សាកលវិទ្យាល័យ ឯកទេស នៃកម្ពុជា
CAMBODIAN UNIVERSITY FOR SPECIALTIES
Education for an Excellent Career
Siem Reap Branch

កិច្ចការស្រាវជ្រាវ

ប្រធានបទ

ទ្រឹស្តីចំនួនកុំផ្លិច

ណែនាំដោយសាស្ត្រាចារ្យៈ

អោ មណីចន្ទ្រា

ស្រាវជ្រាវដោយៈ

ក្រុមនិស្សិតជំនាន់ទី ១៥ ឆ្នាំទី២

មហាវិទ្យាល័យ វិទ្យាសាស្ត្រ និងបច្ចេកវិទ្យា
ឯកទេស ៖ គណិតវិទ្យា
ជំនាន់ទី ១៥ ឆ្នាំទី ២ ឆមាសទី ២

Education for an Excellent Career

ឆ្នាំសិក្សា: ២០១៨ - ២០១៩

អារម្ភកថា

ជាបឋមយើងខ្ញុំ សូមធ្វើសេចក្តីគោរពដ៏ជ្រាលជ្រៅចំពោះគណៈគ្រប់គ្រង សាស្ត្រាចារ្យ ឧទ្ទេសទាំងអស់នៃសកលវិទ្យាល័យ ឯកទេសនៃកម្ពុជា (cus) រួមទាំងអ្នកគ្រូ អោ មណីចន្ទ្រា ដែលជាសាស្ត្រាចារ្យបង្រៀនគណិតវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យ(cus) លើមុខវិជ្ជា **ទ្រឹស្តីចំនួន - កុំផ្លិច** ដល់ពួកយើងខ្ញុំផ្ទាល់ដែរជាទីគោរព។ សូមជម្រាបសួរដល់មិត្តអ្នកអាន ក៏ដូចជាសិស្ស និស្សិតទាំងអស់ ជាទីស្នេហា។

សៀវភៅនេះផងដែរក៏ជួយបម្រើដល់និស្សិត ក៏ដូចជាអ្នកដែលចូលចិត្តសិក្សា គណិតវិទ្យាផងដែរ។ និស្សិត និងមិត្តអ្នកអានទាំងអស់អាចស្រាវជ្រាវ និងរៀនមេរៀននីមួយៗ ដោះស្រាយលំហាត់ផ្សេងៗ ដោយខ្លួនឯងដែលមានសៀវភៅជាជំនួយក្នុងការផ្ទៀងផ្ទាត់ បញ្ញាតិ រូបមន្តនានា រួមទាំងចម្លើយនៃលំហាត់ដែលពាក់ព័ន្ធផងដែរ។

លើសពីនេះ យើងខ្ញុំសូមអភ័យទោសចំពោះកំហុសឆ្គងដោយអចេតនាហើយក៏រីករាយ ក្នុងការ ទទួលយកនូវការរិះគន់ដើម្បីស្ថាបនា កែលម្អគ្រប់ពេលវេលាពីសំណាក់មិត្តអ្នកអាន រួមទាំងសិស្ស និស្សិតទាំងអស់គ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន។

ជាចុងក្រោយយើងខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណ និងគោរពជូនពរដល់មិត្តៗអ្នកអាន សិស្ស និស្សិតដែលចូលចិត្តស្រាវជ្រាវលើមុខវិជ្ជានេះឱ្យជួបតែសេចក្តីសុខ សុខភាពល្អ និងទទួលបានជោគជ័យ ក្នុងការសិក្សា។

និស្សិតជំនាន់ទី១៥ ឆ្នាំទី២ CUS SR 2018-2019

សេចក្ដីផ្ដើម

បច្ចុប្បន្ន ពិភពលោកទាំងមូល ក៏ដូចជាប្រទេសកម្ពុជាយើងគឺកំពុងស្ថិតនៅក្នុងសម័យសកលភាវូបនីយកម្ម។ យ៉ាងណាមិញក៏ដោយប្រទេសកម្ពុជាយើងជាប្រទេសដែលនឹងកំពុងអភិវឌ្ឍន៍ តាមការអប់រំ និងបណ្ដុះបណ្ដាលធនធានមនុស្ស ឱ្យសមជាគ្រាប់ពូជល្អមានចំណេះដឹង ជំនាញ សមត្ថភាពខ្ពស់ដែលជាជាកត្តាយ៉ាងសំខាន់។ ម្យ៉ាងទៀតរាជរដ្ឋាភិបាលរួមទាំងលោករដ្ឋមន្ត្រីក្រសួងអប់រំនាពេលបច្ចុប្បន្នបានយកចិត្តទុកដាក់ និងផ្ដល់ឱវាទឱ្យយុវជនខ្មែរទាំងអស់ខិតខំសិក្សារៀនផ្ដោត ទៅលើមុខវិជ្ជាSTEM ដែលជាមុខវិជ្ជាមួយសម្រាប់ឆ្លើយតបនិងតម្រូវការទីផ្សារការងារនាពេលបច្ចុប្បន្ន ហើយក៏ជាកត្តាដែលធ្វើឱ្យសេដ្ឋកិច្ចក៏ដូចជាវិស័យផ្សេងៗទៀតមានការអភិវឌ្ឍយ៉ាងឆាប់រហ័សដែលអាចដើរទាន់ប្រទេសនានានៅក្នុងតំបន់ក៏ដូចជាទូទាំងពិភពលោកផងដែរ។

ទន្ទឹមនឹងនេះ ដើម្បីជាកាឆ្លើយតបទៅនិងទិសដៅរបស់រាជរដ្ឋាភិបាលក៏ដូចជាក្រសួងអប់រំ យើងខ្ញុំបានរៀបចំសៀវភៅនេះយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់ក្នុងគោលបំណងជួយដល់សិស្សនិស្សិតកម្ពុជាឱ្យមានសមត្ថភាព និងឆាប់វៃឆ្លាតក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ឬចំណោទផ្សេងៗដែលទាក់ទងនឹង មេរៀននានាដែលមានក្នុងមុខវិជ្ជាគណិតវិភាគនោះផងដែរ។ និយាយរួមនិស្សិតអាចស្វ័យសិក្សាដោយខ្លួនឯង ចំពោះលំហាត់ដែលលំបាកៗមិនដែលធ្លាប់ជួបប្រទះរួមទាំងចំណោទផ្សេងៗផងដែរ។ មួយវិញទៀតគណិតវិភាគអាចឱ្យយើងយកទៅអនុវត្តក្នុងការវិភាគសេដ្ឋកិច្ច អនុវត្តវេជ្ជសាស្ត្រ អនុវត្តក្នុងវិស្វកម្មក៏ដូចជាអនុវត្តន៍ក្នុងរូបវិទ្យាជាដើម។ល។

សរុបមកការយល់ច្បាស់ពី **ទ្រឹស្ដីចំនួនកុំផ្លិច** ពិតជាសាកសមណាស់សម្រាប់ដោះស្រាយបញ្ហា ប្រឈម ផ្សេងៗដែលកើតមានឡើងនាពេលបច្ចុប្បន្នក៏ដូចជាពេលអនាគតនៅក្នុងសង្គមមនុស្ស។ ដូចនេះក្នុងនាមយើងជាកូនខ្មែរត្រូវមានមនសិកាស្រឡាញ់ និងប្រឹងប្រែងស្រាវជ្រាវលើមុខវិជ្ជា **ទ្រឹស្ដីចំនួនកុំផ្លិច** នេះដើម្បីឱ្យគណិតវិទ្យានៅកម្ពុជាកាន់តែមានការរីកចម្រើន នោះប្រទេសជាតិនឹងសម្បូរធនធាន មនុស្សក្នុងការលើកស្ទួយនិងអភិវឌ្ឍន៍យ៉ាងឆាប់រហ័សលើគ្រប់វិស័យ។

និស្សិតជំនាន់ទី១៥ ឆ្នាំទី២ CUS SR 2018-2019!

មេរៀនទី ១

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

១. រូបមន្តសង្ខេប

$$z = a + bi \ , \ \bar{z} = a - bi$$

$$i^{4n} = 1 \ , \ i^{4n+1} = i \ , \ i^{4n+2} = -1 \ , \ i^{4n+3} = -i$$

២. ដំណោះស្រាយលំហាត់

១. បម្លែងចំនួនខាងក្រោមជាចំនួននិម្មិត

$$A = \sqrt{-9}$$
$$= \sqrt{i^2 9}$$
$$= 3i$$

ដូចនេះ: $\boxed{A = 3i}$

$$B = \sqrt{-121}$$
$$= \sqrt{i^2 121}$$
$$= 11i$$

ដូចនេះ: $\boxed{B = 11i}$

$$C = \sqrt{-\frac{9}{25}}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{25} i^2}$$
$$= \frac{3}{5} i$$

ដូចនេះ: $\boxed{C = \frac{3}{5} i}$

$$D = -\sqrt{-28}$$
$$= -\sqrt{4i^2 \times 6}$$
$$= -2i\sqrt{6}$$

ដូចនេះ: $\boxed{D = -2i\sqrt{6}}$

២. បម្លែងចំនួនខាងក្រោមជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានទម្រង់ពីជគណិត

$A = 4 - 100$

$= -96$

ដូចនេះ $\boxed{A = -96}$

$B = -5 + \sqrt{-9}$

$= -5 + \sqrt{9i^2}$

$= -5 + 3i$

ដូចនេះ $\boxed{B = -5 + 3i}$

$C = -5 + \sqrt{-18}$

$= -5 + \sqrt{2 \times 9i^2}$

$= -5 + 3i\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\boxed{C = -5 + 3i\sqrt{2}}$

$D = 9 - 2i - (4 - 4i)$

$= 9 - 2i - 4 + 4i$

$= 5 + 2i$

ដូចនេះ $\boxed{D = 5 + 2i}$

$E = (1 + 2i)^2 - i(4 + 2i)$

$= 1^2 + 2(1)^2(2i) + (2i)^2 - 4i - 2i^2$

$= 1 + 4i + 4i^2 - 4i + 2$

$= -1 + 0i$

ដូចនេះ $\boxed{E = -1 + 0i}$

$F = (2 - 3i)(-1 + i) + (2 - i)^2$

$= -2 + 2i + 3i - 3i^2 + 4 - 4i + i^2$

$= 4 + i$

ដូចនេះ $\boxed{F = 4 + i}$

$G = (2 - 5i)(3 + i)$

$= 6 + 2i - 15i - 5i^2$

$= 11 - 13i$

ដូចនេះ $\boxed{G = 11 - 13i}$

$H = (4 + 2i)^2$

$= 4^2 + 2 \times 4 \times 2i + (2i)^2$

$$=16+16i+4i^2$$

$$=12+16i$$

ដូចនេះ $\boxed{H=12+16i}$

$$I=(1+2i)^3$$

$$=1^3+3\times1^2\times2i+3\times1\times(2i)^2+(2i)^3$$

$$=1+6i-12-8i$$

$$=-11-2i$$

ដូចនេះ $\boxed{I=-11-2i}$

$$J=(3+2i)^4$$

$$=3^4+4(3)^3(2i)+6(3)^2(2i)^2+4(3)(2i)^3+(2i)^4$$

$$=81+216i-216-96i+16$$

$$=-119+120i$$

ដូចនេះ $\boxed{J=-119+120i}$

$$K=\frac{1}{4+3i}$$

$$=\frac{1(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$$

$$=\frac{4-3i}{4^2-(3i)^2}$$

$$=\frac{4-3i}{16+9}$$

$$=\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i$$

ដូចនេះ $\boxed{K=\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i}$

$$L=\frac{2-3i}{1+i}+\frac{1-2i}{1-i}$$

$$=\frac{(2-3i)(1-i)+(1-2i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{2-2i-3i+3i^2+1+i-2i-2i^2}{1^2-(i)^2}$$

$$=\frac{2}{2}-\frac{6}{2}i$$

$$=1-3i$$

ដូចនេះ $\boxed{L=1-3i}$

$$M=\frac{(2+i)(1-i)}{1+2i}$$
$$=\frac{(2+i)(1-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$
$$=\frac{(2-2i+i-i^2)(1-2i)}{1^2-(2i)^2}$$
$$=\frac{(3-i)(1-2i)}{1+4}$$
$$=\frac{3-6i-i+2i^2}{5}$$
$$=\frac{1-7i}{5}$$
$$=\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$$

ដូចនេះ: $\boxed{M=\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i}$

៣. បើ $Z_1=2-5i$ និង $Z_2=1-4i$ សរសេរកន្សោមខាងក្រោមជារាង $a+bi$ ៖

ក. $Z_1+\overline{Z_2}$

គេមាន $Z_1=2-5i\Rightarrow\overline{Z_1}=2+5i$

$Z_2=1-4i\Rightarrow\overline{Z_2}=1+4i$

នាំឱ្យ $Z_1+\overline{Z_2}=2-5i+1+4i$

$=3-i$

ដូចនេះ: $\boxed{Z_1+\overline{Z_2}=3-i}$

ខ. $Z_1\overline{Z_2}=(2-5i)(1+4i)$

$=2+8i-5i-20i^2$

$=22+3i$

ដូចនេះ: $\boxed{Z_1\overline{Z_2}=22+3i}$

គ. $\frac{1}{\overline{\overline{Z_1}}}=\frac{1}{2+5i}$

$$=\frac{2-5i}{(2+5i)(2-5i)}$$
$$=\frac{2-5i}{2^2-(5i)^2}$$
$$=\frac{2-5i}{4+25}$$
$$=\frac{2}{29}-\frac{5}{29}i$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\overline{Z_1}} = \frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$

ឃ. $i\overline{Z_1}Z_2 = i(2+5i)(1-4i)$

$= (2i+5i^2)(1-4i)$

$= 2i - 8i^2 - 5 + 20i$

$= 3 + 22i$

ដូចនេះ $\boxed{i\overline{Z_1}Z_2 = 3+22i}$

៤. បើ $Z_1 = x_1 + iy_1$ និង $Z_2 = x_2 + iy_2$ ។ បង្ហាញថា $Z_1\overline{Z_2} + \overline{Z_1}Z_2$ ជាចំនួនពិត ។

យើងមាន $Z_1 = x_1 + iy_1 \Rightarrow \overline{Z_1} = x_1 - iy_1$

$Z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow \overline{Z_2} = x_2 - iy_2$

នាំឱ្យ $Z_1\overline{Z_2} = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)$

$= x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - i^2y_1y_2$

$= (x_1x_2 + y_1y_2) - (x_1y_2 - x_2y_1)i$

$\overline{Z_1}Z_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)$

$= x_1x_2 + ix_1y_2 - ix_2y_1 - i^2y_1y_2$

$= (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)i$

យើងបាន $Z_1\overline{Z_2} + \overline{Z_1}Z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) - (x_1y_2 - x_2y_1)i + (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)i$

$= 2(x_1x_2 + y_1y_2)$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{Z_1\overline{Z_2} + \overline{Z_1}Z_2 = 2(x_1x_2 + y_1y_2)\text{ ជាចំនួនពិត}}$

៥. គេយក $z_1 = 2 - 3i$ និង $z_2 = -4 + i$ ។ សរសេរក្រោមទម្រង់ពីជគណិត៖

ក. $z_1 + z_2 = 2 - 3i - 4 + i$

$= -2 - 2i$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 + z_2 = -2 - 2i}$

ខ. $3z_1 - 2z_2 = 3(2-3i) - 2(-4+i)$

$= 6 - 9i + 8 - 2i$

$= 14 - 11i$

ដូចនេះ $\boxed{3z_1 - 2z_2 = 14 - 11i}$

គ. $(1-z_1)(5+z_2) = [1-(2-3i)][5+(-4+i)]$

$= (1-2+3i)(5-4+i)$

$$= (-1+3i)(1+i)$$

$$= -1 - i + 3i + 3i^2$$

$$= -4 + 2i$$

ដូចនេះ $\boxed{(1-z_1)(5+z_2) = -4+2i}$

ឃ. $\frac{1}{z_1^2} = \frac{1}{(2-3i)^2}$

$$= \frac{1}{2^2 - 2(2)(3i) + (3i)^2}$$

$$= \frac{1}{1-12i}$$

$$= \frac{1(1+12i)}{(1-12i)(1+12i)}$$

$$= \frac{1+12i}{1^2-(12i)^2}$$

$$= \frac{1}{145} + \frac{12}{145}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{z_1^2} = \frac{1}{145} + \frac{12}{145}i}$

៣. លំហាត់អនុវត្តន៍

១. បម្លែងចំនួនខាងក្រោមជាចំនួនជាចំនួននិម្មិត

$A = -\sqrt{-144}$ $\quad B = \sqrt{-\frac{81}{121}}$ $\quad C = \sqrt{-\frac{676}{1296}}$

២. បម្លែងចំនួនខាងក្រោមជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានទម្រង់ពីជគណិត

$A = \frac{-1+\sqrt{3}i}{(11-4\sqrt{3}i)^3}$ $\quad B = \frac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^3-(2+i)^3}$ $\quad C = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + i - 1$

$D = \sqrt{4-3i}$ $\quad E = \frac{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-2i}}{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-2i}}$

៣. គេឃក $z_1 = 2-3i$ និង $z_2 = -4+i$ ។ សរសេរក្រោមទម្រង់ពីជគណិត៖

$A = z_1 z_2$ $\quad B = \frac{1-z_1}{5+z_2}$

សេចក្តីសន្និដ្ឋាន

ឆ្លងតាមការសិក្សាស្រាវជ្រាវរួចមកក្រុមទី១ យើងខ្ញុំអាចសង្ខេប និងចងក្រងលំហាត់បានដោយបែងចែកជា បីចំណុចគឺ:

១. រូបមន្តសង្ខេប

២. ដំណោះស្រាយលំហាត់

៣. លំហាត់អនុវត្តន៍

នៅក្នុងចំណុចទាំងបីខាងលើ យើងអាចយកទៅប្រើប្រាស់ជាជំនួយនៅពេលធ្វើការដោះស្រាយលំហាត់ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិតបាន ។

៦.ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពិជគណិតដែល

$$j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

1. $z_1=\frac{1-j+j^2}{1+j-j^2}$ យើងបាន $z_1=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}{1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2}-\frac{2}{4}}{1-\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{4-2-2}{4}}{\frac{4-1}{2}}=0 \text{ ។}$$

2. $z_2=\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^3+\left(\frac{j+j^2}{j-j^2}\right)$ យើងបាន $z_2=\left(\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^3+\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}\right)$

$$=\left(\frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^3+\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\left(-\frac{1}{2}-2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3}+\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}}\right)$$

$$=\frac{\frac{27}{8}-\frac{27\sqrt{3}i}{8}-\frac{27}{8}+\frac{3\sqrt{3}i}{8}i}{\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}i}{8}-\frac{9}{8}-\frac{3\sqrt{3}i}{8}}+\left(\frac{-2}{0}\right) \quad =\frac{-24\sqrt{3}i}{-1}=24\sqrt{3}i \text{ ។}$$

៧.គណនា

រៀបរៀងដោយៈ ក.គង់ កណ្ណិការ ល.ហឿន ឌីន

ក.គង់ នីហា្យ ល.ពោន លាស់

ក.កែ ធារ៉ា ល.ភាព ផុន

ក. $\frac{1}{2i}\left(i^7-\frac{1}{i^7}\right)=\frac{1}{2i}\left(-i+\frac{1}{i}\right)$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{-i^2+1}{i}\right)=\frac{-i^2+1}{-2}$$

$$=\frac{-1}{2}+\frac{i^2}{2}=\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}=-1 \text{ ។}$$

ខ. $i^9+i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}=i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}+i^{4n+0}+i^{4n+1}$

$$=i-1-i+1+i=i \text{ ។}$$

ឃ.គណនា i^2,i^3,i^4,i^5 និងទាញរក i^{24} និង i^{25}

$i^2=-1$ $\quad i^3=-i$ $\quad i^4=1$ $\quad i^5=i$

គេបាន៖ $i^{24}=i^{4n+0}=1$ $\quad i^{25}=i^{4n+1}=i$ ។

ង.គណនា $1+i+i^2+i^3$ ទាញរក $i^{2013}+i^{2012}+i^{2011}+i^{2010}$

គណនា $1+i+i^2+i^3$

យើងបាន៖ $1+i-1-i=0$ ។

ទាញរក $i^{2013}+i^{2012}+i^{2011}+i^{2010}$

$$=i^{4\times503+1}+i^{4\times503+0}+i^{4\times502+2}+i^{4\times502+0}$$

$$=i+1-1+1=1+i \text{ ។}$$

៨.កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឲ្យសមភាពនីមួយៗខាងក្រោមពិត

ក. $(2x+3yi)-(xi=3y)=i(7+4i)$

$$2x+3yi-xi-3y=7i+4i^2$$

$$(2x-3y)-(x-3y)i=-4+7i$$

$$\begin{cases}2x+3y=-4\\-x-3y=7(2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-3y=-4\\-2x+6y=14\end{cases}$$

នោះគេបាន $3y=10 => y=\frac{10}{3}$

យក $y=\frac{10}{3}$ ជួសក្នុងសមីការ(១)

$$2x-3y=-4$$

$$2x-3\left(\frac{10}{3}\right)=-4$$

$2x-\frac{30}{3}=-4 => 2x-10=-4$ នោះ $x=3$

ដូចនេះ $x=3; y=\frac{10}{3}$

ខ. $(x+iy)(1-i)=3-i$

$$x-xi+yi-yi^2=3-i$$

$$x+y-xi+yi=3-i$$

$$\begin{cases} x+y=3(1) \\ -x+y=-1(2) \end{cases}$$

នោះគេបាន៖ $2x=2 => x=1$

យក $x=1$ ជួសក្នុងសមីការ(១)

$x+y=3 =>$ គេបាន $1+y=3 => y=2$

ដូចនេះ $x=1; y=2$

គ. $(1-2i)x+(1+2i)y=1+i$

$$x-2xi+y+2yi=1+i$$

$$x+y-2xi+2yi=1+i$$

$\begin{cases} x+y=1(2)(1) \\ -2x+2y=1(2) \end{cases} => \begin{cases} 2x+2y=2 \\ -2x+2y=1 \end{cases}$ នោះគេបាន៖ $4y=3 => y=\frac{3}{4}$

យក $y=\frac{3}{4}$ ជួសក្នុងសមីការ(១)

នោះយើងបាន៖ $x+\frac{3}{4}=1 => x=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ $x=\frac{1}{4}; y=\frac{3}{4}$

ឃ. $\frac{x+iy}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=0$

$$\frac{(x+yi)(1+i)+(1-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}=0$$

$$\frac{x+xi+yi+yi^2+1-i-i+i^2}{1^2-i^2}=0$$

$$\frac{x+xi+yi-y+1-2i-1}{2}=0$$

$$\frac{x-y}{2}+\frac{x+y-2}{2}i=0$$

$$\begin{cases}\frac{x-y}{2}=0\\ \frac{x+y-2}{2}=0\end{cases} => \begin{cases}x-y=0\\ x+y=2\end{cases} => \begin{cases}x=y(1)\\ x+y=2(2)\end{cases}$$

យក $x=y$ ជួសក្នុងសមីការ(១)

នោះគេបាន៖ $x+y=2 => y+y=2 => y=1$

យក $y=1$ជួសក្នុងសមីការ(១)

នាំឲ្យ $x=y=1$

ដូចនេះ $x=1; y=1$

ង. $\frac{3+2i}{5+i}=x+yi$

$$\frac{(3+2i)(5-i)}{(s+i)(s-i)}=x+yi$$

$$\frac{15-3i+10i-2}{5^2+1^2}=x+yi$$

$$\frac{13+7i}{26}=x+yi => \begin{cases}x=\frac{13}{26}\\ y=\frac{7}{26}\end{cases}$$

ដូចនេះ $x=\frac{13}{26}; y=\frac{7}{26}$

លំហាត់អនុវត្ត

ច. $y^2-4^x-8+i2^{x+1}+y+1=0$ ឆ. $\left(3^x\times 2^y-\frac{1}{9}\right)+iy-x-2=0$

ជ. $\frac{x+iy}{4-3i}=\frac{5}{25}+\frac{10}{25}i$ ។

៩.កំណត់ចំនួនពិត x ដើម្បីឲ្យចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

ក. $z_1=\frac{x^2-x-2}{x}+\left(x^3-3x+2\right)i$

1. ជាចំនួនពិត

z ជាចំនួនពិតកាលណាផ្នែកនិម្មិតស្មើសូន្យ

យើងបាន៖ $\frac{x^2-x-2}{x}=0$

$$x^2-x-2=0$$

នោះគេបានតាម $a-b+c=0$

$$=> x_1=-1, x_2=-\frac{c}{a}=2$$

ដូចនេះ $x_1=-1, x_2=2$ ។

2. ជាចំនួននិម្មិត

z ជាចំនួននិម្មិតកាលណាផ្នែកពិតស្មើសូន្យ

យើងបាន៖ $x^3-3x+2=0$

$$(x-1)\left(x^2+x-2\right)=0$$

$$\begin{cases} x-1=0 => x_1=1(1) \\ x^2+x-2=0(2) \end{cases}$$

$x^2+x-2=0$ នោះគេបានតាម $a+b+c=0$

$$=> x_2=1, x_3=-2$$

ដូចនេះ $x_1=1, x_2=1, x_3=-2$ ។

ខ. $z_2=\left(2^{x^2+3x-2}-4\right)+\log_2\left((x^2+x)-1\right)i$

1. ជាចំនួនពិត

យើងបាន៖ $2^{x^2+3x-2}-4=0$

$$2^{x^2+3x-2}=2^2$$

$$x^2+3x-2=2$$

$x^2+3x-4=0$ នោះគេបានតាម $a+b+c=0$

$$=> x_1=1, x_2=-4$$

ដូចនេះ $x_1=1, x_2=-4$ ។

2. ជាចំនួននិម្មិត

គេបាន៖ $\log_2\left(x^2+x\right)-1=0$

$$\log_2\left(x^2+x-1\right)=\log_2 1$$

$$x^2+x-1=1$$

$x^2+x-2=0$ នោះគេបានតាម $a+b+c=0$

$$=> x_1=1, x_2=-2$$

ដូចនេះ $x_1=1, x_2=-2$ ។

គ. $z_3=(\sin-1)+i\sin x$

1. ជាចំនួនពិត

យើងបាន៖ $\sin x-1=0$

$$\sin x=1$$

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{2} => x=\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $x=\frac{\pi}{2}$ ។

2. ជាចំនួននិម្មិត

យើងបាន៖ $\sin x=0$

$$\sin x=\sin 0 => x=0$$

ដូចនេះ $x=0$ ។

ឃ. $z_4=(\cos x+1)+i\cos x$

1. ជាចំនួនពិត

យើងបាន៖ $\cos x+1=0$

$$\cos x=-1$$

$$\cos x=\cos\pi => x=\pi$$

ដូចនេះ $x=\pi$ ។

2. ជាចំនួននិម្មិត

យើងបាន៖ $\cos x=0$

$\cos x=\cos\frac{\pi}{2} => x=\frac{\pi}{2}$ ដូចនេះ $x=\frac{\pi}{2}$ ។

១០.គេមាន $z=1-2i$ និង $w=5+3i$

ក.បង្ហាញថា $\overline{w+z}=\overline{w}+\overline{z}$

យើងបាន៖ $w+z=5+3i+1-2i$

$=6+i(1)$

នោះ $\overline{w+z}=6-i$

ហើយ $\overline{w}+\overline{z}=5-3i+1+2i$

$=6-i(2)$

តាម(១)និង(២)

ដូចនេះ យើងបាន៖ $\overline{w+z}=\overline{w}+\overline{z}$ ពិត។

ខ.បង្ហាញថា $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$

យើងបាន៖ $z-w=1-2i-(5+3i)$

$=1-2i-5-3i$

$=-4-5i$

នោះ $\overline{z-w}=-4+5i$

ហើយ $\overline{z}-\overline{w}=1+2i-(5-3i)$

$=1+2i-5+3i$

$=-4+5i(2)$

តាម(១)និង(២)

ដូចនេះ យើងបាន៖$\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$ ពិត ។

គ.គេឲ្យ $M=(1-i)x+(1+i)y$

កំណត់ x និង y ដើម្បីឲ្យ $M=z^2-w+3i$

$M=(1-i)x+(1+i)y$

តែ $z=1-2i$ និង $w=5+3i$

យើងបាន៖$(1-i)x+(1+i)y=(1-2i)^2-5-3i+3i$

$x-xi+y+yi=1-4i-4-5$

$$x+y+(y-x)i=-8-4i$$

$$\begin{cases} x+y=-8(1) \\ -x+y=-4(2) \end{cases}$$

នោះគេបាន៖ $2y=-12 \Rightarrow y=-\frac{12}{2}=-6$

យក $y=-6$ ជួសក្នុងសមីការ(១)

នោះគេបាន៖ $x-6=-8$

$x=-2$ ដូចនេះ $x=-2; y=-6$ ។

មេរៀនទី១:

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពិជគណិត

I. រូបមន្តសង្ខេប

$$z = a + bi$$

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$$

16. ដោះស្រាយសមីការ

1. $\begin{cases} ix - 3y = 2 - 3i(1)(\times 2i) \\ (1+i)x + 2iy = 5 - i(2)(\times 3) \end{cases}$

$\begin{cases} 2i^2x - 6iy = 4i - 6i^2 \\ (1+i)3x + 6iy = 15 - 3i \end{cases}$

$(1+3i)x = i + 21$

$x = \dfrac{i+21}{1+3i}$

$\Leftrightarrow x - \dfrac{(i+21)(1-3i)}{1^2 - (3i)^2} = \dfrac{i - 3i^2 + 21 - 63i}{1+9}$

$= \dfrac{-62i + 24}{10} = -\dfrac{31}{5}i + \dfrac{12}{5}$

$-i\left(-\dfrac{31}{5}i + 12\right) + 3y = 2 - 3i$

$-\dfrac{31}{5} + \dfrac{12}{5}i + 3y = 2 - 3i$

$+3y = 2 - 3i - \dfrac{31}{5} - \dfrac{12}{5}i$

$15y = 10 - 15i - 31 - 12i$

$y = -\dfrac{9}{5}i - \dfrac{7}{5}$

ដូចនេះ $x = -\frac{3}{5}i + \frac{12}{5}; y = -\frac{9}{5}i - \frac{7}{5}$

14. រកចំនួនតែ a, b, c ដើម្បីឱ្យ$2-i$ ជាឬសនៃសមីការ $x^2-ax-b=0$

$x^2-ax-b=0$

ដើម្បីឱ្យ$2-i$ ជាឬសនៃសមីការ $x^2-ax-b=0$ លុះត្រាតែ

$(2-i)-a(2-i)-b=0$

$4-4i+i^2-2a+ai-b=0$

$-4i+ai-2a-b+3=0$

$-4+a=0 \Rightarrow a=4$

$-2a-b+3=0 \Rightarrow a=5$

ដូចនេះ $a=4, b=5$

15. រកអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ $f(z)=z^2+az+b$ ដែល$a,b,c\ \in R$បើគេដឹងថា$f(-1-2i)=0$

$f(z)=z^2+az+b$

$f(-1-2i)=0$

$\Leftrightarrow (-1-2i)^2+a(-1-2i)+b=0$

$1+4i+4i^2-a-2ai+b=0$

$4i-2ai-a+b-3=0$

$$\begin{cases} 4-2a=0 \Rightarrow a=2 \\ -a+b-3=0 \Rightarrow b=5 \end{cases}$$

ដូនេះ:$f(z)=z^2+2z+5$

13. ដោះស្រាយសមីការកុំផ្លិច

9,$x^2-(3-i)x+4=0$

$\Delta = b^2-4ac$

$=(3-i)-4\times 4$

$=a-6i+i^2-16=-6i-8$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{-6i-8}=\sqrt{(-3+i)^2}=\sqrt{(3+i)^2i^2}$

$= (3+i)i = 3i - 1$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{(3-i)-(3i-1)}{2}$$

$$= \frac{-3+i-3i+1}{2} = \frac{-2i-2}{2} = -(i+1)$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(3-i)^2+3i-1}{2} = \frac{-3+i+3i-1}{2}$$

$= \frac{4i-4}{2} - 2i - 2$

$\boxed{\text{ដូចនេះ } x_1 = -(i+1), x_2 2i - 2}$

14. $z^2 = 1 - 2i\sqrt{2}$

$(4^2-1)^2 = \left(-2i\sqrt{2}\right)^2$ លើកអង្គទាំងសងខាង

$z^4 = 2z^2 + 1$

$= 4i^2\sqrt{2^2}$

$z^4 - 2z^2 + 1 + 8 = 0$

$z^4 - 2z^2 + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 2^2 - 4 \times 9$

$= 4 - 36 = -32$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{32i}$

$= \sqrt{(4+4i)^2}$

$= 4 + 4i$

$$t_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2-4-4i}{2}$$

$$= \frac{4i-2}{2} = -2i - 1$$

$$t_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2+4+4i}{2}$$

$= 2i - 3$

ដូចនេះ៖ $z_1 = 2i - 1, z_2 = 2i + 3$

15. $z^2 + 2z + 1 + 2i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 2^2 - 4 \times (1 + 2i)$

$= 4 - 4 - 8i$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-8i} + 8 = \sqrt{(2 - 2i)^2}$

$z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2 - (2 - 2i)}{2}$

$= \dfrac{2i - 4}{2} = i - 2$

$z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2 + 2 - 2i}{2}$

$= \frac{-2i}{2} = -i$

ដូចនេះ៖ $z_1 = i - 2, z_1 = -i$

17. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$

តាង $t = z^2$

$\Rightarrow t^2 + 10t + 169 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (10)^2 - 4(169) = 100 - 676$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{576i} = \sqrt{(288 - 288i)^2}$

$= 288 + 288i$

$t_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-10 - 288 - 288i}{2}$

$= \frac{288i - 298}{2}$

$= 144i - 149$

$t_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 + 288 + 288i}{2}$

$t_2 = \frac{288i - 278}{2} = 144i + 139$

ដូចនេះ $z_1 = \sqrt{-144i - 149}, z_2 = \sqrt{144i - 139}$

12. $(1 + i)z^2 + z + 11i = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1^2 - 11(1 + i)$

$= 1 - 11 - i = -i - 10$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-(i - 10)}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2}$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}i\right)i$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = \frac{-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$

$= \frac{-\sqrt{2}i - 2 + \sqrt{2}}{4}$

$z_2 = \frac{-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{2}i - 2 - \sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ$z_1 = \frac{\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}}{4}, z_2 = \frac{\sqrt{2}i - 2 - \sqrt{2}}{4}$

16. ដោះស្រាយសមីការ

1. $\begin{cases} ix - 3y = 2 - 3i(1) \ \times (2i) \\ (1+i)x + 2iy = 5 - i(2) \times (3) \end{cases}$

$\begin{cases} 2i^2 - 6iy = 4i - 6i^2 \\ (1+i)3x + 6iy = 15 - 3i \end{cases}$

$(1+3i)x = i + 21$

$x = \frac{i+21}{1+3i}$

$\Leftrightarrow x = \frac{(i+21)(1-3i)}{1^2-(3i)^2} = \frac{i-3i^2+21-63i}{1+9}$

$= \frac{-62i+24}{10} = -\frac{31}{5}i + \frac{12}{5}$

ជួសក្នុង(1): គេបាន

$i\left(-\frac{31}{5}i + \frac{12}{5}\right) + 3y = 2 - 3i$

$\frac{31}{5} + \frac{12}{5}i + 3y = 2 - 3i$

$3y = 2 - 3i - \frac{31}{5} - \frac{12}{5}i$

$15y = 10 - 15i - 31 - 12i$

$y = -\frac{9}{5}i - \frac{7}{5}$

ដូចនេះ $x = -\frac{31}{5}i + \frac{12}{5}, y = -\frac{9}{5}i - \frac{7}{5}$

2. $\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2 + 6i \ (1) \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5 + 4i \ (2) \end{cases}$

$\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2 + 6i \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5 + 4i \end{cases}$

$7x + 2x + 2y - yi = 7 + 10i$

$7x + 2y + (x - y)i = 7 + 10i$

$$\begin{cases} 7x + 2y = 7 \ (1) \\ x - y = 10 \ \ (2) \Rightarrow x = y + 10 \end{cases}$$

$7(y + 10) + 2y = 7$

$7y + 70 + 2y = 7$

$9y = -63 \Rightarrow y = -7$ជួស$(2)$

$\Rightarrow x = -7 + 10 = 3$

ដូចនេះ $x = 3\,, y = -7$

3. $\begin{cases} (2 + i)x + (4 + 2i)y = 6 \\ (3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + ix + 4y + 2yi = 6 \\ 3x + 2ix + 3y - 2yi = 8 \end{cases}$$

$5x + 3ix + 7y = 14$

$$\begin{cases} 5x + 7y = 14 \ (1) \\ 3x = 0 \ (2) \ \Rightarrow x = 0 \ \text{ជួសក្នុង}(1) \end{cases}$$

គេបាន $5 \times 0 + 7y = 14 \Rightarrow y = 2$

ដូចនេះ $x = 0, y = 2$

លំហាត់អនុវត្ត

១៦.ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុង C ខាងក្រោម

3. $\begin{cases} (2 - i)x + 7y = 1 + 2i \\ (1 - i)\bar{x} - i\bar{y} = 4 - i \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$

13.ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចC៖

1. $x^2 + 2x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2$
$= 4 - 8 = -4 < 0$
$\sqrt{\Delta}i = \sqrt{4}i = 2i$
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}i}{2a} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

ដូចនេះ $x_1 = -1 + i, x_2 = -1 - i$

2. $(t+1)^2 + 8 = 0$
$t^2 + 2t + 1 + 8 = 0$
$t^2 + 2t + 9 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 36$
$= -32 < 0$
$\sqrt{\Delta}i = \sqrt{32}i = 4i\sqrt{2}$
$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}i}{2a} = \frac{-2 + 4i\sqrt{2}}{2} = -1 + 2i\sqrt{2}$$
$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}i}{2a} = \frac{-2 - 4i\sqrt{2}}{2} = -1 - 2i\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $t_1 = -1 - 2i\sqrt{2}, t_2 = -1 - 2i\sqrt{2}$

5. $z\bar{z} + (1+3i) + \frac{\bar{z}}{2+i} = 19 + 5i$

តាង $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

គេបាន $(a+bi)(a-bi)(1+3i) + \dfrac{(a-bi)}{2+i} = 19 + 5i$

$$a^2 - (bi)^2 + 3i + 1 + \frac{(a-bi)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 19 + 5i$$
$$a^2 + b^2 + 1 + 3i + \frac{2a - ai - 2bi + bi^2}{2^2 - i^2} = 19 + 5i$$
$$a^2 + b^2 + 1 + 3i + \frac{(2a - b) - i(a + 2b)}{5} = 19 + 5i$$
$5a^2 + 5b^2 + 5 + 15i + (2a - b) - i(a + 2b) = 95 + 25i$
$$\begin{cases} 5a^2 + 5b^2 + 2a - b + 5 = 95 \ (1) \\ 15 - a - 2b = 25 \ \ (2) \Rightarrow -a = 10 + 2b \Rightarrow a = 2b - 10 \text{ជួស}(1) \end{cases}$$
$5(2b - 10)^2 + 5b^2 + 2(-2b - 10) + 5 = 95$
$5(4b^2 - 40b + 100) + 5b^2 - 4b - 20 + 5 = 95$
$20b^2 - 200b + 500 + b - 15 = 95$
$20b^2 - 204b + 390 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = (-104)^2 20 \times 390$

$= 10816 - 9750 = 1066$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{1066}$

$$b_1 = \frac{-b + \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{-104 + \sqrt{1066}}{25}$$

$$b_2 = \frac{-b - \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{-104 - \sqrt{1066}}{25}$$

បើ $b_1 = \dfrac{-104 + \sqrt{1066}}{25}$ នោះ $a_1 = -2\left(\dfrac{-104 + \sqrt{1066}}{25}\right) - 10$

$$= \frac{208 - 2\sqrt{1066} - 250}{250} = \frac{-42 - 2\sqrt{1066}}{25}$$

បើ $b_2 = \dfrac{-104 - \sqrt{1066}}{25}$ នោះ $a_2 = -2\left(\dfrac{-104 - \sqrt{1066}}{25}\right) - 10$

$$= \frac{208 + 2\sqrt{1066} - 250}{250} = \frac{-42 + 2\sqrt{1066}}{25}$$

$$\boxed{b_1 = \frac{-42 - 2\sqrt{1066}}{25} + \frac{i(-104 + \sqrt{1066})}{25}, b_2 = \frac{-42 + 2\sqrt{1066}}{25} + \frac{i(-104 - \sqrt{1066})}{25}}$$

6. $iz + 2\bar{z} = i - 1$

តាង $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$

គេបាន $i(a + bi) + 2(a - bi) = i - 1$

$ai + bi^2 + 2a - 2bi = i - 1$

$(2a - b) + (a - 2b)i = i - 1$

$$\begin{cases} 2a - b = -1 \ (1) \\ a - 2b = 1 \ (2) \times (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - b = -1 \\ -2a + 4b = -2 \end{cases}$$

$2b = -1 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2}$ ជួសក្នុង(2)

គេបាន$a - 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$

$a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$

$\boxed{\text{ដូចនេះ} z = -\frac{1}{2}i}$

លំហាត់អនុវត្ត

13.ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$៖

16. $\boldsymbol{z^3+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0}$

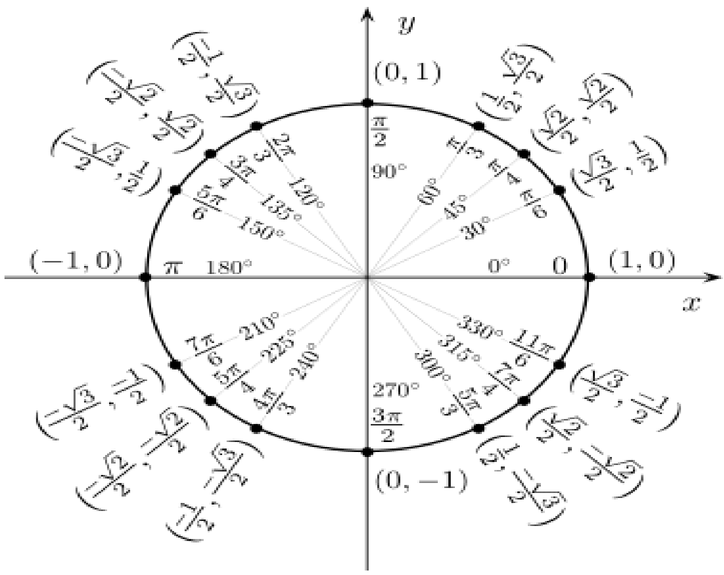
18. $\boldsymbol{e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}=0}$

19. $\log_5|z|+\frac{z+iz}{7}=3+i$

20. $\left(\frac{iz+3}{z-2i}\right)^2-3\left(\frac{iz+3}{z-2i}\right)-4=0$

ជំពូកទី២ ចំនួនកុំផ្លិចត្រីកោណមាត្រ

I. រូបមន្តសង្ខេប



II. ដំណោះស្រាយលំហាត់អនុវត្តន៍

១. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -2 + i$

ក. គណនា $|z_1|$, $|\overline{z_1}|$, $|z_2|^2$, $z_2.\overline{z_2}$, $|z_1.z_2|$ និង $|z_1|.|z_2|$

ចម្លើយ ៖

ក. គណនា $|z_1|$, $|\overline{z_1}|$, $|z_2|^2$, $z_2.\overline{z_2}$, $|z_1.z_2|$ និង $|z_1|.|z_2|$

ដោយ $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -2 + i$

នោះ
$$|z_1| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$
$$|\overline{z_1}| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$
$$|z_2|^2 = \left(\sqrt{(-2)^2 + (1)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$$
$$\begin{aligned} z_2.\overline{z_2} &= (-2 + i)(2 - i) \\ &= -4 + 2i + 2i + 1 \\ &= -3 + 4i \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} |z_1.z_2| &= (2 + 3i)(-2 + i) \\ &= -4 + 2i + 6i + 3 \\ &= -1 + 8i \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$
$$|z_1|.|z_2| = \sqrt{13} \times \sqrt{5} = \sqrt{65}$$

២. គណនាម៉ូឌុលចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ៖

ក. $z = -2015$

ខ. $z = 2i(3+i)(1+i)$

គ. $z = \left(\frac{1+i}{2+i}\right)^4$

ចម្លើយ ៖

ក. $z = -2015$

តាមរូបមន្ត $r = \sqrt{a^2+b^2}$

$= \sqrt{(-2015)^2}$

ដូចនេះ $r = \sqrt{(-2015)^2}$

ខ. $z = 2i(3+i)(1+i)$

$z = -8+4i$

តាមរូបមន្ត $r = \sqrt{a^2+b^2}$

$= \sqrt{(-8)^2+4^2}$

$= \sqrt{80}$

$= 4\sqrt{5}$

ដូចនេះ $r = 4\sqrt{5}$

គ. $z = \left(\frac{1+i}{2+i}\right)^4$

$z = (3+i)^4$

តាមរូបមន្ត $r = \sqrt{a^2+b^2}$

$= \sqrt{(3)^2+1^2}$

$= \left(\sqrt{10}\right)^4$

$= 10^2$

$= 100$

ដូចនេះ $r = 100$

៣. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ៖

ក. $z = -6i$

ខ. $z = \frac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$

គ. $z = \left(\sqrt{3}-i\right)^{100}$

ឃ. $z = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{210}$

ង. $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} - isin\frac{\pi}{3}\right)$

ចម្លើយ ៖

ក. $z = -6i$

$= 0-6i$

$= 6(0-i)$

$z = 6\left(\cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right)$

ដូចនេះ ម៉ូឌុល $= 6$

អាគុយម៉ង់ $= \frac{3\pi}{2}$

ខ. $z = \frac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$

$= \frac{\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^{13}}{\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^{7}}$

$$= \frac{(\sqrt{2})^{13}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{13}}{(\sqrt{2})^{7}\left(\cos\frac{7\pi}{4}-i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^{7}}$$
$$= (2)^6(\cos 9\pi - i\sin 9\pi)$$
$$z = 64(\cos 9\pi - i\sin 9\pi)$$

ដូចនេះ ម៉ូឌុល $= 64$

អាគុយម៉ង់ $= 9\pi$

គ. $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{100}$
$$= \left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\right]^{100}$$
$$= 2^{100}\left[\cos\frac{1100\pi}{6} + i\sin\frac{1100\pi}{6}\right]$$

ដូចនេះ ម៉ូឌុល $= 2^{100}$

អាគុយម៉ង់ $= \frac{1100\pi}{6}$

ឃ. $z = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{210}$
$$= \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{210}$$
$$= (\cos 70\pi - i\sin 70\pi)$$

ដូចនេះ ម៉ូឌុល $= 1$

អាគុយម៉ង់ $= 70\pi$

ង. $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ដូចនេះ ម៉ូឌុល $= -2$

អាគុយម៉ង់ $= \frac{\pi}{3}$

៤. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ (ទម្រង់ប៉ូលែរ)៖

ក. $z = 1 + i\sqrt{3}$

ខ. $z = \sqrt{3} + 3i$

គ. $z = \frac{4}{1+i\sqrt{3}}$

ឃ. $z = 1 - i$

ង. $z = -2$

ច. $z = 2 - 2\sqrt{3}i$

ចម្លើយ ៖

ក. $z = 1 + i\sqrt{3}$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $z = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ខ. $z = \sqrt{3} + 3i$
$$= 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $z = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

គ. $z = \frac{4}{1+i\sqrt{3}}$

$= \frac{4(1-i\sqrt{3})}{4}$

$= 1 - i\sqrt{3}$

$= 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2\left(cos\frac{5\pi}{3} + isin\frac{5\pi}{3}\right)$

ដូចនេះ $z = 2\left(cos\frac{5\pi}{3} + isin\frac{5\pi}{3}\right)$

ឃ. $z = 1 - i$

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

ដូចនេះ $z = \sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

ង. $z = -2$

$= 2(-1 + 0i)$

$= 2(cos\pi + isin\pi)$

ដូចនេះ $z = 2(cos\pi + isin\pi)$

ច. $z = 2 - 2\sqrt{3}i$

$= 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 4\left[cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

ដូចនេះ $z = 4\left[cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

៥. បម្លែងចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ជាទម្រង់ប៉ូលែរ ៖

ក. $z = 2\left(sin\frac{\pi}{7} + icos\frac{\pi}{7}\right)$

ខ. $z = \sqrt{2}\left(sin\frac{\pi}{4} + icos\frac{\pi}{4}\right)$

គ. $z = icos\frac{\pi}{3} + sin\frac{\pi}{3}$

ឃ. $z = 2i\left(sin\frac{\pi}{3} + icos\frac{\pi}{3}\right)$

ង. $z = (1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos x + isinx)$

ចម្លើយ ៖

ក. $z = 2\left(sin\frac{\pi}{7} + icos\frac{\pi}{7}\right)$

$= 2\left[cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right]$

$= 2\left[cos\left(\frac{7\pi-2\pi}{14}\right) + isin\left(\frac{7\pi-2\pi}{14}\right)\right]$

$= 2\left(cos\frac{5\pi}{14} + isin\frac{5\pi}{14}\right)$

ដូចនេះ $z = 2\left(cos\frac{5\pi}{14} + isin\frac{5\pi}{14}\right)$

ខ. $z = -\sqrt{2}\left(sin\frac{\pi}{4} + icos\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= -\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{4\pi-2\pi}{8}\right) + isin\left(\frac{4\pi-2\pi}{8}\right)\right]$

$= -\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $z = -\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$

គ. $z = icos\frac{\pi}{3} + sin\frac{\pi}{3}$

$$= \left[cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \left[cos\left(\frac{3\pi-2\pi}{6}\right)+isin\left(\frac{3\pi-2\pi}{6}\right)\right]$$
$$= \left(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $z = \left(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)$

ឃ. $z = 2i\left(sin\frac{\pi}{3}+icos\frac{\pi}{3}\right)$

$$= 2\left[isin\frac{\pi}{3}+(i)^2cos\frac{\pi}{3}\right] \quad , i^2 = 1$$
$$= 2\left[-cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right]$$
$$= 2\left[cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2\left(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $z = 2\left(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)$

ង. $z = (1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos x+isinx)$

$$= 2\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)\left[\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)(cosx+isinx)\right]$$
$$= 2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)(cosx+isinx)$$
$$= 2\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{12}+isin\frac{7\pi}{12}\right)(cosx+isinx)$$
$$= 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)+isin\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)\right]$$

ដូចនេះ $z = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)+isin\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)\right]$

៦.ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពិជគណិតដែល

$$j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

1. $z_1=\frac{1-j+j^2}{1+j-j^2}$ យើងបាន $z_1=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}{1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2}-\frac{2}{4}}{1-\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{4-2-2}{4}}{\frac{4-1}{2}}=0$$ ។

2. $z_2=\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^3+\left(\frac{j+j^2}{j-j^2}\right)$ យើងបាន $z_2=\left(\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^3+\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}\right)$

$$=\left(\frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^3+\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\left(-\frac{1}{2}-2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3}+\left(\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}}\right)$$

$$=\frac{\frac{27}{8}-\frac{27\sqrt{3}i}{8}-\frac{27}{8}+\frac{3\sqrt{3}i}{8}i}{\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}i}{8}-\frac{9}{8}-\frac{3\sqrt{3}i}{8}}+\left(\frac{-2}{0}\right)\qquad=\frac{-24\sqrt{3}i}{-1}=24\sqrt{3}i$$ ។

៧.គណនា

ក. $\frac{1}{2i}\left(i^7-\frac{1}{i^7}\right)=\frac{1}{2i}\left(-i+\frac{1}{i}\right)$

$=\frac{1}{2i}\left(\frac{-i^2+1}{i}\right)=\frac{-i^2+1}{-2}$

$=\frac{-1}{2}+\frac{i^2}{2}=\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}=-1$ ។

ខ. $i^9+i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}=i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}+i^{4n+0}+i^{4n+1}$

$=i-1-i+1+i=i$ ។

ឃ.គណនា i^2, i^3, i^4, i^5 និងទាញរក i^{24} និង i^{25}

$i^2=-1$ $\quad i^3=-i$ $\quad i^4=1$ $\quad i^5=i$

គេបាន៖ $i^{24}=i^{4n+0}=1$ $\quad i^{25}=i^{4n+1}=i$ ។

ង.គណនា $1+i+i^2+i^3$ ទាញរក $i^{2013}+i^{2012}+i^{2011}+i^{2010}$

គណនា $1+i+i^2+i^3$

យើងបាន៖ $1+i-1-i=0$ ។

ទាញរក $i^{2013}+i^{2012}+i^{2011}+i^{2010}$

$=i^{4\times503+1}+i^{4\times503+0}+i^{4\times502+2}+i^{4\times502+0}$

$=i+1-1+1=1+i$ ។

៨.កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឲ្យសមភាពនីមួយៗខាងក្រោមពិត

ក. $(2x+3yi)-(xi=3y)=i(7+4i)$

$2x+3yi-xi-3y=7i+4i^2$

$(2x-3y)-(x-3y)i=-4+7i$

$\begin{cases}2x+3y=-4\\ -x-3y=7(2)\end{cases}$

$\begin{cases}2x-3y=-4\\ -2x+6y=14\end{cases}$

នោះគេបាន $3y=10 \Rightarrow y=\frac{10}{3}$

យក $y=\frac{10}{3}$ ជួសក្នុងសមីការ(១)

$2x-3y=-4$

$$2x-3\left(\frac{10}{3}\right)=-4$$

$2x-\frac{30}{3}=-4 => 2x-10=-4$ នោះ $x=3$

ដូចនេះ $x=3; y=\frac{10}{3}$

ខ. $(x+iy)(1-i)=3-i$

$$x-xi+yi-yi^2=3-i$$

$$x+y-xi+yi=3-i$$

$$\begin{cases} x+y=3(1) \\ -x+y=-1(2) \end{cases}$$

នោះគេបាន៖ $2x=2 => x=1$

យក $x=1$ ជួសក្នុងសមីការ(១)

$x+y=3 =>$ គេបាន $1+y=3 => y=2$

ដូចនេះ $x=1; y=2$

គ. $(1-2i)x+(1+2i)y=1+i$

$$x-2xi+y+2yi=1+i$$

$$x+y-2xi+2yi=1+i$$

$\begin{cases} x+y=1(2)(1) \\ -2x+2y=1(2) \end{cases} => \begin{cases} 2x+2y=2 \\ -2x+2y=1 \end{cases}$ នោះគេបាន៖ $4y=3 => y=\frac{3}{4}$

យក $y=\frac{3}{4}$ ជួសក្នុងសមីការ(១)

នោះយើងបាន៖ $x+\frac{3}{4}=1 => x=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ $x=\frac{1}{4}; y=\frac{3}{4}$

ឃ. $\frac{x+iy}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=0$

$$\frac{(x+yi)(1+i)+(1-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}=0$$

$$\frac{x+xi+yi+yi^2+1-i-i+i^2}{1^2-i^2}=0$$

$$\frac{x+xi+yi-y+1-2i-1}{2}=0$$

$$\frac{x-y}{2}+\frac{x+y-2}{2}i=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{x-y}{2}=0\\ \dfrac{x+y-2}{2}=0\end{cases} => \begin{cases}x-y=0\\ x+y=2\end{cases} => \begin{cases}x=y(1)\\ x+y=2(2)\end{cases}$$

យក $x=y$ ជួសក្នុងសមីការ(១)

នោះគេបាន៖ $x+y=2 => y+y=2 => y=1$

យក $y=1$ ជួសក្នុងសមីការ(១)

នាំឲ្យ $x=y=1$

ដូចនេះ $x=1; y=1$

ង. $\dfrac{3+2i}{5+i}=x+yi$

$$\frac{(3+2i)(5-i)}{(s+i)(s-i)}=x+yi$$

$$\frac{15-3i+10i-2}{5^2+1^2}=x+yi$$

$$\frac{13+7i}{26}=x+yi => \begin{cases}x=\dfrac{13}{26}\\ y=\dfrac{7}{26}\end{cases}$$

ដូចនេះ $x=\dfrac{13}{26}; y=\dfrac{7}{26}$

លំហាត់អនុវត្ត

ច. $y^2-4^x-8+i2^{x+1}+y+1=0$ ឆ. $\left(3^x\times 2^y-\dfrac{1}{9}\right)+iy-x-2=0$

ជ. $\dfrac{x+iy}{4-3i}=\dfrac{5}{25}+\dfrac{10}{25}i$ ។

៩.កំណត់ចំនួនពិត x ដើម្បីឲ្យចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

ក. $z_1=\dfrac{x^2-x-2}{x}+\left(x^3-3x+2\right)i$

1. ជាចំនួនពិត

z ជាចំនួនពិតកាលណាផ្នែកនិម្មិតស្មើសូន្យ

យើងបាន៖ $\frac{x^2-x-2}{x}=0$

$x^2-x-2=0$

នោះគេបានតាម $a-b+c=0$

$=> x_1=-1, x_2=-\frac{c}{a}=2$

ដូចនេះ $x_1=-1, x_2=2$ ។

2. ជាចំនួននិម្មិត

z ជាចំនួននិម្មិតកាលណាផ្នែកពិតស្មើសូន្យ

យើងបាន៖ $x^3-3x+2=0$

$(x-1)\left(x^2+x-2\right)=0$

$\begin{cases} x-1=0 => x_1=1(1) \\ x^2+x-2=0(2) \end{cases}$

$x^2+x-2=0$ នោះគេបានតាម $a+b+c=0$

$=> x_2=1, x_3=-2$

ដូចនេះ $x_1=1, x_2=1, x_3=-2$ ។

ខ. $z_2=\left(2^{x^2+3x-2}-4\right)+\log_2\left((x^2+x)-1\right)i$

1. ជាចំនួនពិត

យើងបាន៖ $2^{x^2+3x-2}-4=0$

$2^{x^2+3x-2}=2^2$

$x^2+3x-2=2$

$x^2+3x-4=0$ នោះគេបានតាម $a+b+c=0$

$=> x_1=1, x_2=-4$

ដូចនេះ $x_1=1, x_2=-4$ ។

2. ជាចំនួននិម្មិត

គេបាន៖ $\log_2\left(x^2+x\right)-1=0$

$$\log_2\left(x^2+x-1\right)=\log_2 1$$

$$x^2+x-1=1$$

$x^2+x-2=0$ នោះគេបានតាម $a+b+c=0$

$$=> x_1=1, x_2=-2$$

ដូចនេះ $x_1=1, x_2=-2$ ។

គ. $z_3=\left(\sin -1\right)+i\sin x$

1. ជាចំនួនពិត

យើងបាន៖ $\sin x-1=0$

$$\sin x=1$$

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{2} => x=\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $x=\frac{\pi}{2}$ ។

2. ជាចំនួននិម្មិត

យើងបាន៖ $\sin x=0$

$$\sin x=\sin 0 => x=0$$

ដូចនេះ $x=0$ ។

ឃ. $z_4=\left(\cos x+1\right)+i\cos x$

1. ជាចំនួនពិត

យើងបាន៖ $\cos x+1=0$

$$\cos x=-1$$

$$\cos x=\cos\pi => x=\pi$$

ដូចនេះ $x=\pi$ ។

2. ជាចំនួននិម្មិត

យើងបាន៖ $\cos x=0$

$\cos x=\cos\frac{\pi}{2} => x=\frac{\pi}{2}$ ដូចនេះ $x=\frac{\pi}{2}$ ។

១០.គេមាន $z=1-2i$ និង $w=5+3i$

ក.បង្ហាញថា $\overline{w+z}=\overline{w}+\overline{z}$

យើងបាន៖ $w+z=5+3i+1-2i$

$=6+i(1)$

នោះ $\overline{w+z}=6-i$

ហើយ $\overline{w}+\overline{z}=5-3i+1+2i$

$=6-i(2)$

តាម(១)និង(២)

ដូចនេះ យើងបាន៖ $\overline{w+z}=\overline{w}+\overline{z}$ ពិត។

ខ.បង្ហាញថា $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$

យើងបាន៖ $z-w=1-2i-(5+3i)$

$=1-2i-5-3i$

$=-4-5i$

នោះ $\overline{z-w}=-4+5i$

ហើយ $\overline{z}-\overline{w}=1+2i-(5-3i)$

$=1+2i-5+3i$

$=-4+5i(2)$

តាម(១)និង(២)

ដូចនេះ យើងបាន៖ $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}$ ពិត ។

គ.គេឲ្យ $M=(1-i)x+(1+i)y$

កំណត់ x និង y ដើម្បីឲ្យ $M=z^2-w+3i$

$M=(1-i)x+(1+i)y$

តែ $z=1-2i$ និង $w=5+3i$

យើងបាន៖ $(1-i)x+(1+i)y=(1-2i)^2-5-3i+3i$

$x-xi+y+yi=1-4i-4-5$

$$x+y+(y-x)i=-8-4i$$

$$\begin{cases} x+y=-8(1) \\ -x+y=-4(2) \end{cases}$$

នោះគេបាន៖ $2y=-12 \Rightarrow y=-\frac{12}{2}=-6$

យក $y=-6$ ជួសក្នុងសមីការ(១)

នោះគេបាន៖ $x-6=-8$

$$x=-2$$

ដូចនេះ $\boxed{x=-2; y=-6}$ ។

មេរៀនទី ២

ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

រូបមន្តសង្ខេប

1. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 2. $z^n=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2\pi\kappa}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi\kappa}{n}\right)$

3. $\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi)$

4. $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)$

5. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ 6. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

លំហាត់និងដំណោះស្រាយ

11. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

ក. $z^2+25=0$

$z^2=-25 \Leftrightarrow z^2=25(1+0i)\Leftrightarrow z^2=25(\cos\pi+i\sin\pi)$

$w=\sqrt{25}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)$

បើk=0 នោះ $w_0=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

បើk=1នោះ $w_1=5\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

ខ. $z^3+8i=0$

$z^3=0-8i \Leftrightarrow z^3=8(0+i) \Leftrightarrow z^3=8(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$

$w=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{2\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi+2k\pi}{3}\right)$

បើK=0នោះ $w_0=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

បើk=1នោះ $w_1=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

បើk=2នោះ $w_2=2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$

គ. $z^4 = 8\left(-1+i\sqrt{3}\right)$

$$z^4 = 16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow z^4 = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$w = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{2\pi+6k\pi}{12}+i\sin\frac{2\pi+2k\pi}{12}\right)$$

បើK=0នោះ $w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

បើK=1នោះ $w_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

បើK=2នោះ $w_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

បើK=3នោះ $w_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

ឃ. $z^5 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = 0$

$$z^5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \Leftrightarrow z^5 = \left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow w = \left(\cos\frac{5\pi+8k\pi}{20}+i\sin\frac{5\pi+8k\pi}{20}\right)$$

បើk=0នោះ $w_0 = \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

បើk=1នោះ $w_1 = \left(\cos\frac{13\pi}{20}+i\sin\frac{13\pi}{20}\right)$

បើk=2នោះ $w_2 = \left(\cos\frac{21\pi}{20}+i\sin\frac{21\pi}{20}\right)$

បើk=3នោះ $w_3 = \left(\cos\frac{29\pi}{20}+i\sin\frac{29\pi}{20}\right)$

បើk=4នោះ $w_4 = \left(\cos\frac{37\pi}{20}+i\sin\frac{37\pi}{20}\right)$

12. ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថារូបមន្តដឺម័រ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n

តាង $z = \cos\theta + i\sin\theta$

យើងមាន $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

គេបាន $z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

បើn=1 នោះ $(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ ពិត

បើn=2នោះ $z^2=z*z=\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)$

$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ ពិត

បើn=3នោះ $z^3=z^2*z=\cos(2\theta+\theta)+i\sin(2\theta+\theta)$

$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$ ពិត

………………………………..

បើn=nនោះ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ពិត

បើn=n+1នោះ $z^{n+1}=z^n*z=(\cos n\theta+i\sin n\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=(\cos(n\theta+\theta)+i\sin(n\theta+\theta))$

$=(\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta)$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$

ខ. ដោយប្រើរូបមន្តដែលមានស្រាយរួចខាងលើបង្ហាញថាសមភាពខាងក្រោមពិត

1. $\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

គេមាន $\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos^2\theta+i\sin^2\theta}$

$=\cos\theta-i\sin\theta$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$

2. $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin n\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\cos\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$, $\sin\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

គេបាន $\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)^n=\cos n\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin n\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

ដូចនេះ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

13.ស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក. $$\frac{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^5(\cos2\theta+i\sin2\theta)^3}{(\cos4\theta+i\sin4\theta)^{-9}(\cos5\theta+i\sin5\theta)^9}=1$$

$$\frac{(\cos15\theta+i\sin15\theta)(\cos6\theta+i\sin6\theta)}{(\cos(-45\theta)+i\sin(-45\theta))(\cos45\theta+i\sin45\theta)^9}=1$$

$$\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos0+i\sin0)}{(\cos0+i\sin0)(\cos\theta+i\sin\theta)}=1$$

$1=1$ ពិត

ដូចនេះ $$\boxed{\frac{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^5(\cos2\theta+i\sin2\theta)^3}{(\cos4\theta+i\sin4\theta)^{-9}(\cos5\theta+i\sin5\theta)^9}=1}$$

ខ. $$\left(\frac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}\right)^n=\cos\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]$$

$$\left(\frac{(1+\sin\varphi+i\cos\varphi)^2}{(1+\sin\varphi)^2-i\cos^2\varphi}\right)^n=\cos\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]$$

$$\left(\frac{1+\sin^2\varphi-\cos^2\varphi+2\sin\varphi+2i\sin\varphi\cos\varphi+2i\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)}\right)^n=\cos\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]$$

$$\left(\frac{2\sin\varphi+2\sin^2\varphi+2i\cos\varphi+2i\sin\varphi\cos\varphi}{2(1+\sin\varphi)}\right)^n=\cos\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]$$

$$\left(\frac{2\sin\varphi(1+\sin\varphi)+2i\cos\varphi(1+\sin\varphi)}{2(1+\sin\varphi)}\right)^n=\cos\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]$$

$$(\sin\varphi+i\cos\varphi)^n=\cos\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]$$

$$\left(\cos\left[\left(90^\circ-\varphi\right)\right]+i\sin\left[\left(90^\circ-\varphi\right)\right]\right)^n=\cos\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]$$

នោះ $\cos\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]=\cos\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]$ ពិត

ដូចនេះ $$\boxed{\left(\frac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}\right)^n=\cos\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(90^\circ-\varphi\right)\right]}$$

គ. $$(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\left[2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

នោះ $2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)}$

ឃ. $\left(\sqrt{3}+i\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$

$$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$

នោះ $2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\left(\sqrt{3}+i\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)}$

ង. $\left(\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}\right)^n = \frac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}$

$$\left(\frac{\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{i\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x}-i\frac{\sin x}{\cos x}}\right)^n = \frac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx} = \left(\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x+i\sin(-x)}\right)^n = \frac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}$$

$$\frac{\cos nx+i\sin nx}{\cos nx-i\sin nx}=\frac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx} = \frac{\frac{\cos nx}{\cos nx}+\frac{i\sin nx}{\cos nx}}{\frac{\cos nx}{\cos nx}-i\frac{\sin nx}{\cos nx}}=\frac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}$$

នោះ $\frac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}=\frac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}$

ដូចនេះ $\boxed{\left(\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}\right)^n = \frac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}}$

ច. $\frac{1+\sin x+i\cos x}{1+\sin x-i\cos x}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$\frac{(1+\sin x+i\cos x)^2}{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\frac{2(1+\sin x)(\sin x+i\cos x)}{2(1+\sin x)}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\cos x+i\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1+\sin x+i\cos x}{1+\sin x-i\cos x}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

ឆ. គេឲ្យ $z=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$ បង្ហាញថា $(1+z)^3=8\cos^3\frac{2\pi}{5}\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$

យើងមាន $z=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$

នោះ $(1+z)^3=\left(1+\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)^3$

$$=\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5}+2i\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\right)^3$$

$$=\left(2\cos\frac{2\pi}{5}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)\right)^3$$

$$=8\cos^3\frac{2\pi}{5}\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{(1+z)^3=8\cos^3\frac{2\pi}{5}\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)}$

ជ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$ នោះ $\frac{x^n+1}{x^n}=2\cos n\theta$

យើងមាន $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$

$$x^2-2\cos\theta+1=0$$

$$\Delta'=\cos^2-1 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta'}=\sqrt{\cos^2\theta-1}=\sqrt{i^2\sin\theta}=i\sin\theta$$

នោះ $\Leftrightarrow x^{-1}=\frac{1}{x}=\begin{cases}\cos\theta-i\sin\theta\\ \cos\theta+i\sin\theta\end{cases}$

ហើយ $x^n=\cos n\theta\pm i\sin n\theta \Leftrightarrow \frac{1}{x^n}=x^{-n}=\begin{cases}\cos n\theta-i\sin n\theta\\ \cos n\theta+i\sin n\theta\end{cases}$

គេបាន $x+\frac{1}{x}=\begin{cases}\cos\theta+i\sin\theta+\cos\theta-i\sin\theta\\ \cos\theta-i\sin\theta+\cos\theta+i\sin\theta\end{cases}$

$x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$ ពិត

នោះ $x^n+\frac{1}{x^n}=\begin{cases}\cos n\theta+i\sin n\theta+\cos n\theta-i\sin n\theta\\ \cos n\theta-i\sin n\theta+\cos n\theta+i\sin n\theta\end{cases}$

$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{x+\frac{1}{x}=2\cos\theta \text{ នោះ } x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta}$

14.គណនាតម្លៃកន្សោម

1.$\left(\sqrt{3}-i\right)^{\frac{1}{2}}$

$=2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{\left(\sqrt{3}-i\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$

2.$\left(\frac{1}{1+i}\right)^{2016}$

$=\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2016}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2016}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2016}$

$=2^{-1008}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2016}$

$=2\frac{1}{2^{1008}}$

ដូចនេះ $\boxed{\left(\frac{1}{1+i}\right)^{2016}=2\frac{1}{2^{1008}}}$

15. ក.ដោះស្រាយសមីការ $z^2-2za-2i+\sin^2 a=0;\left(a\in\mathbb{R}\right)$

យើងមាន $z^2-2za-2i+\sin^2 a=0$

$\Delta'=\left(-\sin a\right)^2+2i-\sin^2 a$ នោះ $\Delta'=\sqrt{2i}$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=\sin a-\sqrt{2i}\ ;z_2=\sin a+\sqrt{2i}}$

ខ.តាង $z';z''$ ជាឫសសមីការនេះដែល $z=\frac{z'-z''}{2}+\sqrt{2}$ ។ គណនា $|z|;\arg(z)$

បើ $z';z''$ តាង $z'=\sin a-\sqrt{i2}$; $z''=\sin a+\sqrt{i2}$

$$z=\frac{z'-z''}{2}+\sqrt{2} \ = z=\frac{\sin a-\sqrt{2i}-\sin a-\sqrt{2i}}{2}+\sqrt{2}$$

$$z=-\sqrt{2i}+\sqrt{2}$$

$$z=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2i}}{2}\right)$$ នោះ $z=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{|z|=2;\arg(z)=\frac{7\pi}{4}}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

1.ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

ក. $z^4+81=0$ ខ. $z^3=4\sqrt{2}-4i$ គ. $z^4+8+i8\sqrt{3}=0$

ឃ. $z^2+|z|^2=0$

2.គណនាតម្លៃកន្សោមខាងក្រោម

ក. $\frac{1}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{619}}$ ខ. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2017}$ គ. $\left(2+2i\sqrt{3}\right)^{\frac{-5}{2}}$

ឃ. $i^n, n\in\mathbb{N}$

មេរៀនទី ២: ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

1.ដោះស្រាយសមីការ

ក. $\left|z-2-\sqrt{2}i\right|^{\log_{|z|}(z\bar{z})}=\log_z\left|\dfrac{2+\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}\right|$, $z\bar{z}=|z|^2$ឬ$|z|=\sqrt{z\bar{z}}$

$$\left|z-2-\sqrt{2}i\right|^{\log_{|z|}|z|^2}=\log_z\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}\right)\overline{\left(\frac{2+\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}\right)}}\ ,\ \log_a a^2=2$$

$$\left|z-2-\sqrt{2}i\right|^2=\log_z\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}\right)\left(\frac{2-\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i}\right)}$$

$$\left|z-2-\sqrt{2}i\right|^2=\log_z 1$$

$$\left|z-2-\sqrt{2}i\right|^2=0$$

$$z-2-\sqrt{2}i=0$$

$$z=2+\sqrt{2}i$$

ខ. $\dfrac{z}{3+4i}+\dfrac{z-i}{5i}=\dfrac{5}{3-4i}$

$$\frac{5iz+(z-i)(3+4i)}{(3+4i)5i}=\frac{5}{3-4i}$$

$$\frac{5iz+3z-3+4iz-4i}{15i+20i^2}=\frac{5}{3-4i}$$

$$\frac{9iz+3z-3-4i}{15i-20}=\frac{5}{3-4i}$$

$$\frac{(9i+3)z-3-4i}{5(3i-4)}=\frac{5}{3-4i}$$

$$(9i+3)z-3-4i=\frac{5}{3-4i}.5(3i-4)$$

$$(9i+3)z-3-4i=\frac{25(3i-4)}{3-4i}$$

$$(9i+3)z-3-4i=\frac{25(3i-4)(3i-4)}{(3-4i)(3i+4i)}$$

$$(9i+3)z-3-4i=\frac{25(9i-12-12-16i)}{9+16}$$

$$(9i+3)z-3-4i=\frac{25(-24-7i)}{25}$$

$$(9i+3)z-3-4i=-24-7i$$

$$(9i+3)z=-21-3i$$

$$z=\frac{-21-3i}{9i+3}$$

$$z=\frac{-7-i}{1+3i}$$

$z = \frac{(-7-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$

$z = \frac{-7+21i-i-3}{1+9}$

$z = \frac{20i-10}{10}$

ដូច្នេះ $z = 2i - 1$

2. បង្ហាញថាបើ α ជាឫសនៃពហុធាមួយមានមេគុណជាចំនួនពិតនោះ $\overline{\alpha}$ ក៏ជាឫសដែរ។តើលទ្ធផលនេះត្រឹមត្រូវឬទេចំពោះពហុធាមានមេគុណជាចំនួនកុំផ្លិច។

ចម្លើយ:

ចំពោះពហុធាមួយមានមេគុណជាចំនួនពិត

តាង $ax^2 + bx + c = 0 \quad , a, b \in \mathbb{R} \ , \Delta < 0$

បើ$\Delta < 0$ នោះ $\sqrt{\Delta} < 0$ គេបាន $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{\Delta}$

គេបាន$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$

ទាញ$x_1 = \alpha \ , x_2 = \overline{\alpha}$

ចំពោះពហុធាមានមេគុណជាចំនួនកុំផ្លិច

តាង $(a+bi)x^2 + (a+bi)x + (a+bi) = 0$

$\Delta = (a+bi)^2 - 4(a+bi)(a+bi)$

$= (a+bi)^2 - 4(a+bi)^2$

$= -3(a+bi)^2$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-3(a+bi)^2}$

$= i\sqrt{3}(a+bi)$

$x_1 = \frac{-(a+bi) + i\sqrt{3}(a+bi)}{2(a+bi)}$

$= -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$x_2 = \frac{-(a+bi) - i\sqrt{3}(a+bi)}{2(a+bi)}$

$= -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

ទាញ$x_1 = \alpha \ , x_2 = \overline{\alpha}$

ដូច្នេះ: αនឹង$\bar{\alpha}$ ជាឬសនៃពហុធាមួយមានមេគុណជាចំនួនពិតផង និងកុំផ្លិចផង។

3.រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\frac{50}{\bar{z}}-\frac{10}{z}=2+9i$ ដែល$|z|=2\sqrt{10}$ ។

ចម្លើយ: គេមាន $\frac{50}{\bar{z}}-\frac{10}{z}=2+9i$ (1)

តាង$z=a+bi$,$\bar{z}=a-bi$ (2)

យក(1)ជួសក្នុង(2)គេបាន

$$\frac{50}{a-bi}-\frac{10}{a+bi}=2+9i$$
$$\frac{50(a+bi)}{a-bi}-\frac{10(a-bi)}{a+bi}=2+9i$$
$$\frac{50a+50bi}{a^2+b^2}-\frac{10a+10bi}{a^2+b^2}=2+9i$$
$$\frac{40a+60bi}{a^2+b^2}=2+9i$$
$$40a+60bi=(2+9i)(a^2+b^2)$$

ដោយ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{10}$

$$a^2+b^2=(2\sqrt{10})^2=40$$

គេបាន $40a+60bi=(2+9i)40$

$$40a+60bi=80a+36$$
$$\begin{cases}40a=80\Rightarrow a=2\\60b=360\Rightarrow b=6\end{cases}$$
$$\Rightarrow z=a+bi=2+6i$$

ដូច្នេះ $z=2+6i$ ។

4.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទដឺម័រតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា$z^n=\cos(n\alpha)+isin(n\alpha)$

ដែល $z=\cos\alpha+isin\alpha$ ចំពោះ $n=1,2,3,\ldots$ ។

ចម្លើយ:ដោយយើងមាន $z=\cos\alpha+isin\alpha$, $n=1,2,3,\ldots$

$$z^n=\cos(n\alpha)+isin(n\alpha)$$

ចំពោះ $n=1$ នោះ$z^1=(\cos\alpha+isin\alpha)^1=\cos\alpha+isin\alpha$

ចំពោះ $n=2$ នោះ$z^2=(\cos\alpha+isin\alpha)^2=\cos2\alpha+isin2\alpha$

ចំពោះ $n=3$ នោះ$z^3=(\cos\alpha+isin\alpha)^3=\cos3\alpha+isin3\alpha$

ចំពោះ $n=n$ នោះ$z^n=(\cos\alpha+isin\alpha)^n=\cos(n\alpha)+isin(n\alpha)$

ចំពោះ $n=n+1$ នោះ$z^{n+1}=(\cos\alpha+isin\alpha)^{n+1}=\cos(n+1)\alpha+isin(n+1)\alpha$ ពិត

ដូច្នេះ $z^n = \cos(n\alpha) + isin(n\alpha)$ ។

5.គេឱ្យពហុធា$P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$ ចូរគណនា $P(i)$

រួចដោះស្រាយសមីការ $P(z) = 0$ ក្នុង ℂ ។

ចម្លើយ: គេមាន $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$

$$P(i) = i^3 - (2+i)i^2 + 2(1+i)i - 2i$$
$$= i^3 - 2i^2 - i^3 + 2i + 2i^2 - 2i$$
$$P(i) = 0$$

ដូច្នេះ: $P(i) = 0$ ។

$$P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$$
$$z^3 - 2z^2 - iz^2 + 2z + 2iz - 2i = 0$$
$$(z-i)(z^2 - 2z + 2) = 0$$
$$\Rightarrow z - i = 0 \Leftrightarrow z = i$$
$$z^2 - 2z + 2 = 0$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2$$
$$= -4$$
$$\sqrt{\Delta} = 2i$$

$$z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$$
$$z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$$

ដូច្នេះ : $z_1 = 1 - i$, $z_1 = 1 - i$ ។

មេរៀនទី៣

អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រ

(Complex Number Apply to Geometry)

លំហាត់

6.រូបខាងស្ដាំបង្ហាញពីការេ$OABC$ ។បើ $\overrightarrow{OA} = 5 + 2i$សរសេរវិចទ័រខាងក្រោយជាទម្រង់$a + bi$

ក. $\overrightarrow{CB}$　　ខ. $\overrightarrow{BC}$　　គ. $\overrightarrow{OC}$

ចម្លើយ

សរសេរវិចទ័រខាងក្រោមជាទម្រង់$a + bi$

ក. $\overrightarrow{CB}$

ដោយ $OABC$ ជាការេនោះ$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

តែ$\overrightarrow{OA} = 5 + 2i$ នោះ $\overrightarrow{OA} = (5,2)$

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$នោះ$\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OC} = 0$

តាង $C(x, y)$ ជាកូអរដោនេចំណុច C

$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OC} = 0$

$5x + 2y = 0 \ (1)$

$|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA}|$

$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{29}$

$x^2 + y^2 = 29 \ (2)$

(1) និង (2)

$$\begin{cases} 5x + 2y = 0 \ (1) \\ x^2 + y^2 = 29 \ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{2}x \ (1) \\ x^2 + y^2 = 29 \ (2) \end{cases}$$

យក (1) ចជំនួស (២)

$x^2 + \left(-\frac{5}{2}x\right)^2 = 29$

$4x^2 + 25x^2 - 116 = 0$

$29x^2 = 116 \Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = \pm 2$ នោះ $y = \mp 5$

$\Rightarrow C(2, -5); C(-2,5)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = 2 - 5i$ ឬ$\overrightarrow{OC} = -2 + 5i$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{CB} = 2 - 5i$ ឬ$\overrightarrow{CB} = -2 + 5i$ ។

ខ. $\overrightarrow{BC}$

ដោយ$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} = 2 - 5i$

ឬ$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} = -2 + 5i$

ដូចនេះ $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2 - 5\mathrm{i}$ ឬ$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -2 + 5\mathrm{i}$ ។

គ. $\overrightarrow{OC}$

ដោយ$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = 2 - 5i$

ឬ$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = -2 + 5i$

ដូចនេះ $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2 - 5\mathrm{i}$ ឬ$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -2 + 5\mathrm{i}$ ។

លំហាត់

7. គេឲ្យចំនួនពិត α មួយដែល $-\pi < \alpha < \pi$។

ក. បង្ហាញថា $\sin^2\alpha - 2(1+\cos^2\alpha) = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$ ។

ខ. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការ$Z^2 - 2Z\sin\alpha + 2(1+\cos\alpha) = 0$ ។

គ. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់ នៃឫសនីមួយៗជាអនុគមន៍ α

ចម្លើយ

ក. បង្ហាញថា $\sin^2\alpha - 2(1+\cos^2\alpha) = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$

យើងមាន$\sin^2\alpha - 2(1+\cos^2\alpha) = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$

$$\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$
$$4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} - 4\cos^2\frac{\alpha}{2} = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$
$$4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$
$$-4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$
$$-4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = -4\cos^4\frac{\alpha}{2}$$
$$-4\cos^4\frac{\alpha}{2} = -4\cos^4\frac{\alpha}{2} \text{ ពិត}$$

ខ. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការ$Z^2 - 2Z\sin\alpha + 2(1+\cos\alpha) = 0$

តាម $\Delta' = (-\sin\alpha)^2 - 2(1+\cos\alpha)$

$$= \sin^2\alpha - 2 - 2\cos\alpha$$
$$= 1 - \cos^2\alpha - 2 - 2\cos\alpha = -(\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1)$$

$= -(\cos\alpha+1)^2$

$=> \sqrt{\Delta}= \sqrt{-(\cos\alpha+1)^2}$

$=> \sqrt{\Delta}= (\cos\alpha+1)i$

$=> Z_1 = \sin\alpha-(\cos\alpha+1)i\,, Z_2 = \sin\alpha+(\cos\alpha+1)i$

ដូចនេះ $Z_1 = \sin\alpha-(\cos\alpha+1)i\,, Z_2 = \sin\alpha+(\cos\alpha+1)i$ ។

គ. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់ នៃឬសនីមួយៗជាអនុគមន៍ α

យើងមាន $Z_1 = \sin\alpha-(\cos\alpha+1)i$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-2i\cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$
$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)+i\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right]$$
$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

ដូចនេះ $r = 2\cos\frac{\alpha}{2}\,, Arg = \left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)+2K\pi, K\epsilon Z$

យើងមាន $Z_2 = \sin\alpha+(\cos\alpha+1)i$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2i\cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

ដូចនេះ $r = 2\cos\frac{\alpha}{2}\,, Arg = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+2K\pi, K\epsilon\mathbb{Z}$ ។

លំហាត់

៨ នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិចមួយ .A និងB ជារូបតំណាងឲ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 រៀងគ្នា ។ គណនាប្រវែង AB និងកូអរដោនេចំណុចកណ្តាលនៃ AB បើ

ក .$z_1 = 4+5i$ និង $z_2 = 3+2i$ ខ .$z_1 = 11-6i$ និង $z_2 = -1$

ចម្លើយ

ក .$z_1 = 4+5i$ និង $z_2 = 3+2i$

+រកប្រវែង AB

ដោយ $z_1 = 4+5i$

$z_2 = 3+2i$

នាំឲ្យ $AB = |z_2 - z_1| = \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (2-5)^2}$

ដូចនេះ: $\boxed{AB = \sqrt{10}}$ ឯកតាប្រវែង ។

_រកកូអរដោនេនៃចំណុចកណ្ដាលនៃ AB

តាង P ជាកូអរដោនេចំណុចកណ្ដាលនៃ AB

នាំឲ្យ $z_p = \frac{z_2+z_1}{2} = \frac{4+5i+3+2i}{2} = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}i$

ដូចនេះ: $\boxed{z_p = \left(x = \frac{7}{2}\ ;\ y = \frac{7}{2}\right)}$ ។

ខ. $z_1 = 11 - 6i$ និង $z_2 = -1$

+រកប្រវែង AB

ដោយ $z_1 = 11 - 6i$

$z_2 = -1$

នាំឲ្យ $AB = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)} = \sqrt{(-1-11)^2 + (0-6)^2}$

$= \sqrt{180} = \sqrt{9 \times 20} = \sqrt{3^2 \times 2^2 \times 5} = 6\sqrt{5}$

ដូចនេះ: $\boxed{AB = 6\sqrt{5}}$ ឯកតាប្រវែង ។

_រកកូអរដោនេនៃចំណុចកណ្ដាលនៃ AB

តាង P ជាកូអរដោនេចំណុចកណ្ដាលនៃ AB

នាំឲ្យ $z_p = \frac{z_2+z_1}{2} = \frac{11-6i+(-1)}{2} = \frac{12-6i}{2} = 6 - 3i$

ដូចនេះ: $\boxed{z_p = (x = 6\ , y = 3)}$ ។

លំហាត់

៩ គណនាចម្ងាយរវាងពីរចំណុច.A និងB នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

ក .A និងB មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 2i$

ខ .A និងB មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$

គ .A និងB មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 1 + i$ ។

<u>ចម្លើយ</u>

ក .A និងB មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 2i$

តាង A មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_1 = 1 + i$

B មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_2 = 2 + 2i$

នាំឲ្យ $z_2 - z_1 = 2 - 2i - 1 - i$

$= (2 - 1) + (-2 + 1)i$

$= 1 - 3i$

$|z_2 - z_1| = \sqrt{1 + (-3)^2}$

$= \sqrt{4} = 2$

ដូចនេះ $\boxed{z_2 - z_1 = 2}$ ។

ខ. A និងB មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$

តាង A មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_1 = 2 + 2i$

B មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$

នាំឲ្យ $z_2 - z_1 = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{3}\right) - (2 + 2i)$

$= \sqrt{2} + i\sqrt{3} - 2 - 2i$

$= \left(\sqrt{2} - 2\right) + \left(\sqrt{3} - 2\right)i$

$= \sqrt{\left(\sqrt{2} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{3} - 2\right)^2}$

$= \sqrt{(2 - 4) + (3 - 4)}$

$= \sqrt{(-2) + (-1)} = \sqrt{-3} = \sqrt{3}i$

ដូចនេះ $\boxed{z_2 - z_1 = \sqrt{3}i}$ ។

គ. A និងB មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 1 + i$

តាង A មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_1 = 3 - 2i$

B មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_2 = 1 + i$

នាំឲ្យ $z_2 - z_1 = (1 + i) - (3 - 2i)$

$= 1 + i - 3 + 2i$

$= \sqrt{(-2)^2 + (3i)^2}$

$= \sqrt{4 - 9} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

ដូចនេះ $\boxed{z_2 - z_1 = \sqrt{5}i}$ ។

លំហាត់

10. គេមានពីរចំណុច A និង B ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $Z_A = 2 - 7i$និង $Z_B = 1 - i$។ z_pជាចំណុចចែកក្នុងនៃអង្កត់ $[AB]$តាមផលធៀប $\lambda_p = \frac{1}{4}$ ហើយ Qជារូបភាពនៃ z_Qជាចំណុចចែកក្រៅនៃអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\lambda_Q = \frac{3}{4}$ ។ ចូររក z_pនិង z_Q

ចម្លើយ

+រក z_p

បើ z_pចែកអង្កត់ $[AB]$ ខាងក្នុង:

តាមរូបមន្ត $z_p = \frac{\lambda Z_B + Z_A}{1+\lambda}$ <=> $z_p = \frac{\lambda Z_B + Z_A}{1+\lambda_p}$

ដោយ $z_A = 2 - 7i$, $z_B = 1 - i$, $\lambda_p = \frac{1}{4}$

$$z_p = \frac{\frac{1}{4}(1-i) + (2-i)}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i + 2 - 7i}{\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{1 - i + 8 - 28i}{5} = \frac{9 - 29i}{5} = \frac{9}{5} - \frac{29}{5}i$$

ដូចនេះ: $z_p = \frac{9}{5} - \frac{29}{5}i$ ។

$+z_Q$

បើ z_Q ចែកអង្កត់$[AB]$ ខាងក្រៅ

តាម$z_Q = \frac{z_A - \lambda z_B}{1-\lambda}$ នាំឲ្យ $z_Q = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1-\lambda_Q}$ ដោយ $\lambda_Q = \frac{3}{4}$

នាំឲ្យ $z_Q = \frac{2-7i-\frac{3}{4}(1-i)}{1-\frac{3}{4}} = \frac{2-7i-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i}{\frac{1}{4}} = 8 - 28i - 3 + 3i = 5 - 25i$

ដូចនេះ: $\boxed{Z_Q = 5 - 25i}$ ។

មេរៀនទី៣

ការអនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រ

រូបមន្តសង្ខេប

១.ចំណុចចែកក្នុងអង្កត់តាមផលធៀបមួយ

យើងបាន $\dfrac{m}{m+n}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}\Rightarrow z-z_1=\dfrac{m}{m+n}(z_2-z_1)$

នាំអោយ $z=\dfrac{mz_2}{m+n}-\dfrac{mz_1}{m+n}+\dfrac{mz_1-mz_2}{m+n}=\dfrac{mz_1+mz_2}{m+n}$

បើគេតាង $\dfrac{m}{n}=\lambda$ $\boxed{\text{គេបាន } z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}}$

ជាទូទៅ បើគេមានz_1និងz_2ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរូបភាពរៀងគ្នា A(z_1)និង $B(z_2)$ ហើយចំណុច

P(z)ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិចZដែលស្ថិតនៅលើ$[AB]$ហើយចែក$[AB]$តាមផលធៀប

$z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ ដែល $\dfrac{m}{n}=\lambda$

+ បើ $\lambda=1$នោះ p ស្ថិតនៅលើចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់$[AB]$

+បើ$\lambda>0$ នោះ p ស្ថិតនៅលើចន្លោះនៃអង្កត់$[AB]$

+បើ$\lambda<1$នោះ p ស្ថិតនៅលើបន្លាយនៃអង្កត់$[AB]$ឬស្ថិតនៅក្រៅអង្កត់$[AB]$

២.ចំណុចចែកក្រៅអង្កត់តាមផលធៀបមួយ

ជាទូទៅ បើគេមានz_1និងz_2ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរូបភាពរៀងគ្នា A(z_1)និង $B(z_2)$ ហើយចំណុច

P(z)ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិចZដែលស្ថិតនៅលើ$[AB]$ហើយចែក$[AB]$តាមផលធៀប$\dfrac{m}{n}=\lambda$

នោះ $\boxed{\text{គេបាន } z=\dfrac{z_1-\lambda z_2}{1-\lambda}}$

លំហាត់

១១. គេមានពីរចំណុច A និង B ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_A=2+i\sqrt{2}$ និង $z_B=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$ P ជារូបភាពនៃ z_p ជាចំណុចចែកក្នុងនៃអង្កត់$[AB]$តាមផលធៀប $\lambda_p=\dfrac{2}{3}$ ហើយ Q ជារូបភាពនៃ z_Q ជាចំណុចចែកក្រៅនៃអង្កត់$[AB]$តាមផលធៀប $\lambda_Q=\dfrac{3}{4}$ ។ ចូររក z_P និង z_Q

ដំណោះស្រាយ

រក z_P

គេមាន $z_A = 2 + i\sqrt{2}$ និង $z_B = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$

P ជារូបភាពនៃ z_p ជាចំណុចចែកក្នុងនៃអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\lambda_p = \dfrac{2}{3}$

តាមរូបមន្ត $z_p = \dfrac{z_A + \lambda_p z_B}{1 + \lambda_p}$

គេបាន $z_p = \dfrac{\left(2 + i\sqrt{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)}{1 + \frac{2}{3}}$

$$= \frac{2 + i\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}i\sqrt{2}}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} + i\sqrt{2} + \frac{2}{3}i\sqrt{2}}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{2}{3}} + \frac{i\sqrt{2}\left(1 + \frac{2}{3}\right)}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}}{\frac{5}{3}} + \frac{i\sqrt{2}\left(\frac{5}{3}\right)}{\frac{5}{3}}$$

$$z_p = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{5} + i\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{z_p = \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{5} + i\sqrt{2}}$

រក z_Q

Q ជារូបភាពនៃ z_Q ជាចំណុចចែកក្រៅនៃអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\lambda_Q = \dfrac{3}{4}$

តាមរូបមន្ត $z_Q = \dfrac{z_A - \lambda_Q z_B}{1 + \lambda_Q}$

គេបាន

$$z_Q = \frac{\left(2 + i\sqrt{2}\right) - \frac{3}{4}\left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$=\frac{2+i\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{3}{4}i\sqrt{2}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{2-\frac{3}{4}\sqrt{3}+i\sqrt{2}-\frac{3}{4}i\sqrt{2}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{\frac{8-3\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{3}{4}}+\frac{i\sqrt{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{\frac{8-3\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}+\frac{i\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{4}}$$

$z_Q=8-3\sqrt{3}+i\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\boxed{z_Q=8-3\sqrt{3}+i\sqrt{2}}$

១២ គេអោយចំនួនកុំផ្លិច $z_A=2-3i$ និង $z_B=-1-3i$ z_A និង z_B មានរូបភាពរៀងគ្នាក្នុងប្លង់កុំផ្លិចតាងដោយ A និង B

ក.កំណត់អាហ្វិក P នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល P ចែក $[AB]$ ខាងក្នុងផលធៀប $\frac{2}{1}$ ។

ខ.កំណត់អាហ្វិក Q នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល Q ចែក $[AB]$ ខាងក្រៅតាមផលធៀប $\frac{2}{1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រក z_p

គេមាន $z_A=2-3i$ និង $z_B=-1-3i$

ដោយអាហ្វិក P នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល P ចែក $[AB]$ ខាងក្នុងផលធៀប $\frac{2}{1}$ ដែល $\lambda=\frac{2}{1}$

តាមរូបមន្ត $z_P=\frac{z_A+\lambda_P z_B}{1+\lambda p}$

$z_p=\frac{z_A+z_B\lambda_p}{1+\lambda_P}$

$=\frac{(2-3i)+\frac{2}{1}(-1-3i)}{1+\frac{2}{1}}$

$=\frac{2-3i-2-6i}{3}=\frac{2-2-(3+6)i}{3}$

$=-\frac{9i}{3}=-3i$

$\boxed{\text{ដូចនេះ } z_p=-3i}$

រក z_Q

ដោយអាហ្វិក Q នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល Q ចែក $[AB]$ ខាងក្រៅតាមផលធៀប $\frac{2}{1}$

តាមរូបមន្ត $z_Q=\frac{z_A-z_B\lambda_Q}{1-\lambda_Q}$

គេបាន $z_Q=\frac{(2-3i)-2(-1-3i)}{1-\frac{2}{1}}$

$=\frac{2-3i+2+6i}{-1}$

$=-4-(6-3)i$

$=-4-3i$

$\boxed{\text{ដូចនេះ } z_Q=-4-3i}$

១៣. នៅក្នុងកុំផ្លិច (xoy) គេអោយចំណុច P ជារូបភាពនៃ Z ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌដោយ $\left|\frac{z-2+2i}{z-i}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ។ ចូររកសំណុំចំណុច P

ដំណោះស្រាយ

រកសំណុំចំណុច P

តាង $z=a+bi$

គេមាន $\left|\frac{z-2+2i}{z-i}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}|z-2+2i|=|z-i|$

$(\sqrt{2})^2|a+bi-2+2i|^2=|a+bi-i|^2$

$2|(a-2)+i(b+2)|^2=|a+i(b-1)|^2$

$2\left[(a-2)^2+(b+2)^2\right]=a^2+(b-1)^2$

$2\left[a^2-4a+4+b^2+4b+4\right]=a^2+b^2-2b+1$

$2a^2-8a+8+2b^2+8b+8=a^2+b^2-2b+1$

$2a^2-8a+16+2b^2+8b-a^2-b^2+2b-1=0$

$a^2+b^2-8a+10b+15=0$

$a^2-2.a.4+16-16+b^2-2.b.5+25-25+15=0$

$(a-4)^2+(b+5)^2=26$

ដូចនេះ សំណុំចំណុច P ជាផ្ចិតរង្វង់ $I(4,-5)$ និងកាំ $R=\sqrt{26}$

១៩.គេអោយចំនួនកុំផ្លិច z ហើយ P ជាចំណុចរូបភាពនៃ z ក្នុងប្លង់ (xoy)

ចូរកំណត់សំណុំចំណុច P បើគេដឹងថា $\arg(Z-2+2i)=\dfrac{\pi}{4}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $z=a+bi$

គេបាន $z-2+2i=a+bi-2+2i$

$=(a-2)+i(b+2)$

ដោយ $\arg(z-2+2i)=\dfrac{\pi}{4}$ នោះ $\arg\left[(a-2)+i(b+2)\right]=\dfrac{\pi}{4}$

តាម $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

គេបាន $\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{b+2}{a-2}=1$

នាំអោយ $b=a-4$

ដែល $\begin{cases} a-2>0 \\ b+2>0 \end{cases}$ ឬ $a>2, b>-2$

ដូចនេះសំណុំចំណុច P ជាបន្ទាត់ $(d): b=a-4$

លំហាត់អនុវត្តន៍

១.ឧបមាថាចំនួនកុំផ្លិច z បំពេញដោយលក្ខខណ្ឌ $|z|=1$។

ក. ចូររកវ៉ង់នៃតម្លៃ $|Z-2|$

ខ. ចូររកវ៉ង់នៃតម្លៃ $\arg(z-2)$

២. តាង α,β,γ ជាចំនួនកុំផ្លិចនៅលើរង្វង់ $|z|=R$ និង $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$។

ចូររកតម្លៃ $\dfrac{|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha|}{|\alpha+\beta+\gamma|}$

ឯកសារយោង

១.សៀវភៅទ្រឹស្តីចំនួនកុំផ្លិចបោះពុម្ពឆ្នាំ២០១៧- ២០១៨ ដែលរៀបរៀងដោយ អ្នកគ្រូ អោ មណីចន្ទ្រា

២. សៀវភៅទ្រឹស្តីចំនួនកុំផ្លិចបោះពុម្ពឆ្នាំ២០១១ ដែលរៀបរៀងដោយ លោកគ្រូ លឹម ផល្គុន

មេរៀនទី៤ ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
លំហាត់

1. គេឲ្យ $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $z_3 = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$
សរសេរជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនូវចំនួនកុំផ្លិច
ក. $z_1.z_2.z_3$ ខ. $\frac{1}{z_1}$ គ. z_3^2 ឃ. $\frac{z_2}{z_3}$
2. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ
រួចជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនូវចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម:
ក. $z = 4 - 4i\sqrt{3}$ ខ. $z = \frac{1}{1+i}$ គ. $z = \frac{-\sqrt{3}+i}{2+2i\sqrt{3}}$ ឃ. $z = -4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
3. សរសេរ ចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពិជគណិត
ក. $z = e^{i\pi}$ ខ. $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$ គ. $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ឃ. $z = e^{-2i\pi}$
4. សរសេរជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនូវចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម
ក. $z = (-3 + 3i\ )^{11}$ ខ. $z = (-1 - i\ )^{70}$ គ. $z = \left(\sqrt{8} - i\sqrt{8}\ \right)^{200}$ ឃ. $z = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{6}\ \right)^{2017}$
5. ដោយប្រើ $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ និង $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ បង្ហាញថា
ក. $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$ ខ. $\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$
គ. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ឃ. $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

ចម្លើយ

១. សរសេរជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមាន $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$Z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$Z_3 = \sqrt{3}.e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

ក. គណនា $Z_1.Z_2.Z_3$

$$Z_1.Z_2.Z_3 = e^{i\frac{\pi}{3}}.2e^{-i\frac{\pi}{3}}.\sqrt{3}.e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$
$$= 2\sqrt{3}.e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)}$$
$$= 2\sqrt{3}.e^{-\frac{5\pi}{6}i}$$

ដូចនេះ $Z_1.Z_2.Z_3 = 2\sqrt{3}.e^{-\frac{5\pi}{6}i}$

ខ. គណនា $\frac{1}{Z_1}$

$$\frac{1}{Z_1}=\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$$
$$=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{ដូចនេះ\ \frac{1}{Z_1}=e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$Z_3^2=\left(\sqrt{3}.e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2$$
$$=3e^{\frac{10\pi}{6}}$$

$$\boxed{ដូចនេះ\ Z_3^2=3e^{\frac{5\pi}{3}}}$$

ឃ. គណនា $\frac{Z_2}{Z_3}$

$$\frac{Z_2}{Z_3}=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}.e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}.e^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}\sqrt{3}.e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}.e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3.e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}.e^{-i\frac{\pi}{3}+-i\frac{5\pi}{6}}}{3}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}.e^{i\frac{2\pi}{6}}}{3}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{2}}}{3}$$

ដូចនេះ $Z=\frac{2\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{2}}}{3}$

២.សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. $Z=4-4i\sqrt{3}$
$$=4\left(1-i\sqrt{3}\right)$$
$$=8\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=8\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=8\left(cos\frac{5\pi}{3}+isin\frac{5\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $Z=8\left(cos\frac{5\pi}{3}+isin\frac{5\pi}{3}\right)$ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $Z=8\left(cos\frac{5\pi}{3}+isin\frac{5\pi}{3}\right)$
តាមរូបមន្ត $e^{ix}=cosx+isinx$
នាំឱ្យ $Z=\ 8e^{i\frac{5\pi}{3}}$
ដូចនេះ $Z=\ 8e^{i\frac{5\pi}{3}}$ ជាទម្រង់អុិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ខ. $Z=\frac{1}{1+i}$

$$=\frac{1(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{1(1-i)}{1^2-i^2}$$

$$=\frac{1-i}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{7\pi}{4}+isin\frac{7\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{7\pi}{4}+isin\frac{7\pi}{4}\right)$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{7\pi}{4}+isin\frac{7\pi}{4}\right)$
តាមរូបមន្ត $e^{ix}=cosx+isinx$
នាំឱ្យ $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}.e^{i\frac{7\pi}{4}}$

ដូចនេះ $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}.e^{i\frac{7\pi}{4}}$ ជាទម្រង់អុិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គ. $Z=\frac{-\sqrt{3}+i}{2+2i\sqrt{3}}$

$$=\frac{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)}{2(1+i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)}{2\times 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$=\frac{2\left(cos\frac{5\pi}{3}+isin\frac{5\pi}{3}\right)}{4\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{1\left(cos\frac{5\pi}{3}+isin\frac{5\pi}{3}\right)}{2\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(cos\frac{3\pi}{6}+isin\frac{3\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}\right)$$

ដូចនេះ $Z=\frac{1}{2}\left(cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}\right)$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $Z=\frac{1}{2}\left(cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}\right)$

តាមរូបមន្ត $e^{ix}=cosx+isinx$

នាំឱ្យ $Z=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

ដូចនេះ $Z=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ឃ. $Z=-4\left(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)$
$$=4\left(-cos\frac{\pi}{4}-isin\frac{\pi}{4}\right)$$

តាមរូបមន្ត មុំមានផលសងស្មើ π

$sin\emptyset=sin(\pi+\emptyset)$

$cos\emptyset=cos(\pi+\emptyset)$
$$=4\left[cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=4\left(cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $Z=4\left(cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}\right)$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $Z=4\left(cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}\right)$

តាមរូបមន្ត $e^{ix}=cosx+isinx$

នាំឱ្យ $Z=4e^{i\frac{5\pi}{4}}$

ដូចនេះ $Z=4e^{i\frac{5\pi}{4}}$ ជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

៣. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពីជគណិត

ក. $Z=e^{i\pi}$

តាមរូបមន្ត $e^{ix}=cosx+isinx$

គេបាន $Z=cos\pi+isin\pi$

នាំឱ្យ $Z=-1+0i$

ដូចនេះ $Z=-1+0i$

ខ. $Z=e^{i\frac{\pi}{2}}$

តាមរូបមន្ត $e^{ix} = cosx + isinx$

គេបាន $Z = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}$

នាំឱ្យ $Z = 0 + i$

ដូចនេះ $Z = 0 + i$

គ. $Z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

តាមរូបមន្ត $e^{ix} = cosx + isinx$

គេបាន $Z = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$

នាំឱ្យ $Z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$Z = 1 + i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $Z = 1 + i\sqrt{3}$

ឃ. $Z = e^{-2i\pi}$

តាមរូបមន្ត $e^{ix} = cosx + isinx$

គេបាន $Z = \cos(-2\pi) + isin(-2\pi)$

$Z = \cos 0 + isin0$

$Z = 1 + 0\mathrm{i}$

ដូចនេះ $Z = 1 + 0\mathrm{i}$

៤. សរសេរជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនូវចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

ក. $Z = (-3 + 3i)^{11}$

$= 3(-1 + i)$

$= 3\sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$

$= 3\sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$

$= 3\sqrt{2}\,(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4})$

$= \left[3\sqrt{2}\left((cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4})\right)\ \right]^{11}$

$= 3\sqrt{2}^{11}(cos11 \times \frac{3\pi}{4} + isin11 \times \frac{3\pi}{4})$

$= (3\sqrt{2})^{11}(\frac{33\pi}{4} + isin11 \times \frac{33\pi}{4})$

តាមរូបមន្ត $e^{ix} = cosx + isinx$

នាំឱ្យ $Z = (3\sqrt{2})^{11}e^{i\frac{33\pi}{4}}$

ដូចនេះ $Z = (3\sqrt{2})^{11}e^{i\frac{33\pi}{4}}$

ខ. $Z = (-1 - i)^{70}$

$\mathrm{Z} = -1 - \mathrm{i}$

$\mathrm{Z} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\mathrm{Z} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} - \mathrm{isin}\frac{5\pi}{4}\right)$

$Z = \sqrt{2}^{70}\left(\cos\frac{70\times 5\pi}{4} - \mathrm{isin}\frac{70\times 5\pi}{4}\right)$

$\mathrm{Z} = 2^{\frac{70}{2}}\left(\cos\frac{175\pi}{2} - \mathrm{isin}\frac{175\pi}{2}\right)$

$\mathrm{Z} = 2^{35}\left(\cos\frac{175\pi}{2} - \mathrm{isin}\frac{175\pi}{2}\right)$

តាមរូបមន្ត $e^{ix} = cosx + isinx$

គេបាន $Z = 2^{35}e^{i\frac{175\pi}{2}}$

ដូចនេះ $Z = 2^{35}e^{i\frac{175\pi}{2}}$

គ. $Z = (\sqrt{8} - i\sqrt{8})^{200}$

$= \sqrt{8} - i\sqrt{8}$

$= \sqrt{8}.\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \sqrt{16}\left(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \left[\sqrt{16}\left(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{200}$

$= (4)^{200}\left(cos200\times\frac{7\pi}{4} + isin200\times\frac{7\pi}{4}\right)$

$=4^{100}(cos350\pi + isin350\pi)$

$= 4^{100}(cos350\pi + isin350\pi)$

$= 4^{100}[\cos(2\times 175\pi + 0) + isin(2\times 175\pi + 0)]$

$= 4^{100}(cos0 + isin0)$

តាមរូបមន្ត $e^{ix} = cosx + isinx$

នាំឱ្យ $Z = e^{i0}$

$\mathrm{Z} = 1$

ដូចនេះ $\mathrm{Z} = 1$

ឃ. $Z = (\sqrt{2} + i\sqrt{6})^{2017}$

$Z = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$

$= \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$

$= 2\sqrt{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$= 2\sqrt{2}(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})$

$= \left[2\sqrt{2}(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})\right]^{2017}$

$= (2\sqrt{2})^{2017}\left(cos2017\times\frac{\pi}{3} + isin2017\times\frac{\pi}{3})\right)$

$$= (2\sqrt{2})^{2017}\left(cos\frac{2017\pi}{3} + isin\frac{2017\pi}{3}\right)$$

តាមរូបមន្ត $e^{ix} = cosx + isinx$

នាំឱ្យ $Z = (2\sqrt{2})^{2017} e^{i\frac{2017\pi}{3}}$

ដូចនេះ $\boxed{Z = (2\sqrt{2})^{2017} e^{i\frac{2017\pi}{3}}}$

៥

ក. $sin^3\theta = \frac{3}{4}sin\theta - \frac{1}{4}sin3\theta$

ដោយ $sin = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \Rightarrow sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$

$$sin^3\theta = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left[e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right]$$

$$sin^3\theta = \left(\frac{1}{-4}\right)\left[\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i}\right) - 3\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\right]$$

$$sin^3\theta = \left(\frac{1}{-4}\right)[sin3\theta - 3sin\theta]$$

$$sin^3\theta = \frac{3}{4}sin\theta - \frac{1}{4}sin3\theta \qquad \text{ពិត}$$

ដូច្នេះ $\boxed{sin^3\theta = \frac{3}{4}sin\theta - \frac{1}{4}sin3\theta}$

ខ. cos^4

ដោយ $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4$

$$cos^4\theta = \left(\frac{1}{2}\right)^4\left[\left(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}\right) + 4\left(e^{2i\theta} + e^{2i\theta}\right) + 6\right]$$

$$cos^4\theta = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{2}\right) + 4\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{2i\theta}}{2}\right) + 3\right]$$

$$cos^4\theta = \frac{1}{8}[(cos4\theta) + 4(cos2\theta) + 3]$$

$$cos^4\theta = \frac{1}{8}cos4\theta + \frac{1}{2}cos2\theta + \frac{3}{8} \quad \text{ពិត}$$

ដូច្នេះ $\boxed{cos^4\theta = \frac{1}{8}cos4\theta + \frac{1}{2}cos2\theta + \frac{3}{8}}$

គ. $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$

ដោយ $cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ និង $sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

$$\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2\right) + \left(\frac{1}{2i}\right)^2\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2\right) = 1$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{-2}\right)\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2} - 1\right) = 1$$

$$\frac{1}{2}(cos2\theta + 1) - \frac{1}{2}(cos2\theta - 1) = 1$$

$$\cancel{\frac{1}{2}cos2\theta} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}cos2\theta} + \frac{1}{2} = 1$$

1 = 1 ពិត

ដូច្នេះ $\boxed{cos^2\theta + sin^2\theta = 1}$

ឃ. cos^2

$$\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = cos2\theta$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2\right) - \left(\frac{1}{2i}\right)^2 \left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2\right) = cos2\theta$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{-2}\right)\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} - 1\right) = cos2\theta$$

$$\frac{1}{2}(cos2\theta + 1) + \frac{1}{2}(cos2\theta - 1) = cos2\theta$$

$$\frac{1}{2}cos2\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos2\theta - \frac{1}{2} = cos2\theta$$

$cos2\theta = cos2\theta$ ពិត

ដូច្នេះ $\boxed{cos^2\theta - sin^2\theta = co2\theta}$

មេរៀនទី ៤

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

6.រកគ្រប់ចំនួនគត់ n $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2$

$\left(\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2$

$$\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n + \left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n = 2$$

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n + \left(\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^n = 2$$

តាមទ្រឹស្តីបទដឺម័រ

គេបាន :$\cos\frac{2\pi n}{3}+i\sin\frac{2\pi n}{3}+\cos\frac{4\pi n}{3}+i\sin\frac{4\pi n}{3}=2$

$\cos\frac{2\pi n}{3}+\cos\frac{4\pi n}{3}+ i\sin\frac{2\pi n}{3}+\sin\frac{4\pi n}{3}=2$

$$\left(\cos\frac{2\pi n}{3}+\cos\frac{4\pi n}{3}\right)+i\left(\sin\frac{2\pi n}{3}+ \sin\frac{4\pi n}{3}\right)=2$$

ទាញផ្នែកពិត=ផ្នែកពិត

គេបាន $\cos\frac{2\pi n}{3}+\cos\frac{4\pi n}{3}$=2

$\cos\frac{2\pi n}{3}+\cos\frac{2\pi n}{3}^2$-1= 2 $(\cos 2a = 2\cos a^2 - 1)$

$\cos\frac{2\pi n}{3}+\cos\frac{2\pi n}{3}^2$-3= 0

តាង t=$\cos\frac{2\pi n}{3}$;$(-1 \le t \le 1)$

គេបាន $2t^2+t-3=0$

$$t_1 = 1;\ t_2 = -\frac{3}{2}$$

ចំពោះ $t_1 = 1$ $\Rightarrow$ $\cos\frac{2\pi n}{3}$=$\cos 0$

$\Longrightarrow$ $\frac{2\pi n}{3}=0$

$\Longrightarrow$ n=0

$$\sin\frac{2\pi n}{3}+ \sin\frac{4\pi n}{3}=0$$

$$\sin\frac{2\pi n}{3}+2\ \sin\frac{4\pi n}{3}\cos\frac{2\pi n}{3}=0$$

$$\sin\frac{2\pi n}{3}\left(1+2\cos\frac{2\pi n}{3}\right)=0$$

$$\sin\frac{2\pi n}{3}=0 \quad ;(\sin 0 = 0)$$

$\frac{2\pi n}{3}$=0

n=o

1+2cos$\frac{2\pi n}{3}$=0

2cos$\frac{2\pi n}{3}$=-1

$$\cos\frac{2\pi n}{3} = -\frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{2\pi n}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$\frac{2\pi n}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

2πn=3π- π

n=$\frac{2\pi}{2\pi} = 1$

ដូចនេះ $\boxed{n=0;1}$

7 កំណត់ចំនួនគត់ n នៃស្វីត

ក $\begin{cases} a_0 = 0; a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \end{cases}$

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$$

តាមសមីការសម្គាល់$r^2 - r + 1 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 = -3$$
$$\sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$$
$$r_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}; \ r_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

សមីការជំនួយៈ

$$z_n = a_{n+1} - r_1 a_n$$
$$z_n = a_{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) a_n$$
$$z_{n+1} = a_{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) a_{n+1}$$

តែ $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

$z_{n+1} = a_{n+1} - a_n - \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) a_{n+1}$

$=a_{n+1}\left(1 - a_n - \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\right)$

$=a_{n+1}\left(\frac{1-2an+\sqrt{3}i}{2}\right)$

$$=a_{n+1}\left(-an + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(a_{n+1} - \frac{2}{1+\sqrt{3}i} a_n\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(a_{n+1} - \frac{2(1-\sqrt{3}i)}{4} a_n\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(a_{n+1} - \frac{(1-\sqrt{3}i)}{2} a_n\right)$$
$$\text{តែ } z_n = \left(a_{n+1} - \frac{(1-\sqrt{3}i)}{2} a_n\right)$$

$z_{n+1}=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)z_n$;z_nជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេស៊ីដង់ q=$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

ដោយ q=$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ នោះ $z_0=a_1-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)a_0=1; z_0=1$

គេបាន $z_n=z_0q^n=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n$

$=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\quad(1)$

និង $z_n=a_{n+1}-r_1a_n$

$=a_{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)a_n$

$=a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\frac{\sqrt{3}i}{2}a_n$

$=\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)+i\left(\frac{\sqrt{3}i}{2}a_n\right)\quad(2)$

តាម (1)&(2)

គេបាន $\frac{\sqrt{3}i}{2}a_n=\sin\frac{n\pi}{3}$

$a_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_0=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{0\pi}{3}=0$ ពិត ; $a_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3}=1$ ពិត

$$\boxed{a_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3};\forall\, n\in=0;1;2\ldots}$$

ខ. $\begin{cases}a_1=0;a_2=2\\a_{n+2}=2a_{n+1}-2a_n\end{cases}$

សមីការសម្គាល់ $r^2-2r+2=0$

$\Delta=(-2)^2-4(2)=-4$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{4i^2}=2i$

$r_1=\frac{2-2i}{2}=1-i$

$r_2=\frac{2+2i}{2}=1+i$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ

$Z_n=a_{n+1}-ra_n=a_{n+1}-(1-i)a_n$

$Z_{n+1}=a_{n+2}-(1-i)a_{n+1}$

$=2a_{n+1}-2a_n-(1-i)a_{n+1}$

$(1+i)\left[u_{n+1}-(1-i)_{u_n}\right]=(1+i)\times Z_n$

នោះ Z_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចមានរេសុង

$q=1+i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)$

និង $Z_1=a_1-(1-i)a_1=1$

គេបាន$Z_n=Z_1\times q^{n-1}\left[\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{n-1}$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}}\left[\sqrt{2}\left(cos\frac{(n-1)\pi}{4} + isin\frac{(n-1)\pi}{4}\right)\right]$$

នោះ $Z_n = 2^{\frac{n-1}{2}}\left[\sqrt{2}\left(cos\frac{(n-1)\pi}{4} + i2^{\frac{n-1}{2}}sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right)\right]$ (1)

តែ $Z_n = a_{n+1} - 1 + ia_n$ (2)

តាម (1)&(2)

ទាញបាន $u_n = 2^{\frac{n-1}{2}}sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 2^{\frac{n-1}{2}}sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)}$; $\forall\, n \in= N$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $u_1 = 0$; $u_2 = 1$ ពិត

<u>**លំហាត់អនុវត្ត**</u>

១ចូរកំណត់តួទី n នៃស្វីតចំនួនគត់ខាងក្រោម

ក$\begin{cases} a_0 = 0\,; a_1 = 1 \\ a_{n+2} = -a_{n+1} - a_n \end{cases}$ $\forall n \in N$

២ គេឲ្យស្វីតចំនួនកុំផ្លិច (z_n)កំណត់ដោយ$z_1 = \frac{2+\sqrt{3}+i}{2}$ និង $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}z_n + \frac{2-\sqrt{3}+i}{2}$ និង n= 1,2,3....

ក តាង $w_n = z_n - 1$។បង្ហាញថា(w_n)ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចរួចគណនាw_nជាអនុគមន៍នៃ nដោយអោយលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ.ទាញបង្ហាញថា$z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}\left(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12}\right)$ ។

សូមអរគុណ!

សាកលវិទ្យាល័យ ឯកទេស នៃកម្ពុជា

CAMBODIAN UNIVERSITY FOR SPECIALTIES

Education for an Excellent Career

CUS បណ្ដុះបណ្ដាលដើម្បីការងារ និងមុខរបរ
បណ្ដុះបណ្ដាលដើម្បីភាពជោគជ័យការងារ និងមុខរបរ

ថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រ / បរិញ្ញាបត្ររង

មហាវិទ្យាល័យ គ្រប់គ្រងពាណិជ្ជកម្ម និងសេដ្ឋកិច្ច

ឯកទេស

- គ្រប់គ្រង
- គណនេយ្យ
- ហិរញ្ញវត្ថុ និងធនាគារ
- ម៉ាឃីតធីង
- គ្រប់គ្រងសណ្ឋាគារ និងទេសចរណ៍
- ....

មហាវិទ្យាល័យ សិល្បៈ មនុស្សសាស្ត្រ និងភាសា

ឯកទេស

- អក្សរសាស្ត្រអង់គ្លេស
- អក្សរសាស្ត្រខ្មែរ
- ប្រវត្តិវិទ្យា
- ....

មហាវិទ្យាល័យ វិទ្យាសាស្ត្រ និងបច្ចេកវិទ្យា

ឯកទេស

- វិទ្យាសាស្ត្រកុំព្យូទ័រ
- គណិតវិទ្យា
- រូបវិទ្យា
- គីមីវិទ្យា
- ជីវវិទ្យា
- ....

មហាវិទ្យាល័យ វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម និងនីតិសាស្ត្រ

ឯកទេស

- នីតិសាស្ត្រ (ច្បាប់)
- ....

ទទួលស្គាល់ដោយរាជរដ្ឋាភិបាល
នៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា តាមអនុក្រឹត្យ
លេខ ០១ អនក្រ.បក ចុះថ្ងៃទី ១៦ ខែ មករា ឆ្នាំ២០០៤

CUS

CUS

CUS

Designed by: Mr. Khy Vannet