ទ្រឹស្តីពហុធា

Polynomials

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

មេរៀនសង្ខេប លំហាត់គំរូ លំហាត់អនុវត្តន៍

រៀបរៀងដោយ

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន   និង   សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី
លោក លឹម ឆុន
លោក អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោក អ៊ឹង សំណាង និង លឹម ផល្គុន

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !
សៀវភៅ **ទ្រឹស្តីពហុធា** ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងសម្រាប់ទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំណងចង់យល់ដឹងអំពីមេរៀននេះ ។
នៅក្នុងជំពូកទី១នៃសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំបានសង្ខេបនូវនិយមន័យ និង ទ្រឹស្តីបទសំខាន់ៗ ព្រមទាំងមានឧទាហរណ៍គំរូអមជាមួយផង ។ ហើយក្នុងជំពូកទី២យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសលំហាត់ល្អៗ មកធ្វើដំណោះស្រាយជាគំរូ ដែលអាចឲ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់ និង ឆាប់ចងចាំ ។ ចំពោះជំពូកទី៣ ជាលំហាត់អនុវត្តន៍ និងជំពូកទី៤ ជំពូកទី៥ ជាកម្រងវិញ្ញាសារប្រឡងតាមបណ្តាខេត្ត-ក្រុង ថ្នាក់រាជធានី ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវគំនិតនិងវិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការសិក្សាស្វែងយល់អំពីទ្រឹស្តីពហុធាជាពុំខានឡើយ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ៦ កក្កដា ឆ្នាំ២០១៣

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លឹម ផល្គុន

Tel : 017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី១

ទ្រឹស្តី និង និយមន័យសំខាន់ៗក្នុងពហុធា

១-និយមន័យ

អនុគមន៍មួយដែលមានទម្រង់

$\mathbf{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n}$

ហៅថាពហុធាដឺក្រេទី $\mathbf{n}$ នៃមួយអថេរ $\mathbf{x}$ ។

ដែលចំនួន $\mathbf{a_0, a_1, a_2, ..., a_n}$ ជាមេគុណនៃពហុធា និង $\mathbf{a_n \neq 0}$ ។

$\mathbf{a_k}$ ជាមេគុណមុខតួ $\mathbf{x^k}$ នៃពហុធា $(\mathbf{0 \leq k \leq n})$ ។

ឧទាហរណ៍ $\mathbf{P(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួន ។

២-ពហុធាពីរស្មើគ្នា

និយមន័យ ៖

ពហុធាពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែលេខមេគុណត្រូវគ្នាស្មើគ្នា

ឧបមាថា $\mathbf{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n}$ ដែល $\mathbf{a_n \neq 0}$

និង $\mathbf{Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n}$ ដែល $\mathbf{b_n \neq 0}$ ។

គេបាន $P(x)=Q(x)\Leftrightarrow a_k=b_k$ ដែល $k=0,1,2,....,n$ ។

ឧទាហរណ៍១ គេមានពហុធាពីរ

$P(x)=x^4+(2a-1)x^3+bx^2+(3c+1)x+d-1$

$Q(x)=x^4+bx^3+(a-5)x^2+(c-d)x+c+7$

ចូរកំណត់ចំនួនពិត a,b,c និង d ដើម្បីឲ្យ $P(x)=Q(x)$ គ្រប់ x

គេបាន $P(x)=Q(x)$ សមមូល $\begin{cases}2a-1=b\\ b=a-5\\ 3c+1=c-d\\ d-1=c+7\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}2a-b=1\\ -a+b=-5\\ -2c-d=1\\ -c+d=8\end{cases}$ នាំឲ្យ

$a=-4\ ,\ b=-9\ ,\ c=-3\ ,\ d=5$

ដូចនេះ $a=-4\ ,\ b=-9\ ,\ c=-3\ ,\ d=5$ ។

ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^2+px+q$

កំណត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ

$P^2(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x+1$

គេមាន $P^2(x)=(x^2+px+q)^2$

$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$

គេទាញបាន $\begin{cases} 2p = 6 & (1) \\ p^2 + 2q = 11 & (2) \\ 2pq = 6 & (3) \\ q^2 = 1 & (4) \end{cases}$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $p = 3 \ ; q = 1$

យក $p = 3 \ ; q = 1$ ជួសក្នុង (3) និង (4) នោះសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $p = 3$ និង $q = 1$ ។

៣-វិធីបូក និង វិធីដកពហុធា

គេមានពហុធា

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k + ... + a_n x^n$$

និង $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k + ... + b_m x^m$

គេបាន

$$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_k + b_k)x^k + ...$$

និង

$$P(x) - Q(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + ... + (a_k - b_k)x^k + ...$$

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យ $P(x) = 2x^2 + x - 7$ និង

$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$

គេបាន $P(x) + Q(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 4$

និង $P(x) - Q(x) = -x^3 + 6x^2 - 4x - 10$ ។

៤-វិធីគុណនៃពហុធា

គេមានពហុធា

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k + ... + a_nx^n$

និង $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_kx^k + ... + b_mx^m$ ។

គេបាន $P(x).Q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + ... + a_nb_mx^{m+n}$

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យពហុធា $P(x) = x^2 - 2x + 2$ និង

$Q(x) = 2x^2 + 4x + 4$

$$\begin{aligned} P(x).Q(x) &= (x^2 - 2x + 2)(2x^2 + 4x + 4) \\ &= 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x^3 - 8x^2 - 8x + 4x^2 + 8x + 8 \\ &= 2x^4 + 8 \end{aligned}$$

៥-អាល់គូរីតវិធីចែក

ឧបមាថាគេមានពហុធាពីរ $A(x)$ និង $B(x)$ ដែល $B(x) \neq 0$ ។

វិធីចែករវាងពហុធា $A(x)$ និង $B(x)$ គឺរកគូពហុធា $Q(x)$ និង

$R(x)$ តែមួយគត់ដែល $A(x) = B(x).Q(x) + R(x)$ និង

$\deg(R) < \deg(B)$ ។

ពហុធា $Q(x)$ ហៅថាផលចែក និង $R(x)$ ហៅថាសំណល់ ។

តាង $\deg(A)$ និង $\deg(B)$ ជាដឺក្រេនៃពហុធា $A(x)$ និង $B(x)$

រៀងគ្នា ។

-បើ $\deg(A) < \deg(B)$ នោះ $Q(x) = 0$ និង $R(x) = B(x)$ ។

-បើ $R(x)\equiv 0$ នោះ $A(x)=B(x)Q(x)$ ក្នុងករណីនេះគេថា $B(x)$ ជាកត្តានៃ $B(x)$ ឬ $A(x)$ ជាពហុគុណនៃ $B(x)$ ឬ $B(x)$ ចែកដាច់ $A(x)$

គេកំណត់សរសេរ $B(x)|A(x)$ ។

ឧទាហរណ៍១

វិធីចែករវាងពហុធា $A(x)=x^3+x^2-1$ នឹង $B(x)=x^2-x-3$

ឲ្យផលចែក $Q(x)=x+2$ និង សំណល់ $R(x)=5x+5$ ព្រោះ

$$\frac{x^3+x^2-1}{x^2-x-3}=x+2+\frac{5x+5}{x^2-x-3}$$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យពហុធា $A(x)=x^4+4$ និង $B(x)=x^2+2x+2$

ដោយ

$$A(x)=x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

នោះគេបាន $B(x)|A(x)$ ។

៦-ទ្រឹស្តីបទសំណល់ (Remainder Theorem)

សំណល់នៃវិធីចែកនៃគ្រប់ពហុធា $P(x)$ នឹង $x-\alpha$ គឺ $P(\alpha)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

តាមអាល់កូរីតនៃវិធីចែកយើងបាន $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+r$

យក $x=\alpha$ គេបាន $P(\alpha)=0\times Q(a)+r=r$ នោះ $r=P(\alpha)$ ។

ឧទាហរណ៍១

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាងពហុធា

$\mathbf{P(x)=(x^3+3x^2-11x+4)^4}$

នឹង $\mathbf{x-2}$ ។

តាង $\mathbf{r}$ ជាសំណល់នៃវិធីចែករវាង $\mathbf{P(x)}$ នឹង $\mathbf{x-2}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទសំណល់គេបាន

$\mathbf{r=P(2)=(8+12-22+4)^4=16}$

ដូចនេះសំណល់នៃវិធីចែកគឺ $\mathbf{r=4}$ ។

ឧទាហរណ៍២ កំណត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យ

$\mathbf{P(x)=x^5+\lambda x^3+2x^2+9}$

ចែកនឹង $\mathbf{x-2}$ ឲ្យសំណល់ $\mathbf{1}$ ។

គេបាន $\mathbf{P(2)=32+8\lambda+8+9=1}$ នាំឲ្យ $\lambda=\mathbf{-6}$ ។

៧-ទ្រឹស្តីបទ BEZOUT

ពហុធា $\mathbf{P(x)}$ ចែកដាច់នឹងទ្វេធា $\mathbf{x-\alpha}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{P(\alpha)=0}$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

មានពហុធា $\mathbf{Q(x)}$ និងចំនួនថេរ $\mathbf{r}$ ដែល

$\mathbf{P(x)=(x-\alpha)Q(x)+r}$

បើ $\mathbf{x=\alpha}$ នោះ $\mathbf{P(\alpha)=r}$ ។

ដោយ $\mathbf{(x-a)|P(x)}$ នោះ $\mathbf{r=0}$ ។ ហេតុនេះ $\mathbf{P(\alpha)=0}$ ។

ឧទាហរណ៍១ កំណត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យ $P(x)=x^3+\lambda x+16$ ចែកដាច់នឹង $x+4$ ។ គេបាន $x+4\,|\,P(x)\Leftrightarrow P(-4)=0$

$-64-4\lambda+16=0$ នាំឲ្យ $\lambda=-12$ ។

ឧទាហរណ៍២ កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីឲ្យ

$P(x)=x^n-12x-16$

ចែកដាច់នឹង $x-4$ ។

គេបាន $x-4\,|\,P(x)\Leftrightarrow P(4)=0$

$4^n-48-16=0$ នាំឲ្យ $n=3$ ។

៨-ទ្រឹស្តីបទ

បើពហុធា $P(x)$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $Q(x)$ នោះគ្រប់ឫសនៃ $Q(x)$ជាឫសរបស់ $P(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និងចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យ ពហុធា$P(x)=x^n+\lambda x^3+48x-64$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $Q(x)=x^2-6x+8$ ។

គេមាន $Q(x)=x^2-6x+8=(x-2)(x-4)=0$

នោះ $x_1=2$ ឬ $x_2=4$ ។

គេបាន $Q(x)\,|\,P(x)\Leftrightarrow\begin{cases}P(2)=0\\P(4)=0\end{cases}$ ឬ

$$\begin{cases}2^n+8\lambda+32=0 & (1)\\4^n+64\lambda+128=0 & (2)\end{cases}$$

គុណសមីការ (1) នឹង 8 គេបាន $8\times2^n+64\lambda+256=0$ (3)

ដកសមីការ (2) និង (3) គេបាន $4^n-8\times2^n-128=0$

ឬ $(2^n-4)^2-144=0$ នាំឲ្យ $2^n-4=12$ គេទាញ $n=4$

តាម (1) គេបាន $2^4+8\lambda+32=0$ នាំឲ្យ $\lambda=-6$ ។

ដូចនេះ $n=4$ និង $\lambda=-6$ ។

៩-ទ្រឹស្តីបទ

បើពហុធា $P(x)$ ចែកដាច់នឹងពហុធាពីរ $R(x)$ និង $Q(x)$ ដែល $R(x)$ និង $Q(x)$ ជាពហុធាបឋមរវាងគ្នានោះ $P(x)$ចែកដាច់នឹង$P(x).Q(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ រកពហុធា $P(x)$ មានដឺក្រេទីបួនបើគេដឹងថា $(x^2-4x+8)\,|\,P(x)$ និង $(x^2+4x+8)\,|\,P(x)$ ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $x-1$ ឲ្យសំណល់ 65 ។

ដោយ $P(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទីបួន ហើយ $P(x)$ ចែកដាច់នឹងពហុធាx^2-4x+8 និង x^2+4x+8 ដែល

$GCD(x^2-4x+8,\ x^2+4x+8)=1$

នោះ $P(x)=a(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)$ ដែល $a\neq0$

ដោយ$P(x)$ ចែកនឹង $x-1$ ឲ្យសំណល់ 65 នោះ $P(1)=65$

គេបាន $a(1-4+8)(1+4+8)=65$ នាំឲ្យ $a=1$ ។

ដូចនេះ $P(x)=(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)=x^4+64$ ។

១០-ទ្រឹស្តីបទ

បើ $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាពហុធាពីរមានដឺក្រេតូចជាង ឬ ស្មើ n ហើយដោយដឹងថា $P(x_k) = Q(x_k)$, $k = 1, 2, 3, 4, ..., m$ ដែល $x_1, x_2, ..., x_m$ ជាចំនួនខុសគ្នា និង $m > n$ នោះ
$P(x) = Q(x)$ ចំពោះគ្រប់ x ។
ឧទាហរណ៍ ចូររកពហុធាដឺក្រេទីបួន $P(x)$ មួយដោយដឹងថា ៖
$P(0) = 1$, $P(-1) = P(1) = 2$, $P(2) = 17$ និង $P(3) = 82$
យើងពិនិត្យពហុធា $Q(x) = x^4 + 1$ ។
គេមាន $P(x_k) = Q(x_k)$ គ្រប់ $k = 1, 2, 3, 4, 5$
ដែល $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$ ។
តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើគេទាញបាន $P(x) = Q(x) = x^4 + 1$
ពីព្រោះ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួន គឺ $n = 4 < m = 5$ ។

១១-ទ្រឹស្តីបទ

បើ $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ ដែល $a_n \neq 0$ ជាពហុធាដឺក្រេទី $n > 0$ មាន n ឫស $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ នោះគេអាចដាក់វាជាផលគុណកត្តាបានតែមួយបែបគត់គឺ ៖

$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)....(x - \alpha_n)$ ។

ឧទាហរណ៍១

គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ។

ចូររកលេខមេគុណ a,b,c,d ដោយដឹងថា $f(k)=2k+1$ ចំពោះ $k=1,2,3$ និង $f(4)=33$ ។

តាងពហុធា $P(x)=f(x)-(2x+1)$

ចំពោះ $k=1,2,3$ គេបាន $P(k)=f(k)-(2k+1)=0$

(ព្រោះតាមសម្មតិកម្ម $f(k)=2k+1$ ចំពោះតម្លៃ $k=1,2,3$)

គេទាញបាន $x=1\ ,\ 2\ ,\ 3$ ជាឫសនៃពហុធា $P(x)$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1 នោះគេទាញ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1 ដែរហេតុនេះពហុធា $P(x)$ អាចសរសេរ ៖

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)$ ដែល α ជាឫសមួយទៀតនៃ $P(x)$ គេបាន

$$f(x)=P(x)+2x+1=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)+2x+1$$

ចំពោះ $x=4$ គេបាន $f(4)=6(4-\alpha)+9=33$ នោះ $\alpha=0$

គេបាន $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)+2x+1$

ឬ $\quad f(x)=x^4-6x^3+11x^2-4x+1$

ដូចនេះ $a=-6\ ,\ b=11\ ,\ c=-4\ ,\ d=1$ ។

ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

គេដឹងថា $f(k)=k^2$ គ្រប់ $k=1,3,5$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $f(-4)+f(10)$ និង $f(-9)+f(15)$?

តាងពហុធា $P(x)=f(x)-x^2$

ចំពោះ $k=1,3,5$ គេបាន $P(k)=f(k)-k^2=0$

(ព្រោះតាមសម្មតិកម្ម $f(k)=k^2$ ចំពោះតម្លៃ $k=1,3,5$)

គេទាញបាន $x=1\ ,\ 3\ ,\ 5$ ជាឬសនៃពហុធា $P(x)$ ។

ដោយ $f(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួx^4ស្មើ 1

នោះគេទាញ$P(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួx^4

ស្មើ 1ដែរហេតុនេះពហុធា $P(x)$ អាចសរសេរ ៖

$P(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-\alpha)$ ដែលαជាឬសមួយទៀត

នៃ $P(x)$ គេបាន ៖

$f(x)=P(x)+x^2=(x-1)(x-3)(x-5)(x-\alpha)+x^2$

ចំពោះ $x=-4$ គេបាន $f(-4)=315(4+\alpha)+16$

ចំពោះ $x=10$ គេបាន $f(10)=315(10-\alpha)+100$ នោះ

$f(-4)+f(10)=315(4+\alpha)+16+315(10-\alpha)+100=4526$

ចំពោះ $x=-9$ គេបាន $f(-9)=1680(9+\alpha)+81$

ចំពោះ $x=15$ គេបាន $f(15)=1680(15-\alpha)+225$

$f(-6)+f(15)=1680(9+\alpha)+81+1680(15-\alpha)+225=40626$

ដូចនេះ $f(-4)+f(10)=4526$ និង $f(-6)+f(15)=40626$ ។

១២-ទ្រឹស្តីបទវ្យែត

បើ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$ ជាពហុធា

ដឺក្រេទី $n>0$ មាន n ឫស $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,....,\alpha_n$ នោះគេបាន ៖

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\ ,\ \sum_{1\le i<j\le n}\alpha_i\alpha_j=\frac{a_{n-2}}{a_n},....,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3.....\alpha_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

ឧទាហរណ៍១ បើ α និង β ជាឫសនៃ

$P(x)=ax^2+bx+c\ ,\ a\neq 0$

នោះគេបាន $\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\[2ex] \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

ឧទាហរណ៍២ បើ α,β និង γ ជាឫសនៃពហុធា

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ ,\ a\neq 0$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\[2ex] \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\dfrac{c}{a}\\[2ex] \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

១៣-អាំងទែប៉ូឡាស្យុងឡាក្រង់

គេឲ្យ n ចំណុច $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),.....,(x_n,y_n)$ នោះមាន

ពហុធា $P(x)$ តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$P(x_i)=y_i\ ,\ i=1,2,3,...,n$ ហើយរូបមន្តអ៊ិចព្លីស៊ិតរបស់វាគឺ

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i\prod_{1\le j\le n\ ,\ j\ne i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right]$$ ។

ឧទាហរណ៍ រកពហុធា $P(x)$ តែមួយគត់ដែលកាត់តាមបីចំណុច

$M_1(1,3)\ ,\ M_2(2\ ,\ 4)$ និង $M_3(4,12)$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន ៖

$$P(x)=\sum_{i=1}^{3}\left[y_i\prod_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right]$$

$$=y_1.\frac{x-x_2}{x_1-x_2}.\frac{x-x_3}{x_1-x_3}+y_2.\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.\frac{x-x_3}{x_2-x_3}+y_3.\frac{x-x_1}{x_3-x_1}.\frac{x-x_2}{x_3-x_2}$$

$$=3.\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)}+4.\frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)}+12.\frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$$

$$=(x^2-6x+8)-2(x^2-5x+4)+2(x^2-3x+2)$$

$$=x^2-2x+4$$

១៤-ការអនុវត្តន៍នៃការគណនា

ឧបមាថាគេមានពហុធាដឺក្រេទី **n** ៖

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$$ ដែល $a_n\neq 0$

ក/ដេរីវេនៃពហុធា ៖

ដេរីវេនៃពហុធានេះកំណត់ដោយ ៖

$$P'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+...+2a_2x+a_1$$

ខ/អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ៖

អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃពហុធានេះគឺ ៖

$$\int P(x).dx=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+...+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+C$$

គ/ករណីដែលពហុធា $P(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$

នោះគេបាន $P'(x)=P(x)\times\left(\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+...+\frac{1}{x-\alpha_n}\right)$

ឃ/ករណីដែលពហុធា

$$P(x)=a_n(x-\alpha_1)^{m1}(x-\alpha_2)^{m2}...(x-\alpha_k)^{mk}$$

ដែល $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=n$ នោះគេបាន ៖

$$P'(x)=P(x)\times\left(\frac{m_1}{x-\alpha_1}+\frac{m_2}{x-\alpha_2}+...+\frac{m_k}{x-\alpha_k}\right)$$ ។

ឃ/ឫសត្រួត ៖

បើមាន $m\in IN$ ដែល $P(x)=(x-\alpha)^mQ(x)$ និង $Q(\alpha)\neq 0$

នោះ α ជាឫសគ្រូត $\mathbf{m}$ ដងនៃ $\mathbf{P(x)}$ ។

ចំនួន α ជាឫសគ្រូត $\mathbf{m}$ ដងនៃ $\mathbf{P(x)}$ លុះត្រាតែ ៖

$$P(\alpha)=0, P'(\alpha)=0, P''(\alpha)=0, ..., P^{(m-1)}(\alpha)=0$$

និង $P^{(m)}(\alpha)\neq 0$ ។

១៥-ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថាគេមានពហុធា $\mathbf{P(x)}$ មួយ ។

បើ $(x-\alpha)^k \mid P(x)$ នោះ $(x-\alpha)^{k-1} \mid P'(x)$ ដែល $k \in IN$

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

ដោយ $(x-\alpha)^k \mid P(x)$ នាំឲ្យមានពហុធា $\mathbf{Q(x)}$ ដែល ៖

$$P(x)=(x-\alpha)^k Q(x)$$

គេបាន $P'(x)=k(x-\alpha)^{k-1}Q(x)+(x-\alpha)^k Q'(x)$

ទំនាក់ទំនងនេះគេទាញបាន $(x-\alpha)^{k-1} \mid P'(x)$ ។

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^4+2x^3+3x^2+5x-1$

តាង $\mathbf{a,b,c,d}$ ជាឫសរបស់ $\mathbf{P(x)}$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $S=\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}+\dfrac{1}{d+2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\mathbf{a,b,c,d}$ ជាឫសរបស់ $\mathbf{P(x)}$ នោះគេអាចសរសេរ ៖

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

គេបាន $\dfrac{P'(x)}{P(x)}=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}+\dfrac{1}{x-d}$

យក $x=-2$ នោះ

$$\frac{P'(-2)}{P(-2)}=-(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2})=-S$$

គេទាញ $S=-\frac{P'(-2)}{P(-2)}$ តែ $P(-2)=16-16+12-10-1=1$

$P'(x)=4x^3+6x^2+6x+5$ នោះ $P'(-2)=-15$ ។

ដូចនេះ $S=15$ ។

ឧទាហរណ៍២ ចូររកពហុធា $P(x)$ មួយមានដឺក្រេទីប្រាំដោយដឹងថា $P(x)$ចែកនឹង $(x-1)^3$ ឲ្យសំណល់ -1 ហើយ $P(x)$ចែកនឹង $(x+1)^3$ ឲ្យសំណល់ 1 ។

តាមបម្រាប់គេបាន $(x-1)^3 \mid P(x)+1$ នោះ

$(x-1)^2 \mid P'(x)$ (1)

ហើយ$(x+1)^3 \mid P(x)-1$ នោះ $(x+1)^2 \mid P'(x)$ (2)

តាម(1) និង (2) គេទាញ $(x+1)^2(x-1)^2 \mid P'(x)$

ដោយ$P(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទីប្រាំនោះ $P'(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទីបួន

ហេតុនេះ$P'(x)=a(x+1)^2(x-1)^2=a(x^4-2x^2+1)$

គេទាញ $P(x)=a\int(x^4-2x^2+1).dx=a(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x)+C$

គេមាន $P(1)=-1$ និង $P(1)=1$ នោះ $\begin{cases}\frac{8}{15}a+C=-1\\ -\frac{8}{15}a+C=1\end{cases}$

គេទាញបាន $a=-\frac{15}{8}$; $C=0$

ដូចនេះ $P(x)=-\frac{15}{8}(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x)=-\frac{3}{8}x^5+\frac{5}{4}x^3-\frac{15}{8}x$ ។

១៦-ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

ឧបមាថា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$

និង $a_k\in IR, k=0,1,2,...,n$ ។

បើមានពីរចំនួនពិត α និង β ដែល $P(\alpha)$ និង $P(\beta)$ មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នានោះយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួនពិត c នៃចន្លោះចំនួនពិត α និង β ដែល $P(c)=0$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

ដែល a,b,c,d ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $|a+c|>|1+b+d|$ ។

ចូរស្រាយថាសមីការ $P(x)$ មានឫសមួយយ៉ាងតិចជាចំនួនពិតនៅក្នុងចន្លោះ -1 និង 1 ។

គេមាន $P(-1)=1-a+b-c+d=(1+b+d)-(a+c)$

និង $P(1)=1+a+b+c+d=(1+b+d)+(a+c)$

គេបាន $P(-1).P(1)=(1+b+d)^2-(a+c)^2<0$

ដូចនេះសមីការមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ -1 និង 1 ។

១៧-ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល

ឧបមាថាគេមានពហុធា $\mathbf{P(x)}$ មួយ ។ចំពោះគ្រប់ចំនួន $\alpha \neq \beta$ ដែល $\mathbf{P(\alpha) = P(\beta) = 0}$ នោះមានចំនួន $\mathbf{c}$ នៅចន្លោះ α និង β ដែល $\mathbf{P'(c) = 0}$ ។

ឧទាហរណ៍ គេតាង $\mathbf{r}$ និង $\mathbf{R}$ ជាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុង និងចារឹកក្រៅត្រីកោណមួយ ហើយ $\mathbf{p}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{9r(4R+r) \leq 3p^2 \leq (4R+r)^2}$ ។

តាង $\mathbf{a , b ,c}$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណនោះគេមានទំនាក់ទំនង

ឆ្លុះ $\begin{cases} \mathbf{a+b+c=2p} \\ \mathbf{ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR} \\ \mathbf{abc=4pRr} \end{cases}$

នោះ $\mathbf{a , b , c}$ ជាឫសពហុធា ៖

$\mathbf{x^3-2px^2+(p^2+r^2+4rR)x-4pRr=0 \quad (1)}$

តាង $\mathbf{r_a , r_b , r_c}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ $\mathbf{A,B,C}$ នៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$

គេមាន $\mathbf{a=\dfrac{p(r_a-r)}{r_a} , b=\dfrac{p(r_b-r)}{r_b} , c=\dfrac{p(r_c-r)}{r_c}}$

យក $\mathbf{x=\dfrac{p(y-r)}{y}}$ ជួសក្នុងសមីការ $\mathbf{(1)}$ គេបាន ៖

$\mathbf{y^3-(4R+r)y^2+p^2y-p^2r=0 \quad (2)}$

មានន័យថា $\mathbf{r_a , r_b ,r_c}$ ជាឫសមីការ (2) ។

តាងពហុធា $P(x)=x^3-2px^2+(p^2+r^2+4rR)x-4pRr$

និង $Q(y)=y^3-(4R+r)y^2+p^2y-p^2r$ ។

គេបាន $P'(x)=3x^2-4px+p^2+r^2+4rR$

និង $Q'(y)=3y^2-2(4R+r)y+p^2$

តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលគេទាញបានសមីការ $P'(x)=0$ និង $Q'(y)=0$

សុទ្ធតែជាសមីការមានឫស ។

ដោយឌីសគ្រីមីណង់សមីការគឺ ៖

$\Delta'_1=p^2-3r(4R+r)$ និង $\Delta'_2=2(4R+r)^2-3p^2$

ដោយ $\Delta'_1\geq 0$ និង $\Delta'_2\geq 0$ នោះគេទាញបានវិសមភាព ៖

$9r(4R+r)\leq 3p^2\leq (4R+r)^2$ ពិត ។

១៨-ទ្រឹស្តីបទ

បើ $P(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនពិត និង មានដឺក្រេជាចំនួន

សេសនោះយ៉ាងតិចវាមានឫសមួយជាចំនួនពិត ។

១៩-ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថា $P(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនពិត ។

បើចំនួនកុំផ្លិច $x=\alpha+i\beta,\alpha,\beta\in IR$ ជាឫសនៃ $P(x)$ នោះចំនួន

កុំផ្លិចឆ្លាស់ $\bar{x}=\alpha-i\beta$ ក៏ជាឫសនៃ $P(x)$ ដែរ ។

២០-ទ្រឹស្ដីបទ

ឧបមាថា $\mathbf{P(x)}$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនសនិទាន ។
បើចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{a+b\sqrt{c}}$ ជាឬសនៃ $\mathbf{P(x)}$ នោះចំនួន$\mathbf{a-b\sqrt{c}}$ ក៏ជាឬសនៃ $\mathbf{P(x)}$ ដែរ ។
$\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនសនិទាន និង $\mathbf{\sqrt{c}}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

២១-ទ្រឹស្ដីបទ

ឧបមាថា $\mathbf{P(x)}$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ និង $\alpha \in \mathbf{Z}$
$\mathbf{P(\alpha)=0}$ នោះ $\alpha \mid \mathbf{P(0)}$ ។

២២-ឧបមាថា $\mathbf{P(x)}$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ និង $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ ដែល $\alpha \neq \beta$ នោះគេបាន $\alpha-\beta \mid \mathbf{P(\alpha)-P(\beta)}$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $\mathbf{P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n} a_kx^k}$

គេបាន $\mathbf{P(\alpha)-P(\beta)=\sum_{k=0}^{n} a_k(\alpha^k-\beta^k)}$

ដោយ $\alpha^k-\beta^k=(\alpha-\beta)(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}\beta+....+\beta^{k-1})$

នោះគេទាញបាន $(\alpha-\beta) \mid \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a_k(\alpha^k-\beta^k)}$ ។

ឧទាហរណ៍

តើមានពហុធា $P(x)$ មានមេគុណជាចំនួនគត់ដែល $P(2)=7$ និង $P(5)=15$ ឬទេ ? ដោយ $P(5)-P(2)=8$ ចែកមិនដាច់នឹង $5-2=3$ នោះគ្មានពហុធាបំពេញលក្ខខណ្ឌនេះទេ ។

២៣-សមភាពញូតុន

យក $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n$ ជាអថេរ ។ ចំពោះ $k\ge 1$ យើងតាង $p_k(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_k)$ ជាផលបូកស្វ័យគុណ k កំណត់ដោយ ៖

$$p_k(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k=\alpha_1^k+\alpha_2^k+...+\alpha_n^k$$

ហើយចំពោះគ្រប់ $k\ge 0$ តាង $e_k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ ជាធាតុឆ្លុះពហុធាដែលជាផលបូកនៃគ្រប់ផលគុណខុសៗគ្នានៃអថេរខុសគ្នាៗ ដែលកំណត់ដោយ ៖

$$e_0(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=1$$

$$e_1(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$$

$$e_2(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\sum_{1\le i<j\le n}\alpha_i\alpha_j$$

$$e_n(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\alpha_1.\alpha_2...\alpha_n$$

—————————————————

$e_k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=0$ ចំពោះ $k>n$ នោះសមភាពញូតុនគឺ៖

$$ke_k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}e_{k-i}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n).p_i(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

២៤-ស៊េរីម៉ាក់ឡូរាំងចំពោះអនុគមន៍ពហុធា

ឧបមាថាគេមានពហុធា

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

អនុគមន៍ពហុធានេះអាចសរសេរជាស៊េរីម៉ាក់ឡូរាំងដូចខាងក្រោម

$$P(x)=P(0)+\frac{x}{1!}P'(0)+\frac{x^2}{2!}P''(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}P^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.P^{(k)}(0)$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$

គេមាន

$$P'(0)=a_1\ ,\ P''(0)=2a_2\ ,P^{(3)}(0)=6a_3,\ \dots,P^{(k)}(0)=k!a_k$$

គេទាញ $a_1=\frac{P'(0)}{1!}\ ,a_2=\frac{P''(0)}{2!},\dots,\ a_k=\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

ដូចនេះ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ អាចសរសេរជា ៖

$$P(x)=P(0)+\frac{x}{1!}P'(0)+\frac{x^2}{2!}P''(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}P^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.P^{(k)}(0)$$

២៥-ស៊េរីតៃល័រចំពោះអនុគមន៍ពហុធា

ឧបមាថាគេមានពហុធា

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

អនុគមន៍ពហុធានេះអាចសរសេរជាស៊េរីតៃល័រដូចខាងក្រោម ៖

$$P(x)=P(\alpha)+\frac{x-\alpha}{1!}P'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{2!}P''(\alpha)+...+\frac{(x-\alpha)^n}{n!}P^{(n)}(\alpha)$$

ឬ $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-\alpha)^k}{k!}P^{(k)}(\alpha)$ ។

តាងពហុធា $Q(x)=P(x+\alpha)$ គេបាន

$Q(0)=P(\alpha)$, $Q'(0)=P'(\alpha), Q''(0)=P''(\alpha),....,Q^{(n)}(0)=P^{(n)}(\alpha)$

តាមស៊េរីម៉ាក់ឡូរាំងគេបាន ៖

$$Q(x)=Q(0)+\frac{x}{1!}Q'(0)+\frac{x^2}{2!}Q''(0)+...+\frac{x^n}{n!}Q^{(n)}(0)\quad (*)$$

ជំនួស x ដោយ $x-\alpha$ និង $Q(x-\alpha)=P(x)$ ក្នុង (*) គេបាន ៖

$$P(x)=P(\alpha)+\frac{x-\alpha}{1!}P'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{2!}P''(\alpha)+...+\frac{(x-\alpha)^n}{n!}P^{(n)}(\alpha)$$

ឬ $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-\alpha)^k}{k!}P^{(k)}(\alpha)$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^7-3x^6+5x+2$ ។

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង $(x-1)^3$ ។

គេមាន $P(x)=x^7-3x^6+5x+2$ នោះ $P(1)=5$

$P'(x)=7x^6-18x^5+5$ នោះ $P'(1)=-6$

$P''(x)=42x^5-90x^4$ នោះ $P''(1)=-48$

$P^{(3)}(x)=210x^4-360x^3$ នោះ

$P^{(3)}(1)=210-360=-150$

តាមស៊េរីតៃល័រគេអាចសរសេរ ៖

$$P(x)=P(1)+\frac{x-1}{1!}P'(1)+\frac{(x-1)^2}{2!}P''(1)+\frac{(x-1)^3}{3!}P^{(3)}(1)+...+\frac{(x-1)^7}{7!}P^{(7)}(1)$$

សមភាពនេះបញ្ជាក់ថា $P(x)$ ចែកនឹង $(x-1)^3$ ឲ្យអនុគមន៍

សំណល់ $R(x)=P(1)+\frac{x-1}{1!}P'(1)+\frac{(x-1)^2}{2!}P''(1)$

$$=5-6(x-1)-24(x-1)^2$$

$$=-24x^2+42x-13$$

ដូចនេះអនុគមន៍សំណល់ដែលត្រូវរកគឺ

$R(x)=-24x^2+42x-13$ ។

ĦĦĦ☆ĦĦĦ

ជំពូកទី២

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

(Problems with Solutions)

លំហាត់ទី១

កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ និងចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យពហុធា

$\mathbf{P(x) = x^n - 12x^3 + \lambda x - (2\lambda + 81)}$ ចែកដាច់នឹងពហុធា

$\mathbf{Q(x) = x^2 - 12x + 27}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ និងចំនួនពិត λ

គេមាន $\mathbf{Q(x) = x^2 - 12x + 27 = (x-3)(x-9) = 0}$

នោះ $\mathbf{x_1 = 3}$ ឬ $\mathbf{x_2 = 9}$ ។

គេបាន $\mathbf{Q(x) \mid P(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(3) = 0 \\ P(9) = 0 \end{cases}}$ ឬ

$$\mathbf{\begin{cases} 3^n + \lambda - 405 = 0 & (1) \\ 9^n + 7\lambda - 8829 = 0 & (2) \end{cases}}$$

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការនេះគេបាន $\mathbf{n = 4}$, $\mathbf{\lambda = 324}$ ។

លំហាត់ទី២

កំណត់ចំនួនពិត **a** និងចំនួនពិត **b** ដើម្បីឲ្យពហុធា

$P(x)=x^6-3x^4+ax^3+bx^2-ax+1$ ចែកដាច់នឹងពហុធា

$(x-1)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត **a** និងចំនួនពិត **b**

បើ $(x-1)^2\,|\,P(x)$ នោះ $(x-1)\,|\,P'(x)$ គេទាញបាន

$$\begin{cases} P(1)=0 \\ P'(1)=0 \end{cases}$$

ដោយ $P(1)=1-3+a+b-a+1=b-1=0$ នោះ $b=1$

ហើយ $P'(x)=6x^5-12x^3+3ax^2+2bx-a$

នោះ $P'(1)=6-12+3a+2b-a=2a+2b-6=0$

គេទាញ $a=3-b=3-1=2$ ។

ដូចនេះ $a=2$ និង $b=1$ ។

លំហាត់ទី៣

កំណត់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ និងចំនួនពិត $\mathbf{b}$ ដើម្បីឲ្យពហុធា

$\mathbf{P(x)=ax^5+bx+1}$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $\mathbf{Q(x)=x^2-2x-1}$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ និងចំនួនពិត $\mathbf{b}$

តាង α និង β ជាឬសនៃពហុធា $\mathbf{Q(x)=x^2-2x-1}$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមាន $\alpha+\beta=2$ និង $\alpha\beta=-1$ ។

ដើម្បីឲ្យ $\mathbf{Q(x)\,|\,P(x)}$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} P(\alpha)=0 \\ P(\beta)=0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} a\alpha^5+b\alpha+1=0 & (1) \\ a\beta^5+b\beta+1=0 & (2) \end{cases}$

គុណសមីការ (1) នឹង β ហើយសមីការ (2) នឹង $-\alpha$ រួចបូកគ្នាគេ

បាន $a(\alpha^5\beta-\alpha\beta^5)-(\alpha-\beta)=0$ នាំឲ្យ $a=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta(\alpha^4-\beta^4)}$

ឬ $a=\dfrac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)}=\dfrac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]}$

ដោយ $\alpha+\beta=2$ និង $\alpha\beta=-1$ នោះ

$$a=\frac{1}{(-1)(2)(2^2+2)}=-\frac{1}{12}$$

ម្យ៉ាងទៀតដកសមីការ (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$\mathbf{a(\alpha^5-\beta^5)+b(\alpha-\beta)=0}$ នោះ $\mathbf{b=-\dfrac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha-\beta}\times a}$

ឬ $\mathbf{b=-(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)a}$

ឬ $\mathbf{b=\dfrac{[(\alpha^4+\beta^4)+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2]}{12}}$ ព្រោះ $\mathbf{a=-\dfrac{1}{12}}$

ដោយ $\mathbf{\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4+2=6}$

ហើយ $\mathbf{\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=36-2=34}$

គេបាន $\mathbf{b=\dfrac{34-6+1}{12}=\dfrac{29}{12}}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{a=-\dfrac{1}{12}}$, $\mathbf{b=\dfrac{29}{12}}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។ គេដឹងថា $P(x)$ ចែកនឹង $x-2$
ឲ្យសំណល់ 2 និង$P(x)$ ចែកនឹង $x+2$ឲ្យសំណល់ -2 ។

ក/រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4 ។

ខ/គេដឹងថា $P(0)=P(1)=-8$ ។ រក $P(x)$?

ដំណោះស្រាយ

ក/រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4

តាមបំរាប់គេបាន $\begin{cases} \dfrac{P(x)}{x-2}=Q_1(x)+\dfrac{2}{x-2} & (1) \\ \dfrac{P(x)}{x+2}=Q_2(x)+\dfrac{-2}{x+2} & (2) \end{cases}$

ធ្វើផលសងរវាងសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)P(x)=Q_1(x)-Q_2(x)+\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}$$

ឬ $\dfrac{4}{x^2-4}P(x)=Q_1(x)-Q_2(x)+\dfrac{4x}{x^2-4}$

ឬ $\dfrac{P(x)}{x^2-4}=Q(x)+\dfrac{x}{x^2-4}$ (3) ដែល $Q(x)=\dfrac{Q_1(x)-Q_2(x)}{4}$

តាមទំនាក់ទំនង (3) គេទាញបានថាសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$នឹង x^2-4 គឺ $R(x)=x$ ។

ខ-រកពហុធា $P(x)$ ៖

តាម (3) គេសរសេរ $P(x)=(x^2-4)Q(x)+x$

ដោយ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបីនោះ $Q(x)$ ត្រូវតែជាពហុធាដឺក្រេទី១ហេតុនេះគេអាចតាង $R(x)=ax+b$

គេសរសេរ $P(x)=(x^2-4)(ax+b)+x$

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $P(0)=-4b=-8$ នោះ $b=2$ ។

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $P(1)=-3(a+b)+1=-8$

គេទាញ $a=3-b=3-2=1$ ។

ដូចនេះ $P(x)=(x^2-4)(x+2)+x=x^3+2x^2-3x-8$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។

គេដឹងថា $P(x+1)-P(x)=x^2$ និង $P(0)=0$ ។

ក/ចូររកពហុធា $P(x)$ ។

ខ/ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរស្រាយថា ៖

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ដំណោះស្រាយ

ក/ រកពហុធា $P(x)$ ៖

តាង $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

គេបាន $P(x+1)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$$P(x+1)=P(x)+3ax^2+(3a+2b)x+a+b+c$$

ឬ $P(x+1)-P(x)=3ax^2+(3a+2b)x+a+b+c \quad (1)$

តាមសម្មតិកម្ម $P(x+1)-P(x)=x^2 \quad (2)$

ដោយប្រៀបធៀបសមភាព (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$\begin{cases} 3a=1 \\ 3a+2b=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$ នាំឲ្យ $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{6}$

គេបាន $P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+d$ ដោយ $P(0)=0$

នោះ $d=0$

ដូចនេះ $P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x=\frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$ ។

ខ/ ស្រាយថា $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

គេមាន $P(x+1)-P(x)=x^2$ នោះ

$$\sum_{k=1}^{n}\left[P(k+1)-P(k)\right]=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

គេទាញ $\sum_{k=1}^{n}k^2=P(n+1)-P(1)$ ដោយ

$$P(x)=\frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$$

នោះ $P(1)=0$ និង $P(n+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។ គេដឹងថា

$2P(x)-P(x+1)=x^3$

ក/ចូររកពហុធា $P(x)$ ។

ខ/ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរគណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{1^3}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+....+\frac{n^3}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក/រកពហុធា $P(x)$ ៖

តាង $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

នោះ $P(x+1)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

គេបាន ៖

$2P(x)-P(x+1)=ax^3+(b-3a)x^2+(c-2b-3a)x+d-a-b-c$

ដោយ $2P(x)-P(x+1)=x^3$ នោះ $\begin{cases}a=1\\ b-3a=0\\ c-2b-3a=0\\ d-a-b-c=0\end{cases}$

គេទាញបាន $a=1$, $b=3$, $c=9$, $d=13$

ដូចនេះ $P(x)=x^3+3x^2+9x+13$ ។

ខ/ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរគណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{1^3}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+....+\frac{n^3}{2^n}$$

គេមាន $2P(x)-P(x+1)=x^3$

យក $x=k$ នោះ $2P(k)-P(k+1)=k^3$ ដែល $k=1,2,3,...$

ចែកសមភាពនឹង 2^{k+1} នោះ $\frac{P(k)}{2^k}-\frac{P(k+1)}{2^{k+1}}=\frac{k^3}{2^{k+1}}$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{P(k)}{2^k}-\frac{P(k+1)}{2^{k+1}}\right]=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{2^k}=\frac{1}{2}S_n$

ហេតុនេះ $S_n=2\left[\frac{P(1)}{2}-\frac{P(n+1)}{2^{n+1}}\right]=P(1)-\frac{P(n+1)}{2^n}$

$P(1)=26$, $P(n+1)=(n+1)^3+3(n+1)^2+9(n+1)+13$

$$=n^3+6n^2+18n+26$$

ដូចនេះ $S_n=26-\frac{n^3+6n^2+18n+26}{2^n}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។

គេដឹងថា $P(x)-3$ ចែកដាច់នឹង $(x-3)^2$ និង $P(x)+3$ ចែក
ដាច់នឹង

$(x+3)^2$ ។ ចូរកំណត់រកពហុធា $P(x)$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកពហុធា $P(x)$ ៖

គេមាន $(x-3)^2 \mid P(x)-3$ នោះ $(x-3) \mid P'(x)$

ហើយ $(x+3)^2 \mid P(x)+3$ នោះ $(x+3) \mid P'(x)$

ដោយ $GCD(x-3, x+3)=1$ នោះ $(x-3)(x+3) \mid P'(x)$

នាំឲ្យមាន $a \in IR$ ដែល $P'(x)=a(x-3)(x+3)=a(x^2-9)$

គេបាន $P(x)=a\int (x^2-9).dx = a(\frac{x^3}{3}-9x)+C$

ម្យ៉ាងទៀតមាន $P(3)=3$ និង $P(-3)=-$ នោះ

$$\begin{cases} -18a+C=3 \\ 18a+C=-3 \end{cases}$$

គេទាញបាន $a=-\frac{1}{6}$, $C=0$ ។ ដូចនេះ $P(x)=-\frac{1}{18}x^3+\frac{3x}{2}$

លំហាត់ទី៨

កំណត់រកពហុធា $P(x)$ មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x)$ និង $P(2)=2$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកពហុធា $P(x)$

តាង n ជាដឺក្រេនៃពហុធា $P(x)$ ហើយដោយគេមានសមភាព

$P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x)$ (1)

នោះ $2n=2+2+n=n+4$ ឬ $n=4$ ។

ជំនួស x ដោយ $-x$ ក្នុង (1) នោះ

$P(x^2)=x^2(x^2+1)P(-x)$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $P(x)=P(-x)$

នោះ $P(x)$ ជាអនុគមន៍គូ។

យក $x=0$ គេបាន $P(0)=0$

យក $x=i$ គេបាន $P(-1)=0$

យក $x=-1$ គេបាន $P(1)=2P(-1)=0$

គេបាន $P(0)=P(-1)=P(1)=0$ នោះ $0,-1,1$ ជាឬសនៃ $P(x)$

គេបាន $P(x)=x(x-1)(x+1)(ax+b)$ ដែល $a\neq 0$

ដោយ $P(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេទាញបាន $b=0$ ។

ហេតុនេះ $P(x)=ax^2(x^2-1)$

ដោយ $P(2)=2$ នោះគេបាន $12a=2$ នាំឲ្យ $a=\frac{1}{6}$

ដូចនេះ $P(x)=\frac{1}{6}x^2(x^2-1)=\frac{x^4}{6}-\frac{x^2}{6}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យ a និង b ជាឫសនៃ $P(x)=x^4+x^3-1$ ។

ចូរបង្ហាញថា ab ជាឫសនៃ $Q(x)=x^6+x^4+x^3-x^2-1$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ab ជាឫសនៃ $Q(x)$

តាង $S=a+b$ និង $P=ab$ នោះ a និង b ជាឫសនៃ

$x^2-Sx+P=0$

ដោយ a និង b ជាឫសនៃ $P(x)=x^4+x^3-1$ នោះគេអាចដាក់ x^2-Sx+P ជាកត្តារួមក្នុង $P(x)$ ។ គេអាចសរសេរ ៖

$$x^4+x^3-1=(x^2-Sx+P)(x^2+cx+d)$$

$$=P(\frac{1}{P}x^2-\frac{S}{P}x+1)(x^2+cx+d)$$

$$=(\frac{1}{p}x^2-\frac{S}{P}x+1)(Px^2+Pcx+Pd)$$

$$=(\frac{1}{p}x^2-ux+1)(px^2+vx+w)$$

ដែល $u=\frac{S}{P}$, $v=Pc$, $w=Pd$ ។

តាមសមភាពខាងលើនេះគេទាញបាន $w=-1$ ។

គេទាញបាន $x^4+x^3-1=(\frac{1}{p}x^2-ux+1)(px^2+vx-1)$

ឬ

$$x^4+x^3-1=x^4+(\frac{v}{p}-up)x^3+(p-\frac{1}{p}-uv)x^2+(u+v)x-1$$

គេទាញ $\begin{cases} \frac{v}{P}-uP=1 & (1) \\ P-\frac{1}{P}-uv=0 & (2) \\ u+v=0 & (3) \end{cases}$

តាម (1) និង (3) គេទាញបាន $v=-u \; , u=-\frac{P}{1+P^2}$

ទំនាក់ទំនង (2) ទៅជា $P-\frac{1}{P}+\frac{P^2}{(1+P^2)^2}=0$

នាំឲ្យ $P^6+P^4+P^3+P^2-1=0$ មានន័យថា $P=ab$ ជាឬសរបស់

ពហុធា $Q(x)=x^6+x^4+x^3+x^2-1$ ។

ដូចនេះបើ a និង b ជាឬសនៃ $P(x)$ នោះ ab ជាឬសនៃ $Q(x)$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ។

គេដឹងថា $P(1)=1$, $P(2)=8$ និង $P(3)=27$ ។

ចូរស្រាយថា $f(2+\lambda)+f(2-\lambda)=2\lambda^4+10\lambda^2+16$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $f(2+\lambda)+f(2-\lambda)=2\lambda^4+10\lambda^2+16$

តាងពហុធា $P(x)=f(x)-x^3$

ចំពោះ $k=1,2,3$ គេបាន $P(k)=f(k)-k^3=0$

គេទាញបាន $x=1$, 2 , 3 ជាឫសនៃពហុធា $P(x)$ ។

ដោយ $f(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួx^4ស្មើ 1 នោះគេទាញ$P(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួx^4 ស្មើ 1ដែរហេតុនេះពហុធា $P(x)$ អាចសរសេរ ៖

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)$ ដែលαជាឫសមួយទៀតនៃ $P(x)$

គេបាន $f(x)=P(x)+x^3=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)+x^3$

-ចំពោះ $x=2+\lambda$ គេបាន ៖

$$f(2+\lambda)=\lambda(\lambda^2-1)(2+\lambda-\alpha)+(2+\lambda)^3 \quad (1)$$

-ចំពោះ $x=2-\lambda$ គេបាន ៖

$$f(2-\lambda)=-\lambda(\lambda^2-1)(2-\lambda-\alpha)+(2-\lambda)^3 \quad (2)$$

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន ៖

$f(2+\lambda)+f(2-\lambda)=2\lambda^4+10\lambda^2+16$ ។

លំហាត់ទី១១

បើ $P(x),Q(x),R(x)$ និង $S(x)$ ជាពហុធាដោយដឹងថា ៖

$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$

នោះចូរស្រាយថា $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$៖

គេមាន

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x) \quad (*)$$

យក $\alpha=e^{\frac{2\pi i}{5}}$ នោះ $\alpha^5=1$

ហើយ $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=\dfrac{\alpha^5-1}{\alpha-1}=0$

ជំនួស x ដោយ $\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4$ ក្នុង (*) នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} P(1)+\alpha Q(1)+\alpha^2R(1)=0 & (1) \\ P(1)+\alpha^2Q(1)+\alpha^4R(1)=0 & (2) \\ P(1)+\alpha^3Q(1)+\alpha R(1)=0 & (3) \\ P(1)+\alpha^4Q(1)+\alpha^3R(1)=0 & (4) \end{cases}$$

គុណសមីការ (1),(2),(3) និង (4) នឹងចំនួនរៀងគ្នា

$-\alpha, -\alpha^2, -\alpha^3, -\alpha^4$

គេបាន $\begin{cases} -\alpha P(1)-\alpha^2Q(1)-\alpha^3R(1)=0 & (5) \\ -\alpha^2P(1)-\alpha^4Q(1)-\alpha R(1)=0 & (6) \\ -\alpha^3P(1)-\alpha\ Q(1)-\alpha^4R(1)=0 & (7) \\ -\alpha^4P(1)-\alpha^3Q(1)-\alpha^2R(1)=0 & (8) \end{cases}$

បូកសមីការទាំង(8)ខាងលើគេបាន $5P(1)=0$ នោះ $P(1)=0$

ដូចនេះ $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ។

គេដឹងថា $P(k)=\frac{k}{k+1}$ ចំពោះ $k=0,1,2,....,n$ ។

ចូរកំណត់ $P(n+1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $Q(x)=(x+1)P(x)-x$ នោះ $Q(k)=0$ គ្រប់

$k=0,1,2,....,n$ ។

នោះគេអាចសរសេរ $Q(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)...(x-n)$

គេទាញបាន

$(x+1)P(x)-x=ax(x-1)(x-2)(x-3)....(x-n)$

យក $x=-1$ គេបាន $1=a(-1)^{n+1}.(n+1)!$ នោះ $a=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\text{គេបាន } P(x)=\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-n)+x}{x+1}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(n+1)=\begin{cases}1 & \text{បើ } n \text{ គូ}\\ \frac{n}{n+2} & \text{បើ } n \text{ សេស}\end{cases}$$

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនគត់ខុសគ្នា ។ យក $P(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណ
ជាចំនួនគត់ ។ ចូរបង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌ
$P(a)=b,P(b)=c,P(c)=a$
មិនអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នាបានទេ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $P(a)=b,P(b)=c,P(c)=a$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} P(x)-b=(x-a)\,Q_1(x) & (1) \\ P(x)-c=(x-b)\,Q_2(x) & (2) \\ P(x)-a=(x-c)\,Q_3(x) & (3) \end{cases}$$

ក្នុងចំណោមបីចំនួនគត់ខុសគ្នា a,b,c យើងអាចជ្រើសរើសយកតម្លៃដាច់នៃផលដកធំជាងគេមួយ ។ សន្មតថា $|a-c|$ ជាចំនួនធំជាងគេក្នុងចំណោមចំនួន $|a-b|,|b-c|,|a-c|$ គេបាន $|a-c|>|a-b|$ ។ដោយយក $x=c$ ជួសក្នុង (1) នោះ
$P(c)-b=a-b=(c-a).Q_1(c)$
គេបាន $|a-b|=|a-c|.|Q_1(c)|$ ដោយ $Q_1(c)$ ជាចំនួនគត់
នោះ$|a-b|\geq|a-c|$ ដែលផ្ទុយពីការឧបមាខាងលើ។

ជំពូកទី៣

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^5+ax^3-7x+6$ ដែល a ជាចំនួនពិត
កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-2$ ។

២-គេមានពហុធា $P(x)=x^n-6x^{n-1}+7x^3+5x-2$
ដែល $n\in N$។
កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-2$ ។

៣-គេមានពហុធា $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$
គេដឹងថា $P(2)=4$, $P(4)=16$, $P(8)=64$ និង $P(10)=4$
ចូរកំណត់តម្លៃនៃ a,b,c,d ។

៤-គេមានពហុធា $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$
គេដឹងថា $P(1)=20$, $P(2)=40$ និង $P(3)=60$។
ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $P(-6)+P(10)$ ។

៥-គេមានពហុធា $P(x)$ មានដឺក្រេទីប្រាំ ។
គេដឹងថា $(x^2+1)\,|\,P(x)$ និង $(x^3+1)\,|\,P(x)$ ។
រក $P(x)$ បើ $P(1)=8$ ។

៦-គេឲ្យ $P(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$ និង $a,b,c\in IR$ ។
កំណត់ a,b,c ដោយដឹងថា $a+b+c=4$ ហើយពហុធា

$P^2(x)+2P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x(x+1)(x+2)(x+3)$ ។

៧-កំណត់ពហុធា $P(x)$ មួយមានដឺក្រេទីប្រាំដោយដឹងថា ៖

$P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+2)^3$ និង $P(x)-2$ ចែកដាច់នឹង $(x-2)^3$ ។

៨-គេមានពហុធា $P(x)=(2x^2-7x+4)^5$

ក/រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង $x-2$

ខ/ឧបមាថា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{10}x^{10}$ ។

ចូរគណនាតម្លៃ $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{10}$ ។

៩-រកសំណល់នៃវិធីចែករវាងពហុធា $P(x)=(x+1)^n$, $n\geq 2$ នឹងពហុធា $Q(x)=x^2+1$ ។

១០-គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^4+ax^2+b$ ដែល $a,b\in IR$ ។

កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-2x+4 ។

១១-គេឲ្យពហុធា $P(x)=ax^5+bx^3+1$ ដែល $a,b\in IR$ ។

កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-x-1 ។

ជំពូកទី៤

ផ្សេងៗគួរយល់ដឹង

Eigenvalues and Eigenvectors

1) Eigenvalues

✧ *និយមន័យ*

យក A ជាម៉ាទ្រីសការេ ។ ចំនួន λ ហៅថា Eigenvalues នៃម៉ាទ្រីស A លុះត្រាតែ $A-\lambda.I$ ជាម៉ាទ្រីសទោល ។

$A-\lambda.I$ ជាម៉ាទ្រីសទោលលុះត្រាតែ $\det(A-\lambda.I)=0$ ។

I ជាម៉ាទ្រីសឯកតា ។

2) Eigenvectors

✧ *និយមន័យ*

យក A ជាម៉ាទ្រីសការេមិនសូន្យ ។ ម៉ាទ្រីស M មិនសូន្យហៅថា Eigenvector នៃម៉ាទ្រីស A លុះត្រាតែមានចំនួនពិត ឬ ចំនួនកុំផ្លិច λ ដែល $A.M=\lambda M$ ឬ $(A-\lambda I).M=0$ ។

(λ ជា Eigenvalues នៃម៉ាទ្រីស A)។

ឧទាហរណ៍១

គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

ចូរកំណត់ Eigenvalues និង Eigenvectors នៃម៉ាទ្រីស A ?

តាង λ ជា Eigenvalues នៃ A នោះ $\det(A-\lambda I)=0$

ដោយ $A-\lambda I=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\ 2 & 4-\lambda\end{bmatrix}$

គេបាន $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+10$

ដោយ $\det(A-\lambda I)=0$ នោះ $\lambda^2-7\lambda+10=0$

$\Delta=49-40=3^2$ មានឫស $\lambda_1=\dfrac{7-3}{2}=2\,,\lambda_2=\dfrac{7+3}{2}=5$ ។

ដូចនេះ $\lambda_1=2\,,\lambda_2=5$ ជា Eigenvalues នៃម៉ាទ្រីស A ។

តាងម៉ាទ្រីស $M=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ មិនសូន្យហៅថាEigenvector

នៃម៉ាទ្រីស A ។

-ចំពោះ $\lambda_1=2$

គេបាន $(A-2I).M=0$ ឬ $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

ឬ $\begin{bmatrix}\alpha+\beta\\ 2\alpha+2\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ សមមូល $\beta=-\alpha$ ។

យក $\alpha=1$ នោះ $\beta=-1$

ដូចនេះ $M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ Eigenvector មួយនៃម៉ាទ្រីស A ចំពោះ $\lambda = 2$

-ចំពោះ $\lambda_2 = 5$

គេបាន $(A-5I).M = 0$ ឬ $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ឬ $\begin{bmatrix} -2\alpha + \beta \\ 2\alpha - \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ សមមូល $\beta = 2\alpha$ ។យក $\alpha = 1$ នោះ $\beta = 2$

ដូចនេះ $M_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Eigenvector មួយនៃម៉ាទ្រីស A ចំពោះ $\lambda = 5$

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ។ គណនា A^n ?

តាង λ ជា Eigenvalues នៃ A នោះ $\det(A - \lambda I) = 0$

ដោយ $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix}$

គេបាន $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 28$

ដោយ $\det(A - \lambda I) = 0$ នោះ $\lambda^2 - 11\lambda + 28 = 0$

$\Delta = 121 - 112 = 3^2$ មានឫស $\lambda_1 = \frac{11-3}{2} = 4, \lambda_2 = \frac{11+3}{2} = 7$ ។

តាងម៉ាទ្រីស $M = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ មិនសូន្យជាEigenvector នៃម៉ាទ្រីស A

-ចំពោះ $\lambda_1 = 4$

គេបាន $(A-4I).M=0$ ឬ $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

ឬ $\begin{bmatrix}\alpha+\beta\\ 2\alpha+2\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ សមមូល $\beta=-\alpha$ ។យក $\alpha=1$ នោះ $\beta=-1$

ដូចនេះ $M_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ Eigenvector មួយនៃម៉ាទ្រីស A ចំពោះ $\lambda=2$

-ចំពោះ $\lambda_2=7$

គេបាន $(A-5I).M=0$ ឬ $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

ឬ $\begin{bmatrix}-2\alpha+\beta\\ 2\alpha-\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ សមមូល $\beta=2\alpha$ ។យក $\alpha=1$ នោះ $\beta=2$

ដូចនេះ $M_2=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ Eigenvector មួយនៃម៉ាទ្រីស A ចំពោះ $\lambda=7$

យក P ជាម៉ាទ្រីសមានកូឡោន M_1 , M_2 នោះ $P=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

$\det(P)=(-1)(2)-(1)(1)=-3$

ម៉ាទ្រីសច្រាស់នៃ P គឺ $P^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

គេមាន $P^{-1}.A.P=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}5 & 1\\ 2 & 6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}$

នោះ $A=P.E.P^{-1}$ ដែល $E=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$

គេបាន $A^n = P.E^n.P^{-1}$ ដែល $E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{bmatrix}$

គេមាន $P.E^n = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 7^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4^n & 7^n \\ 4^n & 2.7^n \end{bmatrix}$

នោះ $P.E^n.P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4^n & 7^n \\ 4^n & 2.7^n \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -(2.4^n + 7^n) & 4^n - 7^n \\ 2(4^n - 7^n) & -(4^n + 2.7^n) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2.4^n + 7^n & 7^n - 4^n \\ 2(7^n - 4^n) & 4^n + 2.7^n \end{bmatrix}$$

ដូចនេះ $A^n = \begin{bmatrix} \frac{2.4^n + 7^n}{3} & \frac{7^n - 4^n}{3} \\ \frac{2(7^n - 4^n)}{3} & \frac{4^n + 2.7^n}{3} \end{bmatrix}$.

ឧទាហរណ៍៣

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $\{x_n\}$ និង $\{y_n\}$ កំណត់ដោយ ៖

$\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{cases}$ និង $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 4y_n \end{cases}$ ចំពោះ $n = 0,1,2,3,...$ ។

ចូរគណនាតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{x_n\}$ និង $\{y_n\}$ ។

ដោយ $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 4y_n \end{cases}$ នោះ $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

គេទាញ $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (1)

យក $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ និង $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសឯកតា។

ឧបមាថា λ ជា ***Eigenvalue*** នៃ A នោះ $\det\left(A - \lambda.I\right) = 0$

ដោយ $A - \lambda.I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

នោះ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2$

គេបាន $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ នោះ $\lambda_1 = 2 , \lambda_2 = 5$ ។

ចំពោះ $\lambda_1 = 2 , \lambda_2 = 5$ គេបាន ***Eigenvectors*** រៀងគ្នា

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ និង $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ។

ម៉ាទ្រីស A អាចសរសេរជា ៖

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

នោះ
$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n \\ 2 \times 5^{n+1} - 2^{n+1} & 2 \times 5^n + 2^n \end{pmatrix}$$

ហេតុនេះគេបាន ៖

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n\\ 2\times 5^{n+1} - 2^{n+1} & 2\times 5^n + 2^n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^{n+1} + 2^{n+2}\\ 2.5^{n+1} - 2^{n+2}\end{pmatrix} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$x_n = \frac{5^{n+1} + 2^{n+2}}{3} \;,\; y_n = \frac{2.5^{n+1} - 2^{n+2}}{3} \text{ ។}$$

ជំពូកទី៨

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាប្រឡងថ្នាក់ខេត្ត-ក្រុង -រាជធានី និង ទូទាំងប្រទេស

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែប្រចាំ រាជធានីភ្នំពេញ

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និង ថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង ១៤-១៥ កុម្ភៈ ២០១៣

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ លើកទី១ (១៤-២-២០១៣)

រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I- (ពិន្ទុ១០) គណនាផលបូក $S=3+15+35+....+483$

II- (ពិន្ទុ១០) គណនាផលបូក

$$S=100!+100\times 100!+101\times 101!+...+2012\times 2012!$$

III- (ពិន្ទុ២០) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\left(1-C_{2013}^{2}+C_{2013}^{4}-...+C_{2013}^{2012}\right)^{2}+\left(C_{2013}^{1}-C_{2013}^{3}+C_{2013}^{5}-...+C_{2013}^{2013}\right)^{2}=2^{2013}$$

IV- (ពិន្ទុ២០) គេឲ្យផលបូក

$$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+....+\frac{1}{2012\times 2013}$$ ។

រកគ្រប់ស្វ៊ីតចំនួនពិតទាំងអស់ដែលមានតួដូចតួនៃ S ហើយមានផលបូកស្មើ $\frac{1}{6}$ ។

V- (ពិន្ទុ២០) គេឲ្យស្វ៊ីតពីរ (a_n) និង (b_n) កំណត់លើសំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមានដោយ ៖

$a_0 = 1 , b_0 = 0$ និង $a_{n+1} = a_n + b_n , b_{n+1} = b_n - a_n$ ។

គេតាង $Z_n = a_n + i.b_n$ ដែល $i^2 = -1$ ។

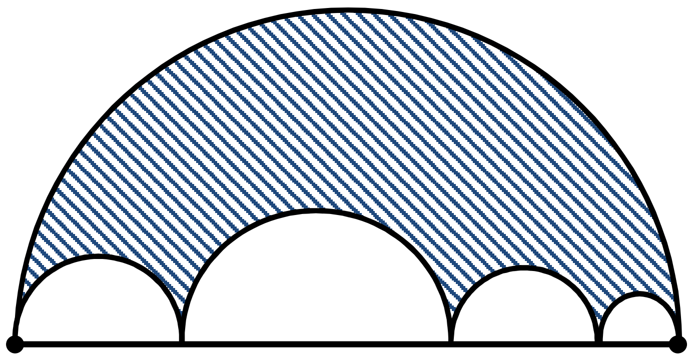
ក)បង្ហាញថា (Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ គណនា Z_{2013} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក a_{2013} និង b_{2013} ។

ខ)គណនា $A_{2013} = \sum_{i=0}^{2013} Z_i ; B_{2013} = \sum_{i=0}^{2013} a_i , C_{2013} = \sum_{i=0}^{2013} b_i$ ។

VI- (ពិន្ទុ២០) ក្នុងរូបខាងស្តាំ គេឲ្យកន្លះរង្វង់ ៥ ដែលមានផ្ចិតទាំងអស់នៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ហើយផលបូកអង្កត់ផ្ចិតនៃកន្លះរង្វង់តូចៗ ៤ ស្មើ $4cm$ ដែលជាអង្កត់ផ្ចិតនៃកន្លះរង្វង់ធំ ។

រកផ្ទៃក្រឡានៃការេមួយដែលបរិមាត្ររបស់វា ស្មើនឹងបរិមាត្រនៃតំបន់ដែលឆូត ។



អត្រាកំណែរគំរូ

I- (ពិន្ទុ១០) គណនាផលបូក $S=3+15+35+....+483$

គេអាចសរសេរ ៖

$$S=(2^2-1)+(4^2-1)+(6^2-1)+...+(22^2-1)$$
$$=(2^2+4^2+6^2+...+22^2)-(1+1+1+...+1)$$
$$=2^2(1^2+2^2+3^2+...+11^2)-11=4\times\frac{11(11+1)(22+1)}{6}-1$$
$$=2024-11=2013$$

ដូចនេះ $S=3+15+35+....+483=2013$ ។

II- (ពិន្ទុ១០) គណនាផលបូក

$$S=100!+100\times100!+101\times101!+...+2012\times2012!$$

គេអាចសរសេរ $S=100!+\sum_{k=100}^{2012}(k\times k!)$ ដោយ

$$k\times k!=[(k+1)-1].k!=(k+1)!-k!$$

គេបាន $S=100!+\sum_{k=100}^{2012}[(k+1)!-k!]$

$$=100!+\left[(101!-100!)+(102!-101!)+...+(2013!-2012!)\right]$$

$$=100!+(2013!-100!)=2013!$$

ដូចនេះ $S=100!+100\times100!+101\times101!+...+2012\times2012!=2013!$

III- (ពិន្ទុ២០) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\left(1-C_{2013}^{2}+C_{2013}^{4}-...+C_{2013}^{2012}\right)^{2}+\left(C_{2013}^{1}-C_{2013}^{3}+C_{2013}^{5}-...+C_{2013}^{2013}\right)^{2}=2^{2013}$$

តាមទ្វេធាញូតុន $(a+b)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}\,a^{n-k}b^{k}$

ដែល $C_{n}^{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

យក $a=1\,,b=i$ និង $n=2013$ ដែល $i^{2}=-1$ គេបាន ៖

$$(1+i)^{2013}=\sum_{k=0}^{2013}C_{2013}^{k}\,i^{k}=1+iC_{2013}^{1}+i^{2}C_{2013}^{2}+i^{3}C_{2013}^{3}+...+i^{2013}C_{2013}^{2013}$$

$$(1+i)^{2013}=\left(1-C_{2013}^{2}+C_{2013}^{4}-...+C_{2013}^{2012}\right)+i\left(C_{2013}^{1}-C_{2013}^{3}+C_{2013}^{5}-...+C_{2013}^{2013}\right)\ (1)$$

ដោយ $1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

នោះតាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន

$$(1+i)^{2013}=\left(\sqrt{2}\right)^{2013}\left(\cos\frac{2013\pi}{4}+i\sin\frac{2013\pi}{4}\right)$$

ដោយ $\dfrac{2013\pi}{4}=502\pi+\dfrac{5\pi}{4}$

គេបាន $(1+i)^{2013}=\left(\sqrt{2}\right)^{2013}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)\ (2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន

$$\begin{cases}\left(1-C_{2013}^{2}+C_{2013}^{4}-...+C_{2013}^{2012}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^{2013}\cos\frac{5\pi}{4}\\ \left(C_{2013}^{1}-C_{2013}^{3}+C_{2013}^{5}-...+C_{2013}^{2013}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^{2013}\sin\frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

ដោយ $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{2013}\cos\frac{5\pi}{4}\right]^{2}+\left[\left(\sqrt{2}\right)^{2013}\sin\frac{5\pi}{4}\right]^{2}=2^{2013}$

ដូចនេះ

$$\left(1-C_{2013}^{2}+C_{2013}^{4}-...+C_{2013}^{2012}\right)^{2}+\left(C_{2013}^{1}-C_{2013}^{3}+C_{2013}^{5}-...+C_{2013}^{2013}\right)^{2}=2^{2013}$$

V- (ពិន្ទុ២០) គេឲ្យស្វ៊ីតពីរ (a_n) និង (b_n) កំណត់លើសំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមានដោយ ៖

$a_0=1\,,\,b_0=0$ និង $a_{n+1}=a_n+b_n\,,\,b_{n+1}=b_n-a_n$ ។

គេតាង $Z_n=a_n+i.b_n$ ដែល $i^2=-1$ ។

ក)បង្ហាញថា (Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $Z_n=a_n+i.b_n$ នោះ $Z_{n+1}=a_{n+1}+ib_{n+1}$

ដោយ $a_{n+1}=a_n+b_n\,,\,b_{n+1}=b_n-a_n$

គេបាន $Z_{n+1}=(a_n+b_n)+i(b_n-a_n)=(1-i)a_n+(1+i)b_n$

$$=(1-i)\left(a_n+\frac{1+i}{1-i}b_n\right)=(1-i)(a_n+ib_n)$$

$$=(1-i)Z_n$$

ដូចនេះ (Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 1 - i$ និងតួ $Z_0 = a_0 + ib_0 = 1$ ។

គណនា Z_{2013} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួច រក a_{2013} និង b_{2013}

គេបាន $Z_{2013} = Z_0 \times q^{2013} = (1-i)^{2013}$

ដោយ $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

តាមរូបមន្តដឺមរ័

$$Z_{2013} = \left(\sqrt{2}\right)^{2013}\left[\cos\left(-\frac{2013\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{2013\pi}{4}\right)\right]$$

ដោយ $\frac{2013\pi}{4} = 502\pi + \frac{5\pi}{4}$ នោះ:

$$Z_{2013} = \left(\sqrt{2}\right)^{2013}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

ដូចនេះ: $Z_{2013} = \left(\sqrt{2}\right)^{2013}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $Z_{2013} = a_{2013} + i.b_{2013}$

នោះ: $\begin{cases} a_{2013} = \left(\sqrt{2}\right)^{2013}\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \\ b_{2013} = \left(\sqrt{2}\right)^{2013}\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \end{cases}$

ដោយ $\cos(-\frac{5\pi}{4}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

និង $\sin(-\frac{5\pi}{4}) = -\sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ដូចនេះ

$a_{2013} = -\left(\sqrt{2}\right)^{2012} = -2^{1006}$, $b_{2013} = -\left(\sqrt{2}\right)^{2012} = -2^{1006}$ ។

ខ)គណនា $A_{2013} = \sum_{i=0}^{2013} Z_i$; $B_{2013} = \sum_{i=0}^{2013} a_i$, $C_{2013} = \sum_{i=0}^{2013} b_i$ ៖

គេមាន (Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចនោះគេបាន ៖

$$A_{2013} = \sum_{i=0}^{2013} Z_i = Z_0 + Z_1 + ... + Z_{2013}$$

$$= Z_0 \times \frac{1-q^{2014}}{1-q}$$

$$= Z_0 \times \frac{1-(q^2)^{1007}}{1-q}$$

ដោយ $q = 1-i$ នោះ $q^2 = (1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$

និង $1-q = 1-(1-i) = i$ ហើយ $Z_0 = 1$ នោះ

$$A_{2013} = \frac{1-(-2i)^{1007}}{i} = \frac{i\left[1+2^{1007}.i^{1007}\right]}{i^2}$$

ដោយ $i^2 = -1$, $i^{1007} = i^{4\times 251+3} = i^3 = -i$

នោះ $A_{2013} = \frac{i(1-2^{1007}i)}{-1} = -2^{1007} - i$

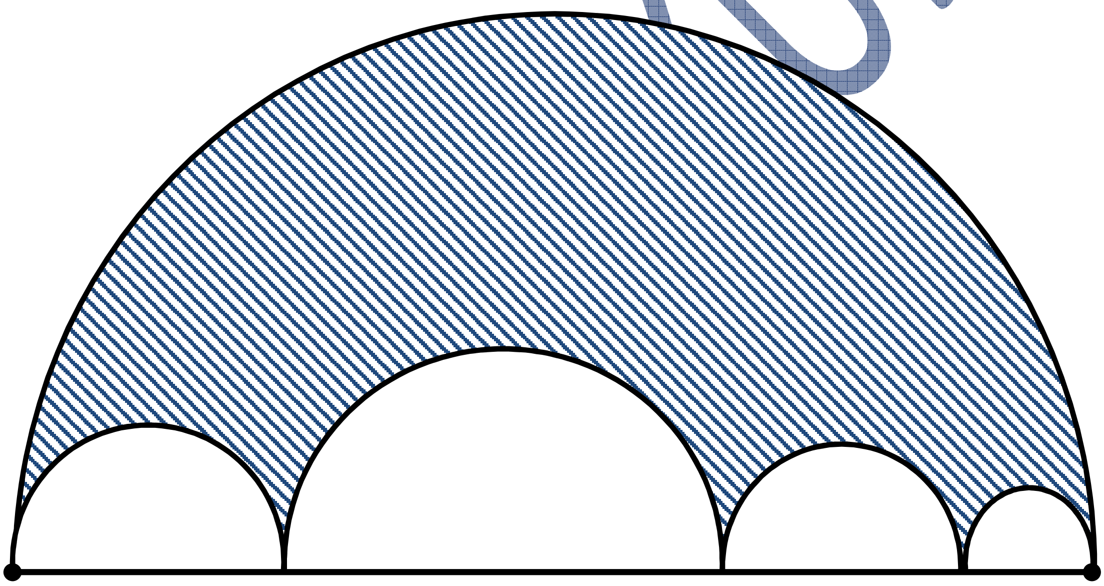
ដូចនេះ $A_{2013} = -2^{1007} - i$ ។

$$A_{2013}=\sum_{i=0}^{2013} Z_i$$

$$=\sum_{i=0}^{2013}(a_i+ib_i)=B_{2013}+iC_{2013}=-2^{1007}-i$$

ដូចនេះ $B_{2013}=-2^{1007}$ និង $C_{2013}=-1$ ។

VI- (ពិន្ទុ២០) រកផ្ទៃក្រឡានៃការេមួយដែលបរិមាត្ររបស់វា ស្មើនឹងបរិមាត្រនៃតំបន់ដែលឆូត ៖



តាង r_1, r_2, r_3, r_4 ជារង្វាស់កាំនៃកន្លះរង្វង់តូចៗបួន និង R ជារង្វាស់កាំនៃកន្លះរង្វង់ធំ ។

បរិមាត្រនៃតំបន់ដែលឆូតស្មើនឹងផលបូកនៃបរិមាត្រកន្លះរង្វង់តូចទាំងបួន និង បរិមាត្រកន្លះរង្វង់ធំ

គេបាន បរិមាត្រនៃតំបន់ដែលឆូត

$$p = \pi r_1 + \pi r_2 + \pi r_3 + \pi r_4 + \pi R = \pi(r_1 + r_2 + r_3 + R)$$

ដោយ ផលបូកអង្កត់ផ្ចិតនៃកន្លះរង្វង់តូចៗ ៤ ស្មើ $4cm$ នោះ

$2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = 4$

គេទាញបាន $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2\ (cm)$ ហើយ

$2(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = 4 = 2R$ នោះ $R = 2\ (cm)$

គេបាន $p = 4\pi\ \ (cm)$ ។

តាង c ជាជ្រុងនៃការេដែលមានបរិមាត្ររបស់វា ស្មើនឹងបរិមាត្រនៃតំបន់ដែលឆូតនោះគេបាន $4c = 4\pi$ នោះ $c = \pi\ \ (cm)$ ។

ដូចនេះផ្ទៃក្រឡានៃការេដែលត្រូវរកគឺ $S = c^2 = \pi^2\ \ (cm^2)$ ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែប្រចាំ រាជធានីភ្នំពេញ

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និង ថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង ១៤-១៥ កុម្ភៈ ២០១៣

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ លើកទី២ (១៥-២-២០១៣)

រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I- (ពិន្ទុ១៥) គេឲ្យផលបូក

$$S_n = \frac{n+2}{n!} + \frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \frac{14}{4!} + \dots + \frac{n^2-2}{n!}$$

គណនា S_1 និង S_{2013} ?

II- (ពិន្ទុ១៥) គណនាផលបូក

$$S = \cos\frac{\pi}{2013} - \cos\frac{2\pi}{2013} + \cos\frac{3\pi}{2013} - \dots - \cos\frac{1006\pi}{2013}$$ ។

III- (ពិន្ទុ១៥) តាង $O(n)$ ជាផលបូកលេខសេសនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

ឧទាហរណ៍ $O(2013) = 1 + 3 = 4$ ។

គណនា $O(1) + O(2) + O(3) + \dots + O(100)$ ។

IV- (ពិន្ទុ១៥) គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{បើ } x \text{ សេស}\\ \dfrac{x}{2} & \text{បើ } x \text{ គូ}\end{cases}$$

ឧបមាថា k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស និង $f[f(k)]=1011$ ។ រកតម្លៃនៃ k ?

V- (ពិន្ទុ២០) បុប្ផាប្រើប្រពន្ធ័ទូរសព្ទ័មួយដែលមាន ៧លេខ ។ សំ ស្រពិចស្រពិលលេខទូរសព្ទ័របស់នាង ។សំចាំបានថា៤ ខ្ទង់ដំបូងមានលេខ9មួយលេខ8មួយ និងលេខ7 ពីរ ។ សំចាំមិនសូវច្បាស់លេខខ្ទង់ទី៥អាចលេខ 1 ឬ លេខ 2 ។ ចំណែកលេខខ្ទង់ទី6 សំមិនចាំសោះ ប៉ុន្តែសំចាំលើខខ្ទង់ទី៧ ស្មើនឹងលេខ5ដកលេខនៅខ្ទង់ទី៦ ។

តើសំត្រូវហៅលេខទូរសព្ទ័ចំនួនប៉ុន្មានដងទើបបុប្ផាលើក ទូរសព្ទ័ទទួល ?

VI- (ពិន្ទុ២០) អាងទឹកចិញ្ចឹមត្រីមួយរាងប្រលេពីប៉ែតកែងមាន មាឌ $8m^3$ ។ បើទ្រនុងនីមួយៗត្រូវគេបង្កើន$1m$ នោះមាឌនៃ អាងទឹកស្មើនឹង $27m^3$ ។

រកមាឌអាងទឹកក្នុងករណីទ្រនុងនីមួយៗឥឡូវនេះត្រូវគេ បង្កើន $2m$ ទៀត ។

អត្រាកំណែគំរូ

I- (ពិន្ទុ១៥) គេឲ្យផលបូក

$$S_n = \frac{n+2}{n!} + \frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \frac{14}{4!} + \dots + \frac{n^2-2}{n!}$$

គណនា S_1 និង S_{2013} ៖

គេមាន $S_n = \dfrac{n+2}{n!} + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k^2-2}{k!}$ នោះ $S_1 = \dfrac{1+2}{1!} = 3$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $S_n = \dfrac{n+2}{n!} + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k^2-2}{k!}$

គេមាន

$$\begin{aligned}
\frac{k^2-2}{k!} &= \frac{k}{(k-1)!} - \frac{2}{k!} \\
&= \frac{(k-1)+1}{(k-1)!} - \frac{2}{k!} \\
&= \frac{1}{(k-2)!} + \frac{1}{(k-1)!} - \frac{2}{k!} \\
&= \left[\frac{1}{(k-2)!} - \frac{1}{(k-1)!}\right] + 2\left[\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right]
\end{aligned}$$

គេបាន

$$S_n = \frac{n+2}{n!} + \sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(k-2)!} - \frac{1}{(k-1)!}\right] + 2\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right]$$

$$=\frac{n+2}{n!}+\left[\frac{1}{0!}-\frac{1}{(n-1)!}\right]+2\left[\frac{1}{1!}-\frac{1}{n!}\right]$$

$$=\frac{n+2}{n!}+1-\frac{n}{n!}+2-\frac{2}{n!}=3$$

យក $n=2013$នោះ $S_{2013}=3$ ។

ដូចនេះ $S_1=3$, $S_{2013}=3$ ។

II- (ពិន្ទុ១៥) គណនាផលបូក

$$S=\cos\frac{\pi}{2013}-\cos\frac{2\pi}{2013}+\cos\frac{3\pi}{2013}-....-\cos\frac{1006\pi}{2013}$$

គេអាចសរសេរ $S=\sum_{k=1}^{1006}(-1)^{k+1}\cos\left(\frac{k\pi}{2013}\right)$

យើងជ្រើសរើស $T=\sum_{k=1}^{1006}(-1)^{k+1}\sin\left(\frac{k\pi}{2013}\right)$

និង $Z=S+i.T$ ដែល $i^2=-1$

គេបាន ៖

$$Z=\sum_{k=1}^{1006}\left[(-1)^{k+1}\left(\cos\frac{k\pi}{2013}+i\sin\frac{k\pi}{2013}\right)\right]$$

$$=-\sum_{k=1}^{1006}\left[(-1).\left(\cos\frac{\pi}{2013}+i\sin\frac{\pi}{2013}\right)\right]^k$$

យក $u=(-1)\left(\cos\frac{\pi}{2013}+i\sin\frac{\pi}{2013}\right)=\cos\frac{2014\pi}{2013}+i\sin\frac{2014\pi}{2013}=e^{i\theta}$

ដែល $\theta=\frac{2014\pi}{2013}$ ។

នោះគេបាន ៖

$$Z=-\sum_{k=1}^{1006}u^k=-(u+u^2+u^3+...+u^{1006})=-u\times\frac{1-u^{1006}}{1-u}$$

ដោយ $1-u=1-e^{i\theta}=e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)=-2ie^{\frac{i\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}$

ហើយ

$$\begin{aligned}1-u^{1006}&=1-e^{i1006\theta}\\&=e^{i503\theta}\left(e^{-i.503\theta}-e^{i.503\theta}\right)\\&=-2ie^{i503\theta}\sin 503\theta\end{aligned}$$

គេបាន $Z=-e^{i\theta}.\dfrac{-2ie^{i.503\theta}\sin 503\theta}{-2ie^{\frac{i\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}}=-\dfrac{\sin 503\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\times e^{\frac{i.107\theta}{2}}$

គេទាញ $S=\operatorname{Re}(Z)=-\dfrac{\sin 503\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\cos\dfrac{107\theta}{2}$

ដែល $\theta=\dfrac{2014\pi}{2013}$

គេមាន

$$\begin{aligned}\sin 503\theta\cos\frac{107\theta}{2}&=\frac{1}{2}\left[\sin\left(503\theta+\frac{107\theta}{2}\right)+\sin\left(503\theta-\frac{107\theta}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2013\theta}{2}+\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

ដោយ $\sin\dfrac{2013\theta}{2}=\sin\dfrac{2013}{2}\times\dfrac{2014\pi}{2013}=\sin(1007\pi)=0$

ព្រោះ $\theta = \dfrac{2014\pi}{2013}$ ។

នោះ $\sin 503\theta \cos\dfrac{107\theta}{2} = -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}$

ហេតុនេះ $S = \text{Re}(Z) = -\dfrac{-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $S = \dfrac{1}{2}$ ។

III- (ពិន្ទុ១៥)

តាង $O(n)$ ជាផលបូកលេខសេសនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

ឧទាហរណ៍ $O(2013) = 1 + 3 = 4$ ។

គណនា $O(1) + O(2) + O(3) + ... + O(100)$ ៖

តាង $S = O(1) + O(2) + O(3) + ... + O(100) = \sum_{k=1}^{100} O(k)$

$$= \sum_{k=1}^{9} O(k) + \sum_{k=10}^{99} O(k) + O(100)$$

ដោយ $O(100) = 1$, $\sum_{k=1}^{9} O(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

ព្រោះ $O(2) = O(4) = O(6) = O(8) = 0$

ហើយ $\sum_{k=10}^{99} O(k) = \sum_{k=10}^{19} O(k) + \sum_{k=20}^{29} O(k) + ... + \sum_{K=90}^{99} O(k)$

មាន $\sum_{k=10}^{19} O(k) = 1\times 10 + (1+3+5+7+9) = 10+25 = 35$

$$\sum_{k=20}^{29} O(k) = \sum_{k=40}^{49} O(k) = \sum_{k=60}^{69} O(k)$$

$$= \sum_{k=80}^{89} Q(k) = 1+3+5+7+9 = 25$$

$$\sum_{k=30}^{39} Q(k) = 3\times 10 + (1+3+5+7+9) = 30+25 = 55$$

$$\sum_{k=50}^{59} O(k) = 5\times 10 + (1+3+5+7+9) = 50+25 = 75$$

$$\sum_{k=70}^{79} O(k) = 7\times 10 + (1+3+5+7+9) = 70+25 = 95$$

$$\sum_{k=90}^{99} O(k) = 9\times 10 + (1+3+5+7+9) = 90+25 = 115$$

គេបាន $S = 25 + 25\times 4 + (55+75+95+115) + 1 = 501$

ដូចនេះ $O(1) + O(2) + O(3) + ... + O(100) = 501$ ។

IV-(ពិន្ទុ១៥) គេឲ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ កំណត់ដោយ

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{បើ } x \text{ សេស} \\ \dfrac{x}{2} & \text{បើ } x \text{ គូ} \end{cases}$$

ឧបមាថា k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស និង $f[f(k)] = 1011$

រកតម្លៃនៃ k ៖

ដោយ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេសនោះ $f(k)=k+3$ ជាចំនួនគូ

នោះ $f[f(k)]=\frac{f(k)}{2}=\frac{k+3}{2}=1011$

សមមូល $k=2022-3=2019$

ដូចនេះ $k=2019$ ។

V-លេខទូរសព្ទ័របស់បុប្ផាមានរាង $X=\overline{9877ab(5-b)}$

ដែល a,b ជាលេខ ហើយ $a=1$

ឬ $a=2$និង $5-b\geq 0$ សមមូល $b\leq 5$

នោះ $b\in\{0,1,2,3,4,5\}$ ។

យើងឃើញថាតម្លៃ a អាចមានជំរើស2ជង ហើយ តម្លៃលេខ b អាចមានជម្រើស6ដង ។

ដូចនេះចំនួនដងនៃការហៅលេខទូរសព្ទ័របស់សំដើម្បីឲ្យត្រូវលេខពិតប្រាកដរបស់បុប្ផាគឺ $n=2\times 6=12$ ដង ។

VI- (ពិន្ទុ២០) អាងទឹកចិញ្ចឹមត្រីមួយរាងប្រលេពីប៉ែតកែងមានមាឌ $8m^3$ ។ បើទ្រនុងនីមួយៗត្រូវគេបង្កើន$1m$ នោះមាឌនៃអាងទឹកស្មើនឹង $27m^3$ ។

រកមាឌអាងទឹកក្នុងករណីទ្រនុងនីមួយៗឥឡូវនេះត្រូវគេបង្កើន $2m$ ទៀត ។

តាង $a\,,b,c$ (គិតជាម៉ែត្រ) ជាមាឌរបស់អាងទឹក រាងប្រលេពីប៉ែតកែង និង V_0 ជាមាឌរបស់វានោះគេបាន $V_0 = abc = 8\ m^3$ ។

បើទ្រនុងនីមួយៗត្រូវគេបង្កើន $1m$ នោះមាឌនៃអាងទឹកគឺ ៖

$V_1 = (1+a)(1+b)(1+b) = 27\ m^3$

គេមាន

$(1+a)(1+b)(1+c) = 1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\begin{cases} a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \\ ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2} \end{cases}$

គេបាន

$(1+a)(1+b)(1+c) \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{(abc)^2}+\sqrt[3]{(abc)^3} = (1+\sqrt[3]{abc})^3$

នោះ $V_1 = (1+a)(1+b)(1+c) \ge (1+\sqrt[3]{V_0})^3 = (1+\sqrt[3]{8})^3 = 27$

សមភាពកើតមានកាលណា $a=b=c=2\ cm$ ។

បើក្នុងករណីទ្រនុងនីមួយៗឥឡូវនេះត្រូវគេបង្កើន $2m$ ទៀតនោះ រកមាឌអាងទឹកកំណត់ដោយ

$V_2 = (a+2)(b+2)(c+2) = (2+2)(2+2)(2+2) = 64m^3$ ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែប្រចាំ វិទ្យាល័យព្រះមុន្នីវង្ស
ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និង ថ្នាក់ទី១២
សម័យប្រឡង ២០១៣
វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២
រយះពេល ១២០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I)១) ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sin(n!)}{n+1}+\dfrac{\cos(n^2)}{n+2}\right)$

២) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-1}$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ $f'(x)\geq 0\ \forall x\in(3,+\infty)$ ។

II)១)កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x,y,z,t ដែល

$$31(xyzt+xy+xt+zt+1)=40(yzt+y+t)$$ ។

២)គេឲ្យ $f(n)=\dfrac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

កំណត់តម្លៃ $f(1)+f(2)+f(3)+....+f(40)$ ។

III) គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $\{a_n\}$ កំណត់លើសំណុំ $IN \cup \{0\}$ ដែលកំណត់ដោយ $a_0 = 3$ និងទំនាក់ ទំនងកំណើន

$(3 - a_{n+1})(6 + a_n) = 18$ ។

ចូរគណនា $\sum_{k=0}^{2012} \frac{1}{a_k}$?

IV)ចូរស្រាយថា $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ ចែកដាច់នឹង 17 ជានិច្ចគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n ។

V)អនុគមន៍ f មួយផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការអនុគមន៍

$\frac{1}{2} f\left(\frac{2x}{3x-2}\right) + f(x) = 503x$ ។ ចូររកអនុគមន៍ f ?

VI)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាវិសមភាព $\cos^6 x \sin^4 x \le \frac{108}{3125}$ ពិត

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

VII) P ជាចំណុចនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ I, J, K ជាចំណោលកែងនៃចំណុច P លើជ្រុងរៀងគ្នា $[BC], [CA], [AB]$ ចូរកំណត់ចំណុច P ដែលធ្វើឲ្យ $\frac{BC}{PI} + \frac{AC}{PJ} + \frac{AB}{PK}$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

អត្រាកំណែគំរូ

I)១) គណនាលីមីត $L=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin(n!)}{n+1}+\frac{\cos(n^2)}{n+2}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $n>0$ គេមាន $n+1>0$ និង $n+2>0$

ហើយដោយ $-1\le\sin(n!)\le 1$

និង $-1\le\cos(n^2)\le 1$ នោះគេបាន $\frac{-1}{n+1}\le\frac{\sin(n!)}{n+1}\le\frac{1}{n+1}$ (1)

និង $\frac{-1}{n+2}\le\frac{\cos(n^2)}{n+2}\le\frac{1}{n+2}$ (2)

បូក (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន

$$-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\le\frac{\sin(n!)}{n+1}+\frac{\cos(n^2)}{n+2}\le\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$$

នោះ:

$$-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\le\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\sin(n!)}{n+1}+\frac{\cos(n^2)}{n+2}\right]\le\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$0\le\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\sin(n!)}{n+1}+\frac{\cos(n^2)}{n+2}\right]\le 0$$

ដូចនេះ: $L=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin(n!)}{n+1}+\frac{\cos(n^2)}{n+2}\right)=0$ ។

២) កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យ $f'(x)\ge 0\ \forall x\in(3,+\infty)$ ៖

គេមាន $f(x)=\frac{2x^2-3x+m}{x-1}$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ចំពោះគ្រប់ $x \neq 1$ អនុគមន៍ f អាចសរសេរជារាងកាណូនិចដូចខាងក្រោម ៖

$$f(x) = \frac{2x(x-1)-(x-1)+(m-1)}{x-1} = 2x-1+\frac{m-1}{x-1}$$

គេបាន៖

$$f'(x) = (2x-1)' + \left(\frac{m-1}{x-1}\right)' = 2 - \frac{m-1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)^2 - m + 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x-m+3}{(x-1)^2}$$

តាងត្រីធា $g(x) = 2x^2-4x-m+3$ ។ ដើម្បីឲ្យ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (3, +\infty)$ លុះត្រាតែ និង គ្រាន់តែយើងឲ្យ $g(x) = 2x^2-4x-m+3 \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x > 2$ ។

ដោយ $a_g = 2 > 0$ នោះយើងត្រូវសិក្សាពីរករណីខាងក្រោម ៖

-ករណីទី១ $\Delta' \leq 0$

$\Delta' = 4 - 2(-m+3) = 2m-2 \leq 0$

សមមូល $m \leq 1$ ឬ $m \in (-\infty, 1]$ ។

-ករណីទី២ $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a\,g(\alpha) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha < 0 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} 2m-2 > 0 \\ 2(8-8-m+3) \geq 0 \\ 1-2 < 0 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} m-1 > 0 \\ -m+3 \geq 0 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} m > 1 \\ m \le 3 \end{cases}$ សមមូល $1 < m \le 3$ ឬ $m \in (1\,,\,3]$ ។

ដូចនេះ $m \in (-\infty\,,\,1] \cup (1,3]$ ។

II)១)កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x, y, z, t

ដែល $31(xyzt + xy + xt + zt + 1) = 40(yzt + y + t)$

ចំពោះគ្រប់ $x, y, z, t \in IN$ សមីការអាចសរសេរ

$$\frac{xyzt + xy + xt + zt + 1}{yzt + y + t} = \frac{40}{31}$$

$$\frac{x(yzt + y + t) + zt + 1}{yzt + y + t} = x + \frac{zt + 1}{yzt + y + t} = 1 + \frac{9}{31}$$ នាំឲ្យ

$$\begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{zt + 1}{yzt + y + t} = \dfrac{9}{31} \quad (*) \end{cases}$$

តាម (*) គេអាចសរសេរ $\dfrac{yzt + y + t}{zt + 1} = \dfrac{31}{9}$

ឬ $y + \dfrac{t}{zt + 1} = 3 + \dfrac{4}{9}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{t}{zt + 1} = \dfrac{4}{9} \quad (**) \end{cases}$

តាម (**) គេអាចសរសេរ $\dfrac{zt + 1}{t} = \dfrac{9}{4}$ ឬ $z + \dfrac{1}{t} = 2 + \dfrac{1}{4}$

នោះ $z = 2$ និង $t = 4$ ។

ដូចនេះ $x = 1\,,\, y = 3\,,\, z = 2\,,\, t = 4$ ។

២) កំណត់តម្លៃ $S = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(40)$

គេមាន $f(n) = \dfrac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

យក $a = \sqrt{2n+1}$ និង $b = \sqrt{2n-1}$

នោះ $a^2 + b^2 = 2n + 1 + 2n - 1 = 4n$ និង $ab = \sqrt{4n^2 - 1}$

គេអាចសរសេរ

$$f(n) = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{(2n+1)^3} - \sqrt{(2n-1)^3}}{2n + 1 - 2n + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{(2n+1)^3} - \sqrt{(2n-1)^3}}{2}$$

គេបាន៖

$$S = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(40) = \sum_{k=1}^{40} f(k)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{40}\left[\sqrt{(2k+1)^3} - \sqrt{(2k-1)^3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}) + (\sqrt{5^3} - \sqrt{3^3}) + ... + (\sqrt{81^3} - \sqrt{79^3})\right]$$

$$= \frac{\sqrt{81^3} - \sqrt{1^3}}{2}$$

$$= \frac{9^3 - 1^3}{2} = \frac{729 - 1}{2} = \frac{728}{2} = 364$$

ដូចនេះ $S = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(40) = 364$ ។

III) គណនា $\sum_{k=0}^{2012}\frac{1}{a_k}$

គេមាន $(3-a_{n+1})(6+a_n)=18$

សមមូល $18+3a_n-(6+a_n)a_{n+1}=18$ សមមូល $a_{n+1}=\frac{3a_n}{a_n+6}$

សមមូល $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+6}{3a_n}=\frac{1}{3}(1+\frac{6}{a_n})$ ។

តាង $b_n=\frac{1}{a_n}$ នោះ $b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}}$

គេបាន $b_{n+1}=\frac{1}{3}(1+6b_n)$ មានសមីការសម្គាល់ $t=\frac{1}{3}(1+6t)$

ឬ $3t=1+6t$ នាំឲ្យ $t=-\frac{1}{3}$ ។

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $c_n=b_n+\frac{1}{3}$

នោះ $c_{n+1}=b_{n+1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(1+6b_n)+\frac{1}{3}=2(b_n+\frac{1}{3})=c_n$

គេទាញ (c_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ និងតួ

$c_0=b_0+\frac{1}{3}=\frac{1}{a_0}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

គេបាន $c_n=c_0\times q^n=\frac{2}{3}\times 2^n=\frac{2^{n+1}}{3}$ ហើយដោយ $c_n=b_n+\frac{1}{3}$

នោះ $b_n=\frac{2^{n+1}-1}{3}$ ។

យើងបាន៖

$$\sum_{k=0}^{2012}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=0}^{2012}b_k=\sum_{k=0}^{2012}\left(\frac{2^{k+1}-1}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{2012}2^k-\sum_{k=0}^{2012}\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{2^{2013}-1}{2-1}-\frac{2013}{3}$$

$$=\frac{2(2^{2013}-1)-2013}{3}=\frac{2^{2014}-2015}{3}$$

ដូចនេះ $\sum_{k=0}^{2012}\frac{1}{a_k}=\frac{2^{2014}-2015}{3}$ ។

IV) ស្រាយថា $3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ ចែកដាច់នឹង 17 ជានិច្ចគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n ៖

តាង $A_n=3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}=15\times25^n+2\times8^n$

ដោយ $25^n=(17+8)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.17^{n-k}.8^k=(\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k17^{n-k}.8^k)+8^n$

ហើយ $\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k17^{n-k}.8^k=17\lambda_n$, $\lambda_n\in IN$ នោះ $25^n=17\lambda_n+8^n$

(តាមទ្វេធាញូតុន $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k$,$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$)

គេបាន $A_n=15\left(17\lambda_n+8^n\right)+2\times8^n=17(15\lambda_n+8^n)$

ដូចនេះ $A_n=3\times5^{2n+1}+2^{3n+1}$ ចែកដាច់នឹង 17 ជានិច្ច ។

V) រកអនុគមន៍ f

គេមាន $\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)+f(x)=503x \quad (1)$

លក្ខខណ្ឌ $3x-2\neq 0$ ឬ $x\neq\frac{2}{3}$ ។

ជំនួស x ដោយ $\frac{2x}{3x-2}$ ក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{\frac{4x}{3x-2}}{\frac{6x}{3x-2}-2}\right)+f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)=\frac{1006x}{3x-2}$$ ឬ

$$\frac{1}{2}f(x)+f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)=\frac{1006x}{3x-2}$$

ឬ $\frac{1}{4}f(x)+\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)=\frac{503x}{3x-2} \quad (2)$

ដកសមីការ (1) និង (2) គេបាន

$$\frac{3}{4}f(x)=503x-\frac{503x}{3x-2}=\frac{503x(3x-3)}{3x-2}=\frac{3(503x)(x-1)}{3x-2}$$

គេទាញ $f(x)=\frac{4}{3}\times\frac{3(503x)x(x-1)}{3x-2}=2012\times\frac{x(x-1)}{3x-2}$ ។

ដូចនេះ $f(x)=2012\times\frac{x(x-1)}{3x-2}$ ដែល $x\in IR-\{\frac{2}{3}\}$ ។

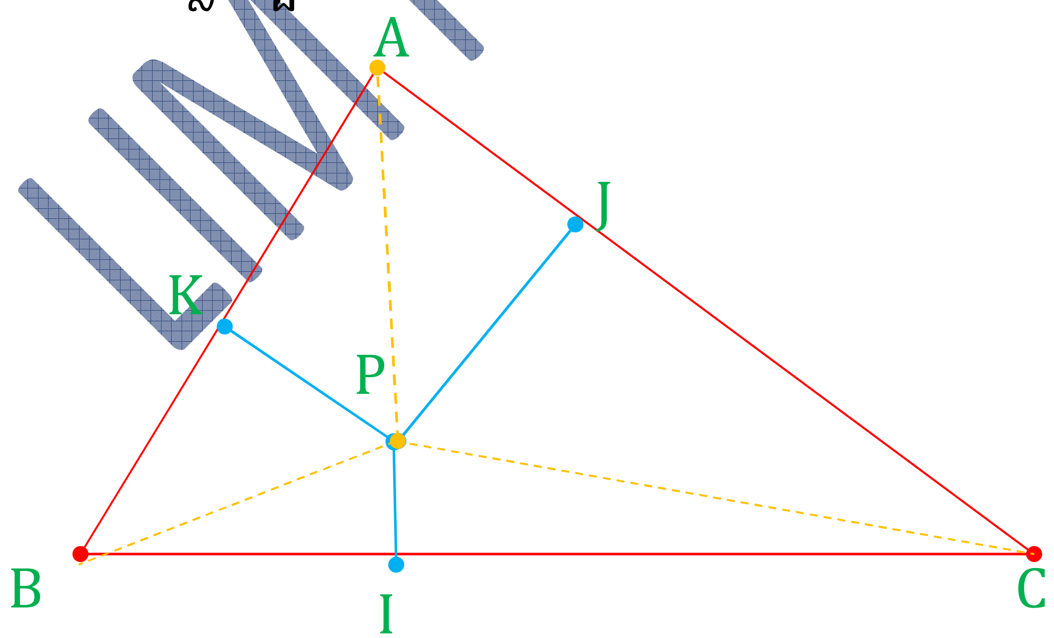
VI) ស្រាយបញ្ជាក់ថាវិសមភាព $\cos^6 x\sin^4 x \le \frac{108}{3125}$ ពិតចំពោះ
គ្រប់ចំនួនពិត x យក $a=\cos^2 x$ និង $b=\sin^2 x$ នោះ
$a+b=\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ។
គេបាន $\cos^6 x\sin^4 x=a^3b^2$ ។ តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង
មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន ៖

$$a+b=\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\ge 5\sqrt[5]{\frac{a^3}{27}\times\frac{b^2}{4}}$$ នោះ

$$a^3b^2\le 27\times 4\times\left(\frac{a+b}{5}\right)^5=\frac{108}{3125}$$ ព្រោះ $a+b=1$

ដូចនេះ $\cos^6 x\sin^4 x=a^3b^2\le\frac{108}{3125}$ ។

VII) កំណត់ចំណុច P ដែលធ្វើឲ្យ $\frac{BC}{PI}+\frac{AC}{PJ}+\frac{AB}{PK}$
មានតម្លៃអប្បបរមា ៖



តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$

និង $PI=x$, $PJ=y$, $PK=z$ ហើយ S ជាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC

យើងបាន $S=S_{PBC}+S_{PCA}+S_{PAB}=\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}by+\frac{1}{2}cz$

នោះ $ax+by+cz=2S$ (1)

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត

a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 គេមាន ៖

$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

ដោយយក $\begin{cases} a_1=\sqrt{\frac{a}{x}}\ ,\ a_2=\sqrt{\frac{b}{y}}\ ,a_3=\sqrt{\frac{c}{y}} \\ b_1=\sqrt{ax}\ ,\ b_2=\sqrt{by}\ ,\ b_3=\sqrt{cz} \end{cases}$

គេបាន $(a+b+c)^2\le\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\left(ax+by+cz\right)$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញ $(a+b+c)^2\le\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\times 2S$ សមមូល $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2S}$

ហេតុនេះគ្រប់ចំណុច P នៅក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន ៖

$\frac{BC}{PI}+\frac{AC}{PJ}+\frac{AB}{PK}=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2S}$ (3)

ដើម្បីឲ្យ $\frac{BC}{PI}+\frac{AC}{PJ}+\frac{AB}{PK}$ មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ

វិសមភាព (3) ក្លាយជាសមភាពពោលគឺគេត្រូវឲ្យ ៖

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ សមមូល $\frac{\sqrt{\frac{a}{x}}}{\sqrt{ax}}=\frac{\sqrt{\frac{b}{y}}}{\sqrt{by}}=\frac{\sqrt{\frac{c}{z}}}{\sqrt{cz}}$

សមមូល $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$

នោះ $x=y=z$ ឬ $PI=PJ=PK$ នាំឲ្យ P ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។

ដូចនេះដើម្បីឲ្យ $\frac{BC}{PI}+\frac{AC}{PJ}+\frac{AB}{PK}$ មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ P ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែប្រចាំ វិទ្យាល័យទ្រៀល

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និង ថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង ២០១៣

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

រយះពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I) គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\to\Re$ ដែល $f(1)=5$

និង $f(n+1)=2f(n)-3$ ។ គណនា $f(2013)$?

គេមាន $f(n+1)=2f(n)-3 \quad (1)$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2^{n+1} គេបាន $\dfrac{f(n+1)}{2^{n+1}}=\dfrac{f(n)}{2^n}-\dfrac{3}{2^{n+1}}$

ឬ $\dfrac{f(n+1)}{2^{n+1}}-\dfrac{f(n)}{2^n}=-\dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

គេបាន $\displaystyle\sum_{n=1}^{2012}\left[\frac{f(n+1)}{2^{n+1}}-\frac{f(n)}{2^n}\right]=-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{2012}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\left(\frac{f(2)}{2^2}-\frac{f(1)}{2}\right)+\left(\frac{f(3)}{2^3}-\frac{f(2)}{2^2}\right)+\ldots+\left(\frac{f(2013)}{2^{2013}}-\frac{f(2012)}{2^{2012}}\right)=-\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2012}}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$\frac{f(2013)}{2^{2013}}-\frac{f(1)}{2}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2^{2013}}$$

ដោយ $f(1)=5$ នោះគេទាញ $\dfrac{f(2013)}{2^{2013}}=4+\dfrac{3}{2^{2013}}$

ឬ $f(2013)=3+2^{2015}$ ។

II) f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(n)=9n^2-3n-2$, $n\in\mathbb{N}$

គណនា $A=\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\ldots+\dfrac{1}{f(671)}$ ។

គេមាន៖

$$f(n)=9n^2-3n-2=9n^2-6n+3n-2=(3n-2)(3n+1)$$

គេបាន

$$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}.\frac{(3n+1)-(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$A=\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\ldots+\frac{1}{f(671)}=\sum_{n=1}^{671}\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{671}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[(1-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{10})+\ldots+(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2014})\right]=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2014}\right)=\frac{2\cdots}{3\times\cdots}$$

ដូចនេះ $A=\dfrac{671}{2014}$ ។

III) គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^n+x-37$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកនឹង $x-2$ ឲ្យសំណល់ស្មើនឹង 2013 ?

តាមទ្រឹស្តីបទសំណល់ បើ $P(x)$ ចែកនឹង $x-2$ ឲ្យសំណល់ស្មើនឹង 2013 នោះ $P(2)=2013$

គេបាន $2^n+2-37=2013$ សមមូល $2^n=2048=2^{20}$

នោះ $n=20$ ។

ដូចនេះ $n=20$ ។

IV) រកគ្រប់អនុគមន៍ f ដែលគ្រប់ $x\neq\{0,1\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$f(x)+f(\frac{1}{1-x})=x+1-\frac{1}{x}$$

គេមាន $f(x)+f(\frac{1}{1-x})=x+1-\frac{1}{x}$ (1)

ជំនួស x ដោយ $\frac{1}{1-x}$ ក្នុង (1) គេបាន

$$f(\frac{1}{1-x})+f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right)=\frac{1}{1-x}+1-(1-x)$$

ឬ $f(\frac{1}{1-x})+f\left(\frac{1-x}{-x}\right)=x+\frac{1}{1-x}$ (2)

ជំនួស x ដោយ $\frac{1-x}{-x}$ ក្នុង (2) គេបាន

$$f\left(\frac{1-x}{-x}\right)+f\left(\frac{1}{1+\frac{1-x}{x}}\right)=-\frac{1-x}{x}+1+\frac{x}{1-x}$$

ឬ $f(\frac{1-x}{-x})+f(x)=-\frac{1}{x}+2+\frac{x}{1-x}$ (3)

យកសមីការ (3) ដក សមីការ(2) រួចបូកសមីការ (1) គេបាន

$$2f(x)=-\frac{1}{x}+2+\frac{x}{1-x}-x-\frac{1}{1-x}+x+1-\frac{1}{x}=-\frac{2}{x}+2$$

នាំឲ្យ $f(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{x-1}{x}$ ។

V) បង្ហាញថាផលបូក ៖

$$S=2\tan 2x+4\tan 4x+8\tan 8x+....+2^n\tan 2^n x=2(\cot 2x-2^n\cot 2^{n+1}x)$$

គេមាន $\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ នោះ

$$\cot 2a=\frac{1}{\tan 2a}=\frac{1-\tan^2 a}{2\tan a}=\frac{1}{2}\cot a-\frac{1}{2}\tan a$$

នាំឲ្យ $\tan a=\cot a-2\cot 2a$ រួចយក $a=2^k x$ នោះ

$\tan 2^k x=\cot 2^k x-2\cot 2^{k+1}x$ គេបាន

$$S=2\tan 2x+4\tan 4x+8\tan 8x+....+2^n\tan 2^n x=\sum_{k=1}^{n}2^k\tan 2^k x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(2^k\cot 2^k x-2^{k+1}\cot 2^{k+1}x\right)$$

$$=(2\cot 2x-4\cot 4x)+(4\cot 4x-8\cot 8x)+...+(2^n\cot 2^n x-2^{n+1}\cot 2^{n+1}x)$$

$$=2\cot 2x-2^{n+1}\cot 2^{n+1}x=2(\cot 2x-2^n\cot 2^{n+1}x)$$

ដូចនេះ $S=2(\cot 2x-2^n\cot 2^{n+1}x)$ ។

VI) ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\le\frac{1}{xyz}$$

គ្រប់ $x,y,z>0$ ។

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន ៖

$$x^2+y^2\ge 2xy\Leftrightarrow x^2-xy+y^2\ge xy\Leftrightarrow(x+y)(x^2-xy+y^2)\ge xy(x+y)$$

$$x^3+y^3\ge xy(x+y)\Leftrightarrow x^3+y^3+xyz\ge xy(x+y)+xyz=xy(x+y+z)$$

គេទាញបាន

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}\le\frac{1}{xy(x+y+z)}=\frac{z}{xyz(x+y+z)}\quad(1)$$

ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាដែរគេបាន ៖

$$\frac{1}{y^3+z^3+xyz}\le\frac{x}{xyz(x+y+z)}\quad(2)\ ;\ \frac{1}{z^3+x^3+xyz}\le\frac{y}{xyz(x+y+z)}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព (1),(2),(3) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\le\frac{x+y+z}{xyz(x+y+z)}=\frac{1}{xyz}$$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{x^3+y^3+xyz}+\dfrac{1}{y^3+z^3+xyz}+\dfrac{1}{z^3+x^3+xyz}\le\dfrac{1}{xyz}$

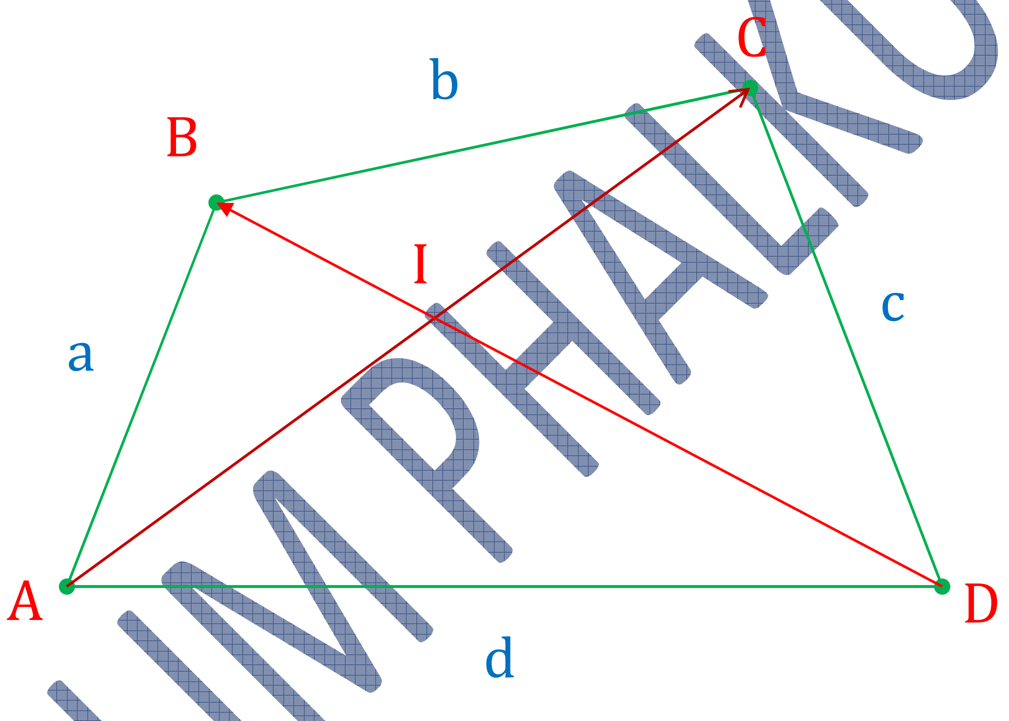
វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពនៅពេលដែល $x = y = z$ ។

VII)គេឲ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានរង្វាស់ជ្រុង

$AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ផលគុណស្កាលែ ៖

$$\overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)$$ ។



តាមទំនាក់ទំនងសាគេមាន $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

និង $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ នោះគេបាន ៖

$$\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow AB^2-AC^2-CB^2=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}\ (1)$$

$$\overrightarrow{AD}^2=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow AD^2-AC^2-CD^2=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}\ (2)$$

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន

$$AB^2-CB^2+CD^2-AD^2=2(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD})=2\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})=2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$$

គេទាញ

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=\frac{AB^2-CB^2+CD^2-AD^2}{2}=\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{2}$$ ពិត

ដូចនេះ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2-d^2)$ ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែប្រចាំ រាជធានីភ្នំពេញ
ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និង ថ្នាក់ទី១២
សម័យប្រឡង ២០១២
វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ លើកទី១
រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. រកចំនួនគត់ធំបំផុតមានរាង $A=\dfrac{2013!+2010!}{2012!+2011!}$

II. រកគ្រប់តម្លៃនៃ b ដែល $B=\overline{111....111}-\overline{bbb....bbb}$ ជាចំនួនការេ ដោយដឹងថា លេខ 1 មាន 4024 ខ្ទង់ និង b មាន 2012 ខ្ទង់។

III. ដោះស្រាយសមីការ

$(x^{2012}+1)(1+x^2+x^4+...+x^{2010})=2012x^{2011}$

IV. ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ក្រាបនៃអនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូល

$y=(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1$ កាត់អ័ក្ស

អាប់ស៊ីសត្រង់ពីរចំណុច A_n និង B_n។ គណនា $\sum_{n=1}^{2012} A_nB_n$

V. គេឲ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$

VI. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) ជាស្វ៊ីតរួម កំណត់ដោយ

$x_1 = 1 , x_2 = 2012 \ , \ x_{n+2} = \sqrt[3]{x_{n+1}^2 x_n}$

គណនា $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

VII. ABC ជាត្រីកោណដែលមានជ្រុង

$AB = 13 , BC = 15 , AC = 14$ ។

ចំណុច D , E , F នៅលើជ្រុង AB, BC, CA រៀងគ្នា ដែល

$$\frac{AD}{AB} = x \ , \ \frac{BE}{BC} = y \ , \ \frac{CF}{CA} = z$$

និង $x + y + z = \frac{2}{3} \ , \ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{5}$ ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ DEF ។

✧✧✧✧✧

អត្រាកំណែគំរូ

I. រកចំនួនគត់ធំបំផុតមានរាង $A=\dfrac{2013!+2010!}{2012!+2011!}$ ។

គេមាន $2013!+2010!=2010!(2011\times2012\times2013+1)$

និង $2012!+2011!=2011!(2012+1)=2010!2011\times2013$

នោះ $A=\dfrac{2011\times2012\times2013+1}{2011\times2013}=2012+\dfrac{1}{2011\times2013}$

ដូចនេះផ្នែកគត់នៃ A គឺ $\lfloor A\rfloor=2012$ ។

II. រកគ្រប់តម្លៃនៃb ដែល $B=\overline{111....111}-\overline{bbb....bbb}$

ជាចំនួនការេ ដោយដឹងថា លេខ 1 មាន 4024 ខ្ទង់ និង b មាន 2012ខ្ទង់។ គេអាចសរសេរ

$$B=\frac{1}{9}(10^{4024}-1)-\frac{b}{9}(10^{2012}-1)=\frac{10^{4024}-b.10^{2012}+b-1}{9}$$

យក $x=10^{2012}$

និង $N=10^{4024}-b.10^{2012}+b-1=x^2-bx+b-1$ ។

ចំនួន B ជាការេប្រាកដបានលុះត្រាតែ N អាចសរសេរជាការេនៃទ្វេធាពោលគេត្រូវឲ្យ $\Delta=0$

ដោយ $\Delta=b^2-4(b-1)=(b-2)^2=0$ នោះ $b=2$ ។

ដូចនេះ $b=2$ ហើយ

$$B=\frac{10^{4024}-2.10^{2012}+1}{9}=\left(\frac{10^{2012}-1}{3}\right)^2=\left(\underbrace{333...333}_{2012}\right)^2$$ ។

III. ដោះស្រាយសមីការ

$$(x^{2012}+1)(1+x^2+x^4+...+x^{2010})=2012x^{2011}$$

ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ គេមាន $x^{2012}+1>0$ និង

$1+x^2+x^4+...+x^{2010}>0$

នោះអង្គទីមួយនៃសមីការជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះគេបាន

$2012x^{2011}>0$ ឬ $x>0$ ។

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន

$x^{2012}+1\ge 2x^{1006}$ និង

$1+x^2+x^4+...+x^{2010}\ge 1006\sqrt[1006]{x^{2+4+...+2010}}=1006x^{1005}$

នោះ $(x^{2012}+1)(1+x^2+x^4+...+x^{2010})\ge 2012x^{2011}$ ជាករណី

ដែលវិសមភាពក្លាយជាសមភាពនោះគេបាន $x^{2012}=1$ នាំឲ្យ

$x=1$ ជាឫសតែមួយគត់នៃសមីការ ។

IV. ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ក្រាបនៃអនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូល

$$y=(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1$$ កាត់អ័ក្ស

អាប់ស៊ីសត្រង់ពីរចំណុច A_n និង B_n ។ គណនា $\sum_{n=1}^{2012}A_nB_n$

បើ $y=0\Leftrightarrow(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1=0\quad(E)$

តាង α_n និង β_n ជាអាប់ស៊ីសនៃចំណុច A_n និង B_n នោះ α_n និង β_n ជាឫសនៃសមីការ (E) តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន

$$\alpha_n+\beta_n=\frac{2n+1}{n^2+n}\ \ (1)\ \text{ និង }\ \alpha_n\beta_n=\frac{1}{n^2+n}\ \ (2)$$

គេមាន

$$A_nB_n=|\beta_n-\alpha_n|=\sqrt{(\beta_n-\alpha_n)^2}=\sqrt{(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n}\ \ (3)$$

យក (1) និង (2) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន ៖

$$A_nB_n=\sqrt{\frac{(2n+1)^2}{n^2(n+1)^2}-\frac{4}{n(n+1)}}=\frac{\sqrt{4n^2+4n+1-4n^2-4n}}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

គេបាន

$$\sum_{n=1}^{2012}A_nB_n=\sum_{n=1}^{2012}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2013}=\frac{2012}{2013}$$

ដូចនេះ $\sum_{n=1}^{2012}A_nB_n=\frac{2012}{2013}$ ។

V. គេឲ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$

តាមវិសភាព $AM-GM:\ \ x^2+yz\ge 2x\sqrt{yz}$

នោះគេទាញ $\frac{1}{x^2+yz}\le\frac{1}{2x\sqrt{yz}}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{y^2+zx}\le\frac{1}{2y\sqrt{zx}}$ និង $\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2z\sqrt{xy}}$ ។

គេបាន

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{yz}}+\frac{1}{y\sqrt{xz}}+\frac{1}{z\sqrt{xy}}\right)\ \textbf{(1)}$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេមាន ៖

$$\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}.\frac{1}{\sqrt{xz}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}.\frac{1}{\sqrt{yx}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}.\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)^2\le\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)$$

$$\left(\frac{1}{x\sqrt{yz}}+\frac{1}{y\sqrt{zx}}+\frac{1}{z\sqrt{xy}}\right)^2\le\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x\sqrt{yz}}+\frac{1}{y\sqrt{zx}}+\frac{1}{z\sqrt{xy}}\le\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\quad\textbf{(2)}$$

តាម (1) និង (2) គេទាញ

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$ ។

VI. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) ជាស្វ៊ីតរួម កំណត់ដោយ

$x_1=1\,,x_2=2012\ ,\ x_{n+2}=\sqrt[3]{x_{n+1}^2x_n}$

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

គេមាន $x_{n+2}=\sqrt[3]{x_{n+1}^2 x_n}$ នោះ $\ln x_{n+2}=\dfrac{2\ln x_{n+1}+\ln x_n}{3}$

$\ln x_{n+2}-\ln x_{n+1}=\dfrac{\ln x_n-\ln x_{n+1}}{3}$ ឬ

$\ln\left(\dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}}\right)=-\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ តាង $y_n=\ln\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$

គេបាន $y_{n+1}=-\dfrac{1}{3}y_n$ នោះ (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង

$q=-\dfrac{1}{3}$ និងតួ $y_1=\ln 2012$

គេបាន $y_n=y_1\times q^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\ln 2012=\ln 2012^{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

ដោយ $y_n=\ln\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$

គេទាញបាន $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=(2012)^{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$ ឬ $\dfrac{x_{k+1}}{x_k}=(2012)^{\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{x_{k+1}}{x_k}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}(2012)^{\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}}$

ឬ $\dfrac{x_n}{x_1}=(2012)^{\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}}$

ដោយ $\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$

និង $x_1=1$ គេបាន $x_n=(2012)^{\frac{3}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}x_n=2012^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2012^3}$ ។

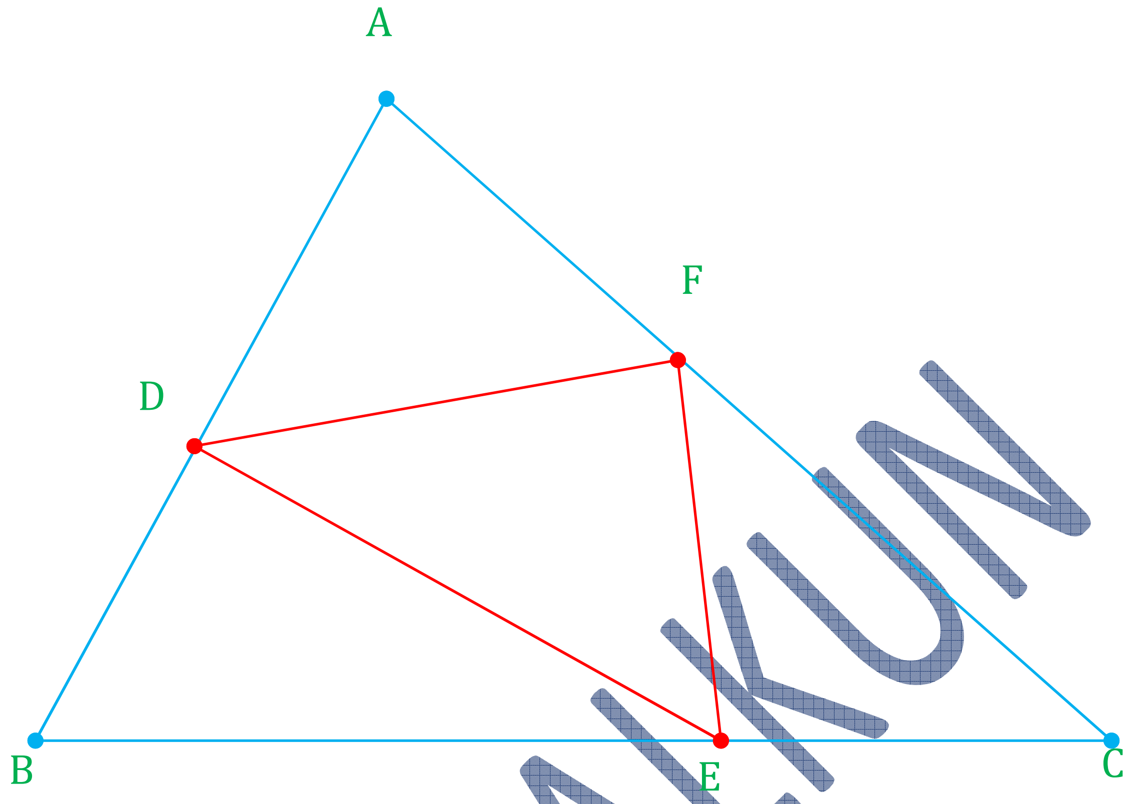
VII. ABC ជាត្រីកោណដែលមានជ្រុង

$AB=13$, $BC=15$, $AC=14$ ។ ចំណុច D,E,F នៅលើជ្រុង

AB,BC,CA រៀងគ្នា ដែល $\frac{AD}{AB}=x$, $\frac{BE}{BC}=y$, $\frac{CF}{CA}=z$ និង

$x+y+z=\frac{2}{3}$, $x^2+y^2+z^2=\frac{2}{5}$

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ DEF ។



គេមាន $S_{DEF} = S_{ABC} - \left(S_{ADF} + S_{BED} + S_{CFE} \right)$ (1)

គេមាន $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AD.AF}{AB.AC}$ តែ $\frac{AD}{AB} = x$ ហើយ $\frac{CF}{CA} = z$

នោះ $\frac{AF}{AC} = 1 - \frac{CF}{CA} = 1 - z$

គេបាន $\frac{S_{ADF}}{S_{ABC}} = x(1-z)$ ឬ $S_{ADF} = x(1-z) S_{ABC}$ (2)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ

$S_{BED} = y(1-x) S_{ABC}$ (3) , $S_{CFE} = z(1-y) S_{ABC}$ (4)

យក (2),(3) & (4) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$S_{DEF}=S_{ABC}\left[1-\left(x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)\right]=[1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)]S_{ABC}\right.$$

គេមាន $x+y+z=\frac{2}{3}$, $x^2+y^2+z^2=\frac{2}{5}$ នោះ

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}$$

ឬ $xy+yz+zx=\dfrac{\frac{4}{9}-\frac{2}{5}}{2}=\frac{1}{45}$

ហើយ $S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

ដោយ $p=\frac{13+14+15}{2}=21$ នោះ

$$S_{ABC}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=84$$

ដូចនេះ $S_{DEF}=\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{45}\right)\times 84=\frac{16\times 28\times 3}{15\times 3}=\frac{448}{15}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

✧✧✧✧✧

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង ០២ មេសា ២០១២

វិញ្ញាសាទី០១ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ សម្រាប់ថ្ងៃទី០២ មេសា ២០១២

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

✧✧✧❀✧✧✧

I-(ពិន្ទុ 10) គណនាផលបូក

$S_{2012}=\cos a+\cos 2a+\cos 3a+...+\cos 2012a$ ។

II-(ពិន្ទុ 10) បង្ហាញថា $A=6^{2012}+13^{2012}-2^{2012}-17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44 ។

III-(ពិន្ទុ 10) ដោះស្រាយសមីការ

$\sin^2 x^2+\sin^2 2x^2=\sin^2 3x^2+\sin^2 4x^2$ ។

IV-(ពិន្ទុ 15) ប្រអប់មួយមានបាតជាចតុកោណកែងដែលមានអង្កត់ទ្រូងប្រវែង $D(a)=\dfrac{a^2-\sqrt{a^4+4}+2}{a}$ ដែល $a>0$

រកប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់បាតប្រអប់ ។

V-(ពិន្ទុ 15) ពហុធា $r(x)=x^5-5x^3-3x^2+2x+1$ មានឫស ប្រាំផ្សេងគ្នា a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ហើយ $s(x)=-x^2+5$ ជាពហុធា មួយទៀត ។

គណនាផលគុណ $P=s(a_1).s(a_2).s(a_3).s(a_4).s(a_5)$ ។

VI-(ពិន្ទុ 20) អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$ ដែល a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានខុសពី1 ។

គណនាផលបូក $S=f\left(\dfrac{1}{2012}\right)+f\left(\dfrac{2}{2012}\right)+...+f\left(\dfrac{2011}{2012}\right)$

VII-(ពិន្ទុ 20) រង្វង់ផ្ចិត O កាំ R មួយចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមានមុំក្នុងទាំងបីជាមុំស្រួចហើយ $\angle ACB$, $\angle ABC$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\angle ACB-\angle ABC\geq\dfrac{\pi}{6}$ ។ H ជាចំណោល កែងកំពូល A ទៅលើជ្រុង BC របស់ត្រីកោណ ។ បង្ហាញថា $\angle BAC+\angle COH<\dfrac{\pi}{2}$?

✧✧✧❀✧✧✧

អត្រាកំណែគំរូ

I-(ពិន្ទុ 10) គណនាផលបូក

$S_{2012} = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + ... + \cos 2012a$

✧ករណី $a = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ នោះ

$\cos a = \cos 2a = ... = \cos 2012a = 1$

គេបាន $S_{2012} = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = 2012$ ។

✧ករណី $a \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ នោះ $\sin \frac{a}{2} \neq 0$

តាមរូបមន្ត $\cos \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}$ បើគេយក

$\alpha = ka$, $\beta = \frac{a}{2}$

គេបាន $\cos(ka) \sin \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin \frac{(2k+1)a}{2} - \sin \frac{(2k-1)a}{2} \right]$

គេទាញបាន

$$\cos(ka) = \frac{1}{2\sin \frac{a}{2}} \times \left[\sin \frac{(2k+1)a}{2} - \sin \frac{(2k-1)a}{2} \right]$$

ហេតុនេះ

$$S_{2012} = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + ... + \cos 2012a = \sum_{k=1}^{2012} \left[\cos(ka) \right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\sum_{k=1}^{2012}\left[\sin\frac{(2k+1)a}{2}-\sin\frac{(2k-1)a}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}.\left[(\sin\frac{3a}{2}-\sin\frac{a}{2})+(\sin\frac{5a}{2}-\sin\frac{3a}{2})+...+(\sin\frac{4015a}{2}-\sin\frac{4013a}{2})\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}.\left(\sin\frac{4015a}{2}-\sin\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\times 2\sin 1006a.\cos\frac{2013a}{2}$$

ដូចនេះ $S_{2012}=\dfrac{\sin(1006a)\times\cos(\frac{2013a}{2})}{\sin\frac{a}{2}}$

ដែល $a\neq 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ។

II-(ពិន្ទុ 10) បង្ហាញថា $A=6^{2012}+13^{2012}-2^{2012}-17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44 គេមាន $44=2^2\times 11$ ដោយ $\gcd(2^2,11)=1$ នោះ ដើម្បីបង្ហាញថា $44|A$ យើងគ្រាន់តែស្រាយឲ្យឃើញថា $4|A$ និង $11|A$ ។

តាមរូបមន្ត $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1})$ គេបាន

$6^{2012}-2^{2012}=(6-2).q_1=4q_1$ និង

$17^{2012}-13^{2012}=(17-13)q_2=4q_2$ ដែល $q_1,q_2\in\mathbb{N}$

គេទាញ $A=4q_1-4q_2=4(q_1-q_2)$ នោះ $4|A$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $6^{2012}-17^{2012}=(6-17)q_3=-11q_3$ និង

$13^{2012}-2^{2012}=(13-2)q_4=11q_4$

ដែល $q_3,q_4\in\mathbb{N}$ ។គេទាញ $A=11q_4-11q_3=11(q_4-q_3)$

នោះ $11\,|\,A$ ។

ដូចនេះ $A=6^{2012}+13^{2012}-2^{2012}-17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44 ។

III-(ពិន្ទុ 10) ដោះស្រាយសមីការ

$\sin^2 x^2+\sin^2 2x^2=\sin^2 3x^2+\sin^2 4x^2$

តាមរូបមន្ត $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ នោះសមីការអាចបម្លែងជា ៖

$$\frac{1-\cos 2x^2}{2}+\frac{1-\cos 4x^2}{2}=\frac{1-\cos 6x^2}{2}+\frac{1-\cos 8x^2}{2}$$

សមមូល $\cos 2x^2+\cos 4x^2=\cos 6x^2+\cos 8x^2$

សមមូល $2\cos 3x^2.\cos x^2=2\cos 7x^2.\cos x^2$

សមមូល $\cos x^2(\cos 3x^2-\cos 7x^2)=0$

សមមូល $2\cos x^2\sin 5x^2\sin 2x^2=0$

ដើម្បីឲ្យផលគុណនៃកត្តាស្មើសូន្យលុះត្រាតែកត្តានីមួយៗស្មើសូន្យ

-បើ $\cos x^2=0$ សមមូល $x^2=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\ ,k=0,1,2,...$

គេទាញ $x=\pm\sqrt{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}}\ ,k=0,1,2,3...$ ។

-បើ $\sin 5x^2=0$ សមមូល $5x^2=k\pi\ ,k=0,1,2,...$

គេទាញ $x=\pm\sqrt{\frac{k\pi}{5}}$, $k=0,1,2,3...$ ។

-បើ $\sin 2x^2=0$ សមមូល $2x^2=k\pi$, $k=0,1,2,...$

គេទាញ $x=\pm\sqrt{\frac{k\pi}{2}}$, $k=0,1,2,3...$ ។

IV-(ពិន្ទុ 15) រកប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់បាតប្រអប់តាមសម្មតិកម្ម ប្រអប់នោះមានបាតជាចតុកោណកែងដែលមានអង្កត់ទ្រូងប្រវែង $D(a)=\frac{a^2-\sqrt{a^4+4}+2}{a}$ ដែល $a>0$

គុណភាគយក និង ភាគបែងនៃ $D(a)$ និងកន្សោមឆ្លាស់ $a^2+2+\sqrt{a^4+4}$

គេបាន ៖

$$D(a)=\frac{(a^2+2)^2-(a^4+4)}{a(a^2+2+\sqrt{a^4+4})}=\frac{4a}{a^2+2+\sqrt{a^2+4}}=\frac{4}{a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}}$$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រ (AM-GM)

ចំពោះគ្រប់ $a>0$ គេមាន $a+\frac{2}{a}\geq 2\sqrt{2}$ និង $a^2+\frac{4}{a^2}\geq 4$ នោះ

$$a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}\geq 2\sqrt{2}+2$$

គេទាញ $D(a)\leq\frac{4}{2\sqrt{2}+2}=2\,(\sqrt{2}-1)$ ។ វិសមភាពកើតមានកាលណា $a=\sqrt{2}$ ។

ដូចនេះប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់បាតប្រអប់ស្មើនឹង $2(\sqrt{2}-1)$ ឯកតាប្រវែង ។

V-(ពិន្ទុ 15) គណនាផលគុណ $P = s(a_1).s(a_2).s(a_3).s(a_4).s(a_5)$

ដោយ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ជាឬសពហុធា

$r(x) = x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទកត្តា

គេអាចសរសេរ

$$r(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5) = \prod_{k=1}^{5}(x-a_k)$$

ហើយគេមាន $s(x) = -x^2 + 5 = (\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)$

គេបាន

$$P = s(a_1).s(a_2).s(a_3).s(a_4).s(a_5) = \prod_{k=1}^{5}(\sqrt{5}-a_k)(\sqrt{5}+a_k)$$

$$= \prod_{k=1}^{5}(\sqrt{5}-a_k) \times \prod_{k=1}^{5}(\sqrt{5}+a_k) = -\prod_{k=1}^{5}(\sqrt{5}-a_k) \times \prod_{k=1}^{5}(-\sqrt{5}-a_k)$$

ព្រោះ $\prod_{k=1}^{5}(\sqrt{5}+a_k) = -\prod_{k=1}^{5}(-\sqrt{5}-a_k)$ ។

ដោយ $\prod_{k=1}^{5}(\sqrt{5}-a_k) = r(\sqrt{5})$ និង $\prod_{k=1}^{5}(-\sqrt{5}-a_k) = r(-\sqrt{5})$

គេបាន $P = -r(\sqrt{5}) \times r(-\sqrt{5})$ ។

$$r(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^5 - 5(\sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1 = -14 + 2\sqrt{5}$$

$r(-\sqrt{5}) = (-\sqrt{5})^5 - 5(-\sqrt{5})^3 - 3(-\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1 = -14 - 2\sqrt{5}$

ហេតុនេះ $P = -r(\sqrt{5}) \times r(-\sqrt{5}) = -(-14 + 2\sqrt{5})(-14 - 2\sqrt{5})$

$$= -\left[(-14)^2 - (2\sqrt{5})^2\right] = -(196 - 20) = -176$$

ដូចនេះ $P = s(a_1).s(a_2).s(a_3).s(a_4).s(a_5) = -176$ ។

VI-(ពិន្ទុ 20) គណនាផលបូក

$$S = f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2}{2012}\right) + \dots + f\left(\frac{2011}{2012}\right)$$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយថាគ្រប់ $m, n \in IR$ បើ $m + n = 1$ នោះ $f(m) + f(n) = 1$

គេមាន $f(m) + f(n) = \dfrac{a^m}{a^m + \sqrt{a}} + \dfrac{a^n}{a^n + \sqrt{a}}$

$$= \frac{a^m(a^n + \sqrt{a}) + a^n(a^m + \sqrt{a})}{(a^m + \sqrt{a})(a^n + \sqrt{a})} = \frac{a^{m+n} + a^{m+\frac{1}{2}} + a^{m+n} + a^{n+\frac{1}{2}}}{a^{m+m} + a^{m+\frac{1}{2}} + a^{n+\frac{1}{2}} + a}$$

$$= \frac{a + a^{m+\frac{1}{2}} + a + a^{n+\frac{1}{2}}}{a + a^{m+\frac{1}{2}} + a^{n+\frac{1}{2}} + a} = \frac{2a + a^{m+\frac{1}{2}} + a^{n+\frac{1}{2}}}{2a + a^{m+\frac{1}{2}} + a^{n+\frac{1}{2}}} = 1$$

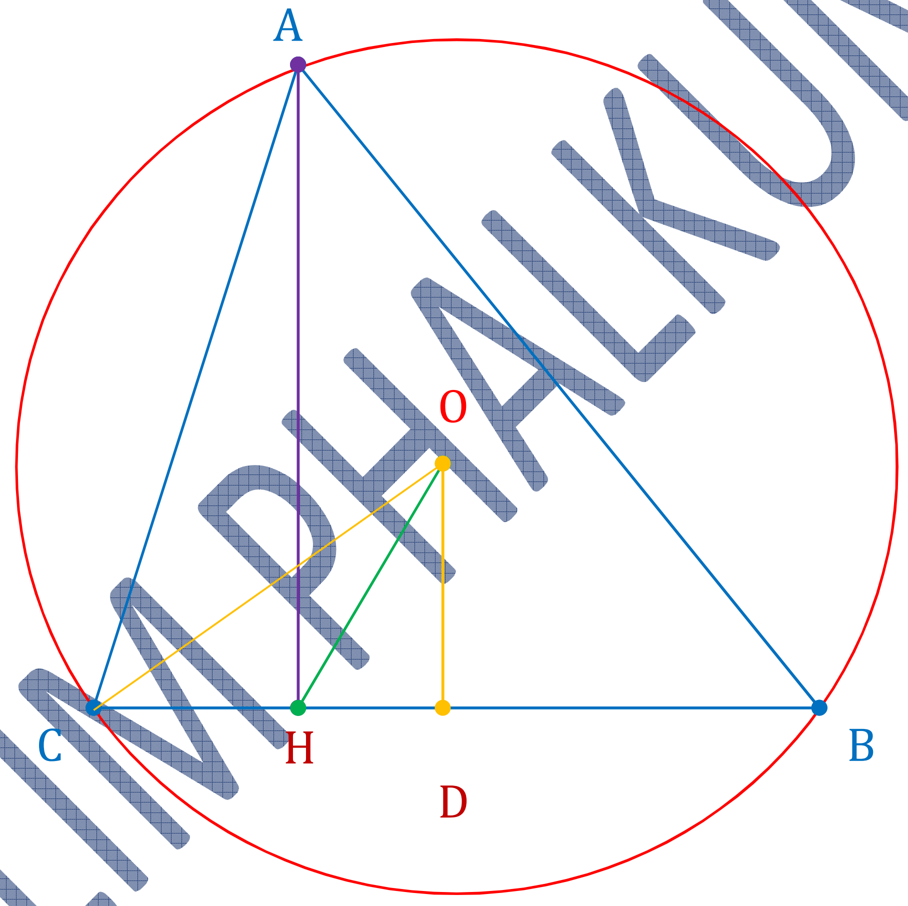
គេមាន $S = f\left(\dfrac{1}{2012}\right) + f\left(\dfrac{2}{2012}\right) + \dots + f\left(\dfrac{2011}{2012}\right)$ (1)

ឬ $S = f\left(\dfrac{2011}{2012}\right) + f\left(\dfrac{2010}{2012}\right) + \dots + f\left(\dfrac{1}{2012}\right)$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន $2S = \underbrace{1+1+....+1}_{(2011)} = 2011$ ។

ដូចនេះ $S = \dfrac{2011}{2}$ ។

VII-(ពិន្ទុ 20)បង្ហាញថា $\angle BAC + \angle COH < \dfrac{\pi}{2}$ ៖



យក D ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BC]$ នោះ $OD \perp BC$ ។

គេមាន $\angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle COB = \angle COD$ (មុំផ្ចិត និង មុំចារឹកក្នុងរង្វង់

ដោយ $\angle COD = \frac{\pi}{2} - \angle OCH$ នោះ $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \angle OCH$

សមមូល $\angle BAC + \angle OCH = \frac{\pi}{2}$ នោះដើម្បីស្រាយថា

$\angle BAC + \angle COH < \frac{\pi}{2}$ ពិត

យើងត្រូវស្រាយឲ្យបានថា $\angle COH < \angle OCH$ សមមូល

$HO > HC$ ពិត ។

តាង

$BC = a\ ,\ AC = b\ ,\ AB = c\ ,\ \angle ACB = C\ ,\ \angle ABC = B\ ,\angle BAC = A$

និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ$\Delta\ ABC$ ។

គេមាន $\angle ACB - \angle ABC \ge \frac{\pi}{6}$ ឬ $C - B \ge \frac{\pi}{6}$ សមមូល

$\sin(C - B) \ge \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

សមមូល $\sin C\cos B - \sin B\cos C \ge \frac{1}{2}$ (1)

គេមាន $\sin B = \frac{b}{2R}\ ,\ \sin C = \frac{c}{2R}$ (ទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស)

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\ ,\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស)

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរជា

$$\frac{c}{2R}.\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - \frac{b}{2R}.\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \ge \frac{1}{2}$$

សម្មូល $c^2 - b^2 \geq a\,R$ (2)

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរ័អនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណកែង OHD គេបាន

$HO^2 = OD^2 + DH^2$

គេទាញ

$$HO^2 - HC^2 = OD^2 + (DC - HC)^2 - HC^2 = OD^2 + DC^2 - 2DC.HC$$

$$= OD^2 + \frac{a^2}{4} - 2.\frac{a}{2}.b\cos C = OD^2 + \frac{a^2}{4} - ab.\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= OD^2 + \frac{c^2 - b^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad (3)$$

តាម (2) និង (3) គេបាន

$$HO^2 - HC^2 \geq OD^2 + \frac{aR}{2} - \frac{a^2}{4} = OD^2 + \frac{a}{4}(2R - a) \quad (4)$$

ដោយមុំ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ $a < 2R$ និង $OD > 0$ នោះ

តាម (4) គេទាញបាន $HO^2 - HC^2 > 0$ ឬ $HO > HC$ ពិត

ដូចនេះ $\angle BAC + \angle COH < \frac{\pi}{2}$ ។

✧✧✧❀✧✧✧

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស
ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២
សម័យប្រឡង ០២ មេសា ២០១២
វិញ្ញាសាទី០២ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ សម្រាប់ថ្ងៃទី០២ មេសា ២០១២
រយះពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

✧✧✧❀✧✧✧

I-(ពិន្ទុ 10) គេតាង $\lfloor x \rfloor$ ជាផ្នែកគត់នៃ x ហើយដែលកំណត់ដោយ $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$ ។

បង្ហាញថាបើ b ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វវិជ្ជមាននោះគេបាន

$$\left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{b} \right\rfloor$$ ។

II-(ពិន្ទុ 10) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ

$$f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{p}\,x)$$

ដែល p ជាចំនួនបឋម ។ បង្ហាញថា f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ ។

III-(ពិន្ទុ 20) គេឲ្យផលបូក

$$S(a,b) = (a+1)^b + (a+2)^b + (a+3)^b + (a+4)^b + (a+5)^b$$

ដែល a និង b ជាពីរចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វមិនអវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនពហុគុណនៃ 4

IV-(ពិន្ទុ 20) សមីការ $t^3 = 3t^2 + 4t - 5$ មានឬសបីផ្សេងគ្នា a,b,c

គណនាតម្លៃលេខ $F_7(a,b,c) = \frac{a^7 - b^7}{a - b} + \frac{b^7 - c^7}{b - c} + \frac{c^7 - a^7}{c - a}$

V-(ពិន្ទុ 20) ត្រីកោណ ABC មួយមាន $\angle ABC = 2\alpha$ និងផ្ទៃក្រលា S ។ D ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅ លើជ្រុង $[AC]$ ហើយដែលរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABD ប៉ុនគ្នានឹងរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ BCD ។ បង្ហាញថា $BD = \sqrt{\frac{S}{\tan\alpha}}$ ។

VI-(ពិន្ទុ 20) ស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

1)បង្ហាញថា $x_{k+1}.x_{k+2} - x_k.x_{k+3} = (-1)^k$ ចំពោះគ្រប់ $k \in IN$

2)គេតាង $arc\cot x$ ជាអនុគមន៍ច្រាស់នៃអនុគមន៍ $\cot x$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$arc\cot x_1 - arc\cot x_3 - arc\cot x_5 - .... - arc\cot x_{2011} = arc\cot x_{2012}$$

✧✧✧❀✧✧✧

អត្រាកំណែគំរូ

I-(ពិន្ទុ 10) បង្ហាញថា $\left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{b} \right\rfloor$

ឧបមាថា $\lfloor x \rfloor = a$ ។

តាមវិធីចែកអឺគ្លីតរវាងចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b គេបាន ៖

$a = bq + r$ ដែល $0 \le r < b$ និង $r, q \in IN$ ។

តាម $0 \le r < b$ គេបាន $bq \le bq + r < bq + q$

ឬ $bq \le a < (q+1)b$ នាំឲ្យ $q \le \frac{a}{b} < q + 1$ នោះគេទាញបាន

ផ្នែកគត់នៃ $\frac{a}{b}$ គឺ $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{b} \right\rfloor = q$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$

នោះ $x = \lfloor x \rfloor + \lambda$, $0 \le \lambda < 1$ តែ $\lfloor x \rfloor = a = bq + r$

គេបាន $x = bq + r + \lambda$ នាំឲ្យ $\frac{x}{b} = q + \frac{r+\lambda}{b}$

ដោយ $0 \le r \le b - 1$ និង $0 \le \lambda < 1$ នោះ $0 \le r + \lambda < b$

ឬ $0 \le \frac{r+\lambda}{b} < 1$ ថែម q លើអង្គទាំងពីរគេបាន

$q \le q + \frac{r+\lambda}{b} < 1 + q$ ឬ $q \le \frac{x}{b} < q + 1$

នោះគេទាញបានផ្នែកគត់នៃ $\frac{x}{b}$ គឺ $\left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor = q$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\left\lfloor \dfrac{x}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor}{b} \right\rfloor$ ។

II-(ពិន្ទុ 10) បង្ហាញថា f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ

គេមាន $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{p}x)$ ដែល p ជាចំនួនបឋម

យើងឧបមាថា f ជាអនុគមន៍ខួប ដែលមានខួបស្មើ $T > 0$ ។

តាមនិយមន័យអនុគមន៍ខួបគេបាន

$\forall x \in IR : f(x+T) = f(x)$ ។

ជ្រើសរើស $x = 0$ គេបាន $f(T) = f(0)$ តែ

$f(0) = 2$, $f(p) = \cos T + \cos\sqrt{p}T$

គេបាន $\cos T + \cos\sqrt{p}T = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos T = 1 \\ \cos\sqrt{p}T = 1 \end{cases}$ (ព្រោះ

$\cos T \le 1$, $\cos\sqrt{p}T \le 1$)

គេទាញ $\begin{cases} T = 2k_1\pi \\ \sqrt{p}T = 2k_2\pi \end{cases}$, $(k_1, k_2 \in IN)$

តាម $\sqrt{p}T = 2k_2\pi$ គេទាញ $\sqrt{p} = \dfrac{2k_2\pi}{T} = \dfrac{2k_2\pi}{2k_1\pi} = \dfrac{k_2}{k_1}$ មិនអាច

មានព្រោះ $\dfrac{k_2}{k_1}$ ជាចំនួនសនិទាន

ហើយ $\sqrt{p}$ ជាចំនួនអសនិទានគ្រប់ចំនួនបឋម p ។

ដូចនេះ f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ ។

III-(ពិន្ទុ 20)

បង្ហាញថា $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនពហុគុណនៃ 4

គេមាន ៖

$$S(a,b)=(a+1)^b+(a+2)^b+(a+3)^b+(a+4)^b+(a+5)^b$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន a គេមាន

$a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$ ចែកនឹង 5 ឲ្យសំណល់

$0,1,2,3,4$ ។ នោះគេបាន

$$S(a,b)\equiv 0^b+1^b+2^b+3^b+4^b \pmod{5}$$

ឬ $S(a,b)\equiv 1^b+2^b+3^b+4^b \pmod{5}$ ។

ដោយ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 នោះ

$b\in\{4k+1\,,4k+2,4k+3\}$ ដែល $k=0,1,2,....$

ដោយ $x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+...+y^{n-1})$ គ្រប់ n

ជាចំនួនសេស នោះ $x+y\,|\,x^n+y^n$ គ្រប់ $x,y\in IN$ ។

-ករណី $b=4k+1$ ឬ $b=4k+3$ (ជាចំនួនសេស)

នោះគេបាន $5\,|\,1^b+4^b$ និង $5\,|\,2^b+3^b$

គេទាញបាន $5\,|\,1^b+2^b+3^b+4^b$ នាំឲ្យ $5\,|\,S(a,b)$ (1)

-ករណី $b=4k+2$ នោះ

$$S(a,b)\equiv 1^{4k+2}+2^{4k+2}+3^{4k+2}+4^{4k+2} \pmod{5}$$ ឬ

$$S(a,b)\equiv 1^{2k+1}+4^{2k+1}+9^{2k+1}+16^{2k+1} \pmod{5}$$

ដោយ $5\,|\,1^{2k+1}+9^{2k+1}$

និង $5 | 4^{2k+1} + 16^{2k+1}$ គេទាញ

$5 | (1^{2k+1} + 4^{2k+1} + 9^{2k+1} + 16^{2k+1})$ នាំឲ្យ $5 | S(a,b)$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $5 | S(a,b)$ គ្រប់ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 ។

ដូចនេះ $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនពហុគុណនៃ 4 ។

IV-(ពិន្ទុ 20) គណនាតម្លៃលេខ

$$F_7(a,b,c) = \frac{a^7 - b^7}{a-b} + \frac{b^7 - c^7}{b-c} + \frac{c^7 - a^7}{c-a}$$

តាង

$$F_n = F_n(a,b,c) = \frac{a^n - b^n}{a-b} + \frac{b^n - c^n}{b-c} + \frac{c^n - a^n}{c-a} = \sum_{cyc} \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

គេមាន a និង b ជាឫសនៃ $t^3 = 3t^2 + 4t - 5$

នោះ $\begin{cases} a^3 = 3a^2 + 4a - 5 \\ b^3 = 3b^2 + 4b - 5 \end{cases}$

ដោយ $t = 0$ មិនមែនជាឫសនៃសមីការ $t^3 = 3t^2 + 4t - 5$ នោះ

$a \neq 0$ និង $b \neq 0$

គេបាន $\begin{cases} a^3 = 3a^2 + 4a - 5 \\ b^3 = 3b^2 + 4b - 5 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} a^{n+3} = 3a^{n+2} + 4a^{n+1} - 5a^n \\ b^{n+3} = 3b^{n+2} + 4b^{n+1} - 5b^n \end{cases}$

គេទាញ

$a^{n+3}-b^{n+3}=3(a^{n+2}-b^{n+2})+4(a^{n+1}-b^{n+1})-5(a^n-b^n)$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $a-b\neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{a^{n+3}-b^{n+3}}{a-b}=3\frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a-b}+4\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}-5\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

នាំឲ្យ

$$\sum_{cyc}\frac{a^{n+3}-b^{n+3}}{a-b}=3\sum_{cyc}\frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a-b}+4\sum_{cyc}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}-5\sum_{cyc}\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

គេទាញ

$F_{n+3}(a,b,c)=3F_{n+2}(a,b,c)+4F_{n+1}(a,b,c)-5F_n(a,b,c)$

-បើ $n=0$ តាម $(*)$ គេបាន $F_3=3F_2+4F_1-5F_0$

តែតាម $F_n(a,b,c)=\frac{a^n-b^n}{a-b}+\frac{b^n-c^n}{b-c}+\frac{c^n-a^n}{c-a}=\sum_{cyc}\frac{a^n-b^n}{a-b}$

គេបាន $F_0=0$, $F_1=\frac{a-b}{a-b}+\frac{b-c}{b-c}+\frac{c-a}{c-a}=3$ និង

$$F_2=\frac{a^2-b^2}{a-b}+\frac{b^2-c^2}{b-c}+\frac{c^2-a^2}{c-a}=2(a+b+c)$$

ដោយ a,b,c ជាឫសនៃ $t^3=3t^2+4t-5$ នោះ $a+b+c=3$

ហេតុនេះ $F_2=6$ គេបាន $F_3=18+12-0=30$ ។

-បើ $n=1$ តាម $(*)$ គេបាន

$F_4=3F_3+4F_2-5F_1=90+24-15=99$

-បើ $n=2$ តាម $(*)$ គេបាន

$F_5=3F_4+4F_3-5F_2=297+120-30=387$

-បើ $n=3$ តាម (*) គេបាន

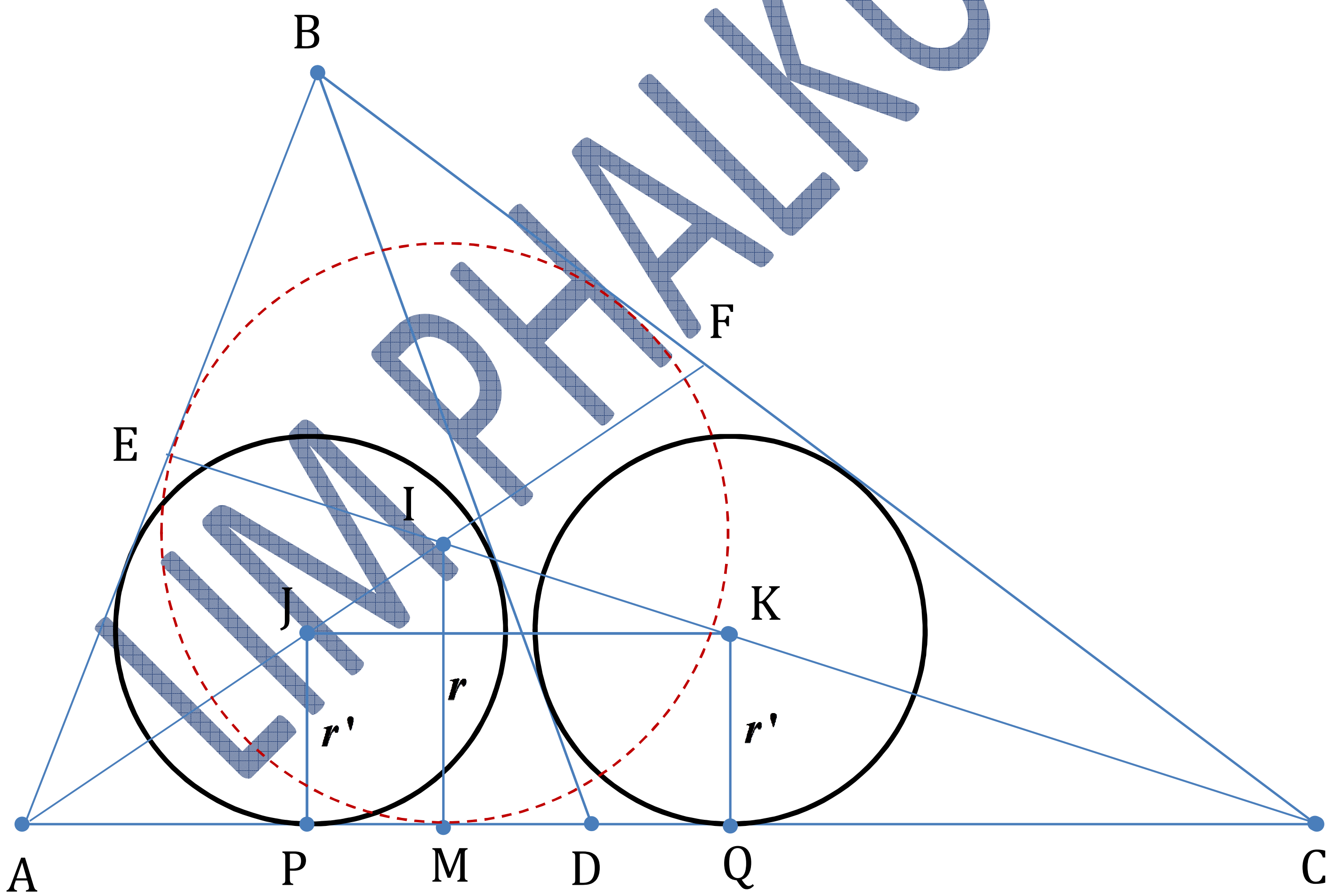
$$F_6 = 3F_5 + 4F_4 - 5F_3 = 1161 + 396 - 150 = 1407$$

-បើ $n=4$ តាម (*) គេបាន

$$F_7 = 3F_6 + 4F_5 - 5F_4 = 4221 + 1548 - 495 = 5274$$

ដូចនេះ $F_7(a,b,c) = \dfrac{a^7-b^7}{a-b} + \dfrac{b^7-c^7}{b-c} + \dfrac{c^7-a^7}{c-a} = 5274$

V-(ពិន្ទុ 20) បង្ហាញថា $BD = \sqrt{\dfrac{S}{\tan\alpha}}$ ។



តាង r' ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង នៃត្រីកោណ ABD និង BCD ហើយ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ តាង p_1 , p_2 , p រៀងគ្នាជាកន្លះបរិមាត្រនៃ ABD , BCD និង ABC ។

តាង $BC = a , AC = b , AB = c$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC ។

គេមាន $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCD}$ តែ $\begin{cases} S_{ABC} = p\,r \\ S_{ABD} = p_1 r' \\ S_{BCD} = p_2 r' \end{cases}$

គេបាន $pr = (p_1 + p_2)r'$ នោះ $\frac{r}{r'} = \frac{p_1 + p_2}{p}$ **(1)**

ម្យ៉ាងទៀត $2p_1 + p_2 = 2p + 2BD$ ឬ $p_1 + p_2 = p + BD$

នោះទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ $\frac{r}{r'} = \frac{p + BD}{p}$

ឬ $\frac{r - r'}{r} = \frac{BD}{p}$ **(2)**

គេមាន $\Delta \perp IMA \approx \Delta \perp JPA$ និង $\Delta \perp IMA \approx \Delta \perp KQC$

គេបាន $\frac{IM}{JP} = \frac{MA}{PA}$ និង $\frac{IM}{KQ} = \frac{MC}{QC}$

ដោយ $IM = r , JP = KQ = r'$

គេទាញ $\frac{r}{r'} = \frac{MA}{PA} = \frac{MC}{QC}$ ឬ $\frac{r - r'}{r'} = \frac{MA - PA}{PA} = \frac{MC - QC}{QC}$

ឬ $\frac{r - r'}{r} = \frac{PM}{PA} = \frac{MQ}{QC} = \frac{PM + MQ}{PA + QC} = \frac{PQ}{b - PQ}$ **(2)**

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $\frac{BD}{p} = \frac{PQ}{AC - PQ}$ **(3)**

ដោយ $PQ = PD + DQ$ ហើយ $PD = p_1 - c$, $DQ = p_2 - a$

នោះ

$$PQ = p_1 + p_2 - (c + a) = p + BD - (2p - b) = BD - p + b \quad (4)$$

យក (4) ជួសក្នុង (3) គេបាន

$$\frac{BD}{p} = \frac{BD - p + b}{b - (BD - p + b)} = \frac{BD - p + b}{-BD + p}$$

នាំឲ្យ $-BD^2 + p.BD = p.BD - p(p - b)$

ឬ $BD = \sqrt{p(p-b)}$ (5)

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ និង តាមរូបមន្ត

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

គេបាន $\dfrac{S}{\tan\frac{B}{2}} = p(p-b)$ ឬ $p(p-b) = \dfrac{S}{\tan\alpha}$ (6)

(ព្រោះ $\angle ABC = 2\alpha$)

យក (6) ជំនួសក្នុង (5) គេបាន $BD = \sqrt{\dfrac{S}{\tan\alpha}}$ ពិត ។

VI-(ពិន្ទុ 20) 1)បង្ហាញថា $x_{k+1}.x_{k+2} - x_k.x_{k+3} = (-1)^k$ ចំពោះគ្រប់ $k \in IN$

តាងស្វ៊ីត $y_k = x_k x_{k+1} - x_{k-1}x_{k+2} \quad \forall k \ge 2$

គេបាន $y_{k+1} = x_{k+1}x_{k+2} - x_k x_{k+3}$

គេមាន $x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \; \forall n \ge 2$

គេបាន

$x_{k+1} = x_k + x_{k-1}$, $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$, $x_{k+3} = x_{k+2} + x_{k+1}$

ហេតុនេះ $y_{k+1} = (x_k + x_{k-1})x_{k+2} - x_k(x_{k+2} + x_{k+1})$

$$= x_k x_{k+2} + x_{k-1}x_{k+2} - x_k x_{k+2} - x_k x_{k+1}$$

$$= x_{k-1}x_{k+2} - x_k x_{k+1} = -y_k$$

ដោយ $y_{k+1} = -y_k$ $\forall k \geq 2$ នោះ (y_k) ជាស្វីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = -2$ និងតួ $y_2 = x_2 x_3 - x_1 x_4$ ដោយ $x_1 = x_2 = 1$ នោះ

$x_3 = x_1 + x_2 = 2$, $x_4 = x_3 + x_2 = 3$

គេបាន $y_2 = 2 - 3 = -1$ ។ តាមរូបមន្ត

$y_k = y_2 \times q^{k-2} = -1 \times (-1)^{k-2} = (-1)^{k-1}$

នោះ $y_{k+1} = (-1)^k$ ដោយ $y_{k+1} = x_{k+1}x_{k+2} - x_k x_{k+3}$

ដូចនេះ $x_{k+1}.x_{k+2} - x_k.x_{k+3} = (-1)^k$ ។

2) បង្ហាញថា

$arc\cot x_1 - arc\cot x_3 - arc\cot x_5 - .... - arc\cot x_{2011} = arc\cot x_{2012}$

គេមាន $\cot(a-b) = \dfrac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a}$ នាំឲ្យ

$$a - b = arc\cot\left(\frac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a}\right)$$

យក $\cot a = x_{2p}$ និង $\cot b = x_{2p+1}$ នោះ $a = arc\cot x_{2p}$ និង

$b = arc\cot x_{2p+1}$ គ្រប់ $p \in IN$

គេបាន

$$arc\cot x_{2p} - arc\cot x_{2p+1} = arc\cot\left(\frac{x_{2p}x_{2p+1}+1}{x_{2p+1}-x_{2p}}\right) \quad (1)$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $x_{k+1}.x_{k+2} - x_k.x_{k+3} = (-1)^k$

យក $k = 2p-1$ បាន $x_{2p}x_{2p+1} - x_{2p-1}x_{2p+2} = -1$ នោះ

$x_{2p}x_{2p+1} + 1 = x_{2p-1}x_{2p+2} \quad (2)$

ដោយ $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}\ \forall n \geq 2$ នោះ $x_{2p+1} = x_{2p} + x_{2p-1}$ ឬ

$x_{2p+1} - x_{2p} = x_{2p-1} \quad (3)$

យក (2) និង (3) ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$arc\cot x_{2p} - arc\cot x_{2p+1} = arc\cot\left(x_{2p+2}\right)$$

ឬ $arc\cot x_{2p} - arc\cot x_{2p+2} = arc\cot x_{2p+1}$

គេបាន $\sum_{p=1}^{1005}\left(arc\cot x_{2p} - arc\cot x_{2p+2}\right) = \sum_{p=1}^{1005} arc\cot x_{2p+1}$

$$arc\cot x_2 - arc\cot x_{2012} = \sum_{p=1}^{1005} arc\cot x_{2p+1}$$

ដោយ $x_2 = x_1$

ដូចនេះ

$$arc\cot x_1 - arc\cot x_3 - arc\cot x_5 - .... - arc\cot x_{2011} = arc\cot x_{2012}$$

✧✧✧❀✧✧✧

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២
សម័យប្រឡង ០១ មេសា ២០១១
វិញ្ញាសាទី០១ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២ សម្រាប់ថ្ងៃទី០១ មេសា ២០១១
រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

✧✧✧❀✧✧✧

I-(ពិន្ទុ 10) នៅដើមឆ្នាំ ២០១១ នេះចំនួនអ្នកទេសចរដែលបានមកទស្សនាប្រាសាទអង្គរវត្តស្មើនឹង $pq(p^2-q^2)$ ដែល p និង q ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយ $p>q$ គេស្រង់ឈ្មោះទេសចរទាំងនោះដាក់ក្នុងបញ្ជីមួយដោយមានចុះលេខរៀងត្រឹមត្រូវ ។ បង្ហាញថាលេខរៀងរបស់ទេសចរចុងក្រោយបង្អស់ជាពហុគុណនៃ 3 ។

II-(ពិន្ទុ 10) ចំណុច $M(x,y,z)$ មានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$ ។ បង្ហាញថាមានចំណុច M ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ ។

III-(ពិន្ទុ 20) ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1$, $u_2=1$ និង $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។

បង្ហាញថា $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=1$ ហើយ

$u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=-1$ ។

IV-(ពិន្ទុ 20) ស្វ៊ីត (I_k) កំណត់ដោយ $I_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^k x.dx$ ចំពោះ

គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(k)=(k+1)I_k I_{k+1}$ ។

ក)កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង I_k និង I_{k+2} ។

ខ)ប្រៀបធៀប $f(k)$ និង $f(k+1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ

k ។ គណនាតម្លៃនៃ $f(2011)$

V-(ពិន្ទុ 20) ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង

$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ និង $DA=d$

និងបរិមាត្រ $2p$ ហើយចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ។ បង្ហាញថាចតុកោណ

$ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡា $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។

VI-(ពិន្ទុ 20) $P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$P_n(x)=-2x\,P_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ ។

ក)បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ

$y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ ។

ខ)ទាញបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x)+2x\,P_n(x)+2n\,P_{n-1}(x)=0$

ហើយ $P_n''(x)-2xP_n'(x)+2n\,P_n(x)=0$ ។

អត្រាកំណែគំរូ

I-(ពិន្ទុ 10) បង្ហាញថាលេខរៀងរបស់ទេសចរចុងក្រោយបង្អស់ជាពហុគុណនៃ 3

តាង $N = pq(p^2 - q^2)$ ដែល $p,q \in IN$ និង $p > q$

យើងនឹងស្រាយថា N ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះគ្រប់ $p,q \in IN$ និង $p > q$ ។

-បើ $3 | p$ ឬ $3 | q$ នោះ $3 | N$ ។

-បើ p និង q ចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះគេបាន $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ និង $q^2 \equiv 1 \pmod 3$

គេទាញបាន $p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod 3$ នោះគេបាន $3 | N$ ។

ដូចនេះលេខរៀងរបស់ទេសចរចុងក្រោយបង្អស់ជាពហុគុណនៃ 3

II-(ពិន្ទុ 10)

បង្ហាញថាមានចំណុច M ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ ៖

គេមាន $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 \quad (1)$

យក $z = -x$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$x^2 + y^2 + (-x)^2 = x^3 + y^3 + (-z)^3$$

ឬ $2x^2 + y^2 = y^3$ នោះគេទាញ $x^2 = \dfrac{y-1}{2}.y^2$

ដោយ $x\,,y\in\mathbb{Z}$ នោះគេត្រូវឲ្យ $\frac{y-1}{2}=q^2\,,q\in\mathbb{Z}$

នោះ $y=2q^2+1$

ហើយ $x^2=\frac{y-1}{2}.y^2=q^2(2q^2+1)^2$ នោះ $x=\pm q(2q^2+1)$

ហេតុនេះគេបាន

$x=\pm q(2q^2+1)\,,\ y=2q^2+1\ ,\ z=\mp q(2q^2+1)\,,q\in\mathbb{Z}$

សម្រាយបញ្ជាក់នេះមានន័យថាមានត្រីធាតុ (x,y,z) នៃសំណុំ
ចំនួនគត់រ៉ឺទ្យាទីហ្វច្រើនរាប់មិនអស់
ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$ ។

ដូចនេះមានចំណុច $M(x,y,z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ។

III-(ពិន្ទុ 20) បង្ហាញថា $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=1$ ហើយ
$u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=-1$

ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1\,,u_2=1$ និង $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$
ចំពោះ $n\geq 2$

តាងស្វ៊ីត $y_n=u_nu_{n+1}-u_{n-1}u_{n+2}$ ដែល $n\geq 2$ ។

គេបាន $y_{n+1}=u_{n+1}u_{n+2}-u_nu_{n+3}$ ដោយគេមាន

$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$

នោះ $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ និង $u_{n+3}=u_{n+2}+u_{n+1}$

គេបាន $y_{n+1}=(u_n+u_{n-1})u_{n+2}-u_n(u_{n+2}+u_{n+1})$

$$= u_n u_{n+2} + u_{n-1}u_{n+2} - u_n u_{n+2} - u_n u_{n+1}$$
$$= -(u_n u_{n+1} - u_{n-1}u_{n+2}) = -y_n$$

ដោយ $y_{n+1} = -y_n$ នោះ (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = -1$ និងតួ $y_2 = u_2 u_3 - u_1 u_4$

គេមាន $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ និង $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ ចំពោះ $n \ge 2$ នោះ $u_3 = u_2 + u_1 = 2$

ហើយ $u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$ នោះ $y_2 = 2 - 3 = -1$

គេបាន $y_n = y_2 \times q^{n-2} = -(-1)^{n-2} = (-1)^{n-1}$ ដោយ $y_n = u_n u_{n+1} - u_{n-1}u_{n+2}$ គ្រប់ $n \ge 2$

គេទាញបាន $u_n u_{n+1} - u_{n-1}u_{n+2} = (-1)^{n-1}$ (*) គ្រប់ $n \ge 2$

-យក $n = 2011$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន

$u_{2011}u_{2012} - u_{2010}u_{2013} = (-1)^{2010} = 1$ ។

-យក $n = 1042012$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន

$u_{1042012}u_{1042013} - u_{1042011}u_{1042014} = (-1)^{1042011} = -1$

ដូចនេះ $u_{2011}u_{2012} - u_{2010}u_{2013} = 1$ ហើយ

$u_{1042012}u_{1042013} - u_{1042011}u_{1042014} = -1$ ។

IV-(ពិន្ទុ 20) ក)កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង I_k និង I_{k+2}

គេមាន $I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x.dx$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k

គេបាន $I_{k+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{k+2}x.dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{k+1}x.\sin xdx$

តាង $\begin{cases}u=\sin^{k+1}x\\ dv=\sin x.dx\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}du=(k+1)\cos x\sin^k x.dx\\ v=-\cos x\end{cases}$

គេបាន $I_{k+2}=\left[-\sin^{k+1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^k x.dx$

$$I_{k+2}=(k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^k x.dx$$

$$I_{k+2}=(k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^k x.dx-(k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{k+2}x.dx$$

$I_{k+2}=(k+1)I_k-(k+1)I_{k+2}$ នាំឲ្យ $I_{k+2}=\dfrac{k+1}{k+2}I_k$

ដូចនេះ $I_{k+2}=\dfrac{k+1}{k+2}.I_k$ ។

ខ)ប្រៀបធៀប $f(k)$ និង $f(k+1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k

គេមាន f កំណត់ដោយ $f(k)=(k+1)I_kI_{k+1}$

គេបាន $f(k+1)=(k+2)I_{k+1}I_{k+2}$ ដោយ $I_{k+2}=\dfrac{k+1}{k+2}.I_k$ (សម្រាយខាងលើ)

នោះ $f(k+1)=(k+2)I_{k+1}\times\frac{k+1}{k+2}.I_k=(k+1)I_k\,I_{k+1}=f(k)$

ដូចនេះ $f(k+1)=f(k)$ គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។

គណនាតម្លៃនៃ $f(2011)$ ៖

ដោយ $f(k+1)=f(k)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ថេរគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។

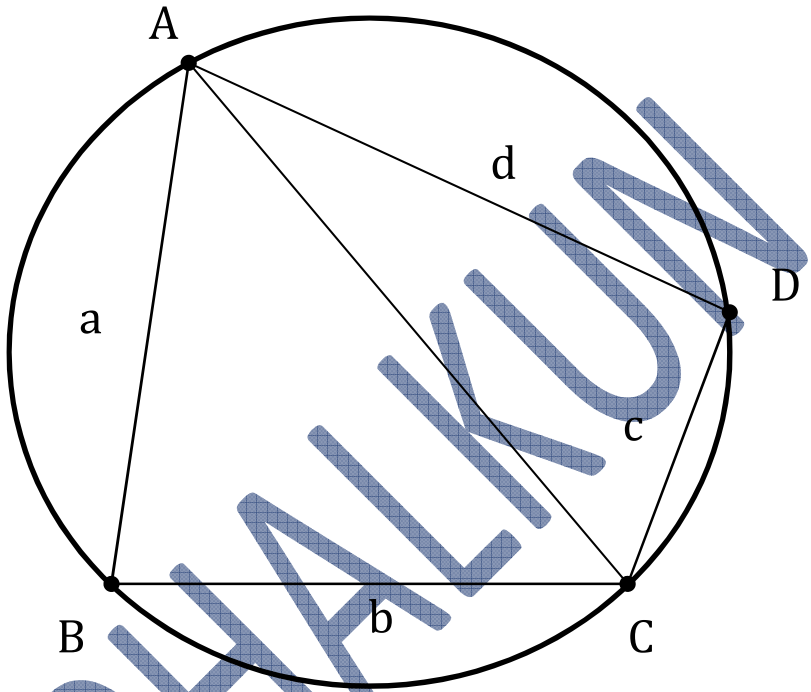
គេបាន $f(k)=f(0)=I_0\,I_1$ ដោយ $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

ហើយ $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.dx=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=0+1=1$ នោះ

$f(k)=(k+1)I_kI_{k+1}=\frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $f(2011)=\frac{\pi}{2}$ ។

V-(ពិន្ទុ 20) បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡា
$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$



គេមាន $S=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D$

ដោយ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់នោះ $B+D=\pi$ នាំឲ្យ
$\sin D=\sin(\pi-B)=\sin B$

គេបាន $S=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B \quad (1)$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ ABC និង ACD

គេបាន $AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B \quad (2)$

និង $AC^2=c^2+d^2-2cd\cos(\pi-B)=c^2+d^2+2cd\cos B \quad (3)$

ផ្ទឹម (2) និង (3) គេបាន

$$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B$$

គេទាញបាន $\cos B=\frac{1}{2}.\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{ab+cd}$ ដោយ

$$\sin^2 B=1-\cos^2 B$$

គេបាន

$$\sin^2 B=1-\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}=\frac{(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}$$

$$=\frac{(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)}{4(ab+cd)^2}$$

$$=\frac{\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right]\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right]}{4(ab+cd)^2}$$

$$=\frac{(a+b-c+d)(a+b+c-d)(c+d-a+b)(c+d+a-b)}{4(ab+cd)^2}$$

ដោយ $p=\frac{a+b+c+d}{2}$ នោះ

$a+b-c+d=2(p-c)$, $(a+b+c-d)=2(p-d)$

ហើយ $c+d-a+b=2(p-a)$, $c+d+a-b=2(p-b)$

គេបាន $\sin^2 B=\frac{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{4(ab+cd)^2}$

នាំឲ្យ $\sin B=\frac{2}{ab+cd}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ (4)

យក (4) ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$S=\frac{1}{2}(ab+cd)\times\frac{2}{ab+cd}\times\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

ដូចនេះ $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។

VI-(ពិន្ទុ 20) ក)បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$

តាមរូបមន្តដេរីវេ $\left(e^u\right)'=u'.e^u$ នោះគេបាន

$$y'=(-x^2)'e^{-x^2}=-2xe^{-x^2}=e^{-x^2}.P_1(x)$$

នោះ $y'=e^{-x^2}P_1(x)$ ពិតចំពោះ $n=1$ ។

យើងឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $y^{(k)}=e^{-x^2}P_k(x)$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$ គឺ

$$y^{(k+1)}=e^{-x^2}P_{k+1}(x)$$

គេមាន $y^{(k+1)}=\left[y^{(k)}\right]'=\left[e^{-x^2}P_k(x)\right]'$

$$=-2xe^{-x^2}P_k(x)+e^{-x^2}P'_k(x)$$

$$=e^{-x^2}\left[-2xP_k(x)+P'_k(x)\right]$$

$P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$P_n(x)=-2xP_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ ។

យក $n=k+1$ គេបាន $P_{k+1}(x)=-2xP_k(x)+P'_k(x)$

គេទាញ $y^{(k+1)}=e^{-x^2}P_{k+1}(x)$ ពិត

ដូចនេះ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ

$y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ ។

ខ)ទាញ ថា $P_{n+1}(x)+2x\,P_n(x)+2n\,P_{n-1}(x)=0$ និង

$P_n''(x)-2xP_n'(x)+2n\,P_n(x)=0$

មាន $y=e^{-x^2}$ នោះ $y'=-2xe^{-x^2}=-2xy$ ឬ $2xy+y'=0$

តាងអនុគមន៍ z កំណត់ដោយ $z=2xy+y'$ ។

តាមរូបមន្តឡិបនិចគេមាន $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$ ដែល

$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ គេបាន

$$z^{(n)}=2\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k)}x^{(k)}+y^{(n+1)}=2C_n^0y^{(n)}x+2C_n^1y^{(n-1)}+y^{(n+1)}=0$$

គេទាញ $y^{(n+1)}+2xy^{(n)}+2ny^{(n-1)}=0$ ដោយ

$y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$

គេបាន $e^{-x^2}P_{n+1}(x)+2xe^{-x^2}P_n(x)+2ne^{-x^2}P_{n-1}(x)=0$

សមមូល $e^{-x^2}\left[P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)\right]=0$

ដូចនេះ $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ ពិត ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $P_n(x)=-2x\,P_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ នោះ

$P_{n+1}(x)=-2x\,P_n(x)+P'_n(x)$

ដោយ $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ នោះគេបាន ៖

$-2xP_n(x)+P'_n(x)+2x\,P_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ ឬ

$P'_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$

គេបាន $P'_{n+1}(x)+2(n+1)P_n(x)=0$ (*)

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃ $P_n(x)=-2x\,P_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ នោះ

គេបាន $P'_n(x)=-2P_{n-1}(x)-2xP'_{n-1}(x)+P''_{n-1}(x)$

នោះ $P'_{n+1}(x)=-2P_n(x)-2xP'_n(x)+P''_n(x)$ (**)

យក (**) ជំនួសក្នុង (*) គេបាន

$-2P(x)-2xP'_n(x)+P''_n(x)+2(n+1)P_n(x)=0$

ដូចនេះ $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$ ពិត ។

✧✧✧❀✧✧✧

រយៈពេល៣ម៉ោង

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២

ប្រចាំវិទ្យាល័យបាក់ទូកឆ្នាំសិក្សា ២០១២- ២០១៣

✧✧✧✧✧✧✧✧✧✧

I-រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក) $y=\sqrt{\log_x(x^3+1)\log_{x+1}x-2}$

ខ) $y=\log_{x^2+1}\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}$

II-តាង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC ។ចូរស្រាយថា $1+\dfrac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$

III- ស្រាយបញ្ជាក់ថា អង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណមួយកែងគ្នាលុះត្រាតែជ្រុងឈមនៃចតុកោណនោះមានផលបូកការេស្មើគ្នា

IV- គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (u_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ដោយ $u_0=-2$, $u_1=2$ និង $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$ ។

គណនាតួ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

V- រកតួទី n នៃស្វីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1=1$ និង $u_{n+1}=u_n(u_n+2)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

VI- ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក) $\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x=3^x+4^x+5^x$

ខ) $\frac{\left(1+2\cos x+3\cos^2 x+...+n\cos^{n-1}x\right)-(1+2+3+...+n)\cos^n x}{2\times1+3\times2\cos x+4\times3\cos^2 x+...+n(n-1)\cos^{n-2}x+(n+1)n\cos^{n-1}x}=\frac{1}{4}$

VII- រកបណ្តាអនុគមន៍ f ដែលកំណត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y\ \forall x,y\in IR$

និង $f(0)=2012$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2013$

VIII- ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ មានសមីការ

$z^3-(6+4i)z^2+(8+14i)z-12i=0$ ។

ក)ដោះស្រាយសមីការ (E) យក z_1 ជាឫសពិត និង z_2,z_3 ជាឫសពីរផ្សេងទៀតដែល$|z_2|<|z_3|$

ខ)ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេឲ្យបីចំណុច $M_1(z_1),M_2(z_2)$ និង $M_3(z_3)$ ។

ស្រាយថា $M_1M_2M_3$ ជាត្រីកោណកែង ។

IX- សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1-i\left(\sqrt{3}+2\right)$

និង $z_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

X- គណនាលីមីត ៖

$$A=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)....\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

និង $B=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+...+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$

អត្រាកំណែគំរូ

I- រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក) $y=\sqrt{\log_x(x^3+1)\log_{x+1}x-2}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x>0\,,\,x\neq 1 \\ x+1>0\,,\,x+1\neq 1 \\ \log_x(x^3+1)\log_{x+1}x-2\geq 0\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} x>0\,,\,x\neq 1 \\ \log_x(x^3+1)\log_{x+1}x\geq 2 \quad (*)\end{cases}$

វិសមីការ (*) សមមូល

$$\left[\log_x(x+1)+\log_x(x^2-x+1)\right].\frac{1}{\log_{x+1}x}\geq 2$$

សមមូល $1+\dfrac{\log_x(x^2-x+1)}{\log_x(x+1)}\geq 2$ សមមូល

$$\frac{\log_x(x^2-x+1)-\log_x(x+1)}{\log_x(x+1)}\geq 0$$

សមមូល $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_x(x+1)>0\\ \log_x(x^2-x+1)-\log_x(x+1)\ge 0\end{cases}\quad (I)\\ \begin{cases}\log_x(x+1)<0\\ \log_x(x^2-x+1)-\log_x(x+1)\le 0\end{cases}\quad (II)\end{array}\right.$

✧ ចំពោះប្រព័ន្ធ វិសមីការ (I)

$$\begin{cases}\log_x(x+1)>0\\ \log_x(x^2-x+1)-\log_x(x+1)\ge 0\end{cases}$$

សមមូល $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1\\ x+1<1\\ x^2-x+1\le x+1\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\\ x+1>1\\ x^2-x+1\ge x+1\end{cases}\end{array}\right.$ សមមូល $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1\\ x<0\\ x^2-2x\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\\ x^2-2x\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$ សម

មូល $x\ge 2$ ឬ $x\in[2,+\infty)$

✧ ចំពោះប្រព័ន្ធ វិសមីការ (II)

$$\begin{cases}\log_x(x+1)<0\\ \log_x(x^2-x+1)-\log_x(x+1)\le 0\end{cases}$$

សមមូល $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1\\ x+1>1\\ x^2-x+1\geq x+1\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\\ x+1<1\\ x^2-x+1\leq x+1\end{cases}\end{array}\right.$ សមមូល $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1\\ x^2-2x\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\\ x<0\\ x^2-2x\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$

(គ្មានចម្លើយ)

ដូចនេះ $D_f=[2,+\infty)$ ។

ខ) $y=\log_{x^2+1}\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}x^2+1\neq 1\\ \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>0\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}x\neq 0\\ \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>0 \ \ (1)\end{cases}$

វិសមីការ(1)សមមូល $\dfrac{1-1+4x^2}{x(1+\sqrt{1-4x^2})}>0$

សមមូល $\dfrac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}}>0$ សមមូល $\begin{cases}x>0\\ 1-4x^2\geq 0\end{cases}$

សមមូល $0<x\leq\dfrac{1}{2}$ ។ដូចនេះ $D_f=(0,\dfrac{1}{2}]$ ។

II- ស្រាយថា $1+\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$

គេមាន

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

ព្រោះ $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

ហើយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$

គេបាន

$$\cos A+\cos B+\cos C=1-2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ជាជ្រុង និង $p=\frac{a+b+c}{2}$

ជាកន្លះបរិមាត្រនៃ ΔABC ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc(1-2\sin^2\frac{A}{2})$$

ឬ $a^2=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{A}{2}$

នាំឲ្យ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$

ដោយ $a-b+c=2(p-b)$ និង $a+b-c=2(p-c)$

ព្រោះ $p=\frac{a+b+c}{2}$

ហេតុនេះ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ហើយស្រាយដូចគ្នានេះដែរ គេបានទំនាក់ទំនងពីរទៀត

$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ និង $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

គេទាញ $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$ (*)

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡា $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R}$

គេទាញ $(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2$ និង $abc=4prR$ នោះ

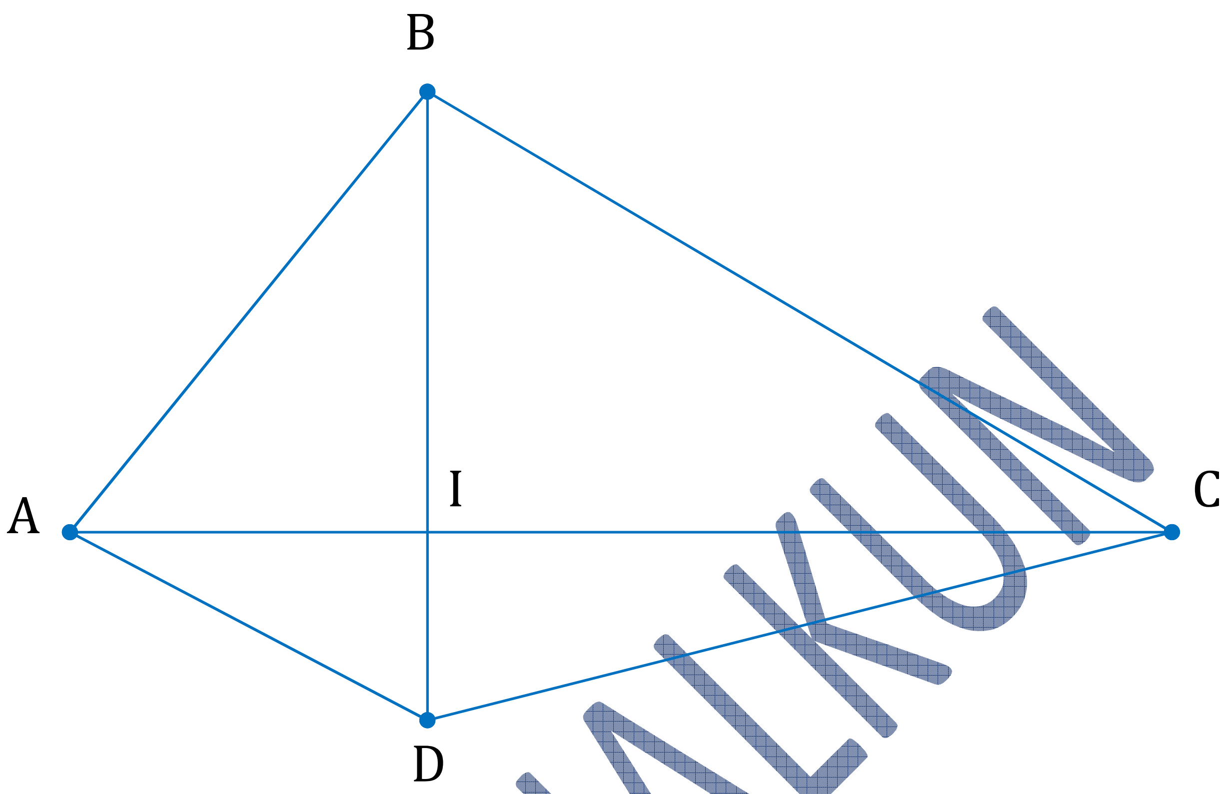
(*) អាចសរសេរ $\cos A+\cos B+\cos C=1+4.\frac{pr^2}{4prR}=1+\frac{r}{R}$

ដូចនេះ $1+\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$ ។

III-ស្រាយបញ្ជាក់ថា អង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណមួយកែងគ្នាលុះត្រាតែជ្រុងឈមនៃចតុកោណនោះមានផលបូកការេស្មើគ្នា ៖

យក $ABCD$ ជាចតុកោណមួយដែលមាន AC និង BD ជាអង្កត់ទ្រូង ។

យើងនឹងស្រាយថា $AC\perp BD \Leftrightarrow AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$ ជាសំណើពិត ។



ឧបមាថា $AC \perp BD$ នោះត្រីកោណ IAB , ICD , IAD , IBC សុទ្ធតែជាត្រីកោណកែងត្រង់ I ។

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រគេបាន

$AB^2 + CD^2 = IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$ (1)

និង $AD^2 + BC^2 = IA^2 + ID^2 + IB^2 + IC^2$ (2)

តាម (1) និង (2)គេបាន $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

ដូចនេះ $AC \perp BD \Rightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ (*) ។

ឧបមាថា $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

នោះ $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2$

$$\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{CD}^2$$

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}).(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD})$$

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BD}.(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD})$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CD}=0$$

$$(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC})=0$$

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{DB}+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}).\overrightarrow{DB}=0$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=0$$

$$2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}$$

ដូចនេះ $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2 \Rightarrow AC\perp BD\ (**)$ ។

តាម (*) & (**) គេបាន

$AC\perp BD \Leftrightarrow AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$ ជាសំណើពិត ។

IV- គណនាតួ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $u_0=-2$, $u_1=2$ និង $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីតគឺ $z^2=2z-2$

ឬ $z^2-2z+2=0$, $\Delta'=1-2=-1=i^2$

មានឫសពីរ $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$ ។

ក្នុងករណីនេះតួទូទៅនៃស្វ៊ីតមានរាង

$u_n = r^n\left[A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right]$

ដែល $r = |z_1| = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ និង $\theta = \arg(z_1)$ តែ

$z_1 = 1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

នោះ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ។ គេបាន $u_n = \sqrt{2}^n\left[A\cos(\frac{n\pi}{4}) + B\sin(\frac{n\pi}{4})\right]$

ដោយ $u_0 = -2$, $u_1 = 2$ នាំឲ្យ $\begin{cases} u_0 = A = -2 \\ u_1 = \sqrt{2}\left(A\cos\frac{\pi}{4} + B\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2 \end{cases}$

នោះ $\begin{cases} A = -2 \\ B = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ

$u_n = \sqrt{2}^n(-2\cos\frac{n\pi}{4} + 4\sin\frac{n\pi}{4}) = \left(\sqrt{2}\right)^{n+2}\left(2\sin\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{n\pi}{4}\right)$

V- រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 1$

និង $u_{n+1} = u_n(u_n + 2)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

គេមាន $u_1 = 1 = 2^{2^0} - 1$ ។

យក $n = 1$ គេបាន $u_2 = u_1(u_1 + 2) = 3 = 2^{2^1} - 1$

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k = 2^{2^{k-1}} - 1$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k+1$ គឺ $u_{k+1} = 2^{2^k} - 1$

គេមាន $u_{k+1}=u_k(u_k+2)$ ដោយ $u_k=2^{2^{k-1}}-1$

គេបាន $u_{k+1}=(2^{2^{k-1}}-1)(2^{2^{k-1}}+1)=2^{2^k}-1$ ពិត

ដូចនេះ $u_n=2^{2^{n-1}}-1$ ។

VI- ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក) $\left(\dfrac{12}{5}\right)^x+\left(\dfrac{15}{4}\right)^x+\left(\dfrac{20}{3}\right)^x=3^x+4^x+5^x$

សមមូល $\dfrac{12^{2x}+15^{2x}+20^{2x}}{60^x}=3^x+4^x+5^x$ តាង $\begin{cases} a=3^x \\ b=4^x \\ c=5^x \end{cases}$

នោះ $\begin{cases} ab=12^x \\ ac=15^x \\ bc=20^x \end{cases}$

សមីការក្លាយជា $\dfrac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}=a+b+c$

តាមវិសមភាព AM-GM គេមាន $\begin{cases} (ab)^2+(bc)^2\geq 2b(abc) \\ (bc)^2+(ac)^2\geq 2c(abc) \\ (ab)^2+(ac)^2\geq 2a(abc) \end{cases}$

គេបាន $2\left[(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\right]\geq 2(abc)(a+b+c)$

សមមូល $\dfrac{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}{abc}\geq a+b+c$ គ្រប់ $a,b,c>0$

សមមភាពកើតមានលុះត្រាតែ $a=b=c$ នោះ $3^x=4^x=5^x$

នាំឲ្យ $x=0$ ជាឬសតែមួយគត់។

VII- រកបណ្តាអនុគមន៍ f ដែលកំណត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y \ \forall x,y\in IR$

និង $f(0)=2012$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2013$

គេមាន $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$ (1)

យក $y=\dfrac{\pi}{2}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$f(x+\frac{\pi}{2})+f(x-\frac{\pi}{2})=0 \ (2)$$

យក $x=\dfrac{\pi}{2}$ ជួសក្នុង (1)គេបាន

$$f(\frac{\pi}{2}+y)+f(\frac{\pi}{2}-y)=2f(\frac{\pi}{2})\cos y$$

ឬ $f(\dfrac{\pi}{2}+x)+f(\dfrac{\pi}{2}-x)=4026\cos x$ (3)

យក $x=0$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $f(y)+f(-y)=2f(0)\cos y$

ឬ $f(x)+f(-x)=4024\cos x$ (4)

ជំនួស x ដោយ $\dfrac{\pi}{2}-x$ ក្នុង (4) គេបាន

$$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x-\frac{\pi}{2})=4024\sin x \ (5)$$

បូកសមីការ (3) និង (5)គេបាន ៖

$$f(\frac{\pi}{2}+x)+f(x-\frac{\pi}{2})+2f(\frac{\pi}{2}-x)=4026\cos x+4024\sin x \quad (6)$$

យក (2)ជំនួសក្នុង (6)គេបាន

$$2f(\frac{\pi}{2}-x)=4026\cos x+4024\sin x$$

ឬ $f(\frac{\pi}{2}-x)=2013\cos x+2012\sin x \;\; (7)$

ជំនួស x ដោយ $\frac{\pi}{2}-x$ ក្នុង (7) គេបាន

$$f(x)=2013\sin x+2012\cos x$$

ដូចនេះ $f(x)=2013\sin x+2012\cos x$ ។

VIII- ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ មានសមីការ

$$z^3-(6+4i)z^2+(8+14i)z-12i=0$$ ។

ក)ដោះស្រាយសមីការ (E) យក z_1 ជាឬសពិត និង z_2,z_3 ជាឬសពីរផ្សេងទៀតដែល $|z_2|<|z_3|$

សមីការអាចសរសេរដូចតទៅ ៖

$$z^3-(6+4i)z^2+(8+14i)z-12i=0$$

$$z^3-6z^2-4iz^2+8z+14iz-12i=0$$

$$(z^3-6z^2+8z)-2i(2z^2-7z+6)=0$$

$$z(z-2)(z-4)-2i(z-2)(2z-3)=0$$

$$(z-2)(z^2-4z-4iz+6i)=0$$

សមមូល $\left[\begin{array}{l} z_1=2 \\ z^2-4(1+i)z+6i=0 \;\; (*) \end{array}\right.$

ឌីសគ្រីមីណង់បង្រួមនៃសមីការ (*) គឺ

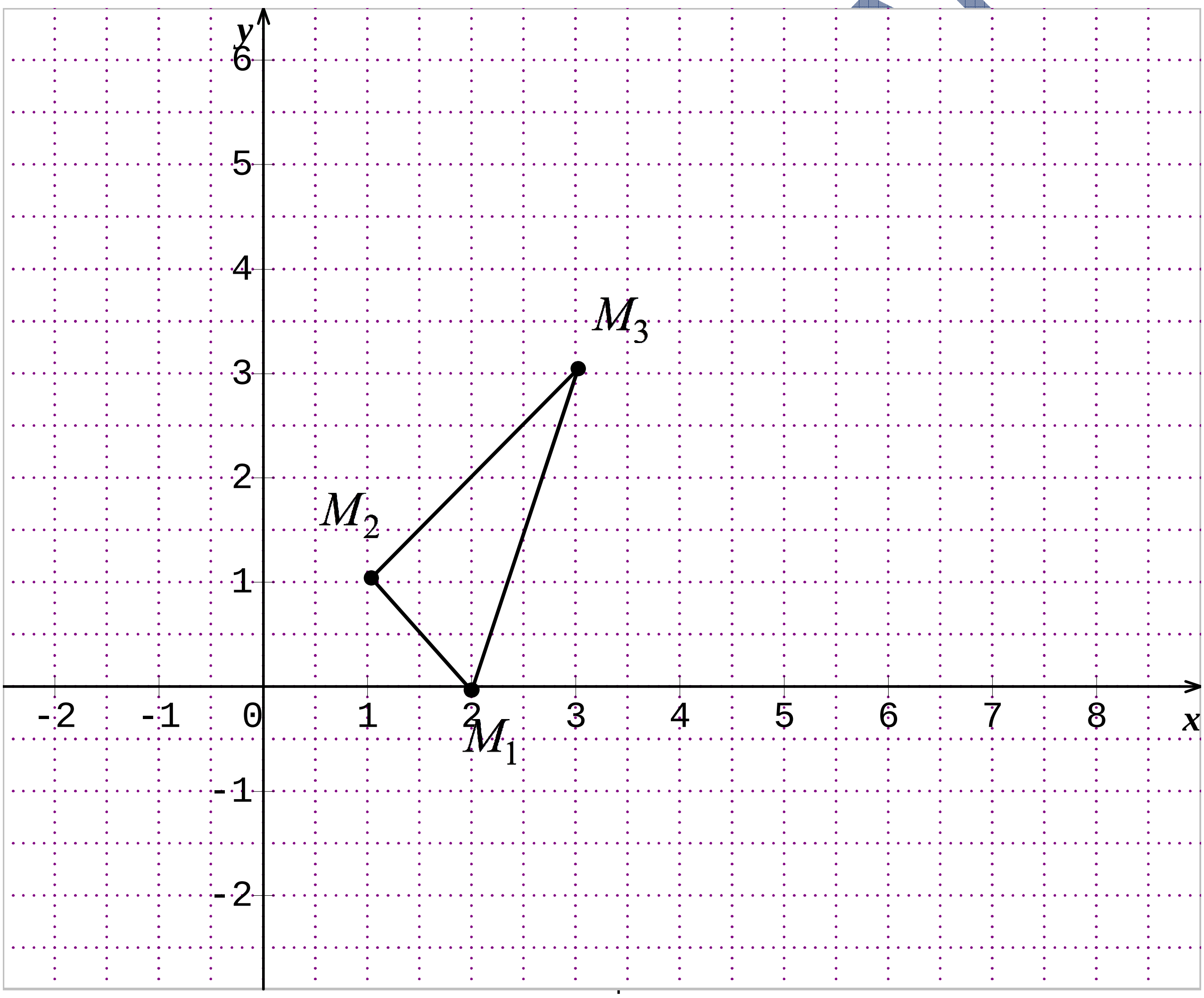
$$\Delta'=4(1+i)^2-6i=2i=(1+i)^2$$

គេទាញឫស $z_2=2+2i-1-i=1+i$, $z_3=2+2i+1+i=3+3i$

ដែល $|z_2|<|z_3|$ ។

ដូចនេះ $z_1=2$, $z_2=1+i$, $z_3=3+3i$ ។

ខ) ស្រាយថា $M_1M_2M_3$ ជាត្រីកោណកែង ៖



តាង θ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{M_2M_1}$ & $\overrightarrow{M_2M_3}$

នោះ $\theta = \arg\left(\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right)$

ដោយ

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{3+3i-1-i}{2-1-i} = \frac{2+2i}{1-i} = \frac{2(1+i)^2}{1+1} = 2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

គេបាន $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ដូចនេះ $M_1M_2M_3$ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M_2 ។

IX-សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 - i\left(\sqrt{3}+2\right)$ និង

$z_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ៖

គេមាន

$$z_1 = 1 - i\left(\sqrt{3}+2\right) = (\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2-i) = 2(\sqrt{3}-2)(-1+\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})$$

$$= 2(\sqrt{3}+2)(-1+\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}) = 2(\sqrt{3}+2)(-2\sin^2\frac{\pi}{12} - 2i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12})$$

$$= 4(\sqrt{3}+2)\sin\frac{\pi}{12}(-\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}) = 4(\sqrt{3}+2)\sin\frac{\pi}{12}\left(\sin\frac{13\pi}{12} + i\cos\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$= 4(\sqrt{3}+2)\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos(-\frac{7\pi}{12}) + i\sin(-\frac{7\pi}{12})\right)$$

ដោយ

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $z_1 = (\sqrt{3}+2)(\sqrt{6}-\sqrt{2})\left[\cos(-\frac{7\pi}{12}) + i\sin(-\frac{7\pi}{12})\right]$ ។

$$z_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{4})}+i\sqrt{2(1-\cos\frac{\pi}{4})}=2\cos\frac{\pi}{8}+i2\sin\frac{\pi}{8}$$

ដូចនេះ $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ ។

X- គណនាលីមីត ៖

$$A=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)....\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

ដោយ

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\times\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})$$

គេទាញ $A=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ ។

ដូចនេះ

$$A=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)....\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$B=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+\ldots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$$

គេមាន $n^4+1\le n^4+k\le n^4+n$ គ្រប់ $k=1,2,3,\ldots,n$

គេទាញ $\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\le\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$

នោះ $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$

ដោយ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}=\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}$ & $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}=\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$

គេបាន $\displaystyle\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\le\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$

នោះ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}\le\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$

ឬ $\displaystyle 1\le\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\le 1$ នាំឲ្យ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}=1$ ។

ដូចនេះ

$$B=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+\dots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}=1$$

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

រយៈពេល៣ម៉ោង

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២

ប្រចាំវិទ្យាល័យបាក់ទូកឆ្នាំសិក្សា ២០១២ ២០១៣

✧✧✧✧✧✧✧✧✧

I-ក)ស្រាយថា $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

គណនា $A=\lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$ រួចទាញថា $A^{a+b}\geq A^{2\sqrt{ab}}$ ។

ខ)ស្រាយថា $\frac{2}{e^2}\leq\int_0^2 e^{x-x^2}.dx\leq 2\sqrt[4]{e}$ ។

II-ក)ដោយមិនបាច់ធ្វើប្រមាណវិធីគុណចូរស្រាយថា $2011\times 2013<2012^2$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា

$$\log_{2011}2012>\log_{2012}2013$$ ។

ខ)គេឲ្យ $\sin x+\sin y+\sin z=0$ ។ កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃកន្សោម $M=\sin^2 x+\sin^4 y+\sin^6 z$

III-ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k តូចជាងគេដោយដឹងថាមានចំនួនគត់ $x_1,x_2,x_3...,x_k$ ដែល $x_1^3+x_2^3+x_3^3+....+x_k^3=2002^{2002}$ ។

IV-គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (u_n) ដោយ

$$u_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+....+\frac{k}{(k+1)!}\ ,\ k\in IN$$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+u_3^n+...+u_{2013}^n}$ ។

V-រកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=\cos x+\sin x$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។ រកតម្លៃ x ជាអនុគមន៍នៃn ដើម្បីឲ្យ $y^{(n)}=0$ និងអនុវត្តន៍ចំពោះ $n=2013$ ។

VI-ក)ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,x,y,z គេបាន

$$\sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)}\ge\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{abc}$$

ខ)ស្រាយថា

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$ គ្រប់ $a,b,c>0$ ។

VII-ក)រក អនុគមន៍ $f:IR\to IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\forall x,y\in IR: f\left[(x-y)^2\right]=x^2-2yf(x)+\left[f(y)\right]^2$$ ។

ខ) អនុគមន៍ $g:IN\to IN$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $g(x+1)=g(x)+x$ ដែល $x\in IN$, $g(1)=1$ ។រក $g(2013)$?

VIII-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y''-4y'+8y=e^{2x}+\cos 2x$$ ។

IX-ក្នុងចតុមុខ $OABC$ យក E ជាចំណុចកណ្តាលនៃទ្រនុង AB ហើយ F និង P ចែកក្នុង OC និងOA តាមផលធៀប $\frac{FO}{FC}=\frac{2}{1}$ និង $\frac{PO}{PA}=\frac{1}{2}$ ។ យក Q នៅលើទ្រនុង BC ដែល $\overrightarrow{BQ}=t\,\overrightarrow{BC}$ ។

បើ PQ ប្រសព្វ EF ត្រង់ចំណុច M នោះបង្ហាញថា

$\overrightarrow{OM}=k\,\overrightarrow{OE}+(1-k)\,\overrightarrow{OF}$, $(0<k<1)$

និង $\overrightarrow{OM}=m\,\overrightarrow{OP}+(1-m)\,\overrightarrow{OQ}$, $(0<m<1)$ ។ រួចកំណត់តម្លៃ t

X-គូប $ABCDEFGH$ មួយមានរង្វាស់ជ្រុង a ។ I ជាចំណុចកណ្តាល $[AB]$ហើយ J ជាចំណុចកណ្តាល $[EH]$។ តាមមុខខាងនៃគូប រករង្វាស់ខ្លីបំផុតពី I ទៅ J ?

អត្រាកំណែគំរូ

ក)ស្រាយថា $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b

គេមាន $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b

សមមូល $a-2\sqrt{ab}+b\geq 0$ ឬ $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ ពិត

ដូចនេះ $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

គណនា $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$ រាង 1^{∞}

គេអាចសរសេរ

$$A=\lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[1+(e^x+x-1)\right]^{\frac{1}{e^x+x-1}\times\frac{e^x+x-1}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+1\right)}=e^2$$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ។

ដូចនេះ $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=e^2$ ។

ទាញថា $A^{a+b}\ge A^{2\sqrt{ab}}$ ៖

គេមាន $A=e^2>1$ និង $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ដូចនេះ $A^{a+b}\ge A^{2\sqrt{ab}}$ ។

ខ)ស្រាយថា $\frac{2}{e^2}\le\int_0^2 e^{x-x^2}.dx\le 2\sqrt[4]{e}$

គេមាន $x-x^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\le\frac{1}{4}$ នោះចំពោះគ្រប់ $x\in[0,2]$

គេបាន $-2\le x-x^2\le\frac{1}{4}$

ដោយ $e=2.71828>1$

នោះគេទាញ $e^{-2}=\frac{1}{e^2}\le e^{x-x^2}\le e^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{e}$

គេបាន $\int_0^2 \frac{1}{e^2}.dx \le \int_0^2 e^{x-x^2}.dx \le \int_0^2 \sqrt[4]{e}.dx$ ដោយ

$\int_0^2 \frac{1}{e^2}.dx = \frac{2}{e^2}$ & $\int_0^2 \sqrt[4]{e}.dx = 2\sqrt[4]{e}$

ដូចនេះ $\frac{2}{e^2} \le \int_0^2 e^{x-x^2}.dx \le 2\sqrt[4]{e}$ ។

ក) ស្រាយថា $2011\times 2013 < 2012^2$ ៖

គេមាន $2011\times 2013 = (2012-1)(2012+1) = 2012^2 - 1 < 2012^2$

ដូចនេះ $2011\times 2013 < 2012^2$ ។

ទាញបញ្ជាក់ថា $\log_{2011} 2012 > \log_{2012} 2013$ ៖

គេមាន $2011\times 2013 < 2012^2$ នោះ

$\log_{2012}(2011\times 2013) < \log_{2012} 2012^2$

ឬ $\log_{2012} 2011 + \log_{2012} 2013 < 2$ (1)

តាមវិសមភាព AM-GM គេមាន

$\log_{2012} 2011 + \log_{2011} 2012 \ge 2\sqrt{\log_{2012} 2011 \times \log_{2011} 2012} = 2$ (2)

តាម(1) និង (2) គេទាញ

$\log_{2012} 2011 + \log_{2011} 2012 > \log_{2012} 2011 + \log_{2012} 2013$

ដូចនេះ $\log_{2011} 2012 > \log_{2012} 2013$ ។

III-កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k តូចជាងគេ ៖

សម្មតិកម្ម $x_1^3+x_2^3+x_3^3+....+x_k^3=2002^{2002}$ ដែល

$x_1,x_2,x_3,....,x_k$ ជាចំនួនគត់

គេមាន $2002\equiv 4\ (\mathrm{mod}\,9)$ នោះ $2002^3\equiv 4^3\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,9)$

គេទាញ $2002^{2002}=\left(2002^3\right)^{667}.2002\equiv 4\ \ (\mathrm{mod}\ 9)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x គេមាន $x^3\equiv\{-1,0,1\}\ (\mathrm{mod}\ 9)$

-បើ $k=2$ គេបាន $x_1^3+x_2^3=2002^{2002}$ ដោយ

$x_1^3+x_2^3\equiv\{0\,,-2\,,2,1,-1\}\ \ (\mathrm{mod}\ 9)$

និង $2002^{2002}\equiv 4\ \ (\mathrm{mod}\ 9)$ នោះសមីការ $x_1^3+x_2^3=2002^{2002}$ គ្មានឫសជាចំនួនគត់ ។

-បើ $k=3$ គេបាន $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2002^{2002}$ ដោយ

$x_1^3+x_2^3+x_3^3\equiv\{0\,,-2\,,2,-3,3,1,-1\}\ \ (\mathrm{mod}\ 9)$

និង $2002^{2002}\equiv 4\ \ (\mathrm{mod}\ 9)$ នោះសមីការ

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=2002^{2002}$ គ្មានឫសជាចំនួនគត់ ។

-បើ $k=4$ គេបាន $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=2002^{2002}$

ដោយ

$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\equiv\{0\,,-1,1,-2\,,2,-3,3,4,-4\}\ \ (\mathrm{mod}\ 9)$

និង $2002^{2002}\equiv 4\ \ (\mathrm{mod}\ 9)$

នោះសមីការ $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=2002^{2002}$ អាចមានឬសជាចំនួនគត់ ។ដោយសម្គាល់ឃើញថា

$2002=1000+1000+1+1=10^3+10^3+1^3+1^3$ នោះ៖

$$2002^{2002}=2002\times(2002^{667})^3=(10^3+10^3+1^3+1^3)\times(2002^{667})^3$$

$$=(10\times2002^{667})^3+(10\times2002^{667})^3+(2002^{667})^3+(2002^{667})^3$$

គេទាញបានថា $x_1=x_2=10\times2002^{667}$, $x_3=x_4=2002^{667}$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការចំពោះ $k=4$ ។

ដូចនេះចំនួនគត់វិជ្ជមាន k តូចជាងគេដោយដឹងថាមានចំនួនគត់ $x_1,x_2,x_3...,x_k$ ដែល $x_1^3+x_2^3+x_3^3+....+x_k^3=2002^{2002}$ គឺ $k=4$

IV-គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) ដោយ

$$u_k=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+....+\frac{k}{(k+1)!}\ ,\ k\in IN$$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+u_3^n+...+u_{2013}^n}$

គេមាន

$$\frac{p}{(p+1)!}=\frac{(p+1)-1}{(p+1)!}=\frac{p+1}{(p+1)!}-\frac{1}{(p+1)!}=\frac{1}{p!}-\frac{1}{(p+1)!}$$

គេបាន

$$u_k=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+....+\frac{k}{(k+1)!}=(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+...+(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!})=1-\frac{1}{(k+1)!}$$

ដោយ $u_{k+1}-u_k=\frac{k+1}{(k+2)!}>0$ នោះ (u_k) ជាស្វ៊ីតកើន ។

គេបាន $u_{2013}^n<u_1^n+u_2^n+....+u_{2013}^n<2013u_{2013}^n$

នាំឲ្យ $u_{2013}<\sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+....+u_{2013}^n}<(2013)^{\frac{1}{n}}u_{2013}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}(2013)^{\frac{1}{n}}=0$

នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+u_3^n+...+u_{2013}^n}=u_{2013}=1-\frac{1}{2014}$ ។

V-រកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=\cos x+\sin x$ ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន

$$y=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+x)$$

គេបាន $y'=y^{(1)}=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x)=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x)$

ឧបមាថា $y^{(k)}=\sqrt{2}\sin(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x)$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $y^{(k+1)}=\sqrt{2}\sin(\frac{(k+1)\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x)$ ។

គេមាន $y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=\left(\sqrt{2}\sin(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x)\right)'$

$$y^{(k+1)}=\sqrt{2}\cos(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x)=\sqrt{2}\sin(\frac{(k+1)\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x)$$ ពិត

ដូចនេះ $y^{(n)}=\sqrt{2}\sin(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}+x\right)$ ។

រកតម្លៃ x ជាអនុគមន៍នៃ n ដើម្បីឲ្យ $y^{(n)}=0$ ៖

គេបាន $\sqrt{2}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}+x\right)=0$ សមមូល

$\frac{(2n+1)\pi}{4}+x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ៖ $x=k\pi-\frac{(2n+1)\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$ ។

អនុវត្តន៍ចំពោះ $n=2013$ គេបាន $x=k\pi-\frac{4027\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$ ។

VI-ក)ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,x,y,z គេបាន

$\sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)}\geq\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{abc}$ ។

គេមាន

$(x+a)(y+b)(z+c)=xyz+abc+(ayz+bxz+cxy)+(abz+bcx+acy)$

តាមវិសមភាព AM-GM គេមាន ៖

$$ayz+bxz+cxy\geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2(abc)}$$

និង $abz+bcx+acy\geq 3\sqrt[3]{(xyz)(abc)^2}$

គេបាន

$(x+a)(y+b)(z+c)\geq xyz+abc+3\sqrt[3]{(xyz)^2(abc)}+3\sqrt[3]{(xyz)(abc)^2}$

ឬ $(x+a)(y+b)(z+c)\geq\left(\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{abc}\right)^3$

ដូចនេះ៖ $\sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)}\geq\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{abc}$ ។

ខ)ស្រាយថា

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

គ្រប់ $a,b,c>0$

តាង $T=\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

យក $s=a+b+c$ នោះគេបាន

$$T=\frac{(s+a)^2}{2a^2+(s-a)^2}+\frac{(s+b)^2}{2b^2+(s-b)^2}+\frac{(s+c)^2}{2c^2+(s-c)^2}$$

គេមាន

$$\frac{(s+a)^2}{2a^2+(s-a)^2}=\frac{s^2+2as+a^2}{3a^2-2as+s^2}=\frac{1}{3}+\frac{8as+2s^2}{(3a-s)^2+2s^2}\le\frac{1}{3}+\frac{8as+2s^2}{2s^2}$$

ឬ $\frac{(s+a)^2}{2a^2+(s-a)^2}\le\frac{4}{3}+\frac{4a}{s}$ (1) ។

ស្រាយដូចគ្នានេះដែរគេបាន

$$\frac{(s+b)^2}{2b^2+(s-b)^2}\le\frac{4}{3}+\frac{4b}{s}\ (2)\ ,\quad \frac{(s+c)^2}{2c^2+(s-c)^2}\le\frac{4}{3}+\frac{4c}{s}\ (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3)គេបាន ៖

$T\le\frac{12}{3}+\frac{4(a+b+c)}{s}=8$ ព្រោះ $a+b+c=s$ ។

ដូចនេះ: $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$ ។

VII-ក)រក អនុគមន៍ $f : IR \to IR$

គេមាន $\forall x, y \in IR : f\left[(x-y)^2\right] = x^2 - 2yf(x) + [f(y)]^2$ (1)

យក $y = x$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$f^2(0) = x^2 - 2xf(x) + f^2(x) = (x - f(x))^2$

គេទាញ $\left[\begin{array}{l} f(0) = x - f(x) \\ -f(0) = x - f(x) \end{array}\right.$ ឬ $\left[\begin{array}{l} f(x) = x - f(0) \\ f(x) = x + f(0) \end{array}\right.$

យក $x = 0$, $y = 0$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $f(0) = f^2(0)$ នោះ

$f(0) = 0$ ឬ $f(0) = 1$

គេបាន $f(x) = x$, $f(x) = x - 1$, $f(x) = x + 1$ ។

-ករណី $f(x) = x$ តាម (1)គេបាន $(x-y)^2 = x^2 - 2yx + y^2$ ពិត

-ករណី $f(x) = x - 1$ តាម (1) គេបាន

$(x-y)^2 - 1 = x^2 - 2y(x-1) + (y-1)^2$ មិនពិត

-ករណី $f(x) = x + 1$ តាម (1) គេបាន

$(x-y)^2 + 1 = x^2 - 2y(x+1) + (y+1)^2$ មិនពិត

ដូចនេះអនុគមន៍ដែលត្រូវរកមានតែមួយគត់គឺ $f(x) = x$ ។

ខ) រក $g(2013)$ ៖

មានអនុគមន៍ $g : IN \to IN$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $g(x+1) = g(x) + x$ ដែល $x \in IN$, $g(1) = 1$

គេបាន $\sum_{x=1}^{2012} [g(x+1) - g(x)] = \sum_{x=1}^{2012} x$

$g(2013)-g(1)=\dfrac{2012(2012+1)}{2}=1006\times 2013$ ដោយ $g(1)=1$

ដូចនេះ $g(2013)=2025079$ ។

VIII-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$y''-4y'+8y=e^{2x}+\cos 2x \quad (1)$

យើងតាង $y=e^{2x}.z$ នោះ $y'=(2z+z')e^{2x}$ និង $y''=(z''+4z'+4z)e^{2x}$

សមីការ (1)អាចសរសេរ ៖

$[(z''+4z'+4z)-4(2z+z')+8z]e^{2x}=e^{2x}+\cos 2x$

$z''+4z=1+e^{-2x}\cos 2x \iff z''+4(z-\dfrac{1}{4})=e^{-2x}\cos 2x \quad (2)$

តាង $u=z-\dfrac{1}{4}$ នោះ $u'=z'$ & $u''=z''$

សមីការ (2) ក្លាយជា $u''+4u=e^{-2x}\cos 2x \quad (3)$

តាង $u=ve^{-2x}$ នោះ $u'=(v'-2v)e^{-2x}$ និង $u''=(v''-4v'+4v)e^{-2x}$

សមីការ (3) ក្លាយជា $(v''-4v'+4v)e^{-2x}+4ve^{-2x}=e^{-2x}\cos 2x$

សមមូល $v''-4v'+4v=\cos 2x \quad (4)$

-រកចម្លើយអូម៉ូសែន $v''-4v'+8v=0$ មានសមីការសម្គាល់ $r^2-4r+8=0$

$\Delta'=4-8=4i^2$ មានឫស $r_1=2-2i$, $r_2=2+2i$ នោះ $\alpha=2$, $\beta=2$

គេបានចម្លើយអូម៉ូសែន $v_h = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{2x}$, $A, B \in IR$

-រកចម្លើយពិសេស v_p ៖

តាង $v_p = C\cos 2x + D\sin 2x$ ជាចម្លើយពិសេសនោះ

$v_p'' - 4v_p' + 4v_p = \cos 2x \quad (5)$

ដោយ $v_p' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x$ និង

$v_p'' = -4C\cos 2x - 4D\sin 2x$

គេបាន

$$\begin{cases} v_p'' = -4C\cos 2x - 4D\sin 2x \\ -4v_p' = 8C\sin 2x - 8D\cos 2x \\ 8v_p = 8C\cos 2x + 8D\sin 2x \end{cases}$$

$v_p'' - 4v_p' + 8v_p = (4C - 8D)\cos 2x + (8C + 4D)\sin 2x = \cos 2x$

គេទាញ $\begin{cases} 4C - 8D = 1 \\ 8C + 4D = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $C = \dfrac{1}{20}$, $D = -\dfrac{1}{10}$

នោះ $v_p = \dfrac{1}{20}\cos 2x - \dfrac{1}{10}\sin 2x = \dfrac{\cos 2x - 2\sin 2x}{20}$

គេបានចម្លើយទូទៅនៃ (4) គឺ

$v = v_h + v_p = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{2x} + \dfrac{\cos 2x - 2\sin 2x}{20}$

គេទាញ $u = ve^{-2x} = A\cos 2x + B\sin 2x + \dfrac{\cos 2x - 2\sin 2x}{20}e^{-2x}$

ដោយ $u = z - \dfrac{1}{4}$

គេទាញ

$$z = u + \frac{1}{4} = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{\cos 2x - 2\sin 2x}{20}e^{-2x} + \frac{1}{4}$$

ដោយ $y = e^{2x}.z$

ដូចនេះ $y = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{2x} + \frac{\cos 2x - 2\sin 2x}{20} + \frac{e^{2x}}{4}$

ជាចម្លើយទូទៅនៃ (1)ដែល A,B ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

✧✧✧ សម្គាល់ ៖

គេអាចដោះស្រាយសមីការនេះ $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \cos 2x$ (1)

តាមរបៀបមួយទៀតគឺ ៖

✧រកចម្លើយអូម៉ូសែន y_h នៃ $y'' - 4y' + 8y = 0$

✧រកចម្លើយពិសេស y_1 នៃ $y'' - 4y' + 8y = \cos 2x$

✧រកចម្លើយពិសេស y_2 នៃ $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$

ដូចនេះ $y = y_h + y_1 + y_2$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1)

-គេត្រូវតាង $y_1 = a\cos 2x + b\sin 2x$ ដែល a,b ត្រូវរក។

-គេត្រូវតាង $y_2 = (cx + d)e^{2x}$ ដែល c,d ត្រូវរក

✧✧✧✧✧✧

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា
ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

✧✧✧✧✧

I-ចូរបង្ហាញថា $512^3+675^3+720^3$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

II-គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1$, $u_2=5$ និង $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}^2+4}{u_n}$ ដែល $n\in IN$ ។

ចូរស្រាយថាគ្រប់តួនៃស្វីត(u_n)សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ រួចគណនាតួទូទៅ u_n នៃស្វីតជាអនុគមន៍នៃ n ។

III-គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $a^3+b^3+c^3=a^4+b^4+c^4$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a}{a^2+b^3+c^3}+\dfrac{b}{a^3+b^2+c^3}+\dfrac{c}{a^3+b^3+c^2}\geq 1$ ។

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ ដោយដឹងថា

$f(x+1)=f(x)+1$ និង $f(x^3)=[f(x)]^3$ គ្រប់ $x\in\mathbb{Q}^+$ ។

ចូរកំណត់រកអនុគមន៍ f ។

V-រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC មួយប៉ះជ្រុង BC , CA និង AB រៀងគ្នាត្រង់ K , L និង M ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{\dfrac{AL}{AB}}+\sqrt{\dfrac{BM}{BC}}+\sqrt{\dfrac{CK}{CA}}\leq\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ។

អត្រាកំណែគំរូ

I- បង្ហាញថា $512^3+675^3+720^3$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ៖

តាង $S=512^3+675^3+720^3=a^3+b^3+c^3$

ដែល $a=512$, $b=675$, $c=720$ ។

គេមាន

$a=512=2^9$, $b=675=3^3\times5^2$, $c=720=2^4\times3^2\times5$

យើងពិនិត្យឃើញថា $2c^2=3ab$ នោះ S អាចសរសេរជា ៖

$$S=a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+(-3c)^3-3ab(-c)=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$$

ដោយ $a+b-c=512+675-720=467\neq1$ នោះ $467\,|\,S$ ។

ដូចនេះ $512^3+675^3+720^3$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

II-ស្រាយថាគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត (u_n) សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ៖

គេមាន $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}^2+4}{u_n}$ នោះ $u_{n+2}u_n=u_{n+1}^2+4$ (1)

ហើយ $u_{n+3}u_{n+1}=u_{n+2}^2+4$ (2)

ដកសមីការ (1) និង (2) គេបាន $u_{n+2}u_n-u_{n+3}u_{n+1}=u_{n+1}^2-u_{n+2}^2$

សមមូល $u_{n+2}u_n+u_{n+2}^2=u_{n+3}u_{n+1}+u_{n+1}^2$

ឬ $u_{n+2}(u_n+u_{n+2})=u_{n+1}(u_{n+3}+u_{n+1})$

សមមូល $\dfrac{u_{n+3}+u_{n+1}}{u_{n+2}}=\dfrac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+1}}$ (3)

តាង $V_n=\frac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+1}}$ នោះ $V_{n+1}=\frac{u_{n+3}+u_{n+1}}{u_{n+2}}=V_n$

(តាមទំនាក់ទំនង(3)) នោះ (V_n) ជាស្វ៊ីតថេរ

គេបាន $V_n=V_1=\frac{u_3+u_1}{u_2}$ តែ $u_1=1\,,u_2=5$

និង $u_3=\frac{u_2^2+4}{u_1}=\frac{25+4}{1}=29$

នោះ $V_n=\frac{29+1}{5}=6$ ឬ $\frac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+1}}=6$ នាំឲ្យ $u_{n+2}=6u_{n+1}-u_n$

ដោយ $u_1=1\,,u_2=5$ ជាចំនួនគត់នោះតាម $u_{n+2}=6u_{n+1}-u_n$

គេទាញបាន u_n ជាចំនួនគត់គ្រប់ $n\in IN$ ។

ដូចនេះគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត (u_n) សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ។

គណនាតួទូទៅ u_n នៃស្វ៊ីតជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $u_{n+2}=6u_{n+1}-u_n$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

សមីការសម្គាល់ $r^2=6r-1$ ឬ $r^2-6r+1=0$, $\Delta'=9-1=8$

គេទាញឫស $r_1=3-2\sqrt{2}$, $r_2=3+2\sqrt{2}$

តួទូទៅនៃស្វ៊ីតមានរាង

$$u_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n=\alpha\left(3-2\sqrt{2}\right)^n+\beta\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$$

ដោយ $u_1=1\,,u_2=5$ នោះ $\begin{cases}\alpha(3-2\sqrt{2})+\beta(3+2\sqrt{2})=1\\ \alpha(3-2\sqrt{2})^2+\beta(3+2\sqrt{2})^2=5\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រពន្ធ័នេះគេបាន $\alpha=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $\beta=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $u_n=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$ ។

III-ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{a^2+b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+b^2+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3+c^2}\geq 1$$

យើងតាង

$$T=\frac{a}{a^2+b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+b^2+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3+c^2}$$

$$=\frac{a^2}{a^3+a(b^3+c^3)}+\frac{b^2}{b^3+b(a^3+c^3)}+\frac{c^2}{c^3+c(a^3+b^3)}$$

តាមវិសមភាព

$Cauchy-Schwarz:(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$ (*)

យក

$$a_1=\frac{a}{\sqrt{a^3+a(b^3+c^3)}},\ a_2=\frac{b}{\sqrt{b^3+b(a^3+c^3)}},\ a_3=\frac{c}{\sqrt{c^3+c(a^3+b^3)}}$$

និង

$$b_1=\sqrt{a^3+a(b^3+c^3)},\ b_2=\sqrt{b^3+b(a^3+c^3)},\ b_3=\sqrt{c^3+c(a^3+b^3)}$$

ដែល $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a+b+c$, $a_1{}^2+a_2^2+a_3^2=T$ និង

$$b_1^2+b_2^2+b_3^2=a^3+b^3+c^3+a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)$$

ជំនួសក្នុង (*) គេទាញបាន ៖

$$T \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{(a^3+b^3+c^3)+(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-(a^4+b^4+c^4)}$$

ដោយគេមាន $a^3+b^3+c^3 = a^4+b^4+c^4$ (សម្មតិកម្ម)

គេទាញ $T \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)} = \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$ $(**)$

តាមវិសមភាព Holder គេមាន ៖

$$(a+b+c)(a^4+b^4+c^4)^2 \geq (a^3+b^3+c^3)^3 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3} \geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{(a^4+b^4+c^4)^2} = 1 \quad (***)$$

តាម $(**)$ និង $(***)$ គេទាញបាន $T \geq 1$ ពិត ។

ដូចនេះ: $\frac{a}{a^2+b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+b^2+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3+c^2} \geq 1$ ។

IV- កំណត់រកអនុគមន៍ f ៖

គេមាន $f(x+1) = f(x)+1$ នោះចំពោះគ្រប់ $k \in IN$ គេបាន $f(x+k) = f(x)+k$ (1)

យក $x = \frac{p}{q}+q^2$ ដែល $GCD(p,q)=1$ និង $p,q \in IN$ ជំនួស ក្នុង $f(x^3) = [f(x)]^3$ គេបាន ៖

$$f\left[(\frac{p}{q}+q^2)^3\right] = \left[f(\frac{p}{q}+q^2)\right]^3 \quad (2)$$

ដោយប្រើ (1) គេបាន $f\left(\frac{p}{q}+q^2\right)=f\left(\frac{p}{q}\right)+q^2$

ហើយ

$$f\left[(\frac{p}{q}+q^2)^3\right]=f\left(\frac{p^3}{q^3}+3p^2+3pq^3+q^6\right)=f\left((\frac{p}{q})^3\right)+3p^2+3pq^3+q^6$$

$$=\left[f(\frac{p}{q})\right]^3+3p^2+3pq^3+q^6$$

នោះទំនាក់ទំនង (2) អាចសរសេរជា ៖

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^3+3p^2+3pq^3+q^6=\left[f\left(\frac{p}{q}\right)+q^2\right]^3$$

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^3+3p^2+3pq^3+q^6=\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^3+3\left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^2q^2+3f\left(\frac{p}{q}\right)q^4+q^6$$

$$3p^2q^2\left[f^2\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{p^2}{q^2}\right]+3q^4\left[f\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{p}{q}\right]=0$$

$$\left[f\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{p}{q}\right]\left[3p^2q^2\left(f\left(\frac{p}{q}\right)+\frac{p}{q}\right)+3q^4\right]=0$$

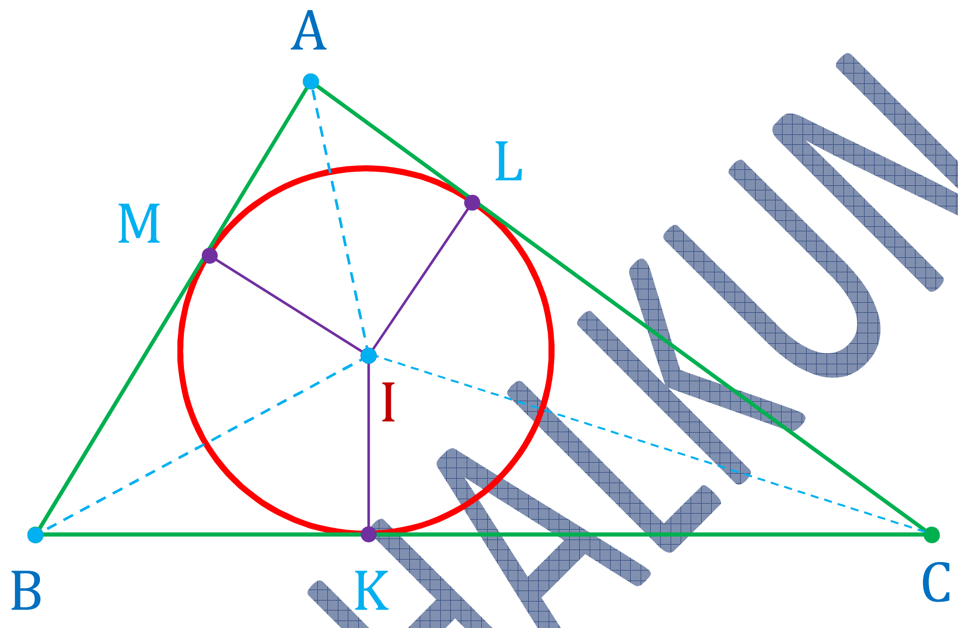
ដោយ $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ នោះ $3p^2q^2\left(f\left(\frac{p}{q}\right)+\frac{p}{q}\right)+3q^4>0$

គេទាញបាន $f\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{p}{q}=0$ ឬ $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}$ គ្រប់ $p,q\in IN$

និង $GCD(p,q)=1$ ។

ដូចនេះ $f(x)=x$ គ្រប់ $x\in\mathbb{Q}^+$ ។

V-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{\frac{AL}{AB}}+\sqrt{\frac{BM}{BC}}+\sqrt{\frac{CK}{CA}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$



តាង $AM=AL=x$, $BM=BK=y$, $CK=CL=z$ នោះ

$BC=y+z$, $CA=z+x$, $AB=x+y$

គេបាន

$$\sqrt{\frac{AL}{AB}}+\sqrt{\frac{BM}{BC}}+\sqrt{\frac{CK}{CA}}=\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}\quad(*)$$

តាង

$$T=\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}=\frac{\sqrt{x(y+z)(z+x)}+\sqrt{y(x+y)(z+x)}+\sqrt{z(x+y)(y+z)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(x+z)}}$$

$$=\frac{\sqrt{(x+z)(xy+xz)}+\sqrt{(x+y)(yz+xy)}+\sqrt{(y+z)(xz+yz)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(x+z)}}$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz គេមាន ៖

$$\sqrt{(x+z)(xy+xz)}+\sqrt{(x+y)(yz+xy)}+\sqrt{(y+z)(xz+yz)}\le\sqrt{2(x+y+z)}\sqrt{2(xy+yz+xz)}$$

គេទាញ

$$T\le 2\sqrt{\frac{(x+y+z)(xy+yz+xz)}{(x+y)(y+z)(x+z)}}=2\sqrt{1+\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}}$$

តាមវិសមភាព AM-GM គេមាន

$$(x+y)(y+z)(x+z)\ge 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{xz}=8xyz$$

នោះគេទាញ $\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}\le\frac{1}{8}$ ហេតុនេះ

$T\le 2\sqrt{1+\frac{1}{8}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{\frac{AL}{AB}}+\sqrt{\frac{BM}{BC}}+\sqrt{\frac{CK}{CA}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$ ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

សម័យប្រឡង ២៣ ឧសភា ២០០២

(រយៈពេល ៣ ម៉ោង)

១-(ពិន្ទុ10) ស្រាយថា $\mathbf{f(n)=3^{2n}+7}$ ចែកដាច់នឹង **8** ដែល $\mathbf{n}\in\mathbb{N}$

២-(ពិន្ទុ10) ចំនួនមួយមានលេខប្រាំខ្ទង់ដែលលេខខ្ទង់វារៀបតាមលំដាប់ $x , x+1 , x+2 , 3x , x+3$ ហើយគេដឹងថាចំនួននោះជាការេប្រាកដ ។ ចូររកចំនួននោះ ?

៣-(ពិន្ទុ10) ABC ជាត្រីកោណមួយកែងត្រង់ B ដែលមាន CI ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃមុំ C ។ បើ $IB = 1cm ; BC = 3cm$ ហើយតាង $AI = x ; AC = y$ ចូរគណនា x និង y ។

៤-(ពិន្ទុ10) $\forall n \in IN^*$ ចូរបញ្ជាក់ថា $E = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ជាចំនួនដែលចែកដាច់នឹង 1897 ជានិច្ច ។

៥-(ពិន្ទុ10) $a;b;c$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយថា
$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le 3abc$$ ។

៦-(ពិន្ទុ10) U ជាស្វ៊ីតមួយកំណត់ដោយ ៖
$$\forall n \in IN : U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n$$
ចូរកំនត់តម្លៃ x ដែលនាំឲ្យ $V_n = U_{n+1} - xU_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

៧-(ពិន្ទុ20) ដោះស្រាយវិសមីការ $1 - \frac{x}{2} < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ។

៨-(ពិន្ទុ20) ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ដែល $BC = a$ ហើយមានរង្វង់មួយដែលមានកាំ r ចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះ ។ ចូររករង្វាស់ជ្រុងពីរទៀតនៃត្រីកោណនោះ ?

ដំណោះស្រាយ

១-ស្រាយថា $f(n)=3^{2n}+7$ ចែកដាច់នឹង 8 ៖

គេអាចសរសេរ $f(n)=9^n+7=(9^n-1)+8$

តាមសមភាព $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+....+b^{n-1})$

គេបាន

$$\begin{aligned}9^n-1&=(9-1)(9^{n-1}+9^{n-2}+...+9+1)\\&=8\times(9^{n-1}+9^{n-2}+.....+9+1)\end{aligned}$$

គេទាញ $8|9^n-1$ ។

ដូចនេះ $f(n)=3^{2n}+7$ ចែកដាច់នឹង 8 ជានិច្ចគ្រប់ចំនួន $n\in IN$

២-រកចំនួនដែលជាការេប្រាកដ ៖

តាង N ជាចំនួនមានលេខប្រាំខ្ទង់ដែលលេខខ្ទង់វារៀបតាម

លំដាប់ $x\,,x+1\,,x+2\,,\,3x\,,\,x+3$ ។

គេអាចសរសេរ $N=\overline{x(x+1)(x+2)(3x)(x+3)}$

ក្នុងប្រពន្ធ័គោល10។

ដោយ $x\,,x+1\,,x+2\,,\,3x\,,\,x+3$ ជាលេខនោះវាត្រូវតែជាចំនួន

គត់ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ 0 និង 9 ។ ហេតុនេះគេទាញ $3x\le 9$

នោះ $x\le 3$ ហើយដោយ $x\ne 0$ នោះគេបាន $x=1\,,2\,,3$ ។

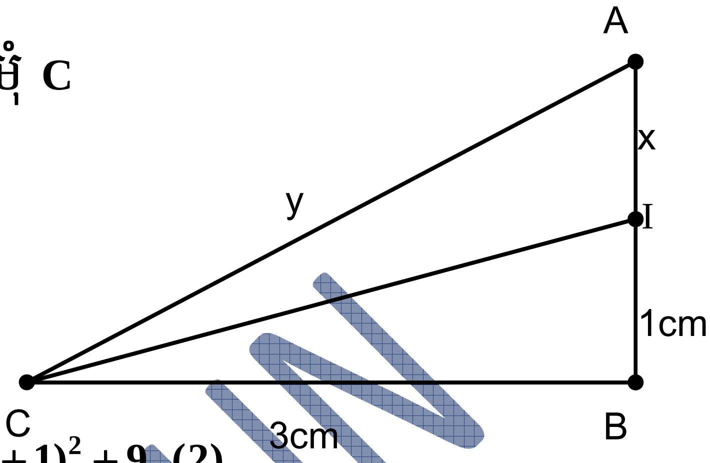
-ចំពោះ $x=1$ គេបាន $N=12334$ (មិនមែនជាការេប្រាកដ)

-ចំពោះ $x=2$ គេបាន $N=23465$ (មិនមែនជាការេប្រាកដ)

-ចំពោះ $x=3$ គេបាន $N=34596=186^2$ ជាការេប្រាកដ

ដូចនេះចំនួនជាការេប្រាកដដែលត្រូវរកនោះគឺ $N=34596$ ។

៣-គណនា x និង y ៖



ដោយ CI ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃមុំ C

គេបាន $\frac{CB}{CA}=\frac{BI}{AI}$ ឬ $\frac{3}{y}=\frac{1}{x}$

គេទាញ $y=3x \quad (1)$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រគេបាន៖

$$AC^2=AB^2+BC^2 \quad \text{ឬ} \quad y^2=(x+1)^2+9 \quad (2)$$

យកសមីការ (1) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន ៖

$$9x^2=(x+1)^2+9$$

$$9x^2=x^2+2x+1+9$$

$$8x^2-2x-10=0$$

$$4x^2-x-5=0 \ , \ \Delta=1+80=81$$

គេទាញឫស $x_1=\frac{1+9}{8}=\frac{5}{4} ; x_2=\frac{1-9}{8}=-1$ (មិនយក)

ចំពោះ $x=\frac{5}{4}$ តាម (1) គេទាញបាន $y=\frac{15}{4}$ ។

ដូចនេះ $x=\frac{5}{4}cm \ ; y=\frac{15}{4}cm$ ។

៤-បញ្ជាក់ថា ចែកដាច់នឹង 1897 ជានិច្ច ៖

មាន $E=2903^n-803^n-464^n+261^n$

គេមាន $1897=271\times 7$ ហើយ $GCD(271,7)=1$

តាមរូបមន្ត $a^p-b^p=(a-b)(a^{p-1}+a^{p-2}b+....+b^{p-1})$

គេបាន $2903^n-803^n=(2903-803)N_1=7\times 300N_1$

$$464^n - 261^n = (464 - 261)N_2 = 7 \times 29N_2$$

ដែល N_1, N_2 ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

នោះ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n = 7(300N_1 - 29N_2)$

នាំឱ្យ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដូចគ្នាដែរ $2903^n - 464^n = (2903 - 464)N_3 = 271 \times 9N_3$

$$803^n - 261^n = (803 - 261)N_4 = 271 \times 2N_4$$

នោះ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n = 271(9N_3 - 2N_4)$

នាំឱ្យ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 271 ។

ដូចនេះ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897 ។

៥-ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \le 3abc$$

តាង $T = 3abc - a^2(b + c - a) - b^2(c + a - b) - c^2(a + b - c)$

គេមាន $abc - a^2(b + c - a) = a(bc - ab - ac + a^2)$

$$= a[(a^2 - ab) - (ac - bc)]$$

$$= a[a(a - b) - c(a - b)]$$

$$= a(a - b)(a - c) \quad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $abc - b^2(c + a - b) = b(b - a)(b - c) \quad (2)$

និង $abc - c^2(a + b - c) = c(c - a)(c - b) \quad (3)$

បូកសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន ៖

$$T = a(a - b)(a - c) + b(b - a)(b - c) + c(c - a)(c - b)$$

$$= (a - b)[a(a - c) - b(b - c)] + c(c - a)(c - b)$$

ដោយកន្សោម T មានលក្ខណៈឆ្លុះនោះយើងអាចឧបមាថា $a \ge b \ge c$

គេបាន $\begin{cases} a \ge b > 0 \\ a - c \ge b - c \ge 0 \end{cases}$ នោះ $a(a-c) \ge b(b-c)$

នាំឲ្យ $a(a-c) - b(b-c) \ge 0$ ហើយ $a - b \ge 0$

និង $(c-a)(c-b) = (a-c)(b-c) \ge 0$

គេទាញ $T = (a-b)[a(a-c) - b(b-c)] + c(c-a)(c-b) \ge 0$

ដូចនេះ $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \le 3abc$ ។

សម្គាល់ ៖ តាមវិសមភាព Schur : $\sum_{cyc} a^r(a-b)(a-c) \ge 0$

យក $r = 1$ គេបាន $T = \sum_{cyc} a(a-b)(a-c) \ge 0$ ។

៦-(ពិន្ទុ10) U ជាស្វ៊ីតមួយកំណត់ដោយ

$\forall n \in IN : U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n$

កំនត់តម្លៃ x ដែលនាំឲ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ៖

គេមាន $V_n = U_{n+1} - xU_n \quad (1)$

នាំឲ្យ $V_{n+1} = U_{n+2} - xU_{n+1}$

ដោយ $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n$

គេបាន $V_{n+1} = 5U_{n+1} - 6U_n - xU_{n+1}$

$$V_{n+1} = (5-x)U_{n+1} - 6U_n$$

$$V_{n+1} = (5-x)\left(U_{n+1} - \frac{6}{5-x}U_n\right) \quad (2) \quad (\forall x \ne 5)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) ដើម្បីឲ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

លុះត្រាតែ $x = \frac{6}{5-x}$ នាំឲ្យ $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4\times 6 = 25 - 24 = 1$

គេទាញឫស $x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$; $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$ ។

ដូចនេះ $x_1 = 2$ ឬ $x_2 = 3$,

៧-(ពិន្ទុ20) ដោះស្រាយវិសមីការ $1-\frac{x}{2} < \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

វិសមីការនេះមានន័យលុះត្រាតែ $1+x>0$ ឬ $x>-1$ (1)

-ករណី $1-\frac{x}{2} \le 0$ នាំឲ្យ $x\ge 2$ នោះវិសមីការពិតជានិច្ច។

ដូចនេះ $x\in[2;+\infty)$ ។

-ករណី $1-\frac{x}{2} > 0$ ឬ $x<2$

ហើយតាម (1) គេបាន $-1<x<2$ (2)

ក្នុងករណីនេះវិសមីការសមមូល $(1-\frac{x}{2})^2 < \frac{1}{1+x}$

សមមូល $(1-x+\frac{x^2}{4})(1+x)<1$

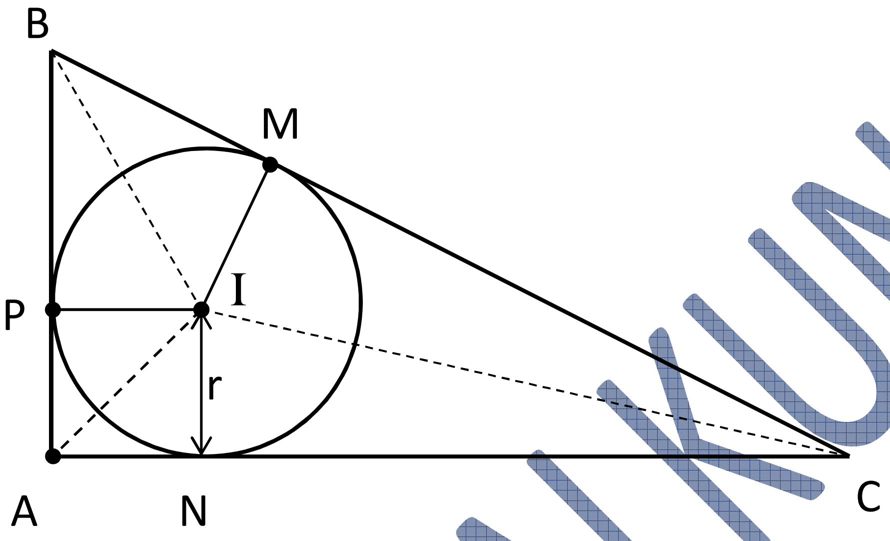
សមមូល $x^2(x-3)<0$

ដោយ $x^2\ge 0$ នោះគេទាញ $x\ne 0$ និង $x<3$ (3)

តាម (2) និង (3) គេទាញ $x\in(-1;0)\cup(0;2)$ ។

សរុបមកសំណុំចម្លើយវិសមីការគឺ $x \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$ ។

៨-(ពិន្ទុ20) រករង្វាស់ជ្រុងពីរទៀតនៃត្រីកោណ



តាង $AB = x$; $AC = y$ ជារង្វាស់ជ្រុងដែលត្រូវរក ។

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរ័អនុវត្តក្នុងត្រីកោណកែង ABC គេបាន

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ ឬ $a^2 = x^2 + y^2$ (1)

ព្រោះ $BC = a$ ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណកែង ABC គឺ ៖

$S_{ABC} = S_{IAB} + S_{IAC} + S_{IBC}$

ឬ $\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}xr + \frac{1}{2}yr + \frac{1}{2}ar$

ឬ $xy = r(x+y) + ar$ (2)

(1)និង(2) គេបាន $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 & (1) \\ xy = r(x+y) + ar & (2) \end{cases}$

តាង $S = x + y \ ; P = xy$

ប្រព័ន្ធសមីការខាងលើអាចសរសេរ $\begin{cases} S^2 - 2P = a^2 \\ P = rS + ar \end{cases}$

ដោយបំបាត់ P គេបាន $S^2 - 2(rS + ar) = a^2$

ឬ $S^2 - 2rS - 2ar - a^2 = 0$

ឬ $(S - r)^2 - (r + a)^2 = 0$ នាំឲ្យ $S = 2r + a$

ហើយ $P = r(2r + a) + ar = 2r(r + a)$ ។

គេបាន $x ; y$ ជាឬសសមីការ $X^2 - SX + P = 0$

(ទ្រឹស្តីបទវ្យែត)

$X^2 - (2r + a)X + 2r(r + a) = 0$

$\Delta = (2r + a)^2 - 8r(r + a) = a^2 - 4ra - 4r^2$

សមីការមានឬសលុះត្រាតែ

$\Delta = a^2 - 4ra - 4r^2 = (a - 2r)^2 - 8r^2 \geq 0$

ឬ $a \geq 2(1 + \sqrt{2})r$ ។

គេទាញឬស

$X_1 = \frac{1}{2}(2r + a + \sqrt{a^2 - 4ar - 4r^2}) ; X_2 = \frac{1}{2}(2r + a - \sqrt{a^2 - 4ar - 4r^2})$

ដូចនេះ $x = X_1 ; y = X_2$ ឬ $x = X_2 \ ; y = X_1$ ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែប្រចាំ ខេត្តបាត់ដំបង

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និង ថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង ១៩ កុម្ភៈ ២០១៣

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

រយៈពេល ១២០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I-(ពិន្ទុ៥)ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times...\times\frac{2011}{2012}<\frac{1}{\sqrt{2013}}$ ។

II-(ពិន្ទុ៥)កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1+\sin x}+\frac{b\cos x}{1-\sin x}$ គ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

III-(ពិន្ទុ១០)គេសង់ស៊ីឡាំងបរិវត្តន៍មួយមានមាឌ $54\pi\ m^3$ ។ កំណត់វិមាត្រស៊ីឡាំងដើម្បីឲ្យអស់ចំណាយតិចបំផុត ។

IV-(ពិន្ទុ១០)គេមាន $x^2+y^2=1$ ។ កំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $S=x+y$ ។

V-(ពិន្ទុ១០)ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង a,b,c,d និងមានផ្ទៃក្រឡា S ។កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ S ?

VI-(ពិន្ទុ១០)កំណត់គូចំនួនគត់ (x,y) ដែល $x^2+y^2=2(x+y)+xy$ ។

VII-(ពិន្ទុ១០)គ្រប់ $x \in IR$ គេមាន

$$f(x) + 2f\left(\frac{x + \frac{2011}{2}}{x-1}\right) = 4028 - x$$ ។ គណនា $f(2014)$?

VIII-(ពិន្ទុ១០)ចតុកោណ $ABCD$ មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន $AB = 1$, $BC = 3$, $CD = 2$, $DA = 2$

E ជាប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូង BD និង AC ។

រកតម្លៃផលធៀប $\frac{BE}{ED}$?

IX-(ពិន្ទុ១០)គេឲ្យ (Z_n) ជាស៊្វីតកំណត់ដោយ $Z_0 = 1$ និង $Z_{n+1} = Z_n + i$

ក)បង្ហាញថា $|Z_n| < 1 \ \forall n \in IN$, $n \geq 0$ ។

ខ)តាង $Z_n = x_n + i.y_n$ ដែល $x_n, y_n \in IR$ និង $U_n = Z_n - i$

កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង U_n និង U_{n+1} ។

X-(ពិន្ទុ២០)គេឲ្យត្រីកោណ ABC ចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ R ផ្ចិត O ។តាង R_1, R_2, R_3 ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ OBC , OCA, OAB រៀងគ្នា ។ តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ និង $a + b + c = 2p$ ។

ស្រាយថា $\left(\frac{2p}{3}\right)^3 \geq abc$ រួចទាញថា $R_1R_2R_3 \geq \frac{3^6}{4^2} \times \frac{R^7}{p^4}$?

អត្រាកំណែគំរូដោយ លឹម ផល្គុន

I-(ពិន្ទុ៥)ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2011}{2012}<\frac{1}{\sqrt{2013}}$

តាង $P=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2011}{2012}=\prod_{k=1}^{1006}\frac{2k-1}{2k}$

ចំពោះគ្រប់ $k\in\mathbb{N}$ គេមាន $(2k-1)(2k+1)=4k^2-1<4k^2$

នោះ $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$ គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{2k-1}{2k}>0$ គេបាន

$\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2<\frac{2k-1}{2k+1}$ នោះ $\frac{2k-1}{2k}<\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}$

គេបាន

$$P=\prod_{k=1}^{1006}\frac{2k-1}{2k}<\prod_{k=1}^{1006}\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}=\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{\frac{3}{5}}\times\ldots\times\sqrt{\frac{2011}{2013}}=\frac{1}{\sqrt{2013}}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2011}{2012}<\frac{1}{\sqrt{2013}}$ ។

II-(ពិន្ទុ៥)កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1+\sin x}+\frac{b\cos x}{1-\sin x}$

គ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

មាន $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1+\sin x}+\frac{b\cos x}{1-\sin x}$ (1)

គ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ គេមាន

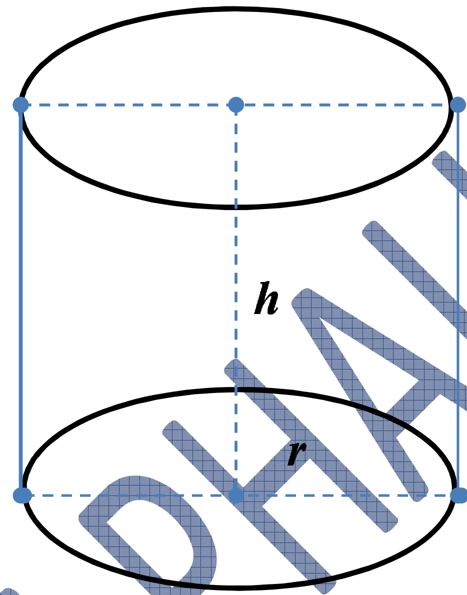
$$\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x}{2}\cdot\frac{(1+\sin x)+(1-\sin xx)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

ឬ $\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $a=b=\dfrac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$ ។

III-(ពិន្ទុ១០)កំណត់វិមាត្រស៊ីឡាំងដើម្បីឲ្យអស់ចំណាយតិចបំផុត



តាង r ជាកាំថាសបាត និង h ជាកម្ពស់របស់ស៊ីឡាំង

(គិតជា dm)

មាឌរបស់ស៊ីឡាំងគឺ $V=\pi r^2h=54\pi$ នោះ $h=\dfrac{54}{r^2}$ (1)

ផ្ទៃក្រឡាខាងទាំងអស់នៃស៊ីឡាំងគឺ $S_t=2\pi r^2+2\pi rh$ (2)

យក(1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$$S_t = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{54}{r^2} = 2\pi(r^2 + \frac{54}{r})$$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន ៖

$r^2 + \frac{54}{r} = r^2 + \frac{27}{r} + \frac{27}{r} \geq 3\sqrt[3]{r^2 \times \frac{27}{r} \times \frac{27}{r}} = 27$ គេទាញ

$S_t \geq 54\pi \ \ (m^2)$ ។

ដើម្បីឲ្យប្រាក់ចំណាយលើការសង់ស៊ីឡាំងនេះអស់តិចបំផុត លុះត្រាតែ S_t អប្បបរមា នោះវិសមភាពខាងលើក្លាយជាសមភាព ។

គេបាន $r^2 = \frac{27}{r}$ នាំឲ្យ $r = 3$ ហើយ $h = \frac{54}{3^2} = 6$

ដូចនេះ $r = 3 \ m$ និង $h = 6m$ ។

IV-(ពិន្ទុ១០)កំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $S = x + y$

របៀបទី១

តាមវិសមភាព $Cauchy - Schwarz$ គេមាន

$S^2 = (x+y)^2 \leq (1^2 + 1^2)(x^2 + y^2)$

ដោយគេមាន $x^2 + y^2 = 1$ នោះ $S^2 \leq 2$

សមមូល $-\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2}$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃនៃ S គឺ $S_{\min} = -\sqrt{2}$ និងតម្លៃធំបំផុតគឺ $S_{\max} = \sqrt{2}$ ។

របៀបទី២

ដោយ $x^2+y^2=1$ នោះគេអាចជ្រើសរើស $x=\cos\varphi$ និង $y=\sin\varphi$ គ្រប់ $\varphi\in IR$

គេបាន $S=x+y=\cos\varphi+\sin\varphi=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\varphi+\sin\frac{\pi}{4}\sin\varphi\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$$

ដោយគ្រប់ $\varphi\in IR: -1\le\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\le 1$

នោះ $-\sqrt{2}\le S\le\sqrt{2}$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃនៃ S គឺ $S_{\min}=-\sqrt{2}$ និងតម្លៃធំបំផុតគឺ $S_{\max}=\sqrt{2}$ ។

របៀបទី៣

ជ្រើសរើសវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(1,1)$ និង $\vec{v}=(x,y)$ យក $\varphi\in IR$ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែគេបាន ៖

$$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\varphi=\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{x^2+y^2}.\cos\varphi=\sqrt{2}\cos\varphi \quad (1)$$

តាមកន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែគេបាន ៖

$$\vec{u}.\vec{v}=(1)(x)+(1)(y)=x+y=S \quad (2)$$

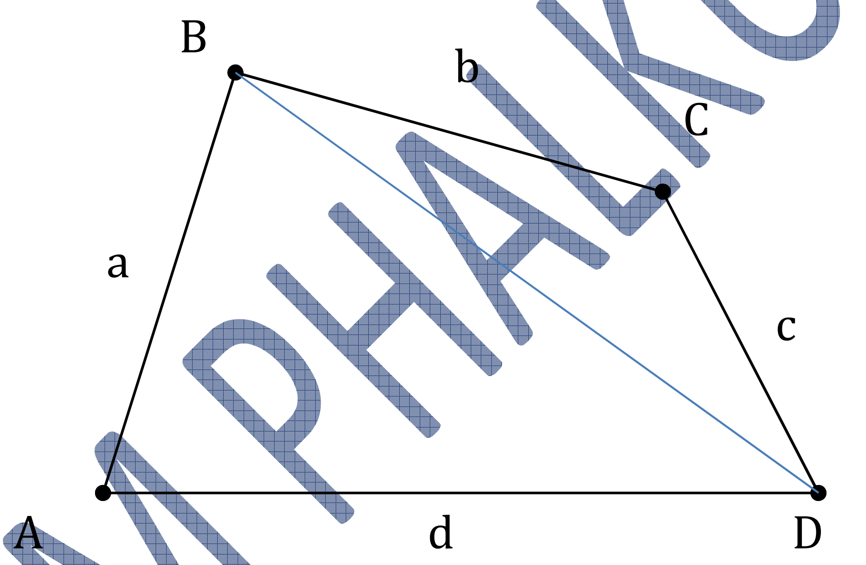
តាម (1) និង (2) គេទាញ $S=\sqrt{2}\cos\varphi$ ដោយ

$\forall\varphi\in IR : -1\le\cos\varphi\le 1$

នោះគេទាញបាន $-\sqrt{2}\le S\le\sqrt{2}$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃនៃ S គឺ $S_{\min}=-\sqrt{2}$ និងតម្លៃធំបំផុតគឺ $S_{\max}=\sqrt{2}$ ។

V-(ពិន្ទុ១០)កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ S



គេមាន $S=S_{ABD}+S_{BCD}=\dfrac{1}{2}ad\sin A+\dfrac{1}{2}bc\sin C$ នោះ

$ad\sin A+bc\sin C=2S$ (1)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ABD និង BCD គេមាន ៖

$AC^2=a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C$

នោះ $ad\cos A - bc\cos C = \dfrac{(a^2+d^2)-(b^2+c^2)}{2}$ (2)

គេមាន

$$(ad\sin A + bc\sin C)^2 + (ad\cos A - bc\cos C)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\cos(A+C)$$

ដោយ $\cos(A+C) = 2\cos^2\dfrac{A+C}{2} - 1$

គេបាន

$$(ad\sin A + bc\sin C)^2 + (ad\cos A - bc\cos C)^2 = (ad+bc)^2 - 4abcd\cos^2\frac{A+C}{2} \quad (3)$$

តាម (1) , (2) និង (3) គេបាន

$$4S^2 + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4} = (ad+bc)^2 - 4abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$

គេទាញ

$$S = \sqrt{\frac{(ad+bc)^2}{4} - \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{16} - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}} \quad (*)$$

តាម (*) ដើម្បីឲ្យ S អតិបរមាលុះត្រាតែ $\cos^2\dfrac{A+C}{2} = 0$ នោះ

$\dfrac{A+C}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ ឬ $A+C=\pi$

ដូចនេះផ្ទៃក្រឡាធំបំផុតនៃចតុកោណជាអនុគមន៍នៃជ្រុង a,b,c,d

គឺ $S_{\max} = \sqrt{\dfrac{(ad+bc)^2}{4} - \dfrac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{16}}$ ។

VI-(ពិន្ទុ១០)កំណត់គូចំនួនគត់ (x,y)

សមីការ $x^2+y^2 = 2(x+y)+xy$ អាចសរសេរ

$(x+y)^2 - 2xy = 2(x+y)+xy$

សមមូល $(x+y)^2-2(x+y)+1=3xy+1$

សមមូល $(x+y-1)^2=3xy+1$ (1)

-បើ $x=0$ នោះសមីការ (1) ក្លាយជា $(y-1)^2=1$ សមមូល $y(y-2)=0$

គេទាញ $y=0$, $y=2$ ។ ដោយ (1) ជាសមីកាស៊ីមេទ្រី(ឆ្លុះ)នោះ

គេទាញបានគូចម្លើយ ៖ $(x,y)\in\{(0,0),(0,2),(2,0)\}$ ។

-បើ $x\neq 0$ ឬ $y\neq 0$ នោះដើម្បីឲ្យ (1) មានចម្លើយក្នុងសំណុំចំនួនគត់លុះត្រាតែ $3xy+1$

ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ព្រោះអង្គទីមួយនៃសមីការជាការេប្រាកដ ។តាង $m\in IN$ ដែល $3xy+1=m^2$ នោះ

$xy=\dfrac{m^2-1}{3}=\dfrac{(m-1)(m+1)}{3}$ ដោយ $xy\in IN$

នោះគេត្រូវឲ្យ $3|(m-1)$ ឬ $3|m+1$ ។

-ករណី $3|m-1$ នោះ $m=3k+1\ \forall k\in IN$

គេបាន $\begin{cases}(x+y-1)^2=(3k+1)^2\\ xy=k(3k+2)\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}x+y=3k+2\\ xy=k(3k+2)\end{cases}$

នោះ x និង y ជាឬសសមីការ

$t^2-(3k+2)t+k(3k+2)=0\ (E_1)$, $\Delta=(3k+2)^2-4k(3k+2)$

$\Delta=(3k+2)(2-k)$ សមីការមានឬសលុះត្រាតែ

$\Delta=(3k+2)(2-k)\geq 0$ ដោយ $k\in IN$

នោះគេទាញបាន $k=1$ ឬ $k=2$ ។

ចំពោះ $k=1$ នោះ $\Delta=5$ មិនមែនជាការេប្រាកដនោះសមីការគ្មានឬសគត់។

ចំពោះ $k=2$ នោះ $\Delta=0$ សមីការមានឬសឌុប

$$t_1=t_2=\frac{3k+2}{2}=\frac{3(2)+2}{2}=4$$

ដូចនេះ $x=4\,,\ y=4$ ។

-ករណី $3\,|\,m+1$ នោះ $m=3k-1\ \forall k\in\mathbb{N}$

គេបាន $\begin{cases}(x+y-1)^2=(3k-1)^2\\ xy=k(3k-2)\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}x+y=3k\\ xy=3k(3k-2)\end{cases}$

នោះ x និង y ជាឬសសមីការ

$$t^2-3k\,t+k(3k-2)=0\ (E_1)\quad ,\Delta=9k^2-4k(3k-2)$$

$\Delta=k(8-3k)$ សមីការមានឬសលុះត្រាតែ $\Delta=k(8-3k)\geq 0$

ដោយ $k\in\mathbb{N}$ នោះគេទាញបាន $k=1$ ឬ $k=2$ ។

ចំពោះ $k=1$ នោះ $\Delta=5$ មិនមែនជាការេប្រាកដនោះសមីការគ្មានឬសគត់។

ចំពោះ $k=2$ នោះ $\Delta=4$ គេទាញឬស $t_1=2\ ,t_2=4$ ។

ដូចនេះ $x=2\,,y=4$ ឬ $x=4\,,y=2$ ។

សរុបមកសមីការមានគូចម្លើយ៦គូគឺ ៖

$(x,y)\in\{(0,0),(0,2),(2,0),(4,2),(2,4),(4,4)\}$ ។

VII-(ពិន្ទុ១០)គណនា $f(2014)$

គេមាន $f(x)+2f\left(\dfrac{x+\frac{2011}{2}}{x-1}\right)=4028-x \quad (1)$

យក $x=2014$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$$f(2014)+2f\left(\dfrac{2014+\frac{2011}{2}}{2013}\right)=4028-2014$$

សម្រួល $f(2014)+2f(\frac{3}{2})=2014 \ (2)$

យក $x=\frac{3}{2}$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$$f(\frac{3}{2})+2f\left(\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{2011}{2}}{\frac{3}{2}-1}\right)=4028-\frac{3}{2}$$

សម្រួល $f(\frac{3}{2})+2f(2014)=\frac{8053}{2}$ នោះ

$f(\frac{3}{2})=\frac{8053}{2}-2f(2014) \ (3)$

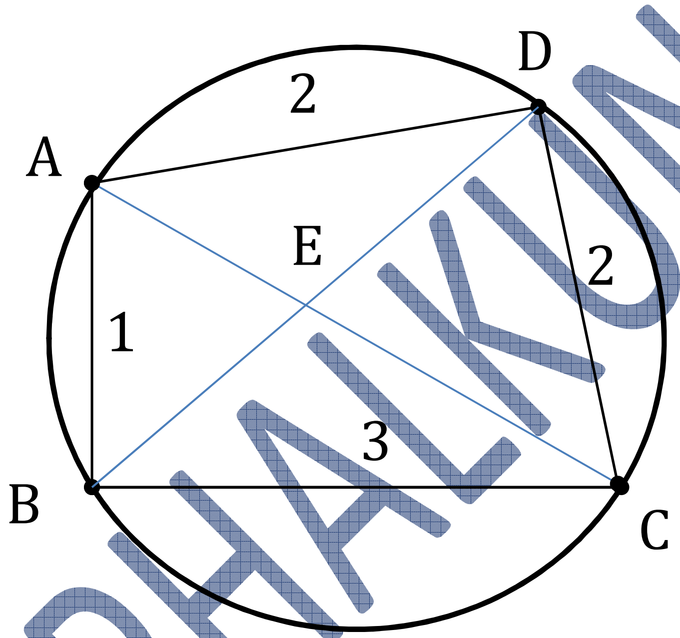
យក (3) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$f(2014)+8053-4f(2014)=2014$

$-3f(2014)=-6039$

ដូចនេះ $f(2014)=\frac{-6039}{-3}=2013$ ។

VIII-(ពិន្ទុ១០) រកតម្លៃផលធៀប $\frac{BE}{ED}$



✧ ប្រៀបធៀបត្រីកោណ EAD និងត្រីកោណ EBC :

មាន $\angle AED=\angle BEC$ (មុំទល់កំពូល) និង $\angle EAD=\angle EBC$

(មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ដោយធ្នូរួម $\overset{\frown}{DC}$)

នោះ EAD និង EBC ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបានផលធៀបដំណូច $\frac{ED}{EC}=\frac{EA}{EB}=\frac{AD}{BC}=\frac{2}{3}$ នោះ

$\frac{EC}{ED}=\frac{3}{2}$ (1) និង $\frac{EA}{EB}=\frac{2}{3}$ (2)

✧ ប្រៀបធៀបត្រីកោណ EAB និងត្រីកោណ EDC :

មាន $\angle AEB = \angle DEC$ (មុំទល់កំពូល) និង $\angle ABE = \angle ECD$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ដោយធ្នូរួម $\overset{\frown}{AD}$)

នោះ EAB និង EDC ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបានផលធៀបដំណូច $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{DC} = \frac{1}{2}$ នោះ

$\frac{EA}{ED} = \frac{1}{2}$ (3) និង $\frac{EC}{EB} = 2$ (4)

បូកសមីការ (1) និង (3) គេបាន $\frac{EA+EC}{ED} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ ឬ

$\frac{AC}{ED} = 2$ (5)

បូកសមីការ (2) និង (4) $\frac{EA+EC}{EB} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$ ឬ

$\frac{AC}{EB} = \frac{8}{3}$ (6)

ចែកសមីការ (5) និង (6) គេបាន $\frac{BE}{ED} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ។

ដូចនេះគេបានតម្លៃផលធៀប $\frac{BE}{ED} = \frac{3}{4}$ ។

IX-(ពិន្ទុ១០)ក)បង្ហាញថា $|Z_n| < 1 \ \forall n \in IN \ , n \geq 0$

គេមាន $Z_0 = 1$ និង $Z_{n+1} = Z_n + i$

គេទាញ (Z_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនៃចំនួនកុំផ្លិចមានផលសងរួម $d = i$

គេបាន $Z_n = Z_0 + nd = 1 + ni$ នោះ $|Z_n| = \sqrt{1+n^2} \ge 1$ គ្រប់ $n \in IN$ និង $n \ge 0$

ដូចនេះ $|Z_n| \ge 1$

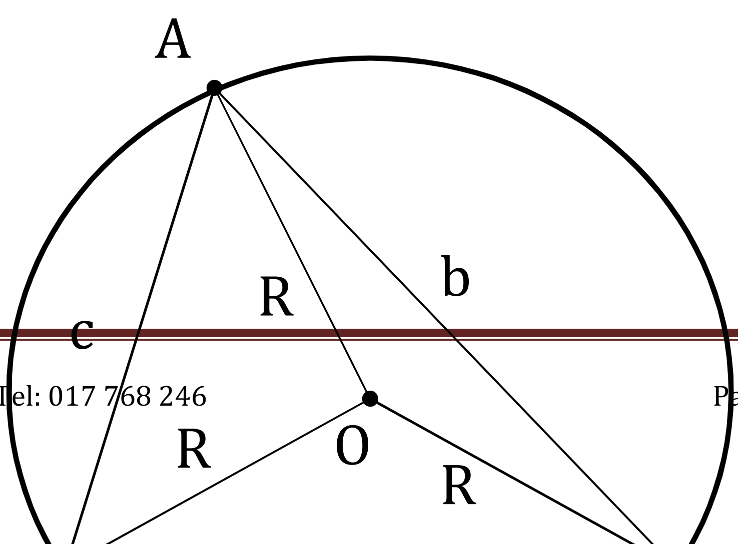
ខ) កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង U_n និង U_{n+1}

គេមាន $U_n = Z_n - i$ នោះ៖

$$U_{n+1} = Z_{n+1} - i = Z_n + i - i = (Z_n - i) + i = U_n + i$$

ដូចនេះ៖ $U_{n+1} = U_n + i$ ជាទំនាក់ទំនងត្រូវរក ។

X-(ពិន្ទុ២០)ស្រាយថា $\left(\frac{2p}{3}\right)^3 \ge abc$ ទាញ $R_1R_2R_3 \ge \frac{3^6}{4^2}\times\frac{R^7}{p^4}$



គ្រប់ $a>0\,,b>0$ គេមាន $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$ សមមូល

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $c+\frac{2p}{3}\ge 2\sqrt{\frac{2cp}{3}}$ (2) ដែល $2p=a+b+c$

បូកវិសមភាព (1) និង (2) គេបាន

$$a+b+c+\frac{2p}{3}\ge 2(\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{2cp}{3}})$$

ដោយ $a+b+c+\frac{2p}{3}=2p+\frac{2p}{3}=\frac{8p}{3}$ និង

$$\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{2cp}{3}}\ge 2\sqrt[4]{\frac{2abcp}{3}}$$

គេបាន $\frac{8p}{3}\ge 4\sqrt[4]{\frac{2abcp}{3}}$ សមមូល $\left(\frac{2p}{3}\right)^4\ge\frac{2p}{3}\times abc$ នោះ

$\left(\frac{2p}{3}\right)^3\ge abc$ ពិត

ដូចនេះ $\left(\frac{2p}{3}\right)^3\ge abc$ ។

គេមាន $S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}$ ដោយ

$$\begin{cases} S_{ABC} = \dfrac{abc}{4R} \quad , \quad S_{OBC} = \dfrac{aR^2}{4R_1} \\ S_{OAC} = \dfrac{bR^2}{4R_2} \quad , \quad S_{OAB} = \dfrac{cR^2}{4R_3} \end{cases}$$

នោះ $\dfrac{abc}{4R} = \dfrac{aR^2}{4R_1} + \dfrac{bR^2}{4R_2} + \dfrac{cR^2}{4R_3}$ ឬ

$$\frac{abc}{R} = R^2\left(\frac{a}{R_1} + \frac{b}{R_2} + \frac{c}{R_3}\right)$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន

$$\frac{a}{R_1} + \frac{b}{R_2} + \frac{c}{R_3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{R_1R_2R_3}}$$

គេទាញ $\dfrac{abc}{R} \geq 3R^2\sqrt[3]{\dfrac{abc}{R_1R_2R_3}}$ សមមូល

$$\frac{(abc)^3}{R^3} \geq 3^3R^6 . \frac{abc}{R_1R_2R_3}$$

សមមូល $abc \geq \sqrt{\dfrac{3^3R^9}{R_1R_2R_3}}$ ដោយ $\left(\dfrac{2p}{3}\right)^3 \geq abc$ (សម្រាយខាងលើ)

គេទាញ $\left(\dfrac{2p}{3}\right)^3 \geq \sqrt{\dfrac{3^3R^9}{R_1R_2R_3}}$ សមមូល $\dfrac{2^6p^6}{3^6} \geq \dfrac{3^3R^9}{R_1R_2R_3}$ នោះ

$$R_1R_2R_3 \geq \frac{3^9R^9}{2^6p^6}$$

ដើម្បីស្រាយថា $R_1R_2R_3 \geq \frac{3^6}{4^2}\times\frac{R^7}{p^4}$ យើងត្រូវបង្ហាញថា

$\frac{3^9R^9}{2^6p^6} \geq \frac{3^6}{4^2}\times\frac{R^7}{p^4}$ ពិត

សមមូល $\frac{R^2}{p^2} \geq \frac{2^2}{3^3}$ នោះ $\frac{p}{R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

គេទាញបាន $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{2p}{2R} = \frac{p}{R}$

តាងអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \sin x$, $x \in (0,\pi)$

គេមាន $f'(x) = \cos x$ និង $f''(x) = -\sin x < 0$ $\forall x \in (0,\pi)$

នោះ f ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ

ចន្លោះ $(0,\pi)$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទ *Jensen* ចំពោះគ្រប់

$A,B,C \in (0,\pi)$ គេបាន ៖

$$f(A)+f(B)+f(C) \geq 3f(\frac{A+B+C}{3}) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

នោះគេទាញ $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ សមមូល

$\frac{p}{R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ពិត ។

ដូចនេះ $R_1R_2R_3 \geq \frac{3^6}{4^2}\times\frac{R^7}{p^4}$ ។

របៀបទី២

តាង $S\ ,\ S_1 ,\ S_2\ ,\ S_3$ ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ $ABC\ ,OBC\ ,OAC\ ,\ OAB$ រៀងគ្នា ។

គេមាន $S = S_1 + S_2 + S_3$ តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្តនិងមធ្យមធរណីមាត្រគេបាន

$S_1 + S_2 + S_3 \geq 3\sqrt[3]{S_1 S_2 S_3}$ នោះ

$$S_1.S_2.S_3 \leq \left(\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}\right)^3 = \frac{S^3}{27} \quad (1)$$

ដោយ $S = \dfrac{abc}{4R}\ ,\ S_1 = \dfrac{aR^2}{4R_1}\ ,\ S_2 = \dfrac{bR^2}{4R_2}\ ,\ S_3 = \dfrac{cR^2}{4R_3}$ នោះ (1)

អាចសរសេរជា ៖

$$\frac{aR^2}{4R_1} \times \frac{bR^2}{4R_2} \times \frac{cR^2}{4R_3} \leq \frac{1}{27} \times \frac{(abc)^3}{4^3 R^3}$$ នាំឲ្យ

$$R_1 R_2 R_3 \geq \frac{27 R^9}{(abc)^2} = \frac{27}{16} R^7 \times \left(\frac{4R}{abc}\right)^2 = \frac{27}{16} \times \frac{R^7}{S^2} \quad (2)$$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ នោះ

$$(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p}$$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេបាន ៖

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)\ge 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}=3\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}$$

ឬ $3p-(a+b+c)=3p-2p=p\ge 3\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}$

នោះ $S^2\le\frac{p^4}{27}$ (3)

តាម (2) និង (3) គេទាញ $R_1R_2R_3\ge\frac{27}{16}\times R^7\times\frac{27}{p^4}=\frac{3^6}{4^2}.\frac{R^7}{p^4}$

ដូចនេះ $R_1R_2R_3\ge\frac{3^6}{4^2}\times\frac{R^7}{p^4}$ ។

សម្គាល់ ៖

គេមាន $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{p}{R}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ នោះ $\frac{R}{p}\ge\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ឬ

$\frac{R^4}{p^4}\ge\frac{2^4}{3^6}$ ដោយ

$$R_1R_2R_3\ge\frac{3^6}{4^2}\times\frac{R^7}{p^4}=\frac{3^6}{4^2}\times R^3\times\frac{R^4}{p^4}\ge\frac{3^6}{4^2}\times R^3\times\frac{2^4}{3^6}=R^3$$

ដូចនេះ $R_1\times R_2\times R_3\ge R^3$ (*)

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន

$$\frac{R_1+R_2+R_3}{3}\ge\sqrt[3]{R_1R_2R_3}\ge R$$

ដូចនេះ $R_1+R_2+R_3\ge 3R$ (**)