ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ថ្មី !!

រៀបរៀងដោយ ឈួន សុផល់ បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា

គណិតវិទ្យា

១០

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

<u>**អារម្ភកថា**</u>

សួរស្តី ! ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស ប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អានពីខ្ញុំ ។ សៀវភៅ**គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០** ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់នៅក្នុងដៃនេះ គឺជាសៀវភៅថ្មីមួយដែលបង្កើតឡើងដើម្បីជាជំនួយដល់ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស ក្នុងការសិក្សារៀនសូត្រ និងធ្វើឲ្យដំណើរការនៃការរៀនរបស់ប្អូនៗមានភាពងាយស្រួលមិនលំបាក ដោយសារសៀវភៅនេះមាន **មេរៀនសង្ខេប លំហាត់ប្រតិបត្តិ និងលំហាត់អនុវត្ត** ដែលស្របតាមសៀវភៅរបស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ។ លំហាត់ក្នុងសៀវភៅនេះ បានដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅជាច្រើនដូចជា សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា សៀវភៅលំហាត់សម្រាប់គ្រូ និងសិស្ស មធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (សៀវភៅ១៥ភាគរបស់អង្គការ *JICA*) រួមមានលំហាត់ដែលធ្លាប់ចេញប្រឡងនានា ព្រមទាំងលំហាត់ធ្លាប់ចេញប្រឡងសិស្សពូកែផងដែរ ។

ខ្ញុំបាទបានរៀបចំសៀវភៅនេះឡើង ដើម្បីបំពេញចំណុចខ្វះខាត និងជាជំនួយស្មារតីដល់ប្អូនៗ សិស្សានុសិស្ស ដែលមានគោលបំណងក្នុងការសិក្សាស្រាវជ្រាវបន្ថែម ។ មានតែការសិក្សាស្រាវជ្រាវទេទើបធ្វើឲ្យចំណេះដឹងមានការរីកចម្រើន ទាន់សម័យកាលសមាហរណ៍កម្មអាស៊ាន ។

ទោះបីជាខ្ញុំខិតខំចងក្រង សំរិតសំរាំងយ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏នៅតែមិនអាចចៀសផុតនូវចំណុចខ្វះខាត និងកំហុសជាក់ជាមិនខានឡើយ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ ខ្ញុំបាទរងចាំទទួលនូវការតិះតៀនគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីស្ថាបនាដល់ខ្ញុំបាទពីសំណាក់ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ដោយក្តីរីករាយបំផុត ។

ជាទីបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទសូមគោរពជូនពរដល់ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ សូមទទួលបាននូវសេចក្តីសុខ ជោគជ័យគ្រប់ពេលវេលាក្នុងភារៈកិច្ច និងការងាររបស់ខ្លួន ជាពិសេសក្នុងអាជីពជាអ្នកសិក្សារៀនសូត្រក្នុងគោលដៅអភិវឌ្ឍប្រទេសជាតិយើងឲ្យរីកចម្រើនដូចប្រទេសនានានៅលើសកលលោក ។

ស្វាយរៀង , ថ្ងៃទី ១១ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០១៥

អ្នករៀបរៀង

បញ្ជីអត្ថបទ

	ចំណងជើងមេរៀន	ទំព័រ
១.	តក្កវិទ្យា	1
២.	សំណុំ	6
៣.	ចំនួន	12
៤.	ពហុធា	18
៥.	ប្រមាណវិធីចែកពហុធា	23
៦.	សមីការដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាត	26
៧.	ប្រព័ន្ធសមីការ និងសមីការដឺក្រេលំដាប់ខ្ពស់	33
៨.	វិសមីការ	35
៩.	ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់	40
១០.	អនុគមន៍ និងក្រាបនៃអនុគមន៍	47
១១.	អនុគមន៍ដឺក្រេទី 2 និងក្រាប	50
១២.	អនុគមន៍សនិទាន អនុគមន៍អសនិទាន	54
១៣.	ផលធៀបត្រីកោណមាត្រ	58
១៤.	អនុវត្តនៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រ	63
១៥.	ចម្លាស់	65
១៦.	បន្សំ	69
១៧.	វ៉ិចទ័រក្នុងប្លង់	72
១៨.	ធរណីមាត្រក្នុងលំហ	81

មេរៀនទី ១ តក្កវិទ្យា

I. សំណើ

និយមន័យ : សំណើ គឺជាអំណះអំណាងទាំងឡាយណាដែលគេសម្រេចថាពិត ឬមិនពិត ។

គេតាងឈ្មោះនៃសំណើដោយ អក្សរ p , q , r , s , ... ។

តម្លៃភាពពិត :

- បើសំណើ p ពិតនោះគេថា p មានតម្លៃភាពពិតស្មើនឹង 1 ។ គេកំណត់សរសេរ ត.$(p)=1$ ។
- បើសំណើ p មិនពិតនោះគេថា p មានតម្លៃភាពពិតស្មើនឹង 0 ។ គេកំណត់សរសេរ ត.$(p)=0$ ។

ប្រតិបត្តិ : ចូរជ្រើសរើសអំណះអំណាងដែលជាសំណើក្នុងចំណោមអំណះអំណាងខាងក្រោម ហើយកំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើទាំងនោះ ។

ក. សត្វគោតូចជាងសត្វឆ្មា ។

ខ. 2007 ចែកដាច់នឹង 3 ។

គ. ថ្ងៃស្អែកនឹងមានភ្លៀងខ្លាំងបំផុតនៅភ្នំពេញ ។

II. ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

១-ឈ្នាប់និង $(\wedge)$: សំណើទាំងឡាយណាដែលភ្ជាប់ដោយឈ្នាប់និង គេហៅថាសំណើឈ្នាប់និង។ ឈ្នាប់និងមាននិមិត្តសញ្ញា $\wedge$។ សំណើ p និង q កំណត់សរសេរដោយ $p\wedge q$។ $p\wedge q$ ពិតលុះត្រាតែ p និង q ពិតព្រមគ្នាទាំងពីរ។ គេបានតារាងតម្លៃភាពពិត:

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ប្រតិបត្តិ : គេមានសំណើពីរ : r : 24 ជាពហុគុណនៃ 6 , s : 24 ជាចំនួនគូ ។ ចូរកំណត់សំណើ $r\wedge s$ និង ត. $(r\wedge s)$ ។

២-ឈ្នាប់ឬ $(\vee)$: សំណើទាំងឡាយណា ដែលភ្ជាប់ដោយឈ្នាប់ ឬ ហៅថា សំណើឈ្នាប់ឬ។ ឈ្នាប់ឬមាននិមិត្តសញ្ញា $\vee$។ សំណើ p ឬ q គេកំណត់សរសេរដោយ $p\vee q$។ $p\vee q$ ពិតគ្រប់ករណីលើកលែងតែ p និង q មិនពិតព្រមគ្នាទាំងពីរ ។ គេបានតារាងតម្លៃភាពពិត:

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ប្រតិបត្តិ : គេមានសំណើពីរដូចខាងក្រោម ៖

p : 37 ជាចំនួនបឋម

q : 37 ចែកដាច់នឹង 5 ។ ចូរកំណត់សំណើ $p \vee q$ និង ត. $(p \vee q)$ ។

៣-ឈ្នាប់មិន $(\bar{\ }, \neg, -)$: សំណើទាំងឡាយណា ដែលភ្ជាប់ដោយឈ្នាប់ មិន ហៅថាសំណើឈ្នាប់មិន (ឬជាសំណើបដិសេធ)។ ឈ្នាប់មិនមាននិមិត្ត សញ្ញា $(\bar{\ })$។ សំណើ p និងសំណើ $\bar{p}$ មានតម្លៃភាពពិតខុសគ្នា។

p	$(\bar{p})$
0	1
1	0

-សម្គាល់: សំណើ $p = \bar{\bar{p}}$។ សំណើមិន p ស្មើសំណើដើម p កាលណា វាមានរបានៅខាងលើជាចំនួនគូ។

-លក្ខណៈដឺម៉ជេន (De Morgan) : គេមានសំណើ p និង q គេបានៈ

(i) $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$　　(ii) $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$ ។

ប្រតិបត្តិ : គេមានសំណើពីរ :

r : កុំព្យូទ័រនេះមានអានុភាពខ្លាំង

s : កម្មវិធីអ៊ិនធឺណេតនៃកុំព្យូទ័រនេះដំណើរការបានស្រួល ។

កំណត់សំណើ $\bar{r}, \bar{s}, \bar{r} \wedge \bar{s}$ និង $\bar{r} \vee \bar{s}$ ។

៤-ឈ្នាប់នាំឱ្យ $(\Rightarrow)$: សំណើទាំងឡាយណា ដែលភ្ជាប់ដោយឈ្នាប់ នាំឱ្យ គេហៅថា សំណើឈ្នាប់នាំឱ្យ ។ ឈ្នាប់នាំឱ្យមាននិមិត្តសញ្ញា $\Rightarrow$។ សំណើ p នាំឱ្យ q កំណត់សរសេរដោយ $p \Rightarrow q$។ $p \Rightarrow q$ ពិតគ្រប់ករណីលើកលែងតែ p ពិត តែ q មិនពិត ។ គេបានតារាងតម្លៃភាពពិតៈ

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ប្រតិបត្តិ : ក្រុមហ៊ុនលក់កាហ្វេស្រកានាគបានផ្សាយពាណិជ្ជកម្មថា " បើអ្នកផឹកកាហ្វេស្រកានាគ នោះអ្នកនឹងមិនមានអារម្មណ៍ ស្ពឹកឡើយ " ។ តាងសំណើលក្ខខណ្ឌនោះដោយប្រើសញ្ញាឈ្នាប់ ។

៥-ឈ្នាប់សមមូល $(\Leftrightarrow)$: សំណើទាំងឡាយណា ដែលភ្ជាប់ដោយឈ្នាប់ សមមូល គេហៅថា សំណើឈ្នាប់សមមូល ។ ឈ្នាប់សមមូលមាននិមិត្តសញ្ញា $\Leftrightarrow$ ។ សំណើ p សមមូល q កំណត់សរសេរដោយ $p \Leftrightarrow q$ ។ $p \Leftrightarrow q$ ពិតលុះត្រាតែ p និង q មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា។

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ប្រតិបត្តិ : គេមានសំណើពីរ $p: x^2+x-2=0$ និង $q: x=1\,,\,x=-2$ ។

ក. បង្ហាញថា $p\Rightarrow q$ ជាសំណើពិត , $q\Rightarrow p$ ជាសំណើពិត

ខ. បង្ហាញថា $p\Leftrightarrow q$ ។

III. **ប្រភេទសម្រាយបញ្ជាក់**

១. សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់ : គឺជាសម្រាយបញ្ជាក់ត្រង់ៗទៅតាម អ្វីដែលគេចង់បាន។

ប្រតិបត្តិ : បង្ហាញថា ក. បើ x និង y ជាចំនួនគត់សេសនោះ $x+y$ ជាចំនួនគត់គូ ។

ខ. បើ x និង y ជាចំនួនគត់សេសនោះ $x\cdot y$ ជាចំនួនគត់សេស ។

២. សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសម្ពតិកម្ម : គឺប្រភេទសម្រាយបញ្ជាក់ ទាញចេញពីសំណើឈ្នាប់នាំឱ្យ $(\Rightarrow)$ គេដឹងថា: $p\Rightarrow q$ និង $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា។

របៀបដោះស្រាយ : ឧបមាថា គេចង់បង្ហាញសំណើ $p\Rightarrow q$ ពិត

- *ជំហានទី១* : ត្រូវកំណត់សំណើ p និង q ឲ្យបានត្រឹមត្រូវ (តាងសំណើ)
- *ជំហានទី២* : ត្រូវកំណត់សំណើ $\overline{p}$ និងសំណើ $\overline{q}$
- *ជំហានទី3* : គេផ្តើមពីមិន $\overline{q}$ បញ្ជាក់រហូតគេបានសំណើ $\overline{p}$ ដែលជាសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម គឺមានន័យថាគេបានបង្ហាញ $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ ពិត ។ ដូចនេះគេបាន $p\Rightarrow q$ ជាសំណើពិត ។

ប្រតិបត្តិ : ក. បង្ហាញថាចំពោះចំនួនគត់ m និង n បើផលគុណ mn មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 នោះ m និង n ក៏មិនមែន ជាពហុគុណនៃ 3 ដែរ ។

ខ. បង្ហាញថាបើមុំឆ្លាស់ក្នុងពីរនៃបន្ទាត់ពីរជាមុំស្មើគ្នា នោះបន្ទាត់ទាំងពីរនោះស្របគ្នា ។

៣. សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីការពិត : គឺជាប្រភេទសម្រាយបញ្ជាក់ ដែលតម្រូវឱ្យគេផ្តើមចេញពី សំណើឈ្នាប់មិន នៃសំណើដែលគេត្រូវបង្ហាញថាពិត រហូតទទួលបានសំណើថ្មី ដែលផ្ទុយពីទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យា នោះនាំឱ្យ សំណើដើមដែលត្រូវបង្ហាញ គឺជាសំណើពិត ។

របៀបដោះស្រាយ :

- *ជំហានទី១* : តាង p ជាសំណើដែលត្រូវបង្ហាញ
- *ជំហានទី២* : កំណត់សំណើ $\overline{p}$
- *ជំហានទី3* : កំណត់ថាសំណើ $\overline{p}$ ពិត ។ រួចបកស្រាយបន្តបន្ទាប់រហូតដល់បានលទ្ធផលផ្ទុយពីទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យា គេបានសំណើ $\overline{p}$ មិនពិត ។ ដូច្នេះសំណើ p ពិត ។

ប្រតិបត្តិ : ក. បង្ហាញថា $\sqrt{2}$ គឺជាចំនួនអសនិទាន ។

ខ. បង្ហាញថា $\sqrt{3}$ គឺជាចំនួនអសនិទាន ។

គ. បង្ហាញថា $\sqrt[4]{2}$ គឺជាចំនួនអសនិទាន ។

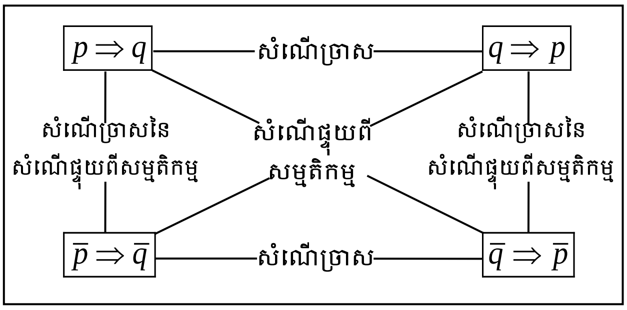
៤. សម្រាយបញ្ជាក់តាមបែបទ្វេលក្ខខណ្ឌ : គឺជាប្រភេទសម្រាយបញ្ជាក់ ទាញចេញពីឈ្នាប់សមមូល។ មានន័យថា គេបង្ហាញលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ $p\Rightarrow q$ និងលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ $q\Rightarrow p$ ព្រោះគេដឹងថា:

$(p\Leftrightarrow q)=(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ ។

ប្រតិបត្តិ : បង្ហាញថា : ក. $x^3-4x=0$ លុះត្រាតែ $(x=0$ ឬ $x=-2$ ឬ $x=2)$ ។

ខ. $x^2+y^2=0$ លុះត្រាតែ $(x=0$ និង $y=0)$ ។

៥. សម្រាយបញ្ជាក់តាមឧទាហរណ៍ផ្ទុយ : គឺជាប្រភេទសម្រាយបញ្ជាក់ តម្រូវឱ្យគេរកឧទាហរណ៍មួយមកបញ្ជាក់ថា សំណើដែលគេត្រូវបង្ហាញ ជាសំណើមិនពិត ។



ប្រតិបត្តិ : បង្ហាញថាសំណើខាងក្រោមនេះមិនពិតដោយប្រើឧទាហរណ៍ផ្ទុយ :

ក. អង្គការអាស៊ានមានសមាជិកមកពីគ្រប់ប្រទេសក្នុងទ្វីបអាស៊ី ។

ខ. គ្រប់ចំនួនបឋមគឺជាចំនួនគត់សេស ។

គ. បើ p និង q ជាចំនួនបឋម ហើយ $n=p^2+q^2$ នោះ n ជាចំនួនបឋម ។

ឃ. បើ $a>b$ នោះ $a^2>b^2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ។

<u>លំហាត់អនុវត្ត</u>

1. តើសំណើ $p\wedge q$ ពិតនៅពេលណា ? ចូរសរសេរតារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $p\wedge q$ ឱ្យបានត្រឹមត្រូវ។
2. តើសំណើ $p\vee q$ មិនពិតនៅពេលណា ? ចូរសរសេរតារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $p\vee q$ ឱ្យបានត្រឹមត្រូវ។
3. តើសំណើ $p\Rightarrow q$ មិនពិតនៅពេលណា ? ចូរសរសេរតារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $p\Rightarrow q$ ឱ្យបានត្រឹមត្រូវ។
4. តើសំណើ $p\Leftrightarrow q$ ពិតនៅពេលណា ? ចូរសរសេរតារាងតម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $p\Leftrightarrow q$ ឱ្យបានត្រឹមត្រូវ។
5. បើគេមានសំណើពីរ p និង q នោះគេបានលក្ខណៈដឺម៉ជេនៈ

   (i) $\overline{p\wedge q}=\overline{p}\vee\overline{q}$ និង

   (ii) $\overline{p\vee q}=\overline{p}\wedge\overline{q}$ ។ ចូរបកស្រាយលក្ខណៈនីមួយៗ ដោយប្រើតារាងតម្លៃភាពពិត។
6. កំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើដូចខាងក្រោមៈ

   ក. ទំហំផែនដីតូចជាងព្រះច័ន្ទ និងផែនដីវិលជុំវិញព្រះអាទិត្យ ។ ខ. ស្វាយជាផ្លែឈើ លុះត្រាតែស្ករមានរសជាតិផ្អែម ។

   គ. $2\le 3$ នោះ $2+3\ne 5$ ។ ឃ. $x^2+3x-4=0$ នោះ $x=1$ និង $x=-4$ ។
7. ចូរសរសេរសំណើខាងក្រោមដោយប្រើឈ្នាប់តក្កវិទ្យា រួចកំណត់តម្លៃភាពពិតរបស់សំណើទាំងនោះ។

   ក. គោមិនមានជើងបួន ឬគោមានស្នែងពីរ។ ខ. គោមានជើងបួន និងគោមិនមានស្នែងពីរ។

   គ. គោមានជើងបួន នោះគោមានស្នែងពីរ។ ឃ. គោមានស្នែងពីរ លុះត្រាតែគោមានជើងបួន។
8. ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីការពិតៈ

ក. បង្ហាញថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ខ. បង្ហាញថា $\sqrt[3]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

9. ដោយប្រើឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ចូរបង្ហាញថា បើ a និង b ជាចំនួនបឋមដែល $c=a^2+b^2$ នោះ c ជាចំនួនបឋមជាសំណើមិនពិត។

ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីការពិត បង្ហាញថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនអសនិទាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម p ។

10. ដោយប្រើឧបមាផ្ទុយពីការពិតៈ

ក. បង្ហាញថា $\sqrt{6}$ គឺជាចំនួនអសនិទាន ។

ខ. បង្ហាញថា $\sqrt[3]{4}$ គឺជាចំនួនអសនិទាន។

គ. បង្ហាញថា $\sqrt[4]{3}$ គឺជាចំនួនអសនិទាន ។

ឃ. បង្ហាញថា $2\sqrt{2}$ គឺជាចំនួនអសនិទាន ។

ង. បង្ហាញថា $1+\sqrt{2}$ គឺជាចំនួនអសនិទាន។

ច. បង្ហាញថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ គឺជាចំនួនអសនិទាន ។

មេរៀនទី ២ សំណុំ

I. សញ្ញាណនៃសំណុំ

១. ភាពទូទៅនៃសំណុំ

សំណុំ ជាបណ្តុំនៃវត្ថុ ឬធាតុទាំងឡាយ ដែលកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌជាក់លាក់ ។ គេតាងសំណុំដោយអក្សរពុម្ពធំឡាតាំង ដូចជា $A, B, C, ...$។ ឯធាតុនៃសំណុំគេតាងដោយ $a, b, c, ...$ ។

-វត្ថុទាំងឡាយនៃសំណុំ A ហៅថាធាតុនៃសំណុំ A ។

-បើ a ជាធាតុមួយនៃសំណុំ E គេសរសេរ $a \in E$ ឬសរសេរ $E \ni a$។

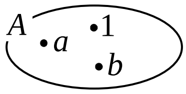
-ធាតុទាំងឡាយនៃសំណុំ A គេសរសេរដោយប្រើសញ្ញារបស់ $(\in)$ ឯធាតុ ទាំងឡាយមិនជាធាតុនៃសំណុំ A គេសរសេរដោយប្រើសញ្ញាមិនរបស់ $(\notin)$ ។

-ជាធម្មតា ធាតុនៃសំណុំណាមួយ គេសរសេរនៅក្នុងរបាំង $\{ ... \}$ ។

-បើ a ជាធាតុមួយ ហើយ E ជាសំណុំមួយ នោះគេបាន $a \in E$ ពិត ឬ $a \notin E$ ពិត ។

-គេអាចតាងធាតុទាំងអស់នៃសំណុំដោយចំណុចស្ថិតនៅក្នុងខ្សែបិទជិត ហៅថា ដ្យាក្រាមវិន $(VennDiagram)$ ។

ចំពោះ $A = \{ a, b, 1 \}$ គេបានដ្យាក្រាមវិនៈ



-ចំនួនធាតុនៃសំណុំ A តាងដោយ $n(A)$ ។

-សំណុំដែលគ្មានធាតុសោះ គេហៅថាសំណុំទទេ ហើយគេតាងដោយ $\varnothing$ ឬតាងដោយ $\{ \}$

ដូចនេះចំនួនធាតុនៃសំណុំទទេគឺ $n(\varnothing) = 0$ ។

-ធាតុនីមួយៗនៃសំណុំមិនអាចច្រំដែលបានទេ គឺត្រូវតែខុសៗគ្នា។

២. ទ្រឹស្តីបទចំពោះសំណុំ

-ចំពោះគ្រប់សំណុំ E គេបាន $E \subset E$, E ហៅថាផ្នែកពេញនៃ E ។

-ចំពោះគ្រប់សំណុំ E គេបាន $\varnothing \subset E$, $\varnothing$ ហៅថាផ្នែកទទេនៃ E ។

៣. ប្រភេទនៃសំណុំ

-គេកំណត់ប្រភេទនៃសំណុំតាមពីររបៀបគឺៈ កំណត់តាមការរាប់ឈ្មោះធាតុ និងកំណត់តាមលក្ខខណៈរួមនៃធាតុ។

-គេចែកសំណុំជាពីរប្រភេទគឺៈ សំណុំរាប់អស់ និងសំណុំអនន្ត។

-សំណុំរាប់អស់ ជាសំណុំដែលមានចំនួនធាតុជាចំនួនកំណត់។

-សំណុំអនន្ត ជាសំណុំដែលមានចំនួនធាតុ ច្រើនរាប់មិនអស់។

-សំណុំខ្លះមានធាតុមិនមែនជាចំនួន ប៉ុន្តែជាចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ។

-សំណុំពីរ ជាសំណុំស្មើគ្នា កាលណាវាមានបញ្ជីធាតុដូចគ្នា។

-បើ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ B លុះត្រាតែគ្រប់ធាតុ $x \in A$ នោះ $x \in B$។

គេសរសេរៈ $A \subseteq B \Leftrightarrow$ គ្រប់ធាតុ $x \in A$ នោះ $x \in B$ ។

-បើ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ B គេបាន $A \subseteq B$ នោះ $n(A) \le n(B)$ ។

-បើ A ជាសំណុំរងផ្ទាល់នៃសំណុំ B គេបាន $A \subset B$ នោះ $n(A) < n(B)$

-សំណុំ U ជាសំណុំសកល លុះត្រាតែសំណុំនេះ មានគ្រប់ធាតុដែលគេ បានជ្រើសរើសមកសិក្សា។

-សំណុំ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំសកល U ។ សំណុំរងបំពេញនៃសំណុំ A កំណត់ដោយ $\boxed{\overline{A} = \{x \mid x \notin A \ , x \in U\}}$

-ជាទូទៅ: $\boxed{n(U) = n(A) + n(\overline{A})}$ ។

-លក្ខណៈ: $\boxed{\bullet \ \overline{\overline{A}} = A \quad \bullet \ \overline{U} = \varnothing \quad \bullet \ \overline{\varnothing} = U}$ ។

-បើ E ជាសំណុំមួយ នោះគ្រួសារសំណុំរងទាំងអស់របស់ E បង្កើតបាន ជាសំណុំមួយ ហៅថាសំណុំផ្នែកនៃ E ដែលគេតាងដោយ $P(E)$ ។

-បើ E ជាសំណុំមួយមាន n ធាតុ នោះ $P(E)$ ជាសំណុំមាន 2^n ធាតុ ។

ប្រតិបត្តិ១ : កំណត់សំណុំដោយរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ កំណត់ចំនួនធាតុ និងគូសដ្យាក្រាមវិនតាងសំណុំនីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក. សំណុំនៃចំនួនគត់គូវិជ្ជមានតូចជាង ឬស្មើ 10 ។

ខ. សំណុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលតូចជាង 8 តែធំជាងឬស្មើ 1 ។

ប្រតិបត្តិ២ : កំណត់សំណុំតាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុ និងតាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ ហើយកំណត់ចំនួនធាតុនៃសំណុំខាងក្រោម ៖

ក. សំណុំចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានតូចជាង ឬស្មើ 10 ។

ខ. សំណុំចម្លើយនៃសមីការ $(x-1)(x-3)=0$ ។

គ. សំណុំចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានដែលតូចជាង 20 និងធំជាង 2 ។

ប្រតិបត្តិ៣ : កំណត់សំណុំតាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ និងប្រៀបធៀបសំណុំខាងក្រោម ៖

$D = \{x \mid x$ ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និង $5x \le 16\}$

$E = \{x \mid x$ ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និង $\sqrt{x} \le 2\}$

$F = \{x \mid x$ ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និង $x^2 \le 25\}$ ។

ប្រតិបត្តិ៤ : គេឲ្យសំណុំសកល $U = \{x \mid x$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $0 < x \le 11\}$ និងសំណុំរងពីរ A និង B ដែល $A = \{x \mid 0 < 2x < 7\}$, $B = \{x \mid 0 < 2x < 20\}$ ។

ក. សរសេរសំណុំរងបំពេញ $\bar{A}$ និងកំណត់ចំនួនធាតុរបស់សំណុំនោះ ។

ខ. សរសេរសំណុំរងបំពេញ $\bar{B}$ និងកំណត់ចំនួនធាតុរបស់សំណុំនោះ ។

គ. ចូរបញ្ជាក់ថា សំណើណាពិត ហើយសំណើណាមិនពិត ចំពោះសំណើដូចខាងក្រោម ៖

$\bar{A} \subseteq \bar{B}$, $\bar{B} \not\subset A$ និង $A \not\subset B$ ។

II. ប្រមាណវិធីលើសំណុំ

១. ប្រសព្វនៃសំណុំ

-បើ A ប្រសព្វ B បានធាតុ x នោះ x ជាធាតុរបស់សំណុំ A និង x ជាធាតុរបស់ B គឺ:

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ និង } x\in B\}$$

-ចំនួនធាតុនៃសំណុំ $A\cap B$ តាងដោយ $n(A\cap B)$ ។

-បើ $A\cap B=\varnothing$ មានន័យថាសំណុំ A និងសំណុំ B ជាសំណុំដាច់គ្នា។ គេបាន $A\cap\bar{A}=\varnothing$ នោះសំណុំ A និងសំណុំ $\bar{A}$ ជាសំណុំដាច់គ្នា។

-លក្ខណៈ បើ A , B និង C ជាសំណុំរងនៃសំណុំសកល U គេបានៈ

• $A\cap B=B\cap A$	• $A\cap A=A$
• $A\cap U=A$	• $A\cap\varnothing=\varnothing$
• $A\cap\bar{A}=\varnothing$	• $(A\cap B)\subset A$
• $(A\cap B)\subset B$	• $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

ប្រតិបត្តិ : កំណត់ប្រសព្វ និងចំនួនធាតុនៃប្រសព្វរបស់គូសំណុំនីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក. $A=\{1,2,3,4\}$ និង $B=\{2,4,6\}$ ខ. $R=\{1,2,4,8\}$ និង $P=\{1,3,9\}$

គ. $C=\{1,2,3,6\}$ និង $D=\{4,7\}$ ឃ. $M=\{m,a,t,h\}$ និង $N=\{c,u,t\}$ ។

២. ប្រជុំនៃសំណុំ

-បើ A ប្រជុំ B បានធាតុ x នោះ x ជាធាតុរបស់សំណុំ A ឬ x ជាធាតុ របស់ B គឺ: $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ or } x\in B\}$

-ចំនួនធាតុនៃសំណុំ $A\cup B$ តាងដោយ $n(A\cup B)$ ។

-ចំពោះគ្រប់សំណុំ A និងសំណុំសកល U គេបាន $A\cup\bar{A}=U$ ។

-សម្គាល់: -បើ $x\in A$ ឬ $x\in B$ មានន័យថា $x\in A$ តែ $x\notin B$ ឬ $x\in B$ តែ $x\notin A$ ឬ $x\in(A\cap B)$ ។

-បើមានសំណុំរាប់អស់ពីរ A និង B នោះគេបាន $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ ។

-លក្ខណៈ បើ A , B និង C ជាសំណុំរងនៃសំណុំសកល U គេបានៈ

• $A\cup B=B\cup A$	• $A\cup A=A$
• $A\cup U=U$	• $A\cup\varnothing=A$
• $A\cup\bar{A}=U$	• $A\subset(A\cup B)$
• $B\subset(A\cup B)$	• $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

ប្រតិបត្តិ : តាមការសាកសួរពត៌មានពីសិស្សចំនួន 160 នាក់ បានឲ្យដឹងថាមានសិស្សចំនួន 76 នាក់ចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅ បណ្ណាល័យ 65 នាក់ចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅផ្ទះ និង 41 នាក់ចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅកន្លែងទាំងពីរនេះ ។ រកចំនួនសិស្ស ដែលចូលចិត្តអានសៀវភៅតាមករណីដូចខាងក្រោម ៖

ក. នៅបណ្ណាល័យតែម្យ៉ាងប៉ុណ្ណោះ ។

ខ. នៅផ្ទះ តែម្យ៉ាងប៉ុណ្ណោះ ។

គ. នៅកន្លែងផ្សេងពីកន្លែងទាំងពីរនេះ ។

III. លក្ខណៈនៃប្រមាណវិធីលើសំណុំ

១. លក្ខណៈដឺម័ដេន (De Morgan)

-ចំពោះគ្រប់ពីរសំណុំ A និង B គេបាន:

- $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$
- $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

២. លក្ខណៈផ្តុំ

-គេមានបីសំណុំ A , B និង C គេបាន:

- $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
- $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

៣. លក្ខណៈបំបែក

-គេមានបីសំណុំ A , B និង C គេបាន:

- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

លំហាត់អនុវត្ត

1. ចូរកំណត់សំណុំខាងក្រោម តាមការកំណត់លក្ខណៈរួមនៃធាតុ និងតាមការរៀបរាប់ឈ្មោះនៃធាតុ ហើយកំណត់ចំនួនធាតុនៃ សំណុំនីមួយៗ ដូចខាងក្រោម:

   ក. សំណុំចំនួនដែលជាតួចែកវិជ្ជមាននៃ 30 ។
   ខ. សំណុំចំនួនបឋមដែលចែកដាច់នឹង 2 ។
   គ. សំណុំចំនួនគត់សេស ដែលចែកដាច់នឹង 2 ។
   ឃ. សំណុំឫសនៃសមីការ $(x-1)(x+2)(x-3)=0$ ។
   ង. សំណុំចំនួនគត់សេសដែលតូចជាងឬស្មើ 10 ។
   ច. សំណុំចំនួនគត់គូ ដែលតូចជាង 20 និងធំជាង 2 ។
   ឆ. សំណុំចំនួនបឋម 10 តួដំបូង។
   ជ. សំណុំចំនួនលទ្ធផលនៃការប្រឡងមួយ ។

2. គេឱ្យសំណុំសកល $U=\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , a , b , c , d, e \}$ និងពីរសំណុំទៀតគឺ:

   $A=\{ 1 , 2 , 3 , b , d , e \}$ និង $\bar{B}=\{ 1 , 3 , 5 , a , d , e \}$ ។

   ក. កំណត់សំណុំ $\bar{A}$ រួចទាញរក $n(\bar{A})$ ។
   ខ. កំណត់សំណុំ B រួចគូសដ្យាក្រាមវិននៃសំណុំនេះ
   គ. កំណត់សំណុំ $\bar{A}\cap B$ រួចកំណត់ $n(\bar{A}\cap B)$ ។
   ឃ. កំណត់សំណុំ $A\cup\bar{B}$ រួចកំណត់ $n(A\cup\bar{B})$ ។

3. សរសេរគ្រប់សំណុំរងទាំងអស់នៃសំណុំ $C=\{ a ,1, 2 \}$ ។

4. គេមានសំណុំសកល $U=\{ a , b , c ,1, 2 , 3 , 4 \}$ និងសំណុំ $P=\{ a , b , 3 \}$ ។

   ក. កំណត់សំណុំរងបំពេញនៃសំណុំ P ។
   ខ. គណនា $n(P)+n(\bar{P})$ រួចប្រៀបធៀប $n(P)+n(\bar{P})$ និង $n(U)$ ។

5. កំណត់ប្រសព្វ រួចបញ្ជាក់ដោយប្រើដ្យាក្រាមវិន និងរកចំនួនធាតុនៃប្រសព្វរបស់គូសំណុំនីមួយៗដូចខាងក្រោម:

   ក. $A=\{1, 2, 3, 4 \}$ និង $B=\{ 2 , 4 ,6 \}$
   ខ. $M=\{ 1, 2 , 4 , 8 \}$ និង $N=\{ 3 , 5 ,9 \}$

គ. $X=\{1,2,a,b\}$ និង $Y=\{2,b,c\}$ ឃ. $P=\{a,n,g,o,r\}$ និង $Q=\{l,o,v,e\}$ ។

6. គេមានបីសំណុំ $A=\{1,2,4,a,d\}$, $B=\{x|x$ ជាតួចែកវិជ្ជមាននៃ $4\}$ និង $C=\{2,3,4,a,b,c\}$

ក. បើសំណុំសកល $U=\{1,2,3,4,5,a,b,c,d\}$ ចូរកំណត់ $\overline{A}$, B , $\overline{B}$, $\overline{C}$ ។

ខ. កំណត់សំណុំ $A\cup B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{B}\cup C$, $\overline{A}\cap\overline{C}$ រួចសំណុំ $(A\cap B)\cap C$, $\overline{A}\cup(B\cap\overline{C})$ ។

គ. ប្រើលក្ខណៈដឺម៉ដេន កំណត់សំណុំ $\overline{(A\cap\overline{B})\cup C}$ ។

7. តាមការសាកសួរព័ត៌មានពីសិស្ស 160 នាក់ បានឱ្យដឹងថា មានចំនួនសិស្ស 79 នាក់ ចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅបណ្ណាល័យ 65 នាក់ ចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅផ្ទះ និង 41 នាក់ចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅកន្លែងទាំងពីរ។ ចូររកចំនួនសិស្សដែលៈ

ក. ចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅតែបណ្ណាល័យប៉ុណ្ណោះ។ ខ. ចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅផ្ទះតែម្យ៉ាងប៉ុណ្ណោះ។

គ. ចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅផ្ទះ ឬនៅបណ្ណាល័យ។

ឃ. ចូលចិត្តអានសៀវភៅនៅកន្លែងផ្សេងក្រៅពីកន្លែងទាំងពីរ

8. គេឱ្យសំណុំសកល $U=\{5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$ ។

កំណត់សំណុំខាងក្រោមតាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុៈ

ក. $A=\{x|x\in U$ និង x ជាពហុគុណនៃ $3\}$ ខ. $D=\{x|x\in U$ និង x ជាចំនួនសេសតូចជាងឬស្មើ$11\}$ ។

គ. $C=\{x|x\in U$ និង x ជាចំនួនបឋម $\}$ ។ ឃ. $B=\{x|x\in U$ និង x ជាតួចែកនៃ $60\}$ ។

9. គេមានសំណុំសកល $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ ហើយនិងសំណុំរងពីរគឺ $A=\{a,c,e\}$ និងសំណុំ $B=\{b,d,f,h\}$។ កំណត់សំណុំ $\overline{A}$ និង $\overline{B}$ តាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ។ តើ A ជាសំណុំរងផ្ទាល់នៃ $\overline{B}$ ដែរឬទេ?

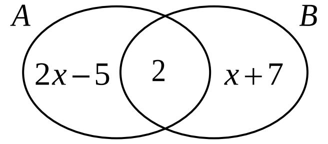
10. គេឱ្យសំណុំ $A=\{x|1\le x\le 5\}$, $B=\{x|0<x<3\}$ និង $C=\{x||x|<2\}$ ដែល x ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន។

កំណត់សំណុំៈ ក. $A\cup B$, ខ. $B\cap C$, គ. $\overline{B}\cap C$ ។

11. គេឱ្យសំណុំសកល $U=\{x|x$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន $\}$ ហើយនិងសំណុំរងពីរ $A=\{x|x\in U$ និង $x\ge 5\}$ និង $B=\{x|x\in U$ និង $x<12\}$ ។ កំណត់ $n(A\cap B)$ និង $n(\overline{A})$ ។

12. គេតាងចំនួនធាតុនៃសំណុំ $\overline{A}$, $\overline{B}$ និង $A\cap B$ នៅក្នុងដ្យាក្រាមវិន។

គេឱ្យ $n(\overline{A}\cap B)=n(A\cap\overline{B})$។

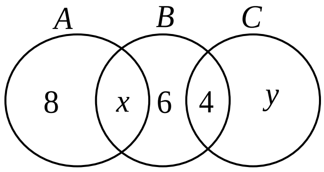


ក. កំណត់តម្លៃ x ។

ខ. កំណត់ $n(A)$ និង $n(B)$ ។

13. គេមានបីសំណុំ A, B និង C ដែល $U=A\cup B\cup C$។

គេតាងចំនួនធាតុនៃសំណុំរងទាំងបីនេះ នៅក្នុងដ្យាក្រាមវិន។

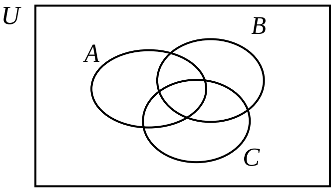


ក. គេឱ្យ $n(A\cap B)=n(B\cap C)$ ចូរកំណត់តម្លៃនៃ x ។

ខ. គេឱ្យ $n(B\cap\overline{C})=n(\overline{A}\cap C)$ ចូរកំណត់តម្លៃនៃ y ។

គ. រក $n(U)$ ។

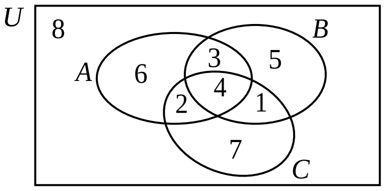
14. គេមានដ្យាក្រាមវិនតាងសំណុំបី A, B និង C ។ ចូរគូសឆូតរកសំណុំដូចខាងក្រោម:



ក. $(A\cap B)\cap\bar{C}$, ខ. $(A\cap\bar{B})\cap C$, គ. $(A\cup\bar{B})\cap C$

ឃ. $(A\cup B)\cup C$, ង. $(A\cap B)\cap C$, ច. $U\cap\overline{\left[(A\cup B)\cup C\right]}$ ។

15. គេមានដ្យាក្រាមវិន និងចំនួននៃធាតុដូចខាងស្តាំ:



តាមដ្យាក្រាមវិន ខាងស្តាំនេះ ចូរកំណត់ចំនួនធាតុ:

ក. $n(A\cap B\cap C)$, $n(A\cap B)$, $n(A\cap\bar{C})$, $n\left[(\bar{A}\cap B)\cap C\right]$

ខ. $n(A)$, $n(B)$, $n(A\cup B)$, $n(B\cup C)$, $n(A\cup B\cup C)$, $n(U)$ ។

16. ក្នុងពិធី Party (ជប់លៀង) មួយមានតែសិស្សថ្នាក់ទី 10I ចំនួន 40 នាក់បានចូលរួម។ ក្នុងចំណោមសិស្សទាំងនេះមាន 32 នាក់ចេះច្រៀង , 29 នាក់ចេះរាំ និងមាន 24 នាក់ចេះរាំផងនិងច្រៀងផង។

ក. រកចំនួនសិស្សចេះរាំតែម្យ៉ាងគត់។ ខ. រកចំនួនសិស្សមិនចេះរាំ តែចេះច្រៀង។

គ. រកចំនួនសិស្សចេះរាំ ឬចេះច្រៀង ។ ឃ. រកចំនួនសិស្សរាំក៏មិនចេះ និងច្រៀងក៏មិនចេះ (មោគសុទ្ធ)

17. តាមការសម្ភាសអតិថិជនចំនួន 130 នាក់ បានឱ្យដឹងថា មានអតិថិជនចំនួន 74 នាក់ចូលចិត្តទិញផលិតផលនៅក្នុងស្រុក ចំនួន 70 នាក់ចូលចិត្តទិញផលិតផលបរទេស និងចំនួន 41 នាក់ចូលចិត្តទិញផលិតផលទាំងពីរនេះ។ រកចំនួនអតិថិជនដែលចូលចិត្ត ទិញផលិតផលដូចខាងក្រោម:

ក. ទិញតែផលិតផលនៅក្នុងស្រុក។ ខ. ទិញតែផលិតផលបរទេស។

គ. ទិញទាំងផលិតផលបរទេស ឬផលិតផលក្នុងស្រុក។ ឃ. មិនទិញផលិតផលទាំងពីរប្រភេទនេះ។

មេរៀនទី ៣ ចំនួន

I. ចំនួនពិត

បន្ទាត់ចំនួនចែកចេញជាពីរផ្នែក គឺផ្នែកវិជ្ជមាន និងផ្នែកអវិជ្ជមាន។

-គ្រប់ចំនួនដែលត្រូវនឹងគ្រប់ចំណុចនៅលើបន្ទាត់ចំនួន ហៅថាចំនួនពិត។

-ចំនួន x ដែលត្រូវនឹងចំណុច M លើអ័ក្សចំនួនពិត ហៅថាកូអរដោនេ នៃចំណុច M ។ កំណត់សរសេរដោយ $M(x)$

-នៅលើអ័ក្សនៃចំនួនពិត ចំនួនដែលនៅខាងស្តាំ ធំជាងចំនួនដែលនៅខាង ឆ្វេង ឬចំនួនដែលនៅខាងឆ្វេង តូចជាងចំនួនដែលនៅខាងស្តាំ។

-បើ a ជាចំនួនវិជ្ជមានគេកំណត់សរសេរ $a>0$ ។

-បើ a ជាចំនួនអវិជ្ជមានគេកំណត់សរសេរ $a<0$ ។

-បើ a ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមានគេកំណត់សរសេរ $a\geq 0$ ។

-ទំនាក់ទំនងចំនួនពិត a និង b អាចជា $a>b$ ឬ $a=b$ ឬ $a<b$ ។

-ចម្ងាយពីគល់ O ទៅចំណុច a នៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិតហៅថា តម្លៃដាច់ខាតនៃ a ។ គេកំណត់សរសេរ $|a|$ ។

$|a|$ មានលក្ខណៈដូចខាងក្រោមៈ

- $|a|=a$ បើ $a\geq 0$ • $|a|=-a$ បើ $a<0$
- $|a|=0$ លុះត្រា $a=0$ • គ្រប់ចំនួនពិត a គេបាន $|a|\geq 0$ ។

-**ចំនួនគូ** ជាចំនួនគត់ចែកដាច់នឹងពីរ ឬចំនួនដែលជាពហុគុណនៃពីរ ។

-**ចំនួនសេស** ជាចំនួនគត់ចែកមិនដាច់នឹងពីរ ឬមិនមែនជាពហុគុណនៃពីរ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. គណនាតម្លៃខាងក្រោម :

ក. $|8|$ ខ. $|-10|$ គ. $|2\times 5|$ ឃ. $\left|-\frac{1}{3}\right|$

២. កំណត់ចំនួនពិត x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|x|=7$ ។

៣. បង្ហាញថា $a^2=|a|^2$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។

1) ប្រភេទនៃចំនួនផ្សេងៗ

-**ចំនួនគត់** ជាចំនួនដែលអាចរាប់បានរួមទាំងសូន្យផងដែរ។

គេសរសេរបានៈ $0, 1, 2, \ldots$

-**ចំនួនគត់ធម្មជាតិ** ជាចំនួនគត់ដែលគ្មានលេខសូន្យ។

គេសរសេរបានៈ $1, 2, 3, \ldots$

-**ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប** ជាចំនួនគត់ដែលមានសញ្ញា $(+)$ ឬ $(-)$ នៅពីខាង ឆ្វេង និងលេខសូន្យ ។ គេសរសេរបានៈ

$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

-ចំនួនប្រភាគ ជាចំនួនដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ ដែល a និង b ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $b\neq 0$ ហើយ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា។ បើ $a<b$ គេ ហៅថា ប្រភាគសុទ្ធ តែបើ $a>b$ គេហៅថា ប្រភាគមិនសុទ្ធ។

-ចំនួនចម្រុះ ជាចំនួនដែលមានចំនួនគត់ផង និងប្រភាគផង ហើយមាន ទម្រង់ $a\frac{b}{c}$ ដែល a , b , c ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និង $c\neq 0$ ។

-ចំនួនទសភាគ ជាចំនួនដែលមានភាគបែងស្មើ $10 , 100 , 1000 , ...$ គេសរសេរចំនួនទសភាគដោយប្រើសញ្ញាក្បៀស $(.)$។ ចំនួនទសភាគ ចែកជាពីរគឺ មានផ្នែកទសភាគកំណត់បាន និងកំណត់មិនបាន ។ ឯចំនួនទសភាគដែលមានផ្នែកទសភាគកំណត់មិនបានចែកជាពីរទៀតគឺ ចំនួន ទសភាគមានខួប និងទសភាគគ្មានខួប(ហៅថាចំនួនអសនិទាន)។

-ចំនួនសនិទាន ជាចំនួនដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ ដែល a និង b ជាចំនួន គត់រ៉ឺឡាទីប $b\neq 0$ ។

តាមន័យនេះចំនួនពិតទាំងឡាយដែលមិនមែនជា ចំនួនអសនិទាន វាជាចំនួនសនិទានទាំងអស់។

-ចំនួនអសនិទាន ជាចំនួនទសភាគគ្មានខួប។

-ចំនួនពិត ជាចំនួនទាំងសនិទាន និងអសនិទាន។

-ចំនួននិមិត្ត ជាផលគុណចំនួនពិត និងឯកតានិមិត្ត (i) ។

2) **សំណុំនៃចំនួន និងចំណែកថ្នាក់របស់វា**

-សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ : $\mathbb{N}=\{ 1 , 2 , 3 , ...\}$

-សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប : $\mathbb{Z}=\{ ...-2 , -1 , 0 , 1 , 2 ,...\}$

-សំណុំចំនួនសនិទាន : $\mathbb{Q}=\left\{ \frac{a}{b} \middle| a\in\mathbb{Z} , b\in\mathbb{Z} , b\neq 0 \right\}$

-សំណុំចំនួនពិត : $\mathbb{R}=\{ x|x$ ជាចំនួនសនិទាន និងអសនិទាន $\}$

-សំណុំចំនួនកុំផ្លិច : $\mathbb{C}=\{ x|x$ ជាចំនួនពិត និងចំនួននិមិត្ត $\}$

$*$ យើងចែកថ្នាក់នៃសំណុំចំនួនបាន: $\boxed{\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}}$ ។

ប្រតិបត្តិ : តើចំនួនណាខ្លះជាចំនួនសនិទាន ចំនួនអសនិទាន ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនេះ ៖

$$0 , 3 , \pi , -5 , \frac{2}{7} , -\frac{9}{4} , \sqrt{8} , \sqrt{0.16} , \sqrt{3+1} \quad ?$$

II. **កន្សោមរ៉ាឌីកាល់**

- ចំពោះ $a>0$ និង $b>0$ គេបាន : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$, $\sqrt{a^2}=\left(\sqrt{a}\right)^2$
- បើ $a>0$ និង $b>0$ គេបាន : $a<b \Leftrightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$

ប្រតិបត្តិ : ១. ចូរឲ្យឧទាហរណ៍នៃចំនួនពិត a មួយដែលមិនផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\sqrt{a^2}=a$ ហើយបង្ហាញថា $\sqrt{a^2}=|a|$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។

២. ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោម :

ក. $\sqrt{8}-\sqrt{18}+\sqrt{72}$ ខ. $\sqrt{20}-3\sqrt{2}-\sqrt{\frac{5}{9}}+\sqrt{50}$

គ. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ ឃ. $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ ។

៣. ប្រៀបធៀបចំនួន :

ក. $2\sqrt{7}$ និង $3\sqrt{3}$ ខ. $2+\sqrt{6}$ និង $2\sqrt{5}$ ។

៤. បំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែងនៃប្រភាគខាងក្រោម :

ក. $\frac{1}{\sqrt{28}}$ ខ. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ គ. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

៥. រកតម្លៃប្រហែលនៃ $\frac{3}{\sqrt{7}-2}$ ដោយដឹងថា $\sqrt{7}\approx 2.6458$ ។

៦. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម :

ក. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ខ. $\sqrt{6-2\sqrt{8}}$ គ. $\sqrt{7+\sqrt{24}}$

III. ប្រព័ន្ធរាប់

រាប់ចំនួនគោល a កំណត់សរសេរដោយ $(...)_a$ ។

១. ប្រព័ន្ធរាប់គោល 10

ប្រព័ន្ធរាប់ដែលយើងប្រើប្រាស់សព្វថ្ងៃ ហៅថាប្រព័ន្ធគោល១០ ដែលមាន ១០និមិត្តសញ្ញា(Digits) ចាប់ពីលេខ 0 រហូតដល់លេខ 9 ដែលមាន តម្លៃទៅតាមទីតាំង (ឬខ្ទង់)របស់វា ។

សម្គាល់: $9342=(9342)_{10}=9342_{10}=9342_{ដប់}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. សរសេរទម្រង់ពន្លាតខាងក្រោមជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល 10 :

ក. $3\times10^6+5\times10^4+7\times10$

ខ. $9\times10^7+1\times10^6+7\times10^3+2$

គ. $8\times10^8+1\times10^5+2\times10^2+1$

ឃ. $1\times10^9+2\times10^8+5\times10^5+9\times10$

២. ហៅឈ្មោះតាមឈ្មោះខ្ទង់ ហើយសរសេរជាទម្រង់ពន្លាតនៃចំនួនខាងក្រោម :

ក. 123 345 456 ខ. 987 098 678 002

គ. 987 654 321 001 ឃ. 100 700 800 123 ។

២. ប្រព័ន្ធរាប់គោល 2

ប្រព័ន្ធរាប់គោល 2 មានពីរនិមិត្តសញ្ញាគឺ $\{\,0\,,1\,\}$ ។ ការកំណត់ទីតាំងនីមួយៗនៃតម្លៃលេខរបស់ប្រព័ន្ធគោល 2 តាងដោយ ស្វ័យគុណនៃ 2 ។ ដូចជា $(10111)_2=1+2+4+0+16=(23)_{10}$ ។ ចំនួន $(10111)_2$ អានថា មួយ សូន្យ មួយ មួយ មួយ

ប្រតិបត្តិ : ចូរអាន និងសរសេរទម្រង់ពន្លាតនៃចំនួនខាងក្រោម :

ក. 10010110_2 ខ. 10111000_2 គ. 111000111_2 ឃ. 1010110011_2 ។

៣. រូបមន្តបំលែងចំនួនពីប្រព័ន្ធគោល b ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10

$$\left(\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3}\ \dots\ a_3 a_2 a_1 a_0}\right)_b = \left(a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + \dots + a_{n-1} b^{n-1} + a_n b^n\right)$$

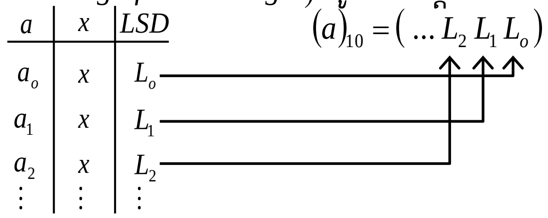
ប្រតិបត្តិ : ចូរបំលែងចំនួនខាងក្រោមទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 10 :

ក. 10010110_2 ខ. 10111000_2 គ. 111000111_2 ឃ. 1010110011_2 ។

៤. វិធីសាស្រ្តបំលែងចំនួនពីគោល 10 ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល x

បើ a ជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10 ហើយចង់បំលែងទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល x យើងចែករកសំណល់

LSD ($Least\ Signification\ Digit$) ដូចខាងស្តាំ ៖



ប្រតិបត្តិ : បំលែងចំនួនខាងក្រោមជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 2 :

ក. 33 ខ. 123 គ. 317 ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. ចូរដៅចំនួន $6, -5, 2.5, \frac{5}{4}, -1\times 3$ នៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។
2. ចូរដៅចំណុច $A(-4), B(7), C\left(-\frac{1}{2}\right), D(2.25)$ នៅលើបន្ទាត់ចំនួនតែមួយ។
3. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b បើយើងប្រៀបធៀប a និង b នោះយើងបានលទ្ធផលដូចម្តេច?
4. យើងប្រៀបធៀប a និង b ដោយសិក្សាផលដក $a-b$ ។ បើយើងបាន $a-b<0$ ចូរប្រៀបធៀប a និង b ។
5. គណនាតម្លៃដាច់ខាតនៃចំនួនខាងស្តាំ៖ ក. $|4|$ ខ. $|-5|$ គ. $|-1.3|$ ឃ. $|-2\times 5|$ ។
6. គណនាតម្លៃ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព ៖ ក. $x=|-2|$ ខ. $|-12|=3x$ គ. $|5.2x|=5$
   ឃ. $|2x|=|-2|$ ង. $|x+2|=3$ ច. $|3(x-2)|=|-12|$ ឆ. $|-2x-1|=5$ ។
7. បង្ហាញថាសមភាព $|-a|=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។
8. សរសេរចំនួនទសភាគកំណត់ជាប្រភាគ: ក. 1.2 ខ. -3.27 គ. -0.002 ឃ. 2.333 ។
9. សរសេរចំនួនទសភាគខួបជាប្រភាគ: ក. $1.\overline{2}$ ខ. $-1.\overline{12}$ គ. $0.0\overline{3}$ ឃ. $-1.444444\dots$
10. តើលេខណាមួយធំជាងគេបំផុត ក្នុងចំណោមលេខ $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{7}$ និង 5 ។
11. ដោយប្រើសមភាព $8051+7^2=90^2$, បញ្ជាក់ថា 8051 គឺជាផលគុណនៃចំនួនបឋមពីរ។
12. ចូរគណនាផលបូក ឬដកនៃរ៉ាឌីកាល់ខាងក្រោម៖

ក. $\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}$ ខ. $\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+2\sqrt{3}$

គ. $\sqrt{50}+2\sqrt{20}+\sqrt{80}-\sqrt{500}$ ឃ. $\sqrt{28}-\sqrt{63}+3\sqrt{7}-\sqrt{175}$

ង. $3\sqrt{11}+5\sqrt{44}-3\sqrt{99}$ ច. $2\sqrt{8}-3\sqrt{98}-2\sqrt{200}+8\sqrt{50}$

ឆ. $\sqrt{108}+2\sqrt{27}-2\sqrt{300}+3\sqrt{12}$ ជ. $3\sqrt{63}-5\sqrt{112}-2\sqrt{28}+3\sqrt{175}$

ឈ. $\sqrt{108}-2\sqrt{27}+10\sqrt{40}-5\sqrt{160}$ ញ. $2\sqrt{242}+\sqrt{338}-\sqrt{512}-5\sqrt{32}$

ដ. $-10\sqrt[3]{40}-3\sqrt[3]{135}+5\sqrt[3]{320}+8\sqrt[3]{5}$ ឋ. $18\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{135}+4\sqrt[3]{320}-4\sqrt[3]{40}$

ឌ. $2\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{81}$ ឍ. $2\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{128}+3\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}$ ។

13. បំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង ៖

ក. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ខ. $\frac{1}{\sqrt{8}}$ គ. $\frac{-3}{\sqrt{15}}$ ឃ. $\frac{12}{\sqrt{12}}$ ង. $\frac{-2}{\sqrt{24}}$

ច. $\frac{3}{\sqrt{21}}$ ឆ. $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}$ ជ. $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{36}}$ ឈ. $\frac{-3}{\sqrt[3]{32}}$ ញ. $\frac{1}{\sqrt[3]{108}}$

ដ. $\frac{2+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}$ ឋ. $\frac{-4}{\sqrt[3]{196}}$ ឌ. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ឍ. $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ ណ. $\frac{4}{\sqrt{5}-2}$

ត. $\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$ ថ. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+3}$ ទ. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ ធ. $\frac{5}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$ ន. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}$

ប. $\frac{-\sqrt[3]{9}}{1+\sqrt[3]{3}}$ ផ. $\frac{11}{\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}+4}$ ព. $\frac{5}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$ ភ. $\frac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}}$ ។

14. គណនាកន្សោមខាងក្រោម៖

ក. $2\div\left(\sqrt{2}+2\right)$ ខ. $\left(1-\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{20}$ គ. $\sqrt{5}\left(3+2\sqrt{5}\right)-\frac{15}{\sqrt{5}}$

ឃ. $\frac{4}{\sqrt{3}-1}+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)$ ង. $\left(\sqrt{6}-2\right)^2+\frac{12}{\sqrt{6}}$ ច. $\left(\sqrt{5}+1\right)^2-\frac{10}{\sqrt{5}}$

ឆ. $\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ជ. $\sqrt{10}\left(2\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$ ឈ. $\frac{3}{\sqrt{5}}\left(2\sqrt{5}-5\right)+4\sqrt{5}$ ។

15. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម៖

ក. $\sqrt{6+\sqrt{32}}$ ខ. $\sqrt{11+\sqrt{72}}$ គ. $\sqrt{4+\sqrt{12}}$ ឃ. $\sqrt{3-\sqrt{8}}$

ង. $\sqrt{5-\sqrt{24}}$ ច. $\sqrt{4-\sqrt{12}}$ ឆ. $\sqrt{14+3\sqrt{20}}$ ជ. $\sqrt{11-2\sqrt{18}}$

ឈ. $\sqrt{6-\sqrt{32}}$ ញ. $\sqrt{7+\sqrt{48}}$ ដ. $\sqrt{6+\sqrt{20}}$ ឋ. $\sqrt{6-\sqrt{20}}$

ឌ. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ ឍ. $\sqrt{7+\sqrt{24}}$ ណ. $\sqrt{9-6\sqrt{2}}$ ត. $\sqrt{3+\sqrt{8}}$

ថ. $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ ទ. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ ធ. $\sqrt{5+\sqrt{24}}$ ន. $\sqrt{11-2\sqrt{28}}$ ។

16. សរសេរចំនួនខាងក្រោមជាទម្រង់ពន្លាត:

ក. 234 ខ. 7289 គ. 56879 ឃ. 760432 ង. 0.987 ច. 0.4308

ឆ. 568.321 ជ. 120.605 ឈ. $\frac{1}{2}$ ញ. $\frac{1561}{4}$ ដ. $\frac{1}{8}$ ឋ. $3\frac{1}{4}$ ។

17. សរសេរចំនួនខាងក្រោម ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល 10 ៖

ក. $\left(4\times10^3\right)+\left(2\times10^2\right)+\left(7\times10\right)+5$

ខ. $(3\times10^7)+(1\times10^5)+(4\times10^4)+(6\times10^3)+(3\times10^2)+(4\times10)+5$

គ. $(5\times10^9)+(3\times10^6)+(1\times10^4)+(9\times10^2)+(8\times10)+5$

ឃ. $[(7\times10^5)+(2\times10^4)+3]+[(4\times10^4)+(5\times10^3)+(1\times10)+3]$

ង. $(9\times10^4)+(5\times10^3)+(2\times10)+3+(6\times10^{-1})+(7\times10^{-2})$ ។

18. បម្លែងចំនួនខាងក្រោម ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល 10 ៖

ក. 1101_2 ខ. 1000110_2 គ. 101010101_2 ឃ. 11.101_2 ង. 101.11_2 ។

19. បម្លែងចំនួនខាងក្រោម ទៅជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល 2 ៖

ក. 18 ខ. 124 គ. 1111 ឃ. 1010 ង. 999 ។

20. គណនាផលបូក និងផលដកនៃចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល 2 ដូចខាងក្រោម៖

ក. 1101_2+1011_2 ខ. 1001_2+1111_2 គ. 1100_2+101_2

ឃ. 1101_2-1001_2 ង. $1111101_2-10101_2$ ច. $111101_2-11111_2$

ឆ. $11001_2-1001_2+1101_2$ ជ. $100001_2-10101_2+1010_2$ ឈ. $1000000_2-11111_2+110011_2$ ។

21. ប្រៀបធៀបចំនួន ក្នុងគូចំនួននីមួយៗ ហើយគណនាផលដករវាងចំនួនទី 1 និងចំនួនទី 2 ក្នុងគូចំនួននីមួយដូចខាងក្រោម៖

ក. 10_{10} និង 10_2 ខ. 101_{10} និង 111_2 គ. 123_{10} និង 1101_2 ។

22. គណនាផលបូក និងផលដកនៃចំនួនដូចខាងក្រោម ឱ្យលទ្ធផលជាចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល 10 រួចជាប្រព័ន្ធរាប់គោល 2 ៖

ក. $1101_2+10101_{10}-101_2+1081_{10}$ ខ. $1111_2-102_{10}-101_2+7961_{10}$

គ. $111_2-10101_{10}-111111_2+81081_{10}$ ឃ. $-1010111_2-5982_{10}-1101_2+6200_{10}$ ។

23. ចំពោះ $x=\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ និង $y=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ ចូរគណនា:

ក. $x+y$, ខ. xy , គ. x^2y+xy^2 , ឃ. $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$ ។

24. ក. សម្រួលកន្សោម $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$ ។

ខ. បំបាត់រ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែងនៃ $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ដោយប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ ក. ។

25. គណនា $A=2\dfrac{3}{4}$ $B=2\cdot\dfrac{3}{4}$ $C=2\times\dfrac{3}{4}$ $D=2\left(\dfrac{3}{4}\right)$ $E=2+\dfrac{3}{4}$ ។

26. គណនា $A=2^{2^2}$ $B=(2^2)^2$ $C=2^{2\cdot2}$ $D=2^{2+2}$ $E=2\cdot2^2$ ។

មេរៀនទី ៤ ពហុធា

1) ឯកធា

-ឯកធា គឺជាកន្សោមដែលមានតែវិធីគុណ និងស្វ័យគុណ ហើយមាននិទស្សន្ត ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ឬសូន្យ ។

ប្រតិបត្តិ១ : ក្នុងកន្សោមខាងក្រោមនេះ តើកន្សោមណាខ្លះដែលជាឯកធា ?

m , -15 , $2a+b$, $\frac{4}{x}$, $\sqrt{3}x^2y$, $5xy^{-2}$, $-\frac{3}{7}xy^4z$, $\sqrt{xy}$ ។

ប្រតិបត្តិ២ : ចូរបំពេញអថេរ និងមេគុណនៃឯកធាក្នុងតារាងខាងក្រោម :

ឯកធា	អថេរ	មេគុណ
$2y$		
$\sqrt{2}xy^3$		
$-\frac{4}{5}abc^2$		

-ឯកធាដូចគ្នា គឺជាឯកធាដែលមានផ្នែកអថេរដូចគ្នា (ដូចទាំងអថេរ និងដូច ទាំងស្វ័យគុណរបស់អថេរ) ។

ប្រតិបត្តិ : ចូរជ្រើសរើសឯកធាដែលដូចគ្នាក្នុងឯកធាខាងក្រោម :

$2xy$, $-3x^2y$, $-\frac{1}{2}yx$, $\sqrt{5}yx^2$, ay , $4ax$ ។

-ដឺក្រេនៃឯកធា ជាផលបូកនិទស្សន្តរបស់អថេរនីមួយៗនៃឯកធា ។

ឯកធា	អថេរ	មេគុណ	ដឺក្រេ
$\frac{1}{2}x$	x		
$-4ax^2y^{3z}$	x និង z		
$10ax^2y^3z^2$	x និង z		
$\sqrt{2}bc^5d^2$	b , c និង d		

-ដើម្បីគណនាផលបូក ឬផលដកនៃឯកធាដូចគ្នា គេត្រូវធ្វើប្រមាណវិធីបូក ឬដកតែលើផ្នែក មេគុណប៉ុណ្ណោះ រួចយកលទ្ធផលគុណនឹងផ្នែកអថេរ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនា : ក. $5x+7x+x$

ខ. $x^2-10x^2+11x^2$

គ. $8x^2y^2z+13x^2y^2z-x^2y^2z$

-ដើម្បីគណនាប្រមាណវិធីគុណនៃឯកធា និងឯកធាគេត្រូវ ៖

- គុណផ្នែកមេគុណ ជាមួយផ្នែកមេគុណ
- គុណផ្នែកអថេរ ជាមួយផ្នែកអថេរ (បើអថេរដូចគ្នាគេបូកនិទស្សន្តបញ្ចូលគ្នាតែបើអថេរផ្សេងគ្នា គេរក្សាអថេរទាំងនោះឱ្យនៅដដែល) ។

ប្រតិបត្តិ : គណនា : ក. $(10ab)(a^2b^2)$

ខ. $(\sqrt{2}xy^5)\left(-\frac{5}{7}x^2y^3\right)$

គ. $\left(-\frac{13}{5}abc^2\right)\left(-\frac{1}{3}\right)a^2bc^5$

ឃ. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x^3y^5z^7\right)(-\sqrt{3}xyz)$

-ដើម្បីគណនាប្រមាណវិធីចែកឯកធា និងឯកធាគេត្រូវ ៖

- ចែកផ្នែកមេគុណ ជាមួយផ្នែកមេគុណ
- ចែកផ្នែកអថេរ ជាមួយផ្នែកអថេរ (បើផ្នែកអថេរដូចគ្នា គេត្រូវសរសេរអថេរ នោះជាផលគុណកត្តាទាំងភាគយក និងភាគបែង រួចសម្រួលផ្នែកអថេរដូច គ្នានោះចោល ដោយឱ្យលក្ខខណ្ឌអថេរដែលសម្រួលខុសពីសូន្យ) ។

ប្រតិបត្តិ : គណនា : ក. $\frac{a^2x^2}{10ax^2}$ ខ. $\frac{-\sqrt{5}x^7y^2z^3}{4x^2yz}$

គ. $-\frac{32a^{10}b^5c^6}{6abc^3}$ ឃ. $-\frac{-12m^7n^2}{15m^2n}$

2) **ពហុធា**

-ពហុធា ជាផលបូកនៃច្រើនឯកធាដូចគ្នា ហើយឯកធានីមួយៗនោះ ហៅថា **តួនៃពហុធា** ។

ប្រតិបត្តិ : ក្នុងកន្សោមខាងក្រោមនេះ តើកន្សោមណាខ្លះជាពហុធា រួចបញ្ជាក់តួនៃពហុធានីមួយៗ ?

ក. $3x^2-\frac{1}{2}$ ខ. $-\frac{1}{3x}+5x^2$ គ. $3x+\sqrt{5}y-2xy^2$ ឃ. $2x^{-2}+5x$

ង. $\frac{m^2+5}{m^2-4}$ ច. $12x^2yz$ ឆ. $8x^4-2x+\frac{1}{x}$ ជ. $2x^{-2}yz^3$ ។

-ដឺក្រេនៃពហុធា គឺជាដឺក្រេរបស់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេនៃពហុធានោះ ។

ប្រតិបត្តិ : ចូរបំពេញតារាងខាងក្រោម :

ពហុធា	អថេរ	ដឺក្រេ	រៀបតាមលំដាប់កើន	រៀបតាមលំដាប់ចុះ
$x+2-4x^2$	x			
$t^3+3bt-2b^2t^2+b^3$	t			
$\frac{1}{2}my^2-3+my+\frac{1}{3}y^4$	y			

-ដើម្បីបូក ឬដកពីរពហុធា គេត្រូវបូក ឬដកឯកធាដែលដូចគ្នា ។

ប្រតិបត្តិ១ : គណនា $M+N$ និង $M-N$:

ក. $M=x^2-3x+5$ និង $N=2x^2+x-2$

ខ. $M=2x^2+y+10$ និង $N=x^2-10y+20$

គ. $M=\frac{1}{2}x^2-6x+7$ និង $N=\frac{3}{2}x^2+5x-4$ ។

ប្រតិបត្តិ២ : ត្រីកោណមួយមានប្រវែងជ្រុងគឺ $2x+y$, $3x+7y$ និង $4x-y$ ។ គណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណនេះ

-ដើម្បីគុណពហុធា និងពហុធា គេយកតួនីមួយៗនៃពហុធាទី១ គុណឱ្យគ្រប់ តួនៃពហុធាទី២ រួចបង្រួមលទ្ធផល ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាប្រមាណវិធីគុណខាងក្រោម :

ក. $(2x^2-4x+1)(3x-4)$ ខ. $(a^2-3a+5)(a^2+4a-3)$

គ. $(-3x+x^2-1)(2+x-5x^2)$ ឃ. $(4x+3)(2x-x^3-1)$

-រូបមន្តពន្លាតពហុធាមួយចំនួន ៖

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
- $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
- $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

ប្រតិបត្តិ : ពន្លាតកន្សោមខាងក្រោម :

ក. $(x-5)^2$ ខ. $\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2$ គ. $\left(10x+\frac{1}{2}y\right)\left(10x-\frac{1}{2}y\right)$ ឃ. $(3+a+2b)^2$

ង. $(x-5)^3$ ច. $(x+3y)^3$ ឆ. $(x-3)(x^2+3x+9)$ ជ. $\left(\frac{1}{4}x+4y\right)\left(\frac{1}{16}x^2-xy+16y^2\right)$

3) **ការដាក់ជាផលគុណកត្តា**

-យើងមានកន្សោម $ax+2ay-2az$ យើងឃើញថាតួនីមួយៗសុទ្ធតែ មាន a យើងដាក់ a ជាកត្តារួម នាំឱ្យយើងបាន $a(x+2y-2z)$ ជា ផលគុណកត្តា។

-គេអាចដាក់ជាផលគុណកត្តាតាមរូបមន្តសមភាពដឺក្រេទី២ និងដឺក្រេទី៣។

-គេអាចដាក់កន្សោម $acx^2+(ad+bc)x+bd$ តាមវិធីគុណខ្វែង:

$$\begin{array}{ccc} ac & bd & ad+bc \\ \hline a & b & \to bc \\ c & d & \to ad \\ \hline & & ad+bc \end{array}$$

ដូចនេះ $\boxed{acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ដាក់កន្សោមខាងក្រោមជាផលគុណកត្តា :

ក. $6kp^2-21p^2$ ខ. $2p^2q-4pqr$ គ. $24x^3y+30x^2y^3$ ឃ. $a^2bc-ab^2c+abc^2$

ង. $5x(x-3)-4(3-x)$ ច. $6x-3xy-2+y$ ជ. x^2+6x+9 ឈ. $81x^2-64y^2$

ញ. $2x^2+3x+1$ ដ. $6p^2-4pq-16q^2$ ឋ. a^3+27 ឌ. $x^4+x^2y^2-2y^4$

លំហាត់អនុវត្ត

1. ដូចម្តេចដែលហៅថាឯកធាដូចគ្នា ? ចូរជ្រើសរើសឯកធាដូចគ្នា ក្នុងបណ្តាឯកធាខាងក្រោម៖

$5a$, $12z$, $3xy^2$, a , $2b$, $-xy^2$, $\frac{5}{6}z$, 6 , ab ។

2. ដើម្បីរកដឺក្រេនៃឯកធាមួយ តើយើងត្រូវធ្វើដូចម្តេច ? ចូរប្រាប់ពី មេគុណ ដឺក្រេ និងអថេរ នៃឯកធាខាងក្រោម៖

a , 2 , $2.35xa^2$, abc , $3ax^2$, $\frac{7}{3}a^2bc$, $1\frac{2}{3}x^3y^2z^5$ ។

3. ពន្លាត និងសម្រួលកន្សោមដូចខាងក្រោមឱ្យបានត្រឹមត្រូវ ៖

ក. $5x+7x+x$ ខ. $x^2-10x^2+11x^2$ គ. $8x^2y^2z+13x^2y^2z-x^2y^2z$

ឃ. $12x-17y-4(3x-5y)$ ង. $3x^2+4x-5y+3x(-x+2)$ ច. $(x^2+6x+8)-(x^2+2x-8)$

ឆ. $(2x+1)^2-(2x+3)(2x-5)$ ជ. $(x-y)(4x+y)-(2x-y)(2x+y)$ ឈ. $(x+3y)^2-(x+y)(x+5y)$

4. កំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាពខាងក្រោម៖

ក. $(x+a)(x-8)=x^2-12x+32$ ខ. $(2y-6)(y+a)=2y^2+8y-42$

គ. $4x^2-3ay^4=(2x+9y^2)(2x-9y^2)$ ឃ. $16x^2+5ay^4=(4x+5y^2)(4x-5y^2)$ ។

5. ដាក់កន្សោមខាងក្រោមជាផលគុណកត្តា៖

ក. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$ ខ. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ គ. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

ឃ. $x^2+4x-12$ ង. $(x+y)^2-12(x+y)+36$ ច. $16x^2-25$

ឆ. $9x^2-24xy+16y^2$ ជ. $16x^2-25$ ឈ. $9x^2-24xy+16y^2$ ។

6. ដាក់កន្សោមខាងក្រោមជាផលគុណកត្តា៖

ក. $16(2x+1)^3-9(2x+1)$ ខ. $(3a^2-12a)-5(a-4)$ គ. $4(a+3b)^2-(a-3b)^2$

ឃ. $x(4x-8y)+y(x-2y)$ ង. $(7a-1)^2-(7a-1)(3a+2)$ ច. $(y-8)(4y-1)+y^2-8y$

7. ស្រះទឹកមួយមានរាងជាចតុកោណកែង ដែលមានបណ្តោយប្រវែង $5x$ ឯកតា និងមានទទឹងប្រវែង $2x$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាស្រះនេះ។

8. ប្រវែងបណ្តោយនៃចតុកោណកែងមួយលើសទទឹង $3\,\mathrm{m}$ ។ ប្រសិនបើ បណ្តោយកើនឡើង $2\mathrm{m}$ និងទទឹងថយចុះ $1\mathrm{m}$ នោះយើងបាន ផ្ទៃក្រឡាស្មើគ្នា ។ រកប្រវែងបណ្តោយ និងប្រវែងទទឹង ។

9. ប្រវែងបណ្តោយនៃចតុកោណកែងមួយស្មើពីរដងទទឹង។ ប្រសិនបើប្រវែងបណ្តោយថយចុះ $4\mathrm{m}$ និងទទឹងកើនឡើង $3\mathrm{m}$ នោះយើង បានផ្ទៃក្រឡាស្មើគ្នា។ រកប្រវែងបណ្តោយ និងប្រវែងទទឹង ។

10. ការេនៃចំនួនគត់ដែលធំ នៃចំនួនគត់ពីរជាប់គ្នា លើសផលគុណនៃចំនួនគត់ជាប់គ្នា 10 ។ ចូររកចំនួនគត់ទាំងពីរនោះ។

11. ប្រអប់មួយមានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែង ដែលមានបណ្ដោយនៃបាតប្រវែង $x+8$ និងទទឹងនៃបាតប្រវែង x ។ បើគេដឹងថាប្រអប់នោះ មានមាឌស្មើនឹង x^3+10x^2+16 ចូរគណនាកម្ពស់របស់ប្រអប់នោះ ។

មេរៀនទី ៥ ប្រមាណវិធីចែកពហុធា

1) **ប្រមាណវិធីចែកពហុធា**

-បើមានកន្សោម A និង B ហើយមានកន្សោម Q ដែល $A=B\times Q$ នោះគេថា A ចែកដាច់នឹង B ។ គេសរសេរ $A\div B=Q$

-គេឱ្យកន្សោមពីរ A និង B ដែលមានផ្នែកអថេរដូចគ្នា ហើយមានដឺក្រេ រៀងគ្នាគឺ m និង n ។ បើ $m\geq n$ គេអាចរកបានកន្សោមពីជគណិត Q និង R ដែល $A=B\times Q+R$ ។ ដឺក្រេនៃ R តូចជាងដឺក្រេនៃ B ។

ប្រតិបត្តិ : ធ្វើប្រមាណវិធីចែកខាងក្រោម :

ក. $\left(x^2+6x-55\right)\div\left(x-5\right)$ ខ. $\left(6y^4-10y^2+y^3+6+7y\right)\div\left(2y+3\right)$ គ. $\left(5a^2+2a^3-1\right)\div\left(-1+2a+a^2\right)$

ឃ. $\left(a^4+7a-1\right)\div\left(a^2+2\right)$ ង. $\left(x^4-25x^2+8x-3\right)\div\left(x^2-3x+1\right)$ ច. $\left(x^5-2x^3-4x+5\right)\div\left(3x^3+2\right)$

2) **តួចែករួមធំបំផុតនៃពហុធា** (PGCD ឬ GCD)

-តួចែករួមធំបំផុតនៃកន្សោម A និង B គឺជាផលគុណកត្តារួម ដែលមាននិទស្សន្តតូចជាងគេ ។

-វិធានដើម្បីគណនា តួចែករួមធំបំផុតនៃ A និង B គេត្រូវ:

- ដាក់ A និង B ជាផលគុណកត្តា
- ជ្រើសរើសកត្តារួមដែលមាននិទស្សន្តតូចជាងគេ
- តួចែករួមធំបំផុត ជាផលគុណកត្តារួម ដែលមាននិទស្សន្តតូចជាងគេ ។

ប្រតិបត្តិ១ : រកតួចែករួមធំបំផុត :

ក. $3x^5$, $4x^4$ និង $5x^3$ ខ. $25x^3y^2$, $30x^6y^3$ និង $15x^2y^4$ ។

ប្រតិបត្តិ២ : ក. គេឲ្យការេមួយចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំស្មើ r ចូររកតួចែករួមធំបំផុតនៃផ្ទៃក្រឡាការេ និងផ្ទៃក្រឡារង្វង់ ។

ខ. តាង S_1 និង S_2 ជាផ្ទៃបាត និងផ្ទៃខាងរៀងគ្នានៃស៊ីឡាំងបរិវត្តមួយដែលមានកាំបាតស្មើនឹង r និងកម្ពស់ស្មើ នឹង h ។ ចូររកតួចែករួមធំបំផុតនៃ S_1 និង S_2 ។

3) **ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពហុធា** (PPCM ឬ LCM)

-ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃកន្សោម A និង B គឺជាផលគុណកត្តារួមដែលមាននិទស្សន្តធំជាងគេ ជាមួយកត្តាមិនរួមទាំងអស់ ។

-វិធានដើម្បីគណនា ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃ A និង B គេត្រូវ:

- ដាក់ A និង B ជាផលគុណកត្តា
- ជ្រើសរើសកត្តារួមដែលមាននិទស្សន្តធំជាងគេ និងកត្តាមិនរួមទាំងអស់
- ពហុគុណរួមតូចបំផុត ជាផលគុណកត្តារួម និងកត្តាមិនរួមទាំងអស់ ។

ប្រតិបត្តិ : រកពហុគុណរួមបំផុត :

ក. $3x^5$, $4x^4$ និង $5x^3$ ខ. $25x^3y^2$, $30x^6y^3$ និង $15x^2y^4$ គ. $4x^2-2x-12$ និង $4x^2-16$

4) **ការសម្រួលប្រភាគសនិទាន**

-កន្សោមដែលមានទម្រង់ $\frac{A}{B}$, $(B\neq 0)$ ហៅថា ប្រភាគសនិទាន ហើយ A ជាតំណាងចែក និង B ជាតួចែក ។

-បើគេចែកភាគយក និងភាគបែងដោយតួចែករួមធំបំផុតរបស់វាទាំងពីរ នោះគេបានកន្សោមប្រភាគថ្មីដែលមិនអាចសម្រួលបាន

យើងបាន $\frac{A\times C}{B\times C}=\frac{A}{B}$, $(B\neq 0, C\neq 0)$ ។

ប្រតិបត្តិ : ចូរសម្រួលកន្សោមខាងក្រោម និងបំលែងទៅជាកន្សោមប្រភាគដែលមិនអាចសម្រួលបាន :

ក. $\frac{3a^2b^3c}{9ab^4c^3}$ ខ. $\frac{x^2-1}{x^3+1}$ គ. $\frac{a^3-a^2-2a}{a^3-4a}$

5) **ការតម្រូវភាគបែងនៃពីរ ឬច្រើនប្រភាគ**

តម្រូវភាគបែង នៃពីរឬច្រើនប្រភាគគេត្រូវរកពហុគុណរួមតូចបំផុត នៃភាគបែងរបស់ប្រភាគទាំងនោះ ។

ប្រតិបត្តិ : តម្រូវភាគបែងនៃកន្សោមប្រភាគនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $\frac{x^2+x+1}{x+1}, \frac{x^2-x+1}{x-1}$ ខ. $\frac{x}{yz}, \frac{y}{zx}, \frac{z}{xy}$ គ. $\frac{1}{x+y}, \frac{1}{y-x}, \frac{1}{x^2-y^2}$ ។

6) **ប្រមាណវិធីបូក ឬដកនៃកន្សោមប្រភាគ**

-ផលបូក ឬដកនៃប្រភាគដែលមានភាគបែងដូចគ្នា គេធ្វើប្រមាណវិធីបូក ឬដកតែភាគយក

រួចរក្សាភាគបែងទុកនៅដដែល ។ គេបាន: $\bullet \frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$ $\bullet \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$, $(C\neq 0)$

-ដើម្បីធ្វើប្រមាណវិធីបូក ឬដកប្រភាគដែលមានភាគបែងខុសគ្នាគេត្រូវ:

- តម្រូវភាគបែងនៃប្រភាគនីមួយៗឱ្យដូចគ្នា (រក *LCM* នៃភាគបែង)
- ធ្វើប្រមាណវិធីបូក ឬដកតែភាគយក រួចរក្សាភាគបែងទុកនៅដដែល ។

ប្រតិបត្តិ១ : គណនាកន្សោមប្រភាគខាងក្រោម :

ក. $\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-1}$ ខ. $\frac{x+2}{x-2}+\frac{4}{2-x}$ គ. $\frac{1}{1+a}+\frac{2a}{1-a^2}$

ប្រតិបត្តិ២ : បង្ហាញថា $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4+1}=\frac{8}{x^8-1}$ ។

7) **ប្រមាណវិធីគុណ និងប្រមាណវិធីចែក**

-រូបមន្តសម្រាប់គណនាផលគុណ និងផលចែកប្រភាគមានដូចខាងក្រោម:

$\bullet \frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$ $\bullet \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$ ដែល $B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$ ។

-ដើម្បីគណនាប្រមាណវិធីគុណ ឬចែកប្រភាគគេត្រូវ:

• ដាក់កន្សោមនីមួយៗជាផលគុណកត្តា ទាំងភាគយក និងភាគបែង

• សម្រួលកន្សោមនីមួយៗ (បើអាច)

• ធ្វើប្រមាណវិធីតាមរូបមន្តវិធីគុណ ឬវិធីចែកខាងលើ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនាកន្សោមប្រភាគខាងក្រោម :

ក. $\frac{x^2-49}{x^2+2x}\times\frac{x+2}{x-7}$ ខ. $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}\div\frac{x^3-8}{2x+4}$

<u>លំហាត់អនុវត្ត</u>

1. គណនាប្រមាណវិធីចែកពហុធាខាងក្រោម:

ក. $\left(2x^2+7x+2\right)\div(x+2)$ ខ. $\left(12x^3+26x^2+3x-6\right)\div(3x+2)$ គ. $\left(6x^3-x^2-16x+16\right)\div(2x-3)$

ឃ. $(x-2)\div(x+2)$ ង. $\left(9x^4+9x^3+2x^2-3x\right)\div(3x+1)$ ច. $\left(x^3+4x\right)\div\left(x^2+2\right)$

2. ចូររកតម្លៃនៃ p ដើម្បីឱ្យពហុធា x^3-3x^2+4x+p ចែកដាច់នឹង $x-2$ ។

3. គេឱ្យពហុធា x^3+2x^2-x+k ចែកជាមួយនឹង $x+1$ ។ ចូរគណនាតម្លៃនៃ k ដែលធ្វើឱ្យសំណល់នៃផលចែក ស្មើនឹង -2 ។

4. រកតួចែករួមធំបំផុត និងពហុគុណរួមតូចបំផុត ចំពោះករណីនីមួយៗ ដូចខាងក្រោម:

ក. $12a^2b^3c$, $18a^3bc^2$ និង $30a^4c^2$ ខ. $25x^3y^2$, $30x^6y^3$ និង $15x^2y^4$

គ. $x^2+7x+10$ និង x^2-25 ឃ. x^2+3x+2 និង $2x^2+x-1$

5. ពហុធា $f(x)$ ចែកនឹង $x-2$ មានសំណល់ស្មើនឹង 5 និង $f(x)$ ចែកនឹង $x-3$ មានសំណល់ស្មើនឹង 9 ។ ចូររកសំណល់ពេល ពហុធា $f(x)$ ចែកនឹង $(x-2)(x-3)$ ។

6. នៅពេលដែលពហុធា $P(x)$ ចែកនឹង $x+3$ សំណល់គឺ 3 ។ នៅពេលដែល $P(x)$ ចែកនឹង $x-4$ មានសំណល់សល់គឺ 1 ។ រកសំណល់នៅពេលដែល $P(x)$ ចែកនឹង $(x+3)(x-4)$ ។

7. ពហុធា $p(x)$ ចែកនឹង $x-4$ និង $p(x)$ ចែកនឹង $x+3$ មានសំណល់ស្មើនឹង 14 ដូចគ្នា ។ ចូររកសំណល់នៅពេលដែលពហុធា $p(x)$ ចែកនឹង x^2-x-12 ។

8. រកតម្លៃនៃ a ដែលធ្វើឱ្យពហុធា x^3+3x^2+ax+4 ចែកដាច់នឹង $x-2$ ។

9. គេឱ្យ x^2+x-6 ជាកត្តាមួយនៃពហុធា $f(x)=2x^4+x^3-ax^2+bx+a+b-1$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ a និង b ។

10. គេឱ្យកន្សោមសនិទាន $\frac{2x^2-x+3}{x-1}=ax+b+\frac{c}{x-1}$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a , b និង c ។

11. ចូរកំណត់តម្លៃនៃ a ដើម្បីឱ្យ $P=2x^3+3x^2-8x+3$ ស្មើនឹង $(x-1)\left(2x^2+ax-3\right)$ ។ រួចដាក់ P ជាផលគុណកត្តាដឺក្រេទី១ ។

12. គេឱ្យពហុធា $f(x)=x^n-4x^2+1$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។ រក n ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ចែកនឹង $(x-3)$ បានសំណល់ ស្មើនឹង 46 ។

មេរៀនទី ៦ សមីការដឺក្រេទី 2 មានមួយអញ្ញាត

1. ចំនួនកុំផ្លិច

1.1. ចំនួន និមិត្ត

ផលគុណរវាងចំនួនពិត ខុសពីសូន្យនឹង i ហៅថា **ចំនួននិមិត្ត** ។ i ហៅថា " **ឯកតានិមិត្ត** " ដែល $i=\sqrt{-1}$ ឬ $i^2=-1$

ឧទាហរណ៍ : ចំនួន $3i\,,-2i\,,3\sqrt{5}\,i\,,\frac{3}{5}i$ ជាចំនួននិមិត្ត ។

1.2. ឫសការេ នៃចំនួនអវិជ្ជមាន

<u>លក្ខណៈទី ១</u>

បើ $c>0$ នោះ $\sqrt{-c}=\sqrt{c(-1)}=\sqrt{c}\cdot\sqrt{-1}=i\sqrt{c}$

ឧទាហរណ៍: គណនា

ក. $\sqrt{-4}$ ខ. $3+\sqrt{-16}$ គ. $-1-\sqrt{-12}$ ឃ. $2-\sqrt{-7}$

<u>លក្ខណៈទី ២</u>

បើ $x^2=-a\quad(a>0)$ នោះ $x=i\sqrt{a}$ ឬ $x=-i\sqrt{a}$

ឧទាហរណ៍ : គណនាតម្លៃ x ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. $x^2=-9$ ខ. $x^2=-18$ គ. $x^2=-49$ ឃ. $x^2=-75$ ង. $x^2=-100$ ។

សម្គាល់ : រូបមន្ត $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ មិនពិតចំពោះ $a<0\,,b<0$ ។

ប្រតិបត្តិ : គណនា :

ក. $\sqrt{-36}$ ខ. $\sqrt{-54}$ គ. $\sqrt{-\frac{16}{25}}$

ឃ. $\sqrt{-50}-\sqrt{-8}$ ង. $\sqrt{-18}\times\sqrt{-3}$ ច. $\sqrt{-5}\left(\sqrt{-16}-\sqrt{-10}\right)$

1.3. និយមន័យចំនួនកុំផ្លិច

ចំនួនកុំផ្លិច ជាចំនួនដែលមានរាង $z=a+ib$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។ គេតាងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចដោយ $\mathbb{C}$ ។

- ទម្រង់ $a+ib$ ហៅថា " **ទម្រង់ស្តង់ដា ឬ ទម្រង់ពីជគណិត** " នៃចំនួនកុំផ្លិច

  a ហៅថា ផ្នែកពិត និង b ហៅថា ផ្នែកនិមិត្ត ។

  គេកំណត់សរសេរ $a=\text{Re}(z)$ និង $b=\text{Im}(z)$ ។
- ករណី $b=0$ នោះ $a+ib=a+0i=a$ ជាចំនួនពិត

  $a=0$ នោះ $a+ib=0+ib=ib$ ជាចំនួននិមិត្ត
- ចំនួនកុំផ្លិច $a+ib=0$ កាលណា $a=b=0$ ។

ឧទាហរណ៍១ : គេមាន $z=2+i$ នោះគេបាន $a=2$ និង $b=1$

$z=-1+3i$ នោះគេបាន $a=-1$ និង $b=3$

ឧទាហរណ៍២ : បម្លែងចំនួនខាងក្រោម ជាទម្រង់ពីជគណិត :

ក. $4-\sqrt{-25}$ ខ. $\sqrt{-24}$ គ. 3 ឃ. 0

ប្រតិបត្តិ : បំប្លែងចំនួនខាងក្រោមជាចំនួនកុំផ្លិច រួចកំណត់ផ្នែកពិតនិងផ្នែកនិមិត្ត :

ក. $3-\sqrt{-16}$ ខ. $\sqrt{-45}+\sqrt{25}$ គ. $-\sqrt{-9}$

1.4. ចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា

និយមន័យ: ចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z=a+ib$ និង $w=c+id$ ស្មើគ្នា លុះត្រាតែ $a=c$ និង $b=d$ ។

ឧទាហរណ៍ : សមភាព $a+ib=2+i\sqrt{3}$ ពិតលុះត្រាតែ $a=2$, $b=\sqrt{3}$ ។

ប្រតិបត្តិ : កំណត់តម្លៃចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យសមភាពខាងក្រោមពិត :

ក. $\left(5-\sqrt{-4}\right)-(a+bi)=6$ ខ. $(6+5i)(a+bi)=38-9i$

1.5. ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ និង ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយ

- ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ និង ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយ មិនដូចគ្នាទេ ។

- ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ នៃ $z=a+ib$ តាងដោយ $\overline{z}$ ដែល $\overline{z}=a-ib$
- ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយ នៃ $z=a+ib$ តាងដោយ $-z$ ដែល $-z=-a-ib$

ឧទាហរណ៍ : រកចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ និង ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយ នៃចំនួនខាងក្រោម

$z=2+i$, $z=-1+3i$, $z=4$, $z=2i$, $z=\sqrt{2}-2i$

ចំនួនកុំផ្លិច	ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់	ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយ
$z=2+i$	…………………………………	…………………………………
$z=-1+3i$	…………………………………	…………………………………
$z=4$	…………………………………	…………………………………
$z=2i$	…………………………………	…………………………………
$z=\sqrt{2}-2i$	…………………………………	…………………………………

2. ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច

2.1 វិធីបូក និង វិធីដកចំនួនកុំផ្លិច

- ផលបូកនៃចំនួនកុំផ្លិច $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$
- ផលដកនៃចំនួនកុំផ្លិច $(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$

ប្រតិបត្តិ : គណនា :

ក. $(2+7i)+(4-3i)$ ខ. $(2-4i)-(1-i)$ គ. $(-6+5i)+(1+2i)$ ឃ. $(4+3i)-(10-2i)$ ។

2.2 **វិធីគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច**

ផលគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

ឧទាហរណ៍ : គណនាផលគុណ :

ក. $(2+3i)(1-2i)$ ខ. $(2+3i)(2-3i)$ គ. $(-6i)(i)(6i)$

2.3 **វិធីចែកចំនួនកុំផ្លិច**

ចំពោះ $c+di\neq 0$, $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

ឧទាហរណ៍ : សរសេរផលចែកខាងក្រោម ជាទម្រង់ $a+ib$:

ក. $\dfrac{3+2i}{1-3i}$ ខ. $\dfrac{3-2i}{1+3i}$ គ. $\dfrac{1+2i}{5i}$

ប្រតិបត្តិ : គណនាផលចែកខាងក្រោម :

ក. $\dfrac{3+2i}{i}$ ខ. $\dfrac{3}{2+\sqrt{-3}}$ គ. $\dfrac{4-3i}{-7-5i}$ ឃ. $\dfrac{2+3i}{4-2i}$ ង. $\dfrac{5}{3-2i}$ ។

3. **សមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត**

- សមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត មានរាងទូទៅ $ax^2+bx+c=0$ ដែលមានមេគុណ a,b,c ជាចំនួនពិតហើយ $a\neq 0$ ។
- តម្លៃអញ្ញាត x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ហៅថា ឫសនៃសមីការ ។
- **របៀបដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាតរួមមាន ៖**

  - វិធីតាមផលគុណកត្តា - វិធីតាមលក្ខណៈឫសការេ
  - វិធីដោយបំពេញជាការេ - វិធីតាមឌីសគ្រីមីណង់ Δ , Δ'
  - វិធីតាមករណីពិសេស - វិធីតាមរូបមន្ត
  - វិធីផលបូក និងផលគុណឫស ។

- **ដោះស្រាយសមីការ $ax^2+bx+c=0$ តាមវិធីឌីសគ្រីមីណង់គឺ:**

រក Δ ដែល $\Delta=b^2-4ac$ ហើយឫសសមីការអាស្រ័យតម្លៃ Δ ៖

-បើ $\Delta>0$ នោះសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

-បើ $\Delta=0$ នោះសមីការមានឫសឌុបគឺ $x=\dfrac{-b}{2a}$

-បើ $\Delta<0$ នោះសមីការមានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច $x=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

- ក្នុងករណី $b=2b'$ (b ជាចំនួនគូ) គេអាចដោះស្រាយតាម Δ'

ដែល $\Delta'=(b')^2-ac$ ហើយសមីការមានឫសតាមតម្លៃ Δ' គឺ ៖

-បើ $\Delta'>0$	នោះសមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ	$x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$
-បើ $\Delta'=0$	នោះសមីការមានឫសឌុបគឺ	$x=\frac{-b'}{a}$
-បើ $\Delta'<0$	នោះសមីការមានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច	$x=\frac{-b'\pm i\sqrt{-\Delta'}}{a}$

- ក្នុងករណីពិសេសបើ $ax^2+bx+c=0$ ដែល $a\neq 0$ នាំឱ្យគេបាន:

-បើ $a+b+c=0$ នោះសមីការមានឫស $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$

-បើ $a-b+c=0$ នោះសមីការមានឫស $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$

ប្រតិបត្តិ១ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមតាមផលគុណកត្តា :

ក. $x^2-2x-8=0$ ខ. $5x^2-45=0$ គ. $(3x-1)^2-25x^2=0$ ។

ប្រតិបត្តិ២ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមតាមលក្ខណៈឫសការេ :

ក. $(x-2)^2=10$ ខ. $(y-3)^2=-5$ គ. $3(5x+4)^2-81=0$ ។

ប្រតិបត្តិ៣ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមដោយបំពេញជាការេ :

ក. $x^2+5x+2=0$ ខ. $x(2x+3)=6$ គ. $x^2-10x+25=0$

ប្រតិបត្តិ៤ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមដោយប្រើឌីសគ្រីមីណង់ :

ក. $x^2-10x+21=0$ ខ. $2y^2+12y+19=0$ គ. $\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x+1=0$

ប្រតិបត្តិ៥ : ក. រកតម្លៃ a ដែលនាំឲ្យសមីការ $(a-2)x^2+(3a-6)x+2a-3=0$ មានឫសឌុបហើយរកឫសឌុបនោះ ។

ខ. រកតម្លៃ k ដែលនាំឲ្យសមីការ $4x^2-2kx+k+3=0$ មានឫសឌុប ។ ចូររករកឫសឌុបនោះ ។

4. ទំនាក់ទំនងរវាងឫស និងមេគុណ

១. ផលបូក និងផលគុណឫស

បើ α និង β ជាឫសពីរនៃសមីការដឺក្រេទី២: $ax^2+bx+c=0$ ដែល $a\neq 0$ នោះគេបាន:

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ។ គេច្រើនតាង $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $P=\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ ។

ប្រតិបត្តិ១ : សមីការ $2x^2+8x+3=0$ មានឫស α និង β ។ គណនា :

ក. $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ ខ. $\alpha^2+\beta^2$ ។

ប្រតិបត្តិ២ : ក. ដោះស្រាយសមីការ $\frac{4}{x-2}-\frac{x-3}{x+4}=0$ ។

ខ. គេមានសមីការ $-x^2+x+a=0$ ។ កំណត់តម្លៃ a ដោយដឹងថា $x=-1$ ជាឫសមួយ

នៃសមីការ ។ រកឫសមួយទៀតនៃសមីការ ។

២. ការដាក់កន្សោមដឺក្រេទី២ ជាផលគុណកត្តា

បើសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា α និង β នោះ $\boxed{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ដាក់កន្សោមដឺក្រេទី 2 ខាងក្រោមជាផលគុណកត្តា :

ក. $2x^2+x-21$ ខ. x^2+2x-1 គ. $2x^2-3x+2$ ។

៣. ការបង្កើតសមីការដឺក្រេទី២ ដោយស្គាល់ផលបូកនិងផលគុណឫស

បើសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា α និង β ដែល $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $P=\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$

នោះគេអាចបង្កើតបាន សមីការថ្មីមានទម្រង់ $x^2-Sx+P=0$ (តាមវ្យែត គណិតវិទូបារាំង) ។

ប្រតិបត្តិ : សមីការ $x^2-2x+7=0$ មានឫស α និង β ។ រកសមីការដឺក្រេទី 2 ដែលមានឫស $\alpha+2$ និង $\beta+2$ ។

5. ទំនាក់ទំនងរវាងឫស និងមេគុណ

គេពិភាក្សាទៅលើតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដែលមានក្នុងសមីការតាមលំដាប់លំដោយគឺ a , Δ , P , S ដូចខាងក្រោម៖

- $a=0$ ⟶ សមីការដឺក្រេទី១ (មានឫសតែមួយគត់)
- $a\neq 0$
  - $\Delta<0$ ⟶ គ្មានឫសជាចំនួនពិត (ចំនួនកុំផ្លិច)
  - $\Delta=0$ ⟶ មានឫសឌុប $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$
  - $\Delta>0$
    - $P<0$ ⟶ មានឫសសញ្ញាផ្ទុយគ្នា $x_1<0<x_2$
    - $P=0$ ⟶ មានឫសពីរគឺ $x_1=0$, $x_2=-b/a$
    - $P>0$
      - $S<0$ ⟶ មានឫសពីរអវិជ្ជមាន $x_1<x_2<0$
      - $S>0$ ⟶ មានឫសពីរវិជ្ជមាន $0<x_1<x_2$

<u>លំហាត់អនុវត្ត</u>

1. ចូរសរសេរសមីការដឺក្រេទី២ខាងក្រោមជាទម្រង់ទូទៅ រួចបញ្ជាក់អញ្ញាត និងតម្លៃមេគុណនីមួយៗ៖

ក. $x^2=x-6$ ខ. $3x^2-5=7x-2$ គ. $3(x+2)=(x+2)^2$ ឃ. $(3x+1)^2-4=2x^2$

2. ចូរដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ ខាងក្រោមតាមផលគុណកត្តាស្មើសូន្យ $A\times B=0\Rightarrow A=0$ ឬ $B=0$ ៖

ក. $x(x-2)=0$ ខ. $(x+1)(x-3)=0$ គ. $(2x+6)(3x-15)=0$ ឃ. $3x^2+9x=0$

ង. $2x^2=5x$ ច. $4x^2-9=0$ ឆ. $(2x+1)^2-25=0$ ជ. $(6-3x)^2=36$

3. ចូរដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ ខាងក្រោមតាមលក្ខណៈឫសការេ $x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$ ៖

ក. $x^2 = 4$ ខ. $3x^2 = 48$ គ. $2(x+2)^2 = 18$ ឃ. $(4x+1)^2 + 1 = 26$

ង. $3-(2x+1)^2 = -46$ ច. $100-(2x-6)^2 = 0$ ឆ. $3(6x-3)^2 - 1 = 26$ ជ. $(4x-15)^2 = x^2$

4. ចូរដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ ខាងក្រោមតាមវិធីបំពេញជាការេ៖

ក. $x^2+2x-3=0$ ខ. $x(x-2)=35$ គ. $x^2+4x-12=0$ ឃ. $4x^2-4x-24=0$

ង. $x^2=3x+28$ ច. $x^2-3x-4=0$ ឆ. $x+4x^2=5$ ជ. $x^2=2(x+12)$

5. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមតាមវិធីឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta = b^2-4ac$:

ក. $x^2+3x+2=0$ ខ. $2x^2+3x-5=0$ គ. $3x^2-10x+3=0$ ឃ. $x^2-x-12=0$

ង. $x^2=3x$ ច. $6x^2-13x+6=0$ ឆ. $7x+5x^2=6$ ជ. $x^2+11x+10=0$

6. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមតាមវិធីឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta' = b'^2-ac$:

ក. $x^2+4x-5=0$ ខ. $5x^2-26x+5=0$ គ. $x^2+4x-12=0$ ឃ. $x^2-2x-15=0$

ង. $2x^2-20x+42=0$ ច. $(x+2)^2-9=0$ ឆ. $x^2-12x+35=0$ ជ. $9x^2+8=6x$

7. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមតាមករណីពិសេស $a+b+c=0$ ឬ $a-b+c=0$:

ក. $x^2+3x-4=0$ ខ. $x^2=6-5x$ គ. $5x^2-3x-8=0$ ឃ. $(x+2)^2-9=0$

ង. $2x^2=3x-1$ ច. $x^2-7x-8=0$ ឆ. $x(1-3x)=-2$ ជ. $4x^2-7x-11=0$

8. ដោយមិនបាច់គណនាឫស ចូរគណនាផលបូកឫស S និងផលគុណឫស P នៃសមីការខាងក្រោម៖

ក. $x^2+5x-14=0$ ខ. $2x^2-x-1=0$ គ. $x^2-6x+5=0$ ឃ. $3x^2+8x-4=0$

ង. $13x-x^2=42$ ច. $3x^2-2x-63=0$ ឆ. $2x^2-4x-77=0$ ជ. $6x^2+5x+1=0$

9. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមតាមផលបូកឫស $S = x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ និងផលគុណឫស $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$:

ក. $x^2-5x+6=0$ ខ. $x^2-12x+35=0$ គ. $x^2+3x-10=0$ ឃ. $x^2-x-20=0$

ង. $x^2=2(x+4)$ ច. $2x^2-20x+42=0$ ឆ. $x^2-5x-24=0$ ជ. $3x^2+21x+36=0$

10. រកពីរចំនួនតាមករណីនីមួយខាងក្រោម ដោយស្គាល់ :

ក. $\begin{cases} x_1+x_2=10 \\ x_1 \cdot x_2 = 21 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} m+n=12 \\ m \cdot n = 28 \end{cases}$ គ. $\begin{cases} p+q=7/6 \\ p \cdot q = 1/3 \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} x_1+x_2=1/3 \\ x_1 \cdot x_2 = -2/9 \end{cases}$

11. ចូរបង្កើតសមីការដឺក្រេទី២ ដោយស្គាល់ផលបូក និងផលគុណឫសតាមករណីដូចខាងក្រោម រួចរកឫសទាំងនោះផង ៖

ក. $x_1+x_2=2$, $x_1x_2=5$ ខ. $x_1+x_2=\sqrt{2}$, $x_1x_2=-\sqrt{2}$ គ. $x_1+x_2=-1$, $x_1x_2=3$ ឃ. $x_1+x_2=x_1x_2=4$

ង. $S=4$, $P=1$ ច. $S=\frac{17}{2}$, $P=4$ ឆ. $S=4\sqrt{2}$, $P=6$ ជ. $S=1$, $P=\frac{7}{36}$

12. ចូរឱ្យលក្ខខណ្ឌដើម្បីឱ្យសមីការមានន័យ រួចដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{3}{2}$ ខ. $\frac{5}{2x+3}+\frac{3}{2x+1}=2$ គ. $\frac{3x}{x+2}-\frac{x+1}{x-1}=-\frac{3}{2}$ ឃ. $\frac{4}{x-2}-\frac{x-3}{x+4}=4$

ង. $\frac{x-1}{2x}+\frac{x+1}{x+5}=1$ ច. $\frac{2x+1}{3x-1}+\frac{1}{8}=\frac{x}{2x-3}$ ឆ. $\frac{3}{x}-\frac{1}{3x-4}=1$ ជ. $\frac{4}{x-2}-\frac{x-3}{x+4}=0$

13. ក. ចូរដាក់ 270 ជាផលគុណនៃពីរកត្តា ដែលផលបូកនៃពីរកត្តានោះស្មើនឹង 39 ។

ខ. ពីរចំនួនមានផលបូកស្មើ 30 និងមានផលគុណស្មើនឹង 216 ។ ចូរគណនាចំនួនទាំងពីរនេះ ។

គ. ពីរចំនួនស្មើគ្នា ហើយមានផលបូកស្មើនឹងផលគុណ ។ ចូររកចំនួននោះ ។

14. កំណត់តម្លៃនៃ k ឬ m ដើម្បីឱ្យសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $x^2+kx+15=0$ មានឫសមួយស្មើនឹង 5 រួចគណនាឫសមួយទៀត ។

ខ. $2x^2-3x+m=0$ មានឫសមួយស្មើនឹង 1 រួចគណនាផលបូកឫស និងផលគុណឫស ដោយមិនបាច់រកឫសមួយទៀត។

គ. $mx^2-12x+9=0$ មានឫសឌុប រួចគណនាឫសឌុបនោះផង ។

15. ក. សមីការ $x^2-3=0$ មានឫស x_1 និង x_2 ។ ចូរបង្កើតសមីការដែលមានឫស $2-x_1$ និង $2-x_2$ ។

ខ. សមីការ $x^2-5x-14=0$ មានឫស α និង β ។ ចូររកសមីការដឺក្រេទី២ ដែលមានឫស $\alpha+2$ និង $\beta+2$ ។

គ. សមីការ $4x^2-8x+3=0$ មានឫស $x_1<x_2$ ។ រកសមីការដឺក្រេទី២ ដែលមានឫស $x_1+\frac{1}{2}$ និង $x_2-\frac{1}{2}$ ។

16. ត្រីកោណកែងមួយមានប្រវែងជ្រុងរបស់វាទាំងបី ជាបីចំនួនគត់តគ្នា ។ គណនាប្រវែងជ្រុងនីមួយៗនៃត្រីកោណកែងនេះ

17. ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ដែល $AB=x-2$, $AC=x$ និង $BC=x+2$ ។ រកតម្លៃនៃ x រួចរកប្រវែងជ្រុងនីមួយៗ។

18. ត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A មានអ៊ីប៉ូតេនុស $BC=17$ និង $AB+AC=23\text{cm}$ ។ គណនាប្រវែង AB និង AC

19. គេឱ្យពីរចំនួនធំជាងគ្នា 3 ឯកតា ហើយផលបូកការេនៃចំនួនទាំងពីរស្មើនឹង 89 ។ រកចំនួនទាំងពីរនោះ ។

20. ត្រីកោណកែងមួយមានផ្ទៃក្រឡា 24cm^2 និងបរិមាត្រ 24cm ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗនៃត្រីកោណកែងនេះ ។

21. សួនច្បារមួយមានរាងជាចតុកោណកែង ដែលបណ្ដោយវែងជាងទទឹង 10m ។ បើវាមានផ្ទៃ $1200\,\text{m}^2$ ចូររកវិមាត្រសួនច្បារនេះ ។

22. សួនច្បារមួយមានរាងជាចតុកោណកែង មានបណ្ដោយលើសទទឹង 9m ។ រកប្រវែងរបងព័ទ្ធជុំវិញសួននោះ បើវាមានផ្ទៃ 112m^2 ។

23. ដីចំការមួយមានរាងជាចតុកោណកែង ដែលមានបរិមាត្រ 270m និងមានផ្ទៃស្មើនឹង 4284m^2 ។ គណនាវិមាត្រនៃចំការនេះ ។

មេរៀនទី ៧ ប្រព័ន្ធសមីការ និងសមីការដឺក្រេលំដាប់ខ្ពស់

I. ប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី 1 មានបីអញ្ញាត

សមីការដឺក្រេទី 1 ដែលជាប់ទាក់ទងនឹងបីអញ្ញាតហៅថា សមីការដឺក្រេទី 1 មានបីអញ្ញាត ។

សមីការទាំងនេះផ្តុំគ្នាបង្កើត បានជា **ប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី 1 មានបីអញ្ញាត** ។

ប្រតិបត្តិ : ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម :

ក. $\begin{cases} 4x+y-3z=11 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+y+z=-3 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} x+2y=5 \\ y+2z=-1 \\ z+5x=7 \end{cases}$

II. ប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី 1 និងសមីការដឺក្រេទី 2

ប្រព័ន្ធសមីការនេះ ផ្តុំឡើងដោយសមីការដឺក្រេទី 1 និងសមីការដឺក្រេទី 2 មានពីរអញ្ញាត ។

ប្រតិបត្តិ១ : ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម :

ក. $\begin{cases} y=x+2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ x^2+y^2=48 \end{cases}$

ប្រតិបត្តិ២ : ពីរចំនួនមានផលគុណស្មើនឹង 12 ហើយផលបូកការេរបស់វាស្មើនឹង 25 ។ គណនាចំនួននីមួយៗ

III. សមីការដឺក្រេលំដាប់ខ្ពស់ងាយ

សមីការដែលតាងដោយ : (ពហុធាដែលមានដឺក្រេ n)$=0$ ហៅថាសមីការដឺក្រេទី n ។

គេអាចដោះស្រាយសមីការ លំដាល់ខ្ពស់ងាយៗបានដោយការដាក់ ជាផលគុណកត្តា ។

ប្រតិបត្តិ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $x^3=8$ ខ. $x^3-9x=0$ គ. $4x^4=64$ ឃ. $x^3-4x^2+4x=0$

IV. ទ្រឹស្តីបទសំណល់ និងទ្រឹស្តីបទផលគុណកត្តា

ទ្រឹស្តីបទសំណល់ :

បើ R ជាសំណល់ក្នុងការចែកកន្សោមពហុធា $f(x)$ នឹង $x-\alpha$ នោះគេបាន $R=f(\alpha)$ ។

ប្រតិបត្តិ : រកសំណល់នៃប្រមាណវិធីចែកដូចខាងក្រោម :

ក. $\left(x^3+2x-12\right)\div(x+1)$ ខ. $\left(4x^3-2x^2-9\right)\div(2x-1)$

គ. $\left(2x^3+x^2-x+7\right)\div(x+2)$ ឃ. $\left(3x^2-2x+2\right)\div(x+3)$

ទ្រឹស្តីបទកត្តា :

$f(x)$ ជាពហុធា ។ បើ α ជាចម្លើយនៃសមីការ $f(x)=0$ នោះ $x-\alpha$ ជាកត្តារបស់ពហុធា $f(x)$ ។

ប្រតិបត្តិ : ក. រកតម្លៃ a ដែលនាំឲ្យពហុធា x^4-2x+a ចែកដាច់នឹង $x+2$ ។

ខ. ពហុធា $f(x)$ ចែដាច់នឹង $x-4$ និង $f(x)$ ចែកនឹង $x+3$ មានសំណល់ 14 ។

រកសំណល់នៅពេលដែល $f(x)$ ចែកនឹង x^2-x-12 ។

V. ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេខ្ពស់ ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទកត្តា

ដោះស្រាយសមីការនេះ ដោយប្រើឫសងាយ ។ ឫសងាយមានលេខ : $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ។

ប្រតិបត្តិ១ : ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $x^3-3x^2-8x-4=0$ ខ. $x^3-2x^2-4x+8=0$

គ. $x^4-x^3-3x^2+x+2=0$ ឃ. $x^4+x^3-x^2+x-2=0$ ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេខ្ពស់ជាង២ ដោយស្គាល់ឫសងាយ:

ក. $x^3-3x^2-8x-4=0$ ខ. $x^3-2x^2-4x+8=0$ គ. $x^4-x^3-3x^2+x+2=0$

ឃ. $x^4+x^3-x^2+x-2=0$ ង. $x^3+2x^2+3x-6=0$ ច. $x^4-5x-6=0$

2. ដោះស្រាយសមីការប៊ីការេខាងក្រោម:

ក. $x^4-5x^2+4=0$ ខ. $x^4-13x^2+36=0$ គ. $4y^4-5y^2+1=0$ ឃ. $36a^4-13a^2+1=0$

ង. $h^4-3x^2-4=0$ ច. $h^4-3h^2-4=0$ ឆ. $m^4+5m^2+4=0$ ជ. $4x^4-37x^2+9=0$

ឈ. $81x^4+1=18x^2$ ញ. $13x^2-36=x^4$ ដ. $x^4-23x^2+112=0$ ឋ. $2x^4+x^2-1=0$

3. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការដែលអាចទាញជាសមីការដឺក្រេទី២ :

ក. $\begin{cases} x-y=10 \\ x^2+y^2=58 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} x+y=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ គ. $\begin{cases} xy+8x+2y+6=0 \\ xy+4x+6=0 \end{cases}$ ឃ. $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$

4. ឧបមាថាសមីការ $x^2+px+1=0$ មានឫស a, b និងសមីការ $x^2+qx+2=0$ មានឫស b, c ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(b-a)(b-c)=pq-6$ ។

5. ដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}=\dfrac{x^2+x+1}{x}$ ។

6. ដោះស្រាយសមីការ $A=\dfrac{1}{6}$ បើគេដឹងថា $A=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{2}{(2-x)(3-x)}+\dfrac{3}{(1-x)(x-3)}$ ។

7. គេមានសមីការ $x^3+ax^2-2x+b=0$ ។ ដោយស្គាល់ឫសមួយនៃសមីការគឺ $1+i\sqrt{3}$ ចូរកំណត់តម្លៃ a និង b រួចដោះស្រាយសមីការតាមតម្លៃ a និង b នោះ ។

8. គេឲ្យ x^2+x-6 ជាកត្តានៃពហុធា $f(x)=2x^4+x^3-ax^2+bx+a+b-1$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ a និង b ។

9. សួនច្បារពីរមានរាងជាការេ។ ប្រវែងជ្រុងនៃសួនធំវែងជាងជ្រុងនៃសួនតូច $3\,\text{m}$ ។ ផ្ទៃនៃសួនធំស្មើនឹង 3 ដងផ្ទៃនៃសួនតូច ថែមនឹង 13m^2 ។ ចូររកប្រវែងជ្រុងនៃសួនច្បារនីមួយៗ ។

មេរៀនទី ៨ វិសមីការ

1) សញ្ញាណវិសមភាព

-ពីរកន្សោមលេខនៅសងខាងសញ្ញា $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ ហៅថាវិសមភាព ។

-កន្សោម $a>b$ និងកន្សោម $c>d$ ជាវិសមភាពមានទិសដៅដូចគ្នា ។

-កន្សោម $a>b$ និងកន្សោម $c<d$ ជាវិសមភាពមានទិសដៅផ្ទុយគ្នា ។

2) លក្ខណៈវិសមភាព

-បើគេបូក ឬដកចំនួនដូចគ្នាលើអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាព នោះគេបានវិសមភាពថ្មី ដែលមានទិសដៅដូចវិសមភាពដើម។

-បើមាន $a+b>c-d$ សមមូល $a+d>c-b$ ។

-បើមាន $a>b$ និង $c>0$ នោះគេបាន $ac>bc$ ឬ $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ ។

-បើមាន $a>b$ និង $c<0$ នោះគេបាន $ac<bc$ ឬ $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ ។

3) វិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

- វិសមីការដឺក្រេទី១មានទម្រង់ $Ax+B>0$ ដែល A និង B ជាចំនួនពិត ។
  និយមន័យនេះក៏ពិតផងដែរចំពោះសញ្ញា $<$, $\leq$, $\geq$ ។
- ចម្លើយរបស់វិសមីការ គឺគ្រប់តម្លៃនៃអញ្ញាត x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ ។ ការដោះស្រាយវិសមីការ មានន័យថារកសំណុំចម្លើយរបស់វិសមីការ ។
- គេប្រើលក្ខណៈវិសមភាព ដើម្បីដោះស្រាយវិសមីការ ។
- គេអាចបកស្រាយចម្លើយវិសមីការ លើបន្ទាត់ចំនួនពិត ។
- គេអាចដោះស្រាយវិសមីការ តាមតារាងសញ្ញាទ្វេធាដឺក្រេទី១ ។

សិក្សាសញ្ញាទ្វេធាដឺក្រេទី១

ទ្វេធាដឺក្រេទី១មានទម្រង់ $f(x)=ax+b$ ដែល $a\neq 0$ ។ ទ្វេធានេះមាន $x=-\frac{b}{a}$ ជាឫសហើយគេកំណត់សញ្ញា របស់ទ្វេធា $f(x)=ax+b$ ទៅតាមសញ្ញារបស់ a ។ តារាងសញ្ញាទ្វេធាដឺក្រេទី១មានដូចខាងក្រោម ៖

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)=ax+b$	សញ្ញាផ្ទុយ a	0	សញ្ញាដូច a

ប្រតិបត្តិ១ : ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម រួចបកស្រាយលើបន្ទាត់ចំនួន :

ក. $3x-4<7x+20$ ខ. $\frac{(x-2)}{3}\geq 6$ គ. $8+\frac{6}{5}y\leq\frac{8}{5}y+12$

ប្រតិបត្តិ២ : សិក្សាសញ្ញាទ្វេធាខាងក្រោម :

ក. $f(x)=-3x+21$ ខ. $g(x)=\frac{x}{4}+1$

ប្រតិបត្តិ៣ : ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោមតាមសញ្ញាទ្វេធា :

ក. $4x-6>0$ ខ. $-4x+\frac{5}{4}\le 0$ គ. $3y+2-5>-y+7+2y$

4) ប្រព័ន្ធវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត

- ប្រព័ន្ធវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត កើតពីការផ្គុំគ្នានៃវិសមីការពីរ ឬ ច្រើន ដែលសុទ្ធតែជាវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាត ។
- តម្លៃ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នាក្នុងវិសមីការទាំងនោះ គឺជាសំណុំចម្លើយ នៃប្រព័ន្ធវិសមីការ ។
- សំណុំចម្លើយនៃប្រព័ន្ធវិសមីការ បានមកពីប្រសព្វនៃសំណុំចម្លើយ របស់វិសមីការនីមួយៗនៅក្នុងប្រព័ន្ធ ។
- គេអាចដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ តាមតារាងសញ្ញាទ្វេធាដឺក្រេទី១ ។

ប្រតិបត្តិ : ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $\begin{cases}2x+5\ge 5x-4\\ x-7\ge 2x-3\end{cases}$ ខ. $\begin{cases}5-x>7\\ 2x+3\ge 13\end{cases}$ គ. $\begin{cases}2x-7\le 6x+5\\ 4x-11\le 4+x\end{cases}$

5) ដោះស្រាយវិសមីការដែលមានតម្លៃដាច់ខាត

ចំពោះសមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី១ ដែលមានតម្លៃដាច់ខាត ហើយមាន $c>0$ នោះគេបាន:

- $|Ax+B|=C$ មានន័យថា $Ax+B=C$ ឬ $Ax+B=-C$
- $|Ax+B|<C$ មានន័យថា $Ax+B<C$ និង $Ax+B>-C$ អាចសរសេរ $-C<Ax+B<C$
- $|Ax+B|>C$ មានន័យថា $Ax+B>C$ ឬ $Ax+B<-C$

ប្រតិបត្តិ : ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម រួចបកស្រាយលើបន្ទាត់ចំនួន :

ក. $|2x-3|<4$ ខ. $|2x-1|-3\ge 2$ គ. $\left|\frac{x-8}{2}\right|\le 4$

6) វិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត

- វិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត x មានរាង $ax^2+bx+c>0$ ដែល $a\ne 0$។ វាក៏ពិតផងដែរចំពោះសញ្ញា $<$, $\le$, $\ge$ ។
- គេដោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត តាមតារាងសញ្ញាត្រីធាដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាត ។

ត្រីធាដឺក្រេទី២មានទម្រង់ $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\ne 0$ ។ យើងរកឫសរបស់ត្រីធាតាមតម្លៃរបស់ Δ ដូចខាងក្រោម ៖

• បើ $\Delta<0$: ត្រីធាមានសញ្ញាដូច a ជានិច្ច។

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	សញ្ញាដូច a ជានិច្ច

• បើ $\Delta=0$: ត្រីធាមានសញ្ញាដូច a លើកលែងត្រង់ $x=-\dfrac{b}{2a}$ ។

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	សញ្ញាដូច a	0	សញ្ញាដូច a

• បើ $\Delta>0$: ត្រីធាមានឫសពីរ x_1 , x_2 និងមានសញ្ញាដូចខាងក្រោម ៖

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)=ax^2+bx+c$	សញ្ញាដូច a	0	សញ្ញាផ្ទុយ a	0	សញ្ញាដូច a

ប្រតិបត្តិ១ : ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $x^2-2x-2>0$ ខ. $x^2-4x+4>0$ គ. $2x^2+3x+4>0$ ឃ. $64\le 16x-x^2$

ប្រតិបត្តិ២ : ចូររកតម្លៃ p និង q បើចម្លើយនៃវិសមីការ $x^2+px+q>0$ គឺ $x<-3$, $2<x$ ។

7) **វិធីស្រាយបញ្ជាក់វិសមីការដឺក្រេទី២**

យើងមាន $f(x)=ax^2+bx+c$ យើងស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

-ដើម្បីឱ្យ $f(x)>0 , \forall x\in\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ ។

-ដើម្បីឱ្យ $f(x)<0 , \forall x\in\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ ។

-ដើម្បីឱ្យ $f(x)\ge 0 , \forall x\in\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} a>0 \\ \Delta=0 \end{cases}$ ។

-ដើម្បីឱ្យ $f(x)\le 0 , \forall x\in\mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} a<0 \\ \Delta=0 \end{cases}$ ។

8) **មធ្យមនព្វន្ត និងមធ្យមធរណីមាត្រ**

ចំពោះ $a\ge 0$, $b\ge 0$ នោះគេបាន $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ សមភាពនេះពិតលុះត្រា តែ $a=b$ ។ ($\dfrac{a+b}{2}$ ជាមធ្យមនព្វន្ត ឯ $\sqrt{ab}$ ជាមធ្យមធរណីមាត្រ) ។

ប្រតិបត្តិ១ : ចូរបង្ហាញវិសមភាពខាងក្រោម :

ក. $a^2+ab+b^2\ge 0$ ខ. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$

ប្រតិបត្តិ២ : បង្ហាញវិសមភាព $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$ ចំពោះ $a>b>0$ ។

ប្រតិបត្តិ៣ : ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពខាងក្រោមចំពោះ $a>0\ ,\ b>0$

ក. $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ ខ. $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}\right)\geq 4$ គ. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2(a+b)}$

9) **របៀបដោះស្រាយវិសមីការតាមក្រាប គេត្រូវ** :

-សង់ក្រាបតាងសមីការនីមួយៗ ។

-តាមក្រាបកំណត់តំបន់ចម្លើយនៃវិសមីការនីមួយៗ ។

10) **របៀបដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការតាមក្រាប គេត្រូវ** :

-សង់ក្រាបតាងសមីការនីមួយៗ ។

-តាមក្រាបកំណត់តំបន់ចម្លើយនៃវិសមីការនីមួយៗ ។

-យកតំបន់ចម្លើយរួម ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធវិសមីការ ។

11) **វិសមភាពកូស៊ី** :

បើ $a>0\ ,\ b>0$ នោះគេបាន :

- $a+b\geq 2\sqrt{ab}$
- $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$

<u>លំហាត់អនុវត្ត</u>

1. ដោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាតខាងក្រោមរួចបកស្រាយចម្លើយលើបន្ទាត់ចំនួនពិត :

ក. $-3x-6\geq 0$ ខ. $4(2x+1)+5\geq 2(3x)+5$ គ. $y+1<\dfrac{3}{2}y-3$

ឃ. $\dfrac{2(x-4)}{10}>2-\dfrac{x}{5}$ ង. $x+1>x+2$ ច. $\dfrac{2}{5}(y-5)-\dfrac{2}{3}(2-y)\leq 2$

2. សិក្សាសញ្ញាទ្វេធាខាងក្រោម :

ក. $f(x)=-3x-33$ ខ. $f(x)=7x+42$ គ. $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+3$ ឃ. $g(x)=x$

ង. $h(x)=\sqrt{2}x-2\sqrt{3}$ ច. $I(x)=\left(2-\sqrt{3}\right)x-1$ ឆ. $f(x)=3x-12$ ជ. $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+3$

3. សិក្សាសញ្ញាត្រីធាខាងក្រោម :

ក. $f(x)=x^2-4x-5$ ខ. $f(x)=x^2+x+1$ គ. $f(x)=5x^2-x-3$ ឃ. x^2+3x-9

ង. $f(x)=-4x+4x+3$ ច. $f(x)=3x^2-x-3$ ឆ. $f(x)=-x^2-4x-4$ ជ. $f(x)=x^2-3x$

4. សិក្សាសញ្ញានៃផលគុណខាងក្រោម :

ក. $f(x)=(3x+6)(3x-5)$ ខ. $f(x)=\left(\dfrac{x}{2}+1\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ គ. $f(x)=(-x+1)(x-5)$

ឃ. $f(x)=(-4x+1)(x-2)$ ង. $f(x)=\left(\dfrac{-x}{2}+1\right)(3x-6)$ ច. $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)$

5. សិក្សាសញ្ញានៃពហុធាខាងក្រោម :

ក. $f(x)=x^3-2x^2-8x$ ខ. $f(x)=x^3-3x^2-8x-4$ គ. $f(x)=-x^3+2x^2+4x-8$

ឃ. $g(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$ ង. $h(x)=3x^4-2x^2-20x$ ច. $I(x)=x^3+2x^2+3x-6$

6. ដោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទី១មានមួយអញ្ញាតតាមតារាងសញ្ញាទ្វេធា :

ក. $5x-7\geq 0$ ខ. $-4x+\frac{5}{4}\leq 0$ គ. $-2-\frac{3}{2}x\geq 0$ ឃ. $-4+\frac{3}{2}x\leq 0$

ង. $3x-2>x+5$ ច. $2x-\frac{1}{3}<3x-\frac{1}{4}$ ឆ. $\frac{3x+1}{4}>\frac{5x+1}{6}$ ជ. $2x-\frac{x-1}{5}\geq\frac{1}{4}-x$

7. ដោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទី២មានមួយអញ្ញាតតាមតារាងសញ្ញាត្រីធា :

ក. $x^2-8x+12>0$ ខ. $3x^2-5x+4\geq 1-x^2$ គ. $(2x-1)(x+4)>18$

ឃ. $3x^2-6x+1<2x^2-17$ ង. $x^2+5x-3>3x^2-2x$ ច. $-5x^2-3x+2\leq 0$

8. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $\begin{cases}2x+5\leq 3\\14-5x>4\end{cases}$ ខ. $\begin{cases}-4x-5\geq 0\\3x-2\geq 0\end{cases}$ គ. $\begin{cases}2x+7>5x-9\\x-8\leq 4x-3\end{cases}$ ឃ. $\begin{cases}y+1\geq\frac{1}{3}(y+5)\\\frac{1}{2}(3y+7)-1<0\end{cases}$

9. ដោះស្រាយវិសមីការមានជាប់តម្លៃដាច់ខាតខាងក្រោម :

ក. $|3-2x|\leq 17$ ខ. $|2x-3|<4$ គ. $|2x-1|-3\geq 2$ ឃ. $\left|\frac{x-8}{2}\right|\leq 4$

ង. $|8x-7|>1$ ច. $|3x-1|\leq 4$ ឆ. $|6x+5|\geq 1$ ជ. $3|-2x+1|-2\leq 13$

10. គេមានសមីការ $x^2-2(k-3)x+4k=0$ មានឫសពីរគឺ x_1 , x_2 ។

ក. កំណត់តម្លៃ k ក្នុងករណីដែលឫសទាំងពីរវិជ្ជមាន ។

ខ. កំណត់តម្លៃ k ក្នុងករណីដែលឫសទាំងពីរអវិជ្ជមាន ។

11. គេមានសមីការ $(m-1)x^2-2mx+3m-2=0$ ។

ក. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរ ។

ខ. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសឌុប ។

គ. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការគ្មានឫស ។

12. គេមានសមីការ $(m+2)x^2-(2m+7)x+m+7=0$ ។

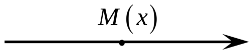
ក. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរមានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា ។

ខ. កំណត់តម្លៃនៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសពីរវិជ្ជមាន ។

មេរៀនទី ៩ ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់

1. កូអរដោនេនៃចំណុចនៅលើបន្ទាត់

គ្រប់ចំណុច M នៃបន្ទាត់មានចំនួនពិត x មួយគត់ដែលជាកូអរដោនេនៃចំណុច M គេកំណត់សរសេរដោយ $M(x)$ ។



2. ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចនៅលើបន្ទាត់

ចម្ងាយរវាងពីចំណុច $A(a)$ និង $B(b)$ នៅលើបន្ទាត់មួយ កំណត់ដោយ $\boxed{AB=|b-a|=|a-b|}$ ។

ប្រតិបត្តិ : គេឲ្យបីចំណុច $M(-3)$, $N(1.5)$ និង $P(4)$ នៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិត ។

ក. ដៅចំណុច M , N និង P ។

ខ. កំណត់ចម្ងាយ OM , MN និង PM ។

3. ចំណុចចែកខាងក្នុង

• គេឱ្យចំណុច P នៅលើអង្កត់ AB ។ បើចំណុច P ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $AP:PB=m:n$ (ឬ $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$) ចំពោះ $m>0$ និង $n>0$ នោះគេថាចំណុច P ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ ។

• $A(a)$ និង $B(b)$ ជាពីរចំណុចបើចំណុច $P(x)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ នោះ

$$\boxed{x=\frac{mb+na}{m+n}}$$

ប្រតិបត្តិ : គេឲ្យ $A(-3)$, $B(2)$ និង $P(p)$ នៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិតមួយ ។ កំណត់តម្លៃ p ដើម្បីឲ្យចំណុច P ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $2:1$ ។

4. ចំណុចចែកខាងក្នុងក្រៅ

•គេឱ្យចំណុច Q នៅលើបន្លាយ AB ។ បើចំណុច Q ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $AQ:QB=m:n$ (ឬ $\frac{AQ}{QB}=\frac{m}{n}$) ចំពោះ $m, n>0$ និង $m\neq n$ នោះគេថាចំណុច Q ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅ តាមផលធៀប $m:n$ ។

• $A(a)$ និង $B(b)$ ជាពីចំណុច បើចំណុច $Q(x)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m:n$ នោះ

$$\boxed{x=\frac{mb-na}{m-n}}$$

ប្រតិបត្តិ១ : គេឲ្យចំណុច $A(-3)$, $B(2)$ និង $Q(x)$ នៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិតមួយ ។ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យចំណុច Q ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $3:2$ ។

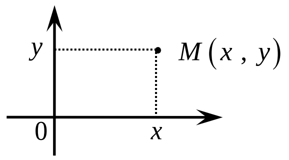
ប្រតិបត្តិ២ : គេឲ្យពីរចំណុច $A(1)$ និង $B(5)$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចខាងក្រោម :

ក. ចំណុចដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $3:2$ ។

ខ. ចំណុចដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $1:4$ ។

5. **តម្រុយកូអរដោនេ**

-គ្រប់ចំណុច M នៃប្លង់កូអរដោនេ កំណត់ដោយគូមានលំដាប់ (x,y) ដែល x ជាអាប់ស៊ីស និង y ជាអរដោនេនៃចំណុច M គេកំណត់ សរសេរដោយ $M(x\,,\,y)$ ។



-តម្រុយកូអរដោនេផ្គុំដោយបន្ទាត់ចំនួនពិតពីរ នៅក្នុងប្លង់តែមួយ ហើយ ប្រសព្វគ្នាបានមួយចំណុច O ហៅថាគល់កូអរដោនេ ឬគល់តម្រុយ ដែលចែកចេញជា 4 ផ្នែកហៅថា កាដ្រង់ទី ១ , ទី ២ , ទី ៣ និងទី ៤ ។

6. **ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចនៅក្នុងប្លង់កូអរដោនេ**

-ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $A(x_1\,,\,y_1)$ និង $B(x_2\,,\,y_2)$ កំណត់ដោយរូបមន្ត : $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

-ករណីពិសេសចម្ងាយរវាងគល់តម្រុយ និងចំណុច $P(x\,,\,y)$ កំណត់ដោយរូបន្ត : $OP=\sqrt{x^2+y^2}$ ។

ប្រតិបត្តិ : រកចម្ងាយរវាងគូនៃចំណុចខាងក្រោម :

ក. $O(0\,,0)$ និង $A(2\,,3)$

ខ. $B(-3\,,1)$ និង $C(5\,,0)$

គ. $D(3\,,-2)$ និង $E(-2\,,-3)$

ឃ. $F(3\,,0)$ និង $G(3\,,-1)$ ។

7. **ចំណុចចែកខាងក្នុង**

$A(x_a\,,\,y_a)$ និង $B(x_b\,,\,y_b)$ ជាពីរចំណុចក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ បើចំណុច $P(x\,,\,y)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $P\left(\dfrac{mx_b+nx_a}{m+n}\,,\,\dfrac{my_b+ny_a}{m+n}\right)$ ។

ប្រតិបត្តិ : គេមានចំណុច $A(-1\,,-3)\,,B(-4\,,2)$ ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច $P(x\,,\,y)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $2:1$ ។

8. **ចំណុចចែកខាងក្រៅ**

$A(x_a\,,\,y_a)$ និង $B(x_b\,,\,y_b)$ ជាពីរចំណុចក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ បើចំណុច $Q(x\,,\,y)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $Q\left(\dfrac{mx_b-nx_a}{m-n}\,,\,\dfrac{my_b-ny_a}{m-n}\right)$ ។

ប្រតិបត្តិ : គេមានពីរចំណុច $E(-3\,,4)$ និង $F(5\,,-1)$ ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចចែកក្រៅនៃអង្កត់ EF តាមផលធៀប $1:3$ ។

9. **សមីការបន្ទាត់កាត់តាមមួយចំណុច និងស្គាល់មេគុណប្រាប់ទិស**

សមីការនៃបន្ទាត់គាត់តាមចំណុច $(x_1\,,\,y_1)$ និងមានមេគុណប្រាប់ទិស m គឺកំណត់ដោយ $y-y_1=m(x-x_1)$

ប្រតិបត្តិ : កំណត់សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(-1\,,1)$ និងមានមគុណប្រាប់ទិសស្មើ -3 ។

10. **សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច**

សមីការនៃបន្ទាត់គាត់តាមពីរចំណុច $(x_1\,,\,y_1)$ និង $(x_2\,,\,y_2)$ គឺ

-ចំពោះ $x_1\neq x_2$: $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

-ចំពោះ $x_1 = x_2$: $x = x_1$ ។

ប្រតិបត្តិ : ក. កំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ ដែលកាត់តាមគូនៃចំណុចខាងក្រោម :

(1) $A(2 , 3)$ និង $B(10 , 5)$ (2) $C(5 , -1)$ និង $D(-1 , 8)$ ។

ខ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ពីរ $x + y - 4 = 0$ និង $2x - y + 1 = 0$ ។

កំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចប្រសព្វនេះ និងចំណុច $(-2 , 1)$ ។

11. និយមន័យបន្ទាត់ស្របគ្នា និងលក្ខខណ្ឌបន្ទាត់ស្របគ្នា

-បន្ទាត់ពីរជាបន្ទាត់ស្របគ្នា កាលណាបន្ទាត់ទាំងពីរស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយហើយគ្មានចំណុចរួម (គ្មានចំណុចប្រសព្វ)

-គេឱ្យបន្ទាត់ពីរ $D : y = mx + n$ និង $D' : y = m'x + n'$ បន្ទាត់ D ស្រប D' លុះត្រាតែ $\boxed{m = m'}$ ។

ប្រតិបត្តិ១ : តើបន្ទាត់ណាខ្លះជាបន្ទាត់ដែលស្របគ្នាក្នុងចំណោមបន្ទាត់ខាងក្រោមនេះ :

ក. $L_1 : 6x + 3y = 1$ ខ. $L_2 : y = 3x - 2$ គ. $L_3 : 2x - y = 5$ ឃ. $L_4 : y = -2x + 5$ ។

ប្រតិបត្តិ២ : រកសមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $A(2 , 1)$ ហើយស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $D : y = 2x + 5$ ។

12. លក្ខខណ្ឌកែងគ្នានៃបន្ទាត់ពីរ

-គេឱ្យបន្ទាត់ពីរ $D : y = mx + n$ និង $D' : y = m'x + n'$ បន្ទាត់ D កែង D' លុះត្រាតែ $\boxed{mm' = -1}$

ឬ $\boxed{D \perp D' \Leftrightarrow mm' = -1}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ក្នុងប្លង់កូអរដោនេគេមានចំណុច $A(2 , 3)$ និង $B(1 , 2)$ ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ AB ។

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ L កាត់តាមគល់ O ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ AB ។

13. ចម្ងាយរវាងចំណុចមួយ និងបន្ទាត់មួយក្នុងប្លង់

ចម្ងាយ d រវាងចំណុច (x_1 , y_1) និងបន្ទាត់ $ax + by + c = 0$ គឺកំណត់ដោយរូបមន្ត : $\boxed{d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ក. គណនាចម្ងាយពីចំណុច $A(0 , 2)$ ទៅបន្ទាត់ $D_1 : x + \sqrt{2}y - 10 = 0$ ។

ខ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច $B(-3 , 2)$ ទៅបន្ទាត់ $D_2 : 3x + 2y - 3 = 0$ ។

14. សំណុំចំណុច

- សំណុំចំណុចនៃចំណុច ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ p គឺជារូបធរណីមាត្រ

ផ្គុំដោយចំណុចទាំងអស់ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ p ។

- ដើម្បីបង្ហាញថារូប F ជាសំណុំចំណុចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ p ដែលឱ្យ គេត្រូវបង្ហាញថា :

• គ្រប់ចំណុចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យត្រូវនៅលើរូប F ។

• គ្រប់ចំណុចនៅលើរូប F ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ ។

ប្រតិបត្តិ : គេឲ្យចំណុចនឹងពីរ $A(2 , 0)$ និង $B(-2 , 0)$ ។ រកសំណុំចំណុចនៃចំណុច P

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $AP^2 - BP^2 = 16$ ។

15.**សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់**

- សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(a\,,b)$ និងកាំ r គឺ $\boxed{(x-a)^2+(y-b^2)=r^2}$

ប្រតិបត្តិ : រកសមីការរង្វង់ខាងក្រោម :

ក. រង្វង់ដែលមានកាំស្មើ $\sqrt{3}$ និងផ្ចិត $I(-1\,,1)$ ។

ខ. រង្វង់ដែលមានផ្ចិត $J(-1\,,2)$ ដែលកាត់តាមគល់ O ។

គ. រង្វង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB ដែល $A(-3\,,0)$ និង $B(1\,,0)$ ។

16.**សមីការទូទៅនៃរង្វង់**

- សមីការទូទៅនៃរង្វង់គឺ $\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$ (បានមកពីការពន្លាតសមីការស្តង់ដា) ។

ប្រតិបត្តិ១ : កំណត់ផ្ចិត និងកាំនៃរង្វង់ដែលមានសមីការទូទៅដូចខាងក្រោម :

ក. $x^2+y^2-6x+4y+4=0$ ខ. $3x^2+3y^2-2x-3y+1=0$ ។

ប្រតិបត្តិ៣ : កំណត់តម្លៃនៃមេគុណ $A\,,B$ និង C ដែលរង្វង់ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ កាត់តាមចំណុចបី $E(-6\,,6)\,,F(-2\,,8)$ និង $G(1\,,-1)$ ។

ប្រតិបត្តិ៣ : គេឲ្យចំណុចពីរ $A(-2\,,0)$ និង $B(3\,,0)$ ។ រកសំណុំចំណុចនៃចំណុច P ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $AP:PB=3:2$ ។

17.**ចំណុចប្រសព្វនៃរង្វង់ និងបន្ទាត់**

- កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ និងរង្វង់គឺជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការដែលផ្គុំដោយសមីការរង្វង់ និងសមីការបន្ទាត់ ។
- គេឲ្យសមីការរង្វង់ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ និងបន្ទាត់ $D:y=mx+n$ នោះគេបាន :

$(x-a)^2+\left[(mx+n)^2-b\right]=r^2 \quad (1)$

បើ Δ ជាឌីគ្រីមីណង់នៃសមីការ (1) គេបាន :

ក. បើ $\Delta>0$ នោះបន្ទាត់ និងរង្វង់ប្រសព្វគ្នាត្រង់ពីរចំណុច

ខ. បើ $\Delta=0$ នោះបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង

គ. បើ $\Delta<0$ នោះបន្ទាត់ និងរង្វង់មិនប្រសព្វគ្នាទេ ។

ប្រតិបត្តិ១ : រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $2x-y-2=0$ និងរង្វង់ $x^2+y^2-x+4y=0$ ។

ប្រតិបត្តិ២ : គេមានរង្វង់ $x^2+y^2=1$ និងបន្ទាត់ $y=2x+n$ ដែល n ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។ សិក្សាចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ និងរង្វង់ទៅតាមតម្លៃ n ។

18.**បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់**

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ ត្រង់ចំណុច $(x_0\,,y_0)$ គឺ $\boxed{x_0x+y_0y=r^2}$ ។

សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ត្រង់ចំណុច $(x_0\,,y_0)$ គឺ

$\boxed{(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ $x^2+y^2=13$ ត្រង់ចំណុច $(2,3)$ ។

ខ. រកតម្លៃនៃ n ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ $y=x+n$ ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ $x^2+y^2=4$ ។

19. ដោះស្រាយវិសមីការតាមក្រាប

របៀបដោះស្រាយវិសមីការតាមក្រាប គេត្រូវ :

១. សង់ក្រាបតាងសមីការនីមួយៗ ។

២. តាមក្រាបកំណត់តំបន់ចម្លើយវិសមីការនីមួយៗ ។

ប្រតិបត្តិ : ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោមតាមក្រាប :

ក. $y>3x-2$ ខ. $2x+4y\le 5$ គ. $x^2+y^2\le 4$ ឃ. $x^2+y^2-4x-2y-1>0$ ។

20. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការតាមក្រាប

របៀបដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការតាមក្រាប គេត្រូវ :

១. សង់ក្រាបតាងសមីការនីមួយៗ ។

២. តាមក្រាបកំណត់តំបន់ចម្លើយវិសមីការនីមួយៗ ។

៣. យកតំបន់ចម្លើយរួមជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធវិសមីការ ។

ប្រតិបត្តិ : ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការខាងក្រោមតាមក្រាប :

ក. $\begin{cases} y<2x+1 \\ 3y>x-2 \\ y<-x+2 \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} x^2+y^2<4 \\ x+y>0 \\ x-y<0 \end{cases}$ ។

<u>លំហាត់អនុវត្ត</u>

1. គេឱ្យចំណុច $A(-3)$, $B(2)$, $C(5)$ និង $D\left(-\frac{3}{2}\right)$ នៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិត ។

ក. ដៅចំណុច A , B , C និង D ។

ខ. កំណត់ចម្ងាយ AO , AB , BC និង DC

2. គេឱ្យចំណុច $A(-3)$, $B(2)$ និង $Q(x)$ នៅលើបន្ទាត់ចំនួនពិតមួយ ។ កំណត់តម្លៃនៃ x ដើម្បីឱ្យចំណុច Q ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $3:2$ ។

3. គេឱ្យពីរចំណុច $A(1)$ និង $B(5)$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចខាងក្រោម ៖

ក. ចំណុច M ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $3:2$ ។

ខ. ចំណុច N ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $1:4$ ។

4. គណនាចម្ងាយរវាងគូចំណុចខាងក្រោម ៖

ក. $O(0,0)$ និង $A(2,3)$ ខ. $B(-3,1)$ និង $C(5,0)$ គ. $D(3,-2)$ និង $E(-2,-3)$

ឃ. $F(3,0)$ និង $G(3,-1)$ ង. $H(-2,4)$ និង $I(2,1)$ ច. $J(-1,-6)$ និង $K(5,2)$

5. គេឱ្យត្រីកោណមួយដែលមានកំពូល $A(-2,4)$, $B(0,9)$ និង $C(3,2)$ ។ តើត្រីកោណនេះជាត្រីកោណកែងឬទេ ?

6. រកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងបីនៃត្រីកោណ ដែលចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុងគឺ $(-2,3)$, $(3,-1)$ និង $(5,4)$ ។
7. រកកូអរដោនេកំពូល D នៃចតុកោណកែង $ABCD$ បើកូអរដោនេនៃកំពូល $A(0,0)$, $B(0,5)$ និង $C(8,0)$ ។ រួចគណនា ផ្ទៃក្រឡារបស់វា ។
8. គេមានចំណុច $A(1,3)$, $B(4,0)$ ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច $P(x,y)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាម ផលធៀប $3:2$ ។
9. រកសមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $A(3\,,1)$ ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ $L: 2x-3y-5=0$ ។
10. រកសមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $B(-1\,,1)$ កែងទៅនឹងបន្ទាត់ $L: x+3y+4=0$ ។
11. ក្នុងប្លង់កូអរដោនេគេមានចំណុច $A(1\,,-3)$, $B(2\,,-1)$ និងបន្ទាត់ $D: y=x-2$ ។
    ក. រកសមីការបន្ទាត់ AB ។
    ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ L ស្របនឹងបន្ទាត់ AB កាត់គល់ O ។
    គ. គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ I នៃបន្ទាត់ D និង L ។
12. គណនាសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចគល់ និងកាត់តាមចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $L_1: 2x-y-1=0$ និង $L_2: x+2y-2=0$ ។
13. រកសំណុំចំណុចដែលមានផលធៀបចម្ងាយពី O និង $A(3\,,0)$ ស្មើ $2:1$ ។
14. សរសេរសមីការរង្វង់ជាទម្រង់ស្តង់ដា $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ដោយស្គាល់ផ្ចិត I និងកាំ r តាមករណីដូចខាងក្រោម :

    ក. $I(1\,,3)$ និង $r=3$ ខ. $I(0\,,0)$ និង $r=4$ គ. $I(2\,,-1)$ និង $r=\sqrt{2}$

    ឃ. $I(0\,,2)$ និង $r=\sqrt{3}$ ង. $I(-2\,,0)$ និង $r=2$ ច. $I(-1\,,-1)$ និង $r=\dfrac{1}{2}$
15. កំណត់ផ្ចិត C និងកាំ R នៃរង្វង់ដែលមានសមីការស្តង់ដាដូចខាងក្រោម :

    ក. $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ ខ. $(x+2)^2+(y-1)^2=9$ គ. $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

    ឃ. $(x-3)^2+(y-1)^2=5$ ង. $(x+1)^2+y^2=1$ ច. $x^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$
16. កំណត់ផ្ចិត C និងកាំ r នៃរង្វង់ តាមករណីដូចខាងក្រោម បើសមីការមានក្រាបភិច ហើយបើសមីការគ្មានក្រាភិចសូមបញ្ជាក់ :

    ក. $x^2+y^2-16=0$ ខ. $x^2+y^2+2x-6y=0$ គ. $x^2+y^2+4=0$

    ឃ. $x^2+y^2-4x+2y+6=0$ ង. x^2+y^2-4x ច. $x^2+y^2+6x-4y-3=0$

    ឆ. $x^2+y^2=2y$ ជ. $x^2+y^2+5x+5y+8=0$ ឈ. $x^2+y^2-4x=0$
17. សរសេរសមីការរង្វង់ក្នុងករណីដូចខាងក្រោម :
    ក. ផ្ចិត $C(2\,,0)$ ហើយរង្វង់កាត់តាមគល់អ័ក្សកូអរដោនេ ។
    ខ. ផ្ចិត $C(0\,,3)$ ហើយរង្វង់កាត់តាមចំណុច $(0\,,6)$ ។
    គ. ផ្ចិតស្ថិតនៅក្នុងកាដ្រង់ទី 1 មានកាំ $r=3$ ហើយប៉ះ $(y'y)$ ត្រង់ចំណុច $(0\,,1)$ ។

ឃ. ផ្ចិតស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ $y=2$ ហើយប៉ះអ័ក្ស $(x'x)$ ត្រង់ចំណុច $(3\,,0)$ ។

ង. ផ្ចិតស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ $x+y=6$ ហើយប៉ះអ័ក្ស $(x'x)$ ត្រង់ចំណុច $(2\,,0)$ ។

18. គេមានចំណុច $A(5\,,4)$ នៅលើរង្វង់ $(x-2)^2+(y-3)^2=10$ ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ចំណុចនេះ ។

19. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $A(3\,,4)$ ទៅនឹងរង្វង់ $x^2+y^2=25$ ។

20. គេមានសមីការរង្វង់ $x^2+y^2=13$ និងបន្ទាត់ $x+5y=13$ មានចំណុចប្រសព្វពីរផ្សេងគ្នា ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វទាំងនោះ ។

21. ដោះស្រាយវិសមីការ និងប្រព័ន្ធវិសមីការខាងក្រោមតាមក្រាប :

ក. $x+2y-4>0$ ខ. $1<x^2+y^2<4$ គ. $x^2+y^2\le 2x+3$ ឃ. $x^2+y^2<9\,,\,x+y>2$ ។

22. ក. សង់បន្ទាត់ $D: y=-x+2$ និង $D': x-2y-2=0$ ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

ខ. ទាញរកគូចម្លើយប្រព័ន្ធសមីការតាមក្រាបភិច $\begin{cases} y=-x+2 \\ x-2y-2=0 \end{cases}$ ។

មេរៀនទី ១០ អនុគមន៍ និងក្រាបនៃអនុគមន៍

1) និយមន័យ

A និង B ជាពីរសំណុំមិនទទេ ។ បើទំនាក់ទំនង f ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ភ្ជាប់ធាតុនីមួយៗនៃសំណុំ A ទៅនឹងធាតុតែមួយគត់នៃសំណុំ B នោះទំនាក់ទំនង f ហៅថា អនុគមន៍ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ។

គេកំណត់សរសេរៈ $f : A \to B$

$$x \to y = f(x)$$

A ហៅថាសំណុំដើមហើយ x ជាធាតុដើម ហៅថាអថេរមិនអាស្រ័យ ។ B ហៅថាសំណុំចុង ហើយ y ជារូបភាពនៃ x តាមអនុគមន៍ f និង $y = f(x)$ ហៅថាអថេរអាស្រ័យ ។

សម្គាល់: គេអាចគណនាតម្លៃ y បានបើស្គាល់តម្លៃនៃ x ។

ប្រតិបត្តិ : ១. តើទំនាក់ទំនងនីមួយៗខាងក្រោមជាអនុគមន៍ឬទេ ? ព្រោះអ្វី ?

ក. $y = (x-4)^2$ ខ. $x = (y+1)^2$ ។

២. ចំពោះ $g(x) = -x^2 + 3x - 4$ ។ គណនាតម្លៃខាងក្រោម :

ក. $g(1)$ ខ. $g(0)$ គ. $g(-2)$ ឃ. $g(k)$ ។

2) ដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាព

- ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ដែលតាងដោយ D គឺជាសំណុំតម្លៃអថេរ x ដែលបណ្តាលឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានន័យ ឬកំណត់បាន ។
- សំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ f ដែលតាងដោយ I (Interval) គឺសំណុំតម្លៃ $y = f(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៅលើដែនកំណត់ D ។

ប្រតិបត្តិ១ : រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ :

ក. $y = -x + 3$ ខ. $y = \dfrac{1}{x+1}$ គ. $y = \dfrac{1}{x-2}$ ឃ. $y = \sqrt{x}$ ។

ប្រតិបត្តិ២ : រកសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = x - 2$ ខ. $y = -2x + 3$ គ. $y = 3x - 4 \quad (x < 2)$ ឃ. $y = -2x + 3 \quad (x \geq 1)$

3) ដែនកំណត់ នៃអនុគមន៍មួយចំនួន

-អនុគមន៍ពហុធាៈ $y = ax^n + \ldots + bx + c$ មានន័យ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

-អនុគមន៍សនិទានៈ $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ មានន័យកាលណា $g(x) \neq 0$ ។

-អនគមន៍អសនិទានៈ $y = \sqrt{f(x)}$ មានន័យកាលណា $f(x) \geq 0$ ។

$*$ ចំពោះអនុគមន៍ច្រើនប្រភេទចម្រុះគ្នា ដើម្បីបានដែនកំណត់គេយកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍នីមួយៗ មកប្រសព្វគ្នា ។

4) **ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍** (**អនុគមន៍កើន-ចុះ**)

• ចំពោះ x_1 និង x_2 ដែល $x_2 > x_1$ គេកំណត់:

- កំណើនអថេរ: $\Delta x = x_2 - x_1$

- កំណើនអនុគមន៍: $\Delta f = \Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

• f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $I[a,b]$ គេបានអថេរភាពនៃអនុគមន៍គឺ:

- បើ $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ **កើន** លើចន្លោះ $[a,b]$ ។

- បើ $\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ **ចុះ** លើចន្លោះ $[a,b]$ ។

ប្រតិបត្តិ : គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = 3x - 5$ និង $g(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ ។ សិក្សាភាពកើន ឬចុះនៃអនុគមន៍ f និង g ដោយប្រើផលធៀប $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ និង $\frac{\Delta g}{\Delta x}$ ។

5) **ក្រាបនៃអនុគមន៍**

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺជាសំណុំចំណុច (x, y) ដែល x នីមួយៗនៅក្នុងដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ហើយ $y = f(x)$ ។ ក្រាប f ជាសំណុំ $\{(x, y) | y = f(x) , x \in D\}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{1}{x}$ ចំពោះ $x > 0$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ $x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}$ គណនាតម្លៃ $f(x)$ ។

ខ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x) = \frac{1}{x}$ ចំពោះ $x > 0$ ។

២. សង់ក្រាបតាងអនុគម៍ខាងក្រោម :

ក. $y = |x + 2|$ ខ. $y = |-x + 1| + 2$ ។

6) **អនុគមន៍ច្រាស**

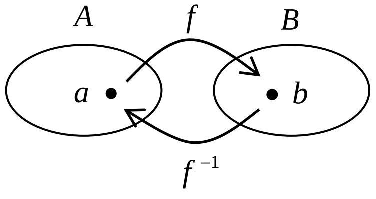
គេថា f^{-1} ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ f ។

បើ f ជាអនុគមន៍ មួយទល់មួយ នោះគេបាន:

- មានអនុគមន៍ច្រាសគឺ f^{-1}

- b ជារូបភាពនៃ a តាម f សមមូល a ជារូបភាពនៃ b តាម f^{-1} មានន័យថា $b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$

មានដ្យាក្រាមគឺ:



វិធាន : **ដើម្បីរកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍** f **គេត្រូវ** :

➢ ជំនួស $f(x)$ ដោយ y ។

- ប្តូរ x ជា y និង y ជា x គេបានសមីការថ្មី រួចទាញរកតម្លៃ y ។
- បើសមីការថ្មីនេះមិនតាង y ជាអនុគមន៍នៃ x ទេ នោះអនុគមន៍ f គ្មានអនុគមន៍ច្រាសទេ ។
- ជំនួស y ដោយ $f^{-1}(x)$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)=-2x-4$, $g(x)=-3x-2$ ។

២. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f , g និងអនុគមន៍ច្រាស f^{-1} , g^{-1} ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x^2-4x+2$ ។ ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ $x\in\{-1,0,1,2\}$ កំណត់តម្លៃ $f(x)$ ។

2. គេមានអនុគមន៍ $g: x\mapsto 3-2x$ ។ ដោយមានជំនួយពីក្រាបតាង $y=3-2x$ ។

ក. រកសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ g ត្រូវនឹងដែនកំណត់ $\{x\in\mathbb{R}\,|-1\le x\le 2\}$ ។

ខ. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ g ត្រូវនឹងសំណុំរូបភាព $\{x\in\mathbb{R}\,|-3\le y\le 2\}$ ។

3. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $f(x)=4\sqrt{x-3}-\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}}$ ខ. $f(x)=4\sqrt{3-2x}-\dfrac{3x}{x^2-3x+2}$

គ. $f(x)=\sqrt{5x-4}+\dfrac{1}{x-3}$ ឃ. $f(x)=\sqrt[3]{x-5}-\sqrt[4]{4-x}$ ។

4. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=2x-3$ និង $g(x)=x^2+2$ ។ សិក្សាភាពកើន ឬចុះនៃអនុគមន៍ f និង g ដោយប្រើផលធៀប $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ និង $\dfrac{\Delta g}{\Delta x}$ ។

5. រកអនុគមន៍ច្រាស ចំពោះអនុគមន៍ $f(x)$ នីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $f(x)=2x+3$ ខ. $f(x)=2-x$ គ. $f(x)=\dfrac{1}{x}-3$, $x\neq 0$ ឃ. $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$ ។

6. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y=|x+1|$ ខ. $y=|x-1|+2$ ។

7. ក. រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)=x+3$ ។

ខ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f និងអនុគមន៍ច្រាស f^{-1} ។

មេរៀនទី ១១ អនុគមន៍ដឺក្រេទី២ និងក្រាប

1) អនុគមន៍ដឺក្រេទី២ និងក្រាបរបស់វា

១. អនុគមន៍រាង $\mathbf{y=ax^2}$

អនុគមន៍ដឺក្រេទី២ មានមួយអថេរ គឺអនុគមន៍ដែលដឺក្រេនៃអថេរស្មើ២ ។

អនុគមន៍ $y=ax^2$ ហៅថា ប៉ារ៉ាបូលហើយបើ:

•$a>0$ នោះប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2$ បែរភាពផតឡើងលើ $(\cup)$ ។

•$a<0$ នោះប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2$ បែរភាពផតចុះក្រោម $(\cap)$ ។

ប្រតិបត្តិ : សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ :

ក. $y=-2x^2$ ខ. $y=-\frac{1}{2}x^2$ ។

២. ក្រាបអនុគមន៍ $\mathbf{y=a(x-p)^2}$

ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=a(x-p)^2$ ជារូបកិលនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=ax^2$ ចំនួន p ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស តាមករណី:

-បើ $p>0$ រំកិលទៅខាងស្តាំ $(\rightarrow)$ ។

-បើ $p<0$ រំកិលទៅខាងឆ្វេង $(\leftarrow)$ ។

ប្រតិបត្តិ : សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោមដោយប្រើក្រាបតាង $y=3x^2$

ក. $y=3(x+2)^2$ ខ. $3(x-1)^2$ ។

៣. ក្រាបអនុគមន៍រាង $\mathbf{y=a(x-p)^2+q}$

ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=a(x-p)^2+q$ គឺជាប៉ារ៉ាបូល ដែលបានដោយកិលក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=ax^2$ ស្របនឹង:

•អ័ក្សអាប់ស៊ីស: ចំនួន p ឯកតា តាមករណី:

-បើ $p>0$ រំកិលទៅខាងស្តាំ $(\rightarrow)$ ។

-បើ $p<0$ រំកិលទៅខាងឆ្វេង $(\leftarrow)$ ។

•អ័ក្សអរដោនេ: ចំនួន q ឯកតា តាមករណី:

-បើ $q>0$ រំកិលទៅខាងលើ $(\uparrow)$ ។

-បើ $q<0$ រំកិលទៅខាងក្រោម $(\downarrow)$ ។

ប៉ារ៉ាបូលនេះមានកូអរដោនេកំពូលគឺ $(p\,,q)$ និងមានអ័ក្សឆ្លុះដែលមាន សមីការ $x=p$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. ក. សង់ក្រាបតាង $y=\frac{1}{2}x^2$ ខ. ទាញរកក្រាបតាង $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-2$ ។

២. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y=3(x-4)^2+1$ ខ. $y=\frac{1}{3}(x+2)^2-1$ គ. $y=-2(x-1)^2+3$ ។

៤. ក្រាបអនុគមន៍ $\mathbf{y=ax^2+bx+c}$

គេអាចបំលែងពីរាង $y=ax^2+bx+c$ ឱ្យទៅជាសមីការដែលមានរាង $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ មានទម្រង់ដូច $y=a(x-p)^2+q$ ដែលមាន $p=-\frac{b}{2a}$ និង $q=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ ។

ដូចនេះក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=ax^2+bx+c$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

និងអ័ក្សឆ្លុះមានសមីការ $x=-\frac{b}{2a}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និងសមីការអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលខាងក្រោម :

ក. $y=x^2+2x+3$ ខ. $y=-2x^2+8x+1$

២. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y=5x^2+2x-3$ ខ. $y=2x-\frac{1}{2}x^2$

៥. តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី២

តម្លៃអតិបរមា និងអប្បរមានៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី២: $y=ax^2+bx+c$ មានទម្រង់ជា $y=a(x-p)^2+q$

អាស្រ័យតាមតម្លៃនៃ a ខាងក្រោម:

-បើ $a>0$: នោះអនុគមន៍មានតម្លៃ ***អប្បបរមា*** ស្មើ $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$

ត្រង់ $x=-\frac{b}{2a}$ ហើយអនុគមន៍គ្មានអតិបរមាទេ ។

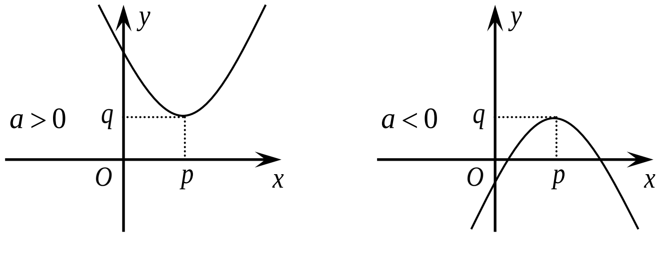
-បើ $a<0$: នោះអនុគមន៍មានតម្លៃ ***អតិបរមា*** ស្មើ $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$

ត្រង់ $x=-\frac{b}{2a}$ ហើយអនុគមន៍គ្មានអប្បបរមាទេ។

ដូចនេះ បើគេសរសេរ $y=ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$ នោះ គេបានក្រាបដូចរូបខាងក្រោម:

-បើ $a>0$: នោះអនុគមន៍មានតម្លៃ អប្បរមា

-បើ $a<0$: នោះអនុគមន៍មានតម្លៃ អតិបរមា



ប្រតិបត្តិ : ១. ក. កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $y=-2x^2+3x+4$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $y=x^2-4x-3$ ។

២. កំណត់តម្លៃអប្បបរមា និងអតិបរមានៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ខាងក្រោម :

ក. $y=x^2-4x\ \ (0\le x\le 3)$ ខ. $y=-x^2+3x\ \ (-2\le x\le 1)$ ។

៣. គេកាត់ខ្សែមួយដែលមានប្រវែង $60cm$ ជាពីរផ្នែក ហើយគេបត់ខ្សែទាំងនោះជាការេពីរ ។ តើគេត្រូវកាត់ខ្សែ ត្រង់ណាដើម្បីឲ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃការេទាំងពីរមានតម្លៃតូចបំផុត ។

៦. ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២តាមក្រាប

យើងមានសមីការដឺក្រេទី២: $ax^2+bx+c=0\ (*)$

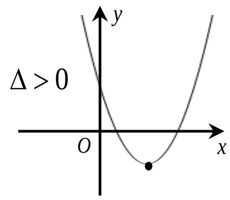
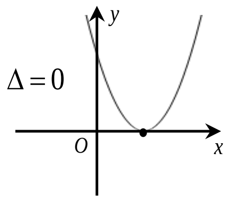
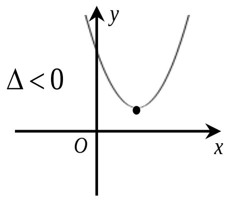
ដោយ $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\quad \text{(ព្រោះ } \Delta=b^2-4ac\text{)}$$

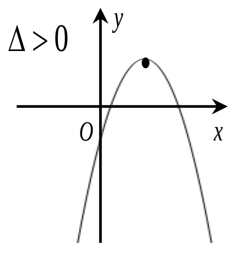
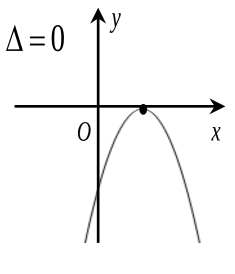
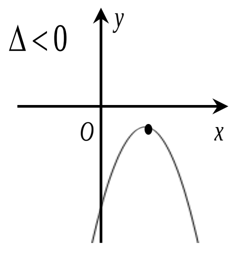
ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=ax^2+bx+c$ មានកំពូល $\left(-\frac{b}{2a}\,,-\frac{\Delta}{4a}\right)$ ។

ចម្លើយនៃសមីការ $(*)$ អាស្រ័យតាមតម្លៃ Δ ដូចខាងក្រោម៖

•បើមេគុណ $a>0$ នោះសមីការ $(*)$:

		
មានឫសពីរ x_1,x_2	មានឫសឌុប $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	គ្មានឫសជាចំនួនពិត

•បើមេគុណ $a<0$ នោះសមីការ $(*)$:

		
មានឫសពីរ x_1,x_2	មានឫសឌុប $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	គ្មានឫសជាចំនួនពិត

ប្រតិបត្តិ : សិក្សាចំនួនប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូលតាង $y=x^2-mx+4$ នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសទៅតាមតម្លៃ m ។

៧. ដំណោះស្រាយវិសមីការដឺក្រេទី២តាមក្រាប

គេអាចដោះស្រាយវិសមីការ $ax^2 < bx + c$ តាមរបៀបដូចខាងក្រោម ៖

-សង់ក្រាប: $y = ax^2$ និង $y = bx + c$ ក្នុងតម្រុយតែមួយ

-កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបទាំងពីរ

-ទាញរកចម្លើយតាមក្រាប (ក្រាបនៅខាងលើជាក្រាបធំជាង) ។

ប្រតិបត្តិ : ១. ដោះស្រាយវិសមីការតាមក្រាប :

ក. $x^2 + 4x + 1 < 0$ ខ. $3x^2 + 7x + 3 \geq 0$ គ. $-x^2 + 7x + +3 > 0$ ។

២. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យសមីការ $x^2 - kx + 4 = 0$ មានឫសទាំងពីរអវិជ្ជមាន ។

៣. ដោះស្រាយវិសមីការ $|2x - 6| < 4$ ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. សងក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = \frac{3}{2}x^2$ ខ. $y = -\frac{1}{3}x^2$ គ. $y = -\frac{3}{2}x^2$ ។

2. កំណត់អនុគមន៍ដែលក្រាបជាប៉ារ៉ាបូលដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម :

ក. កូអរដោនេនៃកំពូល $(3 , -1)$ ហើយក្រាបកាត់តាមចំណុច $(6 , 0)$ ។

ខ. ក្រាបកាត់តាមចំណុច $(-1 , -3)$, $(0 , 1)$ និង $(1 , 3)$ ។

គ. ក្រាបកាត់តាមពីរចំណុច $(1 , 1)$ និង $(4 , 4)$ ហើយកំពូលនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

3. កំណត់តម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមានៃអនុគមន៍បើវាមានដែនកំណត់ភ្ជាប់ខាងក្រោម :

ក. $y = 3x - x^2 \ (-1 \leq x \leq 2)$ ខ. $y = x^2 + 5x + 4 \ (-3 \leq x \leq 0)$ ។

4. កំណត់ចំនួនចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល $y = x^2 + 2kx + 1$ និងបន្ទាត់ $y = 2x - 3$ តាមតម្លៃ k ។

5. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = |x - 4|$ ។

6. ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម :

ក. $x^2 > 9$ ខ. $x(x - 2) < 3$ គ. $x^2 + 5x - 6 < 0$ ឃ. $2x^2 - 7x + 3 \geq 0$ ។

7. គេមាន $f(x) = x^2 - 2x - 5$

ក. កំណត់កូអរដោនេកំពូលនៃប៉ារ៉ាបូល រួចទាញជាទម្រង់ $f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$ ។

ខ. សង់ប៉ារ៉ាបូលក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ រួចបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

8. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = |2x - 1|$ ចំពោះ $-1 \leq x \leq 3$ ។

ក. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ f និងរកសំណុំរូបភាពតាងអនុគមន៍ f ។

ខ. ដោះស្រាយវិសមីការ $f(x) \leq 0$ ។

គ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = x + 1$ រួចដោះស្រាយសមីការ $|2x - 1| = x + 1$ តាមក្រាប ។

មេរៀនទី ១២ អនុគមន៍សនិទាន អនុគមន៍អសនិទាន

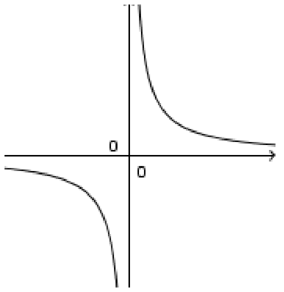
1) អនុគមន៍សនិទាន និងក្រាបរបស់វា

អនុគមន៍មានទម្រង់ជាប្រភាគ ដែលមានភាគយកនិងភាគបែងជាពហុធានៃ x ហៅថាអនុគមន៍សនិទាននៃអថេរ x ។ អនុគមន៍សនិទានមានដែនកំណត់ D ជាសំណុំតម្លៃនៃអថេរដែលធ្វើឱ្យភាគបែងខុសពីសូន្យ ។

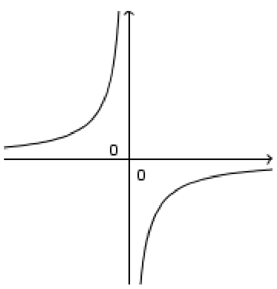
១. អនុគមន៍រាង $\mathbf{y=\frac{a}{x}}$

ចំពោះអនុគមន៍ $y=\frac{a}{x}$ មានដែនកំនត់ $D=\{\,x|x\neq 0\}$ ហើយក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{a}{x}$ ដែល $a\neq 0$ ហៅថា "**អ៊ីពែបូល**" ដែលមានអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងអ័ក្សអរដោនេជាអាស៊ីមតូត ។

ខាងក្រោមគឺមានបង្ហាញក្រាបនៃអនុគមន៍ដែលមានរាង $y=\frac{a}{x}$



ឬ



ប្រតិបត្តិ : ១. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ :

ក. $y=\frac{2}{x}$ ខ. $y=-\frac{3}{x}$

២. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\frac{4}{x}$ ហើយរកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងបន្ទាត់ $y=x$ ។

២. ក្រាបអនុគមន៍រាង $\mathbf{y=\frac{a}{x-p}+q}$

ក្រាបអនុគមន៍ $y=\frac{a}{x-p}+q$ គឺជាអ៊ីពែបូលបានដោយរំកិលក្រាប តាងអនុគមន៍ $y=\frac{a}{x}$ ស្របនឹង ៖

- អ័ក្សអាប់ស៊ីសៈ ចំនួន p ឯកតា តាមករណីៈ
  - -បើ $p>0$ រំកិលទៅខាងស្តាំ $(\rightarrow)$ ។
  - -បើ $p<0$ រំកិលទៅខាងឆ្វេង $(\leftarrow)$ ។
- អ័ក្សអរដោនេៈ ចំនួន q ឯកតា តាមករណីៈ
  - -បើ $q>0$ រំកិលទៅខាងលើ $(\uparrow)$ ។
  - -បើ $q<0$ រំកិលទៅខាងក្រោម $(\downarrow)$ ។

អ៊ីពែបូលនេះមានអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេក ដែលមានសមីការរៀងគ្នាគឺៈ $x=p$, $y=q$ ។

ប្រតិបត្តិ : សង់ក្រាប និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y=\frac{2}{x-3}$ ខ. $y=\frac{3}{x+1}-2$ គ. $y=-\frac{1}{x-3}+4$ ឃ. $(x+1)y=-1$ ។

៣. ក្រាបអនុគមន៍រាង $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

អនុគមន៍ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ អាចបំលែងជា $y=\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}$ មាន ទម្រង់ដូច $y=\frac{\alpha}{x-p}+q$ ដែល

$\alpha=\frac{bc-ad}{c^2}$, $p=-\frac{d}{c}$ និង $q=\frac{a}{c}$ ហើយយើងសង់ក្រាបរបស់វាតាមរបៀបសង់ក្រាបនៃ

អនុគមន៍ $y=\frac{\alpha}{x-p}+q$ ដែលមានជូននៅខាងលើស្រាប់ ។

ប្រតិបត្តិ : សង់ក្រាប និងកំណត់សមីការអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y=\frac{3x}{x-1}$ ខ. $y=\frac{1-2x}{x+2}$ គ. $y=\frac{x-1}{2-x}$ ។

2) អនុគមន៍អសនិទាន និងក្រាបរបស់វា

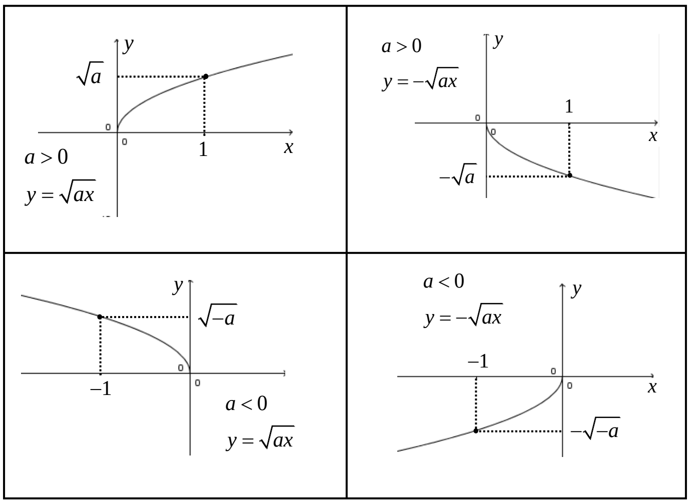
អនុគមន៍ដែលមានអថេរ x ឬកន្សោមនៃអថេរ x នៅក្រោមរ៉ាឌីកាល់ហៅថាអនុគមន៍អសនិទាននៃអថេរ x ។ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍អសនិទាន គឺជាសំណុំតម្លៃនៃអថេរ x ដែលធ្វើឱ្យកន្សោមនៅក្រោមរ៉ាឌីកាល់នោះមានន័យ ឬកំណត់បាន ។

១. ក្រាបអនុគមន៍រាង $y=\sqrt{ax}$

-ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$ ជារូបឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូលតាងអនុគមន៍ $y=x^2$

តាមបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ដែលត្រូវនឹងតម្លៃ $x\geq 0$ ។

-ក្រាបតាងអនុកមន៍អសនិទាន $y=\sqrt{ax}$ មានរាងអាស្រ័យទៅតាមសញ្ញានៃ a ដូចករណីខាងក្រោម ៖



ប្រតិបត្តិ : សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍អសនិទានខាងក្រោម :

ក. $y=-\sqrt{x}$ ខ. $y=\sqrt{2x}$ គ. $y=-\sqrt{-x}$ ។

២. ក្រាបអនុគមន៍ $\mathbf{y=\sqrt{ax+b}}$

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax+b}$ អាចបំលែងជាទម្រង់ $y=\sqrt{a(x-p)}$ តាមរបៀបដូចខាងក្រោមៈ

យើងមាន $y=\sqrt{ax+b}=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}=\sqrt{a(x-p)}$ ដែលទីនេះ $p=-\dfrac{b}{a}$ ។

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax+b}$ បានដោយរំកិលក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax}$ ចំនួន p ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស តាមករណីៈ

-បើ $p>0$ រំកិលទៅខាងស្តាំ $(\rightarrow)$

-បើ $p<0$ រំកិលទៅខាងឆ្វេង $(\leftarrow)$ ។

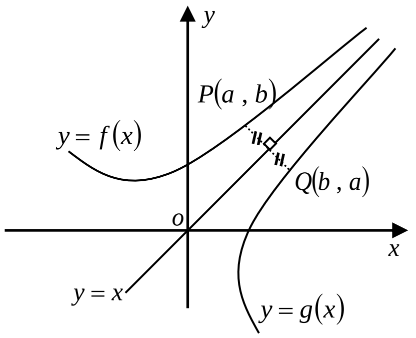
ប្រតិបត្តិ : ១. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍អសនិទានខាងក្រោម :

ក. $y=\sqrt{x-3}$ ខ. $y=\sqrt{1-x}$ ។

២. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វនៃក្រាបតាងគូអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $\begin{cases} y=\sqrt{x-2} \\ y=\dfrac{1}{3}x \end{cases}$ ខ. $\begin{cases} y=-\sqrt{x} \\ y=x-1 \end{cases}$ ។

3) ក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាស



បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានអនុគមន៍ច្រាស $y=g(x)$ យើងបាន $b=f(x)$ សមមូល $a=g(b)$ ដូចនេះចំណុច $P(a\,,b)$ ស្ថិតនៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ គឺសមមូលទៅនឹងចំណុច $Q(b\,,a)$ ស្ថិតនៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=g(x)$ ។ ចំណុច $P(a\,,b)$ និង $Q(b\,,a)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹង បន្ទាត់ពុះទី១: $y=x$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម និងរកអនុគមន៍ច្រាសរបស់វា :

ក. $y=x^2-1 \quad (x\geq 0)$ ខ. $y=\dfrac{2}{x}+1 \quad (x>0)$ ។

២. រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $y=x^2-2$ ដែលមានដែនកំណត់ $\{x \mid x\leq 0\}$ រួចរកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ច្រាសនេះ ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. រកអនុគមន៍ដែលក្រាបបានដោយរំកិលក្រាបតាង $y=\frac{2}{x}$:

   ក. ចំនួន -5 ឯកតា ស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

   ខ. ចំនួន -4 ឯកតា ស្របអ័ក្សអរដោនេ ។

   គ. ចំនួន 3 ឯកតា ស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង 5 ឯកតាស្របអ័ក្សអរដោនេ ។

2. សង់ក្រាប និងកំណត់អាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

   ក. $y=\frac{4}{x+3}$ ខ. $y=4-\frac{2}{x+1}$ ។

3. កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបតាង $y=\frac{1}{x}$ និងបន្ទាត់ $y=\frac{5}{2}-x$ ។

4. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម :

   ក. $y=\sqrt{3x-5}$ ខ. $y=-\sqrt{4-x}$ ។

5. រកអនុគមន៍ច្រាស និងរកដែនកំណត់តាងអនុគមន៍ $f(x)$ នីមួយៗខាងក្រោម :

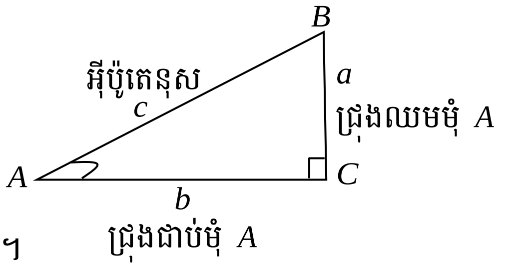
   ក. $f(x)=\frac{2}{3}x+5$ ខ. $f(x)=\frac{1}{x+2}+1$ គ. $f(x)=-\sqrt{x+4}$ ។

មេរៀនទី ១៣ ផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

I. តង់សង់ ស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស

➤ ក្នុងត្រីកោណកែងមួយ បើ A ជារង្វាស់មុំស្រួចមួយនោះ :

- តង់សង់នៃមុំ A គឺជាផលធៀបរង្វាស់ជ្រុងឈមមុំ A និងរង្វាស់ជ្រុងជាប់មុំ A ។



$\tan A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{b}$ ឬ $a = b \cdot \tan A$ ។

- ស៊ីនុសនៃមុំ A គឺជាផលធៀបជ្រុងឈមមុំ A និងអ៊ីប៉ូតេនុស ។

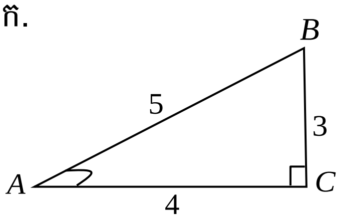
$\sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{c}$ ឬ $a = c \cdot \sin A$ ។

- កូស៊ីនុសនៃមុំ A គឺជាផលធៀបជ្រុងជាប់ មុំ A និងអ៊ីប៉ូតេនុស ។

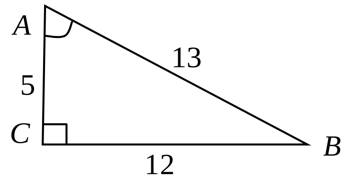
$\cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{b}{c}$ ឬ $b = c \cdot \cos A$ ។

ប្រតិបត្តិ : តាមរូបខាងក្រោមនេះ ចូរគណនា $\tan A$, $\sin A$ និង $\cos A$:

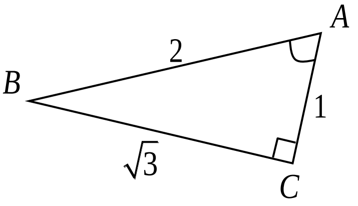
ក.



ខ.



គ.



II. ទំនាក់ទំនងរវាងផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

➤ $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$

➤ $\sin\left(90^0 - A\right) = \cos A$, $\cos\left(90^0 - A\right) = \sin A$, $\tan\left(90^0 - A\right) = \dfrac{1}{\tan A}$

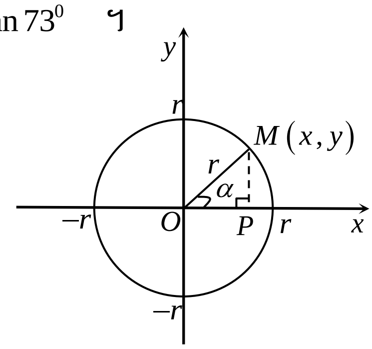
ប្រតិបត្តិ : ១. ដោយស្គាល់ $\cos A = \dfrac{12}{13}$ គណនា $\sin A$ និង $\tan A$ ។

២. ដោយស្គាល់ $\tan A = 3$ គណនា $\sin A$ និង $\cos A$ ។

៣. រកផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំតូចជាង 45^0 ដែលស្មើនឹងផលធៀបត្រីកោមាត្រនីមួយៗនេះ :

ក. $\sin 63^0$ ខ. $\cos 82^0$ គ. $\tan 73^0$ ។

III. ការពន្លាតនៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

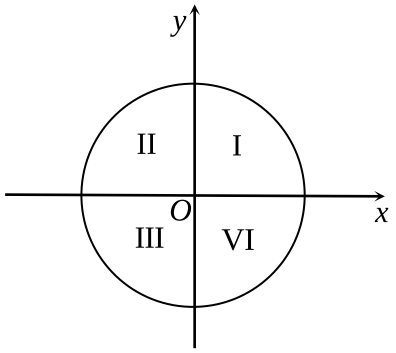


➤ ចំពោះត្រីកោណកែង OMP គេបាន :

$\cos\alpha = \dfrac{OP}{OM}$, $\sin\alpha = \dfrac{MP}{OM}$, $\tan\alpha = \dfrac{MP}{OP}$

ចំណុច M មានកូអរដោនេ (x , y) នោះ:

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$, $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$, $\tan\alpha = \dfrac{x}{y}$



តារាងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ :

កាដ្រង់ទី	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$\tan\alpha$	+	-	+	-
$\cot\alpha$	+	-	+	-

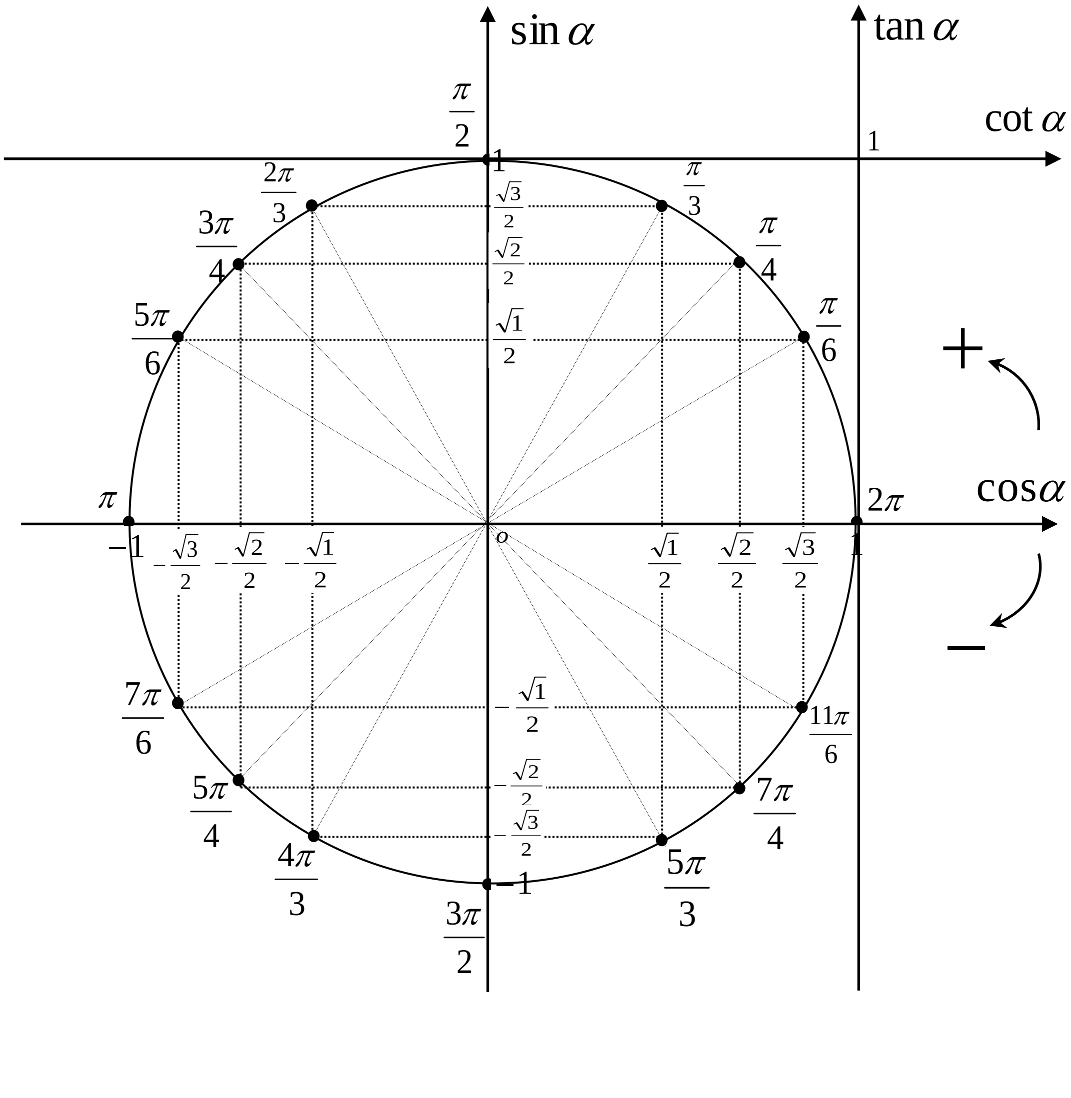
សម្គាល់ : – អ័ក្សអាប់ស៊ីស ហៅថាអ័ក្សកូស៊ីនុស (cos)

– អ័ក្សអរដោនេ ហៅថាអ័ក្សស៊ីនុស (sin)

ប្រតិបត្តិ : ១. គណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ 135^0 ក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំ $r=\sqrt{2}$ ។

២. គណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ 180^0 ក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំ $r=2$ ។

រង្វង់ត្រីកោណមាត្រ និងតារាងមុំពិសេសលម្អិត



Angles		I				II				III				IV			
DEG	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
RAD	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{4}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{4}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\cot\alpha$	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\|$

- មុំបន្ថែម $(\pi-\theta)$ និង θ : $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\ ,\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta\ ,\ \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

ខាងក្រោមជាតារាងផលធៀបនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ដឺក្រេ	រ៉ាដ្យង់	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$		ដឺក្រេ	រ៉ាដ្យង់	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0°	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-------		46°	0.8029	0.7193	0.6947	1.0355	0.9657
1°	0.0175	0.0175	0.9998	0.0175	57.2900		47°	0.8203	0.7314	0.6820	1.0724	0.9325
2°	0.0349	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363		48°	0.8378	0.7431	0.6691	1.1106	0.9004
3°	0.0524	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811		49°	0.8552	0.7547	0.6561	1.1504	0.8693
4°	0.0698	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007		50°	0.8727	0.7660	0.6428	1.1918	0.8391
5°	0.0873	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301		51°	0.8901	0.7771	0.6293	1.2349	0.8098
6°	0.1047	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144		52°	0.9076	0.7880	0.6157	1.2799	0.7813
7°	0.1222	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443		53°	0.9250	0.7986	0.6018	1.3270	0.7536
8°	0.1396	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154		54°	0.9425	0.8090	0.5878	1.3764	0.7265
9°	0.1571	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138		55°	0.9599	0.8192	0.5736	1.4281	0.7002
10°	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713		56°	0.9774	0.8290	0.5592	1.4826	0.6745
11°	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446		57°	0.9948	0.8387	0.5446	1.5399	0.6494
12°	0.2094	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046		58°	1.0123	0.8480	0.5299	1.6003	0.6249
13°	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315		59°	1.0297	0.8572	0.5150	1.6643	0.6009
14°	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108		60°	1.0472	0.8660	0.5000	1.7321	0.5774
15°	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321		61°	1.0647	0.8746	0.4848	1.8040	0.5543
16°	0.2793	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874		62°	1.0821	0.8829	0.4695	1.8807	0.5317
17°	0.2967	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709		63°	1.0996	0.8910	0.4540	1.9626	0.5095
18°	0.3142	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777		64°	1.1170	0.8988	0.4384	2.0503	0.4877
19°	0.3316	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042		65°	1.1345	0.9063	0.4226	2.1445	0.4663
20°	0.3491	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475		66°	1.1519	0.9135	0.4067	2.2460	0.4452
21°	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051		67°	1.1694	0.9205	0.3907	2.3559	0.4245
22°	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751		68°	1.1868	0.9272	0.3746	2.4751	0.4040
23°	0.4014	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559		69°	1.2043	0.9336	0.3584	2.6051	0.3839
24°	0.4189	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460		70°	1.2217	0.9397	0.3420	2.7475	0.3640

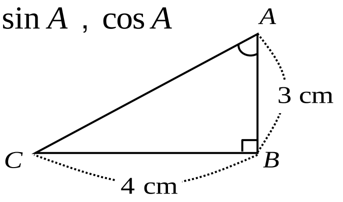
25°	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445
26°	0.4538	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503
27°	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626
28°	0.4887	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807
29°	0.5061	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040
30°	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321
31°	0.5411	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643
32°	0.5585	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003
33°	0.5760	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399
34°	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826
35°	0.6109	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281
36°	0.6283	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764
37°	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270
38°	0.6632	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799
39°	0.6807	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349
40°	0.6981	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918
41°	0.7156	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504
42°	0.7330	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106
43°	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724
44°	0.7679	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355
45°	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000

71°	1.2392	0.9455	0.3256	2.9042	0.3443
72°	1.2566	0.9511	0.3090	3.0777	0.3249
73°	1.2741	0.9563	0.2924	3.2709	0.3057
74°	1.2915	0.9613	0.2756	3.4874	0.2867
75°	1.3090	0.9659	0.2588	3.7321	0.2679
76°	1.3265	0.9703	0.2419	4.0108	0.2493
77°	1.3439	0.9744	0.2250	4.3315	0.2309
78°	1.3614	0.9781	0.2079	4.7046	0.2126
79°	1.3788	0.9816	0.1908	5.1446	0.1944
80°	1.3963	0.9848	0.1736	5.6713	0.1763
81°	1.4137	0.9877	0.1564	6.3138	0.1584
82°	1.4312	0.9903	0.1392	7.1154	0.1405
83°	1.4486	0.9925	0.1219	8.1443	0.1228
84°	1.4661	0.9945	0.1045	9.5144	0.1051
85°	1.4835	0.9962	0.0872	11.4301	0.0875
86°	1.5010	0.9976	0.0698	14.3007	0.0699
87°	1.5184	0.9986	0.0523	19.0811	0.0524
88°	1.5359	0.9994	0.0349	28.6363	0.0349
89°	1.5533	0.9998	0.0175	57.2900	0.0175
90°	1.5708	1.0000	0.0000	--------	0.0000

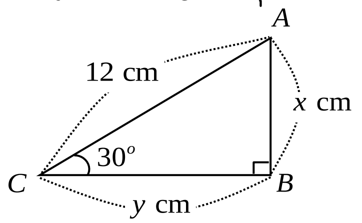
ប្រតិបត្តិ : រកផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ 105^0 , 152^0 ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. ក. តាមរូបដែលឱ្យខាងក្រោម ចូរគណនា ៖ $\tan A$, $\sin A$, $\cos A$

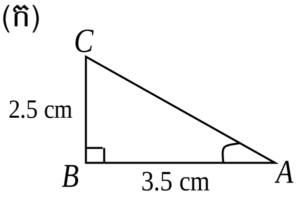


ខ. តាមមរូបខាងក្រោម ចូរគណនារង្វាស់ជ្រុង x និងជ្រុង y ៖

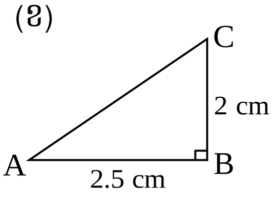


2. គណនាតង់សង់នៃមុំ A ក្នុងរូបខាងក្រោម ៖

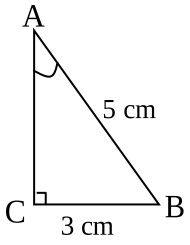
(ក)



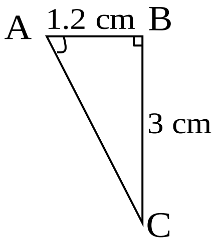
(ខ)



(គ)



(ឃ)



3. គេមានត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ B និងមានរង្វាស់ជ្រុង $BC = 3$ cm , $AC = 4$ cm ។ គណនា $\tan A$ និង $\tan B$ ។

4. ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C ។ បើស្គាល់ $\tan A = 0.75$ និង $AC = 5\text{ cm}$ ។ គណនាផលធៀប $\frac{BC}{AB}$ និង $\frac{AC}{AB}$ ។

5. EFG ជាត្រីកោណកែងត្រង់ E ដែល $EG = 4\text{cm}$ និង $FG = 7\text{cm}$ ។ ចូរគណនា $\sin F$ ។

6. គណនាតម្លៃនៃកន្សោមនីមួយៗខាងក្រោមឱ្យបានត្រឹមត្រូវ :

$A = \frac{\sqrt{3}\sin 60^o}{\cos 45^o + \sin 30^o}$ $B = \frac{\sqrt{3}\tan 30^o}{\cos^2 60^o + \sin^2 30^o}$ $C = \frac{\sin^2 30^o + \cos^2 60}{\sin^2 55^o + \sin^2 35^o}$

$D = \tan 50^o \tan 40^o$ $E = \frac{5\cos 60° - 3\sin 30°}{2\cos 45° \cdot \sin 45°}$ ។

7. គណនាតម្លៃនៃកន្សោមនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖

ក. $\frac{\sin 45^o}{\cos 30^o + \sin 60^o}$ ខ. $\tan 45^o + \tan 30^o \tan 60^o$ គ. $\tan 75^o \tan 15^o$

ឃ. $\frac{2 - \sin 65^o}{\cos 25^o - 2}$ ង. $\frac{\cos 76^o + \sin 14^o}{2\cos 76^o}$ ច. $\frac{4\cos 73^o \sin 17^o}{\left(\cos 73^o + \sin 17^o\right)^2}$

8. ដោយប្រើតារាងផលធៀបអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ចូររកតម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម:

ក. $\sin 108°$ ខ. $\cos 124°$ គ. $\tan 139°$

ឃ. $\sin 142°$ ង. $\cos 149°$ ច. $\tan 152°$ ឆ. $\sin 162°$ ។

9. រកតម្លៃ $\cos\alpha$ ឬ $\sin\alpha$ ឬ $\tan\alpha$ ដោយស្គាល់ :

ក. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $0^0 \le \alpha \le 180^0$ ខ. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ និង $90^0 \le \alpha \le 180^0$

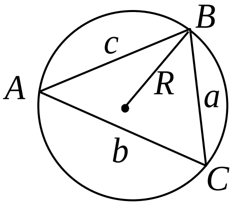
គ. $\tan\alpha = 2$ និង $0^0 \le \alpha \le 90^0$ ឃ. $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ និង $90^0 \le \alpha \le 180^0$ ។

មេរៀនទី ១៤ អនុវត្តន៍នៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

1) **ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស** : បើ ΔABC ចារឹកក្នុង

រង្វង់មានរង្វាស់កាំ R គេបាន:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



ប្រតិបត្តិ : ១. ត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់មុំ $A=75^0$, $B=60^0$ និងរង្វាស់ជ្រុង $b=6$ ។
គណនារង្វាស់ជ្រុង a និងកាំ R នៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

២. បើ $A=135^0$, $a=4\sqrt{2}$, $b=4$ ។ គណនាមុំ B និងកាំ R ។

៣. គណនារង្វាស់ជ្រុង និងមុំត្រីកោណ ABC ដោយស្គាល់ $BC=8$ រង្វាស់មុំ $A=73^0$, $C=66^0$

2) **ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស** : បើ ΔABC មាន a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងគេបាន:

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C \end{cases}$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \ , \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \ , \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

ប្រតិបត្តិ : ១. ក្នុងត្រីកោណ ABC មាន $a=7$, $b=15$, $c=13$ ។ គណនារង្វាស់មុំ C ។

២. ក្នុងត្រីកោណ ABC មាន $a=\sqrt{6}$, $c=2$, $B=15^0$ ។ គណនារង្វាស់ជ្រុង និងមុំផ្សេងទៀត ។

៣. គេមានអដ្ឋកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O និងកាំ R ។
គណនារង្វាស់ជ្រុងអដ្ឋកោណជាអនុគមន៍នៃ R រួចទាញរក $\sin 22^0 30'$ និង $\sin 67^0 30'$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. រករង្វាស់មុំ A នៃ ΔABC បើស្គាល់ $a=7$, $b=5$, $c=3$ ។

២. ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមាន $A(3\ ,4)$, $C(-1\ ,1)$, $BC=6$, $C=30^0$ ។ គណនា AB ។

3) **ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ** : បើត្រីកោណមួយមាន a,b,c ជាជ្រុងគេបាន:

$S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$ ឬ $S=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B$ ឬ $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$ យើងទាញបានផលធៀប $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{abc}{2\cdot S}$

ប្រតិបត្តិ : ១. គណនាផ្ទៃក្រឡា ΔABC បើស្គាល់រង្វាស់ជ្រុង $a=5$, $b=4$ និងរង្វាស់មុំ $C=30^0$ ។

២. គណនាផ្ទៃក្រឡា ΔMNP បើស្គាល់ $MN=40$, $NP=70$, $N=135^0$ ។

៣. ABC ជាត្រីកោណសម័ង្សដែលជ្រុងមានរង្វាស់ a ។ A' ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ BC ។
តាម A' គូសបន្ទាត់កែងនឹង AC ត្រង់ H ។ គណនាផ្ទៃក្រឡា $\Delta A'BH$ ។

4) **រូបមន្តហេរ៉ុង** : ត្រីកោណមួយមាន a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុង និង p ជា កន្លះបរិមាត្រ គេបាន:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ ។

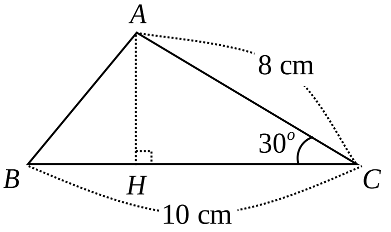
ចំពោះចតុកោណ : បើចតុកោណប៉ោងមួយចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមានមានជ្រុង $a, b, c\ , d$ និងមាន p
ជាកន្លះបរិមាត្រមានផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយ : $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. ចំការមួយមានរាងត្រីកោណដែលរង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗស្មើនឹង $125m$, $160m$ និង $225m$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាចំការនេះ ។

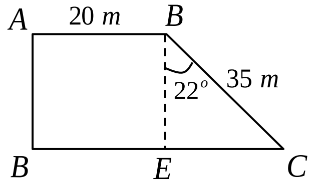
២. គេមានរង្វង់ផ្ចិត O និងកាំ $R=2cm$ ។ គេគូសអង្កត់ធ្នូ $AB=2\sqrt{3}cm$ និងអង្កត់ធ្នូ $BC=2\sqrt{2}cm$ ។ គណនា AC និងគណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។

លំហាត់អនុវត្ត

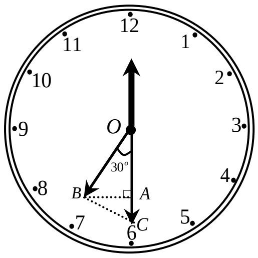
1. ត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់មុំ $A=60^o$ និងប្រវែងជ្រុង $AB=4$ cm និង $AC=8$ cm ។ គណនាប្រវែង BC ។
2. ABC ជាត្រីកោណដែលមានរង្វាស់ជ្រុងទាំងបី $AC=1$ cm, $AB=\sqrt{3}$ cm និង $BC=2$ cm ។
   ក. គណនារង្វាស់មុំនីមួយៗនៃត្រីកោណ ABC ។
   ខ. ចូរប្រាប់ពីប្រភេទត្រីកោណ ABC ។
3. គេឱ្យត្រីកោណ ABC ដូចរូបខាងក្រោម ៖
   ក. គណនា AH ។
   ខ. គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC ។



4. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថារង្វាស់ជ្រុង $AB=2$ cm , $AC=2\sqrt{3}$ cm ហើយមុំ $A=60^o$ ។
5. គណនាប្រវែងជ្រុង និងផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណសម័ង្សមួយដែលមានកម្ពស់ $5\sqrt{3}$ cm ។
6. ក. គណនារង្វាស់មុំ A , B និង C នៃត្រីកោណ ABC ដោយស្គាល់ $BC=10$, $AC=4$ និង $AB=7$ ។
   ខ. គណនារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណ MNP បើដឹងថា $MN=10$, $MP=24$ និង $NP=26$ ។
7. ដីចំការមួយកន្លែងមានរាងជាចតុកោណព្នាយកែង $ABCD$ ។ ដោយដឹងថា $AB=20$ cm , $BC=35$ cm និង $\angle CBE=22°$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាចំការ ។



8. គណនា $\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}$ និង $0°\le\alpha\le180°$ ។
9. គណនាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ដែលមាន $A=143°$ និង $BC=10$ ។
10. ទ្រនិចវែងនាឡិកាមានប្រវែង 2cm ធ្វើចលនាងាកចេញពីលេខ 6 បានមុំ $30°$ ។ តាមគំនូសតាងខាងស្តាំនេះ ចូរគណនាប្រវែង AC រួចទាញរក $\tan15°$ ។



11. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ $\sin\alpha$ ឬ $\cos\alpha$:

$A=2\sin(90°-\alpha)+\cos(180°-\alpha)$ $\quad B=1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

$C=\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$ $\quad D=\sqrt{\dfrac{2}{1+\sin\alpha}+\dfrac{2}{1-\sin\alpha}}$ ។

12. ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ α គេបាន :

ក. $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=2$ $\quad$ ខ. $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$

គ. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha=3$ $\quad$ ឃ. $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

ង. $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\cot^2\alpha}$ $\quad$ ច. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{2}{\tan\alpha}$ ។

មេរៀនទី ១៥ ចម្លាស់

1) គោលការណ៍ផលបូក និងគោលការណ៍ផលគុណ

១. គោលការណ៍ផលបូក

ជាទូទៅ: គេមានព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ B ហើយ $n(A)$ ជាចំនួនលទ្ធផលកើតក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ A , $n(B)$ ជាចំនួនលទ្ធផលកើតក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ B ។

• បើ A និង B គ្មានលទ្ធផលណាមួយរួមគ្នាទេ នោះចំនួនលទ្ធផលដែលកើតក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ "A ឬ B" គឺ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ ។

• បើ A និង B មានលទ្ធផលរួមគ្នា នោះចំនួនលទ្ធផលដែលកើតក្នុងព្រឹត្តិការណ៍ "A ឬ B" គឺ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរគ្រាប់មួយពណ៌ស និងមួយទៀតពណ៌ក្រហម ។ រកចំនួនលទ្ធផលដែលកើតឡើង កាលណាលទ្ធផលមានផលបូកលេខស្មើនឹង 5 ឬ 6 ។

២. ក្នុងថង់មួយមានប័ណ្ណ 6 ដែលបង់លេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ។ គេចាប់យកប័ណ្ណមួយចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ ។ រកចំនួនលទ្ធផលដែលអាចកើតឡើង កាលណាលេខដែលចាប់បានជាលេខសេស ឬលេខធំជាង 4 ។

២. គោលការណ៍ផលគុណ

គេមានព្រឹត្តិការណ៍ A កើតឡើង m របៀប ហើយមានព្រឹត្តិការណ៍ B កើតឡើង n របៀប នោះចំនួនលទ្ធផលដែលព្រឹត្តិការណ៍ A កើតឡើងហើយ B កើត ឡើងបន្ទាប់ស្មើនឹង $m\times n$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. កំណត់ចំនួនស្លាកលេខ ដើម្បីសម្គាល់វត្ថុតាមប្រភេទដោយប្រើតួអក្សរមួយពី A ដល់ H សរសេរពីមុខលេខដោយប្រើលេខពី 1 ដល់ 15 ។

២. មីងដានីចង់ទិញវត្ថុបីមុខមាន កាបូបដាក់សៀវភៅរៀនមួយ កាបូបតូចដាក់ប៊ិចខ្មៅដៃមួយ និងល្បែងហ្គេមមួយឈុត សម្រាប់ជារង្វាន់លើកទឹកចិត្តកូនដែលបានជាប់ចំណាត់ថ្នាក់ល្អ ។ ពេលទៅដល់ហាងលក់វត្ថុទាំងនេះ គាត់ឃើញកាបូបដាក់សៀវភៅ 3 ប្រភេទ (A , B , C) កាបូបតូចដាក់ប៊ិចខ្មៅដៃមាន 4 ពណ៌ (ក្រហម ខៀវ លឿង បៃតង) និងល្បែងហ្គេម 2 ប្រភេទ (I , II) ។ តើមីងដានីអាចជ្រើសរើសវត្ថុបីប្រភេទបានប៉ុន្មានរបៀប ?

2) ចម្លាស់

១. ចម្លាស់នៃ n ធាតុ

ចម្លាស់នៃ n ធាតុគឺជាតម្រៀបមានលំដាប់នៃ n វត្ថុខុសៗគ្នាជាជួរដេក $(n\in\mathbb{N})$ ។ ចំនួនចម្លាស់នៃ n ធាតុស្មើនឹង $n!$ ។ $n!$ អានថា n ហ្វាក់តូរីយ៉ែល (Factorial) $n!=n(n-1)(n-2)\times...\times3\times2\times1$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. គេរៀបសៀវភៅ 10 ក្បាលខុសៗគ្នាដាក់ជាជួរដេកលើថតទូមួយ ។

ក. តើការរៀបនេះមានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា ?

ខ. បើគេកំណត់ឲ្យសៀវភៅ 3 ក្បាលនៅជាប់គ្នាជានិច្ច តើការតម្រៀបនេះមានប៉ុន្មានបែប ?

២. មានមនុស្ស 6 នាក់អង្គុយលើកៅអីមួយជួរដែលក្នុងនោះមានក្មេង 4 នាក់និងមនុស្សចាស់ 2 នាក់ ។ រកចំនួនរបៀបការអង្គុយក្នុងករណីមនុស្សចាស់ទាំង 2 នាក់អង្គុយចុងសងខាង ។

២. ចម្លាស់នៃ r ធាតុយកពី n ធាតុ

ចម្លាស់នៃ r ធាតុយកពី n ធាតុ គឺជាតម្រៀបមានលំដាប់នៃ r ធាតុខុសៗគ្នាដែលធាតុនីមួយៗយកចេញពី n ធាតុខុសៗគ្នា ។ $(n\in\mathbb{N}\,,\,r\in\mathbb{N}\,,\,r\le n)$ ។ ចំនួនចម្លាស់នៃ r ធាតុយកពី n ធាតុគឺ:

$P(n\,,\,r)=n(n-1)(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)$ ឬ $\boxed{P(n\,,\,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. គេចង់បង្កើតគណៈកម្មការសិស្សមានគ្នា 4 នាក់ ម្នាក់ជាប្រធាន ម្នាក់ជាអនុប្រធាន ម្នាក់ជាលេខា និងម្នាក់ទៀតជាសមាជិកដើម្បីជួយការងារសាលារៀន ។ សមាសភាពគណៈកម្មការនេះត្រូវរើសក្នុងចំណោមសិស្ស 10 នាក់ ។

ក. កំណត់ចំនួនគណៈកម្មការដែលអាចបង្កើតបាន ?

ខ. កំណត់ចំនួនគណៈកម្មការដែលមានសុខជាលេខា ?

២. សិស្ស 9 នាក់ឈរជាជួរដែលក្នុងនោះមានសិស្សស្រី 5 នាក់ និងសិស្សប្រុស 4 នាក់ ។ រកចំនួនរបៀបដែលសិស្សឈរ បើគេដឹងថាសិស្សប្រុស 2 នាក់ឈរនៅចុងសងខាង ។

៣. ចម្លាស់ច្រំដែល

ចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុគឺជាតម្រៀបមានលំដាប់នៃ r ធាតុដែលធាតុនីមួយៗអាចជាធាតុដដែលយកចេញពី n ធាតុ ។ ចំនួនចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុគឺ n^r ។

ប្រតិបត្តិ : ១. គេពិនិត្យលេខទូរស័ព្ទដែលគេប្រើសព្វថ្ងៃ ជាចំនួនដែលមានលេខ 6 ខ្ទង់ (ដោយមិនគិតពីលេខសម្គាល់ក្រុមហ៊ុន) ។ រកចំនួនផ្លាកគ្រប់គ្រងប្រព័ន្ធព័តមាន (SIM card) ដែលអាចបង្កើតបានដោយក្រុមហ៊ុននីមួយៗ ។

២. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ 3 ដងបន្តបន្ទាប់គ្នា ។

ក. រកចំនួនលទ្ធផលដែលអាចកើតឡើងទាំងអស់ ។

ខ. រកចំនួនលទ្ធផលដែលមានលេខ 5 ពីរដង ។

៤. ចម្លាស់វង់

ជាទូទៅ: ចំនួនចម្លាស់វង់នៃ n ធាតុគឺ: $\boxed{\dfrac{n!}{n}=(n-1)!}$ ។

ប្រតិបត្តិ : សិស្សមួយក្រុមមានស្រី 2 នាក់ ប្រុស 6 នាក់អង្គុយជុំវិញតុមូលធ្វើការងារជាក្រុម ។ តើសិស្សអាចអង្គុយបានប៉ុន្មានរបៀប បើសិស្សស្រី 2 អង្គុយទល់មុខគ្នា ។

៥. ចម្លាស់នៃ n ធាតុយកម្ដង n ធាតុ

ចម្លាស់ n ធាតុខុសគ្នា ជាតម្រៀបដោយគិតលំដាប់នៃ n ធាតុនោះដោយជ្រើសរើសមិនច្រំដែល ។ ចំនួនចម្លាស់ n ធាតុស្មើនឹង $P_n = n!$ ។

ប្រតិបត្តិ : ទេសចរមួយក្រុមមានបុរស 3 នាក់និងស្ត្រី 5 នាក់ បានឈរបន្តគ្នាជាជួរដោយចៃដន្យ ដើម្បីទិញសំបុត្រចូលទស្សនាប្រាសាទអង្គរវត្ត ។

ក. រកចំនួនរបៀបនៃការឈរបន្តគ្នាជាជួររបស់ក្រុមទេសចរនោះ ។

ខ. រកចំនួនរបៀបនៃការឈរ បើទេសចរដែលឈរមុខគេបង្អស់ជាស្ត្រី ។

គ. រកចំនួនរបៀបនៃការឈរ បើទេសចរជាបុរសទាំងអស់ឈរនៅជាប់ៗគ្នា ។

៦. ចម្លាស់អាចបែងចែកបាន

បើសំណុំមួយមាន n ធាតុ ដែលក្នុងនោះមាន n_1 ដូចគ្នាក្នុងប្រភេទទី1 , n_2 ដូចគ្នាក្នុងប្រភេទទី 2 , … , n_k ដូចគ្នាក្នុងប្រភេទទី k ដោយ $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ នោះចំនួនចម្លាស់នៃ n ធាតុនេះស្មើនឹង:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!}$$ ។

ប្រតិបត្តិ : រកចំនួនចម្លាស់នៃពាក្យ BANANA ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. គ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរត្រូវបានបោះឡើង ។ តើគេបានលទ្ធផលប៉ុន្មានរបៀប បើចំនួននៅមុខលើនៃគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរមាន ផលបូកស្មើនឹង 3 ឬ 4 ។
2. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរគ្រាប់មួយពណ៌ស មួយទៀតពណ៌ក្រហម ។ រកចំនួនលទ្ធផលដែលកើតឡើង កាលណាលទ្ធផល មានបូកលេខស្មើ 5 ឬ 6 ។
3. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរឡើង ។ តើលទ្ធផលមានប៉ុន្មានរបៀប បើគ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរមានផលបូកស្មើ 4 ឬផលគុណ ស្មើនឹង 4 ?
4. ក្នុងថង់មួយមានប័ណ្ណ 6 ដែលបង់លេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ។ គេចាប់យកប័ណ្ណមួយចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ ។ រកចំនួនលទ្ធផលដែលអាចកើតឡើង កាលណាលេខដែលចាប់បានជាលេខគូ ឬលេខធំជាង 3 ។
5. បុរស 6 នាក់និងនារី 5 នាក់ចាប់ដៃគូគ្នារាំវាយសី ។ តើការចាប់ដៃគូស្រីនិងប្រុសនេះមានប៉ុន្មានរបៀប ?
6. កំណត់ចំនួនស្លាកលេខ ដើម្បីសម្គាល់វត្ថុតាមប្រភេទដោយប្រើតួអក្សរមួយពី A ដល់ H សរសេរពីមុខលេខដោយប្រើលេខពី 0 ដល់ 9 ។
7. គេមាន 3 ផ្លូវសម្រាប់ធ្វើដំណើរពីភូមិ A ទៅភូមិ B និងមាន 2 ផ្លូវសម្រាប់ធ្វើដំណើរពីភូមិ B ទៅភូមិ C ។ រកចំនួនរបៀប ទាំងអស់ដែលគេអាចធ្វើដំណើរពីភូមិ A ទៅភូមិ C ។
8. សុខមានអាវថ្មី 4 និងខោថ្មី 3 ដែលគាត់នឹងស្លៀកពាក់ចូលរួមក្នុងពិធីជប់លៀង ។ តើសុខអាចស្លៀកពាក់បានប៉ុន្មានរបៀប ខុសៗគ្នាដើម្បីចូលរួមក្នុងពិធីជប់លៀង ?

9. គេចង់បង្កើតប្រអប់ការដូមួយចំនួន ដែលក្នុងប្រអប់មានប៊ិចមួយ បន្ទាត់មួយ និងសៀវភៅមួយ ។ គេដឹងថា ប៊ិចមាន 3 ប្រភេទ បន្ទាត់មាន 2 ប្រភេទ និងសៀវភៅមាន 5 ប្រភេទ ។ តើគេអាចបង្កើតកាដូបានប៉ុន្មានរបៀបខុសគ្នា ?

10. ចូរគណនា: ក. $\frac{4!}{3!}$ ខ. $\frac{10!}{7!}$ គ. $\frac{(n-1)!}{n!}$ ឃ. $\frac{n!}{(n-3)!}$ ង. $\frac{(n!)^2}{(n-1)!(n-2)!}$ ច. $0!$ ។

11. គណនា: ក. $P(5,2)$ ខ. $P(12,10)$ គ. $P(10,10)$ ឃ. ${}_6P_4$ ។

12. គេមានអក្សរ A, B, C, D ។ តើគេមានប៉ុន្មានរបៀបក្នុងការជ្រើសយកអក្សរពីរមករៀបឆ្លាស់គ្នា?

13. តើជ័យលាភីមានចំនួនប៉ុន្មានរបៀប ដើម្បីចាប់យករង្វាន់លេខ 1 លេខ 2 និងលេខ 3 សម្រាប់សិស្ស 9 នាក់ ?

14. មនុស្សមួយក្រុមមានគ្នា 5 នាក់រត់មកតម្រៀបជួរគ្នា ។ រកចំនួនរបៀបទាំងអស់នៃការតម្រៀបជួរ។

15. គេចង់បង្កើតលេខ 5 ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់នីមួយៗខុសគ្នា ដោយជ្រើសរើសចេញពីលេខ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8។ តើគេអាចបង្កើតបានប៉ុន្មានចំនួនខុសៗគ្នា ។

16. ក្រុមហ៊ុនទូរស័ព្ទចល័តមួយបានបង្កើតលេខទូរស័ព្ទមានលេខ 6 ខ្ទង់ដាក់ភ្ជាប់ជាមួយលេខក្បាលប្រព័ន្ធ។ រកចំនួនលេខទូរស័ព្ទទាំងអស់ ដែលក្រុមហ៊ុននេះអាចបង្កើតបាន។

17. គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចំនួនពីរដង។ រកចំនួនលទ្ធផលដែលអាចកើតមានឡើងទាំងអស់។

18. គ្រួសារមួយមានមនុស្សចាស់ 4 នាក់ និងក្មេង 2 នាក់ អង្គុយហូបបាយជុំវិញតុមូលមួយ ។
 ក. តើការអង្គុយនេះមានប៉ុន្មានរបៀបខុសគ្នា?
 ខ. បើក្មេងពីរនាក់អង្គុយជិតគ្នាជានិច្ច តើការអង្គុយនេះមានប៉ុន្មានរបៀប ?

19. សិស្សមួយក្រុមមានស្រី 2 នាក់ និងប្រុស 4 នាក់ អង្គុយជុំវិញតុមូលធ្វើការងារជាក្រុម ។ តើសិស្សអាចអង្គុយបានប៉ុន្មានរបៀប បើសិស្សស្រីពីនាក់អង្គុយទល់មុខគ្នា ?

20. គេតម្រៀបមនុស្ស 8 នាក់ជារង្វង់ ដែលក្នុងនោះមានឈ្មោះ A និង B ។
 ក. ចូររកចំនួននៃតម្រៀបទាំងអស់ ។
 ខ. ចូររកចំនួនតម្រៀបនៅពេលដែល A និង B ត្រូវបានគេដាក់ជិតគ្នា។

21. កុមារីវិនយកឃ្លី 6 ពណ៌ផ្សេងៗគ្នា មករៀបជារង្វង់ឱ្យឆ្លាស់ពណ៌គ្នា ។ តើវិនអាចរៀបបានប៉ុន្មានរបៀបផ្សេងៗគ្នា ?

22. ជាមួយតួអក្សរនៃពាក្យ COCOON តើគេអាចសរសេរបានប៉ុន្មានពាក្យ (ពាក្យនីមួយៗមិនចាំបាច់មានន័យទេ) ដែលមាន 6 តួអក្សរ ។

23. ជាមួយតួអក្សរនៃពាក្យ INFINTE តើគេអាចសរសេរបានប៉ុន្មានពាក្យ (ពាក្យនីមួយៗមិនចាំបាច់មានន័យទេ) ដែលមាន 8 តួអក្សរ ។

24. ក. រកចំនួនចម្លាស់ផ្សេងគ្នាទាំងអស់របស់តួអក្សរនៃពាក្យ *STEEPLES* ។
 ខ. ក្នុងចំណោមចម្លាស់ទាំងនេះ មានចម្លាស់ប៉ុន្មាន ដែលអក្សរ E ទាំងបីនៅជាប់គ្នា។
 គ. តើមានចម្លាស់ទាំងអស់ប៉ុន្មាន ដែលចាប់ផ្តើម និងបញ្ចប់ដោយអក្សរ S ។

មេរៀនទី ១៦ បន្សំ

1) **បន្សំ**

១. បន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុ

ជាទូទៅ: បន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុ គឺជាការយកព្រមគ្នាម្តង r ធាតុ ចេញពី n ធាតុខុសៗគ្នាដោយមិនគិតពីលំដាប់នៃការយកចេញ ។ $(r,n\in\mathbb{N}\,,\, r\le n)$ ចំនួនបន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុគឺ:

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$ ។

ប្រតិបត្តិ១ : ក្នុងទូនៃបណ្ណាល័យមួយមានសៀវភៅគណិតវិទ្យា 4 ក្បាលខុសៗគ្នា និងរូបវិទ្យា 2 ក្បាលខុសៗគ្នាដែរ សុកត្រូវការអានសៀវភៅទាំងអស់ ប៉ុន្តែអាចខ្ចីសៀវភៅម្តងបានតែ 3 ក្បាលក្នុងចំណោមសៀវភៅនៅក្នុងទូនោះ ។

ក. តើសុកអាចរៀបសៀវភៅ 3ក្បាលសម្រាប់ខ្ចីបានប៉ុន្មានរបៀប ?

ខ. បើសុកចង់បានសៀវភៅគណិតវិទ្យា 2 ក្បាល និងរូបវិទ្យា 1 ក្បាល តើសុកអាចរៀបបាន សៀវភៅប៉ុន្មានរបៀប ?

ប្រតិបត្តិ២ : ថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សប្រុស 12 នាក់ និងសិស្សស្រី 8 នាក់ ។ គ្រូចង់ដឹងសមត្ថភាពសិស្ស 3 នាក់ ដោយឲ្យដោះស្រាយលំហាត់មួយនៅក្តារខៀន ។

ក. តើគ្រូអាចហៅសិស្សម្តង 3 នាក់មកក្តារខៀនបានប៉ុន្មានរបៀប ?

ខ. តើក្រុមសិស្ស 3 នាក់មានប៉ុន្មានរបៀប បើគ្រូចង់ឲ្យក្រុមនេះមានសិស្សប្រុស 2 នាក់ និងសិស្សស្រីម្នាក់ ?

២. លក្ខណៈនៃបន្សំ

តាមរូបមន្តនៃបន្សំយើងទាញបានលក្ខណៈ

1) $C(n\,,\,n-r)=C(n\,,\,r)$	3) $C(n\,,1)=n$
2) $C(n\,,\,n)=C(n\,,\,0)=1$	4) $0!=1$

ប្រតិបត្តិ : ចូរបង្ហាញថា $C(3\,,0)+C(3\,,1)+C(3\,,2)+C(3\,,3)=2^3$ ។

៣. ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា $(1+a)^n$ និង $(a+b)^n$

-ក្នុងការពន្លាតទ្វេធានៃ $(1+a)^n$ ដែល $n\in\mathbb{N}$:

$$(1+a)^n=C(n,0)1+C(n,1)a+C(n,2)a^2+\ldots+C(n,r)a^r+\ldots+C(n,n)a^n$$

ក្នុងការពន្លាតទ្វេធានៃ $(1+a)^n$ គេបានមេគុណនៃ a^k ស្មើនឹង $C(n\,,\,k)$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. ចូរពន្លាតទ្វេធានៃ $\left(1+\frac{2}{x}\right)^5$ ។

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $C(n\,,0)+C(n\,,1)+C(n\,,2)+\ldots+C(n\,,n)=2^n$ ។

-ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា $(a+b)^n$: បើ $n\in\mathbb{N}$ នោះ

$\boxed{(a+b)^n = C(n,0)a^n + C(n,1)a^{n-1}b + C(n,2)a^{n-2}b^2 + ... + C(n,n)b^n}$ ក្នុងការពន្លាតទ្វេធានៃ $(a+b)^n$ គេបានមេគុណនៃ $a^{n-k}b^k$ ស្មើនឹង $C(n,k)$ ។

ប្រតិបត្តិ : ចូរសរសេរ 4 តួដំបូងតាមស្វ័យគុណកើននៃ x ក្នុងការពន្លាតទ្វេធានៃកន្សោម :

ក. $(2+3x)^6$

ខ. $\left(\frac{1}{2x}-2x^2\right)^8$ ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. ចូរផ្សំអក្សរពីរៗឱ្យអស់លទ្ធភាពដោយយកចេញពីអក្សរ A, B, C និង D រួចប្រាប់ចំនួននៃបន្សំទាំងអស់នេះ ។
2. ក្នុងបន្ទប់មួយមានកៅអី 7 ។ គេយកកៅអី 5 ភ្ញៀវអង្គុយ។ តើគេមានប៉ុន្មានរបៀបក្នុងការយកកៅអីទាំង 5 ?
3. ក្នុងក្លឹបមួយមានកីឡាករ 10 នាក់ ។ គេបង្កើតក្រុមដែលមានសមាជិក 3 នាក់ ក្នុងចំណោមកីឡាករ 10 នាក់ធ្វើជាដៃគូហ្វឹកហាត់។ តើគេអាចរៀបកីឡាករ 3 នាក់បានប៉ុន្មានរបៀប ក្នុងចំណោមកីឡាករ 10 នាក់ ?
4. គេចង់បង្កើតគណៈកម្មការនិស្សិតមួយក្រុមមានគ្នា 5 នាក់ ដោយជ្រើសរើសក្នុងចំណោមនិស្សិតគំរូ 9 នាក់ ។ តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មការបែបនេះបានប៉ុន្មានរបៀប ?
5. ក្នុងក្រុមពិសេសមានសមាជិក 14 នាក់ ។ គេបង្កើតគណៈប្រតិភូមានសមាជិក 5 នាក់រើសចេញពីក្រុមពិសេសនេះ។ តើគេ អាចបង្កើតគណៈប្រតិភូបានប៉ុន្មានរបៀប ?
6. គេរើសអក្សរ 5 តួចេញពីអក្សរ $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ និង J ។

   ក. តើគេអាចរើសបានប៉ុន្មានរបៀប ?

   ខ. តើគេអាចរើសបានប៉ុន្មានរបៀប បើក្នុងចំណោម 5 តួនោះគឺ:

   -មានព្យញ្ជនៈតែ 3 គត់?

   -គ្មានស្រៈសោះ?

   -យ៉ាងតិចមានស្រៈមួយ?
7. គេជ្រើសរើសមនុស្សចាស់ 4 នាក់ និងក្មេង 3 នាក់ចេញពីក្រុមមួយដែលមានមនុស្សចាស់ 8 នាក់ និងក្មេង 5 នាក់ ។ តើគេអាចជ្រើសរើស បានប៉ុន្មានរបៀប ?
8. គ្រូចង់ចែកសិស្សជា 3 ក្រុមមានសមាជិកស្មើៗគ្នា នៃសិស្ស 15 នាក់ ។ តើគាត់ចែកបានប៉ុន្មានរបៀប ?
9. តើគេអាចបែងចែកសិស្សបានប៉ុន្មានរបៀប បើដឹងថាមានៈ

   ក. សិស្ស 5 នាក់ត្រូវចែកជា 2 ក្រុម ដែលក្រុមមួយមាន 2 នាក់ និងក្រុមមួយទៀតមាន 3 នាក់ ?

   ខ. សិស្ស 9 នាក់ត្រូវចែកជា 2 ក្រុម ដែលក្រុមមួយមាន 4 នាក់ និងក្រុមមួយទៀតមាន 5 នាក់ ?

   គ. សិស្ស 9 នាក់ត្រូវចែកជា 3 ក្រុម ដែលមួយក្រុមមានសិស្ស 2 នាក់ 3 នាក់និង 4 នាក់ ?

10. ក្រុមកីឡាករមានមនុស្ស 10 នាក់ ដែលមានស្ត្រី 4 នាក់ និងបុរស 6 នាក់។ គេរើសកីឡាករ 4 នាក់ ដើម្បីធ្វើការប្រកួតគ្នា ។ រកចំនួនរៀបដែលជ្រើសរើសបើៈ

ក. កីឡាករត្រូវប្រកួតមានភេទដូចគ្នា ។

ខ. កីឡាករត្រូវប្រកួតមានចំនួនស្រីស្មើនឹងចំនួនបុរស ។

11. គេជ្រើសរើសសិស្ស 5 នាក់ក្នុងចំណោមសិស្សស្រី 7 នាក់ និងសិស្សប្រុស 10 នាក់ ឱ្យចូលរួមប្រជុំការងារ។ តើគេអាចជ្រើសរើសសិស្ស 5 នាក់នេះបានប៉ុន្មានរបៀបបើៈ

ក. គ្មានលក្ខខណ្ឌ ?

ខ. មានសិស្សស្រី 3 នាក់ និងសិស្សប្រុស 2 នាក់ ?

គ. មានសិស្សស្រី 2 នាក់គត់ ?

ឃ. មានសុទ្ធតែសិស្សប្រុស ?

ង. យ៉ាងតិចមានសិស្សស្រីម្នាក់ ?

12. គេមានលំហាត់ធរណីមាត្រ 6 និងលំហាត់ពីជគណិតចំនួន 4 ។ គេបង្កើតវិញ្ញាសាប្រឡងមួយដែលមាន 3 លំហាត់ ដោយ រើសចេញពីលំហាត់ទាំង 10 ខាងលើ។ តើគេអាចបង្កើតវិញ្ញាសាបានប៉ុន្មានរបៀប បើក្នុងវិញ្ញាសានីមួយៗត្រូវមានលំហាត់ លំហាត់ធរណីមាត្រយ៉ាងតិច 1 ?

13. ក្នុងកាបូបមួយមានប៊ិចខៀវ 8 ដើម និងប៊ិចក្រហម 6 ដើម។ គេហូតយកប៊ិច 4 ដើមចេញពីការបូបដោយចៃដន្យ។ រកចំនួន របៀបដែលគេហូតបានប៊ិច 4 ដើមតាមករណីដូចខាងក្រោមៈ

ក. គ្មានលក្ខខណ្ឌអ្វីទាំងអស់ ។

ខ. ប៊ិចខៀវ 3 ដើម និងប៊ិចក្រហម 1 ដើម។

គ. ប៊ិចខៀវ 2 ដើមគត់។

ឃ. ប៊ិចខៀវ 2 ដើមគត់ ឬប៊ិចខៀវ 3 ដើមគត់។

ង. ប៊ិចខៀវ 2 ដើមគត់ ឬប៊ិចក្រហម 3 ដើមគត់។

ច. គ្មានប៊ិចខៀវសោះ។

ឆ. យ៉ាងតិចប៊ិចក្រហមមួយដើម។

ជ. ប៊ិចខៀវយ៉ាងតិច 3 ដើម ។

ឈ. ប៊ិចពណ៌ខ្មៅទាំង 4 ដើម។

ញ. ប៊ិចខៀវយ៉ាងច្រើន 2 ដើម ។

14. គណនាៈ ក. $\frac{C(9,5)}{C(8,5)}$ ខ. $\frac{C(10,6)}{C(9,5)}$ គ. $\frac{C(n+1,p)}{C(n,p)}$ ។

15. ចូរពន្លាតកន្សោមៈ ក. $(1+x)^5$ ខ. $(a+b)^4$ គ. $(x-y)^6$ ។

16. បង្ហាញថា $C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-C(n,3)+\ldots+(-1)^n C(n,n)=0$ ។

17. ចូររកមេគុណរបស់ x^4 និង x^5 ក្នុងពន្លាតទ្វេធានៃ $(1+x)^{12}$ ។

18. ចូររកមេគុណរបស់តួដែលមាន b^5 និង b^6 ក្នុងពន្លាតទ្វេធានៃ $\left(1-\frac{b}{2}\right)^{10}$ ។

មេរៀនទី ១៧ វ៉ិចទ័រក្នុងប្លង់

1. **អត្ថន័យនៃវ៉ិចទ័រ**

-អង្កត់មានទិសដៅ ដែលមិនគិតពីទីតាំងហៅថា **វ៉ិចទ័រ** ។

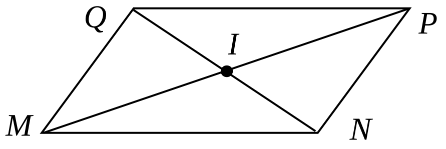
-វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ គឺមានចំណុច A ជាគល់ និងចំណុច B ជាចុង ។

2. **វ៉ិចទ័រស្មើគ្នា**

វ៉ិចទ័រពីរជាវ៉ិចទ័រស្មើគ្នា កាលណា :

-វាមានទិសដៅដូចគ្នា
-វាមានប្រវែងស្មើគ្នា ។

ប្រតិបត្តិ : រៀបរាប់ឈ្មោះវ៉ិចទ័រដែលស្មើគ្នានៅក្នុងរូបខាងស្តាំនេះ ។



3. **វ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នា**

វ៉ិចទ័រពីរជាវ៉ិចទ័រផ្ទុយគ្នា លុះត្រាតែ :

-វាមានទិសដៅផ្ទុយគ្នា
-វាមានប្រវែងស្មើគ្នា ។

សម្គាល់ : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ ។

4. **វ៉ិចទ័រសូន្យ**

វ៉ិចទ័រមួយជាវ៉ិចទ័រសូន្យ លុះត្រាតែវ៉ិចទ័រនោះមានចំណុចចុងត្រួតលើគល់ ។ បើ $\vec{a}$ ជាវ៉ិចទ័រសូន្យ លុះត្រាតែ $|\vec{a}|=0$ ។ វ៉ិចទ័រសូន្យកំណត់សរសេរ ដោយ $\vec{0}$ ។ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{BB}=\vec{0}$, ... ។

5. **វ៉ិចទ័រឯកតា**

វ៉ិចទ័រឯកតា ជាវ៉ិចទ័រដែលមានប្រវែងស្មើនឹង 1 ។

6. **ប្រមាណវិធីបូកវ៉ិចទ័រ**

បើគេមានវ៉ិចទ័រពីរ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$ នោះផលបូករវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BC}$ គឺ $\overrightarrow{AC}$ ដែលគេកំណត់សរសេរដោយ $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$ ។

7. **ប្រមាណវិធីបូកវ៉ិចទ័រតាមវិធានប្រលេឡូក្រាម**

បើគេមានវ៉ិចទ័រពីរ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ដែលមាន A ជាគល់រួម នោះផលបូក រវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ គឺ $\overrightarrow{AD}$ ដែល AD ជាអង្កត់ទ្រូងនៃប្រលេឡូក្រាម $ABDC$ ។

8. **លក្ខណៈគ្រឹះនៃប្រមាណវិធីវ៉ិចទ័រ**

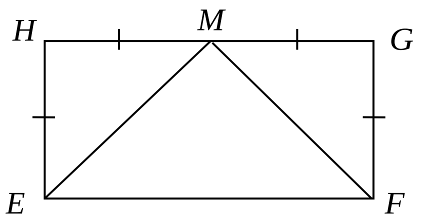
- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$
- $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

ប្រតិបត្តិ : សរសេរផលបូកជាវ៉ិចទ័រតែមួយ

ដូចរូបខាងស្តាំ :

ក. $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{MH}$

ខ. $\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HF}$ ។

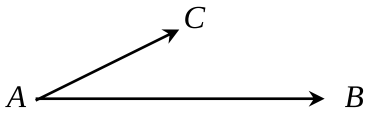


9. **ប្រមាណវិធីដកលើវ៉ិចទ័រ**

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ ចំពោះគ្រប់ចំណុច O នៃប្លង់ ។

ប្រតិបត្តិ : រក $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

ចំពោះរូបខាងស្តាំ ។



10. **ប្រមាណវិធីគុណវ៉ិចទ័រនឹងមួយចំនួនពិត**

បើគេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និងចំនួនពិត m មួយ នោះយើងអាចកំណត់ $m\vec{a}$ ដែល m គុណនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ ដូចវិធីខាងក្រោម :

-បើ $\vec{a}$ មិនស្មើនឹងសូន្យ នោះ :

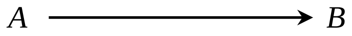
១. បើ $m>0$ នោះ $m\vec{a}$ ជាវ៉ិចទ័រមានទិសដៅដូច $\vec{a}$ ហើយមានប្រវែង $|m||\vec{a}|$ ។

២. បើ $m<0$ នោះ $m\vec{a}$ ជាវ៉ិចទ័រមានទិសដៅផ្ទុយពី $\vec{a}$ ហើយមានប្រវែង $|m||\vec{a}|$ ។

៣. បើ $m=0$ នោះ $m\vec{a}$ ជាវ៉ិចទ័រ $\vec{0}$ ។

-បើ $\vec{a}$ ស្មើទៅនឹងសូន្យ នោះ $m\vec{a}$ ជាវ៉ិចទ័រ $\vec{0}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ (ដូចរូប) សង់វ៉ិចទ័រ :



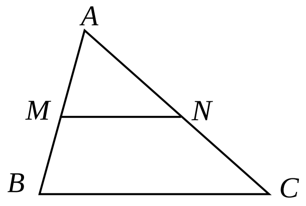
ក. $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ខ. $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ ។

២. M និង N ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង AB និង AC របស់ ΔABC

(ដូចខាងស្តាំ) ។ បង្ហាញថា :

ក. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$ ខ. $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{CN}$

គ. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ឃ. $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{NM}$



11. **វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរ**

-វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរ កាលណា $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ស្របគ្នាទោះបីមានទិសដៅដូចគ្នា ឬផ្ទុយគ្នា ប្រវែងស្មើគ្នា ឬមិនស្មើគ្នា ។ គេកំណត់សរសេរ $\vec{a}$ កូលីនេអ៊ែរ $\vec{b}$ ដោយ : $\boxed{\vec{a}\,//\,\vec{b}}$ ។

-បើ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរដែល $\vec{a}\neq\vec{0}$ និង $\vec{b}\neq\vec{0}$ ហើយមានចំនួនពិត m ណាមួយដែល : $\boxed{\vec{a}=m\vec{b}}$ ។

12. **លក្ខណៈគ្រឹះនៃវ៉ិចទ័រ**

បើ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រ ហើយ m និង n ជាចំនួនពិតគេបាន :

១. $(mn)\vec{a}=m(n\vec{a})$ (លក្ខណៈផ្តុំ)

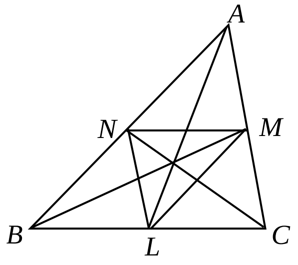
២. $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$ (លក្ខណៈបំបែក I)

៣. $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$ (លក្ខណៈបំបែក II)

ប្រតិបត្តិ : ១. គណនាកន្សោមខាងក្រោម :

ក. $3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{a}$ ខ. $3(\vec{u}+2\vec{v})-3(\vec{u}-4\vec{v})$

២. យកចំណុច L , M និង N ជាចំណុចកណ្ដាល នៃជ្រុង BC , CA និង AB នៃ ΔABC ។ សរសេរវ៉ិចទ័រខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ដោយតាង $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ និង $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ ។ $\overrightarrow{NL}$, $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CN}$ ។



13. ការសរសេរកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ

បើ $\vec{a}$ មានកូអរដោនេ x និង y គេបាន :

-សរសេរតាងជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ ។

-សរសេរតាងឱ្យកូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(x\ ,\ y)$ ។

14. ប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ

បើ $\vec{a}$ មានកូអរដោនេ $(x\ ,\ y)$ នោះប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ កំណត់ដោយ : $\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}}$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. សង់ចំណុច A , B , C និង D បើគេដឹងថា $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}-2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=(2\ ,\ 3)$, $\overrightarrow{OC}=(5\ ,\ -1)$ និង $\overrightarrow{OD}=2\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$ ។

២. គេឲ្យចំណុច $A(-2\ ,\ -6)$, $B(3\ ,\ 1)$ និង $C(3\ ,\ 4)$ ។ សរសេរ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}$ និង $\vec{j}$ ។ រួចគណនាប្រវែងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CA}$ ។

15. កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ

បើមានពីរចំណុច $A(x_1\ ,\ y_1)$ និង $B(x_2\ ,\ y_2)$ នោះគេបានកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ គឺ :

$\boxed{\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1)}$ និងមានប្រវែងកំណត់ដោយ $\boxed{AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$

16. ការគណនាវ៉ិចទ័រដោយប្រើកូអរដោនេ

១. $(x_1\ ,\ y_1)+(x_2\ ,\ y_2)=(x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2)$

២. $(x_1\ ,\ y_1)-(x_2\ ,\ y_2)=(x_1-x_2\ ,\ y_1-y_2)$

៣. $m(x\ ,\ y)=(mx\ ,\ my)$

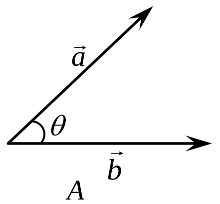
ប្រតិបត្តិ : ១. ចូរគូសវ៉ិចទ័រខាងក្រោម ដោយយកគល់ជាចំណុចចាប់ផ្ដើម :

ក. $\vec{a}=\left(-\frac{5}{2}\ ,\ -3\right)$ ខ. $\vec{b}=(4\ ,\ 0)$ គ. $\vec{c}=2\vec{i}-3\vec{j}$ ឃ. $\vec{d}=5\vec{j}$ ។

២. រកកូអរដោនេ និងប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ បើ $\vec{a}=(2\ ,\ -3)$, $\vec{b}=(-12\ ,\ 2)$ និង $\vec{c}=(5\ ,\ 0)$ ។

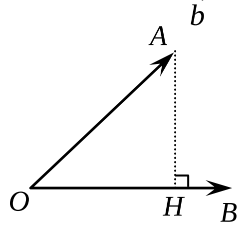
ក. $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ខ. $\vec{v}=-3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$ គ. $\vec{w}=3(\vec{a}+\vec{b})-2(\vec{b}-\vec{c})$ ។

17.**ការគណនាផលគុណស្កាលែ**



១. បើ θ ជាមុំដែលកើតឡើងដោយពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

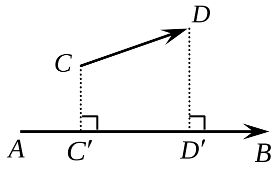
នោះគេបានផលគុណស្កាលែ : $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$



២. បើ H ជាចំណោលកែងនៃ A លើ OB

នោះផលគុណស្កាលែនៃ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OB}$:

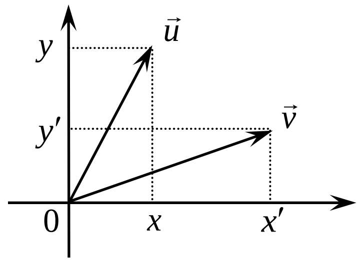
$\boxed{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OH\cdot OB}$ ។



៣. បើ C' និង D' ជាចំណោលកែងនៃ C និង D

លើ OB រៀងគ្នានោះផលគុណស្កាលែនៃ

$\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{CD}$: $\boxed{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OH\cdot OB}$ ។



៤. បើ $\vec{u}=(x\ ,\ y)$ និង $\vec{v}=(x'\ ,\ y')$

នោះគេបានផលគុណស្កាលែគឺ :

$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'}$ ។

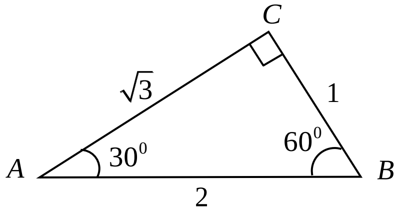
-ទាញពីផលគុណស្កាលែ បានរូបមន្តដើម្បីរកមុំ θ ដែលផ្គុំដោយពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x\ ,\ y)$ និង $\vec{v}=(x'\ ,\ y')$

កំណត់ដូចខាងក្រោម : $\boxed{\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}}$ ។

-ករណីពិសេស ទាញពីផលគុណស្កាលែ គេបានវ៉ិចទ័រកែងគ្នាគឺ :

- បើ $\vec{a}\perp\vec{b}$ លុះត្រាតែ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ។
- បើ $\vec{a}\perp\vec{b}$ លុះត្រាតែ $xx'+yy'=0$ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល C ។



គណនាផលគុណស្កាលែខាងក្រោម :

ក. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ខ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

គ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ ឃ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$

២. ត្រីកោណកែងសមបាត ABC មួយមាន $\angle A$ ជាមុំកែង ។ តាង a ជាប្រវែងនៃជ្រុង AB រួចយើងគូសបន្ទាត់កែង AM ពីកំពូល A ទៅជ្រុង BC ។ គណនាផលគុណស្កាលែខាងក្រោម :

ក. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$ ខ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$ គ. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BA}$ ។

៣. គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$:

ក. $\vec{a}=(-2\ ,\ 3)$, $\vec{b}=(5\ ,\ 4)$ ខ. $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{b}=-4\vec{i}+\vec{j}$

៤. បង្ហាញថា $\vec{a}\perp\vec{b}$ ដែល $\vec{a}=(3\ ,\ -4)$ និង $\vec{b}=(8\ ,\ 6)$ ។

៥. រកមុំ θ ដែលកើតឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$:

ក. $\vec{a}=(-3,0)$, $\vec{b}=(-1,\sqrt{3})$ ខ. $\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(3,-6)$ ។

18.លក្ខណៈនៃផលគុណស្កាលែ

ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{a},\vec{b}$ និង $\vec{c}$ គេបាន :

១. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

២. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

៣. $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$

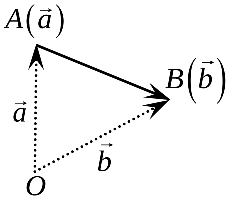
៤. $\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$

ប្រតិបត្តិ : ១. រកតម្លៃនៃ $|\vec{a}+2\vec{b}|$ បើ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ ។

២. រកតម្លៃនៃ $|2\vec{a}-3\vec{b}|$ បើ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ ។

19.វ៉ិចទ័រទីតាំង

វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ស្មើនឹងផលដករវាងវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុចចុង B និងវ៉ិចទ័រ ទីតាំងនៃចំណុចគល់ A គេកំណត់សរសេរ $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ ។



ប្រតិបត្តិ : គេមាន $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ និង $D(\vec{d})$ ជាកំពូលនៃចតុកោណមួយ ។ កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាងវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ និង $\vec{d}$ នៃកំពូលទាំងបួន ដើម្បីឲ្យ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

20. រូបមន្តនៃចែកក្នុង និងចែកក្រៅនៃវ៉ិចទ័រទីតាំង

-ចំណុច $C(\vec{c})$ ចែក $[AB]$ ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ ហើយ $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំង

នោះគេបាន $\boxed{\vec{c}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}}$ ។

-ចំណុច $D(\vec{d})$ ចែក $[AB]$ ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m:n$ ហើយ $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំង

នោះគេបាន $\boxed{\vec{d}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}}$ ។

-ករណីពិសេសវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុចកណ្តាលរបស់ $[AB]$ គឺ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ : តាង $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃពីរចំណុច A និង B ។ បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុចខាងក្រោមជាអនុគមន៍នៃ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$:

ក. ចំណុចចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $3:2$ ។

ខ. ចំណុចចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $1:2$ ។

គ. ចំណុចស៊ីមេទ្រីទៅនឹង A ធៀបទៅនឹង B ។

21. **កូអរដោនេ នៃវ៉ិចទ័រទីតាំង**

កូអរដោនេ (x , y) នៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងដែលភ្ជាប់ចំណុច $A(x_1 , y_1)$ និង $B(x_2 , y_2)$

តាមផលធៀប $m:n$ កំណត់ដោយ : $\boxed{x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n} \ , \ y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}}$ ។

22. **សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ក្នុងប្លង់**

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $p_0(x_0 , y_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a , b)$

មានពីរបែបគឺ : (ចំពោះ $t\in\mathbb{R}$)

- $\vec{p}=\vec{p}_0+t\vec{u}$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ L ។
- $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រទម្រង់កូអរដោនេនៃបន្ទាត់ L ។

សម្គាល់ : បើ $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ L នោះបើ $k\neq 0$ គេបាន $k\vec{u}$ ក៏ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ L ដែរ ។

ប្រតិបត្តិ : សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ :

ក. បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(2 , 3)$ និងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1 , 2)$ ។

ខ. បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $(4 , 0)$ និងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(-3 , 2)$ ។

23. **សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$**

បន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ ហើយ $P(\vec{p})$ ជាចំណុចណាមួយនៃបន្ទាត់ L

នោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ L មានរាងទូទៅ $\boxed{\vec{p}=\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})t}$ ។

ប្រតិបត្តិ : កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រទម្រង់វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ AB ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម :

ក. $A(4 , -3)$, $B(-2 , 5)$ ខ. $A\left(-\dfrac{3}{2} , -4\right)$, $B(2 , -4)$ ។

24. **ទ្រឹស្តីបទ**

លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឱ្យចំណុច $C(\vec{c})\in AB$ ដែល $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ គឺមានចំនួនពិត m និង n

ដែល $m+n=1$ ហើយ $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ ។

25. **បន្ទាត់ និងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់**

សមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $P_0(x_0 , y_0)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(a , b)$ គឺ :

$\boxed{\begin{cases} \vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0 \\ a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \end{cases}}$ ។ វ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(a , b)$ ហៅថាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់នេះ ។

ប្រតិបត្តិ : ១. រកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់ $3x-4y+5=0$ ។

២. រកសមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $(5 , -4)$ ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(2 , 3)$ ។

26. **ចម្ងាយរវាងចំណុច និងបន្ទាត់**

ចម្ងាយពីចំណុច $P(x_1\ ,\ y_1)$ ទៅបន្ទាត់ $L: ax+by+c=0$ កំណត់ដោយ $\boxed{d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ ។

ប្រតិបត្តិ : រកចម្ងាយរវាងចំណុច $P(2\ ,-5)$ និងបន្ទាត់ $4x-3y+7=0$ ។

27. **រង្វង់ និងវ៉ិចទ័រ**

រង្វង់ផ្ចិត $C(x_0\ ,y_0)$ និងកាំ r មានសមីការ : $\boxed{\begin{cases}|\vec{p}-\vec{c}|=r\\(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\end{cases}}$ ។

ប្រតិបត្តិ : រកសមីការរង្វង់ផ្ចិត $O(0\ ,0)$ និងកាំ $r=5$ ។

28. **កូអរដោនេនៃចំណុចកណ្តាលអង្កត់**

បើគេមានពីរចំណុច $A(x_1\ ,\ y_1)$ និង $B(x_2\ ,\ y_2)$ និងចំណុច I កណ្តាលអង្កត់ AB គេបាន :

$\boxed{I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\ ,\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)}$ ។

ប្រតិបត្តិ : គេឲ្យចំណុច $A(1\ ,2)$ និង $B(3\ ,-5)$ ។ រកកូអរដោនេ I កណ្តាលអង្កត់ AB ។

29. **វ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់ និងវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរ**

គេមានពីរវ៉ិចទ័រគឺ $\vec{u}=(x\ ,\ y)$ និង $\vec{v}=(x'\ ,\ y')$ នោះគេបាន :

-លក្ខខណ្ឌអរតូកូណាល់ (កែង) : $\boxed{\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0}$

-លក្ខខណ្ឌកូលីនេអ៊ែរ (ស្រប) : $\boxed{\vec{u}\,//\,\vec{v}\Leftrightarrow xy'-yx'=0}$ ឬ $\boxed{\vec{u}\,//\,\vec{v}\Leftrightarrow \dfrac{x}{x'}=\dfrac{y}{y'}}$ ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. គណនាផលបូកនៃវ៉ិចទ័រខាងក្រោម :

ក. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ខ. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}$ គ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$

ឃ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ ង. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{NA}$ ច. $\vec{u}+7(\vec{u}-2\vec{v})-4(2\vec{u}+3\vec{v})$

2. គេមានចំណុច $A(-2\ ,1)$ និង $B(3\ ,4)$ ។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃ $\overrightarrow{AB}$ ។ ខ. គណនាប្រវែង $|\overrightarrow{AB}|$ ។

3. ចូរសង់ចំណុច $A\ ,B\ ,C$ និង D បើដឹងថា $\overrightarrow{OA}=-\vec{i}-2\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=(2\ ,3)$, $\overrightarrow{OC}=(5\ ,-1)$ និង $\overrightarrow{OD}=2\vec{i}-\dfrac{1}{2}\vec{j}$

4. គេឱ្យចំណុច $A(-2\ ,-6)\ ,B(3\ ,1)$ និង $C(3\ ,4)$ ។ សរសេរ $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{BC}\ ,\overrightarrow{CA}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកត្តា $\vec{i}$ និង $\vec{j}$ រួចគណនាប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CA}$ ។

5. គេឱ្យ $\vec{a}=(2\ ,-3)$, $\vec{b}=(-12\ ,2)$ និង $\vec{c}=(5\ ,0)$ ។

១. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ : ក. $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ខ. $\vec{v}=-3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$ គ. $\vec{w}=3(\vec{a}+\vec{b})-2(\vec{b}-\vec{c})$

២. រកប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}\ ,\vec{b}\ ,\vec{c}\ ,\vec{u}\ ,\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ។

6. រកកូអរដោនេនៃចំណុច P និង Q ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោមដែលគេឱ្យពីរចំណុច $A(-3\,,4)$ និង $B(2\,,-1)$ និង O ជាគល់ : ក. $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{AB}$ ខ. $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ។

7. រកចំនួនពិត k និង ℓ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\vec{c}=k\vec{a}+\ell\vec{b}$ បើ $\vec{a}=(-2\,,3)\,,\vec{b}=(1\,,-4)$ និង $\vec{c}=(8\,,-17)$ ។

8. គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ឬក៏ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ តាមករណីនីមួយដូចខាងក្រោម :

ក. $|\vec{a}|=3\,,|\vec{b}|=2$ និង $\theta=30°$ ខ. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$ និង $\theta=60°$ គ. $|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=\sqrt{2}$ និង $\theta=45°$

ឃ. $|\vec{a}|=2\,,|\vec{b}|=6$ និង $\theta=0°$ ង. $|\vec{a}|=2\,,|\vec{b}|=3$ និង $\theta=\frac{\pi}{4}$ ច. $|\vec{a}|=\sqrt{3}\,,|\vec{b}|=4$ និង $\theta=\frac{\pi}{3}$ ស

9. គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$:

ក. $\vec{a}=(-2\,,3)$, $\vec{b}=(5\,,4)$ ខ. $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{b}=-4\vec{i}+\vec{j}$ គ. $\vec{a}=(0\,,3)$, $\vec{b}=(2\,,-2)$

ឃ. $\vec{a}=\vec{i}$ និង $\vec{b}=\vec{j}$ ង. $\vec{a}=-8\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}+12\vec{j}$ ច. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ និង $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$

10. បង្ហាញថា $\vec{a}\perp\vec{b}$ ដែល $\vec{a}=(3\,,-4)$ និង $\vec{b}=(8\,,6)$ ។

11. ក. បង្ហាញថា $\vec{u}=(2\,,-3)$ និង $\vec{v}=(-6\,,-4)$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់គ្នា ។

ខ. បង្ហាញថា $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ ។

12. រកមុំ θ ដែលផ្គុំដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ តាមករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម :

ក. $\vec{a}=(-3\,,0)$, $\vec{b}=\left(-1\,,\sqrt{3}\right)$ ខ. $\vec{a}=(2\,,1)$, $\vec{b}=(3,-6)$ គ. $\vec{a}=(0\,,2)$, $\vec{b}=(-2,2)$

ឃ. $\vec{a}=\left(-\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{b}=\left(\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ង. $\vec{a}=\vec{b}$ ច. $\vec{a}=\frac{\vec{i}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$, $b=\vec{i}$

13. គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(2\,,1)$ និង $\vec{b}=(-1\,,2)$ ។ រកតម្លៃនៃចំនួនពិត x ដែលនាំឱ្យវ៉ិចទ័រ $4x\vec{a}+\vec{b}$ និង $x\vec{a}-3\vec{b}$ កែងគ្នា ។

14. គេឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(3\,,-2)$ និង $\vec{v}=(-6\,,7)$ ។ ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}+\vec{v}$, $4\vec{u}$, $2\vec{u}+3\vec{v}$ ។

15. គេឱ្យពីចំណុច $A(-1\,,2)$ និង $B(3\,,0)$ ។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BA}$ ។

ខ. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ AB ។

16. ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ គេឱ្យបីវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(2\,,-3)\,,\vec{v}=(3\,,4)$ និង $\vec{w}=(-1\,,5)$ ។

ចូរកំណត់វ៉ិចទ័រ $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ និង $\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{w}$ ។

17. គណនាកូអរដោនេចំណុចកណ្តាលនៃពីរៗចំណុចដូចខាងក្រោម :

ក. $A(3\,,0)$ និង $B(5\,,0)$ ខ. $A\left(\frac{1}{2}\,,\frac{3}{4}\right)$ និង $B\left(\frac{1}{3}\,,-5\right)$ គ. $M\left(0\,,-\frac{1}{2}\right)$ និង $N(0\,,2)$

ឃ. $P(0\,,1)$ និង $B(2\,,3)$ ង. $C(-1\,,5)$ និង $D(7\,,3)$ ច. $E(4\,,-4)$ និង $F(-1\,,0)$

18. គេឱ្យ $A(-1\,,2)$ និង $B(-3\,,-5)$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច C ដែល A ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ ។

19. កំណត់តម្លៃនៃ x ដើម្បីឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ អរតូកូណាល់នឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ក្នុងករណីដូចខាងក្រោម :

ក. $\vec{u}=(4\,,-3)$ និង $\vec{v}=(5\,,-x)$ ខ. $\vec{u}=(x^2\,,6)$ និង $\vec{v}=(5\,,-3)$ គ. $\vec{u}=(4,x)$ និង $\vec{v}=(-6,\sqrt{2})$

ឃ. $\vec{u}=(3\,,x\sqrt{5})$ និង $\vec{v}=(-10,4)$ ង. $\vec{u}=(0\,,4)$ និង $\vec{v}=(2\,,-x)$ ច. $\vec{u}=(1\,,1)$ និង $\vec{v}=(2\,,2x)$

20. គេមានបីចំណុច $A(-2\,,3)$, $B(4\,,6)$ និង $C(8\,,8)$ ។

ក. រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AB) និងបន្ទាត់ (BC) ។

ខ. តើចំណុច A , B និង C កូលីនេអ៊ែរនឹងគ្នាឬទេ ?

21. គេមានចំណុច $A(2\,,7)$ និង $B(12\,,k)$ ហើយបន្ទាត់ (AB) មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $\frac{5}{2}$ ។ គណនាតម្លៃ k ។

22. រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $(5\,,6)$ និងចំណុច : ក. $(2\,,1)$ ខ. $(-2\,,-1)$ ។

23. ក. រកសមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $(5\,,-4)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(2\,,3)$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ D កាត់តាមចំណុច $A(2\,,7)$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{r}=(2\,,3)$ ។

24. ក. រកចម្ងាយរវាងចំណុច $P(2\,,-5)$ និងបន្ទាត់ $4x-3y+7=0$ ។

ខ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច $A(0\,,-3)$ ទៅបន្ទាត់ $D: x+y=1$ ។

គ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច $C(-2\,,4)$ ទៅបន្ទាត់ $L: x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ - 8 = 0$ ។

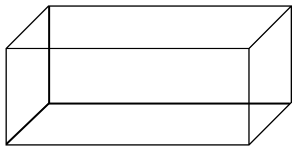
25. រកវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃបន្ទាត់ $\sqrt{3}x+y-1=0$ និង $x+\sqrt{3}y+2=0$ ហើយរកមុំដែលកើតឡើងដោយបន្ទាត់ពីរនេះ ។

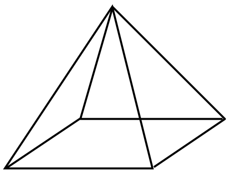
មេរៀនទី ១៨ ធរណីមាត្រក្នុងលំហ

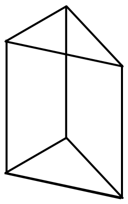
I. ការគូសរូបក្នុងលំហនៅលើប្លង់

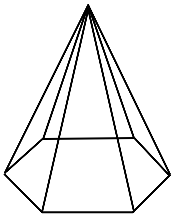
- ដើម្បីគូសរូបក្នុងលំហ គេត្រូវស្គាល់ច្បាស់អំពីទ្រង់ទ្រាយដើម
- បន្ទាត់ស្របគ្នាក្នុងលំហ តាងដោយបន្ទាត់ស្របគ្នាក្នុងប្លង់
- អង្កត់ពីរដែលមានប្រវែងស្មើគ្នានៅក្នុងលំហអាចមិនចាំបាច់ តាងដោយអង្កត់ពីរដែលមានប្រវែងស្មើគ្នានៅក្នុងប្លង់ទេ ។
- ចំពោះទ្រនុងដែលគេមើលឃើញ ត្រូវគូសដោយគំនូសជាប់ ចំពោះទ្រនុងដែលបាំងត្រូវគូសដោយគំនូសដាច់ ។

ប្រតិបត្តិ : គូសរូបខាងក្រោមឡើងវិញ ដោយដាក់អង្កត់ដាច់ៗឱ្យបានត្រឹមត្រូវ :


(រូប ក)


(រូប ខ)


(រូប គ)


(រូប ឃ)

II. លក្ខណៈគ្រឹះ

ក. ស្វ័យសត្យបន្ទាត់

តាមពីរចំណុចផ្សេងគ្នា គេអាចគូសបន្ទាត់ត្រង់បានតែមួយគត់ ។

ខ. ស្វ័យសត្យប្លង់

តាមបីចំណុចមិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ គេអាចកំណត់បានប្លង់តែមួយគត់ដែលមានចំណុចទាំងនោះ ។

គ. ការកំណត់ប្លង់

តាមស្វ័យសត្យប្លង់ គេអាចកំណត់ប្លង់បានដូចខាងក្រោម :

- ✓ ចំណុចបីដែលមិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយកំណត់បានប្លង់តែមួយគត់ ។
- ✓ បន្ទាត់មួយ និងចំណុចមួយមិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ កំណត់បានប្លង់តែមួយគត់ ។
- ✓ បន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នា កំណត់បានប្លង់តែមួយ ។
- ✓ បន្ទាត់ពីរស្របគ្នា កំណត់បានប្លង់តែមួយ ។

ប្រតិបត្តិ : គេឲ្យការេ $ABCD$ និងចំណុច O មួយស្ថិតនៅខាងក្រៅប្លង់នៃការេនេះ ។ តើតាមចំណុច O គេអាចគូសបានប្លង់ប៉ុន្មានជាមួយនឹងជ្រុងនៃការេនោះ ?

ឃ. ប្រសព្វរវាងប្លង់ និងប្លង់

បើប្លង់ទាំងពីរមានចំណុចរួមមួយ វាប្រសព្វគ្នាតាមបន្ទាត់មួយ ដែលកាត់តាមចំណុចរួមនោះ ។

ប្រតិបត្តិ : នៅក្នុងប្លង់ P មានការេ $ABCD$ មួយ ។ ចំណុច O មួយនៅក្រៅប្លង់ P ។

ក. កំណត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ OAC និង OBD ។

ខ. A' កណ្តាលនៃ OA ចូរកំណត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ $A'BC$ និង OAD , $A'BC$ និង ODC ។

III. បន្ទាត់ស្របគ្នា

- បន្ទាត់ពីរស្របគ្នា គឺជាបន្ទាត់ពីរនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ហើយវាគ្មានចំណុចរួម ។

$d_1 \parallel d_2$ កាលណា $\begin{cases} d_1 \subset P \ , \ d_2 \subset P \\ d_1 \cap d_2 = \varnothing \end{cases}$ ។

- តាមចំណុចមួយដែលនៅក្រៅបន្ទាត់មួយ គេអាចគូសបានបន្ទាត់តែមួយគត់ដែលស្របទៅនឹងបន្ទាត់នោះ ។
- បើបន្ទាត់ពីរផ្សេងគ្នាស្របទៅនឹងបន្ទាត់ទីបីតែមួយ នោះបន្ទាត់ទាំងពីរនេះស្របគ្នា ។
- បើបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា គ្រប់ប្លង់ដែលកាត់បន្ទាត់ទីមួយ ត្រូវកាត់បន្ទាត់ទីពីរ ។

IV. បន្ទាត់ស្របនឹងប្លង់

- បន្ទាត់ស្របនឹងប្លង់កាលណាវាគ្មានចំណុចរួម ។
- បើបន្ទាត់មួយស្របនឹងប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នា នោះបន្ទាត់នេះស្របទៅនឹងបន្ទាត់ប្រសព្វនៃប្លង់ទាំងពីរនេះ ។

V. ប្លង់ស្របគ្នា

- ប្លង់ពីរស្របគ្នា កាលណាវាគ្មានចំណុចរួម ។
- តាមចំណុចមួយនៅក្រៅប្លង់មួយ គេអាចគូសបានប្លង់តែមួយគត់ដែលស្របទៅនឹងប្លង់នោះ ។
- ប្លង់ពីរស្របគ្នា គ្រប់ប្លង់ដែលស្របនឹងប្លង់មួយ ត្រូវស្របនឹងប្លង់មួយទៀត ។
- ប្លង់ពីរស្របគ្នា គ្រប់ប្លង់ដែលប្រសព្វនឹងប្លង់មួយ ត្រូវប្រសព្វនឹងប្លង់មួយទៀត ហើយបន្ទាត់ប្រសព្វពីរនោះជាបន្ទាត់ស្របគ្នា ។
- បើប្លង់ពីរស្របគ្នា នោះគ្រប់បន្ទាត់ដែលកាត់ប្លង់ទីមួយ ត្រូវកាត់នឹងប្លង់ទីពីរ ។
- ប្លង់ច្រើនស្របគ្នា កំណត់នៅលើខ្នាត់ពីរបានអង្កត់ត្រូវគ្នាសមាមាត្រគ្នា ។

VI. រូបមន្តបរិមាត្រ ផ្ទៃក្រឡា និងមាឌនៃសូលីតខ្លះ

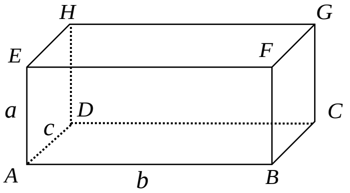
✍ ប្រលេពីប៉ែតកែង

-ជារូបធរណីមាត្រក្នុងលំហមានទ្រនុងមិនប៉ុនៗគ្នាប៉ុន្តែកែងគ្នា ។

-ក្រឡាផ្ទៃ: $S = 2(ab + ac + bc)$

-មាឌ: $V = a \times b \times c$

-អង្កត់ទ្រូង: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



✍ ស៊ីឡាំង

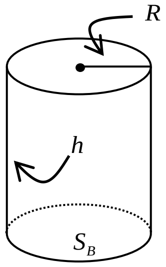
-ជារូបធរណីមាត្រក្នុងលំហមានបាតពីរជាថាសពីរប៉ុនគ្នា។

-ក្រឡាផ្ទៃខាង: $S_L = 2\pi Rh$

-ក្រឡាផ្ទៃបាតមួយ: $S_B = \pi R^2$

-ក្រឡាផ្ទៃសរុប: $S_T = S_L + S_B$

-មាឌ: $V = S_B h = \pi R^2 h$



✍ កោណ

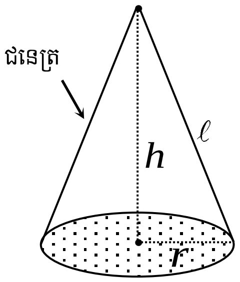
-ជាសូលីតដែលមានបាតជារង្វង់ និងមានកំពូលជាចំណុច។

-ក្រឡាផ្ទៃខាង: $S_L = \pi r \ell$

-ក្រឡាផ្ទៃបាត: $S_B = \pi r^2$

-ក្រឡាផ្ទៃសរុប: $S_T = \pi r(\ell + r)$

-មាឌ: $V = \frac{1}{3} S_B h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



✍ ពីរ៉ាមីត

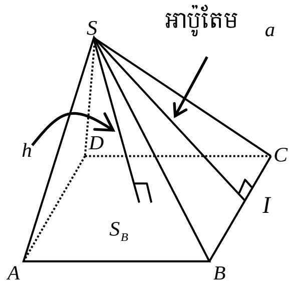
-ជាសូលីតដែលមានបាតជាពហុកោណ និងមានកំពូលជាចំណុច។

-ក្រឡាផ្ទៃខាង(ពីរ៉ាមីតនិយ័ត) $S_L = \frac{1}{2} \times p \times a$

-ក្រឡាផ្ទៃបាត: (កំណត់តាមផ្ទៃពហុកោណជាបាត)

-ក្រឡាផ្ទៃសរុប: $S_T = S_L + S_B$

-មាឌ: $V = \frac{1}{3} S_B h$



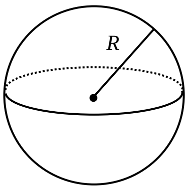
✍ ស្វ៊ែ

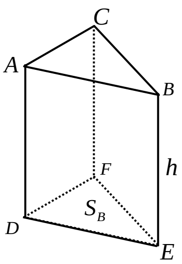
-ជាសំណុំចំណុចក្នុងលំហស្ថិតនៅស្មើចម្ងាយពីចំណុចនឹងមួយ (ហៅថាផ្ចិត)។

-អង្កត់ផ្ចិត: $d = 2R$

-ក្រឡាផ្ទៃ: $S = 4\pi R^2$

-មាឌ: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$





✍ មាឌព្រីស

-មាឌ: $V = S_B h$

VII. **បន្ទាត់អរតូកូណាល់**

បន្ទាត់ពីរនៅក្នុងលំហ **អរតូកូណាល់** គ្នាកាលណាមុំរវាងបន្ទាត់ទាំងពីរជាមុំ **កែង** ។

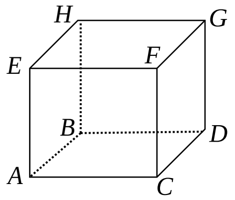
VIII. **ប្លង់មេដ្យាទ័រ**

ប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់មួយ គឺជាប្លង់ដែលកែងនឹងអង្កត់នោះត្រង់ចំណុចកណ្តាល ។

លំហាត់អនុវត្ត

1. គេមានគូបមួយ ដូចរូបខាងក្រោម ។ កំណត់មុំ ដែលបង្កើតឡើងដោយគូអង្កត់ខាងក្រោម ៖

ក. FE និង FG

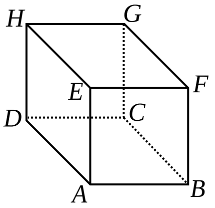


ខ. DB និង DC

គ. BC និង HG

ឃ. BA និង CF

2. គេមានប្រលេពីប៉ែតកែង $ABCDEFGH$ មួយ ដូចរូប ។

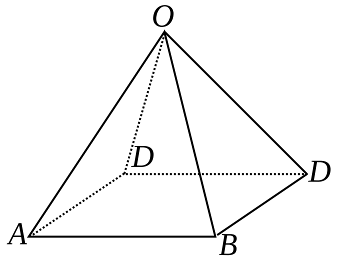


ក. កំណត់ប្លង់ដែលស្របទៅនឹងប្លង់ $ABCD$ ។

ខ. កំណត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ $ABCD$ និងប្លង់ $ACGE$ ។

គ. កំណត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ $ABCD$ និងប្លង់ $BCHE$ ។

3. មើលរូបខាងស្តាំ រួចសរសេរចម្លើយត្រូវ ឬខុសនៅក្នុងប្រអប់ ៖



ក. ប្លង់ OAB និងប្លង់ ABC កាត់គ្នា ☐

ខ. បន្ទាត់ OA និង AB កែងគ្នា ☐

គ. បន្ទាត់ OD និង BC ប្រសព្វគ្នា ☐

ឃ. បួនចំណុច O , A , B និង C ឋិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ☐

ង. ប្លង់ OAB និងប្លង់ OBC មានចំណុចរួមមួយ ☐

4. ប្រសិនបើផ្ទៃសរុបនៃគូបមួយស្មើនឹង $150\ m^2$ ។ ចូររកប្រវែងទ្រនុង និងមាឌនៃគូបនេះ ។

5. គេយកបន្ទះស័ង្កសីរាងជាចតុកោណកែង មានបណ្តោយ $12\ cm$ និងទទឹង $8\ cm$ ។ គេពត់ស័ង្កសីនេះធ្វើជាស៊ីឡាំងបរិវត្ត ។ ចូររកមាឌនៃស៊ីឡាំងនេះ ។