កំណែ លំហាត់ជ្រើសរើស

អិចស្បូណង់ស្យែល និង លោការីត

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១១-១២ និងឧត្តម

មានៈ

- សមីការ និងវិសមីការអិចស្បូណង់ស្យែល និងលោការីត
- សមីការត្រីកោណមាត្រមែបបពិភាក្សា
- ប្រើប្រាស់ត្រីកោណមាត្រចូលពីជគណិត-ធរណីមាត្រ
- អាំងតេក្រាលមិនកំណត់
- វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងចូលមហាវិទ្យាល័យ

ឆូ ប៊ុណ្ណរ័ត្ន

មាស មោរ៉ា

អារម្ភកថា

ដើម្បីជាជំនួយសម្រាប់មិត្តទាំងឡាយដែលមានបំណងចង់យល់ច្បាស់ពីគន្លឹះក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ "លោការីត- អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល, ត្រីកោណមាត្រ- អនុវត្តត្រីកោណមាត្រ- អាំងតេក្រាលមិនកំណត់" និងដើម្បីសម្រួលដល់ការសិក្សារបស់សិស្ស ជាពិសេសបេក្ខជនដែលជួបប្រទះឧបសគ្គក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ខាងលើ ទើបខ្ញុំបានរៀបរៀងចងក្រងសៀវភៅនេះឡើងដោយស្រាវជ្រាវពីឯកសារបរទេសមួយចំនួន ដែលមានគន្លឹះប្លែកៗ គួរឱ្យចាប់អារម្មណ៍ជាទីបំផុត។

ការរៀបរៀងនេះគឺ មានបំណងផ្តល់ឱ្យសិស្សទាំងឡាយបានទទួលនូវចំណេះដឹងមួយផ្នែកធំ ពោលគឺមានបំណងចង់ឱ្យអ្នកទាំងឡាយនេះមានសមត្ថភាពគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីត្រៀមប្រឡងចូលគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សានានាដោយមានប្រសិទ្ធិភាព។

អវសាន្តនេះ យើងខ្ញុំរង់ចាំទទួលការទិតៀនដ៏ស្មោះរបស់មិត្តអ្នកអានទាំងឡាយដែលជាអ្នកសិក្សាដោយក្តីរីករាយបំផុត ដើម្បីឱ្យយើងខ្ញុំអាចកែលំអសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែប្រសើរជាងមុនទៅទៀត។

សូមជូនពរ សុខភាពល្អ ប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ ជ័យជំនះលើការសិក្សា។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី ខែ ឆ្នាំ

ហត្ថលេខា

ឆូ ប៊ុណ្ណារ័ត្ន

ផ្នែកទី១

ដំណោះស្រាយ
សមីការ
ឌីផេរ៉ង់ស្យែល

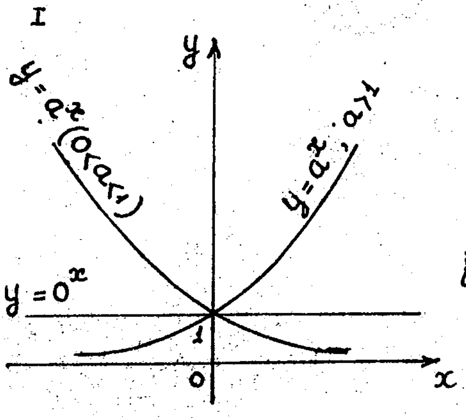
របៀបដោះស្រាយសមីការនិងវិសមីការ អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនិងលោការីត

1. លក្ខណៈគួរកត់សំគាល់ :

អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលកំណត់ដោយ $y = a^x \ (a>0)$ មានដែនកំណត់ $\mathbb{R}$ ហើយតំលៃកំនត់របស់វាគឺ $\mathbb{R}^+$ ដូចនេះ $\forall x \in \mathbb{R}, a^x \in \mathbb{R}^+$ តំលៃពិសេសរបស់អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមាន

$$a^0 = 1 \ , \ a^1 = a \ , \ 1^x = 1$$



ក្រាបរបស់អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល មាន 3 ដំណាក់កាលតាមតំលៃរបស់គោល a (រូបទី I) ។

បន្ទាប់មកទៀតយើងសង្ខេបនូវរូបមន្តសំខាន់ៗ ដែលគួរអោយចងចាំ

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \qquad \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2} \qquad a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2 \text{ បើ } a > 1$$

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ បើ } 0 < a < 1$$

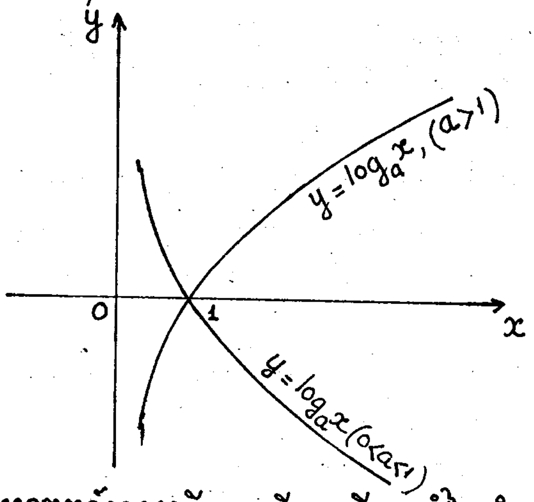
2. អនុគមន៍លោការីត

អនុគមន៍លោការីតកំណត់ដោយ

$y = \log_a x$, $(a>0)$, $(a \neq 1)$, $(x>0)$

$$\boxed{y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y}$$

* ដែនកំណត់របស់អនុគមន៍លោការីតគឺ $\mathbb{R}^+$ ហើយតំលៃកំណត់របស់វាគឺ $\mathbb{R}$ ។



ក្រាបរបស់អនុគមន៍លោការីតមានពីរករណីតាមតំលៃកំណត់របស់គោល a
បន្ទាប់មកយើងនិយាយអំពីតំលៃពិសេសខ្លះៗរបស់អនុគមន៍លោការីត ។

$$\boxed{\log_a 1 = 0 \ , \ \log_a a = 1 \ , \ x = \log_a a^x}$$

$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$ $\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x$ $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$	$\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$ $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \log_a x$ $\log_{a^{\alpha}} x = \dfrac{1}{\alpha} \log_a x$

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$
$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 \,,\ (a>1)$$
$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \,,\ (0<a<1)$$

<u>សំគាល់</u>

* បើ $a = 10$ គេសរសេរ $\lg x$ ឬ $\log x$
* បើ $a = e = 2,7\ldots$ គេសរសេរ $\ln x$

៣- <u>វិធានសំរាប់ដោះស្រាយសមីការ ឬ វិសមីការ អុិចស្ប៉ូណង់ស្យែល</u>

យើងត្រូវចេះចាំសមីការ ឬវិសមីការអុិចស្ប៉ូណង់ស្យែលអោយចូលរាងងាយស្រួល ហើយអនុវត្តតាមលក្ខណៈខាងក្រោម :

ក- បើសមីការ ឬវិសមីការអុិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគ្មានប្រមាណវិធីបូក ឬដក នោះយើងត្រូវទំលាក់ស្វ័យគុណចុះដោយលើកលោការីតគោល a នៃអង្គទាំងពីរ ។ ហើយគោល a ដែលយើងជ្រើសរើសនោះត្រូវយកអោយសមស្របតាមករណីដែល $0<a<1$ ឬ $a>1$

ខ- បើក្នុងសមីការ ឬវិសមីការស្វ័យគុណមានប្រមាណវិធីបូក ឬដកនោះ យើងអនុវត្តតាមជំហាននិមួយៗខាងក្រោម

* ប្ដូរអថេរសមីការ ឬវិសមីការអុិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
* តាងអញ្ញាតជំនួយ
* បំលែងសមីការអុិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ឬវិសមីការអុិចស្ប៉ូណង់ស្យែលទៅសមីការ ឬវិសមីការពីជគណិតតាមអញ្ញាតជំនួយដោយមាន
* រកឫសសមីការអញ្ញាតជំនួយ ហើយទាញយកឫសរបស់សមីការដើម ។

4- បើគោលរបស់សមីការ ឬវិសមីការអុិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ យើងត្រូវ

* ចំពោះសមីការ យើងពិនិត្យក្នុងករណី $a = 1$
* ចំពោះវិសមីការ យើងពិនិត្យក្នុងករណី

$a = 1$, $a > 1$, $0 < a < 1$

5- វិធានសំរាប់ដោះស្រាយសមីការ រឺ វិសមីការលោការីត

ចំពោះសមីការ រឺ វិសមីការលោការីត កិច្ចការដំបូងគឺយើងត្រូវដាក់លក្ខខណ្ឌ អោយសមីការ រឺ វិសមីការមានន័យសិន បន្ទាប់មកយើងត្រូវដោះប្តូរអថេរ ហើយសមីការ រឺ វិសមីការត្រូវនាំអោយចូលកាន់ងាយជាទីបំផុត ។

ក- បើក្នុងសមីការ រឺ វិសមីការលោការីតឥតមានប្រមាណវិធីបូក រឺដក ដាច់ខាត យើងប្រើរូបមន្តប្តូរគោលហើយគណនាតាមស្វ័យគុណ ទាញយកឬសងាយៗ ហើយគោល a ត្រូវស្គាល់ច្បាស់ ក្នុងករណី $0<a<1$ រឺ $a>1$ ។

ខ- បើសមីការ រឺ វិសមីការលោការីត មានប្រមាណវិធីបូក រឺដក យើងត្រូវអនុវត្តតាមជំហាននីមួយៗខាងក្រោម

* ប្តូរអថេរសមីការ រឺ វិសមីការលោការីត
* តាងអញ្ញាតជំនួយ
* ផ្លាស់ប្តូរសមីការ រឺ វិសមីការលោការីត មកជាសមីការ រឺ វិសមីការពិជគណិត តាមអញ្ញាតជំនួយ ។
* រកឬស របស់សមីការអញ្ញាតជំនួយ ដោយទាញយកឬស របស់សមីការដើម ។

គ- បើគោល a របស់សមីការ រឺ វិសមីការលោការីតមានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

* ចំពោះសមីការ យើងត្រូវពិនិត្យករណី
  $a>0$, $a\neq 1$
* ចំពោះវិសមីការ យើងត្រូវពិនិត្យក្នុងករណី
  $0<a<1$, $a>1$

(1) ដោះស្រាយសមីការ $4^{tg^2x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$
(ប្រលងចូលវិទ្យាស្ថានបច្ចេកទេសជាន់ខ្ពស់រូបវិទ្យាទីក្រុងមូស្គូ

លក្ខ័ណ្ឌ $\cos x \neq 0$ ឬ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

គេមាន $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2x$ ពេលនោះសមីការខាងលើ

សមមូល $2^{2tg^2x} + 2^{1+tg^2x} - 80 = 0$

$2^{2tg^2x} + 2.2^{tg^2x} - 80 = 0$

តាង $y = 2^{tg^2x}$, $y \geq 1$ សមីការទៅជា

$y^2 + 2y - 80 = 0$ (2)

សមីការ (2) មានឫស $y_1 = 8$, $y_2 = -10$

$y_2 < 1$ មិនយក

ចំពោះ $y_1 = 8$ គេបាន $2^{tg^2x} = 8$

$\Rightarrow 2^{tg^2x} = 2^3 \Rightarrow tg^2x = 3 \Rightarrow tg\,x = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខ័ណ្ឌ $\cos x \neq 0$ ដូចនេះសមីការ
មានឫស $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

(2)- ដោះស្រាយសមីការ $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$
(ប្រលងចូលសាលាជាន់ខ្ពស់វិស្វករសំណង់ទីក្រុង KIEV)

យើងសង្កេតឃើញថា

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = (2^2 - \sqrt{3}^2) = (4-3) = 1$

យើងគុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹងចំនួន $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x$

យើងបានសមីការសមមូលនឹង

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{2x} - 4(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{x} + 1 = 0$$

យើងតាង $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{x} = t$, $t>0$ ពេលនោះ

សមីការក្លាយទៅជា $t^2 - 4t + 1 = 0$ សមីការមានឫសពីរ

គឺ $t_1 = 2-\sqrt{3}$, $t_2 = 2+\sqrt{3}$

* ចំពោះ $t_1 = 2-\sqrt{3}$ យើងបាន $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{x} = 2-\sqrt{3}$

$$\Rightarrow (2-\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = 1$$

$$\Rightarrow x = 2$$

* ចំពោះ $t_2 = 2+\sqrt{3}$ យើងបាន $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^{x} = 2+\sqrt{3}$

$$\Rightarrow (2-\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = (2+\sqrt{3})\frac{(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow (2-\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = (2-\sqrt{3})^{-1}$$

$$\frac{x}{2} = -1 \Rightarrow x = -2$$

ដូចនេះ សមីការ មានឫស $x = 2$, $x = -2$

3-

> ដោះស្រាយសមីការ $6.9^{\frac{1}{x}} - 13.6^{\frac{1}{x}} + 6.4^{\frac{1}{x}} = 0$
> ប្រលងចូលសាលាគរុវិជ្ជាជាន់ខ្ពស់ KOLOMEN

យើងត្រូវអោយ $x \neq 0$ ដោយ $4^{\frac{1}{x}} \neq 0$ ចែកអង្គទាំងពីរនៃ សមីការនឹង $4^{\frac{1}{x}}$ គេបានសមីការសមមូលនឹងសមីការខាងក្រោម

$$6.\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{x}} - 13\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6.\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}} - 13\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + 6 = 0$$

តាង $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $y>0 \Rightarrow 6y^2 - 13y + 6 = 0$

មានឫស $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{2}{3}$

* $y_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

* $y_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x = -1$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x = 1$, $x = -1$

4- ដោះស្រាយសមីការ : ក - $e^{2x} - 12e^{x} + 32 = 0$

ខ - $17^{\ln x} = 34 - x^{\ln 17}$

ប្រលងចូលវិទ្យាស្ថានពហុបច្ចេកទេស VOLGAGRAT និងប្រលងយកសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាកំរិត 2 ឆ្នាំ 1987

ក - $e^{2x} - 12e^{x} + 32 = 0$ មានន័យ $\forall x \in \mathbb{R}$

តាង $X = e^{x} > 0 \Rightarrow X^2 - 12X + 32 = 0$

$\Delta' = 36 - 32 = 4 \Rightarrow X = 8 , X = 4$

$* \; X = 8 \Leftrightarrow e^{x} = 8 \Leftrightarrow x = \ln 8 = 3\ln 2$

តែដោយ $\ln 2 = 0,693 \Rightarrow x \simeq 3 \times 0,693 \simeq 2,079$

$* \; X = 4 \Leftrightarrow e^{x} = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4 = 2\ln 2 \simeq 2 \times 0,693$

$\Leftrightarrow x \simeq 1,386$

ដូចនេះចំលើយសមីការគឺ $x \simeq 2,079$, $x \simeq 1,386$

ខ- $17^{\ln x} = 34 - x^{\ln 17}$ (1) មានន័យ $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$

$\Rightarrow x = 17^{\log_{17} x} \Rightarrow x^{\ln 17} = \left(17^{\log_{17} x}\right)^{\ln 17} = 17^{\log_{17} x . \ln 17}$

$\Rightarrow x^{\ln 17} = 17^{\ln x}$

(1) $\Leftrightarrow 17^{\ln x} = 34 - 17^{\ln x}$

$\Leftrightarrow 2.17^{\ln x} = 34 \Leftrightarrow 17^{\ln x} = 17$

$\Leftrightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \simeq 2,718$

5- ក- រកវិធីសាស្រ្តសំរាប់ដោះស្រាយវិសមីការ $[A(x)]^{f(x)} < 1$

ដែល $A(x)$ និង $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធា ដែលមានអញ្ញាត x

ខ- រកវិធីសាស្រ្តមួយសំរាប់ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_{A(x)} f(x) < 1$

ដែល $A_{(x)}$ និង $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាដែលមានអញ្ញាត x

<u>អនុវត្តន៍</u> : ដោះស្រាយវិសមីការ $(x^2 - 5x + 5)^{x-2} < 1$

<u>អនុវត្តន៍</u> : ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$

(ប្រលងចូលសាលាបច្ចេកទេសជាន់ខ្ពស់រោងចក្រយន្តមូស្គូ)

ក- រកទំនាក់ទំនងមួយជាវិធីសាស្រ្តសំរាប់ដោះស្រាយវិសមីការ

$[A(x)]^{f(x)} < 1$, $A(x)$, $f(x)$ ជាពហុធានៃ x

នេះជាវិសមីការ អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល គោលថេរ យើងដោះស្រាយ អាស្រ័យលើគោល $a = A(x)$

$$(1):\begin{cases} a = A(x) > 1 \\ [A(x)]^{f(x)} < 1 \end{cases} \qquad (2):\begin{cases} 0 < a = A(x) < 1 \\ [A(x)]^{f(x)} < 1 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) - 1 > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) - 1 < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$$

ចំលើយគឺ (I) $\cup$ (II)

ខ- រកទំនាក់ទំនងមួយជាវិធីសាស្រ្តសំរាប់ដោះស្រាយវិសមីការ

$\log_{A(x)} f(x) < 1$ ដែល $A(x)$, $f(x)$ ជាពហុធានៃ x

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) > 1 \\ f(x) > 0 \\ \log_{A(x)} \dfrac{f(x)}{A(x)} < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < A(x) < 1 \\ f(x) > 0 \\ \log_{A(x)} \dfrac{f(x)}{A(x)} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) - 1 > 0 \\ f(x) > 0 \\ \dfrac{f(x)}{A(x)} > 0 \\ \dfrac{f(x)}{A(x)} < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) - 1 < 0 \\ \dfrac{f(x)}{A(x)} > 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} A(x) - 1 > 0 \\ f(x) > 0 \\ \dfrac{f(x)}{A(x)} > 0 \\ \dfrac{f(x)}{A(x)} - 1 < 0 \end{cases} \text{(I) ឬ } \begin{cases} A(x) > 0 \\ A(x) - 1 < 0 \\ f(x) > 0 \\ \dfrac{f(x)}{A(x)} - 1 > 0 \end{cases} \text{(II)}$$

ចំលើយនៃវិសមីការ $\log_{A(x)} f(x) < 1 \Leftrightarrow \log_{A(x)} \frac{f(x)}{A(x)} < 0$

ដែល $A(x), f(x)$ ជាពហុធានៃ x

ចំលើយ (I) $\cup$ ចំលើយ (II)

* អនុវត្តន៍ដោះស្រាយ $(x^2-5x+5)^{x-2} < 1$

$$\left[\begin{array}{l} (1)\begin{cases} x^2-5x+5 > 1 \\ (x^2-5x+5)^{x-2} < 1 \end{cases} \\ (2)\begin{cases} 0 < x^2-5x+5 < 1 \\ (x^2-5x+5)^{x-2} < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-5x+4 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \text{(I)} \\ \begin{cases} x^2-5x+5 > 0 \\ x^2-5x+4 < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \text{(II)} \end{array}\right.$$

$$\text{(I)} \begin{cases} x^2-5x+4 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]4, +\infty\right[\\ x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1\right[$$

$$\text{(II)} \begin{cases} x^2-5x+5 > 0 \\ x^2-5x+4 < 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[\\ x \in \left]1, 4\right[\\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{5+\sqrt{5}}{2}, 4\right[$$

$$\text{(I)} \cup \text{(II)} \Rightarrow x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{5}}{2}, 4\right[$$

* អនុវត្តន៍ដោះស្រាយ $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 0 \Leftrightarrow \log_{2x}\left(\frac{x^2-5x+6}{2x}\right) < 0$

$$\left[\begin{array}{l} \text{(I)}\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x^2-5x+6 > 0 \\ \frac{x^2-5x+6}{2x} > 0 \\ \frac{x^2-5x+6}{2x} - 1 < 0 \end{cases} \\ \text{(II)}\begin{cases} 2x > 0 \\ 2x-1 < 0 \\ x^2-5x+6 > 0 \\ \frac{x^2-5x+6}{2x} - 1 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \in \left]-\infty, 2\right[\cup \left]3, +\infty\right[\\ x \in \left]0, 2\right[\cup \left]3, +\infty\right[\\ x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]1, 6\right[\end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{1}{2} \\ x \in \left]-\infty, 2\right[\cup \left]3, +\infty\right[\\ x \in \left]0, 1\right[\cup \left]6, +\infty\right[\end{cases} \end{array}\right.$$

ចំលើយសមីការ គឺ ① ∪ ② គឺ $x \in]1,2[\cup]3,6[\cup]0,\frac{1}{2}[$

ឬ $x \in]0,\frac{1}{2}[\cup]1,2[\cup]3,6[$

6. កំនត់តំលៃ m ដើម្បីអោយ $x^4 - 2x^2\log_2 m + 3\log_2 m - 2 = 0$
មានចំលើយបួន :

(ប្រលងចូលសាលាជាន់ខ្ពស់ GOMENSKI)

តាង $x^2 = y$, $y > 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}$ នោះសមីការអាចសរសេរ
$y^2 - 2y\log_2 m + 3\log_2 m - 2 = 0$ ដើម្បីអោយសមីការ
អញ្ញាត x មានចំលើយ 4 លុះត្រាតែសមីការនៃ y មានចំលើយ
ពីរផ្សេងគ្នា ដែលមាន $0 < y_1 < y_2$ មានន័យថា

$$\begin{cases} \Delta' > 0 & (1) \\ af(0) > 0 & (2) \\ S > 0 \end{cases}$$

$* \ \Delta' = \log_2^2 m - 3\log_2 m + 2 > 0$

$\log_2 m$	$-\infty$		1		2		$+\infty$
		+	0	////	0	+	

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 m < 1 \Leftrightarrow -\log_2 \frac{m}{2} < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 2 \\ \log_2 m > 2 \Leftrightarrow \log \frac{m}{4} > 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{m}{4} \Leftrightarrow m > 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 2 \\ m > 4 \end{array}\right.$$

$* \ af(0) = 3\log_2 m - 2 > 0$

$\log_2 m$	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$af(0) > 0$		//////////	0	+	

$$\Leftrightarrow \log_2 m > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log \frac{m}{\sqrt[3]{4}} > 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{m}{\sqrt[3]{4}} \Leftrightarrow m > \sqrt[3]{4}$$

$* \ S = 2\log_2 m > 0 \Leftrightarrow \log_2 m > 0 \Leftrightarrow m > 1$

ដូចនេះដើម្បីអោយមានចំលើយបួនលុះត្រាតែ
$m \in]\sqrt[3]{4}, 2[\cup]4, +\infty[$

7- កំណត់ $m \in \mathbb{R}$ ដើម្បីអោយសមីការមានចំលើយពីរ

$$e^{2x} - 2e^{x}\cdot\log_2 m + 3\log_2 m - 2 = 0$$

(ប្រលងចូលសាលាគរុវិជ្ជាជាន់ខ្ពស់ KOLOMEN)

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $m>0$

តាង $e^x = y\,;\ y>0 \iff x = \ln y$ នោះសមីការសមមូល

$$y^2 - 2y\log_2 m + 3\log_2 m - 2 = 0 \quad (1)$$

ដើម្បីអោយសមីការគេអោយមានចំលើយពីរ លុះត្រាតែសមីការ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា វិជ្ជមាន $0<y_1<y_2$ មានន័យថា

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(0) > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

* $\Delta' = \log_2^2 m - 3\log_2 m + 2$

$\log_2 m$	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\Delta'>0$		+	0	//////	0	+	

$$\Delta'>0 \iff \left[\begin{array}{l} \log_2 m < 1 \\ \log_2 m > 2 \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \log_2 m - \log_2 2 < 0 \iff \log_2 \frac{m}{2} < 0 \\ \log_2 m - \log_2 2^2 > 0 \iff \log \frac{m}{4} > 0 \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \frac{m}{2} < 1 \\ \frac{m}{4} > 1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} m < 2 \\ m > 4 \end{array}\right.$$

$\frac{m}{2}$	0		1		$+\infty$
$\log_2 \frac{m}{2}<0$	‖	−	0	//////	

$\frac{m}{4}$	0		1		$+\infty$
$\log_2 \frac{m}{4}>0$	‖	//////	0	+	

$$m \in \left]-\infty, 2\right[\cup \left]4, +\infty\right[$$

* $af(0) = 3\log_2 m - 2$

$\log_2 m$		0		$2/3$		$+\infty$
$af(0)>0$	//////		//////	0	+	

$$\log_2 m > \frac{2}{3} = \log_2 \sqrt[3]{4} \iff \log_2 \frac{m}{\sqrt[3]{4}} > 0$$

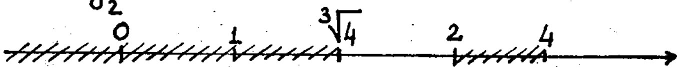
$\frac{m}{\sqrt[3]{4}}$	0		1		$+\infty$
$\log_2 \frac{m}{\sqrt[3]{4}}>0$	‖	//////	0	+	

$$\log_2 \frac{m}{\sqrt[3]{4}} > 0 \iff \frac{m}{\sqrt[3]{4}} > 1 \iff m > \sqrt[3]{4}$$

* $S = 2\log_2 m$

m	0	1	$+\infty$
$S>0$	‖////////	0	+

$\log_2 m > 0 \iff 1 < m$



ដូចនេះ ចំលើយគឺ $m \in \left]\sqrt[3]{4}, 2\right[\cup \left]4, +\infty\right[$

(8-) ដោះស្រាយសមីការ $64.9^x - 84.12^x + 27.16^x = 0$
(ប្រលងចូលវិទ្យាស្ថានពហុបច្ចេកទេសទីក្រុង KIEV)

$\Rightarrow 64.\left(\frac{9}{12}\right)^x + 27\left(\frac{16}{12}\right)^x - 84 = 0$ (ចែកអង្គទាំង2នឹង 12^x)

$64\left(\frac{3}{4}\right)^x + 27\left(\frac{4}{3}\right)^x - 84 = 0$

$64\left(\frac{3}{4}\right)^x + 27\left(\frac{3}{4}\right)^{-x} - 84 = 0$

$64\left(\frac{3}{4}\right)^x + \frac{27}{\left(\frac{3}{4}\right)^x} - 84 = 0$

តាង $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x \Rightarrow 64t + \frac{27}{t} - 84 = 0$

$64t^2 - 84t + 27 = 0$

$\Delta' = 1764 - 1728 = 36 = 6^2$

$t = \frac{42+6}{64} = \frac{3}{4}$, $t = \frac{42-6}{64} = \frac{9}{16}$

* ចំពោះ $t = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow x = 1$

* ចំពោះ $t = \frac{9}{16} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$\Rightarrow x = 2$

ដូចនេះចំលើយសមីការគឺ $x = 1, x = 2$

ដោះស្រាយសមីការ $2.9^{\log_2 \frac{x}{2}} = x^{\log_2 6} - x^2$

(ប្រលងចូលសាលាជាន់ខ្ពស់អាកាសចរ KAZAN)

ដោយហេតុថា * $2.9^{\log_2 \frac{x}{2}} = 2.9^{\log_2 x - \log_2 2} = 2.9^{\log_2 x - 1} = \frac{2.9^{\log_2 x}}{9}$

* $x^2 = 2^{\log_2 x^2} = 2^{2\log_2 x} = 4^{\log_2 x}$

* $x^{\log_2 6} = (2^{\log_2 x})^{\log_2 6} = (2^{\log_2 6})^{\log_2 x} = 6^{\log_2 x}$

$\Rightarrow 2.9^{\log_2 \frac{x}{2}} = x^{\log_2 6} - x^2$ សមមូលនឹងសមីការខាងក្រោម

$\frac{2.9^{\log_2 x}}{9} = 6^{\log_2 x} - 4^{\log_2 x}$

$\Leftrightarrow 2.9^{\log_2 x} = 9.6^{\log_2 x} - 9.4^{\log_2 x}$

$\Leftrightarrow 2.9^{\log_2 x} - 9.6^{\log_2 x} + 9.4^{\log_2 x} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2.9^{\log_2 x}}{4^{\log_2 x}} - \frac{9.6^{\log_2 x}}{4^{\log_2 x}} + 9 = 0$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $4^{\log_2 x}$)

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{9}{4}\right)^{\log_2 x} - 9\left(\frac{6}{4}\right)^{\log_2 x} + 9 = 0$

$2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}\right]^2 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} + 9 = 0$

តាង $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}$ យើងបានសមីការសមមូលនឹងសមីការ :

$2t^2 - 9t + 9 = 0$; $t = \frac{3}{2}$; $t = 3$

* ចំពោះ $t = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 2$

* ចំពោះ $t = 3 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{3/2} 3}$

$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_{\frac{3}{2}} 3 \Leftrightarrow x = 2^{\log_{3/2} 3} = 2^{\frac{1}{\log_3 \frac{3}{2}}} = 2^{\frac{1}{1-\log_3 2}}$

ដូចនេះចំលើយសមីការគឺ $x = 2$, $x = 2^{\frac{1}{1-\log_3 2}}$

10 ដោះស្រាយសមីការ $9^{1+\log_3 x} - 3^{1+\log_3 x} - 210 = 0$

(ប្រលងចូលវិទ្យាស្ថានពហុបច្ចេកទេស KIEV)

$\Rightarrow 3^{2(1+\log_3 x)} - 3^{1+\log_3 x} - 210 = 0 \quad , x > 0$

តាង $t = 3^{1+\log_3 x}$, $t > 0 \Rightarrow$ សមីការសមមូលនឹងសមីការខាងក្រោម $t^2 - t - 210 = 0$

$\Delta = 1 + 840 = 841 = 29^2$; $t = \frac{1+29}{2} = 15$

* ចំពោះ $t = -4 < 0$ មិនយក

* ចំពោះ $t = 15 \Rightarrow 3^{1+\log_3 x} = 15$

$\Rightarrow 3^{1+\log_3 x} = 3^{\log_3 15}$

$\Rightarrow 1 + \log_3 x = \log_3 15 \Rightarrow \log_3 3 + \log_3 x = \log_{13} 15$

$\Rightarrow \log 3x = \log_3 15 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$

ដូចនេះចំលើយរបស់សមីការគឺ : $x = 5$

11 - ដោះស្រាយសមីការ $4^{\lg x+1} - 6^{\lg x} - 2.3^{\lg x^2+2} = 0$

(ប្រលងចូលសាលាយ៉ាន់ខ្ពស់ KOLOMEN)

លក្ខខណ្ឌ : $x > 0 \Rightarrow 4.4^{\lg x} - 6^{\lg x} - 18.9^{\lg x} = 0$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $6^{\lg x}$)

$\Rightarrow 4\left(\frac{4}{6}\right)^{\lg x} - 18\left(\frac{9}{6}\right)^{\lg x} - 1 = 0$

$4\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} - 18\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x} - 1 = 0$

$4\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} - \frac{18}{\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x}} - 1 = 0$

តាង $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} \Rightarrow 4t^2 - t - 18 = 0$

$\Delta = 1 + 288 = 289 = 17^2$, $t = \frac{1+17}{8} = \frac{9}{4}$; $t = \frac{1-17}{8} = -\frac{16}{8}$ មិនយក

* $t = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = \frac{9}{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Rightarrow \lg x = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

ចំលើយសមីការគឺ $x=\frac{1}{100}$

12. ដោះស្រាយសមីការ $\log_n x+\log_{\sqrt{n}} x+\log_{\sqrt[3]{n}} x+\dots+\log_{\sqrt[n]{n}} x=\frac{n+1}{2}$
(ប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យអក្គិសនីទំរុងមូស្គូ)

សមីការមានន័យកាលណា $x>0$

យើងដឹងហើយថា $\log_{\sqrt{n}} x=\log_{n^{\frac{1}{2}}} x=2\log_n x$

$$\log_{\sqrt[3]{n}} x=\log_{n^{\frac{1}{3}}} x=3\log_n x$$

$$\log_{\sqrt[n]{n}} x=\log_{n^{\frac{1}{n}}} x=n\log_n x$$

ដូចនេះ សមីការខាងលើសមមូលនឹងសមីការខាងក្រោម

$$\log_n x+2\log_n x+3\log_n x+\dots+n\log_n x=\frac{n+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (1+2+3+\dots+n)\log_n x=\frac{n+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2}\log_n x=\frac{n+1}{2}\Leftrightarrow n\log_n x=1$$

$$\Leftrightarrow \log_n x=\frac{1}{n}\Leftrightarrow \log_n x=\log_n n^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow x=n^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{n}$$

ដូចនេះ សមីការមានចំលើយគឺ $x=\sqrt[n]{n}$

13 ដោះស្រាយសមីការ $x^{x^2-5x+8}=x^2$
(ដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសាជ្រើសរើសរបស់ VN)

យើងដោះស្រាយក្នុងករណីដែល $x\geqslant 0$

* ករណី1 $x=0$ គេបានអង្គខាងឆ្វេងនិងខាងស្តាំស្មើ 0 ដូចនេះ $x=0$ ជាឫសរបស់សមីការ

* ករណីទី2 $x>0$ គេបានសមីការខាងលើសមមូលនឹងសមីការ

$$\log x^{x^2-5x+8}=\log x^2$$

$$\Rightarrow (x^2-5x+8)\log x = 2\log x$$

$$\Rightarrow (x^2-5x+6)\log x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6=0 \\ \log x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ ឬ } x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

ដូចនេះសមីការខាងលើមានចំលើយ $x=1, x=2, x=3$

14 ដោះស្រាយសមីការ $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$
(ប្រលងចូលវិទ្យាស្ថានពហុបច្ចេកទេស IAROSLAV)

តាង $y = 2^{\sin^2 x}$ ដែល $1 \leq y \leq 2$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow 2^{\cos^2 x} = 2^{1-\sin^2 x} = \frac{2}{2^{\sin^2 x}}$$

$$\Rightarrow 2^{\cos^2 x} = \frac{2}{y}$$

សមីការដែលត្រូវដោះស្រាយអាចសរសេរ

$$y + \frac{2}{y} = 3 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$$

មានឫស $y=1$, $y=2$

* ចំពោះ $y=1 \Rightarrow 2^{\sin^2 x} = 1 \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} = 2^0$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

* ចំពោះ $y=2 \Rightarrow 2^{\sin^2 x} = 2 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ដូចនេះចំលើយសមីការគឺ $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

15 ដោះស្រាយសមីការ $2^{2\lg 4x-1} - 7^{\lg 4x} = 7^{\lg 4x-1} - 3.4^{\lg 4x}$

(ប្រលងចូលសាលាបច្ចេកទេសអគ្គិសនី NOVOXIBIR)

$$\Rightarrow \frac{2}{2}^{2\lg 4x} + 3.4^{\lg 4x} = \frac{7}{7}^{\lg 4x} + 7^{\lg 4x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2}^{\lg 4x} + 3.4^{\lg 4x} = \frac{7}{7}^{\lg 4x} + 7^{\lg 4x}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2}\cdot 4^{\lg 4x} = \frac{8}{7}\, 7^{\lg 4x}$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{\lg 4x} = \frac{16}{49} = \left(\frac{4}{7}\right)^2$$

$$\lg 4x = 2 \Rightarrow 4x = 10^2$$

$$\Rightarrow x = 25$$

16 ដោះស្រាយសមីការ $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$

(ប្រលងចូលសាកលវិទ្យាល័យរបស់រដ្ឋ IAROSLAV)

យើងដោះស្រាយក្នុងករណី $x \geqslant 0$ នោះសមីការសមមូលនឹង

$$2^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} \cdot 2^{(\sqrt{x}+3)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)} = 4$$

$$2^{\frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = 4 = 2^2$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = 2 \Rightarrow 3\sqrt{x} + 3 = 2x - 2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{x} - 2x + 3 = 0 \Rightarrow -2(\sqrt{x})^2 + 5(\sqrt{x}) + 3 = 0$$

តាង $t = \sqrt{x}$, $t > 0$

$$\Rightarrow -2t^2 + 5t + 3 = 0$$

$\Delta = 25 + 24 = 49$, $t = -\frac{1}{2}$ មិនយក

$t = 3$

ចំពោះ $t = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$

ចំលើយរបស់សមីការ គឺ $x = 9$

17. ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt{7^{2x^2-5x-6}} = (\sqrt{2})^{3\log_2 49}$
(ប្រលងចូលសាកលវិទ្យាល័យរបស់ UJCOROV

សមីការខាងលើសមមូលនិងសមីការ

$$7^{\frac{1}{2}(2x^2-5x-6)} = 2^{\frac{1}{2}3\log_2 7^2}$$

$$7^{\frac{1}{2}(2x^2-5x-6)} = 2^{3\log_2 7}$$

$$\log_7 7^{\frac{1}{2}(2x^2-5x-6)} = \log_7 2^{3\log_2 7}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(2x^2-5x-6)\log_7 7 = 3\log_2 7 \cdot \log_7 2$$

$$\frac{1}{2}(2x^2-5x-6) = 3 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x - 3 = 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0 .$$

$\Delta = 25 + 96 = 121 = 11^2$, $x = \frac{5+11}{4} = 4$; $x = \frac{5-11}{4} = -\frac{3}{2}$

ដូចនេះសមីការមានចំលើយ $x = -\frac{3}{2}$, $x = 4$

48. គេអោយ $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$ គណនា $\log_{35} 28$ ជាអនុគមន៍នៃ a និង b

$$\log_{35} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{1 + \log_{14} 2}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5} = \frac{1 + \log_{14} 2}{a + b}$$

តែដោយ $\log_{14} 2 = \log_{14}\left(\frac{14}{7}\right) = \log_{14} 14 - \log_{14} 7 = 1 - a$

ដូចនេះ: $\log_{35} 28 = \frac{1 + 1 - a}{a + b} = \frac{2 - a}{a + b}$

ផ្នែកទី II

ដំណោះស្រាយ
វិសមីការ
អុិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1. ដោះស្រាយវិសមីការ $25.2^x - 10^x + 5^x > 25$
(ប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យនៅ VN ឆ្នាំ 1976)

$$25.2^x - 10^x + 5^x > 25$$

$$\Leftrightarrow \quad 5^2.2^x - 2^x.5^x + 5^x - 5^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^x(5^2 - 5^x) + (5^x - 5^2) > 0$$

$$2^x(5^2 - 5^x) - (5^2 - 5^x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (5^2 - 5^x)(2^x - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^2 - 5^x > 0 \\ 2^x - 1 > 0 \end{cases} (1) \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} 5^2 - 5^x < 0 \\ 2^x - 1 < 0 \end{cases} (2)$$

$\Rightarrow$ (1) យើងបាន $5^2 > 5^x \Rightarrow x < 2$

$2^x > 1 \Rightarrow x > 0$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធ (1) មានចំលើយ $0 < x < 2$

$\Rightarrow$ (2) យើងបាន $5^2 < 5^x \Rightarrow x > 2$

$2^x < 1 \Rightarrow x < 0$

ដូចនេះប្រព័ន្ធ (2) មានចំលើយ $x < 0$ និង $x > 2$

2 ដោះស្រាយវិសមីការ $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 2^{\frac{2x}{x+1}}$, $x \neq -1$
(ប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យនៅ V.N ឆ្នាំ 1977)

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x > 2^{\frac{2x}{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4^{-x} > 4^{\frac{x}{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad -x > \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{x+1} + x < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x + x^2 + x}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x(x+2)}{x+1} < 0$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x(x+2)}{x+1}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

ដូចនេះវិសមីការមានចំលើយកាលណា $x<-2$, $-1<x<0$

3 - ដោះស្រាយវិសមីការ $(x^2-1)^{x^2+2x} > (x^2-1)^3$
(ប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យនៅ V.N ឆ្នាំ 1978)

វិសមីការមានន័យកាលណា $x^2-1>0 \Leftrightarrow x<-1$ ឬ $x>1$ (1)

* បើ $x^2-1<1 \Leftrightarrow x^2-2<0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ (2)

គេបាន $(x^2-1)^{x^2+2x} > (x^2-1)^3 \Rightarrow x^2+2x<3$

$\Rightarrow x^2+2x-3<0 \Leftrightarrow -3<x<1$ (3)

(1), (2), និង (3) យើងបាន :

$E_1 =]-\sqrt{2}, -1[$

* បើ $x^2-1=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2} \Rightarrow$ (1) គ្មានចំលើយ
* បើ $x^2-1>1 \Leftrightarrow x<-\sqrt{2}$ ឬ $x>\sqrt{2}$ (4)

គេបាន $(x^2-1)^{x^2+2x} > (x^2-1)^3 \Rightarrow x^2+2x>3$

$\Rightarrow x^2+2x-3>0 \Leftrightarrow x<-3$ ឬ $x>1$ (5)

(1), (4), (5) $\Rightarrow E_2 =]-\infty, -3[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

ចំលើយវិសមីការគឺ : $E = E_1 \cup E_2$

$E =]-\infty, -3[\cup]-\sqrt{2}, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

4- ដោះស្រាយសមីការ $(3^x-1)(\log_3 x-1)(9-3^x)\leqslant 0$
ដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសាប្រឡងចូលមហាវិទ្យាល័យ
V. N

ដើម្បីដោះស្រាយ យើងត្រូវសិក្សាសញ្ញារបស់កន្សោមនីមួយៗ

* 3^x-1 មានឫសស្មើ 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
3^x-1		$-$	0	$+$	

* $9-3^x$ មានឫសស្មើ 2

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$9-3^x$		$+$	0	$-$	

* $\log_3 x-1$ មានន័យកាលណា $x>0$ ហើយវាមានឫសស្មើ 3

x	$-\infty$	0		3		$+\infty$
$\log_3 x-1$	//////		$-$	0	$+$	

ដូចនេះយើងបានតារាងសញ្ញារបស់វិសមីការខាងលើដូចខាងក្រោម

x		0		2		3		$+\infty$
3^x-1	//////	0	$+$		$+$		$+$	
$9-3^x$	//////		$+$	0	$-$		$-$	
$\log_3 x-1$	//////		$-$		$-$	0	$+$	
$(3^x-1)(9-3^x)(\log_3 x-1)$	//////		$-$	0	////+////	0	$-$	

ដូចនេះវិសមីការមានចម្លើយ $x\in\,]0,2[\,\cup\,]3,+\infty[$

5. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

ក. $(0,4)^{\log^2 x+1}=(6,25)^{2-\lg x^3}$

ខ. $(0,6)^x\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$

គ. $6.9^{\frac{1}{x}}-13.6^{\frac{1}{x}}+6.4^{\frac{1}{x}}=0$

ក. $(0,4)^{\log^2 x+1}=(6,25)^{2-\lg x^3}$ មានន័យកាលណា $x>0$, គេបាន

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x+1}=\left(\frac{25}{4}\right)^{2-\lg x^3}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2(2-\lg x^3)}$$

$$\Rightarrow \lg^2 x + 1 = -4 + 2\lg x^3$$

$$\Rightarrow \lg^2 x + 1 = -4 + 6\lg x$$

$$\Rightarrow \lg^2 x - 6\lg x + 5 = 0$$

* $\lg x = 1 \Rightarrow x = 10$
* $\lg x = 5 \Rightarrow x = 10^5$

សមីការមានចំលើយ $x = 10, x = 10^5$

ខ- $(0{,}6)^x \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{5}{3}\right)^{2(x^2-12)} = \left(\frac{3}{5}\right)^9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x-2x^2+24} = \left(\frac{3}{5}\right)^9$$

$$\Rightarrow -2x^2 + x + 15 = 0$$

$\Delta = 1 + 120 = 121 = 11^2$, $x = \frac{-1+11}{-4} = -\frac{5}{2}$; $x = \frac{-1-11}{-4} = -3$

សមីការមានចំលើយ $x = -\frac{5}{2}, x = -3$

គ- $6.9^{\frac{1}{x}} - 13.6^{\frac{1}{x}} + 6.4^{\frac{1}{x}} = 0$

កាលណា $x \neq 0$ គេបាន : ដោយ $9^{\frac{1}{x}} > 0$

$$\Rightarrow -13\left(\frac{6}{9}\right)^{\frac{1}{x}} + 6\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{x}} + 6 = 0$$

$$\Rightarrow -13\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} + 6\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 6 = 0$$

តាង $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/x}$, $t > 0$

$$\Rightarrow 6t^2 - 13t + 6 = 0$$

$\Delta = 961 - 144 = 25$, $t = \frac{3}{2}$, $t = \frac{2}{3}$

* ចំពោះ $t = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{1/x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$
* ចំពោះ $t = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{1/x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Rightarrow x = -1$

ចំលើយសមីការគឺ $x = 1, x = -1$.

6 - ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

1 - $(0,3)^{2x^2-3x+6} < 0,00243$

2 - $4^{-x+0,5} - 7.2^{-x} - 4 < 0$

3 - $x^2.5^x - 5^{2+x} < 0$

4 - $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$

5 - $5^{2x+1} > 5^x + 4$

① $(0,3)^{2x^2-3x+6} < 0,00243$

វិសមីការកំនត់បាន ដូចនេះ:

$\Rightarrow \left(\frac{3}{10}\right)^{2x^2-3x+6} < \frac{243}{100\,000} = \left(\frac{3}{10}\right)^5$

ដោយ $0 < \frac{3}{10} < 1$ គេបាន

$2x^2-3x+6 > 5 \Rightarrow 2x^2-3x+1 > 0$

$\Rightarrow 2(x-1)(x-\frac{1}{2}) > 0$ មានឫស $x=1, x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2x^2+3x+1$		$+$	0	//////	0	$+$	

ចំលើយវិសមីការគឺ $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]1,+\infty[$

② $4^{-x+0,5} - 7.2^{-x} - 4 < 0$

$4^{-x}.4^{1/2} - 7.2^{-x} - 4 < 0$

$2.2^{-2x} - 7.2^{-x} - 4 < 0$, តាង $t = 2^{-x} > 0$

$\Rightarrow 2t^2 - 7t - 4 < 0$ មានឫស

$\Delta = 49 - 32 = 81$, $t = 4$, $t = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2(t-4)(t+\frac{1}{2}) < 0$

ដោយ $t > 0 \Rightarrow t + \frac{1}{2} > 0$ ជានិច្ច ។

ដូចនេះ: $t - 4 < 0 \Rightarrow t < 4$

$\Rightarrow 2^{-x} < 4 \quad \Rightarrow 2^{-x} < 2^{2}$

$\Rightarrow -x < 2 \quad \Rightarrow x > -2$

ចំលើយវិសមីការគឺ $x \in]-2, +\infty[$

③. $x^{2}.5^{x} - 5^{2+x} < 0$

$\Rightarrow x^{2}5^{x} - 5^{2}5^{x} < 0 \Rightarrow 5^{x}(x^{2} - 5^{2}) < 0$

ដោយ $5^{x} > 0 \Rightarrow x^{2} - 5^{2} < 0$

$\Rightarrow x^{2} < 5^{2}$

$\Rightarrow -5 < x < 5$

ដូចនេះវិសមីការមានចំលើយ $x \in]-5, 5[$

④. $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leqslant 9$

$\Rightarrow 4.2^{x} - 2.2^{x} + \frac{2^{x}}{2} - \frac{2^{x}}{4} \leqslant 9$

$2^{x}\left(4 - 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \leqslant 9$

$2^{x}\left(\frac{16 - 8 + 2 - 1}{4}\right) \leqslant 9$

$\frac{9}{4}.2^{x} \leqslant 9 \Rightarrow 2^{x} \leqslant 4$

$\Rightarrow x \leqslant 2$

ដូចនេះវិសមីការមានចំលើយ $x \in]-\infty, 2]$

⑤ $5^{2x+1} > 5^{x} + 4$

$\Rightarrow 5.5^{2x} - 5^{x} - 4 > 0$

តាង $t > 0$, $t = 5^{x} \Rightarrow 5t^{2} - t - 4 > 0$

មានឫស $t = 1$, $t = -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow 5(t-1)(t+\frac{4}{5}) > 0$, ដោយ $t + \frac{4}{5} > 0, \forall t$

$\Rightarrow t - 1 > 0 \Rightarrow t > 1$

$\Rightarrow 5^{x} > 1 \Rightarrow x > 0$

វិសមីការមានចំលើយ $x > 0$

7- ដោះស្រាយវិសមីការ

ក. $x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} > 1000$

ខ. $3^{4-3x} - 35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geqslant 0$

គ. $2^{3-6x} > 1$

ឃ. $16^{x} > 0,125$

ក. $x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} > 1000$

មានន័យកាលណា $x > 0$

* ករណីដែល $0 < x \leqslant 1$ វិសមីការមិនពិត
* ករណីដែល $x > 1$ គេបាន :

$\Rightarrow (\lg^2 x - 3\lg x + 1)\lg x > \lg 10^3$

$\Rightarrow \lg^3 x - 3\lg^2 x + \lg x - 3 > 0$

តាង $t = \lg x \Rightarrow t^3 - 3t^2 + t - 3 > 0$

$\Rightarrow t(t^2+1) - 3(t^2+1) > 0$

$\Rightarrow (t-3)(t^2+1) > 0$ ដោយ $t^2+1 > 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow t - 3 > 0 \Rightarrow t > 3$ ដូចនេះ គេបាន :

$t > 3 \Rightarrow \lg x > 3 \Rightarrow x > 10^3$

ដូចនេះវិសមីការមានចំលើយ $x > 10^3$

ខ. $3^{4-3x} - 35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geqslant 0$

$\Rightarrow 9.3^{2-3x} - \frac{35}{3^{2-3x}} + 6 \geqslant 0$

តាង $t = 3^{2-3x} > 0 \Rightarrow 9t - \frac{35}{t} + 6 \geqslant 0$

$\Rightarrow 9t^2 + 6t - 35 \geqslant 0$

$\Delta' = 9 + 315 = 324 = 18^2$

$t = \frac{15}{9}$, $t = -\frac{21}{9}$

$9\left(t - \frac{15}{9}\right)\left(t + \frac{21}{9}\right) \geqslant 0$, ដោយ $t + \frac{21}{9} > 0$

$\Rightarrow t - \frac{15}{9} \geqslant 0 \Rightarrow t \geqslant \frac{15}{9}$

$\Rightarrow 3^{2-3x} \geqslant \frac{15}{9} \Rightarrow 3^{2-3x} \geqslant \frac{5}{3}$

$\Rightarrow 2 - 3x \geqslant \log_3 \frac{5}{3} = \log_3 5 - 1$

$\Rightarrow -3x \geqslant \log_3 5 - 3 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{3}\log_3 5 + 1$

ដូចនេះវិសមីការមានចំលើយ $x \leqslant 1 - \frac{1}{3}\log_3 5$

ឬ $x \in \left]-\infty, 1 - \frac{1}{3}\log_3 5\right]$

គ. $2^{3-6x} > 1$

$\Rightarrow 2^{3-6x} > 2^0 \Rightarrow 3 - 6x > 0$

$\Rightarrow -6x > -3 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

វិសមីការមានចំលើយ $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

ឃ. $16^x > 0,125$

$\Rightarrow 2^{4x} > \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$

$2^{4x} > 2^{-3} \Rightarrow 4x > -3$

$\Rightarrow x > -\frac{3}{4}$

វិសមីការមានចំលើយ $x \in \left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

8. ដោះស្រាយវិសមីការ $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{2-|x|}} > 9$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{2-|x|}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$\Rightarrow \frac{|x+2|}{2-|x|} < -2 \Rightarrow \frac{|x+2|}{2-|x|} + 2 < 0$

$|x+2|$ មានឫស $x = -2$

$|x|$ មានឫស $x = 0$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$\|x+2\|$	$-$	0	$+$		$+$
$\|x\|$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{\|x+2\|}{2+\|x\|}+2$	$-\frac{(x+2)}{2+x}+2$		$\frac{x+2}{2+x}+2$		$\frac{x+2}{2-x}+2$

* ចំពោះ: $x < -2$

$\Rightarrow \frac{-x-2+4+2x}{2+x} < 0 \Rightarrow \frac{x+2}{2+x} < 0 \Leftrightarrow 1 < 0,\ x \neq -2$ មិនពិត

* ចំពោះ: $-2 < x < 0$

$\Rightarrow \frac{x+2+4+2x}{2+x} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x+6}{2+x} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{3(x+2)}{x+2} < 0 \Leftrightarrow 3 < 0$ មិនពិត $x \neq -2$

* ចំពោះ: $x > 0$

$\Rightarrow \frac{x+2+4-2x}{2-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x+6}{2-x} < 0$ មានឫស $x=6, x=2$

x	$-\infty$	2		6	$+\infty$
$-x+6$	$+$		$+$	0	$-$
$2-x$	$+$	0	$-$		$-$
$-\frac{x+6}{2-x}$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow 2 < x < 6$

ត្រូវនឹងលក្ខខណ្ឌ $x > 0$ ដូចនេះវិសមីការមានចំលើយ $x \in]2,6[$

៩ ដោះស្រាយវិសមីការ

$$x^2.2^{2x} + 9(x+2)2^x + 8x^2 \leqslant (x+2)2^{2x} + 9x^2 2^x + 8x + 16$$

$$\Rightarrow x^2.2^{2x} + 9(x+2)2^x + 8x^2 - (x+2)2^{2x} - 9x^2 2^x - 8x - 16 \leqslant 0$$

$$(x+2)2^x(9-2^x) + x^2 2^x(2^x - 9) + 8(x^2 - x - 2) \leqslant 0$$

$$2^x(9-2^x)(x+2-x^2) + 8(x^2-x-2) \leqslant 0$$

$$-2^x(9-2^x)(x^2-x-1) + 8(x^2-x-2) \leqslant 0$$

$$(x^2-x-2)\left[-2^x(9-2^x)+8\right] \leqslant 0$$

* $x^2 - x - 2$ មានឫស $x = -1$, $x = 2$
* $-2^x(9-2^x) + 8 = -2^x.9 + 2^{2x} + 8 = 0$

$\Rightarrow 2^{2x} - 9.2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1$, $2^x = 8$

$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

x	$-\infty$	-1		0		2		3	$+\infty$
x^2-x-2	+	0	−		−	0	+		+
$2^{2x}-9.2^x+8$	+		+	0	−		−	0	+
$P(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+

ដូចនេះវិសមីការមានចំលើយគឺ

$x \in [-1,0] \cup [2,3]$

10 ដោះស្រាយវិសមីការ $|x|^{x^2-x-2} < 1$ (1)
(ដកស្រង់ពីវិញ្ញាសាត្រៀមប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យនិង សិស្សពូកែ)

របៀបទី1 : ពិនិត្យករណី

* $|x| = 1 \Rightarrow$ (1) មានរាង $1<1$ គ្មានឫស
* $|x| > 1 \Rightarrow x<-1$ និង $1<x$ (2)

(1) និង (2) $\Rightarrow x^2-x-2<0 \Leftrightarrow -1<x<2$ (3)

(2) និង (3) $\Rightarrow 1<x<2$ (4)

* $\begin{cases} |x|<1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<1 \\ x\neq 0 \end{cases}$ (5)

(1) និង (5) $\Rightarrow$

$x^2-x-2>0 \Rightarrow -1<x$ និង $2<x$ (6)

(5) និង (6) យើងមានករណី $|x|<1 \Rightarrow$ (1) គ្មានឫស

* $x=0 \Rightarrow$ អង្គខាងឆ្វេងរបស់ (1) គ្មានន័យ

សេចក្ដីសន្និដ្ឋាន : (1) មានឫស : $1<x<2$

របៀបទី2 : ពីលក្ខណៈកើននិងចុះរបស់អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល : (1) $\Leftrightarrow (|x|-1)(x^2-x-2)<0$ (1')

ដោះស្រាយ (1') ដោយបង្កើតតារាង :

x	$-\infty$	-1		0		1		2		$+\infty$
$\lvert x\rvert-1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-2	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
	$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow$ ឫស : $1<x<2$ ។

11 - ចំពោះតំលៃណារបស់ m ទើបសមីការ : $\log_2(1-x-x^2) = m-1+m^2\lg_{(1-x-x^2)}2$ មានឫស ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $0<x<\frac{1}{2}$?
(ដកស្រង់ពីវិញ្ញាសារប្រឡងប្រជែងចូលមហាវិទ្យាល័យនិងសិស្សពូកែ)

យើងមាន : $\begin{cases} 1-x-x^2 \geq 0 \\ 1-x-x^2 \neq 1 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x \neq 0 \;,\; x \neq -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{1}{2} < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

តាង $\lg_2(1-x-x^2) = t \Rightarrow$ សមីការខាងលើមានរាង
$t = m-1+\frac{m^2}{t}$ ឬ $t^2-(m-1)t-m^2 = 0$

កាលណា $0<x<\frac{1}{2} \Rightarrow -2<t<0$
ដូចនេះ សមីការមានឫសផ្ទៀងផ្ទាត់ $0<x<\frac{1}{2}$ បើ ត្រីធា $f(t) = t^2-(m-1)t-m^2$ មានឫសនៅក្នុងចន្លោះ $(-2,0)$ ។

ពិនិត្យ 3 ករណី

1/- ឫសទាំងពីររបស់ត្រីធានៅក្នុងចន្លោះ $(-2,0)$ លក្ខខណ្ឌនេះសមមូល:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-2) > 0 \\ af(0) > 0 \\ -2 < \frac{S}{2} < 0 \end{cases}$$

ប្រព័ន្ធនេះគ្មានឫស

2/- ត្រីធាមានឫសមួយនៅចន្លោះ $(-2,0)$ លក្ខខណ្ឌនេះសមមូលនឹង:
$f(-2)\,f(0) < 0$ ឬ : $(-m^2+2m+2)(-m^2) < 0$ ឬ :
$1-\sqrt{3} < m < 1+\sqrt{3}$ ។

3/ ត្រីធាមានឫសមួយស្មើ 0 ឬមានឫសមួយស្មើ -2 ហើយឫសមួយទៀតនៅចន្លោះ $(-2,0)$ ចំពោះ $f(0)=0 \Rightarrow m=0$
$\Rightarrow f(t) = t^2+t$ មានឫស $t=-1 \Rightarrow$ ឫសនេះនៅចន្លោះ$(-2,0)$

ចំពោះ $f(-2)=0 \Rightarrow m = 1\pm\sqrt{3}$ ក្នុងករណីនេះត្រីធាមាន
ឫសពីរដូចគ្នា ។ ដូចនេះឫសផ្សេងទៀតមិនអាចនៅក្នុងចន្លោះ
$(-2,0)$ សរុបមកតំលៃរបស់ m គឺ : $1-\sqrt{3} < m < 1+\sqrt{3}$

12 ដោះស្រាយវិសមីការ $2^{x^2}+2^{\sin^2 x} \leqslant 1+\sqrt{1-a^2}$; $-1\leqslant a\leqslant 1$
(ដកស្រង់ពីវិញ្ញាសារប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យនិងសិស្សពូកែ)

យើងមាន : $2^{x^2} \geqslant 2^0 = 1$

$2^{\sin^2 x} \geqslant 2^0 = 1$

$\Rightarrow 2^{x^2}+2^{\sin^2 x} \geqslant 2$ (1) សញ្ញាស្មើមានកាលណា

$$\begin{cases} 2^{x^2} = 1 \\ 2^{\sin^2 x} = 1 \end{cases}$$

1) បើ $a \neq 0$ នោះ $1+\sqrt{1-a^2} < 2$

$\Rightarrow 2^{x^2}+2^{\sin^2 x} \geqslant 2 > 1+\sqrt{1-a^2}$

$\Rightarrow$ វិសមីការគ្មានឫស ។

2) បើ $a=0$ នោះ $1+\sqrt{1-a^2} = 2$

$\Rightarrow 2^{x^2}+2^{\sin^2 x} \geqslant 2 = 1+\sqrt{1-a^2}$

ក្នុងករណីនេះវិសមីការខាងលើសមមូលនឹងសមីការ :
$2^{x^2}+2^{\sin^2 x} = 2$ មានន័យថា សញ្ញាស្មើរបស់(1)មាន ។

ដូចនេះ $\begin{cases} 2^{x^2} = 1 \\ 2^{\sin^2 x} = 1 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ប្រព័ន្ធនេះមានឫស $x=0$

សរុបមក : 1) បើ $a\neq 0$ នោះវិសមីការគ្មានឫស

2) បើ $a=0$ នោះវិសមីការមានឫស $x=0$

13 ដោះស្រាយវិសមីការ : $10^x \leqslant \lg x$
(ប្រធានដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសារត្រៀមចូលមហាវិទ្យាល័យនិងសិស្សពូកែ

លក្ខខណ្ឌដើម្បីអោយ $\lg x$ មានន័យ : $x>0$

1) បើ $0<x\leq 1$ នោះ $\lg x \leq \lg 1 = 0 < 10^x$

ដូចនេះក្នុងចន្លោះនេះ វិសមីការគ្មានឫស ។

2) បើ $1<x\leq 10$ នោះ $\lg x \leq \lg 10 < x \leq 10 < 10^x$

ដូច្នេះក្នុងចន្លោះនេះវិសមីការក៏គ្មានឫស

យើងបង្ហាញថា ក្នុងគ្រប់ចន្លោះ $(10^n, 10^{n+1})$, n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ វិសមីការគ្មានឫស ។

ចំពោះ $n=0$ នោះតាម 2) លក្ខខណ្ឌនេះត្រឹមត្រូវ ។ ឧបមាថា សន្និដ្ឋាននេះត្រឹមត្រូវចំពោះ $n=k$ (ចំនួនគត់វិជ្ជមាន) យើងនឹងបង្ហាញថាត្រឹមត្រូវចំពោះ $n=k+1$ ។

ដូច្នេះ តាមសម្មតិកម្មកំណើន នោះកាលណា $10^k<x\leq 10^{k+1}$ យើងបាន , $10^x > \lg x$

ពិនិត្យ $10^{k+1}<x\leq 10^{k+2}$

$\Rightarrow 10^k < \frac{x}{10} \leq 10^{k+1}$

$\Rightarrow 10^{\frac{x}{10}} > \lg\frac{x}{10}$

ឬ $10^{\frac{x}{10}} > \lg x - 1$

ឬ $10^{\frac{x}{10}} + 1 > \lg x$

ម្យ៉ាងទៀត $10^x = 5^x 2^x > 2.2^x = 2^x+2^x > 2^x+1 >$

$> (\sqrt[10]{10})^x + 1 = 10^{\frac{x}{10}}+1$ កាលណា $x\geq 1$

$\Rightarrow 10^x > \lg x$

ដូចនេះ វិសមីការខាងលើគ្មានឫស ។

ផ្នែកទី III

ដំណោះស្រាយ
សមីការ

លោការីត

1 ដោះស្រាយសមីការលោការីត : $x+\lg(1+2^x)=x\lg5+\lg6$
(ប្រឡងចូលវិទ្យាស្ថានពហុបច្ចេកទេស IAROSLAV)

លោការីតមាននិយមន័យកាលណា

$1+2^x>0 \Rightarrow 2^x>-1$ ពិតជានិច្ចចំពោះគ្រប់តំលៃ x

$\Rightarrow x-x\lg5+\lg(1+2^x)=\lg6$

$x(1-\lg5)+\lg(1+2^x)=\lg6$

$x\lg2+\lg(1+2^x)=\lg6$

$\lg 2^x(1+2^x)=\lg6$

$2^x(1+2^x)=6$

$\Rightarrow 2^x+2^{2x}-6=0$ តាង $t=2^x \Rightarrow t^2+t-6=0$

មានឫស $t=2$, $t=-3$

* ចំពោះ $t=-3 \Rightarrow 2^x=-3$ មិនពិត

* ចំពោះ $t=2 \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x=1$

ដូចនេះ សមីការ មានឫស $x=1$

2 . ដោះស្រាយសមីការ $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1$
(ប្រឡងចូលមហាវិទ្យាល័យ មុនដំណាញ់ទីក្រុងមូស្គូ

លោការីតមាននិយមន័យកាលណា $x>0$, $x\neq1$

$\Rightarrow \log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1$

$\Rightarrow (\log_x 125+1)\log_{25}^2 x=1$

$\Rightarrow \left(\frac{\log_{25}125}{\log_{25}x}+1\right)\log_{25}^2 x=1$

$\Rightarrow \left(\frac{3/2}{\log_{25}x}+1\right)\log_{25}^2 x=1$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2\log_{25} x}+1\right)\log_{25}^2 x = 1$$

តាង $t = \log_{25} x \Rightarrow \left(\frac{3}{2t}+1\right)t^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}t + t^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2t^2+3t-2=0$$

$$\Delta = 9+16 = 25 \Rightarrow t = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{-3-5}{4} = -2$$

* ចំពោះ $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{25} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 5$

* ចំពោះ $t = -2 \Rightarrow \log_{25} x = -2 \Rightarrow x = 25^{-2} = 5^{-4}$

ដោយលក្ខខណ្ឌ $x>0$, $x \neq 1$

$\Rightarrow$ សមីការ មានចំលើយគឺ $x = 5$, $x = 5^{-4}$

3 – ដោះស្រាយសមីការ $\log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4) = 2 - \dfrac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(2-2x^2)}$

(ប្រលងចូលសាលាជាន់ខ្ពស់អាកាសចរ KAZAN

មាននិយមន័យកាលណា :

$$\begin{cases} 2-x^2-x^4>0 \\ 2-2x^2>0 \\ 2-2x^2\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(x^2-1)(x^2+2)>0 \\ 2(1-x^2)>0 \\ 2(1-x^2)\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+1>0 \\ 1-x^2\neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2<1 \\ x^2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<1 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \left]-1,0\right[\cup \left]0,1\right[$$

$$\Rightarrow \frac{\log_{4/3}(2-x^2-x^4)}{\log_{4/3} 2(1-x^2)} = 2 - \frac{1}{\log_{\frac{4}{3}} 2(1-x^2)}$$

$$\Rightarrow \log_{4/3}[-(x^2-1)(x^2+2)] = 2\log_{4/3} 2(1-x^2) - 1$$

$$\Rightarrow \log_{4/3}[-(x^2-1)(x^2+2) - 2\log_{4/3}[-2(x^2-1)] = -1$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{4}{3}} \frac{[-(x^2-1)(x^2+2)]}{4(x^2-1)^2} = -1 = \log_{4/3}\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow -\frac{(x^2+2)}{4(x^2-1)} = \frac{3}{4} \Rightarrow 16x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

ដូចនេះសមីការមានចំលើយ $x = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{2}$

4 ដោះស្រាយសមីការ $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$
(ប្រលងចូលសាលាជាន់ខ្ពស់ KOLOMEN)

លោការីតមានន័យ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

$$\Rightarrow \frac{\log_3 3}{\log_3 x} + \log_3 x = \frac{\log_3 3}{\log_3 \sqrt{x}} + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = \frac{1}{\log_3 \sqrt{x}} + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x - \frac{2}{\log_3 x} - \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2} = 0$$

តាង $t = \log_3 x \Rightarrow \frac{1}{t} + t - \frac{2}{t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{2 + 2t^2 - 4 - t^2 - t}{2t} = 0 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

មានឬស $t = -1$, $t = 2$

* ចំពោះ $t = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
* ចំពោះ $t = 2 \Rightarrow \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9$

ដូចនេះសមីការ មានចំលើយ $x = \frac{1}{3}$, $x = 9$

5 ដោះស្រាយសមីការ $2.9^{\log_2 \frac{x}{2}} = x^{\log_2 6} - x^2$
(ដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសាប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យ)

យើងបាន * $2.9^{\log_2 \frac{x}{2}} = 2.9^{\log_2 x - \log_2 2} = 2.9^{\log_2 x - 1} = \frac{2.9^{\log_2 x}}{9}$

* $x^{\log_2 6} = (2^{\log_2 x})^{\log_2 6} = (2^{\log_2 6})^{\log_2 x} = 6^{\log_2 x}$
* $x^2 = 2^{\log_2 x^2} = 2^{2\log_2 x} = 4^{\log_2 x}$

សមីការអាចសរសេរ : $\frac{2.9^{\log_2 x}}{9} = 6^{\log_2 x} - 4^{\log_2 x}$

$\Leftrightarrow 2.9^{\log_2 x} = 9.6^{\log_2 x} - 9.4^{\log_2 x}$

$\Leftrightarrow 2.9^{\log_2 x} - 9.6^{\log_2 x} + 9.4^{\log_2 x} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2.9^{\log_2 x}}{4^{\log_2 x}} - \frac{9.6^{\log_2 x}}{4^{\log_2 x}} + 9 = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{9}{4}\right)^{\log_2 x} - 9\left(\frac{6}{4}\right)^{\log_2 x} + 9 = 0$

$2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x}\right]^2 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} + 9 = 0$

តាង $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} \Rightarrow 2t^2 - 9t + 9 = 0$

$\Delta = 81 - 72 = 9 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = 3 \end{cases}$

* ចំពោះ $t = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$
* ចំពោះ $t = 3 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = 3 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log_{\frac{3}{2}} 3}$

$\Rightarrow \log_2 x = \log_{3/2} 3 \Rightarrow x = 2^{\log_{3/2} 3} = 2^{\frac{1}{1-\log_3 2}}$

6. **ដោះស្រាយសមីការ $\log_{x-1} 3 = 2$**

លក្ខខណ្ឌមានន័យកាលណា $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$x \in]1, 2[\cup]2, +\infty[$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_3(x-1)} = 2 \Leftrightarrow 2\log_3(x-1) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)^2 = \log_3 3$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$

$\Delta = 1+2 = 3 \Rightarrow x = 1+\sqrt{3}$, $x = 1-\sqrt{3}$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

ចំលើយសមីការគឺ $x = 1+\sqrt{3}$

7- ដោះស្រាយសមីការលោការីត $\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x} = 1$
(ប្រលងចូលសាលាបច្ចេកទេស RADIO TAGANROG)

មានន័យកាលណា :

$$\begin{cases} 9-2^x>0 \\ 3-x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x<9 \\ x\neq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\log_2 9 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_2(9-2^x) = 3-x \Rightarrow \log_2(9-2^x) = \log_2 2^{(3-x)}$$

$$\Rightarrow 9-2^x = 2^{3-x} \Rightarrow 9-2^x-\frac{8}{2^x} = 0$$

តាង $t = 2^x > 0 \Rightarrow -t^2+9t-8=0$

មានឫស $t=1$, $t=8$

* ចំពោះ $t=1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x=0$
* ចំពោះ $t=8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x=3$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

ដូចនេះសមីការមានចំលើយ $x=0$

8- ដោះស្រាយសមីការ $1-\lg 5 = \frac{1}{3}\left(\lg\frac{1}{2}+\lg x+\frac{1}{3}\lg 5\right)$

មានន័យកាលណា $x>0$

$$\Rightarrow 3(1-\lg 5) = \lg\frac{1}{2}+\lg x+\lg 5^{1/3}$$

$$\Rightarrow \lg 10^3 - \lg 5^3 - \lg\frac{1}{2} - \lg 5^{1/3} = \lg x$$

$$\lg 10^3 - \left(\lg 5^3+\lg\frac{1}{2}+\lg 5^{1/3}\right) = \lg x$$

$$\lg 10^3 - \lg 5^3\cdot\frac{1}{2}5^{1/3} = \lg x$$

$$\lg\frac{10^3}{5^3\cdot\frac{1}{2}5^{1/3}} = \lg x$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\cdot 10^3}{5^3\cdot 5^{1/3}} = \frac{2\cdot 2^3\cdot 5^3}{5^3\cdot\sqrt[3]{5}} = \frac{16}{\sqrt[3]{5}}$$

ដូចនេះចំលើយសមីការគឺ $x = \frac{16}{\sqrt[3]{5}}$

៩. ដោះស្រាយសមីការ $2\lg(x-1)=\frac{1}{2}\lg x^5-\lg\sqrt{x}$
(ដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសាប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យនៅ VN)

$$2\lg(x-1)=\frac{1}{2}\lg x^5-\lg\sqrt{x} \quad (1)$$

សមីការ (1) មានន័យកាលណា $x-1>0$ និង $x>0$

$$\Rightarrow x\in\,]1,+\infty[$$

$$\frac{1}{2}\lg x^5-\lg\sqrt{x}=\frac{5}{2}\lg x-\frac{1}{2}\lg x=2\lg x$$

ដូចនេះសមីការ (1) ទាញបាន :

$$2\lg(x-1)=2\lg x$$

$$x-1=x \quad (2)$$

សមីការ (2) មិនពិត ដូចនេះសមីការខាងលើគ្មានឫស

10 ដោះស្រាយសមីការ $\log_4[2\log_3[1+\log_2(1+3\log_3 x)]]=\frac{1}{2}$
(ប្រធានប្រលងចូលសាលាគរុវិជ្ជាជាន់ខ្ពស់ KOLOMEN

លោការីតមានន័យកាលណា $x>0$

$$\log_4[2\log_3[1+\log_2(1+3\log_3 x)]]=\log_4 4^{\frac{1}{2}}=\log_4 2$$

$$\log_3[1+\log_2(1+3\log_3 x)]=1=\log_3 3$$

$$1+\log_2(1+3\log_3 x)=3$$

$$\log_2(1+3\log_3 x)=2=\log_2 2^2$$

$$1+3\log_3 x=4$$

$$\log_3 x=1$$

$$\Rightarrow x=3$$

11 ដោះស្រាយសមីការលោការីត $\log_{\sqrt5} x \cdot \sqrt{\log_x 5\sqrt5 + \log_{\sqrt5} 5\sqrt5} = -\sqrt6$
(ប្រលងចូលសាលាជាន់ខ្ពស់ អាកាសចរ KAZAN

លោការីត មានន័យកាលណា $x>0, x\neq 1$

$$\log_{\sqrt5} x \sqrt{\frac{\log_{\sqrt5} 5\sqrt5}{\log_{\sqrt5} x} + \log_{\sqrt5} 5\cdot\sqrt5} = \sqrt6 \cdot \sqrt{\log_{\sqrt5} x}$$

$$\sqrt{\log_{\sqrt5} 5 + \log_{\sqrt5}\sqrt5 + (\log_{\sqrt5} 5 + \log_{\sqrt5}\sqrt5)(\log_{\sqrt5} x)} = \frac{-\sqrt6}{\sqrt{\log_{\sqrt5} x}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2+1+(2+1)(\log_{\sqrt5} x)} = \frac{-\sqrt6}{\sqrt{\log_{\sqrt5} x}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3+3\log_{\sqrt5} x} = \frac{-\sqrt6}{\sqrt{\log_{\sqrt5} x}} \Rightarrow \sqrt{\log_{\sqrt5} x(3+3\log_{\sqrt5} x)} = -\sqrt6$$

$$\Rightarrow 3\log^2_{\sqrt5} x + 3\log_{\sqrt5} x - 6 = 0$$

តាង $t = \log_{\sqrt5} x \Rightarrow 3t^2 + 3t - 6 = 0$

មានឫស $t=1$, $t=-2$

* ចំពោះ: $t=1 \Rightarrow \log_{\sqrt5} x = \log_{\sqrt5}\sqrt5 \Rightarrow x = \sqrt5$
* ចំពោះ: $t=-2 \Rightarrow \log_{\sqrt5} x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

ដូចនេះសមីការមានចំលើយ $x=\sqrt5$; $x=\frac{1}{5}$

12 . ដោះស្រាយសមីការ $\log_2(2x^2)\cdot\log_2(16x) = \frac{9}{2}\log_2^2 x$
(ប្រលងចូលវិទ្យាស្ថានពហុបច្ចេកទេសក្រុង KIEV

លោការីតមានន័យកាលណា $x>0$

$$\Rightarrow \log_2(2x^2)\cdot\log_2(16x) = \frac{9}{2}\log_2^2 x$$

$$\Rightarrow (\log_2 2 + \log_2 x^2)(\log_2 16 + \log_2 x) = \frac{9}{2}\log_2^2 x$$

$$\Rightarrow (1+\log_2 x^2)(4+\log_2 x) = \frac{9}{2}\log_2^2 x$$

$$\Rightarrow 4+\log_2 x + 4\log_2 x^2 + 2\log_2^2 x - \frac{9}{2}\log_2^2 x = 0$$

$$4+\log_2 x + 8\log_2 x + 2\log_2^2 x - \frac{9}{2}\log_2^2 x = 0$$

$$-\frac{5}{2}\log_2^2 x + 9\log_2 x + 4 = 0$$

$$-5\log_2^2 x + 18\log_2 x + 8 = 0$$

$$\Delta' = 81 + 40 = 121 = 11^2$$

$$\log_2 x = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = 2^{-\frac{2}{5}}$$

$$\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4$$

ដូចនេះ សមីការមានចំលើយ $x = 2^4, x = 2^{-\frac{2}{5}}$

13 ដោះស្រាយសមីការ $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}, x > 0$
(ប្រលងចូលសាលាគរុវិជ្ជាជាន់ខ្ពស់ KOLOMEN)

យើងតាង $5^{\lg x} = X$, $x^{\lg 5} = y$

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា $X = y$

$$5^{\lg x} = x \Rightarrow \lg 5^{\lg x} = \lg x$$

$$\Rightarrow \lg x . \lg 5 = \lg x \quad (1)$$

$$x^{\lg 5} = y \Rightarrow \lg x^{\lg 5} = \lg y$$

$$\Rightarrow \lg 5 . \lg x = \lg y \quad (2)$$

(1) និង (2) $\Rightarrow \lg x = \lg y \Rightarrow x = y$

ចំពោះការដោះស្រាយសមីការខាងលើ យើងបាន

$$5^{\lg x} + 5^{\lg x} = 50$$

$$2.5^{\lg x} = 50 \Rightarrow 5^{\lg x} = 25$$

$$\Rightarrow 5^{\lg x} = 5^2 \Rightarrow \lg x = 2 \Rightarrow x = 10^2$$

ដូចនេះចំលើយសមីការគឺ $x = 10^2$

14 ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt{\log_9(9x^8)\cdot\log_3(3x)} = \log_3 x^3$

(ប្រឡងចូលមហាវិទ្យាល័យថាមពល ទីក្រុងមូស្គូ)

សមីការមានន័យកាលណា $x>0$ ដូចនេះ: $\log_9(9x^8)\cdot\log_3(3x)>0$

នៅក្នុងករណីនេះ: $\sqrt{\log_9(9x^8)\cdot\log_3(3x)}$ មានន័យ :

$\Rightarrow$ សមីការអាចដោះស្រាយបាន :

$$\Rightarrow (\log_9 9 + \log_9 x^8)(\log_3 3 + \log_3 x) = 9\log_3^2 x$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{8}{2}\log_3 x\right)(1 + \log_3 x) = 9\log_3^2 x$$

$$\Rightarrow (1 + 4\log_3 x)(1 + \log_3 x) = 9\log_3^2 x$$

$$1 + \log_3 x + 4\log_3 x + 4\log_3^2 x - 9\log_3^2 x = 0$$

$$-5\log_3^2 x + 5\log_3 x + 1 = 0$$

តាង $t = \log_3 x \Rightarrow -5t^2 + 5t + 1 = 0$

$$\Delta = 25 + 20 = 45 = (3\sqrt{5})^2$$

$$t = \frac{-5+3\sqrt{5}}{-10}, \quad t = \frac{-5-3\sqrt{5}}{-10} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$$

ចំពោះ: $t = \frac{-5+3\sqrt{5}}{-10} \Rightarrow \log_3 x = \frac{-5+3\sqrt{5}}{-10} = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$

$$\Rightarrow x = 3^{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}}$$

ចំពោះ: $t = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \Rightarrow \log_3 x = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$

$$\Rightarrow x = 3^{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}}$$

ដូចនេះ សមីការមានចំលើយ $x = 3^{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}}, x = 3^{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}}$

15

> ដោះស្រាយសមីការ $\lg^2(100x) - \lg^2(10x) + \lg^2 x = 6$
> (ដកស្រង់ពីវិញ្ញាសាប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យនៅ VN

លោការីតមានន័យកាលណា $x > 0$

$$\Rightarrow (\lg 10^2 + \lg x)^2 - (\lg 10 + \lg x)^2 + \lg^2 x = 6$$

$$(4 + \lg^2 x + 4\lg x) - (1 + \lg^2 x + 2\lg x) + \lg^2 x = 6$$

$$4 + \lg^2 x + 4\lg x - 1 - \lg^2 x - 2\lg x + \lg^2 x = 6$$

$$\lg^2 x + 2\lg x + 3 = 6$$

$$\lg^2 x + 2\lg x - 3 = 0$$

$$\Delta' = 1 + 3 = 4 \;,\; \lg x = 1 \;,\; \lg x = -3$$

$*$ $\lg x = 1 \Rightarrow x = 10$

$*$ $\lg x = -3 \Rightarrow x = 10^{-3}$

សមីការមានចំលើយគឺ $x = 10 \,,\, x = 10^{-3}$

16

> ដោះស្រាយសមីការ $9^{\log_{1/3}(x+1)} = 5^{\log_{1/5}(2x^2+1)}$
> (ដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសាប្រលងមធ្យមសិក្សាកំរិត២ V.N)

មានន័យកាលណា

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 2x^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 > -\frac{1}{2} \text{ ពិត} \end{cases} \Rightarrow x > -1$$

$$\Rightarrow 9^{-\log_3(x+1)} = 5^{-\log_5(2x^2+1)}$$

$$3^{\log_3(x+1)^{-2}} = 5^{\log_5(2x^2+1)^{-1}} \quad , \quad a^{\log_a x} = x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2+1} \Rightarrow 2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ឬ } x = 2$$

ចំលើយសមីការគឺ $x = 0 \,,\, x = 2$

17 ដោះស្រាយសមីការ $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4$
(ប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យអគ្គិសនីក្រុងមូស្គូ)

$$\begin{cases} 9+12x+4x^2>0 \\ 6x^2+23x+21>0 \\ 3x+7>0 \\ 2x+3>0 \\ 3x+7\neq 1 \\ 2x+3\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x+3)^2>0 \text{ ពិត } \forall x \\ (2x+3)(3x+7)>0 \\ 3x+7>0 \\ 2x+3>0 \\ 3x+7\neq 1 \\ 2x+3\neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\in\left]-\infty,-\frac{7}{3}\right[\cup\left]-\frac{3}{2},+\infty\right[\\ x>-\frac{7}{3}\ ,\ x>-\frac{3}{2} \\ x\neq-2\ ,\ x\neq-1 \end{cases} \Rightarrow x>-\frac{3}{2}, x\neq-2, x\neq-1$$

$$\Rightarrow \log_{3x+7}(2x+3)^2+\log_{2x+3}(2x+3).(3x+7)=4$$

$$\Rightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3)+\log_{2x+3}(2x+3)+\log_{2x+3}(3x+7)=4$$

$$\Rightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3)+\log_{2x+3}(3x+7)-3=0$$

$$2\log_{3x+7}(2x+3)+\frac{1}{\log_{3x+7}(2x+3)}-3=0$$

តាង $t=\log_{3x+7}(2x+3) \Rightarrow 2t^2-3t+1=0$

$$\Rightarrow t=1\ ,\ t=\frac{1}{2}$$

* ចំពោះ: $t=1 \Rightarrow \log_{3x+7}(2x+3)=\log_{3x+7}3x+7$

$\Rightarrow 2x+3=3x+7 \Rightarrow x=-4$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

* ចំពោះ: $t=\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{3x+7}(2x+3)=\frac{1}{2}=\log_{3x+7}(3x+7)^{1/2}$

$\Rightarrow 2x+3=\sqrt{3x+7}$

$\Rightarrow 4x^2+9+12x=3x+7$

$\Rightarrow 4x^2+9x+2=0$

$\Delta^x = 81-32 = 49$

$x=\frac{-9+7}{8}=-\frac{1}{4}$, $x=\frac{-9-7}{8}=-2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

ដូចនេះសមីការ មានចំលើយគឺ $x=-\frac{1}{4}$

18 ដោះស្រាយសមីការ $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}$
(ប្រលងចូលសាលាបច្ចេកទេសជាន់ខ្ពស់រោងចក្ររថយន្តមួយ)

លោការីតមាននិយមន័យកាលណា

$$\begin{cases}\sqrt{1+x}>0\\ \sqrt{1-x}>0\\ \sqrt{1-x^2}>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+1>0\\ 1-x>0\\ (1-x)(1+x)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-1\\ x<1\\ x\in]-1,1[\end{cases}$$

លក្ខខណ្ឌ $-1<x<1$

$$\Rightarrow \log\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}=-3\lg\sqrt{1-x}=\lg\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}}=0$$

$$\frac{1-x-1}{(1-x)\sqrt{1-x}}=0 \Rightarrow -x=0 \Rightarrow x=0$$

19 ដោះស្រាយសមីការ $\log_x 2-\log_4 x+7/6=0$

មាននិយមន័យកាលណា $x\neq 1$, $x>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_2 x}-\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{7}{6}=0 \Rightarrow \frac{6}{\log_2 x}-3\log_2 x+7=0$$

$$\Rightarrow -3\log_2^2 x+7\log_2 x+6=0$$

$\Delta = 49+72=121=11^2$

$\log_2 x = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = 2^{-2/3}$

$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$

សមីការមានចំលើយគឺ $x = 2^{-2/3}$, $x = 8$

20 ដោះស្រាយសមីការ $(\lg ax)^2+(\lg bx)^2+(\lg cx)^2=(\lg a)^2+(\lg b)^2+(\lg c)^2$

(ប្រលងចូលសាកលវិទ្យាល័យរបស់ UJCOROV)

$$(\lg ax)^2+(\lg bx)^2+(\lg cx)^2=(\lg a)^2+(\lg b)^2+(\lg c)^2 \quad (1)$$

ដើម្បីអោយអង្គទាំងពីររបស់សមីការ (1) មានន័យ យើងត្រូវមាន a, b, c និង x វិជ្ជមាន ។

សមីការ (1) សមមូលនឹងសមីការ

$$(\lg a+\lg x)^2(\lg b+\lg x)^2(\lg c+\lg x)^2 = (\lg a)^2+(\lg b)^2+(\lg c)^2$$

ឬ $3(\lg x)^2 + 2\lg x(\lg a+\lg b+\lg c = 0$

ឬ $\lg x\,(3\lg x + 2\lg abc) = 0$

a) $\lg x = 0 \Rightarrow x = 1$

b) $3\lg x + 2\lg abc = 0 \Rightarrow \lg x^3 + \lg a^2b^2c^2 = 0$

$\Rightarrow \lg x^3a^2b^2c^2 = 0$

$\Rightarrow x^3a^2b^2c^2 = 1$ ឬ $x = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \frac{\sqrt[3]{abc}}{abc}$

ដូចនេះឫសរបស់ (1) គឺ $x = 1$ និង $x = \frac{\sqrt[2]{abc}}{abc}$

21. ដោះស្រាយសមីការ $2\lg 2 + \lg(5^{\sqrt{x}}+1) = 2+\lg(5^{1-\sqrt{x}}+5)$

(ប្រលងចូលសាលាគរុវិជ្ជាជាន់ខ្ពស់ KOLOMEN)

$\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$ សមីការអាចសរសេរ

$$\lg 2^2+\lg(5^{\sqrt{x}}+1) = \lg 10^2+\lg(5^{1-\sqrt{x}}+5)$$

$$\lg 4(5^{\sqrt{x}}+1) = \lg 100(5^{1-\sqrt{x}}+5)$$

$$4(5^{\sqrt{x}}+1) = 100(5^{1-\sqrt{x}}+5)$$

$$5^{\sqrt{x}}+1 = 25\left(5 \cdot 5^{-\sqrt{x}}+5\right)$$
$$5^{\sqrt{x}}+1 = 125\left(5^{-\sqrt{x}}+1\right)$$
$$5^{\sqrt{x}}+1 = \frac{125}{5^{\sqrt{x}}} + 125$$
$$\Leftrightarrow 5^{2\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0$$
$$\Rightarrow 5^{\sqrt{x}} = -1 \ , \ 5^{\sqrt{x}} = 125$$

$* \ 5^{\sqrt{x}} = -1$ (មិនយក)

$* \ 5^{\sqrt{x}} = 125 \Rightarrow 5^{\sqrt{x}} = 5^3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$

ដូចនេះចំលើយរបស់សមីការគឺ $x = 9$

22

ដោះស្រាយសមីការ $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$ (ប្រធានប្រឡងចូលសាកលវិទ្យាល័យរបស់ UJCOROV និងប្រឡងចូលវិទ្យាស្ថានសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា ឆ្នាំ 1988)

សមីការមាននិយមន័យកាលណា

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos x \neq 1 \\ \sin x > 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x \neq 2k\pi \\ 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ .$$

សមីការអាចសរសេរ :

$$\log_{\cos x} \sin x + \frac{1}{\log_{\cos x} \sin x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \log^2_{\cos x} \sin x - 2\log_{\cos x} \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_{\cos x} \sin x - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{\cos} \sin x = 1 \cdot \log_{\cos} \sin x \Rightarrow \sin x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ និង } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

ដែល $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

សមីការមានចំលើយ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , (k \in \mathbb{Z})$

21 រកតំលៃ m ដើម្បីអោយសមីការ

$$\log_2(1+x+x^2) = m^2\log_{1+x+x^2} 2 + m-2$$

មានឫសវិជ្ជមានតូចជាង : $\frac{\sqrt[3]{13}-1}{2}$

(ដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសាប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យនិងសិស្សពូកែ

<u>របៀបទី 1</u> : លក្ខខណ្ឌដើម្បីអោយលោការីតមានន័យកាលណា

$$\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x^2+x+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}>0 \Leftrightarrow x\neq 0 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

តាង $y = x^2+x+1$ ពេលនោះ

$x=0 \Rightarrow y=1$; $x=\frac{\sqrt{13}-1}{2} \Rightarrow y=4$

y មានក្រាភិចជាប៉ារ៉ាបូល កំពូលមានអាប់ស៊ីស $x=-\frac{1}{2}$

ដូចនេះ: $x>0$ អនុគមន៍ y ជានិច្ចជាកាល បំលែងបាន

បើ $0<x<\frac{\sqrt{13}-1}{4} \Rightarrow 1<y<4$

តាង $t=\log_2 y = \log_2(x^2+x+1)$ ពេលនោះគេបាន

$* \log_{x^2+x+1} 2 = \frac{1}{\log_2 y} = \frac{1}{t}$ និង

ពេល $1<y<4 \Rightarrow 0<t<2$

បំលែងសមីការតាម t

$$\Rightarrow t=\frac{m^2}{t}+m-2 \Leftrightarrow f(t)=t^2-(m-2)t-m^2=0$$

ដើម្បីអោយសមីការមានឫសពីរផ្ទៀងផ្ទាត់ចំនោទខាងលើ ចាំបាច់ត្រូវតែអោយ $f(t)=0$ មានឫសមួយធំជាងសូន្យ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $0<t<2$ មានពីរលទ្ធភាព :

a) មានឫសមួយជារបស់ចន្លោះ $(0,2) \Rightarrow f(0)\cdot f(2)<0$

b) f មានឫសពីរធំជាងសូន្យរបស់ $(0,2)$

$$0<t_1<t_2<2 \Rightarrow \begin{cases} f(0)>0 \\ f(2)>0 \\ 0<\frac{S}{2}<2 \\ \Delta>0 \end{cases}$$

ករណី a)

$f(0)\cdot f(2)<0 \Leftrightarrow m^2(m^2+2m-8)<0$

$\Leftrightarrow -4<m<2 \; , \; m\neq 0$

ករណី b)

$$\begin{cases} \Delta = 5m^2-4m+4>0 \\ f(2) = -m^2-2m-8>0 \\ f(0) = -m^2>0 \\ 0<\frac{m-2}{2}<2 \end{cases}$$

ប្រព័ន្ធខាងលើគ្មានឫសព្រោះ $f(0) = -m^2<0$

ដូចនេះ m ត្រូវមានតម្លៃ $-4<m<0 \; , \; 0<m<2$

ឬ $-4<m<2$ និង $m\neq 0$

របៀបទី2 ដោះស្រាយសមីការ $f(t)=0$

* ចំណាំ: $m=0 : f(t)=0 \Leftrightarrow t^2+2t=0$

$\Rightarrow t_1=0 \; ; \; t_2=-2$

ដោយ $\Delta = 5m^2-4m+4>0, \forall m$ បើ $f(t)=0$

ជានិច្ចជាកាលមានឫសពីរ

ដោយ $t_1.t_2 = -m^2<0$ ដូចនេះសមីការមានឫសពីរផ្ទុយសញ្ញា ។

ពិនិត្យឫសវិជ្ជមាន $t_2 = \frac{(m-2)+\sqrt{5m^2-4m+4}}{2} \in (0,2)$

$\Rightarrow \frac{m-2+\sqrt{5m^2-4m+4}}{2} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{5m^2-4m+4} < 6-m$

លក្ខខណ្ឌ $m<6 \Rightarrow 5m^2-4m+4<(6-m)^2 = m^2-12m+36$

$\Leftrightarrow m^2+2m-8<0 \quad \Leftrightarrow -4<m<2$

ជាសរុប $-4<m<2$ និង $m\neq 0$

ផ្នែកទី IV

ដំណោះស្រាយ
វិសមីការ

លោការីត

លំហាត់ជ្រើសរើសវិសមីការលោការីត

1 ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)>0$
(ប្រលងចូលសាលាបច្ចេកទេស RADIO TAGANROG)

លោការីតមានន័យកាលណា $5x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{5}$

$\log_{1/3}(5x-1)>0 \Rightarrow \log_{1/3}(5x-1)>\log_{1/3}1$

$(5x-1)<1$

$5x<2$

$x<\frac{2}{5}$

ដូចនេះសមីការមានចំលើយ $x\in\left]\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right[$

2 ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_5(3x-1)<1$
(ប្រលងចូលសាលាបច្ចេកទេស RADIO TAGANROG)

លោការីតមានន័យកាលណា $3x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{3}$

$\log_5(3x-1)<1$

$\log_5(3x-1)<\log_5 5$

$3x-1<5$

$3x<6$

$x<2$

ដូចនេះសមីការមានចំលើយ $x\in\left]\frac{1}{3},2\right[$

3 ដោះស្រាយសមីការ $\log_{0,5}(x^2-5x+6)>-1$
(ប្រលងចូលសាលាបច្ចេកទេសអគ្គិសនី NOVOXIBIR

លោការីតមានន័យកាលណា $x^2-5x+6>0$ មានឫស $x=3, x=2$

$x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,2\right[\cup\left]3,+\infty\right[$

$\Rightarrow \log_{1/2}(x^2-5x+6) > \log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$x^2-5x+6 < 2$

$x^2-5x+4 < 0$ មានឫស $x=1, x=4$

$\Rightarrow x \in]1,4[$

ដូចនេះសមីការមានចំលើយគឺ $x \in]1,2[\cup]3,4[$

4. ដោះស្រាយសមីការ $\log_8(x^2-4x+3) \leqslant 1$
(ប្រលងចូលសាលាបច្ចេកទេសរោងចក្រថយន្តមូស្គូ)

លោការីតមានន័យកាលណា $x^2-4x+3>0$

មានឫស $x=1, x=3$

$x^2-4x+3>0 \iff x \in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

$\log_8(x^2-4x+3) \leqslant 1$

$\log_8(x^2-4x+3) \leqslant \log_8 8$

$x^2-4x-5 \leqslant 0$

មានឫស $x \in [-1,5]$

ដូចនេះវិសមីការមានចំលើយគឺ $x \in [-1,1[\cup]3,5]$

5. ដោះស្រាយវិសមីការ $\lg(x^2-5x+7)<0$
(ប្រលងចូលសាលាបច្ចេកទេសអគ្គិសនី NOVOXIBIR)

លោការីតមានន័យកាលណា $x^2-5x+7>0$

$\Delta = 25-28<0 \Rightarrow x^2-5x+7>0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lg(x^2-5x+7) < \lg 1$

$x^2-5x+6<0$

$\Delta = 25-24 = 1,\ x' = \frac{5+1}{2} = 3,\ x'' = \frac{5-1}{2} = 2$

$x \in]2,3[$

ដូចនេះវិសមីការមានចំលើយគឺ : $x \in]2,3[$

6 - ដោះស្រាយវិសមីការ $\sqrt{2^{x-2}+1} > |2^{x-1}-1| + 2^{x}\log_x\sqrt{x}$

(ដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសាជ្រើសរើសសិស្សឆ្នាំ 1989)

វិសមីការមានន័យកាលណា $x>0,\ x\neq 1$

តាង $y = 2^{x-1} \Rightarrow 0<y\neq 1$

ដូចនេះវិសមីការអាចសរសេរ $\sqrt{\frac{1}{2}y+1} > |y-1|+y$

(ព្រោះ $\log_x\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log_x x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x\log_x\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cdot 2^x = 2^{x-1}$)

ហើយ $2^{x-2} = \frac{2^x}{2^2} = \frac{2^x}{2.2} = 2^{x-1}\cdot\frac{1}{2}$

* <u>ករណីទី1</u> : បើ $y>1$ យើងបាន :

$$\sqrt{\frac{1}{2}y+1} > y-1+y$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}y+1} > 2y-1$$

ដោយអង្គទាំងពីរជាចំនួនវិជ្ជមានគេបាន :

$\frac{1}{2}y+1 > (2y-1)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}y+1 > 4y^2-4y+1$

ឬ $4y^2-\frac{9}{2}y<0 \Rightarrow 0<y<\frac{9}{8}$

តែដោយ $y>1$ គេបាន

$1<y<\frac{9}{8} \Rightarrow 1<2^{x-1}<\frac{9}{8}$

$\Rightarrow 1<x<2(\log_2 3-1)$

* <u>ករណីទី2</u> : បើ $y<1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}y+1} > -(y-1)+y$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}y+1} > -y+1+y$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}y+1} > 1$$

$$\frac{1}{2}y+1>1 \Rightarrow \frac{1}{2}y>0$$

តែដោយ $y<1$ គេបាន :

$0<y<1 \Rightarrow 0<2^{x-1}<1$

$\Rightarrow 0<x<1$

7 - ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt3}}\sqrt{1+2\cos 2x}<1$

(ប្រលងចូលវិទ្យាស្ថានសេដ្ឋកិច្ចផែនកសិកម្ម ទីក្រុងមូស្គូ)

យើងមាន $\log_{\frac{2\cos x}{\sqrt3}}\sqrt{1+2\cos 2x}<1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<\frac{2\cos x}{\sqrt3}<1 \\ 1+2\cos 2x>0 \\ \sqrt{1+2\cos 2x}>\frac{2\cos x}{\sqrt3} \end{cases} (I) \text{ ឬ } \begin{cases} \frac{2\cos x}{\sqrt3}>1 \\ 1+2\cos 2x>0 \\ \sqrt{1+2\cos 2x}<\frac{2\cos x}{\sqrt3} \end{cases} (II)$$

បើយើងតាង $y=\cos x$ គេបាន

$$(I)\Rightarrow \begin{cases} 0<\frac{2y}{\sqrt3}<1 \\ 4y^2-1>0 \\ \sqrt{4y^2-1}>\frac{2y}{\sqrt3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<y<\frac{\sqrt3}{2} \\ y<-\frac12 \text{ ឬ } y>\frac12 \\ \sqrt{4y^2-1}>\frac{2y}{\sqrt3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac12<y<\frac{\sqrt3}{2} \\ \sqrt{4y^2-1}>\frac{2y}{\sqrt3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac12<y<\frac{\sqrt3}{2} \\ y^2>\frac38 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt6}{4}<y<\frac{\sqrt3}{2}$$

$$(II)\Rightarrow \begin{cases} \frac{2y}{\sqrt3}>1 \\ 4y^2-1>0 \\ \sqrt{4y^2-1}<\frac{2y}{\sqrt3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>\frac{\sqrt3}{2} \\ y<-\frac12 \text{ ឬ } y>\frac12 \\ \sqrt{4y^2-1}<\frac{2y}{\sqrt3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y>\frac{\sqrt3}{2} \\ \sqrt{4y^2-1}<\frac{2y}{\sqrt3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>\frac{\sqrt3}{2} \\ y^2<\frac38 \end{cases} \text{ គ្មានឬស}$$

ដូចនេះឬសរបស់វិសមីការគឺ:

$$\frac{\sqrt6}{4}<\cos x<\frac{\sqrt3}{2}$$

$$\arccos\frac{\sqrt6}{4}<x<\arccos\frac{\sqrt3}{2}$$

$$\arccos\frac{\sqrt6}{4}+2k\pi<x<\arccos\frac{\sqrt3}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

8. ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_{x^2-3} 729 > 3$

(ដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសាប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យ VN)

ដើម្បីអោយវិសមីការមានន័យកាលណា

$$\begin{cases} x^2-3>0 \\ x^2-3\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in \left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3},+\infty\right[- \{-2,2\}$$

គេបាន $\log_{x^2-3} 729 > 3$

$\Leftrightarrow \log_{x^2-3} 729 > 3\log_{x^2-3}(x^2-3)$

$\Leftrightarrow \log_{x^2-3} 729 > \log_{x^2-3}(x^2-3)^3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3>1 \\ 729>(x^2-3)^3 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x^2-3<1 \\ 729<(x^2-3)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4>0 \\ 9^3>(x^2-3)^3 \end{cases} (I) \text{ ឬ } \begin{cases} x^2-4<0 \\ 9^3<(x^2-3)^3 \end{cases} (II)$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ(I) និង(II) គេបាន

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-\sqrt{2} \text{ ឬ } x>2 \\ -2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3} \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} -2<x<2 \\ x<-2\sqrt{3} \text{ ឬ } x>2\sqrt{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}<x<-2$ ឬ $2<x<2\sqrt{3}$

ដោយផ្ទៀងផ្ទាត់ជាមួយលក្ខខ័ណ្ឌខាងលើ វិសមីការមានចំលើយ :

$-2\sqrt{3}<x<-2$ ឬ $2<x<2\sqrt{3}$

9. ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_7 \frac{2x-6}{2x-1} > 0$

(ប្រលងចូលសាលាវិស្វករសំណង់ទីក្រុង KIEV)

លោការីតមានន័យកាលណា

$$\begin{cases} \frac{2x-6}{2x-1}>0 \quad \text{មានឫស } x=\frac{1}{2}, x=3 \\ 2x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ដូចនេះ លោការីតកំនត់បានកាលណា

$x \in]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]3, +\infty[$

វិសមីការលោការីតក្លាយទៅជា $\log_7\left(\frac{2x-6}{2x-1}\right) > \log_7 1$

$\Rightarrow \frac{2x-6}{2x-1} > 1$

* ករណី $x > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2x - 6 > 2x - 1$

$-6 > -1$ មិនពិត

* ករណី $x < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2x - 6 < 2x - 1$

$-6 < -1$ ពិតជានិច្ច

ដូចនេះ វិសមីការខាងលើមានចំលើយ $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$

10 ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_{1,5} \frac{2x-8}{x-1} < 0$
(ប្រលងចូលវិទ្យាស្ថានពហុបច្ចេក URAL

លក្ខខណ្ឌ : $\frac{2x-8}{x-2} > 0$ មានឫស $x = 2, x = 4$ $x \neq 2$

លោការីតមានន័យកាលណា $x \in]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$

$\Rightarrow \log_{1,5}\left(\frac{2x-8}{x-2}\right) < \log_{1/5} 1$

$\frac{2x-8}{x-2} < 1 < 1 \Leftrightarrow \frac{2x-8-x+2}{x-2} < 0$

$\Rightarrow \frac{x-6}{x-2} < 0$ មានឫស $x = 2$, $x = 6$

$\Rightarrow x \in]2, 6[$

ដូចនេះ វិសមីការមានចំលើយគឺ $x \in]4, 6[$

11 **ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_{1/3}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \geqslant 1$**
(ប្រលងចូលវិទ្យាស្ថានពហុបច្ចេកទេស URAL)

លោការីតមានន័យកាលណា

$$\begin{cases} \frac{2-3x}{x} > 0 & \text{មានឫស } x=0, x=\frac{2}{3} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$x \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$$

$$\Rightarrow \log_{1/3}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \geqslant -1$$

$$\log_{1/3}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \geqslant \log_{1/3}(1/3)^{-1}$$

$$\frac{2-3x}{x} \leqslant 3 \Rightarrow \frac{2-3x-3x}{x} \leqslant 0$$

$$\Rightarrow \frac{-6x+2}{x} \leqslant 0$$ មានឫស $x=\frac{1}{3}$, $x=0$

$$\Rightarrow x \in \left]-\infty, 0\right] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$$

ដូចនេះវិសមីការមានចំលើយ $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$

12. **ដោះស្រាយវិសមីការ $\log^2_{0,5} x + \log_{0,5} x - 2 \leqslant 0$**

លោការីតមានន័យកាលណា $x > 0$

តាង $X = \log_{0,5} x$

$\Rightarrow \log^2_{0,5} x + \log_{0,5} x - 2 \leqslant 0$ ទៅជា

$X^2 + X - 2 \leqslant 0$ មានឫស $X = 1$, $X = -2$

$$\Rightarrow -2 \leqslant X \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant \log_{0,5} x \leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{1/2}(1/2)^{-2} \leqslant \log_{1/2} x \leqslant \log_{1/2} 1/2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

ដូចនេះ $x \in \left[\frac{1}{2}, 4\right]$

13 ដោះស្រាយវិសមីការ $|\log_3 x| - \log_3 x - 3 \leqslant 0$

តាង $X = \log_3 x$, លក្ខខណ្ឌមានន័យកាលណា $x > 0$

$\Rightarrow |X| - X - 3 \leqslant 0$

* បើ $X > 0 \Rightarrow |X| = X$

$\Rightarrow X - X - 3 \leqslant 0 \Rightarrow -3 < 0$ ពិតជានិច្ច

* បើ $X < 0 \Rightarrow |X| = -X$

$\Rightarrow -X - X - 3 \leqslant 0 \Rightarrow -2X - 3 \leqslant 0 \Rightarrow X \geqslant -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \log_3 x \geqslant -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3 x \geqslant \log_3 3^{-3/2}$

$\Rightarrow x \geqslant 3^{-3/2} \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3^3}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$

ដូចនេះវិសមីការមានចំលើយ $x \in [\frac{1}{27}, +\infty[$

14 ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_{1/6}(x^2 - 3x + 2) + 1 < 0$

លក្ខខណ្ឌមានន័យកាលណា $x^2 - 3x + 2 > 0$

$x^2 - 3x + 2$ មានឫស $x = 1, x = 2$

$\Rightarrow \mathcal{D} =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

$\Rightarrow \log_{1/6}(x^2 - 3x + 2) < -1$

$\Rightarrow \log_{1/6}(x^2 - 3x + 2) < \log_{1/6} 6$

$x^2 - 3x - 4 > 0$ មានឫស $x = -1, x = 4$

$\Rightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

$\mathcal{D} \in]-\infty, +1[\cup]2, +\infty[$

ដូចនេះចំលើយវិសមីការគឺ $x \in]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

15 ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$

(ប្រធានប្រលងចូលវិទ្យាស្ថានបច្ចេកទេសជាន់ខ្ពស់រូបវិទ្យាទីក្រុងមូស្គូ)

លោការីតមានន័យលុះត្រាតែ : $\begin{cases} x > 0 \\ \lg x - 1 \neq \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \lg x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 10 \end{cases}$$

$$\mathcal{D} =]0,10[\cup]10,+\infty[$$

$$\Rightarrow \frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\lg^2 x - 3\lg x + 3 - \lg x + 1}{\lg x - 1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\lg^2 x - 4\lg x + 4}{\lg x - 1} < 0$$, បើតាង $X = \lg x$

$$\Rightarrow \frac{X^2 - 4X + 4}{X - 1} < 0$$ មានឫស $X = 2$, $X = 1$

$\Rightarrow X \in]1,2[$ ឬ $1 < X < 2$

$\Rightarrow 1 < \lg x < 2 \Rightarrow 10 < x < 100$ ឬ $x \in]10,100[$

$$\mathcal{D} =]0,10[\cup]10,+\infty[$$

ដូចនេះចំលើយវិសមីការគឺ $x \in]10,100[$

16 ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{1}{1+\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} > 2$

(ប្រធានប្រលងចូលសាលាជាន់ខ្ពស់ GOHENSKI)

លោការីតមានន័យកាលណា $x > 0$, $x \neq 1$

$1 + \lg x \neq 0$, $1 - \lg x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ \lg x \neq -1 \\ \lg x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x\neq 0{,}1 \\ x\neq 10 \end{cases}$$

$$\mathcal{D} = \left]0,+\infty\right[- \{0{,}1\,;\,1\,;\,10\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} - 2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1-\lg x + 1 + \lg x - 2(1+\lg x)(1-\lg x)}{(1-\lg x)(1+\lg x)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2-2+2\lg^2 x}{(1-\lg x)(1+\lg x)} > 0 \Rightarrow \frac{2\lg^2 x}{(1-\lg x)(1+\lg x)} > 0$$

តាង $f(x) = 2\lg^2 x$, $g(x) = (1-\lg x)(1+\lg x)$

វិសមីការខាងលើធំជាង 0 លុះត្រាតែ $f(x)$ និង $g(x)$ មាន

សញ្ញាដូចគ្នា , ដោយ $f(x) = 2\lg^2 x > 0 \ \forall x$

ដូចនេះ $\Rightarrow g(x) = (1-\lg x)(1+\lg x) > 0$

តាង $t = \lg x \Rightarrow g(x) = (1-t)(1+t) > 0$

$$\Leftrightarrow -1 < t < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < \lg x < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} < x < 10$$

ដូច្នេះ: ដើម្បីអោយ $g_{(x)} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0{,}1\,;\,10\right[$

តែ $\mathcal{D} = \left]0,+\infty\right[- \{0{,}1\,;\,1\,;\,10\}$

ចំលើយវិសមីការគឺ $x \in \left]0{,}1\,;\,1\right[\cup \left]1\,;\,10\right[$

17. ដោះស្រាយវិសមីការ $1+\log_2(x-2) > \log_2(x^2-3x+2)$
(ប្រឡងចូលវិទ្យាស្ថានបច្ចេកទេសជាន់ខ្ពស់រូបវិទ្យាទីក្រុងមូស្គូ)

លោការីតមានន័យកាលណា

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]2,+\infty\right[\end{cases}$$

$$\mathcal{D}=\left]2,+\infty\right[$$

$$\log_2(x^2-3x+2)-\log_2(x-2)<1$$

$$\Rightarrow \log\frac{x^2-3x+2}{x-2}<\lg_2 2 \Rightarrow \frac{x^2-3x+2-2x+4}{x-2}<0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-5x+6}{x-2}<0 \Rightarrow x\in\left]-\infty,3\right[$$

$$\mathcal{D}=\left]2,+\infty\right[$$

ដូចនេះចំលើយរបស់វិសមីការគឺ $x\in\left]2,3\right[$

18 $\log_{1/3}(2^{x+2}-4^x)\geqslant -2$, ប្រឡងចូល HOIU ,KHOAHOA 1977

មានន័យកាលណា $2^{x+2}-4^x>0$

$$\Rightarrow 2^{x+2}>2^{2x} \Rightarrow x+2>2x \Rightarrow x<2$$

$$\mathcal{D}=\left]-\infty,2\right[$$

$$\Rightarrow \log_{1/3}(2^{x+2}-4^x)\geqslant \log_{1/3}(1/3)^{-2}$$

$$\Rightarrow 2^{x+2}-4^x\leqslant 9 \Rightarrow -2^{2x}+4\cdot 2^x-9\leqslant 0$$

តាង $X=2^x \Rightarrow -X^2+4X-9\leqslant 0$

$$\Delta'=4-9<0$$

$$\Rightarrow -X^2+4X-9\leqslant 0 \text{ ពិត } \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -2^{2x}+4\cdot 2^x-9\leqslant 0 \text{ ពិត } \forall x\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះចំលើយរបស់វិសមីការគឺ $x\in\left]-\infty,2\right[$

19 $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^{x})\geqslant -2$, ប្រលងចូល (HOIU, KHOAHÓA, 1978)

មាននិយមន័យកាលណា $6^{x+1}-36^{x}>0 \Rightarrow 6^{x+1}>6^{2x}$

$\Rightarrow x+1>2x \Rightarrow x<1$

$\mathcal{D}=]-\infty,1[$

$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^{x})\geqslant \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$

$\Rightarrow -6^{2x}+6.6^{x}-5\leqslant 0$

តាង $X=6^{x} \Rightarrow -X^2+6X-5\leqslant 0$ មានឫស $1;5$

$\Rightarrow X\in]-\infty,1]\cup[5,+\infty[$

ចំពោះ $X=1 \Rightarrow 6^{x}=1 \Rightarrow 6^{x}=6^{0} \Rightarrow x=0$

ចំពោះ $X=5 \Rightarrow 6^{x}=5 \Rightarrow x=\log_6 5$

$\Rightarrow x\in]-\infty,0[\cup]\log_6 5,+\infty[$

$\mathcal{D}=]-\infty,1[$

ដូចនេះសមីការមានចំលើយ $x\in]-\infty,0[\cup]\log_6 5,1[$

20 ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_{1/3}[\log_4(x^2-5)]>0$
(ប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យមុខវិជ្ជាទីក្រុងម៉ូស្គូ)

លោការីតមាននិយមន័យកាលណា $\begin{cases}\log_4(x^2-5)>0\\ x^2-5>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\log_4(x^2-5)>\log_4 1\\ x^2>5\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x^2-5>1\\ x^2>5\end{cases} \Rightarrow x^2>6 \Rightarrow x<-\sqrt{6}$ ឬ $x>\sqrt{6}$

$\mathcal{D}=]-\infty,-\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6},+\infty[$

$\log_{1/3}[\log_4(x^2-5)]>0 \Rightarrow \log_4(x^2-5)<1$

$\Rightarrow \log_4(x^2-5)<\log_4 4 \Rightarrow x^2-5<4 \Rightarrow x^2<9 \Rightarrow -3<x<3$

$\mathcal{D}=]-\infty,-\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6},+\infty[$

ដូចនេះសមីការមានចំលើយ $x\in]-3,-\sqrt{6}[\cup]\sqrt{6},3[$

21. ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_{0,5}\left[\log_6\left(\frac{x^2+x}{x+4}\right)\right]<0$
(ប្រលងចូល MIREA នៅឆ្នាំ 1976 នៅរុស្ស៊ី)

លោការីតមានន័យកាលណា $\log_6\left(\frac{x^2+x}{x+4}\right)>0$ (1); $\frac{x^2+x}{x+4}>0$ (2)

(1) $\log_6\left(\frac{x^2+x}{x+4}\right)>\log_6 1$

$\Rightarrow \frac{x^2+x}{x+4}-1>0 \Rightarrow \frac{x^2+x-x-4}{x+4}>0$

$\Rightarrow \frac{x^2-4}{x+4}>0$ មានឫស $x=\pm 2$; $x=-4$

x	$-\infty$	-4		-2		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$\frac{x^2-4}{x+4}$	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$

(2) $\Rightarrow \frac{x^2-x}{x+4}>0 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{x+4}>0$ មានឫស $x=0$; $x=1$, $x=-4$

x	$-\infty$	-4		0		1	$+\infty$
$x(x-1)$	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$\frac{x(x-1)}{x+4}$	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$

(1) និង (2) $\Rightarrow \mathcal{D}=]-4,-2[\cup]2,+\infty[$

$\log_{0,5}\left[\log_6\left(\frac{x^2+x}{x+4}\right)\right]<0 \Rightarrow \log_{0,5}\left[\log_6\left(\frac{x^2+x}{x+4}\right)\right]<\log_{0,5}1$

$\Rightarrow \log_6\left(\frac{x^2+x}{x+4}\right)>1 \Rightarrow \log_6\left(\frac{x^2+x}{x+4}\right)>\log_6 6$

$\Rightarrow \frac{x^2+x}{x+4}-6>0$

$\Rightarrow \frac{x^2+x-6x-24}{x+4}>0 \Rightarrow \frac{x^2-5x-24}{x+4}>0$

មានឫស $x=8$, $x=-3$, $x=-4$

x	$-\infty$		-4		-3		8		$+\infty$
$x^2-5x-24$		+		+	0	−	0	+	
$x+4$		−	0	+		+		+	
$\frac{x^2-5x-24}{x+4}$		−	‖	+	0	−	0	+	

$$x \in \left]-4,-3\right[\cup \left]8,+\infty\right[$$

$$D = \left]-4,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[$$

ដូចនេះចំលើយសមីការគឺ $x \in \left]-4,-3\right[\cup \left]8,+\infty\right[$

22 ដោះស្រាយវិសមីការ $\dfrac{1-\log_{0,5}(-x)}{\sqrt{2-6x}} \leqslant 0$

(ប្រលងចូល MGMI ឆ្នាំ 1979 នៅមូស្គូ)

មានន័យកាលណា $\begin{cases} -x>0 \\ 2-6x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ x<\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x<0$

$$D = \left]-\infty,0\right[$$

តាង $f(x) = 1-\log_{0,5}(-x)$, $g(x) = \sqrt{2-6x}$

ដោយនៅក្នុង D , $g(x)>0$ ។ ដូចនេះ ដើម្បីអោយវិសមភាពផ្ទៀងផ្ទាត់លុះត្រាតែ $f(x) \leqslant 0$

$$\Rightarrow 1-\log_{0,5}(-x) \leqslant 0 \Rightarrow -\log_{0,5}(-x) \leqslant -1$$

$$\Rightarrow \log_{0,5}(-x) \geqslant \log_{0,5}0,5 \Rightarrow -x \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow x \leqslant -\frac{1}{2}$$

ឬ $x \in \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

$$D = \left]-\infty,0\right[$$

ដូចនេះលោការីតមានចំលើយគឺ :

$$x \in \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$$

23 ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_x\left[\log_9(3^x-9)\right]<1$
(ប្រលងចូលសាលាជាន់ខ្ពស់ វិស្វករសំណង់ទីក្រុង KIEV)

$$\log_x\left[\log_9(3^x-9)\right]<1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_9(3^x-9)>0 \\ 3^x-9>0 \\ \log_9(3^x-9)<x \end{cases} \text{I} \qquad \begin{cases} 0<x<1 \\ \log_9(3^x-9)>0 \\ 3^x-9>0 \\ \log_9(3^x-9)>x \end{cases} (\text{II})$$

$$\text{I} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ 3^x-9>1 \\ 3^x-9<9^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 3^x>10 \\ 3^{2x}-3^x+9>0 \text{ ពិត} \forall x\ (\Delta<0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\log_3 10 \end{cases} \Leftrightarrow x>\log_3 10$$

ឬ $x\in\left]\log_3 10,+\infty\right[$

$$\text{II} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ 3^x-9>1 \\ 3^x-9>9^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ 3^x>10 \\ 3^{2x}-3^x+9<0 \text{ មិនពិត} \forall x\ (\Delta<0) \end{cases}$$

ប្រព័ន្ធ (II) គ្មានចំលើយ

ដូចនេះចំលើយវិសមីការគឺ $x\in\left]\log_3 10,+\infty\right[$

24 ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_{0,1}\left[\log_2\left(\frac{x^2+1}{|x-1|}\right)\right]<0$
ប្រលងចូលសាលាគរុវិទ្យាជាន់ខ្ពស់ KOLOHEN

មានន័យកាលណា $\begin{cases} \frac{x^2+1}{|x-1|}>0 \text{ ពិត} \forall x\in\mathbb{R} \\ \log_2\frac{x^2+1}{|x-1|}>0 \end{cases}$

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{បើ } x>1 \\ -x+1 & \text{បើ } x<1 \end{cases}$$

* <u>ករណី $x>1$</u>

$$\log_2\frac{x^2+1}{|x-1|}>0 \Rightarrow \log_2\frac{x^2+1}{x-1}>\log_2 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x-1}-1>0 \Rightarrow \frac{x^2-x+2}{x-1}>0$$

$$\Rightarrow x\in\,]1,+\infty[\quad (*)$$

* <u>ករណី $x<1$</u>

$$\log_2\frac{x^2+1}{|x-1|}>0 \Rightarrow \log_2\frac{x^2+1}{-(x-1)}>\log_2 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1+x-1}{1-x}>0 \Rightarrow \frac{x^2+x}{1-x}>0$$

$$\Rightarrow x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,1[\quad (**)$$

$$(*)\cup(**) \Rightarrow \mathcal{D}=\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$$

$$\Rightarrow \log_{0,1}\left[\log_2\left(\frac{x^2+1}{|x-1|}\right)\right]<0=\log_{0,1}1$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{x^2+1}{|x-1|}\right)>1=\log_2 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{|x-1|}>2 \Rightarrow \frac{x^2+1}{|x-1|}-2>0$$

<u>ករណី $x>1$</u> $\Rightarrow \dfrac{x^2+1-2x+2}{x-1}>0 \Rightarrow \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}>0$

$$\Rightarrow x\in\,]1,+\infty[\quad (I)$$

<u>ករណី $x<1$</u> $\dfrac{x^2+1-2(1-x)}{1-x}>0 \Rightarrow \dfrac{x^2+1-2+2x}{1-x}>0$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x-1}{1-x}>0 \Rightarrow x\in\,]-\infty,-1-\sqrt{2}[\,\cup\,]-1+\sqrt{2},1[\quad (II)$$

$$(I)\cup(II) \Rightarrow x\in\,]-\infty,-1-\sqrt{2}[\,\cup\,]-1+\sqrt{2},1[\,\cup\,]1,+\infty[$$

$$\mathcal{D}=\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$$

ដូចនេះចំលើយវិសមីការគឺ

$$x\in\,]-\infty,-1-\sqrt{2}[\,\cup\,]-1+\sqrt{2},1[\,\cup\,]1,+\infty[$$

25 ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{1/2}(2^{x+1}-2) > -2$
ប្រលងចូលវិទ្យាស្ថានពហុបច្ចេកទេស VOLGAGRAT

លោការីតមានន័យកាលណា

$$\begin{cases} 2^x-1>0 \\ 2^{x+1}-2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x>1 \\ 2(2^x-1)>0 \end{cases} \Rightarrow x>0$$

$$\log_2(2^x-1)\cdot\left[-\log_2(2^{x+1}-2)\right]>-2$$

$$\log_2(2^x-1)\cdot\left[-\log_2(2\cdot(2^x-1))\right]>-2$$

$$\log_2(2^x-1)\cdot\left[-(\log_2 2+\log_2(2^x-1))\right]>-2$$

$$-\log_2^2(2^x-1)-\log_2(2^x-1)+2>0$$

តាង $X=\log_2(2^x-1) \Rightarrow -X^2-X+2>0$

$$\Rightarrow -2<X<1$$

គេបាន : $-2<\log_2(2^x-1)<1$

$$\frac{1}{4}<2^x-1<2$$

$$\frac{5}{4}<2^x<3 \Rightarrow \log_2\frac{5}{4}<x<\log_2 3$$

ដូចនេះចំលើយរបស់វិសមីការគឺ $x\in\left]\log_2\frac{5}{4}\ ,\ \log_2 3\right[$

26 ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_4(18-2^x)\cdot\log_2\left(\frac{18-2^x}{8}\right)\leqslant -1$
(ប្រលងចូលសាកលវិទ្យាល័យរបស់រដ្ឋ IAROSLAV)

លោការីតមានន័យកាលណា :

$$18-2^x>0 \Rightarrow -2^x>-18 \Rightarrow 2^x<18 \Rightarrow x<\log_2 18$$

$$\log_4(18-2^x)\left[\log_2(18-2^x)-\log_2 8\right]\leqslant -1$$

$$\log_4(18-2^x)\left[\log_2(18-2^x)-3\right]\leqslant -1$$

$$\frac{1}{2}\log_2^2(18-2^x)-\frac{3}{2}\log_2(18-2^x)+1\leqslant 0$$

$$\log_2^2(18-2^x)-3\log_2(18-2^x)+2\leqslant 0$$

តាង $X=\log_2(18-2^x) \Rightarrow X^2-3X+2\leqslant 0$

$\Rightarrow X\in[1,2]$ ឬ $1\leqslant X\leqslant 2$

$\Rightarrow 1\leqslant \log_2(18-2^x)\leqslant 2$

$2\leqslant 18-2^x\leqslant 4$

$-16\leqslant -2^x\leqslant -14$

$14\leqslant 2^x\leqslant 16 \Rightarrow \log_2 14 < x\leqslant \log_2 16$

$\Rightarrow \log_2 14\leqslant x\leqslant 4$

ដូចនេះចំលើយរបស់វិសមីការគឺ $x\in[\log_2 14,4]$

27. ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_5(x-3)+\frac{1}{2}\log_5 3<\frac{1}{2}\log_5(2x^2-6x+7)$
(ប្រលងចូលវិទ្យាស្ថានបច្ចេកទេសជាន់ខ្ពស់រូបវិទ្យាទីក្រុងមូស្គូ)

លោការីតមានន័យកាលណា

$$\begin{cases} x-3>0 \\ 2x^2-6x+7>0 \text{ ពិត } \forall x \end{cases} \Rightarrow x>3$$

$$\log_5(x-3)-\frac{1}{2}\log_5(2x^2-6x+7)+\frac{1}{2}\log_5 3<0$$

$$2\log_5(x-3)-\log_5(2x^2-6x+7)+\log_5 3<0$$

$$\log_5(x^2-6x+9)-\log_5(2x^2-6x+7)+\log_5 3<0$$

$$\log_5\left[\frac{3(x^2-6x+9)}{2x^2-6x+7}\right]<\log_5 1$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2-18x+27-2x^2+6x-7}{2x^2-6x+7}<0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-12x+20}{2x^2-6x+7}<0$$

ដោយ $2x^2-6x+7>0\ \forall x \Rightarrow x^2-12x+20<0$

$\Delta'=36-20=16,\ x=10\ ;\ x=2 \Rightarrow x\in]2,10[$

ដោយរួមផ្សំនឹងលក្ខខណ្ឌវិសមីការមានចំលើយ :

$$x\in]3,10[$$

28 ដោះស្រាយវិសមីការ $(\log_x 4)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x) > 1$
(ដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសាប្រលងជ្រើសរើសឆ្នាំ១៩៨៩)

លក្ខខណ្ឌមានន័យកាលណា $x>0$, $x \neq 1$ និង $x \neq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\log_4 x)} \cdot \frac{1}{(\log_2 2x)} \left(\log_2 4 + \log_2 x\right) > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+\log_2 x}{\log_2 2x\,(\log_2 2 + \log_2 x)} > 1 \Rightarrow \frac{2+\log_2 x}{\frac{1}{2}\log_2 x\,(1+\log_2 x)} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2+\log_2 x)}{\log_2 x(1+\log_2 x)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4+2\log_2 x - \log_2 x - \log_2^2 x}{\log_2 x(1+\log_2 x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\log_2^2 x + \log_2 x + 4}{\log_2 x(1+\log_2 x)} > 0$$

តាង $t = \log_2 x \Rightarrow \frac{-t^2+t+4}{t(1+t)} > 0$

$-t^2+t+4$ មានឫស $t = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$; $t = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

t	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$		-1		0		$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
$-t^2+t+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$t(1+t)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-t^2+t+4}{t(1+t)}$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

$$\frac{-t^2+t+4}{t(1+t)} > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{17}}{2} < t < -1 \text{ ឬ } 0 < t < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{17}}{2} < \log_2 x < -1 \text{ ឬ } 0 < \log_2 x < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 2^{\frac{1-\sqrt{17}}{2}} < \log_2 x < \log_2 2^{-1} \\ \log_2 1 < \log_2 x < \log_2 2^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{1-\sqrt{17}}{2}} < x < \frac{1}{2} \\ 1 < x < 2^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \end{cases}$$

ដូចនេះវិសមីការមានចំលើយ $x \in \left]2^{\frac{1-\sqrt{17}}{2}}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1, 2^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\right[$

29 ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_x 2x \leqslant \sqrt{\log_x 2x^3}$
(ប្រធានប្រឡងចូលសាលាគរុវិជ្ជាជាន់ខ្ពស់ KOLOMEN

អនុគមន៍លោការីត $\log_x 2x$ និង $\log_x 2x^3$ មានន័យកាលណា $x>0;\ x\neq 1$

$$\sqrt{\log_x 2x^3} \geqslant \log_x 2x \iff \begin{cases}\log_x 2x<0\\ \log_x 2x^3\geqslant 0\end{cases}(\mathrm{I}) \text{ ឬ } \begin{cases}\log_x 2x\geqslant 0\\ \log_x 2x^3 \geqslant (\log_x 2x)^2\end{cases}(\mathrm{II})$$

$$* \ \log_x 2x = \frac{\log_2 2x}{\log_2 x} = \frac{\log_2 2+\log_2 x}{\log_2 x} = \frac{1+\log_2 x}{\log_2 x}$$

$$* \ \log_x 2x^3 = \frac{\log_2 2x^3}{\log_2 x} = \frac{\log_2 2+3\log_2 x}{\log_2 x} = \frac{1+3\log_2 x}{\log_2 x}$$

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases}\dfrac{1+\log_2 x}{\log_2 x}<0\\[2mm] \dfrac{1+3\log_2 x}{\log_2 x}\geqslant 0\end{cases} \iff \begin{cases}-1<\log_2 x<0\\ \log_2 x\leqslant -\frac{1}{3} \text{ ឬ } \log_2 x>0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\log_2 2^{-1}<\log_2 x<\log_2 1\\ \log_2 x\leqslant \log_2 2^{-1/3} \text{ ឬ } \log_2 x>\log_2 1\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{1}{2}<x<1\\ x\leqslant 2^{-1/3} \text{ ឬ } x>1\end{cases}$$

ដោយរួមផ្សំនិងលក្ខខណ្ឌ $x>0,\ x\neq 1$ គេបាន

$$\Rightarrow(\mathrm{I}) :\ \frac{1}{2}<x\leqslant 2^{-1/3}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\dfrac{1+\log_2 x}{\log_2 x}\geqslant 0\\[2mm] \dfrac{1+3\log_2 x}{\log_2 x}\geqslant\left(\dfrac{1+\log_2 x}{\log_2 x}\right)^2\end{cases} \iff \begin{cases}\dfrac{1+\log_2 x}{\log_2 x}\geqslant 0\\[2mm] \dfrac{2\log_2^2 x-\log_2 x-1}{\log_2^2 x}\geqslant 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_2 x\leqslant -1 \text{ ឬ } \log_2 x>0\\ \log_2 x\leqslant -\frac{1}{2} \text{ ឬ } \log_2 x\geqslant 1\end{cases} \iff \begin{cases}x\leqslant 2^{-1} \text{ ឬ } x>1\\ x\leqslant 2^{-1/2} \text{ ឬ } x\geqslant 2\end{cases}$$

$$\iff x\leqslant \frac{1}{2} \text{ ឬ } x\geqslant 2$$

ដោយរួមផ្សំលក្ខខណ្ឌ $x>0$ និង $x\neq 1$

$$\Rightarrow(\mathrm{II}) :\ 0<x\leqslant \frac{1}{2} \text{ ឬ } x\geqslant 2$$

(I) និង (II) វិសមីការមានចម្លើយ $x\in \left]0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right[\cup [2,+\infty[$

សង្ខេបមេរៀន

A. ធ្នូ - មុំត្រីកោណមាត្រ និងទំនាក់ទំនងគ្រឹះរបស់វា

1. ឯកតារង្វាស់ :

ឯកតា 3 ដែលគេតែងតែប្រើដើម្បីវាស់ក្នុងត្រីកោណគឺ: រ៉ាដ្យង់ ដឺក្រេ និងក្រាដ ហើយដែលនិយមប្រើដើម្បីគណនាគឺ រ៉ាដ្យង់ និង ដឺក្រេ

ខ្នាតវាស់របស់រង្វង់គឺ
- 2 រ៉ាដ្យង់
- 360 ដឺក្រេ
- 400 ក្រាដ

រូបមន្តទាក់ទងគ្នានៃឯកតាទាំង 3 :

$$\frac{d}{10} = \frac{\alpha}{\pi} = \frac{g}{200}$$

d គិតជាដឺក្រេ

α " រ៉ាដ្យង់

g " ក្រាដ

2. ទំនាក់ទំនងគ្រឹះរបស់ត្រីកោណមាត្រ

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

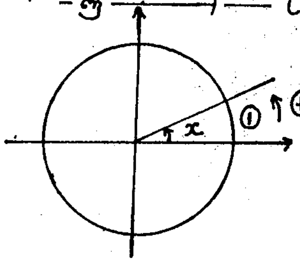
3. គណនាខួប

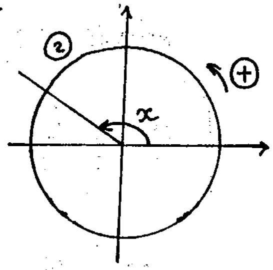
$$\sin(x+k.2\pi) = \sin x$$
$$\cos(x+k.2\pi) = \cos x$$
$$tg(x+k\pi) = tg\,x$$
$$cotg(x+k\pi) = cotg\,x$$
$(k \in \mathbb{Z})$

អនុគមន៍ $\sin x, \cos x$ មានខួប 2π

អនុគមន៍ $tg\,x, cotg\,x$ មានខួប π

4. សញ្ញារបស់អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ





ក្នុង ① :

$\sin x > 0$; $\cos x > 0$

$tg\,x > 0$; $cotg\,x > 0$

ក្នុង ②

$\sin x > 0$; $\cos x < 0$

$tg\,x < 0$; $cotg\,x < 0$

ក្នុង ③

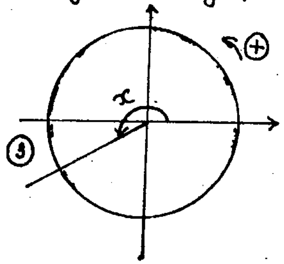
$\sin x < 0$; $\cos x < 0$

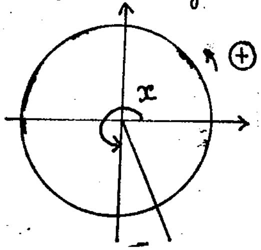
$tg\,x > 0$; $cotg\,x > 0$

ក្នុង ④

$\sin x < 0$; $\cos x > 0$

$tg\,x < 0$; $cotg\,x < 0$





5. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្ររបស់មុំទាក់ទង :

* មុំ2ផ្ទុយគ្នា : x និង $-x$

រូបមន្ត

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$tg(-x) = -tg x$$
$$\cot g(-x) = -\cot g x$$

* មុំ2បំពេញគ្នា : x និង $\frac{\pi}{2} - x$

រូបមន្ត

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot g x$$
$$\cot g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = tg x$$

* មុំ2បន្ថែមគ្នា : x និង $\pi - x$

រូបមន្ត

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$
$$tg(\pi - x) = -tg x$$
$$\cot g(\pi - x) = -\cot g x$$

* មុំ2 ដែលមានផលសងស្មើ π : $\pi+x$ និង x

$$\cos(\pi+x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi+x) = -\sin x$$
$$tg(\pi+x) = tgx$$
$$Cotg(\pi+x) = Cotgx$$

* មុំ2 ដែលមានផលសងស្មើ $\frac{\pi}{2}$ គឺ $\frac{\pi}{2}+x$ និង x

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$$
$$tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -Cotgx$$
$$Cotg\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -tgx$$

B- រូបមន្ត បូក គុណ បំលែង :

* រូបមន្តបូក

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$
$$tg(a+b) = \frac{tga+tgb}{1-tgatgb}$$
$$tg(a-b) = \frac{tga-tgb}{1+tgatgb}$$

* រូបមន្តគុណ (បានពីរូបមន្តបូកដោយជំនួស $a=b=x$)

$$\cos 2x = \cos^2x - \sin^2x = 2\cos^2x - 1 = 1-2\sin^2x$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$tg2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^2 x$$
$$\cos 3x = 3\cos^3 x - 3\cos x$$

* រូបមន្តគណនា $\cos x$, $\sin x$, $tg x$ តាម $t = tg\frac{x}{2}$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$tg x = \frac{2t}{1-t^2}$$

* រូបមន្តបំលែង

បំលែងផលបូកជាផលគុណ

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = 2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$tgp \pm tgq = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p - \cos q}$$

$$\cot gp + \cot gq = \frac{\sin(p+q)}{\sin p - \sin q}$$

$$\cot gp - \cot gq = \frac{\sin(p-q)}{\sin p - \sin q}$$

បំលែងផលគុណជាផលបូក

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

C- ប្រភេទសមីការត្រីកោណមាត្រ

C_1- សមីការត្រីកោណមាត្រគ្រឹះ

$$\sin x = \sin a \Rightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos x = \cos a \Rightarrow x = \pm a + 2k\pi$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \Rightarrow \begin{cases} x = a + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} a \Rightarrow \begin{cases} x = a + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases}$$

C_2- សមីការដឺក្រេទី1 ជាមួយនឹងអនុគមន៍រង្វង់របស់x :

ចំពោះ $a \neq 0$ នោះយើងមានសមីការ :

$a\sin x + b = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{b}{a}$ (តាង $-\frac{b}{a} = \sin\alpha$,

ចំពោះ $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ រួចប្រើប្រាស់សមីការគ្រឹះដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់)

$a\cos x + b = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{b}{a}$ (តាង $-\frac{b}{a} = \cos\alpha$,

ចំពោះ $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ រួចប្រើសមីការគ្រឹះដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់)

$$a\,tgx + b = 0$$ $\Rightarrow tgx = -\frac{b}{a}$ (តាង $-\frac{b}{a} = tg\alpha$,

ចំពោះ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ រួចប្រើសមីការគ្រឹះដើម្បីដោះស្រាយបញ្ចប់)

$$a\,Cotgx + b = 0$$ $\Rightarrow Cotgx = -\frac{b}{a}$ (តាង $-\frac{b}{a} = Cotg\alpha$,

ចំពោះ $\alpha \neq k\pi$ រួចប្រើសមីការគ្រឹះដើម្បីដោះស្រាយបញ្ចប់)

C_3 - <u>សមីការដឺក្រេទី2 ចំពោះអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្ររបស់ x</u> :

ចំពោះ $a \neq 0$ យើងមានសមីការ :

$$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0 \qquad (1)$$
$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0 \qquad (2)$$

របៀបដោះស្រាយ : ប្តូរតាង $y = \sin x$ ក្នុង (1)
$y = \cos x$ ក្នុង (2)
ជាមួយនឹង $|y| \leqslant 1$ និងក្រោយមកនោះ ដោះស្រាយ :

$$ay^2 + by + c = 0 \quad (3)$$

ដោះស្រាយ (3) រួចយកតម្លៃឬសណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|y| \leqslant 1$

ចំពោះ $a \neq 0$ យើងមានសមីការ :

$$a\,tg^2 x + b\,tgx + c = 0 \qquad (4)$$
$$a\,Cotg^2 x + b\,Cotgx + c = 0 \qquad (5)$$

របៀបដោះស្រាយ : តាង $y = tgx$ ក្នុង (4)
$y = Cotgx$ ក្នុង (5)

បន្ទាប់មកដោះស្រាយ :

$$ay^2 + by + c = 0$$

C_4 . ដោះស្រាយសមីការមានរាង

$$a\cos x + b\sin x = c \qquad (6)$$

ចំពោះ a,b,c សុទ្ធតែខុសពីសូន្យ

លក្ខខណ្ឌដើម្បីអោយ (6) មានឫស $a^2+b^2 \geq c^2$ (6')

របៀបដោះស្រាយ :

a) ប្រើជំនួយ (វិធីត្រីកោណមាត្រ) :

ចែកអង្គទាំង 2 ∈ (6) និង a រួចដាក់ $\frac{b}{a} = tg\,\alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ ពេលនោះសមីការ $\cos x + \frac{b}{a}\sin x = \frac{c}{a}$ ក្លាយជា $\cos(x-\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$ ដាក់ $\frac{c}{a}\cos\alpha = \cos\varphi$ រួចដោះស្រាយ :

$$\cos(x-\alpha) = \cos\varphi$$

b) ប្រើអញ្ញាតជំនួយ (វិធីពិជគណិត) :

តាង $t = tg\frac{x}{2}$ ចំពោះ $x \neq (2k+1)$ (7)

ជំនួស $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ នោះគេបាន

$$(a+c)t^2 - 2bt + c - a = 0 \qquad (8)$$

ដោះស្រាយ (8) បើ (8) មានឫស 2 គឺ t_1 និង t_2

នោះគេតាង $\begin{cases} t_1 = tg\,\alpha_1 \\ t_2 = tg\,\alpha_2 \end{cases}$

ពេលនោះ $tg\frac{x}{2} = tg\,\alpha_1 \Rightarrow x = 2\alpha_1 + 2k\pi$

$tg\frac{x}{2} = tg\,\alpha_2 \Rightarrow x = 2\alpha_2 + 2k\pi$

C_5 . <u>ដោះស្រាយសមីការមានរាង</u> .

$$a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x = d \qquad (9)$$

<u>របៀបស្រាយ</u>

a) គុណ d នឹង $\cos^2x + \sin^2x \; (=1)$

រួចចែកអង្គទាំង 2 នឹង $\cos^2x$, ចំពោះ $\cos x \neq 0$

នោះបានសមីការដឺក្រេទី2 តាម $t = tgx$

$$(a-d)t^2 + bt + c - d = 0 \qquad (10)$$

b) ជំនួស $\sin^2x = \dfrac{1-\cos2x}{2}$; $\cos^2x = \dfrac{1+\cos2x}{2}$

$$\sin x\cos x = \frac{\sin2x}{2}$$

នោះគេបាន : $b\sin2x + (c-a)\cos2x = 2d - a - c$

ឬ
$$\boxed{(c-a)\cos2x + b\sin2x = 2d - a - c} \qquad (11)$$

ដោះស្រាយ (11) ដូចដោះស្រាយ (6)

C_6 . ដោះស្រាយសមីការមានរាង

$$\boxed{a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0} \qquad (12)$$

<u>របៀបដោះស្រាយ</u> : តាង $y = \sin x + \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x.\cos x = \dfrac{y^2-1}{2}$

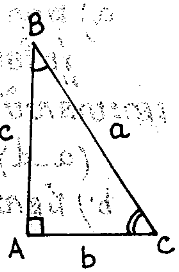
ជំនួសចូល (12) នោះគេបាន :

$$\boxed{\begin{array}{l} by^2 + 2ay + 2c - b = 0 \\ \text{លក្ខខណ្ឌគឺ} : -\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2} \end{array}}$$

១_ ទំនាក់ទំនងត្រីកោណមាត្រក្នុងត្រីកោណ:

a _ ក្នុងត្រីកោណកែង :

$$A = B + C = \frac{\pi}{2}$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b = a\sin B = a\cos C$$
$$c = a\sin C = a\cos B$$
$$b = c\,tg B = c\cot g C$$
$$c = b\,tg C = b\cot g B$$

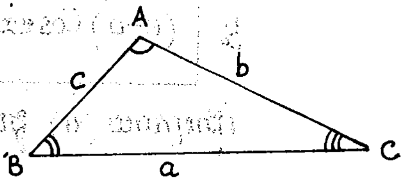


b. ក្នុងត្រីកោណណាមួយ

$$A + B + C = \pi$$

b_1 - ទ្រឹស្តីបទអនុគមន៍ Sin :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



b_2. ទ្រឹស្តីបទ Cos :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

b_3 ទ្រឹស្តីបទកំពស់ចំណោល :

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

b_4. អង្កត់ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ : $2R$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

b_5 - ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ (ចំពោះ $p = \frac{a+b+c}{2}$)

$$S = \frac{1}{2} bc\sin A = \frac{1}{2} ca\sin B = \frac{1}{2} ab\sin C = \frac{abc}{4R} = p.r$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

R = កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ

r = កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ

b_6 - កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

ផ្នែកទី V

ដំណោះស្រាយ
សមីការ
ត្រីកោណមាត្រ
មានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

វិធីដោះស្រាយសមីការត្រីកោណមាត្រ មានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

1- សមីការត្រីកោណមាត្រគ្រឹះ

$$\begin{cases} \sin x = m \\ |m| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin m + k\pi$$

$$\begin{cases} \cos x = m \\ |m| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \arccos m + 2k\pi$$

$$\begin{cases} \text{tg}\, x = m \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x = \text{arctg}\, m + k\pi$$

$$\begin{cases} \text{cotg}\, x = m \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x = \text{arccotg}\, m + k\pi$$

$(k \in \mathbb{Z})$

• ល្បិចដោះស្រាយ :

ពេលជួបប្រទះសមីការត្រីកោណមាត្រជាប់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ដឺក្រេទី1 ចំពោះអនុគមន៍ Cos , Sin, tg ឬ Cotg នៃមុំតែមួយ x គេត្រូវបំលែង :

• បំលែងនិងបង្រួមសមីការឲ្យមានរាង :

$$a\sin x = b$$
$$a\cos x = b$$
$$a\,\text{tg}\, x = b$$
$$a\,\text{cotg}\, x = b$$

• រកលក្ខខណ្ឌឲ្យប៉ារ៉ាម៉ែត្រដើម្បីឲ្យ $a \neq 0$
ពេលនោះសមីការមានរាង :

$\sin x = \frac{b}{a}$ (1)

$\cos x = \frac{b}{a}$ (2)

$\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$ (3)

$\operatorname{cotg} x = \frac{b}{a}$ (4)

– ចំពោះ (1) ឬ (2) រកលក្ខខណ្ឌប៉ារ៉ាម៉ែត្រដើម្បីឲ្យ :

$\left|\frac{b}{a}\right| \leqslant 1$

– ចំពោះ (3) ឬ (4) រកលក្ខខណ្ឌប៉ារ៉ាម៉ែត្រដើម្បីឲ្យ

$\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$

– ពេលលក្ខខណ្ឌប៉ារ៉ាម៉ែត្រផ្ទៀងផ្ទាត់ យើងងាយស្រួលក្នុងការរកឫស ។

1- **ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាសមីការតាមប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m :**

$$m\cos x - 2(m-1) = (2m+3)\cos x - 1$$

សំរាយបញ្ជាក់

$$m\cos x - 2(m-1) = (2m+3)\cos x - 1 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow m\cos x - (2m+3)\cos x = 2(m-1) - 1$$

$$\Leftrightarrow -(m+3)\cos x = 2m - 3$$

$$\Leftrightarrow (m+3)\cos x = 3 - 2m$$

បើ $m+3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$ សមីការ (1) សមមូល

$$\cos x = \frac{3-2m}{m+3} \quad (2)$$

ដើម្បីឲ្យ (2) មានឫសនោះ :

$$\left|\frac{3-2m}{m+3}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3-2m}{m+3}\right)^2 \leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3-2m}{m+3}\right)^2 - 1 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (3-2m)^2 - (m+3)^2 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 3m(m-6) \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant m \leqslant 6$$

គួបផ្សំនឹងលក្ខខណ្ឌខាងលើរបស់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m យើងមាន :

$$0 \leqslant m \leqslant 6 \ : \ x = \pm \arccos\left(\frac{3-2m}{m+3}\right) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

ពិភាក្សា :

* បើ $0<m<6$ នោះ $x = \pm \arccos\left(\frac{3-2m}{m+3}\right) + 2k\pi$

* បើ $m=0$ នោះ $x = \pm \arccos(1) + 2k\pi = 2k\pi$

* បើ $m=6$ នោះ $x = \pm \arccos(-1) + 2k\pi$

$$= (2k+1)\pi$$

* បើ $m<0$ ឬ $m>0$ នោះសមីការគ្មានឫស, $x \in \phi$

2. ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m

$$tg\,x - m = (m+2)\,tg\,x$$

<u>សំរាយបញ្ជាក់</u>

$$tgx - m = (m+2)tgx \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (m+2)tgx - tgx = -m$$

$$\Leftrightarrow (m+1)tgx = -m$$

បើ $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ សមីការ (1)

មានឫស :

$$tgx = \frac{-m}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{m}{m+1}\right) + k\pi ,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg}\frac{m}{m+1} + k\pi ,\ k \in \mathbb{Z}$$

ពិភាក្សា :

. បើ $m \neq -1$ នោះ $x = -\operatorname{arctg}\frac{m}{m+1} + k\pi ,\ k \in \mathbb{Z}$

. បើ $m = -1$ នោះ $x \in \emptyset$

4 ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាតាមប៉ារ៉ាម៉ែត្រសមីការ

$$m + \sin 3x = m\sin 3x$$

<u>សំរាយបញ្ជាក់</u>

$$m + \sin 3x = m\sin 3x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow m\sin 3x - \sin 3x = m$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\sin 3x = m$$

បើ $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ សមីការ (1) សមមូល :

$$\sin 3x = \frac{m}{m-1} \quad (2)$$

ដើម្បីឲ្យសមីការ (2) មានឫសនោះ :

$$\left|\frac{m}{m-1}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow \left(\frac{m}{m-1}\right)^2 - 1 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - (m-1)^2 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 2m - 1 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow m \leqslant \frac{1}{2}$$

គួបផ្សំនឹងលក្ខខណ្ឌប៉ារ៉ាម៉ែត្រខាងលើ យើងបាន

$$m \leqslant \frac{1}{2} ;\ 3x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{m}{m-1}\right) + k\pi ;\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{1}{3}(-1)^k \arcsin\left(\frac{m}{m-1}\right) + \frac{k}{3}\pi$$

<u>ពិភាក្សា</u>

បើ $m < \frac{1}{2}$ នោះ $x = \frac{1}{3}(-1)^k \arcsin\left(\frac{m}{m-1}\right) + \frac{k}{3}\pi ;\ k \in \mathbb{Z}$

• បើ $m = \frac{1}{2}$ នោះ $x = \frac{1}{3}(-1)^k \arcsin(-1) + \frac{k}{3}\pi$

$$= \frac{1}{3}(-1)^k \frac{3\pi}{2} + \frac{k}{3}\pi$$

$$= \left[\frac{3}{2}(-1)^k + k\right]\frac{\pi}{3}$$

• បើ $m > \frac{1}{2}$ នោះ $x \in \emptyset$

2°) <u>សមីការត្រីកោណមាត្រគោល</u>

$$\sin x = \sin A \iff x = (-1)^k A + k\pi$$

$$\cos x = \cos A \iff x = \pm A + 2k\pi$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} A \iff x = A + k\pi$$

$$\operatorname{Cotg} x = \operatorname{Cotg} A \iff x = A + k\pi$$

ក្នុងនោះ $k \in \mathbb{Z}$ ។

3_ រកឫសវិជ្ជមានតូចបំផុត នៃសមីការ

$$\cos \pi x^2 = \cos \pi (x^2 + 2x + 1)$$

<u>សំរាយបញ្ជាក់</u>

$$\cos \pi x^2 = \cos \pi (x^2 + 2x + 1)$$

$$\iff \pi x^2 = \pm \pi (x^2 + 2x + 1) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = x^2 + 2x + 1 + 2k \\ x^2 = -(x^2 + 2x + 1) + 2k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 1 + 2k = 0 & (1) \\ 2x^2 + 2x + 1 - 2k = 0, \ k \in \mathbb{Z} & (2) \end{cases}$$

ដោះស្រាយ (1) យើងមាន :

$$2x + 1 + 2k = 0 \iff x = \frac{-1 - 2k}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$$

ដើម្បីឲ្យឫស x វិជ្ជមានតូចបំផុត នោះត្រូវឲ្យ $k = -1$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$$

3) សមីការដឺក្រេទី2 ចំពោះអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ :

* សមីការមានរាង :

$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$

$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$

$a\,tg^2 x + b\,tg x + c = 0$

$a\,cotg^2 x + b\,cotg x + c = 0$

* របៀបដោះស្រាយ :

យើងត្រូវបំលែងសមីការឲ្យចូលរាងខាងលើ ។ បន្ទាប់មក :

_ តាង $\sin x = t$ ឬ $\cos x = t$ ចំពោះ $|t| \leqslant 1$

_ តាង $tg x = t$ ឬ $cotg x = t$ ចំពោះ $t \in \mathbb{R}$

_ ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី 2 តាម t

_ កំនត់រកតម្លៃ t តាមតម្លៃ t យើងនឹងរកឃើញតម្លៃ x ។

គេឲ្យសមីការ : $2\left(a\cos 2x + \cos x + \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} + 1\right) = a$

① ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាសមីការតាមប៉ារ៉ាម៉ែត្រ a

② កំនត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការមានឫសនៅក្នុងចន្លោះបិទ $[0, \frac{\pi}{4}]$

សំរាយបញ្ជាក់ :

យើងមាន : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x)$ "បំលែងផលគុណជាផលបូក)

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1 + \cos x)$

$= \cos^2 x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x$

ដូចនេះ សមីការ : $2\left(a\cos 2x + \cos x + \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} + 1\right) = a \quad (1)$

$\Leftrightarrow 2\left[a(2\cos^2 x - 1) + \cos x + \cos^2 x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x + 1\right] = a$

$\Leftrightarrow 2(2a+1)\cos^2 x + 3\cos x + 1 - a = 0 \quad (2)$

1) ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាទៅតាមប៉ារ៉ាម៉ែត្រ a :

តាង $\cos x = t$ ចំពោះ $|t| \leqslant 1$ យើងបាន

$x=\pm\arccos t+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ :

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases} f(t)=2(2a+1)t^2+3t+1-a=0\ ,\ |t|\leqslant 1 \quad (3)\\ x=\pm\arccos t+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

យើងពិនិត្យករណី:

$2(2a+1)=0 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$

សមីការ $f(t)=0$ ទៅជា

$3t+1+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$

$x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2k\pi=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

យើងពិនិត្យករណី :

$2(2a+1)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq-\frac{1}{2}$

យើងបាន :

$f(t)=2(2a+1)t^2+3t+1-a=0$

$\Delta=3^2-8(2a+1)(1-a)=(4a-1)^2\geqslant 0\ ,\ \forall a$

ដូច្នេះសមីការ $f(t)=0$ ជានិច្ចជាកាលមានរឫសពីរ

$t_1=\dfrac{-3+4a-1}{4(2a+1)}=\dfrac{a-1}{2a+1}$

$t_2=\dfrac{-3-4a+1}{4(2a+1)}=-\frac{1}{2}\in[-1,1]$

លក្ខខណ្ឌដើម្បីឲ្យ $t_1\in[-1,1]$ គឺ:

$\left|\dfrac{a-1}{2a+1}\right|\leqslant 1 \Leftrightarrow (a-1)^2-(2a+1)^2\leqslant 0$

$\Leftrightarrow 3a(-a-2)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow a\leqslant -2$ ឬ $a\geqslant 0$

តាមលក្ខខណ្ឌខាងលើ :

$x_1=\pm\arccos t_1+2k\pi=\pm\arccos\left(\dfrac{a-1}{2a+1}\right)+2k\pi$

$x_2=\pm\arccos t_2+2k\pi=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2k\pi$

$=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

ពិភាក្សា: តាមលទ្ធផលរបស់ករណីទាំង២ខាងលើបង្ហាញថា:
សមីការ $f(t)=0$ មានរឫស $t_1=t_2=-\frac{1}{2}$ ពេលណា $\Delta=0$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$, យើងត្រូវពិភាក្សាដូចខាងក្រោម :

. បើ $a<-2$ សមីការមានឫស 4

$$x = \pm \arccos\left(\frac{a-1}{2a+1}\right) + 2k\pi$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

. បើ $a=-2$ សមីការមានឫស 3 :

$$x = \pm \arccos 1 + 2k\pi = 2k\pi$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

. បើ $-2<a<0$

សមីការមានឫស 2 : $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

. បើ $a=0$ សមីការមានឫស 3

$$x = \pm \arccos(-1) + 2k\pi = (2k+1)\pi$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

. បើ $0<a<\frac{1}{4}$ សមីការមានឫស 4 :

$$x = \pm \arccos\left(\frac{a-1}{2a+1}\right) + 2k\pi$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

. បើ $a = \frac{1}{4}$ សមីការមានឫស 2

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

. បើ $a > \frac{1}{4}$ សមីការមានឫស 4

$$x = \pm \arccos\left(\frac{a-1}{2a+1}\right) + 2k\pi$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

2) កំណត់ a ដើម្បីឲ្យ $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

យើងមាន $\cos x = t$

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$$

ដូច្នេះឫស $t_2 = -\frac{1}{2} \notin \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

ដូច្នេះដើម្បីឲ្យ $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ នោះ

$$t_1 \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{a-1}{2a+1} \leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-1}{2a+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0 \\ \frac{a-1}{2a+1} - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(1-\sqrt{2})a - 2 - \sqrt{2}}{2(2a+1)} \geq 0 \\ \frac{-a-2}{2a+1} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \leq a < -\frac{1}{2} \\ a \leq -2 \text{ ឬ } a > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq a \leq -2$$

* សំគាល់: 1) របៀបដោះស្រាយខាងលើគឺចូលក្នុងករណីពិសេស ព្រោះសមីការដឺក្រេទី2 $f(t)=0$ មានឫស $t_2=-\frac{1}{2}$ ជាចំនួនមិនអាស្រ័យនឹងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ a ។

2) ក្នុងករណីដែលឫសទាំងពីរ t_1, t_2 អាស្រ័យនឹងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ពេលនោះ យើងត្រូវបង្កើតតារាងប្រៀបធៀបឫសទាំងពីររបស់សមីការ $f(t)=0$ ចំពោះចំនួន -1 និង $+1$ រួចត្រូវពិភាក្សាឫស x ចំពោះប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

3) រូបមន្តដែលត្រូវចងចាំដើម្បីប្រៀបធៀបឫសរបស់សមីការដឺក្រេទី2 $f(t)=at^2+bt+c=0$ ជាមួយនឹងចំនួន α គឺ:

$$\left\{\begin{matrix} f(t)=0 \text{ មានឫស } \alpha \\ t_1=\alpha \text{ ឬ } t_2=\alpha \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow f(\alpha)=0$$

$$\left\{\begin{matrix} f(t)=0 \text{ មានឫស} \\ \text{និង } t_1<\alpha<t_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow af(\alpha)<0$$

$$\left\{\begin{matrix} f(t)=0 \text{ មានឫស} \\ \text{និង } t_1<t_2<\alpha \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \Delta \geq 0 \\ f(\alpha)>0 \\ \alpha - \frac{S}{2} > 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{cases} f(t)=0 \text{ មានឫស} \\ \text{និង } \alpha<t_1<t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha)>0 \\ \alpha-\frac{S}{2}<0 \end{cases}$$

4) របមនខាងលើក៏អាចប្រើដើម្បីប្រៀបធៀបពីរចំនួន α, β ជាមួយនឹងឫសទាំងពីរ $\in$ សមីការដឺក្រេទី2 $f(t)=0$ ។ ដោយឡែកករណី :

$$\begin{cases} f(t)=0 \text{ មានឫស} \\ \text{ដែលក្នុងនោះមានឫស} \\ \text{មួយនៅក្នុងចន្លោះ } (\alpha,\beta) \end{cases} \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)<0$$

5) ក្នុងករណីដែលឫសរបស់សមីការដឺក្រេទី2 $f(t)=0$ មានទំនាក់ទំនងជាមួយចន្លោះ (α,β) ឬ ចន្លោះ $[\alpha,\beta]$ នោះគប្បីគូសគំនូសបំព្រួញវិភាគគ្រប់ករណីដែលអាចមាន រួចហើយបង្កើតប្រព័ន្ធវិសមីការត្រូវគ្នានឹងករណីនិមួយៗខាងលើ ។

> គេមានសមីការ : $\sin^4x+\cos^4x-\cos2x+\frac{1}{4}\sin2x+m=0$
> ចំពោះតម្លៃណារបស់ m ទើបសមីការនោះមានឫស ?

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^22x=1-\frac{1}{2}(1-\cos^22x)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos^22x+\frac{1}{2}$$

យើងបាន $\sin^4x+\cos^4x-\cos2x+\frac{1}{4}\sin^22x+m=0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos^22x+\frac{1}{2}-\cos2x+\frac{1}{4}(1-\cos^22x)+m=0$

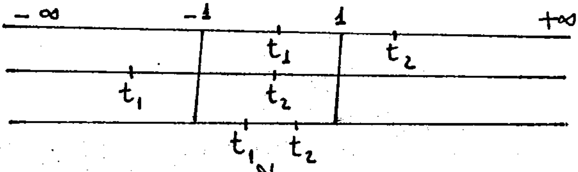
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\cos^22x-\cos2x+m-\frac{3}{4}=0 \quad (2)$

តាង $\cos2x=t$ ចំពោះ $|t|\leq1$ យើងបាន :

$2x=\pm\arccos t+2k\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}\arccos t+k\pi$.

ដូចនេះសមីការ(1) សមមូលនឹង :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(t)=\frac{1}{4}t^2-t+m+\frac{3}{4}=0, \ t\in[-1,1] \quad (3) \\ x=\pm\frac{1}{2}\arccos t+k\pi \end{cases}$$



(រូបទី១)

ដើម្បីឲ្យ(1) មានឫសនោះសមីការដឺក្រេទី2 $f(t)=0$ ត្រូវមានឫស t_1, t_2 និងយ៉ាងហោចណាស់មានឫស១ ស្ថិតក្នុងចន្លោះ $[-1,1]$ ។

តាមតារាងខាងលើ ដើម្បីឲ្យមានឫសនោះ:

$$\underbrace{f(-1)f(1)\leqslant 0}_{(I)} \quad \text{ឬ} \quad \left.\begin{cases} \Delta\geqslant 0 \\ f(-1)>0 \\ f(1)>0 \\ -1-\frac{S}{2}<0 \\ 1-\frac{S}{2}>0 \end{cases}\right\} (II)$$

ដោះស្រាយ (I) យើងបាន:

$$f(-1)f(1)\leqslant 0 \Leftrightarrow (2+m)m\leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow -2\leqslant m\leqslant 0$$

ដោះស្រាយ (II) យើងបាន:

$$\begin{cases} \Delta\geqslant 0 \\ f(-1)>0 \\ f(1)>0 \\ -1-\frac{S}{2}<0 \\ 1-\frac{S}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}-m\geqslant 0 \\ 2+m>0 \\ m>0 \\ -1-2<0 \\ 1-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\phi$$

សរុបលទ្ធផលខាងលើយើងឃើញថាសមីការ(1) មានឫសកាលណា :

$$-2\leqslant m\leqslant 0$$

ចំពោះតម្លៃណារបស់ m ទើបសមីការ :

$$4\cos^2 x - 2\cos x - m - 1 = 0 \quad (1)$$

មានឫស $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $\cos x = t$ ចំពោះ $x \neq k\pi$ យើងបាន $t \in (-1;1)$

និង $x = \pm \arccos t + 2k\pi$

ពេលនោះ $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = 4t^2 - 2t - m - 1 = 0 \ ; \ t \in (-1,1) \\ x = \pm \arccos t + 2k\pi \end{cases}$

* ពិនិត្យករណី $t = -1$ ពេលនោះតម្លៃរបស់ m គឺ

$f(-1) = -m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = 5$

និងឫសរបស់សមីការនោះគឺ :

$tt' = \frac{c}{a} = \frac{-m-1}{4} = \frac{-5-1}{4} = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow t' = \frac{-3}{2t} = \frac{3}{2} \notin (-1;1)$

$\Rightarrow m = 5$ មិនយក

* ពិនិត្យករណី : $t = 1$

$\Rightarrow f(1) = -m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

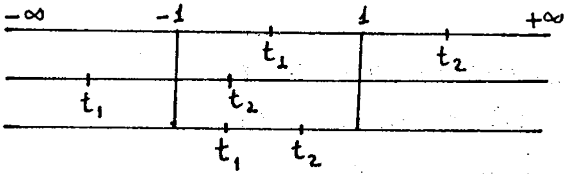
យើងបានឫសរបស់សមីការនោះគឺ :

$tt' = \frac{c}{a} = \frac{-m-1}{4} = \frac{-1-1}{4} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow t' = -\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2} \in (-1,1)$

ដូចនេះ $m = 1$ យកបាន

* ពិនិត្យករណី : $m \neq 1$ និង $m \neq 5$ ។ ដើម្បីឲ្យសមីការត្រីកោណមាត្រមានឫស នោះសមីការដឺក្រេទី 2 $f(t) = 0$ ត្រូវមានឫស 2: t_1, t_2 និងយ៉ាងហោចណាស់មានឫសមួយនៅក្នុងចន្លោះ $(-1;1)$



(រូបទី2)

តាមតំនូសបំព្រួញរូបទី2, ដើម្បីឲ្យបំពេញបានដូចនោះត្រូវ៖

$$\underbrace{f(-1)f(1)<0}_{(I)} \quad \text{ឬ} \quad \left\{\begin{array}{l} \Delta' \geqslant 0 \\ f(-1)>0 \\ f(1)>0 \\ -1-\frac{S}{2}<0 \\ 1-\frac{S}{2}>0 \end{array}\right\} (II)$$

ដោះស្រាយ (I)

យើងមាន៖ $f(-1)f(1)<0 \Leftrightarrow (-m+5)(-m+1)<0$

$\Leftrightarrow 1<m<5$

ដោះស្រាយ (II) យើងមាន៖

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta' \geqslant 0 \\ f(-1)>0 \\ f(1)>0 \\ -1-\frac{S}{2}<0 \\ 1-\frac{S}{2}>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4m+5 \geqslant 0 \\ -m+5>0 \\ -m+1>0 \\ -1-\frac{1}{4}<0 \\ 1-\frac{1}{4}>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \geqslant -\frac{5}{4} \\ m<5 \\ m<1 \\ \forall m \\ \forall m \end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leqslant m < 1$

សរុបលទ្ធផលខាងលើ សមីការ (1) មានឬសកាលណា៖

$m=1$ ឬ $1<m<5$ ឬ $-\frac{5}{4} \leqslant m<1$

$\Rightarrow \quad -\frac{5}{4} \leqslant m<5$

4. សមីការដឺក្រេទី1 ចំពោះ $\sin x$ និង $\cos x$.

* សមីការរាង៖ $a\sin x+b\cos x+C=0 \quad (1)$

ក្នុងនោះមេគុណ a, b, c ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

* របៀបដោះស្រាយ :

_ ដំណាក់ដំបូងពិនិត្យមើល $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ជាឫសរបស់សមីការឬទេ ប្រសិនបើជាឫសមែន ចូររកឫសផ្សេងទៀតចំពោះករណីនេះ ។

_ ឧបមា $x \neq (2k+1)\pi$. ពេលនោះ

យើងតាង $tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

_ ជំនួសចូល (1) យើងបានសមីការដឺក្រេទី 2 មានអញ្ញាត t រួចដោះស្រាយរក t ហើយតាម t យើងនឹងទាញរកតម្លៃ x:

$x = 2\,\mathrm{arctg}\, t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

> ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាតាមប៉ារ៉ាម៉ែត m សមីការ :
> $(2m-1)\cos x + m\sin x = 3m-1 \ (1)$

សំរាយបញ្ជាក់ :

* ពិនិត្យករណី $x = (2k+1)\pi$

ជំនួស $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ចូលសមីការ (1)

យើងបាន :

$(2m-1)(-1) + m.0 = 3m-1 \Rightarrow m = \frac{2}{5}$

ជំនួស $m = \frac{2}{5}$ ចូលសមីការ (1)

យើងបាន :

$\left(\frac{4}{5}-1\right)\cos x + \frac{2}{5}\sin x = \frac{6}{5} - 1$

$\Leftrightarrow -\cos x + 2\sin x = 1$

$\Leftrightarrow -2\cos^2\frac{x}{2} + 1 + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 1$

$\Leftrightarrow -\cos\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{x}{2} = 0 \\ 2\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = (2k+1)\pi \\ x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

ដូច្នេះពេល $m = \frac{2}{5}$ សមីការ(1) មានឫស :

$x = (2k+1)\pi$ ឬ $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2k\pi$

* ករណី $m \neq \frac{2}{5}$ ក្នុងករណីនេះ

$x \neq (2k+1)\pi$ តាង $tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t + 2k\pi$

និង $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

ជំនួសចូល(1) យើងបាន :

$$(2m-1)\cos x + m\sin x = 3m-1$$

$$(2m-1)\frac{1-t^2}{1+t^2} + m\frac{2t}{1+t^2} = 3m-1$$

$$(5m-2)t^2 - 2mt + m = 0$$

ក្នុងករណីនេះ យើងមាន :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = (5m-2)t^2 - 2mt + m = 0 \quad (2) \\ x = 2\operatorname{arctg} t + 2k\pi \end{cases}$$

ដូច្នេះដើម្បីឲ្យសមីការ (1) មានឫស នោះសមីការ (2) ត្រូវមានឫស ។ ដូច្នេះ :

$$\Delta' = m^2 - (5m-2)m = m(2-4m) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$$

ពេលនោះឫសរបស់សមីការ (2) គឺ :

$$t_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m(2-4m)}}{5m-2}$$

$\Rightarrow$ ឫសរបស់ (1) គឺ :

$$x = 2\operatorname{arctg}\frac{m \pm \sqrt{m(2-4m)}}{5m-2} + 2k\pi$$

ពិភាក្សាសរុបករណីខាងលើ យើងបាន :

* បើ $m<0$ ឬ $m>\frac{1}{2}$ នោះសមីការ (1) គ្មានឫស ។
* បើ $m=0$ សមីការ (1) មានឫស 1 គឺ :

$$x = 2\text{arctg}\,0 + 2k\pi$$

* បើ $0<m<\frac{1}{2}$ និង $m \neq \frac{2}{5}$ សមីការ (1) មានឫស 2:

$$x = 2\text{arctg}\,\frac{m \pm \sqrt{m(2-4m)}}{5m-2} + 2k\pi$$

* បើ $m=\frac{2}{5}$ សមីការ (1) មានឫសពីរ :

$$x=(2k+1)\pi \text{ ឬ } x = 2\text{arctg}\,\frac{1}{2} + 2k\pi$$

* បើ $m=\frac{1}{2}$ សមីការ (1) មានឫសមួយ:

$$x = 2\text{arctg}\,1 + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាតាមតម្លៃ m សមីការ :

$$m\cos 2x - \sin 2x = 1-m \quad (1)$$

ដំណោះស្រាយ

* ពិនិត្យករណី $2x = (2k+1)\pi$

ជំនួស $2x=(2k+1)\pi$ ចូលក្នុង (1) យើងបាន:

$m(-1)-0 = 1-m \Rightarrow 0 = 1$ មិនពិត

ដូច្នេះគ្មានតម្លៃណារបស់ m ដើម្បីឲ្យ :

$x=(2k+1)\pi$ ជាឫសរបស់សមីការ (1) ទេ ។

ដោះស្រាយ (1) :

ដោយ : $2x \neq (2k+1)\pi$ ចំពោះ $\forall m$

យើងតាង $\text{tg}\,x = t \Rightarrow x = \text{arctg}\,t + k\pi$

និង $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

ជំនួសចូលក្នុង (1) យើងបាន

$$m\cos 2x - \sin 2x = 1-m$$

$$m\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} = 1-m$$

ដូច្នេះ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = t^2+2t-2m+1=0 \\ x = \text{arctg}\,t + k\pi \end{cases}$

ដើម្បីឲ្យសមីការ $f(t)=0$ មានឫសត្រូវ :

$$\Delta' = 1-(-2m+1) = 2m \geqslant 0 \Leftrightarrow m \geqslant 0$$

ពេលនោះឫសរបស់សមីការ (2) គឺ :

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2m}$$

ហើយឫសរបស់ (1) គឺ

$$x = \operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{2m}) + k\pi$$

ពិភាក្សា : • បើ $m<0$ សមីការ (1) គ្មានឫស , $x \in \emptyset$

• បើ $m=0$ សមីការ (1) មានឫសមួយ :

$$x = \operatorname{arctg}(-1) + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

• បើ $m>0 \Rightarrow$ (1) មានឫស 2 :

$$x = \operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{2m}) + k\pi .$$

* <u>ចំណាំ</u> : បើ a, b, c ជាចំនួនថេរ នោះសមីការ $a\cos x + b\sin x = c$ គឺអាចដោះស្រាយតាមវិធីបំលែងអញ្ញាតដូចខាងលើបាន ដោយតាង $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ រួចរកតំលៃ t រួចតាមតំលៃ t ទាញរកតំលៃ $x = 2\operatorname{arctg} t + 2k\pi$

ប៉ុន្តែចំពោះករណីនេះ គួរតែប្រើប្រាស់មុំបំពេញដើម្បីដោះស្រាយ ។ ព្រោះ a និង b មិនសុទ្ធតែស្មើ 0 ទេ ។ ដូច្នេះយើងបាន :

$$a\cos x + b\sin x = c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ដោយ $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$

ដូចនេះយើងតាង : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$; $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$

ពេលនោះសមីការ (1) សមមូលនឹងសមីការ :

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ដើម្បីឲ្យ (1) មានឫសនោះសមីការ (2) ត្រូវមានឫស

ដូច្នេះ $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow c^2 \leqslant a^2+b^2$

5- សមីការត្រីកោណមាត្រការ៉េ :

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

* របៀបដោះស្រាយ :

- បើ $a \neq 0$ និង $\cos x \neq 0$ ។ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^2 x$

យើងបាន : $(1) \Leftrightarrow a\,tg^2 x + b\,tgx + c = 0$

- បើ $c \neq 0$ និង $\sin x \neq 0$ ។ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\sin^2 x$

$$(1) \Leftrightarrow a + b\,cotgx + c\,cotg^2 x = 0$$

- ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី2 ទៅតាមអញ្ញាត tgx ឬ $cotgx$
- ស្គាល់តម្លៃរបស់ tgx ឬ របស់ $cotgx$ យើងទាញរកតម្លៃ x ។

> ដោះស្រាយនិងពិភាក្សា តាមតម្លៃ a សមីការ :
>
> $(\sin x + a\cos x)(\sin x + 2a\cos x) = 2 \quad (1)$

ដោះស្រាយ

យើងមាន :

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + 2a\cos x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 3a\sin x\cos x + 2a^2\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 3a\sin x\cos x + 2(1-a^2)\cos^2 x = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow tg^2 x - 3a\,tgx + 2(1-a^2) = 0 \quad (3)$$ (ចែក (2) នឹង $\cos^2 x$)

តាង $tgx = t \Rightarrow x = arctg\,t + k\pi \Rightarrow (3)$ ទៅជា :

$$t^2 - 3at + 2(1-a^2) = 0$$

ដូចនេះ សមីការ (1) សមមូលនឹង

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = t^2 - 3at + 2(1-a^2) = 0 \\ x = arctg\,t + k\pi \end{cases}$$

សមីការ $f(t)=0$ មានឫសលុះត្រាតែ :

$$\Delta = 9a^2 - 8(1-a^2) = 17a^2 - 8 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow |a| \geqslant 2\sqrt{\frac{2}{17}}$$

ពេលនោះឫសរបស់សមីការ $f(t)=0$ គឺ :

$$t_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{17a^2-8}}{2}$$ $\Rightarrow$ ឫសរបស់សមីការ(1) គឺ:

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3a \pm \sqrt{17a^2-8}}{2} + k\pi$$

ពិភាក្សា :

* បើ $|a| > 2\sqrt{\frac{2}{17}}$ សមីការ(1) មានឫស 2 :

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3a \pm \sqrt{17a^2-8}}{2} + k\pi$$

* បើ $|a| = 2\sqrt{\frac{2}{17}}$ សមីការ(1) មានឫសពីរ

$$x = \operatorname{arctg}\left(\pm 3\sqrt{\frac{2}{17}}\right) + k\pi$$

* បើ $|a| < 2\sqrt{\frac{2}{17}}$ សមីការ(1) គ្មានឫស , $x \in \emptyset$

ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាសមីការតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m :

$$(3m-2)\sin^2 x - 2(5m-2)\sin x\cos x + 3(2m+1)\cos^2 x = 0 \quad (1)$$

ដំណោះស្រាយ

* ពិនិត្យករណី : $3m-2=0 \Leftrightarrow m=\frac{2}{3}$

សមីការ(1) ទៅជា $-2\left(\frac{10}{3}-2\right)\sin x\cos x + 3\left(\frac{4}{3}+1\right)\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow -8\sin x\cos x + 21\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(21\cos x - 8\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ ឬ $21\cos x - 8\sin x = 0 \quad (2)$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ ឬ $tgx = \frac{21}{8}$ (ចែក(2) នឹង $\cos x$)

$\Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ឬ $x = \operatorname{arctg}\frac{21}{8} + k\pi$

ដូចនេះពេល $m = \frac{2}{3}$ សមីការ(1) មានឫស 2

* ពិនិត្យករណី : $3m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{2}{3}$

យើងបាន : $(3m-2)\sin^2 x - 2(5m-2)\sin x\cos x + 3(2m+1)\cos^2 x = 0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow (3m-2)tg^2x - 2(5m-2)tgx + 3(2m+1) = 0$ (ចែក(1) នឹង $\cos^2 x$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = (3m-2)t^2 - 2(5m-2)t + 3(2m+1) = 0 \quad (3) \\ x = \operatorname{arctg} t + k\pi \end{cases}$$

(យក $t = tgx$)

ដើម្បីឲ្យសមីការ (3) មានឫសនោះ :

$\Delta' = (5m-2)^2 - (3m-2)\cdot 3(2m+1) \geq 0 \Leftrightarrow 7m^2 - 23m + 10 \geq 0$

$\Leftrightarrow m \leq \frac{23-\sqrt{249}}{14}$ ឬ $m \geq \frac{23+\sqrt{249}}{14}$ ពេលនោះឫសរបស់(3)

គឺ : $t_{1,2} = \frac{5m-2 \pm \sqrt{7m^2-23m+10}}{3m-2}$

យើងបានឫសរបស់ (1) គឺ:

$$x = \operatorname{arctg} \frac{5m-2 \pm \sqrt{7m^2-23m+10}}{3m-2} + k\pi$$

* ពិភាក្សា

$-\infty \quad \frac{23-\sqrt{249}}{14} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{23+\sqrt{249}}{14} \quad +\infty$

គំនូសតាងតម្លៃពិសេសៗរបស់ m

• បើ $m < \frac{23-\sqrt{249}}{14}$ ឬ $m > \frac{23+\sqrt{249}}{14}$

សមីការ(1) មានឫសពីរ :

$$x = \operatorname{arctg} \frac{5m-2 \pm \sqrt{7m^2-2m+10}}{3m-2} + k\pi$$

• បើ $m = \frac{23-\sqrt{249}}{14}$ ឬ $m = \frac{23+\sqrt{249}}{14}$

សមីការ (1) មានឫសឌុប :

$$x = \operatorname{arctg} \frac{5m-2}{3m-2} + k\pi$$

• បើ $\frac{23-\sqrt{249}}{14} < m < \frac{23+\sqrt{249}}{14}$ និង $m \neq \frac{2}{3}$

សមីការ(1) គ្មានឫស ។

• បើ $m = \frac{2}{3}$ សមីការ(1) មានឫស2 :

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ ឬ } x = \operatorname{arctg}\frac{21}{8} + k\pi$$

6) សមីការដឺក្រេទី2ឆ្លុះជាមួយនឹង Sinx និង Cosx

* រាងរបស់សមីការ :

$a(\cos x + \sin x) + b\cos x \sin x + C = 0 \quad (1)$

* របៀបដោះស្រាយ

- តាង $\cos x+\sin x=t$ យើងមាន: $t=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

និង $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$; $|t|\leq\sqrt{2}$

$$x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+2k\pi$$

- ជំនួសចូលក្នុង (1) យើងបានសមីការដឺក្រេទី2 : $f(t)=0$
- ដោះស្រាយសមីការ $f(t)=0$ ។ ស្គាល់តម្លៃរបស់ t យើងទាញរកឃើញតម្លៃ x ។

> ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាតាមតម្លៃ m សមីការ:
> $\sin 3x+\cos 3x=1+m\sin 6x \quad (1)$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $\sin 3x+\cos 3x=1+m\sin 6x$

$\Leftrightarrow \sin 3x+\cos 3x-2m\sin 3x\cos 3x-1=0 \quad (2)$

តាង $t=\sin 3x+\cos 3x$ យើងបាន: $t=\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$

និង : $\sin 3x\cos 3x=\frac{t^2-1}{2}$; $|t|\leq\sqrt{2}$

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{t}{\sqrt{2}}\Longrightarrow x=\frac{\pi}{12}\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{2}{3}k\pi$$

ជំនួសតម្លៃ t ចូលក្នុង (2) :

$$t-2m\,\frac{t^2-1}{2}-1=0$$

$$mt^2-t+1-m=0$$

ដូចនេះ :

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}f(t)=mt^2-t+1-m=0,\ |t|\leq\sqrt{2} \quad (3)\\ x=\frac{\pi}{12}\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{k}{3}2\pi\end{cases}$$

ដោយមេគុណរបស់ t^2 ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ដូចនេះយើងនឹងពិនិត្យករណីមេគុណនោះស្មើ0 , ខុសពី0 នៅក្នុងការរកឫសរបស់ $f(t)=0$ ។

* ករណី $m=0\Longrightarrow f(t)=0$ ទៅជា:

$$-t+1=0\Longleftrightarrow t=1\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$$

⇒ សមីការ (1) មានឫស :

$$x = \frac{\pi}{12} \pm \frac{1}{3} \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{k}{3} 2\pi$$
$$= \frac{\pi}{12} \pm \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} + \frac{k}{3}.2\pi$$

⇒ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{3} 2\pi$ ឬ $x = \frac{k}{3} 2\pi$

. ករណី $m \neq 0$ យើងបាន :

$f(t) = mt^2 - t + 1 - m = 0$

មានផលបូកមេគុណទាំងអស់ : $m-1+1-m=0$

⇒ $f(t)=0$ មានឫស $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1-m}{m}$

ដើម្បីឲ្យ t_2 ជាឫសរបស់ (3) នោះ :

$|t_2| \leqslant \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1-m}{m}\right| \leqslant \sqrt{2} \Leftrightarrow (1-m)^2 - 2m^2 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow (1-m+m\sqrt{2})(1-m-m\sqrt{2}) \leqslant 0$

$\Leftrightarrow m \leqslant -1-\sqrt{2}$ ឬ $m \geqslant -1+\sqrt{2}$

ដូច្នេះ សមីការ (1) មានឫស $x = \frac{\pi}{12} \pm \frac{1}{3} \arccos\frac{1-m}{m\sqrt{2}} + \frac{k}{3}.2\pi$

* ពិភាក្សា :

$-\infty$ ——— $-1-\sqrt{2}$ ——— 0 ——— $-1+\sqrt{2}$ ——— $+\infty$

(តំណាងតម្លៃពិសេសរបស់ m)

• បើ $m \leqslant -1-\sqrt{2}$ ឬ $m \geqslant -1+\sqrt{2}$, សមីការ(1) មានឫស 4 ផ្សេងគ្នា :

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{3} 2\pi$; $x = \frac{k}{3}.2\pi$

$x = \frac{\pi}{12} \pm \arccos\frac{1-m}{m\sqrt{2}} + \frac{k}{3} 2\pi$

• បើ $-1-\sqrt{2} < m < -1+\sqrt{2}$ និង $m \neq 0$

នោះសមីការគ្មានឫស , $x \in \phi$ ។

. បើ $m = 0$ សមីការ (1) មានឫស 2 :

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{3}.2\pi$; $x = \frac{k}{3} 2\pi$ ។

* <u>ចំណាំ</u> :

1.) របៀបកំណត់តម្លៃឲ្យប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដើម្បីឲ្យសមីការ(3) មានឫសងាយស្រួល ព្រោះសមីការដឺក្រេទី 2 $f(t)=0$ មានឫស $t_1 = 1$ មិនអាស្រ័យនឹងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។ ដូច្នេះ គេត្រូវតែកំណត់តម្លៃឲ្យ t_2 ប៉ុណ្ណោះ ។

2.) កាលណាជួបសមីការរាង :

$$a(\cos x - \sin x) + b\sin x\cos x + c = 0$$

យើងក៏អាចដោះស្រាយតាមសមីការនេះ ដោយរបៀប តាង $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin x\cos x = \frac{1-t^2}{2} \\ |t| \leq \sqrt{2} \end{cases}$

> គេឲ្យសមីការ :
>
> $$\sin 2x - 4(\cos x - \sin x) = m \quad (1)$$
>
> ចំពោះតម្លៃណារបស់ m ទើបសមីការនេះមានឫស

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមាន : $\sin 2x - 4(\cos x - \sin x) = m$

$$\Leftrightarrow 4(\cos x - \sin x) - 2\sin x\cos x + m = 0 \quad (2)$$

តាង $t = \cos x - \sin x$ យើងបាន :

$$t = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x\cos x = \frac{1-t^2}{2},\ |t| \leq \sqrt{2}$$

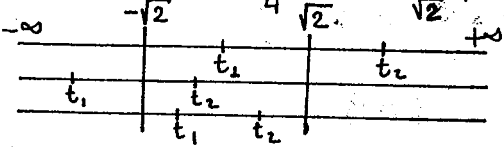
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{t}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{t}{\sqrt{2}} + 2k\pi$$

ជំនួស t ចូលក្នុងសមីការ (2) យើងបាន :

$$4t - 2\cdot\frac{1-t^2}{2} + m = 0$$

$$t^2 - 4t + m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = t^2 - 4t + m - 1 = 0,\ |t| \leq \sqrt{2} \quad (3) \\ x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{t}{\sqrt{2}} + 2k\pi \end{cases}$$



ដើម្បីឲ្យសមីការ (២) មានឫសនោះ សមីការ $f(t)=0$ ត្រូវមានឫសពីរ t_1, t_2 ដែលយ៉ាងហោចណាស់មានឫសមួយនៅចន្លោះ $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

តាមតារាងខាងលើ ចង់បានដូចនេះត្រូវ:

$$\underbrace{f(-\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) \leq 0}_{(I)} \quad \text{ឬ} \quad \left\{\begin{array}{l} \Delta' > 0 \\ f(-\sqrt{2}) > 0 \\ f(\sqrt{2}) > 0 \\ -\sqrt{2} - \frac{S}{2} < 0 \\ \sqrt{2} - \frac{S}{2} > 0 \end{array}\right\} (II)$$

ដោះស្រាយ(I) យើងមាន:

$$f(-\sqrt{2})f(\sqrt{2}) \leq 0 \Leftrightarrow (m+1+4\sqrt{2})(m+1-4\sqrt{2}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1-4\sqrt{2} \leq m \leq -1+4\sqrt{2}$$

ដោះស្រាយ(II) យើងមាន:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta' \geq 0 \\ f(-\sqrt{2}) > 0 \\ f(\sqrt{2}) > 0 \\ -\sqrt{2} - \frac{S}{2} < 0 \\ \sqrt{2} - \frac{S}{2} > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta' \geq 0 \\ f(-\sqrt{2}) > 0 \\ f(\sqrt{2}) > 0 \\ -\sqrt{2} - 2 < 0 \\ \sqrt{2} - 2 > 0 \text{ មិនពិត} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{គ្មានឫស}$$

ដូចនេះតម្លៃរបស់ m ដើម្បីឲ្យសមីការ(១) មានឫសគឺ:

$$-1-4\sqrt{2} \leq m \leq -1+4\sqrt{2}$$

* សំគាល់: ប្រព័ន្ធ(II) រួមមាន 5 វិសមីការ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញវិសមីការមួយគ្មានឫស នោះប្រព័ន្ធទាំងអស់គ្មានឫស ។ សិស្សត្រូវតែយកចិត្តទុកដាក់ដល់បញ្ហានេះ ដើម្បីឲ្យការដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការប្រើរយៈពេលខ្លី ។

ផ្នែកទី VI

ដំណោះស្រាយ
សមីការ
ត្រីកោណមាត្រ

ដំណោះស្រាយសមីការត្រីកោណមាត្រ

1 **ដោះស្រាយសមីការ : $\cos x + \sin\frac{5x}{4} = 2$**

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងដឹងថា :

$|\cos x| \leqslant 1 ; |\sin\frac{5x}{4}| \leqslant 1$ ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះដើម្បីឲ្យផលបូក $\cos x + \sin\frac{5x}{4} = 2$ នោះ តួនិមួយៗ ត្រូវគោរពលក្ខខណ្ឌខាងលើ ។ យើងបាន :

$$\cos x + \sin\frac{5x}{4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin\frac{5x}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ \frac{5x}{4} = (4k'+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = (4k'+1)\frac{2\pi}{5} \end{cases}$$

ដើម្បីឲ្យប្រព័ន្ធមានឫសនោះត្រូវមានចំនួនគត់ k, k' ដែល

$$2k\pi = (4k'+1)\cdot\frac{2\pi}{5} \Rightarrow k = \frac{1+4k'}{5} \quad (1)$$

ដើម្បីឲ្យ k, k' ជាចំនួនគត់ ផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) យើងត្រូវយក

$$k' = 1+5l , l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1+4(1+5l)}{5} = 1+4l$$

ឫសរបស់ប្រព័ន្ធគឺ :

$$x = 2(1+4l)\pi = 2\pi + 8l\pi$$

ដូចនេះសមីការ (1) មានឫសមួយគឺ :

$$x = 2\pi + 8l\pi ; \ l \in \mathbb{Z}$$

2.

> បង្ហាញថាសមីការ : $4\cos x + 2\cos 2x + \cos 4x = -7$ គ្មានឫស
> ប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យ VN

ដំណោះស្រាយ :

លក្ខណៈរបស់អនុគមន៍ Cos គឺ:

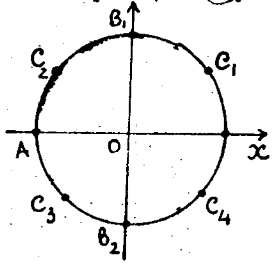
$|\cos x| \leqslant 1 ; |\cos 2x| \leqslant 1 ; |\cos 4x| \leqslant 1$ ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះដើម្បីឲ្យ $4\cos x + 2\cos 2x + \cos 4x = -7$ នោះ:
$\cos x, \cos 2x, \cos 4x$ ត្រូវទទួលយកលក្ខខណ្ឌខាងលើ .
យើងបាន : $4\cos x + 2\cos 2x + \cos 4x = -7$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = -1 \\ \cos 4x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{k'}{2} 2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k''}{4} . 2\pi \end{cases}$$

• នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ឫស $x = \pi + k2\pi$ មានចំណុច A ឫស $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k'}{2} 2\pi$ មានចំណុច 2 : B_1, B_2 និងឫស $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k''}{4} 2\pi$ មាន 4 ចំណុច : e_1, e_2, e_3, e_4 និងគ្មានចំណុចណាត្រួតស៊ីគ្នាទេ

ដូចនេះសមីការខាងលើគ្មានឫស



---

* វិធីផលបូកការេតួទាំងអស់ស្មើ0

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

3-

> ដោះស្រាយសមីការ
> $x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0 \quad (1)$

ដំណោះស្រាយ

ជំនួស $1 = \sin^2(xy) + \cos^2(xy)$ ចូលក្នុង (1)

យើងមាន : $x^2+2x\sin(xy)+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x\sin(xy)+\sin^2(xy)+\cos^2(xy)=0$

$\Leftrightarrow [x+\sin^2(xy)]^2+\cos^2(xy)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\sin(xy)=0 \\ \cos(xy)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sin(xy)=0 \\ \sin(xy)=\pm 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sin(xy)=1 \end{cases}$ (I) ឬ $\begin{cases} x-1=0 \\ \sin(xy)=-1 \end{cases}$ (II)

ដោះស្រាយ(I) យើងបាន :

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ xy=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$

ដោះស្រាយ(II)

$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ xy=-\frac{\pi}{2}+2k'\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{\pi}{2}+2k'\pi \end{cases}$

ដូចនេះសមីការ (1) មានឫស 2គឺ

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{\pi}{2}+2k'\pi \end{cases} \quad \forall k,k' \in \mathbb{Z}$

4- ដោះស្រាយសមីការ : $\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\sin^2 3x$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន : $\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\sin^2 3x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-\sin x\sin^2 3x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2-\frac{1}{4}\sin^4 3x+\frac{1}{4}\sin^2 3x=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2 3x(1-\sin^2 3x)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2 3x\cos^2 3x=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2+\frac{1}{4}(\sin 3x\cos 3x)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x-\frac{1}{2}\sin^2 3x=0 \\ \sin 3x\cos 3x=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 3x \\ \sin 3x = 0 \end{cases} (\mathrm{I}) \quad ឬ \quad \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 3x \\ \cos 3x = 0 \end{cases} (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k'}{3}\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi ,\ k \in \mathbb{Z}$$

(ព្រោះធ្នូ $k\pi$ និង $\frac{k'}{3}\pi$ ត្រួតស៊ីគ្នា)

$$(\mathrm{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 3x \\ \cos 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 3x \\ \sin 3x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 3x \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \quad ឬ \quad \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}\sin^2 3x \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$$

(II_a) (II_b)

$$(\mathrm{II}_a) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ឬ } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k'}{3}.2\pi \end{cases}$$

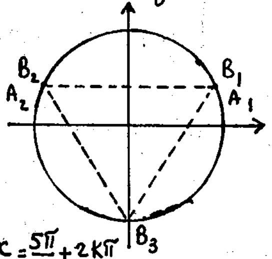
ឫស $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ និង $\left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ មានគល់ធ្នូ 2 : A_1, A_2 ត្រូវគ្នានឹង $k = 0$ ។

ឫស $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k'}{3} + 2\pi\right\}$ មានគល់ធ្នូ3 : B_1, B_2, B_3 ត្រូវគ្នានឹង $k' = 0, 1, 2,$ ។

គល់ធ្នូ A_1, A_2 ត្រួតស៊ីគ្នានឹង B_1, B_2 ។

$\Rightarrow$ ប្រព័ន្ធ (II_a) មានឫស

$\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ និង $\left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$

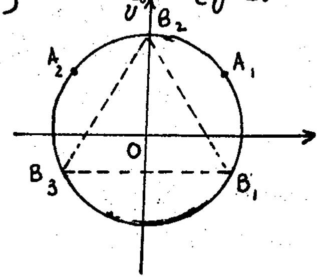


$$(\mathrm{II}_b) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ឬ } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k'}{3}.2\pi \end{cases}$$

ឫស $\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ និង $\left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ មានគល់ធ្នូពីរត្រូវគ្នាចំពោះ $k = 0$

ឫស $\left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{k'}{3}2\pi\right\}$ មានគល់ធ្នូបីត្រូវនឹង $k = 0, 1, 2$

គល់ធ្នូទាំងអស់គ្មានធ្នូណាត្រួតគ្នាទេ $\Rightarrow \mathrm{II}_b$ គ្មានឫស



សរុបមកសមីការ (1) មានឫស 3 : $x = k\pi$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

* វិធីដោះស្រាយ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \leqslant c^{te} \leqslant g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = c^{te} \\ g(x) = c^{te} \end{cases}$

5 - ដោះស្រាយសមីការ :

$$\cos^2\left[\frac{\pi}{4}(\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x)\right] - tg^2\left(x + \frac{\pi}{4} + tg^2 x\right) = 1$$

<u>សំរាយបំភ្លឺ</u>

យើងមាន : $\cos^2\left[\frac{\pi}{4}(\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x)\right] - tg^2\left(x + \frac{\pi}{4} tg^2 x\right) = 1 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left[\frac{\pi}{4}(\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x)\right] = 1 + tg^2\left(x + \frac{\pi}{4} tg^2 x\right) \quad (2)$$

ដោយ $\forall x \in \mathbb{R}$ យើងបាន :

$$\cos^2\left[\frac{\pi}{4}(\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x)\right] \leqslant 1 \leqslant 1 + tg^2\left(x + \frac{\pi}{4} tg^2 x\right) \quad (3)$$

តាម (2) និង (3), សមីការ (1) សមមូលនឹងប្រព័ន្ធ :

$$(I) \quad \begin{cases} \cos^2\left[\frac{\pi}{4}(\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x)\right] = 1 & (4) \\ 1 + tg^2\left(x + \frac{\pi}{4} tg^2 x\right) = 1 & (5) \end{cases}$$

$$(4) \Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{4}(\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x)\right] = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}(\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x) = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{2}\cos^2 x = 4k, \; k \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

* ពិនិត្យករណី $k \neq 0$ ក្នុងករណីនេះ:

$$|\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x| \leqslant |\sin x| + |\sqrt{2}\cos^2 x| \leqslant 1 + \sqrt{2} < 4k$$

ព្រោះ k ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបខុសពី 0 ។

ដូចនេះសមីការ (6) គ្មានឫស , មានន័យថា (4) ក៏គ្មានឫស $\Rightarrow$ ប្រព័ន្ធ (I) គ្មានឫស ។

* ពិនិត្យករណី $k = 0$ ករណីនេះ:

$(4) \Leftrightarrow (6) \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin^2 x - \sin x - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ឬ $\sin x = -2\sqrt{2}$ (ចោល)

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ឬ $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

ជំនួស $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ចូល (5) យើងបាន :

$(5) \Leftrightarrow tg^2\left(x + \frac{\pi}{4}tg^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow tg\left(x + \frac{\pi}{4}tg^2 x\right) = 0$

$\Rightarrow tg\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi + \frac{\pi}{4}tg^2\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right] = 0$

$tg\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right] = 0$

$tg(2k\pi) = 0$ (ត្រូវ $\forall k \in \mathbb{Z}$

ជំនួស $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ចូលក្នុង (5) ដូចគ្នាដែរយើងបាន :

$(5) \Leftrightarrow tg\left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi + \frac{\pi}{4}tg^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)\right] = 0$

$tg\left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right] = 0$

$tg\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$ ខុស $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ ឫស $\in$ ប្រព័ន្ធ (I) គឺ $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ដូចនេះសមីការ (1) មានឫស :

$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ ៕

6 - ដោះស្រាយសមីការ $\cos^9 x + \sin^9 x = 1$

ដំណោះស្រាយ

$\cos^9 x + \sin^9 x = 1 \quad (1)$

$\Leftrightarrow \cos^9 x + \sin^9 x = \cos^2 x + \sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cos^9 x - \cos^2 x = \sin^2 x - \sin^9 x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x(\cos^7 x - 1) = \sin^2(1 - \sin^7 x) \quad (2)$

ម្យ៉ាងទៀត, $\forall x \in \mathbb{R}$ យើងមាន :

$|Cos x| \leqslant 1 \Rightarrow |Cos^n x| \leqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$|Sin x| \leqslant 1 \Rightarrow |Sin^n x| \leqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow Cos^2 x(Cos^7 x - 1) \leqslant 0 \leqslant Sin^2 x(1 - Sin^7 x)$ (3)

តាម (2) និង (3) សមីការ (1) សមមូលនឹងប្រព័ន្ធ

$$(I) \quad \begin{cases} Cos^2 x(Cos^7 x - 1) = 0 \\ Sin^2 x(1 - Sin^7 x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Cos^2 x = 0 \text{ ឬ } Cos^7 x = 1 \\ Sin^2 x = 0 \text{ ឬ } Sin^7 x = +1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Cos x = 0 \text{ ឬ } Cos x = 1 \\ Sin x = 0 \text{ ឬ } Sin x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underset{(Ia)}{\begin{cases} Cos x = 0 \\ Sin x = 0 \end{cases}} \text{ ឬ } \underset{(Ib)}{\begin{cases} Cos x = 0 \\ Sin x = 1 \end{cases}}$$

$$\text{ឬ} \quad \underset{(Ic)}{\begin{cases} Cos x = 1 \\ Sin x = 0 \end{cases}} \text{ ឬ } \underset{(Id)}{\begin{cases} Cos x = 1 \\ Sin x = 1 \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ យើងឃើញថា : (Ia) និង (Id) គ្មានឫស ។

ដោះស្រាយ (Ib) យើងបាន :

$$(Ib) \begin{cases} Cos x = 0 \\ Sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ដោះស្រាយ (Ic) :

$$(Ic) \begin{cases} Cos x = 1 \\ Sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k\pi$$

ឫសរបស់ (I) ក៏ជាឫសរបស់ (1) ។ ដូច្នេះសមីការ (1)

មានឫស 2 : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$

7. ដោះស្រាយសមីការ : $2\cos^2\frac{x^2+x}{6} = 2^x+2^{-x}$ (1)

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ Cosin មានតម្លៃតូចបំផុតស្មើ -1 និងធំបំផុតស្មើ $+1$

ដូចនេះយើងបាន $2\cos^2\frac{x^2+x}{6}\leqslant 2$ ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$

តាមវិសមភាព Cosi យើងបាន :

$$\frac{2^x+2^{-x}}{2}\geqslant\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}\Rightarrow 2^x+2^{-x}\geqslant 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\frac{x^2+x}{6}\leqslant 2\leqslant 2^x+2^{-x},\ \forall x\in\mathbb{R}\quad (2)$$

តាម (1) និង (2) សមីការខាងលើសមមូលនឹង :

$$(I)\ \begin{cases}2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=2 & (3)\\ 2^x+2^{-x}=2\end{cases}$$

$(4)\Rightarrow 2^x+\frac{1}{2^x}=2$ យក $t=2^x$

$\Rightarrow t+\frac{1}{t}=2\Rightarrow t^2-2t+1=0\Rightarrow t=1$

$t=1\Rightarrow 2^x=1\Rightarrow x=0$

យកឫស $x=0$ ជួសក្នុង (3) : $2\cos^2\frac{0}{6}=2$

$2=2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូច្នេះឫសរបស់ប្រព័ន្ធ (I) ឬឫសរបស់សមីការ (1) គឺ : $x=0$ ។

* វិធីប្រើប៉ារ៉ាម៉ែត្រដូចអញ្ញាត

$$f(x,m)=0$$

សមីការនេះមានអញ្ញាត x , ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។ បើសមីការតាមប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m អាចដោះស្រាយរួច នោះយក m ជាអញ្ញាត ។ ពេលគណនារក m ជាអនុគមន៍នៃ x ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាតម្លៃ x តាមតម្លៃ m ។

8 ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាសមីការតាមប៉ារ៉ាម៉ែត m :

$$\sin 2x + m(2\sin x - \cos x) - m^2 = 0 \quad (1)$$

ដំណោះស្រាយ

សមីការ(1) អាចសរសេរ :

$m^2 - (2\sin x - \cos x)m - \sin 2x = 0$

ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី2 តាមប៉ារ៉ាម៉ែត m

$\Delta = (2\sin x - \cos x)^2 + 4\sin 2x$

$= 4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x + 8\sin x\cos x$

$= 4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x$

$= (2\sin x + \cos x)^2 \geqslant 0 \;, \forall x \in \mathbb{R}$

$m_1 = \dfrac{2\sin x - \cos x + (2\sin x + \cos x)}{2} = 2\sin x$

$m_2 = \dfrac{2\sin x - \cos x - (2\sin x + \cos x)}{2} = -\cos x$

$\Rightarrow$ សមីការ(1) សមមូល: $(1) \Leftrightarrow (m - 2\sin x)(m + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow m - 2\sin x = 0$ ឬ $m + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow m - 2\sin x = 0$ ឬ $\sin x = \frac{m}{2}$

. បើ $\left|\frac{m}{2}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow |m| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ នោះសមីការ(1)មានឫស $x = (-1)^k \arcsin \frac{m}{2} + k\pi \,,\; k \in \mathbb{Z}$

$m + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -m$

. បើ $|-m| \leqslant 1 \Leftrightarrow |m| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant m < 1$

នោះសមីការ (1) មានឫស :

$x = \pm \arccos(-m) + 2k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$

• ពិភាក្សា

$-\infty \quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$

តំណាងតម្លៃពិសេសៗរបស់ m

* បើ $m < -2$ សមីការ (1) គ្មានឫស

* បើ $m=-2$ សមីការ (1) មានឬសមួយ :

$$x=(-1)^k\arcsin(-1)+k\pi=-\frac{\pi}{2}(-1)^k+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

* បើ $-2<m<-1$ សមីការមានឬសមួយ :

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{m}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

* បើ $m=-1$ សមីការ (1) មានឬស 2 :

$$x=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi=-\frac{\pi}{6}(-1)^k+k\pi$$

$$x=\pm\arccos 1+2k\pi=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

* បើ $-1<m<1$ សមីការ (1) មានឬស 3 :

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{m}{2}+k\pi$$

$$x=\pm\arccos(-m)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

* បើ $m=1$ សមីការ (1) មានឬស 2 :

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}+k\pi=\frac{\pi}{6}(-1)^k+k\pi$$

$$x=\pm\arccos(-1)+2k\pi=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

* បើ $1<m<2\Rightarrow$ (1) មានឬសមួយ :

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{m}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

* បើ $m=2\Rightarrow$ (1) មានឬសមួយ :

$$x=(-1)^k\arcsin 1+k\pi=\frac{\pi}{2}(-1)^k+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

* បើ $m>2$ សមីការ (1) គ្មានឬស ។

* របៀបដោះស្រាយសមីការត្រីកោណមាត្រមានរ៉ាឌីកាល់

$$\sqrt{A(x)}=B(x)\iff\begin{cases}B(x)\geq 0 & (1)\\ A(x)=[B(x)]^2 & (2)\end{cases}$$

ក្នុងនោះ $A(x)$ ជាកន្សោមត្រីកោណមាត្រ ។

! របៀបដោះស្រាយ :

– បើសមីការមានរាង $\sqrt{A(x)}=B(x)$ នោះប្រើប្រព័ន្ធសមមូលដូចខាងលើដើម្បីដោះស្រាយ ។

– បើ $B(x)$ ជាកន្សោមត្រីកោណមាត្រ នោះយើងមិនដោះស្រាយ (1) ទេ ចាំបាច់ត្រូវដោះស្រាយ (2), រកឬស x ។

ជំនួសឫសនេះចូល(1) ដើម្បីត្រួតពិនិត្យមើលថាតើផ្ទៀងផ្ទាត់ឬទេ ។

– បើសមីការមានរ៉ាឌីកាល់គ្មានរាងដូចខាងលើ ចូររកលក្ខខណ្ឌជាមុនសិន ពេលលើកជាការេ ដើម្បីបំបាត់រ៉ាឌីកាល់ ។

១. **ដោះស្រាយ :** $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x.\cos^2 2x}$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន : $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x.\cos^2 2x}$

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0 \qquad (1)$$

$$4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1+8\sin 2x\cos^2 2x \quad (2)$$

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន :

$$2\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=1+\sin 6x$$

$$=1+3\sin 2x-4\sin^3 2x$$

ជំនួសចូល (2) យើងបាន :

$$(2)\Leftrightarrow 2(1+3\sin 2x-4\sin^3 2x)=1+8\sin 2x(1-\sin^2 2x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ឬ } 2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi \text{ ឬ } x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (1) ចំពោះឫស :

$$x=\frac{\pi}{12}+k\pi\ ,\quad k\in\mathbb{Z}$$

យើងមាន $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+3k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+3k\pi\right)=$$

$$=\cos 3k\pi=\begin{cases}1>0 \text{ បើ } k=2k'\ ,\ k'\in\mathbb{Z}\\ -1<0 \text{ បើ } k=(2k'+1),\ k'\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{12}+2k'\pi\ ,\ k'\in\mathbb{Z}$ ជាឫសរបស់សមីការខាងលើ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ (1) ចំពោះឫស : $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

យើងមាន : $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4} + 3k\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3k\pi\right)$

$= -\cos 3k\pi = \begin{cases} 1 > 0 & \text{បើ } k = 2k' - 1 \\ -1 < 0 & \text{បើ } k = 2k' \end{cases}$

$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + (2k' - 1)\pi = -\frac{7\pi}{12} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}$

ជាឫសរបស់សមីការខាងលើ ។

ដូច្នេះសមីការខាងលើមានឫស 2 :

$x = \frac{\pi}{12} + 2k'\pi$ ឬ $x = -\frac{7\pi}{12} + 2k'\pi$

ដោះស្រាយសមីការ $\frac{3}{\sqrt{4\cos 2x + 1}} = \sqrt{2\cos 2x + 2}$ (1)

ដំណោះស្រាយ

លក្ខខណ្ឌដើម្បីឲ្យសមីការ (1) មានន័យ :

$\begin{cases} 2\cos 2x + 2 \geq 0 \\ 4\cos 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ 4\cos 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4\cos 2x + 1 > 0$ (2)

កាលណាលក្ខខណ្ឌ (2) ផ្ទៀងផ្ទាត់នោះ :

$(1) \Leftrightarrow 3 = \sqrt{(2\cos 2x + 2)(4\cos 2x + 1)}$

$\Leftrightarrow 9 = (2\cos 2x + 2)(4\cos 2x + 1)$

$\Leftrightarrow 8\cos^2 2x + 10\cos 2x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$ ឬ $\cos 2x = -\frac{7}{4}$ (មិនយក)

$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ (2) ចំពោះឫស : $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ យើងបាន :

$4\cos 2x + 1 = 4\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + 1 = 4\frac{1}{2} + 1 = 3 > 0$

ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ (2) ចំពោះឫស $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

$\Rightarrow 4\cos 2x + 1 = 4\cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + 1 = 4\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 3 > 0$

ដូចនេះសមីការ (1) មានឫសពីរគឺ:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

* <u>លំហាត់ជ្រើសរើសប្រលងចូលមហាវិទ្យាល័យនៅសហភាពសូវៀត</u>

> ដោះស្រាយសមីការ :
>
> $2 + \sin 12x - 2\cos 8x = 0 \ , \ x \in \left[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6}\right]$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

យើងមាន $\sin 12x = \sin 3(4x) = 3\sin 4x - 4\sin^3 4x$

$\cos 8x = \cos 2(4x) = 1 - 2\sin^2 4x$

$\Rightarrow 2 + \sin 12x - 2\cos 8x = 0$

$\Leftrightarrow 2 + 3\sin 4x - 4\sin^3 4x - 2 + 4\sin^2 4x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x\left(4\sin^2 4x - 4\sin 4x - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\sin 4x = 0}_{(I)}$ ឬ $\underbrace{4\sin^2 4x - 4\sin 4x - 3 = 0}_{II}$

$(I) \Rightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \ , \ k \in \mathbb{Z}$

ដើម្បីឲ្យ $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ នោះ $k = 0 \Rightarrow x = 0$

$(II) \Rightarrow 4\sin^2 4x - 4\sin 4x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x = -\frac{1}{2}$ ឬ $\sin 4x = \frac{3}{2}$ (មិនយក)

$\Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ឬ $4x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$ ឬ $x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \ , \ k \in \mathbb{Z}$

ដើម្បីឲ្យ $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ នោះ $k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{24}$

ដូចនេះសមីការខាងលើមានឫស 2 : $x = 0$ ឬ $x = -\frac{\pi}{24}$ ។

12

ដោះស្រាយសមីការ :

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+4\sin x=2+\sqrt{2}(1-\sin x)$$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}$

$$=\sqrt{2}(1-2\sin^2 x)$$

$$\Rightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+4\sin x=2+\sqrt{2}(1-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(1-2\sin^2 x)+4\sin x=2+\sqrt{2}(1-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^2 x-(4+\sqrt{2})\sin x+2=0$$

តាង $\sin x=t$ ចំពោះ $|t|\leq 1$ យើងបាន :

$$x=(-1)^k\arcsin t+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

សមីការខាងលើសមមូលនឹងប្រព័ន្ធ :

$$\begin{cases} f(t)=2\sqrt{2}t^2-(4+\sqrt{2})t+2=0,\ |t|\leq 1 \\ x=(-1)^k\arcsin t+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

ដោះស្រាយ $f(t)=0$ យើងបាន

$$\Delta=(4+\sqrt{2})^2-4.2\sqrt{2}.2=16+8\sqrt{2}+2-16\sqrt{2}=$$

$$=16-8\sqrt{2}+2=(4-\sqrt{2})^2$$

$t_1=\dfrac{4+\sqrt{2}+(4-\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ (មិនយក)

$$t_2=\frac{4+\sqrt{2}-(4-\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះសមីការខាងលើមានឫសមួយ :

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}+k\pi=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$ ។

ផ្នែកទី VII

ចំណោទចំរុះ

ប្រើប្រាស់ត្រីកោណមាត្រចូល

ធរណីមាត្រ- ពីជគណិត

ចំណោទពិសេស

ត្រីកោណមាត្រ , ធរណីមាត្រ ពិជគណិត

1 - គេឲ្យត្រីកោណ ABC ក្នុងនោះមុំ $A = 2B$ ។

1) គណនា C ជាអនុគមន៍នៃ B ។ ចូររកតម្លៃលើសកំណត់របស់ B រួចគណនា B ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC សមបាទ ។

2) គណនា a, c ជាអនុគមន៍នៃ b និង $\cos B$ ។

3) បង្ហាញទំនាក់ទំនង : $a^2 = b(b+c)$

សំរាយបំភ្លឺ

1) យើងមាន : $A + B + C = \pi$

$$\Rightarrow C = \pi - A - B = \pi - 2B - B$$

$$\boxed{C = \pi - 3B}$$

តម្លៃតូចបំផុតរបស់ C គឺ 0

$$C \geqslant 0 \Rightarrow \pi - 3B \geqslant 0 \Rightarrow \pi \geqslant 3B \Rightarrow \boxed{B \leqslant \frac{\pi}{3}}$$

ΔABC សមបាទ ក្នុងករណី

$$* \ A = C \Rightarrow \pi = A + B + C = 2A + B = 2A + \frac{A}{2} = \frac{5A}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2\pi}{5}, \ B = \frac{\pi}{5}, \ C = \frac{2\pi}{5}$$

$$* \ B = C \Rightarrow \pi = A + B + C = A + 2B = 2A$$

$$\Rightarrow A = \frac{\pi}{2}, \ B = \frac{\pi}{4}, \ C = \frac{\pi}{4}$$

2) តាមរូបមន្ត យើងមាន :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow a = \frac{b\sin A}{\sin B} = \frac{b\sin 2B}{\sin B} = \frac{2b\sin B\cos B}{\sin B}$$

$\Rightarrow a = 2b\cos B$

ដូចគ្នាដែរ $c = \dfrac{b\sin C}{\sin B}$

$= \dfrac{b\sin(\pi - 3B)}{\sin B} = \dfrac{b\sin 3B}{\sin B}$

$= \dfrac{b(3\sin B - 4\sin^3 B)}{\sin B}$

$= b(3 - 4\sin^2 B)$

$= b\left[3 - 4(1 - \cos^2 B)\right]$

$c = b(4\cos^2 B - 1)$

3/ យើងបាន : $a^2 = (2b\cos B)^2 = 4b^2\cos^2 B$ (*)

$b + c = b + b(4\cos^2 B - 1) = 4b\cos^2 B$

$\Rightarrow b(b+c) = 4b^2\cos^2 B$ (**)

(*) និង (**) យើងបាន : $a^2 = b(b+c)$

2 | <u>ប្រធាន</u> : មានត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថាល័ក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឲ្យ $A = 2B$ គឺ $a^2 = b(b+c)$ ។

<u>សំរាយបំភ្លឺ</u>

* $A = 2B \Rightarrow a^2 = b(b+c)$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស Sin យើងបាន :

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b+c}{\sin B + \sin C}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $A + B + C = \pi$

$\Rightarrow 3B + C = \pi$ (ព្រោះ $A = 2B$)

$\Rightarrow C = \pi - 3B$

$\Rightarrow \sin C = \sin 3B$ (ចុំបន្ថែម)

(1) យើងបាន : $\dfrac{a}{\sin 2B} = \dfrac{b+c}{\sin B + \sin 3B}$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2 2B} = \frac{b(b+c)}{\sin B(\sin B+\sin 3B)} \quad (2)$$

យើងមាន $\sin B(\sin B+\sin 3B) = \sin B\left(2\sin\frac{B+3B}{2}\cos\frac{B-3B}{2}\right)$

$$= 2\sin B\sin 2B\cos B$$

$$= \sin 2B \sin 2B$$

$$= \sin^2 2B \quad (3)$$

(2) និង (3) $\Rightarrow a^2 = b(b+c)$

$* \ a^2 = b(b+c) \Rightarrow A = 2B$

យើងមាន : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{bc}{\sin B \cdot \sin C} = \frac{b^2+bc}{\sin^2 B+\sin B\cdot\sin C}$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = \sin^2 B + \sin B\cdot\sin C$$

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin B\sin(A+B)$ (មុំបន្ថែម)

$$\Rightarrow \sin^2 A - \sin^2 B = \sin B\cdot\sin(A+B)$$

$$\Rightarrow (\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B) = \sin B\cdot\sin(A+B)$$

$$4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin B\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A-B}{2} = \sin B$$

$$\Rightarrow \sin(A-B) = \sin B \quad (*)$$

ដោយ $A-B<\pi$

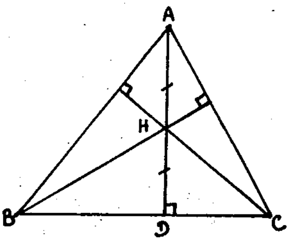
$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} A-B=B \\ A-B=\pi-B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2B \\ A=\pi \end{cases}$ (គ្មានន័យ)

ដូច្នេះ $A = 2B$

③

ប្រធាន : គេមានត្រីកោណ ABC មួយ ។ ក្នុងនោះអរតូសង់ H ជាចំនុចកណ្តាលរបស់កំពស់ [AD] ។ 1) បង្ហាញថា : ក្នុងត្រីកោណ ABC យើងមាន : $\tan B \tan C = 2$ 2) ដោយស្គាល់មុំ A ចូរគណនា $\tan B$ និង $\tan C$ ។

សំរាយបំភ្លឺ



1) យើងមាន $\widehat{DHC} = \widehat{ABC}\ (= B)$

ក្នុង $\Delta\perp DHC$ មាន:

$tg\,DHC = \frac{DC}{DH} \Rightarrow tgB = \frac{DC}{DH}$ (1)

ក្នុង $\Delta\perp DAC$ មាន

$tg\,DCA = \frac{DA}{DC} \Rightarrow tgC = \frac{DA}{DC}$ (2)

(1) និង (2) $\Rightarrow tgB.tgC = \frac{DA}{DH} = 2$

$tgB.tgC = 2$

2) យើងមាន: $\begin{cases} tgB.tgC = 2 & (3) \\ B + C = \pi - A & (4) \end{cases}$ (A ស្រួច)

$(4) \Rightarrow tg(B+C) = tg(\pi - A) = -tgA$

$\Rightarrow \frac{tgB + tgC}{1 - tgB\,tgC} = -tgA$

$\Rightarrow tgB + tgC = tgA$ (ព្រោះ: $tgB.tgC = 2$)

ដូចនេះយើងមានប្រព័ន្ធ: $\begin{cases} tgB + tgC = tgA \\ tgB.tgC = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow tgB$ និង tgC ជាឫសរបស់សមីការ:

$x^2 - (tgA)x + 2 = 0$ (5)

$\Delta = tg^2A - 8$

(5) មានឫស កាលណា $tg^2A - 8 \geq 0$

$\Rightarrow (tgA + 2\sqrt{2})(tgA - 2\sqrt{2}) \geq 0$ (6)

យើងត្រូវឲ្យ $tgA > 0$ ព្រោះបើ $tgA < 0$ នោះពី

$tgB + tgC = tgA \Rightarrow tgB < 0$ ឬ $tgC < 0$

$\Rightarrow$ B ជាមុំទាល ឬ C ជាមុំទាល

$\Rightarrow \Delta ABC$ មានមុំទាល 2 (A និង B ឬ A និង C) $\Rightarrow$ គ្មានន័យ

$(6) \Rightarrow tgA - 2\sqrt{2} \geq 0$

$\Rightarrow tgA \geq 2\sqrt{2}$ (7)

ក្នុងលក្ខខណ្ឌ (7) ⇒ (5) មានឫស 2 វិជ្ជមាន $tg B$ និង $tg C$

$$tg B = \frac{tg A + \sqrt{tg^2 A - 8}}{2}$$

$$tg C = \frac{tg A - \sqrt{tg^2 A - 8}}{2}$$

4 . **ប្រធាន** : គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានបាត [BC] និង ហើយមាន រង្វាស់ 6 cm និង $|AB| + |AC| = 10$ cm .

1°) a - បង្ហាញថា : $\dfrac{\sin B + \sin C}{\sin (B+C)} = \dfrac{5}{3}$

b - ទាញបង្ហាញថា : $tg\dfrac{B}{2} \cdot tg\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{4}$

2°) យក O ជាចំណុចកណ្ដាល [BC] , I ជាជើងកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងរបស់មុំ $\angle BAC$ ។ ចូរគណនា $|AB|$ និង $|AC|$ ជាអនុគមន៍នៃ $x = |OI|$ ។

សំរាយបំភ្លឺ

1°) a- យើងតាង : $|BC| = a = 6$ cm

$|AB| = c$, $|CA| = b$

យើងមាន : $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

$$\Rightarrow \frac{\sin A}{6} = \frac{\sin B + \sin C}{b + c} = \frac{\sin B + \sin C}{10}$$

ម្យ៉ាងទៀត : $A + B + C = \pi$

$$\Rightarrow B + C = \pi - A$$

$$\Rightarrow \sin (B+C) = \sin A$$

$$\Rightarrow \frac{\sin (B+C)}{6} = \frac{\sin B + \sin C}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B + \sin C}{\sin (B+C)} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \quad (1)$$

b - យើងមាន :

$$\sin (B+C) = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$(1) \Rightarrow \dfrac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} = \dfrac{5}{3}$

$\Rightarrow 5\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$

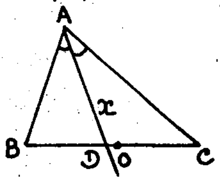
$\Rightarrow 5\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right] = 3\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right]$

$\Rightarrow 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 8\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\Rightarrow tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2} = \frac{1}{4}$

(2) <u>ឧបមា</u> : $B > C$ (2)

(ព្រោះបើ $B = C \Rightarrow ABC$ សមបាតត្រង់ $A \Rightarrow |AB| = |AC| = 5cm$)



$(2) \Rightarrow b > c$

$\Rightarrow$ D នៅជិត B ជាង C

$\Rightarrow BD = OB - OD = 3 - x$

$CD = OC - OD = 3 + x$

ដោយនឹងជាកន្លះបន្ទាត់ពុះរបស់មុំ A ចែកជ្រុងឈម [BC] ជាពីរផ្នែកសមមាត្រនឹងជ្រុងទាំងពីរគូសចេញពីមុំ A ។

ដូចនេះយើងបាន:

$\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AB+AC}{BD+CD}$

$\dfrac{c}{3-x} = \dfrac{b}{3+x} = \dfrac{b+c}{BC} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

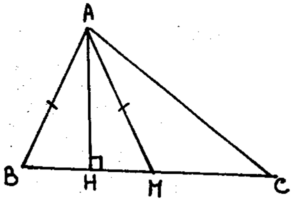
$AC = CD\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{3}(3+x)$

$AB = BD\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{3}(3-x)$

5 <u>ប្រធាន</u> : ក្នុងត្រីកោណ ABC, មេដ្យាន [AH] ដែល $|AH| = |AB|$

បង្ហាញថា : a) $tgB = 3tgC$

b) $\sin A = 2\sin(B-C)$



សំរាយបំភ្លឺ :

a) Δ BAM សមបាទ

គូសកំពស់ AH យើងបាន

$BH = HM = \frac{BM}{2} = \frac{BC}{4}$

$\Rightarrow HC = 3HB$

ក្នុង $\Delta \perp AHB$

$\Rightarrow tg B = \frac{AH}{HB}$

ក្នុង $\Delta \perp AHC \Rightarrow tg C = \frac{AH}{HC} = \frac{AH}{3HB} \Rightarrow tg B = 3 tg C$

b) ក្នុង ΔAMC យើងបាន :

$$\frac{CA}{\sin AMC} = \frac{CM}{\sin MAC} \quad (*)$$

យើងបាន : $\widehat{AMC} = \pi - \widehat{BMA} = \pi - B$

$\Rightarrow \sin AMC = \sin B$

ម្យ៉ាងទៀត Δ AMC មានមុំក្រៅ $\widehat{BMA}$:

$\widehat{BMA} = C + \widehat{MAC}$

$\widehat{MAC} = \widehat{BMA} - C$

$= B - C \Rightarrow \sin MAC = \sin(B-C)$

$$(*) \Rightarrow \frac{CA}{\sin B} = \frac{CM}{\sin(B-C)} \quad (1)$$

ក្នុង Δ ABC មាន : $\frac{CA}{\sin B} = \frac{CB}{\sin A} \quad (2)$

(1) និង (2) $\Rightarrow \frac{CM}{\sin(B-C)} = \frac{CB}{\sin A} = \frac{2CM}{\sin A}$

$$\sin A = 2\sin(B-C)$$

6 គេមានត្រីកោណសមបាទ ABC ($AB = AC$) ។ យក O ជាចំណុចកណ្ដាល $[BC]$, R ជាកាំរង្វង់ផ្ចិត O និងប៉ះនឹង $[AB]$ ។ មុំ $\widehat{BAC} = 2\alpha$ ។

1. គណនាជាអនុគមន៍នៃ R និង $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ នៃអង្កត់ BC, AO, AC និងផ្ទៃ S របស់ ΔABC ។
2. គណនា $\frac{1}{S^2}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\sin 2\alpha$
3. គណនា α ដើម្បីឲ្យ S អប្បបរមា ឬ $S = 4R^2$

សំរាយបំភ្លឺ

1) តម្លៃរបស់ BC, AO, AC និង S(ABC):

ពី O គូស OH កែងនឹង AB

$$OH = R$$

ក្នុង Δ AOH យើងមាន:

$$AO = \frac{OH}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha}$$

ក្នុង $\Delta\perp$ AOB:

$$AB = \frac{AO}{\cos\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha.\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{AC = \frac{R}{\sin\alpha\cos\alpha}}$$

$$OB = AB\sin\alpha = \frac{R}{\cos\alpha}$$

តែ $BC = 2OB \Rightarrow \boxed{BC = \frac{2R}{\cos\alpha}}$

យើងមាន $S(ABC) = \frac{1}{2}OA.BC = \frac{1}{2}\frac{R}{\sin\alpha}\cdot\frac{2R}{\cos\alpha} = \boxed{\frac{R^2}{\sin\alpha\cos\alpha}}$

2) គណនា $\frac{1}{S^2}$:

យើងមាន: $S = \frac{R^2}{\sin\alpha\cos\alpha} \Rightarrow S^2 = \frac{R^4}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{1}{S^2} = \frac{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{R^4} = \frac{\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}{R^4}$$

3) S អប្បបរមា:

S អប្បបរមា $\Leftrightarrow S^2$ អប្បបរមា $\Leftrightarrow \frac{1}{S^2}$ អតិបរមា

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$ អតិបរមា

តាង $A = \sin^2\alpha$; $B = 1-\sin^2\alpha \Rightarrow A+B = 1$ = ចំនួនថេរ

$\Rightarrow$ ផលគុណ: $A.B = \sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$ អតិបរមា

កាលណា $A = B$ ។

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ កែងសមបាតត្រង់ A

b/ ដោយ : $S = \dfrac{R^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$

ដូច្នេះ: $S = 4R^2 \Rightarrow \dfrac{R^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = 4R^2$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{6} \\ 2\alpha = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{12} \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

7. ប្រធាន : គេមានត្រីកោណ ABC មួយ ដូចកំពស់ [AH] ; ឧបមា H នៅលើ ចន្លោះពី B→C ដែល : AH = CH = x និង BH = 1 cm

1/ គណនាផ្ទៃ y របស់ ΔABC ជាអនុគមន៍នៃ x

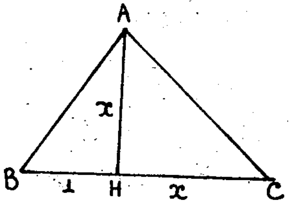
2/ គណនា tgA, tgB, tgC ចំពោះ $x = 2$

3/ បើ 3 ចំនុច B, H, C គេមិនដឹងថាស្ថិតនៅតាមលំដាប់ដូចម្តេច ដែលគ្រាន់តែដឹងថាផ្ទៃរបស់ ΔABC ស្មើ $\frac{8}{25}$ ។ ចូរគណនា AH និង BC

ដំណោះស្រាយ

1/ យើងមាន :

$$y = \frac{1}{2} BC.AH = \frac{1}{2} x(x+1)$$



2/ គណនា tgA, tgB, tgC

$\Delta HAC \perp$ សមបាត $\Rightarrow tgC = tg\frac{\pi}{4} = 1$

$\Delta \perp HAB$ មាន : $tgB = \frac{AH}{BH} = x = 2$

ម្យ៉ាងទៀត : $A = \pi - (B + C)$

$$\Rightarrow tgA = -tg(B+C) = -\frac{tgB + tgC}{1 - tgB\,tgC}$$

$$tgA = 3$$

3) គណនា AH និង BC

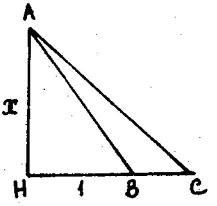
a. បើនៅក្នុងចន្លោះ [BC] យើងបាន $y = \frac{x^2+x}{2} = \frac{3}{25}$

$\Rightarrow 25x^2 + 25x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

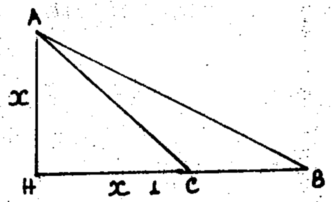
$AH = \frac{1}{5}$; $BC = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$

b. បើ H នៅក្រៅ [BC]

$\Rightarrow y = \frac{(x-1)x}{2}$ (រូបទី1) ឬ $y = \frac{(1-x)x}{2}$ (រូបទី2)



(រូបទី1)



(រូបទី2)

និង $\frac{(x-1)x}{2} = \frac{3}{25} \Rightarrow x = \frac{5}{6} \Rightarrow BC = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$

$\frac{(1-x)x}{2} = \frac{3}{25} \Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

8 **ប្រធាន**: មានអង្កត់ [AB] និង $|AB| = a$ ។ រង្វង់ចល័តផ្ចិត I ប៉ះនឹង [AB] ត្រង់ A ។ យក C ជាចំណុចឆ្លុះនៃ A ធៀបផ្ចិត I ។ តាង $\widehat{ABI} = \alpha$ និង $\widehat{IBC} = \beta$

1) រកទំនាក់ទំនងរវាង $tg\alpha$ និង $tg\beta$

2) រក α ដើម្បីឲ្យ $tg\beta$ អតិបរមា

សំរាយបំភ្លឺ

1) យក x ជាកាំរង្វង់ផ្ចិត I ប៉ះនឹង AB ត្រង់ A ហើយ $\Delta IBA \perp$

$\Rightarrow tg\alpha = \frac{AI}{BA} = \frac{x}{a}$ (1)

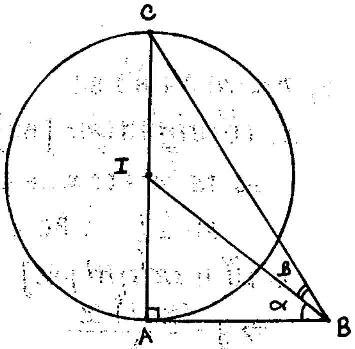
ដោយ $\Delta CAB \perp$

$\Rightarrow tg(\alpha+\beta) = \frac{CA}{AB} = \frac{2x}{a}$ (2)

(1)&(2) $\Rightarrow tg(\alpha+\beta) = 2tg\alpha$

$\Rightarrow \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = 2tg\alpha$

$\Rightarrow tg\beta = \frac{tg\alpha}{1+2tg^2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{tg\alpha} + 2tg\alpha}$



2/ $tg\beta$ អតិបរមា :

$\Leftrightarrow \frac{1}{tg\alpha} + 2tg\alpha$ អប្បរមា

តាង $\begin{cases} A = \frac{1}{tg\alpha} \\ B = 2tg\alpha \end{cases} \Rightarrow A.B = 2 =$ ចំនួនថេរ

$\Rightarrow A+B = 2tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha}$ អប្បរមា កាលណា

$2tg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} \Leftrightarrow tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3)

(3) $\Rightarrow \alpha$ ជាមុំស្រួច

មុំα មានទីតាំង 2 នៃ I ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹង AB ។

9 _ មានត្រីកោណ ABC កែងសមបាតត្រង់ A, ដែល $|AB| = |AC| = a$ ។ លើ [AC] គេបន្លាយបាន [CM] ។ មុំ $\widehat{CBH} = \alpha$ ។

a. គណនាជាអនុគមន៍នៃ α, មុំ $\in \Delta CBH$

b. គណនាជាអនុគមន៍នៃ α និង a នៃ $|AM|$ និង $|CH|$

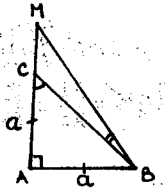
c. គណនា $tg\alpha$ ដើម្បីឲ្យមាន $CM = CB$

d. រួចទាញបង្ហាញ $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$

សំរាយបំភ្លឺ

a. $\widehat{MCB} + \widehat{ACB} = \pi$

$\Rightarrow \widehat{MCB} = \pi - \widehat{ACB} = \frac{3\pi}{4}$



ក្នុង ΔCBH មាន :

$\widehat{CHB} = \pi - (\widehat{HCB} + \widehat{CBH}) = \pi - (\frac{3\pi}{4} + \alpha) = \frac{\pi}{4} - \alpha$

b - ΔABM កែង $\Rightarrow AM = AB\, tg\, ABM = a\, tg(\frac{\pi}{4} + \alpha)$

តែ : $tg(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{tg\frac{\pi}{4} + tg\alpha}{1 - tg\frac{\pi}{4}\, tg\alpha} = \frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha}$

$\Rightarrow AM = a\frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha}$

ម្យ៉ាងទៀតដោយសម្មតិកម្ម :

$CH = AH - AC = a\frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha} - a = \frac{2a\,tg\alpha}{1 - tg\alpha}$

c - យើងមាន : $CB = a\sqrt{2}$

$CH = CB \Rightarrow \frac{2a\,tg\alpha}{1 - tg\alpha} = a\sqrt{2} \Rightarrow tg\alpha = \sqrt{2} - 1$

d - ដោយ : $CH = CB \Rightarrow tg\alpha = \sqrt{2} - 1$

$\alpha = arctg(\sqrt{2} - 1) = \frac{\pi}{8}$

ដោយ α ជាមុំស្រួច $\Rightarrow Cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\frac{\pi}{8}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

$Sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{1 - Cos^2\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

10 ប្រធាន : មានត្រីកោណ ABC ដែលជ្រុងទាំង 3 មានរង្វាស់ a,b,c ហើយបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែល a ជាតួកណ្តាល ។ បង្ហាញថា: $tg\frac{B}{2}\, tg\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$

សំរាយបំភ្លឺ

តាមសម្មតិកម្ម :

$a = \frac{b + c}{2} \Rightarrow 2a = b + c$

យើងមាន :

$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} = \frac{b + c}{SinB + SinC} = \frac{2a}{SinB + SinC}$

$\Rightarrow 2SinA = SinB + SinC$

$\Rightarrow 4Sin\frac{A}{2}Cos\frac{A}{2} = 2Sin\frac{B + C}{2}Cos\frac{B - C}{2}$ (1)

យើងមាន : $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$

$(1)\Rightarrow 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$\Rightarrow 2\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B-C}{2}=\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad(2)$

ម្យ៉ាងទៀត : $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$

$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}=\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$

$=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$(2)\Rightarrow 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=3\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$

11. **ប្រធាន** : មុំ A, B, C របស់ ΔABC បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត B ជាតួមធ្យម ។ ដោយស្គាល់ផលបូក $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})$ ចូរគណនា A, B, C ។

សំរាយបំភ្លឺ

$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})\Rightarrow A,B,C=?$

សម្មតិកម្ម : $B=\frac{A+C}{2}\Rightarrow 2B=A+C$

តែ : $A+B+C=\pi\Rightarrow 3B=\pi\Rightarrow B=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

នាំឱ្យ: $\sin A+\sin C=\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\quad(1)$

ម្យ៉ាងទៀត $A+C=\pi-B=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\quad(2)$

ដូចនេះ: A, C កំណត់ដោយ (1) និង (2)

$$\begin{cases}\sin A+\sin C=\frac{3}{2}\\ A+C=\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

(1) អាចសរសេរ : $2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{A-C}{2}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{A-C}{2}=\frac{3}{4}:\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{A-C}{2}=\frac{\pi}{6}\ ;\ A-C=\frac{\pi}{3}\ (A>C)$

$\Rightarrow \begin{cases} A + C = \dfrac{2\pi}{3} \\ A - C = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} A = \dfrac{\pi}{2} \\ C = \dfrac{\pi}{6} \end{matrix}$

ដូច្នេះ $A = \dfrac{\pi}{2}$, $B = \dfrac{\pi}{3}$, $C = \dfrac{\pi}{6}$

12 **ប្រធាន**: គេឲ្យត្រីកោណកែង ABC $\left(A = \dfrac{\pi}{2}\right)$ និង $BC = a$ ។ ដោយដឹងថាផលគុណរង្វាស់អង្កត់ពុះរបស់មុំ B និង C គឺ m^2

1) បង្ហាញថា: $\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{m^2}{4a^2}$

2) យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ។ បង្ហាញថា:

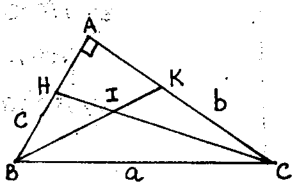
$BI \cdot CI = \dfrac{m^2}{2}$

សំរាយបំភ្លឺ

1) តាង $CH = e$, CH ជាអង្កត់ពុះមុំ C

$BK = d$, BK ជាអង្កត់ពុះមុំ B

$\Rightarrow CH \cdot BK = ed = m^2$ ដោយ



ΔABC កែង $\Rightarrow \begin{cases} \sin B = \dfrac{b}{a} \\ \sin C = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

$\Rightarrow \sin B \cdot \sin C = \dfrac{bc}{a^2}$ (1)

ដោយ ΔABC កែង $\Rightarrow \cos\dfrac{B}{2} = \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{c}{d}$

ΔACH កែង $\Rightarrow \cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{AC}{CH} = \dfrac{b}{e}$

ដូចនេះ: $\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{bc}{de}$ (2)

(1) អាចសរសេរជារាង:

$2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}\, 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{bc}{a^2}$ (3)

(2) និង (3) $\Rightarrow 4\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{de}{a^2} = \dfrac{m^2}{4a^2}$

2) ផ្ចិតរង្វង់ I ចារឹកក្នុង ΔABC ជាចំណុចប្រសព្វ រវាង BK និង CH ក្នុង ΔBIC មាន:

$\dfrac{BI}{\sin\frac{C}{2}} = \dfrac{CI}{\sin\frac{B}{2}} = \dfrac{BC}{\sin BIC}$

តែ $\widehat{BIC} = 180° - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$

$= 180° - \left(\frac{B+C}{2}\right) = 180° - 45° = 135°$

$\Rightarrow \sin BIC = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \frac{BI}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{CI}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} BI = a\sqrt{2}\,\sin\frac{C}{2} \\ CI = a\sqrt{2}\,\sin\frac{B}{2} \end{cases} \Rightarrow BI.CI = 2a^2 \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$= 2a^2\frac{m^2}{4a^2} = \frac{m^2}{2}$

13 ប្រធាន: មានត្រីកោណ ABC ដែលមុំ $A > C$ និង

$\sin\frac{B}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$

1) បង្ហាញថា $tg\frac{A}{2}\,tg\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$

2) ដោយស្គាល់ $\sin\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

ចូរគណនា $\cos 2B$ តើលទ្ធផលដូចម្ដេច?

3) គណនាមុំ B (ដោយមិនបាច់មើលតារាង)

សំរាយបំភ្លឺ

1) យើងមាន: $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{B}{2} = \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right)$

$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\Rightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\Rightarrow tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$

2) គណនា $\cos 2B$

យើងមាន $\cos B = 1 - 2\sin^2\frac{B}{2}$

$\Rightarrow \cos B = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\Rightarrow \cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1$

$= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \cos 2B = \sin\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

3./ តម្លៃរបស់ B

យើងមាន $\cos 2B = \sin\frac{B}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right)$ (*)

ដូច្នេះមាន 2 ករណី :

* $2B = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$ (ព្រោះ B ជាមុំរបស់ត្រីកោណ)

$\Rightarrow B = \frac{\pi}{5}$

* $2B = -\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$ (ព្រោះ B ជាមុំរបស់ត្រីកោណ)

$\Rightarrow B = -\frac{\pi}{3}$ (គ្មានន័យ)

ដូច្នេះ $B = \frac{\pi}{5}$ ជាចំលើយ

14 - ប្រធាន: មានត្រីកោណ ABC ។ M ជាចំនុចកណ្តាល [BC], AB និង AC កាត់មេដ្យាទ័ររបស់ BC រៀងគ្នាត្រង់ N និង O ។ ឧបមា O ជាចំនុចកណ្តាល MN

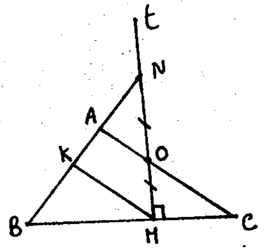
1) រកទំនាក់ទំនងរវាង tg នៃមុំ B និង C

2) រកផលធៀប $\frac{NA}{NB}$

3) រកសំនុំចំណុចរបស់ A កាលណា BC នឹង ។
រកសំនុំចំណុចរបស់ C កាលណា AB នឹង ។

4) តាង $y = tgA$, $x = tgC$, គណនា y ជាអនុគមន៍នៃ x

ដំណោះស្រាយ



1) ទំនាក់ទំនងរវាង tgB , tgC :

ដោយ ΔBMN កែង

$\Rightarrow tgB = \frac{MN}{BM}$

ដោយ ΔCMO កែង

$\Rightarrow tgC = \frac{OM}{CM}$

តែ $\begin{cases} MN = 2OM \\ BM = CM \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{MN}{BM} = 2\cdot\frac{OM}{CM} \Rightarrow tgB = 2tgC$

2) $\frac{NA}{NB}$; គូស MK//CA

ក្នុង Δ CAB មាន MB = MC ⇒ BK = AK .

ក្នុង Δ MNK មាន ON = OM ⇒ AK = AN

⇒ AK = AN = BK

⇒ $\frac{NA}{NB} = \frac{1}{3}$.

3) a- សំនុំចំនុច A :

កាលណា B និង C នឹង នោះអរតូសង់ H ក៏នឹងដែរ ហើយ $\frac{BA}{BN} = \frac{2}{3}$

⇒ សំនុំចំនុច A ជាបន្ទាត់ស្របនឹង Ht

b- សំនុំចំនុច C :

កាលណា A, B នឹង នោះ N នឹង ព្រោះ $\frac{BN}{BA} = \frac{3}{2}$ ដោយសំនុំចំណុច M ជារង្វង់មានអង្កត់ផ្ចិត BN (ព្រោះ $\widehat{BMN} = \frac{\pi}{2}$) ⇒ សំនុំចំណុច C ជារង្វង់មានអង្កត់ផ្ចិត BN' = 2BN

4) យើងមាន $A = \pi - (B+C) \Rightarrow tg A = -tg(B+C) =$

$= -\frac{tgB + tgC}{1 - tgB\,tgC}$ និង $tg B = 2tgC$ (សំរាយខាងលើ)

$\Rightarrow tgA = \frac{3tgC}{2tg^2C - 1} \Rightarrow y = \frac{3x}{2x^2 - 1}$

16 ប្រធាន: គេមានកន្លះរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត AOB = 2R ។ លើកន្លះរង្វង់គេដៅចំនុច C ដែល (OB, OC) = α ។ បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ A និង C កាត់គ្នាត្រង់ D ។ ខ្សែកែង CC' កែងនឹង AB ។

1) គណនាជាអនុគមន៍នៃ R និង $t = tg\frac{\alpha}{2}$ រង្វាស់ CC', AC', AD

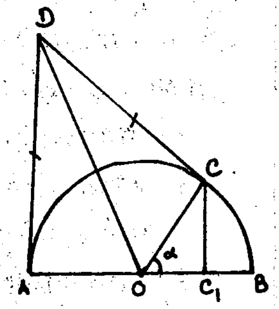
2) មានចតុកោណព្នាយ AC'CD វិលជុំវិញ AB ។ គណនាជាអនុគមន៍នៃ R និង t ផ្ទៃខាង y របស់កំណាត់កោនកំណត់ដោយចតុកោណព្នាយនោះ ។

3) គណនា t ដើម្បីឲ្យ $y = m\pi AD^2$

គណនា α ចំពោះ $m = \frac{5}{2}$ ។

បំភាយបំភ្លឺ

1) គណនា CC', AC', AD :



យើងមាន (ចំពោះទិសវិជ្ជមាន ពី $A \to B$)

$\overline{C'C} = R.\sin\alpha$

$0 < \alpha < \pi$

$\overline{OC'} = R.\cos\alpha$

តាមទំនាក់ទំនង Chasles :

$\overline{AC'} = \overline{AO} + \overline{OC'} = R + R.\cos\alpha =$

$= R(1+\cos\alpha)$

ដោយ OD ជាបន្ទាត់ពុះមុំ AOC $\Rightarrow \widehat{AOC} = \pi - \alpha$

$\widehat{AOD} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

ΔAOD មាន: $AD = AO.tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = AO.Cotg\frac{\alpha}{2}$

តាង : $tg\frac{\alpha}{2} = t$ នោះយើងបាន :

$CC' = R\sin\alpha = R.\frac{2t}{1+t^2}$

$AC' = R(1+\cos\alpha) = \left(R + R\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = R\frac{2}{1+t^2}$

$AD = \frac{AO}{t} = \frac{R}{t}$

2) យើងមាន : $y = \pi.CD(CC' + AD) = \pi.AD(CC' + AD)$

ព្រោះ ($CD = AD$)

$\Rightarrow y = \pi.\frac{R}{t}\left(\frac{2Rt}{1+t^2} + \frac{R}{t}\right) = \pi\frac{R^2}{t^2}.\frac{3t^2+1}{1+t^2}$

3) យើងមាន:

$y = \frac{\pi R^2}{t^2}\frac{(3t^2+1)}{(1+t^2)} = mn\frac{R^2}{t^2}$ (ព្រោះ $AD = \frac{R}{t}$)

$\Rightarrow \frac{3t^2+1}{t^2+1} = m \Rightarrow (m-3)t^2 = 1-m$

ចំពោះ $m \neq 3 \Rightarrow t^2 = \frac{1-m}{m-3}$

លក្ខខណ្ឌ : $\frac{1-m}{m-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant m < 3$

$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{1-m}{m-3}}$ (ដោយ $t = tg\frac{\alpha}{2} > 0$)

បើ $m = \frac{5}{2} \Rightarrow t^2 = 3 \Rightarrow t = \sqrt{3} = tg\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow tg\frac{\alpha}{2} = tg\frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$

16 រង្វាស់អង្កត់ AB = 2 ។ O ចំណុចកណ្ដាល AB ។ គូស Ax និង By កែងនឹង AB ។ ដោយដឹងថា Ax និង By មិននៅក្នុងប្លង់តែ 1 ។ លើ Ax យក $AP = x > 0$ លើ By យក $BQ = y > 0$ ។

1) - គណនារង្វាស់ : OP^2, OQ^2, PQ^2 ជាអនុគមន៍នៃ x, y

2) ឧបមាថា PQ ប៉ះនឹងស្វ៊ែអង្កត់ផ្ចិត AB ។ ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ។

3) យក α ជាមុំរបស់ AB និង PQ បង្ហាញថា

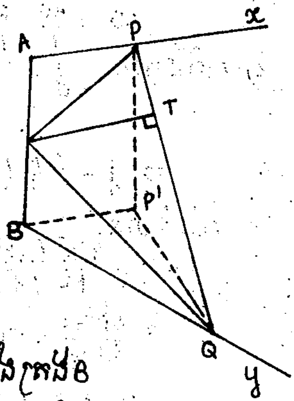
a) $\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

b) $tg^2\alpha = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$

4) គណនា x និង y បើ $PQ = 4$

5) គណនាតម្លៃអប្បបរមារបស់ PQ និងតម្លៃត្រូវគ្នារបស់ α ។

ដំណោះស្រាយ



1) យើងមាន :

ΔAOP និង OPQ ជាត្រីកោណកែង

$OP^2 = OA^2 + AP^2 = 1 + x^2$

$OQ^2 = OB^2 + BQ^2 = 1 + y^2$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ :

{ BQ និង Ax មិននៅក្នុងប្លង់តែមួយ
{ $BQ \perp AB$

$\Rightarrow BQ \perp (BAx) \Rightarrow$ QBP ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B

យើងបាន $PQ^2 = BP^2 + QB^2 = (AB^2 + AP^2) + QB^2 = 4 + x^2 + y^2$

2) យក T ជាចំណុចប៉ះរបស់ PQ និងស្វ៊ែមានអង្កត់ផ្ចិត AB

យើងបាន $PA = PT$; $QB = QT$ (បន្ទាត់ប៉ះនឹងស្វ៊ែត្រង់ចំណុច 1)

$\Rightarrow PA + QB = PQ \Rightarrow x + y = \sqrt{x^2 + y^2 + 4} \Rightarrow xy = 2$

3) យើងគូសកំពូល P' របស់ចតុកោណកែង ABP'P ដោយ

$PP' // AB \Rightarrow \begin{cases} \text{មុំ } (PQ', PP') = \alpha \\ \triangle PP'Q \perp \text{ (កែង) ត្រង់ } P' \end{cases}$

$\Rightarrow PP'$ ជាចំណោលរបស់ PQ លើប្លង់របស់ចតុកោណកែង

យើងបាន : $PP' = PQ\cos\alpha \Rightarrow AB = PQ\cos\alpha = (x+y)\cos\alpha$

$\Rightarrow (x+y)\cos\alpha = 2 = xy \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (1)$

b/ លើក (1) ជាការេ :

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$

$\Rightarrow tg^2\alpha = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$

4) យើងមាន: $PQ = PT + TQ = AP + BQ = x + y$

ដោយ $PQ = 4 \Rightarrow x + y = 4$ ម្យ៉ាងទៀត $xy = 2$

$\Rightarrow x, y$ ជាឫសរបស់សមីការ

$x^2 - 4x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

យើងបានគូចំលើយ $\begin{cases} x = 2+\sqrt{2} \\ y = 2-\sqrt{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2-\sqrt{2} \\ y = 2+\sqrt{2} \end{cases}$

5) អប្បបរមារបស់ PQ

យើងមាន : $PQ = x \cdot y$

តែ $x + y = 2 =$ ចំនួនថេរ

$\Rightarrow$ ផលគុណ $x \cdot y$ អប្បបរមាកាលណា : $x = y$

$\Rightarrow x = y = \sqrt{2}$

$\Rightarrow tg^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\Rightarrow tg\alpha = \pm 1$

$tg\alpha = -1$ មិនយក

ដូច្នេះ: $tg\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ ៕

7 x ជាវង្វាស់ធ្នូនៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។

1.) ដោះស្រាយសមីការ : $\cos mx = \cos(m-1)x$

បង្ហាញថាដំណោះស្រាយមាន : $x = \frac{2k\pi}{m'}$ $\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ m' \text{ គិតតាម } m \end{cases}$

និងពិនិត្យករណីគ្មានកំណត់ ។

ចូរសង្ខេបរូបធរណីមាត្រ កាលណា $m \in N$ និង $m > 0$

2.) រកតម្លៃ $\cos x$ ដោយដឹង $\cos mx = \cos(m-1)x$

ចំពោះ $m = 2$ ឬ $m = 3$ ។

3.) បើ $\cos 3x = \cos 4x$ នោះ $\cos x$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការណា?

បង្ហាញថា តម្លៃរបស់ $\cos x$ $(\neq 1)$ នោះឲ្យសមីការដឺក្រេទី3 ដែលគេយកជា $\cos x$ សរសេរសមីការនោះ និងពន្យល់រូបធរណីមាត្រនៃឫសនោះ ។

សំរាយបញ្ជាក់

1.) យើងមាន $\cos mx = \cos(m-1)x$

$$\Rightarrow \begin{cases} mx = (m-1)x + 2k\pi \\ mx = -(m-1)x + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ (2m-1)x = 2k\pi \end{cases}$$

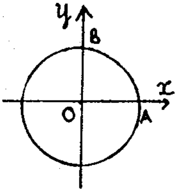
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi & (1) \\ x = \frac{2k\pi}{2m-1} & \text{បើ } m = \frac{1}{2} \ (2) \end{cases}$$

តាង $m' = 2m-1$ យើងបាន $\begin{cases} x = 2k\pi & (1) \\ x = \frac{2k\pi}{m'} & (3) \end{cases}$

. ពិនិត្យករណីមិនកំណត់ :

ពេលណា $m = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos x$

$\Rightarrow x$ មិនកំណត់



បើ $m > 1 \Rightarrow m' = 2m - 1 > 1$

(1) $\Rightarrow$ គល់ធ្នូ x ជាចំណុច A

(2) $\Rightarrow$ គល់ធ្នូ x ជាកំពូលរបស់ពហុកោណនិយ័ត (P) ដែល

ចំនួនជ្រុងស្មើ m' (= 2m-1) ពហុកោណនេះមានកំពូលមួយនៅត្រង់ A។

2) យើងមាន $\cos mx = \cos(m-1)x \quad (4)$

a. បើ $m = 2$ $(4) \Rightarrow \cos 2x = \cos x \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = \cos x$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$\cos x$ ជាឫសរបស់សមីការ :

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b. បើ $m = 3$ $(4) \Rightarrow \cos 3x = \cos 2x$

$$\Rightarrow 4\cos^3 x + 3\cos x = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow 4\cos^3 x - 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

$\cos x$ ជាឫសរបស់ : $4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\Rightarrow (x-1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \\ x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ x_3 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} \end{cases}$$

3) យើងមាន : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1$$

$$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\Rightarrow 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\Rightarrow 8\cos^4 x - 4\cos^3 x - 8\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$$

$\cos x$ ជាឫសរបស់ : $8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1) = 0$$

បើ $x = 1 = \cos x$ មិនយកនោះ:

$$8\cos^3 x - 4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$$

ដូចនេះតម្លៃរបស់ $\cos x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\cos 3x = \cos 4x$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់

$$8\cos^3 x - 4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0 \quad (\cos x \neq 1)$$

សមីការ $\cos 4x = \cos 3x$ មានរាង : $\cos mx = \cos(m-1)x \quad (m = 4)$

⇒ ឫសរបស់សមីការនេះគឺ

$$\begin{cases} \cos x = 2k\pi \\ \cos x = \dfrac{2k\pi}{m'} = \dfrac{2k\pi}{2m-1} \end{cases} \quad \text{ចំពោះ} \begin{cases} m = 4 \\ m' = 7 \end{cases}$$

មានន័យថា : គល់របស់ឫសដែលជាឫស ជាកំពូលរបស់ពហុកោណនិយ័ត 7 ជ្រុង ចារឹកក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ។

18 ក្នុងប្លង់ (P), គូសរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ។ ត្រីកោណ ABC ចារឹកក្នុងរង្វង់នេះ ។ លើបន្ទាត់កែងនឹង (P) គូសពី O គេដៅចំណុច S ។

1.) a- បង្ហាញថា : SA = SB = SC និងមុំរវាងរង្គត់ទាំងនេះ និងប្លង់ (P) ស្មើគ្នា ។ យកតម្លៃនៃមុំនោះស្មើ x ។

b. គណនាមុំ $\widehat{BSC}, \widehat{CSA}, \widehat{ASB}$ ជាអនុគមន៍ x និងមុំ A, B, C ។

2.) ត្រីកោណ ABC ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌអ្វី ដើម្បីឲ្យ :

$$\widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \widehat{ASB}$$

3.) ក្នុងលក្ខខណ្ឌសំនួរ 2.), ចូរគណនា OS ជាអនុគមន៍នៃ R ។

a- ដើម្បីឲ្យ $\widehat{BSC}, \widehat{CSA}, \widehat{ASB}$ ជាមុំកែង

b. ដើម្បីឲ្យ $\widehat{BSC}, \widehat{CSA}, \widehat{ASB}$ ស្មើនឹង $\frac{\pi}{3}$

រួចទាញបង្ហាញលក្ខណៈមួយរបស់ចតុមុខនិយ័ត ។

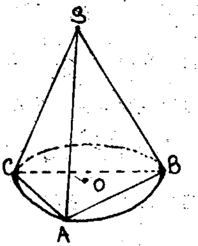
សំរាយបំភ្លឺ

1) a. យើងមាន : ចំណោលកែងពី S លើ (P) ត្រង់ O .

⇒ ចំណោលរបស់ SA, SB, SC លើ (P) គឺ OA, OB, OC

⇒ មុំរវាង SA, SB, SC ជាមួយ (P) គឺ $\widehat{SAO}, \widehat{SBO}, \widehat{SCO}$

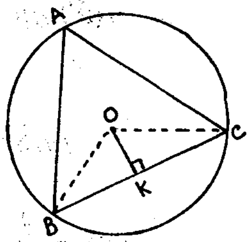
យើងបាន ° $\Delta\perp$ SAO, SBO, SCO ប៉ុនគ្នា



$$\Rightarrow \begin{cases} SA = SB = SC \\ \widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO} = x \end{cases}$$

b. គណនា $\widehat{BSC}$: ΔSOB កែង $\Rightarrow SB = \dfrac{OB}{\cos BO} = \dfrac{R}{\cos x}$ (1)

គូស $OK \perp BC \Rightarrow KC = OC \sin KOC = OC \sin\frac{BOC}{2} = R \sin A$



$\Rightarrow BC = 2R\sin A \quad (2)$

ត្រីកោណសមបាទ SBC មាន :

$SB = SC = \dfrac{R}{\cos x}$, $BC = 2R\sin A$

$\Rightarrow \cos BSC$ ឲ្យដោយ :

$BC^2 = SC^2 + BS^2 - 2SC.BS.\cos BSC$

$\Rightarrow 2R^2\sin^2 A = \dfrac{2R^2}{\cos^2 x} - 2\dfrac{R^2}{\cos^2 x}\cos BSC$

$$\Rightarrow \boxed{\cos BSC = 1 - 2\sin^2 A\cos^2 x} \quad \Rightarrow \widehat{BSC}$$

ចំពោះ $\widehat{CSA}$, $\widehat{ASB}$ យើងគណនាដូចគ្នាដែរ ។

2) ពិនិត្យ Δ BSC, CSA, ASB ត្រីកោណទាំង 3 ជាត្រីកោណសមបាទមានកំពូលS ក្នុងនោះជ្រុងដែលគូសចេញពីកំពូលS ស្មើគ្នា ។ ដូច្នេះចង់ឲ្យមុំនៅកំពូលS ទាំងអស់ស្មើគ្នា នោះលក្ខខណ្ឌចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់គឺជ្រុងបាតទាំងអស់ប៉ុនគ្នា : $AB = BC = CA \Rightarrow \Delta ABC$ សម័ង្ស

3) a. យើងមាន : $AB = CA = BC = R\sqrt{3}$

ចំពោះ $\widehat{BSC} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow SB^2 + SC^2 = BC^2 \Rightarrow 2BS^2 = 3R^2 \Rightarrow SB = \dfrac{R\sqrt{6}}{2}$

ΔOSB កែង $\Rightarrow OS^2 = BS^2 - OB^2$

$= \dfrac{6R^2}{4} - R^2$

$= \dfrac{2R^2}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{OS = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}}$$

b. ΔBSC សម័ង្ស

$\Rightarrow SB = BC = R\sqrt{3}$

ΔOBS កែង

$\Rightarrow OS^2 = BS^2 - OB^2 = 3R^2 - R^2$

$$\Rightarrow \boxed{OS = R\sqrt{2}}$$

ទាញបង្ហាញ :

យើងមាន : $AB = R\sqrt{3}$, $OS = R\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{OS}{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$$\Rightarrow OS = \frac{AB\sqrt{6}}{3} \quad (*)$$

យើងមាន OS ជាកំពស់របស់ចតុមុខនិយ័ត តាងដោយ h

AB ជាជ្រុងរបស់ចតុមុខនិយ័ត តាងដោយ a

$(*) \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \quad (**)$

ក្នុងចតុមុខនិយ័ត ជ្រុងនិងកំពស់ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $(**)$ ។

19

1°) x, y ជាចំនួន ។ តាង $\sin\dfrac{x+y}{2} = z$, ។ គណនា $\cos(x+y)$ ជាអនុគមន៍នៃ z ។

2°) បើ $\sin x + \sin y = 1$ គណនា $\cos(x-y)$ ជាអនុគមន៍នៃ z

3°) គណនា z បើដឹង : $\cos x . \cos y = 3/4$

4°) ទាញរកឫសរបស់ប្រព័ន្ធ : $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x . \cos y = 3/4 \end{cases}$ ចំពោះ $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$

សំរាយបំភ្លឺ

1) គណនា : $\cos(x+y)$

យើងមាន : $\cos A = 1 - 2\sin^2\dfrac{A}{2}$

$$\Rightarrow \cos(x+y) = 1 - 2\sin^2\frac{x+y}{2} = 1 - 2z^2$$

2) គណនា : $\cos(x-y)$

យើងមាន : $\sin x + \sin y = 1$ (គេឲ្យ)

$$\Rightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 2z\cos\frac{x-y}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2z} \quad (z \neq 0)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x-y}{2} - 1$$
$$= 2\left(\frac{1}{2z}\right)^2 - 1$$
$$= \frac{1}{2z^2} - 1$$

3·) គណនា z :

$\cos x . \cos y = \frac{3}{4}$ (គេឲ្យ)

យើងបាន : $\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right] = \frac{3}{4}$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{3}{2}$$

ដោយប្រើប្រាស់ចំលើយ 1·) និង 2·) :

$$\Rightarrow 1 - 2z^2 + \frac{1}{2z^2} - 1 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 4z^4 + 3z^2 - 1 = 0 \quad (\text{ចំពោះ } z \neq 0)$$

តាង $t = z^2$ ចំពោះ $t > 0$

$$\Rightarrow 4t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 & (\text{មិនយក}) \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow z = \pm\frac{1}{2}$$

4·) ដោះស្រាយ : $\sin x + \sin y = 1$

$$\cos x . \cos y = \frac{3}{4}$$

យើងប្រើអញ្ញាតជំនួយ : $\sin\frac{x+y}{2} = z$

តាមសំនួរ 2·) $\Rightarrow \sin x + \sin y = 1$

$$\Leftrightarrow \cos(x-y) = \frac{1}{2z^2} - 1$$

តាមសំនួរ 3·) $\Rightarrow \cos x . \cos y = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2z^2}$$

តែ $z^2 = \frac{1}{4}$ ដូចនេះយើងបានប្រព័ន្ធ :

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1 & (1) \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$(1) \Rightarrow \cos(x-y) = \cos 0 \Rightarrow x = y$

$(2) \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x = y = \frac{\pi}{6}$

20

មានត្រីកោណ ABC កែងសមបាទ $\begin{cases} AB = AC = \ell \\ \widehat{BAC} = 90^\circ \end{cases}$

1-/ ពីចំណុចកណ្តាល O នៃ BC គូសបន្ទាត់(Δ) កែងនឹងប្លង់ (ABC)។ ចូរកំណត់ទីតាំង H នៅលើ (Δ) ដើម្បីឲ្យ $\widehat{BHC} = 90^\circ$ រួចគណនាមុំនិងជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABH ។

2-/ យក x ជាអាប់ស៊ីសរបស់ចំណុច P យកនៅលើ (AH), គល់ A ទិសដៅមានពី A → H ។ គណនា tg BPC ជាអនុគមន៍នៃ x និង ℓ។

សំរាយបំភ្លឺ

1-/ រកតម្លៃ OH ដើម្បីឲ្យ $\widehat{BHC} = 90^\circ$

H នៅលើមេដ្យាទ័រ BC

$\Rightarrow HB = HC$

$\Rightarrow \Delta HBC$ ជាត្រីកោណសមបាទកំពូល H

$\widehat{BHC} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow OH = \frac{BC}{2}$

តែ $BC = AB\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{OH = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}}$

ΔAOH កែងសមបាទ : $AH = OH\sqrt{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2} = \ell$

Δ BOM កែងសមបាត : $BM = OM\sqrt{2} = \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} = \ell$

ដូចនេះ: $AM = BM = AB = \ell$

$\Rightarrow$ ABM ជាត្រីកោណសម័ង្ស $\Rightarrow$ មុំរបស់ Δ ABM ទាំងអស់ស្មើ $60°$

2/ គណនា $tg\ BPC$:

M និង A មានចំងាយស្មើគ្នា B និង C

ដូចនេះ: MA ស្ថិតលើមេដ្យាទ័រ BC

ពេលណាយកចំនុច P លើ AM នោះ $PB = PC$ និង Δ BPC សមបាត ។

ភ្ជាប់ PO នោះ $\widehat{BPC} = 2\widehat{BPO}$

យើងគណនា : OP

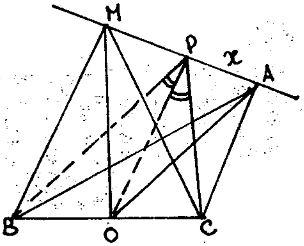
Δ OPA $\Rightarrow OP^2 = OA^2 + AP^2 - 2AO.AP\, CosA$

$$= \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 + x^2 - \frac{2\ell\sqrt{2}}{2} x\, CosA$$

ចំពោះ: $CosA = Cos\,45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow OP^2 = \frac{\ell^2}{2} + x^2 - \ell x\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\ell^2}{2} + x^2 - \ell x$$

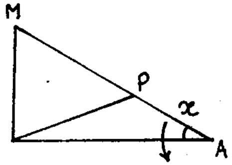


ក្នុង $\Delta\perp$ BOP មាន :

$$tg\ BPO = \frac{BO}{OP} = \frac{\frac{\ell\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{\ell^2}{2} + x^2 - \ell x}}$$

ហើយ $\widehat{BPC} = 2\widehat{BPO} \Rightarrow tg\ BPC = \frac{2tg\ BPO}{1 - tg^2 BPO}$

$$= \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\ell^2}{2} + x^2 - \ell x}} \times \frac{\frac{\ell^2}{2} + x^2 - \ell x}{x^2 - \ell x}$$



ផ្នែកទី VIII

ដំណោះស្រាយ

អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

អាំងតេក្រាល សំរាប់ត្រៀមឧត្តម

1 - **ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល** $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$

គេត្រូវតាង $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx = \int \frac{\sqrt{1+(\frac{1}{t})^2}}{(\frac{1}{t})^4}\left(-\frac{dt}{t^2}\right)$$

$$= \int -\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{t^2 \cdot \frac{1}{t^4}}dt = -\int \frac{\sqrt{t^2+1}}{t \cdot t^2 \cdot \frac{1}{t^4}}dt$$

$$= -\int t.\sqrt{t^2+1}\,dt$$

យើងតាង $u = t^2+1 \Rightarrow du = 2tdt \Rightarrow tdt = \frac{du}{2}$

ដូចនេះអាំងតេក្រាល $-\int t\sqrt{t^2+1}\,dt$ ទៅជា

$$-\int \sqrt{u}.\frac{du}{2} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} = -\frac{1}{3}(t^2+1)^{3/2}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^2+1\right]^{3/2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{3/2}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{3/2} = -\frac{1}{3}\frac{(1+x^2)^{3/2}}{x^3} = -\frac{1}{3x^3}\sqrt{(1+x^2)^3} + c$$

ដូចនេះ $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx = -\frac{1}{3x^3}\sqrt{(1+x^2)^3} + c$

2 **ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល** $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx$

យើងត្រូវតាង $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt$

$$\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx = -\int \frac{\sqrt{\left[9-(\frac{1}{t})^2\right]^3}}{t^2 \cdot (\frac{1}{t})^6}dt$$

$$= -\int \frac{\sqrt{\left(\frac{9t^2-1}{t^2}\right)^3}}{t^2 \cdot \frac{1}{t^6}}\, dt = -\int \frac{\sqrt{(9t^2-1)^3}}{t^3 \cdot t^2 \cdot \frac{1}{t^6}}\, dt = -\int t\sqrt{(9t^2-1)^3}\, dt$$

យក $u = 9t^2 - 1 \Rightarrow du = 18t\,dt \Rightarrow t\,dt = \frac{du}{18}$

$$\Rightarrow -\int t\sqrt{(9t^2-1)^3}\, dt = -\int \frac{1}{18} u^{3/2}\, du = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}+1} u^{\frac{3}{2}+1}$$

$$= -\frac{1}{18} \times \frac{1}{\frac{5}{2}} u^{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{45} u^{5/2} = -\frac{1}{45}(9t^2-1)^{5/2} = -\frac{1}{45}\left(\frac{9}{x^2} - 1\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{1}{45}\left(\frac{9-x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{45} \cdot \frac{(9-x^2)^{\frac{5}{2}}}{x^5} = -\frac{1}{45x^5}\sqrt{(9-x^2)^5}$$

ដូចនេះ: $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\, dx = -\frac{1}{45x^5}\sqrt{(9-x^2)^5} + c$

3 . ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{(x+1)\,dx}{x(1+xe^x)}$

តាង $t = xe^x \Rightarrow dt = (e^x + xe^x)\,dx = e^x(1+x)\,dx$

$$\Rightarrow (1+x)\,dx = \frac{dt}{e^x}$$

$$t = xe^x \Rightarrow x = \frac{t}{e^x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{(x+1)\,dx}{x(1+xe^x)} = \int \frac{dt}{\frac{t}{e^x} e^x (1+t)} = \int \frac{dt}{t(1+t)}$$

$$= \int \frac{1}{t}\, dt - \int \frac{dt}{1+t}$$

$$= \ln|t| - \ln|1+t| = \ln|xe^x| - \ln|1-xe^x|$$

ដូចនេះ: $\int \frac{(x+1)\,dx}{x(1+xe^x)} = \ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + c$

4 ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int (2-3x^{4/3})^{1/5} \cdot x^{1/3}\,dx$

តាង $u = 2-3x^{4/3} \Rightarrow du = -3 \cdot \frac{4}{3} x^{4/3-1}dx = -4x^{1/3}\,dx$

$\Rightarrow x^{1/3}dx = -\frac{du}{4}$

$\int (2-3x^{4/3})^{1/5} \cdot x^{1/3}dx = -\frac{1}{4}\int u^{1/5}du = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{5}+1}u^{1/5+1}+c =$

$= -\frac{5}{24}u^{6/5} = -\frac{5}{24}(2-3x^{4/3})^{6/5}+c$

ដូចនេះ: $\int (2-3x^{4/3})^{1/5} \cdot x^{1/3}dx = -\frac{5}{24}\sqrt[5]{(2-3x^{4/3})^6}+c$

5. ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \sqrt{tg^3x} \cdot Sec^4x\,dx$

$Sec^4x = \frac{1}{Cos^4x}$, $\frac{1}{Cos^2x} = 1+tg^2x$

បើគេតាង $u = tgx \Rightarrow du = \frac{1}{Cos^2x}dx$

$\Rightarrow \int \sqrt{tg^3x} \cdot Sec^4x\,dx = \int \sqrt{tg^3x} \cdot \frac{1}{Cos^4x}dx = \int \sqrt{tg^3x}(1+tg^2x)\frac{1}{Cos^2x}dx$

$= \int (\sqrt{tg^3x} + \sqrt{tg^7x}) \cdot \frac{1}{Cos^2x}dx = \int \sqrt{tg^3x} \cdot \frac{1}{Cos^2x}dx + \int \sqrt{tg^7x}\frac{dx}{Cos^2x}$

$= \int u^{3/2}du + \int u^{7/2}du = \frac{2}{9}u^{9/2} + \frac{2}{5}u^{5/2} + c =$

$= \frac{2}{45}tg^{5/2}x\,(5tg^2x+9)+c = \frac{2}{45}\sqrt{tg^5x}\,(5tg^2x+9)+c$

ដូចនេះ: $\int \sqrt{tg^3x} \cdot Sec^4x\,dx = \frac{2}{45}\sqrt{tg^5x}\,(5tg^2x+9)+c$

5. ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$

$$\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{8x\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} - 11\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$$

$$= -4\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} - 11\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$$

$$= -4\int \frac{(-2x+2)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} + 8\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} - 11\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$$

$$= -4\int \frac{(2-2x)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$$

$$= -4\int (5+2x-x^2)^{-1/2} d(2-2x) - 3\int \frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}}$$

$$= -4\int (5+2x-x^2)\, d(2-2x) - \frac{3}{\sqrt{6}}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{(x-1)}{\sqrt{6}}\right)^2}$$

$$= -4 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(5+2x-x^2)^{-\frac{1}{2}+1} - \frac{3}{\sqrt{6}} \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + C$$

$$= -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}} + C$$

ចម្លើយ: ;

$$\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{6}}$$

7. ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{(3x-1)\,dx}{4x^2-4x+17}$

$$\int \frac{(3x-1)\,dx}{4x^2-4x+17} = \int \frac{3x\,dx}{4x^2-4x+17} - \int \frac{dx}{4x^2-4x+17}$$

$$= \frac{3}{8}\int \frac{8x\,dx}{4x^2-4x+17} - \int \frac{dx}{4x^2-4x+17}$$

$$= \frac{3}{8}\int \frac{(8x-4)\,dx}{4x^2-4x+17} + \frac{3}{8}\int \frac{4\,dx}{4x^2-4x+17} - \int \frac{dx}{4x^2-4x+17}$$

$$= \frac{3}{8}\int \frac{(8x-4)}{4x^2-4x+17}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{4x^2-4x+17} - \int \frac{dx}{4x^2-4x+17}$$

$$= \frac{3}{8}\int \frac{(8x-4)}{4x^2-4x+17}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{4x^2-4x+17}$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right) + \frac{1}{2\times 16}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{4}\right)^2+1}$$

$$= \frac{3}{8}\ln\left(4x^2-4x+17\right) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4} + C$$

ដូចនេះ $\int \frac{(3x-1)\,dx}{4x^2-4x+17} = \frac{3}{8}\ln(4x^2-4x+17) + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{4}\right) + C$

8. ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{2-5x}{\sqrt{4x^2+9x+1}}\,dx$

$$\int \frac{2-5x}{\sqrt{4x^2+9x+1}}\,dx = 2\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}} - 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$$

$$= 2\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}} - \frac{3}{8}\int \frac{8x\,dx}{4x^2+9x+1}$$

$$= 2\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}} - \frac{3}{8}\int\frac{8x+9-9}{\sqrt{4x^2+9x+1}}\,dx$$

$$= 2\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}} - \frac{3}{8}\int\frac{8x+9}{\sqrt{4x^2+9x+1}}\,dx + \frac{27}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$$

$$= 4\frac{3}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}} - \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}$$

$$= \frac{4.3}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{(8x+9)^2}{4^2} - \frac{65}{4^2}}} - \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}$$

$$= \frac{4.3}{8}\cdot\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{(8x+9)^2-65}} - \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}$$

$$= \frac{4.3}{16}\ln\left(8x+9+\sqrt{(8x+9)^2-65}\right) - \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+9x+1} + C$$

$$= \frac{43}{16}\ln\left(8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right) - \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+9x+1} + C$$

ដូចនេះ: $\int\frac{(2-3x)\,dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}} = \frac{43}{16}\ln\left(8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right) - \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+9x+1} + C$

9. **ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+3}}\,dx$**

$$\int\frac{\sqrt{x}}{2x+3}\,dx = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{x}\sqrt{2x+3}} = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3x}}$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{4x+3-3}{\sqrt{2x^2+3x}}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{4x+3}{\sqrt{2x^2+3x}}\,dx - \frac{3}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x} - \frac{3}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x}\right) + C$$

ដូចនេះ $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left(x+\frac{3}{4}\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x}\right) + C$

10 **ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{Sec^2x\; dx}{\sqrt{tg^2x+4tgx+1}}$**

$$\int \frac{Sec^2x\, dx}{\sqrt{tg^2x+4tgx+1}} = \int \frac{1}{\sqrt{tg^2x+4tgx+1}} \cdot \frac{dx}{Cos^2x}$$

គេតាង $t = tgx \Rightarrow dt = \frac{1}{Cos^2x}dx$

គេបាន : $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4t+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2-3}} = \ln\left|t+2+\sqrt{t^2+4t+1}\right| + c$

$$= \ln\left|tgx+2+\sqrt{tg^2x+4tgx+1}\right| + c$$

ដូចនេះ: $\int \frac{Sec^2x}{\sqrt{tg^2x+4tgx+1}} = \ln\left|tgx+2+\sqrt{tg^2x+4tgx+1}\right| + c$

11. **ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{Cos^4x+Sin^4x}{Cos^2x-Sin^2x}dx$**

យើងដឹងហើយថា $Cos^4x+Sin^4x = \frac{1}{2}(1+Cos^2 2x)$, $Cos^2x - Sin^2x = Cos\,2x$

$$\Rightarrow \int \frac{Cos^4x+Sin^4x}{Cos^2x-Sin^2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+Cos^2x}{Cos2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{Cos2x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{Cos^2 2x\,dx}{Cos2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{Cos^2x-Sin^2x} + \frac{1}{2}\int Cos2x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{Cos^2x(1-tg^2x)} + \frac{1}{2}\int Cos2x\,dx$$

បើតាង $u = tgx \Rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 x}dx \Rightarrow \int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-u^2} + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{1}{4}\sin 2x + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+tgx}{1-tgx}\right| + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

ចម្លើយ: $\int \frac{\cos^4 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+tgx}{1-tgx}\right| + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

12 ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

តាង $x = t^6 \Rightarrow \sqrt{x} = t^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = t^2,\ dx = 6t^5 dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = 6\int \frac{(t^3-1)}{t^2+1}t^5\,dt = 6\int \frac{t^8 - t^5}{t^2+1} = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}dt - 6\int \frac{t^5}{t^2+1}dt$$

$$* \ 6\int \frac{t^8}{t^2+1}dt = 6\int \frac{(t^4)^2 - 1}{t^2+1} + 6\int \frac{dt}{t^2+1} = 6\int \frac{(t^4-1)(t^4+1)}{t^2+1}dt + 6\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= 6\int (t^2-1)(t^4+1)dt + 6\int \frac{dt}{t^2+1} = 6\int (t^6 + t^2 + t^4 - 1)dt + 6\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \frac{6}{7}t^7 + 2t^3 - \frac{6}{5}t^5 - 6t + 6\,\text{arctg}\,t + c'$$

$$= \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + 2\sqrt[6]{x^3} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 6\sqrt[6]{x} + 6\,\text{arctg}\sqrt[6]{x} + c'$$

$$* \ -6\int \frac{t^5}{t^2+1}dt = -6\int \frac{t^5 + t^3}{t^2-1} + 6\int \frac{t^3}{t^2+1} = -6\int t^3 dt + 6\int \frac{t^3}{t^2+1}dt$$

$$= -6\int t^3 dt + 6\int \frac{t^3+t}{t^2+1} - 6\int \frac{t\,dt}{t^2+1} = -\frac{3}{2}t^4 + 6\int t\,dt - \frac{6}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+1} =$$

$$= -\frac{3}{2}t^4 + 3t^2 - 3\ln(t^2+1) = -\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4} + 3\sqrt[6]{x^2} - 3\ln(1+\sqrt[6]{x^2}) + c''$$

ចម្លើយ: $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + 2\sqrt[6]{x^3} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 6\sqrt[6]{x} + 6\,\text{arctg}\sqrt[6]{x} - \frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4} + 3\sqrt[6]{x^2} -$
$- 3\ln|1+\sqrt[6]{x^2}| + c$

13 **ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល** $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$

តាង $u = \sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow u^3 = x^2+1 \Rightarrow x^2 = u^3-1 \Rightarrow x = \sqrt{u^3-1}$

$\Rightarrow dx = \frac{3u^2du}{2\sqrt{u^3-1}}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = \frac{3}{2}\int \frac{u^2}{u\sqrt{u^3-1}} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^3-1}} = \frac{3}{2}\int \frac{udu}{u^3-1}$

$$\frac{u}{u^3-1} = \frac{u}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{A}{(u-1)} + \frac{Bu+C}{u^2+u+1}$$

$$\frac{u}{u^3-1} = \frac{A(u^2+u+1)+(Bu+C)(u-1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{Au^2+Au+A+Bu^2+Cu-Bu-C}{(u-1)(u^2+u+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)u^2+(A-B+C)u+A-C}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{(A+B)u^2+(A-B+C)u+A-C}{u^3-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B = 0 \\ A-B+C = 1 \\ A-C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \; (1) \\ -B+A+C = 1 \; (2) \\ A = C \; (3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow A+A+A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

$B = -\frac{1}{3}$

$C = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\int \frac{udu}{u^3-1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\int \frac{du}{u-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\int \frac{u-1}{u^2+u+1}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u^2+u+1}du = \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\int \frac{2u-2}{u^2+u+1}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\int \frac{2u+1-3}{u^2+u+1}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\int \frac{2u+1}{u^2+u+1}du - \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2+u+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\ln|u^2+u+1| - \frac{3}{4}\int \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{1}{4}\ln|u^2+u+1|-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4/3}\int\frac{du}{\left(\frac{u+\frac{1}{2}}{3/4}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{1}{4}\ln|u^2+u+1|-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\int\frac{du}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{1}{4}\ln|u^2+u+1|-\frac{1}{4}\int\frac{du}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

តាង $t=\frac{2u-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow du=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$

$$\Rightarrow\int\frac{du}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}t=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=\frac{1}{2}\ln|u-1|-\frac{1}{4}\ln|u^2+u+1|-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C$$

$$x=\sqrt{u^3-1} \Rightarrow u=\sqrt[3]{x^2+1}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\sqrt[3]{(x^2+1)^2}-\sqrt[3]{x^2+1}+1\right|-$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}2\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

14 | ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int x^{-1}(1+x^{1/3})^{-3}dx$

តាង $u=1+\sqrt[3]{x} \Rightarrow x=(u-1)^3$

$$\Rightarrow dx=3(u-1)^2du$$

$$\int x^{-1}(1+x^{1/3})^{-3}\,dx = \int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^3} = \int \frac{3(u-1)^2}{(u-1)^3(u)^3} = 3\int \frac{du}{u^3(u-1)}$$

$$\frac{1}{u^3(u-1)} = \frac{A}{(u-1)} + \frac{Bu^2+Cu+D}{u^3}$$

$$= \frac{Au^3+(u-1)(Bu^2+Cu+D)}{(u-1)\,u^3}$$

$$= \frac{Au^3+Bu^3+Cu^2+Du-Bu^2-Cu-D}{(u-1)\,u^3}$$

$$\frac{1}{u^3(u-1)} = \frac{(A+B)u^3+(C-B)u^2+(D-C)u-D}{u^3(u-1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C-B=0 \\ D-C=0 \\ -D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=-1 \\ A=-B=1 \\ C=B=-1 \\ D=C=-1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(u-1)u^3} = \frac{1}{u-1} - \frac{u^2+u+1}{u^3} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3}$$

$$\Rightarrow 3\int \frac{du}{u^3(u-1)} = 3\int \frac{1}{u-1}\,du - 3\int \frac{du}{u} - 3\int \frac{du}{u^2} - 3\int \frac{du}{u^3} =$$

$$= 3\ln|u-1| - 3\ln|u| + 3\frac{1}{4} + \frac{3}{2u^2} + C$$

$$= 3\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + 3\left(\frac{2u+1}{2u^2}\right) + C$$

$$= 3\left(\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + \frac{2u+1}{2u^2}\right) + C$$

$$= 3\left(\ln\left|\frac{1+\sqrt[3]{x}-1}{1+\sqrt[3]{x}}\right| + \frac{2(1+\sqrt[3]{x})+1}{2(1+\sqrt[3]{x})}\right)$$

ដូចនេះ: $\int x^{-1}(1+x^{1/3})^{-3}dx = 3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right| + \left(\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2+2\sqrt[3]{x}}\right)\right] + C$

15. ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int x^5\left(\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\right) dx$

តាង $u = \sqrt[3]{1+x^3} \Rightarrow u^3 = 1+x^3$

$$\Rightarrow x^3 = u^3 - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{u^3-1}$$

$$\Rightarrow dx = \left(\sqrt[3]{u^3-1}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{3u^2du}{\sqrt[3]{(u^3-1)^2}} = \frac{u^2}{\sqrt[3]{(u^3-1)^2}}\,du$$

$$\Rightarrow \int x^5\sqrt[3]{(x^3+1)^2}dx = \int \sqrt[3]{(u^3-1)^5}\cdot u^2\cdot u^2\cdot\frac{du}{\sqrt[3]{(u^3-1)^2}}$$

$$= \int u^4(u^3-1)\,du$$

$$= \int (u^7 - u^4)\,du$$

$$\Rightarrow \int x^5\sqrt[3]{(x^3+1)^2}\,dx = \int u^7du - \int u^4du = \frac{1}{8}u^8 - \frac{1}{5}u^5 + C =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5} + C$$

ដូច្នេះ: $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx = \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5} + C$

16 ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}\,dx$

តាង $tg\frac{x}{2}=t$, $\sin x=\frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx=\int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}=\int \frac{4tdt}{(1+t^2)(1+t^2-2t)}$$

$$\frac{t}{(1+t^2)(1-2t+t^2)}=\frac{At+E}{(1+t^2)}+\frac{Bt+C}{(t^2-2t+1)}=$$

$$=\frac{At^3-2At^2+At+Bt+Bt^3+C+Ct^2+Et^2-2Et+E}{(1+t^2)(1-2t+t^2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A+C+E=0 \\ A+B-2E=1 \\ E+C=0 \end{cases} \Rightarrow A=0, B=0, C=\frac{1}{2}, E=-\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx=4\left(-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-2t+1}\right)$$

$$=-2\,arctg\,t-\frac{2}{t-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx=-2\,arctg\left(tg\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{tg\frac{x}{2}-1}+C$$

ដូចនេះ: $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx=-x-\frac{2}{tg\frac{x}{2}-1}+C$

17 ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

តាង $tg\frac{x}{2}=t$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{8-4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+7\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{8+8t^2-8t+7-7t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2-8t+15} = 2\int \frac{dt}{(t-4)^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C$$

ដូចនេះ: $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x} = \ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right| + C$

18. ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$

តាង $tg\frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\frac{2t}{1+t^2}+3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{2t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{t^2+2t+2}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = arctg(t+1)$$

ដូចនេះ: $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3} = arctg\left(1+tg\frac{x}{2}\right) + C$

19. គណនាអាំងតេក្រាល $\displaystyle\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}\,dx$

$$3\sin x + 2\cos x = \alpha(2\sin x + 3\cos x) + \beta(2\cos x - 3\sin x)$$
$$= (2\alpha\sin x + 3\alpha\cos x) + (2\beta\cos x - 3\beta\sin x)$$
$$= (2\alpha - 3\beta)\sin x + (3\alpha + 2\beta)\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 3 \\ 2\alpha + 2\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha - 9\beta = 9 \\ -6\alpha - 4\beta = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -9\beta - 4\beta = 5 \Rightarrow -13\beta = 5 \Rightarrow \beta = -\frac{5}{13}$$

$$6\alpha - 9\beta = 9 \Rightarrow 6\alpha - 9\left(-\frac{5}{13}\right) = 9$$
$$\Rightarrow 6\alpha = 9 - \frac{45}{13} = \frac{117 - 45}{13} = \frac{72}{13}$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}\,dx = \int \frac{\frac{12}{13}(2\sin x + 3\cos x) - \frac{5}{13}(2\cos x - 3\sin x)}{2\sin x + 3\cos x}\,dx$$
$$= \frac{12}{13}\int dx - \frac{5}{13}\int \frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x}\,dx$$

តាង $u = 2\sin x + 3\cos x \Rightarrow du = 2\cos x - 3\sin x$

$$\Rightarrow \int \frac{(3\sin x + 2\cos x)}{2\sin x + 3\cos x} = \frac{12}{13}\int dx - \frac{5}{13}\int \frac{du}{u} = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|u| + c =$$
$$= \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x| + c$$

ដូចនេះ: $\displaystyle\int \frac{(3\sin x + 2\cos x)}{2\sin x + 3\cos x}\,dx = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x| + C$

20 - ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{(1+tgx)}{(1-tgx)}\,dx$

$$\int \frac{(1+tgx)}{(1-tgx)}\,dx = \int \frac{\dfrac{Cosx + Sinx}{Cosx}}{\dfrac{Cosx - Sinx}{Cosx}}\,dx = \int \frac{(Sinx + Cosx)}{-Sinx + Cosx}\,dx$$

$$Sinx + Cosx = A(-Sinx + Cosx) + B(-Cosx - Sinx)$$
$$= -A\,Sinx + A\,Cosx - B\,Sinx - B\,Cosx$$
$$= (-A-B)\,Sinx + (A-B)\,Cosx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -A-B = 1 \\ A-B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -2B = 2 \Rightarrow B = -1 \\ A-B = 1 \Rightarrow A = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{(1+tg)dx}{(1-tgx)} = \int + \frac{Cosx + Sinx}{Cosx - Sinx}\,dx$$

$$u = Cosx - Sinx \Rightarrow du = (-Sinx - Cosx)\,dx$$
$$= -du = (Sinx + Cosx)\,dx$$

$$\int \frac{(1+tgx)dx}{(1-tgx)} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|Cosx - Sinx| + C$$

ដូចនេះ: $\int \frac{(1+tgx)}{(1-tgx)}\,dx = -\ln|Cosx - Sinx| + C$

21 ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{1+3\,Cos^2x}$

$$tgx = t,\quad Sinx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad Cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+3\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+3}{1+t^2}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{2}\right) + C$$

22 ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$

$\operatorname{tg}x = t$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{3t^2}{1+t^2} + \frac{5}{1+7^2}} = \int \frac{dt}{3\left(t^2+\frac{5}{3}\right)} \Rightarrow \int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

ដូចនេះ: $\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}\right) + C$

24. ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x}$

$t = tgx$, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 + \frac{3}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+3t-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{2t+3-\sqrt{13}}{2t+3+\sqrt{13}}\right| + C$$

ដូចនេះ: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x\cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{2tgx+3-\sqrt{13}}{2tgx+3+\sqrt{13}}\right| + C$

25. ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$

$$\frac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)} = \frac{1}{2-\sin x} - \frac{1}{3-\sin x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)} = \int \frac{dx}{2-\sin x} - \int \frac{dx}{3-\sin x}$$

$tg\frac{x}{2} = t$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)} = \int \frac{2dt}{\left(2-\frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} - \int \frac{2dt}{\left(3-\frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2-t+1} - \int \frac{dt}{3t^2-2t+3} = -\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}} + \int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{8}} \operatorname{arctg} \frac{3\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{18}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{8}} \operatorname{arctg} \frac{3t-1}{\sqrt{8}} + C$$

ដូចនេះ :

$$\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{3}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}\right) + C$$

26 ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$

តាង $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}} = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-4t-t^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2t-4+4}{\sqrt{1-4t-t^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{(-2t-4)\,dt}{\sqrt{1-4t-t^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{4\,dt}{\sqrt{1-4t-t^2}}$$

តាង $u = 1-4t-t^2 \Rightarrow du = -2t^2-4$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{-(t^2+4t-1)}}$$

$$= -\sqrt{u} - 2 \int \frac{dx}{-[(t+2)^2-5]} = -\sqrt{u} - 2\arcsin\left(\frac{t+2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

ដូចនេះ :

$$\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}} = -\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x} - 2\arcsin \frac{\ln x+2}{5} + C$$

27 ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $F(x) = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$

តាង $e^x = t \Rightarrow dt = e^x dx$

$$F(x) = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= \ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right) + c$$

$$= \ln\left(t+\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\right)$$

ដូចនេះ: $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} = \ln\left(e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)$

28 ដោះស្រាយអាំងតេក្រាល $F(x) = \int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx$

តាង $u = \sqrt{x^2+2x+5} \Rightarrow du = \frac{(2x+2)}{2\sqrt{x^2+2x+5}} dx$

$$\Rightarrow du = \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$F(x) = \int \sqrt{x^2+2x+5}\, dx = \int u\,dv =$$

$$= x\sqrt{x^2+2x+5} - \int \frac{(x^2+x)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$* \; A(x) = \int \frac{(x^2+x)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$A(x) = \int \frac{(x^2+2x+5)}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx - \int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$A(x) = F(x) - \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$$

$$= F(x) - \int \frac{du}{\sqrt{u}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}} - \frac{2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$= F(x) - \int \frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$= F(x) - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - 4\int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2}$$

$$= F(x) - \frac{1}{2}\,2\sqrt{x^2+2x+5} - 4\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}\right|$$

$$\Rightarrow -A(x) = -F(x) + \sqrt{x^2+2x+5} + 4\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+4}\right|$$

$$\Rightarrow 2F(x) = x\sqrt{x^2+2x+5} + \sqrt{x^2+2x+5} + 4\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right|$$

$$F(x) = \frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C$$

ផ្នែកទី IX

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រលងចូល

មហាវិទ្យាល័យ

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងចូល
មហាវិទ្យាល័យ

វិញ្ញាសាទី 1

1. សិក្សាអថេរភាពនិងគូសក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ $y=(x+1)^2(x-2)$ សរសេរសមីការរបស់បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាភិចត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x=-2, x=1$

2. ដោះស្រាយសមីការ $1+\sin x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

3. រកដែនកំណត់របស់អនុគមន៍ :

$$y=\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}}+\lg(x^2-3x+2)$$

$$y=\sqrt{\log_{0,8}\frac{2x+1}{x+5}-2}$$

4. ក្នុងកំនាត់ពីរ៉ាមីតត្រីកោណនិយ័ត ដោយស្គាល់កំពស់គឺ h, មុំរវាងទ្រនុងខាង និងប្លង់បាតធំស្មើ α ។ មុំរវាងអង្កត់ទ្រូងរបស់កំនាត់ពីរ៉ាមីតនិងប្លង់បាតធំគឺ β ។ គណនាក្រលាផ្ទៃខាងរបស់កំនាត់ពីរ៉ាមីតនោះ ។

5. ដោយក្រាភិចក៏ដូចជាដោយគណនា, ចូរអង្កេតឫសរបស់សមីការ :

$$\sqrt{x^2-4x+3}=\frac{x}{2}+m$$ ទៅតាមតម្លៃរបស់ m

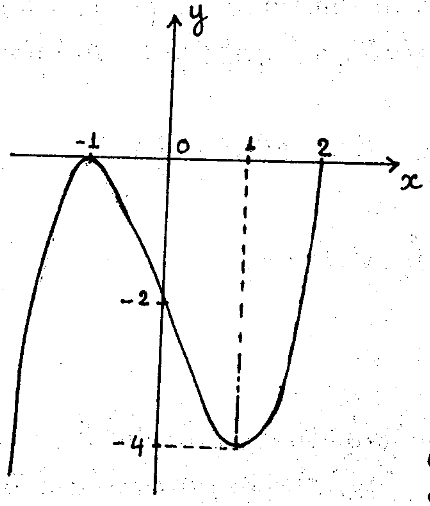
ចម្លើយ

1-a អនុគមន៍ $y=(x+1)^2(x-2)=x^3-3x-2$ កំនត់គ្រប់តម្លៃ x ដេរីវេ $y'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$ ស្មើសូន្យកាលណា $x=\pm1$ អវិជ្ជមានកាលណា $-1<x<1$, វិជ្ជមានកាលណា $x<-1$ និង $x>1$ ដូចនេះអនុគមន៍ y មានអតិបរមាត្រង់ $x=-1$ $(y=0)$ និង y អប្បបរមាត្រង់ $x=1$ $(y=-4)$ ។

យើងបានតារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

ខ្សែកោងតំណាងរបស់អនុគមន៍ $y=(x+1)^2(x-2)$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=2$ និង (ប៉ះនិយាយទាំងចំនុចប៉ះ) $x=-1$, កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y=-2$ ។ ដោយ $y''=6x$ ស្មើសូន្យ កាលណា $x=0$ $(y=-2)$ និងប្តូរសញ្ញាកាលណាកាត់តាម $x=0$ ។ ដូច្នេះខ្សែកោងតំណាងរបស់អនុគមន៍ y កាត់តាមចំនុចមានកូអរដោនេ $(0,-2)$ ដែលជាចំនុចរបត់ ។



យើងមាន $y+2=x^3-3x$ (1)

តាង $\begin{cases} X = x \\ Y = y+2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (1) សរសេរជារាង $Y=X^3+3X$

និងដោយ :

$Y(-X) = -X^3+3X = (X^3-3X) = -Y(X)$

$\Rightarrow Y(X)$ ជាអនុគមន៍សេស, ដូចនេះ ក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ $Y(X)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អរដោនេថ្មី ពីនោះនាំឲ្យក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ $y(x+1)^2(x-2)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំនុច $(0;-2)$

b- សមីការរបស់បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ y ត្រង់ចំនុច (x_0,y_0) មានរាង : $y-y_0=y_0'(x-x_0)$

① ចំពោះ $x_0=-2 \Rightarrow y_0=-4, y_0'=9$, យើងបាន $y+4=9(x+2)$

$y=9x+14$

② ចំពោះ $x_0=1 \Rightarrow y_0=-4 ; y_0'=0$, យើងបាន $y+4=0 \Rightarrow y=-4$

2. ពិនិត្យសមីការ : $1+\sin x+\cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ (1)

សមីការ(1) សមមូលនឹង :

$$0 = 1+\cos x+\sin x - 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= 2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}-1\right)$$

a) $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi \quad (2)$

b) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}-1=0$ ឬ $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{2}+4k\pi \quad (3)$

ដូចនេះរឹសរបស់ (1) គឺគួបផ្សំ (2) និង (3)

$x=\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$ និង $x=\frac{\pi}{2}+4k\pi \quad (k=0,\pm 1,\dots)$

3-a- អនុគមន៍

$$y=\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}}+\lg(x^2-3x+2) \quad (1)$$

(1) មានន័យកាលណា :

$$\begin{cases} -x^2+4x+5=(x+1)(5-x)>0 & (2)\\ x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0 & (3)\end{cases}$$

(2) មានឫស : $-1<x<5 \quad (4)$

សមីការ (3) មានរឹស : $x<1$ និង $x>2 \quad (5)$

ដូចនេះ (គួបផ្សំ (4) និង (5)) ដែនកំណត់របស់អនុគមន៍ (1) គឺ

$-1<x<1$ និង $2<x<5$.

b- អនុគមន៍

$$y=\sqrt{\log_{0,8}\left(\frac{2x+1}{x+5}\right)-2} \quad (1')$$

(1') មានន័យកាលណា :
$$\begin{cases} \frac{2x+1}{x+5}>0 \\ \log_{0,8}\left(\frac{2x+1}{x+5}\right)-2>0 & (2')\end{cases}$$

ដោយគោលរបស់លោការីត <1

$\Rightarrow \log_{0,8}\left(\frac{2x+1}{x+5}\right)-2\geq 0$

កាលណា $\frac{2x+1}{x+5}\leq\left(\frac{4}{5}\right)^2$ ឬ $\frac{2x+1}{x+5}-\frac{16}{25}\leq 0$

ឬ $\dfrac{34x-55}{25(x+5)} \leqslant 0$

ដូចនេះ (2') សមមូលនឹងប្រព័ន្ធ :

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+5} > 0 & (3') \\ \dfrac{34x-55}{25(x+5)} \leqslant 0 & (4') \end{cases}$$

ឫសរបស់វិសមីការ (3') គឺ

$x < -5$ និង $x > -\frac{1}{2}$ (5')

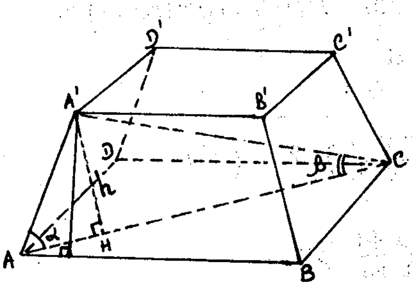
ឫសរបស់វិសមីការ (4') គឺ :

$-5 < x \leqslant \frac{55}{34}$ (6')

ដូចនេះដែនកំណត់របស់អនុគមន៍ (1') គឺបន្សំរវាង (5') និង (6') :

$$-\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{55}{34}$$

4- សន្មត A'B'C'D'ABCD ជាកំណាត់ពីរ៉ាមីតត្រីកោណនិយ័ត ។ដូចនេះ:
មុខកាត់ A'C'CA ជាត្រីកោណសមបាទ ក្នុងនោះកំពស់ $[A'H] = h$, $\widehat{A'AC} = \alpha$, $\widehat{A'CA} = \beta$



ពិនិត្យ Δ⊥A'AH មាន $|AA'| = \dfrac{|A'H|}{\sin\alpha} = \dfrac{h}{\sin\alpha}$, $|AH| = |A'H|\,\text{Cotg}\,\alpha = h\,\text{Cotg}\,\alpha$

ពិនិត្យ Δ⊥A'HC មាន :

$|HC| = |A'H|\,\text{Cotg}\,\beta = h\,\text{Cotg}\,\beta$

ដូច្នេះ :

$|AC| = |AH| + |HC| = h\,\text{cotg}\,\alpha + h\,\text{Cotg}\,\beta = h(\text{Cotg}\,\alpha + \text{Cotg}\,\beta)$

$|A'C'| = |HC| - |AH| = h\,\text{Cotg}\,\beta - h\,\text{Cotg}\,\alpha = h(\text{Cotg}\,\beta - \text{Cotg}\,\alpha)$

ពិនិត្យការេ A'B'C'D' និង ABCD យើងមាន :

$|A'B'| = \dfrac{|A'C'|\sqrt{2}}{2} = \dfrac{h\sqrt{2}}{2}(\text{Cotg}\,\beta - \text{Cotg}\,\alpha)$

$|AB| = \dfrac{|AC|\sqrt{2}}{2} = \dfrac{h\sqrt{2}}{2}(\text{Cotg}\,\alpha + \text{Cotg}\,\beta)$

ពិនិត្យចតុកោណព្នាយសមបាទ A'B'BA ក្នុងនោះ [A'K] ជាកំពស់ យើងបាន :

$$|AK| = \frac{1}{2}\left(|AB|-|A'B'|\right) = \frac{h\sqrt{2}}{2}\,Cotg\,\alpha = \frac{h\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow |A'K| = \sqrt{|A'A|^2-|AK|^2} = \sqrt{\frac{h^2}{\sin^2\alpha}-\frac{h^2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}} = \frac{h\sqrt{2}}{2\sin\alpha}\sqrt{2-\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{h\sqrt{2}}{2\sin\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$$

ដូចនេះក្រឡាផ្ទៃខាងរបស់កំណាត់ពីរ៉ាមីតចតុកោណនិយ័តគឺ :

$$S_l = 4\,\frac{|AB|+|A'B'|}{2}\cdot|A'K| = 4\,\frac{h\sqrt{2}}{2}\,Cotg\,\beta\times\frac{h\sqrt{2}}{2\sin\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{2h^2\,Cotg\,\beta\,\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$$

5. 1) ជាបឋមយើងដោះស្រាយចំនោទតាមក្រាភិច ដែលលើការសន្និដ្ឋានថាចំនួនឫសរបស់សមីការនោះស្មើនឹងចំនួនប្រសព្វរបស់ក្រាភិចអនុគមន៍ $y_1 = \sqrt{x^2-4x+3} = \sqrt{(x-1)(x-3)}$

និង $y_2 = \frac{x}{2}+m$

អនុគមន៍ មានន័យកាលណា $x\leqslant 1$ និង $x\geqslant 3$ ។

ដេរីវេ y_1 :

$$y_1' = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

ដូច្នេះ y_1 ជាបំលែងចុះលើចន្លោះ $(-\infty,1)$ និងបំលែងកើនលើចន្លោះ $(3,+\infty)$ ។ ម្យ៉ាងទៀតគឺសមភាព :

$$\sqrt{x^2-4x+3}-|x-2| = \sqrt{(x-2)^2-1}-|x-2| =$$

$$= \sqrt{(x-2)^2-1}+|x-2|$$

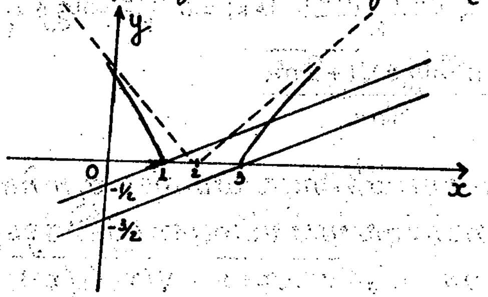
យើងបាន : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(y_1-|x-2|\right)=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[y_1-(x-2)\right]=0$$

និង $\lim\limits_{x\to-\infty}[y_1+(x-2)]=0$

ដូចនេះក្រាភិចរបស់ y_1 មានអាស៊ីមតូតទ្រេតខាងស្តាំ ជាបន្ទាត់ $y=x-2$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតខាងឆ្វេងជាបន្ទាត់ $y=-x+2$

ម្យ៉ាងទៀតក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ y_2 ជាបន្ទាត់មួយមានមេគុណស្មើ $\frac{1}{2}$, កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំនុចមានអរដោនេស្មើ m និងកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីសស្មើ $-2m$ ។ កាលណា m ប្រែប្រួលនោះ បន្ទាត់នឹងចលតស្របគ្នា ។ ដូចនេះយើងបានរូបខាងក្រោមនេះ :



ដោយផ្អែកលើរូប យើងឃើញថា:

a) បើ $m < -3/2$: សមីការខាងលើគ្មានឫស

b) បើ $-\frac{3}{2} \leqslant m < -\frac{1}{2}$: សមីការមានឫសមួយ

c) បើ $-\frac{1}{2} \leqslant m$: សមីការមានឫសពីរ

2- ដោះស្រាយដោយគណនា : $\sqrt{x^2-4x+3} = \frac{x}{2}+m$ (1)

(1) $\Leftrightarrow$ $x^2-4x+3 = \left(\frac{x}{2}+m\right)^2$ (2)

ដោយពិនិត្យផ្អែកតាមលក្ខខណ្ឌ $x \geqslant -2m$ (3)

ម្យ៉ាងទៀត បើ (2) និង (3) ផ្ទៀងផ្ទាត់, នោះអង្គខាងឆ្វេងរបស់ (2) នឹងវិជ្ជមាន, និងតាម (3), យកឫសការេ (ពីរកង់វិជ្ជមាន) របស់អង្គទាំងពីរនៃសមីការ (2) នោះនឹងក្លាយជាសមីការ (1)

សមីការ (2) សមមូលនឹង

$\frac{3}{4}x^2-(4+m)x+(3-m^2)=0$ (2')

សមីការនោះជានិច្ចជាកាលមានឫសពីរផ្សេងគ្នា ព្រោះ :

$$\Delta = (4+m)^2 - 3(3-m^2) = 4m^2+8m+7 = 4(m+1)^2+3>0$$

យក $f(x)$ ជាត្រីធាដឺក្រេទី2 នៅអង្គខាងឆ្វេងរបស់ (2')
ដោយជំនួស $x = -2m$

$$f(-2m) = 4m^2+8m+3 = 4\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)$$

a) បើ $m = \frac{3}{2} \Rightarrow$ (2') មានឫស2 : $x_1 = -2m$; $x_2 = \frac{1}{3}$
ក្នុងករណីនេះ, (1) មានឫស (1) : $x = 3$
b) បើ $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{2}$ នោះ $f(-2m)<0$ ដូច្នេះក្នុងឫសទាំងពីររបស់ (2') មានឫសមួយធំជាង $-2m$ និងឫសមួយតូចជាង $-2m$,
ក្នុងករណីនេះ (1) មានឫសមួយ ។
c) បើ $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ (2') មានឫស2 : $x_1 = -2m = 1$; $x_2 = \frac{11}{3}$
ក្នុងករណីនេះ (1) មានឫស2

ឥឡូវនេះយើងសិក្សាករណីរបស់ $m<-\frac{3}{2}$ និង $m>-\frac{1}{2}$ ពេលនោះ $f(-2m)>0$ និង $-2m$ ស្ថិតក្រៅឫសរបស់ (2') ។ ដើម្បីឲ្យដឹងថា $-2m$ ធំជាង ឬតូចជាងឫសទាំងពីរនោះ យើងត្រូវការប្រៀបធៀប $-2m$ និង $\frac{S}{2} = \frac{2}{3}(4+m)$

$$\frac{S}{2} - (-2m) = \frac{2}{3}(4+m) + 2m = \frac{8}{3}(m+1)$$

ដូច្នេះ :

a) បើ $m<-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} < -2m$: ឫសទាំងពីររបស់ (2') សុទ្ធតែតូចជាង $-2m$ ដូចនេះ (1) មានឫសពីរ ។

ដូច្នេះយើងបានលទ្ធផលសរុប :

a) បើ $m<-\frac{3}{2}$: សមីការ (1) គ្មានឫស
b) បើ $-\frac{3}{2} \leqslant m \leqslant -\frac{1}{2}$: (1) មានឫសមួយ
c) បើ $-\frac{1}{2} \leqslant m$: (1) មានឫសពីរ

វិញ្ញាសាទី2

1. ដោះស្រាយសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល : $3^x+4^x=5^x$
2. ឧបមាថា x និង y ជា 2 ចំនួនដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ : $x^2+y^2=1$ ។ បង្ហាញថាគេបាន : $-\sqrt{2}\leq x+y\leq\sqrt{2}$
3. ឧបមាថាអនុគមន៍ : $f(x)=a\sin x+b\cos x$ ស្មើសូន្យ កាលណា $x=x_1$ និង $x=x_2$ ចំពោះ $x_1-x_2\neq k\pi$, k ជាចំនួនគត់ ។ បង្ហាញថា ពេលនោះ យើងមាន $f(x)=0, \forall x$ ។
4. លើជ្រុង $[AB]$, $[BC]$ និង $[CA]$ របស់ ΔABC គេជ្រើសរើសរៀងគ្នានូវចំណុច M, N, P ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ :

$$\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{|BN|}{|NC|}=\frac{|CP|}{|PA|}=k$$

ចំនួន k ជាចំនួនវិជ្ជមានដែលគេស្គាល់ ។

a/- ចូរគណនាក្រឡាផ្ទៃ ΔMNP ជាអនុគមន៍នៃ k និង S (S ជាក្រលាផ្ទៃរបស់ ΔABC)

b/- ΔABC នឹង ។ ចូរជ្រើសរើសចំនួន k ដើម្បីឲ្យ ΔMNP មានក្រលាផ្ទៃតូចបំផុត

5. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ក្នុងលំហ គ្មានពហុមុខមានចំនួនមុខសេសទេ ដែលជាពហុមុខមានជ្រុងសេស ។

ចម្លើយ

1. ពិនិត្យសមីការ : $3^x+4^x=5^x$ (1)

ចំពោះ $x=2 \Rightarrow$ (1) ទៅជា :

$3^2+4^2=5^2$ (2)

$25=25$

ដូចនេះ $x=2$ ជាឫសរបស់ (1)

$x=2$ ជាឫសតែមួយគត់ ពីព្រោះ (1) សមមូល :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1 \quad (1')$$

ដូចនេះ (2) យើងបាន

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1 \quad (2')$$

ប្រើប្រាស់លក្ខណៈរបស់អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលចំពោះគោលតូចជាង 1 យើងបាន:

a) បើ $x<2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x>\left(\frac{3}{5}\right)^2$ និង $\left(\frac{4}{5}\right)^x>\left(\frac{4}{5}\right)^2$

ដូចនេះ: $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x>\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$

ដូចនេះសមីការ (1) គ្មានឫសចំពោះ $x<2$

b) បើ $x>2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x<\left(\frac{3}{5}\right)^2$ និង $\left(\frac{4}{5}\right)^x<\left(\frac{4}{5}\right)^2$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x<\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$

ដូច្នេះសមីការ (1) គ្មានឫសចំពោះ $x>2$

2) a. របៀបទី1:

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងបាន:

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geqslant\sqrt{x^2y^2}=|xy|$$

តាមសម្មតិកម្ម $x^2+y^2=1$ ដូចនេះយើងបាន

$\frac{1}{2}\geqslant|xy|$ ឬ $1\geqslant 2|xy|$

យើងបាន: $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=1+2xy\leqslant 1+2|xy|\leqslant 1+1=2$

ដូចនេះ $|x+y|\leqslant\sqrt{2}$ ឬ $-\sqrt{2}\leqslant x+y\leqslant\sqrt{2}$

b - របៀបទី2:

តាង $x=\sin\alpha$; $y=\cos\alpha$ នោះ $\sin\alpha$ និង $\cos\alpha$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌរបស់ចំណោទ គឺ $x^2+y^2=1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

យើងបាន $|x+y|=|\sin\alpha+\cos\alpha|=\left|\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}$

(ព្រោះ $\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 1$)

$\Rightarrow -\sqrt{2}\leqslant x+y\leqslant\sqrt{2}$ ។

3) ចំណោទនឹងបានដោះស្រាយរួច បើយើងបង្ហាញថា: $a=b=0$ ។

a- របៀបទី1: ស្រាយបញ្ជាក់ប្រាស់សម្មតិកម្ម: a និង b មិនស្មើសូន្យព្រមគ្នា មានន័យថា: $a^2+b^2\neq 0$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{Sin}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{Cos}x\right)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\,\operatorname{Sin}(x+\varphi)$$

ចំពោះ φ ជាមុំមួយកំនត់ដោយ :

$$\operatorname{Cos}\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;\quad \operatorname{Sin}\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

តាមសម្មតិកម្ម : $f(x_1)=f(x_2)=0$ យើងបាន :

$\operatorname{Sin}(x_1+\varphi)=\operatorname{Sin}(x_2+\varphi)=0$.

$\Rightarrow x_1+\varphi=m\pi\ ;\ x_2+\varphi=n\pi$. (ចំនួន m,n ជាចំនួនគត់)

$x_1-x_2=(x_1+\varphi)-(x_2+\varphi)=(m-n)\pi$

លទ្ធផលនេះផ្ទុយនឹងសម្មតិកម្ម $x_1-x_2\neq k\pi$

k ជាចំនួនគត់ ។ ដូចនេះ $a=b=0$ ។

b) <u>របៀបទី2</u> : តាមសម្មតិកម្មយើងបាន :

$0=f(x_1)=a\operatorname{Sin}x_1+b\operatorname{Cos}x_1\ (1)$

$0=f(x_2)=a\operatorname{Sin}x_2+b\operatorname{Cos}x_2\ (2)$

គុណអង្គទាំងពីររបស់ (1) នឹង $\operatorname{Cos}x_2$ និងអង្គទាំងពីររបស់ (2) នឹង $-\operatorname{Cos}x_1$ រួចបូកបញ្ចូលគ្នា យើងបាន :

$0=a(\operatorname{Sin}x_1\operatorname{Cos}x_2-\operatorname{Sin}x_2\operatorname{Cos}x_1)=a\operatorname{Sin}(x_1-x_2)\ (3)$

ដូចគ្នាដែរគុណអង្គទាំងពីររបស់ (1) នឹង $-\operatorname{Sin}x_2$ និងរបស់ (2) នឹង $\operatorname{Sin}x_1$ រួចបូកនឹងគ្នា យើងបាន :

$0=b(\operatorname{Sin}x_1\operatorname{Cos}x_2-\operatorname{Sin}x_2\operatorname{Cos}x_1)=b\operatorname{Sin}(x_1-x_2)\ (4)$

ដោយ $x_1-x_2\neq k\pi$ ចំពោះ k ចំនួនគត់ $\Rightarrow \operatorname{Sin}(x_1-x_2)\neq 0$;

ដូច្នេះពី (3) និង (4) $\Rightarrow a=b=0$ ។

4 - a) យើងយក S_1, S_2 និង S_3 ជាក្រលាផ្ទៃរៀងគ្នារបស់ ΔBMN, CNP និង AMP ហើយភ្ជាប់ A ជាមួយនឹង N យើងបាន :

$S(ABN)=\frac{|BN|}{|BC|}\cdot S(ABC)=\frac{k}{k+1}\cdot S$ (ព្រោះ $\frac{|BN|}{|BC|}=k$)

ម្យ៉ាងទៀត : (ដោយ $\frac{|MA|}{|MB|}=k$)

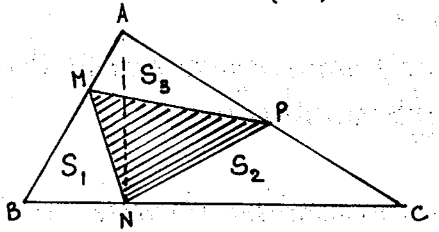
$$S_1 = \frac{|MB|}{|AB|} \times S(ABN) = \frac{1}{k+1} S(ABN) = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot S$$

ដោយ S_1, S_2, S_3 មាននាទីដូចគ្នា

$$\Rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot S$$

ដូច្នេះក្រលាផ្ទៃ ΔMNP :

$$S(MNP) = S - (S_1 + S_2 + S_3) = S - \frac{3k}{(k+1)^2} \cdot S = \left[1 - \frac{3k}{(k+1)^2}\right] S$$



b) តាង $y = 1 - \frac{3k}{(k+1)^2}$ ដោយតាមលទ្ធផល S លើ

$\Rightarrow$ យើងឃើញថា: $S(MNP)$ ទទួលតម្លៃតូចបំផុតកាលណា y មានតម្លៃតូចបំផុត ។ ដូចនេះ យើងសិក្សាអនុគមន៍ :

$$y(k) = 1 - \frac{3k}{(k+1)^2} \quad \text{កាលណា } k > 0$$

$$y'(k) = \frac{3(k+1)(k-1)}{(k+1)^4} = \frac{3(k-1)}{(k+1)^3}$$ ស្មើសូន្យចំពោះ $k = 1$

យើងបានតារាងអថេរភាព :

k	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$1/4$	$\nearrow$	1

ដូច្នេះ $S(MNP)$ តូចបំផុត កាលណា $k = 1$; ពេលនោះ:

$$\Rightarrow S(MNP) = \frac{1}{4} S$$

5 - ឧបមាថាមានពហុមុខ មានចំនួនមុខសេស ទន្ទឹមនឹងនោះ មុខនិមួយៗជាពហុកោណមួយមានចំនួនជ្រុងសេស យកចំនួនសេសនៃមុខ : $k = 2n+1$ (n ចំនួនគត់ > 0) និងចំនួនសេសនៃ

ជ្រុង : $2n_1+1, 2n_2+1, \ldots, 2n_k+1$ យក c ជាចំនួនទ្រនុងរបស់ពហុមុខនោះ ។ ដោយមុខទាំងពីរឈមគ្នា មានទ្រនុងរួមមួយ ដូច្នេះ :

$$(2n_1+1)+(2n_2+1)+\ldots+(2n_k+1) = 2(n_1+n_2+\ldots n_k)+k = 2c$$

ឬ : $2(n_1+n_2+\ldots+n_k)+(2n+1) = 2c \quad (1)$

ចំពោះ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

សមភាព(1) មិនអាចមាន , ព្រោះអង្គខាងឆ្វេងជាចំនួនសេស ចំណែកអង្គខាងស្តាំជាចំនួនគូ ។

ដូចនេះ វាគ្មានពហុមុខណាមានចំនួនមុខសេសផង និងមុខនិមួយៗ ជាពហុកោណមានចំនួនជ្រុងសេសផងទេ ។

វិញ្ញាសាទី 3

1. a) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងរបស់អនុគមន៍ : $y=\frac{4x^2+x+1}{x}$

b) សរសេរសមីការរបស់បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាភិចត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x=2$ ។

2. ដោះស្រាយសមីការ $\frac{1+tgx}{1-tgx} = 1+2\sin x\cos x$

3- ស្រាយបញ្ជាក់ថា ជាទូទៅយើងបាន : $3\sin x+4\cos x \leq 5$ និងចំពោះតម្លៃណារបស់ x ទើបអង្គទាំងពីរស្មើគ្នា?

4. សមីការលោការីតខាងក្រោមនេះ មានឫសឬទេ?

$$2\lg(x-1) = \frac{1}{2}\lg x^3 - \lg\sqrt{x}.$$

5. ក្នុងកំណាត់កោនមួយ អង្កត់ទ្រូងរបស់ឌ្យាក់ដែលកាត់តាមកំពស់របស់កំណាត់កោន កែងគ្នា ។ ដនេត្រមានប្រវែង ℓ និងផ្តុំជាមួយបាតធំបានមុំ α ។ គណនាមាឌ និងក្រឡាផ្ទៃខាងរបស់កំណត់កោននោះ ។

ចម្លើយ

1. a) អនុគមន៍ $y=\frac{4x^2+x+1}{x} = 4x+1+\frac{1}{x}$

កំណត់គ្រប់ $x \in \mathbb{R}^*$

ដេរីវេ : $y' = 4-\frac{1}{x^2} = \frac{4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})}{x^2}$ ស្មើសូន្យកាលណា $x=-\frac{1}{2}$ និង $x=\frac{1}{2}$; អវិជ្ជមានកាលណា $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ $(x\neq 0)$, វិជ្ជមានកាលណា $x<-\frac{1}{2}$ និង $x>\frac{1}{2}$

ដូចនេះអនុគមន៍ y មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=-\frac{1}{2}$ $(y=-3)$
និងអប្បបរមាត្រង់ $x=\frac{1}{2}$ $(y=5)$

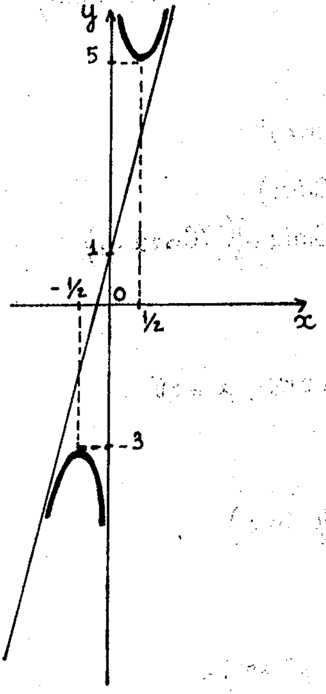
យើងបានតារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$1/2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

ដោយ : $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}\left(4x+1+\frac{1}{x}\right)=\infty$ ដូចនេះអនុគមន៍ y មានអាស៊ីមតូតឈរ $x=0$

ដោយ : $\lim\limits_{x\to\infty}\left[y-(4x+1)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

ដូចនេះអនុគមន៍ y មានអាស៊ីមតូតទ្រេត : $y=4x+1$



យើងមាន : $y-1=4x+\frac{1}{x}$ (1)

តាង $X=x$; $Y=y-1$

$\Rightarrow$ (1) សរសេរជាថ្មី $Y=4X+\frac{1}{X}$

និងដោយ : $Y(-X)=-4X-\frac{1}{X}=-\left(4X+\frac{1}{X}\right)=$
$=-Y(X)$ ដូចនេះ $Y(X)$ ជាអនុគមន៍សេស

$\Rightarrow$ ក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ Y ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់តម្រុយថ្មី ; ពីនោះ $\Rightarrow$ ក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ $y=\frac{4x^2+x+1}{x}$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំនុច $(0;1)$

b) សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ y ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x=2$ គឺ :

$$y-y_0=y'_0(x-x_0)$$

ក្នុងនោះ $x_0=2$, $y_0=\frac{19}{2}$; $y'_0=\frac{15}{4}$

$\Rightarrow y=\frac{15}{4}x+2$

2 . ពិនិត្យសមីការ :

$$\frac{1+tgx}{1-tgx}=1+2\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x \quad (1)$$

អង្គខាងឆ្វេងរបស់(1) មានន័យកាលណា $1-tgx\neq 0$ និង tgx មានន័យកាលណា $x\neq \frac{\pi}{4}+k\pi$ និង $x\neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

a) របៀបទី1 : យើងមាន: $1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x=1+\frac{2tgx}{1+tg^2x}=$

$$=\frac{(1+tgx)^2}{1+tg^2x}$$

ដូចនេះ (1) សមមូលនឹង :

$$\frac{1+tgx}{1-tgx}=\frac{(1+tgx)^2}{1+tg^2x} \text{ ឬ } 0=(1+tgx)(1+tg^2x)-(1-tgx)(1+tgx)^2=$$

$$=2tg^2x(1+tgx)$$

1) - $tgx=0$ ឬ $x=k\pi$

2) - $1+tgx=0$ ឬ $tgx=-1=tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ឬ $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

ដូច្នេះឫសរបស់(1)គឺ : $x=k\pi$ និង $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k=0,\pm 1,\dots)$

b) របៀបទី2 : ដោយ : $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$

$$1+2\sin x\cos x=\cos^2x+\sin^2x+2\sin x\cos x=(\cos x+\sin x)^2$$

$$\frac{1+tgx}{1-tgx}=\frac{1+\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$$

$\Rightarrow$ (1) សមមូលនឹង $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=(\cos x+\sin x)^2$

ឬ $0=(\cos x+\sin x)^2(\cos x-\sin x)-(\cos x+\sin x)=$

$$=(\cos x+\sin x)(\cos^2x-\sin^2x-1)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x-1)$$

$\Rightarrow$ 1) - $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi$

$$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

2) $\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \cos 2x=1 \Rightarrow 2x=2k\pi\ ;\ x=k\pi$

ដូចនេះសមីការ(1) មានឫស :

$x=k\pi$ និង $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k=0,\pm 1,\dots)$

3- យើងមាន : $3\sin x+4\cos x=5\left(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right)$

ដោយ $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1 \Rightarrow$ យើងអាចតាង

$$\cos\varphi=\frac{3}{5}\ ;\ \sin\varphi=\frac{4}{5}$$

$\Rightarrow 3\sin x+4\cos x=5(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x)=$

$=5\sin(x+\varphi)\leqslant 5$ (ព្រោះ: $\sin(x+\varphi)\leqslant 1$)

សមភាពមានកាលណា : $\sin(x+\varphi) = 1 \Leftrightarrow x+\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ឬ $x = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi \quad (k = 0; \pm 1, \dots)$

4. ពិនិត្យសមីការ : $2\lg(x-1) = \frac{1}{2}\lg x^5 - \lg\sqrt{x} \quad (1)$

(1) មានន័យកាលណា : $x-1>0$ និង $x>0 \Leftrightarrow x>1$

យើងបាន : $\frac{1}{2}\lg x^5 - \lg\sqrt{x} = \frac{5}{2}\lg x - \frac{1}{2}\lg x = 2\lg x$

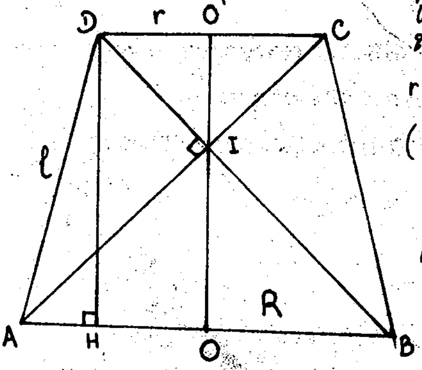
(1) សមមូលនឹង $2\lg(x-1) = 2\lg x$

$$x-1 = x \quad (2)$$

(2) គ្មានឫស ដូច្នេះសមីការ (1) ក៏គ្មានឫសដែរ ។

5. យក O', r និង O, R ជាផ្ចិតនិងកាំរៀងគ្នារបស់បាតតូចនិងបាតធំ ។

យក ABCD ជាមុខកាត់តាមកំពស់ $[OO']$ របស់កោណកាត់ ។



ដូចនេះ ABCD ជាចតុកោណព្នាយសមបាត តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន $|AD| = \ell$; $R = |OA|$

$r = |DO'|$; $\widehat{DAB} = \alpha$ និង $[BD] \perp [AC]$ ត្រង់ I (ដូចនេះ I ស្ថិតនៅលើ $[OO']$) ។ ពីនេះយើងបាន : $|AO| + |DO'| = |OI| + |IO'| = |OO'|$

ដូច្នេះ មាឌ V និងក្រឡាផ្ទៃខាង S_ℓ របស់កោណកាត់គឺ :

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi |OO'| \left(|AO|^2 + |DO'|^2 + |AO|.|DO'| \right)$$

$$S_\ell = \pi(R+r)\ell = \pi(|AO| + |DO'|)\ell = \pi |OO'|.\ell$$

ពិនិត្យ ΔDAB ក្នុងនោះ $[DH]$ ជាកំពស់ យើងមាន : $|AO| + |DO'| =$

$= |OO'| = |DH| = |AD| \cdot \sin\alpha = \ell\sin\alpha \quad (1)$

$|AO| - |DO'| = |AH| = |AD|\cos\alpha = \ell\cos\alpha \quad (2)$

ដោះស្រាយ (1) និង (2) យើងបាន :

$$|AO| = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)\ell$$

$$|DO'| = \frac{1}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha)\ell$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\ell\sin\alpha \left[\frac{\ell^2}{4}(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 + \frac{\ell^2}{4}(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\ell^2}{4}\left[(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)\right] \right] =$$

$$= \frac{1}{12}\pi l^3 \sin\alpha\left[1+2\sin^2\alpha\right]$$

$$S_l = \pi l^2 \sin\alpha$$

<u>វិញ្ញាសាទី4</u> :

1. បង្ហាញថាបើ A, B, C ជាមុំ3 របស់ត្រីកោណមួយនោះ:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2} + 1$$

2. គេឲ្យអនុគមន៍ $y = |x|^3$

a) គណនាដេរីវេ y'

b) សង់ក្រាភិចរបស់អនុគមន៍នោះ

3. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួន a, b, c, d យើងសុទ្ធតែមាន :

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geqslant \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

តើពេលណាទើបមានសញ្ញាសមភាព

4. គេពិនិត្យប្លង់មេដ្យាទ័រទាំង6 របស់ទ្រនុងទាំង6 របស់ចតុមុខមួយ ។ បង្ហាញថាប្លង់មេដ្យាទ័រទាំង6 ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុចមួយ ។

5. យក r និង R ជាកាំរៀងគ្នារបស់រង្វង់ចារឹកក្នុង និងរបស់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា : $\frac{r}{R} \leqslant \frac{1}{2}$

<u>ចម្លើយ</u>

1. យើងមាន:

$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C) = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{C+(A+B+C)}{2}\cos\frac{C-(A+B+C)}{2} =$$

$$= 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2} - \cos(A+B+C)$$

$$= 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2} + 1$$

(ព្រោះ $\cos(A+B+C) = -1$)

2. ពិនិត្យ $y = |x|^3 = \begin{cases} x^3 & \text{បើ } x \geqslant 0 \\ -x^3 & \text{បើ } x \leqslant 0 \end{cases}$

a) $y' = \begin{cases} 3x^2 & \text{បើ } x > 0 \\ -3x^2 & \text{បើ } x < 0 \end{cases}$

យើងគណនា y' ត្រង់ $x=0$

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{|\Delta x|^3}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{|\Delta x|(\Delta x)^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|\Delta x=0$$

ដូច្នេះ $y'=\begin{cases}3x^2 & \text{បើ } x>0\\ 0 & \text{បើ } x=0\\ -3x^2 & \text{បើ } x<0\end{cases}$

b_1 - អនុគមន៍ y' កំណត់គ្រប់តម្លៃរបស់ x

1) ចំពោះ $x>0$ ខ្សែកោងរបស់ y' ត្រួតស៊ីគ្នានឹងមែកខាងស្ដាំរបស់ខ្សែកោង $y_1=3x^2$ (ជាប៉ារ៉ាបូលកំពូល $(0,0)$ ទិសដៅ, ផតឡើងទៅផ្នែកលើ)

2) ចំពោះ $x<0$ ខ្សែកោងរបស់ y' ត្រួតនឹងមែកខាងឆ្វេងរបស់ខ្សែកោង $y_2=-3x^2$ (ជាប៉ារ៉ាបូលកំពូល $(0,0)$ ទិសដៅ, ផតទៅផ្នែកខាងក្រោម) ។ ខ្សែកោងរបស់ y_1 ឆ្លុះគ្នានឹងខ្សែកោង y_2 ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

យើងមាន

$$y'(-x)=\begin{cases}-3x^2 & \text{កាលណា } x>0\\ 3x^2 & \text{កាលណា } x\leq 0\end{cases}$$

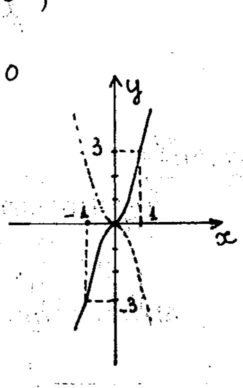
$$=y'(x)$$

ដូចនេះ y' អនុគមន៍សេស ដូច្នេះខ្សែកោងអនុគមន៍ y' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់តម្រុយអរតូណេ ។

ក្រាភិចរបស់ y' កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=0$ $(y'=0)$ (រូបខាងក្រោម)

(ខ្សែកោងរបស់ y' មានចំណុចរបត់ត្រង់គល់អ័ក្ស ព្រោះ:

$$y''(0)=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\dfrac{y'(\Delta x)-y'(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\dfrac{3\Delta x^2}{\Delta x}=0\ ,\\ \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\dfrac{y'(\Delta x)-y'(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\dfrac{-3\Delta x^2}{\Delta x}=0\end{cases}$$



និង y'' ដូរសញ្ញាកាលណា x កាត់តាម 0

3 - យើងបង្ហាញ:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\qquad(1)$$

ចំពោះ $\forall a, b, c, d$ ។

វិសមភាព (1) សមមូលនឹង $a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq$

$\geq (a+c)^2+(b+d)^2$ ឬ $\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac+bd$ (2)

a) បើ $ac+bd<0$ នោះវិសមភាព (2) ពិត $\forall a,b,c,d$

ដូច្នេះ (1) ពិត $\forall$ តម្លៃ a,b,c,d ។

b) បើ $ac+bd \geq 0$ នោះ (2) សមមូលនឹង :

$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2 \Leftrightarrow a^2d^2+b^2c^2 \geq 2acbd$

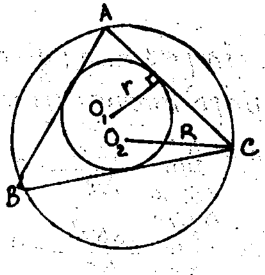
$(ad-bc)^2 \geq 0$ (3) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall a,b,c,d$

(3) មានសញ្ញាស្មើកាលណា : $(ad-bc)=0 \Rightarrow$ (1) មានសញ្ញាស្មើកាលណា $(ac+bd) \geq 0$ និង $ad-bc=0$ (កាលណា $ac+bd \geq 0$ និង $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}=k$ ឬ កាលណា $ac+bd \geq 0$ និង $c=ak$, $d=bk$) ។

4. យើងឃើញថាចំនុចដែលជាប្រសព្វរបស់ប្លង់មេដ្យាទ័រទាំង៦ របស់គែមទាំង៦នៃចតុមុខ គឺជាចំនុចដែលមានចំងាយស្មើគ្នាទៅកំពូលទាំង 4 របស់ចតុមុខ ។ ដូច្នេះចំនុចនោះគឺជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែចារឹកក្រៅចតុមុខ ។

5. តាង $|O_1O_2| = l$ តាមរូបមន្តអឺល័រ $l^2 = R^2-2Rr \Rightarrow l^2=R^2-2Rr \geq 0$

$\Leftrightarrow R-2r \geq 0$ ឬ $R \geq 2r \Rightarrow \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$



វិញ្ញាសាទី5

1. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាភិចរបស់អនុគមន៍

$$y=\frac{x^2-2x+10}{2(x-1)}$$

សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាភិចត្រង់ចំណុច $x=-1, x=2$

2. រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យយើងមាន:

$$\cos x+\cos(x+a)+\cos(x+2a)+\cos(x+3a)+\cos(x+4a)=0$$

ចំពោះ: $\forall x$

3. ប្លង់កាត់តាមដនទ្រូងពីរ [MP] [NQ] របស់កំណាត់កោនមួយកាត់ប្លង់បាតបានមុំ 60°, ចំនុច H, N ស្ថិតនៅលើរង្វង់បាតតូច ។
គណនាក្រឡាផ្ទៃខាង និងមាឌរបស់កំណាត់កោន ដោយដឹងប្រវែងដនទ្រូងស្មើ l, $\widehat{MPQ}=\beta$, $\widehat{PNQ}=\alpha$ ។

4. ចំពោះ: $\forall a>0$ ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$

5. រកឫសរបស់សមីការ $3x^4-10x^3+9x^2-1=0$
កំណត់តម្លៃប្រហែលរបស់ឫសនោះ ។

ចម្លើយ

1. a) អនុគមន៍:

$$y=\frac{x^2-2x+10}{2(x-1)}=\frac{(x^2-2x+1)+9}{2(x-1)}=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{9}{2(x-1)}$$

កំណត់ចំពោះ: $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

ដេរីវេ: $y'=\frac{1}{2}-\frac{9}{2(x-1)^2}=\frac{(x+2)(x-4)}{2(x-1)^2}$

ស្មើសូន្យកាលណា $x=-2$ និង $x=4$ អវិជ្ជមានកាលណា $-2<x<4$ $(x\neq 1)$; វិជ្ជមាន $x<-2$ និង $x>4$

ដូចនេះ: អនុគមន៍ y មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=-2$ $(y=-3)$ និងអប្បបរមាត្រង់ $x=4$ $(y=3)$

យើងមានតារាងអថេរភាព:

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

ខ្សែកោងរបស់អនុគមន៍ $y=\frac{x^2-2x+10}{2(x-1)}$ កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y=-5$ ។

ដោយ $\lim_{x\to 1} y = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{2}(x-1)+\frac{9}{2(x-1)}\right] = \infty$

ដូចនេះ អនុគមន៍ y មានអាស៊ីមតូតឈរ : $x=1$

ដោយ $\lim_{x\to\infty}\left[y-\frac{1}{2}(x-1)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{9}{2(x-1)} = 0$

ដូចនេះ អនុគមន៍ y មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=\frac{1}{2}(x-1)$

យើងមាន : $y=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{9}{2(x-1)}$ (1)

តាង $X=x-1$; $Y=y$

$\Rightarrow$ (1) សរសេរជា : $Y=\frac{1}{2}X+\frac{9}{2X}$

និងដោយ $Y(-X)=-\frac{1}{2}X-\frac{9}{2X}=-\left(\frac{1}{2}X+\frac{9}{2X}\right)=-Y(X)$

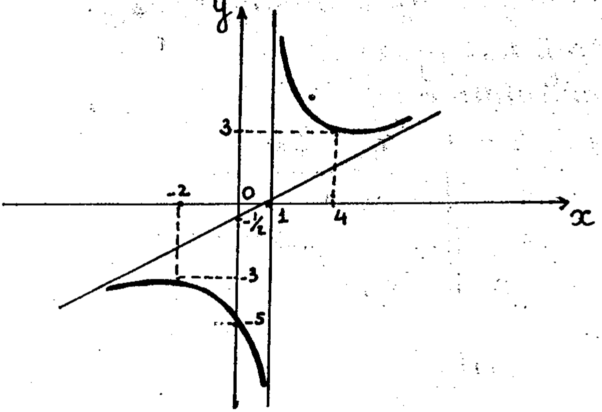
ដូចនេះក្រាភិចអនុគមន៍ $Y(X)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អ័ក្សកូអរដោនេថ្មី ។ ដូច្នេះក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ y ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំណុច $(1,0)$

b. សមីការរបស់បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ y ត្រង់ចំនុច $x=x_0$ $(y=y_0)$ មានរាង : $y-y_0=y_0'(x-x_0)$

ចំពោះ $x_0=-1$ យើងមាន $y_0=\frac{13}{4}$, $y_0'=-\frac{5}{8}$

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាភិចត្រង់ចំនុច $x=-1$

$y+\frac{13}{4}=-\frac{5}{8}(x+1)$ ឬ $y=-\frac{5}{8}x-\frac{31}{8}$



ចំពោះ $x_0=2$ យើងបាន $y_0=5$; $y_0'=-4 \Rightarrow$ សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាបចំណុច $x=2$ គឺ: $y-5=-4(x-2)$

ឬ: $y=-4x+13$

2. យើងបាន:

$$0=\cos x+\cos(x+a)+\cos(x+2a)+\cos(x+3a)+\cos(x+4a)=$$
$$=\cos(x+2a)+\left[\cos(x+4a)+\cos x\right]+\left[\cos(x+3a)+\cos(x+a)\right]$$
$$=\cos(x+2a)+2\cos(x+2a)\times\cos 2a+2\cos(x+2a)\times\cos a=$$
$$=\cos(x+2a)\left[2(2\cos^2 a-1)+2\cos a+1\right]$$
$$=\cos(x+2a)\left[4\cos^2 a+2\cos a-1\right] \quad (1)$$

ចង់បានសមភាព (1) កើតឡើងចំពោះ $\forall x$ យើងត្រូវមាន:

$$4\cos^2 a+2\cos a-1=0 \quad (2)$$

តាង $X=\cos a$ នោះ $|X|\leqslant 1$ ពេលនោះ (2):

$$4X^2+2X-1=0 \quad (3)$$

a) $X=\cos a=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\cos\varphi_1 \Rightarrow a=\pm\varphi_1+2k\pi$

b) $X=\cos a=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}=\cos\varphi_2 \Rightarrow a=\pm\varphi_2+2k\pi$

ដូច្នេះ (1) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall x$ កាលណា:

$a=\pm\varphi_1+2k\pi$ និង $a=\pm\varphi_2+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\ldots)$

ក្នុងនោះ φ_1 និង φ_2 កំណត់ដោយ

$\cos\varphi_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$; $\cos\varphi_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

3. ប្លង់កាត់តាមដំនេក្រ $[MP]$, $[NP]$ កាត់កំនាត់ឡានតាមខ្នាតជាចតុកោណព្នាយសមបាទ $MNPQ$, ដូចនេះ: $\widehat{MPQ}=\widehat{NQP}=\beta$, $|PM|=|NQ|=\ell$ ។ យក O,R និង O',r ជាផ្ចិតនិងកាំរៀងគ្នារបស់បាតធំនិងបាតតូចរបស់កំនាត់កោន ។

តាមសម្មតិកម្មយើងបាន: $\widehat{MON}=60^\circ$ និង $\widehat{PO'Q}=60^\circ$,

ដូចនេះ: $|MN|=|NO'|=r$, $|PQ|=|QO|=R$ ។ យក I', I ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នារបស់ $[MN]$ និង $[PQ]$ យើងបាន:

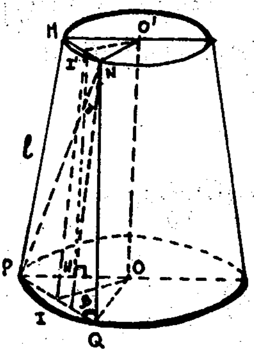
$|I'O'|=\frac{r\sqrt{3}}{2}$; $|IO|=\frac{R\sqrt{3}}{2}$ ។ ពី I' គូស $[I'H]\perp[OI] \Rightarrow$

$\Rightarrow h = |OO'| = |I'H|$

$|IH| = |IO| - |I'O'| = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(R-r)$

ដូចនេះក្រលាផ្ទៃខាង S_l និងមាឌរបស់កំណាត់កោនគឺ :

$S_l = \pi(R+r)l \;(1)$ និង $V = \frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr) \;(2)$



ពិនិត្យ ΔPNQ តាមទ្រឹស្តីបទទំនុ-គបន៍ស៊ីនុស យើងបាន :

$$\frac{|PQ|}{\sin\alpha} = \frac{|PN|}{\sin\beta} = \frac{|NQ|}{\sin[\pi-(\alpha+\beta)]}$$

គូសកំពស់ $[NK]$ យើងបាន:

$|II'| = |NK| = |NQ|\sin\beta = l\sin\beta$

$|KQ| = l\cos\beta = \frac{1}{2}(|PQ|-|MN|) = \frac{1}{2}(R-r)$

$|PQ| = |NP|\cos[\pi-(\alpha+\beta)] = -\frac{l\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\cos(\alpha+\beta) =$

$= -l\sin\beta\cot g(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(|PQ|+|MN|) = \frac{1}{2}(R+r)$

ដូច្នេះ: $\begin{cases} R-r = 2l\cos\beta \\ R+r = -2l\sin\beta\cot g(\alpha+\beta) \end{cases} \quad (3)$

ពីប្រព័ន្ធខាងលើ យើងបាន:

$Rr = l^2\sin^2\beta\cot g^2(\alpha+\beta) - l^2\cos^2\beta$

និង $R^2+r^2+Rr = (R+r)^2 - Rr =$

$= 4l^2\sin\beta\cot g^2(\alpha+\beta) - l^2\sin^2\beta\cot g^2(\alpha+\beta) + l^2\cos^2\beta$

$= l^2[3\sin^2\beta\cot g^2(\alpha+\beta) + \cos^2\beta] \quad (4)$

ពិនិត្យ $\Delta\perp II'IH$ យើងបាន:

$h = \sqrt{|II'|^2 - |IH|^2} = \sqrt{l^2\sin^2\beta - (\frac{\sqrt{3}}{2} - 2l\cos\beta)^2} =$

$= l\sqrt{\sin^2\beta - 3\cos^2\beta} = l\sqrt{(\sin\beta+\sqrt{3}\cos\beta)(\sin\beta-\sqrt{3}\cos\beta)} =$

$= l\sqrt{(\sin\beta + tg\frac{\pi}{3}\cos\beta)(\sin\beta - tg\frac{\pi}{3}\cos\beta)} = \frac{l}{\cos\frac{\pi}{3}}\sqrt{\sin(\beta+\frac{\pi}{3})\sin(\beta-\frac{\pi}{3})} =$

$$= 2\ell\sqrt{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)} \qquad (5)$$

(3) និង (1) យើងបាន : $S_\ell = -2\pi\ell^2\sin\beta\,\mathrm{Cotg}(\alpha+\beta)$

ដោយ $S_\ell > 0 \Rightarrow \mathrm{Cotg}(\alpha+\beta) < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \pi$

ជំនួស (4) និង (5) ចូល (2) យើងបាន

$$V = \frac{2\pi\ell^3}{3}\sqrt{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)} \times \left[3\sin^2\beta\,\mathrm{Cotg}^2(\alpha+\beta)+\cos^2\beta\right]$$

4- ពិនិត្យសមីការ $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x} > a \qquad (1)$

$\sqrt{a+x}$ មានន័យកាលណា $x \geqslant -a$

$\sqrt{a-x}$ ——"—— $x \leqslant a$

ដូចនេះអង្គខាងឆ្វេងរបស់ (1) មានន័យកាលណា $-a \leqslant x \leqslant a$ ឬ $|x| \leqslant a$ ។ វិសមភាព (1) សមមូលនឹង (លើកអង្គទាំងពីររបស់(1) ជាការេ) : $2a+2\sqrt{a^2-x^2} > a^2$ ឬ $2\sqrt{a^2-x^2} > a(a-2) \quad (2)$

a) ចំពោះ $a<2$ យើងបាន $a(a-2)<0 \Rightarrow (2)$ (ព្រមទាំង (1)) ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $|x| \leqslant a$ ។

b) ចំពោះ $a \geqslant 2 \Rightarrow a(a-2) \geqslant 0 \Rightarrow (2)$ សមមូលនឹង :

$$4(a^2-x^2) > a^2(a-2)^2$$

$$-4x^2 > a^3(a-4) \qquad (3)$$

ចំពោះ $a \geqslant 4$ យើងបាន : $a^3(a-4) \geqslant 0$ ក្នុងនោះ $-4x^2 \leqslant 0$ ចំពោះ $\forall x$ ។ ដូចនេះ (3) មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $\forall x \Rightarrow$ (2) និង (1) មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

c) ចំពោះ $2 \leqslant a < 4$, (3) សមមូលនឹង : $x^2 < \frac{a^3}{4}(4-a)$

ឬ $|x| < \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} \qquad (4)$

ដោយឫស x ត្រូវបំពេញលក្ខខណ្ឌ $|x| \leqslant a \Rightarrow$ យើងត្រូវប្រៀបធៀប a និង $\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$, យើងបាន :

$\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} \leqslant a$ ចំពោះ $2 \leqslant a < 4 \quad (5)$

ដូចនេះ (5) សមមូល : $\frac{1}{2}\sqrt{a(4-a)} \leqslant 1$ ឬ $\frac{1}{4}a(4-a)-1 \leqslant 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}(a-2)^2 \leqslant 0 \qquad (6)$$

វិសមភាព (6) ពិត $\forall a$

ដូចនេះឫសរបស់ (1) គឺ a) $|x| \leqslant a$ ចំពោះ $a<2$

b) $|x| < \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$ ចំពោះ $2 \leqslant a < 4$

c) គ្មានឫស ចំពោះ $a \geqslant 4$

5- យើងដោះស្រាយចំណោទនេះតាមក្រាភិចរបស់ $y = 3x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 1$ កំណត់ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

$y' = 12x^3 - 30x^2 + 18x = 12x(x-1)\times\left(x-\frac{3}{2}\right)$ ស្មើសូន្យ កាលណា $x=0$, $x=1$ និង $x=\frac{3}{2}$; អវិជ្ជមានកាលណា $x<0$ និង $1<x<\frac{3}{2}$ វិជ្ជមានកាលណា $0<x<1$ និង $x>\frac{3}{2}$ ។

ដូចនេះ y មានអតិបរមាត្រង់ $x=1$ $(y=1)$ និងអប្បបរមាត្រង់ $x=0$ $(y=-1$; $x=3/2$ $\left(y=\frac{11}{16}\right)$ ។

យើងបានតារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{11}{16}$	↗	$+\infty$

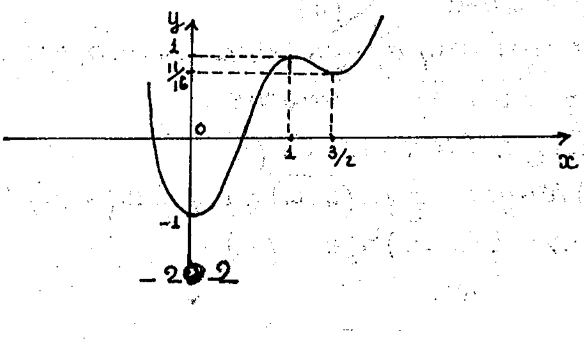
ដោយផ្អែកតាមក្រាភិច យើងឃើញថាសមីការ :

$3x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 1 = 0$ មានឫសពីរ: x_0 $(x_0<0)$; x_1 $(0<x_1<1)$

យើងមាន : $y(-0{,}2) = -0{,}55$ និង $y(-0{,}3) = 0{,}10$

$\Rightarrow -0{,}3 < x_0 < -0{,}2$

យើងមាន $y(0{,}4) = -0{,}12$ និង $y(0{,}5) = 0{,}18 \Rightarrow 0{,}4 < x_1 < 0{,}5$



វិញ្ញាសាទី៦

1. រកមេគុណ a,b,c ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ : $y = x^3+ax^2+bx+c$ មានតម្លៃស្មើសូន្យ ចំពោះ $x = 1$, មានតម្លៃអតិបរមា ឬអប្បបរមាចំពោះ $x = -2$។ សិក្សាអថេរភាពនិងគូសខ្សែកោងរបស់អនុគមន៍ y ហើយនិងកំនត់ផងដែរ សមីការរបស់បន្ទាត់ប៉ះនិងខ្សែកោងត្រង់ចំនុចរបត់ ។

2. ΔABC មួយកែងត្រង់A , មានកាំរបស់រង្វង់ចារឹកក្នុង r, $\hat{C} = \alpha$ ។ គណនាមាឌនិងក្រលាផ្ទៃទាំងអស់របស់ចតុមុខ ដែលមានបាតជា ΔABC, ដោយដឹងថាមុខខាងទាំង3 របស់ចតុមុខ សុទ្ធតែធ្វើជាមួយប្លង់បាតបានមុំ β។

3. ដោះស្រាយសមីការ :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$$

4. ចំពោះតម្លៃណារបស់ m ទើបយើងមាន : $-3 \leq \frac{x^2+mx-2}{x^2-x+1} \leq 2$, $\forall x$

5. រកដែនកំនត់និងអាស៊ីមតូតរបស់អនុគមន៍ :

$$y = x + \frac{x-1}{x+1}$$

6. រកតម្លៃតូចបំផុតនិងតម្លៃធំបំផុតរបស់អនុគមន៍ :

$$y = 5\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x$$

ចម្លើយ

1. a) $y = x^3+ax^2+bx+c$ យើងបាន : $y' = 3x^2+2ax+b$

ដោយ $y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1+a+b+c = 0$ (1)

ដោយ y មានតម្លៃអតិបរមា ឬអប្បបរមាចំពោះ $x = -2$

$\Rightarrow y'(-2) = 0$ និង $y(-2) = 0$

$12-4a+b = 0$ និង $-8+4a-2b+c = 0$

ឬ $4a-b = 12$ (2) និង $4a-2b+c = 8$ (3)

យើងសរសេរ (3) ជារាង $(4a-b)+(c-b) = 8$ (3')

ជំនួស (2) ចូលក្នុង (3') :

យើងបាន : $c-b = -4$ ឬ $c = b-4$ (4)

ជំនួស (4) ចូល (1) :

$1+a+b+b-4 = 0$

$a = -2b + 3 \quad (5)$

ជំនួស (5) ចូល (2) : $4(-b+3) - b = 12$

$9b = 0 \Rightarrow b = 0$

$(4) \Rightarrow c = b - 4 = -4$

$(5) \Rightarrow a = -2b + 3 = 3$

ដូចនេះ $y = x^3 + 3x^2 - 4$ កំណត់ $\forall x \in \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ ស្មើសូន្យចំពោះ $x = 0$ និង $x = -2$, អវិជ្ជមានចំពោះ $-2 < x < 0$ វិជ្ជមានចំពោះ $x < -2$ និង $x > 0$ ។

ដូចនេះ y មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = -2$ $(y = 0)$ និងអប្បបរមាត្រង់ $x = 0$ $(y = -4)$ ។ យើងមានតារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

ខ្សែកោងរបស់ $y = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2$

កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $x = -2$ និង $x = 1$

កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y = -4$

$y'' = 6x + 6 = 6(x+1)$ ស្មើ 0 ចំពោះ $x = -1$ $(y = -2)$ និងប្តូរសញ្ញាកាលណា x ឆ្លងកាត់ -1

ដូចនេះក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ y មានចំណុច $(-1, -2)$ ជាចំណុចរបត់ ។

យើងបាន : $y + 2 = x^3 + 3x^2 - 2 = (x+1)^3 - 3(x+1) \quad (1)$

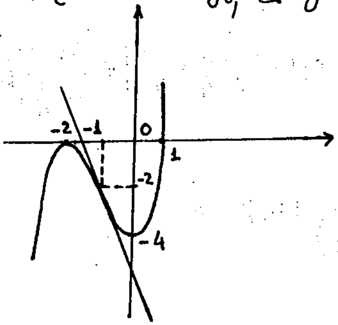
តាង $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (1) ទៅជារាង : $Y = X^3 - 3X$.

$\Rightarrow Y(-X) = -X^3 + 3X = -(X^3 - 3X) = -Y(X)$

$\Rightarrow Y$ ជាអនុគមន៍សេស ដូចនេះក្រាភិចរបស់ Y ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អ័ក្សថ្មី ។

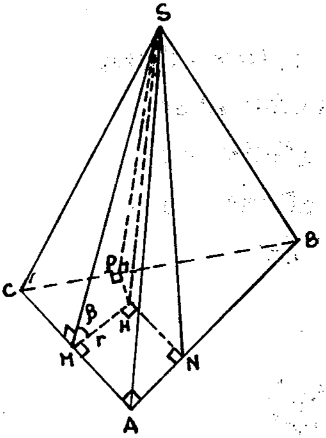
⇒ ក្រាភិចរបស់ y ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំណុច $(-1,-2)$



គ) សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាភិចត្រង់ចំណុចរបត់ មានរាង : $y-y_0=y'_0(x-x_0)$

ក្នុងនោះ $x_0=-1$; $y_0=-2$; $y'_0=-3$

ដូច្នេះសមីការរបស់បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាភិច ត្រង់ចំណុចរបត់គឺ : $y=-3x-5$ ។



2. SABC ជាចតុមុខ, បាតជា ΔABC កែងត្រង់ A មុខខាងនីមួយៗជាមួយបាតបានមុំ β ។ $[SH]$ ជាកំពស់របស់ចតុមុខ ។ ពី H គូសអង្កត់កែង $[HM]$, $[HN]$, $[HP]$ រៀងគ្នាទៅ $[AC]$, $[AB]$, $[BC]$ ។

$\Delta \perp SMH, SNH, SPH$ មាន $[SH]$ ជាកំពស់រួម $\widehat{SMH}=\widehat{SNH}=\widehat{SPH}=\beta$

⇒ ត្រីកោណទាំងនេះប៉ុនគ្នា

វិបាក : $|MH|=|NH|=|PH|$

⇒ H ជាផ្ចិតរបស់រង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC

$\Rightarrow |MH|=|NH|=|PH|=r$

$|SH|=r\,tg\beta$

យក V ជាមាឌរបស់ចតុមុខ SABC និង S ជាក្រលាផ្ទៃទាំងអស់របស់វា

យើងបាន : $V=\frac{1}{3}\left(S(ABC)\right)\times|SH|$

$S=S(ABC)+S(SAC)+S(SAB)+S(SBC)=$

$=S(ABC)+\frac{1}{\cos\beta}S(ABC)=S(ABC)\left[1+\frac{1}{\cos\beta}\right]=2S(ABC)\cdot\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$

ក្នុង ΔABC មាន : $|AM|=|AN|=r$

$|MC|=r\,Cotg\frac{\alpha}{2}$; $|NB|=r\,Cotg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=r\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

$\Rightarrow |AC|=|AM|+|MC|=r+r\,Cotg\frac{\alpha}{2}=r\left(1+Cotg\frac{\alpha}{2}\right)=$

$=\frac{r\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$$|AB| = |AN| + |NB| = r + r\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = r\left[1+tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{r\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

ដូច្នេះ: $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\,|AC|\cdot|AB|\cdot|SH| =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{r\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{r\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}\; r\,tg\beta =$$

$$= \frac{1}{3}r^2\,Cotg\frac{\alpha}{2}\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)tg\beta$$

$$S = \frac{2r^2\,Cotg\frac{\alpha}{2}\,tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$$

3 - ពិនិត្យសមីការ : $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow -(\sin 3x + \sin x) - \sin 2x + \cos x + (1 + \cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x\cos x - 2\sin x\cos x + \cos x + 2\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow -4\sin x\cos^2 x - 2\sin x\cos x + \cos x + 2\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x(1-2\sin x) + \cos x(1-2\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\,(1-2\sin x)(2\cos x+1) = 0$

$\Rightarrow$ a) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

b) $1-2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ និង $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

c) $2\cos x + 1 = 0$, $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

ដូចនេះឫសរបស់សមីការគឺ :

$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$ ។

4 - ពិនិត្យវិសមភាពឌុប $-3 \leq \frac{x^2+mx-2}{x^2-x+1} \leq 2$ (1)

ដោយ $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall x$

$\Rightarrow$ (1) សរសេរជាង

$-3(x^2-x+1) \leq x^2+mx-2 \leq 2(x^2-x+1)$ (2)

ដោះស្រាយ (2) សមមូលនឹង (3) និង (4)

a) $-3(x^2-x+1) \leq x^2+mx-2$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant 4x^2+(m-3)x+1$ (3)

b) $x^2+mx-2 \leqslant 2(x^2-x+1) \Leftrightarrow x^2-(m+2)x+4 \geqslant 0$ (4)

ដើម្បីឲ្យ (3) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall x$ យើងត្រូវមាន:

$\Delta = (m-3)^2 - 4^2 = (m+1)(m-7) \leqslant 0$

($\Delta=0$ កាលណា $m=-1$ និង $m=7$) ឬ $-1 \leqslant m \leqslant 7$ (5)

ដើម្បីឲ្យ (4) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall x$:

$\Delta = (m+2)^2 - 4^2 = (m-2)(m+6) \leqslant 0$

($\Delta=0$ កាលណា $m=2$ និង $m=-6$) ឬ $-6 \leqslant m \leqslant 2$ (6)

ដូចនេះវិសមភាព (1) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall x$ កាលណា

(តាម (5) និង (6)) : $-1 \leqslant m \leqslant 2$ ឬ

5. អនុគមន៍ $y = x + \frac{x-1}{x+1} = x+1-\frac{2}{x+1}$ កំណត់ចំពោះ $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$

ហើយ: $\lim\limits_{x\to -1} y = \lim\limits_{x \to -1}\left(x+1-\frac{2}{x+1}\right) = \infty$

$\Rightarrow y = x+1-\frac{2}{x+1}$ មានអាស៊ីមតូតឈរ : $x=-1$

ហើយ : $\lim\limits_{x\to\infty}\left[y-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x+1}\right) = 0$

$\Rightarrow y = x+1-\frac{2}{x+1}$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x+1$

6. $y = 5\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x =$

$= 5\,\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2} =$

$= \frac{3}{2}\sin 2x - 2\cos 2x + 3 = \frac{5}{2}\left[\frac{3}{5}\sin 2x - \frac{4}{5}\cos 2x\right] + 3 =$

$= \frac{5}{2}\sin(2x-\varphi) + 3$

ចំពោះ φ កំណត់ដោយ : $\cos\varphi = \frac{3}{5}$; $\sin\varphi = \frac{4}{5}$

ពេលដែល x ប្រែប្រួល តម្លៃធំបំផុតរបស់ $\sin(2x-\varphi)$ គឺ 1

និងតម្លៃតូចបំផុតរបស់ $\sin(2x-\varphi)$ គឺ -1

ដូច្នេះ: $y_{max} = 3+\frac{5}{2} = \frac{11}{2}$

$y_{min} = 3-\frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

វិញ្ញាសាទី៧

1. សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោងរបស់អនុគមន៍ $y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$
2. ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$
3. រកតម្លៃតូចបំផុតនិងធំបំផុតរបស់អនុគមន៍:

$$y=3\sin^2x+4\sin x\cos x-5\cos^2x+2$$

4. គេមានពីរ៉ាមីតចតុកោណនិយ័តមួយ SABCD ក្នុងនោះ ABCD ជាការេដែលជ្រុងមានរង្វាស់ a និង $|SA|=|SB|=|SC|=|SD|=a$ ។

a. រកកំពស់និងមាឌពីរ៉ាមីតជាអនុគមន៍នៃ a ;

b. យក M, N, P ជាចំណុចកណ្តាលរៀងរបស់ [AB], [AD] និង [SC] ។ ប្លង់ (MNP) កាត់ទ្រនុងខាង [SB] និង [SD] រៀងគ្នាត្រង់ Q និង R ។ ចូរប្រៀបធៀប $|QB|$, $|RD|$ ជាមួយនឹង $|SB|$ ។

c. បង្ហាញថា (MNP) ចែកពីរ៉ាមីតជាពីរផ្នែកសមមូលគ្នា (មានមាឌស្មើគ្នា) លទ្ធផលនោះត្រឹមត្រូវឬទេ ការណ៍:

$|SA|=|SB|=|SC|=|SD|\neq a$ ។

5. គូសក្រាភិចរបស់អនុគមន៍: $y=|x-2|-2|x-3|-3|x+1|$

ពីក្រាភិចនេះ ចូរទាញបង្ហាញឫសរបស់សមីការ:

$|x-2|-2|x-3|-3|x+1|=m$ ទៅតាមតម្លៃរបស់ m ។

ចម្លើយ

1. អនុគមន៍: $y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}=x+1+\frac{1}{x+2}$

កំណត់ចំពោះ: $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

ដេរីវេ: $y'=1-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$

$y'=0 \iff x=-3$ និង $x=-1$

$y>0 \iff x<-3$ និង $x>-1$

$y<0 \iff -3<x<-1$

ដូចនេះអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=-3$ $(y=-3)$ និងអប្បបរមាត្រង់ $x=-1$ $(y=1)$ ។

យើងមានតារាងអថេរភាព :

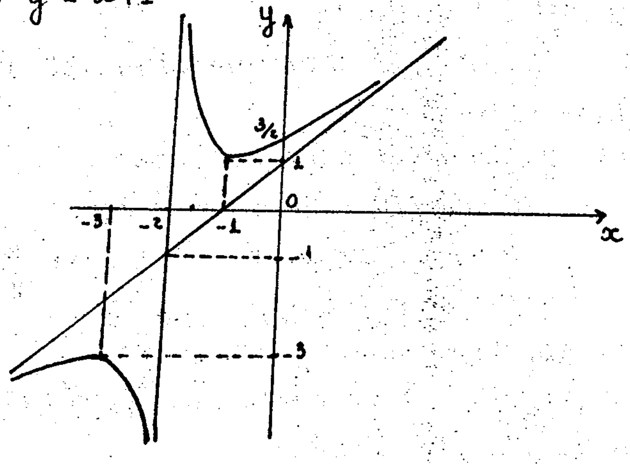
x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

ក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ y កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំនុច $y = \frac{3}{2}$

ដោយ: $\lim\limits_{x \to -2} y = \lim\limits_{x \to -2} \left(x+1+\frac{1}{x+2}\right) = \infty$

$\Rightarrow$ អនុគមន៍ y មានអាស៊ីមតូតឈរ : $x = -2$

ដោយ: $\lim\limits_{x \to \infty} [y-(x+1)] = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\frac{1}{x+2}\right] = 0 \Rightarrow$ y មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x+1$



យើងមាន: $y+1 = x+2+\frac{1}{x+2}$ (1)

តាង : $X = x+2$; $Y = y+1$

$\Rightarrow$ (1) ទៅជារាង : $Y = X + \frac{1}{X}$

$Y(-X) = -X - \frac{1}{X} = -Y(X)$

$\Rightarrow$ Y ជាអនុគមន៍សេស ។ ដូចនេះក្រាភិចវាឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អ័ក្សថ្មី ។ ដូចនេះក្រាភិចរបស់ y ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹង $(-2,-1)$

2- ពិនិត្យសមីការ $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$ (1)

ដោយ $\sqrt{3-x}$ មានន័យកាលណា $x \leq 3$ និង $\sqrt{x+1}$ មានន័យកាលណា $x \geq -1$ ដូចនេះអង្គខាងឆ្វេងរបស់ (1) មានន័យកាលណា : $-1 \leq x \leq 3$
វិសមភាព (1) សមមូលនឹង $\sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1}$ និងដោយអង្គទាំងពីរសុទ្ធតែវិជ្ជមាន ដូចនេះយើងបាន :

$$3-x > \frac{1}{4} + x + 1 + \sqrt{x+1}$$

$$\sqrt{x+1} < \frac{7}{4} - 2x$$

បើ $\frac{7}{4} - 2x \leq 0$ ឬ $x \geq \frac{7}{8}$ នោះ (2) (និង (1)) មិនផ្ទៀងផ្ទាត់
បើ $\frac{7}{4} - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{7}{8}$ នោះ (2) និង (1) សមមូលនឹង :

$$x+1 < \frac{49}{16} + 4x^2 - 7x$$

$$4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8} \text{ និង } x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}$$

ក្នុងនោះ $1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$ និង $1 + \frac{\sqrt{31}}{8}$ ជាឫសរបស់សមីការ : $4x^2 - 8x + \frac{33}{16} = 0$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow -1 < x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$$

3. យើងមាន : $y = 3\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x + 2 =$

$$= 3.\frac{1-\cos 2x}{2} + 2\sin 2x - 5.\frac{1+\cos 2x}{2} + 2 =$$

$$= 2\sin 2x - 4\cos 2x + 1 = 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2x - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2x\right) + 1 =$$

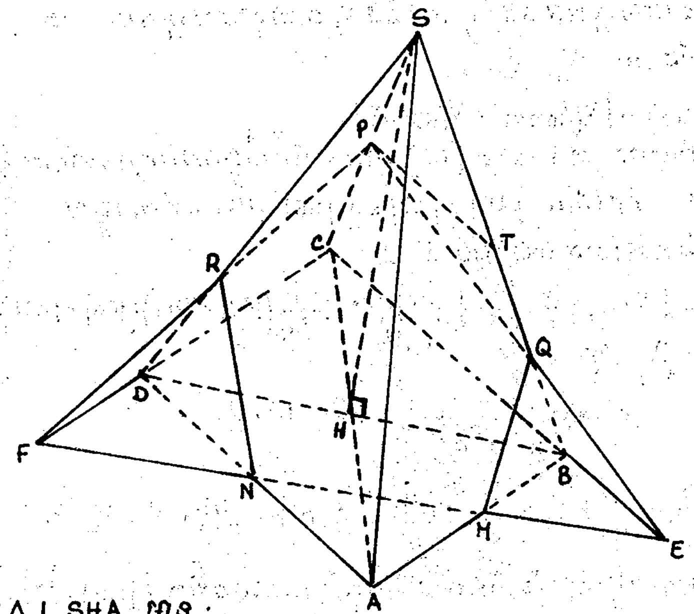
$$= 1 + 2\sqrt{5}\sin(2x - \varphi)$$

ចំពោះ φ កំណត់ដោយ : $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$
ពេល x ប្រែប្រួល តម្លៃធំបំផុតរបស់ $\sin(2x - \varphi)$ ស្មើ 1 និងតម្លៃតូចបំផុតរបស់ $\sin(2x-\varphi)$ ស្មើ -1
ដូច្នេះ: $y_{max} = 1 + 2\sqrt{5}$

$y_{min} = 1 - 2\sqrt{5}$

4. ដោយ SABCD ជាពីរ៉ាមីតចតុកោណនិយ័ត ដូចនេះជើងកំពស់ H របស់ពីរ៉ាមីតគូសចេញពី S ទៅបាត ABCD ជាប្រសព្វអង្កត់ទ្រូងការេ ABCD (មើលរូប) ។

a). ក្នុងការេ ABCD មាន : $|AH| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$



$C \Delta \perp SHA$ មាន :

$$|SH| = \sqrt{|SA|^2 - |AH|^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះមាឌរបស់ពីរ៉ាមីត SABCD គឺ

$$V = \frac{1}{3} S(ABCD)\,|SH| = \frac{1}{3} a^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

b) (MN) កាត់ (BC) និង (CD) រៀងគ្នាត្រង់ E និង F ។

ពិនិត្យត្រីកោណកែងសមបាតប៉ុនគ្នា $\Delta BME, AMN$ និង DNF

$(|BM| = |AM| = |AN| = |DN|,\ \widehat{BME} = \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = \widehat{DNF}$ មុំទល់កំពូល$)$

យើងបាន $|DF| = |BE| = |AM| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{a}{2}$

យើងមាន Q ជាប្រសព្វរវាង (PE) និង (SB) , R ជាប្រសព្វរវាង(PF)និង(SD)។

ក្នុងប្លង់ (SCB) គូស $(PT) \,//\, (CB)$ យើងបាន : ត្រីកោណពីរប៉ុនគ្នា :

$\Delta PTQ = \Delta EBQ \left(|EB| = |PT| = \frac{a}{2},\ \widehat{QPT} = \widehat{QEB}\right.$ និង $\left.\widehat{PTQ} = \widehat{QBE}\right)$

ដូចនេះ $|QB| = |QT| = \frac{1}{2}|BT| = \frac{1}{4}|SB| = \frac{a}{4}$

បង្ហាញដូចគ្នាដែរយើងនឹងបាន: $|RD| = \frac{1}{4}|SD| = \frac{1}{4}|SB| = \frac{a}{4}$

c) យក $|SH| = h \Rightarrow$ មាឌរបស់ពីរ៉ាមីតនោះគឺ : $V = \frac{1}{3}a^2h$

ម្យ៉ាងទៀត (MNP) ចែកពីរ៉ាមីតជាពីរផ្នែក

យក V_1 ជាមាឌរបស់ផ្នែកមានទីកំពូល S និង V_2 ជាមាឌរបស់ផ្នែកមានបាត ABCD ។ យើងបាន : $V_1 = V - V_2$

$$V_2 = V(PCEF) - \left[V(QBME) + V(RDFN)\right]$$

ដោយ P ជាចំណុចកណ្ដាលរបស់ [CS] ដូចនេះកំពស់គូសចេញពី P ទៅបាត ABCD ស្មើ $\frac{h}{2}$ និងដោយ $|QB| = |RD| = \frac{1}{4}|SB|$ ដូចនេះកំពស់គូសចេញពី Q និង R ទៅបាត ABCD ស្មើ $\frac{h}{4}$ ។

$$V(PCFE) = \frac{1}{3} S(CFE)\frac{h}{2} = \frac{h}{2.3}\cdot\frac{1}{2}|CF|\cdot|CE| = \frac{h}{3.4}\left(|CD|+|DF|\right)\left(|CB|+|BE|\right) =$$

$$= \frac{h}{3.4}\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{3a}{2} = \frac{3a^2h}{16}$$

$$V(QBME) + V(RDFN) = \frac{1}{3}S(BME)\times\frac{h}{4} + \frac{1}{3}S(DFN)\times\frac{h}{4} =$$

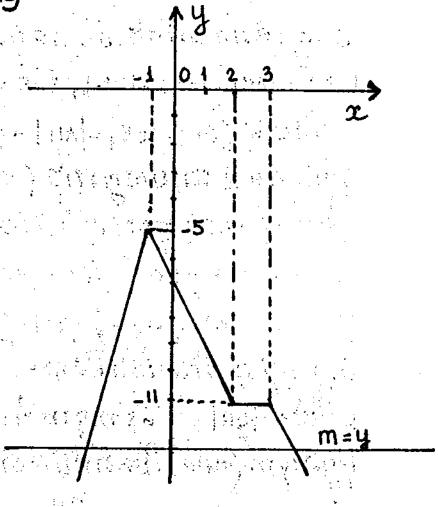
$$= \frac{h}{3.4}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a^2h}{3.16},$$

ដូចនេះ $V_2 = \frac{3a^2h}{16} - \frac{a^2h}{3.16} = \frac{8a^2h}{3.16} = \frac{1}{6}a^2h$ ដូច្នេះ $V_1 = V_2$ ។

ក្នុងការបង្ហាញខាងលើយើងមិនប្រើប្រាស់សម្មតិកម្ម $[SH] = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ទេ ។ ក្រៅពីនេះ [BE] និង [DF] ក៏មិនអាស្រ័យនឹង h ដែរ ។ ដូចនេះលទ្ធផលនៅតែត្រូវក្នុងករណី : $|SA| = |SB| = |SC| = |SD| \neq a$ ។

5. a) ដើម្បីសង់ក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ $y = f(x) = |x-2| - 2|x-3| - 3|x+1|$ យើងត្រូវពិនិត្យកន្សោម $f(x)$ ក្នុងចន្លោះ: $x \leq -1$, $-1 < x \leq 2$, $2 < x \leq 3$, $3 < x$ ដើម្បីលុបសញ្ញាតម្លៃដាច់ខាត ។ លទ្ធផលយើងបានក្នុងតារាងខាងក្រោម

x	$-\infty$ ... -1	-1 ... 2	2 ... 3	3 ... $+\infty$
y	$4x-1$	$-2x-7$	-11	$-4x+1$



ដោយផ្អែកលើតារាងនេះយើងគូសបាន ក្រាភិចរបស់ y ដូចរូប :

b) ចំនួនឫសរបស់សមីការ : $y = m$ គឺជាប្រសព្វរវាងក្រាភិចរបស់ $y = f(x)$ និង $y = m$ ក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ $y = m$ ជាបន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ ដូចនេះយើងបានចំនួនឫសរបស់(1) ដូចខាងក្រោម : $m > -5$: គ្មានឫស ; $m = -5$: មានឫសមួយ $(x = -1)$; $-11 < m < -5$: មានឫសពីរ ; $m = -11$: គ្មានចំនួនឫស ($x = -\frac{5}{2}$ និង $2 \leq x \leq 3$) ; $m < -11$: មានឫសពីរ .

វិញ្ញាសាទី 8

1. ដោះស្រាយសមីការ : $\cos^2 2x \sin^2 6x \cot g 3x = 0$

2. គេឲ្យសមីការ : $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$

សិស្សម្នាក់បានដោះស្រាយសមីការនេះដូចខាងក្រោម :

$3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+2}} = 3 \cdot 2$

$3^{x-1}\, 2^{\frac{3x}{x+2}-1} = 1$

ពីនោះ: $x - 1 = 0$; $\frac{3x}{x+2} - 1 = 0$, ដូចនេះ: $x = 1$

ចូរត្រិះរិះមើលតើរបៀបដោះស្រាយនេះត្រឹមត្រូវឬទេ?

3. បង្ហាញថា: $f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$

មិនអាស្រ័យនឹង x ។ រួចទាញរកតម្លៃរបស់កន្សោមនោះ ទន្ទឹមនឹងនោះទាញយកតម្លៃរបស់កន្សោមខាងក្រោម :

$g(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\cos^2 x$

4. លើជ្រុងទាំង3របស់ត្រីមុខកែងត្រង់កំពូល O គេយក $|OA| = 4a$, $|OB| = 3a\sqrt{2}$, $|OC| = 3a\sqrt{2}$ ដូចនេះគេបានចតុមុខ OABC ។

a.) គណនាចំងាយពីកំពូល O ទៅប្លង់ (ABC)

b.) បង្ហាញថាគ្រប់ទ្រនុងឈមគ្នារបស់ចតុមុខ OABC កែងគ្នា ។ រកបន្ទាត់កែងរួមរបស់គូទ្រនុងឈមនិមួយៗ

c.) ប្លង់មួយចល័តស្របនឹងប្លង់ (OBC) កាត់ចតុមុខ OABC បាន ΔPQR ។ រកទីតាំងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណនោះ ។

រកសំណុំចំនុចចំនោលកែងរបស់ផ្ចិតនោះលើប្លង់ (OBC) ។

ចម្លើយ

1. ពិនិត្យសមីការ : $\cos^2 2x \sin^2 6x \, \mathrm{Cotg}\, 3x = 0$ (1)

អង្គខាងឆ្វេងរបស់ (1) មានន័យកាលណា : $3x \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{3}$ (2)

ដូចនេះយើងបាន :

a) $\cos 2x = 0 \iff 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$

b) $\sin 6x = 0 \iff 6x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{6} \left(= \frac{2k\pi}{3}\right)$

c) $\mathrm{Cotg}\, 3x = 0 \iff 3x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$

ដូចនេះឫសរបស់ (1) គឺ : $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ និង $x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$ $(k \in \mathbb{Z})$

3. a) ពិនិត្យអំពីវិធីដោះស្រាយ :

1) សិស្សដោះស្រាយសមីការនោះខុះសម្មតិកម្ម $x \neq -2$ ដើម្បីអង្គខាងឆ្វេងរបស់សមីការ : $3^x . 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$ មានន័យ ដូចនេះគេមិនអាចខុះបានតួរលក្ខខណ្ឌ $x = -2$ ទេ ប្រសិនបើមាន ដូច្នេះ ។

2) ដោយ $3^{x-1} 2^{\frac{3x}{x+2}-1}$ គឺជាផលគុណនៃកត្តា : 3^{x-1} និង $2^{\frac{3x}{x+2}-1}$ ដូចនេះផលគុណនេះស្មើ 1 កាលណា $3^{x-1} = 1$ និង $2^{\frac{3x}{x+2}-1} = 1$ មានន័យថា : $x-1=0$ និង $\frac{3x}{x+2} - 1 = 0$ ឬ $x = 1$ ដូចសិស្សនោះបានធ្វើ ;

កត្តាមួយក្នុងចំនោមកត្តាទាំងពីរ : 3^{x-1} និង $2^{\frac{3x}{x+2}-1}$ ជាចំរាស់របស់កត្តាមួយទៀត ។ ដូចនេះហេតុផលនេះហើយដែលសិស្សដោះស្រាយខុះឫស ។ ជាក់ស្តែងយើងដោះស្រាយចំនោទនេះធ្វើជាឧទាហរណ៍មួយ ។

b) ពិនិត្យសមីការ $3^x . 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$ (1)

អង្គខាងឆ្វេងរបស់ (1) មានន័យកាលណា $x \neq -2$

ចែកអង្គទាំងពីររបស់ (1) និង $6 = 3 \times 2$

យើងបាន : $3^{x-1} . 2^{\frac{3x}{x+2}-1} = 1$

$\iff 3^{x-1} . 2^{\frac{2(x-1)}{x+2}} = 1$

$$\Leftrightarrow \left(3\cdot 2^{\frac{2}{x+2}}\right)^{x-1}_{2} = 1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \log_2\left(3\cdot 2^{\frac{2}{x+2}}\right)^{x-1} = \log_2 1$$

$$\Rightarrow (x-1)\log_2\left(3\cdot 2^{\frac{2}{x+2}}\right) = 0$$

1) $x-1=0 \Rightarrow x=1$

2 . $0 = \log_2\left(3\cdot 2^{\frac{2}{x+2}}\right) = \log_2 3 + \log_2 2^{\frac{2}{x+2}} = \log_2 3 + \dfrac{2}{x+2}$

$0 = x\log_2 3 + 2\log_2 3 + 2 \Rightarrow x = -\left(2+\dfrac{2}{\log_2 3}\right) = -2\left(1+\dfrac{1}{\log_2 3}\right) =$

$= -2\left(1+\log_3 2\right)$

ដូចនេះឫសរបស់សមីការ (1) គឺ :

$x = 1$ និង $x = -2\left(1+\log_3 2\right)$

4- យើងមាន

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right) -$$

$$-2\sin^2 x = \left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)^2 +$$

$$+\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)^2 + \left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos x + \sin\frac{2\pi}{3}\sin x\right)^2 +$$

$$+\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos x - \sin\frac{2\pi}{3}\sin x\right)^2 - 2\sin^2 x = 2\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2 x +$$

$$+2\sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2 x + 2\cos^2\frac{2\pi}{3}\cos^2 x + 2\sin^2\frac{2\pi}{3}\sin^2 x -$$

$$-2\sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

ដូចនេះ $f(x)$ មិនអាស្រ័យនឹង x និង $f(x) = 1$

យើងមាន :

$$f(x)+g(x) = \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right] + \left[\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right) +\right.$$

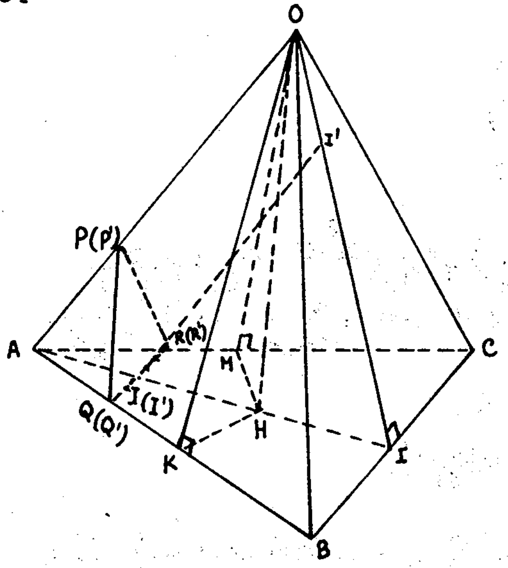
$$\left.+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right] + \left[\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right] + \left[\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right) +\right.$$

$$\left.+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)\right] - 2\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = 1+1+1+1-2 = 2$$

ដូចនេះ: $g(x) = 2 - f(x) = 2 - 1 = 1$

ដូច្នេះ:កន្សោម $g(x)$ ក៏មិនអាស្រ័យនឹង x ដែរ និង $g(x) = 1$ ។

5.



a) ពិនិត្យ $\Delta\perp AOB$, $\Delta\perp AOC$ និង $\Delta\perp BOC$ មាន :

$|BC| = \sqrt{|OB|^2 + |OC|^2} =$
$= \sqrt{2(3a\sqrt{2})^2} = 6a$

$|AB| = |AC| = \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2} =$
$= \sqrt{(4a)^2 + (3a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{34}$

យក I ជាចំនុចកណ្តាល [BC] ដោយ Δ BOC និង Δ BAC ជាត្រីកោណសមបាទ $\Rightarrow$ [OI] និង [AI] ជាកំពស់រៀងគ្នារបស់ Δ BOC និង Δ ABC ។

យក H ជាជើងកំពស់គូសចេញពី O ទៅប្លង់ (ABC) $\Rightarrow$ [OH] ជាចំងាយពីកំពូល O ទៅ (ABC) ។ គូស [OK] និង [OM] ជាកំពស់រៀងគ្នារបស់ Δ AOB និង Δ AOC ទៅជ្រុង [AB] និង [AC] យើងបាន : $|OK| = |OM|$ (ដោយត្រីកោណ AOB និង AOC ប៉ុនគ្នា) និងតាមទ្រឹស្តីបទ 3 បន្ទាត់កែង នោះ $[HK] \perp [AB]$ និង $[HM] \perp [AC]$ ។ ដូចនេះ $\Delta\perp OKH \cong \Delta\perp OMH$ និង H ស្ថិតនៅលើ [AI] ។ តាមសម្មតិកម្មយើងមាន : $[AO] \perp (OBC) \Rightarrow$
$\Rightarrow [AO] \perp [OI] \Rightarrow \Delta$ AOI កែងត្រង់ O ។

C $\Delta\perp$ សមបាទ BOC មាន :

$|BI| = |IC| = |IO| = \frac{|HC|}{2} = 3a$.

C $\Delta\perp$ ABI មាន :

$|AI| = \sqrt{|AB|^2 - |BI|^2} = 5a$

និង $\sin \widehat{OIA} = \frac{|OA|}{|AI|} = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow |OH| = |OI| \sin \widehat{OIA} = 3a \cdot \frac{4}{5} = \frac{12a}{5}$

b) ដោយ $[OC]\perp[AO]$, $[OC]\perp[OB] \Rightarrow [OC]\perp(AOB)$

$\Rightarrow [OC]\perp[AB]$, $[OC]\perp[OK]$

ម្យ៉ាងទៀត : $[OK]\perp[AB]$ ដូចនេះ $[OK]$ ជារង្គត់រួមរបស់ $[OC]$ និង $[AB]$ ។

ដោយ $\left.\begin{matrix}[OB]\perp[OA]\\ [OB]\perp[OC]\end{matrix}\right\} \Rightarrow [OB]\perp(AOC) \Rightarrow [OB]\perp[AC]$, $[OB]\perp[OH]$

ម្យ៉ាងទៀត $[OH]\perp[AC] \Rightarrow [OH]$ ជារង្គត់រួមរបស់ $[OB]$ និង $[AC]$ ដោយ : $\left.\begin{matrix}[OA]\perp[OB]\\ [OA]\perp[OC]\end{matrix}\right\} \Rightarrow [OA]\perp(BOC) \Rightarrow [OA]\perp[BC]$; $[OA]\perp[OI]$

ម្យ៉ាងទៀត $[OI]\perp[BC] \Rightarrow [OI]$ ជារង្គត់រួមរបស់ $[AO]$ និង $[BC]$ ។

តាមខាងលើ យើងមាន : $|OI| = 3a$

ពិនិត្យ $\Delta\perp AOB$ មាន : $\sin\widehat{BAO} = \frac{|OB|}{|AB|} = \frac{3a\sqrt{2}}{a\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$

ដូចនេះយើងមាន (តាមខាងលើ) : $|OH| = |OK| = |OA|\sin\widehat{BAO} = 4a\frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{12a}{\sqrt{17}}$

c) ប្លង់ (PQR) ស្របនឹងប្លង់ $(OBC) \Rightarrow [PQ]//[OB]$; $[PR]//[OC]$ (និង $[QR]//[BC]$) តែ $[OB]\perp[OC]$ ដូចនេះ $[PQ]\perp[PR]$ យក J ជាចំនុចកណ្តាលរបស់ $[QR] \Rightarrow J$ ស្ថិតលើ $[AI]$ (ព្រោះ $[AI]$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំរបស់ Δ សមបាទ BAC) និងយើងមាន $|JQ| = |JR| = |JR|$

$\Rightarrow J$ ជាផ្ចិតរបស់រង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔPQR ។ ពេល (PQR) ចល័តស្របនឹង (OBC) នោះផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅរបស់ ΔPQR រត់នៅលើបន្ទាត់ (AI) ។ ដោយ $[AO]\perp(OBC) \Rightarrow [OI]$ ជាចំណោលរបស់ $[AI]$ លើ (OBC) ។ ដូច្នេះសំណុំចំនុចចំណោលរបស់ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔRQP លើ (OBC) កាលណា (PQR) ចល័តស្របនឹង (OBC) គឺ (OI) ។ ច្រាសមកវិញ : យក $I'\in[OI]$ ក្នុង (AOI) គូសពី I' នូវបន្ទាត់ស្របនឹង $[OA]$ កាត់ $[AI]$ ត្រង់ J' ។ យក $(P'Q'R')$ ជាប្លង់កាត់តាម J' ស្របនឹងប្លង់ (OBC) យើងបាន : $[OA]\perp(OBC) \Rightarrow [I'J']\perp(BOC)$ ដូចនេះ I' ជាចំណោលរបស់ J' ។

ដោយ $(P'Q'R') // (OBC)$ ⇒ តាមការបង្ហាញខាងលើយើងបាន

$\Delta P'Q'R'$ កែងត្រង់ P' និងដោយ $[AI]$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះរបស់ $\Delta BAC \Rightarrow |J'Q'| = |J'R'| = |J'P'|$

ដូចនេះ J ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ $\Delta P'Q'R'$ ។

<u>វិញ្ញាសាទី ៩</u>

1. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាភិចអនុគមន៍ : $y = \sin x + \cos x$

2. ដោះស្រាយសមីការ :

$$(\lg ax)^2+(\lg bx)^2+(\lg cx)^2=(\lg a)^2+(\lg b)^2+(\lg c)^2$$

3. រកគ្រប់គូចំនួនពិត (x,y) ឬសរបស់សមីការ :

$$x^2-6x\sin y+9=0$$

4. គេចង់រកចំនុច G មួយនៅក្នុងប្លង់របស់ ΔABC ដែលគ្រប់បន្ទាត់កាត់តាម G និងស្ថិតក្នុង (ABC) សុទ្ធតែចែក ΔABC ជាពីរផ្នែកមានក្រឡាផ្ទៃស្មើគ្នា ។ តើអាចរកបានចំនុច G ដូចនេះឬទេ?

5. លើរង្វង់មួយដែលគេឲ្យមុន , គេយកចំនុច A, B នឹង និង C ប្រែប្រួល ។ រកសំណុំចំនុចផ្ចិតរបស់រង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC ពេល C ចល័ត ។

<u>ចម្លើយ</u>

1. អនុគមន៍ : $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ កំនត់ $\forall x$

តាមកន្សោម y ⇒ ខ្សែកោងរបស់ y មានរាងស៊ីនុស៊ុយអ៊ីត ។

ពេល x ប្រែប្រួល ⇒ $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ មានតម្លៃធំបំផុតគឺ 1 និងតម្លៃតូចបំផុតគឺ -1 ។

$\Rightarrow y_{max} = \sqrt{2}$ ត្រង់ $x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+2k\pi$ ឬ $x = \frac{\pi}{4}+2k\pi$

$y_{min} = -\sqrt{2}$ ត្រង់ $x+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ឬ $x = -\frac{3\pi}{4}+2k\pi$.

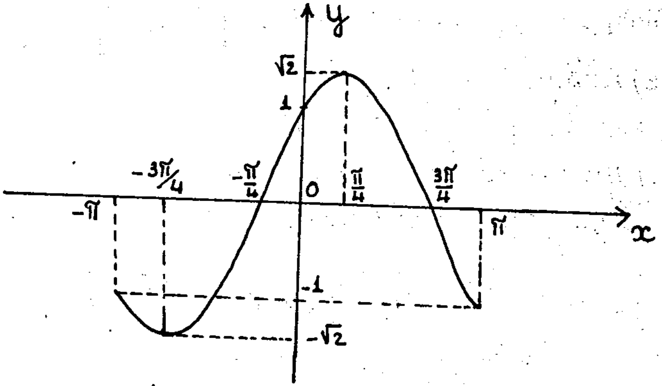
ដោយ $y' = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow y'' = -\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ ស្មើ 0 ចំពោះ $x+\frac{\pi}{4} = k\pi$,

ឬ $x = -\frac{\pi}{4}+k\pi$; y'' ប្ដូរសញ្ញាកាលណាកាត់តាមតម្លៃនោះ ។

ដូចនេះក្រាភិច $y = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ មានចំនុចរបត់ត្រង់

$$x = -\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (y=0)$$



ដោយ $\sin(x+\frac{\pi}{4})$ មានខួបស្មើ 2π ដូចនេះយើងសង់ក្រាភិចរបស់ $y=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ ក្នុងចន្លោះ $[-\pi,\pi]$ ។ ខ្សែកោងរបស់ y កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y=1$ និងកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

2. ពិនិត្យសមីការ : $(\lg ax)^2+(\lg bx)^2+(\lg cx)^2=(\lg a)^2+(\lg b)^2+(\lg c)^2$ (1)

ដើម្បីឲ្យអង្គទាំងពីររបស់ (1) មានន័យ លុះត្រាតែ : a,b,c និង x វិជ្ជមាន

(1) សមមូលនឹង :

$$(\lg a+\lg x)^2+(\lg b+\lg x)^2+(\lg c+\lg x)^2=(\lg a)^2+(\lg b)^2+(\lg c)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(\lg x)^2+2\lg x(\lg a+\lg b+\lg c)=0$$

$$\Leftrightarrow \lg x(3\lg x+2\lg abc)=0$$

a) $\lg x=0 \Rightarrow x=1$.

b) $0=3\lg x+2\lg abc=\lg x^3+\lg a^2b^2c^2=$

$0=\lg x^3a^2b^2c^2$

$$\Rightarrow x^3a^2b^2c^2=1,\ x=\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}=\frac{\sqrt{abc}}{abc}$$

ដូចនេះ (1) មានឫស :

$$x=1 \text{ និង } x=\frac{\sqrt{abc}}{abc}$$

3 - a) របៀបទី1 :

យើងមាន $0=x^2+6x\sin y+9=(x-3\sin y)^2+9(1-\sin^2 y)$ (1)

ដោយ : $1-\sin^2 y \geq 0 \Rightarrow (1)$ សមមូលនឹងប្រព័ន្ធ : $\begin{cases} 1-\sin^2 y = 0 & (2) \\ x-3\sin y = 0 & (3) \end{cases}$

ដោះស្រាយ (2) យើងបាន $\sin y = \pm 1$ ឬ :

$y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ និង $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (4)$

ជំនួស (4) ចូល (3) យើងបាន : $x = 3$ និង $x = -3$

ដូចនេះយើងបានគូចម្លើយរបស់សមីការ :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ និង } \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) របៀបទី2 : $x^2 - 6x\sin y + 9 = 0 \quad (5)$

(5) មានឫសចំពោះ x យើងមាន :

$\Delta = 9\sin^2 y - 9 = 9(\sin^2 y - 1) \geq 0$ ឬ $\sin^2 y \geq 1$

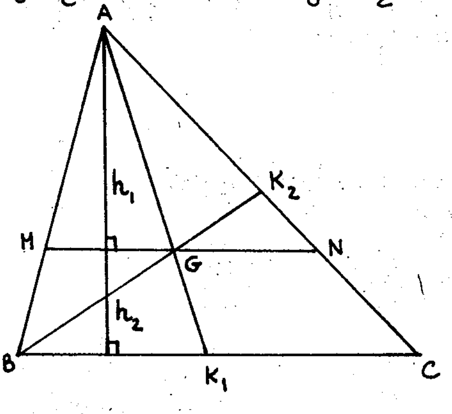
ដោយ : $\sin^2 y \leq 1 \Rightarrow$ មានតែ $\sin^2 y = 1$

ឬ $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ និង $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (6)$

ជំនួស (6) និង (5) រួចដោះស្រាយ យើងបាន : $x = 3$ និង $x = -3$

ដូចនេះយើងបានគូចំលើយ :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ និង } \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



១ បមាមានចំនុច G មួយនៅក្នុងផ្ទៃរបស់ $\triangle ABC$ ដែលគ្រប់បន្ទាត់កាត់តាម G និងស្ថិតក្នុង (ABC) សុទ្ធតែចែក $\triangle ABC$ ជាពីរផ្នែកមានក្រលាផ្ទៃស្មើគ្នា ឬ

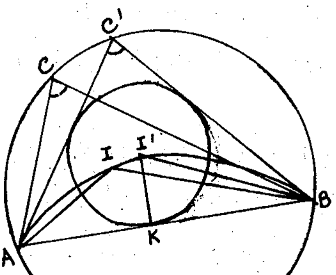
a) តាមលក្ខណៈខាងលើ G មិនអាចជាកំពូលមួយក្នុងចំណោមកំពូលទាំងបី ឬនៅលើជ្រុងមួយក្នុងចំណោមជ្រុងទាំងបីរបស់ ΔABC ទេ ឬស្ថិតនៅក្រៅ ΔBCA ទេ ព្រោះពី G យើងគូសបន្ទាត់ស្របនឹងជ្រុងមួយក្នុងចំណោមជ្រុងទាំងបី នោះបន្ទាត់នោះមិនកាត់ ΔABC ទេ ។

b) ឥឡូវនេះយើងឧបមាថា G មានលក្ខណៈស្ថិតក្នុង ΔABC ។ ភ្ជាប់ G ទៅ A, G ទៅ B និងបន្លាយរបស់វាកាត់ $[BC]$ ត្រង់ K_1, កាត់ $[AC]$ ត្រង់ K_2 ។ តាមលក្ខណៈរបស់ G ដូចនេះ $[AK_1]$ និង $[BK_2]$ ជាមេដ្យានរបស់ ΔABC, ព្រោះ $S(ABK_1) = S(ACK_1)$ និងជាត្រីកោណពីរមានកំពស់ $[AH]$ រួម $\Rightarrow |BK_1| = |CK_1|$ ដូចគ្នាដែរ $|AK_2| = |CK_2|$ ដូចនេះ G ជាទីប្រជុំទម្ងន់របស់ ΔABC ។ ពី G គូសបន្ទាត់ស្របនឹង $[BC]$ កាត់ $[AB]$ ត្រង់ M និង $[AC]$ ត្រង់ N, យើងបាន:

$S(AMN) = \frac{1}{2}|MN|h_1 = |MN| \times h_2$ h_1 ជាកំពស់របស់ ΔAMN, h_2 ជាកំពស់របស់ចតុកោណព្នាយ MBCN និង $S_{(MBCN)} = \frac{1}{2}(|MN| + |BC|)h_2 =$
$= \frac{1}{2}\left(|MN| + \frac{3}{2}|MN|\right) \times h_2 = \frac{5}{4}|MN| \times h_2 \Rightarrow S_{(MBCN)} > S(AMN)$

លក្ខណៈនេះទំនាស់ជាមួយលក្ខណៈរបស់ G ។ ដូចនេះចំនុច G មិនស្ថិតនៅក្នុង ΔABC ។ ដូច្នេះគ្មានចំនុច G ដែលមានលក្ខណៈដូចខាងលើទេ ។

5-



(AB) ចែករង្វង់បានធ្នូពីរ ស្ថិតនៅសងខាង (AB) ។ យករង្វាស់របស់ធ្នូទាំងពីរគឺ α និង β, $\alpha > \beta$ ។ ចំនុច C ចល័តលើធ្នូមានរង្វាស់ α ។ យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង ΔABC ។ ដោយ I ជាចំនុចប្រសព្វរបស់កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំទាំងពីរ $\Rightarrow \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{1}{2}(\widehat{CAB} + \widehat{CBA}) =$
$= \frac{1}{4}\widehat{ACB} = \frac{\alpha}{4}$ ដូច្នេះ:
$\widehat{AIB} = \pi - (\widehat{IAB} + \widehat{IBA}) = \pi - \frac{\alpha}{4}$
$\Rightarrow$ I ស្ថិតលើរង្វង់ស្កាត់ដោយអង្កត់ធ្នូ $[AB]$ មើលក្រោមមុំថេរស្មើ $\pi - \frac{\alpha}{4}$ ។

ធ្នូនោះស្ថិតខាងធ្នូដែលមានរង្វាស់ α ចំពោះអង្កត់ធ្នូ [AB] ។ ច្រាស់មកវិញ បើយើងយក I' ជាចំនុចមួយនៅលើធ្នូខាងលើ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា I' ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង $\Delta ABC'$ ណានោះ, ចំពោះ C' ស្ថិតនៅលើរង្វង់ដែលគេឲ្យ ។ បើ $I' \equiv A$ ឬ $I' \equiv B$ នោះគេអាចយកដូចគ្នា $C' \equiv A$; $C' \equiv B$ ពេលនោះផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រួតស៊ីគ្នានឹង A និង B ។ សន្មតកម្ម I' មិនត្រួតស៊ីគ្នា A និង B ។ ពី I' គូសបន្ទាត់កែង $(I'K)$ ទៅ [AB] ។ ពី A និង B គូសបន្ទាត់ប៉ះរៀងគ្នាទៅរង្វង់ផ្ចិត I' កាំ $[I'K]$ បន្ទាត់ទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ C' ។ ដូចនេះ I' ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង $\Delta ABC'$ ។

ដូច្នេះ : $\frac{1}{2}\left(\widehat{C'AB} + \widehat{C'BA}\right) = \left(\widehat{I'AB}\right) + \left(\widehat{I'BA}\right) = \pi - \widehat{AI'B} = \frac{\alpha}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{C'AB} + \widehat{C'BA} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow C'$ ស្ថិតលើរង្វង់ដែលឲ្យ (លើធ្នូរួមមួយស្កាត់ដោយ [AB]) ពីខាងលើយើងបានសមតកម្មថា : C ចល័តលើធ្នូមួយដែលមានរង្វាស់ α ។ ដោយ C អាចចល័តគ្រប់ចំនុចទាំងអស់លើរង្វង់ ដូចនេះយើងសន្និដ្ឋានបាន: សំនុំចំនុចដែលត្រូវរកគឺជាធ្នូពីរកាត់តាម [AB] ស្ថិតក្នុងរង្វង់ដែលឲ្យនិងស្កាត់ដោយអង្កត់ធ្នូ [AB] នូវមុំ $\pi - \frac{\alpha}{4}$; $\pi - \frac{\beta}{4}$ (α, β ជារង្វាស់ធ្នូពីររបស់រង្វង់ដែលឲ្យកំនត់ដោយ A និង B , $\alpha + \beta = 2\pi$) ។

វិញ្ញាសាទី 10

1- គេឲ្យអនុគមន៍ $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + m}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ កាលណា $m = 2$ ។
ចូររកតម្លៃពិសេសរបស់ m ដែលធ្វើឲ្យក្រាភិចមានរាងមិនធម្មតា ។
តើរាងមិនធម្មតានោះយ៉ាងដូចម្តេច ?

បង្ហាញថា ចំពោះ $\forall$ តម្លៃរបស់ m ក្រាភិចកាត់តាមពីរចំនុចនឹង ។

2- ត្រីកោណសមបាទមួយមានបរិមាត្រ $2p$ ។ គណនាជ្រុងរបស់វា ដើម្បីឲ្យមាឌរបស់សូលីដកើតឡើងដោយរង្វិលរបស់ត្រីកោណនោះជុំវិញអ័ក្សឆ្លុះវាមានតម្លៃធំបំផុត ។

(3) ដោយស្គាល់ $tg\alpha$ និង $tg\beta$ ជាឫសរបស់សមីការដឺក្រេទី2 :

$$x^2 + px + q = 0$$

ចូរគណនាកន្សោម : $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$ ជាអនុគមន៍នៃ p និង q ។

4- គេឲ្យស្វ៊ែរមួយមានកាំ R ។ (L) ជាប្រសព្វរបស់ស្វ៊ែរនិងប្លង់ (P) ឃ្លាតពីផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរចំងាយ h $(0<h<R)$ ។ A ជាចំនុចមួយលើ (L) ។ មុំកែង xAy នៅក្នុងប្លង់ (P) វិលជុំវិញចំនុច A, $[Ax)$; $[Ay)$ កាត់ (L) ត្រង់ C, D ។ បន្ទាត់កាត់តាម A កែងនឹង (P) កាត់ស្វ៊ែរត្រង់ B ។

a) បង្ហាញថាផលបូក $|BC|^2+|AD|^2$ និង $|BD|^2+|AC|^2$ ជានិច្ចជាកាលមានតម្លៃថេរ ។

b) ចំពោះតម្លៃណារបស់ $|CD|$ ទើបក្រលាផ្ទៃរបស់ ΔBCD មានតម្លៃធំបំផុត ។

c) រកសំនុំចំនុចរបស់ចំណោល H នៃ B លើ (CD) ។

5- រកចំនួនពិត x, y ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $tg^2x+cotg^2x=2\sin^2y$

ចម្លើយ

1- អនុគមន៍ $y=\dfrac{x^2-x-2}{x+m}$

a) ករណី $m=2$

$y=\dfrac{x^2-x-2}{x+2}=x-3+\dfrac{4}{x+2}$ កំណត់ចំពោះ $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$

$y'=1-\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

$y'=0 \iff x=-4$ និង $x=0$

$y'<0 \iff -4<x<0 \; ; (x\neq-2)$

$y'>0 \iff x<-4$ និង $x>0$

ដូចនេះអនុគមន៍ $y=\dfrac{x^2-x-2}{x+2}$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=-4$ $(y=-9)$ និងអប្បបរមាត្រង់ $x=0$ $(y=-1)$ ។

យើងបានតារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-9	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-1	↗	$+\infty$

ខ្សែកោង $y=\frac{x^2-x-2}{x+2}=\frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)}$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=-1$, $x=2$ និងកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y=-1$ ដោយ:

$\lim\limits_{x\to -2} y=\lim\limits_{x\to -2}\left(x-3+\frac{4}{x+2}\right)=\infty \Rightarrow y=\frac{x^2-x-2}{x+2}$ មានអាស៊ីមតូតឈរ: $x=-2$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty}[y-(x-3)]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{4}{x+2}\right]=0$

$\Rightarrow y=\frac{x^2-x-2}{x+2}$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេត: $y=x-3$

យើងបាន $y+5=x+2+\frac{4}{x+2}$

តាង: $X=x+2$, $Y=y+5$

$\Rightarrow$ (1) ទៅជាសរសេរជារាង:

$Y=X+\frac{4}{X}$

ដោយ: $Y(-X)=-X-\frac{4}{X}=$

$=-\left(X+\frac{4}{X}\right)=-Y(X)$

$\Rightarrow Y(X)$ ជាអនុគមន៍សេស

ដូចនេះក្រាភិចរបស់ $Y=X+\frac{4}{X}$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អ័ក្សថ្មី

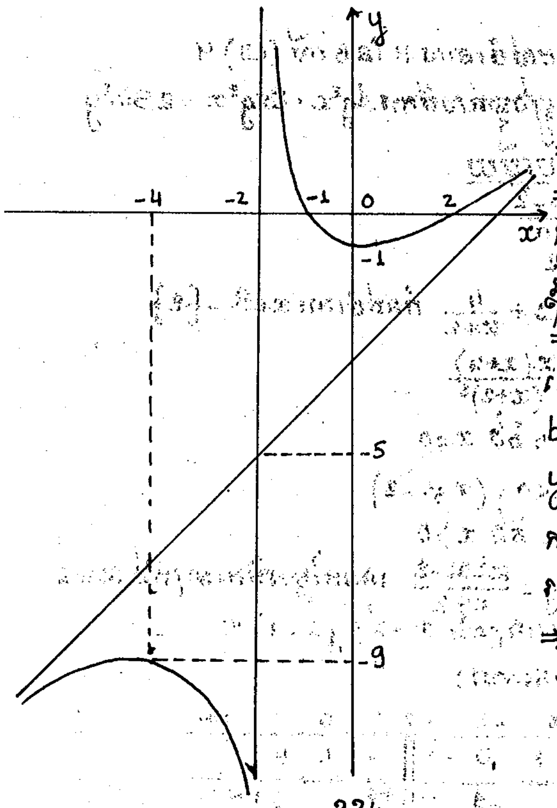
$\Rightarrow y=x-3+\frac{4}{x+2}$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំណុច $(-2,-5)$

b) យើងពិនិត្យអនុគមន៍:

$y=\frac{x^2-x-2}{x+m}=\frac{(x+1)(x-2)}{x+m}$

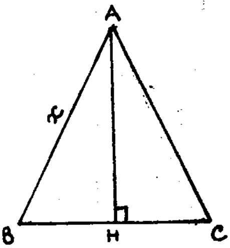
កាលណា $-m$ ត្រូវជាឫសមួយរបស់ត្រីធា x^2-x-2

$\Rightarrow m=+1$ និង $m=-2$



ចំពោះ $m = 1$ យើងបាន : $y = \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = x - 2$ ចំពោះ $x \neq -1$
ក្នុងករណីនេះ ក្រាភិចរបស់បន្ទាត់ $y_1 = x - 2$ មិនកាត់តាមចំណុច $(-1,-3)$ ។
ចំពោះ $m = -2 \Rightarrow y = \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = x + 1$ ចំពោះ $x \neq 2$
ក្នុងករណីនេះក្រាភិចរបស់បន្ទាត់ $y_2 = x+1$ មិនកាត់តាមចំនុច $(2;3)$ ។
ខ)- ដោយ $x = -1$ និង $x = 2$ ជាឫសរបស់ត្រីធា $x^2 - x - 2 \Rightarrow$ ក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ $y = \frac{x^2-x-2}{x+m}$ ជានិច្ចជាកាលកាត់តាមចំនុច $(-1,0)$ និង $(2,0)$ ចំពោះ $\forall m$ ។ កាលណា $m = 1$ នោះក្រាភិចកាត់តាមចំនុច $(2,0)$, កាលណា $m = -2$ ក្រាភិចកាត់តាមចំនុច $(-1,0)$ ។ ដូចនេះ ចំនុចទាំងពីរនេះជាចំនុចដែលយើងត្រូវរក ។ អាចបង្ហាញថាក្រៅពីចំនុចទាំង 2 នោះគ្មានចំនុចណានឹងផ្សេងទៀតទេ ។

2 -



យក $[BC]$ ជាបាតរបស់ត្រីកោណសមបាទ ABC មានបរិមាត្រ $2p$ និង H ជាជើងកំពស់គូសពីកំពូល A ។ តាង $x = |AB| = |AC|$ យើងបាន :

$$|BC| = 2p - 2x = 2(p-x)$$

$$|BH| = \frac{BC}{2} = p - x$$

$$|AH| = \sqrt{|AB|^2 - |BH|^2} = \sqrt{x^2 - (p-x)^2} = \sqrt{2px - p^2}$$

យក V ជាមាឌរបស់កោនតាំងលើ យើងមាន :

$V = \frac{1}{3}\pi |BH|^2 |AH| = \frac{1}{2}\pi (p-x)^2 \sqrt{2px - p^2}$ ដោយ $2p$ ជាបរិមាត្ររបស់ $\Delta ABC \Rightarrow 2p > 2x$ ឬ $p > x$

និង $2x > 2p - 2x$ ឬ $x > \frac{p}{2}$

$$\Rightarrow \frac{p}{2} < x < p$$

យើងបាន

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi\left[-2(p-x)\sqrt{2px - p^2} + \frac{p(p-x)^2}{\sqrt{2px-p^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{p(p-x)(3p-5x)}{\sqrt{2px+p^2}}$$

កាលណា x ប្រែប្រួលក្នុងចន្លោះ $(\frac{p}{2}, p)$ នោះ $V'(x)=0$ ចំពោះ $x=\frac{3p}{5}$,
$V'(x)<0$ ចំពោះ $\frac{3p}{5}<x<p$ $V'(x)>0$ ចំពោះ $\frac{p}{2}<x<\frac{3p}{5}$
ដូចនេះ V មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=\frac{3p}{5}$
យើងបានតារាងអថេរភាព :

x	$\frac{p}{2}$		$\frac{3p}{5}$		p
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi p^3\sqrt{5}}{3.5^3}$	$\searrow$	0

ដូចនេះចំពោះ $|AB|=|AC|=\frac{3p}{5}$ និង $|BC|=2p-2.\frac{3p}{5}=\frac{4p}{5}$, នោះមាឌសូលីដដែលកើតឡើងដោយ ΔABC ពេលវិលរបស់វាជុំវិញអ័ក្សឆ្លុះ មានតម្លៃធំបំផុត

3 - ដោយ : $tg\alpha, tg\beta$ ជាឫសរបស់សមីការ : $x^2+px+q=0$
$\Rightarrow \cos\alpha\cos\beta \neq 0$ (ដើម្បីឲ្យ $tg\alpha, tg\beta$ មានន័យ)
តាមប្រព័ន្ធ :

$$\begin{cases} -p = tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\ q = tg\alpha\, tg\beta \end{cases}$$

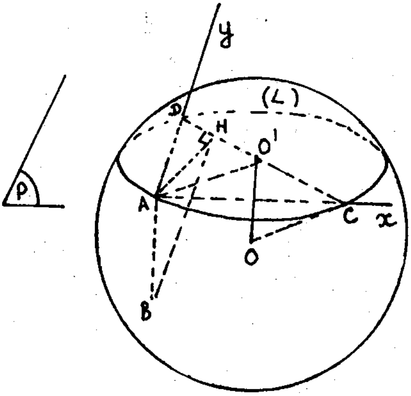
$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = -p\cos\alpha\cos\beta$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta(1-tg\alpha\, tg\beta) = (1-q)\cos\alpha\cos\beta$$

ដោយ : $1 = \sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)$
$\Rightarrow \quad 1 = [p^2+(1-q)^2]\cos^2\alpha\cos^2\beta$
ដូចនេះ: $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta) =$
$= p^2\cos^2\alpha\cos^2\beta - p^2(1-q)\cos^2\alpha\cos^2\beta + q(1-q)^2\cos^2\alpha\cos^2\beta =$
$= q[p^2+(1-q)^2]\cos^2\alpha\cos^2\beta = q$

4 - a. ដោយ $[AB]$ កែងនឹង (P)

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}(AB)\perp(AC)\\(AB)\perp(AD)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2 & (1)\\ |BD|^2=|AB|^2+|AD|^2 & (2)\\ |AC|^2+|AD|^2=|DC|^2 & (3)\end{matrix}$$



(1) និង (3) យើងបាន :

$|BC|^2+|AD|^2=|AB|^2+|AC|^2+|AD|^2=$
$=|AB|^2+|DC|^2$

(2) និង (3) យើងបាន :

$|BD|^2+|AC|^2=|AB|^2+|AD|^2+|AC|^2=$
$|AB|^2+|DC|^2$ ហើយ B ស្ថិតលើប្លង់ឆ្លុះនិង (P) ធៀបនឹង O

$\Rightarrow |AB|=2|OO'|=2h$

$|DC|=2|O'C|=2\sqrt{|OC|^2-|OO'|^2}=$
$=2\sqrt{R^2-h^2}\Rightarrow |BC|^2+|AD|^2=$
$=|BD|^2+|AC|^2=|AB|^2+|DC|^2=$
$=4h^2+4(R^2-h^2)=4R^2$

ដូចនេះតម្លៃរបស់ផលបូក : $|BC|^2+|AD|^2$ និង $|BD|^2+|AC|^2$ មិនប្រែប្រួល ។

b) យក S ជាក្រលាផ្ទៃ ΔBCD , H ជាជើងកំពស់របស់ ΔBCD គូសពី B ទៅ [CD] យើងបាន : $S=\frac{1}{2}|CD|.|BH|$

ដោយ $|CD|$ មិនប្រែប្រួល $\Rightarrow$ S ធំបំផុតកាលណា $|BH|$ ធំបំផុត ។

ក្នុង $\Delta\perp HBO'$ មាន: $|BH|\leqslant|BO'|\Rightarrow|BH|$ ធំបំផុតកាលណា $|BH|=|BO'|$ គឺ H ត្រួតលើ O' ។

ដោយ $\left.\begin{matrix}[BA]\perp(P)\\ [BO']\perp(CD)\end{matrix}\right\}\Rightarrow|AO'|\perp(CD)$ (ទ្រឹស្តីបទបីបន្ទាត់កែង)

$\Rightarrow$ S មានតម្លៃធំបំផុតកាលណា $[CD]\perp[AO']$ ។

c) ដោយ $\left.\begin{matrix}(AB)\perp(ACD)\\ (BH)\perp(CD)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(CD)\perp(AH)$

(តាមទ្រឹស្តីបទបីបន្ទាត់កែង) ដូចនេះ H ស្ថិតនៅលើរង្វង់កាំ [AO'] ។
ច្រាសមកវិញ : យក H' ជាចំនុចមួយរបស់រង្វង់ កាំ [AO'] ។
ភ្ជាប់ H' ទៅ A, B និង O' ; បន្លាយ [H'O'] កាត់ (L) ត្រង់ C' និង D' ។
ដោយ [C'D'] ជាអង្កត់របស់ (L) $\Rightarrow\Delta C'AD'$ កែងត្រង់ A

ដូចនេះ $\widehat{C'AD'}$ ជាទីតាំងមួយរបស់មុំ xAy កាត់ (L) ត្រង់ C' និង D'

ដោយ $\left.\begin{array}{l}(AB)\perp(AC'D')\\ (AH')\perp(C'D')\end{array}\right\}\Rightarrow (BH')\perp(C'D')$ (តាមទ្រឹស្តីបទបីបន្ទាត់កែង)

ដូចនេះ H ជាចំណោលកែងរបស់ B លើ $(C'D')$ ។

$\Rightarrow$ សំណុំចំនុចរបស់ចំណោលកែង H របស់ B លើ (CD) កាលណាមុំ xAy វិលជុំវិញចំនុច A ជារង្វង់អង្កត់ $[AO']$ ($[AO']$ ថេរ ព្រោះ A និង O' នឹង) ។

5- ពិនិត្យសមីការ : $tg^2x + Cotg^2x = 2Sin^2y \quad (1)$

អង្គខាងឆ្វេងរបស់ (1) មានន័យកាលណា $x \neq k\pi$ និង $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

a) <u>របៀបទី1</u> : $0 = tg^2x + Cotg^2x - 2Sin^2y =$

$= (tgx - Cotgx)^2 + 2(1 - Sin^2y)$

ដោយ : $1 - Sin^2y \geqslant 0 \Rightarrow (1)$ សមមូល :

$$\begin{cases} 1 - Sin^2y = 0 \\ tgx - Cotgx = 0 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} Sin^2y = 1 & (2) \\ tgx = Cotgx & (3) \end{cases}$$

ដោះស្រាយ $(2) \Rightarrow y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

ដោះស្រាយ $(3) \Rightarrow x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k'\pi$ ឬ $x = \frac{\pi}{4} + k'\frac{\pi}{2}$

ដូច្នេះគូចម្លើយគឺ : (របស់សមីការ (1)) :

$$x = \frac{\pi}{4} + k'\frac{\pi}{2}\,,\quad y = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k, k' \in \mathbb{Z})$$

b) <u>របៀបទី2</u> : យើងបាន (ដោយ $x \neq k\pi$)

$$0 = tg^2x + Cotg^2x - 2Sin^2y = tg^2x + \frac{1}{tg^2x} - 2Sin^2y =$$

$$= \frac{tg^4x - 2Sin^2y\,tg^2x + 1}{tg^2x}$$

ដូចនេះ (1) សមមូលនឹង : $tg^4x - 2Sin^2y\,tg^2x + 1 = 0 \quad (4)$

តាង $X = tg^2x \geqslant 0$ ជំនួសចូល (4) យើងបាន:

$$X^2 - 2Sin^2y\,X + 1 = 0 \quad (5)$$

(5) មានឫសចំពោះអញ្ញាត X កាលណា:

$$\Delta' = Sin^2y - 1 \geqslant 0 \text{ ឬ } Sin^2y \geqslant 1$$

ដោយ $\sin^2 y \leq 1$ ដូចនេះមានតែ $\sin^2 y = 1 \Rightarrow y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ និងពេលនោះ $\Delta' = 0$ ។ ដូច្នេះ $X = tg^2 x = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k'\pi$ ដូចនេះគូចំនួនពិត : $x = \pm\frac{\pi}{4} + k'\pi$, $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k, k' \in \mathbb{Z})$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (1) ។

វិញ្ញាសាទី 11

1. ដោះស្រាយសមីការ : $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. សិក្សាអថេរភាពនិងគូសខ្សែកោងអនុគមន៍ : $y = x^3 - 3x^2 + 2$
   សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប់ចំនុចរបត់របស់ខ្សែកោង
3. ដោះស្រាយសមីការ : $\sqrt{2x-1} < 2x-3$
4. គេមានចតុកោណកែង ABCD មួយនៅក្នុង (P) ។ លើបន្ទាត់កាត់តាម A កែងនឹង (P) យើងដៅចំនុច S មួយ ។
   a) គណនាក្រលាផ្ទៃខាងរបស់ពីរ៉ាមីត SABCD ដោយដឹងថា
   $|SA| = |AC| = a$, $\widehat{ACD} = \alpha$ ។
   b) យក L, M, N ជាចំណោលកែងនៃ A លើ [SB], [SC], [SD] ។ បង្ហាញថា : 5 ចំនុច S, A, L, M និង N ស្ថិតនៅលើស្វ៊ែរតែមួយ ។ តើស្វ៊ែរនោះយ៉ាងដូចម្តេចចំពោះ (P) ។

ចម្លើយ

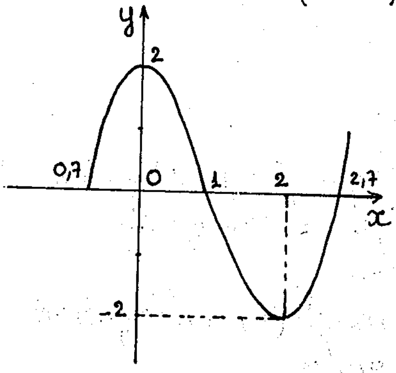
1. ពិនិត្យសមីការ $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$
   $\Rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ និង $3x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$
   $\Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{3}$ និង $x = \frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$
2. អនុគមន៍ $y = x^3 - 3x^2 + 2$ កំណត់ $\forall x \in \mathbb{R}$
   $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
   $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $(y = 0)$ និង y' ប្តូរសញ្ញាកាលណាកាត់តាម $x = 1$ ។ ដូចនេះក្រាបអនុគមន៍ y មានចំនុច (1,0) ជាចំនុចរបត់ ។

យើងមាន : $y = x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)^3 - 3(x-1)$ (1)

តាង $X = x-1$; $Y = y$

$\Rightarrow$ (1) អាចសរសេរជារាង : $Y = X^3 - 3X$

$\Rightarrow Y(-X) = -X^3 + 3X = -(X^3 - 3X) = -Y(X)$



ដូចនេះ Y ជាអនុគមន៍សេស ដូចនេះ ខ្សែកោងរបស់ Y នឹងឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អ័ក្សថ្មី $\Rightarrow$ ខ្សែកោងរបស់ y ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំណុចរបត់ (1,0) ។ យើងមាន : $y'(1) = -3$ ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់ (1,0) របស់ខ្សែកោងគឺ : $y = -3(x-1)$ ។

3. ពិនិត្យសមីការ : $\sqrt{2x-1} < 2x+3$ (1)

អង្គខាងឆ្វេងរបស់ (1) មានន័យលុះត្រាតែ : $2x-1 \geq 0$ ឬ $x \geq \frac{1}{2}$ ។ អង្គខាងឆ្វេងរបស់ (1) វិជ្ជមាន ដូចនេះអង្គខាងស្តាំរបស់ (1) ត្រូវវិជ្ជមានដើម្បី (1) មានឫស ។ ដូចនេះ $x > \frac{3}{2} \Rightarrow$ យើងពិនិត្យតែករណី $x > \frac{3}{2}$ ។

- របៀបទី 1 :

$$(2x-1) < (2x-3)^2$$

$$2x-1 < 4x^2 - 12x + 9$$

$$0 < 4x^2 - 14x + 10$$

$$0 < 4(x-1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

ហើយ : $x > \frac{3}{2} \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow$ ដូចនេះវិសមីការចុងក្រោយមានឫស : $x > \frac{5}{2}$ (នោះក៏ជាឫសដែលត្រូវរកដែរ) ។

- របៀបទី 2 :

(1) សរសេរជារាង :

$$\sqrt{2x-1} < \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 - 2$$

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 - \sqrt{2x-1} - 2 > 0 \quad (2)$$

តាង $y = \sqrt{2x-1} > 0$ (3)

យើងបាន : $y^2 - y - 2 > 0$

$(y+1)(y-2) > 0 \Rightarrow y < -1$ និង $y > 2$

តាម (3) $\Rightarrow y = \sqrt{2x-1} > 2$ (4)

ជាឫសមួយរបស់ (2)

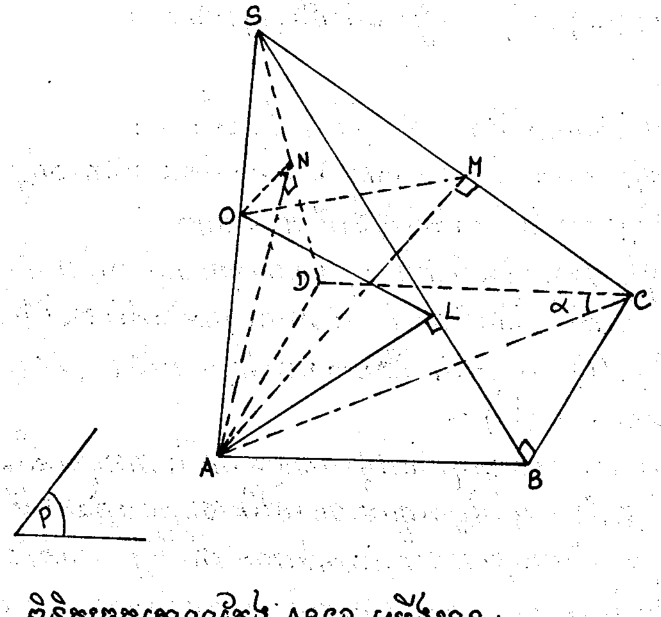
វិសមីការ (4) សមមូល : $2x-1 > 4$ ឬ $x > 2,5$

ដូចនេះឫសរបស់សមីការ (1) : $x > 2,5$

4.a) ដោយ $[SA] \perp (P)$ យើងបាន : $\widehat{SAB} = \widehat{SAD} = \frac{\pi}{2}$

$\widehat{SBC} = \widehat{SDC} = \frac{\pi}{2}$

(តាមទ្រឹស្តីបទបីបន្ទាត់កែង)



ពិនិត្យចតុកោណកែង ABCD យើងមាន :

$|BC| = |AD| = a\sin\alpha$

$|AB| = |DC| = a\cos\alpha$

ក្នុង $\Delta\perp SAD$ និង SAB មាន : $|SD| = \sqrt{|SA|^2 + |AD|^2} = a\sqrt{1+\sin^2\alpha}$

$|SB| = \sqrt{|SA|^2+|AB|^2} = a\sqrt{1+\cos^2\alpha}$

ក្រឡាផ្ទៃខាងរបស់ពីរ៉ាមីត SABCD គឺ:

$S_\ell = S(SAD)+S(SAB)+S(SBC)+S(SDC) =$

$= \frac{1}{2}a.a\sin\alpha + \frac{1}{2}a.a\cos\alpha + \frac{1}{2}a\sin\alpha \times a\sqrt{1+\cos^2\alpha} +$

$+ \frac{1}{2}a\cos\alpha . a\sqrt{1+\sin^2\alpha} = \frac{1}{2}a^2(\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha} +$

$+ \cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha})$

b. យក O ជាចំណុចកណ្តាលរបស់ [SA] នោះ [OL], [OH], [ON] ជាមេដ្យានរៀងគ្នារបស់ $\Delta\perp SAL, SAH, SAN$ មានអ៊ីប៉ូតេនុស [SA] រួម ។ ដូចនេះ $|OA| = |OS| = |OL| = |OH| = |ON|$ ដូចនេះ 5 ចំណុច S, A, L, H, N ស្ថិតនៅលើស្វ៊ែផ្ចិត O តែមួយ ដែលស្វ៊ែនោះមានកាំ $|OA| = \frac{1}{2}|SA| = \frac{a}{2}$ ដោយ $[SA] \perp (P) \Rightarrow$ ស្វ៊ែនេះប៉ះនឹង (P) ត្រង់ A ។

លំហាត់ទី12

1- ដោះស្រាយសមីការ : $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$

2 គេឲ្យ $\cos 2a = \frac{2}{3}$ ។ គណនា $\sin a$ និង $\cos a$ ក្នុងករណីធ្នូ 2a ស្ថិតក្នុងកាដ្រង់ទី 4 របស់រង្វង់ត្រីកោណមាត្រ

3- ស្វ៊ែមួយមានកាំ R ប៉ះនឹង (P) ។ កោនមួយមានបាតស្ថិតក្នុង (P) មានកំពស់ h និងកាំបាតគឺ R ។ គេកាត់រូបទាំងពីរនោះដោយ (Q)//(P) បានខ្ទាត់ពីរ និងយក x ជាចំងាយរវាង (P) និង (Q) $(x<2R, x<h)$ ។

a) គណនាផលបូកក្រលាផ្ទៃរបស់ខ្ទាត់ទាំងពីរ ជាអនុគមន៍នៃ h, R និង x ។ តម្លៃកន្សោមនោះនៅតែសមស្របក្នុងករណី $h<x<2R$ ឬទេ បើគេបន្លាយដនទ្រេរបស់កោន ដើម្បីឲ្យវាកាត់(Q) ។

b) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាភិចអនុគមន៍របស់ផលបូកក្រលាផ្ទៃទាំងនោះ កាលណា x ប្រែប្រួល ។ រួចពិភាក្សាគ្រប់ករណី ។

ចម្លើយ

1- ពិនិត្យសមីការ $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7 \quad (1)$

$\sqrt{x+5}$ មានន័យកាលណា $x \geq -5$

$\sqrt{2x+8}$ មានន័យកាលណា $x \geqslant -4 \Rightarrow$ អង្គខាងឆ្វេងរបស់(1) មានន័យលុះត្រាតែ : $x \geqslant -4$

$\Rightarrow$ អង្គខាងឆ្វេងរបស់(1) មានន័យលុះត្រាតែ: $x \geqslant -4$ ងាយនឹងឃើញថា $x=4$ ជាឫសរបស់(1) ព្រោះអង្គទាំងពីររបស់(1) ស្មើគ្នានឹង 7 ។ ហើយមានតែឫសនេះតែមួយគត់ ព្រោះ, ចំពោះ $x>4$ យើងមាន $\sqrt{x+5}>3$ និង $\sqrt{2x+8}>4 \Rightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}>7$

ចំពោះ $-4 \leqslant x<4$ យើងបាន $\sqrt{x+5}<3$ និង $\sqrt{2x+8}<4$
$\Rightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}<7$

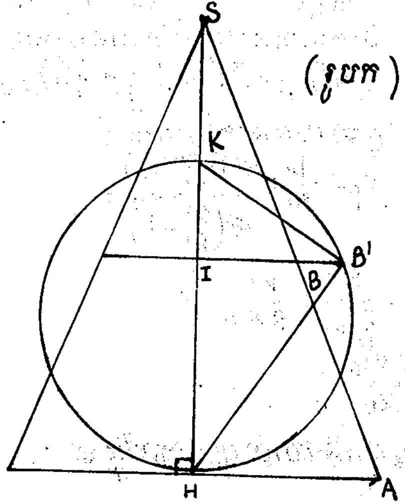
2. ដោយធ្នូ 2a ស្ថិតក្នុងកាដ្រង់ទី 4 $\Rightarrow 2k\pi > 2a > -\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (1)
$\Rightarrow 2\sin a\cos a = \sin 2a<0$ ដូចនេះ Sina និង Cosa មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា ។ យើងមាន $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} = \frac{1+\frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{6}$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} = \frac{1-\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$

ពី (1) យើងបាន : $k\pi > a > -\frac{\pi}{4}+k\pi \Rightarrow$

a) $(2k+1) > a > -\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi \Rightarrow \cos a = -\sqrt{\frac{5}{6}}$ និង $\sin a = \sqrt{\frac{1}{6}}$

b) $2k\pi > a > -\frac{\pi}{4}+2k\pi \Rightarrow \cos a = \sqrt{\frac{5}{6}}$ និង $\sin a = -\sqrt{\frac{1}{6}}$.



3- យក H ជាជើងកំពស់របស់កោនត្រូវគ្នានឹងចំណុចប៉ះរបស់ស្វ៊ែចំពោះ (P) ។ ពិនិត្យខ្នាតកាត់តាមកំពូល S និងជើងកំពស់ H របស់កោន ។ ពេលនោះប្លង់ (Q) ដែលស្របនឹង (P) កាត់កោននិងស្វ៊ែបានខ្នាតពីរជារង្វង់ដែលមានកាំ [IB] និង [IB'] ។

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន ៖

$|IH| = x$, $|SH| = h$, $|KH| = 2|HA| =$
$= 2R$

1. ករណី $x<2R$, $x<h$ (រូបក)

ពី $\Delta\perp$ ដូចគ្នា SIB និង SHA យើងមាន:

$$\frac{|IB|}{|HA|}=\frac{|SI|}{|SH|} \text{ ឬ } \frac{|IB|}{R}=\frac{h-x}{h} \Rightarrow |IB|=\frac{R}{h}(h-x)$$

C$\Delta\perp$ HB'K យើងមានប្រភេទ :

$$|IB'|^2=|IK|.|IH|=(|KH|-|IH|).|IH|=(2R-x)x$$

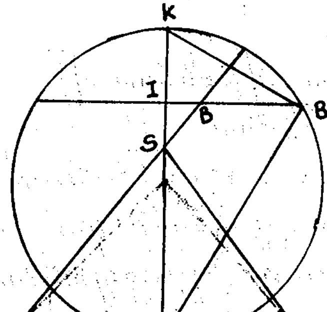
យក y ជាផលបូកក្រឡាផ្ទៃរបស់ឌីសទាំងពីរ:

យើងបាន : $y=\pi|IB|^2+\pi|IB'|^2=\pi\left[\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2+(2R-x)x\right]$ (1)

2. ករណី $h<x<2R$: (រូបខ)

បង្ហាញដូចគ្នាដែរ (ខាងលើ) យើងបាន : $|IB|=\frac{R}{h}(x-h)$

$|IB'|^2=(2R-x)x$ ដូចនេះ (1) នៅតែត្រឹមត្រូវ ។



(រូបខ)

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោងរបស់ផលបូកក្រឡាផ្ទៃនោះកាលណា x ប្រែប្រួល :

$0\leq x<2R$, $0\leq x<h$

យើងមាន:

$$y=\pi\left[\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2+(2R-x)x\right]=$$

$$=\pi\left[\left(\frac{R^2}{h^2}-1\right)x^2+2R\times\left(\frac{R}{h}-1\right)x+R^2\right] (1)$$

ជាអនុគមន៍ដឺក្រេទី2 មានអញ្ញាត x ។ ខ្សែកោងរបស់ y ជាប៉ារ៉ាបូល កូអរដោនេត្រង់កំពូល :

$$x_p=-\frac{b}{2a}=\frac{2\pi R\left(\frac{R}{h}-1\right)}{2\pi\left(\frac{R^2}{h^2}-1\right)}=$$

$$=\frac{R}{\frac{R}{h}+1}=\frac{Rh}{R+h},$$

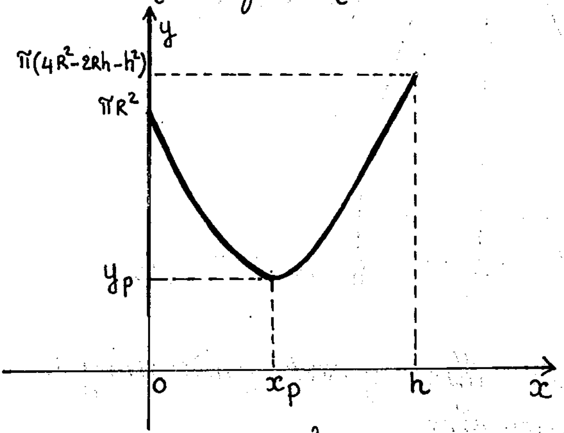
$$y_p=-\frac{\Delta'}{a}=\frac{2\pi^2R^2\left(\frac{R}{h}-1\right)}{\pi\left(\frac{R^2}{h^2}-1\right)}=\frac{2\pi R^2}{\frac{R}{h}+1}=\frac{2\pi R^2h}{R+h}$$

1) $\frac{R^2}{h^2}-1>0 \Rightarrow \frac{R}{h}>1 \Rightarrow R>h$ ខ្សែកោងរបស់ y ជាប៉ារ៉ាបូល

ប៉ោងដកនៅផ្នែកខាងលើ ។ អរដោនេត្រង់កំពូលមានតម្លៃតូចបំផុត :

$y_{min} = y_P = \frac{2\pi R^2 h}{R+h}$ $\quad \left(x_P = \frac{Rh}{R+h} \right)$

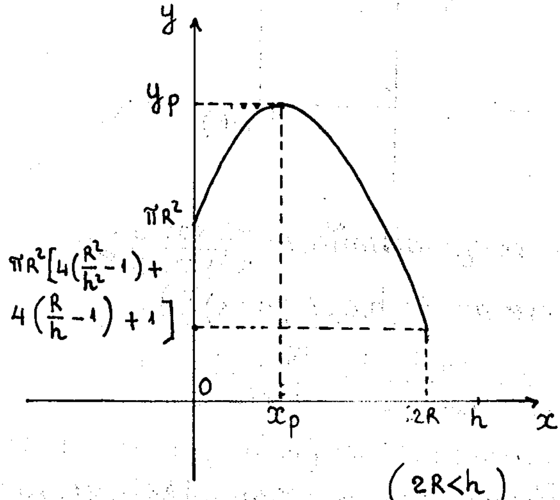
យើងបានក្រាភិចដូចខាងក្រោម :

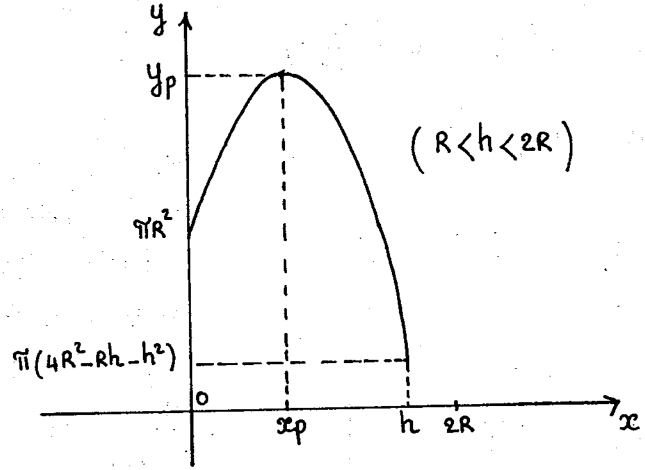


ខ). $\frac{R^2}{h^2}-1<0 \Rightarrow \frac{R}{h}<1$ ឬ $R<h$: ខ្សែកោងរបស់ y ប៉ោងដកនៅផ្នែកខាងក្រោម , អរដោនេត្រង់កំពូលមានតម្លៃធំបំផុត

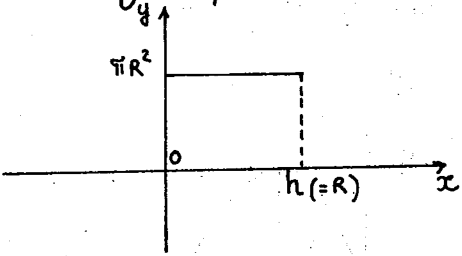
$y_{max} = y_P = \frac{2\pi R^2 h}{R+h}$ $\left(x_P = \frac{Rh}{R+h} \right)$

យើងបានក្រាភិចដូចខាងក្រោម :





3) ករណីពិសេស : $R=h$ យើងបាន $y=\pi R^2$: ក្រាភិចរបស់ y ជាបន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស :



<u>វិញ្ញាសាទី 13</u> : 2. ដោះស្រាយវិសមីការ : $\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-3} \geqslant 0$

1) បង្ហាញសមភាព $\left(a, b, c \neq (2K+1)\frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cos a} = 0$$

3- ដោះស្រាយសមីការ $\sin x(1+\cos x) = 1+\cos x+\cos^2 x$

4- គេឲ្យត្រីកោណសមបាទ SAB មានបាត $|AB| = 2a$ ថេរ

ជ្រុងខាង $|SA| = x$ (ប្រែប្រួល) វិលជុំវិញកំពស់ $[SH]$ ត្រូវគ្នានឹងបាតទ

a) គណនាផលធៀប $y = \frac{V_1}{V_2}$ ជាអនុគមន៍នៃ a និង x ក្នុងនោះ V_1 និង V_2 ជាមាឌរៀងគ្នារបស់សូលីដដែលកំណត់ដោយ Δ SAB និងរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះ ក្នុងករណីវិលខាងលើ។

b). សិក្សាអថេរភាពរបស់ y តាមតម្លៃ x និងតំណាងខ្សែកោង y។

<u>ចម្លើយ</u>

1- ដោយ : $tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$

$$\Rightarrow \frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b\cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c\cos a} = (tga - tgb) + (tgb - tgc) +$$

$$+ (tgc - tga) = 0 \quad \text{ចំពោះ } \forall a, b, c \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

2- ពិនិត្យវិសមីការ : $\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-3} \geqslant 0 \qquad (1)$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+3)} \geqslant 0$ យើងមានតារាងពិនិត្យសញ្ញារបស់ (1)

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		+		+	0	−		−	0	+	
x^2+2x-3		+	0	−		−	0	+		+	
$\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-3}$		+	‖	−	0	+	‖	−	0	+	

តាមតារាងយើងបានឫសរបស់ (1) គឺ : $x < -3$; $-1 \leqslant x < 1$, $x \geqslant 3$

3- ពិនិត្យសមីការ : $\sin x(1+\cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$

ឬ $0 = -\sin x - \sin x\cos x + 1 + \cos x + \cos^2 x =$

$$= (1-\sin x) + \cos x(1-\sin x) + (1-\sin^2 x) =$$

$$= (1-\sin x)[1 + \cos x + (1+\sin x)] = (1-\sin x)[2 + (\cos x + \sin x)] =$$

$$= (1-\sin x)\left[2 + \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

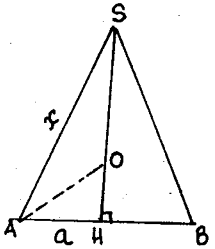
ដោយ : $\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1 \Rightarrow 2 + \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > 0$

$\Rightarrow 1 - \sin x = 0$ ឬ $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ដូច្នេះ ឫសរបស់សមីការគឺ : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k = 0$; $k = \pm 1, \dots$)

4 - យក O ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរចារឹកក្នុង ΔSAB ,

$|OH| = r$ ជាកាំរបស់វា ។



យើងមាន : $|SH| = \sqrt{x^2-a^2}$

$S(ASB) = \frac{1}{2}|SH|.|AB| = a\sqrt{x^2-a^2}$

$p = \frac{1}{2}(|AB|+|SA|+|SB|) = a+x$

(p : បរិមាត្រ ΔASB)

ដូច្នេះ : $r = \frac{S(SAB)}{p} = a\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$

កាលណា ΔSAB (សមបាត) វិលជុំវិញកំពស់ $[SH]$ នោះសូលីត ដែលកើតឡើងដោយ ΔSAB ជាកោនមានកាំបាតស្មើ a , មាន កំពស់ $[SH]$ ដែល $|SH| = \sqrt{x^2-a^2}$ និងសូលីតកើតឡើងដោយ ស្វ៊ែរចារឹកក្នុង ΔSAB ជាស្វ៊ែផ្ចិត O , កាំ $|OH| = a\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$

យើងបាន : $V_1 = \frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{x^2-a^2}$

$V_2 = \frac{4}{3}\pi a^3\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow y = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{x^2-a^2}}{\frac{4}{3}\pi a^3\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{3/2}} = \frac{(x+a)^2}{4a(x-a)}$

b) ដោយ : $|SA| = x$ ជាជ្រុងខាងរបស់ ΔSAB មានបាត $|AB| = 2a$

$\Rightarrow x > a$ ។ ដូចនេះអនុគមន៍ $y = \frac{(x+a)^2}{4a(x-a)} = \frac{x}{4a} + \frac{3}{4} + \frac{a}{x-a}$ កំណត់ ចំពោះគ្រប់ $x > a$

ដេរីវេ : $y' = \frac{1}{4a} - \frac{a}{(x-a)^2} = \frac{(x-3a)(x+a)}{4a(x-a)^2}$

$y' = 0$ ត្រង់ $x = 3a$ (ពិនិត្យក្នុងដែនកំណត់ E វា)

$y' < 0$ ចំពោះ $a < x < 3a$; $y' > 0$ ចំពោះ $x > 3a$ ។

ដូចនេះ $y(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 3a$

យើងបានតារាងអថេរភាព :

x	a		$3a$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	2	$\nearrow$	

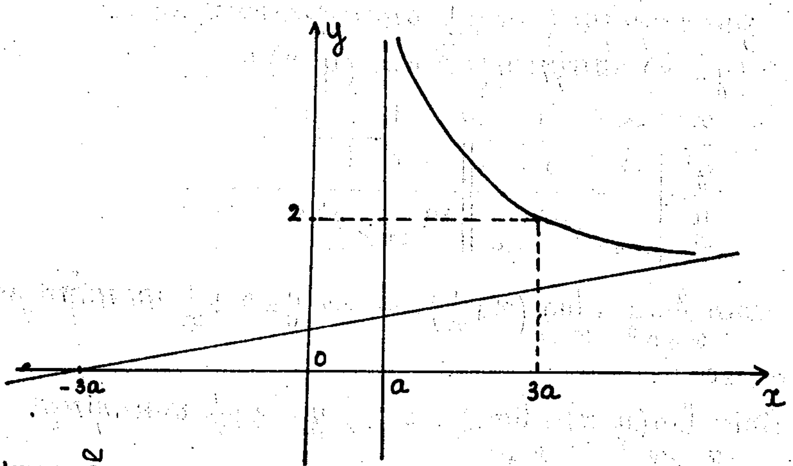
ដោយ $\lim\limits_{x\to a} y = \lim\limits_{x\to a}\left[\frac{x}{4a}+\frac{3}{4}+\frac{a}{x-a}\right] = \infty$

$\Rightarrow y$ មានអាស៊ីមតូតឈរ : $x = a$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty}\left[y-\left(\frac{x}{4a}+\frac{3}{4}\right)\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x-a} = 0$

$\Rightarrow y$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេត : $y = \frac{x}{4a}+\frac{3}{4}$

ដូចនេះយើងបានខ្សែកោងរបស់ y :



លំហាត់ទី 13

1. សិក្សាអថេរភាពនិងគូសខ្សែកោងអនុគមន៍ : $y = x + \frac{1}{x}$
2. មានចំនួន a និង b ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ : $a>0$ និង $4a^2+9b^2 = 4ab$
   បង្ហាញថា ពេលនោះគេបានសមភាព :
   $$\lg\frac{2a+3b}{4} = \frac{\lg a+\lg b}{2}$$
3. រកតម្លៃរបស់ x ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព : $\frac{1}{\sin x} \leqslant 2$
4. ចូររកចំណុច M មួយនៅក្នុង ΔABC ដើម្បី ΔMAB, ΔMBC, ΔMCA មានក្រលាផ្ទៃស្មើគ្នា ។ តើមានចំណុច M ប៉ុន្មានចំពោះលក្ខណៈខាងលើ? ។
5. ចូររកមាឌរបស់ចតុមុខនិយ័តជាអនុគមន៍នៃ r របស់ស្វ៊ែចារឹកក្នុង

ចក្ខុមរោះ ៦

ចម្លើយ

១. អនុគមន៍ : $y = x + \frac{1}{x}$ កំណត់ចំពោះ $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \ (x \neq 0)$$

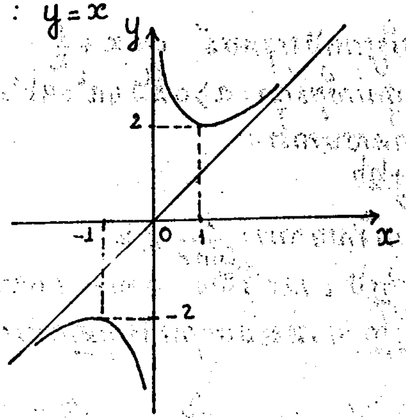
$$y' > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ និង } x > 1$$

ដូចនេះអនុគមន៍ $y = x + \frac{1}{x}$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = -1$ $(y = -2)$ និងអប្បរមាត្រង់ $x = 1$ $(y = 2)$ ។

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty \Rightarrow y = x + \frac{1}{x}$ មានអាស៊ីមតូតឈរ $x = 0$

ដោយ $\lim\limits_{x \to \infty} (y - x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = x + \frac{1}{x}$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេត : $y = x$



យើងមាន: $y(-x) = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -y(x) \Rightarrow y = x + \frac{1}{x}$ ជាអនុគមន៍សេស ដូចនេះខ្សែកោងរបស់វាឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អ័ក្ស ។

2. ដោយ $a>0$ និង $4a^2+9b^2=4ab \Rightarrow b>0$ និង $\left(\frac{2a+3b}{4}\right)^2 = ab > 0$ (1)

យកលោការីតគោល 10 សមភាព (1) យើងបាន :

$$\lg\left(\frac{2a+3b}{4}\right)^2 = \lg ab$$

$$\Leftrightarrow 2\lg \frac{2a+3b}{4} = \lg a + \lg b$$

$$\Leftrightarrow \lg \frac{2a+3b}{4} = \frac{\lg a + \lg b}{2}$$

3. ពិនិត្យវិសមីការ : $\frac{1}{\sin x} \leqslant 2$ (1)

ដើម្បីឲ្យអង្គខាងឆ្វេងរបស់ (1) មានន័យលុះត្រាតែ :

$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$

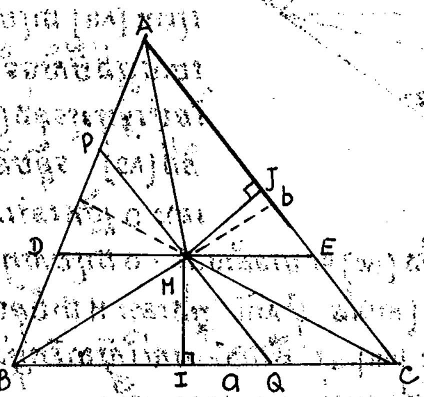
a) បើ $\sin x < 0 \Rightarrow$ (1) ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះយើងបាន $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

b) បើ $\sin x > 0$ យើងបាន : $\sin x \geqslant \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

4-



យក S ជាក្រលាផ្ទៃរបស់ ΔABC។ a, b និង h_a, h_b ជាជ្រុង និងកំពស់រៀងគ្នា ត្រូវគ្នានឹងមុំ A និងមុំ B របស់ ΔABC ។ ដូចនេះ:

$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$ (1)

ឧបមាថាមានចំនុច M មួយនៅក្នុង ΔABC ដែលឲ្យ ΔHAB, ΔMBC និង ΔHAC មានក្រលាផ្ទៃស្មើគ្នា ។ ពេលនោះ

យើងបាន : $\frac{1}{3}S = S(HBC) = S(HAC)$ (2)

ឬ $\frac{1}{3}S = \frac{1}{2}a|MI| = \frac{1}{2}b|MJ|$ ក្នុងនោះ [MI] និង [MJ] ជាកំពស់រៀងគ្នារបស់ ΔMBC និង HAC (1) និង (2) ⇒

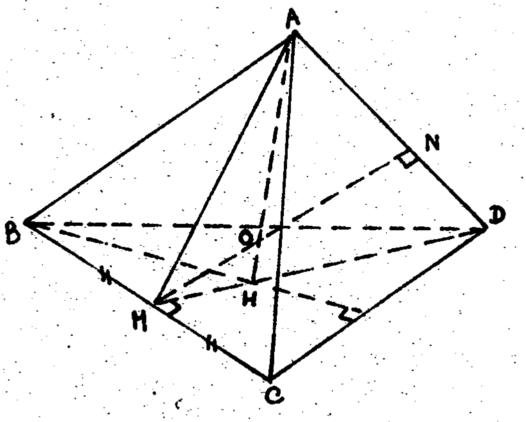
$$|MI| = \frac{1}{3}h_a \; ; \; |MJ| = \frac{1}{3}h_b$$

ដូចនេះចំនុច M ជាប្រសព្វរបស់បន្ទាត់ (DE) // (BC)

(ចែក h_a តាមផលធៀប $\frac{2}{3}$) ជាមួយនឹង (PQ) // (AC)
(ចែក h_a តាមផលធៀប $\frac{2}{3}$) ដូចនេះ (DE), (PQ) កាត់តាមទីប្រជុំទម្ងន់ របស់ ΔABC និងប្រសព្វរបស់ (DE) និង (PQ) គឺជាទីប្រជុំទម្ងន់របស់ ΔABC ។

ដូច្នេះ៖ ចំណុច M ដែលមានលក្ខណៈដូចខាងលើគឺជាទីប្រជុំទម្ងន់ របស់ ΔABC និងមានតែមួយគត់ ។

5



ដោយ ABCD ជាចតុមុខនិយ័ត , [AH] ជាកំពស់ $\Rightarrow$ H ជាទីប្រជុំទម្ងន់ របស់ Δ BCD ។ យក O ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែចារឹកក្នុងចតុមុខនោះ ។ ដូចនេះ O ស្ថិតនៅលើ [AH] ព្រោះ [AH] ជាប្រសព្វរបស់ប្លង់បីសិចទ័រ 2 នៃមុំទ្វេមុខទ្រនុង [AB] និង [AD] ទន្ទឹមនឹងនោះ O ស្ថិតនៅលើប្លង់បីសិចទ័ររបស់មុំទ្វេមុខទ្រនុង [BC] ។ មានន័យថា : O ជាប្រសព្វរបស់ [AH] និងកន្លះបន្ទាត់ពុះ [MN) នៃមុំ $\widehat{AMD}$ ក្នុងនោះ H ជាចំនុចកណ្តាលនៃ [BC] ។ ដូចនេះ $|OH| = r$ គឺជាកាំរបស់ស្វ៊ែចារឹកក្នុងចតុមុខ ABCD ។ យករង្វាស់ជ្រុងរបស់ចតុមុខ ABCD ស្មើ a

$$\Rightarrow V(ABCD) = \frac{1}{3} S(BCD) \times |AH| = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{|AB|^2 - |BH|^2} =$$
$$= \frac{1}{12} a^2\sqrt{3} \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{12} a^2\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12} a^3\sqrt{2}$$

ពិនិត្យត្រីកោណសមបាទ AMD $\left(|AM| = |MD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ មាន :
[MN) ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះ $\Rightarrow |AN| = |ND| = \frac{a}{2}$
និង $|MN| = \sqrt{|MD|^2 - |ND|^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ: $\cot \widehat{NHD} = \frac{|MN|}{|ND|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}$

ពិនិត្យ $\Delta\perp OMH$ យើងបាន:

$|MH| = |OH| \cot \widehat{NHD} = r\sqrt{2}$

ម្យ៉ាងទៀត: $|MH| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $\Big\} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{6} = r\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 2r\sqrt{6}$

ជំនួស $a = 2r\sqrt{6}$ ចូលក្នុងកន្សោម $V_{(ABCD)}$

យើងបាន $V_{(ABCD)} = \frac{1}{12}(2r\sqrt{6})^3\sqrt{2} = 8r^3\sqrt{3}$

វិញ្ញាសាទី 14

1) អនុគមន៍: $y = x^3 - 1 - m(x-1)$

a) ចំពោះតម្លៃ m ណាទើបខ្សែកោងរបស់អនុគមន៍ប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស Ox ?

b) សង់ខ្សែកោងអនុគមន៍ ចំពោះតម្លៃ m ដែលទើបនឹងបាន ។

2) រកតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមារបស់អនុគមន៍:

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

3) ដោយស្គាល់រង្វាស់អង្កត់មួយស្មើ a ។ ចូរប្រើបន្ទាត់និងកំប៉ា (Compa) ដើម្បីសង់អង្កត់ $a^4\sqrt{2}$ ។

4) មាន 4 ចំនួនពិត u, v, x, y ដែល:

$u^2 + v^2 = 1$ និង $x^2 + y^2 = 1$

បង្ហាញថា: $-\sqrt{2} \leq u(y-x) + v(x+y) \leq \sqrt{2}$

5) គេឲ្យចតុមុខ ABCD ។

a) (P) មួយស្របនឹងទ្រនុង [BC] កាត់ទ្រនុង [AB], [AC], [DC], [DB] ត្រង់ចំនុច M, N, P, Q ។ បង្ហាញថា: ចតុកោណ MNPQ ជាចតុកោណព្នាយ ។ តើ (P) ត្រូវបំពេញលក្ខខណ្ឌណាដើម្បីឲ្យ: ចតុកោណនោះជាចតុកោណស្មើ ? ជាចតុកោណកែង ?

b) ដោយដឹង $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 90°$ ហើយ ΔBCD ជាត្រីកោណ

សម័ង្សជ្រុង a ។ គណនាមាឌរបស់ចតុមុខ ជាអនុគមន៍នៃ a ។

c) ដោយស្គាល់ BCD ជាត្រីកោណសម័ង្សជ្រុង a និងមានផ្ចិតជាចំណុច O ។ គណនា $|OA|$ ជាអនុគមន៍នៃ a ដែលឲ្យស្វ៊ែចារឹកក្រៅចតុមុខ ABCD មានរង្វង់ (BCD) ជារង្វង់ធំមួយ ។

គណនាក្រលាផ្ទៃស្វ៊ែក្នុងករណីនោះ ។ កំណត់ទីតាំងរបស់កំពូល A លើស្វ៊ែនោះ ដើម្បីឲ្យមាឌរបស់ចតុមុខ ABCD ធំបំផុត ។

<u>ចម្លើយ</u>

1- a) $y = x^3 - 1 - m(x-1) = (x-1)\times(x^2+x+1-m)$

ចំណុចដែលខ្សែកោងប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ជាចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} y = (x-1)(x^2+x+1-m) = 0 & (1) \\ y' = 3x^2 - m = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow m = 3x^2 \quad (3)$

(3) និង (1) យើងបាន

$(x-1)(x^2+x+1-3x^2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(-2x^2+x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1) = 0$

សមីការ (4) មានឫស : $x_1 = 1 \; ; \; x_2 = -\frac{1}{2}$

ដូច្នេះមានខ្សែកោងពីរប៉ះនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រូវគ្នានឹង :

$m_1 = 3x_1^2 = 3 \; ; \; m_2 = 3x_2^2 = \frac{3}{4}$

ខ្សែកោងទាំងពីរនោះមានសមីការ

$y_1 = (x-1)(x^2+x+1-3) = (x-1)^2(x+2) = x^3 - 3x + 2$

$y_2 = (x-1)(x^2+x+1-\frac{3}{4}) = (x-1)(x+\frac{1}{2})^2 = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

b) អនុគមន៍ y_1 និង y_2 កំណត់ $\forall x \in \mathbb{R}$

ដេរីវេ : $y_1' = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1)$

$y_1' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \; ; \; y_1' < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

$y_1' > 0 \Leftrightarrow x < -1$ និង $x > 1$

$y_2' = 3x^2 - \frac{3}{4} = 3\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$

$y_2' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$; $y_2' < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

$y_2' > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ និង $x > \frac{1}{2}$ ។

$\Rightarrow y_1$ មានអតិបរមាត្រង់ $x = -1$ $(y = 4)$ និង អប្បបរមាត្រង់ $x = 1$ $(y = 0)$

$\Rightarrow y_2$ មានអតិបរមាត្រង់ $x = -\frac{1}{2}$ $(y = 0)$ និង អប្បបរមាត្រង់ $x = \frac{1}{2}$ $\left(y = -\frac{1}{2}\right)$ ។

យើងមានតារាងអថេរភាពរបស់ y_1 និង y_2:

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		$1/2$		1		$+\infty$
y_1'		$+$	0			$-$			0	$+$	
y_2'			$+$		0	$-$	0		$+$		
y_1	$-\infty$	$\nearrow$	4				$\searrow$		0	$\nearrow$	$+\infty$
y_2	$-\infty$	$\nearrow$			0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$		$\nearrow$		$+\infty$

ខ្សែកោងរបស់អនុគមន៍ y_1 កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $x = -2$ និង $x = 1$, កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y = 2$ ។ ខ្សែកោងរបស់ y_2 កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x = 1$ និង $x = -\frac{1}{2}$ កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y = -\frac{1}{4}$ ។

$y_1'' = y_2'' = 6x$ ស្មើសូន្យ កាលណា $x = 0$ $\left(y_1 = 2 ; y_2 = -\frac{1}{4}\right)$ និងដូរសញ្ញាកាលណាកាត់តាម $x = 0$ ដូចនេះក្រាភិចរបស់អនុគមន៍ y_1 និង y_2 មានចំណុចរបត់រៀងគ្នាគឺ: $(0,2)$ និង $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ ។

យើងបាន: $y_1 - 2 = x^3 - 3x$; $y_2 + \frac{1}{4} = x^3 - \frac{3}{4}x$ (1)

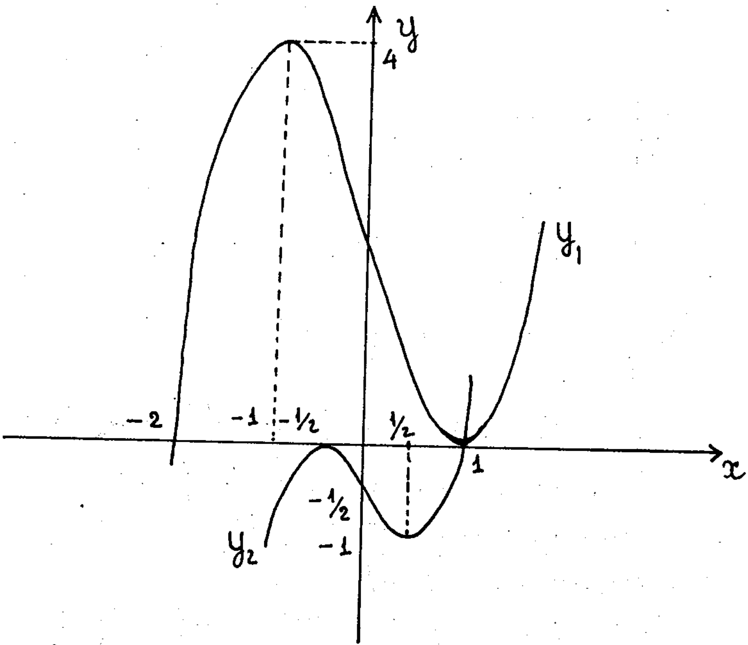
តាង $X = x$; $Y_1 = y_1 - 2$; $Y_2 = y_2 + \frac{1}{4}$

(1) $\Rightarrow Y_1 = X^3 - 3X$; $Y_2 = X^3 - \frac{3}{4}X$

$Y_1(-X) = -X^3 + 3X = -(X^3 - 3X) = -Y_1(X)$

$$y_2(-x) = -x^3 + \frac{3}{4}x = -\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right) = -y_2(x)$$

ដូចនេះ y_1, y_2 ជាអនុគមន៍សេស $\Rightarrow$ ក្រាភិចរបស់ y_1, y_2 ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អ័ក្សរបស់ប្រព័ន្ធ (x, y_1); (x, y_2) $\Rightarrow$ ខ្សែកោងរបស់ y_1, y_2 ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំណុច $(0, 2)$ និង $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ ។



2. ពិនិត្យសមីការ :

$$y = \cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមារបស់អនុគមន៍ :

$y = \cos^4 x + \sin^4 x$ គឺ:

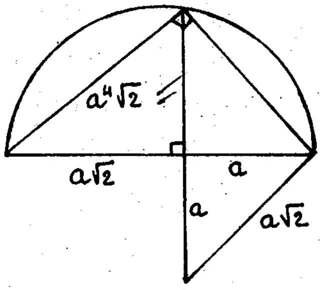
$y_{max} = 1$ កាលណា $\cos 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

$y_{min} = \frac{1}{2}$ កាលណា $\cos 4x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4}\,; (k \in \mathbb{Z})$ ។

3- យើងមាន: $(a^4\sqrt{2})^2 = a^2\sqrt{2} = a.a\sqrt{2}$

$\Rightarrow a^4\sqrt{2}$ ជាតួមធ្យមរបស់ស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃរង្វាស់ a និង $a\sqrt{2}$
យើងបានរបៀបសង់ដូចខាងក្រោម :

សង់ត្រីកោណកែងសមបាទមានជ្រុងកែងស្មើ a ដើម្បីឲ្យអ៊ីប៉ូ-តេនុសស្មើ $a\sqrt{2}$ រួចសង់កំពស់របស់ត្រីកោណកែងមានចំនោលកែងរបស់ជ្រុងកែងទាំងពីរទៅអ៊ីប៉ូតេនុសរៀងគ្នាស្មើ a និង $a\sqrt{2}$ ។ កំពស់របស់ត្រីកោណកែងនេះគឺជាអង្កត់ដែលត្រូវសង់ ។



4-a) <u>របៀបទី 1</u>

ប្រើប្រាស់វិសមភាព :

$|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

យើងបាន :

$\frac{1}{\sqrt{2}}|u(y-x)+v(x+y)| =$

$= \left|u.\frac{y-x}{\sqrt{2}} + v.\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right| \leqslant$

$\leqslant \left|u.\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right| + \left|v.\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right| \leqslant$

$\leqslant \frac{1}{2}\left[u^2 + \left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)^2\right] +$

$+ \frac{1}{2}\left[u^2 + \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2\right] =$

$= \frac{1}{2}[u^2+v^2+x^2+y^2] = 1$

$\Rightarrow |u(y-x)+v(x+y)| \leqslant \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leqslant u(y-x)+v(x+y) \leqslant \sqrt{2}$

b) <u>របៀបទី 2</u> :

តាមសម្មតិកម្ម : $u^2+v^2=1$ និង $x^2+y^2=1$

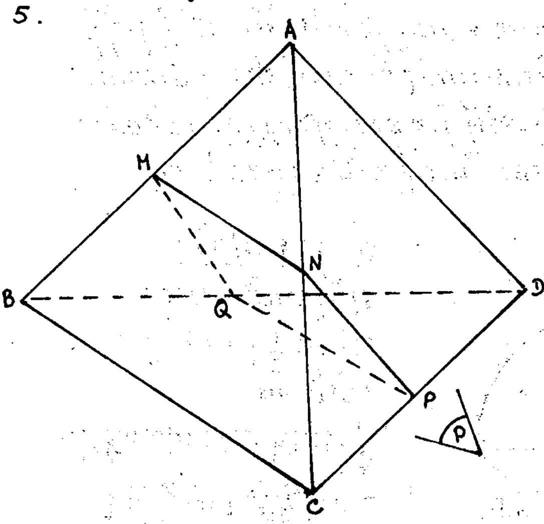
⇒ យើងតាង $u = \cos\alpha$, $v = \sin\alpha$, $x = \cos\beta$; $y = \sin\beta$

$$\Rightarrow u(y-x) + v(x+y) = \cos\alpha(\sin\beta - \cos\beta) + \sin\alpha(\cos\beta + \sin\beta) =$$
$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \sin(\alpha+\beta) -$$
$$- \cos(\alpha+\beta) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{4}\right)$$

ដោយ : $-1 \leqslant \sin\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leqslant u(y-x)+v(x+y) \leqslant \sqrt{2}$$

5.



a) $(P)//(BC) = (ABC)\cap(DBC)$ ⇒ ប្រសព្វ (MN) និង (PQ) របស់ (P) ជាមួយនឹង (ABC) និង (DBC) គឺស្របនឹង (BC)។ ដូចនេះ $[MN]//[PQ]$។ ⇒ MNPQ ជាចតុកោណព្នាយ។ ដើម្បីឲ្យ MNPQ ជាចតុកោណស្មើ នោះយើងត្រូវមានលក្ខខណ្ឌ $[NP]//[MQ]$ (CAD) និង (BAD) កាត់តាមបន្ទាត់ស្របពីររៀងគ្នា: (NP) និង (MQ)។

ដូចនេះ: $(AD) = (CAD)\cap(BAD)$ គឺស្របនឹង (NP) និង $(MQ) \Rightarrow (P)//(AD)$

ដូចនេះ លក្ខខណ្ឌដើម្បីឲ្យ MNPQ ជាចតុកោណស្មើ គឺ (P) ត្រូវស្របនឹង (BC); (AD)។ ដើម្បីឲ្យ MNPQ ជាចតុកោណកែង យើងត្រូវមាន : $[MN]\perp[NP]$។ ដូច្នេះលក្ខខណ្ឌដើម្បីឲ្យ MNPQ ជាចតុកោណកែងគឺ : $[BC]\perp[AD]$។

b) ដោយ $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ ជាជ្រុងរួមរបស់ត្រីកោណកែងត្រង់ A និងដោយ : $|BC| = |CD| = |DB| = a \Rightarrow \Delta\perp$ BAC, CAD, DAB ប៉ុនគ្នា

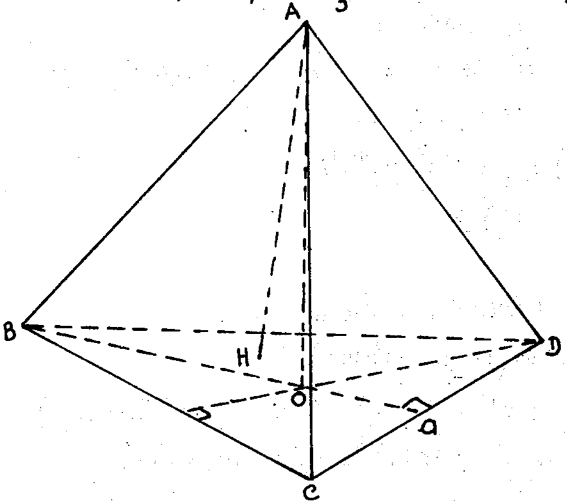
$$\Rightarrow |AB| = |AC| = |AD| = \frac{|CD|\times\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ មាឌរបស់ចតុមុខ ABCD គឺ :

$$V=\frac{1}{3}|AB|\left(\frac{1}{2}|AC|\cdot|AD|\right)=\frac{1}{6}(|AB|)=\frac{1}{6}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

ខ) ដោយរង្វង់ (BCD) ជារង្វង់ធំបំផុតរបស់ស្វ៊ែចារឹកក្រៅចតុមុខ ABCD និងដោយ O ជាផ្ចិតរបស់ត្រីកោណសម័ង្ស BCD ជ្រុង a ⇒ ផ្ចិត O របស់ត្រីកោណសម័ង្ស BCD ក៏ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែចារឹកក្រៅចតុមុខ ABCD

យើងបាន: $|OA|=|OB|=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ ⇒ ក្រលាផ្ទៃស្វ៊ែចារឹកក្រៅចតុមុខ ABCD ស្មើនឹង :



$$S=4\pi|OA|^2=4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}\pi a^2$$

យក [AH] ជាកំពស់របស់ចតុមុខ ABCD គូសចេញពី A ទៅបាត (BCD) ។ ជាទូទៅយើងបាន: $|AH|\leqslant|AO|$ និងមាឌរបស់ចតុមុខ ABCD :

$$V=\frac{1}{3}S(BCD)\cdot|AH|$$

ក្នុងនោះ $S(BCD)=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=$ ថេរ ⇒ មាឌចតុមុខ ABCD មានមាឌធំបំផុត កាលណា : $|AH|=|OA| \Rightarrow [OA]\perp(BCD)$ ឬ ចតុមុខ ABCD ជាពីរ៉ាមីតនិយ័តកំពូល A ។

លំហាត់ទី 15

1. ដោះស្រាយសមីការ : $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$
2. ដោះស្រាយសមីការ : $\dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin 3x}=-1$
3. មានអនុគមន៍ : $y=x^3+bx^2+cx+d$

ដោយដឹងថាក្រាភិចអនុគមន៍កាត់តាមចំនុច :

$(1,0)$; $(-1,0)$; $(0,2)$

a) រកមេគុណ d,b,c

b) គូសក្រាភិចអនុគមន៍

c) សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាភិចត្រង់ចំណុចរបត់ ។

4- គេមានចតុមុខនិយ័ត SABC ។ យក [SH] ជាកំពស់របស់ចតុមុខនោះ ។ យក I ជាចំណុចកណ្តាល [SH] ។

a) បង្ហាញថាចំណុច : I ជាទីប្រជុំទម្ងន់ T របស់ Δ ABC និងផ្ចិតស្វ៊ែចារឹកក្រៅចតុមុខ IABC តែត្រង់ជួរ ។

b) គណនាកាំរបស់ស្វ៊ែចារឹកក្នុងចតុមុខ IABC ជាអនុគមន៍នៃ a ទ្រនុងរបស់ចតុមុខ SABC ។

c) បង្ហាញថាបន្ទាត់បី : (AI), (BI) និង (CI) កែងគ្នាពីរៗ ។

5- ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះ $\forall a, b$ យើងបាន:

$$(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2) \geq (a^6+b^6)(a^4+b^4)$$

ចម្លើយ

1- យើងមាន :

$$0 = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x =$$

$$= (\cos 4x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 2x) =$$

$$= 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$$

ដូច្នេះ a) $\cos\frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{5}$

b) $\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0$

$\cos\frac{3x}{2} = -\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right) \Rightarrow \frac{3x}{2} = \pm\left(\frac{x}{2}+\pi\right) + 2k\pi$

$\Rightarrow x = (2k+1)\pi$ និង $x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$

ដោយឫស $x = (2k+1)\pi$ ត្រួតស៊ីគ្នានឹងឫស $x = (2k+1)\frac{\pi}{5}$

ដូច្នេះឫសសមីការគឺ:

$x = (2k+1)\frac{\pi}{5}$ និង $x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

2. យើងមាន :

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1 \quad (1)$$

អង្គខាងឆ្វេងរបស់ (1) មានន័យ លុះត្រាតែ : $\sin 3x \neq 0$

$\Rightarrow 3x \neq k\pi$ ឬ $x = \frac{k\pi}{3}$ ។

សមីការ (1) សមមូលនឹង : $\sin x + \sin 2x = -\sin 3x, \left(x \neq \frac{k\pi}{3}\right)$

ឬ $0 = \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x + (\sin 3x + \sin x) =$

$$= \sin 2x + 2\sin 2x \cos x = \sin 2x(1 + 2\cos x)$$

a) $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = k\frac{\pi}{2}$

b) $1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

ដោយ $x = \frac{k\pi}{3}$ ត្រូវគ្នានឹងឫស $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ និង
មានមួយផ្នែកនៅក្នុងឫស $x = \frac{k\pi}{2}$ ដូចនេះឫសរបស់សមីការ (1):

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k = 0, k = \pm 1; \dots)$$

3 - ពិនិត្យអនុគមន៍ :

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

a) ដោយក្រាភិចរបស់ y កាត់តាមចំណុច : $(1,0); (-1,0); (0,2)$

យើងបាន : $\begin{cases} 1 + b + c + d = 0 & (1) \\ -1 + b - c + d = 0 & (2) \end{cases}$; $d = 2$ (3)

ជំនួស (3) ចូល (1) និង (2) :

យើងបាន : $\begin{cases} b + c = -3 \\ b - c = -1 \end{cases}$ (4)

ដោះស្រាយ (4) យើងបាន : $b = -2, c = -1$

ដូចនេះ $b = -2, c = -1; d = 2$ និង $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) អនុគមន៍ $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ កំណត់ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 4x - 1 = 3\left(x - \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

$y' < 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{2+\sqrt{7}}{3}$

$y' > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ និង $x > \frac{2+\sqrt{7}}{3}$

ដូចនេះ y មានអតិបរមាត្រង់ $x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ និង អប្បបរមាត្រង់ $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$

យើងបានអថេរភាព

x	$-\infty$		$(2-\sqrt{7})/3$		$(2+\sqrt{7})/3$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{20+14\sqrt{7}}{27}$	↘	$\frac{20-14\sqrt{7}}{27}$	↗	$+\infty$

ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំនុច : $x = 1$; $x = 2$ និង $x = -1$ កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y = 2$ ។ $y'' = 6x - 4 = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\left(y = \frac{20}{27}\right)$ និង y'' ប្តូរសញ្ញាកាលណាកាត់តាម $x = \frac{2}{3}$ ។ ដូចនេះខ្សែកោងអនុគមន៍ y មានចំនុច $\left(\frac{2}{3}, \frac{20}{27}\right)$ ជាចំនុចរបត់ ។ យើងមាន :

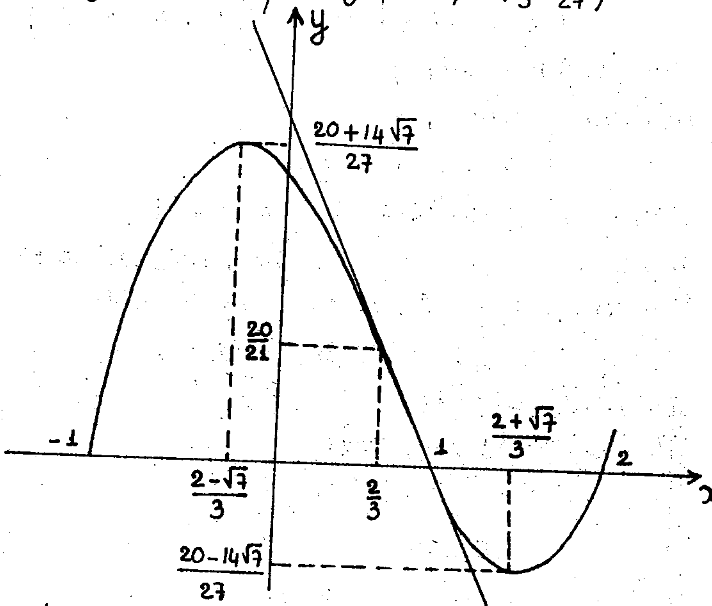
$$y - \frac{20}{27} = x^3 - 2x^2 - x + 2 - \frac{20}{27} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^3 - \frac{7}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right) \quad (1)$$

តាង $X = x - \frac{2}{3}$; $Y = y - \frac{20}{27} \Rightarrow (1)$ អាចសរសេរជារាង :

$$Y = X^3 - \frac{7}{3}X$$

ដោយ : $Y(-X) = -X^3 + \frac{7}{3}X = -\left(X^3 - \frac{7}{3}X\right) = -Y(X)$

$\Rightarrow$ អនុគមន៍ Y សេស , ដូចនេះខ្សែកោងរបស់វាឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អ័ក្សថ្មី $\Rightarrow$ ខ្សែកោងរបស់ y ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំនុច $\left(\frac{2}{3}, \frac{20}{27}\right)$ ។



c)- សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាភិចមានរាង : (ត្រង់ចំនុចរបត់)

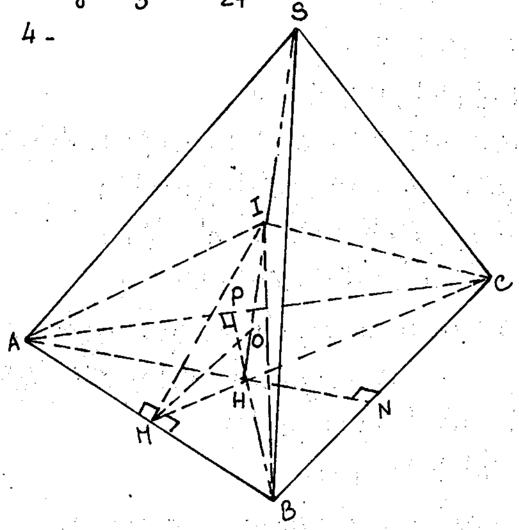
$y - y_0 = y'_0(x - x_0)$ ក្នុងនោះ $x_0 = \frac{2}{3}$; $y_0 = \frac{20}{27}$

$y'_0 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\cdot\frac{2}{3} - 1 = -\frac{7}{3}$

⇒ សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាភិចត្រង់ចំនុចរបត់គឺ:

$y = -\frac{7}{3}x + \frac{62}{27}$

4 -



a) [SH] ជាកំពស់របស់ចតុមុខនិយ័ត SABC ⇒ H ត្រួតស៊ីគ្នានឹងទីប្រជុំទម្ងន់របស់ ΔABC ⇒ $T = H$ ដូចនេះគ្រប់ចំនុចនៅលើ (SH) សុទ្ធតែមានចម្ងាយស្មើគ្នាទៅ A, B, C របស់ ΔABC ។ ក្នុងប្លង់ ΔAIH យើងគូសមេដ្យាទ័រ (AI) កាត់ [SH] ត្រង់ O' យើងបាន : $|IO'| = |AO'| = |BO'| = |CO'|$

⇒ O' ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែចារឹកក្រៅចតុមុខ IABC

ដូចនេះយើងបាន : I, H, O' ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

b) យក O ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែចារឹកក្នុងចតុមុខ IABC ⇒ O ស្ថិតនៅលើ [SH] ព្រោះ (SH) ជាប្រសព្វរបស់ប្លង់ប៊ីសិចទ័ររបស់មុំទ្វេមុខទ្រនុង (IA) និង (IB) ។ ទន្ទឹមនឹងនោះ O ស្ថិតនៅលើប្លង់ប៊ីសិចទ័ររបស់មុំទ្វេមុខទ្រនុង (AB) ⇒ O ជាប្រសព្វរបស់ (IH) និងបន្ទាត់ពុះមុំ $\widehat{IMB}$, និង [OH] ជាកាំរបស់ស្វ៊ែចារឹកក្នុងចតុមុខ IABC ។

យើងបាន : $|SH| = \sqrt{|SA|^2 - |AH|^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow |IH| = \frac{|SH|}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

C $\Delta\perp IMH$ មាន : $tg\,\widehat{IMH} = \frac{|IH|}{|MH|} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

$|IM| = \sqrt{|MH|^2 + |IH|^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{2tg\frac{\widehat{IMH}}{2}}{1 - tg^2\frac{\widehat{IMH}}{2}} = tg\,\widehat{IMH} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\,tg^2\frac{\widehat{IMH}}{2}+2tg\frac{\widehat{IMH}}{2}-\sqrt{2}=0$ ដោះស្រាយយើងបាន

$tg\,\widehat{OHH}=tg\frac{\widehat{IMH}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ (tg របស់មុំដែលសមស្រប)

ក្នុង ΔOHH មាន : $|OH|=|HH|\,tg\,\widehat{OHH}=\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{6\sqrt{2}}$

c) ដូចបានរកក្នុងសំនួរ b) : $|IM|=\frac{a}{2}$;

ដូចគ្នាដែរ យើងបាន : $|IN|=\frac{a}{2}$ $|IP|=\frac{a}{2}$

$\Rightarrow |IM|=\frac{1}{2}|AB|$, $|IN|=\frac{1}{2}|BC|$; $|IP|=\frac{1}{2}|CA|$

ដូច្នេះ: Δ AIB, BIC, CID កែងត្រង់ I $\Rightarrow$ (AI);(BI),(CI) កែងគ្នាពីរៗ។

5- យើងស្រាយបំភ្លឺ : $(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2)\geqslant(a^8+b^8)(a^4+b^4)$ (1)

ឬ $a^{12}+b^{12}+a^{10}b^2+b^{10}a^2\geqslant a^{12}+b^{12}+a^8b^4+b^8a^4$; $\forall a,b$

វិសមភាព(1) សមមូលនឹង $a^{10}b^2+b^{10}a^2\geqslant a^8b^4+b^8a^4$ (2)

ចំពោះ : $a=0$ ឬ $b=0$ ឬ $a=b=0$, (1) និង (2) សុទ្ធតែផ្ទៀងផ្ទាត់។

ដូច្នេះឧបមាថា $a,b\neq0 \Rightarrow$ (2) សមមូលនឹង : $a^8+b^8\geqslant a^6b^2+b^6a^2$

ឬ $0\leqslant a^8+b^8-a^6b^2-b^6a^2=a^6(a^2-b^2)+b^6(a^2-b^2)$

ឬ $0\leqslant(a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4)$ (3)

(3) ផ្ទៀងផ្ទាត់ ព្រោះកត្តានិមួយៗធំជាងសូន្យ ដូចនេះ(1) យើងបានស្រាយរួច ។

វិញ្ញាសាទី 16

1- សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោងអនុគមន៍ : $y=2x^3-9x^2+12x$

2- ដោះស្រាយសមីការ : $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

3- គេឲ្យអង្កត់មួយវែង a ។ ចូរប្រើបន្ទាត់និងកុំប៉ា (Com-pa) ដើម្បីសង់អង្កត់ដែលមានរង្វាស់ :

$$a\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

4. ដោះស្រាយវិសមីការ : $x^2+(x+1)^2\leqslant\frac{15}{x^2+x+1}$

5. មានចតុមុខនិយ័ត ABCD មានទ្រនុងវែង a ។ គេយកចំនុចកណ្តាល A' នៃទ្រនុង [AB] , B' នៃ [AC] ; C' នៃ [CD] ; D' នៃ [BD] ។

a) បង្ហាញថា : A'B'C'D' ជាការេ

b) គណនាមាឌរបស់សូលីត DAA'B'C'D' ជាអនុគមន៍នៃ a ។ បើសិនចំនុច A',B',C',D' ជាចំនុចរៀងគ្នារបស់[AB],[AC],[CD],[BD]

ដែល : $|AA'| = |AB'| = |DC'| = |DD'| = \frac{a}{2n}$ (n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានធំជាង ឬស្មើ $\frac{1}{2}$) នោះមាឌរបស់សូលីដ $DAA'B'C'D'$ នឹងស្មើប៉ុន្មាន?

(6) បង្ហាញថាបើ : $a_1, a_2, \dots, a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល :

$a_1 a_2 \dots a_n = 1$ នោះ $(1+a_1)(1+a_2)\ \dots\ (1+a_n) \geqslant 2^n$

<u>ចម្លើយ</u>

1. អនុគមន៍ : $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x = x(2x^2 - 9x + 12)$ កំណត់គ្រប់តម្លៃ x

$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ និង $x = 2$; $y' < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

$y' > 0 \Leftrightarrow x < 1$ និង $x > 2$

$\Rightarrow$ អនុគមន៍ y មានអតិបរមាត្រង់ $x = 1$ $(y = 5)$ និងអប្បបរមាត្រង់ $x = 2$ $(y = 4)$ ។

យើងមានតារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

ខ្សែកោងរបស់អនុគមន៍ y កាត់តាមគល់អ័ក្ស $(x = 0\ ;\ y = 0)$ ។

$y'' = 12x - 18 = 12\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ $\left(y = \frac{9}{2}\right)$ និងប្តូរសញ្ញាកាលណាកាត់តាម $x = \frac{3}{2}$ ។ ដូចនេះអនុគមន៍ y មានចំណុច $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$ ជាចំណុចរបត់។

យើងបាន : $y - \frac{9}{2} = 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2} =$

$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)$ (1)

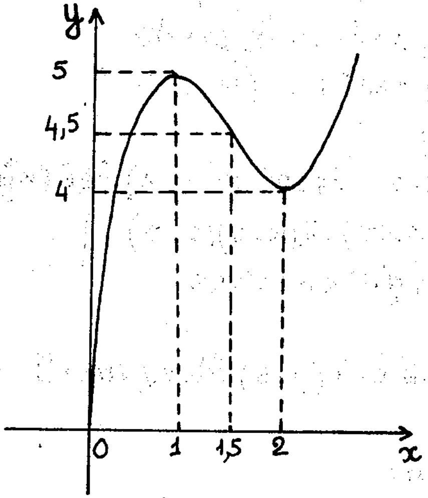
តាង $\begin{cases} X = x - \frac{3}{2} \\ Y = y - \frac{9}{2} \end{cases}$

(1) អាចសរសេរជារាង : $Y = 2X^3 - \frac{3}{2}X$

$\Rightarrow Y(-X) = -2X^3 + \frac{3}{2}X = -\left(2X^3 - \frac{3}{2}X\right) = -Y(X)$

$\Rightarrow Y$ ជាអនុគមន៍សេស ដូចនេះខ្សែកោងរបស់ Y ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹង

គល់អ័ក្សថ្មី ។ ដូចនេះខ្សែកោងតំណាងរបស់ y ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំណុច $(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$ ។



2 ពិនិត្យសមីការ :

$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

ឬ $0=\sin 2x+(\sin x+\sin 3x)=$

$=\sin 2x+2\sin 2x\cos x=$

$=\sin 2x(1+2\cos x)$

$\Rightarrow \sin 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi$ ឬ

$x=\frac{k\pi}{2}$

$1+2\cos x=0 \Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}=$

$=\cos\frac{2\pi}{3}$

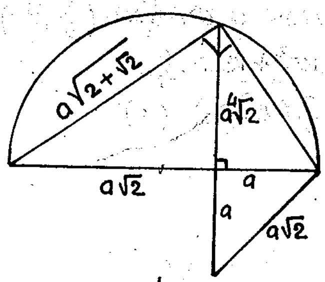
$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

ដូច្នេះឫសរបស់សមីការគឺ : $x=k\frac{\pi}{2}$ និង $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

3 - យើងមាន : $a\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{(a\sqrt{2})^2+(a\sqrt[4]{2})^2}$

ដូច្នេះ $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ជាអ៊ីប៉ូតេនុសរបស់ត្រីកោណកែងមានជ្រុងកែង $a\sqrt{2}$ និង $a\sqrt[4]{2}$ ក្នុងនោះ $a\sqrt{2}$ ជាអ៊ីប៉ូតេនុសរបស់ត្រីកោណកែងសមបាតមានជ្រុងកែងស្មើ a, $a\sqrt[4]{2}$ ជាតួមធ្យមធរណីមាត្ររបស់ a និង $a\sqrt{2}$: $(a\sqrt[4]{2})^2=$

$=a^2\sqrt{2}=a\cdot a\sqrt{2}$



ពីនោះយើងមានរបៀបសង់ត្រីកោណកែងសមបាតមានជ្រុងកែងស្មើ a ដើម្បីឲ្យអ៊ីប៉ូតេនុស $a\sqrt{2}$, បន្ទាប់មកសង់កំពស់របស់ត្រីកោណកែង

មានចំណោលកែងរបស់ជ្រុងកែងលើអ៊ីប៉ូតេនុសស្មើ a និង $a\sqrt{2}$ ។ កំពស់របស់ត្រីកោណនោះគឺជាអង្កត់មានរង្វាស់ស្មើ $a\sqrt{2}$ និងជ្រុងកែងមានចំណោលកែងទៅអ៊ីប៉ូតេនុសស្មើ $a\sqrt{2}$ គឺជាអង្កត់ដែលត្រូវរក ។

4. ពិនិត្យសមីការ : $x^2+(x+1)^2 \leqslant \frac{15}{x^2+x+1}$ (1)

គេមាន : $x^2+x+1>0 \ \forall x$

ព្រោះ $\Delta = -3<0$

$\Rightarrow$ (1) សមមូលនឹង

$[x^2+(x+1)^2](x^2+x+1) \leqslant 15$

ឬ : $[2(x^2+x+1)-1](x^2+x+1)-15 \leqslant 0$ (2)

តាង $X = x^2+x+1>0$

យើងសរសេរ (2) ជារាង :

$[2X-1]X-15 \leqslant 0$ ឬ $2(X-3)(X+\frac{5}{2}) \leqslant 0$ (2')

ដោះស្រាយ (2') យើងបាន : $-\frac{5}{2} \leqslant X \leqslant 3$

ដោយ $X>0 \Rightarrow 0<X\leqslant 3 \Rightarrow 0<x^2+x+1 \leqslant 3$

ដោយ $x^2+x+1>0$ ចំពោះ $\forall x$

ដូចនេះយើងមានតែ : $x^2+x+1 \leqslant 3$

$\Leftrightarrow x^2+x-2 \leqslant 0$

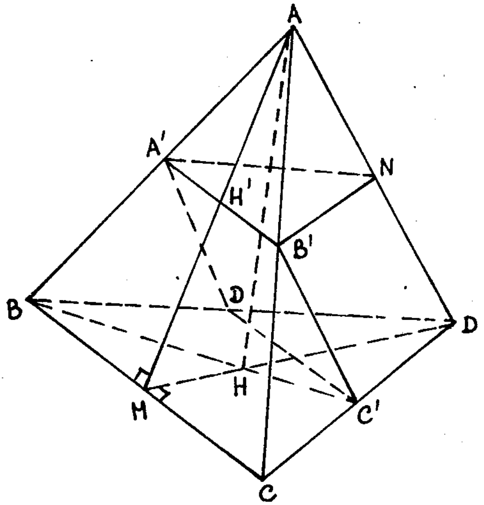
$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) \leqslant 0$ (3)

ដោះស្រាយ (3) យើង : $-2 \leqslant x \leqslant 1$ ។ ដូចនេះឫស(1)គឺ : $-2 \leqslant x \leqslant 1$

5. យើងមាន :

$$\left.\begin{array}{l} [A'B'] \parallel [BC], \ |A'B'| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{9}{2} \\ [D'C'] \parallel [BC], \ |D'C'| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{9}{2} \\ [B'C'] \parallel [AD], \ |B'C'| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{9}{2} \\ [A'D'] \parallel [AD]; \ |A'D'| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{9}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $A'B'C'D'$ ជាប្រលេឡូក្រាម



យក H ជាចំនុចកណ្ដាលរបស់ [BC]

$\Rightarrow [AM], [DM]$ ជាកំពស់រៀងគ្នារបស់ ΔABC និង DBC

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow [AM] \perp [BC] \\ [DM] \perp [BC] \end{matrix}\right\} \Rightarrow [BC] \perp (AMD)$$

ដូចនេះ: $[BC] \perp [AD]$ និងដោយ:

$[A'D'] \,//\, [AD]$, $[D'C'] \,//\, [BC]$

$\Rightarrow [A'D'] \perp [D'C']$

ដូច្នេះ: ប្លង់ $A'B'C'D'$ ជាការេ ។

b). <u>របៀបទី1</u>

ដោយ : A', B', C' និង D' ជាចំនុចកណ្ដាលរៀងរបស់ : $[AB], [AC], [CD]$ និង $[BD]$ $\Rightarrow$ ប្លង់ $A'B'C'D'$ ចែកចតុមុខនិយ័ត $ABCD$ ជាពីរផ្នែកស្មើគ្នា (មានមាឌស្មើគ្នា) ។

យក V ជាមាឌរបស់ចតុមុខ $ABCD$

$\Rightarrow$ មាឌរបស់ $DAA'B'C'D'$ ស្មើ $\frac{1}{2}V$ ក្នុងនោះ:

$$V = \frac{1}{3} S(BCD) \cdot |AH|$$

($[AH]$ ជាកំពស់របស់ចតុមុខ)

យើងមាន:

$$S(BCD) = \frac{1}{2}|BC| \cdot |DH| = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

ដោយ: $ABCD$ ជាចតុមុខនិយ័ត $\Rightarrow H$ ជាទីប្រជុំទម្ងន់របស់ ΔBCD

យើងបាន : $|AH| = \sqrt{|AD|^2 - |DH|^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{4})^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

ដូច្នេះ :

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

- របៀបទី2

យក N ជាចំនុចកណ្តាល [AD]

ដូចនេះ $V(DAA'B'C'D') = V(AA'B'N) + V(A'B'ND'C'D)$.

ដោយ A', B' និង N ជាចំនុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ [AB], [AC] និង [AD] ។

ដូចនេះ $(A'B'N) // (BCD)$ និងយើងបាន :

$$|A'B'| = |B'N| = |NA'| = \frac{|BD|}{2} = \frac{a}{2}$$

$\Rightarrow$ យើងបាន $[SH] \perp (A'B'N)$ ។

យក H' ជាជើងកំពស់របស់ចតុមុខ $AA'B'N$ គូសចេញពីកំពូល A នោះ H' ស្ថិតនៅលើ [AH] និងយើងបាន $|AH'| = \frac{|AH|}{2}$

ដូច្នេះ :

$$V(AA'B'N) = \frac{1}{3} S(A'B'N) \cdot |AH'|$$

$$V(A'B'ND'C'D) = S(A'B'N) \cdot |HH'| = S(A'B'N) \times (|AH| - |AH'|)$$

$$\Rightarrow V(DAA'B'C'D') = \frac{1}{3} S(A'B'N)|AH'| + S(A'B'N) \times (|AH| - |AH'|) =$$

$$= \frac{1}{3} S(A'B'N)\left[|AH'| + 3(|AH| - |AH'|)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} S(A'B'N)(3|AH| - 2|AH'|) = \frac{2}{3} S(A'B'N) \times |AH| =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

ក្នុងករណីយកចំនុច A', B', C', D' រៀងគ្នានៅលើ [AB], [AC], [CD], [BD] ដែល : $|AA'| = |AB'| = |DC'| = |DD'| = \frac{a}{2n}$ $(n \geq \frac{1}{2})$

យើងបាន :

$$|A'B'| = |B'N| = |NA'| = \frac{a}{2n}, \quad |AH'| = \frac{a\sqrt{2}}{2n\sqrt{3}}$$

ដូច្នេះ :

$$V(DAA'B'C'D') = \frac{1}{3} S(A'B'N) \cdot (3|AH| - 2|AH'|) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2n} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4n}\right)\left(\frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 2\frac{a\sqrt{2}}{2n\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{48n^3} a^3\sqrt{2}(3n-1)$$

6 - តាមវិសមភាពកូស៊ី : 2 ចំនួនវិជ្ជមាន 1 និង a_k

យើងបាន : $\frac{1+a_k}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_k} = \sqrt{a_k}$ $(K = 1, 2, \ldots, n)$

$$\Rightarrow \frac{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}{2^n} = \frac{1+a_1}{2}\cdot\frac{1+a_2}{2}\dots\frac{1+a_n}{2} \geq$$

$$\geq \sqrt{a_1}\cdot\sqrt{a_2}\dots\sqrt{a_n} = \sqrt{a_1a_2\dots a_n} = 1$$

$$\Rightarrow (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$$

វិញ្ញាសាទី17

1 _ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ខ្សែកោងអនុគមន៍ :

$$y = \frac{-x^2+5x-7}{x-3}$$

បង្ហាញថាខ្សែកោងនោះមានផ្ចិតឆ្លុះមួយ ។

2 _ ដោះស្រាយសមីការ : $\cos 4x - \sin x = \sin 7x - \cos 2x$

3 _ ដោះស្រាយសមីការ : $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

4 _ a) ដោះស្រាយវិសមីការ : $\frac{2+y}{y(1+y)} > 1$

b) ដោះស្រាយវិសមីការ : $(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x) > 1$

(ដោយដឹងរូបមន្ត : $\log_a b \cdot \log_b a = 1$) ។

5 _ មានពីរ៉ាមីតចតុកោណនិយ័ត S.ABCD (គឺ $|SA| = |SB| = |SC| = |SD|$ និង ABCD ជាការេ) ។ ជ្រុងបាតស្មើ a ទ្រនុងខាងធ្វើនឹងបាតបានមុំ α ($\alpha > 45°$)

a) គណនាមាឌរបស់ពីរ៉ាមីត S.ABCD ជាអនុគមន៍ α, a ។

b) តាម A គូសប្លង់មួយកែងនឹងទ្រនុងខាងឈមនឹង [SC] ត្រង់ H ។ ប្លង់នោះកាត់ [SB] ត្រង់ N, [SD] ត្រង់ P ។ ចូរគណនាក្រលាផ្ទៃឆ្នូត ANHP .

ចម្លើយ

1 _ អនុគមន៍ : $y = \frac{-x^2+5x-7}{x-3} = -x+2-\frac{1}{x-3}$

កំនត់ចំពោះ: $x \in \mathbb{R} - \{3\}$

$$y' = -1 + \frac{1}{(x-3)^2} = -\frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$ និង $x = 4$

$y' < 0 \Leftrightarrow x < 2$ និង $x > 4$

$y' > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 4$ $(x \neq 3)$

ដូចនេះ y មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = 4$ $(y = -3)$

និងអប្បបរមាត្រង់ $x = 2$ $(y = 1)$

យើងមានតារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

ក្រាភិច : $y = \frac{-x^2+5x-7}{x-3}$ កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y = \frac{7}{3}$

ដោយ $\lim\limits_{x \to 3} y = \lim\limits_{x \to 3}\left[-x+2-\frac{1}{x-3}\right] = \infty$

$\Rightarrow y$ មានអាស៊ីមតូតឈរ $x = 3$

ដោយ $\lim\limits_{x \to \infty}\left[y-(-x+2)\right] = \lim\limits_{x \to \infty}\left[-\frac{1}{x-3}\right] = 0$

$\Rightarrow y$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេត : $y = -x+2$

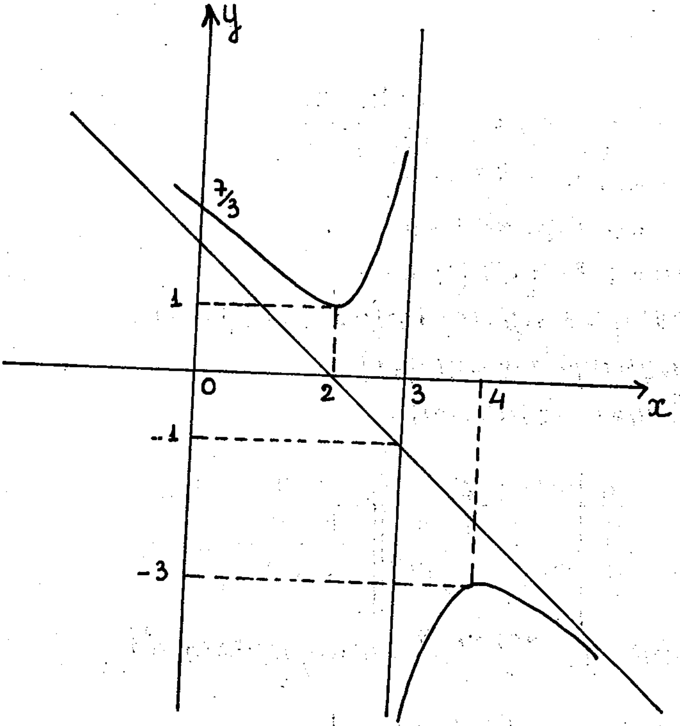
យើងមាន : $y+1 = -(x-3) - \frac{1}{x-3}$ (1)

តាង $\begin{cases} X = x-3 \\ Y = y+1 \end{cases}$

(1) $\Rightarrow Y = -\left(X + \frac{1}{X}\right)$ ដោយ $Y(-X) = X + \frac{1}{X} = -Y(X)$

$\Rightarrow Y$ ជាអនុគមន៍សេស ។ ដូចនេះ Y មានក្រាភិចឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អ័ក្សថ្មី ។

$\Rightarrow y = -x+2-\frac{1}{x-3}$ មានក្រាភិចឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំនុច $(3,-1)$ ។



2- ពិនិត្យសមីការ : $\cos 4x - \sin x = \sin 7x - \cos 2x$

ឬ $0 = (\cos 4x + \cos 2x) - (\sin 7x + \sin x) =$

$= 2\cos 3x \cos x - 2\sin 4x \cos 3x = 2\cos 3x(\cos x - \sin 4x)$

$\Rightarrow$ a) $\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$

b) $\cos x - \sin 4x = 0$ ឬ $\cos x = \sin 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$

$\Rightarrow x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) + 2k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}$ និង $x = \frac{\pi}{6} - 2k\frac{\pi}{3}$ ហើយឫស $x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$

ត្រួតគ្នានឹងឫស : $x = \frac{\pi}{6} - 2k\frac{\pi}{3} = (1-4k)\frac{\pi}{6}$

ដូចនេះឫសរបស់សមីការគឺ :

$x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$ និង $x = \frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$ ។

3- ពិនិត្យសមីការ $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ ឬ

$0 = (1 - \sin 2x) - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= (1-2\sin x\cos x)-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}) = (\sin x-\cos x)^2-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}) =$

$= [\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})]^2-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})[\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})-1]$

ដូចនេះ :

a) $\sin(x-\frac{\pi}{4})=0 \Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi$

$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

b) $\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}) = 1/\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ និង $x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ និង $x=(2k+1)\pi$

ដូច្នេះឫសរបស់សមីការគឺ :

$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ និង $x=(2k+1)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

4-a) ពិនិត្យវិសមីការ : $\frac{2+y}{y(1+y)} > 1$ (1)

កន្សោមខាងឆ្វេងរបស់ (1) មានន័យកាលណា $y\neq 0, y\neq -1$

វិសមីការ (1) សមមូល : $\frac{2+y}{y(1+y)} - 1 > 0$

ឬ : $\frac{(\sqrt{2}+y)(\sqrt{2}-y)}{y(y+1)} > 0$ (2)

សិក្សាសញ្ញារបស់ (2) :

y	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$(\sqrt{2}+y)(\sqrt{2}-y)$		−	0	+	|	+	|	+	0	−	
$y(1+y)$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	
$\frac{(\sqrt{2}+y)(\sqrt{2}-y)}{y(1+y)}$		−	0	+	||	−	||	+	0	−	

តាមតារាងយើងឃើញឫសរបស់ (2) (ឬឫសរបស់ (1)) :

$-\sqrt{2}<y<-1$ និង $0<y<\sqrt{2}$

b). ពិនិត្យវិសមីការ : $(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x) > 1$ (1)

$\log_x 2$ មានន័យកាលណា $x>0$ និង $x \neq 1$

$\log_{2x} 2$ ——"—— $x>0$ និង $x \neq \frac{1}{2}$

$\log_2 4x$ ——"—— $x>0$

ដូច្នេះ (1) មានន័យកាលណា $x>0$, $x \neq \frac{1}{2}$ និង $x \neq 1$ ។

ដោយ : $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ $(x>0, x \neq 1)$

$$\log_{2x} 2 = \frac{1}{\log_2 2x} \quad (x>0;\ x \neq \tfrac{1}{2})$$

$\Rightarrow$ (1) សមមូលនឹង : $\frac{\log_2 4x}{(\log_2 x)(\log_2 2x)} > 1$

ឬ : $\frac{2+\log_2 x}{(\log_2 x)(\log_2 2x)} > 1$

$$\frac{2+\log_2 x}{\log_2 x(1+\log_2 x)} > 1$$

ប្រើប្រាស់លទ្ធផលរបស់សំនួរ a) ចំពោះ $y = \log_2 x$

យើងបាន : 1) $-\sqrt{2} < \log_2 x < -1$

$$\log_2 2^{-\sqrt{2}} < \log_2 x < \log_2 2^{-1}$$

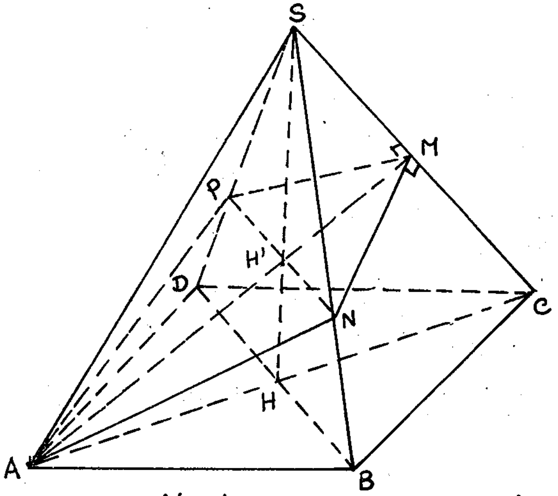
ឬ $\frac{1}{2^{\sqrt{2}}} < x < \frac{1}{2}$

2). $0 < \log_2 x < \sqrt{2}$

$$\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 2^{\sqrt{2}}$$

ឬ : $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$

5- a)



យើងមាន: SABCD ជាពីរ៉ាមីតចតុកោណនិយ័ត ⇒ ជើងកំពស់ H គូស
ចេញពី S ទៅបាត ABCD ជាប្រសព្វរបស់អង្កត់ទ្រូងបាត ។
យើងមាន: $|SH| = |AH| \, tg\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} tg\alpha$
ដូច្នេះមាឌរបស់ពីរ៉ាមីត SABCD ស្មើ:

$$V = \frac{1}{3} S(ABCD) \times |SH| = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} tg\alpha = \frac{1}{6} a^3\sqrt{2}\, tg\alpha$$

b) $\Delta \perp$ SMN និង SMP ប៉ុនគ្នា ([SH] រួម; $\widehat{MSP} = \widehat{NSH}$) ⇒

$|SN| = |SP|$ ដូច្នេះ $\frac{|SN|}{|SB|} = \frac{|SP|}{|SD|} \Rightarrow (NP) // (BD)$

យក H' ជាប្រសព្វរបស់ [NP] និង [AM]
⇒ H' ស្ថិតនៅលើ [SH] និង $|NH'| = |H'P|$
ដូចនេះខ្លែង ANMP ជាចតុកោណស្មើក្លាយ, ព្រោះ $[AM] \perp [NP]$
(មានចំនោលកែង [AC], [BD] រៀងគ្នាលើបាត ABCD កែងគ្នា)
និងចំនុចប្រសព្វ H' របស់អង្កត់ទ្រូងទាំងពីរ ជាចំនុចកណ្ដាល [NP]
ប៉ុន្តែមិនមែនចំនុចកណ្ដាល [AM] ទេ ។
ក្រលាផ្ទៃខ្លែងស្មើ : $S = \frac{1}{2} |AM| \times |NP|$
$C\Delta \perp AMC$ មាន : $\widehat{MAC} = \frac{\pi}{2} - \alpha$
$|AM| = |AC| . Sin\alpha = a\sqrt{2} Sin\alpha$

$\subset \Delta \perp AH'H$ មាន: $|HH'| = |AH| . tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2} Cotg\alpha$

$\Rightarrow |SH'| = |SH| - |HH'| = \frac{a\sqrt{2}}{2} tg\alpha - \frac{a\sqrt{2}}{2} Cotg\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2}(tg\alpha - Cotg\alpha) =$

$= \frac{a\sqrt{2}\, Cos2\alpha}{2 Sin\alpha Cos\alpha} = - \frac{a\sqrt{2}\, Cos2\alpha}{Sin2\alpha} = - a\sqrt{2}\, Cotg2\alpha$

$\subset \Delta \perp SH'N$ មាន:

$|NP| = 2|NH'| = 2|SH'|. Cotg\alpha = 2(-a\sqrt{2} Cotg2\alpha) Cotg\alpha =$

$= - 2a\sqrt{2}\, Cotg2\alpha Cotg\alpha$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} a\sqrt{2} Sin\alpha(-2a\sqrt{2} Cotg2\alpha Cotg\alpha) = -2a^2 Cos\alpha Cotg2\alpha$

វិញ្ញាសាទី 18

1- សិក្សាអថេរភាពនិងគូសក្រាភិចអនុគមន៍ : $y = x^2(1+x)$

2- ដោះស្រាយសមីការត្រីកោណមាត្រ :

$$Sinx = Cos2x$$

$$tg3x = Cotg5x$$

$$Cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = Sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$$

3- ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ x^2 - y + m = 0 \end{cases}$$

ក្នុងនោះ m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត ។

4. មានកោនបរិវត្តមួយ (កំពូលនៅផ្នែកខាងក្រោម, បាតនៅខាងលើ) មានកាំបាតស្មើ R , មុំរវាងវត្រនិងប្លង់បាតស្មើ α ។ កោននោះពេញដោយទឹក និងមានស្វ៊ែមួយ, ផ្ទៃស្វ៊ែប៉ះនឹងផ្ទៃទឹករបស់កោន ។

a) គណនាមាឌរបស់ទឹកស្ថិតនៅខាងក្រោមស្វ៊ែ ។

b) បើគេយកស្វ៊ែនោះចេញនោះ នោះជំរៅរបស់ទឹកនឹងស្មើប៉ុន្មាន ? គណនាជំរៅនោះ កាលណា $R = \sqrt{3}$ cm ; $\alpha = 60^\circ$

ចម្លើយ

1) អនុគមន៍ : $y = x^2(x+1) = x^3 + x^2$ កំណត់ $\forall x$

$$y' = 3x^2 + 2x = 3x\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ និង } x = -2/3$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 0$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3} \text{ និង } x > 0$$

ដូចនេះអនុគមន៍ y មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = -\frac{2}{3}$ $\left(y = \frac{4}{27}\right)$ និងអប្បបរមាត្រង់ $x = 0$ $(y = 0)$ ។

យើងបានតារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$

ក្រាភិចរបស់ $y = x^2(1+x)$ កាត់តាមអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x = -1$ និង $x = 0$, កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y = 0$ ។

$$y'' = 6x + 2 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ $\left(y = \frac{2}{27}\right)$ និងដូរសញ្ញាកាលណាកាត់តាម $x = -\frac{1}{3}$ ។

ដូចនេះក្រាភិចរបស់ $y = x^2(1+x)$ មាន $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$ ជាចំណុចរបត់ ។

យើងបាន : $y - \frac{2}{27} = x^3 + x^2 - \frac{2}{27} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)$ (1)

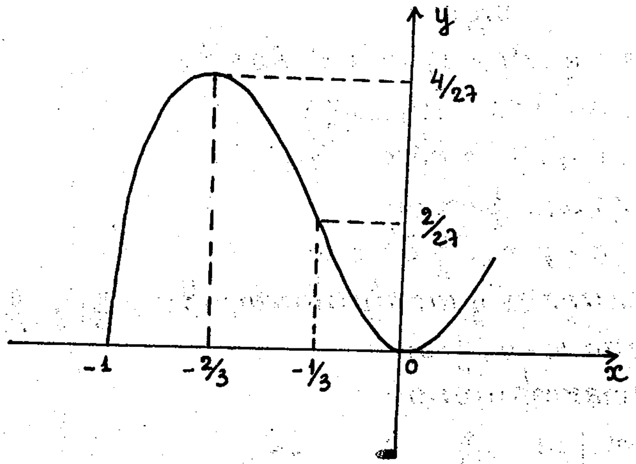
តាង $X = x + \frac{1}{3}$; $Y = y - \frac{2}{27}$

(1) អាចសរសេរជារាង : $Y = X^3 - \frac{1}{3}X$

$\Rightarrow Y(-X) = -X^3 + \frac{1}{3}X = -\left(X^3 - \frac{1}{3}X\right) = -Y(X)$

$\Rightarrow Y(X)$ ជាអនុគមន៍សេស ដូចនេះក្រាភិច $Y = X^3 - \frac{1}{3}X$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អ័ក្សថ្មី ។

$\Rightarrow$ ក្រាភិចអនុគមន៍ $y = x^2(1+x)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំណុច $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$ ។



2. a) ពិនិត្យសមីការ : $\sin x = \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

$\Rightarrow x = \left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+2k\pi$ និង $x = -\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+2k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{3}$ និង $x = -\frac{\pi}{2}-2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

b) ពិនិត្យសមីការ : $\operatorname{tg}3x = \operatorname{Cotg}5x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)$

ដើម្បីឲ្យសមីការមានន័យកាលណា : $3x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

និង $5x \neq k\pi$ ឬ : $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{6}$ និង $x \neq k\frac{\pi}{5}$

$\Rightarrow 3x = \left(\frac{\pi}{2}-5x\right)+k\pi$ ឬ : $x = \frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{8}$ $(k\in\mathbb{Z})$ ។

c) ពិនិត្យសមីការ : $\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) =$

$= \cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$

$\Rightarrow 3x+\frac{\pi}{4} = \pm\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+2k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{60}+2k\frac{\pi}{5}$ និង $x = -\frac{7\pi}{12}+2k\pi$. $(k\in\mathbb{Z})$

3. ពិនិត្យសមីការ : $\begin{cases} x^2+y^2-2=0 & (1) \\ x^2-y+m=0. & (2) \end{cases}$

(1) និង (2) យើងបាន : $y^2+y-(m+2)=0$ (3)

(3) មានឫសកាលណា :

$\Delta = 1+4(m+2) = 4m+9 \geqslant 0$

ម្យ៉ាងទៀត (2) យើងត្រូវមាន: $y - m = x^2 \geqslant 0$

យក y_1 និង y_2 ជាឫសពីររបស់ (3) ក្នុងករណី $\Delta \geqslant 0$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត យើងបាន:

$$(y_1 - m) + (y_2 - m) = y_1 + y_2 - 2m = -1 - 2m = -2\left(m + \frac{1}{2}\right) \quad (4)$$

$$(y_1 - m)(y_2 - m) = y_1 y_2 - m(y_1 + y_2) + m^2 = -(m+2) + m + m^2 =$$

$$= m^2 - 2 = (m + \sqrt{2})(m - \sqrt{2}) \quad (5)$$

យើងមានតារាងកំនត់សញ្ញា Δ, (4) និង (5) តាមតម្លៃ m ខាងក្រោម:

m	$-\infty$		$-\frac{9}{4}$		$-\sqrt{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$(y_1-m)+(y_2-m)$		$-$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(y_1-m)(y_2-m)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

តាមតារាងយើងបាន:

a) $m < -\frac{9}{4}$: ប្រព័ន្ធគ្មានឫស (ព្រោះ $\Delta < 0$)

b) $m = -\frac{9}{4}$: ប្រព័ន្ធមានឫសឌុប ($\Delta = 0$; $y_1 - m = y_2 - m > 0$)

$$\begin{cases} x = \sqrt{y_1 - m} \\ y = y_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = -\sqrt{y_1 - m} \\ y = y_1 \end{cases}$$

c) $-\frac{9}{4} < m < -\sqrt{2}$: ប្រព័ន្ធមានឫស 4 ផ្សេងគ្នា

(ព្រោះ $\Delta > 0$; $y_1 - m > 0$; $y_2 - m > 0$)

$$\begin{cases} x = \sqrt{y_1 - m} \\ y = y_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = -\sqrt{y_1 - m} \\ y = y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{y_2 - m} \\ y = y_2 \end{cases} ; \quad \begin{matrix} x = -\sqrt{y_2 - m} \\ y = y_2 \end{matrix}$$

d) $m = -\sqrt{2}$: ប្រព័ន្ធមានឫសឌុបមួយនិងឫសពីរទៀតផ្សេងគ្នា

(ព្រោះ $\Delta>0$; $y_1-m>0$; $y_2-m=0$)

$$\begin{cases} x=0 \\ y=y_2=m \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=\sqrt{y_1-m} \\ y=y_1 \end{cases} ; \begin{cases} x=-\sqrt{y_1-m} \\ y=y_1 \end{cases}$$

e) $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$: ប្រព័ន្ធមានឫសពីរផ្សេងគ្នា :
(ព្រោះ $\Delta>0$; $y_1-m>0$, $y_2-m<0$)

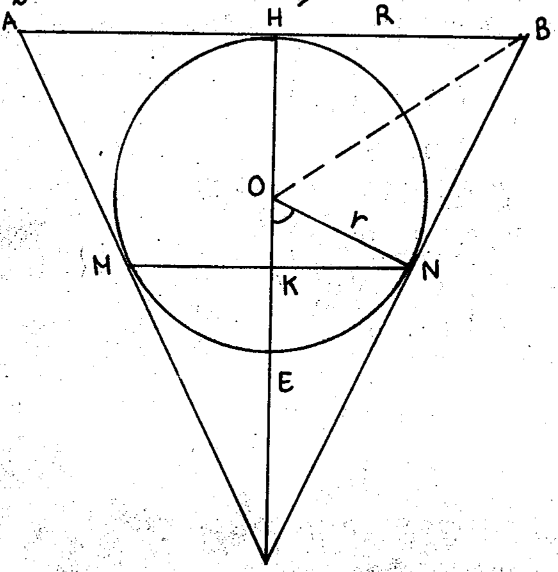
$$\begin{cases} x=\sqrt{y_1-m} \\ y=y_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=-\sqrt{y_1-m} \\ y=y_1 \end{cases}$$

g) $m=\sqrt{2}$: ប្រព័ន្ធមានឫសឌុប (ព្រោះ $\Delta>0$, $y_1-m<0$; $y_2-m=0$)

$$\begin{cases} x=0 \\ y=y_2=m \end{cases}$$

h) $\sqrt{2}<m$: ប្រព័ន្ធគ្មានឫស (ព្រោះ $\Delta>0$ តែ $y_1-m<0$; $y_2-m<0$)
[ដូចនេះក្នុងករណី : $-\frac{9}{4}\leqslant m\leqslant\sqrt{2}$ យើងគណនាបាន y តាម (3) រួចគណនា x តាម (2)] ។

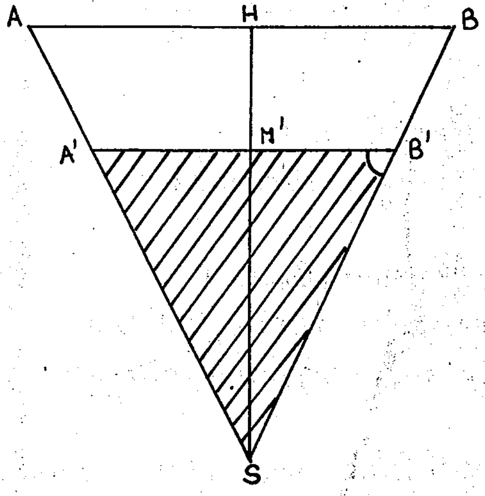
4



ផ្ចិត O របស់ស្វ៊ែចារឹកក្នុងកោន : SAB ស្ថិតនៅលើកំពស់ [SH] របស់កោនគូសចេញពី S ទៅបាត ។ ពិនិត្យត្រីកោណ ASB កាត់តាម [SH], យក r ជាកាំស្វ៊ែចារឹកក្នុង V_1 ជាមាឌរបស់ទឹកស្ថិតនៅក្រោមស្វ៊ែ, V ជាមាឌរបស់ទឹកទាំងអស់ ។

a). $V_1 = \frac{1}{3}\pi |KN|^2 |SK| - \pi |KE|^2 \left(|OE| - \frac{|KE|}{3}\right)$,

b) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 |SH| - \frac{4}{3} R^3 = \frac{1}{3}\pi |H'B'|^2 \times |SH'|$ ក្នុងនោះ [SH'] ជាកំពស់របស់ទឹកកោន ក្រោយពេលដែលយកស្វ៊ែចេញ ដើម្បីគណនា [SH'] ។



$|HB| = R$; $r = |OE| = |ON| =$

$= |OH| = |HB| tg\frac{\alpha}{2} = R tg\frac{\alpha}{2}$

$|SH| = |HB| tg\alpha = R tg\alpha$,

$|KN| = |ON| \operatorname{Sin}\alpha = r \operatorname{Sin}\alpha$

$|KE| = |OE| - |OK| =$

$= r - |ON| \operatorname{Cos}\alpha = r(1 - \operatorname{Cos}\alpha)$

$|SK| = |KN| tg\alpha = r \operatorname{Sin}\alpha \, tg\alpha$,

$|H'B'| = |SH'| \operatorname{Cotg}\alpha = \frac{|SH'|}{tg\alpha}$

ជំនួសលទ្ធផលខាងលើចូល V_1 និង V យើងបាន

a) $V_1 = \frac{\pi}{3} r^2 \operatorname{Sin}^2\alpha \; r.\operatorname{Sin}\alpha \, tg\alpha - \pi r^2 (1 - \operatorname{Cos}\alpha)^2 \times \left[r - \frac{r(1-\operatorname{Cos}\alpha)}{3}\right] =$

$= \frac{\pi}{3} r^3 \left[\frac{\operatorname{Sin}^4\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha} - (1 - \operatorname{Cos}\alpha)^2 (2 + \operatorname{Cos}\alpha)\right] =$

$= \frac{\pi}{3} r^3 \frac{(1 - \operatorname{Cos}^2\alpha)^2 - \operatorname{Cos}\alpha (1 - \operatorname{Cos}\alpha)^2 (2 + \operatorname{Cos}\alpha)}{\operatorname{Cos}\alpha} =$

$= \frac{\pi}{3} r^3 (1 - \operatorname{Cos}^2\alpha) \frac{(1 + \operatorname{Cos}\alpha)^2 - \operatorname{Cos}\alpha (2 + \operatorname{Cos}\alpha)}{\operatorname{Cos}\alpha} =$

$= \frac{\pi}{3} r^3 \frac{(1 - \operatorname{Cos}\alpha)}{\operatorname{Cos}\alpha} = \frac{\pi}{3} R^3 tg^3\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{(1 - \operatorname{Cos}\alpha)^2}{\operatorname{Cos}\alpha}$

b) $V = \frac{\pi}{3} R^2 R tg\alpha - \frac{4}{3}\pi R^3 tg^3\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}\pi R^3 \left(tg\alpha - 4 tg^3\frac{\alpha}{2}\right) =$

$= \frac{1}{3}\pi \frac{|SH'|^2}{tg^2\alpha} |SH'| = \frac{1}{3}\pi \frac{|SH'|^3}{tg^2\alpha}$

$\Rightarrow |SH'|^3 = R^3 tg^2\alpha \left(tg\alpha - 4 tg^3\frac{\alpha}{2}\right)$

$\Rightarrow |SH'| = R\sqrt[3]{tg^2\alpha \left(tg\alpha - 4 tg^3\frac{\alpha}{2}\right)} = R\sqrt[3]{tg^3\alpha - 4 tg^2\alpha \, tg^3\frac{\alpha}{2}}$

កាលណា $R = \sqrt{3}$ (cm), $\alpha = 60^\circ$ យើងបាន :

$$|SH'| = \sqrt{3}\sqrt[3]{3\sqrt{3} - 4.3.\frac{3\sqrt{3}}{3^3}} = \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{5\sqrt{3}}{3}} = \sqrt[3]{15} \text{ cm}$$ ។

វិញ្ញាសាទី ១៩

1- ដោយស្គាល់ $\frac{\sin x}{x}$ ខិតជិត 1 កាលណា $x \to 0$

ចូរគណនា : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$; $\frac{\sin 8x}{2x}$

2- មានអនុគមន៍ : $y = \frac{x^2+1}{x-1}$

a) សិក្សានិងសង់ក្រាភិចអនុគមន៍នោះ ។

b) បង្ហាញថាចំនុច $I(1,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ក្រាភិច ។

3- ដោះស្រាយសមីការ :

$\sin 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin x + \cos x = 1$

4- មានចតុកោណព្នាយ ABCD កែងត្រង់ A និង D, $|AB| = |AD| = a$ $|DC| = 2a$ ។ លើបន្ទាត់កែងនឹង (ABCD) ត្រង់ D ដៅចំនុច S ដែល $|SD| = a$ ។

a) តើមុខខាងទាំងអស់របស់ពីរ៉ាមីត SABCD ជាត្រីកោណដូចម្ដេច?

b) រកផ្ចិតនិងកាំរបស់ស្វ៊ែកាត់តាមចំនុច : S, B, C, D ។

c) យក M ជាចំនុចកណ្ដាល [SA], ប្លង់ (DMC) កាត់ពីរ៉ាមីត SABCD បានខ្លួនអ្វី? គណនាក្រឡាផ្ទៃរបស់ខ្លួននោះ ។

ចម្លើយ

1) ដោយ $\frac{\sin x}{x} \to 1$ កាលណា $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{2x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x} = 4$$

2. a) $y = \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$ កំនត់ចំពោះ $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$y' = 1 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})}{(x-1)^2}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

$y' < 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2} \quad (x \neq 1)$

$y > 0 \Leftrightarrow x < 1-\sqrt{2}$ និង $x > 1+\sqrt{2}$

ដូចនេះ $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ មានអតិបរមាត្រង់ $x = 1-\sqrt{2}$ និង អប្បបរមា ត្រង់ $x = 1+\sqrt{2}$ ។

យើងបានតារាងអថេរភាព :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$2-2\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2+2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

ដោយ : $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1}\left[x+1+\frac{2}{x-1}\right] = \infty$

$\Rightarrow$ y មានអាស៊ីមតូតឈរ : $x = 1$

ដោយ : $\lim\limits_{x\to\infty}\left[y-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x-1} = 0$

$\Rightarrow$ y មានអាស៊ីមតូតទ្រេត : $y = x+1$

ក្រាភិចរបស់ y កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំនុច $y = -1$ ។

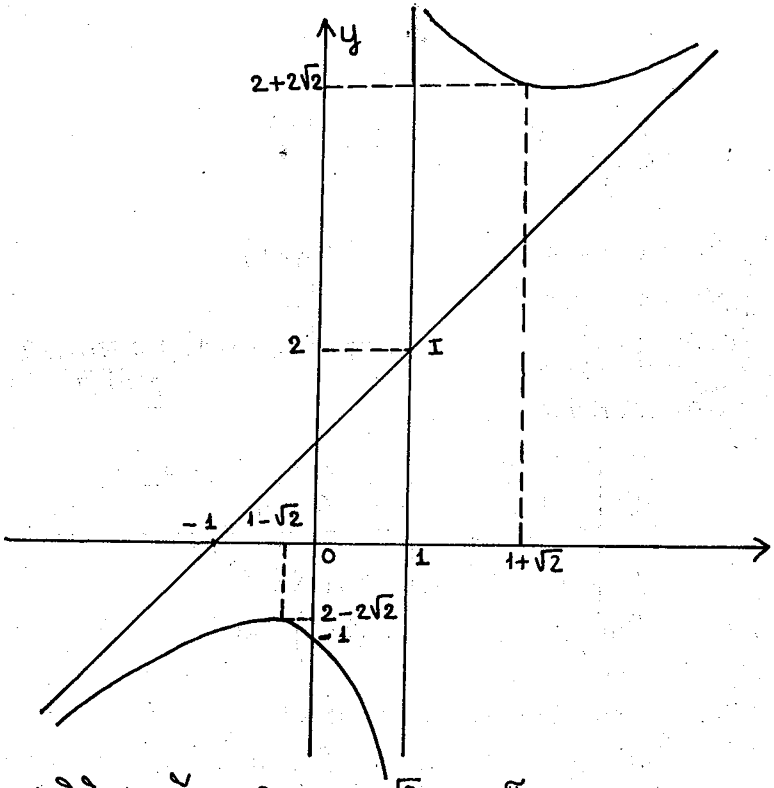
b) យើងមាន : $y - 2 = x - 1 + \frac{2}{x-1}$ (1)

តាង $X = x-1$; $Y = y-2$

(1) សរសេរជាតាង : $Y = X + \frac{2}{X}$

$\Rightarrow Y(-X) = -X - \frac{2}{X} = -\left(X + \frac{2}{X}\right) = -Y(X)$

$\Rightarrow Y(X)$ ជាអនុគមន៍សេស, ដូចនេះក្រាភិចវាឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អ័ក្សថ្មី ។ ដូចនេះក្រាភិចរបស់ $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងចំនុច $I(1,2)$ ។



3. a) ពិនិត្យសមីការ $\sin 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ នឹង $5x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + 2k\frac{\pi}{5}$ នឹង $x = \frac{3\pi}{20} + 2k\frac{\pi}{5}$ $(k\in\mathbb{Z})$

b) ពិនិត្យសមីការ $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6} \Rightarrow 3x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\Rightarrow x = \pm\frac{5\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$

c) ពិនិត្យសមីការ: $\sin x + \cos x = 1$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ នឹង $x+\frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$\Rightarrow x = 2k\pi$ នឹង $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

4. a) $[SD] \perp (ABCD) \Rightarrow [SD] \perp [AD]\,; [SD] \perp [CD]$

ដូចនេះ: ΔSDA កែងសមបាតត្រង់ D មាន $|AD| = |SD| = a$

$|SA| = a\sqrt{2}$.

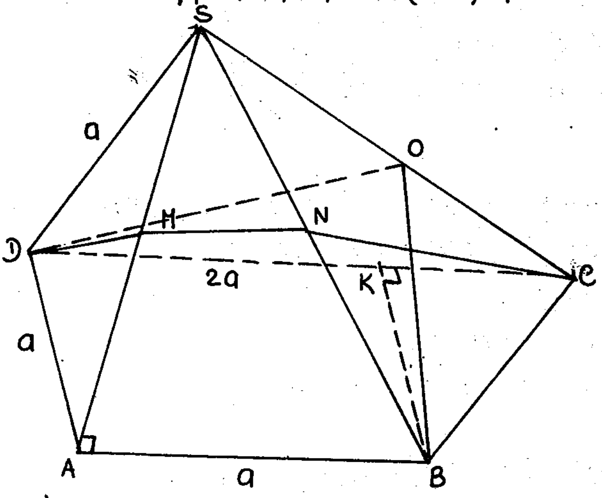
ΔSCD កែងត្រង់ D មាន : $|SD| = a$, $|CD| = 2a$,

$\Rightarrow |SC| = \sqrt{|SD|^2+|CD|^2} = \sqrt{a^2+(2a)^2} = a\sqrt{5}$

ដោយ : $\left.\begin{matrix}[SD]\perp(ABCD)\\ \widehat{DAB} = 90^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{SAB} = 90^\circ$ (ទ្រឹស្តីបទបីបន្ទាត់កែង)

ដូចនេះ: ΔSAB កែងត្រង់ A មាន : $|AB| = a$, $|SA| = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow |SB| = \sqrt{|SA|^2+|AB|^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2+a^2} = a\sqrt{3}$



ក្នុង ΔDBC គូសកំពស់ [BK] យើងបាន :

$|DK| = |AB| = a = \frac{|CD|}{2} = |KC|$

⇒ DBC ជាត្រីកោណសមបាទ

$\Rightarrow |BC| = |BD| = a\sqrt{2}$

ដោយ $|BD|^2+|BC|^2 = 2|BD|^2 = 2(a\sqrt{2})^2 = 4a^2 = (2a)^2 = |CD|^2$

⇒ ΔDBC ជាត្រីកោណកែងសមបាទត្រង់ B ។

ដោយ : $\left.\begin{matrix}[SD]\perp(ABCD)\\ \text{និង } \widehat{DBC} = 90^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{SBC} = 90^\circ$ (តាមទ្រឹស្តីបទបន្ទាត់កែង)

⇒ ΔSBC កែងត្រង់ C មាន : $|SB| = a\sqrt{3}$; $|BC| = a\sqrt{2}$, $|SC| = a\sqrt{5}$

b) យក O ជាចំណុចកណ្តាលរបស់ [SC]

ដោយ ΔSDC និង ΔSBC កែងរៀងគ្នាត្រង់ D និង C

$\Rightarrow |OS| = |OD| = |OB| = |OC| = \frac{|SC|}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

ដូចនេះ: S, B, C, D ស្ថិតនៅលើស្វ៊ែផ្ចិត O (ចំណុចកណ្តាល [SC]) មានកាំ $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ ។

c) ប្លង់ (DMC) និង (SAB) មានចំណុច M រួម

$\Rightarrow (DMC) \cap (SAB) = (MN)$ (N ស្ថិតនៅលើ [SB])

និងដោយ : $(AB)//(CD) \Rightarrow (MN)//(CD)$ (និង $(MN)//(AB)$)
ដូចនេះ CDMN ជាចតុកោណព្នាយ ដែលជាមុខកាត់របស់ (DMC) កាត់ពីរ៉ាមីត SABCD ។

ដោយ : $\widehat{CDS}$ និង $\widehat{CDA}$ ស្មើ $90^\circ \Rightarrow [CD] \perp (SDA)$

ដូចនេះ: $[CD]\perp[DM] \Rightarrow$ CDMN ជាចតុកោណព្នាយកែងត្រង់ D និង M
$\Rightarrow$ M ជាចំនុចកណ្ដាល [SA]
យើងបាន : $|DM| = \frac{1}{2}|SA| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|MN| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{a}{2}$
ដូច្នេះក្រលាផ្ទៃរបស់មុខកាត់ CDMN ស្មើ :

$$S = \frac{|CD|+|MN|}{2}|DM| = \frac{2a+\frac{a}{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{8}$$

វិញ្ញាសាទី 19

1. ដោះស្រាយសមីការ : $\sin 3x = \frac{1}{2}$, $\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tg 5x = \sqrt{3}$

2- សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាភិចអនុគមន៍ :
$$y = \frac{x^2+1}{x},$$

3- គណនាដេរីវេរបស់អនុគមន៍ :
$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} \ ; \ y = \frac{\sin 2x \cos 3x}{1+tg x}$$

4- រក a ដើម្បីឲ្យ : $\sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) +$
$+ \sin(x+3a) + \sin(x+4a) = 0 \ ; \forall x$

5. គេមានកោនមួយដែលមានកំពស់ 15cm, កាំបាតស្មើនឹង 6cm ។
a) រកកំពស់និងកាំបាតរបស់ស៊ីឡាំងដែលឲ្យក្រលាផ្ទៃរបស់វាទាំងអស់ធំបំផុត ចារឹកក្នុងកោននោះ ។
b) តើក្រលាផ្ទៃទាំងអស់របស់ស៊ីឡាំងស្មើប៉ុន្មាន?

ចម្លើយ

1- a) $\sin 3x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$
$\Rightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ និង $3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3}$ និង $x = \frac{5\pi}{18} + 2k\frac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$
b) $\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow 4x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \pm \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

c) $tg\,5x = \sqrt{3}$

លក្ខខណ្ឌ $5x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ឬ: $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{10}$

យើងបាន: $tg5x = \sqrt{3} = tg\frac{\pi}{3} \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$

ដូចនេះ ឫសរបស់សមីការគឺ $x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$

2. អនុគមន៍ : $y = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$ កំណត់ $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

$y' = 0$ ចំពោះ $x = \pm 1$

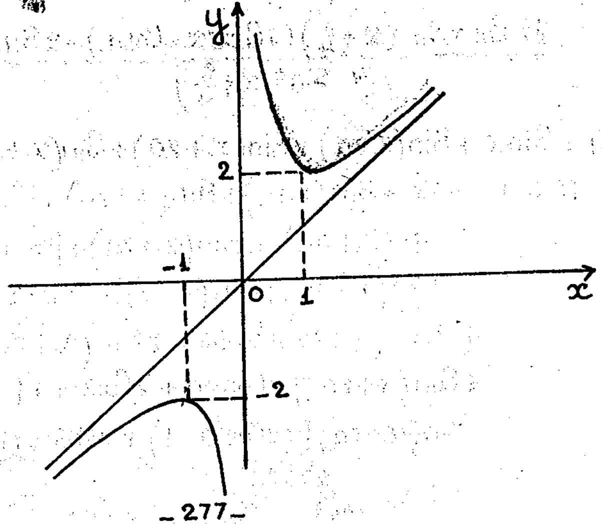
$y' < 0$ ចំពោះ $-1 < x < 1$ $(x \neq 0)$

$y' > 0$ ចំពោះ $x < -1$ និង $x > 1$

$\Rightarrow y = x + \frac{1}{x}$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = -1$ $(y = -2)$
និងអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$ $(y = 2)$

យើងបានតារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$



ដោយ : $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right) = \infty$

$\Rightarrow y = x+\frac{1}{x}$ មានអាស៊ីមតូតឈរ : $x = 0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow y = x+\frac{1}{x}$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេត : $y = x$

យើងមាន : $y(-x) = -x-\frac{1}{x} = -\left(x+\frac{1}{x}\right) = -y(x)$

$\Rightarrow y(x)$ ជាអនុគមន៍សេស , ក្រាភិចរបស់វាឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់អ័ក្ស ។

3- a) យើងមាន : $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}-1}\times\left(-\frac{2x}{x^4}\right) = -\frac{2}{3x^3}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3x^3}(x^2)^{\frac{2}{3}} =$$

$$= -\frac{2x\sqrt[3]{x}}{3x^3} = -\frac{2\sqrt[3]{x}}{3x^2}$$

b) យើងមាន

$$y = \frac{Sin2xCos3x}{1+tgx} = \frac{Sin5x - Sinx}{2(1+tgx)}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(1+tgx)(5Cos5x - Cosx) - (Sin5x - Sinx)\frac{1}{Cos^2x}}{2(1+tgx)^2} =$$

$$= \frac{Cosx(Cosx+Sinx)(5Cos5x - Cosx) - (Sin5x - Sinx)}{2(Cosx+Sinx)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,CosxSin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(5Cos5x - Cosx) - 2Sin2xCos3x}{4\,Sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

4 - $Sinx + Sin(x+a) + Sin(x+2a) + Sin(x+3a) + Sin(x+4a) = 0 \quad (1)$

មាន $0 = Sinx + Sin(x+a) + Sin(x+2a) + Sin(x+3a) +$

$+ Sin(x+4a) = Sin(x+2a) + [Sin(x+4a) + Sinx] +$

$+ [Sin(x+3a) + Sin(x+a)] = Sin(x+2a) +$

$+ 2Sin(x+2a)Cos2a + 2Sin(x+2a)Cosa =$

$= Sin(x+2a)[2Cos2a + 2Cosa + 1] =$

$= Sin(x+2a)[(2Cos^2a - 1) + 2Cosa + 1] =$

$= \sin(x+2a)\left[4\cos^2 a + 2\cos a - 1\right]$

ដើម្បីឲ្យសមភាព (1) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall x$ លុះត្រាតែ : $4\cos^2 a+2\cos a-1=0$ (2)

តាង $x = \cos a \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow$ (2) សរសេរជា : $4x^2+2x-1=0$ (2')

a) $x = \cos a = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos\varphi_1 \Rightarrow a = \pm\varphi_1 + 2k\pi$

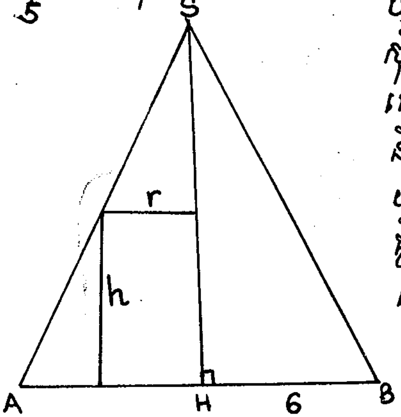
b) $x = \cos a = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} = \cos\varphi_2 \Rightarrow a = \pm\varphi_2 + 2k\pi$

ដូចនេះ (1) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall x$ កាលណា :

$a = \pm\varphi_1 + 2k\pi$ និង $a = \pm\varphi_2 + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

ដែលក្នុងនោះ φ_1 និង φ_2 កំនត់ដោយ : $\cos\varphi_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, $\cos\varphi_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

5



យក r និង h ជាកាំបាត និងកំពស់របស់ស៊ីឡាំងមានក្រលាផ្ទៃ S ធំបំផុតចារឹកក្នុងកោន។ យើងមាន : $6>r>0$, $15>h>0$

និង $S = 2\pi r^2+2\pi rh$ (1)

យក SAB ជាមុខកាត់តាមកំពូល S និងផ្ចិតបាត H របស់កោន

យើងបាន : $|SH| = 15(cm)$; $|AH|=6(cm)$

និង $\frac{r}{|AH|} = \frac{|SH|-h}{|SH|}$ ឬ $\frac{r}{6} = \frac{15-h}{15}$

$\Rightarrow$ $r = \frac{2(15-h)}{5}$ (2)

$h = \frac{30-5r}{2}$ (3)

ជំនួស (3) ចូល (1) យើងបាន : $S = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{30-5r}{2}\right) = -3\pi r^2+30\pi r$ (4)

$S' = -6\pi r + 30\pi = -6\pi(r-5)$

$S' = 0$ កាលណា $r = 5$

$S' < 0$ កាលណា $r > 5$; $S' > 0$ កាលណា $r < 5$

ដូចនេះ S មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = 5$

តារាងអថេរភាព

r	0	5	6
S'	+	0	−
S	↗	75π	↘

ជំនួស $r = 5$ ចូល (4) និង (3) យើងបាន

$h = 2,5(cm)$; $S = 75\pi(cm^2)$