កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសពិសេស

ឌីផេរ៉ង់ស្យែល

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១០

រួមមាន

- ដេរីវេនិងប្រមាណវិធីលើដេរីវេ
- ការអនុវត្តនៃដេរីវេ

រៀបរៀងដោយ អោ មណីចន្ទ្រា

គ្រឹះស្ថានបោះពុម្ព

ជំពូកទី០១

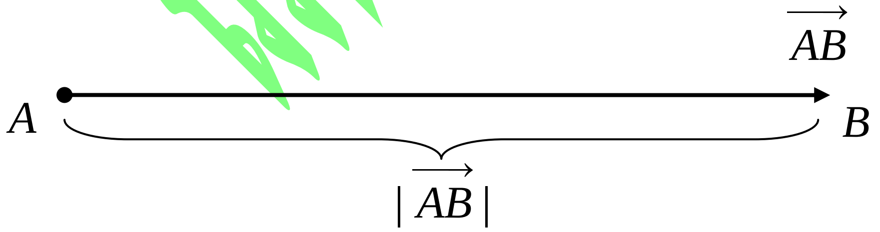
វ៉ិចទ័រ និង ប្រមាណវិធីលើវ៉ិចទ័រ

១-និយមន័យ

$*$ អង្កត់មានទិសដៅ ដែលមិនគិតពីទីតាំងហៅថា **វ៉ិចទ័រ** ។

$*$ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ គឺមានចំណុច A ជាគល់ និងចំណុច B ជាចុង ។

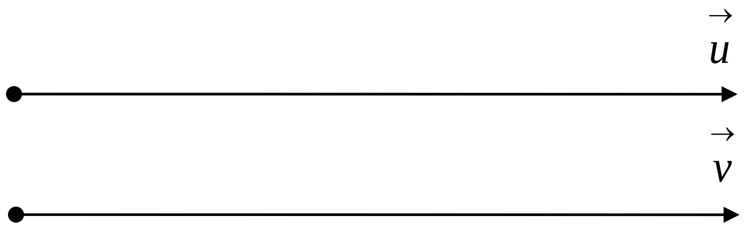
$*$ ចម្ងាយពីចំណុច A ទៅចំណុច B គឺជាប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ដែលគេតាងដោយ $|\overrightarrow{AB}|$ ។



$*$ គេអាចតាងសម្គាល់ឈ្មោះវ៉ិចទ័រដោយប្រើអក្សរតែមួយ ។

ឧទាហរណ៍ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$,....,$\overrightarrow{PQ}=\vec{u}$,.... ។

២-វ៉ិចទ័រស្មើគ្នា

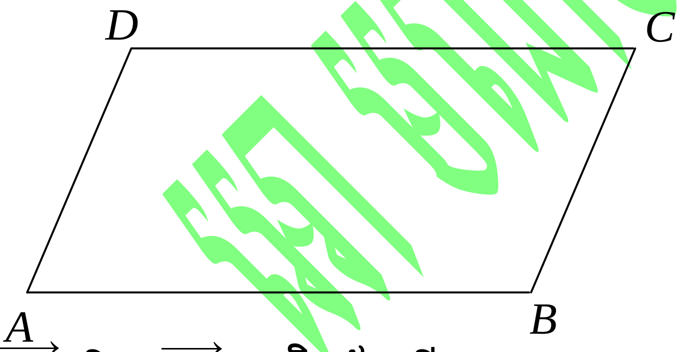


វ៉ិចទ័រពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែ៖

* វាមានទិសដៅដូចគ្នា

* វាមានប្រវែងស្មើគ្នា

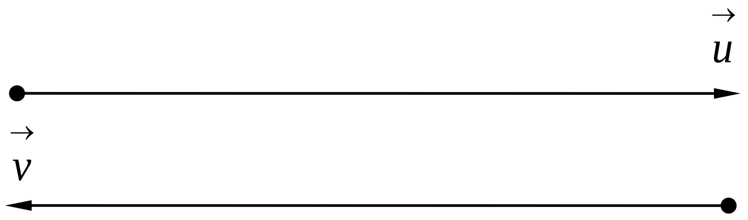
ឧទាហរណ៍ ក្នុងប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ មួយគេមាន ៖



-វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DC}$ ជាវ៉ិចទ័រស្មើគ្នា ។ គេសរសេរ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ។

-វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ជាវ៉ិចទ័រស្មើគ្នា ។ គេសរសេរ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ។

៣-វ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នា

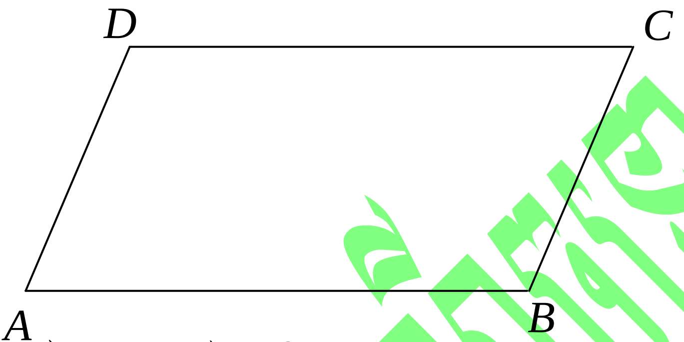


វិចទ័រពីរជាវិចទ័រផ្ទុយគ្នាលុះត្រាតែ៖

* វាមានទិសដៅផ្ទុយគ្នា

* វាមានប្រវែងស្មើគ្នា

ឧទាហរណ៍ ក្នុងប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ មួយគេមាន ៖

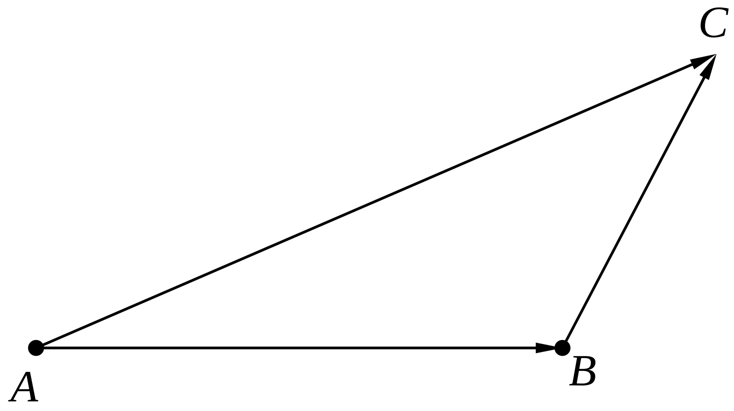


-វិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ជាវិចទ័រស្មើគ្នា ។ គេសរសេរ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ ។

-វិចទ័រ $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{CB}$ ជាវិចទ័រស្មើគ្នា ។ គេសរសេរ $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$ ។

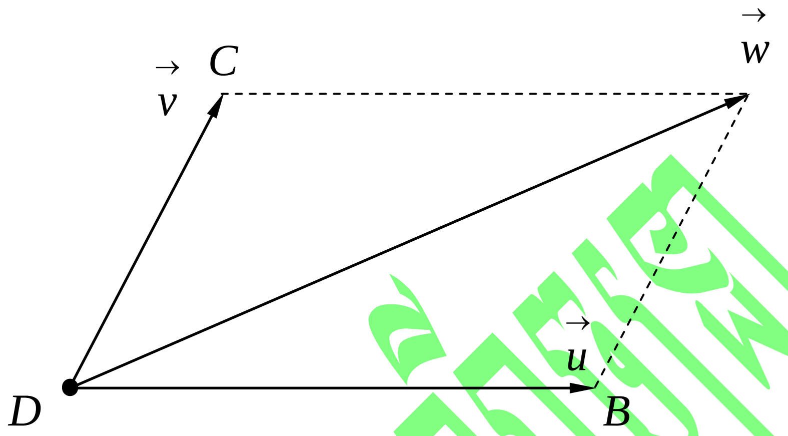
៤-ប្រមាណវិធីបូក និង ដកវិចទ័រក្នុងប្លង់

ក)ប្រមាណវិធីបូក



បើគេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$ នោះផលបូករវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$ គឺជាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AC}$ ដែលគេកំណត់សរសេរ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ។

ខ)វិធានប្រលេឡូក្រាម

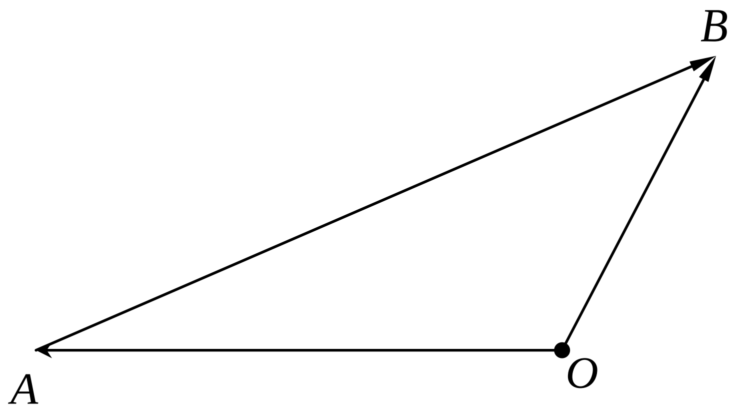


គេបាន $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ ។

គ)លក្ខណៈ

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- $\vec{u}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{u}=\vec{u}$
- $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{o}$

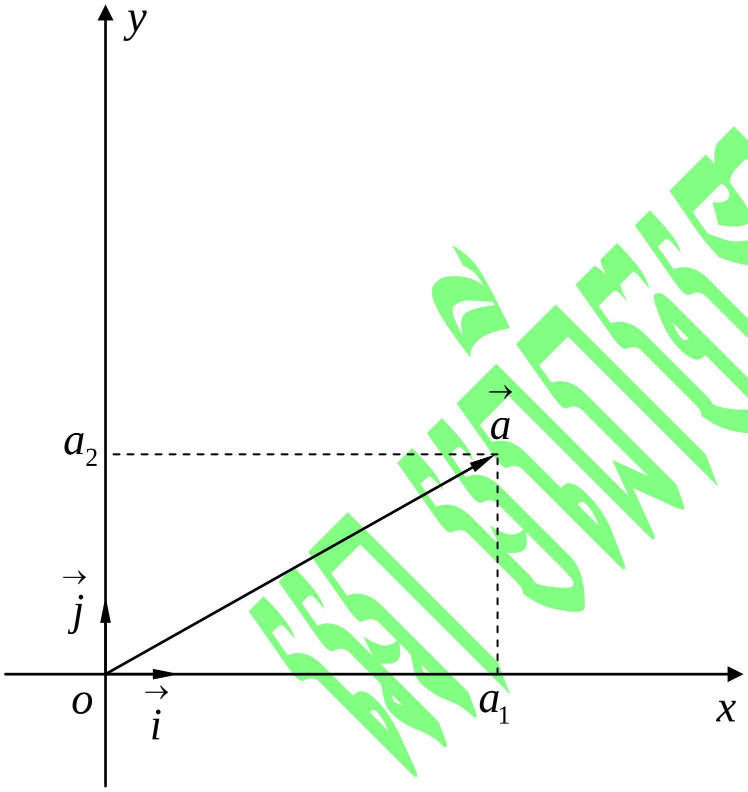
ឃ)ប្រមាណវិធីដក



បើគេមានពីរវិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OB}$ នោះផលបូករវាងវិចទ័រ $\overrightarrow{OB}$ និង $\overrightarrow{OA}$

គឺជាវិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ដែលគេកំណត់សរសេរ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ ។

៥-កូអរដោនេវិចទ័រក្នុងប្លង់



គេបាន $\vec{a}=(a_1\ ,\ a_2\ )$ តាងឲ្យកូអរដោនេនៃវិចទ័រ

$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ តាងជាអនុគមន៍វិចទ័រឯកតា

ប្រវែងនៃវិចទ័រ $\vec{a}$ គឺ $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ ។

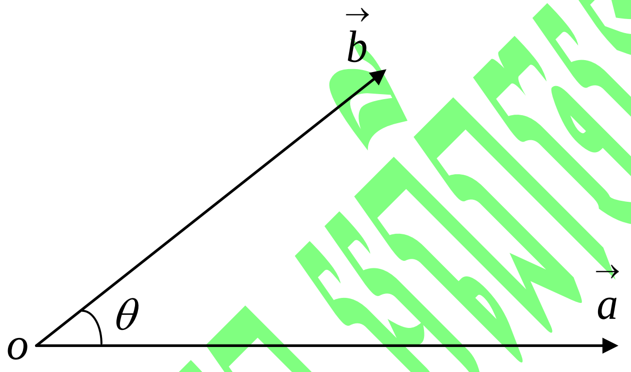
-ការគណនាដោយប្រើកូអរដោនេ

1/ $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

2/ $(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$

៦-ផលគុណស្កាលែ

ក)និយមន័យ



ផលគុណស្កាលែរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ក្នុងប្លង់

ជាចំនួនពិតកំណត់ដោយ $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ។

ខ) លក្ខណៈ

1/ $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

2/ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

3/ $k(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b})$

4/ $\vec{a}\cdot\vec{a} = (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$

គ) គណនាផលគុណស្កាលែតាមកូអរដោនេ

ផលគុណស្កាលែរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(a_1,a_2)$ និង $\vec{b}=(b_1,b_2)$

ក្នុងប្លង់ជាចំនួនពិតកំណត់ដោយ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ។

ឃ) កូស៊ីនូសនៃមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

៧-ការអនុវត្តនៃវ៉ិចទ័រ

ក) វ៉ិចទ័រទីតាំង

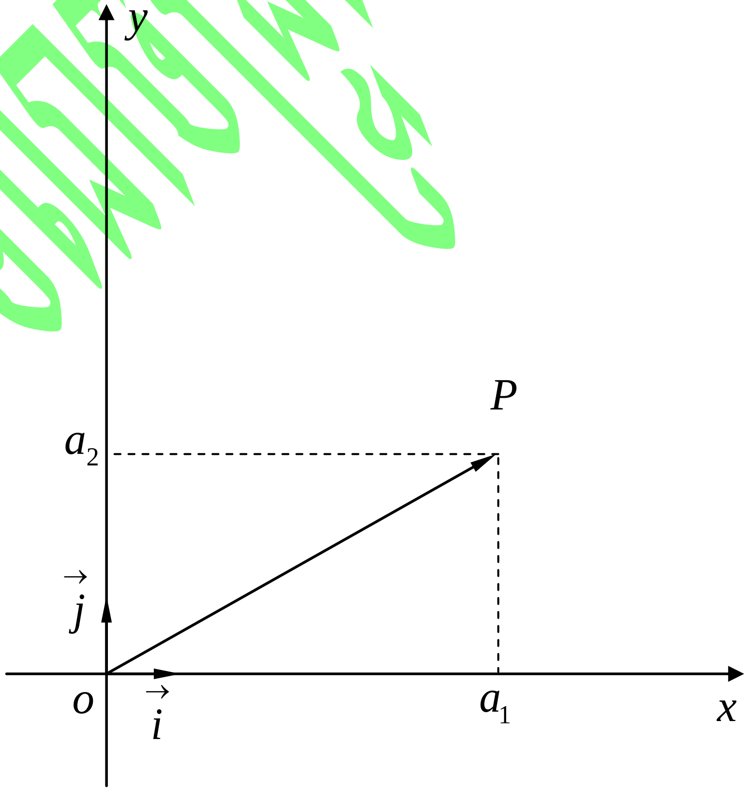
-វ៉ិចទ័រ $\vec{p}$ ហៅថា

វ៉ិចទ័រ ទីតាំងនៃចំនុច

$P(a_1,a_2)$ ដែលមាន

O ជាគល់ហើយ

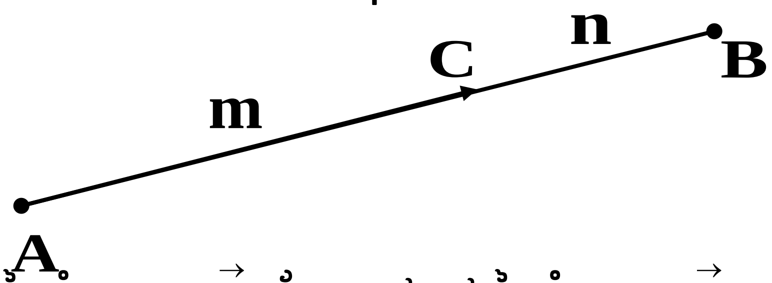
គេកំណត់សរសេរ $P(\vec{p})$ ។



-វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ស្មើនឹងផលដករវាងវ៉ិចទ័រ ទីតាំងនៃចំនុចចុង B និងវ៉ិចទ័រ ទីតាំងនៃចំនុចគល់ A ។

គេសរសេរ $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=(x_B-x_A)\,\vec{i}+\left(y_B-y_A\right)\vec{j}$ ។

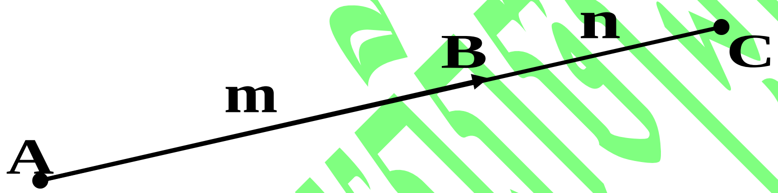
ខ) វិចទ័រទីតាំងនៃចំនុចចែកខាងក្នុងអង្កត់មួយ



វិចទ័រទីតាំងនៃចំនុច $C\,(\vec{c})$ ចែកខាងក្នុងនៃចំនុច $A\,(\vec{a})$

និង $B(\vec{b})$ តាមផលធៀប $m:n$ កំណត់ដោយ $\vec{c}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ ។

គ) វិចទ័រទីតាំងនៃចំនុចចែកខាងក្រៅអង្កត់មួយ

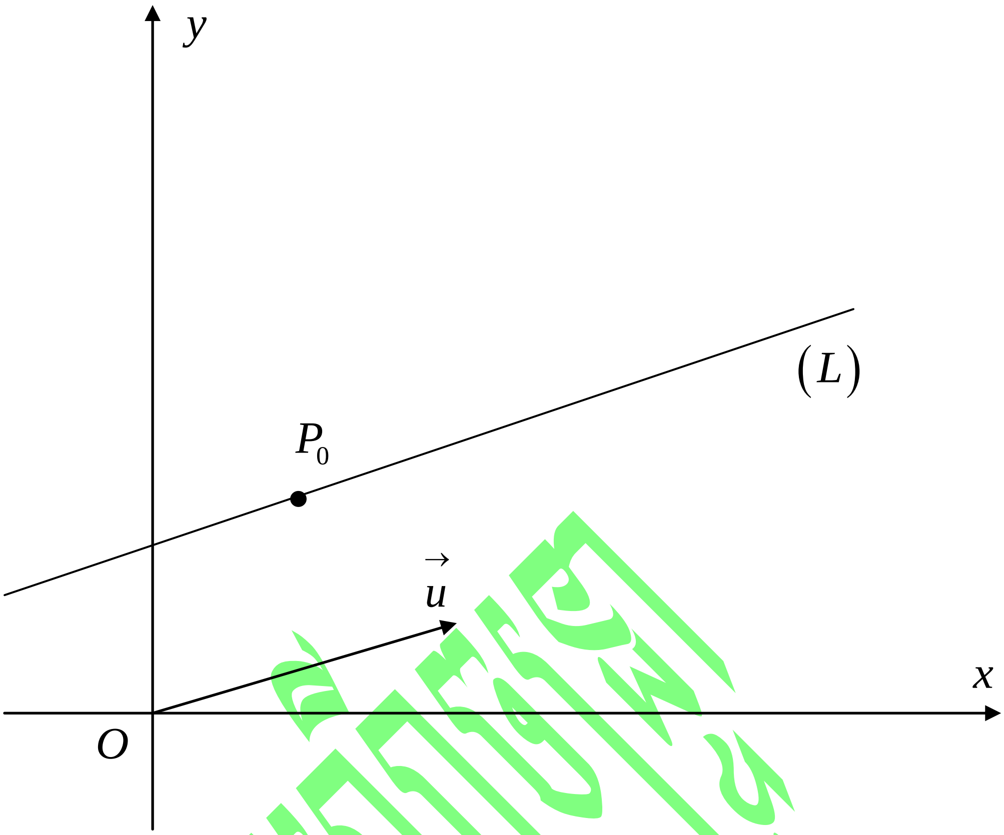


វិចទ័រទីតាំងនៃចំនុច $C\,(\vec{c})$ ចែកខាងក្រៅនៃចំនុច $A\,(\vec{a})$

និង $B(\vec{b})$ តាមផលធៀប $m:n$ កំនត់ដោយ $\vec{c}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ ។

៨-បន្ទាត់និងវិចទ័រ

ក)បន្ទាត់ និងវិចទ័រប្រាប់ទិស សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់



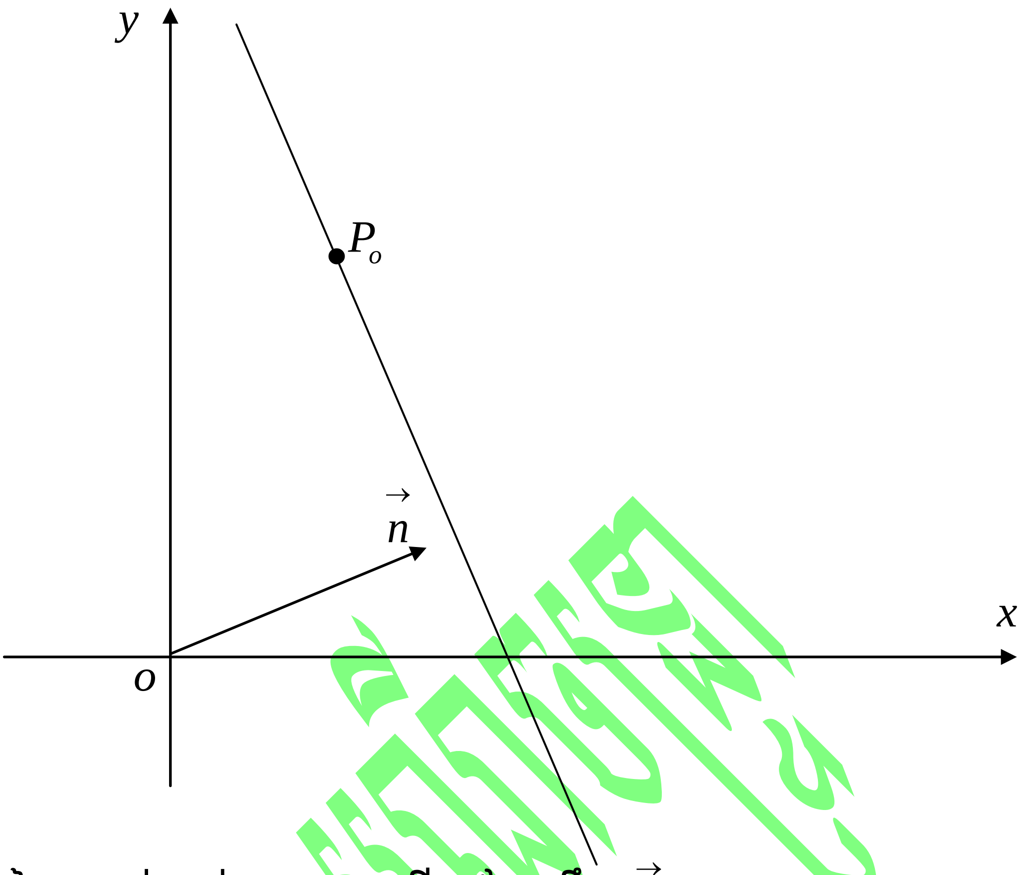
-សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់កាត់តាម P_0

ហើយស្របនឹង $\vec{u}=(a,b)$ គឺ $\vec{p}=\vec{p}_0+t\,\vec{u}$ ។

-សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កាត់តាម $P_0(x_0;y_0)$

ហើយស្របនឹង $\vec{u}=(a,b)$ គឺ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \; ; \; t \in IR$

ខ) បន្ទាត់ និង វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់



-សមីការនៃបន្ទាត់កាត់តាម P_0 ហើយកែងនឹង $\vec{n}=(a,b)$

គឺ $\vec{n}(\vec{p}-\vec{p_0})=0$ ។

-សមីការនៃបន្ទាត់កាត់តាម $P_0(x_0;y_0)$ ហើយកែងនឹង

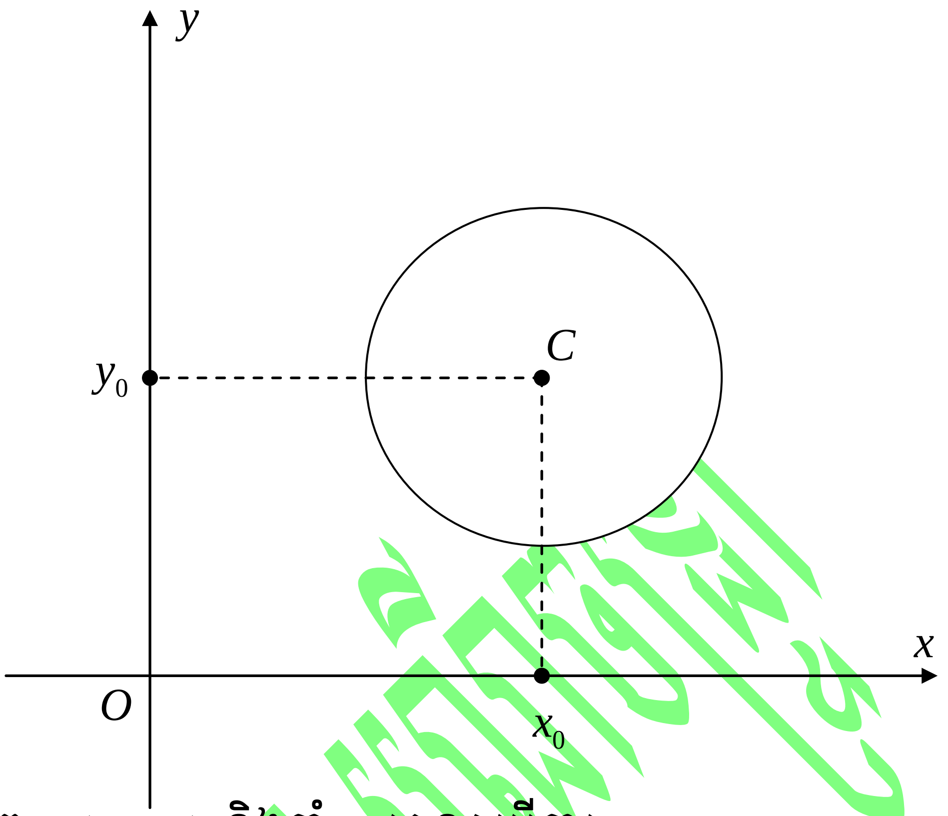
$\vec{n}=(a,b)$ គឺ $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ ។

គ)ចម្ងាយរវាងចំនុច និង បន្ទាត់

ចម្ងាយពីចំនុច $A(x_A;y_A)$ ទៅបន្ទាត់ $(L): ax+by+c=0$

គឺ $d=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ។

៩-រង្វង់និងវ៉ិចទ័រ



រង្វង់ផ្ចិត $C(x_o;y_o)$ និងកាំ r មានសមីការ

$$\begin{cases} |\vec{p}-\vec{c}|=r \\ (x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2 \end{cases}$$

ជំពូកទី០២

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1-គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយហើយ K ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង $[BC]$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{AK}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ ។

2-គេឲ្យប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ មួយហើយ I ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូង $[AC]$ និង $[BD]$ ។គ្រប់ចំណុច M នៃប្លង់ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{MI}=\dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}{4}$ ។

3-គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ហើយ G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ ។

4-នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ គេមានបីចំណុច $A(1,2)$ $B(-2,3)$ និង $C(-2,4)$ ។

១)រកកូអរដោនេនៃចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ទិចផរត្នុចម្លង់

២) រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដែល $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ ។

5- គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(2,-1)$ និង $\vec{b}=(-5,5)$

ក) កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{v}=7\vec{a}+2\vec{b}$

ខ) គណនា $|\vec{u}|$ និង $|\vec{v}|$ ។

6-គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(2,-3)$ និង $\vec{b}=(1,-6)$

ក) គណនា $|\vec{u}|$ ដោយដឹងថា $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$ ។

ខ) កំណត់ពីរចំនួនពិត λ និង μ ដើម្បីឲ្យ $\vec{v}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ ដែល $\vec{v}=(-5\,,\,4)$ ។

7-គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(2xy\,,x^2-y^2)$ ដែល $x,y\in\Re$ ។ គណនា $|\vec{u}|$ ។

8-គេឲ្យពីរចំណុច $A(-2,3)$ និង $B(4,-5)$ ។

ក) គណនាកូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{AB}$ ។

ខ) គណនាប្រវែង $|\overrightarrow{AB}|$ ។

9-គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយ ។

ចូរគណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ដោយដឹងថា ៖

១) $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=4$ និងមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\theta=30^o$ ។

២) $|\vec{a}|=4\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$ និងមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\theta=45^o$ ។

៣) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ និងមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\theta=60^o$ ។

៤) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=6$ និងមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\theta=120^o$ ។

៥) $|\vec{a}|=3\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=8$ និងមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\theta=135^o$ ។

10-គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

ខ) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

គ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{4}$

11-គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយ ដែល $|\vec{a}|=3$ និង $|\vec{b}|=5$

មុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=60^o$ ។

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ)គណនា $|\vec{a}+\vec{b}|$ ។

12-គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយ ដែល $|\vec{a}|=12$ និង

$|\vec{b}|=32$ មុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=60^o$ ។

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ)គណនា $|\vec{a}-\vec{b}|$ ។

13-គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយ ដែល $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$ និង $|\vec{b}|=4$ មុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=45^o$ ។

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ)គេយក $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}+3\vec{b}$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{p}\cdot\vec{q}$ ។

14-គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយ ដែល $|\vec{a}|=4\sqrt{3}$ និង $|\vec{b}|=2$ មុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=30^o$ ។

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ)គេយក $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{p}\cdot\vec{q}$ ។

15-គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}=(-1,4)$ និង $\vec{b}=(5,-1)$ ។

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ)គេយក $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។
គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{p}\cdot\vec{q}$ ជាអនុគមន៍នៃ x រួចកំណត់ x ដើម្បីឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{p}$ និង $\vec{q}$ អរតូកូណាល់គ្នា ។

គ)គណនា $|\vec{a}+\vec{b}|$ ។

16-គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}=(2,3)$ និង $\vec{b}=(5x+4,2-x)$ ។

កំណត់ x ដើម្បីឲ្យ វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ អរតូកូណាល់គ្នា ។

17-គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}=(3,4)$ និង $\vec{b}=(12,-5)$ ។

ក)គណនា $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ និងកូស៊ីនូសនៃមុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

ខ)យក $\vec{p}=x\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}-x\vec{b}$ ។ គណនា $\vec{p}\cdot\vec{q}$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

គ)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យ $\vec{p}\cdot\vec{q}=144$ ។

18-គេឲ្យពីរចំណុច $A(1,3)$, $B(4,-1)$ និង $B(5,6)$ ។

ក)គណនាកូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។

ខ)គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។

គ)គណនាប្រវែង $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{AC}|$ រួចបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

19-គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}=(x-3,x-4)$ និង $\vec{b}=(x+1,x-2)$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $p(x)=\vec{a}.\vec{b}$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ)កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $p(x)=-1$ ។

គ)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យ $p(x)$ មានតម្លៃតូចបំផុត ។

20-គេឲ្យចំណុច $A(x,x+1),B(3,x+4),C(2x+5,-2)$ ដែល $x\in\mathbb{R}$

កំណត់ x ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល A ។

21-គេឲ្យចំណុច $A(x,x+1),B(3,-1)$ និង $C(7,6)$ ។

ក)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A ។

ខ)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ B ។

គ)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ C ។

22-គេឲ្យចំណុច $A(1,2),B(4,6)$ និង $C(5,-1)$ ។

ក)ចូរគណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ និង $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ ។

ខ)រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

23-ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច

$P_0(x_0,y_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a,b)$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម

ក) $P_0(2,-3)$ និង $\vec{u}=(-1,3)$

ខ) $P_0(1,4)$ និង $\vec{u}=(2,-1)$

គ) $P_0(2,5)$ និង $\vec{u}=(0,3)$

ឃ) $P_0(-1,4)$ និង $\vec{u}=(-2,0)$

ង) $P_0(0,-5)$ និង $\vec{u}=(1,-4)$

24-គេឲ្យចំណុច $A(-1,5)$, $B(3,1)$ និង $C(1,9)$ ។

១)សរសេរសមីការជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។

២)សរសេរសមីការមេដ្យានទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។

៣)រកកូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC ។

25-ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $P_0(x_0,y_0)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(a,b)$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក) $P_0(2,-3)$ និង $\vec{n}=(-1,3)$

ខ) $P_0(1,4)$ និង $\vec{n}=(2,-1)$

គ) $P_0(2,5)$ និង $\vec{n}=(0,3)$

ឃ) $P_0(-1,4)$ និង $\vec{n}=(-2,0)$

ង) $P_0(0,-5)$ និង $\vec{n}=(1,-4)$

26-គេឲ្យបីចំណុច $A(-1,2)$, $B(2,3)$ និង $C(3,5)$ ។

ក)ចូរសរសេរសមីការកម្ពស់ទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។

ខ)គណនាកូអរដោនេអរតូសង់ H នៃត្រីកោណ ABC ។

27-គេឲ្យចំណុច $A(x_A,y_A)$ និង បន្ទាត់ $d:ax+by+c=0$ ។

ចូរស្រាយថាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ d កំណត់ដោយ ៖

$$d=d(A,(d))=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ។

28-គេមានរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ និងចំណុច $M(x_0,y_0)$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់នេះ។

ចូរស្រាយថាបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច M មានសមីការ៖

$x_0x+y_0y-r^2=0$ ។

29-គេឲ្យរង្វង់ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ និងចំណុច $M(x_0,y_0)$

ស្ថិតនៅលើរង្វង់។

ចូរស្រាយថាបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច M មានសមីការ៖

$(x_0-a)(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$ ។

30-គេឲ្យបន្ទាត់ $(\Delta):3x-4y+2=0$ និង ចំណុច $I(5,-2)$ ។

ក)គណនាចម្ងាយពីចំណុច I ទៅបន្ទាត់ (Δ) ។

ខ)រកសមីការរង្វង់ (C) មានផ្ចិត I ហើយប៉ះនឹងបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ M ។

គ)គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ M ។

ឃ)រកសមីការបន្ទាត់កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) ហើយប៉ះនឹងរង្វង់ (C) ។

31-គេមានរង្វង់ $(x-1)^2+(y+1)^2=25$ និងចំណុច $M(-2,3)$

ស្ថិតនៅលើរង្វង់ ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច M ។

32-បើ O, A, B, C ជាបួនចំណុចដែល $\overrightarrow{OA}=10\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=5\vec{b}$ និង $\overrightarrow{OC}=4\vec{a}+3\vec{b}$ ។ បង្ហាញថា A, B និង C កូលីនេអ៊ែរ នឹងគ្នា។

33-ត្រីកោណ ABC មានកំពូលត្រង់ចំណុច $A(2,-1)$, $B(3,-2)$ និង $C(-1,-6)$ ។

ក)រកជាអនុគមន៍ទម្រង់ $a\vec{i}+b\vec{j}$ នៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$

ខ) រកប្រវែងនៃជ្រុងត្រីកោណ។

34- គេឱ្យចំណុច $A(-2\,,-6)$, $B(3,1)$ និង $C(3,4)$ ។

សរសេរ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}$ និង $\vec{j}$ ។

រួចគណនាប្រវែងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CA}$ ។

35-រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ បើ $\vec{a}=(2,-3)$, $\vec{b}=(-12\,,2)$

និង $\vec{c}=(5\,,0)$ ។

ក. $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

ខ. $\vec{v}=-3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$

គ. $\vec{w}=3(\vec{a}+\vec{b})-2(\vec{b}-\vec{c})$

36-រកប្រវែងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$, $\vec{b}$ និង $\vec{c}$ នៅក្នុងលំហាត់ទី៣៥។

37-គេឱ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដែល $|\vec{a}|=\frac{\sqrt{15}}{4}$ និង $|\vec{b}|=\frac{7}{8}$ ហើយមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ 120° ។ គណនាផលគុណស្កាលែនៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

38- គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដោយដឹងថា៖

ក. $|\vec{a}|=12$, $|\vec{b}|=6$ និង មុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ 60° ។

ខ. $|\vec{a}|=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=\frac{3}{2}$ និង មុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ 150° ។

39- គេឱ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដែល $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\frac{1}{2}$ ហើយមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ 360° ។ គណនាផលគុណស្កាលែនៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

40- បង្ហាញថាសមភាពខាងក្រោមពិត ដោយប្រើនិយមន័យផលគុណស្កាលែ ចំពោះ៖

- មុំ $\theta=30^o$ នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$
- មុំ $\theta=120^o$ នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$
- មុំ $\theta=0^o$ នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$
- មុំ $\theta=180^o$ នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$

41- ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល C ហើយ មុំ $\angle A=30^o$, $\angle B=60^o$ និង $AB=2$, $AC=\sqrt{3}$, $BC=1$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែខាងក្រោម៖

ក. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ខ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

ទិចផ័រភ្នុខម្លង់

គ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ ឃ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$

42- ត្រីកោណកែងសមបាត ABC មួយមាន $\angle A$ជាមុំកែង។

តាង a ជាប្រវែងនៃជ្រុង AB រួចយើងគូសបន្ទាត់កែង AM ពីកំពូល A ទៅជ្រុង BC។ គណនាផលគុណស្កាលែខាងក្រោម៖

ក. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$ ខ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$ គ. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}$

43- គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$៖

ក. $\vec{a}=(-2,3)$, $\vec{b}=(5,4)$

ខ. $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{b}=-4\vec{i}+\vec{j}$

គ. $\vec{a}=(-5,3)$, $\vec{b}=(2,6)$

44- បង្ហាញថា $\vec{a}\perp\vec{b}$ ដែល $\vec{a}=(3,-4)$ និង $\vec{b}=(8,6)$។

45- កំណត់មុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ

ក. $\vec{a}=(1,0)$, $\vec{b}=(0,2)$

ខ. $\vec{a}=(1,1)$, $\vec{b}=(2,0)$

គ. $\vec{a}=(-1,0)$, $\vec{b}=(1,0)$

ឃ. $\vec{a}=(-3,0)$, $\vec{b}=(-1,\sqrt{3})$

ង. $\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(3,-6)$

46- គណនាផលគុណស្កាលែខាងក្រោម៖

ក. $\vec{a}=(1,0)$, $\vec{b}=(0,2)$ ដែលមុំរវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរស្មើ 90° ។

ខ. $\vec{a}=(1,1)$, $\vec{b}=(2,0)$ ដែលមុំរវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរស្មើ 45° ។

47- គេឱ្យ $\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{a}+2\vec{b})$ និង $\vec{q}=2\vec{a}+\vec{b}+s\vec{a}$ ។ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនស្របគ្នា ហើយខុសពីសូន្យ។ រកតម្លៃនៃ t និង s បើ $\vec{p}=\vec{q}$ ។

48- គេឱ្យ $\vec{p}=2\vec{a}+t(3\vec{a}+4\vec{b})$ និង $\vec{q}=5\vec{a}+s\vec{a}+2\vec{b}$ ។ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនស្របគ្នា ហើយខុសពីសូន្យ។ រកតម្លៃនៃ t និង s បើ $\vec{p}=\vec{q}$ ។

49. បើ M ចែក AB តាមផលធៀប $2:3$ និង O ជាចំណុចមិននៅលើ AB ។ បង្ហាញថា

$5\vec{m}=3\vec{a}+2\vec{b}$ ដែល $\vec{m}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ និង $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ ។

50- រកកូអរដោនេនៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង ដែលភ្ជាប់ចំណុចពីរ $A(2,3)$ និង $B(-2,4)$ តាមផលធៀប $2:1$ ។

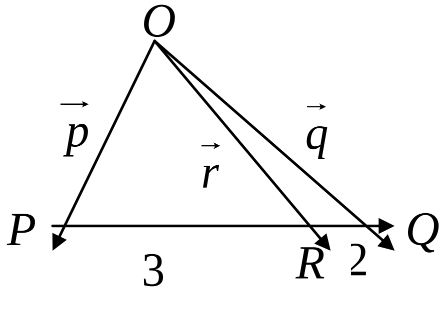
51- រកកូអរដោនេនៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង ដែលភ្ជាប់ចំណុចពីរ $A(-1,2)$ និង $B(3,1)$ តាមផលធៀប $3:2$ ។

52- បើ R ចែក PQ តាមផលធៀប $3:2$ ។

ក. បំពេញនូវចន្លោះ

(i) $\overrightarrow{PR}=....\overrightarrow{PQ}$

(ii) $\overrightarrow{QR}=....\overrightarrow{QP}$



ខ. បង្ហាញ $\overrightarrow{PR}$ និង $\overrightarrow{QR}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{p}$ និង $\vec{q}$ ។

53- រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត

ក. បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(2,3)$ និង វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1,2)$ ។

ខ. បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(4, 0)$ និង វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(-3,2)$ ។

54- គេឱ្យបន្ទាត់ L ហើយកាត់តាមចំណុច P_o ស្របទៅនឹង $\vec{u}$ ។

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L និងរកសមីការបន្ទាត់ L ចំពោះ៖

ក. $P_o(2,7),\vec{u}=(1,2)$

ខ. $P_o(10,-2),\vec{u}=(-2,5)$

គ. $P_o(4,9),\vec{u}=(7,5)$

ឃ. $P_o(4,-3),\vec{u}=(-2,3)$

55. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ AB ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $A(4,-3)$, $B(-2, 5)$

ខ. $A(-\frac{3}{2},-4)$, $B(2,-4)$

56- រកសមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $P_o(4,3)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(5,2)$ ។

ឡឹម ផល្គុន

57- រកចំណុចប្រសព្វចំពោះគូនៃបន្ទាត់

ក. $\vec{r}=(1,2)+s(1,1)$ និង $\vec{r}=(3,-2)+t(1,4)$

ខ. $\vec{r}=(3,1)+s(4,-2)$ និង $\vec{r}=(1,2)+t(-6,3)$

58- រកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់៖

ក. $3x-4y+5=0$

ខ. $-x+2y-4=0$

គ. $x+y-3=0$

ឃ. $4x-3y+15=0$

59- រកសមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាម

ក. ចំណុច $(-2,5)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(-1,2)$ ។

ខ. ចំណុច $(0,3)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(1,1)$ ។

60- រកសមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $P_o(-1,2)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(1,-2)$ ។

61. រកចម្ងាយរវាងចំណុច $P(2,-5)$ និងបន្ទាត់ $4x-3y+7=0$ ។

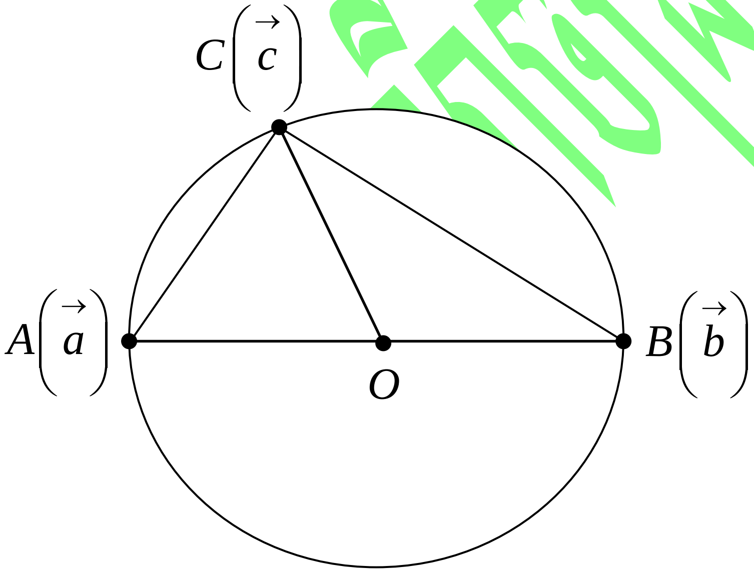
62. បង្ហាញថាសមីការវ៉ិចទ័រនៃរង្វង់ដែលមាន $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ ជាចំណុចចុងសងខាងនៃ អង្កត់ផ្ចិត $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ ដែល $P(\vec{p})$ ជាចំណុចចល័តនៅលើរង្វង់។

ស្គាល់ជាងស៊ុំ

63- តាងចំណុចមួយ $P_o(\vec{p})$ នៅលើរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $C(\vec{c})$ និងកាំ r ។ បង្ហាញថា សមីការវ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់នេះត្រង់ចំណុច P_o គឺ $(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\overrightarrow{p_o}-\vec{c})=r^2$ ដែល $P(\vec{p})$ ជាចំណុចចល័តនៅលើបន្ទាត់ប៉ះ។

64- តាងចំណុច P ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ដែលមានសមីការ $x^2+y^2=36$ ហើយដែល កូអរដោនេនៃ P គឺ $(4,5)$។ រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P ។ គេកំណត់ថាបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P គឺជាបន្ទាត់កែងត្រង់ទៅនឹង $\overrightarrow{OP}$។

65- បង្ហាញថាមុំចារឹកកន្លះរង្វង់ជាមុំកែង។



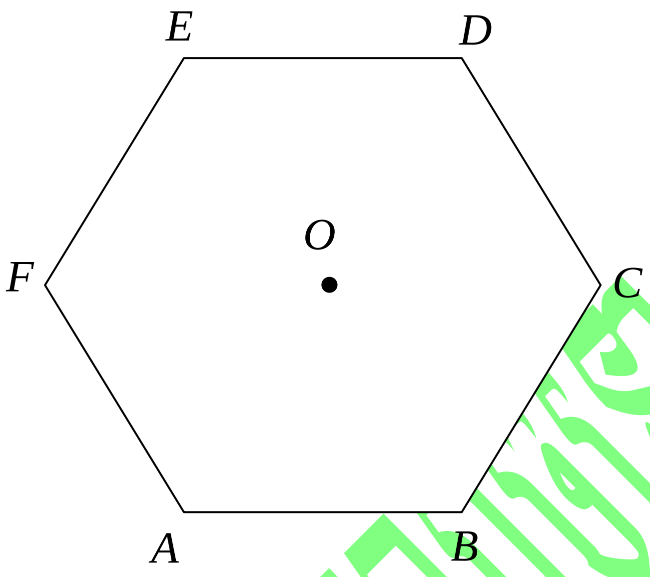
66- តាង H ជាចំណុចប្រសព្វនៃ ΔABC ហើយតាង P ជាចំណុចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{HP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})$ ។

ក. បើ M ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង BC បង្ហាញថា $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MP}$។

ខ.បង្ហាញថា P ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ ΔABC។

67- បង្ហាញថា ចំពោះត្រីកោណ ABC គេបាន $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ។

68- $ABCDEF$ ជាឆកោណនិយ័តដែលមានផ្ចិត O ។



បើ $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ និង $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$ ។ បង្ហាញជាអនុគមន៍នៃ $\vec{p}$ និង $\vec{q}$ ៖

ក. $\overrightarrow{AC}$ ខ. $\overrightarrow{OA}$ គ. $\overrightarrow{AF}$ ឃ. $\overrightarrow{CF}$

69- សរសេរសមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច A ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ក្នុងករណី៖

ក. $A(-3, 2)$, $\vec{v} = (-1, -2)$

ខ. $A(-1, 1)$, $\vec{v} = (2, 3)$

គ. $A(3, -2)$, $\vec{v} = (-1, 2)$

70- សរសេរសមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច P ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ក្នុងករណី៖

ក. $P(4, 0)$, $\vec{v} = (1 , 2)$

ខ. $P(4, -3)$, $\vec{v} = (\frac{1}{2} , 3)$

គ. $P(-1, -2)$, $\vec{v} = (2 , 3)$

71-តើសមីការបន្ទាត់ណាដែលកាត់តាមចំណុច Q ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ក្នុងករណី៖

$Q(4, 9)$, $\vec{v} = (2 , -3)$

$i)$. $2x - 3y + 19 = 0$

$ii)$. $2x - 3y - 35 = 0$

72-គេឲ្យបីចំណុច $A(1,2)$, $B(-1,3)$ និង $C(2,-1)$ ។

a). រកកូអរដោនេចំណុច D ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $4\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{O}$

b). រកសំណុំចំណុច M នៃប្លង់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|4\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = 5$ ។

c). តាង (C) ជាក្រាបតាងឲ្យសំណុំចំណុច G ។ ចូរសង់ (C) រួចបង្ហាញថាចំណុច $E(1,-1)$ ស្ថិតនៅលើ (C) ។

d). រកសមីការបន្ទាត់ (d) ដែលប៉ះនឹង (C) ត្រង់ចំណុច D ។

73- គេឲ្យបីចំណុច $A(1,-1)$, $B(2,4)$ និង $C(3,6)$ ។

a). រកកូអរដោនេចំណុចG ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$ ។

b). រកសំណុំចំណុច M នៃប្លង់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=15$

c). តាង(C) ជាក្រាបតាងឲ្យសំណុំចំណុចG ។ ចូរសង់(C) រួចបង្ហាញថាចំណុច$D(-1,-1)$ ស្ថិតនៅលើ (C) ។

d). រកសមីការបន្ទាត់(d) ដែលប៉ះនឹង(C) ត្រង់ចំណុចD ។

74- គេឲ្យត្រីកោណABC មួយ។ យកG ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ

ហើយ M ជាចំណុចមួយនៃប្លង់ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2+|\overrightarrow{MC}|^2=3|\overrightarrow{MG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$$

75- គេឲ្យបីចំណុច$A(x,2)$, $B(-1,y)$ និង $C(x+1,y+1)$ ។

កំណត់ចំនួនពិតx និងy ដើម្បីឲ្យABC ជាត្រីកោណកែង

សមបាតកំពូលA។

ជំពូកទី០៣

ផ្នែកដំណោះស្រាយលំហាត់ជ្រើសរើស

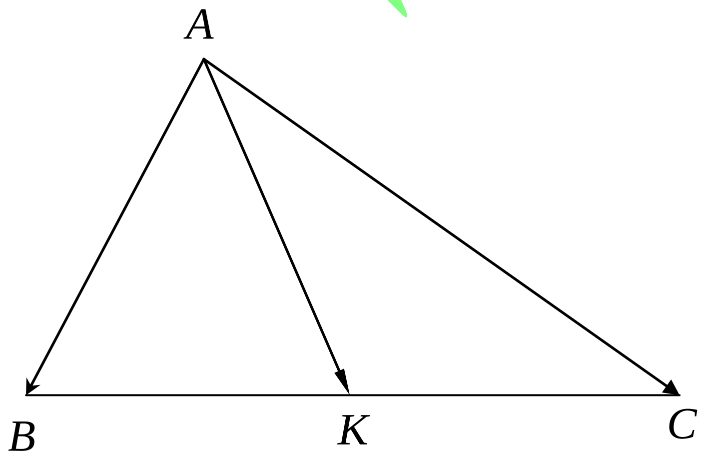
លំហាត់ទី០១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយហើយ K ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង $[BC]$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{AK}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{AK}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$



តាមទំនាក់ទំនងសាលយើងមាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}$ (1)

និង $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC}$ (2)

បូកសមីការ (1)និង(2)អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}$ (3)

ដោយ K ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង$[BC]$ នោះ $\overrightarrow{KB}$ និង$\overrightarrow{KC}$ ជាវ៉ិចទ័រ

ផ្ទុយគ្នា នោះគេទាញ $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{O}$ (4)

យក(4)ជំនួសក្នុង(3)គេបាន $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AK}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AK}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}}$ ពិត ។

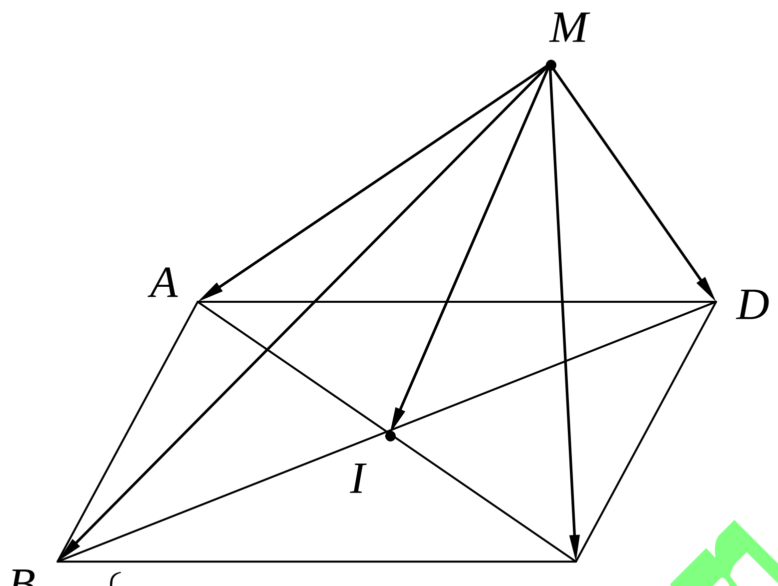
លំហាត់ទី០២

គេឲ្យប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ មួយហើយ I ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូង $[AC]$ និង $[BD]$ ។គ្រប់ចំណុច M នៃប្លង់ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{MI}=\dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{MI}=\dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}{4}$



គេមាន $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} & (1) \\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} & (2) \\ \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} & (3) \\ \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID} & (4) \end{cases}$

បូកសមីការ $(1),(2),(3)$ និង (4) គេបាន ៖

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} \quad (5)$$

ដោយ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ទ្រូង $[AC]$ និង $[BD]$ នោះគេបាន

$\overrightarrow{IA}$ និង $\overrightarrow{IC}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នា ហើយ $\overrightarrow{IB}$ និង $\overrightarrow{ID}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នា

នោះគេបាន $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{O}$ (6) និង $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{O}$ (7)

យកទំនាក់ទំនង (6) និង (7) ជំនួសក្នុង (5) គេបាន ៖

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MI}$ នោះ $\overrightarrow{MI}=\dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}{4}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{MI}=\dfrac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}}{4}}$ ។

លំហាត់ទី០៣

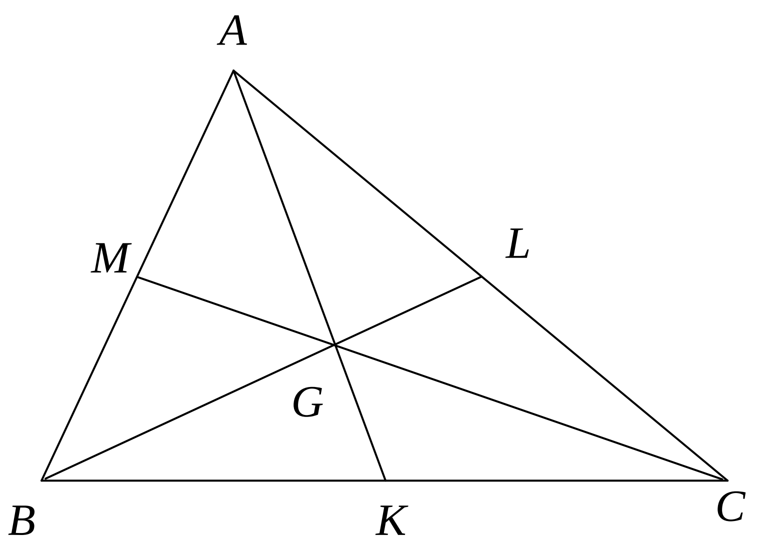
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ហើយG ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$

យើងសង់មេដ្យាន AK,BL និង CM នៃត្រីកោណ ហើយG ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណជាប្រសព្វរវាងមេដ្យានទាំងបី ។



ដោយ G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណនោះគេមាន $\overrightarrow{GA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$

ដោយ AK ជាមេដ្យាននោះ $\overrightarrow{AK}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ (មើលលំហាត់ទី០១)

គេទាញបាន $\overrightarrow{GA}=-\frac{2}{3}\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=-\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\overrightarrow{GB}=-\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}$ (2) និង $\overrightarrow{GC}=-\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}$ (3)

បូកសមីការ(1),(2)និង(3)គេបាន ៖

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}}{3}$$

ដោយ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{O},\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\vec{O},\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}=\vec{O}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}}$ ។

លំហាត់ទី០៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ គេមានបីចំណុច $A(1,2)$

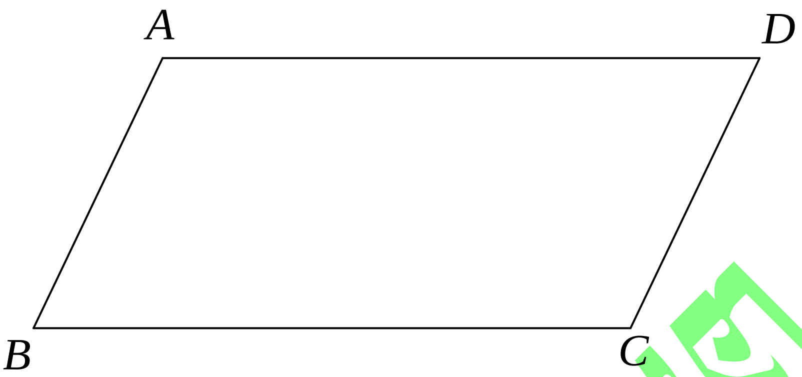
$B(-2,3)$ និង $C(-2,4)$ ។

១)រកកូអរដោនេនៃចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២)រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដែល $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១)រកកូអរដោនេនៃចំណុច D



ដោយ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមនោះគេបាន $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

តាង $D(x_D,y_D)$ នោះ $\overrightarrow{AD}=(x_D-1\,,\,y_D-2)$ ហើយ $\overrightarrow{BC}=(0,1)$

ដោយ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ សមមូល $\begin{cases} x_D-1=0 \\ y_D-2=1 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_D=1 \\ y_D=3 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{D(1,3)}$ ។

២)រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដែល $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$

តាង $G(x_G,y_G)$ នោះ $\begin{cases} \overrightarrow{GA}=(1-x_G\,,\,2-y_G) \\ \overrightarrow{GB}=(-2-x_G\,,\,3-y_G) \\ \overrightarrow{GC}=(-2-x_G\,,\,4-y_G) \end{cases}$

គេបាន $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(-3-3x_G)\vec{i}+(9-3y_G)\vec{j}$

ដោយ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ សមមូល $\begin{cases}-3-3x_G=0\\9-3y_G=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_G=-1\\y_G=3\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{G(-1,3)}$ ។

លំហាត់ទី០៩

គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(2,-1)$ និង $\vec{b}=(-5,5)$

ក)កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{v}=7\vec{a}+2\vec{b}$

ខ)គណនា $|\vec{u}|$ និង $|\vec{v}|$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{v}=7\vec{a}+2\vec{b}$

គេបាន $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}=(2,-1)+(-5,5)=(2-5,-1+5)=(-3,4)$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{u}=(-3,4)}$ ។

គេបាន $\vec{v}=7\vec{a}+2\vec{b}=7(2,-1)+2(-5,5)=(14-10,-7+10)=(4,3)$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{v}=(4,3)}$ ។

ខ)គណនា $|\vec{u}|$ និង $|\vec{v}|$

គេបាន $|\vec{u}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

និង $|\vec{v}|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ ។

ដូចនេះ $\boxed{|\vec{u}|=5 \text{ និង } |\vec{v}|=5}$ ។

លំហាត់ទី០៦

គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(2,-3)$ និង $\vec{b}=(1,-6)$

ក)គណនា $|\vec{u}|$ ដោយដឹងថា $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$ ។

ខ)កំណត់ពីរចំនួនពិត λ និង μ ដើម្បីឲ្យ $\vec{v}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ ដែល $\vec{v}=(-5,4)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនា $|\vec{u}|$ ដោយដឹងថា $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$

ដោយ $\vec{u}=2(2,-3)+3(1,-6)=(4+3,-6-18)=(7,-24)$

យើងបាន $|\vec{u}|=\sqrt{7^2+(-24)^2}=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25$

ដូចនេះ $\boxed{|\vec{u}|=25}$ ។

ខ)កំណត់ពីរចំនួនពិត λ និង μ ដើម្បីឲ្យ $\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ ដែល

$\vec{v} = (-5\,,\,4)$

គេបាន $(-5,\,4) = \lambda(2,-3) + \mu(1\,,-5) = (2\lambda + \mu\,,-3\lambda - 5\mu)$

គេទាញបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 2\lambda + \mu = -5 \\ -3\lambda - 5\mu = 4 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} 10\lambda + 5\mu = -25 \\ -3\lambda - 5\mu = 4 \end{cases}$

បូកសមីការពីរនេះគេបាន $7\lambda = -21$ នោះ $\lambda = -3$

ហើយ $\mu = -5 - 2\lambda = -5 + 6 = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\lambda = -3\;,\;\mu = 1}$ ។

លំហាត់ទី០៧

គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (2xy\,,x^2 - y^2)$ ដែល $x, y \in \Re$ ។ គណនា $|\vec{u}|$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $|\vec{u}|$

យើងបាន $|\vec{u}| = \sqrt{(2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2} = \sqrt{4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4}$

$= \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} = \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = x^2 + y^2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{|\vec{u}| = x^2 + y^2}$ ។

លំហាត់ទី០៨

គេឲ្យពីរចំណុច $A(-2,3)$ និង $B(4,-5)$ ។

ក)គណនាកូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{AB}$ ។

ខ)គណនាប្រវែង $|\overrightarrow{AB}|$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនាកូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{AB}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ ដោយ $\overrightarrow{OB}=4\vec{i}-5\vec{j}$; $\overrightarrow{OA}=-2\vec{i}+3\vec{j}$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(4\vec{i}-5\vec{j})-(-2\vec{i}+3\vec{j})=6\vec{i}-8\vec{j}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}=(6\,,-8)}$ ។

ខ)គណនាប្រវែង $|\overrightarrow{AB}|$

គេបាន $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{6^2+(-8)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

ដូចនេះ $\boxed{|\overrightarrow{AB}|=10}$ ។

ស្រាវជ្រាវ

លំហាត់ទី០៩

គេឲ្យវិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយ ។

ចូរគណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ដោយដឹងថា ៖

១) $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=4$ និងមុំរវាងពីរវិចទ័រ $\theta=30^o$ ។

២) $|\vec{a}|=4\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$ និងមុំរវាងពីរវិចទ័រ $\theta=45^o$ ។

៣) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ និងមុំរវាងពីរវិចទ័រ $\theta=60^o$ ។

៤) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=6$ និងមុំរវាងពីរវិចទ័រ $\theta=120^o$ ។

៥) $|\vec{a}|=3\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=8$ និងមុំរវាងពីរវិចទ័រ $\theta=135^o$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$

១) $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=4$ និងមុំរវាងពីរវិចទ័រ $\theta=30^o$

តាមនិយមន័យ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

យើងបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(2\sqrt{3}\right)(4)\cos 30^o=8\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=12}$ ។

២) $|\vec{a}|=4\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$ និងមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\theta=45^o$

តាមនិយមន័យ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

យើងបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(4\sqrt{2}\right)(3)\cos 45^o=12\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=12$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=12}$ ។

៣) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ និងមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\theta=60^o$

តាមនិយមន័យ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

យើងបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=(3)(4)\cos 60^o=12\times\dfrac{1}{2}=6$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=6}$ ។

៤) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=6$ និងមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\theta=120^o$

តាមនិយមន័យ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

យើងបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=(2)(6)\cos 120^o=12\cos(90^o+30^o)=-12\sin 30^o=-6$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=-6}$ ។

៥) $|\vec{a}|=3\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=8$ និងមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\theta=135^o$

តាមនិយមន័យ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

យើងបាន

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(3\sqrt{2}\right)(8)\cos 135^{o}=24\sqrt{2}\cos(90^{o}+45^{o})=-24\sqrt{2}\sin 45^{o}=-24$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=-24}$ ។

<u>លំហាត់ទី១០</u>

គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

ខ) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

គ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{4}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

គេមាន $|\vec{a}+\vec{b}|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}$ ដោយ $\begin{cases}\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2\\ \vec{b}^{\,2}=|\vec{b}|^2\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}$ ។

ខ)$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

គេមាន$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ ដោយ$\begin{cases}\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\\ \vec{b}^2=|\vec{b}|^2\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}$ ។

គ)$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{4}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$ (1)

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ (2)

យកសមីការ(1)ដក(2)អង្គនិងអង្គគេបាន៖$|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{4}}$ ពិត ។

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយ ដែល $|\vec{a}|=3$ និង $|\vec{b}|=5$

មុំរវាងវ៉ិចទ័រ$\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=60^o$ ។

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ$\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ)គណនា$|\vec{a}+\vec{b}|$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$

តាមនិយមន័យ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ដោយ $|\vec{a}|=3$ និង $|\vec{b}|=5$

ហើយ មុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=60^o$ ។

គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=(3)(5)\cos 60^o=\dfrac{15}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{15}{2}}$

ខ)គណនា$|\vec{a}+\vec{b}|$

គេមាន $|\vec{a}+\vec{b}|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$ ដោយ $\begin{cases}\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\\ \vec{b}^2=|\vec{b}|^2\end{cases}$

គេបាន $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=3^2+5^2+2\left(\dfrac{15}{2}\right)=49$

ដូចនេះ $\boxed{|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{49}=7}$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយ ដែល $|\vec{a}|=12$ និង $|\vec{b}|=32$

មុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=60^o$ ។

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ)គណនា $|\vec{a}-\vec{b}|$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$

តាមនិយមន័យ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ដោយ $|\vec{a}|=12$ និង $|\vec{b}|=32$

ហើយ មុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=60^o$ ។

គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=(12)(32)\cos 60^o=192$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=192}$ ។

ខ)គណនា $|\vec{a}-\vec{b}|$

គេមាន $|\vec{a}-\vec{b}|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ ដោយ $\begin{cases}\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\\ \vec{b}^2=|\vec{b}|^2\end{cases}$

គេបាន $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=12^2+32^2-2(192)=784$

ដូចនេះ $\boxed{|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{784}=28}$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយ ដែល $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$ និង $|\vec{b}|=4$

មុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=45^o$ ។

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ)គេយក $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}+3\vec{b}$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{p}\cdot\vec{q}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$

តាមនិយមន័យ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ដោយ $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$ និង $|\vec{b}|=4$

ហើយ មុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=45^o$ ។

គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(2\sqrt{2}\right)(4)\cos 45^o=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=8}$ ។

ខ)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{p}\cdot\vec{q}$

គេមាន $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}+3\vec{b}$

យើងបាន $\vec{p}\cdot\vec{q}=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=2|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}$

ស្តូ ឡេហ្វាទ្រី

ដោយ $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$ និង $|\vec{b}|=4$ និង $\vec{a}\cdot\vec{b}=8$

គេបាន $\vec{p}\cdot\vec{q}=2\left(2\sqrt{2}\right)^2+3(4)^2+7(8)=16+48+56=120$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{p}\cdot\vec{q}=120}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់មួយ ដែល $|\vec{a}|=4\sqrt{3}$ និង $|\vec{b}|=2$

មុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=30^o$ ។

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ)គេយក $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{p}\cdot\vec{q}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$

តាមនិយមន័យ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ដោយ $|\vec{a}|=4\sqrt{3}$ និង $|\vec{b}|=2$

ហើយ មុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=30^o$ ។

គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(4\sqrt{3}\right)(2)\cos 30^o=8\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=12}$ ។

ខ)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{p}\cdot\vec{q}$

គេមាន $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$

យើងបាន $\vec{p}\cdot\vec{q}=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=2|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}$

ដោយ $|\vec{a}|=4\sqrt{3}$ និង $|\vec{b}|=2$ និង $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$

គេបាន $\vec{p}\cdot\vec{q}=2\left(4\sqrt{3}\right)^2+3(2)^2-5(12)=96+12-60=48$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{p}\cdot\vec{q}=48}$ ។

<u>**លំហាត់ទី១៥**</u>

គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}=(-1,4)$ និង $\vec{b}=(5,-1)$ ។

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ)គេយក $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។

គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{p}\cdot\vec{q}$ ជាអនុគមន៍នៃ x រួចកំណត់ x ដើម្បីឲ្យវ៉ិចទ័រ

$\vec{p}$ និង $\vec{q}$ អរតូកូណាល់គ្នា ។

គ)គណនា $|\vec{a}+\vec{b}|$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$

គេមាន $\vec{a}=(-1,4)$ និង $\vec{b}=(5,-1)$

យើងបាន$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)(5)+(4)(-1)=-5-4=-9$

ដូចនេះ$\vec{a}\cdot\vec{b}=-9$ ។

ខ)គណនាផលគុណស្កាលែ$\vec{p}\cdot\vec{q}$ ជាអនុគមន៍នៃ x

គេមាន $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$ ដែល $x\in\mathbb{R}$

គេបាន $\vec{p}=2(-1,4)+3(5,-1)=(13,5)$

និង $\vec{q}=(-1,4)+x(5,-1)=(5x-1,4-x)$

យើងបាន $\vec{p}\cdot\vec{q}=13(5x-1)+5(4-x)=60x+7$

កំណត់x ដើម្បីឲ្យវ៉ិចទ័រ$\vec{p}$ និង$\vec{q}$ អរតូកូណាល់គ្នា ៖

$\vec{p}\perp\vec{q}\Leftrightarrow\vec{p}\cdot\vec{q}=0\Leftrightarrow 60x+7=0$ នាំឲ្យ $x=-\dfrac{7}{60}$ ។

គ)គណនា $|\vec{a}+\vec{b}|$

គេបាន $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-1+5)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25}=5$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}=(2,3)$ និង $\vec{b}=(5x+4,2-x)$ ។

កំណត់ x ដើម្បីឲ្យ វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ អរតូកូណាល់គ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ x

ដើម្បីឲ្យ វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ អរតូកូណាល់គ្នាលុះត្រាតែ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

គេមាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=2(5x+4)+3(2-x)=10x+8+6-3x=7x+14$

គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow 7x+14=0$ ឬ $x=-2$ ។

ដូចនេះ $x=-2$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}=(3,4)$ និង $\vec{b}=(12,-5)$ ។

ក)គណនា $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ និងកូស៊ីនូសនៃមុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

ខ)យក $\vec{p}=x\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}-x\vec{b}$ ។ គណនា $\vec{p}\cdot\vec{q}$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

គ)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យ $\vec{p}\cdot\vec{q}=144$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនា $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ និងកូស៊ីនួសនៃមុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

គេមាន $\vec{a}=(3,4)$ និង $\vec{b}=(12,-5)$

យើងបាន $\vec{a}.\vec{b}=(3)(12)+(4)(-5)=36-20=16$

$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$, $|\vec{b}|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=\sqrt{169}=13$

ហើយ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{16}{5\times 13}=\dfrac{16}{65}$ ។

ដូចនេះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=16$, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=13$ និង $\cos\theta=\dfrac{16}{65}$ ។

ខ) គណនា $\vec{p}\cdot\vec{q}$ ជាអនុគមន៍នៃ x

គេមាន $\vec{p}=x\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}-x\vec{b}$

យើងបាន $\vec{p}\cdot\vec{q}=(x\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-x\vec{b})=x|\vec{a}|^2-x|\vec{b}|^2+(1-x^2)\vec{a}.\vec{b}$

$$=x(5)^2-x(13)^2+(1-x^2)(16)=-16x^2-144x+16$$

ដូចនេះ $\vec{p}\cdot\vec{q}=16(1-9x-x^2)$ ។

គ)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យ $\vec{p}\cdot\vec{q}=144$

យើងមាន $\vec{p}\cdot\vec{q}=16(1-9x-x^2)$

យើងបាន $16\left(1-9x-x^2\right)=144 \Leftrightarrow x^2+9x+8=0$

ដោយ $b=a+c$ នោះ $x_1=-1$, $x_2=-\dfrac{c}{a}=-8$ ។

ដូចនេះ $x_1=-1$, $x_2=-8$ ។

<u>**លំហាត់ទី១៨**</u>

គេឲ្យពីរចំណុច $A(1,3),B(4,-1)$ និង $B(5,6)$ ។

ក)គណនាកូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។

ខ)គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។

គ)គណនាប្រវែង $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{AC}|$ រួចបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនាកូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$

គេមាន $A(1,3),B(4,-1)$ និង $B(5,6)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}=(4-1,-1-3)$ ឬ $\overrightarrow{AB}=(3,-4)$

ហើយ $\overrightarrow{AC}=(5-1,6-3)$ ឬ $\overrightarrow{AB}=(4,3)$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}=(3,-4)$ និង $\overrightarrow{AC}=(4,3)$ ។

ខ)គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(3,-4)$ និង $\overrightarrow{AC}=(4,3)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(3)(4)+(-4)(3)=12-12=0$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ ។

ខ)គណនាប្រវែង $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{AC}|$ រួចបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(3,-4)$ និង $\overrightarrow{AC}=(4,3)$

យើងបាន $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$

និង $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$ ។

ដូចនេះ $|\overrightarrow{AB}|=5$ និង $|\overrightarrow{AC}|=5$ ។

ដោយ $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=5$ និង $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A ។

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}=(x-3,x-4)$ និង $\vec{b}=\left(x+1,x-2\right)$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $p(x)=\vec{a}.\vec{b}$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ)កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $p(x)=-1$ ។

គ)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យ $p(x)$ មានតម្លៃតូចបំផុត ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនាផលគុណស្កាលែ $p(x)=\vec{a}.\vec{b}$ ជាអនុគមន៍នៃ x

យើងបាន $p(x)=\vec{a}.\vec{b}=(x-3)(x+1)+(x-4)(x-2)$

$$=x^2-2x-3+x^2-6x+8$$

$$=2x^2-8x+5$$

ដូចនេះ $p(x)=\vec{a}.\vec{b}=2x^2-8x+5$ ។

ខ)កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $p(x)=-1$

យើងបាន $2x^2-8x+5=-1$ សមមូល $2x^2-8x+6=0$

ដោយ $a+b+c=0$ នោះ $x_1=1\,,\ x_2=\dfrac{6}{2}=3$

ដូចនេះ $x_1=1\,,\ x_2=3$ ។

គ)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យ $p(x)$ មានតម្លៃតូចបំផុត

យើងមាន $p(x)=2x^2-8x+5=2(x-2)^2-3$ ។

ដើម្បីឲ្យ $p(x)$ មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ $(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$ ។

ដូចនេះ $x=2$ ។

<u>**លំហាត់ទី២០**</u>

គេឲ្យចំណុច $A(x,x+1),B(3,x+4),C(2x+5,-2)$ ដែល $x\in\mathbb{R}$

កំណត់ x ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល A ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

កំណត់តម្លៃនៃ x

ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល A លុះត្រាតែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(3-x,3)$, $\overrightarrow{AC}=(x+5,-3-x)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(3-x)(x+5)+3(-3-x)=-x^2-5x+6$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ នោះ $-x^2-5x+6=0$ មានឫស $x_1=1$, $x_2=-6$

ដូចនេះ $x_1=1$, $x_2=-6$ ។

<u>លំហាត់ទី២១</u>

គេឲ្យចំណុច $A(x,x+1), B(3,-1)$ និង $C(7,6)$ ។

ក)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A ។

ខ)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ B ។

គ)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ C ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A

ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល A លុះត្រាតែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(3-x,-2-x)$, $\overrightarrow{AC}=(7-x,5-x)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(3-x)(7-x)+(-2-x)(5-x)=2x^2-13x+11$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ នោះ $2x^2-13x+11=0$ មានឫស $x_1=1$, $x_2=\dfrac{11}{2}$

ដូចនេះ $x_1=1$, $x_2=\dfrac{11}{2}$ ។

ខ)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ B

ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល B លុះត្រាតែ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

គេមាន $\overrightarrow{BA}=(x-3,x+2)$, $\overrightarrow{BC}=(4,7)$

គេបាន $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=4(x-3)+7(x+2)=11x+2$

ដោយ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ នោះ $11x+2=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{11}$ ។

ដូចនេះ $x=-\dfrac{2}{11}$ ។

គ)កំណត់ x ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ C

ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល C លុះត្រាតែ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

គេមាន $\overrightarrow{CA}=(x-7,x-5)$, $\overrightarrow{CB}=(-4,-7)$

គេបាន $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-4(x-7)-7(x-5)=-11x+63$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ នោះ $-11x+63=0\Leftrightarrow x=\dfrac{63}{11}$ ។

ដូចនេះ $x=\dfrac{63}{11}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឲ្យចំណុច $A(1,2), B(4,6)$ និង $C(5,-1)$ ។

ក)ចូរគណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ និង $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ ។

ខ)រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ និង $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$

យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(3,4)$ និង $\overrightarrow{AC}=(4,-3)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(3)(4)+(4)(-3)=12-12=0$

ហើយ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ និង $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=5$

ខ)រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ និង $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=5$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A ។

<u>**លំហាត់ទី២៣**</u>

ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $P_0(x_0,y_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a,b)$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក) $P_0(2,-3)$ និង $\vec{u}=(-1,3)$

ខ) $P_0(1,4)$ និង $\vec{u}=(2,-1)$

គ) $P_0(2,5)$ និង $\vec{u}=(0,3)$

ឃ) $P_0(-1,4)$ និង $\vec{u}=(-2,0)$

ង) $P_0(0,-5)$ និង $\vec{u}=(1,-4)$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L

ក) $P_0(2,-3)$ និង $\vec{u}=(-1,3)$

តាមរូបមន្ត $L:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \quad , t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ដូចនេះ $L:\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+3t \ , t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ម៉ៅ ម៉ា ថិចឆ័រ

ខ) $P_0(1,4)$ និង $\vec{u}=(2,-1)$

តាមរូបមន្ត $L:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad , t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ដូចនេះ $L:\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - t \quad , t\in\mathbb{R}\end{cases}$

គ) $P_0(2,5)$ និង $\vec{u}=(0,3)$

តាមរូបមន្ត $L:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad , t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ដូចនេះ $L:\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 + 3t \quad , t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ឃ) $P_0(-1,4)$ និង $\vec{u}=(-2,0)$

តាមរូបមន្ត $L:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad , t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ដូចនេះ $L:\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 4 \quad , t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ង) $P_0(0,-5)$ និង $\vec{u}=(1,-4)$

តាមរូបមន្ត $L:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad , t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ដូចនេះ $L:\begin{cases} x = t \\ y = -5 - 4t \quad , t\in\mathbb{R}\end{cases}$

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យចំណុច $A(-1,5)$, $B(3,1)$ និង $C(1,9)$ ។

១)សរសេរសមីការជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។

២)សរសេរសមីការមេដ្យានទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។

៣)រកកូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ

១)សរសេរសមីការជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC

-សមីការជ្រុង AB :

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ AB គឺ $\overrightarrow{AB}=(4,-4)$

តាមរូបមន្ត $AB:\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}$ ឬ $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-5}{-4}$ ឬ $y=-x+4$

ដូចនេះ $AB: y=-x+4$ ។

-សមីការជ្រុង AC :

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ AC គឺ $\overrightarrow{AC}=(2,4)$

តាមរូបមន្ត $AC:\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}$ ឬ $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{4}$ ឬ $y=2x+7$

ដូចនេះ $AC: y=2x+7$ ។

-សមីការជ្រុង BC :

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ BC គឺ $\overrightarrow{BC}=(-2,8)$

តាមរូបមន្ត $BC:\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}$ ឬ $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-1}{8}$ ឬ $y=-4x+13$

ដូចនេះ $BC: y=-4x+13$ ។

២) សរសេរសមីការមេដ្យានទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC

គេមាន $A(-1,5)$, $B(3,1)$ និង $C(1,9)$

យក K,L,M ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃជ្រុង $[BC],[AC],[AB]$

គេបាន $K\left(\dfrac{3+1}{2},\dfrac{1+9}{2}\right)$, $L\left(\dfrac{-1+1}{2},\dfrac{5+9}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{-1+3}{2},\dfrac{5+1}{2}\right)$

ឬ $K(2,5)$, $L(0,7)$, $M(1,3)$ ។

-សមីការមេដ្យាន AK :

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ AK គឺ $\overrightarrow{AK}=(3,0)$

តាមរូបមន្ត $AK:\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}$

ឬ $y=\dfrac{\beta}{\alpha}(x-x_0)+y_0=\dfrac{0}{3}(x+1)+5=5$

ដូចនេះ $AK: y=5$ ។

-សមីការមេដ្យាន BL :

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ BL គឺ $\overrightarrow{BL}=(-3,6)$

តាមរូបមន្ត $BL:\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}$

ឬ $y=\dfrac{\beta}{\alpha}(x-x_0)+y_0=-\dfrac{6}{3}(x-3)+1=-2x+7$

ដូចនេះ $BL: y=-2x+7$ ។

-សមីការមេដ្យាន CM :

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ CM គឺ $\overrightarrow{CM}=(0,-6)$

តាមរូបមន្ត $CM:\dfrac{x-x_0}{\alpha}=\dfrac{y-y_0}{\beta}$

ឬ $\beta(x-x_0)=\alpha(y-y_0)$ ឬ $-6(x-1)=0(y-9)$ ឬ $x=1$

ដូចនេះ $CM: x=1$ ។

៣) រកកូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC

ចំណុចប្រសព្វរវាងមេដ្យាន $AK: y=5$ និង $CM: x=1$ គឺ $G(1,5)$

ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC ។

លំហាត់ទី២៨

ចូរសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $P_0(x_0, y_0)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(a,b)$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក) $P_0(2,-3)$ និង $\vec{n}=(-1,3)$

ខ) $P_0(1,4)$ និង $\vec{n}=(2,-1)$

គ) $P_0(2,5)$ និង $\vec{n}=(0,3)$

ឃ) $P_0(-1,4)$ និង $\vec{n}=(-2,0)$

ង) $P_0(0,-5)$ និង $\vec{n}=(1,-4)$

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ L

ក) $P_0(2,-3)$ និង $\vec{n}=(-1,3)$

តាមរូបមន្ត $L: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

គេបាន $L: -1(x-2)+3(y+3)=0$

ដូចនេះ $\boxed{L: -x+3y+11=0}$ ។

ខ) $P_0(1,4)$ និង $\vec{n}=(2,-1)$

តាមរូបមន្ត $L: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

គេបាន $L: 2(x-1)-(y-4)=0$

ដូចនេះ $\boxed{L: 2x-y+6=0}$ ។

គ) $P_0(2,5)$ និង $\vec{n}=(0,3)$

តាមរូបមន្ត $L: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

គេបាន $L: 0(x-2)+3(y-5)=0$

ដូចនេះ $\boxed{L: y=5}$ ។

ឃ) $P_0(-1,4)$ និង $\vec{n}=(-2,0)$

តាមរូបមន្ត $L: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

គេបាន $L: -2(x+1)+0(y-4)=0$

ដូចនេះ $\boxed{L: x=-1}$ ។

ង) $P_0(0,-5)$ និង $\vec{n}=(1,-4)$

តាមរូបមន្ត $L: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

គេបាន $L: (x-0)-4(y+5)=0$

ដូចនេះ $\boxed{L: x-4y-20=0}$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យបីចំណុច $A(-1,2)$, $B(2,3)$ និង $C(3\,,5)$ ។

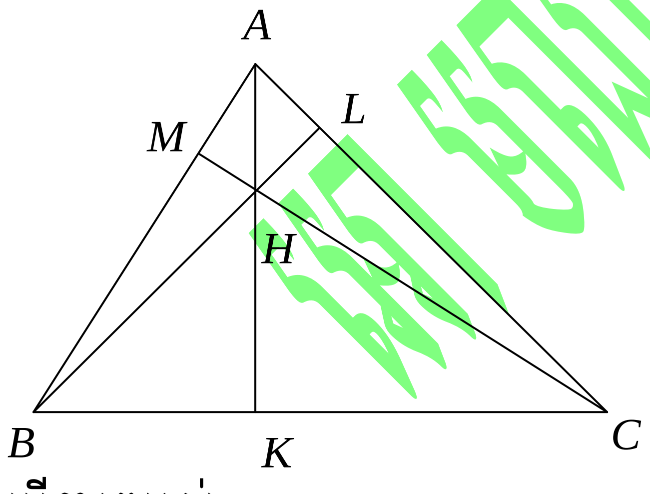
ក)ចូរសរសេរសមីការកម្ពស់ទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។

ខ)គណនាកូអរដោនេអរតូសង់ H នៃត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការកម្ពស់ទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC

គេមាន $A(-1,2)$, $B(2,3)$ និង $C(3\,,5)$



-សមីការកម្ពស់ AK :

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់ AK គឺ $\overrightarrow{BC}=(1\,,2)$

តាមរូបមន្ត $BC: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

$$1(x+1)+2(y-2)=0 \text{ ឬ } x+2y-3=0$$

ដូចនេះ $AK: x+2y-3=0$ ។

-សមីការកម្ពស់ BL :

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់ BL គឺ $\overrightarrow{AC}=(4,3)$

តាមរូបមន្ត $BC: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

$$4(x-2)+3(y-3)=0 \text{ ឬ } 4x+3y-17=0$$

ដូចនេះ $BL: 4x+3y-17=0$ ។

-សមីការកម្ពស់ CM :

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់ CM គឺ $\overrightarrow{AB}=(3,1)$

តាមរូបមន្ត $BC: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

$$3(x-3)+(y-5)=0 \text{ ឬ } 3x+y-14=0$$

ដូចនេះ $AK: 3x+y-14=0$ ។

ខ)គណនាកូអរដោនេអរតូសង់ H នៃត្រីកោណ ABC

កូអរដោនេ H ជាប្រសព្វរវាងកម្ពស់ពីរ $\begin{cases} AK: x+2y-3=0 \\ BL: 4x+3y-17=0 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $H(5,-1)$ ។

ឡាក់ ស៊ីនឌីហ្ស

លំហាត់ទី២៧

គេឲ្យចំណុច $A(x_A, y_A)$ និង បន្ទាត់ $d : ax+by+c=0$ ។

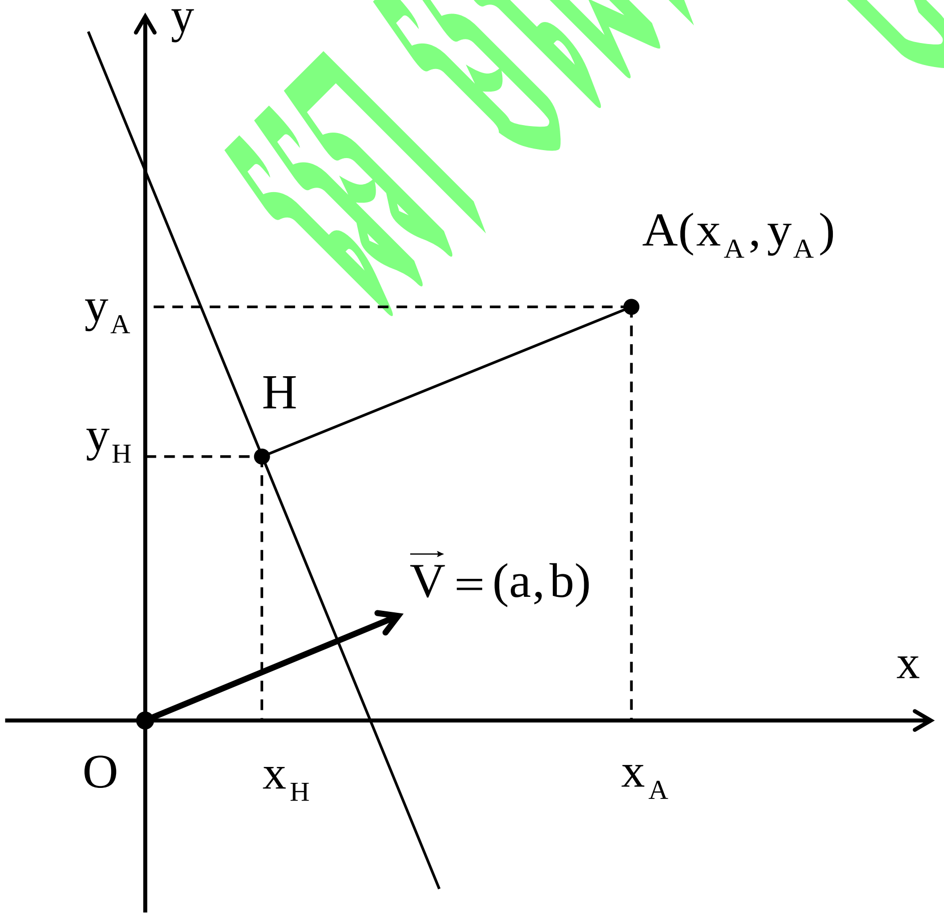
ចូរស្រាយថាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ d កំណត់ដោយ ៖

$$d = d(A,(d)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $H(x_H, y_H)$ ជាជើងចំណោលកែងនៃចំណុច A លើបន្ទាត់ d ។

គេបាន $d = AH = |\overrightarrow{AH}|$ ជាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ d ។



បន្ទាត់ $d: ax+by+c=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{V}=(a,b)$

គេមាន $\overrightarrow{AH}=(x_H-x_A; y_H-y_A)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AH}\perp d$ និង $\vec{V}\perp d$ នោះ $\overrightarrow{AH}//\vec{V}$ នាំឲ្យមានចំនួនពិត t មួយ

ដែល $\overrightarrow{AH}=t\vec{V}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x_H-x_A=at \\ y_H-y_A=bt \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_H=x_A+at \\ y_H=y_A+bt \end{cases}$ (1)

ដោយ $H\in d$ នោះ $ax_H+by_H+c=0$ (2)

យកសមីការ(1)ជួសក្នុង(2) គេបាន ៖

$a(x_A+at)+b(y_A+bt)+c=0$ គេទាញ $t=-\dfrac{ax_A+by_A+c}{a^2+b^2}$

គេបាន $\overrightarrow{AH}=t\vec{V}=-\dfrac{ax_A+by_A+c}{a^2+b^2}.\vec{V}$

ហេតុនេះ $|\overrightarrow{AH}|=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{a^2+b^2}.|\vec{V}|$ តែ $|\vec{V}|=\sqrt{a^2+b^2}$

ដូចនេះ $d=|\overrightarrow{AH}|=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ។

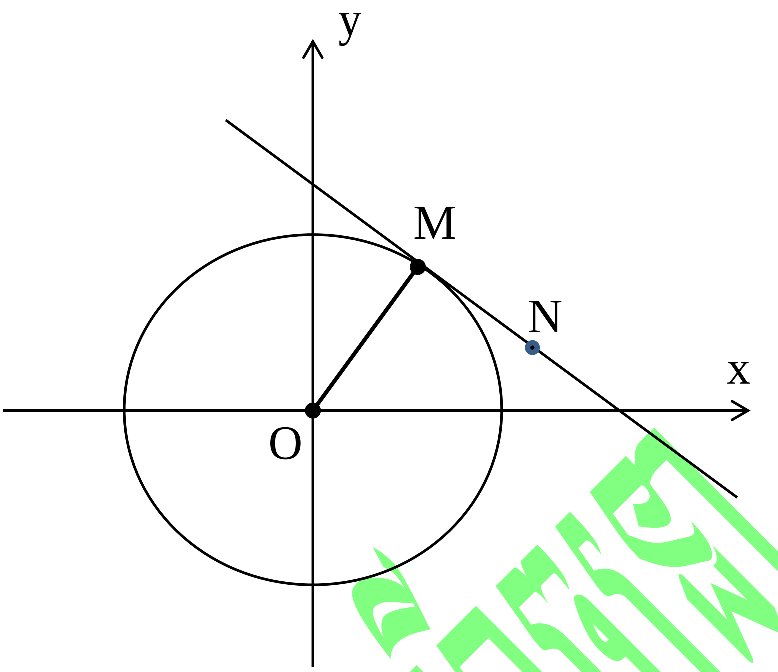
លំហាត់ទី២៨

គេមានរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ និងចំណុច $M(x_0,y_0)$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់នេះ។

ចូរស្រាយថាបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច M មានសមីការ៖

$x_0x+y_0y-r^2=0$ ។

ដំណោះស្រាយ



យក $N(x,y)$ ជាគ្រប់ចំណុចនៃបន្ទាត់រង្វង់ត្រង់ចំណុច M

គេបាន $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MN} = 0$

ដោយ $\overrightarrow{OM} = (x_0, y_0)$ និង $\overrightarrow{MN} = (x - x_0, y - y_0)$

គេបាន $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$

$$x_0x + y_0y - (x_0{}^2 + y_0{}^2) = 0$$

ដោយ M នៅលើរង្វង់នោះ $x_0{}^2 + y_0{}^2 = r^2$ ។

ដូចនេះ $x_0x + y_0y - r^2 = 0$ ជាសមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ $M(x_0, y_0)$ ។

<u>លំហាត់ទី២៩</u>

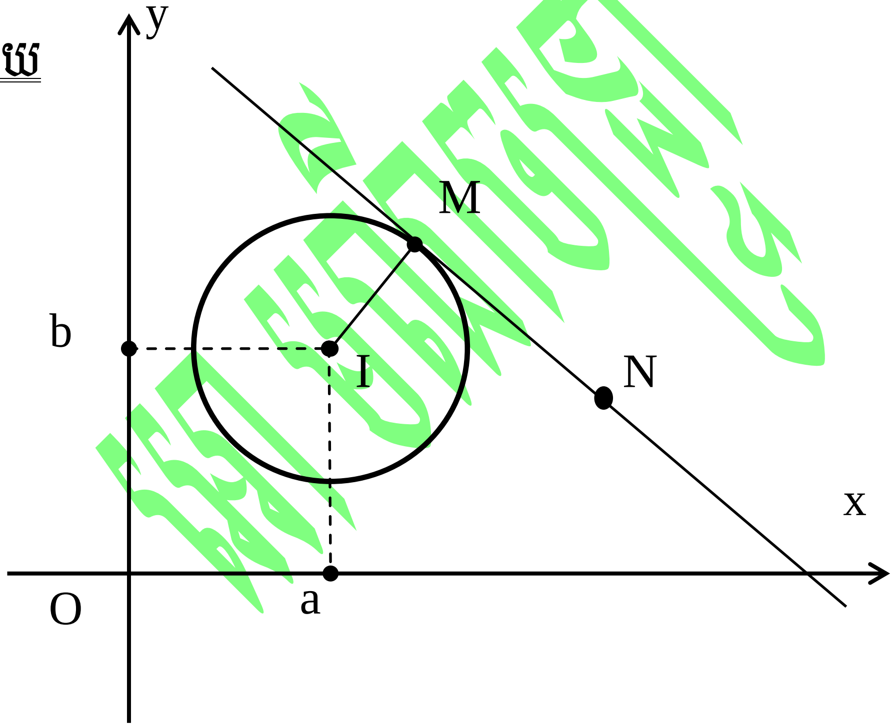
គេឲ្យរង្វង់ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ និងចំណុច $M(x_0,y_0)$

ស្ថិតនៅលើរង្វង់។

ចូរស្រាយថាបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច M មានសមីការៈ

$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>



យក $N(x,y)$ ជាគ្រប់ចំណុចនៃបន្ទាត់រង្វង់ត្រង់ចំណុច M

គេបាន $\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{MN}=0$

ដោយ $\overrightarrow{IM}=(x_0-a,y_0-b)$ និង $\overrightarrow{MN}=(x-x_0,y-y_0)$

គេបាន $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$

$$(x_0-a)x+(y_0-b)y-(x_0{}^2+y_0{}^2-ax_0-by_0)=0$$

$$(x_0-a)x+(y_0-b)y-(x_0{}^2+y_0{}^2-ax_0-by_0)=0$$

$$(x_0-a)x+(y_0-b)y-x_0(x_0-a)-y_0(y_0-b)=0$$

$$(x_0-a)(\text{x}-\text{x}_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$$

ដូចនេះ $(x_0-a)(\text{x}-\text{x}_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$

ជាសមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ $M(x_0,y_0)$ ។

<u>**លំហាត់ទី៣០**</u>

គេឲ្យបន្ទាត់ $(\Delta):3x-4y+2=0$ និង ចំណុច $I(5,-2)$ ។

ក)គណនាចម្ងាយពីចំណុច I ទៅបន្ទាត់ (Δ) ។

ខ)រកសមីការរង្វង់ (C) មានផ្ចិត I ហើយប៉ះនឹងបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ M ។

គ)គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ M ។

ឃ)រកសមីការបន្ទាត់កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) ហើយប៉ះនឹងរង្វង់ (C) ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ក)គណនាចម្ងាយពីចំណុច I ទៅបន្ទាត់ (Δ)

គេមាន $(\Delta):3x-4y+2=0$ និង ចំណុច $I(5,-2)$ ។

តាមរូបមន្ត $d\left(I,(\Delta)\right)=\dfrac{|3x_I-4y_I+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|3(5)-4(-2)+2|}{5}=5$

ដូចនេះ $d\left(I,(\Delta)\right)=5$ ។

ខ)រកសមីការរង្វង់(C) មានផ្ចិតI ហើយប៉ះនឹងបន្ទាត់(Δ) ត្រង់M

តាមរូបមន្ត $(C):\left(x-x_I\right)^2+\left(y-y_I\right)^2=R^2$

ដោយ(C) ប៉ះនឹងបន្ទាត់(Δ)នោះ $R=d\left(I,(\Delta)\right)=5$ ។

ដូចនេះ $(C):(x-5)^2+(y+2)^2=25$ ។

គ)គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះM

កូអរដោនេនៃចំណុចM ជាគូចម្លើយនៃប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases}3x-4y+2=0 & (1)\\ (x-5)^2+(y+2)^2=25 & (2)\end{cases}$$

តាម(1)គេទាញបាន $y=\dfrac{3x+2}{4}$ (3) យកជំនួសក្នុងសមីការ(2)

$$(x-5)^2+\left(\frac{3x+2}{4}+2\right)^2=25$$

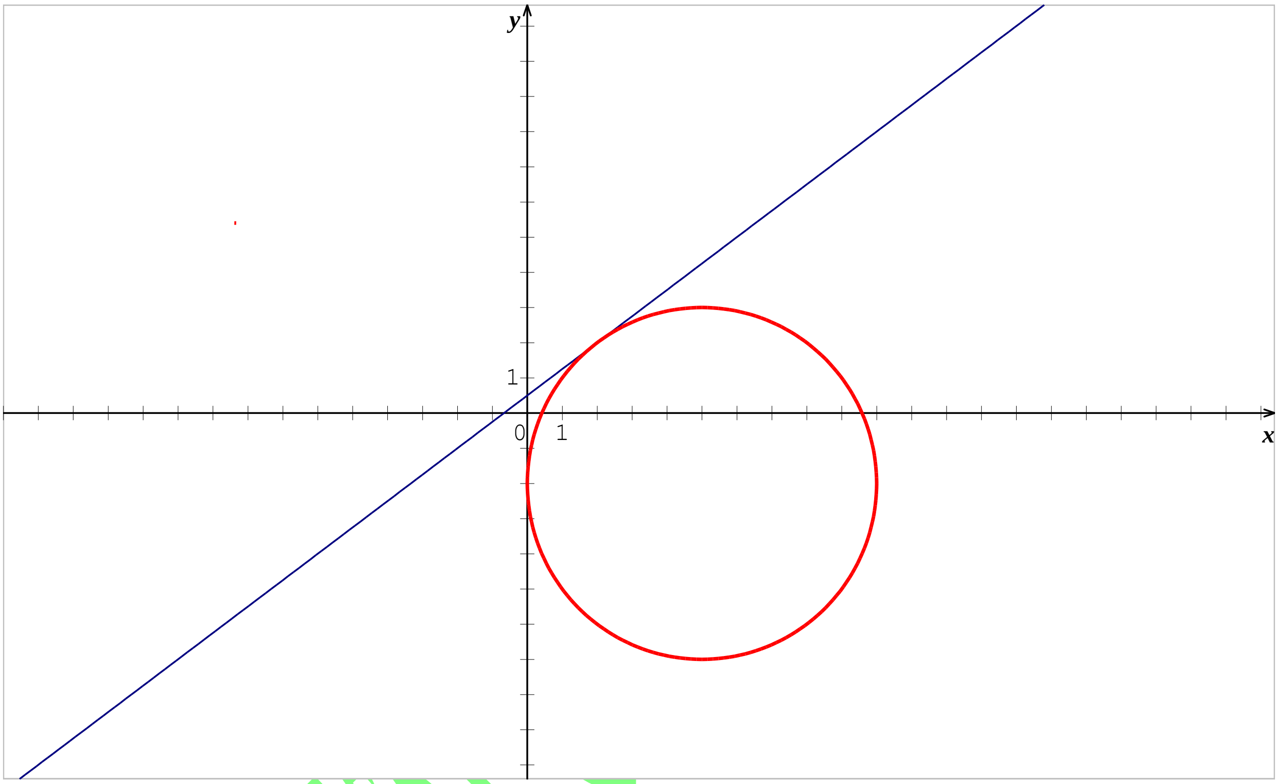
សមមូល $(x-5)^2+\dfrac{(3x+10)^2}{16}=25$

សមមូល $16x^2-160x+400+9x^2+60x+100=400$

សមមូល $25x^2-100x+100=0$

សមមូល $25(x-2)^2=0$ ឬ $x=2$ យកជួសក្នុង(3) គេបាន $y=2$ ។

ដូចនេះ $M(2,2)$ ។



ឃ)រកសមីការបន្ទាត់កែងនឹងបន្ទាត់(Δ) ហើយប៉ះនឹងរង្វង់(C) ។

<u>លំហាត់ទី៣១</u>

គេមានរង្វង់ $(x-1)^2+(y+1)^2=25$ និងចំណុច $M(-2,3)$

ស្ថិតនៅលើរង្វង់ ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច M ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច M

យក $N(x,y)$ ជាគ្រប់ចំណុចនៃបន្ទាត់រង្វង់ត្រង់ចំណុច M

គេបាន $\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{MN}=0$

កូអរដោនេផ្ចិតនៃរង្វង់គឺ $I(1\,,-1)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{IM}=(-3,4)$ និង $\overrightarrow{MN}=(x+2,y-3)$

គេបាន $-3(x+2)+4(y-3)=0$

ដូចនេះ $-3x+4y-18=0$ ។

<u>**លំហាត់ទី៣២**</u>

បើ $O, A\,, B\,, C$ ជាបួនចំណុចដែល $\overrightarrow{OA}=10\vec{a}\,,\overrightarrow{OB}=5\vec{b}$ និង $\overrightarrow{OC}=4\vec{a}+3\vec{b}$ ។ បង្ហាញថា A, B និង C កូលីនេអ៊ែរ នឹងគ្នា។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ដោយ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=5\vec{b}-10\vec{a}$

$=5(\vec{b}-2\vec{a})$

$\overrightarrow{AB}=-5(2\vec{a}-\vec{b})\qquad(1)$

ហើយ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$=4\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{b}$

$=4\vec{a}-2\vec{b}$

$$\overrightarrow{BC}=2(2\vec{a}-\vec{b})\ \ (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$\overrightarrow{AB}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{ឬ} \quad \overrightarrow{BC}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

ដូចនេះ គេបាន $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ជាវ៉ិចទ័រតែមួយនាំឱ្យចំណុច A,B និង C កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នា។

<u>លំហាត់ទី៣៣</u>

ត្រីកោណ ABC មានកំពូលត្រង់ចំណុច $A(2,-1)$, $B(3,-2)$ និង $C(-1,-6)$ ។

ក)រកជាអនុគមន៍ទម្រង់ $a\vec{i}+b\vec{j}$ នៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$

ខ) រកប្រវែងនៃជ្រុងត្រីកោណ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក)រកជាអនុគមន៍ទម្រង់ $a\vec{i}+b\vec{j}$ នៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$

ដោយ ចំណុច $A(2,-1)$, $B(3,-2)$ និង $C(-1,-6)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(3\vec{i}-2\vec{j})-(2\vec{i}-\vec{j})=\vec{i}-\vec{j}$

$$\overrightarrow{BC}=(-\vec{i}-6\vec{j})-(3\vec{i}-2\vec{j})=-4\vec{i}-4\vec{j}$$

$$\overrightarrow{CA}=(2\vec{i}-\vec{j})-(1\vec{i}-6\vec{j})=\vec{i}+5\vec{j}$$

ខ) រកប្រវែងនៃជ្រុងត្រីកោណ

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$

$CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

<u>លំហាត់ទី៣៨</u>

គេឱ្យចំណុច $A(-2\,,-6)$, $B(3,1)$ និង $C(3,4)$ ។

សរសេរ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CA}$ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}$ និង $\vec{j}$ ។

រួចគណនាប្រវែងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ និង$\overrightarrow{CA}$។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គេមាន ចំណុច $A(-2\,,-6)$, $B(3,1)$ និង $C(3,4)$

សរសេរ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CA}$ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}$ និង$\vec{j}$

គេបាន $\overrightarrow{AB} = (3\vec{i} + \vec{j}) - (-2\vec{i} - 6\vec{j}) = 5\vec{i} + 7\vec{j}$

$\overrightarrow{BC} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) - (3\vec{i} + 1\vec{j}) = 0\vec{i} + 3\vec{j}$

$\overrightarrow{CA} = (-2\vec{i} - 6\vec{j}) - (3\vec{i} + 4\vec{j}) = -5\vec{i} - 10\vec{j}$

គណនាប្រវែងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ និង$\overrightarrow{CA}$

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$

$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(0)^2 + (3)^2} = 3$

$CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

<u>លំហាត់ទី៣៨</u>

រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ បើ $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (-12\ , 2)$ និង $\vec{c} = (5\ , 0)$ ។

ក. $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

ខ. $\vec{v} = -3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$

គ. $\vec{w} = 3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{b} - \vec{c})$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$

ដោយ $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (-12\ , 2)$ និង $\vec{c} = (5\ , 0)$

ក. $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

គេបាន $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2\vec{i} - 3\vec{j}) + (-12\vec{i} + 2\vec{j}) + (5\vec{i} + 0\vec{j})$

$= (2\vec{i} - 12\vec{i} + 5\vec{i}) + (-3\vec{j} + 2\vec{j})$

$= -5\vec{i} - \vec{j}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{u} = (-5, -1)}$

ខ. $\vec{v} = -3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$

គេបាន $\vec{v} = -3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = -3(2\vec{i} - 3\vec{j}) + 2(-12\vec{i} + 2\vec{j}) + (5\vec{i} + 0\vec{j})$

$$= -6\vec{i} + 9\vec{j} - 24\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{i}$$

$$= (-6\vec{i} - 24\vec{i} + 5\vec{i}) + (9\vec{j} + 4\vec{j})$$

$$= -25\vec{i} + 13\vec{j}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{v} = (-25, 13)}$

គ. $\vec{w} = 3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{b} - \vec{c})$

គេបាន $\vec{w} = 3[(2\vec{i} - 3\vec{j}) + (-12\vec{i} + 2\vec{j})] - 2[(-12\vec{i} + 2\vec{j}) - (5\vec{i} + 0\vec{j})]$

$$= 3[(2\vec{i} - 12\vec{i}) + (-3\vec{j} + 2\vec{j})] - 2[(-12\vec{i} - 5\vec{i}) + 2\vec{j}]$$

$$= 3(-10\vec{i} - \vec{j}) - 2(-17\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$= -30\vec{i} - 3\vec{j} + 34\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$= (-30\vec{i} + 34\vec{i}) + (-3\vec{j} - 4\vec{j})$$

$$= 4\vec{i} - 7\vec{j}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{w} = (4, -7)}$

លំហាត់ទី៣៦

រកប្រវែងវិចទ័រ $\vec{a}$, $\vec{b}$ និង $\vec{c}$ នៅក្នុងលំហាត់ទី៣៥។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\vec{a}=(2,-3)$, $\vec{b}=(-12\ ,\ 2)$ និង $\vec{c}=(5\ ,0)$

គេបាន $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-12)^2+2^2}=\sqrt{144+4}=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$

$|\vec{c}|=\sqrt{5^2+0^2}=\sqrt{25}=5$

ដូចនេះ $\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{13}\ ,\ |\vec{b}|=2\sqrt{37}\ ,|\vec{c}|=5}$

លំហាត់ទី៣៧

គេឱ្យពីរវិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដែល $|\vec{a}|=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ និង $|\vec{b}|=\dfrac{7}{8}$ ហើយមុំរវាងវិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ 120° ។ គណនាផលគុណស្កាលែនៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណស្កាលែនៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

តាមសម្មតិកម្មគេបាន $|\vec{a}|=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $|\vec{b}|=\dfrac{7}{8}$, $\cos\theta=\cos120^o=-\dfrac{1}{2}$

នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^o$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{7}{8} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{7\sqrt{15}}{64}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{7}{64}\sqrt{15}}$

<u>លំហាត់ទី៣៨</u>

គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដោយដឹងថា៖

ក. $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 6$ និង មុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ 60° ។

ខ. $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \frac{3}{2}$ និង មុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ 150° ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

ដោយដឹងថា៖

ក. $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 6$ និង មុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ 60°

គេបាន $\cos 60^o = \frac{1}{2}$

នោះ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^o$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \times 6 \times \frac{1}{2} = 36$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=36}$

ខ. $|\vec{a}|=\sqrt{5}\ ,|\vec{b}|=\dfrac{3}{2}$ និង មុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ 150°

គេបាន $\cos150^o=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos150^o$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{5}\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{10}}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{4}\sqrt{10}}$

<u>លំហាត់ទី៣៩</u>

គេឱ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដែល $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\dfrac{1}{2}$ ហើយមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ 360°។ គណនាផលគុណស្កាលែនៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គណនាផលគុណស្កាលែនៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

ដោយ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\dfrac{1}{2}$ ហើយមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ 360°

គេបាន $\cos\theta=\cos360^o=1$

នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos360^o$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(1)=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}}$

លំហាត់ទី៤០

បង្ហាញថាសមភាពខាងក្រោមពិត ដោយប្រើនិយមន័យផលគុណស្កាលែ ចំពោះ៖

- មុំ $\theta=30^o$ នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$
- មុំ $\theta=120^o$ នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$
- មុំ $\theta=0^o$ នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$
- មុំ $\theta=180^o$ នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាសមភាពពិតខាងក្រោម ដោយប្រើនិយមន័យផលគុណស្កាលែ៖

- មុំ $\theta=30^o$

គេបាន $\cos\theta=\cos 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$

នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 30^o$

$$=|\vec{a}||\vec{b}|\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\theta=30^o\ ,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{a}||\vec{b}|}$ ពិត

- មុំ $\theta=120^o$ នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$

គេបាន $\cos\theta=\cos120^o=-\frac{1}{2}$

នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}\ =|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^o$

$$=|\vec{a}||\vec{b}|\left(-\frac{1}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\theta=120^o\ ,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|}$ ពិត

- មុំ $\theta=0^o$ នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$

គេបាន $\cos\theta=\cos0^o=1$

នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}\ =|\vec{a}||\vec{b}|\cos0^o$

$$=|\vec{a}||\vec{b}|(1)$$

ដូចនេះ $\boxed{\theta=0^o\ ,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|}$ ពិត

- មុំ $\theta=180^o$ នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$

គេបាន $\cos\theta=\cos180^o=-1$

នោះ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 180^o$

$=|\vec{a}||\vec{b}|(-1)$

ដូចនេះ $\boxed{\theta = 180^o\ ,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|}$ ពិត

<u>លំហាត់ទី៤១</u>

ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល C ហើយ មុំ $\angle A = 30^o$, $\angle B = 60^o$ និង $AB = 2$, $AC = \sqrt{3}$, $BC = 1$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែខាងក្រោម៖

ក. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ខ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

គ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ ឃ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គណនាផលគុណស្កាលែ៖

ក. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

តាមរូបមន្ត: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A$

ដោយ $AB = 2$, $AC = \sqrt{3}$, $\cos A = \cos 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3}$

ខ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

តាមរូបមន្ត: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos C$

ដោយ $CA=\sqrt{3}$, $CB=1$, $\cos C=\cos 90^o=0$

គេបាន $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\sqrt{3}\times1\times0=0$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0}$

គ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

តែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

តាមរូបមន្ត: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B$

ដោយ $BA=AB=2$, $BC=1$, $\cos B=\cos 60^o=\frac{1}{2}$

គេបាន $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times1\times\frac{1}{2}=1$

នោះ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-1$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-1}$

ឃ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$

នោះ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-3$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-3}$

<u>លំហាត់ទី៤២</u>

ត្រីកោណកែងសមបាត ABC មួយមាន $\angle A$ជាមុំកែង។

តាង a ជាប្រវែងនៃជ្រុង AB រួចយើងគូសបន្ទាត់កែង AM ពីកំពូល A ទៅជ្រុង BC។ គណនាផលគុណស្កាលែខាងក្រោម៖

ក. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$ ខ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$ គ. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គណនាផលគុណស្កាលែ៖

ក. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

តែ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B$

$$|\overrightarrow{BA}|=a\ ,\ |\overrightarrow{BC}|=a\sqrt{2}\ ,\ \cos B=\cos 45^o=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

គេបាន $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=a\times a\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=a^2}$

ខ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$

ដោយ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

តែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A$

$|\overrightarrow{AB}|=a$, $|\overrightarrow{AC}|=a$, $\cos A=\cos 90^o=0$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a\times a\times 0=0$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=0}$

គ. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}$

តែ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$

តាមរូបមន្ត: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AB}|\cos A$

មុំ A ជាមុំរវាង $\overrightarrow{AM}$ និង $\overrightarrow{AB}$

ដោយ $AM=MB=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $AB=a$, $\cos A=\cos 45^o=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

គេបាន $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\times a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

នោះ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{a^2}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}=-\dfrac{a^2}{2}}$

លំហាត់ទី៤៣

គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ៖

ក. $\vec{a}=(-2,3)$, $\vec{b}=(5\,,4)$

ខ. $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}\,,\ \vec{b}=-4\vec{i}+\vec{j}$

គ. $\vec{a}=(-5,\,3)$, $\vec{b}=(2,6)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ៖

ក. $\vec{a}=(-2,3)$, $\vec{b}=(5\,,4)$

តាមរូបមន្ត $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}\ =(-2)(5)+(3)(4)$

$=-10+12$

$=2$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=2}$

ខ. $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}\,,\ \vec{b}=-4\vec{i}+\vec{j}$

តាមរូបមន្ត $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}\ =(3)(-4)+(5)(1)$

$= -12 + 5$

$= -7$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = -7}$

គ. $\vec{a} = (-5, 3)$, $\vec{b} = (2, 6)$

តាមរូបមន្ត $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b} = (-5)(2) + (3)(6)$

$= -10 + 18$

$= 8$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = 8}$

<u>**លំហាត់ទី៤៤**</u>

បង្ហាញថា $\vec{a} \perp \vec{b}$ ដែល $\vec{a} = (3, -4)$ និង $\vec{b} = (8, 6)$ ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

តាមរូបមន្ត $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b} = (3)(8) + (-4)(6)$

$= 24 - 24$

$= 0$

ដោយ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ គេបាន $\vec{a} \perp \vec{b}$

<u>លំហាត់ទី៤៥</u>

កំណត់មុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ

ក. $\vec{a}=(1,0)$, $\vec{b}=(0,2)$

ខ. $\vec{a}=(1,1)$, $\vec{b}=(2\ ,0)$

គ. $\vec{a}=(-1,0)$, $\vec{b}=(1,0)$

ឃ. $\vec{a}=(-3,0)$, $\vec{b}=(-1,\sqrt{3})$

ង. $\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(3,-6)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់មុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រៈ

តាង θ ជាមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

ក. $\vec{a}=(1,0)$, $\vec{b}=(0,2)$

គេបាន $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

$$=\frac{(1)(0)+(0)(2)}{\sqrt{1^2+0^2}\sqrt{0^2+2^2}}$$

$$=\frac{0}{2}=0$$

ដោយ $\cos\theta=0$ នោះ $\theta=90^{o}$

ដូចនេះ $\boxed{\theta = 90^o}$

ខ. $\vec{a} = (1,1)$, $\vec{b} = (2\ ,0)$

គេបាន $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

$$= \frac{(1)(2) + (1)(0)}{\sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 0^2}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដោយ $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ នោះ $\theta = 45^o$

ដូចនេះ $\boxed{\theta = 45^o}$

គ. $\vec{a} = (-1,0)$, $\vec{b} = (1,0)$

គេបាន $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

$$= \frac{(-1)(1) + (0)(0)}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

$$= \frac{-1}{1} = -1$$

ដោយ $\cos\theta = -1$ នោះ $\theta = 180^o$

ដូចនេះ $\boxed{\theta = 180^o}$

ស្រាវជ្រាវ

ឃ. $\vec{a}=(-3,0)$, $\vec{b}=(-1,\sqrt{3})$

គេបាន $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

$$=\frac{(-3)(-1)+(0)(\sqrt{3})}{\sqrt{(-3)^2+0^2}\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}}$$

$$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

ដោយ $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ នោះ $\theta=60^o$

ដូចនេះ $\boxed{\theta=60^o}$

ង. $\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(3,-6)$

គេបាន $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

$$=\frac{(2)(3)+(1)(-6)}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{3^2+(-6)^2}}$$

$$=\frac{0}{\sqrt{5}\sqrt{45}}=0$$

ដោយ $\cos\theta=0$ នោះ $\theta=90^o$

ដូចនេះ $\boxed{\theta=90^o}$

លំហាត់ទី៤៦

គណនាផលគុណស្កាលែខាងក្រោម៖

ក. $\vec{a}=(1,0)$, $\vec{b}=(0,2)$ ដែលមុំរវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរស្មើ 90° ។

ខ. $\vec{a}=(1,1)$, $\vec{b}=(2,0)$ ដែលមុំរវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរស្មើ 45° ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណស្កាលែខាងក្រោម៖

ក. $\vec{a}=(1,0)$, $\vec{b}=(0,2)$ ដែលមុំរវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរស្មើ 90°

តាមរូបមន្ត៖ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

$$\cos 90^o = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{1^2+0^2}\sqrt{0^2+2^2}}$$

$$0 = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}$$

នាំឱ្យ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\times 0 = 0$

ដូចនេះ: $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=0}$

ខ. $\vec{a}=(1,1)$, $\vec{b}=(2,0)$ ដែលមុំរវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរស្មើ 45° ។

តាមរូបមន្ត៖ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

$$\cos 45^o = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{2^2+0^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2\sqrt{2}}$$

នាំឱ្យ $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2} = 2$

ដូចនេះ: $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = 2}$

លំហាត់ទី៤៧

គេឱ្យ $\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{a} + 2\vec{b})$ និង $\vec{q} = 2\vec{a} + \vec{b} + s\vec{a}$ ។ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនស្របគ្នា ហើយខុសពីសូន្យ។ រកតម្លៃនៃ t និង s បើ $\vec{p} = \vec{q}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃនៃ t និង s

យើងមាន $\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{a} + 2\vec{b})$ និង $\vec{q} = 2\vec{a} + \vec{b} + s\vec{a}$

បើ $\vec{p} = \vec{q}$

គេបាន $\vec{a} + t(\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b} + s\vec{a}$

$$\vec{a} + \vec{a}t + 2t\vec{b} = 2\vec{a} + \vec{b} + s\vec{a}$$

$$\vec{a} + \vec{a}t + 2t\vec{b} - 2\vec{a} - \vec{b} - s\vec{a} = 0$$

$$-\vec{a} + \vec{a}t - s\vec{a} + 2t\vec{b} - \vec{b} = 0$$

$$\vec{a}(-1 + t - s) + \vec{b}(2t - 1) = 0$$

ដោយ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនស្របគ្នា ហើយខុសពីសូន្យគេបាន

$$\Rightarrow \begin{cases} -1+t-s=0 \\ 2t-1=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$t=\frac{1}{2} \Rightarrow s=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{t=\dfrac{1}{2}\ , s=-\dfrac{1}{2}}$

<u>លំហាត់ទី៤៨</u>

គេឱ្យ $\vec{p}=2\vec{a}+t(3\vec{a}+4\vec{b})$ និង $\vec{q}=5\vec{a}+s\vec{a}+2\vec{b}$ ។ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនស្របគ្នា ហើយខុសពីសូន្យ។ រកតម្លៃនៃ t និង s បើ $\vec{p}=\vec{q}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកតម្លៃនៃ t និង s

យើងមាន $\vec{p}=2\vec{a}+t(3\vec{a}+4\vec{b})$ និង $\vec{q}=5\vec{a}+s\vec{a}+2\vec{b}$

បើ $\vec{p}=\vec{q}$

គេបាន $2\vec{a}+t(3\vec{a}+4\vec{b})=5\vec{a}+s\vec{a}+2\vec{b}$

$$2\vec{a}+3t\vec{a}+4t\vec{b}=5\vec{a}+s\vec{a}+2\vec{b}$$

$$2\vec{a}+3t\vec{a}+4t\vec{b}-5\vec{a}-s\vec{a}-2\vec{b}=0$$

$$-3\vec{a}+3t\vec{a}-s\vec{a}+4t\vec{b}-2\vec{b}=0$$

$$\vec{a}(-3+3t-s)+\vec{b}(4t-2)=0$$

ដោយ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនស្របគ្នា ហើយខុសពីសូន្យគេបាន

$$\Rightarrow \begin{cases} -3+3t-s=0 \\ 4t-2=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$t=\frac{1}{2} \Rightarrow s=-\frac{3}{2}$$

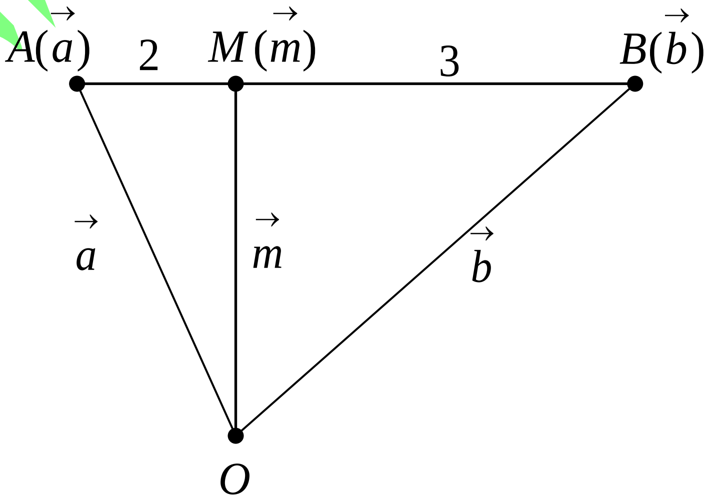
ដូចនេះ $\boxed{t=\frac{1}{2}\ , s=-\frac{3}{2}}$

លំហាត់ទី៤៩

បើ M ចែក AB តាមផលធៀប $2:3$ និង O ជាចំណុចមិននៅលើ AB ។ បង្ហាញថា $5\vec{m}=3\vec{a}+2\vec{b}$ ដែល $\vec{m}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ និង $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $5\vec{m}=3\vec{a}+2\vec{b}$



តាមវិធីចែកក្នុង គេឃើញថា M ចែក AB តាមផលធៀប $2:3$

នោះគេអាចសរសេរៈ

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3+2}\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{m}-\vec{a}=\frac{2}{5}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$5\vec{m}-5\vec{a}=2\vec{b}-2\vec{a}$$

$$5\vec{m}=3\vec{a}+2\vec{b}$$

ដូចនេះ $\boxed{5\vec{m}=3\vec{a}+2\vec{b}}$ ពិត

<u>**លំហាត់ទី៨០**</u>

រកកូអរដោនេនៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង ដែលភ្ជាប់ចំណុចពីរ $A(2,3)$ និង $B(-2,4)$ តាមផលធៀប $2:1$។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

រកកូអរដោនេនៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង

តាមរូបមន្ត $C\left(x_C=\dfrac{nx_A+mx_B}{m+n}\ ,\ y_C=\dfrac{ny_A+my_B}{m+n}\right)$

ដោយ $A(2,3)$, $B(-2,4)$, $m:n=2:1$

គេបាន $C\left(\dfrac{(1)(2)+(2)(-2)}{2+1}\ ,\ \dfrac{(1)(3)+(2)(4)}{2+1}\right)$

$$C\left(-\frac{2}{3},\frac{11}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{កូអរដោនេនៃចំណុច } C \text{ គឺ } C\left(-\frac{2}{3},\frac{11}{3}\right)}$

លំហាត់ទី៨១

រកកូអរដោនេនៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង ដែលភ្ជាប់ចំណុចពីរ $A(-1,2)$ និង $B(3,1)$ តាមផលធៀប $3:2$។

ដំណោះស្រាយ

រកកូអរដោនេនៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង

តាមរូបមន្ត $C\left(x_C=\dfrac{nx_A+mx_B}{m+n}\ ,\ y_C=\dfrac{ny_A+my_B}{m+n}\right)$

ដោយ $A(-1,2)$, $B(3,1)$, $m:n=3:2$

គេបាន $C\left(\dfrac{(2)(-1)+(3)(3)}{3+2},\dfrac{(2)(2)+(3)(1)}{3+2}\right)$

$C\left(\dfrac{7}{5},\dfrac{7}{5}\right)$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុច C គឺ $C\left(\dfrac{7}{5},\dfrac{7}{5}\right)$

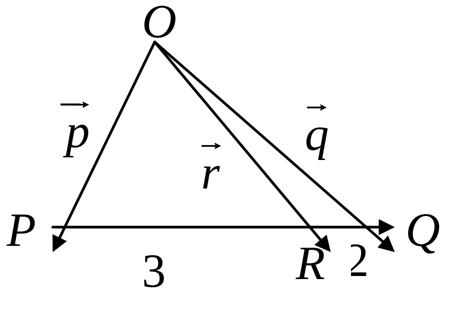
លំហាត់ទី៨២

បើ R ចែក PQ តាមផលធៀប $3:2$។

ក. បំពេញនូវចន្លោះ

$(i)\ \overrightarrow{PR}=....\overrightarrow{PQ}$

$(ii)\ \overrightarrow{QR}=....\overrightarrow{QP}$



ខ. បង្ហាញ $\overrightarrow{PR}$ និង $\overrightarrow{QR}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{p}$ និង $\vec{q}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. បំពេញនូវចន្លោះ

$$(i)\ \overrightarrow{PR}=\frac{3}{5}\ \overrightarrow{PQ}$$

$$(ii)\ \overrightarrow{QR}=\frac{2}{5}\ \overrightarrow{QP}$$

ខ. បង្ហាញ $\overrightarrow{PR}$ និង $\overrightarrow{QR}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{p}$ និង $\vec{q}$

តាមសំណួរ (ក) គេឃើញថា $\overrightarrow{PR}=\frac{3}{5}\overrightarrow{PQ}$

តែ $\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}$ នោះគេបាន

$$\overrightarrow{PR}=\frac{3}{5}(\vec{q}-\vec{p})$$

ដូចគ្នាដែរ $\overrightarrow{QR}=\frac{2}{5}\overrightarrow{QP}$ តែ $\overrightarrow{QP}=\vec{p}-\vec{q}$

នោះគេបាន $\overrightarrow{QR}=\frac{2}{5}(\vec{p}-\vec{q})$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{PR}=\frac{3}{5}(\vec{q}-\vec{p})\ ,\quad \overrightarrow{QR}=\frac{2}{5}(\vec{p}-\vec{q})}$

លំហាត់ទី៨៣

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត

ក. បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(2,3)$ និង វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1,2)$ ។

ខ. បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(4,0)$ និង វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(-3,2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត

ក. បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(2,3)$ និង វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1,2)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រ $\vec{p}=\overrightarrow{p_o}+t\vec{u}$

គេបាន $\vec{p}=(2,3)+t(1,2)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \end{cases}$

ខ. បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(4,0)$ និង វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(-3,2)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រ $\vec{p}=\overrightarrow{p_o}+t\vec{u}$

គេបាន $\vec{p}=(4,0)+t(-3,2)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4-3t \\ y=2t \end{cases}$

<u>លំហាត់ទី៨៤</u>

គេឱ្យបន្ទាត់ L ហើយកាត់តាមចំណុច P_o ស្របទៅនឹង $\vec{u}$។

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L និងរកសមីការបន្ទាត់ L ចំពោះ៖

ក. $P_o(2\,,7\,)\,,\vec{u}=(1,2)$

ខ. $P_o(10\,,-2\,)\,,\vec{u}=(-2,5)$

គ. $P_o(4\,,9\,)\,,\vec{u}=(7,5)$

ឃ. $P_o(4\,,-3\,)\,,\vec{u}=(-2,3)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L និងរកសមីការបន្ទាត់ L ចំពោះ៖

ក. $P_o(2\,,7\,)\,,\vec{u}=(1,2)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រ $\vec{p}=\overrightarrow{p_o}+t\vec{u}$

គេបាន $\vec{p}=(2,7)+t(1,2)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=7+2t \end{cases}$

សមីការនៃបន្ទាត់ L គឺតាមសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គេបាន

$$t=x-2\ ,\ \ t=\frac{y-7}{2}$$

ផ្ទឹមសមីការទាំងពីរ គេបាន៖ $x-2=\dfrac{y-7}{2} \Rightarrow y-7=2x-4$

នោះ $y=2x-4+7=2x+3$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L គឺ $\boxed{x=2+t\ ,\ y=7+2t}$

និងសមីការបន្ទាត់ L គឺ $\boxed{y=2x+3}$

ខ. $P_o(10\ ,-2\ )\ ,\vec{u}=(-2,5)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រ $\vec{p}=\vec{p_o}+t\vec{u}$

គេបាន $\vec{p}=(10,-2)+t(-2,5)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10-2t \\ y=-2+5t \end{cases}$

សមីការនៃបន្ទាត់ L គឺតាមសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គេបាន

$$t=\frac{x-10}{-2}\ ,\ t=\frac{y+2}{5}$$

ផ្ទឹមសមីការទាំងពីរ គេបាន៖ $\dfrac{x-10}{-2}=\dfrac{y+2}{5} \Rightarrow -2y-4=5x-50$

នោះ $y=\dfrac{5x-50+4}{-2}=\dfrac{5x-46}{-2}=-\dfrac{5}{2}x+23$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L គឺ $\boxed{x=10-2t\ ,\ y=-2+5t}$

និងសមីការបន្ទាត់ L គឺ $\boxed{y=-\dfrac{5}{2}x+23}$

ទិចឆ័រភ្លួចម្លង់

គ. $P_o(4\,,9\,)\,,\vec{u}=(7,5)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រ $\vec{p}=\overrightarrow{p_o}+t\vec{u}$

គេបាន $\vec{p}=(4,9)+t(7,5)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4+7t\\y=9+5t\end{cases}$

សមីការនៃបន្ទាត់ L គឺតាមសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គេបាន

$$t=\frac{x-4}{7}\ ,\ t=\frac{y-9}{5}$$

ផ្ទឹមសមីការទាំងពីរ គេបាន៖ $\frac{x-4}{7}=\frac{y-9}{5}\Rightarrow 7y-63=5x-20$

នោះ $y=\frac{5x-20+63}{7}=\frac{5x+43}{7}=\frac{5}{7}x+\frac{43}{7}$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L គឺ $\boxed{x=4+7t\ ,\ y=9+5t}$

និងសមីការបន្ទាត់ L គឺ $\boxed{y=\frac{5}{7}x+\frac{43}{7}}$

ឃ. $P_o(4\,,-3\,)\,,\vec{u}=(-2,3)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រ $\vec{p}=\overrightarrow{p_o}+t\vec{u}$

គេបាន $\vec{p}=(4,-3)+t(-2,3)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4-2t\\y=-3+3t\end{cases}$

សមីការនៃបន្ទាត់ L គឺតាមសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គេបាន

$$t=\frac{x-4}{-2}\ ,\ \ t=\frac{y+3}{3}$$

ផ្ទឹមសមីការទាំងពីរ គេបាន៖ $\frac{x-4}{-2}=\frac{y+3}{3}\Rightarrow -2y-6=3x-12$

នោះ $y=\frac{3x-12+6}{-2}=\frac{3x-6}{-2}=-\frac{3}{2}x+3$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L គឺ $\boxed{x=4-2t\ ,\ \ y=-3+3t}$

និងសមីការបន្ទាត់ L គឺ $\boxed{y=-\frac{3}{2}x+3}$

<u>លំហាត់ទី៨៥</u>

កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ AB ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $A(4,-3)\ ,\ B(-2\ ,\ 5)$

ខ. $A(-\frac{3}{2},-4)\ ,\ B(2\ ,\ -4)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ AB ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $A(4,-3)\ ,\ B(-2\ ,\ 5)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រ $AB: \vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$

នោះ $AB: \vec{p} = (4,-3) + t[(-2,5) - (4,-3)]$

គេបាន $AB: \vec{p} = (4\,,-3) + t[(-2-4),(5+3)]$

$\vec{p} = (4\,,-3) + t(-6,8)$

ដូចនេះ

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ AB គឺ $\boxed{AB: \vec{p} = (4,-3) + t(-6\,,8)}$

ខ. $A(-\frac{3}{2},-4)$, $B(2\,,-4)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រ $AB: \vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$

នោះ $AB: \vec{p} = (-\frac{3}{2},-4) + t[(2,-4) - (-\frac{3}{2},-4)]$

គេបាន $AB: \vec{p} = (-\frac{3}{2},-4) + t[(2+\frac{3}{2}),(-4+4)]$

$\vec{p} = (-\frac{3}{2},-4) + t(\frac{7}{2},0)$

ដូចនេះ

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ AB គឺ $\boxed{AB: \vec{p} = (-\frac{3}{2},-4) + t(\frac{7}{2},0)}$

លំហាត់ទី៨៦

រកសមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $P_o(4\,,3)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(5\,,2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការនៃបន្ទាត់ L

តាមសមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $P_o(x_o\,,y_o)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(a\,,b)$ គឺ $a(x-x_o)+b(y-y_o)=0$ គេបាន៖

$$5(x-4)+2(y-3)=0$$
$$5x-20+2y-6=0$$
$$5x+2y-26=0$$

ដូចនេះ សមីការនៃបន្ទាត់ L គឺ $\boxed{5x+2y-26=0}$

លំហាត់ទី៨៧

រកចំណុចប្រសព្វចំពោះគូនៃបន្ទាត់

ក. $\vec{r}=(1,2)+s(1\,,1)$ និង $\vec{r}=(3,-2)+t(1\,,4)$

ខ. $\vec{r}=(3,1)+s(4\,,-2)$ និង $\vec{r}=(1,2)+t(-6\,,3)$

ដំណោះស្រាយ

រកចំណុចប្រសព្វចំពោះគូនៃបន្ទាត់

ស្រឡាញ់ខ្មែរ

ក. $\vec{r}=(1,2)+s(1,1)$ និង $\vec{r}=(3,-2)+t(1,4)$

សរសេរសមីការទាំងពីរជាទម្រង់ប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ គេបាន

$x=1+s\ ,\ y=2+s$ (1) និង $x=3+t\ ,\ y=-2+4t$ (2)

បន្ទាត់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នា នៅពេលដែល

$$(1+s,\ 2+s)=(3+t\ ,-2+4t)$$

គេបាន $1+s=3+t\Rightarrow s=t+2$

$$2+s=-2+4t\Rightarrow 2+(t+2)=-2+4t$$
$$2+t+2=-2+4t$$
$$4t-t=4+2$$
$$3t=6$$
$$t=2$$

នោះ $s=4$

(យក $s=4$ ទៅជំនួសក្នុងសមីការបន្ទាត់ទីមួយ ឬយក $t=2$ ទៅជំនួសក្នុងសមីការទីពីរក៏បាន)

យើងបាន កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $(5,6)$

ដូចនេះ **កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $(5,6)$**

ខ. $\vec{r}=(3,1)+s(4,-2)$ និង $\vec{r}=(1,2)+t(-6,3)$

សរសេរសមីការទាំងពីរជាទម្រង់ប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ គេបាន

$x=3+4s\ ,\ y=1-2s\ \ (1)$ និង $x=1-6t\ ,\ y=2+3t\qquad (2)$

បន្ទាត់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នា នៅពេលដែល

$$(3+4s,1-2s)=(1-6t\ ,\ 2+3t)$$

គេបាន $3+4s=1-6t\Rightarrow t=\dfrac{4s+2}{-6}=-\dfrac{2}{3}s-\dfrac{1}{3}$

$$1-2s=2+3t\Rightarrow 1-2s=2+3\left(-\frac{2}{3}s-\frac{1}{3}\right)$$

$$1-2s=2-2s-1$$

នោះ $0s=0$ ពិត

យើងបាន បន្ទាត់ទាំងពីរស្របគ្នា តែមិនត្រួតគ្នាទេ

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ទាំងពីរគ្មានកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វទេ}}$

<u>លំហាត់ទី៨៨</u>

រកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់៖

ក. $3x-4y+5=0$

ខ. $-x+2y-4=0$

គ. $x+y-3=0$

ឃ. $4x-3y+15=0$

ដំណោះស្រាយ

រកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់៖

ក. $3x-4y+5=0$

សមីការខាងលើអាចសរសេរ $ax+by+c=0$

នោះគេបាន វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់គឺ $\vec{n}(a,b)$

នាំឱ្យ $\vec{n}=(3,-4)$

ដូចនេះ **វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់ គឺ $\vec{n}=(3,-4)$**

ខ. $-x+2y-4=0$

សមីការខាងលើអាចសរសេរ $ax+by+c=0$

នោះគេបាន វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់គឺ $\vec{n}(a,b)$

នាំឱ្យ $\vec{n}=(-1,2)$

ដូចនេះ **វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់ គឺ $\vec{n}=(-1,2)$**

គ. $x+y-3=0$

សមីការខាងលើអាចសរសេរ $ax+by+c=0$

នោះគេបាន វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់គឺ $\vec{n}(a,b)$

នាំឱ្យ $\vec{n}=(1,1)$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់ គឺ $\vec{n}=(1,1)$

ឃ. $4x-3y+15=0$

សមីការខាងលើអាចសរសេរ $ax+by+c=0$

នោះគេបាន វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់គឺ $\vec{n}(a,b)$

នាំឱ្យ $\vec{n}=(4,-3)$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់ គឺ $\vec{n}=(4,-3)$

លំហាត់ទី៥៩

រកសមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាម

ក. ចំណុច $(-2,5)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(-1,2)$ ។

ខ. ចំណុច $(0,3)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(1,1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាម

ក. ចំណុច $(-2,5)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(-1,2)$

តាមសមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $P_o(x_o\ ,\ y_o)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(a\ ,b)$ គឺ $a(x-x_o)+b(y-y_o)=0$ គេបាន៖

ទិចឆ័រភ្លូខម្លង់

$$-(x+2)+2(y-5)=0$$
$$-x-2+2y-10=0$$
$$-x+2y-12=0$$

ដូចនេះ សមីការនៃបន្ទាត់ L គឺ $\boxed{-x+2y-12=0}$

ខ. ចំណុច $(0\ ,3)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(1,1)$

តាមសមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $P_o(x_o\ ,\ y_o)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(a\ ,b)$ គឺ $a(x-x_o)+b(y-y_o)=0$ គេបាន៖

$$(x-0)+(y-3)=0$$
$$x+y-3=0$$

ដូចនេះ សមីការនៃបន្ទាត់ L គឺ $\boxed{x+y-3=0}$

<u>លំហាត់ទី៦០</u>

រកសមីការនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $P_o(-1\ ,2)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(1\ ,-2)$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

តាមសមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $P_o(x_o\ ,\ y_o)$ ហើយកែង ទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(a\ ,b)$ គឺ $a(x-x_o)+b(y-y_o)=0$ គេបាន៖

$$(x+1)+(-2)(y-2)=0$$
$$x+1-2y+4=0$$
$$x-2y+5=0$$

ដូចនេះ សមីការនៃបន្ទាត់ L គឺ $\boxed{x-2y+5=0}$

<u>លំហាត់ទី៦១</u>

រកចម្ងាយរវាងចំណុច $P(2\,,-5)$ និងបន្ទាត់ $4x-3y+7=0$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកចម្ងាយរវាងចំណុច P ទៅបន្ទាត់

តាមរូបមន្តចម្ងាយ $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ គេបាន

$$d=\frac{|(4)(2)+(-3)(-5)+7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$$d=\frac{|8+15+7|}{\sqrt{16+9}}=\frac{30}{5}=6$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្ងាយរវាងចំណុច } P \text{ ទៅបន្ទាត់គឺ } d=6}$

<u>លំហាត់ទី៦២</u>

បង្ហាញថាសមីការវ៉ិចទ័រនៃរង្វង់ដែលមាន $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ ជាចំណុចចុងសងខាងនៃ អង្កត់ផ្ចិត $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ ដែល $P(\vec{p})$ ជាចំណុចចល័តនៅលើរង្វង់។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថាសមីការវ៉ិចទ័រនៃរង្វង់គឺ $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

ដោយ AB ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ ហើយ P ជាចំណុចចល័តនៅលើរង្វង់ គេបាន ABP ជាត្រីកោណកែងត្រង់ P (ត្រីកោណចារឹកកន្លះរង្វង់)

តាមផលគុណស្កាលែគេបាន $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ (1)

ដោយ $\overrightarrow{PA}=\vec{a}-\vec{p}$ និង $\overrightarrow{PB}=\vec{b}-\vec{p}$ នោះ (1) អាចសរសេរជា

$(\vec{a}-\vec{p})(\vec{b}-\vec{p})=0$ ឬ $(\vec{p}-\vec{a})(\vec{p}-\vec{b})=0$ ពិត

ដូចនេះ សមីការវ៉ិចទ័រនៃរង្វង់គឺ $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

<u>លំហាត់ទី៦៣</u>

តាងចំណុចមួយ $P_o(\vec{p})$ នៅលើរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $C(\vec{c})$ និងកាំ r ។ បង្ហាញថា សមីការវ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់នេះត្រង់ចំណុច P_o គឺ $(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\overrightarrow{p_o}-\vec{c})=r^2$ ដែល $P(\vec{p})$ ជាចំណុចចល័តនៅលើបន្ទាត់ប៉ះ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា សមីការវ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច P_o គឺ

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\overrightarrow{p_o}-\vec{c})=r^2$$

តាមរូប គេបាន $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CP_o}=|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CP_o}|\cos\theta$

តែ $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{CP_o}|}{|\overrightarrow{CP}|}$

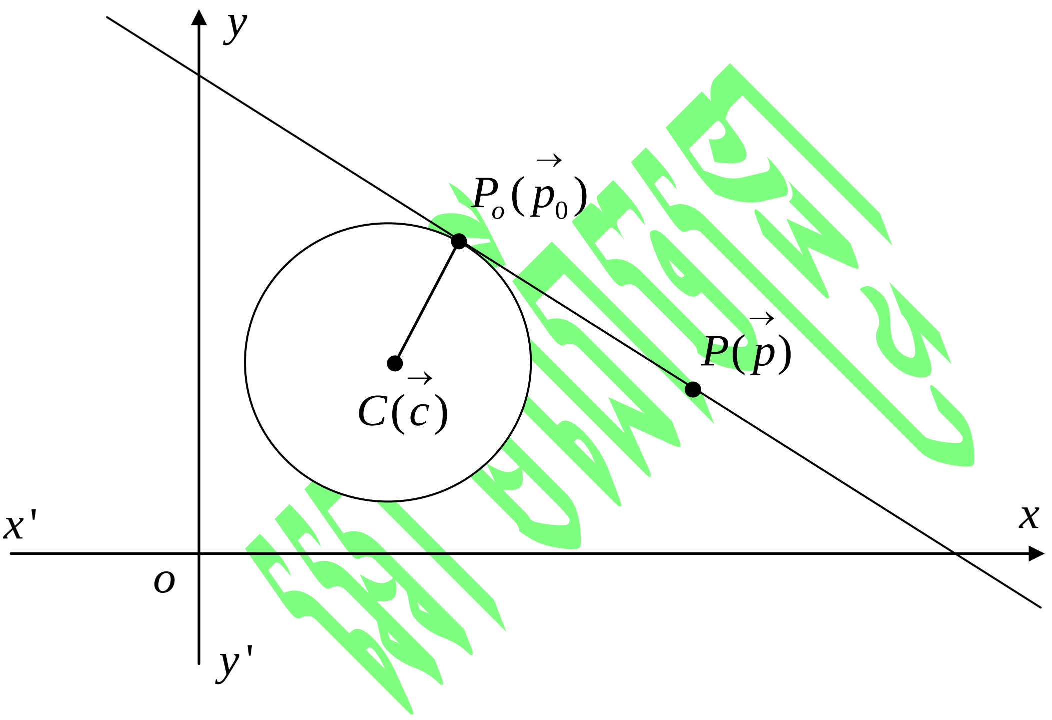
នាំឱ្យ $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CP_o}=|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CP_o}|\times\dfrac{|\overrightarrow{CP_o}|}{|\overrightarrow{CP}|}=|\overrightarrow{CP_o}|^2=r^2$ (1)

តែ $\overrightarrow{CP}=\vec{p}-\vec{c}$ និង $\overrightarrow{CP_o}=\overrightarrow{p_o}-\vec{c}$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $(\vec{p}-\vec{c})(\overrightarrow{p_o}-\vec{c})=r^2$ ពិត

ដូចនេះ សមីការវ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច P_o គឺ

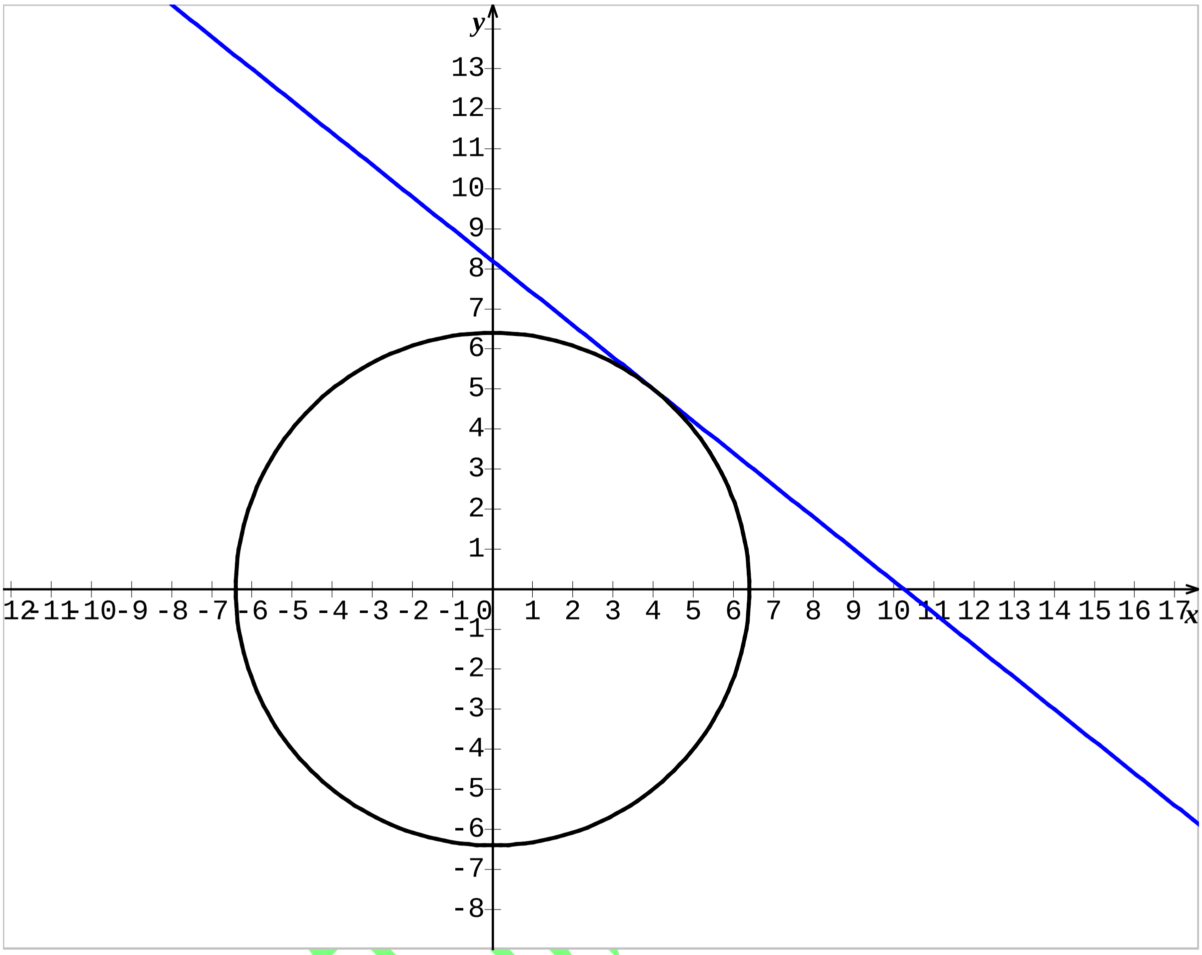
$$\boxed{(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\overrightarrow{p_o}-\vec{c})=r^2}$$



<u>លំហាត់ទី៦៨</u>

តាងចំណុច P ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ដែលមានសមីការ $x^2+y^2=41$ ហើយដែល កូអរដោនេនៃ P គឺ $(4,5)$ ។ រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P ។ គេកំណត់ថាបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P គឺជាបន្ទាត់កែងត្រង់ទៅនឹង $\overrightarrow{OP}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>



រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P

តាង $P(x,y)$ លើបន្ទាត់ប៉ះ នោះគេបាន

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PP'}=0 \text{ (ពីព្រោះ } \overrightarrow{OP}\perp\Delta \text{)}$$

ដោយ $\overrightarrow{OP}=(4,5)$ និង $\overrightarrow{PP'}=(x-4,y-5)$

នោះគេបាន $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PP'} =(4,5)\cdot(x-4,y-5)$

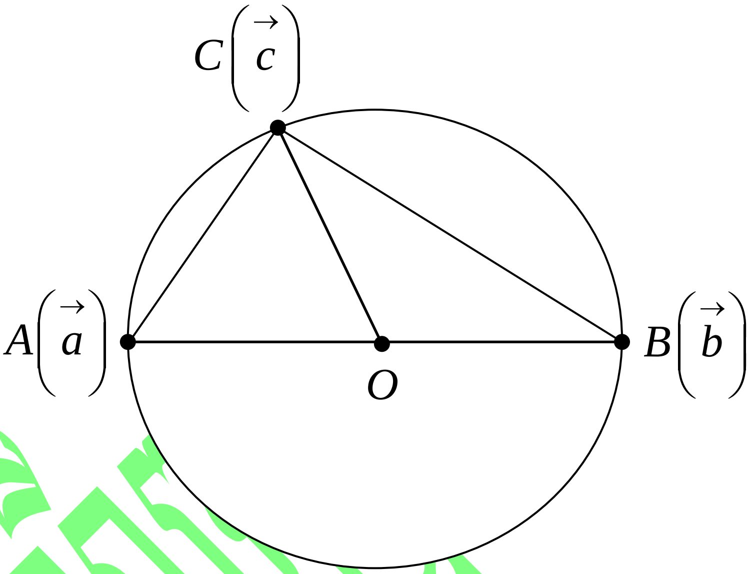
$$=4(x-4)+5(y-5)$$

$$=4x-16+5y-25=4x+5y-41$$

ដូចនេះ **សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ P គឺ $4x+5y-41=0$**

លំហាត់ទី៦៩

បង្ហាញថាមុំចារឹកកន្លះរង្វង់ជាមុំកែង។



ទិចឆ័រភ្លុខម្លង់

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាមុំចារឹកកន្លះរង្វង់ជាមុំកែង

ដោយ AB ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ហើយ C ជាចំណុចនៅលើរង្វង់នោះមុំ $\angle ACB$ គឺជាមុំកែង។ យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ដែលមានកាំ r ។

ហើយតាង $\vec{a}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច A និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច B ។

បើ $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ នោះគេបាន $c^2 - a^2 = 0,\ (c-a)(c+a) = 0$

ឬ $(c-a)(c-b) = 0$ នោះ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ កែងត្រង់ C

ដូចនេះ មុំចារឹកកន្លះរង្វង់ជាមុំកែង។

លំហាត់ទី៦៦

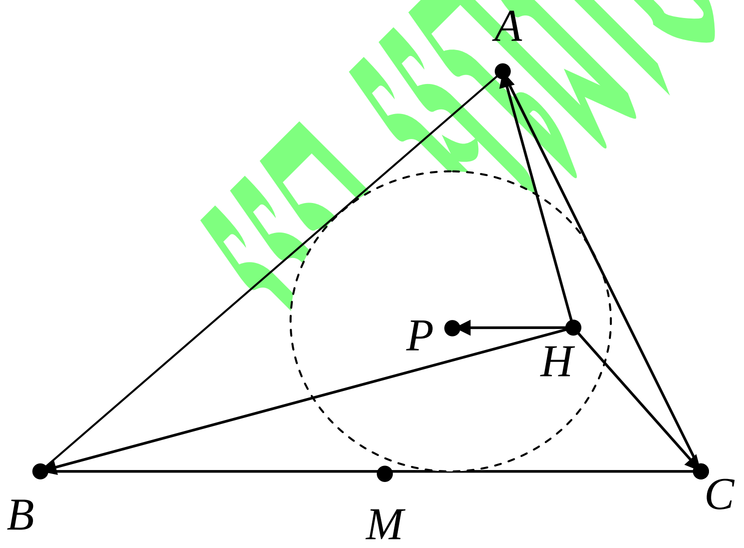
តាង H ជាចំណុចប្រសព្វនៃ ΔABC ហើយតាង P ជាចំណុចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{HP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})$ ។

ក. បើ M ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង BC បង្ហាញថា $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MP}$ ។

ខ.បង្ហាញថា P ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ ΔABC ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បើ M ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង BC បង្ហាញថា $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MP}$



តាមរូប និងតាមសម្មតិកម្មគេបាន

$$\overrightarrow{HP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}+\frac{\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}}{2} \qquad (1)$$

ដោយ $\frac{\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}}{2}=\overrightarrow{HM}$

(1) គឺ $\overrightarrow{HP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HM} \Rightarrow \overrightarrow{HP}-\overrightarrow{HM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$

នោះ $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{HA}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MP}}$

ខ.បង្ហាញថា P ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ ΔABC

ដោយ $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{MP}$ នោះ $HA \parallel MP$ និង M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ BC នោះ $MP \perp BC$ នោះគេបាន $AH \perp BC$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគឺ

យក N ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង AB នោះ $NP \perp AB$

យក L ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង AC នោះ $LP \perp AC$

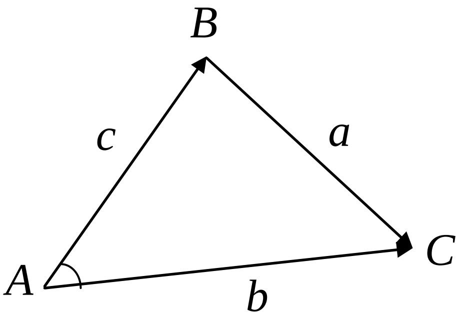
នោះគេបាន P ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC ។

<u>លំហាត់ទី៦៧</u>

បង្ហាញថា ចំពោះត្រីកោណ ABC គេបាន $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

តាង $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{q}$



នោះ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{q} - \vec{p}$

$a^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{q} - \vec{p})^2$

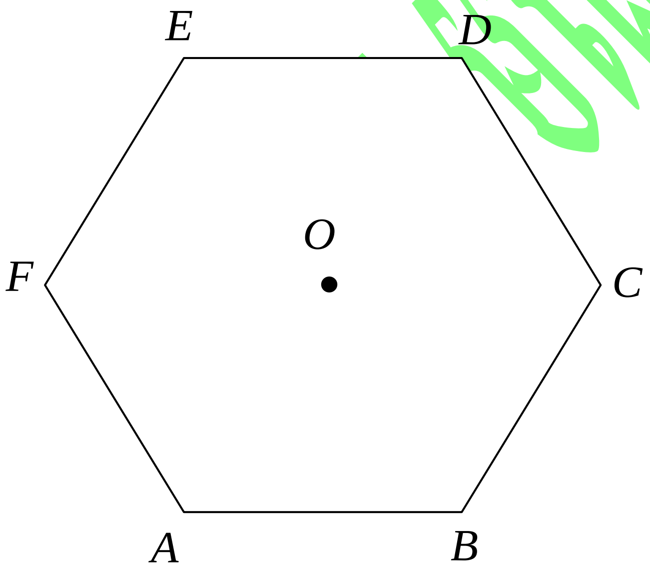
$= |\vec{q}|^2 + |\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q}$

$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2|\vec{q}||\vec{p}|\cos A$

$= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

ដូចនេះ ចំពោះត្រីកោណ ABC គេបាន $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

<u>**លំហាត់ទី៦៨**</u>



$ABCDEF$ ជាឆកោណនិយ័តដែលមានផ្ចិត O ។

បើ $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ និង $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$ ។ បង្ហាញជាអនុគមន៍នៃ $\vec{p}$ និង $\vec{q}$ ៖

ក. $\overrightarrow{AC}$ ខ. $\overrightarrow{OA}$ គ. $\overrightarrow{AF}$ ឃ. $\overrightarrow{CF}$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

បង្ហាញវ៉ិចទ័រខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ $\vec{p}$ និង $\vec{q}$៖

តាមរូប

ក. $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \vec{p} + \vec{q}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AC} = \vec{p} + \vec{q}}$

ខ. $\overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}$$
$$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$
$$= \vec{p} - (\vec{p} + \vec{q})$$
$$\overrightarrow{OA} = -\vec{q}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{OA} = -\vec{q}}$

គ. $\overrightarrow{AF}$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF}$$
$$= -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$$
$$= -(-\vec{q}) - \vec{p}$$
$$\overrightarrow{AF} = \vec{q} - \vec{p}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AF}=\vec{q}-\vec{p}}$

ឃ. $\overrightarrow{CF}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} &= 2\overrightarrow{CO}\\ &= -2\overrightarrow{AB}\\ &= -2\vec{p}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{CF}=-2\vec{p}}$

លំហាត់ទី៦៩

សរសេរសមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច A ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ក្នុងករណី៖

ក. $A(-3, 2)$, $\vec{v}=(-1 , -2)$

ខ. $A(-1, 1)$, $\vec{v}=(2 , 3)$

គ. $A(3, -2)$, $\vec{v}=(-1 , 2)$

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច A ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ក្នុងករណី៖

ក. $A(-3, 2)$, $\vec{v}=(-1 , -2)$

តាង L ជាបន្ទាត់កាត់តាម $A(-3, 2)$ ហើយស្របទៅនឹង $\vec{v}=(-1,-2)$

នោះគេបានសមីការនៃបន្ទាត់ L គឺ $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{v}$

យើងបាន $\vec{p}=(-3,-2)+t(-1\,,-2)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-3-t\\ y=-2-2t\end{cases}$$

ដោយបំបាត់ t នោះគេបានសមីការបន្ទាត់ L ៖

$$\frac{y+2}{-2}=-x-3\Rightarrow y=2x+4$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ $\boxed{L:y-2x-4=0}$

ខ. $A(-1,1)$, $\vec{v}=(2\,,3)$

តាង L ជាបន្ទាត់កាត់តាម $A(-1,1)$ ហើយស្របទៅនឹង $\vec{v}=(2,3)$

នោះគេបានសមីការនៃបន្ទាត់ L គឺ $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{v}$

យើងបាន $\vec{p}=(-1,1)+t(2\,,3)$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-1+2t\\ y=1+3t\end{cases}$$

ដោយបំបាត់ t នោះគេបានសមីការបន្ទាត់ L ៖

$$\frac{y-1}{3}=\frac{x+1}{2}\Rightarrow 2y=3x+5$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ $\boxed{L:2y-3x-5=0}$

គ. $A(3,-2)$, $\vec{v}=(-1\,,2)$

តាង L ជាបន្ទាត់កាត់តាម $A(3,-2)$ ហើយស្របទៅនឹង $\vec{v}=(-1,2)$

នោះគេបានសមីការនៃបន្ទាត់ L គឺ $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{v}$

យើងបាន $\vec{p}=(3,-2)+t(-1,2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3-t \\ y=-2+2t \end{cases}$$

ដោយបំបាត់ t នោះគេបានសមីការបន្ទាត់ L៖

$$\frac{y+2}{2}=3-x \Rightarrow y=-2x+4$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ $\boxed{L: y+2x-4=0}$

<u>លំហាត់ទី៧០</u>

សរសេរសមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច P ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ក្នុងករណី៖

ក. $P(4,0)$, $\vec{v}=(1,2)$

ខ. $P(4,-3)$, $\vec{v}=(\frac{1}{2},3)$

គ. $P(-1,-2)$, $\vec{v}=(2,3)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

សរសេរសមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច P ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ក្នុងករណីៈ

ក. $P(4, 0)$, $\vec{v} = (1, 2)$

តាង L ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $P(x_o, y_o)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}(a,b)$

នោះគេបានសមីការបន្ទាត់ L គឺ

តាមរូបមន្ត $a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$

គេបាន $(x-4) + 2(y-0) = 0$

$x - 4 + 2y = 0$

$x + 2y - 4 = 0$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ L គឺ $L: 2y + x - 4 = 0$

ខ. $P(4, -3)$, $\vec{v} = (\frac{1}{2}, 3)$

តាង L ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $P(x_o, y_o)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}(a,b)$

នោះគេបានសមីការបន្ទាត់ L គឺ

តាមរូបមន្ត $a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$

គេបាន $\frac{1}{2}(x-4) + 3(y+3) = 0$

ឡាយចំរើន

$$\frac{1}{2}x-2+3y+9=0$$

$$3y+\frac{1}{2}x+7=0$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ L គឺ $L: 3y+\frac{1}{2}x+7=0$

គ. $P(-1,-2)$, $\vec{v}=(2\ ,3)$

តាង L ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $P(x_o\ ,y_o)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}(a,b)$

នោះគេបានសមីការបន្ទាត់ L គឺ

តាមរូបមន្ត $a(x-x_o)+b(y-y_o)=0$

គេបាន $2(x+1)+3(y+2)=0$

$$2x+2+3y+6=0$$

$$3y+2x+8=0$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ L គឺ $L: 3y+2x+8=0$

លំហាត់ទី៧១

តើសមីការបន្ទាត់ណាដែលកាត់តាមចំណុច Q ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ក្នុងករណី៖

$Q(4, 9)$, $\vec{v} = (2 , -3)$

$i).\ 2x - 3y + 19 = 0$

$ii).\ 2x - 3y - 35 = 0$

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច Q ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$៖

តាមរូបមន្ត $a(x - x_o) + b(y - y_o) = 0$

គេបាន $2(x-4) - 3(y+9) = 0$

$2x - 8 - 3y - 27 = 0$

$2x - 3y - 35 = 0$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់នោះគឺ $(ii).\ 2x - 3y - 35 = 0$

<u>លំហាត់ទី៧២</u>

គេឲ្យបីចំណុច $A(1,2)$, $B(-1,3)$ និង $C(2,-1)$ ។

a). រកកូអរដោនេចំណុច D ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $4\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{O}$

b). រកសំណុំចំណុច M នៃប្លង់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$|4\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|=5$

c). តាង(C) ជាក្រាបតាងឲ្យសំណុំចំណុចG ។ ចូរសង់(C) រួចបង្ហាញថាចំណុច$E(1,-1)$ ស្ថិតនៅលើ (C) ។

d). រកសមីការបន្ទាត់(d) ដែលប៉ះនឹង(C) ត្រង់ចំណុចD ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

a). រកូអរដោនេចំណុចD ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់$4\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{O}$

តាង $D(x_D,y_D)$ ជាចំណុចត្រូវរក។

គេមាន $\begin{cases}\overrightarrow{DA}=(1-x_D)\vec{i}+(2-y_D)\vec{j}\\ \overrightarrow{DB}=(-1-x_D)\vec{i}+(3-y_D)\vec{j}\\ \overrightarrow{DC}=(2-x_D)\vec{i}+(-1-y_D)\vec{j}\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}4\overrightarrow{DA}=(4-4x_D)\vec{i}+(8-4y_D)\vec{j}\\ -2\overrightarrow{DB}=(2+2x_D)\vec{i}+(-6+2y_D)\vec{j}\\ -\overrightarrow{DC}=(-2+x_D)\vec{i}+(1+y_D)\vec{j}\end{cases}$

គេបាន $4\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\left(4-x_D\right)\vec{i}+\left(3-y_D\right)\vec{j}$

ដោយ $4\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{O}$ សមមូល $\begin{cases}4-x_D=0\\3-y_D=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_D=4\\y_D=3\end{cases}$

ដូចនេះ $D(4,3)$ ។

b). រកសំណុំចំណុច M នៃប្លង់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$|4\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|=5$

តាមទំនាក់ទំនងសាលគេមាន $\begin{cases}\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}\\\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}\\\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\end{cases}$

យើងបាន $4\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+4\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$

ដោយ $4\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{O}$ នោះ $4\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$

គេមាន $|4\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|=5$ នោះគេទាញ $|\overrightarrow{MD}|=5$

ដោយសារតែ D ជាចំណុចនឹង និង $|\overrightarrow{MD}|=5$ ថេរ

ដូចនេះសំណុំនៃចំណុច M គឺជារង្វង់ (C) មានផ្ចិត D និងកាំ $r=5$ ។

c). សង់ (C) រួចបង្ហាញថាចំណុច $E(1,-1)$ ស្ថិតនៅលើ (C)

តាង (C) ជាក្រាបតាងឲ្យសំណុំចំណុច G នោះជារង្វង់ (C) មានផ្ចិត G និងកាំ $r=5$ ដែលមានសមីការស្តង់ដាអាចសរសេរ ៖

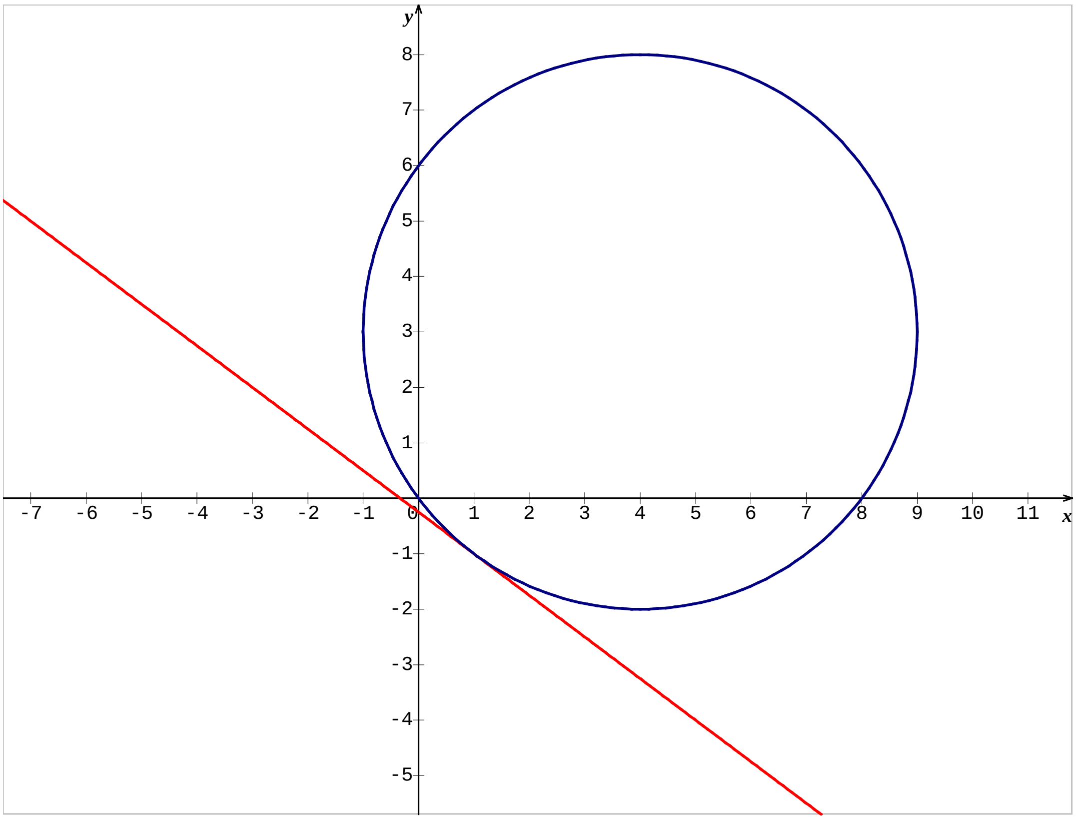
$(C):(x-x_D)^2+(y-y_D)^2=r^2$ ឬ $(C):(x-4)^2+(y-3)^2=25$ ។

យកកូអរដោនេនៃ $E(1,-1)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ក្នុងសមីការ (C) គេបាន៖

$(1-4)^2+(-1-3)^2=25$

$9+16=25$ ពិត

ដូចនេះចំណុច $E(1,-1)$ ស្ថិតនៅលើ (C) ។



d). រកសមីការបន្ទាត់ (d) ដែលប៉ះនឹង (C) ត្រង់ចំណុច E

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់ (d) គឺ $\vec{n}=\overrightarrow{ED}=(4-1,3+1)$ ឬ $\vec{n}=(3,4)$

សមីការបន្ទាត់ (d) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$(d):a(x-x_D)+b(y-y_D)=0$

$(d):3(x-1)+4(y+1)=0$

$(d):3x+4y+1=0$

<u>លំហាត់ទី៧៣</u>

គេឲ្យបីចំណុច $A(1,-1)$, $B(2,4)$ និង $C(3,6)$ ។

a). រកកូអរដោនេចំណុចG ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ ។

b). រកសំណុំចំណុច M នៃប្លង់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=15$

c). តាង(C) ជាក្រាបតាងឲ្យសំណុំចំណុចG ។ ចូរសង់(C) រួចបង្ហាញថាចំណុច$D(-1,-1)$ ស្ថិតនៅលើ (C) ។

d). រកសមីការបន្ទាត់(d) ដែលប៉ះនឹង(C) ត្រង់ចំណុចD ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

a). រកកូអរដោនេចំណុចG ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$

តាមទំនាក់ទំនង$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ បញ្ជាក់ថាG ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃΔABC

យើងបាន $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{1+2+3}{3}=2 \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{-1+4+6}{3}=3 \end{cases}$

ដូចនេះ $G(2,3)$ ។

b). រកសំណុំចំណុច M នៃប្លង់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=15$

តាមទំនាក់ទំនងសាលគេមាន $\begin{cases} \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA} \\ \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC} \end{cases}$

យើងបាន $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$

ដោយ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ នោះ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

គេមាន $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=15$ នោះគេទាញ $|3\overrightarrow{MG}|=15$ ឬ $|\overrightarrow{MG}|=5$

ដោយសារតែ G ជាចំណុចនឹង និង $|\overrightarrow{MG}|=5$ ថេរ

ដូចនេះសំណុំនៃចំណុច M គឺជារង្វង់ (C) មានផ្ចិត G និងកាំ $r=5$ ។

c). សង់ (C) រួចបង្ហាញថាចំណុច $D(-1,-1)$ ស្ថិតនៅលើ (C)

តាង (C) ជាក្រាបតាងឲ្យសំណុំចំណុច G នោះជារង្វង់ (C) មានផ្ចិត G និងកាំ $r=5$ ដែលមានសមីការស្តង់ដាអាចសរសេរ ៖

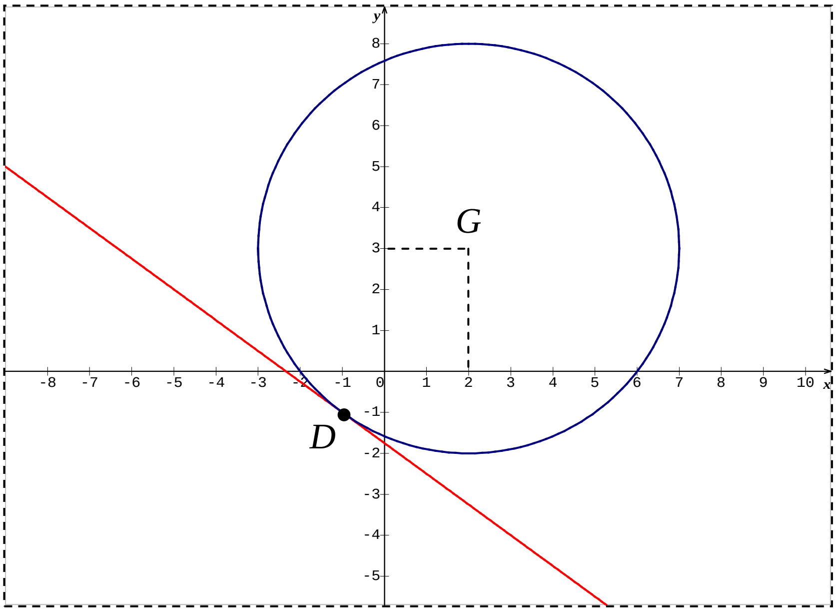
$(C):(x-x_G)^2+(y-y_G)^2=r^2$ ឬ $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=25$ ។

យកកូអរដោនេនៃ $D(-1,-1)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ក្នុងសមីការ (C) គេបាន៖

$(-1-2)^2+(-1-3)^2=25$

$9+16=25$ ពិត

ដូចនេះចំណុច $D(-1,-1)$ ស្ថិតនៅលើ (C) ។



d). រកសមីការបន្ទាត់(d) ដែលប៉ះនឹង(C) ត្រង់ចំណុចD

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់(d) គឺ $\vec{n}=\overrightarrow{GD}=(2+1,3+1)$ ឬ $\vec{n}=(3,4)$

សមីការបន្ទាត់(d) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$$(d):a(x-x_D)+b(y-y_D)=0$$

$$(d):3(x+1)+4(y+1)=0$$

$$(d):3x+4y+7=0$$

លំហាត់ទី៧៤

គេឲ្យត្រីកោណABC មួយ។ យកG ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ហើយ M ជាចំណុចមួយនៃប្លង់ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2+|\overrightarrow{MC}|^2=3|\overrightarrow{MG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2+|\overrightarrow{MC}|^2=3|\overrightarrow{MG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$$

គេមាន $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}$

លើកជាការេគេបាន $\overrightarrow{MA}^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2=\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{GA}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}$

ឬ $|\overrightarrow{MA}|^2=|\overrightarrow{MG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $|\overrightarrow{MB}|^2=|\overrightarrow{MG}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}$ (2)

និង $|\overrightarrow{MC}|^2=|\overrightarrow{MG}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}$ (3)

បូកសមីការ(1),(2) និង(3) គេបាន ៖

$|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2+|\overrightarrow{MC}|^2=3|\overrightarrow{MG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$

ព្រោះ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ នោះគេទាញបាន

$2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{MG}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=0$ ។

ដូចនេះ $|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2+|\overrightarrow{MC}|^2=3|\overrightarrow{MG}|^2+|\overrightarrow{GA}|^2+|\overrightarrow{GB}|^2+|\overrightarrow{GC}|^2$ ។

លំហាត់ទី៧៥

គេឲ្យបីចំណុច $A(x,2)$, $B(-1,y)$ និង $C(x+1,y+1)$ ។ កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត x និង y

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(-1-x,y-2)$ និង $\overrightarrow{AC}=(1,y-1)$

ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A លុះត្រាតែ

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\\ |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|\end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|\end{cases}$$

គេមាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1-x)+(y-2)(y-1)=0$

សមមូល $-1-x+y^2-3y+2=0$

សមមូល $-x+y^2-3y+1=0$ ឬ $x=y^2-3y+1\ (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ សមមូល

$\sqrt{(-1-x)^2+(y-2)^2}=\sqrt{1^2+(y-1)^2}$

សមមូល $1+2x+x^2+y^2-4y+4=1+y^2-2y+1$

សមមូល $x^2+2x-2y+3=0$ ឬ $(x+1)^2=2y-2$ (2)

យកសមីការ(1)ជួសក្នុង(2) គេទទួលបាន៖

$(y^2-3y+2)^2=2(y-1)$ ឬ $(y-1)^2(y-2)^2-2(y-1)=0$

សមមូល$(y-1)\left[(y-1)(y-2)^2-2\right]=0$

សមមូល $(y-1)(y^3-5y^2+8y-6)=0$

សមមូល $(y-1)\left[y^2(y-3)-2y(y-3)+2(y-3)\right]=0$

សមមូល $(y-1)(y-3)(y^2-2y+2)=0$

សមមូល $(y-1)(y-3)\left[(y-1)^2+1\right]=0$

គេទាញឫស $y_1=1$ ឬ $y_2=3$ ។

ចំពោះ $y=1$ តាម(1) គេបាន $x=1^2-3+1=-1$

ចំពោះ $y=3$ តាម(1) គេបាន $x=3^2-3(3)+1=1$

ដូចនេះ $x=-1$, $y=1$ ឬ $x=1$, $y=3$ ។

****

លំហាត់ជ្រើសរើសបន្ថែម

1. គេឱ្យ $A=(1,3)$, $B(4,1)$ តាង $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ ។ រកកូអរដោនេនៃ $\vec{v}$?

2. យក $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ ដែល $A(2,1)$, $B(-3,2)$ រក $\vec{v}$?

3. យក A , B , C ជាចំណុច $(1,2)$, $(3,-2)$, $(2,4)$ រៀងគ្នាក្នុង R^2 ។ រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រខាងក្រោម៖

$a).\ \overrightarrow{AB}$ $\quad b).\ \overrightarrow{AC}$ $\quad c).\ \overrightarrow{CB}$

4. គេឱ្យ $\vec{v}=(2,1)$ ចូរសរសេរជាទម្រង់កូអរដោនេនៃ៖

$a).3\vec{v}$ $\quad b).-2\vec{v}$ $\quad c).-\vec{v}$ $\quad d).\ \frac{1}{2}\vec{v}$

5. គេឱ្យ $\vec{u}=(3,-2)$ និង $\vec{v}=(-1,4)$ រកកូអរដោនេនៃ $\vec{u}+\vec{v}$ ។

6. គេឱ្យ $A=(1,-1)$ និង $B=(2,4)$ ។ គណនា

$a).\ 4A+B$ $\quad b).A-B$ $\quad c).\ A-A$

7. គេឱ្យ $\vec{u}=(2,-1)$, $\vec{v}=(-1,4)$, $\vec{w}=(3,-3)$ រក

$i).\ \vec{u}+\vec{w}$ $\quad ii).\vec{w}+\vec{v}$ $\quad iii).\vec{v}-\vec{u}$

$iv).2\vec{u}+\vec{v}$ $\quad v).-3\vec{v}+2(\vec{u}-\vec{w})$ $\quad vi).\ 2\vec{w}-3(2\vec{u}+3\vec{v})$

8. គេមាន $OABC$ ជាប្រលេឡូក្រាមក្នុង R^2 ដែលមានកំពូល $O(0,0)$, $A(2,3)$, $B(-1,2)$ ។ រកកូអរដោនេនៃ កំពូលទីបួន C ។

9. គណនា $|(0,0)|$, $|(1,-1)|$, $|(3,4)|$

10. ប្រើ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ដើម្បីបញ្ជាក់ថា $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ កែងគ្នាឬទេ ?

$a).\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(5,7)$

$b).\ \vec{a}=(-4,5)$, $\vec{b}=(-9,1)$

$c).\ \vec{a}=(6,1)$, $\vec{b}=(-2,12)$

11. រកកូស៊ីនុសនៃមុំរវាង $A=(3,4)$ និង $B=(5,12)$

12. រកកូស៊ីនុសនៃមុំរវាង $A=(1,1)$ និង $B=(-2,2)$? តើវ៉ិចទ័រទាំងពីរកែងគ្នាឬទេ ?

13. រករង្វាស់មុំរវាងគូវ៉ិចទ័រនីមួយៗខាងក្រោម ៖

$a).\vec{a}=(1,3)$, $\vec{b}=(2,5)$

$b).\vec{a}=(-4,1)$, $\vec{b}=(7,2)$

14. កំណត់គ្រប់តម្លៃ y ដើម្បីឱ្យវ៉ិចទ័រខាងក្រោមកែងគ្នា

$a).(2,4)$, $(2,y)$

$b).\ (4,-1)\ ,\ (y,y^2)$

15. គេឱ្យ $\vec{u}=-2\vec{i}+5\vec{j}$ និង $\vec{v}=\alpha\vec{i}-2\vec{j}$។ រក α ដើម្បីឱ្យ

$a).\ \vec{u}\perp\vec{v}$ $b).\ \vec{u}\parallel\vec{v}$

$c)$. មុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ស្មើ 60°

16. គេឱ្យសមីការបន្ទាត់ $l_1:\begin{cases}x=3+2t\\ y=-5+4t\end{cases}$

$a)$. រកកូអរដោនេនៃពីរចំណុចដែលនៅលើបន្ទាត់

$b)$. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់

$c)$. សរសេរសមីការបន្ទាត់

$d)$. តើបន្ទាត់ l_1 និង l_2 ស្របគ្នាឬទេ ?

បើ $l_2:\begin{cases}x=1+3t\\ y=8+12t\end{cases}$

17. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតជាទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច P_o ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{m}$

$a).\ \overrightarrow{m}=(3,1)\ ,P_o(2,7)$

$b).\ \overrightarrow{m}=(-2,5)\ \ ,P_o(10,-4)$

18. ចូរសរសេរសមីការទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមគូនៃចំណុចនីមួយៗ៖

$a). A(1,7)\ ,\ B(4,10)$

$b). A(-3,5)\ , B(-2,-8)$

19. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់បើគេឱ្យសមីការវ៉ិចទ័រដូចខាងក្រោម

$a).(x,y)=(10,6)+t(13,1)$

$b).\ (x,y)=(0,5)+t(12,-7)$

20. សរសេរសមីការវ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់នីមួយៗដោយដឹងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត

$a).\ x=3+5t\ ,\ \ y=9+7t$

$b). x=-5-6t\ ,\ y=11t$

21. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់បើគេឱ្យសំណុំនៃសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតដូចខាងក្រោម

$a).\ x=1+2t\ , y=1-3t$

$b). x=-2+t\ \ , y=4+5t$

$c).\ \ x=5+7t\ ,\ y=-2-4t$

$d).\ \ x=0.5+0.3t\ ,\ y=1.5-0.2t$

22. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ និង សមីការឆ្លុះដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ និងកាត់ចំណុច P_o

$a).\ \vec{n}=(3,1)\quad,\quad P_o(2,4)$

$b).\ \vec{n}=(1,-1)\quad,\quad P_o(-5,1)$

$c).\ \vec{n}=(0,1)\quad,\quad P_o(-3,-7)$

$d).\ \vec{n}=(1.5\,,-3.5)\quad,\quad P_o(0.5,-2.5)$

23. គេឱ្យសមីការបន្ទាត់ដូចខាងក្រោម ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតជាទម្រង់វ៉ិចទ័រ និងប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់៖

$a).\ x+2y=6$

$b).\ 4x-y=12$

$c).\ 5x-2y=13$

$d).\ 8x+9y=-45$

****

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់១

គេឱ្យ $A=(1,3)$, $B(4,1)$ តាង $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ ។ រកកូអរដោនេនៃ $\vec{v}$?

ដំណោះស្រាយ

រកកូអរដោនេនៃ $\vec{v}$

គេបាន $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=[(x_b-x_a),(y_b-y_a)]=[(4-1),(1-3)]=(3,-2)$

លំហាត់២

យក $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ ដែល $A(2,1)$, $B(-3,2)$ រក $\vec{v}$?

ដំណោះស្រាយ

រក $\vec{v}$

គេបាន $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=[(x_b-x_a),(y_b-y_a)]=[(-3-2),(2-1)]=(-5,1)$

លំហាត់៣

យក A , B , C ជាចំណុច $(1,2)$, $(3,-2)$, $(2,4)$ រៀងគ្នាក្នុង R^2 ។ រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រខាងក្រោម៖

$a).\ \overrightarrow{AB}$ $b).\ \overrightarrow{AC}$ $c).\ \overrightarrow{CB}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រខាងក្រោម៖

$a).\ \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}=(3-1,-2-2)=(2,-4)$

$b).\ \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC}=(2-1,4-2)=(1,2)$

$c).\ \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CB}=(3-2,-2-4)=(1,-6)$

<u>លំហាត់៤</u>

គេឱ្យ $\vec{v}=(2,1)$ ចូរសរសេរជាទម្រង់កូអរដោនេនៃ៖

$a).3\vec{v}\quad b).-2\vec{v}\quad c).-\vec{v}\quad d).\frac{1}{2}\vec{v}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ចូរសរសេរ $\vec{v}$ ជាទម្រង់កូអរដោនេនៃ៖

$a).3\vec{v}$

$3\vec{v}=3(2,1)=(6,3)$

ម្សៅ ប៊ីណូហ៊្ស

$b). -2\vec{v}$

$-2\vec{v} = -2(2,1) = (-4,-2)$

$c).-\vec{v}$

$-\vec{v} = -(2,1) = (-2,-1)$

$d). \frac{1}{2}\vec{v}$

$\frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}(2,1) = (1,\frac{1}{2})$

លំហាត់៥

គេឱ្យ $\vec{u} = (3,-2)$ និង $\vec{v} = (-1,4)$ រកកូអរដោនេនៃ $\vec{u}+\vec{v}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកកូអរដោនេនៃ $\vec{u}+\vec{v}$

$\vec{u}+\vec{v} = (3,-2)+(-1,4) = (3-1,-2+4) = (2,2)$

លំហាត់៦

គេឱ្យ $A=(1,-1)$ និង $B=(2,4)$ ។ គណនា

$a). 4A+B$ $b). A-B$ $c). A-A$

ដំណោះស្រាយ

គណនា

$a).\ 4A+B$

$4A+B=4(1,-1)+(2,4)=(4,-4)+(2,4)=(4+2,-4+4)=(6,0)$

$b).A-B$

$A-B=(1,-1)-(2,4)=(1-2,-1-4)=(-1,-5)$

$c).\ \ A-A$

$A-A=[(1,-1)-(1,-1)]=(1-1,-1+1)=(0,0)$

<u>**លំហាត់៧**</u>

គេឱ្យ $\vec{u}=(2,-1)$, $\vec{v}=(-1,4)$, $\vec{w}=(3,-3)$ ។ រក

$i).\ \vec{u}+\vec{w}$ $ii).\ \vec{w}+\vec{v}$ $iii).\vec{v}-\vec{u}$

$iv).2\vec{u}+\vec{v}$ $v).\ -3\vec{v}+2(\vec{u}-\vec{w})$ $vi).\ 2\vec{w}-3(2\vec{u}+3\vec{v})$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

យើងមាន $\vec{u}=(2,-1)$, $\vec{v}=(-1,4)$, $\vec{w}=(3,-3)$

រក

$i).\ \vec{u}+\vec{w}$

$\vec{u}+\vec{w}=[(2,-1)+(3,-3)]=(2+3,-1-3)=(5,-4)$

$ii).\vec{w}+\vec{v}$

$$\boxed{\vec{w}+\vec{v}=(2,1)}$$

$iii).\vec{v}-\vec{u}$

$$\boxed{\vec{v}-\vec{u}=(-3,5)}$$

$iv).2\vec{u}+\vec{v}$

$$\boxed{2\vec{u}+\vec{v}=(3,2)}$$

$v).-3\vec{v}+2(\vec{u}-\vec{w})$

$$\begin{aligned}-3\vec{v}+2(\vec{u}-\vec{w}) &=\{-3(-1,4)+2[(2,-1)-(3,-3)]\\ &=[(3,-12)+(-2,4)]\\ &=(-9,2)\end{aligned}$$

$$\boxed{-3\vec{v}+2(\vec{u}-\vec{w})=(-9,2)}$$

$vi).\ 2\vec{w}-3(2\vec{u}+3\vec{v})$

$$\begin{aligned}2\vec{w}-3(2\vec{u}+3\vec{v}) &=\{2(3,-3)-3[(4,-2)+(-3,12)]\}\\ &=[(6,-6)-(3,30)]\\ &=(3,-36)\end{aligned}$$

$$\boxed{2\vec{w}-3(2\vec{u}+3\vec{v})=(3,-36)}$$

លំហាត់៨

គេមាន $OABC$ ជាប្រលេឡូក្រាមក្នុង R^2 ដែលមានកំពូល $O(0,0)$, $A(2,3)$, $B(-1,2)$ ។ រកកូអរដោនេនៃ កំពូលទីបួន C ។

ដំណោះស្រាយ

រកកូអរដោនេនៃ កំពូលទីបួន C

តាង $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$: $\vec{u}=(2,3)$

$\vec{v}=\overrightarrow{OB}$: $\vec{v}=(-1,2)$

គេបានអង្កត់ទ្រូងប្រលេឡូក្រាម $\vec{u}+\vec{v}$ កំប៉ុសង់របស់វាជាកូអរដោនេរបស់ C

គេបាន $\vec{u}+\vec{v}=C=[(2,3)+(-1,2)]=(1,5)$

ដូចនេះ $C(1,5)$

លំហាត់៩

គណនា $|(0,0)|$, $|(1,-1)|$, $|(3,4)|$

ដំណោះស្រាយ

គណនា

- $|(0,0)|$

$$|(0,0)|=\sqrt{0^2+0^2}=0$$

ទ្រឹចផ័រភ្នួចម្ពួច់

- $|(1,-1)|$

$|(1,-1)|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

- $|(3,4)|$

$|(3,4)|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

លំហាត់១០

ប្រើ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ដើម្បីបញ្ជាក់ថា $\vec{a}$ និង $\vec{b}$កែងគ្នាឬទេ ?

$a).\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(5,7)$

$b).\ \vec{a}=(-4,5)$, $\vec{b}=(-9,1)$

$c).\ \vec{a}=(6,1)$, $\vec{b}=(-2,12)$

ដំណោះស្រាយ

ប្រើ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ដើម្បីបញ្ជាក់ថា $\vec{a}$ និង $\vec{b}$កែងគ្នាឬទេ ?

$a).\vec{a}=(3,1)$, $\vec{b}=(5,7)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=(3)(5)+(1)(7)=22$

ដោយ $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a} \text{ និង } \vec{b} \text{ មិនកែងគ្នាទេ}}$

$b).\ \vec{a}=(-4,5)$, $\vec{b}=(-9,1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = (-4)(-9) + (5)(1) = 41$

ដោយ $\vec{a}\cdot\vec{b} \neq 0$

ដូចនេះ: $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនកែងគ្នាទេ

$c).\ \vec{a} = (6,1)\ ,\ \vec{b} = (-2,12)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = (6)(-2) + (1)(12) = 0$

ដោយ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

ដូចនេះ: $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ កែងគ្នា

លំហាត់១១

រកកូស៊ីនុសនៃមុំរវាង $A = (3,4)$ និង $B = (5,12)$

ដំណោះស្រាយ

រកកូស៊ីនុសនៃ θ មុំរវាង $A = (3,4)$ និង $B = (5,12)$

តាមរូបមន្ត $\cos\theta = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

$$\cos\theta = \frac{(3)(5) + (4)(12)}{\sqrt{3^2 + 4^2}\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$$= \frac{63}{5\times 13}$$

$$= \frac{63}{65}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\theta = \frac{63}{65}}$

លំហាត់១២

រកកូស៊ីនុសនៃមុំរវាង $A=(1,1)$ និង $B=(-2,2)$?
តើវ៉ិចទ័រទាំងពីរកែងគ្នាឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

រកកូស៊ីនុសនៃ θ មុំរវាង $A=(1,1)$ និង $B=(-2,2)$

តាមរូបមន្ត $\cos\theta = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

$$\cos\theta = \frac{(1)(1)+(-2)(2)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+2^2}}$$

$$= \frac{1-4}{\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\theta = -\frac{3}{4}}$

លំហាត់១៣

រករង្វាស់មុំរវាងគូវ៉ិចទ័រនីមួយៗខាងក្រោម ៖

$a).\vec{a}=(1,3)\ ,\vec{b}=(2,5)$

$b).\vec{a}=(-4,1)\ ,\ \vec{b}=(7,2)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រករង្វាស់មុំ θ រវាងគូវ៉ិចទ័រនីមួយៗខាងក្រោម ៖

$a).\vec{a}=(1,3)\ ,\vec{b}=(2,5)$

តាមរូបមន្ត $\cos\theta=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$

$$\cos\theta=\frac{(1)(2)+(3)(5)}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+5^2}}$$
$$=\frac{2+15}{\sqrt{10}\times\sqrt{29}}$$
$$=\frac{17}{\sqrt{290}}$$
$$=\frac{17\sqrt{290}}{290}$$
$$=0.99827$$

ដោយ $\cos\theta=0.99827$

គេបាន $\theta=3.3707^o$

ដូចនេះ $\boxed{\theta=3.3707^o}$

$b).\vec{a}=(-4,1)\ ,\ \vec{b}=(7,2)$

តាមរូបមន្ត $\cos\theta = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

$$\cos\theta = \frac{(-4)(7) + (1)(2)}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2}\sqrt{7^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{-28 + 2}{\sqrt{17} \times \sqrt{53}}$$

$$= -\frac{26}{\sqrt{901}}$$

$$= -\frac{26\sqrt{901}}{901}$$

$$= 0.866$$

ដោយ $\cos\theta = 0.866$

គេបាន $\theta = 30^o$

ដូចនេះ $\boxed{\theta = 30^o}$

<u>លំហាត់១៤</u>

កំណត់គ្រប់តម្លៃ y ដើម្បីឱ្យវ៉ិចទ័រខាងក្រោមកែងគ្នា

$a).(2,4)$, $(2, y)$

$b).\ (4,-1)$, (y, y^2)

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់គ្រប់តម្លៃ y ដើម្បីឱ្យវ៉ិចទ័រខាងក្រោមកែងគ្នា

$a).(2,4)$, $(2,y)$

វ៉ិចទ័រពីរកែងគ្នាលុះត្រាតែ ផលគុណស្កាលែរបស់វាស្មើ 0

គេបាន

$$\begin{aligned}(2,4)\cdot(2,y) &= 0\\ 2\times 2+4\times y &= 0\\ 4y+4 &= 0\\ \Rightarrow \quad y &= -1\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y=-1}$

$b).\ (4,-1)$, (y,y^2)

វ៉ិចទ័រពីរកែងគ្នាលុះត្រាតែ ផលគុណស្កាលែរបស់វាស្មើ 0

គេបាន

$$\begin{aligned}(4,-1)\cdot(y,y^2) &= 0\\ 4\times y-1\times y^2 &= 0\\ 4y-y^2 &= 0\\ y(4-y) &= 0\\ \Rightarrow \quad y=0\ ,\ y=4\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{y=0\ ,y=4}$

<u>លំហាត់១៨</u>

គេឱ្យ $\vec{u}=-2\vec{i}+5\vec{j}$ និង $\vec{v}=\alpha\vec{i}-2\vec{j}$។ រក α ដើម្បីឱ្យ

$a).\ \vec{u}\perp\vec{v}$ $\qquad\qquad$ $b).\vec{u}\parallel\vec{v}$

$c).$ មុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ស្មើ 60°

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមាន $\vec{u}=-2\vec{i}+5\vec{j}$ និង $\vec{v}=\alpha\vec{i}-2\vec{j}$

រក α ដើម្បីឱ្យ

$a).\ \vec{u}\perp\vec{v}$

វិចទ័រ $\vec{u}\perp\vec{v}$ លុះត្រាតែ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

គេបាន

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=0\\ (-2)(\alpha)+(5)(-2)&=0\\ -2\alpha-10&=0\\ \Rightarrow\quad \alpha&=-5\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha=-5}$

$b).\vec{u}\parallel\vec{v}$

$\vec{u}\parallel\vec{v}$ លុះត្រាតែ $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$

គេបាន

$$\frac{-2}{\alpha} = \frac{5}{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{4}{5}$$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha = \frac{4}{5}}$

c). មុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ស្មើ 60°

យើងបាន $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\alpha - 10 = |\vec{u}||\vec{v}|\cos 60^o$

តែ $|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$, $|\vec{v}| = \sqrt{\alpha^2 + (-2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4}$, $\cos 60^o = \frac{1}{2}$

គេបាន $-2\alpha - 10 = \sqrt{29}\times\sqrt{\alpha^2 + 4}\times\frac{1}{2}$

$$(-2\alpha - 10)^2 = \left(\sqrt{29}\times\sqrt{\alpha^2 + 4}\times\frac{1}{2}\right)^2$$

$$4\alpha^2 + 40\alpha + 100 = 29(\alpha^2 + 4)\times\frac{1}{4}$$

$$16\alpha^2 + 160\alpha + 400 = 29\alpha^2 + 116$$

$$16\alpha^2 - 29\alpha^2 + 160\alpha + 400 - 116 = 0$$

$$-13\alpha^2 + 160\alpha + 284 = 0$$

$$\alpha = \frac{-160 \pm \sqrt{160^2 + 4\times 13\times 284}}{-26} \approx 13.88 \ \ or \ \ -1.574$$

ដូចនេះ $\alpha = 13.88$, $\alpha = -1.574$

លំហាត់១៦

គេឱ្យសមីការបន្ទាត់ $l_1 : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -5 + 4t \end{cases}$

a). រកកូអរដោនេនៃពីរចំណុចដែលនៅលើបន្ទាត់

b). សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់

c). សរសេរសមីការបន្ទាត់

d). តើបន្ទាត់ l_1 និង l_2 ស្របគ្នាឬទេ?

បើ $l_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 8 + 12t \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

គេមានសមីការបន្ទាត់ $l_1 : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -5 + 4t \end{cases}$

a). រកកូអរដោនេនៃពីរចំណុចដែលនៅលើបន្ទាត់

បើ $t = 0$ គេបានចំណុច $P_1(3,5)$

ដើម្បីរកចំណុចផ្សេងទៀត គឺគ្រាន់តែរើសតម្លៃផ្សេងទៀតនៃ t

បើ $t = 1$ នោះ

$$x = 3 + 2(1) = 5$$
$$y = -5 + 4 = -1$$

$P_2(5,-1)$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃពីរចំណុចលើបន្ទាត់គឺ $\boxed{P_1(3,-5)\ ,\ P_2(5,-1)}$

$b)$. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់

ពីសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់យើងបាន៖

$$P_o(3,-5)\ ,\ \vec{m}=(2,4)$$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់គឺ $\boxed{(x,y)=(3,-5)+t(2,4)}$

$c)$. សរសេរសមីការបន្ទាត់

យើងមាន $x=3+2t\ ,\ y=-5+4t$ ដោយបំបាត់ t គេបាន

$$t=\frac{x-3}{2}\quad ,\quad t=\frac{y+5}{4}$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{4}$$

$$4x-12=2y+10$$

$$2x-y-11=0$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់គឺ $\boxed{2x-y-11=0}$

$d)$. តើបន្ទាត់ l_1 និង l_2 ស្របគ្នាឬទេ ?

បើ $l_2:\begin{cases}x=1+3t\\ y=8+12t\end{cases}$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់នីមួយៗគឺ

$l_1 : \overrightarrow{m_1} = (2,4)$

$l_2 : \overrightarrow{m_2} = (3,12)$

បើបន្ទាត់ទាំងពីរស្របគ្នាយើងបាន៖ $(2,4) = k(3,12)$

គេបាន $2 = 3k \Rightarrow k = \frac{2}{3}$ និង $4 = 12k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

ដោយ តម្លៃ k មិនដូចគ្នា នោះបន្ទាត់ទាំងពីរមិនស្របគ្នាទេ។

<u>លំហាត់១៧</u>

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតជាទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច P_o ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{m}$

$a).\ \overrightarrow{m} = (3,1)$, $P_o(2,7)$

$b).\ \overrightarrow{m} = (-2,5)$, $P_o(10,-4)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតជាទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច P_o ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{m}$

$a).\ \overrightarrow{m} = (3,1)$, $P_o(2,7)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $P_o(x_o, y_o)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{m} = (a,b)$ មានរាង $(x,y) = (x_o, y_o) + t(a,b)$

គេបាន $(x,y) = (2,7) + t(3,1)$

ដូចនេះ **សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតជាទម្រង់វិចទ័រនៃបន្ទាត់គឺ $(x,y)=(2,7)+t(3,1)$**

$b).\ \vec{m}=(-2,5)\ ,P_o(10,-4)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វិចទ័រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $P_o(x_o,y_o)$ ហើយមានវិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{m}=(a,b)$ មានរាង $(x,y)=(x_o,y_o)+t(a,b)$

គេបាន $(x,y)=(10,-4)+t(-2,5)$

ដូចនេះ

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតជាទម្រង់វិចទ័រនៃបន្ទាត់គឺ $(x,y)=(10,-4)+t(-2,5)$

លំហាត់១៨

ចូរសរសេរសមីការទម្រង់វិចទ័រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមគូនៃចំណុចនីមួយៗ៖

$a).\ A(1,7)\ ,\ B(4,10)$

$b).\ A(-3,5)\ ,B(-2,-8)$

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការទម្រង់វិចទ័រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមគូនៃចំណុចនីមួយៗ៖

$a).\ A(1,7)\ ,\ B(4,10)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វិចទ័រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(x_o,y_o)$ ហើយមានវិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{m}=(a,b)$ មានរាង $(x,y)=(x_o,y_o)+t(a,b)$

តែ $\vec{m}=\overrightarrow{AB}=(4-1,10-7)=(3,3)$

គេបាន $(x,y)=(1,7)+t(3,3)$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតជាទម្រង់វិចទ័រនៃបន្ទាត់គឺ $(x,y)=(1,7)+t(3,3)$

$b).\ A(-3,5)\ ,B(-2,-8)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វិចទ័រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(x_o,y_o)$ ហើយមានវិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{m}=(a,b)$ មានរាង $(x,y)=(x_o,y_o)+t(a,b)$

តែ $\vec{m}=\overrightarrow{AB}=(-2+3,-8-5)=(1,-13)$

គេបាន $(x,y)=(-3,5)+t(1,-13)$

ដូចនេះ

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតជាទម្រង់វិចទ័រនៃបន្ទាត់គឺ $(x,y)=(-3,5)+t(1,-13)$

លំហាត់១៩

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់បើគេឱ្យសមីការវិចទ័រដូចខាងក្រោម

$a).(x,y)=(10,6)+t(13,1)$

$b).\ (x,y)=(0,5)+t(12,-7)$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់បើគេឱ្យសមីការវ៉ិចទ័រដូចខាងក្រោម

$a).(x,y)=(10,6)+t(13,1)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់មានរាង $x=x_o+at$, $y=y_o+bt$

គេបាន $x=10+13t$, $y=6+t$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $x=10+13t$, $y=6+t$

$b).\ (x,y)=(0,5)+t(12,-7)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់មានរាង $x=x_o+at$, $y=y_o+bt$

គេបាន $x=12t$, $y=5-7t$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $x=12t$, $y=5-7t$

<u>**លំហាត់២០**</u>

សរសេរសមីការវ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់នីមួយៗដោយដឹងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត

$a).\ x=3+5t$, $y=9+7t$

$b).x=-5-6t$, $y=11t$

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

សរសេរសមីការវ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់នីមួយៗដោយដឹងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត

$a). \ x = 3 + 5t \ , \ \ y = 9 + 7t$

សមីការវ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់មានរាង $(x, y) = (x_o, y_o) + t(a, b)$

គេបាន $(x, y) = (3, 9) + t(5, 7)$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $(x, y) = (3, 9) + t(5, 7)$

$b). x = -5 - 6t \ , \ y = 11t$

សមីការវ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់មានរាង $(x, y) = (x_o, y_o) + t(a, b)$

គេបាន $(x, y) = (-5, 0) + t(-6, 11)$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $(x, y) = (-5, 0) + t(-6, 11)$

លំហាត់២១

សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់បើគេឱ្យសំណុំនៃសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត ដូចខាងក្រោម

$a). \ x = 1 + 2t \ , y = 1 - 3t$

$b). x = -2 + t \ \ , y = 4 + 5t$

$c). \ \ x = 5 + 7t \ , \ y = -2 - 4t$

$d). \ \ x = 0.5 + 0.3t \ , \ y = 1.5 - 0.2t$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់បើគេឱ្យសំណុំនៃសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត ដូចខាងក្រោម

$a). \ x = 1 + 2t \ , y = 1 - 3t$

ដោយបំបាត់ t គេបាន

$$t = \frac{x-1}{2} \quad , \quad t = \frac{y-1}{-3}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3}$$

$$-3x + 3 = 2y - 2$$

$$-3x - 2y + 5 = 0$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់គឺ $\boxed{3x + 2y - 5 = 0}$

$b).x = -2 + t \ \ , y = 4 + 5t$

ដោយបំបាត់ t គេបាន

$$t = x + 2 \ , \ \ t = \frac{y-4}{5}$$

$$x + 2 = \frac{y-4}{5}$$

$$5x + 10 = y - 4$$

$$5x - y + 14 = 0$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់គឺ $\boxed{5x - y + 14 = 0}$

$c).\ x=5+7t\ ,\ y=-2-4t$

ដោយបំបាត់ t គេបាន

$$t=\frac{x-5}{7}\ ,\ t=\frac{y+2}{-4}$$

$$\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-4}$$

$$-4x+20=7y+14$$

$$4x+7y-6=0$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់គឺ $\boxed{4x+7y-6=0}$

$d).\ x=0.5+0.3t\ ,\ y=1.5-0.2t$

ដោយបំបាត់ t គេបាន

$$t=\frac{x-0.5}{0.3}\ ,\ t=\frac{y-1.5}{-0.2}$$

$$\frac{x-0.5}{0.3}=\frac{y-1.5}{-0.2}$$

$$-0.2x+0.1=0.3y-0.45$$

$$0.2x+0.3y-0.55=0$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់គឺ $\boxed{0.2x+0.3y-0.55=0}$

<u>លំហាត់២២</u>

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ និង សមីការឆ្លុះដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ និងកាត់ចំណុច P_o

$a).\ \vec{n}=(3,1)$, $P_o(2,4)$

$b).\ \vec{n}=(1,-1)$, $P_o(-5,1)$

$c).\ \vec{n}=(0,1)$, $P_o(-3,-7)$

$d).\ \vec{n}=(1.5\,,-3.5)$, $P_o(0.5,-2.5)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ និងសមីការឆ្លុះដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ និងកាត់ចំណុច P_o

$a).\ \vec{n}=(3,1)$, $P_o(2,4)$

ដោយ វ៉ិចទ័រ $(-1,3)$ កែងនឹង $(3,1)$

គេបាន $(-1,3)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់

នោះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រគឺ $(x,y)=(2,4)+t(-1,3)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $x=2-t$, $y=4+3t$

សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់គឺ $2-x=\dfrac{y-4}{3}$

$b).\ \vec{n}=(1,-1)$, $P_o(-5,1)$

ដោយ វ៉ិចទ័រ $(1,1)$ កែងនឹង $(1,-1)$

គេបាន $(1,1)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់

នោះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រគឺ $(x,y)=(-5,1)+t(1,1)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $x=-5+t$, $y=1+t$

សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់គឺ $x+5=y-1$

$c)$. $\vec{n}=(0,1)$, $P_o(-3,-7)$

ដោយ វ៉ិចទ័រ $(-1,0)$ កែងនឹង $(0,1)$

គេបាន $(-1,0)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់

នោះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រគឺ $(x,y)=(-3,-7)+t(-1,0)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $x=-3-t$, $y=-7$

សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់គឺ $-x-3=0$

$d)$. $\vec{n}=(1.5\,,-3.5)$, $P_o(0.5,-2.5)$

ដោយ វ៉ិចទ័រ $(3.5,1.5)$ កែងនឹង $(1.5,-3.5)$

គេបាន $(3.5,1.5)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់

នោះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រគឺ $(x,y)=(0.5,-2.5)+t(3.5,1.5)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $x=0.5+3.5t$, $y=-2.5+1.5t$

សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់គឺ $\dfrac{x-0.5}{3.5}=\dfrac{y+2.5}{1.5}$

លំហាត់២៣

គេឱ្យសមីការបន្ទាត់ដូចខាងក្រោម ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតជាទម្រង់វ៉ិចទ័រ និងប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់៖

$a).\ x+2y=6$

$b).\ 4x-y=12$

$c).\ 5x-2y=13$

$d).\ 8x+9y=-45$

ដំណោះស្រាយ

ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតជាទម្រង់វ៉ិចទ័រ និងប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់៖

$a).\ x+2y=6$

គេបាន $x+2y=6$

$$x=6-2y$$
$$=2(3-y)$$
$$\frac{x}{2}=3-y=t$$

នោះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $x=2t$, $y=3-t$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រគឺ $(x,y)=(0,3)+t(2,-1)$

$b).\ 4x-y=12$

គេបាន $4x - y = 12$

$$4x - 12 = y$$

$$4(x-3) = y$$

$$x - 3 = \frac{y}{4} = t$$

នោះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $x = 3 + t$, $y = 4t$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រគឺ $(x, y) = (3,0) + t(1,4)$

$c)$. $5x - 2y = 13$

គេបាន $5x - 2y = 13$

$$x = \frac{2y + 8 + 5}{5}$$

$$x = \frac{2(y+4)}{5} + 1$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{5} = t$$

នោះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $x = 1 + 2t$, $y = -4 + 5t$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រគឺ $(x, y) = (1, -4) + t(2,5)$

$d)$. $8x + 9y = -45$

គេបាន $8x + 9y = -45$

$$x = \frac{-9y - 45}{8}$$

$$x = \frac{-9(y+5)}{8}$$

$$-\frac{x}{9} = \frac{y+5}{8} = t$$

នោះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $x = -9t$, $y = -5 + 8t$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វុិចទ័រគឺ $(x, y) = (0, -5) + t(-9, 8)$

ជំពូកទី៣

លំហាត់អនុវត្ត

1. គូសវ៉ិចទ័រខាងក្រោមក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ $\vec{v}$

$a).\ \vec{v_1}=(\frac{1}{2},3)$ $b).\ \vec{v_2}=(-2,2)$ $c).\ \vec{v_3}=(-1,-\frac{3}{2})$

2. រកកូអរដោនេ និងប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ ពីចំណុច $Q(1,2)$ទៅ $P(5,3)$

3. បើ $\vec{u}=3\vec{i}-5\vec{j}$ និង $\vec{v}=-7\vec{i}+4\vec{j}$ ។ រក

$a).\ \vec{u}+\vec{v}$ $b).\ 2\vec{v}+\vec{u}$ $c).\ 6\vec{u}-8\vec{v}$

4. គេឱ្យ $\vec{v}=(2,1)$ និង $\vec{w}=(3,-4)$ ក្នុង R^2 ៖

$a).$ រក $\vec{v}-\vec{w}$

$b).$ រក $3\vec{v}+2\vec{w}$

$c).$ សរសេរ $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាទម្រង់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ

$d).$ រកវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ដែល $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$

$e).$ រកវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ដែល $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=0$

$f).$ រកវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ដែល $2\vec{u}+\vec{i}=2\vec{j}$

$g)$. រកវ៉ិចទ័រឯកតា $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

5. គេឱ្យ $\vec{v}=(-1,5)$ និង $\vec{w}=(3,1)$ ។ គណនា

$a).\ \vec{v}-\vec{w}$ $\qquad b).\ \vec{v}+\vec{w}$ $\qquad c).\ \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$d).\ |\dfrac{1}{2}(\vec{v}-\vec{w})|$ $\qquad e).\ |\dfrac{1}{2}(\vec{v}+\vec{w})|$ $\qquad f).\ -2\vec{v}+4\vec{w}$

$g).\ \vec{v}-2\vec{w}$ $\qquad h)$. រកវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ដែល $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{i}$

$i)$. រកវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ដែល $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=2\vec{i}+\vec{j}$

$j)$. តើមានចំនួន m ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $m(\vec{v}+2\vec{w})=\vec{j}$ ឬទេ ? បើមានចូររកតម្លៃ m នោះ ?

6. គេឱ្យ $\vec{v}=(-1,5)$ និង $\vec{w}=(3,1)$ ។

ក. តើ $|\vec{v}-\vec{w}|=|\vec{v}|-|\vec{w}|$ ឬទេ ? បើមិនស្មើតើតម្លៃមួយណាធំជាង ?

ខ. តើ $|\vec{v}+\vec{w}|=|\vec{v}|+|\vec{w}|$ ឬទេ ? បើមិនស្មើតើតម្លៃមួយណាធំជាង ?

7. រកប្រវែងនៃ

$a).\ \vec{u}=(2,3)$ $\qquad b).\ \vec{v}=(8,3)$ $\qquad c).\ \vec{v}=(5,8)$

$d).\ \vec{v}=(2,-2)$ $\qquad e).\ \vec{v}=(2,-1)$ $\qquad d).\ \vec{v}=(3,2)$

8. គេឱ្យ $P(1,-1)$, $Q(2,-2)$ $R(2,0)$ និង $S(3,-1)$ តើ $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$ ឬទេ ?

9. រកប្រវែងនៃ វ៉ិចទ័រ $12\vec{i}-5\vec{j}$

10. រកប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{PQ}$ ក្នុង R^2 បើ $P(-1,2)$ និង $Q(5,5)$

11. គេឱ្យ $\vec{v}=(5,1)$ និង $\vec{w}=(4,-4)$ គណនា $\vec{v}\cdot\vec{w}$

12. គេឱ្យ $\vec{v}=-3\vec{i}-2\vec{j}$ និង $\vec{w}=6\vec{i}+4\vec{j}$ គណនា $\vec{v}\cdot\vec{w}$

13. រកមុំរវាងវ៉ិចទ័រ

a). $A(1,2), B(3,7)$

b). $A(5,0), B(2,2)$

c). $A(-5,2)$, $B(3,6)$

d). $v(2,1)$, $w(3,-4)$

e). $v=-\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{w}=-3\vec{i}+3\vec{j}$

f). $\vec{v}=\vec{i}$, $\vec{w}=3\vec{i}+2\vec{j}$

14. រកមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=5\vec{i}+7\vec{j}$ និង $\vec{v}=-3\vec{i}+4\vec{j}$ ។

15. តើវ៉ិចទ័រ $\vec{v}=(-1,5)$ និង $\vec{w}=(5,1)$ កែងគ្នាឬទេ ? ចូរបញ្ជាក់។

16. តើវ៉ិចទ័រ $\vec{v}=(6,4)$ និង $\vec{w}=(-2,3)$ កែងគ្នាឬទេ ? ចូរបញ្ជាក់។

17. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $P_1(-3,1)$ និង $P_2(4,4)$ ។

18. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វិចទ័រ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំនុចនិងមានវិចទ័រប្រាប់ទិសដូចខាងក្រោម៖

a). ចំណុច $(1,2)$ វិចទ័រប្រាប់ទិស $(3,2)$

b). ចំណុច $(5,4)$ វិចទ័រប្រាប់ទិស $(2,-1)$

c). ចំណុច $(-1,3)$ វិចទ័រប្រាប់ទិស $(-1,2)$

19. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វិចទ័រ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំនុចនិងមានវិចទ័រណរម៉ាល់ដូចខាងក្រោម៖

a). ចំណុច $(1,2)$ វិចទ័រណរម៉ាល់ $(3,2)$

b). ចំណុច $(5,4)$ វិចទ័រណរម៉ាល់ $(2,-1)$

c). ចំណុច $(-1,3)$ វិចទ័រណរម៉ាល់ $(-1,2)$

20. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ខាងក្រោម៖

$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}$ និង $x+3=\frac{y-8}{-3}$

21. រកសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាមចំណុច $(-3,1)$ និងកែងនឹងវិចទ័រ $\vec{n}=(2,4)$

22. សរសេរសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាមចំណុច Q និង កែងនឹងវិចទ័រ $\vec{n}$

$a).\ Q(5,1)\ ,\ \vec{n}=(4,-4)$

$b).\ Q(6,-2)\ ,\ \vec{n}=(2,6)$

23. រកសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាមចំណុច $(2,1)$ និង $(1,-1)$

24. រកចម្ងាយ D ពីចំណុច $(2,4)$ ទៅប្លង់ $5x-3y-10=0$

25. រកចម្ងាយ D ពីចំណុច Q ទៅប្លង់ P

$a).\ Q(4,1)\ ,\ P: 3x-y+8=0$

$b).\ Q(0,2)\ ,\ P: -5x+2y+1=0$

26. រកចម្ងាយ d ពីចំណុច P ទៅបន្ទាត់ L

$a).\ P(1,-1)\ ,\ L: x=-2-2t\ ,\ y=4t$

$b).\ P(0,0)\ ,\ L: x=3+2t\ ,\ y=4+3t$

27. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់

$a).\ x=7+3s\ ,\ y=-4-3s$ និង

$x=1+6t\ ,\ y=2+t$

$b).\ \dfrac{x-6}{4}=y+3=2$

$\dfrac{x-11}{3}=\dfrac{y-14}{-6}$

28. $a)$. ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1,4)$, $B(3,1)$

$b)$. ចូររកចំណុចបីទៀតដែលនៅលើបន្ទាត់នេះ ? និង គូសរូប។

$c)$. គូសត្រីកោណដែលតំណាងឱ្យសមីការវ៉ិចទ័រនៃចំណុច A, B ។

$d)$. តើចំណុច $(2,3)$ នៅលើបន្ទាត់ដែរឬទេ ?

29.គេមានសមីការបន្ទាត់ $4x+5y+20=0$

$a)$. ចូរគូសបន្ទាត់តាងឱ្យសមីការបន្ទាត់នេះ

$b)$. រកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់

$c)$. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតជាទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់

30. តើចំណុច P ណាខ្លះដែលនៅលើបន្ទាត់ $(x,y)=(3,1)+t(-2,5)$

$a)$. $P(-1,11)$ $b)$. $P(9,-15)$

$c)$. $P(-9,21)$ $d)$. $P(-2,13.5)$

31. សង់បន្ទាត់ខាងក្រោម

$a)$. $3x+6y+36=0$

$b)$. $(x,y)=(1,7)+t(2-5)$

$c)$. $x=4+t$, $y=3t-2$

$d). \ 4x - 15y = 10$

32. តើបន្ទាត់ l_1 និង l_2 កែងគ្នាឬទេ ?

$a). \quad l_1 : 4x - 6y = 9$

$\quad\quad l_2 : (x, y) = (6, 3) + t(3, 2)$

$b). \quad l_1 : x + 9y = 2$

$\quad\quad l_2 : x = t \ , \ y = 15 + 9t$

33. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ដែល

$a).$ ស្របអ័ក្ស $(x'ox)$ ហើយកាត់ $P_o(3, -8)$

$b).$ កែងនឹង $4x - 3y = 17$ ហើយកាត់ $P_o(-2, 4)$

34. គេឱ្យបន្ទាត់ ៖

$l_1 : (x, y) = (3, -2) + t(4, -5)$ និង

$l_2 : (x, y) = (1, 1) + s(7, k)$

$a).$ រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ទាំងពីរស្របគ្នា

$b).$ រកតម្លៃ k ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ទាំងពីរកែងគ្នា

35. បន្ទាត់មួយកាត់តាមចំណុច $A(3, -2)$ និង $B(-5, 4)$

$a).$ រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$

$b).$ សរសេរសមីការវ៉ិចទ័រ និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់។

36. គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(2,-2)$, $\vec{b}=(-1,3)$, $\vec{c}=(1,5)$

ក) គណនា $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ និង $\vec{a}+\vec{c}$

ខ) កំណត់ពីរចំនួនពិត m និង n ដោយដឹងថា $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

37. គេឱ្យបីចំណុច $A(2,1)$, $B(1,3)$ និង $C(-1,0)$

ក) រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$

ខ)គណនា $\vec{p}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ និង $\vec{q}=\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BC}$

គ) រកកូអរដោនេចំណុច M ដោយដឹងថា $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$

38. គេឱ្យបីចំណុច $A(1,3)$, $B(-2,2)$ និង $C(4,4)$

ក) រកកូអរដោនេ G ជាទីប្រជុំទម្ងន់ ΔABC

ខ) រកកូអរដោនេ M ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $4\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ ។

39. គេឱ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដែល $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=10$ និង មុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=60^o$ ។

ក) គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ) គណនា $|\vec{a}+\vec{b}|$ ។

40. គេឱ្យវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដែល $|\vec{a}|=15$, $|\vec{b}|=40$ និង មុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=60^o$ ។

ក) គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ) គណនា $|\vec{a}-\vec{b}|$ ។

41. គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{a}\,,\vec{b},\vec{c}$ ដោយដឹងថា $|\vec{a}|=2\,,|\vec{b}|=3\,,|\vec{c}|=6$ និង $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=9$ ។ គណនា $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ ។

42. គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}\,,\vec{b},\vec{c}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,|\vec{c}|=4$ និង $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=14$ ។ គណនា $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=9$ ។

43. គេឱ្យវ៉ិចទ័រពីរផ្ទៀងផ្ទាត់ $|2\vec{a}+3\vec{b}|=|2\vec{a}-3\vec{b}|$ ។

ចូរស្រាយថា $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់គ្នា។

44. គេឱ្យ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រពីរក្នុងប្លង់។ គេតាង $\vec{p}=3\vec{a}+4\vec{b}$ និង $\vec{q}=4\vec{a}-3\vec{b}$ ។

ចូរស្រាយថា $|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2=25(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

45. គេឱ្យទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដែល $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$ និង $|\vec{b}|=4$ ហើយមុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=30^o$ ។ គេតាង $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ ។ គណនា $\vec{p}\cdot\vec{q}$ ។

46. គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដែល $|\vec{a}|=4\,,|\vec{b}|=2$ និង មុំផ្គុំដោយ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ គឺ $\theta=60^o$ ។ យក $\vec{p}=x\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}-x\vec{b}$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។

ក) គណនា $\vec{p}\cdot\vec{q}$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ) កំណត់ x ដើម្បីឱ្យ $\vec{p}\cdot\vec{q}$ មានតម្លៃធំបំផុត។

គ) កំណត់ x ដើម្បីឱ្យ $\vec{p}\cdot\vec{q}=12$ ។

47. គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដែល $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=4$ និង មុំរវាង $\vec{a}\,\&\,\vec{b}$ គឺ $\theta=120^o$ ។ យក $\vec{p}=x\vec{a}-\vec{b}$ និង $\vec{q}=\vec{a}-x\vec{b}$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ ។

ក) គណនា $\vec{p}\cdot\vec{q}$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ) កំណត់ x ដើម្បីឱ្យ $\vec{p}\cdot\vec{q}$ មានតម្លៃតូចបំផុត។

48. គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$ និង $\vec{b}=12\vec{i}-5\vec{j}$

ក) គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ) គណនា $|\vec{a}|$ និង $|\vec{b}|$ ។

គ) គណនាតម្លៃកូស៊ីនូសនៃមុំរវាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

49. គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}$ និង $\vec{b}=x\vec{i}+4\vec{j}$ ដែល x ជាចំនួនពិតមួយ។

ក) កំណត់ x ដើម្បីឱ្យ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ។

ខ) កំណត់ x ដើម្បីឱ្យ $\vec{a}\perp\vec{b}$ ។

50. គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(3,-4)$, $\vec{b}=(2,1)$ និង $\vec{c}=(-6,-4)$

ក) គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$ និង $\vec{b}\cdot\vec{c}$ ។

ខ) ចូរស្រាយថា $\vec{a}$ និង $\vec{b}+\vec{c}$ អរតូកូណាល់គ្នា។

គ) កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ $\vec{a}+k\vec{b}$ និង $\vec{c}$ អរតូកូណាល់។

51. គេឱ្យបីចំណុច $A(1,2)$, $B(4,-2)$ និង $C(5,5)$ ។

ក) គណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ខ) គណនា $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{AC}|$

គ) រកប្រភេទ ΔABC

52. គេឱ្យបីចំណុច $A(x,x-1)$, $B(2x-1,4)$, $C(-1,x)$ កំណត់ x ដើម្បីឱ្យ ΔABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

53. គេឱ្យបីចំណុច $A(x,y)$, $B(5,-2)$, $C(x-1,y-2)$ កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឱ្យ ΔABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A ។

54. គេឱ្យចំណុច $A(1,-1)$ $B(2,1)$ និង $C(-1,3)$

ក) រកកូអរដោនេចំណុច D ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $2\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

ខ)រកសំណុំចំណុច M នៃប្លង់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|2\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}|=1$

55.គេឱ្យចំណុច $A(2,3)$,$B(-1,2)$ និង $C(5,4)$

ក) រកកូអរដោនេចំណុច G ជាទីប្រជុំទម្ងន់ ΔABC

ខ) រកសំណុំចំណុច M នៃប្លង់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=9$ ។

56. គេមានចំណុច $A(1,0)$,$B(-2,3)$,$C(0,2)$ និង $D(5,-1)$

ក) រកកូអរដោនេចំណុច E ដែល $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=0$

ខ) រកសំណុំចំណុច M នៃប្លង់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់
$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}|=20$ ។

គ) យក (C) តាងឱ្យសំណុំចំណុច M ខាងលើ។ សរសេរសមីការនៃ (C) ។

ឃ) បង្ហាញថា $F(-2,5)$ ស្ថិតលើ (C) ។

ង) រកសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះ (C) ត្រង់ F ។

✤✤✤✱✤✤✤