សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

ROYAL UNIVERSITY OF PHNOM PENH

ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យា

Department of Mathematics

កិច្ចការស្រាវជ្រាវ

កំណែរលំហាត់ម៉ាទ្រីស

- មុខវិជ្ជា គណិតវិទ្យាទូទៅ
- បង្រៀនដោយសាស្ត្រាចារ្យ ថៃ ថាល់

ស្រាវជ្រាវដោយក្រុមទី៧៖

- លឿ សុវណ្ណារ៉ា
- ក.ស៊ីន គីមឡៀន
- ក.ស៊ីម ស្រីអូន
- សាន ម៉ាន់ឌី
- សាន ពិសី
- សារិន សត្យា
- សាលី រូនី
- សាំង យ៉ុងឈី
- សុំ សៀកឡុង

អារម្ភកថា

សួរស្តីលោកគ្រូសា ស្ត្រាចារ្យ និងសិស្សនិស្សិតនៅដេប៉ាតេម៉ង់គណិតវិទ្យានៃសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញជាទីគោរព។

នេះជាកិច្ចការស្រាវជ្រាវ ក៏អាចថាជាការងារក្រុមដែលបានធ្វើកំណែរលំហាត់បញ្ចប់ជំពូកមេរៀនម៉ាទ្រីសនៅក្នុងសៀវភៅ "គណិតវិទ្យាទូទៅ" រៀបរៀងដោយសាស្ត្រាចារ្យ លី ស្រួច ។ កិច្ចការស្រាវជ្រាវនេះទទួលបានពីលោកគ្រូសាស្ត្រាចារ្យ ថៃ ថាល ដោយលោកគ្រូបានដាក់កិច្ចការដ៏មានតម្លៃនេះឡើង ដែលអាចឲ្យក្រុមយើងខ្ញុំ ក៏ដូចជានិស្សិតរួមថ្នាក់ ទទួលបានការអនុវត្តលំហាត់ម៉ាទ្រីសនេះយ៉ាងស្ទាត់ ហើយក៏អាចឲ្យក្រុមយើងខ្ញុំកាន់តែស្គាល់គ្នាថែមទៀត។ហើយក្នុងកិច្ចការនេះក្រុមរបស់យើងខ្ញុំ បានខិតខំធ្វើដោយយកចិត្តទុកដាក់ និងបានបញ្ចូលដោយយកចិត្តទុកដាក់ចូលក្នុងកំព្យូទរ័ បើទោះជាចំណេះដឹងផ្នែកកុំព្យូទ័រមានតិចតួចក៏ដោយក៏ក្រុមរបស់ខ្ញុំខិតខំប្រឹងអស់ពីលទ្ធភាពដែលអាចទៅរួច។

ទោះបីក្រុមរបស់ខ្ញុំខិតខំប្រឹងធ្វើដោយយកចិត្តទុកដាក់ក៏ដោយ ក៏កុំហុសផ្នែកបច្ចេកទេស អក្សរ វិធីសាស្រ្តក្នុងការធ្វើលំហាត់ ឬកំហុសក្នុងការកែលំហាត់ប្រាកដជាមានតិចតួចដែលមិនអាចខានបាន ព្រោះថាអ្វីៗមិនល្អឥតខ្ចោះនោះទេ។ តែកំហុសរបស់ខ្លួន គឺត្រូវតែកែ បើមិនកែនឹងអាចក្លាយជាទម្លាប់ខុសរហូត។ ដូចនេះ ហើយក្រុមរបស់យើងខ្ញុំរង់ចាំទទួលការរិះគន់ពីសំណាកលោកគ្រូអ្នកគ្រូសាស្ត្រាចារ្យ សិស្សនិស្សិតទាំងអស់ ដើម្បីឲ្យកិច្ចការនេះកាន់តែល្អថែមទៀត។

ជាចុងក្រោយសូមជូនពរលោកគ្រូ អ្នកគ្រូសាស្ត្រាចារ្យ និងសិស្សនិស្សិតទាំងអស់នៅសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញមានសុខភាពល្អ និងសំណាំងល្អជានិច្ច។

ក្រុមទី៧

កំណែលំហាត់ម៉ាទ្រីស

លំហាត់ទី ០១៖ គណនា

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 3 & -5\end{bmatrix} ,-2\begin{bmatrix}1 & 7\\2 & -3\\0 & -1\end{bmatrix} ,-1\begin{bmatrix}2 & -3 & 8\\1 & -2 & -6\end{bmatrix}$$

ចម្លើយទី ០១៖

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & 2+(-1) & 3+2\\4+0 & 5+3 & 6+(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\4 & 8 & 1\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ៖ $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\4 & 8 & 1\end{bmatrix}$

$$-2\begin{bmatrix}1 & 7\\2 & -3\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\times 1 & -2\times 7\\-2\times 2 & -2\times(-3)\\-2\times 0 & -2\times(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -14\\-4 & 6\\0 & 2\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ៖ $-2\begin{bmatrix}1 & 7\\2 & -3\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -14\\-4 & 6\\0 & 2\end{bmatrix}$

$$-\begin{bmatrix}2 & -3 & 8\\1 & -2 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)(2) & (-1)(-3) & (-1)(8)\\(-1)(1) & (-1)(-2) & (-1)(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -8\\-1 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ៖ $-\begin{bmatrix}2 & -3 & 8\\1 & -2 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -8\\-1 & 2 & 6\end{bmatrix}$

លំហាត់ទី ០២៖ គណនា

$$3\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\3 & 0 & -4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\0 & -1 & 5\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

ចម្លើយទី ០២

$$3\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\3 & 0 & -4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\0 & -1 & 5\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & -15 & 3\\9 & 0 & -12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -4 & -6\\0 & -2 & 10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 4 & -8\\4 & -4 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6-2+0 & -15-(-4)+4 & 3-(-6)+(-8)\\9-0+4 & 0-(-2)+(-4) & -12-10-4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & -7 & 1\\ 13 & -2 & -26\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $3\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & -4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -7 & 1\\ 13 & -2 & -26\end{bmatrix}$

<u>លំហាត់ទី០៣៖</u> គណនា

$a.\,3\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ $b.\,2\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ 5 & -1 & 0\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0 & -3 & 2\\ 4 & -6 & 2\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}$

<u>ចម្លើយទី ០៣</u> ៖

$$a.\,3\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3 & 6\\ 0 & 9 & 12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}16 & 0 & -12\\ -4 & -8 & 12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3-16 & -3-0 & 6+12\\ 0-(-4) & 9-(-8) & 12-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13 & -3 & 18\\ 4 & 17 & 0\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $3\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13 & -3 & 18\\ 4 & 17 & 0\end{bmatrix}$

$$b.\,2\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ 5 & -1 & 0\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0 & -3 & 2\\ 4 & -6 & 2\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 10 & 4\\ 10 & -2 & 0\\ 4 & -6 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -9 & 6\\ 12 & -18 & 6\\ 3 & -6 & 12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2-0 & 10-(-9) & 4-6\\ 10-12 & -2-(-18) & 0-6\\ 4-3 & -6-(-6) & 8-12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 19 & -2\\ -2 & 16 & -6\\ 1 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $2\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ 5 & -1 & 0\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0 & -3 & 2\\ 4 & -6 & 2\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 19 & -2\\ -2 & 16 & -6\\ 1 & 0 & -4\end{bmatrix}$

<u>លំហាត់ទី ០៤</u>៖ គណនា AB បើ

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}\quad and\quad B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -5\\ 3 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

<u>ចម្លើយទី ០៤</u> គណនា AB

ដោយ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

យើងបាន $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

ដោយ $A_{3\times2}$ និង $B_{2\times3}$ នោះយើងអាចធ្វើប្រមាណវិធីគុណបាន

$$AB = \begin{bmatrix} 2-3 & -4-4 & -10+0 \\ 1+0 & -2+0 & -5+0 \\ -3+12 & 6+16 & 15+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $AB = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$, $(AB)_{3\times3}$

<u>លំហាត់ទី ០៥</u> ៖ គណនា AB បើ

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

<u>ចម្លើយទី ០៥</u> ៖

ដោយ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

យើងបាន $AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

ដោយ $A_{2\times3}$ និង $B_{3\times4}$ នោះយើងអាចធ្វើប្រមាណវិធីគុណបាន

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2+0 & -8+1+0 & 0-3+0 & 2+1+0 \\ 1+0-12 & -4+0+0 & 0+0+6 & 1+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -7 & -3 & 3 \\ -11 & -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $AB = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -3 & 3 \\ -11 & -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

លំហាត់ទី ០៦៖ គណនា AB , AC , AD , BD , និង CD បើ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ចម្លើយទី ០៦ ៖ គណនា

- គណនា AB

ដោយ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

យើងបាន $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

ដោយ $A_{2\times3}$ និង $B_{2\times3}$ នោះយើងមិនអាចធ្វើប្រមាណវិធីគុណបានឡើយ។

ដូចនេះ AB មិនអាចគណនាបាន

- គណនា AC

ដោយ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ និង$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

យើងបាន $AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ដោយ $A_{2\times3}$ និង $C_{3\times4}$ នោះយើងអាចគណនាប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីសនេះ

បាន

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-5-2 & -3+1+0 & 0+4+0 & 1-2+6 \\ 0+15-4 & 0-3+0 & 0-12+0 & 0+6+12 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5 & -2 & 4 & 5\\ 11 & -3 & -12 & 18\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $AC=\begin{bmatrix}-5 & -2 & 4 & 5\\ 11 & -3 & -12 & 18\end{bmatrix}$

- គណនា AD

ដោយ $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$ និង$D=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}$

យើងបាន $AD=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}$

ដោយ $A_{2\times3}$ និង $D_{3\times1}$ នោះប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីសនេះអាចគណនាបាន

យើងបាន $AD=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2+1+6\\ 0-3+12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9\\ 9\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $AD=\begin{bmatrix}9\\ 9\end{bmatrix}$

- គណនា BD

ដោយ $B=\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ និង $C=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -4 & 2\\ -1 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

យើងបាន $BC=\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -4 & 2\\ -1 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

ដោយ $B_{2\times3}$ និង $C_{3\times4}$ នោះយើងអាចគណនាប្រមាណវិធីគុណម៉ាទ្រីសនេះ

បាន

យើងបាន $BC=\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -4 & 2\\ -1 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 8+0+3 & -12+0-0 & 0-0-0 & 4+0-9 \\ -2-10-3 & 3+2+0 & 0+8+0 & -1-4+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & -12 & 0 & -5 \\ -15 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $BC = \begin{bmatrix} 11 & -12 & 0 & -5 \\ -15 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

- គណនា CD

ដោយ $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

យើងបាន $CD = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

ដោយ $C_{3\times4}$ & $D_{3\times1}$ នោះយើងមិនអាចគណនាប្រមាណវិធីគុណនៃម៉ាទ្រីស

នេះបានទេ។

ដូចនេះ CD មិនអាចគណនាបាន ។

<u>លំហាត់ទី ០៧៖</u> គេឲ្យ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$។ គណនា

ក. A^t ខ. AA^t គ. A^tA

<u>ចម្លើយ៖</u> ក. គណនា A^t

ដោយ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

យើងបាន $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

ដូចនេះ $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

ខ. គណនា AA^t

ដោយ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$ & $A^t=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

យើងបាន $AA^t=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1+4+0 & 3-2+0\\ 3-2+0 & 9+1+16\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 26\end{bmatrix}$

ដូចនេះ $AA^t=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 26\end{bmatrix}$

គ.គណនា A^tA

ដោយ $A^t_{3\times2}$ & $A_{2\times3}$

យើងបាន $A^tA=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1+9 & 2-3 & 0+12\\ 2-3 & 4+1 & -4\\ 12 & -4 & 16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -1 & 12\\ -1 & 5 & -4\\ 12 & -4 & 16\end{bmatrix}$

ដូចនេះ $A^tA=\begin{bmatrix}10 & -1 & 12\\ -1 & 5 & -4\\ 12 & -4 & 16\end{bmatrix}$

<u>**លំហាត់ទី ០៨**</u> ៖ ចំពោះម៉ាទ្រីសក្នុងលំហាត់ទី ០៦ , ចូរគណនា

ក. A^t ខ.A^tC គ.D^tA^t ឃ. B^tA ង.D^tD ច. DD^t

ចម្លើយ ៖

ក. គណនា A^t

ដោយ $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}$

យើងបាន $A^t=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

ដូចនេះ $A^t=\begin{bmatrix}1&0\\-1&3\\2&4\end{bmatrix}$

ខ. គណនា A^tC

យើងបាន $A^tC=\begin{bmatrix}1&0\\-1&3\\2&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&-3&0&1\\5&-1&-4&2\\-1&0&0&3\end{bmatrix}$

ដោយ $A^t_{3\times2}$ & $C_{3\times4}$ នោះយើងមិនអាចគណនាប្រមាណវិធីគុណនេះ

បានទេ។

ដូចនេះ AA^t មិនអាចគណនាបាន

គ. គណនា D^tA^t

ដោយ $D=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$ នោះ $D^t=\begin{bmatrix}2&-1&3\end{bmatrix}$,$D^t_{1\times3}$

ហើយ $A^t_{3\times2}$

យើងបាន $D^tA^t=\begin{bmatrix}2&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&3\\2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+1+6&0-3+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&9\end{bmatrix}$

ដូចនេះ $D^tA^t=\begin{bmatrix}9&9\end{bmatrix}$

ឃ. គណនា B^tA

គេមាន $B=\begin{bmatrix}4&0&-3\\-1&-2&3\end{bmatrix}$ នាំឲ្យ $B^t=\begin{bmatrix}4&-1\\0&-2\\-3&3\end{bmatrix}$

យើងបាន

$$B^tA=\begin{bmatrix}4&-1\\0&-2\\-3&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&3&4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-0 & -4-3 & 8-4 \\ 0-0 & 0-6 & 0-8 \\ -3+0 & 3+9 & -6+12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \\ -3 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $B^tA = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \\ -3 & 12 & 6 \end{bmatrix}$

ង. គណនា D^tD

យើងមាន $D^t = [2 \quad -1 \quad 3]$, $D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

យើងបាន $D^tD = [2 \quad -1 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$= [4+1+9] = [14]$$

ដូចនេះ $D^tD = [14]$

ច. គណនា DD^t

ដោយ $D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ & $D^t = [2 \quad -1 \quad 3]$

យើងបាន $DD^t = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \times [2 \quad -1 \quad 3] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$

ដូចនេះ $DD^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$

លំហាត់ទី ០៩ ៖ គេឲ្យ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ។ គណនា

ក. A^2 ខ. A^3 គ. $f(x)$ ដែល $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ ។

ខ. បង្ហាញថា A ជាឫសនៃពហុធា $g(X) = X^2 + 2X - 11I$ ។

<u>ចម្លើយ</u> ៖

ក. គណនា A^2

ដោយ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

យើងបាន $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$

ខ. គណនា A^3

តាមចម្លើយខាងលើ $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$

យើងបាន $A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9-16 & 18+12 \\ -8+68 & -16-51 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ: $A^3 = \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$

គ. គណនា $f(A)$

ដោយ $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$

យើងបាន

$$f(x) = 2A^3 - 4A + 5 = 2\begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14-4+5 & 60-8+0 \\ 120-16+0 & -134+12+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ: $f(A) = \begin{bmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{bmatrix}$

ឃ. បង្ហាញថា A ជាសូន្យនៃពហុធា $g(x)$

គេមានពហុធា $g(x) = x^2 + 2x - 11I$

យើងបាន $g(A) = A^2 + 2A - 11I$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 11\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+2-11 & -4+4+0 \\ -8+8-0 & 17-6-11 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសសូន្យ ពិត។

ដូចនេះ A ជាសូន្យនៃពហុធា $g(x)$ ។

<u>លំហាត់ទី ១០</u> ៖ គេឲ្យ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ។ គណនា

ក. A^2 ខ. A^3 គ. $f(A)$ ដែល $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

ឃ. បើ $g(x) = x^2 - x - 8$, គណនា $g(A)$

<u>ចម្លើយ</u> ៖

ក. គណនា A^2

គេមាន $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

នោះយើងបាន $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4+6 & 4-2 \\ 6-3 & 6+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $A^2 = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

ខ. គណនា A^3

យើងបាន $A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 20+6 & 20-2 \\ 6+21 & 6-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $A^3 = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{bmatrix}$

គ. គណនា $f(A)$

គេមាន $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

យើងបាន $f(A) = A^3 - 3A^2 + 5 = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 27 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 26-30+5 & 18-6+0 \\ 27-9+5 & -1-21+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 23 & -17 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 23 & -17 \end{bmatrix}$

ឃ. គណនា $g(A)$

គេមាន $g(x) = x^2 - x - 8$

នោះយើងបាន $g(A) = A^2 - A - 8$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10-2-8 & 2-2-0 \\ 3-3-0 & 7+1-8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $g(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

លំហាត់ទី ១២ ៖ គេថាម៉ាទ្រីស A និង B អាចត្រឡប់បានបើ $AB = BA$ ។

រកគ្រប់ម៉ាទ្រីសដែលអាចត្រឡប់បានជាមួយម៉ាទ្រីស $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ។

<u>ចម្លើយ</u> ៖ រកគ្រប់ម៉ាទ្រីសដែលអាចត្រឡប់បានជាមួយ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

សរសេរម៉ាទ្រីសជារាង $[A \mid I]$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right]$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right] \quad R_1 - R_2 \to R_1$$

ដូចនេះ ម៉ាទ្រីសដែលអាចត្រឡប់បានជាមួយ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ គឺ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

<u>លំហាត់ទី ១៣</u> ៖ គេឲ្យ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ។ គណនា A^n ។

<u>ចម្លើយ</u> គណនា A^n

យើងមាន $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

នោះយើងបាន $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+4 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

… … … … … … … … … … … … … … … … … …

… … … … … … … … … … … … … … … … … …

នោះ $$A^n = \underbrace{A.A.A \ldots A}_{n \text{ តួនៃ } A} = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ: $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

<u>លំហាត់ទី ១៤</u> ៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាស់ជាមួយនឹងម៉ាទ្រីស

ក. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ខ. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ គ. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

ចម្លើយ រកម៉ាទ្រីសច្រាស

ក. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

សរសេរម៉ាទ្រីសជារាង $[A|I]$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 - R_2 \to R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right] \quad 2R_1 - R_2 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right] \quad 2R_2 - R_1 \to R_1$$

នោះម៉ាទ្រីសច្រាសរបស់ $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ គឺ $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

ដូចនេះម៉ាទ្រីសច្រាសគឺ $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

ខ. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

តាមរូបមន្តច្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $B.B^{-1} = I$

យើងបាន $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ 7a + 5c & 7b + 5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

នោះយើងបានប្រព័ន្ធសមីការដូចតទៅៈ

$$\begin{cases} 3a + 2c = 1 & (1) \\ 3b + 2d = 0 & (2) \\ 7a + 5c = 0 & (3) \\ 7b + 5d = 1 & (4) \end{cases}$$

តាមសមីការ (1) និង (3) យើងបាន

$$\begin{matrix}\times(-5) \\ \times 2\end{matrix}\begin{cases}3a+2c=1\\7a+5c=0\end{cases}$$

$$-15a+14a=-5$$

$\Rightarrow -a=-5 \ \Leftrightarrow a=5$ យក $a=5$ ជំនួសក្នុងសមីការ $3a+2c=1$

យើងបាន $3\times 5+2c=1 \quad \Rightarrow c=-7$

តាមសមីការ (2) និង (4) យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}3b+2d=0\\7b+5d=1\end{cases}\begin{matrix}\times(-5)\\ \times(2)\end{matrix}$$

$$-15b+14b=2$$

$\Rightarrow b=-2$ យកទៅជំនួសក្នុងសមីការ $3b+2d=0$

យើងបាន $3(-2)+2d=0$, $-6+2d=0$, $2d=6$, $\Rightarrow d=3$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $a=5$, $b=-2$, $c=-7$, & $d=3$

នោះយើងទទួលបានម៉ាទ្រីសច្រាសរបស់ $\begin{bmatrix}3&2\\7&5\end{bmatrix}$ គឺ $\begin{bmatrix}5&-2\\-7&3\end{bmatrix}$

ដូចនេះ ម៉ាទ្រីសច្រាសរបស់វាគឺ $\begin{bmatrix}5&-2\\-7&3\end{bmatrix}$ ។

គ. $\begin{bmatrix}2&-3\\1&3\end{bmatrix}$

យើងបានដេទែមីណង់ $D=ad-bc=6—3=9$

យើងបានម៉ាទ្រីសច្រាសគឺ

$$\begin{bmatrix}2&-3\\1&3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3&3\\-1&2\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ ម៉ាទ្រីសច្រាសរបស់វាគឺ $\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3&3\\-1&2\end{bmatrix}$

<u>លំហាត់ទី ១៧</u> ៖ ប្រើម៉ាទ្រីសច្រាសដើម្បីដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ

ក. $\begin{cases} x+5y=2 \\ -3x-14y=-1 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} 2x+4y=1 \\ -2x-3y=-5 \end{cases}$

ចម្លើយ៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases} x+5y=2 \\ -3x-14y=-1 \end{cases}$

តាង $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -14 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ និង $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

តាមរូបមន្ត $A^{-1}B=X$

រកម៉ាទ្រីសច្រាសរបស់ម៉ាទ្រីស A

យើងបានដេទែមីណង់ $D=ad-bc=-14—35=-14+15=1$

យើងបានម៉ាទ្រីសច្រាសគឺ

$A^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

នោះយើងបាន $\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -14\times 2+5 \\ 6-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -23 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយគឺ $x=-23$ & $y=5$

ខ. $\begin{cases} 2x+4y=1 \\ -2x-3y=-5 \end{cases}$

យើងតាង $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

តាមរូបមន្ត $A^{-1}B=X$

តាមដេទែមីណង់យើងបាន $D=ad-bc=-6+8=2$

យើងបានម៉ាទ្រីសច្រាសគឺ $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3 & -4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

នោះយើងបាន $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3 & -4\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

សមមូល $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3+20\\ 2-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\frac{17}{2}\\ -\frac{8}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយគឺ $x=\frac{17}{2}$ & $y=-4$

លំហាត់ទី១៨ ៖ ប្រើម៉ាទ្រីសច្រាសដើម្បីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x-y+2=2\\ -4x+4y-5z=3\\ 2x+3y-6z=9\end{cases}$$

ចម្លើយ៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដោយប្រើម៉ាទ្រីសច្រាស

តាង $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -4 & 4 & -5\\ 2 & 3 & -6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 9\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$

តាមរូបមន្ត $A^{-1}=\frac{1}{detA}\times adjA$

តែ $adjA=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$

ដោយ $A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}4 & -5\\ 3 & -6\end{vmatrix}=-24+15=-9$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}-4 & -5\\ 2 & -6\end{vmatrix}=-(24+10)=-34$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}-4 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-12-8=-20$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -6\end{vmatrix}=6-6=0$$

$$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=-6-4=-10$$

$$A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -6\end{vmatrix}=-6-4=-10$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & -5\end{vmatrix}=(5-8)=-3$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -(-5+8) = -3$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

យើងបាន $adjA = \begin{bmatrix} -9 & 0 & -3 \\ -34 & -10 & -3 \\ -20 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

ហើយ $detA = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$$= 1(-9) + (-1)(-34) + 2(-20)$$

$$= 34 - 49 = -15$$

នោះម៉ាទ្រីសច្រាសគឺ $A^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -9 & 0 & -3 \\ -34 & -10 & -3 \\ -20 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

តាមរូបមន្ត $X = A^{-1}B$

យើងបាន $X = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -9 & 0 & -3 \\ -34 & -10 & -3 \\ -20 & -5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -45 \\ -125 \\ -55 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{25}{3} \\ \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

នោះយើងទាញបាន $x = 3$ $, y = \frac{25}{3}$ $, z = \frac{11}{3}$

ដូចនេះ ប្រពន្ធ័សមីការមានចម្លើយគឺ $x = 3$ $, y = \frac{25}{3}$ $, \& \ z = \frac{11}{3}$

លំហាត់ទី២០៖ ចូរដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការដោយប្រើម៉ាទ្រីសច្រាស

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ -3x + 4y - 4z = -8 \\ -5x - 7y + 9z = 6 \end{cases}$$

<u>ចម្លើយ៖</u> ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ

តាង $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -4 \\ -5 & -7 & 9 \end{bmatrix}$ $, B = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$ និង $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

តាមរូបមន្ត $A^{-1}=\frac{1}{detA}\times adjA$

ដែល $\mathrm{adjA}=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{31}\\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{32}\\ \mathrm{A}_{13} & \mathrm{A}_{23} & \mathrm{A}_{33}\end{bmatrix}$

ដោយ $A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}4 & -4\\ -7 & 9\end{vmatrix}=36-28=8$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}-3 & -4\\ -5 & 9\end{vmatrix}=-(-27-20)=47$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}-3 & -4\\ -5 & -7\end{vmatrix}=21+20=41$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -7 & 9\end{vmatrix}=-(-18+14)=4$$

$$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2\\ -5 & 9\end{vmatrix}=9+10=19$$

$$A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -2\\ -5 & -7\end{vmatrix}=-(-7-10)=17$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 4 & -4\end{vmatrix}=8-8=0$$

$$A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{vmatrix}=-(-4+6)=-2$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2$$

យើងបាន $adjA=\begin{bmatrix}8 & 4 & 0\\ 47 & 19 & -2\\ 41 & 17 & -2\end{bmatrix}$

ហើយ $datA=1(8)+(-2)(47)+2(41)=-4$

នោះគេបាន $A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}8 & 4 & 0\\ 47 & 19 & -2\\ 41 & 17 & -2\end{bmatrix}$

តាមរូបមន្ត $X=A^{-1}B$

$$\mathrm{X}=\ -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}8 & 4 & 0\\ 47 & 19 & -2\\ 41 & 17 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ -8\\ 6\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\ 24\\ 16\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{X}=\begin{bmatrix}0\\ -6\\ -4\end{bmatrix}$$

នោះយើងទាញបាន $x = 0\ , y = -6\ \&\ z = -4$

ដូចនេះ ប្រពន្ធ័សមីការមានចម្លើយគឺ $x = 0\ , y = -6 \,\&\, z = -4$ ។

<u>លំហាត់ទី២១</u> ៖ ប្រើម៉ាទ្រីសច្រាសដើម្បីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x \qquad\qquad + w = 3 \\ \qquad\qquad z + w = 0 \\ \qquad y \qquad + w = 5 \\ x + y \qquad\quad = 4 \end{cases}$$

<u>ចម្លើយ៖</u> ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

សរសេរជារាងម៉ាទ្រីស គេបាន

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow R_4 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 + R_1 \to R_1 \\ R_4 - R_2 \to R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \frac{1}{2} R_1 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] R_4 - R_2 \to R_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + R_2 \to R_2 \\ -R_3 \to R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] R_4 + R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right] - R_3 \to R_3$$

តាមម៉ាទ្រីសខាងលើយើងអាចទាញបាន $x = 1\,, y = 3\,, z = -2\,, \&w = 2$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយគឺ $x = 1\,, y = 3\,, z = -2$ និង $w = 2$ ។

<u>លំហាត់ទី ១៩</u> ៖ ប្រើម៉ាទ្រីសច្រាសដើម្បីដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -4x + 4y - 5z = -4 \\ 2x + 3y - 6z = 1 \end{cases}$$

<u>ចម្លើយ៖</u> ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ចេញពីប្រព័ន្ធសមីកាយើងតាង

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ និង } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

តាមរូបមន្ត $A^{-1} = \frac{1}{detA} \times adjA$

ដោយ $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 4(-6) — 53 = -9$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -34$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -20$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 13$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 13$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

ហើយ $detA = 1(-9) + (-1)(-34) + (-2)(-20) = 65$

នោះ $A^{-1} = \frac{1}{65}\begin{bmatrix} -9 & -12 & 13 \\ -34 & -2 & 13 \\ -20 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

តាមរូបមន្ត $X = A^{-1}B$

$$= \frac{1}{65}\begin{bmatrix} -9 & -12 & 13 \\ -34 & -2 & 13 \\ -20 & -5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{65}\begin{bmatrix} 61 \\ 21 \\ 20 \end{bmatrix}$$

យើងទាញបាន $x = \frac{61}{65}$ $, y = \frac{21}{65}$ $\& z = \frac{20}{65}$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយគឺ $x = \frac{61}{65}$ $, y = \frac{21}{65}$ $\& z = \frac{20}{65}$ ។

<u>លំហាត់ទី ១៥</u> ៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាសជាមួយនឹងម៉ាទ្រីស (បើមាន)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -6 \\ -3 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>ចម្លើយ៖</u> រកម៉ាទ្រីសច្រាសរបស់ម៉ាទ្រីសខាងលើ

សរសេរម៉ាទ្រីសខាងលើជារាង $[A \mid I]$ គេបាន

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -9 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad 3R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad 2R_1 + R_2 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 - R_3 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 - R_3 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 9 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 - R_2 \to R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{15}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad -\frac{1}{2}R_3 + R_1 \to R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 0 & -8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad -\frac{1}{2}R_2 + R_1 \to R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -4 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}R_2 \to R_2 \\ -\frac{1}{2}R_3 \to R_3 \end{array}$$

តាមម៉ាទ្រីសខាងលើយើងទាញបាន ម៉ាទ្រីសច្រាស គឺ

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -6 \\ -3 & -9 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{23}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ ម៉ាទ្រីសច្រាសគឺ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -6 \\ -3 & -9 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{23}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

<u>លំហាត់ទី១១</u> ៖ គេឲ្យ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ។ គណនា

_ក. គណនា $f(A)$ ដែល $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ ។

ខ. រក a nonzero columvector u ដែល $Au = 6u$ ។

ចម្លើយ៖ ក. គណនា $f(A)$

គេមាន $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

ដោយ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

យើងបាន $f(A) = 2A^2 - 4A + 3$

$$f(A) = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= 2\begin{bmatrix} 1+15 & 3+9 \\ 5+15 & 15+9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 20 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= 2\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 20 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4+3 & -12+0 \\ -20+0 & -12+3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 32-1 & 24-12 \\ 40-20 & 48-9 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 31 & 12 \\ 20 & 39 \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $f(A) = \begin{bmatrix} 31 & 12 \\ 20 & 39 \end{bmatrix}$

ខ. រក a nonzero columvecter u

តាង $u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ដែល $a \neq 0, b \neq 0, d \neq 0$ និង $d \neq 0$

យើងបាន $Au = 6u$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ 5a+3c & 5b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a & 6b \\ 6c & 6d \end{bmatrix}$$

យើងទាញបាន

$$\begin{cases} a+3c = 6a \\ 5a+3c = 6c \end{cases} \qquad \begin{cases} b+3d = 6b \\ 5b+3d = 6d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3c-5a = 0 \\ 5a-3c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3d-5b = 0 \\ 5b-3d = 0 \end{cases}$$

$$0 = 0 \qquad\qquad 0 = 0$$

ដូចនេះ គ្មាន u ខុសពីសូន្យណា ផ្ទៀងផ្ទាត់ $Au = 6u$ នោះទេ។

លំហាត់ទី ១៦ ៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាសជាមួយនឹងម៉ាទ្រីស (បើមាន)

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -10 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

ចម្លើយ៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាស

យើងមាន $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -10 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 11 \end{bmatrix}$

តាមរូបមន្ត $detA = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$

$$detA = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 9 & 1 & 11 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -10 & 3 \\ 7 & 1 & 11 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -10 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (5)(-16) - (7)(-12) + (-1)(4) - (9)(0) = 0$$

ដោយ $detA = 0$

យើងបានម៉ាទ្រីសខាងលើគ្មានម៉ាទ្រីសច្រាសទេ។

ដូចនេះ គ្មានម៉ាទ្រីសច្រាសទេ ។

សូមអរគុណលោកគ្រូ ថៃ ថាល់ ជាសាស្ត្រាចារ្យសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ ដែលបានដាក់កិច្ចការនេះមក