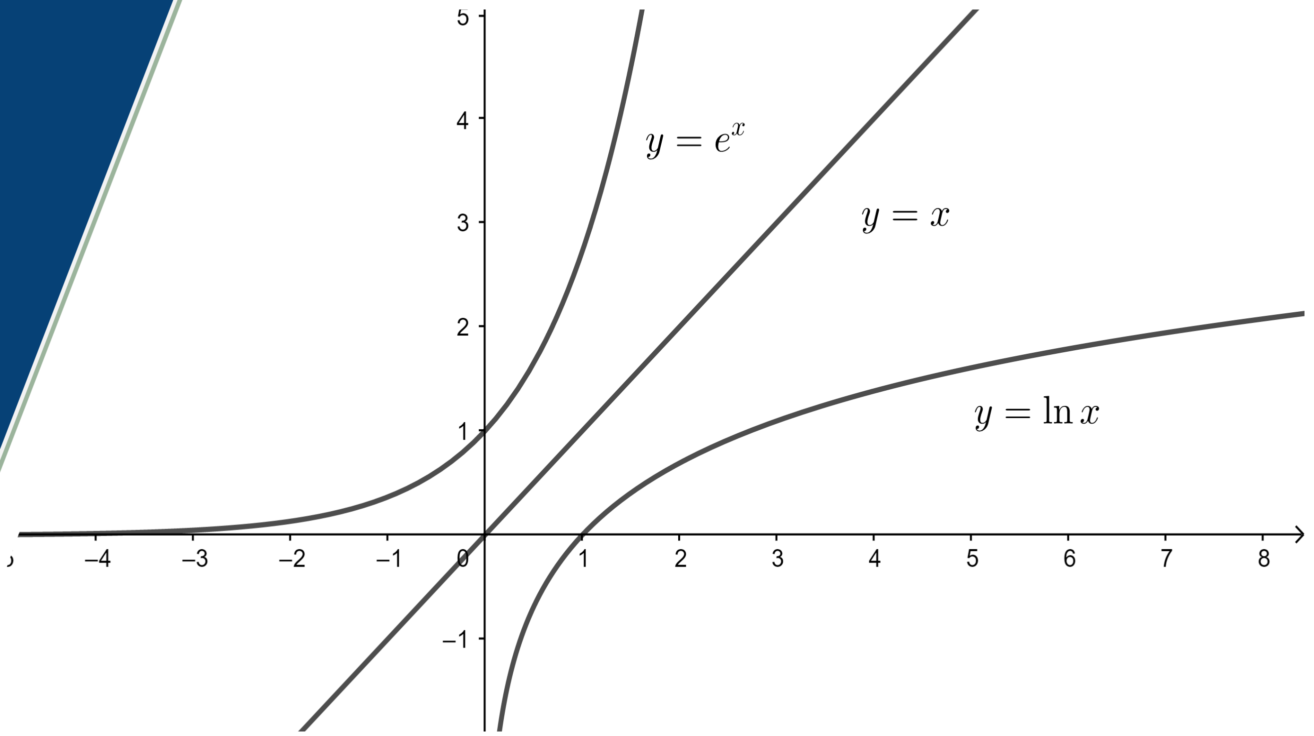
សិក្សាអនុគមន៍អុិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
និង
អនុគមន៍លោការីត



កំណែលំហាត់ដោយ ៖ សេន វីសាល

វិទ្យាល័យបុសខ្នុរ កំពង់ចាម

វាយអត្ថបទដោយ ៖ ណៃ ឡេង

វិទ្យាល័យស្រែណូយ សៀមរាប

ថ្នាក់
វិទ្យាសាស្ត្រពិត

ឆ្នាំ ២០២០

សិក្សាអនុគមន៍អុិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងអនុគមន៍លោការីត

ឆ្នាំ ២០២០

សិក្សាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
និង
អនុគមន៍លោការីត

សម្រាប់ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត

រៀនដើម្បីជាទីពឹង

កំណែលំហាត់ដោយ ៖ **សេន វិសាល**

វិទ្យាល័យ បុសខ្នុរ កំពង់ចាម

វាយអត្ថបទដោយ ៖ **ណៃ ទៀន**

វិទ្យាល័យ ស្រែណូយ សៀមរាប

ឆ្នាំ 2020

© រក្សាសិទ្ធគ្រប់យ៉ាង ©

អារម្ភកថា

សួស្តី!មិត្តអ្នកអានដែលកំពុងតែកាន់តែសៀវភៅដ៏តូច មានកម្រាស់ស្តើង មានចំណងជើងថា **សិក្សាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង អនុគមន៍លោការីត** ។ សៀវភៅមួយក្បាលនេះកើតឡើងក្នុងទម្រង់ជាការប្រមូលផ្តុំឯកសារ ដែលយើងខ្ញុំបានឃើញគេបង្ហោះលើបណ្តាញសង្គមជាភាសាខ្មែរផង ជាភាសាបរទេសផង រាយប៉ាយចឹងក៏យកវាមកចងក្រងធ្វើជាឯកសារមួយក្បាលនេះងាយស្រួលឱ្យអស់លោកអ្នកបានអាន និងស្វែងយល់ជាមួយយើងខ្ញុំ ។ សៀវភៅប្រភេទនេះនៅក្នុងប្រទេសយើងសម្បូរណាស់ ជាពិសេសសៀវភៅដែលកើតចេញពីការរៀបរៀងពីសំណាក់គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យាល្បីៗក្នុងប្រទេស ។ យើងខ្ញុំបានចងក្រងឯកសារនេះឡើង ដោយផ្តោតទៅលើការបកស្រាយមេរៀនខ្លះៗទាក់ទងនិងការសិក្សាអនុគមន៍ ឬល់នៃការសិក្សាអនុគមន៍ លំហាត់មានដំណោះស្រាយ និងលំហាត់អនុវត្តផងដែរ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាសៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងក្លាយជារបស់មានប្រយោជន៍សម្រាប់អ្នកសិក្សាគណិតវិទ្យាទាំងអស់ ទោះបីវាមានកម្រាស់ស្តើងក៏ដោយ ។ យើងខ្ញុំទាំងអស់គ្នា សូមអភ័យទោសទុកជាមុននៅរាល់កំហុសឆ្គងដែលកើតមាន បើទោះជាយើងខ្ញុំប្រឹងប្រែងសម្រិតសម្រាំងយ៉ាងណាតែ ចន្លោះប្រហោងដែលធ្វើឱ្យមានកំហុសឆ្គងប្រាកដជាមានមិនខាន។

ចុងក្រោយយើងខ្ញុំជាអ្នកចងក្រងឯកសារនេះ សូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅ និងរង់ចាំទទួលរាល់មតិរិះគន់កែលម្អរពីសំណាក់ប្រិយមិត្តអ្នកអាន គ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បីស្ថាបនាសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែល្អប្រសើរ។

សៀមរាប,ថ្ងៃទី ០៥ ខែ តុលា ឆ្នាំ២០២០

មាតិកា

1 ប្លង់សិក្សាអនុគមន៍ 1

1.1 ប្លង់សិក្សាអនុគមន៍ 1

1.2 ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ 2

1.3 ដេរីវេនៃអនុគមន៍ 4

1.4 តម្លៃបរមានៃអនុគមន៍ 6

1.5 លីមីតនៃអនុគមន៍ 9

1.6 មែកអនន្ត 12

1.6.1 អាស៊ីមតូត 12

1.6.2 មែកប៉ារ៉ាបូល 13

1.7 តារាងអថេរភាព 16

1.8 ភាពប៉ោង-ផត និង ចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង 17

1.9 បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង 19

1.10 សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាបធៀប និង បន្ទាត់ 23

1.11 អនុគមន៍គូ-សេស 24

1.12 អ័ក្សឆ្លុះ ឬផ្ចិតឆ្លុះ 26

1.13 ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាសមីការដោយប្រើខ្សែកោង 28

1.14 ព្រីមីទីវ និង ផ្ទៃក្រឡា 29

1.14.1 ព្រីមីទីវ 29

1.14.2 អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ 29

1.14.3 ផ្ទៃក្រឡា 30

2 លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ 33

3 លំហាត់អនុវត្តន៍ 179

ផ្នែកទី 1

ប្លង់សិក្សាអនុគមន៍

1.1 ប្លង់សិក្សាអនុគមន៍

របៀបសិក្សាអនុគមន៍ជាទូទៅគេធ្វើតាមរបៀបខាងក្រោម៖

1 ដែនកំណត់

2 ទិសដៅអថេរភាព

ក. ដេរីវេទី១

ខ. ចំណុចបរិមា ចំណុចរបត់

គ. លីមីតចុងដែនកំណត់ អាសុីមតូត

ឃ. តារាងអថេរភាព

3 ខ្សែកោង៖មុននិងសង់ខ្សែកោងគេត្រូវរកចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងនិងអ័ក្ស

សម្គាល់៖ គេអាចសិក្សាអនុគមន៍តាមប្លង់ផ្សេងពីនេះ(តាមប្រភេទនៃអនុគមន៍ ឬតាមបច្ចេកទេសនៃអ្នកសិក្សា)

1.2 ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

ជាទូទៅ

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺជាសំណុំតម្លៃអថេរ x ដែលធ្វើឱ្យ $f(x)$ មានន័យ ឬ កំណត់បាន។ D មកពីពាក្យ *Domaine* (បារាំង) មានន័យថា ដែនកំណត់ ។

ឧទាហរណ៍

? រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $f(x) = x^2 + 3x - 2$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
3. $f(x) = e^x - 3x + 2$
4. $f(x) = \ln(x - 1)$

ដំណោះស្រាយ

1. $f(x) = x^2 + 3x - 2$

ដោយ $x^2 + 3x - 2$ កំណត់បាន $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ៖ $D_f = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

$f(x)$ កំណត់បានកាលណា $x + 2 \neq 0$ ឬ $x \neq -2$

ដូចនេះ៖ $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

3. $f(x) = e^x - 3x + 2$

ដោយ $e^x - 3x + 2$ កំណត់បាន $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ៖ $D_f = \mathbb{R}$

4 $f(x)=\ln(x-1)$

$f(x)$ កំណត់បានកាលណា $x-1>0$ ឬ $x>1$

ដូចនេះ $D_f=(1,+\infty)$

គួរចងចាំ

- អនុគមន៍ពហុធា $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ នោះ $D=\mathbb{R}$ ។
- អនុគមន៍សនិទាន $\frac{P(x)}{Q(x)}$ កំណត់បានកាលណា $D=\{x/Q(x)\neq 0\}$ ។
- អនុគមន៍អសនិទាន $f(x)=\sqrt{Q(x)}$ កំណត់បានកាលណា $D=\{x/Q(x)\geq 0\}$ ។
- អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលមានទម្រង់ $f(x)=e^x$ នោះ $D=\mathbb{R}$ ។
- អនុគមន៍លោការីតនេពែ $f(x)=\ln u(x)$ កំណត់បានកាលណា $D=\{x/u(x)>0\}$

បើ $f(x)$ និង $g(x)$ មានដែនកំណត់រៀងគ្នា D_1 និង D_2

- $f(x)\times g(x)$ ឬ $f(x)\pm g(x)$ មានដែនកំណត់ $D=D_1\cap D_2$
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ មានដែនកំណត់ $D=D_1\cap D_2-D_3$ ដែល $D_3=\{x/g(x)=0\}$

ដើម្បីរកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍មួយគេត្រូវ៖

- សរសេរលក្ខខ័ណ្ឌដែលធ្វើឱ្យកន្សោមនីមួយៗក្នុងអនុគមន៍មានន័យ រួចដោះស្រាយរកតម្លៃ ដែលធ្វើឱ្យលក្ខខ័ណ្ឌនេះ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។
- សំណុំតម្លៃ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នានូវលក្ខខ័ណ្ឌទាំងអស់ខាងលើ គឺជាដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ ។

លំហាត់ប្រតិបត្តិ

? រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1 $f(x)=x^2-3x+2$

2 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-6}$

3 $f(x)=\frac{e^x}{x-6}$

4 $f(x)=\ln(x+5)$

1.3 ដេរីវេនៃអនុគមន៍

យើងបានសិក្សារួចមកហើយនៅមេរៀនដេរីវេ ក្នុងសៀវភៅនេះយើងមិនលម្អិតអំពីមេរៀននេះទេ គ្រាន់តែរំឭកខ្លះៗទាក់ទងនិងអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងអនុគមន៍លោការីតតែប៉ុណ្ណោះ។

ឧទាហរណ៍

? គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $f(x) = (x+1)(e^{-2x}+1)$
2. $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
3. $f(x) = x(\ln x)^2$
4. $f(x) = x\ln x - x$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $f(x) = (x+1)(e^{-2x}+1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)'\left(e^{-2x}+1\right) + \left(e^{-2x}+1\right)'(x+1) \\ &= e^{-2x}+1+\left(-2e^{-2x}\right)(x+1) = e^{-2x}+1-2xe^{-2x}-2e^{-2x} \\ &= -e^{-2x}-2xe^{-2x}+1 = -2xe^{-2x}-e^{-2x}+1 \end{aligned}$$

2. $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^{2x}-1)'(e^{2x}+1)-(e^{2x}+1)'(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{\left(2e^{2x}\right)\left(e^{2x}+1\right)-\left(2e^{2x}\right)\left(e^{2x}-1\right)}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2e^{4x}+2e^{2x}-2e^{4x}+2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \end{aligned}$$

3 $f(x)=x(\ln x)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'(\ln x)^2 + x\left[(\ln x)^2\right]' \\ &= (\ln x)^2 + x\left[2(\ln x)'(\ln x)\right] \\ &= (\ln x)^2 + 2x\cdot\frac{1}{x}\cdot(\ln x) = (\ln x)^2 + 2\ln x \end{aligned}$$

4 $f(x)=x\ln x - x$

$$f(x) = x(\ln x - 1)$$

$$f'(x) = x'(\ln x - 1) + x(\ln x - 1)'$$

$$= \ln x - 1 + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x - 1 + 1 = \ln x$$

រូបមន្តមួយចំនួនគួរចងចាំដើម្បីងាយស្រួលសិក្សាអនុគមន៍

1 $y=e^x \Rightarrow y'=e^x$

2 $y=e^{u(x)} \Rightarrow y'=u'(x)e^{u(x)}$

3 $y=\ln x \Rightarrow y'=\dfrac{1}{x}$

4 $y=\ln u(x) \Rightarrow y'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

5 $y=u+v \Rightarrow y'=u'+v'$

6 $y=\sqrt{u(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

7 $y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$

8 $y=\dfrac{1}{u} \Rightarrow y'=-\dfrac{u'}{u^2}$

9 $y=\dfrac{1}{u^n} \Rightarrow y'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$

10 $y=\dfrac{u}{v} \Rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

លំហាត់ប្រតិបត្តិ

? គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1 $f(x)=e^x\ln x$

2 $f(x)=(x^2-2x)\ln x$

3 $f(x)=\ln(x^2-1)$

4 $f(x)=\ln\sqrt{x^2+4x}$

1.4 តម្លៃបរមានៃអនុគមន៍

វិធាន

ឧបមាថា អនុគមន៍ f មានដេរីវេនៅលើវ៉ស៊ីណាំនៃចំណុច $x_o \in (a,b)$ ។

✎ បើ $f'(x) = 0$ ចំពោះ $x = x_0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ នោះគេថាអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = x_0$ គឺ $f(x_0)$ ។

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$f(x_0) Max$	↘

✎ បើ $f'(x) = 0$ ចំពោះ $x = x_0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ នោះគេថាអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = x_0$ គឺ $f(x_0)$ ។

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(x_0) Min$	↗

សម្គាល់

⚠ បើ f មានតម្លៃស្មើ m ត្រង់ $x = x_0$ នោះគេបាន $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f(x_0) = m \end{cases}$

⚠ បើអនុគមន៍ f មានបរមាត្រង់ x_0 នោះ $f'(x_0) = 0$ តែបើ $f'(x_0) = 0$ នោះអនុគមន៍ f អាចមានឬគ្មានបរមាត្រង់ x_0 (ក្នុងករណីនេះយើងត្រូវសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x_0)$)។

ឧបមាថាអនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេទី២ $f''(x_0)$ និងជាប់ត្រង់ x_0

អនុគមន៍ f មានអតិបរមាត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$

អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$

សម្គាល់

ប្រសិនបើ $f'(x_0)=0$ និង $f''(x_0)=0$ យើងមិនអាចប្រើលក្ខណៈខាងលើដើម្បីសន្និដ្ឋានថាអនុគមន៍ f អាចមាន ឬគ្មានបរមាបានទេ។

អតិបរមា ឬអប្បបរមាអាចហៅរួមគ្នាថា បរមា។

ឧទាហរណ៍

? រកតម្លៃបរមានៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1 $f(x)=e^{x^2}\ ;\forall x\in\mathbb{R}$

2 $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃបរមានៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1 $f(x)=e^{x^2}$

គណនាដេរីវេទី១

យើងមាន $f(x)=e^{x^2}\ ;\forall x\in\mathbb{R}$

នាំឱ្យ $f'(x)=\left(x^2\right)'e^{x^2}=2xe^{x^2}$

ដោយ $e^{x^2}>0\ ;\forall x\in\mathbb{R}$

បើ $x<0\Rightarrow f'(x)<0$

$$x = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

មានន័យថា $f'(x) = 0$ ត្រង់ $x = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ គេថា $f(x)$ មានអប្បបរមា ត្រង់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(0, f(0)) = (0,1)$ ។

2 $f(x) = \dfrac{1 + 2\ln x}{x^2}$; $\forall x \in (0, +\infty)$

យើងមាន $f(x) = \dfrac{1 + 2\ln x}{x^2}$; $\forall x \in (0, +\infty)$

នាំឱ្យ
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+2\ln x)'(x^2) - (x^2)'(1+2\ln x)}{x^4} \\ &= \frac{x^2 \cdot \left(\frac{2}{x}\right) - 2x \cdot (1 + 2\ln x)}{x^4} \\ &= \frac{2x - 2x - 4x\ln x}{x^4} \\ &= \frac{-4x\ln x}{x^4} \\ &= \frac{-4\ln x}{x^3} \end{aligned}$$

ដោយ $x^3 > 0$; $\forall x \in (0, +\infty)$

បើ $0 < x < 1 \Rightarrow -\ln x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

$$x = 1 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$x > 1 \Rightarrow -\ln x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

មានន័យថា $f'(x) = 0$ ត្រង់ $x = 1$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ គេថា $f(x)$ មានអតិបរមា ត្រង់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(1, f(1)) = (1,1)$ ។

☹ លំហាត់ប្រតិបត្តិ

? រកបរិមានៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1 $f(x) = x^2e^{-x}$

2 $f(x) = lnx$

1.5 លីមីតនៃអនុគមន៍

ត្រង់ចំណុចនេះយើងមិនបានសិក្សាលម្អិតពីមេរៀនលីមីតទេ គ្រាន់តែរំឭកលំហាត់ និងរូបមន្តខ្លះៗតែប៉ុណ្ណោះ។

ឧទាហរណ៍

? គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^{x^2}-4^{x^2}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-(e^x+e^{-x})}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+e^x-xe^{2x}}{x^2e^x+e^{2x}}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+1)e^{-x}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+\ln x}{3x^2-1}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x\ln x - x^2+5)$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$
9. $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(e^x+1)$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^{x^2}-4^{x^2}}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{x^2}-1-4^{x^2}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(e^{x^2}-1)-(4^{x^2}-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)-\left(\frac{4^{x^2}-1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)-\left(\frac{4^{x^2}-1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-\ln 4}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-(e^x+e^{-x})}{x^2}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2-e^x-e^{-x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2e^x-e^{2x}-1}{x^2e^x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-(e^{2x}-2e^x+1)}{x^2e^x}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2e^x+1}{x^2e^x}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{x^2e^x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{e^x} = -1$$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+e^x-xe^{2x}}{x^2e^x+e^{2x}}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{2x}\left(\frac{1}{xe^{2x}}+\frac{1}{xe^x}-1\right)}{xe^{2x}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{xe^{2x}}+\frac{1}{xe^x}-1\right)}{\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{0+0-1}{0^+} = -\infty$$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x}$ រាងមិនកំណត់ $(\infty\times 0)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$= 0+0 = 0$$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\ln x}{3x^2-1}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{\ln x}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{\ln x}{x^2}\right)}{\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{1+0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

6 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x - x^2+5)$

$$= \lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{\ln x}{x}-1+\frac{5}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{\ln x}{x}-1+\frac{5}{x^2}\right)$$

$$= (+\infty)(0-1+0) = -\infty$$

7 $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$

$$= \lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \ln e = 1$$

8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)}{\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)} = 1$$

9 $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)$

$$= \ln(0+1)$$

$$= \ln 1 = 0$$

10 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \ln 1 = 0$$

រូបមន្តមួយចំនួនគួរចងចាំដើម្បីងាយស្រួលសិក្សាអនុគមន៍

លីមីតនៃអនុគមន៍អុិចស្ប៉ូណង់ស្យែល៖

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$

លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីត

1. $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to0^+} x^n \ln x = 0$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\ln x} = +\infty, n > 0$

លំហាត់ប្រតិបត្តិ

? គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

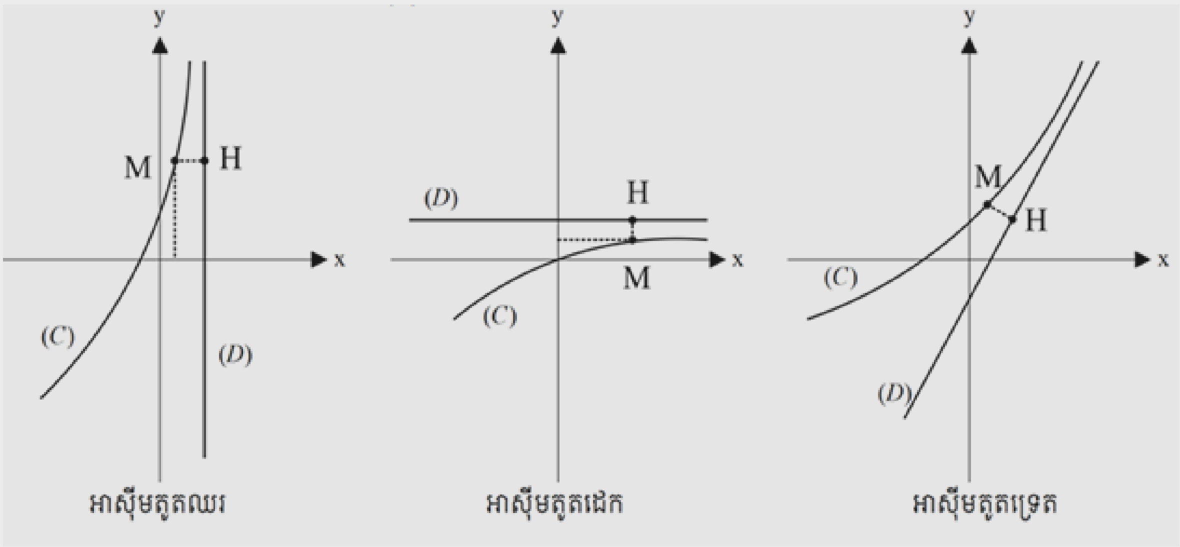
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x+3}{x^2+x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - 7x + 6)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x-2}{5e^x+3}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x\ln x}{x+2}$
7. $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2\ln x+2}{\ln x+1}$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1)$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\ln x)$

1.6 មែកអនន្ត

1.6.1 អាស៊ីមតូត

ជាទូទៅ

បន្ទាត់ (D) ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (C) លុះត្រាតែចម្ងាយពី M ទៅ (D) ខិតទៅជិតសូន្យ កាលណា M រត់នៅលើ (C) ហើយខិតឆ្ងាយអនន្ត។



វិធាន

ដើម្បីសិក្សាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ យើងត្រូវពឹងផ្អែកលើវិធានខាងក្រោម៖

អាស៊ីមតូតឈរ

- បើ $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ ($y = f(x)$ គ្មានន័យត្រង់ $x = a$) នោះបន្ទាត់ $x = a$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

អាស៊ីមតូតដេក

- បើ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ (b ថេរ) នោះបន្ទាត់ $y = b$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។

អាស៊ីមតូតទ្រេត

វិធានទី១ ៖ បើ $y=f(x)$ អាចសរសេរជារាង $y=ax+b+g(x)$ ដែល $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ នោះបន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

វិធានទី២ ៖ បន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ $(C): y=f(x)$

លុះត្រាតែ៖ $\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax] \end{cases}$

1.6.2 មែកប៉ារ៉ាបូល

វិធាន

ដើម្បីសិក្សាមែកអនន្តនៃ C ជាមែកប៉ារ៉ាបូលគេត្រូវ:

បើ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ និង $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\infty$ នោះគេថាមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូល ឬខ្សែកោងមានមែកប៉ារ៉ាបូលដែលមានទិសអាស៊ីមតូត $y=ax$ ។

បើ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$ នោះគេថាមែកអនន្តនៃខ្សែកោងជាមែកប៉ារ៉ាបូលឬខ្សែកោងមានមែកប៉ារ៉ាបូលដែលមានទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្ស (Oy) ។

ឧទាហរណ៍

? រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$

2. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x-1}$

? គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(e^{2x}-2x)$ មានក្រាបតំណាង (C_f) គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ រួចបង្ហាញថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលត្រង់រ៉ស៊ីណា $-\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1 $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{3\}$

•$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{2}{0}=\infty$ នោះគេថាបន្ទាត់ $x=3$ ស្របអ័ក្ស $\left(\overrightarrow{Oy}\right)$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

• $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x-3}=1$ នោះគេថាបន្ទាត់ $y=1$ ស្របអ័ក្ស $\left(\overrightarrow{Ox}\right)$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

2 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x-1}$ ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}-\{1\}$

•$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x-8}{x-1}=-\dfrac{9}{0}=-\infty$ នោះគេថាបន្ទាត់ $x=1$ ស្របអ័ក្ស $\left(\overrightarrow{Oy}\right)$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

$$\bullet\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-8}{x-1}\text{ រាងមិនកំណត់ }\frac{\infty}{\infty}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\infty$$

នោះគេថាខ្សែកោងតាង $f(x)$ គ្មានអាស៊ីមតូតដេកទេ។

អាស៊ីមតូតទ្រេត៖

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x-1}$ អាចសរសេរជា $f(x)=x-1-\dfrac{9}{x-1}$

ដែល $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{x-1}=0$ នោះបន្ទាត់ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោងតាង $f(x)$ ។

បញ្ជាក់

យើងអាចរកអាស៊ីមតូតទ្រេតតាមវិធីមួយទៀតគឺ ៖ តាងសមីការអាស៊ីមតូតរាង $y=ax+b$

•$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-8}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

•$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-8}{x-1}-x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x-8}{x-1}=-1$

ដូចនេះបន្ទាត់ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x-1}$

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(e^{2x}-2x)$ មានក្រាបតំណាង (C_f) គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ រួចបង្ហាញថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលត្រង់វ៉ិស៊ីណា $-\infty$ ។

យើងមាន $f(x)=\ln\left(e^{2x}-2x\right)$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^{2x}-2x\right)=+\infty$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{x}=\left(\frac{e^x}{x}-2\right)\cdot\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x}-2\right)\cdot\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$$

តាង $t=-x\Rightarrow x=-t$

បើ $x\to-\infty\Rightarrow t\to+\infty$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{-2t}}{-t}-2\right)\cdot\frac{\ln\left(e^{-2t}+2t\right)}{\left(e^{-2t}+2t\right)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{e^{2t}}-2\right)\cdot\frac{\ln\left(e^{-2t}+2t\right)}{\left(e^{-2t}+2t\right)}$$

$$=-2\times 0=0$$

ព្រោះ $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{2t}}=0,\ \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{-2t}+2t\right)}{e^{-2t}+2t}=0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ នោះគេថាខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $f(x)$ មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលដែលមានទិសអាស៊ីមតូត $y=0$ ។

☹ លំហាត់ប្រតិបត្តិ

? រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1 $f(x)=\frac{2x^2+3x+2}{x^2-x+1}$

2 $f(x)=xe^{\frac{1}{x^2}}$

1.7 តារាងអថេរភាព

វិធាន

ដើម្បីគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ យើងត្រូវមាន៖

- តារាងសញ្ញាដេរីវេទី១
- តម្លៃបរមា(ចំពោះអនុគមន៍ណាដែលមានតម្លៃបរមា)
- លីមីតចុងដែនកំណត់

រូបតំណាងនៃតារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$-\infty$

ចំណាំ

តារាងអថេរភាពអាចជួយអ្នក

- ប្រៀបធៀបរវាងលីមីតចុងដែនកំណត់និងតារាងសញ្ញាដេរីវេ
- សង់ក្រាបបានត្រឹមត្រូវ

1.8 ភាពប៉ោង-ផត និង ចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង

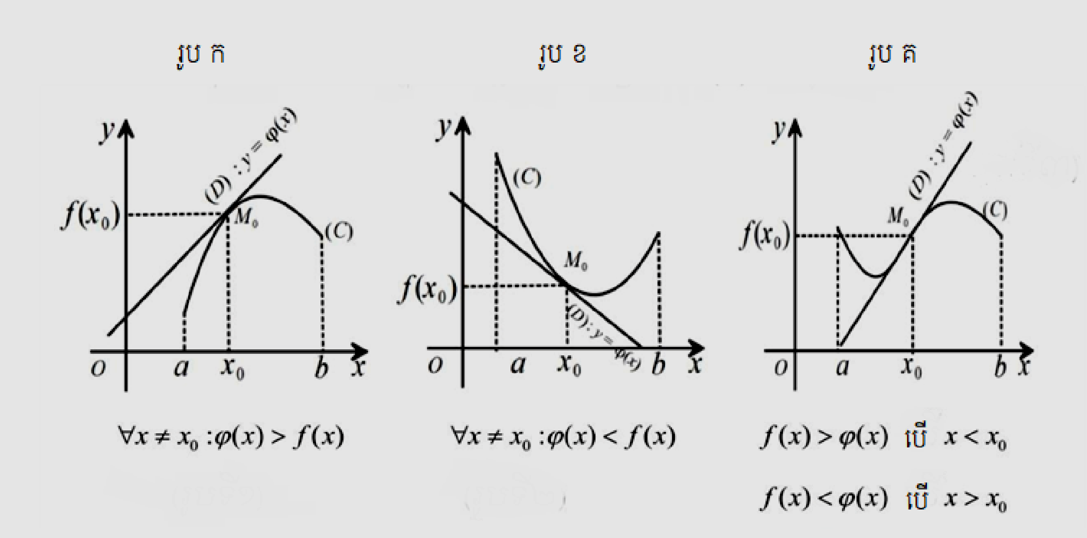
ឧបមាថាអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេនៅគ្រប់ចំណុចនៃចន្លោះ (a,b) ។ x_0 ជាចំណុចមួយនៃ (a,b) $x_0 \in (a,b)$ ហើយ $(D): y = \varphi(x)$ ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $(C): y = f(x)$ ត្រង់ចំណុច $M_0(x_0, f(x_0))$ ។

ជាទូទៅ

ខ្សែកោង (C) ប៉ោងក្នុងចន្លោះ (a,b) បើ $\forall x \in (a,b)$ និង $x \neq x_0$ គេបាន $\varphi(x) > f(x)$ (ឬបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x_0 \in (a,b)$ ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង (C)) ។ (រូប ក)

ខ្សែកោង (C) ផតប៉ោងក្នុងចន្លោះ (a,b) បើ $\forall x \in (a,b)$ និង $x \neq x_0$ គេបាន $\varphi(x) < f(x)$ (ឬបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x_0 \in (a,b)$ ស្ថិតនៅក្រោមលើខ្សែកោង (C)) ។ (រូប ខ)

បើចំណុច $M_0(x_0, f(x_0))$ ខណ្ឌផ្នែកប៉ោង និងផតនៃខ្សែកោង (C) នោះ $M_0(x_0, f(x_0))$ ហៅថាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង (C) ។ បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច M_0 ហៅថាបន្ទាត់ប៉ះនៃចំណុចរបត់។ ត្រង់ចំណុចរបត់នេះបន្ទាត់ប៉ះឆ្លងកាត់ខ្សែកោង (C) ។ (រូប គ)



ទ្រឹស្តីបទ / និយាម

ឧបមាថា $y=f(x)$ មានដេរីវេទី២ ក្នុងចន្លោះ (a,b)

- បើ $f''(x)<0;\forall x\in(a,b)$ នោះខ្សែកោង $(C):y=f(x)$ ប៉ោងក្នុងចន្លោះ (a,b) ។
- បើ $f''(x)>0;\forall x\in(a,b)$ នោះខ្សែកោង $(C):y=f(x)$ ផតក្នុងចន្លោះ (a,b) ។
- បើ $f''(x)=0$ ចំពោះ $x=x_0$ ហើយប្តូរសញ្ញាកាលណា x ឆ្លងកាត់ (ប្តូរសញ្ញាត្រង់ចំណុច x_0) នោះចំណុច $M_0(x_0,f(x_0))$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង (C) ។

ឧទាហរណ៍

? គេឱ្យអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-7x+14)e^{x-1}$ កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោង (C_f) ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-7x+14)e^{x-1}$

នាំឱ្យ
$$f'(x)=\frac{1}{4}(2x-7)e^{x-1}+\frac{1}{4}(x^2-7x+14)e^{x-1}=\frac{1}{4}(x^2-5x+7)e^{x-1}$$

នាំឱ្យ
$$f''(x)=\frac{1}{4}(2x-5)e^{x-1}+\frac{1}{4}(x^2-5x+7)e^{x-1}=\frac{1}{4}(x^2-3x+2)e^{x-1}$$

បើ $f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ ឬ $x_1=1,x_2=2$

តារាងសញ្ញានៃ $f''(x)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដោយចំណុច $x=1$ និង $x=2$ អនុគមន៍ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញានោះខ្សែកោងមានចំណុចពីរត្រង់ចំណុច $I_1(1,2)$, $I_2(2,e)$ ព្រោះ $f(1)=2$ និង $f(2)=e$ ។

ចំណាំ

បើ $f''(x)$ មិនប្តូរសញ្ញានោះ $f(x)$ មិនមានចំណុចរបត់ទេ។

លំហាត់ប្រតិបត្តិ

? អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង (C_f) ។

1.9 បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង

ជាទូទៅ

យើងមាន $M_0(x_0, y_0) \in (C)$ បើអនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេត្រង់ $x = x_0$ នោះសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ គឺ $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

វិធាន

ដើម្បីសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ គេត្រូវ៖

- គណនា $f'(x)$ រួចគណនាតម្លៃនៃ $f'(x_0)$ ($f'(x_0)$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់)
- ប្រើរូបមន្ត $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

ឧទាហរណ៍

? រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x) = -x^2 + x + 3$ ត្រង់ $x = 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $\quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

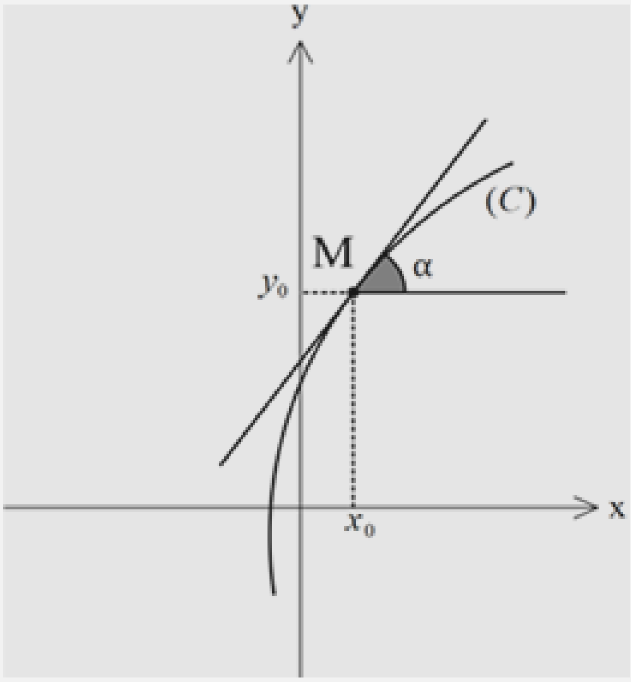
យើងមាន $\quad f(x) = -x^2 + x + 3$

នាំឱ្យ $$f'(x) = -2x + 1$$
$$f'(2) = -2(2) + 1 = -3$$
$$f(2) = -2^2 + 2 + 3 = -4 + 2 + 3 = -1$$
$$\Rightarrow \quad y + 1 = -3(x-2) \Rightarrow y = -3x + 6 - 1 = -3x + 5$$

ដូចនេះ $(T): y = -3x + 5$ ។

គួរយល់ដឹង

សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស k គឺ $y - y_0 = k(x - x_0)$ ។



មានវិធីពីរយ៉ាងសម្រាប់កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះ ៖

1 ប្រើអត្ថន័យធរណីមាត្រនៃដេរីវេ

- ឧបមាថា $M_0(x_0, y_0)$ ជាចំណុចប៉ះ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ត្រង់ M គឺ $k = f'(x_0)$
- ដោះស្រាយសមីការ $k = f'(x_0)$ រក x_0 យក x_0 ជំនួសក្នុងសមីការនៃខ្សែកោង $(C): y = f(x)$ គេនឹងបាន y_0 ។

- ប្រើរូបមន្ត $y-y_0=k(x-x_0)$ គេនឹងបានសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ ។

2 ប្រើលក្ខណៈឫសឌុបនៃសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វ

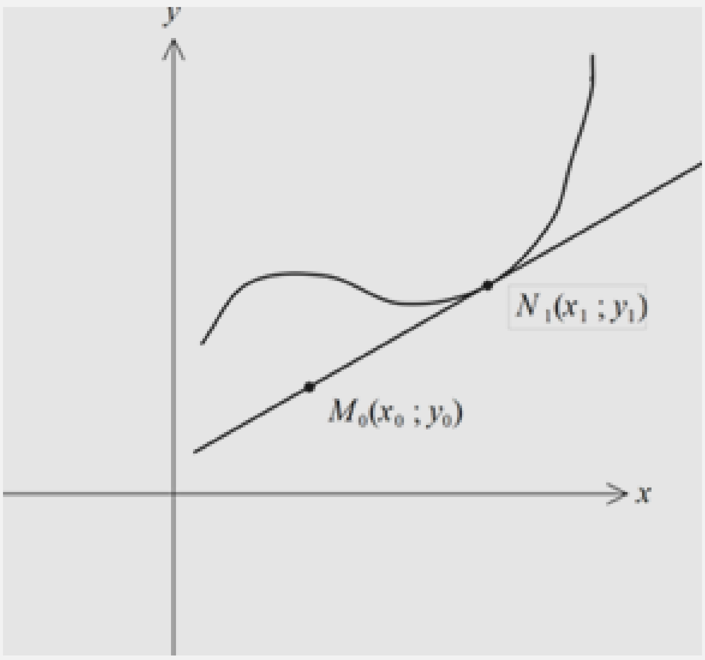
- សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) មានរាង $y=ax+b$
- សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង $(C):y=f(x)$ និង $y=kx+b$

គឺ $f(x)=kx+b\,(1)$

- បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ដូចនេះ (1)មានឫសឌុប។ ទាញចេញពីលក្ខណៈឫសឌុបនេះ

គេបានតម្លៃនៃ b (បើសមីការអាប់ស៊ីសជាសមីការដឺក្រេទី២)។

សមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $(C):y=f(x)$ ដែលគូសចេញពី $M_0(x_0,y_0)\notin(C)$



មានវិធីពីរយ៉ាងដើម្បីរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $(C):y=f(x)$ ដែលគូសចេញពី

$M_0(x_0,y_0)\notin(C)$

1 ប្រើអត្ថន័យធរណីមាត្រនៃដេរីវេ

គេកំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះតាមវិធីខាងក្រោម

- ឧបមាថា $N_1(x_1,y_1)$ ជាចំណុចប៉ះ នោះបន្ទាត់ប៉ះនៃខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុច N_1 មាន

សមីការ $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)\,(1)$ ដែល $y_1=f(x_1)$

ដោយបន្ទាត់ប៉ះកាត់តាម $M_0(x_0,y_0)$ ដូចនេះគេបាន $y_0-y_1=f'(x_1)(x_0-x_1)\,(2)$

ដោះស្រាយសមីការ (2) រក $x_1,f'(x_1),y_1$ រួចយកទៅជំនួសក្នុង (1) គេនឹងបានសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ ។

2 ប្រើលក្ខណៈប្រសព្វនៃខ្សែកោង

គេកំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះតាមវិធីដូចតទៅ៖

ឧបមាថា k ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះដែលគូសចេញពី $M_0(x_0,y_0)$ សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) គឺ $y-y_0=k(x-x_0)+y_0\,(1)$ ។

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់និងខ្សែកោង $(C):y=f(x)$ គឺ $f(x)=k(x-x_0)+y_0\,(2)$

បន្ទាត់ប៉ះនិងខ្សែកោង (C) ប៉ះគ្នា នោះ (2) មានឫសឌុប ។ ទាញចេញពីលក្ខខណ្ឌនៃឫសឌុបនេះគេនឹងគណនាបាន k ជំនួសតម្លៃ k ក្នុង (1) គេនឹងបានសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (បើសមីការអាប់ស៊ីសជាសមីការដឺក្រេទី២)

ចំណាំ

ខ្សែកោងពីរ $(C_f):y=f(x);(C_g):y=g(x)$ មានបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ $M_0(x_0,y_0)$ កាលណា $f'(x_0)=g'(x_0)$ ។

ខ្សែកោង (C_f) & (C_g) អរតូកូណាល់គ្នាត្រង់ចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ កាលណា $f'(x_0)\cdot g'(x_0)=-1$ ។

លំហាត់ប្រតិបត្តិ

? អនុគមន៍ $f(x)=2x^3-16x+11$ មានក្រាបតំណាង (C_f) ។

1 រកសមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុច $A(2,-5)$ ។

2 រកសមីការបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -10 ហើយប៉ះនឹងក្រាប (C_f) ។

1.10 សិក្សាទីតាំងទាងក្រាបធៀប និង បន្ទាត់

វិធាន

ឧបមាថាគេមានក្រាប $(C): f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ និងបន្ទាត់ $(D): y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

គេបាន $f(x) - y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

សិក្សាសញ្ញានៃ $f(x) - y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

- បើ $f(x) - y = 0$ នោះក្រាប (C) ប្រសព្វនិងបន្ទាត់ (D)
- បើ $f(x) - y < 0$ នោះក្រាប (C) នៅខាងក្រោមបន្ទាត់ (D)
- បើ $f(x) - y > 0$ នោះក្រាប (C) នៅខាងលើបន្ទាត់ (D)

ឧទាហរណ៍

? សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប $(C_f): f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$; $\forall x \in (0, +\infty)$ និងបន្ទាត់ $(\Delta): y = x$ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C_f) និងបន្ទាត់ (Δ)

យើងមាន $(C_f): f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

$(\Delta): y = x$

យើងបាន
$$\begin{aligned}(C_f) - (\Delta) &= x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - x = \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - 2\ln x + (\ln x)^2\right] = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2\end{aligned}$$

នោះ $(C_f) - (\Delta) = f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$

ដោយ $(\ln x - 1)^2 \geq 0$; $\forall x \in (0, +\infty)$

នោះ (C_f) នៅលើ (Δ) $\forall x \in (0, +\infty)$

លំហាត់ប្រតិបត្តិ

? សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប $(C_f) : f(x) = xe^{-x} + x \ ; \forall x \in \mathbb{R}$ និងបន្ទាត់ $(\Delta) : y = x$ ។

1.11 អនុគមន៍គូ-សេស

ជាទូទៅ

- $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍គូកាលណា $\forall -x \in D_f$ ដែល $f(-x) = f(x)$ ។
- $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍សេសកាលណា $\forall -x \in D_f$ ដែល $f(-x) = -f(x)$ ។

ឧទាហរណ៍

? បង្ហាញថា $f(x) = x^2$ ជាអនុគមន៍គូ។

? បង្ហាញថា $f(x) = x^3 + \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$ ជាអនុគមន៍សេស។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $f(x) = x^2$ ជាអនុគមន៍គូ។

យើងមាន $f(x) = x^2 \ ; \forall x \in \mathbb{R}$

នោះ $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

យើងបាន $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ។

បង្ហាញថា $f(x) = x^3 + \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$ ជាអនុគមន៍សេស។

អនុគមន៍មានន័យកាលណា $\dfrac{x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$

$\Rightarrow D_f(-1,1)$ នោះ $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \ (1)$

យើងបាន
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + \ln\left(\frac{(-x)+1}{1-(-x)}\right) \\ &= -x^3 + \ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right) \\ &= -x^3 + \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right) \\ &= -x^3 + \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{-1} \\ &= -x^3 - \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) \\ &= -\left(x^3 + \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)\right) \\ f(-x) &= -f(x)\,(2) \end{aligned}$$

តាម (1) និង (2) f ជាអនុគមន៍សេស។

ចំណាំ

ដើម្បីឱ្យ $\forall -x$ និង $x \in D_f$ លុះត្រាតែ ៖

- $D_f = \mathbb{R}$
- $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
- $D_f = (-a, a)$ ឬ $D_f = [-a, a]$
- $D_f = \mathbb{R} - \{-a, a\}$

លំហាត់ប្រតិបត្តិ

? បង្ហាញថាអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = -x + \dfrac{2(e^x - 1)}{e^x + 1}$ ជាអនុគមន៍សេស ។

? បង្ហាញថាអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x^4$ ជាអនុគមន៍គូ ។

1.12 អ័ក្សឆ្លុះ ឬផ្ចិតឆ្លុះ

ជាទូទៅ

- បើបន្ទាត់ $x = x_0$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប (C) លុះត្រាតែ $f(2x_0 - x) = f(x)$
- បើចំណុច $M_0(a, b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) លុះត្រាតែ $f(2a - x) + f(x) = 2b$
- បើ f ជាអនុគមន៍គូ នោះក្រាប (C) មានបន្ទាត់ $x = 0$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ
- បើ f ជាអនុគមន៍សេស នោះក្រាប (C) មានគល់តម្រុយ $O(0, 0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

យើងបានដឹងហើយថា បើ $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ នោះខ្សែកោង (C) មានបន្ទាត់ $x = 0$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ ហើយបើ $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍សេសមានចំណុច $O(0, 0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ (ឬផ្ចិតបម្លែងឆ្លុះ) ។ បើយើងចង់បង្ហាញថាបន្ទាត់ $x = x_0$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ ឬចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ យើងអាចប្រើរូបមន្តរំកិលអ័ក្ស

$$\overrightarrow{OM} : \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} ។$$

វិធាន

ដើម្បីបង្ហាញថា $(C) : y = f(x)$ មានចំណុច $x = x_0$ ជាអ័ក្សឆ្លុះគេត្រូវ៖

- តាង $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$
- យកតម្លៃខាងលើនេះ ជំនួសក្នុង $y = f(x)$ គេនឹងបាន $Y = f(X + x_0) - y_0 = F(X)$
- បង្ហាញថា $F(X)$ ជាអនុគមន៍គូ ។

ដើម្បីបង្ហាញថា $(C) : y = f(x)$ មានចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះគេត្រូវ៖

- តាង $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$
- យកតម្លៃខាងលើនេះ ជំនួសក្នុង $y = f(x)$ គេនឹងបាន $Y = f(X + x_0) - y_0 = F(X)$
- បង្ហាញថា $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ឧទាហរណ៍

? បង្ហាញថាចំណុច $I(0;0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C_f) តាង $y=f(x)=-x-2+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាចំណុច $I(0;0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C_f)

របៀបទី១ ៖

តាមរូបមន្ត $f(2a-x)+f(x)=2b$

ដោយ $I(0,0)$ នោះ $a=0$ និង $b=0$

យើងត្រូវបង្ហាញថា $f(-x)+f(x)=0$

$$\begin{aligned} f(x) &= -x-2+\frac{4e^x}{e^x+1} \\ f(-x) &= -(-x)-2+\frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1} \\ &= x-2+\frac{4e^{-x}}{e^{-x}\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)} \\ &= x-2+\frac{4}{1+e^x} \end{aligned}$$

នាំឱ្យ
$$\begin{aligned} f(-x)+f(x) &= x-2+\frac{4}{e^x+1}-x-2+\frac{4e^x}{e^x+1} \\ &= -4+\frac{4}{e^x+1}+\frac{4e^x}{e^x+1} \\ &= \frac{-4(e^x+1)+4+4e^x}{e^x+1} \\ &= \frac{-4e^x-4+4+4e^x}{e^x+1} \end{aligned}$$

នោះ $f(-x)+f(x)=0$ ពិត ។

ដូចនេះចំណុច $I(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង (C_f) ។

របៀបទី២ ៖

តាមរូបមន្តរំកិលអ័ក្សតាង $\begin{cases} x=x_0+X \\ y=y_0+Y \end{cases}$

ដោយ $I(0,0) \Rightarrow x_0=0, y_0=0$

នាំឱ្យ $\begin{cases} x = X \\ y = Y \end{cases}$ ជំនួសចូលអនុគមន៍ $f(x) = -x - 2 + \dfrac{4e^x}{e^x+1}$

$$\Rightarrow \quad Y = -X - 2 + \frac{4e^x}{e^x+1} \Rightarrow F(X) = -X - 2 + \frac{4e^X}{e^X+1}$$

$$F(-X) = -(-X) - 2 + \frac{4e^{-X}}{e^{-X}+1} = X - 2 + \frac{4e^{-X}}{e^{-X}\left(1+\frac{1}{e^{-X}}\right)} = X - 2 + \frac{4}{1+e^X}$$

$$\Rightarrow \quad F(X) + F(-X) = -X - 2 + \frac{4e^x}{e^x+1} + X - 2 + \frac{4}{e^x+1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F(-x) = -F(x)$$

ដូចនេះចំណុច $I(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង (C_f) ។

1.13 ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាសមីការដោយប្រើខ្សែកោង

វិធាន

ដើម្បីដោះស្រាយនិងពិភាក្សាសមីការពីជគណិត $f(x,m) = 0$ គេត្រូវ៖

- សរសេរសមីការនេះជារាង $f(x) = m$ ។ សមីការ $f(x) = m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វនៃខ្សែកោង $(C): y = f(x)$ និងបន្ទាត់ $y = m$។
- សង់ខ្សែកោង $(C): y = f(x)$ (ជាទូទៅនៅក្នុងលំហាត់ខ្សែកោង (C) ត្រូវបានសង់រួចនៅសំណួរខាងលើ) រួចធ្វើបម្លាស់ទីនៃបន្ទាត់ $y = m$ គេនឹងបានលទ្ធផល។

ចំណាំ

- ចួនកាលក្រោយពីបម្លែងរួចសមីការ $f(x,m) = 0$ មានរាង $f(x) = g(m)$ ក្នុងករណីនេះគេតាង $k = g(m)$ រួចគេពិភាក្សាសមីការ $f(x) = k$(ដែល $k = g(m)$) បន្ទាប់មកគេទាញលទ្ធផលទៅតាមតម្លៃ m ។
- ចំពោះសមីការដែលមានជាប់អនុគមន៍ $\mathrm{Sin}\,x, \mathrm{Cos}\,x, e^x, \ln x\ldots$ គេត្រូវបម្លែងឱ្យទៅជាសមីការពីជគណិតដោយតាង $u = \mathrm{Sin}\,x$ ឬ $u = \mathrm{Cos}\,x$ ដែល $-1 \le u \le 1$ ឬ $u = e^x\ldots$។ ដោះស្រាយនិងពិភាក្សាទៅតាមអញ្ញាត u រួចទាញបញ្ចេញលទ្ធផលទៅតាមអញ្ញាត x ។

1.14 ព្រីមីទីវ និង ផ្ទៃក្រឡា

1.14.1 ព្រីមីទីវ

និយមន័យ

$F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ កាលណា $F'(x) = f(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់នៃ f ។

ទ្រឹស្តីបទ

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ f មានទម្រង់ទូទៅ $F(x)+C$ ដែល C ជាចំនួនពិតថេរ។

1.14.2 អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

និយមន័យ

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $f(x)$ កំណត់ដោយ $\int f(x)dx = F(x)+C, C \in \mathbb{R}$

រូបមន្តមួយចំនួនគួរចងចាំដើម្បីងាយស្រួលសិក្សាអនុគមន៍

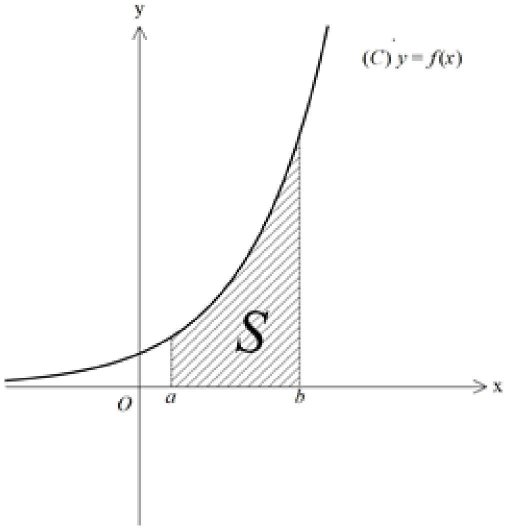
1. $f(x) = a(a \in \mathbb{R}) \Rightarrow F(x) = ax + C$
2. $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ $\Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$
4. $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow F(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
5. $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = \sqrt{x} + C$
6. $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + C$
7. $f(x) = u'(x)e^{u(x)} \Rightarrow F(x) = e^{u(x)} + C$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln x + C$
9. $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \Rightarrow F(x) = \ln|u(x)| + C$
10. $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u^2(x)} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{u(x)} + C$
11. $f(x) = u'(x) \Rightarrow F(x) = u(x) + C$

1.14.3 ផ្ទៃក្រឡា

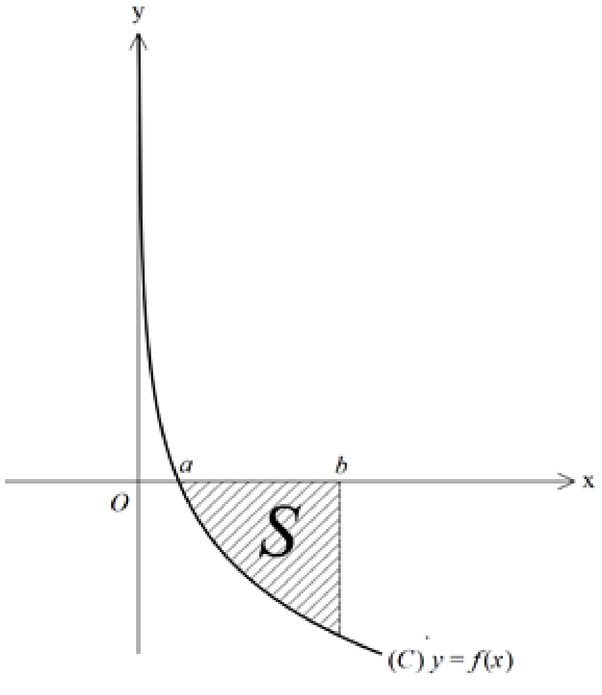
រូបមន្ត $Newton-Leibnitz: \int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

ក. ក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ និង អ័ក្សអាប់ស៊ីស៖

ក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង $(C_f): y=f(x)$ ដែល $f(x)\geq 0$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'Ox)$ បន្ទាត់ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយ៖ $S=\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ ។

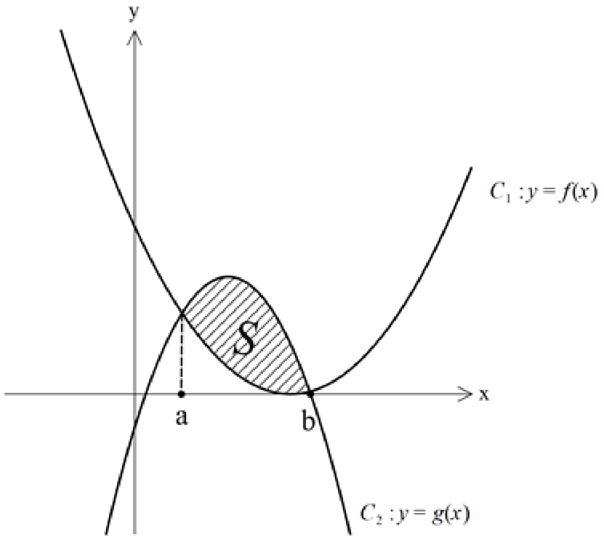


ក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង $(C_f): y=f(x)$ ដែល $f(x)\leq 0$ ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'Ox)$ បន្ទាត់ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយ៖ $S=-\int_a^b f(x)\,dx=-[F(x)]_a^b=-F(b)+F(a)$ ។

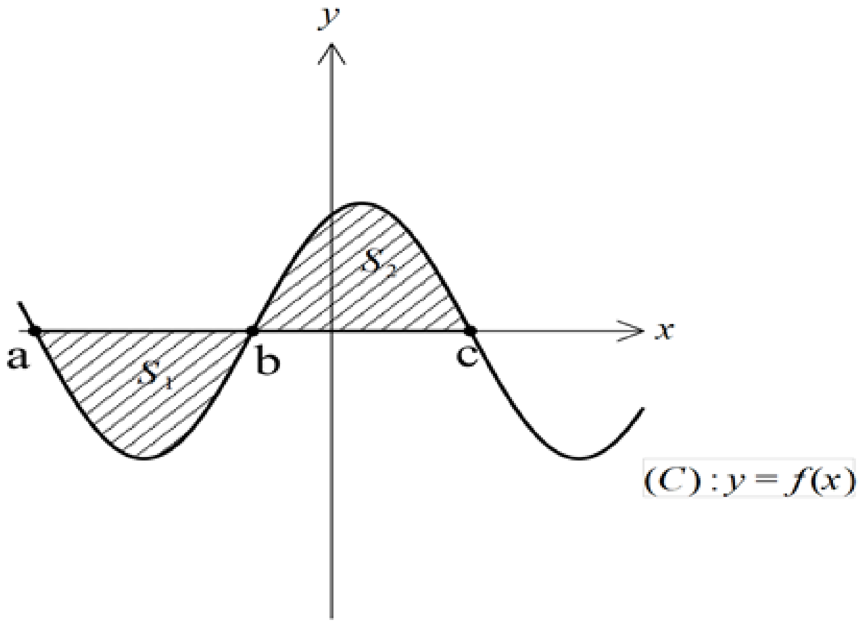


ខ. ក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(C_1) : y = f(x)$ និង $(C_2) : y = g(x)$ លើចន្លោះ (a,b) ដែល គ្រប់ $x \in (a,b) : f(x) \leq g(x)$ កំណត់ដោយ: $S = -\int_a^b f(x) - g(x)dx$

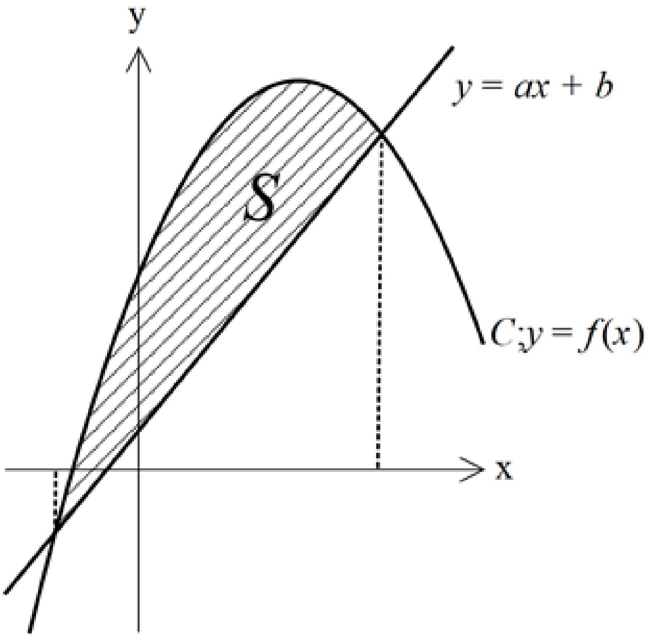


គ. ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ និង អ័ក្សអាប់ស៊ីសៈ



$$S = S_1 + S_2 = -\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

ឃ. ក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ និង បន្ទាត់ $y = ax + b : f(x) - y \geq 0$



$$S = \int_a^b \left[f(x) - y \right] dx$$

ផ្នែកទី 2

លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ

ប្រធានទី ១

ផ្នែកទី ១ គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=x^2-1+\ln x$

1 គណនា $g'(x);\forall x\in(0,+\infty)$ រួចសិក្សាអថេរភាពនៃ $g(x)$ លើ $(0,+\infty)$ ។

2 គណនា $g(1)$ និងទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $(0,+\infty)$ ។

ផ្នែកទី ២ អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$ មានក្រាបតំណាង (C_f) លើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ឯកតា$\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2cm$ ។

1 គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

2 គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។

3 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2},\forall x\in(0,+\infty)$

ខ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

4 ក. បន្ទាត់ $(\Delta):y=x$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា (Δ) ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ។

ខ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C_f) និង (Δ) រួចកំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ទាំងពីរ។

5 បង្ហាញថា (C_f) មានចំណុចរបត់ I រួចកំណត់កូអរដោនេរបស់វា។

6 សង់បន្ទាត់ (Δ) និង (C_f) ។ (គេឱ្យ $e^{\frac{3}{2}} \simeq 4.4, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \simeq 4.1$) ។

7 ដោយប្រើក្រាប ពិភាក្សាតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m នៅឫសនៃសមីការ $x^2 - mx - \ln x = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី ១ អនុគមន៍ $g(x)$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$

1 គណនា $g'(x); \forall x \in (0,+\infty)$

យើងបាន $g'(x) = \left(x^2 - 1 + \ln x\right)' = 2x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2+1}{x}$

នាំឱ្យ $g'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$

ដូចនេះ $g'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$

សិក្សាអថេរភាពនៃ $g(x)$ លើ $(0,+\infty)$

យើងមាន $g'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x} > 0$ ជានិច្ចចំពោះ $\forall x \in (0,+\infty)$

នាំឱ្យ $g(x)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត។

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2 - 1 + \ln x\right) = -\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$)
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2 - 1 + \ln x\right) = +\infty$

តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

2 គណនា $g(1)$ និងទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $(0,+\infty)$

យើងមាន $\quad g(x)=x^2-1+\ln x$

នាំឱ្យ $\quad g(1)=1^2-1+\ln 1=1-1+0=0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$		$+$	
$g(x)$	|| $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

តាមតារាងខាងលើយើងបាន៖

$\forall x\in(0,1)$ នោះ៖ $g(x)<0$

$x=1$ នោះ៖ $g(x)=0$

$\forall x\in(1,+\infty)$ នោះ៖ $g(x)>0$

ផ្នែកទី ២ អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$ មានក្រាបតំណាង (C_f)

1 គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

យើងបាន $\quad \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x-\dfrac{\ln x}{x})=+\infty$ (ព្រោះ៖ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$)

ដូចនេះ៖ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។

2 គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty \text{ (ព្រោះ៖ } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0)$$

3 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2},\forall x\in(0,+\infty)$

យើងមាន $\quad f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$

នាំឱ្យ $\quad f'(x)=\left(x-\dfrac{\ln x}{x}\right)'=1-\dfrac{(\ln x)'\cdot x-x'\cdot\ln x}{x^2}$

(តាមរូបមន្ត $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$)

$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ពិត

ដូចនេះ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, $\forall x \in (0, +\infty)$ ។

ខ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

យើងមាន $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, $\forall x \in (0, +\infty)$

ដោយ $x^2 > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាដូច $g(x)$ ។

ដូចនេះយើងបាន៖

$\forall x \in (0, 1)$ នោះ $f'(x) < 0$

$x = 1$ នោះ $f'(x) = 0$

$\forall x \in (1, +\infty)$ នោះ $f'(x) > 0$

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x = 1$

នោះគេថា $f(x)$ មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = 1 - \frac{ln(1)}{1} = 1 - \frac{0}{1} = 1$ ។

ដូចនេះចំណុចអប្បបរមាធៀបគឺ $(1, 1)$ ។

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4 ក. គណនា $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x]$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា (Δ) ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f)

យើងបាន $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{\ln x}{x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

តាមនិយមន័យនៃសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត គេទាញបាន $(\Delta): y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ពិត ។

ខ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C_f) និង (Δ)

យើងមាន $C_f : y = f(x) = x - \frac{lnx}{x}$

$(\Delta) : y = x$

តាង $y_c = x - \frac{\ln x}{x}; y_\Delta = x$

សិក្សាសញ្ញាផលដកនៃ $y_c - y_\Delta = x - \frac{\ln x}{x} - x = -\frac{\ln x}{x}$

ដោយ $\forall x \in (0, +\infty)$ គេបាន $x > 0$ នោះ $y_C - y_\Delta$ យកសញ្ញាដូច $-\ln x$ ។

បើ $-lnx > 0$ ឬ $lnx < 0$ ឬ $lnx < ln1$ ឬ $x < 1$ នោះ (C_f) នៅលើ (Δ)

បើ $-lnx < 0$ ឬ $lnx > 0$ ឬ $lnx > ln1$ ឬ $x > 1$ នោះ (C_f) នៅក្រោម (Δ)

បើ $-lnx = 0$ ឬ $lnx = 0$ ឬ $lnx = ln1$ ឬ $x = 1$ នោះ (C_f) កាត់ (Δ)

កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ទាំងពីរ

តាមខាងលើ គេបាន (C_f) និងបន្ទាត់ (Δ) ប្រសព្វគ្នាត្រង់ $x = 1$ នោះ $y = x = 1$

ដូចនេះកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វគឺ $(1,1)$។

5 បង្ហាញថា (C_f) មានចំណុចរបត់ I និងកំណត់កូអរដោនេរបស់វា

យើងមាន $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$ និង $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ $\forall x \in (0, +\infty)$

នាំឱ្យ
$$f''(x) = \frac{g'(x)\cdot x^2 - 2x\cdot g(x)}{x^4} = \frac{\left(\frac{2x^2+1}{x}\right)x^2 - 2x\left(x^2 - 1 + \ln x\right)}{x^4}$$
$$= \frac{2x^3 + x - 2x^3 + 2x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{3x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(3 - 2\ln x)}{x^4}$$
$$= \frac{3 - 2\ln x}{x^3}$$

ដោយ $x^3 > 0$ ចំពោះ $\forall x \in (0, +\infty)$ នោះ $f''(x)$ យកសញ្ញាដូច $3 - 2\ln x$

បើ $3 - 2\ln x > 0$ ឬ $-2\ln x > -3$ ឬ $\ln x < \frac{-3}{-2}$ ឬ $\ln x < \frac{3}{2}$ ឬ $\ln x < \ln e^{\frac{3}{2}}$ ឬ $x < e^{\frac{3}{2}} \simeq 4.4$

បើ $3 - 2\ln x = 0$ ឬ $-2\ln x = -3$ ឬ $\ln x = \frac{-3}{-2}$ ឬ $\ln x = \frac{3}{2}$ ឬ $\ln x = \ln e^{\frac{3}{2}}$ ឬ $x = e^{\frac{3}{2}} \simeq 4.4$

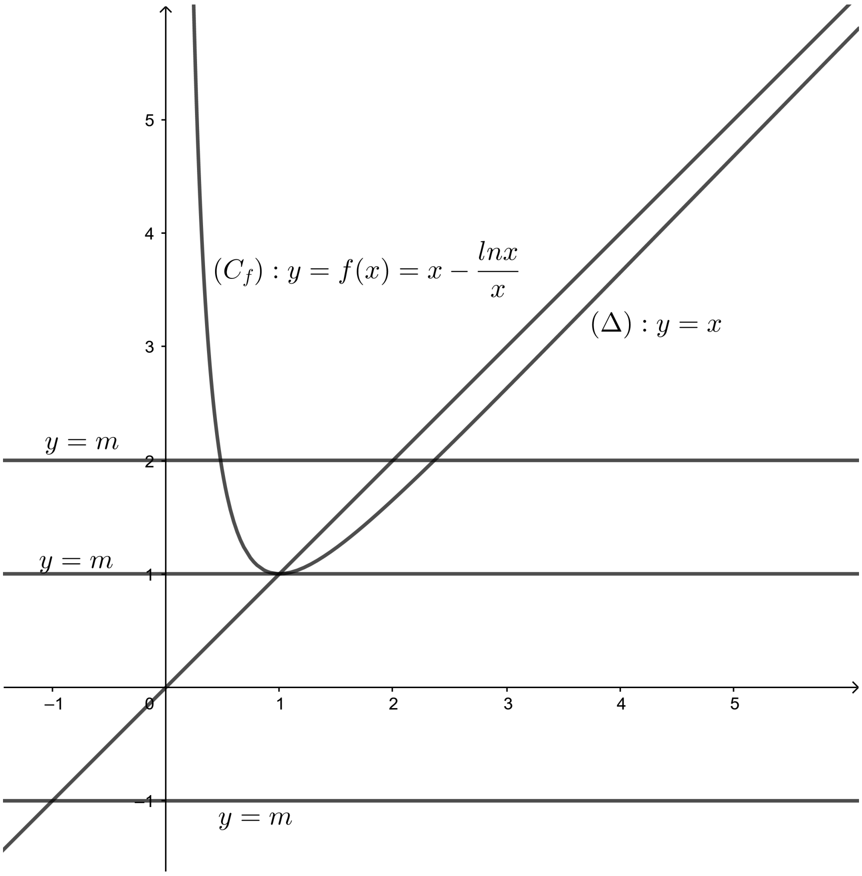
បើ $3 - 2\ln x < 0$ ឬ $-2\ln x < -3$ ឬ $\ln x > \frac{-3}{-2}$ ឬ $\ln x > \frac{3}{2}$ ឬ $\ln x > \ln e^{\frac{3}{2}}$ ឬ $x > e^{\frac{3}{2}} \simeq 4.4$

តារាងសញ្ញានៃ $f''(x)$

x	0		4.4		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

ដោយ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាត្រង់ $x = e^{\frac{3}{2}} \simeq 4.4$ នោះគេថា $f(x)$ មានចំណុចរបត់ត្រង់ $(4.4, 4.1)$ ។

6 សង់បន្ទាត់ (Δ) និង (C_f)



7 ដោយប្រើក្រាប ពិភាក្សាតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m នៅឫសនៃសមីការ $x^2 - mx - \ln x = 0$

យើងមាន $x^2 - mx - \ln x = 0$

យើងបាន $-mx = -x^2 + \ln x$

$m = \frac{-x^2 + \ln x}{-x} = x - \frac{\ln x}{x}$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាង $\begin{cases} y = m \\ y = x - \frac{\ln x}{x} \end{cases}$

ដែល $y = m$ ជាបន្ទាត់ដែលស្របនិងអ័ក្ស (Ox)

តាមក្រាបយើងបាន៖

បើ $m<1$ សមីការគ្មានឫស

បើ $m=1$ សមីការមានឫសឌុបគឺ $x=1$

បើ $m>1$ បន្ទាត់កាត់ខ្សែកោងត្រង់ពីរចំណុចនោះវាមានឫសពីរផ្សេងគ្នា។

ប្រធានទី២

នៅលើប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ឯកតា $4cm$ ។ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x) = -x + (2x+1)e^{-x}$ និងមានក្រាបតំណាង (C_f) ។

ផ្នែកទី១ ៖ សិក្សាអនុគមន៍

1 បើ $f'(x)$ ជាដេរីវេនៃ $f(x)$ ។ បង្ហាញថា $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (1-2x)e^{-x} - 1$ ។

2 ខាងក្រោមជាតារាងអថេរភាពនៃ $f'(x)$

x	$-\infty$	1.5	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	$-2e^{-1.5}-1$	↗ $+\infty$

ក. គណនា $f'(0)$ រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ដោយប្រើតារាងអថេរភាពខាងលើ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x \in \mathbb{R}^*; f(x) = x\left[-1 + \left(2 + \frac{1}{x}\right)e^{-x}\right]$ ។

ខ. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។

4 ក. បង្ហាញថា $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = 2xe^{-x} + e^{-x} - x$ ។

ខ. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។

ផ្នែកទី២ ៖ សំណង់ខ្សែកោង

1 សិក្សាមែកអនន្តនៃ (C_f) ត្រង់ $-\infty$

2 ក. បង្ហាញថា $(D): y = -x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$.

ខ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C_f) និងបន្ទាត់ (D) ព្រមទាំងរកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ P រវាង (C_f) និងបន្ទាត់ (D) ។

3 សង់បន្ទាត់(D) ចំណុច P និងក្រាប (C_f) លើតម្រុយតែមួយ។

ផ្នែកទី៣ ៖ ការគណនាផ្ទៃក្រឡា

អនុគមន៍ h និង H កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $h(x)=(2x+1)e^{-x}$ និង $H(x)=(ax+b)e^{-x}$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។

1 ក. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ H ជាព្រីមីទីវនៃ h ។

ខ. ទាញរកព្រីមីទីវនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។

2 គណនាផ្ទៃក្រឡា A កំណត់ដោយ (C_f) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=-\frac{1}{2}, x=0$ ។

3 គណនាផ្ទៃក្រឡា S កំណត់ដោយសំណុំចំណុច $M(x,y)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} -\frac{1}{2}\le x\le 0 \\ -x\le y\le f(x)\end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

មានអនុគមន៍ $f(x)=-x+(2x+1)e^{-x}$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ឯកតា $4cm$ ។

ផ្នែកទី១ ៖ សិក្សាអនុគមន៍

1 បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=(1-2x)e^{-x}-1$

យើងបាន
$$\begin{aligned} f'(x) &= [-x+(2x+1)e^{-x}]' \\ &= -1+(2x+1)'e^{-x}+(e^{-x})'(2x+1) \\ &= -1+2e^{-x}-e^{-x}(2x+1) \\ &= -1+(2-2x-1)e^{-x} \\ &= -1+(1-2x)e^{-x} \\ &= (1-2x)e^{-x}-1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f'(x)=(1-2x)e^{-x}-1$ ពិត។

2 ក. គណនា $f'(0)$ រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ លើ $\mathbb{R}$

ដោយ $f'(x) = (1-2x)e^{-x} - 1$

នាំឱ្យ $f'(0) = (1-0)e^{0} - 1 = 1 - 1 = 0$

យើងបាន

x	$-\infty$	0	1.5	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-2e^{-1.5}-1$ ↗	-1

តាមតារាងអថេរភាពគេបាន៖

$\forall x \in (-\infty, 0)$ នោះ $f'(x) > 0$

$x = 0$ នោះ $f'(x) = 0$

$\forall x \in (0, +\infty)$ នោះ $f'(x) < 0$

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$

យើងបាន
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left[-x+(2x+1)e^{-x}\right]\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{2x+1}{e^x}\right]\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-xe^x+2x+1}{e^x}\right]\\ &= -\infty\end{aligned}$$

យើងបាន
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[-x+(2x+1)e^{-x}\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{2x+1}{e^x}\right]\\ &= -\infty\end{aligned}$$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$-\infty$

តាមតារាងអថេរភាពគេឃើញថា $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=0$

នោះគេថា f មានតម្លៃអតិបរមាធៀប $f(0)=-0+(0+1)e^0=1$ ចំណុចអតិបរមាធៀបគឺ $(0,1)$ ។

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}^*; f(x)=x\left[-1+\left(2+\frac{1}{x}\right)e^{-x}\right]$

យើងបាន
$$\begin{aligned} f(x) &= -x+(2x+1)e^{-x}\\ &= x\left[-1+\frac{(2x+1)e^{-x}}{x}\right]\\ &= x\left[-1+\left(\frac{2x+1}{x}\right)e^{-x}\right]\\ &= x\left[-1+\left(2+\frac{1}{x}\right)e^{-x}\right] \end{aligned}$$
ពិត $\forall x\in\mathbb{R}^*$ ។

ខ. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$

យើងបាន
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left[-1+\left(2+\frac{1}{x}\right)e^{-x}\right]=-\infty$$
(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$)

4 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}; f(x)=2xe^{-x}+e^{-x}-x$

យើងបាន
$$\begin{aligned} f(x) &= -x+(2x+1)e^{-x}=-x+2xe^{-x}+e^{-x}\\ &= 2xe^{-x}+e^{-x}-x \end{aligned}$$
ពិត $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ខ. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$

យើងបាន
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2xe^{-x}+e^{-x}-x\right)=-\infty$$
(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$)

ផ្នែកទី២ ៖ សំណាង់ខ្សែកោង

1 សិក្សាមែកអនន្តនៃ (C_f) ត្រង់ $-\infty$

របៀបសិក្សាមែកអនន្ត

ដើម្បីសិក្សាមែកអនន្តនៃ (C_f) គេត្រូវ:

⋆ បើ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ និង $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$ ដែល a,b ជាចំនួនពិតនោះ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ។

⋆ បើ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ និង $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\infty$ នោះគេថាមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូល ឬខ្សែកោងមានមែកប៉ារ៉ាបូលដែលមានទិសអាស៊ីមតូត $y=ax$ ។

⋆ បើ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ នោះគេថាមែកអនន្តនៃខ្សែកោងជាមែកប៉ារ៉ាបូលឬខ្សែកោងមានមែកប៉ារ៉ាបូលដែលមានទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្ស (Oy) ។

យើងបាន
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left[-1+\left(2+\frac{1}{x}\right)e^{-x}\right]}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[-1+\left(2+\frac{1}{x}\right)e^{-x}\right]=+\infty$$
(ព្រោះ $f(x)=x\left[-1+\left(2+\frac{1}{x}\right)e^{-x}\right]\ ;\forall x\in\mathbb{R}^*$)។

នោះគេបានមែកអនន្តនៃខ្សែកោងជាប៉ារ៉ាបូលមានទិសអាស៊ីមតូតបន្ទាត់អ័ក្ស (Oy) ខាង $-\infty$ ។

2 ក. បង្ហាញថា $(D):y=-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$

ដោយ
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_D]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2xe^{-x}+e^{-x}-x+x\right)=0$$
(ព្រោះ $f(x)=\left(2xe^{-x}+e^{-x}-x\right)\ ;\forall x\in\mathbb{R}$)។

តាមនិយមន័យគេបាន $(D):y=-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។

ខ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C_f) និងបន្ទាត់ (D)

យើងមាន $C_f : y = f(x) = -x + (2x+1)e^{-x}$

$(D) : y = y_D = -x$

សិក្សាសញ្ញារវាង $f(x) - y_D = -x + (2x+1)e^{-x} + x = (2x+1)e^{-x}$

ដោយ $e^{-x} > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ នោះ $f(x) - y_D$ យកសញ្ញាតាម $2x+1$

បើ $2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x) - y_D$	$-$	0	$+$

គេបានចំពោះ៖

$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ នោះ (C_f) នៅក្រោម (D)

$x = -\frac{1}{2}$ នោះ (C_f) កាត់ (D)

$x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ នោះ (C_f) នៅលើ (D)

រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ P រវាង (C_f) និងបន្ទាត់ (D)

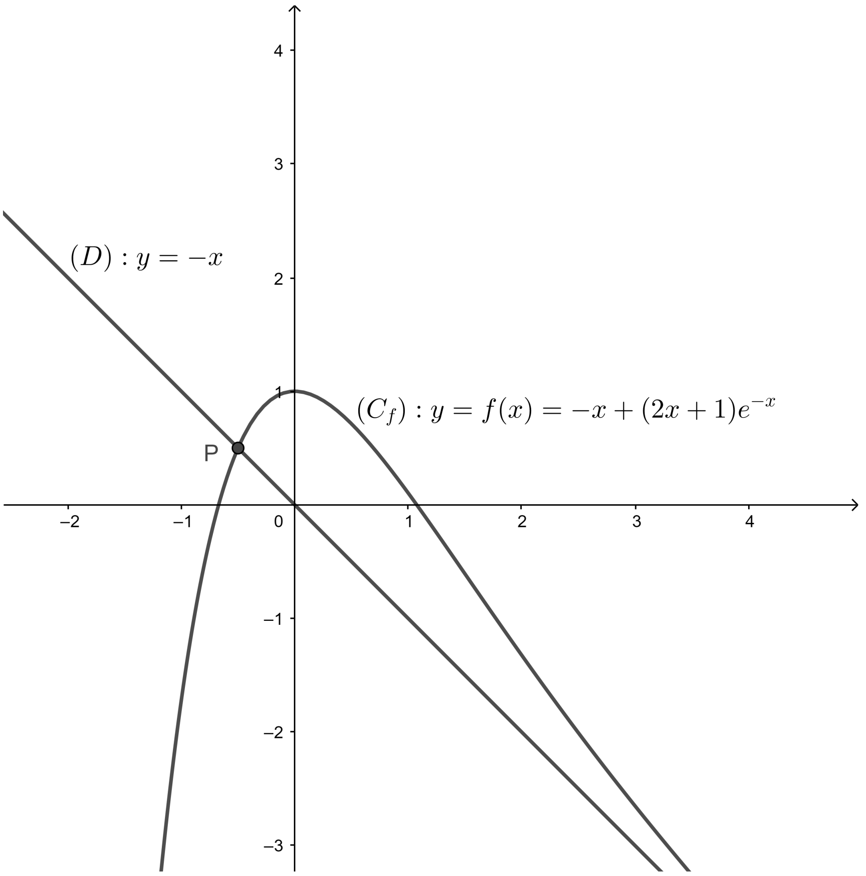
តាមតារាងខាងលើ (C_f) កាត់ (D) ត្រង់ $x = -\frac{1}{2}$

នោះ $y = -x = \frac{1}{2}$

យើងបាន $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

ដូចនេះ $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ។

3 សង់បន្ទាត់ (D) ចំណុច P និងក្រាប (C_f) លើតម្រុយតែមួយ



ផ្នែកទី៣ ៖ ការគណនាផ្ទៃក្រឡា

យើងមាន h និង H កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $h(x) = (2x+1)e^{-x}$ និង $H(x) = (ax+b)e^{-x}$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត

1 ក. កំណត់តម្លៃ a និង b

ដោយ $H(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $h(x)$

ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ គេបាន៖

$$H'(x) = h(x)$$

ដោយ

$$\begin{aligned} H'(x) &= (ax+b)' e^{-x} + \left(e^{-x}\right)' (ax+b) \\ &= ae^{-x} - e^{-x}(ax+b) \\ &= (a - ax - b)e^{-x} \\ &= [-ax + (a-b)]e^{-x} \end{aligned}$$

គេបាន $[-ax+(a-b)]e^{-x}=(2x+1)e^{-x}$

គេទាញបាន $\begin{cases}-a=2\\ a-b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=a-1=-2-1=-3\end{cases}$

ដូចនេះ $a=-2,b=-3$ ។

ខ. ទាញរកព្រីមីទីវនៃ f លើ $\mathbb{R}$

យើងមាន $f(x)=-x+(2x+1)e^{-x}$

$=-x+h(x)$

តាង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $f(x)$ គេបាន៖

$$F(x)=\int f(x)dx=\int[-x+h(x)]dx$$
$$=-\int xdx+\int h(x)dx$$
$$=-\frac{x^2}{2}+H(x)=-\frac{x^2}{2}+(ax+b)e^{-x}$$
$$=-\frac{x^2}{2}+(-2x-3)e^{-x}+C,C\in\mathbb{R}$$

ដោយសារ $H(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $h(x)$ គេបាន $H'(x)=h(x)$ ឬ $H(x)=\int h(x)dx$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ គឺ $F(x)=-\frac{x^2}{2}+(-2x-3)e^{-x}+C,C\in\mathbb{R}$ ។

2 គណនាផ្ទៃក្រឡា A កំណត់ដោយ (C_f) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=-\frac{1}{2},x=0$

គេបាន៖

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}f(x)dx=[F(x)]_{-\frac{1}{2}}^{0}=F(0)-F\left(\frac{1}{2}\right)$$ (ព្រោះ F ជាព្រីមីទីវនៃ f)

$$A=\left[0+(0-3)e^0\right]-\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3\right)e^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$A=-3-\left(-\frac{1}{8}-2\sqrt{e}\right)$$
$$A=-3+\frac{1}{8}+2\sqrt{e}=2\sqrt{e}-\frac{23}{8}$$

តែតម្រុយមានឯកតា $4cm$ នោះ 1 ឯកតាផ្ទៃក្រឡាស្មើ $16cm^2$

$$A=16cm^2\left(2\sqrt{e}-\frac{23}{8}\right)=32\sqrt{e}-46cm^2$$

ដូចនេះ $A=32\sqrt{e}-46cm^2$ ។

3 គណនាផ្ទៃក្រឡា S កំណត់ដោយសំណុំចំណុច $M(x,y)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ -x \leq y \leq f(x) \end{cases}$

តាមក្រាបគេបាន៖

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} [f(x) - y]\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left[-x + (2x+1)e^{-x} + x\right] dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (2x+1)e^{-x}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} h(x)dx \\ &= [H(x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} = H(0) - H\left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

តែ $H(x) = (-2x-3)e^{-x}$

នោះ $S = (0-3)e^0 - (1-3)e^{\frac{1}{2}}$

$= -3 + 2\sqrt{e} = 2\sqrt{e} - 3$

$= 16\left(2\sqrt{e} - 3\right) cm^2$

ដូចនេះ $S = 16\left(2\sqrt{e} - 3\right) cm^2$។

ប្រធានទី ៣

ផ្នែកទី ១ គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

1. បង្ហាញថា $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

2. បង្ហាញថាអនុគមន៍ g កើនលើចន្លោះ $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ និងជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

3. ក. បង្ហាញថា $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ រួចបញ្ជាក់ថា $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ ។

   ខ. ខ.ទាញបញ្ជាក់ថា $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ។

ផ្នែកទី ២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$ មាន (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ឯកតា $2cm$។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចទាញរក $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (ដោយដឹងថា $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u = 0$) ។

2. បង្ហាញថា $f'(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ និងបញ្ជាក់ថា f កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

3. ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ រួចទាញបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង (C_f) មានមែកអនន្តមួយជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្សអរដោនេ (Oy)។

   ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)]$ រួចទាញបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y = x + 1$ គឺជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (C_f) ខាងផ្នែក $-\infty$ ។

   គ. គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (Δ) និងខ្សែកោង (C_f) រួចបង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) នៅលើខ្សែកោង (C_f) នៅចន្លោះ $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ និងក្រោមខ្សែកោង (C_f) នៅចន្លោះ $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ។

4. ក. បង្ហាញសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះខ្សែកោង (C_f) ត្រង់ចំណុច O គឺ $y = x$ ។

   ខ. បង្ហាញថាខ្សែកោង (C_f) មានចំណុចរបត់មួយដែលមានអាប់ស៊ីស $x = -\frac{1}{2}$ ព្រមទាំងកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចរបត់នេះផង ។

5 សង់អាស៊ីមតូត (Δ) បន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោង (C_f) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

6 ក. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក បង្ហាញថា $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)\,e^{2x}dx = 1-\frac{e}{2}$ ។

ខ. បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាដែលកំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) បន្ទាត់ប៉ះ (T) និងបន្ទាត់ទាំងពីរ ដែលមានសមីការ $x=0$ និង $x=\frac{1}{2}$ គឺស្មើនឹង $(6-2e)\,cm^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី ១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=1+4xe^{2x}$

1 បង្ហាញថា $g'(x)=4(2x+1)\,e^{2x}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

យើងបាន
$$\begin{aligned} g'(x) &= (1+4xe^{2x})' = 4[x'e^{2x}+(e^{2x})'x] \\ &= 4(e^{2x}+2e^{2x}) \\ &= 4(2x+1)e^{2x} \text{ ពិត ។} \end{aligned}$$

2 បង្ហាញថាអនុគមន៍ g កើនលើចន្លោះ $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$ និងជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

យើងមាន
$$\begin{aligned} g'(x) &= 4(2x+1)e^{x};\forall x\in\mathbb{R} \\ &= (2x+1)4e^{2x} \end{aligned}$$

ដោយ $4e^{2x};\forall x\in\mathbb{R}$ នោះសញ្ញារបស់ $g'(x)$ មានសញ្ញាដូច $2x+1$ ។

បើ $2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើយើងបាន៖

$$g \text{ ជាអនុគមន៍កើន } \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$
$$g \text{ ជាអនុគមន៍ចុះ } \quad \forall x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$$

3 ក. បង្ហាញថា $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ រួចបញ្ជាក់ថា $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

ដោយ $\quad g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

នាំឱ្យ $\quad g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} > 0$ ពិត (ព្រោះ $e > 2 \Rightarrow e - 2 > 0$)

ខ. ខ.ទាញបញ្ជាក់ថា $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

តាមតារាងខាងលើ $g'(x)$ ដូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x = -\frac{1}{2}$ នោះ $g(x)$ មានតម្លៃអប្ប បរមាធៀប $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e} > 0$ ហើយគេអាចទាញបាន $g(x) > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ ពិត។

ផ្នែកទី ២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$ មាន (C_f)

1 គណនា $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(2x-1)e^{2x} + x + 1\right] = +\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1)e^{2x} = +\infty$)

គណនា $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[(2x-1)e^{2x} + x + 1\right] = -\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x-1)e^{2x} = 0$)

2 បង្ហាញថា $f'(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$

យើងបាន
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(2x-1)e^{2x} + x + 1\right]' \\ &= \left[(2x-1)e^{2x}\right]' + 1 \\ &= (2x-1)'e^{2x} + \left(e^{2x}\right)'(2x-1) + 1 \\ &= 2e^{2x} + 2e^{2x}(2x-1) + 1 \\ &= (2 + 4x - 2)e^{2x} + 1 \\ &= 1 + 4xe^{2x} = g(x) \text{ ពិត} \end{aligned}$$

បញ្ជាក់ថា f កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$

ដោយ $g(x) > 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$

នោះ $f'(x) = g(x) > 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

3 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ រួចទាញបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង (C_f) មានមែកអនន្តមួយជាមែកប៉ារ៉ាបូល ទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្សអរដោនេ (Oy)។

យើងបាន
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-1)\,e^{2x} + x + 1}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{(2x-1)\,e^{2x}}{x} + 1 + \frac{1}{x}\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[\left(2 - \frac{1}{x}\right) e^{2x} + 1 + \frac{1}{x}\right] = +\infty\end{aligned}$$
(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0; \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$)

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ នោះតាមនិយមន័យគេថា ខ្សែកោង (C_f) មានមែកអនន្ត ជាមែកប៉ារ៉ាបូលដែលមានទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្ស (Oy) ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)]$

យើងបាន
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)] &= \lim_{x\to-\infty} \left[(2x-1)\,e^{2x} + x + 1 - x - 1\right] \\ &= \lim_{x\to-\infty} \left[(2x-1)\,e^{2x}\right] = 0\end{aligned}$$

តាមនិយមន័យគេទាញបាន $(\Delta) : y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ខាង $-\infty$ ។

គ. គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (Δ) និងខ្សែកោង (C_f)

យើងមាន $(C) : f(x) = (2x-1)\,e^{2x} + x + 1$

$(\Delta) : y_\Delta = x + 1$

ដោះស្រាយសមីការអាប់ស៊ីស $f(x) = y_\Delta$ ឬ $f(x) - y_\Delta = 0$

យើងបាន $(2x-1)\,e^{2x} + x + 1 - (x+1) = 0$

$(2x-1)\,e^{2x} + x + 1 - x - 1 = 0$

$(2x-1)\,e^{2x} = 0$

ដោយ $e^{2x} > 0$ ជានិច្ច នោះ៖

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y = x + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

ចំណុចប្រសព្វរវាង (C_f) និង (Δ) គឺ $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ។

ទាញរកទីតាំងធៀបនៃ (C_f) និង (Δ)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x) - y_D$		$-$	0	$+$	

តាមតារាងគេបាន៖

$\forall x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ នោះ (C_f) នៅក្រោម (Δ)

$\forall x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ នោះ (C_f) នៅលើ (Δ)

4 ក. បង្ហាញសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះខ្សែកោង (C_f) ត្រង់ចំណុច O គឺ $y = x$

តាមរូបមន្ត $(T): y = f'(x)(x - x_o) + y_o$

ដោយ $O(0,0) \Rightarrow x_o = 0, y_o = 0$

$f'(x_o) = f'(0) = 1 + 0 \cdot e^0 = 1$

នាំឱ្យ $(T): y = 1(x - 0) + 0 = x$ ពិត ។

ខ. បង្ហាញថាខ្សែកោង (C_f) មានចំណុចរបត់មួយដែលមានអាប់ស៊ីស $x = -\frac{1}{2}$ ព្រមទាំងកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចរបត់នេះផង

យើងមាន $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$

$f'(x) = g(x)$

នាំឱ្យ $f''(x) = g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x} = (2x + 1)4e^{2x}$

ដោយ $4e^{2x} > 0$ ជានិច្ចចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$

នោះ $f''(x)$ មានសញ្ញាដូច $2x + 1$

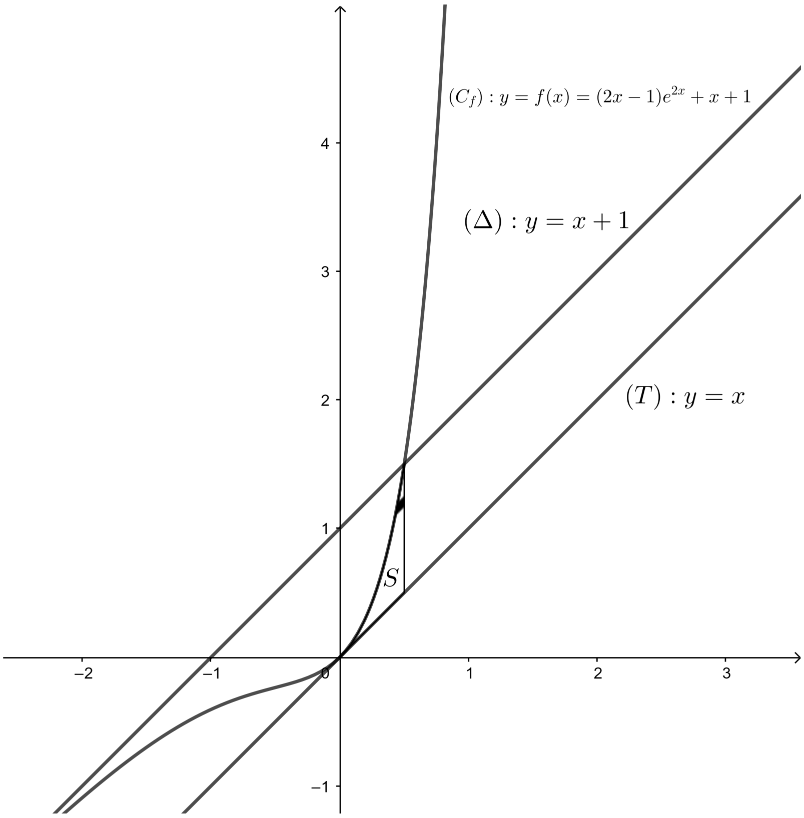
បើ $2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

តារាងសញ្ញានៃ $f''(x)$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

ដោយ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=-\dfrac{1}{2}$ នោះគេថា f មានចំណុចរបត់ដែល មានអាប់ស៊ីស $x=-\dfrac{1}{2}$ និងអរដោនេ $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left[(-1-1)e^{-1}\right]-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{e}$ ដូចនេះចំណុចរបត់ $I\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{e}\right)$ ។

5 សង់អាស៊ីមតូត (Δ) បន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោង (C_f) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$



6 ក. បង្ហាញថា $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=1-\dfrac{e}{2}$

បើ $H=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx$

តាង $u=2x-1 \Rightarrow du=2dx$

$dv=e^{2x}dx \Rightarrow v=\dfrac{1}{2}e^{2x}$

យើងបាន $H = [uv]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} vdu = \left[\frac{1}{2}e^{2x}(2x-1)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx$

$$= \left[\frac{1}{2}e(1-1) - \frac{1}{2}e^0(0-1)\right] - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^0\right)$$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e + \frac{1}{2} = 1 - \frac{e}{2}$ ពិត ។

ខ. បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាដែលកំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) បន្ទាត់ប៉ះ (T) និងបន្ទាត់ទាំងពីរ ដែលមានសមីការ $x = 0$ និង $x = \frac{1}{2}$ គឺស្មើនឹង $(6-2e)\,cm^2$

គេបាន $S = \int_0^{\frac{1}{2}} [f(x) - y_T]\,dx$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[(2x-1)e^{2x} + x + 1 - x\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[(2x-1)e^{2x} + 1\right]dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 1 - \frac{e}{2} + [x]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{e}{2}$$

$= \frac{3-e}{2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ដោយតម្រុយមានឯកតា $2cm$ នោះ 1 ឯកតាផ្ទៃក្រឡាស្មើ $4cm^2$

យើងបាន $S = 4cm^2\left(\frac{3-e}{2}\right)$

$S = (6-2e)\,cm^2$ ពិត ។

ប្រធានទី ៤

ផ្នែកទី ១ គេឱ្យអនុគមន៍ g មួយកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=(1-x)e^x-1$ ។

1 ក. បង្ហាញថា $g'(x)=-xe^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $g(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $(0,+\infty)$ និងជាអនុគមន៍កើនលើ $(-\infty,0)$ ព្រមទាំងបង្ហាញថា $g(0)=0$ ។

2 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $g(x)\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ផ្នែកទី ២ គេឱ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=(2-x)e^x-x$ និង (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ឯកតា $1cm$ ។

1 ក. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ នោះ (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលនៅខាងផ្នែក $+\infty$ ព្រមទាំងបញ្ជាក់ទិសដៅផង។

2 ក. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ រួចទាញរក $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$ (ដោយដឹងថា $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=0$) ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D):y=-x$ គឺជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ខាងផ្នែក $-\infty$ ។

3 ក. បង្ហាញថា $f'(x)=g(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ខ. បកស្រាយតាមន័យធរណីមាត្រចំពោះ $f'(0)=0$ ។

គ. បង្ហាញថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

4 បង្ហាញថា $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់លើ $\mathbb{R}$ នៅលើចន្លោះ $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$ ។ (ដោយដឹងថា $e^{\frac{3}{2}}>3$)

5 ក. ដោះស្រាយលើ $\mathbb{R}$ ចំពោះសមីការ $f(x)+x=0$ និងស្រាយបញ្ជាក់ថា (C_f) និង (D) កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $A(2,-2)$ ។

ខ. សិក្សាសញ្ញានៃ $f(x)+x$ លើ $\mathbb{R}$ ។

គ. ស្រាយថា (C_f) ស្ថិតនៅលើ (D) លើចន្លោះ $(-\infty,2)$ និង (C_f) ស្ថិតនៅក្រោម (D) លើចន្លោះ $(2,+\infty)$ ។

6 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា (C_f) មានចំណុចរបត់មួយត្រង់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(0,2)$

ខ. សង់បន្ទាត់ (D) និងខ្សែកោង (C_f) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$។

7 ក. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក បង្ហាញថា $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx = 3-\frac{4}{e}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកំណត់ដោយ $(C_f);(D)$ និងបន្ទាត់ $x=-1, x=0$ គិតជា cm^2 ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី ១ អនុគមន៍ g មួយកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=(1-x)e^x-1$

1 ក. បង្ហាញថា $g'(x)=-xe^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

យើងបាន
$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}: g'(x) &= \left[(1-x)e^x-1\right]' \\ &= (1-x)'e^x+(e^x)'(1-x) \\ &= -e^x+e^x-xe^x=-xe^x \text{ ពិត}\end{aligned}$$

ខ. បង្ហាញថា $g(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $(0,+\infty)$ និងជាអនុគមន៍កើនលើ $(-\infty,0)$ ព្រមទាំងបង្ហាញថា $g(0)=0$

យើងមាន $g'(x)=-xe^x$ ដោយ $e^x>0$; $\forall x\in\mathbb{R}$

បើ $-x=0\Rightarrow x=0$

តារាងសញ្ញានៃ $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\nearrow$		$g(0)$		$\searrow$

តាមតារាងគេបាន៖

$g'(x) > 0\ ;\ \forall x \in (-\infty, 0)$ នោះអនុគមន៍ g កើនលើ $(-\infty, 0)$

$g'(x) < 0\ ;\ \forall x \in (0, +\infty)$ នោះអនុគមន៍ g ចុះលើ $(0, +\infty)$

$g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ ពិត

2 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $g(x) \leq 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$

តាមតារាង សញ្ញា $g'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ$(-)$ ត្រង់ $x = 0$

នោះ $g(x)$ អតិបរមាធៀបគឺ $g(0) = 0$

គេបាន $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \leq g(0)$ ឬ $g(x) \leq 0$ ។

ផ្នែកទី ២ អនុគមន៍ f មួយកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x) = (2-x)e^x - x$

1 ក. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [(2-x)e^x - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x[(2-x) - \dfrac{x}{e^x}] = -\infty$ ពិត

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$)

ខ. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2-x)e^x - x}{x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\left(\frac{2}{x} - 1\right)e^x - 1\right] = -\infty \text{ ពិត}$$

នោះតាមនិយមន័យ (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលមានទិសដៅអ័ក្ស (Oy)

2 ក. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2-x)e^x-x\right]=+\infty$ ពិត

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$)

ទាញរក $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(2-x)e^x-x+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^x=0$

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D):y=-x$ គឺជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ខាងផ្នែក $-\infty$

តាមខាងលើ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=0$

តាមនិយមន័យ $(D):y=-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ។

3 ក. បង្ហាញថា $f'(x)=g(x)\ ;\forall x\in\mathbb{R}$

យើងបាន

$$\begin{aligned} f'(x)&=\left[(2-x)e^x-x\right]'\\ &=(2-x)'e^x+(e^x)'(2-x)-1\\ &=-e^x+e^x(2-x)-1\\ &=e^x(2-x-1)-1\\ &=e^x(1-x)-1=g(x) \end{aligned}$$

ពិត

ខ. បកស្រាយតាមន័យធរណីមាត្រចំពោះ $f'(0)=0$

តាមន័យធរណីមាត្រ $f'(0)=0$ គឺជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះក្រាប (C_f) ត្រង់ចំណុច ដែលមានអាប់ស៊ីស $x=0$ ។

គ. បង្ហាញថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$

ដោយ $\begin{matrix} f'(x)=g(x)\\ g(x)\le 0\end{matrix}\Rightarrow f'(x)\le 0\ ;\forall x\in\mathbb{R}$

នាំឱ្យអនុគមន៍ f ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)=2$	$\searrow$	$-\infty$

4 បង្ហាញថា $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់លើ $\mathbb{R}$ នៅលើចន្លោះ $\frac{3}{2}<\alpha<2$

ត្រូវបង្ហាញថា៖

1.f ចុះដាច់ខាត ឬកើនដាច់ខាតលើ $\left(\frac{3}{2},2\right)$

2.$f\left(\frac{3}{2}\right)\times f(2)<0$

ដោយ f ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ នោះ f ចុះដាច់ខាតលើ $\left(\frac{3}{2},2\right)$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(2-\frac{3}{2}\right)e^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}=\frac{e^{\frac{3}{2}}-3}{2}>0$ (ព្រោះ$e^{\frac{3}{2}}>3$)

$f(2)=(2-2)e^2-2=-2<0$

យើងបាន $f\left(\frac{3}{2}\right)\times f(2)<0$ (2)

តាម (1) & (2) យើងបាន $f(x)=0$ មានឫសមួយគត់លើ $\left(\frac{3}{2},2\right)$ ។

5 ក. ដោះស្រាយលើ $\mathbb{R}$ ចំពោះសមីការ $f(x)+x=0$

យើងបាន $f(x)+x=0$

$(2-x)e^x-x+x=0$

$(2-x)e^x=0\Rightarrow 2-x=0\Rightarrow x=2$

ដូចនេះ $x=2$ ជាឫសនៃសមីការ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា (C_f) និង (D) កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $A(2,-2)$ ។

បើ (C_f) និង (D) កាត់គ្នានោះ $f(x)+x=0$ គេបានអាប់ស៊ីស $x=2$

និងអរដោនេ $y=f(2)=(2-2)e^2-2=-2$

ដូចនេះ (C_f) និង (D) កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច $A(2,-2)$ ។

ខ. សិក្សាសញ្ញានៃ $f(x)+x$ លើ $\mathbb{R}$

តាមខាងលើមាន $f(x)+x=(2-x)e^{x}$

ដោយ $e^{x}>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $f(x)+x$ មានសញ្ញាដូច $2-x$

បើ $2-x=0\Rightarrow x=2$

តារាងសញ្ញានៃ $f(x)+x$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)+x$		$+$	0	$-$	

តាមតារាងខាងលើគេបាន៖

$\forall x\in(-\infty,2)$ នោះ $f(x)+x>0$

$\forall x\in(2,+\infty)$ នោះ $f(x)+x<0$

$x=2$ នោះ $f(x)+x=0$

គ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C_f) និងបន្ទាត់ (D)

តាមតារាងខាងលើគេបាន៖

$\forall x\in(-\infty,2)$ នោះ (C_f) នៅលើ (Δ)

$\forall x\in(2,+\infty)$ នោះ (C_f) នៅក្រោម (Δ)

$x=2$ នោះ (C_f) កាត់ (Δ)

6 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា (C) មានចំណុចរបត់មួយត្រង់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(0,2)$

យើងមាន $f'(x)=g(x)\Rightarrow f''(x)=g'(x)=-xe^{x}$

ដោយ $e^{x}>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $f''(x)$ មានសញ្ញាដូច $-x$

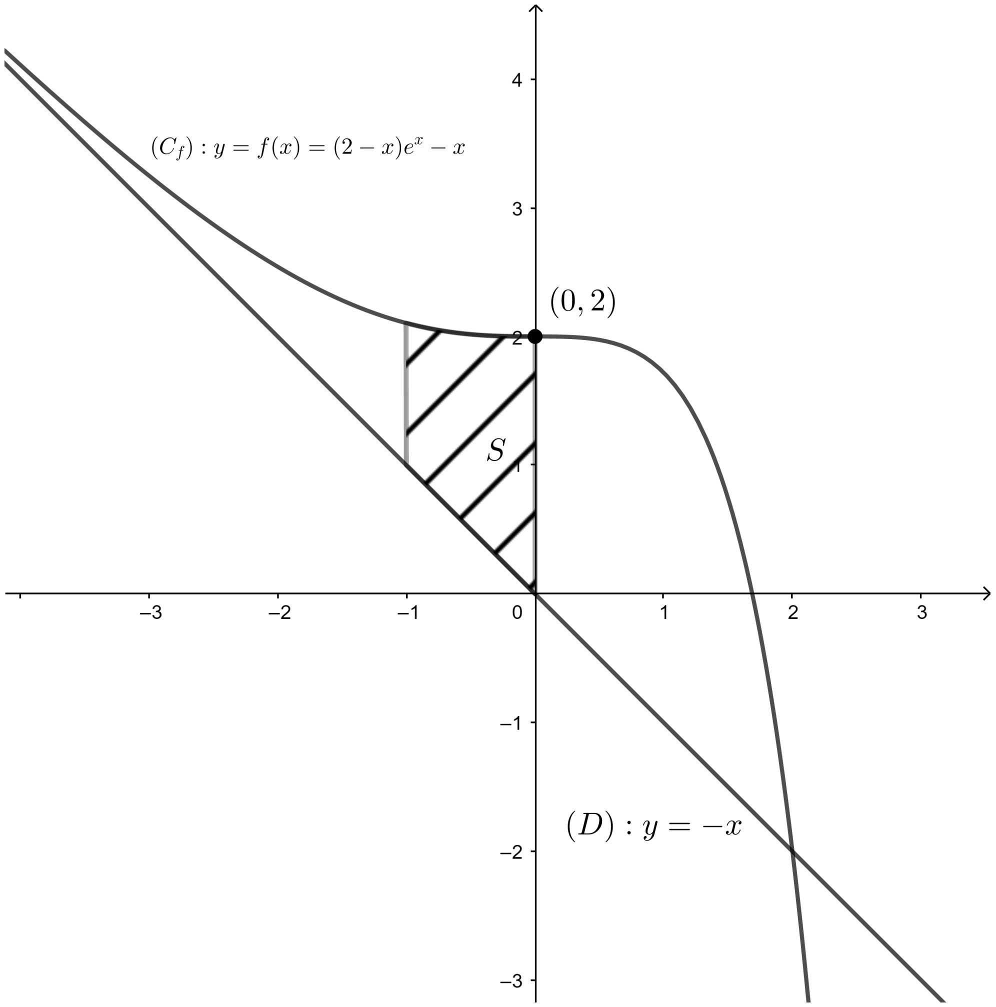
បើ $-x=0\Rightarrow x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

ដោយ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ$(-)$ ត្រង់ $x=0$

គេថា f មានចំណុចរបត់ត្រង់ $(0, f(0)) = (0,2)$ ពិត (ព្រោះ $f(0)=2$) ។

ខ. សង់បន្ទាត់ (D) និងខ្សែកោង (C_f)



7 ក. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកបង្ហាញថា $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$

បើ $I = \int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx$

តាង $u = 2 - x \Rightarrow du = -dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$I = [(2-x)e^x]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^x dx$$
$$= \left(2 - \frac{3}{e}\right) + [e^x]_{-1}^{0} = 2 - \frac{3}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$
$$= 2 - \frac{3}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 3 - \frac{4}{e}$$ ពិត ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយ $(C_f);(D)$ និងបន្ទាត់ $x=-1, x=0$ គិតជា cm^2

គេបាន $S=\int_{-1}^{0}[f(x)-(-x)]dx=\int_{-1}^{0}[(2-x)e^x-x+x]dx$

$\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx=I=3-\frac{4}{e}cm^2$

ដូចនេះ $S=3-\frac{4}{e}cm^2$ ។

ប្រធានទី ៥

ផ្នែកទី ១ គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=e^x-2x$ ។

1 គណនា $g'(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$ ។ ទាញបញ្ជាក់ថា $g(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $(-\infty,\ln 2)$ និងជាអនុគមន៍កើនលើ $(\ln 2,+\infty)$ ។

2 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $g(\ln 2)=2(1-\ln 2)$ និងកំណត់សញ្ញានៃ $g(\ln 2)$ ។

3 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $g(x)>0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ផ្នែកទី ២ អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=\dfrac{x}{e^x-2x}$ មានក្រាបតំណាង (C_f) លើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ឯកតា $1cm$ ។

1 ក. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ (ដោយដឹងថា $e^x-2x=x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)$; $\forall x\in\mathbb{R}$) ។

ខ. បកស្រាយតាមន័យធរណីមាត្រចំពោះលទ្ធផលទាំងពីរខាងលើ។ ព្រមទាំងបញ្ជាក់ទិសដៅផង។

2 ក. បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ខ. សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. បង្ហាញថា $y=x$ ជាសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះខ្សែកោង (C_f) ត្រង់គល់តម្រុយ O ។

3 សង់បន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោង (C_f) លើ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ (ដោយដឹងថា $\dfrac{1}{e-2}\approx 1.4$ និងក្រាប (C_f) មានចំណុចរបត់ពីរគឺ ចំណុចទីមួយមានអាប់ស៊ីសនៅចន្លោះ $(0,1)$ និងចំណុចទីពីរមានអាប់ស៊ីសធំជាង $\dfrac{3}{2}$) ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី ១ អនុគមន៍ $g(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=e^x-2x$ ។

1 គណនា $g'(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

យើងបាន　$g'(x)=(e^x-2x)'=e^x-2$

បើ　$g'(x)=0\Rightarrow e^x-2=0\Rightarrow e^x=2\Rightarrow x=\ln 2$

$g'(x)>0\Rightarrow e^x-2>0\Rightarrow e^x>2\Rightarrow x>\ln 2$

$g'(x)<0\Rightarrow e^x-2<0\Rightarrow e^x<2\Rightarrow x<\ln 2$

តារាងសញ្ញានៃ $g(x)$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	$g(\ln 2)$	↗	

ទាញបញ្ជាក់ថា $g(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $(-\infty,\ln 2)$ និងជាអនុគមន៍កើនលើ $(\ln 2,+\infty)$

តាមតារាងគេបាន៖　g ជាអនុគមន៍ចុះលើ $(-\infty,\ln 2)$

g ជាអនុគមន៍កើនលើ $(\ln 2,+\infty)$

2 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $g(\ln 2)=2(1-\ln 2)$ និងកំណត់សញ្ញានៃ $g(\ln 2)$

យើងមាន　$g(x)=e^x-2x$

នាំឱ្យ　$g(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)$

ម្យ៉ាងទៀត　$e>2\Rightarrow \ln e>\ln 2\Rightarrow 1-\ln 2>0$

នោះ　$g(\ln 2)>0$ ។

3 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $g(x)>0$; $\forall x\in\mathbb{R}$

តាមតារាងគេទាញបាន $\forall x\in\mathbb{R}: g(x)>g(\ln 2)>0\Rightarrow g(x)>0$ ពិត

ផ្នែកទី ២ អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x}{e^x-2x}$ មានក្រាបតំណាង (C_f)

1 ក. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$

យើងបាន
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x-2x}\right) \text{ រាងមិនកំណត់ } \frac{\infty}{\infty}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)}=0\\ &\left(\text{ព្រោះ } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\right)\\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x-2x}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)}=-\frac{1}{2}\\ &\left(\text{ព្រោះ } \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0\right)\end{aligned}$$

ខ. បកស្រាយតាមន័យធរណីមាត្រចំពោះលទ្ធផលទាំងពីរខាងលើ

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ បញ្ជាក់ប្រាប់ថាក្រាប (C_f) មានអាស៊ីមតូតដេក $y=0$ ។
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ បញ្ជាក់ប្រាប់ថាក្រាប (C_f) មានអាស៊ីមតូតដេក $y=-\dfrac{1}{2}$ ។

2 ក. បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

យើងមាន
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{(e^x-2x)} \ ;\ \forall x\in\mathbb{R}\\ f'(x) &= \left(\frac{x}{e^x-2x}\right)'\\ &= \frac{(e^x-2x)-x(e^x-2x)'}{(e^x-2x)^2} = \frac{e^x-2x-x(e^x-2)}{(e^x-2x)^2}\\ &= \frac{e^x-xe^x}{(e^x-2x)^2}\\ &= \frac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2} \text{ ពិត។}\end{aligned}$$

ខ. សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

ព្រោះ $e^x>0$; $(e^x-2x)^2>0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាដូច $1-x$

បើ $1-x=0\Rightarrow x=1$

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	↗	$f(1)$	↘	0

តាមតារាងខាងលើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=1$ គេថា $f(x)$ មានអតិបរមា ត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=\dfrac{1}{e-2}$

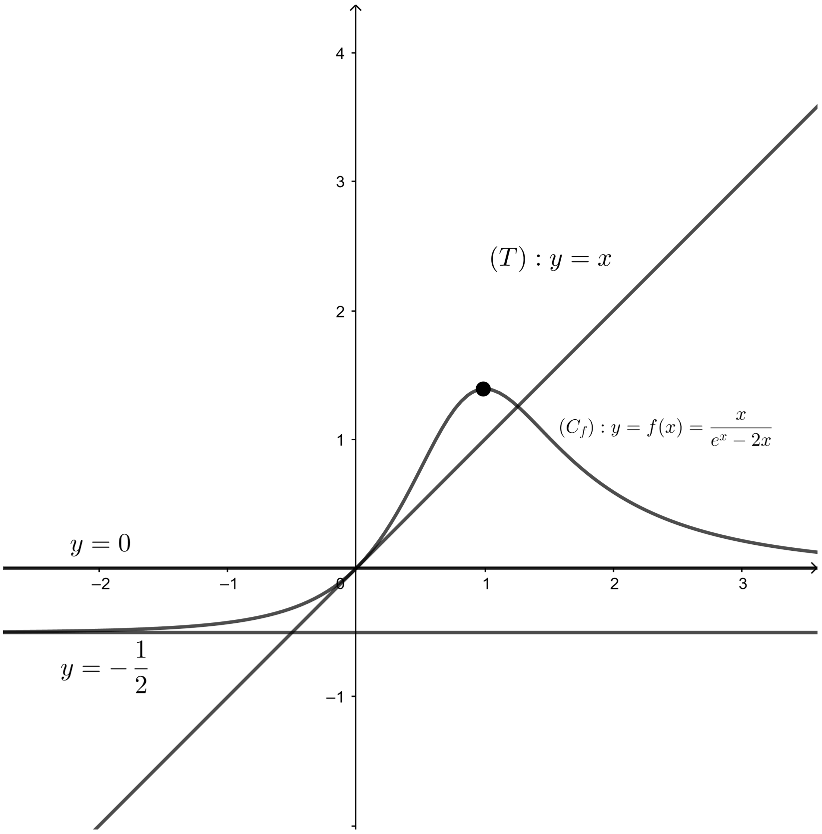
គ. បង្ហាញថា $y=x$ ជាសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះខ្សែកោង (C_f) ត្រង់គល់តម្រុយ O

តាមរូបមន្ត $(T): y=f'(x_o)(x-x_o)+y_o$

ដោយ $x_o=0, y_o=0, f'(x_o)=\dfrac{1}{1^2}=1$

នាំឱ្យ $(T): y=1(x-0)+0=x$ ពិត

3 សង់បន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោង (C_f) លើ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។



ប្រធានទី ៦

ផ្នែកទី ១ គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \sqrt{1+e^{-x}} - x$ មានក្រាប (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ឯកតា $1cm$ ។

1. បង្ហាញថា f កំណត់ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

2. ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ។

   ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលខាងផ្នែក $-\infty$ និងបញ្ជាក់ទិសផង។

3. ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និងទាញបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(D): y = -x+1$ គឺជាអាស៊ីមតូតនៃ (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$ ។

   ខ. ខ.សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C_f) និងបន្ទាត់ (D) ។

4. ក. បង្ហាញថា $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = -\left(1+\dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}}\right)$ ។

   ខ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

   គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។

5. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានឫសតែមួយគត់ α ដែល $1 < \alpha < \ln 4$ ។

6. សង់ខ្សែកោង (C_f) និងបន្ទាត់ (D) លើ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

ផ្នែកទី ២ គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x) = e^{-x} \times f(x)$ មានក្រាប (C_g) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. បង្ហាញថា $\forall x \in [0,1]\ ; g(x) > 0$ ។

2. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក បង្ហាញថា $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$ ។

3. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលកំណត់ដោយខ្សែកោង (C_g) អ័ក្សតម្រុយទាំងពីរ និងបន្ទាត់ $x = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី ១ អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{1+e^{-x}}-x$ មានក្រាប (C_f)

1 បង្ហាញថា f កំណត់ $\forall x\in\mathbb{R}$

ដោយ f មានន័យកាលណា $1+e^{-x}>0$ ហើយ $\forall x\in\mathbb{R}\,;1+e^{-x}>0$

នោះ $D_f=\mathbb{R}$

2 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+e^{-x}}-x)=+\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$)
- $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+e^{-x}}-x}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{1+e^{-x}}}{x}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{e^{-x}}\left(\sqrt{\frac{1}{e^{-x}}+1}\right)}{x}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x}\times\left(\sqrt{\frac{1}{e^{-x}}+1}-1\right)\right)=-\infty$$
(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{x}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{e^{-x}}+1}=1$)

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលខាងផ្នែក $-\infty$ ព្រមទាំងបញ្ជាក់ទិសផង

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ តាមនិយមន័យគេថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលខាង $-\infty$ ទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្ស (Oy) ។

3 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+e^{-x}}-x)=-\infty$

ទាញបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(D):y=-x+1$ គឺជាអាស៊ីមតូតនៃ (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+e^{-x}}-x+x-1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+e^{-x}}-1)=0$

តាមនិយមន័យ $(D):y=-x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ខាង $+\infty$ ។

ខ. ខ.សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C_f) និងបន្ទាត់ (D)

ដោយ $(C_f): f(x) = \sqrt{1+e^{-x}} - x$

$(D): y_D = -x+1$

សិក្សាសញ្ញា $f(x) - y_D = \sqrt{1+e^{-x}} - x + x - 1 = \sqrt{1+e^{-x}} - 1$

ដោយ $\forall x \in \mathbb{R}; e^{-x} > 0 \Rightarrow 1+e^{-x} > 1$ ឬ $\sqrt{1+e^{-x}} > 1$

នាំឱ្យ $f(x) - y_D = \sqrt{1+e^{-x}} - 1 > 0$ ជានិច្ច គេថា (C_f) នៅលើ (D) ជានិច្ច ។

4 ក. បង្ហាញថា $\forall x \in \mathbb{R}: f'(x) = -\left(1 + \frac{e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}}\right)$

យើងមាន $f(x) = \sqrt{1+e^{-x}} - x$

$$f'(x) = \left(\sqrt{1+e^{-x}} - x\right)' = \left(\sqrt{1+e^{-x}}\right)' - 1$$
$$= \frac{(1+e^{-x})'}{2\sqrt{1+e^{-x}}} - 1 = \frac{-e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}} - 1$$
$$= -\left(1 + \frac{e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}}\right)$$ ពិត $\forall x \in \mathbb{R}$

ខ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$

យើងមាន $f'(x) = -\left(1 + \frac{e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}}\right)$

ដោយ $e^{-x} > 0; 2\sqrt{1+e^{-x}} > 0\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$

នោះ $f'(x) = -\left(1 + \frac{e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}}\right) < 0; \forall x \in \mathbb{R}$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

ដោយ f ចុះដាច់ខាត នោះf គ្មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបទេ។

5 បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ α ដែល $1<\alpha<\ln 4$

ដើម្បីបង្ហាញថា $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ α ដែល $1<\alpha<\ln 4$ ត្រូវបង្ហាញថា៖

1.$f(1)\times f(\ln 4)<0$

2.f ចុះដាច់ខាត ឬកើនដាច់ខាតលើ $(1,\ln 4)$

ដោយ $f(1)=\sqrt{1+e^{-1}}-1>0$

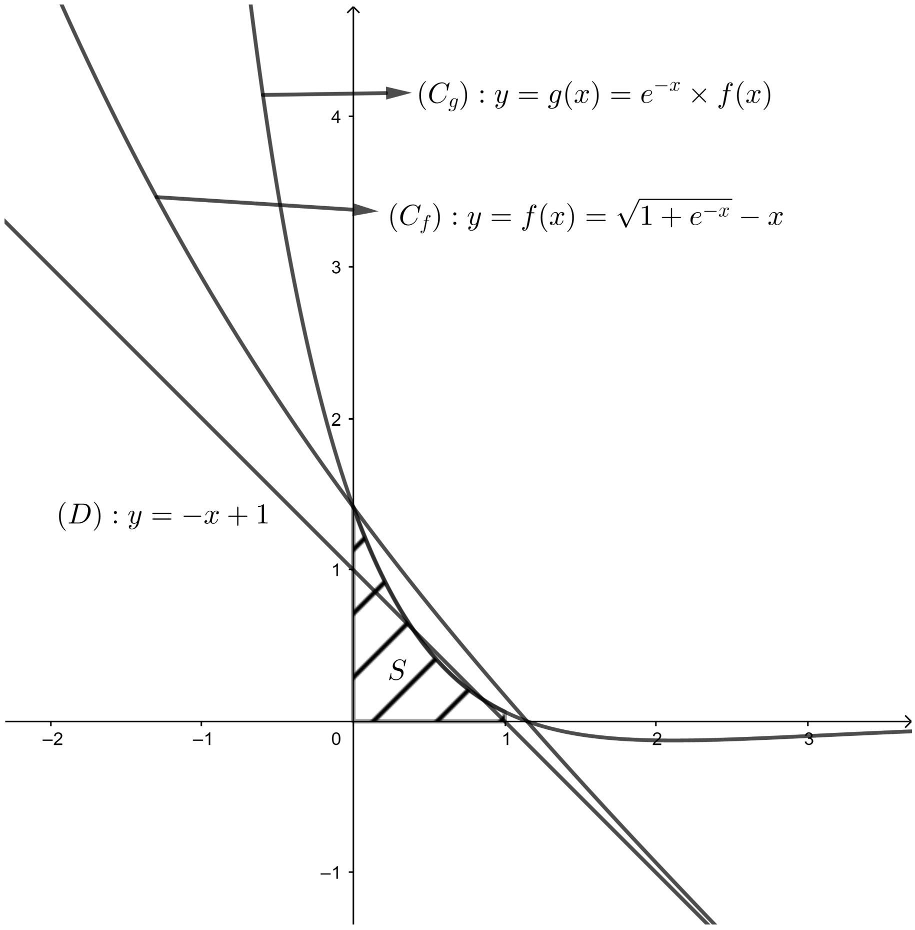
$f(\ln 4)=\sqrt{1+e^{-\ln 4}}-\ln 4$

$=\sqrt{1+\frac{1}{4}}-\ln 4=\sqrt{\frac{5}{4}}-\ln 4<0$ នោះ $f(1)\times f(\ln 4)<0$; (1)

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ f ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ នោះ f ក៏ចុះដាច់ខាតលើ $(1,\ln 4)$; (2)

តាម (1) និង (2) $\Rightarrow f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ α ដែល $1<\alpha<\ln 4$ ។

6 សង់ខ្សែកោង (C_f) និងបន្ទាត់ (D) លើ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$



ផ្នែកទី ២ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=e^{-x}\times f(x)$ មានក្រាប (C_g)

1 បង្ហាញថា $\forall x\in[0,1]\ ;g(x)>0$

ដោយហេតុថា f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត គេបាន៖

$\forall x\in[0,1]$ ដែល $0\le x\le 1$

$\Rightarrow f(0)\ge f(x)\ge f(1)$

ដោយ $f(0)=\sqrt{1+e^0}-0=\sqrt{2}>0$

$f(1)=\sqrt{1+e^{-1}}-1>0$

$\Rightarrow f(x)\in[\sqrt{1+e^{-1}}-1,\sqrt{2}]$

ពោលគឺ $f(x)>0\ ;(1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\forall x\in\mathbb{R}$ ឬ $x\in[0,1]:e^{-x}>0\ ;(2)$

តាម (1) និង $(2)\Rightarrow g(x)=e^{-x}f(x)>0\ ;\forall x\in[0,1]$

2 ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក បង្ហាញថា $\int_0^1 xe^{-x}dx=1-\frac{2}{e}$

យក $I=\int_0^1 xe^{-x}dx$

តាង $\begin{cases}u=x\\ dv=e^{-x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=-e^{-x}\end{cases}$

$$\begin{aligned}I&=\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx\\&=-\frac{1}{e}+\left[-e^{-x}\right]_0^1\\&=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=1-\frac{2}{e}\end{aligned}$$ ពិត

3 គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលកំណត់ដោយខ្សែកោង (C_g), អ័ក្សតម្រុយទាំងពីរ និងបន្ទាត់ $x=1$

ដោយ $\forall x\in[0,1]:g(x)=e^{-x}f(x)>0$

$$\begin{aligned}&=\int_0^1 e^{-x}f(x)\,dx\\&=\int_0^1 e^{-x}\left(\sqrt{1+e^{-x}}-x\right)dx\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 e^{-x}\sqrt{1+e^{-x}}dx - \int_0^1 xe^{-x}dx$$
$$= \int_0^1 e^{-x}\sqrt{1+e^{-x}}dx - I$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1+e^{-x}}d\left(1+e^{-x}\right) - I$$

ដោយ $\int \sqrt{u}du = \frac{2u\sqrt{u}}{3} + C$

$$S = \left[-\frac{2\left(1+e^{-x}\right)\sqrt{1+e^{-x}}}{3}\right]_0^1 - \left(1-\frac{2}{e}\right)$$
$$= \left(-\frac{2\left(1+\frac{1}{e}\right)\sqrt{1+\frac{1}{e}}}{3} + \frac{2\left(1+1\right)\sqrt{1+1}}{3}\right) - 1 + \frac{2}{e}$$
$$= \frac{\left(4\sqrt{2}-3\right)e - 2e\left(1+\frac{1}{e}\right)\sqrt{1+\frac{1}{e}} + 6}{3e}cm^2$$

(ព្រោះ 1 ឯកតាផ្ទៃក្រឡាស្មើ $1cm \times 1cm = 1cm^2$)

ប្រធានទី ៧

អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=xe^x-e^x+x-1$ មានក្រាប (C_f) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ឯកតា $1cm$ ។

1 ក. គណនា និងបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)]$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $f(x)=(x-1)(e^x+1)$ រួចគណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

គ. គណនានិងបកស្រាយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ។

2 ក. គណនា $f'(x), f''(x)$ ដែល f', f'' ជាតំណាងដេរីវេទី១ និងដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ f

ខ. គណនា $f'(-1)$ និងបញ្ជាក់សញ្ញារបស់វា។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា។

3 គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

4 កំណត់ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C_f) និងអ័ក្សកូអរដោនេទាំងពីររួចសង់ក្រាប។

5 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=f'(x)-e^x+x-2$ ទាញរកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S កំណត់ដោយក្រាប (C_f) និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=xe^x-e^x+x-1$ មានក្រាប (C_f)

1 ក. គណនា និងបកស្រាយជាក្រាបនៃលទ្ធផល

យើងមាន $f(x)=xe^x-e^x+x-1$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x-e^x+x-1=-\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$) ។
- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}[xe^x-e^x+x-1-x+1]$

$$= \lim_{x\to-\infty}(xe^x - e^x) = \lim_{x\to-\infty} e^x(x-1) = 0$$

ដោយ $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)] = 0$ នោះគេថាបន្ទាត់ $y = x-1$ គឺជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ខាង $-\infty$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $f(x) = (x-1)(e^x+1)$

យើងមាន $f(x) = xe^x - e^x + x - 1$

$f(x) = e^x(x-1) + (x-1)$

$f(x) = (x-1)(e^x+1)$; $\forall x \in \mathbb{R}$ ពិត

គណនា $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-1)(e^x+1) = +\infty$$

គ. គណនានិងបកស្រាយ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(e^x+1)}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)(e^x+1)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)(e^x+1) = +\infty\end{aligned}$$

ដោយ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$ នោះ (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្ស (Oy) ។

2 ក. គណនា $f'(x), f''(x)$

យើងមាន $f(x) = (x-1)(e^x-1)$

$f'(x) = [(x-1)(e^x+1)]'$

រូបមន្ត $(uv)' = u'v + v'u$

ដោយ $u = x-1 \Rightarrow u' = 1$

$v = e^x + 1 \Rightarrow v' = e^x$

$f'(x) = (e^x+1) + e^x(x-1) = e^x + 1 + xe^x - e^x$

$f'(x) = 1 + xe^x$

$f''(x) = (f'(x))' = (1+xe^x)' = e^x + xe^x$

$f''(x) = e^x(x+1)$

ខ. គណនា $f'(-1)$ និងបញ្ជាក់សញ្ញារបស់វា

យើងមាន $f'(x) = 1 + xe^x$

$f'(-1) = 1 + (-1)e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$

ដោយ $f'(-1) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា

យើងមាន $f'(x) = 1 + xe^x$ និង $f''(x) = e^x(x+1)$

ដើម្បីសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f'(x)$ គេត្រូវប្រើ $f''(x)$

ដោយ $e^x > 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$ នោះសញ្ញា $f''(x)$ យកដូច $x+1$

បើ $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

តារាងអថេរភាពនៃ $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘	$\frac{e-1}{e}$	↗	

តាមតារាង $f''(x)$ ប្រែប្រួលសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x = -1$ នោះ $f'(x)$ មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = -1$ គឺ $f(-1) = \frac{e-1}{e} > 0$ យើងបាន $f'(x) > 0 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$ ។

3 គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ នោះ $f(x)$ គ្មានតម្លៃបរមាធៀបទេ ។

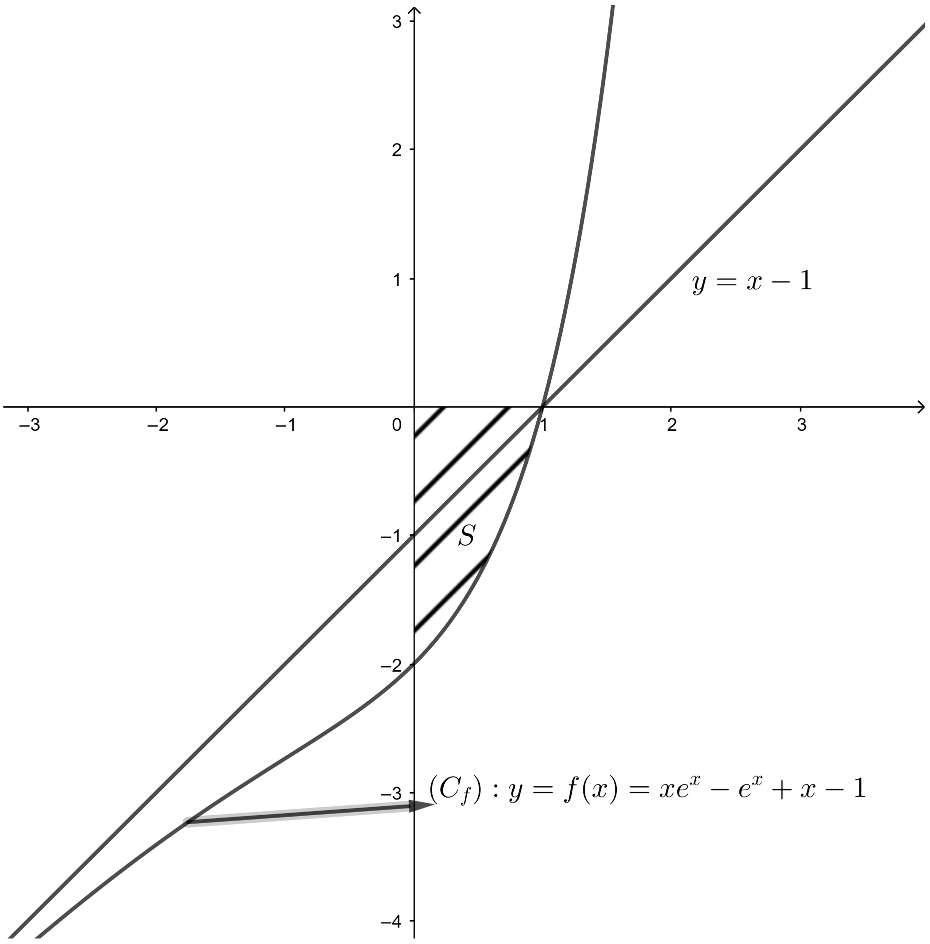
4 កំណត់ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C_f) និងអ័ក្សកូអរដោនេទាំងពីរ

• (C_f) ប្រសព្វអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'x)$ កាលណា $y=0$ នោះ $(x-1)(e^x+1)=0$

យើងបាន $x-1=0 \Rightarrow x=1$ (ព្រោះ $e^x+1\neq 0$)

• (C_f) ប្រសព្វអ័ក្សអរដោនេ $(y'y)$ កាលណា $x=0$ នោះ $y=(0-1)\left(e^0+1\right)=-2$

• សង់ក្រាប



5 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f'(x) - e^x + x - 2$

យើងមាន $f(x) = xe^x - e^x + x - 1$

$f(x) = 1 + xe^x - 1 - e^x + x - 1$

$f(x) = f'(x) - e^x + x - 2\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$

ទាញរកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ f លើ $\mathbb{R}$

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

$$F(x) = \int \left[f'(x) - e^x + x - 2\right] dx$$

$$F(x) = \int f'(x)dx - \int e^x dx + \int x dx - \int 2dx$$

$$F(x) = f(x) - e^x + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C, C \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = xe^x - e^x + x - 1 - e^x + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C, C \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = xe^x - 2e^x - x + \frac{1}{2}x^2 + 1 + C, C \in \mathbb{R}$$

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡា S កំណត់ដោយក្រាប (C_f) និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយ

យើងបាន $S = -\int_0^1 f(x)\,dx$

$$S = -\left[F(x)\right]_0^1$$

$$S = -\left[F(1) - F(0)\right]$$

$$S = F(0) - F(1)$$

$$S = (0 - 2 - 0 + 0 + 1) - \left(e - 2e - 1 + \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$S = (-1) - \left(-e + \frac{1}{2}\right)$$

$$S = -1 + e - \frac{1}{2}$$

$S = e - \frac{3}{2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា

ដោយ 1 ឯកតាផ្ទៃក្រឡាស្មើ $1cm \times 1cm = 1cm^2$

ដូចនេះ: $S = \left(e - \frac{3}{2}\right) \times 1cm^2 = e - \frac{3}{2}cm^2$ ។

ប្រធានទី ៨

អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$ មានក្រាប (C_f) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ឯកតា $2cm$ ។

1 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(D): y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ គឺជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$ ។

2 ទាញបញ្ជាក់ថាអ័ក្សអរដោនេគឺជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (C_f) ។

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty): f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{2\sqrt{x^3}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា f កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $(1,+\infty)$ និងចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $(0,1)$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

4 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in\mathbb{R}: f''(x)=\dfrac{3}{4x\sqrt{x^3}}$ ។

ខ. សិក្សាភាពប៉ោងឬផតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

5 សង់ខ្សែកោង (C_f) បន្ទាត់ (D) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

6 ដោះស្រាយតាមក្រាបវិសមីការ $f(x)\le x$ ។

7 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ។

ខ. គណនាក្រឡាផ្ទៃ S កំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) ,អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=1, x=4$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$ មានក្រាប (C_f)

1 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

- $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=+\infty\end{aligned}$$
  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$)
- $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2}{2x\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}+\frac{2}{2x\sqrt{x}}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(D): y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ គឺជាអាសុីមតូតនៃខ្សែកោង (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$

យើងមាន
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}=a$$
$$\Rightarrow b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}x\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}x\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $(D): y=ax+b=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$ ។

2 ទាញបញ្ជាក់ថាអ័ក្សអរដោនេគឺជាអាសុីមតូតនៃខ្សែកោង (C_f)

ដោយ
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$$

ដូចនេះ $x=0$ ជាអាសុីមតូតឈរនៃខ្សែកោង (C_f) ។

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x \in (0,+\infty) : f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^3}-1}{2\sqrt{x^3}}$

យើងមាន $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

យើងបាន $f'(x) = \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}$ ព្រោះ $(\dfrac{1}{u})' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

$= \dfrac{\sqrt{x^3}-1}{2\sqrt{x^3}}$ ពិត

ខ. បង្ហាញថា f កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $(1,+\infty)$ និងចុះដាច់ខាតលើចន្លោះ $(0,1)$

យើងមាន $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^3}-1}{2\sqrt{x^3}}$

ដោយ $2\sqrt{x^3} > 0$ ជានិច្ច $\forall x \in (0,+\infty)$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $\sqrt{x^3}-1$

បើ $\sqrt{x^3}-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\sqrt{x^3}-1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$\sqrt{x^3}-1 < 0 \Rightarrow x < 1$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f'(x) < 0$; $\forall x \in (0,1) \Rightarrow f$ ចុះដាច់ខាតលើ $(0,1)$

$f'(x) > 0$; $\forall x \in (1,+\infty) \Rightarrow f$ កើនដាច់ខាតលើ $(0,1)$

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(1) = 1$	↗	$+\infty$

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=1$ នោះ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=1$ ។

4 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in\mathbb{R}: f''(x)=\dfrac{3}{4x\sqrt{x^3}}$

យើងមាន
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x^3}-1}{2\sqrt{x^3}} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \end{aligned}$$

យើងបាន
$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x^3}\right)'}{2\left(\sqrt{x^3}\right)^2} \\ &= \frac{\dfrac{\left(x^3\right)'}{2\sqrt{x^3}}}{2x^3} \\ &= \frac{3x^2}{4x^3\sqrt{x^3}} \\ &= \frac{3}{4x\sqrt{x^3}} \text{ ពិត} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f''(x)=\dfrac{3}{4x\sqrt{x^3}}$; $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

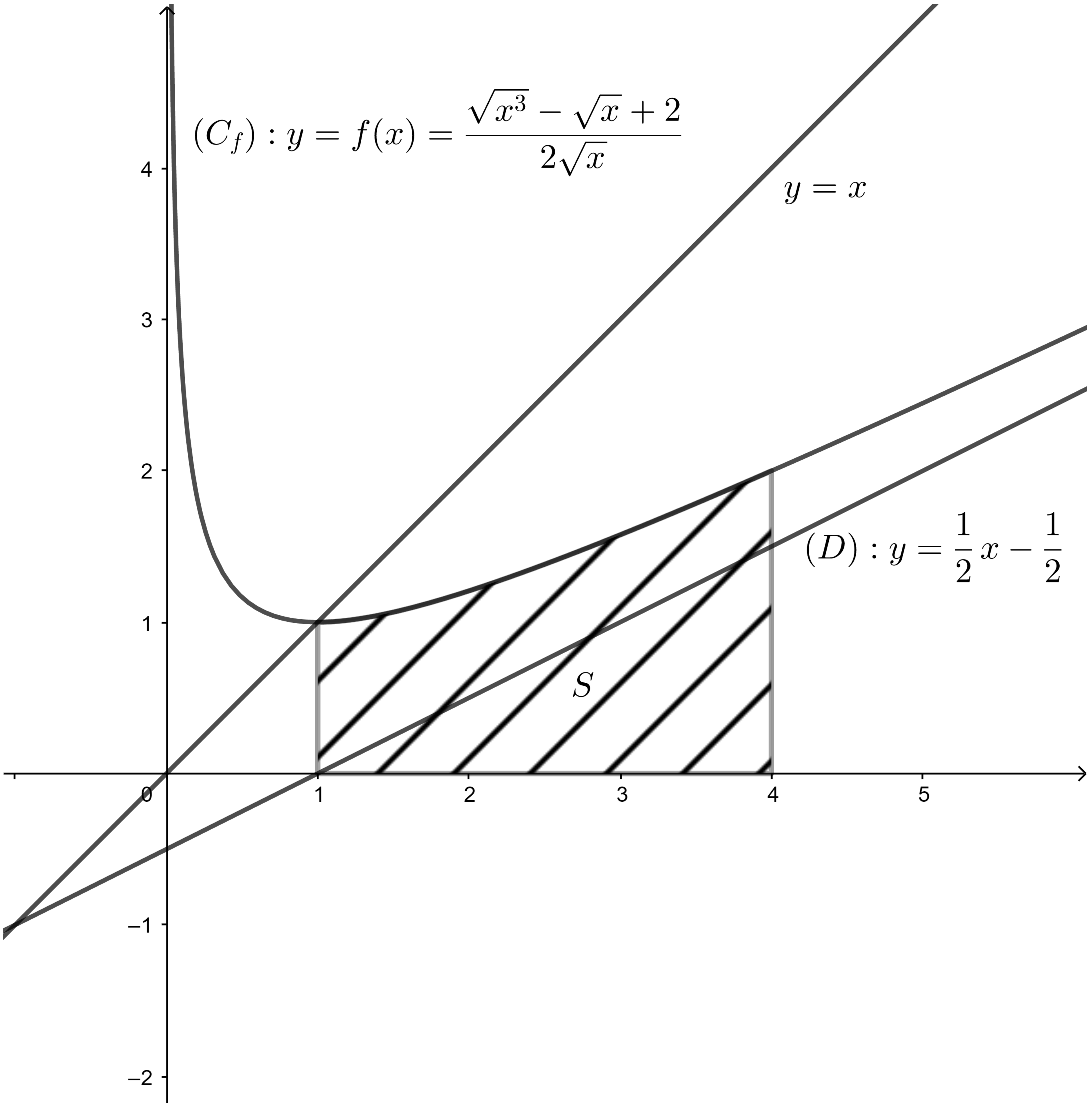
ខ. សិក្សាភាពប៉ោងឬផតនៃអនុគមន៍ $f(x)$

របៀបសិក្សាភាពប៉ោង ឬផតនៃអនុគមន៍

- បើ $f''(x)>0$; $\forall x\in(a,b)$ នោះគេថា f ផតក្នុង (a,b) ។
- បើ $f''(x)<0$; $\forall x\in(a,b)$ នោះគេថា f ប៉ោងក្នុង (a,b) ។
- បើ $f''(x)=0$ ចំពោះ $x=x_o$ ហើយប្តូរសញ្ញាត្រង់ $x=x_o$ នោះ $M(x_o,f(x_o))$ ជាចំណុចរបត់នៃ (C_f) តាង$f(x)$ ។

យើងមាន $f''(x)=\dfrac{3}{4x\sqrt{x^3}}>0$; $\forall x\in(0,+\infty)$ គេថា f ជាអនុគមន៍ផតលើ $(0,+\infty)$ ។

5 សង់ខ្សែកោង (C_f) បន្ទាត់ (D) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$



6 ដោះស្រាយតាមក្រាបវិសមីការ $f(x) \leq x$

ដើម្បីដោះស្រាយតាមក្រាបនូវវិសមីការ $f(x) \leq x$ គឺត្រូវតម្លៃ x ទាំងឡាយដែលធ្វើឱ្យក្រាប (C_f) កាត់ឬនៅក្រោមបន្ទាត់ $y = x$ ។តាមក្រាបគេសង្កេតឃើញថា $f(x) \leq x$ កាលណា $x \geq 1$ ឬ $x \in [1, +\infty)$ ។

7 ក. បង្ហាញថា $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

យើងមាន
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$ ពិត $\forall x \in (0, +\infty)$ ។

ខ. គណនាក្រឡាផ្ទៃ S កំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) ,អ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងបន្ទាត់ $x=1, x=4$

យើងបាន
$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x + 2\sqrt{x}\right]_1^4 \\ &= \left(4 - 2 + 2\sqrt{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2\sqrt{1}\right) \\ &= \frac{16 - 1 + 2 - 8}{4} = \frac{9}{4} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា។} \end{aligned}$$

ប្រធានទី ៩

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ $g(x)$ កំណត់លើ $(-\infty,+\infty)$ ដែល $g(x)=e^{-x}+x-1$ ។

1. គណនា $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ។

2. គណនាដេរីវេ $g'(x)$ ។

3. គូសតារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$ ។

4. បង្ហាញ $g(x)\geq 0\ ;\forall x\in\mathbb{R}$ ។

5. ទាញបញ្ជាក់ថា $e^{-x}+x\geq 1\ ;\forall x\in\mathbb{R}$ ។

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$ មានក្រាបតំណាង (C_f) លើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ដែល $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2cm$ ។

1. បង្ហាញថា $D_f=\mathbb{R}$

2. គណនា $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ បកស្រាយជាក្រាបនៅលទ្ធផលនេះ។

3. ក. បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}\ ;\forall x\in\mathbb{R}$ ។

   ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ D_f ។

   គ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

4. កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះ (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x_o=0$ ។

5. បង្ហាញថា $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ ។

6. សិក្សាទីតាំងធៀប (C_f) និងបន្ទាត់ $(\Delta): y=x$ ។

7. សង់ខ្សែកោង (C_f) និង (Δ) លើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ $g(x)$ កំណត់លើ $(-\infty,+\infty)$ ដែល $g(x)=e^{-x}+x-1$

1 គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+x-1\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(1+\frac{x}{e^{-x}}-\frac{1}{e^{-x}}\right)=+\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+x-1\right)=+\infty$$

2 គណនាដេរីវេ $g'(x)$

យើងមាន $g(x)=e^{-x}+x-1$

$\Rightarrow$ $g'(x)=(e^{-x}+x-1)'=-e-x+1$ ព្រោះ $(e^{-x})'=-e^{-x}$

3 គូសតារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

$\bullet g'(x)=0 \Rightarrow -e^{-x}+1=0 \Rightarrow e^{-x}=1=e^{0} \Rightarrow x=0$

$\bullet g'(x)>0 \Rightarrow -e^{-x}+1>0 \Rightarrow e^{-x}<1=e^{0} \Rightarrow -x<0 \Rightarrow x>0$

$\bullet g'(x)<0 \Rightarrow -e^{-x}+1<0 \Rightarrow e^{-x}>1=e^{0} \Rightarrow -x>0 \Rightarrow x<0$

តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(0)$	↗	$+\infty$

4 បង្ហាញ $g(x)\geq 0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$

តាមតារាង $g'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=0$ នោះគេថា g មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=0$។

គេបាន $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ g(x)\geq g(0)$

តែ $g(0)=e^{0}+0-1=0 \Rightarrow g(x)\geq 0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ពិត

5 ទាញបញ្ជាក់ថា $e^{-x}+x\geq 1\,;\forall x\in\mathbb{R}$

ដោយ $g(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^{-x}+x-1\geq 0$ ឬ $e^{-x}+x\geq 1$ ពិត

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$ មានក្រាបតំណាង (C_f)

1 បង្ហាញថា $D_f=\mathbb{R}$

ដោយហេតុថា $e^{-x}+x\geq 1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

នោះ $x+e^{-x}\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow\ D_f=\mathbb{R}$ ។

2 គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ បកស្រាយជាក្រាបនៅលទ្ធផលនេះ

$$\begin{aligned}\bullet\ \lim_{x\to-\infty}f(x)&=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+e^{-x}}\right)\ \text{រាង}\ \frac{\infty}{\infty}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\left(\frac{1}{xe^{x}+1}\right)=0\end{aligned}$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}=0$)

នោះគេថា $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃ (C_f) ខាង $-\infty$ ។

$\bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+e^{-x}}\right)=1$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$)

នោះគេថា $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃ (C_f) ខាង $+\infty$

3 ក. បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}\,;\forall x\in\mathbb{R}$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}\,;\forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad f'(x)&=\left(\frac{x}{x+e^{-x}}\right)'\\&=\frac{(x)'(x+e^{-x})-x(x+e^{-x})'}{(x+e^{-x})^2}\\&=\frac{x+e^{-x}-x(1-e^{-x})}{(x+e^{-x})^2}=\frac{x+e^{-x}-x+xe^{-x}}{(x+e^{-x})^2}\\&=\frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}\,;\forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}\,;\forall x\in\mathbb{R}$ ពិត។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ D_f

យើងមាន $\quad f'(x) = \dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$

នាំឱ្យ $\quad f'(x) = (x+1) \times \dfrac{e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

ដោយ $\quad \dfrac{e^{-x}}{(x+e^{-x})^2} > 0\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$

នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាដូច $x+1$ បើ $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

តាមតារាងយើងបាន

$x+1 \le 0$, $\forall x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f'(x) \le 0$, $\forall x \in (-\infty, -1]$

$x+1 \ge 0$, $\forall x \in [-1, +\infty] \Rightarrow f'(x) \ge 0$, $\forall x \in [-1, +\infty)$

គ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	1

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=-1$ នោះ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប

$$f(-1) = \frac{-1}{-1+e^{-1}} = -\frac{1}{e-1}$$

4 កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះ (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x_o = 0$

តាមរូបមន្ត $\quad (T) : y = f'(x_o)(x-x_o) + y_o$

ដោយ $\quad f'(x) = \dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

$\Rightarrow \quad f'(x_0) = f'(0) = \dfrac{(0+1)e^0}{(0+e^0)^2} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\quad y_0 = f(x_0) = f(0) = \dfrac{0}{0+e^0} = 0$

$\Rightarrow \quad (T) : y = 1(x-0)+0 = x$

5 បង្ហាញថា $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$

យើងបាន $x-f(x)=x-\dfrac{x}{x+e^{-x}}=\dfrac{x(x+e^{-x})-x}{(x+e^{-x}-1)+1}=\dfrac{x(x+e^{-x}-1)}{(x+e^{-x}-1)+1}$

តែ $g(x)=e^{-x}+x-1$

$\Rightarrow \quad x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ ពិត

6 សិក្សាទីតាំងធៀប (C_f) និងបន្ទាត់ $(\Delta):y=x$

សិក្សាសញ្ញា $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}=x\times\dfrac{g(x)}{g(x)+1}$

ដោយ $g(x)\geq 0\Rightarrow g(x)+1>0$

ហើយ $\dfrac{g(x)}{g(x)+1}\geq 0$ នោះ $x-f(x)$ យកសញ្ញាដូច x ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

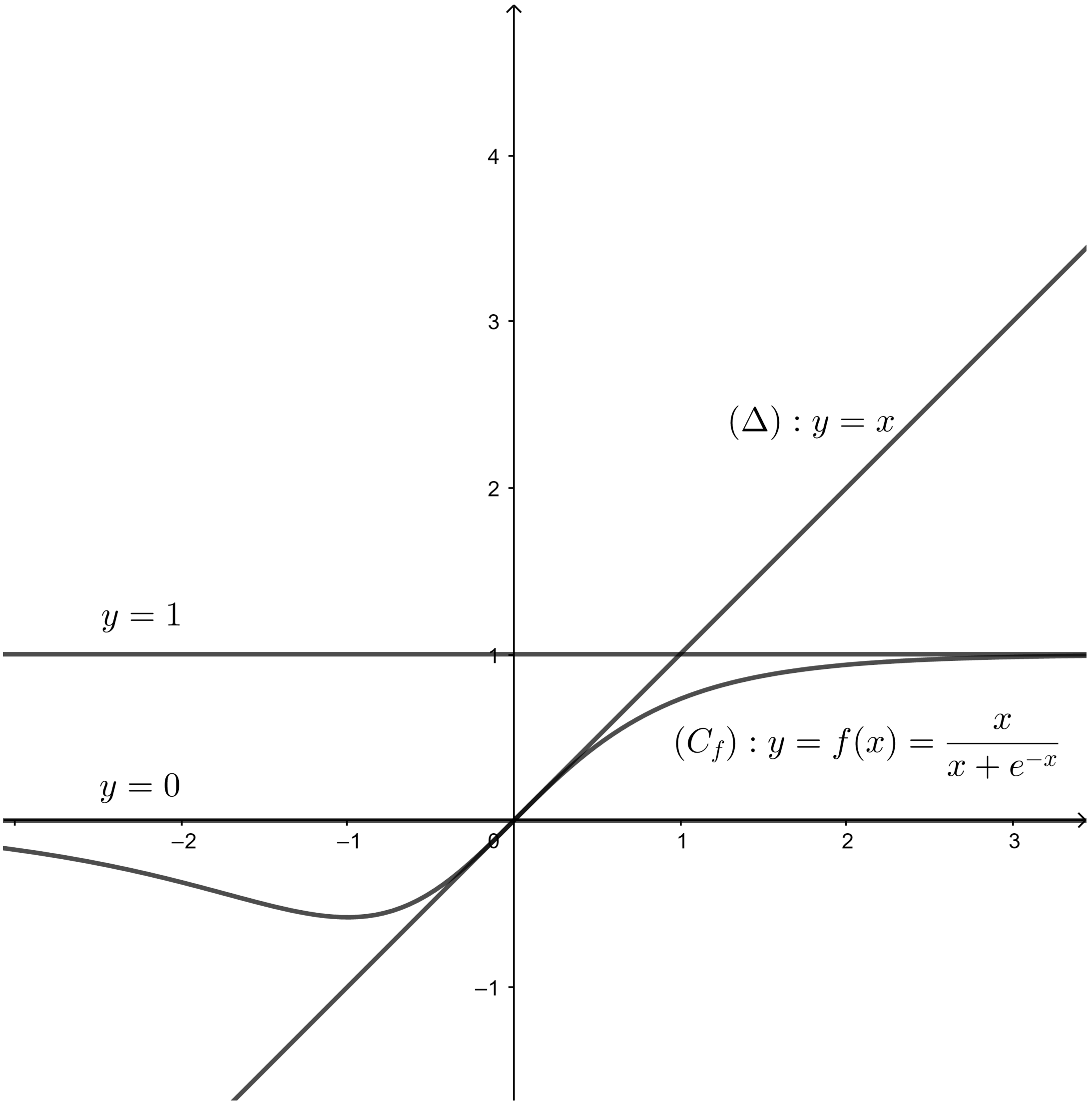
តាមតារាងយើងបាន

$x<0$; $\forall x\in(-\infty,0)$ ឬ $x-f(x)<0$; $\forall x\in(-\infty,0)$ នោះ (Δ) នៅក្រោម (C_f)

$x>0$; $\forall x\in(0,+\infty)$ ឬ $x-f(x)>0$; $\forall x\in(0,+\infty)$ នោះ (Δ) នៅលើ (C_f)

$x=0$ ចំពោះ $x=0$ ឬ $x-f(x)=0$ នោះ (Δ) កាត់ (C_f)

7 សង់ខ្សែកោង (C_f) និង (Δ) លើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$



ប្រធានទី ១០

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ $g(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x) = 2x + 1 + e^{2x}$ ។

1 គណនា $g'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

2 ក. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល បង្ហាញថាមានចំនួនពិត $\alpha \in [-1,0]$ ដែល $g(x) = 0$។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x \in [\alpha,+\infty)$; $g(x) \geq 0$ និង $\forall x \in (-\infty,0]$; $g(x) \leq 0$ ។

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x) = 1 - x + (x+1)e^{-2x}$ មានក្រាបតំណាង (C_f) ឯកតា $2cm$ ។

1 បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមន័យធរណីមាត្រ។

2 បង្ហាញថា $(D): y = -x + 1$ គឺជាអាស៊ីមតូតនៃ (C_f) ខាង $+\infty$ ។

3 ក. សង់តារាងអថេរភាពនៃ $x + 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

ខ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C_f) & (D) ។

4 បង្ហាញថា $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = -g(x)e^{-2x}$ ។

5 សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

6 បង្ហាញថា $f(\alpha) = \dfrac{-2\alpha^2}{2\alpha+1}$ ។

7 សង់ក្រាប (C_f) បន្ទាត់ (D) លើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ។ (គេឱ្យ $\alpha = -0.65$) ។

ផ្នែកទី៣

1 ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក បង្ហាញថា $\int_0^1 (x+1)e^{-2x}dx = \dfrac{3e^2-5}{4e^2}$ ។

2 គណនាក្រឡាផ្ទៃដែលកំណត់ដោយ (C_f) , (D) អ័ក្សអរដោនេ និងបន្ទាត់ $x = 1$ គិតជា cm^2

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ $g(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=2x+1+e^{2x}$ ។

1 គណនា $g'(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$

យើងមាន $\quad g(x)=2x+1+e^{2x}$

យើងបាន $\quad g'(x)=2+2e^{2x}$

$$g'(x)=2(1+e^{2x})\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

2 ក. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល បង្ហាញថាមានចំនួនពិត $\alpha\in[-1,0]$ ដែល $g(x)=0$

ដោយអនុគមន៍ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ នោះ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[-1,0]$

ហើយ $\quad g(-1)=-2+1+\dfrac{1}{e^2}=-1+\dfrac{1}{e^2}<0$

$$g(0)=0+1+e^0=2>0$$

$\Rightarrow g(-1)\times g(0)<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលនោះមាន $\alpha\in[-1,0]$ ដែល $g(x)=0$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in[\alpha,+\infty)$; $g(x)\geq 0$ និង $\forall x\in(-\infty,\alpha]$; $g(x)\leq 0$ ។

យើងមាន $\quad g'(x)=2(1+e^{2x})>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$

នោះគេថា $\quad g(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x+1+e^{2x})=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x+1+e^{2x})=+\infty$$

តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(\alpha)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

តាមតារាងគេបាន

$\forall x \in (-\infty, \alpha]\ ;\ g(x) \leq 0$

$\forall x \in [\alpha, +\infty)\ ;\ g(x) \geq 0$

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x) = 1 - x + (x+1)e^{-2x}$ មានក្រាបតំណាង (C_f)

1 បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមន័យធរណីមាត្រ

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [1 - x + (x+1)e^{-2x}]$
  $= \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x}[\dfrac{1-x}{e^{-2x}} + (x-1)] = -\infty$
  ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x}{e^{-2x}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 - x + (x+1)e^{-2x}}{x}$
  $= \lim\limits_{x\to-\infty} [(\dfrac{1}{x} - 1) + (1 + \dfrac{1}{x})]e^{-2x} = +\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ នោះគេថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលខាងផ្នែក $-\infty$

2 បង្ហាញថា $(D): y = -x + 1$ គឺជាអាស៊ីមតូតនៃ (C_f) ខាង $+\infty$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} [1 - x + (x+1)e^{-2x} + x - 1]$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{-2x} = 0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x+1)] = 0$ នោះគេថាបន្ទាត់ $(D): y = -x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។

3 ក. សង់តារាងអថេរភាពនៃ $x + 1\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$

បើ $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

តាមតារាងយើងបាន៖

$\forall x \in (-\infty, -1]$; $x+1 \leq 0$

$\forall x \in [-1, +\infty)$; $x+1 \geq 0$

ខ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C_f) & (D)

យើងមាន $(C_f) : f(x) = 1 - x + (x+1)e^{-2x}$

$(D) : y = -x + 1$

យើងបាន $(C_f) - (D) = (x+1)e^{-2x}$

ដោយ $e^{-2x} > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ នោះសញ្ញានៃ $(C_f) - (D)$ យកដូច $x+1$

តាមតារាងខាងលើយើងបាន៖

	$\forall x \in (-\infty, -1)$	នោះ (C_f) នៅក្រោម (D)
	$\forall x \in (-1, +\infty)$	នោះ (C_f) នៅលើ (D)
ត្រង់	$x = -1$	នោះ (C_f) ប្រសព្វគ្នានឹង (D)

4 បង្ហាញថា $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = -g(x)e^{-2x}$

យើងមាន $f(x) = 1 - x + (x+1)e^{-2x}$

នោះ $f'(x) = [1 - x + (x+1)e^{-2x}]' = -1 + (x+1)'e^{-2x} + (e^{-2x})'(x+1)$

$= -1 + e^{-2x} - 2e^{-2x}(x+1) = -1 + e^{-2x} - 2xe^{-2x} - 2e^{-2x}$

$= -1 - e^{-2x} - 2xe^{-2x} = -(1 + e^{-2x} + 2xe^{-2x})$

$= -(\frac{1}{e^{-2x}} + 1 + 2x)e^{-2x} = -(e^{2x} + 1 + 2x)e^{-2x} = -(2x + 1 + e^{2x})e^{-2x}$

$= -g(x)e^{-2x}$ ពិត $\forall x \in \mathbb{R}$

5 សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

យើងមាន $f'(x) = -g(x)e^{-2x}$ ដោយ $e^{-2x} > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $f'(x)$ មានសញ្ញាផ្ទុយពី $g(x)$

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [1 - x + (x+1)e^{-2x}] = -\infty$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

6 បង្ហាញថា $f(\alpha)=\dfrac{-2\alpha^2}{2\alpha+1}$

យើងមាន $f(x)=1-x+(x+1)e^{-2x}$

$$f(\alpha)=1-\alpha+(\alpha+1)e^{-2\alpha}$$

$$f(\alpha)=1-\alpha+\frac{\alpha+1}{e^{2\alpha}}=\frac{e^{2\alpha}(1-\alpha)+\alpha+1}{e^{2\alpha}}$$

$$f(\alpha)=\frac{e^{2\alpha}-\alpha e^{2\alpha}+\alpha+1}{e^{2\alpha}}=\frac{e^{2\alpha}+2\alpha+1-\alpha-\alpha e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}}$$

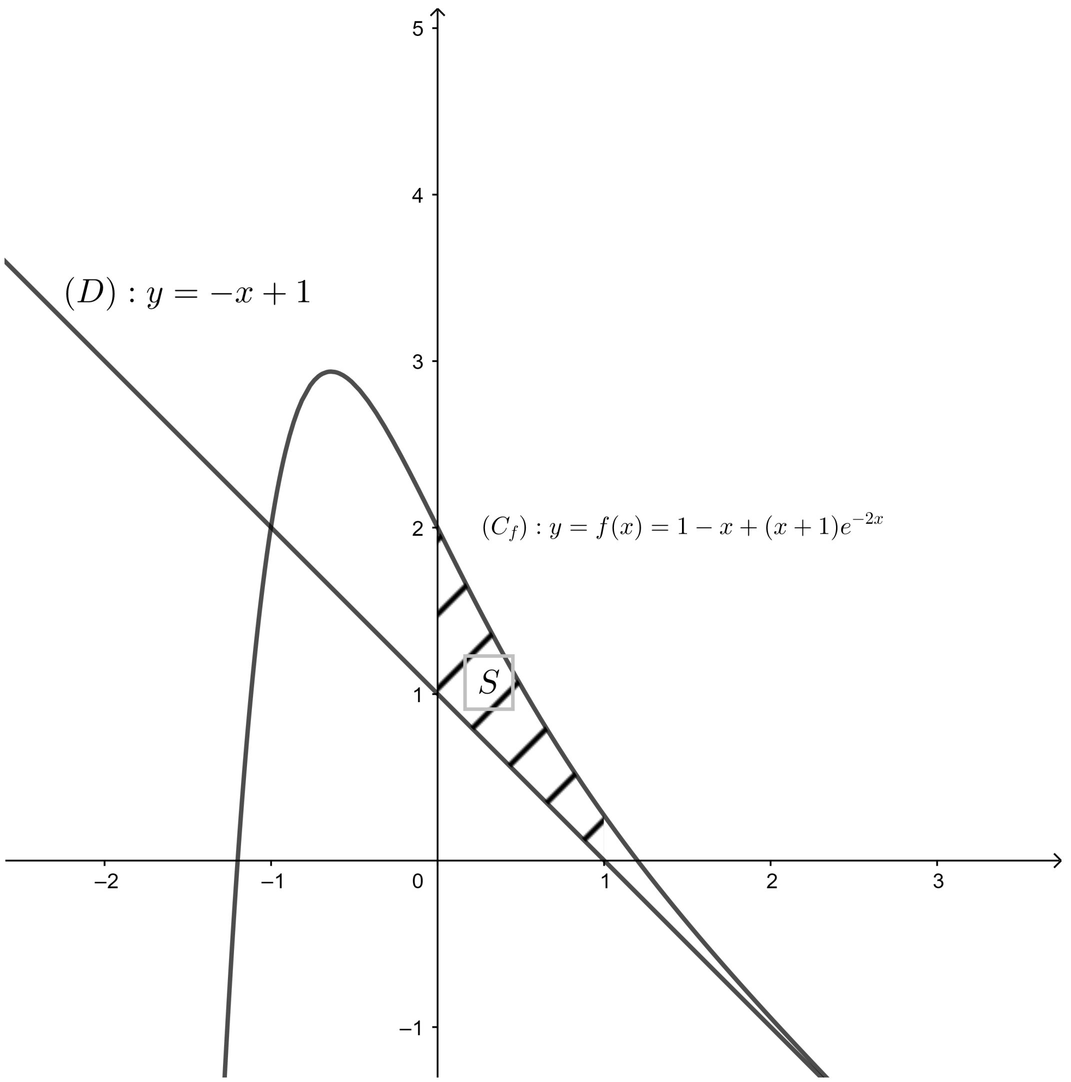
$$f(\alpha)=\frac{g(\alpha)-\alpha-\alpha e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}}=\frac{-\alpha-\alpha e^{2\alpha}}{e^{2\alpha}}$$

$$f(\alpha)=\frac{-\alpha(1+e^{2\alpha})}{e^{2\alpha}}=\frac{-\alpha(e^{2\alpha}+2\alpha+1-2\alpha)}{e^{2\alpha}+2\alpha+1-2\alpha-1}$$

$$f(\alpha)=\frac{-\alpha(g(\alpha)-2\alpha)}{g(\alpha)-2\alpha-1}$$

$f(\alpha)=-\dfrac{2\alpha^2}{2\alpha+1}$ ពិត (ព្រោះ $g(\alpha)=0$) ។

7 សង់ក្រាប (C_f) បន្ទាត់ (D) លើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ។ (គេឱ្យ $\alpha = -0.65$)



ផ្នែកទី៣

1 ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក បង្ហាញថា $\int_0^1 (x+1)e^{-2x}dx = \dfrac{3e^2-5}{4e^2}$

តាង $I = \int_0^1 (x+1)e^{-2x}dx$

តាង $\begin{cases} u = x+1 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-2x}dx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

$$I = \left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x}dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^1$$

$$= \left[-\left(\frac{2}{4}(x+1)e^{-2x}+\frac{e^{-2x}}{4}\right)\right]_0^1 = -\left[\frac{(2x+3)e^{-2x}}{4}\right]_0^1$$
$$= \frac{3}{4}-\frac{5e^{-2}}{4} = \frac{3}{4}-\frac{5}{4e^2}$$
$$= \frac{3e^2-5}{4e^2} \text{ ពិត}$$

2 គណនាក្រឡាផ្ទៃដែលកំណត់ដោយ $(C_f),(D)$ អ័ក្សអរដោនេ និងបន្ទាត់ $x=1$ គិតជា cm^2

$$\Rightarrow \quad S = \int_0^1 [f(x)-y]\,dx$$
$$= \int_0^1 \left[1-x+(x+1)e^{-2x}-(-x+1)\right]dx$$
$$= \int_0^1 (x+1)e^{-2x}dx = I = \frac{3e^2-5}{4e^2} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}$$

ដោយ 1 ឯកតាផ្ទៃក្រឡាស្មើ $2cm \times 2cm = 4cm^2$

$$\Rightarrow \quad S = 4\times\frac{3e^2-5}{4e^2} = \frac{3e^2-5}{e^2}cm^2 \text{ ។}$$

ប្រធានទី ១១

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$ មានក្រាបតំណាង (C_f) លើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ដែល $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1cm$ ។

1 រកកំណត់ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

2 ទាញបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ln 4$ និងបកស្រាយលទ្ធផលជាក្រាប។

3 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ (ដោយដឹងថា $e^x-2\sqrt{e^x}+2=e^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$)

ខ. បង្ហាញថា (C_f) មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=2x$ ខាងផ្នែក $+\infty$ ។

4 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}^+:\sqrt{e^x}-1\geq 0$ និង $\forall x\in\mathbb{R}^-:\sqrt{e^x}-1\leq 0$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ ។

គ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

5 សង់ខ្សែកោង (C_f) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

6 ដោយប្រើក្រាប (C_f) ពិភាក្សាឫសនៃសមីការ $f(x)=m$ តាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ។

7 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}: e^x-3\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ចំពោះ $f(x)=x$ ។

គ. គូសតារាងសញ្ញានៃ $e^x-3\sqrt{e^x}+2$ លើ $\mathbb{R}$ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}$; $\forall x\in[0,\ln 4]$ ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)\leq x$; $\forall x\in[0,\ln 4]$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$ មានក្រាបតំណាង (C_f)

1 រកកំណត់ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $\quad f(x)=2ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)$

$f(x)$ មានន័យកាលណា $e^x-2\sqrt{e^x}+2>0$

តែ $e^x-2\sqrt{e^x}+2=(\sqrt{e}^x)^2-2\sqrt{e^x}+1+1=(\sqrt{e}^x-1)^2+1>0$ ជានិច្ច $\forall x\in\mathbb{R}$

មានន័យថា $D_f=\mathbb{R}$

2 ទាញបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ln 4$ និងបកស្រាយលទ្ធផលជាក្រាប

គេបាន $\quad \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$

$=2\ln 2=\ln 2^2=\ln 4$ ពិត , (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$)

នោះគេថាបន្ទាត់ $y=ln4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតដេកនៃ (C_f) ខាង $-\infty$

3 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ (ដោយដឹងថា $e^x-2\sqrt{e^x}+2=e^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$)

យើងមាន $\quad e^x-2\sqrt{e^x}+2=e^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$)

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2\ln e^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)=+\infty$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{e^x}}=0$)

ខ. បង្ហាញថា (C_f) មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=2x$ ខាងផ្នែក $+\infty$

ដោយ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[2\ln e^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)-2x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[2\ln e^x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)-2x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)-2x\right]=0$$

នោះគេថា បន្ទាត់ $y=2x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ខាង $+\infty$ ។

4 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}^+ : \sqrt{e^x}-1\geq 0$ និង $\forall x\in\mathbb{R}^- : \sqrt{e^x}-1\leq 0$

$\forall x\in\mathbb{R}^+$, មានន័យថា $x\geq 0\Rightarrow e^x\geq e^0$

(ព្រោះកាលណា $a>1$, បើ $x_1>x_2\Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$)

ឬ $e^x\geq 1\Rightarrow\sqrt{e^x}\geq\sqrt{1}=1\Rightarrow\sqrt{e^x}-1\geq 0$ ពិត

ម្យ៉ាងទៀត

$\forall x\in\mathbb{R}^-$, មានន័យថា $x\leq 0$

$\Rightarrow e^x\leq e^0$ ឬ $e^x\leq 1\Rightarrow\sqrt{e^x}\leq\sqrt{1}=1\Rightarrow\sqrt{e^x}-1\leq 0$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{e^x}-1\geq 0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$

$\sqrt{e^x}-1\leq 0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}^-$

ខ. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$

យើងមាន

$$f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$$

$$\Rightarrow f'(x)=2\left[\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\right]' \text{ រាង } (\ln u)'=\frac{u'}{u}$$

$$=2\times\frac{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)'}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)}=2\times\frac{e^x-2\times\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}$$

$$=2\times\frac{e^x-\sqrt{e^x}}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+1\right)+1}=\frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$$

ដូចនេះ $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ ពិត ។

គ. គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

យើងមាន

$$f'(x)=\frac{2e^x\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2}=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\times\frac{2e^x}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$$

ដោយ $\dfrac{2e^x}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}>0\ ;\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាដូច $\sqrt{e^x}-1$

ដោយយើងដឹងថា $\sqrt{e^x}-1\begin{cases}\geq 0\ ;\forall x\in\mathbb{R}^+\\ \leq 0\ ;\forall x\in\mathbb{R}^-\end{cases}$

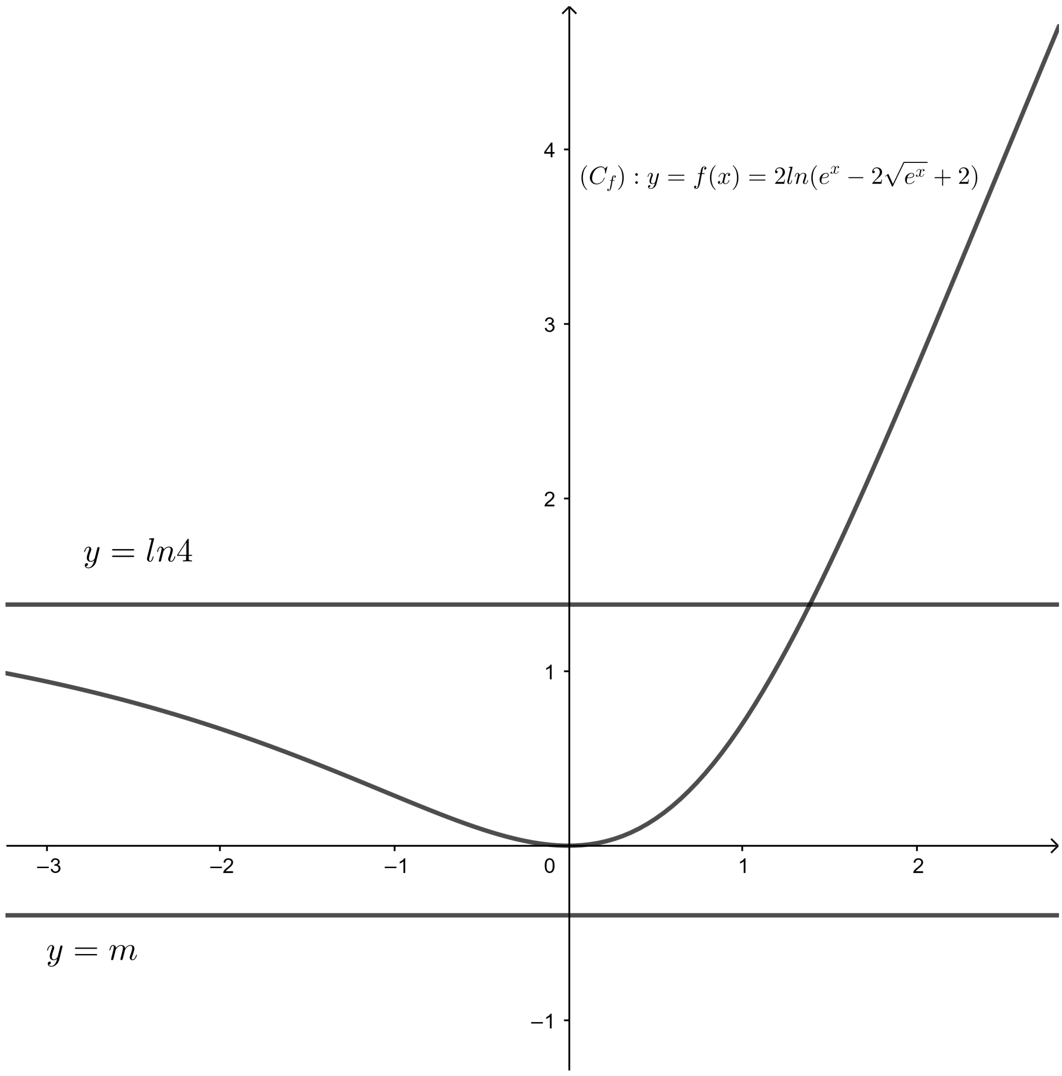
នោះ $f'(x)\geq 0\ ;\forall x\in\mathbb{R}^+$ និង $f'(x)\leq 0\ ;\forall x\in\mathbb{R}^-$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$ln4$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=0$ នោះ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=2ln(e^0-2\sqrt{e^0}+2)=2ln(1-2+2)=2ln1=0$

5 សង់ខ្សែកោង (C_f) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$



6 ដោយប្រើក្រាប (C_f) ពិភាក្សាឫសនៃសមីការ $f(x)=m$ តាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត m

សមីការ $f(x)=m$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាង $\begin{cases} f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right) \\ f(x)=m \text{ ដែល } m \text{ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត} \end{cases}$

នោះ $f(x)=m$ ជាបន្ទាត់ស្រប $(x'x)$

តាមក្រាប

បើ $m<0$ នោះ $f(x)=m$ គ្មានឫស

បើ $m=0$ នោះបន្ទាត់ប៉ះក្រាបគេថាសមីការមានឫសឌុប

បើ $m\in(0,ln4)$ នោះ $f(x)=m$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាដែល $x_1<0<x_2$

បើ $m\geq ln4$ នោះ $f(x)=m$ មានឫសតែមួយគត់ x ដែល $x>0$ ។

7 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}: e^x-3\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$

យើងមាន
$$\begin{aligned} e^x-3\sqrt{e^x}+2 &= e^x-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2 \\ &= \sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-2)-(\sqrt{e^x}-2) \\ &= (\sqrt{e^x}-2)(\sqrt{e^x}-1) \text{ ពិត } \forall x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

ខ. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ចំពោះ $f(x)=x$

គេបាន $f(x)=x$

$\Rightarrow 2ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)=x=lne^x \Rightarrow ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)^2=lne^x$

$\Rightarrow (e^x-2\sqrt{e^x}+2)^2=e^x$

$\Rightarrow e^x-2\sqrt{e^x}+2=\sqrt{e^x}$ (ព្រោះ $e^x>0$)

$\Rightarrow e^x-3\sqrt{e^x}+2=0$

$\Rightarrow (\sqrt{e^x}-2)(\sqrt{e^x}-1)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{e^x}-1=0 \\ \sqrt{e^x}-2=0 \end{array}\right.$ ឬ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{e^x}=1 \\ \sqrt{e^x}=2 \end{array}\right.$ ឬ $\left[\begin{array}{l} e^x=1 \\ e^x=4 \end{array}\right.$ ឬ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\ln 4 \end{array}\right.$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x=0, x=ln4$ ។

គ. គូសតារាងសញ្ញានៃ $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2$ លើ $\mathbb{R}$

ដោយ $e^x - 3\sqrt{e^x} - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 2)(\sqrt{e^x} - 1)$

បើ $\sqrt{e^x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\sqrt{e^x} - 1 > 0$ ឬ $\sqrt{e^x} > 1$ ឬ $e^x > 1 = e^0 \Rightarrow x > 0$

$\sqrt{e^x} - 1 < 0$ ឬ $\sqrt{e^x} < 1$ ឬ $e^x < 1 = e^0 \Rightarrow x < 0$

បើ $\sqrt{e^x} - 2 = 0 \Rightarrow x = ln4$

$\sqrt{e^x} - 2 > 0$ ឬ $\sqrt{e^x} > 2$ ឬ $e^x > 4$ ឬ $e^x > e^{ln4} \Rightarrow x > ln4$

$\sqrt{e^x} - 2 < 0$ ឬ $\sqrt{e^x} < 2$ ឬ $e^x < 4$ ឬ $e^x < e^{ln4} \Rightarrow x < ln4$

x	$-\infty$		0		$ln4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{e^x} - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \le \sqrt{e^x}$; $\forall x \in [0, \ln 4]$

តាមតារាងគេបាន $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) \le 0$; $\forall x \in [0, ln4]$

ឬ $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 \le 0$

ឬ $e^x - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2 \le 0$

$\Rightarrow$ $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \le \sqrt{e^x}$ ពិត $\forall x \in [0, ln4]$

ង. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) \le x$; $\forall x \in [0, \ln 4]$

យើងមាន $\forall x \in [0, ln4]$

គេបាន $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \le \sqrt{e^x}$

$\Rightarrow$ $ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \le ln\sqrt{e^x} = \frac{1}{2}lne^x = \frac{1}{2}x \Rightarrow 2ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \le x$

ឬ $f(x) \le x$, $\forall x \in [0, ln4]$ ពិត ។

ប្រធានទី ១២

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ$(0,+\infty)$ ដែល$g(x)=-1+\dfrac{1}{x}-2\ln x$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ ។
2. បង្ហាញថាអនុគមន៍ g គឺជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ រួចសង់តារាងអថេរភាព។
3. គណនា $g(1)$ រួចទាញរកសញ្ញានៃអនុគមន៍ g លើចន្លោះ $(0,1]$ និង $[1,+\infty)$ ។

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ $[0,+\infty)$ ដែល $\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ មានក្រាបតំណាង (C_f) លើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. ក. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានភាពជាប់ត្រង់ 0 ។

   ខ. សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 រួចបកស្រាយលទ្ធផលជាក្រាប។
2. គណនា $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ រួចសិក្សាមែកអនន្តនៃ (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$ ។
3. ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty)$; $f'(x)=xg(x)$ ។

   ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា។
4. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C_f) និង $(D): y=x$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។
5. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ α លើចន្លោះ $1<\alpha<2$។
6. សង់ខ្សែកោង (C_f) ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=-1+\dfrac{1}{x}-2\ln x$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-1+\dfrac{1}{x}-2\ln x\right)=+\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$)

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{x}-2\ln x\right) = -\infty$ (ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$)

2 បង្ហាញថាអនុគមន៍ g គឺជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$

យើងមាន
$$\begin{aligned} g(x) &= -1+\frac{1}{x}-2lnx \\ g'(x) &= (-1+\frac{1}{x}-2lnx)' \\ &= -\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x} \\ &= \frac{-1-2x}{x^2} \\ &= -(\frac{1+2x}{x^2}) < 0 \; ; \forall x \in (0,+\infty) \end{aligned}$$

នោះគេថា $g(x)$ ចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$

សង់តារាងអថេរភាព $g(x)$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$
$g(x)$	‖ $+\infty$ ↘	$-\infty$

3 គណនា $g(1)$ រួចទាញរកសញ្ញានៃអនុគមន៍ g លើចន្លោះ $(0,1]$ និង $[1,+\infty)$

គេបាន $g(1) = -1+\frac{1}{1}-2ln1 = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

តាមតារាងគេបាន

$x \in (0,1]$: $g(x) \geq 0$

$x \in [1,+\infty)$: $g(x) \leq 0$

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ $[0,+\infty)$ ដែល $\begin{cases} f(x) = x - x^2\ln x; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ មានក្រាប (C_f)

1 ក. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានភាពជាប់ត្រង់ 0

យើងមាន $f(0) = 0$ (1)

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x - x^2\ln x\right) = 0$ (2) ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x = 0$

នោះ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ (3)

តាម $(1),(2)$ និង (3) គេបាន f ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ។

ខ. សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 រួចបកស្រាយលទ្ធផលជាក្រាប

រក $f'(0)$

តាមរូបមន្ត
$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x - x^2\ln x - 0}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0^+}(1 - x\ln x) = 1 \text{ (ព្រោះ } \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\text{)} \end{aligned}$$

នោះគេថា f មានដេរីវេខាងស្តាំ $x = 0$ គឺ $f'(0^+) = 1$

ដូចនេះ $f'(0^+) = 1$ ។

2 គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចសិក្សាមែកអនន្តនៃ (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$

គេបាន
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x - x^2\ln x}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}(1 - x\ln x) = -\infty \end{aligned}$$

នោះគេថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្ស (Oy)

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x \in (0,+\infty)$; $f'(x) = xg(x)$

យើងមាន
$$\begin{aligned} f(x) &= x - x^2 \ln x \\ f'(x) &= 1 - \left(2x\ln x + \frac{1}{x}\cdot x^2\right) \\ &= 1 - (2x\ln x + x) \\ &= 1 - 2x\ln x - x \\ &= x\left(\frac{1}{x} - 2\ln x - 1\right) \\ &= x\left(-1 + \frac{1}{x} - 2\ln x\right) \\ &= xg(x) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f'(x) = xg(x)$ ពិត ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា

យើងមាន $f'(x) = xg(x)$

ដោយ $\forall x \in (0,+\infty)$ នោះ$x > 0$ ដូច្នេះ $f'(x)$ យកសញ្ញាដូច $g(x)$។

បើ $x \in (0,1]$ នោះ $g(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

បើ $x \in [1,+\infty)$ នោះ $g(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$

សង់តារាងអថេរភាព

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f(1)$	↘	$-\infty$

ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x = 1$ គេថា f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1) = 1 - 1^2\ln 1 = 1$។

4 សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C_f) និង $(D): y = x$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$

យើងមាន $\begin{cases} C_f = y = f(x) = x - x^2 \ln x \\ (D): y = y_D = x \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) - y_D = x - x^2 \ln x - x = -x^2 \ln x$

ដោយ $x^2 \geq 0$ ជានិច្ចនោះ $f(x) - y_D$ យកសញ្ញាដូច $-\ln x$

បើ $-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$

បើ $-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$

បើ $-\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$

តារាងសញ្ញា

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y_D$		$+$	0	$-$	

$x \in (0,1)$ (C_f) នៅលើ (D)

$x \in (1,+\infty)$ (C_f) នៅក្រោម (D)

ត្រង់ $x = 1$ (C_f) កាត់ (D) ត្រង់កូអរដោនេ $(1,1)$ ។

5 បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានឫសតែមួយគត់ α លើចន្លោះ $1 < \alpha < 2$

ដោយ $f(1) = 1 > 0$

$f(2) = 2 - 4(ln2)$

$= 2 - 4(0.7)$

$= 2 - 2.8$

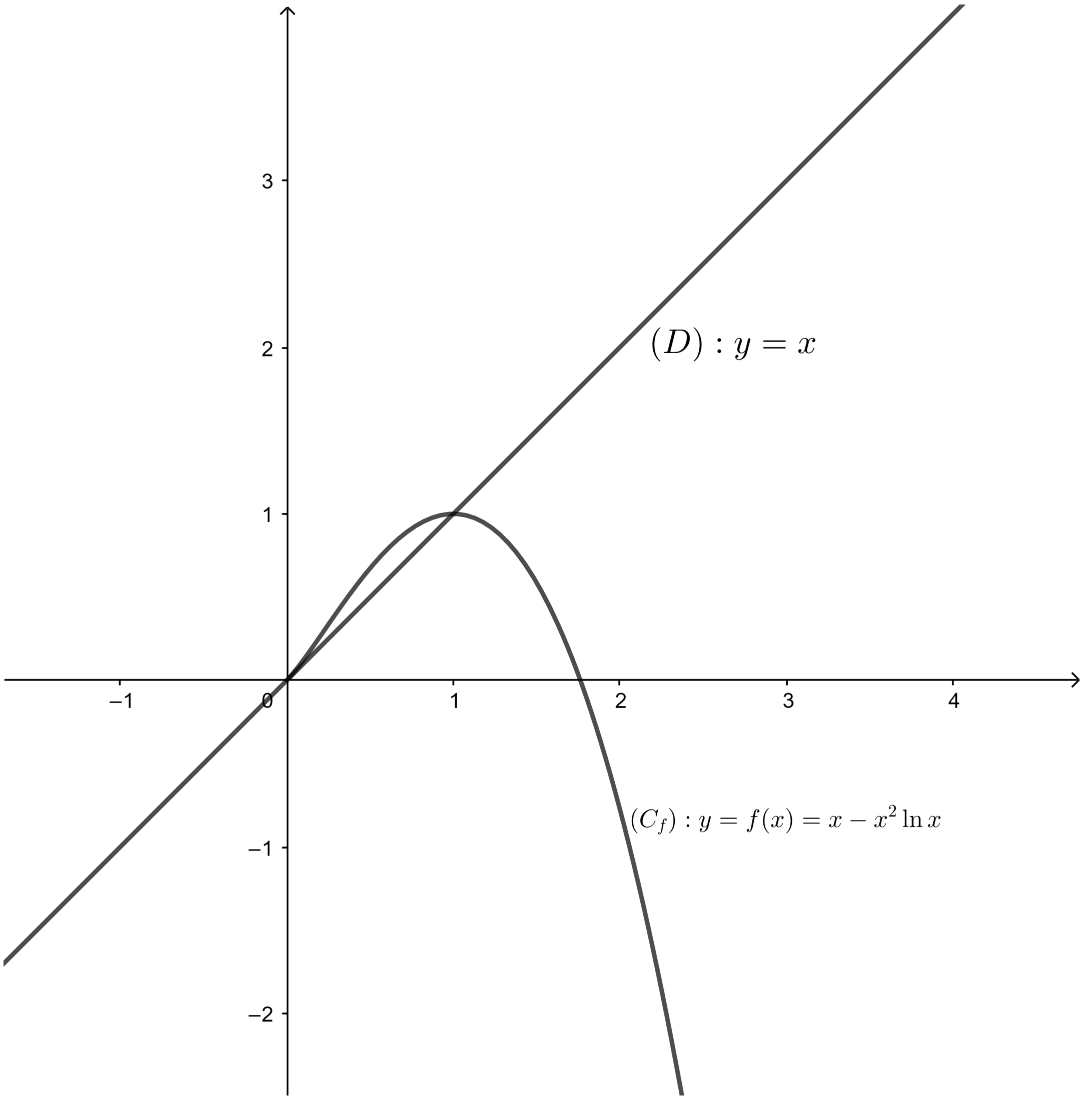
$= -0.8 < 0$

$\Rightarrow f(1) \times f(2) = 1 \times (-0.8) = -0.8 < 0 \ (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $x \in (1,2) : f'(x) < 0$ នោះ $f(x)$ ចុះជានិច្ច (2)

តាម (1) & (2) សមីការ $f(x) = 0$ មានឫសតែមួយគត់ α ដែល $1 < \alpha < 2$ ។

6 សង់ខ្សែកោង (C_f)



ប្រធានទី ១៣

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$ ។

1. រកដែនកំណត់ D_g និងរកលីមីតចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $g(x)$ ។

2. បង្ហាញថា $\forall x\in D_g\ ;\ g'(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$ ។

3. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-1,+\infty)$ ដែល $f(x)=x\ln(x+1)$ ដែលមានក្រាប (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ដែល $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2cm$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលជាក្រាប។

2. គណនា $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ រួចសិក្សាមែកអនន្តនៃ (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$ ។

3. ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(-1,+\infty)\ ;\ f'(x)=g(x)$។

   ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. សិក្សាភាពប៉ោងផតនៃក្រាប (C_f) ។

5. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ (C_f) និងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ។

6. សង់ក្រាប (C_f) ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$

1. រកដែនកំណត់ D_g

យើងមាន $g(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$

អនុគមន៍ $g(x)$ មានន័យកាលណា $\begin{cases}x+1>0\\ x+1\neq 0\end{cases}\Rightarrow x+1>0\Rightarrow x>-1$

ដូចនេះ $D_g = (-1, +\infty)$ ។

លីមីតចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $g(x)$

- $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} = -\infty$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x \to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x+1} = -\infty$)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} = +\infty$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$)

2 បង្ហាញថា $\forall x \in D_g \; ; g'(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$

យើងមាន $g(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$ កំណត់ $\forall x \in D_g$

យើងបាន $g'(x) = \dfrac{(x+1)'}{x+1} + \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}$

$g'(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$g'(x) = \dfrac{x+1+1}{(x+1)^2} = \dfrac{x+2}{(x+1)^2} \; ; \forall x \in D_g$

3 សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g

យើងមាន $g'(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$

ដោយ $\forall x \in (-1, +\infty) : (x+1)^2 > 0$ ជានិច្ច នោះ $g'(x)$ យកសញ្ញាដូច $x+2$

តែ $\forall x \in D_g \Rightarrow x+2 > 0$ នោះ $g'(x) > 0$ ជានិច្ច $\forall x \in D_g$

តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

x	-1		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

តាមតារាងអថេរភាពនេះយើងបាន

$x = \alpha \Rightarrow g(x) = 0$

$x \in (-1, \alpha) \Rightarrow g(x) < 0$

$x \in (\alpha, +\infty) \Rightarrow g(x) > 0$

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-1, +\infty)$ ដែល $f(x) = x\ln(x+1)$ ដែលមានក្រាប (C_f)

1 គណនា $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប

យើងមាន $f(x) = x\ln(x+1)$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x\ln(x+1) = +\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ នោះបន្ទាត់ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C_f) ។

2 គណនា $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

យើងមាន $f(x) = x\ln(x+1)$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(x+1) = +\infty$

សិក្សាមែកអនន្តនៃ (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ នោះក្រាប (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្ស (Oy) ខាងផ្នែក $+\infty$ ។

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x \in (-1, +\infty)$; $f'(x) = g(x)$

យើងមាន $f(x) = x\ln(x+1)$; $\forall x \in (-1, +\infty)$

យើងបាន $f'(x) = [x\ln(x+1)]'$

$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} = g(x)$; $\forall x \in (-1, +\infty)$

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f'(x) = g(x)$

នោះ $x = \alpha \Rightarrow f'(x) = 0$

$x \in (-1, \alpha) \Rightarrow f'(x) < 0$

$x \in (\alpha, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	-1			α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘		$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4 សិក្សាភាពប៉ោងផតនៃក្រាប (C_f)

យើងមាន $f'(x) = g(x)$

នោះ $f''(x) = g'(x)$

ដោយ $g'(x) > 0 \; ; \forall x \in (-1, +\infty) \Rightarrow f''(x) > 0 \; ; \forall x \in (-1, +\infty)$

នោះ (C_f) ជាខ្សែកោងផតលើ $(-1, +\infty)$ ។

5 សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ (C_f) និងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x$

តាង $(\Delta) : y = x$

យើងមាន $(C_f) : y = f(x) = x\ln(x+1)$

យើងបាន $(C_f) - (\Delta) = f(x) - y = x\ln(x+1) - x$

$f(x) - y = x[\ln(x+1) - 1]$

បើ $\ln(x+1)-1=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=1$

$\ln(x+1)=\ln e$

$x+1=e$

$x=e-1$

បើ $\ln(x+1)-1<0 \Leftrightarrow \ln(x+1)<1$

$\ln(x+1)<\ln e$

$x+1<e$

$x<e-1$

បើ $\ln(x+1)-1>0 \Leftrightarrow \ln(x+1)>1$

$\ln(x+1)>\ln e$

$x+1>e$

$x>e-1$

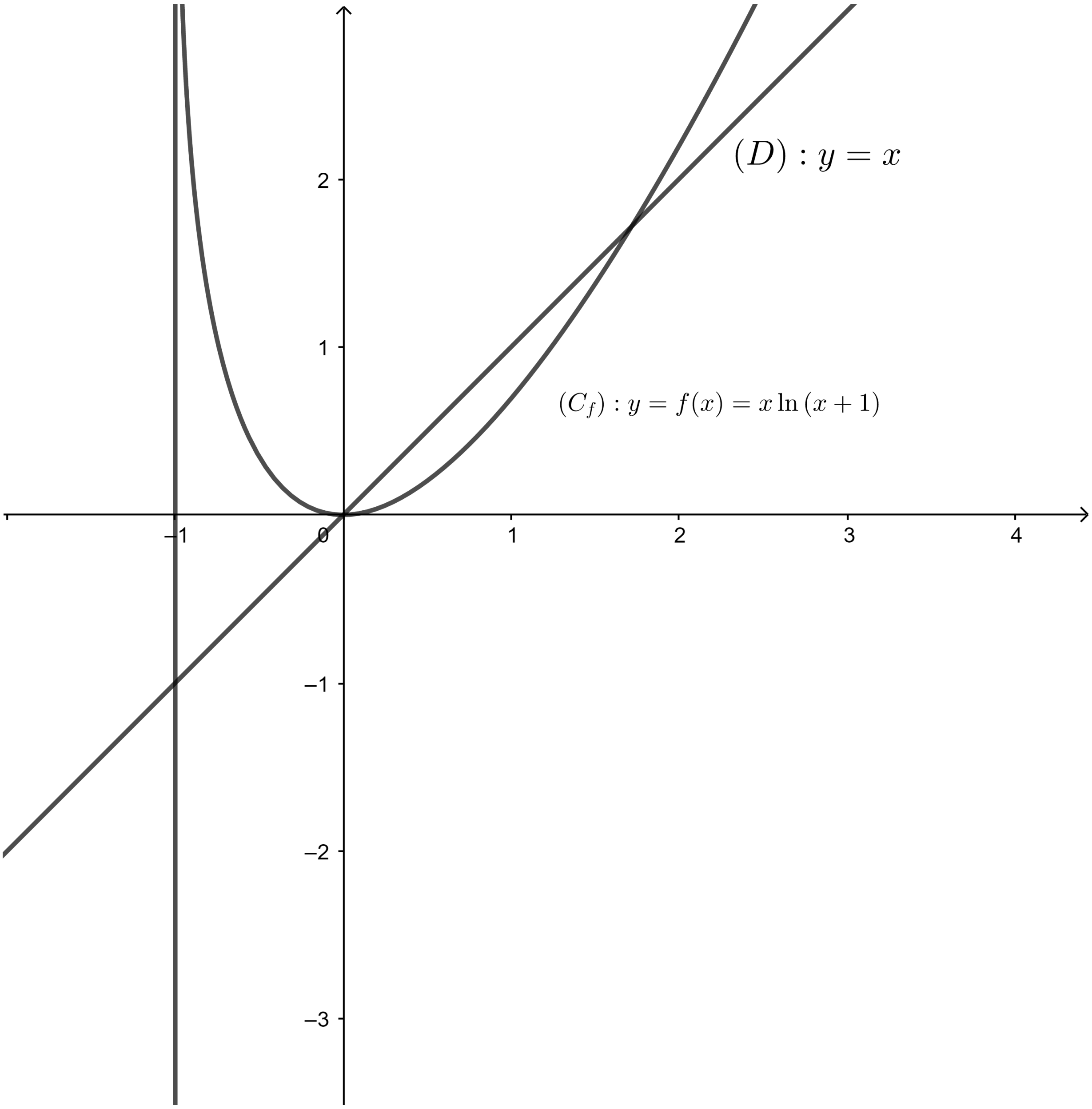
x	$-\infty$		0		$e-1=1.7$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(x+1)-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងខាងលើយើងបាន

$x\in(-1,+0]\cup[e-1,+\infty)$ នោះ(C_f) នៅលើបន្ទាត់ (Δ)

$x\in[0,e-1]$ នោះ (C_f) នៅក្រោមបន្ទាត់ (Δ)

6 សង់ក្រាប (C_f)



ប្រធានទី ១៤

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=x-\ln x-1$ ។

1 គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ ។

2 ក. គណនា $g'(x)$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$។

ខ. គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $g(x)$ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $g(x)\geq 0\ ;\forall x\in(0,+\infty)$ ។

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=x^2-2x\ln x-\dfrac{1}{x}$ ដែលមានក្រាប (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$។

1 ក. ក.គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

ខ. បញ្ជាក់ថា $\forall x\in(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=x^2\left(1-2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)$ រួចគណនា $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។

2 គណនា $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty)\ ;\ f'(x)=2g(x)+\dfrac{1}{x^2}$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4 កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃក្រាប (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 1 ។

5 សង់ក្រាប (C_f) (ដោយដឹងថា ក្រាប (C_f) មានចំណុចរបត់ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស α ដែល $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$) ។

6 ក. គណនា $\displaystyle\int_1^3\left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx$ ។

ខ. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកបង្ហាញថា $\displaystyle\int_1^3 x\ln x\,dx=\frac{9}{2}\ln 3-2$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយក្រាប (C_f) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=1, x=3$

7 ដោះស្រាយតាមក្រាបនៅវិសមីការ $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x^2}\right) \geq \ln x\ ;\ \forall x \in (0,+\infty)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x) = x - \ln x - 1$ ។

1 គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x - \ln x - 1) = +\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$)
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(x - \ln x - 1)$ រាងមិនកំណត់ $\infty - \infty$

$$= \lim_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0,\ \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$)

2 ក. គណនា $g'(x)$ គ្រប់ $x \in (0,+\infty)$

យើងមាន $g(x) = x - \ln x - 1$

នោះ $g'(x) = (x - \ln x - 1)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

ខ. គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $g(x)$

យើងមាន $\forall x \in (0,+\infty) : g'(x) = \frac{x-1}{x}$

ចំពោះ $x \in (0,+\infty) : x > 0$ ជានិច្ច នោះសញ្ញា $g'(x)$ យកដូច $x - 1$

បើ $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ និង $g(1) = 1 - \ln 1 - 1 = 0$

តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $g(x) \geq 0$; $\forall x \in (0, +\infty)$

តាមតារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$ គេឃើញថា $g'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x = 1$

នោះគេថាអនុគមន៍ $g(x)$ មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 1$ គឺ $g(1) = 0$ ។

គេទាញបាន $\forall x \in (0, +\infty) : g(x) \geq g(1) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in (0, +\infty) : g(x) \geq 0$ ។

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដែល $f(x) = x^2 - 2x\ln x - \dfrac{1}{x}$ ដែលមានក្រាប (C_f)

1 ក. ក.គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2 - 2x\ln x - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$)

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ នោះបន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C_f) ។

ខ. បញ្ជាក់ថា $\forall x \in (0, +\infty)$ ដែល $f(x) = x^2\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)$

យើងមាន
$$f(x) = x^2 - 2x\ln x - \frac{1}{x}$$
$$f(x) = x^2\left(1 - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$$ ពិត $\forall x \in (0, +\infty)$

គណនា $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$)

2 គណនា $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2\left(1 - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{x} = \lim_{x\to +\infty} x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ នោះក្រាប (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្ស (Oy) ខាង $+\infty$ ។

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x \in (0, +\infty)$; $f'(x) = 2g(x) + \dfrac{1}{x^2}$

យើងមាន
$$f(x) = x^2 - 2x\ln x - \frac{1}{x}$$
នោះ
$$f'(x) = \left(x^2 - 2x\ln x - \frac{1}{x}\right)'$$
$$f'(x) = 2x - 2(\ln x + 1) + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 2[x - (\ln x + 1)] + \frac{1}{x^2}$$
$$f'(x) = 2(x - \ln x - 1) + \frac{1}{x^2}$$
$$f'(x) = 2g(x) + \frac{1}{x^2}$$

ដូចនេះ $f'(x) = 2g(x) + \frac{1}{x^2}$; $\forall x \in (0, +\infty)$ ពិត។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f'(x) = 2g(x) + \frac{1}{x^2}$; $\forall x \in (0, +\infty)$

ដោយ $g(x) \geq 0$ & $\frac{1}{x^2} > 0$; $\forall x \in (0, +\infty)$

នោះ $f'(x) = 2g(x) + \frac{1}{x^2} > 0$; $\forall x \in (0, +\infty)$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើន $\forall x \in (0, +\infty)$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

4 កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃក្រាប (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 1

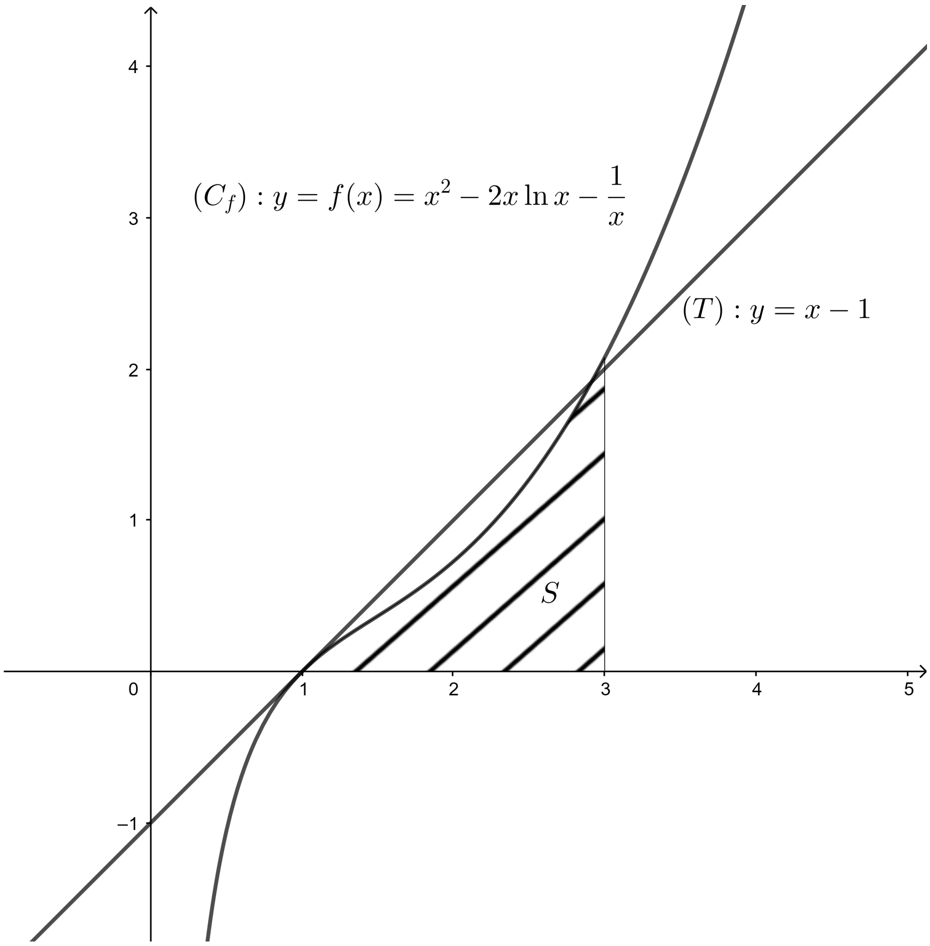
តាមរូបមន្ត $(T) : y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

ដោយ $f(x_o) = f(1) = 1 - 0 - 1 = 0$

$f'(x_o) = f'(1) = 2g(1) + \frac{1}{x^2} = 0 + 1 = 1$

ដូចនេះ $(T) : y = x - 1$ ។

5 សង់ក្រាប (C_f)



6 ក. គណនា $\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \ln|x|\right)_1^3 \\ &= \left(\frac{27}{3} - \ln 3\right) - \left(\frac{1}{3} - \ln 1\right) \\ &= 9 - \ln 3 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{26 - 3\ln 3}{3} \end{aligned}$$

ខ. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកបង្ហាញថា $\int_1^3 x\ln x dx = \frac{9}{2}\ln 3 - 2$

តាង $J = \int_1^3 x\ln x dx$

តាមរូបមន្ត $\int u dv = uv - \int v du$

តាង $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

យើងបាន
$$J = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{2}xdx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^3 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[x^2\ln x - \frac{x^2}{2}\right]_1^3$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(9\ln 3 - \frac{9}{2}\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(9\ln 3 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\right)$$
$$J = \frac{1}{2}(9\ln 3 - 4) = \frac{9}{2}\ln 3 - 2 \text{ ពិត}$$

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយក្រាប (C_f) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x = 1, x = 3$

យើងបាន
$$A = \int_1^3 f(x)dx \; ; f(x) \geq 0$$
$$A = \int_1^3 \left(x^2 - 2x\ln x - \frac{1}{x}\right)dx = \int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)dx - 2\int_1^3 x\ln xdx$$
$$A = I - 2J$$
$$A = \frac{26 - 3\ln 3}{3} - 2\left(\frac{9}{2}\ln 3 - 2\right) = \frac{26 - 3\ln 3}{3} - 9\ln 3 + 4$$
$$A = \frac{26 - 3\ln 3 - 27\ln 3 + 12}{3}$$
$$A = \frac{38 - 30\ln 3}{3} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}$$

7 ដោះស្រាយតាមក្រាបនៅវិសមីការ $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x^2}\right) \geq \ln x \; ; \forall x \in (0, +\infty)$

យើងមាន
$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x^2}\right) \geq \ln x \quad ; \forall x \in (0, +\infty)$$
$$\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) \geq x\ln x$$
$$x^2 - \frac{1}{x} \geq 2x\ln x$$
$$x^2 - 2x\ln x - \frac{1}{x} \geq 0$$
$$f(x) \geq 0$$

តាមក្រាប $f(x) \geq 0$ កាលណា $x \geq 1$

ដូចនេះ $x \geq 1$ ជាតំបន់ចម្លើយនៃវិសមីការ។

ប្រធានទី ១៥

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=\ln x+x-3$ ។

1 គណនា $\lim_{x\to0^+} g(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ។

2 ក. គណនា $g'(x)$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ ។

ខ. គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។

3 ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $g(x)=0$ មានឫសមួយគត់នៅចន្លោះ 2 និង 3 ។

4 សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $g(x)$ ។

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)+2$ ដែលមានក្រាប (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1 ក. គណនា $\lim_{x\to0^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

ខ. គណនា $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

2 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty)$; $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

3 សង់ក្រាប (C_f) (ដោយដឹងថា ក្រាប (C_f) មានចំណុចរបត់ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស α ដែល $4<\alpha<4.5$) ។

4 អនុគមន៍ h កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $h(x)=\ln x$ មានក្រាបតំណាង (C_h) ។

ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty)$; $f(x)-h(x)=\frac{2-\ln x}{x}$ ។

ខ. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ (C_f) និង (C_h) ។

គ. សង់ក្រាប (C_h) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (ដោយដឹងថា $e^2\simeq7.39$) ។

5 គណនាផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) និង (C_h) លើចន្លោះ $\left[1,e^2\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=\ln x+x-3$

1 គណនា $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

- $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x+x-3)=-\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+x-3)=+\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$)

2 ក. គណនា $g'(x)$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$

យើងមាន $g(x)=\ln x+x-3$

$$\Rightarrow \quad g'(x)=(\ln x+x-3)'=\frac{1}{x}+1$$

ខ. គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g

យើងមាន $g'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ ជានិច្ច $\forall x\in(0,+\infty)$

នោះ $g(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $(0,+\infty)$

តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3 ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $g(x)=0$ មានឫសមួយគត់នៅចន្លោះ 2 និង 3

ដោយ $g(2)=\ln2+2-3=\ln2-1<0$

$g(3)=\ln3+3-3=\ln3>0$

$\Rightarrow g(2)\times g(3)<0$ នោះសមីការ $g(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ β ដែល $2<\beta<3$ ។

4 សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $g(x)$

x	-1		β		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

តាមតារាងគេបាន៖

$$\forall x \in (0,\beta] \qquad \Rightarrow g(x) \leq 0$$

$$\forall x \in [\beta,+\infty) \qquad \Rightarrow g(x) \geq 0$$

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2$ មានក្រាប (C_f)

1 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប

$$\bullet \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2\right] = +\infty$$

$$\left(\text{ព្រោះ} \lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}\right) = -\infty, \lim_{x\to 0^+}(\ln x - 2) = -\infty\right)$$

នោះគេថា $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C_f)

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2\right] = +\infty$$

$$\left(\text{ព្រោះ} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0, \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right) + \frac{2}{x}\right] = 0$$

ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - 0x] = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

នោះគេថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសអាស៊ីមតូត $y = 0$

2 ក. បង្ហាញថា $\forall x \in (0,+\infty)$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

យើងមាន
$$f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2$$
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2\right]' \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} \\ &= \frac{\ln x + x - 3}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \text{ ពិត } \forall x \in (0,+\infty) \end{aligned}$$

ខ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ ដោយ $x^2 > 0$ ជានិច្ច $\forall x \in (0,+\infty)$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $g(x)$ ។

គេបាន៖

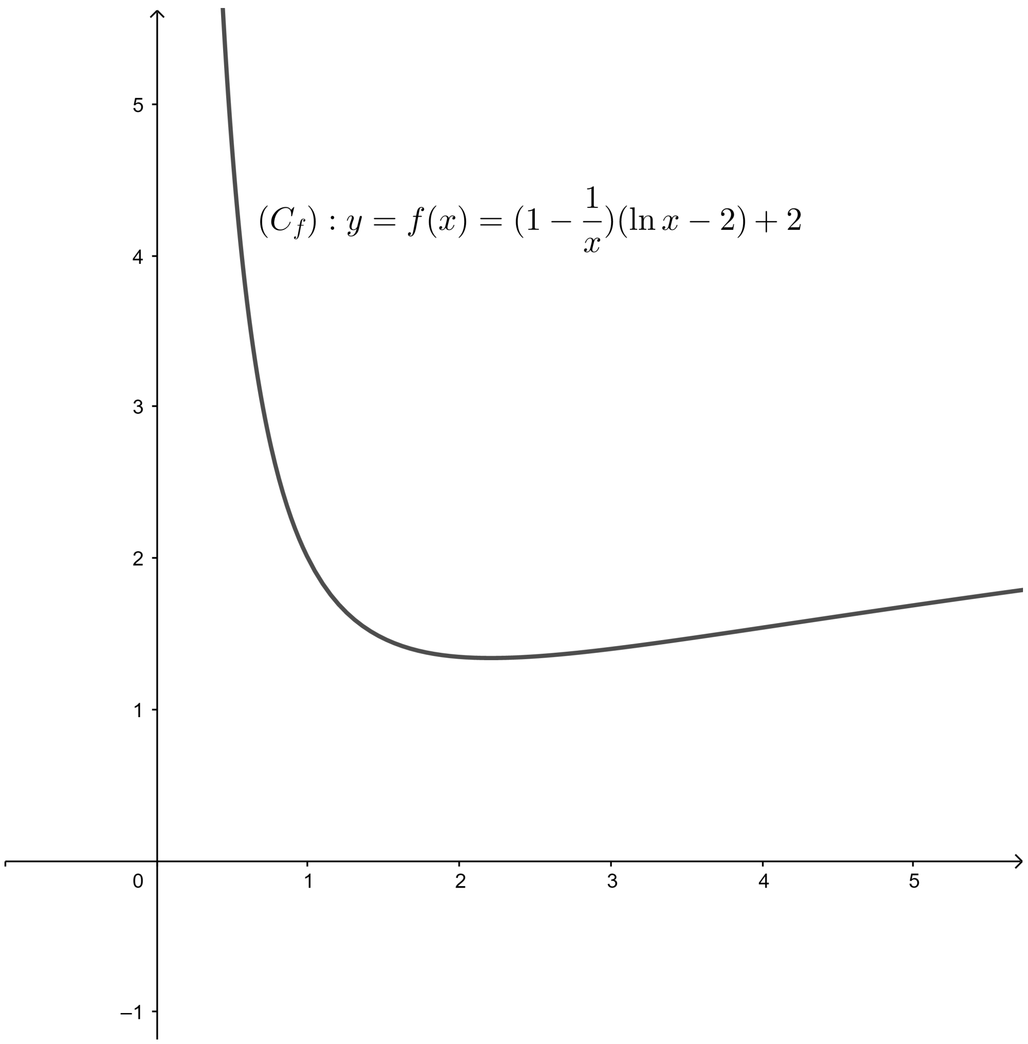
$x \in (0,\beta] : g(x) \le 0 \Rightarrow f'(x) \le 0$

$x \in [\beta,+\infty) : g(x) \ge 0 \Rightarrow f'(x) \ge 0$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\beta)$	↗	$+\infty$

3 សង់ក្រាប (C_f)



4 អនុគមន៍ h កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $h(x) = \ln x$ មានក្រាបតំណាង (C_h) ។

ក. បង្ហាញថា $\forall x \in (0,+\infty)$; $f(x) - h(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x}$

យើងមាន $(C_f): y = f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2$

$(C_h): y = h(x) = \ln x$

គេបាន
$$\begin{aligned} f(x) - h(x) &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2 - \ln x \\ &= \ln x - 2 - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} + 2 - \ln x \\ &= \frac{2 - \ln x}{x} \text{ ពិត} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f(x) - h(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x}$ ពិត $\forall x \in (0,+\infty)$

ខ. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ (C_f) និង (C_h)

យើងសិក្សាសញ្ញាផលដក $f(x)-h(x)=\dfrac{2-\ln x}{x}$

ដោយ $x>0$; $\forall x\in(0,+\infty)$ នោះ $f(x)-h(x)$ មានសញ្ញាដូច $2-\ln x$ ។

បើ $2-\ln x=0\Rightarrow \ln x=2=\ln e^2\Rightarrow x=e^2=7.39$

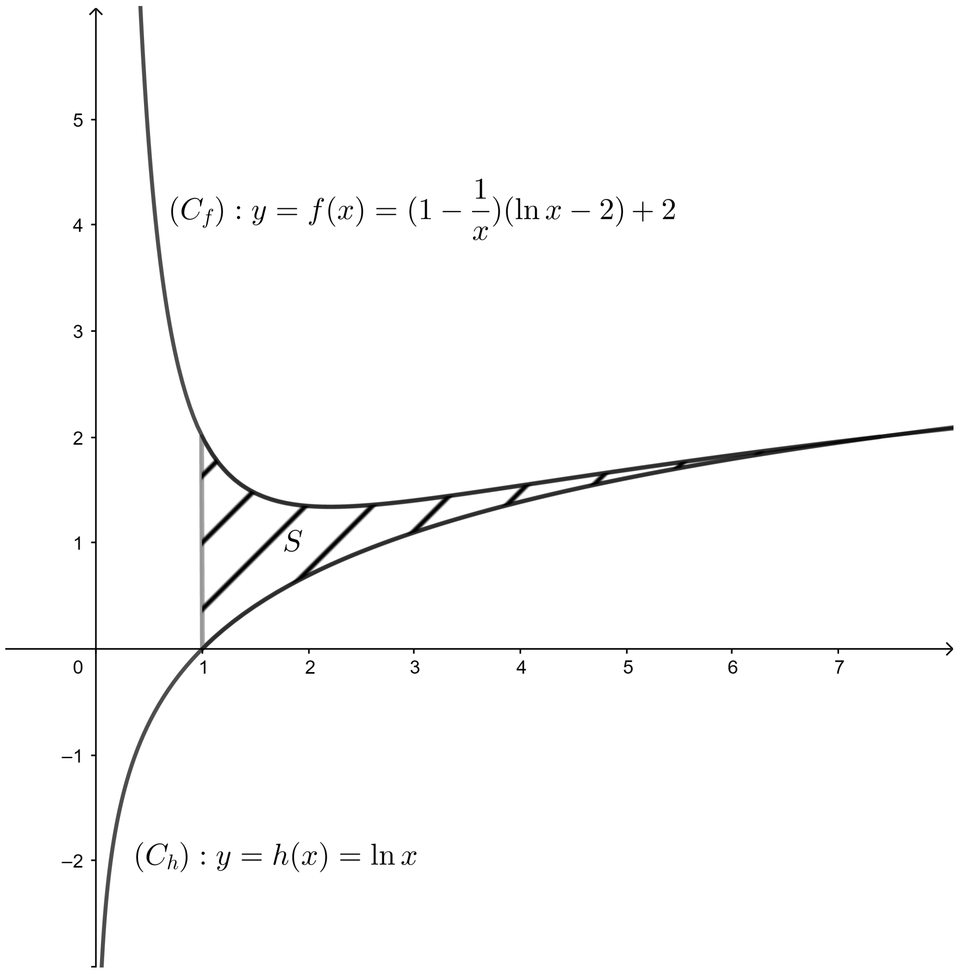
$2-\ln x>0\Rightarrow \ln x<2=\ln e^2\Rightarrow x<e^2=7.39$

$2-\ln x<0\Rightarrow \ln x>2=\ln e^2\Rightarrow x>e^2=7.39$

តារាងសញ្ញានៃ $f(x)-h(x)$

x	0		$e^2=7.39$		$+\infty$
$f(x)-h(x)$	||	$+$	0	$-$	

គ. សង់ក្រាប (C_h) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (ដោយដឹងថា $e^2\simeq 7.39$)



5 គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C_f) និង (C_h) លើចន្លោះ $\left[1,e^2\right]$

គេបាន

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{e^2} [f(x) - h(x)]\,dx \\ &= \int_1^{e^2} \frac{2-\ln x}{x}dx \\ &= \int_1^{e^2} \left(\frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)dx = 2\int_1^{e} \frac{dx}{x} - \int_1^{e} \ln x d(\ln x) \\ &= \left[2\ln|x| - \frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^{e^2} \\ &= \left(2\ln e^2 - \frac{\ln^2 e}{2}\right) - \left(2\ln 1 - \frac{\ln^2 1}{2}\right) \\ &= \left(4 - \frac{1}{2}\right) - (2\times 0 - 0) \\ &= \frac{7}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $S = \frac{7}{2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា។

ប្រធានទី ១៦

អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$ ដែលមានក្រាប (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1 គណនា $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

2 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty)$; $f'(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ ។

ខ. គណនា $f(1)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ f ។

ឃ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះ (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x_o=1$ ។

4 សង់ក្រាប (C_f) ។

5 ក. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក បង្ហាញថា $\int_1^e \ln x dx=1$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=1, x=e$

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$ ដែលមានក្រាប (C_f)

1 គណនា $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-\frac{1}{x}+\ln x\right)=-\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$)

នោះគេថាបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C_f)។

2 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}+\ln x\right)=+\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$)

ខ. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}+\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x}\right)=1$$

ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-1\cdot x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}+\ln x-x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+\ln x\right)=+\infty$$

នោះគេថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសអាស៊ីមតូត $y=x$ ។

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty)\ ;\ f'(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$

$\Rightarrow f'(x)=\left(x-\frac{1}{x}+\ln x\right)'=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$ ពិត $\forall x\in(0,+\infty)$

ខ. គណនា $f(1)$

យើងមាន $f(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$

$\Rightarrow f(1)=1-\frac{1}{1}+\ln 1=0$

គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}>0$ ជានិច្ច $\forall x\in(0,+\infty)$

នោះគេថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ D_f ។

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

គ. សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ f

តាមតារាងអថេរភាពខាងលើយើងបាន៖

$x\in(0,1]\quad : f(x)\le 0$

$x\in[1,+\infty)\quad : f(x)\ge 0$

ឃ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះ (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x_o = 1$

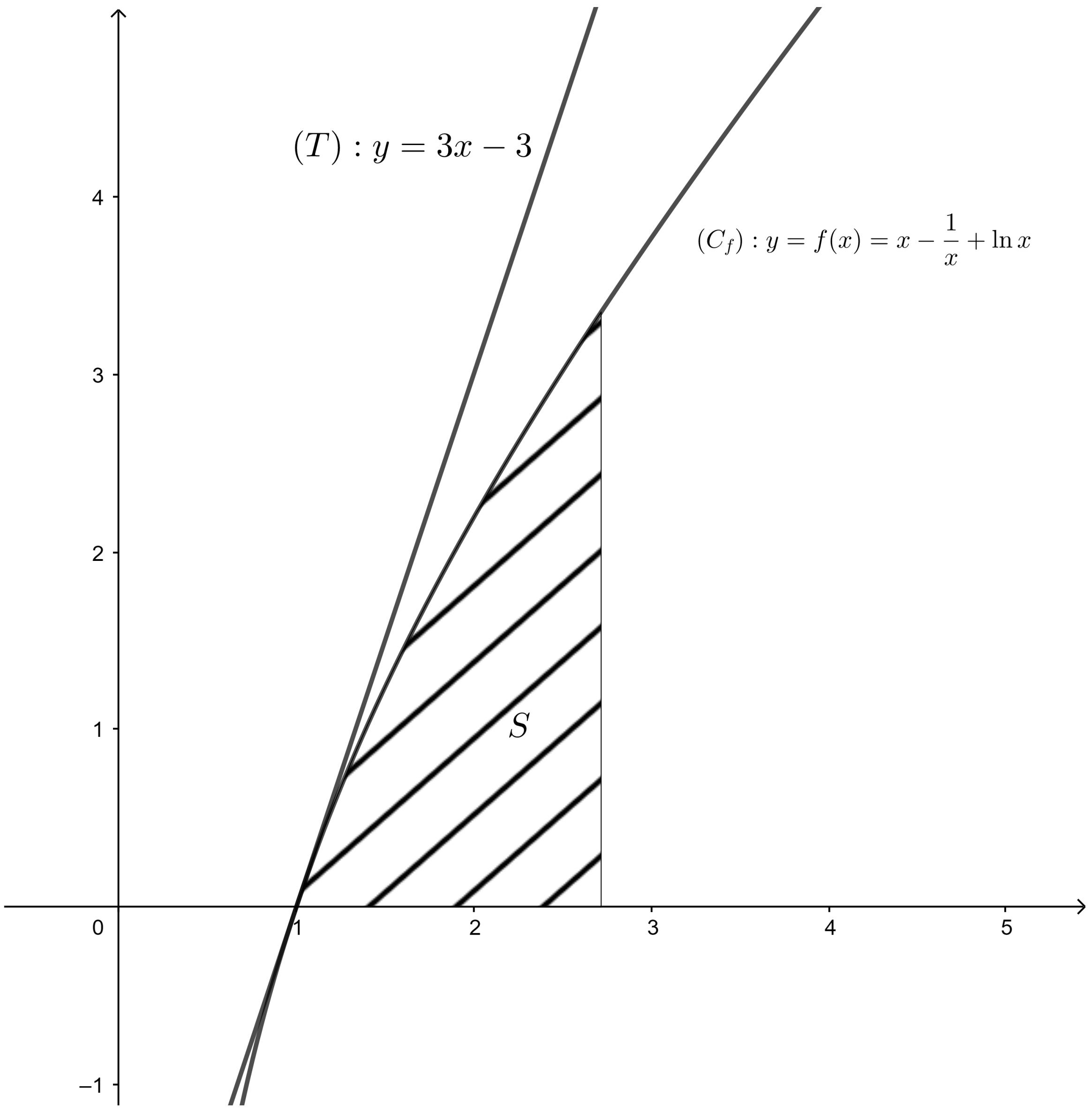
តាមរូបមន្ត $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

ដោយ $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3$

$y_0 = f(x_0) = f(1) = 0$

$\Rightarrow (T): y = 3(x-1) + 0 = 3x - 3$

4 សង់ក្រាប (C_f)



5 ក. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក បង្ហាញថា $\int_1^e \ln x dx = 1$

ឧបមាថា $I = \int_1^e \ln x dx$

តាង $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= (e \ln e - 1 \ln 1) - [x]_1^e$$

$$= e - (e - 1) = e - e + 1 = 1$$ ពិត។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x = 1, x = e$

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x = 1, x = e$

យើងបាន $S = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(x - \frac{1}{x} + \ln x \right) dx$

$$S = \left[\frac{x^2}{2} - \ln |x| \right]_1^e + \int_1^e \ln x dx$$

$$S = \left(\frac{e^2}{2} - \ln e \right) - \left(\frac{1}{2} - \ln 1 \right) + 1$$

$$S = \frac{e^2}{2} - 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$$

ដូចនេះ $S = \frac{e^2 - 1}{2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា។

ប្រធានទី ១៧

អអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដែល $f(x)=\ln|x|+\frac{1-x}{x}$ ដែលមានក្រាប (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។
2. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ។
3. បង្ហាញថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្សអាប់ស៊ីសទាំងខាងផ្នែក $-\infty$ និង $+\infty$ ។
4. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}^*: f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$ ។
5. សិក្សាសញ្ញាដេរីវេនៃ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។
6. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α មួយលើ $(-\infty,0)$ ដែល $-4<\alpha<-3$ ។
7. សង់ក្រាប (C_f) លើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដែល $f(x)=\ln|x|+\frac{1-x}{x}$ ដែលមានក្រាប (C_f)

1. គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln|x|+\frac{1-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln|x|+1-x}{x}=+\infty$

  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln|x|=0$)

- $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\ln|x|+\frac{1-x}{x}\right)=-\infty$

  (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^-}\ln|x|=-\infty,\ \lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-x}{x}=-\infty$)

ដោយ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$ នោះគេថា $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C_f)។

2. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln|x|+\frac{1-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln|x|+\frac{1}{x}-1\right)=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln|x| + \dfrac{1-x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln|x| + \dfrac{1}{x} - 1\right) = +\infty$

3 បង្ហាញថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្សអាប់ស៊ីសទាំងខាងផ្នែក $-\infty$ និង $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln|x| + \dfrac{1-x}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\ln|x|}{x} + \dfrac{1-x}{x^2}\right) = 0$

និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ នោះគេថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសដៅអាស៊ីមតូត $y=0$ ខាង $-\infty$។

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln|x| + \dfrac{1-x}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln|x|}{x} + \dfrac{1-x}{x^2}\right) = 0$

និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ នោះគេថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសដៅអាស៊ីមតូត $y=0$ ខាង $+\infty$ ។

4 បង្ហាញថា $\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$

យើងមាន $f(x) = \ln|x| + \dfrac{1-x}{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\ln|x| + \frac{1-x}{x}\right)'$$

$$f'(x) = (\ln|x|)' + \left(\frac{1-x}{x}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-x-(1-x)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$f'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ ពិត

5 សិក្សាសញ្ញាដេរីវេនៃ $f'(x)$

ដោយ $x^2 > 0\,;\forall x \in \mathbb{R}^*$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $x-1$ ។

បើ $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow$	$f(1)$	$\nearrow +\infty$

បើ $x \in (-\infty, 0) : f'(x) < 0$ នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះ

$f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x = 1$ នោះគេថា $f(x)$មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$ គឺ $f(1)$ ដែល $f(1) = \ln|1| + \dfrac{1-1}{1} = 0$ ។

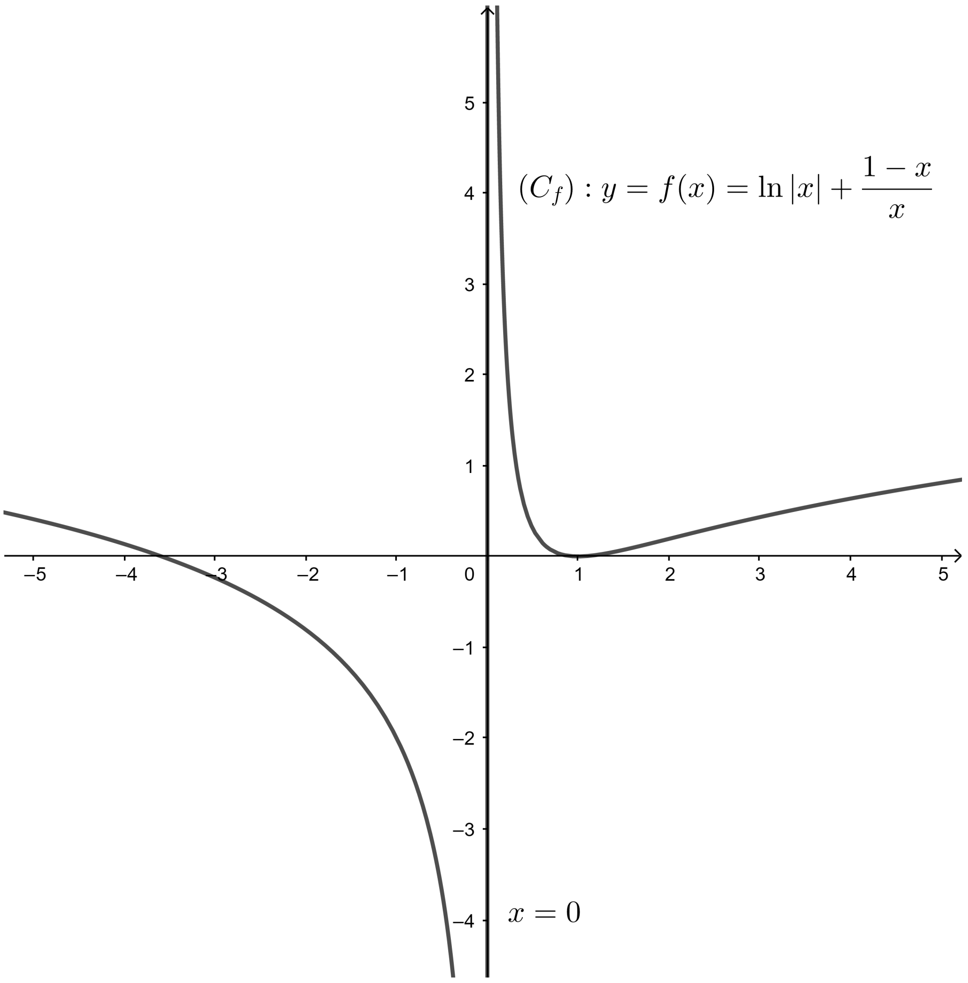
6 បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានឫស α មួយលើ $(-\infty, 0)$ ដែល $-4 < \alpha < -3$

ដោយ
$$f(-4) = \ln|-4| + \frac{1+4}{-4} = \ln 4 - \frac{5}{4} = 1.3 - 1.2 = 0.1 > 0$$
$$f(-3) = \ln|-3| + \frac{1+3}{-3} = \ln 3 - \frac{4}{3} = 1.09 - 1.3 = 0.21 < 0$$
$$\Rightarrow \quad f(-4) \times f(-3) < 0 \ (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត f ចុះលើ $(-\infty, 0)$ នោះ f ចុះលើ $(-4, -3)$; (2)

តាម (1) & (2) នោះ $f(x) = 0$ មានឫសតែមួយគត់លើ $(-4, -3)$ ។

7 សង់ក្រាប (C_f) លើតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$



ប្រធានទី ១៨

អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$ ដែលមានក្រាប (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ឯកតា $1cm$ ។

1 គណនា $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

2 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty):f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

គ. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty):\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ។

រួចទាញបញ្ជាក់ថា $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ ។

ឃ. បង្ហាញថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលតាមទិសនៃបន្ទាត់ $(\Delta):y=x$ ខាងផ្នែក $+\infty$ ។

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0;1]:x-1+\ln x\le 0$ និង $\forall x\in[1,+\infty):x-1+\ln x\ge 0$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in(0,+\infty):f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$ ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

4 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in(0,+\infty):f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ ។

ខ. បង្ហាញថា (C_f) មានចំណុចរបត់និងកំណត់កូអរដោនេរបស់វា។

5 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in(0,+\infty):f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ រួចសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C_f) និងបន្ទាត់ (Δ) ។

ខ. សង់ក្រាប (C_f) និងបន្ទាត់ (Δ) លើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

6 ក. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $H:x\mapsto x\ln x-x$ គឺជាអនុគមន៍ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $h:x\mapsto\ln x$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។

ខ. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកបង្ហាញថា $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយខ្សែកោង $(C_f),(\Delta)$ និងបន្ទាត់ $x=1, x=e$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$ ដែលមានក្រាប (C_f)

1 គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)=+\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$)

នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C_f) ។

2 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty): f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$

យើងមាន $\forall x\in(0,+\infty)\ : f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

$f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$ ពិត

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x\right)=+\infty$ ពិត

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$)

គ. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty): \frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

យើងមាន $4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=4\left(\frac{\ln x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\right)^2=4\left(\frac{\frac{1}{2}\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2$

$=4\left(\frac{\frac{1}{4}(\ln x)^2}{x}\right)=4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{(\ln x)^2}{x}=\frac{(\ln x)^2}{x}$

ទាញបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=0$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$)

ឃ. បង្ហាញថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលតាមទិសនៃបន្ទាត់ $(\Delta): y=x$ ខាង $+\infty$

$$\bullet\ \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x\right]=+\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=+\infty$ នោះក្រាប (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូល

តាមទិសនៃបន្ទាត់ $(\Delta): y=x$ ។

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0;1]: x-1+\ln x\leq 0$ និង $\forall x\in[1,+\infty): x-1+\ln x\geq 0$

បើ $x\in(0,1]$ មានន័យថា $0<x\leq 1$

នោះ $x-1\leq 0$

$\ln x\leq 0$

នោះ $x-1+\ln x\leq 0$ ចំពោះ $x\in(0,1]$

បើ $x\in[1,+\infty)$ មានន័យថា $x\geq 1$

នោះ $x-1\geq 0$

$\ln x\geq 0$

នោះ $x-1+\ln x\geq 0$ ចំពោះ $x\in[1,+\infty)$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in(0,+\infty): f'(x)=\dfrac{x-1+\ln x}{x}$

យើងមាន
$$f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$$
$$f'(x)=\left[x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]'$$
$$f'(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x$$
$$f'(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$$
$$f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$$ ពិត

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{x-1+\ln x}{x}$

ដោយ $x>0\,;\forall x\in(0,+\infty)$ $f'(x)$ យកសញ្ញាដូច $x-1+\ln x$

បើ $x\in(0,1]\Rightarrow x-1+\ln x\leq 0\Leftrightarrow f'(x)\leq 0$

បើ $x\in[1,+\infty)\Rightarrow x-1+\ln x\geq 0\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

ដោយ$f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ$(+)$ នោះគេថា$f(x)$មានចំណុចអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=1+\frac{1}{2}-\ln 1+\frac{1}{2}(\ln 1)^2=\frac{3}{2}$ ។

4 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in(0,+\infty): f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$

យើងមាន $\forall x\in(0,+\infty): f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$

$$f''(x)=\left(\frac{x-1+\ln x}{x}\right)'=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x-(x-1+\ln x)}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{x+1-x+1-\ln x}{x^2}=\frac{2-\ln x}{x^2}$$ ពិត

ខ. បង្ហាញថា (C_f) មានចំណុចរបត់និងកំណត់កូអរដោនេរបស់វា

យើងមាន $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$; $\forall x\in(0,+\infty)$

ដោយ $x^2>0$; $\forall x\in(0,+\infty)$ សញ្ញានៃ $f''(x)$ យកដូច $2-\ln x$

បើ $2-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=2\Leftrightarrow x=e^2$

បើ $2-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<2\Leftrightarrow x<e^2$

បើ $2-\ln x<0\Leftrightarrow \ln x>2\Leftrightarrow x>e^2$

តារាងសញ្ញា $f''(x)$

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

តាមតារាងសញ្ញា $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=e^2$ គេថា $f(x)$ មានចំណុចរបត់ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=e^2$ ហើយអរដោនេគឺ $f\left(e^2\right)=e^2+\frac{1}{2}-\ln e^2+\frac{1}{2}\left(\ln e^2\right)^2$

$f\left(e^2\right)=e^2+\frac{1}{2}-2+2=e^2+\frac{1}{2}=\frac{2e^2+1}{2}$ ។

ដូចនេះចំណុចរបត់ $I\left(e^2,\dfrac{2e^2+1}{2}\right)$។

5 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in(0,+\infty):f(x)-x=\dfrac{1}{2}(\ln x-1)^2$

យើងបាន $\quad f(x)-x=x+\dfrac{1}{2}-\ln x+\dfrac{1}{2}(\ln x)^2-x=\dfrac{1}{2}-\ln x+\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

$$f(x)-x=\frac{1}{2}\left[1-2\ln x+(\ln x)^2\right]=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$$

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C_f) និងបន្ទាត់ (Δ)

យើងមាន $\quad (C_f):f(x)=x+\dfrac{1}{2}-\ln x+\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

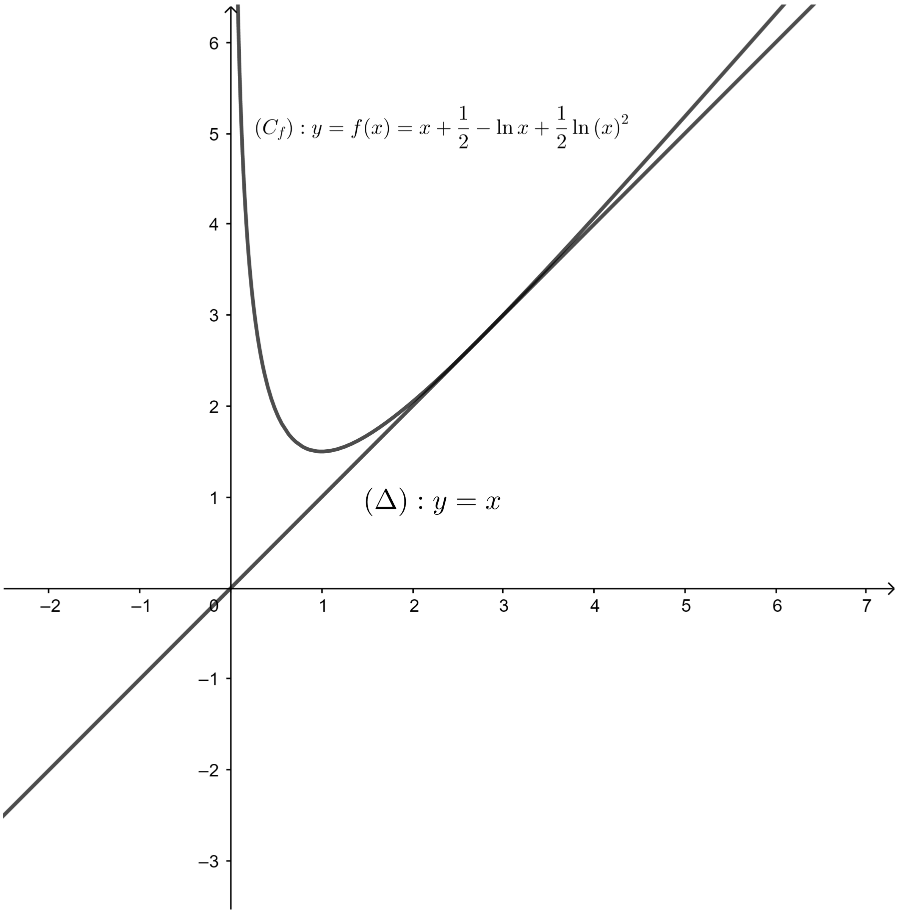
$(\Delta):y=x$

នោះ $\quad f(x)-x=\dfrac{1}{2}(\ln x-1)^2$

ដោយ $\quad (\ln x-1)^2\geq 0\ ;\ \forall x\in(0,+\infty)$

នោះ $\quad (C_f)$ នៅលើ (Δ) $\forall x\in(0,+\infty)$

ខ. សង់ក្រាប (C_f) និងបន្ទាត់ (Δ) លើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$



6 ក. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $H:x\mapsto x\ln x-x$ គឺជាអនុគមន៍ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $h:x\mapsto \ln x$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$

យើងមាន $H(x)=x\ln x-x=(x\ln x-x)'$

$$H'(x)=x'\ln x+(\ln x)'x-1=\ln x+\frac{1}{x}\cdot x-1$$

$$H'(x)=\ln x=h(x)$$

ដូចនេះ $H:x\mapsto x\ln x-x$ ជាអនុគមន៍ព្រីមីទីវនៃ $h:x\mapsto \ln x$ ។

ខ. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកបង្ហាញថា $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$

ឧបមាថា $I=\int_1^e(\ln x)^2dx$

តាមរូបមន្ត $\int udv=uv-\int vdu$

តាង $u=(\ln x)^2\Rightarrow du=2(\ln x)'(\ln x)=2\frac{\ln x}{x}dx$

$$dv=dx\Rightarrow v=x$$

$$I=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e(2\ln x)\,dx=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-2\int_1^e H'(x)\,dx$$

$$I=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-2\left[H(x)\right]_1^e=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-2\left[x\ln x-x\right]_1^e$$

$$I=\left\{\left[e(\ln e)^2-1(\ln 1)^2\right]\right\}-2\left\{(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)\right\}$$

$$I=e-2$$

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយខ្សែកោង $(C_f),(\Delta)$ និងបន្ទាត់ $x=1,x=e$

$$S=\int_1^e[f(x)-x]dx$$

$$S=\int_1^e\frac{1}{2}(\ln x-1)^2dx$$

$$S=\frac{1}{2}\int_1^e\left[(\ln x)^2-2\ln x+1\right]dx$$

$$S=\frac{1}{2}\int_1^e(\ln x)^2dx-\int_1^e(\ln x)\,dx+\frac{1}{2}\int_1^e dx=\frac{1}{2}(e-2)-(x\ln x-x)_1^e+\frac{1}{2}(x)_1^e$$

$$S=\frac{1}{2}(e-2)-(0-(-1))+\frac{1}{2}(e-1)=\frac{1}{2}e-1-1+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$$

$S=e-\frac{5}{2}=\frac{2e-5}{2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា

ដោយ 1 ឯកតាស្មើ $1cm$ នោះ 1 ឯកតាផ្ទៃក្រឡាស្មើ $1cm^2$

ដូចនេះ $S=\frac{2e-5}{2}cm^2$។

ប្រធានទី ១៩

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=(x+1)\ln|x-3|$ ដែលមានក្រាប (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។
2. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍។
3. សិក្សាមែកអនន្តនៃក្រាប (C_f) ។
4. ក. បង្ហាញថា $\forall x\in D_f : f'(x)=\dfrac{x-1}{x-3}+\ln|x-3|$ ។

   ខ. $\forall x\in D_f$ គណនា $f''(x)$ រួចសិក្សាអថេរភាពនៃ $f'(x)$ ។

   គ. គណនាលីមីតនៃ $f'(x)$ ត្រង់ $-\infty$ និង 3^- ។

   ឃ. បង្ហាញថាសមីការ $f'(x)=0$ មានឫស α មួយនៅលើ $(-\infty,3)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$លើ $(-\infty,3)$ ។

   ង. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើ $(3,+\infty)$ ។

   ច. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
5. រកចំណុចប្រសព្វរវាង (C_f) និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយ។
6. សង់ក្រាប (C_f) លើតម្រុយអរតូណរមេ។ (គេឱ្យ $\alpha\simeq\sim 0.78$)

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=(x+1)\ln|x-3|$ ដែលមានក្រាប (C_f)

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x)=(x+1)\ln|x-3|$

ដោយ $|x-3|\geq 0\ ;\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $f(x)$ មានន័យកាលណា $|x-3|\neq 0$ ឬ

$x-3\neq 0\Rightarrow x\neq 3$ នោះ $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

2 គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

គេបាន៖

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)\ln|x-3| = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\ln|x-3| = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} (x+1)\ln|x-3| = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} (x+1)\ln|x-3| = -\infty$

3 សិក្សាមែកអនន្តនៃក្រាប (C_f)

យើងបាន
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)\ln|x-3|}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln|x-3| = +\infty$$

នោះគេថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្ស (Oy) ខាង $-\infty$ ។

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\ln|x-3|}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln|x-3| = +\infty$$

នោះគេថា (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសដៅអ័ក្ស (Oy) ខាង $+\infty$ ។

4 ក. បង្ហាញថា $\forall x \in D_f : f'(x) = \dfrac{x-1}{x-3} + \ln|x-3|$

យើងមាន $f(x) = (x+1)\ln|x-3|$

$$\Rightarrow f'(x) = [(x+1)\ln|x-3|]'$$
$$f'(x) = \ln|x-3| + \frac{1}{x-3}\times(x+1)$$
$$f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$$ ពិត $\forall x \in D_f$

ខ. $\forall x \in D_f$ គណនា $f''(x)$

យើងមាន $f'(x) = \dfrac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$

$$\Rightarrow f''(x) = \left[\frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|\right]'$$
$$f''(x) = \frac{(x-3)-(x+1)}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3}$$

$$f''(x)=\frac{x-3-x-1}{(x-3)^2}+\frac{1}{x-3}$$
$$f''(x)=\frac{-4+x-3}{(x-3)^2}=\frac{x-7}{(x-3)^2}$$

ដូចនេះ $f''(x)=\dfrac{x-7}{(x-3)^2}$

សិក្សាអថេរភាពនៃ $f'(x)$

យើងមាន $f''(x)=\dfrac{x-7}{(x-3)^2}$ ដោយ $(x-3)^2>0\ ;\forall x\in D_f$

នោះ $f''(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $x-7$

បើ $x-7=0\Rightarrow x=7$

តារាងសញ្ញានៃ $f''(x)$

x	$-\infty$	3		7		$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	

តាមតារាងយើងបាន៖

$x\in(-\infty,3)\cup(3,7]:f''(x)\le 0$ នោះ $f'(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះ

$x\in[7,+\infty):f''(x)\ge 0$ នោះ $f'(x)$ ជាអនុគមន៍កើន

គ. គណនាលីមីតនៃ $f'(x)$ ត្រង់ $-\infty$ និង 3^-

• $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{x-3}+\ln|x-3|\right]=+\infty$

• $\displaystyle\lim_{x\to3^-}f'(x)=\lim_{x\to3^-}\left[\frac{x+1}{x-3}+\ln|x-3|\right]=-\infty$

ឃ. បង្ហាញថាសមីការ $f'(x)=0$ មានឫស α មួយនៅលើ $(-\infty,3)$

យក $a=\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f'(x)=+\infty$

$b=\displaystyle\lim_{x\to3^-}f'(x)=-\infty$

នោះគេបាន $a\times b<0\,(1)$

ម្យ៉ាងទៀត $f''(x)\le 0$ លើ $(-\infty,3)$ នោះ $f'(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $(-\infty,3)$។

សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$លើ $(-\infty,3)$

x	$-\infty$		α		3
$f''(x)$		$-$		$-$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

តាមតារាងយើងបាន៖

$x \in (-\infty,\alpha] \quad : f'(x) \geq 0$

$x \in [\alpha,3) \quad : f'(x) \leq 0$

ង. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើ $(3,+\infty)$

តាមតារាងអថេរភាពនៃ $f'(x)$ ដែល $x \in (3,+\infty)$ គេឃើញថា $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ$(+)$ ត្រង់ $x = 7$ នោះ $f'(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = 7$ គឺ

$$f'(7) = \frac{7+1}{7-3} + \ln|7-3| = \frac{8}{2} + \ln 4 = 2 + \ln 4 > 0$$

នោះគេទាញបាន $\forall x \in (3,+\infty) : f'(x) \geq f'(7) = 2 + \ln 4 > 0$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \;;\; \forall x \in (3,+\infty)$$

ច. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

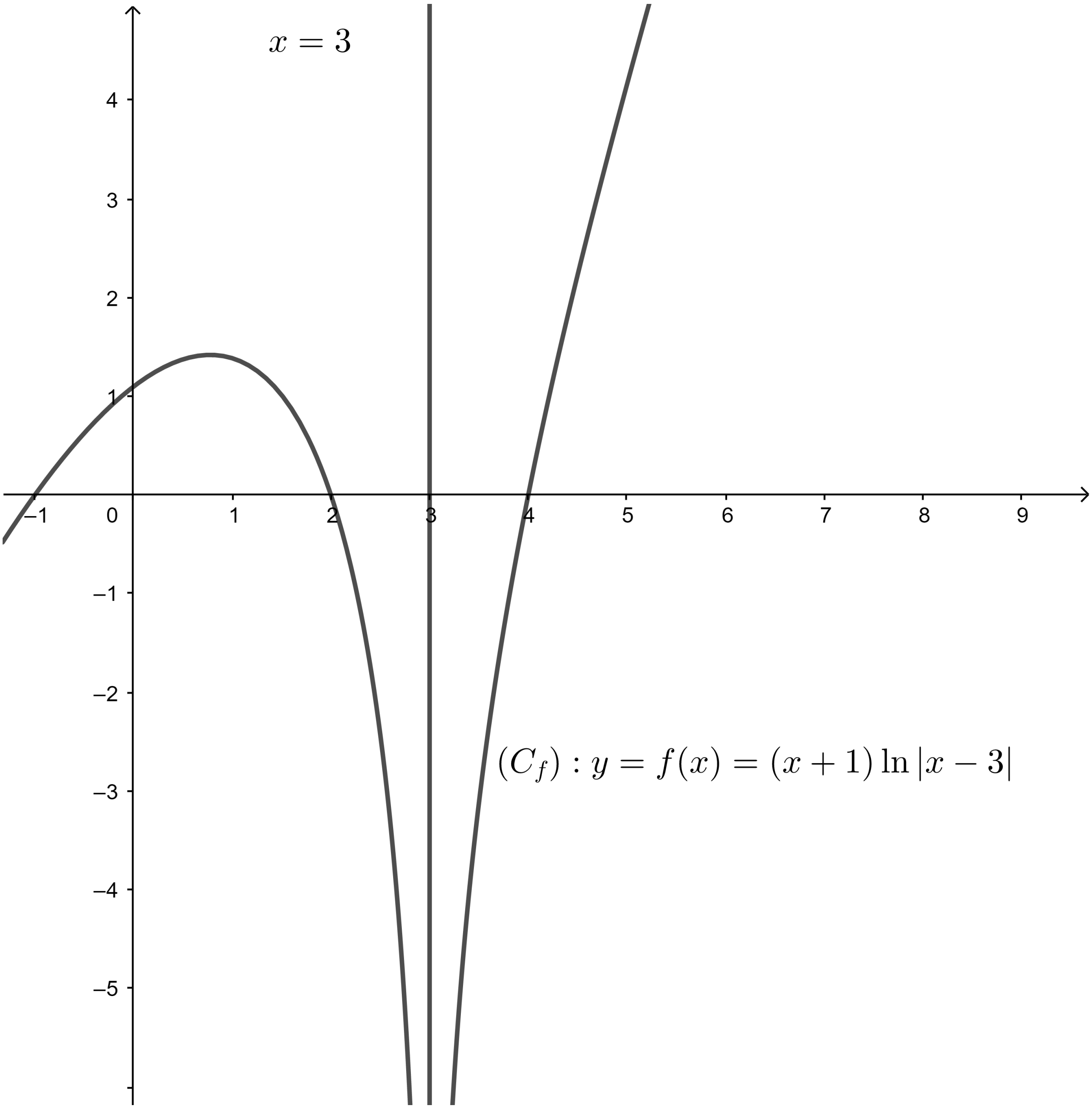
x	$-\infty$		α		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5 រកចំណុចប្រសព្វរវាង (C_f) និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយ

- (C_f) កាត់ $(y'y)$ នោះ $x = 0$ ហើយ $y = (0+1)\ln|0-3| = \ln 3$
- (C_f) កាត់ $(x'x)$ នោះ $y = 0$ ឬ $(x+1)\ln|x-3| = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \ln|x-3|=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ |x-3|=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x-3=\pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4, x=2 \end{array}\right.$$

6 សង់ក្រាប (C_f) លើតម្រុយអរតូណរមេ។ (គេឱ្យ $\alpha \simeq\sim 0.78$)



ប្រធានទី ២០

ផ្នែកទី១ គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-\infty,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x-3+\dfrac{4}{e^x+1}$ មានក្រាប (C_f) ជាតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

2. ក. បង្ហាញថា $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

   ខ. បង្ហាញថា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ ។

3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d):y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C_f) ខាង $+\infty$ ។

4. ក. បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ ។

   ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(d'):y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C_f) ខាង $-\infty$

5. ក. រកកូអរដោនេចំណុច I ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (C_f) និងអ័ក្ស (Oy) ។

   ខ. បង្ហាញថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C_f) ។

6. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសមួយនៅចន្លោះ $2.7<\alpha<2.8$ ។

7. សង់ $(d),(d')$ និង (C_f) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ផ្នែកទី២ λ ជាចំនួនពិតដែល $\lambda>\alpha$ បើ $A_\alpha(\lambda)$ ជាផ្ទៃក្រឡាដែលកំណត់ដោយក្រាប (C_f) , (d) និងបន្ទាត់ $x=\alpha, x=\lambda$ ។

1. បង្ហាញថា $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ រួចគណនា $A_\alpha(\lambda)$ ជាអនុគមន៍នៃ α និង λ ។

2. បង្ហាញថា $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A_\alpha(\lambda)=4\ln\left(\dfrac{4}{\alpha+1}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី១ គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-\infty,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x-3+\dfrac{4}{e^x+1}$ មានក្រាប (C_f)

1 គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-3+\dfrac{4}{e^x+1}\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-3+\dfrac{4}{e^x+1}\right)=+\infty$

2 ក. បង្ហាញថា $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

យើងមាន

$$\begin{aligned} f(x)&=x-3+\frac{4}{e^x+1}\\ \Rightarrow\quad f'(x)&=\left(x-3+\frac{4}{e^x+1}\right)'\\ &=1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}\\ &=1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}-2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2}\\ &=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \text{ ពិត}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ ចំពោះ $x=0$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ខ. បង្ហាញថា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ

$\forall x\in(-\infty,+\infty)\Rightarrow -x\in(-\infty,+\infty)$ គេបាន៖

$f'(-x)=\left(\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right)^2=\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2=f'(x)$ ពិត

ដូចនេះ $f'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ។

3 បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C_f) ខាង $+\infty$

ដោយ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)] &= \lim_{x\to+\infty}\left(x-3+\frac{4}{e^x+1}-x+3\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{e^x+1}\right)=0\end{aligned}$$

នោះគេថា $(d): y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ខាង $+\infty$ ។

4 ក. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \dfrac{4e^x}{e^x+1}$

យើងមាន
$$\begin{aligned}f(x) &= x-3+\frac{4}{e^x+1} = x+1-4+\frac{4}{e^x+1}\\ f(x) &= x+1-\frac{4e^x+4-4}{e^x+1} = x+1-\frac{4e^x}{e^x+1}\end{aligned}$$
ពិត ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(d'): y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C_f) ខាង $-\infty$

ដោយ
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] &= \lim_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{4e^x}{e^x+1}-x-1\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4e^x}{e^x+1}\right)=0\end{aligned}$$

នោះគេថា $(d'): y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ខាង $-\infty$ ។

5 ក. រកកូអរដោនេចំណុច I ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (C_f) និងអ័ក្ស (Oy)

$(C_f): y = f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{e^x+1}$ កាត់ $(y'y)$ កាលណា $x = 0$

នោះ $y = 0 - 3 + \dfrac{4}{e^0+1} = -3 + 2 = -1$

ខ. បង្ហាញថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C_f)

តាមរូបមន្ត $I(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C_f) កាលណា $f(2a-x)+f(x)=2b$ គេបាន៖

$$\begin{aligned}f(2a-x)+f(x) &= f(-x)+f(x)\\ &= -x+1-\frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}+x-1-\frac{4e^x}{e^x+1}\\ &= 2-\frac{4}{e^x+1}-\frac{4}{e^x+1}=\frac{2e^x+2-4-4e^x}{e^x+1}\\ &= \frac{-2e^x-2}{e^x+1}=\frac{-2(e^x+1)}{e^x+1}=-2=2(-1)\end{aligned}$$
ពិត

ដូចនេះ $I(0,-1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ។

6 បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសមួយនៅចន្លោះ $2.7<\alpha<2.8$

យើងមាន f កើនដាច់ខាតលើ $(-\infty,+\infty)$ នោះ f កើនដាច់ខាតលើ $(2.7,2.8)$ (1)

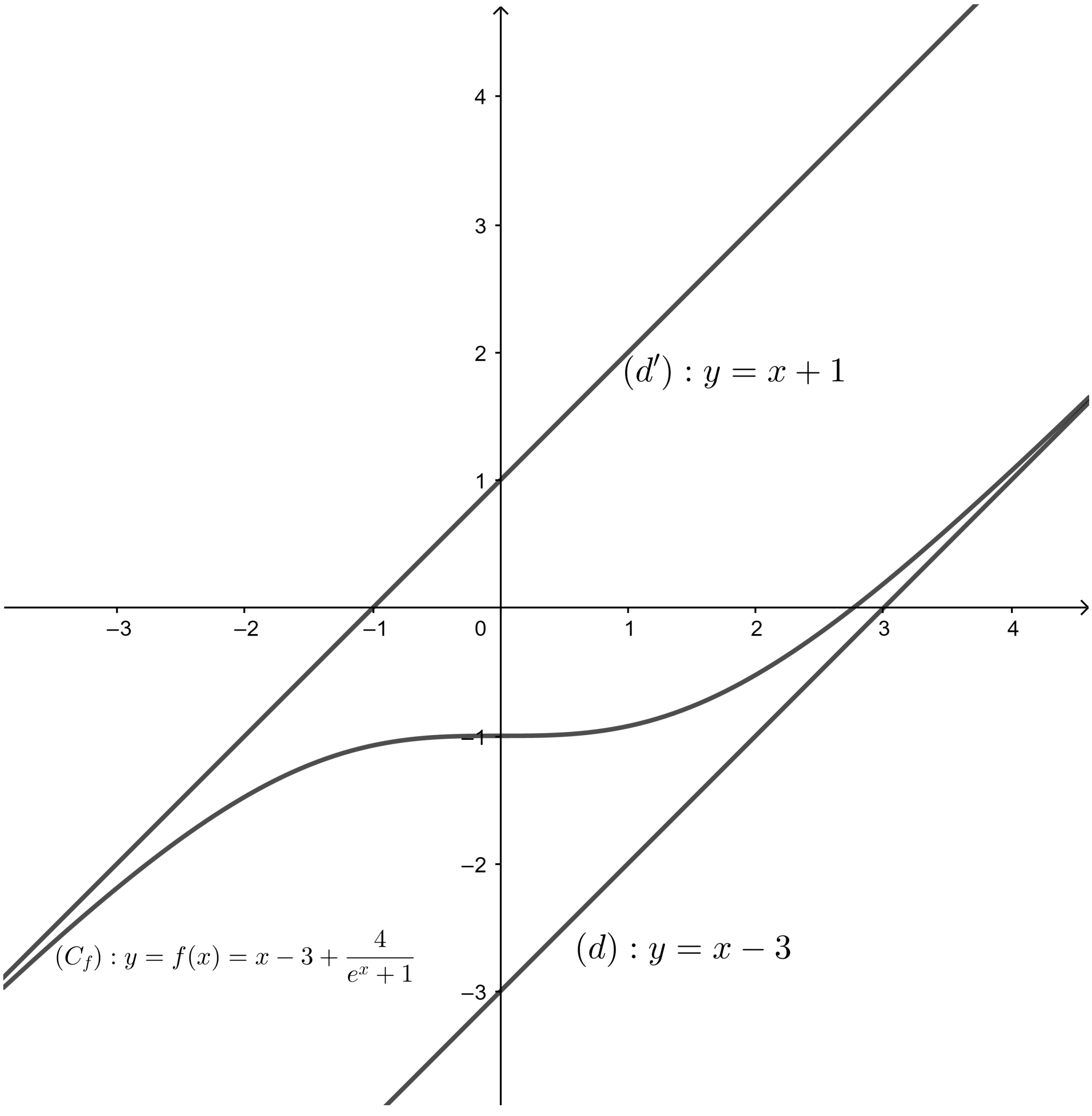
ម្យ៉ាងទៀត $f(2.7)=2.7-3+\dfrac{4}{e^{2.7}+1}=-0.04<0$

$f(2.8)=2.8-3+\dfrac{4}{e^{2.8}+1}=0.02>0$

$\Rightarrow f(2.7)\times f(2.8)<0$ (2)

តាម (1) & (2) គេបាន $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ដែល $2.7<\alpha<2.8$ ។

7 សង់ (d),(d') និង (C_f) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ



ផ្នែកទី២ λ ជាចំនួនពិតដែល $\lambda > \alpha$ បើ $A_\alpha(\lambda)$ ជាផ្ទៃក្រឡាដែលកំណត់ដោយក្រាប (C_f) , (d) និងបន្ទាត់ $x=\alpha, x=\lambda$

1 បង្ហាញថា $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

យើងមាន $$\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$ ពិត

គណនា $A_\alpha(\lambda)$ ជាអនុគមន៍នៃ α និង λ

គេបាន
$$\begin{aligned}
A_\alpha(\lambda) &= \int_\alpha^\lambda [f(x)-(x-3)]\,dx \\
&= \int_\alpha^\lambda \left(x-3+\frac{4}{e^x+1}-x+3\right)dx \\
&= \int_\alpha^\lambda \frac{4}{e^x+1}dx \\
&= 4\int_\alpha^\lambda \frac{1}{e^{-x}+1}dx = 4\int_\alpha^\lambda \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx \\
&= -4\int_\alpha^\lambda \frac{1}{e^{-x}+1}d\left(e^{-x}+1\right) \\
&= \left[-4\ln\left|e^{-x}+1\right|\right]_\alpha^\lambda \\
&= 4\ln\left(e^{-\alpha}+1\right)-4\ln\left(e^{-\lambda}+1\right) \\
&= 4\ln\left(\frac{e^{-\alpha}+1}{e^{-\lambda}+1}\right)
\end{aligned}$$
ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

2 បង្ហាញថា $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\alpha(\lambda)=4\ln\left(\dfrac{4}{\alpha+1}\right)$

យើងបាន
$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to+\infty} A_\alpha(\lambda) &= \lim_{\lambda\to+\infty} 4\ln\left(\frac{e^{-\alpha}+1}{e^{-\lambda}+1}\right) \\
&= 4\ln\left(e^{-\alpha}+1\right) = 4\ln\left(\frac{1}{e^\alpha}+1\right) \\
&= 4\ln\left(\frac{1+e^\alpha}{e^\alpha}\right)
\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត α ជាឫសនៃ $f(x)=0$ នោះគេបាន៖

$$\alpha-3+\frac{4}{e^\alpha+1}=0 \text{ ឬ } \frac{4}{e^\alpha+1}=3-\alpha$$

$$\Rightarrow\ e^\alpha+1=\frac{4}{3-\alpha} \text{ ហើយ } e^\alpha=\frac{4}{3-\alpha}-1=\frac{4-3+\alpha}{3-\alpha}=\frac{1+\alpha}{3-\alpha}$$

គេបាន $$\lim_{\lambda\to+\infty} A_\alpha(\lambda)=4\ln\left(\frac{1+e^\alpha}{e^\alpha}\right)=4\ln\left(\frac{\frac{4}{3-\alpha}}{\frac{1+\alpha}{3-\alpha}}\right)=4\ln\left(\frac{4}{1+\alpha}\right)$$ ពិត ។

ប្រធានទី ២១

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=e^x-e+\ln x$ ។

1 គណនា $\lim_{x\to0^+} g(x)$ & $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ។

2 បង្ហាញថាអនុគមន៍ $g(x)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ រួចសង់តារាងអថេរភាព។

3 គណនា $g(1)$ រួចបង្ហាញថា $\forall x\in(0,1]:g(x)\le 0$ និង $\forall x\in[1,+\infty):g(x)\ge 0$ ។

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $[0,+\infty)$ ដែល $f(x)=e^x+x\ln x-(1+e)x-1;x>0$ និង $f(0)=0$ មានក្រាប (C_f) ជាតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1 ក. បង្ហាញថា $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

ដោយដឹងថា $f(x)=x\left(\frac{e^x}{x}+\ln x-1-e-\frac{1}{x}\right)$

ខ. បង្ហាញថា $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ រួចបកស្រាយតាមន័យធរណីមាត្រ។

2 បង្ហាញថា f មានភាពជាប់ត្រង់ $x_o=0$ ។

3 បង្ហាញថា $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$ ។

ដោយដឹងថា $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ រួចបកស្រាយតាមន័យធរណីមាត្រ។

4 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty):f'(x)=g(x)$ ។

ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

5 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=0$ មានឫស α មួយដែល $1<\alpha<2$ (ដោយ $f(2)=0.34$) ។

6 នៅលើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ សង់ខ្សែកោង (C_f)

7 គេមានចំនួនពិត λ ស្ថិតលើ $(0,1)$ និង $A(\lambda)$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកដែលកំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=1,x=\lambda$ ។

ក. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក បង្ហាញថា $\int_\lambda^1 x\ln x dx=\frac{1}{4}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda-\frac{1}{4}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $A(\lambda)=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}e-\frac{1}{4}\lambda^2(3+2e)-\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda+e^{\lambda}$ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{\lambda\to0^+}A(\lambda)=\frac{11-2e}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=e^x-e+\ln x$

1 គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ & $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

- $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-e+\ln x)=-\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-e+\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(1-\frac{e}{e^x}+\frac{\ln x}{e^x}\right)=+\infty$

(ព្រោះពេល $x\to+\infty$ នោះ $e^x\to+\infty,\frac{\ln x}{e^x}\to0$)

2 បង្ហាញថាអនុគមន៍ $g(x)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ និងសង់តារាងអថេរភាព

យើងមាន $g(x)=e^x-e+\ln x\Rightarrow g'(x)=e^x+\frac{1}{x}>0\ ;\forall x\in(0,+\infty)$

នាំឱ្យ $g(x)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$។

តារាងអថេរភាព $g(x)$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

3 គណនា $g(1)$ រួចបង្ហាញថា $\forall x \in (0,1] : g(x) \leq 0$ និង $\forall x \in [1,+\infty) : g(x) \geq 0$

យើងបាន $g(1) = e^1 - e + \ln 1 = 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $+$		$+$
$g(x)$	‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

យើងបាន $g(x) \leq 0 \; ; \forall x \in (0,1]$

$g(x) \geq 0 \; ; \forall x \in [1,+\infty)$

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $[0,+\infty)$ ដែល $f(x) = e^x + x\ln x - (1+e)x - 1; x > 0$ និង $f(0) = 0$ មានក្រាប (C_f)

1 ក. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (ដោយដឹងថា $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} + \ln x - 1 - e - \frac{1}{x}\right)$)

យើងមាន
$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} + \ln x - 1 - e - \frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x} + \ln x - 1 - e - \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty$$

ខ. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ រួចបកស្រាយតាមន័យធរណីមាត្រ

ដោយ
$$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} + \ln x - 1 - e - \frac{1}{x}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} + \ln x - 1 - e - \frac{1}{x}$$

យើងបាន
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x} + \ln x - 1 - e - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

នោះគេថាខ្សែកោងមានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្ស (Oy)

2 បង្ហាញថា f មានភាពជាប់ត្រង់ $x_o = 0$

យើងមាន $f(x) = e^x + x\ln x - (1+e)x - 1; x > 0$ និង $f(0) = 0$

យើងមាន $f(0) = 0 \;\; (1)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[e^x + x\ln x - (1+e)x - 1\right] = 0 \ (2)$$

តាម (1) & $(2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ នោះ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x_0 = 0$ ពិត

3 បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ (ដោយដឹងថា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$) រួចបកស្រាយតាមន័យធរណីមាត្រ។

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{x} + \ln x - 1 - e - \frac{1}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x} - 1 + \ln x\right) = -\infty\end{aligned}$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$)

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$

បញ្ជាក់ថា គ្មានបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោងត្រង់ $x_0 = 0$ ទេ។

4 ក. បង្ហាញថា $\forall x \in (0,+\infty) : f'(x) = g(x)$

យើងមាន $f(x) = e^x + x\ln x - (1+e)x - 1, \forall x \in (0,+\infty)$

$\Rightarrow f'(x) = e^x + \ln x + 1 - (1+e)$

$= e^x + \ln x + 1 - 1 - e = e^x - e + \ln x = g(x)$ ពិត

$\Rightarrow f'(x) = g(x)\ ; \forall x \in (0,+\infty)$

ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$

ដោយ $f'(x) = g(x)$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)\ ; \forall x \in (0,+\infty)$

$g(x) \le 0\ ; \forall x \in (0,1] \Rightarrow f'(x) \le 0\ ; \forall x \in (0,1]$

$g(x) \ge 0\ ; \forall x \in [1,+\infty) \Rightarrow f'(x) \ge 0\ ; \forall x \in [1,+\infty)$

តារាងអថេរភាពអនុគមន៍ f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$f(0)=-2$	↗	$+\infty$

ដោយ $f'(x)=0$ ត្រង់ $x=1$ និងប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ នោះគេថា $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមា ធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=e^1+1\ln 1-(1+e)-1=-2$ ។

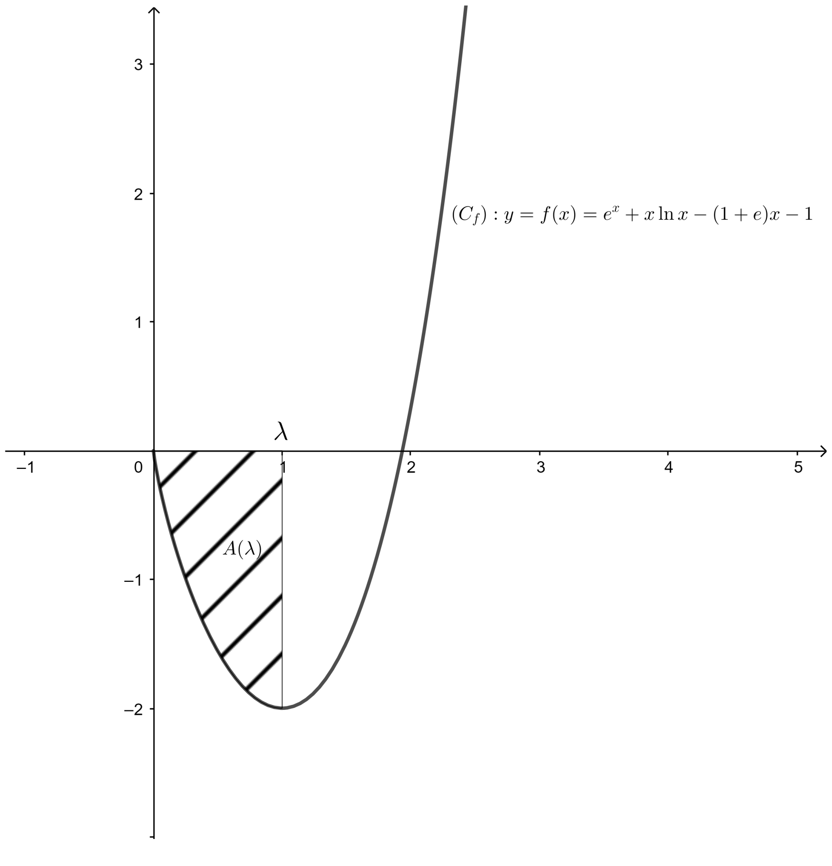
5 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=0$ មានឫស α មួយដែល $1<\alpha<2$ (ដោយ $f(2)=0.34$)

ដោយ $f(1)=-2<0$ និង $f(2)=0.34>0$

$\Rightarrow f(1)\times f(2)=-2(0.34)=-0.68<0$

$\Rightarrow f(x)=0$ មានឫស α មួយដែល $1<\alpha<2$

6 សង់ខ្សែកោង (C_f)



7 គេមានចំនួនពិត λ ស្ថិតលើ $(0,1)$ និង $A(\lambda)$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=1, x=\lambda$ ។

ក. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក បង្ហាញថា $\int_\lambda^1 x\ln x dx = \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda - \frac{1}{4}$

យើងមាន $\int x\ln x dx$

តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int u dv = uv - \int v du$

តាង $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \Rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int x\ln x dx &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_\lambda^1 x\ln x dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_\lambda^1 = \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda - \frac{1}{4}\lambda^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\int_\lambda^1 x\ln x dx = \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda - \frac{1}{4}$ ពិត

ខ. បង្ហាញថា $A(\lambda) = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}\lambda^2(3+2e) - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda + e^\lambda$

$$\begin{aligned}\text{យើងបាន } A(\lambda) &= -\int_\lambda^1 f(x)dx = \int_1^\lambda [e^x + x\ln x - (1+e)x - 1]dx \\ &= \int_1^\lambda e^x + \int_1^\lambda x\ln x dx - \int_1^\lambda (1+e)xdx - \int_1^\lambda dx \\ &= [e^x]_1^\lambda - \int_\lambda^1 x\ln x dx - \frac{1}{2}(1+e)\left[x^2\right]_1^\lambda - [x]_1^\lambda \\ &= \left(e^\lambda - e\right) - \left(\frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda - \frac{1}{4}\right) - \frac{1+e}{2}\left(\lambda^2 - 1\right) - (\lambda - 1) \\ &= e^\lambda - e - \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda + \frac{1}{4} - \frac{1+e}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2} + \frac{e}{2} - \lambda + 1 \\ &= \frac{7}{4} - \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}\lambda^2(3+2e) - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda + e^\lambda \text{ ពិត ។}\end{aligned}$$

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{\lambda\to0^+} A(\lambda) = \frac{11-2e}{4}$

$$\begin{aligned}\text{យើងបាន } \lim_{\lambda\to0^+} A(\lambda) &= \lim_{\lambda\to0^+}\left(\frac{7}{4} - \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}\lambda^2(3+2e) - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\ln\lambda + e^\lambda\right) \\ &= \frac{7}{4} - \frac{1}{2}e + 1 \\ &= \frac{7-2e+4}{4} = \frac{11-2e}{4} \text{ ។}\end{aligned}$$

ប្រធានទី ២២

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$

1. គណនាដេរីវេទី១ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វាលើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។

2. គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ។

3. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $g(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វានៅលើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។

4. សង់ខ្សែកោង (C_g) នៃអនុគមន៍ $g(x)$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ដែល $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=5cm$ ។

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ ។

1. គណនាដេរីវេទី១នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ តាមផ្នែកទី១ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

2. បង្ហាញថា $f=h\circ k$ ដោយដឹងថា h និង k ជាអនុគមន៍ពីរកំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $h(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$ និង $k(x)=\frac{1}{x}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។

3. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ផ្នែកទី៣ បើ α ជាចំនួនពិតដែល $\alpha>1$, $A(\alpha)$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយខ្សែកោង (C_g) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=1, x=\alpha$ ។ គណនា $A(\alpha)$ ជាអនុគមន៍នៃ α ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$

1. គណនាដេរីវេទី១ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វាលើចន្លោះ $(0,+\infty)$

យើងមាន
$$\begin{aligned}g(x)&=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\ \text{កំណត់លើ}\ (0,+\infty)\\&=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}\end{aligned}$$
$$\Rightarrow\quad g'(x)=[\ln(x+1)]'-(\ln x)'-\left(\frac{1}{x+1}\right)'$$

$$= \frac{(x+1)'}{(x+1)} - \frac{1}{x} + \frac{(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + x - \left(x^2 + 2x + 1\right) + x}{x(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + x - x^2 - 2x - 1 + x}{x(x+1)^2}$$
$$= -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0 \ ; \forall x \in (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow \qquad g'(x) < 0 \ ; \forall x \in (0, +\infty)$$

ដូចនេះ $g'(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)^2}$ និង $g'(x) < 0 \ ; \forall x \in (0, +\infty)$ ។

2 គណនា $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

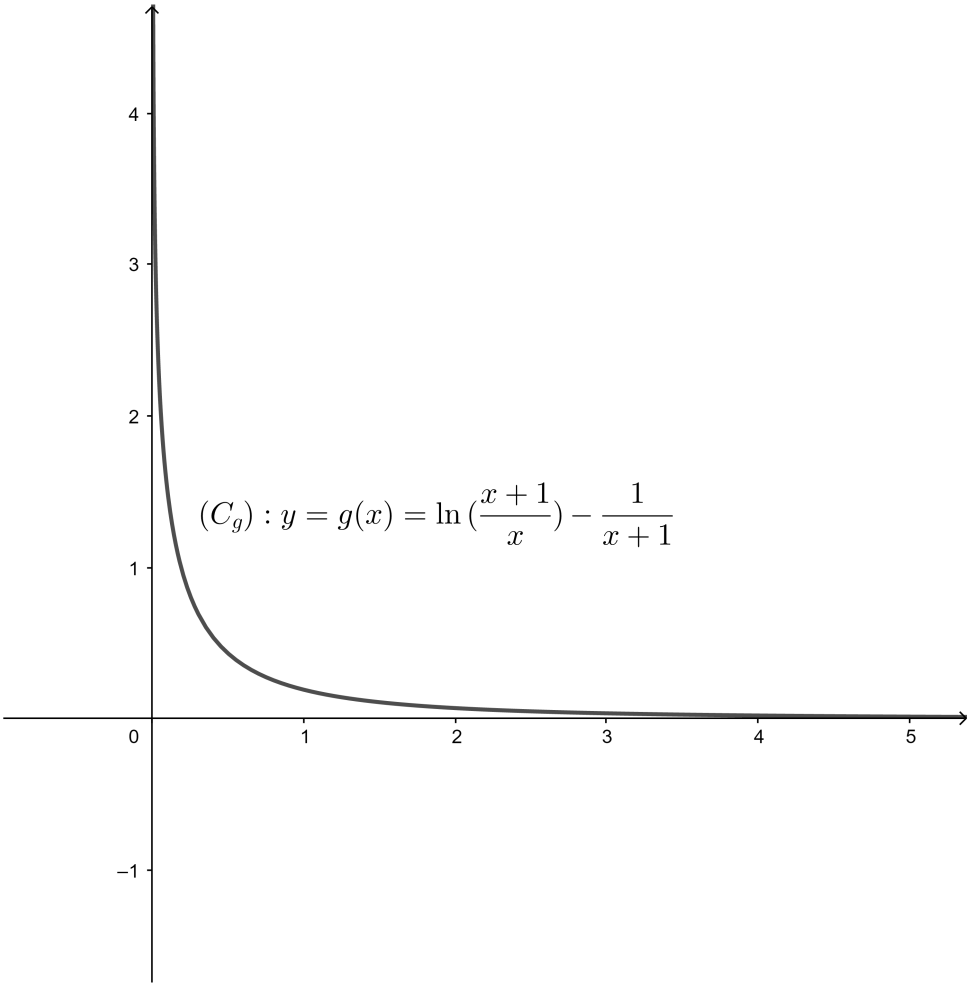
- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}\right] = +\infty$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x+1}{x}\right) = +\infty$)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}\right]$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}\right] = 0$

3 សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $g(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វានៅលើចន្លោះ $(0, +\infty)$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0

តាមតារាងសញ្ញា $g(x) > 0 \ ; \forall x \in (0, +\infty)$

4 សង់ខ្សែកោង (C_g) លើចន្លោះ $(0,+\infty)$



ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ ។

1 គណនាដេរីវេទី១នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។ តាមផ្នែកទី១ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$

យើងមាន

$$\begin{aligned} f(x) &= x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= x\left[\ln(x+1) - \ln x\right] \\ \Rightarrow \quad f'(x) &= (x)'\left[\ln(x+1) - \ln x\right] + \left[\ln(x+1) - \ln x\right]' \cdot x \\ &= \ln(x+1) - \ln x + x\left(\frac{(x+1)'}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\left(\frac{x-x-1}{x(x+1)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = g(x) > 0\ ;\ \forall x \in (0,+\infty) \end{aligned}$$

2 បង្ហាញថា $f = h \circ k$

យើងមាន h និង k ជាអនុគមន៍ពីរកំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $h(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ និង $k(x) = \dfrac{1}{x}$

គេបាន $$(h \circ k)(x) = h[k(x)] = \frac{\ln[k(x)+1]}{k(x)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = f(x)$$ ពិត

ទាញរក $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

តាង $t = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{t}$

បើ $x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$

យើងបាន $$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}}\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right) = e$)

នោះគេថា បន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C_f) ។

3 សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

ផ្នែកទី៣ គណនា $A(\alpha)$ ជាអនុគមន៍នៃ α

$A(\alpha)$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយខ្សែកោង (C_g) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x = 1, x = \alpha$

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha g(x)\,dx = \int_1^\alpha f'(x)\,dx = [f(x)]_1^\alpha$$
$$= \left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]_1^\alpha = \alpha\ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) - 1\cdot\ln(2) = \alpha\ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) - \ln 2$$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

ប្រធានទី ២៣

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ មានក្រាប (C_f) នៅលើតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

ខ. ដោយដឹងថា $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

2 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty)$ នោះយើងបាន $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ រួចគណនា $f'(1)$ ។

ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α លើចន្លោះ $(0,1]$ ។

ឃ. សង់ខ្សែកោង (C_f)

3 បើ h ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $h(x)=(\ln x)^2$

ក. គណនា $h'(x)$

ខ. ទាញរកព្រីមីទីវ F នៃ f លើ $(0,+\infty)$ ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ F ។

ដំណោះស្រាយ

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ មានក្រាប (C_f)

1 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

យើងមាន $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$

យើងបាន
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x}=-\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ នោះគេថាបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង (C_f) ។

ខ. ដោយដឹងថា $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

យើងមាន $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ នោះគេថាបន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C_f) ។

2 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty): f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$ ។

យើងមាន $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$; $\forall x\in(0,+\infty)$

យើងបាន $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(\frac{\ln x}{x}\right)'$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{(\ln x)'x-(x)'\ln x}{x^2}$$
$$= -\frac{1}{x^2}+\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}+\frac{1-\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{-1+1-\ln x}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$ ពិត ។

គណនា $f'(1)$ ។

$f'(1)=-\frac{\ln 1}{1^2}=0$

ដូចនេះ $f'(1)=0$ ។

ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$

យើងមាន $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$

ដោយ $\forall x\in(0,+\infty)$; $x^2>0$ ជានិច្ចសញ្ញារបស់ $f'(x)$ យកដូច $-\ln x$ ។

បើ $x=1\Rightarrow -\ln x=0\Rightarrow f'(x)=0$

$x<1\Rightarrow -\ln x>0\Rightarrow f'(x)>0$

$x>1\Rightarrow -\ln x<0\Rightarrow f'(x)<0$

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(1)=1$	↘	0

តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)$ ត្រង់ $x=1$ យើងឃើញថា $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ទៅ $(-)$ នោះគេថាអនុគមន៍ $f(x)$ មានចំណុចអតិបរមាត្រង់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(1,f(1))=(1,1)$ (ព្រោះ $f(1)=\dfrac{1+\ln 1}{1}=1$)។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $f(x)=0$ មានឬស α លើចន្លោះ $(0,1]$

យើងត្រូវស្រាយថា

១. $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនឬចុះនៅចន្លោះ $(0,1]$

២. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\times f(1)<0$

នៅចន្លោះ $(0,1]: f(x)$ ជាអនុគមន៍កើន (1)

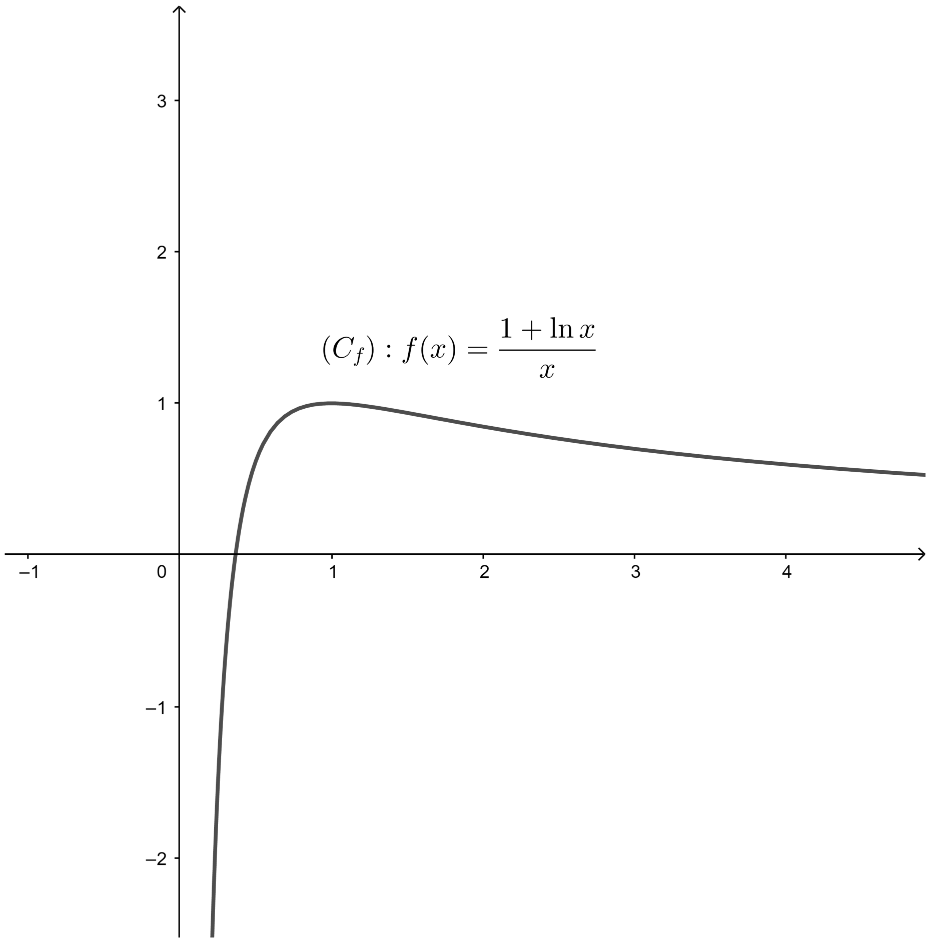
ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty<0$

$f(1)=1>0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\times f(1)<0$ (2)

តាម (1) & (2) នោះសមីការ $f(x)=0$ មានឬស α នៅចន្លោះ $(0,1]$ ។

ឃ. សង់ខ្សែកោង (C_f)



3 បើ h ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $h(x) = (\ln x)^2$

ក. គណនា $h'(x)$

យើងមាន $h(x) = (\ln x)^2$

យើងបាន $h'(x) = 2(\ln x)'(\ln x) = 2\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\ln x = \dfrac{2\ln x}{x}$

ខ. ទាញរកព្រីមីទីវ F នៃ f លើ $(0,+\infty)$

យើងមាន $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{dx}$; $\forall x \in (0,+\infty)$

យើងបាន $F(x) = \int f(x)\,dx$

$$F(x) = \int \frac{1+\ln x}{x}dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx = \ln|x| + \int (\ln x)\cdot(\ln x)'\,dx$$

$$= \ln|x| + \frac{(\ln x)^2}{2} + C, C \text{ ថេរ ។}$$

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ F ។

លីមីតចុងដែនកំណត់

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} F(x) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\ln|x| + \frac{(\ln x)^2}{2} + C\right)\\ &= \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2} + C\right) \text{ (ព្រោះ } x\to 0^+ \Rightarrow x>0 \Rightarrow |x| = x)\\ &= \lim_{x\to 0^+}(\ln x)^2\left(\frac{1}{\ln x} + 2 + \frac{C}{(\ln x)^2}\right) = +\infty\end{aligned}$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)^2 = +\infty, \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x} = 0, \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{C}{(\ln x)^2} = 0$)

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln|x| + \frac{(\ln x)^2}{2} + C\right) = +\infty$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x = +\infty, \lim\limits_{x\to +}\frac{(\ln x)^2}{2} = +\infty$)

ដេរីវេទី១

ដោយ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ នោះ $F'(x) = f(x)$ នោះសញ្ញារបស់ $F'(x)$ ដូច $f(x)$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$			0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$f(1)=1$	↘	0

$f(x) < 0\ ; \forall x \in (0,\alpha) \Rightarrow F'(x) < 0\ ; \forall x \in (0,\alpha)$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = \alpha$

$f(x) > 0\ ; \forall x \in (\alpha,+\infty) \Rightarrow F'(x) > 0\ ; \forall x \in (\alpha,+\infty)$

តារាងអថេរភាពនៃ $F(x)$

x	0		α		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$F(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

ប្រធានទី ២៤

គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=(1-x)e^{-x}+1$

1 ក. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $g(x)>0$ ។

2 គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=xe^{-x}+x$ និងមានក្រាប (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$

ក. បង្ហាញថា $f'(x)=g(x)$ ។

ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. បង្ហាញថា $D: y=x$ ជាអាស៊ីមតូតមួយនៃក្រាប (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$ ។

ឃ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C_f) និង D ។

3 សង់ក្រាប (C_f)

4 ក. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក គណនា $\int_0^{\alpha} xe^{-x}dx$ ដែល $\alpha>0$

ខ. បង្ហាញថា $A(\alpha)=I$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយ (C_f) បន្ទាត់ (D) និងបន្ទាត់ $x=0$, $x=\alpha$

គ. កំណត់ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

ដំណោះស្រាយ

គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=(1-x)e^{-x}+1$

1 ក. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(1-x)e^{-x}+1\right]=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(1-x)e^{-x}+1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x}{e^x}+1\right)=1$$

$$g'(x) = \left[(1-x)e^{-x}+1\right]' = (1-x)'e^{-x} + \left(e^{-x}\right)'(1-x)$$
$$= -e^{-x} - e^{-x}(1-x) = e^{-x}(-1-1+x) = e^{-x}(x-2)$$

ដោយ $e^{-x} > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ នោះ $g'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x-2$ ។

បើ $x-2=0 \Rightarrow x=2$

តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$
$g(x)$	$-\infty$ ↘ $g(2)=\dfrac{e^2-1}{e^2}$ ↗ $+\infty$

តាមតារាង $g'(2)=0$ ហើយវាប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=2$ នោះអនុគមន៍ $g(x)$ មានតម្លៃ អប្បបរមាត្រង់ $x=2$ គឺ $g(2)=(1-2)e^{-2}+1=e^{-2}+1=1-\dfrac{1}{e^2}$ $=\dfrac{e^2-1}{e^2}>0$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $g(x)>0$

ដោយ $g(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$

$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : g(x) \geq g(2) = \dfrac{e^2-1}{e^2} > 0$

$\Rightarrow \quad g(x) > 0$ ពិត ។

2 គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=xe^{-x}+x$ និងមានក្រាប (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$

ក. បង្ហាញថា $f'(x)=g(x)$

យើងមាន $f(x)=xe^{-x}+x$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \left(xe^{-x}+x\right)' = (x)'e^{-x} + \left(e^{-x}\right)'x + (x)'$

$= e^{-x} - xe^{-x} + 1 = (1-x)e^{-x}+1 = g(x)$ ពិត

ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(xe^{-x}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{-x}+1\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(xe^{-x}+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x}+x\right) = +\infty$

ដោយ $f'(x) = g(x) > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ នោះគេបានតារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

គ. បង្ហាញថា $D : y = x$ ជាអាសីុមតូតមួយនៃក្រាប (C_f) ខាងផ្នែក $+\infty$

ដោយ
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{-x}+x-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

នោះគេថា $(D) : y = x$ ជាអាសីុមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។

ឃ. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C_f) និង (D)

តាង $f(x) - y = xe^{-x} + x - x = xe^{-x}$

ដោយ $e^{-x} > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ នោះ $f(x) - y$ មានសញ្ញាដូច x ។

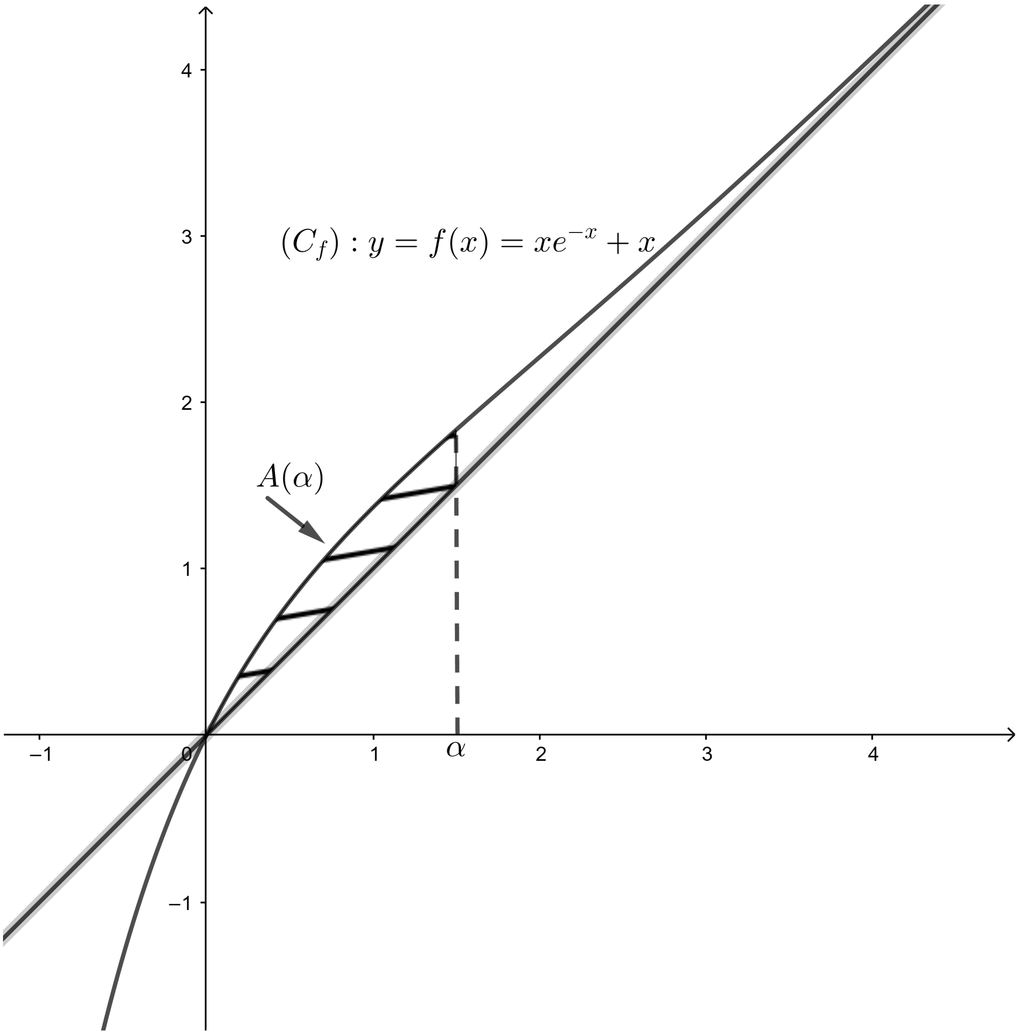
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	

$x \in (-\infty, 0)$ ក្រាប (C_f) នៅក្រោមបន្ទាត់ (D)

$x = 0$ ក្រាប (C_f) កាត់បន្ទាត់ (D)

$x \in (0, +\infty)$ ក្រាប (C_f) នៅលើបន្ទាត់ (D)

3 សង់ក្រាប (C_f)



4 ក. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក គណនា $\int_0^{\alpha} xe^{-x}dx$ ដែល $\alpha > 0$

តាង $I = \int_0^{\alpha} xe^{-x}dx$

តាង $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad I = \left[-xe^{-x}\right]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^{\alpha} - \left[e^{-x}\right]_0^{\alpha}$$

$$= \left(-\alpha e^{-\alpha} + 0\right) - \left(e^{-\alpha} - 1\right)$$

$$= -\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1$$

$$= 1 - \frac{1+\alpha}{e^{\alpha}} = \frac{e^{\alpha} - 1 - \alpha}{e^{\alpha}}$$

ដូចនេះ $I = \dfrac{e^{\alpha} - 1 - \alpha}{e^{\alpha}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $A(\alpha) = I$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់កំណត់ដោយ (C_f) បន្ទាត់ (D)

និងបន្ទាត់ $x = 0$, $x = \alpha$

តាមរូបមន្ត
$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \int_0^{\alpha} [f(x) - y]\, dx = \int_0^{\alpha} \left(xe^{-x} + x - x\right) dx \\ &= \int_0^{\alpha} xe^{-x} dx = I = \frac{e^{\alpha} - 1 - \alpha}{e^{\alpha}} \end{aligned}$$

គ. កំណត់ $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

គេបាន $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \left(\frac{e^{\alpha} - 1 - \alpha}{e^{\alpha}}\right) = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \left(1 - \frac{1+\alpha}{e^{\alpha}}\right) = 1$

ប្រធានទី ២៥

ផ្នែកទី១

1 គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=x-1-\ln x$

ក. គណនា $g'(x);\forall x\in(0,+\infty)$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty);g(x)\geq 0$ ។

2 អនុគមន៍ f កំណត់លើ $[0,+\infty)$ ដែល $\begin{cases} f(x)=x^2-x\ln x\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ មានក្រាបតំណាង (C_f) លើតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. បង្ហាញថា $f(x)$ មានភាពជាប់ត្រង់ 0 ។

ខ. សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ 0 រួចបកស្រាយតាមន័យធរណីមាត្រ។

3 បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

4 ក. បង្ហាញថា $\forall x>0;f'(x)=x+g(x)$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $[0,+\infty)$ ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

5 ក. បង្ហាញថា $(\Delta):y=x$ ជាសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 1 ។

ខ. បង្ហាញថា $\forall x>0,f(x)-x=xg(x)$ ។ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C_f) និងបន្ទាត់ (Δ)

គ. សង់ក្រាប (C_f) ។

ផ្នែកទី២

1 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x>0, \int_1^x t\ln t dt = \frac{1}{2}\ln x^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$ ។

2 ចំពោះ $n \geq 2$,តាង A_n ជាក្រឡាផ្ទៃនៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C_f) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x=\frac{1}{n}, x=1, y=0$ ។

ក. បង្ហាញថា $A_n = \frac{7}{12} - \frac{\ln(n)}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^3}$ ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្នែកទី១

1 គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=x-1-\ln x$

ក. គណនា $g'(x);\forall x\in(0,+\infty)$

គេបាន $g'(x) = (x-1-\ln x)' = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

ខ. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty); g(x)\geq 0$

យើងមាន $g'(x)=\frac{x-1}{x}$ ដោយ $x>0$ នោះ $g'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x-1$

បើ $x-1=0 \Rightarrow x=1$

- $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x-1-\ln x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1-\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g(1)=1-1-\ln 1=0$	↗	$+\infty$

តាមតារាងសញ្ញា $g'(1)=0$ ហើយ $g'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=1$ នោះគេថា អនុគមន៍ $g(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=1$ គឺ $g(1)=0$ (ព្រោះ $g(1)=1-1-\ln 1=0$) ។

គេបាន $\forall x\in(0,+\infty): g(x)\geq g(0)=0$

$\Rightarrow \quad g(x)\geq 0$ ពិត

2 អនុគមន៍ f កំណត់លើ $[0,+\infty)$ ដែល $\begin{cases} f(x)=x^2-x\ln x\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ មានក្រាបតំណាង (C_f)

ក. បង្ហាញថា $f(x)$ មានភាពជាប់ត្រង់ 0

យើងមាន $f(0)=1 \ (1)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2-x\ln x\right)=0 \ (2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0 \ (3)$$

នោះ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

ខ. សិក្សាភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ 0 រួចបកស្រាយតាមន័យធរណីមាត្រ។

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x\ln x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty$$ មិនកំណត់

នោះគេថា f គ្មានដេរីវេខាងស្តាំ $x=0$ ហើយគ្មានបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $x=0$ ទេ។

3 បង្ហាញថា $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

នោះ (C_f) គ្មានអាស៊ីមតូតទេ ។

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

នោះគេថាខ្សែកោង (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលមានទិសអាស៊ីមតូតអ័ក្ស $\left(\overrightarrow{Oy}\right)$ ។

4 ក. បង្ហាញថា $\forall x > 0; f'(x) = x + g(x)$

យើងមាន $f(x) = x^2 - x\ln x$

យើងបាន
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 - x\ln x\right)' \\ &= 2x - (\ln x + 1) \\ &= 2x - \ln x - 1 \\ &= x + x - \ln x - 1 \\ &= x + g(x) \end{aligned}$$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $[0, +\infty)$ ។

យើងមាន $f'(x) = x + g(x)$

$\forall x \in [0, +\infty)$

គេបាន $\begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x + g(x) \geq 0$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $[0, +\infty)$ ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

5 ក. បង្ហាញថា $(\Delta): y = x$ ជាសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 1

តាមរូបមន្ត $(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

ដោយ $f'(x) = 2x - \ln x - 1 \Rightarrow f'(1) = 2 - \ln 1 - 1 = 1$

$y_0 = f(x_0) = f(1) = 1^2 - 1 \cdot \ln 1 = 1$

$\Rightarrow \quad (\Delta): y = 1(x - 1) + 1 = x - 1 + 1 = x$ ពិត

ខ. បង្ហាញថា $\forall x > 0, f(x) - x = xg(x)$

គេបាន $f(x) - x = x^2 - x\ln x - x = x(x - \ln x - 1) = xg(x)$ ពិត

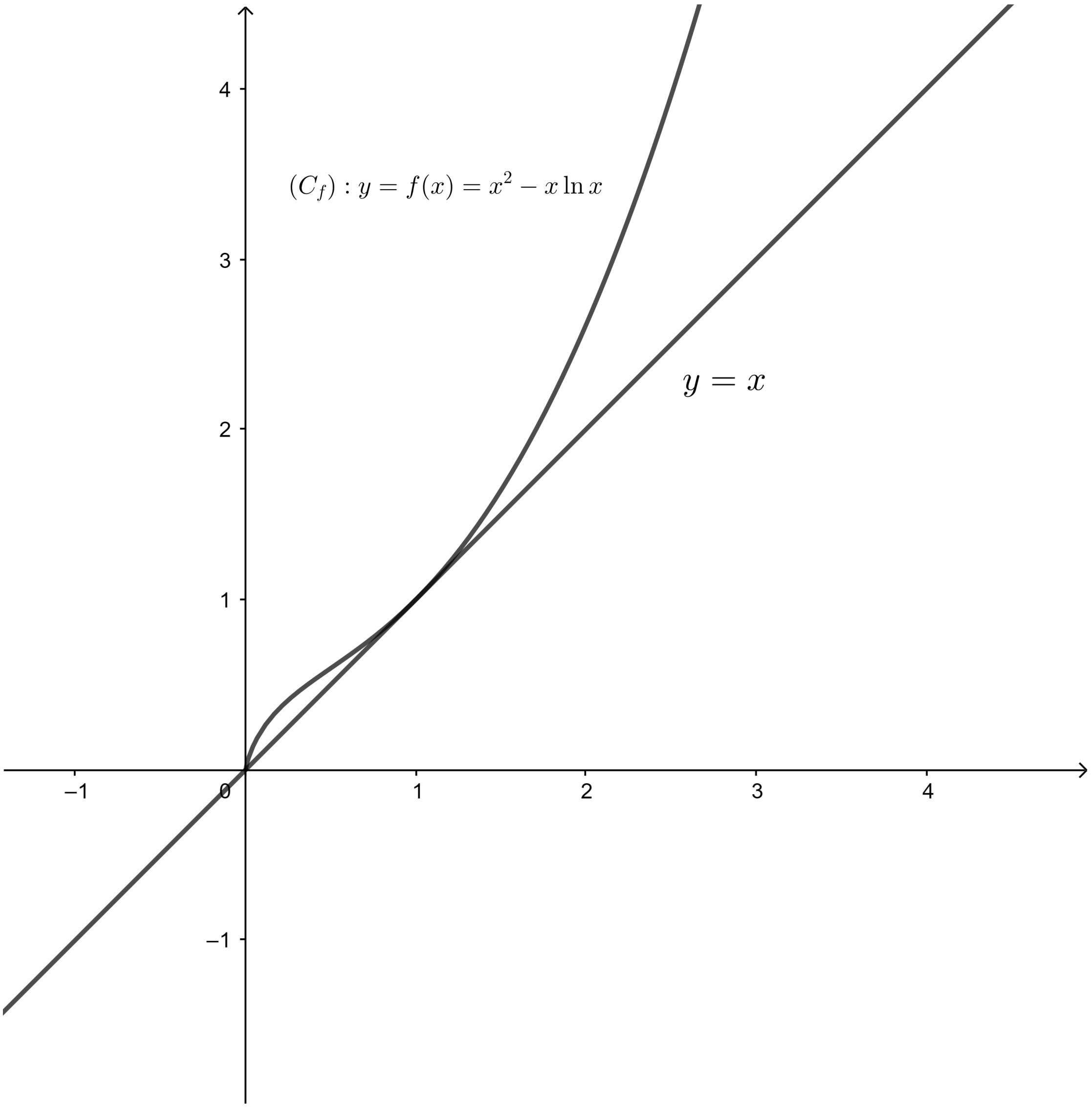
សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C_f) និងបន្ទាត់ (Δ)

យើងមាន $f(x) - x = xg(x) \geq 0$

ព្រោះ $x > 0$ និង $g(x) \geq 0$ លើ $(0, +\infty)$

$\Rightarrow$ (C_f) នៅលើ (Δ) ហើយ (C_f) ប៉ះ (Δ) ត្រង់ $x = 1$ ។

គ. សង់ក្រាប (C_f)



ផ្នែកទី២

1 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x > 0, \int_1^x t\ln t dt = \frac{1}{2}\ln x^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$ ។

តាង $I = \int_1^x t\ln t dt$

តាង $\begin{cases} u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t}dt \\ dv = tdt \Rightarrow v = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad I &= \left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^x - \frac{1}{2}\int_1^x tdt \\
&= \left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_1^x \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}\left(x^2 - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} \text{ ពិត}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$

2 ចំពោះ $n \geq 2$,តាង A_n ជាក្រឡាផ្ទៃនៃផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C_f) អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ $x = \frac{1}{n}, x = 1, y = 0$

ក. បង្ហាញថា $A_n = \frac{7}{12} - \frac{\ln(n)}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^3}$

គេបាន
$$\begin{aligned}
A_n &= \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(x^2 - x\ln x\right)dx \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2dx - \int_{\frac{1}{n}}^1 x\ln xdx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{n}}^1 + \int_1^{\frac{1}{n}} x\ln xdx \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3n^3}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3n^3}\right) + \left[\frac{1}{2n^2}\ln\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4}\right] \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3n^3} - \frac{\ln n}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{7}{12} - \frac{\ln n}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^3} \text{ ពិត}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $A_n = \frac{7}{12} - \frac{\ln n}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{3n^3}$ ពិត ។

ខ. គណនា $\lim_{n\to+\infty} A_n$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{12}-\frac{\ln n}{2n^2}-\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{3n^3}\right)$

$$= \left(\frac{7}{12}-0-0-0\right)$$

$$= \frac{7}{12}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{7}{12}$ ។

ផ្នែកទី 3

លំហាត់អនុវត្តន៍

លំហាត់ទី១

អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$

1 ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ \frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ ។

ខ. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស ។

2 គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=-\frac{1}{2}(\frac{e^x-1}{e^x+1})^2$ ។

ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. ទាញបញ្ជាក់ថា $\forall x\in[0,+\infty)\ ;\ 1-\frac{2}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}x$ ។

4 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]=0$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

5 សង់ក្រាប (C_f) លើតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

6 ក. ដោយដឹងថា $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_{-1}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx=\ln\frac{e+1}{2}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C_f) , អ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងបន្ទាត់ពីរទៀតដែលមានសមីការ $x=-1$ និង $x=0$ ។

លំហាត់ទី២

ផ្នែកទី១ គេឱ្យអនុគមន៍កំណត់លើ $[0,+\infty)$ ដែល $g(x)=(x-1)e^x+(x+1)$

1 គណនា $g'(x)$ចំពោះ $\forall x\in[0,+\infty)$ រួចទាញបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ g កើនដាច់ខាតលើ $[0,+\infty)$។

2 បង្ហាញថា $\forall x\in[0,+\infty):g(x)\geq 0$(ដោយដឹងថា $g(0)=0$)។

ផ្នែកទី២ គេឱ្យអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដែល $f(x)=\dfrac{xe^x}{(e^x-1)^2}$ និងមានក្រាប (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1 បង្ហាញថាអនុគមន៍ f គឺជាអនុគមន៍សេស។

2 ក. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

ខ. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

(ដោយដឹងថា $\forall x\in\mathbb{R}^*;f(x)=\dfrac{x}{e^x(1-e^{-x})^2}$)

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty);f'(x)=\dfrac{e^{-x}}{(e^x-1)^3}\cdot g(x)$។

ខ. គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4 សង់ក្រាប (C_f)

លំហាត់ទី៣

ផ្នែកទី១ គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=e^{-x}+x-1$

1 គណនា $g'(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា g ជាអនុគមន៍កើនលើ $[0,+\infty)$ និងជាអនុគមន៍ចុះលើ $(-\infty,0]$។

2 ទាញបញ្ជាក់ថា $\forall x\in\mathbb{R};g(x)\geq 0$ (ដោយដឹងថា $g(0)=0$) ព្រមទាំងទាញបញ្ជាក់ថា $\forall x\in\mathbb{R};e^{-x}+x\geq 1$

ផ្នែកទី២ គេឱ្យអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$ និងមានក្រាប (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$។

1 រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

2 ក. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}^*; f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^x}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

3 ក. បង្ហាញថា $x\in\mathbb{R}; f'(x)=\dfrac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$ ។

ខ. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4 ក. រកសមីការបន្ទាត់ (Δ) ប៉ះខ្សែកោង (C_f) ត្រង់ចំណុច O គល់តម្រុយ។

ខ. បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}; x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ រួចសិក្សាសញ្ញា $x-f(x)$ លើ $\mathbb{R}$។

គ. សិក្សាទីតាំងធៀបនៃខ្សែកោង (C_f) និងបន្ទាត់ (Δ)។

5 សង់បន្ទាត់ (Δ) និងខ្សែកោង (C_f) លើ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ (ដោយដឹងថា $\dfrac{1}{1-e}\approx-0.6$)

លំហាត់ទី៤

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=e^{2x}-2x$

1 គណនា $g'(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$ ព្រមទាំងស្រាយបញ្ជាក់ថា g ជាអនុគមន៍កើនលើ $[0,+\infty)$ និងជាអនុគមន៍ចុះលើ $(-\infty,0]$ ។

2 ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in\mathbb{R}; g(x)>0$ (ដោយដឹងថា $g(0)=1$)។

ផ្នែកទី២ គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\ln\left(e^{2x}-2x\right)$ និង (C_f) ជាក្រាបតំណាងលើតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1 ក. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$។

ខ. បង្ហាញថា $\forall x \in \mathbb{R}^*; \dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^x}{x} - 2\right) \cdot \dfrac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{e^{2x} - 2x}$ ។

គ. បញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ (ដោយដឹងថា $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$) ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាខ្សែកោង (C_f) មានមែកអនន្តជាមែកប៉ារ៉ាបូលត្រង់វ៉ែស៊ីណា $-\infty$ ។

2 ក. $\forall x > 0$ បង្ហាញថា $1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} > 0$ និង $2x + \ln\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x)$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D): y = 2x$ គឺជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f) ត្រង់វ៉ែស៊ីណា $+\infty$ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x \in [0, +\infty); f(x) - 2x \leq 0$ និងស្រាយបញ្ជាក់ថា (C_f) ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ (D) លើចន្លោះ $[0, +\infty)$ ។

3 ក. បង្ហាញថា $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \dfrac{2\left(e^{2x} - 1\right)}{g(x)}$ ។

ខ. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើ $\mathbb{R}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4 សង់បន្ទាត់ (D) និងខ្សែកោង (C_f) លើ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។ (ដោយដឹងថា (C_f) មានចំណុចរបត់ពីរ)

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = 2(x-1)^2 e^{-x}$ ។ តាង (C_f) ជាក្រាបក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ។

1 គណនាលីមីត $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ រួចទាញបញ្ជាក់ថាក្រាប (C_f) មានអាស៊ីមតូតដេកមួយ ។

2 គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

3 កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដោយដឹងថា $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{-x}$ គឺជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ លើ $\mathbb{R}$ ។

4 ចូរសង់ក្រាប (C_f) រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C_f) អ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងបន្ទាត់ $x=-2, x=0$។

លំហាត់ទី៦

អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\frac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប (C_f) ។

1 រក $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C_f)

2 គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

3 សង់ក្រាប (C_f) នៅក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ គេឲ្យ $e=2.7$; $\frac{2}{e}=0.7$ ។

4 គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C_f) អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

លំហាត់ទី៧

ផ្នែកទី១ គេមានអនុគមន៍ $g(x)=x^2-1+\ln x$ កំណត់លើ $I=(0,+\infty)$ ។

1 គណនា $g'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$ លើចន្លោះ I ។

2 គណនា $g(1)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $g(x)$ លើ I(ដោយមិនបាច់គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់)

3 បញ្ជាក់សញ្ញានៃអនុគមន៍ $g(x)$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1,+\infty)$ ។

ផ្នែកទី២ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ I ដោយ $y=f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$ និងមានក្រាប (C_f) ។

1 សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។

2 បង្ហាញថា ដេរីវេនៃអនុគមន៍ f លើ I គឺ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ។

3 សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ដោយប្រើលទ្ធផលផ្នែកទី១ ។

4 បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(L): y = x+1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C_f), (L) ក្រាប (C_f) ត្រង់ $+\infty$ ។

5 រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C_f) និង (L) រួចបញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C_f) និង (L) ។

6 គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$ និង សង់ក្រាប (C_f) ។

7 គណនាផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយក្រាប (C_f), (L) និងអ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រូវនឹងចន្លោះ $1 \le x \le 2$ ។ (គេយក $\ln 2 = 0.7$)

លំហាត់ទី៨

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$ មានក្រាបតំណាង (C_f) ។

1 គណនាលីមីត f ត្រង់ $+\infty$ ។

2 ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(x) = e^{-x}(3 + 2xe^{x} - 4e^{x})$ រួចកំណត់លីមីត f ត្រង់ $-\infty$ ។

3 បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D): y = 2x - 4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត នៃក្រាប (C_f) ត្រង់ $+\infty$ ។

4 សិក្សាទីតាំងខ្សែកោង (C_f) ធៀបនិងបន្ទាត់ (D)

5 គណនា $f'(x)$ និងដោះស្រាយវិសមីការ $-3e^{-x} + 2 \ge 0$ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

6 កំណត់សមីការបន្ទាត់ដែលប៉ះនិងខ្សែកោង (C_f) ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស 0 ។រួចសង់ $(C_f), (T)$ និង (D) ។

លំហាត់ទី៩

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = 8\left(e^{x} - e^{-2x}\right)$ មានក្រាបតំណាង (C_f) និងកំណត់លើ $[0;+\infty)$

1 បង្ហាញថាគ្រប់ $x > 0$ គេបាន $f'(x) = 8e^{-x}(2e^{-x} - 1)$ ។

2 ដោះស្រាយវិសមីការ $2e^{-x} - 1 < 0$ លើចន្លោះ $[0;+\infty)$

3 ចូរកំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនិងខ្សែកោង (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=\ln 2$

4 គូសតារាងអថេរភាព f ។ សង់ខ្សែកោង (C_f) និង (T) ។

លំហាត់ទី១០

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=xe^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}$ មានក្រាបតំណាង (C_f)

1 រកសំណុំដែនកំណត់នៃ f ។

2 គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមក្រាប។

3 បង្ហាញថា $f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}$ និងទាញរកទិសដៅអថេរភាពនៃ f ។

4 គណនា $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ និង $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

5 គេតាង (Δ) ជាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនិងបន្ទាត់ (Δ)។

6 សង់ខ្សែកោង (C_f) និង បន្ទាត់ (Δ) ។

លំហាត់ទី១១

ផ្នែកទី១ គេមានអនុគមន៍ $g(x)=x^2+2-2\ln x$ កំណត់លើ $(0;+\infty)$

1 បង្ហាញថា $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x}$ ដែលជាអនុគមន៍ g' ដេរីវេនៃ g ។

2 សិក្សាសញ្ញា g' និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ g (មិនបាច់រកលីមីត g ត្រង់ $(0;+\infty)$)

3 ទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ លើចន្លោះ $(0;+\infty)$

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ $f(x)=\frac{2\ln x}{x}+x-1$ មានក្រាបតំណាង (C_f)

1 គណនា $\lim_{x\to 0} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C_f)

2 ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាបន្ទាត់ (Δ) មានសមីការ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C_f)

3 សិក្សាទីតាំងធៀបនៃក្រាប (C_f) និង (Δ)។

4 គណនា $f'(x)$ និង បង្ហាញថា $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

5 ទាញពីផ្នែកទី១ នូវសញ្ញា $f'(x)$ និងគូសតារាងអថេរភាព f

6 កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនិង (C_f) ត្រង់ចំណុច ដែលមានអាប់ស៊ីស 1។សង់ $(C_f);(\Delta)$ និង (T) លើតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ តែមួយ ។

លំហាត់ទី១២

ផ្នែកទី១ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = e^{-2x} + 4e^{-x} + 6x + 1$ មានខ្សែកោង (C_f) ក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1 គណនាលីមីត $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ និងបង្ហាញថា $f(x) = e^{-x}\left(e^{-x} + 4 + 6xe^{x} + e^{x}\right)$ ។ ទាញរក $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2 តាង $h(x) = f(x) - (6x+1)$ គណនា $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ ។ តើគេអាចសន្និដ្ឋានបានយ៉ាងដូចម្តេច ?

3 កំណត់សញ្ញានៃ $h(x)$ និងទាញរកទីតាំងខ្សែកោង (C_f) ធៀបនិងបន្ទាត់ $D: y = 6x + 1$

ផ្នែកទី២

1 បង្ហាញថា $f'(x) = -2\left(e^{-x} + 3\right)\left(e^{-x} + 1\right)$

2 ដោះស្រាយវិសមីការ $e^{-x} - 1 \geq 0$ និងទាញរកសញ្ញា $f'(x)$

3 គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

4 សង់ (C_f) និង (D) ក្នុងតម្រុយតែមួយ

លំហាត់ទី១៣

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=1+\frac{1}{2}x^2-4\ln x$ មានខ្សែកោងតំណាង (C_f) ។

1 រកដែនកំណត់នៃ f ។

2 គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។

3 តាង f' ជាដេរីវេនៃ f ។ គណនា f' និងបង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x}$ ។

4 រកសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹង f ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ។

5 ទាញរកសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងគូសតារាងអថេរភាពនៃ f និងសង់ (C_f) និង (T) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

6 ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $F(x)=\frac{1}{6}x^3-4x\ln x+5x$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ f ។

7 គណនា $\int_1^5 f(x)\,dx$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យធរណីមាត្រ ។

លំហាត់ទី១៤

ផ្នែកទី១ គេមានអនុគមន៍ $u(x)=\ln x+x-3$ កំណត់លើចន្លោះ $(0;+\infty)$

1 ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា u ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើចន្លោះ $(0;+\infty)$

2 ស្រាយថាសមីការ $u(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់នៅចន្លោះ $(2;3)$ ។ ទាញរកសញ្ញានៃ $u(x)$ លើ $(0;+\infty)$ ។

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0;+\infty)$ ដោយ $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)+2$ និងមានខ្សែកោងតំណាង (C_f) ។

1 កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។ គណនា $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ និង $f(4)$ ។

2 បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}$ ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f និងសង់ខ្សែកោង (C_f) ។

ផ្នែកទី៣ តាង (C') ជាខ្សែកោងតំណាង $y=\ln x$ កំណត់លើចន្លោះ $(0;+\infty)$ ។

1 បង្ហាញថា $f(x)-\ln x=\dfrac{2-\ln x}{x}$ ។ ទាញរកចំណុចប្រសព្វរវាង (C_f) និង (C') ។

2 គណនា $I=\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{2-\ln x}{x}dx$ រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមក្រាប ។ (គេយក $\ln 2=0.7$ និង $\ln 3=1.1$)

លំហាត់ទី១៥

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)$ កំណត់លើ $(0;+\infty)$ និងមានខ្សែកោងតំណាង (C_f)

1 គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។

2 បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y=2x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C_f) ។

3 សិក្សាទីតាំងធៀបនៃ (C_f) និង (Δ) ។

4 គណនា $f'(x)$ ។ បង្ហាញថា $f'(x)=xe^{-x}+2\left(1-e^{-x}\right)$ និង $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

5 គណនា $f'(0)$ រួចសង់តារាងអថេរភាព f និងសង់ (C_f) ។

6 គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) បន្ទាត់ (Δ) និង $x=1\,;\,x=3$ ។

7 កំណត់កូអរដោនេចំណុច A នៃខ្សែកោង (C_f) ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់នេះស្របនឹង (Δ) ។

8 គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (Δ)

លំហាត់ទី១៦

ក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ឯកតា $2cm$ អាប់ស៊ីស និង $3cm$ លើអ័ក្សអរដោនេ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់ដោយ $y = f(x) = x - 1 - \dfrac{4e^x}{e^x + 4}$ មានខ្សែកោងតំណាងក្រាប (C_f) ។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f និងគណនាលីមីតត្រង់ $\pm\infty$ ។
2. បង្ហាញថា $f(x)$ អាចសរសេរជារាង $y = f(x) = x - 5 + \dfrac{16}{e^x + 4}$ ។
3. បង្ហាញថា $d_1 : y = x - 1$ និង $d_2 : y = x - 5$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C_f) ខាង $-\infty$ និង $+\infty$ រៀងគ្នា។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបបន្ទាត់ d_1 & d_2។
4. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)$ កើនជានិច្ច។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$
5. កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះខ្សែកោង (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $2\ln 2$ ។
6. បង្ហាញថា $I(2\ln 2, 2\ln 2 - 3)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C_f) ។ សង់ក្រាប $(C_f); (d_1); (d_2)$ និង (T) ។

លំហាត់ទី១៧

ក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ មានអនុគមន៍ $y = f(x) = \left(4x^2 + 4x + 1\right)e^x$ មានក្រាប (C_f)។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f និង គណនា $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតនៃ (C_f) ។
2. គណនា $f'(x)$ និង បង្ហាញថា f មានអតិបរមា និង អប្បបរមាមួយដែលត្រូវកំណត់។ សង់តារាងអថេរភាព f ។
3. កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនិងក្រាប (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអ័ក្សអាប់ស៊ីស 0 ។
4. គណនា $f(-4)$ និង $f(-1)$ រួចសង់ (C_f) & (T)។(យក $e^{-\frac{5}{2}} = 0.082$, $e^{-4} = 0.018$ & $e^{-1} = 0.36$)

លំហាត់ទី១៨

ក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$ មានក្រាប (C_f) ។

1 រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f និង គណនាលីមីតត្រង់ 0 និង $\pm\infty$ ។

2 បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d_1) : y = x + 1$ និង $(d_2) : y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតនិងក្រាប (C_f) ខាងផ្នែក $-\infty$ និង $+\infty$ រៀងគ្នា។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនិង (d_1) និង (d_2) ។

3 បង្ហាញថា $f'(x) = \dfrac{e^{2x} + 1}{(e^x - 1)^2}$ និង សិក្សាសញ្ញានៃ f' ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4 គណនា $f(-1)$ និង $f(1)$។ សង់ខ្សែកោង (C_f)។

លំហាត់ទី១៩

ក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)$ មានក្រាប (C_f)។

1 រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f និង គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់។ ទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C_f) ។

2 គណនា $f'(x)$ និង បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច។

3 កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស -2

4 បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានឬសតែមួយគត់ចន្លោះ $(1, 2)$ ។

5 សង់តារាងអថេរភាព នៃអនុគមន៍ f ។

6 គណនា f ចំពោះ $x \in \{-3, -2, 2, 3\}$ ។ សង់ខ្សែកោង (C_f) និង បន្ទាត់ (T) ។

លំហាត់ទី២០

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-\ln x+x}{x}$ និង យើងតាងដោយ (C_f) ក្រាបរបស់វាក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. បង្ហាញថានៅលើចន្លោះ $(0,+\infty)$, $f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$ ។ សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។

2. បង្ហាញថាដេរីវេ នៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\dfrac{x^2-1+\ln x}{x^2}$ ។

3. ដោយដឹងថាកន្សោម $\left(x^2-1+\ln x\right)$ យកតម្លៃអវិជ្ជមានដាច់ខាតលើចន្លោះ $(0,1)$ ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $(0,+\infty)$ ។

4. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) មានសមីការ $y=x+1$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប (C_f) ត្រង់ $+\infty$ ។ ចូរសិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C_f) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (Δ) រួចសង់បន្ទាត់ (Δ) និងក្រាប (C_f)។

លំហាត់ទី២១

ផ្នែកទី១ សិក្សាអនុគមន៍ជំនួយ៖ គេឲ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=1-\ln x+2x^2$ ។

1. បង្ហាញថា $g'(x)=\dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x}$ ។ សិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$ នៅចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។

2. គណនា $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ g (មិនចាំបាច់គណនាលីមីតទេ) ទាញថា g ជាអនុគមន៍វិជ្ជមានដាច់ខាត។

ផ្នែកទី២ សិក្សាអនុគមន៍ f ៖ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+2x-3$ មានខ្សែកោង (C_f) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ឯកតា $2cm$ លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង $1cm$ លើអ័ក្សអរដោនេ។

1. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង ទាញថា (C_f) មានអាស៊ីមតូតមួយដែលត្រូវកំណត់។

2 គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ និងបង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y = 2x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C_f) ។

3 បង្ហាញថា $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ទាញរកសញ្ញានៃ $f'(x)$ និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4 រក A និង B ជាចំណុចនៃខ្សែកោង (C_f) មានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា e និង $\sqrt{e}$ ។ បង្ហាញថា $f > 0$ លើចន្លោះ $[\sqrt{e}, e]$ ។

5 បង្ហាញថា មានបន្ទាត់ (T) ប៉ះនិងខ្សែកោង (C_f) ត្រង់ A ដែលស្របនិង (Δ)។ សង់ $(C_f); (T); (\Delta)$។

លំហាត់ទី២២

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ មានក្រាប (C_f)។

1 រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f និង គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់នៃ f

2 បង្ហាញថា $(d): y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C_f)។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃ (C_f) ធៀប (d)។

3 គណនា $f'(x)$ និង កំណត់តម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃអនុគមន៍ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4 គណនា $f(-2)$ និង $f(4)$។ សង់ខ្សែកោង (C_f)។

លំហាត់ទី២៣

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = 1 - \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ មានក្រាប (C_f)។

1 សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។

2 គណនា $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ បង្ហាញថា f មានអតិបរមាមួយ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

3 បង្ហាញថា (C_f) មានបន្ទាត់ (D_1) ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។

4 បង្ហាញថា (C_f) មានបន្ទាត់ (D_2) ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$ ។

5 សង់ $(D_1);(D_2)$ និង (C_f) ។

លំហាត់ទី២៤

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ $f(x)=x-1+\ln x$ កំណត់លើចន្លោះ $(0;+\infty)$ ។ គណនា $f(1);f'(x)$ ។ រួចសង់តារាងអថេរភាព f (មិនចាំបាច់គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ទេ)។ ទាញសញ្ញានៃ f ។

ផ្នែកទី២ គេមានអនុគន៍ $g(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$ មានក្រាបតំណាង (C_g) ។

1 គណនា $g'(x)$ ។ ទាញរកសញ្ញានៃ $g'(x)$ ដោយប្រើសំណួរផ្នែកទី១។

2 សង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។

3 បង្ហាញថា (C_g) មានអាស៊ីមតូតជាមួយខ្សែកោង $H:y=\ln x$ ។ សិក្សាទីតាំង (C_g) និង អាស៊ីមតូតខ្សែកោងនេះ។

4 សង់ខ្សែកោង (C_g) និង អាស៊ីមតូត H ។

5 គណនាផ្ទៃក្រឡាកំណត់ដោយខ្សែកោង (C_g) ជាមួយនិង H លើចន្លោះ $[1;e]$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ មានក្រាប (C_f)។

1 រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f និងគណនាលីមីតចុងដែនកំណត់។ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតក្រាប (C_f)

2 បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D):y=\frac{1}{2}x-5$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C_f)។

3 បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}$ ។ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

4 បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសពីរ $\alpha\in(2,3)$ & $\beta(9,10)$

5 សង់ខ្សែកោង (C_f) និងបន្ទាត់ (D) ។

6 បង្ហាញថា $H(x)=(x-1)\ln(x-1)-(x-2)\ln(x-2)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $h(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ ។ ទាញរកព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ និងទាញរកផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះ $[3,9]$

លំហាត់ទី២៦

ផ្នែកទី១ គេមានអនុគមន៍ $g(x)=2x^2-4\ln x+4$ កំណត់លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។បង្ហាញថា $g'(x)=\frac{4x^2-4}{x}$ និងកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$ (ដោយមិនចាំគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ទេ)។

ផ្នែកទី២ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=2x-3+4\frac{\ln x}{x}$ មានខ្សែងកោងតំណាង (C_f)។

1 សិក្សាលីមីតត្រង់ 0 និង $+\infty$ និងបកស្រាយលទ្ធផល។

2 បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y=2x-3)$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ និងសិក្សាទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង (d) ។

3 បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ។ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4 បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឬសតែមួយគត់ចន្លោះ $[1,2]$ ។

5 តើមានចំណុចអាប់ស៊ីស x ណាមួយដែលធ្វើឱ្យខ្សែកោង (C_f) មានបន្ទាត់ប៉ះមួយស្របនឹង (d) ។ សង់ខ្សែកោង (C_f) ។

លំហាត់ទី២៧

គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$ កំណត់លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ មានក្រាបតំណាង (C_f)

1 កំណត់លីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមក្រាប។

2 បង្ហាញថា $f(x)=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ទាញរកលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ និងកំណត់អាស៊ីមតូត។

3 បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ f' ។ គណនា $f(1)$ និង $f\left(e^2\right)$ គូសតារាងអថេរភាព f

4 កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះខ្សែកោង (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ។ រួចសង់ (C_f) និង (T).។

លំហាត់ទី២៨

ផ្នែកទី១ ចំពោះ $x\in(0,+\infty)$ គេមានអនុគមន៍ $u(x)=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$ មានបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ហើយខ្សែកោងរបស់វាកាត់តាម $A(1,0)$ និង $B(4,0)$ ។ចូរបង្ហាញថា $u(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2}$

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ $f(x)=x-5\ln x-\dfrac{4}{x}$ មានក្រាបតំណាង (C_f) និងកំណត់លើ $(0,+\infty)$ កំណត់លីលីមីតនៃអនុគន៍ $f(x)$ ត្រង់ 0 ដោយប្រើ $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$ ។

2 កំណត់លីមីតនៃ $f(x)$ ពេល x ខិតជិត $+\infty$ ។

3 បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $f'(x)=u(x)$ ។ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងកំណត់តម្លៃបរមា រួចសង់តារាងអថេរភាព f ។

4 គណនា $f''(x)$ រួចបញ្ជាក់ថា f មានចំណុចរបត់ដែរឬទេ?

5 គណនា $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ និង $f(8)$ រួចសង់ខ្សែកោង (C_f)។

លំហាត់ទី២៩

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=x+1+\dfrac{x}{e^x}$ មានក្រាបតំណាង (C_f) ក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1 អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=1-x+e^x$ ។សង់តារាងអថេរភាពនៃ g លើ $\mathbb{R}$ (មិនបាច់រកលីមីតចុងដែនទេ)ទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ ។

2 កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ រួចលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត (D)

3 បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដេរីវេ f' នៃf គឺ $f'(x)=e^{-x}g(x)$

4 សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

5 បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ ដែល $-1<\alpha<0$

6 ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (T) ដែលមានសមីការ $y=2x+1$ ជាបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 0

ខ. សិក្សាទីតាំង (C_f) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (T)

7 សង់ខ្សែកោង (C_f) ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត (D) និងបន្ទាត់ប៉ះ (T)

លំហាត់ទី៣០

ផ្នែកទី១ គេមានអនុគមន៍ $g(x)=x^2-2\ln x+4$ កំណត់លើចន្លោះ$I=(0,+\infty)$។

1 យក g' ជាអនុគមន៍ដេរីវេនៃ g លើចន្លោះ I ។ចូរបង្ហាញថា $g'(x)=2\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$

2 សង់តារាងអថេរភាពនៃ g លើ I

3 ទាញរកសញ្ញានៃ g លើ I

ផ្នែកទី២ គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln x-1}{x}$ កំណត់លើ I និងមានក្រាបតំណាង (C_f)

1 សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និងត្រង់ $+\infty$ ។

2 បង្ហាញថា $f'(x)$ ដេរីវេនៃ f លើ I គឺ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$ ។ គណនា $f(1)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

3 បង្ហាញថា បន្ទាត់ $(D): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C_f) ។បញ្ជាក់ទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង (D)

4 សង់ក្រាប (C_f) ។

លំហាត់ទី៣១

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$ ។

1 កំណត់លីមីតនៃ g ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។

2 យក g' ជាដេរីវេនៃ g ។ ចូរបង្ហាញថា $g'(x) = \frac{2x^2 + 3x + 4}{x}$ ។

3 គូសតារាងអថេរភាពនៃ g លើ $(0,+\infty)$ ។

4 គណនា $g(1)$ និងទាញរកសញ្ញានៃ $g'(x)$ លើ $(0,+\infty)$ ។

ផ្នែកទី២ គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ។

1 កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និងលីមីតត្រង់ $+\infty$ ដោយប្រើ $f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$ ។

2 បង្ហាញថា f' ដេរីវេនៃ f កំណត់ដោយ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ។ទាញរកសញ្ញានៃ f' និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

3 ដោះស្រាយសមីការ $f(x) = x$ ។រួចបកស្រាយលទ្ធផលតាមក្រាប។ សង់ខ្សែកោង (C_f) និងបន្ទាត់ $(D): y = x$ ។

លំហាត់ទី៣២

ផ្នែកទី១ អនុគមន៍ $g(x) = 1 - \ln x - x^2$ កំណត់លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។

1 សិក្សាអថេរភាពនៃ g លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ មិនបាច់គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ទេ។

2 គណនា $g(1)$ រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ លើចន្លោះ $(0,+\infty)$

ផ្នែកទី២ គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = 2\frac{\ln x}{x} - 2x + 4$ មានក្រាបតំណាង (C_f) ក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1. កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(L): y = -2x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C_f) ខាង $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង (L) ។

3. បង្ហាញថា $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^2}$ ។ទាញរកអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានឫសពីរនៅចន្លោះ $(0,1)$ និង $(2,3)$ ។

5. កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះខ្សែកោង (C_f) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (L) ។ សង់ខ្សែកោង (C_f) និងបន្ទាត់ (L), (T)។

6. បង្ហាញថា $F(x) = (\ln x)^2 - x^2 + 4x$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។ ទាញរកផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយ (C_f) ជាមួយបន្ទាត់ $x = 1, x = 2$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = x + 1 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ មានក្រាបតំណាង (C_f) ។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់។

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(L): y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (C_f) ។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង (L)។

3. គណនា $f'(x)$ និងបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានឫសពីរនៅចន្លោះ $(-3,-2)$ និង $(1,2)$ ។

5. សង់ខ្សែកោង (C_f) ។

លំហាត់ទី៣៤

គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^{2x}+3}\right)$ មានក្រាបតំណាង (C_f) ។

1. រកសំណុំដែនកំណត់នៃ f និង គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ ។

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D): y=-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C_f) ។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង (D) ។

3. បង្ហាញថាដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{e^x\left(5-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+3\right)\left(e^x-1\right)}$ ។ កំណត់តម្លៃបរមា រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4. សង់ក្រាប (C_f) និង អាស៊ីមតូត ។

5. ប្រើក្រាប (C_f) ដោះស្រាយសមីការ $e^{m+2x}-e^x+3e^m+1=0$ ។

លំហាត់ទី៣៥

អនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ $(0;+\infty)$ ដោយ $f(x)=x+1+2\ln x-2\ln(x-1)$ ។ គេតាងជាក្រាបតំណាង ក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ឯកតា $3cm$ លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង $1cm$ លើអ័ក្សអរដោនេ ។

1. បង្ហាញថា $f(x)=x+1+2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ ។ គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 1 និង $+\infty$ ។ បកស្រាយតាមធរណីមាត្រ ។

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D): y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C_f) ។ បង្ហាញថា $\dfrac{x}{x-1}>1$ ទាញរកសញ្ញានៃ $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ ។ ទាញបញ្ជាក់ទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង (D) ។

3. តាង f' ជាដេរីវេនៃ f ។ បង្ហាញថា $f'(x)=g(x)$ ដែល $g(x)$ ជាអនុគមន៍ត្រូវកំណត់ ។ សិក្សាសញ្ញានៃ f' និង សង់តារាងអថេរភាព f ។

4 រកអាប់ស៊ីស x_0 នៃខ្សែកោង C_f ដែលបន្ទាត់ប៉ះត្រង់នេះកែងនឹងបន្ទាត់ (D) ។ សង់ខ្សែកោង (C_f) ។

5 បង្ហាញថា $H(x) = x\ln x - (x-1)\ln(x-1)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $h(x) = \ln x - \ln(x-1)$ ។ ទាញរកផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C_f) ជាអ័ក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះ $[2;3]$ ។

លំហាត់ទី៣៦

អនុគមន៍ $f(x) = x + \frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x}$ មានក្រាបតំណាង (C_f) និងកំណត់លើ $(0;+\infty)$ ។

1 គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ត្រង់ 0 និង $+\infty$។

2 បង្ហាញថា បន្ទាត់ (d) មានសមីការ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C_f)។ សិក្សាទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង (d)។

3 បង្ហាញថា $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ដែល $g(x) = x^2 + 1 - 2\ln x$ ។ គណនា $g'(x)$ និងបង្ហាញថា $g(x) > 0$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

4 តាងA ជាចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស 1 ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះខ្សែកោង (C_f) ត្រង់ A ។

5 សង់ខ្សែកោង (C_f) អាស៊ីមតូត (d) និងបន្ទាត់ប៉ះ (T) ។

6 បង្ហាញថា $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + [\ln x]^2$ ជាព្រីមីទីវនៃ f ។ ទាញរកផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) ជាមួយបន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = e$ ។

លំហាត់ទី៣៧

f អនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ មានខ្សែកោងតំណាង (C_f) ។

1 រកសំណុំដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ ។

2 បង្ហាញថា $(L): y = -\frac{x}{2} + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C_f) ។ សិក្សាទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង (D) ។

3 បង្ហាញថា $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C_f) ។

4 គណនា $f'(x)$ និង កំណត់តម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

5 សង់អាស៊ីមតូត និង ខ្សែកោង (C_f) ។

លំហាត់ទី៣៨

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x - 2 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ មានក្រាបតំណាង (C_f) ។

1 រកសំណុំដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ ។

2 បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C_f) ។ សិក្សាទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង (Δ) ។

3 គណនា $f'(x)$ និងបង្ហាញថា $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ដែលអនុគមន៍ $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$ ។ គណនា $g'(x)$ និងកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4 បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានឫសពីរគឺ $\alpha \in (-1; 0)$ និង $\beta \in (2; 3)$ ។

5 សង់ខ្សែកោង (C_f) និងអាស៊ីមតូត (Δ) ។

លំហាត់ទី៣៩

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x - 2 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ មានក្រាបតំណាង (C_f) ។

1 រកសំណុំដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ ។

2 បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C_f) ។ សិក្សាទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង (Δ) ។

3 គណនា $f'(x)$ និងបង្ហាញថា $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ដែលអនុគមន៍ $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$ ។ គណនា $g'(x)$ និងកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4 បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានឫសពីរគឺ $\alpha \in (-1;0)$ និង $\beta \in (2;3)$ ។

5 សង់ខ្សែកោង (C_f) និងអាស៊ីមតូត (Δ) ។

លំហាត់ទី៤០

ផ្នែកទី១ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$ ដែល $a, b \in \mathbb{R}$ មានខ្សែកោងតំណាង (C_f)

1 ចូរគណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ a & b ។

2 កំណត់តម្លៃចំនួនពិត a & b បើគេដឹងថាខ្សែកោង (C_f) កាត់តាមចំណុច $\alpha(0,4)$ & $\beta\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

ផ្នែកទី២ កំណត់ថា $f(x) = (2x+3)e^{-x} + 1$

1 គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $\pm\infty$ ។ បកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប ។

2 កំណត់កូអរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C_f) ជាមួយអាស៊ីមតូតដេក (D) ។

3 សិក្សាទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង (D) ។

4 បង្ហាញថា $f'(x) = (-2x-1)e^{-x}$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

5 កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹង (C_f) ត្រង់ α ។ សង់ (C_f) និង (T) ។

លំហាត់ទី៤១

1 គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$ មានក្រាបតំណាង (C_f) និងកំណត់លើចន្លោះ $(-\infty,1)$

ក. តាង $X=\frac{2}{x-1}$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{e}{2}X^2e^X$ ។ ទាញរកលីមីត នៃ f ពេល x ខិតជិត 1 ។

ខ. កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C_f) ។

2 គេឲ្យ $v(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$ កំណត់លើ $(-\infty,1)$ ។ គណនា $v'(x)$ និងបង្ហាញថា $f'(x)=\frac{-4x}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

3 សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ សង់ខ្សែកោង (C_f) ។

ក. កំណត់ព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើចន្លោះ $(-\infty,1)$។

ខ. ចំពោះ $0<\alpha<1$ ចូរគណនា $g(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)dx$ ។ គណនា $\lim_{\alpha\to 1} g(\alpha)$

លំហាត់ទី៤២

គេមាន $f(x)=\frac{3}{e^{3x}+1}$ មានខ្សែកោងតំណាង (C_f) ។

1 កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត (D_1) ហើយសិក្សាទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតនេះ។

2 កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត (D_2) ។
បង្ហាញថា $f(x)=3-\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}$ ។ សិក្សាទីតាំង (C_f) ធៀបនឹង (D_2) ។

3 បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{-9e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$ ។ សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

4 កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) ដែលប៉ះនឹងក្រាប (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។ សង់ $(C_f),(D_1),(D_2)$ & (Δ)។

5 គណនា $A(\alpha)$ ផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់កំណត់ដោយ (C_f) ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងបន្ទាត់ $x=0,$

$x = \alpha$ ដែល $0 < \alpha$ ។

លំហាត់ទី៤៣

ផ្នែកទី១ គេឲ្យអនុគមន៍ $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t} - \ln(1+t)$ កំណត់លើចន្លោះ $[0,+\infty)$ ។

1 គណនាដេរីវេ $\varphi'(x)$

2 កំណត់ទិសដៅអថេរភាពនៃ φ និងកំណត់សញ្ញានៃ φ លើចន្លោះ $[0,+\infty)$ ។

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ និងមានក្រាបតំណាង (C_f) ។

1 បង្ហាញ $f'(x) = e^{-x}\left[\dfrac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)\right]$ រួចទាញរកទិសដៅអថេរនៃ f ។

2 បង្ហាញ $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}\ln\left(1+e^{-x}\right)$ ។ គណនាលីមីតនៃ $f(x)$ ពេល $x \to \pm\infty$ ។

3 សង់តារាងអថេរភាពនៃ f និងសង់ខ្សែកោង (C_f) ។

4 បង្ហាញថា $f'(x) + f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ។ បើតាម $I(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ ចូរគណនា $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x)$

លំហាត់ទី៤៤

ផ្នែកទី១ គេឲ្យអនុគមន៍ $g(x) = 2x^2 - 4\ln x + 4$ កំណត់លើចន្លោះ $(0;+\infty)$ ។

1 បង្ហាញថា $g'(x) = \dfrac{4x^2-4}{x}$ ។

2 សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ g លើចន្លោះ $(0;+\infty)$ ។ ទាញរកសញ្ញានៃ g លើចន្លោះ $(0;+\infty)$។

ផ្នែកទី២ អនុគមន៍ $f(x) = 2x - 3 + 4\dfrac{\ln x}{x}$ កំណត់លើចន្លោះ $(0;+\infty)$ និងមានក្រាបតំណាង (C_f) ឯកតាលើអ័ក្ស $1cm$ ។

1 កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និងបកស្រាយលទ្ធផលតាមក្រាប។

2 កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(D): y = 2x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ

ក្រាប (C_f) ខាង $+\infty$ ។

3 សិក្សាទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង (D) ។

4 ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ។ ទាញរកតារាងអថេរភាពនៃ f ដោយប្រើលទ្ធផលពីសំណួរផ្នែកទី១។

5 បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់លើចន្លោះ $[1;2]$ ។

6 កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ដែលប៉ះខ្សែកោង (C_f) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (D) ។ សង់ខ្សែកោង $(C_f);(D)$ និង (T) ។

7 កំណត់ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយខ្សែកោង (C_f) និងបន្ទាត់ (D) លើចន្លោះ $[1;5]$

លំហាត់ទី៤៥

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2-2x+2xe^{-x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ f និងគណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

2 ក្នុងប្លង់ប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ឯកតាលើអ័ក្ស $2cm$ គេតាង (C_f) ជាក្រាបតំណាង f និង P ជាក្រាបតំណាងប៉ារ៉ាបូល $g(x)=x^2-2x$ ។

ក. សិក្សាទីតាំងនៃ (C_f) ធៀបនឹង P និងកំណត់កូអរដោនេចំណុចដែលប្រសព្វគ្នា។

ខ. បង្ហាញថាក្រាប P ជាខ្សែកោងអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប (C_f) ខាងមែក $+\infty$ ។

គ. សង់ខ្សែកោង (C_f) និង ប៉ារ៉ាបូល P ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ $A(\lambda)$ ខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C_f) និង P ជាមួយបន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=\lambda, 0<\lambda$ ។ គណនា $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$ ។

លំហាត់ទី៤៦

ក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(\dfrac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)$ មានក្រាបតំណាង (C_f) ឯកតាលើអ័ក្ស $3cm$ ។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។
2. កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។ បកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យធរណីមាត្រ។
3. បង្ហាញថា $f(x)=x+\ln 2+\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$ ។ ទាញរកលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។
4. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y=x+\ln 2$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប (C_f) ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C_f) ធៀបនឹង (d) ។
5. គណនា $f'(x)$ និងកំណត់ទិសដៅអថេរភាពនៃ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
6. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ដែលប៉ះនឹងក្រាប (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។
7. សង់ $(C_f),(d)$ និង (T) ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

លំហាត់ទី៤៧

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ឯកតាលើអ័ក្ស $2cm$ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=2x+1-xe^{x-1}$ មានក្រាប (C_f) ។

1. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ (គេសរសេរ $xe^{x-1}=\dfrac{1}{e}xe^x$)។
2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) មានសមីការ $y=2x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប (C_f) ត្រង់ $-\infty$
3. សិក្សាទីតាំងនៃ(d) ធៀបនឹងខ្សែកោង (C_f) ។
4. ក. គណនា f' និង f'' ។

   ខ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f' និងគណនាលីមីតនៃ f' ត្រង់ $-\infty$ ។

គ. គណនា $f'(1)$ និងទាញរកសញ្ញានៃ f' ទៅតាមតម្លៃនៃចំនួនពិត x ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

5 បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ $\alpha \in [1.9;2]$ ។

6 សង់ (d) និង (C_f) ។

លំហាត់ទី៤៨

ក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ គេឲ្យអនុគមន៍ $h(x)=(x-2)e^x+x$ មានក្រាបតំណាង (C_h) ។

1 គណនា h' រួច h'' ។ កំណត់ទិសដៅអថេរភាពនៃ h' រួចទាញរកសញ្ញានៃ h' ។ ទាញរកទិសដៅអថេរភាពនៃ h

2 កំណត់លីមីតនៃ h ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។សង់តារាងអថេរភាពនៃ $h(x)$ ។

3 ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (D) មានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង (C_h) ។ កំណត់កូអរដោណេចំនុចប្រសព្វ (C_h) ជាមួយ (D) និងសិក្សាទីតាំងនៃ (C_h) ធៀបនឹង (D)

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងក្រាប (C_h) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។ សង់ (C_h), (D) និង (T) ។

4 គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់បិទជិតកំណត់ដោយ (C_h) , (D) និងបន្ទាត់ $x=-1$ ។

លំហាត់ទី៤៩

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ មានក្រាបតំណាង (C_f)

1 ក. កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង បកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

ខ. កំណត់លីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ និង បកស្រាយលទ្ធផលតាមអត្ថន័យក្រាប។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

2 កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងក្រាប (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។

3 ក. តាង $k(x)=x+1-e^{x}$ ។ គណនា $k'(x)$ សិក្សាអថេរភាព និងសញ្ញានៃ $k(x)$ ។

ខ. ទាញរកទីតាំងនៃខ្សែកោង (C_f) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (T) ។

4 គណនា $f(-2), f(1), f(2), f(4)$ ។ សង់ខ្សែកោង (C_f) និងបន្ទាត់ប៉ះ (T) ។

លំហាត់ទី៥០

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ និងចំពោះ $x>0$ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$ ក្រាប (C_f) និងឯកតាលើអ័ក្ស $1cm$ ។

1 គេឲ្យអនុគមន៍ជំនួយ $g(x)=x^{2}+2-2\ln x$ ដែល $x>0$ ។

ក. សិក្សាអថេរភាពនៃ g និងគណនា $g(1)$ ។

ខ. ទាញរកសញ្ញានៃ g លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។

2 ក. គណនាលីមីត f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f និងសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) មានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C_f) និងសិក្សាទីតាំងនៃ $y=x$ ធៀបនឹង (Δ) ។

ឃ. កំណត់កូអរដោណេចំណុច A ដែលបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C_f) ត្រង់ A ស្របនឹង (Δ) ។ សង់ $(C_f),(\Delta)$ និង (T) ។

ង. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ដែល $\dfrac{1}{2}\leq\alpha\leq 1$ ។

ឯកសារយោង

- សៀវភៅសិក្សាគោលថ្នាក់ទី១២ របស់ក្រសួងអប់រំយុវជន និងកីឡា បោះពុម្ពឆ្នាំ ២០១៧
- សិក្សាអនុគមន៍ លោកគ្រូលឹម យូសេង ឆ្នាំ ១៩៩៨
- វិភាគគណិត លោកគ្រូស៊ិន ខណ្ឌី ឆ្នាំ ១៩៩៨
- https://www.guessmaths.co