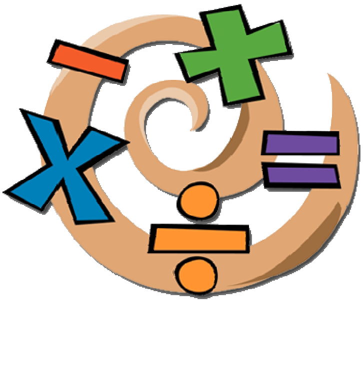
# ប្រជុំវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាជ្រើសរើស
# ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែថ្នាក់ទី៩

ភាគទី១

ត្រៀមសិស្សពូកែថ្នាក់សាលា និងស្រុក

ត្រៀមសិស្សពូកែខេត្ត និងរាជធានី

ត្រៀមសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស



រៀបរៀងដោយ កែវ សិរី

ឆ្នាំសិក្សា ២០១៣ - ២០១៤

# វិញ្ញាសាទី១ រយៈពេល ២ម៉ោង និង៣០នាទី

**លំហាត់ទី១:** គេឲ្យ $x, y, z$ ជាបីចំនួនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$4x^2+2y^2+2z^2-4zx+2yz-6y-10z+34=0$$

ចូរគណនាតំលៃនៃកន្សោម $S=(x-4)^{2011}+(y-4)^{2011}+(z-4)^{2011}$

**លំហាត់ទី២:** ចូរគណនា $A=2x^3+2x^2+1$

ចំពោះ $x=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}}+\sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}-1\right)$

**លំហាត់ទី៣:** គេឲ្យ $c>1$ និង

$$x=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}};\ y=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}};\ z=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}$$

ចូរតំរៀប $x, y, z$ តាមលំដាប់កើន។

**លំហាត់ទី៤:** សំរួលកន្សោមខាងក្រោម:

$$P=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{2011\sqrt{2010}+2010\sqrt{2011}}$$

**លំហាត់ទី៥:** គេឲ្យ $x$ ជាចំនួនពិត, និងឲ្យ $A=\frac{-1+3x}{1+x}-\frac{\sqrt{|x|-2}+\sqrt{2-|x|}}{|2-x|}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A$ គឺជាចំនួនគត់ ហើយចូររកលេខចុងក្រោយរបស់ $A^{2011}$ ។

**លំហាត់ទី៦:** គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ ចារឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត $O$, កាំ $r$ ។ គូសគ្រប់បន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ផ្ចិត $O$, ឲ្យស្របនឹងជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ $ABC$, គ្រប់បន្ទាត់ទាំងនេះ បង្កើតជាមួយនឹងជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ $ABC$ បានត្រីកោណតូចបីដែលមានក្រឡាផ្ទៃរៀងគ្នា គឺ $S_1, S_2, S_3$ ។ តាង $S$ គឺជាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $ABC$ ។ រកតំលៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម: $\frac{S_1+S_2+S_3}{S}$ ។

## ចំលើយ

<u>លំហាត់ទី១:</u>

យើងមាន: $4x^2+2y^2+2z^2-4xy-4zx+2yz-6y-10z+34=0$

$$\Leftrightarrow\ (2x-y-z)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}2x-y-z=0\\ y-3=0\\ z-5=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x=4\\ y=3\\ z=5\end{cases}$$

យើងបាន: $S=(4-4)^{2011}+(4-3)^{2011}+(4-5)^{2011}=0$

ដូចនេះ $\boxed{S=0}$

លំហាត់ទី២:

យើងមាន: $x=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}}+\sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}-1\right)$

តាង $a=\sqrt[3]{\frac{23+\sqrt{513}}{4}}$ និង $b=\sqrt[3]{\frac{23-\sqrt{513}}{4}}$

យើងបាន: $a^3+b^3=\frac{23}{2}$ និង $ab=1$

ហើយតាង $y=a+b$ នាំឲ្យ $y^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=\frac{23}{2}+3y$

ដោយ $y=3x+1$ នោះតាមសមភាពខាងលើ យើងបាន: $2x^3+2x^2+1=2$

ដូចនេះ $\boxed{A=2}$

លំហាត់ទី៣:

យើងមាន: $x=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}=\frac{\left[\left(\sqrt{c+2}\right)^2-\left(\sqrt{c+1}\right)^2\right]\left(\sqrt{c}+\sqrt{c-1}\right)}{\left(\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}\right)\left[\left(\sqrt{c}\right)^2-\left(\sqrt{c-1}\right)^2\right]}$

$$=\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}$$

$$y=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}=\frac{\left[\left(\sqrt{c+2}\right)^2-\left(\sqrt{c+1}\right)^2\right]\left(\sqrt{c+1}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}\right)\left[\left(\sqrt{c+1}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}$$

$$z=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}=\frac{\left[\left(\sqrt{c}\right)^2-\left(\sqrt{c-1}\right)^2\right]\left(\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}\right)}{\left(\sqrt{c}+\sqrt{c-1}\right)\left[\left(\sqrt{c+2}\right)^2-\left(\sqrt{c+1}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}$$

ដោយ $\sqrt{c}+\sqrt{c-1}<\sqrt{c+1}+\sqrt{c}<\sqrt{c+2}<\sqrt{c+1},\ \forall c>1$

ដូចនេះ តំរៀបតាមសំនើរប្រធានគឺ $\boxed{x<y<z}$

សំគាល់: *លំហាត់ទី៣ នេះ អាចកែប្រែឲ្យទៅជាលំហាត់នៅឆ្នាំប្រឡងណាមួយ ដោយគ្រាន់តែជំនួស $c$ ដោយតំលៃលេខណាមួយ ដែលត្រូវគ្នានឹងឆ្នាំប្រឡង, ដូចជា $c=2014$ ជាដើម នោះគេអាចធ្វើឲ្យលំហាត់នេះ ចេញប្រឡងនៅឆ្នាំ2014 ដោយមានលក្ខណៈទាន់សម័យ ^_^ ។*

លំហាត់ទី៤:

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n$, យើងមាន:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}.\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

ដោយឲ្យតំលៃ $n$ ពី $1$ ទៅដល់ $2010$ យើងបានកន្សោម:

$$P=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{2010}}-\frac{1}{\sqrt{2011}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2011}}=\frac{2011-\sqrt{2011}}{\sqrt{2011}}$$

លំហាត់ទី៥:

$+$ តាម $|x|-2\geq 0$ និង $2-|x|\geq 0$ យើងបាន $|x|=2$ នាំឲ្យ $x=\pm 2$

ដោយពិនិត្យលើភាគបែង: $|x-2|\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ នាំឲ្យ $x=-2$

ជំនួស $x=-2$ ចូលកន្សោម $A$ យើងបាន: $A=7$

ដូចនេះ $\boxed{A=7}$

$+$ ពេល $A=7$ នាំឲ្យ $A^{2011}=7^{2011}$

យើងមាន: $7^1=7$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងក្រោយជាលេខ $7$

$7^2=49$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងក្រោយជាលេខ $9$

$7^3=343$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងក្រោយជាលេខ $3$

$7^4=2401$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងក្រោយជាលេខ $1$

..........................

យើងឃើញថា ខួបនៃការលេចឡើងនៃរបស់លេខចុងក្រោយរបស់ $7^k$ ស្មើនឹង $4$

ចំពោះ: $k=4m \Rightarrow 7^{4m}$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងក្រោយជាលេខ $1$

ចំពោះ: $k=4m+1 \Rightarrow 7^{4m+1}$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងក្រោយជាលេខ $7$

ចំពោះ: $k=4m+2 \Rightarrow 7^{4m+2}$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងក្រោយជាលេខ $9$

ចំពោះ: $k=4m+3 \Rightarrow 7^{4m+3}$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងក្រោយជាលេខ $3$

ដោយ $2011$ មានរាង $4k+3$ នាំឲ្យ $7^{2011}$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងក្រោយជាលេខ $3$

ដូចនេះ $A^{2011}$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងក្រោយជាលេខ $3$។

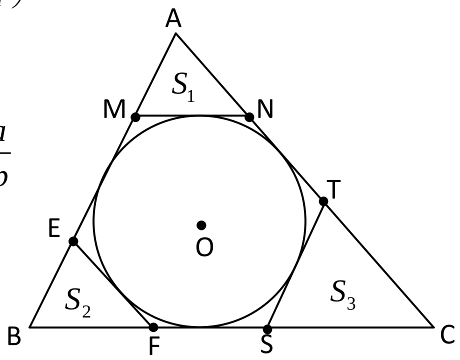
លំហាត់ទី៦:

យើងមាន: $\Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_1}{S}=\left(\frac{h_1}{h_a}\right)^2$

ដោយ $h_1 = h_a - 2r \Rightarrow \dfrac{S_1}{S} = \left(\dfrac{h_a - 2r}{h_a}\right)^2 = \left(1 - \dfrac{2r}{h_a}\right)^2$

តែដោយ $\dfrac{ah_a}{2} = rp$ ដែល $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$\Rightarrow 2r = \dfrac{ah_a}{p} \Rightarrow \dfrac{S_1}{S} = \left(1 - \dfrac{a}{p}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{S_1}{S}} = 1 - \dfrac{a}{p}$




ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាដែរ យើងបាន:

$$\sqrt{\frac{S_2}{S}} = 1 - \frac{b}{p} \quad \text{និង} \quad \sqrt{\frac{S_3}{S}} = 1 - \frac{c}{p}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = 3 - \frac{a+b+c}{p} = 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\sqrt{\frac{S_1}{S}}.1 + \sqrt{\frac{S_2}{S}}.1 + \sqrt{\frac{S_3}{S}}.1\right)^2 \le 3\left(\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} \ge \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \min\left(\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}\right) = \frac{1}{3} \text{ ពេល } \sqrt{\frac{S_1}{S}} = \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \sqrt{\frac{S_3}{S}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{b}{p} = 1 - \frac{c}{p} \Leftrightarrow a = b = c$$

$\Leftrightarrow$ ត្រីកោណ $ABC$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ដូចនេះ តំលៃតូចបំផុតដែលត្រូវរកស្មើនឹង $\dfrac{1}{3}$ ទទួលបានពេល $ABC$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

## វិញ្ញាសាទី២ រយៈពេល ២ម៉ោង និង៣០នាទី

**លំហាត់ទី១:**

គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ ចំនួនពីរគឺ: $x^2+a_1x+b_1=0$ (1)

$x^2+a_2x+b_2=0$ (2)

មានបណ្តាមេគុណ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a_1a_2\geq 2(b_1+b_2)$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានយ៉ាងតិចសមីការមួយ ក្នុងចំនោមសមីការទាំងពីរ មានឬស។

**លំហាត់ទី២:**

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\sqrt{2}+\sqrt{3+}+\sqrt{5}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទាន។

**លំហាត់ទី៣:**

គេឲ្យបីចំនួនគត់ $x, y, z$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2=z^2$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $xyz \,\vdots\, 60$ ។

**លំហាត់ទី៤:**

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall a, b, c>0$ គេបាន:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$$

**លំហាត់ទី៥:**

គេមានដើមឫស្សីពីរដើម ត្រូវបានដាំឈរត្រង់ឡើងទៅលើ ដែលមានកំពស់រៀងគ្នាគឺ $m$ និង $n$, នៅឃ្លាតពីគ្នាចំងាយ $d$ ។ ចូរគណនាប្រវែងកំពស់ ដែលទំលាក់ពីចំនុចប្រសព្វ នៃបន្ទាត់ពីរ ដែលភ្ជាប់គ្នា រវាងចុងកំពូលឫស្សីមួយទៅគល់របស់ឫស្សីមួយទៀត។ និងគណនា ប្រវែងពីជើងកំពស់របស់ចំនុចនោះ ទៅគល់ទាំងពីរ របស់ឫស្សី។

**លំហាត់ទី៦:**

ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរ មានរាងទូទៅ: $ax^2+bx=c \quad (a\neq 0)$ ដោយមិនប្រើកន្សោមឌីគ្រីមីណង់ $\Delta$ ។

## ចំលើយ

<u>លំហាត់ទី១:</u>

ឧបមាថាសមីការ (1) និង (2) សុទ្ធតែគ្មានឫស, នោះយើងបាន:

$$\begin{cases}\Delta_1=a_1^2-4b_1<0\\ \Delta_2=a_2^2-4b_2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1^2<4b_1\\ a_2^2<4b_2\end{cases}\Rightarrow\quad a_1^2+a_2^2<4(b_1+b_2)$$

$$\Rightarrow\quad 4(b_1+b_2)>a_1^2+a_2^2\geq 2a_1a_2\ \Rightarrow\ 2(b_1+b_2)>a_1a_2\quad (1)$$

តែតាមបំរាប់ យើងមាន: $2(b_1+b_2)\leq a_1a_2$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងឃើញថា មានភាពផ្ទុយគ្នា, បញ្ជាក់ថា ការឧបមាខាងលើគឺខុស

ដូចនេះ ក្នុងចំនោមសមីការទាំងពីរ យ៉ាងតិចមានសមីការមួយ មានឫស។

លំហាត់ទី២:

ឧបមាថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=r\in\mathbb{Q}$, យើងបាន:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=r-\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow\quad 5+2\sqrt{6}=r^2+5-2r\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow\quad 2\sqrt{6}+2r\sqrt{5}=r^2$$

$$\Rightarrow\quad 6+5r^2+2r\sqrt{30}=\frac{r^4}{4}$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{30}=\frac{1}{2r}\left(\frac{r^4}{4}-5r^2-6\right)\in\mathbb{Q}$$, ករណីនេះ មិនសមហេតុផល

ដូចនេះ ទាញបាន ការឧបមាខាងលើគឺខុស រឺ $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ មិនមែនជាចំនួនសនិទាន។

លំហាត់ទី៣:

ឧបមាថា $x$ និង $y$ សុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ទាញបាន $x^2\equiv y^2\equiv 1\,(\text{mod }3)$

គឺថា $z^2=x^2+y^2\equiv 2\,(\text{mod }3)$, ករណីនេះ មិនសមហេតុផល

ដូចនេះ $x$ និង $y$ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 3, មានន័យថា $xyz\,\vdots\,3$

ឧបមាថា $x, y$ សុទ្ធតែជាចំនួនសេស, ដូចនោះ $x^2\equiv y^2\equiv 1\,(\text{mod }4)$

ទាញបាន $z^2=x^2+y^2\equiv 2\,(\text{mod }4)$, ករណីនេះ មិនសមហេតុផល

ដូចនេះ ក្នុងចំនោម $x$ និង $y$ យ៉ាងតិចមានមួយ ជាចំនួនគូ

បើ $x\,\vdots\,2, y\,\vdots\,2$ នាំឲ្យ $xy\,\vdots\,4$ គឺថា $xyz\,\vdots\,4$

ឥឡូវ យើងពិនិត្យករណី $x$ ជាចំនួនគូ, $y$ ជាចំនួនសេស។

ឧបមាថា $x\not\vdots\,4$, ទាញបាន $x^2\equiv 4\,(\text{mod }8)$

ម្យ៉ាងទៀត $y^2\equiv 1\,(\text{mod }8)$ ទាញបាន $z^2=x^2+y^2\equiv 5\,(\text{mod }8)$,

ករណីនេះមិនសមហេតុផល។

ដូចនេះ $x\,\vdots\,4$ , គឺថា $xyz\,\vdots\,4$

ដូចគ្នាដែរ បើ $x$ ជាចំនួនសេស ហើយ $y$ ជាចំនួនគូ គឺ $xyz\,\vdots\,4$

ដូចនេះ យើងបានស្រាយបញ្ជាក់ថា $xyz\,\vdots\,4$

ចុងក្រោយ, យើងឧបមាថា $x$ និង $y$ សុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង 5។

ដូចនោះ $x^2\equiv 1,4\,(\text{mod }5)$ , $y^2\equiv 1,4\,(\text{mod }5)$

ទាញបាន $z^2=x^2+y^2\equiv 2,3,0\,(\text{mod }5)$

តែដោយ $z^2\not\equiv 2,3\,(\text{mod }5)$ នាំឲ្យ $z^2\equiv 0\,(\text{mod }5)$ គឺថា $z\,\vdots\,5$

សរុបមក យើងបាន $xyz\,\vdots\,3.4.5=60$ ពិត។

លំហាត់ទី៤:

យើងអាចឧបមាថា $c$ ជាចំនួនតូចបំផុតក្នុងចំនោមបីចំនួន $a, b, c$

យើងបាន: $3abc - a^2(b+c-a) - b^2(c+a-b) - c^2(a+b-c) =$

$$= a(a^2 - ab - ac + bc) + b(b^2 - bc - ba + ca) + c(c^2 - ca - cb + ab)$$

$$= a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b)$$

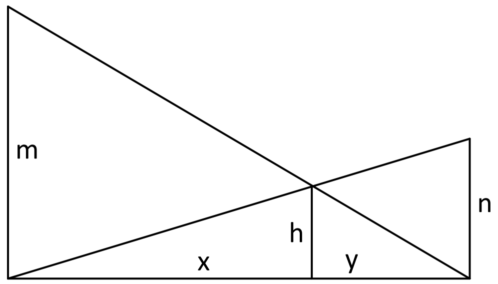
$$= (a-b)(a^2 - ac - b^2 + bc) + c(c-a)(c-b)$$

$$= (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \geq 0$$

$\Rightarrow \quad 3abc \geq a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c)$

សញ្ញា "=" កើតមាន ពេល $a = b = c > 0$ ។

លំហាត់ទី៥:




តាង $h$ ជាកំពស់ដែលត្រូវរក

$d$ ជាប្រវែងរវាងដើមឫស្សីទាំងពីរ

$x$ និង $y$ ជាបណ្ដាអង្កត់នៅលើ $d$

តាមផលធៀបដំនូចត្រីកោណ,

យើងបាន:

$$\frac{m}{h} = \frac{d}{y} \qquad (1)$$

$$\frac{n}{h} = \frac{d}{x} \qquad (2)$$

និង $x + y = d \qquad (3)$

បូក (1) និង (2) យើងទាញបាន: $y = \dfrac{h.d}{m}$ និង $x = \dfrac{hd}{n}$ ជំនួសចូល (3)

ទាញបាន: $\dfrac{hd}{m} + \dfrac{hd}{n} = d \Leftrightarrow h = \dfrac{mn}{m+n}$

នាំឲ្យ $x = \dfrac{hd}{n} = \dfrac{dm}{m+n}$ និង $y = \dfrac{hd}{m} = \dfrac{dn}{m+n}$

ដូចនេះ $h = \dfrac{mn}{m+n}\,;\, x = \dfrac{dm}{m+n}\,;\, y = \dfrac{dn}{m+n}$

លំហាត់ទី៦:

យើងមានសមីការ: $ax^2 + bx = c \ \ (a \neq 0)$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $4a$ យើងបាន:

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$

ក្រោយមក ថែម $b^2$ លើអង្គទាំងពីរនៃសមភាពខាងលើ យើងបាន:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2+4ac$$

$$\Leftrightarrow \quad (2ax+b)^2=\sqrt{b^2+4ac}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2ax+b=\pm\sqrt{b^2+4ac}$$

នាំឲ្យ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

ដូចនេះ សមីការដែលឲ្យមានឫសពីរគឺ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ ។

## វិញ្ញាសាទី៣ រយៈពេល២ម៉ោង និង៣០នាទី

### លំហាត់ទី១:

គេឲ្យចំនួន $a\neq 0, b\neq 0$ និង $a+b+c=0$ ។

$a)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^3+b^3+c^3=3abc$

$b)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2-c^2}=3x$ បើ $c=-2x$ ។

### លំហាត់ទី២:

គណនាតំលៃនៃកន្សោម: $(a^4+b^4+c^4)$ ដោយដឹងថា $a+b+c=0$ និង $a^2+b^2+c^2=1$ ។

### លំហាត់ទី៣:

ដោះស្រាយសមីការ និងប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម:

$a)$ $\sqrt{x-94}+\sqrt{96-x}=x^2-190x+9027$

$b)$ $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$

### លំហាត់ទី៤:

ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយ គេរៀបសិស្សជាក្រុម។ បើគេរៀបសិស្ស៨នាក់ ក្នុងមួយក្រុម នោះនៅសល់សិស្ស៤នាក់ តែបើគេរៀបសិស្ស៩នាក់ក្នុងមួយក្រុម នោះខ្វះសិស្ស២នាក់។

រកចំនួនសិស្ស នៅក្នុងថ្នាក់រៀននោះ?

### លំហាត់ទី៥:

$a)$ គេឲ្យចំនួនវិជ្ជមានពីរ $a, b$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ,

សមភាពកើតមាននៅពេលណា?

$b)$ រកឬសជាចំនួនគត់វិជ្ជមានរបស់សមីការៈ

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)...(1+x_n)=2^n\sqrt{x_1x_2x_3...x_n}$$

## លំហាត់ទី៦:

គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ កែងត្រង់ $A$ មាន $\hat{B}=60^0$ និង $BC=10cm$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃខាង, ក្រឡាផ្ទៃសរុប និងមាឌរបស់រូបធរណីមាត្រ ដែលបង្កើតឡើងដោយការបង្វិលត្រីកោណ $ABC$ ជុំវិញជ្រុង $AC$ ។

## ចំលើយ

<u>លំហាត់ទី១:</u>

$a)$ តាមបំរាប់: $a+b+c=0$ នាំឲ្យ $a+b=-c$

យើងបាន $(a+b)^3=-c^3$

$\Rightarrow\ a^2+b^3+c^3+3ab(a+b)=-c^3$

$\Rightarrow\ a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=-3ab(-c)=3abc$ ពិត

ដូចនេះ $a^3+b^3+c^3=3abc$

$b)$ តាមសំរាយខាងលើ, យើងមាន: $(a+b)^2=c^2\ \Leftrightarrow\ a^2+b^2-c^2=-2ab$

ទាញបាន $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2-c^2}=\dfrac{3abc}{-2ab}=-\dfrac{3}{2}c$

បើ $c=-2x$ នាំឲ្យ $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2-c^2}=-\dfrac{3}{2}(-2x)=3x$ ពិត

<u>លំហាត់ទី២:</u>

តាមបំរាប់: $a^2+b^2+c^2=1$ និង $a+b+c=0$

យើងបាន: $1^2=(a^2+b^2+c^2)^2$

$\Leftrightarrow\ 1=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$\Leftrightarrow\ a^4+b^4+c^4=1-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\qquad(*)$

ម្យ៉ាងទៀត $(a+b+c)^2=0$

$\Leftrightarrow\ a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

$\Rightarrow\ ab+bc+ca=-\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ (ab+bc+ca)^2=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\dfrac{1}{4}$, ជំនួសចូល $(*)$ យើងបាន:

$a^4+b^4+c^4=1-2.\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}$

<u>លំហាត់ទី៣:</u> ដោះស្រាយសមីការ និងប្រព័ន្ធសមីការ:

$a)\quad \sqrt{x-94}+\sqrt{96-x}=x^2-190x+9027$

លក្ខខណ្ឌ $94\le x\le 96$,

យើងមាន: $x^2-190x+9027=(x-95)^2+2\ge 2$

សមភាពកើតមាន លុះត្រាតែ $x=95$

អនុវត្តន៍វិសមភាពកូស៊ី, យើងបាន: $\sqrt{x-94}+\sqrt{96-x}\le\frac{x-94+1}{2}+\frac{96-x+1}{2}=2$

សមភាពកើតមាន លុះត្រាតែ $x=95$

ដូចនេះ សមីការដែលឲ្យ មានឫសតែមួយគត់ គឺ $x=95$

$$b)\quad\begin{cases}x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=1\\x^3+y^3+z^3=1\end{cases}$$

អនុវត្តន៍សមភាព: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$\Leftrightarrow\quad 1-3xyz=1(1-xy-yz-zx)$

$\Leftrightarrow\quad 3xyz=xy+yz+zx$

យើងមាន: $1=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$\Rightarrow\quad 1=1+2(xy+yz+zx)$

$\Rightarrow\quad xy+yz+zx=0$

$\Rightarrow\quad 3xyz=0$

នាំឲ្យ $x=0$ រឺ $y=0$ រឺ $z=0$

$+$ បើ $x=0$,

$$\Rightarrow\begin{cases}y+z=1\\y^2+z^2=1\\y^3+z^3=1\end{cases}\Rightarrow\quad y^2+2yz+z^2=1$$

$\Rightarrow\quad 2yz=0\Leftrightarrow\quad y=0\Rightarrow\quad z=1$

រឺ $\quad z=0\Rightarrow\quad y=1$

ដូចនេះ យើងបាន: $(x;y;z)=(0;0;1),\ (0;1;0)$

ធ្វើដូចគ្នាដែរ ចំពោះ $y=0$ និង $z=0$, យើងបាន: ចំលើយបួនទៀតគឺ: $(0;0;1),\ (1;0;0),$

$(0;1;0),\ (1;0;0)$

សរុបមក ប្រព័ន្ធសមីការដែលឲ្យមានចំលើយៈ $(x;y;z)=(0;0;1),(0;1;0),(1;0;0)$ ។

លំហាត់ទី៤:

តាង $x$ ជាចំនួនសិស្សនៅក្នុងថ្នាក់នេះ

$y$ ជាចំនួនក្រុមដែលរៀបបាន ដែល $(x,y\in\mathbb{N}^*, x>8)$

តាមបំរាប់ប្រធាន, យើងសរសេរបានប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមៈ

$$\begin{cases} x=8y+4 \\ x=9y-2 \end{cases}$$

ទាញបាន $8y+4=9y-2 \Rightarrow y=6$

ដូចនេះ ចំនួនសិស្សនៅក្នុងថ្នាក់រៀននោះមាន $x=8.6+4=52$ នាក់

លំហាត់ទី៥:

$a)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថាៈ $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

ដោយ $a,b>0 \Rightarrow \sqrt{a},\sqrt{b}$ មានន័យ

$\Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$

$\Rightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ពិត

សមភាពកើតមាន លុះត្រាតែ $a=b$

$b)$ តាមសំរាយខាងលើ យើងបានៈ

$$1+x_1\geq 2\sqrt{x_1}, 1+x_2\geq 2\sqrt{x_2}, ..., 1+x_n\geq 2\sqrt{x_n}$$

$$\Rightarrow (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\dots(1+x_n)\geq 2^n\sqrt{x_1.x_2.x_3\dots x_n}$$

សមភាពកើតមាន លុះត្រាតែ $x_1=x_2=x_3=\dots=x_n=1$

ដូចនេះ សមីការដែលឲ្យមានឫសតែមួយគត់ គឺ $x_1=x_2=x_3=\dots=x_n=1$

លំហាត់ទី៦:

$+$ ពេលត្រីកោណកែង $ABC$ វិលជុំវិញជ្រុងកែង $AC$ វានឹងបង្កើតបានជារូបកោន កំពូល $C$, មានកំពស់ $CA$, ជនេត្រ $CB$ និងកាំបាតស្មើនឹង $AB$ ដូចរូប។

$+$ ម្យ៉ាងទៀត ត្រីកោណ $ABC$ កែងត្រង់ $A$ មាន $\hat{B}=60^0$ នាំឲ្យ វាគឺចាពាក់កណ្តាលត្រីកោណសម័ង្ស មានជ្រុង $BC=10cm$, កំពស់ $CA=\dfrac{BC\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}cm$

$+$ យើងបានៈ $AB=\dfrac{BC}{2}=5cm$ (ប្រើពីតាគ័រ)

$*$ ក្រឡាផ្ទៃខាងរបស់រូបកោន ដែលបង្កើតឡើងគឺៈ

$$S_1=\pi Rl=\pi\times5\times10=50cm^2$$

*ក្រឡាផ្ទៃសរុបរបស់កោនៈ

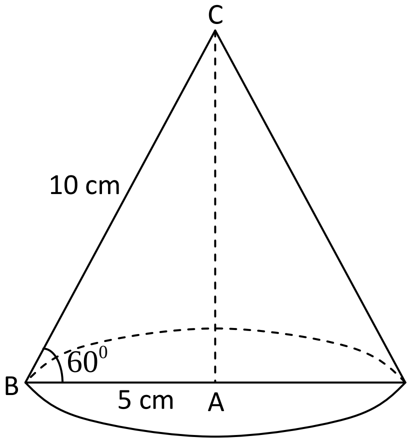
$$S_0 = S_1 + S_2 = \pi Rl + \pi R^2$$

$$= \pi R(l+R) = \pi 5(10+5) = 75\pi cm^2$$

(ដែល $S_2$ គឺជាក្រឡាផ្ទៃបាត)

*មាឌរបស់រូបកោនៈ

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi \times 25 \times 5\sqrt{3} = \frac{125\sqrt{3}}{3}\pi cm^3$$




## វិញ្ញាសាទី៤ រយៈពេល២ម៉ោង និង៣០នាទី

### លំហាត់ទី១:

$a)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a,b,c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$, គេបានៈ

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

$b)$ គណនាតំលៃនៃកន្សោមៈ $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{1006}+1)$ ។

### លំហាត់ទី២:

គេឲ្យ $a>0, b>0$ និង $a^2 - b \geq 0$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាៈ

$a)$ $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

$b)$ $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

$c)$ អនុវត្តន៍, សំរួលកន្សោមៈ $P = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

### លំហាត់ទី៣:

$a)$ ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពៈ $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, ក្នុងនោះ $a>0, b>0$

$b)$ ដោះស្រាយសមីការៈ $2011x^2 + 2012x + 1 = 0$ ។

### លំហាត់ទី៤:

$a)$ គេមានបន្ទះលោហៈមួយសន្លឹក ដែលមានកំរាស់ $3mm$ និងមានទំងន់ $264kg$ ។
ចូររកផ្ទៃក្រឡានៃបន្ទះលោហៈនេះ គិតជា $m^2$ ដោយដឹងថា ម៉ាសមាឌនៃលោហៈនេះ

ស្មើនឹង $8kg/dm^3$ ។

$b)$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការៈ $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2 & (1) \\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4 & (2) \end{cases}$

## លំហាត់ទី៥:

ក្រុមសាមគ្គីមួយ មានដីស្រែពីរកន្លែង មានរាងជាការេដូចគ្នា ដែលមានក្រឡាផ្ទៃខុសគ្នា $75cm^2$ ហើយផលបូក បរិមាត្រដីស្រែទាំងពីរកន្លែង មានរង្វាស់ស្មើ $100m$ ។

ចូរគណនាផលស្រូវតាមកន្លែងនីមួយៗ ដោយដឹងថា ស្រែទាំងពីរកន្លែងទទួលបានផល $0,35kg/m^2$ ។

## លំហាត់ទី៦:

អង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណព្នាយ $ABCD$ ចែកចតុកោណព្នាយជាត្រីកោណបួន។ $s_1$ និង $s_2$ គឺជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ដែលមានជ្រុងមួយ ជាបាតរបស់ចតុកោណព្នាយ។

ចូររកផ្ទៃក្រឡា $S$ នៃចតុកោណព្នាយ ជាអនុគមន៍នៃ $s_1$ និង $s_2$ ។

## ចំលើយ

លំហាត់ទី១:

$a)$ តាង $P=\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}$

តាមបំរាប់: $abc=1$ ជំនួសចូលកន្សោមខាងលើ យើងបាន:

$$P=\frac{abc.a}{ab+abc.a+abc}+\frac{b}{bc+b+abc}+\frac{c}{ac+c+1}$$

$$=\frac{ac}{1+c+ac}+\frac{1}{1+c+ac}+\frac{c}{1+c+ac}=\frac{1+c+ac}{1+c+ac}=1$$ (ព្រោះ $a,b,c\neq 0$)

ដូចនេះ $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=1$ ពិត

លំហាត់ទី២:

$b)$ យើងមាន: $2-1=1$, នោះកន្សោមដែលឲ្យ អាចសរសេរជា:

$$A=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{1006}+1)$$

ដោយពិនិត្យឃើញថា កន្សោមដែលឲ្យមានលក្ខណៈ ជាផលគុណនៃកន្សោមឆ្លាស់គ្នា នោះយើងអាចគណនាបានលទ្ធផលចុងក្រោយគឺ:

$$A=2^{2012}-1$$

លំហាត់ទី២:

$+$ តាង $x=\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}} \Rightarrow x>0 \Rightarrow x=\sqrt{x^2}$

ពិនិត្យមើល: $x^2=2a+2\sqrt{a^2-b}=4\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)$

$$\Rightarrow x=2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \qquad (*)$$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ (**)

$a)$ $+$ យក (*) + (**) យើងបាន: $2\sqrt{a+\sqrt{b}}=2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+2\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

នាំឲ្យ $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

ទាញបាន $a)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

$b)$ $+$ យក (*) − (**) យើងបាន: $2\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-2\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

នាំឲ្យ $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

ទាញបាន $b)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

$c)$ អនុវត្តន៍, យើងមាន: $\begin{cases}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}$

ទាញបាន: $P=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $P=\sqrt{2}$

លំហាត់ទី៣:

$a)$ យើងមាន: $a>0, b>0 \Rightarrow a+b>0$

ឧបមាថា $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ , យើងបាន:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)(a^2-ab+b^2) \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow \quad a^2-ab+b^2 \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ (ព្រោះ $a+b>0$)

$\Leftrightarrow \quad 4a^2-4ab+4b^2 \geq a^2+2ab+b^2$

$\Leftrightarrow \quad 3a^2-6ab+3b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 3(a-b)^2 \geq 0$ ពិតជានិច្ច

ទាញបាន ការឧបមាខាងលើពិត

ដូចនេះ $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ ពិត

$b) \quad 2011x^2+2012x+1=0$

$\Leftrightarrow \quad 2011x^2+2011x+x+1=0$

$\Leftrightarrow \quad 2011x(x+1)+x+1=0$

$\Leftrightarrow \quad (2011x+1)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow \quad x=-\dfrac{1}{2011}$ រឺ $x=-1$

ដូចនេះ សមីការដែលឲ្យមានឫសពីរគឺ $x=-\dfrac{1}{2011}$ រឺ $x=-1$

លំហាត់ទី៤:

$a)$ រកផ្ទៃក្រឡា នៃបន្ទះលោហៈ:

$+$ ទំងន់បន្ទះលោហៈក្នុង $1m^2$ គឺ:

$$10\times10\times0,03\times8=24kg$$

$+$ ផ្ទៃក្រឡារបស់បន្ទះលោហៈគឺ:

$$S=\frac{264}{24}=11m^2$$

$b)$ តាមសមីការ $(1)$ , យើងបាន: $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2=4 \qquad (3)$

យកសមីការ $(2)$ ជំនួសចូល $(3)$ យើងបាន: $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2=\dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx}=\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{zx}+\frac{1}{z^2}\right)+\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{yz}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=-\frac{1}{z}\\ \frac{1}{y}=-\frac{1}{z}\end{cases} \Leftrightarrow x=y=-z$ , ជំនួសចូលសមីការ $(1)$ យើងបាន៖

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=2$$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ និង $y=x=\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{2}$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចំលើយ $(x;y;z)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

លំហាត់ទី៥:

តាង $a$ និង $b$ ជារង្វាស់ជ្រុងការេទាំងពីរ $(a>b)$ យើងបាន៖

$$\begin{cases}a^2-b^2=75\\ 4a+4b=100\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(25-b)^2-b^2=75\\ a=25-b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=14m\\ b=11m\end{cases}$$

ដូចនេះ ផលស្រូវដែលទទួលបាន តាមកន្លែងនីមួយៗគឺ៖

$+$ កន្លែងទី១: $P_1=14\times14\times0,35=68,6kg$

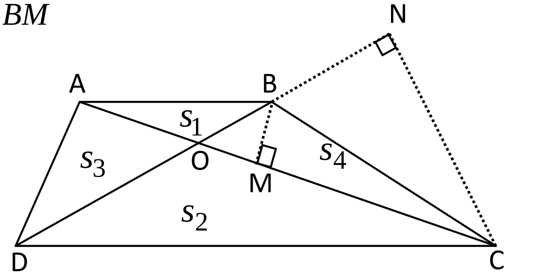
$+$ កន្លែងទី២: $P_2=11\times11\times0,35=42,35kg$

លំហាត់ទី៦:

$$S=s_1+s_2+s_3+s_4$$

យើងមាន៖ $s_1=\frac{1}{2}AO.BM$ និង $s_4=\frac{1}{2}CO.BM$

$\Rightarrow \frac{s_1}{s_4}=\frac{AO}{CO}$ (1)




ហើយ $s_2=\frac{1}{2}DO.CN$ និង $s_4=\frac{1}{2}BO.CN$

$\Rightarrow \frac{s_4}{s_2}=\frac{BO}{DO}$ (2)

ម្យ៉ាងទៀត: $\Delta AOB \sim \Delta COD$ យើងបាន: $\frac{AO}{CO}=\frac{BO}{DO}$ (3)

តាម (1), (2) និង (3) យើងបាន: $\frac{s_1}{s_4}=\frac{s_4}{s_2} \Rightarrow s_4=\sqrt{s_1 s_2}$ (4)

ធ្វើដូចគ្នាដែរ យើងបាន: $s_3=\sqrt{s_1 s_2}$ (5)

តាម (4) និង (5), យើងបាន:

$$S=s_1+s_2+2\sqrt{s_1 s_2}=(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^2$$

## វិញ្ញាសាទី៥ រយៈពេល២ម៉ោង និង៣០នាទី

### លំហាត់ទី១:

គណនាតំលៃនៃកន្សោម $E=\frac{1+xy}{x+y}+\frac{1-xy}{x-y}$, ដោយដឹងថា:

$x=\sqrt{4+\sqrt{8}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ និង $y=\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$។

### លំហាត់ទី២:

$a)$ គេឲ្យបីចំនួន $x, y, z$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នានូវលក្ខខណ្ឌ: $\begin{cases} x^2+2y+1=0 \\ y^2+2z+1=0 \\ z^2+2x+1=0 \end{cases}$

គណនាតំលៃនៃកន្សោម: $A=x^{2012}+y^{2012}+z^{2012}$

$b)$ ចូររកគូនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $(x; y)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់: $x^2-249xy-250y^2=6033$។

### លំហាត់ទី៣:

$a)$ $x_1$ និង $x_2$ ជាឬសនៃសមីការ: $x^2-2(m+1)x+m^2+2m=0$

ចូរបង្ហាញថា $x_1-x_2$ ជាចំនួនថេរ។

$b)$ ចូររកតំលៃ $m$ ដើម្បីឲ្យប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} 3x+7y=m \\ 2x+5y=20 \end{cases}$ មានគូចំលើយវិជ្ជមាន។

### លំហាត់ទី៤:

គេឲ្យការេ $ABCD$ មានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ $a$។ នៅក្នុងការេនេះ គេសង់មួយភាគបួន នៃរង្វង់ដែលមានកាំស្មើ $a$ ហើយផ្ចិតរបស់វា ជាកំពូលទាំងបួនរបស់ការេនេះ។

ចូរគណនាបរិមាត្រ រូបផ្កាកូលាប $AMBNCPDQA$ ដែលសង់បាននោះ (មើលរូប)។

**លំហាត់ទី៥:**

គេឲ្យកន្សោមៈ $S=a^2+b^2+c^2+ac+bd$ , ក្នុងនោះ $ad-bc=1$ ។

$a)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថាៈ $S\geq\sqrt{3}$

$b)$ គណនាតំលៃរបស់ផលបូក $(a+c)^2+(b+d)^2$ ពេលដឹងថា $S=\sqrt{3}$

**លំហាត់ទី៦**

គេឲ្យត្រីកោណសមបាត $ABC$ កំពូល $A$ មានផ្ទៃក្រឡាស្មើ $S$ ។ $MN$ ជាបាតមធ្យមត្រូវគ្នានឹងបាត $BC$ ហើយ $O$ ជាចំនុចប្រសព្វនៃ $MN$ និងកំពស់គូសចេញពីកំពូល $A$ ។ គេបន្លាយ $[CO)$ កាត់ $AB$ ត្រង់ $D$ និងបន្លាយ $[BO)$ កាត់ $AC$ ត្រង់ $E$ ។

ចូររកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ADOE$ ជាអនុគមន៍នៃ $S$ ។

**ចំលើយ**

<u>លំហាត់ទី១:</u>

ដំបូង យើងត្រូវសំរួលកន្សោម $x$ និង $y$ ជាមុនសិន។

$$x=\sqrt{4+\sqrt{8}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$=\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}$$
$$=\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\sqrt{2.2}=2$$
$$y=\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$$
$$=\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{9\sqrt{2}-6\sqrt{3}+3\sqrt{5}}=\frac{2\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\frac{9}{8}$$

តាមនោះ យើងបានៈ

$$E=\frac{1+xy}{x+y}-\frac{1-xy}{x-y}=\frac{1+2.\frac{2}{3}}{2+\frac{2}{3}}-\frac{1-2.\frac{2}{3}}{2-\frac{2}{3}}=\frac{9}{8}$$

<u>លំហាត់ទី២:</u>

$a)$ យើងមានៈ $\begin{cases}x^2+2y+1=0\\ y^2+2z+1=0\\ z^2+2x+1=0\end{cases}$

បូកអង្គនឹងអង្គ នៃបណ្តាសមភាពខាងលើ, យើងបានៈ

$$(x^2+2y+1)+(y^2+2z+1)+(z^2+2x+1)=0$$

$\Rightarrow\ (x^2+2x+1)+(y^2+2y+1)+(z^2+2z+1)=0$

$\Rightarrow\ (x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y+1=0 \\ z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

ទាញបាន: $A=(-1)^{2012}+(-1)^{2012}+(-1)^{2012}=3$

$b)$ រកគូនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $(x,y)$:

$x^2-249xy-250y^2=6033$

$\Leftrightarrow\ x^2-y^2-249xy-249y^2=6033$

$\Leftrightarrow\ (x+y)(x-y)-249y(x+y)=6033$

$\Leftrightarrow\ (x+y)(x-250y)=3\times 2011$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-250y=2011 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x+y=2011 \\ x-250y=3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow\ x=11,\ y=-8$ ឬ $x=2003,\ y=8$

ដោយ $(x,y)$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប យើងបានគូចំលើយ:

$$(11;-8),\ (-11;8),\ (2003;8),\ (-2003;-8)$$

<u>លំហាត់ទី៣:</u>

$a)$. បង្ហាញថា $x_1-x_2$ ជាចំនួនថេរ:

យើងមាន: $x^2-2(m+1)x+m^2+2m=0$

$\Delta'=(m+1)^2-m^2-2m=1$

$x_1=m+1-1=m$ និង $x_2=m+1+1=m+2$

ទាញបាន $x_1-x_2=m-m-2=-2$ ថេរ

$b)$. រកតំលៃ $m$:

យើងមាន: $D=\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=15-14=1$

$D_x=\begin{vmatrix} m & 7 \\ 20 & 5 \end{vmatrix}=5m-140$

$D_y=\begin{vmatrix} 3 & m \\ 2 & 20 \end{vmatrix}=60-2m$

គូចំលើយ $(x;y)=(5m-140;\ y=60-2m)$

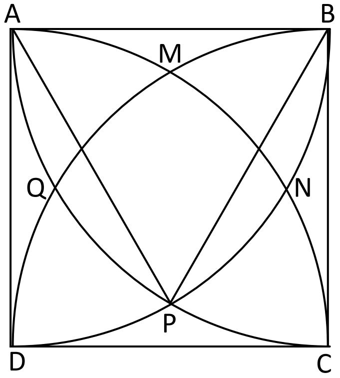
គូចំលើយវិជ្ជមានកាលណា: $5m-140>0$ និង $60-2m>0$

នាំឲ្យ $m > 28$ និង $m < 30$

ដូចនេះ $28 < m < 30$

លំហាត់ទី៤:

គណនាបរិមាត្ររូបផ្កាកូលាបៈ




តាង $M$ ជាបរិមាត្រផ្កាកូលាប, យើងមានៈ

$AB = AP = BP = a$ (កាំនៃរង្វង់)

យើងបានៈ $\Delta ABP$ ជាត្រីកោណសម័ង្សនាំឲ្យ $\widehat{PAB} = 60^0$

$\widehat{PAD} = 90^0 - 60^0 = 30^0$ (មុំផ្ចិតនៃរង្វង់ផ្ចិត $A$)

ទាញបានៈ $\widehat{PAD} = \widehat{DP} = 30^0$

នាំឲ្យ $M = 8.\widehat{DP} = 8\times 30^0 = 240^0$

ដោយ $360^0 = 2\pi a$

ដូចនេះ $M = \dfrac{2\pi a}{360}\times 240 = \dfrac{4\pi a}{3}$

លំហាត់ទី៥:

$a)$. យើងមានៈ $(ad-bc)^2 + (ac+bd)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

ជំនួស $ad - bc = 1 \Rightarrow 1 + (ac+bd)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

អនុវត្តន៍វិសមភាពកូស៊ី

$$(a^2+b^2)+(c^2+d^2) \ge 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

នាំឲ្យ $a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd \ge 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} + ac + bd$

ដូចនោះ យើងគ្រាន់តែត្រូវការស្រាយបញ្ជាក់ថាៈ

$$2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} + ac + bd \ge \sqrt{3}$$

សមមូលនឹង $2\sqrt{1+(ac+bd)^2} + ac + bd \ge \sqrt{3}$

តាង $ac + bd = x$ និង $p = 2\sqrt{1+x^2} + x$

យើងបាន $p^2 = 4(1+x)^2 + 4x\sqrt{1+x^2} + x^2 = (1+x)^2 + 4x\sqrt{1+x^2} + 4x^2 + 3$

$$= \left(\sqrt{1+x^2} + 2x\right)^2 + 3 \ge 3 \Rightarrow p^2 \ge 3 \Rightarrow p \ge \sqrt{3}$$

ទាញបាន $S \ge \sqrt{3}$ ពិត

$b)$ សញ្ញាសមភាពកើតមានលុះត្រាតែៈ

$$\begin{cases} a^2+b^2 = c^2+d^2 \\ \sqrt{1+x^2} + 2x = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

ពេលនោះយើងបាន: $\begin{cases} a^2+b^2=c^2+d^2 \\ ac+bd=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ ad-bc=1 \end{cases}$

តាមសំរាយខាងលើ: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ad-bc)^2+(ac+bd)^2=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

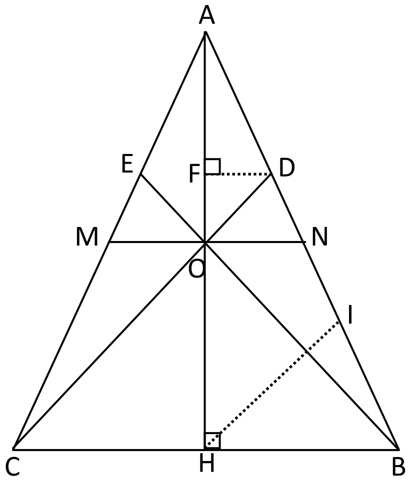
ដូចនេះ $a^2+b^2=c^2+d^2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

យើងបាន: $(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+c^2+b^2+d^2+2ac+2bd$

$$=2.\frac{2}{\sqrt{3}}+2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $(a+c)^2+(b+d)^2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

<u>លំហាត់ទី៦:</u>




រកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ADOE$ :

សង់ $HI \parallel CD$ យើងបាន:

$I$ កណ្ដាល $BD$ ( $HI$ ជាបាតមធ្យម $\Delta BCD$ )

$D$ កណ្ដាល $AI$ ( $DO$ ជាបាតមធ្យម $\Delta AHI$ )

$\Rightarrow \quad AD=DI=IB=\dfrac{AB}{3}$

ចំនោលកែងនៃ $D$ ទៅលើ $AH$ ត្រង់ $F$ យើងបាន:

$\Delta AFD \sim \Delta AHB \Rightarrow \dfrac{FD}{HB}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_{ADOE}}{S}=\frac{2S_{ADO}}{2S_{AHB}}=\frac{\frac{1}{2}FD.AO}{\frac{1}{2}HB.AH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

ដូចនេះ $S_{ADOE}=\dfrac{S}{6}$

## វិញ្ញាសាទី៦ រយៈពេល២ម៉ោង និង៣០នាទី

**លំហាត់ទី១:**

$a$). ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាៈ $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$

$b$). ចូរដោះស្រាយសមីការៈ $\frac{x-4}{2008}+\frac{x-3}{2009}-\frac{x-2}{2010}-\frac{x-1}{2011}=0$

$c$). ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការៈ $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{6}\\ x-y=5\end{cases}$ ចំពោះ $x>y>0$ ។

**លំហាត់ទី២:**

$a$). គេឲ្យ $a,b,c$ ខុសគ្នាពីមួយទៅមួយ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P=a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$ ខុសពីសូន្យជានិច្ច។

$b$). ចូររកចំនួនមួយដែលមានលេខបួនខ្ទង់ៈ $\overline{abca}$ ដោយដឹងថា $\overline{abca}=(5c+1)^2$ ។

**លំហាត់ទី៣:**

គេឲ្យកន្សោម $M=x^2+y^2+2z^2+t^2$ ចំពោះ $x,y,z$ និង $t$ ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។

ចូររកតំលៃតូចបំផុតនៃ $M$ និងបណ្តាតំលៃត្រូវគ្នានៃ $x,y,z$ និង $t$ ដោយដឹងថាៈ

$x^2-y^2+t^2=21$ និង $x^2+3y^2+4z^2=101$ ។

**លំហាត់ទី៤:**

គេឲ្យ $a,b$ និង $c$ ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាៈ

$$3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$$

**លំហាត់ទី៥:**

ការេមួយមានជ្រុងរង្វាស់ស្មើ1 ឯកតាប្រវែង។ តាមចំនុចប្រសព្វនៃអង្កត់ទ្រូងការេ គេគូសបន្ទាត់ចល័តមួយ។ ចូរគណនាផលបូកការេនៃចំងាយពីកំពូលទាំងបួនរបស់ការេ ទៅបន្ទាត់ចល័ត។

**លំហាត់ទី៦:**

ចូររកលេខខ្ទង់ឯកតារបស់កន្សោមៈ $x=\left(\frac{-2a}{4+a}-\frac{\sqrt{|a|-3}+\sqrt{3-|a|}}{3-a}\right)^{2012}$ ។

## ចំលើយ

**លំហាត់ទី១:**

$a$). យើងមានៈ $3^2>2^3 \Rightarrow (3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}>(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ (1)

$2^{\sqrt{9}}>2^{\sqrt{6}} \Rightarrow (2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}>(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{2}}$ (2)

តាម (1) និង (2)ៈ $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}>(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} \Rightarrow 3^{\sqrt{2}}>2^{\sqrt{3}}$ ពិត

$b$). ដោះស្រាយសមីការៈ

$$\frac{x-4}{2008}+\frac{x-3}{2009}-\frac{x-2}{2010}-\frac{x-1}{2011}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-4}{2008}-1+\frac{x-3}{2009}-1-\left(\frac{x-2}{2010}-1\right)-\left(\frac{x-1}{2011}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-2012}{2008}+\frac{x-2012}{2009}-\frac{x-2012}{2010}-\frac{x-2012}{2011}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2012)\left(\frac{1}{2008}+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x-2012=0 \Rightarrow x=2012$$

$c$). ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការៈ

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{6} & (1)\\ x-y=5 & (2)\end{cases}$$

ជំនួស $x=y+5$ ចូលក្នុងសមីការ $(1)$ យើងបានៈ

$$\left[(y+5)^2+y^2\right].36=y(y+5).97$$

$$\Leftrightarrow \quad 25y^2+125y-900=0 \Leftrightarrow y^2+5y-36=0$$

$$\Delta=25+144=169=13^2$$

$y_1=4$ (យក)

$y_2=-9$ (មិនយក)

ដូចនេះ គូចំលើយនៃប្រព័ន្ធសមីការគឺៈ $(x=9,\ y=4)$

លំហាត់ទី២:

$a$). យើងមានៈ $a-b=-(b-c)-(c-a)$, ជំនួសចូលកន្សោមដែលឲ្យ យើងបានៈ

$$P=a^4(b-c)+b^4(c-a)-c^4(b-c)-c^4(c-a)$$
$$=(b-c)(a^4-c^4)+(c-a)(b^4-c^4)$$

បំបែកបន្តទៀត យើងបានៈ

$$P=(a-b)(b-c)(a-c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$
$$=\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(a-c)\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]$$

ដោយ $a,b,c$ ខុសគ្នាពីមួយទៅមួយ, យើងទាញបាន $P$ ខុសពីសូន្យជានិច្ច។

$b$). រកចំនួនមួយដែលមានលេខបួនខ្ទង់ៈ

តាមបំរាប់ $\overline{abca}=(5c+1)^2$

យើងបាន: $1000a+100b+10c+a=25c^2+10c+1$

$\Leftrightarrow \quad 100(10a+b)+a=25c^2+1$

$\Leftrightarrow \quad \left(10\sqrt{10a+b}\right)^2+a=(5c)^2+1$

$\Leftrightarrow \quad 10\sqrt{10a+b}=5c$ និង $a=1$

$\Leftrightarrow \quad c=2\sqrt{10+b} \Leftrightarrow c^2=40+4b$

ដើម្បីបាន $c$ ជាការេប្រាកដលុះត្រាតែ $b=6 \Rightarrow c=8$

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ: $\overline{abca}=1681$

លំហាត់ទី៣:

$a)$. រកតំលៃតូចបំផុតនៃ $M$ និងតំលៃ $x, y, z$ និង $t$:

យើងមាន: $x^2-y^2+t^2=21 \quad (1)$ និង $x^2+3y^2+4z^2=101 \quad (2)$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃ $(1)$ និង $(2)$ យើងបាន:

$$2(x^2+y^2+2z^2)+t^2=122$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2z^2+t^2=61+\frac{t^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow M=61+\frac{t^2}{2}$$

ដើម្បីឲ្យ $M$ តូចបំផុតលុះត្រាតែ $t=0 \Rightarrow M=61$

បើ $t=0$ យើងបាន:

$$x^2-y^2=21 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=3\times 7$$

$\Leftrightarrow x-y=3$ និង $x+y=7 \Leftrightarrow x=5,\ y=2$

ហើយ $4z^2=101-x^2-3y^2=101-25-12=64 \Rightarrow z=4$

ដូចនេះ $x=5,\ y=2,\ z=4$ និង $t=0$

លំហាត់ទី៤:

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$

យើងមាន: $(a-b)^2\ge 0 \Rightarrow a^2+b^2\ge 2ab \quad (1)$

$(b-c)^2\ge 0 \Rightarrow b^2+c^2\ge 2bc \quad (2)$

$(a-c)^2\ge 0 \Rightarrow a^2+c^2\ge 2ac \quad (3)$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃ $(1), (2)$ និង $(3)$ យើងបាន:

$$ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2 \quad (4)$$

បូកអង្គទាំងពីរនៃ $(4)$ នឹង $2ab+2bc+2ca$ យើងបាន:

$3(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^2$ (5)

ម្យ៉ាងទៀត តាមវិសមភាពក្នុងត្រីកោណយើងបាន៖

$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac+bc>c^2 & (6) \\ ab+ac>a^2 & (7) \\ ab+bc>b^2 & (8) \end{cases}$$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃ (6),(7),(8) យើងបាន៖

$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$ (9)

បូកអង្គទាំងពីរនៃ (9) នឹង $2(ab+bc+ca)$ យើងបាន៖

$(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$ (10)

តាម (5) និង (10) យើងបាន៖

$3(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$ ពិត

លំហាត់ទី៥:

គណនាផលបូកការេនៃចំងាយពីកំពូលទាំងបួននៃការេទៅបន្ទាត់ចល័ត៖

តាង $A', B', C'$ និង $D'$ ជាចំនោលកែងនៃ $A, B, C$ និង $D$ លើបន្ទាត់ចល័ត។

យើងបាន៖ $M = A'A^2+B'B^2+C'C^2+D'D^2$

យើងមាន៖ $\Delta A'AO \cong \Delta C'CO \Rightarrow A'A = C'C$

$\Delta B'BO \cong \Delta C'CO \Rightarrow B'B = D'D$

$\Rightarrow \quad M = 2(A'A^2+B'B^2)$

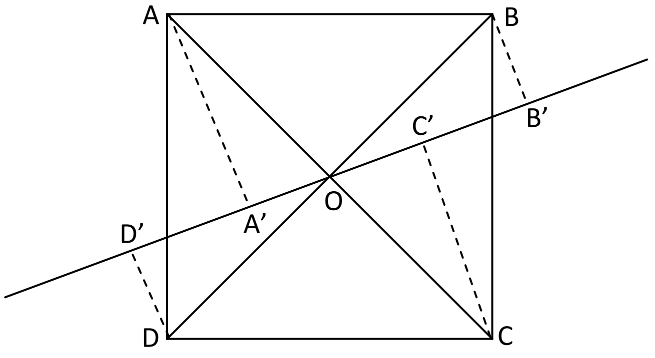
ម្យ៉ាងទៀត $\Delta A'AO \cong \Delta B'OB \Rightarrow A'O = B'B$

$\Rightarrow \quad M = 2(A'A^2+A'O^2)$

ដោយ $\Delta A'AO$ កែងត្រង់ $A'$ យើងបាន៖ $A'A^2+A'O^2 = AO^2$

តែ $(2.AO)^2 = AC^2 = 1+1 = 2 \Rightarrow AO^2 = \dfrac{1}{2}$

ដូចនោះ៖ $M = 2\left(A'A^2+A'O^2\right) = 2.AO^2 = 1$



លំហាត់ទី៦:

រកលេខខ្ទង់ឯកតារបស់កន្សោម $x=\left(\frac{-2a}{4+a}-\frac{\sqrt{|a|-3}+\sqrt{3-|a|}}{3-a}\right)^{2012}$

យើងដឹងថា ចំនួនអវិជ្ជមានមិនអាចស្ថិតនៅក្រោមរ៉ាឌីកាល់គូបានទេ, នោះយើងបាន:

$|a|-3\geq 0$ និង $3-|a|\geq 0$ ទាញបាន $|a|=3$ រឺ $a=\pm 3$

ដោយភាគបែង $3-a\neq 0$ នាំឲ្យ $a\neq 3$ នាំឲ្យ $a=-3$

ទាញបាន $x=\left(\frac{(-2)(-3)}{4-3}\right)^{2012}=6^{2012}$

ហើយយើងសង្កេតឃើញថា គ្រប់ស្វ័យគុណជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននៃគ្រប់ចំនួនដែលបញ្ចប់ដោយលេខចុងជាលេខ $6$ តែងមានលេខខ្ទង់ឯកតាស្មើនឹង $6$ ។

ដោយ $x=6^{2012}$ នោះទាញបាន លេខខ្ទង់ឯកតារបស់វាគឺលេខ $6$ ។

ដូចនេះ លេខខ្ទង់ឯកតារបស់ $x$ គឺលេខ $6$ ។

## វិញ្ញាសាទី៧ រយៈពេល២ម៉ោង និង៣០នាទី

**លំហាត់ទី១:**

$a)$. គេឲ្យ $x+\frac{1}{x}=4$ ។ ចូរកំណត់ $x^3+\frac{1}{x^3}$

$b)$. ចូររកលេខចុងក្រោយនៃផលបូក $2^2+20^{20}+201^{201}+2011^{2011}$

**លំហាត់ទី២:**

ចូរគណនាតំលៃនៃកន្សោមខាងក្រោម:

$a)$. $2011^3-2010.2011^2-2010^2.2011+2010^3$

$b)$. $403^5-402^2(403^3+2.403^2+3.403+4)$

**លំហាត់ទី៣:**

បុរសម្នាក់បានសួរនារីម្នាក់ថា នាងមានអាយុប៉ុន្មាន? នាងមើលមុខបុរសនោះទាំងមិនពេលចិត្ត ហើយឆ្លើយថា: ខ្ញុំចាស់ខ្លាំងណាស់ ព្រោះអាយុបច្ចុប្បន្នរបស់ខ្ញុំស្មើដល់ទៅបីដង នៃអាយុរបស់ខ្ញុំពេលបីឆ្នាំទៀត ដកនឹងបីដងនៃអាយុរបស់ខ្ញុំកាលពីបីឆ្នាំមុន។ ហើយបន្តថា បើលោកគិតឃើញទើបសាកសមនឹងដឹងអាយុរបស់ខ្ញុំ។ តើនារីនោះមានអាយុប៉ុន្មាន?

**លំហាត់ទី៤:**

ឧបមាថា $a$ និង $b$ ជាឫសទាំងពីររបស់សមីការ $x^2+px+1=0$ ហើយ $c$ និង $d$ ជាឫស

ទាំងពីររបស់សមីការ $x^2+qx+1=0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង: $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=q^2-p^2$ ។

**លំហាត់ទី៥**

$a$). គេឲ្យ $a,b,c$ ជាបីចំនួនផ្សេងគ្នាផ្ទៀងផ្ទាត់: $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$

$b$). រកចំនួនគត់ $q$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់: $\frac{2}{7}<\frac{q}{13}<\frac{4}{5}$ ។

**លំហាត់ទី៦:**

គេឲ្យចតុកោណព្នាយ $ABC$ $(AB\parallel CD)$ ។ តាង $O$ ជាចំនុចប្រសព្វរបស់អង្កត់ទ្រូង $AC$ និង $BD$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S_{OAB}+S_{OCD}\geq\frac{1}{2}S_{ABCD}$ ។

## ចំលើយ

<u>លំហាត់ទី១:</u>

$a$). កំណត់ $x^3+\frac{1}{x^3}$ :

យើងមាន: $x+\frac{1}{x}=4$

យើងបាន: $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

នាំឲ្យ $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=14.4-4=52$

ដូចនេះ $x^3+\frac{1}{x^3}=52$

$b$) រកលេខចុងក្រោយនៃផលបូក: $S=2^2+20^{20}+201^{201}+2011^{2011}$

យើងសង្កេតឃើញថា:

+ $2^2$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងគឺលេខ $4$

+ $20^{20}$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងគឺលេខ $0$

+ $201^{201}$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងគឺលេខ $1$

+ $2011^{2011}$ បញ្ចប់ដោយលេខចុងគឺលេខ $1$

ដូចនេះ លេខចុងក្រោយរបស់ផលបូក $S$ គឺ $4+0+1+1=6$

<u>លំហាត់ទី២:</u>

គណនាតំលៃនៃកន្សោម:

$a).\quad A = 2011^3 - 2010.2011^2 - 2010^2.2011 + 2010^3$

$A = 2011^2(2011-2010) + 2010^2(2010-2011)$

$A = 2011^2 - 2010^2 = (2011-2010)(2011+2010) = 4021$

ដូចនេះ $A = 4021$

$b).\quad B = 405^5 - 402^2(403^3 + 2.403^2 + 3.403 + 4)$

$B = 403^5 - (403-1)^2(403^3 + 2.403^2 + 3.403 + 4)$

$B = 403^5 - (403^2 - 2.403 + 1)(403^3 + 2.403^2 + 3.403 + 4)$

$B = -(-5.403 + 4) = 2011$

ដូចនេះ $B = 2011$

លំហាត់ទី៣:

រកអាយុរបស់នារីម្នាក់នោះ

តាង $y$ ជាអាយុរបស់នារីនោះ ដែល $y > 0$

តាមបំរាប់ យើងបានសមីការ: $y = 3(y+3) - 3(y-3) \Leftrightarrow y = 18$

ដូចនេះ នារីនោះមានអាយុ18 ឆ្នាំ

លំហាត់ទី៤:

ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង: $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d) = q^2 - p^2$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត, យើងបាន: $\begin{cases} a+b = -p \\ ab = 1 \end{cases}$ និង $\begin{cases} c+d = -q \\ cd = 1 \end{cases}$

យើងមាន: $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d) = \left[ab - c(a+b) + c^2\right]\left[ab - d(a+b) + d^2\right]$

$= (1 + pc + c^2)(1 - pd + d^2)$

$= (1 - pd + d^2 + c^2 + c^2d^2) + p(c - d + cd^2 - c^2d) - p^2cd$

$= (c^2 + d^2 + 2) + p\left[(c-d)(1-cd)\right] - p^2 = (c+d)^2 - p^2$

$q^2 - p^2$ ពិត

ដូចនេះ $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d) = q^2 - p^2$

លំហាត់ទី៥:

$a).$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $P = \dfrac{a}{(b-c)^2} + \dfrac{b}{(c-a)^2} + \dfrac{c}{(a-b)^2} = 0$

តាមបំរាប់យើងទាញបាន: $\left(\dfrac{a}{b-c} + \dfrac{b}{c-a} + \dfrac{c}{a-b}\right)\left(\dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} + \dfrac{1}{a-b}\right) = 0$

យើងគុណពន្លាត រួចសម្រួលទៅ យើងបាន:

$$P+\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}=0$$

ដោយ $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}=$

$$\frac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$$

តាមនោះ ទាញបាន $P=0$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$

$b$). រកចំនួនគត់ $q$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់: $\frac{2}{7}<\frac{q}{13}<\frac{4}{5}$

យើងមាន: $\frac{2}{7}<\frac{q}{13} \Leftrightarrow q>\frac{26}{7}=3+\frac{5}{7}$

ហើយ $\frac{q}{13}<\frac{4}{5} \Leftrightarrow q<\frac{52}{5}=10+\frac{2}{5}$

ទាញបាន $3+\frac{5}{7}<q<10+\frac{2}{5}$

ដោយ $q$ ជាចំនួនគត់យើងបាន: $q=4,5,6,7,8,9,10$

សាកល្បងជំនួសចូល យើងឃើញថាបណ្តាតំលៃ $q$ នីមួយៗខាងលើបំពេញលក្ខខណ្ឌប្រធាន

ដូចនេះ $q=\{4,5,6,7,8,9,10\}$

លំហាត់ទី៦:

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $S_{OAB}+S_{OCD}\geq\frac{1}{2}S_{ABCD}$

សង់ $AH\perp BD; CK\perp BD\ \ (H;K\in BD)$

យើងបាន: $S_{OAD}.S_{OBC}=\left(\frac{1}{2}AH.OD\right).\left(\frac{1}{2}CK.OB\right)$

$$=\left(\frac{1}{2}AH.OB\right).\left(\frac{1}{2}CK.OD\right)$$

$$=S_{OAB}.S_{OCD}$$

យើងមាន: $(S_{OAB}-S_{OCD})^2\geq 0$

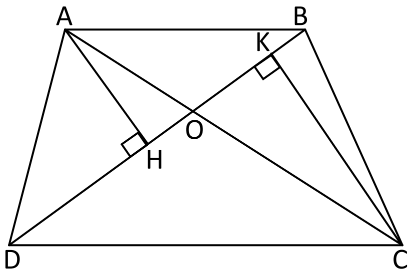
$\Rightarrow\quad (S_{OAB}-S_{OCD})^2+4S_{OAB}.S_{OCD}\geq 4S_{OAB}.S_{OCD}$

$\Rightarrow\quad (S_{OAB}+S_{OCD})^2\geq 4S_{OAB}.S_{OCD}$

$\Rightarrow\quad (S_{OAB}+S_{OCD})^2\geq 4S_{OAD}.S_{OBC}$

$ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយ $\Rightarrow S_{OAD}=S_{OBC}$

ដូចនោះ $(S_{OAB}+S_{OCD})^2\geq(S_{OAD}+S_{OBC})^2$



$$\Rightarrow \quad S_{OAB}+S_{OCD}\geq S_{OAD}+S_{OBC}$$

$$\Rightarrow \quad (S_{OAB}+S_{OCD})+(S_{OAB}+S_{OCD})\geq (S_{OAD}+S_{OBC})+(S_{OAB}+S_{OCD})$$

$$\Rightarrow \quad 2(S_{OAB}+S_{OCD})\geq S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow \quad S_{OAB}+S_{OCD}\geq \frac{1}{2}S_{ABCD}$$ ពិត

## វិញ្ញាសាទី៨ រយៈពេល២ម៉ោង និង៣០នាទី

### លំហាត់ទី១:

$a)$. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\left(x^3+12x-31\right)^{2012}$

គណនា $f(a)$ ដោយដឹងថា $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

$b)$. រកបណ្ដាឫសជាចំនួនគត់របស់សមីការ: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$

### លំហាត់ទី២:

$a)$. ដោះស្រាយសមីការ: $x^2=\sqrt{x^3-x^2}+\sqrt{x^2-x}$

$b)$. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2\\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4\end{cases}$

### លំហាត់ទី៣:

$a)$. ដាក់កន្សោមខាងក្រោមជាផលគុណកត្តា:

$$P=(2010y-2011z)^3+(2011z-2012x)^3+(2012x-2010y)^3$$

$b)$. គេឲ្យ $x,y,z$ ជាបណ្ដាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1$ ។

រកតំលៃធំបំផុតនៃកន្សោម: $A=\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+\dfrac{1}{z^3+x^3+1}$ ។

### លំហាត់ទី៤:

គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ កែងសមបាតត្រង់ $A$, មេដ្យាន $AD$ ។ ចំនុច $M$ ចល័តនៅលើអង្កត់ $AD$ ។ តាង $N$ និង $P$ រៀងគ្នាជាចំនោលកែងរបស់ចំនុច $M$ ទៅលើ $AB$ និង $AC$ ។ សង់ $NH\perp PD$ ត្រង់ $H$ ។ កំណត់ទីតាំងរបស់ $M$ ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ $AHB$ មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត។

### លំហាត់ទី៥:

ស្រាយបញ្ជាក់ថាផលបូកប្រវែងបណ្ដាអង្កត់ទ្រូង របស់បញ្ចកោណប៉ោង $ABCDE$ តូចជាងពីរដងបរិមាត្រ និងធំជាងបរិមាត្ររបស់បញ្ចកោណនោះ។

## ចំលើយ

លំហាត់ទី១:

$a)$. យើងមាន: $a=\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow\quad a^3=32+3\sqrt[3]{\left(16-8\sqrt{5}\right)\left(16+8\sqrt{5}\right)}.\left(\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad a^3=32+3.(-4).a\ \Rightarrow\ a^3=32-12a\ \Rightarrow\ a^3+12a-32=0$$

រឺយើងអាចសរសេរបានជារាង: $a^3+12a-31=1$

យើងបាន: $f(a)=\left(a^3+12a-31\right)^{2012}=1^{2012}=1$

ដូចនេះ $f(a)=1$

$b)$. យើងមាន: $5\left(x^2+xy+y^2\right)=7\left(x+2y\right)\quad(1)$

យើងបាន $7\left(x+2y\right)\vdots 5\Rightarrow\left(x+2y\right)\vdots 5$

តាង $x+2y=5t,\ (t\in\mathbb{Z})\quad(2)$ ជំនួសចូលក្នុង $(1)$

យើងបាន $x^2+xy+y^2=7t\quad(3)$

តាម $(2)\ \Rightarrow\ x=5t-2y$ ជំនួសចូល $(3)$

យើងបាន: $3y^2-15ty+25t^2-7t=0\qquad(*)$

មាន $\Delta=84t-75t^2$

ដើម្បីឲ្យ $(*)$ មានឬសលុះត្រាតែ $\Delta\geq 0\ \Leftrightarrow\ 84t-75t^2\geq 0\ \Leftrightarrow\ 0\leq t\leq\dfrac{28}{25}$

ដោយ $t\in\mathbb{Z}\Rightarrow t=0$ រឺ $t=1$, ជំនួសចូល $(*)$

$+$ ចំពោះ: $t=0\ \Rightarrow\ y_1=0\ \Rightarrow\ x_1=0$

$+$ ចំពោះ: $t=1\ \Rightarrow\left[\begin{array}{l}y_2=3\Rightarrow x_2=-1\\ y_3=2\Rightarrow x_3=1\end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឬស $(x;y)=\left\{(0;0),(-1;3),(1;2)\right\}$

លំហាត់ទី២:

$a)$. លក្ខខណ្ឌ $x=0$ រឺ $x\geq 1$

$+$ ចំពោះ: $x=0$ សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់

$+$ ចំពោះ: $x\geq 1$ យើងមាន: $\sqrt{x^3-x^2}=\sqrt{x^2(x-1)}\leq\dfrac{1}{2}(x^2+x-1)$

$$\sqrt{x^2-x}=\sqrt{1(x^2-x)}\leq\frac{1}{2}(x^2-x+1)$$

$$\Rightarrow\qquad\sqrt{x^3-x^2}+\sqrt{x^2-x}\leq x^2$$

សញ្ញាសមភាពកើតមានកាលណា: $\begin{cases} x^2 = x-1 \\ x^2 - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x-1 \\ x^2 = x+1 \end{cases} \Rightarrow x+1 = x-1$ មិនពិត

ដូចនេះ សមីការដែលឲ្យមានឫសតែមួយគត់គឺ $x=0$ ។

$b)$. តាង $(I)\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2 \quad (1) \\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4 \quad (2) \end{cases}$ លក្ខខណ្ឌ $x;\ y;\ z \neq 0$

តាម (1) $\Rightarrow \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{2}{yz}+\dfrac{2}{zx}=4$, ជំនួសចូល (2) យើងបាន:

$$\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{zx}+\frac{1}{z^2}\right)+\left(\frac{1}{y^2}+\frac{2}{yz}+\frac{1}{z^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=0 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-z$$

ជំនួសចូលប្រព័ន្ធសមីការ $(I)$ យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=2 \\ \dfrac{1}{z^2}=4 \end{cases}$

ចំលើយនៃប្រព័ន្ធសមីការដែលឲ្យគឺ: $(x;y;z)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ ។

លំហាត់ទី៣:

$a)$. តាង $2010y-2011z=a,\ 2011z-2012x=b,\ 2012x-2010y=c$

នាំឲ្យ $a+b+c=0$ , ហើយយើងបាន:

$$(2010y-2011z)^3+(2011z-2012x)^3+(2012x-2010y)^3=a^3+b^3+c^3$$

$$=\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)+3abc$$

$$=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\right)+3abc$$

$$=3abc=3(2010y-2011z)(2011z-2012x)(2012x-2011y)$$

ដូចនេះ $P=3(2010y-2011z)(2011z-2012x)(2012x-2010y)$

$b)$. យើងមានៈ $(x-y)^2 \geq 0 \ \ \forall x, y$

$\Leftrightarrow \ x^2 - xy + y^2 \geq xy$

ដោយ $x; y > 0 \ \Rightarrow x + y > 0$

យើងមាន $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$\Rightarrow \ x^3 + y^3 \geq (x+y)xy$

$\Rightarrow \ x^3 + y^3 + 1 = x^3 + y^3 + xyz \geq (x+y)xy + xyz$

$\Rightarrow \ x^3 + y^3 + 1 \geq xy(x+y+z) > 0$

ដូចគ្នាដែរ $y^3 + z^3 + 1 \geq yz(x+y+z) > 0$ និង $z^3 + x^3 + 1 \geq zx(x+y+z) > 0$

យើងបាន $A \leq \dfrac{1}{xy(x+y+z)} + \dfrac{1}{yz(x+y+z)} + \dfrac{1}{xz(x+y+z)}$

$\Rightarrow \ A \leq \dfrac{x+y+z}{xyz(x+y+z)} = \dfrac{1}{xyz} = 1$

ដូចនេះ តំលៃធំបំផុតរបស់ $A = 1$ ពេល $x = y = z = 1$

លំហាត់ទី៤:

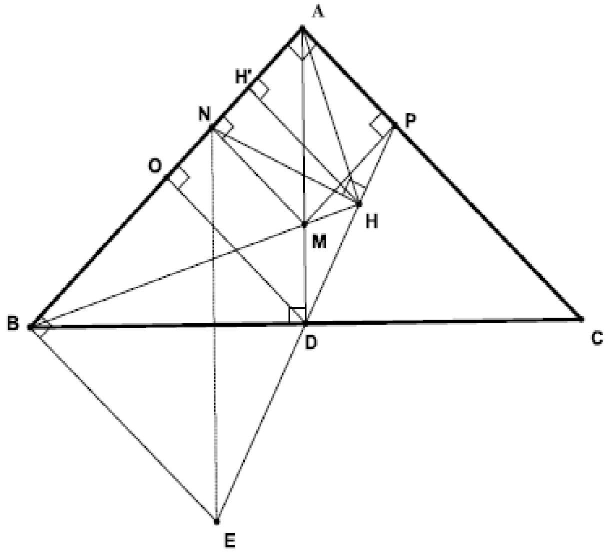
យើងមាន $\Delta ABC$ កែងសមបាត្រង់ $A \Rightarrow AD$ ជាបន្ទាត់ពុះមុំ $A$

ហើយ $AD \perp BC \ \Rightarrow D \in (O; AB/2)$

យើងបាន $ANMP$ ជាការេ (ចតុកោណកែងដែលមាន $AM$ ជាបន្ទាត់ពុះ)

$\Rightarrow$ ចតុកោណ $ANMP$ ចារឹកក្នុងរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត $NP$

តែ $\widehat{NHP} = 90^0 \Rightarrow H$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត $NP$



សង់ $Bx \perp AB$ កាត់បន្ទាត់ $PD$ ត្រង់ $E$

$\Rightarrow$ ចតុកោណ $BNHE$ ចារឹកក្នុងរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត $NE$

ម្យ៉ាងទៀត $\Delta BED = \Delta CDP$ (ម.ជ.ម) $\Rightarrow BE = PC$

ដោយ $PC = BN \Rightarrow BN = BE \Rightarrow \Delta BNE$ កែងសមបាតត្រង់ $B$

$\Rightarrow \widehat{NEB} = 45^0$ តែ $\widehat{NHB} = \widehat{NEB}$ (ស្កាត់ធ្នូរួម $BN$ )

$\Rightarrow \widehat{NHB} = 45^0$ (2)

តាម (1) និង (2) ទាញបាន $\widehat{AHB} = 90^0 \Rightarrow H \in (O; AB/2)$

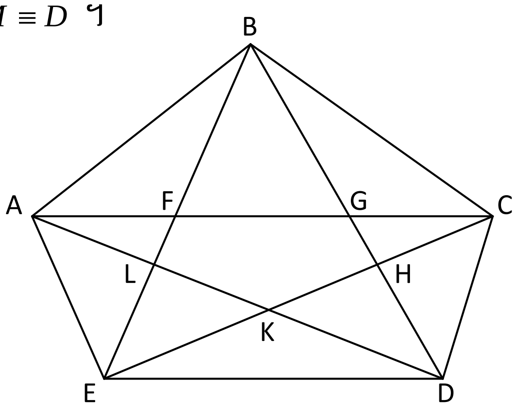
តាង $H'$ ជាចំនោលកែងនៃ $H$ ទៅលើ $AB$

$\Rightarrow S_{AHB} = \dfrac{HH'.AB}{2} \Rightarrow S_{ABH}$ ធំបំផុត $\Leftrightarrow HH'$ ធំបំផុត

តែ $HH' \le OD = \dfrac{AB}{2}$ (ព្រោះ $H; D$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត $AB$ ដូចគ្នា និង $OD \perp AB$)

សញ្ញា "=" កើតមានកាលណា $H \equiv D \Leftrightarrow M \equiv D$ ។

<u>លំហាត់ទី៥:</u>




$\Delta ABE$ មាន $BE < AB + AE$

$\Delta ABC$ មាន $AC < AB + BC$

$\Delta BCD$ មាន $BD < BC + CD$

$\Delta DEC$ មាន $EC < CD + DE$

$\Delta EAD$ មាន $AD < AE + DE$

ទាញបាន

$BE + AC + BD + EC + AD < 2(AB + BC + CD + DE + AE)$

$\Rightarrow \quad BE + AC + BD + EC + AD < 2.p_{ABCDE}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\Delta ABE$ មាន $AB < AF + BF$

$\Delta BCG$ មាន $BC < BG + CG$

$\Delta DCH$ មាន $DC < DH + CH$

$\Delta DEK$ មាន $DE < EK + DK$

$\Delta ALE$ មាន $AE < AL + EL$

ដូចនោះ $AB + BC + CD + DE + EA < (BF + EL) + (AF + CG) + (BG + DH) +$

$+(EK + CH) + (AL + DK) < BE + AC + BD + EC + AD$

$\Rightarrow \quad p_{ABCDE} < BE + AC + BD + EC + AD$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន:

$p_{ABCDE} < BE + AC + BD + EC + AD < 2p_{ABCDE}$

( $p_{ABCDE}$ ជាបរិមាត្ររបស់បញ្ចកោណ $ABCDE$ )។

## វិញ្ញាសាទី៩ រយៈពេល២ម៉ោង និង៣០នាទី

### លំហាត់ទី១:

គណនាតំលៃរបស់កន្សោមខាងក្រោម:

$a).\ \dfrac{(4\times7+2)(6\times9+2)(8\times11+2)...(2010\times2013+2)}{(5\times8+2)(7\times10+2)(9\times12+2)...(2009\times2012+2)}$

$b).\ \dfrac{20092008^2}{20092007^2+20092009^2-2}$

### លំហាត់ទី២:

$a).$ គេឲ្យ $x^2-x-1=0$ , ចូរសម្រួល $\dfrac{x^3+x+1}{x^5}$ ទៅជាទម្រង់ពហុធា។

$b).$ ដោះស្រាយសមីការ: $\dfrac{3}{5}\left[\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{4}x+1\right)+5\right]-\dfrac{1}{2}=x$ ។

### លំហាត់ទី៣:

គេឲ្យសមីការបី: $ax^2+2bx+c=0 \quad (1)$

$bx^2+2cx+a=0 \quad (2)$

$cx^2+2ax+b=0 \quad (3)$

ចំពោះ $a,b,c\neq0$ , ស្រាយបញ្ជាក់ថា យ៉ាងហោចណាស់មានសមីការមួយ ក្នុងចំនោមសមីការទាំងបីខាងលើនេះ មានឫស។

### លំហាត់ទី៤:

$a).$ បំបែកជាផលគុណកត្តា: $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ ។

$b).$ គេដឹងថាប្រេងសាំងមានតម្លៃ $4950$ រៀលក្នុងមួយលីត្រ, ហើយបើចាក់ឲ្យពេញធុងមួយអស់ $148500$ រៀល។ បើនៅពេលឥឡូវនេះ ប្រេងសាំងត្រូវបានតម្លើងថ្លៃ $350$ រៀលក្នុងមួយលីត្រ។

តើគេត្រូវចំនាយប្រាក់អស់ប៉ុន្មាន ដើម្បីចាក់បំពេញធុងសាំងដដែលនោះក្នុងពេលឥឡូវ?

### លំហាត់ទី៥:

គេឲ្យ $a,b,c$ ជាបណ្តាចំនួនស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $[-1;2]$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $a+b+c=0$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $a^2+b^2+c^2\leq6$ ។

**លំហាត់ទី៦:**

គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ មានក្រឡាផ្ទៃ $S$ និងចតុកោណកែង $MNPQ$ មួយចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះ ($M$ ស្ថិតនៅលើជ្រុង $AB$, $N$ ស្ថិតនៅលើជ្រុង $AC$, $P$ និង $Q$ ស្ថិតនៅលើជ្រុង $BC$)។ តាងក្រឡាផ្ទៃរបស់ចតុកោណកែង $MNPQ$ ដោយ $S_1$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S \geq 2S_1$ ។

## ចំលើយ

លំហាត់ទី១:

$a)$ យើងតាង $A=\dfrac{(4\times7+2)(6\times9+2)(8\times11+2)...(2010\times2013+2)}{(5\times8+2)(7\times10+2)(9\times12+2)...(2009\times2012+2)}$

យើងមាន $n(n+3)+2=n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n$,

យើងបាន: $A=\dfrac{(5\times6)(7\times8)(9\times10)...(2011\times2012)}{(6\times7)(8\times9)(10\times11)...(2010\times2011)}$

$A=5\times2012=10060$

$b)$ យើងតាង $B=\dfrac{20092008^2}{20092007^2+20092009^2-2}$

យើងបាន: $B=\dfrac{20092008^2}{(20092007^2-1)+(20092009^2-1)}$

$=\dfrac{20092008^2}{(20092006)(20092008)+(20092008)(20092010)}$

$=\dfrac{20092008^2}{(20092008)(20092006+20092010)}=\dfrac{20092008^2}{2(20092008)^2}=\dfrac{1}{2}$

លំហាត់ទី២:

$a)$ យើងមាន: $x^2-x-1=0$ នាំឲ្យ $x+1=x^2$

យើងបាន $\dfrac{x^3+x+1}{x^5}=\dfrac{x^3+x^2}{x^5}=\dfrac{x+1}{x^3}=\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-x}{x}=x-1$

ដូចនេះ: $\dfrac{x^3+x+1}{x^5}=x-1$

$b)$ ដោះស្រាយសមីការ: $\dfrac{3}{5}\left[\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1}{4}x+1\right)+5\right]-\dfrac{1}{2}=x$

គុណពន្លាតអង្គខាងឆ្វេង: $\dfrac{1}{4}x+1+3-\dfrac{1}{2}=x \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}x=\dfrac{7}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{14}{3}$

ដូចនេះ: $x=\dfrac{14}{3}$

លំហាត់ទី៣:

ស្រាយបញ្ជាក់ថា យ៉ាងតិចមានសមីការមួយ ក្នុងចំនោមសមីការទាំងបីខាងលើមានឫស:

ពិនិត្យ សមីការ (1) មាន $\Delta_1' = b^2 - ac$

សមីការ (2) មាន $\Delta_2' = c^2 - ab$

សមីការ (3) មាន $\Delta_3' = a^2 - bc$

យើងបាន $\Delta_1' + \Delta_2' + \Delta_3' = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$$= \frac{1}{2}\left[2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$$

(ព្រោះ $a, b, c \neq 0$)

ទាញបាន យ៉ាងតិចមានកន្សោមមួយ ក្នុងចំនោមកន្សោម $\Delta_1'; \Delta_2'; \Delta_3'$ ត្រូវធំជាងសូន្យ,

ទាញបាន យ៉ាងតិចមានសមីការមួយ ក្នុងចំនោមសមីការទាំងបីដែលឲ្យ មានឫស។

លំហាត់ទី៤:

$a)$ បំបែកជាផលគុណកត្តា:

យើងតាង $P = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

តាង $x - y = a,\ y - z = b,\ z - x = c$

យើងបាន $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a+b)^3 = -c^3$

$\Rightarrow \quad a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = -c^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(a+b) = 3abc$

ដូចនេះ $P = 3(x-y)(y-z)(z-x)$

$b)$ រកទឹកប្រាក់ដែលត្រូវចំនាយ:

\+ ចំនុះរបស់ធុងសាំងគឺ: $\frac{148500}{4950} = 30$ លីត្រ

\+ បើតំលៃប្រេងឡើង 350 រៀលក្នុងមួយលីត្រ, នោះទឹកប្រាក់ដែលត្រូវចំនាយគឺ:

$(4950 + 350) \times 30 = 159000$ រៀល។

លំហាត់ទី៥:

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$

យើងមាន $-1 \leq a, b, c \leq 2 \Rightarrow a + 1 \geq 0$ និង $a - 2 \leq 0$

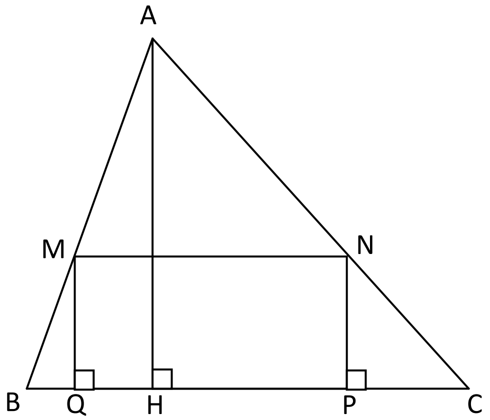
$\Rightarrow \quad (a+1)(a-2) \leq 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq a + 2$

ធ្វើដូចគ្នាដែរ, យើងបាន: $b^2 \leq b + 2$ និង $c^2 \leq c + 2$

ទាញបាន $a^2 + b^2 + c^2 \leq (a + b + c) + 6 = 6$ (ព្រោះ $a + b + c = 0$)

ដូចនេះ $a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$ ពិត។

លំហាត់ទី៦:




សង់ $AH \perp BC\ (H \in BC)$ យើងបាន:

$$S = \frac{1}{2}AH.BC;\ S_1 = MN.MQ$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$$

$MQ \perp BC$ ($MNPQ$ ជាតុកោណកែង),

$$AH \perp BC \Rightarrow MQ \parallel AH$$

$$\Rightarrow \quad \frac{MQ}{AH} = \frac{BM}{AB}$$

ដូចនោះ $\dfrac{MN}{BC}.\dfrac{MQ}{AH} = \dfrac{AM.BM}{AB^2}$

យើងមាន $\dfrac{1}{AB^2}\left[\left(\dfrac{AM+BM}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{AM-BM}{2}\right)^2\right] \le \dfrac{1}{AB^2}\left(\dfrac{AM+BM}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad \frac{S_1}{2S} \le \frac{1}{4} \Rightarrow S \ge 2S_1$$

សញ្ញា "=" កើតមាន $\Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow MN$ ជាបាតមធ្យមរបស់ $\Delta ABC$ ។

## វិញ្ញាសាទី១០ រយៈពេល២ម៉ោង និង៣០នាទី

**លំហាត់ទី១:**

ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $x = \dfrac{a-b}{a+b};\ y = \dfrac{b-c}{b+c};\ z = \dfrac{c-a}{c+a}$ នោះគេបាន:

$$(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$$

**លំហាត់ទី២:**

$a)$. គណនាតំលៃនៃកន្សោម: $A = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2...}}}} - \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}$

$b)$. សម្រួលកន្សោម: $B = \sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}}$

**លំហាត់ទី៣:**

គេឲ្យ $\overline{abcdef}$ ជាចំនួនមានលេខប្រាំមួយខ្ទង់។ ដោយដឹងថា $\overline{defabc}$ មានតំលៃស្មើនឹងប្រាំមួយដងនៃ $\overline{abcdef}$ , ចូរគណនាតំលៃនៃ $a+b+c+d+e+f$ ។

**លំហាត់ទី៤:**

$a)$. ដោះស្រាយសមីការ: $(x-1)(x+5)(x-3)(x+7) = 297$ ។

$b$). ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការៈ $\begin{cases} x+2y+3z=11 \\ 2x+3y+z=-2 \\ 3x+y+2z=3 \end{cases}$

## លំហាត់ទី៥:

$a$) រកតំលៃធំបំផុត និងធំបំផុតរបស់កន្សោមៈ $A=x^2+y^2$, ដោយដឹងថា $x$ និង $y$ ជាបណ្តាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌៈ $x^2+y^2-xy=4$ ។

$b$) កំណត់ពហុធាសំនល់នៃប្រមាណវិធីចែកពហុធា $P(x)=1+x+x^9+x^{25}+x^{49}+x^{81}$ ជាមួយនឹងពហុធា $Q(x)=x^3-x$ ។

## លំហាត់ទី៦:

គេឲ្យការេ $ABCD$ មានជ្រុងស្មើ $a$ ។ តាង $M,N,P,Q$ ជាបណ្តាចំនុចរៀងគ្នាស្ថិតនៅលើបណ្តាជ្រុង $AB, BC, CD, DA$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2a^2 \le MN^2+NP^2+PQ^2+QM^2 \le 4a^2$ ។

## ចំលើយ

លំហាត់ទី១:

យើងមានៈ $1+x=1+\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{a+b+a-b}{a+b}=\dfrac{2a}{a+b}$

$$1+y=1+\frac{b-c}{b+c}=\frac{b+c+b-c}{b+c}=\frac{2b}{b+c}$$

$$1+z=1+\frac{c-a}{c+a}=\frac{c+a+c-a}{c+a}=\frac{2c}{c+a}$$

$$1-x=1-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)-(a-b)}{a+b}=\frac{2b}{a+b}$$

$$1-y=1-\frac{b-c}{b+c}=\frac{(b+c)-(b-c)}{b+c}=\frac{2c}{b+c}$$

$$1-z=1-\frac{c-a}{c+a}=\frac{(c+a)-(c-a)}{c+a}=\frac{2a}{c+a}$$

យើងបាន $(1+x)(1+y)(1+z)=\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$$(1-x)(1-y)(1-z)=\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

ដូចនេះ $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$ ពិត

លំហាត់ទី២:

$a$) គណនាតំលៃនៃកន្សោមៈ $A=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2...}}}}-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}$

យើងតាង $x=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2...}}}}$ និង $y=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}$

យើងបាន $x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការៈ $x^2=2x$ នាំឲ្យ $x=2$ (ព្រោះ $x>0$)

$y$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $y^2=2+y$ សមមូលនឹង $(y-2)(y+1)=0\Rightarrow y=2$ (ព្រោះ $y>0$)

ដូចនេះ យើងបាន $A=x-y=2-2=0$

$b)$ សំរួលកន្សោមៈ $B=\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}-2\sqrt{3-\sqrt{5}}$

យើងមាន $\sqrt{4+\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{4-\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{3-\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

ដូចនេះ $B=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})-2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

<u>លំហាត់ទី៣:</u>

គណនាតំលៃនៃៈ $a+b+c+d+e+f$

តាមបំរាប់របស់ប្រធាន, យើងបានៈ

$$(1000)(\overline{def})+\overline{abc}=6\left[(1000)(\overline{abc})+\overline{def}\right]$$

$$(994)(\overline{def})=(5999)(\overline{abc})$$

$$(142)(\overline{def})=(857)(\overline{abc})$$

ដូចនេះ $857\,|\,(142)(\overline{def})$, តែដោយ $857$ និង $142$ មិនមានកត្តារួមដែលធំជាង$1$,

នោះ$857\,|\,\overline{def}$ , ម្យ៉ាងទៀត $2\times857>1000$ ដែលមិនមែនជាចំនួនមានលេខបីខ្ទង់,

ដូចនេះ $\overline{def}=857$ ហើយ $\overline{abc}=142$

សរុបមក យើងបាន $a+b+c+d+e+f=1+4+2+8+5+7=27$

<u>លំហាត់ទី៤:</u>

$a)$ ដោះស្រាយសមីការៈ $(x-1)(x+5)(x-3)(x+7)=297$

សមីការអាចសរសេរជាៈ $[(x-1)(x+5)][(x-3)(x+7)]=297$

$$\Leftrightarrow\quad (x^2+4x-5)(x^2+4x-21)=297$$

តាង $t=x^2+4x-5$ យើងបានសមីការថ្មី, $t(t-1)=297$

$\Leftrightarrow\quad t^2-16t=297\Leftrightarrow(t-8)^2=361=19^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-8=19 \\ t-8=-19 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=27 \\ t=-11 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+4x-5=27 & (1) \\ x^2+4x-5=-11 & (2) \end{array}\right.$

+ សមីការ $(1)$ សមមូលនឹង $x^2+4x-32=0 \Leftrightarrow (x+8)(x-4)=0$

សមីការមានឬសពីរ $x=-8; x=4$

+ សមីការ $(2)$ សមមូលនឹង $x^2+4x+6=0$ មាន $\Delta'=4-6=-2<0$

សមីការគ្មានឬស

សរុបមក សមីការដែលឲ្យមានឬសពីរគឺ: $x=-8; x=4$ ។

$b)$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} x+2y+3z=11 & (1) \\ 2x+3y+z=-2 & (2) \\ 3x+y+2z=3 & (3) \end{cases}$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃសមីការទាំងបីខាងលើ, យើងបាន: $x+y+z=2 \quad (4)$

យក $(2)-(1): x+y-2z=-13 \Leftrightarrow x+y+z-3z=-13 \quad (5)$

យក $(3)-(2): x-2y+z=5 \Leftrightarrow x+y+z-3y=5 \quad (6)$

យក $(1)-(3): -2x+y+z=8 \Leftrightarrow x+y+z-3x=8 \quad (7)$

យក $(4)$ ជំនួសចូលក្នុង $(5);(6);(7)$ យើងបាន $z=5; y=-1; x=-2$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចំលើយ $(x;y;z)=(-2;-1;5)$ ។

<u>លំហាត់ទី៥:</u>

$a)$ រកតំលៃធំបំផុតរបស់កន្សោម: $A=x^2+y^2$

យើងមាន $x^2+y^2-xy=4 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2-2xy=8$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)+\left(x^2-2xy+y^2\right)=8 \Leftrightarrow A+(x-y)^2=8$

$\Rightarrow \max A=8$ ពេល $x=y$

ម្យ៉ាងទៀត: $2x^2+2y^2=8+2xy \Leftrightarrow 3(x^2+y^2)=8+(x^2+2xy+y^2)$

$\Leftrightarrow 3A=8+(x+y)^2 \geq 8 \Leftrightarrow A \geq \frac{8}{3}$

$\Rightarrow \min A=\frac{8}{3}$ ពេល $x=-y$

ដូចនេះ $\max A=8; \ \min A=\frac{8}{3}$ ។

$b)$ រកពហុធាសំនល់:

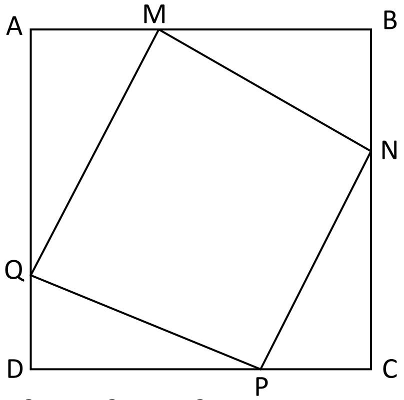
យើងមាន: $P(x)=(x^9-x)+(x^{25}-x)+(x^{49}-x)+(x^{81}-x)+5x+1$

$$= x(x^8 - 1) + x(x^{24} - 1) + x(x^{48} - 1) + x(x^{80} - 1) + 5x + 1$$

$$= x(x^2 - 1).M(x) + 5x + 1 = Q(x).M(x) + 5x + 1$$

ទាញបាន សំនល់នៃប្រមាណវិធីចែករវាងពហុធា $P(x)$ និង $Q(x)$ គឺ $5x+1$ ។

<u>លំហាត់ទី៦:</u>




$\Delta BMN\ (\hat{B} = 90^0) \Rightarrow MN^2 = MB^2 + NB^2$

ដូចគ្នាដែរយើងបាន:

$NP^2 = NC^2 + PC^2,\ PQ^2 = PD^2 + QD^2,$

$QM^2 = QA^2 + MA^2$

ដូចនោះ

$$MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 =$$

$$= MB^2 + NB^2 + NC^2 + PC^2 + PD^2 + QD^2 + QA^2 + MA^2$$

$$= (MA^2 + MB^2) + (NB^2 + NC^2) + (PC^2 + PD^2) + (QD^2 + QA^2)$$

អនុវត្តន៍វិសមភាព: $\frac{1}{2}(a+b)^2 \le a^2 + b^2 \le (a+b)^2$ យើងបាន

$$\frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}CD^2 + \frac{1}{2}DA^2 \le MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 \le$$

$$\le AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

$$\Rightarrow \quad 2a^2 \le MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 \le 4a^2$$

# វិញ្ញាសាទី១១ រយៈពេល ៣ម៉ោង

## វិញ្ញាសាប្រឡងទូទាំងប្រទេសឆ្នាំ ២០១៣ (វិញ្ញាសាទី១)

I. (១៥ពិន្ទុ)

១. រកតម្លៃនៃ $A=\left|\frac{1}{2012}-\frac{1}{2011}\right|+\left|\frac{1}{2013}-\frac{1}{2012}\right|-\left|\frac{1}{2013}-\frac{1}{2011}\right|$

២. រកតម្លៃនៃ $\frac{a}{b-c}$ ដោយដឹងថាៈ $\frac{a}{b}=2012$ និង $\frac{b}{c}=2013$

៣. រកតម្លៃនៃ $d$ ដោយដឹងថាៈ $a+b+c+d=11, 2a+3c=19,\ b+4d=22,$ $4a+d=14$ និង $5b+3c=5$

II. (១៥ពិន្ទុ)

១. ចូរប្រៀបធៀបពីរចំនួនៈ $A=\sqrt{19}$ និង $B=6-\sqrt{3}$

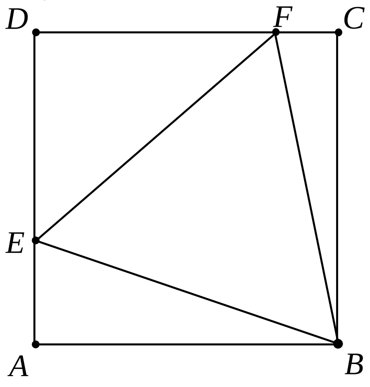
២. ចូរតំរៀបចំនួនខាងក្រោមតាមលំដាប់ពីតូចទៅធំៈ $a=2^{88}$, $b=3^{55}$, $c=5^{44}$, $d=7^{33}$

III. (១០ពិន្ទុ) ថ្ងៃនេះជាថ្ងៃចន្ទ កណិកាមានអាយុ 2013ថ្ងៃ។ តើកណិកា កើតនៅថ្ងៃណាមួយនៃសប្តាហ៍?

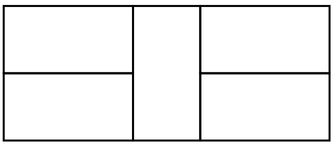
IV. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយ ដែលចំនួនគត់នោះបូកនឹង 168 បានចំនួនមួយជាការេប្រាកដ។ បើគេយកចំនួនគត់នោះបូកនឹង 100វិញ នោះគេបានចំនួនថ្មីមួយជាការេប្រាកដមួយផ្សេងទៀត។ ចូររកចំនួនគត់នោះ?

V. (២០ពិន្ទុ) បច្ចុប្បន្ន ម៉ុកមានអាយុស្មើនឹងពីរដងនៃអាយុម៉ៅ និងមានអាយុលើសម៉ែន 6ឆ្នាំ។ តើប៉ុន្មានឆ្នាំទៀតទើបម៉ុកមានអាយុស្មើនឹង $\frac{2}{3}$ នៃផលបូកអាយុម៉ៅ និងម៉ែន?

VI.(១៥ពិន្ទុ) ត្រីកោណសម័ង្ស $BEF$ ជ្រុងមានរង្វាស់ $a$ ចារឹកក្នុងការេ $ABCD$ ដែលជ្រុងមានរង្វាស់ 2ឯកតាប្រវែង (ដូចរូប)។ ចូរគណនា $a$ រង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណសម័ង្ស។




VII. (១៥ពិន្ទុ) ចតុកោណកែងតូចៗចំនួន5 ប៉ុនគ្នាដែលផ្ទៃក្រឡានីមួយៗមានរង្វាស់ $8cm^2$ ត្រូវបានគេដាក់តំរៀបចូលទៅក្នុងចតុកោណកែងធំមួយ(ដូចរូប)។ រកបរិមាត្ររបស់ចតុកោណកែងធំ។



# ចំលើយសំរាប់ថ្ងៃទីមួយ ០១/០៤/២០១៣

I. (១៥ពិន្ទុ)

១. រកតម្លៃនៃ $A=\left|\frac{1}{2012}-\frac{1}{2011}\right|+\left|\frac{1}{2013}-\frac{1}{2012}\right|-\left|\frac{1}{2013}-\frac{1}{2011}\right|$

យើងមាន: $A=\left|\frac{1}{2012}-\frac{1}{2011}\right|+\left|\frac{1}{2013}-\frac{1}{2012}\right|-\left|\frac{1}{2013}-\frac{1}{2011}\right|$

$$=\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right)+\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)-\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2013}\right)=0$$

ដូចនេះ $A=0$ □

២. រកតម្លៃនៃ $\frac{a}{b-c}$ ដោយដឹងថា: $\frac{a}{b}=2012$ និង $\frac{b}{c}=2013$

យើងមាន: $\frac{a}{b-c}=\frac{a}{b}.\frac{1}{1-\frac{c}{b}}=2012.\frac{1}{1-\frac{1}{2013}}=\frac{2012.2013}{2012}=2013$

ដូចនេះ: $\frac{a}{b-c}=2013$ □

៣. រកតម្លៃនៃ $d$

យើងមាន: $a+b+c+d=11$

$2a+3c=19$

$b+4d=22$

$4a+d=14$

$5b+3c=5$

បូកបណ្តាសមភាពក្នុងបំរាប់បញ្ចូលគ្នាយើងបាន:

$$7a+7b+7c+6d=71 \Leftrightarrow 7(a+b+c+d)-d=71$$

$$\Rightarrow d=7(a+b+c+d)-71=7.11-71=6$$

ដូចនេះ: $d=6$ □

II. (១៥ពិន្ទុ)

១. ប្រៀបធៀបពីរចំនួន: $A=\sqrt{19}$ និង $B=6-\sqrt{3}$

ឧបមាថា $A>B$

នាំឲ្យ $\sqrt{19}>6-\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{19}+\sqrt{3}>6$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេ យើងបាន:

$$\left(\sqrt{19}+\sqrt{3}\right)^2>6^2 \Leftrightarrow 22+2\sqrt{57}>36 \Rightarrow \sqrt{57}>7=\sqrt{49}$$ ពិត

ដូចនេះ $A > B$ □

២. យើងមាន:

$$a = 2^{88} = (2^8)^{11} = 256^{11}$$
$$b = 3^{55} = (3^5)^{11} = 243^{11}$$
$$c = 5^{44} = (5^4)^{11} = 625^{11}$$
$$d = 7^{33} = (7^3)^{11} = 343^{11}$$

ដូចនេះ យើងបានការតំរៀបដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សំនើរប្រធានគឺ: $b < a < d < c$ □

III. (១០ពិន្ទុ)

យើងដឹងថា $1$ អាទិត្យមាន $7$ ថ្ងៃ នោះដើម្បីដឹងថាកណិកាកើតនៅថ្ងៃណា យើងយកអាយុរបស់នាងចែកនឹង $7$ ទៅយើងបាន: $\dfrac{2013}{7} = 287,5714286$ អាទិត្យ។

តាមវិធានត្រីឋានស្រប (^_^) យើងបាន $0,5714286$ អាទិត្យគឺស្មើនឹង $4$ ថ្ងៃ។

មានន័យថា កណិកាមានអាយុ $287$ អាទិត្យនិង $4$ ថ្ងៃ។

ដោយថ្ងៃនេះ ជាថ្ងៃចន្ទ នោះនាងកើតនៅថ្ងៃព្រហស្បត្តិ៍ ។

IV. (១០ពិន្ទុ)

តាង $x$ ជាចំនួនគត់ដែលត្រូវរក ($x \in \mathbb{N}$)

តាមបំរាប់យើងបាន: $x + 168 = a^2$ និង $x + 100 = b^2$ ចំពោះ $a, b \in \mathbb{N}, a < b$ ។

ទាញបាន: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 68 = 1.68 = 2.34 = 4.17$

បណ្តាករណីដែលអាចកើតមាន:

- $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=68 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{69}{2}, b = \dfrac{67}{2}$ (ចោលព្រោះ $a, b \in \mathbb{N}$)
- $\begin{cases} a-b=2 \\ a+b=34 \end{cases} \Rightarrow a = 18, b = 16$
- $\begin{cases} a-b=4 \\ a+b=17 \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{21}{2}, b = \dfrac{13}{2}$ (ចោល)

ចំពោះ $a = 18, b = 16$ យើងសុទ្ធតែរកបាន $x = 156$

ដូចនេះ ចំនួនគត់ដែលត្រូវរកគឺ $x = 156$ □

V. (២០ពិន្ទុ)

តាង $x$ ជាអាយុរបស់ម៉ុកនាពេលបច្ចុប្បន្ន

តាមបំរាប់ យើងបានអាយុរបស់ម៉ៅគឺ $\dfrac{x}{2}$, ហើយអាយុរបស់ម៉ែនគឺ $x - 6$

តាង $y$ ជាចំនួនឆ្នាំទៅមុខដែលអាយុម៉ុកស្មើនឹង $\frac{2}{3}$ នៃផលបូកអាយុម៉ៅ និងម៉ែន

យើងបានសមីការ: $$x+y=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{x}{2}+y\right)+(x-6+y)\right]$$

$$3(x+y)=2\left(\frac{3x}{2}+2y-6\right)$$

$$3x+3y=3x+4y-12 \Rightarrow y=12$$

ដូចនេះ ក្នុង $12$ ឆ្នាំទៅមុខទៀត អាយុម៉ុកស្មើនឹង $\frac{2}{3}$ នៃផលបូកអាយុម៉ៅ និងម៉ែន □

VI. (១៥ពិន្ទុ)

ក្នុង $\Delta\perp ABE$ និង $\Delta\perp BCF$ កែងត្រង់ $A$ និង $B$ រៀងគ្នាមាន:

$AB=BC=2$ (ជ្រុងការេ $ABCD$)

$BE=BF=a$ (ជ្រុងត្រីកោណសម័ង្ស $BEF$)

$\Rightarrow \Delta ABE \simeq \Delta BCE$ (អ៊ី.ជ)

វិបាក: $AE=FC$

យើងបាន $DE=AD-AE=2-x;\ DF=DC-FC=2-x$

$\Rightarrow DE=DF$

ក្នុង $\Delta\perp DEF$ មាន $DE=DF$ នោះវាជាត្រីកោណកែងសមបាត

យើងបាន $EF^2=2DE^2 \Rightarrow a^2=2(2-x)^2$ (1)

ហើយក្នុង $\Delta\perp ABE$, តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ:

$BE^2=AB^2+AE^2 \Rightarrow a^2=2^2+x^2=x^2+4$ (2)

តាម (1) និង (2), យើងបាន:

$$2(2-x)^2=x^2+4 \Leftrightarrow x^2-8x+4=0$$

មាន $\Delta'=16-4=12$,

ទាញបានឫសទាំងពីរ $x_1=-(-4)-\sqrt{12}=4-\sqrt{12}$

និង $x_2=-(-4)+\sqrt{12}=4+\sqrt{12}>2$ (ចោល)

ចំពោះ $x=x_1=4-\sqrt{12}$ យើងបាន: $a^2=x^2+4=\left(4-\sqrt{12}\right)^2+4$

$$a^2=16+12+4-16\sqrt{3}=32-16\sqrt{3}=8\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

$\Rightarrow a=2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ ឯកតាប្រវែង

ដូចនេះ: $a=2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ ឯកតាប្រវែង □

VII. (១៥ពិន្ទុ)

តាង $a$ និង $b$ ជាបណ្តោយ និងទទឹងរៀងគ្នារបស់ចតុកោណកែងតូច

$A$ និង $B$ ជាបណ្តោយ និងទទឹងរបស់ចតុកោណកែងធំ

តាមបំរាប់ និងតាមរូបដែលឲ្យ យើងបានៈ

$ab = 8cm^2$, $A = 2a + b$, និង $B = 2b$ ហើយ $AB = 5ab$

$$\Rightarrow \quad (2a+b)(2b) = 5ab \Leftrightarrow 4ab + 2b^2 = 5ab$$

$$\Leftrightarrow \quad 2b^2 = ab \Leftrightarrow b^2 = \frac{ab}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \Rightarrow b = 2cm$$

នាំឲ្យ $a = \frac{8}{2} = 4cm$

យើងបាន បរិមាត្រចតុកោណកែងធំគឺៈ

$$P = 2(A+B) = 2(2a+b+2b) = 2(2a+3b) = 2(8+6) = 28cm$$

ដូចនេះ បរិមាត្រចតុកោណកែងធំគឺ $28cm$ □

Big thank to **Bro. Soun Sovathana** for solution to exercise Number II, V, VI, and VII.

*ធ្វើចំលើយចប់នៅថ្ងៃទី២៤/៤/២០១៣....*

វប្បធម៌ចែករំលែក គឺជាអំពើដ៏ប្រពៃមួយដែលជនគ្រប់រូបគួរតែមាន!

## វិញ្ញាសាទី១២ រយៈពេល ៣ម៉ោង
## វិញ្ញាសាប្រឡងទូទាំងប្រទេសឆ្នាំ ២០១៣ (វិញ្ញាសាទី២)

**មិនអនុញ្ញាតិឲ្យបេក្ខជនប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខ** !!!

I. (១៥ពិន្ទុ) ដោយមិនប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខចូរប្រៀបធៀបតម្លៃលេខខាងក្រោមៈ

១. $2,\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[5]{64}$

២. $2^{30},\ 3^{20},\ 10^{10}$

៣. $\sqrt[3]{5},\ \sqrt{3},\ \sqrt[4]{8}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យ $2^x - 2^{-x} = 1$ ។ គណនាៈ

១. $4^x + 4^{-x}$ ២. $2^x + 2^{-x}$ ៣. $8^x - 8^{-x}$

III.(២០ពិន្ទុ) ១. ឧបមាថាចំនួនគត់ $a$ និង $b$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2 + b^2 = 13$ និង $a^3 + b^3 = 19$ ។ រកតម្លៃ $a + b$ ។

២. រកគូចម្លើយទាំងអស់នៃ $(x, y)$ ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌឲ្យសមីការ $3xy - 6x - 4y + 5 = 0$ .

៣. រកគូចម្លើយទាំងអស់នៃ $(x, y)$ ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌឲ្យសមីការ $x^2 - 2x - y^2 - 4y - 8 = 0,\quad x \ge 0,\ y \ge 0$ .

IV.(២០ពិន្ទុ) ឧបមាថា $0 < a < b$ និង $a + b = 1$ ។ តើ

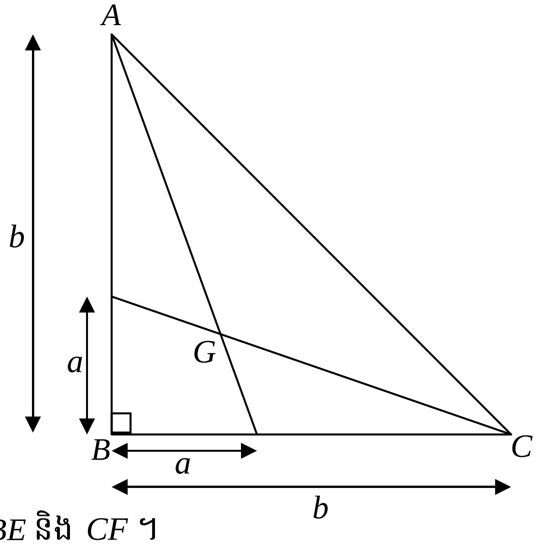
១. $\frac{1}{2}$ ធំជាង ឬក៏តូចជាង $2ab$

២. $2ab$ ធំជាង ឬក៏តូចជាង $a^2 + b^2$

៣. $b$ ធំជាង ឬក៏តូចជាង $a^2 + b^2$

៤. $a^2 + b^2$ ធំជាង ឬក៏តូចជាង $a^3 + b^3$

V. (១៥ពិន្ទុ) តាមរូបខាងស្តាំគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $AGC$ ជាអនុគមន៍នៃ $a$ និង $b$ ។




VI.(១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ មានមេដ្យាន $AD, BE$ និង $CF$ ។ បង្ហាញថា $AB + BC + CA < \frac{4}{3}(AD + BE + CF)$

## ចំលើយសំរាប់ថ្ងៃទី ០៣/០៤/២០១៣

I. (១៥ពិន្ទុ) ប្រៀបធៀបតំលៃលេខខាងក្រោម:

១. $2,\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[5]{64}$

ដោយ $2=2^1,\ \sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}},\ \sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{2^6}=2^{\frac{6}{5}}$

យើងឃើញថា: $\frac{2}{3}<1<\frac{6}{5}$

ដូចនេះ $\sqrt[3]{4}<2<\sqrt[5]{64}$ □

២. $2^{30},\ 3^{20},10^{10}$

យើងអាចសរសេរបាន:

$2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$

$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$

$10^{10}$

យើងឃើញថា $8<9<10$

ដូចនេះ $2^{30}<3^{20}<10^{10}$ □

៣. $\sqrt[3]{5},\sqrt{3},\sqrt[4]{8}$

តាង $x=\sqrt[3]{5},\ y=\sqrt{3},\ z=\sqrt[4]{8}$

$x^{12}=(\sqrt[3]{5})^{12}=5^4=625$

$y^{12}=(\sqrt{3})^{12}=3^6=729$

$z^{12}=(\sqrt[4]{8})^{12}=8^3=512$

យើងបាន $z^{12}<x^{12}<y^{12}$ ហើយ $x>0, y>0, z>0$

នាំឲ្យ $z<x<y$

ដូចនេះ $\sqrt[4]{8}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$ □

II. (១៥ពិន្ទុ)

១. គណនា $4^x+4^{-x}$

យើងមាន: $2^x-2^{-x}=1$

យើងបាន: $(2^x-2^{-x})^2=1 \Leftrightarrow 2^{2x}-2+2^{-2x}=1$

$4^x+4^{-x}=2^{2x}+2^{-2x}=3$

ដូចនេះ $4^x+4^{-x}=3$ □

២. គណនា $2^x+2^{-x}$

យើងមាន: $(2^x+2^{-x})^2=2^{2x}+2+2^{-2x}=3+2=5$

ដោយ $2^x + 2^{-x} > 0$ នាំឲ្យ $2^x + 2^{-x} = \sqrt{5}$

ដូចនេះ $2^x + 2^{-x} = \sqrt{5}$ □

៣. គណនា $8^x - 8^{-x}$

ដោយ $8^x + 8^{-x} = 2^{3x} - 2^{-3x}$

$$= (2^x - 2^{-x})(2^{2x} + 2^x.2^{-x} + 2^{-2x})$$

$$= 1.(3+1) = 4$$

ដូចនេះ $8^x - 8^{-x} = 4$ □

III. (២០ពិន្ទុ)

១. $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 13$ និង $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 19$

យក $a + b = k$ យើងបាន:

$$k^2 - 2ab = 13 \quad (i)$$

$$k^3 - 3abk = 19 \quad (ii)$$

ដោយយក $(i)\times 3k - (ii)\times 2$, យើងបាន

$$k^3 - 39k + 38 = 0$$

$$(k-1)(k + \frac{1-\sqrt{153}}{2})(k + \frac{1+\sqrt{153}}{2}) = 0$$

ដូចនេះ: $k = 1,\ k = \dfrac{-1 \pm \sqrt{153}}{2}$

ដោយ $a$ និង $b$ ជាចំនួនគត់នោះ $a + b$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ដែរ។

ដូចនេះ: $a + b = 1$ □

២. $3xy - 6x - 4y + 5 = 0 \Rightarrow (3x-4)(y-2) = 3$

ដោយ $x$ និង $y$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន យើងបាន: $3x - 4$ និង $y - 2$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ។ ដូច្នេះ:

$$(3x-4, y-2) = (3,1), (1,3), (-3,-1), (-1,-3)$$

$3x - 4 \geq -1$ និង $y - 2 \geq -1$

យើងបាន $(3x-4, y-2) = (3,1), (1,3)$

ប៉ុន្តែ $x$ មិនមែនជាចំនួនគត់ទាំងពីរករណី

ដូចនេះ: មិនមានគូចំលើយវិជ្ជមាន $(x, y)$ □

៣. $x^2 - 2x - y^2 - 4y - 8 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - (y+2)^2 = 5$

$\Rightarrow (x-y-3)(x+y+1) = 5$

ដោយ $x$ និង $y$ គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននាំឲ្យ $x - y - 3$ និង $x + y + 1$ ជាចំនួនគត់

$x + y + 1 \geq 1 + 1 + 1 = 3$

ដូច្នេះ $(x-y-3,x+y+1)=(1,5)$

យើងបាន $(x,y)=(4,0)$ □

IV. (២០ពិន្ទុ) ចំពោះ $0<a<b$, ដោយ $a+b>2\sqrt{ab}$,

យើងបាន $(a+b)^2>4ab$ ។ ហើយដោយ $0<a<b$ និង $a+b=1$

យើងបាន $0<a<\frac{1}{2}<b<1$

១. $2ab<\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}$ ធំជាង $2ab$

២. $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0 \Rightarrow a^2+b^2>2ab$

$\Rightarrow 2ab$ តូចជាង $a^2+b^2$

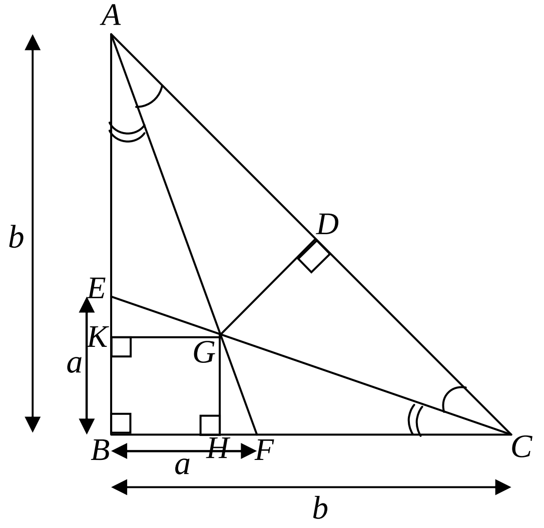
៣. $b-(a^2+b^2)=(1-a)-(a^2+(1-a)^2)=a-2a^2=2a(\frac{1}{2}-a)>0$

$\Rightarrow b$ ធំជាង $a^2+b^2$

៤. $0<a<b<1 \Rightarrow a^2>a^3$ និង $b^2>b^3$

$\Rightarrow a^2+b^2$ ធំជាង $a^3+b^3$ □

V. (១៥ពិន្ទុ) គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $AGC$ ជាអនុគមន៍នៃ $a$ និង $b$ ។




ក្នុង $\Delta BAF$ និង $\Delta BCE$ យើងមាន

$$\left.\begin{array}{l} AB=BC=b \\ \angle ABF=\angle CBE=90^0 \\ BF=BE=a \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BAF \cong \Delta BCE$$

រំពោក $CE=AF$, $\angle BCE=\angle BAF$

ក្នុង $\Delta AGC$ យើងមាន

$\angle GAC = \angle BAC - \angle BAF$

$\angle GCA = \angle BCA - \angle BCG$

តែ $\angle BCE = \angle BAF$, $\angle BCA = \angle BAC$

យើងបាន $\angle GCA = \angle GAC$

នាំឲ្យ $\Delta AGC$ ជាត្រីកោណសមបាត

វិបាក $GC = GA, GE = GF$

តាម $G$ គេគូស $GH \perp BC, GK \perp AB, GD \perp AC$

$$\frac{BH}{BC} = \frac{EG}{GC} \Rightarrow BH = \frac{BC \times EG}{GC}$$

$$\frac{BK}{AB} = \frac{GF}{AG} \Rightarrow BK = \frac{AB \times GF}{AG}$$

ដោយ $GC = GA, GE = GF$, $AB = BC$

យើងបាន $BH = BK$ រួចតាង $BH = BK = GH = GK = x$

ហើយ $\dfrac{GH}{HC} = \dfrac{EB}{BC}$

$$\frac{x}{b-x} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$$

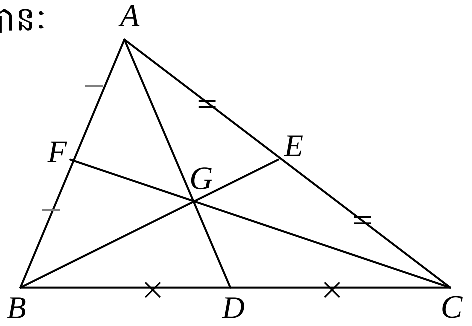
$$S_{AGC} = S_{ABC} - 2S_{GBC}$$

$$= \frac{b^2}{2} - xb = \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{2a}{a+b}\right) = \frac{b^2}{2}\left(\frac{b-a}{a+b}\right)$$ □

VI. (១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $AB + BC + CA > \dfrac{4}{3}(AD + BE + CF)$

វិធីទីមួយ:

យក $G$ ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ $ABC$, យើងបាន:




$$AG = \frac{2}{3}AD$$

$$BG = \frac{2}{3}BE$$

$$CG = \frac{2}{3}CF$$

តាមវិសមភាពក្នុងត្រីកោណ, យើងបាន:

ក្នុងត្រីកោណ $ABG$ មាន: $AB < AG + BG$

ក្នុងត្រីកោណ $BGC$ មាន: $BC < BG + GC$

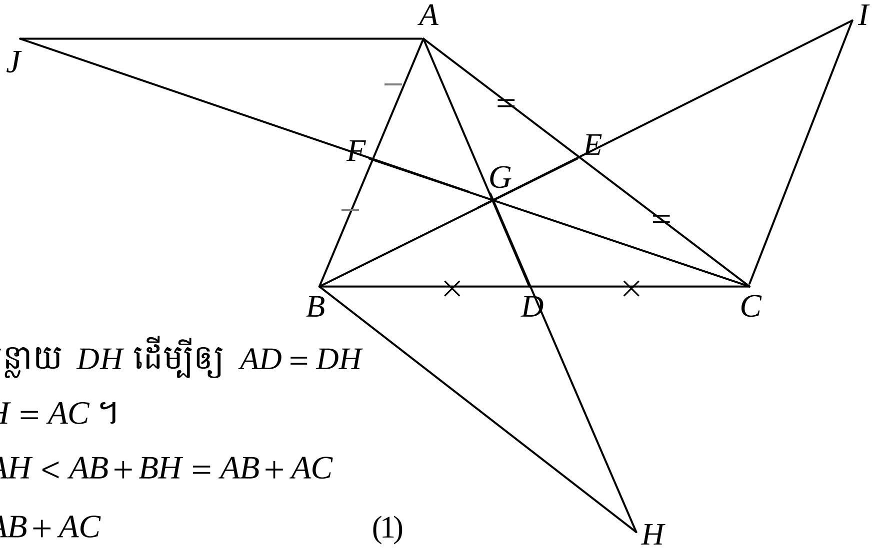
ក្នុងត្រីកោណ $AGC$ មាន: $AC < AG + GC$

បូកវិសមភាពទាំងបីខាងលើ អង្គនឹងអង្គ, យើងបាន:

$$AB+BC+CA<2(AG+BG+CG)=2.\frac{2}{3}.(AD+BE+CF)=\frac{4}{3}(AD+BE+CF)$$

ដូចនេះ $AB+BC+CA<\frac{4}{3}(AD+BE+CF)$ □

វិធីទីពីរ:




តាម $D$ យើងបន្លាយ $DH$ ដើម្បីឲ្យ $AD=DH$

យើងបាន: $BH=AC$ ។

តែ $2AD=AH<AB+BH=AB+AC$

$2AD<AB+AC$ (1)

ធ្វើដូចគ្នាដែរ យើងបាន: $2BE<AB+BC$ (2)

និង $2CF<AC+BC$ (3)

តាម $(1),(2)\&(3)$ យើងបាន:

$$AD+BE+CF<AB+BC+CA$$

ម្យ៉ាងទៀត: $BC<BG+GC=\frac{2}{3}(BE+CF)$

$$AC<\frac{2}{3}(AD+CF)$$

$$AB<\frac{2}{3}(AD+BE)$$

នាំឲ្យ $AB+BC+CA<\frac{4}{3}(AD+BE+CF)$ □

*អារីស្តូត : "គុណធម៌ខ្ពស់បំផុតរបស់មនុស្ស គឺការធ្វើប្រយោជន៍សំរាប់មនុស្សជាតិ"*

*ធ្វើចំលើយចប់នៅថ្ងៃទី២៤/៤/២០១៣....*

## វិញ្ញាសាទី១៣ រយៈពេល ៣ម៉ោង

### វិញ្ញាប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែខេត្ត Kien Giang ឆ្នាំ២០១៣

**លំហាត់ទី១: (៤ពិន្ទុ)**

$a)$ រក $m$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $y=(m^2-2m)+m^2-1$ ជាអនុគមន៍ចុះ ហើយក្រាបរបស់វាកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំនុចមានអរដោនេស្មើ $3$ ។

$b)$ រកតំលៃតូចបំផុតរបស់ $M=5x^2+y^2+z^2-4x-2xy-z-1$ ។

$c)$ គេឲ្យ $x+y=-5$ និង $x^2+y^2=11$ ។ គណនា $x^3+y^3$ ។

**លំហាត់ទី២: (៤ពិន្ទុ)**

$a)$ សំរួលៈ $A=\dfrac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}:2\sqrt{1+\dfrac{2x}{3-x}}$ ។

$b)$ គេឲ្យ $a,b,c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$ ។

គណនាតំលៃរបស់កន្សោមៈ $Q=\left(a^{27}+b^{27}\right)\left(b^{41}+c^{41}\right)\left(c^{2013}+a^{2013}\right)$ ។

**លំហាត់ទី៣: (៤ពិន្ទុ)**

$a)$ ដោះស្រាយសមីការៈ $\sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{17-x}=3$ ។

$b)$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការៈ $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2x-3}{y+5}}+\sqrt{\dfrac{y+5}{2x-3}}=2\\ 3x+2y=19\end{cases}$ (ចំពោះ $x>\dfrac{3}{2},\ y>-5$)។

**លំហាត់ទី៤: (៤ពិន្ទុ)**

គេឲ្យចតុកោណព្នាយ $ABCD$ មានបាតធំគឺ $CD$ ។ តាម $A$ គេសង់ $AK\parallel BC$ $(K\in CD)$ ហើយតាម $B$ គេសង់ $BI\parallel AD$ $(I\in CD)$, $BI$ កាត់ $AC$ ត្រង់ $F$, $AK$ កាត់ $BD$ ត្រង់ $E$ ។

$a)$ បង្ហាញថា: $KD=CI$ និង $EF\parallel AB$ ។

$b)$ បង្ហាញថា: $AB^2=CD.EF$ ។

**លំហាត់ទី៥: (៤ពិន្ទុ)**

គេឲ្យត្រីកោណសម័ង្ស $ABC$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ $(O;R)$ ។ $M$ ជាចំនុចមួយ ចល័តនៅលើធ្នូ $BC$ របស់រង្វង់នោះ។

$a)$ បង្ហាញថា: $MB+MC=MA$

$b)$ កំណត់ទីតាំងរបស់ចំនុច $M$ ដើម្បីឲ្យផលបូក $MA+MB+MC$ មានតំលៃធំបំផុត។

$c)$ តាង $H,K,Q$ រៀងគ្នា ជាចំនោលកែងរបស់ $M$ ទៅលើ $AB,BC,CA$, តាងផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ $ABC$ ដោយ $S$ ហើយផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ $MBC$ ដោយ $S'$។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $MH+MK+MQ=\frac{2\sqrt{3}(S+2S')}{3R}$ ពេល $M$ ចល័តនៅលើធ្នូ $BC$ ។

**អត្រាកំណែ**

**លំហាត់ទី១**

$a)$ $+$ អនុគមន៍ $y=(m^2-2m)x+m^2-1$ ជាអនុគមន៍ចុះ

$\Leftrightarrow\ m^2-2m<0 \Leftrightarrow m(m-2)<0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>0\\ m-2<0\end{cases}\\ \begin{cases}m<0\\ m-2>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>0\\ m<2\end{cases}\\ \begin{cases}m<0\\ m>2\end{cases}\text{(ចោល)}\end{array}\right. \Leftrightarrow 0<m<2 \qquad (1)$$

$+$ កាត់អ័ក្សអរដោនេ: $m^2-1=3 \Leftrightarrow m=\pm 2 \qquad (2)$

តាម $(1)\&(2) \Rightarrow m\in\varnothing$ □

$b)$ រកតំលៃតូចបំផុតរបស់:

$M=5x^2+y^2+z^2-z-4x-2xy-1$

$M=x^2-2xy+y^2+4x^2-4x+1+z^2-z+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}$

$=(x-y)^2+(2x-1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\geq-\frac{9}{4}$

តំលៃតូចបំផុតរបស់ $M=-\frac{9}{4}$,

ទទួលបានពេល $\begin{cases}x-y=0\\ 2x-1=0\\ z-\frac{1}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$ □

$c)$ គេឲ្យ $x+y-5$ និង $x^2+y^2=11$, គណនា $x^3+y^3$

យើងមាន: $x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=-5(11-xy) \qquad (1)$

ដោយ $x+y=-5 \Rightarrow x^2+y^2+2xy=25$

$\Rightarrow 11+2xy=25 \Rightarrow xy=7 \qquad (2)$

តាម $(1)\&(2) \Rightarrow x^3+y^3=-5(11-7)=-20$ □

**លំហាត់ទី២:**

$a)$ សំរួល $A=\frac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}:2\sqrt{1+\frac{2x}{3-x}}$

លក្ខខណ្ឌ: $-3<x<3$

$$A=\frac{(x+3)(x+2)+x\sqrt{3+x}.\sqrt{3-x}}{x(3-x)+(x+2)\sqrt{3+x}.\sqrt{3-x}}:2\sqrt{\frac{3-x}{3-x}+\frac{2x}{3-x}}$$

$$=\frac{\sqrt{3+x}\left[(x+2)\sqrt{3+x}+x\sqrt{3-x}\right]}{\sqrt{3-x}\left[x\sqrt{3-x}+(x+2)\sqrt{3+x}\right]}:2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$$

$$=\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}}:2\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}=\frac{1}{2}$$ □

$b)$ គេឲ្យ $a,b,c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, គណនាតំលៃកន្សោម $Q$

យើងមាន: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c}$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{ab}=\frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$$

$$\Rightarrow(a+b)c(a+b+c)=-ab(a+b)$$

$$\Rightarrow(a+b)\left[c(a+b+c)+ab\right]=0\Rightarrow(a+b)\left[c(a+c)+bc+ab\right]=0$$

$$\Rightarrow(a+b)\left[c(a+c)+b(a+c)\right]=0\Rightarrow(a+b)(a+c)(b+c)=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a+b=0\\b+c=0\\c+a=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\b=-c\\c=-a\end{array}\right.$$

ជំនួសចូលយើងបានកន្សោម $Q=0$ □

## លំហាត់ទី៣

$a)$ ដោះស្រាយសមីការ: $\sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{17-x}=3$

$$\left(\sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{17-x}\right)^3=3^3$$

$$x+10+17-x+3.\sqrt[3]{(x+10)(17-x)}.3=27$$

$$(x+10(17-x)=0$$

$$x=-10,\ x=17$$ □

$b)$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}\sqrt{\frac{2x-3}{y+5}}+\sqrt{\frac{y+5}{2x-3}}=2\\3x+2y=19\end{cases}$ ចំពោះ $x>\frac{3}{2},y>-5$

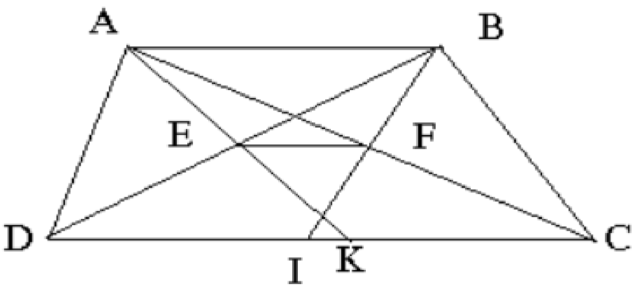
តាង $\sqrt{\frac{2x-3}{y+5}}=m>0$

$\Rightarrow \quad m+\dfrac{1}{m}=2 \Leftrightarrow m^2-2m+1=0 \Leftrightarrow (m-1)^2=0 \Leftrightarrow m=1$ (យក)

$\Rightarrow \quad \dfrac{2x-3}{y+5}=1 \Leftrightarrow 2x-3=y+5 \Leftrightarrow 2x-y=8$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ: $\begin{cases}2x-y=8\\3x+2y=19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-2y=16\\3x+2y=19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$ □

## លំហាត់ទី៤




$a)$ បង្ហាញថា: $KD=CI$ និង $EF \parallel AB$

$+$បង្ហាញថា $ABID, ABCK$ ជាប្រលេឡូក្រាម

$\Rightarrow \quad DI=CK$ (ស្មើរួមគ្នានឹង $AB$)

$\Rightarrow \quad DI+IK=CK+IK \quad \Rightarrow \quad DK=CI$

$+$បង្ហាញថា $\Delta AEB$ មានរាងដូចគ្នានឹង $\Delta KED$ (ម.ម) $\Rightarrow \dfrac{AE}{EK}=\dfrac{AB}{KD}$

$\Delta AFB$ មានរាងដូចគ្នានឹង $\Delta CFI$ (ម.ម) $\Rightarrow \dfrac{AF}{FC}=\dfrac{AB}{CI}$

ដោយ $KD=CI$ (សំរាយខាងលើ)

$\Rightarrow \quad \dfrac{AE}{EK}=\dfrac{AF}{FC} \quad \Rightarrow \quad EF \parallel KC$ (ទ្រឹស្តីបទតាលេសច្រាសក្នុង $\Delta AKC$)

$b)$ បង្ហាញថា $AB^2=CD.EF$

យើងមាន: $\Delta KED$ មានរាងដូចនឹង $\Delta AEB$ (សំរាយខាងលើ)

$\Rightarrow \quad \dfrac{DK}{AB}=\dfrac{DE}{EB} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{DK+AB}{AB}=\dfrac{DE+EB}{EB}$

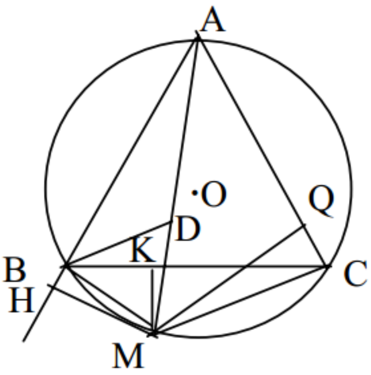
$\Rightarrow \quad \dfrac{DK+KC}{AB}=\dfrac{DB}{EB} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{DC}{AB}=\dfrac{DB}{EB} \qquad (1)$

ដោយ $EF \parallel DI$ (តាមសំរាយខាងលើ: $EF \parallel KC, I \in KC$)

$\Rightarrow \quad \dfrac{DB}{EB}=\dfrac{DI}{EF} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{DB}{EB}=\dfrac{AB}{EF}$ (ព្រោះ $DI=AB$) $\qquad (2)$

តាម $(1)\&(2) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{DC}{AB}=\dfrac{AB}{EF} \quad \Rightarrow \quad AB^2=DC.EF$ □

## លំហាត់ទី៩




$a)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $MC + MB = MA$

$+$ នៅលើ $MA$ យើងដៅ $D$ ដើម្បីឲ្យ $MD = MB$

$\Rightarrow$ $\Delta MBD$ សមបាតត្រង់ $M$

មុំ $BMD =$ មុំ $BCA = 60^0$ (មុំស្កាត់ធ្នូរួម $AB$ )

$\Rightarrow$ $\Delta MBD$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស

$+$ ពិនិត្យ $MBC$ និង $\Delta DBA$

យើងបាន: $MB = BD$ (ព្រោះ $\Delta MBD$ សម័ង្ស)

$BC = AB$ (ព្រោះ $\Delta ABC$ សម័ង្ស)

មុំ $MBC =$ មុំ $DBA$ (បូកនឹងមុំ $DBC$ ស្មើ $60^0$ ដូចគ្នា)

$\Rightarrow$ $\Delta MBC = \Delta DBA$ (ជ.ម.ជ)

$\Rightarrow$ $MC = DA$

ដោយ $MB = MD$ (តាមបំរាប់)

$\Rightarrow$ $MC + MB = MA$ □

$b)$ កំណត់ទីតាំងរបស់ចំនុច $M$ ដើម្បីឲ្យផលបូក $MA + MB + MC$ មានតំលៃធំបំផុត

យើងមាន: $MA$ ជាខ្សែធ្នូរបស់ $(O; R)$

$\Rightarrow$ $MA \le 2R$

$\Rightarrow$ $MA + MB + MC \le 4R$ (មិនប្រែប្រួល)

សញ្ញា "=" កើតមាន $\Leftrightarrow$ $MA$ ជាអង្កត់ផ្ចិត

$\Leftrightarrow$ $M$ ជាចំនុចកណ្តាលរបស់ធ្នូ $BC$ □

$c)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $MH + MK + MQ = \dfrac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{2R}$

យើងមាន: $\frac{MH.AB}{2}+\frac{MK.BC}{2}+\frac{MQ.AC}{2}=S_{MAB}+S_{MBC}+S_{MAC}$

$\Rightarrow \quad AB.(MH+MK+MQ)=2(S+2S')$

គណនា រឺបកស្រាយថា $AB$ ជាជ្រុងត្រីកោណសម័ង្សចារឹកក្នុង $(O;R)$

$\Rightarrow \quad AB=R\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad MH+MK+MQ=\frac{2\sqrt{3}(S+2S')}{3R}$ □

## វិញ្ញាសាទី១៤ រយៈពេល ៣ម៉ោង

### វិញ្ញាប្រឡងសិស្សពូកែខេត្ត Kien Giang ឆ្នាំ២០១២

**លំហាត់ទី១: (៤ពិន្ទុ)**

$a)$ គេឲ្យ $S=1+3+3^2+3^3+3^4+...+3^{96}+3^{97}+3^{98}+3^{99}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S$ ចែកដាច់នឹង 40

$b)$ សំរួលប្រភាគ: $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}$ ។

**លំហាត់ទី២: (៤ពិន្ទុ)**

$a)$ គណនាប្រមាណវិធី: $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

$b)$ គេឲ្យ $a+b+c=0;\ a,b,c\neq 0$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព: $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$ ។

**លំហាត់ទី៣: (៤ពិន្ទុ)**

$a)$ ដោះស្រាយសមីការ: $2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1}$ ។

$b)$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}|x-2|+2|y-1|=9\\ x+|y-1|=-1\end{cases}$ ។

**លំហាត់ទី៤: (៤ពិន្ទុ)**

គេឲ្យចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ $(O;R)$ មានអង្កត់ទ្រូងពីរ $AC, BD$ កែងគ្នាត្រង់ $I$ ($I$ ផ្សេងពី $O$)។ សង់អង្កត់ផ្ចិត $CE$ ។

$a)$ បង្ហាញថា $ABDE$ ជាចតុកោណព្នាយសមបាត។

$b)$ បង្ហាញថា $\sqrt{AB^2+CD^2+BC^2+DA^2}=2R\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៩: ( ៤ពិន្ទុ )

គេឲ្យពីរចំនុចនឹង $A, B$ និងចំនុចចល័ត $M$ មួយ ផ្លាស់ទីយ៉ាងណាឲ្យ $MAB$ ជាត្រីកោណដែលមានមុំទាំងបី ជាមុំស្រួច។ ហៅ $H$ ជាអរតូសង់របស់ត្រីកោណ $MAB$ ហើយ $K$ ជាជើងកំពស់សង់ពី $M$ របស់ត្រីកោណ $MAB$ ។ គណនាតំលៃធំបំផុតរបស់ផលគុណ $KH.KM$ ។

## អត្រាកំណែ

### លំហាត់ទី១

a) $S=(1+3^1+3^2+3^3)+(3^4+3^5+3^6+3^7)+...+(3^{96}+3^{97}+3^{98}+3^{99})$

$S=(1+3^1+3^2+3^3)+3^4(1+3^1+3^2+3^3)+...+3^{96}(1+3^1+3^2+3^3)$

$S=(1+3^1+3^2+3^3)(1+3^4+3^8+...+3^{96})$

ដូចនេះ $S$ ចែកដាច់នឹង 40 □

b) $+$ ភាគយក $=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$

$=(a+b+c)\left[(a+b)^2-(a+b)c+c^2\right]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$+$ ភាគបែង $=a^2-2ab+b^2+a^2-2ab+c^2+b^2-2bc+c^2$

$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$+$ លទ្ធផល $=\dfrac{a+b+c}{2}$ ចំពោះ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\neq 0$ □

### លំហាត់ទី២:

a) គុណចំនួនដែលត្រូវចែក និងចំនួនចែកនឹង $\sqrt{2}$ (ភាគយក និងភាគបែង)

$$=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+(\sqrt{3}+1)}+\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2}.\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{6}=\sqrt{2}$$ □

b) យើងមាន:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{c+b+a}{abc}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right| \quad \square$$

## លំហាត់ទី៣

$a)$ លក្ខខណ្ឌ: $4x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{4}$

$2x^2+2x+1=\sqrt{4x+1}$

$4x^2+4x+2=2\sqrt{4x+1}$

$4x^2+\left(\sqrt{4x+1}-1\right)^2=0$

$$\begin{cases}4x^2=0\\ \sqrt{4x+1}-1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=0 \quad \square$$

$$b)\ \begin{cases}|x-2|+2|y-1|=9 & (1)\\ x+|y-1|=-1 & (2)\end{cases}$$

តាមសមីការ $(2) \Rightarrow |y-1|=-1-x\geq 0$ នាំឲ្យ $x\leq -1$

ជំនួសចូលសមីការ $(1)$ : $|x-2|+2(-1-x)=9$

$|x-2|-2x=11$

$2-x-2x=9$ (ព្រោះ $x<-1$)

$x=-3$

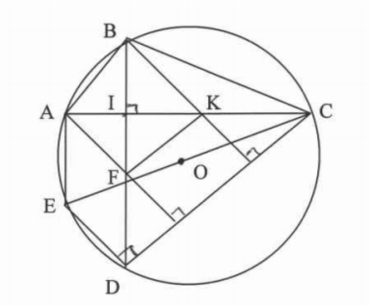
ជំនួស $x=-3$ ចូលសមីការ $(2)$ : $|y-1|=-1+3=2$

$y-1=\pm 2$

$y=3$ ; $y=-1$

ដូចនេះ ចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការគឺ $(-3;3);(-3;-1)$ $\square$

## លំហាត់ទី៤



$a)$ បង្ហាញថាៈ $ABDE$ ជាចតុកោណព្នាយសមបាតៈ

យើងមានៈ $EAC = 90^0$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

$\Rightarrow AE \perp AC$

ដោយ $BD \perp AC$ (បំរាប់)

$\Rightarrow AE \parallel BD$

$\Rightarrow ABDE$ ជាចតុកោណព្នាយ

តែដោយ $ABDE$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ $(O)$

$\Rightarrow ABDE$ ជាចតុកោណព្នាយសមបាត

$b)$ បង្ហាញថា $\sqrt{AB^2+CD^2+BC^2+DA^2} = 2R\sqrt{2}$

យើងមានៈ $\widehat{EDC} = 90^0$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

$\Rightarrow \Delta DEC$ កែងត្រង់ $D$

$\Rightarrow ED^2 + CD^2 = EC^2 = (2R)^2 = 4R^2$

ដោយ $AB = ED$ (ព្រោះ $ABDE$ ជាចតុកោណព្នាយសមបាត)

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = 4R^2$

ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នា យើងបានៈ $BC^2 + DA^2 = 4R^2$

$\Rightarrow AB^2 + CD^2 + BC^2 + DA^2 = 8R^2$

$\Rightarrow \sqrt{AB^2+CD^2+BC^2+DA^2} = 2R\sqrt{2}$

$c)$ បង្ហាញថា $A, B, K, F$ ជាកំពូលទាំងបួនរបស់ចតុកោណពិសេសមួយៈ

យើងមានៈ មុំ $BAC =$ មុំ $BDC$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម $BC$ )

មុំ $IAF =$ មុំ $BDC$ (មុំមានជ្រុងកែងរៀងគ្នា)

$\Rightarrow$ មុំ $BAC =$ មុំ $IAF \Rightarrow \Delta ABF$ សមបាតត្រង់ $A$

ដោយ $AI$ ជាកំពស់, នាំឲ្យ $AI$ ជាមេដ្យាន $\Rightarrow IB = IF$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ យើងបានៈ $IA = IK$

$\Rightarrow ABKE$ ជាប្រលេឡូក្រាម

តែដោយ $AK \perp BF \Rightarrow ABKF$ ជាចតុកោណស្មើ □

## លំហាត់ទី៥

ពិនិត្យ $\Delta KAH$ និង $\Delta KMB$

យើងមានៈ $\widehat{AKH} = \widehat{MKB} = 90^0$

$\widehat{KAH} = \widehat{KMB}$ (មុំមានជ្រុងកែងរៀងគ្នា)

$\Rightarrow \Delta KAH$ និង $\Delta KMB$ មានរាងដូចគ្នា

$\Rightarrow \dfrac{KH}{KB}=\dfrac{AK}{KM}$

អនុវត្តន៍វិសមភាព $Cauchy$ ចំពោះពីរចំនួនវិជ្ជមាន,

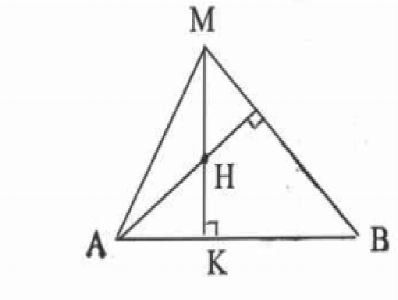
យើងបាន: $\sqrt{AK.KB}\le\dfrac{AK+KB}{2}$

$\Leftrightarrow\ AK.KB\le\dfrac{AB^2}{4}$

ដូចនោះ: $KH.KM\le\dfrac{AB^2}{4}$ (មិនប្រែប្រួល)

សញ្ញា "=" កើតមាន $\Leftrightarrow\ AK=KB$

ដូចនេះ តំលៃធំបំផុតរបស់ $KH.KM$ ស្មើ $\dfrac{AB^2}{4}$ □




## វិញ្ញាសាទី១៥ រយៈពេល ២ម៉ោង និង៣០នាទី

### វិញ្ញាប្រឡងសិស្សពូកែខេត្ត Kien Giang ឆ្នាំ២០១១

**លំហាត់ទី១: (៤ពិន្ទុ)**

$a)$ គេឲ្យ $A=\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{13}+...+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{19}+\dfrac{1}{20}$ ។ ប្រៀបធៀប $A$ នឹង $\dfrac{1}{2}$

$b)$ គណនា $B=(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$

**លំហាត់ទី២: (៤ពិន្ទុ)**

$a)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះ $x, y$ ខុសពីសូន្យ, វិសមភាពខាងក្រោមពិត:

$$x^4+y^4\le\frac{x^6}{y^2}+\frac{y^6}{x^2}$$ ។

$b)$ រកបណ្ដាចំនួន $x, y, z$ ដោយដឹងថា:

$$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx \text{ និង } x^{2010}+y^{2010}+z^{2010}=3^{2011}$$

**លំហាត់ទី៣: (៤ពិន្ទុ)**

$a)$ ដោះស្រាយសមីការ: $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=14$

$b)$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}\dfrac{xyz}{x+y}=2\\ \dfrac{xyz}{y+z}=\dfrac{6}{5}\\ \dfrac{xyz}{x+z}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ ។

លំហាត់ទី៤: (៤ពិន្ទុ)

គេឲ្យការេ $ABCD$ មានជ្រុងស្មើ1។ នៅលើបណ្ដាជ្រុង $AB, AD$ រៀងគ្នា គេដៅបណ្ដាចំនុច $P,Q$ យ៉ាងណាឲ្យត្រីកោណ $APQ$ មានបរិមាត្រស្មើ 2 ។

$a)$ បង្ហាញថាៈ $PB+QD=PQ$ ?

$b)$ គណនារង្វាស់មុំ $PCQ$ ?

លំហាត់ទី៥: (៤ពិន្ទុ)

គេឲ្យរង្វង់ $(O')$ ប៉ះនឹងជ្រុងទាំងពីរ $Ox$ និង $Oy$ របស់មុំ $xOy$ ត្រង់ $A$ និង $B$ ។ តាម $A$ គេសង់កន្លះបន្ទាត់ស្របនឹង $OB$ កាត់រង្វង់ $(O')$ ត្រង់ $C$ ។ អង្កត់ $OC$ កាត់រង្វង់ $(O')$ ត្រង់ $E$ ។ បន្ទាត់ទាំងពីរ $AE$ និង $OB$ កាត់គ្នាត្រង់ $K$ ។ បង្ហាញថា $OA=2OK$ ?

## អត្រាកំណែ

### លំហាត់ទី១

$a)$ យើងមាន $\frac{1}{11}>\frac{1}{20},\frac{1}{12}>\frac{1}{20},\dots,\frac{1}{19}>\frac{1}{20}$

នាំឲ្យ $A=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}>\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\dots+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}$

$$=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $A>\frac{1}{2}$ □

$b)$ $B=(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$

$=\sqrt{4+\sqrt{15}}\sqrt{4+\sqrt{15}}\sqrt{4-\sqrt{15}}\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$=(\sqrt{4+\sqrt{15}}).1.\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$=\sqrt{8+2\sqrt{15}}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$=(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2$ □

### លំហាត់ទី២:

$a)$ $x^4+y^4\le\frac{x^6}{y^2}+\frac{y^6}{x^2}$ (1)

$\Leftrightarrow x^6y^2+x^2y^6\le x^8+y^8$

$\Leftrightarrow x^8-x^6y^2+y^8-x^2y^6\ge 0$

$\Leftrightarrow x^6(x^2-y^2)-y^6(x^2-y^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2)(x^6-y^6)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2)(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2)^2(x^4+x^2y^2+y^4)\geq 0$ (វិសមភាពពិត)

ដូចនេះ (1) ជាវិសមភាពពិត ចំពោះគ្រប់ $x, y$ ខុសពី $0$ □

$b)$ យើងមាន:

$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=y=z$

$\Leftrightarrow x^{2010}=y^{2010}=z^{2010}$

ជំនួសចូល $x^{2010}+y^{2010}+z^{2010}=3^{2011}$

យើងបាន: $3.x^{2010}=3^{2011} \Leftrightarrow x^{2010}=3^{2010}$

ដូចនេះ $x=y=z=3$ □

## លំហាត់ទី៣

$a)$ សមីការ: $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=14$

បំលែងទៅជារាង: $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=14$

$|x-1|+|x+2|+|x-3|=14$

• បើ $x<-2$:

យើងបាន: $-(x-1)-(x+2)+(x-3)=14$

រកបាន $x=-4$ (យក)

• បើ $-2\leq x<1$:

យើងបាន: $-(x-1)+x+2+3-x=14$

រកបាន $x=-8$ (ចោល)

• បើ $1\leq x<3$:

យើងបាន: $x-1+x+2+3-x=14$

រកបាន $x=10$ (ចោល)

• បើ $x\geq 3$:

យើងបាន: $x-1+x+2+x-3=14$

រកបាន $x=\dfrac{16}{3}$ (យក)

ដូចនេះ $S=\left\{-4;\frac{16}{3}\right\}$ □

$b)$ ចំរាសសមីការទាំងបី ហើយផ្តាច់តួ, យើងបាន:

$$\begin{cases}\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{5}{6}\\ \frac{1}{yz}+\frac{1}{xy}=\frac{2}{3}\end{cases}$$

បូកសមីការទាំងបី, រួចដកនឹងសមីការនីមួយតាមលំដាប់ យើងបាន:

$$\begin{cases}xy=2\\ xz=3\\ yz=6\end{cases}$$

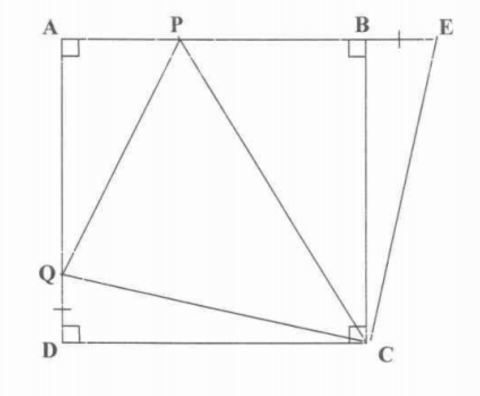
$\Rightarrow\ (xyz)^2=36\ \Rightarrow\ xyz=\pm 6 \qquad (4)$

ជំនួសតាមលំដាប់នូវ $xy=2,\ xz=3,\ yz=6$ ចូលសមីការ $(4)$

យើងរកបាន $z=\pm 3,\ y=\pm 2,\ x=\pm 1$

ដូចនេះ បណ្តាចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការគឺ: $(1;2;3),\ (-1;-2;-3)$ □

## លំហាត់ទី៤




$a)$ បង្ហាញថា: $PB+QD=PQ$

យើងមាន: $AB+AD=2$ (តាមបំរាប់)

$AP+AQ+PQ=2$ (បំរាប់)

$\Rightarrow\ AB+AD=AP+AQ+PQ=2$

$\Rightarrow\ AP+PD+AQ+QD=AP+AQ+PQ$

$\Rightarrow\ PB+QD=PQ$

$b)$ គណនារង្វាស់មុំ $PCQ$

នៅលើកន្លះបន្ទាត់ឈមនឹងកន្លះបន្ទាត់ $BA$ យើងដៅ $E$ យ៉ាងណាឲ្យ $BE = DQ$

◦ ពិនិត្យ $\Delta DCQ$ និង $\Delta BCE$

យើងមាន: $DC = BC$ ( $ABCD$ ជាការេ)

$\widehat{QDC} = \widehat{EBC}$ $(= 90^0)$

$DQ = BE$

$\Rightarrow$ $\Delta DCQ = \Delta BCE$ (ជ.ម.ជ)

$\Rightarrow$ $\widehat{DCQ} = \widehat{BCE}$ និង $CQ = CE$

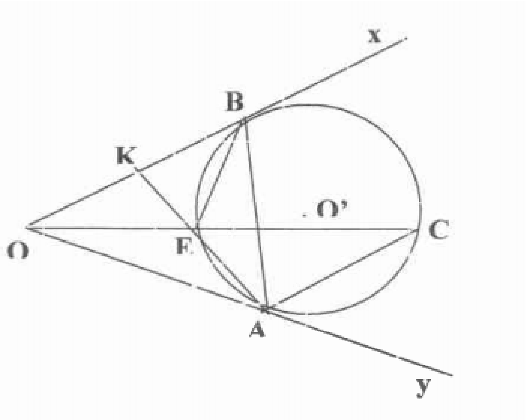
◦ ពិនិត្យ $\Delta PCQ$ និង $\Delta PCE$

យើងមាន: $PQ = PE, CQ = CE, CP$ ជាជ្រុងរួម

$\Rightarrow$ $\Delta PCQ = \Delta PCE$ (ជ.ជ.ជ)

$\Rightarrow$ $\widehat{PCQ} = \widehat{PCE} = \frac{1}{2}\widehat{QCE} = 45^0$ □

## លំហាត់ទី៥




• ពិនិត្យ $\Delta KOE$ និង $\Delta KAO$

យើងមាន: $\widehat{KOE} = \widehat{ECA}$ (ឆ្លាស់ក្នុង)

$\widehat{ECA} = \widehat{KAO}$ (ស្កាត់ធ្នូរួម $AE$ )

$\Rightarrow$ $\widehat{KOE} = \widehat{KAO}$ ហើយមាន $\hat{K}$ ជាមុំរួម

$\Rightarrow$ $\Delta KOE$ និង $\Delta KAO$ មានរាងដូចគ្នា

$\Rightarrow$ $\frac{OK}{AK} = \frac{EK}{OK} \Rightarrow OK^2 = AK.EK$ (1)

• ពិនិត្យ $\Delta KAB$ និង $\Delta KBE$

យើងមាន: $\hat{K}$ មុំរួម

$\widehat{KBE} = \widehat{EAB}$ (មុំស្កាត់ធ្នូរួម $BE$ )

$\Rightarrow$ $\Delta KAB$ និង $\Delta KBE$ មានរាងដូចគ្នា

$\Rightarrow \dfrac{KA}{KB} = \dfrac{KB}{KE} \Rightarrow KB^2 = AK.EK$ (2)

តាម (1) & (2) យើងបាន $OK = KB$

ដោយ $OA = OB$ (លក្ខណៈបន្ទាត់ប៉ះ)

$\Rightarrow \quad OA = 2OK$ □

## វិញ្ញាសាទី១៦ រយៈពេល ២ម៉ោង និង៣០នាទី

### វិញ្ញាប្រឡងសិស្សពូកែខេត្ត Kien Giang ឆ្នាំ២០១០

**លំហាត់ទី១:** ( ៤ពិន្ទុ )

$a)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $B = n^3 + 11n$ ចែកដាច់នឹង $6$ ចំពោះគ្រប់ $n$

$b)$ រកបីចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដើម្បីឲ្យផលបូកបណ្តាចំរាស់របស់វាស្មើនឹង $2$ ។

**លំហាត់ទី២:** ( ៤ពិន្ទុ )

គេឲ្យអនុគមន៍ $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

$a)$ រកដែនកំណត់របស់អនុគមន៍

$b)$ សំរួល $y$ (បំបាត់សញ្ញា $\sqrt{\ }$ និងសញ្ញា $|\ |$)

$c)$ សង់ក្រាបរបស់អនុគមន៍

$d)$ រកតំលៃតូចបំផុតរបស់ $y$ និងបណ្តាតំលៃត្រូវគ្នារបស់ $x$ ។

**លំហាត់ទី៣:** ( ៤ពិន្ទុ )

$a)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $a^4 + b^4 \ge a^3b + ab^3$ ចំពោះគ្រប់ $a, b$

$b)$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} |x+1| + |y-1| = 5 \\ |x+1| = 4y - 4 \end{cases}$

$c)$ រកគ្រប់ $x, y, z$ ក្នុងសមីការ: $x - 2\sqrt{x-2} + y = 4\sqrt{y-3} + 6\sqrt{z-5} - z - 4$ ។

**លំហាត់ទី៤:** ( ៤ពិន្ទុ )

គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ កែងត្រង់ $A$ មាន $I$ ជាចំនុចកណ្តាលរបស់ $BC$ ។ ដៅចំនុច $D$ មួយ នៅលើអង្កត់ $BC$ ( $D$ ផ្សេងពី $B$ និង $C$ )។ តាង $E$ និង $F$ រៀងគ្នាជាបណ្តាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅរបស់បណ្តាត្រីកោណ $ABD$ និង $ADC$ ។ ស្រាយថា $5$ ចំនុច $A, E, D, I, F$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ។

លំហាត់ទី៥: (៤ពិន្ទុ)

គេឲ្យកន្លះរង្វង់ $(O;R)$ អង្កត់ផ្ចិត $AB$, $M$ ជាចំនុចចល័តនៅលើកន្លះរង្វង់, $H$ ជាចំនោលកែងរបស់ $M$ ទៅលើ $AB$, $C$ និង $D$ រៀងគ្នាជាចំនោលកែងរបស់ $H$ ទៅលើ $MA$ និង $MB$ ។ តាង $E$ និង $F$ រៀងគ្នាជាចំនុចកណ្ដាលរបស់ $AH$ និង $HB$ ។

កំណត់ទីតាំងចំនុច $M$ ដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $ECDF$ មានតំលៃធំបំផុត។

## អត្រាកំណែ

### លំហាត់ទី១

$a)$ យើងមាន $B = n^3 - n + 12n$

$= n(n^2 - 1) + 12n$

$= n(n+1)(n-1) + 12n$

ដោយ $n-1, n, n+1$ ជាបីចំនួនគត់តគ្នា នោះផលគុណ $n(n-1)(n+1) \vdots 6$

ហើយ $12n \vdots 6$

ដូចនេះ $B \vdots 6$ □

$b)$ តាងបីចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលត្រូវរកដោយ $x, y, z$

យើងបាន: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \quad (1)$

ឧបមាថា $x \le y \le z$, តាម $(1) \Rightarrow 2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{3}{x} \Rightarrow x \le \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$

ជំនួស $x = 1$ ចូល $(1)$: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow y + z = yz$

$\Leftrightarrow yx - y - z + 1 = 1 \Leftrightarrow (y-1)(z-1) = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y-1=1 \\ z-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ z=2 \end{cases}$

ដូចនេះ បីចំនួនដែលត្រូវរកគឺ $1; 2; 2$ □

### លំហាត់ទី២:

$a)$ $y$ មានន័យ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ge 0 \\ x^2 - 4x + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ge 0 \\ (x-2)^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

ដែនកំណត់របស់ $y$ គឺ $\mathbb{R}$ □

$b)$ $y = |x| + |x-2|$

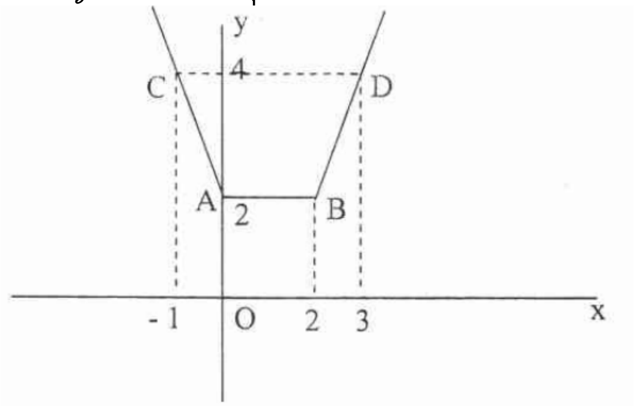
$$= \begin{cases} x + x - 2 = 2x - 2 & (\text{បើ } x > 2) \\ x - x + 2 = 2 & (\text{បើ } 0 \le x \le 2) \\ -x - x + 2 = -2x + 2 & (\text{បើ } x < 0) \end{cases}$$

$c)$ ដែនកំណត់ $\mathbb{R}$

ក្រាបរបស់អនុគមន៍ជាកន្លះបន្ទាត់ពីរ $AC, BD$ និងអង្កត់ $AB$ ដែលៈ

$A(0;2), B(2;2), C(-1;4), D(3;4)$

ក្រាបរបស់អនុគមន៍ត្រូវបានសង់ដូចក្នុងរូបខាងក្រោមៈ




$d)$ អនុវត្តន៍ៈ $|A| \geq A$ ហើយសញ្ញា "=" កើតមាន $\Leftrightarrow \ A \geq 0$

$$y = |x| + |x-2| = |x| + |2-x| \geq x + 2 - x \geq 2$$

សញ្ញា "=" កើតមាន $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ 0 \leq x \leq 2$

ដូចនេះ $y$ មានតំលៃតូចបំផុតស្មើ $2 \ \Leftrightarrow \ 0 \leq x \leq 2$ □

## លំហាត់ទី៣

$a)$ យើងមានៈ $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ (1)

$$\Leftrightarrow \ a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ a^3(a-b) - b^3(a-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ (a-b)(a^3 - b^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ (a-b)(a-b)(a^2 + ab + b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ (a-b)^2\left[\left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{3b^2}{4}\right] \geq 0$$

$\Leftrightarrow \ (a-b)^2\left[\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] \geq 0$ (វិសមភាពនេះពិតចំពោះគ្រប់ $a, b$)

ដូចនេះ (1) ពិតចំពោះគ្រប់ $a, b$ □

$b)$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការៈ $\begin{cases} |x+1| + |y-1| = 5 \quad (1) \\ |x+1| = 4y - 4 \quad (2) \end{cases}$

តាមសមីការ (2) ,យើងមានៈ $4(y-1) = |x+1| \geq 0$

ដូចនោះប្រព័ន្ធដែលឲ្យ $\Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|+y-1=5 \\ |x+1|=4y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|=-y+6 \\ |x+1|=4y-4 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad -y+6=4y-4 \Leftrightarrow y=2$

ជំនួសចូលសមីការ (1) , យើងបាន: $|x+1|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=4 \\ x+1=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-5 \end{array}\right.$

ដូចនេះ ចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការគឺ $(3;2);(-5;2)$ □

$c)$ រកគ្រប់ $x, y, z$ ក្នុងសមីការ: $x-2\sqrt{x-2}+y=4\sqrt{y-3}+6\sqrt{z-5}-z-4$

លក្ខខណ្ឌ: $\begin{cases} x-2\ge 0 \\ y-3\ge 0 \\ z-5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ y\ge 3 \\ z\ge 5 \end{cases}$

យើងមាន: $x-2\sqrt{x-2}+y=4\sqrt{y-3}+6\sqrt{z-5}-z-4$

$\Leftrightarrow \quad x+y+z+4-2\sqrt{x-2}-4\sqrt{y-3}-6\sqrt{z-5}=0$

$\Leftrightarrow \quad (x-2-2\sqrt{x-2}+1)+(y-3-4\sqrt{y-3}+4)+(z-5-6\sqrt{z-5}+9)=0$

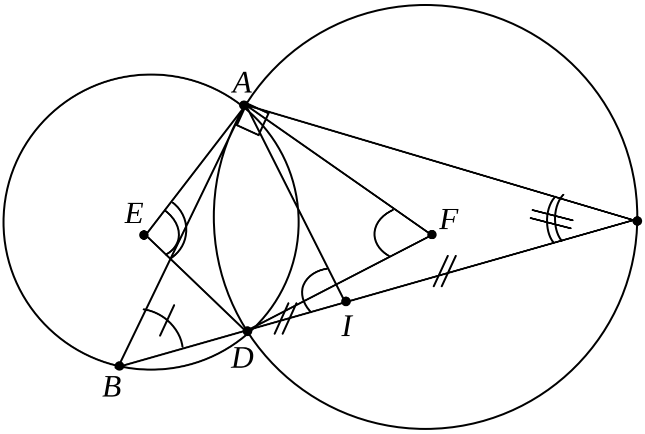
$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{x-2}-1)^2+(\sqrt{y-3}-2)^2+(\sqrt{z-5}-3)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}-1=0 \\ \sqrt{y-3}-2=0 \\ \sqrt{z-5}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=1 \\ \sqrt{y-3}=2 \\ \sqrt{z-5}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ y-3=4 \\ z-5=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=7 \\ z=14 \end{cases}$

(ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ)

ដូចនេះ $x=3, y=7, z=14$ □

## លំហាត់ទី៤




• យើងមាន $\widehat{ABD}=\frac{1}{2}\widehat{AED}$ (វិបាកមុំចារឹកក្នុង)

$\widehat{ACD} = \frac{1}{2}\widehat{AFD}$ (វិបាកមុំចារឹកក្នុង)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(\widehat{AED} + \widehat{AFD}) = \widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 90^0$

$\Rightarrow \quad \widehat{AED} + \widehat{AFD} = 180^0$

$\Rightarrow$ ចតុកោណ $EAFD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុង

$\Rightarrow$ $E, A, F, D$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ (1)

• យើងមានៈ $\Delta ABC$ កែងត្រង់ $A$, $AI$ ជាមេដ្យាន (បំរាប់)

$\Rightarrow$ $AI = BI = CI$

$\Rightarrow$ $\Delta IAC$ សមបាតត្រង់ $A$ $\Rightarrow$ $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}\widehat{AID}$

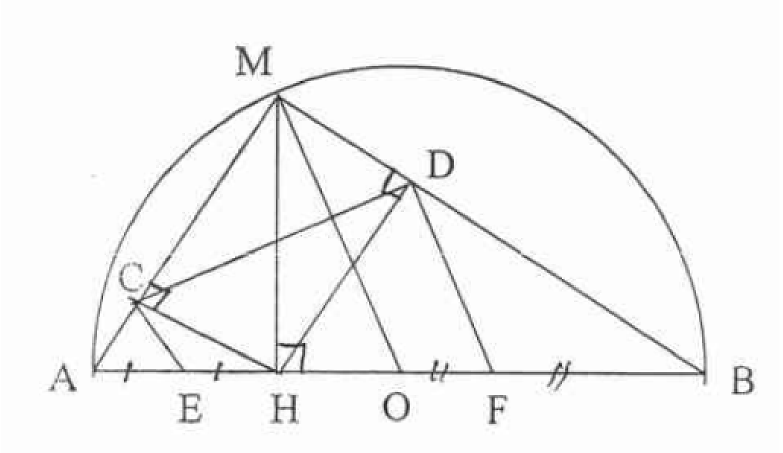
ដោយ $\widehat{ACD} = \frac{1}{2}\widehat{AFD}$ (សំរាយខាងលើ) $\Rightarrow$ $\widehat{AID} = \widehat{AFD}$

$\Rightarrow$ ចតុកោណ $DAFI$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុង

$\Rightarrow$ $A, F, D, I$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ (2)

តាម (1) & (2) , យើងបាន 5 ចំនុច $A, E, D, I, F$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ □

## លំហាត់ទី៩




យើងមានៈ $\widehat{AMB} = 90^0$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

$\Rightarrow$ ចតុកោណ $CMDH$ ជាចតុកោណកែង (ព្រោះ $\hat{M} = \hat{C} = \hat{D} = 90^0$)

$\Rightarrow$ $S_{HCD} = \frac{1}{2}S_{MDHC}$

យើងមានៈ $\Delta ACH$ មាន $CE$ ជាមេដ្យាន $\Rightarrow$ $S_{ECH} = \frac{1}{2}S_{ACH}$

$\Delta DHB$ មាន $DE$ ជាមេដ្យាន $\Rightarrow$ $S_{DHF} = \frac{1}{2}S_{BDH}$

ដូចនោះ $S_{HCD}+S_{ECH}+S_{DHF}=\frac{1}{2}(S_{MDHC}+S_{ACH}+S_{BDH})$

$\Rightarrow\ S_{ECDF}=\frac{1}{2}S_{MAB}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}MH.AB\le\frac{1}{4}.MO.AB=\frac{1}{2}R^2$

(ព្រោះ $MH\perp AB, O\in AB$)

$\Rightarrow\ S_{ECDF}\le\frac{1}{2}R^2$ (មិនប្រែប្រួល)

សញ្ញា "=" កើតមាន $\Leftrightarrow H\equiv O\ \Leftrightarrow\ M$ ជាចំនុចកណ្ដាលរបស់ធ្នូ $AB$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃចតុកោណ $ECDF$ មានតំលៃធំបំផុតស្មើ $\frac{1}{2}R^2$ ពេល $M$ ជាចំនុចកណ្ដាលរបស់ធ្នូ $AB$ □

## វិញ្ញាសាទី១៧ រយៈពេល ២ម៉ោង និង៣០នាទី

### វិញ្ញាប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងក្រុងហាណូយឆ្នាំ២០១១

**លំហាត់ទី១: (២ពិន្ទុ)**

សំរួលកន្សោមៈ $A=\dfrac{\sqrt{4x^3-16x^2+21x-9}}{\sqrt{x-1}}$

**លំហាត់ទី២: (៥ពិន្ទុ)**

1) ដោះស្រាយសមីការៈ $2(x^2+2x+3)=5\sqrt{x^3+3x^2+3x+2}$

2) គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិត $x, y$ ប្រែប្រួល និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $4x^2-(8y+11)x+(8y^2+14)=0$

រក $y$ ពេល $x$ មានតំលៃធំបំផុត, និងពេល $x$ មានតំលៃតូចបំផុត។

**លំហាត់ទី៣: (៥ពិន្ទុ)**

1) រក 7 ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដើម្បីឲ្យផលគុណនៃបណ្ដាការេរបស់ពួកវា ស្មើនឹង 2 ដង ផលបូកបណ្ដាការេរបស់ពួកវា។

2) គេឲ្យបណ្ដាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $x, y$ ប្រែប្រួល និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y=1$។ រកតំលៃធំបំផុត និងតំលៃតូចបំផុតរបស់ៈ $B=(4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy$ ។

**លំហាត់ទី៤: (៦ពិន្ទុ)**

គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ $(O)$ មានអង្កត់ផ្ចិត $BC$ ។

1) សង់នៅខាងក្រៅត្រីកោណ $ABC$ នូវកន្លះរង្វង់ $(I)$ មានអង្កត់ផ្ចិត $AB$ និងកន្លះរង្វង់ $(K)$ មានអង្កត់ផ្ចិត $AC$ ។ បន្ទាត់កាត់តាម $A$ កាត់កន្លះរង្វង់ទាំងពីរ $(I),(K)$ រៀងគ្នាត្រង់បណ្ដាចំនុច $M, N$ ($M$ ផ្សេងពី $A, B$ ហើយ $N$ ផ្សេងពី $A, C$)។

គណនាបណ្ដាមុំរបស់ត្រីកោណ $ABC$ ពេលក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $CAN$ ស្មើ $3$ ដង ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $AMB$ ។

2) គេឲ្យ $AB < AC$ និងចំនុច $D$ ស្ថិតនៅលើជ្រុង $AC$ យ៉ាងណាឲ្យ $AD = AB$ ។ តាងចំនុច $E$ ជាចំនោលកែងរបស់ចំនុច $D$ ទៅលើជ្រុង $BC$ ហើយចំនុច $F$ ជាចំនោលកែងរបស់ចំនុច $A$ ទៅលើជ្រុង $DE$ ។ ប្រៀបធៀប $\dfrac{AF}{AB}$ និង $\dfrac{AF}{AC}$ ជាមួយនឹង $\cos\widehat{AEB}$ ។

## លំហាត់ទី៩: (២ពិន្ទុ)

មនុស្សពីរនាក់លេងល្បែងជាមួយគ្នាដូចខាងក្រោមៈ ក្នុងប្រអប់មានឃ្លី $311$ គ្រាប់, តាមលំដាប់លំដោយ គឺមនុស្សម្នាក់ៗយកឃ្លី $k$ គ្រាប់, ចំពោះ $k \in \{1;2;3\}$ ។ អ្នកឈ្នះ ជាអ្នកដែលយកបានគ្រាប់ឃ្លីចុងក្រោយចេញពីប្រអប់នោះ។

1) តើអ្នកទីមួយ រឺអ្នកទីពីរជាអ្នកឈ្នះ ហើយការលេងដំណើរការបែបណាដែរដើម្បីយកឈ្នះនោះ?

2) សំនួរដូចខាងលើដែរ, ពេលលំហាត់នេះត្រូវបានជំនួសឃ្លី $311$ គ្រាប់ ដោយឃ្លី $n$ គ្រាប់, ចំពោះ $n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន?

# **ដំណោះស្រាយ**

## លំហាត់ទី១

សំរួលកន្សោម $A$ :

បំបែក $4x^3 - 16x^2 + 21x - 9 = (2x-3)^2(x-1)$

លក្ខខណ្ឌ $x > 1$

យើងបាន $A = |2x-3|$

រឺ $$A = \begin{cases} 2x-3; \ x \le \dfrac{3}{2} \\ 3-2x; \ 1 < x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$ □

## លំហាត់ទី២

1) ដោះស្រាយសមីការ $2(x^2+2x+3) = 5\sqrt{x^3+3x^2+3x+2}$ :

បំបែក $x^3+3x^2+3x+2 = (x+2)(x^2+x+1)$

លក្ខខណ្ឌ $x \ge -2$

តាង $x+2 = a,\ x^2+x+1 = b$ បំលែងទៅជារាង $2(a+b) = 5\sqrt{ab}$

ដោះស្រាយយើងបាន $a = 4b, b = 4a$

• ចំពោះ $a = 4b \iff x+2 = 4(x^2+x+1)$ សមីការគ្មានឫស

• ចំពោះ $b=4a \Leftrightarrow x^2-3x-7=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{3+\sqrt{37}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{37}}{2}$

ប្រៀបធៀបជាមួយលក្ខខណ្ឌ និងសន្និដ្ឋាន

□

2) បំលែងសមីការទៅជារាង: $8y^2-8xy+4x^2-11x+14=0$

យើងមាន: $\Delta'_y=-16x^2+88x-112\geq 0 \Leftrightarrow 2x^2-11x+14\leq 0$

ដោះស្រាយយើងបាន $2\leq x\leq 3,5$

ចំពោះ $x=2 \Rightarrow y=1;\ x=3,5 \Rightarrow y=1,75$

សន្និដ្ឋាន: $(2;1), (3,5;1,75)$ □

## លំហាត់ទី៣

1) តាង 7 ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលត្រូវរកដោយ $x_1, x_2, ..., x_7$, យើងបាន:

$$x_1^2.x_2^2....x_7^2=2(x_1^2+x_2^2+...+x_7^2)$$

ឧបមាថា $x_1\geq x_2\geq ...\geq x_7\geq 1$ មាន $x_1^2.x_2^2...x_7^2\leq 2.7x_1^2=14x_1^2$

$\Rightarrow x_1^2.x_2^2...x_7^2\leq 14$

$x_2...x_7\leq\sqrt{14}<4=2^2 \Rightarrow x_2=...=x_7=1$

$\Rightarrow x_1^2.x_2^2=2(x_1^2+x_2^2+5)$

តាង $x_1^2=a, x_2^2=b$ ចំពោះ $a,b$ ជាបណ្ដាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយជាចំនួនការេប្រាកដ

$ab=2a+2b+10 \Leftrightarrow (a-2)(b-2)=14.1=7.2$

• ករណីទី១: $\begin{cases}a-2=14\\b-2=2\end{cases} \Rightarrow b=3$ មិនមែនជាការេប្រាកដ

• ករណីទី២: $\begin{cases}a-2=7\\b-2=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=9\\b=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=3\\x_2=2\end{cases}$ ហើយសន្និដ្ឋាន □

2) រកតម្លៃធំបំផុត និងតូចបំផុតរបស់ $B$ :

$$B=16x^2y^2+12x^3+12y^3+34xy$$

$$B=16x^2y^2+12(x+y)^2-2xy=...=16\left(xy-\frac{1}{16}\right)^2+\frac{191}{16}$$

$B\geq\frac{191}{16}$, $B$ តូចបំផុត $=\frac{191}{16} \Leftrightarrow xy=\frac{1}{16}$

ដោះស្រាយបាន: $x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}, y=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ ឬ $x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}, y=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

ម្យ៉ាងទៀត យើងមាន: $0\leq 4xy\leq (x+y)^2=1 \Rightarrow 0\leq xy\leq\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{16}\leq xy-\frac{1}{16}\leq\frac{3}{16}$

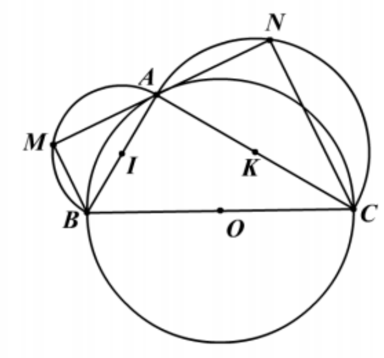
នាំឲ្យ $0 \le \left| xy - \frac{1}{16} \right| \le \frac{3}{16}$

$B = 16\left( xy - \frac{1}{16} \right)^2 + \frac{191}{16} \le 16.\left( \frac{3}{16} \right)^2 + \frac{191}{16} = \frac{25}{52}$

ដូចនេះ $B$ ធំបំផុត $= \frac{25}{52} \Leftrightarrow (x+y) = 1$ និង $xy = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

សន្និដ្ឋាន. □

**លំហាត់ទី៤**




1) គណនាបណ្ដាមុំរបស់ត្រីកោណ $ABC$

ស្រាយបានថា $BAC = 90^0$ □

ស្រាយបានថា $\Delta AMB$ និង $\Delta CAN$ មានរាងដូចគ្នា

ទាញបាន $\frac{1}{3} = \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta CNA}} = \left( \frac{AB}{AC} \right)^2$

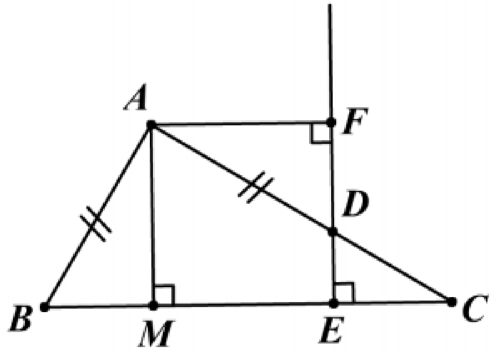
$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^0 = \tan \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ACB} = 30^0$

ដូចនេះ $\widehat{ABC} = 60^0$ ហើយសន្និដ្ឋាន

2) ប្រៀបធៀប....

សង់ $AH \perp BC$ , យើងបាន $AFEH$ ជាចតុកោណកែង

$\Delta ABD$ កែងសមបាត $\Rightarrow \widehat{ADB} = 45^0$




ចតុកោណ $ADEB$ ចារឹកក្នុង $\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 45^0$

ដូចនោះ $\Delta AHE$ កែងសមបាត $\Rightarrow AH = HE = AF$

$\Delta ABC$ ជាត្រីកោណកែង $\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{2}{AC^2} < \frac{1}{AF^2} < \frac{2}{AB^2}$

តាម $\frac{2}{AC^2} < \frac{1}{AF^2} \Rightarrow \frac{AF}{AC} < \cos \widehat{AEB} < \frac{AF}{AB} = \cos 45^0 = \cos \widehat{AEB}$

តាម $\frac{1}{AF^2}<\frac{2}{AB^2} \Rightarrow \frac{AF}{AB}>\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^0=\cos\widehat{AEB}$

សន្និដ្ឋាន $\frac{AF}{AC}<\cos\widehat{AEB}<\frac{AF}{AB}$

លំហាត់ទី៥

1) នរណាជាអ្នកឈ្នះ...

អ្នកទីមួយ យកឃ្លី $3$ គ្រាប់ នៅសល់ឃ្លី $308$ គ្រាប់ជាពហុគុណនៃ $4$

អ្នកទីពីរយកឃ្លី $1, 2$ រឺ $3$ គ្រាប់

អ្នកទីមួយយកឃ្លី $3, 2$ រឺ $1$ គ្រាប់ ចំនួននៅសល់ជាពហុគុណនៃ $4$

ចេះតែបន្តដូចនេះ នោះអ្នកដែលយកឃ្លីចុងក្រោយគឺត្រូវតែជាអ្នកទីមួយ

2) ចំពោះឃ្លីមាន $n$ គ្រាប់..

បើ $n$ មិនមែនជាពហុគុណនៃ $4$, តាមវិធីធ្វើដូចខាងលើ នោះអ្នកទីមួយឈ្នះ

បើ $n$ ជាពហុគុណនៃ $4$ នោះអ្នកទីពីរជាអ្នកឈ្នះ □

## វិញ្ញាសាទី១៨ រយៈពេល៣ម៉ោង

### ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងខេត្ត រាជធានី និងទូទាំងប្រទេស ឆ្នាំ២០១៤

I (15ពិន្ទុ): 1. គេឲ្យ $x+y=\frac{5}{2},\ x^2+y^2=\frac{13}{4}$ ។ រកតម្លៃរបស់ $x^5+y^5$ ។

2. គេឲ្យចំនួនពិត $x, y, z$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=26 \\ x^3+y^3+z^3=90 \end{cases}$$

គណនាតម្លៃរបស់ $xyz$ និង $x^4+y^4+z^4$ ។

II (15ពិន្ទុ): 1. គេឲ្យបណ្តាចំនួនពិតមិនសូន្យ $a, b, c$ ហើយ $a+b+c=0$ ។

រកតម្លៃរបស់កន្សោម $A=x^{2014}-2014x+2014$,

ចំពោះ $x=\frac{|a|}{b+c}+\frac{|b|}{a+c}-\frac{|c|}{a+b}$ ។

2. គេឲ្យ $a<b<c$, រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម:

$y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ ។

III (15ពិន្ទុ): 1. ដោះស្រាយសមីការ $\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$

2. គេឲ្យសមីការ $ax+4=3x-b$ មានឫសច្រើនជាង $1$ ចំពោះអញ្ញាតិ $x$ ។

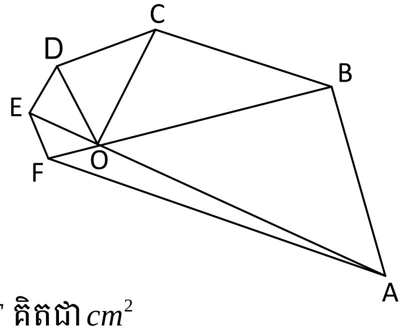
រកតម្លៃរបស់ $(4a+3b)^{2014}$ ។

IV (15ពិន្ទុ): ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{3-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3}}}}}{6-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3}}}}}<\dfrac{1}{4}$

ក្នុងនោះភាគយកមាន 2014រ៉ាឌីកាល់, ភាគបែងមាន 2013រ៉ាឌីកាល់។

V (២០ពិន្ទុ): ក្នុងការប្រណាំងម៉ូតូមួយ, កីឡាករបីនាក់ចេញដំណើរក្នុងពេលតែមួយ។ ក្នុង១ម៉ោងៗ, អ្នកទី២ ជិះយឺតជាងអ្នកទី១ចំងាយ $15km$ ហើយជិះលឿនជាងអ្នកទី៣ ចំងាយ $3mk$ បានជាអ្នកទី២ទៅដល់ទីយឺតជាងអ្នកទី១ $12mn$ ហើយលឿនជាអ្នកទី៣ បាន $3mn$ ។ គណនាល្បឿនរបស់អ្នកប្រណាំងទាំងបីនាក់។

VI (២០ពិន្ទុ): ក្នុងរូបខាងក្រោម គឺជាឆកោណ $ABCDEF$ ដែលបង្កើតចេញពីត្រីកោណកែងចំនួនប្រាំគឺ $ABO, BCO, CDO, DEO, EFO$ និងត្រីកោណ $AOF$ , ដែល $O$ ជាចំនុចប្រសព្វរបស់បន្ទាត់ $BF$ និង $AE$ ។




គេឲ្យ $OA=8cm$, គណនាក្រឡាផ្ទៃរបស់ $\Delta AOF$ គិតជា $cm^2$

## ចំលើយ

I. 1. រកតម្លៃរបស់ $x^5+y^5$ :

យើងមាន: $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=(x^5+y^5)+(xy)^2(x+y)$

នាំឲ្យ $(x^5+y^5)=\frac{13}{4}(x+y)(x^2+y^2-xy)-\frac{5}{2}(xy)^2=\frac{65}{8}\left(\frac{13}{4}-xy\right)-\frac{5}{2}(xy)^2$

ម្យ៉ាងទៀត $xy=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-(x^2+y^2)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{25}{4}-\frac{13}{4}\right)=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ: $x^5+y^5=\frac{65}{8}\left(\frac{13}{4}-\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{2}.\frac{9}{4}=\frac{455-180}{32}=\frac{275}{32}$

2. គណនាតម្លៃរបស់ $xyz$ និង $x^4+y^4+z^4$ :

យើងមាន: $(x+y+z)^2=(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)$

យើងបាន: $xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right]=\frac{1}{2}[6^2-26]=5$

ដោយ $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)[(x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)]$

សមមូលនឹង $90-3xyz=6[26-5]=126$

ដូចនេះ: $xyz=\frac{1}{3}(90-126)=-12$

ម្យ៉ាងទៀត, យើងមានៈ

$$x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$
$$=26^2-2[(xy+yz+zx)^2-2(xy^2z+yz^2x+x^2yz)]$$
$$=26^2-2[5^2-2xyz(x+y+z)]$$
$$=26^2-2(25+24.6)=676-338=338$$

II. 1. គណនាតម្លៃរបស់កន្សោម $A$ :

តាមបំរាប់: $a+b+c=0$ , យើងបានៈ

$b+c=-a, a+c=-b, a+b=-c$ , ជំនួសចូលកន្សោម $x$ យើងបានៈ

$$x=\frac{|a|}{b+c}+\frac{|b|}{a+c}-\frac{|c|}{a+b}=\frac{|a|}{-a}+\frac{|b|}{-b}+\frac{|c|}{c}=-1$$

ដូចនេះ $A=x^{2014}-2014x+2014=-1+2014+2014=4027$

2. រកតម្លៃតូចបំផុតរបស់កន្សោម $y$:

$$y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$$

* ពេល $x\le a$: $y=(a-x)+(b-x)+(c-x)\ge(b-a)+(c-a)$

* ពេល $a<x\le b$: $y=(x-a)+(b-x)+(c-x)=(b-a)+(c-x)$

$$\ge(b-a)+(c-b)=c-a$$

* ពេល $b<x\le c$: $y=(x-a)+(x-b)+(c-x)=(x-a)+(c-b)$

$$>(b-a)+(c-b)=c-a$$

* ពេល $c<x$: $y=(x-a)+(x-b)+(x-c)>(b-a)+(c-b)+(x-c)>c-a$

ដូចនេះ, $y_{\min}=c-a$ ហើយ $y$ ទទួលបានតម្លៃនេះពេល $x=b$

III. 1. ដោះស្រាយសមីការៈ

លើក 3 មកអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ, យើងបានៈ

$$\left(\frac{x-a-b}{c}-1\right)+\left(\frac{x-b-c}{a}-1\right)+\left(\frac{x-c-a}{b}-1\right)=0$$

$$\frac{x-a-b-c}{c}+\frac{x-a-b-c}{a}+\frac{x-a-b-c}{b}=0$$

$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0$$

ដោយ $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>0$ នាំឲ្យ $x-a-b-c=0$ រឺ $x=a+b+c$

2. រកតម្លៃរបស់កន្សោម $(4a+3b)^{2014}$ :

យើងសរសេរសមីការដែលឲ្យក្រោមរាងៈ $(a-3)x=-(4+b)$

ពេលនោះ សមីការមានឫសច្រើនជាង១ សមមូលនឹង:

$a-3=0$ និង $4+b=0$

នាំឲ្យ $a=3, b=-4$

ដូចនេះ $(4a+3b)^{2014}=0^{2014}=0$

IV. ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព:

តាង $a=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3}}}}$ (មាន 2014 រ៉ាឌីកាល់), ទាញបាន:

$a^2=3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3}}}}$ (មាន 2013 រ៉ាឌីកាល់),

នាំឲ្យ $a^3-3=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3}}}}$ , ដូចនោះ យើងបាន:

$$\frac{3-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3}}}}}{6-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3}}}}}=\frac{3-a}{6-(a^2-3)}=\frac{3-a}{9-a^2}=\frac{3-a}{(3-a)(3+a)}=\frac{1}{3+a}$$

ដោយ $a+3>4$, នាំឲ្យ $\frac{1}{3+a}<\frac{1}{4}$ ទាញបាន $\frac{3-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3}}}}}{6-\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3}}}}}<\frac{1}{4}$

V. * តាង $x(km/h)$ ជាល្បឿនរបស់អ្នកទី២

$y(km)$ ជាចំងាយផ្លូវក្នុងការប្រណាំង។ លក្ខខណ្ឌ: $x\geq 3, y>0$

* យើងបាន $x+15(km/h)$ ជាល្បឿនអ្នកទី១

$x-3(km/h)$ ជាល្បឿនអ្នកទី៣

$$12mn=\frac{1}{5}h; 3mn=\frac{1}{20}h$$

* តាមបំរាប់យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}\frac{y}{x}-\frac{y}{x+15}=\frac{1}{5}\\ \frac{y}{x-3}-\frac{y}{x}=\frac{1}{20}\end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}\frac{y}{x}-\frac{y}{x+15}=\frac{1}{5}\\ \frac{y}{x-3}-\frac{y}{x}=\frac{1}{20}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y(x+15)-5xy=(x+15)x\\ 20xy-20(x-3)y=x(x-3)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5xy+75y-5xy=x^2+15x\\ 20xy-20xy+60y=x^2-3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}75y=x^2+15x \quad (1)\\ 60y=x^2-3x \quad (2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x^2+15x}{75} \\ 60\left(\dfrac{x^2+15x}{75}\right)=x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x^2+15x}{75} \\ 4\left(x^2+15x\right)=5\left(x^2-3x\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x^2+15x}{75} \\ x^2-75x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=75 \\ y=90 \end{cases}$$

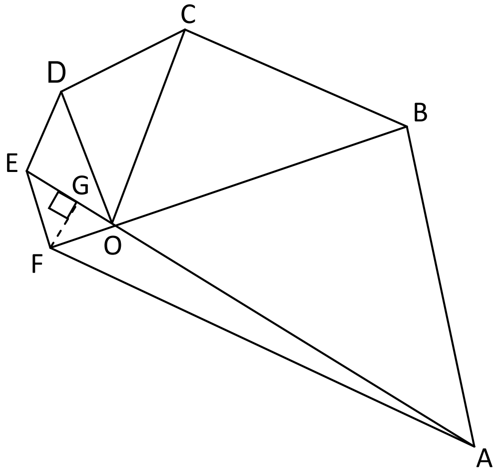
* ដូចនេះ ល្បឿនអ្នកទី១គឺ: $90km/h$ , ល្បឿនអ្នកទី២គឺ: $75km/h$ ,
ល្បឿនអ្នកទី៣គឺ: $72km/h$

VI. តាម $OC=\dfrac{1}{\sqrt{2}}OB=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 OA=\dfrac{1}{2}OA$

$$OE=\frac{1}{\sqrt{2}}OC=\frac{1}{4}OA=2(cm)$$

ដោយត្រីកោណ $\Delta EFO \sim \Delta ABO$

$$EF=OF=\frac{1}{4}OB=\frac{1}{4\sqrt{2}}OA$$




តាង $FG\perp AE$ ត្រង់ $G$ , នាំឲ្យ $FG=\dfrac{1}{\sqrt{2}}OF=\dfrac{1}{8}OA=1cm$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃនៃ $\Delta AOF$ គឺ $S_{\Delta AOF}=\dfrac{1}{2}AO.FG=4(cm^2)$

# វិញ្ញាសាទី១៩ រយៈពេល៣ម៉ោង

## ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងខេត្ត រាជធានី និងទូទាំងប្រទេស ឆ្នាំ២០១៤

I (15ពិន្ទុ): 1. គណនាតម្លៃរបស់កន្សោមៈ $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{4+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}$

2. គណនាតម្លៃរបស់កន្សោមៈ $B=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

II (15ពិន្ទុ): គេឲ្យ $a+b=c+d$ និង $a^3+b^3=c^3+d^3$ ។

បង្ហាញថា $a^{2013}+b^{2013}=c^{2013}+d^{2013}$ ។

III (15ពិន្ទុ): គេឲ្យ $a,b,c$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបីផ្សេងគ្នា។ បង្ហាញថា ក្នុងចំនោមបីចំនួនៈ $a^5b-ab^5$, $b^5c-bc^5$, $c^5a-ca^5$ ត្រូវមានចំនួនមួយចែកដាច់នឹង 8 ។

IV (20ពិន្ទុ): 1. គេឲ្យចំនួនពិតពីរ $x,y$ ដែល $x+y, x^2+y^2, x^4+y^4$ ជាបណ្ដាចំនួនគត់។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^3+y^3$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ។

2. រកចំនួនគត់ដែលមានលេខ9ខ្ទង់ $A=\overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$ ក្នុងនោះ $a_1\neq 0$ ហើយ $\overline{b_1b_2b_3}=2\overline{a_1a_2a_3}$, ដោយដឹងថា $A$ អាចសរសេរបានក្រោមរាងៈ $A=p_1^2.p_2^2.p_3^2.p_4^2$ ចំពោះ $p_1,p_2,p_3,p_4$ ជាចំនួនបឋម4ផ្សេងគ្នា។

V (15ពិន្ទុ): តាង $a,b,c$ ជាប្រវែងជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណមួយ។ តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}=\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}$ គឺត្រីកោណនោះ ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

VI (20ពិន្ទុ): គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ មាន $BC=a, AC=b, AB=c$, កំពស់ $AH=h_a$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថាៈ $h_a\le\dfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}$ ។

## ចំលើយ

I. 1. គណនាតម្លៃរបស់កន្សោម $A$:

យើងមានៈ $4+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}=2+2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}$

$=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+(\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8})$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+(\sqrt{2.2}+\sqrt{2.3}+\sqrt{2.4})$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})(1+\sqrt{2})$

យើងបាន $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{4+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})(1+\sqrt{2})}=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

ដូចនេះ $A=\sqrt{2}-1$

2. គណនាតម្លៃរបស់កន្សោម $B$:

យើងមាន: $A^3=(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})^3$

$=20+14\sqrt{2}+3A\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+20-14\sqrt{2}=40+6A$

$\Leftrightarrow\quad A^3-6A-40=0$

$\Leftrightarrow\quad A^3-4A^2+4A^2-16A+10A-40=0$

$\Leftrightarrow\quad A^2(A-4)+4A(A-4)+10(A-4)=0$

$\Leftrightarrow\quad (A-4)(A^2+4A+10)=0$

ដោយ $A^2+4A+10=(A+2)^2+6>0$ នាំឲ្យ $A=4$

II. យើងមាន: $a+b=c+d$ នាំឲ្យ $(a+b)^3=(c+d)^3$

សមមូលនឹង $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$

ដោយ $a^3+b^3=c^3+d^3$ នាំឲ្យ $3a^2b+3ab^2=3c^2d+3cd^2$ រឺ $3ab(a+b)=3cd(c+d)$

* បើ $a+b=c+d=0$ នាំឲ្យ $b=-a, d=-c$

ដូចនេះ $a^{2013}+b^{2013}=0=c^{2013}+d^{2013}$

* បើ $a+b=c+d\neq 0$ នាំឲ្យ $ab=cd$ ,

ដូចនេះ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(c+d)^2-4cd=(c-d)^2$

$i)$ ពេល $a-b=c-d$ , ហើយ $a+b=c+d$ នាំឲ្យ $2a=2c\Leftrightarrow a=c$ និង $b=d$

$ii)$ ពេល $a-b=-(c-d)$ , និង $a+b=c+d$ , នាំឲ្យ $2a=2d\Leftrightarrow a=d$

ហើយ $b=c$

សរុបមក ក្នុងករណីទាំងអស់ខាងលើ យើងសុទ្ធតែបាន: $a^{2013}+b^{2013}=c^{2013}+d^{2013}$ ។

III. យើងមាន: $a^5b-ab^5=ab(a^4-b^4)=ab(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

$b^5c-bc^5=bc(b^4-c^4)=bc(b-c)(b+c)(b^2+c^2)$

$c^5a-ca^5=ca(c^4-a^4)=ca(c-a)(c+a)(c^2+a^2)$

បើ $a,b$ មានលក្ខខណៈគូសេសដូចគ្នា, នាំឲ្យ $a-b, a+b$ និង $a^2+b^2$ សុទ្ធតែគូ

ដូចនេះ $a^5b-ab^5$ គឺចែកដាច់នឹង8

បើ $a$ និង $b$ មានលក្ខណៈគូសេសផ្សេងគ្នា, ពេលនោះ $c$ ត្រូវមានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា

នឹង $a$ រឺ $b$ , ឧបមាថា $a$ និង $c$ មានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា, នាំឲ្យ $c^5a-ca^5$ ចែកដាច់នឹង8

IV. 1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^3+y^3$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ:

យើងមាន: $(x+y)(x^2+y^2)=x^3+y^3+xy(x+y)\qquad(1)$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy\qquad(2)$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2\qquad(3)$

ដោយ $x+y, x^2+y^2$ ជាចំនួនគត់ នោះតាម $(2) \Rightarrow 2xy$ ជាចំនួនគត់

ដោយ $x^2+y^2, x^4+y^4$ ជាចំនួនគត់ នោះតាម $(3) \Rightarrow 2x^2y^2=\frac{1}{2}(2xy)^2$ ជាចំនួនគត់

$\Rightarrow (2xy)^2$ ចែកដាច់នឹង $2 \Rightarrow 2xy$ ចែកដាច់នឹង $2$ (ព្រោះ $2$ ជាចំនួនបឋម)

$\Rightarrow xy$ ជាចំនួនគត់។ ដូចនោះ តាម $(1)$ ទាញបាន $x^3+y^3$ ជាចំនួនគត់។

2. រកចំនួនគត់ $A$:

យើងមាន: $A=\overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}=\overline{a_1a_2a_3}.10^6+\overline{b_1b_2b_3}.10^3+\overline{a_1a_2a_3}$

$=\overline{a_1a_2a_3}.10^6+2.\overline{a_1a_2a_3}.10^3+\overline{a_1a_2a_3}=\overline{a_1a_2a_3}.(10^6+2+1)$

$=\overline{a_1a_2a_3}(1002001)=\overline{a_1a_2a_3}.7^2.11^2.13^2$

ដូចនេះ $\overline{a_1a_2a_3}$ ត្រូវស្មើនឹងការេនៃចំនួនបឋម $p$ ខុសពី $7, 11, 13$ ។ ដោយ $\overline{b_1b_2b_3}<1000$

នាំឲ្យ $\overline{a_1a_2a_3}<500 \Rightarrow 10<p<23$ ។ ដូចនេះ $p$ អាចស្មើនឹង $17$ រឺ $19$ ,

ដូចនោះ $\overline{a_1a_2a_3}=289$ រឺ $\overline{a_1a_2a_3}=361$ ទាញបាន $\overline{b_1b_2b_3}=578$ រឺ $\overline{b_1b_2b_3}=1156$ (ចោល)

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ: $A=289578289$

V. តាមបំរាប់ ទាញបាន: $\frac{1}{p-a}=\frac{b+c-a}{2}>0; \frac{1}{p-b}>0; \frac{1}{p-c}>0$

អនុវត្តន៍លទ្ធផលខាងលើ យើងបាន: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\geq\frac{4}{2p-(a+b)}=\frac{4}{c}$

ដូចគ្នាដែរ, ទាញបាន: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$

សញ្ញា "=" កើតមានលុះត្រាតែ:

$$\begin{cases}\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}=\frac{4}{c}\\ \frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{4}{a}\\ \frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}=\frac{4}{b}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p-a=p-b\\ p-b=p-c\\ p-c=p-a\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c$$

ដូចនេះ យើងបានបញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

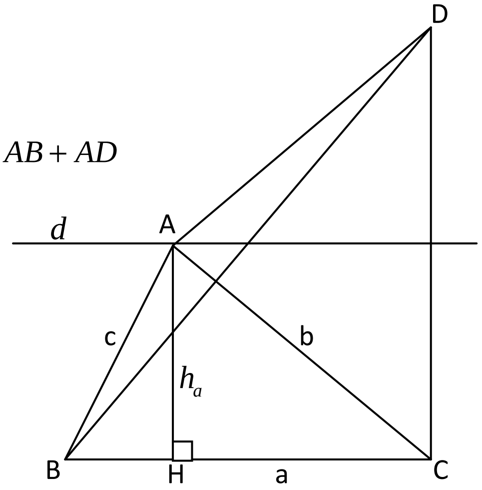
VI. តាង $d$ ជាបន្ទាត់កាត់តាម $A$ ហើយស្របនឹង $BC$ ។

$D$ ជាចំនុចឆ្លុះនឹងចំនុច $C$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $d$ ។

យើញថា $AD=AC=b, DC=2h_a; \widehat{DCB}=90^0$

$\Delta DCB$ មាន $\widehat{DCB}=90^0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ យើងបាន:

$BD^2=DC^2+BC^2=4h_a^2+a^2$




$\Rightarrow\ BD=\sqrt{4h_a^2+a^2}$

ពិនិត្យបីចំនុច $A, B, D$ យើងបាន $BD\ge AB+AD$

$\Rightarrow\ \sqrt{4h_a^2+a^2}\le b+c$

$\Rightarrow\ 4h_a^2+a^2\le (b+c)^2$

$\Rightarrow\ h_a^2\le \frac{1}{4}\left[(b+c)^2-a^2\right]$

$\Rightarrow\ h_a\le \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}$

## វិញ្ញាសាទី២០ រយៈពេល៣ម៉ោង

### ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងខេត្ត រាជធានី និងទូទាំងប្រទេស ឆ្នាំ២០១៤

I (15ពិន្ទុ): 1. ការរៃនៃចំនួនគត់គឺត្រូវបានហៅថាជា ការរៃប្រាកដ។ បើ $x$ ជាការរៃប្រាកដ, ចូររកចំនួនដែលជាការរៃប្រាកដបន្ទាប់ពីវា។

2. គេឲ្យ $-2$ ជាឫសរបស់សមីការ $\frac{1}{3}mx=5x+(-2)^2$, គណនាតម្លៃរបស់កន្សោមៈ $(m^2-11m+17)^{2014}$ ។

II (15ពិន្ទុ): 1. គណនាតម្លៃរបស់កន្សោមៈ $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}$

2. សម្រួលកន្សោមៈ $\dfrac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}$

III (15ពិន្ទុ): គេឲ្យ $\frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b};\ x^2+y^2=1$។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាៈ

1. $bx^2=ay^2$ 2. $\frac{x^{2000}}{a^{1000}}+\frac{y^{2000}}{b^{1000}}=\frac{2}{(a+b)^{1000}}$

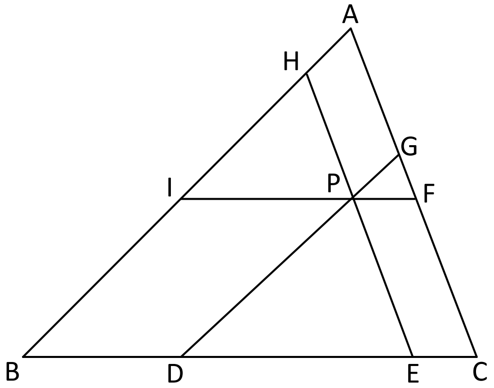
IV (20ពិន្ទុ): 1. គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរៈ $x^2+mx+n=0$ មានឫសពីរ $x_1, x_2$ និង $n\le m-1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថាៈ $x_1^2+x_2^2\ge 1$ ។

2. ឧបមាថា $a, b$ ជាពីរចំនួនផ្ទៀងផ្ទាត់ៈ $a^2+b^2+8a-14b+65=0$ ។ ចូររកតម្លៃរបស់ $a^2+ab+b^2$ ។

V (15ពិន្ទុ): រកគ្រប់ចំនួនគត់មានលេខពីរខ្ទង់ ដែលចំនួននីមួយៗចែកដាច់នឹងផលគុណនៃលេខតាមខ្ទង់នីមួយៗរបស់វា។

VI (20ពិន្ទុ): $P$ គឺជាចំនុចនៅខាងក្នុងត្រីកោណ $\Delta ABC$, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ ។ តាម $P$ គេគូស $IF \parallel BC$, $DG \parallel AB$ និង $EH \parallel CA$ តាមលំដាប់, ដែល $I, H$ ស្ថិតនៅលើ $AB$, $D, E$ ស្ថិតនៅលើ $BC$, $F, G$ ស្ថិតនៅលើ $CA$ ដូចបង្ហាញក្នុងរូប។

គេឲ្យ $DE=a'$, $FG=b'$, $HI=c'$, គណនាតម្លៃរបស់ $\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}$ ។




## ចំលើយ

I. 1. រកចំនួនដែលជាការេប្រាកដបន្ទាប់ពី $x$ :

ដោយ $x \ge 0$ , នោះ $x=(\sqrt{x})^2$

ទាញបាន ចំនួនដែលជាការេប្រាកដបន្ទាប់ពីវាគឺ $(\sqrt{x}+1)^2 = x+2\sqrt{x}+1$

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ $x+2\sqrt{x}+1$

2. គណនាតម្លៃរបស់កន្សោម:

យើងមាន: $-2$ ជាឫសរបស់សមីការ $\frac{1}{3}mx=5x+(-2)^2$

សមមូលនឹង $\frac{1}{3}m.(-2)=5.(-2)+(-2)^2$ ទាញបាន $-\frac{2}{3}m=-6 \Rightarrow m=9$

ដូចនេះ កន្សោម: $(m^2-11m+17)^{2014}=(9^2-11.9+17)^{2014}=(-1)^{2014}=1$

II. 1. គណនាតម្លៃរបស់កន្សោម $A$ :

យើងមាន: $\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k$ , យើងបាន:

$$A=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\frac{1}{9\times11}+\frac{1}{11\times13}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{13}\right)=\frac{6}{13}$$

ដូចនេះ $A=\dfrac{6}{13}$

2. សម្រួលកន្សោម: $\dfrac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}$

យើងតាង $E=\dfrac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}>0 \Rightarrow E=\sqrt{E^2}$

ពិនិត្យ $E^2=\dfrac{4}{\left(4+2\sqrt{5}\right)-\left(3\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{125}\right)}=\dfrac{4\left[\left(4+2\sqrt{5}\right)+\left(3\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{125}\right)\right]}{\left(4+2\sqrt{5}\right)^2-\left(3\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{125}\right)^2}$

$$E^2=\frac{4\left(4+2\sqrt{5}+3\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{125}\right)}{6+2\sqrt{5}}=\frac{2\left(4+2\sqrt{5}+3\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{125}\right)(3-5)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$$

$$E^2=1+2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}=\left(\sqrt[4]{5}+1\right)^2 \Rightarrow E=1+\sqrt[4]{5}$$

ដូចនេះ $\dfrac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}=1+\sqrt[4]{5}$

III. ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

1. $bx^2=ay^2$

យើងមាន: $\dfrac{x^4}{a}+\dfrac{y^4}{b}=\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{a+b} \Rightarrow (a+b)\left(bx^4+ay^4\right)=ab\left(x^2+y^2\right)^2$

$$\Rightarrow \left(ay^2-bx^2\right)=0 \Rightarrow bx^2=ay^2$$

ដូចនេះ $bx^2=ay^2$

2. $\dfrac{x^{2000}}{a^{1000}}+\dfrac{y^{2000}}{b^{1000}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1000}}$

តាម $ay^2=bx^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a}=\dfrac{y^2}{b}=\dfrac{x^2+y^2}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}$

ដូចនោះ $\dfrac{x^2}{a}=\dfrac{y^2}{b}=\dfrac{1}{a+b} \Rightarrow \dfrac{x^{2000}}{a^{1000}}=\dfrac{1}{(a+b)^{1000}}$

ហើយ $\dfrac{y^{2000}}{b^{1000}}=\dfrac{1}{(a+b)^{1000}} \Rightarrow \dfrac{x^{2000}}{a^{1000}}+\dfrac{y^{2000}}{b^{1000}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1000}}$

ដូចនេះ $\dfrac{x^{2000}}{a^{1000}}+\dfrac{y^{2000}}{b^{1000}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1000}}$

IV. 1. បង្ហាញថា $x_1^2+x_2^2\geq 1$:

អនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទវ្យែត: $\begin{cases} x_1+x_2=-m \\ x_1.x_2=n \end{cases}$

យើងបាន: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2=m^2-2n$

ដូចនោះ: $x_1^2+x_2^2\geq 1 \Leftrightarrow m^2-2n\geq 1$

ដោយ $n\leq m$ នោះយើងបាន:

$$2n\leq 2(m-1) \Rightarrow -2n\leq -2(m-1)$$

$$\Rightarrow m^2-2n\geq m^2-2(m-1)=m^2-2m+2=(m-1)^2+1\geq 1 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ: $x_1^2+x_2^2\geq 1$ ពិត

2. រកតម្លៃរបស់កន្សោម $a^2+ab+b^2$ :

យើងមាន: $a^2+b^2+8a-14b+65=0 \Leftrightarrow a^2+8a+16+b^2-14b+49=0$

$$\Leftrightarrow (a+4)^2+(b-7)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+4=0 \\ b-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=7 \end{cases}$$

ដូចនេះ: $a^2+ab+b^2=(-4)^2-4.7+7^2=37$

V. រកគ្រប់ចំនួនគត់ដែលមានលេខពីរខ្ទង់ផ្ទៀងផ្ទាត់សំនើរប្រធាន:

យើងតាង $\overline{xy}=10x+y$ ជាចំនួនដែលត្រូវរក, ពេលនោះ មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k$ មួយ

យ៉ាងណាឲ្យយើងបាន: $10x+y=kxy$ (តាមបំរាប់)

ទាញបាន $y=(ky-10x)$ មានន័យថា $x\,|\,y$ នាំឲ្យ $0<x\leq y$

* បើ $x=y$ នាំឲ្យ $11x=kx^2$ នាំឲ្យ $kx=11=11.1$

ទាញបាន $k=11,\ x=y=1$

* បើ $x<y$ នាំឲ្យ $x\leq 4$ (ហើយដោយ $y\geq 10$)

ពេល $x=4$ នាំឲ្យ $y=8$ , តែមិនមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k$ ណាដែលធ្វើឲ្យ $48=32k$

នោះយើងបាន $x\neq 4$

ពេល $x=3 \Rightarrow 10x=(kx-1)y \Leftrightarrow 30=(3k-1)y$

ដោយ $y\leq 9,\ 2\,|\,y$ ហើយ $y\,|\,30$ , ដូចនោះ: $y=6$

ឃើញថា $36=2.3.6$ , ដូចនោះ: $36$ គឺជាចំនួនទីពីរដែលត្រូវរក

ពេល $x=2 \Rightarrow 20=(2k-1)y$ , តែដោយ $y\leq 9,\ 2\,|\,y$ ហើយ $y\,|\,20$

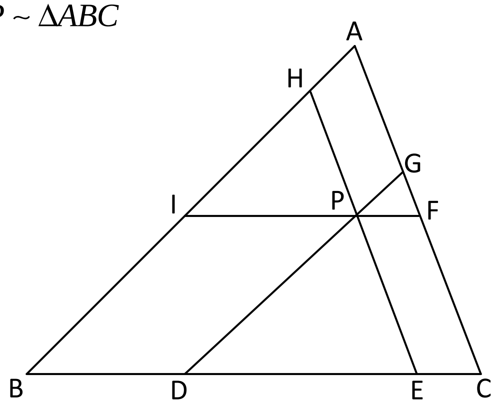
ដូចនេះ: $y=4$ , ឃើញថា $24=3.2.4$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ នោះវាជាចំនួនទីបីដែលត្រូវរក

ពេល $x=1 \Rightarrow 10=(k-1)y$ នាំឲ្យ $y=2$ រឺ $y=5$

ឃើញថា $12=6.1.2$ និង $15=3.1.5$ នាំឲ្យ $12$ និង $15$ ក៏ជាចំលើយដែរ។

សរុបមក ចំនួនដែលត្រូវរកគឺមាន: $11, 12, 15, 24, 36$ ។

VI. តាម $IF \parallel BC, HE \parallel AC$ យើងបាន $\Delta HIP \sim \Delta ABC$




នាំឲ្យ $\dfrac{c'}{c} = \dfrac{IP}{a} = \dfrac{BD}{a}$

ដោយ $\Delta GPS \sim \Delta ABC$

នាំឲ្យ $\dfrac{b'}{b} = \dfrac{PF}{a} = \dfrac{EC}{a}$

ដូចនេះ $\dfrac{a'}{a} + \dfrac{b'}{b} + \dfrac{c'}{c} = \dfrac{DE}{a} + \dfrac{BD}{a} + \dfrac{EC}{a}$

$= \dfrac{DE + BD + EC}{BC} = 1$

ជូនពរឲ្យប្អូនៗទទួលបានជោគជ័យក្នុងការប្រឡងសិស្សពូកែនៅឆ្នាំនេះ

**www.highschoolcam.blogspot.com**

## លំហាត់អនុវត្តន៍សំរាប់ថ្នាក់ទី៩ ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាឆ្នាំ ២០១២-២០១៣

1. គេឲ្យ $xy+yz+zx=2013$ ។ គណនាតំលៃរបស់កន្សោមខាងក្រោម:

$$P=x\sqrt{\frac{\left(2013+y^2\right)\left(2013+z^2\right)}{2013+x^2}}+y\sqrt{\frac{\left(2013+z^2\right)\left(2013+x^2\right)}{2013+y^2}}+z\sqrt{\frac{\left(2013+x^2\right)\left(2013+y^2\right)}{2013+z^2}}$$

### សម្រាយ

តាមបំរាប់: $2013=xy+yz+zx$

យើងបាន: $2013+x^2=xy+yz+zx+x^2=y(x+z)+x(z+x)=(x+y)(x+z)$

ដូចគ្នាដែរ: $2013+y^2=(y+z)(y+x)$ និង $2013+z^2=(z+x)(z+y)$

នាំឲ្យ $P=x\sqrt{\frac{(y+x)(y+z)(z+x)(z+y)}{(x+y)(x+z)}}+y\sqrt{\frac{(z+x)(z+y)(x+y)(x+z)}{(y+x)(y+z)}}+z\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)(y+x)(y+z)}{(z+x)(z+y)}}$

$$=x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)=xy+xz+yz+xy+xz+yz=2(xy+yz+zx)$$

$$=2\times 2013=4026$$

ដូចនេះ កន្សោម $\boxed{P=4026}$

2. ដាក់កន្សោម $Q=(2011y-2012z)^3+(2012z-2013x)^3+(2013x-2011y)^3$ ជាផលគុណកត្តា។

### សម្រាយ

តាង $2011y-2012z=a, 2012z-2013x=b, 2013x-2011y=c$ នាំឲ្យ $a+b+c=0$

យើងបាន $Q=(2011y-2012z)^3+(2012z-2013x)^3+(2013x-2011y)^3=a^3+b^3+c^3$

$$=\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right)+3abc$$

$$=\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\right)+3abc$$

$$=3abc=3(2011y-2012z)(2012z-2013x)(2013x-2011y)$$

ដូចនេះ: $\boxed{Q=3(2011y-2012z)(2012z-2013x)(2013x-2011y)}$.

3. គេឲ្យ $a+b=c+d$ និង $a^3+b^3=c^3+d^3$ ។ បង្ហាញថា $a^{2013}+b^{2013}=c^{2013}+d^{2013}$ ។

### សម្រាយ

តាមបំរាប់ $a+b=c+d$ នាំឲ្យ $(a+b)^3=(c+d)^3$

យើងបាន: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$

ដោយ $a^3+b^3=c^3+d^3$.

នាំឲ្យ $3a^2b+3ab^2=3c^d+3cd^2 \Rightarrow 3ab(a+b)=3cd(c+d)$

$+$ បើ $a+b=c+d=0$, ពេលនោះ $b=-a, d=-c$,

ទាញបាន $a^{2013}+b^{2013}=0=c^{2013}+d^{2013}$

$+$ បើ $a+b=c+d\neq 0$, ពេលនោះ $ab=cd$,

ទាញបាន $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(c+d)^2-4cd=(c-d)^2 \Rightarrow (a-b)=\pm(c-d)$

∘ពេល $a-b=c-d$ បូករួមនិងបំរាប់ $a+b=c+d$ , នាំឲ្យ $2a=2c$

នាំឲ្យ $a=c$ និង $b=d$ ដែរ។

∘ពេល $a-b=-(c-d)$ , បូករួមនិងបំរាប់ $a+b=c+d$ , នាំឲ្យ $2a=2d$

នាំឲ្យ $a=d$ , និង $b=c$ ដែរ។

សរុបមក ក្នុងគ្រប់ករណីយើងបាន $a^{2013}+b^{2013}=c^{2013}+d^{2013}$ ពិត។

4. គេឲ្យចំនួនវិជ្ជមាន $a,b,c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$។ ដោះស្រាយសមីការអញ្ញាត្តិ $x$ ខាងក្រោម:

$$\frac{2ax}{ab+a+1}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\frac{2cx}{ca+c+1}=1$$

## សម្រាយ

តាមបំរាប់: $abc=1$, នាំឲ្យសមីការអាចសរសេរឡើងវិញក្រោមរាង:

$$\frac{2abcx}{ab.bc+a.bc+bc}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\frac{2bcx}{ca.b+c.b+b}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{b+1+bc}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\frac{2bcx}{1+bc+b}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(1+b+bc)x}{bc+b+1}=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ សមីការមានឬស $\boxed{x=\frac{1}{2}}$

5. បើគេឲ្យ $a_{n+1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a_n}}$ (ចំពោះ $n=1,2,...,2013$) និង $a_1=1$, ចូរគណនាតំលៃរបស់កន្សោម:

$$P=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+...+a_{2012}a_{2013}$$ ។

## សម្រាយ

ចំពោះ $n=1,2,...,2008$ ,

$$a_{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{a_n}} \Rightarrow a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+1} \Rightarrow a_{n+1}a_n+a_{n+1}=a_n \Rightarrow a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$$

យើងបាន: $P=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+...+a_{2012}a_{2013}$

$$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+...+(a_{2012}-a_{2013})=a_1-a_{2013}$$

ម្យ៉ាងទៀត, តាមរូបមន្ត $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ យើងរកបាន: $a_2=\dfrac{1}{2}, a_3=\dfrac{1}{3}, a_4=\dfrac{1}{4},...$

សន្មតថា $a_{n-1}=\dfrac{1}{n-1}$ , យើងបាន $a_n=\dfrac{\frac{1}{n-1}}{\frac{1}{n-1}+1}=\dfrac{1}{n}$ , ដូចនេះ $a_{2013}=\dfrac{1}{2013}$ ,

ទាញបាន $P=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+...+a_{2012}a_{2013}=1-\frac{1}{2013}=\frac{2012}{2013}$

ដូចនេះ $\boxed{P=\frac{2012}{2013}}$

6. គេឲ្យ $P(x)=ax^{2013}+bx^{2011}+cx+2013$, ដែល $a,b,c$ ជាចំនួនថេរ។ ដោយដឹងថា $P(-2013)=2013$, ចូររកតំលៃរបស់ $P(2013)$ ។

**សម្រាយ**

តាមបំរាប់: $P(-2013)=a(-2013)^{2013}+b(-2013)^{2011}+c(-2013)+2013=2013$,

ទាញបាន: $-\left[a(2013)^{2013}+b(2013)^{2011}+c(2013)\right]=2013-2013=0$

នាំឲ្យ $P(2013)=a(2013)^{2013}+b(2013)^{2011}+c(2013)+2013=0+2013=2013$

ដូចនេះ តំលៃរបស់ $\boxed{P(2013)=2013}$

7. បើ $x^2+2x+5$ គឺជាកត្តាគុណមួយរបស់ $x^4+ax^2+b$, ចូរកតំលៃរបស់ $a+b$ ។

**សម្រាយ**

តាមបំរាប់ $x^2+2x+5$ ជាកត្តាគុណរបស់ $x^4+ax^2+b$, នោះយើងបាន:

$x^4+ax^2+b=(x^2+2x+5)(x^2+cx+d)$.

ដោយ $(x^2+2x+5)(x^2+cx+d)=x^4+(2+c)x^3+(2c+d+5)x^2+(5c+2d)x+5d$

យើងបាន: $x^4+ax^2+b=x^4+(2+c)x^3+(2c+d+5)x^2+(5c+2d)x+5d$

ដោយផ្ទឹមបណ្តាមេគុណនៅអង្គសងខាងរបស់សមភាពខាងលើ យើងបាន:

$2+c=0,\ 2c+d+5=a,\ 5c+2d=0,\ 5d=b$ .

នាំឲ្យ $c=-2,\ d=5,\ a=6,\ b=25$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a+b=31}$

8. គេឲ្យបួនចំនួនគត់ធម្មជាតិ $a,b,c,d$ និង $a>b>c>d$ ។ បង្ហាញថា ផលគុណនៃបណ្តាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែលជាផលដកនៃពីរចំនួន ក្នុងចំនោម បួនចំនួនខាងលើ គឺចែកដាច់នឹង $12$ ។

**សម្រាយ**

យើងត្រូវការស្រាយបញ្ជាក់ថា: $p=(a-b)(b-c)(c-d)(a-c)(a-d)(b-d)$ ចែកដាច់នឹង $12$ ។ សង្កេតឃើញថា ពេលចែកចំនួនមួយនឹង $3$ នោះសំនល់ដែលបានមក គឺជាចំនួនមួយក្នុងបីចំនួន $0,1,2$ ។ ពិនិត្យលក្ខណៈចែកដាច់ របស់ $p$ ជាមួយ $3$ និង $4$, ដាច់ដោយឡែកគ្នា។ តាមទ្រឹស្តីបទ *Dirichlet*, មានយ៉ាងតិចពីរចំនួនគត់ ក្នុងចំនោមបួនចំនួន $a,b,c,d$ ដែលមានសំនល់ស្មើគ្នាពេលចែកនឹង $3$ ។ ផលដករបស់ពីរចំនួននេះ ចែកដាច់នឹង $3$ ។ ដូចនោះ $p$ ចែកដាច់នឹង $3$ ។ បើមាន ពីរចំនួន ក្នុងចំនោមបួនចំនួនគត់ $a,b,c,d$ ដែលឲ្យ មានសំនល់ស្មើគ្នាពេលចែកនឹង $4$, នោះ $p$ ចែកដាច់នឹង $4$, តាមការបកស្រាយដូចខាងលើ។ បើមិនមាន, បណ្តាសំនល់របស់ $a,b,c,d$ ពេលចែកនឹង $4$ នឹងត្រូវផ្សេងគ្នា។ តែពេលនោះ,

ពីរចំនួន ក្នុងចំនោមបួនចំនួន មានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នា, ហើយពីរចំនួនដែលនៅសល់ ក៏មានលក្ខណៈគូសេសដូចគ្នាដែរ, នោះផលដករបស់ពួកវាសុទ្ធតែជាចំនួនគូ។ ផលគុណរបស់ ពីរចំនួនគូ គឺចែកដាច់នឹង $4$ ។ ដូចនោះ, $p$ ចែកដាច់នឹង $4$ ។

សរុបមក $p$ ចែកដាច់នឹង $3$ និង $4$ ហើយ $(3,4)=1$ នាំឲ្យ $p$ ចែកដាច់នឹង $12$ ពិតមែន។

9. សំរួលកន្សោម $P=\sqrt[3]{a+\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}$ ។

**សម្រាយ**

តាង $x=\sqrt{\frac{a-1}{3}}$ នាំឲ្យ $a=3x^2+1$ ហើយ $\frac{a+8}{3}=x^2+3$,

ទាញបាន កន្សោម $P$ អាចសរសេរឡើងវិញជា:

$$P=\sqrt[3]{3x^2+1+(x^2+3)x}+\sqrt[3]{3x^2+1-(x^2+3)x}=\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}+\sqrt[3]{1-3x+3x^2-x^3}$$

$$=\sqrt[3]{(x+1)^3}+\sqrt[3]{(1-x)^3}=(x+1)+(1-x)=2$$

ដូចនេះ កន្សោម $\boxed{P=2}$

សំគាល់៖ ចំពោះលំហាត់នេះ គេក៏អាចប្តូរទៅជា ឲ្យស្រាយថា កន្សោម $P$ មិនអាស្រ័យនឹង $a$ ដែរ ហើយវិធីស្រាយ ក៏ធ្វើដូចខាងលើដែរ។

10. គណនាតំលៃរបស់កន្សោម: $P=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{2013\sqrt{2012}+2012\sqrt{2013}}$

**សម្រាយ**

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n$, យើងមាន:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+n\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

ឲ្យតំលៃ $n=1,2,\ldots,2012$, យើងបាន:

$$P=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{2012}}-\frac{1}{\sqrt{2013}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2013}}=\frac{2013-\sqrt{2013}}{2013}$$

ដូចនេះ $\boxed{P=\frac{2013-\sqrt{2013}}{2013}}$.

11. គេឲ្យ $m$ ជាចំនួនពិតមិនតូចជាង $-1$, យ៉ាងណាឲ្យសមីការមានអញ្ញត្តិ $x$ ៖

$x^2+2(m-2)x+m^2-3m+3=0$ មានឬសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា $x_1$ និង $x_2$ ។

$(i)$ បើ $x_1^2+x_2^2=6$, រកតំលៃរបស់ $m$ ។

$(ii)$ រកតំលៃអតិបរមារបស់ $P=\frac{mx_1^2}{1-x_1}+\frac{mx_2^2}{1-x_2}$ ។

## សម្រាយ

សមីការមានឬសពីរ ជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា មានន័យថា $\Delta > 0$, យើងបាន:

$$\Delta = 4(m-2)^2 - 4(m^2 - 3m + 3) = -4m + 4 > 0 \ .$$

តាមបំរាប់ $m \geq -1$ នាំឲ្យ $-1 \leq m < 1$

$(i)$ តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត, $x_1 + x_2 = -2(m-2)$, $x_1 x_2 = m^2 - 3m + 3$, នាំឲ្យ:

$$6 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \ .$$

$$= 4(m-2)^2 - 2(m^2 - 3m + 3) = 2m^2 - 10m + 10 \ .$$

នាំឲ្យ $m^2 - 5m + 2 = 0$, ដោះស្រាយសមីការនេះ យើងបាន: $m = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ ។

ដោយ $-1 \leq m < 1$, យើងបាន $m = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{m = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}}$

$(ii)$ $P = \dfrac{mx_1^2}{1 - x_1} + \dfrac{mx_2^2}{1 - x_2} = \dfrac{m\left[x_1^2(1 - x_2) + x_2^2(1 - x_1)\right]}{(1 - x_1)(1 - x_2)} = \dfrac{m\left[x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2(x_1 + x_2)\right]}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1}$

$$= \frac{m\left[(2m^2 - 10m + 10) + 2(m^2 - 3m + 3)(m - 2)\right]}{m^2 - 3m + 3 + 2(m - 2) + 1}$$

$$= \frac{m(2m^3 - 8m^2 + 8m - 2)}{m^2 - m} = 2(m^2 - 3m + 1)$$

$$= 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} \leq 2\left(-1 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} = 10$$ ព្រោះ $-1 \leq m < 1$

ដូចនេះ តំលៃអតិបរមារបស់ $\boxed{P = 10}$

12. ពិសី ជាអ្នកជ្រើសយក បីចំនួនពិតមិនសូន្យ ហើយ ប៉ូវ៉ាជាអ្នកដែលយកចំនួនទាំងបីនោះ មករៀបធ្វើជាមេគុណរបស់សមីការដឺក្រេទីពីរ: $\square x^2 + \square x + \square = 0$ ។

ពិសី ជាអ្នកឈ្នះការភ្នាល់ បើនិងមានតែបើ (លុះត្រាតែ) លទ្ធផលរបស់សមីការ មានឬសពីរជាចំនួនសនិទានផ្សេងគ្នា។ តើនរណា ដែលមានយុទ្ធសាស្រ្តក្នុងការឈ្នះ?

## សម្រាយ

ពិសី ជាអ្នកដែលមានយុទ្ធសាស្រ្តក្នុងការយកឈ្នះ។ សំនុំ នៃបីចំនួនសនិទាន មិនសូន្យ $a, b,$ និង $c$, ដែល $a + b + c = 0$, នឹងបង្កើតបានជាល្បិចក្នុងការយកឈ្នះនេះ។ តាង $A, B,$ និង $C$ ជាការរៀបណាក៏បាននៃ $a, b,$ និង $c$ ហើយ តាង $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ ។

យើងបាន $f(1) = A + B + C = a + b + c = 0$, ដែលមានន័យថា $1$ គឺជាឬសមួយរបស់សមីការ។

ដោយផលគុណនៃឬសទាំងពីរស្មើនឹង $\dfrac{C}{A}$, នាំឲ្យឬសមួយទៀតគឺ $\dfrac{C}{A}$, យើងវា គឺខុសពី $1$។

ដូចនេះ ឃើញថា ពិសីជាអ្នកដែលអាចយកឈ្នះបាន។

13. គេឲ្យកន្សោម

$$A=\left(\sqrt{2011}+\sqrt{2012}+\sqrt{2013}\right)\left(\sqrt{2011}+\sqrt{2012}-\sqrt{2013}\right)\left(\sqrt{2011}-\sqrt{2012}+\sqrt{2013}\right)\left(\sqrt{2011}-\sqrt{2012}-\sqrt{2013}\right)$$

គណនាកន្សោម $B=A+4.2012.2011$ ។

**សម្រាយ**

យើងមាន:

$$A=\left(\sqrt{2011}+\sqrt{2012}+\sqrt{2013}\right)\left(\sqrt{2011}+\sqrt{2012}-\sqrt{2013}\right)\left(\sqrt{2011}-\sqrt{2012}+\sqrt{2013}\right)\left(\sqrt{2011}-\sqrt{2012}-\sqrt{2013}\right)$$

$$=\left[\left(\sqrt{2011}+\sqrt{2012}\right)^2-\left(\sqrt{2013}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{2011}-\sqrt{2012}\right)^2-\left(\sqrt{2013}\right)^2\right]$$

$$=\left(2010+2\sqrt{2011.2012}\right)\left(2010-2\sqrt{2011.2012}\right)=2010^2-4.2011.2012$$

ទាញបាន: $B=A+4.2012.2011=2010^2-4.2012.2011+4.2012.2011=2010^2$

ដូចនេះ កន្សោម $\boxed{B=2010^2}$

14. គេឲ្យ $x=\dfrac{\sqrt{2013}-\sqrt{2012}}{\sqrt{2011}-\sqrt{2010}}$, $y=\dfrac{\sqrt{2013}-\sqrt{2012}}{\sqrt{2012}-\sqrt{2011}}$, $z=\dfrac{\sqrt{2011}-\sqrt{2010}}{\sqrt{2013}-\sqrt{2012}}$,

ចូររៀប $x, y, z$ តាមលំដាប់កើន។

**សម្រាយ**

យើងតាង: $c=2011$, យើងបាន:

$$x=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}=\frac{\left[\left(\sqrt{c+2}\right)^2-\left(\sqrt{c+1}\right)^2\right]\left(\sqrt{c}+\sqrt{c-1}\right)}{\left(\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}\right)\left[\left(\sqrt{c}\right)^2-\left(\sqrt{c-1}\right)^2\right]}=\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}$$

$$y=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}=\frac{\left[\left(\sqrt{c+2}\right)^2-\left(\sqrt{c+1}\right)^2\right]\left(\sqrt{c+1}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}\right)\left[\left(\sqrt{c+1}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2\right]}=\frac{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}$$

$$z=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}=\frac{\left[\left(\sqrt{c}\right)^2-\left(\sqrt{c-1}\right)^2\right]\left(\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}\right)}{\left(\sqrt{c}+\sqrt{c-1}\right)\left[\left(\sqrt{c+2}\right)^2-\left(\sqrt{c+1}\right)^2\right]}=\frac{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}$$

ដោយ $c=2011>0$, នាំឲ្យ $\sqrt{c}+\sqrt{c-1}<\sqrt{c+1}+\sqrt{c}<\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}$,

ទាញបាន $x<y<z$

ដូចនេះ លំដាប់កើនដែលត្រូវរៀបគឺ $\boxed{x<y<z}$

15. (សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៩ ទូទាំងខេត្ត Vinh Phuc, VN-2011-2012)

គេឲ្យ $f(x)=\dfrac{x^3}{1-3x+3x^2}$ ។ ចូរកគណនាតំលៃរបស់កន្សោមខាងក្រោម:

$$f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2}{2012}\right)+...+f\left(\frac{2010}{2012}\right)+f\left(\frac{2011}{2012}\right)$$

**សម្រាយ**

សង្កេត, បើ $x+y=1$ នោះ $f(x)+f(y)=1$

ពិតជាដូចនេះ, យើងមាន $f(x)=\frac{x^3}{x^3+(1-x)^3}\Rightarrow f(y)=f(1-x)=\frac{(1-x)^3}{x^3+(1-x)^3}$

ទាញបាន $f(x)+f(y)=f(x)+f(1-x)=\frac{x^3}{x^3+(1-x)^3}+\frac{(1-x)^3}{x^3+(1-x)^3}=1$

ដូចនេះ, ការសង្កេតខាងលើពិត, ហើយនាំឲ្យ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

តាមការសង្កេតខាងលើ យើងបាន:

$$A=\left(f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2011}{2012}\right)\right)+\left(f\left(\frac{2}{2012}\right)+f\left(\frac{2010}{2012}\right)\right)+...+\left(f\left(\frac{1005}{2012}\right)+f\left(\frac{1007}{2012}\right)\right)+f\left(\frac{1006}{2012}\right)$$

$$=1005+f\left(\frac{1}{2}\right)=1005+\frac{1}{2}=\frac{2011}{2}$$

ដូចនេះ កន្សោម $\boxed{A=\frac{2011}{2}}$

16. (សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៩ ទូទាំងខេត្ត Vinh Phuc, VN:2011-2012)

គេឲ្យកន្សោម $P=\frac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\frac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$ ។ រកគ្រប់តំលៃរបស់ $x$ ដើម្បីឲ្យតំលៃរបស់កន្សោម $P$ ជាចំនួនគត់មួយ។

**សម្រាយ**

លក្ខខណ្ឌ: $x>0, x\neq 1$ ។ ពេលនោះ,

សំរួលកន្សោមយើងបាន: $P=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}$

យើងបាន: $Px+(P-1)\sqrt{x}P-2=0$, យើងចាត់ទុកថានេះ គឺជាសមីការដឺក្រេទីពីរអញ្ញត្តិ $\sqrt{x}$ ។

បើ $P=0\Rightarrow-\sqrt{x}-2=0\Rightarrow\sqrt{x}=-2$ មិនពិត, ទាញបាន $P\neq 0$ ។

នោះដើម្បីឲ្យ មាន $x$ គឺសមីការខាងលើត្រូវមាន $\Delta=(P-1)^2-4P(P-2)\geq 0$

$$\Leftrightarrow -3P^2+6P+1\geq 0\Leftrightarrow P^2-2P+1\leq\frac{4}{3}\Leftrightarrow(P-1)^2\leq\frac{4}{3}$$

ដោយ $P$ ជាចំនួនគត់នាំឲ្យ $(P-1)^2$ ស្មើ 0 រឺ 1

+ បើ $(P-1)^2=0\Leftrightarrow P=1\Leftrightarrow x=1$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់។

+ បើ $(P-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}P=2\\P=0\end{array}\right.\Rightarrow P=2\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់។

ដូចនេះ មិនមានតំលៃរបស់ $x$ ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រធានទេ។

17. គេឲ្យ $a$ និង $b$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា, និងសមីការដឺក្រេទីពីរ ពីរដូចខាងក្រោម:

$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$ និង $(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$, មានឫសមួយរួមគ្នា។

រកតំលៃរបស់កន្សោម: $M=\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$ ។

**សម្រាយ**

តាមបំរាប់ យើងបាន $a>1$ និង $b>1$ និង $a\neq b$ ។ តាង $x_0$ ជាឫសរួមគ្នារបស់សមីការទាំងពីរនោះ,

យើងបាន: $(a-1)x_0^2-(a^2+2)x_0+(a^2+2a)=0,\ (b-1)x_0^2-(b^2+2)x_0+(b^2+2b)=0$

ចំណាំថា $x_0\neq 1$ ។ ព្រោះថា, បើ $x_0=1$, នោះសមីការទាំងពីរខាងលើក្លាយទៅជា $a=1=b$ ។

បន្ទាប់ពីបំបាត់ចោលតួរបស់ $x_0^2$ និងសំរួលទៅ, យើងបាន: $(a-b)(ab-a-b-2)(x_0-1)=0$ ។

ដោយ $a-b\neq 0$ និង $x_0\neq 1$, នាំឲ្យ $ab-a-b-2=0$ ទាញបាន $ab=a+b+2$ ។

$(i)$ ពេល $a>b>1$, នោះ $b=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{2}{a}<3$, ដូចនេះ $b=2, a=\dfrac{4}{b-1}=4$ ។

$(ii)$ ពេល $b>a>1$, នោះតាមលក្ខខណៈឆ្លុះគ្នា, $a=2, b=4$ ។

ដូចនេះ, ក្នុងករណីនីមួយៗខាងលើ, យើងបាន:

$$M=\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=(a^b+b^a).\frac{a^b b^a}{a^b+b^a}=a^b b^a=256.$$

18. សំរួលកន្សោម: $\sqrt{9+2(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{7})}$ ។

**សម្រាយ**

យើងឃើញថា $9+2(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{7})=11+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{15}$, ដែលមេគុណរបស់តួ $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{15}$ គឺសុទ្ធតែស្មើនឹង $2$, វានាំឲ្យយើងអាចប្រើប្រាស់វិធីកំណត់មេគុណ, ឧបមាថា:

$$\sqrt{9+2(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{7})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

លើកជាការេទៅលើអង្គទាំងពីរ យើងបាន:

$$11+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{15}=a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}.$$

ដោយផ្ទឹមមេគុណនៃតួត្រូវគ្នា, យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ:

$$a+b+c=11\ (1),\ ab=3\ (2),\ ac=5\ \ (3),\ bc=15\ \ (4).$$

យក $(2)\times(3)\times(4)\Rightarrow(abc)^2=15^2$ នាំឲ្យ $abc=15$, ដូចនេះ $a=1$ ជំនួសចូល $(2),(3)$:

យើងបាន $b=3, c=5$ ។

ដូចនេះ, $\boxed{\sqrt{9+2(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{7})}=\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ .

19. រកតំលៃរបស់ $P=\dfrac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$, ចំពោះ $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ ។

**សម្រាយ**

យើងមាន: $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}=4-\sqrt{3}$

នាំឲ្យ $4-x=\sqrt{3}\Rightarrow(4-x)^2=3\Rightarrow x^2-8x+13=0$

ដោយធ្វើការចែកពហុធារវាងភាគយកនិង $(x^2-8x+13)$ (សូមចែកដោយខ្លួនឯង ^_^) យើងបាន៖

$$M=x^4-6x^3-2x^2+18x+23=(x^2-8x+13)(x^2+2x+1)+10=10\ .$$

$$N=x^2-8x+15=x^2-8x+13=0+2=2\ .$$

ទាញបាន $P=\dfrac{10}{2}=2$

ដូចនេះ កន្សោម $\boxed{P=2}$ .

20. (ប្រឡងសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសវៀតណាមឆ្នាំ ១៩៩៦-១៩៩៧)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (អញ្ញត្តិ $x,y,z$): $\begin{cases} x+y+z=6 & (1)\\ x^2+y^2+z^2=18 & (2)\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4 & (3)\end{cases}$

## សម្រាយ

តាម $(1)\Rightarrow 36=(x+y+z)^2\Rightarrow 36=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$$\Leftrightarrow 36=18+2(xy+yz+zx)\Leftrightarrow xy+yz+zx=9\quad(4)\,.$$

តាម $(3)\Rightarrow 16=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\Rightarrow x+y+z+2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=16$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=5\Leftrightarrow\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)^2=25$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx+2\left(\sqrt{xy^2z}+\sqrt{yz^2x}+\sqrt{zx^2y}\right)=25$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xyz}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)=8\Leftrightarrow xyz=4$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការដែលឲ្យសមមូលនឹង៖ $\begin{cases} x+y+z=6 & (1)\\ xy+yz+zx=9 & (4)\\ xyz=4 & (5)\end{cases}$

តាម $(5)\Rightarrow yz=\dfrac{4}{x}$ (ឃើញថា $x,y,z>0$)

តាម $(4)\Leftrightarrow xy+yz+zx+x^2=9+x^2\Leftrightarrow x(x+y+z)+yz=9+x^2$

$$\Leftrightarrow x.6+\frac{4}{x}=9+x^2\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x-4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=4\end{array}\right.$$

ជំនួសចូល យើងទាញបានប្រព័ន្ធសមីការមានបណ្តាចំលើយ៖ $(x;y;z)=(1;1;4),(1;4;1),(4;1;1)$ .

# លំហាត់អនុវត្តន៍សំរាប់ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៩ (បន្ត)

1. *a.* គេឲ្យ $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}},\ y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$, រកតំលៃរបស់កន្សោម $P=x^4+y^4+(x+y)^4$

   *b.* សំរួលកន្សោម $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ ដោយបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង។

## ចំលើយ

*a.* តាមបំរាប់:

$$x=\frac{1}{7-3}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2=\frac{1}{4}\left(10+2\sqrt{21}\right)=\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)$$

$$y=\frac{1}{7-3}\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2=\frac{1}{4}\left(10-2\sqrt{21}\right)=\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)$$

នាំឲ្យ $x+y=5$ និង $xy=1$

យើងមាន: $x^4+y^4+(x+y)^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2+(x+y)^4$

$$=\left[(x+y)^2-2(xy)\right]^2-2(xy)^2+(x+y)^4$$

$$=\left[5^2-2.1\right]^2-2.1^2+5^4=1152$$

ដូចនេះ កន្សោម $\boxed{P=1152}$

*b.* យើងមាន:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=1-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=1-\frac{2\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-5}=1-\frac{2\left(\sqrt{10}+\sqrt{15}-5\right)}{2\sqrt{2}.\sqrt{3}}$$

$$=1-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}-5}{\sqrt{6}}=1-\frac{\sqrt{60}+\sqrt{90}-5\sqrt{6}}{6}$$

$$=1-\frac{\sqrt{15}}{3}-\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{5\sqrt{6}}{6}\ .$$

---

2. *a.* គេឲ្យ $a>b>c>d>0$ និង $U=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}, V=\sqrt{ac}+\sqrt{bd}, W=\sqrt{ad}+\sqrt{bc}$, ចូរប្រើសញ្ញា "$<$" ដើម្បីបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $U,V,W$ ។

   *b.* សំរួលកន្សោមខាងក្រោម:

$$M=\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^{-1},\qquad N=\frac{2+3\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}$$

   *c.* គណនាកន្សោមខាងក្រោម:

$$P=\sqrt{\frac{2010\times2011\times2012\times2013+1}{4}},\qquad Q=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

$$T=\frac{1}{1-\sqrt[4]{5}}+\frac{1}{1+\sqrt[4]{5}}+\frac{2}{1+\sqrt{5}}\ .$$

## ចំណើយ

$a.$ តាមបំរាប់: $a>b>c>d>0$, យើងបាន $U,V,W>0$, នោះយើងអាចប្រៀបធៀប $U^2,V^2,W^2$ ។

យើងមាន:

$$U^2-V^2=\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)^2-\left(\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\right)^2=ab+cd-ac-bd$$
$$=(a-d)(b-c)>0.$$
$$V^2-W^2=\left(\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\right)^2-\left(\sqrt{ad}+\sqrt{bc}\right)^2=ac+bd-ad-bc$$
$$=(a-b)(c-d)>0.$$

នាំឲ្យ $U^2>V^2>W^2$ ទាញបាន $W<V<U$

ដូចនេះ: $\boxed{W<V<U}$

$b.$ សំរួលកន្សោមខាងក្រោម:

- $M=\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^{-1}$

តាង $\sqrt[3]{3}=x, \sqrt[3]{2}=y$ , ពេលនោះយើងបានកន្សោមដែលឲ្យក្លាយទៅជា:

$$M=x\left(\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)^{-1}=x\left(\frac{y^2-y+1}{x^2}\right)^{-1}=x.\frac{x^2}{y^2-y+1}$$
$$=\frac{x^3}{y^2-y+1}=\frac{x^3(y+1)}{y^3+1}=\frac{3(y+1)}{2+1}=y+1=\sqrt[3]{2}+1$$

ដូចនេះ: $\boxed{M=\sqrt[3]{2}+1}$

- $N=\dfrac{2+3\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}$

យើងបាន: $N=\dfrac{2+3\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$$=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{12-5}+\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=\frac{2}{7}\sqrt{3}-\frac{1}{7}\sqrt{5}+2-\sqrt{3}=2-\frac{5}{7}\sqrt{3}-\frac{1}{7}\sqrt{5}$$

ដូចនេះ: $\boxed{N=2-\frac{5}{7}\sqrt{3}-\frac{1}{7}\sqrt{5}}$

$c.$ គណនាកន្សោមខាងក្រោម:

- $P=\sqrt{\dfrac{2010\times2011\times2012\times2013+1}{4}}$

យើងសង្កេតឃើញថា កន្សោមដែលឲ្យមានរាងទូទៅគឺ $P=\sqrt{\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}{4}}$ ។

$$P=\frac{1}{2}\sqrt{\left(n^2+3n\right)\left(n^2+3n+2\right)+1}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(n^2+3n+1\right)^2-1+1}=\frac{n^2+3n+1}{2}$$

ចំពោះ $n=2010$, យើងបាន $P=\dfrac{2011^2+2010}{2}=2023065.5$

$\bullet\ Q=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

យើងមាន: $Q=\dfrac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{21}\right)+\left(\sqrt{35}+5\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}$

ទាញបាន: $\dfrac{1}{Q}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$

នាំឲ្យ $Q=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{4}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{Q=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}}$.

$\bullet\ T=\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{5}}+\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{5}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$

យើងបាន: $T=\left(\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{5}}+\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{5}}\right)+\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{2\times 2}{1-5}=-1$

ដូចនេះ $\boxed{T=-1}$.

---

3. *a.* រកតំលៃរបស់កន្សោម: $M=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2...}}}}-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}$ ។

*b.* រក $x$ ដោយដឹងថា: $x=\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13+...}}}}$ , ក្នុងនោះ សញ្ញា "..." មានន័យថា ជាការឆ្លាស់គ្នាទៅវិញទៅមកនៃការសរសេរសញ្ញារ៉ាឌីកាល់ដែលមានផ្ទុកលេខ 5 និងលេខ 13 ជាច្រើនលើកច្រើនសារ។

## ចំលើយ

*a.* តាង $x=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2...}}}}$ និង $y=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}$

ពេលនោះ $x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ: $x^2=2x \Leftrightarrow x(x-2)=0$

ដោយ $x>0$ នោះយើងបាន $x=2$

ដូចគ្នាដែរ, $y$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ: $y^2=2+y \Leftrightarrow (y-2)(y+1)=0$

ដោយ $y>0$, នោះយើងបាន $y=2$ ។

នាំឲ្យកន្សោម $M=x-y=2-2=0$

ដូចនេះ $\boxed{M=0}$ .

*b.* យើងសង្កេតឃើញថា $x>2$ ។

តាមបំរាប់ $x=\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13+...}}}}$

នាំឲ្យ $x^2=5+\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5+...}}}}\Rightarrow(x^2-5)^2=13+x$

$\Leftrightarrow x^4-10x^2-x+12=0\Leftrightarrow(x^4-9x^2)-(x^2-9)-(x-3)=0$.

$\Leftrightarrow(x-3)\left[(x+3)(x+1)(x-1)-1\right]=0$.

ដោយ $x>2\Rightarrow(x+3)(x+1)(x-1)-1>0\Rightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3$

ដូចនេះ $\boxed{x=3}$ .

---

4. *a.* គណនាតំលៃរបស់កន្សោម:

$$A=(3x^3+8x^2+2)^{2013}\text{ ចំពោះ }x=\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$$

*b.* គណនាតំលៃរបស់កន្សោម:

$$B=\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}\text{ ចំពោះ }x=\sqrt[3]{2013}\text{ ។}$$

**ចំលើយ**

*a.* គណនាតំលៃរបស់កន្សោម:

• $A=(3x^3+8x^2+2)^{2013}$ ចំពោះ $x=\dfrac{\left(\sqrt{5}+2\right)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$

យើងសំរួល: $x=\dfrac{\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3}.\left(\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{5}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}}=\dfrac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}=\dfrac{1}{3}$

ជំនួស $x$ ចូលក្នុងកន្សោមដែលត្រូវរកគឺ: $A=\left(3.\dfrac{1}{3^3}+8.\dfrac{1}{3^2}+2\right)^{2013}=3^{2013}$

ដូចនេះ $\boxed{A=3^{2013}}$.

*b.* គណនាតំលៃរបស់កន្សោម:

• $B=\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}$ , ចំពោះ $x=\sqrt[3]{2013}$

យើងពិនិត្យ: $B^3=x^3-3x+3B\sqrt[3]{\dfrac{4}{4}}\Leftrightarrow B^3=x^3-3x+3B$

$\Leftrightarrow B^3-3B-x^3+3x=0\Leftrightarrow(B-x)(B^2+Bx+x^2)-3(B-x)=0$

$\Leftrightarrow(B-x)(B^2+Bx+x^2-3)=0$.

$*$ ចំពោះ: $B-x=0\Leftrightarrow B=x=\sqrt[3]{2013}$

$*$ ចំពោះ: $B^2+Bx+x^2-3=0$ មាន $\Delta=3(4-x^2)<0$ ព្រោះ: $x=\sqrt[3]{2013}$

ដូចនោះ សមីការចុងក្រោយគ្មានឬស។

សរុបមកយើងបាន: $\boxed{B=\sqrt[3]{2013}}$.

---

5. $a.$ រកចំនួនគត់ដែលមានតំលៃក្បែរនឹង $\dfrac{1}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$ ។

$b.$ គេឲ្យ $y$ ជាចំនួនគត់ដែលមានតំលៃក្បែរនឹង $\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-1}+\sqrt[3]{3}}$ , រកតំលៃរបស់ $\sqrt{9+4\sqrt{y}}$ ។

ចំលើយ

$a.$ រកចំនួនគត់ដែលមានតំលៃក្បែរនឹង $\dfrac{1}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$ :

យើងមាន: $\dfrac{1}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)^2}}=\dfrac{1}{3-\sqrt{8}}=3+\sqrt{8}$ ,

ដោយ $3+\sqrt{4}<3+\sqrt{8}<3+\sqrt{9}\Leftrightarrow 5<3+\sqrt{8}<6$

ហើយ $5,5=3+2,5=3+\sqrt{6,25}<3+\sqrt{8}$ , នោះចំនួនគត់ដែលត្រូវរកគឺ 6 ។

ដូចនេះ ចំនួនគត់ដែលត្រូវរកគឺ 6 ។

$b.$ រកតំលៃរបស់ $\sqrt{9+4\sqrt{y}}$ :

ដោយ $2=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-1=\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right)$

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}+\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1+\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\left(\sqrt[3]{3}+1\right)^2}=\sqrt[3]{3}+1$$

ឃើញថា $2<\sqrt[3]{3}+1<3$, ហើយ $(1,5)^3>3\Rightarrow 2,5-(\sqrt[3]{3}+1)=1,5-\sqrt[3]{3}>\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=0$

ទាញបាន $2<\sqrt[3]{3}+1<2,5$ នាំឲ្យ $y=2$

តំលៃរបស់ $\sqrt{9+4\sqrt{y}}=\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{8}+1\right)^2}=2\sqrt{2}+1$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{9+4\sqrt{y}}=2\sqrt{2}+1}$ .

---

6. $a.$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}=1+\sqrt[4]{5}$

$b.$ គេឲ្យ $a, b, c$ ជាបីចំនួនផ្សេងគ្នា។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

ចំលើយ

$a.$ តាងអង្គខាងឆ្វេងដោយ $E=\dfrac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}>0\Rightarrow E=\sqrt{E^2}$

ពិនិត្យ: $E^2=\dfrac{4}{\left(4+2\sqrt{5}\right)-\left(3\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{125}\right)}=\dfrac{4\left[\left(4+2\sqrt{5}\right)+\left(3\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{125}\right)\right]}{\left(4+2\sqrt{5}\right)^2-\left(3\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{125}\right)^2}$

$$=\frac{4\left(4+2\sqrt{5}+3\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{125}\right)}{6+2\sqrt{5}}=\frac{2\left(4+2\sqrt{5}+3\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{125}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$$

$\Rightarrow E^2 = 1 + 2\sqrt[4]{5} + \sqrt{5} = \left(\sqrt[4]{5}+1\right)^2 \Rightarrow E = 1 + \sqrt[4]{5}$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}} = 1+\sqrt[4]{5}$.

$b.$ បំលែងអង្គខាងឆ្វេង:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a}$$

$$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)} = \frac{(b-a)-(b-c)}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b}$$

$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{(c-b)-(c-a)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ, យើងបាន:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$ ពិត

ដូចនេះ បញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

---

7. $a.$ គេឲ្យពហុធា $P(x) = x^4 + ax^2 + 1$ និង $Q(x) = x^3 + ax + 1$។ កំណត់ $a$ ដើម្បីឲ្យពហុធា $P(x)$ និង $Q(x)$ មានឫសរួមគ្នា។

$b.$ ចំពោះតំលៃណារបស់ $a$ និង $b$ ទើបពហុធា $x^3 + ax^2 + 2x + b$ ចែកដាច់នឹងពហុធា: $x^2 + x + 1$?

$c.$ រកសំណល់នៃប្រមាណវិធីចែកពហុធា $P(x) = 1 + x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ នឹងពហុធា $Q(x) = x^3 - x$.

ចំលើយ

$a.$ កំណត់ $a$:

$+$ លក្ខខណ្ឌចាំបាច់: ឧបមាថាឫសរួមគ្នារបស់ $P(x)$ និង $Q(x)$ គឺ $x = c$

យើងមាន $P(x) - xQ(x) = x - 1 \Rightarrow P(c) = cQ(c) = c - 1$

ដោយ $x = c$ ជាឫសរបស់ $P(x)$ និង $Q(x) \Rightarrow P(c) = Q(c) = 0$

យើងបាន: $c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1$

ពេល $c = 1 \Rightarrow P(1) = Q(1) = a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$

$+$ លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់:

ចំពោះ $a = -2$, យើងបាន $P(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ និង $Q(x) = x^3 - 2x + 1$ មានឫសរួមគ្នាគឺ $x = 1$

ដូចនេះ $\boxed{a = -2}$

$b.$ កំណត់តំលៃរបស់ $a$ និង $b$:

តាង $P(x) = x^3 + ax^2 + 2x + b$ និង $Q(x) = x^2 + x + 1$

ដោយធ្វើប្រមាណវិធីចែកពហុធា $P(x)$ និង $Q(x)$ យើងបានពហុធាសំនល់គឺ: $(2-a)x + b - a + 1$

តាមបំរាប់ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $Q(x)$ មានន័យថាសំនល់នៃប្រមាណវិធីចែក $P(x)$ និង $Q(x)$ ស្មើនឹងសូន្យ គឺ $(2-a)x + b - a + 1 = 0$

ទាញបាន $2 - a = 0$ និង $b - a + 1 = 0$ នាំឲ្យ $a = 2$ និង $b = 1$

ដូចនេះ $\boxed{a=2; b=1}$.

$c.$ យើងមាន:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^9-x)+(x^{25}-x)+(x^{49}-x)+(x^{81}-x)+5x+1 \\ &= x(x^8-1)+x(x^{24}-1)+x(x^{48}-1)+x(x^{80}-1)+5x+1 \\ &= x(x^2-1)R(x)+5x+1 \end{aligned}$$

$$Q(x)=x(x^2-1)$$

យើងបាន សំណល់នៃប្រមាណវិធីចែករវាង $P(x)$ និង $Q(x)$ គឺ $M(x)=5x+1$ ។

ដូចនេះ ពហុធាសំនល់ដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{M(x)=5x+1}$.

---

8. $a.$ គេឲ្យសមីការពីរ: $x^2+a_1x+b_1=0$ (1)

$x^2+a_2x+b_2=0$ (2)

ដោយដឹងថា $a_1a_2\geq 2(b_1+b_2)$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានយ៉ាងតិចសមីការមួយក្នុងចំនោមសមីការទាំងពីរដែលឲ្យ មានឬស។

$b.$ ឧបមាថា $a$ និង $b$ ជាពីរចំនួនផ្សេងគ្នា។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើសមីការ:

$x^2+ax+2b=0$ (1)

$x^2+bx+2a=0$ (2)

មានឬសរួមគ្នាមួយ នោះបណ្តាឬសផ្សេងទៀត របស់ (1) និង (2) ជាឬសរបស់សមីការ: $x^2+2x+ab=0$ ។

$c.$ គេឲ្យបណ្តាសមីការដឺក្រេទីពីរ: $ax^2+bx+c=0$ និង $px^2+qx+r=0$ មានឬសរួមគ្នាយ៉ាងតិចមួយ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា គេបានទំនាក់ទំនង: $(pc-ar)^2=(pb-aq)(cq-rb)$ ។

ចំលើយ

$a.$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានយ៉ាងតិចសមីការមួយក្នុងចំនោមសមីការទាំងពីរ មានឬស:

សមីការ (1) មាន: $\Delta_1=a_1^2-4b_1$

សមីការ (2) មាន: $\Delta_2=a_2^2-4b_2$

ពិនិត្យ: $\Delta_1+\Delta_2=a_1^2+a_2^2-4(b_1+b_2)\geq a_1^2+a_2^2-2a_1a_2=(a_1-a_2)^2$ ព្រោះ $a_1a_2\geq 2(b_1+b_2)$

$\Rightarrow \Delta_1+\Delta_2\geq 0$

$\Rightarrow$ មានយ៉ាងតិចកន្សោមមួយក្នុងចំនោមកន្សោម $\Delta_1$ រឺ $\Delta_2$ មិនអវិជ្ជមាន

$\Rightarrow$ មានយ៉ាងតិចសមីការមួយ ក្នុងចំនោមសមីការទាំងពីរមានឬស។

ដូចនេះ បញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

$b.$ ឧបមាថា (1) មានឬសពីរផ្សេងគ្នា $x_1\neq x_0 \Rightarrow x_0^2+ax_0+2b=0$

(2) មានឬសពីរផ្សេងគ្នា $x_2\neq x_0\Rightarrow x_0^2+bx_0+2a=0$

$\Rightarrow (a-b)x_0+2b-2a=0 \Leftrightarrow (a-b)x_0=2(a-b)$.

ដោយ $a\neq b\Rightarrow x_0=2$ ជំនួសចូល (1) យើងបាន: $4+2a+2b=0\Rightarrow a=-b-2$

ជំនួស $a$ ចូល (1), យើងបាន: $x^2-(b+2)x+2b=0 \Rightarrow (x-2)(x-b)=0$

$\Rightarrow x_0=2$ និង $x_1=b$

ជំនួស $b=-a-2$ ចូល $(2)$, ធ្វើដូចគ្នាដែរ, យើងបាន: $x_2=a$

$\Rightarrow\ x_1+x_2=a+b$ និង $x_1x_2=ab$

$\Rightarrow$ តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតច្រាស យើងបាន: $x_1$ និង $x_2$ ជាឫសទាំងពីររបស់សមីការ:

$x^2-(a+b)+x+ab=0$ (ដោយ $a+b=-2$) $\Rightarrow x^2+2x+ab=0$ ។

ដូចនេះ បញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

$c.$ ឧបមាថា $x_0$ ជាឫសរួមគ្នារបស់សមីការទាំងពីរ, យើងបាន:

$ax_0^2+bx_0+c=0 \qquad (1)$.

$px_0^2+qx_0+r=0 \qquad (2)$.

ដោយ $a,p\neq 0$ នោះគុណ $(1)$ នឹង $p$ ហើយគុណ $(2)$ នឹង $a$, យើងបាន:

$$\begin{cases} pax_0^2+pbx_0+pc=0 \\ pax_0^2+qax_0+ra=0 \end{cases} \Rightarrow\ (aq-pb)x_0+(ra-pc)=0$$

ដូចគ្នាដែរ, យើងបាន:

$$(aq-pb)x_0^2+(cq-rb)=0 \ \Rightarrow\ (aq-pb)^2x_0^2=(pc-ra)^2.$$

និង $(aq-pb)^2x_0^2=(rb-cq)(aq-pb)\ \Rightarrow\ (pc-ra)^2=(rb-cq)(aq-pb)$

$\Rightarrow (pc-ar)^2=(pb-aq)(cq-rb)$ ពិត

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

---

9. $a.$ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

$(A):\ (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$ $\qquad (B):\ (x^2+3x-4)(x^2+x-6)=24$

$b.$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម:

$(C):\ \begin{cases} xy+x+y=19 \\ x^2y+xy^2=84 \end{cases}$ $\qquad (D):\ \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \quad (1) \\ \frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}=4 \quad (2) \end{cases}$

$(E):\ \begin{cases} x^2+8y^2=12 \\ x^3+2xy^2+12y=0 \end{cases}$ $\qquad (F):\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x^4+y^4+z^4=xyz \end{cases}$

ចំលើយ

$a.$ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

• $(A):\ (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$.

សមីការអាចសរសេរជា: $[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]=3$

$\Leftrightarrow\ (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3$ .

តាង $t=x^2+5x+4$ យើងបានសមីការ: $t(t+2)=3\Leftrightarrow t^2+2t-3=0$

$\Leftrightarrow (t+3)(t-1)=0\ \Leftrightarrow\ t=-3$ រឺ $t=1$

$*$ ចំពោះ $t=-3$, យើងបាន: $x^2+5x+4=-3\Leftrightarrow x^2+5x+7=0 \qquad (I)$

$*$ ចំពោះ $t=1$, យើងបាន: $x^2+5x+4=1\ \Leftrightarrow\ x^2+5x+3=0 \qquad (II)$

ដោះស្រាយសមីការ $(I)$ និង $(II)$ (សូមដោះស្រាយខ្លួនឯង) ។

យើងបានសមីការ $(A)$ មានឫស: $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$ ។

ដូចនេះ ឫសរបស់សមីការ $\boxed{(A): x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}}$ ។

• $(B):\ (x^2+3x-4)(x^2+x-6)=24$ .

យើងបំលែង: $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$ .

$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ .

សមីការដែលឲ្យសមមូលនឹង: $[(x-1)(x+3)][(x-2)(x+4)]=24$

$\Leftrightarrow\quad (x^2+2x-3)(x^2+2x-8)=24$ .

តាង $t=x^2+2x \Rightarrow (t-3)(t-8)=24 \Leftrightarrow t^2-11t=0 \Leftrightarrow t=0$ រឺ $t=11$

សូមដោះស្រាយបន្តទៀត ដោយធ្វើលំនាំដូចខាងលើ។

*b.* ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម:

• $(C): \begin{cases} xy+x+y=19 \\ x^2y+xy^2=84 \end{cases}$

ប្រព័ន្ធសមីការខាងលើ អាចសរសេរឡើងវិញ: $\begin{cases} xy+(x+y)=19 \\ xy(x+y)=84 \end{cases}$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតច្រាស យើងបាន $xy$ និង $(x+y)$ ជាឫសទាំងពីររបស់សមីការ:

$t^2-19t+84=0 \Rightarrow t_1=7$ រឺ $t_2=12$ ។

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការពីរ: $\begin{cases} xy=7 \\ x+y=12 \end{cases}\ (I)$ រឺ $\begin{cases} xy=12 \\ x+y=7 \end{cases}\ (II)$ .

∗ចំពោះប្រព័ន្ធ $(I)$, តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតច្រាស យើងបាន $x, y$ ជាឫសទាំងពីររបស់សមីការ:

$u^2-12u+7=0$, សមីការនេះមាន $\Delta'=(-6)^2-1.7=29$

ទាញបានចំលើយរបស់សមីការគឺ: $u=6\pm\sqrt{29}$

ទាញបានចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការគឺ: $\begin{cases} x=6+\sqrt{29} \\ y=6-\sqrt{29} \end{cases}$ រឺ $\begin{cases} x=6-\sqrt{29} \\ y=6-\sqrt{29} \end{cases}$

∗ចំពោះប្រព័ន្ធ $(II)$, ដោះស្រាយដូចខាងលើដែរ យើងបានចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការគឺ:

$\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ រឺ $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

សរុបមក ប្រព័ន្ធសមីការដែលឲ្យមានចំលើយ:

$\boxed{(x;y)=(6+\sqrt{29};6-\sqrt{29}),(6-\sqrt{29};6+\sqrt{29}),(4;3),(3;4)}$ .

• $(D): \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2 \quad (1) \\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4 \quad (2) \end{cases}$

តាម (1) $\Rightarrow \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2=4$ ទាញបាន $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2=\dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}$ (ដោយការជំនួស (2) ចូល)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx}=\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{zx}+\frac{1}{z^2}\right)+\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{yz}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=0\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{-1}{z}\\ \frac{1}{y}=\frac{-1}{z}\end{cases} \Leftrightarrow x=y=-z$$

ជំនួសចូលសមីការ $(2)$, យើងបាន: $\frac{2}{z^2}-\frac{1}{z^2}=4 \Rightarrow z=\pm\frac{1}{2}$

$*$ចំពោះ $z=\frac{1}{2} \Rightarrow x=y=-\frac{1}{2}$, ចំនួសចូល $(1)$: $\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ (ចោល)

$*$ចំពោះ $z=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$, ជំនួសចូល $(1)$: $\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ ពិត

ដូចនេះ ចំលើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការគឺ $\boxed{(x;y;z)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)}$ ។

$\bullet (E):\ \begin{cases}x^2+8y^2=12\\ x^3+2xy^2+12y=0\end{cases}$

យើងសង្កេតឃើញថា បើប្រព័ន្ធមានចំលើយ $(x;y)$ នោះ $y\neq 0$ ព្រោះបើ $y=0$:

$$\Rightarrow \begin{cases}x^2=12\\ x^3=0\end{cases} \text{ (មិនសមហេតុផល)}$$

ពេល $y\neq 0$, ជំនួស $12=x^2+8y^2$ ចូលសមីការទីពីរ:

$$x^3+2xy^2+y\left(x^2+8y^2\right)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2y+2xy^2+8y^3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3+\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}\right)+8=0 \text{ (ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង } y\neq 0\text{)}$$

តាង $t=\frac{x}{y} \Rightarrow t^3+t^2+2t+8=0 \Leftrightarrow (t+2)\left(t^2-t+4\right)=0$

$$\Leftrightarrow t=-2 \text{ (ព្រោះ } t^2-t+4=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0\text{)}$$

$$\Rightarrow x=-2y.$$

ជំនួស $x=-2y$ ចូលសមីការទីមួយ, យើងបាន:

$$4y^2+8y^2=12 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=-1\end{array}\right.$$

ពេល $y=1 \Rightarrow x=-2$

ពេល $y=-1 \Rightarrow x=2$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចំលើយ $\boxed{(x;y)=(-2;1),(2;-1)}$ ។

$\bullet (F): \begin{cases} x+y+z=1 \\ x^4+y^4+z^4=xyz \end{cases}$

យើងមាន: $x^4+y^4 \ge 2x^2y^2,\ y^4+z^4 \ge 2y^2z^2,\ z^4+x^4 \ge 2z^2x^2$

$\Rightarrow\ x^4+y^4+z^4 \ge x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$.

ម្យ៉ាងទៀត: $x^2y^2+x^2z^2 \ge 2x^2yz$

$x^2y^2+y^2z^2 \ge 2xy^2z$

$y^2z^2+z^2x^2 \ge 2xyz^2$

$\Rightarrow\ 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \ge 2xyz(x+y+z)=2xyz$ (ព្រោះ $x+y+z=1$)

$\Rightarrow\ x^4+y^4+z^4 \ge x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \ge xyz$.

សញ្ញាសមភាពកើតមានលុះត្រាតែ $x=y=z$ ដោយ $x+y+z=1$

ទាញបាន $x=y=z=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចំលើយ $\boxed{x=y=z=\frac{1}{3}}$

---

10. *a.* ចំពោះតំលៃណារបស់ $x,y,z$, ទើបគេបានសមភាពខាងក្រោម:

$$4x^2+9y^2+16z^2-4x-6y-8z+3=0\ .$$

*b.* គេឲ្យ $x,y,z$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases} 2011(x-y)+2012(y-z)+2013(z-x)=0 \quad (1) \\ 2011^2(x-y)+2012^2(y-z)+2013^2(z-x)=2012 \quad (2) \end{cases}$$

រកតំលៃរបស់ $z-y$ ។

ចំលើយ

*a.* កំណត់តំលៃរបស់ $x,y,z$:

យើងមាន: $4x^2+9y^2+16z^2-4x-6y-8z+3=0$

$\Leftrightarrow\ \left(4x^2-4x+1\right)+\left(9y^2-6y+1\right)+\left(16z^2-8z+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\ (2x-1)^2+(3y-1)^2+(4z-1)^2=0 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} 2x-1=0 \\ 3y-1=0 \\ 4z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow\ \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=\frac{1}{4} \end{cases}$$

ដូចនេះ តំលៃដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{(x;y;z)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)}$

*b.* រកតំលៃរបស់ $z-y$:

យើងតាង $u=x-y, v=y-z, w=z-x$, ពេលនោះ $u,v,w$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម:

$$\begin{cases} u+v+w=0 \quad (1') \\ 2011u+2012v+2013z=0 \quad (2') \\ 2011^2u+2012^2v+2013^2z=2012 \quad (3') \end{cases}$$

ដោយយក $2012\times(1')-(2')$, យើងបាន: $u-w=0 \Rightarrow u=w$ ជំនួសចូល $(1')$

យើងបាន, $v=-2w$, ដោយជំនួសចូលក្នុង $(3')$,យើងបាន:

$$(2011^2-2.2012^2+2013^2)w=2012 \ .$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(2011^2-2012^2\right)+\left(2013^2-2012^2\right)\right]w=2012$$

$$\Leftrightarrow \left[(2011-2012)(2011+2012)+(2013-2012)(2013+2012)\right]w=2012$$

$$\Leftrightarrow \left[(2013+2012)-(2012+2011)\right]w=2012$$

$$\Leftrightarrow 2w=2012 \Rightarrow z-y=-v=2w=2012$$

ដូចនេះ $\boxed{z-y=2012}$ ។

*រង់ចាំអានលំហាត់នៅភាគទីបី....*

**វប្បធម៌រលត់ ជាតិរលាយ វប្បធម៌ពណ្ណរាយ ជាតិថ្កើងថ្កាន!!**
**សូមមានវប្បធម៌ចែករំលែកចំណេះដឹងនៅក្នុងខ្លួនអ្នក និងចូលរួមក្នុងការចែករំលែកចំណេះដឹងនោះ ដល់អ្នកដ៏ទៃ ដើម្បីសេចក្តីចំរើនរបស់ជាតិយើង...**

www.highschoolcam.blogspot.com

## លំហាត់អនុវត្តន៍សំរាប់ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៩ (បន្តភាគ៣)

**1.** គណនា $A$ ដោយឲ្យលទ្ធផលជាផលគុណនៃ 3កត្តា: $A=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}+4-\sqrt{15}}$

**ចំលើយ**

យើងមាន: $A=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}+4-\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}+4-\sqrt{5}.\sqrt{3}}$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}\left(2-\sqrt{3}\right)+2\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)}.\frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)}.\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)}=\left(2+\sqrt{3}\right).\left(2-\sqrt{5}\right).\left(1-\sqrt{2}\right)$$

ដូចនេះ កន្សោម $\boxed{A=\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}$ ។

---

2. សរសេរប្រភាគ $\dfrac{59}{70}$ ជាផលបូកនៃប្រភាគបី ដែលមានភាគបែងជាចំនួនបឋម។

**ចំលើយ**

យើងមាន: $70=2\times5\times7$ ហើយ $59=10+14+35=(2\times5)+(2\times7)+(5\times7)$

នាំឲ្យប្រភាគ: $\dfrac{59}{70}=\dfrac{(2\times5)+(2\times7)+(5\times7)}{2\times5\times7}=\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ: $\boxed{\dfrac{59}{70}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}}$ ។

---

3. ប្តីប្រពន្ធមួយគូបានសន្សំប្រាក់ដែលពួកគេរកបាននៅក្នុងកូនជ្រូកដីមួយ។ ដោយដឹងថា ប្តីរកបានក្នុងមួយថ្ងៃ 50000 រៀល ហើយប្រពន្ធរកបានក្នុងមួយថ្ងៃ 20000 រៀល។ មួយរយៈក្រោយមកប្តីប្រពន្ធទាំងពីរបានបោកកូនជ្រូកដីនោះមើល ពួកគេរាប់លុយឃើញ 320000 រៀល។ តើប្តីរកប្រាក់ប៉ុន្មានថ្ងៃ ហើយប្រពន្ធរកប្រាក់ប៉ុន្មានថ្ងៃ?

**ចំលើយ**

យើងតាង: $x$ និង $y$ រៀងគ្នា ជាចំនួនថ្ងៃនៃការរកប្រាក់របស់ប្តី និងប្រពន្ធ, ក្នុងនោះ $x>0, y>0$, ហើយ $x,y$ ជាចំនួនគត់។

តាមបំរាប់យើងបានសមីការ: $50000x+20000y=320000 \Leftrightarrow 5x+2y=32$

យើងបាន: $y=16-\dfrac{5}{2}x$

ដោយ $y>0 \Rightarrow 16-\dfrac{5}{2}x>0 \Rightarrow 0<x<\dfrac{32}{5}$ (ព្រោះ $x>0$ ដែរ)

ម្យ៉ាងទៀត $x$ ជាចំនួនគត់ យើងទាញបាន $x\in\{1,2,3,4,5\}$

ហើយដោយ $y=16-\dfrac{5}{2}x$ ជាចំនួនគត់នោះមានន័យថា $x$ ត្រូវចែកដាច់នឹង 2 នាំឲ្យ $x=2,4$

$*$ ចំពោះ $x=2 \Rightarrow y=16-5=11$

$*$ ចំពោះ $x=4 \Rightarrow y=16-10=6$

ដូចនេះ ប្តីធ្វើការបាន $2$ ថ្ងៃហើយប្រពន្ធធ្វើការបាន $11$ ថ្ងៃ រឺប្តីធ្វើការបាន $4$ ថ្ងៃហើយប្រពន្ធធ្វើការបាន $6$ ថ្ងៃ។

---

4. សរសេរសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមានឫសពីរគឺ $(2012\alpha+\beta)$ និង $(\alpha+2012\beta)$ ដោយដឹងថា $\alpha$ និង $\beta$ ជាឫសនៃសមីការ: $x^2-5x+3=0$ ។

**ចំលើយ**

តាមបំរាប់ $\alpha$ និង $\beta$ ជាឫសទាំងពីរនៃសមីការ: $x^2-5x+3=0$,

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត យើងបាន: $\alpha+\beta=5$ និង $\alpha.\beta=3$,

យើងបាន: $(2012\alpha+\beta)+(\alpha+2012\beta)=2012(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta).2013=5.2013=10060$

$$(2012\alpha+\beta)(\alpha+2012\beta)=2012(\alpha^2+\beta^2)+\alpha.\beta+2012(\alpha+\beta)$$
$$=2012(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+2012(\alpha+\beta)$$
$$=2012.5^2-3+2012.5=60357.$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតច្រាស យើងបានសមីការដែលត្រូវសរសេរគឺ: $x^2-10060x+60357=0$

ដូចនេះ សមីការដែលត្រូវរកគឺ: $\boxed{x^2-10060x+60357=0}$ ។

---

5. គណនាតំលៃនៃកន្សោម:

$$I=\sqrt{2+2\sqrt{2+2\sqrt{2+2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}} \qquad P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{2012^2}\right)$$ ។

**ចំលើយ**

គណនាកន្សោម:

- $I=\sqrt{2+2\sqrt{2+2\sqrt{2+2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}}$

យើងមាន: $4+2\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$,

យើងបាន: $I=\sqrt{2+2\sqrt{2+2\sqrt{2+2\left(1+\sqrt{3}\right)}}}=\sqrt{2+2\sqrt{2+2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}=\sqrt{2+2\sqrt{2+2\left(1+\sqrt{3}\right)}}$

$$=\sqrt{2+2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\sqrt{2+2\left(1+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=1+\sqrt{3}$$

ដូចនេះ កន្សោម $\boxed{I=1+\sqrt{3}}$ ។

- $P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{2012^2}\right)$

$$=\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)...\left(\frac{2012^2-1}{2012^2}\right)=\left(\frac{1.3}{2^2}\right)\left(\frac{2.4}{3^2}\right)\left(\frac{3.5}{4^2}\right)...\left(\frac{2011.2013}{2012^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}.1.1.....\frac{2013}{2012}=\frac{2013}{4024}$$

ដូចនេះ កន្សោម $\boxed{P=\frac{2013}{4024}}$ ។

---

6. ប្រៀបធៀប $A$ និង $B$ ដែល $A=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$ និង

$B=\frac{a^3}{c^3+ca+a^2}+\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}$

**ចំលើយ**

យើងយក $A-B$, ដោយផ្តុំប្រភាគដែលមានភាគបែងដូចគ្នាជាមួយគ្នា, រួចធ្វើការដកម្តងមួយកន្សោមៗដូចខាងក្រោម:

• $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}=a-b$

ដូចគ្នាដែរ: $\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}-\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}=b-c$ និង $\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}-\frac{a^3}{c^2+ca+a^2}=c-a$

យើងបាន: $A-B=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0\ \Rightarrow A=B$

ដូចនេះ $\boxed{A=B}$

---

7. $a)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^n-b^n$ ចែកដាច់នឹង $a-b$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n$ ។

$b)$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A=n^5-n$ ចែកដាច់នឹង $30$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n$ ។

**ចំលើយ**

$a.$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^n-b^n$ ចែកដាច់នឹង $a-b$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n$ :

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n$ យើងមាន:

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

ទាញបាន $a^n-b^n$ ចែកដាច់នឹង $a-b$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n$ ។

ដូចនេះ បញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

$b.$ បង្ហាញថា $A=n^5-n$ ចែកដាច់នឹង $30$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n$:

យើងមាន: $A=n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)=n(n-1)(n+1)\left[\left(n^2-4\right)+5\right]$

$$=n(n-1)(n+1)(n^2-4)+5n(n-1)(n+1)$$

$$=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n(n-1)(n+1)$$

យើងឃើញថា $n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ ជាផលគុណនៃប្រាំចំនួនគត់តគ្នានោះវាចែកដាច់នឹង $5$ ហើយ $n(n-1)(n+1)$ ជាផលគុណនៃបីចំនួនគត់តគ្នានាំឲ្យវាចែកដាច់នឹង $2$ ហើយក៏ចែកដាច់នឹង $3$ ដែរ, ដោយ $(2,3)=1$ នោះវាចែកដាច់នឹង $6$

ហើយដោយ $(5,6)=1$, យើងបាន:

$$n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)\vdots 30 \text{ និង } 5n(n-1)(n+1)\vdots 30$$

ដូចនេះ $\boxed{A=n^5-n\vdots 30}$

---

8. *a.* រកចំនួនគូ ធំបំផុតដែលមានលេខ 5 ខ្ទង់ ដែលមានបីលេខខាងដើម (គិតលំដាប់ពីឆ្វេងទៅស្តាំ) បង្កើតបានជាចំនួនការេប្រាកដមួយ ហើយបីលេខខាងចុង (គិតពីឆ្វេងទៅស្តាំ) បង្កើតបានជាចំនួនគូបមួយ។

*b.* ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំនួន $P=\frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{12}+\frac{7x^3}{24}+\frac{5x^2}{12}+\frac{x}{5}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $x$ ។

**ចំលើយ**

*a.* តាងចំនួនដែលត្រូវរកដោយ $A=\overline{abcde}$ ដែល $0<a\le 9; 0\le b,c,d,e\le 9$

តាមបំរាប់: $\overline{abc}=x^2$ និង $\overline{cde}=y^3$ ដែល $y$ ជាចំនួនគូ

យើងបាន: $5\le y\le 9$ (ព្រោះ $y$ ជាចំនួនគូបដែលមានលេខបីខ្ទង់),

ហើយដោយ $y$ ជាចំនួនគូ $\Rightarrow y=6$ រឺ $y=8$

∘ ចំពោះ $y=6 \Rightarrow y^3=6^3=216 \Rightarrow c=2$

∘ ចំពោះ $y=8 \Rightarrow y^3=8^3=512 \Rightarrow c=5$

ដោយ $\overline{abc}=x^2 \Rightarrow c$ មានតែអាចស្មើ 5 ប៉ុណ្ណោះ (ព្រោះជាលេខចុងក្រោយរបស់ចំនួនការេ)

ពេលនោះយើងបាន: $\overline{abc}=15^2=225$ រឺ $\overline{abc}=25^2=625$

ដោយ $A$ ធំបំផុត, យើងបាន $A=62512$

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{A=62512}$ ។

*b.* យើងមាន: $P=\frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{12}+\frac{7x^3}{24}+\frac{5x^2}{12}+\frac{x}{5}=\frac{x^5+10x^4+35x^3+50x^2+24x}{120}$

ដើម្បីស្រាយថា $P$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ, យើងត្រូវស្រាយថា $\left(x^5+10x^4+35x^3+50x^2+24x\right)\vdots 120$

យើងមាន: $x^5+10x^4+35x^3+50x^2+24x=x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

ដោយ $120=3.5.8$ ដែល $3, 5, 8$ បឋមរវាងគ្នាពីមួយទៅមួយ, ដូចនោះយើងគ្រាន់តែត្រូវការស្រាយបញ្ជាក់ថា $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ ចែកដាច់នឹង $3, 5$ និង $8$ តាមលំដាប់។

យើងឃើញថា $x(x+1)(x+2)$ ជាផលគុណនៃបីចំនួនគត់ធម្មជាតិតគ្នានោះវាចែកដាច់នឹង 3

$x(x+1)(x+2)(x+3)$ ជាផលគុណនៃបួនចំនួនគត់ធម្មជាតិតគ្នានោះវាចែកដាច់នឹង 2 និង 4 នាំឲ្យវាចែកដាច់នឹង 8

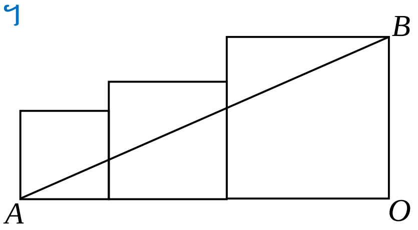
$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ ជាផលគុណនៃប្រាំចំនួនគត់ធម្មជាតិតគ្នានោះវាចែកដាច់នឹង 5

ទាញបាន កន្សោម $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ ចែកដាច់នឹង 120 មានន័យថា $P$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ។

ដូចនេះ បញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

---

9. គេមានការេបីដាក់តំរៀបគ្នាដូចរូប។ ផ្ទៃក្រលាការេទីមួយស្មើ 9, ផ្ទៃក្រលាការេទីពីរស្មើ 16, ផ្ទៃក្រលាការេទីបីស្មើ 25, គណនាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ $AOB$ ។



## ចំលើយ

គណនាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ $AOB$:

តាមបំរាប់ផ្ទៃក្រលាការេទីមួយ, ទីពីរ, ទីបីតាមលំដាប់ស្មើ $9, 16, 25$

ទាញបាន ជ្រុងរបស់ការេទីមួយ, ទីពីរ, ទីបីតាមលំដាប់ស្មើ $3, 4, 5$

នាំឲ្យ $AO = 3+4+5 = 12$ ហើយ $OB = 5$

ទាញបានផ្ទៃក្រលាត្រីកោណកែង $AOB$ គឺ: $S_{AOB} = \frac{1}{2}OB.AO = \frac{1}{2}\times 5\times 12 = 30$ ឯកតាក្រលាផ្ទៃ

ដូចនេះ: $S_{AOB} = 30$ ឯកតាក្រលាផ្ទៃ។

---

10. គេឲ្យ $f(x) = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x+1)-f(x-1) = f(x)$ ។

## ចំលើយ

យើងមាន:

$$f(x+1)-f(x-1) = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x+1} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{x+1} - \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x-1} - \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x-1}$$

$$= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x-1}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1\right) + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{x-1}\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1\right)$$

ដោយ $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{6\pm 2\sqrt{5}-4}{4} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, យើងបាន:

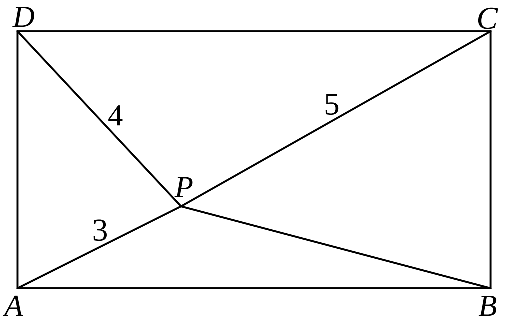
$$f(x+1)-f(x-1) = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{x} = f(x)$$ ពិត

ដូចនេះ: $\boxed{f(x+1)-f(x-1) = f(x)}$

---

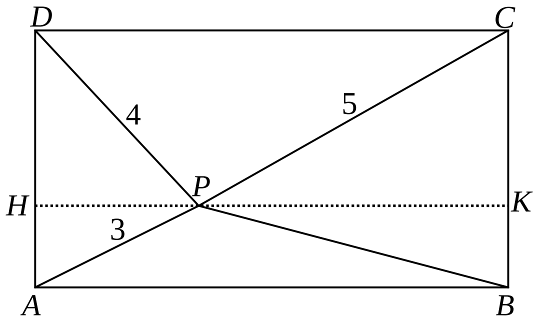
11. គេឲ្យ $P$ ជាចំនុចមួយនៅក្នុងចតុកោណកែង $ABCD$ ដែល $PA = 3cm, PD = 4cm, PC = 5cm$ ។ គណនាប្រវែង $PB$?



## ចំលើយ

គណនាប្រវែង $PB$:

យើងសង់បន្ទាត់មួយ កាត់តាម $P$ កែងនឹង $AD$ និង $BC$ រៀងគ្នា ត្រង់ចំនុច $H$ និង $K$ ។




យើងបាន: $PA^2-PD^2=\left(PH^2+HA^2\right)-\left(PH^2+HD^2\right)$

$$=HA^2-HD^2$$

ដូចគ្នាដែរ: $PB^2-PC^2=KB^2-KC^2$

ដោយ $HA=KB$ និង $HD=KC$,

នាំឲ្យ $PA^2-PD^2=PB^2-PC^2$

ទាញបាន $3^2-4^2=PB^2-5^2 \Rightarrow PB^2=18 \Rightarrow PB=3\sqrt{2}cm$

ដូចនេះ: $\boxed{PB=3\sqrt{2}cm}$ .

---

12. ពេលចែកចំនួនគត់វិជ្ជមាន $x$ នឹងចំនួនគត់វិជ្ជមាន $y$, គេបានផលចែកស្មើ $u$ និងសំនល់ស្មើ $v$, $u$ និង $v$ ជាបណ្តាចំនួនគត់។ តើពេលចែក $x+2uy$ នឹង $y$ គេបានសំនល់ស្មើប៉ុន្មាន?

## ចំលើយ

តាមបំរាប់, និងតាមប្រមាណវិធីចែកមានសំនល់ យើងបាន: $x=uy+v$,

នាំឲ្យ $x+2uy=3uy+v$, នោះពេលចែកនឹង $v$ គឺយើងបានសំនល់ស្មើ $v$

ដូចនេះ សំនល់នៃប្រមាណវិធីចែក $x+2uy$ នឹង $y$ គឺស្មើនឹង $v$ ។

---

13. គេឲ្យ $2^x=8^{y+1}$ និង $9^y=3^{x-9}$, គណនាតំលៃរបស់ $x+y$ ។

## ចំលើយ

យើងមាន: $2^x=8^{y+1}=2^{3(y+1)} \Leftrightarrow x=3y+3 \qquad (1)$

$3^{x-9}=9^y=3^{2y} \Leftrightarrow x-9=2y \Rightarrow x=2y+9 \qquad (2)$

តាម $(1)\&(2)$: $\Rightarrow 3y+3=2y+9 \Rightarrow y=6 \Rightarrow x=21$

ទាញបាន $x+y=21+6=27$

ដូចនេះ: $\boxed{x+y=27}$ ។

---

14. *a.* គេឲ្យ $P=x+y$ និង $Q=x-y$, គណនាកន្សោម $T=\dfrac{P+Q}{P-Q}-\dfrac{P-Q}{P+Q}$ ។

*b.* បើ $2x-3y-z=0$ និង $x+3y-14z=0$, ចំពោះ $z\neq 0$, ចូរគណនាតំលៃរបស់កន្សោម:

$M=\dfrac{x^2+3xy}{y^2+z^2}$ ។

## ចំលើយ

*a.* គណនាកន្សោម $T$ :

យើងមាន $P+Q=2x$ និង $P-Q=2y$ ,

ទាញបាន $T=\frac{P+Q}{P-Q}-\frac{P-Q}{P+Q}=\frac{2x}{2y}-\frac{2y}{2x}=\frac{x^2-y^2}{xy}$

ដូចនេះ $\boxed{T=\frac{x^2-y^2}{xy}}$

*b.* គណនាកន្សោម $M$ :

តាមបំរាប់យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases}2x-3y-z=0\\x+3y-14z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=z\\-2x-6y=-28z\end{cases}$

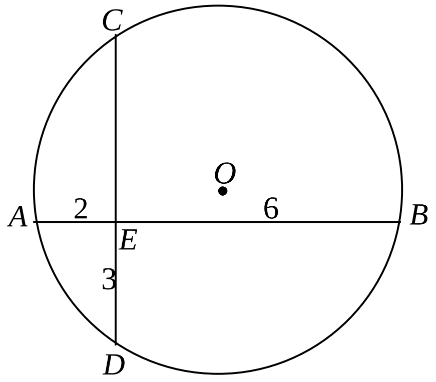
បូកសមីការទាំងពីរចូលគ្នាយើងបាន: $-9y=-27z\Leftrightarrow y=3z$ និង $x=5z$

ទាញបានកន្សោម $M=\frac{x^2+3xy}{y^2+z^2}=\frac{25z^2+3(5z)(3z)}{9z^2+z^2}=\frac{70z^2}{10z^2}=7$ (ព្រោះ $z\neq 0$)

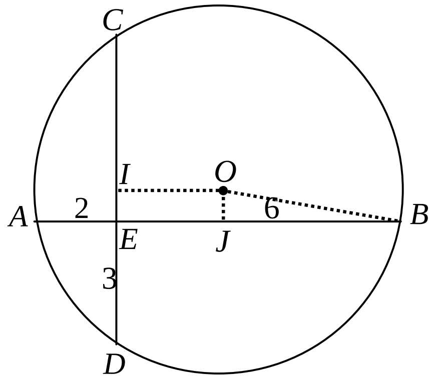
ដូចនេះ $\boxed{M=7}$ ។

---

15. គេឲ្យខ្សែ $AB$ និង $CD$ កែងគ្នាត្រង់ $E$ ។ ដោយដឹងថាអង្កត់ $AE, EB$ និង $ED$ មានប្រវែងរៀងគ្នាស្មើ $2, 6$ និង $3$ ។ គណនាអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់?




## ចំលើយ




តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងរង្វង់យើងបាន: $EA.EB=EC.ED$ (អាចស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនងនេះដោយការប្រដូចត្រីកោណ $AED$ និងត្រីកោណ $BEC$ )

$\Rightarrow EC=4 \Rightarrow CD=7$ .

តាង $I, J$ រៀងគ្នាជាចំនុចកណ្តាលរបស់ $CD$ និង $AB$ ,

យើងបាន: $EI=7/2-3=1/2=OJ$

ក្នុងត្រីកោណកែង $OBJ$ យើងមាន: $OB^2=OJ^2+BJ^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+4^2=\frac{65}{4}\Rightarrow OB=\frac{\sqrt{65}}{2}$

ទាញបានអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់ស្មើ: $2OB=\sqrt{65}$ ។

---

16. *a.* រកចំនួនខ្ទង់របស់ ចំនួន $N=2^{12}\times5^{8}$ ។

*b.* រកផលសងរវាង ឫសធំ និងឫសតូចរបស់សមីការ: $(7+4\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})x-2=0$ ។

**ចំលើយ**

*a.* រកចំនួនខ្ទង់របស់ $N$ :

យើងមាន: $2\times5=10$, យើងបាន:

$$N=2^{12}.5^{8}=2^{4}.2^{8}.5^{8}=16.10^{8}=1.600.000.000$$

ដូចនេះ $N$ ជាចំនួនដែលមានលេខ 10 ខ្ទង់។

*b.* យើងដឹងថាសមីការដឺក្រេទីពីររាង: $ax^2+bx+c=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាពេល $\Delta=b^2-4ac>0$

ដែលឫសទាំងពីរនោះឲ្យដោយកន្សោម: $x_b=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, x_s=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

ផលសងឫសធំ និងឫសតូចរបស់សមីការគឺ: $d=\left|\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

សមីការដែលឲ្យ $(7+4\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})x-2=0$ មាន $\Delta=(2+\sqrt{3})^2+8(7+4\sqrt{3})$

យើងបានផលសងឫសធំ និងឫសតូចរបស់សមីការគឺ: $d=\dfrac{\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+8(7+4\sqrt{3})}}{7+4\sqrt{3}}$

ដោយ $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ នោះឲ្យ $d=\dfrac{3(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})^2}=\dfrac{3}{2+\sqrt{3}}=6-3\sqrt{3}$

ដូចនេះ ផលសងឫសដែលត្រូវរកគឺ $\boxed{d=6-3\sqrt{3}}$

---

17. គេឲ្យ $x=2013\left(1+2012^{2}\right)\left(1+2012^{2^2}\right).....\left(1+2012^{2^{2011}}\right)$ ។ បង្ហាញថា $2011x=2012^{2^{2012}}-1$ ។

**ចំលើយ**

យើងមាន: $x=2013\left(1+2012^{2}\right)\left(1+2012^{2^2}\right).....\left(1+2012^{2^{2011}}\right)$

នាំឲ្យ $2011x=2011.2013\left(1+2012^{2}\right)\left(1+2012^{2^2}\right).....\left(1+2012^{2^{2011}}\right)$

$$=(2012-1)(2012+1)\left(1+2012^{2}\right)\left(1+2012^{2^2}\right).....\left(1+2012^{2^{2011}}\right)$$

$$=\left(2012^2-1\right)\left(2012^2+1\right)\left(2012^{2^2}+1\right).....\left(2012^{2^{2011}}+1\right)$$

$$=\left(2012^{2^2}-1\right)\left(2012^{2^2}+1\right).....\left(2012^{2^{2011}}+1\right)=...=2012^{2^{2012}}-1$$ ពិត

ដូចនេះ: $\boxed{2011x=2012^{2^{2012}}-1}$ ។

18. *a.* គណនាតំលៃលេខនៃកន្សោមខាងក្រោម:

$A=x^{2011}-112x^{2010}+112x^{2009}-112x^{2008}+...+112x-1$ ចំពោះ $x=111$ ។

*b.* គណនាកន្សោម $S=(-1)+(-1)^2+(-1)^3+...+(-1)^{2012}+2013$ ។

*c.* គេថែម $x$ ចូលក្នុង ភាគយក និងភាគបែងរបស់ប្រភាគ $\dfrac{a}{b}, a\neq b, b\neq0$, ពេលនោះគេបានប្រភាគថ្មីគឺ $\dfrac{c}{d}$ ។

គណនា $x$ ។

## ចំលើយ

*a.* យើងមាន $112=111+1$, ចំពោះ $x=111$ យើងបាន:

$$A=111^{2011}-(111+1).111^{2010}+(111+1).111^{2009}-(111+1).111^{2008}+...+(111+1).111-1$$
$$=111^{2011}-111^{2011}-111^{2010}+111^{2010}+111^{2009}-111^{2009}-111^{2008}+...+111^2+111-1$$
$$=111-1=110$$ ។

ដូចនេះ: $\boxed{A=110}$ ។

*b.* គណនាកន្សោម $S$:

យើងមាន: $S=(-1)+(-1)^2+(-1)^3+...+(-1)^{2012}+2013$

សង្កេតឃើញថា ចំនួន $(-1)$ ដែលមានស្វ័យគុណគូ ស្មើនឹងចំនួន $(-1)$ ដែលមានស្វ័យគុណសេស

ទាញបាន $S=-1+1-1+1...+1-1+2013=0+2013=2013$

ដូចនេះ: $\boxed{S=2013}$ ។

*c.* គណនា $x$:

តាមបំរាប់យើងបានសមីការ: $\frac{a+x}{b+x}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad+dx=bc+cx \quad (d\neq 0, x+b\neq 0)$

$$\Leftrightarrow (c-d)x=ad-bc \Leftrightarrow x=\frac{ad-bc}{c-d}$$

សំគាល់: $c\neq d$ ព្រោះបើមិនដូចនោះទេ គឺ $a=b$ ដែលតាមបំរាប់គឺ $a\neq b$ នាំឲ្យផ្ទុយគ្នា។

ដូចនេះ: $\boxed{x=\frac{ad-bc}{c-d}}$ ។

---

19. ប្រវែងជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណមួយស្មើនឹង $13, 14, 15$ តាមលំដាប់។ កំពស់ទាំងអស់កាត់គ្នាត្រង់ $H$ ។ បើ $AD$ ជាកំពស់ត្រូវគ្នានឹងជ្រុងដែលមានប្រវែងស្មើ $14$, ចូរគណនាផលធៀប $\frac{HD}{HA}$ ។

## ចំលើយ

គណនាផលធៀប $\frac{HD}{HA}$:

តាង $u=BD, v=CD$, អនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទពីតាហ្គ័រ ក្នុងត្រីកោណ $ABD$ និង $ACD$, យើងបាន:

$$u^2-v^2=\left(AB^2+AD^2\right)-\left(AC^2-AD^2\right)=AB^2-AC^2.$$

$\Rightarrow (u+v)(u-v)=AB^2-AC^2$.

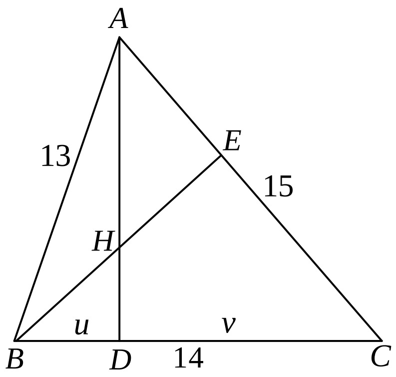
$\Rightarrow 14.(u-v)=13^2-15^2 \Rightarrow u-v=4$.

គួបផ្សំនឹង $u+v=14$, យើងបាន $u=5=BD$ និង $v=CD=9$

ទាញបាន: $AD^2=AB^2-BD^2=13^2-5^2=144 \Rightarrow AD=12$

ត្រីកោណ $BDH$ និង $ADC$ មានរាងដូចគ្នា, យើងបាន:

$$\frac{DH}{CD}=\frac{BD}{AD} \Rightarrow DH=\frac{CD.BD}{AD}=\frac{9.5}{12}=\frac{15}{4}$$



$\Rightarrow HA = AD - DH = 12 - \frac{15}{4} = \frac{33}{4}$ នាំឲ្យ $\frac{HD}{HA} = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}$

ដូចនេះ ផលធៀប $\boxed{HD : HA = \frac{5}{11}}$ ។

---

20. បណ្តាជ្រុង $PQ$ និង $PR$ របស់ត្រីកោណ $PQR$ មានប្រវែងស្មើ $4cm$ , និង $7cm$ តាមលំដាប់។ មេដ្យាន $PM$ មានប្រវែង $3,5cm$ ។ គណនាប្រវែង $QR$ ។

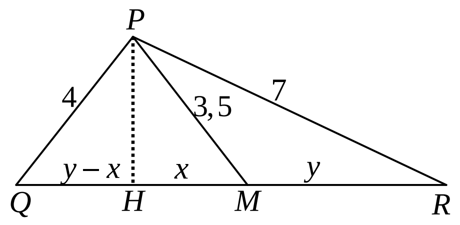
**ចំលើយ**

គណនាប្រវែង $QR$ :

យើងសង់កំពស់ $PH$ , តាង $HM = x, QM = MR = y$

ក្នុងត្រីកោណ $PQH$ និង $PMH$ , យើងមាន:

$$PH^2 = 16 - (y-x)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - x^2 \Leftrightarrow y^2 - 2xy = \frac{15}{4} \qquad (1)$$




ក្នុងត្រីកោណ $PQH$ និង $PRH$ , យើងមាន:

$$PH^2 = 16 - (y-x)^2 = 7^2 - (y+x)^2 \Leftrightarrow 4xy = 33 \qquad (2)$$

ជំនួស (2) ចូលក្នុង (1) : $y^2 - \frac{33}{2} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow y = \frac{9}{2}$.

ដូចនេះ $QR = 9cm$ ។

***វិធីទីពីរ:*** អនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន: $PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + \frac{QR^2}{2}$

ទាញបាន $QR^2 = 2\left(PQ^2 + PR^2\right) - 4PM^2 = 2\left(4^2 + 7^2\right) - 7^2 = 81$

ដូចនេះ $QR = 9cm$ ។

---

*រង់ចាំអានលំហាត់នៅភាគទី៤បន្តទៀត....*

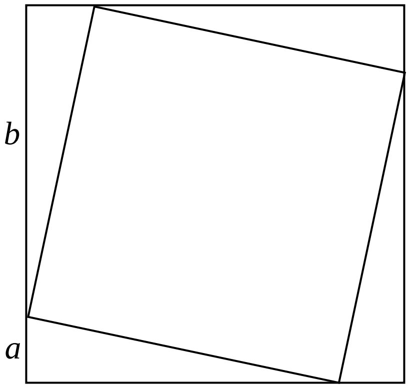
**វប្បធម៌លេត់ ជាតិរលាយ វប្បធម៌ពណ្ណរាយ ជាតិថ្កើងថ្កាន!!**
**សូមមានវប្បធម៌ចែករំលែកចំណេះដឹងនៅក្នុងខ្លួនអ្នក និងចូលរួមក្នុងការចែករំលែកចំណេះដឹងនោះ ដល់អ្នកដទៃ ដើម្បីសេចក្តីចំរើនរបស់ជាតិយើង...**

www.highschoolcam.blogspot.com

# លំហាត់អនុវត្តន៍សំរាប់ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី៩ ( បន្តភាគ៤ )

1. ការេមួយមានក្រឡាផ្ទៃស្មើ $4$ (ឯកតាផ្ទៃ) ចារឹកក្នុងការេមួយដែលមានក្រឡាផ្ទៃស្មើ $5$ (ឯកតាផ្ទៃ) ដែលកំពូលនីមួយៗ របស់ការេតូច គឺស្ថិតនៅលើ ជ្រុងនីមួយៗរបស់ការេធំ។ កំពូលរបស់ការេតូច ចែកជ្រុងនីមួយៗរបស់ការេធំ ទៅជាពីរអង្កត់, មួយមានប្រវែង $a$, ហើយមួយទៀតមានប្រវែង $b$ ។

គណនាតំលៃនៃ $ab$? (**USA AMC 8 2012**)




## សំរាយ

តាមបំរាប់យើងបាន:

ក្រឡាផ្ទៃការេធំគឺ: $(a+b)(a+b)=5$ (1)

ក្រឡាផ្ទៃការេតូចគឺ $a^2+b^2=x^2=4$ (2), ($x$ គឺជាជ្រុងរបស់ការេតូច)

តាម (1) $\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=5$ (3), ជំនួស (2) ចូល (3) យើងបាន:

$$4+2ab=5 \Rightarrow ab=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{ab=\frac{1}{2}}$

2. គេឲ្យ $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k$ ។

ចូរគណនាតំលៃនៃ $\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ ជាអនុគមន៍នៃ $k$ ។

## សំរាយ

តាមសមភាពដែលឲ្យ: $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k$

យើងបាន: $\dfrac{(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2}{x^4-y^4}=k$

បំបែក និងសំរួលទៅ យើងបាន: $\dfrac{x^4+y^4}{x^4-y^4}=\dfrac{k}{2}$

ហើយ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^4=\dfrac{k+2}{k-2}$

ដូចនេះ: $\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}=\dfrac{(x^8+y^8)^2+(x^8-y^8)^2}{x^{16}-y^{16}}=\dfrac{2(x^{16}+y^{16})}{x^{16}-y^{16}}$

$$=2\dfrac{\left(\dfrac{k+2}{k-2}\right)^4+1}{\left(\dfrac{k+2}{k-2}\right)^4-1}=2\dfrac{(k+2)^4+(k-2)^4}{(k+2)^4-(k-2)^4}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}=2\dfrac{(k+2)^4+(k-2)^4}{(k+2)^4-(k-2)^4}}$

$\boxed{3}$. គេឲ្យ $x, y$ គឺជាចំនួនគត់ ផ្ទៀងផ្ទាត់: $x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000$ ។
បង្ហាញថា: $x+y=10$ ។

## សំរាយ

យើងមាន: $E=x^3+y^3+(x+y)^3+30xy-2000$

$$=2(x+y)^3-3x^2y-3xy^2+30xy-2000$$
$$=2\left[(x+y)^3-1000\right]-3xy(x+y-10)$$
$$=(x+y-10)\left[2\left((x+y)^2+10(x+y)+100\right)-3xy\right]$$
$$=(x+y-10)(2x^2+xy+2y^2+20x+20y+200)$$

ដោយ $F=2x^2+xy+2y^2+20x+20y+200$

$$=(x^2+xy+y^2)+(x^2+20x+100)+(y^2+20y+100)$$
$$=\dfrac{x^2+y^2+(x+y)^2}{2}+(x+10)^2+(y+10)^2>0\,,$$

នាំឲ្យ $x+y=10$

ដូចនេះ: $\boxed{x+y=10}$

$\boxed{4}$. គេឲ្យ $A=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{1997.1998}$

និង $B=\dfrac{1}{1000.1998}+\dfrac{1}{1001.1997}+\ldots+\dfrac{1}{1998,1000}$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{A}{B}$ គឺជាចំនួនគត់។

## សំរាយ

យើងមាន: $A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}-\frac{1}{1998}$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1998}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}-1-\frac{1}{2}-...-\frac{1}{999}$$

$$=(1-1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+...+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{999}\right)+\frac{1}{1000}+...+\frac{1}{1998}$$

$$=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+...+\frac{1}{1997}+\frac{1}{1998}$$

នាំឲ្យ $2A=\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{1998}\right)+\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{1997}\right)+...+\left(\frac{1}{1998}+\frac{1}{1000}\right)$

$$=2998.\left(\frac{1}{1000.1998}+\frac{1}{1001.1997}+...+\frac{1}{1998.1000}\right)$$

$$=2998.B$$

ទាញបាន $\frac{A}{B}=1499$ គឺជាចំនួនគត់

ដូចនេះ បញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

5. ចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន $n$, គេតាង $f(n)$ គឺជាតំលៃនៃ $f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$ ។

គណនា: $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(40)$ ។

## សំរាយ

តាមបំរាប់: $f(n)=\frac{\sqrt{(2n+1)}^2+\sqrt{(2n-1)}^2+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

គុណនឹងកន្សោមឆ្លាស់បំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង

ទាញបាន: $f(n)=\frac{\sqrt{(2n+1)}^3-\sqrt{(2n-1)}^3}{2}$

នាំឲ្យ: $f(1)+f(2)+...+f(40)=\frac{\left(\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3}\right)+\left(\sqrt{5^3}-\sqrt{3^3}\right)+...+\left(\sqrt{81^3}-\sqrt{79^3}\right)}{2}$

$$=\frac{\sqrt{81^3}-\sqrt{1^3}}{2}=364$$

6 . រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a, b$ ដើម្បីឲ្យ $a^4+4b^4$ គឺជាចំនួនបឋម។

**សំរាយ**

សង្កេតឃើញថា:

$$a^4+4b^4=a^4+4b^4+4a^2b^2-4a^2b^2=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2$$
$$=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)=\left[(a+b)^2+b^2\right]\left[(a-b)^2+b^2\right]$$

ដោយ $(a+b)^2+b^2>1$ (ព្រោះ $a, b$ គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន)

នាំឲ្យ $a^4+4b^4=5$ អាចជាចំនួនបឋម លុះត្រាតែ $(a-b)^2+b^2>1$

ជាក់ស្តែង, ចំពោះ $a=b=1$ យើងបាន $a^4+4b^5=1$ គឺជាចំនួនបឋម

ដូចនេះ $\boxed{a=b=1}$

7 . គណនា គូបនៃចំនួន $N=\sqrt{7\sqrt{3\sqrt{7\sqrt{3\sqrt{7\sqrt{3....}}}}}}$

**សំរាយ**

យើងមាន: $N^4=7^2.3N$ ហើយ $N\neq 0$ ,

ដូចនេះ: $N^3=147$

8 . គេឲ្យ $x, y, z$ គឺជាចំនួនគត់ផ្សេងគ្នា ផ្ទៀងផ្ទាត់ $xy+yz+zx=26$ ។

បង្ហាញថា: $x^2+y^2+z^2\geq 29$

**សំរាយ**

យើងអាចឧបមាថា $x<y<z$ , ពេលនោះ: $y-x\geq 1, z-y\geq 1, z-x\geq 2$ ,

នាំឲ្យ $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 6$

ម្យ៉ាងទៀត: $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq 3$ ,

ហើយដោយ $xy+yz+zx=26$

យើងបាន $x^2+y^2+z^2\geq 29$ , បញ្ហាត្រូវស្រាយបញ្ជាក់។

9 . គេឲ្យ $N=\underbrace{44\ldots4}_{2002}\underbrace{88\ldots8}_{2001}9$ ។ គណនា $\sqrt{N}$ ។

**សំរាយ**

យើងមាន: $N=\underbrace{44\ldots4}_{2002}\underbrace{88\ldots8}_{2001}9=4.\underbrace{11\ldots1}_{2002}.10^{2002}+8.\underbrace{11\ldots1}_{2001}.10+9$

$$=4(10^{2001}+10^{2000}+\ldots+10+1).10^{2002}+$$

$$+8.(10^{2000}+10^{1999}+\ldots+10+1).10+9$$

$$=4.\frac{10^{2002}-1}{9}.10^{2002}+8.\frac{10^{2001}-1}{9}.10+9$$

$$=\frac{4}{9}\left(10^{4004}-10^{2002}\right)+\frac{8}{9}\left(10^{2002}-10\right)+\frac{81}{9}$$

$$=\frac{4.10^{4004}-4.10^{2002}+8.10^{2002}-80+81}{9}$$

$$=\left(\frac{2.10^{2002}+1}{3}\right)^2$$

ដូចនេះ $\sqrt{N}=\sqrt{\left(\frac{2.10^{2002}+1}{3}\right)^2}=\frac{2.10^{2002}+1}{3}=\underbrace{66\ldots6}_{2001}7$

**10**. គេឲ្យ $ABCD$ គឺជាប្រលេឡូក្រាមមួយ។ នៅលើជ្រុង $BC$ និង $CD$ គេដៅចំនុច $E$ និង $F$ តាមលំដាប់ យ៉ាងណាឲ្យ $\frac{EB}{EC}=a$ និង $\frac{FC}{FD}=b$ ។ បន្ទាត់ $AE$ និង $BF$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ $M$ ។

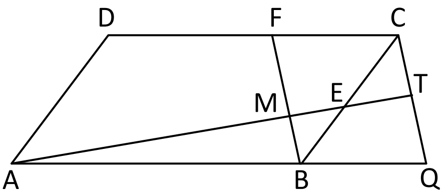
គណនាផលធៀប $\frac{AM}{ME}$ ។

## សំរាយ

គូសបន្ទាត់ស្របនឹង $BF$ ពីចំនុច $C$ ប្រសព្វនឹងបន្ទាត់ $AB$ ត្រង់ $Q$ ។

បន្ទាត់ $AE$ និង $CQ$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ $T$ ។ យើងបាន:

$$\frac{AM}{ME}=\frac{\frac{AM}{MT}}{\frac{ME}{MT}} \qquad (1)$$




ដោយ $MB \parallel CQ$ , យើងបាន:

$$\frac{AM}{MT}=\frac{AB}{BQ} \qquad (2)$$

ហើយ $$\frac{ET}{ME}=\frac{EC}{EB} \qquad (3)$$

ម្យ៉ាងទៀត $$\frac{AM}{MT}=\frac{AB}{BQ}=\frac{DC}{CF}=\frac{DF+FC}{CF}=\frac{1}{b}+1=\frac{b+1}{b}$$

$$\frac{MT}{ME}=\frac{ME+ET}{ME}=\frac{ME}{ME}+\frac{ET}{ME}=1+\frac{EC}{EB}=1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}$$

តាមទំនាក់ទំនង $(1)$ យើងបាន:

$$\frac{AM}{ME}=\frac{AM}{MT}.\frac{MT}{ME}=\frac{b+1}{b}.\frac{a+1}{a}=\frac{(a+1)(b+1)}{ab}$$

11 . គេសន្មតថា សមីការ $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ មានឬសពីរគឺ $x_1$ និង $x_2$ ។
បង្ហាញថា $x_1^3$ និង $x_2^3$ គឺជាឬសរបស់សមីការ:

$$X^3-\left(a^3+d^3+3abc+3bcd\right)X+\left(ad-bc\right)^3=0$$

**សំរាយ**

យើងមាន $x_1$ និង $x_2$ ជាឬសនៃសមីការ: $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត, យើងបាន: $\begin{cases} x_1+x_2=a+d \\ x_1x_2=ad-bc \end{cases}$

នាំឲ្យ $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$

$$=(a+d)^3-3(ad-bc)(a+d)$$

$$=a^3+d^3+3ad+(a+d)-3(ad-bc)(c+d)$$

$$=a^3+d^3+3(a+d)(ad-ad+bc)$$

$$=a^3+d^3+3bc(a+d)$$

$$=a^3+d^3+3abc+3bcd$$

និង $x_1^3x_2^3=(ad-bc)^3$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតច្រាស, យើងបាន: $x_1^3, x_2^3$ គឺជាឬសរបស់សមីការ:

$$X^3-\left(a^3+d^3+3abc+3bcd\right)X+\left(ad-bc\right)^3=0.$$

12 . គេឲ្យត្រីកោណ $ABC$ ដែលមាន $\angle A=90^0$ ។ ការេ $MNPQ$ មួយ ចារឹកក្នុងត្រីកោណ យ៉ាងណាឲ្យ $M$ ស្ថិតនៅលើ $AB$, $N$ ស្ថិតនៅលើ $BC$, $P$ ស្ថិតនៅលើ $BC$ ហើយ $Q$ ស្ថិតនៅលើ $CA$ ។ ដូចគ្នាដែរ, ការេដែលមានជ្រុង $l_1, l_2, l_3$ ចារឹកក្នុងបណ្តាត្រីកោណ $QPC$, $MBN$, $AMQ$ តាមលំដាប់, ដែលការេទាំងបីនោះ មានកំពូលពីរស្ថិតនៅលើអ៊ីប៉ូតេនុស និងកំពូលមួយ ស្ថិតនៅលើជ្រុងនីមួយៗ របស់ត្រីកោណ។ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{l_1^2}+\dfrac{1}{l_2^2}=\dfrac{1}{l_3^2}$ ។

**សំរាយ**

បណ្តាត្រីកោណ $QPC$, $BNM$, $MAQ$ គឺមានរាងដូចគ្នា នឹងត្រីកោណ $BAC$ មានផលធៀបស្មើនឹង ផលធៀបនៃបណ្តាការេចារឹកក្នុង

ដូចនោះ , បើ $l=MN$ , នាំឲ្យ: $\dfrac{l_1}{l}=\dfrac{QP}{AB}=\dfrac{l}{AB} \Rightarrow AB=\dfrac{l^2}{l_1}$

$$\frac{l_2}{l}=\frac{MN}{AC}=\frac{l}{AC} \Rightarrow AC=\frac{l^2}{l_2}$$

$$\frac{l_3}{l}=\frac{MN}{AC}=\frac{l}{AC}\ \Rightarrow\ AC=\frac{l^2}{l_2}$$

ដូចនេះ $AB^2+AC^2=BC^2 \Leftrightarrow \frac{l^4}{l_1^2}+\frac{l^4}{l_2^2}=\frac{l^4}{l_3^2} \Leftrightarrow \frac{1}{l_1^2}+\frac{1}{l_2^2}=\frac{1}{l_3^2}$ ពិត។

13\. គណនាផលបូក: $S=\frac{1}{2^1}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+....-\frac{2010}{2^{2010}}+\frac{2011}{2^{2011}}$ ។

**សំរាយ**

យើងមាន: $S=\frac{1}{2^1}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+....-\frac{2010}{2^{2010}}+\frac{2011}{2^{2011}}$

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}-\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}-\frac{4}{2^5}+...-\frac{2010}{2^{2011}}+\frac{2011}{2^{2012}}$$

$$\Rightarrow\quad S+\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+...-\frac{1}{2^{2010}}+\frac{1}{2^{2011}}+\frac{2011}{2^{2012}}$$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{2010}}+\frac{1}{2^{2012}}+\frac{2012}{2^{2012}}$$

$$=\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{2010}}\right)+\frac{2012}{2^{2012}}$$

$$=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^{1006}}{1-\frac{1}{2^2}}+\frac{2012}{2^{2012}}$$ (ប្រើរូបមន្តផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រ)

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2012}}\right)+\frac{2012}{2^{2012}}=\frac{2^{2012}+6035}{3.2^{2012}}$$

$$\Rightarrow\quad S=\frac{2^{2012}+6035}{9.2^{2011}}$$

14\. 1) ដោះស្រាយសមីការ: $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{7-x}=3$

2) ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{2} \\ xy+\frac{1}{xy}=\frac{5}{2} \end{cases}$

**សំរាយ**

1) ដោះស្រាយសមីការ: $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{7-x}=3$

តាង $a=\sqrt[3]{x+2};\ \sqrt[3]{7-x}=b$ នាំឲ្យ $a+b=3$ និង $a^3+b^3=9$

ម្យ៉ាងទៀត យើងមាន: $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

នាំឲ្យ: $9=3^3-3ab(3) \Leftrightarrow ab=2$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធខាងលើ យើងបាន: $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ រឺ $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

ចំពោះ $a=1, b=2$ យើងបាន $x=-1$

ចំពោះ $a=2, b=1$ យើងបាន $x=6$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ យើងឃើញថា ចំលើយទាំងពីរសុទ្ធតែអាចទទួលយកបាន។

ដូចនេះ សមីការដែលឲ្យមានឬសពីរ $x=-1$ រឺ $x=6$ ។

2) ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{2} & (1) \\ xy+\frac{1}{xy}=\frac{5}{2} & (2) \end{cases}$

យើងមាន: $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)=xy+\frac{1}{xy}+2$

តាមនោះ យើងតាង: $x+\frac{1}{y}=a;\ y+\frac{1}{x}=b$ នាំឲ្យ $a+b=\frac{9}{2}$ និង $ab=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$

យើងទាញបានប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} a+b=\frac{9}{2} \\ ab=\frac{9}{2} \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការថ្មីយើងបាន: $\begin{cases} a=3 \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$ រឺ $\begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=3 \end{cases}$

ចំពោះ $\begin{cases} a=3 \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x+\frac{1}{y}=\frac{3}{2} & (3) \\ \frac{1}{x}+y=3 & (4) \end{cases}$

តាម $(4)$ យើងបាន $y=3-\frac{1}{x}$ , ជំនួសចូល $(3)$ យើងបានសមីការ:

$2x^2-3x+1=0$ មានឬសពីរ គឺ $x=1$ រឺ $x=\frac{1}{2}$

ចំពោះ $x=1$ នាំឲ្យ $y=2$

ចំពោះ $x=\frac{1}{2}$ នាំឲ្យ $y=1$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធមានចំលើយពីរ គឺ: $(x;y)=(1;2),(\frac{1}{2};1)$ ។

15. 1) គណនាតំលៃនៃកន្សោម $A=\dfrac{2^{2014}+2^{2012}}{2^{2014}-2^{2012}}$

2) គេឲ្យ $x, y$ គឺជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ពីរផ្សេងគ្នា ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+\dfrac{2}{x}=y+\dfrac{2}{y}$, គណនាតំលៃនៃ $xy$

## សំរាយ

1) គណនាតំលៃកន្សោម $A$

យើងមាន: $A=\dfrac{2^{2014}+2^{2012}}{2^{2014}-2^{2012}}=\dfrac{2^{2012}(2^2+1)}{2^{2012}(2^2-1)}=\dfrac{5}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{A=\dfrac{5}{3}}$

2) គណនាតំលៃនៃ $xy$

យើងមាន: $x+\dfrac{2}{x}=y+\dfrac{2}{y} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2}{x}=\dfrac{y^2+2}{y}$

$\Leftrightarrow x^2y+2y=y^2x+2x$ (ព្រោះ $x, y\neq 0$)

$\Leftrightarrow xy(x-y)-2(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (xy-2)(x-y)=0 \Leftrightarrow xy=2$ (ព្រោះ $x\neq y$)

ដូចនេះ $\boxed{xy=2}$

16. ចំងាយផ្លូវពី $A$ ទៅ $B$ មានប្រវែង $90km$ ។ មនុស្សម្នាក់ជិះម៉ូតូពី $A$ ទៅ $B$ ។ ពេលទៅដល់ $B$ គាត់ឈប់អស់ $30$ នាទី រួចត្រឡប់មក $A$ វិញ ដោយល្បឿនលឿនជាងពេលទៅ ស្មើនឹង $9km/h$ ។ រយៈពេលគិតចាប់ពីពេលចេញដំណើរពី $A$ រហូតដល់ពេលត្រឡប់មក $A$ វិញ ស្មើនឹង $5$ ម៉ោង។ គណនាល្បឿនរបស់ម៉ូតូ ពេលចេញពី $A$ ទៅ $B$ ។

## សំរាយ

យើងតាងល្បឿនរបស់ម៉ូតូពី $A$ ទៅ $B$ ដោយ $x$ $(x>0; km/h)$

រយៈពេលម៉ូតូចេញពី $A$ ទៅ $B$ ស្មើនឹង $\dfrac{90}{x}(h)$

រយៈពេលឈប់ត្រង់ $B$ ស្មើនឹង $30'=\dfrac{1}{2}(h)$

ល្បឿនរបស់ម៉ូតូពេលត្រឡប់ពី $B$ វិញ ស្មើនឹង $x+9\ (km/h)$

រយៈពេលរបស់ម៉ូតូ ត្រឡប់ពី $B$ ដល់ $A$ ស្មើនឹង $\dfrac{90}{x+9}(h)$

តាមបំរាប់ យើងបានសមីការ: $\dfrac{90}{x}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{90}{x+9}=5$

ដោះស្រាយសមីការ ខាងលើយើងបាន $x=36$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ), $x=-5$ (ចោល)
ដូចនេះ ល្បឿនរបស់ម៉ូតូពេលចេញពី $A$ ទៅ $B$ ស្មើនឹង $36km/h$ ។

17. គេឲ្យ $a, b, c$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3$ ។

## សំរាយ

យើងមាន: $a+b+c+ab+bc+ca=6abc$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$$

យើងមាន:

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}+1\geq 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{b}-1\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2}-\frac{2}{b}+1\geq 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{c}-1\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2}-2+1\geq 0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}\geq 0 \quad (4)$$

$$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2}-\frac{2}{bc}+\frac{1}{c^2}\geq 0 \quad (5)$$

$$\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a^2}\right)^2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2}-\frac{2}{ca}+\frac{1}{a^2}\geq 0 \quad (6)$$

តាម (1); (2); (3); (4); (5); (6) យើងបាន:

$$3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-2\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-2.6+3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3 \text{ ពិត}$$

សញ្ញា "=" កើតមានពេល $a=b=c=1$ ។

18. $a)$ សរសេរប្រភាគ $\frac{-7}{8}$ ក្រោមរាង ផលបូកនៃប្រភាគបី ដែលមានភាគយកស្មើ $-1$ និងភាគបែងផ្សេងគ្នា។

$b)$ គេឲ្យ $S=\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\frac{1}{24}+\frac{1}{25}+\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\frac{1}{28}+\frac{1}{29}+\frac{1}{30}$

ចូរប្រៀបធៀប $S$ ជាមួយនឹង $\frac{1}{3}$ ។

## សំរាយ

$a)$ • យើងសង្កេតឃើញថា 8 គឺជាចំនួនគូ, ហើយ 7 គឺជាចំនួនសេស, អាចសរសេរ:

$7=1+2+4$ ដើម្បីបាន 2 និង 4 ដែលជាតួចែកនៃ 8 ។

តាមនោះ យើងបានបណ្ដាប្រភាគដែលត្រូវរកគឺ:

$$\frac{-7}{8}=\frac{-1}{8}+\frac{-2}{8}+\frac{-4}{8}$$

រឺ $$\frac{-7}{8}=\frac{-1}{8}+\frac{-1}{4}+\frac{-1}{2}$$

$b)$ + យើងដឹងថា ប្រភាគវិជ្ជមានពីរដូចគ្នា ដែលមានភាគយកស្មើគ្នា, ប្រភាគដែលមានភាគបែងតូចជាងគេ នឹងមានតំលៃធំជាងគេ, ដូចនេះ បណ្ដាប្រភាគ $\frac{1}{21},\frac{1}{22},...,\frac{1}{29}$ សុទ្ធតែធំជាង $\frac{1}{30}$

នាំឲ្យ $$S>\underbrace{\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+...+\frac{1}{30}}_{10}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $S>\frac{1}{3}$

19 . $a)$ បង្ហាញថា តំលៃនៃកន្សោមខាងក្រោម មិនអាស្រ័យនឹង $x$:

$$\frac{x}{\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}-1} \quad (\text{ចំពោះ } x\neq 0)$$

$b)$ ចូលបំពេញក្នុងសញ្ញា * នូវបណ្ដាលេខដែលសមស្រប ក្នុងប្រមាណវិធីគុណខាងក្រោម:

$$\begin{array}{r} **** \\ \times \quad 9 \\ \hline 212*3 \end{array}$$

## សំរាយ

$a)$ យើងគ្រាន់តែតំរូវភាគបែងបន្តបន្ទាប់គ្នា គឺបានលទ្ធផលដូចខាងក្រោម:

$$\frac{x}{\frac{1}{1-\frac{1}{x+1}}-1}=\frac{x}{\frac{1}{\frac{x+1-x}{x+1}}-1}=\frac{x}{\frac{1}{\frac{1}{x+1}}-1}=\frac{x}{x+1-1}=\frac{x}{x}=1$$

ដូចនេះ កន្សោមដែលឲ្យ គឺមិនអាស្រ័យនឹង $x$ ទេ។

$b)$ + យើងដឹងថា ប្រមាណវិធីចែក គឺជាប្រមាណវិធីគណនា ប្រាសនៃប្រមាណវិធីគុណ នោះ ផលគុណ 212*3 ត្រូវចែកដាច់នឹង 9។

+ តាមការវិភាគខាងលើ និងតាមលក្ខណៈចែកដាច់នឹង 9 យើងបានៈ

ចំនួន 212*3 ចែកដាច់នឹង 9 $\Leftrightarrow$ $2+1+2+*+3=8+*$ ត្រូវចែកដាច់នឹង 9

ទាញបាន $*=1$។

+ យើងបាន ផលគុណដែលត្រូវរកស្មើនឹង 21213

ដូចនោះ យើងគ្រាន់តែធ្វើប្រមាណវិធីចែកមកវិញ យើងទទួលបានៈ

$21213:9=2357$ ជាលេខដែលត្រូវជំនួសចូលក្នុងបណ្តាសញ្ញា * នោះ។

20. មនុស្សមួយក្រុមរៀបចំឡើងជិះឡានមួយ។ បើមនុស្សម្នាក់អង្គុយកៅអីមួយ នោះនៅសល់មនុស្ស 4 នាក់គ្មានកៅអីអង្គុយ។ បើកៅអីមួយ អង្គុយពីរនាក់ នោះនៅសល់កៅអី 4 គ្មានមនុស្សអង្គុយ។ រកចំនួនមនុស្សមួយក្រុមនោះ ។

## សំរាយ

តាង $n$ ជាចំនួនមនុស្សមួយក្រុមនោះ លក្ខខណ្ឌ $(n>0)$

នាំឲ្យចំនួនកៅអីនៅលើឡាន ស្មើនឹង $x-4$

តាមបំរាប់ប្រធាន យើងបានៈ $\dfrac{x}{2}+4=x-4$

នាំឲ្យ $x=16$, ផ្ទៀងផ្ទាត់ឡើងវិញ ឃើញថាពិត

ដូចនេះ មនុស្សមួយក្រុមនោះ មាន 16 នាក់។

*បញ្ចប់ភាគទី៤ នៅថ្ងៃទី២៩ ខែកក្កដា ឆ្នាំ ២០១៣...*

*គ្មានជោគជ័យណា កើតឡើងដោយគ្មានការខិតខំប្រឹងប្រែងនោះទេ!!!!*

www.highschoolcam.blogspot.com