គណិតវិភាគ

សម្រាប់ថ្នាក់វិទ្យាល័យ

និងមហាវិទ្យាល័យ

$2 > -3$

$0.999... = 1$

$\pi \approx 3.14$

5^2

$\sqrt{2}$

$1 + 2 \cdot 3$

$(1 - 2) + 3$

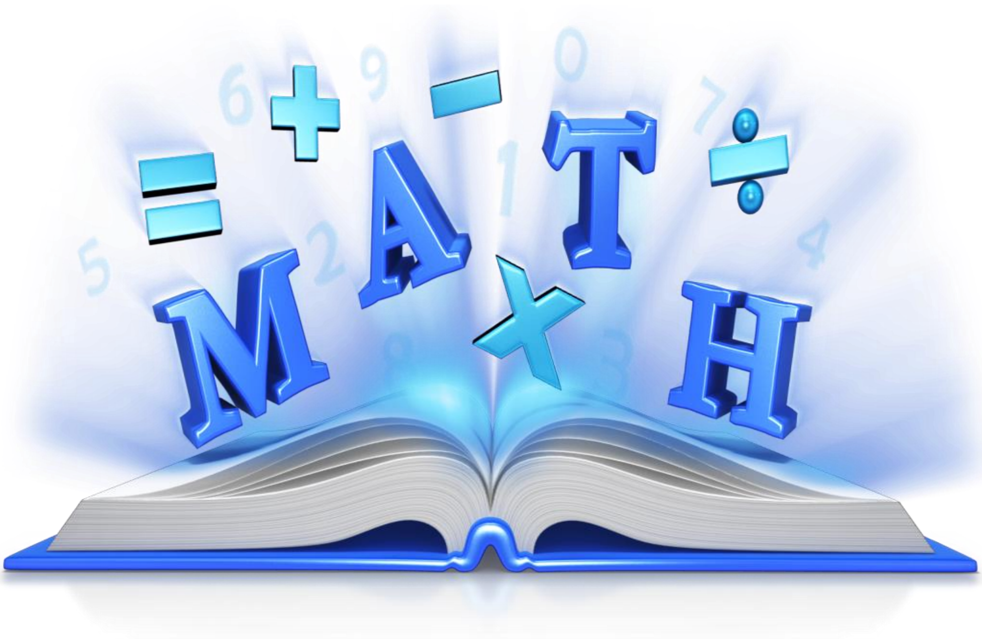
$5(2 + 2)$

$101_2 = 5_{10}$

រៀបរៀងដោយ និស្សិត លឿ សុវណ្ណារ៉ា

នេះជាសៀវភៅ គណិតវិភាគ ដែលប្រមូលផ្ដុំនូវមេរៀនសង្ខេប និងលំហាត់អមដោយដំណោះស្រាយមកជាមួយ។ សៀវភៅនេះសរសេរឡើងក្នុងឆ្នាំ ២០១៧។

គណិតវិភាគ



ផលិតឆ្នាំ ២០១៧

អ្នករៀបរៀង ៖ លឿ សុវណ្ណារ៉ា (និស្សិតសាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ)

អ្នករចនាក្រប និងកំព្យូទ័រ ៖ លឿ សុវណ្ណារ៉ា

អ្នកត្រួតពិនិត្យ ៖

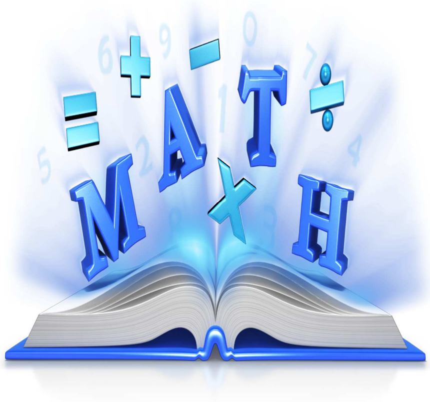
លឿ សុវណ្ណារ៉ា

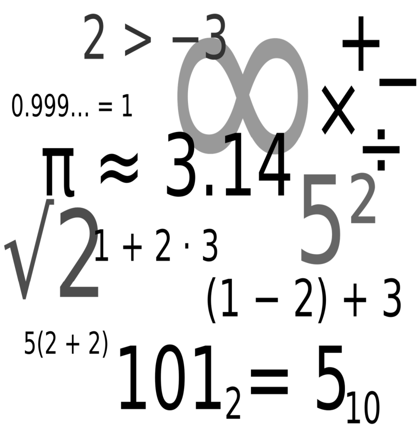
ការកកើតឡើងនេះ គឺដោយសារខិតខំប្រឹងប្រែងរបស់ខ្ញុំ ទម្រាំវាយអត្ថបទ ការគណនា រិះគិត និងការស្រាវជ្រាវយ៉ាងយូរនេះ ប្រើពេលជិត ២ឆ្នាំ ទើបបានសៀវភៅនេះលេចរូបរាងឡើង។ដូច្នេះ សូមអ្នកសិក្សាទាំងឡាយជួយគាំទ្រស្នាដៃរនេះ ទើបសៀវភៅលើកក្រោយនឹងចេញមកបន្តបន្ទាប់ទៀត។ សូមអរគុណ !!

ផលិតឆ្នាំ ២០១៧

រាជធានី ភ្នំពេញ , ប្រទេសកម្ពុជា

អារម្ភកថា





ខ្ញុំបាទសូមសួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងឡាយ!!

ខ្ញុំបាទសូមជម្រាបថា សៀវភៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះខ្ញុំបានសិក្សារៀនសូត្រកាលពីខ្ញុំរៀនឆ្នាំទី១ នៃដេប៉ាតេម៉ង់គណិតវិទ្យា។ កាលខ្ញុំរៀនឆ្នាំទី១ នោះខ្ញុំប្រឡងមុខវិជ្ជានេះបានត្រឹមមួយជាប់ៗ ប៉ុណ្ណោះ ដូច្នេះខ្ញុំមិនមែនជាអ្នកពូកែអីប៉ុន្មានទេ តែដោយចិត្តចង់សរសេរនឹងស្រាវជ្រាវលំហាត់ខ្ញុំក៏សម្រេចចិត្តសរសេរសៀវភៅនេះឡើង ។ ការសរសេរសៀវភៅនេះឡើង ក៏គ្មានគោលបំណងចង់បង្ហាញថាខ្ញុំនេះមានចំណេះដឹងជ្រៅជ្រះអ្វីដែរ តែវាគ្រាន់តែជាការចែករំលែកនូវចំណេះដឹងផ្សេងៗកាលនៅរៀនឆ្នាំទី១ ជូនទៅដល់អ្នករាល់គ្នាតែប៉ុណ្ណោះ ។សូមបញ្ជាក់ថា សៀវភៅនេះមិនមែនជាសៀវភៅមេរៀនលំអិតទេ វាគ្រាន់តែជាគន្លិះ និងមេរៀនសង្ខេបនៃសៀវភៅកាលពីខ្ញុំរៀន ចំណែកឯលំហាត់ខ្ញុំបានដកស្រង់យកលំហាត់ខ្លះដែលខ្ញុំអាចយល់ នឹងចេះធ្វើមកពីសៀវភៅរបស់លោកគ្រូ សួន សុវ៉ាន់ និងលំហាត់ផ្សេងទៀត យកចេញពីបណ្តាញសង្គមនានា ។

ដូច្នេះហើយប្រសិនបើមិត្តអ្នកសិក្សា អានទៅមានអារម្មណ៍ថាមានកន្លែងខុសឆ្គងត្រង់ណា សូមមេត្តាផ្តល់មតិយោបល់នានាមកកាន់យើងខ្ញុំតាមរយៈ Loeur.sovannra1@gmail.com យើងខ្ញុំនឹងទទួលយកការកែលំអរដោយក្តីរីករាយ នឹងគោរព។

ជាចុងបញ្ចប់នៃអារម្ភកថានេះ ខ្ញុំសូមជូនពរលោកគ្រូអ្នកគ្រូ សិស្សនិស្សិតទាំងអស់មានសុខភាពល្អ និងជោគជ័យលើការងារ និងការសិក្សា។ សូមអរគុណ !!

ភ្នំពេញ ០៥ / ០១ / ២០១៤

និស្សិតគណិតវិទ្យា

ជំពូកទី១

ស្វ៊ីតចំនួនពិត

1. និយមន័យ៖

ដែលហៅថា ស្វ៊ីតចំនួនពិត គឺគ្រប់អនុគមន៍អនុវត្តន៍សំណុំចំនួនពិតធម្មជាតិ (IN) ទៅសំណុំចំនួនពិត (IR) ។

គឺ $IN \to IR \; : n \mapsto u_n$

2. ស្វ៊ីតរង

គេមាន $\{u_n\}$ និង $\{v_n\}$ គេថា (v_n) ជាស្វ៊ីតរងនៃ (u_n) កាលណា គ្រប់តួនៃស្វ៊ីត (v_n) ជាតួខ្លះនៃស្វ៊ីត (u_n) ។

3. ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

- គេថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើនកាលណា $\forall n \in IN$, $u_{n+1} \geq u_n$ ។
- គេថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើនដាច់ខាតកាលណា $\forall n \in IN$,$u_{n+1} > u_n$ ។
- គេថា (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះកាលណា $\forall n \in IN$,$u_{n+1} \leq u_n$ ។
- គេថា (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះដាច់ខាតកាលណា $\forall n \in IN$,$u_{n+1} = u_n$ ។
- ស្វ៊ីតកើនរហូត ឬចុះរហូតជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

4. ស្វ៊ីតទាល់

- គេថា (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើកាលណា $\exists M \in IR$,$\forall n \in IN$,$u_n \leq M$ ។

- គេថា (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមកាលណា $\exists m \in IR \ , \forall n \in IN \ , m \le u_n \ , \ (u_n \ge m)$
- គេថា (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់កាលណា (u_n) ទាល់លើផង ទាល់ក្រោមផង ឬអាចសរសេរ ៖
  - (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ $\Leftrightarrow \ \exists m, M \in IR \ , \forall n \in IN \ , m \le u_n \le M$
  - (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ $\Leftrightarrow \exists \mu > 0 \ , \forall n \in IN \ , -\mu \le u_n \le \mu$

    $; |u_m| \le \mu$

5. ស្វ៊ីតបង្រួម

5.1. និយមន័យ

គេថា (u_n) មានលីមីត l $(\lim_{n\to+\infty} u_n = l \ , l \in IN)$ លុះត្រាតែ $\forall \varepsilon > 0 \ ,$

$, \exists \delta \in IN \ , \ \forall n \ge \delta \ , \ |u_n - l| < \varepsilon$ ។

ឬ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta \in IN \ , \quad \forall n \ge \delta$ $|u_n - l| < \varepsilon$

ចំនាំ៖ ស្វ៊ីតមានលីមីត ជាស្វ៊ីតរួម។

- និយមន័យផ្នែកគត់

$\forall x \in IR \ , \quad \exists x \in \mathbb{Z}$ ដែល $[x] = k \ \Leftrightarrow k \le x \le k+1$

5.2. ទ្រឹស្តីបទ

គ្រប់ស្វ៊ីតរួម ជាស្វ៊ីតទាល់ តែគ្រប់ស្វ៊ីតទាល់ពុំមែនសុទ្ធតែជាស្វ៊ីតរួមទេ។

5.3. ***ស្វ៊ីតរងនៃស្វ៊ីតរួម***

ទ្រឹស្តីបទ៖ គ្រប់ស្វ៊ីតរងនៃស្វ៊ីតរួម ជាស្វ៊ីតរួម ហើយមានលីមីតដូចស្វ៊ីតរួម។

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ និងម៉ូណូតូននោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម។តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើ យើងអាចទាញបាន៖

- បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ និងកើននោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម។
- បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម និងចុះនោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម។

6. ***ស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy)***

6.1. ***និយមន័យ***

គេថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ីលុះត្រាតែ $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > IN$,$\forall n > \delta$, $\forall m > \delta$,$|u_n - u_m| < \varepsilon$ ។

6.2. ***ទ្រឹស្តីបទ***

ទ្រឹស្តីបទទី១៖ គ្រប់ស្វ៊ីតរួម ជាស្វ៊ីតកូស៊ី ។

ទ្រឹស្តីបទទី២៖ គ្រប់ស្វ៊ីតកូស៊ី ជាស្វ៊ីតទាល់។

ទ្រឹស្តីបទទី៣៖ គ្រប់ស្វ៊ីតកូស៊ីក្នុង IR ជាស្វ៊ីតរួម។

ផ្នែកលំហាត់ស្វ៊ីតចំនួនពិត

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងប្រជែងនានា

លំហាត់ទី០១៖ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ

$$u_n=\sqrt{2\times\sqrt{2\times\sqrt{2\times\ldots\times\sqrt{2}}}}$$

មានឫសការេចំនួន n , $n\in IN^*$។

1. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។
2. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

លំហាត់ទី០២៖ គេមានស្វ៊ីត (u_n) មួយកំណត់ដោយ ៖

$$u_{n+1}=\frac{eu_n+2}{e}\quad(e=2.718281\ldots)$$

បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។

លំហាត់ទី០៣៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in IN^*}$ ជាស្វ៊ីតទាល់។

ដោយ $u_n=\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$, $n\in IN^*$ ។

លំហាត់ទី០៤៖ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases}u_1=-1\\ u_{n+1}=\dfrac{n}{2(n+1)}u_n+\dfrac{3(2+n)}{2(n+1)}\end{cases}$$

បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន $\forall n\in IN^*$ ។

លំហាត់ទី០៥៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $\{U_n\}_{n\in IN^*}$ ដែលមានតួទូទៅ

$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ជាស្វ៊ីតចុះ។

លំហាត់ទី០៦៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

$$\text{ដែល } U_n = \frac{3n}{n^2+1} \ , \qquad n \in IN$$

លំហាត់ទី០៧៖ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 3 \end{cases}$$

លំហាត់ទី០៨៖ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$$

លំហាត់ទី០៩៖ ប្រើទ្រឹស្តីស្វ៊ីតម៉ូណូតូន និងស្វ៊ីតទាល់បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n)

ជាស្វ៊ីតរួម។

$$\text{ដោយ } u_n = \frac{n}{n+1}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right) \ , n \in IN^* \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី១០៖ ប្រើទ្រឹស្តីស្វ៊ីតម៉ូណូតូន និងស្វ៊ីតទាល់បង្ហាញថា (u_n)ជាស្វ៊ី

តរួម។

$$\text{ដែល } u_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \ , n \geq 2$$

លំហាត់ទី១១៖ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \ , \qquad n \in IN^* \end{cases}$$

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

លំហាត់ទី១២៖ ចូរគណនាលីមីតស៊ីត

$$(1).\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$$

$$(2).\ \lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{a}{2}\times\cos\frac{a}{2^2}\times\ldots\times\cos\frac{a}{2^n}\right)\ ,a\in]0,\pi[$$

$$(3).\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$$

$$(4).\ \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}\times\ldots\times\sqrt[n]{2}\right)$$

លំហាត់ទី១៣ ៖ បង្ហាញថា ស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$$u_n=\frac{\sin 1^0}{2}+\frac{\sin 2^0}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n^0}{n^2}$$

ជាស៊ីត Cauchy ។ $(n\in IN^*)$ ។

លំហាត់ទី១៤៖ គេមានស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$$u_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\ ,n\geq1$$

បង្ហាញថា (u_n) ជាស៊ីតកូស៊ី (Cauchy) ។

លំហាត់ទី១៤៖ បង្ហាញថា ចំពោះ $\forall n\in IN^*$៖

$$A.\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0\quad,\quad B=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

លំហាត់ទី០១៖ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ

$$u_n = \sqrt{2 \times \sqrt{2 \times \sqrt{2 \times \dots \times \sqrt{2}}}}$$

មានឫសការេចំនួន n , $n \in IN^*$។

1. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។
2. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

ដំណោះស្រាយ៖

1. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន

គេមាន $u_n = \sqrt{2 \times \sqrt{2 \times \sqrt{2 \times \dots \times \sqrt{2}}}}$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{8}} \times \dots \times 2^{\frac{1}{2^n}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}}$$

តាង $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ ជាផលបូកតួស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដែល $q = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow S_n = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

យើងបាន $u_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$

$$u_{n+1} = 2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$$

យក $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}}{2^{1-\frac{1}{2^n}}} = 2^{-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}}$

$$= 2^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \sqrt[2^{n+1}]{2}$$

ចំពោះ $n \in IN^*$ នោះ $n+1>n$

បើ $n=1$: $2>1$ ឬ $\sqrt[2^{n+1}]{2} > \sqrt[2^{n+1}]{1} = 1$

ដោយ $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ឬ $u_{n+1} > u_n$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។

2. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

យើងមាន $u_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$

ចំពោះ $n \in IN^*$: $u_n > 0$, នោះ ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម (1)

ចំពោះ $n \in IN^*$: $2^{1-\frac{1}{2^n}} < 2^1$ ឬ $u_n < 2$

នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ (2) ។

តាម (1) & (2) គេអាចទាញបាន ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

លំហាត់ទី០២៖ គេមានស្វ៊ីត (u_n) មួយកំណត់ដោយ ៖

$$u_{n+1} = \frac{eu_n + 2}{e} \quad (e = 2.718281 \dots)$$

បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន

គេមាន $u_{n+1} = \frac{eu_n + 2}{e}$

$$eu_{n+1} = eu_n + 2$$

$$e(u_{n+1} - u_n) = 2$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{2}{e} > 0$$

ដោយ $u_{n+1} - u_n > 0$ ឬ $u_{n+1} > u_n$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។

លំហាត់ទី០៣៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n \in IN^*}$ ជាស្វ៊ីតទាល់។

ដោយ $u_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$, $n \in IN^*$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

គេមាន $u_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$

$$= \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{6} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{2n+1}{n}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

ចំពោះ $n \in IN^*$ យើងបាន ៖

$\dfrac{1}{n} > 0$ នោះ $u_n > \dfrac{1}{6}(1)(2) = \dfrac{1}{3}$

នោះ $u_n > \dfrac{1}{3}$ នោះយើងបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមត្រង់ $\dfrac{1}{3}$ ។ (1)

តាមវិសមភាព $AM \geq GM$ យើងបាន

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(2+\frac{1}{n}\right)}{2} \geq \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(2+\frac{1}{n}\right) \geq 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{2}{n} \leq 2 \quad , n \in IN^*$

$$3+\frac{2}{n} \leq 5$$

នោះ $2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)} \leq 5$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{25}{4}$$

គុណអង្គសងខាង នឹង $\frac{1}{6}$ យើងបាន ៖

$$\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{25}{24}$$

$\Rightarrow u_n \leq \frac{25}{24}$ នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើត្រង់ $\frac{25}{24}$ ។ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ ។

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

លំហាត់ទី០៤÷ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}u_n + \dfrac{3(2+n)}{2(n+1)} \end{cases}$$

បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន $\forall n \in IN^*$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន $\forall n \in IN^*$

យើងមាន $u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}u_n + \dfrac{3(2+n)}{2(n+1)}$

យក $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n}{2(n+1)}u_n + \dfrac{3(2+n)}{2(n+1)} - u_n$

$$= \frac{nu_n + 3(2+n) - 2u_n(1+n)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{nu_n + 6 + 3n - 2u_n - 2nu_n}{2(n+1)}$$

$$= \frac{3(n+2) - 2u_n - nu_n}{2(n+1)}$$

$$= \frac{3(n+2) - u_n(n+2)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{(n+2)(3-u_n)}{2(n+1)}$$

ចំពោះ $\forall n \in IN^*$ គេមាន $\begin{cases} (n+2) > 0 \\ 2(n+1) > 0 \end{cases}$

ដើម្បីឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើនកាលណា $3 - u_n > 0$

នោះយើងត្រូវស្រាយថា $u_n < 3$

ចំពោះ $n \in IN^*$ នោះប្រសិនបើ

$n = 1$, $3 - u_1 = 3 - (-1) = 4 > 0$,$u_1 < 3$ ពិត

ឧបមារថាពិតដល់ $n = k$,$u_k < 3$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាពិតរហូតដល់ $n = k + 1$,$u_{k+1} < 3$

យើងមាន $u_k < 3$

$$\frac{k}{2(k+1)}u_k < \frac{3k}{2(k+1)}$$

$$\frac{k}{2(k+1)}u_k + \frac{3(2+k)}{2(k+1)} < \frac{3k}{2(k+1)} + \frac{3(2+k)}{2(k+1)}$$

$$u_{k+1} < \frac{3k+6+3k}{2(k+1)}$$

$$u_{k+1} < \frac{6(k+1)}{2(k+1)} = 3 \text{ ពិត}$$

នោះ $u_n < 3$

យើងបាន $3 - u_n > 0$

គេទាញបាន $u_{n+1} - u_n > 0$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។

លំហាត់ទី០៥៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $\{U_n\}_{n\in IN^*}$ ដែលមានតួទូទៅ

$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ជាស្វ៊ីតចុះ។

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $\{U_n\}_{n\in IN^*}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

យើងមាន $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\Rightarrow U_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

យក $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}$$

$$= \frac{(n+2-n-1)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{(n+1-n)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

ចំពោះ $\forall x \in IN^*$ យើងមាន

$n+2>n$

$\sqrt{n+2}>\sqrt{n}$

$\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

$\frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}<1 \quad \Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n}<1$

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

លំហាត់ទី០៦៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

ដែល $U_n = \frac{3n}{n^2+1} \quad , \qquad n \in IN$

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

យើងមាន $U_n = \frac{3n}{n^2+1} \ , \ n \in IN$

$$U_n = \frac{3n}{n^2+1} \geq 0 \ , \ n \in IN \quad (1)$$

តាមវិសមភាព $Cauchy$ យើងមាន៖

$a^2+b^2>2ab$

$\Rightarrow n^2+1>2n$

$\Rightarrow \frac{3n}{n^2+1}<\frac{3n}{2n}=\frac{3}{2} \quad (2)$

តាម (1) & (2) គេទាញបាន

$0 \le u_n < \dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

លំហាត់ទី០៧៖ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n - 3 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត

គេមាន $\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n - 3 \end{cases}$

តាង $V_n = U_n - a$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ V_{n+1} &= U_{n+1} - a \\ &= \frac{2}{3}U_n - 3 - a \\ &= \frac{2}{3}U_n - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a - a - 3 \\ &= \frac{2}{3}(U_n - a) - \frac{a}{3} - 3 \end{aligned}$$

ដើម្បីឲ្យស្វ៊ីត (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកាលណា $-\frac{a}{3} - 3 = 0$

$$\Rightarrow a = -9$$

យើងបាន $V_n = U_n + 9 \ \Rightarrow V_0 = U_0 + 9 = -4 + 9 = 5$

ដោយ $V_{n+1} = \dfrac{2}{3}V_n \ \ \Rightarrow q = \dfrac{2}{3}$

តែ $V_n = V_0.q^n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$

គេបាន $5\left(\frac{2}{3}\right)^n = U_n + 9 \Rightarrow U_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 9$

ដូចនេះ៖ $U_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 9$

លំហាត់ទី០៨៖ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n)

យើងមាន $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

សមីការសម្គាល់ស្វ៊ីត (u_n) គឺ $r^2 = r + 6$

$\Rightarrow \mathrm{r}^2 - \mathrm{r} - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25 = 5^2$

$\Rightarrow \mathrm{r}_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \,, \quad \mathrm{r}_2 = \frac{1+5}{2} = 3$

តាងស្វ៊ីតជំនួយដូចខាងក្រោម៖

$$\begin{cases} X_n = u_{n+1} + 2u_n \\ Y_n = u_{n+1} - 3u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{n+1} = u_{n+2} + 2u_{n+1} \; (1) \\ Y_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1} \; (2) \end{cases}$$

តាម (1) : $X_{n+1} = u_{n+2} + 2u_{n+1}$

$$= u_{n+1} + 6u_n + 2u_{n+1}$$

$$= 3u_{n+1} + 6u_n$$

$$= 3(u_{n+1} + 2u_n)$$

$$X_{n+1} = 3X_n$$

នាំឲ្យ (X_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$

តាមរូបមន្ត $X_n = X_0.q^n$, $X_0 = u_1 + 2u_0 = 1 + 2 = 3$

$$X_n = 3(3)^n \quad (i)$$

តាម (2) : $Y_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}$

$$= u_{n+1} + 6u_n - 3u_{n+1}$$
$$= 6u_n - 2u_{n+1}$$
$$= -2(u_{n+1} - 3u_n)$$
$$= -2Y_n$$

នាំឲ្យ (Y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុង $q = -2$

តាមរូបមន្ត $Y_n = Y_0 q^n$, $Y_0 = u_1 - 3u_0 = 1 - 3 = -2$

$$Y_n = -2(-2)^n \quad (ii)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\begin{cases} X_n = 3(3)^n \\ Y_n = -2(-2)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{n+1} + 2u_n = 3(3)^n \\ u_{n+1} - 3u_n = -2(-2)^n \end{cases}$$

ដោយ បូកបំបាត់ u_{n+1} យើងទទួលបាន $-5u_n = -3(3)^n - 2(-2)^n$

នោះ $u_n = -\frac{1}{5}(-3(3)^n - 2(-2)^n)$

ដូចនេះ $u_n = -\frac{1}{5}[-3(3)^n - (-2)^n]$

លំហាត់ទី០៩៖ ប្រើទ្រឹស្តីស្វ៊ីតម៉ូណូតូន និងស្វ៊ីតទាល់បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម។

ដោយ $u_n = \frac{n}{n+1}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)$, $n \in IN^*$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម

យើងមាន $u_n = \dfrac{n}{(n+1)}\left(2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ $, n \in IN^*$

$$= \frac{n(2n^2-1)}{n^2(n+1)} = \frac{2n^2-1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{2(n+1)^2-1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2n^2+4n+1}{(n+1)(n+2)}$$

យក $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n^2+4n+1}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{2n^2-1}{n(n+1)}$

$$= \frac{n(2n^2+4n+1)}{n(n+1)(n+2)} - \frac{(2n^2-1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2n^3+4n^2+n-2n^3-4n^2+n+2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)} > 0 , \forall x \in IN^*$$

នាំឲ្យ $u_{n+1} - u_n > 0$ នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន (1) ។

ម្យ៉ាងទៀត ៖ $u_n = \dfrac{n}{n+1}\left(2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ $, \dfrac{n}{n+1} < 1$ $, \forall n \in IN^*$

នាំឲ្យ $u_n < 2 - \dfrac{1}{n^2}$

$$u_n < 2 \ , \frac{1}{n^2} > 0$$

ដោយ $u_n < 2$ នោះគេបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន៖ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម។

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម។

លំហាត់ទី១០៖ ប្រើទ្រឹស្តីស្វ៊ីតម៉ូណូតូន និងស្វ៊ីតទាល់បង្ហាញថា (u_n)ជាស្វ៊ីតរួម។

ដែល $u_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\times \dots \times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ $,n \geq 2$

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម

យើងមាន $u_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\times \dots \times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$= \left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\times \dots \times\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\dots.(n-1)(n+1)}{(n!)^2}$$

$$= \frac{1\times 2\times 3\times 4\times \dots \times (n-1)n(n+1)}{(n!)^2}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n!)^2} = \frac{(n!)(n+1)}{(n!)^2} = \frac{n+1}{n!}$$

នោះ $u_{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)!}$

យក $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}} = \frac{(n+2)n!}{(n+1)(n+1)!} = \frac{n+2}{(n+1)^2} < 1$ $,\forall n \in IN^*$

គេទាញបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ គ្រប់ $n \in IN^*$ (1) ។

ហើយ $u_n = \frac{n+1}{n!} > 0\, , n \in IN^*$

នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម។ (2)

តាម (1) និង (2) នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម។

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម ។

លំហាត់ទី១១៖ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}\,, \qquad n \in IN^* \end{cases}$$

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាលីមីត

យើងមាន $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}\,, \qquad n \in IN^* \end{cases}$

ពិនិត្យ ៖ $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n}$$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{1}{2^n}$$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ $\,, n = 1,2,3,4, \dots$

$$n = 1 \;:\; u_2^2 - u_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \;:\; u_3^2 - u_2^2 = \frac{1}{2^2}$$

$$n = 3 \;:\; u_4^2 - u_3^2 = \frac{1}{2^3}$$

… … … … … … … … … …

$n=k\ :\ u_{k+1}^2-u_k^2=\dfrac{1}{2^k}$

បូកពីលើរហូតដល់ក្រោម យើងបាន

$$u_{k+1}^2-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^k}$$

$$u_{k+1}^2=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}+1$$

$$=1-\left(\frac{1}{2^k}-1\right)$$

$$=2-\frac{1}{2^k}\ \Rightarrow u_{k+1}=\sqrt{2-\frac{1}{2^k}}\ \Rightarrow u_{n+1}=\sqrt{2-\frac{1}{2^n}}$$

$$\Rightarrow u_n=\sqrt{2-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{2^{n-1}}}=2\ ,\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0\right)$$

ដូចនេះ៖ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

លំហាត់ទី១២៖ ចូរគណនាលីមីតស្វ៊ីត

(1). $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$

(2). $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\dfrac{a}{2}\times\cos\dfrac{a}{2^2}\times\ldots\times\cos\dfrac{a}{2^n}\right)\ ,a\in]0,\pi[$

(3). $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

(4). $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}\times\ldots\times\sqrt[n]{2}\right)$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាលីមីត

(1). $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$

យើងមាន $-1\le \sin n!\le 1$

$$-\sqrt[3]{n^2}\le \sqrt[3]{n^2}\sin n!\le \sqrt[3]{n^2}$$

$$-\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\le \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\le \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$$

$$-\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\le \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\le \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$$

$$0\le \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\le 0$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ}\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0}$$

(2). $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\dfrac{a}{2}\times\cos\dfrac{a}{2^2}\times\ldots\times\cos\dfrac{a}{2^n}\right)$

$$let\ :S=\cos\frac{a}{2}\times\cos\frac{a}{2^2}\times\ldots\times\cos\frac{a}{2^n}$$

$$by:2\sin a\cos a=\sin 2a\ \Longrightarrow \cos a=\frac{\sin 2a}{2\sin a}$$

$$we\ have:\ \cos\frac{a}{2^n}=\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{a}{2^{n-1}}}{\sin\frac{a}{2^n}}$$

$$if\ n=1\ :\ \cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}.\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2}}$$

$$if\ n=2\ :\ \cos\frac{a}{2^2}=\frac{1}{2}.\frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2^2}}$$

… … … … … … … … ….

$$if\ \ n=n\ :\ \cos\frac{a}{2^n}=\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{a}{2^{n-1}}}{\sin\frac{a}{2^n}}$$

$$we\ have : S_n = \frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2^2}} \times \ldots \times \frac{\sin\frac{a}{2^{n-1}}}{\sin\frac{a}{2^n}} \times \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^n}\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2^n}\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a}{2^n}\left(\frac{\sin a}{a}\right)}{\sin\frac{a}{2^n}}$$

$$let\ \ t = \frac{a}{2^n}\ \ ,when\ n \to +\infty\ \ \Longrightarrow t \to 0$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\left(\frac{\sin a}{a}\right)\right) = \frac{\sin a}{a}$$

$$\boxed{So\ ,\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{a}{2} \times \cos\frac{a}{2^2} \times \ldots \times \cos\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin a}{a}}$$

(3). $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right)$

តាង $S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$

យើងមាន $\frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2+n}$

$$\frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2+2} < \frac{n}{n^2+n}$$

$$\frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2+3} < \frac{n}{n^2+n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+n}$$

យើងបាន $\frac{n^2}{n^2+1} \le S_n \le \frac{n^2}{n^2+n}$

$$\frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \le S_n \le \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \le \lim_{n\to+\infty} S_n \le \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$1 \le \lim_{n\to+\infty} S_n \le 1$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=1$

(4). $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}\times\ldots\times\sqrt[n]{2}\right)$

តាង $S_n=\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}\times\ldots\times\sqrt[n]{2}$

$$=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{1}{8}}\times\ldots\times 2^{\frac{1}{n}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}2^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=2$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}\times\ldots\times\sqrt[n]{2}\right)=2$

លំហាត់ទី១៣ ៖ បង្ហាញថា ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$$u_n=\frac{\sin 1^0}{2}+\frac{\sin 2^0}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n^0}{n^2}$$

ជាស្វ៊ីត Cauchy ។ $(n\in IN^*)$

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីត Cauchy

គេមាន $u_n=\dfrac{\sin 1^0}{2}+\dfrac{\sin 2^0}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n^0}{n^2}$

យើងឲ្យ $u_{n+p}=u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\ ,p\in IN^*$

$$=u_n+\frac{\sin(n+1)^0}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)^0}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)^0}{(n+p)^2}$$

យើងបាន $|u_{n+1}-u_n|=\left|\dfrac{\sin(n+1)^0}{(n+1)^2}+\dfrac{\sin(n+2)^0}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{\sin(n+p)^0}{(n+p)^2}\right|$

$$\leq\left|\frac{\sin(n+1)^0}{(n+1)^2}\right|+\left|\frac{\sin(n+2)^0}{(n+2)^2}\right|+\cdots+\left|\frac{\sin(n+p)^0}{(n+p)^2}\right|$$

$$\le \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} \text{ ,ព្រោះ } \sin a \le 1$$

$$< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}$$

$$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}$$

$$< \frac{1}{n} \ , \qquad \left(\frac{1}{n+p} > 0 \ , \forall n \in IN^* \text{ និង } \forall p \in IN^*\right)$$

នោះ $|u_{n+1}-u_n| < \frac{1}{n}$

$\forall \varepsilon > 0$ ដើម្បីបាន $|u_{n+p}-u_n| < \varepsilon$,យើងគ្រាន់តែយក $\frac{1}{n} < \varepsilon \ \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

កំណត់យក $\delta = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ។

$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \in IN \ , \forall n , n+p > \delta \ , |u_{n+p}-u_n| < \varepsilon$

នាំឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy)

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy) ។

លំហាត់ទី១៤៖ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$$u_n = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \ , n \ge 1$$

បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy) ។

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy)

យើងមាន $u_n = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$,

យើងឲ្យ $u_{n+p}=u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\,,n\geq 1$

$$=u_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

យើងបាន $|u_{n+1}-u_n|$

$$=\left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\right|$$
$$\leq\left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right|+\left|\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\right|$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}$$

គេបាន $|u_{n+1}-u_n|<\dfrac{1}{n+1}$

$\forall\varepsilon>0$ ដើម្បីឲ្យបាន $|u_{n+p}-u_n|<\varepsilon$ យើងគ្រាន់តែយក $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$

$$\Longrightarrow n=\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

$\forall\varepsilon>0\,,\exists n\in\left[\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]\,,\forall n\,,n+p>\left[\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]\,,|u_{n+1}-u_n|<\varepsilon$

នោះ នាំឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy)

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy) ។

លំហាត់ទី១៤៖ បង្ហាញថា ចំពោះ $\forall n \in IN^*$៖

$$A.\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0\quad,\quad B=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

ដំណោះស្រាយ៖

$A.$ បង្ហាញថា $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$

យើងមាន $\frac{n}{2^n}>0\ ,\forall n\in IN^*$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{n}{(1+1)^n}=\frac{n}{1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n}$

$$\le\frac{n}{C_n^2}=\frac{n}{\frac{n!}{(n-2)!\,2!}}$$

$$=\frac{n(n-2)!\,2!}{n!}$$

$$=\frac{2n}{n(n-1)}=\frac{2}{n-1}$$

នោះគេបាន $\lim_{n\to+\infty}0<\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}<\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n-1}$

$$0<\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}<0$$

យើងទាញបាន $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$ ពិត ។

ដូចនេះ៖ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$

$B.$ បង្ហាញថា $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

ចំពោះ $\forall n\in IN$ នោះ៖ $\frac{2^n}{n!}>0$

ម្យ៉ាងវិញទៀត៖ $\frac{2^n}{n!}=\frac{2^n}{1\times2\times3\times\ldots\times n}$

$$=\frac{2}{1}\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{2}{n}$$

$$< 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{2}{3}$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

នោះ $0 < \frac{2^n}{n!} < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

យើងបាន $\lim_{n\to+\infty} 0 < \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} < \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

$$0 < \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} < 0$$

នោះយើងទាញបាន $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ ពិត។

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0}$

ជំពូក ២

អនុគមន៍ពិតនៃមួយអថេរពិត

1. និយមន័យ -ដែនកំនត់

1.1. និយមន័យ

ដែលហៅថាអនុគមន៍មួយអថេរតាងដោយ $y=f(x)$ គឺ

$$f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y=f(x)$$

- x ជាអថេរមិនទាក់ទង (ឬអថេរឯករាជ្យ)
- y ជាអថេរទាក់ទង (ឬអថេរមិនឯករាជ្យ)

ឧទាហរណ៍៖ $+y=ch(x)$ ជាអនុគមន៍កូស៊ីនុស អ៊ីពែបូលិក

$+y=\coth x$ ជាអនុគមន៍កូតង់សង់អ៊ីពែបូលិក

$+\ y=[x]$ ជាអនុគមន៍ផ្នែកគត់

$+y=\begin{cases} 5 & ,\ 0<x\le 3 \\ 5+0.5x & ,\quad x>3 \end{cases}$ ជាអនុគមន៍ពហុរូបមន្ត

1.2. ដែនកំណត់

ដែលហៅថា ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ តាងដោយ D គឺជាសំណុំនៃតំលៃ x ដែលធ្វើឲ្យ $y=f(x)$ មានន័យ(ឬធ្វើឲ្យ $y=f(x)$ អាចកំណត់តម្លៃបាន) ។

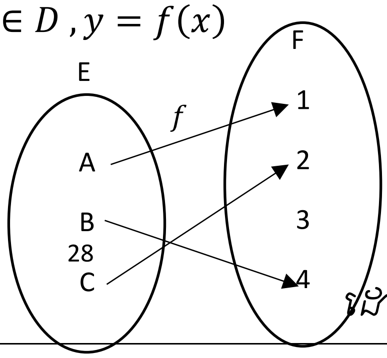
គេអាចសរសេរ ៖ $D=\{\forall x\in\mathbb{R}:\ \exists y, y=f(x)\}$

1.3. រូបភាព

ដែលហៅថារូបភាពនៃ $y=f(x)$ មានដែនកំណត់ D គឺ

$f(D)=\{y\in\mathbb{R}:\ \exists x\in D\ ,y=f(x)$

ឧទាហរណ៍៖



1.4. ខ្សែកោង

ដែលហៅថា ខ្សែកោងនៃ $y=f(x)$ តាងដោយ (C) គឺជាសំណុំចំនុច (x,y) ដែល x ចេញពីដែនកំណត់នៃ $y=f(x)$ ហើយ $y=f(x)$ គេអាចសរសេរ

$$(C):\ \{(x,y):x\in D, y=f(x)\}$$

2. អនុគមន៍ទាល់

- គេថា $f(x)$ ទ័លលើ លើ D លុះត្រាតែ $\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in D$ ។
- គេថា $f(x)$ ទ័លក្រោមលើ D លុះត្រាតែ $\exists m\in\mathbb{R},\forall x\in D$ ។
- គេថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍ទ័ល លើ D លុះត្រាតែ

  $\exists m,M\in\mathbb{R},\forall x\in D, m\le f(x)\le M$

  ឬ $\exists\mu>0,\forall x\in D,-\mu\le f(x)\le\mu$

ឧទាហរណ៍៖ $+f(x)=\sin x$ ជាអនុគមន៍ទាល់ $\forall x\in[0,2\pi]$ ។

ព្រោះ $\forall x\in[0,2\pi]\ ,-1\le\sin x\le 1$

$+y=x-[x]$ ជាអនុគមន៍ទាល់ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ព្រោះ $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ [x]\le x<[x]+1$

$$\Leftrightarrow 0\le x-[x]\le 1$$

3. អនុគមន៍ម៉ូណូតូន

- គេថា $f(x)$ កើនលើ D លុះត្រាតែ $\forall x_1,x_2\in D\ ,\ x_1<x_2$

  $\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$
- គេថា $f(x)$ កើនដាច់ខាតលើ D លុះត្រាតែ $\forall x_1,x_2\in D, x_1<x_2$

  $\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$
- គេថា $f(x)$ ចុះលើ D លុះត្រាតែ $\forall x_1,x_2\in D$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

- គេថា $f(x)$ ចុះដាច់ខាតលើ D លុះត្រាតែ $\forall x_1, x_2 \in D$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

4. ចំណុចបរមាធៀប

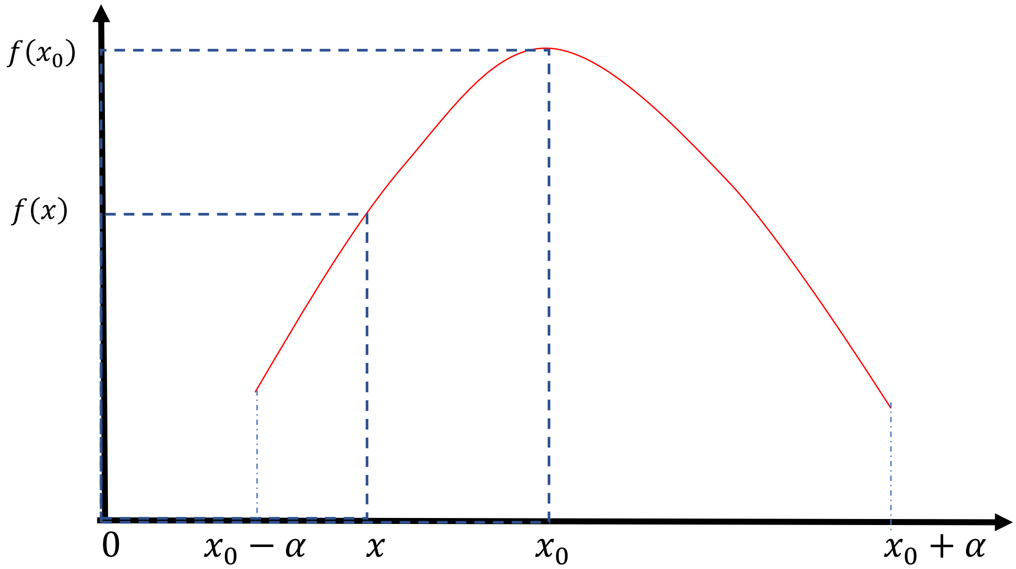
គេមាន $y = f(x)$ មានន័យលើ D ត្រង់ Voisinage នៃ x_0 ។

- គេថា $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ x_0 កាលណា $\exists \alpha$ ដែល

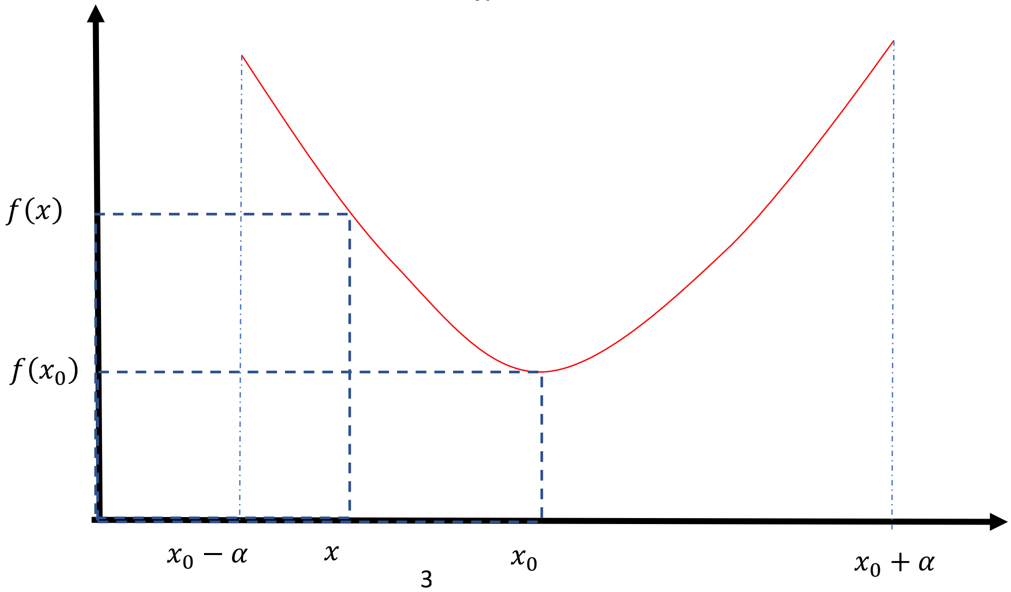
$x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, $f(x) \leq f(x_0)$

- គេថា $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ x_0 កាលណា $\exists \alpha$ ដែល

$x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, $f(x) \geq f(x_0)$ ។



$f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ x_0



$f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ x_0

5. បណ្ដាក់អនុគមន៍

គេមាន $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍អនុវត្តន៍ពី $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ។
ដែលហៅថា អនុគមន៍បណ្ដាក់នៃ $f(x)$ ដោយ $g(x)$ គឺជាអនុគមន៍
$h = gof$ ដែលអាចសរសេរ $h(x) = (gof)(x) = g[f(x)]$ ។

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[dr, "g"] & \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h = gof"'] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

ឧទាហរណ៍៖ គេមាន $f(x) = \log(3x+5)$ និង $g(x) = \sqrt{5x+1}$ ។
គណនា $g[f(x)]$ និង $f[g(x)]$ ។

ចម្លើយ៖ $g[f(x)] = \sqrt{5\log(3x+5)+1}$

$f[g(x)] = \log\left(3\sqrt{5x+1}+5\right)$

ជាទូទៅ៖ $g \circ f \neq f \circ g$

លក្ខណៈ:

+ $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ លក្ខណៈផ្តុំ

+ បើ f ជាអនុវត្តន៍មួយទាល់មួយនោះ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$

6. អនុគមន៍សេសគូ

គេមាន $y = f(x)$ មានន័យលើ D ($\forall x \in D, -x \in D$) ។

- គេថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេសលុះត្រាតែ $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$ ។

- គេថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ លុះត្រាតែ $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$

- ***សម្គាល់៖***
  - ចំពោះខ្សែកោងអនុគមន៍សេស ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់ o (គល់តម្រុយ) ។
  - ចំពោះខ្សែកោងអនុគមន៍គូ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស (oy)

ឧទាហរណ៍៖+ $\sin x$,$\tan x$,$\cot x$,ជាអនុគមន៍សេស។

ព្រោះ $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

+ $\cos x$ ជាអនុគមន៍គូព្រោះ $\cos(-x) = \cos x$

+ $f(x) = \lg_a\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$ ជាអនុគមន៍សេសព្រោះ

ដោយ $f(x) = \lg_a\left(\dfrac{x^2 - x^2 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right)$

$$= \lg_a\left(-\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$\Rightarrow f(-x) = \lg_a\left(-\frac{1}{-x + \sqrt{(-x)^2+1}}\right)$$

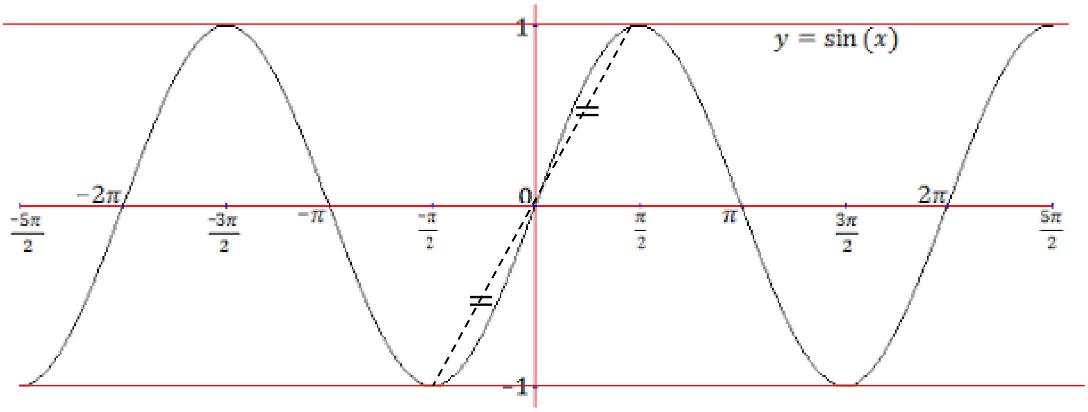
$$= \lg_a\left(\frac{1}{x - \sqrt{x^2+1}}\right) = \lg_a\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)^{-1}$$

$$= -\lg_a\left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = -f(x)$$

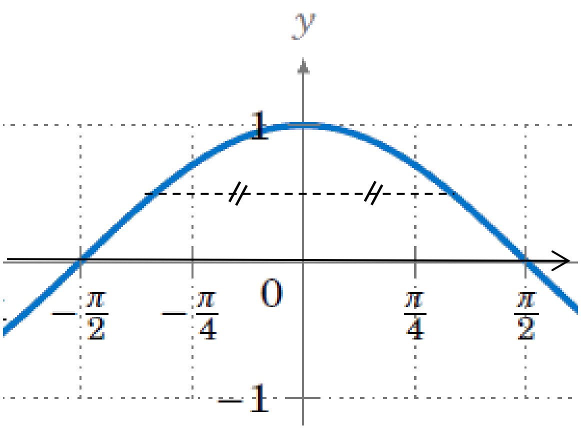
- ចំណាំ៖ បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេសមានន័យត្រង់ $x = 0$ នោះ $f(0) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍៖

$+f(x) = \sin(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



$+f(x) = \cos(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



<u>អនុគមន៍ខួប</u>

ឧទាហរណ៍៖ រកខួបតូចជាងគេនៃអនុគមន៍

(1). $f(x) = \sin(x)$

ដោយ $f(x+T) = f(x)$

$\Longrightarrow \ f(x+T) - f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(x+T) - \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x+T-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+T+x}{2}\right)=0$$

$$2\sin\left(\frac{T}{2}\right)\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)=0$$

$$\Longrightarrow \sin\left(\frac{T}{2}\right)=0=\sin(\pi)$$

$$\Longrightarrow \frac{T}{2}=\pi \Longrightarrow T=2\pi$$

ដូច្នេះ $\boxed{T=2\pi}$

(2). $f(x)=\sin(2x)+\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

ដោយ $\sin(2x)$ មានខួប $T_1=\frac{2k\pi}{2}=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ មានខួប $T_2=\frac{2k\pi}{\frac{1}{3}}=6k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

k	1	2	3	4	5	6
T_1	π	2π	3π	4π	5π	6π
T_2	6π	12π	18π	24π	30π	36π

ដូច្នេះ $\boxed{T=6\pi}$ ។

(3). បង្ហាញថា $f(x)=x-E(x)$ មានខួប $T=1$ ។

ដោយ $f(x+k)=x+k-E(x+k)$ $,(i)$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $E(x)\le x\le E(x)+1$, $(*)$

$$\Leftrightarrow E(x)+k\le x+k\le E(x)+k+1$$

តាម $(*)$ សមមូល $E(x+k)\le x+k<E(x+k)+1$

$$\Longrightarrow E(x+k)=E(x)+k \quad , \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) នាំឲ្យ

$$f(x+k)=x+k-(E(x)+k)=x+k-E(x)-k=x-E(x)=f(x)$$

ដូច្នេះ $\boxed{f(x) = x - E(x) \text{ មានខួប } T = 1 \text{ ។}}$

7. លីមីតនៃអនុគមន៍

7.1. និយមន័យ

គេថា $f(x)$ មានលីមីត L $(L \in \mathbb{R})$ ពេល $x \to x_0$

$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = L\right)$ លុះត្រាតែ $\forall \varepsilon > 0 \ ,\exists \alpha > 0\,,\forall x \neq x_0\,,|x - x_0| < \alpha\,,$

$|f(x) - L| < \varepsilon$ ។

ឬគេសរសេរ៖

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ ,\exists \alpha > 0\,,\forall x \neq x_0\,,|x - x_0| < \alpha\,, \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

7.2. លីមីតឆ្វេង និងលីមីតស្តាំ

- លីមីតឆ្វេងត្រង់ x_0

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0\,,\exists \alpha > 0\,,\forall x \neq x_0^- \quad 0 < x_0 - x < \alpha\,,|f(x) - L| < \varepsilon$$

- លីមីតស្តាំត្រង់ x_0

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0\,,\exists \alpha > 0\,,\forall x \neq x_0^+ \quad 0 < x - x_0 < \alpha\,,|f(x) - L| < \varepsilon$$

មូលហេតុដែល ៖ $0 < x_0 - x < \alpha$ និង $0 < x - x_0 < \alpha$

$(\mathrm{i}).\ \mathrm{x} \to \mathrm{x}_0^- \Rightarrow \mathrm{x} - \mathrm{x}_0 < 0 \Rightarrow |\mathrm{x} - \mathrm{x}_0| = -(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = \mathrm{x}_0 - \mathrm{x}$

$(\mathrm{ii}).\ \mathrm{x} \to \mathrm{x}_0^+ \Rightarrow \mathrm{x} - \mathrm{x}_0 > 0 \Rightarrow |\mathrm{x} - \mathrm{x}_0| = \mathrm{x} - \mathrm{x}_0$

7.3. អនុគមន៍មានលីមីតអនន្តពេល $x \to x_0$

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0 \ ,\exists \alpha > 0 \ ,\forall x \neq x_0\,,|x - x_0| < \alpha$ $f(x) > A$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0\,,\exists \alpha > 0\,,\forall x \neq x_0\,,|x - x_0| < \alpha$ $f(x) < -A$

- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \neq x_0^-$
  $0 < x - x_0 < \alpha, f(x) > A$
- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \neq x_0^-$
  $0 < x_0 - x < \alpha, \quad f(x) < -A$
- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \neq x_0^-$
  $0 < x_0 - x < \alpha, \quad f(x) > A$

7.4. អនុគមន៍មានលីមីតពេល $x \to \pm\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, x > B, |f(x) - L| < \varepsilon$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, x < -B, |f(x) - L| < \varepsilon$

7.5. អនុគមន៍មានលីមីតអនន្តពេល $x \to \pm\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, x > B, f(x) > A$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, x > B, f(x) < -A$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, x < -B, f(x) > A$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, x < -B, f(x) < -A$

7.6. ប្រមាណវិធីលីមីតនៃអនុគមន៍

បើ $f(x)$ និង $g(x)$ មានលីមីតពេល $x \to x_0$ នោះ

(a). $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x)$, (α ថេរ)

(b). $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$

(c). $\lim_{x\to x_0} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \times \lim_{x\to x_0} g(x)$

(d). $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\right)$

(e). $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

(f). បើ $f(x) \leq g(x)$ នោះ $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)]$

8. អនុគមន៍មានលីមីតរាងមិនកំណត់ (1^∞)

(ក). ទ្រឹស្តីបទ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad (e = 2.718281\ldots)$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់</u>៖

$$+\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

តាមនិយមន័យផ្នែកគត់

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \exists n \in \mathbb{N} \, , [x] = n \iff n \le x < n+1$$

$$\iff \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$$

$$\iff 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}$$

$$\iff \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\iff \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\iff \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\iff \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n < \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\left(\begin{matrix} n \le x \\ n \to +\infty \end{matrix}\right| \Rightarrow x \to +\infty\Bigg)$$

$$\iff \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} < \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$< \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\iff e < \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ ។

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

តាង $x=-t-1$ ពេល $x\to-\infty \Rightarrow t\to+\infty$

យើងបាន

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-t-1}\right)^{-(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-t-1+1}{-t-1}\right)^{-(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{-t-1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)=e$$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ ។

(ខ). វិបាក

$$+\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e\ ,\qquad (x\to\infty \text{ នាំឲ្យ } u(x)\to\infty)$$

$$+\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

9. អនុគមន៍ជាប់

9.1. និយមន័យ (ជាប់ត្រង់មួយចំនុច)

គេមាន $f(x)$ មានន័យត្រង់ *Voisinage* នៃ x_0 គេថា $f(x)$ ជាប់ត្រង់ x_0 កាលណា៖

(i). $f(x)$ មានន័យត្រង់ x_0

(ii). មាន $\lim_{x\to x_0}f(x)$

ឬ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ x_0 លុះត្រាតែ $\forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\neq x_0\ ,|x-x_0|<\alpha\ ,|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ ។

ឧទាហរណ៍១៖សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x}$ ត្រង់ $x_0\in\mathbb{R}_+^*$ ។

ដោយ $|f(x)-f(x_0)|=|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|$

$$=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}<\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

$\forall\varepsilon>0$, ដើម្បីបាន $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ យើងគ្រាន់តែយក

$$\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon\Leftrightarrow|x-x_0|<\varepsilon\sqrt{x_0}$$

កំណត់យក $\alpha=\varepsilon\sqrt{x_0}$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\alpha=\varepsilon\sqrt{x_0}>0$, $\forall x\neq x_0$,$|x-x_0|<\alpha$

$|f(x)-f(x_0)|=|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon\Longrightarrow f(x)=\sqrt{x}$ ជាប់ $\forall x_0\in\mathbb{R}_+^*$ ។

សម្គាល់

- បើ $f(x)$ មិនបំពេញលក្ខខណ្ឌណាមួយក្នុងចំណោមលក្ខខ័ណ្ឌទាំង ៣ របស់អនុគមន៍ជាប់នោះ $f(x)$ ដាច់ត្រង់ x_0 ។
- ឬ $f(x)$ ដាច់ត្រង់ $x_0\Leftrightarrow\ \exists\varepsilon>0,\forall\alpha>0,|x-x_0|>\alpha$, $|f(x)-f(x_0)|>\varepsilon$

ឧទាហរណ៍២៖ សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}\ , & x\neq 2\\ 3\ , & x=2\end{cases}$$ ត្រង់ $x_0=2$ ។

ចម្លើយ៖

$+\ f(2)=3\ \Longrightarrow f(x)$ មានន័យត្រង់ $x_0=2\ (i)$

$$+\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\frac{12}{4}=3\ (ii)$$

តាម (i) & (ii) នាំឲ្យ $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=3$

ដូច្នេះ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x_0 = 2$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ សិក្សាភាពជាប់នៃ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & ;\ x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$ ត្រង់ $x_0 = 0$ ។

$+$ ដោយ $f(0) = 0 \Rightarrow f(x)$ មានន័យត្រង់ $x_0 = 0$ (i) ។

$+$ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (ii) ។

តាម $(1)\&(2)$ គេទាញបាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

$\Rightarrow f(x)$ ដាច់ត្រង់ $x_0 = 0$ ។

9.2. <u>បណ្តាក់នៃអនុគមន៍ជាប់</u>

បើ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ x_0 ហើយ $g(x)$ ជាប់ត្រង់ $f(x_0)$ នោះ

$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ ជាប់ត្រង់ x_0 ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមាន $f(x) = 5x^2 + 2$ ជាប់ត្រង់ $x_0 = 2$ ហើយ

$g(x) = 3x + 1$ ជាប់ត្រង់ $f(2) = 22$

$\Rightarrow g[f(x)] = 3(5x^2 + 2) + 1 = 15x^2 + 7$ ជាប់ត្រង់ $x_0 = 2$ ។

ព្រោះ៖

$+g[f(2)] = 67 \Rightarrow g[f(x)]$ មានន័យត្រង់ $x_0 = 2$, (i)

$+ \lim\limits_{x\to 2} g[f(x)] = \lim\limits_{x\to 2}(15x^2 + 7) = 67$, (ii)

តាម (i) & (ii) នោះ $\lim\limits_{x\to 2} g[f(x)] = g[f(2)] = 67$

9.3. <u>បន្លាយភាពជាប់នៃ $f(x)$ ត្រង់ x_0</u>

និយមន័យ៖ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានន័យលើ *Voisinage* នៃ x_0

តែ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ ។ ដែលហៅថា **បន្លាយភាពជាប់នៃ $f(x)$ ត្រង់x_0**

គឺជាអនុគមន៍ $g(x)$ កំណត់ដោយ

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \ , & x \neq x_0 \\ L \ , & x = x_0 \end{cases}$$

គឺ $g(x)$ ជាប់ត្រង់ x_0 ដោយ $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = L = g(x_0)$ ។

ឧទាហរណ៍៖ រកបន្លាយភាពជាប់នៃ $f(x)$ ត្រង់ $x_0 = 0$

ដែល $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ។

ចម្លើយ៖ រកបន្លាយភាពជាប់នៃ $f(x)$

ដោយ $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \ x \neq 0 \\ 1 & , \ x = 0 \end{cases}$ ជាបន្លាយតាមភាពជាប់នៃ $f(x)$ ត្រង់

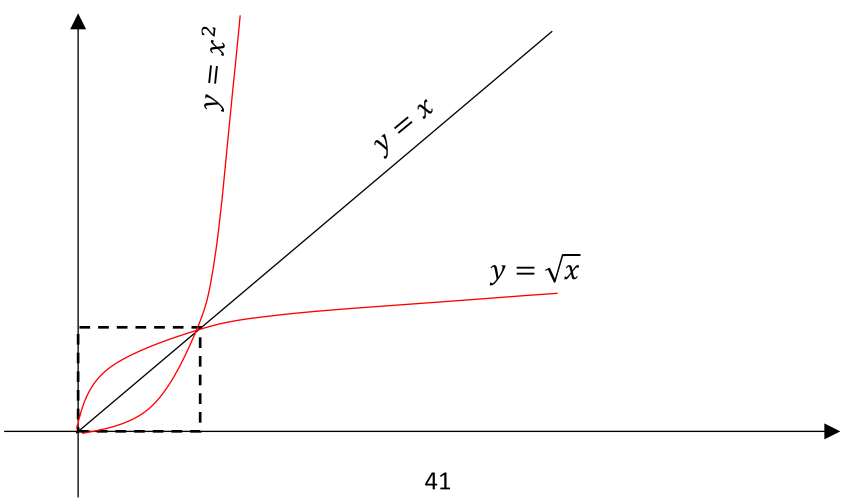
$x_0 = 0$ ។

10. លក្ខណៈខ្សែកោងអនុគមន៍ពីរច្រាសគ្នាក្នុងតម្រុយតែមួយ

ខ្សែកោងរវាង $y = f(x)$ និង $y = f^{-1}(x)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះមុំទី១ $(y = x)$ ។

អនុគមន៍មួយមានអនុគមន៍ច្រាសលុះត្រាតែវាមានន័យជាប់នឹងម៉ូណូតូន ។

ឧទាហរណ៍៖ ខ្សែកោងរវាង $y = x^2$ និង $y = \sqrt{x}$ ឆ្លុះធៀបនឹង $y = x$ (កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំទី១) ។



11. អនុគមន៍ច្រាសត្រីកោណមាត្រ

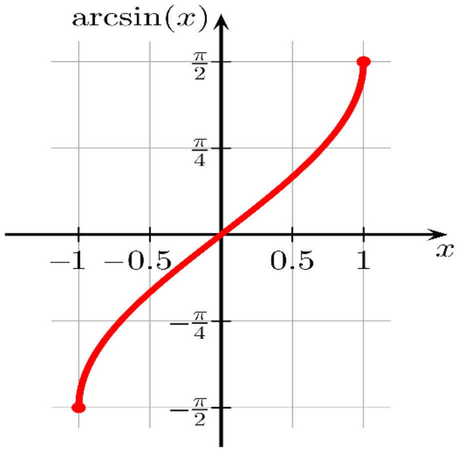
- $y = \arcsin x$

ដោយ $x = \sin y$ មានន័យជាប់លើ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ នាំឲ្យអនុគមន៍ច្រាសតាងដោយ $y = \arcsin x$ កំណត់ដោយ៖

$$\left.\begin{array}{c} x = \sin y \\ -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right| \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ -1 \le x \le 1 \end{array}\right.$$

ឧទាហរណ៍៖ $\arcsin(0) = 0\,; \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\,; \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

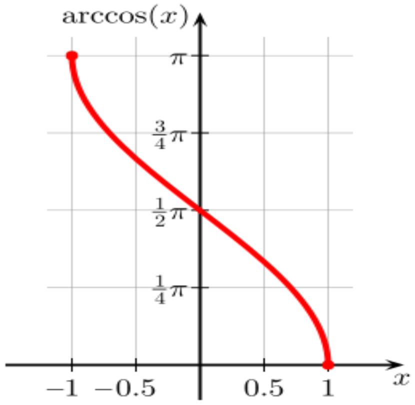


- $y = \arccos(x)$

ដោយ $x = \cos y$ មានន័យជាប់និងចុះលើ $[0, \pi]$ នាំឲ្យមានអនុគមន៍ច្រាសតាងដោយ $y = \arccos(x)$ កំណត់ដោយ៖

$$\left.\begin{array}{c} x = \cos(y) \\ 0 \le y \le \pi \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} y = \arccos(x) \\ -1 \le x \le 1 \end{array}\right.$$

ឧទាហរណ៍៖ $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\,; \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\,; \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$



* **លក្ខណៈ:**

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ ,-1\le x\le 1$$

ស្រាយ

តាង $a=arcsin\,x\Rightarrow x=sin\,a=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$

$\Rightarrow\frac{\pi}{2}-a=\arccos x\Rightarrow a+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

តែ $a=\arcsin x$

នាំឲ្យ $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ ,\qquad x\in[-1,1]$

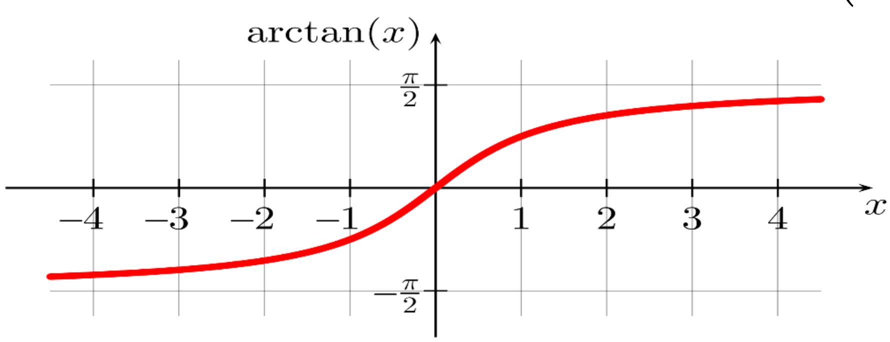
- $y=\arctan x$

ដោយ $x=\tan y$ មានន័យជាប់និងកើនលើ $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ នាំឲ្យមាន អនុគមន៍ច្រាសតាងដោយ $a=\arctan x$ កំណត់ដោយ៖

$$\left.\begin{matrix}x=\tan y\\-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}y=\arctan x\\-\infty<x<+\infty\end{matrix}\right.$$

ឧទាហរណ៍៖ $\arctan(0)=0$

$$\arctan(1)=\frac{\pi}{4}\ ;\ \arctan(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}\ ;\ \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$$



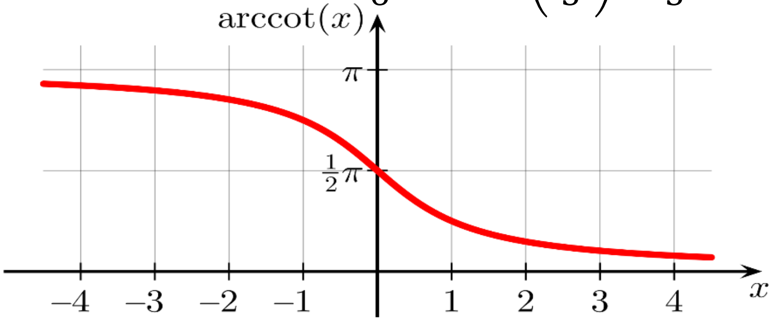
- $y = \operatorname{arccot} x$

ដោយ $x = \cot y$ មានន័យ ជាប់និងចុះលើ $]0, \pi[$ នាំឲ្យមាន

អនុគមន៍ច្រាស តាងដោយ $y = \operatorname{arccot} x$ កំណត់ដោយ៖

$$\left.\begin{array}{r} x = \cot y \\ 0 < y < \pi \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} y = \operatorname{arccot} x \\ -\infty < x < +\infty \end{array}\right.$$

ឧទាហរណ៍៖ $\operatorname{arccot}(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{6}$; $\operatorname{arccot}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$; $\operatorname{arccot}(1) = \dfrac{\pi}{4}$



∗ លក្ខណៈ

$$\begin{array}{lll}
(a). & \arccos(\cos x) = x \ , & 0 \le x \le \pi \\
(b). & \cos(\arccos x) = x \ , & -1 \le x \le 1 \\
(c). & \arcsin(\sin x) = x \ , & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\
(d). & \sin(\arcsin x) = x \ , & -1 \le x \le 1 \\
(e). & \tan(\arctan x) = x \, , & -\infty < x < +\infty \\
(f). & \arctan(\tan x) = x \, , & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\
(g). & \cot(\operatorname{arccot} x) = x \, , & -\infty < x < +\infty \\
(h). & \operatorname{arccot}(\cot x) = x \ , & 0 < x < \pi \\
(i). & \arctan x + \arctan y = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) & \\
(j). & \arctan x - \arctan y = \arctan\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right) & \\
(k). & \arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) & \\
(l). & \arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) & \\
(m). & \arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right) & \\
(n). & \arccos x - \arccos y = \arccos\left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right) &
\end{array}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

(j). $\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\dfrac{x-y}{1-xy}\right)$

ដោយ $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

នាំឲ្យ

$$\tan(arctan\, x - arctan\, y) = \frac{\tan(\arctan x) - \tan(\arctan y)}{1 + \tan(\arctan x)\tan(\arctan y)}$$
$$= \frac{x-y}{1+xy}$$

នោះគេទាញបាន $\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\dfrac{x-y}{1-xy}\right)$

(k). $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$

ដោយ $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

$$\Longrightarrow \sin(\arcsin x + \arcsin y)$$
$$= \sin(\arcsin x)\cos(\arcsin y) + \sin(\arcsin y)\cos(\arcsin x)$$
$$= x\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)} + y\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}$$
$$= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

$$\Longrightarrow \arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

លំហាត់អនុវត្តន៍៖ ចូរស្រាយលក្ខណៈខាងលើ ដែលនៅសល់។

12. ទំហំធំអនេក- តូចអនេក

12.1. ទំហំតូចអនេក

→**និយមន័យ** ៖ គេថា $\alpha(x)$ ជាទំហំតូចអនេកពេល $x \to a$

កាលណា $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍៖ $\sin x$, $\tan x$, $(1-\cos x)$, $(e^x - 1)$, $\ln(1+x)$ សុទ្ធតែ

ជាទំហំតូចអនេក កាលណា $x \to 0$ ។

$+\dfrac{1}{e^x}$; $\dfrac{1}{\ln x}$; $\dfrac{1}{(1+x)^n}$ សុទ្ធតែជាទំហំតូចអនេកពេល $x \to +\infty$ ។

⊕ បើ $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \to 0$ នោះទំហំតូចអនេក $\alpha(x)$ មានលំដាប់ខ្ពស់ជាង

ទំហំតូចអនេក $\beta(x)$ ។

⊕ បើ $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \to l\ (l \neq 0)$ ពេល $x \to a$ នោះ ទំហំតូចអនេក $\alpha(x)$ និង $\beta(x)$ មានលំដាប់ស្មើគ្នា។

⊕ បើ $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \to 1$ ពេល $x \to a$ នោះ $\alpha(x)$ សមមូល $\beta(x)$ ឬ $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ។

12.2. ទំហំធំអនេក

និយមន័យ៖ គេថា $\beta(x)$ ជាទំហំធំអនេកពេល $x \to a$ កាលណា

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = \pm\infty$$

ឧទាហរណ៍៖ e^x ; $\ln x$; $(1+x)^n$ សុទ្ធតែជាទំហំធំអនេកពេល $x \to +\infty$ ។

លំហាត់

លំហាត់ទី០១៖ គេឲ្យ $f(x)=\dfrac{x-1}{3x+5}$ ។ចូរកំណត់ $f(\dfrac{1}{x})$ ។

លំហាត់ទី០២៖ ប្រសិនបើ $f(a)=\tan(a)$ ។

ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(2a)=\dfrac{2f(a)}{1-[f(a)]^2}$ ។

លំហាត់ទី០៣៖ គេឲ្យ $f(x)=\ln x$ និង $g(x)=x^3$, ចូរកំណត់៖

$(f\circ g)(2)$, $(f\circ g)(a)$ និង $(g\circ f)(a)$ ។

លំហាត់ទី០៤៖ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

$(a).\ y=\sqrt{3-x^2}$, $(b).\ f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$

$(c).\ y=\sqrt{\ln x+1}$, $(d).\ y=\ln(\ln x)$

$(e).\ y=\arcsin(3x-5)$;

$(f).\ y=\ln(x^2-3x+2)+\sqrt{-x^2+4x+5}$

$(g).\ y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2-4}}$, $(h).y=\sqrt{1-\cos x}$

លំហាត់ទី០៥៖

បើ $f(x)=\dfrac{1}{x}$, នោះចូរង្ហាញថា $f(a)-f(b)=f\left(\dfrac{ab}{b-a}\right)$ ។

លំហាត់ទី០៦៖ ចូរគណនា

$(1).\arctan 1+\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$$(2).\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arctan(-\sqrt{3})+\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$(3).\sin(2\arctan 3)$; $(4).\cos(2\arctan 2)$

$(5).\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$; $(6).\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$

$(7).\sin\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)+\cos(\arctan 2\sqrt{2})$

$$(8).\sin\left[\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)-\arccos\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

លំហាត់ទី០៨៖ សម្រួលកន្សោម

$(a).\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; $(b).\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$

$(c).\sin(\arctan 2)$; $(d).\cos(\arctan 2)$

$$(e).\arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ ,0\le x<2\pi\,,x\neq\pi$$

លំហាត់ទី០៩៖ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$(a).2\arctan\frac{1}{2}=\arctan\frac{4}{3}$

$$(b).\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

លំហាត់ទី១០៖ ចូរបង្ហាញថា

$(a).\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$; $(b).\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$

$(c).\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $(d).\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

លំហាត់ទី១១៖ បង្ហាញថា $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ បើ

$-\dfrac{\pi}{2}<\tan^{-1}x+\tan^{-1}y<\dfrac{\pi}{2}$ ហើយមកស្រាយបន្តទៀតថា៖

$$(a).\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}\ ;\ (b).2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{\pi}{4}$$

លំហាត់ទី១២៖ ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

(ក). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(ខ). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{\sin^2\frac{x}{2}}$

(គ). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{(\arctan 3x)^2}$

(ឃ). $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\tan^3\frac{1}{x}\times\arctan\frac{3}{x\sqrt{x}}}{\sin\frac{2}{x^3}\times\tan\frac{1}{\sqrt{x}}\times\arcsin\frac{5}{x}}$

លំហាត់ទី១៣៖ គណនាលីមីតខាងក្រោម

(ក). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\arctan 6x}$; (ខ). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x\arcsin 3x}{\sin 3x\arctan 2x}$

(គ). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-7x^2}{\arcsin 3x+\arctan x^2}$; (ឃ). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(2-\cos bx)}$

(ង). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt{x+9}-3}$; (ច). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\sin\pi x^2}$

(ឆ). $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-3x^3-5x^5}{8-7x^2+16x^4}$; (ជ). $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(a+2x^2)(b-x)^3}{(a+x)^5+(b-2x)^5}$

លំហាត់និងដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី០១៖ គេឲ្យ $f(x)=\dfrac{x-1}{3x+5}$ ។ចូរកំណត់ $f(\dfrac{1}{x})$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

កំណត់ $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x-1}{3x+5}$

យើងជំនួស x ដោយ $\dfrac{1}{x}$; $(x\neq 0)$ គេបាន $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{3}{x}+5}=\dfrac{1-x}{3+5x}$

ដូចនេះ៖ $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-x}{3+5x}$

លំហាត់ទី០២៖ ប្រសិនបើ $f(a)=\tan(a)$ ។

ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(2a)=\dfrac{2f(a)}{1-[f(a)]^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(2a)=\dfrac{2f(a)}{1-[f(a)]^2}$

យើងមាន $f(a)=\tan(a)$

យើងបាន $f(2a)=\tan(2a)=\dfrac{\tan a+\tan a}{1-\tan a\tan a}$

$=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$, $f(a)=\tan a$

$=\dfrac{2f(a)}{1-[f(a)]^2}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ៖ $f(2a)=\dfrac{2f(a)}{1-[f(a)]^2}$

លំហាត់ទី០៣៖ គេឲ្យ $f(x) = \ln x$ និង $g(x) = x^3$, ចូរកំណត់៖

$(f \circ g)(2)$, $(f \circ g)(a)$ និង $(g \circ f)(a)$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ កំណត់ $(f \circ g)(2)$, $(f \circ g)(a)$ និង $(g \circ f)(a)$

យើងមាន $f(x) = \ln x$ និង $g(x) = x^3$

យើងបាន $(f \circ g)(x) = \ln(x^3) = 3\ln x$

$(g \circ f)(x) = (\ln x)^3$

ចំពោះ $x = 2$ យើងបាន $(f \circ g)(2) = 3\ln 2$

$x = a$ យើងបាន $(f \circ g)(a) = 3\ln a$

$(g \circ f)(a) = (\ln a)^3$

ដូចនេះ $(f \circ g)(2) = 3\ln 2$, $(f \circ g)(a) = 3\ln a$ និង $(g \circ f)(a) = (\ln a)^3$

លំហាត់ទី០៤៖ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

$(a).\ y = \sqrt{3 - x^2}$, $(b).\ f(x) = \sqrt{3 + x} + \sqrt[4]{7 - x}$

$(c).\ y = \sqrt{\ln x + 1}$, $(d).\ y = \ln(\ln x)$

$(e).\ y = \arcsin(3x - 5)$;

$(f).\ y = \ln(x^2 - 3x + 2) + \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$

$(g).\ y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2 - 4}}$, $(h).\ y = \sqrt{1 - \cos x}$

ដំណោះស្រាយ៖ រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

$(a).\ y = \sqrt{3 - x^2}$

អនុគមន៍នេះមានន័យកាលណា $3 - x^2 \geq 0$

$$x^2 \leq 3 \implies -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D_y = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ។

$(b). f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$

អនុគមន៍នេះមានន័យកាលណា $\begin{cases}3+x\geq 0\\7-x\geq 0\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}x\geq -3\\x\leq 7\end{cases}\Leftrightarrow -3\leq x\leq 7$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D_f=[-3,7]$ ។

$(c).\ y=\sqrt{\ln x+1}$

អនុគមន៍នេះ មានន័យកាលណា $\begin{cases}x>0\\\ln x+1\geq 0\end{cases}$

$$x\geq e^{-1}$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $D_y=[e^{-1},+\infty)$ ។

$(d).\ y=\ln(\ln x)$

អនុគមន៍នេះមាន ន័យកាលណា $\begin{cases}x>0\\\ln x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$

ដូចនេះ ដែនកំណត់គឺ $D_y=]1\,,+\infty[$ ។

$(e). y=\arcsin(3x-5)$

អនុគមន៍នេះមានន័យកាលណា

$$-1\leq 3x-5\leq 1$$

$$4\leq 3x\leq 6$$

$$\frac{4}{3}\leq x\leq 2$$

ដូចនេះ ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ y គឺ $D_y=\left[\frac{4}{3},2\right]$ ។

$(f).\ y=\ln(x^2-3x+2)+\sqrt{-x^2+4x+5}$

អនុគមន៍នេះ មានន័យកាលណា

$$\begin{cases} x^2-3x+2>0 & (1) \\ -x^2+4x+5\geq 0 & (2) \end{cases}$$

ចំពោះ (1) ៖ បើ $x^2-3x+2=0$

តាម $a+b+c=0 \Longrightarrow x_1=a\ ,\ x_2=\frac{c}{a}$

$x_1=1\ ,\qquad x_2=2$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2-3x+2>0$	$+$	$-$	$+$	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើ យើងទាញបាន $x<1 \vee x>2$ (i)

ចំពោះ (2) ៖ $-x^2+4x+5\geq 0$ បើ $-x^2+4x+5=0$

ដោយ $a-b+c=0 \Longrightarrow x_1=a=-1\ ,\qquad x_2=-\dfrac{c}{a}=5$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$-x^2+4x+5\geq 0$	$-$	$+$	$-$	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើ យើងទាញបាន $x\in[-1,5]$ (ii)

តាម (i) និង (ii) យើងទាញបាន $x\in[-1,1]\cup[2\,,5]$ ។

<u>ដូចនេះ</u> ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ y គឺ $D_y=[-1,1]\cup[2,5]$ ។

$(g).\ y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2-4}}$

ចំពោះ $\sin x$ មានដែនកំណត់ $x\in IR$

ចំពោះ $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ មានន័យកាលណា $x^2-4\neq 0 \wedge x^2-4>0$

$$x^2-4>0$$

$$x^2\geq 4 \implies x\in]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ y គឺ $D_y=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ ។

$(h).y=\sqrt{1-\cos x}$

អនុគមន៍នេះ មានន័យកាលណា

$$1-\cos x\geq 0$$

$$\cos x\leq 1$$

$$\cos x\leq \cos 2\pi$$

$$2\pi+2k\pi\leq x\leq -2\pi+2k\pi \ ,k\in Z$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ y គឺ $D_y=\mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី០៥៖

បើ $f(x)=\frac{1}{x}$, នោះចូរបង្ហាញថា $f(a)-f(b)=f\left(\frac{ab}{b-a}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា $f(a)-f(b)=f\left(\frac{ab}{b-a}\right)$

យើងមាន $f(x)=\frac{1}{x}$

នោះ $f(a)=\frac{1}{a}$; $f(b)=\frac{1}{b}$

យើងបាន $f(a)-f(b)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$ (i)

តែ $f\left(\frac{ab}{b-a}\right)=\frac{1}{\frac{ab}{b-a}}=\frac{b-a}{ab}$ (ii)

តាម (i) និង (ii) យើងបាន

$$f(a)-f(b)=f\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$ ពិត

ដូចនេះ៖ $\boxed{f(a)-f(b)=f\left(\frac{ab}{b-a}\right)}$

លំហាត់ទី០៦៖ ចូរគណនា

$$(1).\arctan 1+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(2).\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arctan(-\sqrt{3})+\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(3).\sin(2\arctan 3) \quad ; \quad (4).\cos(2\arctan 2)$$

$$(5).\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right) \quad ; \quad (6).\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$$

$$(7).\sin\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)+\cos(\arctan 2\sqrt{2})$$

$$(8).\sin\left[\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)-\arccos\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនា

$$(1).\arctan 1+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$$

តាមរូបមន្ត $\arctan(\tan a)=a$

$$\arccos(\cos a)=a$$

$$\arcsin(\sin a)=a$$

យើងតាង $S_1=\arctan 1+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

យើងបាន $S_1 = \arctan\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) + \arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) + \arcsin\left(\sin-\frac{\pi}{3}\right)$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

ដូចនេះ៖ $S_1 = \arctan 1 + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi}{12}$

(2). $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arctan(-\sqrt{3}) + \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$= \arcsin\left(\sin\frac{-\pi}{4}\right) + \arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) - \arctan\left(\tan\frac{-\pi}{3}\right) + \arctan\left(\tan\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{-6\pi - 4\pi + 24\pi}{24} = \frac{14\pi}{24} = \frac{7\pi}{12}$$

ដូចនេះ៖ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arctan(-\sqrt{3}) + \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{7\pi}{12}$

(3). $\sin(2\arctan 3)$

តាង $A = \sin(2\arctan 3)$ និង $B = \arctan 3$

$$\Longrightarrow \tan B = 3 \iff \frac{\sin B}{\cos B} = 3$$

$$\iff \sin^2 B = 9\cos^2 B$$

$$\sin^2 B = 9(1 - \sin^2 B)$$

$$10\sin^2 B = 9 \Longrightarrow \sin B = \frac{3}{\sqrt{10}} \Longrightarrow \cos B = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

តាមរូបមន្ត $\sin 2B = 2\sin B\cos B$

$$\Longrightarrow \sin(2\arctan 3) = 2\sin B\cos B = (2)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{5}$$

ដូចនេះ៖ $\sin(2\arctan 3) = \frac{3}{5}$

(4). $\cos(2\arctan 2)$

របៀបទី០១៖

តាង $A = \arctan 2 \Leftrightarrow \tan A = 2$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = 4$$

$$\sin^2 A = 4(1 - \sin^2 A) \Longrightarrow 5\sin^2 A = 4$$

$$\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}} \Longrightarrow \cos A = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

តាមរូបមន្ត $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

$$\cos(2\arctan 2) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$$

របៀបទី០២៖

តាង $A = \arctan 2 \Leftrightarrow \tan A = 2$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 2\left(\frac{1}{1 + \tan^2 A}\right) - 1$$

$$= 2\left(\frac{1}{1+4}\right) - 1 = -\frac{3}{5}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\cos(2\arctan 2) = -\frac{3}{5}}$

(5). $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$

តាង$A = \arccos\frac{1}{9} \Longrightarrow \cos A = \frac{1}{9}$

$$1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{9}$$

$$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{8}{9} \Longrightarrow \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

យើងបាន $\sin\left(\frac{1}{2}A\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3}$

ដូចនេះ $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{3}$

(6). $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$

តាង $\mathrm{A}=\arccos\frac{1}{8} \Rightarrow \cos A=\frac{1}{8}$

$$2\cos^2\frac{A}{2}-1=\frac{1}{8}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{9}{8} \Rightarrow \cos^2\frac{A}{2}=\frac{9}{16} \Rightarrow \cos\frac{A}{2}=\frac{3}{4}$$

ដូចនេះ $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{4}$

(7). $\sin\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\arctan 2\sqrt{2}\right)$

តាង $A=\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \tan A=\frac{1}{3}$

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9\sin^2 A=1-\sin^2 A$$

$$\Rightarrow \sin A=\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos A=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

ដោយ $\sin 2A=2\sin A\cos A=2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\frac{3}{5}$

តាង $B=\arctan 2\sqrt{2} \Rightarrow \tan B=2\sqrt{2}$

$$\frac{(1-\cos^2 B)}{\cos^2 B}=8$$

$$\Rightarrow \cos^2 B=\frac{1}{9} \Rightarrow \cos B=\frac{1}{3}$$

យើងបាន៖

$$\sin\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\arctan 2\sqrt{2}\right)=\frac{3}{5}+\frac{1}{3}=\frac{14}{15}$$

ដូចនេះ: $\sin\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\arctan 2\sqrt{2}\right)=\frac{14}{15}$

$(8).\sin\left[\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)-\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right]$

$$=\sin\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right)\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)-\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)-\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}.\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)}$$

$$=\frac{9}{25}-\left(\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right)\left(\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{9}{25}-\left(1-\frac{9}{25}\right)=-\frac{7}{25}$$

ដូចនេះ: $\sin\left[\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)-\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right]=-\frac{7}{25}$

លំហាត់ទី០៨៖ សម្រួលកន្សោម

$(a).\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; $(b).\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$

$(c).\sin(\arctan 2)$; $(d).\cos(\arctan 2)$

$(e).\arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\ ,0\leq x<2\pi\ ,x\neq\pi$

ដំណោះស្រាយ៖ សម្រួលកន្សោម

$(a).\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$

$$=\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\frac{3}{5}\right)}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

ដូចនេះ $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$

$(b).\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$

$$= \sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

ដូចនេះ $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$

$(c).\sin(\arctan 2)$

តាង $A = \arctan 2 \implies \tan A = 2$

$$\sin^2 A = 4(1-\sin^2 A)$$

$$5\sin^2 A = 4$$

$$\sin^2 A = \frac{4}{5} \implies \sin A = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

ដូចនេះ $\sin(\arctan 2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$(d).\cos(\arctan 2)$

តាង $A = \arctan 2 \implies \tan A = 2$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = 2$$

$$\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow 1-\cos^2 A = 4\cos^2 A$$

$$\Rightarrow \cos A = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

ដូចនេះ $\cos(\arctan 2) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$(e).\arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$; $0 \le x < 2\pi$, $x \neq \pi$

$$= \arctan\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}}$$

$$= \arctan\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}}$$

$$= \arctan\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$= \arctan\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right) = \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

ដូចនេះ $\arctan\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \dfrac{x}{2}$

លំហាត់ទី០៩៖ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(a).\ 2\arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{4}{3}$$

$$(b).\ \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

ដំណោះស្រាយ៖ ដោះស្រាយសមីការ

$$(a).\ 2\arctan\frac{1}{2}=\arctan\frac{4}{3}$$

$$\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{2}=\arctan\frac{4}{3}$$

$$\arctan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\right)=\arctan\frac{4}{3}$$

$$\arctan\left(\frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{2}}\right)=\arctan\frac{4}{3}$$

$$\arctan\left(\frac{4}{3}\right)=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$ ពិត

$$\boxed{\text{ដូចនេះ៖ } 2\arctan\frac{1}{2}=\arctan\frac{4}{3}}$$

$$(b).\ \arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{10}}\right)+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}}\right)+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\frac{7}{9}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{72}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{65}{65}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$ ពិត

ដូចនេះ: $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

លំហាត់ទី១០: ចូរបង្ហាញថា

$$(a).\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}\quad ;\quad (b).\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$(c).\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\quad ;\quad (d).\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដំណោះស្រាយ: បង្ហាញថា

$(a).\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$

តាង $A=\arccos x \implies x=\cos A$

$$x^2=\cos^2 A$$

$$x^2=1-\sin^2 A\implies \sin A=\sqrt{1-x^2}$$ ពិត

ដូចនេះ: $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$

$(b).\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$

តាង $B=\arcsin x \implies \sin B=x$

$$\sin^2 B=x^2$$

$$1-\cos^2 B=x^2\implies \cos B=\sqrt{1-x^2}$$ ពិត

ដូចនេះ: $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$

$(c).\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

តាង $C=\arcsin x\implies x=\sin C$

យើងមាន $\sin^2 C+\cos^2 C=1$

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-x^2}$$

តាមរូបមន្ត $\tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ដូចនេះ៖ $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$(d).\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

តាង $D = \arctan x \implies x = \tan D$

$$\frac{\sin D}{\cos D} = x$$

$$\frac{\sin^2 D}{\cos^2 D} = x^2 \implies \sin^2 D = x^2(1-\sin^2 D)$$

$$\implies \sin^2 D = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\implies \sin D = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$ ពិត

ដូចនេះ៖ $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

លំហាត់ទី១១៖ បង្ហាញថា $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ បើ

$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x + \tan^{-1} y < \frac{\pi}{2}$ ហើយមកស្រាយបន្តទៀតថា៖

$(a).\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$; $(b).2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$

ដំណោះស្រាយ៖

បង្ហាញថា $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

តាង $X = \tan^{-1} x \implies x = \tan X$

$Y = \tan^{-1} y \implies y = \tan Y$

តាមរូបមន្ត $\tan(X+Y)=\dfrac{\tan X+\tan Y}{1-\tan X\tan Y}=\dfrac{x+y}{1-xy}$

$$\Longrightarrow X+Y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$

(a). ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

តាមរូបមន្តខាងលើ $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$

យើងបាន $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\tan^{-1}\left(\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}\right)$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}\right)=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

(b). ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

យើងបាន $2\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right)=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right)$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{6}{9}}{\frac{8}{9}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{6}{8}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{6}{8}+\frac{1}{7}}{1-\frac{6}{56}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{50}{56}}{\frac{50}{56}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ៖ $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{\pi}{4}$

រូបមន្តអនុគមន៍សមមូល

$(1).\ \boldsymbol{\sin a(x) \sim a(x)}$; $(2).\ \boldsymbol{\arcsin a(x) \sim a(x)}$

$(3).\ \boldsymbol{\tan a(x) \sim a(x)}$; $(4).\ \boldsymbol{\arctan a(x) \sim a(x)}$

$(5).\ \boldsymbol{1-\cos a(x) \sim \frac{1}{2}a^2(x)}$; $(6).\ \boldsymbol{\ln(1+a(x)) \sim a(x)}$

$(7).\ \boldsymbol{\log_a(1+a(x)) \sim \frac{a(x)}{\ln a}}$; $(8).\ \boldsymbol{b^{a(x)}-1 \sim a(x)\ln b}$

$(9).\ \boldsymbol{e^{a(x)}-1 \sim a(x)}$; $(10).\ \boldsymbol{[1+a(x)]^b-1 \sim ba(x)}$

$(11).\ \boldsymbol{\sqrt[n]{1+a(x)}-1 \sim \frac{a(x)}{n}}$;

ដែល $\boldsymbol{a(x)}$ ជាទំហំតូចអនេកពេល $\boldsymbol{x \to x_0}$ ($\lim_{x\to x_0} a(x)=0$)

លំហាត់ទី១២៖ ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

(ក). $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(ខ). $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{\sin^2\frac{x}{2}}$

(គ). $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{(\arctan 3x)^2}$

(ឃ). $\lim_{x\to +\infty}\frac{\tan^3\frac{1}{x}\times \arctan\frac{3}{x\sqrt{x}}}{\sin\frac{2}{x^3}\times\tan\frac{1}{\sqrt{x}}\times\arcsin\frac{5}{x}}$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាលីមីត

(ក). $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$

(ខ). $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(2x)}{\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=16$

(គ). $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{(\arctan 3x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x.2x}{(3x)^2}=\frac{2}{9}$

(ឃ). $\lim_{x\to+\infty}\frac{\tan^3\frac{1}{x}\arctan\frac{3}{x\sqrt{x}}}{\sin\frac{2}{x^3}\tan\frac{1}{\sqrt{x}}\arcsin\frac{5}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3\left(\frac{3}{x\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{2}{x^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{5}{x}\right)}=\frac{3}{10}$

លំហាត់ទី១៣៖ គណនាលីមីតខាងក្រោម

(ក). $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\arctan 6x}$; (ខ). $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x\arcsin 3x}{\sin 3x\arctan 2x}$

(គ). $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-7x^2}{\arcsin 3x+\arctan x^2}$; (ឃ). $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(2-\cos bx)}$

(ង). $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt{x+9}-3}$; (ច). $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\sin\pi x^2}$

(ឆ). $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-3x^3-5x^5}{8-7x^2+16x^4}$; (ជ). $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(a+2x^2)(b-x)^3}{(a+x)^5+(b-2x)^5}$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាលីមីត

(ក). $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{\arctan 6x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{6x}=\frac{1}{2}$

(ខ). $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x\arcsin 3x}{\sin 3x\arctan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x.3x}{3x.2x}=1$

(គ). $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-7x^2}{\arcsin 3x+\arctan x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-7x^2}{3x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

(ឃ). $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(2-\cos bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+cos\,ax-1)}{\ln(1+1-\cos bx)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos ax - 1}{1-\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(ax)^2}{\frac{1}{2}(bx)^2} = -\frac{a^2}{b^2}$$

(ង). $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sqrt{x+9}-3} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt[3]{1+\frac{x}{8}}-2}{3\sqrt{1+\frac{x}{9}}-3} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{8}}-1}{\sqrt{1+\frac{x}{9}}-1}$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\left(\frac{x}{8}\right)}{3}}{\frac{\frac{x}{9}}{2}}\right) = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{24}\times\frac{18}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

(ច). $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\sin \pi x^2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)}{\sin(4\pi-\pi x^2)}$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)}{4\pi-\pi x^2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{\frac{\pi}{4}(2-x)}{\pi(2+x)}\right) = 0$$

(ឆ). $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-3x^3-5x^5}{8-7x^2+16x^4} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x^5}{16x^4} = -\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{16}x = \pm\infty$

(ជ). $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(a+2x)^2(b-x)^3}{(a+x)^5+(b-2x)^5} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x)^2(-x)^3}{x^5+(-2x)^5} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{4x^5}{-31x^5}$

$$= \frac{4}{31}$$

ជំពូកទី៣

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

1. ដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ

ដេរីវេត្រង់ x_0 នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាលីមីត (បើមាន) នៃផលធៀប $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ កាលណា Δx ខិតទៅជិត 0 ។

គេសរសេរ ៖ $y'_0=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x}}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ ។

2. រូបមន្តដេរីវេខ្លះៗ

អនុគមន៍	ដេរីវេ
$f(x)=a$	$f'(x)=0$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^n\ ,\quad (n\in\mathbb{Z})$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}\ ,(n\in\mathbb{Z})$	$f'(x)=\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x)\pm g(x)$	$\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)\pm g'(x)$
$f(x).g(x)$	$\{f(x).g(x)\}'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$
$\{f(x)\}^n\ (n\in\mathbb{Z})$	$(\{f(x)\}^n)'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
$\frac{1}{f(x)}$	$\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}'=-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$
$f(g(x))$	$\{f(g(x))\}'=f'(g(x)).g'(x)$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\ln a$

$f(u) = a^u$ ដែល u ជាអនុគមន៍នៃ x	$f'(u) = u'a^u \ln a$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(u) = e^u$ ដែល u ជាអនុគមន៍នៃ x	$f'(u) = u'e^u$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(u) = \ln(u)$	$f'(u) = \frac{u'}{u}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(u) = \log_a u$	$f'(x) = \frac{u'}{u \ln a}$

3. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ច្រាស

បើ f ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយហើយ g ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ f គឺ $g = f^{-1}$ នោះគេបានទំនាក់ទំនង $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = g(y)$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ f មានដេរីវេត្រង់ x_0 ដែល $f'(x_0) \neq 0$ នោះ គេបាន g មានដេរីវេត្រង់ $y_0 = f(x_0)$ ដែល

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

យើងមាន $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) = g(y)$

$$x = g[f(x)]$$
$$\Rightarrow 1 = x' = g'[f(x)]f'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{x'(y)}$$

គេសរសេរ៖ $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$ ឬ $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$

4. ដេរីវេទី n

*វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយដេរីវេទី n ៖

យើងមាន $f(x)$ មានន័យកាលណា $\forall x \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}$

យើងកំណត់

$y' = f'(x)$ “ ដេរីវេទី១ នៃ $y = f(x)$ “
$y'' = f''(x)$ " ដេរីវេទី២ នៃ y=f(x) "
$y^{(3)} = f^{(3)}(x)$ ‟ ដេរីវេទី៣ នៃ $y = f(x)$ ‟

$\vdots$

យើងឧបមាថា វាពិតដល់ដេរីវេទី n ដែល $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ (i)

យើងនឹងត្រូវបង្ហាញថា វាពិតរហូតដល់ ដេរីវេទី $(n+1)$

គឺ $y^{(n+1)} = \left[f^{(n)}(x)\right]' = f^{(n+1)}(x)$ (ii)

$\rightarrow$បើ (ii) ពិត នោះ (i) ក៏ពិតដែរ។

ឧទាហរណ៍៖ រក $y^{(n)}$ នៃ $y = \sin x$ ។

យើងមាន

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$\vdots$

ឧបមាថា ពិតដល់ដេរីវេទី n ដែល

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតរហូតដល់ ដេរីវេទី $(n+1)$ ដែល

$$y^{(n+1)} = \left[\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) \text{ ពិត}$$

ដូច្នេះ $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ ។

5. ទ្រឹស្តីបទ Roll

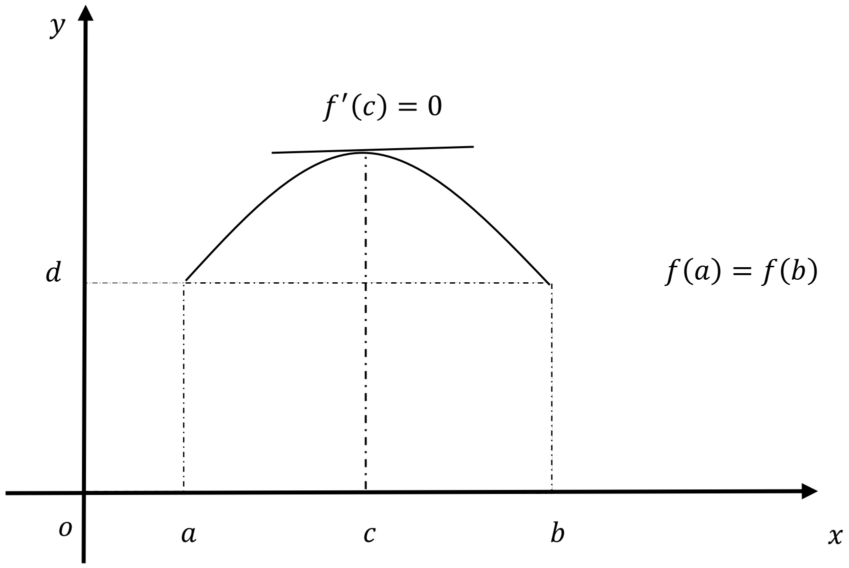
បើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះបើក $]a,b[$ ដែល $f(a)=f(b)$ នោះមានតម្លៃ $x=c$ ក្នុងចន្លោះបើក $]a,b[$ (មានន័យថា $a<c<b$) ដែលដេរីវេទីមួយនៃអនុគមន៍ $f(c)=0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖ គេឲ្យ $f(a)=d=f(b)$

ករណីទី១ បើ $f(x)=d$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះ f ថេរលើចន្លោះ $[a,b]$ និង $f'(x)=0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$ ។

ករណីទី២ បើ $f(x)>d$ គ្រប់ $x\in(a,b)$ នោះ $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាយ៉ាងតិច 1 ត្រង់ $x=c$ ដោយ $f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ $x=c$ គេបាន $f'(c)=0$ ។

ករណីទី៣ បើ $f(x)<d$ គ្រប់ $x\in(a,b)$ នោះ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាយ៉ាងតិច 1 ត្រង់ $x=c$ ដោយ $f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ $x=c$ គេបាន $f'(c)=0$ ។



6. វិសមភាពកំណើនមានកំណត់

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់និងជាប់ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ I ។បើមានពីរចំនួនពិត m និង M ដែលចំពោះគ្រប់ $x \in I$ $m \le f'(x) \le M$ នោះគ្រប់ចំនួនពិត $a , b \in I$ ដែល $a < b$ គេបាន

$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

គេឲ្យអនុគមន៍ $g : x \mapsto f(x) - mx$ មានដេរីវេលើ I

និង $g'(x) = f'(x) - m$ គេបាន $g'(x) \ge 0$ គ្រប់ $x \in I$ ។

មានន័យថា $g(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ I និងកើនលើ $[a , b]$

គេបាន $g(b) - g(a) \ge 0$

ឬ $[f(b) - mb] - [f(a) - ma] \ge 0$ ឬ $m(b-a) \le f(b) - f(a) , (1)$

ដូចគ្នានេះដែរ គេឲ្យអនុគមន៍ $h :\ x \mapsto f(x) - Mx$ មានដេរីវេលើ I និងលើ $[a , b]$

គេបាន $h'(x) \le 0$ គ្រប់ $x \in I$ មានន័យថា $h(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ I និងលើ $[a , b]$ គេបាន $h(b) - h(a) \le 0$

ឬ $[f(b) - Mb] - [f(a) - Ma] \le 0$ ឬ $f(b) - f(a) \le M(b-a) , (2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន បើ f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ I ដែលគ្រប់ $x \in I$, $m \le f'(x) \le M$ នោះគេបាន

$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$$

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឲ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a , b]$ ។ បើមានចំនួនពិត M ដែល $|f'(x)| \le M$ ចំពោះ $x \in [a , b]$ នោះគេបានវិសមភាព

$$|f(b) - f(a)| \le M|b-a|$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

គេមានអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ I ហើយចំពោះគ្រប់ $x \in I$ គេបាន

$-M \leq f'(x) \leq M$

តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់

ចំពោះ $a < b$ គេបាន $-M(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$ (1)

ចំពោះ $a > b$ គេបាន $-M(a-b) \leq f(a)-f(b) \leq M(a-b)$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$ ។

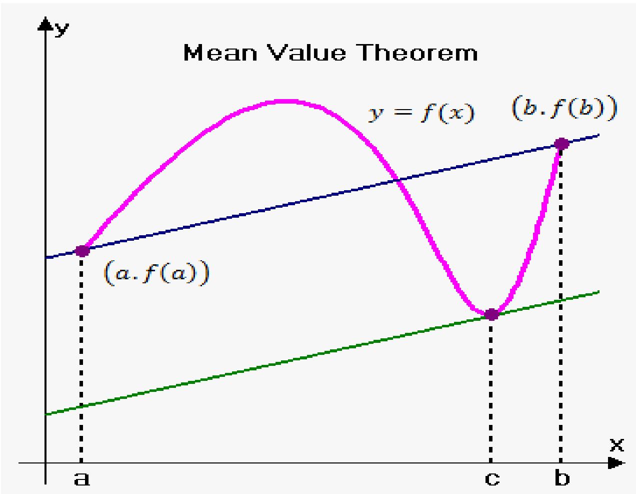
7. ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ មានដេរីវេលើ $[a,b]$ នោះមាន $c \in (a,b)$ មួយយ៉ាងតិច ដែល $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

ខ្សាតដែលកាត់តាមពីរចំនុច $(a,f(a))$ និង $(b,f(b))$ មានសមីការ

$$y = \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a) + f(a)$$



តាង $g(x) = f(x) - y$

គេបាន៖

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)$$
$$-f(a)$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ចំពោះ $x = a$ គេបាន $g(a) = 0$

ចំពោះ $x = b$ គេបាន $g(b) = 0$

g ជាអនុគមន៍ពហុធាជាប់លើ $[a,b]$

ដោយ $g(a) = g(b) = 0$ តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូល មានចំនួន $c \in (a,b)$ មួយ

យ៉ាងតិចដែល $g'(c) = 0$

ហើយ $g'(c)=f'(c)-\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=0$ នាំឲ្យ $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ដូច្នេះ $\exists c\in(a,b)$ មួយយ៉ាងតិច ដែល $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

លំហាត់

លំហាត់ទី០១. បង្ហាញថា ៖

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

លំហាត់ទី០២. គណនាដេរីវេអនុគមន៍៖

(1). $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$; (2). $y = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

(3). $y = \dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$; (4). $y = \dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$

(5). $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; (6). $y = x\sqrt{1+x^4}$

(7). $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; (8). $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

(9). $y = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$

(10). $y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

លំហាត់ទី០៣. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ដែលបានបង្ហាញដូចខាងក្រោម៖

(ក). $y = \dfrac{x^2}{1-x}$ គណនា $y^{(8)}$ ។

(ខ). $y = x^2e^{2x}$ គណនា $y^{(20)}$ ។

(គ). $y = x\ln x$ គណនា $y^{(5)}$ ។

លំហាត់ទី០៤. គណនាដេរីវេ y'_x , y''_{x^2} នៃអនុគមន៍មានរាងជាប៉ារ៉ាម៉ែត

(1). $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$

(2). $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$

(3). $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$

លំហាត់ទី០៥. គណនា $y^{(n)}$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

(1). $y=\sin(3x+2)$; (2). $y=\cos(2x+3)$

លំហាត់ទី០៦៖ សិក្សាភាពជាប់ និងភាពមានដេរីវេត្រង់ 0 និង 1នៃអនុគមន៍ នីមួយៗ ដែលកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដូចខាងក្រោម៖

i. $f: x \longmapsto (x-1)|x^2-x|$

ii. $f: x \longmapsto x|x-x^2|$

លំហាត់ទី០៧៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

i. $f(x)=3x^3-4x+2$

ii. $f(x)=(2x-1)^5$

iii. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

iv. $f(x)=x(x+\sqrt{1+x^2}$

លំហាត់ទី០៨៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ ខ. $y=\dfrac{1}{\sqrt{5x^3+2}}$ គ. $y=\left(\dfrac{x+2}{2-x}\right)^2$

លំហាត់ទី០៩៖ រក y' នៃអនុគមន៍ នៃ x និង y

i. $x=\tan y$

ii. $x=\sin y$

iii. $xy+\sin y=0$

iv. $x+\sin y=xy$

លំហាត់ទី១០៖

ក. គេឲ្យអនុគមន៍

$y=f(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{2x^3}{3}+x$ ។ចូរបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ ។

ខ. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = -\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 3$ ។

ចូរបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី១១៖ តាមរូបមន្ត ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^n$ នោះ

$f'(x) = nx^{n-1}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តដោយប្រើ

i. អនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ii. ទ្វីធាបទទ្វេធា

លំហាត់ទី១២ ៖ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x) = \ln x$ ដែល $x \in (0, +\infty)$។

1) បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x \in [9,10]$ គេបាន $\frac{1}{10} \le f'(x) \le \frac{1}{9}$ ។

2) ដោយអនុគមន៍វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ ចំពោះគ្រប់ $x \in [9,10]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{10} \le \ln\left(1 + \frac{1}{9}\right) \le \frac{1}{9}$ ។

លំហាត់ទី១៣៖ គេឲ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់លើ $]0, +\infty[$ ដោយ

$f(x) = \ln x$ ។

1) បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x \in [n-1, n]$ គេបាន៖

$$\frac{1}{n} \le f'(x) \le \frac{1}{n-1} \quad ,(n \in \mathbb{N}\ , n \ge 2)$$

2) អនុវត្តន៍វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ទៅ និងអនុគមន៍f

លើចន្លោះ $[n-1,n]$ គេបាន $\frac{1}{n}\leq \ln\frac{n}{n-1}\leq \frac{1}{n-1}$ ។

ទាញបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leq \ln x\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$ ។

លំហាត់ទី១៤៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

យើងមាន $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}$ ចំពោះ $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$ ។

លំហាត់ទី១៥៖

1) គណនាដេរីវេទី ៥ នៃអនុគមន៍ពហុធា $x\mapsto x^5-2x^4+3x^3-2$ ។

2) កំណត់ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $x\mapsto x^n$; $(n\in\mathbb{N}^*)$

លំហាត់ទី០១. បង្ហាញថា ៖

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>៖ បង្ហាញ

យើងមាន $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{(ax+b)'(cx+d)-(cx+d)'(ax+b)}{(cx+d)^2}$

$$= \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{ad-cd}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$ ពិត

ដូច្នេះ $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

លំហាត់ទី០២. គណនាដេរីវេអនុគមន៍៖

(1). $y = \frac{2x}{1-x^2}$; (2). $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

(3). $y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$; (4). $y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$

(5). $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; (6). $y = x\sqrt{1+x^4}$

(7). $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; (8). $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

(9). $y = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$

(10). $y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>៖ គណនាដេរីវេ

(1). $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$

យើងបាន $y'=\dfrac{(2x)'(1-x^2)-(2x)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}$

$$=\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{2(x^2+1)}{(1-x^2)^2}$$

(2). $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

$$\Longrightarrow\ y'=\frac{(1+x-x^2)'(1-x+x^2)-(1+x-x^2)(1-x+x^2)'}{(1-x+x^2)^2}$$

$$=\frac{(1-2x)(1-x+x^2)-(1+x-x^2)(2x-1)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$=\frac{1-x+x^2-2x+2x^2-2x^3-(2x+2x^2-2x^3-1-x+x^2)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$=\frac{1-3x+3x^2-2x^3-(x+3x^2-2x^3-1)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$=\frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}$$

(3). $y=\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}\ \Longrightarrow \ln y=p\ln x+q\ln(1-x)-\ln(1+x)$

$$\Longrightarrow\left(\frac{y'}{y}\right)=\frac{p}{x}+\frac{-q}{1-x}-\frac{1}{1+x}$$

$$\Longrightarrow y'=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}\left(\frac{p}{x}+\frac{-q}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)$$

(4). $y=\dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}\ \Longrightarrow \ln y=p\ln(1-x)-q\ln(1+x)$

$$\Longrightarrow\frac{y'}{y}=\frac{-p}{1-x}-\frac{q}{1+x}$$

$$\Longrightarrow y'=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}\left(\frac{-p}{1-x}-\frac{q}{1+x}\right)$$

(5). $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

(6). $y=x\sqrt{1+x^4} \Rightarrow \ln y=\ln x+\frac{1}{2}\ln(1+x^4)$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{4x^3}{1+x^4}=\frac{1}{x}+\frac{2x^3}{1+x^4}$$

$$\Rightarrow y'=x\sqrt{1+x^4}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x^3}{1+x^4}\right)$$

(7). $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

តាង $U=x+\sqrt{x+\sqrt{x}} \Rightarrow U'=1+\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$$=1+\frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x+\sqrt{x}}+1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$\Rightarrow y'=\left(\sqrt{U}\right)'=\frac{U'}{2\sqrt{U}}=\frac{\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

(8). $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \Rightarrow \ln y=\frac{1}{3}\ln(1+x^3)-\frac{1}{3}\ln(1-x^3)$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\frac{3x^2}{1+x^3}+\frac{1}{3}\frac{3x^2}{1-x^3}=\frac{2x^2}{1-x^6}$$

$$\Rightarrow y'=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}\left(\frac{2x^2}{1-x^6}\right)$$

(9). $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$

តាង $V=(2-x^2)\cos x\Rightarrow V'=-2x\cos x-(2-x^2)\sin x$

$U=2x\sin x\Rightarrow U'=2\sin x+2x\cos x$

ដោយ $y'=(V+U)'=V'+U'$

យើងបាន $y'=-2x\cos x-(2-x^2)\sin x+2\sin x+2x\cos x=x^2\sin x$

(10). $y'=-\sin 2x\cos(\cos 2x)$

លំហាត់ទី០៣. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ដែលបានបង្ហាញដូចខាងក្រោម៖

(ក). $y=\dfrac{x^2}{1-x}$ គណនា $y^{(8)}$ ។

(ខ). $y=x^2e^{2x}$ គណនា $y^{(20)}$ ។

(គ). $y=x\ln x$ គណនា $y^{(5)}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>៖ គណនាដេរីវេ

(ក). $y=\dfrac{x^2}{1-x}$

គេអាចសរសេរ $y=x^2\dfrac{1}{1-x}$ រាង $y=uv$

តាង $v=x^2 \Rightarrow v'=2x$

$$u=\frac{1}{1-x}\Rightarrow u'=-\frac{(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1!}{(1-x)^2}$$

យើងបាន

$v=x^2$ $\qquad u=\dfrac{1}{1-x}$

$v'=2x$ $\qquad u'=\dfrac{1!}{(1-x)^2}$

$v''=2$ $\qquad u'=-\dfrac{2(1-x)'(1-x)}{(1-x)^4}=\dfrac{2!}{(1-x)^3}$

$v''' = 0 \qquad\qquad u' = \dfrac{3!}{(1-x)^4}$

… … … … … … … … … … … … … … … …

$v^{(n)} = 0 \qquad\qquad u^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

តាមរូបមន្ត $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v'' + \cdots + uv^n$

យក $n = 8$ គេបាន៖

$$y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9}x^2 + 16x\frac{7!}{(1-x)^8} + 56\frac{6!}{(1-x)^7}$$

ដូច្នេះ $\boxed{y^{(8)} = \dfrac{8!}{(1-x)^9}x^2 + 16x\dfrac{7!}{(1-x)^8} + 56\dfrac{6!}{(1-x)^7}}$

(ខ). $y = x^2e^{2x}$ គណនា $y^{(20)}$

តាង $v = x^2 \qquad u = e^{2x}$

$v' = 2x \qquad u' = 2e^{2x}$

$v'' = 2 \qquad u'' = 2^2e^{2x}$

$v''' = 0 \qquad u''' = 2^3e^{2x}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$v^{(n)} = 0 \qquad u^{(n)} = 2^ne^{2x}$

តាមរូបមន្ត $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v'' + \cdots + uv^n$

$\Rightarrow y^{(20)} = 2^{20}e^{2x}x^2 + n2^{20}e^{2x}x + n(n-1)2^{18}e^{2x}$

លំហាត់ទី០៤. គណនាដេរីវេ y'_x , y''_{x^2} នៃអនុគមន៍មានរាងជាប៉ារ៉ាម៉ែត

(1). $x = 2t - t^2 \quad , \quad y = 3t - t^3$

(2). $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

(3). $x = f'(t) \quad , \quad y = tf'(t) - f(t)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>៖

(1). $x = 2t - t^2 \quad , \quad y = 3t - t^3$

$$x'_t = 2 - 2t \quad , \quad y'_t = 3 - 3t^2$$

$$x''_{t^2} = -2 \quad , \quad y''_{t^2} = -6t$$

យើងបាន $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \dfrac{3}{2}(1 + t)$

$$y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{y''_{t^2}x'_t - x''_{t^2}y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{-12t(1-t) + 6(1-t^2)}{[2(1-t)]^3}$$

$$= \frac{3}{4(1-t)}$$

ដូច្នេះ $y'_x = \dfrac{3}{2}(1+t)$ និង $y''_{x^2} = \dfrac{3}{4(1-t)}$

(2). $x = a(t - \sin t) \quad , \quad y = a(1 - \cos t)$

$$x'_t = a(1 - \cos t) \quad , \quad y'_t = a\sin t$$

$$x''_{t^2} = a\sin t \quad , \quad y''_{t^2} = a\cos t$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$y''_{x^2} = \frac{y''_{t^2}x'_t - x''_{t^2}y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{a^2\cos t\,(1-\cos t) - a^2\sin^2 t}{a^3(1-\cos t)^3}$$

$$= \frac{\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t}{a(1-\cos t)^3} = \frac{\cos t - 1}{a(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

ដូច្នេះ $y'_x = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ និង $y''_{x^2} = -\dfrac{1}{a(1-\cos t)^2}$

(3). $x = f'(t) \quad , \quad y = tf'(t) - f(t)$

$$x'_t = f''(t) \; , \quad y''_t = f'(t) + tf''(t) - f'(t) = tf''(t)$$

$$x''_{t^2} = f'''(t) \; , \quad y''_{t^2} = f''(t) + tf'''(t)$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{tf''(t)}{f''(t)} = t$$

$$y'_{x^2} = \frac{y''_{t^2}x'_t - x''_{t^2}y'_t}{(x'_t)^3} = \frac{\big(f''(t) + tf'''(t)\big)f''(t) - f'''(t)tf'''(t)}{[f''(t)]^3}$$

$$= \frac{f''(t) + tf'''(t) - tf'''(t)}{[f''(t)]^2} = \frac{1}{f''(t)}$$

ដូច្នេះ $y'_x = t$ និង $y''_{x^2} = \dfrac{1}{f''(t)}$

លំហាត់ទី០៥. គណនា $y^{(n)}$ នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

(1). $y = \sin(3x+2)$; (2). $y = \cos(2x+3)$

ដំណោះស្រាយ៖

(1). $y = \sin(3x+2)$

$$y' = (3x+2)'\cos(3x+2) = 3\cos(3x+2) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + (3x+2)\right)$$

$$y'' = 3\left[\frac{\pi}{2} + (3x+2)\right]'\cos\left[\frac{\pi}{2} + (3x+2)\right] = 3^2\sin\left[\frac{2\pi}{2} + (3x+2)\right]$$

$$y''' = 3^3\sin\left[\frac{3\pi}{2} + (3x+2)\right]$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = 3^n\sin\left[\frac{n\pi}{2} + (3x+2)\right]$$

យើងនឹងស្រាយឲ្យពិតដល់ $n+1$ គឺ

$$y^{(n+1)} = 3^{n+1}\sin\left[\frac{(n+1)\pi}{2} + (3x+2)\right]$$

យើងមាន $y^{(n)} = 3^n\sin\left[\frac{n\pi}{2} + (3x+2)\right]$

$$\Rightarrow \left[y^{(n)}\right]' = 3^n\left[\frac{n\pi}{2} + (3x+2)\right]'\cos\left[\frac{n\pi}{2} + (3x+2)\right]$$

$$y^{(n+1)} = 3^{n+1}\sin\left[\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2} + (3x+2)\right]$$

$$= 3^{n+1}\sin\left(\frac{(1+n)\pi}{2} + (3x+2)\right) \text{ ពិត}$$

ដូច្នេះ $y^{(n)} = 3^n\sin\left[\frac{n\pi}{2} + (3x+2)\right]$

(២). $y = \cos(2x+3)$

$$y' = -(2x+3)\sin(2x+3) = 2\cos\left[\frac{\pi}{2} + (2x+3)\right]$$

$$y'' = -2\left[\frac{\pi}{2} + (2x+3)\right]'\sin\left[\frac{\pi}{2} + (2x+3)\right] = 2^2\cos\left[\frac{2\pi}{2} + (2x+3)\right]$$

$$y''' = 2^3 cos\left[\frac{3\pi}{2} + (2x+3)\right]$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = 2^n\cos\left[\frac{n\pi}{2} + (2x+3)\right]$$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតរហូតដល់ $n+1$ គឺ

$$y^{(n+1)} = 2^{n+1}\cos\left[\frac{n\pi}{2} + (2x+3)\right]$$

យើងមាន $y^{(n)} = 2^n\cos\left[\frac{n\pi}{2} + (2x+3)\right]$

$$\left[y^{(n)}\right]' = -2^n\sin\left[\frac{n\pi}{2} + (2x+3)\right] = 2^n\cos\left[\frac{(n+1)\pi}{2} + (2x+3)\right]$$ ពិត

ដូច្នេះ $\boxed{y^{(n)} = 2^n\cos\left[\frac{n\pi}{2} + (2x+3)\right]}$

លំហាត់ទី០៦៖ សិក្សាភាពជាប់ និងភាពមានដេរីវេត្រង់ 0 និង 1 នៃអនុគមន៍ នីមួយៗ ដែលកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដូចខាងក្រោម៖

i. $f : x \longmapsto (x-1)|x^2 - x|$

ii. $f : x \longmapsto x|x - x^2|$

ដំណោះស្រាយ៖ សិក្សាភាពជាប់ និងភាពមានដេរីវេត្រង់ 0 និង 1

i. $f : x \longmapsto (x-1)|x^2 - x|$

ដោយ $x^2 - x = 0$ មានឫស $x = 0$ និង $x = 1$

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	$+$	$-$	$+$
$\lvert x^2 - x\rvert$	$(x^2 - x)$	$-(x^2 - x)$	$(x^2 - x)$

នោះ $f(x) = \begin{cases} (x-1)(x^2-x) & \text{បើ } 0 \geq x \geq 1 \\ -(x-1)(x^2-x) & \text{បើ } 0 < x < 1 \end{cases}$

$f(0) = 0$, $f(1) = 0$

- ត្រង់ $x_0 = 0$

  - ភាពជាប់

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[-(x-1)(x^2-x)]$$
$$= \lim_{x\to 0^+}[-x(x-1)^2] = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}[(x-1)(x^2-x)]$$
$$= \lim_{x\to 0^-}[x(x-1)^2] = 0$$

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$

នោះគេទាញបាន $\boxed{\text{អនុគមន៍ } f \text{ ជាប់ត្រង់ } 0 \text{ ។}}$

  - ភាពមានដេរីវេ

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-(x-1)(x^2-x)-0}{x-0}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x(x-1)^2}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}[-(x-1)^2] = -1$$
$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)(x^2-x)-0}{x-x_0}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-1)^2}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}(x-1)^2 = 1$$

ដោយ $f'(0^+) \neq f'(0^-)$

នោះ គេទាញបាន $\boxed{\text{អនុគមន៍ } f \text{ គ្មានដេរីវេត្រង់ } x_0 = 0 \text{ ទេ ។}}$

- ត្រង់ $x_0 = 1$

  - ភាពជាប់

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}[(x-1)(x^2-x)] = 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}[-(x-1)(x^2-x)] = 0$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0$

នោះគេទាញបាន $\boxed{\text{អនុគមន៍ } f \text{ ជាប់ត្រង់ } x_0 = 1 \text{ ។}}$

  - ភាពមានដេរីវេ

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2-x)-0}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+}(x^2-x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x^2-x)-0}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-}[-(x^2-x)] = 0 \end{aligned}$$

ដោយ $f'(1^+) = f'(1^-)$ នាំឲ្យ $\boxed{\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានដេរីវេត្រង់ } 1 \text{ ។}}$

ii. $f : x \mapsto x|x - x^2|$

ដោយ $x - x^2 = 0$ មានឫស $x = 0$ ឬ $x = 1$

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$x-x^2$	$-$	$+$	$-$
$\lvert x-x^2\rvert$	$-(x-x^2)$	$x-x^2$	$-(x-x^2)$

នោះ $f(x)=\begin{cases}-x(x-x^2) & \text{បើ } x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\\ x(x-x^2) & \text{បើ } x\in[0,1]\end{cases}$

$f(0)=0\ ,f(1)=0$

- ត្រង់ $x_0=0$

  - ភាពជាប់

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}[x(x-x^2)]=0$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}[-x(x-x^2)]=0$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)=0$

នោះគេទាញបាន $\boxed{f \text{ ជាប់ត្រង់ } x_0=0 \text{ ។}}$

  - ភាពមានដេរីវេ

$$f'(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-x(x-x^2)-0}{x}=0$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x(x-x^2)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0^-}[-(x-x^2)]=0$$

ដោយ $f'(o^-)=f'(0^+)$

គេទាញបាន អនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $x_0=0$ ។

- ត្រង់ $x_0 = 1$

  - ភាពជាប់

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} [-x(x - x^2)] = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} [-x(x - x^2)] = 0$$

ដោយ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 0$

គេទាញបាន អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x_0 = 1$

  - ភាពមានដេរីវេ

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-x(x - x^2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2(x - 1)}{x - 1} = 1$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x(x - x^2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2(x - 1)}{x - 1}$$

$$= -1$$

ដោយ $f'(1^+) \neq f'(1^-)$

គេទាញបាន $\boxed{\text{អនុគមន៍ } f \text{ គ្មានដេរីវេត្រង់ } x_0 = 1 \text{ ទេ។}}$

លំហាត់ទី០៧៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

i. $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$

ii. $f(x) = (2x - 1)^5$

iii. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

iv. $f(x) = x(x + \sqrt{1 + x^2}$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

i. $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$

$$f'(x) = 9x^2 - 4$$

ii. $f(x) = (2x - 1)^5$

$$f'(x) = 5(2x - 1)'(2x - 1)^4$$

$$= 10(2x - 1)^4$$

iii. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

$$f'(x) = \frac{(1 + x^2)'}{2\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

iv. $f(x) = x\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = x^2 + x\sqrt{1 + x^2}$

$$f'(x) = 2x + \left(\sqrt{1 + x^2} + x\left(\frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\right)\right)$$

$$= 2x + \left(\sqrt{1 + x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$= \frac{2x\sqrt{1 + x^2} + (1 + x^2) + x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{2x\sqrt{1 + x^2} + 2x^2 + 1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1+x^2}+2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$$

លំហាត់ទី០៨៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $y = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ ខ. $y = \frac{1}{\sqrt{5x^3+2}}$ គ. $y = \left(\frac{x+2}{2-x}\right)^2$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាដេរីវេ

ក. $y = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} = (4x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

តាមរូបមន្ត $(u^m)' = mu'u^{m-1}$

យើងបាន $y' = -\frac{1}{2}(4x^2+1)'(4x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$

$$= -4x(4x^2+1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{4x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$$

ដូចនេះ៖ $y' = -\frac{4x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$

ខ. $y = \frac{1}{\sqrt{5x^3+2}}$

យើងអាចសរសេរ $y = (5x^3+2)^{-\frac{1}{2}}$

យើងបាន $y' = -\frac{1}{2}(5x^3+2)'(5x^3+2)^{-\frac{3}{2}}$

$$= -\frac{15x^2}{2\sqrt{(5x^3+2)^3}}$$

ដូចនេះ៖ $y' = -\frac{15x^2}{2\sqrt{(5x^3+2)^3}}$

គ. $y = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^3$

យើងបាន $y' = 3\left(\frac{x+2}{x-2}\right)'\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$

$$= 3\left(\frac{(2-x)'(x+2)-(x+2)'(2-x)}{(2-x)^2}\right)\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^2$$

$$= 3\left(-\frac{4}{(2-x)^2}\right)\left(\frac{x+2}{2-x}\right)^2$$

$$= -\frac{12(x+2)^2}{(2-x)^4}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = -\frac{12(x+2)^2}{(2-x)^4}}$

លំហាត់ទី០៩៖ រក y' នៃអនុគមន៍ នៃ x និង y

i. $x = \tan y$

ii. $x = \sin y$

iii. $xy + \sin y = 0$

iv. $x + \sin y = xy$

ដំណោះស្រាយ៖

i. $x = \tan y$

$x' = (\tan y)'$

$1 = y'(1 + \tan^2 y)$

$$y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y}}$$

ii. $x = \sin y$

$x' = (\sin y)'$

$1 = y' \cos y$

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{\cos y}}$$

iii. $xy + \sin y = 0$

$(xy)' + (\sin y)' = 0$

$x'y + y'x + y'\cos y = 0$

$y + y'x + y'\cos y = 0$

$y'(x + \cos y) = -y$

$y' = -\dfrac{y}{x + \cos y}$

$$\boxed{y' = -\frac{y}{x + \cos y}}$$

iv. $x + \sin y = xy$

$x' + (\sin y)' = (xy)'$

$1 + y'\cos y = x'y + y'x$

$y'\cos y - y'x = x'y - 1$

$y'(\cos y - x) = y - 1$

$y' = \dfrac{y-1}{\cos y - x}$

$$\boxed{y' = \frac{y-1}{\cos y - x}}$$

លំហាត់ទី១០៖

ក. គេឲ្យអនុគមន៍

$y = f(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2x^3}{3} + x$ ។ចូរបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ ។

ខ. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 3$ ។

ចូរបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ក. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$

យើងមាន $y = f(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2x^3}{3} + x$

$$y' = f'(x) = \frac{1}{5}(x^5)' + \frac{2}{3}(x^3)' + x'$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2 > 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ ។

ខ.បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\mathbb{R}$

យើងមាន $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 3$

$$f'(x) = -x^2 - 4x - 5$$

$$= -(x^2 + 4x + 5) = -(x^2 + 4x + 4 + 1)$$

$$= -[(x+2)^2 + 1] < 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ចុះលើ $\mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី១១៖ តាមរូបមន្ត ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^n$ នោះ

$f'(x) = nx^{n-1}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តដោយប្រើ

i. អនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ii. ទ្វីស្ដីបទទ្វេធា

ដំណោះស្រាយ៖ ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តដោយប្រើ

i. អនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ចំពោះ $n = 1$, $f(x) = x$ នោះ $f'(x) = 1 . x^{1-1} = 1$ ពិត

ឧបមាថា $n = k$ ពិត

$f(x) = x^k$ នោះ $f'(x) = kx^{k-1}$

តាមនិយមន័យយើងបាន៖

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} = kx^{k-1}$$

យើងនឹងស្រាយថាពិតរហូតដល់ $n = k + 1$ យើងបាន

$$f'(x) = x^{k+1} \quad \text{នោះ} \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{k+1} - x^{k+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x+h)^k - x^k x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x+h)^k - x^k h - x^k k + x^k h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)(x+h)^k - (x+h)x^k + x^k h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{(x+h)((x+h)^k - x^k)}{h} \right) + \lim_{h\to 0} x^k$$

$$= xkx^{k-1} + x^k = kx^k + x^k = (k+1)x^k \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{f(x) = x^n \text{ នោះ } f'(x) = nx^{n-1} \text{ ។}}$

ii. ស្រាយតាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

គេមាន $f(x) = x^n$

តាមនិយមន័យ៖ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា៖

$$(x+h)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} h + C_n^2 x^{n-2} h^2 + \cdots + C_n^n h^n$$

យើងបាន $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{C_n^1 x^{n-1} h + C_n^2 x^{n-2} h^2 + \cdots + C_n^n h^n}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}(C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}h + \cdots + C_n^n h^{n-1})$$

$$= nx^{n-1}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = nx^{n-1}}$ ។

លំហាត់ទី១២ ៖ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x) = \ln x$ ដែល $x \in (0,+\infty)$ ។

1) បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x \in [9,10]$ គេបាន $\frac{1}{10} \le f'(x) \le \frac{1}{9}$ ។

2) ដោយអនុគមន៍វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ ចំពោះគ្រប់ $x \in [9,10]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{10} \le \ln\left(1+\frac{1}{9}\right) \le \frac{1}{9}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

1) បង្ហាញថា $\frac{1}{10} \le f'(x) \le \frac{1}{9}$

គេមាន $f(x) = \ln x$ នោះ $f'(x) = \frac{1}{x}$

ចំពោះគ្រប់ $x \in [9,10]$ យើងបាន $9 \le x \le 10$

$$\frac{1}{9} \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{10}$$

ដូចនេះ $\forall x \in [9,10]$, $\frac{1}{10} \le f'(x) \le \frac{1}{9}$ ។

2) បង្ហាញថា $\frac{1}{10} \le \ln\left(1+\frac{1}{9}\right) \le \frac{1}{9}$

តាមរូបមន្តវិសមភាពកំណើនមានកំណត់

$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)\ , \qquad b > a$$

តាមសម្មតិកម្មខាងលើ $\frac{1}{10} \leq f'(x) \leq \frac{1}{9}$

នាំឲ្យ $m = \frac{1}{10}$, $M = \frac{1}{9}$

ដោយ $x \in [9,10]$ យក $a = 9$, $b = 10$

យើងបាន $\frac{1}{10} \leq \ln 10 - \ln 9 \leq \frac{1}{9}$

$$\frac{1}{10} \leq \ln\frac{10}{9} \leq \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{10} \leq \ln\frac{9+1}{9} \leq \frac{1}{9}$$

$\frac{1}{10} \leq \ln\left(1+\frac{1}{9}\right) \leq \frac{1}{9}$ ពិត

ដូច្នេះ $\boxed{\frac{1}{10} < \ln\left(1+\frac{1}{9}\right) \leq \frac{1}{9}}$

លំហាត់ទី១៣៖ គេឲ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់លើ $]0,+\infty[$ ដោយ

$f(x) = \ln x$ ។

1) បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x \in [n-1,n]$ គេបាន៖

$$\frac{1}{n} \leq f'(x) \leq \frac{1}{n-1} \ ,(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

2) អនុវត្តន៍វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ទៅ និងអនុគមន៍f

លើចន្លោះ $[n-1,n]$ គេបាន $\frac{1}{n} \leq \ln\frac{n}{n-1} \leq \frac{1}{n-1}$ ។

ទាញបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \leq \ln x \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ៖</u>

1) បង្ហាញថា $x \in [n-1,n]$ $\frac{1}{n} \leq f'(x) \leq \frac{1}{n-1}$

គេមាន $f(x) = \ln x$

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

ដោយ $x\in[n-1,n]$, $n-1\le x\le n$

$$\frac{1}{n-1}\ge\frac{1}{x}\ge\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n}\le f'(x)\le\frac{1}{n-1}$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ } \frac{1}{n}\le f'(x)\le\frac{1}{n-1}}$$

2) <u>អនុវត្តវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ទៅលើអនុគមន៍</u>

រូបមន្ត ៖ $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$, $a>b$

នោះ $m(b-a)=\frac{1}{n}$, $M(b-a)=\frac{1}{n-1}$

យើងបាន $\frac{1}{n}\le \ln n-\ln(n-1)\le\frac{1}{n-1}$

$$\frac{1}{n}\le \ln\frac{n}{n-1}\le\frac{1}{n-1}$$

$$\boxed{\text{ដូចនេះ } x\in[n-1\,,n]\ ,\frac{1}{n}\le \ln\frac{n}{n-1}\le\frac{1}{n-1}}$$

<u>ទាញបញ្ជាក់ថា៖</u>

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\le \ln x\le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

យើងមាន $\frac{1}{k}\le \ln k-\ln(k-1)\le\frac{1}{k-1}$

$$(+)\begin{cases} k=2\ :\ \frac{1}{2}\le \ln 2-\ln 1\le 1\\ k=3\ :\ \frac{1}{3}\le \ln 3-\ln 2\le\frac{1}{2}\\ \quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ k=n\ :\frac{1}{n}\le \ln n-\ln(n-1)\le\frac{1}{n-1}\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\le \ln n\le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leq \ln n\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$

<u>លំហាត់ទី១៤</u>៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

យើងមាន $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}$ ចំពោះ $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>៖ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

យើងមាន $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{x}{4}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{4}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{x}{4}}{2}}$$

$$=\sqrt{\cos^2\frac{x}{8}}=\cos\frac{x}{8}$$

នាំឲ្យ $f'(x) = -\left(\frac{x}{8}\right)' \sin\frac{x}{8} = -\frac{1}{8}\sin\frac{x}{8}$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = -\frac{1}{8}\sin\frac{x}{8}}$

លំហាត់ទី១៥៖

1) គណនាដេរីវេទី ៥ នៃអនុគមន៍ពហុធា $x \mapsto x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2$ ។

2) កំណត់ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $x \mapsto x^n$; $(n \in \mathbb{N}^*)$

ដំណោះស្រាយ៖

1) គណនាដេរីវេទី 5

តាង $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 2$

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 6x$$

$$f''(x) = 20x^3 - 24x^2 + 6$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 48x$$

$$f^{(4)}(x) = 120x - 48$$

$$f^{(5)}(x) = 120$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(5)}(x) = 120}$ ។

2) កំណត់ដេរីវេទី n

តាង $g(x) = x^n$

$$g'(x) = nx^{n-1}$$

$$g''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$g'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

… … …

$$g^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(2)(1) = n!$$

ដូច្នេះ $g^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(2)(1) = n!$

"អតីតកាល រៀបបាននឹងទឹកហូរមិនត្រឡប់"

ជំពូក ៤

អនុគន៍លោការីត និងអិុចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1. អនុគមន៍លោការីតនេពែ

1.1. និយមន័យ

$G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ដែលយកតម្លៃ 0 ត្រង់ $x = x_0$ ។

ដែលហៅថា អនុគមន៍លោការីតនេពែ (ឬអនុគមន៍លោការីតគោល e) តាងដោយ

ln គឺជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $\frac{1}{x}$ ដែល $x > 0$ ដោយយកតម្លៃ 0 ពេល $x = 1$ ។

យើងបាន $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \ ,\forall x > 0$

1.2. លក្ខណៈ

(ក). បើ $\forall a, b > 0$ នោះ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ។

(ខ). $\ln\frac{1}{a} = -\ln a \ \ ,a > 0$

(គ). $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \ \ ,a\,,b > 0$

(ឃ). បើ $a_1\,,a_2\,,\dots,a_n > 0$ នោះ $\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n)$
$= \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n \quad (1)$

(ង). ទាញចេញពី (1) ប្រសិនបើ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$
នោះ $\ln a^n = n \ln a \ \ ,n \in IN$

(ច). $\ln a^{-n} = -\ln a^n = -n \ln a$

(ឆ). $\forall \alpha \in \mathbb{Z} \ ,\ln a^\alpha = \alpha \ln a$

(ជ). $\forall n \in \mathbb{Q} \ ,\ln a^n = n \ln a$

$+$ បើ $n \in \mathbb{N}^* \ ,\ln a = \ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = n \ln a^{\frac{1}{n}}$

+បើ $\forall b \in \mathbb{Q}$ នោះ $b = \frac{m}{n}$,($m \in \mathbb{Z}\,;n \in \mathbb{N}^*$)

$\ln a^b = \ln a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\ln a = b\ln a$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់៖</u>

(ក). បើ $\forall a, b > 0$ នោះ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

អនុគមន៍ $f(x) = \ln(ax)$,$a > 0$,$x > 0$

យើងបាន $f'(x) = \frac{(ax)'}{ax} = \frac{1}{x}$

$\exists C \in IR$,$f(x) = \ln x + C$

ដោយ $f(x) = \ln(ax)$

នាំឲ្យ $\ln(ax) = \ln(x) + C$

ចំពោះតម្លៃ $x = 1 \Longrightarrow \ln a = \ln 1 + C \Longrightarrow \ln a = C$

យើងបាន $\ln(ax) = \ln x + \ln a$

<u>ដូចនេះ</u> បើ $\forall a, b > 0$ នោះ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ។

1.3. សិក្សាអនុគមន៍លោការីតនេពែ

<u>រូបមន្តទូទៅទាក់ទងនឹងលីមីត៖</u>

(ក). $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

(ខ). $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

(គ). $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ ឬ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

(ឃ). $a \in \mathbb{Q}_+^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ ឬ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\ln x} = +\infty$

(ង). $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$ $\big($ស្រាយតាមនិយមន័យដេរីវេ$\big)$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់៖</u>

ស្រាយថា $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\forall x\geq 1\ ,\forall t\in[1,x]\ ,0\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\Leftrightarrow\quad 0\leq\int_1^x\frac{dt}{t}\leq\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$0\leq\ln x\leq 2\left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$0\leq\frac{\ln x}{x}\leq\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}$$

$$0\leq\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\leq\lim_{x\to+\infty}2\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$0\leq\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\leq 0$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ។

<u>ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ដោយឡូការីតនេពែ</u>

$$\boxed{(\ln|x|)'=\frac{1}{x}\quad\Leftrightarrow\quad\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C}$$

<u>សម្រាយបញ្ជាក់៖</u>

$$y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x & \text{បើ } x>0\\ \ln(-x) & \text{បើ } x<0\end{cases}\Longrightarrow y'=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{បើ } x>0\\ -\frac{1}{-x}=\frac{1}{x} & \text{បើ } x<0\end{cases}$$

$$\boxed{\text{ជាទូទៅ៖ }(\ln|u(x)|)'=\frac{u'(x)}{u(x)}\quad\Leftrightarrow\quad\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln|u(x)|+C}$$

<u>សិក្សាអនុគមន៍៖ $y=\ln x$</u>

ក.អនុគមន៍ $y = \ln x$ កំណត់លើចន្លោះ $]0, +\infty[$, ហើយជាប់លើ

$]0, +\infty[$,និងមានដេរីវេ $y' = \frac{1}{x} > 0$ ។

យើងទាញបាន $y = \ln x$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $]0, +\infty[$ ។

ខ.គណនាលីមីត

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

គ.អថេរភាព និងខ្សែកោង

តាមការសិក្សាខាងលើ យើងបានតារាងអថេរភាពនៃ $y = \ln x$ ដូច

ខាងក្រោម៖

x	0	1	$+\infty$
y'	$+$		$+$
$y = \ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

តាមតារាងអថេរភាព គេទាញបានសញ្ញាដូចខាងក្រោម៖

+ បើ $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$

+ បើ $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$

+ បើ $x = e \backsimeq 2.7132 \Rightarrow \ln x = \ln e = 1$

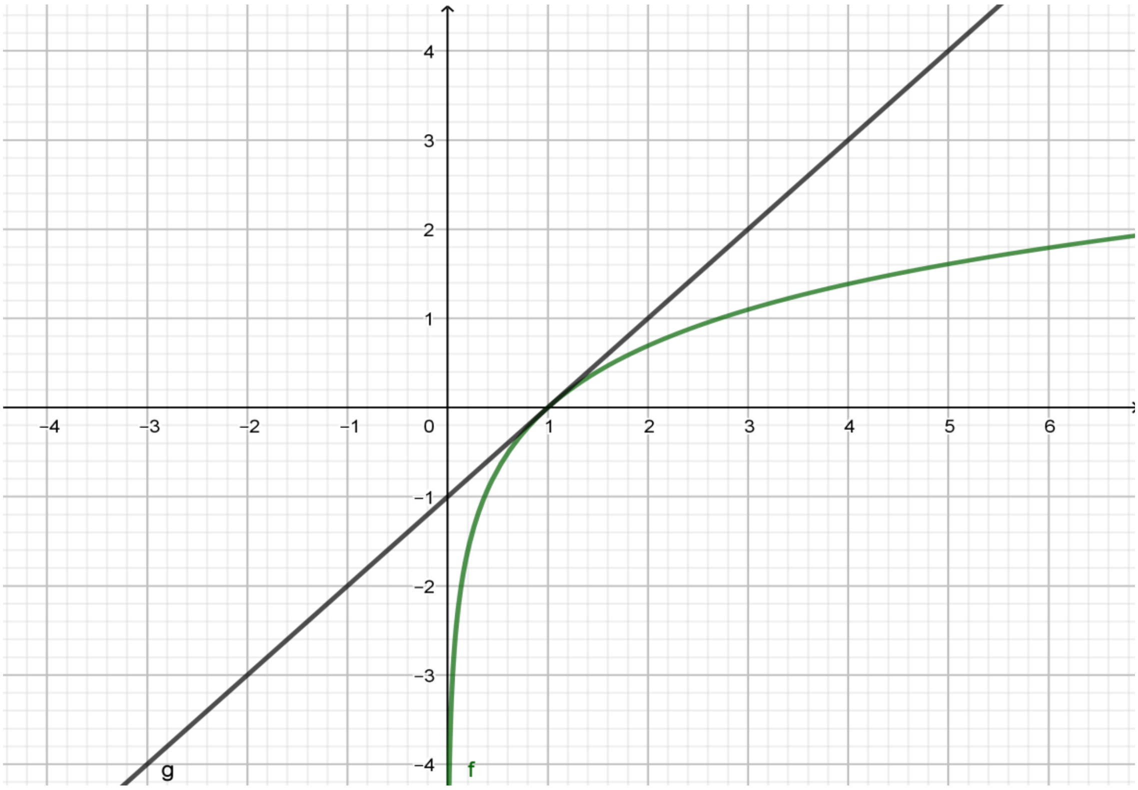
ដោយ $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1 \Rightarrow y = \ln x$

ដោយ $f'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1 \Rightarrow y = \ln x$

ប៉ះនឹងបន្ទាត់ប៉ះ $y = x - 1$

ហើយ $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow y = \ln x$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ នាំឲ្យខ្សែកោងមានមែកប៉ារ៉ាបូល បែទិស ទៅខាង (ox) ។



1.4. អនុគមន៍លោការីតគោលទូទៅ

1.4.1. និយមន័យ

- បើ $a > 0 , a \neq 1$ នោះគេបាន

  $$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \ , \qquad x > 0$$

  តាមនិយមន័យខាងលើយើងបាន៖

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a} \begin{cases} > 0 \,, a > 1 \\ < 0 \,,\; 0 < a < 1 \end{cases}$$

ដូច្នេះ យើងទាញបាន៖

- $y = \log_a x$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $]0, +\infty[$ កាលណា $a > 1$ ។
- $y = \log_a x$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $]0\,, +\infty[$ កាលណា $0 < a < 1$ ។

1.4.2. **លក្ខណៈ**

(ក). $\forall x\,, y > 0\,, \log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(ខ). $\forall x > 0\,, \forall \alpha \in \mathbb{Q}\;, \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

(គ). $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty \;, a > 1 \\ -\infty \;, 0 < a < 1 \end{cases}$

(ឃ). $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty \,, & a > 1 \\ +\infty \,, & 0 < a < 1 \end{cases}$

(ង). $\log_a x = \log_a b \times \log_b x$

ឧទាហរណ៍៖ រក x ចេញពី

$$\log_5 x + \log_5 x^2 + \log_5 x^3 + \cdots + \log_5 x^n = 2017$$

ចម្លើយ៖

$\log_5 x + \log_5 x^2 + \log_5 x^3 + \cdots + \log_5 x^n = 2017$

$\log_5 x + 2\log_5 x + 3\log_5 x + \cdots + n\log_5 x = 2017$

$\log_5 x\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 2017$

$\left(\frac{(1+n)n}{2}\right)\log_5 x = 2017$

$\log_5 x = \frac{4034}{n(1+n)} \Leftrightarrow \log_5 x = \log_5 5^{\frac{4034}{n(n+1)}}$

$$\Longrightarrow x = 5^{\frac{4034}{n(n+1)}}$$

ដូចនេះ $x = 5^{\frac{4034}{n(n+1)}}$ ។

2. អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

2.1.1. និយមន័យ

ដោយអនុគមន៍ $y = \ln x$ មានន័យ ជាប់ និងកើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $]0,+\infty[$ នាំឲ្យវាមានអនុគមន៍ច្រាស ហៅថា អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e តាងដោយ $\exp(x) = e^x$ កំណត់ដោយ៖

$$\left.\begin{matrix} x = \ln y \\ y > 0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} y = \exp(x) = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right.$$

តាមនិយមន័យខាងលើនេះ គេបានលក្ខណៈវិបាកដូចខាងក្រោម៖

- $\exp(ln\, y) = y \;, \forall y > 0$
- $\ln(\exp(x)) = x$
- $\exp(0) = 1$
- $\exp(1) = e$

2.1.2. លក្ខណៈគ្រឹះ

- $\forall x_1 , x_2 \in \mathbb{R} , \exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \times \exp(x_2)$

  ឬ $\exp(x_1 - x_2) = \dfrac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)}$
- $[\exp(x)]^n = (e^x)^n = e^{nx} = \exp(nx)$
- $[\exp(x)]^n = \exp(nx) \quad , n \in \mathbb{N}$
- $[\exp(x)]^\alpha = \exp(\alpha x) \quad , n \in \mathbb{Q}$

2.1.3. ដេរីវេ

រូបមន្ត៖ $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$

- សម្រាយបញ្ជាក់ ដោយប្រើនិយមន័យ៖

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x.\ln a$$ ពិត

ចំណាំ៖ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

2.1.4. **អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោលទូទៅ**

2.1.4.1. **និយមន័យ**

$$\left.\begin{matrix} a>0\,,a\neq 1\,,y=a^x \\ x\in\mathbb{R}\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x=\log_a y \\ y>0\end{matrix}\right.$$

ដូច្នេះ គេបាន $a^{\log_a y} = y$ ឬ $\log_a a^x = x$,$\forall x\in\mathbb{R}$ ។

2.1.4.2. **ទំនាក់ទំនងគ្រឹះ**

$+\ a^x = e^{x\ln a}$

ព្រោះ បើតាង $y = a^x \Rightarrow x = \log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}$

$$\Rightarrow \ln y = x\ln a = \ln e^{x\ln a}$$

$\Leftrightarrow y = e^{x\ln a} \;\; \Rightarrow \;\; a^x = e^{x\ln a}$; $(y = a^x)$

2.1.4.3. **លក្ខណៈវិបាក**

(1). $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$

(2). $a^{x_1-x_2} = \dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$; $\left(a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}\right)$

(3). $a^{\alpha x} = (a^x)^\alpha$,$\forall x\in\mathbb{R}\,,\alpha\in\mathbb{R}$

លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ

****

លំហាត់ទី០១៖ យើងមាន $a>0\,,a\neq 1$ ហើយ $x>0\,,x\neq 1$។ចូរបង្ហាញថា៖

$$\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_{a^2} x}+\cdots+\frac{1}{\log_{a^n} x}=\frac{n(n+1)}{2\log_a x}$$

ដំណោះស្រាយ៖

យើងមាន $\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_{a^2} x}+\cdots+\frac{1}{\log_{a^n} x}=\log_x a+\log_x a^2+\cdots+\log_x a^n$

$$=(1+2+\cdots+n)\log_x a$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\log_x a$$

$$=\frac{n(n+1)}{2\log_a x}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_{a^2} x}+\cdots+\frac{1}{\log_{a^n} x}=\frac{n(n+1)}{2\log_a x}}$

លំហាត់ទី០២៖ ចូរគណនា y' នៃ $y=\log_3\sqrt{\arctan x}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ គណនា y'

យើងមាន $y=\log_3\sqrt{\arctan x}=\frac{1}{2}\log_3(\arctan x)$

តាង $u=\arctan x \quad\Rightarrow\quad u'=\frac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow\quad y'=\frac{u'}{2u\ln 3}=\frac{\frac{1}{1+x^2}}{2\arctan x\ln 3}=\frac{1}{2(\arctan x)(\ln 3)(1+x^2)}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'=\frac{1}{2(\arctan x)(\ln 3)(1+x^2)}}$

លំហាត់ទី០៣៖ ចូរគណនា y' នៃ $y=\ln[\sin(\arcsin x)]$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ គណនា y'

តាង $v=\arcsin x$

$u=\sin(\arcsin x)=\sin v$

យើងមាន $y=\ln[\sin(\arcsin x)]=\ln u$

តែ

$$v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \implies u' = v'\cos v = \frac{\cos(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

យើងបាន $y' = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{\frac{\cos(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin(\arcsin x)} = \dfrac{\cos(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}\sin(\arcsin x)} = \dfrac{\cot(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$

ដូចនេះ $y' = \dfrac{\cot(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$ ។

លំហាត់ទី០៤៖ ចូរសម្រួលកន្សោម៖

$$\log_3 2 . \log_4 3 \ldots \log_{n-1}(n-2) . \log_n(n-1)$$

ដំណោះស្រាយ៖ សម្រួលកន្សោម

យើងមាន $\log_3 2 . \log_4 3 \ldots \log_{n-1}(n-2) . \log_n(n-1)$

$$= \frac{\log 2}{\log 3} \times \frac{\log 3}{\log 4} \times \ldots \times \frac{\log(n-2)}{\log(n-1)} \times \frac{\log(n-1)}{\log n}$$

$$= \frac{\log 2}{\log n} = \log_n 2$$

ដូចនេះ $\log_3 2 . \log_4 3 \ldots \log_{n-1}(n-2) . \log_n(n-1) = \log_n 2$

លំហាត់ទី០៥៖ ចូរសម្រួលកន្សោម

$$(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$$

ដំណោះស្រាយ៖ សម្រួលកន្សោម

យើងមាន $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$

$$= \left(\frac{\log b}{\log a} + \frac{\log a}{\log b} + 2\right)\left(\frac{\log b}{\log a} - \frac{\log b}{\log ab}\right)\left(\frac{\log a}{\log b}\right) - 1$$

$$= \frac{\log^2 b + \log^2 a + 2\log a \log b}{\log a \log b} \times \frac{\log b \log ab - \log a \log b}{\log a \log ab}\left(\frac{\log a}{\log b}\right) - 1$$

$$= \frac{(\log a + \log b)^2}{\log a \log b} \times \frac{\log b\,(\log a + \log b) - \log a \log b}{\log a\,(\log a + \log b)} \times \frac{\log a}{\log b} - 1$$

$$= \frac{(\log a + \log b)^2}{\log a \log b} \times \frac{\log^2 b + \log a \log b - \log a \log b}{\log a\,(\log a + \log b)} \times \frac{\log a}{\log b} - 1$$

$$= \frac{(\log a + \log b)^2}{\log a \log b} \times \frac{\log^2 b}{\log a\,(\log a + \log b)} \times \frac{\log a}{\log b} - 1$$

$$= \frac{\log a + \log b}{\log a} - 1 = \frac{\log b}{\log a} = \log_a b$$

ដូចនេះ $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1 = \log_a b$

<u>លំហាត់ទី០៦</u>៖ គេឲ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន $a\,, b\,, c$ ដែល $c \neq 1$ ។ចូរស្រាយថា

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>៖ សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $a^{\log_c b} = a^{\log_a b \times \frac{1}{\log_a c}}$

$$= \left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{1}{\log_a c}}$$

$$= (b)^{\frac{\log_a a}{\log_a c}} = b^{\log_c a}$$ ពិត

ដូចនេះ $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

<u>លំហាត់ទី០៧</u>៖ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

(ក). $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$

(ខ). $\log_{ab} N = \dfrac{\log_a N \log_b N}{\log_a N + \log_b N}$

(គ). $\log_a N \log_b N + \log_b N \log_c N + \log_c N \log_a N = \dfrac{\log_a N \log_b N}{\log_{abc} N}$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>៖ សម្រាយបញ្ជាក់

(ក). ស្រាយថា $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$

យើងមាន $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N} = \dfrac{\dfrac{1}{\log_N a}}{\dfrac{1}{\log_N ab}}$

$$= \frac{\log_{\mathrm{N}} ab}{\log_N a} = \log_a ab$$

$$= \log_a a + \log_a b = 1 + \log_a b \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\dfrac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$

(ខ). ស្រាយថា $\log_{ab} N = \dfrac{\log_a N \log_b N}{\log_a N + \log_b N}$

យើងមាន $\log_{ab} N = \dfrac{1}{\log_N ab}$

$$= \frac{1}{\log_N a + \log_N b}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\log_a N} + \dfrac{1}{\log_b N}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\log_a N + \log_b N}{\log_a N \log_b N}}$$

$$= \frac{\log_a N \log_b N}{\log_a N + \log_b N} \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\log_{ab} N = \dfrac{\log_a N \log_b N}{\log_a N + \log_b N}$

(គ). ស្រាយថា $\log_a N \log_b N + \log_b N \log_c N + \log_c N \log_a N$

$$= \frac{\log_a N \log_b N \log_c N}{\log_{abc} N}$$

យើងមាន $\log_a N \log_b N + \log_b N \log_c N + \log_c N \log_a N$

$$= \frac{\log N}{\log a} \times \frac{\log N}{\log b} + \frac{\log N}{\log b} \times \frac{\log N}{\log c} + \frac{\log N}{\log c} \times \frac{\log N}{\log a}$$

$$= \frac{\log^2 N}{\log a \log b} + \frac{\log^2 N}{\log b \log c} + \frac{\log^2 N}{\log c \log a}$$

$$= \log^2 N \left(\frac{1}{\log a \log b} + \frac{1}{\log b \log c} + \frac{1}{\log c \log a}\right)$$

$$= \log^2 N \left(\frac{\log c + \log a + \log b}{\log a \log b \log c}\right)$$

$$= \log^2 N \left(\frac{\log abc}{\log a \log b \log c}\right)$$

$$= \frac{\log N}{\log a} \times \frac{\log N}{\log b} \times \frac{\log abc}{\log c} \times \frac{\log N}{\log N}$$

$$= \log_a N \times \log_b N \times \log_c N \times \frac{1}{\log_{abc} N}$$

$$= \frac{\log_a N \times \log_b N \times \log_c N}{\log_{abc} N}$$ ពិត

ដូចនេះ $\log_a N \log_b N + \log_b N \log_c N + \log_c N \log_a N$

$$= \frac{\log_a N \log_b N \log_c N}{\log_{abc} N}$$

លំហាត់ទី០៨៖ បើ $a^2 + b^2 = c^2$; ចូរស្រាយថា៖

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \log_{c-b} a$$

ដំណោះស្រាយ៖ សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = \frac{1}{\log_a(c+b)} + \frac{1}{\log_a(c-b)}$

$$= \frac{\log_{\mathrm{a}}(c-b) + \log_a(c+b)}{\log_a(c+b)\log_a(c-b)}$$

$$= \frac{\log_a(c^2-b^2)}{\log_a(c+b)\log_a(c-b)}$$

$$= \frac{\log_a a^2}{\log_a(c+b)\log_a(c-b)}$$; $c^2 - b^2 = a^2$

$$= \frac{2}{\log_a(c+b)\log_a(c-b)} = 2\log_{c+b} a \log_{c-b} a$$ ពិត

ដូចនេះ $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \log_{c-b} a$

លំហាត់ទី០៩៖ បើ $a_i > 0$; $a_i \neq 1$; $x > 0$; $x \neq 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\log_{a_1 a_2 \ldots . a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \cdots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}$$

ដំណោះស្រាយ៖ សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $\log_{a_1 a_2 \ldots a_n} x = \frac{1}{\log_x(a_1 a_2 \ldots a_n)}$

$$= \frac{1}{\log_x a_1 + \log_x a_2 + \cdots + \log_x a_n}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \cdots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}$$ ពិត

ដូចនេះ $\log_{a_1 a_2 \ldots . a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \cdots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}$

លំហាត់ទី១០៖

គេឲ្យ $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$ ។ បង្ហាញថា $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$ នោះ $f(y) = \log\frac{1+y}{1-y}$

យក $f(x) + f(y) = \log\frac{1+x}{1-x} + \log\frac{1+y}{1-y}$

$$= \log\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right]$$

$$= \log\left(\frac{1+y+x+xy}{1-y-x+xy}\right) \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \log\left(\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}\right)$

$$= \log\left(\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}\right) \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងទាញបាន៖

$f(x)+f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ ពិត

ដូចនេះ $f(x)+f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

លំហាត់ទី១១៖ ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

(1). $\ln(x-1)+\ln(x-3) = 3\ln 2$

(2). $\log_{\sqrt{2}} x \log_2 x \log_{2\sqrt{2}} x \log_4 x = 54$

(3). $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$

ដំណោះស្រាយ៖ ដោះស្រាយសមីការ

(1). $\ln(x-1)+\ln(x-3) = 3\ln 2$

លក្ខខ័ណ្ឌ $\begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$

សមីការអាចសរសេរជា $\ln(x-1)+\ln(x-3) = \ln 2^3$

$\ln[(x-1)(x-3)] = \ln 8$

នោះ $(x-1)(x-3) = 8$

$x^2-4x+3 = 8$ ឬ $x^2-4x-5=0$

$\Rightarrow$ $x_1 = -1$ មិនយក ; $x_2 = 5$ យក

ដូចនេះ សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x = 5$

(2). $\log_{\sqrt{2}} x \log_2 x \log_{2\sqrt{2}} x \log_4 x = 54 \quad (i)$

បើ $x > 0$ សមីការ (i) អាចសរសេរជា៖

$$\log_{2^{\frac{1}{2}}} x\,.\log_2 x\,.\log_{2^{\frac{3}{2}}} x\,.\log_{2^2} x = 54$$

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_2 x\right)(\log_2 x)\left(\frac{1}{\frac{3}{2}}\log_2 x\right)\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) = 54$$

$$\frac{2}{3}\log_2^4 x = 54$$

$$\log_2^4 x = 81 \Longrightarrow \log_2 x = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$$

បើ$\log_2 x = 3 \iff \log_2 x = \log_2 8 \Longrightarrow x = 8$

បើ $\log_2 x = -3 \iff \log_2 x = \log_2 \frac{1}{8} \Longrightarrow x = \frac{1}{8}$

ដូចនេះ សមីការមានឫសពីរគឺ $x_1 = 8\,;\ x_2 = \frac{1}{8}$

លំហាត់ទី១២៖ ចូរដោះស្រាយសមីការ

(ក). $\left(\frac{3}{7}\right)^{2x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$; (ខ). $0.125 \times 4^{2x-8} = \left(\frac{0.25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$

(គ). $9^x + 6^x = 2.4^x$; (ឃ). $\log_3(5 + 4\log_3(x-1)) = 2$

(ច). $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\log(3-x)}$; (ឆ). $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$

(ជ). $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$

ដំណោះស្រាយ៖ ដោះស្រាយសមីការ

(ក). $\left(\frac{3}{7}\right)^{2x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

$$\iff \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-(7x-3)}$$

$\Leftrightarrow \quad 2x-7=-7x+3$

$\Longrightarrow 9x=10 \ \Longrightarrow x=\dfrac{10}{9}$

$\boxed{\text{ដូចនេះ} \ \ x=\dfrac{10}{9}}$

(ខ). $0.125\times 4^{2x-8}=\left(\dfrac{0.25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$

$\Leftrightarrow \quad 2^{-3}\times 2^{4x-16}=\left(\dfrac{2^{-2}}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{-x}$

$\Leftrightarrow 2^{-3+4x-16}=\left(2^{2x}\times 2^{\frac{x}{2}}\right)$

$\Longrightarrow 2^{4x-19}=2^{2x+\frac{x}{2}} \quad \Longrightarrow \quad 2^{4x-19}=2^{\frac{5x}{2}}$

គេបាន $\ 4x-19=\dfrac{5x}{2}$ ឬ $\ 8x-38=5x$

$\Longrightarrow 3x=38 \ \Longrightarrow \ x=\dfrac{38}{3}$

$\boxed{\text{ដូចនេះ} \ x=\dfrac{38}{3}}$

(គ). $\ 9^x+6^x=2.4^x$

$\Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{9}{4}\right)^x+\left(\dfrac{6}{4}\right)^x=2$

$\Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{9}{4}\right)^x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=2$

$\Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=2$

តាង $A=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x, A>0$ យើងបាន៖

$A^2+A-2=0$ តាម $a+b+c=0$

គេទាញបាន $\left[\begin{array}{l}A=\ \ \ 1\\ A=-2 \text{ មិនយក}\end{array}\right.$

+ចំពោះ $\ A=1$

យើងបាន $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0$

$\Rightarrow x = 0$

ដូចនេះ $x = 0$ ។

(ឃ). $\log_3(5 + 4\log_3(x-1)) = 2$

$\log_3(5 + 4\log_3(x-1)) = \log_3 3^2$

$5 + 4\log_3(x-1) = 3^2$

$4\log_3(x-1) = 4$

$\log_3(x-1) = 1$

$\log_3(x-1) = \log_3 3$

$\Leftrightarrow x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$

ដូចនេះ $x = 4$

(ង). $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\log(3-x)}$

លក្ខខណ្ឌ៖ $\begin{cases} 9 - 2^x > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^2 > 2^x \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow x < 2$

$\Leftrightarrow \log_2(9 - 2^x) = \log_2 2^{3-x}$

$9 - 2^x = \frac{2^3}{2^x}$

$\Rightarrow 2^{2x} - 9(2^x) + 8 = 0$

តាម $a + b + c = 0 \Rightarrow 2^x = 1\,, 2^x = 8$

ចំពោះ $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

ចំពោះ $2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$ មិនយក ព្រោះ $x < 2$

ដូចនេះ $x = 0$

(ច). $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$

លក្ខខណ្ឌ៖ $x + 1 > 0$ ឬ $x > -1$

$\Leftrightarrow \log(x+1)^{\log(x+1)} = \log 100(x+1)$

$\Leftrightarrow \log(x+1)\log(x+1) = \log(x+1) + \log 10^2$

$\Leftrightarrow \log^2(x+1) - \log(x+1) - 2 = 0$

តាម $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$\Longrightarrow \log(x+1) = \dfrac{1+3}{2} = 2 \;\; or \;\; \log(x+1) = \dfrac{1-3}{2} = -1$

ចំពោះ $\log(x+1) = 2 \Leftrightarrow \log(x+1) = \log 10^2 \Longrightarrow x = 99$

ចំពោះ $\log(x+1) = -1$ មិនយក

(ជ). $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$

លក្ខខណ្ឌ៖ $x - 1 > 0 \Longrightarrow x > 1$

$\Leftrightarrow 1 + \log_2(x-1) = 2\log_{x-1} 2$

$\Leftrightarrow 1 + \log_2(x-1) = \dfrac{2}{\log_2(x-1)}$

$\Longrightarrow \log_2(x-1) + \log_2^2(x-1) = 2$

ឬ$(\log_2(x-1))^2 + \log_2(x-1) - 2 = 0$

តាម $\Delta = (1)^2 - 4(1(-2\,) = 1 + 8 = 9$

$\Longrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

គេបាន $\log_2(x-1) = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ មិនយក

$\log_2(x-1) = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

ចំពោះ $\log_2(x-1) = 1 \Longrightarrow x = 3$

ដូចនេះ $x = 3$

លំហាត់ទី១៣៖ ចូរដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

$(a).\, 2^{x+2} > \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$; $(b).\, (1.25)^{1-x} < (0.64)^{2(1+\sqrt{x})}$

ដំណោះស្រាយ៖ ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម

$(a).\ 2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$

$\Leftrightarrow 2^{x+2} > 2^{\frac{-2}{x}}$

$\Leftrightarrow x+2 > -\frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2+2x > -2$ ឬ $x^2+2x+2>0$

តាម $\Delta = (2)^2 - 4(1)(2) = 4-8<0$

ដូចនេះ វិសមីការមានឫស x កំណត់គ្រប់ $\mathbb{R}$

$(b).(1.25)^{1-x} < (0.64)^{2\left(1+\sqrt{x}\right)}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5^3}{10^2}\right)^{1-x} < \left(\frac{8}{10}\right)^{4\left(1+\sqrt{x}\right)}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4\left(1+\sqrt{x}\right)}$

$\Leftrightarrow 1-x < -4-4\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x} - x < -5$

$\Leftrightarrow 4x^{\frac{1}{2}} - x + 5 < 0$ ឬ $x - 4x^{\frac{1}{2}} - 5 > 0$

តាម $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-5) = 16+20 = 36 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

យើងបាន $\sqrt{x} = \frac{4-6}{2} = -1$ មិនយក

$\sqrt{x} = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$\Longrightarrow x = 25$

ដូចនេះ $x=25$

លំហាត់ទី១៤៖ ចូរដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការខាងក្រោម៖

(ក). $\begin{cases} 2^{y-x}(x+y)=1 \\ (x+y)^{x-y}=2 \end{cases}$; (ខ). $\begin{cases} \log_3 x+\log_3 y=\log_3 9+\log_3 2 \\ \log_{27}(x+y)=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម

(ក). $\begin{cases} 2^{y-x}(x+y)=1 \quad (i) \\ (x+y)^{x-y}=2 \quad (ii) \end{cases}$

ចំពោះ (i) គេមាន $2^{y-x}(x+y)=1 \Rightarrow x+y=2^{(x-y)}$

យក (i) ជំនួសក្នុង (ii) គេបាន $2^{(x-y)(x-y)}=2 \Leftrightarrow 2^{(x-y)^2}=2$

$\Rightarrow (x-y)^2=1 \Rightarrow x-y=\pm 1$

ចំពោះ $x-y=1$ យើងបាន $2^{-1}(x+y)=1 \Rightarrow x+y=2$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow y=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$

ចំពោះ $x-y=-1$ យើងបាន $2(x+y)=1 \Rightarrow x+y=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ 2x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow 4x=-1 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{4} \Rightarrow y=\dfrac{3}{4}$

ដូចនេះ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \text{ និង } y=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{1}{4} \text{ និង } y=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

ជំពូកទី ៥

អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក និងច្រាស

(Hyperbolic Functions and Inverse Function of Hyperbolic)

1. អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក (Hyperbolic Functions)

1.1. និយមន័យ

អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក ជាអនុគមន៍អនុវត្តន៍ពី $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែលកំណត់ដោយ

$$f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = shx$$

ដែល $y = shx = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ $(Siness\ hyperbolic)$

$$y = chx = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad (cosiness\ hyperbolic)$$

$$y = thx = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (Tangant\ \ hyperbolic)$$

$$y = \coth x = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \quad (Cotangant\ \ Hyperbolic)$$

1.2. រូបមន្ត

$(i).\ ch^{2}(x) - sh^{2}(x) = 1$

ព្រោះ ៖ $\left(\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^{2} - \left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^{2}$

$$= \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} - \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} + \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= e^{-x}(e^{x}) = 1$$

$(ii).\dfrac{1}{ch^{2}(x)} = 1 - th^{2}(x)$

ព្រោះ ៖ $\dfrac{1}{ch^{2}(x)} = \dfrac{ch^{2}(x) - sh^{2}(x)}{ch^{2}(x)} = 1 - th^{2}x(x)$

$$\frac{1}{sh^{2}(x)} = \coth^{2}(x) - 1$$

ព្រោះ $\dfrac{1}{sh^{2}(x)} = \dfrac{ch^{2}(x) - sh^{2}(x)}{sh^{2}(x)} = \coth^{2} x - 1$

$(iii).(1).\ sh(a + b) = sh(a)ch(b) + sh(b).ch(a)$

$(2).\ sh(a-b)=sh(a).ch(b)-sh(b).ch(a)$
$(3).\ ch(a+b)=ch(a).ch(b)+sh(a).sh(b)$
$(4).\ ch(a-b)=ch(a).ch(b)-sh(a).sh(b)$

$$(5).\ th(a+b)=\frac{th(a)+th(b)}{1+th(a).th(b)}$$

$$(6).\ th(a-b)=\frac{th(a)-th(b)}{1-th(a).th(b)}$$

$$(7).\coth(a+b)=\frac{1+\coth(a).\coth(b)}{\coth(a)+\coth(b)}$$

$$(8).\coth(a-b)=\frac{1-\coth(a).\coth(b)}{\coth(a)-\coth(b)}$$

$(iv).sh(2a)=2sh(a).ch(a)$

$$ch(2a)=ch^2a+sh^2a=2ch^2a-1=1+2sh^2a$$

1.3. រូបមន្តលីមីតរាងមិនកំណត់ ដេរីវេ និងអាំងតេក្រាល

(a). រូបមន្តលីមីត

$$(i).\lim_{x\to0}\frac{sh(x)}{x}=1\quad;\qquad(ii).\ \lim_{x\to0}\frac{th(x)}{x}=1$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

$$(i).\lim_{x\to0}\frac{sh(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left[\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right]=1 \text{ ពិត}$$

$$(ii).\lim_{x\to0}\frac{th(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{sh(x)}{x}\left(\frac{1}{ch(x)}\right)=1\ \text{ ពិត}$$

(b).រូបមន្តដេរីវេ

$(i).\ \ y=sh(x)\implies y'=ch(x)\ ;\ (ii).\ y=ch(x)\implies y'=sh(x)$

$$(iii).\ y=th(x)\implies y'=\frac{1}{ch^2(x)}=1-th^2(x)$$

$$(iv).y=\coth x\implies y'=-\frac{1}{sh^2(x)}=1-\coth^2x$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

$(i).\ y=sh(x)\implies y'=ch(x)$

យើងមាន $y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{sh(x+\Delta x)-sh(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{sh(x)ch(\Delta x)+sh(\Delta x)ch(x)-sh(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sh(x)(ch(\Delta x) - 1) + sh(\Delta x)ch(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[sh(x) . \frac{sh^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} + \frac{sh(\Delta x)}{\Delta x} . ch(x) \right] = ch(x)$$

(c).រូបមន្តអាំងតេក្រាលមិនកំនត់

(i). ដោយ $(shx)' = chx \implies \int ch(x)dx = sh(x) + c\, , c \in \mathbb{R}$

(ii). ដោយ $(chx)' = sh(x) \implies \int shxdx = chx + c\, , c \in \mathbb{R}$

(iii). ដោយ $(thx)' = \frac{1}{ch^2x} \Rightarrow \int \frac{dx}{ch^2x} = thx + c\, , c \in \mathbb{R}$

(iv). ដោយ $(\coth x)' = -\frac{1}{sh^2x} \Rightarrow \int \frac{dx}{sh^2x} = -\coth x + c\, , c \in \mathbb{R}$

(v). ដោយ $\int th(x)dx = \int \frac{sh(x)}{ch(x)}dx = \int \frac{d(ch(x))}{ch(x)} = \ln|chx| + c$

(vi). $\int \coth x\, dx = \int \frac{ch(x)}{sh(x)}dx = \int \frac{d(sh(x))}{sh(x)} = \ln|sh(x)| + c$

2. អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកច្រាស

2.1. អនុគមន៍ច្រាសនៃស៊ីនុសអ៊ីពែបូលិក (Inverse function of siness hyperbolic)

2.1.1. និយមន័យ

អនុគមន៍ច្រាសនៃ $y = sh(x)$ គឺជាអនុគមន៍មួយកំណត់ដោយ៖

$f^{-1} \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = argsh(x)$ ""Argument siness hyperbolic ""

យើងអាចសរសេរ ៖ $y = argsh(x) \implies x = sh(x)$ ។

2.1.2. រូបមន្ត

$$\boxed{y = argsh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}$$

<u>ស្រាយ</u>៖

យើងមាន $y = argsh(x) \Rightarrow x = sh(y)$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = e^y - e^{-y} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

$\Longrightarrow\ \Delta' = (x)^2 + 1 > 0\ ,\qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}\ = \left[\begin{array}{l} x + \sqrt{x^2+1} \\ x - \sqrt{x^2+1} \end{array}\right.$$ មិនយក

យើងយក $e^y = x + \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$$\Leftrightarrow argsh(x)$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$ ពិត

2.1.3. ដេរីវេ

$$\boxed{y = argsh(x) \quad \Longrightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

ស្រាយ៖

យើងមាន $y = argsh(x)\ \Longrightarrow x = sh(y) \Longrightarrow x' = y'ch(y)$

$$\Longrightarrow y' = \frac{1}{ch(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$ ពិត

កំណត់សម្គាល់៖

(ក). ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ កំណត់ដោយ៖

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(ខ). ដេរីវេនៃអនុគមន៍ច្រាស $x = f^{-1}(x)$ កំណត់ដោយ

$$y' = \frac{1}{x'(y)}$$

ជាទូទៅ៖

$$\boxed{y = arcsh(u) \quad \Longrightarrow \ y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}}$$

2.1.4. សិក្សាអនុគមន៍(ខ្សែកោង)

គេមាន $y = argsh(x)$

ដេរីវេ $\quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0\ ,\forall x \in \mathbb{R}$

គេទាញបានអនុគមន៍នេះ ជាអនុគមន៍កើន ។

លីមីតចុងដែនកំណត់ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} argsh(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} argsh(x) = +\infty \end{cases}$

តារាងអថេរភាព

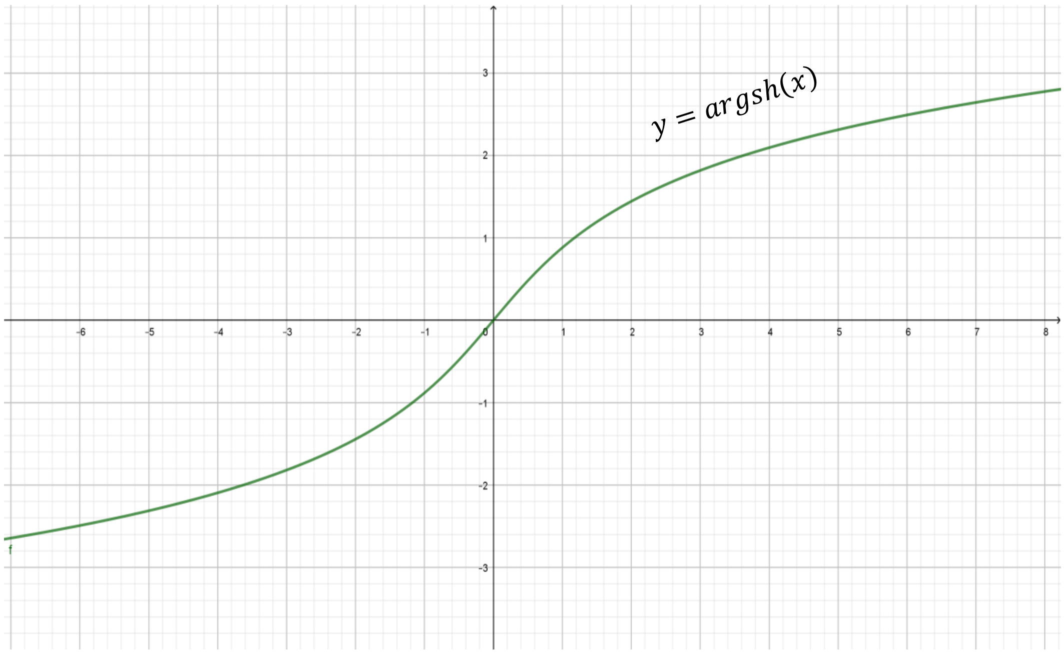
x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
y'	$+$
y	$-\infty \nearrow +\infty$

ខ្សែកោង ៖

បើ $x = 0$, $y = \ln 1 = 0$

$x = 1 \quad , y = 0.87$

$x = -1, y = -0.87$



2.2. អនុគមន៍ច្រាសកូស៊ីនុសអ៊ីពែបូលិក

2.2.1. និយមន័យ

ភាពច្រាសនៃអនុគមន៍ $y = chx$ គឺ :

f^{-1} : $[1\,,+\infty[\to \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto y = argchx$$

(អាគុយម៉ង់កូស៊ីនុសអ៊ីពែបូលិក)

គេបាន ៖

$$\boxed{y = argchx \iff x = ch}$$

2.2.2. សរសេរជាកន្សោមលោការីត

$$\boxed{argchx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

យើងមាន $y = argchx > 0$

$$\Rightarrow x = chy$$

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y + e^{-y} = e^y + \frac{1}{e^y}$$

$\Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$

$\Rightarrow \Delta' = (-x)^2 - 1 \geq 0 \ , \forall x \in \mathbb{D}$

បើ $\Delta' > 0 \Rightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} = \left[\begin{array}{l} x + \sqrt{x^2 - 1} \\ x - \sqrt{x^2 - 1} \end{array}\right.$ មិនយក

បើ $\Delta' = 0 \Rightarrow e^y = x \Rightarrow y = \ln x$ ។

2.2.3. ដេរីវេ

យើងមាន $y = argchx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

ដេរីវេ :

$$y' = \frac{d\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right)}{dx}$$

$$= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

គេបាន ៖

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

ជាទូទៅ៖

$$\boxed{\left(argch(u)\right)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}}$$

2.2.4. សិក្សាអនុគមន៍(ខ្សែកោង)

យើងមាន $y = argch(x)$, $x \in [1,+\infty)$

ដេរីវេ : $y' = \left(argch(x)\right)'$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0 \ , x > 1$$

គេទាញបាន អនុគមន៍នេះ ជាអនុគមន៍កើន ។

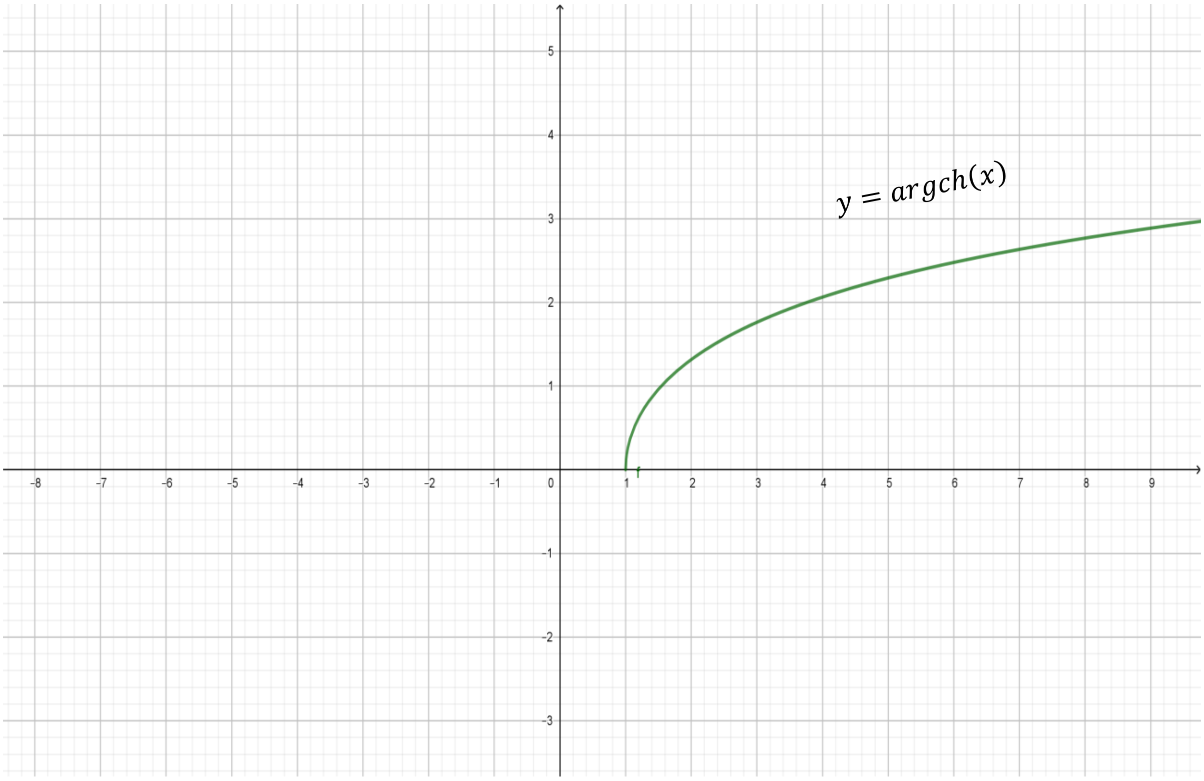
លីមីតចុងដែន :

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = +\infty$$

តារាងអថេរភាព

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
y'	$+$
y	$0 \nearrow +\infty$

ខ្សែកោង៖



2.3. អនុគមន៍ច្រាសតង់សង់អ៊ីពែបូលិក

2.3.1. និយមន័យ

$x = th(y)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងម៉ូណូតូនកើន

$y \in (-\infty, +\infty)$ កំណត់ដោយ ៖

$$\left.\begin{matrix} x = thy \\ -\infty < y < +\infty \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} y = argth(x) \\ -1 < x < 1 \end{matrix}\right.$$

2.3.2. សរសេរជាលោការីតនេពែ

ដោយ $y = argth(x) \Rightarrow x = th(y) = \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$

$\Leftrightarrow xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$

$\Leftrightarrow e^{2y}(1 - x) = 1 + x$

$\Rightarrow e^{2y} = \dfrac{1 + x}{1 - x}$

$\Rightarrow 2y = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right) \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right), -1 < x < 1$

គេបាន $argth(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ។

2.3.3.ដេរីវេ

យើងមាន $y=argth(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

ដេរីវេ ៖ $$y'=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{(1-x)+1+x}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{(1-x)(1+x)}\right]$$

$$=\frac{1}{1-x^2}$$

គេបាន $y'=\frac{1}{1-x^2}$ ។

ជាទូទៅ៖

$$\boxed{\left(argth(u)\right)'=\frac{u'}{1-u^2}}$$

2.3.4.សិក្សាអនុគមន៍(ខ្សែកោង)

យើងមាន $y=argth(x)$

ដែនកំណត់ ៖ $\mathbb{D}=(-1,1)$

ដេរីវេ ៖ $y'=\frac{1}{1-x^2}>0\,,x\in\mathbb{D}\implies y$ ជាអនុគមន៍កើន

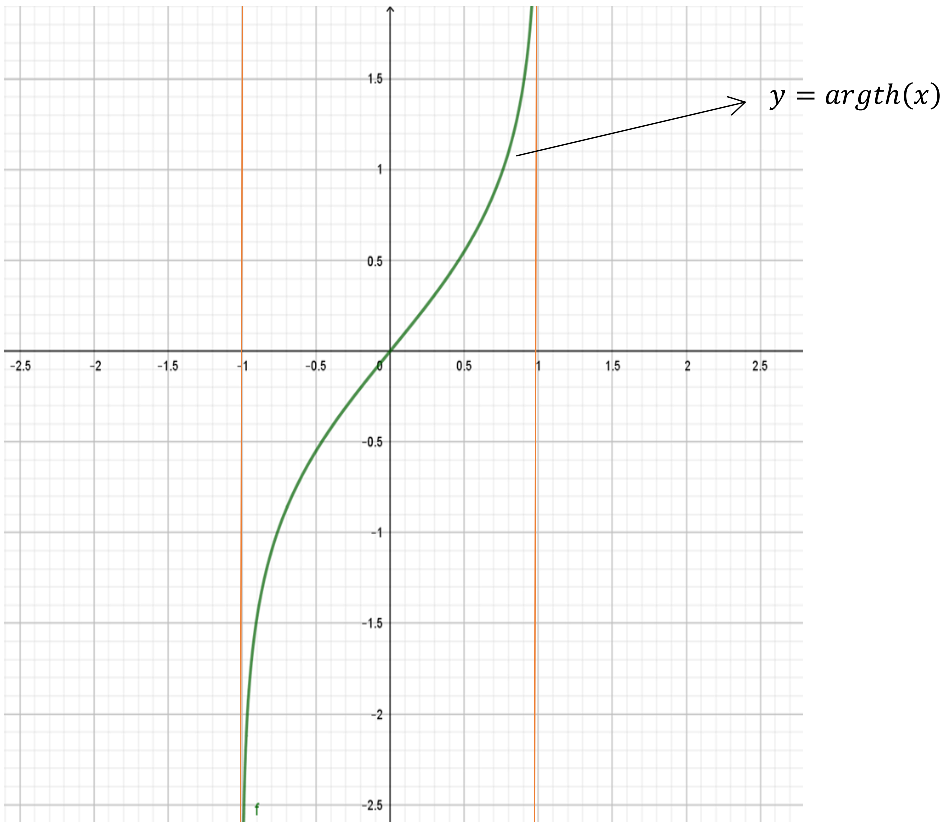
លីមីត ៖ $\lim\limits_{x\to\pm1}y=\begin{cases}-\infty\,,when\ x\to-1\\+\infty\,,when\ x\to+1\end{cases}$

តារាងអថេរភាព

x	-1 +1
y'	+
y	$-\infty \nearrow +\infty$

ខ្សែកោង៖

ចំពោះ៖ $x = 0$, $y = 0$



2.4. អនុគមន៍ច្រាសកូតង់សង់អ៊ីពែបូលិក

2.4.1. និយមន័យ

$x = \coth x$ ជាអនុគមន៍ជាប់ហើយ ចុះគ្រប់ $y \in \mathbb{R}^*$ នាំឲ្យមានអនុគមន៍ច្រាសតាងដោយ $argcoth(x)$ (អាគុយម៉ង់កូតង់សង់អ៊ីពែបូលិក) ដែលកំណត់ដោយ៖

$$\left.\begin{matrix} x = \coth x \\ y \in \mathbb{R}^* \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} y = argcoth(x) \\ |x| > 1 \end{matrix}\right.$$

2.4.2. សរសេរជាលោការីតនេពែ

ដោយ $argcoth(x) \implies x = \coth x = \dfrac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$

$$\Leftrightarrow xe^{2y} - x = e^{2y} + 1$$
$$\Leftrightarrow e^{2y}(1-x) = -x-1$$
$$\Rightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad , \qquad |x| > 1$$

$$\boxed{argcoth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

2.4.3. ដេរីវេ

យើងមាន $y = argcoth(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

ដេរីវេ ៖ $y' = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)'}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}\right] = -\frac{1}{x^2-1}$$

គេបាន៖

$$\boxed{y' = -\frac{1}{x^2-1}}$$

ជាទូទៅ៖

$$\boxed{[argcoth(u)]' = -\frac{u'}{u^2-1}}$$

ដែនកំណត់នៃ $y = argcoth(x)$: $D_f = \mathbb{R} - \{-1,1\}$

ដោយ $y' = -\frac{1}{x^2-1} < 0$, $|x| > 1$

បើ $x \in (-1\,,1)\,, y' = -\dfrac{1}{x^2-1} > 0$

នោះ អនុគមន៍នេះជាអនុគមន៍ចុះ ។

លីមីត៖

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0\ ;$$

$$\lim_{x\to\pm 1}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\begin{cases}+\infty\,, if\ x\to +1\\ -\infty\,, if\ x\to -1\end{cases}$$

តារាងអថេរភាព

x	-∞	-1	1	+∞
y'	$-$	$+$	$-$	
y	$0 \searrow -\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow 0$	

ខ្សែកោង៖

2.5. រូបមន្តលីមីតរាងមិនកំណត់ និងរូបមន្តអាំងតេក្រាលមិនកំនត់

(ក). រូបមន្តលីមីតរាងមិនកំណត់

$(a).\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{argsh(x)}{x}=1$

ព្រោះ ៖ តាង $y=argsh(x)\ \Rightarrow x=sh(y)$

ពេល $x\to 0$ នោះ $y\to 0$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{argsh(x)}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{sh(y)}=1$

$(b).\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{argth(x)}{x}=1$

ព្រោះ៖

$$\lim_{x\to 0}\frac{argth(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x}\right]=1$$

(ខ). រូបមន្តអាំងតេក្រាល

$+$ដោយ $(argshx)'=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=argshx+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c$$

ដូចគ្នានេះដែរ ៖ $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=argsh\left(\frac{x}{a}\right)+c$

$$=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$$

$+$ដោយ $(argchx)'=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=argchx+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+c$$

ដូចគ្នានេះដែរ ៖ $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=argch\left(\frac{x}{a}\right)+c$

$$=\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+c$$

លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ

******

លំហាត់ទី០១៖

គណនាផលបូក :

$S_n = Chx + Ch2x + \cdots + Chnx$ និង $T_n = Shx + Sh2x + \cdots + Shnx$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាផលបូក $S_n + T_n$

យើងមាន $S_n = Chx + Ch2x + \cdots + Chnx$

$T_n = Shx + Sh2x + \cdots + Shnx$

យក $S_n + T_n = Chx + Shx + Ch2x + Sh2x + \cdots + Chnx + Shx$

ដោយ $Chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ និង $Shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

យើងបាន

$$S_n + T_n = \frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x} + e^{2x} + e^{-2x} + e^{2x} - e^{-2x} + \cdots + e^{nx} + e^{nx} + e^{nx} - e^{-nx}}{2}$$

$$= \frac{2e^x + 2e^{2x} + \cdots + 2e^{nx}}{2}$$

$$= e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}$$

$$= \frac{e^x(e^{xn} - 1)}{e^x - 1}$$

ដូចនេះ $S_n + T_n = \dfrac{e^x(e^{nx} - 1)}{e^x - 1}$

លំហាត់ទី០២៖

បង្ហាញថា៖

(ក). $2Argshx = Argsh2x\sqrt{x^2 + 1}$

(ខ). $Argchx = Argshx\sqrt{x^2 + 1}$

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា

(ក). $2Argshx = Argsh2x\sqrt{x^2+1}$

តាង $A = Argshx \implies x = ShA$

តាមរូបមន្ត $Sh2x = 2ShxChx$

យើងបាន $Sh2A = 2ShAChA$; $ShA = x, ChA = \sqrt{1+Sh^2A}$

$= 2x\sqrt{1+x^2}$

$\implies 2A = Argsh2x\sqrt{x^2+1}$ ពិត

ដូចនេះ $2Argshx = Argsh2x\sqrt{x^2+1}$

(ខ). $Argchx = Argsh\sqrt{x^2+1}$

តាង $A = Argchx \implies x = ChA$

តាមរូបមន្ត $Ch^2x - Sh^2x = 1 \implies Sh^2x = 1 + Ch^2x$

យើងបាន $Sh^2A = 1 + Ch^2A \implies ShA = \sqrt{1+Ch^2A}; ChA = x$

$\implies ShA = \sqrt{1+x^2} \implies A = Argsh\sqrt{x^2+1}$ ពិត

ដូចនេះ $Argchx = Argsh\sqrt{x^2+1}$

លំហាត់ទី០៣៖

រក $Ch3a$ និង $Sh3a$ ចេញពី $(Cha + Sha)^3$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ រក $Ch\,3a$ និង $Sh3a$

យើងមាន $(Cha + Sha)^3 = Ch^3a + 3Ch^2aSha + 3ChaSh^2a + Sh^3a$

តាមផ្នែកគូ និងផ្នែកសេស យើងបាន៖

$Ch3a = Ch^3a + 3ChaSh^2a$

$= Ch^3a + 3Cha(Ch^2a - 1)$

$$= 4Ch^3a + 3Cha$$

$$Sh3a = Sh^3a + 3Ch^2aSha$$

$$= Sh^3a + 3(1 + Sh^2a)Sha$$

$$= 4Sh^3a + 3Sha$$

ដូចនេះ $\begin{cases} Ch3a = 4Ch^3a + 3Cha \\ Sh3a = 4Sh^3a + 3Sha \end{cases}$

លំហាត់ទី០៤៖

គេមាន $Chx = \dfrac{5}{4}$ ។ចូរគណនា $shx\,;thx\;;\;cothx$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

- គណនា shx

តាមរូបមន្ត ៖ $Ch^2x - Sh^2x = 1$

$$\Longrightarrow Shx = \sqrt{1 + Ch^2x} = \sqrt{1 + \frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{41}{16}} = \frac{\sqrt{41}}{4}$$

- គណនា thx

តាមរូបមន្ត ៖ $\dfrac{1}{Ch^2x} = 1 - th^2x \Longrightarrow th^2x = 1 - \dfrac{1}{ch^2x}$

យើងបាន ៖ $\mathrm{thx} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\frac{25}{16}}} = \sqrt{1 - \dfrac{16}{25}} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$

- គណនា $cothx$

តាមរូបមន្ត $\dfrac{1}{sh^2x} = \coth^2 x - 1$

$$\Longrightarrow \coth x = \sqrt{1 - \frac{1}{sh^2x}}$$

លំហាត់ទី០៥៖

គណនាដេរីវេននៃអនុគមន៍

$(a).\ f(x)=argth(\sin x)$; $\mathrm{(b).\ f(x) = argcoth^3}\left(\frac{1}{arcsh\sqrt{\ln x}}\right)$

ដំណោះស្រាយ៖

$(\mathrm{a}).\ f(x)=argth(\sin x)$

$$f'(x)=\frac{d\big(argth(\sin x)\big)}{x}$$

$$=\frac{1}{1-\sin^2 x}\frac{d(\sin x)}{x}$$

$$=\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\sec x$$

ដូច្នេះ $f'(x)=\sec x$

$(b).f(x)=\mathrm{argcoth}^3\left(\frac{1}{arcsh\sqrt{\ln x}}\right)$

យើងមាន $f(x)=u^3$

ដែល $u=argcothx\left(\frac{1}{arcsh\big(\sqrt{\ln x}\big)}\right)=argcothv$

$$v=\frac{1}{argsh\big(\sqrt{\ln x}\big)}=\frac{1}{w}$$

$$w=argsh\big(\sqrt{\ln x}\big)=argsht\ ,\qquad t=\sqrt{\ln x}=\sqrt{s}$$

$$s=\ln x\quad\Rightarrow s'=\frac{1}{x}\Rightarrow t'=\frac{s'}{2\sqrt{s}}=\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

$$\Rightarrow w'=\frac{t'}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}\sqrt{1+\ln x}}=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x+\ln^2 x}}$$

$$\Rightarrow v' = -\frac{w'}{w^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{\ln x + \ln^2 x}\left(argsh^2\left(\sqrt{\ln x}\right)\right)}$$

$$= -\frac{1}{2xargsh^2\left(\sqrt{\ln x}\right)\sqrt{\ln x + \ln^2 x}}$$

$$\Rightarrow u' = (argcothv)' = \frac{v'}{v^2 - 1}$$

$$= \left(-\frac{1}{2xargsh^2\left(\sqrt{\ln x}\right)\sqrt{\ln x + \ln^2 x}}\right)\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{argsh\left(\sqrt{\ln x}\right)}\right)^2 - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2xargsh^2\left(\sqrt{\ln x}\right)\sqrt{\ln x + \ln^2 x}\left(\frac{1 - arcsh^2\left(\sqrt{\ln x}\right)}{arcsh^2\left(\sqrt{\ln x}\right)}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2x\sqrt{\ln x + \ln^2 x}\left(1 - arcsh^2\left(\sqrt{\ln x}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (u^3)' = 3u'u^2$$

$$= 3\left(-\frac{1}{2x\sqrt{\ln x + \ln^2 x}\left(1 - arcsh^2\left(\sqrt{\ln x}\right)\right)}\ argcoth^2\left(\frac{1}{argsh\left(\sqrt{\ln x}\right)}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{2x}\left(\frac{argcoth^2\left(\frac{1}{argsh\left(\sqrt{\ln x}\right)}\right)}{\sqrt{\ln x + \ln^2 x}\left(1 - arcsh^2\left(\sqrt{\ln x}\right)\right)}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{3}{2x}\left(\frac{argcoth^2\left(\frac{1}{argsh\left(\sqrt{\ln x}\right)}\right)}{\sqrt{\ln x + \ln^2 x}\left(1 - arcsh^2\left(\sqrt{\ln x}\right)\right)}\right)}$

(c). យើងមាន $f(x) = argch\left(\sqrt{\dfrac{\ln x}{argth\sqrt{x}}}\right) = argch(u)$

ដែល $u = \sqrt{\dfrac{\ln x}{argth\sqrt{x}}} = \sqrt{v}$

$$v = \frac{\ln x}{argth\sqrt{x}} = \frac{t}{w}$$

$$t = \ln x \ \Rightarrow t' = \frac{1}{x} \quad , \qquad w = argth\sqrt{x} = argth(z)$$

$$\Rightarrow z' = \left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \ \Rightarrow w' = \frac{z'}{1-z^2} = \frac{argth\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{1-x}$$

$$\Rightarrow v' = \left(\frac{t}{w}\right)' = \frac{t'w - w't}{w^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{x}\right) argth\sqrt{x} - \ln x\left(argth\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)\right)}{argth^2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{argth\sqrt{x} - \ln x\left(argth\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)\right)}{x\, argth^2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow u' = -\frac{v'}{2\sqrt{v}} = -\frac{argth\sqrt{x} - \ln x\left(argth\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)\right)}{2x\, argth^2\sqrt{x}\sqrt{\dfrac{\ln x}{argth\sqrt{x}}}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = argch(u) = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$= -\frac{argth\sqrt{x} - \ln x\left(argth\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)\right)}{2x\, argth^2\sqrt{x}\sqrt{\dfrac{\ln x}{argth\sqrt{x}}}\sqrt{\left(\dfrac{\ln x}{argth\sqrt{x}}\right)^2 - 1}}$$

លំហាត់ទី០៦. ចូរសម្រួលកន្សោមខាងក្រោម៖

$(a).\ argsh(4x^3+3x)$ និង $(b).\ argch(4x^3-3x)$

ដំណោះស្រាយ. សម្រួលកន្សោម

$(a). argsh(4x^3+3x)$

តាង $x = shy$

គេបាន $4x^3+3x = 4sh^3y + 3shy = sh3y$

នោះនាំឲ្យ $argsh(4x^3+3x) = argsh(sh3y) = 3y$

តែ $x = shy \iff y = argshx$

យើងបាន $argsh(4x^3+3x) = 3argshx$

ដូច្នេះ $argsh(4x^3+3x) = 3argshx$

$(b).\ argch(4x^3+3x)$

តាង $x = chy$

គេបាន $4x^3+3x = 4ch^3y + 3chy = ch3y$

នោះនាំឲ្យ $argch(4x^3+3x) = argch(ch3y) = 3y$

តែ $x = chy \iff y = argchx$

យើងបាន $argch(4x^3+3x) = 3argchx$

ដូច្នេះ $argch(4x^3+3x) = 3argchx$

ជំពូក ៧

អាំងតេក្រាល

1. អាំងតេក្រាល(ចំណេះដឹងមូលដ្ឋាន)

1.1. និយមន័យព្រីមីទីវ

គេថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$, ចំពោះគ្រប់ $x \in I \subset \mathbb{R}$ ដែលបញ្ជាក់បានថា ៖ $F'(x) = f(x)$ ។

☞ គេតាងអាំងតេក្រាល

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ ,} C \text{ មានតម្លៃថេរ}$$

ឧទាហរណ៍៖ $F(x) = x^3$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x) = 3x^2$ ។

ព្រោះ ៖ $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$ (ពិត)

1.2. រូបមន្តអាំងតេក្រាលងាយ

(1). $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \text{ ; } a \neq -1 \text{ and } a \in \mathbb{R}$

(2). $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(3). $\int e^x dx = e^x + C$

(4). $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

(5). $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(6). $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(7). $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x)dx = \tan x + C$

(8). $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x)dx = -\cot x + C$

(9). $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

(10). $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$

(11). $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(12). $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

(13). $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

(14). $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

(15). $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C = arcshx + C$

(16). $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C = arcchx + C$

(17). $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

(18). $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C = arcthx + C$

(19). $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(20). $\int chxdx = shx + C$

(21). $\int shx\, dx = chx + C$

(22). $\int \frac{dx}{ch^2x} = \int (1-th^2x)dx = thx + C$

(23). $\int \frac{dx}{sh^2x} = \int (\coth^2 x - 1)dx = -\coth x + C$

(24). $\int thx\, dx = \ln|chx| + C$

(25). $\int \coth x\, dx = \ln|shx| + C$

ដែល $C \in \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍៖ ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

(1). $\int (4x+3)^{2017}dx$

តាង $T = 4x+3$ នោះ $dT = 4dx \Rightarrow dx = \frac{dT}{4}$

យើងបាន $\int (4x+3)^{2017}dx = \frac{1}{4}\int T^{2017}dT = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{T}^{2018}}{2018}\right) + C$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{(4\mathrm{x}+3)^{2018}}{2018}\right) + \mathrm{C}$

(2). $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(3-x^2)}{\sqrt{3-x^2}} = -\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3-x^2}\right) + C$

$= -\sqrt{3-x^2} + C$, C មានតម្លៃថេរ

(3). $\int \tan^4 x\, dx = \int [(1+\tan^2 x)\tan^2 x - \tan^2 x]dx$

$= \int (1+\tan^2 x)\tan^2 x\, dx - \int (\tan^2 x + 1 - 1)dx$

$= \int \tan^2 x\, d(\tan x) - \int (\tan^2 x + 1)dx + \int dx$

$= \frac{\tan^3 x}{3} - \int d(\tan x) + x + C$

$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$, C ជាតម្លៃថេរ ។

(4). $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$ រូបមន្ត $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{2}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}x + C$, C មានតម្លៃថេរ។

(5). $\int \frac{dx}{3^x+2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{3^x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{3^x+2-3^x}{3^x+2}dx$

$= \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{3^x}{3^x+2}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2\ln 3}\int \frac{d(3^x+2)}{3^x+2}$,រូបមន្ត $(a^x)' = a^x \ln a$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\ln 3}\ln|3^x+2| + C$,មានតម្លៃថេរ ។

(6). $\int \sin^2(2-3x)\, dx$

ប្រើរូបមន្ត ៖ $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$\Rightarrow \int \sin^2(2-3x)\,dx = \int \frac{1-\cos(4-6x)}{2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(4-6x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\int (-6)\cos(4-6x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\int \cos(4-6x)\,d(4-6x)$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin(4-6x) + C\,, C \in \mathbb{R}$$

(7). $\displaystyle\int \frac{dx}{sh^4x} = \int \left(\frac{1}{sh^2x}\right)^2$

យើងមាន $\dfrac{1}{sh^2x} = \coth^2 x - 1 \;\Rightarrow \left(\dfrac{1}{sh^2x}\right)^2 = (\coth^2 x - 1)^2$

$$= \coth^4 x - 2\coth^2 x + 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{sh^4x} = \int (\coth^4 x - 2\coth^2 x + 1)dx$$
$$= \int [(1-\coth^2 x)(-\coth^2 x) + \coth^2 x]dx$$
$$- \int (2\coth^2 x - 1)dx$$
$$= -\int \coth^2 x\, d(\coth x) - \int \coth^2 x\, dx + \int dx$$

$$= -\frac{\coth^3 x}{3} + \int (1-\coth^2 x)\coth^0 x\, dx - \int dx + \int dx$$
$$+ C$$
$$= -\frac{\coth^3 x}{3} + \int \coth^0 x\, d(\coth x) + C$$
$$= -\frac{\coth^3 x}{3} + \coth x + C \;\;, C \in \mathbb{R}$$

1.3. ព្រីមីទីវឲ្យជាពាងអាំងតេក្រាល

ទ្រឹស្តីបទ ៖ បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b)$ ទូទៅ $\big(b$ អាចស្មើ $+\infty\big)$ នោះ $\forall x \in [a,b)\,, F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ជាព្រីមីទីវមួយ

នៃ f លើ $[a,b)$ ដែល $f(a)=0$ គឺ

$$F'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x) \text{ និង } f(a)=0$$

វិបាកៈ

$G(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f ដែល $G(a)=0$ ។

ដូច្នេះបើ F ជាព្រីមីទីវស្គាល់មួយនៃ f គេបាន

$G(x)=\int_a^x f(t)dt=F(x)+C$ ។

យក $x=a$ គេបាន $0=F(a)+C \Leftrightarrow C=F(a)$

ដូច្នេះ $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$

ជាពិសេសបើ f ជាប់លើ $[a,b]$ គេបាន៖

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt=f(b)-f(a)=f(t)|_a^b}$$

1.4. រូបមន្តប្តូរអថេរ(អាំងតេក្រាលកំនត់)

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់លើ $[a\,,b]$ ហើយ $\varphi(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើ $]a,b[$ ដែល $\forall t\in[A,B]$ $,a\le\varphi(t)\le b$ ក្នុងករណីនេះគេអាចប្តូរអថេរ

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

តាង $x=\varphi(t) \Rightarrow t=\varphi^{-1}(x)$

$x=a \quad \Rightarrow a=\varphi(t)\Rightarrow t=\varphi^{-1}(a)$

$x=b \quad \Rightarrow b=\varphi(t)\Rightarrow t=\varphi^{-1}(b)$

ឧទាហរណ៍៖ គណនា

(1). $\int\frac{dx}{x\sqrt{2-\log x}}$;(តាង $u=1-\log x \Rightarrow du=-\frac{dx}{x\ln 10}$)

$=\int\frac{-\ln 10\,du}{\sqrt{u}}=-2\ln 10\sqrt{u}+C$

(2). $\int \frac{\sqrt[3]{3+4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

តាង $u = 3+4\sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{2dx}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

យើងបាន៖ $\int \frac{\sqrt[3]{3+4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{u}du$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right) + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{u^4} + C$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(3+4\sqrt{x}\right)^4} + C \text{ }, C \in \mathbb{R}$$

(3). $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}}dx = \int \frac{\sqrt{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$= \int \frac{\sqrt{arcshx}}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

តាង $u = arcshx \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

យើងបាន $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}}dx = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + C$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^3} + C$$

1.5. អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក(អាំងតេក្រាលកំនត់)

ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ $f(x)$,$g(x)$ មានដេរីវេលើ $]a,b[$ ហើយជាប់លើ $[a,b]$ នោះមានអាំងតេក្រាលលើ $[a,b]$ ។

ដែល ៖ $\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b g(t)f'(t)dt$

ហៅថា "អាំងតេក្រាលកម្មដោយផ្នែក" ។

ស្រាយបញ្ជាក់៖

ដោយ $[f(t)g(x)]' = f'(t)g(t) + g'(t)f(t)$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \left(f(t)\times g(t)\right)' dt = \int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b g'(t)f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow f(t)g(t)\Big|_a^b = \int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b g'(t)f(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b g'(t)f(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

ជាទូទៅគេអាចសរសេរជារាង៖

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$I = \int x \sin x \, dx$$

តាង $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -x\cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

$$J = \int e^x \sin x \, dx \quad ; \begin{pmatrix} \text{តាង } u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{pmatrix}$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \; ; \begin{pmatrix} \text{តាង } u_1 = \cos x \Rightarrow du_1 = -\sin x \, dx \\ dv_1 = e^x dx \Rightarrow v_1 = e^x \end{pmatrix}$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx\right)$$

$$\Rightarrow 2J = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$\Rightarrow J = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$, Cមានតម្លៃថេរ

1.6. អាំងតេក្រាលរាង $\int \dfrac{dx}{ax^2+bx+c}$ ឬ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

\+ ចំពោះ៖ $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

យើងមាន $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$

តាង $t = x + \dfrac{b}{2a} \Rightarrow dt = dx$

$$k^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2} \text{ បើ } \Delta < 0 \ ; \ -k^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2} \text{ បើ } \Delta > 0$$

យើងបាន $ax^2 + bx + c = a(t^2 \pm k^2)$

នោះ $I_2 = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$

ដូចនេះ $I_1 = \frac{1}{ak}\arctan\frac{t}{k} + C$ $\left(\text{បើ } t^2 + k^2\right)$

ឬ $I_1 = \frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right| + C$ $\left(\text{បើ } t^2 - k^2\right)$

+ ចំពោះ $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$

ដូចនេះ + បើ $t^2 + k^2$; $I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm k^2}\right| + C$

+ បើ $t^2 - k^2$; $I_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{t}{k} + C$

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

$$= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

តាង $t = x + \frac{1}{2} \Rightarrow dt = dx$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}$$,រូបមន្ត $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2t\sqrt{3}}{3}\right) + C$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}x + \sqrt{3}}{3}\right) + C$$

ដូចនេះ $I = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}x + \sqrt{3}}{3}\right) + C \, , C \in \mathbb{R}$

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{36}\right]}}$$

តាង $u=x-\dfrac{1}{6}$ នោះ $du=dx$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{u^2+\left(\sqrt{\frac{23}{36}}\right)^2}}$$

,រូបមន្ត $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|u+\sqrt{u^2+\frac{23}{36}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x-\frac{1}{6}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{36}}+C$$

ដូចនេះ $J=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln|x-\dfrac{1}{6}+\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{23}{36}}+C$,Cមានតម្លៃថេរ ។

1.6.1. អាំងតេក្រាលរាង $\int\frac{xdx}{(ax^2+b)(\sqrt{cx^2+d})}$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលរាង $\int\dfrac{xdx}{(ax^2+b)(\sqrt{cx^2+d})}$ បាន៖

យើងតាង

$$t=\sqrt{cx^2+d}\ \Rightarrow t^2=cx^2+d\ \Rightarrow x^2=\frac{t^2-d}{c}\ ;xdx=\frac{tdt}{c}$$

យើងមាន $\displaystyle\int\frac{xdx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}=\frac{1}{c}\int\frac{tdt}{\left[a\left(\frac{t^2-d}{c}\right)+b\right]t}$

$$=\frac{1}{c^2}\int\frac{dt}{at^2+(ab-ad)}$$,ដោយប្រើរូបមន្តបន្ត។

<u>ឧទាហរណ៍</u>៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

$$I=\int\frac{xdx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$$

តាង $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\ \Rightarrow x^2=t^2-4\Rightarrow xdx=tdt$

យើងបាន $I=\int\frac{tdt}{[2(t^2-4)+1]t}=\int\frac{dt}{2t^2-7}$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

នោះ $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}t)}{\left(t\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-\sqrt{7}}{t\sqrt{2}+\sqrt{7}}\right|+C$

$$I\ =\frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{2x^2+8}-\sqrt{7}}{\sqrt{2x^2+8}+\sqrt{7}}\right|+C\ ,C\in\mathbb{R}$$ ។

$$J=\int\frac{8xdx}{(3x^2-2)\sqrt{2x^2-1}}$$

$\left(\text{តាង } t=\sqrt{2x^2-1}\Rightarrow t^2=2x^2-1\Rightarrow 2x^2=t^2+1 \atop \Rightarrow 2xdx=tdt\right)$

យើងបាន $J=4\int\frac{tdt}{\left[3\left(\frac{t^2+1}{2}\right)-2\right]t}$

$$=4\int\frac{dt}{\left(\frac{3t^2-1}{2}\right)}=8\int\frac{dt}{3t^2-1}=\frac{8}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(t\sqrt{3}\right)}{\left(t\sqrt{3}\right)^2-1^2}$$

ប្រើរូបមន្ត ៖ $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

នោះ $J=\frac{8}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t\sqrt{3}-1}{t\sqrt{3}+1}\right|+C$

$=\frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{6x^2-3}-1}{\sqrt{6x^2-3}+1}\right|+C\ ,C$ មានតម្លៃថេរ ។

$$K=\int\frac{xdx}{(4x^2+3)\sqrt{3x^2+2}}$$

$$\left(\text{តាង }\ t=\sqrt{3x^2+2}\Rightarrow t^2=3x^2+2\Rightarrow x^2=\frac{t^2-2}{3}\atop \Rightarrow 3xdx=dt\right)$$

$$\Rightarrow K=\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{\left[4\left(\frac{t^2-2}{3}\right)+3\right]t}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\frac{4t^2+1}{3}}=\int\frac{dt}{4t^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(2t)}{(2t)^2+(1)^2}$$

ប្រើប្រាស់រូបមន្ត ៖ $\int\frac{dx}{x^2+a}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

$$\Rightarrow K=\frac{1}{2}\arctan(2t)+C$$

$K=\frac{1}{2}\arctan\left(2\sqrt{3x^2+2}\right)+C$, C មានតំលៃថេរ ។

1.6.2. អាំងតេក្រាលរាង $\int\frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$

យើងមាន $F(x)=\int\frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$

យើងនឹងតាង $xt=\sqrt{cx^2+d}\Rightarrow x^2t^2=cx^2+d$

$$\Rightarrow x^2=\frac{d}{t^2-c}\quad\Rightarrow xdx=-\frac{td}{(t^2-c)^2}dt$$

$$\Rightarrow\ \frac{dx}{\sqrt{cx^2+d}}=\frac{xdx}{x(xt)}=-\frac{\frac{td.dt}{(t^2-c)^2}}{\frac{td}{t^2-c}}=-\frac{dt}{t^2-c}$$

ដូច្នេះ $F(x)=\int\frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$

$$=-\int\frac{dt}{\left[a\left(\frac{d}{t^2-c}\right)+b\right](t^2-c)}$$

$$F(x) = -\int \frac{dt}{ad + bt^2 - bc} = -\int \frac{dt}{bt^2 + (ad - bc)}$$

រួចប្រើប្រាស់ការគណនាមួយនឹងរូបមន្តបន្តទៀតដើម្បីទទួលបានលទ្ធផល។

<u>ឧទាហរណ៍</u>៖ គណនាអាំងតេក្រាល

1. $F(x) = \int \frac{dx}{(x^2 - 2)\sqrt{x^2 + 3}}$

$$\left(\begin{array}{l} \text{តាង } xt = \sqrt{x^2 + 3} \Rightarrow x^2t^2 = x^2 + 3 \Rightarrow x^2 = \dfrac{3}{t^2 - 1} \\ \qquad \Rightarrow xdx = -\dfrac{3t.dt}{(t^2 - 1)^2} \\ \Rightarrow \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}} = \dfrac{xdx}{x^2t} = \dfrac{\frac{-3t.dt}{(t^2 - 1)^2}}{\frac{3t}{(t^2 - 1)}} = -\dfrac{dt}{t^2 - 1} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow F(x) = -\int \frac{dt}{\left(\frac{3}{t^2 - 1} - 2\right)(t^2 - 1)}$$

$$= -\int \frac{dt}{(3 - 2t^2 + 2)} = \int \frac{dt}{2t^2 - 5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(t\sqrt{2}\right)}{\left(t\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left|\frac{2t - \sqrt{5}}{2t + \sqrt{5}}\right| + C$$

ដូច្នេះ $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left|\frac{\sqrt{2(x^2 + 3)} - \sqrt{5}}{\sqrt{2(x^2 + 3)} + \sqrt{5}}\right| + C$ ។

2. $F(x) = \int \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}} dx$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} + \int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}}$$

យើងតាង $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 2}\right| + C$

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{តាង}\ \ xt=\sqrt{x^2+2}\ \Longrightarrow x^2t^2=x^2+2\Longrightarrow x^2=\dfrac{2}{t^2-1} \\ \Longrightarrow xdx=-\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}dt \\ \Longrightarrow\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{xdx}{x^2t}=\dfrac{-\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}dt}{\dfrac{2t}{t^2-1}}=-\dfrac{dt}{t^2-1} \end{array}\right)$$

យើងបាន $I_2=-\int\dfrac{dt}{\left(\dfrac{2}{t^2-1}+1\right)(t^2-1)}$

$$=-\int\frac{dt}{t^2+1}=-\arctan t+C=\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)+C$$

ដូច្នេះ $F(x)=\ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right|-\arctan\left(\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)+C$ ។

1.6.3. **អាំងតេក្រាលរាង** $\int\frac{(mx+n)dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$

យើងមាន $F(x)=\int\dfrac{(mx+n)dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$

$$=\overbrace{m\int\frac{xdx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}}^{\text{ប្រើវិធី \#1.6.1}}+\overbrace{n\int\frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}}^{\text{ប្រើវិធី \#1.6.2}}$$

ឧទាហរណ៍៖ គណនា $F(x)$

$$F(x)=\int\frac{(4x+3)dx}{(x^2-2x-4)\sqrt{3x^2-6x+5}}$$

$$=\int\frac{[4(x-1)+7]dx}{[(x-1)^2-5]\sqrt{[3(x-1)^2+2]}}$$

$$=\int\frac{(4u+7)du}{(u^2-5)\sqrt{3u^2+2}}$$

$$= 4\underbrace{\int \frac{udu}{(u^2-5)\sqrt{3u^2+2}}}_{L} + 7\underbrace{\int \frac{du}{(u^2-5)\sqrt{3u^2+2}}}_{M}$$

$$= 4L + 7M$$

+ចំពោះ៖

$$L = \int \frac{udu}{(u^2-5)\sqrt{3u^2+2}}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{តាង } t = \sqrt{3u^2+2} \Longrightarrow t^2 = 3u^2+2 \Longrightarrow u^2 = \dfrac{t^2-2}{3} \\ \Longrightarrow u.du = \dfrac{t.dt}{3} \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow L = \frac{1}{3}\int \frac{tdt}{\left(\frac{t^2-2}{3}-5\right)t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\frac{t^2-17}{3}} = \int \frac{dt}{t^2-17}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{17}}{t+\sqrt{17}}\right| + C_1 = \frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x-1)^2+2}-17}{\sqrt{3(x-1)^2+2}+17}\right|$$

+ ចំពោះ៖

$$M = \int \frac{du}{(u^2-5)\sqrt{3u^2+2}}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{តាង } ut = \sqrt{3u^2+2} \Longrightarrow u^2t^2 = 3u^2+2 \Longrightarrow u^2 = \dfrac{2}{t^2-3} \\ \Longrightarrow udu = -\dfrac{2t}{(t^2-3)^2}dt \\ \Longrightarrow \dfrac{du}{\sqrt{3u^2+2}} = \dfrac{udu}{u^2t} = \dfrac{-\frac{2t}{(t^2-3)^2}dt}{\frac{2t}{t^2-3}} = -\dfrac{dt}{t^2-3} \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow M = -\int \frac{dt}{\left(\frac{2}{t^2-3}-5\right)(t^2-3)}$$

$$= -\int \frac{dt}{2-5t^2+15} = -\int \frac{dt}{-5t^2+17} = \int \frac{dt}{5t^2-17}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(t\sqrt{5}\right)}{\left(t\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{17}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{85}}\ln\left|\frac{t\sqrt{5}-\sqrt{17}}{t\sqrt{5}+\sqrt{17}}\right| + C_2$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{85}} \ln\left|\frac{\left(\frac{\sqrt{3u^2+2}}{u}\right)\sqrt{5}-\sqrt{17}}{\frac{\left(\sqrt{3u^2+2}\right)\sqrt{5}}{u}+\sqrt{17}}\right| + C_2$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{85}} \ln\left|\frac{\sqrt{5(3u^2+2)}-u\sqrt{17}}{\sqrt{5(3u^2+2}+u\sqrt{17}}\right| + C_2$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{85}} \ln\left|\frac{\sqrt{15(x-1)^2+2}-(x-1)\sqrt{17}}{\sqrt{15(x-1)^2+2}+(x-1)\sqrt{17}}\right| + C_2$$

យើងបាន

$$F(x) = \frac{4}{2\sqrt{17}} \ln\left|\frac{\sqrt{3(x-1)^2+2}-17}{\sqrt{3(x-1)^2+2}+17}\right| + \frac{1}{2\sqrt{85}} \ln\left|\frac{\sqrt{15(x-1)^2+2}-(x-1)\sqrt{17}}{\sqrt{15(x-1)^2+2}+(x-1)\sqrt{17}}\right| + C$$

រូបមន្តអាំងតេក្រាលបន្ថែមទៀត៖

$(i).\ \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n-1} + C$

$(ii)\ \int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

$(iii).\int cosec^2 xdx = -cotanx + C$

$(iv).\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

$(v).\ \int cosecx.\cot x\, dx = -cosecx + C$

$(vi).\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

$(vii).\int \frac{dx}{\sqrt{1-(ax)^2}} = \frac{1}{a}\arctan(ax) + C$

$(viii).\int \frac{dx}{1+(ax)^2} = \frac{1}{a}\arctan(ax) + C$

$(ix).\ \int \cos x\,.\sin^n x\, dx = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x + C$

$(x).\ \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

$(xi).\ \int \sin x\,.\cos^n x\, dx = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x + C$

1.7. អាំងតេក្រាលរាង

$$F(x)=\int\frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}\quad \text{ឬ} \quad F(x)=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

យើងអាចសរសេរបាន៖

$$F(x)=\int\frac{\frac{(2ax+b)A}{2a}-b.\frac{A}{2a}+B}{ax^2+bx+c}dx$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}dx+\overbrace{\left(B-\frac{bA}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}}^{\text{ប្រើ}\ \#\ 1.6}$$

$$\boxed{F(x)=\frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+\overbrace{\left(B-\frac{bA}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}}^{use\ \#\ 1.6}}$$

ឬ $F(x)=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\overbrace{\left(B-\frac{bA}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}^{\text{ប្រើវិធីនៅ}\ \#1.6}$$

$$\boxed{F(x)=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\overbrace{\left(B-\frac{bA}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}^{\text{ប្រើវិធីនៅ}\ \#1.6}}$$

ឧទាហរណ៍១៖ គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$F(x)=\int\frac{(x-3)dx}{x^2+x-2}$$

$$=\int\frac{\frac{(2x+1)1}{2}-\frac{1}{2}-3}{x^2+x-2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x-2}dx-\left(3+\frac{1}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+x-2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x-2}-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x-2|-\frac{7}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x-2| - \frac{7}{6}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right| + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2+x-2| - \frac{7}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int \frac{(1-3x)dx}{\sqrt{2x^2-x-3}}$$

$$= -\frac{3}{4}\int \frac{d(2x^2-x-3)}{\sqrt{2x^2-x-3}} + \left(1-\frac{3}{4}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x-3}}$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x-3} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x-3}}$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x-3} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{2\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{-24-1}{16}\right)}}$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x-3} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}}}$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x-3} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}}}$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

$$I = -\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x-3} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\left(x-\frac{1}{4}\right) + \sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}}\right| + C$$

1.8.អាំងតេក្រាលមានរាង

$$F(x) = \int \frac{dx}{(Ax+B).\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

យើងតាង $Ax+B = \frac{1}{t} \Longrightarrow Adx = -\frac{dt}{t^2}$ ឬ $dx = -\frac{dt}{At^2}$

ដែល $x = \frac{\frac{1}{t}-B}{A}$ ឬ $t = \frac{1}{Ax+B}$

$$\text{នោះ } F(x)=\int\frac{-\frac{dt}{At^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{a\left(\frac{\frac{1}{t}-B}{A}\right)^2+b\left(\frac{\frac{1}{t}-B}{A}\right)+c}}=\int g(t).dt$$

ឧទាហរណ៍ទី១៖ $F(x)=\int\frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2+3x-1}}$

តាង $x+3=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{1}{x+3}\Rightarrow dx=-\frac{dt}{t^2}$, ដែល $x=\frac{1}{t}-3$

$$\Rightarrow F(x)=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-3\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-3\right)-1}}$$

$$=-\int\frac{dt}{t\sqrt{\left(\frac{1}{t^2}-\frac{6}{t}+9\right)+\frac{3}{t}-9-1}}$$

$$=-\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t}-1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-3t-t^2}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{-\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{-4-9}{4}\right]}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}}}=-\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}}}$$

ប្រើរូបមន្ត $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

$$=-\arcsin\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}}\right)+C\ \ ,t=\frac{1}{x+3}$$

1.8. អាំងតេក្រាលមានរាង

$$F(x)=\int\frac{(Ax+B)dx}{(Cx+D)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

យើងអាចសរសេរ $F(x)=\int\frac{(Cx+D)\frac{A}{C}-\frac{AD}{C}+B}{(Cx+D)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

$$=\frac{A}{C}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{AD}{C}\right)\int\frac{dx}{(Cx+D)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

1.9.អាំងតេក្រាលសនិទាន

គេថា $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ជាអនុគមន៍សនិទានទៀងទាត់ លុះត្រាណា $degP(x)<degQ(x)$ ។

⊕ នៅក្នុងលក្ខខណ្ឌនេះ គេប្រើការបំបែកជាផលបូកងាយ។

ឧទាហរណ៍៖ គណនា $F(x)=\int\frac{x^3-3}{x^2+2}dx$

យើងមាន $\frac{x^3-3}{x^2+2}=\frac{(x^2+2)x-2x-3}{x^2+2}$

$$=x-\frac{2x}{x^2+2}-\frac{3}{x^2+2}$$

យើងបាន $\int\frac{x^3-3}{x^2+2}dx=\int xdx-\int\frac{2x}{x^2+2}dx-3\int\frac{dx}{x^2+2}$

$$=\frac{x^2}{2}-\ln|x^2+2|-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

1.10. ការបំបែករាងកាណូនិចក្នុងអនុគមន៍សនិទានទៀងទាត់

បើ $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ជាអនុគមន៍ប្រភាគសនិទានទៀងទាត់ នោះ

$$Q(x)=(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\dots(x-a_n)^{m_n}[(x-b_1)^2+c_1^2]^{p_1}\dots\dots[(x-b_n)^2+c_n^2]^{p_n}$$

នោះ $f(x)$ អាចសរសេរបំបែកជារាងកាណូនិចដូចខាងក្រោម៖

$$f(x)=\sum_{j=1}^{m_1}\frac{A_{1j}}{(x-a_1)^j}+\dots+\sum_{j=1}^{m_n}\frac{A_{nj}}{(x-a_n)^j}+\sum_{k=1}^{p_1}\frac{B_{1k}x+C_{1k}}{[(x-b_1)^2+c_1^2]}+\cdots+\sum_{k=1}^{p_n}\frac{B_{nk}x+C_{nk}}{[(x-b_n)^2+c_n^2]^m}$$

1.11. អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ចំពោះទម្រង់៖ $\boldsymbol{F(x)=\int \sin^m x.\cos^n x\,dx\ \ ,m\,,n\in\mathbb{Z}}$

ដើម្បីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលប្រភេទនេះ គេចែកវាជា៤ករណីផ្សេងគ្នា ៖

- **ករណីទី១៖** ប្រសិនបើ m ជាចំនួនគត់សេស គេបាន តាង $U=\cos x$
- **ករណីទី២៖** ប្រសិនបើ n ជាចំនួនគត់សេស គេបាន តាង $U=\sin x$
- **ករណីទី៣៖** ប្រសិនបើ m និង n ជាចំនួនគត់គូវិជ្ជមាន យើងអាចនឹងត្រូវប្រើរូបមន្តត្រីកោណមាត្រមួយចំនួន៖

  $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ និង $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

  $\cos p\cos q=\frac{1}{2}[\cos(p+q)+\cos(p-q)]$

  $\sin p\sin q=\frac{1}{2}[\cos(p-q)-\cos(p+q)]$

  $\sin p\cos q=\frac{1}{2}[\sin(p+q)+\sin(p-q)]$
- **ករណីទី៤៖** ប្រសិនបើ m និង n ជាចំនួនគត់គូអវិជ្ជមាន គេបាន តាង $U=\tan x$ ឬ $U=\cot x$

1.12. អាំងតេក្រាលរាង

$$F(x)=\int R(x,\sin x\,,\cos x\,,\ldots)dx$$

យើងត្រូវតាង $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

ដែល ៖ $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$; $\cot x=\frac{1-t^2}{2t}$

ព្រោះ ៖

$$t=\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sin x\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin x\,(1+t^2)$$

$$\Longrightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$ ពិត

$$\Longrightarrow \cos x=\sqrt{1-\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}}=\sqrt{\frac{(1+t^2)^2-4t^2}{(1+t^2)^2}}=\sqrt{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}$$

$$=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$ (ពិត)

$$\Longrightarrow \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{2t}{1-t^2}$$ (ពិត)

និង $\cot x=\dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{1-t^2}{2t}$

1.13. អាំងតេក្រាលរាង

$$F(x)=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx$$

យើងនឹងសរសេរ៖

$$a_1\sin x+b_1\cos x=A(a_2\sin x+b_2\cos x)+B(a_2\cos x-b_2\sin x)$$

ហើយ រកតម្លៃអក្សរ A និង B ។

1.14. អាំងតេក្រាលរាង

$$F(x)=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin^2 x+b_2\cos^2 x+c_2}dx$$

យើងអាចសរសេរ៖

$$F(x) = a_1\int \frac{\sin x}{(b_2-a_2)\cos^2 x+(a_2+c_2)}dx + b_1\int \frac{\cos x\, dx}{(a_2-b_2)\sin^2 x+(b_2+c_2)} + c_1\int \frac{dx}{a_2\sin^2 x+b_2\cos^2 x+c_2}$$

$$= -a_1\int \frac{d(\cos x)}{(b_2-a_2)\cos^2 x+(a_2+c_2)} + b_1\int \frac{d(\sin x)}{(a_2-b_2)\sin^2 x+(b_2+c_2)} + c_1\int \frac{dx}{a_2\sin^2 x+b_2\cos^2 x+c_2}$$

2. រូបមន្តអាំងតេក្រាល (Summary Formula Definite Integral)

(1). $\int udv = uv - \int vdu$

(2). $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C\,, a \neq 1\,, a > 0$

(3). $\int \cos u\, du = \sin u + C$

(4). $\int \sin u\, du = -\cos u + C$

(5). $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C\,, (n \neq -1)$

(6). $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

(7). $\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left[\frac{ax+b}{m+2} - \frac{b}{n+1}\right] + C\,, n \neq -1, -2$

(8). $\int \frac{x}{ax+b}dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

(9). $\int \frac{x}{(ax+b)^2}dx = \frac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right] + C$

(10). $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C$

(11). $\int \left(\sqrt{ax+b}\right)^n dx = \frac{2}{n}\frac{\left(\sqrt{ax+b}\right)^{n+2}}{n+2} + C\,, n \neq 2$

(12). $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

(13). (a). បើ $b<0$: $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C$

(b). បើ $b>0$: $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C$

(14). $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

(15). $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

(16). $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

(17). $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

(18). $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

(19). $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2a^3}\int \frac{dx}{a^2-x^2}$

(20). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{2} + C = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$

(21). $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C$

(22). $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{x(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + C$

(23). $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\sinh^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$

(24). $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}dx = \sinh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$

(25). $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = -\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C$

(26). $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

(27). $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C$

$$(28).\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$$

$$(29).\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$$

$$(30).\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}(a^2-2x^2)+C$$

$$(31).\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$$

$$(32).\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=-\sin^{-1}\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C$$

$$(33).\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

$$(34).\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$$

$$(35).\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$$

$$(36).\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\cosh^{-1}\frac{x}{a}+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

$$(37).\int \sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}+C$$

$$(38).\int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n}{n+1}-\frac{na^2}{n+1}\int \left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}dx \quad ,n\neq 1$$

$$(39).\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n}=\frac{x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{2-n}}{(2-n)a^2}-\frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n-2}} \quad ,$$

$n\neq 2$

$$(40).\int x\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^n dx=\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)^{n+2}}{n+2}+C$$

$$(41).\int x^2\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\cosh^{-1}\frac{x}{a}+C$$

$$(42).\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+C$$

$$(43).\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = \cosh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C$$

$$(44).\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C$$

$$(45).\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$$

$$(46).\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$$

$$(47).\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

$$(48).\int \sqrt{2ax-x^2}dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

$$(49).\int \left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n dx = \frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int \left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2} dx$$

$$(50).\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^n}$$

$$= \frac{(x-a)\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)^{n-2}}$$

$$(51).\int x\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)dx = \frac{(x+a)(2x-3a)\left(\sqrt{2ax-x^2}\right)}{6} + \frac{a^3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)$$

$$(52).\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}dx = \sqrt{2ax-x^2} + a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

$$(53).\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}dx = -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

$$(54).\int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}dx = a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + \sqrt{2ax-x^2} + C$$

$$(55).\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C$$

$$(56).\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$(57).\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$(58).\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{a} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

$$(59).\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{a} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

$$(60).\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax\,.\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx$$

$$(61).\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax\,.\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx$$

$$(62).(a).\int \sin ax\,.\cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)\,x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C$$

$$,a^2 \neq b^2$$

$$(b).\int \sin ax \sin bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C\,,a^2 \neq b^2$$

$$(c).\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C\,,a^2 \neq b^2$$

$$(63).\int \sin ax \cos ax\,dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$$

$$(64).\int \sin^n ax \cos ax\,dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a} + C\ \ ,n \neq -1$$

$$(65).\int \frac{\cos ax}{\sin ax}dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$$

$$(66).\int \cos^n ax \sin ax\,dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C\,,n \neq -1$$

$$(67).\int \frac{\sin ax}{\cos ax}dx = \int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$$

$$(68).\int \sin^n ax \cos^m ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)}$$

$$+\frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} ax \cos^m ax\,dx\ \ ,n \neq -m\ (if\ n=-m, use\ N^0 86)$$

$$(69).\int \sin^n ax \cos^m ax\,dx = \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(m+n)}$$

$$+\frac{m-1}{m+1}\int \sin^n ax \cos^{m-2} ax\,dx\ \ \ ,m \neq -n\ (if\ m=-n\,, use\ N^0 87)$$

$$(70).\int \frac{dx}{b+c\sin ax} = -\frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)\right] + C\ \ ,$$

$$b^2 > c^2$$

$$(71).\int \frac{dx}{b+c\sin ax} = -\frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{c+b\sin ax+\sqrt{c^2-b^2}\cos ax}{b+c\sin ax}\right|$$

$+C \;,\; b^2 < c^2$

(72). $\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+C$

(73). $\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)+C$

(74). $\int \frac{dx}{b+c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right]+C \,, b^2 > c^2$

(75). $\int \frac{dx}{b+c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{c+b\cos ax+\sqrt{c^2-b^2}\sin ax}{b+c\cos ax}\right|+C$

$b^2 < c^2$

(76). $\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2}+C$

(77). $\int \frac{dx}{(1-\cos ax)} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2}+C$

(78). $\int x\sin ax\;\; dx = \frac{1}{a^2}\sin ax-\frac{x}{a}\cos ax+C$

(79). $\int x\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax+\frac{x}{a}\sin ax+C$

(80). $\int x^n\sin ax\, dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$

(81). $\int x^n\cos ax\, dx = \frac{x^n}{a}\sin ax-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\, dx$

(82). $\int \tan ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax|+C$

(83). $\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax|+C$

(84). $\int \tan^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax-x+c$

(85). $\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax-x+C$

(86). $\int \tan^n ax\, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)}-\int \tan^{n-2} ax\, dx \quad , \qquad n \neq 1$

(87). $\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)}-\int \cot^{n-2} ax\, dx \;, \qquad n \neq 1$

(88). $\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax+\tan ax|+C$

(89). $\int cosec\, ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|cosec\, ax + cotan\, ax| + C$

(90). $\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

(91). $\int cosec^2 ax dx = -\frac{1}{a} cotan\, ax + C$

(92). $\int \sec^n ax\, dx = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\, dx \ , n \neq 1$

(93). $\int cosec^n ax dx$

$$= -\frac{cosec^{n-2} ax cotan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int cosec^{n-2} ax dx \ , n \neq 1$$

(94). $\int \sec^n ax \tan ax\, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C \ , n \neq 0$

(95). $\int cosec^n ax. cotan ax\, dx = -\frac{cosec^n ax}{na} + C \ , \quad n \neq 0$

(96). $\int \sin^{-1} ax\, dx = x\sin^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + C$

(97). $\int \cos^{-1} ax\, dx = x\cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + C$

(98). $\int \tan^{-1} ax\, dx = x\tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2) + C$

(99). $\int x^n \sin^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx \ ,$

$n \neq -1$

(100). $\int x^n \cos^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx \ ,$

$n \neq -1$

(101). $\int x^n \tan^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+a^2x^2}}dx \ ,$

$n \neq -1$

(102). $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

(103). $\int b^{ax}dx = \frac{1}{a}.\frac{b^{ax}}{\ln b} + C \ , \quad b > 0 \ , b \neq 1$

(104). $\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$

(105). $\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax} dx$

(106). $\int x^n b^{ax} dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b}\int x^{n-1} b^{ax} dx\, , b > 0\, , b \neq 1$

(107). $\int e^{ax} \sin bx\ \ dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$

(108). $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$

(109). $\int \ln ax\, dx = x \ln ax - x + C$

(110). $\int x^n (\ln ax)^m dx = \frac{x^{n+1}(\ln ax)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n (\ln ax)^{m-1} dx$,

$n \neq -1$

(111). $\int \frac{(\ln ax)^m}{x} dx = \frac{(\ln ax)^{m+1}}{m+1} + C\, , m \neq -1$

(112). $\int \frac{dx}{x \ln ax} = \ln|\ln ax| + C$

(113). $\int \sinh ax\, dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$

(114). $\int \cosh ax\, dx = \frac{1}{a}\sinh ax + C$

(115). $\int \sinh^2 ax\, dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$

(116). $\int \cosh^2 ax\, dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$

(117). $\int \sinh^n ax\, dx = \frac{\sinh^{-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2} ax\, dx$, n

$\neq 0$

(118). $\int \cosh^n ax\, dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\, dx$

$, n \neq 0$

(119). $\int x. \sinh ax\, dx = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\sinh ax + C$

(120). $\int x. \cosh ax\, dx = \frac{x}{a}\sinh ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C$

(121). $\int x^n \sinh ax\, dx = \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1} \cosh ax\, dx$

(122). $\int x^n \cosh ax\,dx = \frac{x^n}{a}\sinh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sinh ax\,dx$

(123). $\int \tan ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax) + C$

(124). $\int \coth ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sinh ax| + C$

(125). $\int \tanh^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\tanh ax + C$

(126). $\int \cot^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\cot ax + C$

(127). $\int \tanh^n ax\,dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \tanh^{n-2} ax\,dx \ , n \neq 1$

(128). $\int \coth^{\mathrm{n}} ax\,dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \coth^{n-2} ax\,dx \ , n \neq 1$

(129). $\int \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{1}{a}\sin^{-1}(\tanh ax) + C$

(130). $\int cosech\ ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right| + C$

(131). $\int \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tanh ax + C$

(132). $\int cosech^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\coth ax + C$

(133). $\int \operatorname{sech}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\,dx$,
$n \neq 1$

(134). $\int cosech^n ax\,dx = -\frac{cosech^{n-2} ax \coth ax}{a(n-1)}$
$-\frac{n-2}{n-1}\int cosech^{n-2} ax dx \quad , \qquad n \neq 1$

(135). $\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax\,dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C \quad , \qquad n \neq 0$

(136). $\int cosech^n ax \coth ax\,dx = -\frac{cosech^n ax}{na} + C \ , \qquad n \neq 0$

(137). $\int e^{ax}\sinh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C \ , \qquad a^2 \neq b^2$

(138). $\int e^{ax}\cosh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \qquad a^2 \neq b^2$

$$(139).\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx = T(n) = (n-1)!\,, \qquad n > 0$$

$$(140).\int_0^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ , \qquad x > 0$$

$$(141).\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n} \text{ បើ } n \text{ ជាចំនួនគត់គូ } \geq 2 \\ \dfrac{2.4.6\ldots(n-1)}{3.5.7\ldots n} \text{ បើ } n \text{ ជាចំនួនគត់សេស } \geq 3 \end{cases}$$

លំហាត់ទី០១៖គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$(1).\int x(x+1)^{2017}dx$; $(2).\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$; $(3).\int \frac{dx}{a^2-x^2}$

$(4).\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$; $(5).\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

$(6).\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $(7).\int \frac{dx}{1+x^2}$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$(1).\int x(x+1)^{2017}dx$

$$= \int (x+1-1)(x+1)^{2017}dx$$

$$= \int (x+1)^{2018}dx - \int (x+1)^{2017}dx$$

(តាង $t = x+1 \Rightarrow dt = dx$)

$$\Rightarrow \int x(x+1)^{2017}dx = \int t^{2018}dt - \int t^{2017}dt$$

$$= \frac{1}{2019}t^{2019} - \frac{1}{2018}t^{2018} + C$$

$$= \frac{1}{2019}(x+1)^{2019} - \frac{1}{2018}(x+1)^{2018} + C$$

ដូច្នេះ $\int x(x+1)^{2017}dx = \frac{1}{2019}(x+1)^{2019} - \frac{1}{2018}(x+1)^{2019} + C$ $, C \in \mathbb{R}$

$(2).\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

តាង $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \int \frac{2dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}$$

$$= 2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t + C$$

$$= 2\arcsin(\sqrt{x}) + C\ ,\qquad (C \text{ ជាចំនួនថេរ })$$

ដូច្នេះ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = 2\arcsin(\sqrt{x}) + C$, (C ជាចំនួនថេរ)

(3). $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2}$

$$= \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)}$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a-x+a)}{(a-x)(a+x)}dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{x+a}{(a-x)(a+x)}dx - \frac{1}{2a}\int \frac{x-a}{(a-x)(a+x)}dx$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a-x} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+x}$$

$\left(\begin{array}{l}\text{តាង } t = a - x \Longrightarrow dt = dx \\ u = a + x \Longrightarrow du = dx\end{array}\right)$

$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|t| + \ln|u|) + C$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|a-x| + \ln|a-x|)$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\quad ,\qquad (C \text{ ជាចំនួនថេរ})$$

ដូច្នេះ $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, (C ជាចំនួនថេរ)

(4). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

តាង $x = \dfrac{a}{\sin t} \Longrightarrow dx = -\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{-a\cos t}{\sin^2 t \sqrt{\left(\frac{a}{\sin t}\right)^2 - a^2}} dt$$

$$= -a \int \frac{\cos t \sin t}{a \sin^2 t \sqrt{1 - \sin^2 t}} dt$$

$$= -\int \frac{1}{\sin t} dt = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right| + C$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos\left(\arcsin\frac{a}{x}\right)}{1 - \cos\left(\arcsin\frac{a}{x}\right)} \right| + C \ , \qquad (C \text{ ជាចំនួនថេរ})$$

ដូច្នេះ $\ln \left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos\left(\arcsin\frac{a}{x}\right)}{1 - \cos\left(\arcsin\frac{a}{x}\right)} \right| + C$, (C ជាចំនួនថេរ)

(5). $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

តាង $x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t \, dt$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - (a \sin t)^2} \times a \cos t \, dt$$

$$= \int a\sqrt{1 - \sin^2 t} \times a \cos t \, dt$$

$$= a^2 \int \cos^2 t \, dt$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C$$

(ដោយ $\sin t = \frac{x}{a} \Rightarrow t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$)

យើងបាន $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{4} \sin 2\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) + C$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\sin 2\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right) + C$$

ដូច្នេះ $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{4}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\sin 2\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right] + C$

(6). $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(តាង $x = \sin t$ ដែល $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ នោះ $dx = \cos t\,dt, t = \arcsin x$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$= \int \frac{\cos t\,dt}{\cos t} = \int dt = t + C = \arcsin c + C\,, C \in \mathbb{R}$$

ដូច្នេះ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C\,, C \in \mathbb{R}$

(7). $\int \frac{dx}{1+x^2}$

តាង $x = \tan t$ ដែល $\left(-\frac{\pi}{2} < 1 < \frac{\pi}{2}\right)$ នោះ $dx = (1 + \tan^2 t)dt$

($t = \arctan x$)

យើងបាន $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{(1+\tan^2 t)dt}{1+(\tan^2 t)}$

$$= \int dt = t + C = \arctan x + C\,, C \in \mathbb{R}$$

ដូច្នេះ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + \mathrm{C}\,, \mathrm{C} \in \mathbb{R}$

លំហាត់ទី០២៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

(1). $I = \int \frac{dx}{\sin x}$; (2). $J = \int \frac{dx}{\cos x}$; (3). $K = \int \frac{dx}{\cos^6 x}$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាអាំងតេក្រាល

(1). $I = \int \frac{dx}{\sin x}$

$$= \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x}$$

$$= -\int \frac{-\sin x\,dx}{1-\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|$$

ដូច្នេះ $I = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C\,,$ C ជាចំនួនថេរ

$$(2).J = \int \frac{dx}{\cos x}$$

$$= \int \frac{dx}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$= \int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$$

ដូច្នេះ $J = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C\,,$ C ជាចំនួនថេរ

$$(3).\ K = \int \frac{dx}{\cos^6 x}$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{\cos^4 x}\right)dx$$

$$= \int (1+\tan^2 x)^2 \times \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int (1+2\tan^2 x+\tan^4 x) \times \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$= \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C\ ,\qquad C \text{ ជាចំនួនថេរ}$$

ដូច្នេះ $K = \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C\,,$ C ជាចំនួនថេរ

លំហាត់ទី០៣៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$I = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}\quad ;\quad J = \int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$I=\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx \qquad ; \qquad J=\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

យើងយក

$$\begin{cases} I+J=\int \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int dx & (1) \\ J-I=\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx & (2) \end{cases}$$

យើងយក $(1)+(2)$ យើងបាន

$$2J=\int dx+\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=x+\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$$

តាង $t=\cos x+\sin x \Longrightarrow dt=(\cos x-\sin x)dx$

$$2J=x+\int \frac{dt}{t}$$

$$=x+\ln|t|+C$$

$$=x+\ln|\cos x+\sin x|+C$$

$$J=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|+C$$

ដោយ $I+J=\int dx$ នោះ

$$I+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|=\int dx$$

$$I=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|+C \quad (C \text{ ជាចំនួនថេរ})$$

ដូច្នេះ $\boxed{I=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln|\cos x+\sin x|+C \quad (C \text{ ជាចំនួនថេរ})}$

លំហាត់ទី០៤. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2|\sin x|}{2006^x+1}dx$$

ដំណោះស្រាយ៖

យើងតាង $f(x)=x^2|\sin x|$ ជាអនុគមន៍គូ ហើយជាប់លើចន្លោះ

$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ នោះយើងបាន

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2|\sin x|}{2006^x+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2|\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$$

តាមរូបមន្ត $\int x^n\sin ax\,dx=-\frac{x^n}{a}\cos ax+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx$

យើងបាន $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2|\sin x|}{2006^x+1}dx=[-x^2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$

$$=2[x\sin x-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\frac{\pi}{2}\right)-2=\pi-2$$

ឬ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$ តាង $\begin{cases} u=x^2\Rightarrow du=2x\\ dv=\sin x\Rightarrow v=-\cos x\end{cases}$

យើងបាន $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx=[\mathrm{x}^2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$

$\begin{pmatrix}\text{តាង } t=x\ \Rightarrow dt=dx\\ ds=\cos x\Rightarrow s=\sin x\end{pmatrix}$

យើងបាន $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx=2[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$$=\pi+\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos 0\right)2=\pi-2$$

ដូច្នេះ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2|\sin x|}{2006^x+1}dx = \pi - 2$

លំហាត់ទី០៤៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$A = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right)dx \ , \quad B = \int \frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}}dx \ , C = \int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាអាំងតេក្រាល

$$A = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right)dx$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{dx}{x^3} + 3\int \frac{dx}{x^4}$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + c \, , c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $A = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + c \, , c \in \mathbb{R}$

$$B = \int \frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$$

$$= \int \frac{(1-x)(1-2x+x^2)}{x^{\frac{1}{3}}}dx$$

$$= \int \frac{1-2x+x^2-x+2x^2-x^3}{x^{\frac{1}{3}}}dx$$

$$= \int \frac{-x^3+3x^2-3x+1}{x^{\frac{1}{3}}}dx$$

$$= \int \left(-x^{3-\frac{1}{3}} + 3x^{2-\frac{1}{3}} - 3x^{1-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$$

$$= \int \left(-x^{\frac{8}{3}} + 3x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$$

$$= -\frac{x^{\frac{8}{3}+1}}{\frac{8}{3}+1} + \frac{3x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} - \frac{3x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c$$

$$= -\frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} + \frac{9}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c\,, c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $B = -\frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} + \frac{9}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c\,, c \in \mathbb{R}$

$$C = \int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}}dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}dx$$

$$= \int x^{\frac{7}{8}}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1} + c = \frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}} + c\,, c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $C = \frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}} + c = \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + c\,, c \in \mathbb{R}$

លំហាត់ទី០៥៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$I = \int \frac{dx}{x(x+1)}$; $J = \int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$; $K = \int \frac{dx}{x^2-3x+2}$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាអាំងតេក្រាល

$$I = \int \frac{dx}{x(x+1)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{(x+1)'dx}{x+1}$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + c \ \ , c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $I = \ln|x| - \ln|x+1| + c \, , c \in \mathbb{R}$

រូបមន្ត ៖ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$J = \int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{(x-1)'}{(x-1)} dx - \frac{1}{4} \int \frac{(x+3)'}{x+3} dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+3| + c \, , c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $J = \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+3| + c \, , c \in \mathbb{R}$

$$K = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2 - x - 2x + 2}$$

$$= \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$$

$$= -\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-2)} \right) dx$$

$$= -\int \left[\frac{(x-1)'}{(x-1)} - \frac{(x-2)'}{(x-2)} \right] dx$$

$$= -(\ln|x-1| - \ln|x-2|) + c \, , c \in \mathbb{R}$$

$$= -\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + c$$

ដូចនេះ $K = -\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + c \, , c \in \mathbb{R}$

លំហាត់ទី០៦៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad ; \quad J = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} \\ &= \tan x - \cot x + c \, , c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $I = \tan x - \cot x + c \, , c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 \int \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= \tan x - \cot x - 2\tan x + c \\ &= -\tan x - \cot x + c \, , c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ $J = -\tan x - \cot x + c \, , c \in \mathbb{R}$

លំហាត់ទី០៧៖ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម

$$I = \int 2\sin^2 x \, dx \quad ; \quad J = \int 4\cos^3 x \, dx \quad ; \quad K = \int 4\tan^2 x \, dx$$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាអាំងតេក្រាល

$I = \int 2\sin^2 x \, dx$ ដោយ $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$$= 2\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$= \int (1-\cos 2x)dx$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c\,, c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $I = \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c\,, c \in \mathbb{R}$

$$J = \int 4\cos^3 x\, dx$$

ដោយ $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

$$= \int (3\cos x + \cos 3x)dx$$

$$= 3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $J = 3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + c \quad , c \in \mathbb{R}$

$$K = \int 4\tan^2 x\, dx$$

$$= \int 4(\tan^2 x + 1)dx - 4\int dx$$

$$= 4\tan x - 4x + c \ \ , c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $K = 4\tan x - 4x + c\,, c \in \mathbb{R}$

លំហាត់ទី០៨៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$I = \int (\tan x - \cot x)^2 dx \quad ; \quad J = \int \sqrt{\tan^4 x + \cot^4 x + 2}dx$$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$I = \int (\tan x - \cot x)^2 dx$$

$$= \int (\tan^2 x - 2\tan x \cot x + \cot^2 x)dx$$

$$= \int (\tan^2 x - 2 + \cot^2 x)dx$$

$$= \int (\tan^2 x + 1)dx + \int (\cot^2 x + 1)dx - 4\int dx$$

$$= \tan x - \cot x - 4x + c \,, c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $I = \tan x - \cot x - 4x + c \,, c \in \mathbb{R}$

$$J = \int \sqrt{\tan^4 x + \cot^4 x + 2}dx$$

$$= \int \left(\sqrt{(\tan^2 x + \cot^2 x)^2}\right) dx$$

$$= \int (\tan^2 x + \cot^2 x)dx$$

$$= \int (\tan^2 x + 1)dx + \int (\cot^2 x + 1)dx - 2\int dx$$

$$= \tan x - \cot x - 2x + c \ \,, c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $J = \tan x - \cot x - 2x + c \ \,, c \in \mathbb{R}$

លំហាត់ទី០៩ ៖ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម

ក) $\int \frac{3\cos 2x - 2\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$; ខ) $\int \left(\frac{4\sin^2 x + 3\cos 2x}{\sin^2 x}\right) dx$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម

ក) $\int \frac{3\cos 2x - 2\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$

$$= \int \frac{3(2\cos^2 x - 1) - 2\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{6\cos^2 x - 3 - 2\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{4\cos^2 x - 3}{\cos^2 x} dx$$

$$= 4\int dx - 3\int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= 4x - 3\tan x + c\,,c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\displaystyle\int \frac{3\cos 2x - 2\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = 4x - 3\tan x + c\,,c \in \mathbb{R}$

ខ) $\displaystyle\int \left(\frac{4\sin^2 x + 3\cos 2x}{\sin^2 x}\right)dx$

$$= \int \left(\frac{4\sin^2 x + 3(1 - 2\sin^2 x)}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{4\sin^2 x + 3 - 6\sin^2 x}{\sin x}\right)dx$$

$$= \int \frac{3 - 2\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$$

$$= 3\int \frac{dx}{\sin^2 x} - 2\int dx$$

$$= -3\cot x - 2x + c\,,c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\displaystyle\int \left(\frac{4\sin^2 x + 3\cos 2x}{\sin^2 x}\right)dx = -3\cot x - 2x + c\,,c \in \mathbb{R}$

លំហាត់ទី១០៖ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ក. $\displaystyle f(x) = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x}$; ខ. $\displaystyle g(x) = \int \sin^4 x\,dx$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ក. $\displaystyle f(x) = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x}$

$$= \int \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= \tan x - \cot x + c\,,c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $f(x) = \tan x - \cot x + c\,, c \in \mathbb{R}$

ខ. $g(x) = \int \sin^4 x\, dx$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c\,, c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

ដូចនេះ $g(x) = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

លំហាត់ទី១១៖

1. គណនាអាំងតេក្រាល $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx$ ។
2. គេយក $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$ និង $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$ ។

   គណនា $I + J$,$I - J$ ។រួចទាញរក I និង J ។

ដំណោះស្រាយ៖

1. គណនាអាំងតេក្រាល

គេមាន $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\, dx$

តាង $\begin{cases} u = x^2 \ , du = 2xdx \\ dv = \cos 2x \ , v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

យើងបាន៖

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\, dx = \frac{\mathrm{x}^2}{2}\sin 2a\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\, dx \quad ,(1)$$

គណនា $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\, dx \quad$,តាង $\begin{cases} u = x, du = dx \\ dv = \sin 2x\, , v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

យើងបាន $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\, dx = -\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$

$$= \frac{\pi}{4} \ ,(2)$$

យក (2) ជំនួសទៅក្នុង (1) យើងបាន

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\, dx = \frac{\mathrm{x}^2}{2}\sin 2a\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\, dx$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\, dx = -\frac{\pi}{4}}$

2. គណនា $I + J \quad , I - J$

ដោយ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x\, dx$ និង $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x\, dx$

យើងបាន $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \cos^2 x + x^2 \sin^2 x) dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos^2 x + \sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi^3}{8}}{3} = \frac{\pi^3}{24}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2\cos^2 x - x^2\sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos^2 x - \sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\, dx$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{I + J = \frac{\pi^3}{24} \text{ និង } I - J = -\frac{\pi}{4}}$

+ទាញរក I និង J

យើងបាន $\begin{cases} I + J = \frac{\pi^3}{24} \\ I - J = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

នោះ $2I = \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{\pi^3 - 6\pi}{24}$$

$$I = \frac{\pi^3 - 6\pi}{48}$$

នាំឲ្យ $J = \frac{\pi^3 + 6\pi}{48}$

ដូច្នេះ $I = \frac{\pi^3 - 6\pi}{48}$ និង $J = \frac{\pi^3 + 6\pi}{48}$

លំហាត់ទី១២. ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពខាងក្រោម៖

$$\frac{\pi}{16} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 3\cos^3 x} < \frac{\pi}{10}$$

ដំណោះស្រាយ៖ ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

យើងតាង $f(x) = \frac{1}{5 + 3\cos^3 x}$ ជាប់លើចន្លោះ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ចំពោះ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos x \leq 1$

$$0 \leq \cos^3 x \leq 1$$

$$0 \leq 3\cos^3 x \leq 3$$

$$5 \leq 5 + 3\cos^3 x \leq 8$$

$$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{5 + 3\cos^3 x} \leq \frac{1}{5}$$

យើងបាន $\int_0^{\pi} \frac{dx}{8} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 3\cos^3 x} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5}$

$$\frac{1}{8}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 3\cos^3 x} \leq \frac{1}{5}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\pi}{16} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 3\cos^3 x} \leq \frac{\pi}{10} \quad \text{ពិត}$$

ដូច្នេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១៣. ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពខាងក្រោម៖

$$\ln 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \frac{\pi}{4}$$

ដំណោះស្រាយ៖ ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

ចំពោះ $\forall x \in [0,1] \quad : \quad 0 \le x \le \sqrt{x} \le 1$

$$x^2 \le x\sqrt{x} \le x$$

$$1+x^2 \le 1+x\sqrt{x} \le 1+x$$

$$\frac{1}{1+x} \le \frac{1}{1+x\sqrt{x}} \le \frac{1}{1+x^2}$$

យើងបាន $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int_0^1 \frac{d(1+x)}{1+x} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$[\ln|x+1|]_0^1 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < [\arctan x]_0^1$$

$$\ln 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \frac{\pi}{4} \quad \text{ពិត}$$

ដូច្នេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

លំហាត់ទី១៤. ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពខាងក្រោម៖

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}\, dx < \frac{\pi^2}{32}$$

ដំណោះស្រាយ៖ ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព.

យើងតាង $f(x) = x\sqrt{\tan x}$ ជាប់លើចន្លោះ $\left[0\ ,\frac{\pi}{4}\right]$

ចំពោះ $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $0 \le \tan x \le 1$

$$0 \le \sqrt{\tan x} \le 1$$

$$0 \le x\sqrt{\tan x} \le x$$

យើងបាន $0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx$

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + x\sqrt{x}} < \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}$$

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}\, dx < \frac{\pi^2}{32}$$ ពិត

ដូច្នេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

លំហាត់ទី១៥. ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពខាងក្រោម៖

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt[4]{1 + x^4} + \sqrt[3]{1 + x^3} + \sqrt{1 + x^2} + \sqrt[4]{1 - x^4} + \sqrt[3]{1 - x^3} + \sqrt{1 - x^2}\right) dx \le 12$$

ដំណោះស្រាយ៖ ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព.

យើងមាន៖

$$\sqrt[4]{1 + x^4} = \sqrt[4]{(1 + x^4) \times 1 \times 1 \times 1} \le \frac{(1 + x^4) + 1 + 1 + 1}{4} = \frac{x^4 + 4}{4}$$

$$\sqrt[3]{1 + x^3} = \sqrt[3]{(1 + x^3) \times 1 \times 1} \le \frac{(1 + x^3) + 1 + 1}{3} = \frac{x^3 + 3}{3}$$

$$\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{(1 + x^2) \times 1} \le \frac{(1 + x^2) + 1}{2} = \frac{x^2 + 2}{2}$$

$$\sqrt[4]{1 - x^4} = \sqrt{(1 - x^4) \times 1 \times 1 \times 1} \le \frac{(1 - x^4) + 1 + 1 + 1}{4} = \frac{4 - x^4}{4}$$

$$\sqrt[3]{1 - x^3} = \sqrt{(1 - x^3) \times 1 \times 1} \le \frac{(1 - x^3) + 1 + 1}{3} = \frac{3 - x^3}{3}$$

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1-x^2)\times 1}\leq\frac{(1-x^2)+1}{2}=\frac{2-x^2}{2}$$

យើងបាន៖

$$\sqrt[4]{1+x^4}+\sqrt[3]{1+x^3}+\sqrt{1+x^2}+\sqrt[4]{1-x^4}+\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt{1-x^2}$$
$$\leq\frac{x^4+4}{4}+\frac{4-x^4}{4}+\frac{x^3+3}{3}+\frac{3-x^3}{3}+\frac{x^2+2}{2}+\frac{2-x^2}{2}$$
$$\leq 1+1+1+1+1+1=6$$

$$I\leq\int_{-1}^{1}6dx=[6x]_{-1}^{1}=6+6=12$$

នោះ $I\leq 12$ ពិត

ដូច្នេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

លំហាត់ទី១៦. ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$(1).F(x)=\int\frac{dx}{x^2+x+1}$; $(2).F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាអាំងតេក្រាល.

$$(1).F(x)=\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$
$$=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4-1}{4}}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$
$$=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+C$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)+C\ ,C\in\mathbb{R}$$

ដូច្នេះ $\mathrm{F(x)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C \ , \qquad C \in \mathbb{R}$

$$(2).F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(-x - \frac{1}{2(-1)}\right)^2 + \frac{-4-(-1)^2}{4(-1)^2}}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(-x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}}$$

$$= -\int \frac{d\left(-x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(-x + \frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2}}}$$

$$= \arcsin \frac{\left(-x + \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = \arcsin \frac{-2x+1}{\sqrt{5}} + C \ , C \in \mathbb{R}$$

ដូច្នេះ $F(x) = \arcsin\left(\frac{-2x+1}{\sqrt{5}}\right) + C \ , C \in \mathbb{R}$

ឯកសារយោង

1. សៀវភៅ វិភាគចំនួនពិតភាគ១ (លោកគ្រូ សួន សូវ៉ាន់)
2. សៀវភៅ លំហាត់សម្រាប់គ្រូ និងសិស្សមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិភាគទី១ ដល់ទី១៥
3. ឯកសារនានាតាមបណ្ដាញសង្គម Facebook , Google , ...