វិទ្យាស្ថាន ជាតិអប់រំ

National Institute of Education

កិច្ចការស្រាវជ្រាវ

ម៉ាទ្រីស

រៀបរៀងដោយៈ គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យាក្រុម១

ជំនាន់ទី២៤

គ្រូណែនាំៈ ហួត សុខលឿន

ឆ្នាំសិក្សា ២០១៨~២០១៩

២០១៩ ⓢ សៀវភៅសម្រាប់អ្នកសិក្សាទូទៅ ⓢ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

សៀវភៅ ម៉ាទ្រីស

កិច្ចការស្រាវជ្រាវរបស់គរុនិស្សិតបរិញ្ញា+១

មុខវិជ្ជា៖ គណិតវិទ្យា

គរុនិស្សិតជំនាន់ទី ២៤

គ្រូណែនាំ៖ ហួត សុខលឿន

គរុនិស្សិត

១. ហ៊ីង វុទ្ធី

២. ហាម វណ្ណឌី

៣. នីម តារម្យ

៤. អៀត សារី

៥. ស្នួង សុតា

អារម្ភកថា

សួស្តីអ្នកសិក្សាទាំងឡាយជាទីគោរពរាប់អាន!

សៀវភៅ **ម៉ាទ្រីស** ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ត្រូវបានរៀបចំឡើងដោយក្រុម គរុនិស្សិត ឯកទេស គណិតវិទ្យា ក្រុម១ ជំនាន់ទី២៤ ក្រោមការណែនាំពីលោកគ្រូ **ហួត សុខឿន** ដែលជាសាស្ត្រាចារ្យនៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ។ សៀវភៅនេះរៀបចំឡើងក្នុងគោលបំណងចង់ឲ្យអ្នកសិក្សាទាំងឡាយមានភាពងាយស្រួលក្នុងកាសិក្សាស្រាវជ្រាវទៅលើមេរៀនម៉ាទ្រីស និង ដើម្បីទុកជាឯកសារជំនួយមួយដល់ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស ថ្នាក់ទី១១-១២ និង ប្អូនៗនិស្សិតថ្នាក់មហាវិទ្យាល័យដែលកំពុងតែត្រូវការសៀវភៅ **ម៉ាទ្រីស** នេះក្នុងការហ្វឹកហាត់ ដោះស្រាយលំហាត់ម៉ាទ្រីសផ្សេងៗ ។ នៅក្នុងសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំបានបែងចែកជា បីផ្នែកធំៗ គឺ ទី១ផ្នែក មេរៀន ទី២ផ្នែកលំហាត់មានដំណោះស្រាយ និងទី៣ផ្នែកលំហាត់អនុវត្តន៍ ។ នៅក្នុងផ្នែក មេរៀនយើងខ្ញុំបានបញ្ចូលទាំង និយមន័យ ទ្រឹស្តី បំណកស្រាយ ឧទាហរណ៍ និងចំណុចសម្គាល់ផ្សេងៗ ងាយយល់ និងងាយចងចាំ ។ ចំណែកឯ ផ្នែកលំហាត់មានដំណោះស្រាយ យើងខ្ញុំបានខិតខំសម្រិតសម្រាំងលំហាត់ល្បីៗល្អៗ ដែលដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសាប្រឡងប្រជែងនានាទាំងក្នុងស្រុក និងក្រៅស្រុក និងចេញពីសៀវភៅខ្មែរ និងបរទេសល្បីៗថែមទៀតផង ហើយសម្រាប់ផ្នែកលំហាត់អនុវត្តន៍ យើងខ្ញុំបន្ថែមនូវចម្លើយពីក្រោយផងដែរ ។ តែទោះបីជាយើងខ្ញុំ ខិតខំយកចិត្តទុកដាក់អស់ពីសមត្ថភាពយ៉ាងណា ក៏ការរៀបរៀងនេះមិនប្រាកដថា មិនមានចំណុច ខ្វះខាត ឬ កំហុសឆ្គងណាមួយដោយអចេតនានោះទេ ទាំងផ្នែកបច្ចេកទេស និងអក្ខរាវិរុទ្ធ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំ ដែលជា ក្រុមអ្នករៀបរៀងរង់ចាំដោយរីករាយនូវការរិះគន់ក្នុងន័យស្ថាបនាពី សំណាក់អ្នកសិក្សាទូទៅគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បីជួយកែលម្អសៀវភៅមួយនេះឲ្យកាន់តែត្រឹមត្រូវ ទូលំទូលាយ និងប្រសើរឡើងថែមមួយកម្រិតទៀត។ ជាចុងក្រោយ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមយ៉ាងមុតមាំថា សៀវភៅម៉ាទ្រីសមួយនេះនឹងក្លាយជាទុនមួយយ៉ាងសំខាន់សម្រាប់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងអ្នកសិក្សាទូទៅយកទៅប្រើប្រាស់ទុកជាឯកសារស្រាវជ្រាវមួយ ។ យើងខ្ញុំ សូមគោរពជូនពរ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ លោក/លោកស្រី និងមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពល្អ រឹងមាំ មានភាពជោគជ័យក្នុងការសិក្សា និងគ្រប់ភារកិច្ច ។

ថ្ងៃចន្ទ ១៤ រោច ខែជេស្ឋ ឆ្នាំកុរ ឯកស័ក ព.ស ២៥៦៣

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី០១ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០១៩

គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ក្រុម១ ជំនាន់ទី២៤

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាបឋម យើងខ្ញុំដែលជាអ្នករៀបរៀងសៀវភៅនេះ សូមនឹករលឹកគុណជូនចំពោះមាតាមិតា លោកគ្រូអ្នកគ្រូព្រមទាំងអ្នកមានគុណទាំងឡាយដែលបានជំរុញ ពួកយើងខ្ញុំហូតក្លាយទៅជាគរុនិស្សិតហើយនឹងក្លាយជាគ្រូបង្រៀន ក្នុងពេលខាងមុខនេះ សម្រាប់អប់រំក្មេងៗជំនាន់ក្រោយឱ្យក្លាយជាសរសរទ្រូងនៃប្រទេសជាតិ។ ប្រសិនបើគ្មានវត្តមានអស់លោកអ្នកទាំងអស់ទេ ពួកយើងខ្ញុំក៏មិនមានថ្ងៃនេះដែរ។

សូមគោរពអរព្រះគុណជូនចំពោះលោកឪពុក អ្នកម្តាយជាព្រះកន្លោងដែលបានផ្តល់ជីវិត ក៏ដូចជាក្តីស្រលាញ់ និងសម្ភារៈសម្រាប់ទ្រទ្រង់ដល់ការសិក្សារៀនសូត្ររបស់កូនៗ តាំងពីតូចរហូតដល់ពេលបច្ចុប្បន្ន។

សូមគោរពអរគុណជូនចំពោះលោកគ្រូ អ្នកគ្រូគ្រប់កម្រិតតាំងពីមត្តេយ្យសិក្សា រហូតដល់ឧត្តមសិក្សាជាពិសេសលោកគ្រូអ្នកគ្រូ ដែលជាគ្រូឧទ្ទេស និងគណៈគ្រប់គ្រងវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ដែលបានបង្ហាត់បង្រៀនយើងខ្ញុំឱ្យក្លាយជាធនធានមនុស្សសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍប្រទេសជាតិ។

សូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះអ្នកមានគុណទាំងឡាយមាន បងប្អូន ជីដូនជីតា មិត្តភក្តិ និងអ្នកទាំងឡាយដែលបានជួយជ្រោមជ្រែង និងបានផ្តល់នូវបទពិសោធន៍ល្អៗ ក៏ដូចជាសកម្មភាពនានាពាក់ព័ន្ធនឹងដំណើរការសិក្សានេះផងដែរ។

ជាចុងបញ្ចប់ យើងខ្ញុំសូមជូនពរអ្នកមានគុណទាំងអស់ សូមប្រកបដោយសុខភាពល្អបរិបូរណ៍ សុភមង្គល់ សុខសុវត្ថភាព និងទទួលបាននូវពុទ្ធពរទាំងបួនប្រការគឺ អាយុ វណ្ណៈ សុខៈ ពលៈ កុំបីឃ្លៀងឃ្លាតឡើយ។

សូមអរព្រះគុណ និងអរគុណ!

ថ្ងៃចន្ទ ១៤ រោច ខែជេស្ឋ ឆ្នាំកុរ ឯកស័ក ព.ស ២៥៦៣

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី០១ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០១៩

គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា ក្រុម១ ជំនាន់ទី២៤

មូលន័យសង្ខេប

ដោយយោងតាមតម្រូវការរបស់សិស្សានុសិស្សដែលកំពុងសិក្សាថ្នាក់នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងសិស្សនិស្សិតនៅតាមបណ្ដាមហាវិទ្យាល័យនានា ទើបក្រុមយើងខ្ញុំ បានសិក្សាស្រាវជ្រាវលើប្រធានបទ **ម៉ាទ្រីស** ដើម្បីទុកជាឯកសារស្រាវជ្រាវបញ្ចប់ឆ្នាំសិ ក្សានៅវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំគណិតក្រុម១ ជំនាន់ទី២៤ និងទុកជាឯកសារសម្រាប់សិស្សនិស្សិតដែលត្រូវការចាំបាច់ផងដែរ។

សៀវភៅនេះបានបែងចែកជាជំពូកធំៗគឺ ជំពូកទី១និយាយអំពី **ម៉ាទ្រីស** បានសរសេររៀបរាប់អំពីផ្នែកនេះមេរៀននីមួយរួចមាននិយមន័យ ទ្រឹស្ដីបទ និងឧទាហរណ៍ ។ ជំពូកទី២ គឺនិយាយអំពី **ការអនុវត្តន៍ម៉ាទ្រីសនៅលើមេរៀនវ៉ិចទ័រនិងបរមាភម្ម** និងមានលំហាត់ឧទាហរណ៍ផងដែរ ។ បន្ទាប់ពីមេរៀនមកចូលដល់ផ្នែកលំហាត់ មានដំណោះស្រាយ ។ ជាចុងបញ្ចប់នៃសៀវភៅនេះមានលំហាត់អនុវត្តន៍ ដែលមានចម្លើយដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

មាតិកា

ជំពូក១ ម៉ាទ្រីស

១. សញ្ញាណនៃម៉ាទ្រីស

នៅក្នុងហាងធំមួយ គេមានអាវយឺតមានបីទំហំនិងពណ៌ចំនួនប្រាំផ្សេងៗគ្នា ។ ដោយអាវយឺតពណ៌ក្រហម មានទំហំមធ្យមចំនួន 3 និងទំហំធំមានចំនួន 1, អាវយឺតពណ៌ស មានទំហំតូចមានចំនួន 9 និងទំហំមធ្យមចំនួន 5 , អាវយឺតពណ៌ខៀវ មានទំហំតូចមានចំនួន 8 និងទំហំមធ្យមចំនួន 6, អាវយឺតពណ៌បៃតង មានទំហំមធ្យមចំនួន 5 និងទំហំធំមានចំនួន 3, អាវយឺតពណ៌ខ្មៅ មានទំហំតូចមានចំនួន 7 ទំហំមធ្យមចំនួន 1 និងទំហំធំមានចំនួន 2 ។ ដោយសារតែពណ៌មានដែលទាក់ទង់នឹងអាវយឺតមានភាពស្មុកស្មាញ ទើបអ្នកគ្រប់គ្រងហាងបានរៀបចំនួនទិន្នន័យរបស់អាវយឺតជាជួរឈរ និងជួដេកដូចខាងក្រោមដើម្បីងាយស្រួលយល់ ។

$$\begin{array}{c} \\ \text{តូច} \\ \text{មធ្យម} \\ \text{ធំ} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{ក្រហម} & \text{ស} & \text{ខៀវ} & \text{បៃតង} & \text{ខ្មៅ} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (១.១)$$

ការតម្រៀបទិន្នន័យជាជួរដេក និងជួរឈរដូចក្រាបខាងលើ គេហៅថាជាម៉ាទ្រីស ។

២. និយមន័យ និងការកំណត់សរសេរ

និយមន័យ ១.១. គេហៅថាម៉ាទ្រីសមានទំហំ (p,n) ឬ $p\times n$ មានមេគុណក្នុង $\mathbb{K}$ ជាតារាង A មួយរាងចតុកោណកែងមាន pn ធាតុរៀបលើ p ជួរដេក និងលើ n ជួរឈរ៖

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \tag{១.២}$$

ដែលគេអាចសរសេរយ៉ាងខ្លី $A=(a_{ij})$ (១.៣)

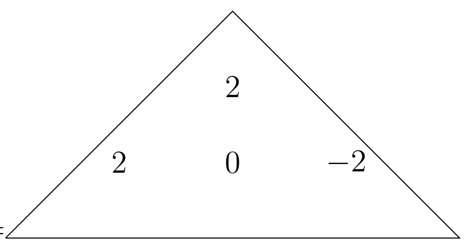
សំណុំនៃម៉ាទ្រីសមាន p ជួរដេក និង n ជួរឈរកំណត់សរសេរដោយ $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ ឬ $\mathbb{K}^{p\times n}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.១.

ក. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសមានទំហំ $(3,2)$ ឬ 3×2 នោះ $A\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ ។

ខ. $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីស មានទំហំ $(3,3)$ ឬ 3×3 នោះ $B\in\mathcal{M}_{3}(\mathbb{R})$

គ. $C=\begin{pmatrix}3-i & 2 & 1\\ 2 & 1 & i+2\\ 3 & i & 3\end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីស មានទំហំ $(3,3)$ ឬ 3×3 នោះ $C\in\mathcal{M}_{3}(\mathbb{C})$

ឃ. $D=$ 

មិនមែនជាម៉ាទ្រីសទេ ។

ចំណាំ ១.១. នៅក្នុងការកំណត់សរសេរ a_{ij} សន្ទស្សន៍ទី i សម្គាល់ជួរដេកទី i និងសន្ទស្សន៍ទីពីរ j សម្គាល់ជួរឈរទី j ។

៣. ប្រភេទនៃម៉ាទ្រីស

៣.១. ម៉ាទ្រីសសូន្យ

និយមន័យ ១.២. ម៉ាទ្រីសសូន្យ គឺជាម៉ាទ្រីសទាំងឡាយណាដែលមានធាតុទាំងអ ស់ស្មើសូន្យ ។

ឧទាហរណ៍ ១.២. ខាងក្រោមនេះជាម៉ាទ្រីសសូន្យ

១. $A = (0)$

២. $B = (0, 0, 0)$

៣. $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

៤. $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

៣.២. ម៉ាទ្រីសការេ (Square Matrix)

និយមន័យ ១.៣. ម៉ាទ្រីសការេ គឺជាម៉ាទ្រីសដែលមានលំដាប់ជួរដេកនិងលំដាប់ជួរឈរស្មើគ្នា ។ ម៉ាទ្រីលំដាប់ $n \times n$ ហៅថា ម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ n (n-square matrix) ។ តាមនិយមន័យ១.២ បើ $p = n$ នោះ $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ ហៅថាម៉ាទ្រីសការេទំហំ n កំណត់សរសេរដោយ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ឬ $\mathbb{K}^{n\times n}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.៣. ១. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសការេ មានទំហំ $(2, 2)$ ឬ 2×2 នោះ $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ។

២. $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសការេ មានទំហំ $(3, 3)$ ឬ 3×3 នោះ $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ។

៣. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ មិនមែនជាម៉ាទ្រីសការេទេ ព្រោះ មានទំហំ $(2, 3)$ ឬ 2×3 នោះ $C \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ ។

៣.៣. ម៉ាទ្រីសឯកតា

និយមន័យ ១.៤. ម៉ាទ្រីការេ ដែលមានធាតុនៅលើអង្គត់ទ្រូងពិសេស $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \cdots = a_{nn} = 1$ ហើយធាតុរផ្សេងទៀតស្មើនឹងសូន្យ ហៅថាម៉ាទ្រីសឯកតា តាងដោយ I ។

ឧទាហរណ៍ ១.៤. គេឲ្យម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

១. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសឯកតា មានលំដាប់ $(2, 2)$ ឬ 2×2 ។

២. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសឯកតា មានលំដាប់ $(3,3)$ ឬ 3×3 ។

៣. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសឯកតា មានលំដាប់ $(4,4)$ ឬ 4×4 ។

៣.៤. ម៉ាទ្រីសបឋម

និយមន័យ ១.៥. A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ហៅថាម៉ាទ្រីសបឋមកាលណា A ជាម៉ាទ្រីសដែលបានមកដោយការធ្វើប្រមាណវិធីជួរដេកដំបូងតែមួយគត់លើម៉ាទ្រីសឯកតា I_n ។

ឧទាហរណ៍ ១.៥. គេឲ្យម៉ាទ្រីសឯកតាបីគឺ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ និង $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

- គេមាន $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ យក A ជាម៉ាទ្រីសដែលបានមកពីការគុណជួរដេកទីមួយនៃ I_2 នឹង 3

នោះគេបាន $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_1 \to 3R_1$

ដូចនេះ $\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ជាម៉ាទ្រីសបឋម}}$

- គេមាន $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ យក B ជាម៉ាទ្រីសដែលបានមកពីការប្តូរជួរដេកទីពីរ និងជួរដេកទីបីនៃ I_3 នោះ

គេបាន $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ជាម៉ាទ្រីសបឋម}}$

- គេមាន $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ យក C ជាម៉ាទ្រីសដែលបានមកដោយគុណជួរដេកទីបីនឹង 2 ហើយបូកជួរដេកទីមួយនៃ I_4

នោះ គេបាន $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_3 \to 2R_3 + R_1$

ដូចនេះ $\boxed{C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ជាម៉ាទ្រីសបឋម}}$

៣.៥. ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង (Diagonal Matrix)

និយមន័យ ១.៦. $A = (a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le n}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ហៅថាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង លុះត្រាតែគ្រប់ធាតុ ដែលមិនមែនជាធាតុនៃអង្កត់ទ្រូងពិសេសសុទ្ធតែស្មើសូន្យ និងគ្រប់ធាតុដែលជាធាតុនៃអង្កត់ទ្រូង ពិសេសខុសពីសូន្យ ។ មានន័យថា $a_{ij} = 0, \forall i \ne j; a_{ij} \ne 0, \forall i = j$ គេសរសេរ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn} \ne 0$ ។

ចំណាំ ១.២. បើ $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ នោះ A ក្លាយជាម៉ាទ្រីសឯកតា ។

ឧទាហរណ៍ ១.៦. តើក្នុងចំណោមម៉ាទ្រីសខាងក្រោមមួយណាខ្លះជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង៖

ក . $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ខ . $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ គ . $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក . A ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង ។

ខ . B ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង ។

គ . C មិនមែនជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងទេព្រោះ $a_{33} = 0$ ។

៣.៦. ម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ

និយមន័យ ១.៧. A ជាម៉ាទ្រីសមួយហៅថាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ បើគ្រប់ធាតុទាំងអស់ដែលឋិតនៅខាងក្រោមអង្កត់ទ្រូងសំខាន់ គឺស្មើសូន្យទាំងអស់ ។ គេអាចសរសេរទម្រង់ទូទៅ៖ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

មានន័យថា៖ $A = (a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le n}$ ដែល $a_{ij} = 0, \forall i > j$; $a_{ij} \ne 1, \forall i = j$ និង $\exists a_{ij} \ne 0, i < j$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.៧. ម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ៖

ក. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$ ខ. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ គ. $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\0 & a_{22} & a_{23} & a_{34}\\0 & 0 & a_{33} & a_{34}\\0 & 0 & 0 & a_{44}\end{pmatrix}$

៣.៧. ម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម

និយមន័យ ១.៨. ម៉ាទ្រីសមួយហៅថាម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម បើគ្រប់ធាតុទាំងអស់ដែលស្ថិតនៅខាងលើអង្កត់ទ្រូងសំខាន់ គឺស្មើសូន្យទាំងអស់ ។ គេអាចសរសេរទម្រង់ទូទៅ៖ $\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$

មានន័យថា៖ $A=(a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le n}$ ដែល $a_{ij}=0,\forall i<j$; $a_{ij}\neq 0,\forall i=j$ និង $\exists a_{ij}\neq 0, i>j$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.៨. ម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម៖

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 3 & 0\\-1 & 0 & 4\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0 & 0\\a_{21} & a_{22} & 0 & 0\\a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0\\a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}$

៣.៨. ម៉ាទ្រីសឆ្លុះ ឬម៉ាទ្រីសស៊ីមេទ្រី

ឧទាហរណ៍ ១.៩. $A=(a_{ij})$ ដែល $1\le i\le n, 1\le j\le n$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n\times n$ ហៅថាម៉ាទ្រីសឆ្លុះ ឬម៉ាទ្រីសស៊ីមេទ្រី កាលណាត្រង់ស្ប៉ូសេ $TRANSPOSE$ នៃម៉ាទ្រីស A ស្មើនឹងម៉ាទ្រីស A ។ មានន័យថា $A^T=A$

ឧទាហរណ៍ ១.១០. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 5\\3 & 5 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 5\\3 & 5 & 6\end{pmatrix}$

ដោយ $A=A^T$ នោះ A ជាម៉ាទ្រីសស៊ីមេទ្រី ។

ចំណាំ ១.៣. ម៉ាទ្រីសការេ A ជាម៉ាទ្រីសប្រាសស៊ីមេទ្រីលុះត្រាតែ $A^T=A$ នោះបានលក្ខណៈខាងក្រោម៖

- បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេនោះ $A+A^T$ ជាម៉ាទ្រីសឆ្លុះ ។
- បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេនោះ $A-A^T$ ជាម៉ាទ្រីសប្រាសស៊ីមេទ្រី ។

៣.៩. ម៉ាទ្រីសកែង

និយមន័យ ១.៩. $A=(a_{ij})$ ដែល $1\le i\le n, 1\le j\le n$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n\times n$ គឺជាម៉ាទ្រីសកែង កាលណា ចម្រាសរបស់វាស្មើនឹងម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូសេរបស់វា ។

ចំណាំ ១.៤. បើ A ជាម៉ាទ្រីសកែង នោះ $A^{-1}=A^T$ នាំឲ្យ $AA^{-1}=AA^T=I_n$ ដែល I_n ជាម៉ាទ្រីសឯកតា ។
ដូចនេះ A ជាម៉ាទ្រីសកែងកាលណា $A^{-1}=A^T$ ឬ $AA^T=A^TA=I_n$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.១១. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

គេបាន $B^T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \sin 0\\ \sin 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$AA^T=I_2$

ដូចនេះ $\boxed{A \text{ ជាម៉ាទ្រីសកែង}}$

៣.១០. ប្រមាណវិធីបូកម៉ាទ្រីស

នៅលើសំណុំ $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ គេកំណត់ប្រមាណវិធី៖

ចំពោះ $A=(a_{ij})$ និង $B=(b_{ij})$ គេបាន $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]\ ,(i=\overline{1,p}\,;j=\overline{1,n})$

ឧទាហរណ៍ ១.១២. គេមានម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 7 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ $,B=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 2 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ និង $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

គណនា $$A+B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 7 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 2 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5-6 & 1+3\\ 7+2 & 3-1\\ -2+4 & -1+1\end{pmatrix}$$
$$\therefore\quad A+B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 9 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

គណនា $A+C$ មិនអាចបូកបានទេព្រោះ ម៉ាទ្រីសទាំងពីរមានលំដាប់ខុសគ្នា ។

Listing ១.1: ដោះស្រាយតាម matlab

```
a = [5 1 ; 7 3 ; -2 -1];
b = [-6 3 ; 2 -1 ; 4 1];
c = [2 1 ; 0 3];
q1 = a+b
q2 = a+c
```

ទ្រឹស្តីបទ ១.១. បើ A,B និង C ជាម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ស្មើគ្នា នោះគេបាន៖

១. លក្ខណៈត្រឡប់ចំពោះប្រមាណវិធីបូក៖ គេបាន $A+B=B+A$ ។

២. លក្ខណៈផ្តុំចំពោះប្រណាណវិធីបូក៖ គេបាន $A+(B+C)=(A+B)+C$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $A=[a_{ij}],B=[b_{ij}]$ និង $C=[c_{ij}]$

១. គេបាន $$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]$$
$$=[a_{ij}+b_{ij}]$$
$$=[b_{ij}+b_{ij}]$$
$$=[b_{ij}]+[a_{ij}]$$
$$\therefore\quad A+B=B+A$$

២. គេបាន
$$\begin{aligned} A+(B+C) &= [a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}]) \\ &= [a_{ij}]+([b_{ij}+c_{ij}]) \\ &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) \\ &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}] \\ &= [(a_i+b_{ij})]+[c_{ij}] \\ &= ([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}] \end{aligned}$$
$$\therefore \quad A+(B+C)=(A+B)+C$$

លក្ខណៈ ១.១. ចំពោះ ម៉ាទ្រីស A ធ្វើប្រមាណវិធីនឹងម៉ាទ្រីស 0 គេបាន $A+0=A$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.១៣. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ និង $B=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&2&2\\-1&3&1\end{pmatrix}$ ។ គណនា $A+B$ និង $A-B$ ។

គេបាន
$$A+B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&3\\5&2&2\\-1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&2+1&3+3\\4+5&5+2&6+2\\7-1&8+3&9+1\end{pmatrix}$$
$$\therefore \quad A+B=\begin{pmatrix}3&3&6\\9&7&8\\6&11&10\end{pmatrix}$$
$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1&3\\5&2&2\\-1&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2&2-1&3-3\\4-5&5-2&6-2\\7+1&8-3&9-1\end{pmatrix}$$
$$\therefore \quad A-B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&3&4\\8&5&8\end{pmatrix}$$

Listing ១.2: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
a = [1 2 3 ; 4 5 6 ; 7 8 9];
b = [2 1 3 ; 5 2 2 ; -1 3 1];
q1 = a+b
q2 = a-b
```

ទ្រឹស្តីបទ ១.២. បើ A និង B ជាម៉ាទ្រីមានលំដាប់ដូចគ្នា និង $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ នោះគេបាន៖

១. $\lambda_1(A+B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$

២. $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$

៣. $(\lambda_1\lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $A = [a_{ij}]$ និង $B = [b_{ij}]$

១. ចំពោះ $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ គេបាន
$$\begin{aligned}\lambda_1(A+B) &= \lambda_1\left([a_{ij}] + [b_{ij}]\right)\\ &= \lambda_1\left[(a_{ij}+b_{ij})\right]\\ &= \left[(\lambda_1 a_{ij} + \lambda_1 b_{ij})\right]\\ &= [\lambda_1 a_{ij}] + [\lambda_1 b_{ij}]\\ &= \lambda_1[a_{ij}] + \lambda_1[b_{ij}]\\ \therefore \quad \lambda_1(A+B) &= \lambda_1 A + \lambda_1 B\end{aligned}$$

២. ចំពោះ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ គេបាន
$$\begin{aligned}(\lambda_1+\lambda_2)A &= (\lambda_1+\lambda_2)[a_{ij}]\\ &= \lambda_1[a_{ij}] + \lambda_2[a_{ij}]\\ \therefore \quad (\lambda_1+\lambda_2)A &= \lambda_1 A + \lambda_2 A\end{aligned}$$

៣. ចំពោះ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ គេបាន
$$\begin{aligned}(\lambda_1\lambda_2)A &= (\lambda_1\lambda_2)[a_{ij}]\\ &= \lambda_1(\lambda_2[a_{ij}])\\ \therefore \quad (\lambda_1\lambda_2)A &= \lambda_1(\lambda_2 A)\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ ១.១៤. គេឲ្យម៉ាទ្រី $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ ។
គណនា $2A$, $A+B$, $3(A-B)$, $2A+3B$ និង $A+B+C$ ។

ដំណោះស្រាយ

- $2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

- $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

- $$\begin{aligned} 3(A-B) = 3A - 3B &= 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 21 & 24 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3-15 & 6-18 \\ 9-21 & 12-24 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -12 & -12 \\ -12 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 2A+3B = 2A+2B+B = 2(A+B)+B &= 2\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 20 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12+5 & 16+6 \\ 20+7 & 24+8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 & 22 \\ 27 & 32 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} A+B+C = (A+B)+C &= \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6-1 & 8+0 \\ 10+3 & 12-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Listing ១.3: ដំណោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
a = [1 2 ; 3 4];
b = [5 6 ; 7 8];
c = [-1 0 ; 3 -3];
q1 = 2.*a
```

```
q2 = a+b
q3 = 3.*(a-b)
q4 = 2.*a+3.*b
q5 = a+b+c
```

៣.១១. ប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីស

បើគេមានប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទីមួយមានបីអញ្ញាតដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 4 \\ 5x+6y+7z &= 8 \\ -1x-2y-3z &= 9 \end{cases} \tag{១.៤}$$

គេអាចសរសេរប្រព័ន្ធសមីការ (១.៤) ជាទំរង់ [ចំនួនថេរ].[អថេរ] = ចំនួនថេរ

គេបាន

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \tag{១.៥}$$

តាមប្រព័ន្ធសមីការ (១.៤) និង (១.៥) គេអាចកំណត់ផលគុណនៃម៉ាទ្រីសបាន៖

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x+2y+3y \\ 5x+6y+7z \\ -1x-2y-3 \end{pmatrix} \tag{១.៦}$$

និយមន័យ ១.១០. ផលគុណនៃម៉ាទ្រីស ជាអនុវត្តន៍

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ ([a_{ij}],[b_{ij}]) &\longmapsto [c_{ik}] \end{aligned} \tag{១.៧}$$

ដែល $$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \tag{១.៨}$$

ដូច្នេះធាតុ c_{ik} នៃជួរដេកទី i និងជួរឈរទី k នៃផលគុណ $C = AB$ ជាផលបូកនៃផលគុណនៃធាតុនៃម៉ាទ្រីសផលគុណ $C = AB$ ត្រូវបានចាត់ទុកដូចផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រជួរដេកទី i នៃម៉ាទ្រីសទីមួយនិង A និង វ៉ិចទ័រជួរឈរទី k នៃម៉ាទ្រីសទីពីរ B ។ មានន័យថា ផលគុណនៃពីរម៉ាទ្រីសត្រូវធ្វើ ជួរដេកជាមួយជួរឈរ ។

ចំណាំ ១.៥. ម៉ាទ្រីសពីរធ្វើប្រមាណវិធីគុណបាន កាលណាចំនួនជួរឈរនៃម៉ាទ្រីសទី១ ស្មើនឹងចំនួនជួរដេកនៃទីពីរ ។

ឧទាហរណ៍ ១.១៥. គេឲ្យ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 9 & 10 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$ និង $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ។

គណនា AB , BA , AC និង CA ។ រួចទាញថា $AB \neq BA$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 9 & 10 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(-7)+(2)(9)+(3)(0) & (1)(-8)+(2)(10)+(3)(-11) \\ (4)(-7)+(5)(9)+(6)(0) & (4)(-8)+(5)(10)+(6)(-11) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad AB = \begin{pmatrix} 11 & -21 \\ 17 & -48 \end{pmatrix} \quad (I)$$

$$BA = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 9 & 10 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-7)(1)+(-8)(4) & (-7)(2)+(-8)(5) & (-7)(3)+(-8)(6) \\ (9)(1)+(10)(4) & (9)(2)+(10)(5) & (9)(3)+(10)(6) \\ (0)(1)+(-11)(4) & (0)(2)+(-11)(5) & (0)(3)+(-11)(6) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad BA = \begin{pmatrix} -39 & -54 & -69 \\ 49 & 68 & 87 \\ -44 & -55 & -66 \end{pmatrix} \quad (II)$$

ចំពោះ AC តាមនិយមន័យមិនអាចគុណបានទេ ព្រោះ A ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ (2×3) ហើយ C ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ (2×2) ។ តែ CA គេអាចគណនាបាន ព្រោះ C ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ (3×2) និង A ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ (2×2)

គេបាន $$CA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2)(1)+(3)(4) & (2)(2)+(5)(3) & (2)(3)+(3)(6) \\ (3)(1)+(2)(4) & (3)(2)+(2)(5) & (3)(3)+(2)(6) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 19 & 24 \\ 11 & 16 & 21 \end{pmatrix}$$

តាម (I) និង (II) គេបាន $AB \neq BA$

Listing ១.4: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
a = [1 2 3 ; 4 5 6];
b = [-7 -8 ; 9 10 ; 0 -11];
c = [2 3 ; 3 2];
q1 = a*b
q2 = b*a
q3 = a*c
q4 = c*a
```

ទ្រឹស្តីបទ ១.៣. បើ A, B និង C គឺជាបីម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ដូចគ្នា នោះគេបាន៖

១. $A(BC) = (AB)C$ លក្ខណៈផ្តុំចំពោះប្រមាណវិធីគុណ

២. $A(B+C) = AB + AC$ លក្ខណៈបំបែកខាងឆ្វេងចំពោះប្រមាណវិធីគុណ

៣. $(B+C)A = BA + CA$ លក្ខណៈបំបែកខាងស្តាំចំពោះប្រមាណវិធីគុណ

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បើគេយក $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $m \times n$ និង $C = [c_{ij}]$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $n \times p$

១. គេបាន
$$\begin{aligned} A(BC) &= [a_{ij}]\left([b_{ij}][c_{ij}]\right) \\ &= [a_{ij}][b_{ij}][c_{ij}] \\ &= \left([a_{ij}][b_{ij}]\right)[c_{ij}] \\ \therefore \quad A(BC) &= (AB)C \end{aligned}$$

២. គេបាន
$$\begin{aligned} A(B+C) &= [a_{ij}]\left([b_{ij}]+[c_{ij}]\right)\\ &= [a_{ij}]\left[(b_{ij}+c_{ij})\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj})\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right]\\ &= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]+\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\right]\\ &= [a_{ij}][b_{ij}]+[a_{ij}][c_{ij}] \quad \text{តាមនិយមន័យ}\\ \therefore\quad A(B+C) &= AB+AC \end{aligned}$$

៣. ស្រាយដូចទី២

៤. ម៉ាទ្រីសច្រាស

និយមន័យ ១.១១. A ជាម៉ាទ្រីសការេមួយដែល $\det(A)\neq 0$ ។ បើគេគុណម៉ាទ្រីស A និងម៉ាទ្រីសការេ B មួយ ហើយ ផលគុណនៃម៉ាទ្រីសនោះជាម៉ាទ្រីសឯកតា $AB=BA=I$ នោះគេថាម៉ាទ្រីស A មានចម្រាស ដែល B ជាចម្រាស ឬជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $B=A^{-1}$ ដូចនេះគេបាន $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.១៦. ម៉ាទ្រីស $B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{bmatrix}$ គឺជាចម្រាសនៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

ព្រោះ $AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=BA$

គេសរសេរបាន $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{bmatrix}$

ឧទាហរណ៍ ១.១៧. គេឲ្យបីម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ និង $C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

• បើ $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4)(-2)+(3)(3) & (4)(3)+(3)(-4) \\ (3)(-2)+(2)(3) & (3)(3)+(2)(-4) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

និង $BA = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4)(-2)+(3)(3) & (4)(3)+(3)(-4) \\ (3)(-2)+(2)(3) & (3)(3)+(2)(-4) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

គេបាន $AB = BA = I$ នោះ B ជាចម្រាសនៃម៉ាទ្រីស A ឬ A ជាចម្រាសនៃម៉ាទ្រីស B ។

• បើ $AC = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 2+3\times 1 & 4\times 3+3\times 2 \\ 3\times 2+2\times 1 & 3\times 3+2\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$

គេបាន $AC \neq I_2$ នោះ C មិនមែនជាម៉ាទ្រីសប្រាសនៃម៉ាទ្រីស A ទេ ឬម៉ាទ្រីស A មិនមែនជាម៉ាទ្រីសប្រាសនៃម៉ាទ្រីស B ទេ ។

ទ្រឹស្តីបទ ១.៤. បើពីរម៉ាទ្រីសការេ B និង C ជាម៉ាទ្រីសប្រាសនៃម៉ាទ្រីសការេ A នោះ $B = C$ ។

ដំណោះស្រាយ

បើ B និង C ជាម៉ាទ្រីសប្រាសនៃម៉ាទ្រីស A នោះ $AB = I$ និង $CA = I$

គេបាន $AB = I \Rightarrow C(AB) = CI = C$

$CA = I \Rightarrow (CA)B = IB = B$

ដោយ $C(AB) = (CA)B \Rightarrow C = B$

ទ្រឹស្តីបទ ១.៥. បើពីរម៉ាទ្រីសការេ A និង B ជាម៉ាទ្រីសមានប្រាសដែលមានលំដាប់ដូចគ្នាគេបាន៖

១. ម៉ាទ្រីសការេ AB មានចម្រាស

២. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ដំណោះស្រាយ

គេគ្រាន់តែបង្ហាញថា $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ តាមលក្ខណៈប្រមាណវិធីនៃម៉ាទ្រីស

គេបាន $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

នាំឲ្យ $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ មានន័យថាម៉ាទ្រីស AB មានចម្រាសគឺ B^1A^{-1} និងប្រាសមកវិញ ម៉ាទ្រីស $B^{-1}A^{-1}$ មានចម្រាសគឺម៉ាទ្រីស AB ។

ដូចនេះ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ។

៤.១. លក្ខណៈនៃម៉ាទ្រីសច្រាស

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
3. $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}, k \neq 0$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
5. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
6. $(A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$
7. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \quad , n = 1, 2, 3, \cdots$

៤.២. ដេទែមីណាង់ Determinent

និយមន័យ ១.១២. ដេទែមីណង់ជាអនុគមន៍ដែលយកតម្លៃពិតនៃអថេរដែលមានរាងជាម៉ាទ្រីសការេមួយ ។ មានន័យថាវានឹងកំណត់បាននូវតម្លៃពិត $f(x)$ មួយតាមតម្លៃនៃម៉ាទ្រីសការេ X ។

និយមន័យ ១.១៣. A ជាម៉ាទ្រីការេមួយ ។ អនុគមន៍ដេទែមីណង់តាងដោយ det ឬ $|\quad|$ ហើយអនុគមន៍ដេទែមីណង់នៃ A កំណត់ដោយ $\det(A)$ ឬ $|A|$ គឺជាផលបូកនៃគ្រប់ផលគុណដំបូងដែលមានសញ្ញាទាំងអស់នៃម៉ាទ្រីសការេ A ។

ចំណាំ ១.៦. ផលគុណដំបូងនៃម៉ាទ្រីសការេ A មានន័យថាជាផលគុណណាមួយនៃ n ធាតុរបស់ម៉ាទ្រីស តែគ្មានធាតុពីរណាដែលឋិតក្នុងជួរដេកតែមួយឬ ជួឈរតែមួយទេ ។

ឧទាហរណ៍ ១.១៨. ចូរសរសេរគ្រប់ផលគុណដំបូងទាំងអស់នៃម៉ាទ្រីសការេ ហើយសរសេរគ្រប់ផលគុណដំបូងដែលមានសញ្ញាទាំងអស់នៃម៉ាទ្រីស និងកំណត់ដេទែមីណង់ នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

១. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

២. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

១. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ផលគុណដំបូងទាំងអស់នៃម៉ាទ្រីស A មាន $a_{11}a_{22}$ និង $a_{21}a_{12}$

ផលគុណដំបូងដែលមានសញ្ញាទាំងអស់នៃម៉ាទ្រីស A គឺ $a_{11}a_{22}$ និង $-a_{21}a_{12}$

ដូចនេះ $\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ហៅថាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសការេ A ។

២ . $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ផលគុណដំបូងទាំងអស់នៃម៉ាទ្រីស B

មាន $a_{11}a_{22}a_{33} \quad a_{12}a_{23}a_{31} \quad a_{13}a_{32}a_{21} \quad a_{31}a_{22}a_{13} \quad a_{32}a_{23}a_{11}$ និង $a_{21}a_{12}a_{33}$

ផលគុណដំបូងដែលមានសញ្ញាទាំងអស់នៃម៉ាទ្រីស B គឺ $a_{11}a_{22}a_{33} \quad a_{12}a_{23}a_{31} \quad a_{13}a_{32}a_{21} \quad -a_{31}a_{22}a_{13} \quad -a_{32}a_{23}a_{11}$ និង $-a_{21}a_{12}a_{33}$

ដូចនេះ $\det(B) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

ហៅថាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសការេ B ។

Listing ៩.5: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
syms a_11 a_12 a_13 a_21 a_22 a_23 a_31 a_32 a_33
A = sym([a_11 a_12 ; a_21 a_22])
B = sym([a_11 a_12 a_13 ; a_21 a_22 a_23 ; a_31 a_32 a_33])
X = det(A)
Y = det(B)
```

ទ្រឹស្តីបទ ១.៦. បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេ ហើយមានចម្រាស នោះ $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេហើយមានចម្រាសនោះ

គេបាន $\quad AA^{-1} = I$

$$\Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \quad ,\text{ព្រោះ } \det(AB) = \deg(A).\det(B)$$

បើ $\det(A) \neq 0$ នោះ $\dfrac{\det(A).\det(A^{-1})}{\det(A)} = \dfrac{1}{\det(A)}$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

៤.៣. ការគណនាដេទែមីណង់ដោយប្រើវិធី SARUSE

គេឲ្យ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 3×3 ដែល $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$

ចំណាំ ១.៧. វិធី SARUSE អនុវត្តន៍បានចំពោះម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×3 តែប៉ុណ្ណោះ ។

ឧទាហរណ៍ ១.១៩. គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

គេបាន $\det(A) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & \vdots & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$= (1)(1)(1) + (0)(2)(0) + (2)(3)(2) - (0)(1)(2) - (2)(2)(1) - (1)(3)(0)$$

$$= 9$$

ដូចនេះ $\boxed{\det(A) = 9}$

Listing 9.6: ដោះស្រាយដោយប្រើ matlab

```
format rat
a = [1 0 2 ; 3 1 2 ; 0 2 1];
answer = det(a)
```

៤.៤. ការគណនាដេទែមីណង់ចំពោះម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ ម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម និងម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងពិសេស

និយមន័យ ១.១៤. បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ (ម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើ ម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោម ឬម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង) នោះ $\det(A)$ ស្មើនឹងផលគុណនៃធាតុនៅលើអង្កត់ទ្រូងសំខាន់គឺ $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.២០. គេឲ្យបីម៉ាទ្រីការេ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \end{pmatrix}$

និង $C = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

- A ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណលើមានលំដាប់ 4×4 ដែល $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$

  គេបាន $\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

- B ជាម៉ាទ្រីសត្រីកោណក្រោមលំដាប់ 5×5 ដែល $B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} & 0 \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} & a_{55} \end{pmatrix}$

គេបាន $\det(B) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} & 0 \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} & a_{55} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$

- C ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងពិសេសលំដាប់ 4×4 ដែល $C = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$

គេបាន $\det(C) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

៤.៥. ការគណនាដេទែមីណង់ដោយប្រើបន្ទាត់ជួរដេក

ទ្រឹស្តីបទ ១.៧. បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេមួយដែលមានជួរដេកមួយស្មើសូន្យនោះ $\det(A) = 0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គ្រប់ផលគុណដំបូងដែលមានសញ្ញាទាំងអស់ចេញពីម៉ាទ្រីស A មានកត្តាមួយចេញពីគ្រប់ជួរដេកទាំងអស់នៃ A នោះគ្រប់ផលគុណដំបូងដែលមានសញ្ញាទាំងអស់មានកត្តាមួយពីជួរ ដេកស្មើសូន្យ ដូច្នេះវាមានតម្លៃស្មើសូន្យ ។ ម៉្យាងទៀតដោយ $\det(A)$ ជាផលបូកនៃគ្រប់ផលគុណដំបូងដែលមាន សញ្ញាទាំងអស់ នោះយើងបាន $\det(A) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.២១. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 2 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1-x \end{pmatrix}$ ។ រកតម្លៃ x ដែល $\det(A) = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $\det(A)=\begin{vmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 2 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1-x \end{vmatrix}$

$$=(3-x)[-(4-x)(1+x)+4]-2[-2(1+x)+2]+2[-8+2(4-x)]$$

$$=(3-x)\left[x^2-3x\right]-2[-2x]+2[-2x]$$

$$=x\left[-(x-3)^2\right]$$

ដោយ $\det(A)=0$ នោះ $x\left[-(x-3)^2\right]=0$ នាំឲ្យ $x=0, x=3$

ទ្រឹស្តីបទ ១.៨. A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n\times n$ និង k ជាចំនួនពិតមួយនោះ $|kA|=k^n|A|$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

$A=(a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le n}\Rightarrow (kA)=(ka_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le n}$`

នោះគេបាន $\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & a_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix}$

$$= k^2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & a_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= k^n\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{|kA|=k^n|A|}$

ទ្រឹស្តីបទ ១.៩. A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។

១. បើ B ជាម៉ាទ្រីសដែលបានមកដោយគុណជួរដេកមួយនៃ A និង ចំនួនថេរ k មួយនោះ $\det(B) = k\det(A)$ ឬ $\det(A) = \dfrac{1}{k}\det(B), k \neq 0$ ។

២. បើ B ជាម៉ាទ្រីសដែលបានមកដោយផ្លាស់ប្តូរទីតាំងទៅវិញទៅមកនៃជួរដេកពីរនៃ A នោះ $\det(B) = -\det(A)$ ឬ $\det(A) = -\det(B)$ ។

៣. បើ B ជាម៉ាទ្រីសដែលបានមកដោយយកចំនួនថេរ k ណាមួយទៅគុណនឹងជួរដេកណាមួយនៃម៉ាទ្រីស A ហើយទៅបូកនឹងជួរដេកមួយផ្សេងទៀតនៃម៉ាទ្រីស A នោះ $\det(A) = \det(B)$ ។

៤.៦. មីន័រ (Minor)

និយមន័យ ១.១៥. បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ នោះមីន័រ (Minor) នៃជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j កំណត់ដោយ M_{ij} គឺជាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសរងនៃម៉ាទ្រីសការេ A ដែលបានមកដោយ លុបជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j ចេញពីម៉ាទ្រីសការេ A ។

តាមនិយមន័យ A ជាម៉ាទ្រិសការេលំដាប់ $n \times n$ គេបាន

$$A = (a)_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)(n-1)} & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{i(n-1)} & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(j-1)} & a_{(n-1)j} & a_{(n-1)(j+1)} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n-j} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)(n-1)} & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{i(n-1)} & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(j-1)} & a_{(n-1)j} & a_{(n-1)(j+1)} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)(n-1)} & a_{(i-1)n} \\ a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{i(n-1)} & a_{in} \\ a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(j-1)} & a_{(n-1)j} & a_{(n-1)(j+1)} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- $M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)(n-1)} & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{i(n-1)} & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(j-1)} & a_{(n-1)j} & a_{(n-1)(j+1)} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)(n-1)} & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{i(n-1)} & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(j-1)} & a_{(n-1)(j+1)} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- $$M_{i1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)(n-1)} & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{i(n-1)} & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(j-1)} & a_{(n-1)j} & a_{(n-1)(j+1)} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)(n-1)} & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(j-1)} & a_{(n-1)j} & a_{(n-1)(j+1)} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- $$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)j} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)(n-1)} & a_{(i-1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & a_{i(j+1)} & \cdots & a_{i(n-1)} & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)j} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(j-1)} & a_{(n-1)j} & a_{(n-1)(j+1)} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)(n-1)} & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)(n-1)} & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(j-1)} & a_{(n-1)(j+1)} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ឧទាហរណ៍ ១.២២. កំណត់មីន័រ (Minor) គ្រប់ជួរដេក និងជួរឈរនៃម៉ាទ្រីស $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2(2) - 0(1) = -4$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0(-2) - 2(0) = 0$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0(1) - 2(2) = -4$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 1(3) = -7$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2) - 2(3) = -8$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 2(2) = -3$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(0) - 2(3) = -6$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(0) - 0(3) = 0$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) - 0(2) = 2$$

៤.៧. **កូហ្វេកទ័រ** (Cofactor)

និយមន័យ ១.១៦. កូហ្វេកទ័រ (Cofactor) នៃម៉ាទ្រីសការេ A តាងដោយ $Cof(A)$ ។ ជាម៉ាទ្រីសការេ ដែលធាតុរបស់វាជាមីន័រ (Minor) ទៅតាមលំដាប់ជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j នៃម៉ាទ្រីសការេ A ដែរ ហើយរួមបញ្ចូលទាំងសញ្ញាទៅលើមីន័រ (Minor) នោះផង ។ គេកំណត់តាងធាតុនៃកូហ្វេកទ័រ $(Cofactor)$ ដោយ $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ។

តាមនិយមន័យគេបាន៖ $Cof(A) = (c_{ij})_{i\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} = \left((-1)^{i+j}M_{ij}\right)_{1\leq j\leq n, 1\leq j\leq n}$ ដែល M_{ij} ជាមីន័រ $(Minor)$ នៃជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j នៃម៉ាទ្រីសការេ A ។

ចំណាំ ១.៨. កូហ្វេកទ័រ (Cofactor) និង មីន័រ (Minor) នៃម៉ាទ្រីសការេ A នៃជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j ខុសគ្នាតែសញ្ញាប៉ុណ្ណោះ ។ មានន័យថា $c_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ ។ ខាងក្រោមនេះជាសញ្ញាម៉ាទ្រីស $Cofactor$ $\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

ឧទាហរណ៍ ១.២៣. កំណត់ Cofactor នៃ A ដែល $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0(2) - 1(1) = -1 \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = -1$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -3(2) + 2(1) = -4 \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = 4$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3(1) + 2(0) = -3 \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = -3$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2) - 1(3) = -5 \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = 5$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) + 2(3) = 10 \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = 10$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - 2(1) = 0 \Rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = 0$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1(1) - 0(3) = -1 \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = -1$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - 3(-3) = 11 \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -11$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 2(0) - (-3)(-1) = -3 \Rightarrow C_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = -3$$

ដូចនេះ $\boxed{Cof(A)=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -3\\ 5 & 10 & 0\\ -1 & -11 & -3\end{pmatrix}}$

៤.៨. ការគណនាដេទែមីណង់តាមកូហ្វេកទ័រ

គេមាន $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=a_{11}.C_{11}+a_{12}C_{12}=a_{11}C_{11}+a_{21}C_{21}\ ,C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

ជាទូទៅ ១.១៦.១. បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n\times n$ និង M_{ij} ជាមីន័រ នោះ កូហ្វេទ័រ $C_{ij}=(-1)^{i+i}$ នោះគេបាន $\det(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}C_{ij}$ ដែល $i=\overline{1,n},j=\overline{1,n}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.២៤. គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $C_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$

$$C_{12}=-M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}$$

$$C_{13}=M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}$$

គេបាន $\det(A)=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{1j}C_{1j}=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}$

$$\begin{aligned}\det(A)&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})\\&=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{31}a_{22}}$

Listing ១.7: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
syms a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33
sq1 = det([a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33])
```

ឧទាហរណ៍ ១.២៥. គណនា $\det(A)$ ដែល $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $C_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 25 = 34$

$C_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -7$

គេបាន $\det(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}C_{i1} = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$

$= 2(34) + 0(C_{21}) + 4(-7)$

$= 40$

ដូចនេះ $\boxed{\det(A) = 40}$

Listing ១.8: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
A = det([2 1 4; 0 3 5; 4 -5 3])
```

ឧទាហរណ៍ ១.២៦. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ គណនា $\det(A)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយម៉ាទ្រីស A យើងឃើញថាជួរឈរទី៣ មានលេខសូន្យច្រើនដូចនេះ

គេបាន $\det(A) = \sum_{i=1}^{4} a_{i3}C_{i3} = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}$

ដែល $a_{13} = 3, a_{23} = a_{33} = 0, a_{43} = 4$

ដោយ $C_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12$

$C_{43} = -M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 44$

គេបាន $\det(A) = 3(-12) + 0 \times C_{24} + 0 \times C_{34} + 4(44) = 140$

ដូចនេះ $\boxed{\det(A) = 140}$

Listing ១.9: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
A=det([1 2 3 4 ; 3 2 0 1 ; 5 -2 0 -2 ; -2 0 4 1])
```

៤.៩. ម៉ាទ្រីស Adjoin

និយមន័យ ១.១៧. ADJOIN នៃម៉ាទ្រីសការេ $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ គឺជាម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូសេ (TRANSPOSE) នៃម៉ាទ្រីស COFACTOR នៃម៉ាទ្រីសការេ A ។ គេកំណត់សេសេរដោយ $Adj(A) = [Cof(A)]^T$ ។

តាមនិយមន័យ ១.១៧ គេបាន $\text{Adj}(A) = [\text{cof}(A)]^T = (c_{ij})^T_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (c_{ji})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$$

ដូចនេះ $Adj(A) = [\text{cof}(A)]^T = (c_{ij})^T_{1\le i\le n, 1\le j\le n} = (c_{ji})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.២៧. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ កំណត់រក $Adjoin$ នៃ A ។

ដំណោះស្រាយ

- $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3 \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -3$
- $M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 42 = -6 \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 6$

- $M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3 \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -3$

- $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6 \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 6$

- $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12 \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -12$

- $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6 \Rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 6$

- $M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3 \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -3$

- $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6 \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 6$

- $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \Rightarrow C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -3$

$$\Rightarrow \text{Cof}(A) = (C_{ij})_{1 \le i \le 3, 1 \le j \le 3} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Adj}(A) = [\text{Cof}(A)]^T = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}}$

Listing 9.10: ដោះស្រាយតាម matlab

```
A = sym([1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]);
X = adjoint(A)
```

៤.១០. ការគណនាម៉ាទ្រីសច្រាសដោយប្រើដេទែមីណង់

ទ្រឹស្តីបទ ១.១០. A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ។ បើ A ជាម៉ាទ្រីសដែលមាន $|A| \neq 0$ នោះ $A.Adf(A) = Adf(A).A = |A|.I$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមរយៈទ្រឹស្តីបទនោះ

នោះបាន
$$A.Ajd(A) = |A|.I$$
$$\Rightarrow A.Adj(A).\frac{1}{|A|} = I, \quad |A| \neq 0$$
$$\Rightarrow A^{-1}A.Adj(A).\frac{1}{|A|} = A^{-1}I$$
$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A)$$
ជារូបមន្តជាក់លាក់មួយសម្រាប់គណនាម៉ាទ្រីច្រសដោយប្រើដេទែមីណង់ (Determinant) ។

ចំណាំ ១.៩. $Adj(A) = [Cof(A)]^T$

$$Cof(A) = (c_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$$
$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$
$$c_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$
M_{ij} ជាមីន័រ $(Minor)$ ទៅតាមជួរដេកទី i និងជួរឈរទី j នៃម៉ាទ្រីសការេ A ។

ឧទាហរណ៍ ១.២៨. រកម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

- រក $\det(A)$

គេមាន $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = 7\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$

$$= 7(-6+4) - 2(0-3) + 9$$

$$= -14 + 6 + 9$$

$$= 1$$

- រក $Adj(A)$

គេបាន $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow C_{11} = -2$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow C_{12} = 3$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow C_{13} = 9$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -8 \Rightarrow C_{21} = 8$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -11 \Rightarrow C_{22} = -11$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 34 \Rightarrow C_{23} = -34$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow C_{31} = -5$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \Rightarrow C_{32} = 7$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 21 \Rightarrow C_{33} = 21$$

$$\Rightarrow Cof(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 \\ 8 & -11 & -34 \\ -5 & 7 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A) = [Cof(A)]^T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{pmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{pmatrix}}$

Listing ១.11: ដោះស្រាយតាម matlab

```
A = sym([7  2  1  ;  0  3  -1  ;  -3  4  -2]);
invA = adjoint(A)/det(A)
```

៤.១១. ការគណនាម៉ាទ្រីសច្រាសតាមវិធី Guass-Jordan Elemination

បើ A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ $n \times n$ ហើយមានចម្រាស ។ ដើម្បីរកចម្រាសនៃម៉ាទ្រីស A យើងត្រូវអនុវត្តន៍ប្រមាណវិធីជួរដេកដំបូងបន្តបន្ទាប់គ្នាដើម្បីបម្លែង A ឲ្យទៅជាម៉ាទ្រីសឯកតា ហើយបន្ទាប់មកអនុវត្តន៍ប្រមាណវិធីជួរដេកដំបូងដដែលលើ I_n យើងទទួលបាន A^{-1} ។ មានន័យថា៖ $\left(A \vdots I_n\right) = \left(A^{-1}\right)$

A បម្លែងជា I_n ដោយប្រើប្រមាណវិធីជួរដេក

I_n ក្លាយទៅជា A^{-1} ដោយប្រើប្រមាណវិធីជួរដេកដូចគ្នា ។

ចំណាំ ១.១០. តាមវិធីសាស្ត្រនេះបើមានជួរដេកណាមួយនៃម៉ាទ្រីសស្មើសូន្យនៅពេលដែលមិន ទាន់បានអនុវត្តន៍ប្រមាណវិធីជួរដេកដំបូង ឬបានអនុវត្តន៍ប្រមាណវិធីជួរដេកដំបូង ជាបន្តបន្ទាប់ហើយក៏ដោយ នោះម៉ាទ្រីសគ្មានចម្រាសទេ ។ (មានន័យថា ដេទែមីណង់ ស្មើសូន្យ) ។

ឧទាហរណ៍ ១.២៩. ចូររកចម្រាសនៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយអនុវត្តន៍តាមវិធីសាស្ត្រ $\left(A \vdots I_2\right) = \left(I_2 \vdots A^{-1}\right)$

គេបាន $\left(A \vdots I_2\right) = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim R_2 \to R_2 - 3R_1 \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$$\sim R_2 \to -1/2R_2 \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim R_1 \to R_1 - 2R_2 \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}}$

Listing ១.12: ដោះស្រាយក្នុង matlab

```
clear all
A = [1 2 ; -2 1];
X = inv(A)
```

ឧទាហរណ៍ ១.៣០. រកម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $\left(A \vdots I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 8 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1^1 = L_1 \\ L_2^1 = L_2 \\ L_3^1 = 5L_3 - 4L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 8 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & -9 & -4 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1^2 = L_1^1 \\ L_2^2 = L_2^1 \\ L_2^2 = 2L_3^1 + 17L_2^1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 8 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 17 & 10 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1^3 = L_1^2 + L_3^2 \\ L_2^3 = L_2^2 + L_3^2 \\ L_3^3 = -L_3^2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 8 & 0 & -7 & 17 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & -8 & 18 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -17 & -10 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1^4 = 1/5(L_1^3 - 4L_2^3) \\ L_2^4 = 1/2L_2^4 \\ L_3^4 = L_3^4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -11 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -17 & -10 \end{array}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -11 & -6 \\ -4 & 9 & 5 \\ 8 & -17 & -10 \end{pmatrix}}$

Listing ១.13: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
A = [5 8 1 ; 0 2 1 ; 4 3 -1]
X = inv(A)
```

៥. ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរ

៥.១. សមីការលីនេអ៊ែរ

និយមន័យ ១.១៨. សមីការលីនេអ៊ែរជាសមីការដែលមានទម្រង់ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ ដែល $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, b$ ជាចំនួនថេរ ។

ចំណាំ ១.១១. សមីការលីលេអ៊ែរមិនទាក់ទងផលគុណ ឬឬសនៃអញ្ញាតិទេ ។ ពោលគឺអថេរទាំងអស់ នៃសមីការលីនេអ៊ែរមានស្វ័យគុណស្មើ១ ហើយមិនអាចកើតមានឡើងចំពោះអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ លោការីត និងអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលទេ ។

៦. ប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរ

៦.១. ប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

និយមន័យ ១.១៩. ប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនជាប្រពន្ធ័សមីការមានរាង $AX = 0$ ។

រាងទូទៅនៃប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនគឺ ៖ $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & = 0 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

៦.២. ប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែមិនអូម៉ូសែន

និយមន័យ ១.២០. ប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនជាប្រពន្ធ័សមីការមានរាង $AX = B$ ។

រាងទូទៅនៃប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនគឺ ៖ $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & = b_3 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_n \end{cases}$$

ទម្រង់ម៉ាទ្រីសនៃប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរ

ប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីសគឺជាការអនុវត្តយ៉ាងសំខាន់ចំពោះប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរប្រពន្ធ័សមីការមួយដែលមាន m សមីការលីនេអ៊ែរ និងមាន n អញ្ញាតិដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & = b_3 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_n \end{cases}$$

ដោយម៉ាទ្រីសពីរស្មើគ្នា កាលណាធាតុដែលត្រូវគ្នាទាំងអស់របស់វាស្មើគ្នា ត្រូវរៀងគ្នានោះយើងអាចជំនួស m សមីការទៅក្នុងសមីការដែលជាសមីការម៉ាទ្រីសមួយ $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{21}x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \cdots & a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

ឬម្យ៉ាងទៀតគេអាចសរសេរវាជាផលគុណម៉ាទ្រីសដែលកំណត់ដោយ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

យើងតាងម៉ាទ្រីសទាំងបីនេះ ដោយអក្សរ A, X និង B រៀងគ្នានោះប្រពន្ធ័សមីការដើមដែលមាន m សមីការលីនេអ៊ែរ និងមាន n អញ្ញាតិត្រូវជំនួសដោយសមីការម៉ាទ្រីសមួយគឺ $AX = B$ ដែល $A = a_{ij}, (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ ជាមេគុណនៃប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរ និង $B = b_j, (1 \leq j \leq n)$ ជាចំនួនថេរនៃប្រពន្ធ័សមីការនិង $X = x_i, (1 \leq i \leq n)$ ជាអថេរនៃប្រពន្ធ័សមីការ ។

ចំណាំ ១.១២. គេអាចសរសេរសមីការម៉ាទ្រីសខាងលើទៅជា The augmented matrix គឺ $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

ឧទាហរណ៍ ១.៣១. ចូរសរសេរប្រពន្ធ័សមីការខាងក្រោមជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស និងទីជា The auggmented matrix នៃប្រពន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ ។

១ . $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

២ . $\begin{cases} -x + 2y - 3z = 4 \\ 2x - 1/3y + z = -3 \\ 1/2y + 3z = -1/2 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

១. $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+3y+z=3 \\ z=1 \end{cases}$ គេបាន $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$ ឬ $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\2&3&1&3\\0&0&1&1\end{array}\right)$

២. $\begin{cases} -x+2y-3z=4 \\ 2x-1/3y+z=-3 \\ 1/2y+3z=-1/2 \end{cases}$

គេបាន $\begin{pmatrix}-1&2&-3\\2&-1/3&1\\0&1/2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\-1/2\end{pmatrix}$ ឬ $\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&-3&4\\2&-1/3&1&-3\\0&1/2&3&-1/2\end{array}\right)$

៦.៣. ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ

ក្នុងការដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរគេអាចដោះស្រាយបានច្រើនរបៀប ដូចជាដោះស្រាយតាមប្រមាណវិធីលើជួរដេកដំបូង (Element Row Operation) , Gauss Jordan, (Cramer Rule) និងតាមចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីសជាដើម ។

៦.៤. ប្រមាណវិធីជួរដេកដំបូង (Element Row Operation)

វិធានៈក្នុងប្រមាណវិធីលើជួរដេកដំបូងគឺតម្រូវឲ្យយើងបំលែងម៉ាទ្រីសមួយទៅជាម៉ាទ្រីសសមមូលដែលៈ

១. ប្តូរលំដាប់នៃសមីការ។

២. គុណសមីការមួយដោយចំនួនថេរមួយមិនសូន្យនៃ $\mathbb{K}$ ។

៣. បូកទៅនឹងសមីការមួយ បន្សំលីនេអ៊ែរមួយនៃសមីការផ្សេងទៀត។

ឧទាហរណ៍ ១.៣២. គេអោយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរ

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x &+& y &-& 2z &+& 3w &=& 1 \\ 3x &+& 2y &-& z &+& 2w &=& 4 \\ 3x &+& 3y &+& 3z &-& 3w &=& 5 \end{array}\right.$$

យើងធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗដើម្បីបំបាត់មេគុណទាំងពីរដែលគូសក្នុងរង្វង់។

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)}=2L_2-3L_1 \\ L_3^{(1)}=2L_3-3L_1 \end{array}\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x &+& y &-& 2z &+& 3w &=& 1 \\ && y &+& 4z &-& 5w &=& 5 \\ && 3y &+& 12z &-& 15w &=& 7 \end{array}\right.$$

សំណុំចំលើយននៃប្រព័ន្ធមិនបានប្រែប្រួលទេ។ ឥឡូវនេះ យើងបន្តធ្វើប្រមាណវិធីលើសមីការទាំងពីរចុងក្រោយ៖

$$
\begin{array}{l}
L_1 \\
L_2^{(1)} \\
L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - 3L_2^{(1)}
\end{array}
\quad
\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 \\
 & & y & + & 4z & - & 5w & = & 5 \\
 & & & & & & 0w & = & -8
\end{array}
\right.
$$

ដូច្នេះ $\boxed{\text{យើងឃើញថាប្រព័ន្ធគ្មានចំលើយ។}}$

Listing ១.14: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
syms x y z w
eqn1 = 2*x+y-2*z+3*w == 1;
eqn2 = 3*x+2*y-z+2*w == 4;
eqn3 = 3*x+3*y+3*z-3*w == 5;
[A,B] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2,eqn3], [x, y,z,w])
X = linsolve(A,B)
```

ឧទាហរណ៍ ១.៣៣. គេអោយប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$
\begin{array}{l}
L_1 \\
L_2 \\
L_3
\end{array}
\left\{
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 2y & - & z & = & 1 \\
2x & + & 3y & + & z & = & 2 \\
1x & - & 4y & - & 6z & = & 2
\end{array}
\right.
$$

យើងធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗតាមជួរដេកដើម្បីបានប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$
\begin{array}{l}
L_1 \\
L_2^{(1)} = L_2 - 2L_1 \\
L_3^{(1)} = L_3 - L_1
\end{array}
\quad
\left\{
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 2y & - & z & = & 1 \\
 & - & y & + & 3z & = & 0 \\
 & & -6y & - & 5z & = & 1
\end{array}
\right.
$$

យើងបន្តធ្វើប្រមាណវិធីងាយៗតាមជួរដេកដើម្បីបានប្រព័ន្ធសមីការថ្មី៖

$$
\begin{array}{l}
L_1 \\
L_2^{(2)} \\
L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - 6L_2^{(1)}
\end{array}
\quad
\left\{
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 2y & - & z & = & 1 \\
 & - & y & + & 3z & = & 0 \\
 & & & & -23z & = & 1
\end{array}
\right.
$$

យើងបាន $z = -1/23$ ។ យើងជំនួសតំលៃនេះក្នុងសមីការ $L_2^{(1)}$ យើងបាន $y = -3/23$ ។ ជាបញ្ចប់ យើងជំនួសតំលៃទាំងនេះក្នុង L_1 ដើម្បីបាន $x = 28/23$ ។

ដូច្នេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការមានចំលើយតែមួយគត់ } x = 28/23, y = -3/23, z = -1/23 \text{ ។}}$

Listing ១.15: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
syms x y z
eqn1 = x+2*y-z == 1;
eqn2 = 2*x+3*y+z == 2;
eqn3 = x-4*y-6*z == 2;
[A,B] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2,eqn3], [x, y,z])
X = linsolve(A,B)
```

ដូចយើងឃើញហើយថាវិធីសាស្ត្រនេះតំរូវអោយសរសេរប្រព័ន្ធជាទំរង់ជាថ្នាក់ដើម្បីអាចដោះ ស្រាយសមីការទាំងអស់ដោយជំនួសចំលើយពីក្រោមឡើងមកលើ។

ឥឡូវនេះ យើងលំអិតដំណើរការនៃវិធីសាស្ត្រនៃជាតុវិល។

យើងអោយម៉ាទ្រីសមួយ i.e តារាងចតុកោណកែងមួយនៃធាតុនៃ $\mathbb{K}$ រៀបតាមជួរដេក និងជួរឈរ។ ចំពោះប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរមួយ គេហៅថាម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធជាម៉ាទ្រីសជាមេគុណនៃអង្គទីមួយនៃសមីការ។ ជាឧទាហរណ៍ ចំពោះឧទាហរណ៍ ១.៣៣ ម៉ាទ្រីសនៃប្រព័ន្ធគឺ

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

គេនឹងកំណត់យក $L_1, L_2, \cdots, L_k$ ជាជួរដេកផ្សេងគ្នានៃម៉ាទ្រីស។ ជួរដេក L_i ហៅថាជួរដេកទី i ។

គេហៅថាម៉ាទ្រីសមួយមានទំរង់ជាថ្នាក់បើជួរដេកចាប់ផ្ដើមដោយចំនួនមួយនៃសូន្យកើនដាច់ ខាតដើម្បីអោយសន្ទស្សន៍កើន។

ឧទាហរណ៍ ១.៣៤. ម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសមួយមានទំរង់ជាថ្នាក់

ចំណែកឯម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសមួយគ្មានទំរង់ជាថ្នាក់។

វាមានលក្ខណៈងាយស្រួលដើម្បីសិក្សាថាតាមប្រមាណវិធីងាយៗនៃជួរដេក គេអាចសរសេរ ជានិច្ចកាលប្រព័ន្ធក្រោមទំរង់ម៉ាទ្រីសជាថ្នាក់ មានន័យថាគេអាចជំនួសប្រព័ន្ធដោយប្រព័ន្ធមួយទៀតដែលម៉ាទ្រីសមេគុណជាម៉ាទ្រីសទំរង់ជាថ្នាក់។

ដើម្បីធ្វើដូច្នេះ គេជាដំបូងគេត្រូវអោយសមីការទីមួយចាប់ផ្ដើមដោយមេគុណមួយមិនសូន្យ ដែលគេអាចធ្វើអោយកើតមានជានិច្ចកាលដោយប្ដូរលំដាប់នៃសមីការ។ មេគុណមិនសូន្យនេះហៅថាជាតុវិល។

ឧទាហរណ៍ ១.៣៥. គេមានប្រព័ន្ធសមីការៈ

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &-& 3z &=& 4 \\ x &+& 3y &+& z &=& 11 \\ 2x &+& 5y &-& 4z &=& 13 \\ 4x &+& 11y && &=& 37 \end{array} \right.$$

តាមប្រមាណវិធីជួរដេក គេមានប្រព័ន្ធៈ

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} = L_2 - L_1 \\ L_3^{(1)} = L_3 - 2L_1 \\ L_4^{(1)} = L_4 - 4L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &-& 3z &=& 4 \\ && y &+& 4z &=& 7 \\ && y &+& 2z &=& 5 \\ && 3y &+& 12z &=& 21 \end{array} \right.$$

ជាបន្ទាប់ យើងបានៈ

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - L_2^{(1)} \\ L_4^{(2)} = L_4^{(1)} - 3L_2^{(1)} \end{array} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &-& 3z &=& 4 \\ && y &+& 4z &=& 7 \\ && && 2z &=& 2 \\ && && 0 &=& 0 \end{array} \right.$$

ដូច្នេះប្រព័ន្ធសមីការមានទំរង់ជាថ្នាក់។ យើងបាន $z = 1$ រួចដោយជំនួសពីក្រោមឡើងលើ $y = 3, x = 1$ ។

ដូនេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធមានចំលើយតែមួយគត់ } x = 1, y = 3, z = 1 \text{ ។}}$

Listing ១.16: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
syms x y z
eqn1 = x+2*y-z == 1;
eqn2 = 2*x+3*y+z == 2;
eqn3 = x-4*y-6*z == 2;
[A,B] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2,eqn3], [x, y,z])
X = linsolve(A,B)
```

៦.៥. ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការតាមវិធាន Guass-Jordan

នៅពេលគេត្រូវការដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែច្រើន គេអាចប្រើវិធីកាត់បន្ថយ Gauss Jordan ពីព្រោះវាមានប្រសិទ្ធភាពដោះស្រាយ ។ ការអនុវត្តវិធីនេះទាមទារការដោះស្រាយរកអញ្ញាតិមួយក្នុងចំណោម n សមីការពោលគឺ x_1 ដោយប្រើអញ្ញាតិដទៃទៀត $x_2, x_3, \cdots, x_n$ ។ ជំនួសសមីការដែលគេហៅថា Pivotal equation ទៅក្នុងសមីការដែលនៅសល់ដែលមាន $n-1$ សមីការជាមួយនឹង $n-1$ អញ្ញាតិ ។ អនុវត្តប្រមាណវិធីនេះបន្តទៀតដើម្បីដោះអញ្ញាតិ $x_3, x_4, \cdots, x_n$ បង្កើតបាន Privotal equation ទីពីរ ។ បន្ទាប់មកជំនួសសមីការទៅក្នុង សមីការដទៃទៀតដែលធ្វើឲ្យនៅសល់ $n-3$ សមីការជាមួយនឹង

$n-3$ អញ្ញាតិ ។ អនុវត្តន៍ប្រមាណវិធីនេះសារឡើងវិញរហូតទាល់តែសល់ Pivotal equation មួយដែលមានអញ្ញាតិមួយ ដែលបន្ទាប់មកយើងនឹងដោះស្រាយរកវា ។ បន្ទាប់មកយើងអាចដោះស្រាយរកអញ្ញាតិដទៃទៀតដោយជំនួសវាទៅក្នុង Pivotal equation ការស្រេច ។ ដូចនេះក្នុងម៉ាទ្រីសមួយគេអាចសរសេរ៖

១. $R_i \leftrightarrow R_j$ ឬ $L_i \leftrightarrow L_j$

២. $R_i \to kR_i, k \in \mathbb{R}$ ឬ $(L_i \to kL_j), k \in \mathbb{R}$

៣. $R_i \to R_i \pm kR_j, k \in \mathbb{R}$ ឬ $(L_i \to L_i \pm kL_j), k \in \mathbb{R}$

ម៉ាទ្រីសពីរដែលមានលក្ខណៈបម្លែងដូចប្រមាណវិធីខាងលើជាម៉ាទ្រីសសមមូលគ្នាតាងដោយនិមិត្តសញ្ញា $\leq\sim\geq$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.៣៦. ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការតាម Guass-Jordan នៃ $\begin{cases} 2x-2y+4z &= 10 \\ 3x-6y+6z &= 18 \\ -2x+5y-3z &= -11 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $\begin{cases} 2x-2y+4z &= 10 \\ 3x-6y+6z &= 18 \\ -2x+5y-3z &= -11 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 10 \\ 3 & -6 & 6 & 18 \\ -2 & 5 & -3 & -11 \end{array}\right)$

$$\sim \frac{1}{2}R_1 \to R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 6 & 18 \\ -2 & 5 & -3 & -11 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} -3R_1+R_2 \to R_2 \\ 2R_1+R_3 \to R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim -\frac{1}{3}R_2 \to R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{matrix} R_2+R_1\to R_1 \\ -3R_2+R_3\to R_3\end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim -2R_3+R_1\to R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{x=0, y=-1, z=2}$

Listing ១.17: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
syms x y z
eqn1 = 2*x-2*y+4*z == 10;
eqn2 = 3*x-6*y+6*z  == 18;
eqn3 = -2*x+5*y-3*z == -11;
[A,B] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2,eqn3], [x,y,z])
X = linsolve(A,B)
```

៦.៦. ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការតាមវិធានក្រាមម័រ (Cramer's Rule)

ទោះជាវិធីដែលបានប្រើក្នុងការដោះស្រាយឧទាហរណ៍មុនៗតាមវិធីដូចគ្នា ជាញឹកញាប់ក៏ដោយវាសំខាន់ណាស់ដែលមានរូបមន្តមួយសម្រាប់ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែដែលគេនឹង សិក្សាលក្ខណៈនៃចម្លើយដោយមិនចាំបាច់ដោះស្រាយប្រពន្ធ័ ។ ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមនេះគឺជា រូបមន្តប្រើសម្រាប់ប្រពន្ធ័ n អញ្ញាតិ រូបមន្តគេទទួលស្គាល់ថាជាវិធាន $Cramer$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ១.១១ (វិធានក្រាមម័រ (Cramer Rule)). បើ $Ax=B$ ជាប្រពន្ធ័ n សមីការលីនេអ៊ែដែលមាន n អញ្ញាតិ $\det(A)\neq 0$ នោះប្រពន្ធ័សមីការមានចម្លើយតែមួយគត់ ។
ចម្លើយនោះគឺ $x_1=\dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2=\dfrac{\det(A_2)}{\det(A)},\cdots,x_n=\dfrac{\det(A_n)}{\det(A)}$ ដែល A_j ជាម៉ាទ្រីសដែលបានមកពីជំនួយធាតុក្នុងជួរឈរទី j នៃ A ដោយធាតុនៃ B ម៉ាទ្រីស $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ $\det(A)\neq 0$ នោះ A មានចម្រាស់ហើយ (តាមទ្រឹស្តីបទ) $x=A^{-1}B$ ជាចម្លើយតែមួយគត់នៃ $Ax=B$ តាមទ្រឹស្តីបទ

គេមាន $x = A^{-1}B = \dfrac{1}{\det(A)}Adj(A).B = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

តាមប្រមាណវិធីគុណនៃម៉ាទ្រីសគេបាន $x = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} b_1c_{11} & +b_2c_{21} & +\cdots & +b_nc_{n1} \\ b_1c_{12} & +b_2c_{22} & +\cdots & +b_nc_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1c_{1n} & +b_2c_{2n} & +\cdots & +b_nc_{nn} \end{pmatrix}$

ដូចនេះធាតុក្នុងជួរដេកទី j នៃ x គឺ $x_j = \dfrac{b_1c_j + b_2c_j + \cdots + b_nc_j}{\det(A)}$

គេតាង $A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

ដោយ A_j ខុសពី A ត្រង់ជួរឈរទី j នោះ $Cofactor$ នៃធាតុ $b_1, b_2, \cdots, b_n$ ក្នុង A_j ដូចគ្នានឹង $Cofactor$ នៃធាតុត្រូវគ្នាក្នុងជួរឈរទី j នៃ A ។ពន្លាត $Cofactor$ នៃ $\det(A_j)$ តាមជួរឈរទី j គេបាន $\det(A_j) = b_1c_{1j} + b_2c_{2j} + \cdots + b_nc_{nj}$ គេបាន ចម្លើយនៃសមីការគឺ $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១.៣៧. ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការខាងក្រោមតាម Cramer Rule ៖

ក. $\begin{cases} 3x - 2y & = 17 \\ 4x + 5y & = -8 \end{cases}$

ខ. $\begin{cases} 2x + 3y - z & = 1 \\ 4x + y - 3z & = 11 \\ 3x - 2y + 5z & = 21 \end{cases}$

ឥ. **ដំណោះស្រាយ**

ក. គេបាន $A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A) = 15 - (-8) = 23$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 17 & -2 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = 85 - 16 = 69$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = -24 - 68 = -92$$

នាំឲ្យ $x = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{69}{23} = 3, y = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{-92}{23} = -4$

ដូចនេះ $\boxed{x = 3, y = -4}$

Listing ៩.18: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
syms x y
eqn1 = 3*x-2*y == 17;
eqn2 = 4*x+5*y == -8;
[A,B] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2], [x,y])
X = linsolve(A,B)
```

ខ. គេបាន $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A) = -9 - 69 = -78$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 11 & 1 & -3 \\ 21 & -2 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = -162 - 150 = -312$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 11 & -3 \\ 3 & 21 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = 17 - (-139) = 156$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 11 \\ 3 & -2 & 21 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = 133 - 211 = -78$$

នាំឲ្យ $x = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{-312}{-78} = 4, y = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{156}{-78} = -2, z = \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)} = \dfrac{-78}{-78} = 1$

ដូចនេះ $\boxed{x = 4, y = -2 \text{ និង } z = 1}$

Listing ៩.19: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
syms x y z
eqn1 = 2*x+3*y-z == 1;
eqn2 = 4*x+y-3*z  == 11;
eqn3 = 3*x-2*y+5*z == 21;
[A,B] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2,eqn3], [x,y,z])
X = linsolve(A,B)
```

៧. តម្លៃផ្ទាល់ និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ (Eigenvalues and Eigenvectors)

និយមន័យ ១.២១. បើ A ជាម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ $n \times n$ នោះវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ X នៅក្នុង $\mathbb{R}^n$ ហៅថា វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ (Eigenvector) នៃ A បើ AX ជាពហុគុណស្កាលែនៃ X គឺថា៖ $AX = \lambda X$ ចំពោះចំនួនស្កាលែ λ ណាមួយ ។ ចំនួនស្កាលែ λ ហៅថាតម្លៃផ្ទាល់ (Eigenvalue) នៃ A ហើយ X វ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ A ដែលត្រូវនឹង λ ។

ដើម្បីរកតម្លៃផ្ទាល់នៃម៉ទ្រីស A ដែលមានលំដាប់ $n \times n$ យើងសរសេរ

$$AX = \lambda X \quad \text{ឬ} \quad AX = \lambda IX \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0 \qquad (១.៩)$$

ដែល I ជាម៉ាទ្រីសឯកតា ។ ដើម្បីឲ្យ λ ជាតម្លៃផ្ទាល់វាត្រូវតែមានចម្លើយមិនសូន្យនៃសមីការនេះ ។ តែតាមសមីការ ១.៩ និង មានចម្លើយសូន្យលុះត្រាតែ $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

បើ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ជាកំប៉ូសង់នៃវ៉ិចទ័រ V តាមគោល $v_1, v_2, \cdots, v_n$ នោះទំនាក់ទំនងអាចសរសេរទៅជា៖

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11}-\lambda)\, x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = 0 \\ a_{12}x_1 + (a_{22}-\lambda)\, x_2 + \ldots + a_{n2}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\, x_n = 0 \end{cases}$$

គេបានប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន ដែលយកចម្លើយមិនសូន្យ ។

១. តម្លៃផ្ទាល់នៃ A ជាឫសនៃមីការសម្គាល់ $\det(A - \lambda I) = 0$ ។

២. ដើម្បីបានវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ត្រូវនឹងតម្លៃផ្ទាល់ λ គេត្រូវស្រាយប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ ១.៣៨. រកតម្លៃផ្ទាល់ និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

ក. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ខ. $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ គ. $C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

ក. គេមាន $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ នាំឲ្យ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$

គេបាន $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -\lambda(3-\lambda) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda - 1 = 0, \lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 2$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃផ្ទាល់ (Eigenvalue) នៃម៉ាទ្រីស } A \text{ គឺ } \lambda = 1, \lambda = 2}$

- ចំពោះ $\lambda = 1$ នាំឲ្យ $(A - I)\vec{v}_1 = 0$

  គេបាន $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y & = 0 \\ -x - y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$

  យក $y = t \Rightarrow x = -t, t \in \mathbb{R}$ នាំឲ្យ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t$

- ចំពោះ $\lambda = 2$ គេបាន $(A - 2I)\vec{v}_2 = 0$

  គេបាន $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y & = 0 \\ -x - 2y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2y$

  យក $y = t \Rightarrow x = -2t, t \in \mathbb{R}$ នាំឲ្យ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t$

ដូចនេះ $\boxed{\text{វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ (Eigenvector) នៃម៉ាទ្រីស } A \text{ គឺ } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}}$

ខ. គេមាន $B=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -6\end{pmatrix}$ នាំឲ្យ $B-\lambda I=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & -6\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-\lambda & -4\\ 2 & -6-\lambda\end{pmatrix}$

គេបាន $\det(B-\lambda I)=0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(-6-\lambda)+8=0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda-10=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+5)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=2, \lambda=-5$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃផ្ទាល់ (Eigenvalue) នៃម៉ាទ្រីស } B \text{ គឺ } \lambda=2, \lambda=-5}$

- ចំពោះ $\lambda=2$ នាំឲ្យ $(B-2I)\vec{v}_1=0$

  គេបាន $\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x-4y & =0\\ 2x-8y & =0\end{cases} \Leftrightarrow x=4y$

  យក $y=t \Rightarrow x=4t, t\in\mathbb{R}$ នាំឲ្យ $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4t\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}t$

- ចំពោះ $\lambda=-5$ នាំឲ្យ $(B+5I)\vec{v}_2=0$

  គេបាន $\begin{pmatrix}8 & -4\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}8x-4y & =0\\ 2x-y & =0\end{cases} \Leftrightarrow 2x-y \Rightarrow x=\frac{1}{2}y$

  យក $y=t \Rightarrow x=\frac{1}{2}t, t\in\mathbb{R}$ នាំឲ្យ $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}t\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}t$

  ដូចនេះ $\boxed{\text{វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ (Eigenvector) នៃម៉ាទ្រីស } B \text{ គឺ } \vec{v}_1=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}t, \vec{v}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}t \quad, t\in\mathbb{R}}$

គ. គេមាន $C=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ នាំឲ្យ $C-\lambda I=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-\lambda & -5\\ 1 & -1-\lambda\end{pmatrix}$

គេបាន $\det(C-\lambda I)=0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(-1-\lambda)+5=0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+2=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1\pm i$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃផ្ទាល់ (Eigenvalue) នៃម៉ាទ្រីស } C \text{ គឺ } \lambda=1\pm i}$

- ចំពោះ $\lambda=1+i$ នាំឲ្យ $(C-(1+i)I)\vec{v}_1=0$

គេបាន $\begin{pmatrix} 3-(1+i) & -5 \\ 1 & -1-(1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-i)x - 5y &= 0 \\ x-(2-i)y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2-i}y = \frac{5(2+i)}{4+1}y = (2+i)y$$

យក $x = t \Rightarrow y = (2+i)t, t \in \mathbb{R}$ នាំឲ្យ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+i)t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} t$

- ចំពោះ $\lambda = 1-i$ នាំឲ្យ $(C-(1-i)I)\vec{v}_2 = 0$

គេបាន $\begin{pmatrix} 3-(1-i) & -5 \\ 1 & -1-(1-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2+i)x - 5y &= 0 \\ x-(2-i)y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2+i}y = \frac{5(2-i)}{4+1}y = (2-i)y$$

យក $x = t \Rightarrow y = (2-i)t, t \in \mathbb{R}$ នាំឲ្យ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-i)t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix} t$

ដូចនេះ $\boxed{\text{វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ (Eigenvector) នៃម៉ាទ្រីស } C \text{ គឺ } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} t, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix} t \quad , t \in \mathbb{R}}$

ឧទាហរណ៍ ១.៣៩. រកតម្លៃផ្ទាល់ (Eigenvalue) និង (Eigenvector) នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

១. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ២. $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ៣. $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

១. គេមាន $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ នាំឲ្យ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

គេបាន $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow -\lambda\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 2-\lambda\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0$

$$\Leftrightarrow -\lambda(2-\lambda)(3-\lambda)-2[-(2-\lambda)]=0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)[-\lambda(3-\lambda)+2]=0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda-1=0, \lambda-2=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1, \lambda=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃផ្ទាល់ (Eigenvalue) នៃម៉ាទ្រីស } A \text{ គឺ } \lambda=1, \lambda=2}$

Listing ១.20: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
A = [0 0 -2 ; 1 2 1 ; 1 0 3];
q1 = eig(A)
```

- ចំពោះ $\lambda=1$ គេបាន $(A-I)\vec{v}_1=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c}R_1\\ R_2\\ R_3\end{array}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll}R_1 & \\ R_2^1 & \to R_2+R_1\\ R_3^1 & \to R_3+R_1\end{array}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+2z & =0\\ -y+z & =0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x & =-2z\\ y & =z\end{cases}$$

យក $z=t \Rightarrow y=t \Rightarrow x=-2t, t\in\mathbb{R}$ នាំឲ្យ $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2t\\t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}t$

• ចំពោះ $\lambda=2$ គេបាន $(A-2I)\vec{v}_2=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2&0&-2\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}R_1\\R_2\\R_3\end{matrix}\begin{pmatrix}-2&0&-2\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}R_1\\R_2^1 \to R_2+R_1\\R_3^1 \to R_3+R_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+2z &=0\\-y+z &=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x &=-2z\\y &=z\end{cases}$$

យក $z=t \Rightarrow y=t \Rightarrow x=-2t, t\in\mathbb{R}$ នាំឲ្យ $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2t\\t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}t$

ដូចនេះ $\boxed{\text{វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ (Eigenvector) នៃម៉ាទ្រីស } A \text{ គឺ } \vec{v}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}t, \vec{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}t \quad ,t\in\mathbb{R}}$

២. គេមាន $B=\begin{pmatrix}-2&2&-3\\2&1&-6\\-1&-2&0\end{pmatrix}$ នាំឲ្យ $B-\lambda I=\begin{pmatrix}-2&2&-3\\2&1&-6\\-1&-2&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-2-\lambda&2&-3\\2&1-\lambda&-6\\-1&-2&-\lambda\end{pmatrix}$$

គេបាន

$$\det(B-\lambda I)=0 \Leftrightarrow (-2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & -6\\ -2 & -\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & -6\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 1-\lambda\\ -1 & -2\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -(\lambda+2)[-\lambda(1-\lambda)-12]-2(-2\lambda-6)-3[-4+(1-\lambda)]=0$$

$$\Leftrightarrow -(\lambda+2)(\lambda^2-\lambda-12)+7(\lambda+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-4)-7(\lambda+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda^2-2\lambda-15)=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-5)=0$$

$$\Rightarrow \lambda+3=0, \lambda-5=0$$

$$\Rightarrow \lambda=-3, \lambda=5$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃផ្ទាល់ (Eigenvalue) នៃម៉ាទ្រីស } A \text{ គឺ } \lambda=-3, \lambda=5}$

- ចំពោះ $\lambda=-3$ គេបាន $(B+3I)\vec{v}_1=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l}R_1\\ R_2\\ R_3\end{array}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & -6\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll}R_1 & \\ R_2^1 & \to R_2-2R_1\\ R_3^1 & \to R_3+R_1\end{array}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x+2y-3z=0$$

យក $z=\lambda$ និង $y=t \Rightarrow x=-2t+3\lambda$ ដែល $\lambda, t\in\mathbb{R}$

នាំឲ្យ $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2t+3\lambda\\ t\\ \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\lambda$

- ចំពោះ $\lambda=5$

គេបាន $(B-5I)\vec{v}_2=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-7 & 2 & -3\\ 2 & -4 & -6\\ -1 & -2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l}R_1\\ R_2\\ R_3\end{array}\begin{pmatrix}-7 & 2 & -3\\ 2 & -4 & -6\\ -1 & -2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll}R_1 & \\ R_2^1 & \to 7R_2+2R_1\\ R_3^1 & \to 2R_3-R_1\end{array}\begin{pmatrix}-7 & 2 & -3\\ 0 & -24 & -48\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-7x & +2y & -3z & =0\\ & y & +2z & =0\\ & & -4z & =0\end{cases}$$

យក $z=t \Rightarrow y=-2t \Rightarrow 7x=2(-2t)-3t=-7t \Leftrightarrow x=-t$ ដែល $t\in\mathbb{R}$

នាំឲ្យ $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\ -2t\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}t$

ដូចនេះ $\boxed{\text{វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ (Eigenvector) នៃម៉ាទ្រីស } B \text{ គឺ } \vec{v}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\lambda,\vec{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}t \quad \text{ដែល } t,\lambda\in\mathbb{R}}$

៣. គេមាន $C=\begin{pmatrix}4 & 6 & 6\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & -5 & -2\end{pmatrix}$ នាំឲ្យ $C-\lambda I=\begin{pmatrix}4 & 6 & 6\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & -5 & -2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}4-\lambda & 6 & 6\\ 1 & 3-\lambda & 2\\ -1 & -5 & -2-\lambda\end{pmatrix}$$

គេបាន

$$\det(C-\lambda I)=0 \Leftrightarrow (4-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ -5 & -2-\lambda\end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -2-\lambda\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}1 & 3-\lambda\\ -1 & -5\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)[(3-\lambda)(-2-\lambda)+10]-6(-2-\lambda+2)+6(-5+3-\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)(-6-3\lambda+2\lambda+\lambda^2+10)+6\lambda-12-6\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)(\lambda^2-\lambda+4)-12=0$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2-4\lambda+16-\lambda^3+\lambda^2-4\lambda-12=0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$

$$\Rightarrow \lambda-1=0, \lambda-2=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1, \lambda=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃផ្ទាល់ (Eigenvalue) នៃម៉ាទ្រីស } A \text{ គឺ } \lambda=1, \lambda=2}$

- ចំពោះ $\lambda=1$ គេបាន $(C-I)\vec{v}_1=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 6 & 6\\ 1 & 2 & 2\\ -1 & -5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l}R_1\\ R_2\\ R_3\end{array}\begin{pmatrix}3 & 6 & 6\\ 1 & 2 & 2\\ -1 & -5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll}R_1 & \\ R_2^1 & \to 3R_2-R_1\\ R_3^1 & \to R_3+R_2\end{array}\begin{pmatrix}3 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll}R_1^1 & \to R_1\\ R_2^2 & \to R_3^1\\ R_3^2 & \to R_2^1\end{array}\begin{pmatrix}3 & 6 & 6\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3x + 6y+6z=0\\ -3y-z=0\end{cases}$$

យក $z=t \Rightarrow y=-\frac{t}{3} \Rightarrow x=-2t+\frac{2t}{3}=-\frac{4t}{3}$ ដែល $t\in\mathbb{R}$

នាំឲ្យ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4t}{3} \\ -\frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R}$

- ចំពោះ $\lambda = 2$ គេបាន $(C - 2I)\vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} R_1 & \\ R_2^1 & \to 2R_2 - R_1 \\ R_3^1 & \to R_3 + R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y + 6z = 0 \\ \quad - 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

យក $z = t \Rightarrow y = -\frac{t}{2} \Rightarrow x = -3t + \frac{3t}{2} = -\frac{3t}{2}$ ដែល $t \in \mathbb{R}$

នាំឲ្យ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3t}{2} \\ -\frac{t}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ (Eigenvector) នៃម៉ាទ្រីស } A \text{ គឺ } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} t, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t \quad , t \in \mathbb{R}}$

៨. ការគណនាស្វ័យគុណរបស់ម៉ាទ្រីស (Computing Powers of a Matrix)

និយមន័យ ១.១២. ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម: កាលណាម៉ាទ្រីស A ហៅថាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង (Diagonalizable Matrix) បើមានម៉ាទ្រីសមានចម្រាស P ដែល $P^{-1}AP$ ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម ។ គេហៅ P ជាម៉ាទ្រីសដែលធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មទៅលើ A ។

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧបមាថា A ជាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងកម្ម នោះវាជាម៉ាទ្រីសមានចម្រាស $\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nm} \end{pmatrix}$ ដែល $P^{-1}AP = D$

និង $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ មានន័យថា $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ និង $P_1, P_2, \cdots, P_n$ គឺជាតម្លៃផ្ទាល់ និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ រៀងគ្នានៃម៉ាទ្រីស A ។

បើ A ជាម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ $n \times n$ ហើយ P ជាម៉ាទ្រីសមានចម្រាសនោះ

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

គេបាន $A^k = \underbrace{\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\ldots\left(PDP^{-1}\right) = PD^kP^{-1}}_{k}, k \in \mathbb{N}$

សមីការបានបង្ហាញនូវស្វ័យគុណទី k នៃ A ជាអនុគមន៍នៃស្វ័យគុណទី k របស់ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង។ តែគេអាចគណនាដោយងាយដូចជា៖

$$\text{បើ} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{នោះ} \quad D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

ឧទាហរណ៍ ១.៤០. គណនា A^n ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យនៃម៉សទ្រីស $= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

- រក eigenvalues នៃម៉ាទ្រីស A

  គេបាន $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

  $$= (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

  $$= (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

  $$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$$

- រក eigenvector

- ចំពោះ $\lambda=-1$ នាំឲ្យ $(A+I)\vec{v}_1=0$

  គេបាន $\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2x+2y=0\Leftrightarrow x=y$

  យក $y=t\Rightarrow x=t, t\in\mathbb{R}$ នាំឲ្យ $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t$

- ចំពោះ $\lambda=3$ នាំឲ្យ $(A-3I)\vec{v}_1=0$

  គេបាន $\begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow -2x+2y=0 \quad\Leftrightarrow x=-y$

  យក $y=t\Rightarrow x=-t, t\in\mathbb{R}$ នាំឲ្យ $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}t$

- រក P ជាម៉ាទ្រីសដែលធ្វើអង្កត់ទ្រូងកម្មទៅលើ A

  នាំឲ្យ $P=[\vec{v_1},\vec{v_2}]=\begin{bmatrix}-1&1\\1&1\end{bmatrix}$ នោះ $P^{-1}=\dfrac{1}{\det(P)}\text{adj}(A)=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

  គេបាន $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}$ ឬ $A=P\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}P^{-1}$

- រក A^n ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$

  គេបាន $A^n=\left(P\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}P^{-1}\right)^n=P\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}^nP^{-1}=P\begin{bmatrix}(-1)^n&0\\0&3^n\end{bmatrix}P^{-1}$

  $$=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n&0\\0&3^n\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(-1)^n+3^n&(-1)^{n+1}+3^n\\(-1)^{n+1}+3^n&(-1)^n+3^n\end{bmatrix}$$

  ដូចនេះ $\boxed{A^n=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}(-1)^n+3^n&(-1)^{n+1}+3^n\\(-1)^{n+1}+3^n&(-1)^n+3^n\end{bmatrix}}$

ឧទាហរណ៍ ១.៤១. គណនា A^n ចំពោះម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda&2&2\\2&4-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}$

$$=\left[(4-\lambda)^3+8+8\right]-[4(4-\lambda)+4(4-\lambda)+4(4-\lambda)]=(\lambda-8)(\lambda-2)^2$$

តែ $\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow(\lambda-8)(\lambda-2)^2=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=8$ វាជា Eigenvalues នៃ A

- ចំពោះ $\lambda_1 = 2$ នោះ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+2z=0 & (1) \\ 2x+2y+2z=0 & (2) \\ 2x+2y+2z=0 & (3) \end{cases}$

  បើយក $y = t, z = r$ ដែល $t, r \in \mathbb{R}$ តាម$(1):\ x = -t - r$

  គេបាន $\vec{v} = \begin{pmatrix} -t-r \\ t \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$

  នោះ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- ចំពោះ $\lambda_2 = 8$ នោះ $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+2y+2z=0 & (1) \\ 2x-4y+2z=0 & (2) \\ 2x+2y-4z=0 & (3) \end{cases}$

  យក $(1)-(2):\ -6x+6y=0 \Rightarrow x = y$ បើយក $y = t \Rightarrow x = t, t \in \mathbb{R}$

  តាម $(1):\ z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t = t$

  គេបានវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R}$

  នោះ $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}$

  គេបាន $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  នោះ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \to L_1 + L_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \to -L_2 \\ L_3 \to L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to -L_1 \\ L_3 \to \dfrac{L_3}{3} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + L_3 \\ L_2 \to L_2 + 2L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) L_1 \to L_1 - L_2$$

គេបាន $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

គេបាន $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2^n & -2^n & 8^n \\ 2^n & 0 & 8^n \\ 0 & 2^n & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2^n & -2^n & 8^n \\ 2^n & 0 & 8^n \\ 0 & 2^n & 8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2^n + 8^n & -2 \cdot 2^n + 2^n + 8^n & 2^n - 2 \cdot 2^n + 8^n \\ -2^n + 8^n & 2.2^n + 8^n & -2^n + 8^n \\ -2^n + 8^n & -2^n + 8^n & 2.2^n + 8^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 8^n & -2^n + 8^n & -2^n + 8^n \\ -2^n + 8^n & 2^{n+1} + 8^n & -2^n + 8^n \\ -2^n + 8^n & -2^n + 8^n & 2^{n+1} + 8^n \end{pmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+1}+8^n & -2^n+8^n & -2^n+8^n \\ -2^n+8^n & 2^{n+1}+8^n & -2^n+8^n \\ -2^n+8^n & -2^n+8^n & 2^{n+1}+8^n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}}$

៩. រ៉ង់នៃម៉ាទ្រីស (Rank of Matrix)

ឧទាហរណ៍ ១.៤២. រ៉ង់នៃម៉ាទ្រីសមួយគឺជាចំនួនជួរដេកមិនសូន្យក្នុងទម្រង់បន្ថយជួរដេកនៃម៉ាទ្រីស ឬចំនួននៃជួរឈរនាំមុខ ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $Rank(A) = r$ ។

ចំណាំ ១.១៣. • ម៉ាទ្រីសក្នុងទម្រង់ជួរដេកអាចនិយាយថាស្ថិតក្នុងទម្រង់ The Echelon Form ។ បើវាជា The Echelen Form ប្រសិនបើ៖

១. ជួរដេកមិនសូន្យ r របស់វាស្ថិតនៅក្នុងផ្នែកខាងលើនៃម៉ាទ្រីស ។

២. ក្នុងជួរឈរនាំមុខទី i ធាតុទាំងអស់ខាងក្រោមជួរដេកទី i ស្មើសូន្យ ។

• វិធីសម្រួលម៉ាទ្រីសមួយជាទម្រង់កាត់បន្ថយជួរដេក ហៅថាវិធីបំបាត់ Gauss Jordan Elimination ហើយវិធីសម្រួលម៉ាទ្រីសមួយជាទម្រង់ The Echelon Form ហៅថា Gauss Jordan Elimination ។

ឧទាហរណ៍ ១.៤៣. រករ៉ង់នៃម៉ាទ្រីស៖

១. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

២. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

១. គេបាន $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} r_2 \to r_2 - 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} r_3 \to r_3 - 3r_1 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \end{pmatrix}$

$r_3 \to r_2/-9 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \end{pmatrix} r_3 \to r_3 + 9r_2 \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{រ៉ង់នៃ } A \text{ គឺ } Rank(A) = 2}$

២. គេបាន $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 2r_1 + r_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} R_3 \to -3r_1 + r_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$R_3 \to r_2 + r_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_1 \to -2r_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{រ៉ង់នៃ } B \text{ គឺ } Rank(B) = 2}$

Listing ១.21: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
A=[1 5 1 ; 2 1 1 ; 3 6 2];
B=[1 2 1 ; -2 -3 1 ; 3 5 0];
eq1 = rank(B)
eq2 = rank(B)
```

សម្គាល់ ១. ចំពោះឧទាហរណ៍ទី២ គេអាចប្រើទម្រង់កាត់បន្ថយជួរដេកសម្រាប់ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $AX = B$

ដែល $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ដោយសរសេរជា The augmented matrix

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

ទ្រឹស្តីបទ ១.១៣. ឧបមាថា $m \times n$ ប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែរ $AX = B$ ។ តាង $A|B$ ជា The augented matrix នៃប្រពន្ធ័ ។

១. បើ $Rank(A) < Rank(A|B)$ ប្រពន្ធ័សមីការគ្មានចម្លើយ

២. បើ $Rank(A) = Rank(A|B) = n$ ប្រពន្ធ័សមីការមានសំណុំចម្លើយតែមួយគាត់

៣. បើ $Rank(A) = Rank(A|B) < n$ ប្រពន្ធ័សមីការមានសំណុំចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់ ។

ឧទាហរណ៍ ១.៤៤. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} x+y-z+t &= 1 \\ 2x+3y+z &= 4 \\ 3x+5y+3z-t &= 5 \end{cases}$ ២. $\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ x+2y+z &= 5 \\ x-y &= -1 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

១. $\begin{cases} x+y-z+t &= 1 \\ 2x+3y+z &= 4 \\ 3x+5y+3z-t &= 5 \end{cases}$ សរសេរទៅជា The augment matrix

គេបាន $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1 \to R_2 \\ R_3-3R_1 \to R_3 \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-R_2 \to R_1 \\ R_3-2R_2 \to R_3 \end{array}$

ដោយ $Rank(a)=2 < Rank(a|B)=3$ នាំឲ្យប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ}}$

Listing ១.22: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
syms x y z t
eqn1 = x+y-z +t == 1;
eqn2 = 2*x+3*y+z  == 4;
eqn3 = 3*x+5*y+3*z-t == 5;
[A,B] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2,eqn3], [x,y,z,t])
X = linsolve(A,B)
```

២. $\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ x+2y+z &= 5 \\ x-y &= -1 \end{cases}$ សរសេរទៅជា The augmented matrix

គេបាន $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_1 - R_3 \to R_3 \end{array}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 - R_2 \to R_1 \\ R_3 - 2R_2 \to R_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) R_1 - R_3 \to R_1$$

យើងសង្កេតឃើញថា $Rank(c) = Rank(c|B) = n = 3$ នោះប្រពន្ធ័សមីការមានសំណុំចម្លើយតែមួយគត់ ។

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រពន្ធ័សមីការមានសំណុំចម្លើយតែមួយគត់គឺ } x = 0, y = 1, z = 3}$ ។

Listing ១.23: ដោះស្រាយតាម matlab

```
clear all
syms x y z
eqn1 = x+y+z == 4;
eqn2 = x+2*y+z  == 5;
eqn3 = x-y == -1;
[A,B] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2,eqn3], [x,y,z])
X = linsolve(A,B)
```

ជំពូក២ ការអនុវត្តន៍ម៉ាទ្រីស

១. ទ្រឹស្តីបរមាកម្ម

១.១. ការបង្កើតទម្រង់នៃបញ្ហាកម្មវិធីលីនេអ៊ែរ (Formation of LP Problem)

១.១.១. គម្រូកម្មវិធីលីនេអ៊ែរ (The LP Models)

ក. **អថេរសម្រេចចិត្ត** (Decision Variables) ជាបរិមាណផលិតផលដែលត្រូវសម្រេចចិត្ត ផលិតក្នុងបញ្ហាផលិតផលចម្រុះ ឬជាបរិមាណវត្ថុធាតុដើមដែលត្រូវសម្រេចចិត្តទិញក្នុងបញ្ហាល្បាយដើម្បីទទួលបានចម្លើយប្រសើរបំផុត (Optimal Solution) គឺចំណេញអតិបរមា ឬចំណាយថ្លៃដើមអប្បបរមា។ ដើម្បីធ្វើបែបនេះបាន គេត្រូវតាងអថេរដោយអក្សរមានន័យថា តាងឲ្យបរិមាណទាំងឡាយដែលយើងត្រូវរកតម្លៃរបស់វាក្នុងការដោះស្រាយចំណោទ។ ជាធម្មតាគេតាង $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ជា n អថេរសម្រេចចិត្តនៃចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរ។

ខ. **អនុគមន៍គោលដៅ** (Objective Function) សំដៅទៅដល់កន្សោម ដែលប្រាប់ពីទំនាក់ទំនងរវាងទិន្នន័យ និងប្រាក់ចំណេញ។ ចំណោទកម្មវិធីលីនេអ៊ែរនីមួយៗមានអនុគមន៍គោលដៅតែមួយគត់ដែលគេអាចសរសេរជារាងលីនេអ៊ែរ $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$ ដែល $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ ជាចំនួនពិតថេរ ហើយ z ត្រូវរកតម្លៃអតិបរមា ឬអប្បបរមារបស់វា។

គ. កម្រិតព្រំដែល (Constraints) ជារាល់លក្ខខណ្ឌដែលបានកំណត់ ឬកម្រិតក្នុងចំណោទ។ លក្ខណ្ឌទាំងនេះអាចសរសេរជាទម្រង់សមីការ ឬវិសមីការលីនេអ៊ែរ។

១.១.២. ការបង្កើតរូបមន្តសម្រាប់បញ្ហា LP (The Formulation of the LP Problems)

ក្នុងការដោះស្រាយចំណោទនៃការបង្កើតកម្មវិធីលីនេអ៊ែរមួយ ជាដំបូងយើងត្រូវបង្កើតរូបមន្តជាទម្រង់នៃគណិតវិទ្យា។ ដើម្បីធ្វើបានដូចនេះយើងត្រូវកំណត់ឲ្យបានច្បាស់នូវៈ

១. អថេរសម្រេចចិត្ត (Decision Variables)

២. អនុគមន៍គោលដៅ (Objective Function)

៣. កម្រិតព្រំដែន (Constriants)

១.២. ការបង្កើតកម្មវិធីគម្រូគណិតវិទ្យាសម្រាប់ចំណោទនៃគម្រោងការងារ ចំណោទចម្រុះ និងចំណោទនៃដំណើរការផលិតកម្ម

ឧទាហរណ៍ ២.១. ប្រៃសនីយ៍មួយកន្លែងត្រូវការចំនួនបុគ្គលិកធ្វើការពេញម៉ោងផ្សេងៗ នៅថ្ងៃខុសៗគ្នា។ ច្បាប់សហជីពចែងថា បុគ្គលិកធ្វើការពេញម៉ោងត្រូវ ធ្វើការថ្ងៃជាប់ៗគ្នាហើយបន្ទាប់មកត្រូវបានឈប់សម្រាកពីរថ្ងៃ។ ឧទាហរណ៍ បុគ្គលិកដែលធ្វើការពីថ្ងៃចន្ទ ដល់ថ្ងៃសុក្រ ត្រូវឈប់សម្រាកនៅថ្ងៃសៅរ៍ និងថ្ងៃអាទិត្យ។ ចំនួនបុគ្គលិកធ្វើការពេញម៉ោងត្រូវធ្វើការតាមថ្ងៃដែលបានកំណត់ដូចក្នុងតារាងខាងក្រោម។ ចូរបង្កើតរូបមន្ត LP មួយ ដើម្បីឲ្យប្រៃសនីយ៍នេះប្រើប្រាស់បុគ្គលិកធ្វើការពេញម៉ោងដែលគេត្រូវជួលនេះតិចបំផុត។

តារាងកម្មករដែលត្រូវធ្វើការសម្រាប់ប្រៃសនីយ៍

		ចំនួនបុគ្គលិកធ្វើការពេញម៉ោង
ថ្ងៃទី១	ចន្ទ	17
ថ្ងៃទី២	អង្គារ	13
ថ្ងៃទី៣	ពុធ	15
ថ្ងៃទី៤	ព្រហស្បត្តិ៍	19
ថ្ងៃទី៥	សុក្រ	14
ថ្ងៃទី៦	សៅរ៍	16
ថ្ងៃទី៧	អាទិត្យ	11

ដំណោះស្រាយ

តាង x_i ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅក្នុងថ្ងៃ i ។

គេបាន x_1 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃចន្ទ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃចន្ទដល់ថ្ងៃសុក្រ)

x_2 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃអង្គារ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃអង្គារដល់ថ្ងៃសៅរ៍)

x_3 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃពុធ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃពុធដល់ថ្ងៃអាទិត្យ)

x_4 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃព្រហស្បត្តិ៍ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃព្រហស្បត្តិ៍ដល់ថ្ងៃចន្ទ)

x_5 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃសុក្រ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃសុក្រដល់ថ្ងៃអង្គារ)

x_6 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃសៅរ៍ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃសៅរ៍ដល់ថ្ងៃពុធ)

x_7 ជាចំនួនបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការនៅថ្ងៃអាទិត្យ (បុគ្គលិកទាំងនេះធ្វើការពីថ្ងៃអាទិត្យដល់ថ្ងៃព្រហស្បតិ៍)

ចំនួនបុគ្គលិកធ្វើការពេញម៉ោង $=$ ចំនួនបុគ្គលិកចាប់ផ្តើមធ្វើការថ្ងៃចន្ទ $+$ ចំនួនបុគ្គលិកចាប់ផ្តើមធ្វើការថ្ងៃអង្គារ $+\cdots+$ ចំនួនបុគ្គលិកចាប់ផ្តើមធ្វើការថ្ងៃអាទិត្យ

គេបាន អនុគមន៍គោលដៅគឺ $MinZ = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

ប្រៃសនីយ៍ត្រូវប្រាកដថាយ៉ាងហោចណាស់មានមនុស្ស 17 នាក់ធ្វើការនៅថ្ងៃចន្ទ។ បុគ្គលិកទាំងអស់ត្រូវធ្វើការនៅថ្ងៃចន្ទ លើកលែងតែបុគ្គលិកដែលចាប់ផ្តើមធ្វើការថ្ងៃអង្គារនិងថ្ងសពុធ (ព្រោះពួកគេត្រូវឈប់សម្រាកនៅ ថ្ងៃអាទិត្យនិងថ្ងៃចន្ទ ថ្ងៃចន្ទ

និងថ្ងៃអង្គារ រៀងគ្នា)។ នេះមានន័យថាចំនួនបុគ្គលិកដែលធ្វើការនៅថ្ងៃចន្ទគឺ $x_1+x_4+x_5+x_6+x_7$ ។ ដូចគ្នាដែរចំពោះថ្ងៃផ្សេងទៀត។

រូបមន្ត LP នៃចំណោទនេះគឺៈ $MinZ = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$

ចន្ទ $x_1+x_4+x_5+x_6+x_7 \geq 17$

អង្គារ $x_1+x_2+x_5+x_6+x_7 \geq 13$

ពុធ $x_1+x_2+x_3+x_6+x_7 \geq 15$

ព្រហស្បត្តិ៍ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_7 \geq 19$

សុក្រ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geq 14$

សៅរ៍ $x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \geq 16$

អាទិត្យ $x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \geq 11$

$x_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,3,4,5,6,7)$

១.៣. ដំណោះស្រាយចំណោទលីនេអ៊ែរ (LP) តាមក្រាបហ្វិច

១. **ជំហានទី១៖** ក្នុងការដោះស្រាយចំណោទនៃការបង្កើតកម្មវិធីលីនេអ៊ែរមួយ ជាដំបូងគេត្រូវបង្កើតរូបមន្តជាទម្រង់នៃគណិតវិទ្យា។ ដើម្បីធ្វើបានដូចនេះយើងត្រូវកំណត់ឲ្យបានច្បាស់នូវៈ

   ក. អថេរសម្រេចចិត្ត (Decision Variables)

   ខ. អនុគមន៍គោលដៅ (Objective Function)

   គ. កម្រិតព្រំដែន (Constriants)

២. **ជំហានទី២៖** ពេលនេះយើងត្រូវគូសកម្រិតព្រំដែននៃចំណោទក្នុងក្រាហ្វិចមួយ។ ដើម្បីឲ្យបានជាចម្លើយដែលយើងចង់បាន ចម្លើយនោះត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះកម្រិតព្រំដែនទាំងអស់។

៣. **ជំហានទី៣៖** យើងត្រូវដៅចំណុចកាច់ជ្រុងទាំងអស់ជុំវិញតំបន់ចម្លើយ។

៤. **ជំហានទី៤៖** យកចំណុចកាច់ជ្រុងនៃតំបន់ចម្លើយជំនួសក្នុងអនុគមន៍គោលដៅ។ បន្ទាប់មកសង្កេតមើលតម្លៃដែលប្រសើរបំផុត (អតិបរមា ឬអប្បបរមា)។

ឧទាហរណ៍ ២.២. មីងសីនួនចង់លាយម្សៅសណ្ដែក ស្ករសនិងទឹកដើម្បីធ្វើភេជ្ជៈពីរប្រភេទគឺទឹកសណ្ដែកសនិងទឹកសណ្ដែកខៀវ ។ ទឹកសណ្ដែកសធ្វើពីស្ករស 20% ម្សៅសណ្ដែក 20% និងទឹក 60% ហើយទឹកសណ្ដែកខៀវធ្វើពីស្ករស 40% មស្សៅសណ្ដែក 20% និងទឹក 40% ។ មីងស៊ីនួនចំណេញបាន 60 សេនក្នុង $1kg$ នៃទឹកសណ្ដែកស និងបានចំណេញ 80 សេនក្នុង $1kg$ នៃទឹកសណ្ដែកខៀវ។ ប្រសិនបើគាត់មានស្ករសរ $60kg$ និងម្សៅសណ្ដែក $40kg$ នោះគាត់អាចផលិតទឹកសណ្ដែកប្រភេទនីមួយៗបានប៉ុន្មានគីឡូក្រាម ដើម្បីឲ្យគាត់ទទួលបានប្រាក់ចំណេញខ្ពស់បំផុត ?

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនទឹកសណ្តែកស និងខៀវដែលត្រូវផលិតដើម្បីទទួលប្រាក់ចំណេញអតិបរមា

- តារាងសង្ខេប

	ស្ករស	ម្សៅសណ្តែក	ទឹក	ប្រាក់ចំណេញ
ទឹកសណ្តែកស	0.2	0.2	0.6	$0.6\$/1kg$
ទឹកសណ្តែកខៀវ	0.4	0.2	0.4	$0.8\$/1kg$
វត្ថុដែលមានសរុប	$60kg$	$40kg$		

- បង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

តាង x ជាទឹកសណ្តែកស និង y ជាទឹកសណ្តែកខៀវ

Max P: $z = 0.6x + 0.8y$ និង S.t $\begin{cases} 0.2x + 0.4y \leq 60 \\ 0.2x + 0.2y \leq 40 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

$0.2x + 0.4y \leq 60$ ការប្រើស្ករសដើម្បីផលិតទឹកសណ្តែកស និងខៀវយ៉ាងច្រើន $60kg$

$0.2x + 0.2y \leq 40$ ការប្រើម្សៅសណ្តែកដើម្បីផលិតទឹកសណ្តែកស និងខៀវយ៉ាងច្រើន $40kg$ ។

- សង់បន្ទាត់

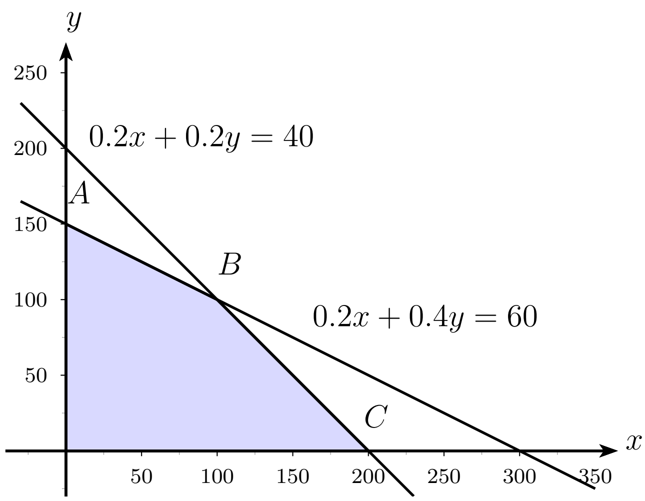
តារាងតម្លៃលេខ

$0.2x + 0.4y = 60$

x	0	300
y	150	0

$0.2x + 0.2y = 40$

x	0	200
y	200	0



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់ពត៌ខៀវ និងចំណុចកាច់ជ្រុង

- រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ដែលជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរ

គេបាន $\begin{cases} 0.2x + 0.4y = 60 \\ 0.2x + 0.2y = 40 \end{cases} \sim L_2 = R_1 - R_2 : \begin{cases} 0.2x + \quad 0.4y = 60 \\ \qquad\quad 0.2y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{20}{0.2} = 100 \\ x = \dfrac{60 - 0.2(100)}{0.4} = 100 \end{cases}$

- តម្លៃនៃចំណុចកាច់ជ្រុង

  - $0(0,0) \Rightarrow z = 0$
  - $A(0,150) \Rightarrow z = 0.6(0) + 0.8(150) = 120$
  - $B(100,100) \Rightarrow z = 0.6(100) + 0.8(100) = 140$
  - $C(200,0) \Rightarrow z = 0.6(200) + 0.8(0) = 120$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយដែលប្រសើរបំផុតគឺ } x = 0, y = 200 \text{ ដើម្បីទទួលបានចំណេញអតិបរមា } 160\$}$

ឧទាហរណ៍ ២.៣. ក្រុមហ៊ុន TOYOTA តម្លើងរថយន្តពីរប្រភេទគឺឡានតូច (Car) និងឡានដឹកទំនិញ (Van) នៅទីក្រុង Bang Kok ។ រថយន្តនីមួយៗត្រូវឆ្លងកាត់ហាងបាញ់ថ្នាំ និងហាងតម្លើង។ ប្រសិន បើហាងបាញ់ថ្នាំត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានតូច នោះគេអាចបាញ់ថ្នាំឡានតូចបានចំនួន 800 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ប្រសិនបើហាងបាញ់ថ្នាំត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានដឹង ទំនិញនោះគេអាចបាញ់ថ្នាំឡានដឹកទំនិញបានចំនួន 700 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ប្រសិនបើហាងតម្លើងត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានតូច នោះគេអាចតម្លើងឡានតូចបានចំនួន 1700 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ប្រើសិនបើហាងតម្លើងត្រូវបានគេរៀបចំរួចរាល់សម្រាប់ឡានដឹកទំនិញ នោះគេអាចតម្លើងឡានដឹកទំនិញបានចំនួន 1200 ក្នុងមួយថ្ងៃ។ ឡានតូចនីមួយៗផ្តល់ប្រាក់ចំណេញបាន 300\$ និងឡានដឹកទំនិញផ្តល់បាន 500\$ ចូរអ្នកបង្កើតរូបមន្តតាមបែបកម្មវិធីលីនេអ៊ែរដែលនឹងធ្វើឲ្យប្រាក់ចំណេញរបស់ក្រុមហ៊ុន TOYOTA ឡើងដល់កម្រិតអតិបរមា។ បន្ទាប់មកដោះស្រាយតាមក្រាបហ្វិច។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួន Car និង Van ដែលត្រូវផលិតដើម្បីឲ្យបានប្រាក់ចំណេញជាអតិបរមា

- តារាងសង្ខេប

	Car	Van
ផ្នែកបាញ់ថ្នាំ	$1/180$	$1/700$
ផ្នែកតម្លើង	$1/1700$	$1/1200$
ប្រាក់ចំណេញ	300	

$\frac{1}{800}$ មានន័យថាមួយថ្ងៃបាញ់ថ្នាំ Car បាន 800 គ្រឿង
$\frac{1}{700}$ មានន័យថាមួយថ្ងៃបាញ់ថ្នាំ Van បាន 700 គ្រឿង
$\frac{1}{1700}$ មានន័យថាមួយថ្ងៃតម្លើង Car បាន 1700 គ្រឿង
$\frac{1}{1200}$ មានន័យថាមួយថ្ងៃតម្លើង Van បាន 1200 គ្រឿង

- បង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

  តាង x ជាចំនួន Car និង y ជាចំនួន Van

  MaxP: $z = 300x + 500y$ និង S.t $\begin{cases} \dfrac{1}{800}x + \dfrac{1}{700}y & \leq 1 \\ \dfrac{1}{1700}x + \dfrac{1}{1200}y & \leq 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

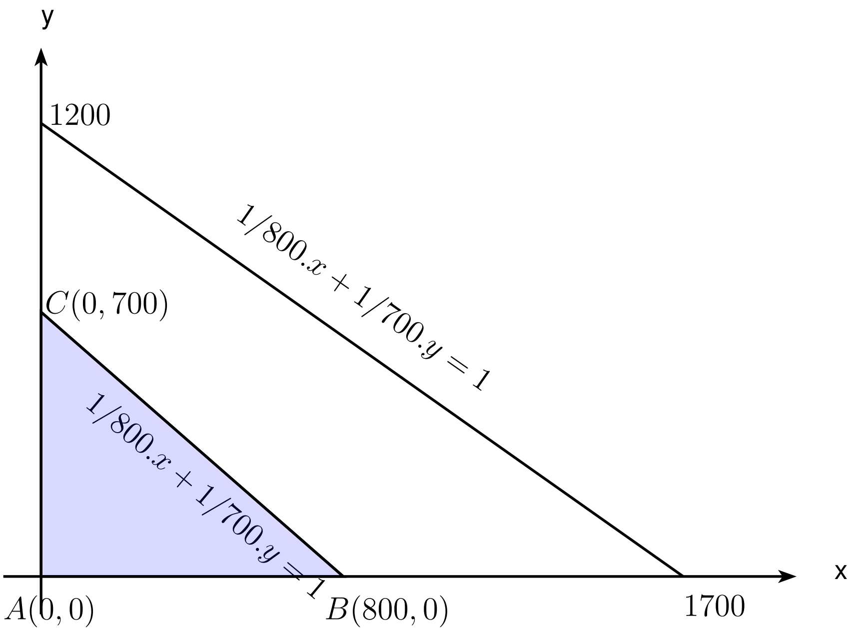
- ដំណោះស្រាយតាមក្រាប

$\dfrac{1}{800}x + \dfrac{1}{700}y = 1$

x	0	800
y	700	0

$\dfrac{1}{1700}x + \dfrac{1}{1200}y = 1$

x	0	1700
y	1200	0



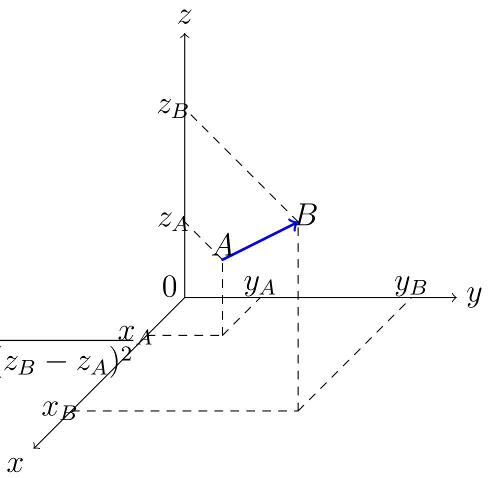
- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលបានគឺនៅត្រង់តំបន់ចំណុចកាច់ជ្រុងតម្លៃនៃចំណុចកាចជ្រុង

  - $A(0,0) = 0$
  - $B(800,0) \Rightarrow z = 300(800) + 500(0) = 240000$
  - $C(0,700) \Rightarrow z = 300(0) + 500(700) = 350000$

ដូចនេះ: ក្រុមហ៊ុន TOYOTA ត្រូវផលិត Car ចំនួន 0 និង Van ចំនួន 700 ដើម្បីឲ្យប្រាក់ចំណេញអតិបរមា 350 000\$

២. អនុវត្តម៉ាទ្រីសក្នុងវ៉ិចទ័រ

២.១. ចម្ងាយពីចំណុចទៅចំណុចនៅក្នុងលំហ



បើគេមានចំណុច $A(x_A, y_A, z_A)$ និង $B(x_B, y_B, z_B)$ នោះគេបាន៖

- វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$
  $= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$
- ប្រវែង $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

ឧទាហរណ៍ ២.៤. គេមានចំណុច $A(1, 2, 3)$ និង $B(2, 1, 2)$ ។ គណនាប្រវែង AB ។

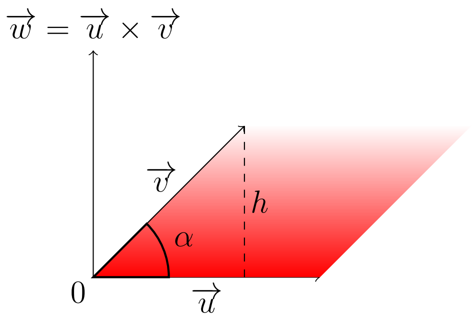
<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

តាមរូបមន្ត
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - Z_A)^2}$$
$$= \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (2-3)^2}$$
$$= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$$
$\therefore \quad AB = \sqrt{3}$ ឯកត្តាប្រវែង

២.២. ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

បើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រមិនសូន្យនៅក្នុងលំហ និង តាង α ជាមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាវ៉ិចទ័រមួយតាងដោយ $\vec{u} \times \vec{v}$ ឬ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ។

មានន័យថា $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ និង $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$ ។



រូប២.១

តាង $\vec{u} \times \vec{v} = (x, y, z), \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ និង $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

ដោយ $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \Leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v}).\vec{u} = u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0 \quad (1)$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v} \Leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v}).\vec{v} = v_1 x + v_2 y + v_3 z = 0 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) ចងជាប្រព័ន្ធសមីការ

គេបាន $\begin{cases} u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0 \\ v_1 x + v_2 y + v_3 z = 0 \end{cases} \Rightarrow L_2 = v_1.L_1 - u_1.L_2 : \begin{cases} u_1 x + u_2 y + u_3 z = 0 \\ (u_2 v_1 - u_1 v_2) y + (u_3 v_1 - u_1 v_3) z = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{3v_1-u_1v_3}{u_1b_2-u_2v_1} \Rightarrow y=(u_3v_1-u_1v_3)t \text{ និង } z=(u_1v_2-u_2v_1)t \text{ ចំពោះ } t\neq 0$$

ជំនួសចូលសមីការ (1) គេបាន $u_1x=-u_3\left(u_1v_2-u_2v_1\right)t-u_2\left(u_3v_1-u_1v_3\right)t$

$$=\left(-u_1u_3v_2+u_2u_3v_1-u_2u_3v_1+u_1u_2v_3\right)t$$

$$u_1x=u_1\left(u_2v_3-u_3v_2\right)t$$

$$x=\left(u_2v_3-u_3v_2\right)t$$

យក $t=1$ គេបាន $\vec{u}\times\vec{v}=(x,y,z)=(u_2v_3-u_3b_2,u_3v_1-u_1v_3,u_1v_2-u_2v_1)$

$$=\left(u_2v_3-u_3b_2\right)\overrightarrow{i}-\left(u_1v_3-u_3v_1\right)\overrightarrow{j}+\left(u_1v_2-u_2v_1\right)\overrightarrow{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\overrightarrow{k}}$

ចំណាំ ២.១. បើ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3),\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ នោះគេបាន $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$

ទ្រឹស្តីបទ ២.១. បើ $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកត្តា $(|n|=1)$ ហើយអរតូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$ ផងនិង $\vec{v}$ ផងនោះគេបាន វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\alpha.\vec{n}$ ឬ $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\alpha$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\sin^2\alpha=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1-\sin^2\alpha)$

$$=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-|a|^2|b|^2\cos^2\alpha$$

$$=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}.\vec{v})^2$$

$$=(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2$$

$$=(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2$$

$$=|\vec{u}\times\vec{v}|^2$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\alpha \quad ,\sin\alpha>0$$

ទ្រឹស្តីបទ ២.២. ចំពោះ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រក្នុងតម្រុយ $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ នោះគេបាន៖

១. បើ $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ នោះ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កូលីនេអ៊ែនឹងគ្នា ។

២. $|\vec{u} \times \vec{v}|$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម ដែលលងលើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

៣. $\dfrac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ដែលលងលើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

៤. A, B, C ជាបីចំណុចរតមិនត្រង់គ្នា លុះត្រាតែ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

១. តាមទ្រឹស្តីបទ ២.១ : $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}| \sin\alpha.\vec{n}$ ដោយ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កូលីនេអ៊ែនឹងគ្នា នោះ $\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0$ នោះគេបាន $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ ។

២. ក្នុង រូប២.១: គេបានក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម
$$\begin{aligned} S &= |\vec{u}|.h \\ &= |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\alpha \quad \text{តាមទ្រឹស្តីបទ ២.១} \\ \therefore \quad S &= |\vec{u} \times \vec{v}| \end{aligned}$$

៣. ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ $S_{\triangle} = \dfrac{1}{2}S = \dfrac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$

៤. គេមាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ លុះត្រាតែ $\overrightarrow{AB}$ កូលីនេអ៊ែ $\overrightarrow{AC}$ លុះត្រាតែ ចំណុច A, B, C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

ឧទាហរណ៍ ២.៥. គេឲ្យចំណុច $A(1,3,2), B(2,-1,1), C(-1,2,3)$ ។ គណនា ក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S_{\triangle ABC}$

គេមាន $A(1,3,2), B(2,-1,1), C(-1,2,3)$

នោះ $\overrightarrow{AB} = (2-1)\overrightarrow{i} + (-1-3)\overrightarrow{j} + (1-2)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{AC} = (-1-1)\overrightarrow{i} + (2-3)\overrightarrow{j} + (3-2)\overrightarrow{k} = -2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

គេបាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-4-1)\overrightarrow{i} - (1-2)\overrightarrow{j} + (-1-8)\overrightarrow{k} = -5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 9\overrightarrow{k}$

នាំឲ្យ $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{5^2 + 1^2 + 9^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{107}$ ឯកត្តាក្រលាផ្ទៃ ។

២.៣. កន្សោមផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន

បើ $\vec{u} = u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k} = (u_1, u_2, u_3)$ និង $\vec{v} = v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k} = (v_1, v_2, v_3)$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ។ ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាវ៉ិចទ័រកំណត់ដោយ៖ $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$

$$\vec{u}\times\vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k} \qquad (២.១)$$

ឧទាហរណ៍ ២.៦. គណនា $|\vec{u}\times\vec{v}|$ បើ $\vec{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ និង $\vec{v} = 3\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

គេមាន $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\vec{k}$

$$= (-2-15)\overrightarrow{i} - (-4-9)\overrightarrow{j} + (10-3)\overrightarrow{k} = -17\overrightarrow{i} + 13\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{(-7)^2 + (13)^2 + (7)^2} = \sqrt{507}$$

២.៤. លក្ខណៈនៃផលគុណពីរវ៉ិចទ័រ

បើ $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ និង c ជាចំនួនពិត គេបាន៖

១. $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$

២. $\vec{u}\times(\vec{u}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$

៣. $c(\vec{u}\times\vec{v}) = (c\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(c\vec{v})$

៤. $\vec{u}\times\vec{0} = \vec{0}\times\vec{u} = \vec{0}$

៥. $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$

៦. $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើតាង $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ និង $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ និង $c \in \mathbb{R}$

១. តាមសមីការ (២.១) គេបាន $\vec{u}\times\vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$

$$= -\left[(u_3v_2 - v_2v_3)\overrightarrow{i} - (u_3v_1 - u_1v_3)\overrightarrow{j} + (u_2v_1 - u_1v_2)\overrightarrow{k}\right]$$

$$\therefore \quad \vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$$

២. តាមសមីការ (២.១) គេបាន

$$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = [u_2(v_3+w_3)-u_3(v_2+w_2)]\,\vec{i}-[u_1(v_3+w_3)-u_3(v_1+w_1)]\,\vec{j}$$

$$+[u_1(v_2+w_2)-u_2(v_1+w_1)]\,\vec{k}$$

$$=(u_2v_3+u_2w_3-u_3v_2-u_3w_2)\,\overrightarrow{i}-(u_1v_3+u_1w_3-u_3v_1-u_3w_1)\,\overrightarrow{j}$$

$$+(u_1v_2+u_1w_2-u_2v_1-u_2w_1)\,\overrightarrow{k}$$

$$=(u_2v_3-u_3v_2)\,\overrightarrow{i}+(u_2w_3-u_3w_2)\,\overrightarrow{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\,\overrightarrow{j}-(u_1w_3-u_3w_1)\,\overrightarrow{j}$$

$$+(u_1v_2-u_2v_1)\,\overrightarrow{k}+(u_1w_2-u_2w_1)\,\overrightarrow{k}$$

$$=\left[(u_2v_3-u_3v_2)\,\overrightarrow{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\,\overrightarrow{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\,\overrightarrow{k}\right]$$

$$+\left[(u_2w_3-u_3w_2)\,\overrightarrow{i}-(u_1w_3-u_3w_1)\,\overrightarrow{j}+(u_1w_2-u_2w_1)\,\overrightarrow{k}\right]$$

$$\therefore\quad \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$$

៣. ចំពោះ $c\in\mathbb{R}$ គេបាន $\vec{u}\times\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$

នាំឲ្យ $(c\vec{u})\times\vec{v}=c\left[(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}\right]$

$$=(cu_2v_3-cu_3v_2)\vec{i}-(cu_1v_3-cu_3v_1)\vec{j}+(cu_1v_2-cu_2v_1)\vec{k}$$

$$=(u_2cv_3-u_3cv_2)\vec{i}-(u_1cv_3-u_3cv_1)\vec{j}+(u_1cv_2-u_2cv_1)\vec{k}$$

$$=\vec{u}\times(c\vec{v})$$

$$\therefore\quad c(\vec{u}\times\vec{v})=(c\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(c\vec{v})$$

៤. គេបាន $\vec{u}\times\vec{0}=(u_2\times 0-u_3\times 0)\vec{i}-(u_1\times 0-u_3\times 0)\vec{j}+(u_1\times 0-u_2\times 0)\vec{k}$

$$=0\,\overrightarrow{i}+0\,\overrightarrow{j}+0\,\overrightarrow{k}$$

$$=-(0\,\overrightarrow{i}+0\,\overrightarrow{j}+0\,\overrightarrow{k})$$

$$=-\vec{0}\times\vec{u}$$

$$=\vec{0}$$

$$\therefore\quad \vec{u}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{u}=\vec{0}$$

៥. គេបាន $\vec{u}\times\vec{u}=(u_2u_3-u_3u_2)\vec{i}-(u_1u_3-u_3u_1)\vec{j}+(u_1u_2-u_2u_1)\vec{k}$

$$=0\,\overrightarrow{i}+0\,\overrightarrow{j}+0\,\overrightarrow{k}$$

$$\therefore\quad \vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$$

៦. តាមសមីការ (២.១)

គេបាន $\vec{u}\times\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$

នាំឲ្យ $(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}=(u_2v_3-u_3v_2)w_1-(u_1v_3-u_3v_1)w_2+(u_1v_2-u_2v_1)w_3$

$$=u_2v_3w_1-u_3v_2w_1-u_1v_3w_2+u_3v_1w_2+u_1v_2w_3-u_2v_1w_3 \qquad (I)$$

$$\vec{v}\times\vec{w}=(v_2w_3-v_3w_2)\vec{i}-(v_1w_3-v_3w_1)\vec{j}+(v_1w_2-v_2w_1)\vec{k}$$

នាំឲ្យ $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=(v_2w_3-v_3w_2)u_1-(v_1w_3-v_3w_1)u_2+(v_1w_2-v_2w_1)u_3$

$$=u_1v_2w_3-u_1v_3w_2-u_2v_1w_3+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2-u_3v_2w_1 \qquad (II)$$

តាម (I) និង (II) គេបាន $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$

ឧទាហរណ៍ ២.៧. គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ និង $\vec{v}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\vec{u},\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកត្តា និង អរតូកូណាល់គ្នា ។

ខ. កំណត់គ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{w}$ ដែលវ៉ិចទ័រ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ ជាគោលអរតូណរម៉ាល់ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\vec{u},\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកត្តា និង អរតូកូណាល់គ្នា ។

គេមាន $\vec{u}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\Longrightarrow|\vec{u}|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=1$

$$\vec{v}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Longrightarrow|\vec{v}|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}=1$$

គេបាន $\vec{u}.\vec{v}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)(0)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

ដោយ $|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$ នោះគេបាន $\vec{u},\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកត្តា និង $\vec{u}.\vec{v}=0$ នោះគេបាន $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ អរតូណរម៉ាល់នឹងគ្នា

ខ. កំណត់គ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{w}$ ដែលវ៉ិចទ័រ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ ជាគោលអរតូណរម៉ាល់

គេបាន $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{k}$

$$=\left(\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-0\times\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{i}-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{j}+\left(\frac{2}{3}\times0+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{k}$$

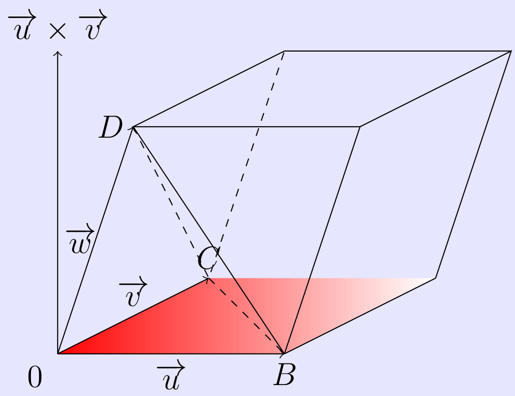
$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\overrightarrow{i}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\overrightarrow{j}+\frac{\sqrt{2}}{6}\overrightarrow{k}$$

២.៥. ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

និយមន័យ ២.១. គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v}$ និង $\vec{w}$ នៅក្នុងលំហ ។ ផលគុណចម្រុះនៃ $\vec{u},\vec{v}$ និង $\vec{w}$ តាមលំដាប់គឺជាចំនួនពិតកំណត់ដោយ $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})$ ។

ទ្រឹស្តីបទ ២.៣. បើគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}, \vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ និង $\vec{w}=w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}$ នោះផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v}$ និង $\vec{w}$ តាមលំដាប់នៅក្នុងលំហកំណត់ដោយ ៖

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$



១. មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v}$ សង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u},\vec{v}$ និង $\vec{w}$ គឺ $V=|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|$ ។

២. មាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ គឺ $W=\dfrac{1}{6}|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|$ ឬ $W=\dfrac{1}{6}|\vec{AD}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})|$ បានន័យថាយកមាឌប្រលេពីប៉ែតចែកនឹង 6 ។

១. តាង θ ជាមុំផ្គុំរវាង $\vec{v}$ និង h ដែល h ជាកម្ពស់ប្រលេពីប៉ែត

ដោយមាឌប្រលេពីប៉ែត = ក្រឡាផ្ទៃបាត $\times$ កម្ពស់

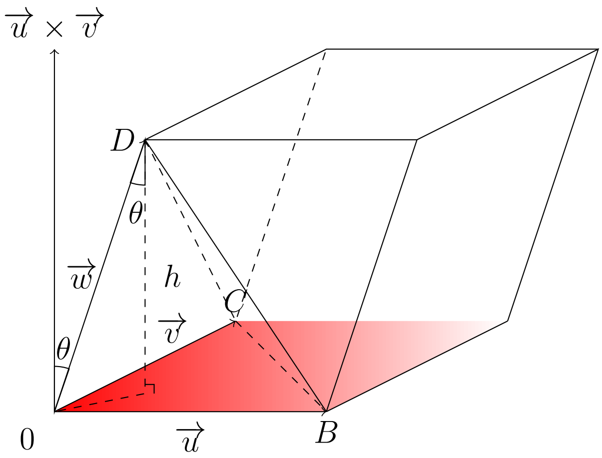
$V = |\vec{u}\times\vec{v}|.h$, $h = |\vec{w}|.\cos\theta$, $0^\circ < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

គេបាន

$$V = |\vec{u}\times\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta \qquad (២.២)$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w} = |\vec{u}\times\vec{w}|.|\vec{w}|\cos\theta \qquad (២.៣)$$



តាម (២.២) និង (២.៣) គេបាន $V = (\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$

ករណី $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \cos\theta < 0$

គេបាន $V = -(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w} \Rightarrow V = |(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}|$

ដូចនេះ មាឌប្រលេពីប៉ែត $V = |\vec{v}.(\vec{u}\times\vec{w})|$

២. តាមរូបមន្ត

មាឌតេត្រាអ៊ែត $= \dfrac{1}{3}$ ក្រលាផ្ទៃបាទ $\times$ កម្ពស់

ដោយផ្ទៃបាតជាត្រីកោណ $\dfrac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$ និង

កម្ពស់ $h = |\vec{v}|.\cos\theta$, $0^\circ < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

គេបាន $W = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|.|\vec{w}|\cos\theta$

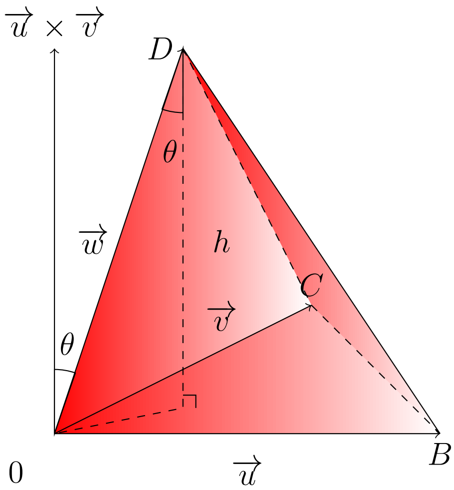
$= \dfrac{1}{6}(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$ (តាមនិយន័យ)

ករណី $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \cos\theta < 0$

គេបាន $W = -\dfrac{1}{6}(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$

$\Rightarrow W = \dfrac{1}{6}|(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}|$

ដូចនេះ មាឌប្រលេពីប៉ែត $W = \dfrac{1}{6}|(\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}|$



ឧទាហរណ៍ ២.៨. ក្នុងតម្រុយ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន គេឲ្យចំណុច $A(1,0,2)$, $B(1,1,3)$ និង $C(2,1,2)$ ។

១. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

២. គណនា $\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$ រួចទាញរកមាឌនៃប្រលេពីប៉ែតដែលមានវិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ និងមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=(1-1,1-0,3-2)=(0,1,1)$

$\overrightarrow{AC}=(2-1,1-0,2-2)=(1,1,0)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\overrightarrow{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}-\overrightarrow{j}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\overrightarrow{k}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}$

$=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

គេបាន $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ

២. គណនា $\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$

ដោយ $\overrightarrow{AO}=(0-1,0-0,0-2)=(-1,0,-2)$

គេបាន $\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=(-1)(-1)+(0)(1)+(-2)(-1)$

$=1+0+2=3$

មាឌនៃប្រលេពីប៉ែតដែលមានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

គេបាន $V_{OABC}=|\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=|3|=3$ ឯកតាមាឌ

មាឌនៃចតុមុខ $OABC$

គេបាន $W_{OABC}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\right|=\frac{1}{6}\times 3=\frac{1}{2}$ ឯកតាមាឌ

ផ្នែកទី ១

លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ១. គេឲ្យម៉ាទ្រីស A, B និង C កំណត់ដោយ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ និង $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ។ គណនាម៉ាទ្រីស $D = a + 2B - C$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2+2\times 1-(-2) & -1+2\times 0-1 \\ 3+2\times 0-(-1) & 1+2\times(-2)-1 \end{pmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{D = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}}$

លំហាត់ ២. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -7 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

និង $D = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ។ គណនា $A+B, A+C, A+B+D$ ។

ដំណោះស្រាយ

- $A + B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & -3+2 \\ 0+0 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

  ដូចនេះ $\boxed{A + B == \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}$

- $A + C$ មិនអាចធ្វើការបូកបានទេ ព្រោះវាមានលំដាប់ខុសគ្នា

- $A + B + D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1+5 & -3+2+3 \\ 0+0+2 & 1-3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{A+B=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix};\quad A+B+D=\begin{bmatrix}10 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}}$

លំហាត់ ៣. គណនា $A+B, A-B$ ដែល $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -3 & 5\end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 0 & -2\\ 6 & 3 & 0\end{bmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

- $A+B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 0 & -2\\ 6 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2 & 1+1 & 3+3\\ 3+5 & 0+0 & 2-2\\ 4+6 & -3+3 & 5+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 2 & 6\\ 8 & 0 & 0\\ 10 & 0 & 5\end{bmatrix}$
- $A-B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 2\\ 4 & -3 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 0 & -2\\ 6 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-2 & 1-1 & 3-3\\ 3-5 & 0-0 & 2+2\\ 4-6 & -3-3 & 5-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 4\\ -2 & -6 & 5\end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{A+B=\begin{bmatrix}6 & 2 & 6\\ 8 & 0 & 0\\ 10 & 0 & 5\end{bmatrix};\quad A-B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 4\\ -2 & -6 & 5\end{bmatrix}}$

លំហាត់ ៤. គណនា $4A, -2B$ និង $4A-2B$

គេឲ្យ $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

- $4A=4\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 8 & 0\\ -4 & 16 & 20\\ 0 & 12 & 16\end{bmatrix}$

$-2B=2\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -10 & -12\\ 0 & 2 & 2\\ -4 & -6 & -8\end{bmatrix}$

- $4A-2B=\begin{bmatrix}12 & 8 & 0\\ -4 & 16 & 20\\ 0 & 12 & 16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -10 & -12\\ 0 & 2 & 2\\ -4 & -6 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -2 & -12\\ -4 & 18 & 22\\ -4 & 6 & 8\end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{4A=\begin{bmatrix}12 & 8 & 0\\ -4 & 16 & 20\\ 0 & 12 & 16\end{bmatrix}\ ;\quad -2B=\begin{bmatrix}-4 & -10 & -12\\ 0 & 2 & 2\\ -4 & -6 & -8\end{bmatrix}\quad 4A-2B=\begin{bmatrix}8 & -2 & -12\\ -4 & 18 & 22\\ -4 & 6 & 8\end{bmatrix}}$

លំហាត់ ៥. គេឲ្យ $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ និង $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & \\ 4 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ ។ គណនា AB និង BA ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 5 & -1\\ 4 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2(3)+1(4) & 2(1)+1(-2) & 2(5)+1(1) & 2(-1)+1(0)\\ -1(3)+0(4) & -1(1)+0(-2) & -1(5)+0(1) & -1(-1)+0(0)\\ 3(3)+1(4) & 3(1)+1(2) & 3(5)+1(1) & 3(-1)+1(0)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10 & 0 & 11 & -2\\ -3 & -1 & -5 & 1\\ 13 & 1 & 16 & -3\end{pmatrix}$$

ចំពោះ BA មិនអាចធ្វើប្រមាណវិធីបានទេ ។

លំហាត់ ៦. គណនាម៉ាទ្រីស $A\times B$ និង $C\times D$ ដែល $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 1 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

, $C=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 5 & 4\\ 3 & 0 & 3\end{bmatrix}$ និង $D=\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\end{bmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

គេបាន$A \times B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (-2)(6) + (0)(1) + (1)(3) & (-2)(0) + (0)(-2) + (1)(5) \\ (3)(6) + (4)(1) + (2)(3) & (3)(0) + (4)(-2) + (2)(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 + 0 + 3 & 0 + 0 + 5 \\ 18 + 4 + 6 & 0 + (-8) + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ 28 & 2 \end{bmatrix}$$

ហើយ $C \times D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(4) + (-2)(-1) + (0)(2) \\ (1)(4) + (5)(-1) + (4)(-1) \\ (3)(4) + (0)(-1) + (3)(2) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 12 + 2 + 0 \\ 4 + (-5) + (-4) \\ 12 + (-1) + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 17 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{A \times B = \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ 28 & 2 \end{bmatrix} \; ; \quad C \times D = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 17 \end{bmatrix}}$

លំហាត់ ៧. គណនា AB និង BA ដែល $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 9 & 10 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 9 & 10 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$

- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 9 & 10 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1(-7)+2(9)+3(0) & 1(-8)+2(10)+3(-11) \\ 4(-7)+5(9)+6(0) & 4(-8)+5(10)+6(-11) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -21 \\ 17 & -48 \end{pmatrix}$$

- $BA = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 9 & 10 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (-7)1+(-8)4 & (-7)2+(-8)2+(-8)5 & (-7)3+(-8)6 \\ 9(1)+10(4) & 9(2)+10(5) & 9(3)+10(6) \\ 0(1)+(-11)4 & 0(2)+(-11)5 & 0(3)+(-11)6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -39 & -54 & -69 \\ 49 & 68 & 87 \\ -44 & -55 & -66 \end{pmatrix}$$

លំហាត់ ៨. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} \sin^2 x & 1 \\ \cot^2 x & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} \cos^2 x & 0 \\ -\cos ec^2 x & 1 \end{bmatrix}$ និង $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

១. គណនា $A+B+C$

២. គណនា $(A+2B)^2$

ដំណោះស្រាយ

១. គណនា $A+B+C$

គេបាន$A+B+C=\begin{bmatrix}\sin^2 x & 1\\ \cot^2 x & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos^2 x & 0\\ -\cos ec^2 x & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\sin^2 x+\cos^2 x & 1\\ \cot^2 x-\cos ec^2 x & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

(ព្រោះ $\sin^2 x+\cos^2 x=1;\cos ec^2 x-\cot^2 x=1$)

ដូចនេះ: $\boxed{A+B+C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}}$

២ . គណនា $(A+2B)^2$

គេបាន $2B=2\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & -3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 4\\ 2 & -6 & -2\end{bmatrix}$

យើងបាន $A+2B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ -4 & 9 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 4\\ 2 & -6 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 3\\ -2 & 3 & 3\end{bmatrix}$

ដូចនេះ: $\boxed{(A+2B)^2=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 3\\ -2 & 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 3\\ -2 & 3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 11 & 12\\ -14 & 6 & 10\\ -18 & 8 & 16\end{bmatrix}}$

លំហាត់ ៩. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & x\sin\alpha\\ \frac{1}{x}\sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$ ហើយ x ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។
គណនាម៉ាទ្រីស A^2 ។

ដំណោះស្រាយ

រកម៉ាទ្រីស A^2

គេមាន $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & x\sin\alpha\\ \frac{1}{x}\sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$ ហើយ x ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ

$$\text{គេបាន}A^2=A.A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & x\sin\alpha\\ \frac{1}{x}\sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & x\sin\alpha\\ \frac{1}{x}\sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha & x\cos\alpha\sin\alpha-x\cos\alpha\sin\alpha\\ \frac{1}{x}\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{x}\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}$

លំហាត់ ១០. រកពីរម៉ាទ្រីស M ។ គេឲ្យ $M=\begin{bmatrix}a&1\\0&b\end{bmatrix}$ ដែល $M^2=A$ ហើយ $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកពីរម៉ាទ្រីស M

គេមាន $M=\begin{bmatrix}a&1\\0&b\end{bmatrix}$ ដែល $M^2=A$ ហើយ $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$$\text{គេបាន}M^2=M.M=\begin{bmatrix}a&1\\0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&1\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(a)+1(0)&a(1)+1(b)\\0(a)+b(0)&0(1)+b(b)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2&a+b\\0&b^2\end{bmatrix}$$

តែ $M^2=A$ ហើយ $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$$\text{គេបាន}\begin{bmatrix}a^2&a+b\\0&b^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\text{ នោះ }\begin{cases}a^2=1\\a+b=0\\b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm1\\a+b=0\\b=\pm1\end{cases}$$

បើ $a=1$ នោះ $b=-1$

បើ $a=-1$ នោះ $b=1$

ដូចនេះ $\boxed{M=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}\text{ និង }M=\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\end{bmatrix}}$

លំហាត់ ១១. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ។

១. គណនា M^2 និង M^3

២. ស្រាយថា $2M = M^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនា M^2 និង M^3

គេបាន $M^2 = M.M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ហើយ $M^3 = M^2.M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ និង } M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}$

២. ស្រាយថា $2M = M^3$

ដោយ $M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2M$

ដូចនេះ $2M = M^3$ ពិត

លំហាត់ ១២. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ។ គណនា A^2 និង A^3 រួចទាញរក A^{2019} ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា A^2 និង A^3 រួចទាញរក A^{2019}

គេមាន $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

គេបាន $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ហើយ $A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\oplus$ ទាញរក A^{2019}

ដោយ$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^1 & 0 \\ 0 & 1^1 \end{bmatrix}$ គេបាន $A^{2019} = \begin{bmatrix} 2^{2019} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 1^3 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $A^{2019} = \begin{bmatrix} 2^{2019} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

លំហាត់ ១៣. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ ។ បង្ហាញថា $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ រួចទាញរក A^{6057} ។

ដំណោះស្រាយ

- បង្ហាញថា $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ គេមាន $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

គេបាន$A^3 = A.A.A$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1-3 & -\sqrt{3}-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+\sqrt{3} & -3+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2+6 & -2\sqrt{3}+2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3}+2\sqrt{3} & 6+2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \frac{8}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

- ទាញរក A^{6057}

ដោយ $A^{6057} = (A^3)^{2019}$

គេបាន $A^{6057} = \begin{bmatrix} 1^{2019} & 0 \\ 0 & 1^{2019} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{A^{6057} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

លំហាត់ ១៤. គេឲ្យ $A=\begin{pmatrix}4&2\\0&3\end{pmatrix}$ និង $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ។ គណនា $(A+I)^3+3A^2+3A+I$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $A+I=\begin{pmatrix}4&2\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\0&4\end{pmatrix}$

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix}5&2\\0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&2\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&18\\0&16\end{pmatrix}$$

$$(A+I)^3=(A+I)^2(A+I)=\begin{pmatrix}25&18\\0&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}125&122\\0&64\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}4&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&14\\0&9\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}16&14\\0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64&74\\0&27\end{pmatrix}$$

គេបាន $A^3+3A^2+3A+I=\begin{pmatrix}64&74\\0&27\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}16&14\\0&9\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}4&2\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}125&122\\0&64\end{pmatrix}$$

លំហាត់ ១៥. បើ $A=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}$ ។ បង្ហាញថា $A^2=A$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2(2)+1(2)-4(1) & -2(2)-2(3)+4(2) & 2(-4)-2(4)-4(-3) \\ -1(2)+3(-1)+4(1) & -1(-2)+3(3)+4(-2) & -1(-4)+3(4)+4(-3) \\ 1(2)-2(-1)-3(1) & 1(-2)-2(3)-3(-2) & 1(-4)-2(4)-3(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= A$$

លំហាត់ ១៦. បើ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ ។ បង្ហាញថា $A^2 = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 1-3\times -1-4\times 1 & 1\times -3-3\times 3+4\times 3 & 1\times -4-3\times 4+4\times 4 \\ -1\times 1+3\times -1+4\times 1 & -1\times -3+3\times 3+4\times -3 & -1\times -4-3\times 4+1\times -4 \\ 1\times 1+-3\times -1-4\times 1 & 1\times -3-3\times 3+4\times 3 & 1\times -4-3\times 4+4\times 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

លំហាត់ ១៧. រកម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូនៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបានម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូនៃម៉ាទ្រីស A គឺ $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

លំហាត់ ១៨. រកដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

១. $A = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ ២. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ៣. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

១. គេមាន $A = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ គេបាន $\det(A) = 3(8) - 2(12) = 24 - 24 = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\det(A) = 0}$

២. គេមាន $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

គេបាន $\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$= 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - (-3) \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 2[0 - (-4)] + 3[10 - (-1)] + 1[8 - 0]$$

$$= 2(0 + 4) + 3(10 + 1) + 1(8)$$

$$= 2(4) + 3(11) + 8$$

$$= 8 + 33 + 8$$

ដូចនេះ $\boxed{\det(A) = 49}$

៣. គេមាន $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

គេបាន $\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$= 1 \cdot \det\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - (3) \cdot \det\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \det\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 1[-1 - (-9)] - 3[-3 - (-6)] + 2[-9 - (-2)]$$

$$= 1(-1 + 9) - 3(-3 + 6) + 2(-9 + 2)$$

$$= 1(8) - 3(3) + 2(-7)$$

$$= 8 - 9 - 14$$

ដូចនេះ $\boxed{\det(A) = -15}$

លំហាត់ ១៩. ដោយប្រើ Determinant ចូរកំណត់ចម្រាសម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

១. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ ២. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ៣. $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

១. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = 3 - (-4) \times 3 = 3 + 12 = 15$

$M_{11} = 3 \Rightarrow c_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 3$

$M_{12} = -4 \Rightarrow c12 = (-1)^{1+2} M_{12} = 4$

$M_{21} = 3 \Rightarrow c_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -3$

$M_{22} = -3 \Rightarrow c22 = (-1)^{2+2} M_{22} = 1$

$\Rightarrow Adj(A) = (cof(A))^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} Adj(A) = \dfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/15 & -3/15 \\ 4/15 & 1/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 4/15 & 1/15 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 4/15 & 1/15 \end{pmatrix}}$

២. $B=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&0&3\\2&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B)=det\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&0&3\\2&1&1\end{pmatrix}=0-12-2-0-3-4=-21$

$$M_{11}=\begin{vmatrix}0&3\\1&1\end{vmatrix}=1\Rightarrow c_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=1$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}-2&3\\2&1\end{vmatrix}=-8\Rightarrow c_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=8$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}-2&0\\2&1\end{vmatrix}=-2\Rightarrow c_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=-2$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}-2&1\\1&1\end{vmatrix}=-3\Rightarrow c_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=3$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\Rightarrow c_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=-1$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}=5\Rightarrow c_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-5$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}-2&1\\0&3\end{vmatrix}=-6\Rightarrow c_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=-6$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1&1\\-2&3\end{vmatrix}=5\Rightarrow c_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-5$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&0\end{vmatrix}=-4\Rightarrow c_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=-4$$

$$\Rightarrow Adj(B)=(Cof(B))^T=\begin{pmatrix}1&8&-2\\3&-1&-5\\-6&-5&-4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&3&-6\\8&-1&-5\\-2&-5&-4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}Adj(B)=-\frac{1}{21}\begin{pmatrix}1&3&-6\\8&-1&-5\\-2&-5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/21&-1/7&6/21\\-8/21&1/21&5/21\\2/21&5/21&4/21\end{pmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/21&-1/7&6/21\\-8/21&1/21&5/21\\2/21&5/21&4/21\end{pmatrix}}$

គ. $C=\begin{pmatrix}-1&0&-3\\2&4&0\\1&2&-2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(C)=det\begin{pmatrix}-1&0&-3\\2&4&0\\1&2&-2\end{pmatrix}=8+0-12+12-0=8$

$$M_{11}=\begin{vmatrix}4&0\\2&-2\end{vmatrix}=-8\Rightarrow c_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-8$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}2&0\\1&-2\end{vmatrix}=-4\Rightarrow c_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=4$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}2&4\\1&2\end{vmatrix}=0\Rightarrow c_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=0$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}0&-3\\2&-2\end{vmatrix}=6\Rightarrow c_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-6$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}-1&-3\\1&-2\end{vmatrix}=5\Rightarrow c_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=5$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&2\end{vmatrix}=-2\Rightarrow c_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=2$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}-0&-3\\4&0\end{vmatrix}=12\Rightarrow c_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=12$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}-1&-3\\2&0\end{vmatrix}=6\Rightarrow c_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=6$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}-1&0\\2&4\end{vmatrix}=-4\Rightarrow c_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=-4$$

$$\Rightarrow Adj(C)=(Cof(C))^T=\begin{pmatrix}-8&2&0\\-6&5&2\\12&-5&-4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-8&-6&12\\2&5&-5\\0&2&-4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{\det(C)}Adj(C)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-8&-6&12\\2&5&-5\\0&2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-3/4&3/2\\-1/4&5/8&-5/8\\0&1/4&-1/2\end{pmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{pmatrix}-1 & -3/4 & 3/2\\ -1/4 & 5/8 & -5/8\\ 0 & 1/4 & -1/2\end{pmatrix}}$

លំហាត់ ២០. គណនាចម្រាសនៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

១. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & -2\end{pmatrix}$

២. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 5 & 4 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$

៣. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 5 & 5 & -7\end{pmatrix}$

៤. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

១. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & -2\end{vmatrix}=35$

គេបាន $M_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -2 & -2\end{vmatrix}=14\Rightarrow C_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=14$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-16\Rightarrow C_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=16$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=5\Rightarrow C_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=5$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix}=0\Rightarrow C_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=0$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-5\Rightarrow C_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=-5$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-5\Rightarrow C_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=5$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=8\Rightarrow C_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=8$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=3\Rightarrow C_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-3$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-5\Rightarrow C_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=-5$$

នាំឲ្យ $Cof(A)=\begin{pmatrix}14 & 16 & 5\\ 0 & -5 & 5\\ 8 & -3 & -5\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A)=[Cof(A)]^T=\begin{pmatrix}14 & 0 & 8\\ 16 & -5 & -3\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}$

គេបាន $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}.Adj(A)=\dfrac{1}{35}\begin{pmatrix}14 & 0 & 8\\ 16 & -5 & -3\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5 & 0 & 1/5\\ 16/35 & -1/7 & -2/35\\ 1/7 & 1/7 & -1/7\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}2/5 & 0 & 1/5\\ 16/35 & -1/7 & -2/35\\ 1/7 & 1/7 & -1/7\end{pmatrix}}$

២. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 5 & 4 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 5 & 4 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}=-43$

គេបាន $M_{11}=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-2\Rightarrow C_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-2$

$M_{12}=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7\Rightarrow C_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=7$

$M_{13}=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-18\Rightarrow C_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=-18$

$M_{21}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}=5\Rightarrow C_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-5$

$M_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-4\Rightarrow C_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=-4$

$M_{23}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2\Rightarrow C_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-2$

$M_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-7\Rightarrow C_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=-7$

$M_{32}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-3\Rightarrow C_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=3$

$M_{33}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & 4\end{vmatrix}=23\Rightarrow C_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=23$

នាំឲ្យ $Cof(A)=\begin{pmatrix}-2 & 7 & -18\\ -5 & -4 & -2\\ -7 & 3 & 23\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A)=[Cof(A)]^T=\begin{pmatrix}-2 & -5 & -7\\ 7 & -4 & 3\\ -18 & 3 & 23\end{pmatrix}$

គេបាន $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}.Adj(A)=\dfrac{1}{-43}\begin{pmatrix}-2 & -5 & -7\\ 7 & -4 & 3\\ -18 & 3 & 23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/43 & 5/43 & 7/43\\ -7/43 & 4/43 & -3/43\\ 18/43 & 2/43 & -23/43\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}2/43 & 5/43 & 7/43\\ -7/43 & 4/43 & -3/43\\ 18/43 & 2/43 & -23/43\end{pmatrix}}$

៣. $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\2&-1&1\\5&5&-7\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix}3&1&0\\2&-1&1\\5&5&-7\end{vmatrix}=25$

គេបាន $M_{11}=\begin{vmatrix}-1&1\\5&-7\end{vmatrix}=3\Rightarrow C_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=3$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}2&1\\5&-7\end{vmatrix}=-1\Rightarrow C_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=1$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}2&-1\\5&5\end{vmatrix}=0\Rightarrow C_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=0$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}1&0\\5&-7\end{vmatrix}=-2\Rightarrow C_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=2$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}3&0\\5&-7\end{vmatrix}=-1\Rightarrow C_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=-1$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix}3&1\\5&5\end{vmatrix}=-1\Rightarrow C_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=1$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}=5\Rightarrow C_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=5$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}3&0\\2&1\end{vmatrix}=-5\Rightarrow C_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=5$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}3&1\\2&-1\end{vmatrix}=-7\Rightarrow C_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=-7$$

នាំឲ្យ $Cof(A)=\begin{pmatrix}3&1&0\\2&-1&1\\5&5&-7\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A)=[Cof(A)]^T=\begin{pmatrix}3&2&5\\1&-1&5\\0&1&-7\end{pmatrix}$

គេបាន $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}.Adj(A)=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}3&2&5\\1&-1&5\\0&1&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/25&7/25&1/25\\19/25&-21/25&-3/25\\3/5&-2/5&-1/5\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/25 & 7/25 & 1/25 \\ 19/25 & -21/25 & -3/25 \\ 3/5 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix}}$

៤. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 9$

គេបាន $M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 2$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 3$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 2$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = -5$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -3$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 1$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 2$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -6$$

នាំឲ្យ $Cof(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A) = [Cof(A)]^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

គេបាន $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}.Adj(A) = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 1/9 \\ 2/9 & -5/9 & 2/9 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 1/9 \\ 2/9 & -5/9 & 2/9 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}}$

លំហាត់ ២១. បើ $A = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 3x & 2x-y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ និង $AB = C$ ។ គណនា A^2 ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $AB = C \Rightarrow A = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 3x & 2x-y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 2(x+y) + y = 1$ និង $6x + 2x - y = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y & = 1 \\ 8x - y & = -1 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{13}, y = \frac{5}{13}$$

គេបាន $A = \begin{pmatrix} 4/13 & 5/13 \\ -3/13 & -7/13 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 9 & 34 \end{pmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{A^2 = \dfrac{1}{169}\begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 9 & 34 \end{pmatrix}}$

លំហាត់ ២២. គេឲ្យ $A = \begin{pmatrix} x & \ell & m & 1 \\ \alpha & x & n & 1 \\ \alpha & \beta & x & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix}$ ។ បង្ហាញថា $\det(A) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $\det(A)=\begin{vmatrix} x-\alpha & \ell-\beta & m-\gamma & 0\\ 0 & x-\beta & n-\gamma & 0\\ 0 & 0 & x-\gamma & 0\\ \alpha & \beta & \gamma & 1\end{vmatrix}, R_1-R_4, R_2-R_4, R_3-R_4$

$$=\begin{vmatrix} x-\alpha & \ell-\beta & m-\gamma\\ 0 & x-\beta & n-\gamma\\ 0 & 0 & x-\gamma\end{vmatrix}$$

$$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

លំហាត់ ២៣. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix} 1! & 2! & 3!\\ 2! & 3! & 4!\\ 3! & 4! & 5!\end{pmatrix}$ ។ គណនា $\det(A)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $\det(A)=\begin{vmatrix} 1! & 2\times 1 & 6\times 1\\ 2! & 2\times 3 & 6\times 4\\ 3! & 2\times 12 & 6\times 20\end{vmatrix}=12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 6 & 12 & 20\end{vmatrix}$

$$=12\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 6 & 6 & 8\end{vmatrix}=12\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 6 & 6 & 2\end{vmatrix}=24=4!$$

ដូចនេះ $\boxed{\det(A)=4!}$

លំហាត់ ២៤. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែតាម Cramer's rule ខាងក្រោម៖

១ . $\begin{cases} 7x-2y=3\\ 3x+y=5\end{cases}$

២ . $\begin{cases} 14a+7b=77\\ 21a-\dfrac{14}{5}b=49\end{cases}$

៣ . $\begin{cases} 2x-3y &=3\\ 4x-2y &=10\end{cases}$

៤ . $\begin{cases} 2x+y &=1\\ x-4y &=14\end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

១. $\begin{cases} 7x-2y=3 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ គេបាន $D=\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=7-(-6)=13$

$$D_x=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=3-(-10)=13$$

$$D_y=\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}=35-9=26$$

នោះគេបាន $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{13}{13}=1, y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{26}{13}=2$

ដចនេះ $\boxed{x=1, y=2}$

២. $\begin{cases} 14a+7b=77 \\ 21a-\dfrac{14}{5}b=49 \end{cases}$ គេបាន $D=\begin{vmatrix} 14 & 7 \\ 21 & -\dfrac{14}{5} \end{vmatrix}=-\dfrac{196}{5}-147=-\dfrac{931}{5}$

$$D_a=\begin{vmatrix} 77 & 7 \\ 49 & -\dfrac{14}{5} \end{vmatrix}=-\dfrac{1078}{5}-343=-\dfrac{2793}{5}$$

$$D_b=\begin{vmatrix} 14 & 77 \\ 21 & 49 \end{vmatrix}=686-1617=-931$$

នោះគេបាន $a=\dfrac{D_a}{D}=\left(-\dfrac{2793}{5}\right)\times\left(-\dfrac{5}{931}\right)=3, b=\dfrac{D_b}{D}=(-931)\times\left(-\dfrac{5}{931}\right)=5$

ដូចនេះ $\boxed{a=3, b=5}$

៣. $\begin{cases} 2x-3y &=3 \\ 4x-2y &=10 \end{cases}$ គេបាន $D=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-4+12=8$

$$D_x=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 10 & -2 \end{vmatrix}=-6+30=24$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=20-12=8$$

នោះគេបាន $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{24}{8}=3$ និង $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{8}{8}=1$

ដូចនេះ $\boxed{x=3, y=1}$

៤. $\begin{cases} 2x+y &= 1 \\ x-4y &= 14 \end{cases}$ គេបាន $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8-1 = -9$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 14 & -4 \end{vmatrix} = -4-14 = -18$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 28-1 = 27$$

គេបាន $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-18}{-9} = 2, y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{27}{-9} = -3$

ដូចនេះ $\boxed{x = 2, y = -3}$

លំហាត់ ២៥. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែខាងក្រោមតាម Cramer′s rule ៖

១. $\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ 2x-3y+4z &= 33 \\ 3x-2y-2z &= 2 \end{cases}$

២. $\begin{cases} 2x-3y+z &= 0 \\ 5x+4y+z &= 10 \\ 2x-2y-z &= -1 \end{cases}$

៣. $\begin{cases} 3x+y &= -1 \\ 2x-y+z &= -1 \\ 5x+5y-7z &= -16 \end{cases}$

៤. $\begin{cases} 4x+y+z = 13 \\ 2x-y = 4 \\ x+y-z = -3 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

១. $\begin{cases} x+y+z &= 4 \\ 2x-3y+4z &= 33 \\ 3x-2y-2z &= 2 \end{cases}$ គេបាន $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 1(6-(-8)) - 1((-4)-12) + 1(-4(-9))$$

$$= 14+16+5$$

$$= 35$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 33 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 4(6-(-8)) - 1(-66-8) + 1(-66-(-6))$$

$$= 56 + 74 - 60 = 70$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 33 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(-66-8) - 4((-4)-12) + 1(4-99)$$

$$= -74 + 64 - 95 = -105$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 33 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1(-6-(-66)) - 1(4-99) + 4(-4-(-9))$$

$$= 60 + 95 + 20 = 175$$

នោះគេបាន $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{70}{35} = 2, y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-105}{35} = -3$ **និង** $z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{175}{35} = 5$

ដូចនេះ $\boxed{x = 2, y = -3 \text{ និង } z = 5}$

២ . $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 5x + 4y + z = 10 \\ 2x - 2y - z = -1 \end{cases}$ **គេបាន** $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$$= 2[-4-(-2)] - (-3)(-5-2) + 1(-10-8)$$

$$= -43$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0[-4-(-2)] - (-3)[-10-(-1)] + 1[-20-(-4)]$$

$$= 0 - 27 - 16$$

$$= -43$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 10 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-10-(-1)) - 0(-5-2) + 1(-5-20)$$

$$= -18 - 0 - 25$$

$$= -43$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 10 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-4-(-20)) - (-3)(-5-20) + 0(-4-(-20))$$

$$= 32 - 75 + 0$$

$$= -43$$

នោះគេបាន $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-43}{-43} = 1, y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-43}{-43} = 1$ និង $z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{-43}{-43} = 1$

ដូចនេះ $\boxed{x = 1, y = 1 \text{ និង } z = 1}$

៣. $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 2x - y + z = -1 \\ 5x + 5y - 7z = -16 \end{cases}$

គេបាន $$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 3(7-5) - 1(-14-5) + 0(10-(-5))$$

$$= 6 + 19 + 0 = 25$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -16 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -1(7-5) - 1(7-(-16)) + 0(-5-16)$$

$$= -2 - 23 + 0 = -25$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -16 & -7 \end{vmatrix} = 3(7-(-16)) - (-1)(-14-5) + 0(-32-(-5))$$

$$= 69 - 19 + 0 = 50$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & -16 \end{vmatrix}$$

$$= 3[(-1)(-16) - (5)(-1)] - [2(-16) - (5)(-1)] - [(2)(5)(-1)(5)]$$

$$= 75$$

នោះគេបាន $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-25}{25} = -1, y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{50}{25} = 2$ និង $z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{75}{25} = 3$

ដូចនេះ $\boxed{x = -1, y = 2 \text{ និង } z = 3}$

៤ . $\begin{cases} 4x + y + z = 13 \\ 2x - y = 4 \\ x + y - z = -3 \end{cases}$

គេបាន $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4(1-0) - 1((-1)-0) + 1(2-(-1)) = 4 + 2 + 3 = 9$

$$D_x = \begin{vmatrix} 13 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 13(1-1) - 1(-4+3) + (4-3) = 2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 13 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 4(-4-0) - 13(-2-0) + (-6-4) = -16 + 26 - 10 = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 13 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4(3-4) - 1(-6-4) + 13(2+1) = -4 + 10 + 39 = 45$$

នោះគេបាន $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2}{9}, y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{0}{9} = 0, z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{45}{9} = 5$

ដូច្នេះ $\boxed{x = \dfrac{2}{9}, y = 0 \text{ និង } z = 5}$

លំហាត់ ២៦. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែតាម Gaussian Elimination Method ៖

១ . $\begin{cases} 2x + 3y &= 6 \\ x - y &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ២ . $\begin{cases} 4x + 3y &= 11 \\ x - 3y &= -1 \end{cases}$ ៣ . $\begin{cases} 3x + 4y &= 12 \\ 6x + 8y &= 24 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

១ . $\begin{cases} 2x+3y &= 6 \\ x-y &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$ គេបាន $\begin{bmatrix} 2 & 3 & \vdots & 6 \\ 1 & -1 & \vdots & 1/2 \end{bmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2 \ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 1/2 \\ 2 & 3 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$

$-2R_1 + R_2 = R_2 \ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 1/2 \\ 0 & 5 & \vdots & 5 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{5}R_2 = R_2 \ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 1/2 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$

នោះ $\begin{cases} x-y = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{x = \frac{3}{2}, y = 1}$

២ . $\begin{cases} 2x+y = 1 \\ 4x+2y = 6 \end{cases}$ គេបាន $\begin{bmatrix} 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 4 & 2 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{2}R_1 = R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \vdots & 1/2 \\ 4 & 2 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$

$-4R_1 + R_2 = R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \vdots & 1/2 \\ 0 & 0 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$

នៅជួរដេកទី2 សមីការ $0 = 4$ មិនពិត

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ}}$

៣ . $\begin{cases} 3x+4y = 12 \\ 6x+8y = 24 \end{cases}$ គេបាន $\begin{bmatrix} 3 & 4 & \vdots & 12 \\ 6 & 8 & \vdots & 24 \end{bmatrix}$

$-\frac{1}{2}R_2 + R_1 = R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 6 & 8 & \vdots & 24 \end{bmatrix}$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 8 & \vdots & 24 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

ដោយ $0y = 0$ គេបាន $3x + 4y = 12$

$$4y = 12 - 3x$$

$$y = 3 - \frac{3}{4}x$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ } \left(x, 3 - \frac{3}{4}x\right)}$

លំហាត់ ២៧. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមតាម Gauss-Jordan elimination Method ៖

១ . $\begin{cases} x - y + z &= 8 \\ 2x + 3y - z &= -2 \\ 3x - 2y - 9z &= 9 \end{cases}$

២ . $\begin{cases} -x - 2y + z &= -1 \\ 2x + 3y &= 2 \\ y - 2z &= 0 \end{cases}$

៣ . $\begin{cases} 2x + 3y + z &= 9 \\ x + 2y + 3z &= 6 \\ 3x + y + 2z &= 8 \end{cases}$

៤ . $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 3 \end{cases}$

៥ . $\begin{cases} x - 2y - 3z &= -1 \\ 2x + y + z &= 6 \\ x + 3y - 2z &= 13 \end{cases}$

៦ . $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 14x_3 + 14x_4 &= 11 \\ 5x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 4 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

១ . $\begin{cases} x - y + z = 8 \\ 2x + 3y - z = -2 \\ 3x - 2y - 9z = 9 \end{cases}$ គេបាន $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 2 & 3 & -1 & \vdots & -2 \\ 3 & -2 & -9 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$

$$-2R_1 + R_2 = R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -18 \\ 3 & -2 & -9 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

$$-3R_1+R_3=R_3 \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -18 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \ \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \\ 0 & 5 & -3 & \vdots & -18 \end{bmatrix}$$

$$-2R_2+R_3=R_3 \ \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \\ 0 & 0 & 57 & \vdots & 57 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{57}R_3=R_3 \ \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 1 & -12 & \vdots & -15 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

នោះ $\begin{cases} x-y+z=8 \\ y-12z=-15 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=-3 \\ x=4 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ } x=4, y=-3, z=1}$

២ . $\begin{cases} -x-2y+z=-1 \\ 2x+3y=2 \\ y-2z=0 \end{cases}$ គេបាន $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & \vdots & -1 \\ 2 & 3 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

$$-R_1 \to \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & \vdots & -1 \\ 2 & 3 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \ \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 0 \\ 2 & 3 & 0 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$-2R_1+R_3=R_3 \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & \vdots & 1\\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 0\\ 0 & -1 & 2 & \vdots & 0\end{bmatrix}$$

$$R_2+R_3=R_3 \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{bmatrix}$$

នោះ $\begin{cases}x+2y-z=1\\ y-2z=0\\ 0=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+2y-z=1\\ y=2z\end{cases} \Rightarrow x+2(2z)-z=1$

$$x+3z=1$$

$$z=\frac{1-x}{3}$$

$$\Rightarrow y-2\left(\frac{1-x}{3}\right)=0$$

$$y=\frac{2-2x}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ } \left(x,\frac{2-2x}{3},\frac{1-x}{3}\right)}$

៣. $\begin{cases}2x+3y+z=9\\ x+2y+3z=6\\ 3x+y+2z=8\end{cases}$ គេបាន $\left[A:B\right]=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & \vdots & 9\\ 1 & 2 & 3 & \vdots & 6\\ 3 & 1 & 2 & \vdots & 8\end{bmatrix}$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \vdots & 6\\ 2 & 3 & 1 & \vdots 9 & \\ 3 & 1 & 2 & \vdots & 8\end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2-2R_1, R_3 \rightarrow R_3-3R_1 \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \vdots & 6\\ 0 & -1 & -5 & \vdots & -3\\ 0 & -5 & -7 & \vdots & -10\end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3-5R_2 \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & \vdots & 6\\ 0 & -1 & -5 & \vdots & -3\\ 0 & 0 & 18 & \vdots & 5\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 18z = 5 \Rightarrow z = \dfrac{5}{18}$

នោះ $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ -y-5z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{35}{18} \\ y = \dfrac{29}{18} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{x = \dfrac{35}{18}, y = \dfrac{29}{18}, z = \dfrac{5}{18}}$

៤ . $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 3 \end{cases}$ នោះ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad , \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

គេបាន $[A \vdots B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 4 & 4 & 7 & \vdots & 1 \\ 2 & 5 & 9 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2 - 2R_1 \, , \, R_3 \to R_3 - R_1 \; \sim \; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 4 & 6 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$

$R_3 \to R_3 - 2R_2 \; \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$

$R_1 \to \dfrac{1}{2}R_1, R_2 \to \dfrac{1}{2}R_2, R_3 \to \dfrac{1}{4}R_3 \; \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$

$R_1 \to R_1 - \dfrac{1}{2}R_2 \; \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/2 & \vdots & 3/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & \vdots & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$

$R_1 \to R_1 \dfrac{5}{4}R_3 \; , R_2 \to R_2 - \dfrac{1}{2}R_3 \; \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{x_1 = -\dfrac{1}{2}, x_2 = -1, x_3 = 1}$

៥ . $\begin{cases} x-2y-3z=-1 \\ 2x+y+z=6 \\ x+3y-2z=13 \end{cases}$ នោះ $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$

គេបាន $[A\vdots B]=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & \vdots & -1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 1 & 3 & -2 & \vdots & 13 \end{bmatrix}$

$R_2 \to R_2-2R_1, R_3 \to R_3-R_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 5 & 7 & \vdots & 8 \\ 0 & 5 & 1 & \vdots & 14 \end{bmatrix}$

$R_3 \to R_2-R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 5 & 7 & \vdots & 8 \\ 0 & 0 & 6 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$

$R_3 \to \frac{1}{6}R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 5 & 7 & \vdots & 8 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$

$R_1 \to R_1+3R_3, R_2 \to R_2-7R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & -4 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 15 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$

$R_2 \to \frac{1}{5}R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & -4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$

$R_1 \to R_1+2R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{x=2 \ , y=3 \ , z=-1}$

៦. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+2x_3-3x_4=3 \\ 3x_1+6x_2+5x_3+2x_4=2 \\ 4x_1+5x_2+14x_3+14x_4=11 \\ 5x_1+10x_2+8x_3+4x_4=4 \end{cases}$ នោះ $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \\ 5 & 10 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ $,B=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$

គេបាន $[A\vdots B]=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & -3 & \vdots & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & \vdots & 2 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & \vdots & 11 \\ 5 & 10 & 8 & 4 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$

$R_2\to R_2-R_1, R_3\to R_3-R_2, R_4\to R_4-R_3 \sim \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 & -3 & \vdots & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & \vdots & -1 \\ 1 & -1 & 9 & 12 & \vdots & 9 \\ 1 & 5 & -6 & -10 & \vdots & -7 \end{bmatrix}$

$R_1\leftrightarrow R_4, R_2\leftrightarrow R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 & -10 & \vdots & -7 \\ 1 & -1 & 9 & 12 & \vdots & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & \vdots & -1 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$

$R_2\to R_2-R_1, R_3\to R_3\to R_3-R_1, R_4\to R_4-2R_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 & -10 & \vdots & -7 \\ 0 & -6 & 15 & 22 & \vdots & 16 \\ 0 & -4 & 9 & 15 & \vdots & 6 \\ 0 & -5 & 14 & 17 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$

$R_2\to R_2-R_4$ នោះ $R_2\to -R_2, R_3\to R_3-4R_2$ នោះ $R_3\to -R_3, R_4\to R_4-5R_2$ នោះ $R_4\to -R_4$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 & -10 & \vdots & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & \vdots & 22 \end{bmatrix}$

$$R_3 \to -\frac{1}{5}R_3 \text{ នោះ } R_4 \to R_4 - 9R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 & -10 & \vdots & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + R_4, R_2 \to R_2 + 5R_4, R_1 \to R_1 + 10R_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 & \vdots & 33 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + R_4, R_2 \to R_2 + 5R_4, R_1 \to R_1 + 10R_4 \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 & \vdots & 33 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 + R_3, R_1 \to R_1 + 6R_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & \vdots & 69 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \to R_1 - 5R_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -66 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{x_1 = -66, x_2 = 27, x_3 = 6, x_4 = 4}$

លំហាត់ ២៨. ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} 2\log x + 4\log y + 7\log z & = 21 \\ 3\log x - \log y + 5\log z & = 22 \\ 7\log x + 3\log y - 3\log z & = 2 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $u = \log x, v = \log y$ និង $w = \log z$

នោះគេបាន $\begin{cases} 2u+4v+7w=21 \\ 3u-v+5w=22 \\ 7u+3y-3w=2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \\ 7 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 264 \neq 0$

$$\Delta_u = \begin{vmatrix} 21 & 4 & 7 \\ 22 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 528$$

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} 2 & 21 & 7 \\ 3 & 22 & +5 \\ 7 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -264$$

$$\Delta_w = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 21 \\ 3 & -1 & 22 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 792$$

$$\Rightarrow \mathrm{u} = \frac{528}{264} = 2, \mathrm{v} = \frac{-264}{264} = -1, \mathrm{w} = \frac{792}{264} = 3$$

$$\Rightarrow \quad \log x = 2, \log y = -1, \log z = 3$$

$$\Rightarrow \quad x = e^2, y = \frac{1}{e}, z = e^3$$

ដូចនេះ $\boxed{x = e^2, y = \frac{1}{e}, z = e^3}$

លំហាត់ ២៩. ដោះស្រាយ

លំហាត់ ៣០. រកតម្លៃផ្ទាល់ និងវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

១. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

២. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

៣. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

៤. $A = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

៥. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

៦. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

៧. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃផ្ទាល់និងវ៉ិចទ័រនៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម

១. គេមាន $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ គេបាន $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

តែ $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ នោះចម្លើយនៃសមីការនេះគឺ $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ ហើយវាជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A

ចំពោះ $\lambda_1 = 2$ គេបាន $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0(1) \\ 2x - y = 0(2) \end{cases}$

តាម (2) គេបាន $y = 2x$ យក $x = t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \ y = 2t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ នោះ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ចំពោះ $\lambda_2 = 3$ គេបាន $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0(1) \\ 2x - 2y = 0(2) \end{cases}$

តាម $(1): \quad y = x$ យក $x = t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow y = t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$ នោះ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ គឺជាតម្លៃផ្ទាល់និង $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនិងវានៃ A

២. គេមាន $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ គេបាន $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12$

តែ $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 12 = 0$ នោះចម្លើយនៃសមីការនេះគឺ $\lambda = \pm 2\sqrt{3}$ ហើយវាជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A

ចំពោះ $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$ គេបាន $\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 3 \\ 4 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}x + 3y & = 0 \quad (1) \\ 4x - 2\sqrt{3}y & = 0 \quad (2) \end{cases}$

តាម (2) គេបាន $x = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ យក $x = t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \ x = \frac{\sqrt{3}}{2}t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t \right\}$ នោះ $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

ចំពោះ $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$ គេបាន $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 3 \\ 4 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}x + 3y & = 0 \quad (1) \\ 4x + 2\sqrt{3}y & = 0 \quad (2) \end{cases}$

តាម$(2) x = -\frac{\sqrt{3}}{2}y$ យក $y = t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2}t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_2=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ t\end{pmatrix},t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix}t,t\in\mathbb{R}\right\}$ នោះ $v_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\lambda_1=2\sqrt{3},\lambda_2=-2\sqrt{3}$ គឺជាតម្លៃផ្ទាល់និង $v_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនិងវានៃ A

៣. គេមាន $A=\begin{pmatrix}-2&-1\\ 5&2\end{pmatrix}$ គេបាន $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda&-1\\ 4&2-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)(2-\lambda)+5=\lambda^2+1$

តែ $\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow\lambda^2+1=0$ នោះចម្លើយនៃសមីការនេះគឺ $\lambda=\pm i$ហើយវាជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A

ចំពោះ $\lambda_1=i$ គេបាន $\begin{pmatrix}-2-i&-1\\ 5&2-i\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}(2-i)x+2y&=0\quad(1)\\ -x+(2-i)y&=0\quad(2)\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=(2+i)y$ យក $y=t,t\in\mathbb{R}\Rightarrow\ x=(2-i)t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_1=\left\{\begin{pmatrix}(2-i)t\\ t\end{pmatrix},t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}2-i\\ 1\end{pmatrix}t\right\}$ នោះ $v_1=\begin{pmatrix}2-i\\ 1\end{pmatrix}$

ចំពោះ $\lambda_2=-i$ គេបាន $\begin{pmatrix}-2+i&-1\\ 5&2+i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}(2+i)x+2y&=0\quad(1)\\ -x+(2+i)y&=0\quad(2)\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=(2+i)y$ យក $y=t,t\in\mathbb{R}\Rightarrow x=(2+i)t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_2=\left\{\begin{pmatrix}(2+i)t\\ t\end{pmatrix},t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}2+i\\ 1\end{pmatrix}t,t\in\mathbb{R}\right\}$

នោះ $v_2=\begin{pmatrix}2+i\\ 1\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\lambda_1=i,\lambda_2=-i$ គឺជាតម្លៃផ្ទាល់និង $v_1=\begin{pmatrix}2-i\\ 1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2+i\\ 1\end{pmatrix}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនិងវានៃ A

៤. គេមាន $A=\begin{pmatrix}-2&-7\\ 1&2\end{pmatrix}$ គេបាន $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda&-7\\ 1&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+3$

តែ $\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow\lambda^2+3=0$ នោះចម្លើយនៃសមីការនេះគឺ $\lambda=\pm\sqrt{3}i$ ហើយវាជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A

ចំពោះ $\lambda_1=\sqrt{3}i$ គេបាន $\begin{pmatrix}-2-\sqrt{3}i&-7\\ 1&2-\sqrt{3}i\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}(-2-\sqrt{3}i)x+3y&=0\quad(1)\\ x+(2-\sqrt{3}i)y&=0\quad(2)\end{cases}$

តាម (2) គេបាន $x=(-2-\sqrt{3}i)y$ យក $x=t,t\in\mathbb{R}\Rightarrow\ x=(-2-\sqrt{3}i)t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_1=\left\{\begin{pmatrix}(-2-\sqrt{3}i)t\\ t\end{pmatrix},t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-2-\sqrt{3}i\\ 1\end{pmatrix}t\right\}$

នោះ $v_1 = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix}$

ចំពោះ $\lambda_2 = -\sqrt{3}i$ គេបាន $\begin{pmatrix} -2+\sqrt{3} & -7 \\ & 2+\sqrt{3}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2+\sqrt{3}i)x - 7y &= 0 \quad (1) \\ x + (2+\sqrt{3}i)y &= 0 \quad (2) \end{cases}$

តាម $(2):\quad x = (-2-\sqrt{3}i)y$ យក $y = t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow x = (-2+\sqrt{3}i)t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_2 = \left\{ \begin{pmatrix} (-2-\sqrt{3}i)t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2-\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$

នោះ $v_2 = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\lambda_1 = \sqrt{3}i, \lambda_2 = -\sqrt{3}i$ គឺជាតម្លៃផ្ទាល់និង $v_1 = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{3}i \\ 1 \end{pmatrix}$

ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនិងវានៃ A

៥. គេមាន $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ គេបាន $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12$

តែ $\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 12 = 0$ នោះចម្លើយនៃសមីការនេះគឺ $\lambda = \pm 2\sqrt{3}$ ហើយវាជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A

ចំពោះ $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$ គេបាន $\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 3 \\ 4 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}x + 3y &= 0 \quad (1) \\ 4x - 2\sqrt{3}y &= 0 \quad (2) \end{cases}$

តាម (2) គេបាន $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y$ យក $x = t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t \right\}$ នោះ $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

ចំពោះ $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$ គេបាន $\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 3 \\ 4 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}x + 3y &= 0 \quad (1) \\ 4x + 2\sqrt{3}y &= 0 \quad (2) \end{cases}$

តាម $(2):\quad x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}y$ យក $y = t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$ នោះ $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\lambda_1 = 2\sqrt{3}, \lambda_2 = -2\sqrt{3}$ គឺជាតម្លៃផ្ទាល់និង $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែល

ត្រូវនិងវានៃ A ។

៦. គេមាន $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}$ គេបាន $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ -5 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$

តែ $\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow \lambda^2+1=0$ នោះចម្លើយនៃសមីការនេះគឺ $\lambda=\pm i$ ហើយវាជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A

ចំពោះ $\lambda_1=i$ គេបាន $\begin{pmatrix}2+i & 1\\ -5 & -2+i\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}(2+i)x+y &=0\quad(1)\\ 5x-(2-i)y &=0\quad(2)\end{cases}$

តាម (1) គេបាន $y=-(2+i)y$ យក $x=t,t\in\mathbb{R}\Rightarrow\ y=-(2+i)t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_1=\left\{\begin{pmatrix}t\\ -(2+i)t\end{pmatrix},t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\ -(2+i)\end{pmatrix}t\right\}$ នោះ $v_1=\begin{pmatrix}1\\ -(2+i)\end{pmatrix}$

ចំពោះ $\lambda_2=-i$ គេបាន $\begin{pmatrix}2-i & 1\\ -5 & -2-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}(2-i)x+y &=0\quad(1)\\ -5x-(2+i)y &=0\quad(2)\end{cases}$

តាម(1)$y=-(2-i)y$ យក $x=t,t\in\mathbb{R}\Rightarrow y=(i-2)t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_2=\left\{\begin{pmatrix}t\\ (i-2)t\end{pmatrix},t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\ (i-2)\end{pmatrix}t,t\in\mathbb{R}\right\}$

នោះ $v_2=\begin{pmatrix}1\\ (i-2)\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{\lambda_1=i,\lambda_2=-i \text{ គឺជាតម្លៃផ្ទាល់និង } v_2=\begin{pmatrix}1\\ -(2+i)\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\ i-2\end{pmatrix} \text{ ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់នៃ } A}$

៧. គេមាន $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

គេបាន $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & -2 & -2\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ -1 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}$

$$=[-\lambda(-1-\lambda)(2-\lambda)++2]-[2(2-\lambda)-(-1-\lambda)+2\lambda]$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

តែ $\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow-(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$

នោះចម្លើយនៃសមីការនេះគឺ $\lambda=\pm1$ ហើយវាជាតម្លៃផ្ទាល់នៃ A

ចំពោះ $\lambda_1=1$ គេបាន $\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-2y-2z &=0\quad(1)\\ x+y+z &=0\quad(2)\\ -x-y-z &=0\quad(3)\end{cases}$

តាម (1) គេបាន $x=-y-z$ យក $y=t, z=r|t,r\in\mathbb{R}\Rightarrow\ x=-t-r$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_1=\left\{\begin{pmatrix}-t-r\\ t\\ r\end{pmatrix}, t,r\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-t\\ t\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-r\\ 0\end{pmatrix}|t,r\right\}$

$=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}r|t,r\in\mathbb{R}$ នោះ $v_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

ចំពោះ $\lambda_2=-1$ គេបាន $\begin{pmatrix}0&-2&-2\\ 1&3&1\\ -1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x-2z&=0\quad(1)\\ x+3y+z&=0\quad(2)\\ -x-y+z&=0\quad(3)\end{cases}$

តាម (1) : $\quad y=-z$ យក $z=t|t\in\mathbb{R}\Rightarrow x=2t, z=-t$

វ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនឹងវាគឺ $v_2=\left\{\begin{pmatrix}2t\\ t\\ -t\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}t, t\in\mathbb{R}\right\}$ នោះ $v_3=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$ គឺជាតម្លៃផ្ទាល់និង $v_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

ជាវ៉ិចទ័រផ្ទាល់ដែលត្រូវនិងវានៃ A ។

លំហាត់ ៣១. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត Fibonacci ដែលកំណត់ដោយ $f_1=1, f_2=1$ និង $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ ចំពោះ $n\geq 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\begin{pmatrix}f_{n+2}\\ f_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{n+1}+f_n\\ f_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\ 1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{n+1}\\ f_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\ 1&0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}f_n\\ f_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}1&1\\ 1&0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}f_2\\ f_1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\ 1&0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\quad, f_1=1, f_2=1\qquad(1)$$

តាង $A=\begin{pmatrix}1&1\\ 1&0\end{pmatrix}$ គេបាន $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\ 1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-1\qquad(2)$

បើ $\det(A-\lambda I)=0$ នោះ $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $\lambda_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ជា eigenvalues នៃ A

រក eigenvectors នៃ A គេបាន $\begin{pmatrix}1&1\\ 1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ និង $\begin{pmatrix}1&1\\ 1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\qquad(2)$

ដោយ $\lambda_1+\lambda_2=1$ នោះ $x=\lambda_1 y, x=\lambda_2 y$

នោះ $\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{y}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{y}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ជា eigenvectors នៃ A

យក $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 & \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{y}_1 & \mathrm{y}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

គេបាន $\quad \mathrm{B}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1+1 & \lambda_2+1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1+1-\lambda_1\lambda_2 & \lambda_2+1-\lambda_2^2 \\ -\lambda_1-1+\lambda_1^2 & -\lambda_2-1+\lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1+2 & 0 \\ 0 & -\lambda_2-2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+2 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}-2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$B^n=\begin{pmatrix} \lambda_1^{\mathrm{n}} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\mathrm{n}} \end{pmatrix}$$

គេបាន $A^n=\left(\mathrm{PBP}^{-1}\right)^{\mathrm{n}}=\left(\mathrm{PBP}^{-1}\right)\left(\mathrm{PBP}^{-1}\right)\ldots\left(\mathrm{PBP}^{-1}\right)=\mathrm{PB}^{\mathrm{n}}\mathrm{P}^{-1}$

$$A^{\mathrm{n}}=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^{\mathrm{n}}&0\\0&\lambda_2^{\mathrm{n}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^{\mathrm{n}}&0\\0&\lambda_2^{\mathrm{n}}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&-\lambda_2\\-1&\lambda_1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\lambda_1^{\mathrm{n}+1}&\lambda_2^{\mathrm{n}+1}\\\lambda_1^{\mathrm{n}}&\lambda_2^{\mathrm{n}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\lambda_2\\-1&\lambda_1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\lambda_1^{\mathrm{n}+1}-\lambda_2^{\mathrm{n}+1}&-\lambda_1^{\mathrm{n}+1}\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^{\mathrm{n}+1}\\\lambda_1^{\mathrm{n}}-\lambda_2^{\mathrm{n}}&-\lambda_1^{\mathrm{n}}\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^{\mathrm{n}}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\lambda_1^{\mathrm{n}+1}-\lambda_2^{\mathrm{n}+1}&\lambda_1^{\mathrm{n}}-\lambda_2^{\mathrm{n}}\\\lambda_1^{\mathrm{n}}-\lambda_2^{\mathrm{n}}&\lambda_1^{\mathrm{n}-1}-\lambda_2^{\mathrm{n}-1}\end{pmatrix}\quad \text{ដោយ}\quad \lambda_1\lambda=-1$$

តាមសមីការ (1) គេបាន $\begin{pmatrix}f_{n+2}\\f_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\lambda_1^{\mathrm{n}+1}-\lambda_2^{\mathrm{n}+1}&\lambda_1^{\mathrm{n}}-\lambda_2^{\mathrm{n}}\\\lambda_1^{\mathrm{n}}-\lambda_2^{\mathrm{n}}&\lambda_1^{\mathrm{n}-1}-\lambda_2^{\mathrm{n}-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\lambda_1^{\mathrm{n}+1}-\lambda_2^{\mathrm{n}+1}+\lambda_1^{\mathrm{n}}-\lambda_2^{\mathrm{n}}\\\lambda_1^{\mathrm{n}}-\lambda_2^{\mathrm{n}}+\lambda_1^{\mathrm{n}-1}-\lambda_2^{\mathrm{n}-1}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\lambda_1^{\mathrm{n}}(\lambda_1+1)-\lambda_2^{\mathrm{n}}(\lambda_2+1)\\\lambda_1^{\mathrm{n}-1}(\lambda_1+1)-\lambda_2^{\mathrm{n}-1}(\lambda_2+1)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\lambda_1^{\mathrm{n}+2}-\lambda_2^{\mathrm{n}+2}\\\lambda_1^{\mathrm{n}+1}-\lambda_2^{\mathrm{n}+1}\end{pmatrix}$$

គេបាន $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^{\mathrm{n}}-\lambda_2^{\mathrm{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}\right]$

ដូចនេះ $\boxed{f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$

លំហាត់ ៣២. រករ៉ង់នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

១. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

២. $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 13 \end{pmatrix}$

៣. $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

ដំណោះស្រាយ

១. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

គេបាន $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1+R_2\to R_2 \\ 4R_1-R_3\to R_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{2}R_1\to R_1 \\ R_2-R_3\to R_3 \end{matrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{7}R_2\to R_2$$

ដូចនេះ $\boxed{Rank(A)=2}$

២. $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -2 & 13 \end{pmatrix}$

គេបាន $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & -5 & -1 & -14 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2R_1 - R_2 \to R_2 \\ R_1 - R_3 \to R_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} R_2 - R_3 \to R_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\frac{1}{5}R_2 \to R_2 \\ -\frac{1}{6}R_3 \to R_3 \end{matrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{Rank(B) = 3}$

៣. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

គេបាន $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 10 & 5 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 + R_2 \to R_2 \\ 3R_1 - R_3 \to R_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 65 & 104 \end{pmatrix} 10R_2 + R_3 \to R_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{104}{65} \end{pmatrix} \begin{matrix} -R_2 \to R_2 \\ \frac{1}{65}R_3 \to R_3 \end{matrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{Rank(C) = 3}$

លំហាត់ ៣៣. ស្រីលក្ខណមានហាងលក់ទឹកអប់តូចមួយជាហាងដែលនាងលក់ទឹកអប់ម៉ាកដែលលាយខ្លួនឯង និងលក់ម៉ាកផ្សេងៗទៀតរបស់គេ។ បច្ចុប្បន្ននេះនាងបានដាក់លក់ផលិតផលពីរប្រភេទរបស់នាងផ្ទាល់គឺ Silent Flower និង Moon Swing ។ Silent Flower ផ្តល់ប្រាក់ចំណេញ $9\$$ ក្នុងមួយអោន ចំណែកឯ Moon Swing ផ្តល់ប្រាក់ចំណេញ $6\$$ ប៉ុណ្ណោះក្នុងមួយអោន។ ប្រភេទទឹកអប់ទាំងពីររបស់នាងផ្សំឡើងដោយធាតុសំខាន់ៗបីគឺ E_1, E_2 និង E_3។ ការផ្សំចាំបាច់ត្រូវធ្វើដូចខាងក្រោម៖

	E_1	E_2	E_3
Silent Flower	$0.2oz$	$0.3oz$	$0.5oz$
Moon Swing	$0.1oz$	$0.1oz$	$0.8oz$

ស្រីលក្ខណតែងតែត្រួតពិនិត្យគ្រឿងផ្គត់ផ្គង់របស់នាងរាល់ថ្ងៃ។ នៅព្រឹកនេះនាងមាន E_1 ចំនួន $48oz$, E_2 ចំនួន $30oz$ និង E_3 ចំនួន $60oz$។ តើនាងគួរលាយទឹកអប់ Silent Flower និង Moon Swing ក្នុងថ្ងៃនេះ ចំនួនប៉ុន្មានដើម្បីធ្វើឲ្យប្រាក់ចំណេញរបស់នាងកើនឡើងអតិបរមា ?

ដំណោះស្រាយ

តារាងសង្ខេប

	E_1	E_2	E_3	ប្រាក់ចំណេញ
Silent Flower	$0.2oz$	$0.3oz$	$0.5oz$	$9\$$
Moon Swing	$0.1oz$	$0.1oz$	$0.8oz$	$6\$$
គ្រឿងផ្សំសរុប	$48oz$	$30oz$	$60oz$	

- ការបង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

  តាង x ជាចំនួនទឹកអប់ម៉ាក Silent Flower

  y ជាចំនួនទឹកអប់ម៉ាក Moon Swing

  MaxP: $z = 9x + 6y$ និង S.t $\begin{cases} 0.2x + 0.1y \leq 48 \\ 0.3x + 0.1y \leq 30 \\ 0.5x + 0.8y \leq 60 \\ x, y \leq 0 \end{cases}$

- ដំណោះស្រាយតាមក្រាប

$(d_1): \quad 0.2x + 0.1y = 48$

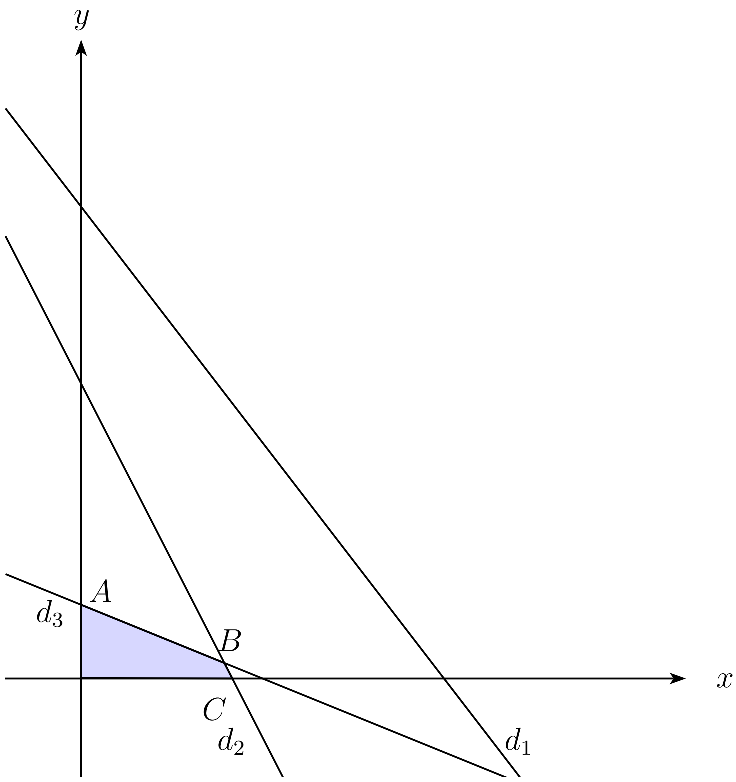
x	0	240
y	480	0

$(d_2): \quad 0.3x + 0.1y = 30$

x	0	100
y	300	0

$(d_3): \quad 0.5x + 0.8y = 60$

x	0	120
y	75	0



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់ពត៌ខៀវ និងចំណុចកាចជ្រុង

- រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ដែលជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d_2) និង (d_3) គឺ $\begin{cases} 0.3x + 0.1y = 30 \\ 0.5x + 0.8y = 60 \end{cases}$

$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.19, D_x = \begin{vmatrix} 30 & 0.1 \\ 60 & 0.8 \end{vmatrix} = 18, D_y = \begin{vmatrix} 0.3 & 30 \\ 0.5 & 60 \end{vmatrix} = 3$

គេបាន $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{18}{0.19} = 94.74, y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{3}{0.19} = 15.78$

- តម្លៃនៃចំណុចកាច់ជ្រុង

  - $0(0,0) \Rightarrow z = 0$
  - $A(0,75) \Rightarrow z = 9(0) + 6(75) = 450$
  - $B(94.74, 15.78) \Rightarrow z = 9(94.74) + 6(15.78) = 947.34$
  - $C(100,0) \Rightarrow z = 9(100) + 6(0) = 900$

ដូចនេះ: នាងគួរលាយទឹកអប់ Silent Flower ចំនួន 94.74 អោន និង Moon Swing ចំនួន 15.78 អោន ។

លំហាត់ ៣៤. កសិករម្នាក់មានដីចម្ការចំនួន 150 អា គាត់ដាំដំណាំទាំងពីរមុខគឺពោត និងសណ្ដែក។ ថ្លៃចំណាយក្នុងការដាំសណ្ដែក និងពោតស្មើ 20 ដុល្លា និង 10 ដុល្លា រៀងគ្នា។ គាត់មានលុយត្រឹមតែ 2000 ដុល្លា ប៉ុណ្ណោះសម្រាប់ដាំដំណាំទាំងពីរមុខនេះ។ គាត់បង្គាប់ឲ្យគេដាំដំណាំសណ្ដែកតិច 10 អា និងដំណាំពោតយ៉ាងតិច 20 អា ហើយគាត់បានធ្វើការប៉ាន់ស្មានថា គាត់នឹងទទួលបានប្រាក់ចំណេញពីដំណាំសណ្ដែក 150 ដុល្លា ក្នុងមួយអា និងដំណាំពោត 120 ដុល្លា។ តើគាត់ត្រូវដាំដំណាំមួយមុខៗប៉ុន្មានអា ទើបបានប្រាក់ចំណេញច្រើនបំផុត ? សរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដា និងដំណោះស្រាយតាមក្រាហ្វិច ?

ដំណោះស្រាយ

សរសេរចំណោទជាទម្រង់ស្តង់ដានិងដោះស្រាយតាម ក្រាហ្វិច

- ការបង្កើតអនុគមន៍គោលដៅ

  តាង x ជាចំនួនដំណាំសណ្ដែកក្នុងមួយអា និង y ជាចំនួនដំណាំពោតក្នុងមួយអា

$$\text{MaxP: } z = 150x + 120y \text{ S.t} \begin{cases} x + y \le 150 \\ 20x + 10y \le 2000 \\ x \le 10 \\ y \le 20 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

- សង់បន្ទាត់

  $d_1: \quad x + y = 150$

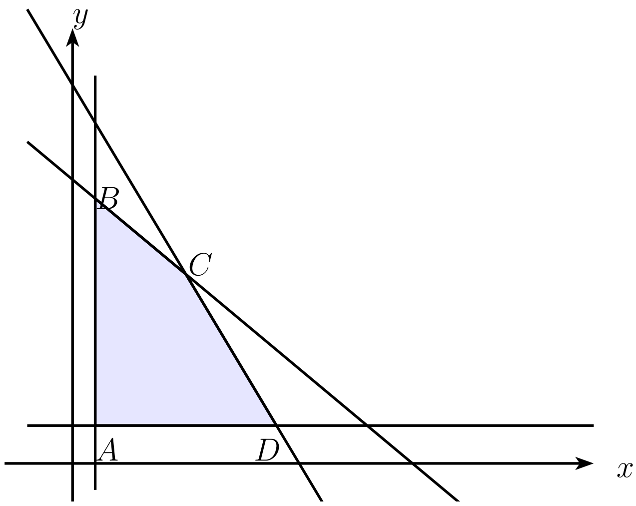
x	0	150
y	150	0

  $d_2: \quad 20x + 10y = 2000$

x	0	100
y	200	0

  $x = 10$

  $y = 20$



- តាមក្រាបចម្លើយដែលអាចទទួលយកបានគឺនៅត្រង់តំបន់ពត៌ខៀវ និងចំណុចកាច់ជ្រុង

- A ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $x = 10$ និង $y = 20 \Rightarrow A(10, 20) \Rightarrow z = 150(10) + 120(20) = 3900$

- B ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $x = 10$ និង $x + y = 150 y = 150 - 10 = 140 \Rightarrow B(10, 140)$

  $\Rightarrow z = 150(10) + 120(140) = 18300$

- C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $2x+y=200$ និង $x+y=150$

$$\begin{cases}2x+y=200\\x+y=150\end{cases} \Rightarrow D=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1, D_x=\begin{vmatrix}200&1\\150&1\end{vmatrix}=50, D_y=\begin{vmatrix}2&200\\1&150\end{vmatrix}=100$$

គេបាន $x=\dfrac{D_x}{D}=50, y=\dfrac{D_y}{D}=100 \Rightarrow C(50,100) \Rightarrow z=150(50)+120(100)=19500$

- D ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $2x+y=200$ និង $y=20 \Rightarrow x=\dfrac{200-20}{2}=90 \Rightarrow D(90,20)$

$\Rightarrow z=150(90)+120(20)=15900$

ដូចនេះ $\boxed{\text{កសិករត្រូវដាំសណ្តែកចំនួន 50អា និងពោតចំនួន 100អា ដើម្បីទទួលបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមា 19500 ។}}$

លំហាត់ ៣៥. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានមួយ គេមានចំណុច $A(0,0,1); B(-1,-2,0)$ និង $C(2,1,-1)$ ។

១. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថា A,B,C រត់មិនត្រង់ជួរ ។

២. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

៣. គណនា $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}$ រួចទាញរកមាឌចតុមុខ $OABC$ ។

ដំណោះស្រាយ

នៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(0,0,1), B(-1,-2,0)$ និង $C(2,1,-1)$ ។

១. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=(-1-0,-2-0,0-1)=(-1,-2,-1)$

$\overrightarrow{AC}=(2+1,1+2,-1-0)=(3,3,-1)$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&-2&-1\\3&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-1\\3&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&-1\\3&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&-2\\3&3\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(2+3)\vec{i}-(1+3)\vec{j}+(-3+6)\vec{k}$$

$$=5\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq 0$ នោះ A,B,C រត់មិនត្រង់ជួរ ។

២. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

គេបាន $S_{\triangle ABC}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}=\dfrac{\sqrt{5^2+(-4)^2+3^2}}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

៣. គណនា $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}$

ដោយ $\overrightarrow{OA}=A(0,0,1), \overrightarrow{OB}=B(-1,-2,0), \overrightarrow{OC}=C(2,1,-1)$

គេបាន $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}0&0&1\\-1&-2&0\\2&1&-1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1&-2\\2&1\end{vmatrix}=-1+4=3$

នាំឲ្យមាឌចតុមុខ $OABC$ គឺ $V_{OABC}=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{OC}\right|}{6}=\dfrac{|3|}{6}=\dfrac{1}{2}$ ឯកត្តាមាឌ ។

លំហាត់ ៣៦. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច $A(-2,1,-3),B(1,2,3)$ និង $C(2,-2,1)$ ។

១. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

២. រកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច $A(-2,1,-3),B(1,2,3)$ និង $C(2,-2,1)$

១. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=(1+2,2-1,3+3)=(3,1,6)$

$\overrightarrow{AC}=(2+2,-2-1,1+3)=(4,-3,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&1&6\\4&-3&4\end{vmatrix}=(4+18)\vec{i}-(12-24)\vec{j}+(-9-4)\vec{k}=22\vec{i}+12\vec{j}-13\vec{k}$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

គេបាន ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC គឺ $S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{22^2+12^2+13^2}=\sqrt{797}$ ឯកត្តាផ្ទៃក្រឡា

២. រកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$

ដោយ $\overrightarrow{A0}=(0+2,0-1,0+3)=(2,-1,3)$ និង $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(22,12,-13)$

នាំឲ្យ $\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=(2)(22)+(-1)(12)+(3)(-13)=-7$

គេបាន មាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$ គឺ $V=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{A0}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\right|=\dfrac{|-7|}{6}=\dfrac{7}{6}$ ឯកត្តាមាឌ

ផ្នែកទី ២

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ ១. គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ និង $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

១. គណនា $A + B, B + A, B + C, 2A + (B + C)$ និង $A - (B + 2C)$

២. គណនា $AB, BA, A.(BC)$ និង $2A + 2BC$ ។

លំហាត់ ២. គណនាដេទែមីណង់ខាងក្រោម៖

១. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

២. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$

៣. $\begin{vmatrix} i+1 & i+2 \\ i+2 & i+3 \end{vmatrix}$

៤. $\Delta = \begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{vmatrix}$

៥. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}$

៦. $\Delta = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$

៧. $\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha + \cos\beta & \cos\beta + \cos\alpha \\ \cos\beta - \cos\alpha & \sin\alpha - \sin\beta \end{vmatrix}$

៨. $\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

លំហាត់ ៣. គណនាដេទែមីណង់ខាងក្រោម៖

១. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

២. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

៣. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

៤. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 101 \\ 2 & 4 & 204 \\ 3 & 9 & 309 \end{vmatrix}$

៥. $\Delta = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$

៦. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 2i & 1 & 1-i \\ -i+1 & i & 1 \end{vmatrix}$

៧. $\Delta = \begin{vmatrix} i & i+1 & i+2 \\ i+1 & i+2 & i+3 \\ i+2 & i+3 & i+4 \end{vmatrix}$

៨. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix}$

៩. $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos\beta & \sin\beta & 1 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1 \end{vmatrix}$

១០. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \tan\frac{a}{2} \\ 1 & \cos b & \tan\frac{b}{2} \\ 1 & \cos c & \tan\frac{c}{2} \end{vmatrix}$

លំហាត់ ៤. គណនាដេទែមីណង់ខាងក្រោមៈ

១. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

២. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

៣. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

៤. $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

៥. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

៦. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 159 \\ 2 & 6 & 0 & 260 \\ 3 & 7 & 1 & 371 \\ 4 & 8 & 2 & 482 \end{vmatrix}$

៧. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

៨. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 7 \end{vmatrix}$

៩. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

១០. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & i & 1-i & 1+i \\ i & 1 & i+1 & 1-i \\ 1-i & 1+i & 1 & i \\ 1+i & i & i-1 & 1 \end{vmatrix}$

១១. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1+i & 1+2i & 1+3i \\ 1+i & i+2 & i+3 & i+4 \\ i+2 & i+3 & i+4 & i+5 \\ i+3 & i+4 & i+5 & i+6 \end{vmatrix}$

១២. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

១៣. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 7 & 1627 \\ 2 & 7 & 3 & 8 & 2738 \\ 3 & 8 & 4 & 9 & 3849 \\ 4 & 9 & 5 & 1 & 4951 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 5162 \end{vmatrix}$

លំហាត់ ៥. គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

១. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

២. $B = \begin{pmatrix} a+\lambda_1 & b+\lambda_2 & c+\lambda_3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

៣. $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$

៤. $D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

លំហាត់ ៦. ក្នុងចំណោមម៉ាទ្រីសខាងក្រោម តើមួយណាជាម៉ាទ្រីសច្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ ៖

១. $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/2 & 1/9 \end{pmatrix}$

២. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}$

៣. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

៤. $\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

លំហាត់ ៧. ក្នុងចំណោមម៉ាទ្រីសខាងក្រោម តើមួយណាជាម៉ាទ្រីសច្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ៖

១. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

២. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

៣. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -21 & -1 \end{pmatrix}$

៤. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

លំហាត់ ៨. គណនាចំរាសនៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

១. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

២. $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

៣. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

៤. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

៥. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

៦. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

លំហាត់ ៩. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ ប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

២. $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x + 7y = 5 \end{cases}$

៣. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

៤. $\begin{cases} 3x + 7y = 5 \\ 8x - y = 3 \\ 4x + 2y = 11 \end{cases}$

៥. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x - 6y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

៦. $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 4x - 3y = 5 \\ 5x - 5y = 2 \end{cases}$

៧. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -3x + 5y = 1 \\ 7x - 11y = -1 \end{cases}$

៨. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

លំហាត់ ១០. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ ប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ -x + y - z = 1 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$

២. $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ 4x - 2y + 3z = 12 \end{cases}$

៣. $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

៤. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x - 2y + 5z = 7 \end{cases}$

៥. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$

៦. $\begin{cases} 2x + 7y - 3z = 8 \\ -x + 3y + z = -4 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \end{cases}$

៧. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x - 2y + 4z = 5 \end{cases}$

៨. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$

៩. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$

១០. $\begin{cases} x + y - 8z = -1 \\ x - 3y + 4z = -5 \\ -3x + y + 12z = 8 \end{cases}$

១១. $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 14 \\ 2x + 5y + 4z = 17 \\ 6x + 4y + 6z = 29 \end{cases}$

១២. $\begin{cases} x - y + 3z = 6 \\ 3x - 2y + 7z = 14 \\ x + 3y - 3z = -4 \end{cases}$

១៣. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases}$

១៤. $\begin{cases} x - y + z - t = -2 \\ 2x - 3y + z + t = 1 \\ x + y + z + t = 0 \\ -x - 8y + 3z + 2t = -5 \end{cases}$

១៥. $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 3x - 3y + 3z + 2t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - 5y + 5z + 7t = 0 \end{cases}$

១៦. $\begin{cases} y + 3z + 2t = 6 \\ 3x + 2y + 4z + 5t = 14 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 10 \\ 4x + 5y + 7z + 6t = 22 \end{cases}$

១៧ . $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 2 \\ x + 4y + 9z + 16t = 3 \\ x + 8y + 27z + 64t = 4 \end{cases}$

លំហាត់ ១១. គណនារ៉ង់នៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម៖

១ . $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

២ . $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

៣ . $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

៤ . $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

៥ . $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

៦ . $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

៧ . $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

៨ . $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 5 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 11 & 7 & -6 \end{pmatrix}$

ផ្នែកទី ៣

ចម្លើយរបស់លំហាត់អនុវត្តន៍

ចម្លើយ ១

១. $A+B=\begin{pmatrix}0&2&5\\7&3&-3\\1&3&5\end{pmatrix}, B+A=\begin{pmatrix}0&2&5\\7&3&-3\\1&3&5\end{pmatrix}, B+C=\begin{pmatrix}-2&4&3\\5&2&-5\\5&1&3\end{pmatrix}$,

$2A+(B+C)=\begin{pmatrix}0&8&9\\13&6&-7\\3&7&11\end{pmatrix}$ និង $A-(B+2C)=\begin{pmatrix}4&-6&-1\\-3&-1&7\\-9&1&-1\end{pmatrix}$

២. គណនា $AB=\begin{pmatrix}-1&0&6\\12&2&2\\-2&0&4\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}-1&0&6\\12&2&2\\-2&0&4\end{pmatrix}, A.(BC)=\begin{pmatrix}1&0&6\\24&2&-6\\-6&0&8\end{pmatrix}$

និង $2A+2BC=\begin{pmatrix}4&4&10\\20&6&10\\10&6&12\end{pmatrix}$ ។

ចម្លើយ ២

១. $\Delta=-2$

២. $\Delta=-2$

៣. $\Delta=-1+\frac{1}{1637672591771090}i$

៤. $\Delta=a^2+b^2-c^2+d^2$

៥. $\Delta=b-a$

៦. $\Delta=2ab$

៧. $\Delta = 1-\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha.\cos\beta-\sin\beta\cos\beta-\cos^2\beta$

៨. $\Delta=1$

ចម្លើយ ៣

១. $\Delta=-18$

២. $\Delta=-\frac{1}{1050839913053116}$

៣. $\Delta=10$

៤. $\Delta=-\frac{1}{14434614190290}$

៥. $\Delta=-8$

៦. $\Delta=5-2i$

៧. $\Delta=\frac{1}{20282409603651670423947251286016}+\frac{1}{4503599627370496}i$

៨. $\Delta=2\sin\theta\cos\theta$

៩. $\cos\alpha\sin\beta-\cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta+\sin\alpha\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma-\sin\beta\cos\gamma$

១០. $\Delta = \cos b.\tan c/2 - \cos c\tan b/2 - \cos a\tan c/2 + \cos c\tan a/2 + \cos a\tan b/2 - \cos b\tan a/2$

ចម្លើយ ៤

១. $\Delta = 336$

២. $\Delta = 96$

៣. $\Delta = -1$

៤. $\Delta = -30$

៥. $\Delta = -8$

៦. $\Delta = \dfrac{1}{1223804246568}$

៧. $\Delta = -16$

៨. $\Delta = -\dfrac{1}{6004799503160661}$

៩. $\Delta = -\dfrac{1}{69480957223320257436803766816}$

១០. $\Delta = -6 + 8i$

១១. $\Delta = -\dfrac{1}{2797573738434713686049577500672} + \dfrac{1}{849525009577033367765456519168}i$

១២. $\Delta = 186$

១៣. $\Delta = \dfrac{1}{62967152208}$

ចម្លើយ ៥

១. $\det(A) = ae - bd - 2af + 2cd + bf - ce$

២. $\det(B) = ae\lambda_3 - bd\lambda_3 - af\lambda_2 + cd\lambda_2 + bf\lambda_1 - ce\lambda_1$

៣. $\det(C) = 0$

៤. $\det(D) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

ចម្លើយ ៦ ៣. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ ជាចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

ចម្លើយ ៧ ១. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ជាចម្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ចម្លើយ ៨

១. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

២. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4/3 & 2 \end{pmatrix}$

៣. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

៤. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

៥. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

៦. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 5/3 & -2/3 & 4/3 & 1/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 5/6 & 1/6 & 5/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

ចម្លើយ៩

១. $x = 1, y = 1$

២. $x = -1, y = 1$

៣. $x = -1, y = 2$

៤. ប្រពន្ធ័សមីការគ្មានចម្លើយ

៥. ប្រពន្ធ័សមីការគ្មានចម្លើយ

៦. $x = \frac{19}{5}, y = \frac{17}{5}$

៧. $x = 3, y = 2$

៨. $x = 1, y = -1$

ចម្លើយ ១០

១. $x = -1, y = 0$ និង $z = 0$

២. $x = 3, y = 3$ និង $z = 2$

៣. $x = 1, y = 1$ និង $z = 0$

៤. $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{11}{3}$ និង $z = 0$

៥. $x = 1, y = 0$ និង $z = 0$

៦. $x = \frac{20}{7}, y = -\frac{1}{14}$ និង $z = -\frac{13}{14}$

៧. $x = \frac{7}{5}, y = -\frac{2}{7}$ និង $z = \frac{2}{35}$

៨. $x = y = z = \frac{1}{4}$

៩. $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$ និង $z = 1$

១០. ប្រពន្ធ័សមីការគ្មានចម្លើយ

១១. ប្រពន្ធ័សមីការគ្មានចម្លើយ

១២. $x = -1, y = 2$ និង $z = 3$

១៣. $x = -\frac{4}{7}, y = 0$ និង $z = \frac{5}{7}$

១៤. $x = 1, y = 0, z = -2$ និង $t = 1$

១៥ . $x=0, y=0, z=0$ និង $t=0$

១៦ . $x=2, y=0, z=2$ និង $t=0$

១៧ . $x=-\frac{5}{6}, y=3, z=-\frac{3}{2}$ និង $t=\frac{1}{3}$

ចម្លើយ១១

១ . $Rank(A)=3$

២ . $Rank(A)=3$

៣ . $Rank(A)=4$

៤ . $Rank(A)=4$

៥ . $Rank(A)=5$

៦ . $Rank(A)=4$

៧ . $Rank(A)=4$

៨ . $Rank(A)=4$

៣. ឯកសារពិគ្រោះ

[1] Matrix Analysis and Applied Linear Algebra , Carl D. Meyer.

[2] Discrete Mathematics for Computer Science, Gary Haggard John Schlipf Sue Whitesides ,Copyright 2006 Thomson Brooks/Cols.

[3] សៀវភៅកិច្ចការស្រាយជ្រាវ ម៉ាទ្រីស, រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតគណិតជំនាន់ទី២១។

[4] សៀវភៅកិច្ចការស្រាយជ្រាវ ម៉ាទ្រីស និងដេទែមីណង់, រៀបរៀងដោយ៖ សេង សុភាសិត , គរុនិស្សិតគណិតក្រុម២ ជំនាន់ទី១៨ ។

[5] សៀវភៅ ម៉ាទ្រីស ចំនួនកុំផ្លិច ,រៀបរៀងដោយ ម៉ែន សាគុនុធ ។

[6] សៀវភៅពិជគណិតលីនេអ៊ែរ ទ្រឹស្តី និងការអនុវត្តន៍ , បណ្ឌិត ស៊ាម ង៉ុន ។

[7] Linear Algebra An Introduction SECOND EDITION, Richard Bronson Gabraiel B. Costa.

[8] MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICS AND ENGINEERING , K.F.RILEY,M.P.HOBSON,S.J.BENCE ,THIRD EDITION. [9] Linear Alebra An Introduction , Richard Bronson Gabriel B. Costa

[10] LINEAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS , Fourth Edition ,Gilbert Strang

[11] Super Course in Mathematics ALGEBRA II for IIT-JEE Volume 2,Trishna′s.

[12] ទ្រឹស្តីបរមាកម្ម , រៀបរៀងដោយ៖ គរុនិស្សិតបរិញ្ញាបត្រ+១ ឯកទេស គណិតវិទ្យា ក្រុម ២ ជំនាន់ទី២២ , ២០១៧

[13] Mathematics for the international student Mathematics HL (Core) second edition ,for use with IB Diploma Programme.