១២

KIM SOKUN

MASTER OF MATHEMATICS (CIMPA)

រូបមន្តគណិតវិទ្យា ១០-១១-១២

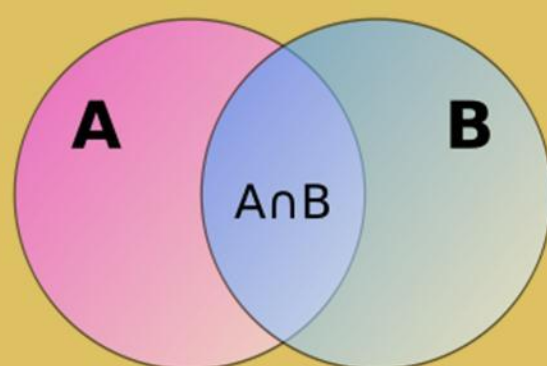
$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

គីម សុគន្ធ

១១

១០



WEBSITE math24.wordpress.com

ជំពូកទី០១ តក្កវិទ្យា

១_សំណើ

និយមន័យ

_ សំណើ គឺជាអំណះអំណាងទាំងឡាយណាដែលគេអាចសម្រេចថាពិត ឬក៏ មិនពិត ។

_ គេតាងឈ្មោះនៃសំណើដោយអក្សរ **p , q , r , s ,....** ។

_ បើ **p** ជាសំណើពិតនោះ **p** មានតម្លៃភាពពិតស្មើនឹង **1** គឺ ត.**(p) = 1**

_ បើ **p** ជាសំណើមិនពិតនោះ **p** មានតម្លៃភាពពិតស្មើនឹង **0** គឺ ត.**(p) = 0**

២_ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

ក.ឈ្នាប់និង $(\wedge)$

_ គេកំនត់សរសេរ $p \wedge q$ អានថា **p** និង **q**

_ សំណើ $p \wedge q$ ពិតតែក្នុងករណីសំណើ **p** និង **q** ពិត

ខ.ឈ្នាប់ឬ $(\vee)$

_ គេកំនត់សរសេរ $p \vee q$ អានថា **p** ឬ **q**

_ សំណើ $p \forall q$ មិនពិតតែក្នុងករណីសំណើ **p** និង **q** មិនពិតទាំងពីរ

គ.ឈ្នាប់មិន $(\overline{})$

- គេកំនត់សរសេរ $\bar{p}$ អានថា មិន p
- សំណើ p និង សំណើ $\bar{p}$ មានតម្លៃភាពពិតខុសគ្នា ។

ឃ.ឈ្នាប់នាំឱ្យ $(\Rightarrow)$

- គេកំនត់សរសេរ $p \Rightarrow q$ អានថា p នាំឲ្យ q
- សំណើ $p \Rightarrow q$ មិនពិតតែក្នុងករណីសំណើ p ពិត និង q មិនពិត ក្រៅពីនេះវាជាសំណើពិត ។

✍ p ជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឲ្យ q ។

✍ q ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ដើម្បីឲ្យ p ។

ង.ឈ្នាប់សមមូល $(\Leftrightarrow)$

- គេកំនត់សរសេរ $p \Leftrightarrow q$ អានថា p សមមូល q
- សំណើ $p \Leftrightarrow q$ ពិតតែក្នុងករណីដែលសំណើ p និងសំណើ q មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា ។

✍ p ជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឲ្យ q ។

- ជាទូទៅ $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

៣_ប្រភេទនៃសម្រាយបញ្ជាក់

ក. សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់

ប្រភេទនៃសម្រាយបញ្ជាក់នេះគឺជាការស្រាយបញ្ជាក់ត្រង់ៗទៅតាមអ្វីដែលគេចង់បាន ។

ខ. សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីសម្ពតិកម្ម

របៀបដោះស្រាយ

ឧបមាថា គេចង់បង្ហាញសំណើ $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ ពិត

- ជំហ៊ានទី១ ត្រូវកំនត់សំណើ $\mathbf{p}$ និង សំណើ $\mathbf{q}$ ឲ្យបានត្រឹមត្រូវ។
- ជំហ៊ានទី២ ត្រូវកំនត់សំណើ $\overline{\mathbf{p}}$ និងសំណើ $\overline{\mathbf{q}}$ ។
- ជំហ៊ានទី៣ គេផ្តើមពី $\overline{\mathbf{q}}$ បញ្ជាក់រហូតគេបានសំណើ $\overline{\mathbf{p}}$ ដែលជាសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម គឺមានន័យថាគេបានបង្ហាញថា $\overline{\mathbf{q}} \Rightarrow \overline{\mathbf{p}}$ ពិត ដូចនេះគេបានសំណើ $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ ពិត ។

គ. សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត

របៀបដោះស្រាយ

- ជំហ៊ានទី១ តាង $\mathbf{p}$ ជាសំណើដែលត្រូវបង្ហាញ ។
- ជំហ៊ានទី២ ត្រូវកំនត់សំណើ $\overline{\mathbf{p}}$ ។
- ជំហ៊ានទី៣ ឧបមាថាសំណើ $\overline{\mathbf{p}}$ ពិត រួចបកស្រាយបន្តបន្ទាប់រហូត

ដល់បានលទ្ធផលផ្ទុយពីទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យា ។

គេបានសំណើ $\overline{p}$ មិនពិត ។

ដូចនេះសំណើ p ពិត (ព្រោះតម្លៃភាពពិតរវាងសំណើ p និង $\overline{p}$ មានតម្លៃផ្ទុយគ្នា) ។

ឃ. សម្រាយបញ្ជាក់តាមទ្វេលក្ខខណ្ឌ

របៀបដោះស្រាយ

- ជំហ៊ានទី១ បង្ហាញលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ $p \Rightarrow q$
- ជំហ៊ានទី២ បង្ហាញលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ $q \Rightarrow p$

ខ. សម្រាយបញ្ជាក់តាមឧទាហរណ៍ផ្ទុយ

វិធីនេះតម្រូវឲ្យគេរកឧទាហរណ៍មួយមកបញ្ជាក់ថាសំណើដែលត្រូវបង្ហាញជាសំណើមិនពិត ។

ជំពូកទី០២

សំណុំ

✍ សំណុំ គឺជាបណ្តុំនៃវត្ថុ ដែលកំនត់ដោយលក្ខខណ្ឌជាក់លាក់ ។

✍ ចំនួនធាតុនៃសំណុំ **A** តាងដោយ **n(A)** ។

✍ សំណុំទទេ គឺជាសំណុំដែលគ្មានធាតុសោះ ហើយតាងដោយ ϕ ។

✍ ការកំនត់សំណុំមានពីររបៀប ៖ កំនត់តាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ និង កំនត់តាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុ ។

✍ សំណុំរាប់អស់ជាសំណុំដែលមានចំនួនធាតុជាចំនួនកំនត់ ។ សំណុំអនន្តជាសំណុំដែលមានចំនួនធាតុច្រើនរាប់មិនអស់ ។

✍ សំណុំស្មើគ្នាកាលណាសំណុំទាំងពីរមានបញ្ជីឈ្មោះធាតុដូចគ្នា ។

✍ $\mathbf{A}$ ជាសំណុំរងនៃ $\mathbf{B}$ លុះត្រាតែគ្រប់ $\mathbf{x\in A}$ នោះ $\mathbf{x\in B}$

✍ បើ $\mathbf{A}$ ជាសំណុំរងនៃ $\mathbf{B}$ នោះ $\mathbf{n(A)\le n(B)}$ ។

✍ បើ $\mathbf{A}$ ជាសំណុំរងផ្ទាល់នៃ $\mathbf{B}$ នោះ $\mathbf{n(A)<n(B)}$ ។

✍ សំណុំសកលគឺជាសំណុំដែលមានគ្រប់ធាតុដែលគេបានជ្រើសរើសយកមកសិក្សា ។

✍ សំណុំរងបំពេញ $\mathbf{\overline{A}=\{\,x/\ x\in A\ ,\ x\in U\,\}}$

✍ សំណុំប្រសព្វ $\mathbf{A\cap B=\{\,x\in A}$ និង $\mathbf{x\in B\,\}}$

- សំណុំប្រជុំ $A\cup B=\{\, x\in A$ ឬ $x\in B \,\}$
- សំណុំ A និង B ជាសំណុំដាច់គ្នាលុះត្រាតែ $A\cap B=\phi$ ។
- ចំពោះគ្រប់សំណុំ A និងសំណុំសកល U គេបាន ៖

  $A\cap \overline{A}=\phi$, $A\cup \overline{A}=U$ ។
- បើ A និង B ជាសំណុំរាប់អស់នោះគេបានរូបមន្ត ៖

  $$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
- លក្ខណៈ **DeMogan** ៖

  $$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \quad ; \quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$
- លក្ខណៈផ្តុំ

  $1/ \quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

  $2/ \quad A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
- លក្ខណៈបំបែក

  $1/ \quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

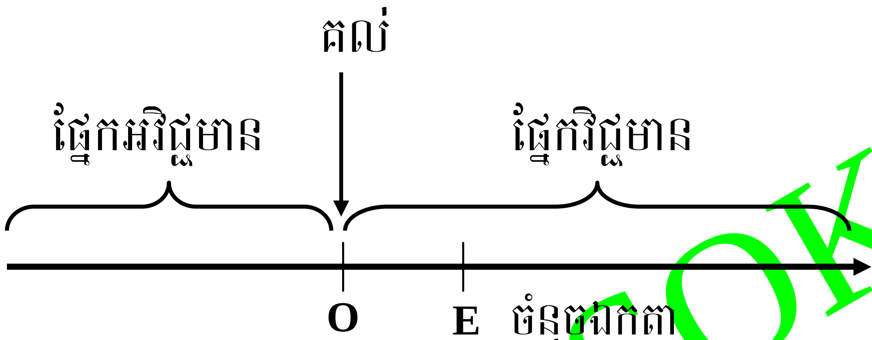
  $2/ \quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

ជំពូកទី០៣

ចំនួន ពហុធា ប្រព័ន្ធរាប់

១. ចំនួន

✍ បន្ទាត់ចំនួន



✍ លក្ខណៈនៃតម្លៃដាច់ខាត

. $|a| = a$ បើ $a \geq 0$

. $|a| = -a$ បើ $a < 0$

✍ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbb{IN} = \{1, 2, 3, ...\}$

✍ សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

✍ ចំនួនសនិទានមានទម្រង់ $\frac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

✍ សំណុំចំនួនសនិទានតាងដោយ $\mathbb{Q}$

✍ គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន **a** និង **b** គេបាន $\mathbf{a<b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}}$

✍ ចំពោះ $\mathbf{a>b}$ និង $\mathbf{b>0}$ គេបាន ៖

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,.\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

✍ ទម្រង់ពន្លាតនៃប្រព័ន្ធរាប់គោល **10** មានរាង

$$abcd_{10}=a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$$

✍ ទម្រង់ពន្លាតនៃប្រព័ន្ធរាប់គោល **2** មានរាង

$$abcd_2=a\times2^3+b\times2^2+c\times2+d$$

២. ឯកធា និង ពហុធា

✍ ឯកធាគឺជាកន្សោមដែលប្រមាណវិធីលើអថេរមានតែវិធីគុណ និង ស្វ័យគុណដែលមាននិទស្សន្តគត់វិជ្ជមាន ឬ សូន្យ ។

✍ ឯកធាដូចគ្នា គឺជាឯកធាដែលមានផ្នែកអថេរដូចគ្នា ។

✍ ដឺក្រេនៃឯកធា ជាផលបូកនិទស្សន្តរបស់អថេរនីមួយៗនៃឯកធា ។

✍ ពហុធា ជាផលបូកនៃច្រើនឯកធាខុសៗគ្នា ។

✍ ដឺក្រេនៃពហុធា គឺជាដឺក្រេរបស់តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេ ។

៣. ប្រមាណវិធីលើ ពហុធា

✍ ដើម្បីបូក ឬ ដកពីរពហុធា គេត្រូវបូក ឬ ដកឯកធាដែលដូចគ្នា ។

✍ ដើម្បីគុណពហុធា និង ពហុធាគេយកតួនីមួយៗនៃពហុធាទីមួយគុណគ្រប់តួនៃពហុធាទីពីរ រួចធ្វើប្រមាណវិធី ។

៤. រូបមន្ត

១. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

២. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

៣. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

៤. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

៥. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

៦. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

៧. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - b^3$

៨. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + b^3$

៩. $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

៥. ប្រមាណវិធីចែកពហុធា

✍ ឧបមាថាគេមានកន្សោមពីរ A និង B ដែលមានអថេរដូចគ្នា ហើយមានដឺក្រេរៀងគ្នា m និង n ។ បើ $m \ge n$ គេអាចរកកន្សោម

ពីជគណិតពីរ $\mathbf{Q}$ និង $\mathbf{R}$ ដែល $\mathbf{A=B\times Q+R}$ ។

ដឺក្រេនៃ $\mathbf{R}$ តូចជាងដឺក្រេនៃ $\mathbf{B}$ ។ $\mathbf{Q}$ ជាផលចែក ហើយ $\mathbf{R}$ ជា

សំណល់នៃក្នុងវិធីចែក ។ ផលចែក $\mathbf{Q}$ មានដឺក្រេ $\mathbf{m-n}$ ។

✍ បើ $\mathbf{R=0}$ គេបាន $\mathbf{A=B\times Q}$ នោះគេថា $\mathbf{A}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{B}$

៦. តួចែករួមធំបំផុត និង ពហុគុណរួមតូចបំផុត

✍ តួចែករួមធំបំផុតនៃកន្សោម $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ គឺជាផលគុណកត្តារួមដែល
មាននិទស្សន្តតូចជាងគេ ។

✍ ពហុគុណរួមតូចបំផុត គឺជាផលគុណគ្រប់កត្តារួមដែលមាននិទស្សន្ត
ធំជាងគេ ។

៧. វិធាន

✍ ដើម្បីគណនាតួចែករួមធំបំផុត ៖

១_ដាក់ជផលគុណកត្តា គ្រប់តួទាំងអស់

២_ជ្រើសរើសយកតែកត្តារួមដែលមាននិទស្សន្តតូចជាងគេ។

៣_តួចែករួមធំបំផុត ជាផលគុណនៃកត្តារួមទាំងនោះ ។

✍ ដើម្បីគណនាតួចែករួមតូចបំផុត ៖

១_ដាក់ជផលគុណកត្តា គ្រប់តួទាំងអស់

២_ជ្រើសរើសយកតែកត្តាមិនរួម និង កត្តារួមដែលមាននិទស្សន

ធំជាងគេ។

៣_ពហុគុណរួមតូចបំផុត ជាផលគុណនៃកត្តាទាំងនោះ ។

៨. ប្រមាណវិធីបូក ឬ ដកកន្សោមប្រភាគ

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C} \quad \text{និង} \quad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

ដែល $C \neq 0$ ។

៩. វិធាន

✍ ដើម្បីធ្វើ វិធីបូក ឬ ដកកន្សោមប្រភាគគេត្រូវ ៖

១_តម្រូវប្រភាគនីមួយៗឲ្យមានភាគបែងរួមដូចគ្នា

២_ធ្វើប្រមាណវិធីបូក ឬ ដកតែភាគយក រក្សាទុកភាគបែងរួម

៣_សម្រួលលទ្ធផល

១០. ប្រមាណវិធីគុណ និង ប្រមាណវិធីចែក

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D} \quad \text{និង} \quad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A\times D}{B\times C}$$

ដែល B , C , D ខុសពីសូន្យ ។

១១. វិធាន

✍ ដាក់ភាគយក និង ភាគបែងនៃកន្សោមទាំងអស់ជាផលគុណកត្តា

✍ សម្រួលកន្សោមប្រភាគនីមួយៗ

✍ ធ្វើប្រមាណវិធីគុណ ឬ វិធីចែកតាមរូបមន្តខាងលើ ។

ជំពូកទី០៤

សមីការ និង វិសមីការ

១_សមីការដឺក្រេទីពីរមានមួយអញ្ញាត

ក_និយមន័យ

សមីការដែលមានរាងទូទៅ $ax^2+bx+c=0$ ហៅថាសមីការដឺក្រេទីពីរ មានមួយអញ្ញាតដែល x ជាអញ្ញាត ហើយលេខមេគុណ a,b,c ជាចំនួនថេរ និង $a\neq 0$ ។

ខ_ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរ

សន្មតថាគេមានសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

ឌីសគ្រីមីណង់សមីការ $\Delta=b^2-4ac$

-បើ $\Delta>0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាគឺ :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

-បើ $\Delta=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$

-បើ $\Delta<0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា :

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\ ;\ x_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

គ_ទំនាក់ទំនងឫស និង លេខមេគុណ

បើ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ នោះគេមាន :

-ផលបូកឫស $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

-ផលគុណឫស $P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$

ឃ_មុខងាគណនាឫសនៃសមីការដឺក្រេទីពីរខ្លាយ

ឧបមាថាគេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

-បើ $a+b+c=0$ សមីការមានឫស $x_1=1$; $x_2=\frac{c}{a}$

-បើ $b=a+c$ សមីការមានឫស $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$

ង_រូបមន្តដាក់ជាផលគុណកត្តា

បើ α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ នោះគេបាន :

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ។

ច_បង្កើតសមីការដឺក្រេទីពីរ

បើគេដឹងផលបូក $\alpha+\beta=S$ និង ផលគុណ $\alpha\beta=P$ នោះ α និង β

ជាឫសសមីការដឺក្រេទីពីរ $x^2-Sx+P=0$ ។

២_វិសមភាព

ក_លក្ខណៈវិសមភាព

1. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ បើ $\mathbf{a > b}$ នោះគេបាន $\mathbf{a + c > b + c}$

ឬ $\mathbf{a - c > b - c}$ ។

2. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ គេមាន :

-បើ $\mathbf{a > b}$ និង $\mathbf{c > 0}$ នោះ $\mathbf{ac > bc}$

-បើ $\mathbf{a > b}$ និង $\mathbf{c < 0}$ នោះ $\mathbf{ac < bc}$

ខ_វិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a \geq 0}$ និង $\mathbf{b \geq 0}$ គេមាន :

$$\frac{\mathbf{a + b}}{\mathbf{2}} \geq \sqrt{\mathbf{ab}}$$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $\mathbf{a = b}$ ។

៣_វិសមីការតម្លៃដាច់ខាត

បើ $\alpha > \mathbf{0}$ នោះគេបាន :

1. $|\mathbf{ax + b}| < \alpha \Leftrightarrow \mathbf{ax + b} < \alpha$ និង $\mathbf{ax + b} > -\alpha$

2. $|\mathbf{ax + b}| > \alpha \Leftrightarrow \mathbf{ax + b} > \alpha$ ឬ $\mathbf{ax + b} < -\alpha$

3. $|\mathbf{ax + b}| = \alpha \Leftrightarrow \mathbf{ax + b} = \pm\alpha$

៤_សញ្ញារបស់ទ្វេធាដឺក្រេទីមួយ

ចំពោះទ្វេធា $\mathbf{f(x)=ax+b}$ មាន $\mathbf{x=-\frac{b}{a}}$ ជាឫស គេកំណត់សញ្ញាទ្វេធានេះ ទៅតាមសញ្ញារបស់ $\mathbf{a}$ ដូចតារាងខាងក្រោម :

$\mathbf{x}$	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$\mathbf{f(x)=ax+b}$		សញ្ញាផ្ទុយពី $\mathbf{a}$	0	សញ្ញាដូច $\mathbf{a}$	

៥_សញ្ញារបស់ត្រីធាដឺក្រេទីពីរ

ចំពោះត្រីធា $\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$ មានឫសពីរ α និង β ដែល $\alpha<\beta$ ។

$\mathbf{x}$	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$\mathbf{f(x)=ax^2+bx+c}$		សញ្ញាដូច $\mathbf{a}$	0	សញ្ញាផ្ទុយពី $\mathbf{a}$	0	សញ្ញាដូច $\mathbf{a}$	

៦_ចម្លើយវិសមីការដឺក្រេទីពីរ

_ករណី $\Delta>0$ និង $a>0$ មានឫស α,β $(\alpha<\beta)$

ក. $\mathbf{ax^2+bx+c>0}$ មានចម្លើយ $\mathbf{x<\alpha}$, $\mathbf{x>\beta}$ ។

ខ. $\mathbf{ax^2+bx+c<0}$ មានចម្លើយ $\alpha<\mathbf{x}<\beta$ ។

គ. $\mathbf{ax^2+bx+c\geq 0}$ មានចម្លើយ $\mathbf{x\leq\alpha}$, $\mathbf{x\geq\beta}$ ។

ឃ. $\mathbf{ax^2+bx+c\leq 0}$ មានចម្លើយ $\alpha\leq\mathbf{x}\leq\beta$ ។

_ករណី $\Delta=0$ និង $a>0$ មានឫសឌុប

ក. $\mathbf{ax^2+bx+c>0}$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតលើកលែងតែ $\mathbf{x=-\frac{b}{2a}}$

ខ. $\mathbf{ax^2+bx+c<0}$ គ្មានចម្លើយ ។

គ. $\mathbf{ax^2+bx+c\geq 0}$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ឃ. $\mathbf{ax^2+bx+c\leq 0}$ មានចម្លើយ $\mathbf{x=-\frac{b}{2a}}$ ។

-ករណី $\Delta<0$ និង $a>0$ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិច

ក. $\mathbf{ax^2+bx+c>0}$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ខ. $\mathbf{ax^2+bx+c<0}$ គ្មានចម្លើយ ។

គ. $\mathbf{ax^2+bx+c\geq 0}$ មានចម្លើយគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់ ។

ឃ. $\mathbf{ax^2+bx+c\leq 0}$ គ្មានចម្លើយ ។

ជំពូកទី០៥

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត

I. ស្វ៊ីតនព្វន្ត និង ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១_ស្វ៊ីតចំនួនពិត

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតគឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំនត់ពីសំណុំ IN ទៅសំណុំ IR ។

គេកំនត់សរសេរស្វ៊ីតមួយដោយ (U_n) ឬ $(U_n)_{n\in IN}$ ដែល $U_n = f(n)$

២.អថេរភាពនៃស្វ៊ីត

ក-ស្វ៊ីតកើន

គេថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតកើនលើ IN កាលណាគ្រប់ $n\in IN$

គេមាន $U_{n+1} > U_n$

ខ-ស្វ៊ីតចុះ

គេថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតចុះលើ IN កាលណាគ្រប់ $n\in IN$

គេមាន $U_{n+1} < U_n$

គ-ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

គេថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកាលណាវាជាស្វ៊ីតកើនជានិច្ច ឬ ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច ។

៣.ស៊ីតទាល់

ក-ស៊ីតទាល់លើ

គេថាស៊ីត(U_n) ជាស៊ីតទាល់លើកាលណាមានចំនួនពិត M ដែលបំពេញ

លក្ខខណ្ឌ $\forall n \in IN : U_n \le M$ ។

ខ-ស៊ីតទាល់ក្រោម

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតទាល់ក្រោមកាលណាមានចំនួនពិត m ដែល

ចំពោះ $\forall n \in IN : U_n \ge m$ ។

គ-ស៊ីតទាល់

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតទាល់កាលណាវាជាស៊ីត ទាល់លើផង និងទាល់

ក្រោមផង ។

៤.ស៊ីតខួប

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតខួបដែលមានខួបស្មើ p កាលណា

ចំពោះ $\forall n \in IN : U_{n+p} = U_n , p \in IN^*$ ។

២_ស៊ីតនព្វន្ត

-ស៊ីតនព្វន្ត គឺជាស៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទីមួយ)

ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកចំនួនថេរ d មួយហៅថាផលសងរួម ឬ រេសុងនៃស៊ីត

រូបមន្តផលសងរួម $d = u_{n+1} - u_n$ ។

-តួទី n នៃស៊ីតនព្វន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$

-ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_2)}{2}$$

៣_ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

-ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q មួយដែលខុសពីសូន្យ ។

ចំនួនថេរ q ហៅថាផលធៀបរួម ឬ រេសុងនៃស្វ៊ីត ។

រូបមន្តផលធៀបរួម $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ។

-តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

-ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = u_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

៤_រូបមន្តផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្តមានលំដាប់ខ្ពស់

$$1/\ \sum_{k=1}^{n}(k) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2/\ \sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3/\ \sum_{k=1}^{n}\left(k^3\right) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

II_របៀបគណនាផលបូកតួនៃស៊ីតផ្សេងៗ

១_និម្មិតសញ្ញា $\sum$ សម្រាប់ផលបូកនៃស៊ីត

ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ កំនត់តាងដោយ :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$$

២_លក្ខណៈផលបូកតួនៃស៊ីត

១. $\sum_{k=1}^{n}(\lambda) = \lambda + \lambda + \lambda + ... + \lambda = n\lambda$

២. $\sum_{k=1}^{n}(\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n}(u_k)$ (λ ជាចំនួនថេរ)

៣. $\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k - w_k) = \sum_{k=1}^{n}(u_k) + \sum_{k=1}^{n}(v_k) - \sum_{k=1}^{n}(w_k)$

៤. $\sum_{k=1}^{n}(u_k + v_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(u_k^{\,2}) + 2\sum_{k=1}^{n}(u_k v_k) + \sum_{k=1}^{n}(v_k^{\,2})$

៣_របៀបគណនាផលបូកស៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$S_n = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$ ដែល $p = 1 ; 2 ; 3 ;...$

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវអនុវត្តន៍តាមជំហានខាងក្រោម :

-គណនា $(n+1)^{p+1} - n^p$

-ឱ្យតម្លៃ $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....; n$

-ធ្វើវិធីបូក ។

៤_របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + ... + \frac{1}{a_na_{n+1}}$$

ដែល $a_{n+1} - a_n = d$ ថេរ ហើយ $d \neq 0$ ។

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវ :

-បំប្លែងតួ $\frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{d} . \frac{a_{n+1} - a_n}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

-ឱ្យតម្លៃ $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....; n$

-ធ្វើវិធីបូក

៥_របៀបគណនាផលបូកស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = \frac{1}{a_1a_2a_3} + \frac{1}{a_2a_3a_4} + \frac{1}{a_3a_4a_5} + ... + \frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$$

ដែល $a_{n+2} - a_n = d$ ថេរ ហើយ $d \neq 0$ ។

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវ :

-បំប្លែងតួ $\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}} = \frac{1}{d} . \frac{a_{n+2} - a_n}{a_na_{n+1}a_{n+2}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right)$

-ឱ្យតម្លៃ $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....; n$

-ធ្វើវិធីបូក

៦_របៀបគណនាផលបូកស៊ីតដែលមានទម្រង់ ៖

$$S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n$$

ដែល (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម d និង (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង q ។

ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវគណនា $S_n - q\,S_n$ រួចទាញរក S_n ។

៧_សំគាល់

គេឱ្យ $S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$

ដើម្បីគណនាផលបូកខាងលើនេះគេត្រូវ :

-សរសេរតួ u_k ជារាង $u_k = t_{k+1} - t_k$ ឬ $u_k = t_k - t_{k+1}$ (បើអាច)

-ករណីគេអាចសរសេរ $u_k = t_{k+1} - t_k$ នោះគេបាន :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = \sum_{k=1}^{n}(t_{k+1} - t_k) = t_{n+1} - t_1$$

-ករណីគេអាចសរសេរ $u_k = t_k - t_{k+1}$ នោះគេបាន :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k+1}) = t_1 - t_{n+1}$$

III_របៀបកំនត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស្វ៊ីត

១_ផលសងតួលំដាប់ទីមួយ ៖

_គេមានស្វ៊ីត $(a_n): a_1 \ ; \ a_2 \ ; a_3 \ ; \ ..... ; \ a_n$

ហើយ$b_1 = a_2 - a_1 ; b_2 = a_3 - a_2 ; b_3 = a_4 - a_3 ; .....$ នោះគេថាស្វ៊ីត

$(b_n) : b_1 ; b_2 ; b_3 ; .... ; b_n$ ជាផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត(a_n) ។

_រូបមន្តគណនាតួ a_n

គេមាន $b_n = a_{n+1} - a_n$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$

ដោយ $\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_n - a_{n-1})$

$= a_n - a_1$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k) = a_n - a_1$

ដូចនេះ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k)$ ។

២_ផលសងតួលំដាប់ទីពីរ ៖

_គេមានស្វ៊ីត $(a_n): a_1 \ ; \ a_2 \ ; a_3 \ ; \ ..... ; \ a_n$ ហើយ

$b_1 = a_2 - a_1 ; b_2 = a_3 - a_2 ; b_3 = a_4 - a_3 ; .....; b_n = a_{n+1} - a_n$

$(b_n) : b_1 ; b_2 ; b_3 ; .... ; b_n$ ជាផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (a_n)

-រូបមន្តគណនាតួ a_n គឺ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k)$ ។

-ស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់ទីពីរនៃស្វ៊ីត (a_n) គឺជាផលសងលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត (b_n) ដែល $c_n = b_{n+1} - b_n$; $n = 1 , 2 , 3 ,...$

រូបមន្តគណនាតួទី n គឺ $b_n = c_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(c_i)$; $n \geq 2$ ។

IV-វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

និយមន័យ ៖

$P(n)$ ជាសំណើដែលទាក់ទងនឹងចំនួនគត់ n

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេត្រូវ ៖

1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះ $n = 1$

2. ឧបមាថា $P(n)$ ពិតចំពោះតម្លៃ n

3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិតនាំឱ្យបាន $P(n+1)$ ពិត

IV_របៀបគណនាតួទូទៅនៃស្វ៊ីតតាមទំនាក់ទំនងកំណើន

១_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a\,u_n + b$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a\,u_n + b$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

និងមានតួ $u_1 = \alpha$ ($|a| \neq 1, a \neq 0$) ។

ដើម្បីកំនត់រកតួ u_n គេត្រូវពិចារណាដូចខាងក្រោម ៖

☞ រកឬសសមីការ $r = a\,r + b$ (ហៅថាសមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត)

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $V_n = u_n - r$ រួចត្រូវបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

☞ រកឱ្យឃើញនូវតួ V_n បន្ទាប់មកគេទាញ $u_n = V_n + r$ ។

២_ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

និងមានតួ $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$

ដើម្បីកំនត់រកតួ u_n គេត្រូវពិចារណាសមីការ $r^2 = a\,r + b$

ឬ $(E) : r^2 - a\,.r - b = 0$ (ហៅថាសមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីតនេះ)

គេត្រូវសិក្សាករណីផ្សេងៗដូចខាងក្រោម ៖

☞ បើ $\Delta = a^2 + 4b > 0$

សមីការសំគាល់ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត r_1 និង r_2 ។

ក្នុងករណីនេះដើម្បីគណនា u_n យើងត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

- តាងស្វ៊ីតជំនួយពីរគឺ

$x_n = u_{n+1} - r_1 u_n$ និង $y_n = u_{n+1} - r_2 u_n$

- រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n)

រួចគណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឧបមាថាគេបាន $x_n = f(n)$ និង $y_n = g(n)$

- យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} u_{n+1} - r_1 u_n = f(n) \\ u_{n+1} - r_2 u_n = g(n) \end{cases}$

- ដោះស្រាយរក u_n គេទទួលបាន $u_n = \dfrac{f(n) - g(n)}{r_2 - r_1}$ ។

☞ បើ $\Delta = a^2 + 4b = 0$

សមីការសំគាល់ (E) មានឫសឌុប $r_1 = r_2 = r_0$

ក្នុងករណីនេះដើម្បីគណនា u_n យើងត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $V_n = u_{n+1} - r_0 u_n$ រួចរកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (V_n)

និងគណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។ ឧបមាថា $V_n = f(n)$ ។

- គេទាញបានសមីការ $u_{n+1} - r_0 u_n = f(n)$

រួចត្រូវបំលែងជាទម្រង់ ៖

$\dfrac{u_{n+1}}{r_0^{\,n+1}} - \dfrac{u_n}{r_0^{\,n}} = \dfrac{f(n)}{r_0^{\,n+1}}$ (ចែកសមីការនឹង $r_0^{\,n+1}$)

-ទាញឱ្យបាន $u_n = r_0{}^n\left[\frac{u_1}{r_0}+\sum_{k=1}^{n-1}[\ \frac{f(k)}{r_0{}^{k+1}}\ ]\right]$ ។

☞ បើ $\Delta = a^2+4b<0$

សមីការសំគាល់ (E) មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា

គឺ $r_1 = p+i.q$, $r_2 = p-i.q$, $p\ ,q \in IR$ ។

ក្នុងករណីនេះដើម្បីគណនា u_n យើងត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

-តាងស្វ៊ីតជំនួយ $Z_n = u_{n+1}-(p+i.q)u_n$ រួចត្រូវស្រាយថា

(Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

រួចគណនា Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

-ឧបមាថា $Z_n = A_n + i.B_n$; $A_n\ , B_n \in IR\ , n \in IN^*$ ។

-គេបានសមីការ $u_{n+1}-(p+iq)\ u_n = A_n + i.B_n$

-ទាញឱ្យបានថា $u_n = -\frac{B_n}{q}$ ។

៣-ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1}+bu_n+c$

បើគេស្គាល់ថា (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = a\,u_{n+1}+b\ u_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

និងមានតួ $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$ ។

ដើម្បីកំនត់រកតួ u_n គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

☞ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $w_n = u_n + \lambda$

☞ គេបាន $u_n = w_n - \lambda$, $u_{n+1} = w_{n+1} - \lambda$, $u_{n+2} = w_{n+2} - \lambda$

☞ យក u_n , u_{n+1} , u_{n+2} ជំនួសក្នុង $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + bu_n + c$

គេបានសមីការ ៖

$$w_{n+2} - \lambda = a(w_{n+1} - \lambda) + b(w_n - \lambda) + c$$
$$w_{n+2} = a\ w_{n+1} + b w_n + (1 - a - b)\lambda + c$$

☞ ត្រូវឱ្យ $(1 - a - b)\lambda + c = 0$ គេទាញបាន $\lambda = \dfrac{c}{a + b - 1}$

(ដែល $a + b \neq 1$) ។

☞ ក្នុងករណីនេះគេបានទំនាក់ទំនងកំណើន

$$w_{n+2} = a\ w_{n+1} + b\ w_n$$

☞ ដោះស្រាយរកតួ w_n តាមវិធីសាស្ត្រដែលបានសិក្សារួចហើយ

ខាងលើ បន្ទាប់មកទាញរកតួ $u_n = w_n - \lambda = w_n - \dfrac{c}{a + b - 1}$

ជំពូកទី០៦ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

១. ទំនាក់ទំនងគ្រឹះ

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
3. $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
4. $\tan\theta . \cot\theta = 1$
5. $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$
6. $1 + \cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

២. រូបមន្តផលបូក និង ផលដក

1. $\sin(a+b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
4. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
5. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
6. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

៣. រូបមន្តមុំឌុប

1. $\sin 2a = 2\sin a \cos a$
2. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - \sin^2 a$
3. $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$
4. $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

៤. រូបមន្តកន្លះមុំ

1. $\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{2}$

2. $\cos^2\frac{a}{2}=\frac{1+\cos a}{2}$

3. $\tan^2\frac{a}{2}=\frac{1-\cos a}{1+\cos a}$

៥. កន្សោម $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ជាអនុគមន៍នៃ $t=\tan\frac{x}{2}$

1. $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

2. $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

3. $\tan x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

៦. កន្សោម $\sin 3a$, $\cos 3a$, $\tan 3a$

1. $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$

2. $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$ 3. $\tan 3a=\frac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

៧. រូបមន្តបំលែងពីផលគុណទៅផលបូក

1. $\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\ \cos(a+b)+\cos(a-b)]$

2. $\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\ \cos(a-b)-\cos(a+b)\ ]$

3. $\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\ \sin(a+b)+\sin(a-b)\ ]$

4. $\sin b\cos a = \frac{1}{2}[\ \sin(a+b)-\sin(a-b)\ ]$

៦. រូបមន្តបំលែងពីផលបូកទៅផលគុណ

1. $\cos p+\cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

2. $\cos p-\cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

3. $\sin p+\sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

4. $\sin p-\sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

5. $\tan p+\tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

6. $\tan p-\tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

7. $\cot p+\cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$

8. $\cot p-\cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$

៧. សមីការត្រីកោណមាត្រ

1. សមីការ $\sin u = \sin v$ មានចម្លើយ

$$\left[\begin{array}{l} u = v+2k\pi \\ u = \pi - v + 2k\pi \quad , \quad k\in Z \end{array}\right.$$

2. សមីការ $\cos u = \cos v$ មានចម្លើយ

$$\left[\begin{array}{l} u = v + 2k\pi \\ u = -v + 2k\pi \quad , \quad k \in Z \end{array}\right.$$

3. សមីការ $\tan u = \tan v$ មានចម្លើយ $u = v + k\pi$

៨. រូបមន្តបម្លែងធ្នូដែលគួកត់សំគាល់

1. $\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta \\ \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \sin(\pi - \theta) = \sin\theta \\ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \end{cases}$

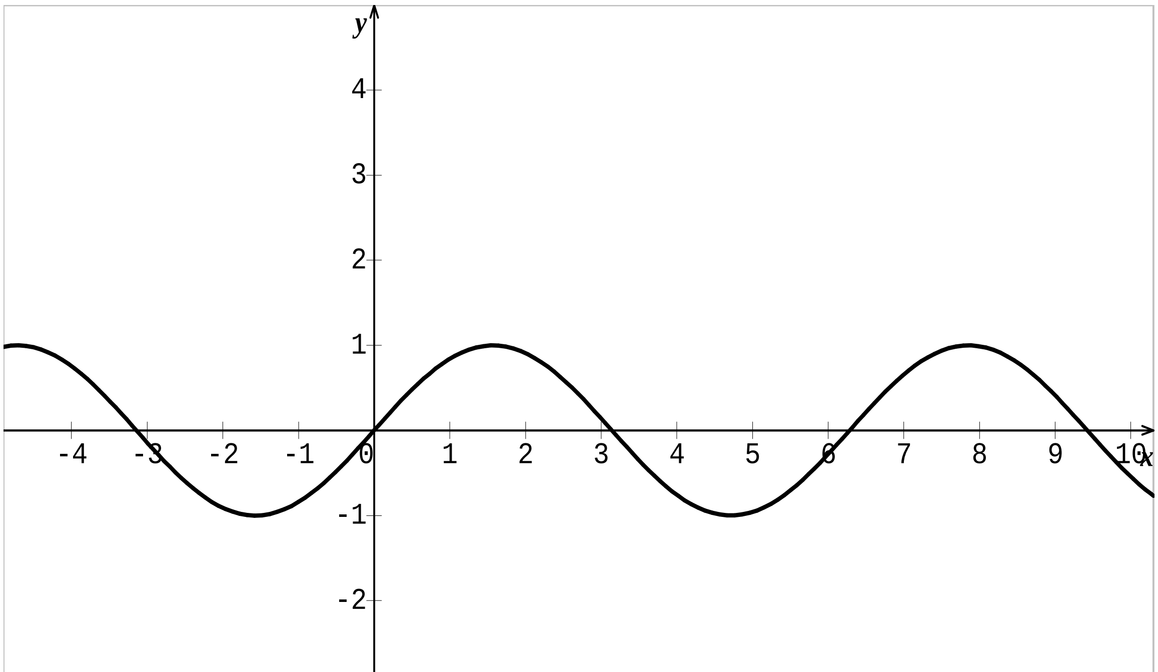
3. $\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta \\ \tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot\theta \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta \\ \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi + \theta) = \tan\theta \end{cases}$

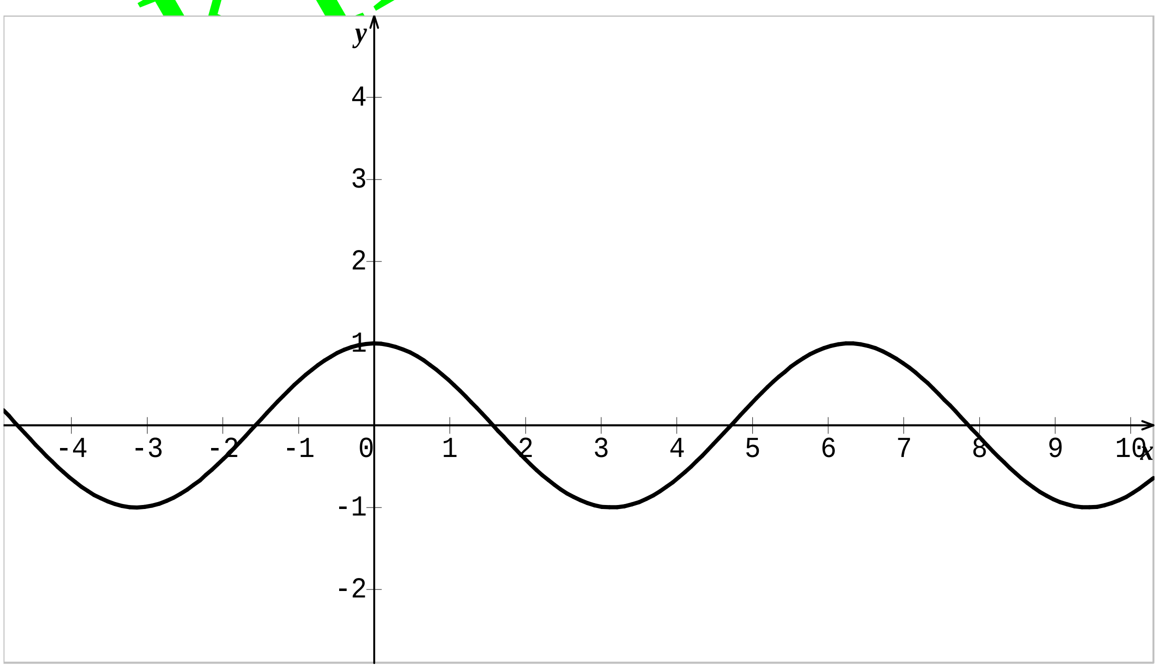
5. $\begin{cases} \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta \\ \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta \\ \tan(\theta + k\pi) = \tan\theta \quad , \quad \forall k \in Z \end{cases}$

៩. ក្រាហ្វិកអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

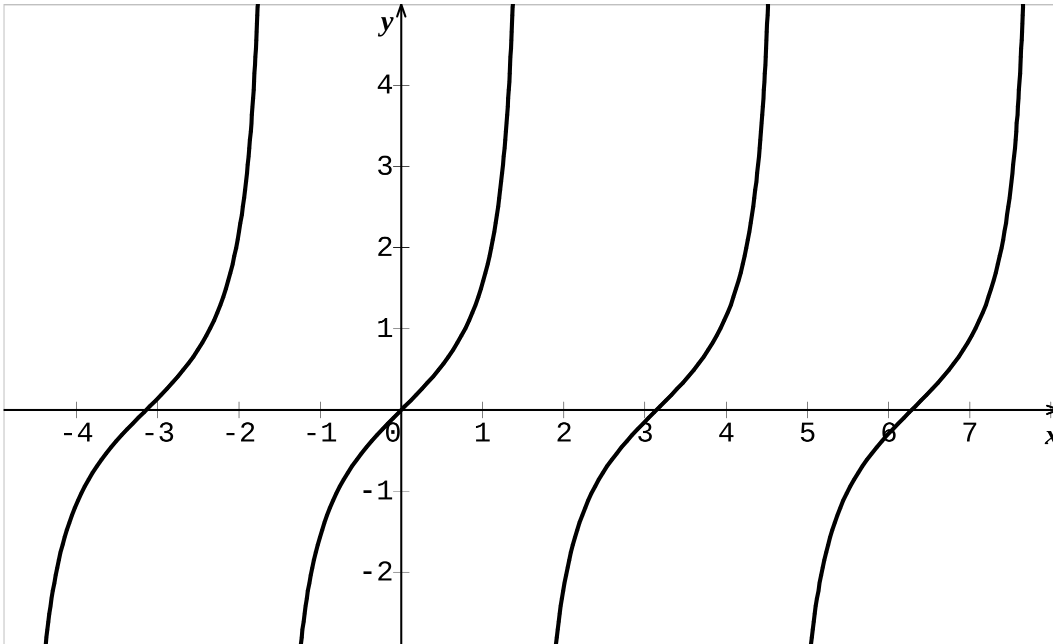
1. ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = \sin x$



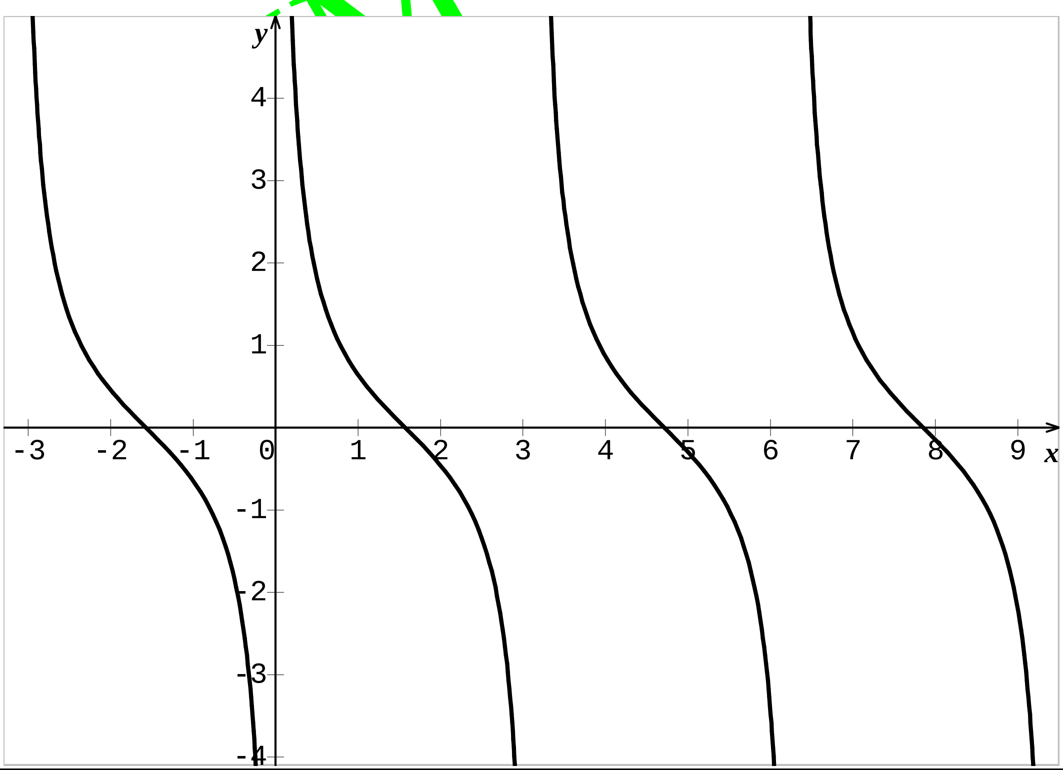
2. ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = \cos x$



3. ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = \tan x$



4. ខ្សែកោងអនុគមន៍ $y = \cot x$



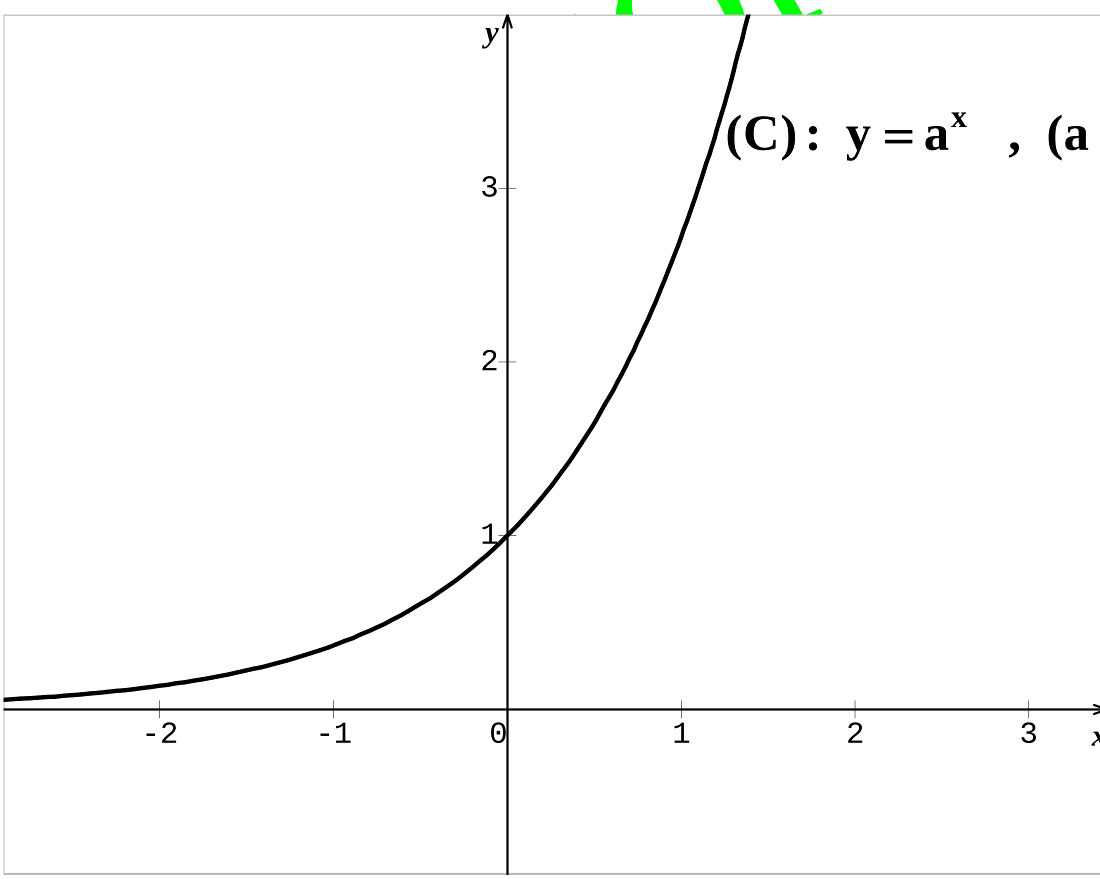
ជំពូកទី០៧

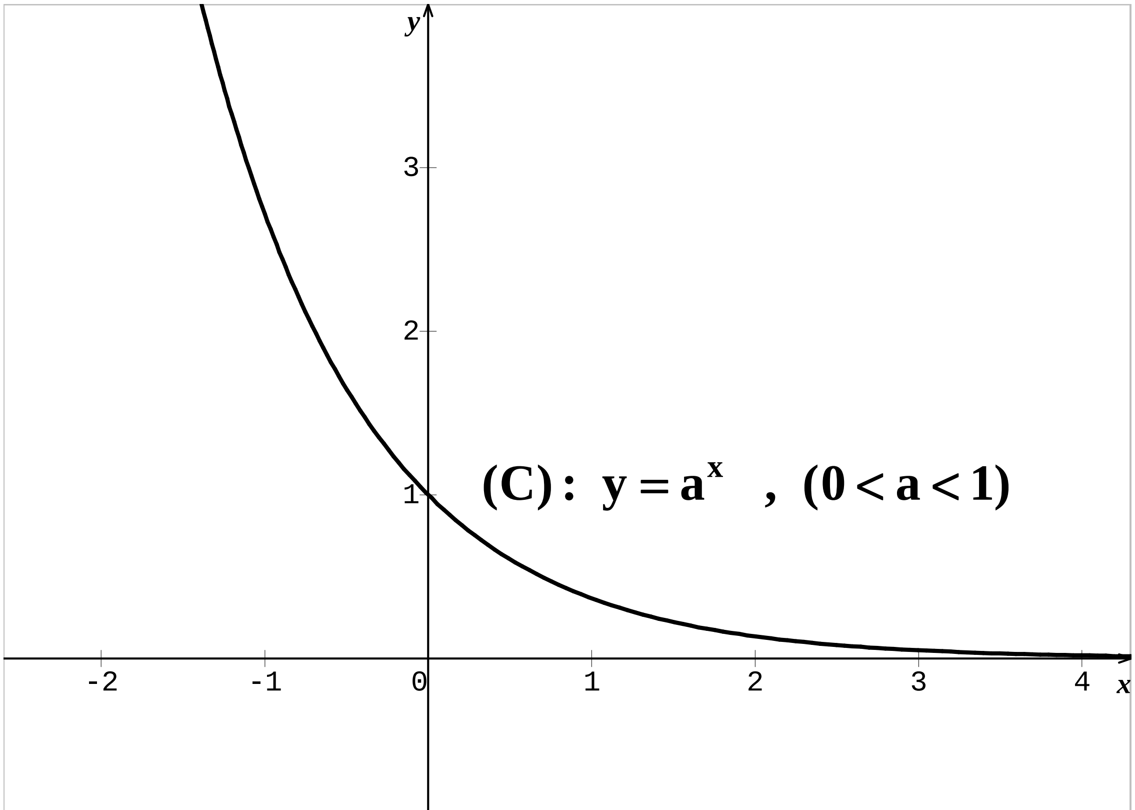
អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង អនុគមន៍លោការីត

1-អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

☞អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ជាអនុគមន៍កំនត់ ដោយ $y=f(x)=a^x$ ដែល $x\in IR$ និង a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និងខុសពី **1** ។

☞ក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល





☞ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a>0$ និង $a\neq 1$ គេបាន

1/ $a^x = a^k \Leftrightarrow x = k$

2/ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

2-អនុគមន៍លោការីត

☞បើគេមាន $y=a^x$ នោះ $x=\log_a y$

ដែល $y>0, a>0$ និង $a\neq 1$ ។

គេថា $f(x)=a^x$ មានអនុគមន៍ច្រាស់ $f^{-1}(x)=\log_a x$ ។

ដូចនេះ $y=\log_a x$ ហៅថាអនុគមន៍លោការីតនៃ x

មានគោល a ។

☞លក្ខណៈនៃលោការីត

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x និង y , $a>0, a\neq 1$ គេមាន

1/ $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

2/ $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

3/ $\log_a x^n = n\log_a x$

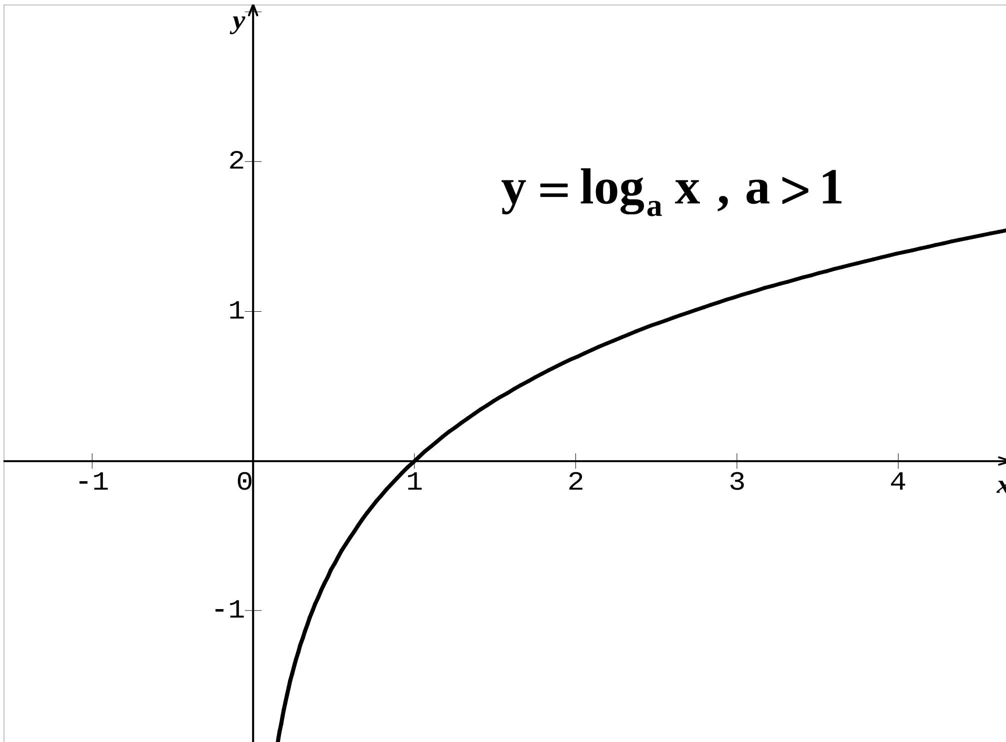
4/ $\log_a x=\dfrac{1}{\log_x a}$

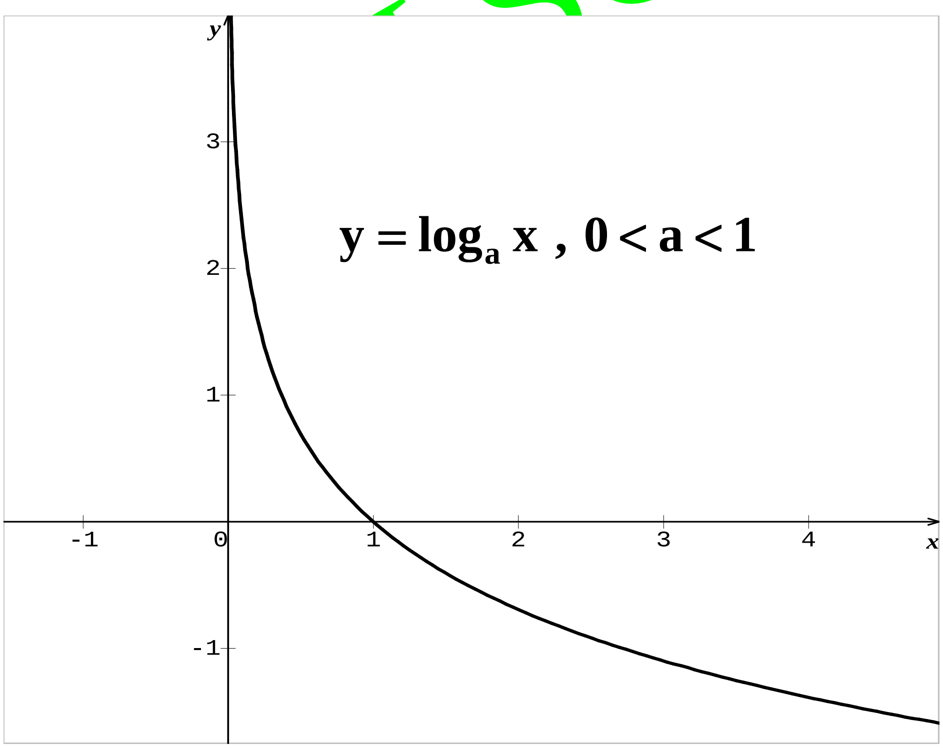
5/ $\log_a a=1$

6/ $\log_a 1=0$

7/ $a^{\log_a b}=b$

☞ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត





ជំពូកទី០៨

លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១_លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

✍ និយមន័យ :

អនុគមន៍ $\mathbf{f}$ មានលីមីតស្មើ $\mathbf{L}$ កាលណា $\mathbf{x}$ ខិតជិត $\mathbf{a}$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឱ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេសរសេរ : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ។

✍និយមន័យ :

គេថាអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ ខិតទៅ $+\infty$ ឬ $-\infty$ កាលណា $\mathbf{x}$ ខិតទៅជិត $\mathbf{a}$ បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឱ្យ $f(x) > M$ ឬ $f(x) < -M$ ។

គេសរសេរ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ឬ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ។

២_លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

✍ គេថាអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ មានលីមីតស្មើ $\mathbf{L}$ កាលណា $\mathbf{x}$ ទៅជិត $+\infty$ ឬ $-\infty$ បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ គេអាចរក $N > 0$ ដែល $x > N$ ឬ $x < -N$ នាំឱ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។

គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ឬ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ ។

✍ គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ទៅជិត $+\infty$

បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M>0$ គេមាន $N>0$ ដែល $x>N$ នាំឱ្យ

$f(x)>M$ ។គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

✍ គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ទៅជិត $-\infty$

បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M>0$ គេមាន $N>0$ ដែល $x<-N$ នាំឱ្យ

$f(x)>M$ ។គេសរសេរ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ។

៣_ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$; $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ និង $\lim\limits_{x\to a} h(x)=N$

ដែល L ; M ; N ជាចំនួនពិតនោះគេបាន :

$1/\ \lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=L\pm M$ (a ជាចំនួនកំណត់ ឬអនន្ត)

$2/\ \lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)-h(x)]=L+M-N$

$3/\ \lim\limits_{x\to a}[k\,f(x)]=k\ \lim\limits_{x\to a}[f(x)]$

$4/\ \lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x).h(x)]=L.M.N$

$5/\ \lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{L}{M}$; $M\neq 0$

$6/\ \lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=L^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ ។

៤_លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

1/ $\lim_{x\to a}\left(\sqrt[n]{x}\right)=\sqrt[n]{a}$ ចំពោះ $a\ge 0$ និង $n\in IN$

2/ $\lim_{x\to a}\left(\sqrt[n]{x}\right)=\sqrt[n]{a}$ ចំពោះ $a<0$ និង n ជាចំនួនគត់សេស

3/ $\lim_{x\to a}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right]=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}[f(x)]}=\sqrt[n]{L}$

បើ $L\ge 0$ និង n ជាចំនួនគត់គូ ឬ $L<0$ និង n ជាចំនួនគត់សេស ។

៥_លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ដែលមាន $\lim_{x\to a}[g(x)]=L$

និង $\lim_{x\to L}f(x)=f(L)$ នោះ $\lim_{x\to a}f[g(x)]=f(L)$ ។

៦_លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f\,;g$ និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

និង $f(x)\ge g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge A$ នោះ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ។

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f\,;g$ និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

និង $f(x)\le g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge A$ នោះ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ។

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f\,;g;h$ និងចំនួនពិត A ដែល

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lambda$ និង $g(x)\le f(x)\le h(x)$

ចំពោះគ្រប់ $x\ge A$ នោះ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lambda$ ។

✍ បើគេមានអនុគមន៍ **f ; g** និងចំនួនពិត **A** ដែល $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lambda'$ និង $f(x)\le g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge A$

នោះ $\lambda\le\lambda'$ ។

៧_លីមីតរាងមិនកំនត់

✍ **លីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$**

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$ គេត្រូវបំបែកភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

✍ **លីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{\infty}{\infty}$**

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

✍ **លីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $+\infty-\infty$**

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $+\infty-\infty$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណ

នៃកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

៨_លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

-បើ **a** ជាចំនួនពិតស្ថិតនៅក្នុងដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែល

ឱ្យនោះគេបាន $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

និង $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$ ។

-វិធាន បើ **x** ជារង្វាស់មុំ ឬធ្នូគិតជារ៉ាដ្យង់នោះគេបាន

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ និង $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ ។

៩_លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1/ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

3/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

4/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ $(n>0)$

5/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$ $(n>0)$

១០_លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

$$1/\ \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$2/\ \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$3/\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$4/\ \lim_{x\to 0} x \ln x = 0$$

$$5/\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \ \ (n > 0)$$

$$6/\ \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$$

១១_លីមីតស្វ៊ីត និង ស៊េរី

◆ ប្រមាណវិធីលើលីមីត

គេមានស្វ៊ីត (a_n) និង (b_n) ដែលមាន $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = M$

និង $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = N$ គេបាន

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty} ka_n = k.M$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = M + N$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = M - N$

គ. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n b_n) = M.N$

បើ $N \neq 0$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{M}{N}$

◆ លីមីតស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត

ក.បើ $r>1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n=+\infty$ ហើយ r^n ជាស្វ៊ីតរីកទៅរក $+\infty$

ខ.បើ $r=1$ នោះ (r^n) ជាស្វ៊ីតថេរហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n=1$ ។

គ.បើ $r=0$ នោះ (r^n) ជាស្វ៊ីតថេរហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n=0$ ។

ឃ.បើ $r\le -1$ នោះស្វ៊ី (r^n) ជាស្វ៊ីតឆ្លាស់ហើយកាលណា $n\to+\infty$

គេមិនអាចកំណត់លីមីតនៃ (r^n) បានទេ ។

◆ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តដែលរួម : ស្វ៊ីត (r^n) សមមូល $-1\le r\le 1$

◆ ស៊េរីរួម និង ស៊េរីរីក :

ក-បើស៊េរី $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)$ ជាស៊េរីរួមនោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$

ខ-បើស្វ៊ីត (a_n) មិនរួមរក 0 ទេនោះ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n)$ ជាស៊េរីរីក ។

◆ ភាពរួមនិងរីកនៃស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត :

គ្រប់ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត $a+ar+ar^2+ar^3+....+ar^{n-1}+...$

ដែល $a\neq 0$ ជាស៊េរីរួម ឬ រីកទៅតាមករណីដូចខាងក្រោម :

ក-បើ $|r|<1$ នោះស៊េរីរួមទៅរក $\dfrac{a}{1-r}$ ។

ខ-បើ $|r|\ge 1$ នោះស៊េរីរីក ។

១២_ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ត្រង់មួយចំនុច

✍ និយមន័យ ៖

អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x=c$ កាលណា f បំពេញ

លក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោម

1- f កំណត់ចំពោះ $x=c$

2- f មានលីមីតកាលណា $x\to c$

3- $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

១៣_លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=c$ នោះគេបាន

១. $f(x)\pm g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=c$

២. $f(x).g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=c$

៣. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=c$ ដែល $g(c)\neq 0$ ។

១៤_ភាពជាប់លើចន្លោះ

✍ និយមន័យ ៖

-អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a,b) លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះ

គ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើនោះ ។

-អនុគមន៍ **f** ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ លុះត្រាតែ **f** ជាប់ លើចន្លោះ

បើក (a,b) និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

(អនុគមន៍ **f** ជាប់ត្រង់ **a** ខាងស្តាំ ជាប់ត្រង់ **b** ខាងឆ្វេង)

១៥_ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើអនុគមន៍ **g** ជាប់ត្រង់ $x=c$ និងអនុគមន៍ **f** ជាប់ត្រង់ $g(c)$

នោះអនុគមន៍បណ្តាក់ $(f\circ g)(x)=f\left[\,g(x)\,\right]$ ជាប់ត្រង់ **c** ។

១៦_អនុវត្តន៍ អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

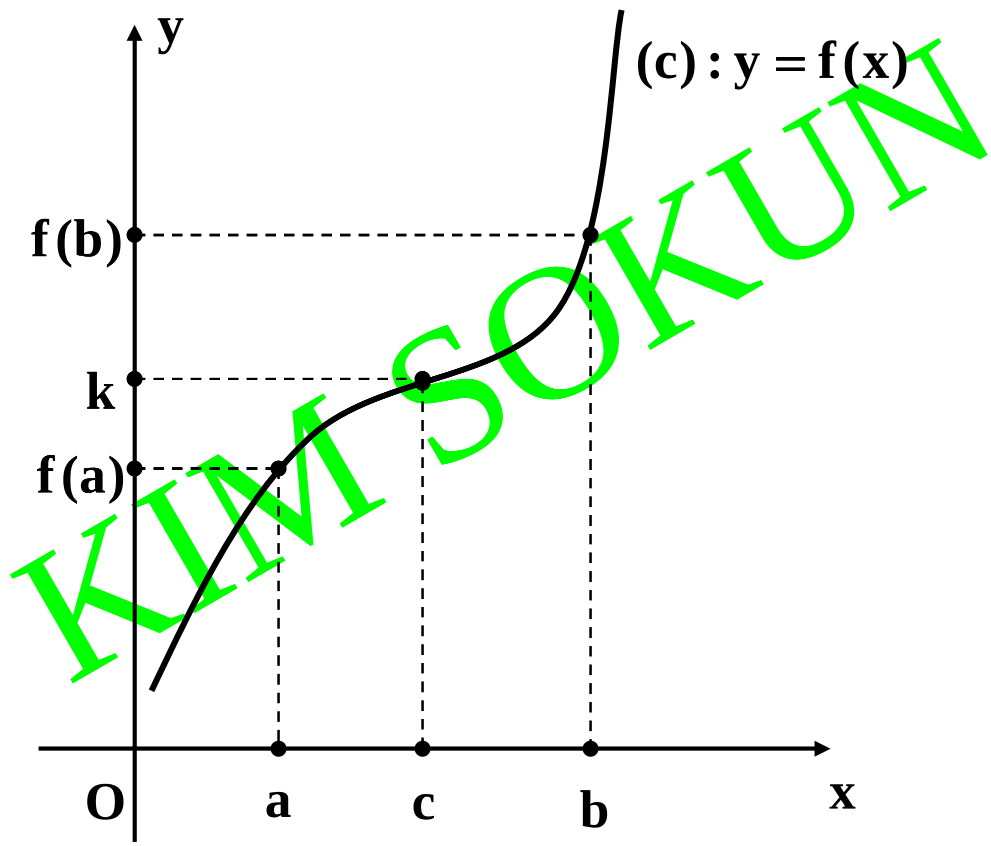
បើ **f** ជាអនុគមន៍មិនកំនត់ត្រង់ $x=a$ និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ **f** តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=a$ កំនត់ដោយ

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{បើ} \quad x\neq a \\ L & \text{បើ} \quad x=a \end{cases}$$

១៧_ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

ទ្រឹស្តីបទ : បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ និង k ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a, b]$ ដែល $f(c) = k$ ។



ជំពូកទី០៩

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១_ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ x_0

✍ និយមន័យ :

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាលីមីត (បើមាន) នៃផលធៀប

កំណើន $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ កាលណា Δx ខិតទៅជិត 0 ។

គេកំនត់សរសេរ

$$y'_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

២_ភាពមានដេរីវេ និង ភាពជាប់

សន្មតថាអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើចន្លោះ I ហើយ x_0 ជាចំនួនពិតនៅក្នុង

ចន្លោះ I និង h ជាចំនួនពិតមិនសូន្យដែល $x_0 + h$ ជារបស់ I ។

-ចំនួនដេរីវេឆ្វេងត្រង់ចំនួន x_0 នៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់តាងដោយ

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ ។}$$

-ចំនួនដេរីវេស្តាំត្រង់ចំនួន x_0 នៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់តាងដោយ

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ ។}$$

-ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ x_0 បើមាន កំនត់តាងដោយ

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

ហើយ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ មានកាលណា

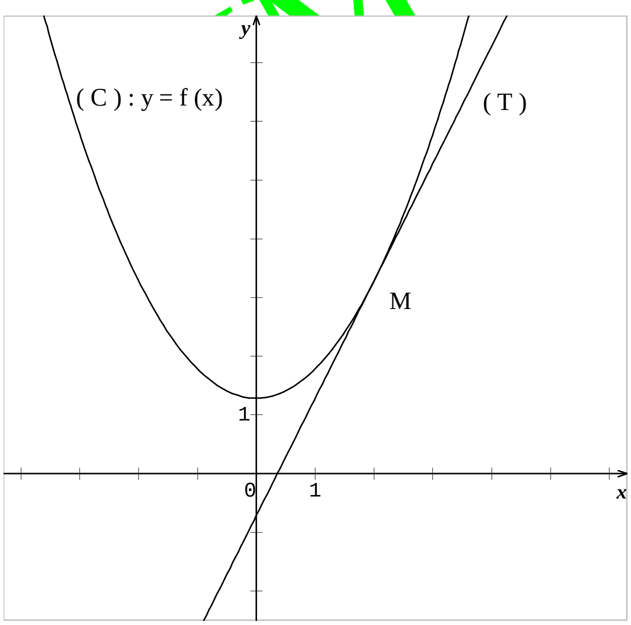
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ ។

៣_អនុគមន៍ដេរីវេ

ក. និយមន័យ

_បើf ជាអនុគមន៍មួយកំនត់លើចន្លោះI និងមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំនុច នៅក្នុងចន្លោះ I នោះគេថាអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ I ។

_អនុគមន៍ដែលគ្រប់ $x\in I$ ផ្សំបានចំនួនដេរីវេនៃ f ត្រង់ x ហៅថា អនុគមន៍ដេរីវេនៃ f ដែលគេកំនត់សរសេរ $f : x \mapsto f'(x)$ ។



ចំនួនដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំនុច x_0 គឺជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ

បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $(c): y = f(x)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x = x_0$

ហើយសមីការបន្ទាត់ប៉ះនោះកំនត់ដោយ ÷

$$\boxed{(T): y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)}$$ ។

៤_ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះគេបាន

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = y' \times u' \quad \text{ឬ} \quad \frac{d}{dx} f[u(x)] = f'(u) \times u'(x)$$

៥_រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍

អនុគមន៍	ដេរីវេ
1. $y = k$	$y' = 0$
2. $y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$
3. $y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
4. $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $y = e^x$	$y' = e^x$
6. $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
7. $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
8. $y = \sin x$	$y = \cos x$
9. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$

10. $y = \tan x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

11. $y = \cot x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

12. $y = \arcsin x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

13. $y = \arccos x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

14. $y = \arctan x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

✱ ជាទូទៅ

អនុគមន៍	ដេរីវេ
1. $y = u^n$	$y' = n.u'.u^{n-1}$
2. $y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
3. $y = u.v$	$y' = u'v + v'u$
4. $y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
5. $y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
6. $y = \sin u$	$y' = u'.\cos u$
7. $y = \cos u$	$y' = -u'\sin u$
8. $y = e^u$	$y' = u'.e^u$
9. $y = \tan u$	$y' = u'(1 + \tan^2 u)$
10. $y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

11. $y = \arccos u$ $\qquad$ $y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

12. $y = \arctan u$ $\qquad$ $y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

13. $y = u^V$ $\qquad$ $y' = u^V\left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u} \right)$

៦_ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេបន្តបន្ទាប់ដល់លំដាប់ n

នោះ $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ ហៅថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$

ហើយ $f^{(n)}(x) = \dfrac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$ ។

៧_ល្បឿននៃចលនា

✍ និយមន័យ :

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $V(t) = S'(t) = \dfrac{dS}{dt}$

ដែល $S(t)$ ជាចម្ងាយនៅខណៈ t ។

៨_សំទុះនៃចលនា

សំទុះនៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $a(t) = \dfrac{dV(t)}{dt} = V'(t)$

ដែល $V(t)$ ជាល្បឿននៃចលនានៅខណៈ t ។

៩_អនុគមន៍អសនិទាន

.អនុគមន៍ $y=\sqrt{ax+b}$ ដែល $a\neq 0$

ដែនកំណត់ : អនុគមន៍មានន័យកាលណា $ax+b\geq 0$

-បើ $a>0$ នោះ $x\geq -\frac{b}{a}$ ហើយ $D=[-\frac{b}{a},+\infty)$

-បើ $a<0$ នោះ $x\leq -\frac{b}{a}$ ហើយ $D=(-\infty,-\frac{b}{a}]$

ដេរីវេ $y'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

-បើ $a<0$ នោះ $y'<0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់ ។

-បើ $a>0$ នោះ $y'>0$ នាំឱ្យអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់ ។

.អនុគមន៍ $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ មាន $\Delta=b^2-4ac$

◆ដែនកំណត់ : អនុគមន៍មានន័យកាលណា $ax^2+bx+c\geq 0$

_ករណី $a>0$

ក្រាបនៃ $y=ax^2+bx+c$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតពីរគឺ

ក-បើ $x\to+\infty$ នោះ $y=\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ក-បើ $x\to-\infty$ នោះ $y=-\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

_ករណី $a<0$

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ គ្មានអាស៊ីមតូតទេ ។

◆ដេរីវេ $y'=\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$ មានសញ្ញាដូច $2ax+b$

-បើ $a<0$ អនុគមន៍មានអតិបរមាមួយត្រង់ $x=-\dfrac{b}{2a}$ ។

-បើ $a>0$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាមួយត្រង់ $x=-\dfrac{b}{2a}$ ។

១០_អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចម្រុះ

.ចំណុចសំខាន់ៗសម្រាប់សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

-ដែនកំណត់

-ខួបនៃះនុគមន៍

-ភាពគូសេសនៃអនុគមន៍

-ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

.ខួបនៃអនុគមន៍

-ខួបនៃអនុគមន៍ $y=\sin(ax)$ គឺ $\dfrac{2\pi}{|a|}$

-ខួបនៃអនុគមន៍ $y=\cos(ax)$ គឺ $\dfrac{2\pi}{|a|}$

.ភាពគូសេសនៃអនុគមន៍

-អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេសលើ I កាលណា $\forall x\in I\ ,\ -x\in I$

ហើយ $f(-x) = -f(x)$ ។

-អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូលើ I កាលណា $\forall x \in I , -x \in I$

ហើយ $f(-x) = f(x)$ ។

១១_ទ្រឹស្តីបទ

បើមានពីរចំនួនពិត m និង M ដែលចំពោះគ្រប់

$x \in I : m \le f'(x) \le M$ នោះគ្រប់ចំនួនពិត $a , b \in I$ ដែល $a < b$

គេបាន $m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$ ។

- គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a , b]$ ។ បើមានចំនួន M ដែលគ្រប់ $x \in [a,b] : |f'(x)| \le M$ នោះគេបាន :

$|f(b) - f(a)| \le M|b-a|$ ។

- បើf ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a , b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ(a , b) និង $f(a) = f(b)$ នោះមានចំនួន$c \in (a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល$f'(c) = 0$ ។

- បើf ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a , b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ(a , b) នោះមានចំនួន $c \in (a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល$f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

ជំពូកទី១០ អាំងតេក្រាល

១_អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

✍ ព្រីមីទីវ

ក. និយមន័យ

សន្មតថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍កំនត់លើចន្លោះ I ។

គេថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើចន្លោះ I កាលណា

$F'(x)=f(x)$ គ្រប់ $x\in I$ ។

ឧទាហរណ៍១ អនុគមន៍ $F(x)=x^3$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍

$f(x)=3x^2$ លើចន្លោះ $]-\infty\,,+\infty[$

ពីព្រោះ $F'(x)=3x^2=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\,]-\infty\,,+\infty[$

ឧទាហរណ៍២ អនុគមន៍ $F(x)=\sin x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍

$f(x)=\cos x$ លើចន្លោះ $]-\infty\,,+\infty[$

ពីព្រោះ $F'(x)=\cos x=f(x)$ ចំពោះគ្រប់$x\in\,]-\infty\,,+\infty[$ ។

ឧទាហរណ៍៣ អនុគមន៍ $F(x)=\ln x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ លើចន្លោះ $]0,+\infty[$

ពីព្រោះ $F'(x)=\dfrac{1}{x}=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\,]0\,,+\infty[$ ។

ខ. ទ្រឹស្តីបទ

បើអនុគមន៍ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើចន្លោះ I នោះគេមាន $F(x)=G(x)+c$ ចំពោះគ្រប់ $x\in I$ ។ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

✍ អាំងតេក្រាលមិនកំនត់

ក. និយមន័យ បើអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ដោយ $\int f(x).dx=F(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

ខ. ទ្រឹស្តីបទ

សន្មតថា $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍ពីរមានព្រីមីទីវលើចន្លោះរួម I គេមាន ៖

$a/ \int[\ f(x)+g(x)\ ]dx=\int f(x).dx+\int g(x).dx$

$b/ \int[k.f(x)]dx=k\int f(x)\ .dx$

✍ រូបមន្តអាំងតេក្រាលសំខាន់ៗ

១. $\int k\ .dx\ =kx+c$

២. $\int x^n.dx=\frac{1}{n+1}.x^{n+1}+c\quad ,\ n\neq -1$

៣. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+c$

៤. $\int \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+c$

៥. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

៦. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$

៧. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c$

៨. $\int e^x dx = e^x + c$

៩. $\int e^{ax}.dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

១០. $\int a^x.dx = \frac{1}{\ln a}.a^x + c$

១១. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

១២. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

១៣. $\int \sin x.dx = -\cos x + c$

១៤. $\int \cos x.dx = \sin x + c$

១៥. $\int \tan x.dx = -\ln|\cos x| + c$

១៦. $\int \cot x.dx = \ln|\sin x| + c$

១៧. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

១៨. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$

១៩. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

២០. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$

២១. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$

២២. $\int \sqrt{x^2+a^2}.dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$

២៣. $\int \sqrt{x^2-a^2}.dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$

២៤. $\int \sqrt{a^2-x^2}.dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$

វិធីប្តូរអថេរក្នុងអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

១-ឧបមាថាគេមានអាំងតេក្រាល $I=\int f[g(x)].g'(x).dx$

បើគេតាង $u=f(x)$ នោះ $du=f'(x).dx$

គេបាន $I=\int f[g(x)].g'(x).dx=\int f(u).du=F(u)+c$ ។

២-ឧបមាថាគេមានអាំងតេក្រាល$I=\int f(x).dx$

តាង $x=\varphi(t)$ នោះ $dx=\varphi'(t).dt$

គេបាន $I=\int f(x).dx=\int f[\varphi(t)].\varphi'(t).dt$ ។

៣-រូបមន្តគ្រឹះ

ក- $\int k\ P'(x).dx=k.P(x)+c$

ខ. $\int [P(x)]^{n}.P'(x).dx = \dfrac{1}{n+1}.P^{n+1}(x)+c \quad , \; n \neq -1$

គ. $\int \dfrac{P'(x)}{P(x)}.dx = \ln|P(x)|+c$

ឃ. $\int \dfrac{P'(x)}{\sqrt{P(x)}}.dx = 2\sqrt{P(x)}+c$

ង. $\int e^{P(x)}.P'(x).dx = e^{P(x)}+c$

ច. $\int \dfrac{P'(x)}{P^{2}(x)}.dx = -\dfrac{1}{P(x)}+c$

✍ អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

បើគេមាន $u=f(x)$ និង $v=g(x)$ គេបាន ÷

$$\int u.\,dv = u.v - \int v.du$$ ។

២_អាំងតេក្រាលកំណត់

.និយមន័យ

f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ។

អាំងតេក្រាលកំណត់ពី a ទៅ b នៃ $y=f(x)$ កំណត់ដោយ

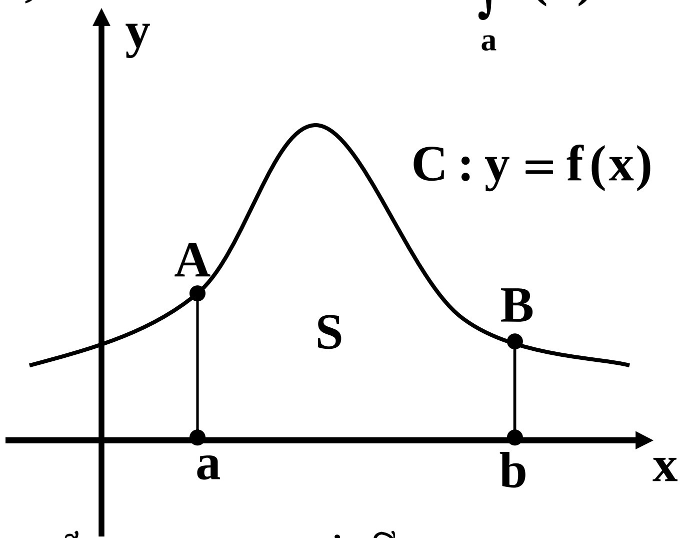
$$\int_{a}^{b} f(x).dx = F(b)-F(a)$$ ដែល $F'(x)=f(x)$ ។

.ផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់

-បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡា

នៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង អ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ

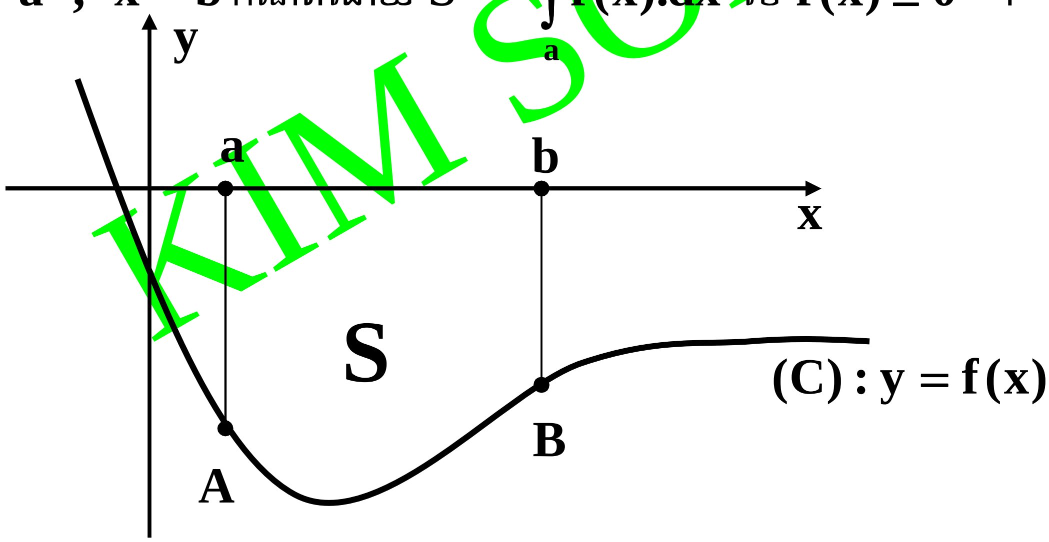
$x = a$, $x = b$ កំណត់ដោយ $S = \int_a^b f(x).dx$ បើ $f(x) \geq 0$



-បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡា

នៃផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង អ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ

$x = a$, $x = b$ កំណត់ដោយ $S = -\int_a^b f(x).dx$ បើ $f(x) \leq 0$ ។

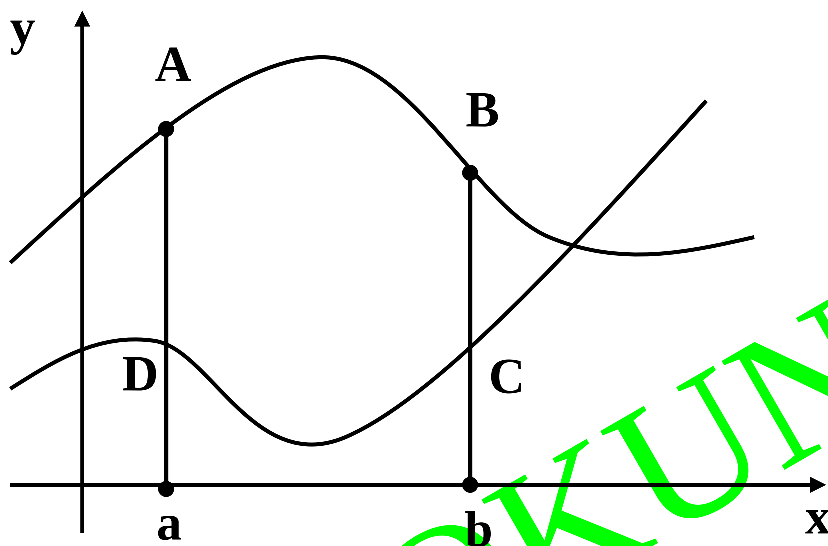


-បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ នោះគេបានផ្ទៃក្រឡា

នៅចន្លោះខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ទាំងពីរកំណត់ដោយ :

$$S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right].dx$$

ដែល $f(x)\ge g(x)$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ ។



៣_មាឌសូលីដ និង ប្រវែងធ្នូ

◆បើអនុគមន៍ f វិជ្ជមានហើយជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះមាឌនៃសូលីដ បរិវត្តន៍បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស័អាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាង អនុគមន៍ $y=f(x)$ អក្ស័អាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយ $V=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\pi f^2(x_k).\Delta x\right]=\pi\int_a^b f^2(x).dx$ ។

◆មាឌនៃសូលីដបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស័ (ox) នៃផ្ទៃ ខណ្ឌដោយ ក្រាប $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$

ដែល$f(x)\ge g(x)$ កំណត់ដោយ $V=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right].dx$ ។

◆ អនុគមន៍ F ដែលកំណត់លើចន្លោះ $[a,b]$ ដោយ $F(x)=\int_a^x f(t).dt$

ហៅថាអនុគមន៍កំណត់តាមអាំងតេក្រាលកំណត់ ។

◆ តម្លៃមធ្យមនៃ f កំណត់ជាប់លើ $[a,b]$ គឺ $y_m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$

◆ ប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងf លើ$[a,b]$ គឺ$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}.dx$

ជំពូកទី១១

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

១_សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 មានរាងទូទៅ

- $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ មានចម្លើយទូទៅ $y = \int f(x).dx + c$
- $g(y).\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ មានចម្លើយទូទៅ $G(y) = F(x) + C$

  ដែល $G(y) = \int g(y).dy$ ។
- $y'+ay = 0$ ឬ $\dfrac{dy}{dx} + ay = 0$ មានចម្លើយទូទៅ $y = A.e^{-ax}$

  ដែល A ជាចំនួនថេរ ។
- $y'+ay = p(x)$ មានចម្លើយទូទៅ $y = y_e + y_p$ ដែល y_e ជាចម្លើយនៃសមីការ $y'+ay = 0$ និង y_p ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ $y'+ay = p(x)$ ។

២_សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២

ក_សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់២

និយមន័យ :

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ អូម៉ូសែន និងមាន មេគុណជាចំនួនថេរជាសមីការដែលអាចសរសេរជារាងទូទៅ :ឧ

$ay''+by'+cy=0$ ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in IR$ ។

ខ_ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២

-សមីការសម្គាល់

សមីការសម្គាល់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ អូម៉ូសែន និងមានមេគុណជាចំនួនថេរ $ay''+by'+cy=0$ ជាសមីការដឺក្រេទីពីរ $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in IR$

-វិធីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់២

ឧបមាថាគេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់2ដូចខាងក្រោម:

$(E):\ y''+by'+cy=0$ ដែល $b\ ,\ c\in IR$ ។

◆សមីការ (E) មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0\ (1)$

◆គណនា $\Delta=b^2-4c$

-ករណី $\Delta>0$ សមីការ (1) មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាគឺ

$\lambda_1 = \alpha$ និង $\lambda_2 = \beta$ នោះសមីការ **(E)** មានចម្លើយទូទៅ

ជាអនុគមន៍រាង $\mathbf{y = A.e^{\alpha x} + B.e^{\beta x}}$

ដែល **A , B** ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

-ករណី $\Delta = 0$ សមីការ **(1)** មានឫសឌុបគឺ $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$

នោះសមីការ **(E)** មានចម្លើយទូទៅជាអនុគមន៍រាង

$$y = Ax.e^{\alpha x} + B.e^{\alpha x}$$

ដែល **A , B** ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

-ករណី $\Delta < 0$ សមីការ **(1)** មានឫសពីរផ្សេងគ្នា

ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ $\lambda_1 = \alpha + i.\beta$ និង $\lambda_2 = \alpha - i.\beta$

($\alpha , \beta \in IR$)នោះសមីការ **(E)** មានចម្លើយទូទៅជាអនុគមន៍រាង

$$y = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

ដែល **A , B** ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

គ_ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី២មិនអូម៉ូសែន

ឧបមាថាគេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2មិនអូម៉ូសែន

$y'' + by' + cy = P(x)$ ដែល $P(x) \neq 0$ ។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវ :

◆ស្វែងរកចម្លើយពិសេសមិនអូម៉ូសែន តាងដោយ y_P

របស់សមីការ $y''+by'+cy = P(x)$ ដែល y_P មានទម្រង់ដូច $P(x)$ ។

◆ រកចម្លើយទូទៅតាងដោយ y_c នៃសមីការលីនេអ៊ែ
លំដាប់ទី2អូម៉ូសែន $y''+by'+cy = 0$ ។

◆ គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2
មិនអូម៉ូសែនជាផលបូករវាង y_P និង y_c គឺ $y = y_P + y_C$ ។

ជំពូកទី១២ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

១-វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក/ និយមន័យ

អង្កត់មានទិសដៅ **AB** នៅក្នុងលំហហៅថាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហដែលមាន **A** ជាគល់និង **B** ជាចុង។

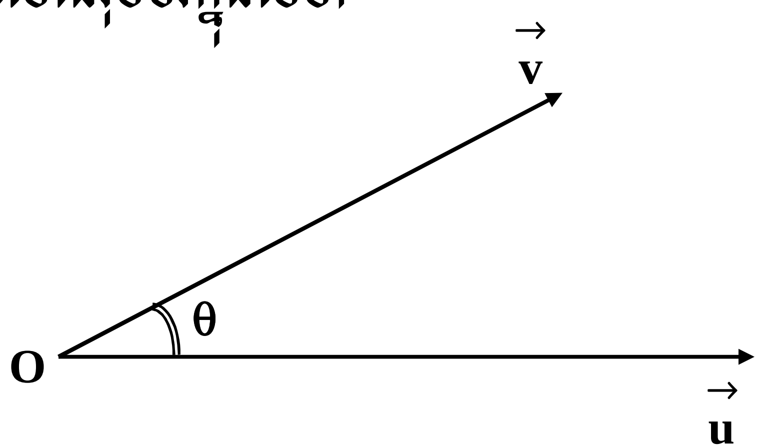
គេកំនត់សរសេរដោយ $\overrightarrow{AB}$ ។

ខ/ កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ចំពោះគ្រប់ចំនុច **P** មានត្រីធាតុ (a,b,c) តែមួយគត់ដែល $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{OP}=a.\vec{i}+b.\vec{j}+c.\vec{k}$ ។ ត្រីធាតុ (a,b,c) ហៅថាកូអរដោនេនៃចំនុច **P** ដែលគេសរសេរ $P(a,b,c)$ ។

២-ផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក/ និយមន័យ



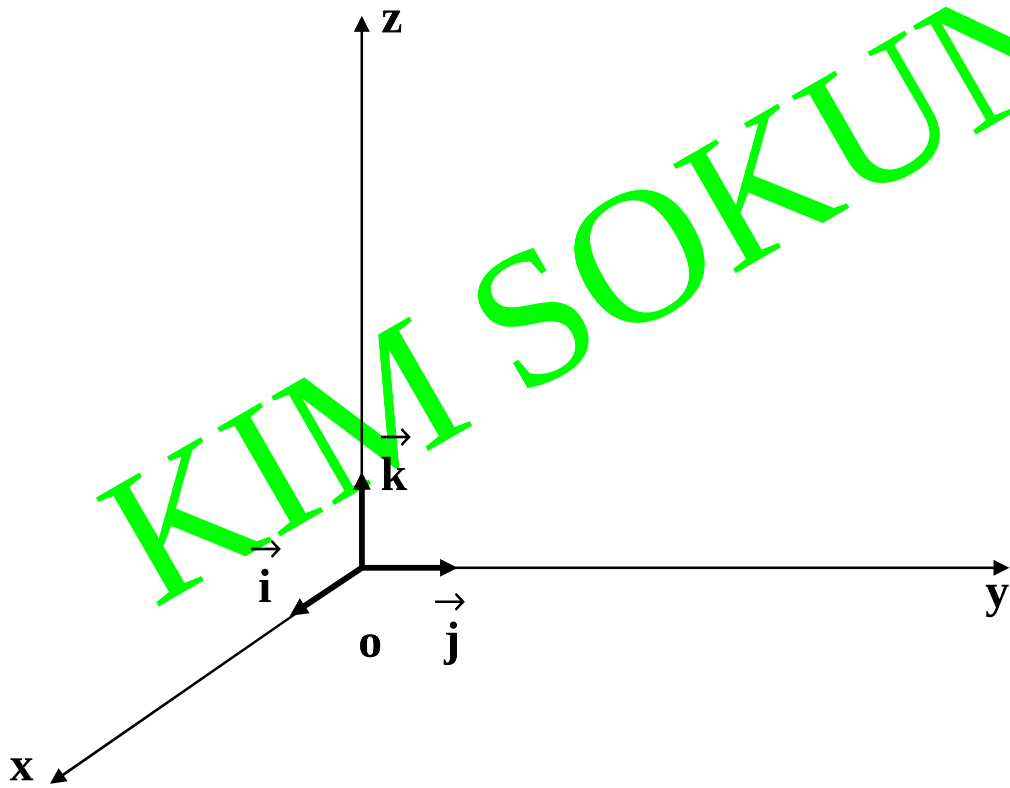
- ផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាចំនួនពិត

កំនត់ដោយ $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\theta$ ។

(θ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$)

– បើ $\vec{u}=0$ ឬ $\vec{v}=0$ នោះ $\vec{u}.\vec{v}=0$ ។

ខ/គោល និង តម្រុយអរតូណារម៉ាល់



គេហៅគោលអរតូណារម៉ាល់នៃវ៉ិចទ័រ គឺគ្រប់ត្រីធាតុ

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែល $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

និង $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$ ។

គ/ ទ្រឹស្តីបទ

ក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់នៃលំហផលគុណស្កាលែរវាង

ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ គឺជាចំនួន

ពិតកំនត់ដោយ $\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ ។

ឃ/ ក្បួនលៃ

-ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$

អរតូកូណាល់គ្នាលុះត្រាតែ $\vec{u}.\vec{v}=0$ បានន័យថា

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ ។

–ស្កាលែ និង ណមនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(a,b,c)$ កំនត់ដោយ

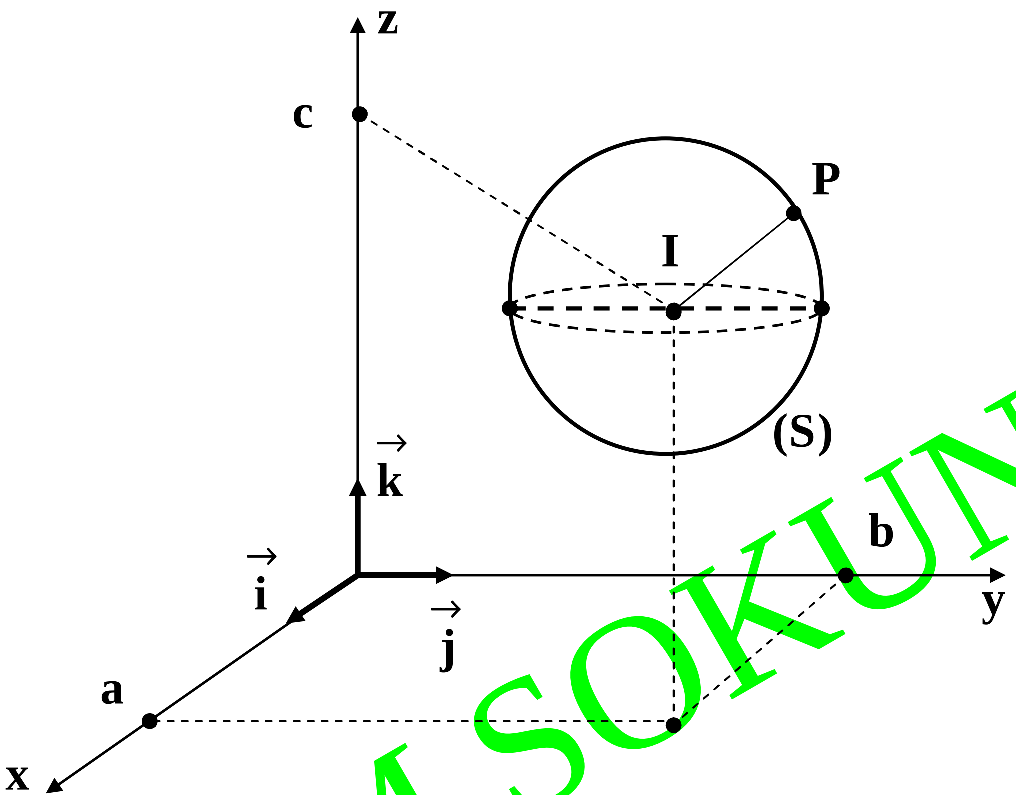
$(\vec{u})^2=a^2+b^2+c^2$ និង $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ។

–មុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$

កំនត់ដោយ $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

ឬ $\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}.\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}$ ។

៣-សមីការស្វ៊ែក្នុងលំហ

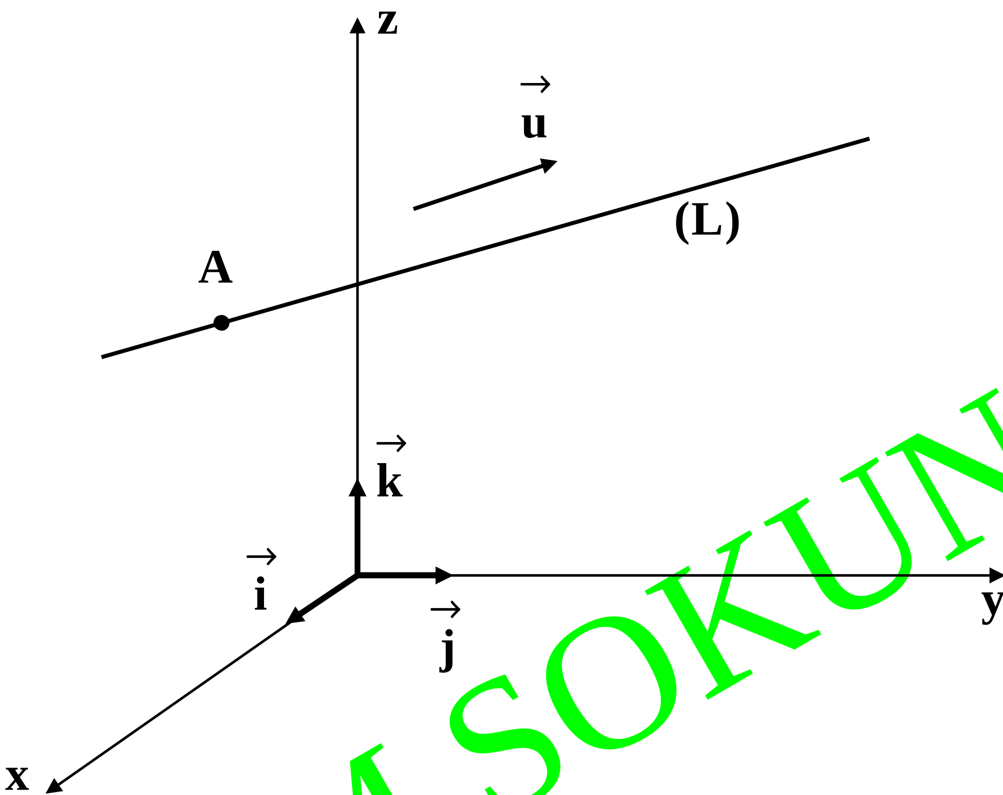


និយមន័យ

សំណុំនៃចំនុច $P(x , y , z)$ ដែលមានចម្ងាយថេរ ស្មើ R ពីចំនុចនឹង $I(a ; b ; c)$ ហៅថាស្វ៊ែផ្ចិត I កាំ R ។ សមីការរបស់ស្វ៊ែនេះគឺ

$(S) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ ។

៨-សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ



សមីការបន្ទាត់ **(L)** កាត់តាមចំនុច $\mathbf{A(x_A , y_A , z_A)}$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{\mathbf{u}}\mathbf{(a , b , c)}$ កំនត់ដោយ

$$\mathbf{(L):}\begin{cases}\mathbf{x = x_A + at}\\ \mathbf{y = y_A + bt}\\ \mathbf{z = z_A + ct} \quad ; \quad \mathbf{t \in IR}\end{cases}$$ (ហៅថាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត)

$$\mathbf{(L): \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}}$$ (ហៅថាសមីការឆ្លុះ)

៨-សមីការប្លង់ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់

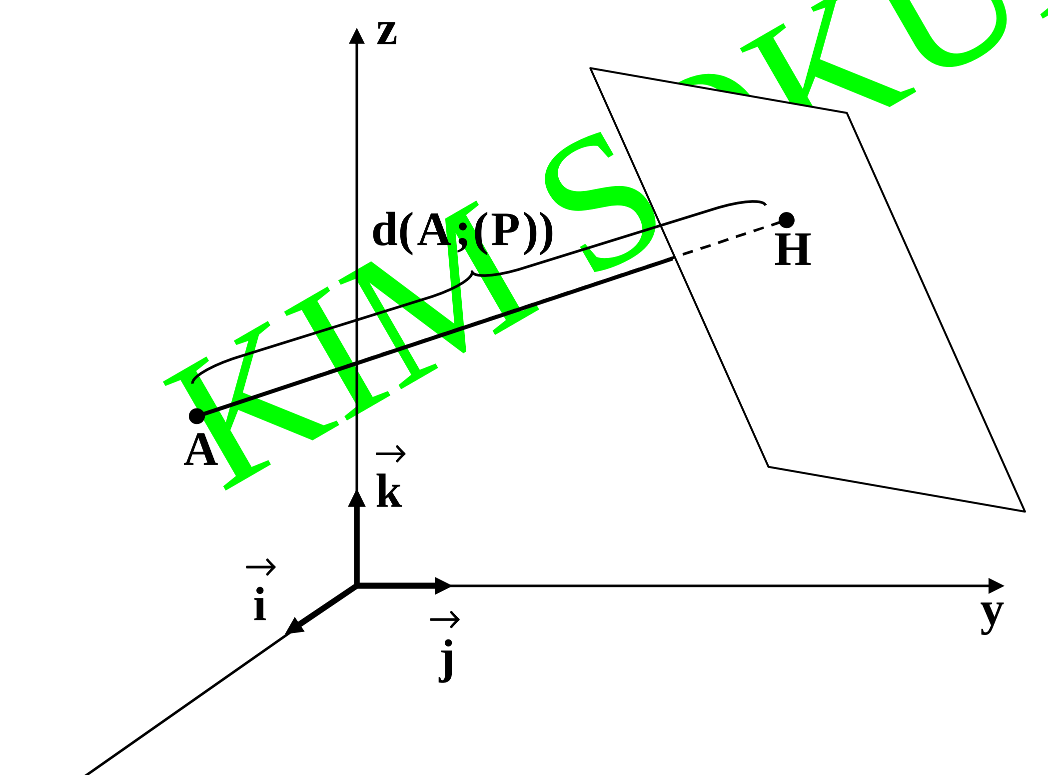
ក/សមីការប្លង់កាត់តាមចំនុចមួយនិងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់មួយ

សមីការប្លង់កាត់តាមចំនុច $A(x_A , y_A , z_A)$ ហើយមាន

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}(a; b ; c)$ កំនត់ដោយ

$(P) : a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ ។

ខ/ចម្ងាយពីចំនុចមួយទៅប្លង់មួយក្នុងលំហ



ចម្ងាយពីចំណុច $A(x_A ; y_A ; z_A)$ ទៅប្លង់ (P) ដែល

មានសមីការ $ax+by+cz+d=0$ កំនត់ដោយ

$$d(A\,;(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ ។

៦-ផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

1.និយមន័យផលគុណនៃពីវ៉ិចទ័រ

បើ $\vec{u}=u_1.\vec{i}+u_2.\vec{j}+u_3.\vec{k}$ និង $\vec{v}=v_1.\vec{i}+v_2.\vec{j}+v_3.\vec{k}$

ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ។

ផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាវ៉ិទ័រកំណត់ដោយៈ

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2)\,\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\,\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\,\vec{k}$$

ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការគណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គេសន្មត

ប្រើដេទែមីណង់លំដាប់បីដូចខាងក្រោម :

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

2.លក្ខណៈនៃផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

បើ $\vec{u}\,,\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ និង c ជាចំនួនពិតនោះគេបាន :

ក. $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$

ខ. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

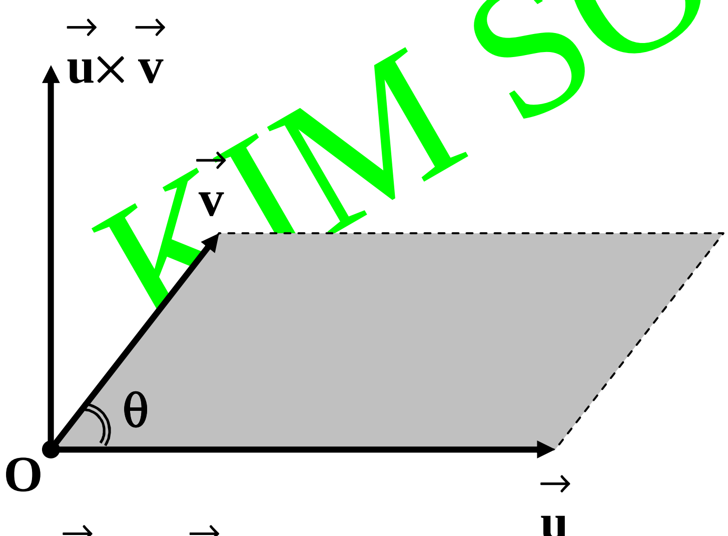
គ. $c(\vec{u}\times\vec{v}) = (c\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(c\vec{v})$

ឃ. $\vec{u}\times\vec{o} = \vec{o}\times\vec{u} = \vec{o}$

ង. $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{o}$

ច. $\vec{u}\,.(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v}).\vec{w}$

3.បំណកស្រាយនៃផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រតាមបែបធរណីមាត្រ



បើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យនៅក្នុងលំហ និងតាង θ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន :

ក.$\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$ ផង និង $\vec{v}$ ផង ។

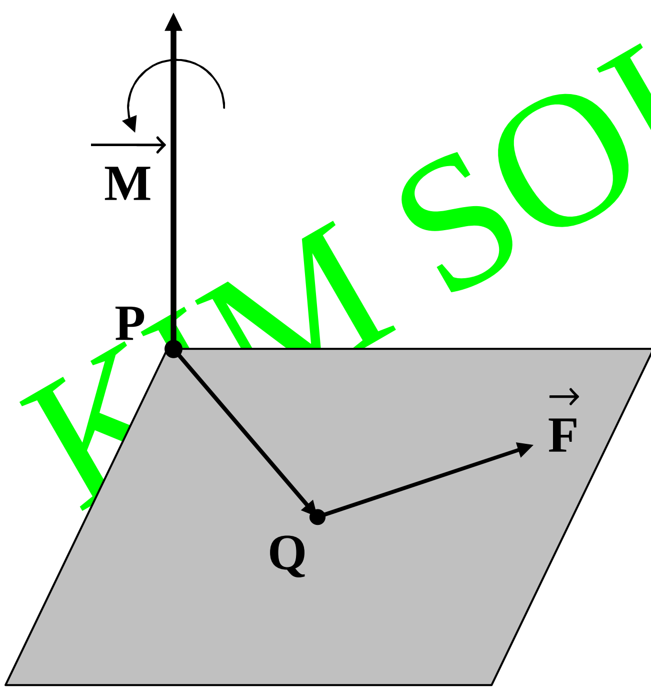
ខ. $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$

គ. បើ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{o}$ នោះ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែនឹងគ្នា ។

ឃ. $|\vec{u}\times\vec{v}|$: ជាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាមដែលសង់លើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

ង. $\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$: ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណដែលសង់លើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

4.ម៉ូម៉ង់ $\vec{M}$ នៃកម្លាំង $\vec{F}$ ចំពោះចំណុច P



បើ Q ជាចំណុចចាប់នៃកម្លាំង $\vec{F}$ នោះម៉ូម៉ង់នៃកម្លាំង $\vec{F}$ ចំពោះចំណុច

P គឺ $|\vec{M}| = |\overrightarrow{PQ}\times\vec{F}|$ ។

៥.ផលគុណចម្រុះនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក.និយមន័យ

គេមានវ៉ិចទ័របី $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ នៅក្នុងលំហ ។ ផលគុណចម្រុះនៃ $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ តាមលំដាប់គឺជាចំនួនពិតកំណត់ដោយ $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = r$ ។

ខ.ទ្រឹស្ដីបទទី១

បើគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = u_1.\vec{i} + u_2.\vec{j} + u_3.\vec{k}$

$\vec{v} = v_1.\vec{i} + v_2.\vec{j} + v_3.\vec{k}$ និង $\vec{w} = w_1.\vec{i} + w_2.\vec{j} + w_3.\vec{k}$

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

គ.ទ្រឹស្ដីបទទី២

មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតកែងដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}, \vec{v}$ និង $\vec{w}$ គឺ :

$V = |\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|$ និងមាឌ W របស់តេត្រាអ៊ែតគឺ : $W = \dfrac{|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|}{6}$

បានន័យថាយកមាឌរបស់តេត្រាអ៊ែតចែកនឹង 6 ។

៦.បន្ទាត់ និង ប្លង់ក្នុងលំហ

ក_បន្ទាត់ក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ :

♦គេមានបន្ទាត់ $\mathbf{L}$ មួយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ហើយកាត់តាម

ចំនុច $\mathbf{P_0(x_0, y_0, z_0)}$ នោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $\mathbf{L}$ គឺ :

$$\mathbf{x = x_0 + at \ , \ y = y_0 + bt \ , \ z = z_0 + ct \ \ (t \in IR)}$$

ឬ $\begin{cases} \mathbf{x = x_0 + at} \\ \mathbf{y = y_0 + bt} \quad ; \ \mathbf{t \in IR} \\ \mathbf{z = z_0 + ct} \end{cases}$ ។

♦បើ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ខុសពីសូន្យនោះសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ $\mathbf{L}$ គឺ :

$$\mathbf{L : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$ ។

ខ_ប្លង់ក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ : បើប្លង់មួយកាត់តាមចំណុច $\mathbf{P(x_0, y_0, z_0)}$

និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{\mathbf{n}} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ នោះប្លង់មានសមីការស្តង់ដា :

$$\mathbf{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

ដោយពន្លាតសមីការនេះហើយតាង $\mathbf{d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)}$

នោះគេបានសមីការទូទៅ $\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$ ។

គ_មុំរវាងប្លង់ពីរ

គេមានប្លង់ពីរ α_1 និង α_2 មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $\vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$ នោះមុំ θ រវាងពីរវ៉ិចទ័រនេះ ជាមុំរវាងប្លង់ទាំងពីរដែលអាចកំណត់បាន តាមទំនាក់ទំនង $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 . \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}$ ។

ឃ_សមីការស្វ៊ែ

សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $C(x_0, y_0, z_0)$ និងកាំ r គឺ

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$ ។

ពន្លាតសមីការស្តង់ដាគេបានសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែដែលមានរាង

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + k = 0$$

ដែល $k = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$ ។

ង_ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់ក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ ចម្ងាយពីចំនុច Q ទៅប្លង់ α ដែលចំណុច Q មិននៅក្នុងប្លង់ α កំណត់ដោយ $D = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} . \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ ដែល P ជាចំណុចនៅក្នុងប្លង់ហើយ $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ ។

បើ $Q(x_0, y_0, z_0)$ និង $\alpha : ax + by + cz + d = 0$

ហើយ $\vec{n} = (a, b, c)$ នោះ $D = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ។

ច_ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់ក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ ចម្ងាយពីចំនុច Q ទៅបន្ទាត់ L ក្នុងលំហកំណត់ដោយ :

$D = \dfrac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ ដែល P ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់ហើយ $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រ

ប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ L ។

ជំពូកទី១៣ ចំនួនកុំផ្លិច

១-និយមន័យ :

. ចំនួនកុំផ្លិចជាចំនួនដែលមានទម្រង់ $z = a + i.b$ ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិត ហើយ i ហៅថាឯកតានិម្មិតដែល $i^2 = -1$ ឬ $i = \sqrt{-1}$ ។

. គេតាងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចដោយ ₵ ។

. a ហៅថាផ្នែកពិតដែលគេកំនត់តាងដោយ $Re(z) = a$ ។

. b ហៅថាផ្នែកនិម្មិតដែលគេកំនត់តាងដោយ $Im(z) = b$ ។

២-ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច

ក. ប្រមាណវិធីបូក និង ប្រមាណវិធីដក

សន្មតថាគេមាន $z_1 = a_1 + i.b_1$ និង $z_2 = a_2 + i.b_2$

ដែល $a_1, a_2, b_1, b_2 \in IR$ ។

គេបានរូបមន្ត $$\boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i.(b_1 + b_2)}$$

និង $$\boxed{z_1 - z_2 = (a_1 + a_2) - i.(b_1 + b_2)}$$

ខ. ប្រមាណវិធីគុណ និង ប្រមាណវិធីចែក

សន្មតថាគេមាន $z_1 = a_1 + i.b_1$ និង $z_2 = a_2 + i.b_2$

ដែល $a_1, a_2, b_1, b_2 \in IR$ ។

គេបានរូបមន្ត $\boxed{z_1 \times z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i.(a_1b_2 + a_2b_1)}$

និង $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i.\dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}}$ ។

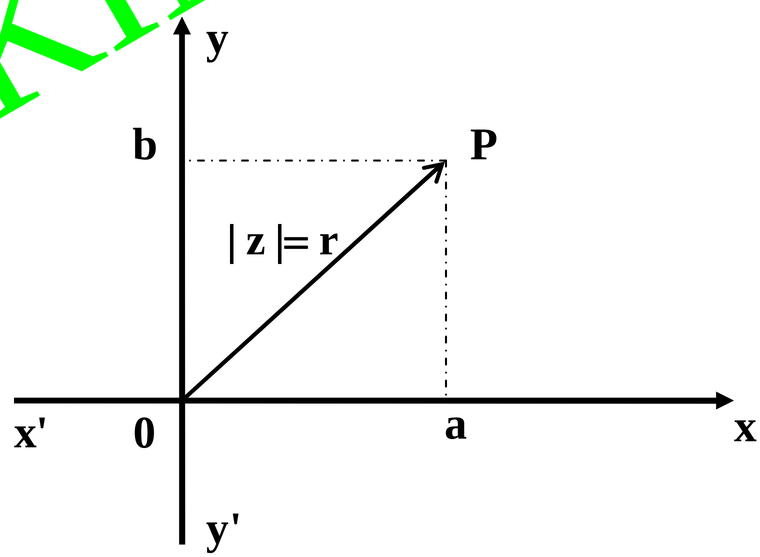
៣ -ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់និងម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

. ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ គឺជាចំនួនកុំផ្លិចដែលតាងដោយ

$\overline{z} = a - i.b$ ។

. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ គេអាចតាងចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ ដោយចំនុច

$P(a\ ,b)$ ។



. រង្វាស់ $OP = r = |z|$ ហៅថាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$

គេកំនត់សរសេរ : $\boxed{|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}}$ ។

៥-ស្វ័យគុណនៃ i

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $k \in IN$ គេមានស្វ័យគុណនៃ i ដូចខាងក្រោម :

$i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$ និង $i^{4k+3} = -i$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនា $S = 1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{2006}$ ។

តាមរូបមន្តផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

គេបាន $S = \dfrac{1 - i^{2007}}{1 - i}$ ដោយ $i^{2007} = i^{4\times 501+3} = -i$

ដូចនេះ $S = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i-1}{1+1} = \dfrac{2i}{2} = i$ ។

៦-អនុវត្តន៍ក្នុងដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរ

គេមានសមីការដឺក្រេទីពីរ $az^2 + bz + c = 0$

ដែល $a \neq 0$ និង $a, b, c \in IR$ ។

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការគឺ $\Delta = b^2 - 4ac$ ។

-បើ $\Delta > 0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនពិតគឺ :

$z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ។

-បើ $\Delta = 0$ សមីការមានឫសឌុបជាចំនួនពិតគឺ: $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$ ។

-បើ $\Delta<0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ :

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\ ,\ z_2=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$ ។

៧ -របៀបគណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច :

ដើម្បីគណនាឫសការេនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b$ គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចតទៅ :

-តាង $W=x+i.y\ ;x,y\in IR$ ជាឫសការេនៃ $z=a+i.b$ ។

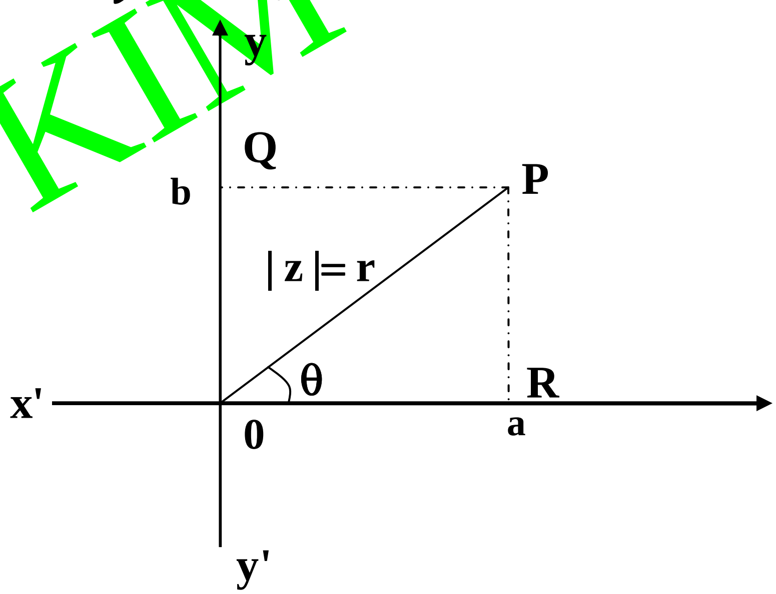
-គេបាន $W^2=z$ ដោយ $W^2=(x+i.y)^2=(x^2-y^2)+2ixy$

-គេបាន $(x^2-y^2)+2ixy=a+i.b$

-គេទាញបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}$

(ត្រូវដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះរកគូចម្លើយ $x;y$)

៨ -ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច



នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) គេឱ្យចំនុច $P(a\ ;b)$ តាងឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b$ ។

តាង θ ជាមុំតូចបំផុតនៃ $\left(\overrightarrow{0x}\ ;\ \overrightarrow{0P}\right)$ ។

ដែលហៅថាអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+i.b$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង **OPR** គេមាន $OP^2=OR^2+RP^2$

ដោយ $\begin{cases} OP=r=|z| \\ OR=a \\ RP=OQ=b \end{cases}$

គេបាន $r^2=a^2+b^2$ ឬ $r=\sqrt{a^2+b^2}$ (ហៅថាម៉ូឌុលនៃ $z=a+i.b$) ។

ម្យ៉ាងទៀត $\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{OR}{OP}=\dfrac{a}{r} \\ \sin\theta=\dfrac{RP}{OP}=\dfrac{b}{r} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a=r.\cos\theta \\ b=r.\sin\theta \end{cases}$

គេបាន $z=a+i.b=r.\cos\theta+i.r.\sin\theta=r(\cos\theta+i.\sin\theta)$

ដូចនេះ $\boxed{z=r.(\cos\theta+i.\sin\theta)}$ ដែល $\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{a}{r}\ ;\ \sin\theta=\dfrac{b}{r} \\ r=\sqrt{a^2+b^2}>0 \end{cases}$

៩ -ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចត្រីកោណមាត្រ

ក. រូបមន្តវិធីគុណ :

សន្មតថា $Z_1=r_1\ (\cos\theta_1+i.\sin\theta_1)$ និង $Z_2=r_2\ (\cos\theta_2+i.\sin\theta_2)$

គេបាន $\boxed{Z_1\times Z_2=r_1.r_2\ [\cos(\theta_1+\theta_2)+i.\sin(\theta_1+\theta_2)]}$ ។

ខ. រូបមន្តវិធីចែក :

សន្មតថា $Z_1 = r_1 \ (\cos\theta_1 + i.\sin\theta_1)$ និង $Z_2 = r_2 \ (\cos\theta_2 + i.\sin\theta_2)$

គេបាន $\boxed{\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \ [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i.\sin(\theta_1 - \theta_2)]}$ ។

គ. ស្វ័យគុណទី n នៃចំនួនកុំផ្លិចត្រីកោណមាត្រ :

សន្មតថាគេមាន $Z = r \ (\cos\theta + i.\sin\theta)$ និងគ្រប់ចំនួនគត់ $n \in Z$

គេបាន $\boxed{Z^n = [r. \ (\cos\theta + i.\sin\theta)]^n = r^n \ [\cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)]}$

ឃ. រូបមន្តដឺម័រ :

ចំពោះគ្រប់ $n \in Z$ គេមាន $\boxed{(\cos\theta + i.\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)}$

១០ -ឫសទីn នៃចំនួនកុំផ្លិច:

ទ្រឹស្តីបទ : សន្មតថា $Z = r\,(\cos\theta + i.\sin\theta)$ ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ

ហើយ $n \in IN^*$ ។

បើ W_k ជាឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងលើនោះគេបាន :

$$W_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

ដែល $k = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, n-1$ ។

១១ -ទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃចំនួនកុំផ្លិច :

ចំនួនកុំផ្លិច Z ដែលមានម៉ូឌុល $|Z| = r$ និង អាគុយម៉ង់ $\arg(Z) = \theta$

មានទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលកំនត់ដោយ $Z = r \cdot e^{i.\theta}$ ។

ជំពូកទី១៤

ទ្រឹស្តីបទក្នុងត្រីកោណ

១-ទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែង

ឧបមាថាគេមានត្រីកោណ **ABC** មួយកែងត្រង់កំពូល **A** និងមានកំពស់ **AH** ។

គេមានទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម

1/ $AB^2 = BH.BC$

2/ $AC^2 = HC.BC$

3/ $AH^2 = BH.HC$

4/ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (ទ្រឹស្តីបទពីតាហ្គ័រ)

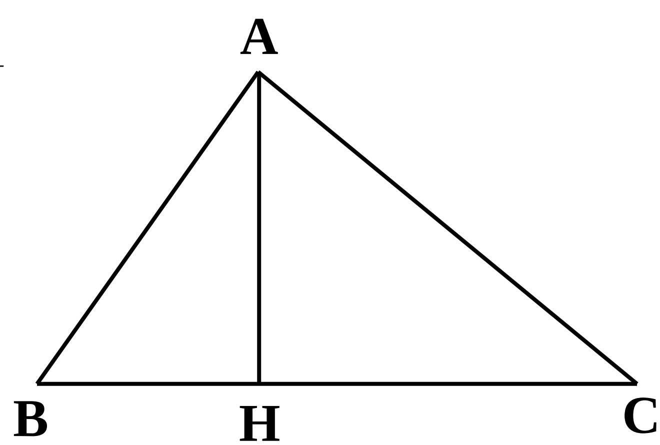
5/ $AH.BC = AB.AC$

6/ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

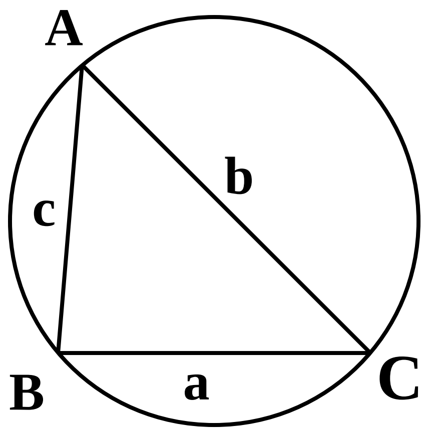
7/ $\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC}$

8/ $\cos\alpha = \dfrac{AC}{BC}$

9/ $\tan\alpha = \dfrac{AB}{AC}$



២-ទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស



ឧបមាថាគេមានត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ $\mathbf{R}$ ហើយមានជ្រុង $\mathbf{BC = a}$; $\mathbf{AC = b}$ និង $\mathbf{AB = c}$ ។

គេមានទំនាក់ទំនង $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

៣-ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

ត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{BC = a}$; $\mathbf{AC = b}$ និង $\mathbf{AB = c}$ ។ គេមានទំនាក់ទំនង

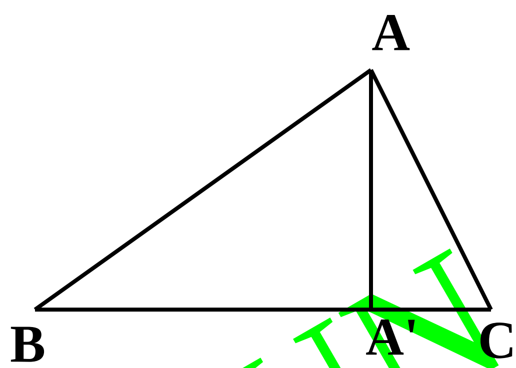
1/ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccsoA$

2/ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

3/ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

៨-រូបមន្តចំណោលកែង

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a\ ;\ AC = b$ និង $AB = c$ ។ គេមានទំនាក់ទំនង



1/ $a = b\cos C + c\cos B$

2/ $b = c\cos A + a\cos C$

3/ $c = a\cos B + b\cos A$

៩-ទ្រឹស្តីបទតង់ហ្សង់

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a\ ;\ AC = b$ និង $AB = c$ ។ គេមានទំនាក់ទំនង

1/ $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}}$

2/ $\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan\dfrac{B+C}{2}}$

3/ $\dfrac{c-a}{c+a} = \dfrac{\tan\dfrac{C-A}{2}}{\tan\dfrac{C+A}{2}}$

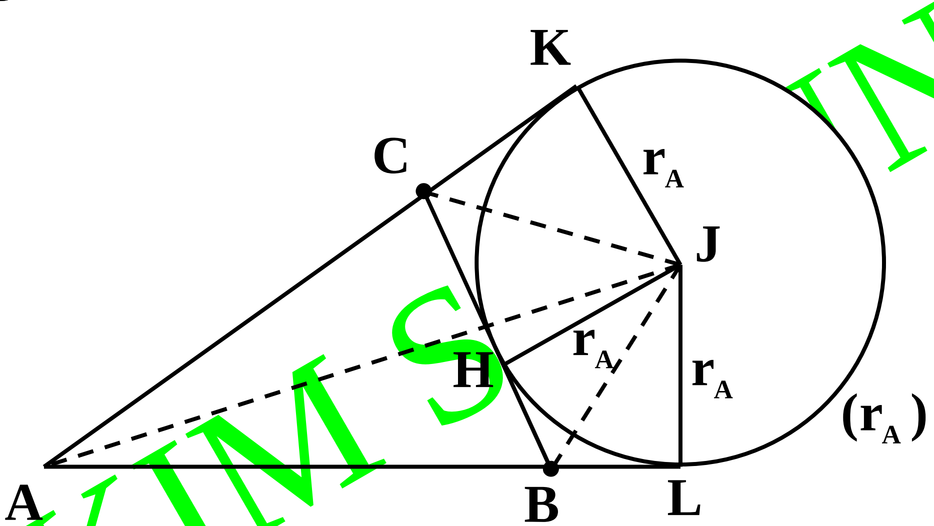
៦-កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំនៃត្រីកោណមួយ

ត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{BC = a \,;\; AC = b}$

និង $\mathbf{AB = c}$ ហើយ $\mathbf{p = \dfrac{a+b+c}{2}}$ ។

តាង $\mathbf{r_A \,, r_B \,, r_C}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ $\mathbf{A, B , C}$

នៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ។គេមានទំនាក់ទំនង



$$\mathbf{1/\;\; r_A = p.\tan\frac{A}{2} = \frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}} = \frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}}}$$

$$\mathbf{2/\;\; r_B = p.\tan\frac{B}{2} = \frac{p-a}{\tan\frac{C}{2}} = \frac{p-c}{\tan\frac{A}{2}}}$$

$$\mathbf{3/\;\; r_C = p.\tan\frac{C}{2} = \frac{p-b}{\tan\frac{A}{2}} = \frac{p-a}{\tan\frac{B}{2}}}$$

៧-កន្សោមកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណមួយ

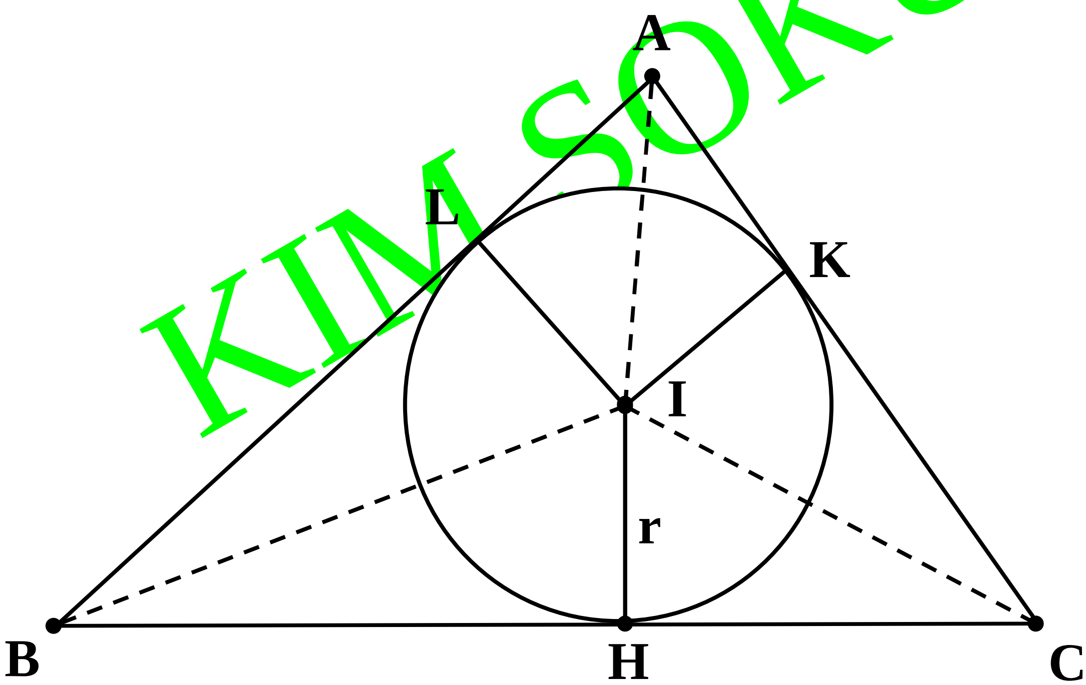
ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$

និង $AB = c$ ហើយ $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ ។

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។

គេមានទំនាក់ទំនង

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$$



៨-រូបមន្តគណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$; $AC=b$ និង $AB=c$ ហើយ $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ។ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងក្រៅនៃត្រីកោណនេះ , តាង r_A , r_B , r_C ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ និង h_a, h_b, h_c ជាកពស់គូសពីកំពូល A, B, C នៃត្រីកោណ ។

1/ $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$

2/ $S=\frac{abc}{4R}=pr$

3/ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

4/ $S=\frac{1}{2}b.c\sin A=\frac{1}{2}c.a\sin B=\frac{1}{2}a.b\sin C$

5/ $S=p(p-a)\tan\frac{A}{2}=p(p-b)\tan\frac{B}{2}=p(p-c)\tan\frac{C}{2}$

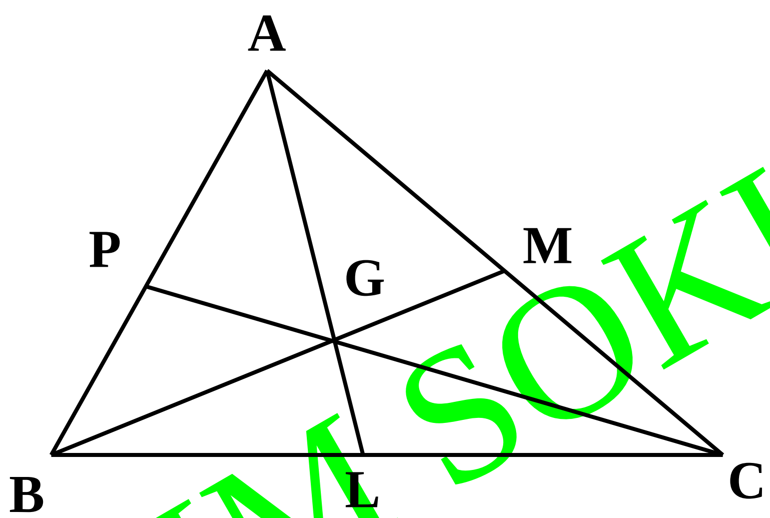
6/ $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$

7/ $S=(p-a)r_A=(p-b)r_B=(p-c)r_C$

8/ $S=\sqrt{r\ .r_A.r_B\ .r_C}$

៩-ទ្រឹស្តីបទមេដ្យានក្នុងត្រីកោណ

ត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ និង $AB = c$ ។ $AL = m_a$; $AM = m_b$; $AN = m_c$ ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ **ABC** ។



គេមានទំនាក់ទំនង

1/ $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

2/ $m_b^2 = \dfrac{c^2 + a^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$

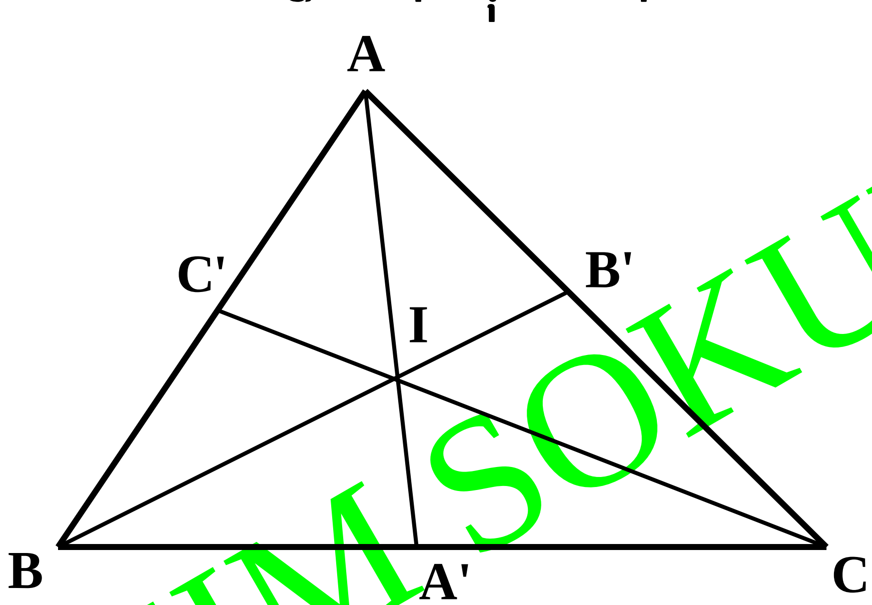
3/ $m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$

១០-ទ្រឹស្តីបទបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$

និង $AB = c$ ។ $AA' = L_a$; $BB' = L_b$; $CC' = L_c$

ជាប្រវែងនៃបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A , B , C ។



គេមានទំនាក់ទំនង

1/ $L_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$

2/ $L_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$

3/ $L_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$

១១-កន្សោម $\cos\frac{A}{2}$; $\cos\frac{B}{2}$; $\cos\frac{C}{2}$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ ;\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

១២-កន្សោម $\sin\frac{A}{2};\sin\frac{B}{2};\sin\frac{C}{2}$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ ;\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

១៣-កន្សោម $\tan\frac{A}{2};\tan\frac{B}{2};\tan\frac{C}{2}$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\ ;\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

១៨-ទំនាក់ទំនងផ្សេងៗទៀតគួរកត់សំគាល់

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេមានទំនាក់ទំនងខាងក្រោម

1/ $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2/ $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

3/ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

4/ $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$

5/ $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

6/ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

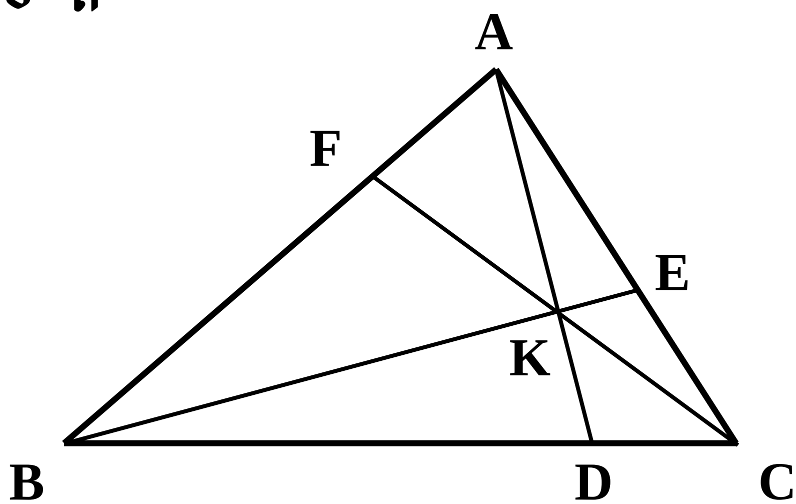
7/ $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

8/ $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

9/ $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

10/ $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

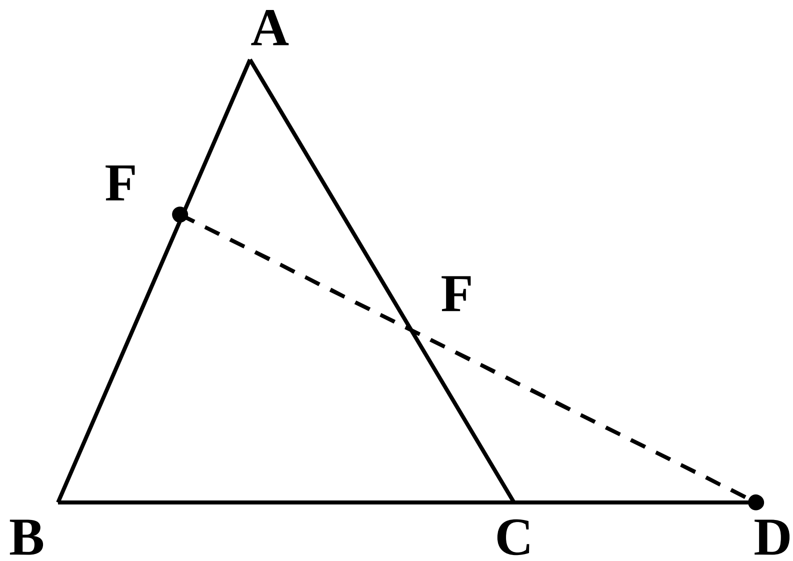
១៨-ទ្រឹស្តីបទ Ceva



ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ,បន្ទាត់បី AD ; BE; CF ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច K តែមួយលុះត្រាតែ

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$ ។

១៦-ទ្រឹស្តីបទ Menelaus



គេមានបីចំនុច **F, D , E** ស្ថិតនៅលើ **AB , BC , AC** នៃត្រីកោណ **ABC** ។ បីចំនុច**F, D , E** រត់ត្រង់គ្នា លុះត្រាតែ $\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=1$ ។

១៧-ទ្រឹស្តីបទឡិបនិច

ក្នុងត្រីកោណ **ABC** ដែលមានជ្រុង **a ; b ; c** ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត **O** កាំ **R** ហើយ **G** ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃ

ត្រីកោណ ABC គេមាន $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ ។

១៧-ទ្រឹស្តីបទ Stewart

បើ L ជាចំនុចនៅលើជ្រុង BC នៃត្រីកោណ ABC

ដែល $AL = l\ ;\ BL = m\ ;\ LC = n$, a, b, c ជាជ្រុង

នោះគេមាន $a(l^2 + mn) = b^2 m + c^2 n$ ។

ជំពូកទី១៥ វិសមភាពចំនួនពិត

១/ វិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រ

(The AM-GM Inequality)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$

គេបាន $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ និង

គ្រាន់តែ $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

_គេមាន $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ សមមូល $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$

ដូចនេះវិសមភាពពិតចំពោះ $n = 2$ ។

_ឧបមាថាសមភាពនេះពិតដល់តួទី $n = k$ គឺ

$\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1.a_2.a_3......a_k}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k + 1$ គឺ ៖

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + a_{k+1}}{k + 1} \geq \sqrt[k+1]{a_1.a_2.a_3...a_k.a_{k+1}}$$

តាងអនុគមន៍

$$f(x)=\frac{(x+a_1+a_2+a_3+......+a_k)^{k+1}}{x}$$

ដែល $x>0\ ,\ a_k>0\ ,\ k=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ ...$។

យើងបាន

$$f'(x)=\frac{(k+1)(x+a_1+....+a_k)^k x-(x+a_1+...+a_k)^{k+1}}{x^2}$$

$$=\frac{(x+a_1+....+a_k)^k\left[(k+1)x-(x+a_1+....+a_k)\right]}{x^2}$$

$$=\frac{(x+a_1+a_2+....+a_k)^k\left(kx-a_1-a_2-....-a_k\right)}{x^2}$$

បើ $f'(x)=0$ នាំឲ្យ $x=\dfrac{a_1+a_2+.....+a_k}{k}$

ចំពោះ $x=\dfrac{a_1+a_2+.....+a_k}{k}$ គេបាន ៖

$$f\left(\frac{a_1+a_2+....+a_k}{k}\right)=\frac{\left(\dfrac{a_1+a_2+...+a_k}{k}+a_1+...+a_k\right)^{k+1}}{\dfrac{a_1+a_2+...+a_k}{k}}$$

$$f\left(\frac{a_1+a_2+......+a_k}{k}\right)=(k+1)^{k+1}\left(\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}\right)^k$$

ចំពោះ $\forall x\geq 0$ យើងទាញបាន ៖

$$f(x) \geq f\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k}\right)$$

$$f(x) \geq (k+1)^{k+1}\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}{k}\right)^k$$

តាមការឧបមា $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1.a_2.a_3......a_k}$

សមមូល $\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k}\right)^k \geq a_1.a_2...a_k$

$$\frac{(x + a_1 + a_2 + ... + a_k)^{k+1}}{x} \geq (k+1)^{k+1} a_1 a_2 ... a_k$$

$$\frac{x + a_1 + a_2 + ... + a_k}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1.a_2.......a_k x} \quad (*)$$

យក $x = a_{k+1} > 0$ ជួសក្នុង $(*)$ គេបាន

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1.a_2.a_3......a_k.a_{k+1}}$$

ដូចនេះ $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$ ។

២/ វិសមភាព កូស៊ី-ស្វ័ស (Cauchy-Schwarz's Inequality)

ក-ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a_1 ; a_2 ;...; a_n ; b_1 ; b_2 ; ...; b_n

គេបាន

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \le (a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+...+a_n^{\ 2})(b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+...+b_n^{\ 2})$$ ឬ

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)\times\sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)$$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែនិងគ្រាន់តែ

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងជ្រើសរើសអនុគមន៍មួយកំនត់ $\forall x\in IR$ ដោយ ៖

$$f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+.....+(a_nx+b_n)^2$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)x^2+2\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)x+\sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)$$

ដោយ $\forall x\in IR$ ត្រីធា $f(x)\ge 0$ ជានិច្ចនោះ $\begin{cases} a_f>0 \\ \Delta'\le 0\end{cases}$

ដោយ $a_f=a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+.....+a_n^{\ 2}>0$

ហេតុនេះគេបានជានិច្ច $\Delta'\le 0$

$$\Delta'=\left(\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)\times\sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)\le 0$$

ឬ $$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)\times\sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)$$

2/ Cauchy-Schwarz in Engle form

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n > 0$

គេបាន

$$\frac{x_1^{\,2}}{y_1}+\frac{x_2^{\,2}}{y_2}+...+\frac{x_n^{\,2}}{y_n}\ge\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{y_1+y_2+...+y_n}$$

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែនិងគ្រាន់តែ

$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=...=\frac{x_n}{y_n}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមវិសមភាព $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\right)\times\sum_{k=1}^{n}\left(b_k^2\right)$

បើគេយក $a_k=\frac{x_k}{\sqrt{y_k}}$, $b_k=\sqrt{y_k}$

គេបាន $\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{\sqrt{y_k}}.\sqrt{y_k}\right)\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k^{\,2}}{y_k}\right)\times\sum_{k=1}^{n}(y_k)$

គេទាញ $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k^{\,2}}{y_k}\right)\ge\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k)\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}(y_k)}$,

ដូចនេះ $\frac{x_1^{\,2}}{y_1}+\frac{x_2^{\,2}}{y_2}+...+\frac{x_n^{\,2}}{y_n} \ge \frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{y_1+y_2+...+y_n}$

៣/ វិសមភាពហូលឌ័រ (Hölder's Inequality)

ទ្រឹស្តីបទ គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_{i,j}$,$1\le i\le m$, $1\le j\le 1$

គេបាន $\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \ge \left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{ij}}\right)^{m}$ ។

រូបមន្តផ្សេងទៀតនៃ Hölder's Inequality

គ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន $x_1,x_2,....,x_n$ និង $y_1,y_2,...,y_n$

ចំពោះ $p>0, q>0$ និង $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

នោះគេបាន $\sum_{k=1}^{n}(x_k y_k) \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{\,q}\right)^{\frac{1}{q}}$ ។

៤/ វិសមភាពមិនកូស្គី (Minkowski's Inequality)

ទ្រឹស្តីបទទី១ ចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន $a_1,a_2,...,a_n$ និង

$b_1,b_2,....,b_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$ និងចំពោះ $p\ge 1$ គេបាន :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ ។}$$

ទ្រឹស្តីបទទី២ ចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន $a_1, a_2, ..., a_n$ និង

$b_1, b_2, ..., b_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$ ដែល $n \ge 2$ គេបាន

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a_k)} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(b_k)} \le \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)} \text{ ។}$$

៥/ វិសមភាពប៊ែនូលី(**Bernoulli’s Inequality**)

- ចំពោះ $x > -1$, $a \in (0,1)$ គេបាន:$(1+x)^a < 1+ax$
- ចំពោះ $x > -1, n < 1$ គេបាន:$(1+x)^a > 1+ax$

៦/ វិសមភាព CHEBYSHEV*(*Chebyshev´s Inequality*)*

គេអោយពីរស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$a_1, a_2, ..., a_n$ និង $b_1, b_2, ..., b_n$ និង $n \in \mathbb{N}^*$

-ចំពោះ$a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ និង $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$

គេបាន : $\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k)\times\sum_{k=1}^{n}(b_k)$

-ចំពោះ $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ និង $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k)\times\sum_{k=1}^{n}(b_k)$

៧/ វិសមភាព JENSEN (Jensen’s Inequality)

វិសមភាព* JENSEN *ទម្រង់ទី១

គេឲ្យ n ចំនួនពិត $x_1, x_2, ..., x_n \in I$

- បើ $f''(x) < 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)] \leq f\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k)\right]$$ ។

- បើ $f''(x) > 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)] \geq f\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k)\right]$$ ។

វិសមភាព JENSEN ទម្រង់ទី២

គេឲ្យ n ចំនួនពិត $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ និងចំពោះគ្រប់

ចំនួនវិជ្ជមាន $a_1, a_2, ..., a_n$ ដែលផលបូក $\sum_{k=1}^{n}(a_k) = 1$

- បើ $f''(x) < 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\sum_{k=1}^{n}[a_k f(x_k)] \le f\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k)\right]$$ ។

- បើ $f''(x) > 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\sum_{k=1}^{n}[f(a_k x_k)] \ge f\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k)\right]$$ ។

វិសមភាព JENSEN ទម្រង់ទី៣

គេឲ្យ n ចំនួនពិត $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ និងចំពោះគ្រប់

ចំនួនវិជ្ជមាន $a_1, a_2, ..., a_n$ ។

- បើ $f''(x) < 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[a_k f(x_k)\right]}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)} \le f\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k)}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)}\right] \text{ ។}$$

. បើ $f''(x) > 0$ និង $\forall x_k \in I$ គេបាន:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[a_k f(x_k)\right]}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)} \ge f\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k x_k)}{\sum_{k=1}^{n}(a_k)}\right]$$

៨/ វិសមភាព **Schur (Schur's Inequality)**

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c និង $n > 0$ គេបាន

$$a^n(a-b)(a-c)+b^n(b-c)(b-a)+c^n(c-a)(c-b) \ge 0$$

វិសមភាពនេះពិតចំពោះ $a = b = c$ ។

៩/ វិសមភាព **(Rearrangement's Inequality)**

គេឲ្យ $(a_n)_{n\ge1}$ និង $(b_n)_{n\ge1}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន

កើន ឬចុះព្រមគ្នា ។ ចំពោះគ្រប់ចម្លាស់ (c_n) នៃចំនួន

(b_n) គេបាន $\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k) \ge \sum_{k=1}^{n}(a_k c_k) \ge \sum_{k=1}^{n}(a_k b_{n-k+1})$

ជំពូកទី១៦

ភាពចែកដាច់ និង វិធីចែកអឺក្លីត

1.ភាពចែកដាច់ក្នុង Z

ក_និយមន័យ

_ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប **a** ជាពហុគុណនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប **b** លុះត្រាតែមាន ចំនួនរ៉ឺឡាទីប **q** មួយដែល $a = b.q$ ។

ក្នុងករណីនេះ **b** ហៅថាតួចែកនៃ **a** ។

-បើ $b \neq 0$ នោះគេថា **b** ជាតួចែកមួយនៃ **a** ឬ **b** ចែកដាច់**a** ហើយ គេកំនត់សរសេរ $b|a$ អានថា **b** ចែកដាច់ **a** ។

ខ_លក្ខណៈចែកដាច់នៃផលបូកនិងផលដក

មាន **a** , **b** , **c** និង **x** ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល **x** ខុសពីសូន្យ ។

បើ $x|a$, $x|b$ និង $x|c$ នោះ $x|(a+b-c)$ ។

គ_លក្ខណៈចែកដាច់នឹងមួយចំនួន

-មួយចំនួនគត់ចែកដាច់នឹង **2** លុះត្រាតែលេខខ្ទង់រាយចែកដាច់នឹង **2**

បានន័យថាចំនួននោះត្រូវមានលេខខាងចុងជាលេខគូ :

(0, 2, 4 , 6,8) ។

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង **5** លុះត្រាតែវាមានលេខចុង 0 ឬ 5 ។

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 4 លុះត្រាតែចំនួនពីរខ្ទង់ខាងចុងចែកដាច់នឹង 4

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 25 លុះត្រាតែចំនួនពីរខ្ទង់ខាងចុងចែកដាច់នឹង 25 គឺ **00, 25 , 50 , 75** ។

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 3 (នឹង 9) លុះត្រាតែផលបូកលេខគ្រប់ខ្ទង់នៃចំនួននោះចែកដាច់នឹង 3 (នឹង 9) ។

-មួយចំនួនចែកដាច់នឹង 11 លុះត្រាតែផលដករវាងផលបូកលេខខ្ទង់សេស និងផលបូកលេខខ្ទង់គូនៃចំនួននោះ (រាប់ពីស្តាំទៅឆ្វេង) ចែកដាច់នឹង 11 ។

2.វិធីចែកបែបអឺគ្លីត

ក_និយមន័យ

ធ្វើវិធីចែកបែបអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប **a** និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ **b** គឺកំណត់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប **q** និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ **r** ដែល $\mathbf{a = bq + r}$ ដោយ $\mathbf{0 \le r < b}$ ។

a ហៅថាតំណាំងចែក , **b** ហៅថាតួចែក , **q** ហៅថាផលចែក និង **r** ហៅថាសំណល់ ។

ខ_ទ្រឹស្តីបទ បើ **a** ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និង **b** ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះមានចំនួនគត់ រ៉ឺឡាទីប **q** តែមួយគត់ និង ចំនួនគត់ធម្មជាតិ **r** តែមួយគត់ដែល $\mathbf{a = b.q + r}$ ដោយ $\mathbf{0 \le r < b}$ ។

ចំនួនបឋម តួចែករួម និង ពហុគុណរួម

✍ ចំនួនបឋម

-គេថាចំនួនគត់ធម្មជាតិ **n** ជាចំនួនបឋមកាលណា **n** មានតួចែក តែពីគត់គឺ **1** និង **n** ខ្លួនឯង ។

-គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{n > 1}$ មានតួចែកជាចំនួនបឋមមួយដែលជាតួចែកតូចបំផុតក្រៅពី **1** ។

-បើ $\mathbf{n \in IN}$ ហើយ **n** មិនមែនជាចំនួនបឋម នោះមានចំនួនបឋម **b** ដែល **n** ចែកដាច់នឹង **b** និង $\mathbf{b^2 \le n}$ ។

-ដើម្បីស្គាល់ថាចំនួនគត់ធម្មជាតិ **a** ណាមួយជាចំនួនបឋម គេត្រូវចែក **a** និងចំនួនបឋមតៗគ្នាដែលតូចជាងវា ។ បើគ្មានវិធីចែកណាមួយផ្តល់សំណល់សូន្យទេនោះ និង ផលចែកតូចជាងតួចែកដែលបានយកមកប្រើ នោះ **a** ជាចំនួនបឋម ។

-បើ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ ហើយ **n** ចែកមិនដាច់នឹងចំនួនបឋមដែលមានការេតូច

ជាងឬស្មើ **n** នោះ **n** ជាចំនួនបឋម ។

-ស្វ៊ីតនៃចំនួនបឋម ជាស្វ៊ីតអនន្ត ។

-គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនបឋម ហើយធំជាង **1** អាចបំបែកជាផលគុណនៃកត្តាបឋមបាន ហើយបានតែមួយបែបគត់ ។

✍ តួចែករួម និង ពហុគុណរួម

-គេឱ្យ **a** និង **b** ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ចំនួនគត់ធម្មជាតិ **d** ជាតួចែករួមនៃ **a** និង **b** កាលណា **d** ជាតួចែកនៃ **a** ផង និងជាតួចែកនៃ **b** ផង ។

-តួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ **a** និង **b** ជាចំនួនគត់ធំជាងគេនៃបណ្ដាតួចែករួមនៃ **a** និង **b** ។ និមិត្តសញ្ញា $\delta = \mathbf{PGCD(a,b)}$ ឬ $\delta = \mathbf{GCD(a,b)}$ ជាតំណាងឱ្យតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ **a** និង **b** ។

-ចំនួនគត់ធម្មជាតិ **a** និង **b** ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាកាលណា តួចែករួមធំបំផុត $\mathbf{GCD(a,b) = 1}$ និងច្រាស់មកវិញ ។

-បើ $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}$ ដែល $\mathbf{a = bq + r}$, $\mathbf{0 < r < b}$ នោះគេបាន

$$\mathbf{GCD(a,b) = GCD(b,r)}$$ ។

-គ្រប់ $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}$ និងគ្រប់តួចែករួម **d** នៃ **a** និង **b** គេបាន :

ក. $\mathbf{GCD(na,nb)=nG(a,b)}$ ដែល $\mathbf{n}\in\mathbb{N}$

ខ. $\mathbf{GCD\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=\frac{GCD(a,b)}{d}}$

-**ទ្រឹស្តីបទ Bezout** ចំនួនគត់ធម្មជាតិ **a** និង **b**

បឋមរវាងគ្នាលុះត្រាតែមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប **u** និង **v**

ដែល $\mathbf{au+bv=1}$ ។

-**ទ្រឹស្តីបទ Gauss :**

បើ $\mathbf{c|ab}$ និង $\mathbf{GCD(a,b)=1}$ នាំឱ្យ $\mathbf{c|b}$ ។

-បើ $\mathbf{a|n}$; $\mathbf{b|n}$ និង $\mathbf{GCD(a,b)=1}$ នាំឱ្យ $\mathbf{ab|n}$ ។

-ពហុគុណរួមតូចបំផុតនៃពីរចំនួនគត់ **a** និង **b** គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

ដែលតូចជាងគេក្នុងបណ្តាពហុគុណរួមវិជ្ជមានខុសពីសូន្យនៃ **a** និង **b**

ដែលកំណត់ដោយ $\mathbf{\mu=PPCM(a,b)}$ ឬ $\mathbf{\mu=LCM(a,b)}$

-គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ **a ,b** និង **n** និងគ្រប់តួចែករួម **a** និង **b**

គេបាន ក. $\mathbf{LCM(na,nb)=nLCM(a,b)}$

ខ. $\mathbf{LCM(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=\frac{LCM(a,b)}{d}}$

-**ទ្រឹស្តីបទ :** បើ **a** និង **b** ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិនោះគេបាន

$\mathbf{GCD(a,b)\times LCM(a,b)=a\times b}$ ។

ជំពូកទី១៧

អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

(Hyperbolic Functions)

1.កន្សោមពីជគណិតស្តង់ដា

អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកមាន ៖

◆ ស៊ីនូសអ៊ីពែបូលិក កំណត់ដោយសមីការ $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

◆ កូស៊ីនូសអ៊ីពែបូលិក កំណត់ដោយសមីការ $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

◆ តង់សង់អ៊ីពែបូលិក កំណត់ដោយសមីការ $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

◆ កូតង់សង់អ៊ីពែបូលិក កំណត់ដោយសមីការ $\coth x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

2.ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ

ក. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

ខ. $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

គ. $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

ឃ. $\tanh x = \dfrac{1}{\coth x}$

ង. $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

ច. $\coth^2 x - 1 = \dfrac{1}{\sinh^2 x}$

សម្រាយបញ្ជាក់

ដោយ $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ និង $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

គេបាន $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}$$
$$= 1$$

ដូចនេះ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ។

តាម $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

គេបាន $$\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$ ដោយ $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

ដូចនេះ $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $$\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$\frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x}$$ ដោយ $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

ដូចនេះ $\coth^2 x - 1 = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ ។

3.រូបមន្តផលបូក

1. $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\sinh y\cosh x$

2. $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$

3. $\tanh(x+y)=\dfrac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$

4. $\coth(x+y)=\dfrac{\coth x\coth y+1}{\coth x+\coth y}$

សំរាយបញ្ជាក់

គេមាន $\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

$$\sinh y=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\ ,\ \cosh y=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$$

គេបាន $\sinh x\cosh y=\dfrac{(e^{x}-e^{-x})(e^{y}+e^{-y})}{4}$

$$\sinh x\cosh y=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}+e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\quad (a)$$

ហើយ $\sinh y\cosh x=\dfrac{(e^{y}-e^{-y})(e^{x}+e^{-x})}{4}$

$$\sinh y\cosh x=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}-e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\quad (b)$$

បូកសមីការ **(a)** និង **(b)** គេបាន :

$$\sinh x\cosh y+\sinh y\cosh x=\frac{e^{x+y}-e^{-(x-y)}}{2}=\sinh(x+y)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\cosh x \cosh y = \dfrac{(e^{x}+e^{-x})(e^{y}+e^{-y})}{4}$

$$\cosh x \cosh y = \frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-(x+y)}}{4} \quad (c)$$

ហើយ $\sinh x \sinh y = \dfrac{(e^{x}-e^{-x})(e^{y}-e^{-y})}{4}$

$$\sinh x \sinh y = \frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-(x+y)}}{4} \quad (d)$$

បូកសមីការ (c) និង (d) គេបាន ៖

$$\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y)$$

ដូចនេះ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ ។

គេមាន $\tanh(x+y) = \dfrac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)}$

$$= \frac{\sinh x \cosh y + \sinh y \text{csoh} x}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y}$$

$$= \frac{\cosh x \cosh y\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}+\frac{\sinh y}{\cosh y}\right)}{\cosh x \cosh y\left(1+\frac{\sinh x \sinh y}{\cosh x \cosh y}\right)}$$

$$= \frac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x \tanh y}$$

ដូចនេះ $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x \tanh y}$ ។

3.អនុគមន៍នៃអាគុយម៉ង់អវិជ្ជមាន

1. $\sinh(-x) = -\sinh x$

2. $\cosh(-x) = \cosh x$

3. $\tanh(-x) = -\tanh x$

4. $\coth(-x) = -\coth x$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

គេបាន $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$

ហើយ $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

គេបាន $\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$ ។

$\tanh(-x) = \dfrac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = -\dfrac{\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x$

$\coth(-x) = \dfrac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = -\dfrac{\cosh x}{\sinh x} = -\coth x$

5.រូបមន្តផលដក

1. $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \sinh y \cosh x$

2. $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$

3. $$\tanh(x-y)=\frac{\tanh x-\tanh y}{1-\tanh x\tanh y}$$

4. $$\coth(x-y)=\frac{1-\coth x\coth y}{\coth x-\coth y}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\sinh y\cosh x \quad (i)$

$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y \quad (ii)$$

$$\tanh(x+y)=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y} \quad (iii)$$

$$\coth(x+y)=\frac{\coth x\coth y+1}{\coth x+\coth y} \quad (iv)$$

ដោយជំនួស y ដោយ $-y$ ក្នុង $(i),(ii),(iii)$ និង (iv)

គេបាន $\sinh(x-y)=\sinh x\cosh(-y)+\sinh(-y)\cosh x$

$$=\sinh x\cosh y-\sinh y\cosh x$$

$$\cosh(x-y)=\cosh x\cosh(-y)+\sinh x\sinh(-y)$$

$$=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y$$

$$\tanh(x-y)=\frac{\tanh x+\tanh(-y)}{1+\tanh x\tanh(-y)}=\frac{\tanh x-\tanh y}{1-\tanh x\tanh y}$$

$$\coth(x-y)=\frac{\coth x\coth(-y)+1}{\coth x+\coth(-y)}=\frac{1-\coth x\coth y}{\coth x-\coth y}$$

៦.រូបមន្តមុំឌុប (DOUBLE ANGLE FORMULAS)

1. $\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$

2. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$$= 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$$

3. $\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$

4. $\coth 2x = \dfrac{1+\coth^2 x}{2\coth x}$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $\sinh(x+y) = \sinh x\cosh y + \sinh y\cosh x \quad (i)$

$$\cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y \quad (ii)$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x\tanh y} \quad (iii)$$

$$\coth(x+y) = \frac{\coth x\coth y + 1}{\coth x + \coth y} \quad (iv)$$

ដោយជំនួស y ដោយ x ក្នុង $(i),(ii),(iii)$ និង (iv) គេបាន :

$$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$ និង $\coth 2x = \dfrac{1+\coth^2 x}{2\coth x}$

7.រូបមន្តកន្លះមុំ (HALE ANGLE FORMULAS)

1. $\sinh^2\frac{x}{2}=\frac{\cosh x-1}{2}$
2. $\cosh^2\frac{x}{2}=\frac{\cosh x+1}{2}$
3. $\tanh^2\frac{x}{2}=\frac{\cosh x-1}{\cosh x+1}$
4. $\coth^2\frac{x}{2}=\frac{\cosh x+1}{\cosh x-1}$

8.រូបមន្តពហុមុំ (MULTIPLE ANGLE FORMULAS)

1. $\sinh 3x=3\sinh x+4\sinh^3 x$

2. $\cosh 3x=4\cosh^3 x-3\cosh x$

3. $\tanh 3x=\frac{3\tanh x+\tanh^3 x}{1+3\tanh^2 x}$

4. $\sinh 4x=8\sinh^3 x\cosh x+4\sinh x\cosh x$

5. $\cosh 4x=8\cosh^4 x-8\cosh^2 x+1$

6. $\tanh 4x=\frac{4\tanh x+4\tanh^3 4x}{1+6\tanh^2 x+\tanh^4 x}$

៩.រូបមន្តផលបូក_ផលដក និង ផលគុណ

(Sum-Difference and Product of Hyperbolic Functions)

1. $\sinh x+\sinh y=2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$

2. $\cosh x+\cosh y=2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$

3. $\sinh x-\sinh y=2\sin\frac{x-y}{2}\cosh\frac{x+y}{2}$

4. $\cosh x-\cosh y=2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$

5. $\tanh x+\tanh y=\frac{\sinh(x+y)}{\cosh x\cosh y}$

6. $\tanh x-\tanh y=\frac{\sinh(x-y)}{\cosh x\cosh y}$

7. $\coth x+\coth y=\frac{\sinh(x+y)}{\sinh x\sinh y}$

8. $\coth x-\coth y=\frac{\sinh(y-x)}{\sinh x\sinh y}$

9. $\sinh x\sinh y=\frac{1}{2}[\cosh(x+y)-\cosh(x-y)]$

10. $\cosh x \cosh y = \frac{1}{2}[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)]$

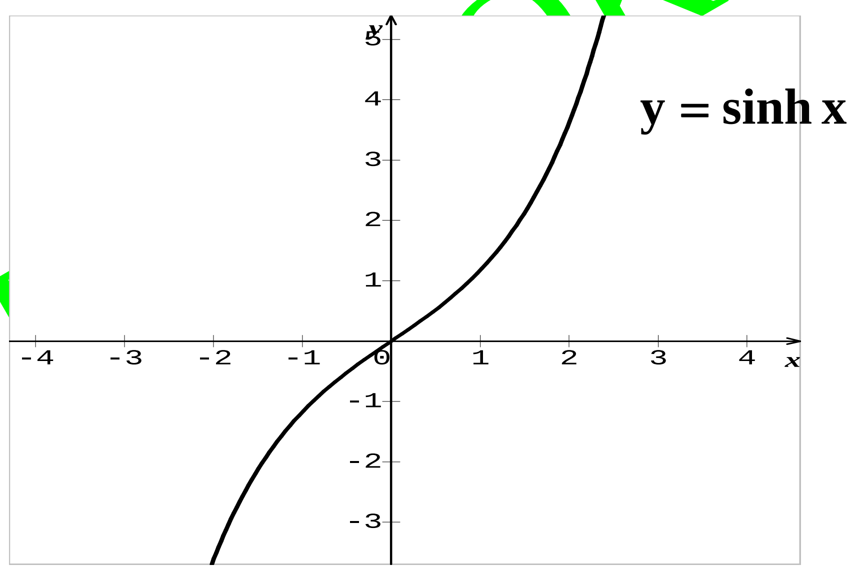
11. $\sinh x \cosh y = \frac{1}{2}[\sinh(x+y) + \sinh(x-y)]$

12. $\sinh y \cosh x = \frac{1}{2}[\sinh(x+y) - \sinh(x-y)]$

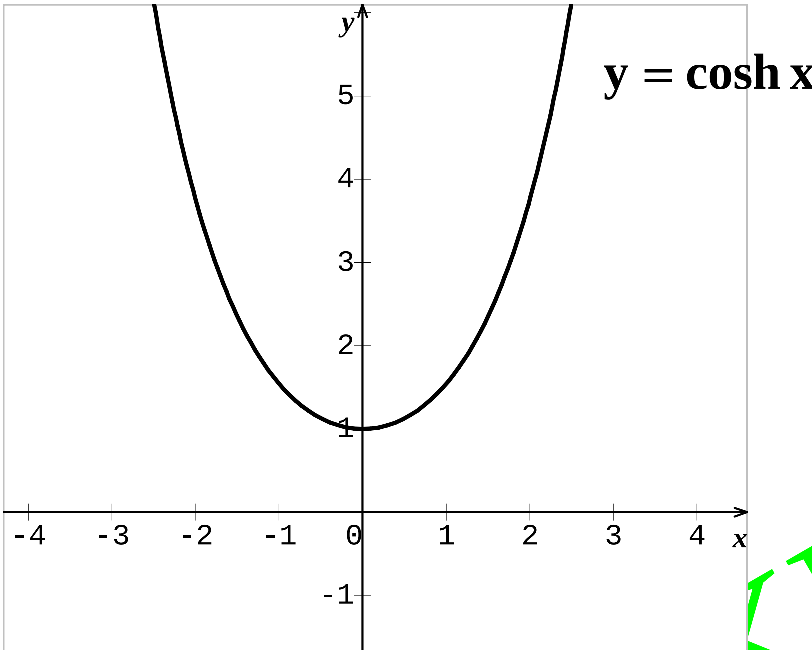
10.ក្រាបនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

(Graphs of Hyperbolic Functions)

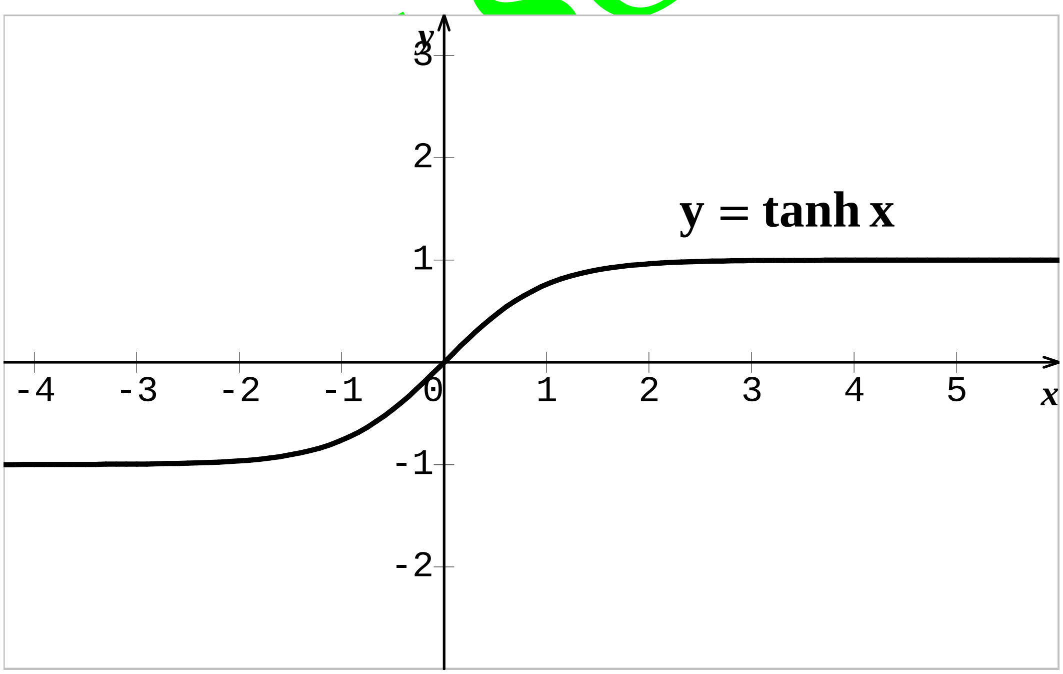
1. $y = \sinh x$



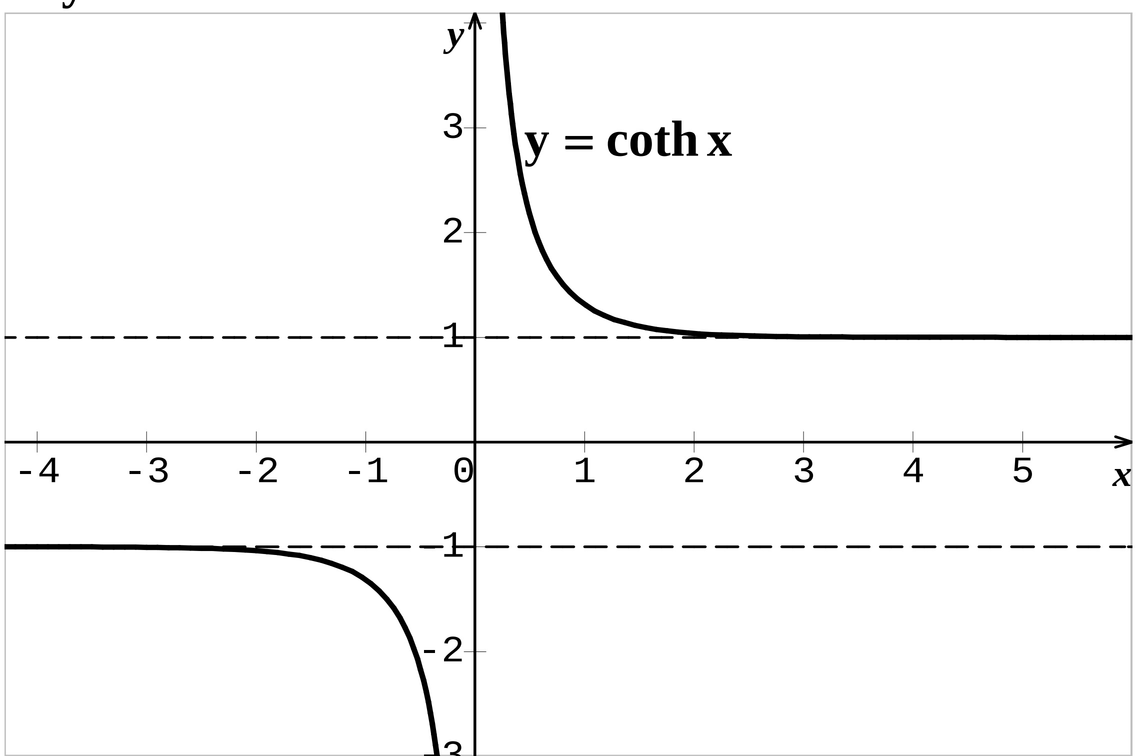
2. $\mathbf{y = \cosh x}$



3. $\mathbf{y = \tanh x}$



4. $\mathbf{y = \coth x}$



11.ទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកនិងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

(Relationships between Hyperbolic and Trigonometry Functions)

1. $\mathbf{\sin(ix) = i\sinh x}$

2. $\mathbf{\cos(ix) = \cosh x}$

3. $\mathbf{\tan(ix) = i\tanh x}$

4. $\mathbf{\sinh(ix) = i\sin x}$

5. $\mathbf{\cosh(ix) = \cos x}$

6. $\mathbf{\tanh(ix) = i\tan x}$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមរូបមន្តអឺលែ $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ និង $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

ជំនួស x ដោយ ix គេបាន :

$$\cos(ix) = \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$$

$$\sin(ix) = \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = i\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = i\sinh x$$

ហើយ $\tan(ix) = \frac{\sin(ix)}{\cos(ix)} = \frac{i\sinh x}{\cosh x} = i\tanh x$ ។

12.អនុវត្តន៏

គេមាន $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh x \cosh y$

ជំនួស $x = ia$ និង $y = ib$ គេបាន :

$$\sinh i(a+b) = \sinh(ia)\cosh(ib) + \sinh(ib)\cos(ia)$$

ដោយ $\sinh i(a+b) = i\sin(a+b)$, $\sinh(ia) = i\sin a$

$\sinh(ib) = i\sin b$, $\cosh(ia) = \cos a$, $\cosh(ib)$

គេបាន $i\sin(a+b) = i\sin a\cos b + i\sin b\cos a$

ដូចនេះ $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$ ។

គេមាន $\cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y$

ជំនួស $x = ia$ និង $y = ib$ គេបាន :

$\cosh i(a+b) = \cosh(ia)\cosh(ib) + \sinh(ia)\sinh(ib)$

ដោយ $\cosh i(a+b) = \cos(a+b)$, $\sinh(ia) = i\sin a$

$\sinh(ib) = i\sin b$, $\cosh(ia) = \cos a$, $\cosh(ib)$

គេបាន $\cos(a+b) = \cos a\cos b + i^2\sin a\sin b$ ដោយ $i^2 = -1$

ដូចនេះ $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ ។

13.លីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x}{x} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tanh x}{x} = 1$

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2xe^x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\dfrac{1}{e^x} = 1$ ។

14.ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

1. $y = \sinh x \Rightarrow y' = \cosh x$

2. $y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x$

3. $y = \tanh x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

4. $y = \coth x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

15.អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

1. $\int \sinh x.dx = \cosh x + c$

2. $\int \cosh x.dx = \sinh x + c$

3. $\int \tanh x.dx = \ln(\cosh x) + c$

4. $\int \coth x.dx = \ln(\sinh x) + c$

ជំពូកទី១៨

វិភាគបន្សំ និង ប្រូបាប៊ីលីតេ

I- វិភាគបន្សំ

១.ហ្វាក់តូរ្យែល (Factorial) :

ដែលហៅថាហ្វាក់តូរ្យែលនៃចំនួន **n** ជាផលគុណនៃ **n** ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង ឬ ជាផលគុណចំនួនគត់វិជ្ជមានតគ្នា ពី **1** រហូតដល់ **n** ដែលគេកំនត់សរសេរ :

$$\boxed{n! = 1\times 2\times 3\times ....\times n}$$ ។

២.តំរៀបមិនសារឡើងវិញ (Arrangement) :

តំរៀប **p** ធាតុក្នុងចំណោម **n** ធាតុនៃសំនុំ **E** គឺជាសំនុំរងនៃ **E** ដែលមាន **p** ធាតុខុសៗគ្នា

រៀបតាមលំដាប់មួយកំនត់ ។ គេកំនត់តាងចំនួនតំរៀប **p** ធាតុក្នុងចំនោម **n** ធាតុដោយ :

$$\boxed{A(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2).....(n-p+1)}$$ ។

៣.ចំលាស់មិនសារឡើងវិញ (Permultation) :

ចំលាស់ **n** ធាតុខុសៗគ្នា គឺជាតំរៀប **n** ធាតុ ក្នុងចំណោម **n** ធាតុ ។

គេកំនត់ចំនួនចំលាស់ **n** ធាតុដោយ $\boxed{P = n! = 1\times 2\times 3\times .....\times n}$ ។

៤.បន្សំមិនសារឡើងវិញ (Combination) :

បន្សំ **p** ធាតុក្នុងចំណោម **n** ធាតុ ជាតំរៀបមិនគិតលំដាប់ដែលកំនត់ដោយ :

$$\boxed{C(n,p)=\frac{A(n,p)}{p!}=\frac{n!}{p!.(n-p)!}} \quad (n\ge p) \text{ ។}$$

៥.តំរៀបសារឡើងវិញ (Arrangement with Repetition) :

តំរៀបសារឡើងវិញ **p** ធាតុ ក្នុងចំណោម **n** ធាតុគឺជាតំរៀបដែលធាតុនីមួយៗ អាចមានវត្តមាន **1,2,3,...,n** ដង ។

គេកំនត់សរសេរ : $\boxed{\overline{A(n,p)}=n^p}$ ។

៦.ចំលាស់សារឡើងវិញ (Permultation with Repetition) :

គេអោយសំនុំ **E** មាន **n** ធាតុ ដែលក្នុងនោះ n_1 ជាធាតុប្រភេទទី១ ,n_2 ជាធាតុប្រភេទទី២ ,n_3 ជាធាតុប្រភេទទី៣ ,........,n_p ជាធាតុប្រភេទទី **p** ដែល $n_1+n_2+n_3+....+n_p=n$

ចំនួនចំលាស់សារឡើងវិញនៃ **n** ធាតុ គឺជាចំលាស់អាចបែងចែកបានដែលកំនត់តាងដោយ :

$$\boxed{\overline{P}=\frac{n!}{n_1!.n_2!.n_3!.....n_p!}} \text{ ។}$$

៧.បន្សំសារឡើងវិញ (Combiation with Repetition) :

បន្សំសារឡើងវិញនៃ **p** ធាតុ ក្នុងចំនោម **n** ធាតុគឺជាបន្សំ ដែលធាតុនីមួយៗអាចមានវត្តមានច្រើនដង ។

គេតាងបន្សំសារឡើងវិញនៃ **p** ធាតុ ក្នុងចំនោម **n** ធាតុដោយ :

$$\boxed{C(n,p)=\frac{(n+p-1)!}{p!.(n-1)!}}$$ ។

៨.ទ្វេធាញូតុន $\left(\text{Binom de Newton}\right)$

$$\boxed{(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^2a^{n-1}.b+C_n^2a^{n-2}.b^2+.......+C_n^nb^n}$$ ។

ដែល $C_n^p=C(n,p)=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ។

សំគាល់ : ទ្វេធាសំខាន់ៗគួរកត់សំគាល់

1. $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+..........+C_n^nx^n$
2. $(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+.........+C_n^0$

II-ប្រូបាប៊ីលីតេ

ប្រូបាប៊ីលីតេ មានសារៈសំខាន់ក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃរបស់យើង ដែលយើងប្រើប្រាស់វាសំរាប់ វាស់ក៏រិតនៃភាពមិនទៀងទាត់ ។ កាលណាយើងគ្រោងធ្វើអ្វីមួយកាលណាអ្នកឧតុនិយម ទស្សន៍ទាយអាកាសធាតុឬ ក្រុមហ៊ុនធានារ៉ាប់រងធ្វើគោលនយោបាយរបស់ក្រុមហ៊ុន ចាំបាច់ ត្រូវប្រើ ប្រូបាប៊ីលីតេ ដើម្បីធ្វើសេចក្តីសំរេចចិត្ត ឬធ្វើ ការជ្រើសរើស ។

១-ព្រឹត្តិការណ៍-លំហសំណាក :

ក.វិញ្ញាសា :

វិញ្ញាសា គឺជាការពិសោធន៍មួយដែល :

-អាចអោយគេដឹង នូវសំណុំលទ្ធផលដែលបានកើតឡើង

-ពុំអាចដឹងប្រាកដថា លទ្ធផលណាដែលនឹងកើតមានឡើង

-ការពិសោធន៍ អាចសារឡើងវិញ ជាច្រើនដង ក្នុងលក្ខខណ្ឌដូចគ្នា ។

ខ.សកល ឬលំហសំណាក :

សំនុំនៃលទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចមាន របស់វិញ្ញាសាមួយ ហៅថា សកល ដែលគេតាងដោយ **S** ។

គ.ព្រឹត្តិការណ៍ : ជាសំណុំរង របស់សកល ឬលំហសំណាក ។

ឧទាហរណ៍ :

បើយើងបោះកាក់ដែលមានមុខ **H** និងខ្នង **T** ចំនួនមួយដងនោះគេអាចបានលទ្ធផល **H** ឬ **T** ។

-សំនុំ $\{H,T\}$ ហៅថា លំហសំណាក តាងដោយ $S=\{H,T\}$ ។

-បើគេប្រាថ្នាបោះបានមុខ **H** នោះសំណុំ $\{H\}$ ហៅថាព្រឹត្តិការណ៍ តាងដោយ $A=\{H\}$

-ចំនួនធាតុនៃលំហសំណាក ហៅថាចំនួនករណីអាច គេតាងដោយ $n(S)=2$ ។

-ចំនួនធាតុនៃព្រឹត្តិការណ៍ ហៅថាចំនួនករណីស្រប គេតាងដោយ $n(A)=1$ ។

២.រូបមន្តគោលនៃប្រូបាប :

នៅក្នុងពិសោធន៍មួយ ដែលមានលំហសំណាក **S** ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ **A** កើតឡើងកំនត់ដោយ :

$$\boxed{\mathbf{P(A)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\frac{n(A)}{n(S)}}}$$

ដោយ $\mathbf{A\subseteq S}$ នោះ $\mathbf{0\le P(A)\le 1}$ ។

៣.រូបមន្តគណនាប្រូបាប៊ីលីតេ :

ក-រូបមន្ត ប្រូបាប៊ីលីតេនៃប្រជុំព្រឹត្តិការណ៍ពីរ

✱ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរមិនចុះសំរុងគ្នានោះគេបាន :

$$\boxed{\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}}$$

✱ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរសាមញ្ញនោះគេបាន :

$$\boxed{\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}}$$

ខ-រូបមន្ត ប្រូបាប៊ីលីតេនៃប្រជុំព្រឹត្តិការណ៍បី :

✱ បើ A ,B និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍បីមិនចុះសំរុងគ្នាពីៗនោះគេបាន :

$$\boxed{\mathbf{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)}}$$

✱ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍បីសាមញ្ញនោះគេបាន :

$$\boxed{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)}$$

គ-ជាទូទៅ :

✴ បើ $\mathbf{A_1, A_2, A_3, ..., A_n}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នាពីៗនោះគេបាន :

$$\boxed{\mathbf{P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)}}$$ ។

ឃ-រូបមន្តប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ពីរផ្ទុយគ្នា :

បើ $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{\overline{A}}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរផ្ទុយគ្នានោះគេបាន :

$$\boxed{\mathbf{P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)}}$$ ។

ង-រូបមន្តប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខ័ណ្ឌ :

✴ ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ A ដោយដឹងថា មានព្រឹត្តិការណ៍ B បានកើត

ឡើងរួចហើយ ហៅថា ប្រូបាបមានលក្ខខ័ណ្ឌ ដែលគេតាងដោយ $P(A/B)$

អានថាប្រូបាបនៃ A ដោយបានដឹង B ។

ដូចនេះ ចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ដោយ $P(B) \neq 0$ គេមានរូបមន្ត :

$$\boxed{\mathbf{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}}$$ ឬគេអាចទាញ $$\boxed{\mathbf{P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)}}$$

ច-រូបមន្តប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ពីរមិនទាក់ទងគ្នា :

✴ ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ដែលអាស្រយ័នឹងគ្នាក្នុងវិធីដែលការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ

មិនមានជាប់ពាក់ពន្ធ័នឹងការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយទៀត យើងហៅថា

ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ។

✼ បើ A និង B មិនទាក់ទងគ្នាសមមូល : $\begin{cases} P(A/B)=P(A) \\ P(B/A)=P(B) \end{cases}$

✼ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ មិនទាក់ទងគ្នានោះគេបាន :

$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$ ។