រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

Prepared by : LIM PHALKUN

104

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រជ្រើសរើស

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១១

សិស្សពូកែ និង អាហារូបករណ៍

Problem and Solution

104

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រជ្រើសរើស

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១១

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
Tel: 017 768 246
www.mathtoday.wordpress.com

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី
លោក លឹម ឆុន
លោក អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោកស្រី លី គុណ្ណកា លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !
សៀវភៅ ១០៤ លំហាត់អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រជ្រើសរើសដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងរួមមាន ១០៤ លំហាត់ យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសលំហាត់ពិសេសៗមកធ្វើដំណោះស្រាយ តាមរបៀបផ្សេងៗពីគ្នាយ៉ាងក្បោះក្បាយ ដែលអាចឲ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់ និង ឆាប់ចងចាំ ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវគំនិត និង វិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី១២តុលា ឆ្នាំ2011

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ
លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
Tel : 017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

១០៤ លំហាត់ជ្រើសរើស

១-ដោយដឹងថា $\tan\alpha = \frac{5}{12}$ និង $0^o < \alpha < 90^o$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ និង $\cot\alpha$ ។

២-ចូរគណនា $A = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$

$$B = (a\sin x + b\cos x)^2 + (a\cos x - b\sin x)^2$$

៣-គេដឹងថា $\sin x + \cos x = \frac{41}{29}$ ។

ចូរគណនាផលគុណ $\sin x.\cos x$ រួចទាញរក $\sin x$ និង $\cos x$ ។

៤-គេដឹងថា $\tan x + \cot x = a$ ដែល $0 < x < 90^o$ និង $a \geq 2$ ។

ចូរគណនា $\tan^3 x + \cot^3 x$ ជាអនុគមន៍នៃ a ។

៥-ដឹងថា $\cos a = \frac{m}{n+p}$, $\cos b = \frac{n}{p+m}$, $\cos c = \frac{p}{m+n}$

ចូរគណនាកន្សោម ៖

$$M = \frac{\sin^2 a}{2 + 2\cos a - \sin^2 a} + \frac{\sin^2 b}{2 + 2\cos b - \sin^2 b} + \frac{\sin^2 c}{2 + 2\cos c - \sin^2 c}$$

៦-ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព ៖

ក. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

ខ. $\frac{1}{4}(\sin^8 x + \cos^8 x) - \frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$

៧-គេដឹងថា $\tan x = \sqrt{\frac{b}{a}}$, $a > 0$, $b > 0$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\cos^4 x}{a} + \frac{\sin^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$

៨-គេដឹងថា $\tan^3 \varphi = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos^4 \varphi}{\sqrt[3]{a^2}} + \frac{\sin^4 \varphi}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$

៩-គេឲ្យ $\frac{\cos^4 x}{a} + \frac{\sin^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$

ដែល $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a + b \neq 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos^{10} x}{a^4} + \frac{\sin^{10} x}{b^4} = \frac{1}{(a+b)^4}$ ។

១០-គេឲ្យ $\cos\alpha=\frac{a}{b+c}$, $\cos\beta=\frac{b}{c+a}$, $\cos\gamma=\frac{c}{a+b}$

ចូរស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\gamma}{2}=1$ ។

១១-ចូរបង្ហាញថា $\tan 3a-\tan 2a-\tan a=\tan 3a\tan 2a\tan a$

ដែល $a\neq\frac{k\pi}{2}$ គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ k ។

១២-គេឱ្យ $a\,;b\,;c\,;d$ និង x ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}$ ដែល $x\neq k\pi\ ;\ k\in Z$

ចូរបង្ហាញថា $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$

១៣-គេឱ្យ $f_k(x)=\frac{1}{k}(\sin^k x+\cos^k x)$ ដែល $k=1\,;2\,;3\,;.$

ចូរបង្ហាញថា $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{1}$ ។

១៤-គេឱ្យ $a\,,\,b\,,\,c\,,\,d$ ជាចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $[\,0\,;\,\pi\,]$ ដោយដឹងថា

$$\begin{cases}\sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d)\\ \cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d)\end{cases}$$

ចូរបង្ហាញថា $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$ ។

១៥-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$

១៦-ចូរបង្ហាញថា៖

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \le 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

១៧-ចូរបង្ហាញថា $\left(1+\dfrac{a}{\sin x}\right)\left(1+\dfrac{b}{\cos x}\right) \ge \left(1+\sqrt{2ab}\,\right)^2$

ចំពោះគ្រប់ $a>0\,,\,b>0\,,\,0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ។

១៨-គេឲ្យ $x\,,\,y\,,\,z$ ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ ៖

$\cos x + \cos y + \cos z = 0$ និង $\cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0$

ចូរបង្ហាញថា $\cos 2x \cos 2y \cos 2z \le 0$ ។

១៩-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\ge\frac{1}{a+b}\qquad ;(a>0\ ,\ b>0)$$

២០-គេឲ្យអនុគមន៍

$$f(x)=\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}+\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}$$

ដែល $a\ ,\ b\ ,\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}\le f(x)\le 2\sqrt{\frac{a+b}{2}+c}$

រួចបញ្ជាក់តម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ $f(x)$ ។

២១-គេមានអនុគមន៍

$$f(x)=\sqrt{\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2}$$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍នេះ ។

២២-គេឲ្យ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2-71x+21<0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$ ។

២៣-គេឲ្យ θ ជាចំនួនពិតដែល $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

២៤-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\in(0,\frac{\pi}{4})$

ចូរបង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x}>(\sin x)^{\sin x}$

២៥-គេមានអនុគមន៍ f ដែលចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

គេមាន $f(x)+2f(-x)=3\cos x-\sin x$ ។

ចូរស្រាយថា $f(x)\le\sqrt{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

២៦-គេឲ្យអនុគមន៍ ៖

$f(x;y)=\left(a\cos x+b\cos y\right)^2+\left(a\sin x+b\sin y\right)^2$, $a>0$, $b>0$

ចំពោះគ្រប់ $x;\,y\in IR$ បង្ហាញថា $f(x;y)\le(a+b)^2$ ។

២៧-ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x, y \in IR$ ។

២៨-គេឱ្យអនុគមន៍

$$f(x)=4(\tan^2 x+\cot^2 x)-12(\tan x+\cot x)+9$$

ដែល $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ។ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

២៩-ចូរគណនា $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}$

៣០-គេឲ្យ $0<a<\frac{\pi}{2}$ និង $0<b<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\left(\frac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2+\left(\frac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2=1$ លុះត្រាតែ $a=b$ ។

៣១-គណនា $P=\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o$

៣២-បង្ហាញថា៖

$$(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\frac{1}{16}$$

៣៣-ចូរបង្ហាញថា

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$$

៣៤-គណនាតម្លៃនៃផលគុណ

$$P=(1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o)(1-\cot 3^o).....(1-\cot 44^o)$$

៣៥-ចូរគណនាតម្លៃផលគុណ៖

$$P=(\sqrt{3}+\tan 1^o)(\sqrt{3}+\tan 2^o).....(\sqrt{3}+\tan 29^o)$$

៣៦-ចូរគណនា $S=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}$

៣៧-ចូរគណនា $S=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$

៣៨-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$8\cos^3\frac{n\pi}{7}+4(-1)^n\cos^2\frac{n\pi}{7}-4\cos\frac{n\pi}{7}+(-1)^{n+1}=0 \quad , \ \forall n\in IN$$

៣៩-គេឲ្យកន្សោម

$S=\cos^3\frac{\pi}{7}+\cos^3\frac{3\pi}{7}+\cos^3\frac{5\pi}{7}$ និង $T=\cos^4\frac{\pi}{7}+\cos^4\frac{3\pi}{7}+\cos^4\frac{5\pi}{7}$

ក.ចូរស្រាយថាបីចំនួន $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$ ជាឬសរបស់សមីការ

$(E)\ :\ 8x^3-4x^2-4x+1=0$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ ៖

$$M=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}$$

$$N=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$$

និង $P=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$ ។

គ.គណនា $Q=\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{5\pi}{7}$ រួចរកតម្លៃ S និង T ។

៤០-ចូរបង្ហាញថា៖

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

៤១-គេដឹងថា $\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

ចូរស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

៤២-ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $]0;\frac{\pi}{2}[$ ដោយដឹងថា ៖

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$$

៤៣-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$64x^6-112x^4+56x^2-7=2\sqrt{1-x^2}$$ ។

៤៤-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\tan^6 x+(\tan^2 x+1)^3+(\tan^2 x+2)^3=(\tan^2 x+3)^3$$

៤៥-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

៤៦-១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ៖

$\cos(n+1)x = 2\cos x\cos(nx) - \cos(n-1)x \quad , x \in IR \ , n \in IN$

២.អនុវត្តន៍ ៖ ចូរសរសេរ $\cos 7x$ ជាអនុគមន៍នៃ $\cos x$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ ៖

$128\cos^7 x - 244\cos^5 x + 112\cos^3 x - 14\cos x - 1 = 0$ ។

៤៧-ក.ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$

ខ.ដោះស្រាយសមីការ

$\sin^2 x - \sqrt{2}\ \sin x.\cos x + (\sqrt{2}-1)\ \cos^2 x = 0$

គ.ចូរដោះស្រាយសមីការ $\frac{\tan x + \sqrt{2} - 1}{1-(\sqrt{2}-1)\ \tan x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

៤៨-ក.ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\cos\frac{7\pi}{12}$

ខ.ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} \cos^3 x + 3\cos x\cos^2 y = \dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{8} \\ 3\cos^2 x\cos y + \cos^3 y = \dfrac{\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{8} \end{cases}$$

៤៩-ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ $(\sin^3 x + \cos^3 x)^2 = \frac{13}{16} + \frac{1}{4}\sin^3 2x$

៥០-មានសមីការដឺក្រេទីពីរ ៖

$(E) : x^2 + (\frac{1}{\cos\phi} - 2)\,x + \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 = 0$ ដែល $0 \le \phi < \frac{\pi}{2}$

គេឧបមាថាសមីការ (E) មានឬសពីរតាងដោយ $\tan a$ និង $\tan b$

ក. កំនត់តម្លៃ ϕ ដើម្បីឲ្យ $a + b = \frac{\pi}{4}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ ϕ ដែលបានរកឃើញ

គ. ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{12}$ ។

៥១-គេឲ្យខ្សែកោង

$(P): y = f(x) = x^2 \sin\phi - 2(1+\sin\phi)x + 5 - \sin\phi$

ដែល $0 < \phi < \pi$ ។

កំនត់តម្លៃ ϕ ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង(P) ស្ថិតនៅលើអក្ស័អាប់ស៊ីសជានិច្ច

៥២-គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E): x^2 - (m^2 - m)x - m + 2 = 0$

គេសន្មតថាសមីការនេះមានឬសពីរតាងរៀងគ្នាដោយ $\tan a$

និង $\tan b$ ។

ក.ចូរកំនត់តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដើម្បីឲ្យ $a + b = \frac{\pi}{3}$ ។

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការខាងលើចំពោះ m ដែលបានរកឃើញ ។

គ.ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{12}$ ។

៥៣-គេឲ្យសមីការ $(E): x^3-(2m+3)x^2+5x-3m+2=0$

ឧបមាថាសមីការនេះមានឫសបីតាងដោយ $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ ។

ក.ចូរគណនា $A=\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ជាអនុគមន៍នៃ m ។

ខ.កំនត់ m ដើម្បីឲ្យ $A=4$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ m ដែលបានរកឃើញខាងលើ

៥៤-គេឲ្យសមីការ $(E): \cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=m$

ក.ចូរដោះស្រាយសមីការនេះកាលណា $m=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

ខ.រកលក្ខខ័ណ្ឌសម្រាប់ m ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឫស ។

៥៥-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log^2_{\sqrt{2}}(\sin x)+\log_{\sqrt{2}}(2\sin^3 x)=0$$

៥៦-គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$$U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ និង } U_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_n^2}}{2}} \quad , \forall n \in IN$$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៥៧-គេឲ្យ $a_0 = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2-5}{2(a_n+2)}$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n = \cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

៥៨-គេឲ្យ

$$\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2} \;,\; \sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3} \;,\; \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និង ស្រាយបញ្ជាក់

រូបមន្តនោះផង ។

៥៩-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត(U_n) កំនត់ដោយ $U_n = \sqrt{2}^n . \sin\frac{n\pi}{4}$

ដែល $n \in IN$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គ-គណនាផលបូក ៖

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦០-គេមានអនុគមន៍លេខ f កំនត់ពីសំណុំ IN ទៅសំណុំ IR

$f(0) = 0$ និង $f(n+1) = 2f(n) + \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ចូរកំនត់រក $f(n)$ ។

៦១-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ n ដោយ៖

$U_0 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$

ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ។

ក.តាង $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ ។ បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

៦២-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} Z_0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ Z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(Z_n + |Z_n| \right) ; n \in IN \end{cases} \quad \left(|Z_n| \text{ ជាម៉ូឌុលនៃ } Z_n \right)$$

សន្មតថា $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$, $\forall n \in IN$

ដែល $\rho_n > 0$, $\rho_n ; \theta_n \in IR$ ។

ក-ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1} ។

ខ-រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n) រួចគណនា θ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ចូរបង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}$

រួចបញ្ជាក់ ρ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦៣-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ $IN \cup \{0\}$ ដោយ ៖

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \quad , n \in IN \end{cases}$$

ក.ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.គណនាផលគុណ $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times .... \times U_n$ ។

៦៤-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ ៖

$U_0 = 0 \;\; ; \;\; U_1 = 1$ និង $\forall n \in IN : \; U_{n+2} = 2U_{n+1}\cos a - U_n$

ដែល $a \in IR$ ។

ក. តាង $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)\, U_n \;\; , \forall n \in IN \cup \{0\}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ រួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦៥-គណនាផលបូកខាងក្រោម

$$S_n = \frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{\tan\frac{\pi}{16}}{\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{\tan\frac{\pi}{32}}{\cos\frac{\pi}{16}} + \dots + \frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\propto$ ។

៦៦-គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d ។

គេតាង $S_n = \frac{\cos a_1}{\cos d} + \frac{\cos a_2}{\cos^2 d} + \frac{\cos a_3}{\cos^3 d} + \dots + \frac{\cos a_n}{\cos^n d}$

ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \dots$ ។

ចូរស្រាយថា $S_n = \frac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$

៦៧-ក.ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{2+\sin(2n-1)x} - \frac{1}{2+\sin(2n+1)x} = \frac{2\sin x\cos(2nx)}{[2+\sin(2n-1)x\ ][2+\sin(2n+1)x\ ]}$$

ខ.គណនា $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(2kx)}{\left(2+\sin(2k-1)x\right)\left(2+\sin(2k+1)x\right)}\right]$ ។

៦៨-ក.ចូរស្រាយថា

$$\cos(2nx)=\frac{1}{2\sin x}\left[\ \sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\ \right]$$

ខ.គណនាផលបូក

$$S_n=\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+.....+\cos(2nx)$$

គ.ទាញរកផលបូក

$$T_n=\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+.....+\cos^2(nx)$$

ឃ.គណនាផលបូក

$$U_n=\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+.....+\sin^2(nx)$$

៦៩-ក.ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

ខ.ចូរគណនាផលបូក $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k\tan^3\frac{a}{2^n}}{1-\tan^2\frac{a}{2^n}}\right)$

៧០-ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

ខ. ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

៧១-គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right) = \tan x.\tan^2\frac{x}{2}.\tan^4\frac{x}{4}.....\tan^{2^n}\frac{x}{2^n}$$

៧២-គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$$

៧៣-គណនាផលគុណ៖

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right] \quad \text{ដែល } |x| < \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

៧៤-ក.ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

ខ.ចូរគណនា $S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin\frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{\sin\frac{a}{2^n}}$

៧៥-ក.ចូរស្រាយថា $1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

ខ.គណនា $P_n = (1 + \frac{1}{\cos a})(1 + \frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1 + \frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1 + \frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$

៧៦-ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

ខ.ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right]$

៧៧-ក.ចូរស្រាយថា $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

ខ.ចូរគណនា

$$S_n = \sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{a}{3^3} + ... + 3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$$

៧៨-ក.ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\sin^2 x}$

ខ.ចូរគណនា $S_n=\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}}+\frac{1}{4^2\cos\frac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}$

៧៩-ក.ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x$

ខ.ចូរគណនា $S_n=\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{\sin\frac{a}{2^n}}$

៨០-ក.ចូរស្រាយថា $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

ខ.ចូរគណនា $S_n=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+....+\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$

៨១-ក.ចូរបង្ហាញថា $1+\tan x\tan(nx)=\frac{\cos(n-1)x}{\cos x\cos(nx)}$

ខ.គណនា $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left[1+\tan x\tan(kx)\right]$ ។

៨២-ក.ចូរស្រាយថា

$$\frac{1}{\cos(nx).\cos(n+1)x} = \frac{1}{\sin x}\left[\tan(n+1)x - \tan(nx)\right]$$

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{p=1}^{n}\left[\frac{1}{\cos(px)\ \cos(p+1)x}\right]$

៨៣-ក.ចូរស្រាយថា

$$\tan(n+1)x - \tan(nx) = \tan x\left[1 + \tan(nx)\tan(n+1)x\right]$$

ខ.គណនាផលបូក

$$S_n = \tan x \tan 2x + \tan 2x \tan 3x + ... + \tan(nx)\tan(n+1)x$$

៨៤-ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $2\cos x \ - 1 = \frac{1+2\cos 2x}{1+2\cos x}$

ខ.ចូរគណនាផលគុណ ៖

$$P_n = (2\cos a - 1)(2\cos\frac{a}{2} - 1)(2\cos\frac{a}{2^2} - 1).....(2\cos\frac{a}{2^n} - 1)$$

៨៥-ក.ចូរស្រាយថា $\frac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\frac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$

ខ.ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{3^k\tan^3\frac{a}{3^k}}{1-3\tan^2\frac{a}{3^k}}\right]$

៨៦-គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មានជ្រុង **a , b , c** និងមានមុំក្នុង α,β,γ ។ បើ $\alpha=3\beta$ ចូរបង្ហាញថា $(a-b)(a^2-b^2)=bc^2$

៨៧-គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមាន **a , b , c** ជារង្វាស់ជ្រុងឈម

រៀងគ្នានៃមុំ **A , B , C** ។

តាង **p** ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ក.ចូរស្រាយថា $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ រួចទាញរកទំនាក់ទំនង

ពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។

ខ.ទាញបញ្ជាក់ថា $bc.\cos^2\frac{A}{2}+ac.\cos^2\frac{B}{2}+ab.\cos^2\frac{C}{2}=p^2$

៨៨-គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក. ចូរស្រាយថា $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3}$ ។

៨៩-គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C < 1$

៩០-គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C > 2$ ។

៩១-គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក. ចូរស្រាយថា $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ ។

ខ. ចូរស្រាយថា $\cot^2 A-1=2\cot 2A\cot A$ ។

គ. គេដឹងថាមុំ $A\,;B\,;C$ បង្កើតបានជាស្វីតធរណីមាត្រ

មួយដែលមានរេសុងស្មើនឹង $q=2$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}=8$ ។

៩២-រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ ៖

$$P(x)=\tan^2 x+\cot^2 x-2(\tan x+\cot x)+27$$

$$Q(x)=\tan^2 x+\cot^2 x-8(\tan x+\cot x)+87$$

ដែល $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ។

៩៣-គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ។

បង្ហាញថាបើ $\tan\frac{A}{3}$, $\tan\frac{B}{3}$, $\tan\frac{C}{3}$ ជាឫសរបស់សមីការ

$(E): x^3+ax^2+bx+c=0$ នោះគេបាន $\sqrt{3}+a=\sqrt{3}b+c$ ។

៩៤-គេឲ្យត្រីកោណ ABC ដែល $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ?

៩៥-មានត្រីកោណ ABC មួយដែល $BC = a\,,\ AC = b\,,\ AB = c$ ។

តាង R និង S រៀងគ្នាជាកាំ និង ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC នេះ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{4S}$

៩៦-ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖

ក/ $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C) = \dfrac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{2}$

ខ/ $\left(1 + \dfrac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3 \geq \left(\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$

៩៧-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1 - \cos A \leq \dfrac{a^2}{2bc}$

ដែល $a\,,\ b\,,\ c$ ជាជ្រុងត្រីកោណ ABC ។

ខ.ទាញបញ្ជាក់ថា $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \leq \dfrac{1}{8}$

៩៨-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$$

៩៩-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A, B, C ជាមុំស្រួចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right)$$ ។

ចូរស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមង្ស ?

១០០-តាង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC មួយ

ក. ចូរស្រាយថា $(\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) = \frac{2R^2}{S}$

ខ. បើ ABC ជាមុំស្រួចនោះចូរទាញឱ្យបានថា $\cos A \cos B \cos C \le \frac{1}{8}$

១០១-ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេឱ្យ $S_n=\cos^n\frac{\pi}{12}+\sin^n\frac{\pi}{12}$

ក. គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ខ. បង្ហាញថា $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$

១០២-គេឱ្យត្រីកោណ ABC ហើយគេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

១០៣-គេយក A, B, C ជាមុំបីនៃត្រីកោណ ABC ។

តាងអនុគមន៍ $y=\cot A+\frac{2\sin A}{\cos A+\cos(B-C)}$

រកតម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍នេះ ?

១០៤-គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយហើយតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$ ។

លំហាត់ទី១

ដោយដឹងថា $\tan\alpha = \frac{5}{12}$ និង $0^o < \alpha < 90^o$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ និង $\cot\alpha$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ និង $\cot\alpha$

គេមាន $\tan\alpha = \frac{5}{12}$ និង $0^o < \alpha < 90^o$

តាមទំនាក់ទំនង $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

គេទាញ $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{144}{169}$

ដោយ $0^o < \alpha < 90^o$ នោះ $\cos\alpha > 0$

ដូចនេះ $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ ។

ហើយតាមទំនាក់ទំនង $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

គេទាញ $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \dfrac{5}{12}.\dfrac{12}{13} = \dfrac{5}{13}$

រួច $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{12}{5}$ ។

ដូចនេះ $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$; $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$; $\cot\alpha = \dfrac{12}{5}$ ។

លំហាត់ទី២

ចូរគណនា $A=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$

$$B=(a\sin x+b\cos x)^2+(a\cos x-b\sin x)^2$$

ដំណោះស្រាយ

គណនា A និង B

$$A=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$$

ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ នោះ $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

ឬ $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

គេបាន $A=\sqrt{\sin^4 x+4(1-\sin^2 x)}+\sqrt{\cos^4 x+4(1-\cos^2 x)}$

$$=\sqrt{\sin^4 x-4\sin^2 x+4}+\sqrt{\cos^4 x-4\cos^2 x+4}$$
$$=\sqrt{(\sin^2 x-2)^2}+\sqrt{(\cos^2 x-2)^2}$$
$$=|\sin^2 x-2|+|\cos^2 x-2|$$

ដោយ $0\le\sin^2 x\le 1$ និង $0\le\cos^2 x\le 1$

គេបាន $A=-(\sin^2 x-2)-(\cos^2 x-2)$

$$=4-(\sin^2 x+\cos^2 x)=4-1=3 \quad ។$$

$$B=(a\sin x+b\cos x)^2+(a\cos x-b\sin x)^2$$

$$=a^2(\sin^2 x+\cos^2 x)+b^2(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$=a^2+b^2$$

ដូចនេះ $A=3$, $B=a^2+b^2$ ។

លំហាត់ទី៣

គេដឹងថា $\sin x+\cos x=\frac{41}{29}$ ។

ចូរគណនាផលគុណ $\sin x.\cos x$ រួចទាញរក $\sin x$ និង $\cos x$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $\sin x.\cos x$

គេមាន $(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$

ដោយ $\sin x+\cos x=\frac{41}{29}$ និង $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

គេបាន $\left(\frac{41}{29}\right)^2=1+2\sin x\cos x$ ឬ $2\sin x\cos x=\frac{41^2-29^2}{29^2}=\frac{840}{841}$

ដូចនេះ $\sin x.\cos x=\frac{420}{841}$ ។

ទាញរក $\sin x$ និង $\cos x$:

ដោយគេមាន $\sin x+\cos x=\frac{41}{29}$

និង $\sin x.\cos x=\frac{420}{841}$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត $\sin x$ និង $\cos x$

ជាឫសសមីការ $X^2-\frac{41}{29}X+\frac{420}{841}=0$ ។

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយសមីការនេះគេបាន $X_1=\frac{20}{29}$; $X_2=\frac{21}{29}$

ដូចនេះ $\sin x=\frac{20}{29}$; $\cos x=\frac{21}{29}$ ឬ $\sin x=\frac{21}{29}$; $\cos x=\frac{20}{29}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេដឹងថា $\tan x+\cot x=a$ ដែល $0<x<90^{o}$ និង $a\geq 2$ ។

ចូរគណនា $\tan^{3}x+\cot^{3}x$ ជាអនុគមន៍នៃ a ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\tan^{3}x+\cot^{3}x$ ជាអនុគមន៍នៃ a

គេមាន $\tan x+\cot x=a$

គេបាន $(\tan x+\cot x)^{2}=a^{2}$

$$\tan^{2}x+2\tan x\cot x+\cot^{2}x=a^{2}$$ ដោយ $\tan x\cot x=1$

គេទាញ $\tan^{2}x+\cot^{2}x=a^{2}-2$

តាមសមភាព $A^{3}+B^{3}=(A+B)(A^{2}-A.B+B^{2})$

គេបាន $\tan^{3}x+\cot^{3}x=(\tan x+\cot x)(\tan^{2}x-\tan x\cot x+\cot^{2}x)$

$$=a(a^{2}-2-1)=a(a^{2}-3)$$

ដូចនេះ $\tan^{3}x+\cot^{3}x=a^{3}-3a$ ។

លំហាត់ទី៥

គេដឹងថា $\cos a=\dfrac{m}{n+p}$, $\cos b=\dfrac{n}{p+m}$, $\cos c=\dfrac{p}{m+n}$

ចូរគណនាកន្សោម ៖

$$M=\frac{\sin^2 a}{2+2\cos a-\sin^2 a}+\frac{\sin^2 b}{2+2\cos b-\sin^2 b}+\frac{\sin^2 c}{2+2\cos c-\sin^2 c}$$

ដំណោះស្រាយ

$$M=\frac{\sin^2 a}{2+2\cos a-\sin^2 a}+\frac{\sin^2 b}{2+2\cos b-\sin^2 b}+\frac{\sin^2 c}{2+2\cos c-\sin^2 c}$$

គេមាន $\sin^2 a=1-\cos^2 a=(1-\cos a)(1+\cos a)$

និង $2+2\cos a-\sin^2 a=1+2\cos a+\cos^2 a=(1+\cos a)^2$

គេបាន $\dfrac{\sin^2 a}{2+2\cos a-\sin^2 a}=\dfrac{(1-\cos a)(1+\cos a)}{(1+\cos a)^2}=\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}$

ហើយ $\dfrac{\sin^2 b}{2+2\cos b-\sin^2 b}=\dfrac{1-\cos b}{1+\cos b}$

និង $\dfrac{\sin^2 c}{2+2\cos c-\sin^2 c}=\dfrac{1-\cos c}{1+\cos c}$

គេបាន $E=\frac{1-\cos a}{1+\cos a}+\frac{1-\cos b}{1+\cos b}+\frac{1-\cos c}{1+\cos c}$

$$=\frac{1-\frac{m}{n+p}}{1+\frac{m}{n+p}}+\frac{1-\frac{n}{p+m}}{1+\frac{n}{p+m}}+\frac{1-\frac{p}{m+n}}{1+\frac{p}{m+n}}$$

$$=\frac{n+p-m+p+m-n+m+n-p}{m+n+p}=1$$

ដូចនេះ $E=1$ ។

លំហាត់ទី៦

ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព ៖

ក. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

ខ. $\frac{1}{4}(\sin^8 x + \cos^8 x) - \frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\sin^4 x \cos^4 x$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព ៖

ក. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

គេមាន $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ឬ $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

យក $a = \sin^2 x$ និង $b = \cos^2 x$ គេបាន ៖

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

ដោយ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ដូចនេះ $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$ ។

ខ. $\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$

គេមាន $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ឬ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

ដូចគ្នាដែរ $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

ឬ $a^4+b^4=\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2$

ដោយយក $a=\sin^2 x$ និង $b=\cos^2 x$ គេបានសមភាព

$$\begin{aligned}\sin^4 x+\cos^4 x&=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\\&=1-2\sin^2 x\cos^2 x\end{aligned}$$

ហើយគេមាន ៖

$$\begin{aligned}\sin^8 x+\cos^8 x&=\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right]^2-2\sin^4 x\cos^4 x\\&=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x\\&=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x\end{aligned}$$

តាងអនុគមន៍

$$f(x)=\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}(1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x)-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x\cos^2 x)+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x-2+4\sin^2 x\cos^2 x+1}{4}$$

$$=\frac{2\sin^4 x\cos^4 x}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$$

ដូចនេះ $\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$ ។

លំហាត់ទី៧

គេដឹងថា $\tan x=\sqrt{\frac{b}{a}}\ ,\ a>0\ ,b>0$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$

គេមាន $\tan x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ នាំឱ្យ $\tan^2 x=\frac{b}{a}$ ដោយ $\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}$

គេបាន $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{b}{a}$ ឬ $\frac{\cos^2 x}{a}=\frac{\sin^2 x}{b}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{a+b}=\frac{1}{a+b}$

គេទាញ $\frac{\cos^2 x}{a}=\frac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\frac{\cos^4}{a}=\frac{a}{(a+b)^2}$ (1)

ហើយ $\frac{\sin^2 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\frac{\sin^4}{b}=\frac{b}{(a+b)^2}$ (2)

បូកសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន៖

$\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{a}{(a+b)^2}+\frac{b}{(a+b)^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2}=\frac{1}{a+b}$ ពិត។

លំហាត់ទី៨

គេដឹងថា $\tan^3\varphi = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}} + \frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}} + \frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$

គេមាន $\tan^3\varphi = \frac{b}{a}$ នាំឱ្យ $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

គេទាញ $\frac{\cos\varphi}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt[3]{b}}$

ឬ $\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$

គេទាញ $\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$ និង $\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$

គេទាញ $\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2}$

និង $\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2}$

បូកសមីការពីនេះគេទទួលបាន ៖

$$\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}} + \frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}} + \frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យ $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$

ដែល $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a+b\neq 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{1}{(a+b)^4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$

យើងបាន $(a+b)(b\cos^4 x+a\sin^4 x)=ab$

$$ab\cos^4 x+a^2\sin^4 x+b^2\cos^4 x+ab\sin^4 x-ab=0$$

$$a^2\sin^4 x+b^2\cos^4 x+ab\,(\sin^4 x+\cos^4 x-1\,)=0$$

$$a^2\sin^2 x+b^2\cos^4 x-2ab\sin^2 x\cos^2 x=0$$

$$(a\sin^2 x-b\cos^2 x)=0$$

គេទាញ $\frac{\cos^2 x}{a}=\frac{\sin^2 x}{b}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{a+b}=\frac{1}{a+b}$

គេបាន $\frac{\cos^2 x}{a}=\frac{1}{a+b}$ នាំឲ្យ $\frac{\cos^{10} x}{a^4}=\frac{a}{(a+b)^5}$ $\quad(1)$

ហើយ $\frac{\sin^2 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ នាំឲ្យ $\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{a}{(a+b)^5}$ $\quad(2)$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន

$$\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{a+b}{(a+b)^5}=\frac{1}{(a+b)^4}$$

ដូចនេះ $\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{1}{(a+b)^4}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យ $\cos\alpha = \frac{a}{b+c}$, $\cos\beta = \frac{b}{c+a}$, $\cos\gamma = \frac{c}{a+b}$

ចូរស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} = 1$

យើងមាន $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

គេបាន $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}} = \frac{b+c-a}{b+c+a}$

$$\tan^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta} = \frac{1-\frac{b}{c+a}}{1+\frac{b}{c+a}} = \frac{c+a-b}{c+a+b}$$

$$\tan^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma} = \frac{1-\frac{c}{a+b}}{1+\frac{c}{a+b}} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

យើងបាន ៖

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\gamma}{2} = \frac{b+c-a}{a+b+c}+\frac{c+a-b}{a+b+c}+\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\gamma}{2} = \frac{b+c-a+c+a-b+a+b-c}{a+b+c}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$ ពិត

ដូចនេះ $\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\gamma}{2} = 1$ ។

លំហាត់ទី១១

ចូរបង្ហាញថា $\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a \tan 2a \tan a$

ដែល $a \neq \frac{k\pi}{2}$ គ្រប់ចំនួនគត់រឺឡាទីហ្វ k ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a \tan 2a \tan a$

គេមាន $\tan 3a = \tan(2a + a)$

$$\tan 3a = \frac{\tan 2a + \tan a}{1 - \tan 2a \tan a}$$

$$\tan 3a(1 - \tan 2a \tan a) = \tan 2a + \tan a$$

$$\tan 3a - \tan 3a \tan 2a \tan a = \tan 2a + \tan a$$

ដូចនេះ $\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a \tan 2a \tan a$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ $a\,;b\,;c\,;d$ និង x ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}$$ ដែល $x\neq k\pi\ ;\ k\in Z$

ចូរបង្ហាញថា $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$

ដំណោះស្រាយ

តាង $\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}=t$

គេទាញ $\begin{cases}\sin x=at\\ \sin 2x=bt\\ \sin 3x=ct\\ \sin 4x=dt\end{cases}$

គេមាន $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x$

$$\sin^2 4x=4\sin^2 2x\cos^2 2x$$

$$\sin^2 4x=4\sin^2 2x(1-\sin^2 2x)$$

$$d^2t^2\quad=4b^2t^2(1-b^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{b^2}\left(1-\frac{d^2}{4b^2}\right) \quad (1)$

ម៉្យាងទៀត $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\sin 3x = \sin x(3-4\sin^2 x)$$

$$ct = at(3-4a^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{4a^2}(3-\frac{c}{a}) \quad (2)$

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន៖

$$\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{d^2}{4b^2}\right) = \frac{1}{4a^2}\left(3-\frac{c}{a}\right)$$

$$\frac{4b^2-d^2}{4b^4} = \frac{3a-c}{4a^3}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង a^3b^4 គេបាន $a^3(4b^2-d^2) = b^4(3a-c)$

ដូចនេះ $a^3(4b^2-d^2) = b^4(3a-c)$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យ $f_k(x)=\frac{1}{k}(\sin^k x+\cos^k x)$ ដែល $k=1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;.$

ចូរបង្ហាញថា $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{1}$

គេមាន $f_4(x)=\frac{1}{4}(\sin^4 x+\cos^4 x)$

$$=\frac{1}{4}[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right)$$

ហើយ $f_6(x)=\frac{1}{6}(\sin^6 x+\cos^6 x)$

$$f_6(x)=\frac{1}{6}\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-3\sin^2 x\cos^2 x\right)$$

គេបាន $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{1}$

ដូចនេះ $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{1}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យ a , b , c , d ជាចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $[\,0 ; \pi\,]$ ដោយដឹងថា

$$\begin{cases} \sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d) \\ \cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d) \end{cases}$$

ចូរបង្ហាញថា $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\begin{cases} \sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d) \\ \cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d) \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} \sin a - 8\sin d = 4\sin c - 7\sin b \\ \cos a - 8\cos d = 4\cos c - 7\cos b \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} (\sin a - 8\sin d)^2 = (4\sin c - 7\sin b)^2 \quad (i) \\ (\cos a - 8\cos d)^2 = (4\cos c - 7\cos b)^2 \quad (ii) \end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$65 - 16\cos(a-d) = 65 - 56\cos(b-c)$$

$$-16\cos(a-d) = -56\cos(b-c)$$

ដូចនេះ $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$ ។

លំហាត់ទី១៥

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$

ឧបមាថា $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$ ពិត

សមមូល $(a\cos x+b\sin x)^2\le a^2+b^2$

ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ នោះគេបាន ៖

$$(a\cos x+b\sin x)^2\le(a^2+b^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

$$a^2\cos^2 x+2ab\sin x\cos x+b^2\sin^2 x\le a^2\sin^2 x+a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x$$

ឬ $a^2\sin^2 x-2ab\sin x\cos x+b^2\cos^2 x\ge 0$

ឬ $(a\sin x-b\cos x)^2\ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $|a\cos x+b\sin x|\le\sqrt{a^2+b^2}$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៦

ចូរបង្ហាញថា៖

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \le 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \le 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (1)$

-បើ $\cos x = 0$ នោះ $\sin^2 x \le 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ពិត

-បើ $\cos x \ne 0$ យើងចែកអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង $\cos^2 x$

$$(\tan x + a)(\tan x + b) \le \left[1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\cos^2 x}$$

តាង $t = \tan x$ នោះ $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$

គេបាន $(t+a)(t+b) = \left[1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left(1 + t^2\right)$

$$t^2+(a+b)t+ab\le 1+t^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2-(a+b)t+1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab\ge 0$$

$$\left(\frac{a+b}{2}t-1\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\ge 0$$ ពិត

ដូចនេះ $(\sin x+a\cos x)(\sin x+b\cos x)\le 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ។

លំហាត់ទី១៧

ចូរបង្ហាញថា $\left(1+\dfrac{a}{\sin x}\right)\left(1+\dfrac{b}{\cos x}\right)\geq\left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$

ចំពោះគ្រប់ $a>0$, $b>0$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\left(1+\dfrac{a}{\sin x}\right)\left(1+\dfrac{b}{\cos x}\right)\geq\left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$

គេមាន $(1+\dfrac{a}{\sin x})(1+\dfrac{b}{\cos x})=1+\dfrac{a}{\sin x}+\dfrac{b}{\cos x}+\dfrac{ab}{\sin x\cos x}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$\dfrac{a}{\sin x}+\dfrac{b}{\cos x}\geq\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x\cos x}}$ នោះគេបាន ៖

$(1+\dfrac{a}{\sin x})(1+\dfrac{b}{\cos x})\geq 1+\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{\sin x\cos x}}+\dfrac{ab}{\sin x\cos x}$

$$(1+\frac{a}{\sin x})(1+\frac{b}{\cos x}) \geq (1+\sqrt{\frac{ab}{\sin x\cos x}})^2$$

$$(1+\frac{a}{\sin x})(1+\frac{b}{\cos x}) \geq (1+\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{\sin 2x}})^2 \geq (1+\sqrt{2ab})^2$$

ពីព្រោះគ្រប់ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ គេមាន $\sin 2x \leq 1$ ។

ដូចនេះ $\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right) \geq \left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យ x , y , z ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ ៖

$\cos x + \cos y + \cos z = 0$ និង $\cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0$

ចូរបង្ហាញថា $\cos 2x \cos 2y \cos 2z \le 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cos 2x \cos 2y \cos 2z \le 0$

តាមរូបមន្ត $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

គេទាញ $4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x \quad (1)$

$$4\cos^3 y = 3\cos y + \cos 3y \quad (2)$$

$$4\cos^3 z = 3\cos z + \cos 3z \quad (3)$$

បូកទំនាក់ទំនង (1) , (2) , (3) គេបាន ៖

$4\cos^3 x + 4\cos^3 y + 4\cos^3 z = 0$

ឬ $\cos^3 x + \cos^3 y + \cos^3 z = 0$

(ព្រោះ $\cos x+\cos y+\cos z=0$ និង $\cos 3x+\cos 3y+\cos 3z=0$)

គេមាន $\cos x+\cos y+\cos z=0$

គេបាន $\cos x+\cos y=-\cos z$ លើកជាគូបគេបាន ៖

$$(\cos x+\cos y)^3=-\cos^3 z$$
$$\cos^3 x+3\cos x\cos y(\cos x+\cos y)+\cos^3 y=-\cos^3 z$$
$$\cos^3 x-3\cos x\cos y\cos z+\cos^3 y=-\cos^3 z$$
$$\cos^3 x+\cos^3 y+\cos^3 x=3\cos x\cos y\cos z$$

ដោយ $\cos^3 x+\cos^3 y+\cos^3 z=0$ គេទាញ $3\cos x\cos y\cos z=0$

នាំឲ្យ $\cos x=0$ ឬ $\cos y=0$ ឬ $\cos z=0$ ។

ដោយសន្មតយក $\cos x=0$ នោះ $\cos y=-\cos z$

គេបាន ៖

$$\cos 2x\cos 2y\cos 2z=(2\cos^2 x-1)(2\cos^2 y-1)(2\cos^2 z-1)$$
$$\cos 2x\cos 2y\cos 2z=-(2\cos^2 z-1)^2\le 0$$

ដូចនេះបញ្ហាត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១៩

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\geq\frac{1}{a+b} \qquad ;(a>0\ ,\ b>0\ )$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\geq\frac{1}{a+b}$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេបាន៖

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{(\sin^2 x)^2}{a}+\frac{(\cos^2 x)^2}{b}$$

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\geq\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{a+b}$$

ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

ដូចនេះ $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\geq\frac{1}{a+b}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឲ្យអនុគមន៍

$$f(x)=\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}+\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}$$

ដែល **a , b , c** ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c} \le f(x) \le 2\sqrt{\frac{a+b}{2}+c}$

រួចបញ្ជាក់តម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c} \le f(x) \le 2\sqrt{\frac{a+b}{2}+c}$

យើងមាន ៖

$$f(x)=\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}+\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c} \quad (1)$$

ដោយ **a , b , c** ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះ $\forall x\in IR : f(x)>0$

លើកអង្គទាំងពីរនៃ **(1)** ជាការេគេបាន ៖

$$f^2(x)=\left(\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}+\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}\right)^2$$

$$f^2(x)=a+b+2c+2\sqrt{(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c)(a\cos^2 x+b\sin^2 x+c)} \quad (2)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីគ្រប់ចំនួនពិត $A,\ B\ge 0$

គេមាន $A+B\ge 2\sqrt{A.B}$ ឬ $2\sqrt{A.B}\le A+B$

គេបាន ៖

$$2\sqrt{(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c)(a\cos^2 x+b\sin^2 x+c)} \le a+b+2c$$

តាមទំនាក់ទំនង (2) គេទាញបាន ៖

$$f^2(x)\le a+b+2c+a+b+2c=4(\frac{a+b}{2}+c)$$

នាំឲ្យ $f(x)\le 2\sqrt{\frac{a+b}{2}+c} \quad (3)$

ម្យ៉ាងទៀតយើងតាង ៖

$$P(x)=(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c)(a\cos^2 x+b\sin^2 x+c)$$

$$P(x)=[\,a(1-\cos^2 x)+b\cos^2 x+c]\,[a\cos^2 x+b(1-\cos^2 x)+c]$$

$$P(x)=[(a+c)+(b-a)\cos^2 x]\,[\,(b+c)-(b-a)\cos^2 x]$$

$$P(x)=(a+c)(b+c)+(b-a)^2\cos^2 x-(b-a)^2\cos^4 x$$

$$P(x)=(a+c)(b+c)+(b-a)^2\cos^2 x\sin^2 x$$

យើងមាន $(b-a)^2\sin^2 x\cos^2 x\geq 0 \quad , \forall x\in IR$

គេទាញបាន $P(x)\geq (a+c)(b+c) \quad , \forall x\in IR$

ទំនាក់ទំនង **(2)** គេអាចសរសេរ ៖

$$f^2(x)=a+b+2c+2\sqrt{P(x)}\geq a+b+2c+2\sqrt{(a+c)(b+c)}$$

$$f^2(x)\geq (a+c)+(b+c)+2\sqrt{(a+c)(b+c)}$$

$$f^2(x)\geq (\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c})^2$$

គេទាញ $f(x)\geq \sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$ **(4)**

តាមទំនាក់ទំនង **(3)** និង **(4)** គេទាញបាន ៖

$$\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}\ \leq\ f(x)\ \leq\ 2\sqrt{\frac{a+b}{2}+c}$$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

លំហាត់ទី២១

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2}$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍នេះ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $f(x)$

$$f(x)=\sqrt{(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2}$$

$$=\sqrt{\cos^4 x+2+\frac{1}{\cos^4 x}+\sin^4 x+2+\frac{1}{\sin^4 x}}$$

$$=\sqrt{4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x})}$$

$$=\sqrt{4+(\cos^4 x+\sin^4 x)(1+\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x})}$$

$$=\sqrt{4+\left[(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right](1+\frac{16}{\sin^4 2x})}$$

$$=\sqrt{4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})}$$

ដោយគេមាន $\sin^2 2x \le 1$ នាំឲ្យ $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x \ge \frac{1}{2}$

និង $1+\frac{16}{\sin^4 2x} \ge 17$ ។

គេទាញ $4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x}) \ge 4+\frac{17}{2}=\frac{25}{2}$

យើងបាន ៖

$$f(x)=\sqrt{4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})} \ge \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍គឺ $m=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឲ្យ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2 - 71x + 21 < 0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right) < 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right) < 0$

តាង $f(x) = 60x^2 - 71x + 21$

បើ $f(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^2 - 71x + 21 = 0$

$\Delta = (-71)^2 - 4(60)(21) = 5041 - 5040 = 1$

គេទាញឫស $x_1 = \frac{71-1}{120} = \frac{7}{12}$, $x_2 = \frac{71+39}{120} = \frac{3}{5}$

យើងបាន $f(x) = 60x^2 - 71x + 21 < 0$

នាំឲ្យ $\frac{7}{12} < x < \frac{3}{5}$ ឬ $\frac{7}{4} < 3x < \frac{9}{5}$

ឬ $\frac{3}{4} < 3x-1 < \frac{4}{5}$ នាំឲ្យ $\frac{4}{5} < \frac{1}{3x-1} < \frac{4}{3}$

គេទាញ $\frac{4\pi}{5} < \frac{\pi}{3x-1} < \frac{4\pi}{3}$ នាំឲ្យ $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right) < 0$ ។

ដូចនេះ បើ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2 - 71x + 21 < 0$

នោះគេបាន $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right) < 0$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យ θ ជាចំនួនពិតដែល $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

តាមវិសមភាព **Bernoulli**

គេមាន $(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x\ ,\ \forall x>-1\ ,\ \alpha>0$

យើងមាន ៖

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}=\left(1+\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}<1+\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}<\frac{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}$$

ឬ $(\sin\theta)^{\cos\theta} > \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}$ **(1)**

ស្រាយដូចខាងលើនេះដែរយើងបាន៖

$$(\cos\theta)^{\sin\theta} > \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta} \quad (2)$$

បូកវិសមភាព **(1)** និង **(2)** ខាងលើនេះយើងបាន ៖

$$(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta} > \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}$$

ដោយគេមាន $\dfrac{\mathrm{son}\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta} > 1$

ដូចនេះ $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta} > 1$ ។

លំហាត់ទី២៤

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \in (0, \frac{\pi}{4})$

ចូរបង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$

តាមវិសមភាព **Bernoulli** ចំពោះគ្រប់ចំនួន x និង a

ដែល $x > -1$ និង $a > 1$

យើងមាន $(1+x)^a \geq 1 + ax$ ។

ហេតុនេះចំពោះ $0 < x < \frac{\pi}{4}$ គេបាន៖

$$(\cos^2 x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} = (1-\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}.(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

ដោយ $(1-\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > 1 - \cos x$

និង $(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > 1+\cos x$

គេបាន $(\cos^2 x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > (1-\cos x)(1+\cos x) = \sin^2 x$

គេទាញ $(\cos x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > \sin x$

$$\ln(\cos x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > \ln(\sin x)$$

$$\frac{\cos x}{\sin x}\ln(\cos x) > \ln(\sin x)$$

$$\cos x \ln(\cos x) > \sin x \ln(\sin x)$$

$$\ln(\cos x)^{\cos x} > \ln(\sin x)^{\sin x}$$

ដូចនេះ $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេមានអនុគមន៍ f ដែលចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

គេមាន $f(x) + 2f(-x) = 3\cos x - \sin x$ ។

ចូរស្រាយថា $f(x) \le \sqrt{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $f(x) \le \sqrt{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

គេមាន $f(x) + 2f(-x) = 3\cos x - \sin x \quad (1)$

ដោយជំនួស x ដោយ $-x$ ក្នុងទំនាក់ទំនង (1) គេបាន

$f(-x) + 2f(x) = 3\cos x + \sin x \quad (2)$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{l|l} f(x) + 2f(-x) = 3\cos x - \sin x & 1 \\ 2f(x) + f(-x) = 3\cos x + \sin x & -2 \end{array}\right.}$$

$$-3f(x) \qquad = -3\cos x - 3\sin x$$

គេទាញបាន $f(x) = \cos x + \sin x$

$$f(x) = \sqrt{2}\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$

$$= \sqrt{2}\ \left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \sin x\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

ដោយ $\forall x \in IR : \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \leq 1$ ។

ដូចនេះ $f(x) \leq \sqrt{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យអនុគមន៍ ៖

$$f(x;y)=\left(a\cos x+b\cos y\right)^2+\left(a\sin x+b\sin y\right)^2$$

(ដែល $a>0$, $b>0$) ។

ចំពោះគ្រប់ $x;y\in IR$ បង្ហាញថា $f(x;y)\le (a+b)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$f(x;y)=\left(a\cos x+b\cos y\right)^2+\left(a\sin x+b\sin y\right)^2$$

$$=a^2(\cos^2 x+\sin^2 x)+b^2(\cos^2 y+\sin^2 y)+2ab(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$$

$$=a^2+b^2+2ab\cos(x-y)$$

គេបាន $f(x;y)=a^2+b^2+2ab\cos(x-y)$

ដោយគេមាន $\forall\ x;y\in IR:\ \cos(x-y)\le 1$

យើងបាន $f(x)\le a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$

ដូចនេះ $f(x;y)\le (a+b)^2$ ។

លំហាត់ទី២៧

ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x, y \in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}$

គេបាន $\sin\frac{2\pi}{10}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10})=\cos\frac{3\pi}{10}$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ៖

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ និង $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=3\cos\frac{\pi}{10}-4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4(1-\sin^2\frac{\pi}{10})$$

ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10}-2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$ តាង $t=\sin\frac{\pi}{10}>0$

គេបាន $4t^2-2t-1=0$, $\Delta'=1+4=5>0$

គេទាញឫស $t_1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$, $t_2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។ ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}=1$

នាំឲ្យ $\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ. ស្រាយថា $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y)=x^2+(x-y)^2-4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គេបាន$f(x;y)=x^2+x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2$

$$=2x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$=2x^2-2xy+y^2-(x^2+y^2)\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x^2-2xy-\frac{1+\sqrt{5}}{2}y^2$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}x^2+2xy+\frac{\sqrt{5}+1}{2}y^2\right)$$

$$=-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,x+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\,y\right)^2 \le 0 \quad , \forall x,y \in IR$$

ដូចនេះ៖ $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=4(\tan^2 x+\cot^2 x)-12(\tan x+\cot x)+9$

ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ។ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=4(\tan^2 x+\cot^2 x)-12(\tan x+\cot x)+9$

តាង $t=\tan x+\cot x\geq 2\sqrt{\tan x\cot x}=2$

គេបាន $t^2=(\tan x+\cot x)^2=\tan^2 x+\cot^2 x+2$

ឬ $\tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$

គេបាន $f(x)=4(t^2-2)-12t+9=(2t-3)^2-8$

ដោយ $t\geq 2$ នោះ $2t-3\geq 4-3=1$ គេបាន $f(x)\geq 1-8=-7$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ $f(x)$ ស្មើនឹង -7 ។

លំហាត់ទី២៩

ចូរគណនា $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}$

តាមរូបមន្ត $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

ឬ $\cos^3 a=\frac{3}{4}\cos a+\frac{1}{4}\cos 3a$

កន្សោមដែលឲ្យអាចសរសេរជា ៖

$$S=\frac{3}{4}(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9})+\frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{7\pi}{3})$$

តាង $M=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}$

ដោយ $-\cos\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{13\pi}{9}$

$$M=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}$$

គុណនឹង $2\sin\frac{\pi}{3}$ គេបាន

$$2M\sin\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{7\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{13\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$2\,.M\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{4\pi}{9}-\sin(-\frac{2\pi}{9})+\sin\frac{10\pi}{9}-\sin\frac{4\pi}{9}+\sin\frac{16\pi}{9}-\sin\frac{10\pi}{9}$$

$$2\,M\,\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{16\pi}{9}=2\,\sin\pi\,\cos(-\frac{7\pi}{9})=0$$

គេទាញបាន $M=0$

តាង $N=\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{7\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

គេបាន $S=\frac{3}{4}M+\frac{1}{4}N=\frac{3}{8}$ ។

ដូចនេះ: $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}=\frac{3}{8}$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យ $0 < a < \frac{\pi}{2}$ និង $0 < b < \frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\left(\frac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2 + \left(\frac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2 = 1$ លុះត្រាតែ $a = b$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

គេមាន $\left(\frac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2 + \left(\frac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2 = 1$

សមមូល $(\sin^2 b + \cos^2 b)\left(\frac{\sin^4 a}{\sin^2 b} + \frac{\cos^4 a}{\cos^2 b}\right) = 1$

$$\sin^4 a+\cos^4 a+\frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}\sin^4 a+\frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}\cos^4 a=1$$

$$1-2\sin^2 a\cos^2 a+\frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}\sin^4 a+\frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}\cos^4 a=1$$

$$\left(\frac{\cos b}{\sin b}\sin^2 a-\frac{\sin b}{\cos b}\cos^2 a)\right)^2=0$$

គេទាញ $\frac{\cos b}{\sin b}\sin^2 a=\frac{\sin b}{\cos b}\cos^2 a$

សមមូល $\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}=\frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}$

សមមូល $\tan^2 a=\tan^2 b$

ដោយ $0<a<\frac{\pi}{2}$ និង $0<b<\frac{\pi}{2}$ នោះគេទាញ $a=b$ ។

លំហាត់ទី៣១

គណនា $P=\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $P=\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o$

តាង $z=\cos 20^o + i\sin 20^o$ ហើយ $z^9=\cos 180^o + i\sin 180^o = -1$

គេបាន $\cos 20^o = \dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$ (ព្រោះ $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$)

$\cos 40^o = \dfrac{z^2+\overline{z}^2}{2} = \dfrac{z^4+1}{2z^2}$; $\cos 80^o = \dfrac{z^4+\overline{z}^4}{2} = \dfrac{z^8+1}{2z^4}$

$$P=\frac{(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)}{8z^7}=\frac{(z^2-1)(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)}{8z^7(z^2-1)}$$

$$=\frac{z^{16}-1}{8(z^9-z^7)}=\frac{-z^7-1}{8(-1-z^7)}=\frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $P=\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o = \dfrac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៣២

បង្ហាញថា៖

$$\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20}\right)=\frac{1}{16}$$

ដំណោះស្រាយ

តាង $P=\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20}\right)$

$$=\prod_{n=0}^{3}\left[\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{3^n\pi}{20}\right)\right]$$

គេមាន $\frac{1}{2}+\cos a=\frac{1}{2}+1-2\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left(3-4\sin^2\frac{a}{2}\right)$

ហើយ $\sin\frac{3a}{2}=3\sin\frac{a}{2}-4\sin^3\frac{a}{2}=\sin\frac{a}{2}\left(3-4\sin^2\frac{a}{2}\right)$

នាំឱ្យ $3-4\sin^2\frac{a}{2}=\frac{\sin\frac{3a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$

ហេតុនេះ $\frac{1}{2}+\cos a=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{3a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$

យក $a=\frac{3^n\pi}{20}$ គេបាន $\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{3^n\pi}{20}\right)=\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{3^{n+1}\pi}{40}}{\sin\frac{3^n\pi}{40}}$

គេបាន $P=\prod_{n=0}^{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{3^{n+1}\pi}{40}}{\sin\frac{3^n\pi}{40}}\right)=\frac{1}{16}.\frac{\sin\frac{81\pi}{40}}{\sin\frac{\pi}{40}}=\frac{1}{16}$

ព្រោះ $\sin\frac{81\pi}{40}=\sin(2\pi+\frac{\pi}{40})=\sin\frac{\pi}{40}$ ។

ដូចនេះ

$$(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\frac{1}{16}$$

លំហាត់ទី៣៣

ចូរបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

ដំណោះស្រាយ

យក $z=\cos\frac{\pi}{11}+i.\sin\frac{\pi}{11}$ ហើយ $z^{11}=-1$

គេមាន $W=z+z^3+z^5+z^7+z^9=\frac{z^{11}-z}{z^2-1}=\frac{-1-z}{z^2-1}=\frac{1}{1-z}$

ដោយ $1-z=1-\cos\frac{\pi}{11}-i\sin\frac{\pi}{11}=2\sin\frac{\pi}{22}(\sin\frac{\pi}{22}-i\cos\frac{\pi}{22})$

$$W=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{22}(\sin\frac{\pi}{22}-i\cos\frac{\pi}{22})}\quad=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{22}$$

ផ្នែកពិតនៃ W គឺ $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$

ដូចនេះ

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}}$$

លំហាត់ទី៣៤

គណនាតម្លៃនៃផលគុណ

$$P=(1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o)(1-\cot 3^o).....(1-\cot 44^o)$$

ដំណោះស្រាយ

យើងពិនិត្យ $1-\cot a=1-\dfrac{\cos a}{\sin a}=\dfrac{\sin a-\cos a}{\sin a}$

ដោយ $\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin(45^o-a)$

ហេតុនេះ $1-\cot a=\sqrt{2}\dfrac{\sin(45^o-a)}{\sin a}$

យើងបាន $P=\prod\limits_{a=1^o}^{44^o}\left(1-\cot a\right)=\prod\limits_{a=1^o}^{44^o}\left[\sqrt{2}\ \dfrac{\sin(45^o-a)}{\sin a}\right]$

$$P=\left(\sqrt{2}\right)^{44}.\frac{\sin 44^o.\sin 43^o.....\sin 1^o}{\sin 1^o.\sin 2^o......\sin 44^o}=2^{22}$$

ដូចនេះ $P=(1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o).....(1-\cot 44^o)=2^{22}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

ចូរគណនាតម្លៃផលគុណ៖

$$P = (\sqrt{3} + \tan 1^o)(\sqrt{3} + \tan 2^o).....(\sqrt{3} + \tan 29^o)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃផលគុណ $P = \prod_{k=1}^{29} \left(\sqrt{3} + \tan k^o \right)$

គេមាន $\sqrt{3} + \tan k^o = \sqrt{3} + \dfrac{\sin k^o}{\cos k^o} = \dfrac{\sqrt{3}\cos k^o + \sin k^o}{\cos k^o}$

$$= \frac{2\cos(30^o - k^o)}{\cos k^o}$$

គេបាន $P = \prod_{k=1}^{29} \left[\dfrac{2\cos(30^o - k^o)}{\cos k^o} \right]$

$$= \frac{2^{29} \cos 29^o \cos 28^o .....\cos 2^o \cos 1^o}{\cos 1^o \cos 2^o .....\cos 28^o \cos 29^o} = 2^{29}$$

ដូចនេះ $(\sqrt{3} + \tan 1^o)(\sqrt{3} + \tan 2^o).....(\sqrt{3} + \tan 29^o) = 2^{29}$

លំហាត់ទី៣៦

ចូរគណនា $S=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}$

យើងបាន $S=\dfrac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2}+\dfrac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2}+\dfrac{1-\cos\frac{8\pi}{7}}{2}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)$$

តាង $T=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}$

$$=\cos(\pi-\frac{5\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{3\pi}{7})+\cos(\pi+\frac{\pi}{7})$$

$$=-\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-(\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7})-(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7})-\sin\frac{2\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{6\pi}{7}=-\sin(\pi-\frac{\pi}{7})=-\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញ $T=-\frac{1}{2}$ នាំឲ្យ $S=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})=\frac{7}{4}$

ដូចនេះ $S=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}=\frac{7}{4}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

ចូរគណនា $S=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{5\pi}{7}$, $\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{7}$, $\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$

ហើយ $\sin\frac{2\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{8\pi}{7}$ និង $\sin\frac{4\pi}{7}>0$

គេបាន $S=\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\;>0$

លើកអង្គទាំពីរជាការេគេបាន ៖

$$S^2=\sin^2\frac{5\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}-2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាង $M=\sin^2\frac{5\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}}{2}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[\ \cos(\pi+\frac{3\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{5\pi}{7})\ \right]$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{5\pi}{7}\right)$$

យក $T=-\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$
$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-(\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7})-(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7})-\sin\frac{2\pi}{7}$$
$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{6\pi}{7}=-\sin(\pi-\frac{\pi}{7})=-\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញ $T=-\frac{1}{2}$ នាំឲ្យ $M=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

តាង $N=2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}-2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$

$$=\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{8\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$=\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{8\pi}{7}=-2\sin\pi.\sin(-\frac{\pi}{7})=0$$

គេបាន $S^2=M+N=\frac{7}{4}+0=\frac{7}{4}$ ដោយ $S>0$

នោះ $S=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

ដូចនេះ $S=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$8\cos^3\frac{n\pi}{7}+4(-1)^n\cos^2\frac{n\pi}{7}-4\cos\frac{n\pi}{7}+(-1)^{n+1}=0 \quad , \ \forall n\in IN$$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\sin\frac{4n\pi}{7}=\sin(n\pi-\frac{3n\pi}{7})$

$$2\sin\frac{2n\pi}{7}\cos\frac{2n\pi}{7}=\sin(n\pi)\cos\frac{3n\pi}{7}-\sin\frac{3n\pi}{7}\cos(n\pi)$$

$$4\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{n\pi}{7}\left(2\cos^2\frac{n\pi}{7}-1\right)=0-\left(3\sin\frac{n\pi}{7}-4\sin^3\frac{n\pi}{7}\right)(-1)^n$$

$$4\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{n\pi}{7}\left(2\cos^2\frac{n\pi}{7}-1\right)=-(-1)^n.\sin\frac{n\pi}{7}\left(3-4\sin^2\frac{n\pi}{7}\right)$$

$$8\cos^3\frac{n\pi}{7}-4\cos\frac{n\pi}{7}=-(-1)^n.\left[\ 3-4\left(1-\cos^2\frac{n\pi}{7}\right)\right]$$

$$8\cos^3\frac{n\pi}{7}-4\cos\frac{n\pi}{7}=-(-1)^n.4\cos^2\frac{n\pi}{7}+(-1)^n$$

$$8\cos^3\frac{n\pi}{7}+4(-1)^n\cos^2\frac{n\pi}{7}-4\cos\frac{n\pi}{7}+(-1)^{n+1}=0$$

ដូចនេះ $8\cos^3\frac{n\pi}{7}+4(-1)^n\cos^2\frac{n\pi}{7}-4\cos\frac{n\pi}{7}+(-1)^{n+1}=0 \quad , \ \forall n\in IN$

លំហាត់ទី៣៩

គេឲ្យកន្សោម

$\mathbf{S=\cos^3\frac{\pi}{7}+\cos^3\frac{3\pi}{7}+\cos^3\frac{5\pi}{7}}$ និង $\mathbf{T=\cos^4\frac{\pi}{7}+\cos^4\frac{3\pi}{7}+\cos^4\frac{5\pi}{7}}$

ក.ចូរស្រាយថាបីចំនួន $\mathbf{\cos\frac{\pi}{7}\ ,\ \cos\frac{3\pi}{7}\ ,\ \cos\frac{5\pi}{7}}$ ជាឫសរបស់សមីការ

$\mathbf{(E)\ :\ 8x^3-4x^2-4x+1=0}$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ ៖

$$\mathbf{M=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}}$$
$$\mathbf{N=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}}$$

និង $\mathbf{P=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}}$ ។

គ.គណនា $\mathbf{Q=\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{5\pi}{7}}$

រួចទាញរកតម្លៃ $\mathbf{S}$ និង $\mathbf{T}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថាបីចំនួន $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$ ជាឬសរបស់សមីការ

$$(E)\ :\ 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

តាង $x_n = \cos\frac{2n-1}{7}\pi$, $n = 1 , 2 , 3$ ជាឬសមីការ (E) គេបាន

$$8\cos^3\frac{(2n-1)\pi}{7} - 4\cos^2\frac{(2n-1)\pi}{7} - 4\cos\frac{(2n-1)\pi}{7} + 1 = 0$$

$$4\cos\frac{(2n-1)\pi}{7}\left(2\cos^2\frac{(2n-1)\pi}{7} - 1\right) + 1 - 4\left(1 - \sin^2\frac{(2n-1)\pi}{4}\right) = 0$$

$$4\cos\frac{(2n-1)\pi}{7}\cos\frac{2(2n-1)\pi}{7} - \left(3 - 4\sin^2\frac{(2n-1)\pi}{7}\right) = 0$$

$$4 \cdot \frac{\sin\frac{2(2n-1)\pi}{7}}{2\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}} \times \frac{\sin\frac{4(2n-1)\pi}{7}}{2\sin\frac{2(2n-1)\pi}{7}} - \frac{3\sin\frac{(2n-1)\pi}{7} - 4\sin^3\frac{(2n-1)\pi}{7}}{\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}} = 0$$

$$\frac{\sin\frac{4(2n-1)\pi}{7}}{\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}} - \frac{\sin\frac{3(2n-1)\pi}{7}}{\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}} = 0 \quad (*)$$

ដោយ $\forall n \in IN :\ \sin\frac{(2n-1)\pi}{7} \neq 0$

ហេតុសមីការ (*) សមមូល ៖

$$\sin\frac{4(2n-1)\pi}{7}-\sin\frac{3(2n-1)\pi}{7}=0$$
$$2\sin\frac{(2n-1)\pi}{7}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}=0$$

$0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) ។

ខ. ទាញរកតម្លៃ M , N , P

សន្មតថា $x_1=\cos\frac{\pi}{7}$, $x_2=\cos\frac{3\pi}{7}$, $x_3=\cos\frac{5\pi}{7}$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀតអនុវត្តន៍ក្នុងសមីការ $8x^3-4x^2-4x+1=0$

$$M=x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=+\frac{1}{2}$$
$$N=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$$

និង $P=x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=-\frac{1}{8}$ ។

ដូចនេះ

$$M=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

$$N=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

និង $P=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=-\frac{1}{8}$ ។

គ.គណនា $Q=\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{5\pi}{7}$

យើងបាន $Q={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$$

$$=M^2-2N=\frac{1}{4}-2\,(-\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$$

ដូចនេះ $Q=\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{5\pi}{7}=\frac{5}{4}$ ។

ទាញរកតម្លៃ S និង T

យើងបាន $S=\cos^3\frac{\pi}{7}+\cos^3\frac{3\pi}{7}+\cos^3\frac{5\pi}{7}$

ឬ $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

ដោយ $x_1 = \cos\frac{\pi}{7}$, $x_2 = \cos\frac{3\pi}{7}$, $x_3 = \cos\frac{5\pi}{7}$ ជាឫសរបស់ (E)

នោះគេបាន $\begin{cases} 8x_1^3 - 4x_1^2 - 4x_1 + 1 = 0 & (1) \\ 8x_2^3 - 4x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0 & (2) \\ 8x_3^3 - 4x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0 & (3) \end{cases}$

បូកសមីការ (1) , (2) , (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$8\,(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = 0$$
$$8\,S - 4Q - 4\,M + 3 = 0$$

គេទាញ $S = \frac{Q+M}{2} - \frac{3}{8} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}}{2} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $S = \cos^3\frac{\pi}{7} + \cos^3\frac{3\pi}{7} + \cos^3\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$ ។

ម៉្យាងទៀត $T = \cos^4\frac{\pi}{7} + \cos^4\frac{3\pi}{7} + \cos^4\frac{5\pi}{7} = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$

ដោយគុណសមីការ (1) , (2) , (3) រៀងគ្នានឹង x_1 , x_2 , x_3

គេបាន $\begin{cases} 8x_1^{\,4} - 4x_1^{\,3} - 4x_1^{\,2} + x_1 = 0 & (1') \\ 8x_2^{\,4} - 4x_2^{\,3} - 4x_2^{\,2} + x_2 = 0 & (2') \\ 8x_3^{\,4} - 4x_3^{\,3} - 4x_3^{\,2} + x_2 = 0 & (3') \end{cases}$

បូកសមីការ $(1')$, $(2')$, $(3')$ អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$8\,T - 4\,S - 4\,Q + M = 0$$

គេទាញ $T = \frac{S+Q}{2} - \frac{M}{8} = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$ ។

ដូចនេះ $T = \cos^4\frac{\pi}{7} + \cos^4\frac{3\pi}{7} + \cos^4\frac{5\pi}{7} = \frac{3}{4}$ ។

លំហាត់ទី៤០

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\cos^7 x + \cos^7(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos^7(x + \frac{4\pi}{3}) = \frac{63}{64}\cos 3x$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដំណោះស្រាយ

$$\cos^7 x + \cos^7(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos^7(x + \frac{4\pi}{3}) = \frac{63}{64}\cos 3x$$

តាង $E_n(x) = \cos^n x + \cos^n(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos^n(x + \frac{4\pi}{3})$ (i)

តាមរូបមន្ត $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

គេទាញ $\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n-3} x$ គេបាន៖

$$\cos^n x = \frac{3}{4}\cos^{n-2} x + \frac{1}{4}\cos 3x \cos^{n-3} x \quad (1)$$

ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន៖

$$\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})=\frac{3}{4}\cos^{n-2}(x+\frac{2\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3}(x+\frac{2\pi}{3}) \quad (2)$$

$$\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{3}{4}\cos^{n-2}(x+\frac{4\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3}(x+\frac{4\pi}{3}) \quad (3)$$

ដោយបូកសមីការ **(1); (2)** និង **(3)** គេបាន៖

$$E_n(x)=\frac{3}{4}E_{n-2}(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_{n-3}(x) \quad \text{(ii)}$$

តាម **(i)** ចំពោះ $n=0\,;n=1\,,n=2$ គេបាន៖

$$E_0(x)=3$$

$$E_1(x)=\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x+\frac{4\pi}{3})$$

$$E_1(x)=\cos x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=0$$

$$E_2(x)=\cos^2 x+(-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2+(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2$$

$$E_2(x)=\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{3}{2}\sin^2 x=\frac{3}{2}$$

តាម (ii) ចំពោះ $n=3$; $n=4$, $n=5$; $n=7$ គេបាន

$$E_3(x)=\frac{3}{4}E_1(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_0(x)=\frac{3}{4}\cos 3x$$

$$E_4(x)=\frac{3}{4}E_2(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_1(x)=\frac{9}{8}$$

$$E_5(x)=\frac{3}{4}E_3(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_2(x)=\frac{9}{16}\cos 3x+\frac{3}{8}\cos 3x=\frac{15}{16}\cos 3x$$

$$E_7(x)=\frac{3}{4}E_5(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_4(x)=\frac{45}{64}\cos 3x+\frac{9}{32}\cos 3x=\frac{63}{64}\cos 3x$$

ដូចនេះ $\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេដឹងថា $\dfrac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

ចូរស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

តាង $u=e^{ix}$, $v=e^{iy}$, $w=e^{iz}$ គេបាន៖

$$u+v+w=\left(\cos x+\cos y+\cos z\right)+i\left(\sin x+\sin y+\sin z\right)$$

ហើយ $uvw=e^{i(x+y+z)}=\cos(x+y+z)+i\sin(x+y+z)$

គេមាន $\dfrac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

នាំឲ្យ $\dfrac{(\cos x+\cos y+\cos z)+i(\sin x+\sin y+\sin z)}{\cos(x+y+z)+i\cos(x+y+z)}=a$

$$\frac{u+v+w}{uvw}=a$$

$$\frac{1}{vw}+\frac{1}{uw}+\frac{1}{uv}=a$$

$$e^{-i(y+z)}+e^{-i(x+z)}+e^{-i(x+y)}=a$$

តាមសមភាពនេះគេទាញបាន ៖

$$\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$$

និង $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(z+x)=0$

ដូចនេះ $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$ ។

លំហាត់ទី៤២

ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $]0;\frac{\pi}{2}[$ ដោយដឹងថា ៖

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $]0;\frac{\pi}{2}[$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2} \quad (1)$$

គេពិនិត្យ $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ហើយ $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

សមីការ (1) អាចសរសេរទៅជា ៖

$$\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\sin x} + \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\cos x} = 2$$

$$\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sin x} + \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\cos x} = 2$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x} + \frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\cos x} = 2$$

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos x + \sin x\cos\frac{\pi}{12} = 2\sin x\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12} + x\right) = \sin 2x$$

ដោយ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ នោះគេទាញ $x = \frac{\pi}{12}$ ឬ $x = \frac{11\pi}{36}$

ដូចនេះ $x \in \{ \frac{\pi}{12} ; \frac{11\pi}{36} \}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7 = 2\sqrt{1-x^2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7 = 2\sqrt{1-x^2} \qquad (1)$$

លក្ខខ័ណ្ឌ $1 - x^2 \geq 0$ ឬ $x \in [-1\,,\,1\,]$

យើងមាន $\cos 4a = \cos(a + 3a)$

$$= \cos a \cos 3a - \sin a \sin 3a$$

$$= \cos a(4\cos^3 a - 3\cos a) - \sin a(3\sin a - 4\sin^3 a)$$

$$= 4\cos^4 a - 3\cos^2 a - 3\sin^2 a + 4\sin^4 a$$

$$= 4\cos^4 a + 4(1 - \cos^2 a)^2 - 3(\cos^2 a + \sin^2 a)$$

$$= 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$$

$$\cos 5a = \cos(a + 4a)$$

$$= \cos a \cos 4a - \sin a \sin 4a$$
$$= \cos a(8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1) - 2\sin a \sin 2a \cos 2a$$
$$= 8\cos^5 a - 8\cos^3 a + \cos a - 4\sin^2 a \cos a(2\cos^2 a - 1)$$
$$= 8\cos^5 a - 8\cos^3 a + \cos a - 4(1 - \cos^2 a)(2\cos^3 a - \cos a)$$
$$= 16\cos^5 - 20\cos^3 a + 5\cos a$$

$$\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1 = 2(4\cos^3 a - 3\cos a)^2 - 1$$
$$= 32\cos^6 a - 48\cos^4 a + 18\cos^2 a - 1$$

$$\cos 7a = \cos(6a + a) = \cos 6a \cos a - \sin 6a \sin a$$
$$= \cos a \cos 6a - 2\sin a \sin 3a \cos 3a$$
$$= \cos a \cos 6a - 2\sin a(3\sin a - 4\sin^3 a)(4\cos^3 a - 3\cos a)$$
$$= 64\cos^7 a - 112\cos^5 a + 56\cos^3 a - 7\cos a$$

យក $x = \cos t$ ដែល $t \in [\ 0\ , \pi\ ]$ សមីការ (1) សរសេរ ៖

$$64\cos^6 t - 112\cos^4 t + 56\cos^2 t - 7 = 2\sqrt{1 - \cos^2 t}$$
$$64\cos^6 t - 112\cos^4 t + 56\cos^2 t - 7 = 2\sin t$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos t \neq 0$ គេបាន ៖

$$64\cos^7 t-112\cos^5 t+56\cos^3 t-7\cos t=2\sin t\cos t$$

$$\cos 7t=\sin 2t$$

$$\cos 7t=\cos(\frac{\pi}{2}-2t)$$

គេទាញ $\left[\begin{array}{l}7t=\frac{\pi}{2}-2t+2k\pi \\ 7t=-\frac{\pi}{2}+2t+2k'\pi \quad , \ k;k'\in Z\end{array}\right.$

សមមូល $\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{9} \\ t=-\frac{\pi}{10}+\frac{2k'\pi}{9} \quad , \ k\ ;k'\in Z\end{array}\right.$

ដោយ $t\in[\,0\,,\pi]$ គេទាញសំណុំតម្លៃ t ដូចខាងក្រោម ៖

$t\in\{\frac{\pi}{18};\frac{5\pi}{18};\frac{9\pi}{18};\frac{13\pi}{18};\frac{17\pi}{18};\frac{3\pi}{10};\frac{7\pi}{10}\}$ ដោយ $\cos t\neq 0$ នោះ

$t\neq\frac{\pi}{2}$ ដូចនេះសមីការ (1) មានសំណុំឬសដូចខាងក្រោម ៖

$$x\in\{\cos\frac{\pi}{18};\cos\frac{5\pi}{18};\cos\frac{13\pi}{18};\cos\frac{17\pi}{18};\cos\frac{3\pi}{10};\cos\frac{7\pi}{10}\}$$

លំហាត់ទី៤៤

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\tan^6 x + (\tan^2 x + 1)^3 + (\tan^2 x + 2)^3 = (\tan^2 x + 3)^3$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\tan^6 x + (\tan^2 x + 1)^3 + (\tan^2 x + 2)^3 = (\tan^2 x + 3)^3 \ .$$

លក្ខ័ខ័ណ្ឌ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in Z$ ។

តាង $t = \tan^2 x \quad , \ t \geq 0$ សមីការសរសេរ ៖

$$t^3 + (t+1)^3 + (t+2)^3 = (t+3)^3$$

$$t^3 + (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) + (t^3 + 6t^2 + 12t + 8) = t^3 + 9t^2 + 27t + 27$$

$$3t^3 + 9t^2 + 15t + 9 = t^3 + 9t^2 + 27t + 27$$

$$2(t^3 - 6t - 9) = 0$$

$$(t^3 - 27) - (6t - 18) = 0$$

$$(t-3)(t^2 + 3t + 9) - 6(t-3) = 0$$

$$(t-3)(t^2 + 3t + 3) = 0$$

គេទាញ $t-3=0 \Rightarrow t=3$

ឬ $t^2+3t+3=0$ គ្មានឫសព្រោះ $\Delta=9-12<0$

ចំពោះ $t=3$ គេបាន $\tan^2 x=3$

$$\tan^2 x-3=0$$

$$(\tan x-\sqrt{3})(\tan x+\sqrt{3})=0$$

គេបាន $\tan x-\sqrt{3}=0$ ឬ $\tan x=\sqrt{3}$

នាំឲ្យ $x=\frac{\pi}{3}+k\pi \quad , k\in Z$ ។

ហើយ $\tan x+\sqrt{3}=0$ ឬ $\tan x=-\sqrt{3}$

នាំឲ្យ $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \quad , k\in Z$ ។

លំហាត់ទី៤៥

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

តាមរូបមន្ត $2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$

សមីការខាងលើអាចសរសេរជាបន្តបន្ទាប់ខាងក្រោម ៖

$$2\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}-x-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$2\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{6}\right]=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1=1+\sqrt{2}$$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

គេទាញ $\left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ 2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad , \ k\in Z \end{array}\right.$

ដូចនេះ $\boxed{x=-\frac{\pi}{24}+k\pi \quad , \ x=\frac{5\pi}{24}+k\pi \ \ ; k\in Z}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ៖

$$\cos(n+1)x = 2\cos x\cos(nx) - \cos(n-1)x \quad , x \in IR , n \in IN$$

២.អនុវត្តន៍ ៖ ចូរសរសេរ $\cos 7x$ ជាអនុគមន៍នៃ $\cos x$ ។

៣.ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$128\cos^7 x - 244\cos^5 x + 112\cos^3 x - 14\cos x - 1 = 0 \quad ។$$

ដំណោះស្រាយ

១.ស្រាយថា $\cos(n+1)x = 2\cos x\cos(nx) - \cos(n-1)x$

$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos\frac{(n+1)x-(n-1)x}{2}.\cos\frac{(n+1)x+(n-1)x}{2}$$

សមមូល $\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos x.\cos(nx)$

ដូចនេះ

$$\boxed{\cos(n+1)x = 2\cos x\cos(nx) - \cos(n-1)x}$$

២. អនុវត្តន៍ ៖សរសេរ $\cos 7x$ ជាអនុគមន៍នៃ $\cos x$

គេមាន $\cos(n+1)x = 2\cos x\cos(nx) - \cos(n-1)x$.

បើ $n=1$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

បើ $n=2$ $\cos 3x = 2\cos x\cos 2x - \cos x$

$$= 2\cos x(2\cos^2 x - 1) - \cos x$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

បើ $n=3$ $\cos 4x = 2\cos x\cos 3x - \cos 2x$

$$= 2\cos x(4\cos^3 x - 3\cos x) - (2\cos^2 x - 1)$$
$$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

បើ $n=4$ $\cos 5x = 2\cos x\cos 4x - \cos 3x$

$$= 2\cos x(8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) - (4\cos^3 x - 3\cos x)$$
$$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

បើ $n=5$ $\cos 6x = 2\cos x\cos 5x - \cos 4x$

$= 2\cos x(16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x) - (8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1)$

$= 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

បើ $n=6$ $\cos 7x = 2\cos x\cos 6x - \cos 5x$

ដូចនេះ $\boxed{\cos 7x = 64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x}$.

៣. ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$128\cos^7 x - 244\cos^5 x + 112\cos^3 x - 14\cos x - 1 = 0 \quad (1)$$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (1) នឹង 2 គេបាន ៖

$$64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\cos 7x = \frac{1}{2}$$

គេទាញបាន $7x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ឬ $x = \pm\frac{\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}$, $k \in Z$

ដូចនេះ $x = \frac{\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}$, $x = -\frac{\pi}{21} + \frac{2k'\pi}{7}$; $k;k' \in Z$ ។

លំហាត់ទី៤៧

ក.ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ

$$\sin^2 x-\sqrt{2}\,\sin x.\cos x+(\sqrt{2}-1)\cos^2 x=0$$

គ.ចូរដោះស្រាយសមីការ $\frac{\tan x+\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)\tan x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$

តាមរូបមន្ត $\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ ដោយយកតម្លៃ $a=\frac{\pi}{8}$

គេបាន $\tan\frac{\pi}{4}=\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$

$$1=\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$$ នាំឲ្យ $\tan^2\frac{\pi}{8}+2\tan\frac{\pi}{8}-1=0$

តាង $t=\tan\frac{\pi}{8}$ ដែល $t>0$

គេបាន $t^2+2t-1=0$; $\Delta'=1+1=2$

គេទាញឫស $t_1=-1+\sqrt{2}$, $t_2=-1-\sqrt{2}<0$ (មិនយក)

ដូចនេះ $\boxed{\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x.\cos x+(\sqrt{2}-1)\cos^2 x=0$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^2 x\neq 0$ គេបានសមីការ ៖

$$\tan^2 x-\sqrt{2}\tan x+(\sqrt{2}-1)=0 \quad .$$

តាង $t=\tan x$ គេបាន ៖

$t^2-\sqrt{2}\,t+(\sqrt{2}-1)=0$ ដោយ $a+b+c=0$

គេទាញឫស $t_1 = 1$; $t_2 = \sqrt{2} - 1$ ។

-ចំពោះ $t = 1$ គេបាន $\tan x = 1$ នាំឲ្យ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

-ចំពោះ $t = \sqrt{2} - 1$ គេបាន $\tan x = \sqrt{2} - 1$

នាំឲ្យ $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in Z$

ដូចនេះ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in Z$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\frac{\tan x + \sqrt{2} - 1}{1 - (\sqrt{2} - 1)\tan x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ ដោយ $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ គេបាន

$$\frac{\tan x + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan x.\tan\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(x + \frac{\pi}{8}) = \tan\frac{\pi}{6}$$

គេទាញ $x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ឬ $x = \frac{\pi}{24} + k\pi$, $k \in Z$

លំហាត់ទី៤៨

ក.ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\cos\frac{7\pi}{12}$

ខ.ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} \cos^3 x + 3\cos x\cos^2 y = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{8} \\ 3\cos^2 x\cos y + \cos^3 y = \frac{\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{8} \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\cos\frac{7\pi}{12}$

យើងបាន $\cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

ហើយ $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\ ,\ \cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$ ។

ខ. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{cases}\cos^3 x+3\cos x\cos^2 y=\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{8} & (1)\\ 3\cos^2 x\cos y+\cos^3 y=\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{8} & (2)\end{cases}$$

បូកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$\cos^3 x+3\cos^2 x\cos y+3\cos x\cos^2 y+\cos^3 y=\frac{2\sqrt{2}}{8}$$

$$(\cos x+\cos y)^3=(\frac{\sqrt{2}}{2})^3$$

$$\cos x+\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad (3)$$

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$\cos^3 x - 3\cos^2 x\cos y + 3\cos x\cos^2 y - \cos^3 y = \frac{6\sqrt{6}}{8}$$

$$(\cos x - \cos y)^3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3$$

$$\cos x - \cos y = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (4)$$

បូកសមីការ (3) និង (4) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$2\cos x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$\cos x = \cos\frac{\pi}{12}$ នាំឲ្យ $x = \pm\frac{\pi}{12} + 2k\pi \ , k \in Z$

ដកសមីការ (3) និង (4) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$2\cos y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$\cos y = \cos\frac{7\pi}{12}$ នាំឲ្យ $y = \pm\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ , k \in Z$

ដូចនេះ $x = \pm\frac{\pi}{12} + 2k\pi \ , k \in Z$ និង $y = \pm\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ , k \in Z$

លំហាត់ទី៤៩

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ $(\sin^3 x+\cos^3 x)^2=\frac{13}{16}+\frac{1}{4}\sin^3 2x$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

យើងមាន $\sin^2 x+\cos^2 x=1 \quad ; \forall x\in IN$

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^3 = 1$$

$$\sin^6 x+3\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos^4 x+\cos^6 x = 1$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=1$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x=1$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=1$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x+\frac{3}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)=1$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $(\sin^3 x+\cos^3 x)^2=\frac{13}{16}+\frac{1}{4}\sin^3 2x$

យើងបាន $\sin^6 x+2\sin^3 x\cos^3 x+\cos^6 x=\frac{13}{16}+2\sin^3 x\cos^3 x$

$\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\cos 4x=\frac{13}{16}$ ឬ $\cos 4x=\frac{1}{2}$

គេទាញ $4x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ឬ $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$ ។

លំហាត់ទី៥០

គេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ ៖

$$(E):x^2+(\frac{1}{\cos\phi}-2)x+\frac{2}{\sqrt{3}}-1=0$$

ដែល $0 \le \phi < \frac{\pi}{2}$ ។

គេឧបមាថាសមីការ (E) មានឬសពីរដែលតាងដោយ $\tan a$ និង $\tan b$ ។

ក. កំនត់តម្លៃ ϕ ដើម្បីឲ្យ $a+b=\frac{\pi}{4}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ ϕ ដែលបានរកឃើញ

គ. ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់តម្លៃ ϕ ដើម្បីឲ្យ $a+b=\frac{\pi}{4}$

ដោយ $\tan a$ និង $\tan b$ ជាឬសរបស់ (E) នោះគេមានទំនាក់ទំនង

$$\tan a+\tan b=2-\frac{1}{\cos\phi} \quad (1)$$

និង $$\tan a\tan b=\frac{2}{\sqrt{3}}-1 \quad (2)$$

តាមរូបមន្ត $$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b} \quad (3)$$

យកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន ៖

$$\tan(a+b)=\frac{2-\frac{1}{\cos\phi}}{1-(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)}=\frac{\sqrt{3}(2\cos\phi-1)}{(2\sqrt{3}-2)\cos\phi}$$

ដោយ $a+b=\frac{\pi}{4}$

គេទាញបាន $\frac{\sqrt{3}(2\cos\phi-1)}{(2\sqrt{3}-2)\cos\phi} = 1$

$$2\sqrt{3}\cos\phi-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cos\phi-2\cos\phi$$

$$\cos\phi=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដោយ $0 \le \phi < \frac{\pi}{2}$ ដូចនេះគេទាញ $\phi=\frac{\pi}{6}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

បើ $\phi=\frac{\pi}{6}$ នោះ (E) $x^2+(\frac{2}{\sqrt{3}}-2)\ x+\frac{2}{\sqrt{3}}-1=0$

$$\Delta=(\frac{2}{\sqrt{3}}-2)^2-4(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)$$

$$\Delta=\frac{4(7-4\sqrt{3})}{3}=\frac{4(2-\sqrt{3})^2}{3}$$

គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2}(-\frac{2}{\sqrt{3}}+2+\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}})=\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x_2=\frac{1}{2}(-\frac{2}{\sqrt{3}}+2-\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}})=2-\sqrt{3} \end{array}\right.$

ដូចនេះ $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2=2-\sqrt{3}$ ។

គ. ប្រើលទ្ធផលខាងលើទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{12}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = 2-\sqrt{3}$

គេទាញ $\tan a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ និង $\tan b = 2-\sqrt{3}$

ដោយ $\tan a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ នាំឲ្យ $a = \frac{\pi}{6}$ ហើយ $a+b = \frac{\pi}{4}$

នាំឲ្យ $b = \frac{\pi}{4} - a = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$

ដូចនេះ $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៥១

គេឲ្យខ្សែកោង

$$(P) : y = f(x) = x^2 \sin\phi - 2(1+\sin\phi)x + 5 - \sin\phi$$

ដែល $0 < \phi < \pi$ ។

កំនត់តម្លៃ ϕ ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង (P) ស្ថិតនៅលើអក្ស័

អាប់ស៊ីសជានិច្ច ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ ϕ

គេមាន

$$(P) : y = f(x) = x^2 \sin\phi - 2(1+\sin\phi)x + 5 - \sin\phi$$

ដើម្បីឲ្យ(P) ស្ថិតនៅលើអក្ស័អាប់ស៊ីសជានិច្ចលុះត្រាតែ

$$f(x) > 0 \ , \ \forall x \in IR$$

ពេលគឺគេត្រូវឲ្យ $\begin{cases} a_f > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

គេមាន $a_f = \sin\phi > 0 \;\; ; \forall \phi \in]\,0\,;\,\pi[$

ហើយ $\Delta' = (1+\sin\phi)^2 - \sin\phi(5-\sin\phi)$

$$\Delta' = 1 + 2\sin\phi + \sin^2\phi - 5\sin\phi + \sin^2\phi$$

$$\Delta' = 2\sin^2\phi - 3\sin\phi + 1$$

$$\Delta' = (2\sin\phi - 1)(\sin\phi - 1)$$

បើ $\Delta' < 0$ សមមូល $\frac{1}{2} < \sin\phi < 1$ ដោយ $0 < \phi < \pi$

គេទាញបាន $\frac{\pi}{6} < \phi < \frac{\pi}{2}$ ។

ដូចនេះដើម្បីឲ្យខ្សែកោង (P) ស្ថិតនៅលើអក្សអាប់ស៊ីស

ជានិច្ចលុះត្រាតែគេឲ្យល័ក្ខខ័ណ្ឌ $\frac{\pi}{6} < \phi < \frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E): x^2-(m^2-m)x-m+2=0$

គេសន្មតថាសមីការនេះមានឫសពីរតាងរៀងគ្នាដោយ $\tan a$

និង $\tan b$ ។

ក.ចូរកំនត់តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដើម្បីឲ្យ $a+b=\frac{\pi}{3}$ ។

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការខាងលើចំពោះ m ដែលបានរកឃើញ ។

គ.ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំនត់តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដើម្បីឲ្យ $a+b=\frac{\pi}{3}$ ៖

សមីការមានឫសកាលណា $\Delta=(m^2-m)^2+4m-8\geq 0$

ដោយ $\tan a$ និង $\tan b$ ជាឫសរបស់សមីការនោះ

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមាន $\begin{cases} \tan a + \tan b = m^2 - m & (1) \\ \tan a . \tan b = -m + 2 & (2) \end{cases}$

ដោយ $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b} \quad (3)$$

យកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) ជួសក្នុងសមីការ (3)

គេបាន ៖

$$\sqrt{3} = \frac{m^2 - m}{1 + m - 2} \quad \text{ឬ } m^2 - (1 + \sqrt{3})\, m + \sqrt{3} = 0$$

ដោយ $a + b + c = 0$ គេទាញឫស $m_1 = 1$, $m_2 = \sqrt{3}$

-ចំពោះ $m = 1$ នោះ $\Delta = (1^2 - 1)^2 + 4.1 - 9 = -4 < 0$ (មិនយក)

-ចំពោះ $m = \sqrt{3}$ នោះ $\Delta = (3 - \sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} - 8 = 4 - 2\sqrt{3} > 0$

ដូចនេះ $m = \sqrt{3}$ ។

ខ.ដោះស្រាយសមីការខាងលើចំពោះ $\mathbf{m}$ ដែលបានរកឃើញ ៖

ចំពោះ $m=\sqrt{3}$ គេបាន ៖ $x^2-(3-\sqrt{3})x-\sqrt{3}+2=0$

ដោយ $a+b+c=0$ គេទាញឫស $x_1=1$, $x_2=2-\sqrt{3}$ ។

គ.ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{12}$ ៖

តាមលទ្ធផលខាងលើគេមាន $x_1=\tan a=1$ នាំឲ្យ $a=\frac{\pi}{4}$

ហើយ $a+b=\frac{\pi}{3}$ នោះ $b=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

ហេតុនេះ $x_2=\tan b=\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៥៣

គេឲ្យសមីការ (E) : $x^3-(2m+3)x^2+5x-3m+2=0$

ឧបមាថាសមីការនេះមានឫសបីតាងដោយ $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ ។

ក.ចូរគណនា $A=\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ជាអនុគមន៍នៃ m ។

ខ.កំនត់ m ដើម្បីឲ្យ $A=4$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ m ដែលបានរកឃើញខាងលើ

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $A=\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ជាអនុគមន៍នៃ m

យើងមាន $A=\dfrac{\sin[\,\alpha+(\beta+\gamma)]}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$

$$=\frac{\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)+\sin(\beta+\gamma)\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$=\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma+\tan\beta+\tan\gamma$$

$$=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

ដោយ $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ ជាឫសសមីការ (E) តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត

យើងមាន $\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=2m+3\\ \tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=5\\ \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma=3m-2\end{cases}$

យើងបាន $A=2m+3-(3m-2)=-m+5$

ដូចនេះ $A=-m+5$ ។

ខ.កំនត់ m ដើម្បីឲ្យ $A=4$

ដោយយើងមាន $A=-m+5$

យើងបាន $-m+5=4$ នាំឲ្យ $m=1$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

ចំពោះ $m=1$ គេបាន (E): $x^3-5x^2+5x-1=0$

ដោយ $x^3-5x^2+5x-1=(x-1)(x^2-4x+1)$

គេទាញ $(x-1)(x^2-4x+1)=0$ ឬ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-4x+1=0 \end{array}\right.$

$\Delta'=4-1=3$ គេទាញ $x_1=2-\sqrt{3}$, $x_2=2+\sqrt{3}$

ដូចនេះសំណុំឫសសមីការ $x\in\{\ 2-\sqrt{3}\ ;\ 1\ ,\ 2+\sqrt{3}\ \}$ ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យសមីការ (E) : $\cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=m$

ក.ចូរដោះស្រាយសមីការនេះកាលណា $m=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

ខ.រកលក្ខខ័ណ្ឌសម្រាប់ m ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឬស ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោះស្រាយសមីការនេះកាលណា $m=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

យើងមាន $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ នាំឲ្យ

$\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$

ហើយ $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

នាំឲ្យ $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

សមីការ (E) អាចសរសេរ ៖

$$\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)\cos 3x+\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\sin 3x=m$$

$$3\cos x\cos 3x+\cos^2 3x+3\sin x\sin 3x-\sin^2 3x=4m$$

$$3(\cos 3x\cos x+\sin 3x\sin x)+(\cos^2 3x-\sin^2 3x)=4m$$

$$3\cos 2x+\cos 6x=4m$$

$$4\cos^3 2x=4m$$

$$\cos 2x=\sqrt[3]{m}$$

ដោយ $m=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ គេបាន $\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

នាំឲ្យ $x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi\ ,k\in Z$

ខ. រកលក្ខខ័ណ្ឌសម្រាប់ m ៖

ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឫសគេគ្រាន់តែឲ្យ $-1\ \le\ \sqrt[3]{m}\ \le\ 1$

ឬ $m\in[-1\ ,\ 1]$ ។

លំហាត់ទី៥៥

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log^2_{\sqrt{2}}(\sin x) + \log_{\sqrt{2}}(2\sin^3 x) = 0$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log^2_{\sqrt{2}}(\sin x) + \log_{\sqrt{2}}(2\sin^3 x) = 0$$

លក្ខខណ្ឌ $\sin x > 0$ នាំឲ្យ $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$, $k \in Z$

សមីការអាចសរសេរ ៖

$$\log^2_{\sqrt{2}}(\sin x) + \log_{\sqrt{2}}(\sin^3 x) + \log_{\sqrt{2}} 2 = 0$$

$$\log^2_{\sqrt{2}}(\sin x) + 3\log_{\sqrt{2}}(\sin x) + 2 = 0$$

តាង $t = \log_{\sqrt{2}}(\sin x)$ គេបានសមីការ $t^2 + 3t + 2 = 0$

ដោយ $b = a + c$ គេទាញឫស $t_1 = -1$, $t_2 = -2$

-ចំពោះ $t=-1$ គេបាន $\log_{\sqrt{2}}(\sin x)=-1$

សមមូល $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

នាំឲ្យ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \;\;, k\in Z \end{array}\right.$

-ចំពោះ $t=-2$ គេបាន $\log_{\sqrt{2}}(\sin x)=-2$

សមមូល $\sin x=\frac{1}{2}$

នាំឲ្យ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \;\;, k\in Z \end{array}\right.$

លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$$U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ និង } U_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_n^{\ 2}}}{2}} \ , \forall n \in IN$$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$U_1 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_0^{\ 2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}}}{2}} = \sin\frac{\pi}{8}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1} = \sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

យើងមាន $U_{p+1}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-U_p^{\,2}}}{2}}$

តែតាមការឧបមា $U_p=\sin\dfrac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\pi}{2^{p+2}}}}{2}}$

$$=\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{2^{p+2}}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi}{2^{p+3}}}{2}}$$

$$=\sin\dfrac{\pi}{2^{p+3}}$$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេឲ្យ $a_0 = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1} = \dfrac{a_n^{\ 2}-5}{2(a_n+2)}$

ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n = \cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a_n = \cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$

ចំពោះ $n=0$ គេបាន $a_0 = \cot\dfrac{\pi}{24}-2$

$$\cot\frac{\pi}{24} = \frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{24}} = \frac{2\cos^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

$$= \frac{1+\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \frac{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}$$
$$=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+8+4\sqrt{3}}{4}$$
$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

គេទាញ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

ហេតុនេះ $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិតចំពោះ $n=0$ ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$a_{k+1}=\cot\left(\frac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។

យើងមាន $a_{k+1}=\frac{{a_k}^2-5}{2(a_k+2)}$ ដោយ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$

នោះ $a_{k+1}=\dfrac{\left[\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2\right]^2-5}{2\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$

$$a_{k+1}=\frac{\cot^2\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-4\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{\cot^2\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{2}\right)}-2$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\cot 2a=\dfrac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

គេបាន $a_{k+1}=\cot\left(\dfrac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។

ដូចនេះ $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យ $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និង ស្រាយបញ្ជាក់

រូបមន្តនោះផង ។

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ ៖

គេមាន $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$,

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

តាមលំនាំឧទាហរណ៍យើងអាចទាញរករូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\boxed{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.........+\sqrt{2}}}}}_{(\,n\,)}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះ ៖

យើងតាង $A_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......+\sqrt{2}}}}}_{(n)}$ គ្រប់ $n \in IN$

យើងមាន $A_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$ ពិត

យើងឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ ៖

$$A_p = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......+\sqrt{2}}}}}_{(p)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $p+1$ គឺ $A_{p+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

យើងមាន $A_{p+1} = \sqrt{2+A_p}$

ដោយតាមការឧបមា $A_p = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$

យើងបាន $A_{p+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

ដូចនេះ $$\boxed{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.........+\sqrt{2}}}}}_{(n)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត(U_n) កំនត់ដោយ$U_n = \sqrt{2}^n . \sin\frac{n\pi}{4}$

ដែល $n \in IN$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គ-គណនាផលបូក ៖

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

តាមរូបមន្ត $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\sqrt{2}\cos(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4})$$

$$=\sqrt{2}(\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{n\pi}{4})=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}}$ ។

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

យើងមាន $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$

នាំឲ្យ $\sin\frac{n\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\sqrt{2})^n$

គេបាន $(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

គ-គណនាផលបូក $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots\dots + U_n$

យើងបាន

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{2})^k \cos\frac{k\pi}{4} - (\sqrt{2})^{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1 - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៦០

គេមានអនុគមន៍លេខ **f** កំនត់ពីសំណុំ **IN** ទៅសំណុំ **IR**

ដោយ $f(0)=0$ និង $f(n+1)=2f(n)+\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$

ចូរកំនត់រក $f(n)$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រក $f(n)$

គេមាន $f(n+1)=2f(n)+\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2^n គេបាន

$$\frac{1}{2^n}f(n)=\frac{1}{2^{n-1}}f(n)+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}\quad(1)$$

គេមាន $\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}=\frac{2\tan a}{\tan a\cot a-\tan^2 a}=\frac{2}{\cot a-\tan a}$

គេទាញ $\tan a=\cot a-2\cot 2a$ ដោយយក $a=\frac{\pi}{2^{n+2}}$

គេបាន $\tan\frac{\pi}{2^{n+2}} = \cot\frac{\pi}{2^{n+2}} - 2\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (2)

យក (២) ជួសក្នុង (១) គេបាន

$$\frac{1}{2^n}f(n+1) - \frac{1}{2^{n-1}}f(n) = \frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - \frac{1}{2^{n-1}}\cot\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2^k}f(k+1) - \frac{1}{2^{k-1}}f(k)\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2^k}\cot\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) - \frac{1}{2^{k-1}}\cot\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}f(n) - 2f(0) = \frac{1}{2^{n-1}}\cot\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \Rightarrow f(n) = \cot\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

ដូចនេះ $f(n) = \cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៦១

គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ n ដោយៈ

$U_0 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$

ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ។

ក.តាង $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ ។ បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមួយៈ

មាន $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ នាំឲ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} - \cot\frac{a}{2}$

តែ $U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$

គេបាន $V_{n+1} = U_n \cos a + \sin a - \cot\frac{a}{2}$

$$= U_n \cos a + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} - \cot\frac{a}{2}$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\tan\frac{a}{2} - 1)$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} - 1)$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin^2\frac{a}{2} - 1) \qquad ; \quad \cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$= U_n \cos a - \cot\frac{a}{2}\cos a = (U_n - \cot\frac{a}{2})\cos a$$

$$= V_n \cos a$$

ដោយ $V_{n+1} = V_n \cos a$ នាំឲ្យ (V_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ

មួយមានរេសុង $\cos a$ និង តួ $V_0 = U_0 - \cot\frac{a}{2} = 1 - \cot\frac{a}{2}$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

យើងមាន ៖

$$V_0 + V_1 + ... + V_n = V_0\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = (1 - \cot\frac{a}{2}).\frac{1 - \cos^{n+1} a}{1 - \cos a}$$

យើងបាន ៖

$$\lim_{n\to+\infty}(V_0+V_1+....+V_n)=\lim_{n\to+\infty}\left[(1-\cot\frac{a}{2})\frac{1-\cos^{n+1}a}{1-\cos a}\right]$$

ដោយ $0<a<\frac{\pi}{2}$ នោះ $0<\cos a<1$ និង $\lim_{n\to+\infty}\cos^{n+1}a=0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(V_0+V_1+....+V_n)=\frac{1-\cot\frac{a}{2}}{1-\cos a}}$ ។

ម៉្យាងទៀត $V_n=U_n-\cot\frac{a}{2}$ នាំឲ្យ $U_n=V_n+\cot\frac{a}{2}$

ដោយ $V_n=V_0\times q^n=(1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a$

គេបាន $U_n=(1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a+\cot\frac{a}{2}$

និង $\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\left[(1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a+\cot\frac{a}{2}\right]=\cot\frac{a}{2}$

ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty}\cos^n a=0$ ។

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}U_n=\cot\frac{a}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} Z_0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ Z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(Z_n + |Z_n| \right) ; n \in IN \end{cases}$$ ($|Z_n|$ ជាម៉ូឌុលនៃ Z_n)

សន្មតថា $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$, $\forall n \in IN$

ដែល $\rho_n > 0$, $\rho_n ; \theta_n \in IR$ ។

ក-ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1} ។

ខ-រកប្រភេទនៃស្វីត (θ_n) រួចគណនា θ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ចូរបង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\dfrac{\theta_1}{2}\cos\dfrac{\theta_2}{2}....\cos\dfrac{\theta_{n-1}}{2}$

រួចបញ្ចាក់ ρ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក-រកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1}

យើងមាន $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$

នាំឲ្យ $Z_{n+1} = \rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1})$

ដោយ $Z_{n+1} = \frac{1}{2}(\,Z_n + |\,Z_n\,|\,)$ ហើយ $|\,Z_n\,| = \rho_n$

គេបាន ៖

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1}) = \frac{1}{2}\left[\rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n) + \rho_n\right]$$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i.\sin\theta_{n+1}) = \frac{1}{2}\rho_n(1 + \cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i.\sin\theta_{n+1}) = \rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}(\cos\frac{\theta_n}{2} + i.\sin\frac{\theta_n}{2})$$

គេទាញបាន $\rho_{n+1} = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2}$ និង $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$

ដូចនេះ $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ និង $\rho_{n+1} = \rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}$ ។

ខ-ប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n) និង គណនា θ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$

នាំឲ្យ (θ_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុងស្មើ $q = \frac{1}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត $\theta_n = \theta_0 \times q^n$

ដោយ $Z_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}$

គេទាញបាន $\rho_0 = 1$; $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ ដូចនេះ $\boxed{\theta_n = \frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n}}$ ។

គ-បង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0\cos\theta_0\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_n}{2}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\rho_{n+1} = \rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}$ ឬ $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \cos\frac{\theta_n}{2}$

គេបាន $\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right) = \prod_{k=0}^{k=n-1}\left[\cos(\frac{\theta_k}{2})\right]$

$$\frac{\rho_n}{\rho_0} = \cos\theta_0.\cos\frac{\theta_1}{2}.\cos\frac{\theta_2}{2}.........\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}}$ ។

ម៉្យាងទៀតយើងមាន $\sin\theta_n = 2\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_n}{2} = 2\sin\theta_{n+1}\cos\frac{\theta_n}{2}$

(ព្រោះ $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$) គេទាញ $\cos\frac{\theta_n}{2} = \frac{1}{2}.\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_{n+1}}$

ហេតុនេះ $\rho_n = \frac{1}{2^n}.\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1}.\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}.....\frac{\sin\theta_{n-1}}{\sin\theta_n} = \frac{1}{2^n}.\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_n}$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_n = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n})} = \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}.\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n})}}$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ $IN \cup \{0\}$ ដោយ ៖

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \quad , n \in IN \end{cases}$$

ក.ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.គណនាផលគុណ $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times .... \times U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន

$$U_0 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} \text{ និង } U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}} = 2\cos\frac{\pi}{8}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+3}}$

យើងមាន $U_{p+1} = \sqrt{2+U_p}$ តែតាមការឧបមា $U_p = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+3}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{U_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times .... \times U_n$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ នាំឲ្យ $2\cos a = \frac{\sin 2a}{\sin a}$

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}(U_k) = \prod_{k=0}^{n}(2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}) = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

ដូចនេះ $P_n = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ ៖

$U_0 = 0$; $U_1 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+2} = 2U_{n+1}\cos a - U_n$

ដែល $a \in IR$ ។

ក. តាង $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)\, U_n$, $\forall n \in IN \cup \{0\}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ រួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$

យើងមាន $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n$

យើងបាន $Z_{n+1} = U_{n+2} - (\cos a - i\sin a)U_{n+1}$

$$= 2U_{n+1}\cos a - U_n - (\cos a - i\sin a)U_{n+1}$$
$$= (\cos a + i\sin a)U_{n+1} - U_n$$
$$= (\cos a + i\sin a)(U_{n+1} - \frac{U_n}{\cos a + i\sin a})$$
$$= (\cos a + i\sin a)\left[U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n\right]$$
$$= (\cos a + i\sin a)\, U_n$$

ដូចនេះ $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ ។

គណនា Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ៖

ដោយ $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ នាំឲ្យ (Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេសុង $q = \cos a + i\sin a$ និង

តួ $Z_0 = U_1 - (\cos a - i\sin a)U_0 = 1$ ។

តាមរូបមន្ត ៖

$$Z_n = Z_0 \times q^n = (\cos a + i\sin a)^n = \cos(na) + i\sin(na)$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n = \cos(na) + i.\sin(na)}$ ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n \quad (1)$

និង $\bar{Z}_n = U_{n+1} - (\cos a + i\sin a)U_n \quad (2)$

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$Z_n - \bar{Z}_n = 2i\sin a\ U_n$ នាំឲ្យ $U_n = \dfrac{Z_n - \bar{Z}_n}{2i\sin a}$ ដែល $\sin a \neq 0$

ដោយ $Z_n = \cos(na) + i\sin(na)$ និង $\bar{Z}_n = \cos(na) - i\sin(na)$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \dfrac{\sin(na)}{\sin a}}$ ។

លំហាត់ទី៦៥

គណនាផលបូកខាងក្រោម

$$S_n = \frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{\tan\frac{\pi}{16}}{\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{\tan\frac{\pi}{32}}{\cos\frac{\pi}{16}} + \dots + \frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

គេបាន $\tan 2x - \tan x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - \tan x = \dfrac{\tan x + \tan^2 x}{1-\tan^2 x}$

$$\tan 2x - \tan x = \tan x . \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$$

ដោយ $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

នោះ $\tan 2x - \tan x = \dfrac{\tan x}{\cos 2x}$ (*)

ដោយជ្រើសរើស $x=\frac{\pi}{2^{k+2}}$ ជួសក្នុង (*)

គេបាន $\tan\frac{\pi}{2^{k+1}}-\tan\frac{\pi}{2^{k+2}}=\dfrac{\tan\frac{\pi}{2^{k+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$

យើងបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\tan\frac{\pi}{2^{k+1}}-\tan\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$

$$=\left(\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{8}\right)+\left(\tan\frac{\pi}{8}-\tan\frac{\pi}{16}\right)+\dots+\left(\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}-\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$=\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}=1-\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

ដូចនេះ $S_n=1-\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\lim_{n\to+\infty}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}=0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}S_n=1$ ។

លំហាត់ទី៦៦

គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d ។

គេតាង $S_n = \frac{\cos a_1}{\cos d} + \frac{\cos a_2}{\cos^2 d} + \frac{\cos a_3}{\cos^3 d} + ... + \frac{\cos a_n}{\cos^n d}$

ចំពោះ $n = 1, 2, 3, ...$ ។

ចូរស្រាយថា $S_n = \frac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $S_n = \frac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$

ដោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d នោះ

$a_{n+1} = a_n + d$ ។

គេបាន $\sin a_{n+1} = \sin(a_n + d) = \sin a_n \cos d + \sin d \cos a_n$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n+1} d \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} = \frac{\sin a_n \cos d + \sin d \cos a_n}{\cos^{n+1} d}$$

គេទាញ $\frac{\cos a_n}{\cos^n d} = \frac{\cos d}{\sin d}\left(\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} - \frac{\sin a_n}{\cos^n d}\right)$

$$S_n = \sum_{p=1}^{n}\left[\ \frac{\cos d}{\sin d}\left(\frac{\sin a_{p+1}}{\cos^{p+1} d} - \frac{\sin a_p}{\cos^p d}\right)\ \right]$$

$$S_n = \frac{\cos d}{\sin d}\left(\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} - \frac{\sin a_1}{\cos d}\right) = \frac{\sin a_{n+1}}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$ ។

លំហាត់ទី៦៧

ក.ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{2+\sin(2n-1)x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}=\frac{2\sin x\cos(2nx)}{[2+\sin(2n-1)x\ ][2+\sin(2n+1)x\ ]}$$

ខ.គណនា $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(2kx)}{\left(2+\sin(2k-1)x\right)\left(2+\sin(2k+1)x\right)}\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ការបង្ហាញ

តាង $f(x)=\frac{1}{2+\sin(2n-1)x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}$

$$=\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\left(2+\sin(2n-1)x\right)\left(2+\sin(2n+1)x\right)}$$

$$=\frac{2\sin x\ \cos(2nx)}{\left(2+\sin(2n-1)x\right)\left(2+\sin(2n+1)x\right)}$$ ពិត

ខ.គណនា $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(2kx)}{\left(2+\sin(2k-1)x\right)\left(2+\sin(2k+1)x\right)}\right]$

យើងបាន $S_n=\frac{1}{2\sin x}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2+\sin(2n-1)x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}\right]$

$$=\frac{1}{2\sin x}\left[\frac{1}{2+\sin x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin x}\cdot\frac{\sin(2n+1)x-\sin x}{\left(2+\sin x\right)\left(2+\sin(2n+1)x\right)}$$

$$=\frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x\left(2+\sin x\right)(2+\sin(2n+1)x)}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x\left(2+\sin x\right)(2+\sin(2n+1)x)}$ ។

លំហាត់ទី៦៨

ក.ចូរស្រាយថា

$$\cos(2nx)=\frac{1}{2\sin x}\left[\ \sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\ \right]$$

ខ.គណនាផលបូក

$$S_n=\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+.....+\cos(2nx)$$

គ.ទាញរកផលបូក

$$T_n=\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+.....+\cos^2(nx)$$

ឃ.គណនាផលបូក

$$U_n=\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+.....+\sin^2(nx)$$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\cos(2nx)=\frac{1}{2\sin x}\left[\ \sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\ \right]$

តាមរូបមន្ត $\sin p-\sin q=2\sin(\frac{p-q}{2})\ \cos(\frac{p+q}{2})$

ដោយយក $p=(2n+1)x$, $q=(2n-1)x$

និង $p-q=2x$, $p+q=4nx$

គេបាន $\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x=2\sin x\cos(2nx)$

ដូចនេះ $\cos(2nx)=\dfrac{1}{2\sin x}\left[\ \sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\ \right]$ ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n=\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+.....+\cos(2nx)$

យើងបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\cos(2kx)\right]$

$$=\frac{1}{2\sin x}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin(2k+1)x-\sin(2k-1)x\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin x}\left[\sin(2n+1)x-\sin x\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin x}\left[2\sin(nx)\cos(n+1)x\right]=\frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x}$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x}$ ។

គ.ទាញរកផលបូក $T_n = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + ... + \cos^2(nx)$

យើងបាន $T_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos^2(kx)\right]$ តាមរូបមន្ត $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$

គេបាន $T_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\cos(2kx)}{2}\right] = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}S_n$

ដោយ $S_n = \frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{\sin x}$

ដូចនេះ $T_n = \frac{n}{2} + \frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{2\sin x}$ ។

ឃ.គណនាផលបូក

$U_n = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + ... + \sin^2(nx)$

យើងបាន $U_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\sin^2(kx)\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[1-\cos^2(kx)\right] = n - T_n$

ដោយ $T_n = \frac{n}{2} + \frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{2\sin x}$

ដូចនេះ $U_n = \frac{n}{2} - \frac{\sin(nx)\cos(n+1)x}{2\sin x}$ ។

លំហាត់ទី៦៩

ក.ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

ខ.ចូរគណនាផលបូក $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{2^k\tan^3\frac{a}{2^n}}{1-\tan^2\frac{a}{2^n}}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

យើងបាន $\dfrac{1}{2}\tan 2x-\tan x=\dfrac{\tan x}{1-\tan^2 x}-\tan x=\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}$

ដូចនេះ $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\tan 2x-\tan x$ ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k \tan^3 \frac{a}{2^k}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2^k}} \right)$

គេមាន $\frac{\tan^3 x}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{2} \tan 2x - \tan x$ យក $x = \frac{a}{2^k}$

គេបាន $\frac{\tan^3 \frac{a}{2^k}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2^k}} = \frac{1}{2} \tan \frac{a}{2^{k-1}} - \tan \frac{a}{2^k}$

យើងបាន៖

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(2^{k-1} \tan \frac{a}{2^{k-1}} - 2^k \tan \frac{a}{2^k} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \tan 2a - 2^n \tan \frac{a}{2^n}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{2} \tan 2a - 2^n \tan \frac{a}{2^n}$ ។

លំហាត់ទី៧០

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

ខ. ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

តាង $A = \cot x - 2\cot 2x$

ដោយ $\begin{cases} \cot x = \dfrac{1}{\tan x} \\ \cot 2x = \dfrac{1}{\tan 2x} = \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x} \end{cases}$

គេបាន

$$A=\frac{1}{\tan x}-2\left(\frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}\right)$$

$$=\frac{1-1+\tan^2 x}{\tan x}=\tan x$$

ដូចនេះ $\tan x=\cot x-2\cot 2x$ ។

ខ. គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n=\tan a+\frac{1}{2}\tan\frac{a}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2}+....+\frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\tan\frac{a}{2^k}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2^k}(\cot\frac{a}{2^k}-2\cot\frac{a}{2^{k-1}})\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{a}{2^k}-\frac{1}{2^{k-1}}\cot\frac{a}{2^{k-1}}\right)=\frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n}-2\cot 2a$$

ដូចនេះ $S_n=\tan a+\frac{1}{2}\tan\frac{a}{2}+....+\frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n}-2\cot 2a$

លំហាត់ទី៧១

គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right)=\tan x.\tan^2\frac{x}{2}.\tan^4\frac{x}{4}.....\tan^{2^n}\frac{x}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ P_n ៖

គេមាន $\tan a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{2\sin^2 a}{2\sin a\cos a}=\frac{2\sin^2 a}{\sin 2a}$

យក $a=\frac{x}{2^k}$ គេបាន $\tan\frac{x}{2^k}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2^k}}{\sin\frac{2x}{2^k}}$

គេទាញ $P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(2^{2^k}.\frac{\sin^{2^{k+1}}\frac{x}{2^k}}{\sin^{2^k}\frac{2x}{2^k}}\right)=2^{2^{n+1}-1}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$

ដូចនេះ $P_n=2^{(2^{n+1}-1)}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$ ។

លំហាត់ទី៧២

គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$

យើងមាន $1-\tan^2\frac{x}{2^k} = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2^k}-\sin^2\frac{x}{2^k}}{\cos^2\frac{x}{2^k}} = \dfrac{\cos\frac{2x}{2^k}}{\cos^2\frac{x}{2^k}}$

គេបាន $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[\dfrac{\cos^{2^k}\frac{x}{2^{k-1}}}{\cos^{2^{k+1}}\frac{x}{2^k}}\right] = \dfrac{\cos 2x}{\cos^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}$

ដូចនេះ $P_n = \dfrac{\cos 2x}{\cos^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៧៣

គណនាផលគុណ៖

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right] \quad \text{ដែល } |x|<\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $\cos 2a=\dfrac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

គេបាន $\cos 2^{k+1}x=\dfrac{1-\tan^2 2^k x}{1+\tan^2 2^k x}$

ហើយ $1-\tan^2 2^k=\dfrac{\cos^2 2^k-\sin^2 2^k}{\cos^2 2^k x}=\dfrac{\cos 2^{k+1}x}{\cos^2 2^k x}$

គេបាន $\dfrac{1+\tan^2 2^k x}{(1-\tan^2 2^k x)^2}=\dfrac{\cos^2 2^k x}{\cos^2 2^{k+1}x}$

ដូចនេះ $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\cos^2 2^k x}{\cos^2 2^{k+1}x}\right)=\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 2^{n+1}x}$ ។

លំហាត់ទី៧៤

ក.ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

ខ.ចូរគណនា $S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^2}} + \dots + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

តាង $f(x) = \cot x - \cot 2x$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{2\sin x \cos x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x - 2\cos^2 x + 1}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$ ។

ខ.គណនា $S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin\frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{\sin\frac{a}{2^n}}$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sin\frac{a}{2^k}} \right)$

ដោយ $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\cot\frac{a}{2^{k+1}} - \cot\frac{a}{2^k} \right)$$

$$= \cot\frac{a}{2^{n+1}} - \cot a$$

ដូចនេះ $S_n = \cot\frac{a}{2^{n+1}} - \cot a$ ។

លំហាត់ទី៧៥

ក.ចូរស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

ខ.គណនា $P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

យើងតាង $A(x)=1+\frac{1}{\cos x}$

$$=\frac{\cos x+1}{\cos x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos x\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}\sin x}{\cos x\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{\sin x}{\cos x}=\tan\frac{x}{2}\ \tan x=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$$

ដូចនេះ $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$ ។

ខ.គណនាផលគុណ

$$P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$$

$$=\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^k}}\right)=\prod_{k=0}^{n}[\frac{\cot\frac{a}{2^{k+1}}}{\cot\frac{a}{2^k}}]$$

ដូចនេះ $P_n=\tan\frac{a}{2^{n+1}}.\cot a$ ។

លំហាត់ទី៧៦

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

ខ.ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right]$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

តាង $f(x) = \tan 2x - 2\tan x$ ដោយ $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

គេបាន $f(x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - 2\tan x$

$$= \frac{2\tan x - 2\tan x(1-\tan^2 x)}{1-\tan^2 x}$$

$$= \frac{2\tan x - 2\tan x + 2\tan^3 x}{1-\tan^2 x}$$

$$= \frac{2\tan^3 x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.\tan^2 x = \tan 2x.\tan^2 x$$

ដូចនេះ $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$ ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\frac{a}{2^k}\ \tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right]$

យើងមាន $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

ដោយយក $x = \frac{a}{2^{k+1}}$

គេបាន $\tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}} = \tan\frac{a}{2^k} - 2\tan\frac{a}{2^{k+1}}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(2^k \tan\frac{a}{2^k} - 2^{k+1}\tan\frac{a}{2^{k+1}}\right) = \tan a - 2^{n+1}\tan\frac{a}{2^{n+1}}$$

ដូចនេះ

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\frac{a}{2^k}\ \tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right] = \tan a - 2^{n+1}\tan\frac{a}{2^{n+1}}$$ ។

លំហាត់ទី៧៧

ក.ចូរស្រាយថា $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

ខ.ចូរគណនា

$$S_n = \sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{a}{3^3} + ... + 3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

យើងមាន $\sin 3x = \sin(x + 2x)$

តាមរូបមន្ត $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

$$\begin{aligned}
&= \sin x\cos 2x + \sin 2x\cos x \\
&= \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x\cos^2 x \\
&= \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x(1 - \sin^2 x) \\
&= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x - 2\sin^3 x \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

ដោយ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

ដូចនេះ $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ ។

ខ. គណនា

$$S_n = \sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{a}{3^3} + ... + 3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(3^{k-1}\sin^3\frac{a}{3^k}\right)$

ដោយ $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$$S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(3^k\sin\frac{a}{3^k} - 3^{k-1}\sin\frac{a}{3^{k-1}}\right) = \frac{1}{4}(3^n\sin\frac{a}{3^n} - \sin a)$$

លំហាត់ទី៧៨

ក.ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\sin^2 x}$

ខ.ចូរគណនា $S_n=\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}}+\frac{1}{4^2\cos\frac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}$

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\sin^2 x}$

យើងមាន

$$\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\sin^2 x}$ ។

ខ. គណនាផលបូក៖

$$S_n=\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}}+\frac{1}{4^2\cos\frac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}$$

យើងបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4^k}.\frac{1}{\cos^2\frac{a}{2^k}}\right)$

ដោយ $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}-\frac{1}{\sin^2 x}$

គេបាន ៖

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4^k}\left(\frac{4}{\sin^2\frac{a}{2^{k-1}}}-\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2^k}}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4^{k-1}}.\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2^{k-1}}}-\frac{1}{4^k}.\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2^k}}\right)=\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៧៩

ក.ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x$

ខ.ចូរគណនា $S_n=\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{\sin\frac{a}{2^n}}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x$

តាង $f(x)=\cot x-\cot 2x$

$$=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{2\cos^2 x-1}{2\sin x\cos x}$$

$$=\frac{2\cos^2 x-2\cos^2 x+1}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin 2x}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x$ ។

ខ.គណនា $S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin\frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{\sin\frac{a}{2^n}}$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sin\frac{a}{2^k}}\right)$ ដោយ $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\cot\frac{a}{2^{k+1}} - \cot\frac{a}{2^k}\right)$$

$$= \cot\frac{a}{2^{n+1}} - \cot a$$

ដូចនេះ $S_n = \cot\frac{a}{2^{n+1}} - \cot a$ ។

លំហាត់ទី៨០

ក.ចូរស្រាយថា $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

ខ.ចូរគណនា $S_n=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+....+\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

យើងមាន $\cos(n+1)x=\cos(nx+x)$

ឬ $\cos(n+1)x=\cos(nx)\cos x-\sin(nx)\sin x$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n+1}x$ គេបាន ៖

$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}=\frac{\cos(nx)\cos x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\sin(nx)\sin x}{\cos^{n+1}x}=\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}-\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}.\tan x$$

នាំឲ្យ $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\frac{1}{\tan x}$

ដូចនេះ $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$ ។

ខ.គណនា $S_n = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin 3x}{\cos^3 x} + ... + \dfrac{\sin(nx)}{\cos^n x}$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\sin(kx)}{\cos^k x}\right]$

ដោយ $\dfrac{\sin(kx)}{\cos^k x} = \left[\dfrac{\cos(k+1)x}{\cos^{k+1} x} - \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k x}\right].\cot x$

$$S_n = \cot x \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos(k+1)x}{\cos^{k+1} x} - \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}\right) = \cot x\left(\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1} x} - 1\right)$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{\cot x[\cos(n+1)x - \cos^{n+1} x]}{\cos^{n+1} x}$

លំហាត់ទី៨១

ក.ចូរបង្ហាញថា $1+\tan x\tan(nx)=\dfrac{\cos(n-1)x}{\cos x\cos(nx)}$

ខ.គណនា $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left[1+\tan x\tan(kx)\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $1+\tan x\tan(nx)=\dfrac{\cos(n-1)x}{\cos x\cos(nx)}$

គេមាន $\cos(n-1)x=\cos(nx)\cos x+\sin(nx)\sin x$

នាំឲ្យ $\dfrac{\cos(n-1)x}{\cos x\cos(nx)}=\dfrac{\cos(nx)\cos x+\sin(nx)\sin x}{\cos(nx)\cos x}$

$=1+\tan x\tan(nx)$ ពិត

ដូចនេះ $1+\tan x\tan(nx)=\dfrac{\cos(n-1)x}{\cos x\cos(nx)}$ ។

ខ.គណនា

គេមាន $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left[1+\tan x\tan(kx)\right]$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(k-1)x}{\cos x\cos(kx)}\right]$$

$$=\frac{1}{\cos^n x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\cos 2x}\cdot\frac{\cos 2x}{\cos 3x}\cdots\frac{\cos(n-1)x}{\cos(nx)}$$

$$=\frac{1}{\cos^n x\,\cos(nx)}$$

$$P_n=\frac{1}{\cos^n x\cos(nx)}$$

លំហាត់ទី៨២

ក.ចូរស្រាយថា

$$\frac{1}{\cos(nx).\cos(n+1)x}=\frac{1}{\sin x}\left[\tan(n+1)x-\tan(nx)\right]$$

ខ. គណនាផលបូក $S_n=\sum_{p=1}^{n}\left[\frac{1}{\cos(px)\ \cos(p+1)x}\right]$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\frac{1}{\cos(nx).\cos(n+1)x}=\frac{1}{\sin x}\left[\tan(n+1)x-\tan(nx)\right]$

តាមរូបមន្ត $\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

នាំឲ្យ $\frac{1}{\cos p\ \cos q}=\frac{1}{\sin(p-q)}\left(\ \tan p-\tan q\right)\ \ (1)$

យក $p=(n+1)x\ ,\ q=(nx)$ និង $p-q=x$ ជួសក្នុង(1) គេបាន

$$\frac{1}{\cos(nx).\cos(n+1)x}=\frac{1}{\sin x}\left[\tan(n+1)x-\tan(nx)\right]$$ ពិត ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n = \sum_{p=1}^{n} \left[\dfrac{1}{\cos(px)\ \cos(p+1)x} \right]$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន ៖

$$\frac{1}{\cos(px).\cos(p+1)x} = \frac{1}{\sin x}\left[\tan(p+1)x - \tan(px)\right]$$

យើងបាន $S_n = \dfrac{1}{\sin x}\sum_{p=1}^{n}\left[\tan(p+1)x - \tan(px)\right]$

$$= \frac{1}{\sin x}\left[\tan(n+1)x - \tan x\right]$$

$$= \frac{\sin(nx)}{\sin x \cos x \cos(n+1)x}$$

លំហាត់ទី៨៣

ក.ចូរស្រាយថា

$$\tan(n+1)x-\tan(nx)=\tan x\left[1+\tan(nx)\tan(n+1)x\right]$$

ខ.គណនាផលបូក

$$S_n=\tan x\tan 2x+\tan 2x\tan 3x+.....+\tan(nx)\tan(n+1)x$$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\tan(n+1)x-\tan(nx)=\tan x\left[1+\tan(nx)\tan(n+1)x\right]$

តាមរូបមន្ត $ta(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

នាំឲ្យ $\tan a-\tan b=\tan(a-b)\left(1+\tan a\ \tan b\right)\quad(1)$

ដោយយក $a=(n+1)x$, $b=nx$ និង $a-b=x$

ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\tan(n+1)x-\tan(nx)=\tan x\left[1+\tan(nx)\tan(n+1)x\right]$$ ។

ខ.គណនាផលបូក

$$S_n = \tan x \tan 2x + \tan 2x \tan 3x + ... + \tan(nx)\tan(n+1)x$$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\tan(kx)\tan(k+1)x\right]$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន ៖

$$\tan(n+1)x - \tan(nx) = \tan x\left[1 + \tan(nx)\tan(n+1)x\right]$$

ឬ $\tan(nx)\tan(n+1)x = \left[\tan(n+1)x - \tan(nx)\right]\cot x \ -1$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\tan(k+1)x - \tan(kx)\right)\cot x - 1\right]$

$$= \left[\tan(n+1)x - \tan x\right]\cot x - n$$

$$= \frac{\sin(nx)}{\cos(n+1)x\cos x}\cot x - n$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{\sin(nx)}{\cos(n+1)x\sin x} - n$ ។

លំហាត់ទី៨៤

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $2\cos x - 1 = \dfrac{1+2\cos 2x}{1+2\cos x}$

ខ.ចូរគណនាផលគុណ ៖

$$P_n = (2\cos a - 1)(2\cos\frac{a}{2} - 1)(2\cos\frac{a}{2^2} - 1).....(2\cos\frac{a}{2^n} - 1)$$

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2\cos x - 1 = \dfrac{1+2\cos 2x}{1+2\cos x}$

តាមរូបមន្ត $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$2\cos 2x = 4\cos^2 x - 2$$

$$2\cos 2x + 1 = 4\cos^2 x - 1$$

$$2\cos 2x + 1 = (2\cos x + 1)(2\cos x - 1)$$

ដូចនេះ $2\cos x - 1 = \dfrac{1+2\cos 2x}{1+2\cos x}$ ។

ខ. គណនាផលគុណ ៖

$$P_n = (2\cos a - 1)(2\cos\frac{a}{2} - 1)(2\cos\frac{a}{2^2} - 1).....(2\cos\frac{a}{2^n} - 1)$$

$$= \prod_{k=0}^{n}\left(2\cos\frac{a}{2^k} - 1\right)$$

ដោយ $2\cos x \ - 1 = \dfrac{1+2\cos 2x}{1+2\cos x}$

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[\frac{1+2\cos(\frac{a}{2^{k-1}})}{1+2\cos(\frac{a}{2^k})}\right] = \frac{1+2\cos 2a}{1+2\cos\frac{a}{2^n}}$$

ដូចនេះ $P_n = \dfrac{1+2\cos 2a}{1+2\cos\frac{a}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៨៥

ក.ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$

ខ.ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\dfrac{3^k\tan^3\frac{a}{3^k}}{1-3\tan^2\frac{a}{3^k}}\right]$

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$

តាមរូបមន្ត $\tan 3x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

យើងបាន $\tan 3x-3\tan x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}-3\tan x=\dfrac{8\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

ដូចនេះ $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$ ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{3^k \tan^3 \frac{a}{3^k}}{1 - 3\tan^2 \frac{a}{3^k}} \right]$

យើងមាន $\frac{\tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} = \frac{1}{8}(\tan 3x - 3\tan x)$

ដោយយក $x = \frac{a}{3^k}$

គេបាន $\frac{\tan^3 \frac{a}{3^k}}{1 - 3\tan^2 \frac{a}{3^k}} = \frac{1}{8}\left(\tan \frac{a}{3^{k-1}} - 3\tan \frac{a}{3^k}\right)$

យើងបាន

$$S_n = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n}(3^k \tan \frac{a}{3^{k-1}} - 3^{k+1} \tan \frac{a}{3^k}) = \frac{1}{8}\left(\tan 3a - 3^{n+1} \tan \frac{a}{3^n}\right)$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{\tan 3a}{8} - \frac{3^{n+1}}{8} \tan \frac{a}{3^n}$ ។

លំហាត់ទី៨៦

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មានជ្រុង a , b , c និងមានមុំក្នុង α , β , γ

បើ $\alpha = 3\beta$ ចូរបង្ហាញថា $(a-b)(a^2-b^2)=bc^2$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(a-b)(a^2-b^2)=bc^2$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស៖

$$a = 2R\sin\alpha \ , \ b = 2R\sin\beta \ , \ c = 2R\sin\gamma$$

គេបាន $(a-b)(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b)$

ដោយ $a-b = 2R(\sin\alpha - \sin\beta)$

$$= 2R(\sin 3\beta - \sin\beta)$$
$$= 4R\sin\beta\cos 2\beta$$

ហើយ $a+b = 2R(\sin\alpha + \sin\beta)$

$$= 2R(\sin 3\beta + \sin\beta)$$
$$= 4R\sin 2\beta\cos\beta$$
$$= 8R\sin\beta\cos^2\beta$$

គេបាន $(a-b)(a^2-b^2)=16R^2\sin^2\beta\cos^2 2\beta . 8R\sin\beta\cos^2\beta$

$$= 8R^3\sin^2 4\beta\sin\beta$$
$$= 8R^3\sin^2(\pi-4\beta)\sin\beta$$
$$= 8R^3\sin^2\gamma\sin\beta$$

ដូចនេះ $(a-b)(a^2-b^2)=bc^2$ ។

លំហាត់ទី៨៧

គេឲ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមាន $\mathbf{a , b , c}$ ជារង្វាស់ជ្រុងឈម

រៀងគ្នានៃមុំ $\mathbf{A , B , C}$ ។

តាង $\mathbf{p}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ក.ចូរស្រាយថា $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ រួចទាញរកទំនាក់ទំនង

ពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។

ខ.ទាញបញ្ជាក់ថា $bc.\cos^2\frac{A}{2}+ac.\cos^2\frac{B}{2}+ab.\cos^2\frac{C}{2}=p^2$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ គេមាន

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ គេទាញ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

គេបាន $\cos^2\frac{A}{2}=\dfrac{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

ដោយ $a+b+c=2p$ នោះ $b+c-a=2\,(p-a)$

គេបាន $\cos^2\frac{A}{2}=\dfrac{2p\,.\,2(p-a)}{4bc}=\dfrac{p(p-a)}{bc}$

ឬ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$ ពិត។

គេទាញបានទំនាក់ទំនងស្រដៀងគ្នានេះដូចខាងក្រោម ៖

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ ,\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$ ។

ខ.ទាញបញ្ជាក់ថា

$$bc\,.\cos^2\frac{A}{2}+ac.\cos^2\frac{B}{2}+ab.\cos^2\frac{C}{2}=p^2$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$, $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

គេទាញ $bc\cos^2\frac{A}{2}=p(p-a)=p^2-p.a$

$$ac\cos^2\frac{B}{2}=p(p-b)=p^2-p.b$$

$$ab\cos^2\frac{C}{2}=p(p-c)=p^2-p.c$$

$$bc.\cos^2\frac{A}{2}+ac.\cos^2\frac{B}{2}+ab.\cos^2\frac{C}{2}=3p^2-p(a+b+c)$$

$$=3p^2-2p^2=p^2$$

ដូចនេះ $bc.\cos^2\frac{A}{2}+ac.\cos^2\frac{B}{2}+ab.\cos^2\frac{C}{2}=p^2$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក.ចូរស្រាយថា $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$ ។

ខ.ទាញបញ្ជាក់ថា $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

យើងមាន $A+B+C=\pi$ ឬ $A+B=\pi-C$

គេបាន $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$
$$\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$$

ដូចនេះ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$ ។

ខ.ទាញបញ្ជាក់ថា $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$

ដោយ A , B , C ជាមុំស្រួច (តាមសម្មតិកម្ម)

គេទាញ $\tan A>0$, $\tan B>0$, $\tan C>0$

តាមវិសមភាពកូស៊ីយើងអាចសរសេរ ៖

$$\tan A+\tan B+\tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C}$$

ដោយ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

គេបាន $\tan A+\tan B+\tan B\geq 3\sqrt[3]{\tan A+\tan B+\tan C}$

$$(\tan A+\tan B+\tan C)^3\geq 27(\tan A+\tan B+\tan C)$$
$$(\tan A+\tan B+\tan C)^2\geq 27$$

ដូចនេះ $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៨៩

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C < 1$

ដំណោះស្រាយ

តាង $T=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\cos^2 C\\
&=1+\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}+\cos^2 C\\
&=1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2 C\\
&=1+\cos(\pi-C)\cos(A-B)+\cos^2 C\\
&=1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C\\
&=1-\cos C\left[\cos(A-B)-\cos C\right]\\
&=1-\cos C\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]=1-2\cos A\cos B\cos C
\end{aligned}
$$

គេបាន $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

ដោយ A , B , C ជាមុំស្រួចនោះ $\cos A>0$, $\cos B>0$, $\cos C>0$

ដូចនេះ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C < 1$ ។

លំហាត់ទី៩០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C \\
&= 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C \\
&= 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C \\
&= 2 + \cos C \ \cos(A-B) - \cos C \\
&= 2 + \cos C \left[\ \cos(A-B) + \cos(A+B) \ \right] \\
&= 2 + 2\cos A \cos B \cos C
\end{aligned}
$$

ដោយ A , B , C ជាមុំស្រួចនោះ $\cos A > 0 , \cos B > 0 , \cos C > 0$

ដូចនេះ $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$ ។

លំហាត់ទី៩១

គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ក. ចូរស្រាយថា $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ ។

ខ. ចូរស្រាយថា $\cot^2 A-1=2\cot 2A\cot A$ ។

គ. គេដឹងថាមុំ **A ; B ; C** បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មួយដែលមានរេសុងស្មើនឹង $q=2$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}=8$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

យើងមាន $A+B+C=\pi$ ឬ $A+B=\pi-C$

គេបាន $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

$$\frac{\frac{1}{\cot A}+\frac{1}{\cot B}}{1-\frac{1}{\cot A}.\frac{1}{\cot B}}=-\frac{1}{\cot C}$$

$$\frac{\cot A+\cot B}{\cot A\cot B-1}=-\frac{1}{\cot C}$$

$$\cot A\cot C+\cot B\cot C=-\cot A\cot B+1$$

ដូចនេះ $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ ។

ខ.ស្រាយថា $\cot^2 A-1=2\cot 2A\cot A$

យើងមាន $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$$\frac{1}{\cot 2A}=\frac{\frac{2}{\cot A}}{1-\frac{1}{\cot^2 A}}=\frac{2\cot A}{\cot^2 A-1}$$

ដូចនេះ $\cot^2 A-1=2\cot 2A\cot A$ ។

គ.ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}=8$

តាង $T=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}$

$$=(1+\cot^2 A)+(1+\cot^2 B)+(1+\cot^2 C)$$

$$=(\cot^2 A-1)+(\cot^2 B-1)+(\cot^2 C-1)+6$$

$$=2\cot 2A\cot A+2\cot B\cot 2B+2\cot 2C\cot C+6 \quad (1)$$

ដោយមុំ $A\,;B\,;C$ ជាស្វីតធរណីមាត្រមួយដែលមានរេសុង

ស្មើនឹង $q=2$ គេបាន $B=2A$, $C=2B=4A$

ដោយ $A+B+C=\pi$

គេបាន $A+2A+4A=\pi$ នាំឲ្យ $A=\frac{\pi}{7}$, $B=\frac{2\pi}{7}$, $C=\frac{4\pi}{7}$

តាម (1) គេបាន $T=2\cot\frac{2\pi}{7}\cot\frac{\pi}{7}+2\cot\frac{2\pi}{7}\cot\frac{4\pi}{7}+\cot\frac{8\pi}{7}\cot\frac{4\pi}{7}+6$

ដោយ $\cot\frac{8\pi}{7}=\cot\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$T = 2\cot\frac{\pi}{7}\cot\frac{2\pi}{7} + 2\cot\frac{2\pi}{7}\cot\frac{4\pi}{7} + 2\cot\frac{\pi}{7}\cot\frac{4\pi}{7} + 6$$
$$= 2(\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot A\cot C) + 6$$
$$= 2(1) + 6 = 8$$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\sin^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 B} + \dfrac{1}{\sin^2 C} = 8$ ។

លំហាត់ទី៩២

រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ ៖

$$P(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 2(\tan x + \cot x) + 27$$
$$Q(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 8(\tan x + \cot x) + 87$$

ដែល $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ ៖

$$P(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 2(\tan x + \cot x) + 27$$

ដែល $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

តាង $z = \tan x + \cot x$ ដែល $z \geq 2$

គេបាន $z^2 = (\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2$

គេទាញ $\tan^2 x + \cot^2 x = z^2 - 2$

យើងបាន $P(z) = z^2 - 2 - 2z + 27 = (z-1)^2 + 24$

ដោយ $z \geq 2$ ហេតុនេះគេបាន $P(z) \geq 1 + 24 = 25$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $P(x)$ គឺ $m = 25$ ។

ម៉្យាងទៀតដោយ $Q(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 8(\tan x + \cot x) + 87$

គេបាន $Q(z) = z^2 - 2 - 8z + 87 = (z-4)^2 + 69$

ដោយ $z \geq 2$ ហេតុនេះដើម្បីឲ្យ Q អប្បបរមាលុះត្រាតែ $z = 4$ ។

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $Q(x)$ គឺ $m = 69$ ។

លំហាត់ទី៩៣

គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ។

បង្ហាញថាបើ $\tan\frac{A}{3}, \tan\frac{B}{3}, \tan\frac{C}{3}$ ជាឬសរបស់សមីការ

$(E): x^3+ax^2+bx+c=0$ នោះគេបាន $\sqrt{3}+a=\sqrt{3}b+c$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $\tan(\frac{A}{3}+\frac{B}{3}+\frac{C}{3})=\tan[(\frac{A}{3}+\frac{B}{3})+\frac{C}{3}]$

$$\tan(\frac{A+B+C}{3})=\frac{\tan(\frac{A}{3}+\frac{B}{3})+\tan\frac{C}{3}}{1-\tan(\frac{A}{3}+\frac{B}{3})\tan\frac{C}{3}}$$

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\dfrac{\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{B}{3}}{1-\tan\frac{A}{3}\tan\frac{B}{3}}+\tan\frac{C}{3}}{1-\dfrac{\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{B}{3}}{1-\tan\frac{A}{3}\tan\frac{B}{3}}.\tan\frac{C}{3}}$$

$$\sqrt{3}=\frac{\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{B}{3}+\tan\frac{C}{3}-\tan\frac{A}{3}\tan\frac{B}{3}\tan\frac{C}{3}}{1-(\tan\frac{A}{3}\tan\frac{B}{3}+\tan\frac{A}{3}\tan\frac{C}{3}+\tan\frac{B}{3}\tan\frac{C}{3})}\quad (1)$$

ដោយ $\tan\frac{A}{3}$, $\tan\frac{B}{3}$, $\tan\frac{C}{3}$ ជាឫសរបស់សមីការ **(E)**

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមានទំនាក់ទំនង ៖

$$\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{B}{3}+\tan\frac{C}{3}=-a \quad (2)$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=b \quad (3)$$

$$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}=-c \quad (4)$$

យកទំនាក់ទំនង **(2) , (3)** និង **(4)** ជួសក្នុងសមីការ **(1)**

គេបាន $\sqrt{3}=\frac{-a+c}{1-b}$ ឬ $\sqrt{3}-\sqrt{3}\,b=-a+c$ ពិត

លំហាត់ទី៩៤

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ដែល $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ?

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

ដោយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$ គេបាន ៖

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1-2\frac{a^2}{4bc}$$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-a^2}{2bc}$$

$$b^2+c^2-a^2=2bc-a^2$$

$$b^2-2bc+c^2=(b-c)^2=0\Rightarrow b=c$$

ត្រីកោណ ABC មានជ្រុង $b=c$ នាំឲ្យវាជាត្រីកោណសមបាត។

លំហាត់ទី៩៥

មានត្រីកោណ ABC មួយដែល $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

តាង R និង S រៀងគ្នាជាកាំ និង ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC នេះ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{4S}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{4S}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស និង ស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ ABC

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ឬ $\frac{\cos A}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ឬ $\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$ និង $S = \frac{abc}{4R}$

គេបាន $\frac{\cos A}{a} = \frac{4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)}{8RS}$

ឬ $\frac{\cos A}{a} = \frac{R(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)}{4S}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{\cos B}{b} = \frac{R(\sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B)}{4S}$ (2)

និង $\frac{\cos C}{c} = \frac{R(\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C)}{4S}$ (3)

បូកសមភាព (1),(2) &(3) គេបាន ៖

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{4S}$$ ពិត ។

លំហាត់ទី៩៦

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖

ក/ $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\dfrac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$

ខ/ $\left(1+\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\ge\left(\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$

ដំណោះស្រាយ

ក/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

តាងជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ និង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

យក R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង S ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ ΔABC ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេបាន $a^2=(b^2+2bc+c^2)-2bc(1+\cos A)$

គេទាញ $1+\cos A=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$

ដោយ $p=\frac{a+b+c}{2}$ នោះ $a+b+c=2p$ និង $b+c-a=2(p-a)$

គេបាន $1+\cos A=\frac{4p(p-a)}{2bc}=\frac{2p(p-a)}{bc}$

ដូចគ្នាដែរ $1+\cos B=\frac{2p(p-b)}{ac}$, $1+\cos C=\frac{2p(p-c)}{ab}$

គេបាន

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{8p^2.p(p-a)(p-b)(p-c)}{(abc)^2} \quad (1)$$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R}$

គេទាញ $\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(abc)^2}=\frac{1}{16R^2} \quad (2)$

យកទំនាក់ទំនង (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{8p^2}{16R^2}=\frac{1}{2}.\left(\frac{p}{R}\right)^2 \quad (3)$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

គេទាញ $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{2p}{2R}=\frac{p}{R}$ (4)

តាម (3) និង (4) គេបានទំនាក់ទំនង ៖

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$ ពិត ។

ខ/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\left(1+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\geq\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$$

ដោយប្រើវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេបាន ៖

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)\leq\left(\frac{1+\cos A+1+\cos B+1+\cos C}{3}\right)^3$$

ឬ $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)\leq\left(1+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3$

ដោយ $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$

ដូចនេះ $\left(1+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\geq\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$ ពិត។

លំហាត់ទី៩៧

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}$

ដែល a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណ ABC ។

ខ.ទាញបញ្ជាក់ថា $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \le \frac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសគេមាន $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន $b^2 + c^2 \ge 2bc$

គេទាញ $a^2 \ge 2bc - 2bc\cos A = 2bc(1-\cos A)$

ដូចនេះ $1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\le\frac{1}{8}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $1-\cos A\le\frac{a^2}{2bc}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $1-\cos B\le\frac{b^2}{2ac}$ (2) និង $1-\cos C\le\frac{c^2}{2ab}$ (3)

គុណវិសមភាព (1) , (2) , (3) អង្គ និង អង្គគេទទួលបាន ៖

$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\le\frac{1}{8}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៩៨

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$

តាង $a\,,\,b\,,\,c$ ជាជ្រុងត្រីកោណ ABC និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

គេទាញ $\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2r\sin B \quad (1) \\ c = 2R\sin C \end{cases}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (2)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$$4R^2\sin^2 A = 4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A)$$

សម្រួល $4R^2$ ក្នុងអង្គទាំងពីរនៃសមភាពគេបាន ៖

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$ ពិត

ដូចនេះ $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$$

គេទាញ $\cos A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B\sin C}$ ដោយ $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

គេបាន $\cot A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin A\sin B\sin C}$ (i)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេទទួលបាន $\cot B = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B}{2\sin A \sin B \sin C}$ **(ii)**

និង $\cot C = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$ **(iii)**

ធ្វើផលបូកសមភាព **(i)** , **(ii)** & **(iii)** គេបាន ៖

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$$ ពិត

ដូចនេះ $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$ ។

លំហាត់ទី៩៩

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$$ ។

ចូរស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមង្ស ?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមង្ស

តាង a , b , c ជាជ្រុង និង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

គេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

គេទាញបាន $\sin A=\frac{2S}{bc}$, $\sin B=\frac{2S}{ac}$, $sibC=\frac{2S}{ab}$

គេបាន $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2S}{bc}}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

ហើយ $\cot B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$, $\cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

គេបាន $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} \quad (1)$

ម៉្យាងទៀត $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} = \dfrac{bc + ca + ab}{2S} \quad (2)$

តាមសម្មតិកម្ម $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} \right) (3)$

យកសមីការ (1) & (2) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន ៖

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \frac{ab + bc + ca}{4S}$$

ឬ $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

ទំនាក់ទំនងនេះសមមូល $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

គេទាញ $\begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c - a = 0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a = b = c$ ។

ដោយត្រីកោណ ABC មានជ្រុងបីស្មើគ្នាវាជាត្រីកោណសមង្ស ។

សម្គាល់ ៖

ដោយគេអាចស្រាយថា $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$

ហើយសម្មតិកម្ម $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}\right)$

គេទាញបានសមីការ ៖

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$$

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A$$

$$(\sin A-\sin B)^2+(\sin B-\sin C)^2+(\sin C-\sin A)^2=0$$

គេទាញ $\begin{cases}\sin A-\sin B=0\\ \sin B-\sin C=0\\ \sin C-\sin A=0\end{cases}$ នាំឱ្យ $\sin A=\sin B=\sin C$

ឬ $A=B=C$ នោះ ABC ជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

លំហាត់ទី១០០

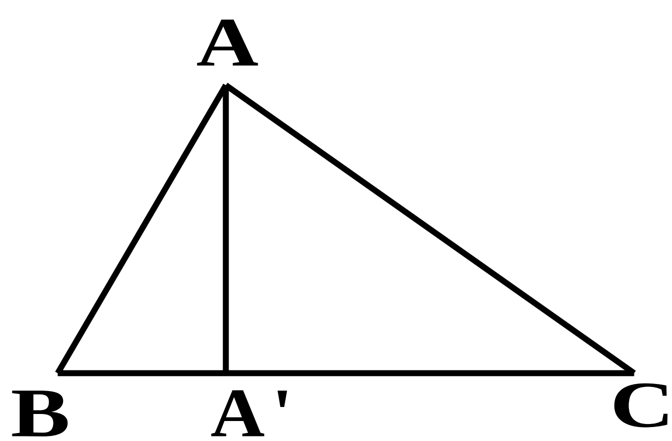
តាង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC មួយ

ក. ចូរស្រាយថា $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{2R^2}{S}$

ខ. បើ ABC ជាមុំស្រួចនោះចូរទាញឱ្យបានថា $\cos A\cos B\cos C\le\dfrac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{2R^2}{S}$



គូសកំពស់ $AA'=h_a$ នៃ ΔABC ។

តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង ABA' & $AA'C$ គេមាន

$$\cot B = \frac{BA'}{AA'} \; ; \; \cot C = \frac{A'C}{AA'}$$

គេបាន $\cot B + \cot C = \frac{BA' + A'C}{AA'} = \frac{a}{h_a} = \frac{a^2}{2S}$

ដែល S ជាផ្ទៃក្រឡា ΔABC ។

ដូចគ្នាដែរ $\cot C + \cot A = \frac{b^2}{2S}$, $\cot A + \cot B = \frac{c^2}{2S}$

គេបាន $(\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) = \frac{a^2 b^2 c^2}{8S^3}$

ដោយ $S = \frac{abc}{4R}$ នោះ $abc = 4RS$

គេបាន $(\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) = \frac{16R^2 S^2}{8S^3}$

ដូចនេះ $(\cot A + \cot B)(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A) = \frac{2R^2}{S}$ ។

ខ. ទាញ ឱ្យបានថា ៖ $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$

មាន $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\frac{2R^2}{S}$ (i)

បើ ABC ជាមុំស្រួចនោះ $\cot A>0$, $\cot B>0$, $\cot C>0$

តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន ៖

$$\cot A+\cot B\ge 2\sqrt{\cot A\cot B}\ ,\ \cot B+\cot C\ge 2\sqrt{\cot B\cot C}$$
$$\cot C+\cot A\ge 2\sqrt{\cot C\cot A}$$

គុណវិសមភាពខាងលើនេះ អង្គ និង អង្គ គេបាន

$$(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)\ge 8\cot A\cot B\cot C\ \text{(ii)}$$

តាម (i)&(ii) គេទាញបាន $8\cot A\cot B\cot C\le\frac{2R^2}{S}$

តែ $S=\frac{abc}{4R}=\frac{8R^3\sin A\sin B\sin C}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

គេបាន $8\cot A\cot B\cot C\le\frac{2R^2}{2R^2\sin A\sin B\sin C}$

ដូចនេះ $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី១០១

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ គេឱ្យ $S_n = \cos^n\frac{\pi}{12} + \sin^n\frac{\pi}{12}$

ក. គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ខ. បង្ហាញថា $4S_{n+2} - 2\sqrt{6}S_{n+1} + S_n = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ដោយគេមាន $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ នោះគេបាន ៖

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $4S_{n+2} - 2\sqrt{6}S_{n+1} + S_n = 0$

គេមាន $S_n = \cos^n\frac{\pi}{12} + \sin^n\frac{\pi}{12}$

តាង $x_1 = \cos\frac{\pi}{12}$; $x_2 = \sin\frac{\pi}{12}$ នោះ $S_n = {x_1}^n + {x_2}^n$

គេមាន $x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

ហើយ $x_1.x_2 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4}$

គេបាន x_1 និង x_2 ជាឫសសមីការ $x^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{1}{4} = 0$

ឬ $4x^2-2\sqrt{6}x+1=0$

គេទាញ $\begin{cases}4{x_1}^2-2\sqrt{6}x_1+1=0\\4{x_2}^2-2\sqrt{6}x_2+1=0\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}4{x_1}^{n+2}-2\sqrt{6}{x_1}^{n+1}+{x_1}^n=0\ (i)\\4{x_2}^{n+2}-2\sqrt{6}{x_2}^{n+1}+{x_2}^n=0\ (i\ \ )\end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$4({x_1}^{n+2}+{x_2}^{n+2})-2\sqrt{6}({x_1}^{n+1}+{x_2}^{n+1})+({x_1}^n+{x_2}^n)=0$$

ដូចនេះ $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$ ។

លំហាត់ទី១០២

គេឱ្យត្រីកោណ ABC ហើយគេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់

ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

គេមាន $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

ហើយ $\cos C = 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 - 2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)$$

ដោយ $\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}$

$$=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad (i)$

គេដឹងថា ៖

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$

និង $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

តាមរូបមន្តហេរុង ៖

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R}$$

គេទាញ $(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=pr^2=rS$

ហើយ $abc=4pRr$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4.\frac{r\,S}{4p\,s}=1+\frac{r}{R}$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$ ។

លំហាត់ទី១០៣

គេយក A, B, C ជាមុំបីនៃត្រីកោណ ABC ។

តាងអនុគមន៍ $y = \cot A + \dfrac{2\sin A}{\cos A + \cos(B-C)}$

រកតម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍នេះ ?

ដំណោះស្រាយ

តម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍

$$y = \cot A + \frac{2\sin A}{\cos A + \cos(B-C)}$$

គេមាន $A + B + C = \pi$

នោះ $\cos A = \cos(\pi - B - C) = -\cos(B+C)$

គេបាន

$$y = \cot A + \frac{2\sin A}{\cos(B-C)-\cos(B+C)}$$

$$= \cot A + \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$$

$$= \frac{\cos A \sin B \sin C + \sin^2 A}{\sin A \sin B \sin C}$$

យក a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណនេះ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ នាំឲ្យ } \begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases} \quad (1)$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (2)$$

យកទំនាក់ទំនង (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន

$$4R^2\sin^2 A = 4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A)$$

គេទាញ $\sin B\sin C\cos A=\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2}$

ហេតុនេះអនុគមន៍ y អាចសរសេរ

$$y=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin B}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\ge 3\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}$$

$$\Rightarrow y\ge\frac{3\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}}{2\sin A\sin B\sin C}$$

$$\Rightarrow y\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}}$$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\sin x$ ដែល $0<x<\pi$

គេមាន $f''(x)=-\sin x<0\ ,\ \forall x\in(0;\pi)$

នាំឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមទ្រឹស្តីបទ Jensen គេបាន

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \le f(\frac{A+B+C}{3})$$

ឬ $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \le \sin(\frac{A+B+C}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

តាម វិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \ge \sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$$

គេទាញ $\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

ឬ $\sin A\sin B\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

ហេតុនេះ $y \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}} \ge \frac{3}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

ដោយ $y = \cot A + \frac{2\sin A}{\cos A+\cos(B-C)} \ge \sqrt{3}$

ដូចនេះតម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍គឺ $\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី១០៤

គេឲ្យ **ABC** ជាត្រីកោណមួយហើយតាង **r** និង **R**

រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$

តាង **a , b , c** ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណ **ABC** ហើយយក

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

គេមាន $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

យើងបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=1+4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$$=1+4\frac{\frac{S^2}{p}}{4RS}=1+\frac{S}{pR}$$

$$=1+\frac{pr}{pR}=1+\frac{r}{R}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

$$1-2\sin^2\frac{A}{2}+1-2\sin^2\frac{B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}=1+\frac{r}{R}$$

$$3-2(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})=1+\frac{r}{R}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-\frac{r}{2R}\quad(1)$$

តាមវិសមភាព Jensen យើងមាន ៖

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le 3\sin(\frac{A+B+C}{6})=3\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4} \quad (2)$$

ដោយប្រើសមភាព

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$1-\frac{r}{2R}+2(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}) \le \frac{9}{4}$$

ឬ $2(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}) \le \frac{5}{4}+\frac{r}{2R}$

ដូចនេះ: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \le \frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$ ។