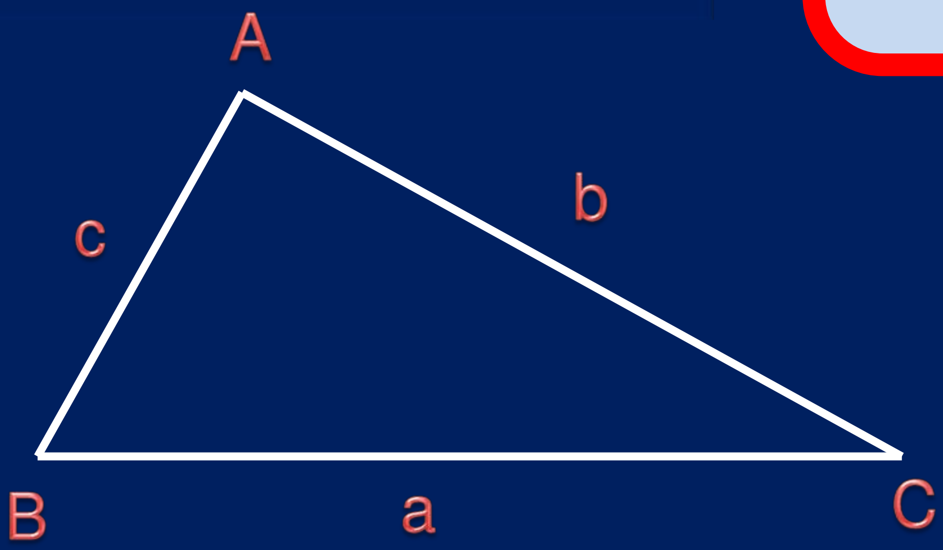
រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន** និង **សែន ពិសិដ្ឋ**

បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

គណិតវិទ្យា

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១០



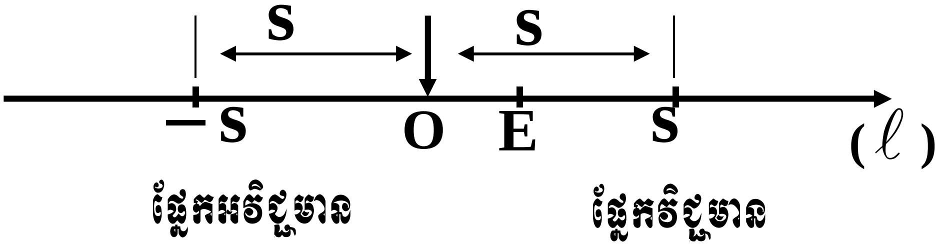
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ជំពូកទី១

ចំនួនពិត និង ប្រព័ន្ធរបាប់

១-ចំនួនពិត

ក. បន្ទាត់ចំនួនពិត



-ចំនុច **O** ត្រូវនឹងចំនួន **0** ។

-គ្រប់ចំនុចនៅផ្នែកវិជ្ជមានហើយមានចម្ងាយ **s** ពីចំនុច **O** ត្រូវគ្នានឹងចំនួនវិជ្ជមាន **s** ។

-គ្រប់ចំនុចនៅផ្នែកអវិជ្ជមានហើយមានចម្ងាយ **s** ពីចំនុច **O** ត្រូវគ្នានឹងចំនួនអវិជ្ជមាន **–s** ។

ខ. ការប្រៀបធៀបចំនួនពិត

-ចំនួនពិត **b** ធំជាងចំនួនពិត **a** ឬ ចំនួនពិត **a** តូចជាងចំនួនពិត **b** ត្រូវបានគេកំណត់ សរសេរ $b>a$ ឬ $a<b$ ។

-បើ a វិជ្ជមាននោះ $a>0$ ។

-បើ a អវិជ្ជមាននោះ $a<0$ ។

គេអាចប្រៀបធៀបចំនួនពិតតាមលក្ខណៈខាងក្រោម៖

-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b គេអាចបានទំនាក់ទំនងមួយក្នុងចំណោម

ទំនាក់ទំនងបីគឺ $a<b$, $a=b$, $a>b$ ។

-បើ $a>b$ និង $b>c$ នាំឱ្យ $a>c$ ។

-បើ $a<b$ និង $b<c$ នាំឱ្យ $a<c$ ។

-បើ $a=b$ និង $b=c$ នាំឱ្យ $a=c$ ។

-បើ $a>b$ សមមូល $a-b>0$ ។

-បើ $a<b$ សមមូល $a-b<0$ ។

គ. តម្លៃដាច់ខាត

-តម្លៃដាច់ខាតនៃចំនួនពិត a កំណត់តាងដោយ $|a|$ ។

-គ្រប់ចំនួនពិត a គេមាន $|a|\geq 0$

-តម្លៃ $|a|=0$ លុះត្រាតែ $a=0$

-ការបញ្ជាក់តម្លៃដាច់ខាត $|a|=\left[\begin{array}{lll} a & \text{បើ} & a\geq 0 \\ -a & \text{បើ} & a<0 \end{array}\right.$

២-កន្សោមរ៉ាឌីកាល់

ក.ផលគុណ និង ផលចែកឬសការេ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a>0$ និង $b>0$ គេមាន៖

1. $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

ខ.ប្រៀបធៀបឬសការេនៃចំនួនវិជ្ជមានពីរ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a>0$ និង $b>0$ គេមាន៖

1. $a<b \Leftrightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$

2. $a>b \Leftrightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$

គ.ការបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a>0$ និង $b>0$ ដែល $a\neq b$ គេមាន៖

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$ ដូចនេះគេមានសមភាព៖

1. $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})c}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})c}{a-b}$

2. $\dfrac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})c}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})c}{a-b}$

ឃ.ការសម្រួលរ៉ាឌីកាល់ពីរជាន់

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a>0$ និង $b>0$ ដែល $a\geq b$ គេមាន៖

$$\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$$ ។

៣-ប្រពន្ធ័របាប់

ក.ប្រពន្ធ័គោល **10**

$$(a_na_{n-1}.....a_2a_1a_0)_{10}=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+....+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$$

ខ.ប្រពន្ធ័គោល **2**

$$(a_na_{n-1}.....a_2a_1a_0)_2=a_n\times2^n+a_{n-1}\times2^{n-1}+....+a_2\times2^2+a_1\times2+a_0$$ ។

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1. គេឱ្យ $a\,,b\,,c$ ជាបីចំនួនពិតមិនសូន្យ ។

ចូរកំណត់តម្លៃដែលអាចនៃកន្សោម $A=\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{c}{|c|}$?

2. ចូរកំណត់លក្ខខណ្ឌ a និង b ដើម្បីឱ្យគេបានសមភាពដូចខាងក្រោម៖

$$\left|\frac{a-b}{a}\right|=\frac{b-a}{a}$$?

3. គេឱ្យ $a\,,b\,,c$ ជាបីចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់

$$(3a+6)^2+\left|\frac{1}{4}b-10\right|+|c+3|=0$$

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $a^{10}+bc$?

4. គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតដែល $a < b < c$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម ៖ $y = |x-a| + |x-b| + |x-c|$

5. គេដឹងថា $c > 1$ ហើយគេមាន ៖

$$x = \frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}} \quad , y = \frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}} \quad \text{និង} \quad z = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x < y < z$?

6. គេឱ្យ x ជាចំនួនពិតមួយ។ តាង $A = \frac{-1+3x}{1+x} - \frac{\sqrt{|x|-2} + \sqrt{2-|x|}}{|2-x|}$

ចូរបង្ហាញថា A ជាចំនួនគត់ ។

7. គេឱ្យ $x = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ និង $y = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

ចូរកំណត់តម្លៃ $S = x^4 + y^4 + (x+y)^4$ ។

8. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$P = (\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12})$$

9.គណនា $N = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

10. សម្រួល $A = \sqrt{2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}} - \sqrt{2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$

11. គេដឹងថា $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ ។

គណនាតម្លៃ $A=\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$

12. សម្រួល $y=\sqrt[3]{a+\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}$ ដែល $a\geq 1$

13. គេឱ្យចំនួន $A=\overline{21a78}_{10}$ និង $B=\overline{87b12}_{10}$ ដែល a និង b ជាលេខ

បើ $A\times 4=B$ នោះចូរកំណត់គ្រប់គូ (a,b) ?

14.គេឱ្យ a , b , c ជាលេខ ។

គេតាង $x=\overline{ab}_{10}$, $y=x-10$ និង $z=\overline{ccc}_{10}$

គេដឹងថា $x.y=z$ ។ ចូរកំណត់គូ (a,b,c)

15. គេឱ្យចំនួន $n=\overline{aabb}_{10}$ ដែល a និង b ជាលេខ ។

ក. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់លេខ a និង b ចំនួន n ចែកដាច់នឹង 11 ជានិច្ច ។

ខ. គេយក $q=\frac{n}{11}$ ។ បង្ហាញថាបើ q ចែកដាច់នឹង 11 នោះមានគូ

(a,b) តែមួយគត់ដែល n ជាការេប្រាកដ ?

16. គេឱ្យចំនួន $n=\overline{aaaaaa}_{10}$ ដែល $a=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

ក. ចូរស្រាយថា n ចែកដាច់នឹង 7 ជានិច្ច ។

ខ. ចូរកំណត់គ្រប់លេខ a ដើម្បីឱ្យ n មានតួចែកយ៉ាងតិចមួយជាការេ

ប្រាកដធំជាង 1 ។

17. គេឱ្យចំនួន $n=\overline{aaabbb}_{10}$ ដែល $a \neq b$ និង a ,b ជាលេខ ។

ក.ចូរសរសេរ n ជាទម្រង់ពន្លាត រួចបង្រួម ។

ខ. កំណត់គ្រប់គូ (a , b) ដែលធ្វើឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 7 ។

18. គេឱ្យចំនួន $n=\overline{abcd}_2$ ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 2

ដែល $a , b , c , d \in \{0,1\}$ ។

ក. ចូរសរសេរ n ជាទម្រង់ពន្លាត ។

ខ. បើ $a=b=c=1$ នោះចូរកំណត់ d ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 5 ។

គ. បើ $a=b=d=1$ នោះចូរកំណត់ c ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 3 ។

ឃ. បើ $a=c=d=1$ នោះចូរកំណត់ b ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 11 ។

19.គេឱ្យចំនួន $n=1100101_2$ (ក្នុងប្រព័ន្ធគោល 2)

និងចំនួន $p=\overline{14285b}_{10}$ (ក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10)

ក.ចូរសរសេរ n ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10 ។

ខ.កំណត់លេខ b ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{p\times b+1}{9(n+6)+10}$ ជាចំនួនគត់ ?

20. គេឱ្យចំនួន $m = \overline{21a7b}_{10}$ និង $n = \overline{b7a12}_{10}$

ចូរកំណត់លេខ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\frac{n}{m} = 4$?

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

Tel : 077 549 491

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតមិនសូន្យ ។

ចូរកំណត់តម្លៃដែលអាចនៃកន្សោម $A = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃដែលអាចនៃកន្សោម $A = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$

-បើ $a > 0, b > 0, c > 0$ (វិជ្ជមានទាំងបី)

គេបាន $A = \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} = 1 + 1 + 1 = 3$ ។

-បើ $a < 0, b < 0, c < 0$ (អវិជ្ជមានទាំងបី)

គេបាន $A = \frac{a}{-a} + \frac{b}{-b} + \frac{c}{-c} = -1 - 1 - 1 = -3$ ។

-បើក្នុងចំណោម a, b, c មានអវិជ្ជមានមួយ និង វិជ្ជមានពីរ

គេបាន $A = -1 + 1 + 1 = 1$ ។

-បើក្នុងចំណោម a, b, c មានអវិជ្ជមានពីរ និង វិជ្ជមានមួយ

គេបាន $A = -1 - 1 + 1 = -1$ ។

ដូចនេះតម្លៃដែលអាចនៃ A គឺ $-3, -1, 1$ និង 3 ។

លំហាត់ទី២

ចូរកំណត់លក្ខខណ្ឌ **a** និង **b** ដើម្បីឱ្យគេបានសមភាពដូចខាងក្រោម៖

$$\left|\frac{a-b}{a}\right| = \frac{b-a}{a} \quad ?$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់លក្ខខណ្ឌ **a** និង **b**

សមភាពដែលឱ្យ $\left|\frac{a-b}{a}\right| = \frac{b-a}{a}$ ពិតលុះត្រាតែ ៖

$a \neq 0$ និង $\frac{a-b}{a} \leq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{b}{a} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} \geq 1$$

ដូចនេះគេមានលក្ខខណ្ឌ **a** និង **b** គឺ $\frac{b}{a} \geq 1$ និង $a \neq 0$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់

$$(3a+6)^2+|\frac{1}{4}b-10|+|c+3|=0$$

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $a^{10}+bc$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃនៃ $a^{10}+bc$

គេមាន $(3a+6)^2+|\frac{1}{4}b-10|+|c+3|=0$

យើងឃើញថាអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការសុទ្ធតែជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

ហេតុនេះយើងត្រូវតែបាន $\begin{cases} 3a+6=0 \\ \frac{1}{4}b-10=0 \\ c+3=0 \end{cases}$

គេទាញ $a=-2 , \ b=40 , c=-3$

ដូចនេះ $a^{10}+bc=(-2)^{10}+(40)(-3)=1024-120=904$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតដែល $a<b<c$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម ៖ $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃតូចបំផុត

គេមាន $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$

-ករណី $x \leq a$

គេបាន $y=(a-x)+(b-x)+(c-x) \geq (b-a)+(c-a)$

-ករណី $a<x \leq b$

គេបាន

$$y=(x-a)+(b-x)+(c-x)=(b-a)+(c-x) \geq (b-a)+(c-b)=c-a$$

-ករណី $b<x \leq c$

គេបាន

$$y=(x-a)+(x-b)+(c-x)=(x-a)+(c-b)>(b-a)+(c-b)=c-a$$

-ករណី $c < x$

គេបាន

$$y = (x-a)+(x-b)+(x-c) > (b-a)+(c-b)+(x-c) > c-a$$

ដូចនេះ $y_{min} = c-a$ ដែលត្រូវនឹង $x = b$ ។

លំហាត់ទី៥

គេដឹងថា $c>1$ ហើយគេមាន $x=\dfrac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}$ $y=\dfrac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}$

និង $z=\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x<y<z$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x<y<z$

គេមាន $x=\dfrac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}$

$$=\frac{[(\sqrt{c+2})^2-(\sqrt{c+1})^2](\sqrt{c}+\sqrt{c-1})}{(\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1})[(\sqrt{c})^2-(\sqrt{c-1})^2]}=\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}$$

$$y=\frac{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}{\sqrt{c+1}-\sqrt{c}}=\frac{[(\sqrt{c+2})^2-(\sqrt{c+1})^2](\sqrt{c+1}+\sqrt{c})}{(\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1})[(\sqrt{c+1})^2-(\sqrt{c})^2]}$$

$$=\frac{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}$$

គេទាញបាន $x<y$ ព្រោះ $\sqrt{c}+\sqrt{c-1}<\sqrt{c+1}+\sqrt{c}$ ។

ហើយ $z=\dfrac{\sqrt{c}-\sqrt{c-1}}{\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}}=\dfrac{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}$

$\sqrt{c}+\sqrt{c-1}<\sqrt{c+1}+\sqrt{c}<\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}$ នោះ $x<y<z$ ពិត ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យ x ជាចំនួនពិតមួយ ។

គេយក $A=\frac{-1+3x}{1+x}-\frac{\sqrt{|x|-2}+\sqrt{2-|x|}}{|2-x|}$

ចូរបង្ហាញថា A ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា A ជាចំនួនគត់

$A=\frac{-1+3x}{1+x}-\frac{\sqrt{|x|-2}+\sqrt{2-|x|}}{|2-x|}$ មានន័យ លុះត្រាតែ $\begin{cases}|x|-2\geq 0\\ 2-|x|\geq 0\\ |2-x|\neq 0\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}|x|=2\\ x\neq 2\end{cases}$ នាំឱ្យ $x=-2$

ចំពោះ $x=-2$ គេបាន $A=\frac{-1-6}{1-2}-\frac{0}{4}=7$

ដូចនេះ $A=7$ ជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យ $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ និង $y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

ចូរកំណត់តម្លៃ $S=x^4+y^4+(x+y)^4$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ $S=x^4+y^4+(x+y)^4$

គេមាន $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2}=\frac{10+2\sqrt{21}}{4}$

និង $y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{7-3}=\frac{10-2\sqrt{21}}{4}$

គេបាន $x+y=5$ និង $xy=1$

គេមាន $S=x^4+y^4+(x+y)^4$

$$\begin{aligned}
&=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x+y)^4\\
&=\left[(x+y)^2-2xy\right]^2-2x^2y^2+(x+y)^4\\
&=(25-2)^2-2+5^4\\
&=529-2+625\\
&=1152
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $S=1152$ ។

លំហាត់ទី៨

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$P=(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12})$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $\mathbf{P}$

គេមាន $M=(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12})$

$$=(\sqrt{10}+\sqrt{11})^2-(\sqrt{12})^2$$
$$=10+2\sqrt{110}+11-12$$
$$=9+2\sqrt{110}$$

និង $N=(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12})$

$$=(\sqrt{10}-\sqrt{11})^2-(\sqrt{12})^2$$
$$=10-2\sqrt{110}+11-12$$
$$=9-2\sqrt{110}$$

គេបាន $P=M.N=(9+2\sqrt{110})(9-2\sqrt{110})$

$$=81-440=-359$$

ដូចនេះ $P=-359$ ។

លំហាត់ទី៩

គណនា $\mathbf{N}=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\mathbf{N}=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

គេមាន $\mathbf{N}=\dfrac{(\sqrt{15}+\sqrt{21})+(\sqrt{35}+5)}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$

គេបាន $\dfrac{1}{\mathbf{N}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{N}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$ ។

លំហាត់ទី១០

សម្រួល $A=\sqrt{2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}-\sqrt{2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$

ដំណោះស្រាយ

សម្រួល $A=\sqrt{2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}-\sqrt{2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$

តាង $a=\sqrt{2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$ និង $b=\sqrt{2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$

គេបាន $a^2+b^2=4$ និង $ab=\sqrt{4-(-2+2\sqrt{5})}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$

គេមាន $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=4-2\sqrt{5}+2=(\sqrt{5}-1)^2$

គេទាញបាន $a-b=\sqrt{5}-1$

ដូចនេះ $A=a-b=\sqrt{5}-1$ ។

លំហាត់ទី១១

គេដឹងថា $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ ។

គណនាតម្លៃ $A=\dfrac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $A=\dfrac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$

គេមាន $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}=4-\sqrt{3}$

នាំឱ្យ $(x-4)^2=3$ ឬ $x^2-8x+13=0$

កន្សោម A អាចសរសេរមួយបែបទៀតគឺៈ

$$A=\frac{(x^2-18x+13)(x+1)^2+10}{(x^2-8x+13)+2}$$ ដោយ $x^2-8x+13=0$

ដូចនេះ $A=\dfrac{10}{2}=5$ ។

លំហាត់ទី១២

សម្រួល $y=\sqrt[3]{a+\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}$ ដែល $a\geq 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្រួល $y=\sqrt[3]{a+\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}+\sqrt[3]{a-\frac{a+8}{3}\sqrt{\frac{a-1}{3}}}$

យក $x=\sqrt{\frac{a-1}{3}}$ នាំឱ្យ $a=3x^2+1$ និង $\frac{a+8}{3}=x^2+3$

កន្សោមខាងដើមអាចសរសេរជា៖

$$\begin{aligned}
y&=\sqrt[3]{3x^2+1+x(x^2+3)}+\sqrt[3]{3x^2+1-x(x^2+3)}\\
&=\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}+\sqrt[3]{1-3x+3x^2-x^3}\\
&=\sqrt[3]{(x+1)^3}+\sqrt[3]{(1-x)^3}\\
&=x+1+1-x=2
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $y=2$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យចំនួន $A=\overline{21a78}_{10}$ និង $B=\overline{87b12}_{10}$ ដែល a និង b ជាលេខ ។

បើ $A\times 4=B$ នោះចូរកំណត់គ្រប់គូ (a,b) ?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់គូ (a,b)

គេមាន $A=\overline{21a78}_{10}=2\times 10^4+1\times 10^3+a\times 10^2+7\times 10+8$

$$A=21078+100a$$

ហើយ $B=\overline{87b12}_{10}=8\times 10^4+7\times 10^3+b\times 10^2+1\times 10+2$

$$B=87012+100b$$

ដោយ $A\times 4=B$ នោះ $4(21078+100a)=87012+100b$

ឬ $84312+400a=87012+100b$

$$400a-100b=87012-84312$$
$$100(4a-b)=2700$$
$$4a-b=27$$

គេទាញ $a=\dfrac{27+b}{4}$

ដោយ b ជាលេខនោះ $b=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

ហើយដោយ a ជាលេខដែរនោះតម្លៃដែលអាចរបស់ b គឺ $\{1, 5, 9\}$

ដូចនេះ $(a,b)=\{(7,1),(8,5),(9,9)\}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យ a , b , c ជាលេខ ។

គេតាង $x = ab_{10}$, $y = x - 10$ និង $z = ccc_{10}$

គេដឹងថា $x.y = z$ ។ ចូរកំណត់គូ (a,b,c)

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គូ (a,b,c)

គេមាន $x = ab_{10} = 10a + b$, $y = x - 10 = 10a + b - 10$

និង $z = ccc_{10} = c\times10^2 + c\times10 + c = 111\,c$

ដោយ $xy = z$ នោះ $x(x-10) = 111c$

ឬ $x^2 - 10x - 111c = 0 \quad (E)$

ឌីសគ្រីមីណង់បង្រួមនៃសមីការ $\Delta' = 25 + 111c$

ដោយ x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះ Δ' ជាការេប្រាកដ ។

គេមាន $c \neq 0$ និង $c = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9\}$

គេទាញបាន $c = 9$ តែមួយគត់ដែលនាំឱ្យ $\Delta' = 1024 = (32)^2$

ជាការេប្រាកដ ។

ក្នុងករណីនេះគេបាន $x_1 = 5 + 32 = 37$; $x_2 = 5 - 32 = -27$ (មិនយក)

ដូចនេះ $x = 37$ តែ $x = 10a + b$ នោះគេទាញ $a = 3$, $b = 7$ ។

ដូចនេះ $a = 3$, $b = 7$, $c = 9$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x = 37$, $y = 27$, $z = 999$ នោះ $37 \times 27 = 999$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យចំនួន $n=\overline{aabb}_{10}$ ដែល a និង b ជាលេខ ។

ក. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់លេខ a និង b ចំនួន n ចែកដាច់នឹង 11 ជានិច្ច ។

ខ. គេយក $q=\frac{n}{11}$ ។ បង្ហាញថាបើ q ចែកដាច់នឹង 11 នោះមានគូ $(a\,,b)$ តែមួយគត់ដែល n ជាការេប្រាកដ ?

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថាគ្រប់លេខ a និង b ចំនួន n ចែកដាច់នឹង 11 ជានិច្ច

គេមាន $n=\overline{aabb}_{10}=a\times 10^3+a\times 10^2+b\times 10+b$

$n=1100a+11b=11(100a+b)$ ជាពហុគុណនៃ 11 ។

ដូចនេះគ្រប់លេខ a និង b ចំនួន n ចែកដាច់នឹង 11 ជានិច្ច ។

ខ.កំណត់គូ (a,b)

គេមាន $q=\frac{n}{11}=100a+b=99a+(a+b)$

ចំនួន q ចែកដាច់នឹង 11 លុះត្រាតែ $a+b$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

ដោយ a និង b ជាលេខនោះ $0<a+b\le 18$ នាំឱ្យ $a+b=11$

គេបាន $q=99a+11=11(9a+1)$

គេទាញ $n = 11q = 11^2(9a+1)$ ។ ចំពោះ $a = 1\ ,\ 2\ ,\ 3, ..., 9$

តម្លៃដែលធ្វើឱ្យ n ជាការេប្រាកដមានតែមួយគត់គឺ $a = 7$ ដែលត្រូវនឹង $b = 11 - 7 = 4$ ។

ដូចនេះ $a = 7\ ,\ b = 4$ ហើយ $n = 7744 = 88^2$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យចំនួន $n=\overline{aaaaaa}_{10}$ ដែល $a=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

ក. ចូរស្រាយថា n ចែកដាច់នឹង 7 ជានិច្ច ។

ខ. រកលេខ a ដើម្បីឱ្យ n មានតួចែកយ៉ាងតិចមួយជាការេប្រាកដធំជាង 1.

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា n ចែកដាច់នឹង 7 ជានិច្ច

គេមាន $n=\overline{aaaaaa}_{10}$

$$\begin{aligned}&=a\times10^5+a\times10^4+a\times10^3+a\times10^2+a\times10+a\\&=(10^5+10^4+10^3+10^2+10+1)\times a\\&=111111\times a=15873\times7\times a\end{aligned}$$

ដូចនេះ n ចែកដាច់នឹង 7 ជានិច្ច ។

ខ. កំណត់គ្រប់លេខ a ដើម្បីឱ្យ n មានតួចែកជាការេប្រាកដ៖

គេមាន $111111=3\times7\times11\times13\times37$

គេបាន $n=3\times7\times11\times13\times37\times a$ ដែល $a=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ n មានតួចែកយ៉ាងតិចមួយដែលជាការេប្រាកដលុះត្រាតែ

$a=3\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 8\ ,\ 9$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យចំនួន $n=\overline{aaabbb}_{10}$ ដែល $a\neq b$ និង $a\,,b$ ជាលេខ ។

ក.ចូរសរសេរ n ជាទម្រង់ពន្លាត រួចបង្រួម ។

ខ. កំណត់គ្រប់គូ $(a\,,b\,)$ ដែលធ្វើឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ n ជាទម្រង់ពន្លាត រួចបង្រួម

គេមាន $n=\overline{aaabbb}_{10}$

$$
\begin{aligned}
&=a\times10^5+a\times10^4+a\times10^3+b\times10^2+b\times10+b\\
&=a\times10^3(10^2+10+1)+b(10^2+10+1)\\
&=111(1000a+b)
\end{aligned}
$$

ខ.កំណត់គ្រប់គូ $(a\,,b\,)$ ដែលធ្វើឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 7

គេអាចសរសេរ៖

$$
\begin{aligned}
n&=111(1000a+b)\\
&=3\times37\times(1000a+b)=3\times37\times[142\times7a+(6a+b)]
\end{aligned}
$$

ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ $6a+b$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដោយ $a\neq b$ និង $a\neq0$ ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $6a+b$ ចែកដាច់នឹង 7

លុះត្រាតែ $(a,b)\in\{(1,8),(2,9),(7,0),(8,1),(9,2)\}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យចំនួន $n = abcd_2$ ក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល 2

ដែល $a , b , c , d \in \{0,1\}$ ។

ក. ចូរសរសេរ n ជាទម្រង់ពន្លាត ។

ខ. បើ $a = b = c = 1$ នោះចូរកំណត់ d ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 5 ។

គ. បើ $a = b = d = 1$ នោះចូរកំណត់ c ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 3 ។

ឃ. បើ $a = c = d = 1$ នោះចូរកំណត់ b ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 11 ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេរ n ជាទម្រង់ពន្លាត

គេបាន $n = abcd_2 = a \times 2^3 + b \times 2^2 + c \times 2 + d$

ខ. កំណត់ d ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 5

បើ $a = b = c = 1$ នោះ $n = 2^3 + 2^2 + 2 + d = 14 + d$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 5 គឺមានតែ $d = 1$ ។

គ. កំណត់ c ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 3

បើ $a = b = d = 1$ នោះ $n = 2^3 + 2^2 + 2c + 1 = 13 + 2c$

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 3 គឺមានតែ $c=1$ ។

ឃ. កំណត់ b ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 11

បើ $a=c=d=1$ នោះ $n=2^3+4b+2+1=11+4b$

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ n ចែកដាច់នឹង 11 គឺមានតែ $b=0$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យចំនួន $n=1100101_2$ (ក្នុងប្រព័ន្ធគោល 2)

និងចំនួន $p=14285b_{10}$ (ក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10)

ក.ចូរសរសេរ n ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10 ។

ខ.កំណត់លេខ b ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{p\times b+1}{9(n+6)+10}$ ជាចំនួនគត់ ?

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ n ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10

គេបាន $n=1100101_2$

$$=1\times 2^6+1\times 2^5+1\times 2^2+1=104$$

ដូចនេះ $n=104$ ។

ខ.កំណត់លេខ b ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{p\times b+1}{9(n+6)+10}$ ជាចំនួនគត់

គេមាន $9(n+6)+10=990+10=1000$

ហើយ $p=14285b_{10}=142850+b$ នាំឱ្យ $p\times b+1=(142850+b)b+1$

ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{p\times b+1}{9(n+6)+10}$ ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $(142850+b)b+1$

ចែកដាច់នឹង 1000

ដោយ $\mathbf{b}$ ជាលេខនោះគេបាន $\mathbf{b=7}$ តែមួយគត់ព្រោះចំពោះ $\mathbf{b=7}$

គេបាន៖

$\mathbf{(142850+b)b+1=142857\times 7+1=1000000}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{1000}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{b=7}$ ជាចម្លើយដែលត្រូវរក ។

លំហាត់ទី២០

គេឱ្យចំនួន $m = 21a7b_{10}$ និង $n = b7a12_{10}$

ចូរកំណត់លេខ a និង b ដើម្បីឱ្យ $\frac{n}{m} = 4$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់លេខ a និង b

គេមាន $m = 21a7b_{10}$

$$= 20000 + 1000 + 100a + 70 + b$$
$$= 21070 + 100a + b$$

និង $n = b7a12_{10}$

$$= 10000b + 7000 + 100a + 10 + 2$$
$$= 10000b + 100a + 7012$$

ដោយ $\frac{n}{m} = 4$ នោះ $n = 4m$

$$10000b + 100a + 7012 = 4(20170 + 100a + b)$$
$$9996b - 3000a = 73668$$
$$3332b - 1000a = 24556$$

គេទាញ $a = \frac{3332b - 24556}{1000}$

ដោយ $a \geq$ នោះ $b \geq \frac{25556}{3332}$ ឬ $b \geq 8$ ហេតុនេះ $b = 8$ ឬ $b = 9$

ចំពោះ $b = 8$ នោះ $a = 2$ ហើយចំពោះ $b = 9$ នោះ $a \in IN$

ដូចនេះ $a = 2\ ,\ b = 9$ ។

ជំពូកទី២

ពហុធា និង វិធីចែកពហុធា

១-ឯកធា និង ពហុធា

ក-ឯកធា

-ឯកធា គឺជាកន្សោមដែលរបមាណវិធីលើអថេរមានតែវិធីគុណ និង ស្វ័យគុណដែលមាននិទស្សន្តគត់វិជ្ជមាន ឬ សូន្យ ។

-ឯកធាដូចគ្នា គឺជាឯកធាដែលមានផ្នែកអថេរដូចគ្នា ។

-ដឺក្រេនៃឯកធា ជាផលបូកនិទស្សន្តរបស់អថេរនីមួយៗនៃឯកធា ។

ខ-ពហុធា

-ពហុធា ជាផលបូកនៃច្រើនឯកធាខុសគ្នា ។

-ដឺក្រេនៃពហុធា គឺជាដឺក្រេរបស់តួដែរមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេ ។

គ-ប្រមាណវិធីលើពហុធា

-ដើម្បីធ្វើ ផលបូក ឬ ដក នៃពហុធា ពីរ ឬច្រើន គេត្រូវបូក ឬ ដកឯកធា

ដែលដូចគ្នា ។

-ដើម្បីគុណពហុធា និង ពហុធា គេយកតួនីមួយៗនៃពហុធាទីមួយ គុណគ្រប់តួនៃពហុធាទីពីរ រួចធ្វើប្រមាណវិធី (បង្រួម) ។

ឃ-រូបមន្ត

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
5. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
6. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
7. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
8. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
9. $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

២-ប្រមាណវិធីចែកពហុធា

ក-ទ្រឹស្តីវិធីចែកពហុធា

-ឧបមាថាគេមានពហុធាពីរ A និង B មានអថេរដូចគ្នា ហើយមានដឺក្រេ

$\mathbf{m}$ និង $\mathbf{n}$ រៀងគ្នា ។ បើ $\mathbf{m \geq n}$ គេអាចរកកន្សោមពីជគណិត $\mathbf{Q}$ និង $\mathbf{R}$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mathbf{A = B \times Q + R}$ ។ ដឺក្រេនៃ $\mathbf{R}$ តូចជាងដឺក្រេនៃ $\mathbf{B}$ ។

$\mathbf{Q}$ ជាផលចែក ហើយ $\mathbf{R}$ ជាសំណល់នៅក្នុងវិធីចែក ។

ផលចែក $\mathbf{Q}$ មានដឺក្រេ $\mathbf{m - n}$ ។

-បើ $\mathbf{R = 0}$ គេបាន $\mathbf{A = B \times Q}$ នោះគេថា $\mathbf{A}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{B}$ ។

ខ-តួចែករួមធំបំផុត និង ពហុគុណរួមតូចបំផុត

-តួចែករួមធំបំផុតនៃកន្សោម $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ គឺជាផលគុណកត្តារួមដែលមាន និទស្សន្តតូចជាងគេ។

-ពហុគុណរួមតូចបំផុត គឺជាផលគុណគ្រប់កត្តាមិនរួម និង គ្រប់កត្តារួម ដែលមាននិទស្សន្តធំជាងគេ ។

✱ វិធាន

♦ដើម្បីគណនាតួចែករួមធំបំផុត៖

1. ដាក់ជាផលគុណកត្តាគ្រប់តួទាំងអស់ ។

2. ជ្រើសរើសយកតែកត្តារួម ដែលមាននិទស្សន្តតូចជាងគេ ។

3. តួចែករួមធំបំផុតជាផលគុណកត្តារួមទាំងនោះ ។

♦ដើម្បីគណនាតួចែករួមតូចបំផុត៖

1. ដាក់ជាផលគុណកត្តាគ្រប់តួទាំងអស់ ។

2. ជ្រើសរើសយកកត្តាមិនរួម និង កត្តាដែលមាននិទស្សន្តធំជាងគេ ។

3. ពហុគុណរួមតូចបំផុតជាផលគុណកត្តាទាំងនោះ ។

គ-ប្រមាណវិធីបូក ដកកន្សោមប្រភាគ

1. $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}=\frac{A+B}{D}$

2. $\frac{A}{D}-\frac{B}{D}=\frac{A-B}{D}$

3. $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}-\frac{C}{D}=\frac{A+B-C}{D}$ ($D\neq 0$)

✱ វិធាន

♦ដើម្បីគណនាផលបូក ឬ ដកប្រភាគ៖

1. តម្រូវប្រភាគនីមួយៗឱ្យមានភាគបែងរួម។

2. ធ្វើប្រមាណវិធី បូក ឬ ដកភាគយក ទុកភាគបែងរួម ។

3. សម្រួលលទ្ធផល ។

ឃ-ប្រមាណវិធីគុណ និង ប្រមាណវិធីចែក

1. $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}$

2. $\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C}$

($B , C , D \neq 0$)

✱ វិធាន

♦ដើម្បីគណនាផលគុណ និង ផលចែកប្រភាគ៖

1. ដាក់ភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណកត្តា។

2. សម្រួលកន្សោមប្រភាគនីមួយៗ ។

3. ធ្វើប្រមាណវិធីគុណ ឬ ចែកតាមរូបមន្តគ្រឹះ ។

គម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1. គណនាកន្សោមៈ

$$E=\frac{9x^2-6x+1}{5-x}\times\frac{5(x-2)-x(x-2)}{x^2-4x+4}\times\frac{1}{3x-1}$$

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x ដើម្បីឱ្យ E ជាចំនួនគត់ ។

2. គេឱ្យពហុធា $A(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ដែល $a, b, c\in Z$

ចូរកំណត់ a, b, c ដើម្បីឱ្យ $x=\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ ជាឫសរបស់ $A(x)=0$ ។

3. ចូរបង្ហាញថា $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

រួចទាញថា $|bx+ay|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$ គ្រប់ចំនួនពិត a, b, x, y

4. គេឱ្យ $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$, $z=\frac{c-a}{c+a}$

ចូរបង្ហាញថា $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

5. គេឱ្យពហុធា $f(x)=x^3-6x^2+9x+\lambda$

ក. កំណត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-4$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃ λ ដែលបានរកឃើញ ចូរដាក់ $f(x)$ ជាផលគុណកត្តា ។

គ. ចូររក x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាការេប្រាកដ ។

6. គេឱ្យពហុធា $f(x)=x^3+px+q$

ក. កំណត់ p និង q ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-2x+1

ខ. ចំពោះតម្លៃ p និង q ដែលបានរកឃើញខាងលើ ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ដែលនាំឱ្យ $f(x)$ ជាការេប្រាកដ ។

7. គេឱ្យពហុធា $P(x)=2(x^2-3x+1)^7$

រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4x+3 ។

8. គេមានពហុធា $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

គេដឹងថា $P(x)$ ចែកនឹង x ឱ្យសំណល់ 2 ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $x+1$ ឱ្យសំណល់ 1 ។

ក. តើ $P(x)$ ចែកនឹង x^2+x ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ. កំណត់ a , b, c , d ដោយដឹងថា $P(1)=P(2)=10$ ។

9.គេឱ្យពហុធា $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

គេដឹងថា $f(k)=k$ គ្រប់ $k=1 , 2 , 3 , 4$ និង $f(5)=77$ ។

ចូរកំនត់លេខមេគុណ a , b , c , d , e ។

10. គេដឹងថា $\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+2}+\frac{c}{k+3}+\frac{d}{k+4}=\frac{1}{k}$

ចំពោះ $k=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4$ ។ ចូរគណនា $A=\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9}$ ។

លំហាត់ទី១

គណនាកន្សោម៖

$$E=\frac{9x^2-6x+1}{5-x}\times\frac{5(x-2)-x(x-2)}{x^2-4x+4}\times\frac{1}{3x-1}$$

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x ដើម្បីឱ្យ E ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាកន្សោម E

គេមាន $E=\frac{9x^2-6x+1}{5-x}\times\frac{5(x-2)-x(x-2)}{x^2-4x+4}\times\frac{1}{3x-1}$

$$=\frac{(3x-1)^2}{5-x}\times\frac{(x-2)(5-x)}{(x-2)^2}\times\frac{1}{3x-1}$$

$$=\frac{(3x-1)^2(x-2)(5-x)}{(5-x)(x-2)^2(3x-1)}=\frac{3x-1}{x-2}$$

ដូចនេះ $E=\frac{3x-1}{x-2}$ ដែល $x\neq\frac{1}{3}$, $x\neq 2$, $x\neq 5$ ។

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x ៈ

គេមាន $E=\frac{3x-1}{x-2}=\frac{3(x-2)+5}{x-2}=3+\frac{5}{x-2}$

ដើម្បីឱ្យ E ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $x-2$ ចែកដាច់ 5 ពោលគឺគេត្រូវឱ្យ

$x=-3$, $x=1$ $x=3$, ឬ $x=7$ ។ដូចនេះ $x\in\{-3,1,3,7\}$ ។

លំហាត់ទី២

គេឱ្យពហុធា $A(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ដែល $a , b , c\in Z$

ចូរកំណត់ a , b , c ដើម្បីឱ្យ $x=\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ ជាឫសរបស់

$A(x)=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ a , b , c

គេមាន $x=\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$

$$x=\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}}$$
$$x=\sqrt{(1+\sqrt[3]{2})^2}$$
$$x=1+\sqrt[3]{2}$$

គេបាន $(x-1)^3=(\sqrt[3]{2})^3$

នាំឱ្យ $x^3-3x^2+3x-3=0$

ដូចនេះ $x=\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ ជាឫស $x^3-3x^2+3x-3=0$ ។

ហេតុនេះ $x=\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ ជាឫសរបស $A(x)=0$

លុះត្រាតែ $a=-3 , b=3 , c=-3$ ។

ដូចនេះ $a=-3 , b=3 , c=-3$ ជាចំនួនគត់ដែលត្រូវរក ។

លំហាត់ទី៣

ចូរបង្ហាញថា $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

រួចទាញថា $|bx+ay|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$ គ្រប់ចំនួនពិត a , b , x, y

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

តាង $A=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

$$
\begin{aligned}
&=a^2x^2-2abxy+b^2y^2+b^2x^2+2abxy+a^2y^2\\
&=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2\\
&=(a^2x^2+b^2x^2)+(a^2y^2+b^2y^2)\\
&=x^2(a^2+b^2)+y^2(a^2+b^2)=(a^2+b^2)(x^2+y^2)
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ៖ $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$ ។

ទាញថា $|bx+ay|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$

ដោយ គ្រប់ចំនួនពិត a , b , x, y គេមាន $(ax-by)^2\ge 0$

តាម $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

គេទាញបាន $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(bx+ay)^2$

ដូចនេះ៖ $|bx+ay|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យ $x=\dfrac{a-b}{a+b}\ ,\ y=\dfrac{b-c}{b+c}\ ,\ z=\dfrac{c-a}{c+a}$

ចូរបង្ហាញថា $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $1+x=1+\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2a}{a+b}$

$$1+y=1+\frac{b-c}{b+c}=\frac{2b}{b+c}$$

$$1+z=1+\frac{c-a}{c+a}=\frac{2c}{c+a}$$

គេបាន $(1+x)(1+y)(1+z)=\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\quad(1)$

ហើយ $1-x=1-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{2b}{a+b}$

$$1-y=1-\frac{b-c}{b+c}=\frac{2c}{b+c}$$

$$1-z=1-\frac{c-a}{c+a}=\frac{2a}{c+a}$$

គេបាន $(1-x)(1-y)(-z)=\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\quad(2)$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន៖

$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$ ពិត ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យពហុធា $f(x)=x^3-6x^2+9x+\lambda$

ក. កំណត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-4$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃ λ ដែលបានរកឃើញ ចូរដាក់ $f(x)$ ជាផលគុណកត្តា ។

គ. ចូររក x ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាមានដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ចំនួនពិត λ

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-4$ លុះត្រាតែមានកន្សោមពីជគណិត

$Q(x)$ មួយដែល $f(x)=x^3-6x^2+9x+\lambda=(x-4)Q(x)$

យក $x=4$ គេបាន $f(4)=64-96+36+\lambda=0$

គេទាញបាន $\lambda=-4$ ។

ខ. ដាក់ $f(x)$ ជាផលគុណកត្តា

ចំពោះ $\lambda=-4$ គេបាន $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$

ដោយ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-4$ នោះគេអាចសរសេរៈ

$$f(x)=(x-4)(x^2+\alpha x+\beta)$$
$$=x^3+\alpha x^2+\beta x-4x^2-4\alpha x-4\beta$$
$$=x^3+(\alpha-4)x^2+(\beta-4\alpha)x-4\beta$$

ដោយប្រៀបធៀបកន្សោមនេះជាមួយនឹង $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$

គេបាន៖

$\begin{cases}\alpha-4=-6\\ \beta-4\alpha=9\\ -4\beta=-4\end{cases}$ នាំឱ្យ $\alpha=-2$, $\beta=1$

គេបាន $f(x)=(x-4)(x^2-2x+1)$

ដូចនេះ $f(x)=(x-4)(x-1)^2$ ។

គ.រក x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាការេប្រាកដ

គេមាន $f(x)=(x-4)(x-1)^2$

ដោយ $(x-1)^2$ ជាការេប្រាកដគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $x>1$ នោះដើម្បីឱ្យ

$f(x)$ ជាការេប្រាកដនោះគេគ្រាន់តែឱ្យ $x-4$ ជាការេប្រាកដ ។

គេបាន $x-4=p^2$ គ្រប់ $p\in IN=\{1,2,3,\ldots\}$

ដូចនេះ $x=p^2+4$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យពហុធា $f(x)=x^3+px+q$

ក. កំណត់ p និង q ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-2x+1

ខ. ចំពោះតម្លៃ p និង q ដែលបានរកឃើញខាងលើ ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួន

គត់រិជ្ជមាន x ដែលនាំឱ្យ $f(x)$ ជាការប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ p និង q

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x^2-2x+1=(x-1)^2$ លុះត្រាតែមាន

កន្សោមពីជគណិត $Q(x)$ មួយដែល $f(x)=(x-1)^2Q(x)$

ឬ $x^3+px+q=(x-1)^2Q(x)\ \ (1)$

យក $x=1$ ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖ $1+p+q=0\Rightarrow q=-1-p$

គេបាន $f(x)=x^3+px-1-p$

$$=(x-1)(x^2+x+1)+p(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2+x+1+p)$$

ដោយ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^2$ នោះគេបាន $x^2+x+1+p$

ត្រូវតែចែកដាច់នឹង $x-1$ ពោលគឺ $x=1$ ជាឬស $x^2+x+1+p=0$

គេបាន $1^2+1+1+p=0 \Rightarrow p=-3$ ហើយ $q=-1-(-3)=2$

ដូចនេះ $p=-3$, $q=2$ ។

ខ. កំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x

ចំពោះ $p=-3$, $q=2$

គេបាន $f(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+\alpha)$

យក $x=0$ គេបាន $f(0)=2=\alpha$

ដូចនេះ $f(x)=(x-1)^2(x+2)$

ដោយកត្តា $(x-1)^2$ ជាការេប្រាកដគ្រប់ចំនួនគត់ $x>1$ ។

ហេតុនេះដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាការេប្រាកដលុះត្រាតែ $x+2$ ជាការេប្រាកដ ។

គេបាន $x+2=k^2$ $\forall k \geq 2$, $k \in IN$

ដូចនេះ $x=k^2-2$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យពហុធា $P(x)=2(x^2-3x+1)^7$

រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4x+3 ។

ដំណោះស្រាយ

រកសំណល់

តាង $R(x)=ax+b$ ជាសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4x+3

នោះមានកន្សោមពីជគណិត $Q(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$P(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+R(x)$$

ឬ $2(x^2-3x+1)^7=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b$

យើងដឹងថា $x^2-4x+3=0$ ពេលដែល $x=1$ ឬ $x=3$

បើ $x=1$ គេបាន $-2=a+b$ (1)

បើ $x=3$ គេបាន $2=3a+b$ (2)

យកសមីការ (2) ដកសមីការ (1) គេបាន $4=2a\Rightarrow a=2$

តាម (1) គេបាន $b=-2-a=-2-2=-4$

ដូចនេះ $a=2$, $b=-4$ និង $R(x)=-2x+4$ ។

លំហាត់ទី៨

គេមានពហុធា $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

គេដឹងថា $P(x)$ ចែកនឹង x ឱ្យសំណល់ 2 ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $x+1$ ឱ្យសំណល់ 1 ។

ក. តើ $P(x)$ ចែកនឹង x^2+x ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ. កំណត់ a , b , c , d ដោយដឹងថា $P(1)=P(2)=10$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. តើ $P(x)$ ចែកនឹង x^2+x ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

សម្មតិកម្ម $P(x)$ ចែកនឹង x ឱ្យសំណល់ 2 ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $x+1$ ឱ្យសំណល់ 1 នាំឱ្យមានកន្សោមពីជគណិត $Q_1(x)$ និង $Q_2(x)$ ដែល៖

$$P(x)=xQ_1(x)+2 \text{ ឬ } \frac{P(x)}{x}=Q_1(x)+\frac{2}{x} \quad (1)$$

$$P(x)=(x+1)Q_2(x)+1 \text{ ឬ } \frac{P(x)}{x+1}=Q_2(x)+\frac{1}{x+1} \quad (2)$$

ដកសមីការ (1) និង (2) គេបាន

$$\frac{P(x)}{x}-\frac{P(x)}{x+1}=Q_1(x)-Q_2(x)+\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}$$

ឬ $\frac{(x+1)-x}{x(x+1)}P(x)=Q_1(x)-Q_2(x)+\frac{x+2}{x(x+1)}$

ឬ $P(x)=[Q_1(x)-Q_2(x)](x^2+x)+x+2$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $P(x)$ ចែកនឹង x^2+x ឱ្យសំណល់ $R(x)=x+2$

ខ. កំណត់ $a\,,b\,,\,c\,,d$

តាមសម្រាយខាងលើ $P(x)$ ចែកនឹង x^2+x ឱ្យសំណល់ $R(x)=x+2$

នាំឱ្យមានកន្សោមពីជគណិត $Q(x)=\alpha x+\beta$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$P(x)=(x^2+x)(\alpha x+\beta)+x+2$

ដោយដឹងថា $P(1)=P(2)=10$ នោះ $\begin{cases}2(\alpha+\beta)+3=10\\6(2\alpha+\beta)+4=10\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{7}{2}\\2\alpha+\beta=1\end{cases}$ នាំឱ្យ $\alpha=-\frac{5}{2}$ និង $\beta=6$

គេបាន $P(x)=(x^2+x)(-\frac{5x}{2}+6)+x+2$

$$P(x)=-\frac{5x^3}{2}+6x^2-\frac{5x^2}{2}+6x+x+2=-\frac{5}{2}x^3+\frac{7}{2}x^2+7x+2$$

ដោយ $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

ដូចនេះ $a=-\frac{5}{2}\,,b=\frac{7}{2}\,,c=7\,,d=2$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យពហុធា $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

គេដឹងថា $f(k)=k$ គ្រប់ $k=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4$ និង $f(5)=77$ ។

ចូរកំនត់លេខមេគុណ $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d\ ,\ e$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់លេខមេគុណ $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d\ ,\ e$

តាងពហុធា $g(x)=f(x)-x$ ដោយ $f(k)=k$ គ្រប់ $k=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4$

នោះគេបាន $g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$

ហេតុនេះ $g(x)=\lambda(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

គេបាន $f(x)-x=\lambda(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

ឬ $f(x)=\lambda(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+x$

បើ $x=5$ នោះ $f(5)=24\lambda+5$ តែ $f(5)=77$

គេបាន $24\lambda+5=77\Rightarrow\lambda=3$

ដូចនេះ $f(x)=3(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+x$

ឬ $f(x)=3x^4-30x^3+105x^2-149x+72$

ដោយ $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

ដូចនេះ $a=3$, $b=-30$, $c=105$, $d=-149$, $e=72$ ។

លំហាត់ទី១០

គេដឹងថា $\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+2}+\frac{c}{k+3}+\frac{d}{k+4}=\frac{1}{k}$ ចំពោះ $k=1\,,2\,,3\,,4$

ចូរគណនា $A=\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A=\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9}$

តាងពហុធា៖

$$P(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x+3}+\frac{d}{x+4}-\frac{1}{x})\ (1)$$

គេមាន $\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+2}+\frac{c}{k+3}+\frac{d}{k+4}=\frac{1}{k}$ ចំពោះ $k=1\,,2\,,3\,,4$

ហេតុនេះ $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=0$ ។

ដោយ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួននៃ x នោះនាំឱ្យមានចំនួនពិត $\lambda\neq 0$

ដែល $P(x)=\lambda(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\ (2)$

តាម (1) គេអាចសរសេរ៖

$$P(x)=x(x+1)...(x+4)(\frac{a}{x+1}+...+\frac{d}{x+4})-(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

បើ $x=0\Rightarrow P(0)=-24$ តែតាម (2) គេបាន $P(0)=24\lambda$

គេទាញបាន $24\lambda = -24 \Rightarrow \lambda = -1$ ។

ហេតុនេះ $P(x) = -(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ (3)

យក $x = 5$ ជួសក្នុង (1) គេបាន៖

$$P(5) = 5.6.7.8.9\left(\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9}-\frac{1}{5}\right)$$ និង $P(5) = -24$

គេបាន $5.6.7.8.9(\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9}-\frac{1}{5}) = -24$

គេទាញ $\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9} = -\frac{1}{630}+\frac{1}{5} = \frac{125}{630} = \frac{25}{126}$

ដូចនេះ $A = \frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}+\frac{d}{9} = \frac{25}{126}$ ។

ជំពូកទី៣

ចំនួនកុំផ្លិច

១-សមីការដឺក្រេទីពីរមានមួយអញ្ញាត

ក-និយមន័យ

សមីការដែលមានរាងទូទៅ $ax^2+bx+c=0$ ហៅថាសមីការដឺក្រេទីពីរមានមួយអញ្ញាតដែល x ជាអញ្ញាត ហើយលេខមេគុណ a,b,c ជាចំនួនថេរ និង $a\neq 0$ ។

ខ-ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរ

សន្មតថាគេមានសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

ឌីសគ្រីមីណង់សមីការ $\Delta=b^2-4ac$

-បើ $\Delta>0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាគឺ៖

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

-បើ $\Delta=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$

-បើ $\Delta<0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា៖

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

គ-ទំនាក់ទំនង ស និង លេខមេគុណ

បើ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2 + bx + c = 0 \ , a \neq 0$

នោះគេមាន៖

-ផលបូកឫស $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

-ផលគុណឫស $P = \alpha.\beta = \frac{c}{a}$

ឃ-មុធាគណនា សនៃសមីការដឺក្រេទីពីរងាយ

ឧបមាថាគេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2 + bx + c = 0 \ , a \neq 0$

-បើ $a + b + c = 0$ សមីការមានឫស $x_1 = 1 \ ; \ x_2 = \frac{c}{a}$

-បើ $b = a + c$ សមីការមានឫស $x_1 = -1 \ , \ x_2 = -\frac{c}{a}$

ង-រូបមន្តដាក់ជាផលគុណកត្តា

បើ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2 + bx + c = 0 \ , a \neq 0$ នោះគេបាន

$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ ។

ច-បង្កើតសមីការដឺក្រេទីពីរ

បើគេដឹងផលបូក $\alpha+\beta=S$ និង ផលគុណ $\alpha\beta=P$ នោះ α និង β

ជាឫសសមីការដឺក្រេទីពីរ $x^2-Sx+P=0$ ។

២-វិសមភាព

ក-លក្ខណៈវិសមភាព

1. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a , b , c បើ $a>b$ នោះគេបាន $a+c>b+c$

 ឬ $a-c>b-c$ ។

2. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a , b , c គេមាន៖

-បើ $a>b$ និង $c>0$ នោះ $ac>bc$

-បើ $a>b$ និង $c<0$ នោះ $ac<bc$

ខ-វិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a\geq 0$ និង $b\geq 0$ គេមាន៖

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $a=b$ ។

៣-វិសមីការតម្លៃដាច់ខាត

បើ $\alpha > 0$ នោះគេបាន៖

1. $|ax+b| < \alpha \Leftrightarrow$ $ax+b < \alpha$ និង $ax+b > -\alpha$

2. $|ax+b| > \alpha \Leftrightarrow$ $ax+b > \alpha$ ឬ $ax+b < -\alpha$

3. $|ax+b| = \alpha \Leftrightarrow ax+b = \pm\alpha$

៤-សញ្ញារបស់ទ្វេធាដឺក្រេទីមួយ

ចំពោះទ្វេធា $f(x) = ax+b$ មាន $x = -\dfrac{b}{a}$ ជាឫស គេកំណត់សញ្ញាទ្វេធានេះទៅតាមសញ្ញារបស់ a ដូចតារាងខាងក្រោម៖

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax+b$	សញ្ញាផ្ទុយពី a	0	សញ្ញាដូច a

៥-សញ្ញារបស់ត្រីធាដឺក្រេទីពីរ

ចំពោះត្រីធា $f(x) = ax^2+bx+c$ មានឫសពីរ α និង β ដែល $\alpha < \beta$

x	$-\infty$	α		β	$+\infty$
$f(x) = ax^2+bx+c$	សញ្ញាដូច a	0	សញ្ញាផ្ទុយពី a	0	សញ្ញាដូច a

៦-ចម្លើយវិសមីការដឺក្រេទីពីរ

-ករណី $\Delta > 0$ និង $a > 0$ មានឫស α , β $(\alpha < \beta)$

ក. $ax^2 + bx + c > 0$ មានចម្លើយ $x < \alpha$, $x > \beta$ ។

ខ. $ax^2 + bx + c < 0$ មានចម្លើយ $\alpha < x < \beta$ ។

គ. $ax^2 + bx + c \geq 0$ មានចម្លើយ $x \leq \alpha$, $x \geq \beta$

ឃ. $ax^2 + bx + c \leq 0$ មានចម្លើយ $\alpha \leq x \leq \beta$ ។

-ករណី $\Delta = 0$ និង $a > 0$ មានឫសឌុប

ក. $ax^2 + bx + c > 0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតលើកលែងតែ $x = -\dfrac{b}{2a}$

ខ. $ax^2 + bx + c < 0$ គ្មានចម្លើយ ។

គ. $ax^2 + bx + c \geq 0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ឃ. $ax^2 + bx + c \leq 0$ មានចម្លើយ $x = -\dfrac{b}{2a}$ ។

-ករណី $\Delta < 0$ និង $a > 0$ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច

ក. $ax^2 + bx + c > 0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ខ. $ax^2 + bx + c < 0$ គ្មានចម្លើយ ។

គ. $ax^2 + bx + c \geq 0$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ឃ. $ax^2+bx+c\le 0$ គ្មានចម្លើយ ។

ការប្រលំហាត់ជ្រើសរើស

1. គេមានសមីការ $x^2-2x-1=0$ មានឫសតាងដោយ α និង β ។

ចូរគណនា $A=\alpha^4+6\beta^2$ ។

2. គេឱ្យសមីការ $x^2-x-1=0$ មានឫសតាងដោយ α និង β ។

ចូរគណនា $A=\alpha^5+2\beta^3+\beta$

3. គេឱ្យសមីការ $(E): x^2-2(m+1)x+4m-9=0$

ក. បង្ហាញថា (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $x_1{}^2+x_2{}^2=2(x_1+x_2)+17$ ដែល x_1, x_2 ជាឫស ។

4. គេឱ្យសមីការ $(E_1): x^2+px+q=0$ និង $(E_2): x^2+p'x+q'=0$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q' ដើម្បីឱ្យ (E_1) និង (E_2) មានឫសរួមមួយ ។

5. គេឱ្យសមីការ $(E_1): x^2+px+q=0$ និង $(E_2): x^2+p'x+q'=0$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q' ដើម្បីឱ្យ (E_1) និង (E_2) មានឫស

រួមមួយ ។

6. គេឱ្យ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ និង $c+\frac{a+b+c}{3} \geq 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើនេះចូរស្រាយថា $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

7. គេឱ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

8. គេឱ្យ a , b , x , y ជាចំនួនវិជ្ជមាន និង $a+b=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{ax+by} \geq a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ ។

9.គេឱ្យ a , b , $c > 0$ ដែល $abc \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \geq \frac{27}{8}$

10. គេឱ្យ a, b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា៖

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

11. គេឱ្យ a, b , c, d ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព៖

$$(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1) > (ac+bd-1)^2$$

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

12. គេឱ្យ $x\,,y,z>0$ ដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{x^3}{(1-x)^2}+\dfrac{y^3}{(1-y)^2}+\dfrac{z^3}{(1-z)^2}\geq\dfrac{1}{4}$

13. គេមានសមីការ $(E):\ x^2+px+q=0$

បើ $x=\sqrt[3]{\alpha}$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះចូរស្រាយថាគេមានទំនាក់

ទំនង $\alpha^2+(p^3-3pq)\alpha+q^3=0$ ។

14. ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{x^2-3x+2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{x^2-3x+2}$$

15. ដោះស្រាយសមីការ

$$x^2-x+6=\sqrt{x^3+8}$$

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី១

គេមានសមីការ $x^2-2x-1=0$ មានឫសតាងដោយ α និង β ។

ចូរគណនា $A=\alpha^4+6\beta^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A=\alpha^4+6\beta^2$

ដោយ α និង β ជាឫស $x^2-2x-1=0$ នោះគេបាន

$$\begin{cases}\alpha^2-2\alpha-1=0 & (1)\\ \beta^2-2\beta-1=0 & (2)\end{cases}$$

តាម (1) គេទាញ $\alpha^2=2\alpha+1$

លើកជាការេគេបាន $\alpha^4=(2\alpha+1)^2$

$$\alpha^4=4\alpha^2+4\alpha+1$$
$$\alpha^4=4(2\alpha+1)+4\alpha+1$$
$$\alpha^4=12\alpha+5$$

តាម (2) គេទាញ $\beta^2=2\beta+1$

គេបាន $A=\alpha^4+6\beta^2$

$$=12\alpha+5+6(2\beta+1)$$
$$=12(\alpha+\beta)+11$$

ដោយ $\alpha+\beta=2$ នោះ $A=12(2)+11=35$

ដូចនេះ $A=35$ ។

លំហាត់ទី២

គេឱ្យសមីការ $x^2 - x - 1 = 0$ មានឫសតាងដោយ α និង β ។

ចូរគណនា $A = \alpha^5 + 2\beta^3 + \beta$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A = \alpha^5 + 2\beta^3 + 3\beta$

ដោយ α និង β ជាឫសនៃ $x^2 - x - 1 = 0$ នោះគេបាន $\begin{cases} \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \\ \beta^2 - \beta - 1 = 0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} \alpha^2 = \alpha + 1 \\ \beta^2 = \beta + 1 \end{cases}$

គេមាន $A = \alpha^5 + 2\beta^3 + \beta$

$$\begin{aligned}
&= \alpha(\alpha^2)^2 + 2\beta.\beta^2 + \beta \\
&= \alpha(\alpha+1)^2 + 2\beta(\beta+1) + \beta \\
&= \alpha(\alpha^2 + 2\alpha + 1) + 2\beta^2 + 2\beta + \beta \\
&= \alpha(\alpha + 1 + 2\alpha + 1) + 2(\beta + 1) + 3\beta \\
&= \alpha(3\alpha + 2) + 5\beta + 2 \\
&= 3\alpha^2 + 2\alpha + 5\beta + 2 \\
&= 3(\alpha + 1) + 2\alpha + 5\beta + 2 = 5(\alpha + \beta) + 2
\end{aligned}$$

ដោយ $\alpha + \beta = 1$ នោះ $A = 5 + 2 = 7$

ដូចនេះ $A = 7$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យសមីការ $(E): x^2 - 2(m+1)x + 4m - 9 = 0$

ក. បង្ហាញថា (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 2(x_1 + x_2) + 17$ ដែល x_1, x_2 ជាឫស ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m

ឌីសគ្រីមីណង់បង្រួមនៃសមីការគឺ៖

$$\begin{aligned}\Delta' &= (m+1)^2 - (4m-9) \\ &= m^2 + 2m + 1 - 4m + 9 = (m-1)^2 + 9 > 0 \quad \forall m \in IR\end{aligned}$$

ដូចនេះ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិតជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 2(x_1 + x_2) + 18$

ដោយ x_1, x_2 ជាឫសនោះ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) & (1) \\ x_1 x_2 = 4m - 9 & (2) \end{cases}$

គេមាន $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 2(x_1 + x_2) + 17$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2) + 17 \quad (3)$$

យកសមីការ $(1)\&(2)$ ជំនួសក្នុង (3) គេបាន៖

$$4(m+1)^2-2(4m-9)=4(m+1)+17$$

$$4m^2-4m+1=0$$

$$(2m-1)^2=0\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $m=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យសមីការ $(E_1): x^2+px+q=0$ និង $(E_2): x^2+p'x+q'=0$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q' ដើម្បីឱ្យ (E_1) និង (E_2)

មានឫសរួមមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

រកទំនាក់ទំនងរវាង p , q , p' , q'

តាង α ជាឫសរួមរបស់សមីការ (E_1) និង (E_2) នោះគេបាន៖

$$\begin{cases}\alpha^2+p\alpha+q=0 & (1)\\ \alpha^2+p'\alpha+q'=0 & (2)\end{cases}$$

ដកសមីការ $(1)\,\&\,(2)$ គេបាន ៖ $(p-p')\alpha+(q-q')=0$

គេទាញ $\alpha=-\dfrac{q-q'}{p-p'}$ យកជំនួសក្នុងសមីការ (1) គេបាន៖

$$\left(-\frac{q-q'}{p-p'}\right)^2+p\left(-\frac{q-q'}{p-p'}\right)+q=0$$

$$(q-q')^2-p(p-p')(q-q')+q(p-p')^2=0$$

$$(q-q')^2-(p-p')[p(q-q')-q(p-p')]=0$$

$$(q-q')^2-(p-p')(p'q-pq')=0$$

ដូចនេះ $(q-q')^2=(p-p')(p'q-pq')$ ។

លំហាត់ទី៥

ចូរស្រាយថា $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$?

ដែល $a,b,c\geq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

តាមមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន៖

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Rightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}\quad (1)$$

ដូចគ្នាដែរគេបាន $b+c\geq 2\sqrt{bc}$ (2) និង $c+a\geq 2\sqrt{ac}$ (3)

ធ្វើវិធីគុណវិសមភាព (1) , (2) & (3) អង្គនិងអង្គគេបាន៖

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ac}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}=8abc$$

ដូចនេះ $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យ $a \geq 0 , b \geq 0 , c \geq 0$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ និង $c+\frac{a+b+c}{3} \geq 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើនេះចូរស្រាយថា $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ និង $c+\frac{a+b+c}{3} \geq 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$

ឧបមាថា $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ពិត

គេបាន $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$

$$(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}.\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $c+\frac{a+b+c}{3} \geq 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}$ ។

ខ.ស្រាយថា $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

គេមាន $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (1)

$$c+\frac{a+b+c}{3}\geq 2\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}} \quad (2)$$

បូកវិសមភាព $(1)\,\&\,(2)$ អង្គ និង អង្គគេបាន៖

$$a+b+c+\frac{a+b+c}{3}\geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}})$$

$$\frac{4}{3}(a+b+c)\geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}) \quad (3)$$

ដោយ

$$\sqrt{ab}+\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}\geq 2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{c.\frac{a+b+c}{3}}}=2\sqrt[4]{abc.\frac{a+b+c}{3}} \quad (4)$$

តាម $(3)\,\&\,(4)$ គេបាន៖

$$\frac{4}{3}(a+b+c)\geq 4\sqrt[4]{abc.\frac{a+b+c}{3}}$$

$$a+b+c\geq 3\sqrt[4]{abc.\frac{a+b+c}{3}}$$

លើកអង្គទាំងពីរជាស្វ័យគុណ 4 គេបាន៖

$$(a+b+c)^4\geq 81.abc.\frac{a+b+c}{3}$$

$$(a+b+c)^3\geq 27abc$$

ដូចនេះ $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន៖

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2} \geq ab^2c \ (1) \ , \frac{b^2c^2+c^2a^2}{2} \geq abc^2 \ (2), \frac{a^2b^2+c^2a^2}{2} \geq a^2bc \ (3)$$

បូកវិសមភាពទាំងនេះអង្គនិងអង្គគេបាន៖

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq ab^2c+abc^2+a^2bc \quad (4)$$

មាន $(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2bc+abc^2+a^2bc)$

ឬ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$

វិសមភាព (4) អាចសរសេរ៖

$$(ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+abc^2+a^2bc) \geq a^2bc+ab^2c+abc^2$$

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3(a^2bc+ab^2c+abc^2)$$

ដូចនេះ៖ $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យ a , b , x , y ជាចំនួនវិជ្ជមាន និង $a+b=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{ax+by} \ge a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{ax+by} \ge a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$

ឧបមាថា $\sqrt{ax+by} \ge a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ ពិត

សមមូល $ax+by \ge (a\sqrt{x}+b\sqrt{y})^2$

$$ax+by \ge a^2x+2ab\sqrt{xy}+b^2y \quad (1)$$

ដោយ $a+b=1$ នោះ វិសមភាព (1) អាចសរសេរ៖

$$(ax+by)(a+b) \ge a^2x+2ab\sqrt{xy}+b^2y$$

$$a^2x+abx+aby+b^2y \ge a^2x+2ab\sqrt{xy}+b^2y$$

$$abx+aby-2ab\sqrt{xy} \ge 0$$

$$ab(x+y-2\sqrt{xy}) \ge 0$$

$$ab(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \ge 0$$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{ax+by} \ge a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យ $a , b , c > 0$ ដែល $abc \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \geq \frac{27}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \geq \frac{27}{8}$

គេមាន $a^2+1 \geq 2a$ គ្រប់ $a > 0$

គេបាន $4a^2+4a+4 \geq 3a^2+6a+3 = 3(a+1)^2$

គេទាញ $a^2+a+1 \geq \frac{3(a+1)^2}{4}$

ឬ $\frac{a^2+a+1}{a+1} \geq \frac{3(a+1)}{4}$

ឬ $1+\frac{a^2}{1+a} \geq \frac{3\sqrt{a}}{2}$ ព្រោះ $a+1 \geq 2\sqrt{a}$

ដូចគ្នាដែរ $1+\frac{b^2}{1+b} \geq \frac{3\sqrt{b}}{2}$ និង $1+\frac{c^2}{1+c} \geq \frac{3\sqrt{c}}{2}$

គេបាន $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \geq \frac{27\sqrt{abc}}{8}$

ដោយសម្មតិកម្ម $abc \geq 1$ នោះ $\frac{27\sqrt{abc}}{8} \geq \frac{27}{8}$

ដូចនេះ $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \geq \frac{27}{8}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា៖

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

ដំណោះស្រាយ

គេមានសមភាព៖

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$a^5+b^5+c^5=(a+b+c)^5-5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} = \frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

យើងនឹងស្រាយថា

$$\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

ឬ $3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq 2(a+b+c)^2$

ឬ $$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន៖

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \;,\; \frac{b^2+c^2}{2} \geq bc \;,\; \frac{c^2+a^2}{2} \geq ac$$

នោះ $ab+bc+ca\le\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2$

ដូចនេះ $\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}\ge\frac{10}{9}(a+b+c)^2$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យ a, b, c, d ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព៖

$$(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$$

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$

តាង $x=1-a^2-b^2$ និង $y=1-c^2-d^2$

យើងឧបមាថា $x\geq 0$ និង $y\geq 0$

វិសមភាព $(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$

សមមូល $xy>(ac+bd-1)^2$

ឬ $4xy>(2ac+2bd-2)^2$

ដោយ $x+y=2-a^2-b^2-c^2-d^2$

នោះ $2ac+2bd-2=-a^2-b^2-c^2-d^2+2ac+2bd-x-y$

$$=-[(a-c)^2+(b-d)^2+x+y]$$

គេទាញ $4xy>[(a-c)^2+(b-d)^2+(x+y)]^2\geq(x+y)^2$

ឬ $4xy > x^2 + 2xy + y^2$

ឬ $(x-y)^2 < 0$ មិនពិត ។ នាំឱ្យការឧបមាខាងលើផ្ទុយពីការពិត ។

ដូចនេះគេទាញ $x < 0$ និង $y < 0$ នាំឱ្យ $a^2 + b^2 > 1$ និង $c^2 + d^2 > 1$

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ $x\,,y,z>0$ ដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{x^3}{(1-x)^2}+\dfrac{y^3}{(1-y)^2}+\dfrac{z^3}{(1-z)^2}\geq\dfrac{1}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{x^3}{(1-x)^2}+\dfrac{y^3}{(1-y)^2}+\dfrac{z^3}{(1-z)^2}\geq\dfrac{1}{4}$

គេពិនិត្យ $\dfrac{x^3}{(1-x)^2}=\dfrac{(x-2x^2+x^3)+(2x^2-x)}{(1-x)^2}$

$$=x+\frac{2x^2-x}{(1-x)^2}$$

$$=x+\frac{(9x^2-6x+1)-(1-2x+x^2)}{4(1-x)^2}$$

$$=x+\frac{(3x-1)^2-(1-x)^2}{4(1-x)^2}=x-\frac{1}{4}+\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2}$$

ដោយ $\dfrac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2}\geq 0$ នោះ $\dfrac{x^3}{(1-x)^2}\geq x-\dfrac{1}{4}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{y^3}{(1-y)^2}\geq y-\dfrac{1}{4}$ (2) និង $\dfrac{z^3}{(1-z)^2}\geq z-\dfrac{1}{4}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) អង្គ និង អង្គគេបាន៖

$$\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\geq x+y+z-\frac{3}{4}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$ ពិត

ដូចនេះ $$\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\geq\frac{1}{4}$$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេមានសមីការ $(E): \ x^2 + px + q = 0$

បើ $x = \sqrt[3]{\alpha}$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះចូរស្រាយថាគេមានទំនាក់

ទំនង $\alpha^2 + (p^3 - 3pq)\alpha + q^3 = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\alpha^2 + (p^3 - 3pq)\alpha + q^3 = 0$

បើ $x = \sqrt[3]{\alpha}$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះគេបាន

$\sqrt[3]{\alpha^2} + p\sqrt[3]{\alpha} + q = 0$ ។

តាមសមភាព

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

បើគេយក $a = \sqrt[3]{\alpha^2}$, $b = p\sqrt[3]{\alpha}$, $c = q$ គេបាន៖

$\alpha^2 + p^3\alpha + q^3 - 3\alpha pq = 0$ (ព្រោះ $\sqrt[3]{\alpha^2} + p\sqrt[3]{\alpha} + q = 0$)

ដូចនេះ $\alpha^2 + (p^3 - 3pq)\alpha + q^3 = 0$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៤

ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{x^2-3x+2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{x^2-3x+2}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{x^2-3x+2(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{x^2-3x+2}$$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ :

នាំឱ្យ $x\le 1$ ឬ $x\ge 2$ ។

តាង $t=\sqrt{x^2-3x+2}$ សមីការអាចសរសេរ៖

$$\frac{t^2+2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=t \text{ ឬ } t^2-(\sqrt{6}+\sqrt{2})t+2\sqrt{3}=0$$

$$\Delta=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-8\sqrt{3}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$$

គេទាញឫស $t_1=\sqrt{2}$, $t_2=\sqrt{6}$

-ចំពោះ $t=\sqrt{2}$ នោះ $\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{2}$

ឬ $x^2-3x=0\Rightarrow x_1=0$, $x_2=3$

-ចំពោះ $t=\sqrt{6}$ នោះ $\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{6}$

ឬ $x^2-3x-4=0 \Rightarrow x_1=-1 , x_2=4$

ដូចនេះ $x \in \{-1 , 0 , 3 , 4\}$ ។

លំហាត់ទី១៥

ដោះស្រាយសមីការ $x^2 - x + 6 = \sqrt{x^3 + 8}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $x^2 - x + 6 = \sqrt{x^3 + 8}$

$$x^2 - x + 6 = \sqrt{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $(x+2)(x^2 - 2x + 4) \geq 0$

ដោយ $x^2 - 2x + 4 > 0$ ជានិច្ចគ្រប់ $x \in IR$

ព្រោះ $a = 1 > 0 , \Delta = -12 < 0$ ។

ហេតុនេះគេត្រូវឱ្យ $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ ។

តាង $u = x + 2$, $v = x^2 - 2x + 4$

សមីការអាចសរសេរ $u + v \geq 2\sqrt{uv} \Leftrightarrow (\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 = 0$ ឬ $u = v$

គេបាន $x + 2 = x^2 - 2x + 4$

ឬ $-x^2 + 3x - 2 = 0$ ដោយ $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = 2$

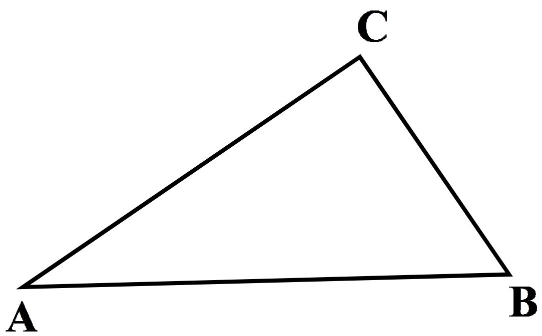
ដូចនេះ $x_1 = 1 , x_2 = 2$ ។

ជំពូកទី ៤

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និង ការអនុវត្តន៍

១-និយមន័យ

ក្នុងត្រីកោណកែង **ABC** បើ **A** ជាមុំស្រួចមួយនោះគេមានទំនាក់ទំនងដូចខាងក្រោម៖



$$\sin A = \frac{BC}{AB} \;;\; \cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} \;;\; \cot A = \frac{AC}{BC}$$

២-ទំនាក់ទំនងរវាងផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad ; \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad ; \quad \tan A = \frac{1}{\cot A}$$

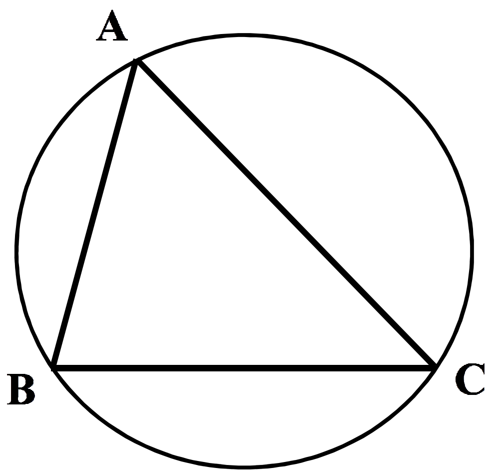
$$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} \quad ; \quad 1 + \cot^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$$

៣-តារាងតម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេស

α	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	មិនកំណត់	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

៤-ទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស

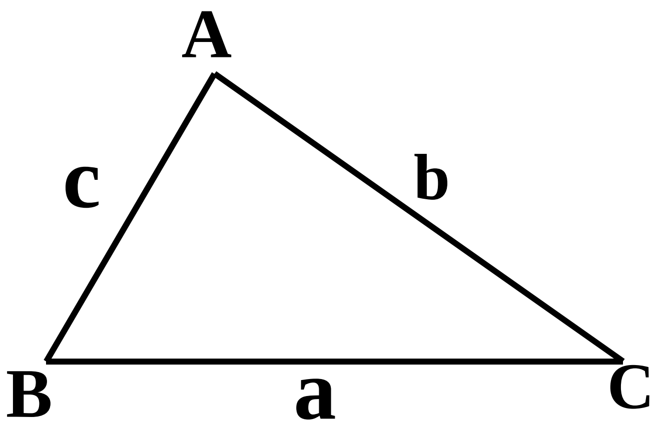
គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយមានផ្ចិត O និងកាំ R ។



គេមានទំនាក់ទំនង $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ។

៥-ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$



គេមានទំនាក់ទំនងដូចខាងក្រោម៖

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

៦-ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ

ក-ករណីស្គាល់ជ្រុងពីរ និង មុំមួយ

ផ្ទៃក្រឡា S នៃត្រីកោណ ABC មួយកំណត់ដោយៈ

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

ខ-ករណីស្គាល់ជ្រុងទាំងបី (រូបមន្តហេរ៉ុង)

ផ្ទៃក្រឡា S នៃត្រីកោណ ABC មួយកំណត់ដោយៈ

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ ដែល $p = \frac{a+b+c}{2}$ ។

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1. គេមានត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ C ។ គេដឹងថា $AB = 10\text{ cm}$

និង $\sin A + \sin B = \frac{7}{5}$ ។

ចូរកំណត់ជ្រុង AC និង BC រួចទាញរក $\tan A$ និង $\tan B$ ។

2. ដោយដឹងថា $\tan\alpha = \frac{5}{12}$ និង $0^o < \alpha < 90^o$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ និង $\cot\alpha$ ។

3. ចូរគណនា $A = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$

$$B = (a\sin x + b\cos x)^2 + (a\cos x - b\sin x)^2$$

4. គេដឹងថា $\tan x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\cos^4 x}{a} + \frac{\sin^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$

5. គេដឹងថា $\sin x + \cos x = \frac{41}{29}$ ។

ចូរគណនាផលគុណ $\sin x.\cos x$ រួចទាញរក $\sin x$ និង $\cos x$ ។

6. គេដឹងថា $\tan x + \cot x = a$ ដែល $0 < x < 90^o$ និង $a \geq 2$ ។

ចូរគណនា $\tan^3 x + \cot^3 x$ ជាអនុគមន៍នៃ a ។

7. ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព៖

ក. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

ខ. $\frac{1}{4}(\sin^8 x + \cos^8 x) - \frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$

8. គេដឹងថា $\cos a = \frac{m}{n+p}$, $\cos b = \frac{n}{p+m}$, $\cos c = \frac{p}{m+n}$

ចូរគណនាកន្សោម៖

$$M = \frac{\sin^2 a}{2 + 2\cos a - \sin^2 a} + \frac{\sin^2 b}{2 + 2\cos b - \sin^2 b} + \frac{\sin^2 c}{2 + 2\cos c - \sin^2 c}$$

9.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$

10. គេមានត្រីកោណ ABC មួយដែល $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព

$$bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

11. គេមានត្រីកោណ ABC មួយដែល $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

តាង R និង S រៀងគ្នាជាកាំ និង ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC នេះ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{4S}$

12. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ចូរស្រាយថា៖

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

13. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណចូរស្រាយថា៖

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)=8\left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right)^2$$

ដែល a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ។

14. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1-\cos A\le\frac{a^2}{2bc}$

ដែល a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\le\frac{1}{8}$

15. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា៖

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$

16. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

សមភាព $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$ ។

ចូរស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមង្ស ?

17. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $AB=5\,cm$ និងផ្ទៃក្រឡា

$S=6\,cm^2$ ។ គណនាតម្លៃ $\cot A+\cot B$ ។

18. តាង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

ក. ចូរស្រាយថា $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\frac{2R^2}{S}$

ខ. បើ ABC ជាមុំស្រួចនោះចូរទាញឱ្យបានថា ៖ $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

19. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$

ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយមានផ្ចិត O និង កាំ R ។ តាង S និង S_{OBC} ជាផ្ទៃ

ក្រឡានៃ ΔOBC និង ΔABC រៀងគ្នា ។ សន្មតថា A,B,C ជាមុំស្រួច ។

ក. ចូរស្រាយថា $S_{OBC}=\frac{1}{4}a^2\cot A$ ។

ខ. ចូរទាញបង្ហាញថា $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S$ ។

គ. ចូរទាញបង្ហាញថា $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{abc}{2R^2}$ ។

20. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

តាង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ ហើយ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង

និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

ក. $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4rR$

ខ. $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8rR$

គ. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 2p(p^2 - 3r^2 - 12rR)$

21.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ D ជាចំណុចមួយនៃជ្រុង $[BC]$ ដែល

$\angle BAD = \alpha$ និង $\angle DAC = \beta$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin B} + \dfrac{\sin\beta}{\sin C}$?

លំហាត់ទី១

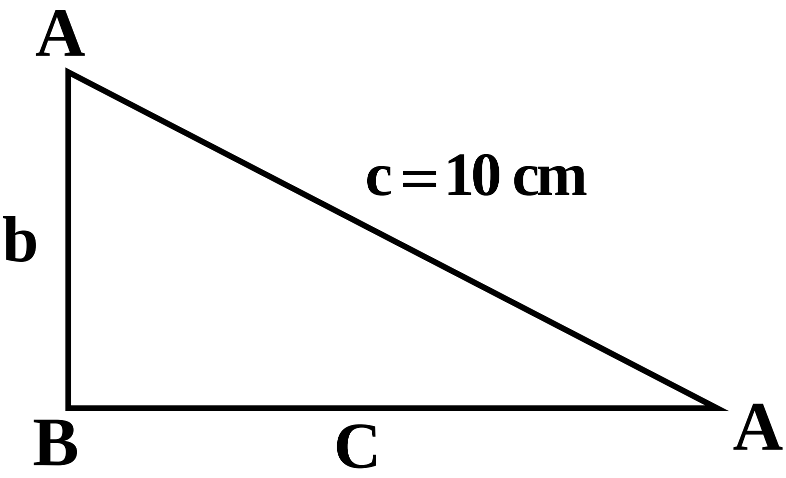
គេមានត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយកែងត្រង់ $\mathbf{C}$ ។ គេដឹងថា $\mathbf{AB = 10\ cm}$

និង $\mathbf{\sin A + \sin B = \frac{7}{5}}$ ។

ចូរកំណត់ជ្រុង $\mathbf{AC}$ និង $\mathbf{BC}$ រួចទាញរក $\mathbf{\tan A}$ និង $\mathbf{\tan B}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ជ្រុង $\mathbf{AC}$ និង $\mathbf{BC}$



តាង $\mathbf{BC = a}$, $\mathbf{AC = b}$, $\mathbf{AB = c = 10\ cm}$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរ័ក្នុងត្រីកោណកែង $\mathbf{ABC}$ គេមាន $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

ដោយ $\mathbf{c = 10}$ នោះ $\mathbf{a^2 + b^2 = 100\ \ (1)}$

ម៉្យាងទៀតតាមនិយមន័យ $\mathbf{\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{10}}$; $\mathbf{\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{10}}$

ដោយ $\sin A + \sin B = \frac{7}{5}$ នោះ $\frac{a}{10} + \frac{b}{10} = \frac{7}{5}$ ឬ $a + b = 14 \;\; (2)$

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ $(a+b)^2 - 2ab = 100$

ឬ $ab = \frac{(a+b)^2}{2} - 50 = \frac{14^2}{2} - 50 = 48 \quad (3)$

តាម (2) និង (3) គេបានប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} a + b = 14 \\ ab = 48 \end{cases}$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតនាំឱ្យ a និង b ជាឬសសមីការ $X^2 - SX + P = 0$

ឬ $X^2 - 14X + 48 = 0$

$\Delta' = 49 - 48 = 1$ គេទាញឬស $X_1 = 7 - 1 = 6 \; ; X_2 = 7 + 1 = 8$

ដូចនេះ $a = 6 , b = 8$ ឬ $a = 8 , b = 6$ ។

ទាញរក $\tan A$ និង $\tan B$ ៈ

-ករណី $a = 6 , b = 8$ គេបាន៖

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ និង } \tan B = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ ។}$$

-ករណី $a = 8 , b = 6$ គេបាន៖

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ និង } \tan B = \frac{b}{a} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ ។}$$

លំហាត់ទី២

ដោយដឹងថា $\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$ និង $0^o < \alpha < 90^o$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ និង $\cot\alpha$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ និង $\cot\alpha$

គេមាន $\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$ និង $0^o < \alpha < 90^o$

តាមទំនាក់ទំនង $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

គេទាញ $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{5}{12}\right)^2} = \dfrac{144}{169}$

ដោយ $0^o < \alpha < 90^o$ នោះ $\cos\alpha > 0$

ដូចនេះ $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ ។ ហើយតាមទំនាក់ទំនង $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

គេទាញ $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \dfrac{5}{12}.\dfrac{12}{13} = \dfrac{5}{13}$ រួច $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{12}{5}$ ។

ដូចនេះ $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$; $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$; $\cot\alpha = \dfrac{12}{5}$ ។

លំហាត់ទី៣

ចូរគណនា $A=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$

$$B=(a\sin x+b\cos x)^2+(a\cos x-b\sin x)^2$$

ដំណោះស្រាយ

$$A=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$$

ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ នោះ $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

ឬ $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ ។

គេបាន $A=\sqrt{\sin^4 x+4(1-\sin^2 x)}+\sqrt{\cos^4 x+4(1-\cos^2 x)}$

$$=\sqrt{\sin^4 x-4\sin^2 x+4}+\sqrt{\cos^4 x-4\cos^2 x+4}$$

$$=\sqrt{(\sin^2 x-2)^2}+\sqrt{(\cos^2 x-2)^2}=|\sin^2 x-2|+|\cos^2 x-2|$$

ដោយ $0\le\sin^2 x\le 1$ និង $0\le\cos^2 x\le 1$

គេបាន $A=-(\sin^2 x-2)-(\cos^2 x-2)$

$$=4-(\sin^2 x+\cos^2 x)=4-1=3$$ ។

$$B=(a\sin x+b\cos x)^2+(a\cos x-b\sin x)^2$$

$$=a^2(\sin^2 x+\cos^2 x)+b^2(\sin^2 x+\cos^2 x)=a^2+b^2$$

ដូចនេះ: $A=3$, $B=a^2+b^2$ ។

លំហាត់ទី៤

គេដឹងថា $\tan x=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\cos^4 x}{a}+\dfrac{\sin^4 x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{\cos^4 x}{a}+\dfrac{\sin^4 x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$

គេមាន $\tan x=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ នាំឱ្យ $\tan^2 x=\dfrac{b}{a}$ ដោយ $\tan x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

គេបាន $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{b}{a}$ ឬ $\dfrac{\cos^2 x}{a}=\dfrac{\sin^2 x}{b}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}$

គេទាញ $\dfrac{\cos^2 x}{a}=\dfrac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\dfrac{\cos^4}{a}=\dfrac{a}{(a+b)^2}$ (1)

ហើយ $\dfrac{\sin^2 x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\dfrac{\sin^4}{b}=\dfrac{b}{(a+b)^2}$ (2)

បូកសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន៖

$$\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{a}{(a+b)^2}+\frac{b}{(a+b)^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2}=\frac{1}{a+b}$$

ដូចនេះ $\dfrac{\cos^4 x}{a}+\dfrac{\sin^4 x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេដឹងថា $\sin x+\cos x=\frac{41}{29}$ ។

ចូរគណនាផលគុណ $\sin x.\cos x$ រួចទាញរក $\sin x$ និង $\cos x$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $\sin x.\cos x$

គេមាន $(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$

ដោយ $\sin x+\cos x=\frac{41}{29}$ និង $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

គេបាន $\left(\frac{41}{29}\right)^2=1+2\sin x\cos x$ ឬ $2\sin x\cos x=\frac{41^2-29^2}{29^2}=\frac{840}{841}$

ដូចនេះ $\sin x.\cos x=\frac{420}{841}$ ។ ទាញរក $\sin x$ និង $\cos x$

ដោយគេមាន $\sin x+\cos x=\frac{41}{29}$ និង $\sin x.\cos x=\frac{420}{841}$

នោះ $\sin x$ និង $\cos x$ ជាឫសសមីការ $X^2-\frac{41}{29}X+\frac{420}{841}=0$ ។

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយសមីការនេះគេបាន $X_1=\frac{20}{29}$; $X_2=\frac{21}{29}$

ដូចនេះ $\sin x=\frac{20}{29}$; $\cos x=\frac{21}{29}$ ឬ $\sin x=\frac{21}{29}$; $\cos x=\frac{20}{29}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេដឹងថា $\tan x+\cot x=a$ ដែល $0<x<90^{o}$ និង $a\geq 2$ ។

ចូរគណនា $\tan^3 x+\cot^3 x$ ជាអនុគមន៍នៃ a ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\tan^3 x+\cot^3 x$ ជាអនុគមន៍នៃ a

គេមាន $\tan x+\cot x=a$

គេបាន $(\tan x+\cot x)^2=a^2$

$$\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x=a^2$$ ដោយ $\tan x\cot x=1$

គេទាញ $\tan^2 x+\cot^2 x=a^2-2$

តាមសមភាព $A^3+B^3=(A+B)(A^2-A.B+B^2)$

គេបាន $\tan^3 x+\cot^3 x=(\tan x+\cot x)(\tan^2 x-\tan x\cot x+\cot^2 x)$

$$=a(a^2-2-1)=a(a^2-3)$$

ដូចនេះ $\tan^3 x+\cot^3 x=a^3-3a$ ។

លំហាត់ទី៧

ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព៖

ក. $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

ខ. $\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព៖

ក. $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

គេមាន $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

ឬ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

យក $a=\sin^2 x$ និង $b=\cos^2 x$ គេបាន៖

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$$

ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

ដូចនេះ៖ $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$ ។

ខ. $\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$

គេមាន $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ឬ $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

ដូចគ្នាដែរ $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

ឬ $a^4+b^4=\left[(a+b)^2-2ab\right]^2-2a^2b^2$

ដោយយក $a=\sin^2 x$ និង $b=\cos^2 x$ គេបានសមភាព

$$\begin{aligned}\sin^4 x+\cos^4 x&=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\\&=1-2\sin^2 x\cos^2 x\end{aligned}$$

ហើយ

$$\begin{aligned}\sin^8 x+\cos^8 x&=\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right]^2-2\sin^4 x\cos^4 x\\&=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x\\&=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x\end{aligned}$$

តាងអនុគមន៍

$$f(x)=\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}(1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x)-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x\cos^2 x)+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x-2+4\sin^2 x\cos^2 x+1}{4}$$

$$=\frac{2\sin^4 x\cos^4 x}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\dfrac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$

លំហាត់ទី៨

គេដឹងថា $\cos a = \frac{m}{n+p}$, $\cos b = \frac{n}{p+m}$, $\cos c = \frac{p}{m+n}$

ចូរគណនាកន្សោម៖

$$M = \frac{\sin^2 a}{2+2\cos a - \sin^2 a} + \frac{\sin^2 b}{2+2\cos b - \sin^2 b} + \frac{\sin^2 c}{2+2\cos c - \sin^2 c}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាកន្សោម៖

$$M = \frac{\sin^2 a}{2+2\cos a - \sin^2 a} + \frac{\sin^2 b}{2+2\cos b - \sin^2 b} + \frac{\sin^2 c}{2+2\cos c - \sin^2 c}$$

គេមាន $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = (1-\cos a)(1+\cos a)$

និង $2+2\cos a - \sin^2 a = 1 + 2\cos a + \cos^2 a = (1+\cos a)^2$

គេបាន $\frac{\sin^2 a}{2+2\cos a - \sin^2 a} = \frac{(1-\cos a)(1+\cos a)}{(1+\cos a)^2} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a}$

ហើយ $\frac{\sin^2 b}{2+2\cos b - \sin^2 b} = \frac{1-\cos b}{1+\cos b}$

និង $\frac{\sin^2 c}{2+2\cos c - \sin^2 c} = \frac{1-\cos c}{1+\cos c}$

គេបាន $E = \frac{1-\cos a}{1+\cos a} + \frac{1-\cos b}{1+\cos b} + \frac{1-\cos c}{1+\cos c}$

$$= \frac{1-\frac{m}{n+p}}{1+\frac{m}{n+p}} + \frac{1-\frac{n}{p+m}}{1+\frac{n}{p+m}} + \frac{1-\frac{p}{m+n}}{1+\frac{p}{m+n}}$$

$$= \frac{n+p-m+p+m-n+m+n-p}{m+n+p} = 1$$

ដូចនេះ $E = 1$ ។

លំហាត់ទី៩

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$

ឧបមាថា $|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$ ពិត

សមមូល $(a\cos x + b\sin x)^2 \le a^2+b^2$ ដោយ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

នោះគេបាន $(a\cos x + b\sin x)^2 \le (a^2+b^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$a^2\cos^2 x + 2ab\sin x\cos x + b^2\sin^2 x \le a^2\sin^2 x + a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x$$

ឬ $a^2\sin^2 x - 2ab\sin x\cos x + b^2\cos^2 x \ge 0$

ឬ $(a\sin x - b\cos x)^2 \ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$ ពិត ។

សម្គាល់៖ គេមាន $(a\cos x + b\sin x)^2 + (a\sin x - b\cos x)^2 = a^2+b^2$

ដោយ $(a\sin x - b\cos x)^2 \ge 0$ នោះគេទាញបាន៖

$(a\cos x + b\sin x)^2 \le a^2+b^2$ ឬ $|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$ ពិត

លំហាត់ទី១០

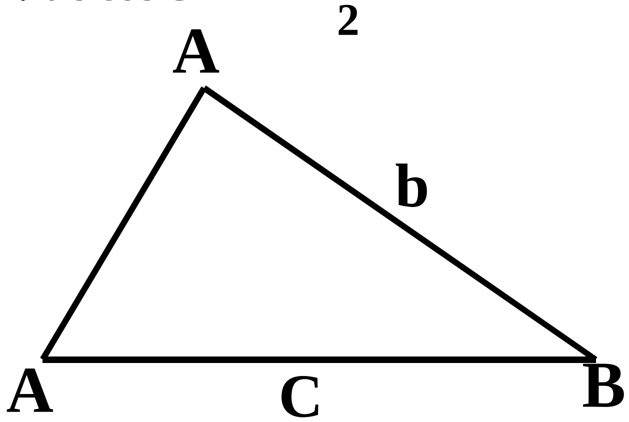
គេមានត្រីកោណ ABC មួយដែល $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព

$$bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ $bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$



តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

គេមានទំនាក់ទំនង ៖

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (1)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B \quad (2)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad (3)$$

បូកទំនាក់ទំនង $(1), (2) \& (3)$ អង្គនិងអង្គគេបាន៖

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - bc\cos A - ac\cos B - ab\cos C)$$

ដូចនេះ៖ $bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេមានត្រីកោណ ABC មួយដែល $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

តាង R និង S រៀងគ្នាជាកាំ និង ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC នេះ ។

ចូរស្រាយថា $$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{R(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{4S}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{R(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{4S}$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស និង ស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន៖

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \text{ ឬ } \frac{\cos A}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ ឬ } \begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases} \text{ និង } S=\frac{abc}{4R}$$

គេបាន $$\frac{\cos A}{a}=\frac{4R^2(\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A)}{8RS}$$

ឬ $$\frac{\cos A}{a}=\frac{R(\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A)}{4S} \quad (1)$$

ដូចគ្នាដែរ $$\frac{\cos B}{b}=\frac{R(\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B)}{4S} \quad (2)$$

និង $$\frac{\cos C}{c}=\frac{R(\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C)}{4S} \quad (3)$$

បូកសមភាព $(1),(2)\ \&(3)$ គេបាន៖

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{R(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{4S}$$ ពិត ។

លំហាត់ទី១២

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា៖

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

តាងជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ និង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

យក R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង S ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ ΔABC ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេបាន $a^2=(b^2+2bc+c^2)-2bc(1+\cos A)$

គេទាញ $1+\cos A=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$

ដោយ $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ នោះ៖ $a+b+c=2p$ និង $b+c-a=2(p-a)$

គេបាន $1+\cos A=\dfrac{4p(p-a)}{2bc}=\dfrac{2p(p-a)}{bc}$

ដូចគ្នាដែរ $1+\cos B=\frac{2p(p-b)}{ac}$, $1+\cos C=\frac{2p(p-c)}{ab}$

គេបាន

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{8p^2.p(p-a)(p-b)(p-c)}{(abc)^2}\quad(1)$$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R}$

គេទាញ $\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(abc)^2}=\frac{1}{16R^2}\quad(2)$

យកទំនាក់ទំនង (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន៖

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{8p^2}{16R^2}=\frac{1}{2}.\left(\frac{p}{R}\right)^2\quad(3)$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

គេទាញ $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{2p}{2R}=\frac{p}{R}\ (4)$

តាម (3) និង (4) គេបានទំនាក់ទំនង៖

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$ ពិត ។

សម្គាល់៖ ៖ គេអាចសួរបន្ថែមទៀតដោយឱ្យស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(1+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3 \geq \left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$$

ដោយប្រើវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេបាន៖

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C) \leq \left(\frac{1+\cos A+1+\cos B+1+\cos C}{3}\right)^3$$

ឬ $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C) \leq \left(1+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3$

ដោយ $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C) = \frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$

ដូចនេះ $\left(1+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3 \geq \left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$ ពិត។

លំហាត់ទី១៣

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណចូរស្រាយថា៖

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)=8\left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right)^2$$

ដែល $a\,,b\,,c$ ជាជ្រុងត្រីកោណ ABC និង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេបាន $a^2=(b^2-2bc+c^2)+2bc(1-\cos A)$

គេទាញ $1-\cos A=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$

ដោយ $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ នោះ៖ $a+b-c=2(p-c)$ និង $a-b+c=2(p-b)$

គេបាន $1-\cos A=\dfrac{4(p-b)(p-c)}{2bc}=\dfrac{2(p-b)(p-c)}{bc}$

ដូចគ្នាដែរ $1-\cos B=\dfrac{2(p-a)(p-c)}{ac};1-\cos C=\dfrac{2(p-a)(p-b)}{ab}$

ដូចនេះ៖ $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)=8\left(\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right)^2$

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}$

ដែល **a , b , c** ជាជ្រុងត្រីកោណ **ABC** ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \le \frac{1}{8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន $b^2 + c^2 \ge 2bc$

គេទាញ $a^2 \ge 2bc - 2bc\cos A = 2bc(1-\cos A)$

ដូចនេះ $1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \le \frac{1}{8}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $1-\cos B \le \frac{b^2}{2ac}$ (2) និង $1-\cos C \le \frac{c^2}{2ab}$ (3)

គុណវិសមភាព (1) , (2) , (3) អង្គ និង អង្គគេទទួលបាន៖

$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \le \frac{1}{8}$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា៖

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$

តាង a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណ **ABC** និង **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ។ តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

គេទាញ $\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2r\sin B \quad (1) \\ c = 2R\sin C \end{cases}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (2)$

យក **(1)** ជំនួសក្នុង **(2)** គេបាន៖

$$4R^2 \sin^2 A = 4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A)$$

សម្រួល $4R^2$ ក្នុងអង្គទាំងពីរនៃសមភាពគេបាន៖

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$ ពិត

ដូចនេះ $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា៖

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$$

គេទាញ $\cos A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B\sin C}$ ដោយ $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

គេបាន $\cot A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin A\sin B\sin C}$ (i)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេទទួលបាន $\cot B = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B}{2\sin A\sin B\sin C}$ (ii)

និង $\cot C = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$ (iii)

ធ្វើផលបូកសមភាព (i) , (ii) & (iii) គេបាន៖

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$ ពិត

ដូចនេះ $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

សមភាព $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$ ។

ចូរស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមង្ស ?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមង្ស

តាង a , b , c ជាជ្រុង និង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

គេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

គេទាញបាន $\sin A=\frac{2S}{bc}$, $\sin B=\frac{2S}{ac}$, $sibC=\frac{2S}{ab}$

គេបាន $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2S}{bc}}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

ហើយ $\cot B=\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$, $\cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

គេបាន $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$ (1)

ម៉្យាងទៀត $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{bc+ca+ab}{2S}$ (2)

តាមសម្មតិកម្ម $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$ (3)

យកសមីការ (1) & (2) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន៖

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}=\frac{ab+bc+ca}{4S}$$

ឬ $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

ទំនាក់ទំនងនេះសមមូល $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

គេទាញ $\begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a=b=c$ ។

ដោយត្រីកោណ ABC មានជ្រុងបីស្មើគ្នាវាជាត្រីកោណសមង្ស ។

សម្គាល់៖

ដោយគេអាចស្រាយថា $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$

ហើយសម្មតិកម្ម $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$

គេទាញបានសមីការ៖

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$$

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A$$

$$(\sin A-\sin B)^2+(\sin B-\sin C)^2+(\sin C-\sin A)^2=0$$

គេទាញ $\begin{cases}\sin A-\sin B=0\\ \sin B-\sin C=0\\ \sin C-\sin A=0\end{cases}$ នាំឱ្យ $\sin A=\sin B=\sin C$

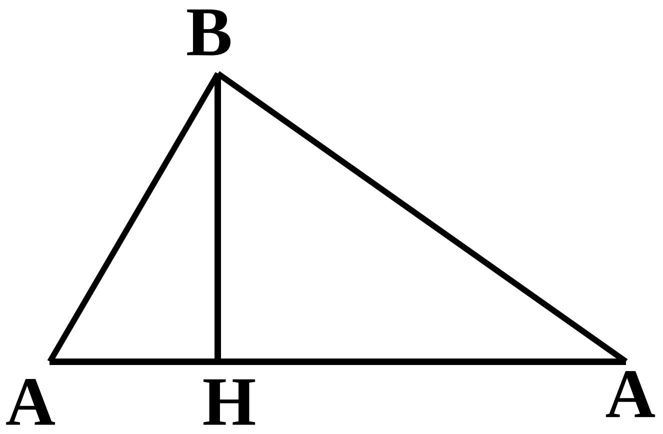
ឬ $A=B=C$ នោះ ABC ជាត្រីកោណសមង្ស ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{AB=5cm}$ និងមានផ្ទៃក្រឡា $\mathbf{S=6cm^2}$ ។ គណនាតម្លៃ $\mathbf{\cot A+\cot B}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $\mathbf{\cot A+\cot B}$



សង់កំពស់ $\mathbf{CH}$ នៃ $\mathbf{\Delta ABC}$ ។

គេមាន $\mathbf{\cot A=\frac{AH}{CH}}$ និង $\mathbf{\cot C=\frac{HB}{CH}}$

គេបាន $\mathbf{\cot A+\cot B=\frac{AH+HB}{CH}=\frac{AB}{CH}=\frac{AB^2}{AB.CH}=\frac{AB^2}{2S}}$

ដោយ $\mathbf{AB=5\ cm\ \ \&\ S=6cm^2}$

ដូចនេះ: $\mathbf{\cot A+\cot B=\frac{25}{12}}$ ។

លំហាត់ទី១៨

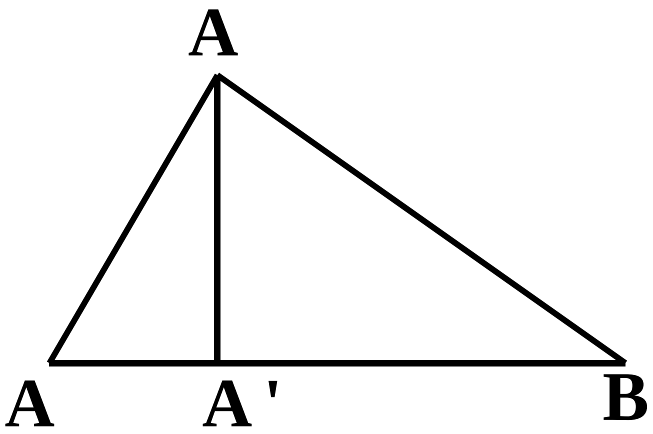
តាង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក. ចូរស្រាយថា $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{2R^2}{S}$

ខ. បើ ABC ជាមុំស្រួចនោះចូរទាញឱ្យបានថា ៖ $\cos A\cos B\cos C\le\dfrac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{2R^2}{S}$



គូសកំពស់ $AA'=h_a$ នៃ ΔABC ។ តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង ABA' & $AA'C$ គេមាន៖

$$\cot B=\frac{BA'}{AA'}\ ;\ \cot C=\frac{A'C}{AA'}$$

គេបាន $\cot B+\cot C=\dfrac{BA'+A'C}{AA'}=\dfrac{a}{h_a}=\dfrac{a^2}{2S}$

ដែល S ជាផ្ទៃក្រឡា ΔABC ។

ដូចគ្នាដែរ $\cot C+\cot A=\dfrac{b^2}{2S}$, $\cot A+\cot B=\dfrac{c^2}{2S}$

គេបាន $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{a^2b^2c^2}{8S^3}$

ដោយ $S=\dfrac{abc}{4R}$ នោះ៖ $abc=4RS$

គេបាន $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{16R^2S^2}{8S^3}$

ដូចនេះ៖ $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{2R^2}{S}$ ។

ខ. ទាញ ឱ្យបានថា ៖ $\cos A\cos B\cos C\le\dfrac{1}{8}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន៖

$$(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\frac{2R^2}{S}\quad (i)$$

បើ ABC ជាមុំស្រួចនោះ៖ $\cot A>0$, $\cot B>0$, $\cot C>0$

តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន៖

$\cot A+\cot B\ge 2\sqrt{\cot A\cot B}$, $\cot B+\cot C\ge 2\sqrt{\cot B\cot C}$

$\cot C+\cot A\ge 2\sqrt{\cot C\cot A}$

គុណវិសមភាពខាងលើនេះ អង្គ និង អង្គ គេបាន

$$(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)\geq 8\cot A\cot B\cot C \ \text{(ii)}$$

តាម $(i)\&(ii)$ គេទាញបាន $8\cot A\cot B\cot C\leq \dfrac{2R^2}{S}$

តែ $S=\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{8R^3\sin A\sin B\sin C}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

គេបាន $8\cot A\cot B\cot C\leq \dfrac{2R^2}{2R^2\sin A\sin B\sin C}$

ដូចនេះ $\cos A\cos B\cos C\leq \dfrac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$

ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយមានផ្ចិត **O** និង កាំ **R** ។

តាង **S** និង S_{OBC} ជាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔOBC និង ΔABC រៀងគ្នា ។

សន្មតថា **A,B,C** ជាមុំស្រួច ។

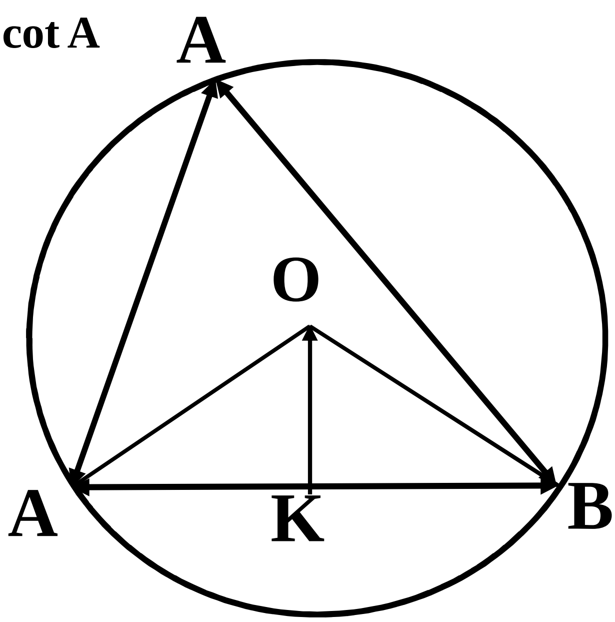
ក. ចូរស្រាយថា $S_{OBC}=\frac{1}{4}a^2\cot A$ ។

ខ. ចូរទាញបង្ហាញថា $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S$ ។

គ. ចូរទាញបង្ហាញថា $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{abc}{2R^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $S_{OBC}=\frac{1}{4}a^2\cot A$



តាង K ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង $[BC]$ នោះ $[OK]\perp[BC]$ ។

គេមាន $\angle BOK=\dfrac{\angle BOC}{2}=\angle BAC=\angle A$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង OBK គេមាន៖

$$\cot\angle BOK=\cot A=\frac{OK}{BK}=\frac{2OK}{BC}=\frac{2OK}{a}$$

គេទាញ $OK=\dfrac{1}{2}a\cot A$ ។

ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ OBC គឺ $S_{OBC}=\dfrac{1}{2}BC.OK=\dfrac{1}{4}a^2\cot A$ ពិត

ដូចនេះ៖ $S_{OBC}=\dfrac{1}{4}a^2\cot A$ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $S_{OBC}=\dfrac{1}{4}a^2\cot A$

ដូចគ្នាដែរ $S_{OCA}=\dfrac{1}{4}b^2\cot B$ និង $S_{OAB}=\dfrac{1}{4}c^2\cot C$

ដោយ $S=S_{OBC}+S_{OCA}+S_{OAB}$

គេបាន $S=\dfrac{1}{4}(a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C)$

ដូចនេះ៖ $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S$ ។

គ. ទាញបង្ហាញថា $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \dfrac{abc}{2R^2}$

គេមាន $a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C = 4S = \dfrac{abc}{R}$ ព្រោះ $S = \dfrac{abc}{4R}$

ដោយ $a^2\cot A = \dfrac{a}{\sin A}.a\cos A = 2Ra\cos A$, $b^2\cot B = 2Rb\cos B$

នោះគេបាន $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \dfrac{abc}{2R^2}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ។

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ ហើយ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹក

ក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

ក. $ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR$

ខ. $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR$

គ. $a^3+b^3+c^3-3abc=2p(p^2-3r^2-12rR)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

ក. $ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

តែគេមាន $S=pr$ នោះគេបានសមីការ

$$pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន៖

$$p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$
$$pr^2 = p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc$$

ដោយ $a+b+c=2p$ ហើយ $abc = 4R.S = 4R.pr$

$$pr^2 = p^3 - 2p^3 + (ab+bc+ca)p - 4R.pr$$
$$pr^2 = -p^3 + (ab+bc+ca)p - 4rRp$$

គេទាញ $ab+bc+ca = \dfrac{pr^2+p^3+4rRp}{p}$

ដូចនេះ $ab+bc+ca = p^2+r^2+4rR$

ខ. $a^2+b^2+c^2 = 2p^2-2r^2-8rR$

គេមាន $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

ដោយ $a+b+c=2p$ និង $ab+bc+ca = p^2+r^2+4rR$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2 = 2p^2-2r^2-8rR$ ។

គ. $a^3+b^3+c^3-3abc = 2p(p^2-3r^2-12rR)$

គេមានសមភាព៖

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)]$$

ដោយ $a+b+c=2p$ និង $ab+bc+ca = p^2+r^2+4rR$

ដូចនេះ $a^3+b^3+c^3-3abc = 2p(p^2-3r^2-12rR)$ ។

លំហាត់ទី២១

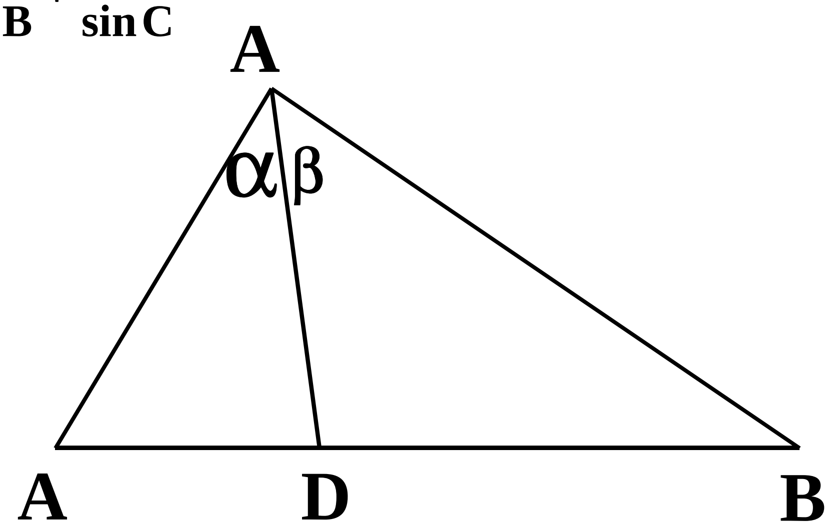
គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ **D** ជាចំណុចមួ្យនៃជ្រុង **[BC]**

ដែល $\angle BAD=\alpha$ និង $\angle DAC=\beta$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{BC}{AD}=\frac{\sin\alpha}{\sin B}+\frac{\sin\beta}{\sin C}$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{BC}{AD}=\frac{\sin\alpha}{\sin B}+\frac{\sin\beta}{\sin C}$



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសអនុវត្តន៍

ក្នុង $\Delta ABD \,\&\, \Delta ADC$

គេមាន $\frac{BD}{\sin\alpha}=\frac{AD}{\sin B}$

ឬ $BD=\frac{\sin\alpha}{\sin B}.AD \quad (1)$

ហើយ $\frac{DC}{\sin\beta}=\frac{AD}{\sin C}$ ឬ $DC=\frac{\sin\beta}{\sin C}.AD \quad (2)$

បូកទំនាក់ទំនង **(1) & (2)** គេបាន៖

$$BD+DC=\left(\frac{\sin\alpha}{\sin B}+\frac{\sin\beta}{\sin C}\right).AD$$

ដោយ $\mathbf{BD + DC = BC}$ នោះ $\mathbf{BC = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin B} + \frac{\sin\beta}{\sin C}\right).AD}$

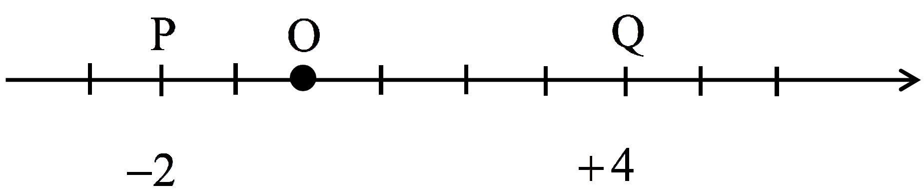
ដូចនេះ $\mathbf{\frac{BC}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin B} + \frac{\sin\beta}{\sin C}}$ ។

ជំពូកទី៥

ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់

១-កូអរដោនេនៃចំណុចនៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិត

ក/បន្ទាត់ចំនួនពិត



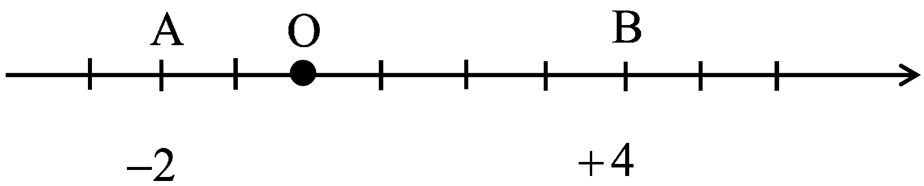
ឧបមាថាចំណុច P មួយស្ថិតនៅចម្ងាយ 2 ឯកតាខាងឆ្វេងគល់ O និង ចំណុច Q មួយស្ថិតនៅចម្ងាយ 4 ឯកតាខាងស្តាំគល់ O នៃបន្ទាត់ចំនួនពិត ។

គេថា P មានកូអរដោនេ -2 និង Q មានកូអរដោនេ $+4$ ឬ 4 ។

គេសរសេរ $P(-2)$ និង $Q(4)$ ។

ជាទូទៅ៖ គ្រប់ចំណុច M នៃបន្ទាត់ចំនួនពិត មានចំនួនពិត x តែមួយគត់ដែលជាកូអរដោនេរនៃចំណុច M ហើយគេកំណត់សរសេរ $M(x)$។

ខ/ចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ចំនួនពិត



ឧបមាថាចំណុច A មួយស្ថិតនៅចម្ងាយ 2 ឯកតាខាងឆ្វេងគល់ O និង ចំណុចBមួយស្ថិតនៅចម្ងា 4ឯកតាខាងស្តាំគល់ O នៃបន្ទាត់ចំនួនពិត

ចូររកចម្ងាយរវាងចំណុច A និង B ?

តាមរូបខាងលើយើងពិនិត្យឃើញថាចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A និង B ស្មើនឹង 6 ឯកតា ។

គេសរសេរ $AB=|4-(-2)|=4+2=6$ឯកតា ។

ជាទូទៅ៖ ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A(a) និង B(b) គឺ ៖

$AB=|b-a|=|a-b|$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ នៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិតមួយគេមានពីរចំនុច $A(x_A)$ និង $B(x_B)$ ដែល x_A និង x_B ជាឫសសមីការ $x^2-11x+28=0$ ។

ចូរគណនាចម្ងាយ AB ?

គេបាន $AB=|x_B-x_A|$

គេមាន x_A និង x_B ជាឫសសមីការ $x^2-11x+28=0$

$\Delta = (-11)^2 - 4(1)(28) = 121 - 112 = 9 = 3^2$

គេទាញឬស $x_A = \frac{11-3}{2} = 4$, $x_B = \frac{11+3}{2} = 7$

ដូចនេះ $AB = |7-4| = 3$ ។

ឧទាហរណ៍២៖

គេមានសមីការ $(E): x^2 - 2(m-1)x + 4(m-6) = 0$

($m \in IR$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ)

នៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិតមួយគេពិនិត្យពីរចំនុច $A(x_A)$ និង $B(x_B)$ ដែល x_A និង x_B ជាឬសសមីការ (E) ។

ក/ចូរគណនាចម្ងាយ AB ជាអនុគមន៍នៃ m ?

ខ/កំណត់ m ដើម្បីឲ្យ AB មានតម្លៃអប្បបរមា រួចរកតម្លៃអប្បបរមានោះ

ដំណោះស្រាយ

ក/គណនាចម្ងាយ AB ជាអនុគមន៍នៃ m ៖

ដោយ x_A និង x_B ជាឬសសមីការ (E) នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមាន

$x_A + x_B = -\frac{b}{a} = 2(m-1)$ (1) និង $x_A x_B = \frac{c}{a} = 4(m-6)$ (2)

គេបាន ៖

$$AB = |x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = \sqrt{(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B} \quad (3)$$

យកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន ៖

$$AB = \sqrt{4(m-1)^2 - 16(m-6)} = 2\sqrt{m^2 - 6m + 25}$$

ដូចនេះ $AB = 2\sqrt{(m-3)^2 + 16}$ ។

ខ/កំណត់ m ដើម្បីឲ្យ AB មានតម្លៃអប្បបរមា៖

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $AB = 2\sqrt{(m-3)^2 + 16}$

ដោយគ្រប់ $m \in IR$ គេមាន $(m-3)^2 \geq 0$

ហេតុនេះដើម្បីឲ្យ AB មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $(m-3)^2 = 0$

ដូចនេះ $m = 3$ ។

រកតម្លៃអប្បបរមានៃ AB ៖

ចំពោះ $m = 3$ គេបាន $AB_{min} = 2\sqrt{16} = 8$ ឯកតាប្រវែង ។

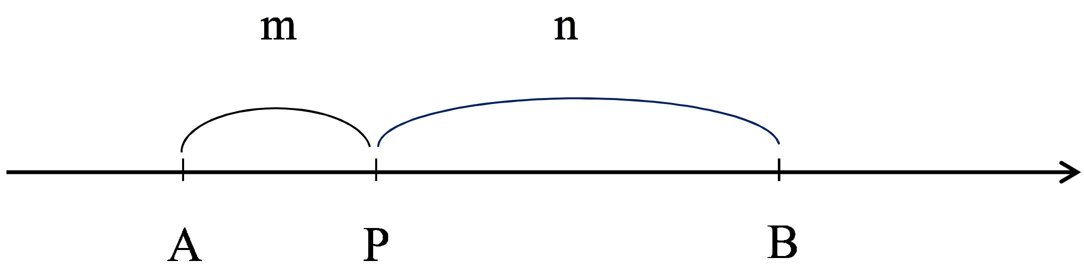
គ/ចំណុចចែកក្នុង

និយមន័យ ៖ គេឲ្យចំណុច P មួយនៅលើអង្កត់ AB ។

បើចំណុច P ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $AP:PB = m:n$ ឬ $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$

ចំពោះគ្រប់ $m > 0, n > 0$ នោះគេថាចំណុច P ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង

តាមផលធៀប $\frac{m}{n}$ ។

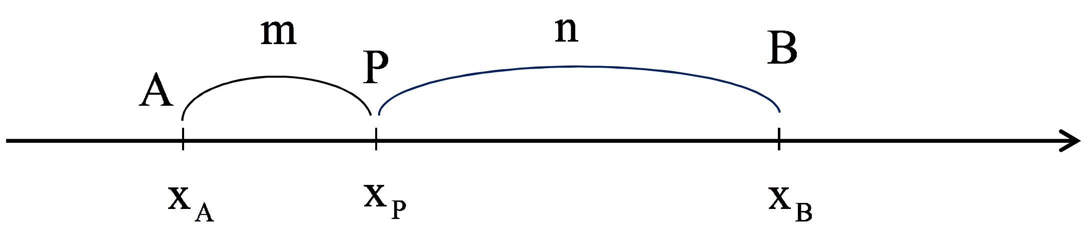


ទ្រឹស្តីបទ៖ $A(x_A)$ និង $B(x_B)$ ជាពីរចំណុចនៃបន្ទាត់ចំនួនពិត ។

បើ $P(x_P)$ ជាចំនុចចែកក្នុងនៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប $\frac{m}{n}$

នោះគេបាន $x_P = \frac{mx_B + nx_A}{m+n}$ ដែល $m > 0 , n > 0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



តាមនិយមន័យបើ $P(x_P)$ ជាចំនុចចែកក្នុងនៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប $\frac{m}{n}$

នោះ $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$ ដោយ $AP=x_P-x_A$, $PB=x_B-x_A$

គេបាន $\frac{x_P-x_A}{x_B-x_P}=\frac{m}{n}$ ឬ $m(x_B-x_P)=n(x_P-x_A)$

$$mx_B-mx_P=nx_P-nx_A$$

$$(m+n)x_P=mx_B+nx_A$$

$$x_P=\frac{mx_B+nx_A}{m+n}$$

ដូចនេះ $x_P=\frac{mx_B+nx_A}{m+n}$ ។

សម្គាល់ ៖ បើ $m=n$ នោះ $x_P=\frac{mx_B+mx_A}{m+m}=\frac{x_A+x_B}{2}$ នាំឲ្យ P ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ AB ។

ឧទាហរណ៍១ ៖ នៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិតគេមានពីរចំនុច $A(2)$ និង $B(7)$ ។

រកចំណុច P ចែកក្នុងនៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប $\frac{2}{3}$ ។

តាមរូបមន្ត $x_P=\frac{mx_B+nx_A}{m+n}$ ដោយ $x_A=2$, $x_B=7$, $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$

គេបាន $x_P=\frac{2(7)+3(2)}{2+3}=\frac{20}{5}=4$ ។

ដូចនេះ $P(4)$ ។

ឧទាហរណ៍២ ៖

គេឲ្យសមីការ $(E): x^2-(2m-1)x+3m-1=0$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

គេពិនិត្យចំណុចពីរ $A(x_A)$ និង $B(x_B)$ ដែល x_A និង x_B ជាឫសនៃ (E)

ក/រកលក្ខខណ្ឌ m ដើម្បីឲ្យសមីការ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ។

ខ/កំណត់ m ដើម្បីឲ្យចំណុច $P(4)$ ចែកក្នុងនៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប $\frac{2}{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/រកលក្ខខណ្ឌ m ដើម្បីឲ្យសមីការ (E) មានឬសពីរផ្សេងគ្នា ៖

$$(E): x^2-(2m-1)x+3m-1=0$$

ឌីស្ក្រីមីណង់នៃសមីការ $\Delta=(2m-1)^2-4(3m-1)=4m^2-16m+5$

$$\Delta=4(m-2)^2-11$$

ដើម្បីឲ្យសមីការ (E) មានឬសពីរផ្សេងគ្នាលុះត្រាតែ $\Delta>0$

គេទាញ $4(m-2)^2-11>0$

សមមូល $|m-2|>\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

សមមូល $m-2>\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ ឬ $m-2<-\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

ដូចនេះ $m>2+\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ ឬ $m<2-\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ ។

ខ/កំណត់ m ៖

ដើម្បីឲ្យចំណុច P(4) ចែកក្នុងនៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប $\dfrac{2}{3}$ លុះត្រាតែ ៖

$x_P=\dfrac{mx_B+nx_A}{m+n}$ ឬ $\dfrac{2x_B+3x_A}{5}=4$ នាំឲ្យ $3x_A+2x_B=20$ (1)

ដោយ x_A និង x_B ជាឬសរបស់ (E) នោះតាមទ្រឹស្តីបទវៀតគេបាន ៖

$x_A + x_B = 2m - 1 \ (2)$ និង $x_A x_B = 3m - 1 \ (3)$

យកសមីការ (2) គុណនឹង -2 រួចបូកជាមួយសមីការ(1)អង្គនិងអង្គគេបាន

$x_A = -4m + 22$ ហើយតាម (2)គេទាញ $x_B = 6m - 23$

យក $x_A = -4m + 22$ និង $x_B = 6m - 23$ ជួសក្នុង (3) គេបាន ៖

$$(-4m+22)(6m-23) = 3m - 1$$
$$-24m^2 + 92m + 132m - 506 = 3m - 1$$
$$24m^2 - 221m + 505 = 0$$
$$\Delta = (-221)^2 - 4(24)(505) = 361 = 19^2$$

គេទាញឫស $m_1 = \dfrac{221+19}{48} = 5 \ ; \ m_2 = \dfrac{221-19}{48} = \dfrac{101}{24}$

ដោយ $m > 2 + \dfrac{\sqrt{11}}{2}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ៖ $m_1 = 5 \, , \, m_2 = \dfrac{101}{24}$ ។

យ/ចំណុចចែកក្រៅ

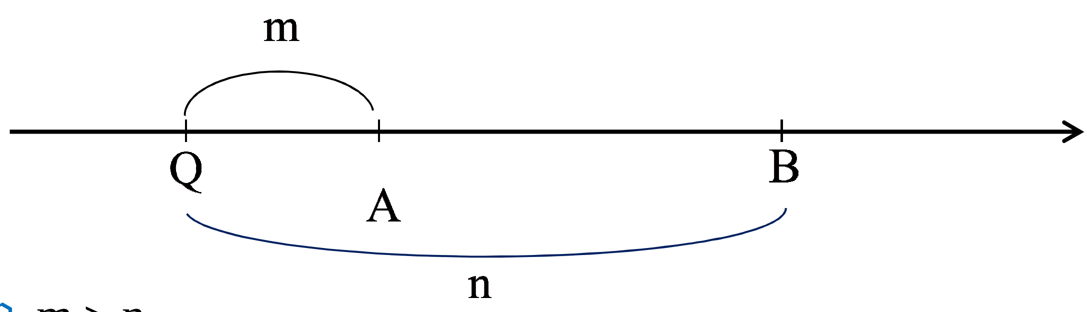
<u>**និយមន័យ**</u> ៖ គេឲ្យចំណុច Q មួយនៅលើបន្ទាយអង្កត់ AB ។

បើចំណុច Q ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $AQ : QB = m : n$ ឬ $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{m}{n}$

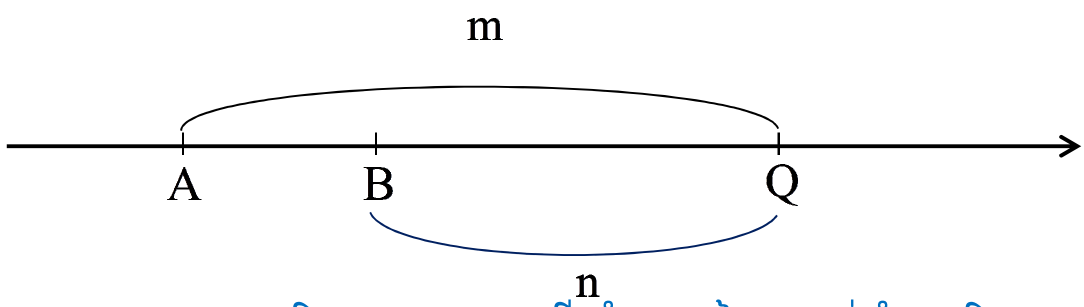
ចំពោះគ្រប់ $m > 0, n > 0$ នោះគេថាចំណុច Q ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅ

តាមផលធៀប $\frac{m}{n}$ ។

ករណី $m<n$



ករណី $m>n$

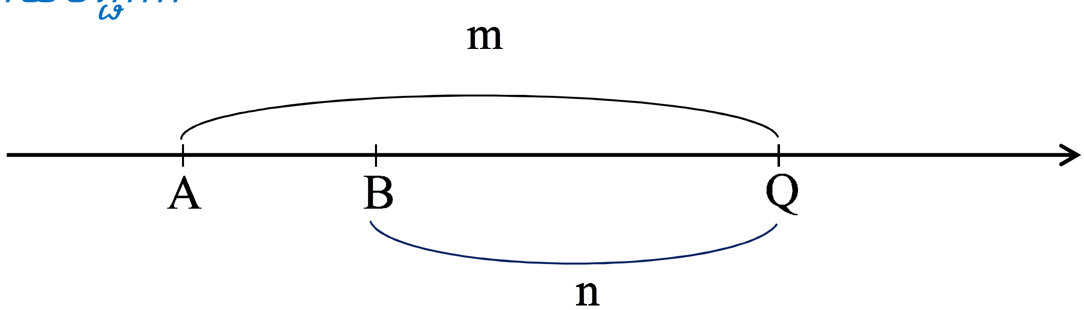


ទ្រឹស្តីបទ៖ $A(x_A)$ និង $B(x_B)$ ជាពីរចំណុចនៃបន្ទាត់ចំនួនពិត ។

បើ $Q(x_Q)$ ជាចំនុចចែកក្រៅនៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប $\frac{m}{n}$ នោះគេបាន ៖

$x_Q=\frac{mx_B-nx_A}{m-n}$ ដែល $m>0\,,\, n>0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



តាមនិយមន័យបើ $Q(x_Q)$ ជាចំនុចចែកក្នុងនៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប $\frac{m}{n}$

នោះ $\frac{AQ}{QB}=\frac{m}{n}$ ដោយ $AQ=x_Q-x_A$, $QB=x_Q-x_B$

គេបាន $\frac{x_Q-x_A}{x_Q-x_B}=\frac{m}{n}$ ឬ $m(x_Q-x_B)=n(x_Q-x_A)$

$$mx_Q-mx_B=nx_Q-nx_A$$
$$(m-n)x_Q=mx_B-nx_A$$
$$x_Q=\frac{mx_B-nx_A}{m-n}$$

ដូចនេះ $x_Q=\frac{mx_B-nx_A}{m-n}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ នៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិតគេមានពីរចំនុច A(3) និង B(5) ។

រកចំណុច Q ចែកក្រៅនៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប $\frac{2}{3}$ ។

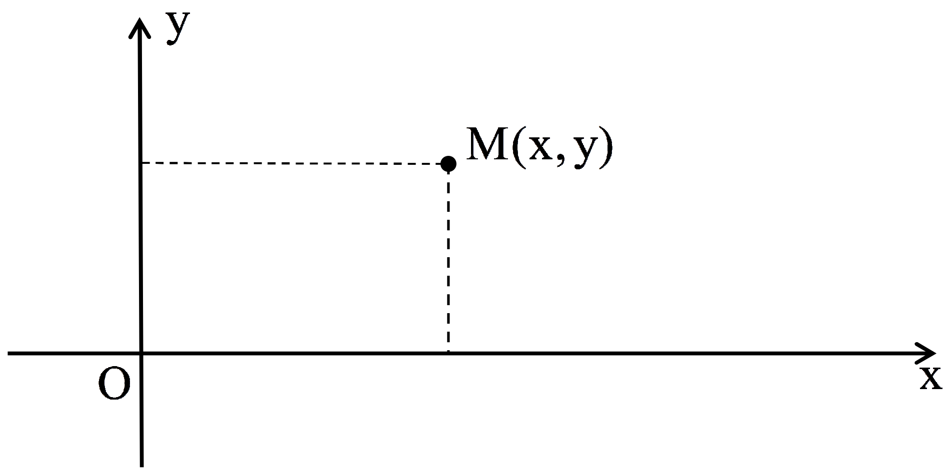
តាមរូបមន្ត $x_Q=\frac{mx_B-nx_A}{m-n}$ ដោយ $x_A=3$, $x_B=5$, $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$

គេបាន $x_Q=\frac{2(5)-3(3)}{2-3}=-1$ ។

ដូចនេះ $Q(-1)$ ។

២-កូអរដោនេនៃចំណុចនៅក្នុងប្លង់

ក/តម្រុយកូអរដោនេ

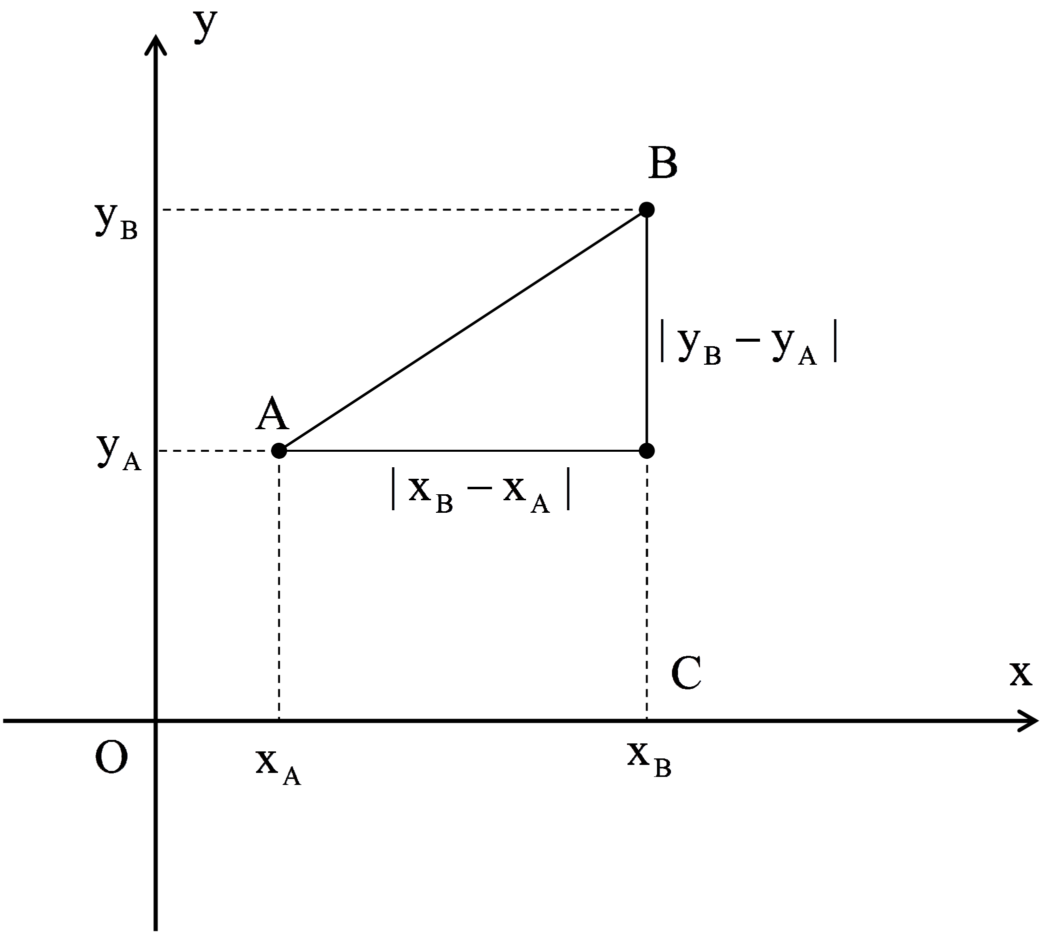


គ្រប់ចំណុច M នៃប្លង់កូអរដោនេ កំណត់ដោយគូលំដាប់ (x,y) ដែល x ជាអាប់ស៊ីស និង y ជាអរដោនេនៃចំណុច M ។

គេកំណត់សរសេរ $M(x,y)$ អានថាចំណុច M មានកូអរដោនេ (x,y) ។

តម្រុយកូអរដោនេ ជាតម្រុយដែលផ្គុំដោយបន្ទាត់ចំនួនពិតពីរនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ដែលបន្ទាត់មួយជាបន្ទាត់ដេក ហៅថាអក្ស័អាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់មួយទៀតជាបន្ទាត់ឈរ ហៅថាអក្ស័អរដោនេ ហើយបន្ទាត់ពីនេះប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច O ហៅថាគល់នៃតម្រុយកូអរដោនេ ។

ខ/ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចនៅក្នុងប្លង់



តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរ័អនុវត្តន៍ក្នុង $\Delta \perp ABC$ គេបាន $AB^2 = AC^2 + BC^2$

ដោយ $AC = |x_B - x_A|$; $BC = |y_B - y_A|$

គេបាន $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

ដូចនេះ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ ជាចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A & B ។

ឧទាហរណ៍១ ៖ គេមានពីរចំណុច $A(2\,,3)$ និង $B(7\,,-9)$ ។

គណនា AB ?តាមរូបមន្ត $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$$=\sqrt{(7-2)^2+(-9-3)^2}$$
$$=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

ដូចនេះ $AB=13$ ឯកតាប្រវែង ។

ឧទាហរណ៍២ ៖ គេមានពីរចំណុច $A(x\,,x+1)$ និង $B(1-x\,,2x-2)$ ។

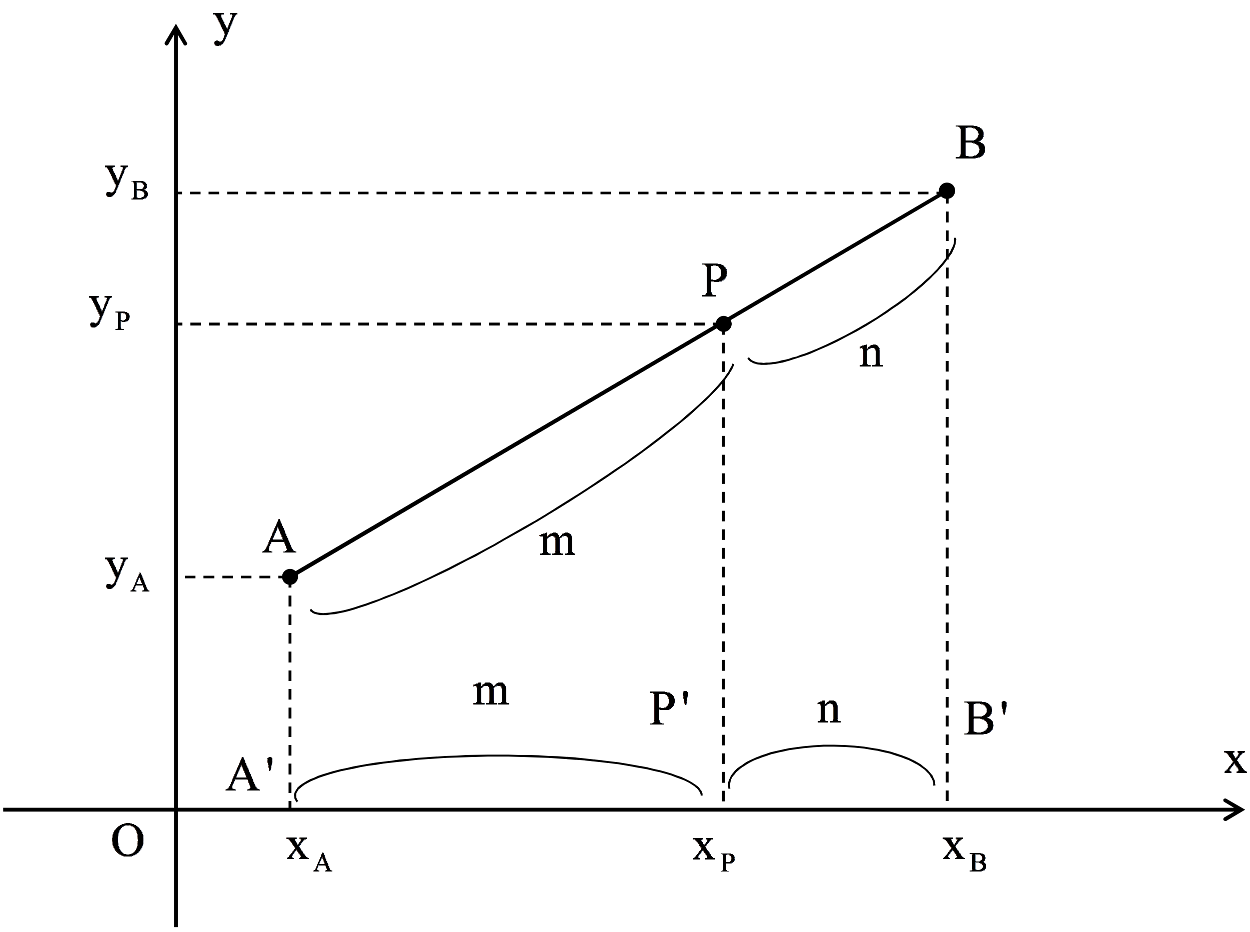
កំណត់ចំនួនពិត x ដើម្បីឲ្យ AB មានតម្លៃតូចបំផុត ។

តាមរូបមន្ត $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$$=\sqrt{(1-x-x)^2+(2x-2-x-1)^2}$$
$$=\sqrt{(1-2x)^2+(x-3)^2}$$
$$=\sqrt{1-4x+4x^2+x^2-6x+9}$$
$$=\sqrt{5x^2-10x+10}=\sqrt{5(x-1)^2+5}$$

ដើម្បីឲ្យAB មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ $x-1=0$ នាំឲ្យ $x=1$ ។

គ/ចំណុចចែកខាងក្នុង



ទ្រឹស្តីបទ ៖ ឧបមាថា $A(x_A, y_A)$ និង $B(x_B, y_B)$ ជាចំណុចពីរនៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។ បើ $P(x_P, y_P)$ ជាចំណុចចែកក្នុងនៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប $\frac{m}{n}$ នោះគេបាន $x_P = \frac{mx_B + nx_A}{m+n}$; $y_P = \frac{my_B + ny_A}{m+n}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ (xoy) គេមានចំណុច $A(x_A, y_A)$ និង $B(x_B, y_B)$ ។

យក A',B',P' ជាជើងចំណោលកែងរៀងគ្នានៃ A,B,P លើអក្ស (ox) ។

គេបាន P' ជាចំណុចចែកក្នុងនៃអង្កត់ $A'B'$ តាមផលធៀប $\frac{m}{n}$ ។

ដោយចំណុច A',B',P' មានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា x_A, x_B, x_P នោះគេបាន

$x_P = \frac{mx_B + nx_A}{m+n}$ ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរដោយគូសបន្ទាត់កែងទៅនឹងអក្ស (oy)

គេបាន $y_P = \frac{mx_B + nx_A}{m+n}$ ។ ដូចនេះ $P(\frac{mx_B + nx_A}{m+n}; \frac{my_B + ny_A}{m+n})$ ។

ឧទាហរណ៍៖

ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ (xoy) គេមានពីរចំណុច $A(2,6)$ និង $B(7,1)$ ។

ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច P ចែកខាងក្នុងនៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប $\frac{2}{3}$ ។

តាមរូបមន្ត $x_P = \frac{mx_B + nx_A}{m+n}$; $y_P = \frac{my_B + ny_A}{m+n}$

ដោយ $A(2,6)$ និង $B(7,1)$ និង $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ ឬ $m = 2, n = 3$ គេបាន ៖

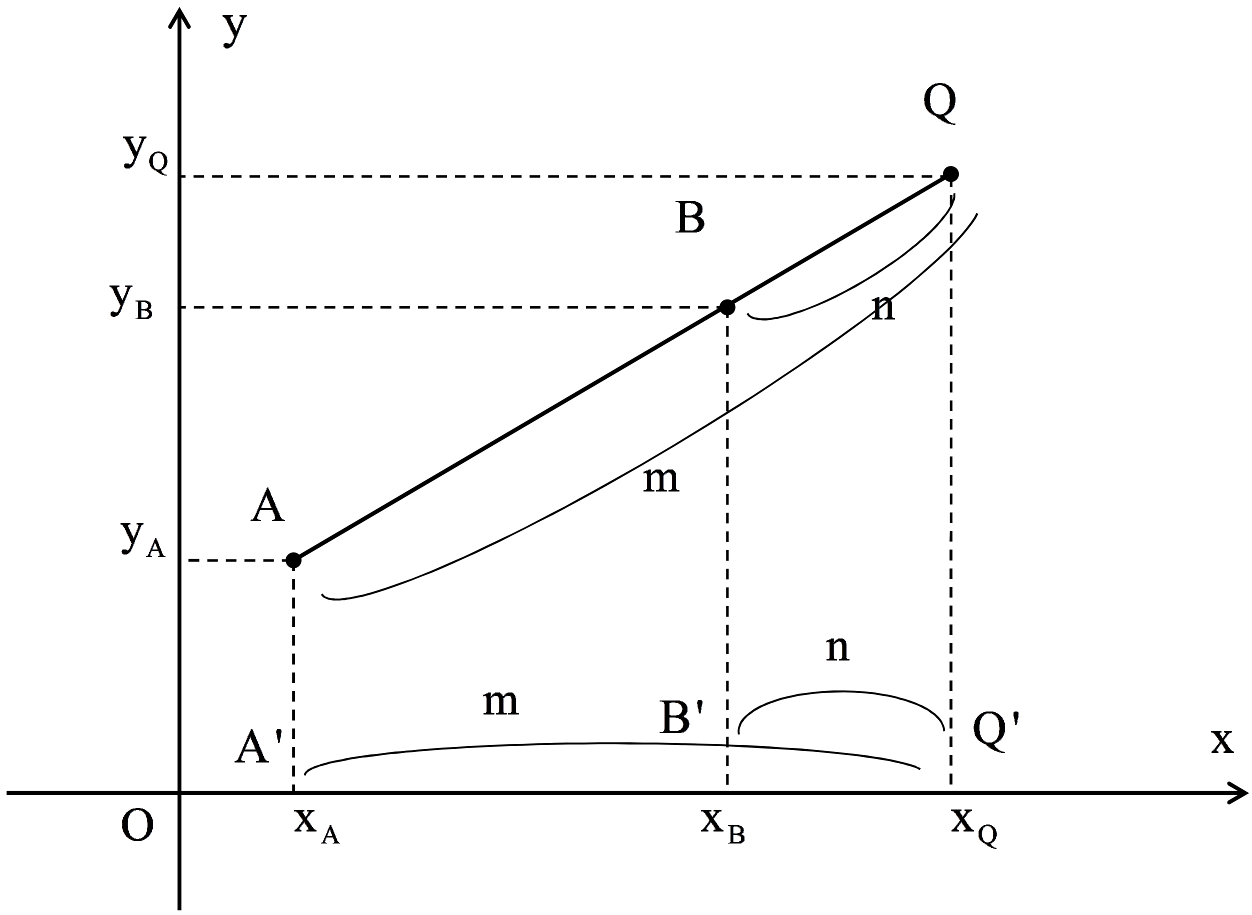
$x_P = \frac{2(7)+3(2)}{2+3} = 4$; $y_P = \frac{2(1)+3(6)}{2+3} = 4$ ។

ដូចនេះ $P(4,4)$ ។

សម្គាល់ ៖ បើ $m=n$ នោះ $x_P=\frac{x_A+x_B}{2};y_P=\frac{y_A+y_B}{2}$

ដូចនេះ $P(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2})$ ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ AB

ឃ/ចំណុចចែកខាងក្រៅ



ទ្រឹស្តីបទ ៖ឧបមាថា $A(x_A,y_A)$ និង $B(x_B,y_B)$ ជាចំណុចពីរនៅក្នុងតម្រុយ

កូអរដោនេ ។ បើ $Q(x_Q,y_Q)$ ជាចំណុចចែកក្រៅនៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប

$\frac{m}{n}$ នោះគេបាន $x_Q=\frac{mx_B-nx_A}{m-n}$; $y_Q=\frac{my_B-ny_A}{m-n}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ (xoy) គេមានចំណុច $A(x_A,y_A)$ និង $B(x_B,y_B)$ ។

យក A',B',Q' ជាជើងចំណោលកែងរៀងគ្នានៃ A,B,Q លើអក្ស័ (ox)។

គេបាន Q' ជាចំណុចចែកក្រៅនៃអង្កត់ $A'B'$ តាមផលធៀប $\frac{m}{n}$ ។

ដោយចំណុច A',B',Q' មានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា x_A,x_B,x_Q នោះគេបាន

$x_Q=\frac{mx_B-nx_A}{m-n}$ ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរដោយគូសបន្ទាត់កែងទៅនឹងអក្ស័(oy)

គេបាន $y_Q=\frac{mx_B-nx_A}{m-n}$ ។ ដូចនេះ $Q(\frac{mx_B-nx_A}{m-n};\frac{my_B-ny_A}{m-n})$ ។

ឧទាហរណ៍៖

ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ (xoy)គេមានពីរចំណុច $A(2,3)$ និង $B(4,1)$ ។

ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច Q ចែកខាងក្នុងនៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប $\frac{2}{3}$ ។

តាមរូបមន្ត $x_Q=\frac{mx_B-nx_A}{m-n}$; $y_Q=\frac{my_B-ny_A}{m-n}$

ដោយ $A(2,3)$ និង $B(4,1)$ ហើយ $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$ ឬ $m=2$, $n=3$

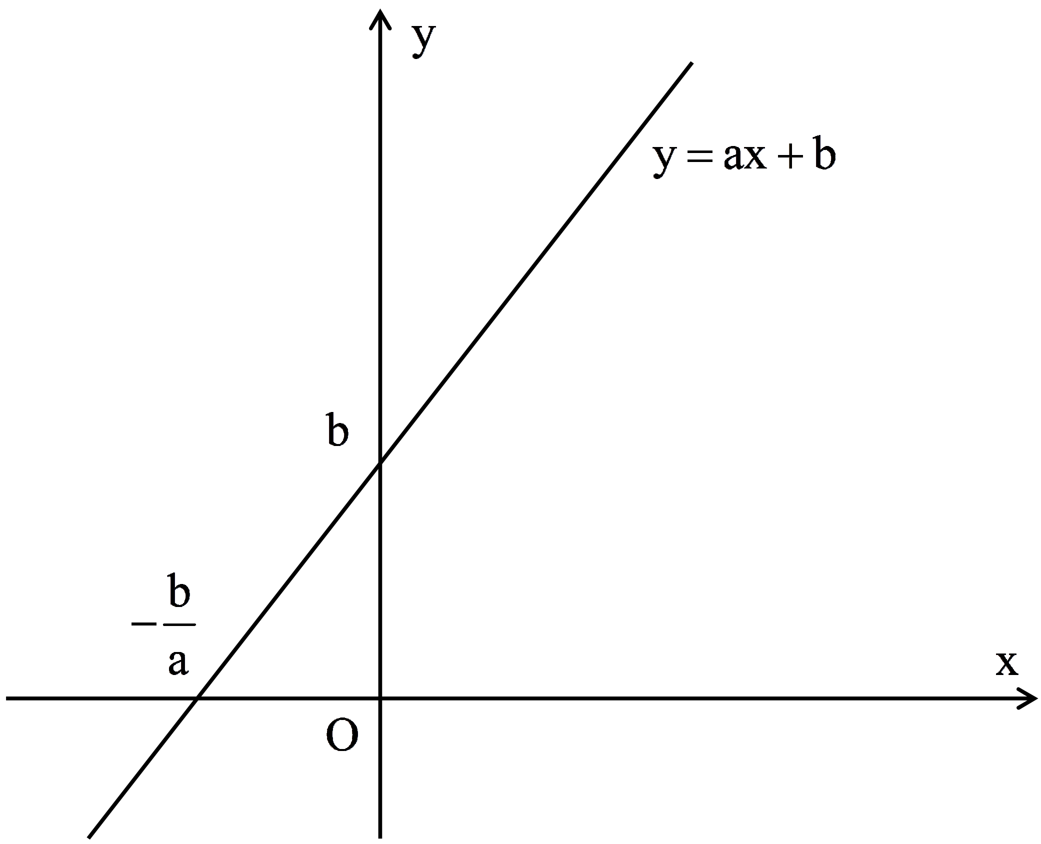
គេបាន $x_Q=\frac{2(4)-3(2)}{2-3}=-2$; $y_Q=\frac{2(1)-3(3)}{2-3}=7$

៣–សមីការបន្ទាត់

ក/និយមន័យ ៖ សមីការបន្ទាត់ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ

$y = ax + b$ ដែល a ហៅថាមេគុណប្រាប់ទិស ហើយ b ជាអរដោនេនៃ

ចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ជាមួយអក្ស័អរដោនេ (oy) ។



ខ/សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុចមួយនិងស្គាល់មេគុណប្រាប់ទិស ៖

បន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $A(x_A, y_B)$ មានមេគុណប្រាប់ទិស m ។

ចំពោះគ្រប់ចំណុច $M(x, y)$ នៃបន្ទាត់ L ផ្សេងពីចំណុច $A(x_A, y_B)$

គេបានមេគុណប្រាប់ទិសនៃ L គឺ $m=\dfrac{y-y_A}{x-x_A}$ ឬ $y-y_A=m(x-x_A)$

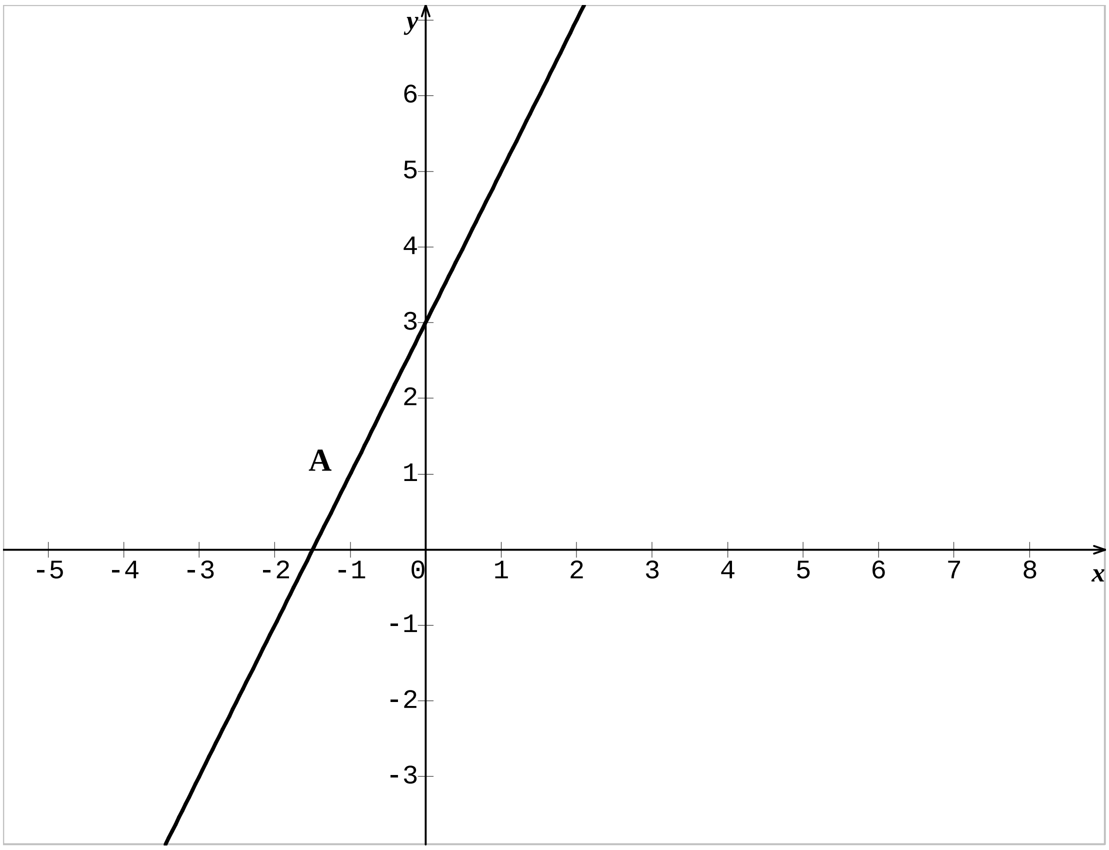
ដូចនេះ $y-y_A=m(x-x_A)$ ជាសមីការនៃបន្ទាត់ (L) ។

ឧទាហរណ៍ ៖ ចូររកសមីការនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $A(-1,1)$

ហើយមានមេគុណប្រាប់ទិស $m=2$ ។

តាមរូបមន្ត $L: y-y_A=m(x-x_A)$ ដោយ $A(-1,1)$ និង $m=2$ ។

គេបាន $y-1=2(x+1)$ ឬ $y=2x+3$ ។



គ/សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច ៖

បន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $A(x_A, y_B)$ និង $B(x_B, y_B)$ ។

មេគុណប្រាប់ទិសនៃ L គឺ $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

តាមរូបមន្ត $y - y_A = m(x - x_A)$

ដូចនេះ $L: y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$ ជាសមីការនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $A(x_A, y_B)$ និង $B(x_B, y_B)$ ។

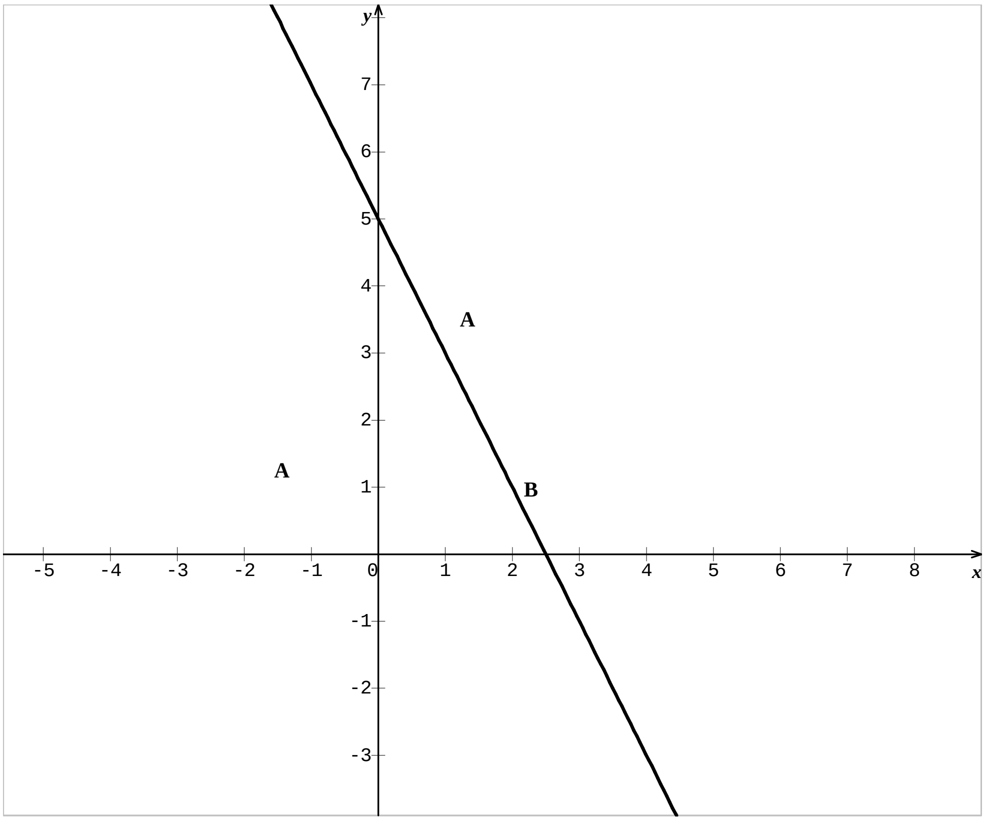
ឧទាហរណ៍ ៖ រកសមីការបន្ទាត់ L កាត់តាមពីរចំណុច $A(1, 3)$ និង $B(2, 1)$ ។

តាមរូបមន្ត $L: y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$

ដោយ $A(1, 3)$ និង $B(2, 1)$

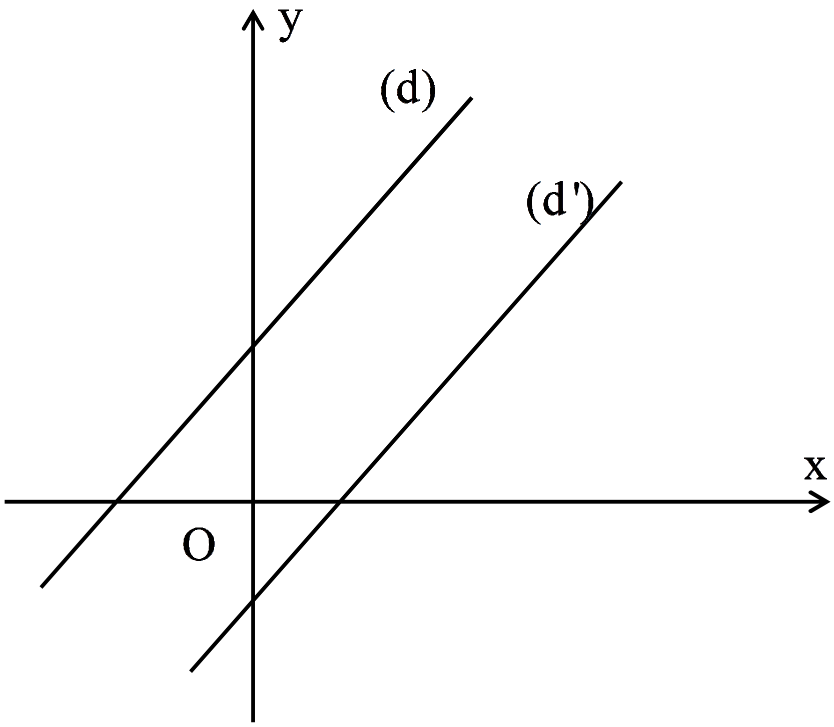
គេបាន $y - 3 = \dfrac{1-3}{2-1}(x-1) \Rightarrow y = -2x + 5$

ដូចនេះ $L: y = -2x + 5$ ។



ឃ/បន្ទាត់ស្របគ្នា

និយមន័យ៖បន្ទាត់ពីរស្របគ្នា កាលណាបន្ទាត់ទាំងពីរស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយហើយគ្មានចំណុចរួមគ្នា ។



លក្ខខណ្ឌបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា ៖

ឧបមាថាគេមានបន្ទាត់ពីរ $(d): y = ax + b$ និង $(d'): y = a'x + b'$

បន្ទាត់ (d) ស្របនឹង (d') លុះត្រាតែ $a = a'$ ។

ឬគេសរសេរ $(d)//(d') \Leftrightarrow a = a'$ ។

ឧទាហរណ៍១ ៖ គេមានបន្ទាត់ពីរ $d: y = 2x + 3$ និង $d': y = 2x - 5$

ដោយ $a = a' = 2$ នោះបន្ទាត់ (d) ស្របនឹង (d') ។

ឧទាហរណ៍២ ៖ គេមានបន្ទាត់ $d: y = (m^2 - m + 1)x + 2m + 1$

និងបន្ទាត់ $d': y = (2m - 1)x + m^2 - m + 2$ ដែល m ជាចំនួនពិត ។

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ (d) ស្របនឹង (d') ។

ដើម្បីឲ្យ $(d)//(d') \Leftrightarrow a = a'$ ដោយ $\begin{cases} a = m^2 - m + 1 \\ a' = 2m - 1 \end{cases}$

គេបាន $m^2 - m + 1 = 2m - 1$ ឬ $m^2 - 3m + 2 = 0$

ដោយ $a + b + c = 0$ នោះ $m_1 = 1 ; m_2 = \frac{c}{a} = 2$ ។

ដូចនេះ $m_1 = 1 , m_2 = 2$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ រកសមីការនៃបន្ទាត់ d កាត់តាមចំណុច $A(2,3)$ ហើយស្រប

ទៅនឹងបន្ទាត់ $d':y=-\frac{x}{2}+3$ ។

តាង m ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ d ។

ដោយ $d//d'$ នោះ $m=m'=-\frac{1}{2}$ ($m'=-\frac{1}{2}$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ d')

តាមរូបមន្ត $d:y-y_A=m(x-x_A)$

គេបាន $y-3=-\frac{1}{2}(x-2)$ ឬ $y=-\frac{1}{2}x+4$

ដូចនេះ $d:y=-\frac{1}{2}x+4$ ។

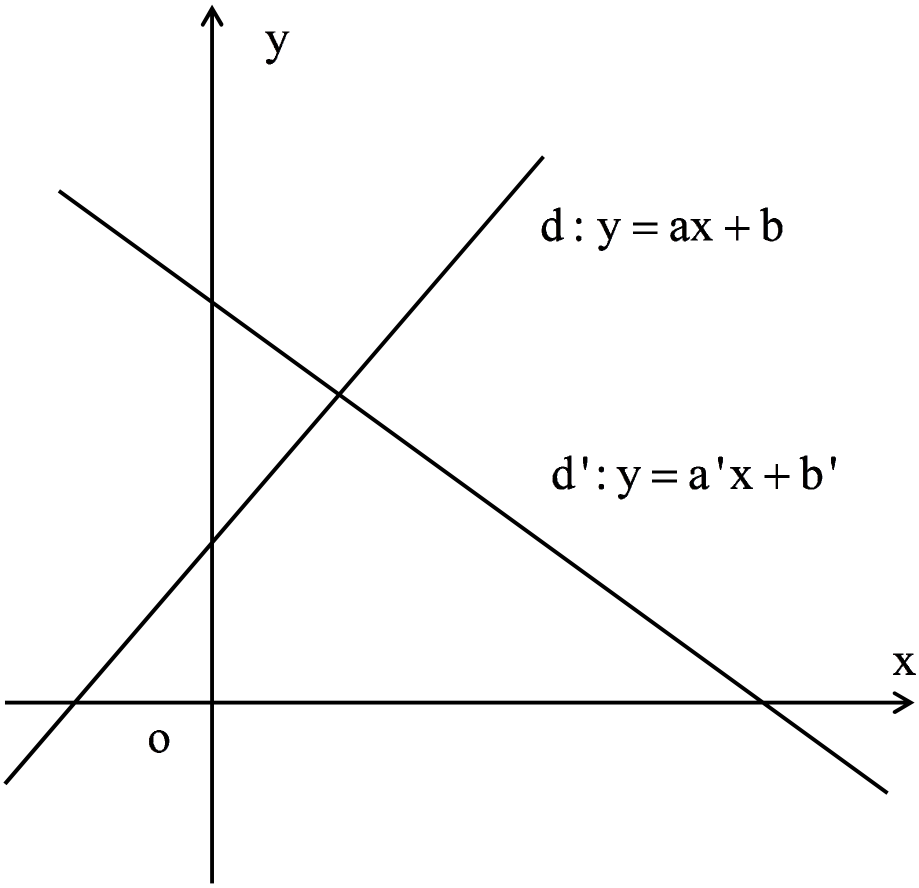
ង/បន្ទាត់កែងគ្នា ៖

លក្ខខណ្ឌកែងគ្នានៃបន្ទាត់ពីរ ៖ ឧបមាថាគេមានបន្ទាត់ពីរ $d:y=ax+b$

និង $d':y=a'x+b'$ ។

បន្ទាត់ d កែងនឹងបន្ទាត់ d' លុះត្រាតែ $a.a'=-1$ ។

គេសរសេរ $d\perp d'\Leftrightarrow a.a'=-1$ ។



ឧទាហរណ៍១៖ គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ $d: y = 2x + 3$ និង $d': y = -\frac{x}{2} + 2$

គេមាន $a = 2\ ; a' = -\frac{1}{2}$ ដោយ $a.a' = -1$ នោះ $d \perp d'$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ រកសមីការនៃបន្ទាត់ d កាត់តាមចំណុច $A(2,1)$ ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ $d': y = 2x + 5$ ។

តាង a ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ d និង a' ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ d' ។ ដោយ $d \perp d'$ នោះ $a.a' = -1$ ឬ $a = -\frac{1}{a'} = -\frac{1}{2}$

តាមរូបមន្ត $d: y - y_A = a(x - x_A)$

គេបាន $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$ ឬ $y=-\frac{1}{2}x+2$ ។

ដូចនេះ $d: y=-\frac{1}{2}x+2$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖

គេមានបន្ទាត់ពីរ $d: y=mx+1$ និង $d': y=(2m-3)x+m+2$

កំណត់ចំនួនពិត m ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ d កែងនឹងបន្ទាត់ d' ។

គេមាន $a=m$ និង $a'=2m-3$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ d និង d'។

បន្ទាត់ d កែងនឹងបន្ទាត់ d' លុះត្រាតែ $a.a'=-1$

គេបាន $m(2m-3)=-1$ ឬ $2m^2-3m+1=0$

ដោយ $a+b+c=0$ នោះគេទាញឫស $m_1=1\,;\,m_2=\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $m_1=1\,;\,m_2=\frac{1}{2}$ ។

ច/ចម្ងាយរវាងចំណុចនិងបន្ទាត់ ៖

ទ្រឹស្តីបទ ៖ គេឲ្យចំណុច $A(x_A, y_A)$ និង បន្ទាត់ $d: ax+by+c=0$ ។

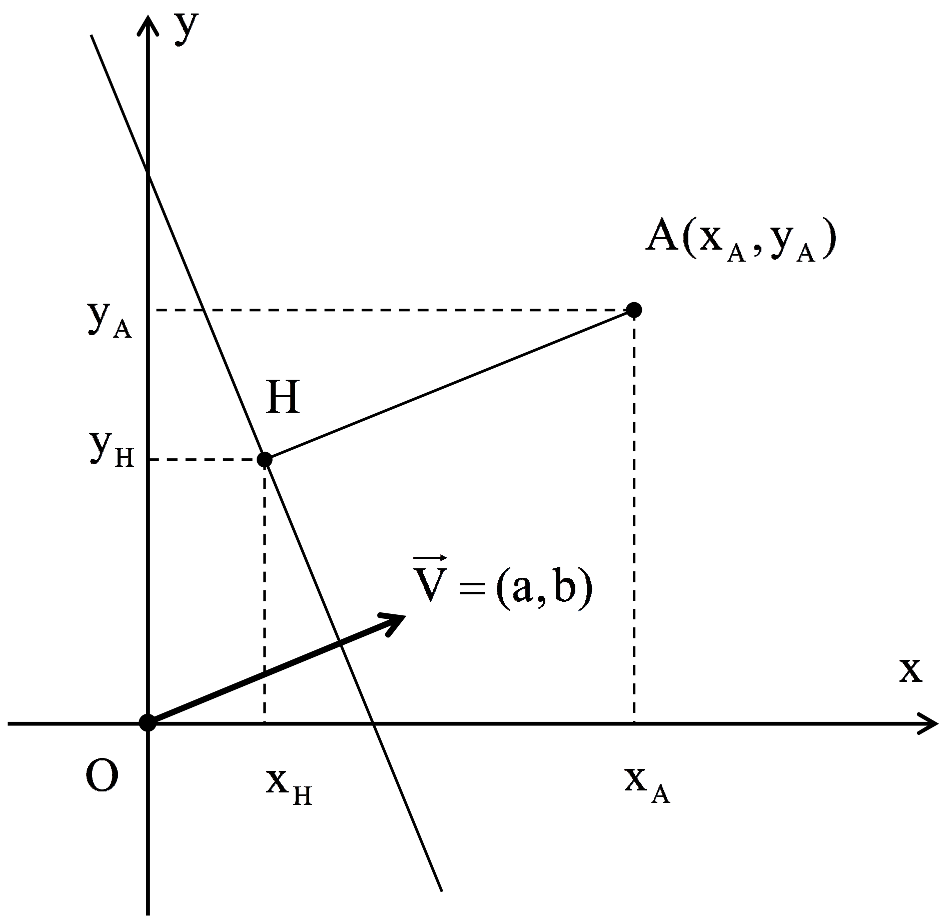
ចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ d កំណត់ដោយ ៖

$$d=d(A,(d))=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $H(x_H, y_H)$ ជាជើងចំណោលកែងនៃចំណុច A លើបន្ទាត់ d ។

គេបាន $d = AH = |\overrightarrow{AH}|$ ជាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ d ។



បន្ទាត់ $d: ax + by + c = 0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{V} = (a, b)$

គេមាន $\overrightarrow{AH} = (x_H - x_A ; y_H - y_A)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AH} \perp d$ និង $\vec{V} \perp d$ នោះ $\overrightarrow{AH} // \vec{V}$ នាំឲ្យមានចំនួនពិត t មួយ

ដែល $\overrightarrow{AH}=t\vec{V}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}x_H-x_A=at\\ y_H-y_A=bt\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_H=x_A+at\\ y_H=y_A+bt\end{cases}$ (1)

ដោយ $H\in d$ នោះ $ax_H+by_H+c=0$ (2)

យកសមីការ(1)ជួសក្នុង(2) គេបាន ៖

$a(x_A+at)+b(y_A+bt)+c=0$ គេទាញ $t=-\dfrac{ax_A+by_A+c}{a^2+b^2}$

គេបាន $\overrightarrow{AH}=t\vec{V}=-\dfrac{ax_A+by_A+c}{a^2+b^2}.\vec{V}$

ហេតុនេះ $|\overrightarrow{AH}|=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{a^2+b^2}.|\vec{V}|$ តែ $|\vec{V}|=\sqrt{a^2+b^2}$

ដូចនេះ $d=|\overrightarrow{AH}|=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ។

ឧទាហរណ៍៖រកចម្ងាយពីចំណុច $A(2,3)$ ទៅបន្ទាត់

$d:3x+4y+12=0$ ។

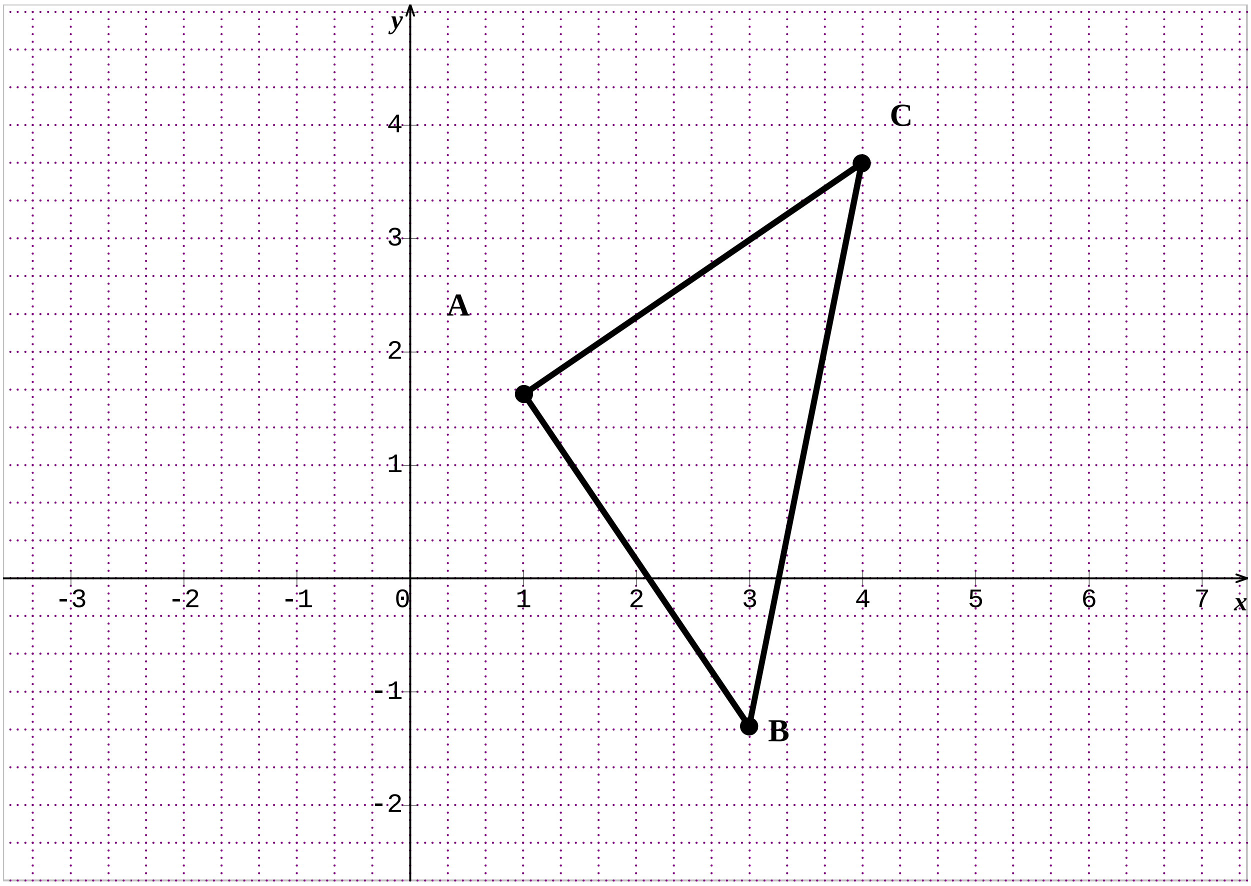
តាមរូបមន្ត $d=\dfrac{|3x_A+4y_A+12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|6+12+12|}{5}=6$

ដូចនេះ $d=6$ ។

៩–ការប្រើកូអរដោនេ ដើម្បីបង្ហាញលក្ខណៈនៃរូបធរណីមាត្រ ៖

ឧទាហរណ៍១៖គេឲ្យបីចំណុច $A(1,2);B(3,-1)\ ,C(4,4)$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតត្រង់កំពូល A ។



មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AB) គឺ $m_{AB}=\frac{-1-2}{3-1}=-\frac{3}{2}$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AC) គឺ $m_{AC}=\frac{4-2}{4-1}=\frac{2}{3}$

ដោយ $m_{AB}.m_{AC}=-\frac{3}{2}.\frac{2}{3}=-1$ នោះគេបាន $AB\perp AC\ \ (1)$

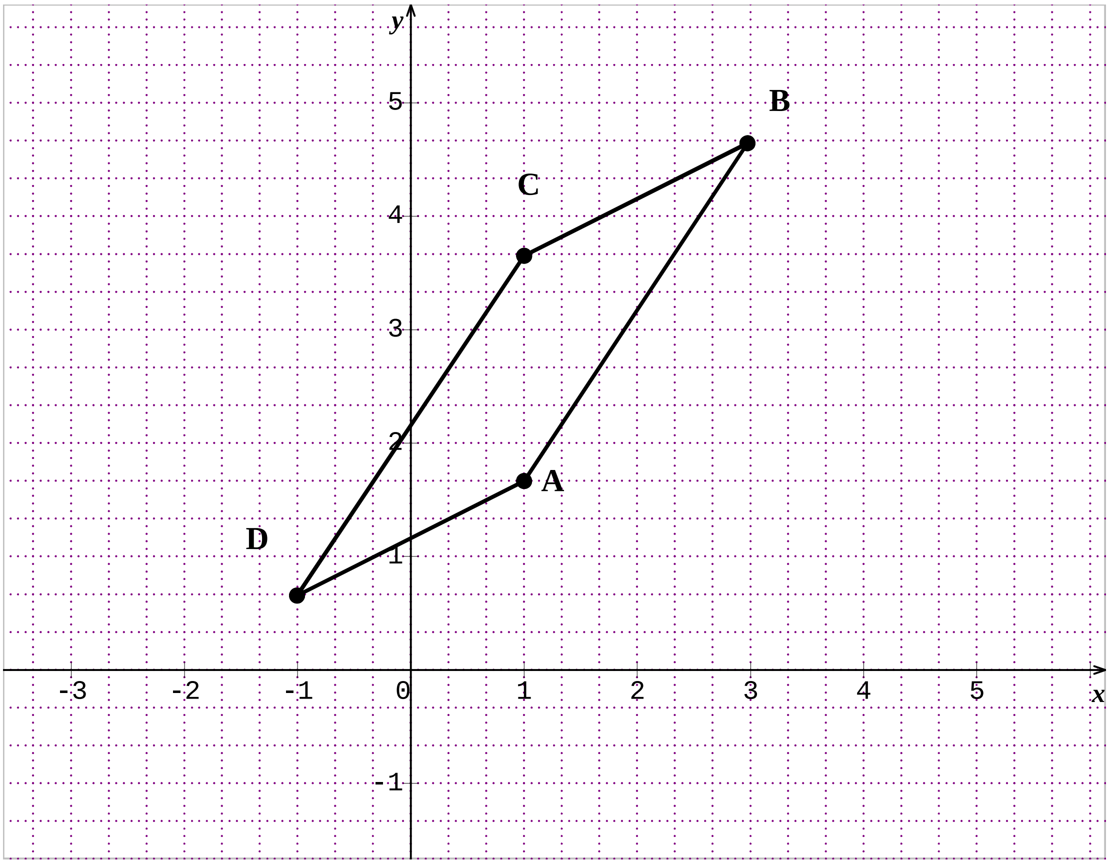
ម្យ៉ាងទៀត $AB=\sqrt{(3-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{13}$

និង $AC=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{13}$ នោះ $AB=AC$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតត្រង់កំពូល A

ឧទាហរណ៍២៖គេឲ្យបួនចំណុច $A(1,2);B(3,5);C(1,4);D(-1,1)$ ។

ចូរបង្ហាញថាចតុកោណ ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម ។



មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ AB គឺ $m_{AB}=\frac{5-2}{3-1}=\frac{3}{2}$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ CD គឺ $m_{CD}=\frac{1-4}{-1-1}=\frac{3}{2}$

ដោយ $m_{AB} = m_{CD} = \frac{3}{2}$ នោះ $AB//CD$ ។

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ AD គឺ $m_{AD} = \frac{1-2}{-1-1} = \frac{1}{2}$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ BC គឺ $m_{BC} = \frac{4-5}{1-3} = \frac{1}{2}$

ដោយ $m_{AD} = m_{BC} = \frac{1}{2}$ នោះ $AD//BC$ ។

ចតុកោណ $ABCD$ មានជ្រុងឈមស្របរៀងគ្នាពីរៗ $AB//CD$

និង $AD//BC$ វាជាប្រលេឡូក្រាម ។

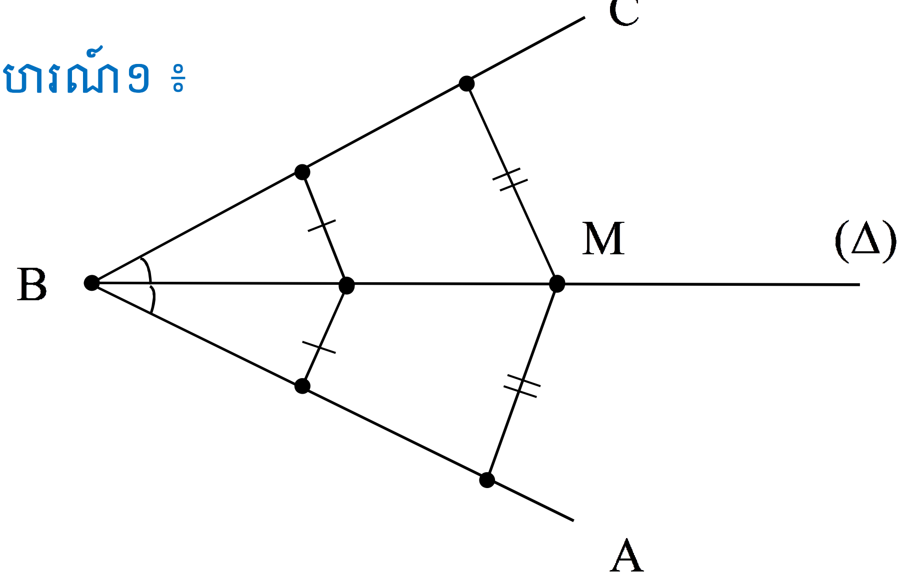
៥-សមីការនៃសំណុំចំណុច

ក/សំណុំចំណុច

សំណុំចំណុចនៃចំណុចដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ p គឺជារូបធរណីមាត្រផ្គុំ

ដោយចំណុចទាំងអស់ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ p ។

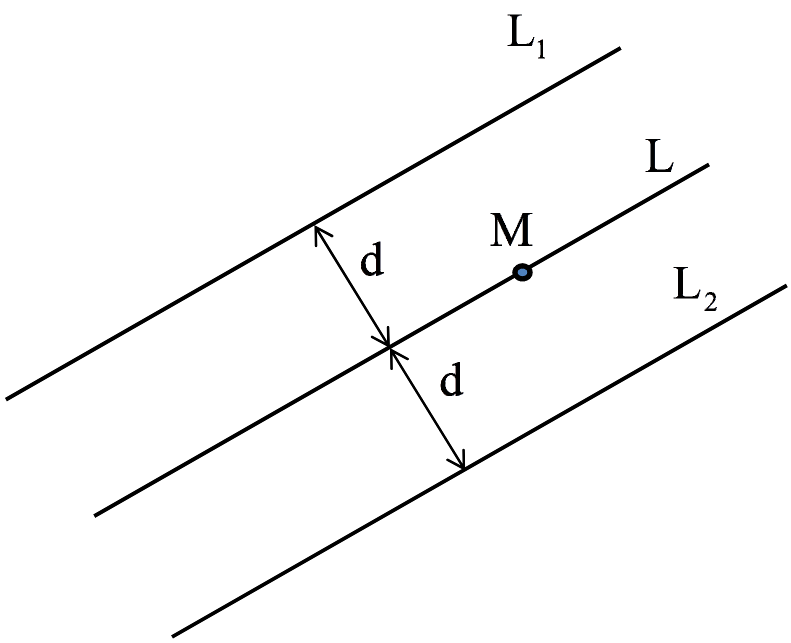
ឧទាហរណ៍១ ៖



គេមានមុំស្រួច $\angle ABC$ មួយ ។ ចំណុច M ផ្លាស់ទី ក្នុងមុំ $\angle ABC$ ហើយមានចម្ងាយស្មើពីជ្រុងទាំងពីរនៃមុំ ។ បំលាស់ទីនៃចំណុច M បង្កើតបានជាកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃមុំ $\angle ABC$ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះនេះហៅថា សំណុំចំណុច នៃចំណុច M ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ (នៅក្នុង $\angle ABC$ និង មានចម្ងាយស្មើពីជ្រុងទាំងពីរនៃមុំ) ។

គេកំណត់សរសេរ $\{M / M$ នៅក្នុងមុំ $\angle ABC$ និងមានចម្ងាយស្មើពីជ្រុងទាំងពីរនៃមុំនោះ $\}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ សំណុំចំណុច M ដែលមានចម្ងាយថេរ d ពីបន្ទាត់នឹង L គឺជាបន្ទាត់ L_1 និង L_2 ដែលស្រប និងមានចម្ងាយ d ពីបន្ទាត់នឹង L ។



ខ/សមីការនៃសំណុំចំណុច ៖

ឧទាហរណ៍១៖ គេឲ្យចំណុចនឹងពីរ $A(2,3)$ និង $B(-1,2)$ ។

រកសំណុំនៃចំណុច M ក្នុងប្លង់ដែល $MA^2 - MB^2 = 4$ ។

តាងចំណុច $M(x,y)$

គេមាន $MA^2 = (2-x)^2 + (3-y)^2 = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$

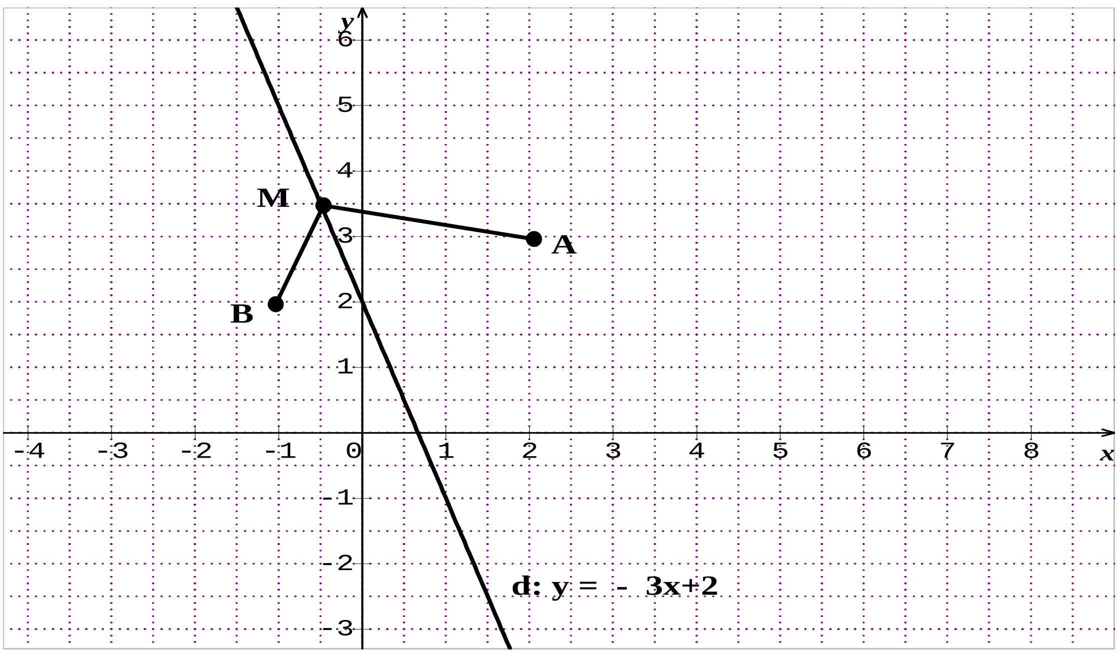
$$MB^2 = (-1-x)^2 + (2-y)^2 = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5$$

គេបាន $MA^2 - MB^2 = -6x - 2y + 8$ ដោយ $MA^2 - MB^2 = 4$

គេទាញ $-6x - 2y + 8 = 4$ នាំឲ្យ $y = -3x + 2$ ។

ដូចនេះសំណុំចំណុច M ក្នុងប្លង់ដែល $MA^2 - MB^2 = 4$ គឺជាបន្ទាត់

$d : y = -3x + 2$ ។



ឧទាហរណ៏២៖ គេឲ្យចំណុចនឹងបី $A(-1,2)$, $B(2,1)$ និង $C(0,3)$ ។

រកសំណុំនៃចំណុច M ក្នុងប្លង់ដែល $MA^2+MB^2=2MC^2$ ។

តាងចំណុច $M(x,y)$

គេមាន $MA^2=(-1-x)^2+(2-y)^2=x^2+y^2+2x-4y+5$

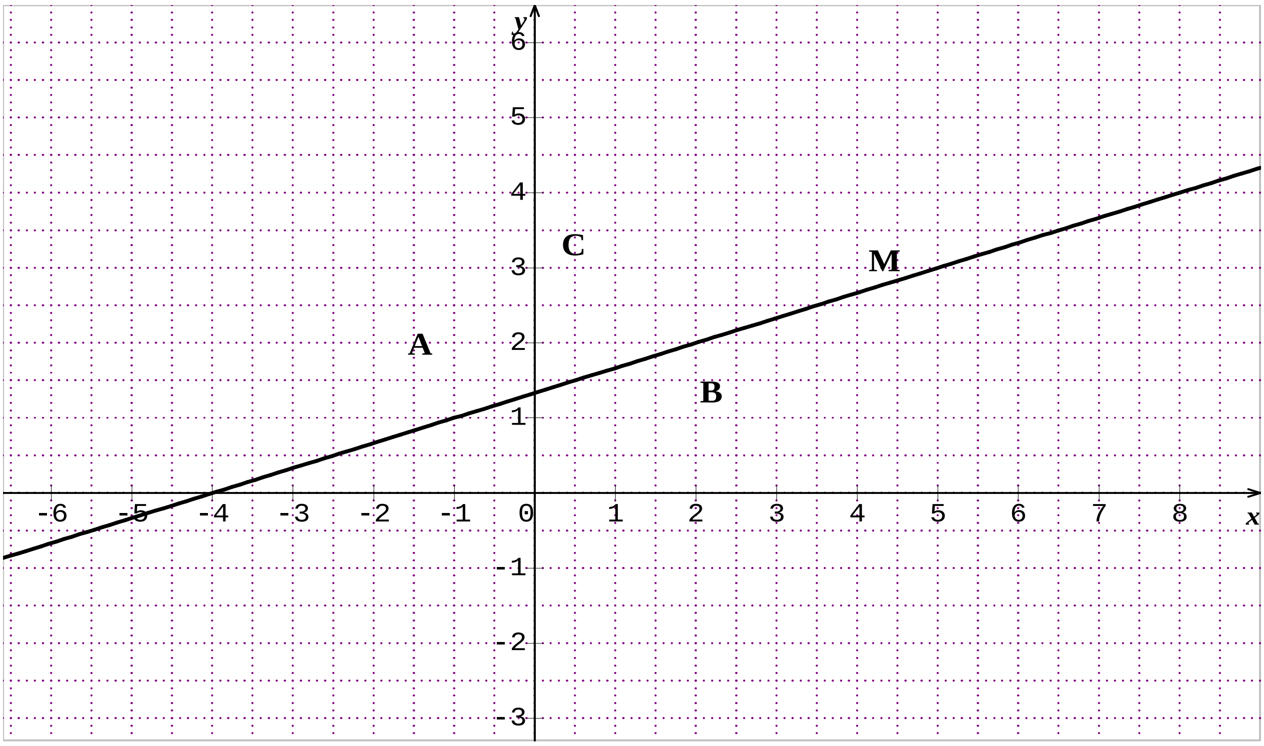
$$MB^2=(2-x)^2+(1-y)^2=x^2+y^2-4x-2y+5$$

$$MC^2=(0-x)^2+(9-y)^2=x^2+y^2-6y+9$$

គេមាន $MA^2+MB^2-2.MC^2=-2x+6y-8$

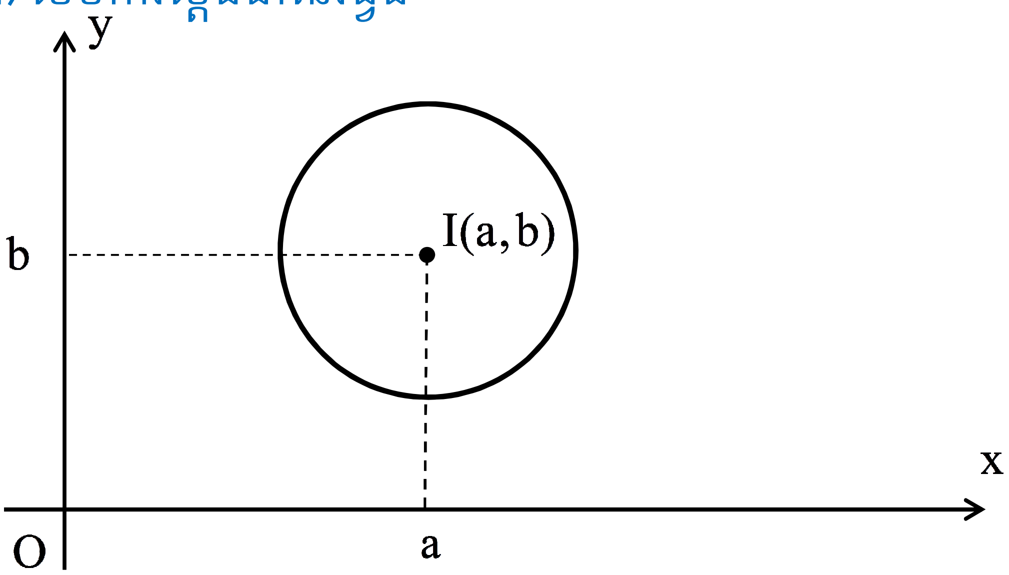
ដោយ $MA^2+MB^2=2MC^2$ នោះ $-2x+6y-8=0$

គេទាញ $y=\dfrac{x+4}{3}$ ជាសមីការតាងឲ្យសំណុំចំណុច M ។



៦-សមីការរង្វង់

ក/សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់



គេឲ្យចំណុចនឹង $I(a,b)$ ហើយ $P(x,y)$ ជាចំណុចទូទៅនៃប្លង់ដែលមានចម្ងាយថេរស្មើ r ពីចំណុច I ។

សំណុំចំណុច P ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $IP = r$ គឺជារង្វង់ផ្ចិត I កាំ r ។

គេមាន $IP = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ នោះ $IP^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$

ដូចនេះ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ជាសមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ផ្ចិត $I(a,b)$ និងកាំ r ។

ឧទាហរណ៍៖ រកសមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(2,3)$ និងកាំ $r=5$ ។

តាមរូបមន្តសមីការស្តង់ដា $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

ដូចនេះ $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ ។

សម្គាល់ ៖ បើ $a=b=0$ នោះចំណុច I នៅចំគល់តម្រុយ ។

ដូចនេះសមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ផ្ចិត $O(0,0)$ កាំ r កំណត់ដោយ ៖

$x^2+y^2=r^2$ ។

ឧទាហរណ៍៖ រកសមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $O(0,0)$ និងកាំ $r=3$ ។

តាមរូបមន្តសមីការស្តង់ដា $x^2+y^2=r^2$

ដូចនេះ $x^2+y^2=9$ ។

ខ/សមីការទូទៅនៃរង្វង់

យើងបានដឹងហើយថាសមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ផ្ចិត $I(a,b)$ កាំ r គឺ

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ។ ដោយពន្លាតសមីការនេះគេបាន ៖

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0$$
$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

ដោយតាង $\alpha=2a,\beta=-2b$ និង $\gamma=a^2+b^2-r^2$ គេបាន ៖

$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ ជាសមីការទូទៅនៃរង្វង់ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានរង្វង់ $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ ។

ចូរកំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និងកាំ r របស់រង្វង់នេះ ។

សមីការរង្វង់នេះអាចបំលែងជាសមីការស្តង់ដាដូចខាងក្រោម ៖

$$(x^2-4x)+(y^2-6y)=12$$
$$(x^2-4x+4)-4+(y^2-6y+9)-9=12$$
$$(x-2)^2+(y-3)^2=25$$

ដូចនេះ $I(2,3)$ ជាផ្ចិត និង $r=5$ ជាកាំរបស់រង្វង់ ។

ឧទាហរណ៍២៖

រកសមីការរង្វង់កាត់តាមបីចំណុច $A(-2,3),B(1,4),C(5,2)$ ។

តាង $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ជាសមីការទូទៅនៃរង្វង់កាត់តាមបី

ចំណុច $A(-2,3),B(1,4),C(5,2)$

$$\begin{cases}4+9-2a+3b+c=0\\1+16+a+4b+c=0\\25+4+5a+2b+c=0\end{cases} \quad \text{នាំឲ្យ} \quad \begin{cases}-2a+3b+c=-13\\a+4b+c=-17\\5a+2b+c=-29\end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រពន្ធ័នេះគេបាន $a=-2,b=2\ ,c=-23$ ។

សមីការរង្វង់សរសេរ $x^2+y^2-2x+2y-23=0$ ។

បើគេបំលែងវាជាទម្រង់ស្តង់ដាគេបាន៖

$$(x^2-2x)+(y^2+2y)=23$$
$$(x^2-2x+1)-1+(y^2+2y+1)-1=23$$
$$(x-1)^2+(y+1)^2=25$$

ដូចនេះ $(x-1)^2+(y+1)^2=25$ ជាសមីការរង្វង់ដែលត្រូវរក ។

រង្វង់នេះមានផ្ចិត $I(1\,,-1)$ និង កាំ $r=5$ ។

៧-រង្វង់ និង បន្ទាត់

ក/ចំណុចប្រសព្វរវាងរង្វង់ និង បន្ទាត់៖

សន្មតថាគេមានរង្វង់ $(c):(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ និងបន្ទាត់មាន

សមីការ $(d):y=ax+b$ ។ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d)

ជាមួយរង្វង់ (c) គឺជាចម្លើយនៃប្រពន្ធ័ដែលផ្គុំដោយសមីការ (d) និង (c)

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 & (1)\\ y=ax+b & (2)\end{cases}$$

យកសមីការ (2) ជំនួសក្នុង(1) គេបានសមីការ ៖

$$(x-\alpha)^2+(ax+b-\beta)^2-r^2=0$$

តាង Δ ជាឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការនេះ ។

-បើ $\Delta<0$ សមីការគ្មានឫស នោះមានន័យថាបន្ទាត់និងរង្វង់មិនប្រសព្វ

គ្នាទេ ។

-បើ $\Delta = 0$ សមីការមានឫសឌុបនោះបន្ទាត់និងរង្វង់ប៉ះគ្នាត្រង់មួយចំណុច។

-បើ $\Delta > 0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា នោះមានន័យថាបន្ទាត់និងរង្វង់មាន

ចំណុចប្រសព្វពីរផ្សេងគ្នា ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមានរង្វង់ $(c): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$

និងបន្ទាត់ $(d): y = x + m$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ចូរសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ (d) ជាមួយនឹងរង្វង់ (c) ទៅតាមតម្លៃផ្សេងៗ

នៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ (d) ជាមួយនឹងរង្វង់ (c) ៖

គេមាន $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0 & (1) \\ y = x + m & (2) \end{cases}$

យកសមីការ(2)ជំនួសក្នុង(1)គេបាន ៖

$$x^2 + (x+m)^2 - 2x - 4(x+m) + 3 = 0$$
$$x^2 + x^2 + 2mx + m^2 - 2x - 4x - 4m + 3 = 0$$
$$2x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$\Delta' = (m-3)^2 - 2(m^2 - 4m + 3)$$
$$= (m-3)^2 - 2(m-1)(m-3)$$
$$= (m-3)(m-3-2m+2)$$
$$= (m-3)(-m-1)$$

បើ $\Delta' = (m-3)(-m-1) = 0$ នោះ $m_1 = -1\ ;\ m_2 = 3$ ។

m	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Δ'		$-$	0	$+$	0	$-$	

-ចំពោះ $m \in (-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$ បន្ទាត់និងរង្វង់មិនប្រសព្វគ្នា ។

-ចំពោះ $m=-1$ ឬ $m=3$បន្ទាត់ប៉ះនិងរង្វង់ ។

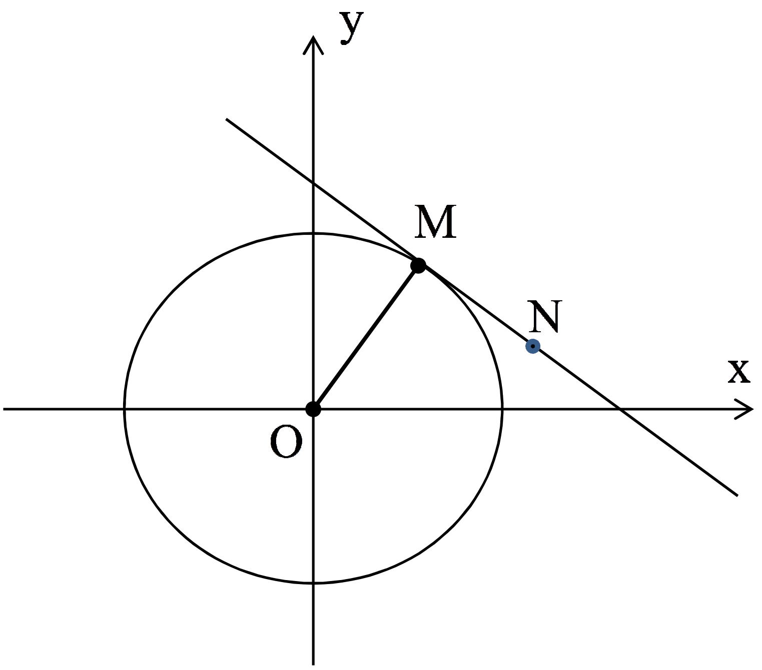
-ចំពោះ $m \in (-1,3)$ ប់ន្ទាប្រសព្វរង្វង់បានពីរចំណុច ។

ខ/បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ ៖

-ករណីរង្វង់ផ្ចិត$O(0,0)$ ៖

គេមានរង្វង់ $x^2 + y^2 = r^2$ និងចំណុច $M(x_0, y_0)$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់នេះ។

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច M ៖



យក $N(x,y)$ ជាគ្រប់ចំណុចនៃបន្ទាត់រង្វង់ត្រង់ចំណុច M

គេបាន $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MN} = 0$

ដោយ $\overrightarrow{OM} = (x_0, y_0)$ និង $\overrightarrow{MN} = (x - x_0, y - y_0)$

គេបាន $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$

$$x_0x + y_0y - (x_0{}^2 + y_0{}^2) = 0$$

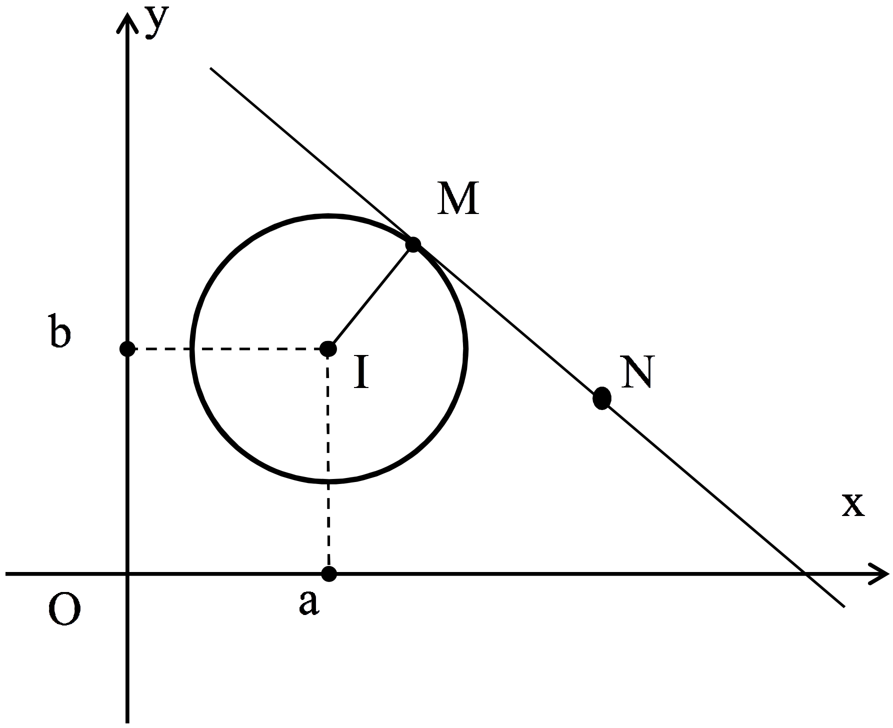
ដោយ M នៅលើរង្វង់នោះ $x_0{}^2 + y_0{}^2 = r^2$ ។

ដូចនេះ $x_0x + y_0y - r^2 = 0$ ជាសមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ $M(x_0, y_0)$ ។

-ករណីរង្វង់ផ្ចិត $I(a,b)$ ៖

គេឲ្យរង្វង់ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ និងចំណុច $M(x_0,y_0)$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់។

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច M ។



យក $N(x,y)$ ជាគ្រប់ចំណុចនៃបន្ទាត់រង្វង់ត្រង់ចំណុច M

គេបាន $\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{MN}=0$

ដោយ $\overrightarrow{IM}=(x_0-a,y_0-b)$ និង $\overrightarrow{MN}=(x-x_0,y-y_0)$

គេបាន $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$

$$(x_0-a)x+(y_0-b)y-(x_0{}^2+y_0{}^2-ax_0-by_0)=0$$

ដូចនេះ $(x_0-a)x+(y_0-b)y-(x_0{}^2+y_0{}^2-ax_0-by_0)=0$

ជាសមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ $M(x_0,y_0)$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមានរង្វង់ $(x-1)^2+(y+1)^2=25$ និងចំណុច $M(-2,3)$

ស្ថិតនៅលើរង្វង់ ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច M ។

យក $N(x,y)$ ជាគ្រប់ចំណុចនៃបន្ទាត់រង្វង់ត្រង់ចំណុច M

គេបាន $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{MN}=0$

កូអរដោនេផ្ចិតនៃរង្វង់គឺ $I(1\,,-1)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{IM}=(-3,4)$ និង $\overrightarrow{MN}=(x+2,y-3)$

គេបាន $-3(x+2)+4(y-3)=0$

ដូចនេះ $-3x+4y-18=0$ ។

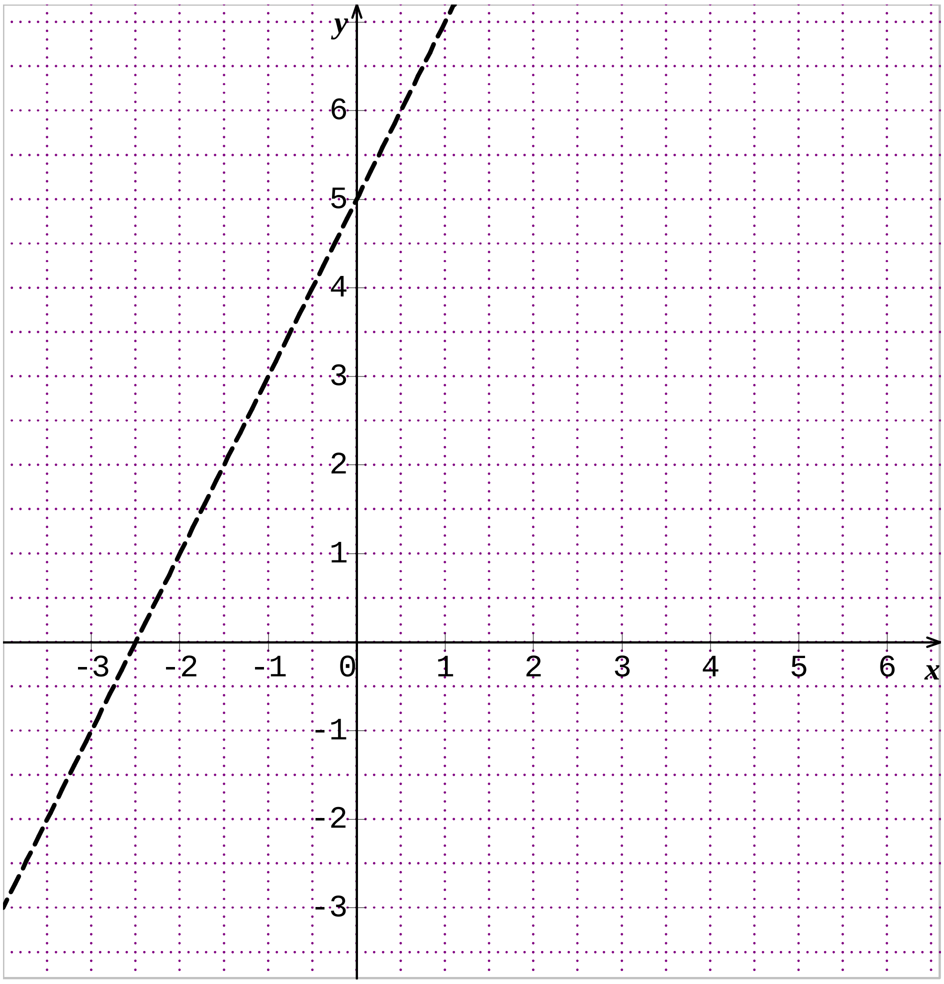
៨-ដំណោះស្រាយវិសមីការ និង ប្រពន្ធ័វិសមីការតាមក្រាប

ក/ដំណោះស្រាយវិសមីការ តាមក្រាប៖

ឧទាហរណ៍៖ដោះស្រាយវិសមីការ $2x-y+5>0$ ។

វិសមីការនេះអាចសរសេរជា $y<2x+5$ ។

សង់បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=2x+5$



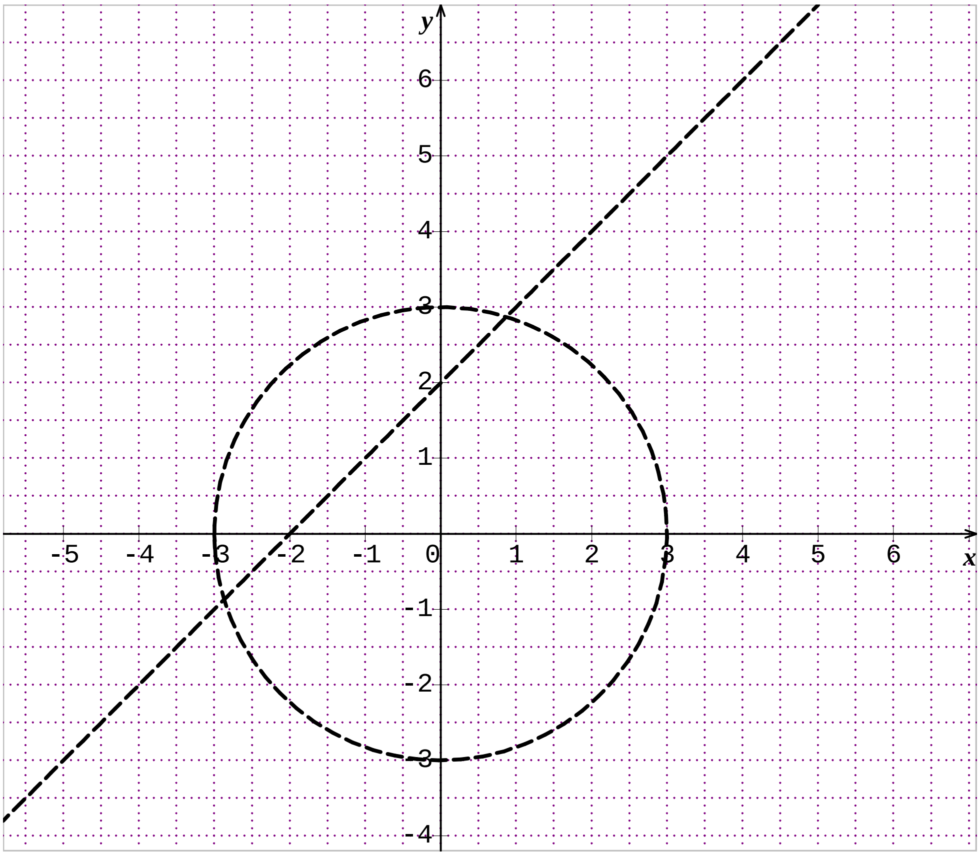
ដូចនេះវិសមីការមានតំបន់ចម្លើយជាកន្លះប្លង់ដែលគូសឆ្វូតនៅខាងក្រោម

បន្ទាត់ព្រំដែន ។

ខ/ដំណោះស្រាយ ប្រពន្ធ័វិសមីការតាមក្រាប ៖

ឧទាហរណ៍៖ ដោះស្រាយប្រពន្ធ័វិសមីការ $\begin{cases} x^2+y^2>9 \\ x-y+2>0 \end{cases}$

ជាដំបូងយើងសង់រង្វង់ $x^2+y^2=9$ និងបន្ទាត់ $x-y+2=0$ ។



$x^2+y^2>9$ មានចម្លើយជាផ្នែកប្លង់ស្ថិតនៅក្រៅរង្វង់តាងដោយ P ។

វិសមីការ $x-y+2>0 \Leftrightarrow y<x+2$ មានចម្លើយជាផ្នែកប្លង់ស្ថិតនៅផ្នែក

ខាងក្រោមនៃបន្ទាត់ តាងដោយ Q ។

ដូចនេះតំបន់ចម្លើយប្រពន្ធ័វិសមីការគឺ $P\cap Q$ ជាផ្នែកឆ្នូតនៅក្រោមបន្ទាត់។

ឯកសារយោង

១-សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ ភាគ១របស់ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១១ ដោយគ្រឹះស្ថានបោះពុម្ព និង ចែកចាយ អគារ ១៩៨ មហាវិថីព្រះនរោត្តមភ្នំពេញ ។

២-PROBLEM BOOK IN HIGH-SCHOOL MATHEMATICS

Edited by A.I.PRILEPKO,D.Sc. 1985.

៣-តាមរយៈអ៊ិនធឺណេត គេហទំព័រ www.Artofproblemsolving.com