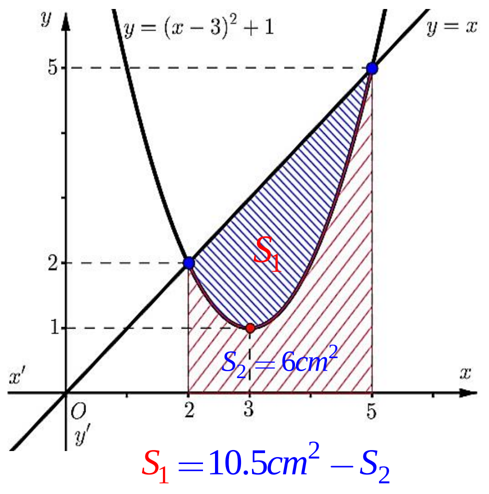
ហាមថតចម្លង
ដោយគ្មានការអនុញ្ញាត

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា



ថ្នាក់ទី ១០

ត្រៀមប្រឡងឆមាស ១+២ ប្រឡងសិស្សពូកែ និងប្រឡងនានា

ងាយយល់ ដំណោះស្រាយមានច្រើនរបៀប

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី (បោះពុម្ពលើកទី១)

រៀបរៀងដោយ គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យា១ ជំនាន់ទី២១ វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០

ហាមថតចម្លង
ដោយគ្មានការអនុញ្ញាត

សូមស្វែងរកវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាសម្រាប់
ថ្នាក់ទី១១ និងទី១២ បន្តទៀត

រក្សាសិទ្ធិគ្រប់យ៉ាងឆ្នាំ ២០១៦

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០

កិច្ចការស្រាវជ្រាវរបស់គរុនិស្សិតបរិញ្ញាបត្រ+១

គរុនិស្សិតជំនាន់ទី២១ ឯកទេសគណិតវិទ្យា ក្រុមទី១

គ្រូណែនាំ ស៊ឹម វិសុទ្ធ

គរុនិស្សិតរៀបរៀង

១. ស្អាត ឌីណា	៤. សុខ ម៉ៅ
២. ស្រ៊ុន យិតស្រ៊ី	៥. ឃុយ បូរ៉ា
៣. អោម សាប៊ី	៦. មាន ឡា

បំណែងចែកភារកិច្ច

ល.រ	គោត្តនាម-នាម	ភេទ	វិញ្ញាសាទី	ប៉ុស្តិ៍បម្រើការ	លេខទូរស័ព្ទ
១. គរុនិស្សិតតាក់តែងវិញ្ញាសា					
១	ស្តាត ឌីណា	ប	1,3,4,10,14,20	ខេត្តកណ្តាល	096 31 88 958
២	ស្រ៊ុន យិតស្រ៊ី	ប	15,16,17,18,19	ខេត្តកណ្តាល	016 39 68 30
៣	អ៊ឹម ឈុនលី	ប	2	ខេត្តកណ្តាល	087 38 53 63
៤	សុខ ម៉ៅ	ប	5,6	ខេត្តព្រះវិហារ	093 71 92 08
៥	ឃុយ បូរ៉ា	ប	7,8	ខេត្តកំពង់ឆ្នាំង	081 85 08 37
៦	អោម សាប៊ី	ប	9,11	ខេត្តកំពង់ឆ្នាំង	017 65 47 37
៧	មាន ឡា	ប	12,13	ខេត្តកំពង់ឆ្នាំង	098 47 90 78
២. គ្រូចារ្យណែនាំ					
១	ស៊ឹម វិសុទ្ធ	ប	1 - 20	វិ.ជាតិអប់រំ	016 59 50 07
៣. គរុនិស្សិតត្រួតពិនិត្យ					
១	ស្តាត ឌីណា	ប	1,3,19,20	ខេត្តកណ្តាល	096 31 88 958
២	ស្រ៊ុន យិតស្រ៊ី	ប	15,16,17,18	ខេត្តកណ្តាល	016 39 68 30
៣	សុខ ម៉ៅ	ប	2,4,5	ខេត្តព្រះវិហារ	093 71 92 08
៤	ឃុយ បូរ៉ា	ប	6,7,8	ខេត្តកំពង់ឆ្នាំង	081 85 08 37
៥	អោម សាប៊ី	ប	9,10,11	ខេត្តកំពង់ឆ្នាំង	017 65 47 37
៦	មាន ឡា	ប	12,13,14	ខេត្តកំពង់ឆ្នាំង	098 47 90 78
៤. គរុនិស្សិតរចនាក្របនិងទំព័រ					
១	ស្តាត ឌីណា	ប	1 - 20	ខេត្តកណ្តាល	096 31 88 958

សេចក្ដីថ្លែងអំណរគុណ

ក្រោយពីសម្រេចនូវសមិទ្ធផលថ្មី "**សៀវភៅវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០**" មួយនេះមក ក្រុមខ្ញុំបាទមានសេចក្ដីរីករាយជាពន់ពេក ព្រមទាំងនឹងទុកជាឯកសារសម្រាប់ប្អូនៗក្រោយៗស្វែងយល់ ។

យើងខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅជូនចំពោះលោក - អ្នកដែលមានគុណទាំងពីរគឺលោកឪពុក និងអ្នកម្ដាយដែលបានផ្ដល់កំណើតរូបកូនមក ថែមទាំងបីបាច់ថែរកក្សា និងផ្គត់ផ្គង់ទាំងសម្ភារ-ស្មារតីដែលធ្វើឱ្យរូបកូនបានមកដល់ឱកាសនេះ ។

យើងខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅជូនចំពោះឯកឧត្តមបណ្ឌិត **សៀង សុវណ្ណា** នាយកវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំដែលបានផ្ដល់ឱកាសដល់យើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាបានសិក្សារៀនសូត្រនៅទីនេះ ។

យើងខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅជូនចំពោះលោក **ស៊ីម វិសុទ្ធ** សាស្ត្រចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ និងជាសាស្ត្រចារ្យណែនាំក្នុងកិច្ចការស្រាវជ្រាវសម្រាប់គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យាជំនាន់ទី២១ ដែលបានផ្ដល់ជាគំនិតនិងរៀបចំប្រធានបទស្រាវជ្រាវដល់គរុនិស្សិត ។ ជាពិសេសលោកបានចំណាយពេលវេលាដ៏មានតម្លៃដើម្បីជួយពន្យល់បង្ហាញដល់យើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នាមុននឹងកិច្ចការស្រាវជ្រាវបានលេចចេញជារូបរាងមកនេះ ។

យើងខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅជូនចំពោះលោកគ្រូ-អ្នកគ្រូទាំងនៅបឋមសិក្សា មធ្យមសិក្សា និងឧត្តមសិក្សា ព្រមទាំងសាស្ត្រាចារ្យទាំងអស់ក្នុងវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំមានឈ្មោះថាឪពុក-ម្ដាយទីពីរបានផ្ដល់ទាំងចំណេះដឹង និងការអប់រំគ្រប់យ៉ាង ក្នុងគោលបំណងឱ្យយើងខ្ញុំក្លាយជាកូនល្អ មិត្តល្អ និងសិស្សល្អ ។

យើងខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះកល្យាណមិត្តទាំងអស់រួមជំនាន់ទី២១នៅវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ដែលបានជួយផ្ដល់មតិយោបល់បន្ថែមនិងកែលម្អ ព្រមទាំងវិធីសាស្ត្រក្នុងដំណោះស្រាយចំណោទនីមួយៗ ។

ជាទីបញ្ចប់ យើងខ្ញុំបាទសូមថ្លែងអំណរគុណម្ដងហើយ-ម្ដងទៀត និងសូមជូនពរសូមទទួលនូវពរទាំងប្រាំប្រការគឺ អាយុ-វណ្ណៈ-សុខៈ-ពលៈ និងបដិភានៈកុំបីឃ្លៀងឃ្លាតឡើយ ។

ឯកសារយោង

- សៀវភៅ "គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០" ភាគ១ និងភាគ២ របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បោះពុម្ពលើកទី១ ឆ្នាំ ២០០៨
- សៀវភៅ "គណិតវិទ្យា១" របស់ យឹម-អាយុវឌ្ឍនវិជ្ជា និងអេវ៉ាន-អាស្លី បោះពុម្ពលើកទី២ ឆ្នាំ ២០០០
- **Mathematics for international student , Mathematics HL (Core) second edition**
- **Suken Test (International Certificate of Japan Mathematics Institute)**
- **Complex Numbers from A to… Z**

អារម្ភកថា

ជាបឋមសួស្តីប្អូនៗ និងប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់គ្នាដែលកំពុងកាន់សៀវភៅ **“វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០”** ក្នុងដៃ ។ សៀវភៅនេះត្រូវបានប្រមូលផ្តុំឡើងដើម្បីជួយសម្រួលដល់ការសិក្សារបស់អ្នកទាំងអស់គ្នា ជាពិសេសប្អូនៗដែលកំពុងសិក្សាថ្នាក់ទី ១០ ហើយកំពុងត្រូវការឯកសារសិក្សាជាចាំបាច់ ។ សៀវភៅ **“វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០”** នេះពិតជាអាចជួយអ្នកទាំងអស់គ្នាបាននៃគណិតវិទ្យា ដែលក្នុងនោះរួមមាន **លំហាត់ដែលត្រូវនឹងគ្រប់មេរៀន លំហាត់អាចដោះស្រាយបានច្រើនរបៀបហើយងាយយល់...។ល។**

ការរៀបចំវិញ្ញាសាក្នុងសៀវភៅនេះ ៖

- វិញ្ញាសាសម្រាប់ឆមាសទី១គឺត្រូវនឹងមេរៀនដែលប្អូនៗត្រូវសិក្សានៅឆមាសទី១ ។
- វិញ្ញាសាសម្រាប់ឆមាសទី២គឺត្រូវនឹងមេរៀនដែលប្អូនៗត្រូវសិក្សានៅឆមាសទី២ ។
- វិញ្ញាសានីមួយៗត្រូវបានរៀបចំឡើងដោយយោងទៅលើរយៈពេលនៃការប្រឡង និងកម្មវិធីសិក្សាជាក់ស្តែង។
- វិញ្ញាសានីមួយៗមានកម្រិតពីមធ្យមទៅខ្លាំង ហើយវាក៏មានលំហាត់ប្លែកជាច្រើនផងដែរ ។

ចុងបញ្ចប់ដើម្បីឱ្យសៀវភៅនេះកាន់តែល្អប្រសើរ ខ្ញុំបាទនឹងរង់ចាំទទួលរាល់កំណែលម្អបន្ថែមពីសំណាក់ប្រិយមិត្តអ្នកអានសៀវភៅ **“វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០”** នេះគ្រប់ទិសទីដោយក្តីរីករាយ ព្រោះកំហុសដោយអចេតនាពិតជានឹងអាចកើតមានឡើងជាក់ជាពុំខាន ។

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ.ថ្ងៃទី ០១ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ២០១៦

ក្រុមអ្នករៀបរៀង

គណិតវិទ្យាក្រុម១ ជំនាន់ទី២១

បញ្ជីអត្ថបទ

ទំព័រទី

ត្រៀមប្រឡងឆមាសទី១

វិញ្ញាសាទី ១.....1

វិញ្ញាសាទី ២.....10

វិញ្ញាសាទី ៣.....17

វិញ្ញាសាទី ៤.....24

វិញ្ញាសាទី ៥.....34

វិញ្ញាសាទី ៦.....43

វិញ្ញាសាទី ៧.....52

វិញ្ញាសាទី ៨.....60

វិញ្ញាសាទី ៩.....70

ត្រៀមប្រឡងឆមាសទី២

វិញ្ញាសាទី ១០.....78

វិញ្ញាសាទី ១១.....86

វិញ្ញាសាទី ១២.....94

វិញ្ញាសាទី ១៣.....107

វិញ្ញាសាទី ១៤.....115

វិញ្ញាសាទី ១៥.....125

វិញ្ញាសាទី ១៦.....134

វិញ្ញាសាទី ១៧.....142

វិញ្ញាសាទី ១៨.....150

វិញ្ញាសាទី ១៩.....156

វិញ្ញាសាទី ២០.....164-171

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ១

រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម(បរិញ្ញា+១)គណិតវិទ្យា១ ជំនាន់២១

វិញ្ញាសាទី១

I.

1. គេមានពីរចំនួនកុំផ្លិចគឺ $x=(a^2-1)+7i$ និង $y=3+(a+b)i$ ។ កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $x=y$ ។

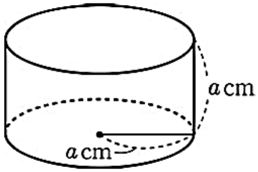
2. កំណត់តម្លៃ b និង c ដើម្បីឱ្យ $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+bx+c)$ ។

II.

1. គេមាន n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ រកកតម្លៃអប្បបរមានៃ n ដើម្បីឱ្យ $\sqrt{56n}$ ក្លាយជាចំនួនគត់ ។

2. ចូរបង្កើតសមីការដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាត y ដែលមានឫសជាចម្រាសនៃឫសរបស់សមីការ $2x^2-5x+3=0$ ។

3. កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $f(x)=2x^2-4x+3$ ។



III. ស៊ីឡាំងមួយដែលមានកាំ $a\ cm$ និងកម្ពស់ $a\ cm$ ។

ក. កំណត់ផ្ទៃក្រឡាសរុបនៃស៊ីឡាំងឱ្យជាប់ទាក់ទងនឹង a ។

ខ. ដើម្បីបង្កើតស៊ីឡាំងដែលធំជាងមុន គេបង្កើនប្រវែងកាំ និងកម្ពស់ $1cm$ ទៀតដូចគ្នា ។ បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាសរុបនៃស៊ីឡាំងថ្មីធំជាងផ្ទៃក្រឡាសរុបនៃស៊ីឡាំងដើមចំនួន $(8a+4)\pi\ cm^2$ ។

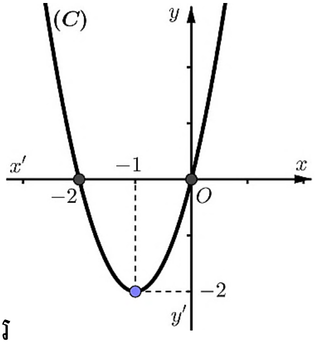
IV. គេឱ្យពីរចំណុច $A(4,0)$ និង $B(-2,8)$ ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។

ក. គណនាប្រវែង AB ។ រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ AB ។

ខ. រកចម្ងាយត្រង់រវាងគល់តម្រុយ និងបន្ទាត់ AB ។ រួចរកកូអរដោនេ I កណ្ដាល AB

គ. សរសេរសមីការស្តង់ដា និងសមីកាទូទៅនៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត I និងអង្កត់ផ្ចិត AB ។

V. តាមរូបខាងក្រោម C ជាក្រាបតាង $y=f(x)$ អនុគមន៍ដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាតមួយ x ។



ក. កំណត់អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ. ប្រើក្រាប ចូរទាញរកចម្លើយនៃសមីការ $f(x)=0$ និងវិសមីការ $f(x)<0$ ។

គ. បន្ទាត់ $L: y=x+a$ បានកាត់ក្រាប (C) ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នាតាងដោយ M និង N ។ ចូរកំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យប្រវែង $MN=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ រួចកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M និង N ។

ចម្លើយ

I. 1. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $x=y$

គេមាន $x=(a^2-1)+7i$, $y=3+\ a+b\ i$

ដើម្បីឱ្យ $x=y$ លុះត្រាតែ $(a^2-1)+7i=3+(a+b)i$

គេបាន $\begin{cases} a^2-1=3 & (1) \\ 7=a+b & (2) \end{cases}$ (ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា)

(1) គេបាន $a^2=3+1=4$ នាំឱ្យ $a=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

(2) ចំពោះ $a=2\ :\ 7=2+b \Rightarrow b=7-2=5$

ចំពោះ $a=-2\ :\ 7=-2+b \Rightarrow b=7+2=9$

ដូចនេះ $\boxed{(a=2\,,b=5)\ ,\ (a=-2\,,b=9)}$ ។

2. កំណត់តម្លៃ b និង c ដើម្បីឱ្យ $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+bx+c)$ (*)

❖ **វិធីទី១ :** ពន្លាតអង្គទី2 រួចផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នា

$$x^3-3x+2=x^3+bx^2+cx-x^2-bx-c$$

$$x^3+0x^2-3x+2=x^3+(b-1)x^2+(c-b)x-c$$

នាំឱ្យ $\begin{cases} b-1=0 & (1) \\ c-b=-3 & (2) \\ -c=2 & (3) \end{cases}$

តាម (1) គេបាន $b=1$ ហើយ (3) គេបាន $c=-2$

ដូចនេះ $\boxed{b=1\ ,\ c=-2}$ ។

❖ **វិធីទី២** : ចែកពហុធា (*) $x^2+bx+c=\dfrac{x^3-3x+2}{x-1}=x^2+x-2$

ដូចនេះ $\boxed{b=1\ ,\ c=-2}$ ។

❖ **វិធីទី៣** : ឱ្យតម្លៃ x (ដែល $x\neq 1$)

(*) ចំពោះ $x=0$ គេបាន $0^3-3(0)+2=(0-1)(0^2+b(0)+c)$

$$2=-c$$
$$c=-2$$

ចំពោះ $x=2$ គេបាន $2^3-3(2)+2=(2-1)(2^2+b(2)+c)$

$$4=4+2b+c$$
$$0=2b+c$$
$$b=-\frac{c}{2}=-\frac{-2}{2}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{b=1\ ,\ c=-2}$ ។

II. 1. រកកតម្លៃអប្បបរមានៃ n ដើម្បីឱ្យ $\sqrt{56n}$ ក្លាយជាចំនួនគត់

ដោយ $\sqrt{56n}=\sqrt{2^2\times2\times7\times n}=2\sqrt{2\times7\times n}$ ដែលអាចក្លាយជាចំនួនគត់បានលុះត្រាតែវាអាចចេញពីរ៉ាឌីកាល់បានទាំងអស់ ។

ដូច្នេះត្រូវយក $\boxed{n=2\times7=14}$ ជាតម្លៃអប្បបរមា ។

2. រកសមីការដឺក្រេទី2ដែលមានឫសជាចម្រាសនៃឫសរបស់សមីការ $2x^2-5x+3=0$

❖ **វិធីទី១**

+ គេត្រូវរកឫសនៃសមីការ $2x^2-5x+3=0$ **ជាមុនសិន**

ដោយមេគុណ $a+b+c=2+(-5)+3=0$ នោះឫស $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$

នោះសមីការដែលត្រូវបង្កើតត្រូវមានឫស $y_1=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{1}=1$, $y_2=\frac{1}{x_2}=\frac{1}{3/2}=\frac{2}{3}$

គេមាន $S=y_1+y_2=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ ហើយ $P=y_1\times y_2=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

នោះសមីការដែលត្រូវរកមានរាង $y^2-Sy+P=0$

ដូច្នេះ $\boxed{y^2-\frac{5}{3}y+\frac{2}{3}=0 \text{ ឬ } 3y^2-5y+2=0}$ ។

❖ **វិធីទី២ : គេគ្រាន់តែប្តូរទីតាំងគ្នានៃមេគុណ** a **និង** c

សមីការដើម $2x^2-5x+3=0$ នោះសមីការដែលមានឫសជាចម្រាសគឺ

$3x^2-5x+2=0$ ។ ប្តូរអញ្ញាតគេបាន $\boxed{3y^2-5y+2=0}$ ។

3. កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $f(x)=2x^2-4x+3$

❖ **វិធីទី១**

មេគុណ $a=2$, $b=-4$, $c=3$

គេបាន $x_o=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2(2)}=1$

ហើយ $y_o=f(1)=2\times1^2-4\times1+3=1$

ដោយ $a=2>0$ នោះ $\boxed{y_o=1}$ ជាតម្លៃតូចបំផុត ។

❖ **វិធីទី២** : គេអាចសរសេរ $y = f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

$$= 2x^2 - 4x + 2 \underbrace{-2+3}_{+1}$$

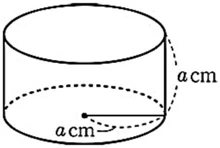
$$= 2(x^2 - 2x + 1) + 1$$

$$= 2\underbrace{(x-1)^2}_{0} + 1$$

ដោយយក $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ នោះនៅសល់តែ $y = 1$

ដោយមេគុណ $a = 2 > 0$ នោះ $\boxed{y = 1}$ ជាតម្លៃតូចបំផុត ។

III. ក.កំណត់ផ្ទៃក្រឡាសរុបនៃស៊ីឡាំងឱ្យជាប់ទាក់ទងនឹង a



$-$ផ្ទៃក្រឡាបាតស៊ីឡាំង $S_b = 2\pi r^2 = 2\pi a^2 \ cm^2$

$-$ផ្ទៃក្រឡាខាង $S_L = 2\pi rh = 2\pi a \times a = 2\pi a^2 \ cm^2$

នោះផ្ទៃក្រឡាសរុប $S = S_b + S_L = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = \boxed{4\pi a^2 \ cm^2}$ ។

ខ. បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាសរុបនៃស៊ីឡាំងថ្មីមុនធំជាងផ្ទៃក្រឡាដើមនៃស៊ីឡាំងដើមចំនួន $(8a+4)\pi \ cm^2$

នៅពេលដែលគេបង្កើនប្រវែងកាំ និងកម្ពស់ $1cm$ ដូចគ្នា

នោះផ្ទៃក្រឡានៃស៊ីឡាំងថ្មី $S' = 4\pi(a+1)^2 = 4\pi(a^2 + 2a + 1) \ cm^2$

ដូច្នេះផ្ទៃក្រឡាដែលលើសមានចំនួន

$S' - S = 4\pi(a^2 + 2a + 1) - 4\pi a^2 = 4\pi(2a+1) = \boxed{(8a+4)\pi \ cm^2}$ ពិត ។

IV. មាន $A(4, 0)$ និង $B(-2, 8)$ ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ

ក. គណនាប្រវែង AB

$AB = \sqrt{(-2-4)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \boxed{10 \text{ ឯកតាប្រវែង}}$ ។

+ រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ AB

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

$$y-0=\frac{8-0}{-2-4}(x-4)$$

$$y=-\frac{4}{3}(x-4)$$

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$$

ដូចនេះបន្ទាត់ $\boxed{AB:\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}}$ ។

ខ. រកចម្ងាយត្រង់រវាងគល់តម្រុយនិងបន្ទាត់ AB

តាងដោយ d

$AB:\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3} \Leftrightarrow 3y+4x-16=0$ គល់តម្រុយ $O(0,0)$

នោះ $d=\frac{|3y_o+4x_o-16|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3(0)+4(0)-16|}{\sqrt{9+16}}=\boxed{\frac{16}{5}\text{ ឯកតាប្រវែង}}$ ។

+ រួចរកកូអរដោនេ I កណ្ដាល AB

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=I\left(\frac{4+(-2)}{2},\frac{-2+8}{2}\right)=\boxed{I\ 1,3}$$ ។

គ. សរសេរសមីការស្តង់ដា និងសមីកាទូទៅនៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត I និងអង្កត់ផ្ចិត AB

ផ្ចិត $\left.\begin{matrix} I\ 1,3 \\ I(a,b)\end{matrix}\right| \Rightarrow a=1,\ b=3$, កាំ $r=\frac{AB}{2}=\frac{10}{2}=5$

សមីការរង្វង់នេះគឺ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Leftrightarrow \boxed{(x-1)^2+(y-3)^2=5^2}$

ជាសមីការស្តង់ដា ។

ពន្លាតសមីការស្តង់ដាគេបាន $x^2-2x+1+y^2-6y+9=25$

$$x^2-2x+1+y^2-6y+9-25=0$$

ដូច្នេះ $\boxed{x^2+y^2-2x-6y-15=0}$ ជាសមីការទូទៅនៃរង្វង់ ។

❖ វិធីម៉្យាងទៀត ដើម្បីកំណត់សមីការទូទៅ

សមីការទូទៅរាង $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ (*)

ដែល $A=-2a=-2(1)=-2$, $B=-2b=-2(3)=-6$

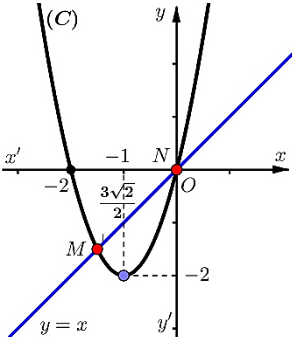
$$C=a^2+b^2-r^2=1^2+3^2-5^2=1+9-25=-15$$

(*) ក្លាយជា $\boxed{x^2+y^2-2x-6y-15=0}$ ។

V. ក. កំណត់អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ x

❖ វិធីទី១ :

រាងអនុគមន៍ដឺក្រេទី2 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ (*)



តាមរូប $y=f(x)$ កាត់តាមចំណុច ៖

- $(-2, 0)$ គេបាន $4a-2b+c=0$ (1)
- $(0, 0)$ គេបាន $c=0$
- $(-1, -2)$ គេបាន $a-b+c=-2$ (2)

យក $c=0$ ជំនួសក្នុង (1) និង (2)

គេបាន $\begin{cases}4a-2b=0\\ a-b=-2 \quad \times(-2)\end{cases} \Leftrightarrow +\begin{cases}4a-2b=0\\ -2a+2b=4\end{cases}$

$$2a=4 \Rightarrow a=2$$

ហើយ $a-b=-2 \Leftrightarrow 2-b=-2 \Rightarrow b=4$

ដូចនេះ (*) ក្លាយជា $\boxed{y=f(x)=2x^2+4x}$ ។

❖ វិធីទី២ : អនុគមន៍ដឺក្រេទី 2 មានរាង $y=f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ (*)

ដែល (α, β) ជាកំពូលនោះគេបាន $(\alpha,\beta)=(-1,-2) \Rightarrow \alpha=-1$, $\beta=-2$

ហើយ (*) ក្លាយជា $y=f(x)=a(x-1)^2-2$ (**)

តែក្រាបកាត់គល់តម្រុយ $(0, 0)$ គេបាន $0=a(0-1)^2-2 \Rightarrow a=2$

ដូចនេះ (**) $\boxed{y=f(x)=2(x-1)^2-2 \text{ ពន្លាត } y=f(x)=2x^2+4x}$ ។

ខ. ប្រើក្រាប ចូរទាញរកចម្លើយនៃសមីការ $f(x)=0$ និងវិសមីការ $f(x)<0$

• ចម្លើយនៃសមីការ $f(x)=0$ គឺជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ និងបន្ទាត់ $y=0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស) ។

តាមក្រាប $\boxed{x_1=-2 \text{ និង } x_2=0}$ ។

• ចម្លើយនៃវិសមីការ $f(x)<0$ គឺសំណុំតម្លៃ x ដែលក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ នៅពីក្រោមបន្ទាត់ $y=0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស) តាមក្រាបគេបាន $\boxed{-2<x<0}$ ។

គ. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យប្រវែង $MN=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

• ដោយបន្ទាត់ $L: y=x+a$ បានកាត់ក្រាប (C) ត្រង់ពីរចំណុច M និង N ផ្សេងគ្នានោះកូអរដោនេរបស់វាជាឫសនៃប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} y=2x^2+4x & (1) \\ y=x+a & (2) \end{cases}$

ផ្ទឹមសមីការទាំងពីរគេបាន $2x^2+4x=x+a \iff 2x^2+3x-a=0$ **(*)**

គេបាន $\Delta=3^2-4(2)(-a)=9+8a$

មានលក្ខខណ្ឌ $9+8a>0 \iff a>-\frac{9}{8}$

តាម (*) បើ x_1 និង x_2 ជាឫសនោះគេបាន $x_1+x_2=-\frac{3}{2}$, $x_1x_2=-\frac{a}{2}$

• រក $(x_2-x_1)^2$

$$(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_2x_1=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{9}{4}+\frac{4a}{2}=\frac{9+8a}{4}$$

• រក $(y_2-y_1)^2$

ដោយ (2) : $y_1=x_1+a$, $y_2=x_2+a$

នាំឱ្យ $y_2-y_1=x_2+a-(x_1+a)=x_2-x_1$

គេបាន $(y_2-y_1)^2=(x_2-x_1)^2$

• យក $M(x_1\,,\,y_1)$ និង $N(x_2\,,\,y_2)$ (ដែល $x_1 < x_2$)

នោះប្រវែង
$$
\begin{aligned}
MN^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\
&= (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \\
&= 2(x_2 - x_1)^2 \\
&= 2 \times \frac{9+8a}{4} \\
&= \frac{9+8a}{2}
\end{aligned}
$$

បម្រាប់ $MN = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MN^2 = \dfrac{9}{2}$

គេបាន $\dfrac{9+8a}{2} = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow 9+8a = 9 \Rightarrow a = 0$

ដូចនេះ $\boxed{a = 0}$ ។

+ រួចកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M និង N

ចំពោះតម្លៃ $a=0$ នោះសមីការ (*) ក្លាយជា $2x^2 + 3x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(2x+3) = 0$

គេបាន $x_2 = 0$ ឬ $2x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -\dfrac{3}{2}$

ហើយ $y_1 = x_1 + a = -\dfrac{3}{2} + 0 = -\dfrac{3}{2}$ និង $y_2 = x_2 + a = 0 + 0 = 0$

គេបាន $M(x_1\,,\,y_1) = M\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ ហើយ $N(x_2\,,\,y_2) = N(0,\,0)$

ដូចនេះ $\boxed{M\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right) \text{ និង } N(0,\,0)}$ ។

ចប់វិញ្ញាសាទី១

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ១

រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម(បរិញ្ញា+១)គណិតវិទ្យា១ ជំនាន់២១

វិញ្ញាសាទី២

I. 1. សំណើពីរ p និង q ។ ចូរសង់តារាងភាពពិតនៃសំណើ $p\wedge(\overline{p\vee q})$ ។

2. បង្ហាញថាបើ $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ នោះ $xy\leq\dfrac{1}{4}$ ចំពោះ $x+y=1$ ។

II. គេឱ្យសំណុំសកល $U=\ x\,|\,x$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $0<x<10$ និងមានសំណុំរងពីរទៀតគឺ A និង B ដែល $n(\overline{A})=3$ និង $n(B)=2$ ។

ក. កំណត់ចំនួនធាតុនៃសំណុំ A ។

ខ. កំណត់ចំនួនធាតុនៃសំណុំរងបំពេញនៃ B ។

III. 1. គណនាកន្សោមខាងក្រោម

$$E=\frac{2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{\frac{8}{9}}-15\sqrt{\frac{32}{25}}+10\sqrt{2} \qquad F=\sqrt{-\frac{(7\sqrt{3}+3\sqrt{7})(-7\sqrt{3}+3\sqrt{7})}{42}}$$

2. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម

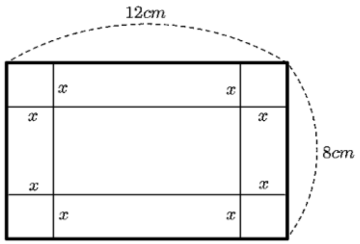
$$G=\sqrt{6-\sqrt{42}} \qquad H=\sqrt{78-(\sqrt{4}-\sqrt{10})^2} \qquad I=\sqrt{24-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}$$

IV. ដោះស្រាយសមីការ និងប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $x^3+3x^2-4x-12=0$

ខ. $\begin{cases}3x+2y+z=6\\3x+y+z=5\\x+y+z=3\end{cases}$

V. គេធ្វើក្រដាសមួយពីក្រដាសកាតុងរឹងរាងចតុកោណកែងមានបណ្តោយ $12cm$ និងទទឹង $8cm$ ។ គេកាត់ការេបួន ដែលមានទ្រនុង xcm ចេញពីបួនជ្រុងរបស់ការេនោះ ។ រួចបត់បណ្តោយ និងទទឹងតាមចំណុចៗ (ដូចរូប) ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែង ។ ចូររកតម្លៃ x បើមាឌនៃអប់នេះស្មើនឹង $64cm^3$ ។



VI. 1. រកកូអរដោនេនៃចំណុចចែកក្នុង E និងចែកក្រៅ F នៃអង្កត់ AB តាមផលធៀប $3:4$ ចំពោះគូចំណុច $A(1, 3)$ និង $B(-2, 5)$ ។ រួចគណនាប្រវែង EF ។

2. ក. កំណត់សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2, 3)$ និង $B(10, 5)$ ។

ខ. កំណត់ចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $L_1 : x+y=4$ និង $L_2 : 2x-y=1$ ។

រួចកំណត់សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចប្រសព្វខាងលើនិងចំណុច $(-2, 1)$ ។

ចម្លើយ

I. 1. **សង់តារាងភាពពិតនៃសំណើ** $p\wedge(\overline{p\vee q})$

p	q	$\overline{p}$	$p\vee q$	$\overline{p\vee q}$	$p\wedge(\overline{p\vee q})$
1	1	0	1	0	**0**
1	0	0	1	0	**0**
0	1	1	1	0	**0**
0	0	1	0	1	**0**

2. **បង្ហាញថាបើ** $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ **នោះ** $xy\leq\frac{1}{4}$ **ចំពោះ** $x+y=1$

គេបាន $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ សមមូល $1\geq 2\sqrt{xy}$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{xy}\leq\frac{1}{2}$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេនោះ $\sqrt{(xy)^2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^2$ សមមូល $\boxed{xy\leq\frac{1}{4} \text{ ពិត}}$ ។

II. ក. កំណត់ចំនួនធាតុនៃសំណុំ A

ដោយ $U=\{x\mid x$ ចំ.គត់វិជ្ជមានដែល $0<x<10\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

នាំឱ្យ $n(U)=9$

មាន $n(A)+n(\overline{A})=n(U)$

នោះ $n(A)=n(U)-n(\overline{A})=9-3=\boxed{6}$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនធាតុនៃសំណុំរងបំពេញនៃ B

មាន $n(B)+n(\overline{B})=n(U)$

នោះ $n(\overline{B})=n(U)-n(B)=9-2=\boxed{7}$ ។

III. 1. គណនាកន្សោមខាងក្រោម

$$E=\frac{2}{\sqrt{2}}-3\sqrt{\frac{8}{9}}-15\sqrt{\frac{32}{25}}+10\sqrt{2}=\sqrt{2}-2\sqrt{2}-3\times4\sqrt{2}+10\sqrt{2}=\boxed{-3\sqrt{2}}$$ ។

$$F=\sqrt{-\frac{(7\sqrt{3}+3\sqrt{7})(-7\sqrt{3}+3\sqrt{7})}{42}}=\sqrt{\frac{(7\sqrt{3})^2-(3\sqrt{7})^2}{42}}$$

$$=\sqrt{\frac{147-63}{42}}=\sqrt{\frac{84}{42}}=\boxed{\sqrt{2}}$$ ។

2. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម

$$G=\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{6-2\sqrt{8}}=\sqrt{(4+2)-2\sqrt{4\times2}}=\sqrt{4}-\sqrt{2}=\boxed{2-\sqrt{2}}$$ ។

$$H=\sqrt{27-(\sqrt{4}-\sqrt{10})^2}=\sqrt{27-(2-\sqrt{10})^2}=\sqrt{27-14+4\sqrt{10}}$$

$$=\sqrt{13+4\sqrt{10}}=\sqrt{13+2\sqrt{40}}=\sqrt{(8+5)+2\sqrt{8\times5}}=\sqrt{8}+\sqrt{5}=\boxed{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$$ ។

$$I=\sqrt{24-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{24-(5-2\sqrt{15}+3)}=\sqrt{16+2\sqrt{15}}$$

$$=\sqrt{(15+1)+2\sqrt{15\times1}}=\sqrt{15}+\sqrt{1}=\boxed{\sqrt{15}+1}$$ ។

IV. ដោះស្រាយសមីការ និងប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $x^3+3x^2-4x-12=0$

គេបាន $x^2(x+3)-4(x+3)=0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2-4)=0$

បើ $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

បើ $x^2-4=0 \Rightarrow x=2 \ , \ x=-2$

ដូចនេះឬស $\boxed{x_1=-3 \ , \ x=-2 \ , \ x=2}$ ។

ខ. $\begin{cases} 3x+2y+z=6 & (1) \\ 3x+y+z=5 & (2) \\ x+y+z=3 & (3) \end{cases}$

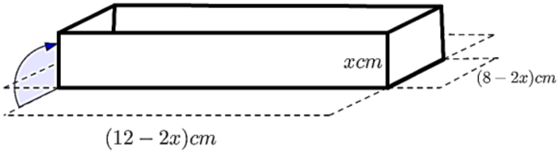
$(2)-(3) \ : \ 2x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{2}=1$

$(1)-(2) \ : \ y=1$

$(3) : 1+1+z=3 \Leftrightarrow z=3-1-1=1$

ដូចនេះឬស $\boxed{(x=1 \ , \ y=1 \ , \ z=1)}$ ។

V. រកតម្លៃ x បើមាឌនៃប្រអប់នេះស្មើនឹង $64cm^3$



បណ្តោយប្រអប់ $(12-2x)cm$ ទទឹង $(8-2x)cm$

កម្ពស់ xcm នោះមាឌប្រអប់គឺ $x(12-2x)(8-2x)=64$

$x(96-24x-16x+4x^2)=64$

$x(4x^2-40x+96)=64$

$4x^3-40x^2+96x-64=0$

$x^3-10x^2+24x-16=0 \quad (*)$

ចំពោះ $x=2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ (*) នោះ $(x-2)$ ជាកត្តាមួយរបស់ (*)

(*) អាចសរសេរ $(x-2)(x^2-8x+8)=0$ (ចែកអង្គទី១នៃ (*) នឹង $(x-2)$)

គេបានឫស $x=2$, $x=4-2\sqrt{2}$, $x=4+2\sqrt{2}$

តែលក្ខខណ្ឌចំណោទ $0<x<\frac{8}{2}=4$

ដូចនេះគេត្រូវយក $\boxed{x=2\ ,\ x=4-2\sqrt{2}}$ ។

VI. 1. **រកកូអរដោនេនៃ E និង F**

គេមាន $A(1,3)\Rightarrow x_a=1\ ,\ y_a=3$, $B(-2,5)\Rightarrow x_b=-2\ ,\ y_b=5$

$$\left.\begin{matrix}3:4\\ m:n\end{matrix}\right|\Rightarrow m=3\ ,\ n=4$$

• E ជាចំណុចចែកក្នុងអង្កត់ AB តាមផលធៀប 3:4 មានកូអរដោនេ $E(x_E\,,y_E)$

$$\left.\begin{matrix}x_E=\dfrac{mx_b+nx_a}{m+n}=\dfrac{3(-2)+4(1)}{3+4}=\dfrac{-6+4}{7}=-\dfrac{2}{7}\\ y_E=\dfrac{my_b+yx_a}{m+n}=\dfrac{3(5)+4(3)}{3+4}=\dfrac{15+12}{7}=\dfrac{27}{7}\end{matrix}\right|\Rightarrow \boxed{E\left(-\frac{2}{7},\frac{27}{7}\right)}$$ ។

• F ជាចំណុចចែកក្រៅអង្កត់ AB តាមផលធៀប 3:4 មានកូអរដោនេ

$F(x_F\,,y_F)$

$$\left.\begin{matrix}x_F=\dfrac{mx_b-nx_a}{m-n}=\dfrac{3(-2)-4(1)}{3-4}=\dfrac{-10}{-1}=10\\ y_F=\dfrac{my_b-yx_a}{m-n}=\dfrac{3(5)-4(3)}{3-4}=\dfrac{3}{-1}=-3\end{matrix}\right|\Rightarrow \boxed{F(10,-3)}$$ ។

+ **គណនាប្រវែង** EF

$$EF=\sqrt{(x_F-x_E)^2+(x_F-x_E)^2}=\sqrt{\left[10-\left(-\frac{2}{7}\right)\right]^2+\left(-3-\frac{27}{7}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{72}{7}\right)^2+\left(-\frac{48}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{5184+2304}{7^2}}=\sqrt{\frac{7488}{7^2}}$$

ដូចនេះ $\boxed{EF=\dfrac{24\sqrt{13}}{7}\ \text{ឯកតាប្រវែង}}$ ។

2. ក. កំណត់សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2,3)$ **និង** $B(10,5)$

គេមាន $A(2,3) \Rightarrow x_A = 2\ ,\ y_A = 3$

$B(10,5) \Rightarrow x_B = 10\ ,\ y_B = 5$

សមីការបន្ទាត់ AB កំណត់ដោយ $y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$

$$y - 3 = \frac{5-3}{10-2}(x-2)$$

$$y = \frac{2}{8}(x-2) + 3$$

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + 3$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ $\boxed{AB : y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}}$ ។

ខ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $L_1 : x + y = 4$ **និង** $L_2 : 2x - y = 1$

វាជាឫសនៃប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x + y = 4 & L_1 \\ 2x - y = 1 & L_2 \end{cases}$

យក $L_1 + L_2\ :\ 3x = 4 + 1 = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$

តាម $L_1\ :\ y = 4 - x = 4 - \dfrac{5}{3} = \dfrac{7}{3}$

ដូចនេះចំណុចប្រសព្វនោះគឺ $\boxed{x = \frac{5}{3}, y = \frac{7}{3}}$ ។

+ រួចកំណត់សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចប្រសព្វខាងលើនិងចំណុច $(-2, 1)$

តាង $M\left(x=\frac{5}{3}, y=\frac{7}{3}\right)$ ហើយ $N(-2, 1)$

នោះសមីកាបន្ទាត់ MN កំណត់ដោយ $y-y_N=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}(x-x_N)$

$$y-1=\frac{1-\frac{7}{3}}{-2-\frac{5}{3}}[x-(-2)]$$

$$y-1=\frac{-4}{-11}(x+2)$$

$$y=\frac{4}{11}x+\frac{8}{11}+1$$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់នោះគឺ $\boxed{y=\frac{4}{11}x+\frac{19}{11}}$ ។

ចប់វិញ្ញាសាទី២

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ១
រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម(បរិញ្ញា+១)គណិតវិទ្យា១ ជំនាន់២១

វិញ្ញាសាទី៣

I.

1. គេមានសំណើពីរគឺ p : " 2^{2016} មានលេខខាងចុង 6" និង q : " $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$ "
ចូរបង្ហាញថាតម្លៃភាពពិត ត.$\left[(p \vee q) \Rightarrow \overline{p}\right] = 0$ ។

2. សណ្ដុំ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ មានសំណុំរងមួយគឺ $B = \{x | x \in A, x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$
ក. រកសំណុំរងទាំងអស់នៃ A ដែលអាចមាន ។
ខ. កំណត់សំណុំ $\overline{B}$ ($\overline{B}$ ជាសំណុំរងបំពេញនៃ B)។

II.

1. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យកន្សោម $\dfrac{x^2 + 2x + 13}{x + 1}$ ក្លាយជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

2. សរសេរកន្សោម $x^4 + x^2y^2 - 2y^4$ ជាផលគុណកត្តា ។

3. រកមេគុណនៃ x^{2016} ក្នុងកន្សោម $(2x^2 - 3x + 1)^{1008}$ ។

4. រកតម្លៃ k ដែលពហុធា $x^2 + (k-1)x + k^2 - 16$ ចែកដាច់នឹង $x - 3$ ។

III. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11 \\ xyz = 6 \end{cases}$ ដោយយក $x < y < z$ ។

IV. ចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ និង $z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ។

ចូរគណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ និង $\dfrac{z_1}{z_2}$ ។

V. គេមានចំណុច $A(2,\ 3)$, $B(1,\ 0)$ និង $C(6,1)$ ។

ក. សរសេរសមីការបន្ទាត់ AB ។ រួចគណនាចម្ងាយរវាងចំណុច C និងបន្ទាត់ AB ។

ខ. គណនាប្រវែង AB ។ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

VI. គេឱ្យក្រាបពីរកំណត់ដោយ $(C)\ :\ y=f(x)=x^2-4x+5$

$$(H)\ :\ y=g(x)=-2x+n$$

ក. ក្រាប (C) និង (H) ប៉ះគ្នាត្រង់ចំណុច A ។ កំណត់តម្លៃ n និងកូអរដោនេនៃចំណុច A

ខ. ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញ ចូរសង់ក្រាប (C) និង (H) ក្នុងតម្រុយតែមួយ

គ. តាមក្រាប ចូររកសំណុំតម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ $x^2-4x<-2x+n-5$ ។

ចម្លើយ

I. 1. ចូរបង្ហាញថាតម្លៃភាពពិត $\text{ត.}\left[(p\vee q)\Rightarrow \overline{p}\right]=0$

គេមានសំណើ p : " 2^{2016} មានលេខខាងចុង 6 " នោះ $\text{ត.}(p)=1$

q : " $\sqrt{2}>\sqrt[3]{3}$ " នោះ $\text{ត.}(q)=0$

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	$(p\vee q)$	$\overline{p}$	$(p\vee q)\Rightarrow \overline{p}$
1	0	1	0	0

ដូចនេះ $\boxed{\text{ត.}\left[(p\vee q)\Rightarrow \overline{p}\right]=0\ \text{ពិត}}$ ។

2. សណុំ $A=\{1,2,3,4,5\}$ **មានសំណុំរងមួយគឺ**

$B=\{x\,|\,x\in A,\ x=2n,\ n\in \mathbb{N}\}$

ក. រកចំនួនសំណុំរងទាំងអស់នៃ A ដែលអាចមាន

❖ **វិធីទី១ : វិធីគណនា**

ដោយសំណុំ A មាន 5 ធាតុនោះសំណុំរងទាំងអស់នៃ A មានចំនួន $2^5=\boxed{32\ \text{សំណុំ}}$ ។

❖ **វិធីទី២ : វិធីរៀបរាប់**

– ករណីសំណុំរងគ្មានធាតុគឺ $\varnothing$ ចំនួន 1 សំណុំ

– ករណីសំណុំរង 1 ធាតុគឺ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ចំនួន 5 សំណុំ

– ករណីសំណុំរង 2 ធាតុគឺ 1,2 , 1,3 , 1,4 , 1,5 , 2,3 , 2,4 , 2,5 , 3,4 , 3,5 , 4,5 ចំនួន 10 សំណុំ

– ករណីសំណុំរង 3 ធាតុគឺ 1,2,3 , 1,2,4 , 1,2,5 , 1,3,4 , 1,3,5 , 1,4,5 , 2,3,4 , 2,3,5 , 2,4,5 , 3,4,5 ចំនួន 10 សំណុំ

– ករណីសំណុំរង 4 ធាតុគឺ 1,2,3,4 , 1,2,3,5 , 1,2,4,5 , 1,3,4,5 , 2,3,4,5 ចំនួន 5 សំណុំ

– ករណីសំណុំរង 5 ធាតុគឺ 1,2,3,4,5 ចំនួន 1 សំណុំ

ដូចនេះចំនួនសំណុំរងទាំងអស់ដែលអាចមានចំនួន $1+5+10+10+5+1=\boxed{32 \text{ សំណុំ}}$ ។

ខ. កំណត់សំណុំ $\overline{B}$ ($\overline{B}$ ជាសំណុំរងបំពេញនៃ B)

ដោយសំណុំ $B = 2 , 4$ នោះសំណុំរងបំពេញនៃ B គឺ $\boxed{\overline{B} = 1 , 3 , 5}$ ។

II. 1. **កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យកន្សោម $\dfrac{x^2+2x+13}{x+1}$ ក្លាយជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន**

ដោយ $\dfrac{x^2+2x+13}{x+1} = \dfrac{(x+1)^2+12}{x+1} = x+1+\dfrac{12}{x+1}$

កន្សោម $\dfrac{x^2+2x+13}{x+1}$ ក្លាយជាចំនួនគត់វិជ្ជមានលុះត្រាតែ យកតម្លៃ x ណាដែលធ្វើឱ្យ 12 ចែកដាច់នឹង $x+1$ ។

ដូច្នេះគេត្រូវយកតម្លៃ $\boxed{x = 0 , 1 , 2 , 3 , 5 , 11}$ ។

សម្គាល់ : គេមិនយក $x = -2, -3, -5, -11$ ទេព្រោះធ្វើឱ្យ $\dfrac{x^2+2x+13}{x+1}$ ជាចំនួនគត់អវិជ្ជមាន ។

2. សរសេរកន្សោម $x^4+x^2y^2-2y^4$ ជាផលគុណកត្តា

$$\begin{aligned}x^4+x^2y^2-2y^4 &= x^4+2x^2y^2-x^2y^2-2y^4\\ &= x^2(x^2+2y^2)-y^2(x^2+2y^2)\\ &= (x^2+2y^2)(x^2-y^2)\\ &= \boxed{(x^2+2y^2)(x-y)(x+y)}\end{aligned}$$ ។

3. រកមេគុណនៃ x^{2016} ក្នុងកន្សោម $(2x^2-3x+1)^{1008}$

គេទាញបាន $(2x^2)^{1008}=2^{1008}x^{2016}$

ដូចនេះតម្លៃមេគុណនៃ x^{2016} គឺ $\boxed{2^{1008}}$ ។

4. រកតម្លៃ k នាំឱ្យពហុធា $x^2+(k-1)x+k^2-16$ ចែកដាច់នឹង $x-3$

តាង $f(x)=x^2+(k-1)x+k^2-16$

$f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-3$ លុះត្រាតែ $f(3)=0$ នោះគេបាន

$3^2+(k-1)\cdot 3+k^2-16=0$

$9+3k-3+k^2-16=0$

$.k^2+3k-10=0$ មេគុណ $a=1\,,b=3\,,c=-10$

រក $\Delta=b^2-4ac=3^2-4(1)(-10)=49 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

ឬស $k_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-7}{2}=-5$, $k_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+7}{2}=2$

ដូចនេះ $\boxed{k_1=-5\;,\;k_2=2}$ ។

III. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}x+y+z=6\\ xy+yz+zx=11\\ xyz=6\end{cases}$ **ដោយយក** $x<y<z$

ទម្រង់បែបនេះគេថា x , y និង z ជាឫសនៃសមីការ $k^3-6k^2+11k-6=0$ (*)

ដោយ $k=1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ (*) នោះ $(k-1)$ ជាកត្តាមួយនៃ $k^3-6k^2+11k-6$

នោះ (*) អាចសរសេរជា $(k-1)(k^2-5k+6)=0$

បើ $k-1=0 \Rightarrow k=1$ ឬបើ $k^2-5k+6=0 \Rightarrow k=2\,,\,k=3$

ដោយ $x<y<z$ យើងយក $\boxed{x=1\;,\;y=2\;,\;z=3}$ ។

IV. ចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **និង** $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\boxed{1}$ ។

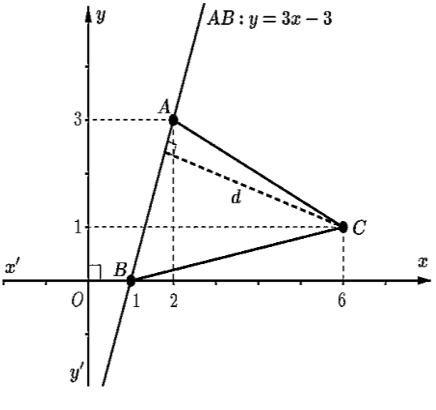
$z_1-z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\boxed{i\sqrt{3}}$ ។

$z_1z_2=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=(\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\boxed{1}$ ។

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}{(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}=\frac{\frac{1}{4}+\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}i+(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2}{1}=\boxed{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ ។

V.គេមានចំណុច $A(2,3)$, $B(1,0)$ **និង** $C(6,1)$

ក. សរសេរសមីការបន្ទាត់ AB



គេមាន $A(2,3)\Rightarrow x_A=2$, $y_A=3$

$B(1,0)\Rightarrow x_B=1$, $y_B=0$

សមីការបន្ទាត់ AB កំណត់ដោយ

$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$

$y-3=\frac{0-3}{1-2}(x-2)$

$y=3(x-2)+3$

$y=3x-3$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ $\boxed{AB:\ y=3x-3}$ ។

+ រួចគណនាចម្ងាយរវាងចំណុច C **និងបន្ទាត់** AB : តាងដោយ d

សមីការបន្ទាត់ $AB: y=3x-3\Leftrightarrow y-3x+3=0$ និងចំណុច $C(6,1)$

គេបាន $d=\frac{|y_c-3x_c+3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|1-3(6)+3|}{\sqrt{1+9}}=\frac{14}{\sqrt{10}}=\boxed{\frac{7\sqrt{10}}{5}\text{ឯកតាប្រវែង}}$ ។

ខ. គណនាប្រវែង AB

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{1+9}=\boxed{\sqrt{10}\text{ ឯកតាប្រវែង}}$$ ។

+ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times d=\frac{1}{2}\times\frac{14}{\sqrt{10}}\times\sqrt{10}=\frac{14}{2}=\boxed{7\text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$$ ។

VI. គេមាន $(C):\ y=f(x)=x^2-4x+5$ **និង** $(H):\ y=g(x)=-2x+n$

ក. កំណត់តម្លៃ n **និងកូអរដោនេនៃចំណុច** A **បើក្រាប** (C) **និង** (H) **ប៉ះគ្នាត្រង់** A

សមីការអាប់ស៊ីសនៃក្រាប (C) និង (H) គឺ $x^2-4x+5=-2x+n$

$$x^2-2x+5-n=0$$

មាន $\Delta'=b'^2-ac=(\frac{-2}{2})^2-1\cdot(5-n)=n-4$

ក្រាប (C) និង (H) ប៉ះគ្នានោះ $\Delta'=0 \Leftrightarrow n-4=0 \Rightarrow n=4$

ដូច្នេះ $\boxed{n=4}$ ។

+ ចំពោះចំណុចប៉ះ $A(x\,,y)$

$$\left.\begin{array}{l} x=-\frac{b'}{a}=-\frac{-1}{1}=1 \\ y=-2x+n=-2\times1+4=2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{A(1,\ 2)}$$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃ n **ដែលបានរកឃើញ ចូរសង់ក្រាប** (C) **និង** (H) **ក្នុងតម្រុយតែមួយ**

- ក្រាប $(C):\ y=f(x)=x^2-4x+5$ មាន ៖

– កំពូល $V_f(\alpha,\beta)$ $\left|\begin{array}{l} \alpha=-\frac{-4}{2(1)}=2 \\ \beta=f(2)=2^2-4(2)+5=1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow V_f(2,1)$

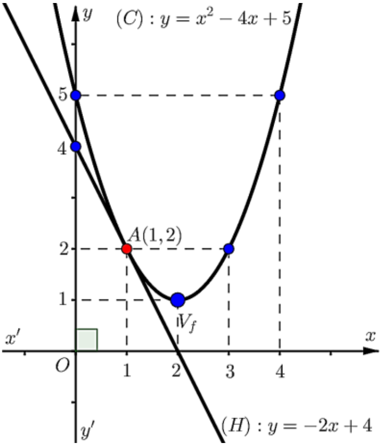
– តារាងតម្លៃ

x	0	1	2	3	4
y	5	2	1	2	5

- ក្រាប $(H):\ y=g(x)=-2x+n=-2x+4$:

x	0	1
y	4	2

• គូសក្រាប



គ. តាមក្រាប ចូររកសំណុំតម្លៃ n **ដើម្បីឱ្យ** $x^2 - 4x < -2x + n - 5$

គេអាចសរសេរ $x^2 - 4x + 5 < -2x + n \quad (*)$

ដោយ $(C): y = f(x) = x^2 - 4x + 5$, $(H): y = g(x) = -2x + n$

គេបាន $(*)$: $f(x) < g(x)$ មានចម្លើយជាសំណុំតម្លៃ n ដែលក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ស្ថិតនៅក្រោមក្រាបនៃអនុគមន៍ $g(x)$ ។

តាមក្រាបដោយ $n = 4$ ក្រាប (H) ប៉ះ (C) នោះគេត្រូវយក $\boxed{n < 4}$ ។

ចប់វិញ្ញាសាទី៣

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ១

រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម(បរិញ្ញា+១)គណិតវិទ្យា១ ជំនាន់២១

វិញ្ញាសាទី៤

I. សំណុំពីរ $A = \ 2,4,6,8\ $ និង $B = \ 1,2,3,6\ $ ។

ក. រកធាតុនៃសំណុំ $A\cap B$ តាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ ។

ខ. តើសំណុំ $A\cup B$ មានធាតុចំនួនប៉ុន្មាន ?

II.

1. រកកូអរដោនេផ្ចិតនិងប្រវែងកាំនៃរង្វង់ដែលមានសមីការ $2x^2+2y^2+8x-12y+8=0$

2. កំណត់សំណុំតម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ $x^2+y^2-6x+8y+a=0$ ក្លាយជាសមីការរង្វង់ ។

III.

1. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_n = i^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់ចំពោះ $1\le n\le 8$ ចូររកចំនួនកុំផ្លិចដែលស្មើគ្នា ។

2. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=ax+b$ ។ ឧបមាថា $-1\le f(1)\le 3$ ហើយ $1\le f(2)\le 5$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ k និង t ដែល $k\le f(3)\le t$ ។

IV. ដោះស្រាយសមីការ និងប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $3x^2-x-4=0$ ខ. $13x^2-36=x^4$ គ. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

V. គេមានសមីការ $mx^2-2(2m-3)x+2m-1=0$ ដែល m ជាចំនួនពិត ។

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសឌុប ។ រួចគណនាឫសឌុបនោះ ។

ខ. ចូរសរសេរទំនាក់ទំនងរវាង x_1 និង x_2 គ្មាន m ។

VI. គេឱ្យពីរចំណុច $A(2,0)$ និង $B(-2,4)$ ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។

ក. រកសំណុំចំណុចនៃចំណុច M ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $AM^2-BM^2=1$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ AB ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចមួយដែលស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ AB ផងនិងនៅលើសំណុំចំណុចនៃចំណុច M ផង ។

គ. រកសមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB ។

VII.

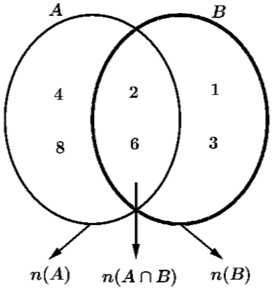
1. រកអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+4}$ ។ រួចបង្ហាញថា $f^{-1}(x)\neq\dfrac{1}{f(x)}$

2. រកកូអរដោនេ និងប្រាប់ប្រភេទកំពូលនៃប៉ារ៉ាបូល $y=f(x)=x^2-2x+3$ ។

3. គណនាកូអរដោនេចំណុច M កណ្តាលចំណុចប្រសព្វទាំងពីររវាងពីរប៉ារ៉ាបូល $(P_1): y=x^2-2x+2$ និង $(P_2): y=-x^2+6$ ។ រួចសង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូលទាំងពីរ ។

ចម្លើយ

I. សំណុំពីរ $A=\ 2,4,6,8$ និង $B=\ 1,2,3,6$



ក. រកធាតុនៃសំណុំ $A\cap B$ តាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ

គេបាន $\boxed{A\cap B=\ 2,6}$ ។

ខ. តើសំណុំ $A\cup B$ មានធាតុចំនួនប៉ុន្មាន ?

❖ **វិធីទី១**

ដោយ $n(A)=4$, $n(B)=4$, $n(A\cap B)=2$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=4+4-2$$
$$=\boxed{6\text{ ធាតុ}}$$ ។

❖ **វិធីទី២**

ដោយ $A\cup B=\ 1,2,3,4,6,8$ គេបាន $n(A\cup B)=\boxed{6\text{ ធាតុ}}$ ។

II. 1. **រកផ្ចិត និងប្រវែងកាំនៃរង្វង់ដែលមានសមីការ** $2x^2+2y^2+8x-12y+10=0$

គេអាចសរសេរ $x^2+y^2+4x-6y+5=0$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2)

ផ្ចិត $\left(\frac{4}{-2}, \frac{-6}{-2}\right)=\boxed{(-2, 3)}$

កាំ $r=\sqrt{(-2)^2+3^2-5}=\sqrt{4+9-5}=\boxed{2\sqrt{2}}$ ។

2. **កំណត់** a **ដើម្បីឱ្យសមីការ** $x^2+y^2-6x+8y+a=0$ **ក្លាយជាសមីការរង្វង់**

រង្វង់មានផ្ចិត $\left(\frac{-6}{-2}, \frac{8}{-2}\right)=(3, -4)$

កាំ $r=\sqrt{3^2+(-4)^2-a}=\sqrt{25-a}$

ដើម្បីឱ្យក្លាយជាសមីការរង្វង់លុះត្រាតែ $25-a>0$ នោះ $25>a$ ឬ $\boxed{a<25}$ ។

III. 1. **រកចំនួនកុំផ្លិចដែលស្មើគ្នា**

គេមាន $z_n=i^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់ ។

ចំពោះ $1\le n\le 8$ គេបាន ៖

$n=1$: $z_1=i^1=i$

$n=2$: $z_2=i^2=-1$

$n=3$: $z_3=i^3=i^2\times i=-1\times i=-i$

$n=4$: $z_4=i^4=i^3\times i=-i\times i=-i^2=-(-1)=1$

$n=5$: $z_5=i^5=i^4\times i=1\times i=i$

$n=6$: $z_6=i^6=i^5\times i=i\times i=i^2=-1$

$n=7$: $z_7=i^7=i^6\times i=-1\times i=-i$

$n=8$: $z_8=i^8=i^7\times i=-i\times i=-i^2=-(-1)=1$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=z_5=i\ ,\ z_2=z_6=-1\ ,\ z_3=z_7=-i\ ,\ z_4=z_8=1}$ ។

2. **កំណត់តម្លៃ** k **និង** t **ដែល** $k \le f(3) \le t$

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = ax + b$

នោះគេបាន $\begin{cases} f(1) = a + b & (*) \\ f(2) = 2a + b & (**) \end{cases}$ ដោះស្រាយរក a , b ដោយ

យក $(**) - (*)$: $f(2) - f(1) = a \Leftrightarrow a = f(2) - f(1)$

តាម $(*)$: $b = f(1) - a = f(1) - [f(2) - f(1)] = 2f(1) - f(2)$

ដោយ $f(3) = 3a + b = 3[f(2) - f(1)] + 2f(1) - f(2) = 2f(2) - f(1)$

$$\begin{array}{lcl} 1 \le f(2) \le 5 & \Rightarrow & 2 \le 2f(2) \le 10 \\ -1 \le f(1) \le 3 & \Rightarrow + & -3 \le -f(1) \le -1 \\ \hline & & -1 \le 2f(2) - f(1) \le 9 \end{array}$$

$$-1 \le f(3) \le 9$$

ពិនិត្យ $\left.\begin{array}{r} -1 \le f(3) \le 9 \\ k \le f(3) \le t \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{k = -1 \ , \ t = 9}$ ។

IV. ដោះស្រាយសមីការ និងវិសមីការខាងក្រោម

ក. $3x^2 - x - 4 = 0$

ដោយ $a - b + c = 3 - (-1) - 4 = 3 = 1 - 4 = 0$

នោះឫស $x_1 = \boxed{-1}$ ហើយ $x_2 = \dfrac{c}{a} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$ ។

ខ. $13x^2 - 36 = x^4$ $(*)$

អាចសរសេរ $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ គេត្រូវតាង $t = x^2$ ដែល $t > 0$

នោះ $(*)$: $t^2 - 13t + 36 = 0 \Leftrightarrow t^2 \underset{-9-4}{-13t} \underset{(-9)(-4)}{+36} = 0$

គេបាន $t_1 = 9$, $t_2 = 4$

ចំពោះ $\left.\begin{matrix} t=x^2 \\ t=9 \end{matrix}\right| \Rightarrow x^2=9$ នោះ $x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

ចំពោះ $\left.\begin{matrix} t=x^2 \\ t=4 \end{matrix}\right| \Rightarrow x^2=4$ នោះ $x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

ដូចនេះសមីការមានឫស $\boxed{x=\{3\,,-3\,,2\,,-2\}}$ ។

គ. $\begin{cases} x-y=1 & (1) \\ x^2+y^2=13 & (2) \end{cases}$

$(1)\ :\ x=1+y$ ជំនួសក្នុង (2) គេបាន $(1+y)^2+y^2=13$

$1+2y+y^2+y^2=13$

$2y^2+2y-12=0$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2)

$y^2 + \underset{3-2}{1y} \ \underset{3(-2)}{-6} = 0 \ \Leftrightarrow \ y_1=-3\ ,\ y_2=2$

ចំពោះ $y_1=-3\ :\ x_1=1+(-3)=-2$

ចំពោះ $y_2=2\ :\ x_2=1+2=3$

ដូចនេះគូចម្លើយ $\boxed{(-2\,,-3)\ \text{ឬ}\ (3\,,2)}$ ។

V. គេមានសមីការ $mx^2-2(2m-3)x+2m-1=0$ ដែល m ជាចំនួនពិត

ក. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសឌុប

មេគុណ $a=m\ ,\ b=-2(2m-3)\ ,\ c=2m-1$

$$\Delta'=b'^2-ac=[-\frac{2(2m-3)}{2}]^2-m(2m-1)=4m^2-12m+9-2m^2+m=2m^2-11m+9$$

សមីការមានឫសឌុបលុះត្រាតែ $\Delta'=0 \ \Leftrightarrow \ 2m^2-11m+9=0$

គេបាន $\boxed{m_1=1\ ,\ m_2=\frac{9}{2}}$ ។

+ រួចគណនាឫសឌុបនោះ

ឫសឌុប $x_o=-\frac{b'}{a}=-\frac{-(2m-3)}{m}=\frac{2m-3}{m}$

ចំពោះ $m=1 \Rightarrow x_o=\frac{2-3}{1}=\boxed{-1}$

ចំពោះ $m=\frac{9}{2} \Rightarrow x_o=\frac{\cancel{2}\times\frac{9}{\cancel{2}}-3}{\frac{9}{2}}=\boxed{\frac{4}{3}}$ ។

ខ. ចូរសរសេរទំនាក់ទំនងរវាង x_1 និង x_2 ដែលគ្មាន m

មាន $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{2(2m-3)}{m}=\frac{4m-6}{m} \Leftrightarrow Sm=4m-6 \Rightarrow m(S-4)=-6$

$$m=-\frac{6}{S-4} \quad (1)$$

ហើយ $P=x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{2m-1}{m} \Leftrightarrow Pm=2m-1 \Rightarrow m(P-2)=-1$

$$m=-\frac{1}{P-2} \quad (2)$$

ផ្ទឹម (1) និង (2) : $-\frac{6}{S-4}=-\frac{1}{P-2}$

$$6(P-2)=S-4$$

$$6P-12-S+4=0$$

$$6x_1x_2-(x_1+x_2)-8=0$$

ដូចនេះ $\boxed{6x_1x_2-(x_1+x_2)-8=0}$ ។

VI. គេឱ្យពីរចំណុច $A(2\,,0)$ និង $B(-2\,,4)$ ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ

ក. រកសំណុំចំណុច M ដែល $AM^2-BM^2=1$

តាង $M(x,y)$

គេបាន $AM^2=(x-2)^2+(y-0)^2=x^2+y^2-4x+4$

$$BM^2=[x-(-2)]^2+(y-4)^2=(x+2)^2+(y-4)^2=x^2+y^2+4x-8y+20$$

ដោយ $AM^2 - BM^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4 - (x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20) = 1$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4x + 4 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} - 4x + 8y - 20 = 1$$

$$-8x + 8y - 16 = 1$$

ដូច្នេះ $\boxed{8x - 8y = -17}$ ជាបន្ទាត់តាងសំណុំចំណុចនៃចំណុច M ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ AB

គេមាន $A(2, 0) \Rightarrow x_A = 2$, $y_A = 0$ និង $B(-2, 4) \Rightarrow x_B = -2$, $y_B = 4$

សមីការបន្ទាត់ AB កំណត់ដោយ $y - y_A = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$

$$y - 0 = \frac{4 - 0}{-2 - 2}(x - 4)$$

$$y = -(x - 2)$$

$$y = -x + 2$$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ $\boxed{AB : y = -x + 2}$ ។

+ រកចំណុចមួយស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ AB ផងនិងនៅលើសំណុំចំណុចនៃចំណុច M ផង

វាជាឫសនៃប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 8x - 8y = -17 & (1) \\ y = -x + 2 & (2) \end{cases}$

យក (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $8x - 8(-x + 2) = -17$

$$8x + 8x - 16 = -17$$

$$16x = -17 + 16$$

$$16x = -1$$

$$x = -\frac{1}{16}$$

តាម (2) : $y = -\left(-\dfrac{1}{16}\right) + 2 = \dfrac{1}{16} + 2 = \dfrac{33}{16}$

ដូចនេះកូអរដោនេចំណុចនោះគឺ $\boxed{\left(-\dfrac{1}{16}, \dfrac{33}{16}\right)}$ ។

គ. រកសមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB

គេបានផ្ចិតនៃរង្វង់ស្ថិតនៅចំកំណុចកណ្តាលអង្កត់ AB មានកូអរដោនេ (a, b) ដែល

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2-2}{2} = 0 \\ b &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \end{aligned}\right| \Rightarrow (a, b) = (0, 2)$$

ប្រវែងអង្កត់ $AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

កាំ $r = \frac{AB}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$

សមីការរង្វង់ស្តង់ដា $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + (y-2)^2 = 8}$ ។

VII. 1. **រកអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$**

គេសរសេរ $y = \frac{2x-1}{x+4}$

ប្តូរ y ទៅជា x និងប្តូរ x ទៅជា y គេបាន $x = \frac{2y-1}{y+4}$

ទាញរក y គេបាន

$$\begin{aligned} x(y+4) &= 2y-1 \\ x(y+4) &= 2y-1 \\ xy + 4x &= 2y-1 \\ y(x-2) &= -1-4x \\ y &= -\frac{1+4x}{x-2} \end{aligned}$$

ប្តូរ y ទៅជា $f^{-1}(x)$ គេបាន $\boxed{f^{-1}(x) = -\frac{1+4x}{x-2}}$ ។

+ រួចបង្ហាញថា $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

គេមាន $f^{-1}(x) = -\frac{1+4x}{x-2}$ ហើយ $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{2x-1}{x+4}} = \frac{x+4}{2x-1}$

ដូច្នេះ $\boxed{f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}}$ ។

2. រកកូអរដោនេ និងប្រាប់ប្រភេទកំពូលនៃប៉ារ៉ាបូល

$f(x)=x^2-2x+3$ មេគុណ $a=1$, $b=-2$, $c=3$

កូអរដោនេកំពូល

$$V(\alpha,\beta)\begin{cases}\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2(1)}=1\\ \beta=f(1)=1^2-2(1)+3=2\end{cases}\Rightarrow V(1,\,2)$$

ដោយ $a=1>0$

ដូចនេះ $\boxed{V(1,\,2)\text{ ជាកំពូលអប្បបរមា(ទាបបំផុត)}}$ ។

3. គណនាកូអរដោនេចំណុច M កណ្តាលចំណុចប្រសព្វទាំងពីររវាងពីរប៉ារ៉ាបូល

(P_1) : $y=x^2-2x+2$ **និង** (P_2) : $y=-x^2+6$

សមីការអាប់ស៊ីសនៃ (P_1) និង (P_2) គឺ $x^2-2x+2=-x^2+6$

$$2x^2-2x-4=0$$

$$x^2-x-2=0$$

ឬស $x_1=-1$, $x_2=2$

តាម (P_2) ចំពោះ $x_1=-1$: $y_1=-(-1)^2+6=5$

$x_2=2$: $y_2=-(2)^2+6=2$

ដូច្នេះកូអរដោនេ $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)=M\left(\dfrac{-1+2}{2},\dfrac{5+2}{2}\right)=\boxed{M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right)}$ ។

+ រួចសង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូលទាំងពីរ

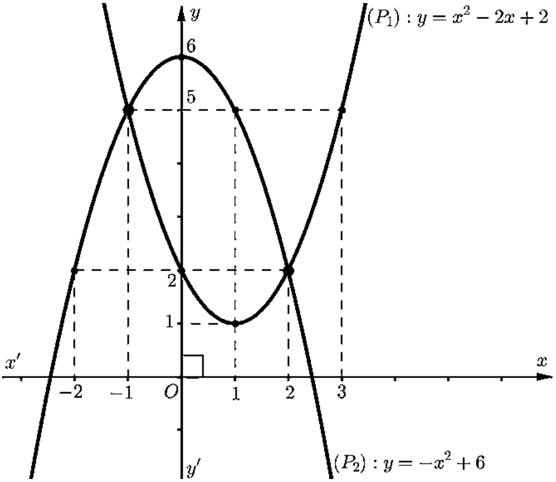
តារាងតម្លៃ

(P_1) : $y=x^2-2x+2$:

x	-1	0	1	2	3
y	5	2	1	2	5

(P_2) : $y=-x^2+6$:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	5	6	5	2



ចប់វិញ្ញាសាទី៤

វិញ្ញាសាទី៥

I.

១. កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $\bar{p}\vee(q\wedge r)$ ក្នុងករណី p ពិត , q មិនពិត និង r ពិត ។

២. បង្ហាញថាបើ x និង y ជាចំនួនគត់សេសនោះ $x+y$ ជាចំនួនគត់គូ ។

II. គេឱ្យសំណុំសកល $U=\{x/x$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $0\le x\le 11\}$ និងសំណុំរងទាំងពីរ A និង B ដែល $A=\{x/0\le 2x<7\}$ $B=\{x/0<2x<20\}$ ។

ក. សរសេរសំណុំរងបំពេញ $\bar{A}$ និង កំណត់ចំនួនធាតុរបស់សំណុំនោះ ។

ខ. សរសេរសំណុំរងបំពេញ $\bar{B}$ និង កំណត់ចំនួនធាតុរបស់សំណុំនោះ ។

III. ១. គណនា $A=\sqrt{20}-3\sqrt{2}-\sqrt{\frac{5}{9}}+\sqrt{50}$, $B=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$ ។

២. សរសេរចំនួនក្នុងប្រពន្ធ័របាប់គោលដប់ទៅជាចំនួនក្នុងប្រពន្ធ័របាប់គោលពីរ

ក. 33 ខ. 123

៣. គេឱ្យកន្សោម $A=x^3+3x^2y+10xy-4$ និង $B=x^3-3xy$ ។

គណនា $A+B$ និង $A-B$ ។

IV.

១.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $x_1=1+i$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+b=0$ ។ រកឫស x_2 មួយទៀត ។

២. ចូរដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការខាងក្រោម:

ក. $\begin{cases} x+y+z=13 \\ x+2y-z=7 \\ 3x-y+z=23 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} x^2-y=0 \\ y=2-x \end{cases}$

V. អនុគមន៍ដឺក្រេទី2 : $f(x)=x^2-3x+2$ មានខ្សែកោងតំណាង C ។

ក. កំណត់ $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ រួចសិក្សាអថេរភាពនៃ f លើចន្លោះ $(-\infty\,,\,\frac{3}{2}]\cup[\frac{3}{2}\,,+\infty)$ ។

ខ. ប្រាប់តម្លៃបរមានៃអនុគមន៍ f ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. គូសខ្សែកោង C ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j}\,)$ ។

VI. ក្នុងតម្រុយ $(0,\vec{i},\vec{j}\,)$ គេឱ្យចំណុច $A(-2,-6)$, $B(3\,,1)$ និង $C(3,4)$ ។

ក. សរសេរ $\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i},\,\vec{j}$ ។

ខ. គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។ រកប្រវែងចំណោលកែងនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AC}$ មកលើ $\overrightarrow{AB}$ ។

គ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ AC ។ គណនាចម្ងាយពីចំណុច B ទៅចំណុច AC ។ រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC AHC និង BHC ។

ចម្លើយ

I. ១. កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃ $\overline{p}\vee(q\wedge r)$ ក្នុងករណី p ពិត , q មិនពិត និង r ពិត

តារាងតម្លៃភាពពិត

p	q	r	$\overline{p}$	$q\wedge r$	$\overline{p}\vee(q\wedge r)$
1	0	1	0	0	0

ដូចនេះ $\boxed{\text{ត.}\left[\overline{p}\vee(q\wedge r)\right]=0}$ ។

២. បង្ហាញថាបើ x និង y ជាចំនួនគត់សេសនោះ $x+y$ ជាចំនួនគត់គូ

តាង $x=2m+1$, $y=2n+1$ ដែល $m,n\in\mathbb{Z}$

គេបាន $x+y=(2m+1)+(2n+1)=2(m+n+1)$

$=2k$ ជាចំនួនគត់គូ (ដែល $k=m+n+1$)

II. គេមានសំណុំ

$U=\{\ x/x$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $0<x\le 11\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

$A=\{x/0<2x<7\}=\{x/0<x<7/2\}=\{1,2,3\}$

$B=\{x/0<2x<20\}=\{x/0<x<10\}=\{1,2,3,........,8,9\}$

ក. សរសេរសំណុំរងបំពេញ $\overline{A}$ និង កំណត់ចំនួនធាតុរបស់សំណុំនោះ

តាមនិយមន័យសំណុំរងបំពេញ $\overline{A}=\{x/x\notin A, x\in U\}$

គេបាន $\boxed{\overline{A}=\{4,5,6,7,8,9,10,11\}}$

នោះ $\boxed{n(\overline{A})=8}$ ។

ខ. សរសេរសំណុំរងបំពេញ $\overline{B}$ និងកំណត់ចំនួនធាតុវា

តាមនិយមន័យសំណុំរងបំពេញ $\overline{B}=\{x/x\notin A\ ,\ x\in \mathrm{U}\}$

គេបាន $\boxed{\overline{B}=\{10,11\}}$ នោះ $\boxed{n(\overline{B})=2}$ ។

III. ១. គណនា

$$A=\sqrt{20}-3\sqrt{2}-\sqrt{\frac{5}{9}}+\sqrt{50}=\sqrt{2^2\times 5}-3\sqrt{2}-\sqrt{\frac{5}{3^2}}+\sqrt{5^2\times 2}$$

$$=2\sqrt{5}-3\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{5}+5\sqrt{2}=(2-\frac{1}{3})\sqrt{5}+(5-3)\sqrt{2}$$

$$=\boxed{\frac{5}{3}\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$$ ។

$$B=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{2}-1+1+\sqrt{2}$$

$$=\boxed{2\sqrt{2}}$$ ។

២. សរសេរចំនួនគោល 10 ទៅជាចំនួនគោល 2

ក. គេត្រូវយក 33 ចែកនឹង 2 ជាបន្តបន្ទាប់ ហើយចម្លើយវាគឺសំណល់ពីក្រោមទៅលើ ។

សំណល់	តំណាំងចែក	តួចែក
	33	2
1	16	2
0	8	2
0	4	2
0	2	2
0	1	

ដូចនេះ $\boxed{33=100001_2}$ ។

ខ. 123

សំណល់	តំណាំងចែក	តួចែក
	123	2
1	61	2
1	30	2
0	15	2
1	7	2
1	3	2
1	1	

ដូចនេះ $\boxed{123=1111011_2}$ ។

៣. គណនា: $A+B$ **និង** $A-B$

ដោយ $A=x^3+3x^2y+10xy-4$, $B=x^3-3xy$

គេបាន $A+B=(x^3+3x^2y+10xy-4)+(x^3-3xy)$

$$=x^3+x^3+3x^2y+10xy-3xy-4$$

$$=\boxed{2x^3+3x^2y+7xy-4}$$ ។

$A-B=(x^3+3x^2y+10xy-4)-(x^3-3xy)=x^3+3x^2y+10xy-4-x^3+3xy$

$=\boxed{3x^2y+13xy-4}$ ។

IV. ១. កំណត់ចំនួនពិត a និង b

$x_1=1+i$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+b=0 \Leftrightarrow (1+i)^2+a(1+i)+b=0$

$$1+2i+i^2+a+ai+b=0$$

$$(a+b)+(a+2)i=0$$

នាំឱ្យ $\begin{cases} a+b=0 \\ a+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a=2 \\ a=-2 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=-2\ ,\ b=2}$ ។

+ ទាញរកឫសមួយទៀតនៃ x_2

ជំនួស $a=-2$, $\mathrm{b}=2$ ក្នុងសមីការ $x^2+ax+b=0$ គេបាន $x^2-2x+2=0$

ផលបូកឫស $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-2}{1}=2$

នាំឱ្យ $x_2=2-x_1=2-(1+i)=2-1-i=\boxed{1-i}$ ។

២. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases} x+y+z=13 & (1) \\ x+2y-z=7 & (2) \\ 3x-y+z=23 & (3) \end{cases}$

$(1)+(2)$: $2x+3y=20$ (4)

$(2)+(3)$: $4x+y=30$ (5)

(5) គុណនឹង -3 រួចបូកនឹង (4) គេបាន $+\begin{array}{r} -12x-3y=-90 \\ 2x+3y=20 \\ \hline -10x \qquad =-70 \end{array} \Rightarrow x=7$

តាម (5) ទាញរក $y=30-4x=30-4\times7=2$

តាម (1) ទាញរក $z=13-x-y=13-7-2=4$

ដូចនេះចម្លើយ $\boxed{(x=7\ ,\ y=2\ ,\ z=4)}$ ។

ខ. $\begin{cases} x^2 - y = 0 & (1) \\ y = 2 - x & (2) \end{cases}$

យក (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $x^2 - (2 - x) = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$ មេគុណ $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$

ដោយ $a + b + c = 1 + 1 + (-2) = 0$ នោះ $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$

តាម (2) ចំពោះ $x_1 = 1$: $y_1 = 2 - 1 = 1$

ចំពោះ $x_2 = -2$: $y_2 = 2 - (-2) = 4$

ដូចនេះមានគូចម្លើយពីរគឺ $\boxed{(1, 1) \text{ និង } (-2, 4)}$ ។

V. គេមាន $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ខ្សែកោងតំណាង P

១. គណនា $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

ដែនកំណត់ $D = (-\infty, +\infty)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x_1 , $x_2 \in D$ ហើយ $x_1 < x_2$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2{}^2 - 3x_2 + 2) - (x_1{}^2 - 3x_1 + 2)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2{}^2 - x_1{}^2 - 3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x) - 3(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 3)}{(x_2 - x_1)}$$

$$= \boxed{x_2 + x_1 - 3}$$ ។

+ សិក្សាអថេរភាពនៃ f ចន្លោះ $(-\infty, 3/2) \cup [3/2, +\infty)$

$-$បើ $x_2 , x_1 \in (-\infty, 3/2] \Leftrightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$ អនុគមន៍ f ចុះលើចន្លោះ $(-\infty, 3/2]$ ។

$-$បើ $x_2 , x_1 \in [3/2, +\infty) \Leftrightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$ អនុគមន៍ f កើនលើចន្លោះ $[3/2 , +\infty)$ ។

២. ប្រាប់តម្លៃបរមានៃ f

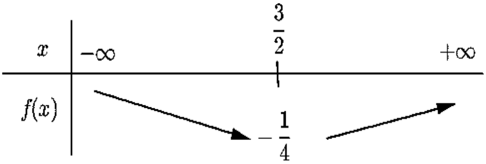
$f(x)=x^2-3x+2$ មេគុណ $a=1$, $b=-3$, $c=2$

ដោយ $a=1>0$ នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើនឹង $f(x_o)$ ត្រង់

$x_o=-\frac{b}{2a}$ ដែល $x_o=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}$

$$f(x_o)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\left(\frac{3}{2}\right)+2=\boxed{-\frac{1}{4}}$$ ។

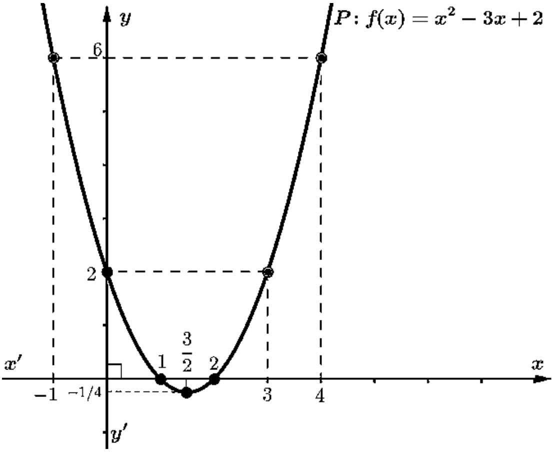
+ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f



៣. គូសខ្សែកោង P ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$

តារាងតម្លៃនៃ $y=f(x)=x^2-3x+2$

x	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
y	6	2	0	$-\frac{1}{4}$	0	2	6



VI. មានចំណុច $A(-2,-6)$, $B(3,1)$ **និង** $C(3,4)$

១. សរសេរ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ **ជាអនុគមន៍នៃ** $\vec{i}$, $\vec{j}$

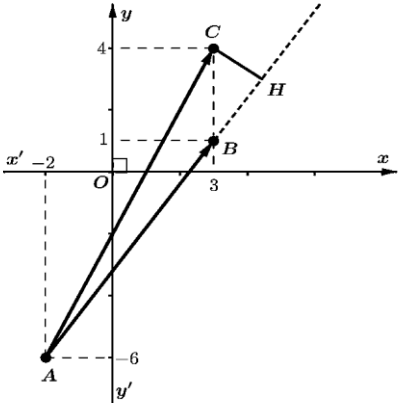
$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}=(3+2)\vec{i}+(1+7)\vec{j}=\boxed{5\vec{i}+7\vec{j}}$ ។

$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A)\vec{i}+(y_C-y_A)\vec{j}=(3+2)\vec{i}+(4+6)\vec{j}=\boxed{5\vec{i}+10\vec{j}}$ ។

២. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5(5)+7(10)=25+70=\boxed{95}$ ។

+ រកប្រវែងចំណោលកែងនៃ $\overrightarrow{AC}$ **មកលើ** $\overrightarrow{AB}$



តាង H ជាចំណោលកែងនៃ $\overrightarrow{AC}$ មកលើ $\overrightarrow{AB}$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រក្នុងត្រីកោណកែង AHC

$AC^2=AH^2+CH^2 \Rightarrow CH=\sqrt{AC^2-AH^2}$ (*)

- រក AC^2

ដោយ $\overrightarrow{AC}=5\vec{i}+10\vec{j}$ នោះ $AC^2=5^2+10^2=25+100=125$

- រក AH^2

រូបមន្តចំណោលកែង $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH \Leftrightarrow AH=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB} \Rightarrow AH^2=\dfrac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}{AB^2}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=95$, $\overrightarrow{AB}=5\vec{i}+7\vec{j} \Rightarrow AB^2=5^2+7^2=74$

គេបាន $AH^2=\left(\dfrac{95}{\sqrt{74}}\right)^2=\dfrac{9025}{74}$

សរុបមក (*) $CH=\sqrt{125-\dfrac{9025}{74}}=\sqrt{\dfrac{225}{74}}=\boxed{\dfrac{15\sqrt{74}}{74}\text{ ឯកតាប្រវែង}}$

៣. សរសេរសមីការបន្ទាត់ AC

មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AC}=(-2,-6)=(a,b)\Rightarrow a=-2\ ,\ b=-6$

និងចំណុចកាត់ $A(-2,-6)\Rightarrow x_A=-2\ ,\ y_A=-6$

សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ AC កំណត់ដោយ $\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}$

$$\frac{x-(-2)}{5}=\frac{y-(-6)}{10}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x+2}{5}=\frac{y+6}{10}$$

គេបាន $\boxed{AC\ :\ 2x-y-2=0}$ ។

+ រកចម្ងាយពីចំណុច B ទៅបន្ទាត់ AC : តាងដោយ d

ដោយ $B(3,1)$ ហើយ $AC\ :\ 2x-y-2=0$

$$d=\frac{|2x_B-y_B-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2(3)-1-2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$$ ។

+ រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ

- $\Delta ABC\ :\ S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\times AC\times d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{125}\times\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\boxed{\dfrac{15}{2}\text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$
- $\Delta AHC\ :\ S_{AHC}=\dfrac{1}{2}\times AH\times CH=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{95}{\sqrt{74}}\times\dfrac{15\sqrt{74}}{74}=\boxed{\dfrac{1425}{148}\text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$
- $\Delta BHC\ :\ S_{BHC}=S_{AHC}-S_{ABC}=\dfrac{1425}{148}-\dfrac{15}{2}=\boxed{\dfrac{315}{148}\text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

ចប់វិញ្ញាសាទី៥

វិញ្ញាសាទី៦

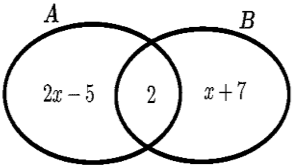
I. ១. សំណើពីរ p : គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខសេស

q : ឡុកឡាក់មិនចេញលេខ 5

ដោយប្រើលក្ខណះរបស់ដឺម៉ដេនចំពោះសំណើខាងក្រោមនិងសរសេរសំណើដែលបានទាំងនោះ អោយទៅជាឃ្លាប្រយោគ ។

ក. $\overline{p\wedge q}$ ខ. $\overline{p\vee q}$ ។

២. គេតាងចំនួនធាតុនៃសំណុំ $\overline{A}$, $\overline{B}$ និង $A\cap B$ នៅក្នុងដ្យាក្រាមវ៉ិនគេអោយ $n(\overline{A}\cap B)=n(A\cap\overline{B})$



ក. កំណត់តម្លៃ x ។

ខ. កំណត់តម្លៃ $n(\mathrm{A})$ និង $n(B)$ ។

II.

១. បង្ហាញថា $\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}=2$ ។

២. ចូរអាន និង សរសេរទម្រង់ពន្លាត់នៃចំនួន 10010110_2 ។

III.

១. ចូររកតម្លៃនៃចំនួនថេរ a ដែលកន្សោមពីជគណិត $x^3+ax^2+x+2-a$ ចែកដាច់នឹង x^2+2x-1 ។

២. គណនាកន្សោមប្រភាគខាងក្រោម:

ក. $\dfrac{x^2-49}{x^2+2x}\times\dfrac{x+2}{x-7}$ ខ. $\dfrac{a^2-4}{a^2-4a+4}\div\dfrac{a^3-8}{2a+4}$

IV.

១. តាង x ជាចំនួនពិត។ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $\frac{3+i}{1+i}+\frac{x-i}{1-i}$ ជាចំនួនពិត ។

២. កំណត់ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $x^2+2mx-3m-2=0$ មានឫសពីរជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=(f)=x^2-x+\frac{1}{4}$ មានខ្សែកោង p ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (xoy)

១. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ ។

២. កំណត់តម្លៃបរមានៃ f ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

៣. គូសខ្សែកោង p ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (xoy) ។

VI. ក្នុងប្លង់កូអរដោនេគេមានចំណុច $A(2\,,3)$, $B(1,2)$ និង $C(4,2)$ ។

១. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ AB ។

២. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមគល់ O មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}$ ។

៣. រកចម្ងាយពីចំណុច C ទៅបន្ទាត់ AB ។

៤. សរសេរសមីការទូទៅនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

ចម្លើយ

I. ១. **មានសំណើ** p : **គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខសេស**

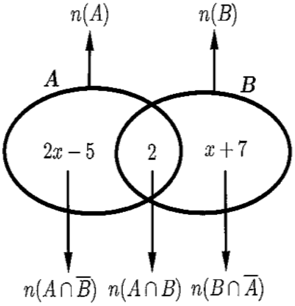
q : **ឡុកឡាក់មិនចេញលេខ 5**

សរសេរសំណើដែលបានទាំងនោះជាឃ្លាប្រយោគ ៖

ក. $\overline{p\wedge q}=\overline{p}\vee\overline{q}$: គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខគូឬគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ 5 ។

ខ. $\overline{p\vee q}=\overline{p}\wedge\overline{q}$: គ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខគូនិងគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខ 5 >>

២. ក. កំណត់តម្លៃ x



យើងមាន $n(\overline{A}\cap B)=n(A\cap\overline{B})$

គេបាន $x+7=2x-5$

$x-2x=-5-7$

នាំឱ្យ $\boxed{x=12}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ $n(A)$ និង $n(B)$

$n(A)=2x-5+2=2(12)-5+2=\boxed{21}$ ។

$n(B)=x+7+2=12+9=\boxed{21}$ ។

II. ១. បង្ហាញថា $\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}=2$

តាង $A=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$ លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន

$A^2=7+\cancel{\sqrt{24}}-2\sqrt{(7+\sqrt{24})(7-\sqrt{24})}+7-\cancel{\sqrt{24}}$

$=14-2\sqrt{7^2-24}=14-2\sqrt{49-24}$

$=14-2\sqrt{25}=14-2\times5$

$=14-10$

$=4$

នាំឱ្យ $A=2$ (ព្រោះ $A>0$)

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}=2 \text{ ពិត}}$ ។

២. ចូរអាន និង សរសេរទម្រង់ពន្លាត់នៃចំនួន 10010110_2

10010110_2 អានថា មួយ សូន្យ សូន្យ មួយ សូន្យ មួយ មួយ សូន្យក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល 2

$10010110_2=1\times2^7+1\times2^4+1\times2^2+1\times2$

III.

១. រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ a ដែលកន្សោម $x^3+ax^2+x+2-a$ ចែកដាច់នឹង x^2+2x-1

គេអាចសរសេរ $x^3+ax^2+x+2-a=(x^2+2x-1)(x+a-2)+\underbrace{(6-2a)}_{0}x$

ដើម្បីឱ្យ $x^3+ax^2+x+2-a$ ចែកដាច់នឹង x^2+2x-1 កាលណា $6-2a=0$

សមមូល $2a=6 \Leftrightarrow a=\dfrac{6}{2}=3$

ដូចនេះ $\boxed{a=3}$ ។

២. គណនាកន្សោមប្រភាគខាងក្រោម

ក. $\dfrac{x^2-49}{x^2+2x}\times\dfrac{x+2}{x-7}=\dfrac{(x-7)(x+7)}{x(x+2)}\times\dfrac{x+2}{x-7}=\boxed{\dfrac{x+7}{x}}$ ។

ខ. $\dfrac{a^2-4}{a^2-4a+4}\div\dfrac{a^3-8}{2a+4}=\dfrac{a^2-2^2}{(a-2)^2}\times\dfrac{2a+4}{a^3-2^3}=\dfrac{(a-2)(a+2)\,2(a+2)}{(a-2)^2(a-a)(a^2+2a+4)}$

$=\boxed{\dfrac{2(a+2)^2}{(a-2)^2(a^2+2a+4)}}$ ។

IV. ១. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{3+i}{1+i}+\dfrac{x-i}{1-i}$ ជាចំនួនពិត

ដោយ $\dfrac{3+i}{1+i}+\dfrac{x-i}{1-i}=\dfrac{(3+i)(1-i)+(x-i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{3-3i+i-i^2+x+xi-i-i^2}{1^2-i^2}$

$=\dfrac{3+x+2+xi-3i}{2}$

$=\dfrac{x+5}{2}+\dfrac{x-3}{2}i$

ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{x+5}{2}+\dfrac{x-3}{2}i$ ជាចំនួនពិតលុះត្រាតែ $\dfrac{x-3}{2}=0 \Leftrightarrow \boxed{x=3}$ ។

២. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ $x^2+2mx-3m-2=0$ មានឬសពីរជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

មេគុណ $a=1$, $b=2m$, $c=-3m-2$ នោះ $b'=\frac{b}{2}=\frac{2m}{2}=m$

គេបាន $\Delta'=(b')^2-ac=m^2+3m+2=(m+1)(m+2)$

$$p=x_1\times x_2=\frac{c}{a}=-3m-2 \quad \text{(ផលគុណឬស)}$$

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-2m \quad \text{(ផលបូកឬស)}$$

សមីការមានឬសពីរជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន លុះត្រាតែ

$$\begin{cases}\Delta\geq 0\\ p>0\\ S>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m^2+3m+2\geq 0 & (1)\\ -3m-2>0 & (2)\\ -2m>0 & (3)\end{cases}$$

(1) មានឬស $m=-1$, -2 (2) មានឬស $m=-\frac{2}{3}$

(3) មានឬស $m=0$

តារាងសញ្ញារួម

m	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$m^2+3m+2\geq 0$		+	0	−	0	+		+		+	
$-3m-2>0$		+		+		+	0	−		−	
$-2m>0$		+		+		+		+	0	−	
$\begin{cases}m^2+3m+2\geq 0\\ -3m-2>0\\ -2m>0\end{cases}$											

ដូចនេះ $\boxed{m\in(-\infty,-2]\cup\left[-1,-\frac{2}{3}\right)}$ ។

V.គេមាន $y=(f)=x^2-x+\dfrac{1}{4}$

១. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ **លើចន្លោះ** $D=\left(-\infty\,,\,\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2}\,,+\infty\right)$

ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x_1\,,\,x_2\in D$ ដែល $x_1<x_2$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\left(x_2^{\;2}-x_2+\dfrac{1}{4}\right)-\left(x_1^{\;2}-x_1+\dfrac{1}{4}\right)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^{\;2}-x_1^{\;2})-(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1-1)}{(x_2-x_1)}$$

$$=x_2+x_1-1$$

- បើ $x_1\,,\,x_2\in\left(-\infty\,,\,\dfrac{1}{2}\right]$ នោះ $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}<0$ អនុគមន៍ $f(x)$ ចុះចន្លោះ $\left(-\infty\,,\,\dfrac{1}{2}\right]$ ។
- បើ $x_1\,,\,x_2\in\left[\dfrac{1}{2}\,,+\infty\right)$ នោះ $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}>0$ អនុគមន៍ $f(x)$ កើនចន្លោះ $\left[\dfrac{1}{2}\,,+\infty\right)$ ។

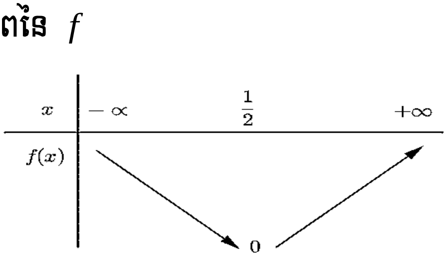
២. កំណត់តម្លៃបរមានៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $y=f(x)=x^2-x+\dfrac{1}{4}$

ដោយ $a>0$ នោះអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមា $f(x_o)$ ត្រង់ $x_o=-\dfrac{b}{2a}$

គេបាន $x_o=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-1}{2(1)}=\dfrac{1}{2}$, $f(x_o)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\boxed{0}$ ។

+ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

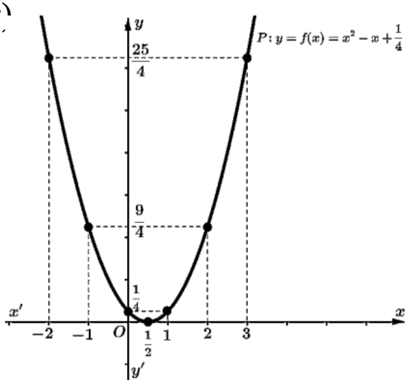


៣. គូសខ្សែកោង p ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (xoy)

តារាងតម្លៃនៃអនុគមន៍ :

$y = f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$\frac{25}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{25}{4}$



VI. គេមានចំណុច $A(2,3)$, $B(1,2)$ **និង** $C(4, 2)$

១. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ AB

ដោយ $A(2,3) \Rightarrow x_A = 2$, $y_A = 3$, $B(1,2) \Rightarrow x_B = 1$, $y_B = 2$

សមីការបន្ទាត់ AB : $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$

$$y - 3 = \frac{2-3}{1-2}(x-2)$$

$$y - 3 = x - 2$$

$$y = x - 2 + 3$$

ដូចនេះ $\boxed{AB : y = x + 1}$ ។

២. សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ L **កាត់តាមគល់ O មាន វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់** $\overrightarrow{AB}$

❖ **វិធីទី១** : ដោយ L កាត់តាមគល់ O ត្រូវមានសមីការ $L : y = mx$ (*)

ហើយ L មានវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}$ មានន័យថា

$$L \perp AB \Leftrightarrow m \times m_{AB} = -1 \Rightarrow m = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{1} = -1$$

(*) ក្លាយជា $L : y = -x$ ឬ $\boxed{L : x + y = 0}$ ។

❖ **វិធីទី២** : វ៉ិចទ័រនរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}=(1-2,\ 2-3)=(-1,\ -1)\Rightarrow a=-1, b=-1$

គល់ $O(0,\ 0)\ \Rightarrow\ x_o=0\ ,\ y_o=0$

តាមរូបមន្ត $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

គេបាន $-1(x-0)-1(y-0)=0$

$$-x-y=0$$

$$x+y=0$$

ដូចនេះ $\boxed{L\ :\ x+y=0}$ ។

៣. រកចម្ងាយពីចំណុច C ទៅបន្ទាត់ AB : តាងដោយ d

គេមាន $AB: y=x+1\ \Leftrightarrow\ x-y+1=0$

ចំណុច $C(4,\ 2)\ \Rightarrow\ x_C=4\ ,\ y_C=2$

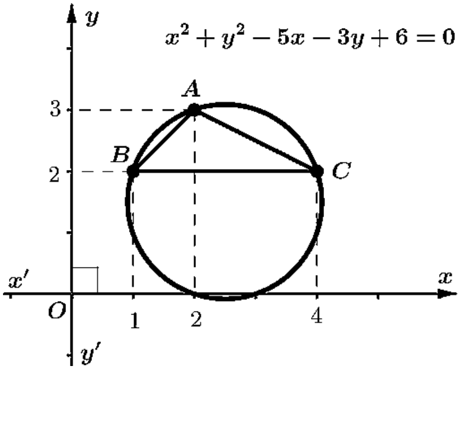
គេបាន $d=\dfrac{|x_C-y_C+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|4-2+1|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\boxed{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$ ។

៤. សរសេរសមីការទូទៅនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC

❖ **វិធីទី១**

តាមរូបមន្ត $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

ត្រូវរកតម្លៃ A , B និង C ឱ្យឃើញដោយ ៖



– រង្វង់កាត់តាម $A(2\,,\,3)$ គេបាន $2^2+3^2+2A+3B+C=0$

$$2A+3B+C=-13 \quad (1)$$

– រង្វង់កាត់តាម $B(1\,,\,2)$ គេបាន $1^2+2^2+A+2B+C=0$

$$A+2B+C=-5 \quad (2)$$

– រង្វង់កាត់តាម $C(4\,,\,2)$ គេបាន $4^2+2^2+4A+2B+C=0$

$$4A+2B+C=-20 \quad (3)$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 2A+3B+C=-13 & (1) \\ A+2B+C=-5 & (2) \\ 4A+2B+C=-20 & (3) \end{cases}$

យក $(3)-(2)$: $3A=-15 \Rightarrow A=\dfrac{-15}{3}=-5$

យក $(1)-(2)$: $A+B=-8 \Leftrightarrow B=-8-A=-8-(-5)=-8+5=-3$

តាម (2) ទាញរក $C=-5-A-2B=-5-(-5)-2(-3)=-5+5+6=6$

ដូចនេះ $\boxed{x^2+y^2-5x-3y+6=0}$ ជាសមីការទូទៅនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

ចប់វិញ្ញាសាទី៦

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ១

រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម(បរិញ្ញា+១)គណិតវិទ្យា១ ជំនាន់២១

វិញ្ញាសាទី៧

I. គេឱ្យ $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ និង $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ។

ចូរគណនា 1. $a+b$ 2. $a-b$ 3. a^2-b^2 4. $a\times b$ ។

II. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

1. $7x^2+3x-10=0$ 2. $3x^2-x-4=0$ 3. $x^2-6x+9=0$

4. $x^2-5x+4=0$

III. គេឱ្យបន្ទាត់បី $d_1 : y=2x+1$, $d_2 : y=mx-2$ និង $d_3 : y-\frac{n}{2}x=1$ ។

1. កំណត់ m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ d_2 ស្របនឹងបន្ទាត់ d_1 ។

2. កំណត់ n ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ d_3 កែងនឹងបន្ទាត់ d_1 ។

3. សរសេរសមីការបន្ទាត់ d_4 ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1\,,\,2)$ ហើយស្របស្របនឹងបន្ទាត់ d_1

IV. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ $\begin{cases}5-x>7\\2x+3\geq 13\end{cases}$ ។

V. ដោះស្រាយវិសមីការ

1. $\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|<1$ 2. $\frac{(x^2+3x-4)^{2015}}{(x^2-9)^{2016}}>0$

VI. នៅក្នុងប្លង់កូអរដោនេគេឱ្យរង្វង់ $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ និងបន្ទាត់ $y=x+4$ ។

1. បំលែងសមីការរង្វង់ជាសមីការស្តង់ដា ។

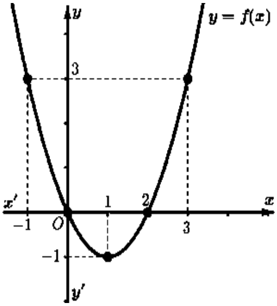
2. កំណត់ផ្ចិត និងកាំនៃរង្វង់ ។

3. រកកូអរដោនេ ចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់និងរង្វង់ ។

VII. តាមរូបខាងស្តាំ

ក. ចូរកំណត់អនុគមន៍ $y=f(x)$ ។

ខ. ឧបមាថា គេរំកិលបន្ទាត់ $L: y=2x$ ក្នុងតម្រុយជាមួយអនុគមន៍ $y=f(x)$ ។ តើវាទាំងពីរនឹងប៉ះគ្នាត្រង់ចំណុចណា ?



ចម្លើយ

I. គេមាន $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ និង $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

1. $a+b=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=\boxed{2\sqrt{3}}$ ។

2. $a-b=\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}=\boxed{-2\sqrt{2}}$ ។

3. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)=(-2\sqrt{2})(2\sqrt{3})=\boxed{-4\sqrt{6}}$ ។

II. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

1. $7x^2+3x-10=0$

ដោយ $a+b+c=7+3+(-10)=0$ នោះឬសងាយ $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}=-\frac{10}{7}$

ដូចនេះ $\boxed{x_1=1\ ,\ x_2=-\frac{10}{7}}$ ជាឬសនៃសមីការ ។

2. $3x^2-x-4=0$

មានមេគុណ $a=3$, $b=-1$, $c=-4$

ដោយ $a-b+c=3-(-1)+(-4)=0$ នោះឬសងាយ $x_1=-1\ , x_2=-\frac{c}{a}=-\frac{-4}{3}=\frac{4}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x_1=-1\ ,\ x_2=\frac{4}{3}}$ ជាឬសនៃសមីការ ។

3. $x^2-6x+9=0$

គេអាចសរសេរ $x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=0$

ឬសឌុប $\boxed{x_1=x_2=3}$ ជាឬសនៃសមីការ ។

4. $x^2-5x+6=0$

គេមាន $\underset{-2-3}{x^2 -5x} \underset{(-2)(-3)}{+6} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0$

នាំឱ្យ $\boxed{x_1=2\ ,\ x_2=3}$ ជាឫសនៃសមីការ ។

III. $d_1 : y=2x+1$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m_1=2$

$d_2 : y=mx-2$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m_2=m$

$d_3 : y-\frac{n}{2}x=1$ មានមេគុណប្រាប់ $m_3=\frac{n}{2}$

1. **កំណត់ m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ d_2 ស្របនឹងបន្ទាត់ d_1**

$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1=m_2 \Rightarrow 2=m$

ដូចនេះ $\boxed{m=2}$ ។

2. **កំណត់ n ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ d_3 កែងនឹងបន្ទាត់ d_1**

$d_1 \perp d_3 \Leftrightarrow m_1\times m_3=-1 \Rightarrow 2\times\frac{n}{2}=-1$

នាំឱ្យ $\boxed{n=-1}$ ។

3. **សរសេរសមីការបន្ទាត់ d_4 កាត់តាមចំណុច $A(1\ ,\ 2)$ ហើយស្របស្របនឹងបន្ទាត់ d_1**

បន្ទាត់ d_4 ត្រូវមានមេគុណប្រាប់ទិស $m_4=m_1=2$ (ព្រោះវាស្របនឹងបន្ទាត់ d_1)

ចំណុចកាត់ $A(1\ ,\ 2) \Rightarrow x_A=1\ ,\ y_A=2$

សមីការបន្ទាត់ d_4 មានរាង $y-y_A=m_4(x-x_A)$

$$y-2=2(x-1)$$

$$y=2x-2+2$$

ដូចនេះ $\boxed{d_4\ :\ y=2x}$ ។

IV. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ $\begin{cases} 5-x>7 & (1) \\ 2x+3\geq 13 & (2) \end{cases}$

$(1)\ :\ 5-7>x \Leftrightarrow -2>x \Leftrightarrow x<-2$

$(2)\ :\ 2x\geq 13-3 \Leftrightarrow 2x\geq 10 \Leftrightarrow x\geq 5$

ប្រសព្វ $x<-2$ និង $x\geq 5$ គេបាន $\boxed{x\in\varnothing}$ (គ្មានធាតុ)

V.មានរង្វង់ $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ **និងបន្ទាត់** $y=x+4$

1. **បំលែងសមីការរង្វង់ជាសមីការស្តង់ដា**

$x^2+y^2-2x-4y-4=0$

$(x^2-2x)+(y^2-4y)=4$

$(x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2)+(y^2-2\cdot y\cdot 2+2^2)=4+1^2+2^2$

$(x-1)^2+(y-2)^2=9$

ដូចនេះ $\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2=3^2}$ សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់។

2. **កំណត់ផ្ចិត និងកាំនៃរង្វង់**

❖ **វិធីទី១**

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-2)^2=3^2\\(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\end{array}\right| \Rightarrow a=1\ ,\ b=2\ ,\ r=3$$

ដូចនេះរង្វង់មាន $\boxed{\text{ផ្ចិត } I(a,b)=I(1,2) \text{ និងកាំ } r=3}$ ។

❖ **វិធីទី២**

រង្វង់ $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ មេគុណ $A=-2\ ,\ B=-4\ ,\ C=-4$

គេបាន $a=-\dfrac{A}{2}=-\dfrac{-2}{1}=1\ ,\ b=-\dfrac{B}{2}=-\dfrac{-4}{2}=2$

ផ្ចិត $I(a\ ,b)=I(1\ ,2)$

និងកាំ $r=\sqrt{a^2+b^2-C}=\sqrt{1^2+2^2-(-4)}=\sqrt{1+4+4}=3$

ដូចនេះរង្វង់មាន $\boxed{\text{ផ្ចិត } I(1\ ,2) \text{ និងកាំ } r=3}$ ។

3. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់និងរង្វង់

វាជាឫសនៃប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} y = x+4 & (1) \\ (x-1)^2+(y-2)^2 = 9 & (2) \end{cases}$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$(x-1)^2+(x+4-2)^2 = 9$

$(x-1)^2+(x+2)^2 = 9$.

$x^2-2x+1+x^2+4x+4 = 9$

$2x^2+2x-4 = 0$

$x^2+x-2 = 0$ មានឫស $x_1 = 1$, $x_2 = -2$

តាម (1) ចំពោះ $x_1 = 1$: $y_1 = 1+4 = 5$

ចំពោះ $x_2 = -2$: $y_2 = -2+4 = 2$

ដូចនេះចំណុចប្រសព្វគឺ **(1 , 5) និង (–2 , 2)** ។

VI. 1. **ដោះស្រាយវិសមីការ** $\left|\dfrac{2x-3}{x+1}\right| < 1$

ប្រើទំនាក់ទំនងចំពោះ $\alpha > 0$ បើ $|f(x)| < \alpha$ នោះ $-\alpha < f(x) < \alpha$

វិសមីការខាងលើក្លាយជា $-1 < \dfrac{2x-3}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x+1} < 1 & (1) \\ \dfrac{2x-3}{x+1} > -1 & (2) \end{cases}$

តាម (1) គេអាចសរសេរ $\dfrac{2x-3}{x+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3-x-1}{x+1} < 0$

$\dfrac{x-4}{x+1} < 0$ (មានឫស $x = 4$, $x = -1$)

តាម (2) គេអាចសរសេរ $\dfrac{2x-3}{x+1} + 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3+x+1}{x+1} > 0$

$\dfrac{3x-2}{x+1} > 0$ (មានឫស $x = 2/3$, $x = -1$)

តារាងសញ្ញារួម

x	$-\infty$		-1		$2/3$		4		$+\infty$
$\dfrac{x-4}{x+1}<0$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{3x-2}{x+1}>0$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x+1}<1\\ \dfrac{2x-3}{x+1}>-1\end{cases}$									

ដូចនេះវិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x\in\left(\dfrac{2}{3}\,,\,4\right)$ ។

2. ដោះស្រាយវិសមីការ $\dfrac{(x^2+3x-4)^{2015}}{(x^2-9)^{2016}}>0$

- $(x^2+3x-4)^{2015}$ យកសញ្ញាតាម x^2+3x-4 (និទស្សន្ត 2015 ចំនួនគត់សេស)

  បើ $x^2+3x-4=0$ នោះ $x=-4$, $x=1$
- $(x^2-9)^{2016}>0$ គ្រប់តម្លៃ x (និទស្សន្ត 2016 ចំនួនគត់គូ)

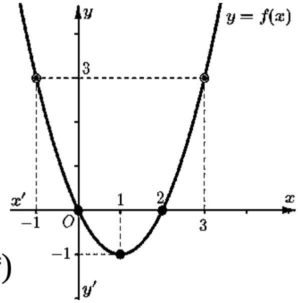
  បើ $x^2-9=0$ នោះ $x=-3$, $x=3$

តារាងសញ្ញារួម

x	$-\infty$		-4		-3		1		3		$+\infty$
$(x^2+3x-4)^{2015}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2-9)^{2016}$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$\dfrac{(x^2+3x-4)^{2015}}{(x^2-9)^{2016}}>0$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	

ដូចនេះវិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x\in\ -\infty\,,\,-4\ \cup(1,\,3)\cup(3,\,+\infty)$ ។

VII. តាមរូបខាងស្តាំ ៖



ក. កំណត់អនុគមន៍ $y = f(x)$

❖ វិធីទី១

ចំពោះអនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូល (អនុគមន៍ដឺក្រេទី២) ដែលកាត់តាមគល់តម្រុយកំណត់ដោយ $y = f(x) = ax^2 + bx$ (*)

តាមរូបដោយអនុគមន៍ $y = f(x)$ កាត់តាមចំណុច ៖

- $(-1, 3)$ នោះ (*) : $3 = a(-1)^2 + b(-1) \Leftrightarrow 3 = a - b$ (1)
- $(1, -1)$ នោះ (*) : $-1 = a(1)^2 + b(1) \Leftrightarrow -1 = a + b$ (2)

ដោះស្រាយរក a, b ដោយយក $(1)+(2)$: $2 = 2a \Rightarrow a = \frac{2}{2} = 1$

ហើយតាម (2) : $b = -1 - a = -1 - 1 = -2$

ដូចនេះអនុគមន៍ $\boxed{y = f(x) = x^2 - 2x}$ ។

❖ វិធីទី២

អនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល (α, β) គឺ $y = f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ (*)

ដោយ $(\alpha, \beta) = (1, -1) \Rightarrow \alpha = 1 , \beta = -1$

ហើយវាកាត់តាម $O(0, 0) \Rightarrow x = 0 , y = 0$

នោះ (*) ក្លាយជា $0 = a(0-1)^2 - 1 \Leftrightarrow 0 = a - 1 \Rightarrow a = 1$

ដូចនេះ $\boxed{y = f(x) = (x-1)^2 - 1}$ ឬពន្លាតគេបាន $\boxed{y = f(x) = x^2 - 2x}$ ។

ខ. តើគេរំកិលបន្ទាត់ $L : y = 2x$ **ប៉ះក្រាប** $y = f(x)$ **ត្រង់ចំណុចណា ?**

តាង $y = 2x + m$, (m ជាចំនួនថេរ) ជាបន្ទាត់ដែលបានមកពីការរំកិលបន្ទាត់ $L : y = 2x$ តាមអ័ក្សឈរ ។

ដើម្បីរកចំណុចប៉ះគេត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} y=2x^2-2x & (1)\\ y=2x+m & (2)\end{cases}$

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន $x^2-2x=2x+m \Leftrightarrow x^2-4x-m=0$

មេគុណ $a=1$, $b=-4$, $c=m$ នោះ $b'=\frac{b}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

គេបាន $\Delta'=b'^2-ac=(-2)^2-1\times(-m)=4+m$

ត្រូវឱ្យលក្ខខណ្ឌ $\Delta'=0 \Leftrightarrow 4+m=0 \Rightarrow m=-4$

ឫស $x=-\frac{b'}{a}=-\frac{-2}{1}=2$

តាម (2) : $y=2x+m=2\times2-4=0$

ដូចនេះគេរំកិលបន្ទាត់ $L : y=2x$ នឹងប៉ះក្រាប $y=f(x)$ ត្រង់ចំណុច $\boxed{(2\,,0)}$ ។

ចប់វិញ្ញាសាទី៧

វិញ្ញាសាទី៨

I. គេឱ្យសំណើបី a , b និង c ។ បង្ហាញថាសំណើ $\overline{a\wedge(b\vee c)}$ និង $\overline{(a\wedge b)\vee(a\wedge v)}$ សមមូលគ្នា ។

II. តាមសាកសួរពត៍មានពីសិស្សចំនួន 160 នាក់ បានឱ្យដឹងថាមានសិស្សចំនួន 79 នាក់ ចូលចិត្តអានសៀវភៅបណ្ណាល័យ 65 នាក់ ចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅផ្ទះ និង 41 នាក់ចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅកន្លែងទាំងពីរនោះ ។ រកចំនួនសិស្សដែលចូលចិត្តអានសៀវភៅតាមករណីដូចខាងក្រោម :

១. នៅបណ្ណាល័យតែម៉្យាងប៉ុណ្ណោះ ។

២. នៅផ្ទះតែម៉្យាងប៉ុណ្ណោះ ។

៣. នៅកន្លែងផ្សេងពីកន្លែងទាំងពីរ ។

III. ១.គណនាតម្លៃនៃ $S=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$ ដែល a , b , c ជាចំនួនពិតមិនសូន្យ

២. ពហុធា $p(x)$ ចែកនឹង $(x-1)$ មានសំណល់ 4 ហើយ $p(x)$ ចែកនឹង $(x-3)$ មានសំណល់ 10 ។ រកសំណល់នៅពេលដែល $p(x)$ ចែកនឹង $(x-1)(x-3)$ ។

IV.

១. កំណត់ a និង b ដើម្បីឱ្យ $1+2i$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^3-4x^2+ax+b=0$ ។

២. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y-3z=-8 \\ x-2y+5z=12 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} 3x+2y=6 \\ 9x^2-4y^2=108 \end{cases}$

V. គេឱ្យប៉ារ៉ាបូល (P) : $y=ax^2+bx+c$ កាត់តាមចំណុច $A(-1,0)$, $B(1,3)$ និង $C(3,4)$ និងបន្ទាត់ $D: y=x+2$ ។

១. កំណត់ចំនួនពិត a , b និង c ។ រួចសង់ក្រាបតាងប៉ារ៉ាបូល និងបន្ទាត់ D ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

២. ដោះស្រាយវិសមីការ :$-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}\le x+2$ តាមក្រាភិច។

VI. ១. គេមានរង្វង់ $C: x^2+y^2=1$ និងបន្ទាត់

$L: y=2x+n$ ដែល n ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

១. សិក្សាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ L និង រង្វង់ C តាមតម្លៃ n ។

២. គេឱ្យ $\overrightarrow{OP}=(1,1)$ និង $\overrightarrow{OQ}=(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$ ។

ក. រកមុំ θ ដែលកើតឡើងដោយ $\overrightarrow{OP}$ និង $\overrightarrow{OQ}$ ។

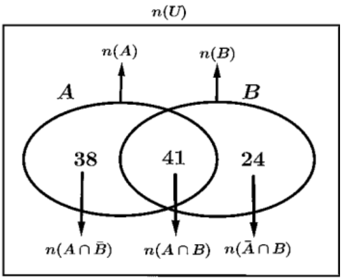
ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ OPQ ។

ចម្លើយ

I. បង្ហាញថា $\overline{a\wedge(b\vee c)}$ សមមូល $\overline{(a\wedge b)\vee(a\wedge c)}$

a	b	c	$a\wedge b$	$a\wedge c$	$b\vee c$	$a\wedge(b\vee c)$	$\overline{a\wedge(b\vee c)}$	$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$	$\overline{(a\wedge b)\vee(a\wedge c)}$
1	1	1	1	1	1	1	**0**	1	**0**
1	1	0	1	0	1	1	**0**	1	**0**
1	0	1	0	1	1	1	**0**	1	**0**
1	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**1**
0	1	1	0	0	1	0	**1**	0	**1**
0	1	0	0	0	1	0	**1**	0	**1**
0	0	1	0	0	1	0	**1**	0	**1**
0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**1**

II. តាង A : សំណុំសិស្សចូលចូលចិត្តអានសៀវភៅ
នៅបណ្ណាល័យ $\Rightarrow\ n(A)=79$



B : សំណុំសិស្សចូលចូលចិត្តអានសៀវភៅ
នៅផ្ទះ $\Rightarrow\ n(\text{B})=65$

$A\cap B$ សំណុំសិស្សចូលចូលចិត្តអានសៀវភៅ
នៅកន្លែងទាំងពីរ $\Rightarrow\ n(A\cap B)=41$

U : ជាសំណុំសិស្សទាំងអស់ $\Rightarrow\ n(U)=160$

រកចំនួនសិស្សដែលចូលចូលចិត្តអានសៀវភៅតាមករណីខាងក្រោម ៖

១. នៅបណ្ណាល័យតែម្យ៉ាងប៉ុណ្ណោះ $n(A\cap\overline{B})$

$n(A\cap\overline{B})+n(A\cap B)=n(A)$

$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=79-41=$ $\boxed{38\ \text{នាក់}}$ ។

២. នៅផ្ទះតែម្យ៉ាងប៉ុណ្ណោះ $n(\overline{A}\cap B)$

$n(\overline{A}\cap B)+n(A\cap B)=n(B)$

$n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=65-41=$ $\boxed{24\ \text{នាក់}}$ ។

៣. នៅកន្លែងផ្សេងពីកន្លែងទាំងពីរ

ចំនួនសិស្សដែលចូលចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅបណ្ណាល័យ
ឬនៅផ្ទះ $n(A\cup B)$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=79+65-41=103\ \text{នាក់}$$

នោះចំនួនសិស្សដែលមិនចូលចិត្តអាននៅកន្លែងទាំងពីរគឺ

$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=160-103=$ $\boxed{57\ \text{នាក់}}$ ។

III. ១.គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $S=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$ ដែល a , b , c ជាចំនួនពិតមិនសូន្យ

– បើ $a>0$, $b>0$, $c>0$ នោះ $|a|=a$, $|b|=b$, $|c|=c$

នាំឱ្យ $S=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}=1+1+1=3$

– បើ $a>0$, $b>0$, $c<0$ នោះ $|a|=a$, $|b|=b$, $|c|=-c$

នាំឱ្យ $S=\frac{a}{a}+\frac{b}{b}-\frac{c}{c}=1+1-1=1$

– បើ $a<0$, $b<0$, $c>0$ នោះ $|a|=-a$, $|b|=-b$, $|c|=c$

នាំឱ្យ $S=-\frac{a}{a}-\frac{b}{b}+\frac{c}{c}=-1-1+1=-1$

– បើ $a<0$, $b<0$, $c<0$ នោះ $|a|=-a$, $|b|=-b$, $|c|=-c$

នាំឱ្យ $S=-\frac{a}{a}-\frac{b}{b}-\frac{c}{c}=-1-1-1=-3$

សរុបមកក្នុងចំណោមចំនួនពិតមិនសូន្យ a , b និង c ៖

- បើមានតែពីរណាវិជ្ជមាន នោះគេបាន $\boxed{S=1}$ ។
- បើមានតែពីរណាអវិជ្ជមាន នោះគេបាន $\boxed{S=-1}$ ។
- បើវិជ្ជមានទាំងបី នោះគេបាន $\boxed{S=3}$ ។
- បើអវិជ្ជមានទាំងបី នោះគេបាន $\boxed{S=-3}$ ។

២. រកសំណល់នៅពេលដែល $p(x)$ ចែកនឹង $(x-1)(x-3)$

ដោយ $(x-1)(x-3)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 2 នោះសំណល់ត្រូវមានដឺក្រេតូចជាងឬស្មើ 1 ។

តាង $R(x)=ax+b$ ជាសំណល់នៅពេល $p(x)$ ចែកនឹង $(x-1)(x-3)$

ដោយ $p(x)$ ចែកនឹង $(x-1)$ សល់ 4 គេបាន $R(1)=4 \Leftrightarrow a+b=4$ (1)

$p(x)$ ចែកនឹង $(x-3)$ សល់ 10 គេបាន $R(3)=10 \Leftrightarrow 3a+b=10$ (2)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a+b=4 & (1) \\ 3a+b=10 & (2) \end{cases}$

$(2)-(1)$: $2a=6 \Rightarrow a=\frac{6}{2}=3$ ហើយ (1) : $b=4-a=4-3=1$

ដូចនេះសំណល់នោះគឺ $\boxed{R(x)=3x+1}$ ។

IV. ១. កំណត់តម្លៃ a និង b

ដោយ $1+2i$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^3-4x^2+ax+b=0$

គេបាន $(1+2i)^3-4(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0$

$$1+6i-12-8i-4(1+4i-4)+a+2ai+b=0$$

$$1-18i+a+2ai+b=0$$

$$(a+b)+2ai=-1+8i$$

នាំឱ្យ $\begin{cases} a+b=-1 \\ 2a=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1-a=-1-9=-10 \\ a=9 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=9\ ,\ b=-10}$ ។

២. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម

ក. $\begin{cases} x+y+z=6 & (1) \\ 3x-y-3z=-8 & (2) \\ x-2y+5z=12 & (3) \end{cases}$

អាចដោះស្រាយបានតាមវិធីបូកបំបាត់ដោយ ៖

យក $(1)+(2)$ គេបាន $+\begin{cases} x+y+\ \ z=6 \\ 3x-y-3z=-8 \end{cases}$

$$4x \quad -2z=-2 \Leftrightarrow 2x-z=-1 \quad (4)$$

យក (1) គុណនឹង 2 រួចបូកនឹង (3) គេបាន $+\begin{cases} 2x+2y+2z=12 \\ \ \ x-2y+5z=12 \end{cases}$

$$3x \quad +7z=24 \quad (5)$$

យក (4) គុណនឹង 7 រួចបូកនឹង (5) គេបាន $+\begin{cases}14x-7z=-7\\ \ 3x+7z=24\end{cases}$

$$17x \qquad =17 \Rightarrow x=\frac{17}{17}=1$$

តាម (4) ទាញរក $z=2x+1=2\times1+1=3$

តាម (1) ទាញរក $y=6-x-z=6-1-3=2$

ដូចនេះចម្លើយ $\boxed{(x=1\ ,\ y=2\ ,\ z=3)}$ ។

ខ. $\begin{cases}3x+2y=6 & (1)\\ 9x^2-4y^2=108 & (2)\end{cases}$

តាម (2) គេអាចសរសេរ $(3x)^2-(2y)^2=108 \Leftrightarrow (3x-2y)\underbrace{(3x+2y)}_{6}=108$

$$(3x-2y)\cdot 6=108 \Leftrightarrow 3x-2y=\frac{108}{6}=18 \quad (3)$$

យក $(1)+(3)$ គេបាន $+\begin{cases}3x+2y=6\\ 3x-2y=18\end{cases}$

$$6x \qquad =24 \Rightarrow x=\frac{24}{6}=4$$

តាម (1) ទាញរក $y=\frac{6-3x}{2}=\frac{6-3\times4}{2}=\frac{6-12}{2}=\frac{-6}{2}=-3$

ដូចនេះគូចម្លើយ $\boxed{(x=4\ ,\ y=-3)}$ ។

V. គេឱ្យ $(P)\ :\ y=ax^2+bx+c$ **និងបន្ទាត់** $D\ :\ y=x+2$

១. កំណត់ចំនួនពិត $a\ ,\ b\ ,\ c$

ដោយប៉ារ៉ាបូល (P) កាត់តាម ៖

- ចំណុច $A(-1\ ,\ 0)$ គេបាន $a(-1)^2+b(-1)+c=0 \Leftrightarrow a-b+c=0$
- ចំណុច $B(1\ ,\ 3)$ គេបាន $a(1)^2+b(1)+c=3 \Leftrightarrow a+b+c=3$
- ចំណុច $C(3\ ,\ 4)$ គេបាន $a(3^2)+b(3)+c=4 \Leftrightarrow 9a+3b+c=4$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a-b+c=0 & (1) \\ a+b+c=3 & (2) \\ 9a+3b+c=4 & (3) \end{cases}$

$(1)\ :\ c=b-a \quad (4)$

$(2)\ :\ a+b+b-a=3 \Leftrightarrow 2b=3 \Leftrightarrow b=\frac{3}{2}$

$(3)\ :\ 9a+3b+b-a=4 \Leftrightarrow 8a+4b=4 \Leftrightarrow 2a+b=1$

$$a=\frac{1-b}{2}=\frac{1-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{1}{4}$$

នោះ (4) ក្លាយជា $c=\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{a=-\frac{1}{4}\ ,\ b=\frac{3}{2}\ ,\ c=\frac{7}{4}}$ ។

+ សង់ក្រាបតាងប៉ារ៉ាបូល និងបន្ទាត់ក្នុងតម្រុយតែមួយ

ចំពោះ $a=-\frac{1}{4}\ ,\ b=\frac{3}{2}\ ,\ c=\frac{7}{4}$ នោះគេបាន $(P)\ :\ y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$

កំពូលប៉ារ៉ាបូល (α,β) ដែល $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{3}{2}}{2\left(-\frac{1}{4}\right)}=3$

$$\beta=f(3)=-\frac{1}{4}\times 3^2+\frac{3}{2}\times 3+\frac{7}{4}=4$$

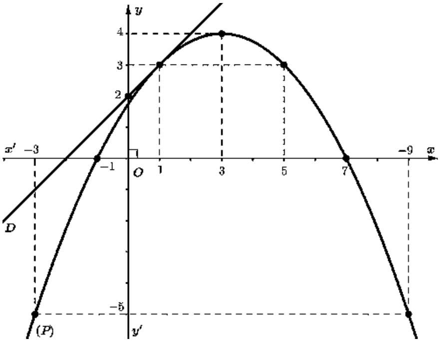
តារាងតម្លៃ $(P)\ :\ y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$

x	-3	-1	1	3	5	7	9
y	-5	0	3	4	3	0	-5

$D\ :\ y=x+2\ :$

x	0	1
y	2	3

គូសក្រាប



២. ដោះស្រាយវិសមីការ $-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}\le x+2$ តាមក្រាភិច

វិសមីការ $-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}\le x+2$ ឬ $(P)\le D$

មានន័យថាក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល (P) មានទីតាំងស្ថិតនៅក្រោម ឬត្រួតលើបន្ទាត់ D ។ តាមក្រាបឃើញថា (P) នៅក្រោមឬត្រួតលើ D គ្រប់កន្លែង ។

ដូចនេះវិសមីការមានចម្លើយ $\boxed{x\in(-\infty\,,\,+\infty)}$ ។

VI. គេមានរង្វង់ $C: x^2+y^2=1$ និងបន្ទាត់ $L: y=2x+n$, n ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

១. សិក្សាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ L និង រង្វង់ C តាមតម្លៃ n

ជំនួសសមីការបន្ទាត់ L ក្នុងសមីការរង្វង់ C គេបាន $x^2+(2x+n)^2=1$

$$x^2+4x^2+4nx+n^2-1=0$$

$$5x^2+4nx+n^2-1=0$$

មេគុណ $a=5$, $b=4n$, $c=n^2-1$ នោះ $b'=\frac{b}{2}=\frac{4n}{2}=2n$

រក $\Delta=b'^2-ac=(2n)^2-5(n^2-1)=4n^2-5n^2+5=-n^2+5$

ត្រូវសិក្សាតម្លៃ Δ' នេះដោយ $\Delta'=0 \Leftrightarrow -n^2+5=0$

គេបានឫស $n=-\sqrt{5}$, $n=\sqrt{5}$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$\Delta'=-n^2+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- បើ $n\in(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},+\infty)$ គេបាន $\Delta'<0$ បន្ទាត់ L និងរង្វង់ C គ្មានប្រសព្វទេ ។
- បើ $n=-\sqrt{5}\,,\ \sqrt{5}$ គេបាន $\Delta'=0$ បន្ទាត់ L ប៉ះរង្វង់ C ត្រង់ចំណុចដែល ៖

$$x=-\frac{b'}{a}=-\frac{2n}{5}\quad,\quad y=2x+n=2\left(-\frac{2n}{5}\right)+n=\frac{n}{5}$$

$y=$

- ចំពោះ $n=-\sqrt{5}$ គេបាន $x=-\frac{2(-\sqrt{5})}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $y=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

តាង $\boxed{A\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\,,-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}$ ។

- ចំពោះ $n=\sqrt{5}$ គេបាន $x=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $y=\frac{\sqrt{5}}{5}$

តាង $\boxed{B\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\,,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}$ ។

- បើ $n\in(-\sqrt{5}\,,\sqrt{5}\,)$ គេបាន $\Delta'>0$ បន្ទាត់ L កាត់រង្វង់ C ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នាដែល

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2n\pm\sqrt{-n^2+5}}{5}\quad,\quad y=2x+n=2\left(\frac{-2n\pm\sqrt{5-n^2}}{5}\right)+n=\frac{n\pm2\sqrt{5-n^2}}{5}$$

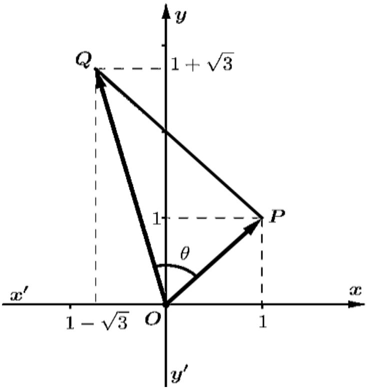
ចំណុចប្រសព្វនោះគឺ $\left(\frac{-2n\pm\sqrt{5-n^2}}{5},\frac{n\pm2\sqrt{5-n^2}}{5}\right)$ ។

២. គេមាន $\overrightarrow{OP}=(1\,,1)$ និង $\overrightarrow{OQ}=(1-\sqrt{3}\,,1+\sqrt{3}\,)$

ក. រកមុំ θ ដែលកើតឡើងដោយ $\overrightarrow{OP}$ និង $\overrightarrow{OQ}$

តាម $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos\theta$

ទាញរក $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|}$



$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1(1-\sqrt{3})+1(1+\sqrt{3})=2$

$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{1^2+1^1}=\sqrt{2}$

$OQ=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2}=2\sqrt{2}$

នាំឱ្យ $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\boxed{\theta=60^o}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ OPQ

គេបាន $S=\dfrac{1}{2}\times OP\times OQ\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\sin60^o$

$=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\boxed{\sqrt{3}\text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

ចប់វិញ្ញាសាទី៨

វិញ្ញាសាទី៩

I. គេឱ្យ $a=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ និង $b=2+\sqrt{10}$ ។

1. គណនា a^2-b^2 ។

2. បំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែងនៃប្រភាគ $\dfrac{a}{b}$ ។

3. គណនា $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ ។

II. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

1 . $x^2+1=0$

2. $x^2+x+2=0$

3. $x^3-1=0$

4. $x^4-1=0$

III. គេឱ្យសមីការ $x^2-x-12=0$ មានឫសពីរ α និង β ។ ដោយមិនចាំបាច់ដោះស្រាយសមីការ ចូរគណនា៖

1. $\alpha^2+\beta^2$

2. $\alpha^3+\beta^3$ ។

IV. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y+t=7 \\ x+z+t=8 \\ y+z+t=9 \end{cases}$ ។

V. ដោះស្រាយវិសមីការ

1. $|x-2|\le 3$

2. $\dfrac{(x-1)^{2015}\times(x-2)^{2016}}{(x-3)^{2017}\times(x-4)^{2018}}\ge 0$

VI. គេឱ្យសមីការ $x^2-2(m-1)x+m-3=0$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

1. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់តម្លៃ m សមីការមានឫសជានិច្ច ។

2. រកទំនាក់ទំនងគ្មាន m រវាងឫសទាំងពីររបស់សមីការ ។

VII. គេមានបន្ទាត់ $D: y=-x+3$ និងរង្វង់ $(C): x^2+y^2-4x-6y+9=0$ ។

1. រកកូអរដោនេផ្ចិត និងរង្វាស់កាំនៃរង្វង់ (C) ។

2. បន្ទាត់ D និងរង្វង់ (C) ប្រសព្វគ្នាត្រង់ពីរចំណុច A និង B ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចទាំងពីរនោះ ។

3. គណនាចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់និងបន្ទាត់ D ។ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកតូចដែលខណ្ឌដោយរង្វង់ (C) និងបន្ទាត់ D ។

ចម្លើយ

I. គេឱ្យ $a=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **និង** $b=2+\sqrt{10}$

1. គណនា a^2-b^2

គេបាន $a^2-b^2=(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-(2+\sqrt{10})^2$

$$=\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}^2-\left(2^2+2\times2\times\sqrt{10}+\sqrt{10}^2\right)$$

$$=2+2\sqrt{10}+5-\left(4+4\sqrt{10}+10\right)$$

$$=7+2\sqrt{10}-\left(14+4\sqrt{10}\right)$$

$$=7+2\sqrt{10}-14-4\sqrt{10}$$

$$=\boxed{-7-2\sqrt{10}}$$ ។

2. បំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែងនៃប្រភាគ $\frac{a}{b}$

គេបាន $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2+\sqrt{10}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-2)}{(\sqrt{10}+2)(\sqrt{10}-2)}=\frac{\sqrt{20}-2\sqrt{2}+\sqrt{50}-2\sqrt{5}}{\sqrt{10^2}-2^2}$

$$=\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}+5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{10-4}=\frac{3\sqrt{2}}{6}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$ ។

3. គណនា

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-\sqrt{3}^2}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{\sqrt{2}^2+2\sqrt{10}+\sqrt{5}^2-3}$$

$$=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{4+2\sqrt{10}}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{2(2+\sqrt{10})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2+\sqrt{10}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$ ។

II. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

1. $x^2+1=0$

គេបាន $x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}=\pm\sqrt{i^2}=\boxed{\pm i}$ ។

2. $x^2+x+2=0$ មានមេគុណ $a=1$, $b=1$, $c=2$

រក $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times2=1-8=-7$

នោះ $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-7}=i\sqrt{7}$

ឫស $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\boxed{\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}}$ ។

3. $x^3-1=0 \Leftrightarrow x^3-1^3=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+1\right)=0$

បើ $x-1=0 \Rightarrow x=1$

បើ $x^2+x+1=0$ មេគុណ $a=1$, $b=1$, $c=1$

រក $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times1=1-4=-3$

នោះ $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-3}=i\sqrt{3}$

ឫស $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះសមីការមានឫស $\boxed{x=1\,,\ \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}}$ ។

4. $x^4-1=0 \Leftrightarrow (x^2)^2-1^2=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1)=0$

បើ $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

បើ $x^2+1=0 \Rightarrow x=\pm i$ (លទ្ធផលទី 1.)

ដូចនេះសមីការមានឫស $\boxed{x=-1\,,1\,,-i\,,i}$ ។

III. សមីការ $x^2-x-12=0$ មានឫសពីរ α និង β

នោះគេបាន $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-1}{1}=1$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-12}{1}=-12$

ដោយមិនចាំបាច់ដោះស្រាយសមីការចូរគណនា

1. $\alpha^2+\beta^2$

$\alpha^2+\beta^2=(\underbrace{\alpha+\beta}_{1})^2-2\underbrace{\alpha\beta}_{-12}=1^2-2(-12)=1+24=\boxed{25}$ ។

2. $\alpha^3+\beta^3$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=1\times(25-(-12))$

$=\boxed{37}$ ។

IV. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម $\begin{cases} x+y+z=6 & (1) \\ x+y+t=7 & (2) \\ x+z+t=8 & (3) \\ y+z+t=9 & (4) \end{cases}$

យក $(1)+(2)+(3)+(4)$ គេបាន $3x+3y+3z+3t=6+7+8+9$

$3(x+y+z+t)=30$

$x+y+z+t=10 \quad (5)$

$(5)-(1)$: $t=4$ $\qquad$ $(5)-(2)$: $z=3$

$(5)-(3)$: $y=2$ $\qquad$ $(5)-(4)$: $x=1$

ដូចនេះចម្លើយ $\boxed{(x=1\ ,\ y=2\ ,\ z=3\ ,\ t=4)}$ ។

V.ដោះស្រាយវិសមីការ

1. $|x-2|\leq 3$

❖ **វិធីទី១**

ដោយ $|x-2|\geq 0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ លើកអង្គទាំងពីជាការេ

គេបាន $|x-2|^2\leq 3^2 \Leftrightarrow (x-2)^2-3^2\leq 0 \Leftrightarrow x^2-4x+4-9\leq 0$

$x^2-4x-5\leq 0$ (មានឫស $x=5$, $x=-1$)

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$x^2-4x-5\leq 0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដូចនេះសំណុំចម្លើយ $\boxed{x\in[-1\,,\,5]}$ ។

❖ **វិធីទី២** : ចំពោះ $\alpha>0$ បើ $|f(x)|\leq\alpha \Leftrightarrow -\alpha\leq f(x)\leq\alpha$

គេបាន $|x-2|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq x-2\leq 3 \Leftrightarrow -3+2\leq x\leq 3+2$

(ថែមអង្គទាំងបីនឹង 2)

គេបាន $-1\leq x\leq 5$ ឬ $\boxed{x\in[-1\,,\,5]}$ ។

2. ដោះស្រាយវិសមីការ $\dfrac{(x-1)^{2015}\times(x-2)^{2016}}{(x-3)^{2017}\times(x-4)^{2018}}\geq 0$

- $(x-1)^{2015}$ យកសញ្ញាតាម $x-1$ (និទស្សន្ត 2015 សេស) មានឫស $x=1$
- $(x-2)^{2016}\geq 0$ (និទស្សន្ត 2016 ជាចំនួនគត់គូ) មានឫស $x=2$
- $(x-3)^{2017}$ យកសញ្ញាតាម $x-3$ (និទស្សន្ត 2017 សេស) មានឫស $x=3$
- $(x-4)^{2018}\geq 0$ (និទស្សន្ត 2018 ជាចំនួនគត់គូ) មានឫស $x=4$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$(x-1)^{2015}$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	$+$	
$(x-2)^{2016}\geq 0$	$+$	$+$	0 $+$	$+$	$+$	
$(x-3)^{2017}$	$-$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
$(x-4)^{2018}\geq 0$	$+$	$+$	$+$	$+$	0 $+$	
$f(x)\geq 0$	$+$	0 $-$	0 $-$	‖ $+$	‖ $+$	

ដូចនេះចម្លើយ $\boxed{x\in(-\infty\,,1]\cup(3\,,4)\cup(4\,,+\infty)}$ ។

VI. គេឱ្យសមីការ $x^2-2(m-1)x+m-3=0$

1. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់តម្លៃ m **សមីការមានឫសជានិច្ច**

សមីការ $x^2-2(m-1)x+m-3=0$ មេគុណ $a=1$, $b=-2(m-1)$, $c=m-3$

នោះ $b'=\dfrac{b}{2}=\dfrac{-2(m-1)}{2}=-(m-1)$

គេបាន $\Delta'=(b')^2-ac$

$=\left[-(m-1)^2\right]-1(m-3)=(m-1)^2-m+3$

$=m^2-2m+1-m+3$

$=m^2-3m+4$ (មេគុណ $a=1$, $b=-3$, $c=4$)

ឫសនៃ $\Delta'=0$ គឺគ្មានទេក្នុងចំនួនពិត(ព្រោះ $\Delta_m=b^2-4ac=1^2-4(1)(4)=-15<0$)

ដោយ Δ' មាន $\begin{cases}\Delta_m<0\\ a=1>0\end{cases}$ នាំឱ្យ $\Delta'=m^2-3m+4>0$ ជានិច្ចគ្រប់តម្លៃពិត m ។

ដូចនេះសមីការខាងលើមានឫសជានិច្ចគ្រប់តម្លៃពិត m ។

2. រកទំនាក់ទំនងរវាងឬសទាំងពីរនៃសមីការខាងលើ

តាង α និង β ជាឬទាំងពីរនៃសមីការខាងលើ

ដោយ $a=1$, $b=-2(m-1)$, $c=m-3$

គេបាន $S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-2(m-1)}{1}=2(m-1) \Leftrightarrow m=\dfrac{S}{2}+1=\dfrac{S+2}{2}$ (1)

$P=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{m-3}{1}=m-3 \Leftrightarrow m=P+3$ (2)

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន $\dfrac{S+2}{2}=P+3 \Leftrightarrow S+2=2P+6$

$S-2P-4=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta-2\alpha\beta-4=0$

ដូចនេះទំនាក់ទំនង $\boxed{\alpha+\beta-2\alpha\beta-4=0}$ ។

VII. បន្ទាត់ $D: y=-x+3$ និងរង្វង់ $x^2+y^2-4x-6y+9=0$

1. រកកូអរដោនេផ្ចិត និងរង្វាស់កាំនៃរង្វង់ (C)

❖ **វិធីទី១** : ប្រើសមីការទូទៅ

ដោយ $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-4x-6y+9=0 \\ x^2+y^2+Ax+By+C=0 \end{array}\right| \Rightarrow A=-4,\ B=-6,\ C=9$

គេបាន $a=-\dfrac{A}{2}=2$, $b=-\dfrac{B}{2}=3$

ដូច្នេះផ្ចិត $I(a,b)=\boxed{I(2,3)}$ និងកាំ $r=\sqrt{a^2+b^2-C}=\sqrt{2^2+3^2-9}=\boxed{2}$ ។

❖ **វិធីទី២** : បម្លែងទៅជាសមីការស្តង់ដា

$$x^2+y^2-4x-6y+9=0$$

$$x^2+y^2-4x-6y+9=0$$

$$(x^2-4x+4)^2+(y^2-6y+9)=4$$

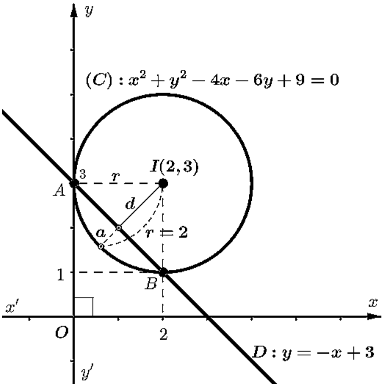
$$\left.\begin{array}{l} (x-2)^2+(y-3)^2=2^2 \\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \end{array}\right| \Rightarrow a=2\ ,\ b=3\ ,\ r=2$$

គេបានផ្ចិត $I(a,b)=\boxed{I(2,3)}$ និងកាំ $\boxed{r=2}$ ។

2. បន្ទាត់ D និងរង្វង់ (C) ប្រសព្វគ្នាត្រង់ពីរចំណុច A និង B ។ រកកូអរដោនេទាំងពីនោះ

ប្រព័ន្ធសមីការរវាងរង្វង់និងបន្ទាត់ $\begin{cases} x^2+y^2-4x-6y+9=0 & C \\ y=-x+3 & D \end{cases}$

យកសមីការ D ជំនួសក្នុងសមីការ C គេបាន



$$x^2+(-x+3)^2-4x-6(-x+3)+9=0$$

$$x^2+x^2-\cancel{6x}+\cancel{9}-4x+\cancel{6x}-\cancel{18}+\cancel{9}=0$$

$$2x^2-4x=0 \Leftrightarrow 2x(x-2)=0$$

បើ $2x=0 \Rightarrow x=0$

បើ $x-2=0 \Rightarrow x=2$

តាមសមីការ D

ចំពោះ $x=0$: $y=0+3=3$ តាង $\boxed{A(0,\ 3)}$ ។

ចំពោះ $x=2$: $y=-2+3=1$ តាង $\boxed{B(2,\ 1)}$ ។

3. គណនាចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់និងបន្ទាត់ D

តាង d ជាចម្ងាយពីផ្ចិតរង្វង់និងបន្ទាត់ D

គេមាន $D : y=-x+3 \Leftrightarrow x+y-3=0$

នោះ $d=\dfrac{|x_I+y_I-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|2+3-3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\boxed{d=\sqrt{2}\ \text{ឯកតាប្រវែង}}$ ។

+ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកតូចដែលខណ្ឌដោយរង្វង់ (C) និងបន្ទាត់ D

ផ្ទៃក្រឡារង្វង់ : $S=\pi r^2=\pi\times 2^2=4\pi$

ផ្ទៃក្រឡាមួយចំណិតរង្វង់ខណ្ឌដោយអង្កត់ $IA\perp IB$ និងធ្នូតូច $\cup AB$ គឺ

$$S_1=\frac{1}{4}S=\frac{1}{4}\times 4\pi=\pi$$

ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណកែង AIB : $S_{AIB}=\dfrac{1}{2}\times IA\times IB=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=2$

ដូច្នេះផ្ទៃក្រឡាផ្នែកតូចនោះកំណត់ដោយ $S'=S_1-S_{AIB}=\boxed{\pi-2\ \text{ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

ចប់វិញ្ញាសាទី៩

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ២

រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម(បរិញ្ញា+១)គណិតវិទ្យា១ ជំនាន់២១

វិញ្ញាសាទី១០

I.

1. ដោយ i ជាឯកតានិមិត្តចូរបង្ហាញថា $z=i^{2016}+i^{2015}+i^{2014}+i$ ជាចំនួនពិត ។

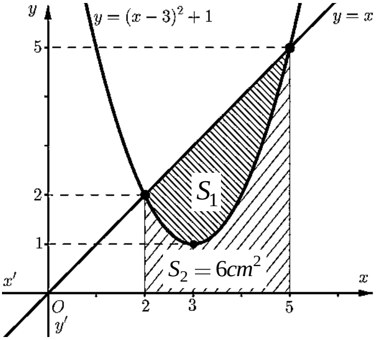
2. បើ $2-i$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ $x^2+(a-i)x+b-3i=0$ ។ កំណត់ឫសមួយទៀត

II.

1. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2-x-1$ និង $g(x)=2x+1$ ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f[g(x)]$ ។

2. បើ $f(x)=x^2-x+1$ និង $f[g(x)]=x^2+x+1$ ចូរបង្ហាញថា $g(-1)=0$ ។

III. គេឱ្យខ្សែកោងពីរដូចរូប



ក. សរសេរកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វនៃខ្សែកោងទាំងពីរ ។

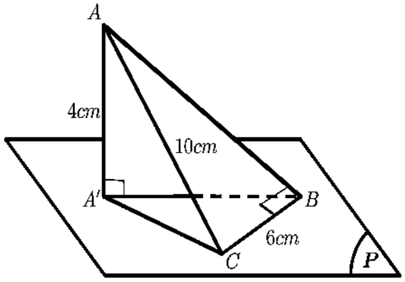
ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S_1 ។ គេឱ្យ $S_2=6cm^2$ ។

IV. ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$S_1=\cos^2 28^o+\cos^2 40^o+\cos^2 62^o+\cos^2 50^o$ ។

$S_2=\sin^2 32^o+\sin^2 43^o+\sin^2 58^o+\sin^2 47^o$ ។

V. គេឱ្យរូបដូចខាងក្រោម



គេមានប្លង់ P មួយហើយ A ជាចំណុចមួយមិនស្ថិតក្នុងប្លង់ P ។ A' ជាចំណោលកែងនៃ A លើ P ដែល $AA'=4cm$ ។ ចំណុច B និង C ស្ថិតក្នុងប្លង់ P បង្កើតបានជាត្រីកោណ ABC ដែល $BC=6cm$, $AC=10cm$ ។ គណនារង្វាស់ជ្រុង $A'B$, $A'C$ និងតម្លៃប្រហែលនៃមុំ $\angle A'CB$ ។

VI. គេមានអនុគមន៍ f និង g កំណត់ដោយ $f(x)=x^2-4x+6$ និង $g(x)=x+2$ មានក្រាបតំណាង (C_f) និង (C_g) រៀងគ្នា ។

ក. សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C_f) និង (C_g) ។ រួចទាញរកកូអរដោនេចំណុច A និង B ដែលជាប្រសព្វនៃក្រាប (C_f) និង (C_g) ។

ខ. រកកូអរដោនេកំពូលក្រាប (C_f) ។ រួចសង់ក្រាប (C_f) និង (C_g) ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

គ. តាង S_f ផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C_f) និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសចន្លោះ A និង B

S_g ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C_g) និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសចន្លោះ A និង B

S ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C_g) និង (C_f) ចន្លោះ A និង B

ដោយផ្ទៃក្រឡា $S_f=9$ ឯកតាផ្ទៃ ចូរគណនាផ្ទៃ S ។

ចម្លើយ

I. 1. **បង្ហាញថា** $z=i^{2016}+i^{2015}+i^{2014}+i$ **ជាចំនួនពិត**

គេបាន $z=i^{2016}+i^{2015}+i^{2014}+i$

$=i^{4\times504+0}+i^{4\times503+3}+i^{4\times503+2}+i$ (ទម្រង់ $i^{4k+n}=i^n$)

$=i^0+i^3+i^2+i$

$=1-i-1+i$

$=0$ ជាចំនួនពិត ។

2. **កំណត់ឫសមួយទៀតនៃសមីការ** $x^2+(a-i)x+b-3i=0$ (*)

ដោយ $2-i$ ជាឫសមួយរបស់ $x^2+(a-i)x+b-3i=0$

$(2-i)^2+(a-i)(2-i)+b-3i=0$

$4-4i+i^2+2a-ai-2i+i^2+b-3i=0$, $(i^2=-1)$

$(2+2a+b)-(9+a)i=0$

នាំឱ្យ $\begin{cases}2+2a+b=0 & (1)\\ 9+a=0 & (2)\end{cases}$

(2) : $a=-9$

(1) : $2+2(-9)+b=0 \Rightarrow b=16$

ចំពោះ $a=-9$ និង $b=16$ នោះសមីការ (*) : $x^2+(-9-i)x+16-3i=0$

ផលបូកឫស $x_1+x_2=-\dfrac{(-9-i)}{1}=9+i$

ទាញរក $2-i+x_2=9+i \Rightarrow x_2=9+i-2+i=7+2i$

ដូចនេះឫសទាំងពីរនោះគឺ $\boxed{x_1=2-i \text{ និង } x_2=7+2i}$

II. 1. **ចូរកំណត់អនុគមន៍** $f[g(x)]$

ដោយ $f(x)=x^2-x-1$ និង $g(x)=2x+1$

គេបាន $f[g(x)]=f(2x+1)=(2x+1)^2-(2x+1)-1=\boxed{4x^2+2x+1}$ ។

2. **ចូរបង្ហាញថា** $g(-1)=0$

❖ **វិធីទី១**

+ គេត្រូវរកអនុគមន៍ $g(x)$ ឱ្យឃើញជាមុនសិន

ដោយ $f(x)=x^2-x+1$ និង $f[g(x)]=x^2+x+1$ (1)

នោះ $g(x)$ ត្រូវតែជាអនុគមន៍ដឺក្រេទីមួយមានមួយអញ្ញាត x ដែលមានរាង

$g(x)=x+c$, c ជាចំនួនថេរ

គេបាន $f[g(x)]=(x+c)^2-(x+c)+1$

$$=x^2+2cx+c^2-x-c+1$$

$$=x^2+(2c-1)+(c^2-c+1) \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) ដោយផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នាគេបាន

$$\begin{cases}2c-1=1\\ c^2-c+1=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=1\\ c=0\ ,\ 1\end{cases} \Bigg| \Rightarrow c=1$$

គេបាន $g(x)=x+c=x+1$ នាំឱ្យ $\boxed{g(-1)=-1+1=0 \text{ ពិត}}$ ។

❖ **វិធីទី២**

ដោយ $f(x)=x^2-x+1$ នោះ $f[g(x)]=g^2(x)-g(x)+1$

គេបាន $f[g(-1)]=g^2(-1)-g(-1)+1$ (1)

ហើយ $f[g(x)]=x^2+x+1$

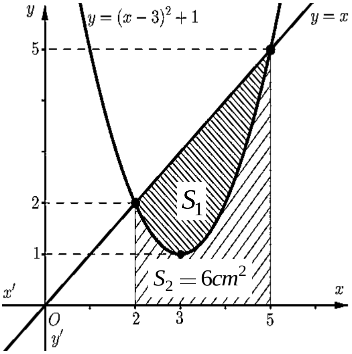
គេបាន $f[g(-1)]=(-1)^2+(-1)+1=1$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $g^2(-1)-g(-1)+1=1 \Leftrightarrow g(-1)[g(-1)-1]=0$

ដូចនេះ $\boxed{g(-1)=0}$ ។

III.

ក. សរសេរកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វនៃខ្សែកោងទាំងពីរ



កូអរដោនេទាំងពីរនោះគឺ $\boxed{(2, 2) \text{ និង } (5, 5)}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S_1 គេឱ្យ $S_2=6cm^2$

ផ្ទៃក្រឡាចន្លោះខ្សែកោង $y=x$, អ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងចំណុចប្រសព្វទាំងពីរជាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណព្នាយកែងមានតម្លៃ $S=\dfrac{(2+5)\times(5-2)}{2}=10.5cm^2$

គេបាន $S_1=S-S_2=10.5-6=5.5cm^2$

ដូចនេះ $\boxed{S_1=5.5cm^2}$ ។

IV. ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម

ដោយ $\cos^2(90^o-x)+\cos^2 x=1$, $\sin^2(90^o-x)+\sin^2 x=1$ នោះគេបាន

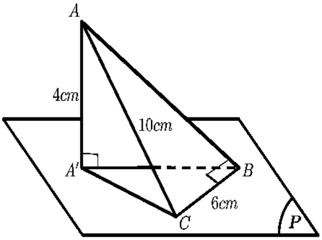
$$\begin{aligned}S_1&=\cos^2 28^o+\cos^2 40^o+\cos^2 62^o+\cos^2 50^o\\&=\cos^2(90^o-62^o)+\cos^2(90^o-50^o)+\cos^2 62^o+\cos^2 50^o\\&=\underbrace{\cos^2(90^o-62^o)+\cos^2 62^o}_{1}+\underbrace{\cos^2(90^o-50^o)+\cos^2 50^o}_{1}\\&=1+1=2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2&=\sin^2 32^o+\sin^2 43^o+\sin^2 58^o+\sin^2 47^o\\&=\sin^2(90^o-58^o)+\sin^2(90^o-47^o)+\sin^2 58^o+\sin^2 47^o\\&=\underbrace{\sin^2(90^o-58^o)+\sin^2 58^o}_{1}+\underbrace{\sin^2(90^o-47^o)+\sin^2 47^o}_{1}\\&=1+1=2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_1=S_2=2}$ ។

V.គណនារង្វាស់ជ្រុង $A'B$, $A'C$ និងតម្លៃប្រហែលនៃ $\angle C$

+ចំពោះ $A'B$: តាមទ្រឹស្តីពីតាគ័រចំពោះ



−ត្រីកោណកែង ABC

គេបាន $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow$

នាំឱ្យ $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

នោះ $AB = \sqrt{64} = 8cm$

−ត្រីកោណកែង $AA'B$ ៖

គេបាន $AC^2 = A'A^2 + A'B^2 \Rightarrow A'B^2 = AC^2 - A'A^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$

នោះ $A'B = \sqrt{48} = \boxed{4\sqrt{3}cm}$ ។

+ចំពោះ $A'C$:

តាមទ្រឹស្តីពីតាគ័រចំពោះត្រីកោណកែង $AA'C$

គេបាន $AC^2 = A'A^2 + A'C^2 \Rightarrow A'C^2 = AC^2 - A'A^2 = 10^2 - 4^2 = 100 - 16 = 84$

នោះ $A'C = \sqrt{84} = \boxed{2\sqrt{21}cm}$ ។

+ចំពោះតម្លៃប្រហែលនៃមុំ $\angle A'CB$:

តាមទ្រឹស្តីកូស៊ីនុសនៃត្រីកោណកែង $A'CB$

គេបាន $A'B^2 = CA'^2 + CB^2 - 2CA' \cdot CB \cdot \cos\angle A'CB$

នោះ $$\cos\angle A'CB = \frac{CA'^2 + CB^2 - A'B^2}{2 \times CA' \times CB}$$

$$= \frac{(2\sqrt{21})^2 + 6^2 - (4\sqrt{3})^2}{2 \times 2\sqrt{21} \times 6}$$

$$= \frac{84 + 36 - 48}{24\sqrt{21}} = 0.6547$$

ដូច្នេះ $\boxed{\angle A'CB \approx 49^o}$ ។

VI. $f(x)=x^2-4x+6$ **និង** $g(x)=x+2$ **ក្រាបតំណាង** (C_f) **និង** (C_g) **រៀងគ្នា**

ក. សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C_f) **និង** (C_g)

គេសិក្សាសញ្ញាផលសង $f(x)-g(x)=x^2-4x+6-x-2=x^2-5x+4$

បើ $f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=4$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		+	0	-	0	+	

តាមតារាងសញ្ញាគេបាន

- $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$ នោះ $f(x)-g(x)>0$ មានន័យថាខ្សែកោង (C_f) នៅលើ (C_g)
- $x=1\ ,\ x=4$ នោះ $f(x)-g(x)=0$ មានន័យថាខ្សែកោង (C_f) និង (C_g) ប្រសព្វគ្នា
- $x\in(1,4)$ នោះ $f(x)-g(x)<0$ មានន័យថាខ្សែកោង (C_f) នៅក្រោម (C_g) ។

+ នោះកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A **និង** B **កំណត់ដោយ**

$-$យកចំណុច A មានអាប់ស៊ីស $x=1$ និងអរដោនេ $y=1+2=3$

គេបាន $\boxed{A(1,3)}$ ។

$-$យកចំណុច B មានអាប់ស៊ីស $x=4$ និងអរដោនេ $y=4+2=6$

គេបាន $\boxed{B(4,6)}$ ។

ខ. រកកូអរដោនេកំពូលនៃក្រាប (C_f)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-4x+6 \\ f(x)=ax^2+bx+c \end{array}\right| \Rightarrow a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=6$$

កំពូល $$V_f(\alpha,\beta)=\left\{\begin{array}{l} \alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-4}{2(1)}=2 \\ \beta=f(2)=2^2-4(2)+6=2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V_f(2,2)}$$ ។

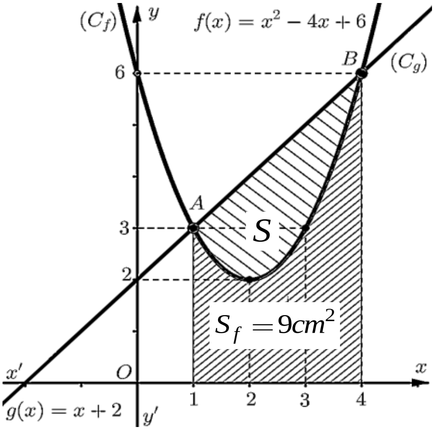
+ សង់ក្រាប (C_f) និង (C_g) ក្នុងតម្រុយតែមួយ

តារាងតម្លៃ $y=f(x)=x^2-4x+6$:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	11	6	3	2	3	6	11

$y=g(x)=x+2$:

x	1	4
y	3	6



គ. ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡា S

ផ្ទៃក្រឡា S_g ហ៊ុមព័ទ្ធដោយចតុកោណព្នាយកែង $A14B$

គេបាន $S_g=\dfrac{(3+6)\times(4-1)}{2}=13.5cm^2$

ដូចនេះគេអាចរកផ្ទៃក្រឡា S បានដោយ $S=S_g-S_f=13.5-9=\boxed{4.5cm^2}$ ។

ចប់វិញ្ញាសាទី១០

វិញ្ញាសាទី១១

I.

1. ដោះស្រាយវិសមីការ $(x-3)(x^2+3x+2)>0$ ។

2. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $\dfrac{4-2\tan^2 45^o+\cot^4 60^o}{2\sin^3 90^o-4\cos 60^o+4\cot 45^o}$ ។

II.

1. អនុគមន៍ $f(x)$ មានអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{3}$ ។ ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f(x)$ ។

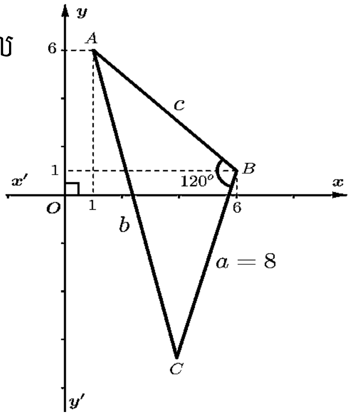
2. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{5x-4}+\dfrac{1}{x-3}$ ។

III.

1. បើ $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ ដែល $90^o\le\alpha\le180^o$ ។ រកតម្លៃនៃ $\tan\alpha$ ។

2. រកកូអរដោនេនៃ $M(x\,,y)$ ដែលត្រូវនឹងមុំ $\alpha=120^o$ និងកាំ $r=1$ នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។

IV. ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេគេមានត្រីកោណ ABC ដែល $A(1\,,6)$, $B(6\,,1)$, $a=BC=8$, $B=120^o$ ដូចបានបង្ហាញក្នុងរូបខាងស្តាំ ។



ក. គណនារង្វាស់ជ្រុង $c=AB$, $b=AC$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

V. គេមានសិស្ស 20 នាក់ (សិស្សប្រុស 10 នាក់ និងសិស្សស្រី 10 នាក់) ដោយសរសេរឈ្មោះម្នាក់មួយប័ណ្ណដាក់ក្នុងហិបឆ្នោតមួយ ។ គេចាប់យកតែមួយដងចំនួន 3 ប័ណ្ណពីក្នុងហិបឆ្នោតនោះដើម្បីទទួលអាហារូបករណ៍ ។ រកចំនួនករណីនៃព្រឹត្តិការណ៍ :

ក. រើសបានសិស្សប្រុស 2 នាក់ និង សិស្សស្រី 1 នាក់ ។

ខ. រើសបានសិស្សស្រីទាំង 3 នាក់ ។

គ. រើសបានយ៉ាងហោចណាស់សិស្សស្រីម្នាក់យ៉ាងតិច ។

VI. គេមានចំណុច $A(1,-1)$, $B(3,3)$ និង $C(5,-3)$ ក្នុងតម្រុយអរតូណេមេ ។

ក. ដៅចំណុច A , B និង C ។

ខ. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ និងប្រវែងរបស់វានីមួយៗ ។

គ. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។ រួចបង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត។

VII. អនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ $y=f(x)=\dfrac{2x-6}{x+3}$ មានក្រាបតំណាង (C) ។

ក. រកដែនកំណត់នៃ f ខាងលើ ។

ខ. កំណត់អាស៊ីមតូតឈរ អាស៊ីមតូតដេក និងផ្ចិតឆ្លុះនៃ f

គ. សង់ក្រាប (C) នៃ f ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។

ចម្លើយ

I. 1. **ដោះស្រាយវិសមីការ** $(x-3)(x^2+3x+2)>0$

បើ $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

បើ $x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$, $x=-2$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	-2		-1		3	$+\infty$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$(x-3)(x^2+3x+2)>0$	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$

ដូចនេះសំណុំចម្លើយ $\boxed{x\in(-2,-1)\cup(3,+\infty)}$ ។

2. **គណនាតម្លៃនៃ** $\dfrac{4-2\tan^2 45^o+\cot^4 60^o}{2\sin^3 90^o-4\cos 60^o+4\cot 45^o}$

គេបាន $\dfrac{4-2\tan^2 45^o+\cot^4 60^o}{2\sin^3 90^o-4\cos 60^o+4\cot 45^o}=\dfrac{4-2(1)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^4}{2(1)^3-4\left(\dfrac{1}{2}\right)+4(1)}$

$$=\dfrac{4-2+\dfrac{1}{9}}{2-2+4}=\boxed{\dfrac{19}{36}}$$ ។

II. 1. **កំណត់អនុគមន៍** $f(x)$

ដោយ $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{3}$ ជំនួស $y=f^{-1}(x)$ គេបាន $y=\dfrac{x-1}{3}$ (*)

ដោយប្តូរ y ទៅជា x និង x ទៅជា y ក្នុង (*) គេបាន $x=\dfrac{y-1}{3}$

ទាញរក y គេបាន $y=3x+1$ ឬ $f(x)=3x+1$

ដូចនេះអនុគមន៍ $\boxed{f(x)=3x+1}$ ។

2. **រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍** $f(x)=\sqrt{5x-4}+\dfrac{1}{x-3}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $\begin{cases}5x-4\geq 0\\ x-3\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{4}{5}\\ x\neq 3\end{cases}$

ដូចនេះដែនកំណត់ $\boxed{D_f=\left[\dfrac{4}{5},\,3\right)\cup(3,\,+\infty)}$ ។

III. 1. **រកតម្លៃនៃ** $\tan\alpha$

គេបាន $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (*) ដោយ $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

+ រក $\cos\alpha$

តាម $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

នាំឱ្យ $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$

ដោយ $90^o \le \alpha \le 180^o$ នោះ $\cos\alpha < 0$ ដូច្នេះ $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

(*) ក្លាយជា $\tan\alpha = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \boxed{-\frac{4}{3}}$ ។

2. រកកូអរដោនេនៃចំណុច $M(x, y)$

ចំពោះ $\alpha = 120^o$ និង $r = 1$ គេបាន $\begin{cases} x = r\cos\alpha = 1\times\cos 120^o = -\frac{1}{2} \\ y = r\sin\alpha = 1\times\sin 120^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{M(x, y) = M(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})}$ ។

IV. ក. គណនារង្វាស់ជ្រុង $c = AB$ **និង** $b = AC$

+ ចំពោះ $c = AB$

ដោយ $A(1, 6)$, $B(6, 1)$

គេបាន $c = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(6-1)^2 + (1-6)^2} \boxed{= 5\sqrt{2}}$ ។

+ ចំពោះ $b = AC$

ដោយ $a = BC = 8$, $B = 120^o$ តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

គេបាន $b^2 = a^2 + c^2 - 2\times a\times c\times\cos B$

$= 8^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2\times 8\times 5\sqrt{2}\times\cos 120^o$

$= 64 + 50 - 80\sqrt{2}\times(-\frac{1}{2})$

$= 170.6585$

នាំឱ្យ $b = \sqrt{170.5685} = \boxed{13.06}$

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sin 120^{o}=20\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=10\sqrt{6}\text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

V.រកចំនួនករណីនៃព្រឹត្តិការណ៍ :

ក. រើសបានសិស្សប្រុស 2 នាក់ និង សិស្សស្រី 1 នាក់

សិស្សប្រុស 2 នាក់ត្រូវជ្រើសចេញពីសិស្សប្រុស 10 នាក់ជាបន្សំនៃ

$$C(10,2)=\frac{10!}{(10-2)!2!}=45$$

សិស្សស្រីម្នាក់ត្រូវជ្រើសចេញពីសិស្សស្រី 10 នាក់ជាបន្សំនៃ

$$C(10,1)=\frac{10!}{(10-1)!1!}=10\text{ ករណី}$$

តាមគោលការណ៍ផលគុណគេបានចំនួនករណីសរុបស្មើនឹង $\boxed{45\times 10=450}$ ។

ខ. រើសបានសិស្សស្រីទាំង 3 នាក់

សិស្សស្រីទាំង 3នាក់ត្រូវជ្រើសចេញពីសិស្សស្រី 10 នាក់ជាបន្សំនៃ

$$C(10,3)=\frac{10!}{(10-3)!3!}=120$$

គ. រើសបានយ៉ាងហោចណាស់សិស្សស្រី 1 នាក់យ៉ាងតិច

+ **<u>វិធីទី១</u>** : អាចមានស្រី 1 ឬ 2 ឬ ទាំង 3 នាក់

–ករណីមានស្រី 1 នាក់ នោះ 2 នាក់ទៀតជាប្រុសមានចំនួន 450 ករណី (ចម្លើយ ក.) ។

–ករណីមានស្រី 2 នាក់ នោះ 1 នាក់ទៀតជាប្រុសមានចំនួន $C(10,2)\times C(10,1)$

$$=\frac{10!}{(10-2)!2!}\times\frac{10!}{(10-1)!1!}=450\text{ ករណី ។}$$

–ករណីមានស្រីទាំង 3 នាក់ មានចំនួន 120 ករណី(ចម្លើយ ខ.) ។

សរុបទាំងអស់គឺ $\boxed{450+450+120=1020}$ ករណី ។

+ **<u>វិធីទី២</u>** : ជាចំនួនករណីដែលមិនគិតពីករណីរើសបានប្រុសទាំង 3 នាក់ ។

ករណីដែលអាចរើសបានមនុស្ស 3 នាក់(មិនគិតភេទ) គឺជាបន្សំនៃ

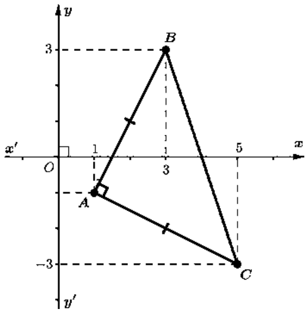
$$C(20,3)=\frac{20!}{(20-3)!3!}=1140$$

ករណីដែលរើសបានប្រុសទាំង 3 នាក់ស្មើនឹង $C(10,3)=\frac{10!}{(10-3)!3!}=120$

នោះចំនួនករណីដែលរើសបានយ៉ាងហោចណាស់សិស្សស្រី 1 នាក់យ៉ាងតិចស្មើនឹង

$\boxed{1140-120=1020}$ ។

VI. ក. ដៅចំណុច A , B និង C



ខ. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ និងប្រវែងរបស់វានីមួយៗ

- ចំពោះ $\overrightarrow{AB}$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\ ,\ y_B-y_A)=(3-1,3-(-1))=(2,4)$

នោះ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

- ចំពោះ $\overrightarrow{AC}$

គេបាន $\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A\ ,\ y_C-y_A)=(5-1,-3-(-1))=(4,-2)$

នោះ $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

- ចំពោះ $\overrightarrow{BC}$

គេបាន $\overrightarrow{BC}=(x_C-x_B\ ,\ y_C-y_B)=(5-3,-3-3)=(2,-6)$

នោះ $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

គ. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=(2,4)$ និង $\overrightarrow{AC}=(4,-2)$ នោះ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(2)(4)+(4)(-2)=0$ ។

+ បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ នោះ ΔABC កែងត្រង់ A (1)

ហើយ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|\neq\left|\overrightarrow{BC}\right|$ នោះ ΔABC សមបាតកំពូល A (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន ΔABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូ A ។

VII. **គេមាន** $y=f(x)=\dfrac{2x-6}{x+3}$

ក. រកដែនកំណត់នៃ f ខាងលើ

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x+3\neq 0$ នោះ $x\neq -3$

ដែនកំណត់ $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{-3\}}$ ។

ខ. កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ សមីការអាស៊ីមតូតដេក និងផ្ចិតឆ្លុះនៃ f

ដោយ $f(x)=\dfrac{2x-6}{x+3}=2-\dfrac{12}{x+3}$

បន្ទាត់ $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

បន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

ចំណុច $I(-3,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ f ។

គ. សង់ក្រាប (C) នៃ f ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ

– ចំណុចកាត់អ័ក្ស

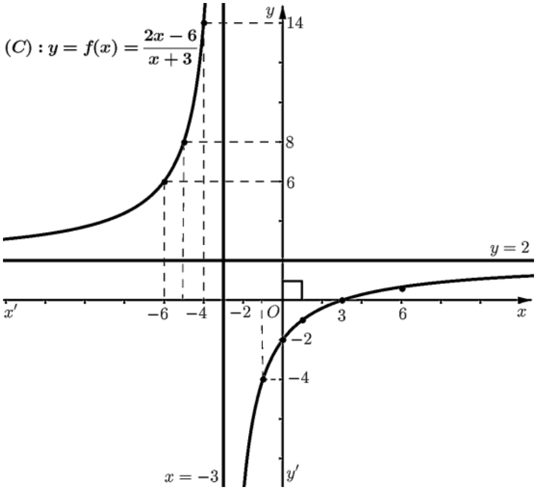
បើ $x=0$: $y=\dfrac{0-6}{0+3}=-2$

បើ $y=0$: $2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

– តារាងតម្លៃ

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	6
y	6	8	14	$\|$	-10	-4	-2	-1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{3}$

– សង់ក្រាប



ចប់វិញ្ញាសាទី១១

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ២

រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម(បរិញ្ញា+១)គណិតវិទ្យា១ ជំនាន់២១

វិញ្ញាសាទី១២

I. 1. រកតម្លៃនៃកន្សោម $A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}$ ។

2. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យគេអាចសរសេរ $x^2-6x+15=(x-a)^2+b$ ។ រួចទាញរកតម្លៃអប្បបរមារបស់កន្សោម $x^2-6x+15$ ។

II.

1. សម្រួលកន្សោម $B=\cos\left(180^o-\alpha\right)-\sin\left(180^o-\alpha\right)+\cos\left(90^o-\alpha\right)$ ។

2. គេឱ្យ $x-\frac{1}{x}=2$ ។ ចូរគណនាតម្លៃនៃ $x+\frac{1}{x}$ ។

III. គេឱ្យពីរចំនួនកុំផ្លិច $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ និង $y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ។

ក. បង្ហាញថា $x+y$, xy និង x^2+y^2 សុទ្ធតែជាចំនួនពិត

ខ. កំណត់ចំនួនពិត m ដើម្បីឱ្យ $x^2+mx+y=0$ ។

IV. គេមានរង្វង់ $C\ :\ x^2+y^2-2x-6y+6=0$ ។

ក. កំណត់ផ្ចិត និងកាំនៃរង្វង់ C ។

ខ. រកចម្ងាយជិតបំផុតពីចំណុច $A(5,\ 0)$ ទៅរង្វង់ C ។

V. ភ្ញៀវជាតិ 9 នាក់និងភ្ញៀវបរទេស 3 នាក់ត្រូវបានឈរតម្រង់ជាជួរតែមួយ ដើម្បីទិញសំបុត្រចូលទស្សនាប្រាង្គប្រាសាទអង្គរវត្ត ។ រកចំនួនរបៀបនៃការឈរក្នុងករណីដែល

ក. គេមិនគិតលក្ខខណ្ឌអ្វីទាំងអស់ ។

ខ. ភ្ញៀវបរទេសត្រូវឈរជាប់ៗគ្នា ។

គ. ភ្ញៀវបរទេសនៅចុងទាំងសងខាងជួរ ។

VI. គេមានចំណុច $A(-2,5)$, $B(1,-2)$ និង $C(3,3)$ នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។

ក. បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

ខ. រកសំណុំចំណុច G ដែល $\overrightarrow{GB}$ កែងនឹង $\overrightarrow{GC}$ ។

គ. ដោយយកចំណុច G នៅលើអង្កត់ AB ចូរគណនាប្រវែង GC ។ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

VII. គេឱ្យអនុគមន៍ g មួយកំណត់ដោយ $y=g(x)=\dfrac{6-x}{x-2}$ ។

ក. សរសេរ g ជារាង $g(x)=\dfrac{a}{x-2}+b$ ។ តើគេត្រូវរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{4}{x}$ ដូចម្ដេចដើម្បីឱ្យក្រាបវាត្រួតលើក្រាបនៃ g ?

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបទាំងពីរ f និង g រួចសង់ក្រាបនៃ f និង g

គ. ប្រើក្រាបចូររកចម្លើយនៃវិសមីការ $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{4}{x}\le 1$ ។

ចម្លើយ

I. 1. **គណនា** $A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}$

គេបាន $A^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}$ (លើកអង្គទាំងពីរជាការេ)

$$A^2=2+A$$

$$A^2-A-2=0 \Leftrightarrow (A-1)(A+2)=0$$

$$A-1=0 \Rightarrow A=1$$

$$A+2=0 \Rightarrow A=-2 \text{ (មិនយកព្រោះ } A>0)$$

ដូចនេះ $\boxed{A=1}$ ។

2. កំណត់តម្លៃ a និង b

❖ **វិធីទី១**

ដោយ $x^2-6x+15=(x-a)^2+b \quad \Leftrightarrow \quad x^2-6x+15=x^2-2ax+a^2+b$

ផ្ទឹមមេគុណត្រូវគ្នាគេបាន $\begin{cases} 2a=6 & (1) \\ a^2+b=15 & (2) \end{cases}$

តាម (1) គេបាន $a=\dfrac{6}{2}=3$

តាម (2) ជំនួស $a=3$ គេបាន $3^2+b=15$ នោះ $b=6$

ដូច្នេះ $\boxed{a=3\,,b=6}$ ។

❖ **វិធីទី២**

ដោយ $x^2-6x+15=x^2-6x+9+6=(x-3)^2+6 \quad (1)$

និង $x^2-6x+15=(x-a)^2+b \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $\boxed{a=3\,,b=6}$ ។

+ រួចទាញរកតម្លៃអប្បបរមារបស់កន្សោម $x^2-6x+15$

តាមទម្រង់ $x^2-6x+15=(x-3)^2+6$

ដោយ $a=1>0$

នោះតម្លៃអប្បបរមានៃ $x^2-6x+15$ គឺស្មើនឹង 6 ។

II. 1. សម្រួលកន្សោម

គេបាន $B=\cos(180^o-\alpha)-\sin(180^o-\alpha)+\cos\cos(90^o-\alpha)$

$=-\cos\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha$

$=-\cos\alpha$

ដូចនេះ $\boxed{B=-\cos\alpha}$ ។

2. គណនាតម្លៃនៃ $x+\frac{1}{x}$

❖ **វិធីទី១** គេមាន

$$x-\frac{1}{x}=2 \quad \Rightarrow \quad \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=2^2$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=4$$

$$x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=6$$

$$x^2+2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=6+2$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=8$$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=8$ នាំឱ្យ $x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{8}=\boxed{\pm\sqrt{2}}$ ។

❖ **វិធីទី២**

ដោះស្រាយសមីការ $x-\frac{1}{x}=2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-1=2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x-1=0$

មាន $\Delta'=\left(\frac{-2}{2}\right)^2-(1)(-1)=2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{2}$

ឫស $x=\frac{-\left(\frac{-2}{2}\right)\pm\sqrt{2}}{1}=\begin{cases}1+\sqrt{2}\\1-\sqrt{2}\end{cases}$

−ចំពោះ $x=1+\sqrt{2}$

គេបាន $x+\frac{1}{x}=1+\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$

$-$ចំពោះ $x=1-\sqrt{2}$

គេបាន $x+\dfrac{1}{x}=1-\sqrt{2}+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\boxed{x+\dfrac{1}{x}=\pm 2\sqrt{2}}$ ។

III. ពីរចំនួនកុំផ្លិច $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ និង $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

ក. បង្ហាញថា $x+y$, xy និង x^2+y^2 សុទ្ធតែជាចំនួនពិត

$x+y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=1$ ជាចំនួនពិត ។

$xy=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$ ជាចំនួនពិត ។

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1^2-2(1)=1-2=-1$ ជាចំនួនពិត ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត m ដើម្បីឱ្យ $x^2+mx+y=0$

$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+m\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$

$\dfrac{1}{4}+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+m\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+m\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $(i^2=-1)$

$m\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$

$m=0$

ដូចនេះ $\boxed{m=0}$ ។

IV. គេមានរង្វង់ $C: x^2+y^2-2x-6y+6=0$

ក. កំណត់ផ្ចិត និងកាំនៃរង្វង់ C

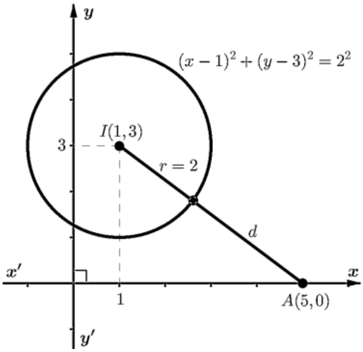
$$x^2+y^2-2x-6y+6=0$$

$$x^2-2x+1+y^2-6y+9=1+9-6$$

$$(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$$

គេបាន ផ្ចិត $I(1,3)$ និងកាំ $r=2$ ។

ខ. រកចម្ងាយជិតបំផុតពីចំណុច $A(5,0)$ ទៅរង្វង់ C



មាន $AI=\sqrt{(1-5)^2+(3-0)^2}=\sqrt{25}=5$

តាង d ជាចម្ងាយដែលចង់បាន

គេបាន $d=AI-r=5-2=$ 3 ឯកតាប្រវែង ។

V. រកចំនួនរបៀបនៃការឈរ ក្នុងករណីដែល

ក. គេមិនគិតលក្ខខណ្ឌអ្វីទាំងអស់

ជាចម្លាស់នៃ $n!=12!=479001600$ របៀប ។

ខ. ភ្ញៀវបរទេសត្រូវឈរជាប់ៗគ្នា

មានន័យថាភ្ញៀវបរទេសទាំង 3 នាក់ក្លាយជា 1 កន្លែងហើយត្រូវធ្វើចម្លាស់ជាមួយភ្ញៀវជាតិ 9 នាក់គឺស្មើនឹង 10! របៀប

ហើយម្យ៉ាងទៀត ចម្លាស់នៃភ្ញៀវបរទេសទាំង 3 នាក់ស្មើនឹង $3!$ របៀប ។

ដូច្នេះតាមគោលការណ៍ផលគុណគេបានចំនួនរបៀបសរុបគឺស្មើនឹង

$(10!)\times(3!) = 10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 \times 3\times2\times1 = \boxed{21772800 \text{ របៀប}}$ ។

គ. ភ្ញៀវបរទេសនៅចុងទាំងសងខាងជួរ

– ភ្ញៀវបរទេសម្នាក់ត្រូវនៅខាងមុខមាន 3 របៀប

– ភ្ញៀវបរទេសម្នាក់ទៀតត្រូវនៅខាងក្រោយមាន 2 របៀប

– នៅចន្លោះនោះជាចម្លាស់នៃភ្ញៀវដែលនៅសល់មាន $10!$

តាមគោលការណ៍ផលគុណចំនួនរបៀបសរុបគឺស្មើនឹង $3\times2\times10! = \boxed{21772800 \text{ របៀប}}$

VI. គេមានចំណុច $A(-2, 5)$, $B(1, -2)$ **និង** $C(3, 3)$

ក. បង្ហាញថា ΔABC **ជាត្រីកោណកែងសមបាត**

ដោយ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A , y_B - y_A) = (1+2 , -2-5) = (3, -7)$

នោះ $AB = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$

និង $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A , y_C - y_A) = (3+2, 3-5) = (5, -2)$

នោះ $AC = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

ហើយ $\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B , y_C - y_B) = (3-1, 3+2) = (2, 5)$

នោះ $BC = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

ឃើញថា $AC = BC \neq AB$

នោះ ΔABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល C (1)

ហើយ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = (5)(2) + (-2)(5) = 0$

នោះ ΔABC ជាត្រីកោណកែងកំពូល C (2)

តាម (1) និង (2)

ដូច្នេះ ΔABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល C ។

ខ. រកសំណុំចំណុច G ដែល $\overrightarrow{GB}$ កែងនឹង $\overrightarrow{GC}$

យក $G(x, y)$ គេបាន $\overrightarrow{GB}=(1-x,-2-y)$, $\overrightarrow{GC}=(3-x,3-y)$

រ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{GB}\perp\overrightarrow{GC}$ លុះត្រាតែ $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=0$

គេបាន $(1-x)(3-x)+(-2-y)(3-y)=0$

$$3-x-3x+x^2-6+2y-3y+y^2=0$$

$$x^2-4x+y^2-y-3=0$$

$$x^2-4x+4+y^2-y+\left(\frac{1}{2}\right)^2=3+4+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

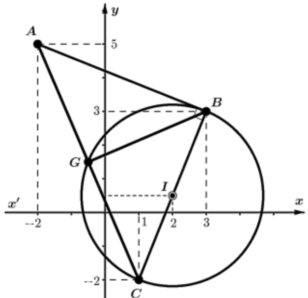
$$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$$

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2$$

ដូច្នេះសំណុំចំណុច G គឺជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I\left(2,\frac{1}{2}\right)$ និងកាំ $r=\frac{\sqrt{29}}{2}$ ។

គ. យកចំណុច G នៅលើអង្កត់ AB ចូររកកូអរដោនេ

របស់វា រួចគណនាប្រវែង GC



❖ **របៀបទី១**

ដោយ ΔABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល C ហើយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{GB}\perp\overrightarrow{GC}$ និង G នៅលើអង្កត់ AB មានន័យថា G ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ AB នោះកូអរដោនេវា

$G\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=G\left(\frac{-2+1}{2},\frac{5-2}{2}\right)=\boxed{G\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$ ។

❖ **របៀបទី២**

សមីការនៃបន្ទាត់ AB កំណត់ដោយ $y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$

$$y-5=\frac{-2-5}{1+2}(x+2)$$

$$y-5=-\frac{7}{3}(x+2)$$

$$y=-\frac{7}{3}x+-\frac{14}{3}+5$$

$$y=-\frac{7}{3}x+\frac{1}{3}$$

សំណុំចំណុច G : $(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$

ដោយចំណុច G នៅលើអង្កត់ AB មានន័យថា G គឺជាចំណុចប្រសព្វរវាងរង្វង់ និង បន្ទាត់ AB ដែលកំណត់ដោយឬសនៃប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases}(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{29}{4} & (1)\\ y=-\frac{7}{3}x+\frac{1}{3} & (2)\end{cases}$$

យក (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$$(x-2)^2+\left(-\frac{7}{3}x+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$$

$$x^2-4x+4+\left(-\frac{7}{3}x-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{29}{4}$$

$$x^2-4x+4+\frac{49}{9}x^2+\frac{7}{9}x+\frac{1}{36}=\frac{29}{4}$$

$$\frac{58}{9}x^2-\frac{29}{36}x-\frac{116}{36}=0$$

$$232x^2-116x-116=0$$

$$2x^2-x-1=0$$

មាន $\Delta=(-1)^2-4(2)(-1)=9 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=3$

ឫស $x=\dfrac{-(-1)\pm 3}{2(2)}=\dfrac{1\pm 3}{4}=\begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$

$-$ចំពោះ $x=1$: $y=-\dfrac{7}{3}+\dfrac{1}{3}=-2$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុច B ។

$-$ចំពោះ $x=-\dfrac{1}{2}$: $y=-\dfrac{7}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{3}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុច G ។

ដូចនេះ $\boxed{G\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)}$ ។

+ **គណនាប្រវែង** GC

❖ **របៀបទី១** :

$$GC=\sqrt{(x_C-x_G)^2+(y_C-y_G)^2}=\sqrt{\left(3+\frac{1}{2}\right)^2+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{58}}{2}$$

❖ **របៀបទី២**

ដោយ ΔABC ជាត្រីកោណកែងហើយ G កណ្តាល AB

នោះគេបាន $GC=\dfrac{AB}{2}=\boxed{\dfrac{\sqrt{58}}{2}}$ ។

❖ **របៀបទី៣**

ដោយ G កណ្តាល AB នោះគេបាន $GB=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{58}}{2}$

ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រចំពោះត្រីកោណកែង BGC

គេបាន $BC^2=GB^2+GC^2$

$$GC^2=BC^2-GB^2=\sqrt{29}^2-\left(\frac{\sqrt{58}}{2}\right)^2=29-\frac{58}{4}=\frac{58}{4}$$

$$GC=\sqrt{\frac{58}{4}}=\frac{\sqrt{58}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{GC=\dfrac{\sqrt{58}}{2}\text{ ឯកតាប្រវែង}}$ ។

+ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times GC=\frac{1}{2}\sqrt{58}\times\frac{\sqrt{58}}{2}=\frac{29}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=\frac{29}{2}\text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

VII. អនុគមន៍ g មួយកំណត់ដោយ $y=g(x)=\frac{6-x}{x-2}$

ក. សរសេរ g ជារាង $g(x)=\frac{a}{x-2}+b$

❖ **វិធីទី១ ៖** ដោយ $\frac{6-x}{x-2}=\frac{a}{x-2}+b$

$$\frac{6-x}{x-2}=\frac{a+b(x-2)}{x-2}$$

$$6-x=a+b(x-2)=a-2b+bx$$

គេទាញ $\begin{cases}a-2b=6 & (1)\\ b=-1 & (2)\end{cases}$

ចំពោះ $b=-1$ នោះ (1) : $a-2(-1)=6\Leftrightarrow a=4$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=\frac{4}{x-2}-1}$ ។

❖ **វិធីទី២** :

គេបាន $g(x)=\frac{6-x}{x-2}=\frac{4-(x-2)}{x-2}=\frac{4}{x-2}-1$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=\frac{4}{x-2}-1}$ ។

+ គេត្រូវរំកិលក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{4}{x}$ ទៅស្តាំស្របអ័ក្ស អាប់ស៊ីស 2 ឯកតា និងចុះក្រោមស្របអ័ក្សអរដោនេ 1 ឯកតាដើម្បីឱ្យក្រាបនៃ f ត្រួត លើក្រាបនៃ g ។

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបទាំង

សមីការអាប់ស៊ីស $\dfrac{6-x}{x-2}=\dfrac{4}{x}$

$$(6-x)x=4(x-2)$$

$$x^2-2x-8=0$$

គេបាន $x_1=-2$, $x_2=4$

ចំពោះ $x_1=-2$: $y_1=\dfrac{4}{-2}=-2$

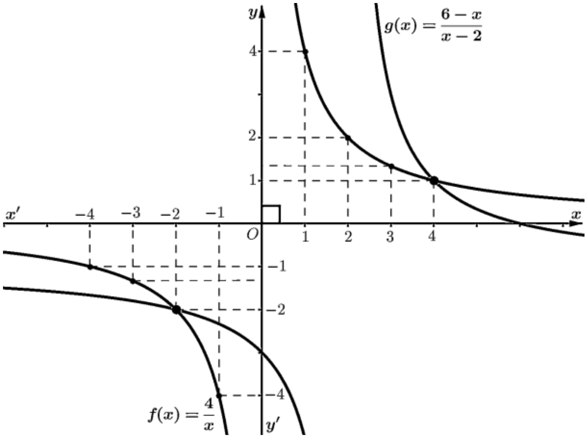
ចំពោះ $x_2=4$: $y_2=\dfrac{4}{4}=1$ ។

ដូចនេះចំណុចប្រសព្វទាំងពីរគឺ $\boxed{(-2,-2) \text{ និង } (4,1)}$ ។

+ រួចសង់ក្រាបនៃ f និង g

តារាងតម្លៃនៃ $f(x)=\dfrac{4}{x}$

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3
y	-1	$-\frac{4}{3}$	-2	-4	4	2	$\frac{4}{3}$



គ. រកចម្លើយនៃវិសមីការ $\frac{4}{x-2}-\frac{4}{x}\le 1$ **តាមក្រាប**

គេអាចសរសេរ $\frac{4}{x-2}-1\le\frac{4}{x} \Leftrightarrow g(x)\le f(x)$ មានន័យថាចម្លើយនៃវិសមីការខាងលើគឺជាតំបន់នៃសំណុំតម្លៃ x ដែលខ្សែកោងនៃ g ស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រោមខ្សែកោងនៃ f ឬប្រសព្វគ្នា ។

តាមក្រាបខាងលើគេបាន $\boxed{x\in(-\infty,\,-2]\cup(4,\,+\infty)}$ ។

ចប់វិញ្ញាសាទី១២

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ២

រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្ដម(បរិញ្ញា+១)គណិតវិទ្យា១ ជំនាន់២១

វិញ្ញាសាទី១៣

I.

1. គណនាកន្សោម $A=\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}$ ។

2. កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ $f(x)=2x^3-5x^2+a$ ចែកដាច់នឹង $x+2$ ។

II. 1. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^{2016}+3}{x}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $f(x)+f(-x)=0$ ។

2. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=4\sqrt{3-2x}-\dfrac{3x}{x^2-3x+2}$ ។

III.

1. បើ $\tan\alpha=2$ ចូររកតម្លៃនៃ $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ ។

2. រកកូអរដោនេនៃ $M(x\,,y)$ ដែលត្រូវនឹងមុំ $\alpha=30^o$ និងកាំ $r=2$ នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។

IV. គេមានរង្វង់ $C\ :\ x^2+y^2-4x-8y-5=0$ ។

ក. កំណត់ផ្ចិត និងកាំនៃរង្វង់ C ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ C ត្រង់ចំណុច $A(-2,\ 1)$ ។

V. ឌីណាត្រូវទន្ទេញរូបមន្តគណិតវិទ្យាចំនួន 8 ខុសៗគ្នាដើម្បីត្រៀមប្រឡងនៅថ្ងៃស្អែក ។ ក្នុងនោះឌីណាចងចាំរូបមន្តតែ 5 ប៉ុណ្ណោះ ។ គ្រូនឹងឱ្យឌីណាចាប់យកសំណួរលើរូបមន្តម្តង 3 ពីក្នុងប្រអប់សំណួរដើម្បីឆ្លើយ ។ តើមានប៉ុន្មានករណីដែលឌីណាអាចចាប់បាន :

ក. រូបមន្ត 2 គត់ដែលខ្លួនចងចាំ ។

ខ. រូបមន្តទាំង 3 ដែលខ្លួនចងចាំ ។

គ. រូបមន្តដែលខ្លួនមិនចងចាំសោះ ។

VI. 1. រកចំនួនពិត k និង t ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\vec{c}=k\vec{a}+t\vec{b}$ បើ $\vec{a}=(-2,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ -4)$ និង $\vec{c}=(8,\ -17)$ រួចទាញរកវ៉ិចទ័រ $\vec{c}$ ឱ្យជាប់នឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ។

2. គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(2,1)$ និង $\vec{b}=(-1,\ 2)$ ។ រកតម្លៃចំនួនពិត x ដែលថាវ៉ិចទ័រ $4x\vec{a}+\vec{b}$ កែងនឹង $x\vec{a}-3\vec{b}$ ។

VII. អនុគមន៍ g មួយកំណត់ដោយ $y=g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ មានក្រាបតំណាង C ។

1. រកដែនកំណត់នៃ g ។ រួចរកសមីការអាស៊ីមតឈរនិងដេករបស់ក្រាប C ។

2. កំណត់ផ្ចិតឆ្លុះ I រួចសង់ក្រាប C ។ រួចទាញរកចម្លើយនៃវិសមីការ $\dfrac{x+1}{x-1}\geq 0$ តាមក្រាប ។

ចម្លើយ

I. 1. **គណនាតម្លៃកន្សោម** $A=\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}$

ដោយ $\sqrt{5+\sqrt{24}}>\sqrt{5-\sqrt{24}}$ នោះ $A>0$

គេបាន $A^2=(\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}})$

$$=5+\sqrt{24}-2\sqrt{(5+\sqrt{24})(5-\sqrt{24})}+5-\sqrt{24}$$

$$=10-2\sqrt{25-24}$$

$$=8$$

$$A=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=2\sqrt{2}}$ ជាចម្លើយព្រោះ $A>0$ ។

2. កំណត់តម្លៃ a **ដើម្បីឱ្យ** $f(x)=2x^3-5x^2+a$ **ចែកដាច់នឹង** $x+2$

គេបាន $f(-2)=0 \Leftrightarrow 2(-2)^3-5(-2)^2+a=0$

$$-16-20+a=0$$

$$a=36$$

ដូចនេះ $\boxed{a=36}$ ជាចម្លើយ ។

II. 1. **គេមាន** $f(x)=\dfrac{2x^{2016}+3}{x}$ **បង្ហាញថា** $f(x)+f(-x)=0$

ដោយ $f(-x)=\dfrac{2(-x)^{2016}+3}{-x}=\dfrac{2x^{2016}+3}{-x}=-\dfrac{2x^{2016}+3}{x}=-f(x)$

ដូច្នេះ $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow \boxed{f(x)+f(-x)=0}$ ។

2. **រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍** $f(x)=4\sqrt{3-2x}-\dfrac{3x}{x^2-3x+2}$

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $\begin{cases}3-2x\ge 0\\ x^2-3x+2\ne 0\end{cases}$

គេបាន $\begin{cases}x\le \dfrac{3}{2}\\ x\ne 1\ ,\ x\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow\ x\in(-\infty,1)\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right]$

ដូចនេះដែនកំណត់ $\boxed{D_f=(-\infty,1)\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right]}$ ។

III. 1. **បើ** $\tan\alpha=2$ **ចូររកតម្លៃនៃ** $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

គេបាន $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1\right)}{\cos\alpha\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1\right)}=\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1}{3}}$ ជាចម្លើយ ។

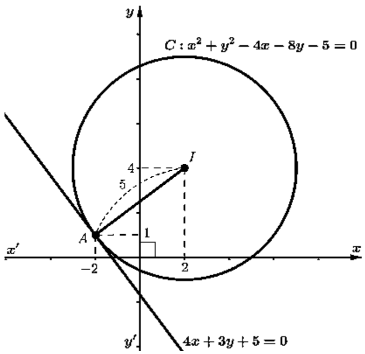
2. **រកចំណុច** $M(x\,,y)$ **ត្រូវនឹងមុំ** $\alpha=30^o$ **និងកាំ** $r=2$ **លើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ**

គេបាន $x=r\cos\alpha=2\cdot\cos 30^o=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$y=r\sin\alpha=2\cdot\sin 30^o=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

ដូចនេះ $\boxed{M(x\,,y)=M(\sqrt{3},1)}$ ជាចម្លើយ ។

IV. **រង្វង់** $C: x^2+y^2-4x-8y-5=0$



ក. កំណត់ផ្ចិត I **និងកាំ** r **នៃរង្វង់** C

បម្លែងសមីការខាងលើជាទម្រង់ស្តង់ដាគេបាន

$$x^2+y^2-4x-8y-5=0$$

$$x^2-4x+y^2-8y=5$$

$$(x^2-4x+4)+(y^2-8y+16)=5+4+16$$

$$(x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2)+(y^2-2\cdot y\cdot 4+4^2)=25$$

$$(x-2)^2+(y-4)^2=5^2$$

មានផ្ចិត $\boxed{I(2,\,4)}$ និងកាំ $\boxed{r=5}$ ។

❖ **វិធីម្យ៉ាងទៀត**

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2-4x-8y-5=0 \\ x^2+y^2+Ax+By+C=0 \end{matrix}\right| \Rightarrow A=-4\ ,\ B=-8\ ,\ C=-5$$

ដោយ $a=-\dfrac{A}{2}=-\dfrac{-4}{2}=2\ ,\ b=-\dfrac{B}{2}=-\dfrac{-8}{2}=4$

ផ្ចិតរង្វង់ $I(a,\,b)=I(2,\,4)$

កាំរង្វង់ $r=\sqrt{a^2+b^2-C}=\sqrt{2^2+4^2+5}=5$

ដូចនេះ $\boxed{I(2,\,4)\ ,\ r=5}$ ជាចម្លើយ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ C **ត្រង់ចំណុច** $A(-2,\,1)$

ដោយ $\left.\begin{matrix} A(-2,\,1) \\ (x_o\,,\,y_o) \end{matrix}\right| \Rightarrow x_o=-2\,,\,y_o=1$, $\left.\begin{matrix} I(2,\,4) \\ (a,\,b) \end{matrix}\right| \Rightarrow a=2\,,\,b=4$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់មានរាង $(a-x_o)(x-x_o)+(b-y_o)(y-y_o)=0$

$$(2+2)(x+2)+(4-1)(y-1)=0$$

$$4(x+2)+3(y-1)=0$$

$$4x+3y+5=0$$

ដូចនេះ $\boxed{4x+3y+5=0}$ ជាសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រូវរក ។

❖ **វិធីម៉្យាងទៀត ៖**

ដោយ $A(-2, 1)$ ជាចំណុចប៉ះនោះ $A\in C$

យក $A(-2, 1)=(x_A , y_A) \Rightarrow x_A=-2 , y_A=1$

មេគុណប្រាប់ទិសបន្ទាត់ AI គឺ $m=\dfrac{y_I-y_A}{x_I-x_A}=\dfrac{4-1}{2-(-2)}=\dfrac{3}{4}$

តាង T ជាបន្ទាត់ដែលប៉ះរង្វង់ C ត្រង់ចំណុច A នោះ T មានមេគុណប្រាប់ទិស m_T ហើយ T ត្រូវកែងនឹងបន្ទាត់ AI ត្រង់ចំណុច A ។

គេបាន $m_T\times m=-1 \Rightarrow m_T=\dfrac{-1}{m}=\dfrac{-1}{3/4}=-\dfrac{4}{3}$

សមីការបន្ទាត់ T ដែលប៉ះរង្វង់ C ត្រង់ចំណុច A គឺ $y-y_A=m_T(x-x_A)$

$$y-1=-\frac{4}{3}[x-(-2)]$$

$$3(y-1)=-4(x+2)$$

$$3y-3=-4x-8$$

$$4x+3y+5=0$$

ដូចនេះ $\boxed{4x+3y+5=0}$ ជាសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រូវរក ។

V. រកចំនួនករណីដែលឪណារើសបាន

ក. រូបមន្ត 2 គត់ដែលខ្លួនចងចាំ

រូបមន្ត 2 គត់ចងចាំត្រូវជ្រើសចេញពីរូបមន្តចងចាំ 5 ដែលជាបន្សំនៃ

$C(5, 2)=\dfrac{5!}{(5-2)!2!}=10$ និងនៅសល់មួយទៀតគឺមិនចងចាំត្រូវជ្រើសចេញពីរូបមន្ត

មិនចងចាំចំនួន 3 ដែលជាបន្សំនៃ $C(3, 1)=\dfrac{3!}{(3-1)!1!}=3$ ករណី ។

ចំនួនករណីសរុបស្មើនឹង $\boxed{10\times 3=30}$ ។

ខ. រូបមន្តទាំង 3 ដែលខ្លួនចងចាំ

រូបមន្តទាំង 3 ដែលខ្លួនចងចាំនោះត្រូវជ្រើសចេញពីរូបមន្ត5 ដែលចងចាំជាបន្សំនៃ

$C(5,\ 3)=\dfrac{5!}{(5-3)!3!}=10$ ។

គ. រូបមន្តដែលខ្លួនមិនចងចាំសោះ

មានន័យថារូបមន្តទាំង 3 ដែលជ្រើសបានសុទ្ធតែមិនចងចាំហើយត្រូវជ្រើសចេញពីសំណួរ

មិនចងចាំ 3 ជាបន្សំនៃ $C(3,\ 3)=\dfrac{3!}{(3-3)!3!}=1$ ករណី ។

VI. 1. **រកចំនួនពិត** $k\ ,t$

គេមាន $\vec{a}=(-2,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ -4)$, $\vec{c}=(8,\ -17)$

ដោយ $\vec{c}=k\vec{a}+t\vec{b}$ គេបាន $(8,\ -17)=k(-2,\ 3)+t(1,\ -4)$

$$(8,\ -17)=(-2k,\ 3k)+(t,-4t)$$

$$(8,\ -17)=(-2k+t,\ 3k-4t)$$

គេបាន $\begin{cases}-2k+t=8 & (1)\times 4\\ 3k-4t=-17 & (2)\end{cases} \Leftrightarrow + \begin{cases}-8k+4t=32\\ 3k-4t=-17\end{cases}$

$$-5k \quad =15 \Rightarrow k=-3$$

(1) ចំពោះ $k=-3$: $-2(-3)+t=8 \Leftrightarrow t=2$

ដូចនេះ $\boxed{k=-3\ ,\ t=2}$ ។

+ រួចកំណត់ $\vec{c}$ **ឱ្យជាប់** $\vec{a}\ ,\vec{b}$

ចំពោះ $k=-3$, $t=2$ គេបាន $\vec{c}=k\vec{a}+t\vec{b}=-3\vec{a}+2\vec{b}$

ដូចនេះវ៉ិចទ័រ $\boxed{\vec{c}=-3\vec{a}+2\vec{b}}$ ។

2. រកតម្លៃចំនួនពិត x

គេមាន $\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(-1,2)$ គេបាន $4a\vec{x}+\vec{b}=4x(2,1)+(-1,2)$

$$=(8x,4x)+(-1,2)$$
$$=(8x-1,4x+2)$$

$$a\vec{x}-3\vec{b}=x(2,1)-3(-1,2)$$
$$=(2x,x)+(3,-6)$$
$$=(2x+3,x-6)$$

ដោយ $4x\vec{a}+\vec{b}$ និង $x\vec{a}-3\vec{b}$ កែងគ្នានោះផលគុណស្កាលែ $(4x\vec{a}+\vec{b})\cdot(x\vec{a}-3\vec{b})=0$

គេបាន $(8x-1)(2x+3)+(4x+2)(x-6)=0$

$$16x^2+24x-2x-3+4x^2-24x+2x-12=0$$

$20x^2-15=0$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 5)

$$4x^2-3=0$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ។

VII. ក. រកដែនកំណត់នៃ g

អនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ មានន័យកាលណា $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

គេបានដែនកំណត់ $\boxed{D_g=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)}$ ។

+ រកអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេករបស់ក្រាប C

ដោយ $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$ នោះគេបានអាស៊ីមតូតឈរ $x-1=0 \Rightarrow x=1$

ហើយអាស៊ីមតូតដេក $y=1$ ។

២. កំណត់ផ្ចិតឆ្លុះ I : ផ្ចិតឆ្លុះគឺ $\boxed{I(1,1)}$ ។

\+ **សង់ក្រាប** C

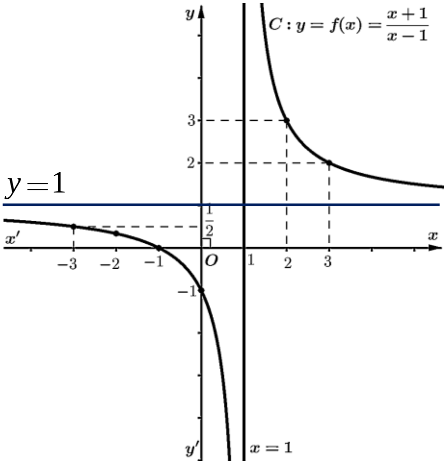
– ចំណុចកាត់អ័ក្ស : បើ $x=0$ នោះ $y=\dfrac{0+1}{0-1}=-1$

បើ $y=0$ នោះ $x+1=0$ គេបាន $x=-1$

– តារាងតម្លៃ

x	-3	-2	-1	0	2	3
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	-1	3	2

– សង់ក្រាប



\+ **ទាញរកចម្លើយនៃវិសមីការ** $\dfrac{x+1}{x-1}\geq 0$ **តាមក្រាប**

ចម្លើយនៃ $\dfrac{x+1}{x-1}\geq 0$ គឺតំបន់នៃសំណុំតម្លៃ x ដែលខ្សែកោងស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើ ហើយប្រសព្វនឹងបន្ទាត់ $y=0$ (អ័ក្សអាប់ស៊ីស) ។ តាមក្រាបគេបាន $x\leq -1$ ឬ $x>1$ ។

ដូចនេះវិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $\boxed{x\leq -1 \text{ ឬ } x>1}$

ចប់វិញ្ញាសាទី១៣

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ២

រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម(បរិញ្ញា+១)គណិតវិទ្យា១ ជំនាន់២១

វិញ្ញាសាទី១៤

I. 1. សមីការ $x^2-x+8=0$ មានឫសពីរ α និង β ។ ចូរគណនាតម្លៃនៃ

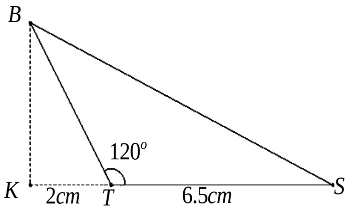
ក. $\alpha-\beta$ ខ. $\alpha^2+\beta^2$ គ. $\alpha^4-\beta^4$

2. ពហុធា $P(x)$ ចែកនឹង $x-1$ មានសំណល់ 4 ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $x-3$ មានសំណល់ 10 ។ រកសំណល់នៅពេលដែល $P(x)$ ចែកនឹង $(x-1)(x-3)$ ។

II. BK ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ BTS (រូបខាងស្តាំ)៖

ក. គណនារង្វាស់មុំ $\angle BTK$

ខ. គណនា BK និង BS រួចរកតម្លៃនៃមុំ S ។



III. 1. ក. ចូរបង្ហាញថា $-77-36i=(2-9i)^2$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $(2+i)x^2-(8-i)x+5(3-i)=0$ រួចសរសេរឫសទាំងពីរជាទម្រង់ពីជគណិត ។

2. កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឱ្យសមីការ $z^2-(3-i)z-ai=0$ មានឫសមួយជាចំនួនពិត ហើយឫសមួយទៀតជាចំនួននិមិត្តរួចកំណត់ឫសទាំងពីរនោះ ។

IV. តារាងទិន្នន័យនេះបង្ហាញពីរយៈពេលដែលសិស្សអង្គុយរៀនដោយខ្លួនឯងក្នុងមួយអាទិត្យ(រយៈពេលគិតជាម៉ោង) ។

រយៈពេល	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
ចំនួនសិស្ស	1	2	18	35	11	3

ក. ចូររកម៉ូតនិងមធ្យមនៃរយៈពេលដែលសិស្សរៀនដោយខ្លួនឯង ។

ខ. ចូររកមេដ្យាន ។

V. គេចង់បែងចែកមនុស្ស 6 នាក់ទៅបន្ទប់ពីរផ្សេងគ្នា A និង B ហើយបន្ទប់នីមួយៗ ត្រូវតែមានមនុស្សចូល ។ តើមានប៉ុន្មានរបៀប? ក្នុងករណីដែល

ក. បន្ទប់ A មានគ្នា 4 នាក់គត់ ។

ខ. បន្ទប់ទាំងពីរត្រូវតែមានមនុស្ស ។

VI.

1. រកកូអរដោនេចំណុច A បើគេដឹងថា $B(-1,-2)$ និងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}=(-2,5)$ ។

2. គេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(2,3)$ និង $\vec{b}=(-1,2)$ ។

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ។

ខ. គណនាប្រវែង $|\vec{a}|$ និង $|\vec{b}|$ ។

គ. រកតម្លៃប្រហែលនៃមុំស្រួច $\alpha=(\vec{a},\vec{b})$ ។

VII. អនុគមន៍ពីរ g និង h កំណត់ដោយ $g(x)=x^2-1$ និង $h(x)=x+1$ ក្រាបតំណាងរៀងគ្នា C_1 និង C_2 ។

ក. ចំណុច A និង B ជាប្រសព្វរវាងក្រាប C_1 និង C_2 ។ គណនាប្រវែង AB ។

ខ. សិក្សាទីតាំងរបស់ក្រាប C_1 និង C_2 ។

គ. រកចម្ងាយពីកំពូល V នៃក្រាប C_1 ទៅក្រាប C_2 ។

ឃ. សង់ក្រាប C_1 និង C_2 ។ រួចបង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាបទាំងពីរបង្ហាញដោយ $S>3$ ឯកតាផ្ទៃ ។

ចម្លើយ

I. 1. **សមីការ** $x^2-x+8=0$ **មានឫស** α **និង** β

គេបាន $\alpha+\beta=-\frac{-1}{1}=1$, $\alpha\beta=\frac{8}{1}=8$

ក. $\alpha-\beta$

មាន $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1^2-4\times8=-31$

នោះ $\alpha-\beta=\pm\sqrt{-31}=\pm i\sqrt{31}$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha-\beta=\pm i\sqrt{31}}$ ។

ខ. $\alpha^2+\beta^2$

គេបាន $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\times8=-15$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha^2+\beta^2=-15}$ ។

គ. $\alpha^4-\beta^4$

គេបាន $\alpha^4-\beta^4=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)$

$$=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)=(\pm\mathrm{i}\sqrt{31})(1)(-15)=\pm\mathrm{i}15\sqrt{31}$$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha^4-\beta^4=\pm\mathrm{i}15\sqrt{31}}$ ។

2. រកសំណល់នៅពេលដែល $P(x)$ ចែកនឹង $(x-1)(x-3)$

ពេលដែលពហុធា $P(x)$ ចែកនឹង $(x-1)(x-3)$ (ពហុធាដឺក្រេទី2) នោះសំណល់វាត្រូវតែជាពហុធាដឺក្រេទីមួយឬសូន្យ ដែលតាងដោយ $R(x)=ax+b$ (*)

ពហុធា $P(x)$ ចែកនឹង $x-1$ សល់ 4 នោះ (*) : $R(1)=4 \Leftrightarrow a+b=4$ (1)

ពហុធា $P(x)$ ចែកនឹង $x-3$ សល់ 10 នោះ (*) : $R(3)=10 \Leftrightarrow 3a+b=10$ (2)

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ (1) និង (2) រកតម្លៃ a និង b :

យក $(2)-(1)$: $2a=6 \Rightarrow a=\frac{6}{2}=3$

តាម (1) : $b=4-a=4-3=1$

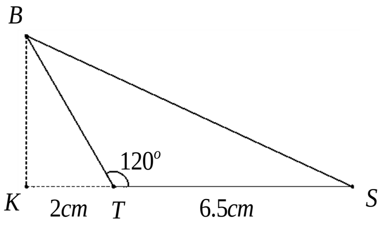
ដូចនេះសំណល់ដែលចង់បានគឺ $\boxed{R(x)=3x+1}$ ។

II. **ក. គណនារង្វាស់មុំ $\angle BTK$**

គេបាន $\angle BTK = \angle KTS - 120^o = 180^o - 120^o = 60^o$

ដូចនេះ $\boxed{\angle BTK = 60^o}$ ។

ខ. គណនា BK និង BS រួចរកតម្លៃនៃមុំ S



+ គណនា BK

ចំពោះត្រីកោណកែង BKT

គេបាន $\tan\angle BKT = \dfrac{BK}{BT}$

នាំឱ្យ $BK = BT \times \tan\angle BKT = 2cm \times \tan 60^o = 2cm \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}cm$

+ គណនា BS

ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រចំពោះត្រីកោណកែង BKS

គេបាន $BS^2 = BK^2 + KS^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2+6.5)^2 = 84.25cm^2$

នោះ $BS = \sqrt{84.25cm^2} = 9.1788cm$

+ រកតម្លៃនៃមុំ S

ចំពោះត្រីកោណកែង BKS

គេបាន $\cos\angle S = \dfrac{KS}{BS} = \dfrac{2+6.5}{9.1788} = 0.9260$

នោះ $\angle S = 22.18^o$

ដូចនេះ $\boxed{BK = 2\sqrt{3}cm\ ,\ BS = 9.1788cm\ ,\ \angle S = 22.18^o}$ ។

III. 1. **ក. ចូរបង្ហាញថា** $-77 - 36i = (2-9i)^2$

គេមាន $(2-9i)^2 = 4 - 2(2)(9i) + (9i)^2 = 4 - 36i - 81 = -77 - 36i$

ដូចនេះ $\boxed{-77 - 36i = (2-9i)^2}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $(2+i)x^2-(8-i)x+5(3-i)=0$

មេគុណ $a=2+i$, $b=-(8-i)$, $c=5(3-i)$

គេមាន $\Delta=b^2-4ac=[-(8-i)]^2-4(2+i)5(3-i)$

$$=(8-i)^2-20(2+i)(3-i)$$

$$=64-16i+i^2-20(6-2i+3i-i^2)$$

$$=64-16i-1-120+40i-60i-20$$

$$=-77-36i$$

$$=(2-9i)^2 \quad \text{(លទ្ធផលទី ក.)}$$

នោះ $\sqrt{\Delta}=\sqrt{(2-9i)^2}=2-9i$

គេបានឫស

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(8-i)-(2-9i)}{2(2+i)}=\frac{6+8i}{2(2+i)}=\frac{3+4i}{2+i}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(8-i)+(2-9i)}{2(2+i)}=\frac{10-10i}{2(2+i)}=\frac{5-5i}{2+i}$$

+រួចសរសេរឫសទាំងពីរជាទម្រង់ពីជគណិត

$$x_1=\frac{3+4i}{2+i}=\frac{(3+4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{10+5i}{5}=2+i$$

$$x_2=\frac{5-5i}{2+i}=\frac{(5-5i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5(1-3i)}{5}=1-3i$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $\boxed{x_1=2+i\ ,\ x_2=1-3i}$ ។

2. កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសមួយជាចំនួនពិតនិងមួយទៀតជាចំនួននិមិត្ត

តាង m ជាឫសពិតនៃសមីការ $z^2-(3-i)z-ai=0$

គេបាន $m^2-(3-i)m-ai=0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2-3m+mi-ai=0$

$$(m^2-3m)+(m-a)i=0$$

នោះ $\begin{cases} m^2-3m=0 \\ m-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(m-3)=0 \\ a=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=0\ ,\ 3 \\ a=m=0\ ,\ 3 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=0\ ,\ 3}$ ។

+ **កំណត់ឫសទាំងពីរនោះ**

តាមទ្រឹស្ដីបទវ្យែត

គេបាន $z_1+z_2=3-i \Leftrightarrow z_2=3-i-z_1$

បើ $z_1=m=0 \ : \ z_2=3-i$

បើ $z_1=m=3 \ : \ z_2=3-i-3=-i$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=0\,,\,z_2=3-i \ \text{ ឬ } \ z_1=3\,,\,z_2=-i}$ ។

IV. ក. ចូររកម៉ូត និងមធ្យមនៃទិន្នន័យខាងលើ

+ **រកម៉ូត** M_o :

រយៈពេល $12-16$ មានចំនួនសិស្សច្រើនជាងគេ

ម៉ូតនៃទិន្នន័យខាងលើត្រូវមានតម្លៃ $M_o=\dfrac{12+16}{2}=14h$

ដូចនេះ $\boxed{M_o=14h}$ ។

+ **រកមធ្យម** $\bar{x}$:

គេបាន $\bar{x}=\dfrac{\left(\frac{0+4}{2}\right)1+\left(\frac{4+8}{2}\right)2+\left(\frac{8+12}{2}\right)18+\left(\frac{12+16}{2}\right)35+\left(\frac{16+20}{2}\right)11+\left(\frac{20+24}{2}\right)3}{1+2+18+35+11+3}$

$=\dfrac{2+12+180+490+198+66}{70}$

$=13.54h=13h\ 32'\ 24''$

ដូចនេះ $\boxed{\bar{x}=13h\ 32'\ 24''}$ ។

ខ. ចូររកមេដ្យាន M_e :

តារាងប្រេកង់កើន

រយៈពេល	0 - 4	4 - 8	**8 - 12**	**12 - 16**	16 - 20	20 - 24
ចំនួនសិស្ស f_i	1	2	18	35	11	3
ប្រេកង់កើន F_i	1	3	**21**	**56**	67	70

– ពាក់កណ្តាលប្រេកង់សរុបគឺ $\frac{N}{2}=\frac{70}{2}=35$

– ក្នុងជួរប្រេកង់កើនតម្លៃ 35 ស្ថិតនៅចន្លោះ $F_3=21$ និង $F_4=56$

– នោះមេដ្យានស្ថិតនៅក្នុងថ្នាក់ទី 4 $(12-16)=(C_3-C_4)$ ដែលមេដ្យានត្រូវមានតម្លៃ

$$Me=C_3+\frac{\frac{N}{2}-F_3}{f_4}(C_4-C_3)=12+\frac{35-21}{35}(16-12)=13.6h=13h\,36'$$

ដូចនេះ $\boxed{M_e=13h\,36'}$ ។

V. រកចំនួនរបៀបដែលគេអាចរៀបបាន ក្នុងករណីដែល ៖

ក. បន្ទប់ A មានគ្នា 4 នាក់គត់

បន្ទប់ A មានរបៀបជាបន្សំនៃមនុស្ស 6 នាក់យក 4នាក់

$$C(6,\,4)=\frac{6!}{(6-4)!4!}=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{(2\times1)4\times3\times2\times1}=15$$ របៀប ។

នៅសល់ 2 នាក់ទៀតត្រូវចូលបន្ទប់ B ទាំងពីរដែលមាន 1 របៀប

តាមគោលការណ៍ផលគុណគេអាចរៀបបាន $\boxed{15\times1=15 \text{ របៀប}}$ ។

ខ. បន្ទប់ទាំងពីរត្រូវតែមានមនុស្ស

ទិន្នន័យត្រូវបែងចែកចំនួនមនុស្សទាំង 6 នាក់ទៅបន្ទប់ពីរ

ផ្សេងគ្នា A និង B ៖

A	1	2	3	4	5
B	5	4	3	2	1

+ បើ A=1 នាក់ នោះ B=5 នាក់ មានចំនួន $C(6,1)\times C(5,5)=6\times1=6$ របៀប

+ ឬ A=2 នាក់ នោះ B=4 នាក់ មានចំនួន $C(6,2)\times C(4,4)=15\times1=15$ របៀប

+ ឬ A=3 នាក់ នោះ B=3 នាក់ មានចំនួន $C(6,3)\times C(3,3)=20\times1=20$ របៀប

+ ឬ A=4 នាក់ នោះ B=2 នាក់ មានចំនួន $C(6,4)\times C(2,2)=15\times1=15$ របៀប

+ ឬ A=5 នាក់ នោះ B=1 នាក់ មានចំនួន $C(6,1)\times C(5,5)=6\times1=6$ របៀប

ដូចនេះក្នុងករណីដែលបន្ទប់នីមួយៗមិនកំណត់ចំនួនមនុស្សមានន័យថាគេអាចរៀបបាន

ចំនួនសរុប $6+15+20+15+6=\boxed{62 \text{ របៀប}}$ ។

VI. 1. **រកកូអរដោនេចំណុច** A **បើគេដឹងថា** $B(-1,-2)$ **និង** $\overrightarrow{AB}=(-2,5)$

តាង $A(x,y)$ គេបាន $\overrightarrow{AB}=(-1-x,-2-y)=(-2,5)$

នោះ $\begin{cases}-1-x=-2\\-2-y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-7\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{A(1,-7)}$ ។

2. **គេមានពីរវ៉ិចទ័រ** $\vec{a}=(2,3)$ **និង** $\vec{b}=(-1,2)$

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$

គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=(2)(-1)+(3)(2)=-2+6=\boxed{4}$ ។

ខ. គណនាប្រវែង $|\vec{a}|$ **និង** $|\vec{b}|$

ដោយ $\vec{a}=(2,3)$ គេបាន $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

ហើយ $\vec{b}=(-1,2)$ គេបាន $|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

ដូចនេះ $\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{13}\text{ និង }|\vec{b}|=\sqrt{5}}$ ។

គ. រកតម្លៃប្រហែលនៃមុំស្រួច $\alpha=(\vec{a},\vec{b})$

ផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

គេបាន $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}}=0.4961$ នាំឱ្យ $\alpha=60.26^o\approx60^o$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha\approx60^o}$ ។

VII. **ក. គណនាប្រវែង** AB

+កូអរដោនេនៃចំណុច A និង B

សមីការអាប់ស៊ីសនៃ g និង h គឺ $x^2-1=x+1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$

គេបានឫសងាយ $x_1=-1$, $x_2=2$

បើ $x_1=-1$: $y_1=-1+1=0$ យក $A(-1,0)$

បើ $x_2=2$: $y_2=2+1=3$ យក $B(2,3)$

+ ប្រវែង AB

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(2+1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{AB=3\sqrt{2}}$ ។

ខ. សិក្សាទីតាំងរបស់ក្រាប C_1 និង C_2

– សិក្សាសញ្ញានៃផលដក $g(x)-h(x)$

គេបាន $g(x)-h(x)=x^2-1-(x-1)=x^2-x-2$

បើសិន $g(x)-h(x)=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x_1=-1$, $x_2=2$

តារាងសញ្ញានៃ $g(x)-h(x)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g(x)-h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើគេបាន

- $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ គេបាន $g(x)-h(x)>0$ នោះ $g(x)>h(x)$ មានន័យថា ក្រាប C_1 នៃ g ស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើក្រាប C_2 នៃ h ។
- $x\in(-1,2)$ គេបាន $g(x)-h(x)<0$ នោះ $g(x)<h(x)$ មានន័យថាក្រាប C_1 នៃ g ស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រោមក្រាប C_2 នៃ h ។
- $x_1=-1$ និង $x_2=2$ គេបាន $g(x)-h(x)=0$ នោះ $g(x)=h(x)$ មានន័យថា ក្រាប C_1 នៃ g និងក្រាប C_2 នៃ h ប្រសព្វគ្នា ។

ខ. រកចម្ងាយពីកំពូល V នៃក្រាប C_1 ទៅក្រាប C_2

+ កំពូល V នៃក្រាប C_1 របស់ g

ដោយ $\left.\begin{array}{l} g(x)=x^2-1 \\ g(x)=ax^2+bx+c \end{array}\right| \Rightarrow a=1$, $b=0$, $c=-1$

កំពូល $V(x_o,y_o)\begin{cases} x_o=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{0}{2(1)}=0 \\ y_o=g(0)=0^2-1=-1 \end{cases} \Rightarrow V(0,-1)$

+ ចម្ងាយពីកំពូល V ទៅក្រាប C_2

គេមាន $C_2 : y = h(x) = x + 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$

គេបាន $d(V, C_2) = \dfrac{|x_V - y_V + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{|0 - (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

ដូចនេះចម្ងាយពីកំពូល V នៃក្រាប C_1 ទៅក្រាប C_2 គឺ $\boxed{d(V, C_2) = \sqrt{2}}$ ឯកតាប្រវែង

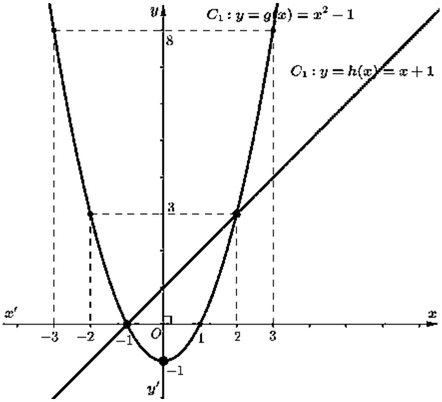
គ. សង់ក្រាប C_1 និង C_2

$C_1 : \ y = g(x) = x^2 - 1$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	3	0	-1	0	3	8

$C_2 : \ y = h(x) = x + 1$

x	0	2
y	1	3



+ **រួចបង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយក្រាបទាំងពីរបង្ហាញដោយ $S > 3$ ឯកតាផ្ទៃ**

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ AVB គឺ $S_{AVB} = \dfrac{1}{2} AB \times d(V, C_2) = \dfrac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3$

តាមរូបខាងលើគេបាន $S > S_{AVB}$ នាំឱ្យ $S > 3$ ឯកតាផ្ទៃ ។

ចប់វិញ្ញាសាទី១៤

វិញ្ញាសាទី១៥

I.

1. រកចំនួនពិត x និង y ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $(x+y)+(2x-y)i=2-5i$ ។

2. តាង x ជាចំនួនពិត ។ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{3+i}{1+i}+\dfrac{x-i}{1-i}$ ជាចំនួនពិត ។

II. គេឱ្យ x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការខាងក្រោម

ក. $(x-8)(x-9)+(x-10)(x-12)=0$ ។ ចូរគណនាតម្លៃនៃ $2(11-x_1)(11-x_2)$ ។

ខ. $x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+(x+3)(x+1)=0$ ចូរគណនាតម្លៃនៃ $(x_1+2)(x_2+2)$ ។

III. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា ។

ក. $x^2+mx+m=0$

ខ. $x^2+(m+2)x+m+4=0$

IV. ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម

ក. $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$

ខ. $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x$

V. ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លី 10 គ្រាប់ចុះពីលេខ 1 ដល់ 10 ។ គេចាប់ឃ្លីពីរគ្រាប់ដោយចាប់ម្តងមួយតាមករណីចាប់ហើយដាក់វិញ រួចគេបូកលទ្ធផលនៃឃ្លីទាំងពីរ ។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា ដើម្បីឱ្យបានផលបូកស្មើ 8 ។

VI. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=x^2+3x-1$ និង $g(x)=4-x^2$ ។

ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង g ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=g(x)$ រួចបកស្រាយតាមបែបក្រាភិច ។

គ. ទាញរកចម្លើយនៃវិសមីការ $f(x)\leq g(x)$ តាមក្រាប ។

VII. គេមានចំណុច M , N , P និង Q ដែលជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃជ្រុង AC , BD , AD និង BC របស់ចតុកោណ $ABCD$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ទីតាំងនៃចំណុច A , B , C និង D គេបាន :

ក. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{MN}$ ។

ខ. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}$ ។

ចម្លើយ

I. 1. រកចំនួនពិត x និង y

គេមាន $(x+y)+(2x-y)i=2-5i$

គេបាន $\begin{cases} x+y=2 & (1) \\ 2x-y=-5 & (2) \end{cases}$

បូក (1) និង (2) : $3x=-3 \Leftrightarrow x=-1$

តាម (1) ចំពោះ $x=-1$: $-1+y=2 \Leftrightarrow y=3$

ដូចនេះ $\boxed{x=-1\ ,\ y=3}$ ។

2. កំណត់តម្លៃចំនួនពិត x

យើងមាន $\dfrac{3+i}{1+i}+\dfrac{x-i}{1-i}=\dfrac{(3+i)(1-i)+(1+i)(x-i)}{1+i}$

$$=\frac{3-3i+i-i^2+x-i+xi-i^2}{1-i^2}$$

$$=\frac{x+5+(x-3)i}{1+1}=\frac{x+5}{2}+\frac{(x-3)}{2}i$$

ដើម្បីឱ្យ $\frac{3+i}{1+i}+\frac{x-i}{1-i}$ ជាចំនួនពិតលុះត្រា $\frac{x-3}{2}=0 \Leftrightarrow x=3$

ដូចនេះ $\boxed{x=3}$ ។

II. គេឱ្យ x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការខាងក្រោម

ក. គណនាតម្លៃនៃ $2(11-x_1)(11-x_2)$

គេមាន $(x-8)(x-9)+(x-10)(x-12)=0$

$$(x-8)(x-9)+(x-10)(x-12)=0$$

$$x^2-17x+72+x^2-22x+120=0$$

$$2x^2-39x+192=0$$

មេគុណ $a=2$, $b=-39$, $c=192$

ដោយ x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការខាងលើនោះ $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-39}{2}=\frac{39}{2}$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{192}{2}$$

នោះគេបាន $2(11-x_1)(11-x_2)=2(121-11x_2-11x_1+x_1x_2)$

$$=2\,121-11(x_1+x_2)+x_1x_2$$

$$=2[121-11\left(\frac{39}{2}\right)+\frac{192}{2}]$$

$$=242-11\times39+192$$

$$=5$$

ដូចនេះ $\boxed{2(11-x_1)(11-x_2)=5}$ ។

ខ. ចូរគណនាតម្លៃនៃ $(x_1+2)(x_2+2)$

គេមាន $x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+(x+3)(x+1)=0$

$$x^2+x+x^2+3x+3+x^2+5x+6+x^2+4x+3=0$$

$$4x^2+13x+11=0$$

មេគុណ $a=4$, $b=13$, $c=11$

ដោយ x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការខាងលើនោះ $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{13}{4}$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{11}{4}$$

នោះគេបាន $(x_1+2)(x_2+2)=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4$

$$=\frac{11}{4}+2\left(-\frac{13}{4}\right)+4$$

$$=\frac{11-26+16}{4}$$

$$=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{(x_1+2)(x_2+2)=\frac{1}{4}}$ ។

III. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នា

ក. $x^2+mx+m=0$

មានមេគុណ $a=1$, $b=m$, $c=m$

រក $\Delta=b^2-4ac=m^2-4\cdot1\cdot m=m^2-4m$

ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាលុះត្រាតែ $\Delta>0 \Leftrightarrow m^2-4m>0$

បើ $m^2-4m=0 \Leftrightarrow m(m-4)=0 \Leftrightarrow m_1=0$, $m_2=4$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$m^2-4m>0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដូចនេះសំណុំតម្លៃ $\boxed{m\in(-\infty,\ 0)\cup(4,\ +\infty)}$ ។

ខ. $x^2+(m+2)x+m+4=0$

មេគុណ $a=1$, $b=m+2$, $c=m+4$

រក $\Delta=b^2-4ac=(m+2)^2-4\times1\times(m+4)=m^2+4m+4-4m-16=m^2-12$

ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាលុះត្រាតែ $\Delta>0 \Leftrightarrow m^2-12>0$

បើ $m^2-12=0 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$m^2-12>0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដូចនេះសំណុំតម្លៃ $\boxed{m\in(-\infty,-2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{3},+\infty)}$ ។

IV. ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម

ក. $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2$

គេបាន $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2\cos^2 x+2\sin^2 x$

$$=2(\cos^2 x+\sin^2 x)$$

$$=2\times1$$

$$=2$$

ដូចនេះ $\boxed{(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2 \text{ ពិត}}$ ។

ខ. $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x$

គេបាន $\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\dfrac{\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1}=\cos^2 x-\sin^2 x \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x \text{ ពិត}}$ ។

V.រកចំនួនរបៀបខុសៗគ្នា ដើម្បីឱ្យបានផលបូកស្មើ 8

តាង A ជាលទ្ធផលនៃផលបូកលេខឃ្លីស្មើ 8

គេបាន $A=$ $(1,7),(7,1),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)$

នោះ $n(A)=7$ របៀប

ដូចនេះផលបូកស្មើ 8 ត្រូវមាន 7 របៀបខុសៗគ្នា ។

VI. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=x^2+3x-1$ និង $g(x)=4-x^2$

ក. សង់ក្រាបនៃអនុមន៍ f និង g ក្នុងតម្រុយតែមួយ

$-$អនុគមនគមន៍ $f(x)=x^2+3x-1$ មានមេគុណ $a=1$, $b=3$, $c=-1$

កំពូល $V_f(\alpha,\beta)\begin{cases}\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{3}{2(1)}=-\dfrac{3}{2}\\ \beta=f(-3)=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+3\left(-\dfrac{3}{2}\right)-1=-\dfrac{13}{4}\end{cases}\Rightarrow V_f\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{13}{4}\right)$

តារាងតម្លៃ

x	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1
y	3	-1	$-\frac{9}{4}$	-3	$-\frac{13}{4}$	-3	-1	3

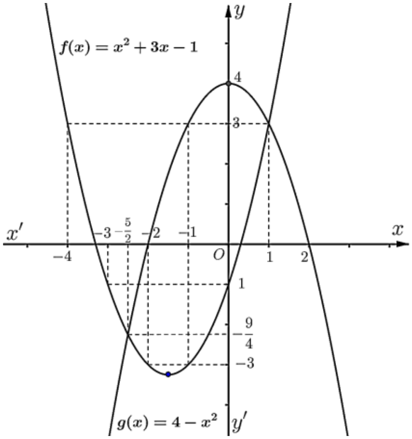
$-$អនុគមន៍ $g(x)=4-x^2$ មានមេគុណ $a=-1$, $b=0$, $c=4$

កំពូល $V_g(x_o,y_o)\begin{vmatrix}x_o=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{0}{2(-1)}=0\\ y_o=g(0)=4-0=4\end{vmatrix}\Rightarrow V_g(0,4)$

តារាងតម្លៃ

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	$-\frac{9}{4}$	0	3	4	3	0	-5

–គូសក្រាបទាំងពីរ



ខ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=g(x)$ បកស្រាយតាមបែបក្រាប រួចតាមបែបគណនា

សមីការ $f(x)=g(x)$ គឺជាតម្លៃ x នៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនៃអនុមន៍ f និង g ។

តាមក្រាបគេបាន $\boxed{x=\left\{-\frac{5}{2}\ ,\ 1\right\}}$ ។

+ តាមបែបគណនា

សមីការអាប់ស៊ីសនៃ f និង g កំណត់ដោយ $x^2+3x-1=4-x^2$

$$x^2+3x-1-4+x^2=0$$

$2x^2+3x-5=0$ មេគុណ $a=2$, $b=3$, $c=-5$

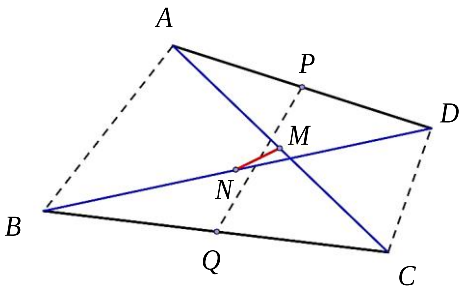
ដោយ $a+b+c=2+3-5=0$ នោះ $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}=\frac{-5}{2}$

ដូចនេះសមីការមានឫស $\boxed{x=\left\{-\frac{5}{2}\ ,\ 1\right\}}$ ។

គ. ទាញរកចម្លើយនៃវិសមីការ $f(x)\le g(x)$ តាមក្រាប

វិសមីការ $f(x)\le g(x)$ គឺជាតម្លៃ x ដែលក្រាបនៃអនុមន៍ f ស្ថិតនៅក្រោមនិងប្រសព្វជាមួយនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ g ។ តាមក្រាបគេបាន $\boxed{-\frac{5}{2}\le x\le 1}$ ។

VII. ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ទីតាំងនៃចំណុច A , B , C និង D គេបាន ៖



ក. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{MN}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ (១) ហើយ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$ (២)

យក (១) + (២) គេបាន
$$+\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\end{cases}$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}$ (៣) ហើយ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}$ (៤)

យក (៣) + (៤) គេបាន
$$+\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}\end{cases}$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\underbrace{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}}_{\vec{0}}+2\overrightarrow{MN}$$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{MN}}$ ពិត ។

ខ. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ (១) ហើយ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$ (២)

យក (១) ដក (២) គេបាន
$$-\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\end{cases}$$
$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\underbrace{\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}}_{\vec{0}}-\overrightarrow{BD}$$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB}$ (៣) ហើយ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PD}$ (៤)

យក (៣) ដក (៤) គេបាន
$$-\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB}\\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PD}\end{cases}$$
$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\underbrace{\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{PD}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{CQ}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{QP}$$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{PQ}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\boxed{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}}$ ពិត ។

ចប់វិញ្ញាសាទី១៥

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ២

រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម(បរិញ្ញា+១)គណិតវិទ្យា១ ជំនាន់២១

វិញ្ញាសាទី១៦

I. តាង $\alpha=1+i\sqrt{3}$ ចូរគណនា $\dfrac{(2+\alpha)^6}{\alpha^3}$ ដោយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត ។

II.

1. ដោះស្រាយសមីការ $5x^3-3x^2-32x-12=0$ ។

2. គេមានកន្សោម $f(x)=2x^3-9x^2+Ax+B$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរ ។
កន្សោមនេះចែកនឹង $x+1$ ឬចែកនឹង $x-2$ មានសំណល់ 3 ដូចគ្នា ។

ក. រកតម្លៃ A និង B ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)-3=0$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $f(2x)-3=0$ ។

ឃ.ទាញរកចម្លើយនៃសមីការ $f(nx)-3=0$ ដែល n ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។

III. ចូរស្រាយបំភ្លឺសមភាពខាងក្រោម

ក. $\dfrac{3-6\cos^2 a}{\sin a-\cos a}=3(\sin a+\cos a)$

ខ. $\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$

IV. 1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម

ក. $f(x)=4\sqrt{x-3}-\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}}$

ខ. $f(x)=4\sqrt{3-2}-\dfrac{3x}{x^2-3x+2}$

2. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=2x-3$ និង $g(x)=x^2+2$ ។
ចូរសិក្សាភាពកើន និងចុះនៃអនុគមន៍ f , g ដោយប្រើផលធៀប $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, $\dfrac{\Delta g}{\Delta x}$ ។

V.តើមានប៉ុន្មានរបៀបក្នុងបង្កើតចំនួនដែលមានលេខបីខ្ទង់តាមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

ក. លេខដំបូងត្រូវខុសពីសូន្យ ។

ខ. លេខដំបូងត្រូវខុសពីសូន្យ និងលេខបន្តទៀតត្រូវខុសៗគ្នា(ទាំងបីតួលេខត្រូវខុសៗគ្នា)

គ. លេខដំបូងត្រូវខុសពីសូន្យ និងចំនួនជាពហុគុណនៃ 5 ។

VI. បង្ហាញថារង្វង់ $x^2+y^2+2x-8y+5=0$ និងរង្វង់ $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ អត្កូកូណាល់គ្នា ។

VII. ក្នុងប្លង់កូអរដោនេគេឱ្យចំណុច $A(1,-3)$, $B(2,-1)$ និងបន្ទាត់ $D: y=x-2$

ក. រកសមីការបន្ទាត់ AB ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ L ដែលស្របនឹងបន្ទាត់ AB ហើយកាត់តាមគល់តម្រុយ ។

គ. គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ I រវាងបន្ទាត់ AB និងបន្ទាត់ L ។

ចម្លើយ

I. តាង $\alpha=1+i\sqrt{3}$ ចូរគណនា $\dfrac{(2+\alpha)^6}{\alpha^3}$ ដោយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត

ដោយ $2+\alpha=3+i\sqrt{3}=\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)$ លើកអង្គទាំងពីរជាការេនោះ

$$(2+\alpha)^2=\left[\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)\right]^2=3(\sqrt{3}+i)^2=3(2+2\sqrt{3}i)=6(1+i\sqrt{3})$$

ដូចនេះ $\dfrac{2+\alpha}{\alpha^3}^6=\left[\dfrac{2+\alpha}{\alpha}^2\right]^3=\left[\dfrac{6(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}\right]^3=6^3=216+0i$ ។

II. 1. ដោះស្រាយសមីការ $5x^3-3x^2-32x-12=0$ (*)

ដោយ $x=-2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (*) នោះមានន័យថា $x=-2$ ជាឬសងាយមួយ ហើយ $(x+2)$ ជាកត្តាមួយនៃ (*) ។

(*) សរសេរ $(x+2)(5x^2-13x-6)=0$ (ចែកពហុធារវាងអង្គទី១នៃ (*) នឹង $(x+2)$)

បើ $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

បើ $5x^2-13x-6=0 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{5}$, $x=3$

ដូចនេះ សមីការមានឬស $\boxed{x=\left\{-2\,,-\dfrac{2}{5}\,,3\right\}}$ ។

2. ក. រកតម្លៃ A និង B

យើងមាន $f(x)=2x^3-9x^2+Ax+B$

ចំពោះ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x+1$ គេបាន $f(-1)=3 \Leftrightarrow -2-9-A+B=3$

$$-A+B=14 \qquad (1)$$

ចំពោះ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-2$ គេបាន $f(2)=3 \Leftrightarrow 16-36+2A+B=3$

$$2A+B=23 \quad (2)$$

យក $(1)-(2)$: $2A-(-A)=23-14 \Leftrightarrow 3A=9 \Rightarrow A=3$

ជំនួស $A=3$ ក្នុង (1) គេបាន $-3+B=14 \Rightarrow B=14+3=17$

ដូចនេះ $\boxed{A=3\ ,\ B=17}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)-3=0$

ចំពោះ $A=3$ និង $B=17$ គេបាន $f(x)=2x^3-9x^2+3x+17$

នាំឱ្យ $f(x)-3=2x^3-9x^2+3x+14=(x+1)(x-2)(2x-7)=0$

បើ $x+1 \Rightarrow x=-1$

បើ $x-2=0 \Rightarrow x=2$

បើ $2x-7=0 \Rightarrow x=\dfrac{7}{2}$

ដូចនេះសមីការមានឫស $\boxed{x=-1\ ,\ x=2\ ,\ x=\dfrac{7}{2}}$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $f(2x)-3=0$

ដោយ $f(x)-3=(x+1)(x-2)(2x-7)=0$

ជំនួស x ដោយ $2x$ គេបាន $f(2x)-3=(2x+1)(2x-2)(4x-7)=0$

បើ $2x+1 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

បើ $2x-2=0 \Rightarrow x=1$

បើ $4x-7=0 \Rightarrow x=\dfrac{7}{4}$

ដូចនេះសមីការមានឫស $\boxed{x=-\dfrac{1}{2}\ ,\ x=1\ ,\ x=\dfrac{7}{4}}$ ។

ឃ. ទាញរកចម្លើយនៃសមីការ $f(nx)-3=0$ ដែល n ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ

គេបាន $f(nx)-3=(nx+1)(nx-2)(2nx-7)=0$

បើ $nx+1 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{n}$

បើ $nx-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{2}{n}$

បើ $2nx-7=0 \Rightarrow x=\dfrac{7}{2n}$

ដូចនេះឫស $\boxed{x=-\dfrac{1}{n}\ ,\ x=\dfrac{2}{n}\ ,\ x=\dfrac{7}{2n}\ \text{ចំពោះ}\ n\neq 0}$

III. ចូរស្រាយបំភ្លឺសមភាពខាងក្រោម

ក. $\dfrac{3-6\cos^2 a}{\sin a-\cos a}=3(\sin a+\cos a)$

$$\frac{3-6\cos^2 a}{\sin a-\cos a}=\frac{3(1-2\cos^2 a)}{\sin a-\cos a}$$

$$=\frac{3(\sin^2 a+\cos^2 a-2\cos^2 a)}{\sin a-\cos a}$$

$$=\frac{3(\sin^2 a-\cos^2 a)}{\sin a-\cos a} \quad , \quad (a^2-b^2=(a-b)(a+b))$$

$$=\frac{3(\sin a-\cos a)(\sin a+\cos a)}{\sin a-\cos a}$$

$$=3(\sin a+\cos a)$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{3-6\cos^2 a}{\sin a-\cos a}=3(\sin a+\cos a)}$ ពិត ។

ខ. $\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$

គេបាន $\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x} \quad , \quad (1=\sin^2 x+\cos^2 x)$

$$=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}-1$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-1}$ ពិត ។

IV. 1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម

ក. $f(x)=4\sqrt{x-3}-\frac{3x}{\sqrt{5-x}}$

អនុគមន៍មានន័យកាលណា $\begin{cases} x-3\geq 0 \\ 5-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ 5>x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ x<5 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow 3\leq x<5$

ដូចនេះដែនកំណត់ $\boxed{D_f = 3 , 5}$ ។

ខ. $f(x)=4\sqrt{3-2x}-\frac{3x}{x^2-3x+2}$

អនុគមន៍មានន័យកាលណា

$$\begin{cases} 3-2x\geq 0 \\ x^2-3x+2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\geq 2x \\ x\neq 1, x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq \frac{3}{2} \\ x\neq 1, x\neq 2 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow x\in\left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \setminus 1$$

គេអាចសរសេរ $\boxed{x\in(-\infty, 1)\cup(1, \frac{3}{2}]}$ ។

2. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=2x-3$ និង $g(x)=x^2+2$

ចូរសិក្សាភាពកើននិងចុះនៃអនុគមន៍ f , g

+ ចំពោះ $f(x)=2x-3$

គេបាន $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(2x_2-3)-(2x_1-3)}{x_2-x_1}=\frac{2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=2$

ដោយ $\frac{\Delta f}{\Delta x}=2>0$ នាំឱ្យ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍កើន}}$ ។

+ **ចំពោះ** $g(x)=x^2+2$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2^2+2)-(x_1^2+2)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}=x_2+x_1$$

−ករណី $0<x_1<x_2$ គេបាន $\frac{\Delta g}{\Delta x}=x_1+x_2>0$ មានន័យថា g កើន ។

−ករណី $0>x_2>x_1$ គេបាន $\frac{\Delta g}{\Delta x}=x_1+x_2<0$ មានន័យថា g ចុះ ។

V.រកចំនួនរបៀបក្នុងបង្កើតចំនួនដែលមានលេខបីខ្ទង់

លេខដែលត្រូវយកមករៀបមានចំនួនដប់គឺ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 និង 9 ។

ក. ករណីលេខដំបូងត្រូវខុសពីសូន្យ មានន័យថាលេខខ្ទង់នីមួយៗអាចដូចគ្នាបានហើយ ខ្ទង់ដំបូងមិនប្រើលេខ 0 ទេ រួចខ្ទង់បន្តបន្ទាប់អាចប្រើលេខ 0 បាន ។

	ខ្ទង់ទី1	ខ្ទង់ទី2	ខ្ទង់ទី3
ចំនួនរបៀប	9	10	10

ចំនួនរបៀបសរុប $=9\times10\times10=\boxed{900}$ ។

ខ. លេខដំបូងត្រូវខុសពីសូន្យ និងលេខបន្តទៀតត្រូវខុសៗគ្នា(ទាំងបីតួលេខត្រូវខុសៗគ្នា)

មានន័យថាលេខខ្ទង់ដំបូងមិនប្រើលេខ 0 ទេ តែខ្ទង់បន្តបន្ទាប់អាចប្រើបាន ហើយលេខដែលប្រើម្តងហើយ គឺមិនអាចប្រើម្តងទៀតបានឡើយ ។

	ខ្ទង់ទី1	ខ្ទង់ទី2	ខ្ទង់ទី3
ចំនួនរបៀប	9	9	8

ចំនួនរបៀបសរុប $=9\times9\times8=\boxed{648}$ ។

គ. លេខដំបូងត្រូវខុសពីសូន្យ និងចំនួនជាពហុគុណនៃ 5

មានន័យថាលេខខ្ទង់ដំបូងមិនប្រើលេខ 0 ទេ តែខ្ទង់បន្តបន្ទាប់អាចប្រើបាន ហើយលេខខាងចុងត្រូវតែជាលេខ 0 ឬ 5 ជាដាច់ខាត ។ ខ្ទង់នីមួយៗអាចមានលេខដូចគ្នាបាន ។

ខ្ទង់ទី1	ខ្ទង់ទី2	ខ្ទង់ទី3	ខ្ទង់ទី1	ខ្ទង់ទី2	ខ្ទង់ទី3
□	□	0	□	□	5
9	10	1	9	10	1
សរុប $=9\times10\times1=90$			$=9\times10\times1=90$		

ដូចនេះក្នុងករណីខាងលើនៃការបង្កើតលេខបីខ្ទង់មានចំនួន $90+90=180$ របៀប

VI. បង្ហាញថារង្វង់ $x^2+y^2+2x-8y+5=0$ និងរង្វង់ $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ អត្តូកូណាល់គ្នា

+ រង្វង់ $x^2+y^2+2x-8y+5=0$ មាន :

ផ្ចិត $O_1\left(\frac{2}{-2}, \frac{-8}{-2}\right)=O_1(-1, 4)$ និងកាំ $R_1=\sqrt{(-1)^2+4^2-5}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

+ រង្វង់ $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ មាន :

ផ្ចិត $O_2\left(\frac{-4}{-2}, \frac{-4}{-2}\right)=O_2(2, 2)$ និងកាំ $R_2=\sqrt{2^2+2^2-7}=1$

+ ប្រវែង $O_1O_2=\sqrt{[2-(-1)]^2+(2-4)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ $O_1O_2{}^2=13$

+ ផលបូក $R_1{}^2+R_2{}^2=(2\sqrt{3})^2+1^2=12+1=13$

ដោយ $O_1O_2{}^2=R_1{}^2+R_2{}^2$ នោះរង្វង់ទាំងពីរខាងលើអរត្តូកូណាល់គ្នា ។

VII. ចំណុច $A(1,-3)$, $B(2,-1)$ និងបន្ទាត់ $D: y=x-2$

ក. រកសមីការបន្ទាត់ AB

សមីការបន្ទាត់ AB កំណត់ដោយ $AB: y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$

$$y-(-3)=\frac{-1-(-3)}{2-1}(x-1)$$

$$y+3=2(x-1)$$

$$y=2x-2-3$$

$$y=2x-5$$

ដូចនេះបន្ទាត់ $\boxed{AB\ :\ y=2x-5}$ ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ L ដែលស្របនឹងបន្ទាត់ AB ហើយកាត់តាមគល់តម្រុយ

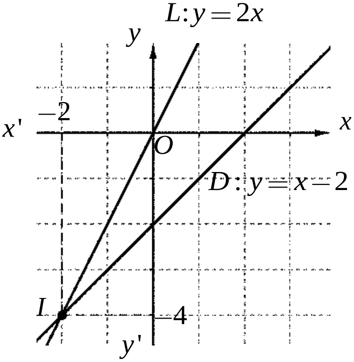
– បន្ទាត់ AB មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 2

– បន្ទាត់ L ដែលស្របនឹងបន្ទាត់ AB មានមេគុណប្រាប់ទិស $a=2$ ដែរហើយកាត់តាមគល់តម្រុយមានសមីការ $y=ax=2x$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ $\boxed{L\ :\ y=2x}$ ។

គ. គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ I រវាងបន្ទាត់ D និងបន្ទាត់ L

វាជាឫសនៃប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} y=x-2 & (D) \\ y=2x & (L) \end{cases}$



ផ្ទឹម (L) និង (D) គេបាន $2x=x-2$

$$2x-x=-2\ .$$

$$x=-2\ .$$

តាម (L) ជំនួស $x=-2\ :\ y=2(-2)=-4$

ដូចនេះកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ $\boxed{I(-2,-4)}$ ។

ចប់វិញ្ញាសាទី១៦

វិញ្ញាសាទី១៧

I. តាង $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ និង $y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ ។ ចូរគណនា $A=x^4+y^4+(x+y)^4$

II. កំណត់តម្លៃ r ដើម្បីឱ្យរង្វង់ $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ និងរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ ដូចខាងក្រោម :

ក. ប៉ះគ្នា ។

ខ. មិនមានចំណុចរួម ។

III. ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព ៖

ក. $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

ខ. $\dfrac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\dfrac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$

IV. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=1+i$ ។

ក. សរសេរ Z^3 ជាទម្រង់ $a+bi$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃ Z និង Z^3 ខាងលើ ចូរកំណត់ចំនួនពិត x និង y ដោយដឹងថា

$$\frac{x}{1+Z}+\frac{y}{1+Z^3}=2i$$ ។

V. អ្នកចាត់ការក្រុមហ៊ុនមួយចង់បង្កើតក្រុមមួយមានសមាជិក 5 នាក់ដែលត្រូវជ្រើសចេញពីក្នុងចំណោមបុគ្គលិក 12 នាក់ ហើយក្នុងនោះមានស្រី 10 នាក់ ដើម្បីចុះទៅឃោសនាពីផលិតផលថ្មី ។

ក. តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការបែបនេះបានប៉ុន្មាន ?

ខ. តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការបែបនេះបានប៉ុន្មានដែលសមាជិកទាំងអស់សុទ្ធតែស្រី ?

គ. តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការបែបនេះបានប៉ុន្មានដែលមានប្រុសម្នាក់យ៉ាងតិច ?

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូល $f(x)=x^2-2x-5$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេកំពូលនៃប៉ារ៉ាបូល រួចទាញជាទម្រង់ $f(x)=(x-\alpha)^2+\beta$ ។

ខ. សង់ប៉ារ៉ាបូលក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ រួចទាញបញ្ជាក់គូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូលនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

VII. L ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(1,1)$ ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1,2)$ ហើយ D ជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $(1,5)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}=(3,-4)$ ។

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L និងបន្ទាត់ D ជាអនុគមន៍នៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ s និង t ។

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ L និងបន្ទាត់ D

ចម្លើយ

I. គណនា $A=x^4+y^4+(x+y)^4$

គេមាន $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

គេបាន $x+y=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2}$

$$=\frac{7+2\sqrt{21}+3+7-2\sqrt{21}+3}{7-3}=\frac{20}{4}=5$$

ហើយ $xy=\left(\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)=1$

នាំឱ្យ $A=x^4+y^4+(x+y)^4$

$$=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2+(x+y)^4$$
$$=[(x+y)^2-2xy]^2-2(xy)^2+(x+y)^4$$
$$=[5^2-2\times1]^2-2\times1^2+5^4$$
$$=23^2-2+625$$
$$=1152$$

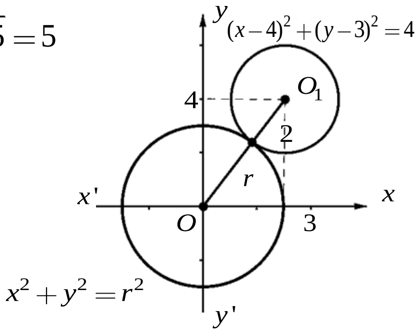
ដូចនេះ $\boxed{A=1152}$ ។

II. កំណត់តម្លៃ r ដើម្បីឱ្យរង្វង់ $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ និងរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$

\+ រង្វង់ $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ មានផ្ចិត $O_1(4, 3)$ និងកាំ $r_1=2$

\+ រង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ មានផ្ចិត $O(0, 0)$ និងកាំ r

\+ ប្រវែង $O_1O=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$



ក. ប៉ះគ្នា លុះត្រាតែ ៖

\+ ករណីប៉ះខាងក្រៅ : គេបាន

$$r+r_1=O_1O \Rightarrow r+2=5 \Leftrightarrow r=3$$

\+ ករណីប៉ះខាងក្នុង : គេបាន

$$r-r_1=O_1O \Rightarrow r-2=5 \Leftrightarrow r=7$$

ក្នុងករណីនេះគេបាន $\boxed{r=3 \text{ ឬ } r=7}$ ។

ខ. មិនមានចំណុចរួម លុះត្រាតែ ៖

\+ ករណីរង្វង់ទាំងពីរដាច់ចេញពីគ្នា : នោះ $r+r_1<O_1O \Rightarrow r+2<5 \Leftrightarrow r<3$

\+ ករណីរង្វង់កាំ r_1 នៅក្នុងរង្វង់កាំ r : នោះ $r-r_1>O_1O \Rightarrow r-2>5 \Leftrightarrow r>7$

ក្នុងករណីនេះគេបាន $\boxed{r<3 \text{ ឬ } r>7}$ ។

III. ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x\in\mathbb{R}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព ៖

ក. $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

យើងមាន $\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}\left[(\sin^2 x)^2-\sin^2 x\cos^2 x+(\cos^2 x)^2\right]$$

$$=(1)[\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}{}^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x]$$

$$=(1)\left[1^2-3\sin^2 x\cos^2 x\right]$$

$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x \quad \text{ពិត ។}$$

ខ. $\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x \quad (1)$

យើងមាន $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$$=1-2\sin^2 x\cos^2 x \quad (2)$$

ម្យ៉ាងទៀត

$\sin^8 x+\cos^8 x=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=1-4\sin^2 x\cos^2 x+4\sin^4 x\cos^4 x-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x \quad (3)$

តាម (2) និង (3) នោះអង្គទីមួយនៃ (1) ក្លាយជា

$\frac{1}{4}(\sin^8 x+\cos^8 x)-\frac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x)+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}(1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x)-\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x\cos^2 x)+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}-\sin^2 x\cos^2 x+\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x-\frac{1}{2}+\sin^2 x\cos^2 x+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}\sin^4 x\cos^4 x$ ពិត ។

IV. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=1+i$

ក. សរសេរ Z^3 **ជាទម្រង់** $a+bi$

គេបាន $Z^3=(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i$

(ព្រោះ $i^2=-1$, $i^3=-i$)

ដូចនេះ $\boxed{Z^3=-2+2i}$ ។

ខ. កំណត់ x **និង** y **ដោយដឹងថា**

$\frac{x}{1+Z}+\frac{y}{1+Z^3}=2i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{1+1+i}+\frac{y}{1-2+2i}=2i$

$$\frac{x}{2+i}+\frac{y}{-1+2i}=2i \Leftrightarrow \frac{x(2-i)}{2^2+1}+\frac{y(-1-2i)}{(-1)^2+2^2}=2i$$

$$\frac{2x-xi}{5}+\frac{-y-2yi}{5}=2i \Leftrightarrow \frac{2x-y}{5}+\frac{(-x-2y)}{5}i=2i$$

គេបាន $\begin{cases}\frac{2x-y}{5}=0\\ \frac{-x-2y}{5}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=0 & (1)\\ x+2y=-10 & (2)\end{cases}$

តាម (1) : $y=2x$ រួចជំនួសក្នុង (2) គេបាន $x+4x=-10 \Rightarrow x=-2$

ហើយ $y=2(-2)=-4$

ដូចនេះ $\boxed{x=-2\ ,\ y=-4}$ ។

V.ក. រកចំនួនគណៈកម្មការដែលគេអាចបង្កើតបាន

មានមនុស្ស 12 នាក់ គេជ្រើសរើសយក 5 នាក់មានចំនួន

$$C(12,5)=\frac{12!}{(12-5)!5!}=\frac{12!}{7!5!}=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7!}{7!\times5\times4\times3\times2\times1}=\frac{12\times11\times10\times9\times8}{5\times4\times3\times2\times1}=792$$

ខ. ចំនួនគណៈកម្មការដែលមានសមាជិកទាំងអស់សុទ្ធតែស្រី

ស្រីទាំង 5 នាក់ត្រូវជ្រើសចេញពីស្រីចំនួន 10 មានចំនួន

$$C(10,5)=\frac{10!}{(10-5)!5!}=\frac{10!}{5!5!}=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5!}{5\times4\times3\times2\times1\times5!}=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}=252$$

គ. រកចំនួនគណៈកម្មការដែលគេអាចបង្កើតបានដែលមានសមាជិកប្រុសម្នាក់យ៉ាងតិច

❖ វិធីទី១

– ចំនួនគណៈកម្មការសរុបមាន 792 (លទ្ធផល ក.)

– ចំនួនគណៈកម្មការដែលមិនមានប្រុសសោះគឺស្រីទាំងអស់មាន 252 (លទ្ធផល ខ.)

ដូច្នេះចំនួនគណៈកម្មការដែលមានប្រុសម្នាក់យ៉ាងតិចគឺ $\boxed{792-252=540}$ ។

❖ វិធីទី២

–គណៈកម្មការដែលមានប្រុសម្នាក់មានចំនួន $C(2,\,1)\times C(10,\,4)=2\times 210=420$

–គណៈកម្មការដែលមានប្រុសពីរនាក់មានចំនួន $C(2,\,2)\times C(10,\,3)=1\times 120=120$

ដូច្នេះចំនួនគណៈកម្មការដែលមានប្រុសម្នាក់យ៉ាងតិចគឺ $\boxed{420+120=540}$ ។

VI. គេឱ្យអនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូល $f(x)=x^2-2x-5$

ក. កំណត់កូអរដោនេកំពូលនៃប៉ារ៉ាបូលរួចទាញជាទម្រង់ $f(x)=(x-\alpha)^2+\beta$

អនុគមន៍ $f(x)=x^2-2x-5$ មានមេគុណ $a=1$, $b=-2$, $c=-5$

កំពូល $V_f(\alpha,\beta)\begin{cases}\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2(1)}=1\\ \beta=f(1)=1^2-2\times1-5=-6\end{cases}\Rightarrow V_f\ 1,-6$

គេបាន $f(x)=(x-\alpha)^2+\beta=(x-1)^2-6$

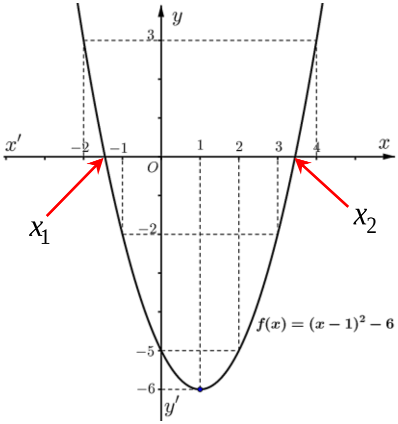
ដូចនេះ $\boxed{f \text{ មានកំពូល } V_f\ 1,-6 \text{ និង } f(x)=(x-1)^2-6}$

ខ. សង់ប៉ារ៉ាបូលក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ

តារាងតម្លៃ

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3	-2	-5	-6	-5	-2	3

គូសក្រាប



+រួចទាញបញ្ជាក់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូលនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

មានន័យថាជាតម្លៃ x_1 និង x_2 (មើលក្រាប) ដែលជាឫសនៃសមីការ $f(x)=0$

គេបាន $(x-1)^2-6=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=6 \Leftrightarrow x-1=\pm\sqrt{6} \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{6}$

ដែលគេយក $\boxed{x_1=1-\sqrt{6} \text{ និង } x_2=1+\sqrt{6}}$ ។

VII. ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L និងបន្ទាត់ D ជាអនុគមន៍នៃ s និង t

❖ **វិធីទី១**

+ **ចំពោះសមីការបន្ទាត់** L : កាត់តាមចំណុច $(1,1)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1,2)$

យើងមាន $\left.\begin{matrix}(1,1)\\(x_o,y_o)\end{matrix}\right| \Rightarrow x_o=1\ ,\ y_o=1\ ,\ \left.\begin{matrix}\vec{u}=(1,2)\\\vec{u}=(a,b)\end{matrix}\right| \Rightarrow a=1\ ,\ b=2$

សមីការបន្ទាត់ L កំណត់ដោយ

$$L:\begin{cases}x=x_o+as\\y=y_o+bs\end{cases} \Rightarrow L:\begin{cases}x=1+s\\y=1+2s\end{cases},\ s \text{ ជាចំនួនពិត ។}$$

+ **ចំពោះសមីការបន្ទាត់** D : កាត់តាមចំណុច $(1,5)$ វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}=(3,-4)$

យើងមាន $\left.\begin{matrix}(1,5)\\(x_o,y_o)\end{matrix}\right| \Rightarrow x_o=1\ ,\ y_o=5\ ,\ \left.\begin{matrix}\vec{n}=(3,-4)\\\vec{n}=(a,b)\end{matrix}\right| \Rightarrow a=3\ ,\ b=-4$

សមីការបន្ទាត់ D កំណត់ដោយ

$$D:\begin{cases}x=x_o+at\\y=y_o+bt\end{cases} \Rightarrow D:\begin{cases}x=1+3t\\y=5-4t\end{cases},\ t \text{ ជាចំនួនពិត ។}$$

❖ **វិធីទី២**

+ បន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $(1,1)$ ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1,2)$ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រកំណត់ដោយ $L:(x,y)=(1,1)+s(1,2)=(1,1)+(s,2s)=(1+s,1+2s)$

ឬគេសរសេរ $L:\begin{cases}x=1+s\\y=1+2s\end{cases}$, s ជាចំនួនពិត ។

+ បន្ទាត់ D កាត់តាមចំណុច $(1, 5)$ ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}=(3,-4)$ សមីការ

ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $D:(x, y)=(1, 3)+t(3,-4)=(1, 5)+(3t,-4t)=(1+3t, 5-4t)$

ឬគេសរសេរ $D:\begin{cases}x=1+3t\\ y=5-4t\end{cases}$, t ជាចំនួនពិត ។

ខ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ L និងបន្ទាត់ D

មានន័យថាចំណុចប្រសព្វនោះជាតម្លៃរួមគ្នានៃ x និង y របស់បន្ទាត់ទាំងពីរ ។

ដោយផ្ទឹមសមីការទាំងពីរ $\begin{cases}1+s=1+3t\\ 1+2s=5-4t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}s=3t & (1)\\ 2s+4t=4 & (2)\end{cases}$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន $2(3t)+4t=4 \Leftrightarrow 10t=4 \Rightarrow t=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

ជំនួស $t=\dfrac{2}{5}$ ក្នុងបន្ទាត់ D គេបាន $\begin{cases}x=1+3t=1+3\left(\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{11}{5}\\ y=5-4t=5-4\left(\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{17}{5}\end{cases}$

ដូចនេះ | ចំណុចប្រសព្វនោះគឺ $\left(\dfrac{11}{5},\dfrac{17}{5}\right)$ |

ចប់វិញ្ញាសាទី១៧

វិញ្ញាសាទី១៨

I. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចនីមួយៗខាងក្រោមជាទម្រង់ $a+bi$ ។

ក. $\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}$ ខ. $\frac{1}{(1+2i)(3-i)}$ គ. $\frac{1+2i}{1-2i}$

II.

1. ដោយ $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A=\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$ ។

2. សម្រួលកន្សោម $A=\sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}}-\sqrt{2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}}$ ។

III. គេមានពហុធា $f(x)=x^3-6x^2+9x+n$ ។

ក. កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-4$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញ ចូរដាក់ $f(x)$ ជាផលគុណកត្តាដឺក្រេទីមួយ ។

IV. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ x គេបាន

ក. $\sin^4 x-\cos^4 x+2\sin^2 x+4\cos^2 x=3$

ខ. $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{2}{\tan x}$

V. ក្រុមកីឡាករមួយមានគ្នា 10 នាក់ក្នុងនោះមានស្រី 4 នាក់ ។ គេរើសកីឡាករ 4 នាក់ ដើម្បីធ្វើការប្រកួតគ្នា ។ រកចំនួនរបៀបដែលអាចជ្រើសរើសបានបើ ៖

ក. កីឡាករត្រូវប្រកួតមានភេទដូចគ្នា ។

ខ. កីឡាករត្រូវប្រកួតមានចំនួនស្រីស្មើនឹងចំនួនប្រុស ។

VI. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=|2x-1|$ ចំពោះ $-1\le x\le 3$ ។

ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ ។

ខ. ដោះស្រាយវិសមីការ $f(x)\le 3$ ។

គ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $g(x)=x+1$ ក្នុងតម្រុយតែមួយជាមួយ f ។ រួចទាញរកចម្លើយនៃសមីការ $|2x-1|=x+1$ តាមក្រាប ។

VII. គេមានវ៉ិចទ័រពីរ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OB}$ ។ តាម B គេគូសចំណោលកែង B' លើទម្រ OA ដែលវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OB'}$ មានទិសដៅដូច $\overrightarrow{OA}$ ។ បង្ហាញថា $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$ ។

ចម្លើយ

I. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចនីមួយៗខាងក្រោមជាទម្រង់ $a+bi$

ក. គេបាន $\dfrac{-2}{1-i\sqrt{3}}=\dfrac{-2(1+i\sqrt{3})}{1^2+(\sqrt{3})^2}=\dfrac{-2(1+i\sqrt{3})}{4}=\boxed{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

ខ. គេបាន

$$\frac{1}{(1+2i)(3-i)}=\frac{1}{3-i+6i-2i^2}=\frac{1}{3+5i+2}=\frac{1}{5+5i}=\frac{1}{5(1+i)}=\frac{1-i}{5(1^2+1^2)}=\boxed{\frac{1}{10}-\frac{1}{10}i}$$ ។

គ. គេបាន

$$\frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)^2}{1+2^2}=\frac{1+4i+4i^2}{5}=\frac{1+4i-4}{5}=\frac{-3+4i}{5}=\boxed{-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}i}$$ ។

II. 1. ដោយ $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A=\dfrac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$

ដោយ $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{4^2-2\times4\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}=4-\sqrt{3}$

នោះ $(x-4)^2=(-\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2-8x+16=3 \Leftrightarrow x^2-8x+13=0$

គេអាច សរសេរ $A=\dfrac{(x^2-8x+13)(x+1)^2+10}{(x^2-8x+13)+2}=\dfrac{0\times(x+1)^2+10}{0+2}=\dfrac{10}{2}=\boxed{5}$ ។

2. សម្រួលកន្សោម $A=\sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}}-\sqrt{2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}}$ (1)

ដោយ $\sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}}>\sqrt{2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}} \Rightarrow A>0$

ដោយលើកអង្គទាំងពីរនៃ (1) ជាការេគេបាន

$$A^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}}-\sqrt{2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}}\right)^2$$

$$A^2=2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}-2\sqrt{(2-\sqrt{2\sqrt{5}-2})(2+\sqrt{2\sqrt{5}-2})}+2-\sqrt{2\sqrt{5}-2}$$

$$=4-2\sqrt{2^2-(\sqrt{2\sqrt{5}-2})^2}$$

$$=4-2\sqrt{4-2\sqrt{5}+2}$$

$$=4-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

$$=4-2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$$

$$=4-2(\sqrt{5}-1)$$

$$=4-2\sqrt{5}+2$$

$$=6-2\sqrt{5}$$

នាំឱ្យ $A=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\boxed{\sqrt{5}-1}$ ។

III. គេមានពហុធា $f(x)=x^3-6x^2+9x+n$ (*)

ក. កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-4$

នៅពេលដែល $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-4$ គេទទួលបាន $f(4)=0$

តាម (*) យក $x=4$ នោះ $f(4)=4^3-6\times4^2+9\times4+n=0$

ក្រោយមកតម្លៃ $\boxed{n=-4}$ ។

ខ. ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញ ចូរដាក់ $f(x)$ ជាផលគុណកត្តាដឺក្រេទីមួយ

ចំពោះ $n=-4$ គេបាន $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$

តាមករណី ក. ខាងលើមានន័យថា $(x-4)$ ជាកត្តាមួយនៃ $f(x)$ ហើយម្យ៉ាងទៀត

កត្តាផ្សេងៗទៀតបានមកតាមរយៈប្រមាណវិធីចែកនៃ $\frac{x^3-6x^2+9x-4}{x-4}=x^2-2x+1$

ពេលនោះគេអាចសរសេរ $f(x)=(x-4)(x^2-2x+1)=\boxed{(x-4)(x-1)(x-1)}$ ។

IV. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ x គេបាន

ក. $\sin^4 x-\cos^4 x+2\sin^2 x+4\cos^2 x=3$

គេមាន $\sin^4 x-\cos^4 x+2\sin^2 x+4\cos^2 x=\left[(\sin^2 x)^2-(\cos^2 x)^2\right]+2\sin^2 x+4\cos^2 x$

$$=(\sin^2 x-\cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}+2\sin^2 x+4\cos^2 x$$

$$=\sin^2 x-\cos^2 x+2\sin^2 x+4\cos^2 x$$

$$=3\sin^2 x+3\cos^2 x$$

$$=3\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}$$

$=3$ ពិត ។

ខ. $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{2}{\tan x}$

គេមាន $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\sqrt{\frac{(1+\cos x)^2}{(1-\cos x)(1+\cos x)}}-\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1+\cos x)(1-\cos x)}}$

$$=\frac{1+\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}-\frac{1-\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

$$=\frac{1+\cos x-1+\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \quad : \ (1-\cos^2 x=\sin^2 x)$$

$$=\frac{2\cos x}{\sqrt{\sin^2 x}}$$

$$=\frac{2\cos x}{\sin x} \quad : \ \left(\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow \frac{1}{\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$=\frac{2}{\tan x}$ ពិត ។

V.ក្នុងចំណោម 10 នាក់មានស្រី 4 នាក់នោះប្រុស 6 នាក់

ក. កីឡាករត្រូវប្រកួតមានភេទដូចគ្នា : អាចជាស្រីទាំង 4 នាក់ ឬប្រុសទាំង 4 នាក់ ។

– ករណីស្រីទាំង 4 នាក់ នោះត្រូវជ្រើសក្នុងចំណោមស្រីទាំងអស់ 4 នាក់ដែលមានចំនួន 1 របៀប

– ករណីប្រុសទាំង 4 នាក់ នោះត្រូវជ្រើសក្នុងចំណោមប្រុសទាំងអស់ 6 នាក់ដែលមាន

ចំនួន $C(6,4)=\frac{6!}{(6-4)!4!}=\frac{6\times5\times4!}{2!4!}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$ របៀប

ដូចនេះគេអាចជ្រើសបានសរុបចំនួន $\boxed{1+15=16\text{ របៀប}}$ ។

ខ. កីឡាករត្រូវប្រកួតមានចំនួនស្រីស្មើនឹងចំនួនប្រុស

មានន័យថាក្នុងចំណោមការជ្រើសរើស 4 នាក់ត្រូវមានស្រី 2 នាក់ និងប្រុស 2 នាក់ ។

– ស្រី 2 នាក់នោះត្រូវរើសចេញពីស្រី 4 នាក់មានចំនួន $C(4,2)=\frac{4!}{(4-2)!2!}=6$ របៀប

– ប្រុស 2 នាក់នោះត្រូវរើសចេញពីប្រុស 6 នាក់មានចំនួន $C(6,2)=\frac{6!}{(6-2)!2!}=15$ របៀប

តាមគោលការណ៍ផលគុណ គេអាចជ្រើសបានសរុបចំនួន $\boxed{6\times15=90\text{ របៀប}}$ ។

VI. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=|2x-1|$ ចំពោះ $-1\le x\le3$

ក. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f

គេបាន $f(x)=|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & \text{បើ } 2x-1\ge0\\ 1-2x & \text{បើ } 2x-1\le0\end{cases}$

នាំឱ្យ $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{បើ } x\ge\frac{1}{2}\\ 1-2x & \text{បើ } x\le\frac{1}{2}\end{cases}$

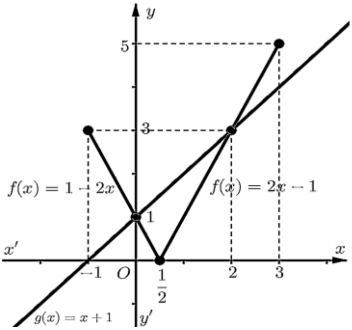
តែចំពោះ $-1\le x\le3$ គេបាន $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{បើ } 1/2\le x\le3 & (1)\\ 1-2x & \text{បើ } -1\le x\le1/2 & (2)\end{cases}$

តារាងតម្លៃចំពោះ (1) :

x	$\frac{1}{2}$	3
y	0	5

(2) :

x	-1	$\frac{1}{2}$
y	3	0



ខ. ដោះស្រាយវិសមីការ $f(x)\le 3$

+ បើ $f(x)=2x-1$ នោះគេបាន $2x-1\le 3 \Rightarrow 2x\le 4 \Rightarrow x\le 2$ (1)

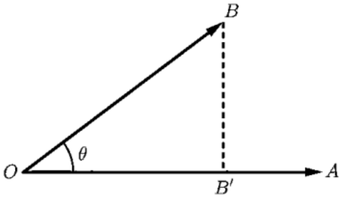
+ ឬ $f(x)=1-2x$ នោះគេបាន $1-2x\le 3 \Rightarrow -2\le 2x \Rightarrow -1\le x$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\boxed{-1\le x\le 2}$ ។

គ. រូចទាញរកចម្លើយនៃសមីការ $|2x-1|=x+1$ **តាមក្រាប**

តាមក្រាប ឫសនៃសមីការខាងលើគឺជាតម្លៃ x នៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនៃអនុគមន៍ f និងក្រាបអនុគមន៍នៃ g នោះគេបាន $\boxed{x=0 \text{ ឬ } x=2}$ ។

VII. បង្ហាញថា $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$



តាង $\angle AOB=\theta$

គេបាន $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\cdot OB\cdot\cos\theta=OA\cdot OB'$ (1)

ដោយ $\angle AOB'=0^o$

គេបាន $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}=OA\cdot OB'$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\boxed{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}}$ ពិត ។

ចប់វិញ្ញាសាទី១៨

វិញ្ញាសាទី១៩

I. គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $w=-\frac{1}{2}\left[-a-b+(a-b)\sqrt{2}i\right]$ និង $z=(2\sqrt{2}+i)^2$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $z=w$ ។

II. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $P=(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12})$

III. គេមានរង្វង់ $C: x^2+y^2-6x-2y-15=0$ និង បន្ទាត់ $L: 3y=x+5$ ។

ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ L កាត់រង្វង់ C ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា

ខ. រកកូអរដោនេចំណុច A និង B ដែលជាប្រសព្វរវាង L និង C ។ រួចគណនា AB ។

គ. រកសមីការរង្វង់ C' មានលក្ខខណ្ឌថា C' កាត់តាមចំណុច A , B និង $D(0, 4)$

IV. គេមានត្រីកោណកែងសមបាត ABC កែងត្រង់ C ដែល $AC=BC=\sqrt{3}cm$

D ជាចំណុចមួយនៅលើ AC ដែលមុំ $\angle DBC=30^o$ ។

ក. គណនារង្វាស់ជ្រុង AB , BD និង AD ។

ខ. តាមតម្លៃប្រាកដនៃជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABD ចូរគណនាតម្លៃនៃ

$\cos 15^o$, $\sin 15^o$ និង $\tan 15^o$ ។

V. ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សប្រុស 12 នាក់និងសិស្សស្រី 8 នាក់ ។ គ្រូចង់ដឹងសមត្ថភាពសិស្ស 3 នាក់ដោយឱ្យដោះស្រាយលំហាត់មួយលើក្តារខៀន ។

ក. តើគ្រូអាចហៅសិស្សម្តង 3 នាក់មកក្តារខៀនប៉ុន្មានរបៀប ?

ខ. តើក្រុមសិស្ស 3 នាក់មានប៉ុន្មានរបៀប បើគ្រូចង់ឱ្យក្រុមនេះមានប្រុស 2 នាក់និងស្រីម្នាក់ ។

VI. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង A' , B' និង C' ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ BC , CA និង AB ។ គេយក $BC=a$, $AC=b$ និង $AB=c$ ។

ក. គណនា AA'^2 , BB'^2 និង CC'^2 ជាអនុគមន៍នៃ a , b និង c ។

ខ. បង្ហាញថា $AA'^2+BB'^2+CC'^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$ ។

VII. គេមានបន្ទាត់ពីរ $L:3x+4y=18$ និង $D:x-2y=-4$ ។ កំណត់តម្លៃចំនួនថេរ k ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y=kx$ កាត់តាមចំណុចប្រសព្វរវាង L និង D ។

ចម្លើយ

I. គេមាន $z=(2\sqrt{2}+i)^2$ និង $w=-\frac{1}{2}\left[-a-b+(a-b)\sqrt{2}i\right]$

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពីជគណិត/

$$z=(2\sqrt{2}+i)^2=(2\sqrt{2})^2+2\times2\sqrt{2}i+i^2=\boxed{7+4\sqrt{2}i}$$

ខ. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $z=w$

គេមាន $w=-\frac{1}{2}\left[-a-b+(a-b)\sqrt{2}i\right]=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{2}i$

គេបាន $z=w \Leftrightarrow 7+4\sqrt{2}i=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)\sqrt{2}i$

តាមនិយមន័យចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នាគេបាន

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(a+b)=7\\ -\frac{1}{2}(a-b)=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=14 & (1)\\ a-b=-8 & (2)\end{cases}$$

យក $(1)+(2)$: $2a=6 \Leftrightarrow a=\frac{6}{2}=3$

ចំពោះ $a=3$ នោះ (1) : $3+b=14 \Leftrightarrow b=14-3=9$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃ } a=3 \text{ និង } b=9}$ ។

II. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម

$$P=(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12})(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12})$$

$$=\left[(\sqrt{10}+\sqrt{11})^2-\sqrt{12^2}\right]\left[(\sqrt{10}-\sqrt{11})^2-\sqrt{12^2}\right]$$

$$=(10+2\sqrt{110}+11-12)(10-2\sqrt{110}+11-12)$$

$$=(9+2\sqrt{110})(9-2\sqrt{110})$$

$$=9^2-(2\sqrt{110})^2$$

$$=81-440$$

$$=-359$$

ដូចនេះ $\boxed{P=-359}$ ។

III. គេមានរង្វង់ $C:x^2+y^2-6x-2y-15=0$ បន្ទាត់ $L:3y=x+5$

ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ L កាត់រង្វង់ C ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា

❖ **វិធីទី១** : រង្វង់ C មានផ្ចិត $I\left(\frac{-6}{-2},\frac{-2}{-2}\right)=I(3,1)$ កាំ $R=\sqrt{3^2+1^2-(-15)}=5$

ចម្ងាយរវាងផ្ចិត $I(3,1)$ និងបន្ទាត់ $L:3y-x-5=0$ កំណត់ដោយ ៖

$$d=\frac{|3y_I-x_I-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3(3)-1-5|}{\sqrt{9+1}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=0.9487$$

ដោយ $d<R$ នោះបង្ហាញថាបន្ទាត់ L កាត់រង្វង់ C ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា ។

❖ **វិធីទី២** : **មាន** $L:3y=x+5 \Leftrightarrow x=3y-5$ (1)

និង $C:x^2+y^2-6x-2y-15=0$ (2)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន $(3y-5)^2+y^2-6(3y-5)-2y-15=0$ **(*)**

$$(3y-5)^2+y^2-6(3y-5)-2y-15=0$$

$$9y^2-30y+25+y^2-18y+30-2y-15=0$$

$$10y^2-50y+40=0$$

$y^2-5y+4=0$ (**) មេគុណ $a=1$, $b=-5$, $c=4$

គេរក $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(4)=25-16=9$

នោះ $\Delta>0$ នេះបញ្ជាក់ថាសមីការ (*) ខាងលើមានឬសពីរផ្សេងគ្នា ។

ដូចនេះបន្ទាត់ L កាត់រង្វង់ C ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា ។

ខ. រកកូអរដោនេចំណុច A និង B ដែលជាប្រសព្វរវាង L និង C

រកឬសនៃសមីការ (**) : $y^2-5y+4=0$

ដោយ $\Delta=9 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

គេបានឬស $y=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5\pm3}{2(1)}$

យក $y_1=\dfrac{5-3}{2}=1$, $y_2=\dfrac{5+3}{2}=4$

ហើយតាម (1) ចំពោះ $y_1=1$: $x_1=3(1)-5=-2$

ចំពោះ $y_2=4$: $x_2=3(4)-5=7$

ដូចនេះកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាង L និង C មានពីរ $\boxed{A(-2,1) \text{ និង } B(7,4)}$

+ រួចគណនា AB : តាងដោយ ℓ

គេបាន $\ell=\sqrt{7-(-2)^{\,2}+(4-1)^2}=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}=\boxed{3\sqrt{10}}$ ។

គ. រកសមីការរង្វង់ C' មានលក្ខខណ្ឌថា C' កាត់តាមចំណុច A , B និង $D(0, 4)$

❖ **វិធីទី១**

ដោយ A និង B ជាចំណុចប្រសព្វរវា L និង C នោះរង្វង់ C' មានសមីការកំណត់ដោយ

$m(3y-x-5)+x^2+y^2-6x-2y-15=0$ (3)

វាកាត់តាមចំណុច $D(0, 4)$ គេបាន $m(3\times4-0-5)+0^2+4^2-6\times0-2\times4-15=0$

នាំឱ្យ $7m-7=0 \Leftrightarrow m=1$

នោះសមីការ (3) ខាងលើក្លាយជា $1(3y-x-5)+x^2+y^2-6x-2y-15=0$

នាំឱ្យ $x^2+y^2-7x+y-20=0$

ដូចនេះសមីការរង្វង់ $\boxed{x^2+y^2-7x+y-20=0}$ ។

❖ **វិធីទី២** : សមីការរង្វង់ $C' : x^2+y^2+Ax+By+C=0$

ដែល A , B និង C ត្រូវតែរកឱ្យឃើញដោយ C' កាត់តាមចំណុច ៖

- $A(-2,1) : (-2)^2+1^2+A(-2)+B(1)+C=0 \Leftrightarrow -2A+B+C=-5 \quad (1)$
- $B(7,4) : 7^2+4^2+A(7)+B(4)+C=0 \Leftrightarrow 7A+4B+C=-65 \quad (2)$
- $D(0,4) : 0^2+4^2+A(0)+B(4)+C=0 \Leftrightarrow 4B+C=-16 \quad (3)$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $\begin{cases} -2A+B+C=-5 & (1) \\ 7A+4B+C=-65 & (2) \\ 4B+C=-16 & (3) \end{cases}$

$(2)-(3) : 7A=-65-(-16)=-49 \Leftrightarrow A=\frac{-49}{7}=-7$

$(2)-(1) : 9A+3B=-65-(-5)=-60$

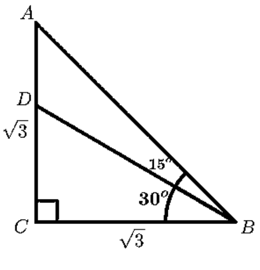
$$B=\frac{-60-9A}{3}=\frac{-60-9(-7)}{3}=1$$

តាម (3) : $C=-16-4B=-16-4(1)=-20$

ដូច្នេះចំពោះតម្លៃ $A=-7$, $B=1$ និង $C=-20$

គេបាន $\boxed{C' : x^2+y^2-7x+y-20=0}$ ។

IV. ក. គណនារង្វាស់ AB , BD **និង** AD



\+ **រង្វាស់** AB

❖ **វិធីទី១** តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រចំពោះត្រីកោណកែង ABC

គេបាន $AB^2=AC^2+CB^2=\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^2=3+3=6$

ដូច្នេះ $\boxed{AB=\sqrt{6}cm}$ ។

❖ **វិធីទី២** : ត្រីកោណកែងសមបាត=កន្លះការេ ហើយអ៊ីប៉ូតេនុស=អង្កត់ទ្រូងការេ

គេបាន $AB = a\sqrt{2} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = \boxed{\sqrt{6}cm}$ ។

❖ **វិធីទី៣** : ចំពោះត្រីកោណកែង ABC

គេបាន $\sin 45^o = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{AC}{\sin 45^o} = \dfrac{\sqrt{3}cm}{\sqrt{2}/2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{6}cm}$ ។

+ **រង្វាស់** BD

ចំពោះត្រីកោណកែង DCB

គេបាន $\cos 30^o = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow BD = \dfrac{BC}{\cos 30^o} = \dfrac{\sqrt{3}cm}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{2\sqrt{3}cm}{\sqrt{3}} = \boxed{2cm}$ ។

+ **រង្វាស់** AD

គេមាន $AD = AC - DC = \sqrt{3} - DC$

តែដោយ $DC = BD\cdot\sin 30^o = 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1cm$ (ត្រី.កែង BCD)

គេបាន $AD = AC - DC = \boxed{(\sqrt{3}-1)cm}$ ។

ខ. គណនាតម្លៃនៃ $\cos 15^o$, $\sin 15^o$ **និង** $\tan 15^o$

+ **ចំពោះ** $\cos 15^o$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសចំពោះត្រីកោណកែង ABD

គេបាន $AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD\times DB\times\cos 15^o$

គេទាញបាន $\cos 15^o = \dfrac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2\times AB\times BD} = \dfrac{\sqrt{6^2} + 2^2 - (\sqrt{3}-1)^2}{2\times\sqrt{6}\times 2} = \dfrac{6+2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

+ **ចំពោះ** $\sin 15^o$

ដោយ $\sin^2 15^o + \cos^2 15^o = 1$ នោះគេបាន

$$\sin 15^o = \sqrt{1-\cos^2 15^o} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-6-2\sqrt{12}-2}{16}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

(មិនយកតម្លៃអវិជ្ជមានទេព្រោះ $\sin 15^o > 0$)

+ ចំពោះ $\tan 15^o$

គេមាន $\tan^2 15^o = \dfrac{\sin^2 15^o}{\cos^2 15^o} = \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{6+2\sqrt{12}+2}{16}} = \dfrac{\cancel{4}(2-\sqrt{3})}{\cancel{4}(2+\sqrt{3})} = (2-\sqrt{3})^2$

នាំឱ្យ $\boxed{\tan 15^o = 2-\sqrt{3}}$ (មិនយកតម្លៃអវិជ្ជមានទេព្រោះ $\tan 15^o > 0$) ។

V.ក. រកចំនួនរបៀបដែលគ្រូអាចហៅសិស្សម្តង 3 នាក់

សិស្ស 3 នាក់នោះជាបន្សំនៃសិស្សទាំងអស់ 20 នាក់ ដែលមានចំនួន ៖

$$C(20,\,3) = \frac{20!}{(20-3)!3!} = \frac{20\times19\times18\times17!}{17!\times3\times2\times1} = \boxed{1140}$$ ។

ខ. រកចំនួនរបៀបដែលគ្រូចង់ឱ្យក្រុមនេះមានប្រុស 2 នាក់និងស្រីម្នាក់

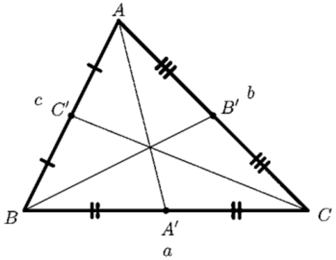
– ប្រុស 2 នាក់ជាបន្សំក្នុងប្រុស 12 នាក់មានចំនួន $C(12,\,2) = \dfrac{12!}{(12-2)!2!} = 66$ របៀប

–ស្រី 1 នាក់ជាបន្សំក្នុងស្រី 8 នាក់មានចំនួន 8 របៀប

តាមគោលការណ៍ផលគុណ ក្នុងករណីខាងលើមានចំនួន $\boxed{66\times8 = 528 \text{ របៀប}}$

VI. ក. គណនា AA'^2 , BB'^2 និង CC'^2 ជាអនុគមន៍នៃ a , b និង c

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យានចំពោះត្រីកោណ ABC គេបាន ៖



$$AA'^2 = \frac{AB^2+AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{c^2+b^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}(2c^2+2b^2-a^2)}$$ ។

$$BB'^2 = \frac{AB^2+BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4} = \boxed{\frac{1}{4}(2c^2+2a^2-b^2)}$$ ។

$$CC' = \frac{BC^2+AC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{b^2+a^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \boxed{\frac{1}{4}(2b^2+2a^2-c^2)}$$ ។

ខ. បង្ហាញថា $AA'^2+BB'^2+CC'^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$

$$\begin{aligned}AA'^2+BB'^2+CC'^2&=\frac{1}{4}(2c^2+2b^2-a^2)+\frac{1}{4}(2c^2+2a^2-b^2)+\frac{1}{4}(2b^2+2a^2-c^2)\\&=\frac{1}{4}(2c^2+2b^2-a^2+2c^2+2a^2-b^2+2b^2+2a^2-c^2)\\&=\frac{1}{4}(3a^2+3b^2+3c^2)\\&=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

ពិត ។

VII. មាន $L: 3x+4y=18$, $D: x-2y=-4$

កំណត់តម្លៃចំនួនថេរ k ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y=kx$ កាត់តាមចំណុចប្រសព្វរវាង L និង D

\+ ចំណុចប្រសព្វរវាង L និង D :

ត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}3x+4y=18 & L\\ x-2y=-4 & D\end{cases}$

តាម $D: x=-4+2y$ ជំនួសក្នុង L គេបាន $3(-4+2y)+4y=18$

ឬ $-12+6y+4y=18 \Leftrightarrow 10y=18+12=30 \Leftrightarrow y=\frac{30}{10}=3$

គេបាន $x=-4+2(3)=2$ ដូច្នេះចំណុចប្រសព្វនោះគឺ $(2,3)$

\+ កំណត់តម្លៃ k :

បន្ទាត់ $y=kx$ កាត់តាមចំណុចប្រសព្វ $(2,3)$ នោះគេត្រូវជំនួស $x=2$, $y=3$

គេនឹងបាន $3=k\cdot 2 \Leftrightarrow \boxed{k=\frac{3}{2}}$ ។

ចប់វិញ្ញាសាទី១៩

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១០
ត្រៀមប្រឡងឆមាសលើកទី ២
រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតកម្រិតឧត្តម(បរិញ្ញា+១)គណិតវិទ្យា១ ជំនាន់២១

វិញ្ញាសាទី២០

I.

1. គេមាន z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។ ចូររកចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z^3 - 1 = 0$ ។

2. គេឱ្យ $x^2 + x + 1 = 0$ ។ ចូររកតម្លៃនៃកន្សោម $A = x^{2015} + x^{2013} + x$ ។

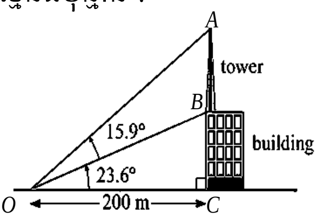
II.

1. ដាក់ជាផលគុណកត្តានៃកន្សោម $(x+y-1)^2 - 6(x+y-1) + 8$ ។

2. បង្ហាញថាកន្សោម $\dfrac{x^2 - x - 30}{x^2 - 25} \times \dfrac{x-5}{x-2} \div \dfrac{x^2 - 36}{x^2 + 4x - 12}$ មិនអាស្រ័យនឹង x ទេ ។

3. គេឱ្យទ្វេធា $(x-y)^{15}$ ។ តើមេគុណនៃតួ $x^7 y^8$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

III. អង់តែនទំនាក់ទំនងមួយត្រូវបានសាងសង់ឡើងនៅលើកំពូលនៃអាគារមួយ(ដូចរូប) ។ គណនាកម្ពស់អង់តែនទំនាក់ទំនងនោះ ។



IV. កាក់មួយមានមុខពីរគឺខាងរូបនិងខាងលេខ ។ គេបានបោះកាក់នេះចំនួន 4 ដង បន្ទាប់គ្នា ។ រកចំនួនលទ្ធផលដែលអាចកើតមាន ក្នុងករណីដែលគេចង់ឱ្យ ៖

ក. កាក់ចេញខាងរូប 1 ដង , 2 ដង , 3 ដង , ទាំង 4 ដង ។

ខ. កាក់ចេញខាងរូបម្តងយ៉ាងតិច ។

V. គេឱ្យចំណុច $A(-2, 5)$, $B(-3, 1)$ និង $C(1, 0)$ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់

ក. ដៅចំណុច A , B និង C ។ រួចរកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។

ខ. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ ។ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

VI.

1. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល a , b និង c ជាចំនួនពិត ។ ចូរកំណត់តម្លៃ a , b និង c ដោយដឹងថាក្រាបនៃ f មានកំពូល $(-2,1)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $(-3,3)$ ។

2. អនុគមន៍ g មួយកំណត់ដោយ $g(x)=f(x)+h$ ដែល h ជាចំនួនពិត ។

ក. រកកូអរដោនេនិងប្រាប់ប្រភេទនៃកំពូលរបស់ក្រាបតាងអនុគមន៍ g ចំពោះ $h=-1$

ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង g ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។ រួចបង្ហាញថាក្រាបនៃអនុគមន៍ g ស្ថិតនៅក្រោមក្រាបនៃអនុគមន៍ f ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

ចម្លើយ

I. 1. **រកចំនួនកុំផ្លិច** z **ដែល** $z^3-1=0$

❖ **វិធីទី១**

គេមាន $z^3-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0$

បើ $z-1=0 \Rightarrow z=1$

បើ $z^2+z+1=0$ មេគុណ $a=1$, $b=1$, $c=1$

រក $\Delta=b^2-4ac=1^2-4(1)(1)=-3 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=i\sqrt{3}$

ឫស $z=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{z=1\ ,\ z=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}}$ ។

2. **រកតម្លៃនៃកន្សោម** $A=x^{2015}+x^{2013}+x$

ដោយ $x^2+x+1=0$

គេបាន $(x-1)(x^2+x+1)=0$ (គុណអង្គទាំងពីរនឹង $x-1\neq 0$)

$x^3-1=0 \Leftrightarrow x^3=1$

គេបាន $A=x^{2015}+x^{2013}+x$

$$=x^{2013}(x^2+1)+x$$

$$=(x^3)^{671}(x^2+1)+x$$

$$=1^{671}(x^2+1)+x$$

$$=x^2+1+x$$

$$=x^2+x+1$$

$$=0$$

ដូចនេះ $\boxed{A=0}$ ។

II. 1. **ដាក់ជាផលគុណកត្តានៃ** $(x+y-1)^2-6(x+y-1)+8$

តាង $t=x+y-1$

គេបាន $(x+y-1)^2-6(x+y-1)+8=t^2\underset{-4-2}{-6t}\underset{(-4)(-2)}{+8}$

$$=(t-4)(t-2)$$

$$=(x+y-1-4)(x+y-1-2)$$

$$=(x+y-5)(x+y-3)$$

ដូចនេះ $\boxed{(x+y-1)^2-6(x+y-1)+8=(x+y-5)(x+y-3)}$ ។

2. **បង្ហាញថាកន្សោម** $\dfrac{x^2-x-30}{x^2-25}\times\dfrac{x-5}{x-2}\div\dfrac{x^2-36}{x^2+4x-12}$ **មិនអាស្រ័យនឹង** x **ទេ**

ដោយ $\dfrac{x^2-x-30}{x^2-25}\times\dfrac{x-5}{x-2}\div\dfrac{x^2-36}{x^2+4x-12}=\dfrac{(x-6)\cancel{(x+5)}}{(x-5)\cancel{(x+5)}}\times\dfrac{x-5}{x-2}\div\dfrac{(x-6)\cancel{(x+6)}}{\cancel{(x+6)}(x-2)}$

$$=\frac{x-6}{x-5}\times\frac{x-5}{x-2}\times\frac{x-2}{x-6}$$

$$=\frac{(x-6)(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-2)(x-6)}$$

$=1$ ជាចំនួនថេរមិនអាស្រ័យនឹង x ទេ ។

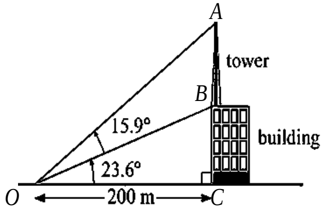
3\. **គេឱ្យទ្វេធា $(x-y)^{15}$ ។ តើមេគុណនៃតួ x^7y^8 ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?**

ដោយទ្វេធា $(x-y)^{15}$ មាននិទស្សន្ត $n=15$ ហើយតួ $x^7y^8=x^{15-8}y^8$

មានទម្រង់ $x^{n-8}y^8$

នោះមេគុណវាស្មើនឹង $C(15,8)=\frac{15!}{(15-8)!8!}=\frac{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times\cancel{8!}}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1\times\cancel{8!}}=\boxed{6435}$ ។

III. គណនាកម្ពស់អង់តែនទំនាក់ទំនងនោះ



តាង AB ជាកម្ពស់អង់តែន (ដូចរូប)

គេបាន $AB=AC-BC \quad (*)$

\+ រក AC

ចំពោះត្រីកោណកែង OAC

គេបាន $\tan(23.6^o+15.9^o)=\frac{AC}{OC}$

ទាញរក $AC=OC\times\tan(23.6^o+15.9^o)$

$$=200m\times\tan39.5^o$$
$$=200m\times0.8243$$
$$=164.867m$$

\+ រក BC

ចំពោះត្រីកោណកែង OCB

គេបាន $\tan23.6^o=\frac{BC}{OC} \quad \Rightarrow \quad AC=OC\times\tan23.6^o$

$$=200m\times0.4369$$
$$=87.378m$$

នាំឱ្យ (*) : $AB=164.867m-87.378m=77.489m$

ដូចនេះអង់តែនទំនាក់ទំនងនោះមានកម្ពស់ $\boxed{77.489m}$ ។

IV. គេបានបោះកាក់មួយចំនួន 4 ដងបន្តបន្ទាប់គ្នា ។ រកចំនួនលទ្ធផលដែលអាចកើតមានក្នុងករណីដែលគេចង់ឱ្យ :

ក. កាក់ចេញខាងរូប 1 ដង , 2 ដង , 3 ដង , ទាំង 4 ដង

តាងអក្សរ $P =$ ចេញខាងរូប (Picture) , $N =$ ចេញខាងលេខ (Number)

– ករណីកាក់ចេញខាងរូប 1 ដង :

គេបាន PNNN , NPNN , NNPN , NNNP មានចំនួន $\boxed{4 \text{ លទ្ធផល}}$ ។

ឬក៏អាចគណនាតាម $C(4,1) = \boxed{4 \text{ លទ្ធផល}}$ ។

– ករណីកាក់ចេញខាងរូប 2 ដង :

គេបាន PPNN , PNPN , PNNP , NPPN , NPNP , NNPP មានចំនួន $\boxed{6 \text{ លទ្ធផល}}$ ។

ឬក៏អាចគណនាតាម $C(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4\times 3\times \cancel{2!}}{\cancel{2!}\times 2\times 1} = \boxed{6 \text{ លទ្ធផល}}$ ។

– ករណីកាក់ចេញខាងរូប 3 ដង :

គេបាន PPPN , PPNP , PNPP , NPPP មានចំនួន $\boxed{4 \text{ លទ្ធផល}}$ ។

ឬក៏អាចគណនាតាម $C(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4\times \cancel{3!}}{1!\cancel{3!}} = \boxed{4 \text{ លទ្ធផល}}$ ។

– ករណីកាក់ចេញខាងរូប 4 ដង :

គេបាន PPPP មានចំនួន $\boxed{1 \text{ លទ្ធផល}}$ ។

ឬក៏អាចគណនាតាម $C(4,4) = \frac{4!}{(4-4)!4!} = \frac{\cancel{4!}}{0!\cancel{3!}} = \boxed{1 \text{ លទ្ធផល}}$ ។

ខ. កាក់ចេញខាងរូបម្តងយ៉ាងតិច

❖ **វិធីទី១** : មានន័យថាខាងរូបអាចចេញ 1 ដង ឬ 2 ដង ឬ 3 ដង ឬទាំង 4 ដង

ដូច្នេះមានចំនួន $4+6+4+1 = \boxed{15 \text{ លទ្ធផល}}$ (ផ្អែកលើសំណួរ ក.) ។

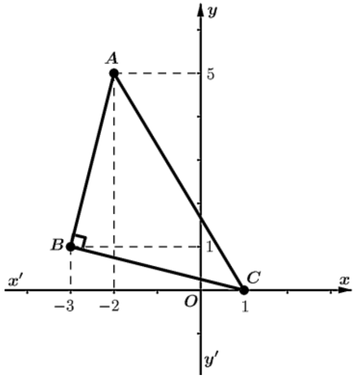
❖ **វិធីទី២** ចំនួនលទ្ធផលសរុបដែលអាចកើតមានគឺស្មើនឹង $2^4 = 16$

លទ្ធផលដែលមិនចេញខាងរូបសោះមាន NNNN ចំនួន 1 លទ្ធផល

ដូច្នេះកាក់ចេញខាងរូបម្តងយ៉ាងតិចមានចំនួន $16 - 1 = \boxed{15 \text{ លទ្ធផល}}$ ។

V.គេឱ្យចំណុច $A(-2, 5)$, $B(-3, 1)$ **និង** $C(1, 0)$

ក. ដៅចំណុច A , B **និង** C



+ **រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ** $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$ **និង** $\overrightarrow{BC}$

គេបាន $\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A\ ,\ y_C-y_A)=(1-(-2)\ ,\ 0-5)=\boxed{(3\ ,\ -5)}$ ។

$\overrightarrow{BA}=(x_A-x_B\ ,\ y_A-y_B)=(-2-(-3)\ ,\ 5-1)=\boxed{(1\ ,\ 4)}$ ។

$\overrightarrow{BC}=(x_C-x_B\ ,\ y_C-y_B)=(1-(-3)\ ,\ 0-1)=\boxed{(4\ ,\ -1)}$ ។

ខ. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

គេបាន $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(1)(4)+(4)(-1)=4-4=\boxed{0}$ ។

+ **បង្ហាញថា** ABC **ជាត្រីកោណកែងសមបាត**

ដោយ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$ គេបាន ABC ជាត្រីកោណកែង (1)

ម៉្យាងទៀត $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$

ឃើញថា $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|\neq\left|\overrightarrow{AC}\right|$ គេបាន ABC ជាត្រីកោណសមបាត (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{BA}|\times|\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\sqrt{17}=\boxed{\frac{17}{2}\text{ឯកតាផ្ទៃ}}$ ។

VI. 1. **កំណត់តម្លៃ** a , b **និង** c

❖ **វិធីទី១**

ចំពោះអនុគមន៍ $f(x)=ax^2+bx+c$

–មានកំពូល $(-2,1)$ គេបានអាប់ស៊ីស $-\frac{b}{2a}=-2 \Leftrightarrow b=4a \quad (1)$

អរដោនេ $f(-2)=1 \Leftrightarrow (-2)^2a+(-2)b+c=1 \Leftrightarrow 4a-2b+c=1 \quad (2)$

–កាត់តាមចំណុច $(-3,3)$ គេបាន $f(-3)=3 \Leftrightarrow (-3)^2a+(-3)b+c=3$

$9a-3b+c=3 \quad (3)$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} b=4a & (1) \\ 4a-2b+c=1 & (2) \\ 9a-3b+c=3 & (3) \end{cases}$

$(3)-(2)\ :\quad 5a-b=2 \Leftrightarrow 5a-4a=2 \Leftrightarrow a=2$

$(1)\ :\ b=4(2)=8$

$(2)\ :\ c=1-4a+2b=1-4(2)+2(8)=9$

ដូចនេះ $\boxed{a=2\ ,\ b=8 \text{ និង } c=9}$ ។

❖ **វិធីទី២** អនុគមន៍ $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta \quad (*)$

ដែលកំពូល $(\alpha,\beta)=(-2,1)\Leftrightarrow \alpha=-2\ ,\ \beta=1$ គេបាន $f(x)=a(x+2)^2+1 \quad (**)$

ដោយវាកាត់តាមចំណុច $(-3,3)$ នោះយក $x=-3$, $f(x)=3$ ទៅជំនួសក្នុង $(**)$

គេបាន $3=a(-3+2)^2+1 \Leftrightarrow 3=a+1 \Rightarrow a=2$

គេបាន $(**)\ :\ f(x)=2(x+2)^2+1=2(x^2+4x+4)+1=2x^2+8x+9$

មានន័យថាតម្លៃ $\boxed{a=2\ ,\ b=8 \text{ និង } c=9}$ ។

2. **អនុគមន៍** $g(x)=f(x)+h$

ក. រកកូអរដោនេនិងប្រាប់ប្រភេទនៃកំពូលរបស់ក្រាបតាងអនុគមន៍ g **ចំពោះ** $h=-1$

តាមសំណួរ 1. : $f(x)=2(x+2)^2+1$ មានកំពូល $(-2,1)$ ចំពោះ $h=-1$

គេបាន $g(x)=f(x)-1=2(x+2)^2+1-1=2(x+2)^2+0$

ដូច្នេះ $\boxed{(-2,0)}$ ជាកំពូលក្រាបនៃអនុគមន៍ g ។

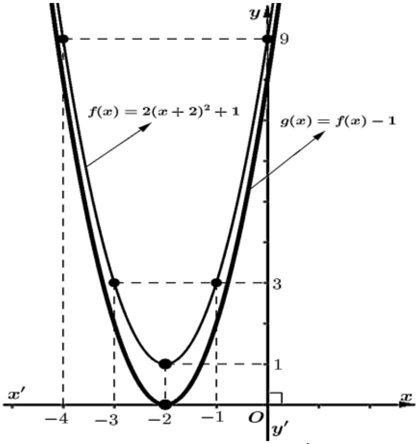
ខ. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f **និង** g **ក្នុងតម្រុយតែមួយ**

តារាងតម្លៃនៃអនុគមន៍ ៖

អនុគមន៍ $f(x)=2(x+2)^2+1$:

x	-4	-3	-2	1	0
y	9	3	1	3	9

អនុគមន៍ $g(x)=f(x)-1$ រំកិលក្រាបនៃ f ចុះក្រោម 1 ឯកតា ។



+ **រួចបង្ហាញថាក្រាបនៃអនុគមន៍** g **ស្ថិតនៅក្រោមក្រាបនៃអនុគមន៍** f **ចំពោះគ្រប់តម្លៃ** x

ដោយ $g(x)=f(x)-1 \Leftrightarrow g(x)-f(x)=-1<0$

គេបាន $g(x)-f(x)<0 \Leftrightarrow g(x)<f(x)$ គ្រប់ចំពោះតម្លៃ x ។

ដូចនេះក្រាបនៃអនុគមន៍ g ស្ថិតនៅក្រោមក្រាបនៃអនុគមន៍ f ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

ជូនពរសំណាងល្អក្នុងការប្រឡងរបស់អ្នកទាំងអស់គ្នាណា !