm 2i$$

$$\Rightarrow y_c=\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)e^{0x}$$

$$=\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right);\left(A,B\in\mathbb{R}\right)$$

$$y_c'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$$

ដោយ $y(0)=1$ និង $y'(0)=4$

$$\Rightarrow\begin{cases}A\cos 0+B\sin 0=1\\-2A\sin 0+2B\cos 0=4\end{cases}$$

$\begin{cases}A=1\\2B=4\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}A=1\\B=2\end{cases}$

យើងបាន $y_c=\cos 2x+2\sin 2x$

ដូចនេះ ចម្លើយសមីការ (E) គឺ: $y_c=\cos 2x+\sin 2x$

២ បង្ហាញថា $S=y'''+y''+y'+y+2015$ មានតម្លៃថេរ

យើងមាន $y=f(x)=2015e^{-x}$

$$\Rightarrow y'=-2015e^{-x}$$

$$y''=2015e^{-x}$$

$$y'''=-2015e^{-x}$$

$$\Rightarrow S=-2015e^{-x}+2015e^{-x}-2015e^{-x}+2015e^{-x}+2015$$

$$=2015$$

ដូចនេះ $S=2015$ មានតម្លៃថេរ

VI • រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃអ៊ីពែបូល

សមីការ $16x^2-9y^2-32x-36y-164=0$

$$16x^2-32x-9y^2-36y=164$$

$$16\left(x^2-2x\right)-9\left(y^2+4y\right)=164$$

$$16\left(x^2-2x+1\right)-9\left(y^2+4y+4\right)=164+16-36$$

$$16(x-1)^2-9(y+4)^2=144$$

$$\frac{16(x-1)^2}{144}-\frac{9(y+4)^2}{144}=1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+4)^2}{16}=1$$

សមីការមានរាង $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

ដែល $h=1, k=-4, a=3, b=4, c=5$

យើងបាន កូអរដោនេកំពូល $V_1(h+a,k)=(4,-4)$

$V_2(h-a,k)=(-2,-4)$

កំណុំ $F_1=(h+c,k)=(6,-4)$

$F_2=(h-c,k)=(-4,-4)$

ផ្ចិត $S(h,k)=(1,-4)$

សមីការអាស៊ីមតូតមានរាង $y=k\pm\frac{b}{a}(x-h)$

យើងបាន $\begin{cases} y_1=-4+\frac{4}{3}(x-1) \\ y_2=-4-\frac{4}{3}(x-1) \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} y_1=-4+\frac{4}{3}x-\frac{4}{3} \\ y_2=-4-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3} \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} y_1=\frac{4}{3}x-\frac{16}{3} \\ y_2=-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3} \end{cases}$

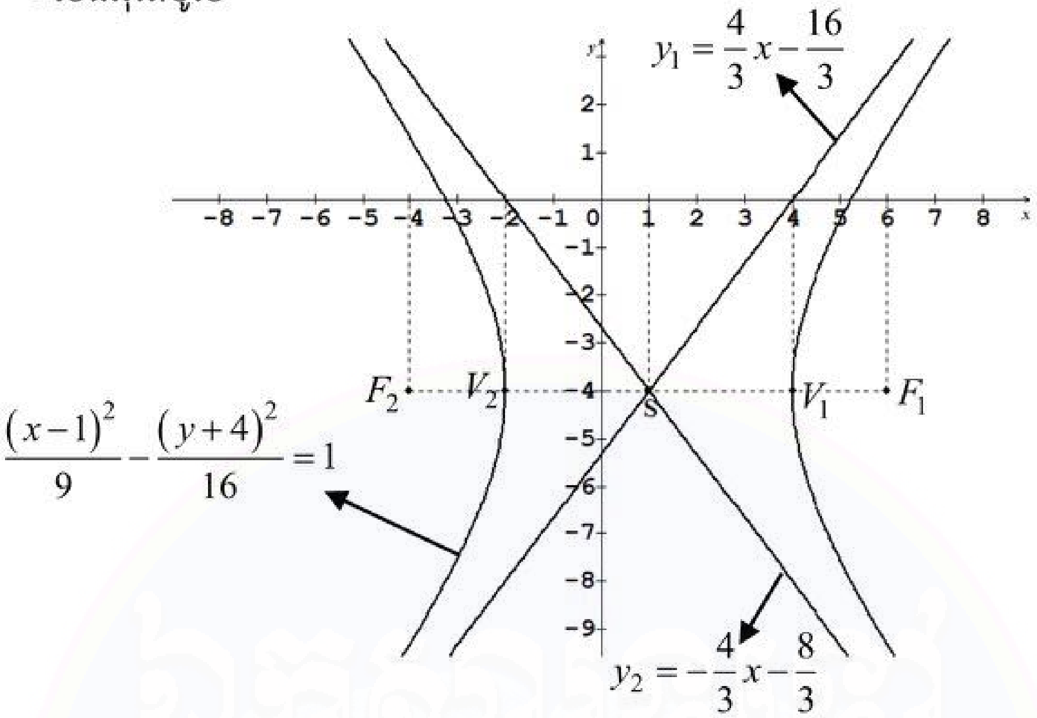
ដូចនេះ កូអរដោនេផ្ចិត $S(1,-4)$

កំពូល $V_1(4,-4)$ និង $V_2(-2,-4)$

កំណុំ $F_1(6,-4)$ និង $F_2(-4,-4)$

សមីការអាស៊ីមតូត $y_1=\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}$ និង $y_2=-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$

• សង់អ៊ីពែបូល



VII ១ • គណនា $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$

យើងមាន $A(0,1,1), B(1,0,0), C(-1,2,1)$ និង $D(0,1,2)$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = (1-0, 0-1, 0-1) = (1,-1,-1)$

$\overrightarrow{AC} = (-1-0, 2-1, 1-1) = (-1,1,0)$

$\overrightarrow{AD} = (0-0, 1-1, 2-1) = (0,0,1)$

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(0) - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}(0) + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}(1)$$

$$= (0+1)(0) - (0-1)(0) + (1-1)(1)$$

$$= 0$$

ដូចនេះ $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD} = 0$

• បញ្ជាក់ថា A, B, C និង D ស្ថិតនៅលើប្លង់តែមួយ

ដោយ $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD} = 0$

នោះ ចំណុច A, B, C និង D ស្ថិតនៅលើប្លង់តែមួយ

ដូចនេះ A, B, C និង D ស្ថិតនៅលើប្លង់តែមួយ

២ • កំណត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A, B និង C

ដោយ ប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A,B និង C

នោះ $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(0+1)\vec{i}-(0-1)\vec{j}+(1-1)\vec{k}$$

$$=\vec{i}+\vec{j}$$

យើងបាន: សមីការប្លង់ (P) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$

ហើយកាត់តាមចំណុច $A(0,1,1)$ កំណត់ដោយ

$$(P): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$1(x-0)+1(y-1)+0(z-1)=0$$

$$x-y-1=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(P): x+y-1=0$

- គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(1)^2+(1)^2+(0)^2}$$

$$=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ឯកតាផ្ទៃ)

៣ ក បង្ហាញថា $E(2,3,-1)$ មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (ABC)

យើងមាន ប្លង់ $(P): x+y-1=0$ ចំណុច $E(2,3,-1)$

យក E ជំនួសក្នុង (P)

យើងបាន $(P): 2+3-1=0$

$$4=0 \quad (\text{មិនផ្ទៀងផ្ទាត់})$$

ដូចនេះ E មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (ABC)

ខ គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $EABC$

តាមរូបមន្ត $V_{EABC}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{EA}\times\overrightarrow{EB}\right)\cdot\overrightarrow{EC}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{EA}=(-2,-2,2)$, $\overrightarrow{EB}=(-1,-3,1)$ និង $\overrightarrow{EC}=(-3,-1,2)$

$$\left(\overrightarrow{EA}\times\overrightarrow{EB}\right)\cdot\overrightarrow{EC}=\begin{vmatrix}-3 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 2\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix}(-3)-\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}(-1)+\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & -3\end{vmatrix}(2)$$

$$=(-2+6)(-3)+(-2+2)(-1)+(6-2)(2)$$

$$=-12+8$$

$$=-4$$

យើងបាន $V_{EABC}=\frac{|-4|}{6}=\frac{2}{3}$ (ឯកតាមាឌ)

ដូចនេះ មាឌតេត្រាអ៊ែត $V_{EABC}=\frac{2}{3}$ (ឯកតាមាឌ)

គ រកចម្ងាយពីចំណុច E ទៅប្លង់ (ABC)

តាមរូបមន្ត $V_{EABC}=\frac{1}{3}\times S_{\Delta ABC}\times d\left[E,(ABC)\right]$

$$\Rightarrow d\left[E,(ABC)\right]=\frac{3V_{EABC}}{S_{\Delta ABC}}$$

ដោយ $V_{EABC}=\frac{2}{3}$ និង $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow d\left[E,(ABC)\right]=\frac{3\left(\frac{2}{3}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}$$ (ឯកតាប្រវែង)

ដូចនេះ $d\left[E,(ABC)\right]=2\sqrt{2}$ (ឯកតាប្រវែង)

VIII ១ • រក $\lim_{x\to 0^+}f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2+\frac{\ln x}{x^2}\right)$$

$= -\infty$ (ព្រោះ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{\ln x}{x^2}\right)$

$= 2$ (ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$)

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

- រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

នោះ បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

នោះ បន្ទាត់ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

បន្ទាត់ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

២ • គណនាដេរីវេ $f'(x)$

យើងមាន $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\ln x)'(x^2) - (x^2)'(\ln x)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x^2 - (2x)(\ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{x(1-2\ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{1-\ln x}{x^3}$$

ដូចនេះ $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$

• សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

$f'(x)=0$ ឬ $\dfrac{1-2\ln x}{x^3}=0$

$$1-2\ln x=0$$

$$\ln x=\frac{1}{2}$$

$$x=e^{\frac{1}{2}}$$

សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

តាមតារាងសញ្ញាយើងបាន

f' ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=e^{\frac{1}{2}}$

នោះ អនុគមន៍ f មានអតិបរមាត្រង់ $x=e^{\frac{1}{2}}$

ដែល $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=2.18$ ជាតម្លៃអតិបរមា

សង់តារាងអថេរភាព

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2.18	↘	2

៣ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីមតូតដេក

យើងមាន ខ្សែកោង $(C): f(x)=2+\dfrac{\ln x}{x^2}$

អាស៊ីមតូតដេក $y=2$

$$\Rightarrow 2+\frac{\ln x}{x^2}=2$$

$$\frac{\ln x}{x^2}=0$$

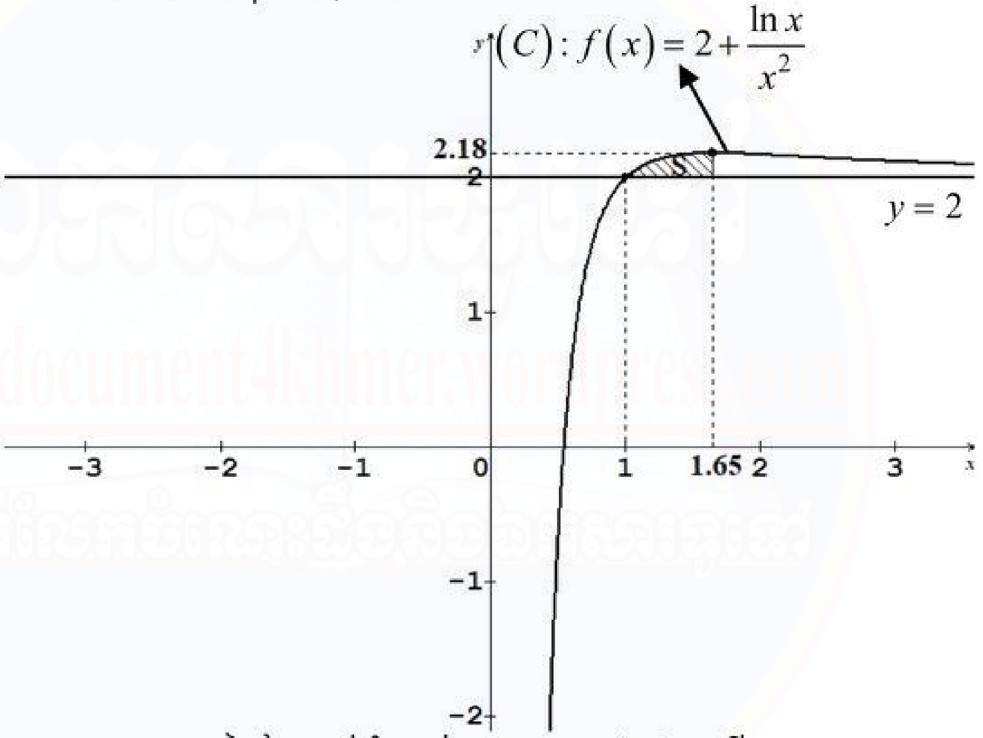
$$\Rightarrow x=e^0$$

$$=1$$

យើងបាន ចំណុចប្រសព្វរវាង (c) និងអាស៊ីមតូតដេកគឺ $(1,2)$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាង (c) និងអាស៊ីមតូតដេកគឺ $(1,2)$

៤ សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ



៥ គណនាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e^{0.5}$

យើងបាន $S=\int_1^{e^{0.5}}\left[f(x)-y\right]dx$

$$=\int_1^{e^{0.5}}\left(2+\frac{\ln}{x^2}-2\right)dx$$

$$=\int_1^{e^{0.5}}\frac{\ln x}{x^2}\int_1^{e^{0.5}}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx$$

តាង $u=\ln x \qquad \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

$$du=\frac{1}{x^2} \qquad \Rightarrow v=\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\int_1^{e^{0.5}}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left(-\frac{\ln x}{x^2}\right)\Bigg|_1^{e^{0.5}}-\int_1^{e^{0.5}}\left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\left(-\frac{\ln x}{x^2}\right)\Bigg|_1^{e^{0.5}}+\int_1^{e^{0.5}}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\left(-\frac{\ln x}{x^2}\right)\Bigg|_1^{e^{0.5}}-\left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^{e^{0.5}}$$

$$=\left[-\left(\frac{\ln e^{0.5}}{e^{0.5}}-\frac{\ln 1}{1}\right)\right]-\left[\frac{1}{e^{0.5}}-\frac{1}{1}\right]$$

$$=-\left(\frac{0.5}{e^{0.5}}-\frac{0}{1}\right)-\left(\frac{1}{e^{0.5}}-1\right)$$

$$=-\frac{0.5}{e^{0.5}}-\frac{1}{e^{0.5}}+1$$

$$=-\frac{1.5}{e^{0.5}}+1$$

$$=\frac{-1.5+1.65}{1.65}$$

$$=\frac{0.15}{1.65}$$

$=0.09$ (ឯកតាផ្ទៃ)

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃប្លង់គឺ $S=0.09$ (ឯកតាផ្ទៃ)

វិញ្ញាសាទី១២

I គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-3x-2}{-3x^2+4x-3}$ ខ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{2x-\pi}$

គ $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}}$

II គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=2+\left(\sqrt{12}+i\sqrt{12}\right)$ និង $z_2=2-\left(\sqrt{12}-i\sqrt{12}\right)$ ។

ក គណនា $U=z_1+z_2$ និង $V=\overline{z_1}-z_2$ ។

ខ សរសេរ U និង V ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

III គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x\left(1+x^4\right)}$ ដែល x ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។

ក ចូរកំណត់បីចំនួនពិត A,B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{Bx^3+C}{1+x^4}$ ។

ខ គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x)dx$ ។

IV ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លីក្រហម 5 ឃ្លីខៀវ 6 និងឃ្លីស 4 ។ គេចាប់យកឃ្លី 3 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យតែម្តងគត់ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា

ខ ចាប់បានឃ្លីខៀវ 2 ក្នុងចំណោមឃ្លីទាំង 3

គ ចាប់បានឃ្លីក្រហមមួយយ៉ាងតិច

ឃ ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា

V គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-4y'+2y=4$ ។

ក រកអនុគមន៍ថេរ k ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ។

ខ ដោះស្រាយសមីការ $y''-4y'+2y=0$ ។

គ រកចម្លើយពិសេសនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=2\sqrt{2}$ និង $y'(0)=0$ ។

VI ១ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យចំណុច $A(2,0,1); B(0,1,3)$ និង $C(0,3,2)$ ។

ក គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។ បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$

និង $\overrightarrow{BC}$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់ ។ គណនាផលគុណ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ ។

ខ រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AC]$ ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B\in(S)$ ។

២ រកសមីការនៃអេលីបដែលមានកំពូលពីរជាចំណុច $(-3,2)$ និង $(5,2)$ និងអ័ក្សតូចប្រវែង 4 ឯកតា ។

VII គេឱ្យខ្សែកោង $(C): y=f(x)=\dfrac{1+x^2+2\ln x}{x^2}$ ។

ក រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f រួចគណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ ។

ខ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាប (C) ។

គ គណនាដេរីវេទីមួយនៃ f រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានអតិបរមាមួយ ។ សង់តារាងធរថេរភាពនៃ f ។

ឃ រកចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីមតូតរបស់វា ។

ង សង់ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ ប្រើក្រាប (C) ទាញរកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $(m-1)x^2-2\ln x-1=0$ គ្មានឫស ។

<u>អត្រាកំណែ</u>

I គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-3x-2}{-3x^2+4x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(4-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(-3+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{-3+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}$$
$$=-\frac{4}{3}$$

ដូចនេះ
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-3x-2}{-3x^2+4x-3}=-\frac{4}{3}$$

ខ
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{2x-\pi}$$

តាង $u=\frac{\pi}{2}-x \quad \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-u$

ដោយ $x\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $u\to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{2x-\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos 3\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)-\pi}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-3u\right)}{\pi-2u-\pi}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi-3u\right)}{-2u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{-\sin(\pi-3u)}{-2u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\sin 3u}{-2u}$$

$$=\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin 3u}{3u}\times\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{2x-\pi}=\frac{3}{2}$

គ $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}\right)}{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}\right)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}\right)}{\left[\left(\sqrt{x+a}\right)^2-\left(\sqrt{2a}\right)^2\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}\right)}{(x+a-2a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{\sqrt{2a}+\sqrt{2a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2a}}{2\sqrt{a}} = \sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}} = \sqrt{2}$

II ក គណនា $U = z_1 + z_2$ និង $V = \overline{z_1} - z_2$

យើងមាន $z_1 = 2+\left(\sqrt{12}+i\sqrt{12}\right)$ នោះ $\overline{z_1} = 2+\sqrt{12}-i\sqrt{12}$

$$z_2 = 2-\left(\sqrt{12}-i\sqrt{12}\right)$$

$$U = z_1 + z_2 = 2+\left(\sqrt{12}+i\sqrt{12}\right)+2-\left(\sqrt{12}-i\sqrt{12}\right)$$

$$= 2+\sqrt{12}+i\sqrt{12}+2-\sqrt{12}+i\sqrt{12}$$

$$= 4+2i\sqrt{12}$$

$$= 4+4i\sqrt{3}$$

$$V = \overline{z_1} - z_2 = 2+\sqrt{12}-i\sqrt{12}-\left[2-\left(\sqrt{12}-i\sqrt{12}\right)\right]$$

$$= 2+\sqrt{12}-i\sqrt{12}-2+\sqrt{12}-i\sqrt{12}$$

$$= 2\sqrt{12}-2i\sqrt{12}$$

$$= 4\sqrt{3}-4i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $U = 4+4i\sqrt{3}$ និង $V = 4\sqrt{3}-4i\sqrt{3}$

ខ សរសេរ U និង V ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $U = 4+4i\sqrt{3}$

$$= 8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$V = 4\sqrt{3}-4i\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3}(1-i)$$

$$= 4\sqrt{3}\times\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= 4\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= 4\sqrt{6}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $U = 8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ និង $V = 4\sqrt{6}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

III ក ចូរកំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{Bx^3+C}{1+x^4}$

យើងមាន $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{Bx^3+C}{1+x^4}$

$$=\frac{A(1+x^4)+(Bx^3+C)x}{x(1+x^4)}$$

$$=\frac{A+Ax^4+Bx^4+Cx}{x(1+x^4)}$$

$$=\frac{(A+B)x^4+Cx+A}{x(1+x^4)}$$

ដោយ $f(x)=\frac{1}{x(1+x^4)}$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\C=0\\A=1\end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases}A=1\\B=-1\\C=0\end{cases}$$

ដូចនេះ $A=1, B=-1$ និង $C=0$

ខ គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x)\,dx$

ចំពោះ $A=1, B=-1$ និង $C=0$ នោះ $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x^3}{1+x^4}$

យើងបាន $I=\int f(x)\,dx$

$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^3}{1+x^4} \right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

$$= \ln|x| - \int \frac{\left(1+x^4\right)'}{1+x^4} dx$$

$$= \ln|x| - \ln\left(1+x^4\right) + c \ ; \ (c \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ $I = \ln|x| - \ln\left(1+x^4\right) + c \ ; \ (c \in \mathbb{R})$

IV រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោមៈ

ក ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា

ដោយ ឃ្លីទាំងអស់មាន 15 គ្រាប់ ចាប់យក 3 គ្រាប់

យើងបាន $n(S) = C(15,3) = \frac{15!}{(15-3)!3!}$

$$= \frac{15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3}$$

$$= 455$$

ដោយ ឃ្លីក្រហមមាន 5 គ្រាប់ ចាប់យក 1 គ្រាប់

ឃ្លីខៀវមាន 6 គ្រាប់ ចាប់យក 1 គ្រាប់

ឃ្លីសមាន 4 គ្រាប់ ចាប់យក 1 គ្រាប់

យើងបាន $n(A) = C(5,1) \times C(6,1) \times (4,1)$

$$= 5 \times 6 \times 4$$

$$= 120$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$$

ដូចនេះ $P(A) = \frac{24}{91}$

ខ ចាប់បានឃ្លីខៀវ 2 ក្នុងចំណោមឃ្លីទាំង 3

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានឃ្លីខៀវ 2 ក្នុងចំណោមឃ្លីទាំង 3

ដោយ ឃ្លីខៀវមាន 6 គ្រាប់ ចាប់យក 2 គ្រាប់

ឃ្លីមិនមែនខៀវមាន 9 គ្រាប់ ចាប់យក 1 គ្រាប់

យើងបាន $n(B)=C(6,2)\times C(9,1)=\dfrac{6!}{(6-2)!2!}\times 9$

$$=\frac{6\times 5}{1\times 2}\times 9$$
$$=135$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{135}{455}=\frac{27}{91}$$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{27}{91}$

គ ចាប់បានឃ្លីក្រហមមួយយ៉ាងតិច

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានឃ្លីក្រហមមួយយ៉ាងតិច

C' ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់មិនបានឃ្លីក្រហមមួយសោះ

(C' ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃ C)

ដោយ ឃ្លីមិនមែនក្រហមមាន 10 គ្រាប់ ចាប់យក 3 គ្រាប់

យើងបាន $n(C')=C(10,3)=\dfrac{10!}{(10-3)!3!}$

$$=\frac{10\times 9\times 8}{1\times 2\times 3}$$
$$=120$$

$$\Rightarrow P(C')=\frac{n(C')}{n(S)}=\frac{120}{455}=\frac{24}{91}$$

$$\Rightarrow P(C)=1-P(C')=1-\frac{24}{91}$$
$$=\frac{67}{91}$$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{67}{91}$

ឃ ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា

តាង D ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា

ដោយ ឃ្លីក្រហមមាន 5 គ្រាប់ ចាប់យក 3 គ្រាប់

ឃ្លីខៀវមាន 6 គ្រាប់ ចាប់យក 3 គ្រាប់

ឃ្លីសមាន 4 គ្រាប់ ចាប់យក 3 គ្រាប់

យើងបាន $n(D)=C(5,3)\times C(6,3)\times C(4,3)$

$$=\frac{5!}{(5-3)!3!}+\frac{6!}{(6-3)!3!}+\frac{4!}{(4-3)!3!}$$

$$=\frac{5\times 4}{1\times 2}+\frac{6\times 5\times 4}{1\times 2\times 3}+4$$

$$=34$$

$$\Rightarrow P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{34}{455}=\frac{2}{65}$$

ដូចនេះ $P(D)=\frac{2}{65}$

V ក រកអនុគមន៍ថេរ k ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

យក $y_p=k$

$y_p^{'}=0$

$y_p^{''}=0$

ដោយ y_p ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $(E): y^{''}-4y^{'}+2y=4$

$$\Rightarrow y_p^{''}-4y_p^{'}+2y_p=4$$

$$2k=4$$

$$k=2$$

ដូចនេះ $y_p=2$

ខ ដោះស្រាយសមីការ $y^{''}-4y^{'}+2y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2-4r+2=0$

$$r^2-4r+4-2=0$$

$$(r-2)^2=2$$

$$r-2=\pm\sqrt{2}$$

$$r=2\pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y_c=Ae^{(2+\sqrt{2})x}+Be^{(2-\sqrt{2})x}\ ;\ (A,B\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ

$$y_c=Ae^{(2+\sqrt{2})x}+Be^{(2-\sqrt{2})x}\ ;\ (A,B\in\mathbb{R})$$

គ រកចម្លើយពិសេសនៃ (E)

ដោយ $y_p = 2$

$$y_c = Ae^{(2+\sqrt{2})x} + Be^{(2-\sqrt{2})x} \ ; \ (A, B \in \mathbb{R})$$

យើងបាន $y = y_c + y_p$

$$= Ae^{(2+\sqrt{2})x} + Be^{(2-\sqrt{2})x} + 2 \ ; \ (A, B \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow y' = (2+\sqrt{2})Ae^{(2+\sqrt{2})x} + (2-\sqrt{2})Be^{(2-\sqrt{2})x}$$

ដោយ $y(0) = 2\sqrt{2}$ និង $y'(0) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + 2 = 2\sqrt{2} & (1) \\ (2+\sqrt{2})A + (2-\sqrt{2})B = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1): A = 2\sqrt{2} - B - 2$ ជំនួសក្នុង (2)

$$(2) \Rightarrow (2+\sqrt{2})(2\sqrt{2} - B - 2) + (2-\sqrt{2})B = 0$$

$$4\sqrt{2} - 2B - 4 + 4 - \sqrt{2}B - 2\sqrt{2} + 2B - \sqrt{2}B = 0$$

$$-2\sqrt{2}B + 2\sqrt{2} = 0$$

$$-2\sqrt{2}B = -2\sqrt{2}$$

$$B = \frac{-2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = 1$$

$$\Rightarrow A = 2\sqrt{2} - 1 - 2 = 2\sqrt{2} - 3$$

$$\Rightarrow y = (\sqrt{2} - 3)e^{(2+\sqrt{2})x} + e^{(2-\sqrt{2})x} + 2$$

ដូចនេះ $y = (\sqrt{2} - 3)e^{(2+\sqrt{2})x} + e^{(2-\sqrt{2})x} + 2$

VI ១ ក • គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$

យើងមាន $A(2,0,1); B(0,1,3)$ និង $C(0,3,2)$

$$\overrightarrow{AB} = (0-2, 1-0, 3-1) = (-2, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (0-0, 3-1, 2-3) = (0, 2, -1)$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} = (-2,1,2)$ និង $\overrightarrow{BC} = (0,2,-1)$

• បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់

យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(-2,1,2)$ និង $\overrightarrow{BC}=(0,2,-1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}&=(-2)(0)+(1)(2)+(2)(-1)\\&=0+2-2\\&=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់

• គណនាផលគុណ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$

យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(-2,1,2)$ និង $\overrightarrow{BC}=(0,2,-1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&1&2\\0&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2&2\\0&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2&1\\0&2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-1-4)\vec{i}-(2-0)\vec{j}+(-4-0)\vec{k}$$

$$=-5\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=(-5,-2,-4)$

ខ • រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AC]$

ដោយ ស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AC]$

យើងបាន ផ្ចិត $I\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2},\frac{z_A+z_C}{2}\right)$

$$I\left(\frac{2+0}{2},\frac{0+3}{2},\frac{1+2}{2}\right)$$

$$I\left(1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

កាំ $R=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}}{2}$

$$=\frac{\sqrt{(0-2)^2+(3-0)^2+(2-1)^2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{4+9+1}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

យើងបាន សមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត $I\left(1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ និងកាំ $R=\frac{\sqrt{14}}{2}$ កំណត់

ដោយ $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{14}^2}{4}=\frac{7}{2}$$

ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែ $(S):(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$

- ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B\in(S)$ ។

យើងមាន $(S):(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$

យក $B(0,1,3)$ ជំនួសក្នុងស្វ៊ែ (S)

$$\Rightarrow(0-1)^2+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{7}{2}$$

$$\frac{4+1+9}{4}=\frac{7\times 2}{2\times 2}$$

$$\frac{14}{4}=\frac{14}{4} \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ ចំណុច $B\in(S)$

២ រកសមីការនៃអេលីប

ដោយ កំពូលទាំងពីរមានអរដោនេដូចគ្នា

សមីការអេលីបមានរាង $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

យើងមាន កំពូល $V_1(h+a,k)=(5,2)$

$$\Rightarrow h+a=5 \ (1) \ ,k=2$$

$$V_2(h-a,k)=(-3,2)$$

$$\Rightarrow h-a=-3 \ (2) \ ,k=2$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\begin{cases} h+a=5 & (1) \\ h-a=-3 & (2) \end{cases}$$

យក (1) បូក (2)

$\Rightarrow 2h = 2$ ឬ $h = 1$

$\Rightarrow a = 4$

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 4$ ឬ $b = 2$

សមីការ $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

ដូចនេះ សមីការអេលីប $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

VII ក • រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x) = \dfrac{1 + x^2 + 2\ln x}{x^2}$

f មានន័យកាលណា $x > 0$

នោះ ដែនកំណត់ $D = (0, +\infty)$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D = (0, +\infty)$

• គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + x^2 + 2\ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{2\ln x}{x^2} \right)$$

$= -\infty$ (ព្រោះ $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty$)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x^2 + 2\ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x^2 + 2\ln x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{2\ln x}{x^2} \right)$$

$= 1$ (ព្រោះ $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ និង $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$)

ដូចនេះ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ និង $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

ខ រកអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

នោះ បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

នោះ បន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

បន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

គ • គណនាដេរីវេទីមួយនៃ f

យើងមាន $f(x) = \dfrac{1+x^2+2\ln x}{x^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\left(1+x^2+2\ln x\right)'\left(x^2\right) - \left(x^2\right)'\left(1+x^2+2\ln x\right)}{\left(x^2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(2x+\dfrac{2}{x}\right)\left(x^2\right) - 2x\left(1+x^2+2\ln x\right)}{x^4}$$

$$= \frac{2x^3+2x-2x-2x^3-4x\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{-4x\ln x}{x^4}$$

$$= -\frac{4\ln x}{x^3}$$

ដូចនេះ $f'(x) = -\dfrac{4\ln x}{x^3}$

• សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

$f'(x)=0$ ឬ $-\dfrac{4\ln x}{x^3}=0$

$\ln x = 0$

$x = 1$

សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

- បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានអតិបរមាមួយ

តាម តារាងសញ្ញា $f^{'}(x)$ យើងបាន

$f^{'}$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=1$

នោះ អនុគមន៍ f មានអតិបរមាមួយត្រង់ $x=1$

ដែល $f(1)=2$ ជាតម្លៃអតិបរមា

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានអតិបរមាមួយត្រង់ $x=1$

- សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		1		$+\infty$
$f^{'}(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1

ឃ រកចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា

ខ្សែកោង $(C): f(x)=\dfrac{1+x^2+2\ln x}{x^2}$

អាស៊ីមតូតដេក $y=1$

ខ្សែកោង (C) ប្រសព្វអាស៊ីមតូតដេក

យើងបាន $\dfrac{1+x^2+2\ln x}{x^2}=1$

$$1+x^2+2\ln x=x^2$$

$$2\ln x=-1$$

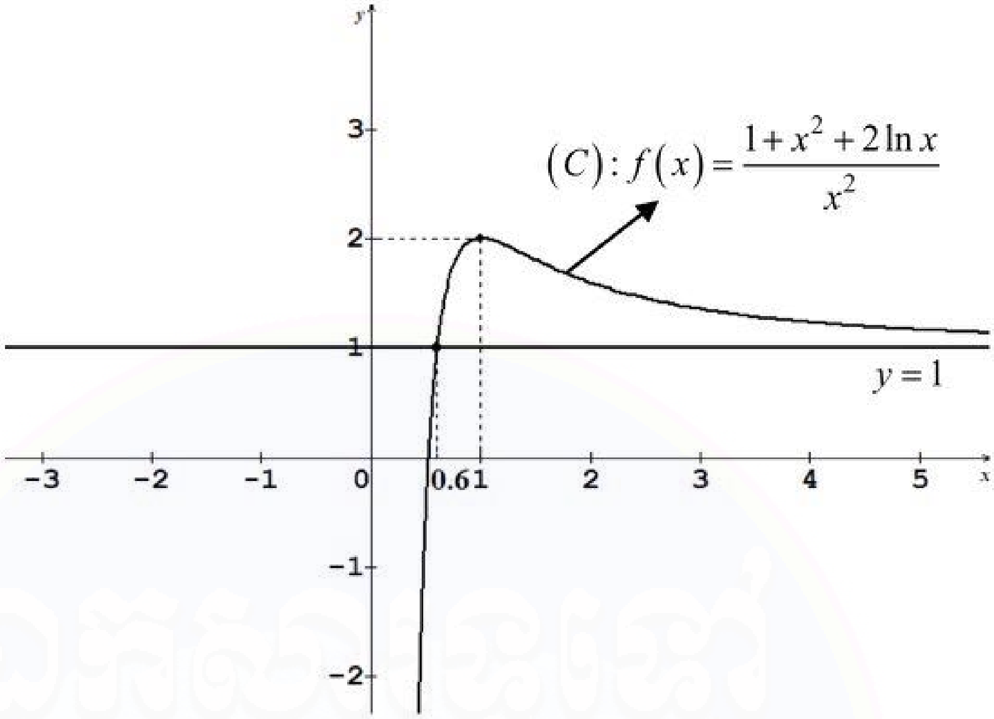
$$\ln x=-\frac{1}{2}$$

$$x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វគឺ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}},1\right)$

document4khmer.wordpress.com

ង • សង់ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$



• ប្រើក្រាប (C) ទាញរកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $(m-1)x^2-2\ln x-1=0$ គ្មានឫស

សមីការ $(m-1)x^2-2\ln x-1=0$

$$mx^2-x^2-2\ln x-1=0$$

$$mx^2=1+x^2+2\ln x$$

$$m=\frac{1+x^2+2\ln x}{x^2}$$

$$m=f(x)$$

តាម ក្រាប (C) យើងបាន

សមីការ $(m-1)x^2-2\ln x-1=0$ គ្មានឫសកាលណា $m>2$

ដូចនេះ សមីការគ្មានឫសកាលណា $m>2$

វិញ្ញាសាទី ១៣

I គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ ខ $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{|x|}$

គ $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)$

II គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)$ និង $z_2=1-i$ ។

១ គណនាម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ $z_1;z_2$ និង $z=\dfrac{z_1}{z_2}$ ។

២ ដាក់ $z=\dfrac{z_1}{z_2}$ ក្រោមទម្រង់ $a+bi$ ដែល a,b ជាចំនួនពិត ។

ទាញរកតម្លៃពិតនៃ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12}$ ។

III ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលចំនួន 8 ក្នុងនោះមាន ប៊ូលស ចំនួន 3 និងប៊ូលខ្មៅ ចំនួន 5 ។ គេចាប់យកព្រមគ្នានូវប៊ូល ចំនួន 2 ដោយចៃដន្យ ។

១ រកប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលស 1 និងប៊ូលខ្មៅ 1 ។

២ រកប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលខ្មៅ 2 ។

៣ រកប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា ។

IV គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\,dx$ ខ $\int_0^1 \dfrac{x}{x+1}dx$

V គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):-y''+2y'+4y=-2\cos 2x$ ។

១ ដោះស្រាយសមីការ $(E'):-y''+2y'+4y=0$ ។

២ រកចំនួនពិត a និង b ដែលអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ។

៣ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

VI ១ ដោយប្រើផលគុណចម្រុះនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ចូរគណនាមាឌប្រលេពីប៉ែតដែលមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u};\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាជ្រុងជាប់ដូចខាងក្រោម:

ក $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j};\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$ និង $\vec{w}=\vec{i}+\vec{k}$

ខ $\vec{u}=(1,3,1);\vec{v}=(0,5,5)$ និង $\vec{w}=(4,0,4)$

២ រកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូល ដែលមានកំពូលទាំងពីរមានកូអរដោនេ $(0,\pm3)$ និងអាស៊ីមតូតទាំងពីរមានសមីការ $y=\pm3x$ រួចសង់ ។

VII f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x^2+\frac{1}{2}-2\ln x$ មានក្រាបតំណាង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

១ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ ។ រកអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=x^2g(x)$ ។ ទាញរក $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ គណនា $f'(x)$ ។ បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាមួយ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

២ សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច A ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 2 ។

៣ សង់ (T) និង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ គេយក $\ln 2=0.7;\ln 3=1.1$ ។

៤ G ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $G(x)=x\ln x-x$ ។ គណនាដេរីវេនៃ G ។ ទាញរកព្រីមីទីវនៃ f លើ $(0,+\infty)$ ។ គណនាផ្ទៃ S ផ្នែកនៃប្លង់ខណ្ឌដោយ (C) អ័ក្ស (ox) បន្ទាត់ $x=1$ និង $x=2$ ។

អត្រាកំណែ

I គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[\left(x^2-x+1\right)-1\right]\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left[(1+x)-(1-x)\right]\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-x\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{(1+x-1+x)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

$$= \frac{(-1)(1+1)}{2(1+1)} = -\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2}$

ខ $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+1)}{-x}$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{-1}$$

$$= -1$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{|x|} = -1$

គ $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)\left(\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}\right)}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(x^2+8x-1\right)-\left(x^2-3\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+8x-1-x^2+3}{x\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(8+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\frac{8}{1+1}=4$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)=4$

II ១ គណនាម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ $z_1;z_2$ និង $z=\frac{z_1}{z_2}$

យើងមាន $z_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$\Rightarrow |z_1|=\sqrt{2}$ និង $\arg(z_1)=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$

$$z_2=1-i$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$\Rightarrow |z_2|=\sqrt{2}$ និង $\arg(z_2)=\frac{7\pi}{4}+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}$$

$$=\cos\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{22\pi-21\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{22\pi-21\pi}{12}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$$

$\Rightarrow |z|=1$ និង $\arg(z)=\frac{\pi}{12}+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$

ដូចនេះ $|z_1|=\sqrt{2}$ និង $\arg(z_1)=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$

$|z_2|=\sqrt{2}$ និង $\arg(z_2)=\frac{7\pi}{4}+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$

$|z|=1$ និង $\arg(z)=\frac{\pi}{12}+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$

២ • ដាក់ $z=\frac{z_1}{z_2}$ ក្រោមទម្រង់ $a+bi$

យើងមាន $z_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)$ និង $z_2=1-i$

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)}{1-i}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}-i^2\sqrt{2}}{1-i^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2\times 2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)i}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

ដូចនេះ $$z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

$(5pt)$ • ទាញរកតម្លៃពិតនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

យើងមាន $$z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$$

$$z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

III ១ រកប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលស 1 និងប៊ូលខ្មៅ 1

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានប៊ូលស 1 និងប៊ូលខ្មៅ 1

ដោយ ប៊ូលទាំងអស់មានចំនួន 8 ត្រូវចាប់យក 2

យើងបាន $$n(S) = C(8,2) = \frac{8!}{(8-2)!2!}$$

$$= \frac{8\times 7}{2}$$

$$= 28$$

ដោយ ប៊ូលសមានចំនួន 3 ត្រូវចាប់យក 1

ប៊ូលខ្មៅមានចំនួន 5 ត្រូវចាប់យក 1

យើងបាន $$n(A) = C(3,1)\times C(5,1) = \frac{3!}{(3-1)!1!}\times\frac{5!}{(5-1)!1!}$$

$$= 3\times 5$$

$$= 15$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{28}$$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{15}{28}$

២ រកប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលខ្មៅ 2

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានប៊ូលខ្មៅ 2

ដោយ ប៊ូលខ្មៅមានចំនួន 5 ត្រូវចាប់យក 2

យើងបាន $n(B)=C(5,2)=\frac{5!}{(5-2)!2!}$

$$=\frac{5\times 4}{2}$$

$$=10$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{5}{14}$

៣ រកប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា

(C ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃ A)

យើងបាន $P(C)=1-P(A)=1-\frac{15}{28}=\frac{13}{28}$

ដូចនេះ $P(C)=\frac{13}{28}$

IV គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោមៈ

ក $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx$

តាង $u=\sin x \qquad \Rightarrow du=\cos x dx$

ដោយ $x=0$ នោះ $u=\sin 0=0$

$x=\frac{\pi}{2}$ នោះ $u=\sin\frac{\pi}{2}=1$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} coxdx=\int_0^1 e^u du$$

$$=\left(e^u\right)\Big|_0^1$$

$= e - 1$

ដូចនេះ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx = e - 1$

ខ $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx$

$= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$= \left(x - \ln|x+1|\right)\Big|_0^1$

$= (1 - \ln 2) - (0 - \ln 1)$

$= 1 - \ln 2$

ដូចនេះ $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = 1 - \ln 2$

V ១ ដោះស្រាយសមីការ $(E'): -y'' + 2y' + 4y = 0$

សមីការសម្គាល់ $-r^2 + 2r + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (2)^2 - 4(-1)(4)$

$= 4 + 16 = 20$

$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2) + \sqrt{20}}{2(-1)}$

$= \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{-2}$

$= 1 - \sqrt{5}$

$r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2) - \sqrt{20}}{2(-1)}$

$= \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{-2}$

$= 1 + \sqrt{5}$

$\Rightarrow y_c = Ae^{(1-\sqrt{5})x} + Be^{(1+\sqrt{5})x}$; $(A, B \in \mathbb{R})$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃ $(E)'$ គឺ $y_c = Ae^{(1-\sqrt{5})x} + Be^{(1+\sqrt{5})x}$;$(A, B \in \mathbb{R})$

២ រកចំនួនពិត a និង b

យើងមាន $g(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$

$$g^{'}(x)=-2a\sin 2x+2b\cos 2x$$

$$g^{''}(x)=-4a\cos 2x-4b\sin x2x$$

ដោយ $g(x)$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E)

$$\Rightarrow -g^{''}(x)+2g^{'}(x)+4g(x)=-2\cos 2x$$

$$-(-4a\cos 2x-4b\sin 2x)+2(-2a\sin 2x+2b\cos 2x)+4(a\cos 2x+b\sin 2x)=-2\cos 2x$$

$$4a\cos 2x+4b\sin 2x-4a\sin 2x+4b\cos 2x+4a\cos 2x+4b\sin 2x=-2\cos 2x$$

$$8a\cos 2x+8b\sin 2x-4a\sin 2x+4b\cos 2x=-2\cos 2x$$

$$(8a+4b)\cos 2x+(-4a+8b)\sin 2x=-2\cos 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8a+4b=-2 & (1) \\ -4a+8b=0 & (2) \end{cases}$$

តាម (2) $\Rightarrow a=\frac{-8b}{-4}=2b$ ជំនួសក្នុង (1)

(1) $\Rightarrow 8(2b)+4b=-2$

$$20b=-2$$

$$b=-\frac{2}{20}=-\frac{1}{10}$$

យក $b=-\frac{1}{10}$ ជំនួសក្នុង (2)

$$\Rightarrow a=2\left(-\frac{1}{10}\right)=-\frac{1}{5}$$

ដូចនេះ: $a=-\frac{1}{5}$ និង $b=-\frac{1}{10}$

៣ រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

យើងបាន $y=y_c+g(x)$

ដោយ $y_c=Ae^{(1-\sqrt{5})x}+Be^{(1+\sqrt{5})x}$; $(A,B\in\mathbb{R})$

$$g(x)=-\frac{1}{5}\cos 2x-\frac{1}{10}\sin 2x$$

$$\Rightarrow y=Ae^{(1-\sqrt{5})x}+Be^{(1+\sqrt{5})x}-\frac{1}{5}\cos 2x-\frac{1}{10}\sin 2x\ ;\ (A,B\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$$y = Ae^{(1-\sqrt{5})x} + Be^{(1+\sqrt{5})x} - \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x \ ; \ (A, B \in \mathbb{R})$$

VI ១ ដោយប្រើផលគុណចម្រុះនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ចូរគណនាមាឌប្រលេពីប៉ែត ដែលមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u};\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាជ្រុងជាប់ដូចខាងក្រោមៈ

ក $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j};\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$ និង $\vec{w}=\vec{i}+\vec{k}$

តាមរូបមន្តមាឌប្រលេពីប៉ែត $V=\left|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}\right|$

យើងមាន $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}=(1,1,0)$

$\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}=(0,1,1)$

$\vec{w}=\vec{i}+\vec{k}=(1,0,1)$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}(1)-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}(0)+\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}(1)$$

$$=(1-0)(1)-(1-0)(0)+(1-0)(1)$$

$$=1-0+1$$

$$=2$$

$\Rightarrow V=|2|=2$ (ឯកតាមាឌ)

ដូចនេះ មាឌប្រលេពីប៉ែត $V=2$ (ឯកតាមាឌ)

ខ $\vec{u}=(1,3,1);\vec{v}=(0,5,5)$ និង $\vec{w}=(4,0,4)$

តាមរូបមន្តមាឌប្រលេពីប៉ែត $V=\left|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}\right|$

យើងមាន $\vec{u}=(1,3,1);\vec{v}=(0,5,5)$ និង $\vec{w}=(4,0,4)$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=\begin{vmatrix}4&0&4\\1&3&1\\0&5&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1\\5&5\end{vmatrix}(4)-\begin{vmatrix}1&1\\0&5\end{vmatrix}(0)+\begin{vmatrix}1&3\\0&5\end{vmatrix}(4)$$

$$=(15-5)(4)-(5-0)(0)+(5-0)(4)$$

$$=40-0+20$$

$$=60$$

$\Rightarrow V=|60|=60$ (ឯកតាមាឌ)

ដូចនេះ មាឌប្រលេពីប៉ែត $V = 60$ (ឯកតាមាឌ)

២ • រកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូល

ដោយ កំពូលទាំងពីរមានអាប់ស៊ីសដូចគ្នា

សមីការអ៊ីពែបូលមានរាង $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

យើងមាន កំពូល $V_1(h, k+a) = (0,3)$

$$\Rightarrow h = 0, k + a = 3 \ (1)$$

$$V_2(h, k-a) = (0,-3)$$

$$\Rightarrow h = 0, k - a = -3 \ (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

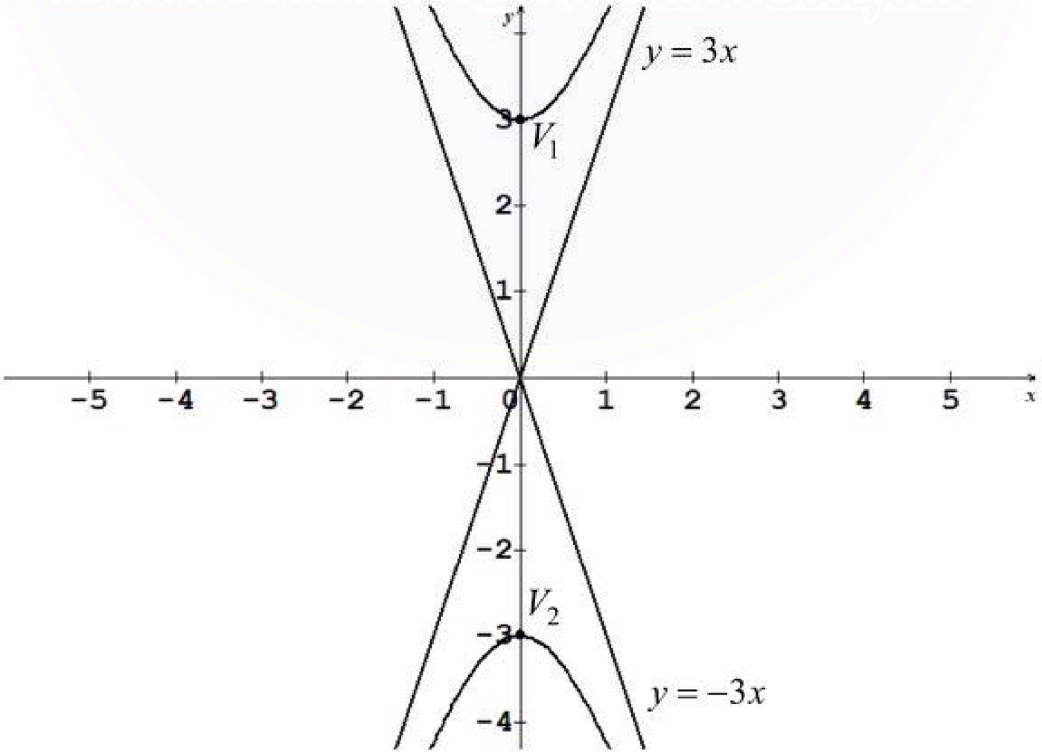
$k = 0, a = 3$

សមីការអាស៊ីមតូត $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h) = \pm 3$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = 3$ ឬ $b = \frac{3}{a} = \frac{3}{3} = 1$

ដូចនេះ សមីការអ៊ីពែបូលគឺ $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$

• សង់អ៊ីពែបូល



VII ១ • រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

យើងបាន ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D=(0,+\infty)$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D_f=(0,+\infty)$

• គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+\frac{1}{2}-2\ln x\right)$$

$$=+\infty \quad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty)$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

• រកអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=x^2g(x)$

យើងមាន $f(x)=x^2+\frac{1}{2}-2\ln x$

$$=x^2\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{2\ln x}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow g(x)=1+\frac{1}{2x^2}-\frac{2\ln x}{x^2} \text{ ចំពោះ } (0,+\infty)$$

ដូចនេះ $g(x)=1+\frac{1}{2x^2}-\frac{2\ln x}{x^2}$

• រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{2\ln x}{x^2}\right)$$

$$=+\infty \quad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0 \text{ និង } \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x^2}=0)$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• គណនា $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=x^2+\frac{1}{2}-2\ln x$

$$\Rightarrow f'(x)=2x-\frac{2}{x}$$

$$=\frac{2x^2-2}{x}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{x}$

- បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាមួយ

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{x}$

$f'(x)=0$ ឬ $\dfrac{2x^2-2}{2}=0$

$$x^2-1=0$$

$$x^2=1$$

$$x=1\ ;\ x\in(0,+\infty)$$

សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)$ យើងបាន

f' ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=1$

នោះ អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាមួយត្រង់ $x=1$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាមួយត្រង់ $x=1$

- សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

ចំពោះ $x=1 \Rightarrow f(1)=(1)^2+\dfrac{1}{2}-2\ln 1=\dfrac{3}{2}$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\dfrac{3}{2}$	↗	$+\infty$

២ សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T)

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច A ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 2

យើងបាន $x_0=2 \quad \Rightarrow y_0=f(2)=2^2+\dfrac{1}{2}-2\ln 2=\dfrac{9}{2}-2\ln 2$

$$\Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = \frac{2(2)^2 - 2}{2} = 3$$

នោះ $(T): y = 3(x-2) + \frac{9}{2} - 2\ln 2$

$$= 3x - 6 + \frac{9}{2} - 2\ln 2$$

$$= 3x - \frac{3}{2} - 2\ln 2$$

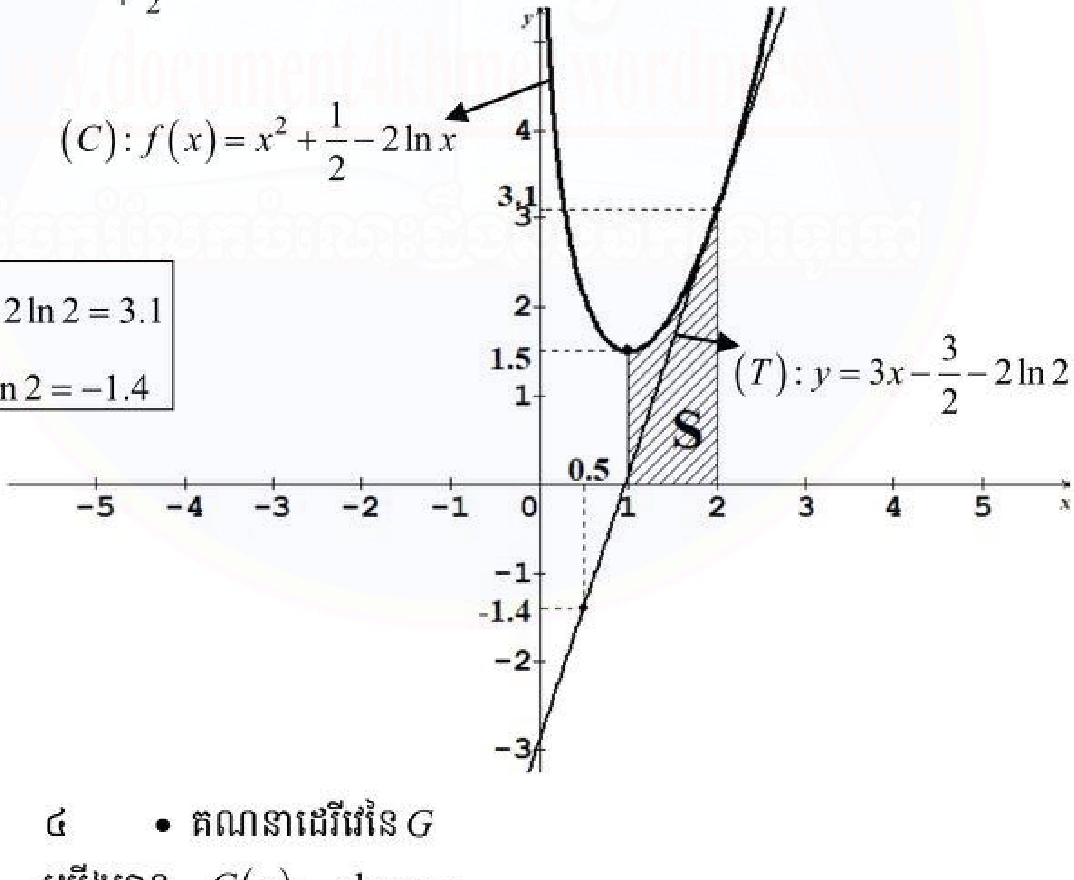
ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T): y = 3x - \frac{3}{2} - 2\ln 2$

៣ សង់ (T) និង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$

$(T): y = 3x - \frac{3}{2} - 2\ln 2$

x	2	$\frac{1}{2}$
y	$\frac{9}{2} - 2\ln 2$	$-2\ln 2$

$\frac{9}{2} - 2\ln 2 = 3.1$
$-2\ln 2 = -1.4$



៤ • គណនាដេរីវេនៃ G

យើងមាន $G(x) = x\ln x - x$

$$\Rightarrow G'(x) = (x)'\ln x + x(\ln x)' - 1$$

$$= \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) - 1$$

$$= \ln x$$

ដូចនេះ $G'(x) = \ln x$

- ទាញរកព្រីមីទីវនៃ f លើ $(0,+\infty)$

យើងមាន $f(x) = x^2 + \frac{1}{2} - 2\ln x$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx$$

$$= \int\left(x^2 + \frac{1}{2} - 2\ln x\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - 2(x\ln x - x) + c \ ; \ (c \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវនៃ f គឺ $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - 2(x\ln x - x) + c ; (c \in \mathbb{R})$

- គណនាផ្ទៃ S ផ្នែកនៃប្លង់

យើងបានក្រឡាផ្ទៃ $S = \int_1^2 \left[f(x) - y\right]dx$

$$= \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{2} - 2\ln x\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - 2(x\ln x - x)\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{8}{3} + 1 - 2(2\ln 2 - 2)\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2(\ln 1 - 1)\right]$$

$$= \frac{8}{3} + 1 - 4\ln 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2$$

$$= \frac{16}{6} + \frac{6}{6} - 4\ln 2 + \frac{24}{6} - \frac{2}{6} - \frac{3}{6} - \frac{12}{6}$$

$$= \frac{29}{6} - 4\ln 2 \quad (\text{ឯកតាផ្ទៃ})$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃ $S = \frac{29}{6} - 4\ln 2$ (ឯកតាផ្ទៃ)

វិញ្ញាសាទី ១៤

I គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$ ខ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-1}{1-\sin x}$

II គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+i\sqrt{3}$ និង $z_2=6\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

ក សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចរកម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃ z_1^3

ខ សរសេរផលគុណ $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

III គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$ ។

ក កំណត់តម្លៃ A, B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

ខ គណនា $F(x)=\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$ ។

IV ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីស 6 ឃ្លីក្រហម 5 និងឃ្លីខៀវ 4 ។ គេចាប់យកឃ្លី 3 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់ ។ គណនាប្រូបាបដែលចាប់បាន:

A "ឃ្លីស 2 និងឃ្លីក្រហម 1" B "ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា"

C "ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា"

V ក ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=0$ ។

ខ រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0)=1$ និង $y'(1)=2e^2$ ។

VI ១ រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេនៃផ្ចិត កំណុំ និងកំពូលនៃអេលីប រួចសង់អេលីប $25x^2+16y^2=400$ ។

២ ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(3,0,0)$ និងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$; $\overrightarrow{AC}=(-3,0,3)$ និង $\overrightarrow{AD}=(-2,2,2)$ ។

ក រកកូអរដោនេចំណុច B, C និង D ។ បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ខ គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចរកសមីការប្លង់ (ABC) ។

VII (C) ជាខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $f(x)=1+\frac{e^x-1}{e^x+1}$ ។

ក គណនា $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ។ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។

ខ គណនា $f'(x)$ ហើយសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

គ គណនា $f(-1); f(0)$ និង $f(1)$ ។ សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូនរមេ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ដោយយក 1 ឯកតា $2cm$ លើអ័ក្ស ។

ឃ គណនាផ្ទៃក្រលាជា cm^2 ផ្នែកនៃប្លង់នៅចន្លោះខ្សែកោង (C) អ័ក្ស $(x'ox)$ ត្រូវនឹងចន្លោះ $0\le x\le 1$ ។

អត្រាកំណែ

I គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+7)-9}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$
$$=\frac{1}{24}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}=\frac{1}{24}$

ខ
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-1}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)(\sin x+1)}{-(\sin x-)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[-(\sin x+1)\right]$$
$$=-2$$

ដូចនេះ $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-1}{1-\sin x}=-2$$

II ក • សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $z_1=1+i\sqrt{3}$

$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

• រកម៉ូឌុលនិងអាគុយម៉ង់នៃ z_1^3

យើងមាន $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

តាមរូបមន្តដឺម័រយើងបាន

$$z_1^3=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3$$

$$=8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$$

នោះ ម៉ូឌុល $\left|z_1^3\right|=8$ និងអាគុយម៉ង់ $\arg\left(z_1^3\right)=\pi+2k\pi\ ;(k\in\mathbb{Z})$

ដូចនេះ $\left|z_1^3\right|=8$ និង $\arg\left(z_1^3\right)=\pi+2k\pi\ ;(k\in\mathbb{Z})$

ខ សរសេរផលគុណ $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $z_1=1+i\sqrt{3}$ និង $z_2=6\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$z_1\times z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left[6\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left[6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}\right)$$

$$=3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}+3i\sqrt{6}+3\sqrt{6}$$

$$=\left(3\sqrt{2}+3\sqrt{6}\right)+\left(3\sqrt{6}-3\sqrt{2}\right)i$$

ដូចនេះ $z_1 \times z_2 = \left(3\sqrt{2}+3\sqrt{6}\right)+\left(3\sqrt{6}-3\sqrt{2}\right)i$

III ក កំណត់តម្លៃ A, B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

យើងមាន $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

$$=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$=\frac{A\left(x^2+2x+1\right)+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$=\frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}$$

ដោយ $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=5\\2A+B+C=20\\A=6\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}A=6\\B=-1\\C=9\end{cases}$$

ដូចនេះ $A=6, B=-1$ និង $C=9$

ខ គណនា $F(x)=\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$

ចំពោះ $A=6, B=-1$ និង $C=9$

នោះ $f(x)=\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}$

$$\Rightarrow F(x)=\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$$

$$=\int\left[\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right]dx$$

$$=6\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{9}{x+1}+c$$

ដូចនេះ $F(x)=6\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{9}{x+1}+c\ ;\ (c\in\mathbb{R})$

IV គណនាប្រូបាបដែលចាប់បាន:

A "ឃ្លីស 2 និងឃ្លីក្រហម 1"

ដោយ ឃ្លីទាំងអស់មាន 15 ត្រូវចាប់យក 3

យើងបាន $n(S)=C(15,3)=\frac{15!}{(15-3)!3!}$

$$=\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}$$

$$=455$$

ដោយ ឃ្លីសមាន 6 ត្រូវចាប់យក 2

ឃ្លីក្រហមមាន 5 ត្រូវចាប់យក 1

យើងបាន $n(A)=C(6,2)\times C(5,1)=\frac{6}{(6-2)!2!}\times\frac{5!}{(5-1)!1!}$

$$=\frac{6\times5}{2\times1}\times5$$

$$=75$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{75}{455}=\frac{15}{91}$$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{15}{91}$

B "ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា"

ដោយ ឃ្លីសមាន 6 ត្រូវចាប់យក 1

ឃ្លីក្រហមមាន 5 ត្រូវចាប់យក 1

ឃ្លីខៀវមាន 4 ត្រូវចាប់យក 1

យើងបាន $n(B)=C(6,1)\times C(5,1)\times C(4,1)$

$$=6\times5\times4$$

$$=120$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{120}{455}=\frac{24}{91}$$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{24}{91}$

C "ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា"

ដោយ ឃ្លីសមាន 6 ត្រូវចាប់យក 3

ឃ្លីក្រហមមាន 5 ត្រូវចាប់យក 3

ឃ្លីខៀវមាន 4 ត្រូវចាប់យក 3

យើងបាន $n(C)=C(6,3)+C(5,3)+C(4,3)$

$$=\frac{6!}{(6-3)!3!}+\frac{5!}{(5-3)!3!}+\frac{4!}{(4-3)!3!}$$

$$=\frac{6\times5\times4}{3\times2}+\frac{5\times4}{2}+4$$

$$=34$$

$$\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{34}{455}$$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{34}{455}$

V ក ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2-3r+2=0$

$$(r-1)(r-2)=0$$

$$r_1=1; r_2=2$$

$$\Rightarrow y=Ae^x+Be^{2x} \;;\; (A,B\in\mathbb{R})$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^x+Be^{2x} \;;\; (A,B\in\mathbb{R})$

ខ រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

យើងមាន $y=Ae^x+Be^{2x} \;;\; (A,B\in\mathbb{R})$

$$\Rightarrow y'=Ae^x+2Be^{2x}$$

ដោយ $y(0)=1$ និង $y'(1)=2e^2$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\ Ae+2Be^2=2e^2\end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases}A+B=1 & (1)\\ A+2Be=2e & (2)\end{cases}$$

យក (2) ដក (1)

$$\Rightarrow 2Be-B=2e-1$$

$B(2e-1)=2e-1$ ឬ $B=1$ ជំនួសក្នុង (1)

$$\Rightarrow A+1=1 \quad \text{ឬ} \quad A=0$$

$\Rightarrow y = e^{2x}$

ដូចនេះ $y = e^{2x}$

VI ១ • រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេនៃផ្ចិត កំណុំ និងកំពូលនៃអេលីប

យើងមាន សមីការ $25x^2 + 16y^2 = 400$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

សមីការមានរាង $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

ដែល $h = 0, k = 0, a = 5, b = 4, c = 3$

យើងបាន ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 10$ ឯកតា

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 8$ ឯកតា

ផ្ចិត $S(h,k) = (0,0)$

កំណុំ $F_1(h, k+c) = (0,3)$

$F_2(h, k-c) = (0,-3)$

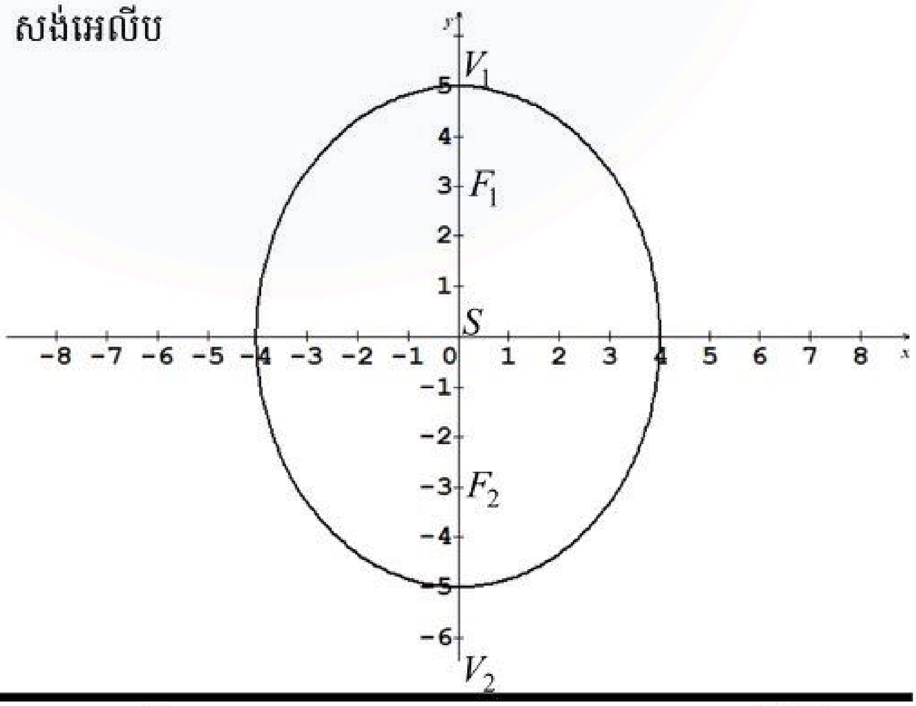
កំពូល $V_1(h, k+a) = (0,5)$

$V_2(h, k-a) = (0,-5)$

ដូចនេះ ប្រវែងអ័ក្សធំ 10 ឯកតា ប្រវែងអ័ក្សតូច 8 ឯកតា ផ្ចិត $S(0,0)$

កំណុំ $F_1(0,3)$ និង $F_2(0,-3)$ កំពូល $V_1(0,5)$ និង $V_2(0,-5)$

• សង់អេលីប



២ ក • រកកូអរដោនេចំណុច B,C និង D

យើងមាន $A(3,0,0)$ និង $\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$; $\overrightarrow{AC}=(-3,0,3)$ និង

$\overrightarrow{AD}=(-2,2,2)$

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$$
$$=(-3,3,0)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_B-x_A=-3\\y_B-y_A=3\\z_B-z_A=0\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}x_B=-3+x_A=0\\y_B=3+y_A=3\\z_B=z_A=0\end{cases}$$

នោះ កូអរដោនេ $B(0,3,0)$

$$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)$$
$$=(-3,0,3)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_C-x_A=-3\\y_C-y_A=0\\z_C-z_A=3\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}x_C=-3+x_A=0\\y_C=y_A=0\\z_C=3+z_A=3\end{cases}$$

នោះ កូអរដោនេ $C(0,0,3)$

$$\overrightarrow{AD}=(x_D-x_A,y_D-y_A,z_D-z_A)$$
$$=(-2,2,2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_D-x_A=-2\\y_D-y_A=2\\z_D-z_A=2\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}x_D=-2+x_A=1\\y_D=2+y_A=2\\z_D=2+z_A=2\end{cases}$$

នោះ កូអរដោនេ $D(1,2,2)$

ដូចនេះ កូអរដោនេ $B(0,3,0)$; $C(0,0,3)$ និង $D(1,2,2)$

• បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(3)^2+(0)^2}=3\sqrt{2} \text{ ឯកតា}$$

$$\overrightarrow{AC}=(-3,0,3)$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-3)^2+(0)^2+(3)^2}=3\sqrt{2} \text{ ឯកតា}$$

$\overrightarrow{BC}=(0-0,0-3,3-0)$

$=(0,-3,3)$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(3)^2}=3\sqrt{2}$ ឯកតា

ដោយ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$

នោះ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ខ • គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$; $\overrightarrow{AC}=(-3,0,3)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -3 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -3 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(9-0)\vec{i}-(-9-0)\vec{j}+(0+9)\vec{k}$$

$$=9\vec{i}+9\vec{j}+9\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(9,9,9)$

• រកសមីការប្លង់ (ABC)

យើងបាន សមីការប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច $C(0,0,3)$ ហើយមាន វ៉ិចទ័រនរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(9,9,9)$ កំណត់ដោយ:

$$(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$9(x-0)+9(y-0)+9(z-3)=0$$

$$x+y+z-3=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(P): x+y+z-3=0$

VII ក • គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

យើងមាន $f(x)=1+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$$

$=0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right)$$

$$= 2 \qquad (\text{ព្រោះ } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0)$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

- រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

នោះ បន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

នោះ បន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

បន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ខ • គណនា $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=1+\frac{e^x-1}{e^x+1}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x+1)'(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

- សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

ដោយ $e^x>0$ និង $\left(e^x+1\right)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ x

$\Rightarrow f'(x)>0$

សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	

- សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

គ • គណនា $f(-1);f(0)$ និង $f(1)$

យើងមាន $f(x)=1+\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

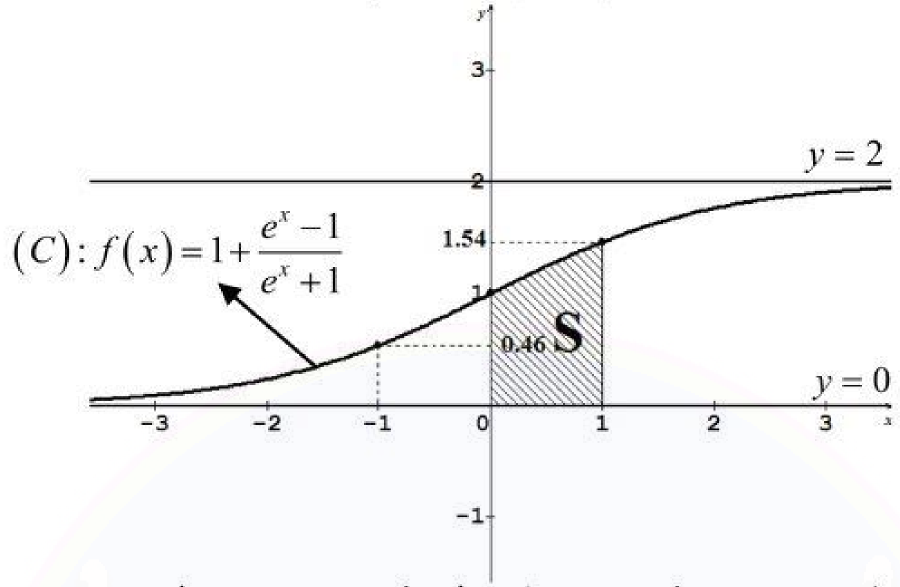
ចំពោះ $x=-1\Rightarrow f(-1)=1+\dfrac{e^{-1}-1}{e^{-1}+1}=1+\dfrac{\frac{1}{e}-1}{\frac{1}{e}+1}=1+\dfrac{\frac{1-e}{e}}{\frac{1+e}{e}}$

$=1+\dfrac{1-e}{1+e}=\dfrac{1+e+1-e}{e+1}=\dfrac{2}{e+1}$

$x=0\ \Rightarrow f(x)=1+\dfrac{e^0-1}{e^0+1}=1$

$x=1\ \Rightarrow f(1)=1+\dfrac{e-1}{e+1}=\dfrac{e+1+e-1}{e+1}=\dfrac{2e}{e+1}$

- សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ដោយយក 1 ឯកតា $2cm$



ឃ គណនាផ្ទៃក្រលាជា cm^2 ផ្នែកនៃប្លង់នៅចន្លោះខ្សែកោង (C) អ័ក្ស $(x'ox)$ ត្រូវនឹងចន្លោះ $0 \le x \le 1$

យើងបានក្រឡាផ្ទៃ $S = \int_0^1 \left[f(x) - y\right]dx$

$$= \int_0^1 \left(1 + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x + 1 + e^x - 1}{e^x + 1}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2e^x}{e^x + 1}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2\left(e^x - 1\right)'}{e^x + 1}dx$$

$$= 2\ln\left(e^x + 1\right)_0^1$$

$$= 2\left[\ln(e+1) - \ln 2\right]$$

$$= 2\ln\frac{e+1}{2} \quad \text{(ឯកតាផ្ទៃ)}$$

ដោយ 1 ឯកតាស្មើ $2cm$ នោះ 1 ឯកតាផ្ទៃស្មើ $4cm^2$

$$\Rightarrow S = 4\left(2\ln\frac{e+1}{2}\right) = 8\ln\frac{e+1}{2}\,cm^2$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់ $S = 8\ln\frac{e+1}{2}\,cm^2$

វិញ្ញាសាទី ១៥

I គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក $\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos^2 x}$ ខ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$

គ $\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-3x-1}{x^3-1}$ ឃ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2+2x-3}\right)$

II គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)i$ និង $z_2=1+i$ ។

ក សរសេរ $w=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាង $a+bi$

ខ សរសេរ $z=z_1-\sqrt{2}z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

III គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2-6x+2}{x(x-1)(x+2)}$ ចំពោះ $x\neq\{-2,0,1\}$ ។

ក កំណត់តម្លៃ A,B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$

ខ គណនា $I=\int f(x)dx$ ។

IV ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីស 3 ឃ្លីក្រហម 4 និងឃ្លីខ្មៅ 3 និងឃ្លីបៃតង 4 គ្រាប់។ គេចាប់យកឃ្លី 4 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក ចាប់បានឃ្លីពណ៌ខុសគ្នាទាំងអស់

ខ ចាប់បានឃ្លីទាំង 4 មានពណ៌ដូចគ្នា

គ ចាប់បានឃ្លីសយ៉ាងច្រើន 2

V គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 2y''-3y'+y=x^2-4x$ ។

ក ដោះស្រាយសមីការ $(F): 2y''-3y'+y=0$ ។

ខ រកចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យ $y_p=ax^2+bx+c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ។

គ រកចម្លើយទូទៅ y នៃសមីការ (E) ។

VI ១ រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប ដែលមានកូអរដោនេកំពូល $(4,1)$ និង $(0,1)$ ហើយអ័ក្សតូចមានប្រវែង 2 ឯកតា រួចសង់អេលីប ។

២ ក្នុងតម្រុយ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យចំណុច $A(1,1,4);B(-2,1,0)$ និង $C(2,2,3)$ ។

ក រកកូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។ គណនាផលគុណ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ ទាញបញ្ជាក់ថា A, B និង C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

ខ គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

គ រកសមីការប្លង់ (ABC) ។

VII (C) ជាខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3e^x}{e^x+1}$ កំណត់ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ក គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។

ខ គណនា $f'(x)$ ហើយសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

គ បង្ហាញថាចំណុច $I\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។

ឃ គណនា $f(-1)$ និង $f(1)$ ។ សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូនរមេ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ដោយយក 1 ឯកតា $2cm$ លើអ័ក្ស ។ $\left(e=2.7;\dfrac{1}{1+e}=0.27\right)$

ង គណនាផ្ទៃក្រលាជា cm^2 ផ្នែកនៃប្លង់នៅចន្លោះខ្សែកោង (C) អ័ក្ស $(x'ox)$ ត្រូវនឹងចន្លោះ $0\le x\le 1$ ។

<u>អត្រាកំណែ</u>

I គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក $$\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin x}$$
$$=2$$

ដូចនេះ $$\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{1-\cos^2 x}=2$$

ខ $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$$

តាង $u=\dfrac{\pi}{2}-x \quad \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-u$

ដោយ $x\to\dfrac{\pi}{2}$ នោះ $u\to0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)-\pi}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{\pi-2u-\pi}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{-2u}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=-\frac{1}{2}$

គ $\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-3x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(4x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4x+1}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{5}{3}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-3x-1}{x^3-1}=\frac{5}{3}$

ឃ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2+2x-3}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2+2x-3}\right)\left(\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2+2x-3}\right)}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-4)-(x^2+2x-3)}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4-x^2-2x+3}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-1}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{-2}{1+1} = -1$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2+2x-3}\right)=-1$

II ក សរសេរ $w=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាង $a+bi$

យើងមាន $z_1=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)i$ និង $z_2=1+i$

$$w=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)i}{1+i}$$

$$=\frac{\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)i\right](1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)i-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)i-\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)i^2}{1^2+1^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+i\sqrt{2}-i\sqrt{6}-i\sqrt{2}-i\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-2i\sqrt{6}}{2}$$

$$=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$$

ដូចនេះ $w=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$

ខ សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $z_1=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)i$ និង $z_2=1+i$

$$z=z_1-\sqrt{2}z_2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)i-\sqrt{2}(1+i)$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{6} + i\sqrt{2} - i\sqrt{6} - \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{6} - i\sqrt{6}$$
$$= \sqrt{6}(1-i)$$
$$= \sqrt{6} \times \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$= \sqrt{12}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$= \sqrt{12}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $z = \sqrt{6} - i\sqrt{6}$ និង $z = \sqrt{12}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

III ក កំណត់តម្លៃ A, B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

យើងមាន $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

$$= \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$
$$= \frac{A\left(x^2 + 2x - x - 2\right) + B\left(x^2 + 2x\right) + C\left(x^2 - x\right)}{x(x-1)(x+2)}$$
$$= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - Cx}{x(x-1)(x+2)}$$
$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A}{x(x-1)(x+2)}$$

ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 2}{x(x-1)(x+2)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=1 & (1) \\ A+2B-C=-6 & (2) \\ -2A=2 & (3) \end{cases}$$

$(3) \quad \Rightarrow A = -1$ ជំនួសក្នុងសមីការ (1) និង (2)

$\Rightarrow\begin{cases}-1+B+C=1\\-1+2B-C=-6\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}B+C=2 & (4)\\2B-C=-5 & (5)\end{cases}$

យក (4) បូក (5)

$\Rightarrow 3B=-3$ ឬ $B=-1$

(4) $\Rightarrow -1+C=2$

$C=3$

ដូចនេះ $A=-1, B=-1, C=3$

ខ គណនា $I=\int f(x)dx$

ចំពោះ $A=-1, B=-1, C=3$ នោះ $f(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}$

$\Rightarrow I=\int f(x)dx$

$=\int\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx$

$=-\ln|x|-\ln|x-1|+3\ln|x+2|+c\ ;(c\in\mathbb{R})$

ដូចនេះ $I=-\ln|x|-\ln|x-1|+3\ln|x+2|+c\ ;(c\in\mathbb{R})$

IV រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក ចាប់បានឃ្លីពណ៌ខុសគ្នាទាំងអស់

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានឃ្លីពណ៌ខុសគ្នាទាំងអស់

ដោយ ឃ្លីទាំងអស់មាន 14 ត្រូវចាប់យក 4

យើងបាន $n(S)=C(14,4)=\frac{14!}{(14-4)!4!}$

$=\frac{14\times 13\times 12\times 11}{4\times 3\times 2\times 1}$

$=1001$

ដោយ ឃ្លីសមាន 3 ត្រូវចាប់យក 1

ឃ្លីក្រហមមាន 4 ត្រូវចាប់យក 1

ឃ្លីខ្មៅមាន 3 ត្រូវចាប់យក 1

ឃ្លីបៃតងមាន 4 ត្រូវចាប់យក 1

យើងបាន $n(A)=C(3,1)\times C(4,1)\times C(3,1)\times C(4,1)$

$=3\times 4\times 3\times 4$

$$=144$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{144}{1001}$$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{144}{1001}$

ខ ចាប់បានឃ្លីទាំង 4 មានពណ៌ដូចគ្នា

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានឃ្លីទាំង 4 មានពណ៌ដូចគ្នា

ដោយ ឃ្លីក្រហមមាន 4 ត្រូវចាប់យក 4

ឃ្លីបៃតងមាន 4 ត្រូវចាប់យក 4

យើងបាន $n(B)=C(4,4)+C(4,4)$

$$=1+1$$

$$=2$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{2}{1001}$$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{2}{1001}$

គ ចាប់បានឃ្លីសយ៉ាងច្រើន 2

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានឃ្លីសយ៉ាងច្រើន 2

C' ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានឃ្លីសទាំង 3

(C' ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃ C)

ដោយ ឃ្លីសមាន 3 ត្រូវចាប់យក 3

ឃ្លីមិនមែនសមាន 11 ត្រូវចាប់យក 1

យើងបាន $n(C)=C(3,3)\times C(11,1)$

$$=1\times 11$$

$$=11$$

$$\Rightarrow P(C')=\frac{n(C')}{n(S)}=\frac{11}{1001}$$

$$\Rightarrow P(C)=1-P(C')=1-\frac{11}{1001}=\frac{990}{1001}$$

ដូចនេះ $P(C)=\frac{990}{1001}$

V ក ដោះស្រាយសមីការ $(F): 2y'' - 3y' + y = 0$

សមីការសម្គាល់ $2r^2 - 3r + 1 = 0$

$$(r-1)(2r-1) = 0$$

$$r_1 = 1; r_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_c = Ae^x + Be^{\frac{1}{2}x} \ ; \ (A, B \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y_c = Ae^x + Be^{\frac{1}{2}x} \ ; \ (A, B \in \mathbb{R})$

ខ រកចំនួនពិត a, b និង c

យើងមាន $y_p = ax^2 + bx + c$

$$\Rightarrow y_p' = 2ax + b$$

$$\Rightarrow y_p'' = 2a$$

យក y_p ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

$$\Rightarrow 2y_p'' - 3y_p' + y_p = x^2 - 4x$$

$$2(2a) - 3(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2 - 4x$$

$$4a - 6ax - 3b + ax^2 + bx + c = x^2 - 4x$$

$$ax^2 + (-6a + b)x + (4a - 3b + c) = x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -6a + b = -4 \\ 4a - 3b + c = 0 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $a = 1, b = 2$ និង $c = 2$

គ រកចម្លើយទូទៅ y នៃសមីការ (E)

យើងបាន $y = y_p + y_c$

ដោយ $y_c = Ae^x + Be^{\frac{1}{2}x} \ ; \ (A, B \in \mathbb{R})$

$$y_p = x^2 + 2x + 4$$

$$\Rightarrow y = Ae^x + Be^{\frac{1}{2}x} + x^2 + 2x + 4 \ ; \ (A, B \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅ y នៃសមីការ (E) គឺ

$$y = Ae^{x} + Be^{\frac{1}{2}x} + x^2 + 2x + 4 \ ; \ (A, B \in \mathbb{R})$$

VI ១ • រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប

ដោយ កំពូលទាំងពីរមានអរដោនេដូចគ្នា

នោះ សមីការស្តង់ដាអេលីបរាង $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

យើងមាន កំពូល $V_1(h+a, k) = (4,1)$

$\Rightarrow h + a = 4 \quad (1) \ , \ k = 1$

$V_1(h-a, k) = (0,1)$

$\Rightarrow h - a = 0 \quad (2) \ , \ k = 1$

តាម (1) និង (2)

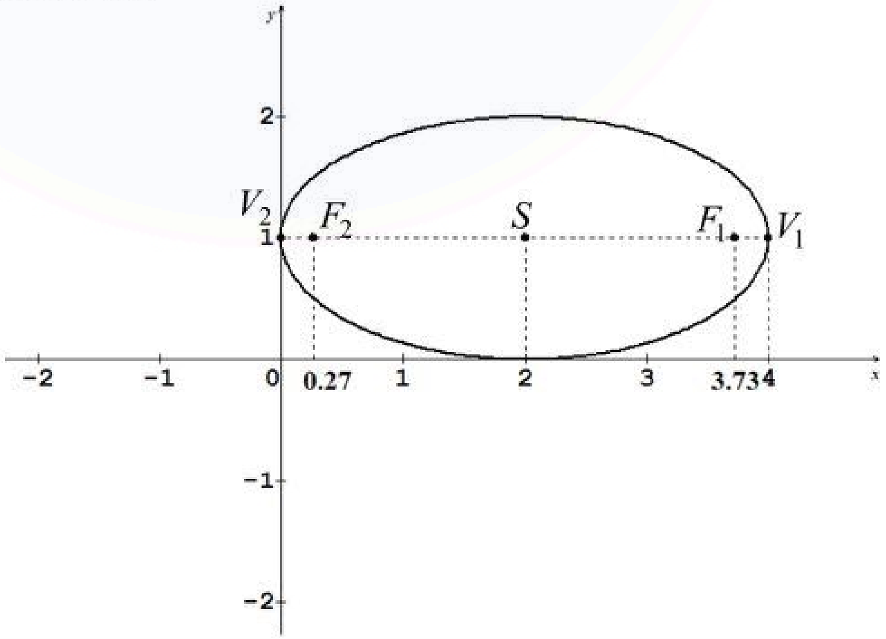
$$\Rightarrow \begin{cases} h + a = 4 \\ h - a = 0 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} h = 2 \\ a = 2 \end{cases}$$

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 2$ ឬ $b = 1$

យើងបាន សមីការ $\frac{(x-2)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃអេលីប $\frac{(x-2)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$

• សង់អេលីប



២ ក • រកកូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$

យើងមាន $A(1,1,4); B(-2,1,0)$ និង $C(2,2,3)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2-1, 1-1, 0-4)$$
$$= (-3, 0, -4)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = (2-1, 2-1, 3-4)$$
$$= (1, 1, -1)$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} = (-3,0,-4)$ និង $\overrightarrow{AC} = (1,1,-1)$

• គណនាផលគុណ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

យើងមាន $\overrightarrow{AB} = (-3,0,-4)$ និង $\overrightarrow{AC} = (1,1,-1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= (0+4)\vec{i} - (3+4)\vec{j} + (-3-0)\vec{k}$$
$$= 4\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4,-7,-3)$

• បញ្ជាក់ថា A, B និង C រត់មិនត្រង់គ្នា

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

នោះ A, B និង C រត់មិនត្រង់គ្នា

ដូចនេះ A, B និង C រត់មិនត្រង់គ្នា

ខ គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4,-7,-3)$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(4)^2 + (-7)^2 + (-3)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{16+49+9}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{74}$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{74}$ (ឯកតាផ្ទៃ)

គ រកសមីការប្លង់ (ABC)

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,-7,-3)$

យើងបាន សមីការប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច $A(1,1,4)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,-7,-3)$ កំណត់ដោយ

$$(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$4(x-1)-7(y-1)-3(z-4)=0$$

$$4x-4-7y+7-3z+12=0$$

$$4x-7y-3z+15=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(ABC): 4x-7y-3z+15=0$

VII ក • គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{3e^x}{e^x+1}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3e^x}{e^x+1}$$

$=0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{e^x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{e^x}}$$

$=3$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$)

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

• រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

នោះ បន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

នោះ បន្ទាត់ $y=3$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

បន្ទាត់ $y=3$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ខ • គណនា $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{3e^x}{e^x+1}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(3e^x)'(e^x+1)-(e^x+1)'(3e^x)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{3e^x(e^x+1)-e^x(3e^x)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{3e^{2x}+3e^x-3e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{3e^x}{(e^x+1)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{3e^x}{(e^x+1)^2}$

• សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{3e^x}{(e^x+1)^2}$

ដោយ $3e^x>0$ និង $(e^x+1)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ x

$\Rightarrow f'(x)>0$

សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	

• សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	3

គ បង្ហាញថាចំណុច $I\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

លុះត្រាតែ $f(x)+f(-x)=3$

ដោយ $f(x)=\dfrac{3e^x}{e^x+1}$

នោះ $f(-x)=\dfrac{3e^{-x}}{e^{-x}+1}$

$$=\dfrac{\dfrac{3}{e^x}}{\dfrac{1}{e^x}+1}$$

$$=\dfrac{3}{e^x}\times\dfrac{e^x}{1+e^x}$$

$$=\dfrac{3}{e^x+1}$$

យើងបាន $f(x)+f(-x)=\dfrac{3e^x}{e^x+1}+\dfrac{3}{e^x+1}$

$$=\dfrac{3\left(e^x+1\right)}{e^x+1}$$

$$=3$$

ដូចនេះ ចំណុច $I\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

ឃ • គណនា $f(-1)$ និង $f(1)$

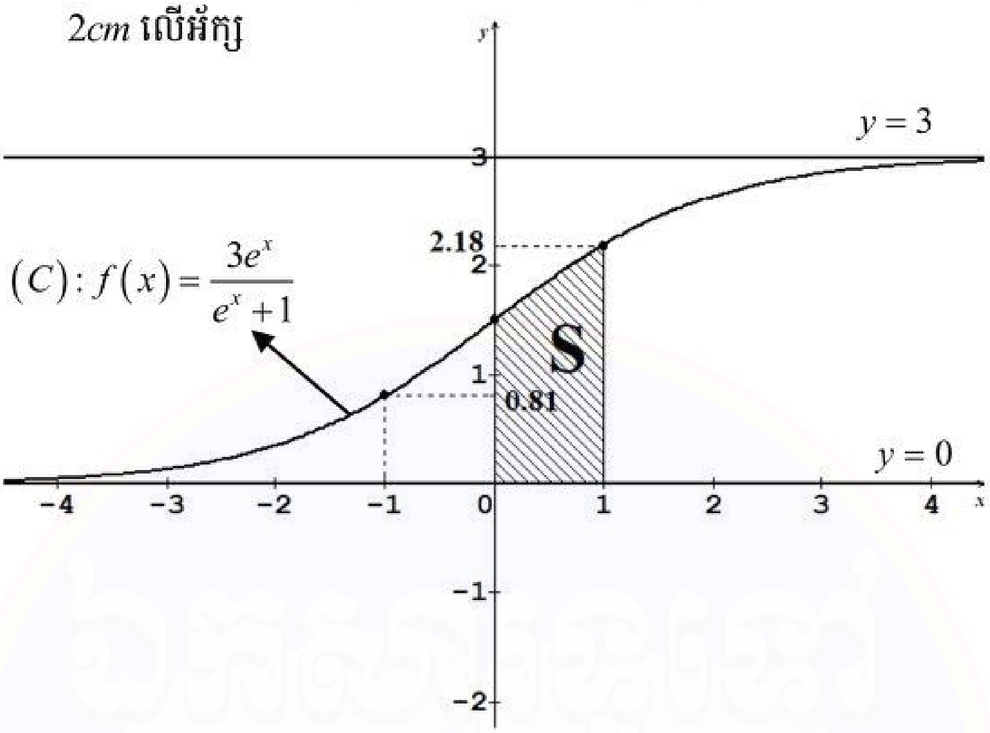
យើងមាន $f(x)=\dfrac{3e^x}{e^x+1}$

ចំពោះ $x=-1\Rightarrow f(-1)=\dfrac{3e^{-1}}{e^{-1}+1}=\dfrac{\dfrac{3}{e}}{\dfrac{1}{e}+1}=\dfrac{3}{1+e}$

$x=1\Rightarrow f(1)=\dfrac{3e}{e+1}$

ដូចនេះ $f(-1)=\dfrac{3}{1+e}$ និង $f(1)=\dfrac{3e}{e+1}$

- សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូនរមេ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ដោយយក 1 ឯកតា $2cm$ លើអ័ក្ស



៥ គណនាផ្ទៃក្រលាជា cm^2 ផ្នែកនៃប្លង់នៅចន្លោះខ្សែកោង (C) អ័ក្ស $\left(x'ox\right)$ ត្រូវនឹងចន្លោះ $0 \le x \le 1$

យើងបានក្រឡាផ្ទៃ $S = \int_0^1 \left[f(x) - y\right]dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx$$

$$= 3\ln\left(e^x+1\right)_0^1$$

$$= 3\left[\ln(e+1) - \ln 2\right]$$

$$= 3\ln\frac{e+1}{2} \quad \text{(ឯកតាផ្ទៃ)}$$

ដោយ 1 ឯកតាស្មើ $2cm$ នោះ 1 ឯកតាផ្ទៃស្មើ $4cm^2$

$$\Rightarrow S = 4\left(3\ln\frac{e+1}{2}\right) = 12\ln\frac{e+1}{2}\,cm^2$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃផ្នែកប្លង់ $S = 12\ln\frac{e+1}{2}\,cm^2$