ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា
ជាតិ សាសនា ព្រះមហាក្សត្រ

វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

កិច្ចការស្រាវជ្រាវ

គណិតវិទ្យា

និង

ឡាប់ ប្រូបាប

Probability

សាស្ត្រាចារ្យបណ្ឌិតណែនាំ : គឹម ចំរើនខុឌ្ឍី

គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យាក្រុម៤ ជំនាន់ទី២១

នឹម ស៊ីណែត　　ចឹក អឿន

ជុំ មាន　　ពេញ រាសី

ផល ថិរៈ　　គង់ រី

ឆ្នាំសិក្សា ២០១៥-២០១៦

វក្សាសិទ្ធិ

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **ទោច់** និង **ប្រូបាប** ដែលមិត្តអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់ក្នុងដៃនេះ ត្រូវបានរៀបចំឡើងយ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់ ដើម្បីជាជំនួយស្មារតីដល់ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងមិត្តអ្នកសិក្សាដែលចូលចិត្តសិក្សាផ្នែកគណិតវិទ្យា និងមានបំណងលើកកម្ពស់ វិស័យអប់រំគណិតវិទ្យានៅកម្ពុជាឱ្យមានគុណភាពល្អប្រសើរ។ ក្នុងសៀវភៅនេះ មានរៀបចំចងក្រងជា មេរៀនសង្ខេប រូបមន្ត និងលំហាត់ ដែលទាក់ទងទៅនឹង រូបមន្តនោះដែលធ្វើឱ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់ ឆាប់ចេះ និងអនុវត្តន៍បានយ៉ាងល្អប្រសើរ។ យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះ នឹងក្លាយជាមិត្តដ៏ល្អ សម្រាប់សិស្សានុសិស្ស និងមិត្តអ្នកសិក្សាគ្រប់កាលៈទេសៈ ជាពិសេសអ្នកទាំងអស់គ្នាអាចយកគន្លឹះនៅក្នុងសៀវភៅនេះយកទៅហ្វឹកហាត់ ស្រាវជ្រាវ និងស្វែងយល់ដោយខ្លួនឯងឱ្យបានស៊ីជម្រៅថែមទៀត។

ទោះជាមានការរៀបចំយ៉ាងល្អិតល្អន់យ៉ាងណាក៏ដោយភាពកង្វះខាត និងកំហុសឆ្គងដោយអចេតនា នឹងកើតមានជាមិនខាន ។ ហេតុនេះ រងចាំទទួលការរិះគន់ និងកែលំអរពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ដើម្បីឱ្យសៀវភៅ កាន់តែមានភាពល្អប្រសើរថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ យើងខ្ញុំសូមគោរពជូនពរដល់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ សិក្សានុសិស្ស និងមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ឱ្យមានសុខភាពល្អ និងជោគជ័យគ្រប់ភារកិច្ច ។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី០៧ ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០១៦

រៀបរៀងដោយ គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យាជំនាន់ទី២១

គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យាក្រុម៤ **សាស្ត្រាចារ្យបណ្តិតណែនាំ គឹម ចំរើនឧត្តម្មី**

នឹម ស៊ីណែត	0972948735	sineth321123@gmail.com
ចឹក អឿន	081782156	samoeurn9@gmail.com
ជុំ មាន	098501644	chummeanp.v@gmail.com
ផល វិរៈ	086288774	vireakphalm.@gmail.com
គង់ រី	012422059 & 070397309	kongrytd@gmail.com
ពេញ រាសី	0965744257	reaseypenh@gmail.com

មាតិកា

ចំណងជើង **ទំព័រ**

១. របាប់

- សំណុំ ១
- គោលការណ៍រាប់ ៦
- វិភាគបន្សំ ១២
- ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា និងពហុធា ២១
- លំហាត់ និងចម្លើយ ៣០

២. ប្រូបាប

- លំហសំណាក និង ព្រឹត្តិការណ៍ ៤១
- និយមន័យប្រូបាប ៤៤
- ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ ៤៦
- ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ៤៧
- រូបមន្ត Bayes ៤៩

៣. បំណែងចែកប្រូបាប

- អថេរចៃដន្យ និង បំណែងចែកប្រូបាប ៥៣
- បំណែងចែកទ្វេធា ៥៧
- បំណែងចែកធរណីមាត្រ ៥៨
- បំណែងចែក Poisson ៦០
- លំហាត់ និងចម្លើយ ៦៤
- ឯកសារយោង ១១៤

សេចក្តីផ្តើម

ទ្រឹស្តីប្រូបាបបានចាប់ផ្តើមឡើងនៅក្នុងសតវត្សទី១៧ ឆ្នាំ១៦៥៤ នៅក្នុងប្រទេសបារាំង នៅពេលដែលអ្នកគណិតវិទ្យាបារាំងដ៏អស្ចារ្យ ពីររូបគឺ លោក Blaise Pascal និង Pierre de Fermat បានជួបនឹងបញ្ហាពីរ នៃឱកាសឈ្នះ ឬចាញ់នៅក្នុងការលេងល្បែង ។ បញ្ហាដូចដែលលោក Pascal និង Fermat បានដោះស្រាយ ក៏បានបន្ត ឥទ្ធិពលដល់អ្នកស្រាវជ្រាវក្រោយទៀតដូចជា : លោក Huygens លោក Bernoulli លោក DeMoivre ក្នុងការបង្កើតទ្រឹស្តី គណិតវិទ្យានៃប្រូបាប ។ បច្ចុប្បន្ននេះ ទ្រឹស្តីបទប្រូបាបត្រូវបានបង្កើតឡើងយ៉ាងល្អ ជាមែកធាងមួយនៃគណិតវិទ្យា ដែលរកឃើញការអនុវត្ត នៅគ្រប់ផ្នែកនៃសកម្មភាពសិក្សាក្នុងបទពិសោធន៍ ប្រចាំថ្ងៃដូចជា ការទស្សន៍ទាយ នូវភាពគ្រោះថ្នាក់នៃការព្យាបាល ដោយប្រើថ្នាំពេទ្យថ្មី ការប្រើប្រាស់នៅក្នុងពាណិជ្ជកម្ម ដោយស្មានទុកនូវអ្វីដែលអាចកើតឡើងជាមុន ការទស្សន៍ទាយនូវភាពឈ្នះចាញ់ទុកជាមុននូវការប្រកួតកីឡា ជាពិសេសទ្រឹស្តីប្រូបាបនេះ អាចអនុវត្តបានយ៉ាងល្អនូវការលេងល្បែងស៊ីសងដោយយើងអាចទស្សន៍ទាយទុកជាមុន នូវភាគរយនៃការឈ្នះ ឬចាញ់ ។ ដោយឡែក សៀវភៅប្រូបាបដែលលោកអ្នកកាន់នៅក្នុងដៃនេះ គឺយើងខ្ញុំបានបែងចែកជាបីចំណុចសំខាន់ៗ ។ ចំណុចទី១ គឺនិយាយពី **របាប់** ដែលជាមេរៀនមួយប្រើជាមូលដ្ឋានសំរាប់ការស្វែងរកករណីស្រប និងករណីអាចនៅក្នុងប្រូបាប ។ ចំណុចទី២ និយាយអំពី រូបមន្តទូទៅរបស់មេរៀន**ប្រូបាប** ហើយចំណុចចុងក្រោយគឺបំណែងចែកប្រូបាបនិយាយអំពីការប្រើប្រាស់ប្រូបាបនៅក្នុងជីវភាពរស់នៅប្រចាំថ្ងៃ ។

គ្រប់ទ្រឹស្តីបទ ឬវិធានផ្សេងៗ សុទ្ធតែមានសារៈសំខាន់ណាស់ដែលមិនអាចខ្វះបាន ប៉ុន្តែអាស្រ័យដោយពេលវេលាមានកំណត់ទើបបានជាការស្រាវជ្រាវទាក់ទងនឹងមុខវិជ្ជាប្រូបាបមិនអាចពេញលក្ខណៈ ល្អប្រសើរបានឡើយព្រោះតែទ្រឹស្តីបទមួយចំនួនយើងខ្ញុំមិនបានយកមកសិក្សាឡើយ ក៏ប៉ុន្តែមិនមែនមានន័យថាទ្រឹស្តីទាំងនោះមិនសំខាន់នោះទេ ។ ដូច្នេះចំពោះទ្រឹស្តីបទ ឬវិធាននានាដែលខ្វះខាត យើងខ្ញុំសូមទុកឱកាសឱ្យប្អូនៗជំនាន់ក្រោយអាចសិក្សាស្រាវជ្រាវបន្ថែមទៀតដើម្បីឱ្យមានភាពប្រសើរលូតលាស់ឡើយនូវមុខវិជ្ជាមួយនេះ ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាសៀវភៅប្រូបាបនេះ ពិតជាអាចជួយលើកកម្ពស់គុណភាពក្នុងវិស័យអប់រំគណិតវិទ្យារបស់មិត្តអ្នកស្រាវជ្រាវ និងប្អូនសិស្សានុសិស្ស តាមរយៈការអភិវឌ្ឍសម្ថតភាពក្នុងការដោះស្រាយចំណោទបញ្ហា ។

មេរៀន

១. សំណុំ

១.១. សំណុំ និង ធាតុ *(Set and Elements)*

❖ **ឧទាហរណ៍ ៖** នៅក្នុងភូមិមួយមានចំនួនប្រជាជនចំនួន ៥០ គ្រួសារ។

នោះគេបាន - ភូមិមួយហៅថា **សំណុំ** ។

- ចំនួនប្រជាជនចំនួន ៥០គ្រួសារ ហៅថា **ធាតុនៃសំណុំ** ។

និយមន័យ ៖ សំណុំគឺជាបណ្តុំនៃវត្ថុនានាដែលកំណត់ដោយលក្ខខណ្ឌជាក់លាក់ណាមួយ ។

គេកំណត់យកអក្សរធំ *A,B,C, ...* តាងអោយសំណុំ និង អក្សរតូច *a,b,c, ...* តាងអោយធាតុនៃសំណុំ។

សម្គាល់ ៖

- ចំនួនធាតុនៃសំណុំគេកំណត់សរសេរដោយ $n(A), n(B), n(C), ...$
- p ជាធាតុរបស់ *A* កំណត់សរសេរដោយ $p \in A$
- p មិនមែនជាធាតុរបស់ *A* កំណត់សរសេរដោយ $p \notin A$
- សំណុំ *A* និង *B* ជាពីរសំណុំស្មើគ្នា កំណត់សរសេរដោយ $A = B$ លុះត្រាតែគ្រប់ធាតុនៃសំណុំ *A* ជាធាតុនៃសំណុំ *B* និងផ្ទុយមកវិញ ។

១.២. សំណុំសកល និង សំណុំទទេ *(Universal set and Empty set)*

និយមន័យ ៖ សំណុំសកលគឺជាសំណុំនៃធាតុ ដែលជាធាតុនៃគ្រប់សំណុំទាំងអស់ដែលគេជ្រើសរើសយកមកសិក្សា ។ គេកំណត់ដោយ U ។

❖ **ឧទាហរណ៍ ៖** នៅក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស 25 នាក់។ ថ្នាក់រៀនជាសំណុំសកលនៃសំណុំដែលមានធាតុចំនួន 25 ។

និយមន័យ ៖ សំណុំទទេ គឺជាសំណុំដែលគ្មានធាតុ ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $\varnothing$ ។

❖ **ឧទាហរណ៍ ៖** $S = \{x / x$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន $, x^2 = 3\}$

ក្នុងករណីនេះគ្មានចំនួនគត់វិជ្ជមានណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈខាងលើឡើយ មានន័យថា *S* ជាសំណុំទទេ និង កំណត់សរសេរដោយ $\varnothing$។

១.៣.សំណុំរង **(Subset)**

និយមន័យ ៖ គេថា *A* គឺជាសំណុំរងនៃ *B* រឺ *A* ក្នុង *B* រឺ *A* ជាផ្នែកមួយនៃ *B* រឺ *B* ផ្ទុក *A* លុះត្រាតែគ្រប់

ធាតុ x នៃ A ជារបស់ B ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $A\subset B$ រឺ $B\supset A\Leftrightarrow(\forall x\in A\Rightarrow x\in B)$ ។ គេបាន $A=B\Leftrightarrow[(A\subset B)\wedge(B\subset A)]$ រឺ $A=B\Leftrightarrow(\forall x: x\in A\Leftrightarrow x\in B)$ ។

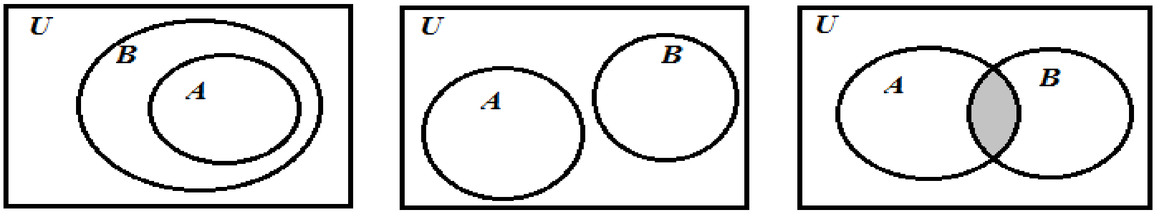
i. $\varnothing\subset A\subset U$ (U ជាសំណុំសកល)

ii. ចំពោះគ្រប់សំណុំ A គេបាន $A\subset A$

iii. បើ $A\subset B$ ហើយ $B\subset C$ នោះគេបាន $A\subset C$

១.៤.ដ្យាក្រាមវិន (*Venn diagrams)*

និយមន័យ ៖ *Venn diagrams* ជារូបភាពតាងឱ្យសំណុំដោយសំណុំចំណុចក្នុងប្លង់ ។ គេតាង សកល U ដោយផ្ទៃកក្នុងនៃចតុកោណកែង ហើយសំណុំដទៃទៀតដោយថាសដែលនៅក្នុងចតុកោណកែង ។



$(a).A\subset B$ (b.) **A** និង **B** ដាច់គ្នា (c). **A** និង **B** មានធាតុរួមគ្នា

- *Venn diagram* (a) គេឱ្យពីរសំណុំ A, B ដែល $A\subset B$
- *Venn diagram* (b) គេឱ្យពីរសំណុំដាច់គ្នា A និង B
- *Venn diagram* (c) គេឱ្យពីរសំណុំ A និង B ដែលមានធាតុរួម

១.៥.ប្រមាណវិធីលើសំណុំ (*Set Operations)*

១.៥.១. ប្រមាណវិធីប្រជុំ

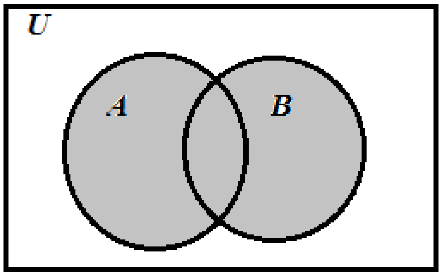
និយមន័យ ៖ គេឱ្យពីរសំណុំ A និង B ។ ប្រជុំនៃពីរសំណុំ A និង B កំណត់តាងដោយ $A\cup B$ គឺជាសំណុំនៃធាតុ x ទាំងឡាយណាដែល x ជាធាតុរបស់ A ឬ x ជាធាតុរបស់ B ។

គេកំណត់សរសេរដោយ: $A\cup B=\{x: x\in A\vee x\in B\}$

$\forall x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B$

សម្គាល់ ៖

- $A\cup A=A$
- $A\cup B=B\cup A$
- $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
- $A\subset(A\cup B), B\subset(A\cup B)$



$A\cup B$ ជាផ្ទៃកផាត់ពណ៌

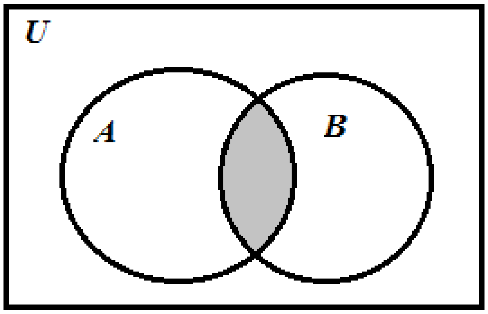
១.៥.២.ប្រមាណវិធីប្រសព្វ

និយមន័យ ៖ គេឱ្យពីរសំណុំ A និង B ។ ប្រសព្វនៃពីរសំណុំ A និង B កំណត់តាងដោយ $A\cap B$ គឺជាសំណុំនៃធាតុ x ទាំងឡាយណាដែល x ជាធាតុរបស់ A ***និង*** x ជាធាតុរបស់ B ។

គេកំណត់សរសេរដោយ: $A\cap B=\{x:x\in A\wedge x\in B\}$

សម្គាល់ ៖ $\forall x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B$

- $A\cap A=A$
- $A\cap B=B\cap A$
- $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
- $(A\cap B)\subset A,(A\cap B)\subset B$
- $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subset B$
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$



$A\cap B$ ជាផ្នែកផាត់ពណ៌

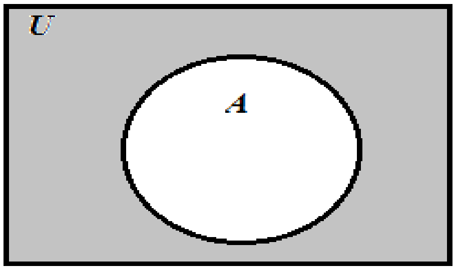
១.៥.៣. សំណុំរងបំពេញ

និយមន័យ ៖ U ជាសកលមួយ និង A ជាផ្នែកមួយនៃសកល U។ សំណុំរងបំពេញនៃ A ក្នុង U កំណត់សរសេរដោយ $\bar{A}$ ឬ A^C គឺជាសំណុំធាតុនៃ x ទាំងឡាយរបស់ U ដែលមិនមែនជាធាតុរបស់ A ។

គេកំណត់សរសេរដោយ: $A^C=\bar{A}=\{x:x\in U,x\notin A\}$

សម្គាល់ ៖

- $A\cap\bar{A}=\varnothing$
- $A\cup\bar{A}=U$
- $\bar{U}=\varnothing$
- $\bar{\bar{A}}=A$
- $\bar{\varnothing}=A$
- $A\subset B\Leftrightarrow\bar{B}\subset\bar{A}$
- $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$
- $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ (***De Morgan's Law)***



A^C ជាផ្នែកផាត់ពណ៌

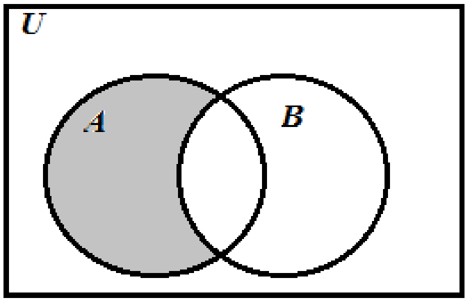
១.៥.៤. ផលសងរវាងពីរសំណុំ ***(Difference Between two set)***

និយមន័យ ៖ គេឱ្យពីរសំណុំ A និង B ។ ផលសងរវាង A និង B កំណត់សរសេរដោយ $A\setminus B$ គឺជាសំណុំធាតុនៃ x ទាំងឡាយដែល x ជាធាតុរបស់ A និង x មិនមែនជាធាតុរបស់ B ។

គេកំណត់សរសេរដោយ: $A\setminus B=\{x:x\in A\wedge x\notin B\}$

$\forall x\in A\setminus B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$

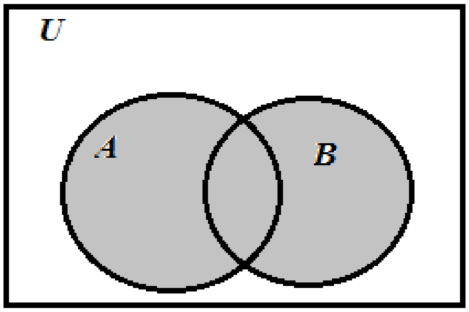
សម្គាល់ ៖ $A\setminus B=A\cap\overline{B}$



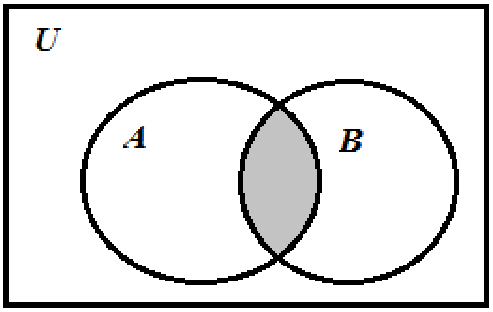
$A\setminus B$ ជាផ្នែកផាត់ពណ៌

❖ **ឧទាហរណ៍ ៖** គេមានសំណុំពីរ $A=\{1,3,5,7,9\}$ និង $B=\{2,4,5,6,7,8\}$ ហើយសំណុំសកល $U=\{1,2,3,...,15\}$ ។ គេបាន $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $A\cap B=\{5,7\}$

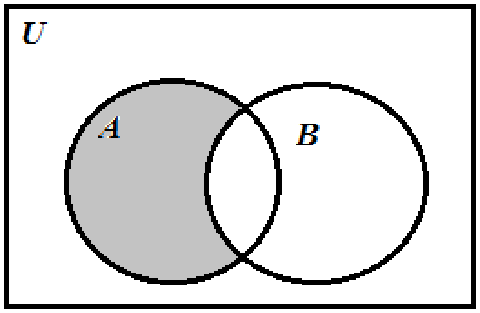
$A\setminus B=\{1,3,9\}$



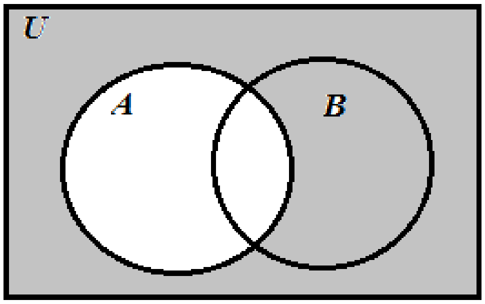
$A\cup B$



$A\cap B$



$A\setminus B$



A^C

១.៦.សំណុំរាប់អស់ និង សំណុំរាប់បាន *(Finite and Countable sets)*

និយមន័យ ៖ គេថាសំណុំមួយជា *សំណុំរាប់អស់* កាលណាសំណុំនោះ មាន m ធាតុផ្សេងៗគ្នាដែល m ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។ បើមិនដូចនេះទេ គេថាវាជា *សំណុំរាប់មិនអស់* ។

❖ **ឧទាហរណ៍ ៖** គេមាន M ជាចំនួនខែក្នុងរយៈពេលមួយឆ្នាំ ។

$M=\{$ មករា ,កុម្ភៈ ,មិនា ,មេសា ,ឧសភា ,មិថុនា ,កក្កដា ,សីហា ,កញ្ញា ,តុលា ,វិច្ឆិកា ,ធ្នូ $\}$

ដូច្នេះ M ជា *សំណុំរាប់អស់* ។

❖ ឧទាហរណ៍ ៖ គេមានសំណុំ $N=\{2,4,6,...\}$ នោះ N ជា *សំណុំរាប់មិនអស់* ។

និយមន័យ ៖ សំណុំមួយជា *សំណុំរាប់បាន* លុះត្រាតែវាជាសំណុំរាប់អស់ ឬ វាអាចសរសេរជាទម្រង់នៃស្វ៊ីតមួយ បើមិនដូចនេះទេវា គឺជា *សំណុំរាប់មិនបាន* ។

❖ **ឧទាហរណ៍** ៖ គេមាន $P=\{x:0\le x\le 1\}$ ជា *សំណុំរាប់អស់* ហើយវាក៏ជា *សំណុំរាប់មិនបានដែរ* ។

១.៧. ផលគុណនៃសំណុំ *(Product of set)*

និយមន័យ ៖ គេឱ្យពីរសំណុំ A និងB ហៅថាផលគុណនៃសំណុំ រឺផលគុណដេកាតនៃពីរសំណុំ A និងB កំណត់សរសេរដោយ $A\times B$ គឺជាសំណុំនៃគូមានលំដាប់ (a,b) ទាំងអស់ដែល $a\in A$ និង $b\in B$ ។

កំណត់សរសេរដោយ $A\times B=\{(a,b):a\in A\wedge b\in B\}$

❖ **ឧទាហរណ៍** ៖ $A=\{1,2\}$ និង $B=\{a,b,c\}$ នោះ ៖

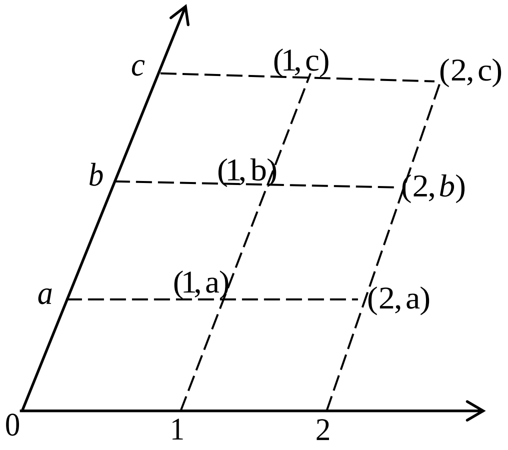
$$A\times B=\{(1,a),(2,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

តារាងនៃធាតុរបស់ $A\times B$

B \ A	a	B	c
1	$(1,a)$	$(1,b)$	$(1,c)$
2	$(2,a)$	$(2,b)$	$(2,c)$



សម្គាល់ ៖

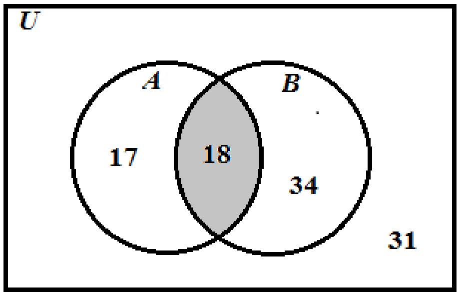
- $(A\subset X\wedge B\subset Y)\Rightarrow(A\times B)\subset(X\times Y)$
- $A\times B=\varnothing\Rightarrow(A=\varnothing\vee B=\varnothing)$
- $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
- $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
- $[(A\ne\varnothing)\wedge(A\times B=A\times C)]\Rightarrow B=C$

២.គោលការណ៍រាប់

២.១. គោលការណ៍ វិធីបូក

បើយើងរាប់ចំនួនសិស្សក្នុងថ្នាក់មួយ ឬ រាប់កាក់ក្នុងថង់មួយ អ្វីដែលយើងបានធ្វើការផ្ទៀងផ្ទាត់លើមូលដ្ឋានមួយទល់នឹងមួយ រវាងសំណុំវត្ថុដែលត្រូវរាប់ និង សំណុំចំនួន $1,2,3,...,n$ ។បើសំណុំ A ផ្ទៀងផ្ទាត់ជាមួយសំណុំ $\{1,2,3,...,25\}$ យើងអាចសន្និដ្ឋានថា សំណុំ A មាន 25 ធាតុ យើងប្រើសញ្ញាកំណត់ $n(A)=25$ ដើម្បីបង្ហាញថា សំណុំ A មាន 25 ធាតុ ។

❖ **ឧទាហរណ៍ ៖** ក្នុងការសាកសួរសិស្ស 100 នាក់ សិស្ស 35 នាក់ចុះឈ្មោះរៀនគណិតវិទ្យា 52 នាក់ចុះឈ្មោះរៀន កុំព្យូទ័រ និង 18 នាក់ ចុះឈ្មោះរៀនទាំងពីរមុខ ។ តើមានសិស្សប៉ុន្មាននាក់ដែលមិនបានចុះឈ្មោះចូលរៀនមុខវិជ្ជាទាំងពីរ ។



ចម្លើយ ៖ ដំបូងយើងដោះស្រាយដោយប្រើដ្យាក្រាមវិន ៖

តាង A ជាសំណុំសិស្សចុះឈ្មោះរៀនគណិតវិទ្យា

តាង B ជាសំណុំសិស្សចុះឈ្មោះរៀន កុំព្យូទ័រ

តាមសម្មតិកម្ម $n(A)=35, n(B)=52$ និង $n(A\cap B)=18$ ។

តាមដ្យាក្រាមវិន ចំនួនសិស្សរៀនមួយមុខយ៉ាងតិចមានចំនួន $17+18+34=69$ នាក់។ ដោយចំនួនសិស្សសរុបមាន 100 នាក់ ។ នោះចំនួនសិស្សមិនចុះឈ្មោះចូលរៀនមុខវិជ្ជាទាំងពីរគឺ $100-69=31$ នាក់ ។ ដូចនេះ សិស្សដែលមិនចុះឈ្មោះរៀនមុខវិជ្ជាទាំងពីរគឺ 31 នាក់។

បើយើងរាប់ធាតុក្នុងសំណុំនីមួយៗ A និង B យើងឃើញថាមានធាតុខ្លះ យើងរាប់ពីរដង នៅក្នុងសំណុំ A ផង និងក្នុងសំណុំ B ផង គឺធាតុដែលជារបស់ $(A\cap B)$ ។ ដើម្បីរាប់ឱ្យបានជាក់លាក់ ធាតុរបស់ $(A\cup B)$ ឬ ដើម្បីរក $n(A\cup B)$ យើងត្រូវដកធាតុនៅក្នុង $A\cap B$ ពី $n(A)+n(B)$ ចេញ ។

ទ្រឹស្តីបទ : បើ A និង B ជាសំណុំកំណត់ គេបាន $\mathbf{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$

ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ យើងបាន : $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$=35+52-18$$
$$=69$$

ដូចនេះ សិស្សមិនបានចុះឈ្មោះចូលរៀន មុខវិជ្ជាទាំងពីរ គឺ $100-69=31$ នាក់

ក្នុងករណី $A\cap B=\varnothing$ នោះ $n(A\cap B)=0$

> ទ្រឹស្តីបទ : បើ A និង B ជាសំណុំគ្មានធាតុរួម គេបាន $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

- ឧទាហរណ៍ ៖ នៅវិទ្យាល័យមួយ សិស្ស 800 នាក់ បានចុះឈ្មោះរៀនភាសាអង់គ្លេស និង សិស្ស 500 នាក់ បានចុះឈ្មោះរៀនភាសា បារាំង ហើយសិស្ស 200 នាក់ទៀតបានចុះឈ្មោះរៀនភាសាទាំងពីរ ។

ក. តើមានសិស្សទាំងអស់ប៉ុន្មានអ្នកបានចុះឈ្មោះរៀនភាសា ?

ខ. តើសិស្សប៉ុន្មាននាក់រៀនតែភាសាអង់គ្លេស ?

គ. តើសិស្សប៉ុន្មានអ្នករៀនតែភាសាបារាំង ?

ចម្លើយ : តាង E ជាសំណុំសិស្សចុះឈ្មោះរៀនភាសាអង់គ្លេស ។

F ជាសំណុំចសិស្សចុះឈ្មោះរៀនភាសាបារាំង ។

យើងបាន $n(E)=800$ នាក់ , $n(F)=500$ នាក់ និង $n(E\cap F)=200$ នាក់ ។

ក. ចំនួនសិស្សបានចុះឈ្មោះរៀនភាសា :

$$n(E\cup F)=n(E)+n(F)-n(E\cap F)$$
$$=800+500-200$$
$$=1100 \text{ នាក់}$$

ដូចនេះ មានសិស្ស 1100 នាក់ បានចុះឈ្មោះរៀនភាសា ។

ខ. ចំនួនសិស្សរៀនតែភាសាអង់គ្លេស :

ដោយសិស្សរៀនភាសាអង់គ្លេសផង និង ភាសាបារាំងផងមានចំនួន 200 នាក់ នោះចំនួនសិស្សរៀនតែភាសាអង់គ្លេស មាន $800-200=600$ នាក់

ដូចនេះ ចំនួនសិស្សរៀនតែភាសាអង់គ្លេស មាន 600 នាក់ ។

គ. ចំនួនសិស្សរៀនតែភាសាបារាំង :

ចំនួនសិស្សរៀនតែភាសាបារាំងមាន $500-200=300$ នាក់ ។

ដូចនេះ ចំនួនសិស្សរៀនតែភាសាបារាំងមាន 300 នាក់ ។

លំហាត់គំរូទី១ : គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរគ្រាប់ មួយមានពណ៌ស មួយទៀតមានពណ៌ក្រហម ។ រកចំនួនលទ្ធផល ដែលកើតឡើងកាលណាលទ្ធផលមានផលបូកលេខ ស្មើនឹង 5 ឬ 6 ។

ចម្លើយ : តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលផលបូកលេខស្មើនឹង 5 ។ គូចំនួនដែលផលបូកលេខស្មើ 5 មាន $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ ។ នោះ $n(A)=4$ ករណី ។

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ ដែលផលបូកលេខស្មើនឹង 6 ។ គូចំនួនដែលផលបូកលេខស្មើនឹង 6 មាន $(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$ នោះ $n(B)=5$ ករណី ។ យើងឃើញថា $A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow n(A\cap B)=0$

ចំនួនករណីដែលផលបូកលេខស្មើនឹង 5 ឬ 6 គឺ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

$=4+5$

$=9$ ករណី

ដូចនេះ ចំនួនលទ្ធផលដែលកើតឡើងកាលណាផលបូកស្មើនឹង 5 ឬ 6 មាន 9 ករណី ។

លំហាត់គំរូទី២ : ក្នុងថង់មួយមានបណ្ណ័ 6 សន្លឹក ដែលបង់លេខ 1,2,3,4,5,6 ។ គេចាប់យកបណ្ណ័មួយសន្លឹកដោយចៃដន្យ ។ រកចំនួនលទ្ធផលដែលកើតឡើង កាលណាលេខដែលចាប់បានជា លេខសេស ឬ លេខធំជាង 4 ។

ចម្លើយ : តាង m ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានលេខសេស

ចំនួនទាំងនោះមាន 1,3,5

$\Rightarrow n(m)=3$ ករណី

k ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចាប់បានលេខធំជាង 4 ។

ចំនួនទាំងនោះមាន 5,6

$\Rightarrow n(k)=2$ ករណី

យើងឃើញថា ព្រឹត្តិការណ៍ m និងព្រឹត្តិការណ៍ k មានលទ្ធផលរួមមួយគឺលេខ 5 ។

$\Rightarrow n(m\cap k)=1$

ចំនួនលទ្ធផលដែលកើតឡើងកាលណាលេខចាប់បានជាលេខសេស ឬ លេខធំជាង 4 គឺ

$n(m\cup k)=n(m)+n(k)-n(m\cap k)$

$=3+2-1$

$=4$ ករណី

ដូចនេះ ចំនួនលទ្ធផលដែលកើតឡើងកាលណាលេខចាប់បានជាលេខសេស ឬ លេខធំជាង 4មាន4 ករណី។

២.២. គោលការណ៍ប្រមាណវិធីគុណ

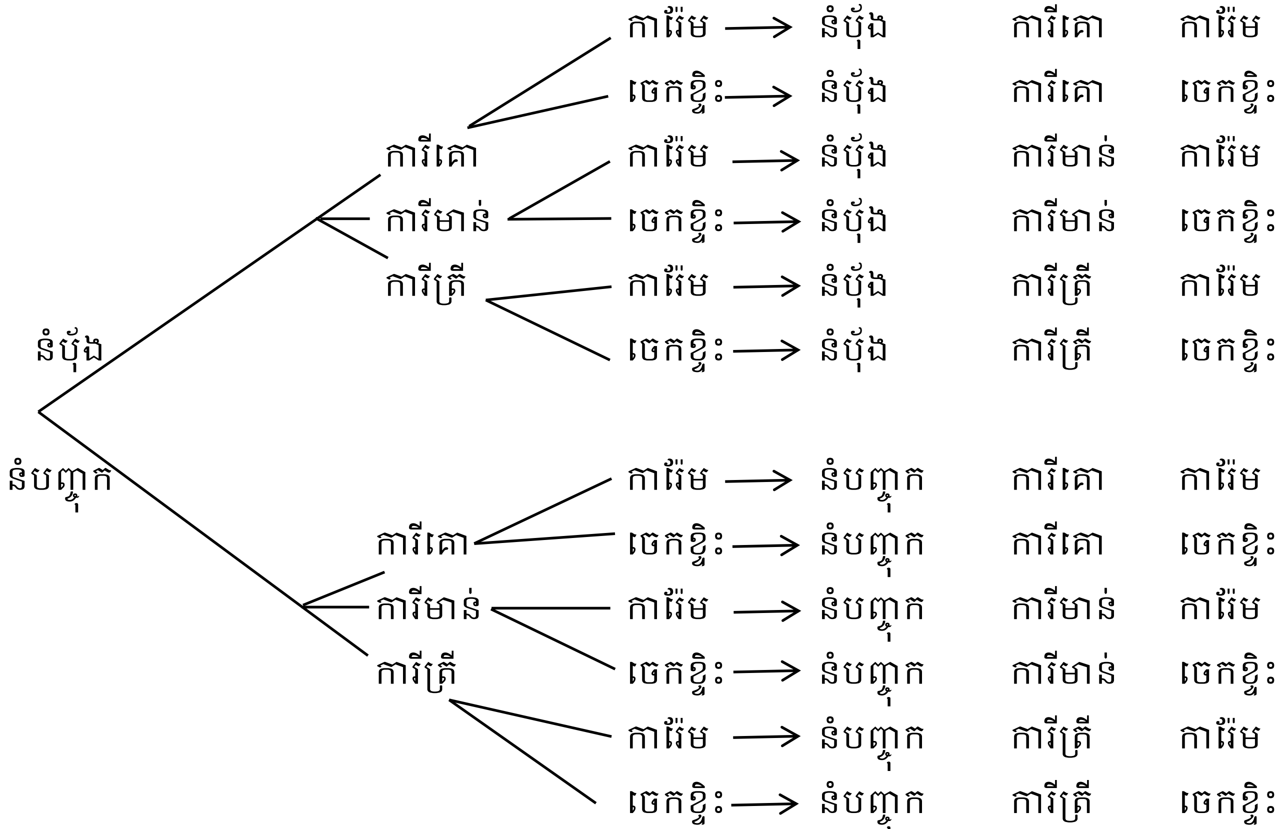
ព្រឹត្តិការណ៍ខ្លះអាចកើតឡើងតាមវិធីច្រើនយ៉ាងខុសៗគ្នា ដែលយើងមិនអាចធ្វើបញ្ជីបាន។ យើងត្រូវផ្អែកលើរូបមន្ត និងគោលការណ៍គ្រឹះនៃរាប់។

- **ឧទាហរណ៍ ៖** ក្នុងពិធីជប់លៀងមួយអ្នកចូលរួមអាចជ្រើសរើស ម្ហូបអាហារដូចខាងក្រោម៖
  - អាហារ : នំពុ្ញក ឬ នំប៉័ង
  - ម្ហូប : ការីគោ, ការីត្រី ឬការីមាន់
  - បង្អែម : ការ៉េម ឬ ចេកខ្ទិះ

  តើគេអាចជ្រើសរើសអាហារបានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា?

ចម្លើយ : យើងត្រូវធ្វើសេចក្តីសម្រេចចិត្ត បីយ៉ាង :

ជ្រើសរើស អាហារ	ជ្រើសរើស ម្ហូប	ជ្រើសរើស បង្អែម
២ ជម្រើស	៣ ជម្រើស	២ ជម្រើស



យើងឃើញថា ចំពោះជម្រើសអាហារ នីមួយៗ យើងអាចជ្រើសរើសម្ហូបបាន បីយ៉ាង និងមានពីរជម្រើសសម្រាប់បង្អែម ។

នោះជម្រើសសរុបមាន $2\times3\times2=12$ ជម្រើសខុសៗគ្នា

ដូចនេះ យើងអាចជ្រើសរើសបាន 12 ជម្រើសខុសៗគ្នា ។

> ***ទ្រឹស្តីបទ*** : យើងមានព្រឹត្តិការណ៍ពីរ E_1 និង E_2 ។ ព្រឹត្តិការណ៍ទីមួយ E_1 កើតឡើង m_1 ដងខុសៗគ្នា ។ ក្រោយពី E_1 បានកើតឡើង E_2 អាចកើតឡើងក្នុង m_2 ករណីខុសៗគ្នា ។ ចំនួនរបៀប រឺករណីដែលព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរកើតឡើងមាន $m_1\times m_2$ ។

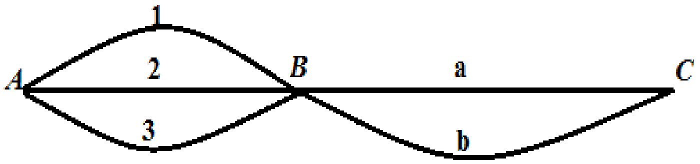
សម្គាល់ : បើព្រឹត្តិការណ៍ $E_1,E_2,E_3,...,E_n$ ហើយកើតឡើងរៀងគ្នា $m_1,m_2,m_3,...,m_n$ ករណីខុសៗគ្នា ។

នោះចំនួនករណីនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំងអស់មាន : $m_1\times m_2\times m_3\times...\times m_n$ ។

❖ ឧទាហរណ៍ ៖ គេមានផ្លូវបីសម្រាប់ធ្វើដំណើរពីភូមិ A ទៅភូមិ B និងមានផ្លូវពីរសម្រាប់ធ្វើដំណើរពីភូមិ B ទៅភូមិ C ។ តើគេអាចធ្វើដំណើរតាមផ្លូវបានប៉ុន្មានរបៀប ដើម្បីចេញពីភូមិ A ទៅភូមិ C ដោយឆ្លងកាត់តាមភូមិ B ។

ចម្លើយ : តាង $1,2,3$ ជាផ្លូវភ្ជាប់ពីភូមិ A ទៅភូមិ B និង a,b ជាផ្លូវភ្ជាប់ពីភូមិ B ទៅភូមិ C ។ ការធ្វើដំណើរពីភូមិ A ទៅភូមិ B មានផ្លូវ 3 ជម្រើស សម្រាប់ធ្វើដំណើរពីភូមិ B ទៅភូមិ C មានផ្លូវ 2 ជម្រើស សម្រាប់ធ្វើដំណើរ ។

តាមគោលការណ៍ផលគុណ មានផ្លូវសម្រាប់ធ្វើដំណើរពីភូមិ A ទៅភូមិ C មាន $3\times2=6$ ជម្រើស។



ដូចនេះ គេអាចធ្វើដំណើរបាន 6 របៀបពីភូមិ A ទៅភូមិ C ដោយឆ្លងកាត់តាម ភូមិ B ។

លំហាត់គំរូទី១ : គេចង់បង្កើតលេខ 4 ខ្ទង់ដោយប្រើលេខ $0,1,2,3,4$ ។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នាដើម្បីឱ្យលេខដែលបង្កើតបាននោះធំជាង 2000 ។ (*បញ្ជាក់* : ចំនួននីមួយៗខាងលើគ្មានតួលេខដែលពីរដងទេ)។

ចម្លើយ : រកចំនួនរបៀបដែលអាចបង្កើតបាន : តាង n ជាចំនួនរបៀបដែលអាចបង្កើតបាន ។

ខ្ទង់ទី១ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់ទី២ មាន 4 ជម្រើស

ខ្ទង់ទី៣ មាន 3 ជម្រើស

ខ្ទង់ទី៤ មាន 2 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ប្រមាណវិធីគុណ យើងបាន $n=4\times3\times3\times2=72$ របៀប

ដូចនេះ គេអាចបង្កើតបាន 72 របៀបខុសៗគ្នា។

៣.វិភាគ បន្សំ *(Combinational Analysis)*

៣.១. ហ្វាក់តូរ្យែល (***Factorial***)

ហ្វាក់តូរ្យែលនៃ n (តាងដោយ $n!$) គឺជាផលគុណនៃ n ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង (គឺផលគុណចំនួនគត់វិជ្ជាមានបន្តគ្នាពី 1 ដល់ n) ។

$$n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$$
$$= n\times (n-1)\times \ldots \times 2\times 1$$

❖ **ឧទាហរណ៍ ៖** $4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$

$7! = 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 5040$

សម្គាល់ : $1! = 1$ និង $0! = 1$

❖ **ឧទាហរណ៍ ៖** គណនាផលបូក : $1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + n.n!$

គេមាន : $(k+1)! = (k+1).k! = k.k! + k!, \forall k \in IN$

$\Rightarrow k.k! = (k+1)! - k!$ ឱ្យតម្លៃ $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ យើងបាន :

$$+\begin{cases} 1.1! = 2! - 1! \\ 2.2! = 3! - 2! \\ 3.3! = 4! - 3! \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n.n! = (n+1)! - n! \end{cases}$$

$$S = (n+1)! - 1!$$

ដូចនេះ $S = (n+1)! - 1$

ចំណាំ ៖ $\boldsymbol{n}! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times \boldsymbol{n}$

$(2\boldsymbol{n})!! = 2\times 4\times 6\times \ldots \times 2\boldsymbol{n} = 2^{n}.\boldsymbol{n}!$

$(2\boldsymbol{n}-1)!! = 1\times 3\times 5\times \ldots \times (2\boldsymbol{n}-1)$

$\boldsymbol{n}!! = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-2)(\boldsymbol{n}-4)\ \ldots$

$\boldsymbol{n}!!! = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-3)(\boldsymbol{n}-6)\ldots$

សំគាល់ $-1!! = 0!! = 1$ ***by definition (Arfken 1985 , page 547)***

❖ **ឧទាហរណ៍ ៖** $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

$5!!=1\times3\times5=15$

$5!!!=5\times2=10$

$8!=5!\times6\times7\times8=40320$

$8!!=8\times6\times4\times2=384$

$8!!!=8\times5\times2=80$

៣.២. តំរៀប *(Arrangement)*

៣.២.១. *តំរៀបមិនសារឡើងវិញ*

តំរៀប p ធាតុក្នុងចំនោម n ធាតុនៃសំណុំ E គឺជាសំណុំរងនៃ E ដែលមាន p ធាតុខុសៗគ្នា រៀបតាមលំដាប់មួយកំនត់ ។

ចំនួនតំរៀប p ធាតុនៃសំណុំ E ដែលមាន n $(p\le n)$ ធាតុគឺ :

$$\boldsymbol{A_n^p=n(n-1)\ldots(n-p+1)}$$

ឬ $$\boldsymbol{A_n^p=\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)=\frac{n!}{(n-p)!}}$$

❖ **ឧទាហរណ៍ ៖** មនុស្សមួយក្រុមមានគ្នា ៤ នាក់។ គេចង់ថតរូបម្តង ៣ នាក់។ តើគេអាចថតរូបបាន ប៉ុន្មានរបៀប ?

✓ **របៀបទី១ ៖**

ចម្លើយ : ដោយមនុស្សមានគ្នា ៤នាក់ ហើយគេជ្រើសរើស ៣ នាក់មកធ្វើការតំរៀបថតរូប ។

គេបាន ចំនួនតំរៀបមនុស្ស ៣ នាក់ក្នុងចំនោម មនុស្ស ៤នាក់គឺ $A_3^4=\frac{4!}{(4-3)!}=4!=24$ របៀប

ដូច្នេះ គេអាចថតរូបបាន 24 របៀប ។

✓ **របៀបទី២ ៖**

ក្នុងការជ្រើសមនុស្ស 3 នាក់ក្នុងចំនោមមនុស្ស 4 នាក់ នោះ :

- អ្នកទី១ : មាន 4 ជម្រើស
- អ្នកទី២ : មាន 3ជម្រើស
- អ្នកទី៣ : មាន 2 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ គេបាន $4\times3\times2=24$ ជម្រើស

ដូចនេះ គេអាចថតរូបបាន 24 របៀប

៣.២.២. *តំរៀប សារឡើងវិញ*

តំរៀបសារឡើងវិញ k ធាតុក្នុងចំនោម n ធាតុគឺ ជាតំរៀបដែលធាតុនីមួយៗ អាចមានវត្តមា $1,2,..$ $...,k$ ដង ។

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

❖ **ឧទាហរណ៍** ៖ គេចង់បង្កើតលេខ 3 ខ្ទង់ដែលយកចេញពីលេខ $1,3,5,7,9$ ។ តើគេអាចបង្កើតលេខ 3 ខ្ទង់បានប៉ុន្មានរបៀប (បើលេខដែលប្រើអាចដូចគ្នា) ?

ចម្លើយ : ដោយគេបង្កើតលេខ 3 ខ្ទង់យកចេញពី 5 លេខផ្សេងគ្នា ហើយលេខដែលអាចប្រើដូចគ្នានោះ គឺ ជាតំរៀបសារឡើងវិញ ។

គេបាន ចំនួនតំរៀបសារឡើងវិញ 3ធាតុក្នុងចំនោម5គឺ $\overline{A}_5^3 = 5^3 = 125$ របៀប

ដូចនេះ គេអាចបង្កើតលេខ3 ខ្ទង់បាន 125 របៀប

៣.៣. ចម្លាស់

❖ **ឧទាហរណ៍១** ៖ មនុស្ស ៣ នាក់ ឈរថតរូបជាជួរ ។ តើគេអាចឈរថតរូបបានប៉ុន្មានករណី ?

✓ **របៀបទី១** ៖

ចម្លើយ : ចំនួនករណីដែលអាច ឈរថតរូបបាន

- អ្នកឈរទី១ : 3ជម្រើស
- អ្នកឈរទី២ : 2 ជម្រើស
- អ្នកឈរទី៣ : 1 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $3\times2\times1=6$ ជម្រើស

ដូចនេះ របៀបដែលអាចឈរថតរូបបានគឺ 6 ករណី

ករណីទូទៅ ៖ *ចម្លាស់នៃ n វត្ថុខុសគ្នា ជាតំរៀបមានលំដាប់នៃ n វត្ថុដែលវត្ថុមួយនៅលំដាប់ទី១ វត្ថុមួយទៀតនៅលំដាប់ទី២ បន្តបន្ទាប់ ។*

ចំនួនចម្លាស់នៃ n វត្ថុគឺ $\boldsymbol{P}!=\boldsymbol{n}!$

✓ **របៀបទី២ ៖** ដោយមនុស្ស ៣ នាក់ឈរថតរូបជាជួរ គឺជាចម្លាស់មនុស្ស ៣ នាក់ជាជួរ

ចំនួនចម្លាស់គឺ $P_3=3!=3\times2\times1=6$ របៀប

ដូចនេះ គេអាចឈរថតរូបបាន 6 របៀប

❖ **ឧទាហរណ៍២ ៖** គរុនិស្សិតគណិតវិទ្យាក្រុម D ជំនាន់ទី ២១មួយក្រុមមានគ្នា ៦ នាក់ ។ គ្រូចាត់ឱ្យសរសេរមេរៀនសង្ខេបអំពីប្រូបាប។ ក្នុងក្រុមនេះគេចង់ជ្រើស ៣ នាក់ ដើម្បីឱ្យ ១ នាក់ វាយអត្ថបទ ១នាក់ត្រួតពិនិត្យ និង ១នាក់ទៀត អ្នកនិពន្ធ ។ តើគេអាចជ្រើសរើសបានប៉ុន្មានរបៀប ?

✓ **របៀបទី១ ៖** រកចំនួនរបៀបដែលជ្រើសរើស 3 នាក់ វាយអត្ថបទមួយនាក់ មួយនាក់ ត្រួតពិនិត្យ និង មួយនាក់ទៀត និពន្ធ ។

- ជ្រើសរើសអ្នកទី១ 6 របៀប
- ជ្រើសរើសអ្នកទី២ 5 របៀប
- ជ្រើសរើសអ្នកទី៣ 4 របៀប

តាមគោលការណ៍ផលគុណ គេបាន $6\times5\times4=120$ របៀប

ដូចនេះ គេអាចជ្រើសរើសបាន 120 របៀប

ជាទូទៅ ៖ *ចម្លាស់នៃ r វត្ថុយកចេញពី n វត្ថុគឺជាតម្រៀបមានលំដាប់នៃ r វត្ថុខុសៗគ្នាដែលធាតុនីមួយៗយកចេញពី n ធាតុខុសៗគ្នា $(r\le n)$ ។*

ចំនួនចម្លាស់នៃ r វត្ថុយកពី n វត្ថុគឺ $\boldsymbol{P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}}$

✓ **របៀបទី២ ៖** ដោយការជ្រើសរើសមនុស្ស ៣ នាក់, ១នាក់ជាអ្នកវាយអត្ថបទ , ១នាក់ជាអ្នកត្រួតពិនិត្យ និង ១នាក់ទៀត ជាអ្នកនិពន្ធ ដោយជ្រើសរើសចេញពីមនុស្ស ៦នាក់ នោះគឺជាចម្លាស់មនុស្ស ៣នាក់ ក្នុងចំនោម ៦នាក់ ។

ចំនួនចម្លាស់គឺ $P(6,3)=\frac{6!}{(6-3)!}=\frac{6!}{3!}=6\times5\times4=120$ ជម្រើស

ដូចនេះ គេអាចជ្រើសរើសបាន 120 របៀប

❖ **ឧទាហរណ៍៣ ៖** គេចង់បង្កើតលេខ 4 ខ្ទង់ ដោយប្រើលេខ $1,3,5,7$ (ដែលលេខ 4 ខ្ទង់នោះអាចជាលេខដូចគ្នា)។ តើគេអាចបង្កើតលេខ 4 ខ្ទង់ នោះគេបានប៉ុន្មានរបៀប?

✓ **របៀបទី១ ៖** រកចំនួនរបៀបដែលបង្កើតបាន :

ដោយការបង្កើតលេខ 4 ខ្ទង់អាចប្រើលេខដូចគ្នា នោះគេបាន

- ខ្ទង់ទី១ : 4 ជម្រើស
- ខ្ទង់ទី២ : 4 ជម្រើស
- ខ្ទង់ទី៣ : 4 ជម្រើស
- ខ្ទង់ទី៤ : 4 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណ គេបាន $4\times4\times4\times4=4^4=256$ របៀប

ដូចនេះ គេអាចបង្កើតបាន 4 ខ្ទង់បាន 256 របៀប

ជាទូទៅ ៖ *ចម្លាស់ច្រំដែលនៃ n វត្ថុ គឺ $P_{n,r}=n^n$ ។*

✓ **របៀបទី២ ៖** ដោយការបង្កើតលេខ 4 ខ្ទង់ អាចប្រើលេខដូចគ្នានោះគឺ ជាចម្លាស់ច្រំដែល នៃ 4 លេខគឺ $P_{4,r}=256$ របៀប

ដូចនេះ គេអាចបង្កើតលេខ 4 ខ្ទង់បាន 256 របៀប ។

❖ **ឧទាហរណ៍៤ ៖** គេចង់បង្កើតលេខ 3 ខ្ទង់ដែលជ្រើសរើសចេញពីលេខ $1,2,3,4,5$ ។
តើគេអាចបង្កើតលេខ 3 ខ្ទង់នេះបានប៉ុន្មានរបៀប ?

✓ **របៀបទី១ ៖** ចំនួនលេខ 3 ខ្ទង់ដែលអាចបង្កើតបាន

- ខ្ទង់ទី១ : 5 ជម្រើស
- ខ្ទង់ទី២ : 5 ជម្រើស
- ខ្ទង់ទី៣ : 5 ជម្រើស

តាមគោលការណ៍ផលគុណគេមាន $5\times5\times5=5^3=125$ របៀប

ជាទូទៅ ៖ *ចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r វត្ថុយកចេញពី n វត្ថុគឺជាតម្រៀបមានលំដាប់នៃ r វត្ថុដែល វត្ថុនីមួយៗអាចជាវត្ថុដដែលយក ចេញពី n វត្ថុ ខុសៗគ្នា $(r\le n)$ ។*

ចំនួនចម្លាស់ច្រំដែល នៃ r វត្ថុយកពី n វត្ថុ គឺ $\boldsymbol{P_{n,r}=n^r}$

✓ របៀបទី២ ៖ ក្នុងការបង្កើតលេខ 3 ខ្ទង់អាចមានលេខដូចគ្នាដែលជ្រើសរើសចេញពី 5 លេខផ្សេងគ្នា នោះគឺជាចម្លាស់ច្រំដែលនៃ3លេខ យកពី 5 លេខគឺ $P_{5,3}=5^3=125$ របៀប

ដូចនេះ គេអាចបង្កើតលេខ 3 ខ្ទង់ បាន125 របៀប

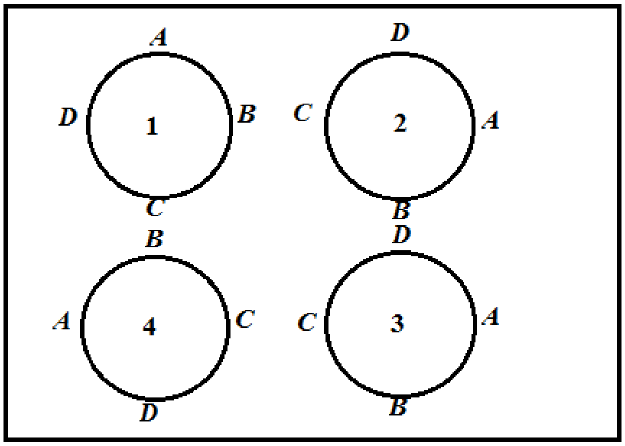
៣.៣.១.ចម្លាស់រង់ *(Circle Permutation)*

ចម្លាស់រង់នៃ n ធាតុគឺជាចម្លាស់ នៃ n ធាតុខុសៗគ្នាជារង្វង់ ។

ចំនួនចម្លាស់រង់នៃ n ធាតុស្មើនឹង $(n-1)!$

❖ ឧទាហរណ៍ ៖ ចូរសរសេរចម្លាស់រង់ A,B,C,D

ABCD	*BACD*	*CABD*	*DABC*
ABDC	*BADC*	*CADB*	*DACB*
ADBC	*BCAD*	*CBAD*	*DBAC*
ADCB	*BCDA*	*CBDA*	*DBCA*
ACBD	*BDAC*	*CDAB*	*DCAB*
ACDB	*BDCA*	*CDBA*	*DCBA*



គិតតែ១ករណី

គេបាន

$$\left.\begin{array}{ll} ABCD & (1) \\ \text{BCDA} & (2) \\ CDAB & (3) \\ \text{DABC} & (4) \end{array}\right\}$$ ៤របៀបខុសៗគ្នា

ដូច្នេះ ចម្លាស់រង់នៃ A,B,C,D គឺ $\frac{4!}{4}=6$ របៀប

៣.៣.២.ចម្លាស់បែងចែកបាន *(Permutation with identical objects)*

ចម្លាស់ n វត្ថុដែលក្នុងនោះមានវត្ថុប្រភេទទី១ ប្រភេទទី២ ....ប្រភេទទីk ហើយវត្ថុប្រភេទនីមួយៗមានចំនួន $r_1, r_2, ...r_k$ រៀងគ្នា $(r_1+r_2+...+r_k=n)$ ហៅថាចម្លាស់បែងចែកបាន ។

ចំនួនចម្លាស់បែងចែកបាន គឺ $\frac{n!}{r_1!r_2!...r_k!}$

ឧទាហរណ៍ ៖ ចូររកចំនួនចម្លាស់នៃពាក្យថា *STATISTICS* ?

ដោយពាក្យថា *STATISTICS* មាន $n=10$ តួអក្សរ

ហើយក្នុងនោះ A មាន ១ តួអក្សរ

C មាន ១ តួអក្សរ

S មាន ៣ តួអក្សរ

T មាន ៣ តួអក្សរ

I មាន ២ តួអក្សរ

ដូចនេះ ចំនួនចម្លាស់នៃពាក្យថា *STATISTICS* គឺ $\frac{10!}{1!1!3!3!2!}=50400$ របៀប

៣.៤. បន្សំ (Combination)

ក្នុង*ចម្លាស់*លំដាប់មានសារៈសំខាន់ណាស់ ។ តម្រៀបដែលមិនគិតលំដាប់ហៅថា ***បន្សំ*** ។

I. **និយមន័យ ៖** *បន្សំជាតម្រៀបមិនគិតលំដាប់ ។*

ជាទូទៅ ៖ *បន្សំនៃ k ធាតុយកពី n ធាតុគឺជាការយកព្រមគ្នាម្តងយក k ធាតុ យកចេញពី n ធាតុខុសៗគ្នាដោយមិនគិតពីលំដាប់នៃការយកចេញ។*

> ចំនួនបន្សំនៃ k ធាតុយកពី n ធាតុ គឺ $C_n^k=\frac{P(n,k)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$ $(k\in IN, n\in IN, k\le n)$

II. **លក្ខណៈនៃបន្សំ**

- $C(n,k)=C(n,n-k)$
- $C(n,k)=\frac{n}{k}C(n-1,k-1)$
- $C(n,k+1)=C(n,k)\times\frac{n-k}{k+1}$
- $C(n,k)=C(n-1,k-1)+C(n-1,k)$

❖ **ឧទាហរណ៍ ៖** ក្នុងល្បែងបៀ 52 សន្លឹក។ គេទាញបៀ 5 សន្លឹកដោយចៃដន្យ ។

តើមានប៉ុន្មានរបៀបដើម្បីបាន ៖

ក). បៀ 2 សន្លឹកជាអាត់

ខ). ច្រើនបំផុតមានអាត់ 2 សន្លឹក

គ). តិចបំផុតមានអាត់ 2 សន្លឹក

ឃ). មានអាត់ 1 សន្លឹក និង ស្តេច1 សន្លឹក

ចម្លើយ

រកចំនួនរបៀបដើម្បីបាន

ក). បៀ 2 សន្លឹកជាអាត់

បៀ 5 សន្លឹក មានអាត់ 2 សន្លឹកមានន័យថាត្រូវយកបៀ 2 សន្លឹកក្នុងបៀ 4 សន្លឹកជាអាត់ និង បៀ3 សន្លឹកទៀតរើសក្នុងបៀ 48 សន្លឹកទៀតដែលមិនមែនជាអាត់។

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបដើម្បីទាញបានបៀ 5 សន្លឹកមានអាត់ 2 សន្លឹកគឺ

$$C(4,2)\times C(48,3)=\frac{4!}{2!2!}\times\frac{48!}{45!\times 3!}$$
$$=\frac{4\times3\times2!}{2\times1\times2!}\times\frac{48\times47\times46\times45}{45!\times3\times2\times1}$$
$$=103776 \text{ របៀប}$$

ខ). ច្រើនបំផុតមានអាត់ 2 សន្លឹក

ព្រឹត្តិការណ៍បៀ 2 សន្លឹក មានអាត់យ៉ាងច្រើន 2 សន្លឹកគឺជាព្រឹត្តិការណ៍ហ្វូតបាន បៀ 2 សន្លឹកជាអាត់ និង បៀ 3 សន្លឹក ផ្សេងទៀតមិនមែនជាអាត់ ឬ បៀ1 សន្លឹកជាអាត់ និង បៀ 4 សន្លឹក ផ្សេងទៀតមិនមែនជាអាត់ ឬ បៀ 5 សន្លឹកគ្មានអាត់សោះ ។

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបដើម្បីបាន អាត់ 2 សន្លឹកយ៉ាងច្រើន តាងដោយ N គឺ

$$N=C(4,2)\times C(48,3)+C(4,1)\times C(48,4)+C(4,0)\times C(48,5)$$
$$=\frac{4!}{2!2!}\times\frac{48!}{45!3!}+\frac{4!}{3!1!}\times\frac{48!}{44!4!}+\frac{4!}{4!0!}\times\frac{48!}{43!5!}$$
$$=103776+778320+1712304=2594400$$

$N=2594400$ របៀប

គ). តិចបំផុតមានអាត់ 2 សន្លឹក

ព្រឹត្តិការណ៍បៀ 2 សន្លឹកដែលយ៉ាងតិចមានអាត់ 2 គឺ បៀ 2 សន្លឹកជាអាត់ និង 3 សន្លឹកផ្សេងទៀតមិនមែនជាអាត់ ឬ បៀ3 សន្លឹកជាអាត់ និង 2 សន្លឹកផ្សេង មិនមែនជាអាត់ ឬ បៀ 4 សន្លឹកជាអាត់ និងបៀ 1 សន្លឹកផ្សេងទៀតមិនមែនជាអាត់។

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបយ៉ាងតិចមានអាត់ 2 សន្លឹកតាងដោយ N គឺ:

$$N^{'}=C(4,2)\times C(48,3)+C(4,3)\times C(48,2)+C(4,4)\times C(48,1)$$

$$=\frac{4!}{2!2!}\times\frac{48!}{45!\times 3!}+\frac{4!}{1!3!}\times\frac{48!}{46!\times 2!}+\frac{4!}{4!0!}\times\frac{48!}{47!1!}$$

$$=103776+4512+48$$

$$\boxed{N^{'}=108336}$$

ឃ). មានអាត់ 1 សន្លឹកនិងស្តេច1 សន្លឹក

- មាន $C(4,1)$ របៀបដែលទាញបានបៀអាត់ 1 សន្លឹក
- មាន $C(4,1)$ របៀបដែលទាញបានបៀស្តេច 1 សន្លឹក
- មាន $C(44,3)$ របៀបដែលទាញបានបៀ 3 សន្លឹកដែលមិនមែនជាអាត់ និងស្តេច ។

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបដែលហូតបានបៀអាត់1 សន្លឹក និងស្តេច1 សន្លឹក តាងដោយ $N^{''}$ គឺ

$$N^{''}=C(4,1)\times C(4,1)\times C(44,3)$$

$$=4\times 4\times\frac{44!}{41!3!}=211904$$

$$\boxed{N^{''}=211904 \text{ របៀប}}$$

៤.ទ្រឹស្តីទ្វេធា និងពហុធា *(The Binomai Theorem)*

៤.១. ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

៤.១.១ ទ្វេធា *(Binomial)*

និយមន័យ *ទ្វេធា (binomial) គឺជាពហុធាដែលមានពីរតួ ។* មានន័យថា ជាកន្សោមពីជគណិតមានពីរតួផ្សេងពីគ្នា ។

ឧទាហរណ៍១ ៖ $2x+4y, cx^3-ay, 1-x, v+u$ ជាកន្សោមពីជគណិតដែលហៅថា *ទ្វេធា* ។

៤.១.២.មេគុណទ្វេធា (Binomial Coefficient)

និយមន័យ ៖ មេគុណទ្វេធា $\boldsymbol{C(n,m)=C_m^n=C_n^m={}^nC_m={}_nC_m=C_{n,m}=\binom{n}{m},(m\le n)}$ ជាចំនួននៃវិធីជ្រើសរើស m វត្ថុចេញពី n វត្ថុផ្សេងៗគ្នាដោយគ្មានទាក់ទងនឹងលំដាប់។

Andreas Von Ettingshausen
(1796 – 1878)

កំណាត់សរសេរ៖ $\binom{n}{m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!},(\forall m\le n)$ ។

ចំណាំ៖

$n!=1\times 2\times\cdots\times n$

$0!=1!=1$

សម្គាល់ ៖ $\binom{n}{m}$ *ត្រូវបានណែនាំឱ្យស្គាល់ដោយគណិតវិទូ និងរូបវិទូអាល្លឺម៉ង់* **Andreas Von Ettingshausen** *(1796 – 1878) នៅឆ្នាំ1826 ។*

ឧទាហរណ៍ ៖ **ក**. ចំពោះ 5 ធាតុ នៃសំនុំ $S=\{a,b,c,d,e\}$ គឺមានសំនុំរង *(subsets)* ដែល $n=\binom{5}{3}=\frac{5!}{2!3!}=10$ សំនុំរង ដែលមាន 3ធាតុប្រាកដផ្សេងៗគ្នារួមមាន៖

$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},$

$\{b,c,d\},\{a,c,e\},\{b,d,e\},\{b,c,d\},\{c,d,e\}.$

ខ. គេមានវត្ថុ 8 ផ្សេងៗគ្នា បន្ទាប់មកចាប់ផ្តើមទុកវត្ថុនេះក្នុងថតតុ 3 (ថតទី I , ថតទី II , ថតទី III) ។ ថតទី I ដាក់វត្ថុ 3 ថតទី II ដាក់វត្ថុ 1 ថតទី III ដាក់វត្ថុ 4 ។ តើគេអាចទុកវត្ថុទាំងនេះបានប៉ុន្មានរបៀប ?

ការទុកវត្ថុនេះជាបីដំណាក់កាល គឺ៖

- រើសវត្ថុ 3 ទុកក្នុងថតទី I បាន $\binom{8}{3}=\frac{8!}{5!3!}=56$ របៀប
- រើសវត្ថុ 1 ទុកក្នុងថតទី II បាន $\binom{5}{1}=\frac{5!}{1!4!}=5$ របៀប
- រើសវត្ថុ 4 ទុកក្នុងថតទី III បាន $\binom{4}{4}=\frac{4!}{0!4!}=1$ របៀប

ដូច្នេះ គេអាចទុកវត្ថុទាំង៖ក្នុងថតតុ 3 បាន $56\times5\times1=280$ របៀប ។

Blaise Pascal
(1623 – 1662)

សម្គាល់៖ *មេគុណទ្វេធាអាចរកបានដែរតាមរយៈត្រីកោណប៉ាស្កាល់(Pascal triangle) ដែលត្រូវហៅតាមឈ្មោះ* ***Blaise Pascal (1623-1662)*** *ជាអ្នកគណិតវិទូ រូបវិទូ សាសនាវិទ្យា និងទស្សនវិជ្ជា ជនជាតិបារាំង នៅពេលអាយុ 20ឆ្នាំបានបង្កើតម៉ាស៊ីនបូក លេខដំបូងគេបង្អស់។* ខាងក្រោមនេះជាតារាងត្រីកោណប៉ាស្កាល់ (Pascal's Triangle) ៖

ស្វ័យគុណនៃ n	មេគុណទ្វេធានៃ $(a+b)^n$
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
…	1 1
n-1	1 .... C_{n-1}^{k-2} C_{n-1}^{k-1} C_{n-1}^{k} 1
n	1 .... C_n^{k-2} C_n^{k-1} C_n^{k} ... . C_n^{n-1} 1

ជាទូទៅ៖ $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$

៤.១.៣. លក្ខណៈមេគុណទ្វេធា (Properties of binomial coefficient)

1. $\binom{n}{m}, m \le n$ គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន
2. $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{n-m}$
3. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ និង $\binom{n}{1} = n$
4. $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$ (ត្រីកោណប៉ាស្កាល់)
5. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$
6. $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$
7. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad , n \ge 1$
8. បើ m, n ជាចំនួនគត់ ហើយគឺ $m > n$ នោះ $\binom{n}{m} = 0$

ឧទាហរណ៍២ ៖

$$A = \frac{\binom{100}{98} + \binom{1000}{998}}{\binom{1000}{2} + \binom{100}{2}} + \frac{\binom{20}{4}}{\binom{18}{3} + \binom{18}{4} + \binom{19}{3}}$$

$$= \frac{\binom{100}{2} + \binom{1000}{2}}{\binom{1000}{2} + \binom{100}{2}} + \frac{\binom{20}{4}}{\binom{19}{4} + \binom{19}{3}}$$

ពីព្រោះ $\binom{100}{98} = \binom{100}{100-98} = \binom{100}{2}$ និង $\binom{18}{3} + \binom{18}{4} = \binom{19}{4}$

ដូច្នេះ $A = 1 + \frac{\binom{20}{4}}{\binom{20}{4}} = 2$

៤.២.៤ ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា(The Binomial Theorem)

❖ **ទម្រង់ទាំងបីនៃទ្រឹស្តីបទទ្វេធា ៖**

ក. *ទម្រង់ទី១* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ខ. *ទម្រង់ទី២* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

គ. *ទម្រង់ទី៣* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

ទម្រង់ទាំងបីនៃរូបមន្តខាងលើគឺអនុវត្តន៍គ្រប់តម្លៃពិត (real numbers) និងចំនួនកុំផ្លិច (complex numbers) a,b ។ ចំពោះ ***ទម្រង់ទី២*** ការពិតទៅជាវិបាកនៃ ***ទម្រង់ទី១*** ដោយគ្រាន់តែជំនួស b ដោយ $-b$ ។

➢ **រូបមន្តទូទៅនៃទម្រង់ទី១ ៖** សម្រាប់តម្លៃ $n=1,2,\cdots$ និងគ្រប់ចំនួនពិត ឬចំនួនកុំផ្លិច a,b $(a \neq b)$ នោះយើងបានរូបមន្តទូទៅ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^n = \boldsymbol{a}^n + \binom{\boldsymbol{n}}{1}\boldsymbol{a}^{n-1}\boldsymbol{b} + \cdots + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{n-1} + \boldsymbol{b}^n$

ជាមួយគ្នានេះដែរយើងអាចសរសេរជានិមិត្តសញ្ញាផលបូកគឺ៖ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}^{n-k}\boldsymbol{b}^k$

➢ **រូបមន្តទូទៅនៃទម្រង់ទី២ ៖** សម្រាប់រូបមន្តទូទៅនៃទម្រង់នេះគឺយើងគ្រាន់តែប្តូរ b ទៅ $-b$ នោះយើងបាន $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}(-1)^k\boldsymbol{a}^{n-k}\boldsymbol{b}^k$ ជាការស្រេច។

Isaac Newton
$(1642-1726)$

➢ **រូបមន្តទូទៅនៃទម្រង់ទី៣ ៖** សម្រាប់តម្លៃ $n=1,2,\cdots$ និងគ្រប់ចំនួនពិត ឬចំនួនកុំផ្លិច a,b $(a \neq b)$ នោះ យើងបានរូបមន្តទូទៅជា $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$ មួយគ្នានេះដែរយើងអាចសរសេរជានិមិត្តសញ្ញាផលបូកគឺ៖ $\dfrac{\boldsymbol{a}^{n+1} - \boldsymbol{b}^{n+1}}{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a}^n + \boldsymbol{a}^{n-1}\boldsymbol{b} + \cdots + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{n-1} + \boldsymbol{b}^n = \sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{b}^k\boldsymbol{a}^{n-k}$

សម្គាល់៖ *សម្រាប់រូបមន្តទូទៅទម្រង់ទី1 នៅពេលដែល $a=1$, $b=x$ នោះជា ករណីពិសេសនៃទ្រឹស្តីបទទ្វេធាដែលគេហៅថា ទ្វេធាញូតុន***(Newton Binomial)*** ដែលយកតាមឈ្មោះ **Isaac Newton (1642-1726)** ជាអ្នកគណិតវិទូ និងរូបវិទូ ជនជាតិ អង់គ្លេស បានរយើញនូវអាយុ 24 ឆ្នាំជាទម្រង់ទូទៅមានហេតុដើមទាញចេញពីរូបមន្តទូទៅនៃស៊េរី ។*

ខាងក្រោមនេះជាទ្វេធាញូតុន ៖

$$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

ឧទាហរណ៍៣ ៖ ក. ចូរគណនា $I_n = \int_0^1 (1+x)^n dx \,;\forall x = 0,1,2,\cdots$

ខ. ទាញបង្ហាញថា $1+\frac{\binom{n}{1}}{2}+\frac{\binom{n}{2}}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ ។

ចម្លើយ ៖ ក. គណនា $I_n = \int_0^1 (1+x)^n dx \,;\forall n = 0,1,2,\cdots$

យើងតាង $u = 1+x \Rightarrow du = dx$ បើ $x=0 \Rightarrow u=1$ និង $x=1 \Rightarrow u=2$

នោះ $I_n = \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_1^2 u^n du$

$$= \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_1^2$$

$$= \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ ។

ខ. ទាញថា $1+\frac{\binom{n}{1}}{2}+\frac{\binom{n}{2}}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

យើងដឹងថាទ្វេធាញូតុន $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ នោះ

$$I_n = \int_0^1 (1+x)^n dx$$

$$= \int_0^1 \left(1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+x^n\right)dx$$

$$= \left[x+\frac{\binom{n}{1}}{2}x^2+\frac{\binom{n}{2}}{3}x^3+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

នាំឱ្យ $I_n = 1+\frac{\binom{n}{1}}{2}+\frac{\binom{n}{2}}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}$

តែ $I_n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

ដូចនេះ $I_n = 1+\frac{\binom{n}{1}}{2}+\frac{\binom{n}{2}}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

៤.៣.ទ្រឹស្តីបទពហុធា (The Polynomial Theorem / Multinomial Theorem)

៤.៣.១.ពហុធា (Multinomial)

និយមន័យ ៖ តាមគណៈកម្មាធិការជាតិភាសាខ្មែរ (គ.ជ.ភ.ខ) ដែលបច្ចុប្បន្នជាក្រុមប្រឹក្សាជាតិភាសាខ្មែរ(ក.ជ.ភ.ខ) បានអនុម័តនូវពាក្យ " កន្សោមពីជគណិតមានផលបូកតួជាច្រើន ដែលតួ នីមួយៗ គឺជាផលគុណចំនួនថេរមួយ និងអថេរមួយ ឬច្រើន។បើសិនមានអថេរ x មួយ នោះទម្រង់ ទូទៅកំណត់ដោយ $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ ដែល $a_i;i\in\overline{0,n}$ ជាចំនួនថេរ " ។ ចំនែកឯពាក្យ "កន្សោមពីជគណិតជាផលបូកនៃពីរតួ ឬច្រើនតួ" ។

ឧទាហរណ៍៖ $x^2-2xy+y^2, 3x^3-xy+2xy^2-y^2, 1+x-2x^2+3x^3-x^4$ ជាពហុធា។

៤.៣.២.មេគុណពហុធា (Multinomial Coefficient)

និយមន័យ ៖ មេគុណពហុធា $\binom{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}=C(n;n_1,n_2,\cdots,n_k)=(n_1,n_2,\cdots,n_k)!$ ជាចំនួនរបៀបនៃរើសវត្ថុ n_1 នៃប្រភេទទី1 បន្ទាប់មកវត្ថុ n_2 ជាប្រភេទទី2 រហូតដល់វត្ថុ n_k ជាប្រភេទទី k ចេញពីការប្រមូលផ្តុំវត្ថុ n ផ្សេងៗគ្នាដោយឥតគិតលំដាប់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sum_{i=1}^{k}n_i=n$ ។

កំណត់សរសេរ៖ $$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$ ។

- **ឧទាហរណ៍៤** ៖ សម្រាប់សំណុំ $\{a,a,b,c\}$ ដែលប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $n=4,k=3,n_1=2,n_2=1,n_3=1$។ ដូច្នោះគឺមាន $\binom{4}{2,1,1}=\frac{4!}{2!1!1!}=12$ របៀប ដែលបង្ហាញដូចខាងក្រោម៖

  aabc, aacb, abac, abca, acab, acba,
  baac, baca, bcaa, caab, caba, cbaa.

- **ឧទាហរណ៍៥** ៖ ចំនួនរបៀបរើសវត្ថុ ២, បន្ទាប់មកវត្ថុ១, បន្ទាប់មកវត្ថុ១ទៀត ចេញពីសំណុំ $\Omega=\{a,b,c,d\}$ *(មានន័យថាជារូបមន្តចំលាស់សារឡើងវិញនៃ៤ធាតុ)* គឺមាន $\binom{4}{2,1,1}=\frac{4!}{2!1!1!}=12$ របៀប។ យើងបាននូវរបៀបដូចខាងក្រោម(របាររបន្ទាត់ព្រួយឈរ ($\uparrow$) បង្ហាញលំដាប់នៃការរើស៖

  $\uparrow ab\uparrow c\uparrow d\uparrow,\ \uparrow ab\uparrow d\uparrow c\uparrow,\ \uparrow ac\uparrow b\uparrow d\uparrow,\ \uparrow ac\uparrow d\uparrow b\uparrow,$
  $\uparrow ad\uparrow b\uparrow c\uparrow,\ \uparrow ad\uparrow c\uparrow b\uparrow,\ \uparrow bc\uparrow a\uparrow d\uparrow,\ \uparrow bc\uparrow d\uparrow a\uparrow,$
  $\uparrow bd\uparrow a\uparrow c\uparrow,\ \uparrow bd\uparrow c\uparrow a\uparrow,\ \uparrow cd\uparrow a\uparrow b\uparrow,\ \uparrow cd\uparrow b\uparrow a\uparrow.$

❖ ឧទាហរណ៍៣ ៖ ចំនួននៃវិធីរៀប ៥ធាតុនៃអក្សរ ៣ធាតុនៃអក្សរ និង៤ធាតុនៃអក្សរ គឺ $\binom{12}{5,3,4}=\frac{12!}{5!3!4!}=27720$ របៀប។

❖ ឧទាហរណ៍៦ ៖ មេគុណនៃកន្សោម $x_1^2x_2^3x_3^4$ នៅក្នុងពហុធាគឺ $(x_1+x_2+x_3)^9$

$$\binom{9}{2,3,4}=\frac{9!}{2!3!4!}=1260$$ ។

ករណីពិសេស៖ *នៅពេលដែល* $k=2$ *នោះមេគុណពហុធាគឺ* $\binom{n}{n_1,n_2}=\binom{n}{n_1}=\binom{n}{n_2},\forall n=n_1+n_2$

❖ ឧទាហរណ៍៧៖ $\binom{5}{2,3}=\binom{5}{2}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{2!3!}=10$ ។

នៅពេលដែល $k=n,n_1=n_2=\cdots=n_k=1$ *នោះ* $\binom{n}{1,1,\cdots,1}=n!$

ឧទាហរណ៍៖ $\binom{4}{1,1,1,1}=\frac{4!}{1!1!1!1!}=4!=24$ ។

៤.៣.២.ទ្រឹស្តីបទពហុធា *(Multinomial Theorem)*

និយមន័យ ៖ គ្រប់ចំនួនពិត (Real numbers) $x_1,x_2,\cdots,x_m$ និងចំនួនគត់ធម្មជាតិ(Natural numbers) $n,\alpha,k_1,k_2,\cdots,k_m$ នោះយើងបានរូបមន្តទូទៅនៃ $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=X_m^n$ ដែល

$$\boldsymbol{X_m^n}=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k_1,k_2,\cdots,k_m}}\prod_{1\le\alpha\le m}\boldsymbol{x_\alpha}^{k_\alpha}$$ ។

ចំណាំ៖ n ជាចំនួនស្វ័យគុណ និង m ជាចំនួនតួ។

(បកស្រាយរូបមន្តនៃទ្រឹស្តីបទនេះនូវផ្នែកលំហាត់ និងចម្លើយ)

❖ ឧទាហរណ៍៨ ៖ ចូរពន្លាត់កន្សោម $X_3^4=(x_1+x_2+x_3)^4$

ជំហានទី១៖ យក $\binom{4}{k_1,k_2,k_3}$ ពីព្រោះកន្សោម X_3^4 មានស្វ័យគុណ4និងមាន3តួគឺ x_1,x_2,x_3

ជំហានទី២៖ រកគ្រប់សំណុំតម្លៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $k_1+k_2+k_3=4$; $\forall k_1,k_2,k_3\le 4$ យើងបានសំណុំតម្លៃ (k_1,k_2,k_3) គឺមាន $5\times3=15$

ចម្លើយ រួមមាន ៖

$(0,0,4),(0,4,0),(0,1,3),(0,3,1),(0,2,2),(1,1,2),(1,2,1),(1,3,0),(1,0,3),(2,2,0),(2,0,2),(2,1,1),(3,1,0),(3,0,1),(4,0,0)$ ។

ជំហានទី៣៖ យកសំណុំតម្លៃខាងលើយកទៅជំនួសចូលកន្សោម $\binom{4}{k_1,k_2,k_3}x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}$

$$\bullet(0,0,4)\to\binom{4}{0,0,4}x_1^0x_2^0x_3^4=\frac{4!}{0!0!4!}x_3^4=x_3^4$$

$$\bullet(0,4,0)\to\binom{4}{0,4,0}x_1^0x_2^4x_3^0=\frac{4!}{4!0!0!}x_2^4=x_2^4$$

$$\bullet(0,1,3)\to\binom{4}{0,1,3}x_1^0x_2^1x_3^3=\frac{4!}{0!1!3!}x_2x_3^3=4x_2x_3^3$$

$$\bullet(0,3,1)\to\binom{4}{0,3,1}x_1^0x_2^3x_3^1=\frac{4!}{0!3!1!}x_2^3x_3=4x_2^3x_3$$

$$\bullet(0,2,2)\to\binom{4}{0,2,2}x_1^0x_2^2x_3^2=\frac{4!}{0!2!2!}x_2^2x_3^2=6x_2^2x_3^2$$

$$\bullet(1,1,2)\to\binom{4}{1,1,2}x_1^1x_2^1x_3^2=\frac{4!}{1!1!2!}x_1x_2^2x_3^2=12x_1x_2^2x_3^2$$

$$\bullet(1,2,1)\to\binom{4}{1,2,1}x_1^1x_2^2x_3^1=\frac{4!}{1!2!1!}x_1x_2^2x_3=12x_1x_2^2x_3$$

$$\bullet(1,3,0)\to\binom{4}{1,3,0}x_1^1x_2^3x_3^0=\frac{4!}{1!3!0!}x_1x_2^3=4x_1x_2^3$$

$$\bullet(1,0,3)\to\binom{4}{1,0,3}x_1^1x_2^0x_3^3=\frac{4!}{1!0!3!}x_1x_3^3=4x_1x_3^3$$

$$\bullet(2,2,0)\to\binom{4}{2,2,0}x_1^2x_2^2x_3^0=\frac{4!}{2!2!0!}x_1^2x_2^2=6x_1^2x_2^2$$

$$\bullet(2,0,2)\to\binom{4}{2,0,2}x_1^2x_2^0x_3^2=\frac{4!}{2!0!2!}x_1^2x_3^2=6x_2^2x_3^2$$

$$\bullet(2,1,1)\to\binom{4}{2,1,1}x_1^2x_2^1x_3^1=\frac{4!}{2!1!1!}x_1^2x_2x_3=12x_1^2x_2x_3$$

$$\bullet(3,1,0)\to\binom{4}{3,1,0}x_1^3x_2^1x_3^0=\frac{4!}{3!1!0!}x_1^3x_2=4x_1^3x_2$$

$$\bullet(3,0,1)\to\binom{4}{3,0,1}x_1^3x_2^0x_3^1=\frac{4!}{3!0!1!}x_1^3x_3=4x_1^3x_3$$

$$\bullet(4,0,0)\to\binom{4}{4,0,0}x_1^4x_2^0x_3^0=\frac{4!}{4!0!0!}x_1^4=x_1^4$$

ជំហានទី៤៖ យកតួនីមួយៗបូកបញ្ចូលគ្នាដោយគោរពតាមរូបមន្តខាងលើ យើងបាន៖

$$X_3^4=x_1^4+x_2^4+x_3^4+12x_1^2x_2x_3+12x_1x_2^2x_3+12x_1x_2x_3^2+6x_1^2x_2^2+6x_1^2x_3^2+6x_2^2x_3^2$$
$$+4x_1^3x_2+4x_1^3x_3+4x_2^3x_1+4x_2^3x_3+4x_3^3x_1+4x_3^3x_2\,.$$

៤.៣.៣.ផលបូកនៃមេគុណពហុធា (Sum of multinomial coefficients)

យើងដឹងរួចមកហើយនូវរូបមន្តទូទៅនៃស្វ័យគុណទី n របស់ពហុធា $(x_1+x_2+\cdots+x_m)$ ដែលតាង ដោយ $\boldsymbol{X_m^n}=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n}\binom{n}{k_1,k_2,\cdots,k_m}\prod_{1\le\alpha\le m}x_\alpha^{k_\alpha}$ ប៉ុន្តែនៅពេលករណី $x_1=x_2=\cdots=x_m=1$ នោះរូបមន្តទៅជា $1_m^n=m^n=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n}\binom{n}{k_1,k_2,\cdots,k_m}$ ពីព្រោះ $\prod_{1\le\alpha\le m}x_\alpha^{k_\alpha}=1,\forall 1\le\alpha\le m$ ។

ដូច្នោះ ផលបូកមេគុណពហុធាទាំងអស់គឺ m^n ដែល m ជាចំនួនគត់ និង n ជាចំនួនស្វ័យគុណ។

- **ឧទាហរណ៍៩ ៖** តាមរូបមន្តទ្វេធា $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ នៅពេលដែល $a=b=1$ នោះរូបមន្ត ទ្វេធាទៅជា $2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ ។
- **ឧទាហរណ៍១០ ៖** ចំពោះឧទាហរណ៍៨ នៃពហុធា $(x_1+x_2+x_3)^4$ ដោយយកតម្លៃ $x_1=x_2=x_3=1$ នោះ

  $1_3^4=3^4=1+1+1+12+12+12+6+6+6+4+4+4+4+4+4=81$ ឬ

  $3^4=\sum_{k_1+k_2+k_3=4}\binom{4}{k_1,k_2,k_3}$ ដែល $k_1+k_2+k_3=4;\forall k_1,k_2,k_3\le 4$ មាន១៥ចម្លើយ។

ផ្នែក លំហាត់ និង ចម្លើយ

១.គេឱ្យសំណុំសកល $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ ហើយ $A=\{a,b,c,d,e\}$;$B=\{a,c,e,g\}$ និង $C=\{b,e,f,g\}$ ។

ចូររក
1). $A\cap B$
2). $B\cap C$
3). $A\setminus B$
4). $(A\setminus B)^C$
5). $(A\Delta B)$
6). $(B\Delta C)$
7). $(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
8). $A\times B$
9). $(A\cap B)\times(B\cap C)$
10). $(A\Delta B)\times(B\Delta C)$

ចម្លើយ

១). រក $A\cap B$

ដោយ $A\cap B=\{x:x\in A\wedge x\in B\}$
$=\{a,c,e\}$

២). $B\cap C=\{x:x\in B\wedge x\in C\}$
$=\{e,g\}$

៣). $A\setminus B=\{x:x\in A\wedge x\notin B\}$
$=\{b,d\}$

៤). $(A\setminus B)^C=\{a,c,e,f,g\}$

៥). $A\Delta B=\{x:x\in A\wedge x\notin B\}\vee\{x\in B\wedge x\notin A\}$
$=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$
$=\{b,d\}\cup\{g\}=\{b,d,g\}$

៦). $(B\Delta C)=\{x:(x\in B\wedge x\notin C)\vee(x\in C\wedge x\notin B)\}$
$=(B\setminus C)\cup(C\setminus B)$
$=\{a,c\}\cup\{b,f\}$
$=\{a,b,c,f\}$

៧). $(A\cap B)\Delta(A\cap C)=[(A\cap B)\setminus(A\cap C)]\cup[(A\cap C)\setminus(A\cap B)]$
$=\{a,c\}\cup\{g\}=\{a,c,g\}$

៨). $A\times B=\{(a,b):a\in A\wedge b\in B\}$

$=\{(a,a);(a,c);(a,e);(a,g);(b,a);(b,c);(b,e);(b,g);(c,a);$
$(c,c);(c,e);(c,g);(d,a);(d,c);(d,e);(d,g);(e,a);(e,c);$
$(e,e);(e,g)\}$

៩). $(A\cap B)\times(B\cap C)=\{(a,e);(a,g);(c,e);(c,g);(e,e);(e,g)\}$

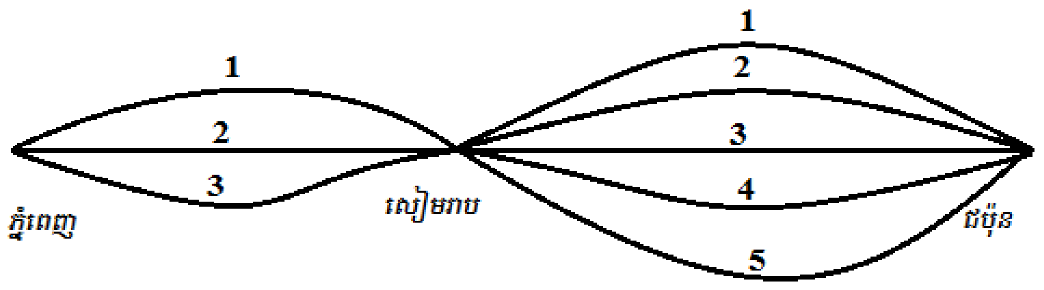
១០). $(A\Delta B)\times(B\Delta C)=\{(b,g);(d,g);(g,g)\}$ ។

២. ក្រុមហ៊ុនអាកាសចរណ៍ មួយនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា បានបើកជើងហោះហើរ បីជើង ពីក្រុងភ្នំពេញទៅ ខេត្តសៀមរាប និង ពីសៀមរាបទៅជប៉ុន ប្រាំជើង ។
តើគេអាចធ្វើដំណើរបានប៉ុន្មាន របៀបពីទីក្រុងភ្នំពេញ ទៅប្រទេសជប៉ុន តាមជើងហោះហើរនេះ?

ចម្លើយ

រករបៀបនៃការធ្វើដំណើរពីទីក្រុងភ្នំពេញទៅ ប្រទេសជប៉ុន ៖

របៀបទី ១



តាមគោលការណ៍របាប់ ចំនួនរបៀបនៃការធ្វើដំណើរពីភ្នំពេញ ទៅប្រទេសជប៉ុន
មាន $3\times5=15$ របៀប

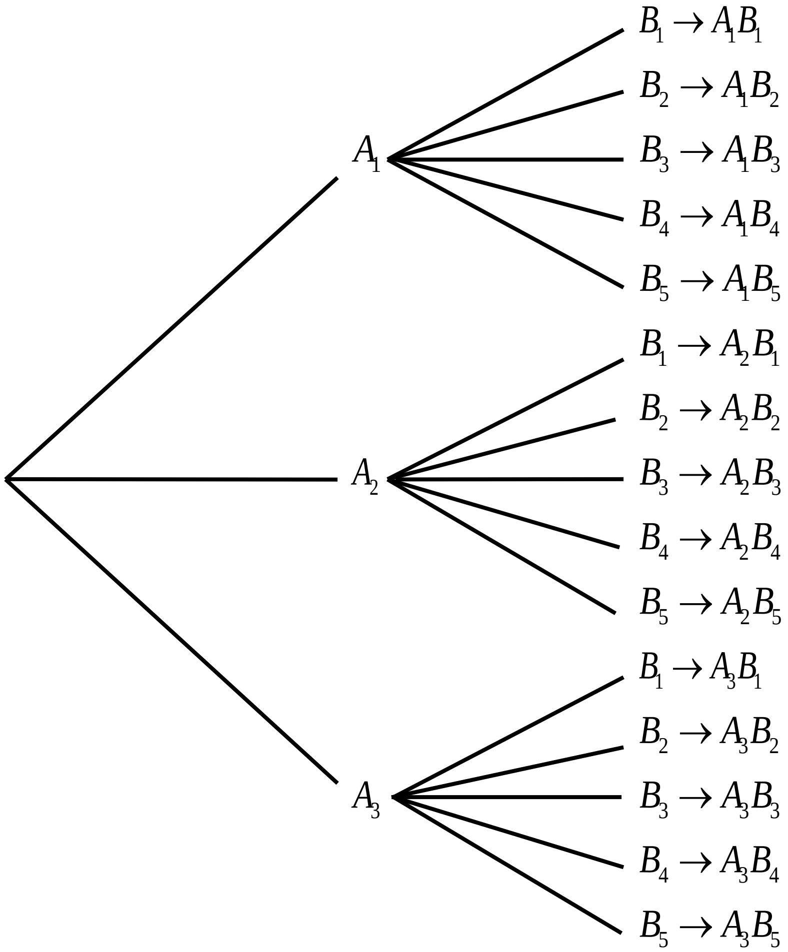
ដូចនេះ គេអាចធ្វើដំណើរពីភ្នំពេញទៅជប៉ុនបាន 15 របៀប។

របៀបទី២

តាង A_i ជាការធ្វើដំណើរពីទីក្រុងភ្នំពេញទៅខេត្តសៀមរាប ដែល $i=1,2,3$

B_j ជាការធ្វើដំណើរពីខេត្តសៀមរាបទៅប្រទេសជប៉ុន ដែល $j=1,2,3,4,5$

យើងបានដ្យាក្រាម ដូចខាងក្រោម ៖



តាមដ្យាក្រាមខាងលើ យើងឃើញថាចំនួនរបៀបនៃការធ្វើដំណើរពីទីក្រុងភ្នំពេញ ទៅប្រទេសជប៉ុន មាន 15 របៀប។

៣. ក្នុងការសាកសួរសិស្ស ២០០នាក់ គេបានឃើញថា សិស្ស ៧០នាក់រៀនភាសាបារាំង ៤០ នាក់ រៀនភាសាជប៉ុន ៧៥នាក់ រៀនភាសាអង់គ្លេស ១០នាក់ រៀនភាសាបារាំង និងជប៉ុន ៣០នាក់ រៀនភាសាបារាំង និង អង់គ្លេស ១៥នាក់ រៀនភាសាជប៉ុន និង អង់គ្លេស ហើយសិស្ស ៧០នាក់ មិនបានរៀនភាសាណាមួយសោះ ។

ក. តើសិស្សប៉ុន្មាននាក់បានរៀនពីរភាសា ?

ខ. តើសិស្សប៉ុន្មាននាក់បានរៀនភាសាអង់គ្លេស មិនរៀនភាសាជទៃ?

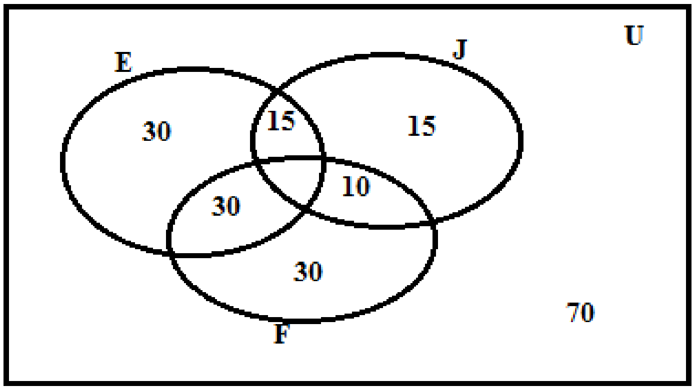
គ. តើសិស្សប៉ុន្មាននាក់រៀនភាសាអង់គ្លេស និង មិនរៀនភាសាបារាំង?

ចម្លើយ

តាង E ជាសំណុំសិស្សរៀនភាសាអង់គ្លេស $n(E)=75$ នាក់

F ជាសំណុំសិស្សរៀនភាសាបារាំង $n(F)=70$ នាក់

J ជាសំណុំសិស្សរៀនភាសាជប៉ុន $n(J)=40$ នាក់



ដ្យាក្រាមវិន

តាមដ្យាក្រាមវិន $n(E\cap F\cap J)=0$ នាក់

$n(E\cap J)=15$ នាក់

$n(E\cap F)=30$ នាក់

$n(F\cap J)=10$ នាក់

ក. ចំនួនសិស្សរៀនពីរភាសា

ចំនួនសិស្សរៀនពីរភាសា = $n(E\cap J)+n(E\cap F)+n(F\cap J)=15+30+10=55$ នាក់

ដូចនេះ ចំនួនសិស្សរៀនពីរភាសា មាន 55 នាក់។

ខ. ចំនួនសិស្សរៀនភាសាអង់គ្លេស មិនរៀនភាសាជទៃទៀត

ចំនួនសិស្សរៀនតែភាសាអង់គ្លេស $=n(E)=n(E\cap F)-n(E\cap J)=75-30-15=30$ នាក់

ដូចនេះ ចំនួនសិស្សរៀនតែភាសាអង់គ្លេស មិនរៀនភាសាជទៃ មាន 30 នាក់

គ. ចំនួនសិស្សរៀនភាសាអង់គ្លេស មិនរៀនភាសាបារាំង ៖

សិស្សរៀនភាសាអង់គ្លេស មិនរៀនភាសាបារាំង $= n(E) - n(E \cap F) = 75 - 30 = 45$ នាក់

ដូចនេះ សិស្សរៀនភាសាអង់គ្លេស មិនរៀនភាសាបារាំង មាន 45 នាក់។

៤. តាមការសាកសួរពត៌មានពីប្រជាជនចំនួន ១០០នាក់ បានឱ្យដឹងថាមានប្រជាជនចំនួន ៥៨ នាក់ ចូលចិត្តអានទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ , ៥៦នាក់ ចូលចិត្តអានទស្សនាវដ្ដី ប្រជាប្រិយ និង២៦នាក់ ចូលចិត្តអានទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ និង ប្រជាប្រិយ ។

ក. តើមានប្រជាជនប៉ុន្មាននាក់ដែលចូលចិត្តអានទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំមួយប៉ុណ្ណោះ ?

ខ. តើមានប្រជាជនប៉ុន្មាននាក់ដែលចូលចិត្តអានទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយមួយប៉ុណ្ណោះ ?

គ. តើមានប្រជាជនប៉ុន្មាននាក់ដែលចូលចិត្តអានទស្សនាវដ្ដីយ៉ាងតិចមួយ ?

ឃ. តើមានប្រជាជនប៉ុន្មាននាក់ដែលចូលចិត្តអានទស្សនាវដ្ដី ?

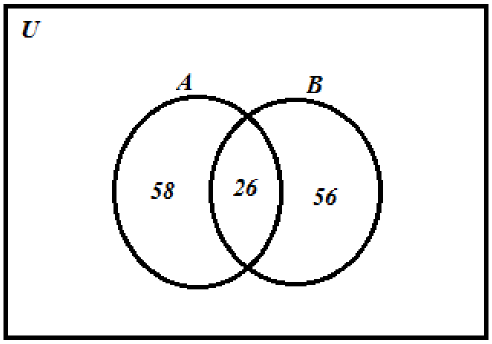
ចម្លើយ

តាង U ជាសំណុំសកលនៃប្រជាជនទាំងអស់

A ជាសំណុំនៃប្រជាជនដែលចូលចិត្តអានទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ

B សំណុំនៃប្រជាជនដែលចូលចិត្តអានទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយ

គេបាន $n(U) = 100$, $n(A) = 58$, $n(B) = 56$, $n(A \cap B) = 26$



ក. រកចំនួនប្រជាជនដែលចូលចិត្តអានតែទស្សនាវដ្ដីអង្គរធំ

យើងមាន $n(A \cap \overline{B}) = n(A) - n(A \cap B)$

$= 58 - 26 = 32$ នាក់

ខ. រកចំនួនប្រជាជនដែលចូលចិត្តអានតែទស្សនាវដ្ដីប្រជាប្រិយ

យើងមាន $n(\overline{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B)$

$= 56 - 26 = 30$ នាក់

គ. រកចំនួនប្រជាជនដែលចូលចិត្តអានទស្សនាវដ្ដីយ៉ាងតិចមួយ

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 58 + 56 - 26 = 88$

ឃ. រកចំនួនប្រជាជនដែលមិនចូលចិត្តអានទស្សនាវដ្ដី

យើងមាន $n(U)=n(A\cup B)+n\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$

$$\Rightarrow n\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=n(U)-n(A\cup B)$$

$=100-88=12$ នាក់

៥. ក្នុងពិធីរៀបអាពាហ៍ពិពាហ៍មួយ កូនកំលោះក្រមុំ ៣គូចង់ថតរូបជាមួយគ្នា អង្គុយជាជួរលើកៅអី ៦ដោយឱ្យកូនកំលោះក្រមុំមួយគូៗត្រូវអង្គុយជាប់គ្នា ។

តើគេអាចអង្គុយថតរបៀបនេះបានប៉ុន្មានរបៀប ?

ចម្លើយ

រកចំនួនរបៀបដែលកូនកំលោះក្រមុំ អង្គុយជាប់ៗគ្នាថតរូប ៖

កៅអីមួយគូៗ គេអាចរៀបបាន ២ របៀបនោះកៅអី ៣គូ គេអាចរៀបបាន $2^3=8$ របៀប

ដោយកូនកំលោះក្រមុំទាំង ៣គូអង្គុយជាប់ៗគ្នា គេប្រើកៅអីបីគូ សម្រាប់អង្គុយ គឺ

$3!=3\times2\times1=6$ របៀប

តាមគោលការណ៍រាប់ចំនួនរបៀបដែលកូនកំលោះក្រមុំអង្គុយជាប់ៗគ្នាថតមាន $8\times6=48$ របៀប

ដូចនេះ កូនកំលោះក្រមុំអង្គុយជាប់គ្នាថតរូប បាន 48 របៀប ។

៦. គេតម្រៀបទៀនពណ៌ក្រហម ៣ដើម ទៀនពណ៌ស ២ដើម និង ទៀនពណ៌លឿង ២ដើម ។

តើគេអាចតម្រៀបទៀនទាំងនោះឱ្យឆ្លាស់ពណ៌គ្នាបានប៉ុន្មានរបៀប ?

ចម្លើយ

គេតម្រៀបទៀនចំនួន ៧ដើម ដែលក្នុងនោះមានទៀន ពណ៌ក្រហម ៣ដើម ទៀនពណ៌ស ២ ដើម និង ទៀនពណ៌លឿង ២ដើមគឺជាចម្លាស់បែងចែកបាន ។

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបដែលអាចបែងចែកបានគឺ $\frac{7!}{3!2!2!}=210$ របៀប

៧. ចូរកំណត់ចម្លាស់រង់នៃមនុស្ស ១០នាក់ក្នុងករណីដែល ៖

i. លោក A&B នៅជិតគ្នា

ii. លោក A&B នៅទល់មុខគ្នា

ចម្លើយ

i. លោក A&B នៅជិតគ្នា

គេបាន ចម្លាស់នៃមនុស្ស ១០នាក់ ដោយដឹងថាលោក A&B នៅជាប់គ្នា នោះគឺជាចម្លាស់រង់នៃមនុស្ស 9 នាក់គឺ $(9-1)!=8!$ ហើយ ចម្លាស់លោក A,B មាន 2 របៀបទៀត

ដូច្នេះ ចម្លាស់រង់ដែល លោក A&B នៅជិតគ្នា គឺ $2\times 8!=80640$ របៀប

ii. លោក $A\&B$ នៅទល់មុខគ្នា

ដោយ $A\&B$ នៅទល់មុខគ្នា នោះយើងអោយនឹង $A\&B$

នាំឱ្យ មនុស្សដែលនៅសល់គឺ 8

គេបាន ចម្លាស់គឺ 8!

៨. គេចង់បង្កើតគណៈកម្មាធិការ សហាគមន៍មួយដែលមាន សមាជិក ៥នាក់ ដោយជ្រើសរើសក្នុងចំណោមនិស្សិតគំរូ ៩នាក់ ។

តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មាធិការបែបនេះបានប៉ុន្មានរបៀប?

ចម្លើយ

រករបៀបបង្កើតគណៈកម្មាធិការនេះ

ដោយនិស្សិតទាំងអស់ ៩នាក់ យើងជ្រើសរើសយក ៥នាក់ គេបានរបៀបបង្កើតគណៈកម្មាធិការនេះ

គឺ $C(9,5)=\dfrac{9!}{(9-5)!5!}=\dfrac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{5!\times 4\times 3\times 2\times 1}=126$ របៀប។

៩. និស្សិតគំរូមួយក្រុមមានប្រុស ៨នាក់និង ស្រី ៦នាក់ ។គេចង់បង្កើតគណៈកម្មាការសមាគមន៍និស្សិតមួយដែលមានសមាជិក ៧នាក់ ក្នុងនោះ ស្រី ៣នាក់ ដោយជ្រើសរើសចេញពីនិស្សិតគំរូទាំងនេះ ។ តើគេអាចបង្កើតគណៈកម្មាការនេះ បានប៉ុន្មានរបៀប ?

ចម្លើយ

រករបៀបបង្កើតគណៈកម្មាការនេះ

ដោយសមាជិកគណៈកម្មាការនេះមានស្រី ៣នាក់ និងត្រូវមានប្រុស ៤នាក់។ គេមាន $C(8,4)$ របៀបដើម្បីជ្រើសរើសនិស្សិត ប្រុស និង $C(6,3)$ របៀប ដើម្បីជ្រើសរើសនិស្សិតស្រី ។ គេបានចំនួនរបៀបបង្កើតគណៈកម្មាការនេះ គឺ $C(8,4)\times C(6,3)=\frac{8!}{4!\times 4!}\times\frac{6!}{3!\times 3!}=1400$ របៀប

ដូចនេះ របៀបបង្កើតគណៈកម្មាការនេះគឺ 1400 របៀប ។

១០.មនុស្សមួយក្រុមមានគ្នា 5នាក់ដែលត្រូវជាមិត្តិភក្តិនិងគ្នាមានឈ្មោះ ក ខ គ ឃ និង ង។ អ្នកទាំង 5រៀបគ្នាជាបន្ទាត់ត្រង់ដើម្បីថត។តើគេអាចមានប៉ុន្មានករណីដែលអាចឈរថតបើ៖

ក. គ្មានលក្ខខណ្ឌអ្វីទាំងអស់។

ខ. បុគ្គលដែលឈ្មោះ ក និង ខ ឈរនៅជិតគ្នា។

គ. បុគ្គលដែលឈ្មោះ ក និង ខ ឈរនៅចុងសងខាងបន្ទាត់។

ចម្លើយ

រកករណីដែលអាចឈរថតបើ៖

ក. គ្មានលក្ខខណ្ឌអ្វីទាំងអស់

ទី 1	ទី 2	ទី 3	ទី 4	ទី 5

ដោយប្រើគោលការណ៍ប្រមាណវិធីគុណ

- កន្លែងទី 1 ៖ មាន 5ជំរើស
- កន្លែងទី 2 ៖ មាន 4ជំរើស
- កន្លែងទី 3 ៖ មាន 3ជំរើស

- កន្លែងទី 4 ៖ មាន 2ជំរើស
- កន្លែងទី 5 ៖ មាន 1ជំរើស

នោះគេបានជំរើសសរុបគឺ $5\times4\times3\times2\times1=120$ជំរើស

ខ. បុគ្គលដែលឈ្មោះ ក និង ខ ឈរនៅជិតគ្នា

ក	ខ			
		ទី 1	ទី 2	ទី 3

ដោយ ក និង ខ ឈរនៅជិតគ្នានោះយើងចាត់ទុកថាតែម្នាក់។ ដូចនេះយើងបាន 4កន្លែងសម្រាប់ថត។ ដោយប្រើគោលការណ៍ប្រមាណវិធីគុណ៖

- កន្លែងទី 1 ៖ មាន 4ជំរើស
- កន្លែងទី 2 ៖ មាន 3ជំរើស
- កន្លែងទី 1 ៖ មាន 2ជំរើស
- កន្លែងទី 2 ៖ មាន 1ជំរើស

នោះគេបានជំរើសសរុបគឺ $4\times3\times2\times1=24$ ជំរើស។ ប៉ុន្តែកន្លែងទី 1មាន2ជំរើសផ្សេងគ្នា ដូចនេះ ជំរើសសរុបគឺ $24\times2=48$ជំរើស

គ. បុគ្គលដែលឈ្មោះ ក និង ខ ឈរនៅចុងសងខាងបន្ទាត់

ក				ខ
	ទី 1	ទី 2	ទី 3	

ដោយ ក និង ខ ឈរនៅចុងសងខាងបន្ទាត់នោះយើងនៅសល់ 3កន្លែងសម្រាប់ថត។ ដោយប្រើគោលការណ៍ប្រមាណវិធីគុណ៖

- កន្លែងទី 1 ៖ មាន 3ជំរើស
- កន្លែងទី 2 ៖ មាន 2ជំរើស
- កន្លែងទី 1 ៖ មាន 1ជំរើស

នោះគេបានជំរើសសរុប $3\times2\times1=6$ ជំរើស ។ប៉ុន្តែ កន្លែង ក និង ខ អាចផ្លាស់ប្តូរកន្លែងគ្នាបាន

ដូចនេះ ជំរើសសរុបគឺ $6\times2=12$ ជំរើស ។

១១. បង្ហាញថា សម្រាប់ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន m និងចំនួនគត់វិជ្ជមាន n នោះយើងទទួលបានរូបមន្ត ពហុធាដែលមានផលបូក m តួ នៅពេលដែលពន្លាតពហុធា $(x_1+x_2+...+x_n)^n$ គឺ

$$\sum_{k_1+k_2+...+k_m=n}\binom{n}{k_1,k_2,k_3,...,k_m}\prod_{1\le t\le m}X_t^{k_t} \text{ ដែល } \binom{n}{k_1,k_2,k_3,...,k_m}=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}$$

ចម្លើយ

យើងមាន $(x_1+x_2+...+x_m)^n=\sum_{k_1+k_2+...+k_m=n}\binom{n}{k_1,k_2,k_3,...,k_m}\prod_{1\le t\le m}X_t^{k_t} \qquad (i)$

- បើ $m=1$ នោះរូបមន្ត (i) គឺ $x_1^n=\sum_{k_1=n}\binom{n}{k_1}\prod_{1\le t\le 1}x_t^t=x_1^n$ ពិត
- បើ $m=m$ នោះរូបមន្ត (i)ក៏ពិតដែរ
- បើ $m=m+1$ នោះយើងបាន

$$(x_1+x_2+...+x_m+x_{m+1})^n=\left[x_1+x_2+...+(x_m+x_{m+1})\right]^n$$

$$=\sum_{k_1+k_2+...+k_m+\lambda=n}\binom{n}{k_1,k_2,k_3,...,k_m,\lambda}x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_{m-1}^{k_{m-1}}(x_m+x_{m+1})^{\lambda}$$

ដែល $n=k_1+k_2+...+k_{m-1}+\lambda$

យើងមានទ្រឹស្តីបទទ្វេធា $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$

ដោយ $\binom{n}{k_1,k_2}=\binom{n}{k_1}=\binom{n}{k_2}$ គ្រប់ $n=k_1+k_2$

ដូចនេះ $(x_1+x_2+...+x_m+x_{m+1})^n=\sum_{k_1+k_2+...+k_m+\lambda=n}\binom{n}{k_1,k_2,k_3,...,k_m,\lambda}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_{m-1}^{k_{m-1}}\times A$

ដែល $A=\sum_{k_m+k_{m+1}=\lambda}\binom{\lambda}{k_m,k_{m+1}}x_m^{k_m}x_{m+1}^{k_{m+1}}$, $(\lambda=k_m+k_{m+1})$

$$=\sum_{k_1+k_2+...+k_{m-1}+k_m+k_{m+1}=n}\binom{n}{k_1,k_2,k_3,....,k_{m-1},k_m,k_{m+1}}x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_{m-1}^{k_{m-1}}x_m^{k_m}x_{m+1}^{k_{m+1}}$$

ពីព្រោះ $\binom{n}{k_1,k_2,...,k_{m-1},\lambda}\times\binom{\lambda}{k_m,k_{m+1}}=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_{m-1}!\lambda!}\times\frac{\lambda!}{k_m!k_{m+1}!}$

$$=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_{m-1}!k_m!k_{m+1}!}$$

$$=\binom{n}{k_1,k_2,...,k_m,k_{m+1}}$$

ដូច្នេះការស្រាយបញ្ជាក់គឺត្រឹមត្រូវ ។

១២. ប្រសិនបើ x ជាចំនួនពិតនិង k ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន នោះ

គេតាង $\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)(x-2)...(x-k+1)}{k!}$ ។ ចូរគណនា $A=\frac{\binom{\frac{1}{2}}{2015}.4^{2015}}{C(4030,2015)}$

ចម្លើយ

តាមរូបមន្ត $C(2n,n)=\frac{2^n(2n-1)!}{n!}=\frac{2^n(2n-1)(2n-3)...3.1}{n!}$

នោះ $C(4030,2015)=\frac{2^{2015}(4030-1)(4030-3)...3.1}{2015!}=\frac{2^{2015}(4029)(4027)...3.1}{2015!}$

និង $\binom{\frac{1}{2}}{2015}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)...\left(\frac{1}{2}-2015+1\right)}{2015!}=\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)...\left(-\frac{4027}{2}\right)}{2015!}$

$$=\frac{\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right)^{2014}.1.3.5\ ...\ 4027}{2015!}=\frac{1.3.5\ ...\ 4027}{2^{2015}.2015!}$$

នាំឱ្យ $A=\frac{\binom{\frac{1}{2}}{2015}.4^{2015}}{C(4030,2015)}=\frac{1.3.5...4027.2^{4030}}{2^{2015}2015!}\times\frac{2015!}{2^{2015}.4029.4027...3.1}=\frac{1}{4029}$

ដូចនេះ $A=\frac{1}{4029}$

ប្រូបាប

១. លំហសំណាក និង ព្រឹត្តិការណ៍

១.១ ពិសោធន៍ចៃដន្យ វិញ្ញាសា

- ពិសោធន៍ចៃដន្យ ជាពិសោធន៍មួយដែលធ្វើដោយមិនបានដឹងលទ្ធផលទុកមុន ។
- វិញ្ញាសា ជាពិសោធន៍មួយដែលគេកំណត់ធ្វើដោយជាក់លាក់ ក្នុងពិសោធន៍ចៃដន្យមួយ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ គេបោះកាក់មួយពីរដង ។

- ពិសោធន៍ចៃដន្យ គឺ សកម្មភាពបោះកាក់ ។
- វិញ្ញាសា គឺ ការបោះកាក់មួយពីរដង ។

១.២ លំហសំណាក

លំហសំណាក ឬសំណុំសំណាក ជាសំណុំលទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចកើតឡើងក្នុងវិញ្ញាសាមួយ នៃពិសោធន៍ចៃដន្យ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ គ្រាប់ឡុកឡាក់មួយត្រូវបានបោះចំនួនមួយលើក ។

សំណុំលទ្ធផលដែលអាចកើតឡើងមាន $\{1,2,3,4,5,6\}$ គេបាន លំហសំណាក $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ ។

លំហាត់គំរូទី១ ៖ ក្នុងថង់មួយមានឃ្លី ៨គ្រាប់ ចុះពីលេខ ១ដល់ លេខ៨ ។គេចាប់យកឃ្លីមួយដោយចៃដន្យ ។

ក. តើសកម្មភាពមួយណាជាពិសោធន៍ចៃដន្យ មួយណាជាវិញ្ញាសា ?

ខ. ចូរសរសេរលំហសំណាក ។

ចម្លើយ

ក. - ពិសោធន៍ចៃដន្យ គឺ សកម្មភាពចាប់ពីឃ្លីក្នុងថង់ ។

- វិញ្ញាសា គឺ ការចាប់យកឃ្លីមួយពីក្នុងថង់ ។

ខ. លំហសំណាក

ករណីដែលអាចកើតឡើងមានចាប់បានលេខ $1,2,3,4,5,6,7,8$ ។

ដូចនេះ $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ។

១.៣ ព្រឹត្តការណ៍

ក. *ព្រឹត្តការណ៍*

និយមន័យ ៖ ព្រឹត្តការណ៍ ជាសំណុំរងនៃលំហសំណាក ឬ ជាសំណុំលទ្ធផលដែលកើតឡើងស្របតាមបំណងប្រាថ្នាចង់បាន ។

ឧទាហរណ៍ ៖ កាក់មួយត្រូវបានបោះ ២ដង ។ តើមានប៉ុន្មានករណីដែលខាងរូប H កើតឡើងមួយគត់?

លទ្ធផលដែលស្របតាមបំណងប្រាថ្នា គឺ មុខ H មានតែមួយគត់ មាន $(HT);(TH)$ ។

ដូចនេះ មាន ២ករណីគឺ (HT) និង (TH) ។

ខ.*ព្រឹត្តិការណ៍សមាស*

គេមានព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ក្នុងលំហសំណាក S ។

គេបាន ៖

១). **ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណនៃ** A **និង** B ($A\cap B$) ជាព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើងនៃគ្រប់លទ្ធផល ដែលលទ្ធផលនៅក្នុង A ផង និងក្នុង B ផង ។

២). **ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូកនៃ** A **និង** B ($A\cup B$) ជាព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើងនៃគ្រប់លទ្ធផលដែលជាលទ្ធផលនៅក្នុង A ឬ B ឬ ទាំងពីរព្រឹត្តិការណ៍ ។

៣). **ព្រឹត្តិការណ៍បំពេញគ្នា ឬព្រឹត្តិកាណ៍ផ្ទុយគ្នា** បើ A' ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ A នោះ A' ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃគ្រប់លទ្ធផលនៅក្នុងលំហសំណាក S ដែលមិននៅក្នុង A ។

៤). ព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នា បើព្រឹត្តិការណ៍ A និង B គ្មានធាតុរួម នោះព្រឹត្តិការណ៍ A និង ព្រឹត្តិការណ៍ B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នា កំណត់សរសេរដោយ $A\cap B=\varnothing$ ។

លំហាត់គំរូទី២ ៖ គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ ។ តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគ្រាប់ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលឡុកឡាក់ចេញលេខ ជាពហុគុណនៃ ៣ និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលឡុកឡាក់ចេញលេខតូចជាង ឬស្មើនឹង ២ ។

ចូរកំណត់ ៖

ក. លំហសំណាក និង ព្រឹត្តិការណ៍ A, B, C

ខ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ $A\cap B$; $A\cap C$; $B\cap C$

គ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក $A\cup B$; $B\cup C$

ឃ. ព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ A, B, C

ង. តើព្រឹត្តិការណ៍ណាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នា

ចម្លើយ

ក. លំហសំណាក និង ព្រឹត្តិការណ៍ A, B, C

គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ លទ្ធផលអាចកើតឡើងមានលេខ $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ។

- លំហសំណាក $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ព្រឹត្តិការណ៍ $A = \{2, 4, 6\}$
- ព្រឹត្តិការណ៍ $B = \{3, 6\}$
- ព្រឹត្តិការណ៍ $C = \{1, 2\}$

ខ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលគុណ

$A\cap B = \{6\}$

$A\cap C = \{2\}$

$B\cap C = \varnothing$

គ. ព្រឹត្តិការណ៍ផលបូក

$A\cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

$B\cup C = \{1, 2, 3, 6\}$

ឃ. ព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ A, B, C

$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$

$\overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$

$\overline{C} = \{3, 4, 5, 6\}$

ង. ព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នា

ដោយ $B\cap C = \varnothing$

ដូចនេះ ព្រឹត្តិការណ៍ B និង C មិនចុះសំរុងគ្នា ។

២. និយមន័យប្រូបាប

១.និយមន័យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A តាងដោយ $P(A)$ គឺជាផលចែករវាងចំនួនករណីស្របតាមព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍ដែលអាចទាំងអស់នៅក្នុងវិញ្ញាសាមួយ ។

$$P(A)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{S})}$$

២. លក្ខណ:

ក. ចំពោះរាល់ព្រឹត្តិការណ៍ $A;\ 0\le P(A)\le 1$

ខ. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលមិនអាចកើតមាន $P(\varnothing)=0$

គ. ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ទាំងអស់ $P(S)=1$

ឧទាហរណ៍៖ គេបោះឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ ។ រកប្រូបាប ៖

ក. ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ

ខ. ឡុកឡាក់ចេញលេខធំជាង ៦ ។

ចម្លើយ

រកប្រូបាប

ក). ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ

ករណីអាចបោះឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ គឺ $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ ។

គេបាន $n(S)=6$

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ឡុកឡាក់ចេញលេខគូ

គេបាន $A=\{2,4,6\}$ ចំនួនករណីស្រប $n(A)=3$

នាំឱ្យ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

$$P(A)=\frac{3}{6}=0.5$$

ដូចនេះ $P(A)=0.5$

ខ). ឡុកឡាក់ចេញលេខធំជាង៦

តាង B ព្រឹត្តិការណ៍ឡុកឡាក់ចេញលេខធំជាង ៦

ដោយព្រឹត្តិការណ៍ឡុកឡាក់ចេញលេខធំជាង ៦ ជាករណីមិនអាចកើតមាន គេបាន $n(B)=0$

នាំឱ្យ $P(A)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{0}{6}=0$

ដូចនេះ $P(B)=0$ ។

៣. ការគណនាប្រូបាបនៃ $A\cup B$

ក). បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរនៃវិញ្ញាសាតែមួយនោះ

គេបាន $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

ខ). បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នានោះ

គេបាន $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$

គ). បើ A ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃវិញ្ញាសាមួយហើយ A' ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយពី A នោះ

គេបាន $\boxed{P(A)+P(A')=1}$

ឧទាហរណ៍៖ គេហូតបៀមួយសន្លឹកចេញពីក្នុងបៀមួយហ៊ូដែលមាន ៥២សន្លឹកដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាប ដើម្បីឱ្យបៀដែលគេហូតនោះជាសន្លឹកអាត់ឬ សន្លឹកពណ៌ខ្មៅ ។

ចម្លើយ

រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យបៀដែលគេហូតនោះជាសន្លឹក អាត់ ឬ សន្លឹកពណ៌ខ្មៅ

តាង A ព្រឹត្តិការណ៍ហូតបានបៀសន្លឹកអាត់

តាង B ព្រឹត្តិការណ៍ ចុះសំរុងគ្នាព្រោះ

$A\cap B=\{$ ជាសន្លឹកអាត់ពណ៌ខ្មៅ $\}$

$A\cup B=\{$ ជាសន្លឹកអាត់ឬ សន្លឹកពណ៌ខ្មៅ $\}$

គេបាន $P(A)=\frac{4}{52}$; $P(B)=\frac{26}{52}$; $P(A\cap B)=\frac{2}{52}$

នោះ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{4}{52}+\frac{26}{52}-\frac{2}{52}=\frac{7}{13}$$

ដូចនេះ $P(A\cup B)=\frac{7}{13}$ ។

៣. ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ (Conditional Probability)

និយមន័យ ៖ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B ដែលនឹងកើតឡើងកាលណា ព្រឹត្តិការណ៍ A បានកើតឡើងហើយ ហៅថា ប្រូបាប មានលក្ខខណ្ឌ ហើយតាងដោយ $P(B/A)$ ។

ចំពោះគ្រប់ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ដែល $P(A)\neq 0$ គេបាន $\boldsymbol{P(\mathrm{B}/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$ ។

សម្គាល់ ៖

១. $\boldsymbol{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$; $\boldsymbol{P(B)}\neq 0$

២. $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)=P(B)\times P(A/B)}$

ឧទាហរណ៍៖ តាមការស្ទាបស្ទង់ពីភាពគាប់ចិត្ត និង ការងាររបស់ខ្លួនទៅលើមនុស្សមួយក្រុមមានគ្នា ២០០ នាក់អោយទិន្នន័យដូចខាងក្រោម ៖

	គាប់ចិត្ត	មិនគាប់ចិត្ត	សរុប
គ្រូបង្រៀន	៥០	៧៥	១២៥
មេធាវី	៤០	៣៥	៧៥
សរុប	៩០	១១០	២០០

បើមនុស្សម្នាក់ត្រូវបានគេជ្រើសរើសពីក្រុមមនុស្សនេះ ដោយចៃដន្យ ។ បើកាលណាមនុស្សដែលជ្រើសរើសនោះជាគ្រូបង្រៀន , រកប្រូបាបដែលគាត់ជាអ្នកគាប់ចិត្ត នឹងការងាររបស់ខ្លួន ។

ចម្លើយ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែមនុស្សជ្រើសរើសបានមកជា អ្នកគាប់ចិត្ត

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែមនុស្សជ្រើសរើសបានមកជាគ្រូបង្រៀន

គេបាន $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

តាមតារាង យើងឃើញថា $P(A\cap B)=\frac{50}{200}=0.25$ និង $P(B)=\frac{125}{200}=0.625$

ដូចនេះ $P(A/B)=\frac{0.25}{0.625}=0.4$

៤. ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា (Independent Events)

និយមន័យ៖ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលមានប្រូបាបមិនសូន្យ ។

១. គេថាព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា កាលណាព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌណាមួយខាងក្រោម ៖

- $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A).P(B)}$
- $\boldsymbol{P(A/B)=P(A)}$
- $\boldsymbol{P(B/\mathrm{A})=P(B)}$

២. គេថាព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា កាលណា $\boldsymbol{P(A\cap B)\neq P(A).P(B)}$

ជាទូទៅ ៖ *បើព្រឹត្តិការណ៍ $A_1,A_2,\ldots,A_n$ អាចកើតឡើង ។ បើ $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា នោះគេបាន ៖* $\boldsymbol{P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1).P(A_2).\ldots.\mathrm{P}(A_n)}$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ ថង់មួយមានប៊ូលស ៤ចុះលេខ $1,1,2$ និង 3 និង ប៊ូលខ្មៅ ៦ចុះលេខ $1,1,1,2,3$ និង 4 ។ គេចាប់យកប៊ូលមួយពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ ។

តាងព្រឹត្តិការណ៍ A : ប៊ូលយកចេញពណ៌ស

B : ប៊ូលយកចេញមានលេខ ១

C : ប៊ូលយកចេញមានលេខ ៤

យើងឃើញថាប៊ូលទាំងអស់មាន១០ ក្នុងនោះមានប៊ូលស ចំនួន៤ ហើយប៊ូលចុះលេខ 1 មានចំនួន៥ និង ប៊ូលពណ៌សចុះលេខ 1 មាន ២ ។

គេបាន $P(A)=\frac{4}{10}$, $P(B)=\frac{5}{10}$ និង $P(A\cap B)=\frac{2}{10}$

ដោយ $P(A).P(B)=\frac{4}{10}\times\frac{5}{10}=\frac{20}{100}=\frac{2}{10}=P(A\cap B)$

បើ $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ នោះគេថាព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ។

បើ A និង B ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នានោះគេបាន ៖

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\times P(B)}{P(B)}=P(A)$$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)\times P(B)}{P(A)}=P(B)$$

យើងឃើញថា $P(C)=\frac{1}{10}$ និង $P(A\cap C)=0$ (ព្រោះ $A\cap C=\varnothing$)

ដោយ $P(A)\times P(C)=\frac{4}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{25}\neq P(A\cap C)$ គេថាព្រឹត្តិការណ៍ A និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា។

ឧទាហរណ៍២៖ គេដកបៀ៣សន្លឹកបន្តបន្ទាប់គ្នា ដោយមិនដាក់ទៅវិញពីបៀមួយហ៊្វ ៥២សន្លឹក ។ រកប្រូបាប ដែលព្រឹត្តិការណ៍ $A_1\cap A_2\cap A_3$ កើតឡើងដែល A_1 ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលសន្លឹកទី១ ជាអាត់ពណ៌ក្រហម A_2 សន្លឹកទី២ជាសន្លឹក ១០ ឬ កម្លោះ និង A_3 សន្លឹកទី៣ ធំជាង ៣និង តូចជាង៧។

ចម្លើយ

យើងកំណត់ព្រឹត្តិការណ៍

- A_1 អាត់ពណ៌ក្រហម $P(A_1)=\frac{2}{52}$
- A_2 សន្លឹក ១០ឬ កម្លោះ $P(A_2)=\frac{8}{51}$
- A_3 សន្លឹកធំជាង៣ ប៉ុន្តែតូចជាង ៧ $P(A_3)=\frac{12}{50}$

គេបាន $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1).P(A_2).P(A_3)$

$$=\frac{2}{52}\times\frac{8}{51}\times\frac{12}{50}=\frac{8}{5525}$$

៥. ទ្រឹស្ដីបទ បាយេស (*Bayes's Theorem*)

១. ទ្រឹស្ដីបទប្រូបាបសរុប (***The theorem of total Probability***)

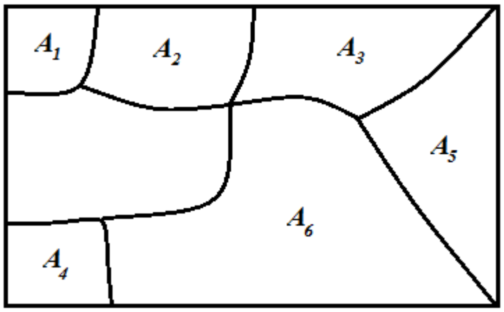
ការបែងចែកលំហាសំណាក ជាការជ្រើសរើសនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ គឺនិយាយបានថាជាការបែងចែកនៃលំហាសំណាក S ប្រសិនបើ ៖

$i.\ A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$

$ii.\ A_i \cap A_j = \varnothing$ គ្រប់ i, j

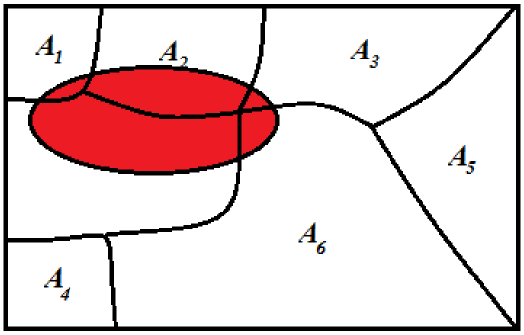
$iii. A_i \neq \varnothing \ ,\forall i$ ដែល $1 \leq i \leq n$

គំនិតសំខាន់គឺការបែងចែកអ្វីមួយជាការជ្រើសរើសមិនមែនសំណុំទទេ ហើយមិនមែនសំណុំរងធំដដែលៗ នៃលំហាសំណាក ដែលជាការប្រជុំនៃលំហាសំណាកខ្លួនវា ។ និយមន័យ គឺបង្ហាញដ្យាក្រាមខាងក្រោម ៖



បើ B ព្រឹត្តិការណ៍ដែលកើតព្រមគ្នា ជាមួយលំហាសំណាក S នោះយើងអាចបញ្ជាក់ B ជាប្រជុំនៃសំណុំរង ពោលគឺ ៖ $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$ ។

និយមន័យនេះគឺបង្ហាញដោយដ្យាក្រាមខាងក្រោម ដែលព្រឹត្តិការណ៍ B មួយក្នុង S គឺតំណាងដោយតំបន់ពណ៌ក្រហម ៖



ព្រឹត្តិការណ៍ដែលនៅក្នុងវង់ក្រចក $(B\cap A_1),(B\cap A_2),\ldots,(B\cap A_n)$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នាទៅវិញទៅមក នោះយើងបាន ៖

$\boldsymbol{P(B\cap A_i)=P(B/A_i)P(A_i)}$, $\forall \boldsymbol{i}:1\le \boldsymbol{i}\le \boldsymbol{n}$

ដូច្នេះ ប្រូបាប $\boldsymbol{P(B)=P(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)+\ldots+P(B/A_n)P(A_n)}$

$$=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{P(B/A_i)P(A_i)}$$

ទាំងនេះជាប្រូបាបនៃទ្រឹស្តីប្រូបាបសរុប ។

២. ទ្រឹស្តីបទបាយ៉េស

ទ្រឹស្តីបទបាយ៉េសនេះ ត្រូវបានដាក់ប្រើប្រាស់ជាសាធារណៈនៅឆ្នាំ ១៧៦៤ ដោយលោកជាអាចារ្យខាងសាសនាប្រូតេស្តង់ និង ជាគណិតវិទូជនជាតិ អង់គ្លេស ។ ទ្រឹស្តីបទនេះចាប់ផ្តើមទៅលើការពិចារណា នៃប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌមួយគឺ ៖ $\boldsymbol{P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A\cap B)}{\sum_{i=1}^{n}P(B/A_i)P(A_i)}}$

នៅក្នុងការប្រើទ្រឹស្តីបទប្រូបាបសរុបខាងលើ ប៉ុន្តែឥឡូវយើងបំបែក $P(A\cap B)=P(B/A)\times P(A)$ ដូចនេះ $P(A/B)=\dfrac{P(B/A).P(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(B/A_i).P(A_i)}$ គឺពិតគ្រប់ព្រឹត្តិការណ៍ A និង ជំនួស A ដោយ A_i ផងដែរ ដែលបានមកនេះហៅថា ទ្រឹស្តីបទបាយ៉េស គឺ $\boldsymbol{P(A_i/B)=\dfrac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B/A_i)P(A_i)}}$

- ករណីពិសេសនៃព្រឹត្តិការណ៍បាយ៉េស ៖

ក្នុងរូបមន្តនេះគេកំណត់ថា ក្នុងលំហសំណាកគឺបែងចែកព្រឹត្តិការណ៍ A និងព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃ A និង A' នោះរូបមន្តបាយ៉េសគឺ $P(A/B)=\dfrac{P(B/A).P(A)}{P(B/A).P(A)+P(B/A').P(A')}$

លំហាត់គំរូទី១ ៖ នៅក្នុងតំបន់មួយមានរោងចក្រជាច្រើន តែមានតែ ៣រោងចក្រប៉ុណ្ណោះផលិតមី ។ រោចក្រទី១ ផលិតបាន ៣០% រោងចក្រទី២ ផលិតបាន ២៥% និងរោងចក្រទី៣ ផលិតបាន ៤៥%។ រោងចក្រទាំងបីផលិតបាននៃផលិតផលមីសរុប ដែលបានស្តុកក្នុងរោងឃ្លាំងមួយ ។ ដោយអត្រាមីខូចគុណភាព របស់រោងចក្រនីមួយៗរៀងគ្នា ១% , ២% , ១.៥% ។ កម្មកររោងចក្រយកមីមួយកញ្ចប់ពីក្នុងឃ្លាំង ។

ក). រកប្រូបាប ដើម្បីឱ្យគាត់យកបានមីដែលខូចគុណភាព ។

ខ). ឧបមាថា គាត់យកបានមីខូចគុណភាព ។គណនាប្រូបាប ដើម្បីឱ្យមីនេះជាផលិតផលរបស់ រោងចក្រទី៣ ។

ចម្លើយ

យើងតាងព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម ៖

A_1 ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានផលិតផលរបស់រោងចក្រទី១

A_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានផលិតផលរបស់រោងចក្រទី២

A_3 ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានផលិតផលរបស់រោងចក្រទី៣

B ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានផលិតផលខូចគុណភាព

ក). រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគាត់យកបានមីខូចគុណភាព

តាមរូបមន្តប្រូបាបសរុប : $P(B)=P(B/A_1).P(A_1)+P(B/A_2).P(A_2)+P(B/A_3).P(A_3)$

ដោយ $P(A_1)=30\%=0.3$, $P(A_2)=25\%=0.25$, $P(A_3)=45\%=0.45$

; $P(B/A_1)=1\%=0.01$, $P(B/A_2)=2\%=0.02$, $P(B/A_3)=1.5\%=0.015$

នោះ $P(B)=0.3\times0.01+0.25\times0.02+0.45\times0.015=0.01475$ ឬ $P(B)=1.475\%$

ដូចនេះ $P(B)=1.475\%$

ខ). រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យផលិតផលខូចនេះជារបស់រោងចក្រទី៣

តាមរូបមន្ត Bayes

គេបាន $P(A_3/B)=\dfrac{P(B/A_3).P(A_3)}{P(B)}$

$$=\frac{0.015\times0.45}{0.0175}=0.4576=45.76\%$$

ដូចនេះ $P(A_3/B)=45.76\%$

លំហាត់គំរូទី២ ៖ ក្រុមហ៊ុនកុំព្យូទ័រ Reasey ទិញ software Microsoft word 2016 ពីក្រុមហ៊ុនផ្គត់ផ្គង់បី គឺ ក្រុមហ៊ុន Microsoft , Hall Electronic , និង Schuller sales ។ ក្រុមហ៊ុនទិញ software ៦០% ពីក្រុមហ៊ុន Microsoft , ៣០% ពីក្រុមហ៊ុន Hall Electronic និង ១០% ពីក្រុមហ៊ុន Schuller sales ។ ក្រុមហ៊ុនបានដឹងថា ២.៥% នៃSoftware ទិញពី Microsoft គឺខូច , ៨% នៃ Software ទិញពី Hall Electronic គឺខូច និង៥%នៃ Software ទិញពី Schuller salesគឺខូច ។ពេលគេដឹក software មកដល់ក្រុមហ៊ុន Reasey គឺប្រធានក្រុមហ៊ុនមានឱ្យអ្នកបច្ចេកទេសមកពិនិត្យមើល ។ ចូររកប្រូបាបដែល software ខូចនោះផលិតដោយក្រុមហ៊ុន Microsoft ។

ចម្លើយ

តាង A_1 ជាព្រឹត្តិការណ៍ Software ទិញពីក្រុមហ៊ុន Microsoft

A_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍ Software ទិញពីក្រុមហ៊ុន Hall Electronic

A_3 ជាព្រឹត្តិការណ៍ Software ទិញពីក្រុមហ៊ុន Schuller Sales

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ Software ខូច

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន

$P(A_1)=60\%=0.6$, $P(A_2)=30\%=0.3$, $\mathrm{P}(A_3)=10\%=0.1$ និង $P(B/A_1)=2.5\%=0.025$, $P(B/A_2)=8\%=0.08$, $P(B/A_3)=5\%=0.05$ នោះប្រូបាប ដែល Software ខូចនោះផលិតដោយក្រុមហ៊ុន Microsoft គឺ

$$P(A_1/B)=\frac{P(B/A_1).P(A_1)}{P(B/A_1).P(A_1)+P(B/A_2).P(A_2)+P(B/A_3).P(A_3)}$$

$$=\frac{0.6\times0.025}{0.6\times0.025+0.3\times0.08+0.1\times0.05}=0.3409$$

ដូចនេះ $P(A_1/B)=34.09\%$

ដោយសារតែជំពូកនេះ និងជំពូកបន្ទាប់មានទំនាក់ទំនងគ្នា ដូច្នេះហើយ យើងខ្ញុំបានយកលំហាត់ទាំងពីរជំពូកទៅរួមបញ្ចូលគ្នាៗ សូមមើលលំហាត់នូវជំពូកបន្ទាប់ !

ចំណែងចែកប្រូបាប

១.អថេរចៃដន្យ និងចំណែងចែកប្រូបាប

១.១ អថេរចៃដន្យ (Random Variables)

អថេរចៃដន្យគឺជាតំលៃលេខ តាងអោយលទ្ធផលនៃការពិសោធន៍ ។ គេតាងអថេរចៃដន្យដោយអក្សរធំ X ហើយតម្លៃរបស់វាដោយអក្សរតូច x ប្រូបាបរបស់វា តាងដោយ $P\{X=x\}$ រឺ $P(X=x)$ ដែល $P(X=x)>0$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ហើយ $\sum_{\forall x} P(X=x)=1$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ ចូរពិនិត្យការពិសោធន៍ចៃដន្យមួយ ដែលក្នុងនោះកាក់មួយត្រូវបានគេបោះបីដង ។ យក X ជាចំនួនមុខកាក់ដែលចេញ (គឺ X ជាអថេរចៃដន្យតាងចំនួនមុខដែលកាក់ចេញ)

H តាងអោយផ្នែកខាងមុខ *(Head)* និង T តាងអោយផ្នែកខាងខ្នង (*Tail*)

គេបានលំហសំណាកនៃការពិសោធន៍នេះគឺ $TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH, HHH$ ។

ដូចនេះតម្លៃ X (ចំនួនមុខ H ដែលចេញ) គឺ $X=0,1,2,3$ ។ តាមនិយមន័យយើងឃើញថា X តាងអោយតម្លៃនៃលទ្ធផលនៃការពិសោធន៍ចៃដន្យ ដោយកំណត់យកតម្លៃគត់ ដូចនេះវាជាអថេរចៃដន្យ**ដាច់** ហើយក្រៅពីនេះ វាជាអថេរចៃដន្យ **ជាប់** ។

ឧទាហរណ៍ ៖ កម្ពស់សិស្ស អាយុកាលប្រើប្រាស់របស់អំពូលភ្លើង គឺជា**អថេរចៃដន្យជាប់ ។**

១.២. ចំណែងចែកប្រូបាបនៃអថេរចៃដន្យដាច់

* ចំណែងចែកប្រូបាបនៃអថេរចៃដន្យមួយ គឺជាបញ្ជីសរុបនៃលទ្ធផលទាំងអស់នៃការពិសោធន៍ដែលភ្ជាប់ជាមួយនឹង ប្រូបាបរបស់វា ។
* ចំពោះ ឧទាហរណ៍១ខាងលើ គេបានបំណែងចែកប្រូបាបនៃអថេរចៃដន្យ X ដូចខាងក្រោម ៖

ចំនួនមុខ(H) X	ប្រូបាបនៃលទ្ធផល $P(X=x)$
0	$1/8=0.125$
1	$3/8=0.375$
2	$3/8=0.375$
3	$1/8=0.125$
	$\sum_{x=0}^{3} P(X=x)=1$

ឧទាហរណ៍៣៖ ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ស ៤០% ហើយក្រៅពីនេះពណ៌ខ្មៅ ។ គំរូមួយដែលគេមានឃ្លីបីគ្រាប់ត្រូវបានគេជ្រើសយកចេញពីក្នុងប្រអប់នេះ។ ចូររកចំណែងចែកប្រូបាបនៃឃ្លីពណ៌ស។

ចម្លើយ

យក X តាងអោយចំនួនឃ្លីពណ៌ស នៅក្នុងគំរូ ។ ដូចនេះតម្លៃអាចនៃ X គឺ ៖ $X = 0,1,2,3$ ហើយលំហគំរូមានដូចខាងក្រោម

$S_1 = WWW$

$S_2 = WWB$

$S_3 = WBW$

$S_4 = BWW$

$S_5 = BBW$

$S_6 = BWB$

$S_7 = WBB$

$S_8 = BBB$

ដែល $W = White$ ពណ៌ស និង $B = Black$ ពណ៌ខ្មៅ

ប្រូបាបនៃឃ្លីពណ៌ស $= 0.40$ ហើយ

ប្រូបាបនៃឃ្លីពណ៌ខ្មៅ $= 0.60$

ករណី

$$X = 0 \quad P(X = 0) = P(S_8) = (0.60)(0.60)(0.60) = 0.216$$

$$X = 1 \quad P(X = 1) = P(S_5) + P(S_6) + P(S_7) = 3(0.40)(0.60)^2 = 0.432$$

$$X = 2 \quad P(X = 2) = P(S_2) + P(S_3) + P(S_4) = 3(0.40)^2(0.60) = 0.288$$

$$X = 3 \quad P(X = 3) = P(S_1) = (0.40)(0.40)(0.40) = 0.064$$

ដូចនេះ ចំណែងចែកប្រូបាបនៃអថេរចៃដន្យ X គឺ

ចំនួនឃ្លីស (X) ក្នុងគំរូ	បំណែងចែកប្រូបាប $P(X = x)$
0	0.216
1	0.432
2	0.288
3	0.064

១.៣. សង្ឃឹមគណិត (Expectation): $E(X)=\mu$ (Mu)

តាង $\mu = \boldsymbol{E(X)} = \sum_{\forall x}[\boldsymbol{x.P(X=x)}]$ ដែល

$E(X)=\mu$ គឺជាសង្ឃឹមគណិត រឺ មធ្យមនៃអថេរចៃដន្យ X

X ជាអថេរចៃដន្យ ហើយ x ជាតម្លៃនៃ X

$P(X=x)$ ជាប្រូបាបនៃអថេរចៃដន្យ X

ឧទាហរណ៍ ៖ X ជាអថេរចៃដន្យមួយដែលមានបំណែងចែក ប្រូបាបដូចខាងក្រោម

X	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	0.3	0.1	0.15	0.4	0.05

ចូររកសង្ឃឹមគណិតនៃ X ។

ចម្លើយ

$$E(X)=\sum_{\forall x} x.P(X=x)=(-2)(0.3)+(-1)(0.1)+(0)(0.15)+(1)(0.4)+(2)(0.05)=-0.2$$

លក្ខណៈ (Properties)

- $E(a)=a$, a គឺជាចំនួនថេរ
- $E(aX)=aE(X)$, a គឺជាចំនួនថេរ
- $E(aX+b)=aE(X)+b$; a,b គឺជាចំនួនថេរ
- $E[f_1(X)+f_2(X)]=E[f_1(X)]+E[f_2(X)]$

១.៤. វ៉ារ្យង់ (Variance) : σ^2 , $Var(X)$

វ៉ារ្យង់នៃចំណែកចែកប្រូបាប គឺជាចំនួនមួយដែលបង្ហាញអោយឃើញអំពីទំហំពង្រាយនេះ ហើយត្រូវបានគណនាតាមរូបមន្ត ៖

$$\sigma^2 = \boldsymbol{Var(X)} = \sum_{\forall x}[\boldsymbol{x-E(X)}]^2 \boldsymbol{.P(X=x)}$$

សំគាល់ ៖ *វ៉ារ្យង់គឺជាមធ្យមនៃការេនៃគំលាតរបស់អថេរចៃដន្យ X ពីមធ្យម $E(X)$ របស់វា។*

ជាមួយ $\mu=E(X)$ នោះគេបាន $Var(X)=E(X-\mu)^2$

ឬ $Var(X)=E(X^2)-\mu^2$

ឬ $Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$

ហើយ $E(X^2)$ គណនាតាមរូបមន្ត $\boldsymbol{E(X^2)=\sum_{\forall x} x^2.P(X=x)}$

ចំពោះឧទាហរណ៍ខាងលើ យើងបាន

X	-2	-1	0	1	2
$x-\mu$	$(-2+0.2)$	$(-1+0.2)$	$(0+0.2)$	$(1+0.2)$	$(2+0.2)$
$(x-\mu)^2$	3.24	0.64	0.04	1.44	4.84
$P(X=x)$	0.3	0.1	0.15	0.4	0.05
$(x-\mu)^2 P(X=x)$	0.972	0.064	0.006	0.576	0.242

យើងបាន $\sigma^2 = Var(X) = 0.972+0.064+0.006+0.576+0.242 = 1.86$

១.៤. គំលាតគំរូ *(Standard Deviation)*

រូបមន្ត $\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2}}$

ចំពោះឧទាហរណ៍ខាងលើ យើងបាន $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.86} = 1.36$ ។

២. បំណែងចែកទ្វេធា *(Binomial Distribution)*

២.១. លទ្ធផលអាច *(Possible Outcomes)*

ពិសោធន៍ទ្វេធាមួយជាពិសោធន៍ដែលមានលក្ខណៈដូចតទៅ ៖

- ☆ **ពិសោធន៍មានការសាកល្បងដដែលៗ**
- ☆ **ការសាកល្បងម្តងៗលេចចេញជាលទ្ធផលមួយដែលអាចបែងចែកជាពីរករណីស្របតាមបំណង *(success)* រឺមិនស្របតាមបំណង *(Failure)***
- ☆ **ប្រូបាបនៃការជោគជ័យ p មានតម្លៃថេរចំពោះពិសោធន៍មួយលើកៗ ។**
- ☆ **ការសាកល្បងមិនទាក់ទងគ្នា**

ឧបមា យើងតាងលទ្ធផល ជោគជ័យ $S\,(Success)$ និង បរាជ័យដោយ $F(Failure)$ ។

ហើយ : p តាងអោយ ប្រូបាប ជោគជ័យ S

: q តាងអោយ ប្រូបាប បរាជ័យ F ដែល $q=1-p$

និង : x ជាអថេរចៃដន្យ ហៅថាអថេរចៃដន្យទ្វេធា

ដូចនេះ បំណែងចែកទ្វេធា នៃ x គឺ

$$\boldsymbol{P(x,n,p)=\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}} \text{ សំរាប់ } x=0,1,\ 2,\ldots,n$$

ឧទាហរណ៍ទី១៖ រកប្រូបាបនៃការទទួលបានលេខ2 បីដង ប្រសិនបើគ្រាប់ឡុកឡាក់ធម្មតាមួយត្រូវបានបោះ 5 ដង ។

ចម្លើយ

ប្រូបាបនៃការស្របតាមបំណងមួយលើការសាកល្បង 5 ដង មិនទាក់ទងគ្នា ស្មើ$\frac{1}{6}$ និងប្រូបាបនៃការមិនស្របតាមបំនងស្មើ $\frac{5}{6}$ ។ លទ្ធផលពីរដែលគេត្រូវចាត់ទុកជាការស្របតាមបំណងនៅទីនេះ ។

ដូចនេះ $P\left(3,4,\frac{1}{6}\right)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{2}=\frac{5!}{3!2!}\times\frac{5^{2}}{6^{2}}=0.032$

ឧទាហរណ៍ទី២៖ ក្នុងឃ្លាំងមួយដែលមានទំនិញ 1000ឯកតា មាន100 ខូចគុណភាពឯកតា ។ គំរូមួយដែលមាន ទំនិញ 10ឯកតា ត្រូវបានគេជ្រើសរើសចេញពីឃ្លាំងនេះ ដោយដាក់ចូលវិញ ។

រកប្រូបាបដែលក្នុងគំរូនេះមានទំនិញខូចមួយឯកតា ? មានយ៉ាងច្រើនមួយ ?

ចម្លើយ

យើងឃើញថា $n=10$, $P=\frac{100}{1000}=0.10 \Rightarrow q=1-0.10=0.90$

ហើយ x ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធា ព្រោះយើងមានតែពីរករណីគឺទំនិញល្អ និងខូច ដូចនេះគេបាន ៖

- ប្រូបាបមានទំនិញខូចមួយឯកតានៅក្នុងគំរូនេះគឺ

$$P(1,10,0.10)=\binom{10}{1}(0.10)^1(0.90)^9=0.3874$$

- ប្រូបាបយ៉ាងច្រើនមានទំនិញខូចមួយឯកតានៅក្នុងគំរូនេះគឺ

$$P(0,10,0.10)+b(1,10,0.10)=\binom{10}{0}(0.10)^0(0.90)^{10}+\binom{10}{1}(0.10)^1(0.90)^9$$

$$=0.3487+0.3874=0.7361$$

២.២. សង្ឃឹមគណិតនៃអថេរចៃដន្យទ្វេធា

❖ បើ X ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធា គេបាន $\boxed{E(X)=np}$ ដែល n គឺជាចំនួនពិសោធន៍ និង p គឺជាប្រូបាបជោគជ័យ ។

ចំពោះ ឧទាហរណ៍ទី២ ខាងលើ យើងបាន $\mu=E(X)=np=(10)(0.10)=1$ ។

២.៣. វ៉ារ្យង់

❖ បើ X ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធា គេបាន

$$\boxed{\sigma^2=Var(X)=np(1-p)}$$

ចំពោះ ឧទាហរណ៍ទី២ខាងលើ យើងបាន

$$\sigma^2=Var(X)=np(1-p)=(10)(0.10)(0.90)=0.90$$

២.៤. គំលាតគំរូ (Standard Deviation)

❖ បើ X ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធា គេបាន $\boxed{\sigma=\sqrt{\sigma^2}}$

ចំពោះឧទាហរណ៍ទី២ ខាងលើគេបាន $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{0.90}=0.94487$

៣. បំណែងចែកធរណីមាត្រ *(Geometric Distribution)*

៣.១. ពិសោធន៍ឯករាជ្យ *(Independent Trials)*

ចូរពិនិត្យការពិសោធន៍ឯករាជ្យជាច្រើនសារ ការពិសោធន៍នីមួយៗ មានប្រូបាប p ដែលឱ្យលទ្ធផលជោគជ័យ ហើយ q ជាប្រូបាបដែលឱ្យលទ្ធផលបរាជ័យ $(q=1-p)$ ។ យក X ជាអថេរចៃដន្យ នៃចំនួនពិសោធន៍រហូតដល់ គេទទួលបាន លទ្ធផលជោគជ័យលើកទីមួយនៅពិសោធន៍លើកចុងក្រោយ ។

$P(X=1)=p$, (ជោគជ័យលើកទី១ លើការពិសោធន៍លើកទី១) $=p$

$P(X=2)=qp$, (ជោគជ័យលើកទី១ លើការពិសោធន៍លើកទី២) $=qp$

$P(X=3)=q^2p$,(ជោគជ័យលើកទី១ លើការពិសោធន៍លើកទី៣) $=q^2p$

....

$P(X=x)=q^{x-1}p$, (ជោគជ័យលើកទី១ លើការពិសោធន៍លើកទី x) $=q^{x-1}p$

យើងឃើញថា X ជាចំនួនសរុបនៃការពិសោធន៍ ហើយមាន $(X-1)$ ជាចំនួនលទ្ធផល បរាជ័យមុនពេល ទទួលលទ្ធផលជោគជ័យលើកទី១ ករណីនេះ គេថា X មានបំណែងចែកធរណីមាត្រ ហើយគេបាន រូបមន្ត :

$$\boldsymbol{P(X=x)=q^{x-1}p} \quad , \quad x=1,\ 2,\ldots$$

៣.២. សង្ឃឹមគណិត

$$\mu=\frac{1}{\boldsymbol{p}}$$

៣.៣. វ៉ារ្យង់

$$\sigma^2=\boldsymbol{Var(X)}=\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{p}^2}$$

ឧទាហរណ៍៣៖ ដោយដឹងថា ប្រូបាបនៃកូនស្រីស្មើ $\frac{1}{2}$ ។ ឧបមាគូស្នេហ៍ ដៃទើបរៀបការរួច ចង់ដឹងថា តើពួកគេត្រូវមានកូនប៉ុន្មាននាក់ ដែលមានប្រូបាប យ៉ាងហោចណាស់ 0.95 ទើបពួកគេបានកូនស្រីម្នាក់ ?

ចម្លើយ

ដោយចង់បានកូនស្រីតែមួយហើយជាស្រីពៅ ហើយកូនច្បងទាំងអស់ជាកូនប្រុស ដូចនេះ កូនដែលកើតមកនេះ មានបំណែងចែកធរណីមាត្រ ហើយប្រូបាបដែលពួកគេមានកូនចំនួន X គឺ

$$P(X=x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

ប្រូបាបដែលមានកូន m នាក់ ឬ តិចជាងនេះ

$$P(\text{ កូន } m \text{ នាក់ឬ តិចជាង})=\sum_{x=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

ដូចនេះបើ :

☆ $x=1:\ P($ កូន ១នាក់ រឺតិចជាង $)=\sum_{x=1}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=0.50$

☆ $x=2:\ P($ កូន ២នាក់ រឺតិចជាង $)=\sum_{x=1}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=0.50+0.25=0.75$

☆ $x=3:\ P($ កូន ៣នាក់ រឺតិចជាង $)=\sum_{x=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=0.50+0.25+0.125=0.875$

☆ $x=4:\ P($ កូន ៤នាក់ រឺតិចជាង $)=\sum_{x=1}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=0.50+0.25+0.125+0.0625=0.9375$

☆ $x=5:\ P($ កូន ៥នាក់ រឺតិចជាង $)=\sum_{x=1}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=0.50+0.25+0.125+0.0625+0.0313=0.9688$

☆ $x=6:\ P($ កូន ៥នាក់ រឺតិចជាង $)=\sum_{x=1}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=0.50+0.25+0.125+0.0625+0.0313+0.0156$

$$=0.9844$$

យើងរៀបប្រូបាបទាំងនេះក្នុងតារាងដូចខាងក្រោម :

M	1	2	3	4	5	6
Probability	0.5	0.75	0.87	0.94	0.97	0.98

យើងឃើញថា កូន៥នាក់ ឬ តិចជាង ផ្តល់ប្រូបាប 0.97 ។ ក្នុងករណីនេះមានន័យថា ប្តីប្រពន្ធខាងលើ នឹងទទួលបានជោគជ័យ (កូនស្រីពៅ) នៅលើកទី៥ ។

៤. បំណែងចែក *Poisson (Poisson Distribution)*

ពិសោធន៍ព័រសុងជាពិសោធន៍មានលក្ខណៈដូចតទៅ ៖

☆ ចំនួននៃលទ្ធផលកើតឡើងក្នុងចន្លោះពេលមួយ(តំបន់ជាក់លាក់មួយ) មិនអាស្រ័យគ្នានឹងចំនួនដែលកើតឡើងក្នុងចន្លោះពេល (តំបន់ដាច់គ្នាណាមួយ) ផ្សេងទៀតទេ ។

☆ ប្រូបាបដែលលទ្ធផលច្រើនជាងមួយនឹងកើតឡើងក្នុងចន្លោះពេលខ្លី ឬតំបន់តូចអាចចោលបាន (ស្មើសូន្យ) ។

ឧទាហរណ៍ ដូចជា :

- ✓ ចំនួនអតិថិជនចូលមកបរិភោគអាហារថ្ងៃត្រង់ក្នុងភោជនីយដ្ឋានមួយក្នុងចន្លោះម៉ោង $10:00am - 11:00\ am$ ។
- ✓ ចំនួនគ្រោះថ្នាក់នៅក្នុងរោងចក្រ កើតឡើងក្នុង មួយសប្តាហ៍ ។
- ✓ ចំនួនការហៅទូរសព្ទ័ ភ្ជាប់បណ្តាញកើតឡើងក្នុងមួយនាទី ។
- ✓ ចំនួនទំនិញ ខូចគុណភាពក្នុងការបញ្ជូនទៅក្រៅ ។
- ✓ ចំនួនអតិថិជនឈរ រង់ចាំគិតលុយនៅ Super Market ។ល។

បើ X តាងអោយចំនួនជោគជ័យកើតឡើងនៅក្នុងលក្ខណៈបែបនេះ ដូចករណីឧទាហរណ៍ ខាងលើ នោះគេថា X មានបំណែងចែក Poisson ហើយប្រូបាប កំណត់ដោយ ៖

$$\boldsymbol{P(X) = \frac{e^{-\mu}.\mu^{x}}{x!}}$$

ដែល μ (Mu) : គឺជាមធ្យមនព្វន្តនៃចំនួនជោគជ័យកើតឡើង នៅក្នុងចន្លោះពេលណាមួយ ។

e : ជាគោឡូការីតនេពែ $e = 2.71828.....$

x : គឺជាប្រូបាបដែលត្រូវគណនាសំរាប់តំលៃ x ដាក់លាក់មួយ ។

☆ **មធ្យម** (μ) នៃចំនួនជោគជ័យអាចគណនាតាមលក្ខណៈ ***Poisson :***

$$\boldsymbol{E(X) = \mu}$$

ដែល n គឺជាចំនួននៃការពិសោធន៍ ហើយ p គឺជាប្រូបាបជោគជ័យ ។

☆ **វ៉ារ្យង់** σ នៃបំណែងចែក Poisson

$$\sigma^2 = \mu$$

សម្គាល់ ៖ *នៅពេលដែលប្រូបាបជោគជ័យ p តិចជាង* 0.05 *ហើយចំនួនពិសោធន៍* **n** *ធំ (Ex :* $\mathbf{n} = 100$ *ឬច្រើនជាង) ការគណនាតាមបំណែងចែកប្រូបាបទ្វេធាមានការលំបាក ដូច្នេះ គេប្រើបំណែងចែក Poisson ។*

ឧទាហរណ៍១ ៖ ក្នុងកសិដ្ឋានចិញ្ចឹមសត្វមួយកន្លែងបែងចែកតំបន់ៗដោយមួយតំបន់ដាក់សត្វ 500 ក្បាល ។ ប្រូបាបដែលសត្វមួយក្បាលមានជំងឺស្មើ 0.002 ។ រកប្រូបាបដែល តំបន់មួយ មានសត្វ 2 ក្បាល មានជំងឺ ?

ចម្លើយ

យើងយក X ជាអថេរចៃដន្យតាងអោយចំនួនសត្វដែលឈឺ ក្នុងតំបន់មួយហើយ X អាចមានតម្លៃ $X = 0, 1, 2, 3, ...$ ។ ដោយ n មានចំនួនធំគឺ $n = 500$ ហើយប្រូបាបកាន់តែតូច $p = 0.002$ ។ ដូច្នេះ យើងអនុវត្ត បំណែងចែក Poisson នៃអថេរចៃដន្យ X ដែល :

មធ្យម $\mu = np = 500(0.002) = 1$ និង វ៉ារ្យង់ $\sigma^2 = \mu = np = 1$ ។

ករណីនេះ $X = 2 \Rightarrow$ $\boxed{P(X) = \frac{e^{-\mu}.\mu^x}{x!} = \frac{e^1.1^2}{2!} = 0.184}$

សំគាល់ : *យើងអាចគណនាប្រូបាបនេះតាមបំណែងចែកទ្វេធា តែយើងជួបប្រទះការលំបាកក្នុងការគណនា* : $n = 500$, $p = 0.002$, $q = 1 - p = 1 - 0.002 = 0.998$

$$P(X = 2) = C_n^r \times q^{n-x} p^x = \frac{n!}{r!(n-r)!} \times q^{n-x} p^x = \frac{500!}{2!(500-2)!}(0.998)^{498}(0.002)^2 = 0.184$$

ឧទាហរណ៍២៖ សៀវភៅមួយក្បាលមាន ៥០០ទំព័រ មានបោះពុម្ពខុស ៧៥០កំហុស ។

1) តើជាមធ្យមមានការបោះពុម្ពខុសប៉ុន្មាន?
2) រកប្រូបាប ដែលទំព័រទី៤២៧
   a. គ្មានការបោះពុម្ពខុស
   b. មានការបោះពុម្ពខុស ៤
   c. មានការបោះពុម្ពខុសច្រើនជាមធ្យម ។

3). រកប្រូបាប ដែលទំព័រទី៤២៧ និង៤២៨ គ្មានការបោះពុម្ពខុស ។

ចម្លើយ

ក្នុងករណីនេះ យើងពិនិត្យឃើញថា ចំនួនកំហុស 750 កំហុស កើតឡើងនៅក្នុងផ្ទៃនៃក្រដាសសៀវភៅ ដែលមាន 500 ($n = 500$) ទំព័រ ដូចនេះ បើយើងតាង X ជាចំនួនកំហុសដែលកើតឡើងក្នុងការបោះពុម្ព ពេលនេះ X មានបំណែងចែក Poisson (អថេរចៃដន្យ Poisson) ។

1). កំហុសជាមធ្យមនៅលើមួយទំព័រ

$$\mu = \frac{750}{500} = 1.5$$

គួរកត់សំគាល់ថា $\mu = np = 1.5 \Rightarrow p = \frac{\mu}{n} = \frac{1.5}{500} = 0.003$ *ករណីនេះ p តូចណាស់ ។*

2). យក x ជាចំនួនកំហុសដែលកើតឡើងក្នុងការបោះពុម្ព ដូចនេះ $x = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ 750$ ប្រូបាប ដែលទំព័រទី ៤២៧ :

a. គ្មានការបោះពុម្ពខុស បានន័យថា $x = 0$

$$P(X) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \frac{e^{-1.5}(1.5)^{0}}{0!} = 0.2231$$

b. មានការបោះពុម្ពខុស ៤ បានន័យថា $x = 4$

$$P(X) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} = \frac{e^{-1.5}(1.5)^{4}}{4!} = 0.0471$$

c. មានការបោះពុម្ពខុសច្រើនជាមធ្យម :

ក្នុងករណីនេះយើងរកប្រូបាបដែលមានកំហុសតិចជាងមធ្យម វាជាការងាយស្រួលជាង :

$$P(X < \mu) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{e^{-1.5}(1.5)^{0}}{0!} + \frac{e^{-1.5}(1.5)^{1}}{1!} = 0.2231 + 0.3347 = 0.5578$$

ប្រូបាបដែលមានកំហុសច្រើនជាងមធ្យម គឺ

$$P(X > \mu) = 1 - P(X < \mu) = 1 - 0.5578 = 0.4422$$

3). រកប្រូបាប ដែលទំព័រទី ៤២៧ និង ៤២៨ គ្មានការបោះពុម្ពខុស

ករណីនេះ យើងតាង μ_1 កំហុសជាមធ្យមនៅលើពីរទំព័រ ៤២៧ និង៤២៨ មានន័យថា ៧៥០ កំហុសកើតឡើងនៅលើសៀវភៅមួយក្បាលមាន $\frac{500}{2} = 250$ ទំព័រ

គឺយើងគួបពីរទំព័រធ្វើតែមួយទំព័រ ។

ហេតុនេះ $\mu_1 = 2\mu = 2(1.5) = 3.0$ ឬ $\mu_1 = \frac{750}{250} = 3.0$ ហើយ x យកតំលៃ $0, 1, 2, . . . , 750$

$$P(X) = \frac{e^{-\mu_1}\mu_1^{\ x}}{x!} = \frac{e^{-3}(3)^{0}}{0!} = 0.0498$$

ផ្នែកលំហាត់ និងចម្លើយ

១. ប្រអប់មួយមានសំបុត្រ ២០ ដែលសំបុត្រ ១៨ សរសេរថាចាញ់ និងសំបុត្រ ២ សរសេរថាឈ្នះ ។ សំបុត្រមួយត្រូវបានគេចាប់ចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់បានសំបុត្រឈ្នះ ។

ចម្លើយ

រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់បានសំបុត្រឈ្នះ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានសំបុត្រឈ្នះ

- ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C_2^1=2$ ព្រោះសំបុត្រឈ្នះ ២ចាប់យក ១
- ចំនួនករណីអាច $n(S)=C_2^1=20$

នាំឱ្យ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{2}{20}=\dfrac{1}{10}$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{1}{10}$ ។

២. បៀមួយសន្លឹកត្រូវបានគេចាប់យកចេញពីក្នុងហ្វៀបៀដែលមាន ៥២សន្លឹកដោយចៃដន្យ ។

ក. រកប្រូបាបដែលគេចាប់យកសន្លឹកការ៉ូ

ខ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់យកបានសន្លឹក ៦

គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់យកបានសន្លឹក ៦ការ៉ូ ។

ចម្លើយ

ក. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានសន្លឹកការ៉ូ

Note បៀទាំងអស់មាន៥២សន្លឹកហើយចែកជា ៤ទឹក

- ការ៉ូ ១៣សន្លឹក
- កឺ ១៣សន្លឹក
- ជួង ១៣សន្លឹក
- ភិច ១៣សន្លឹក

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានសន្លឹកការ៉ូ

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C^{1}_{13}=13$ ព្រោះសន្លឹកការ៉ូ ១៣ហើយគេចាប់យក ១

ចំនួយករណីអាច $n(S)=C^{1}_{52}=52$

នាំឱ្យ $P(A)=\dfrac{13}{52}$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{13}{52}$ ។

ខ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានសន្លឹក ៦

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C^{1}_{4}=4$

នាំឱ្យ $P(B)=\dfrac{4}{52}=\dfrac{1}{13}$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{1}{13}$

គ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានសន្លឹក ៦ការ៉ូ

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានសន្លឹក ៦ការ៉ូ

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C^{1}_{1}=1$

នាំឱ្យ $P(C)=\dfrac{1}{52}$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{1}{52}$ ។

៣. ឧបមាគេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ធំមួយ និងគ្រាប់ឡុកឡាក់តូចមួយព្រមគ្នា ហើយតាង x ជាចំនួនដែលចេញលើគ្រាប់ឡុកឡាក់ធំ និងy ជាចំនួនដែលចេញលើគ្រាប់ឡុកឡាក់តូច ។ រកប្រូបាបដែល $x^2<4y$ ។

ចម្លើយ

រកប្រូបាបដែល $x^2<4y$

តាង E ជាព្រឹត្តិកាណ៍នេះ

$4y \backslash x^2$	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2
4.1	$(1,4)$	$(4,4)$	$(9,4)$	$(16,4)$	$(25,4)$	$(36,4)$
4.2	$(1,8)$	$(4,8)$	$(9,8)$	$(16,8)$	$(25,8)$	$(36,8)$
4.3	$(1,12)$	$(4,12)$	$(9,12)$	$(16,12)$	$(25,12)$	$(36,12)$
4.4	$(1,16)$	$(4,16)$	$(9,16)$	$(16,16)$	$(25,16)$	$(36,16)$
4.5	$(1,20)$	$(4,20)$	$(9,20)$	$(16,20)$	$(25,20)$	$(36,20)$
4.6	$(1,24)$	$(4,24)$	$(9,24)$	$(16,24)$	$(25,24)$	$(36,24)$

គេបាន ចំនួនករណីស្រប $n(E)=17$

ចំនួនករណីអាច $n(S)=36$

នាំឱ្យ $P(E)=\frac{17}{36}$

ដូចនេះ $P(E)=\frac{17}{36}$ ។

៤. បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរក្នុងលំហសំណាក S ដែល $P(A)=0.3$; $P(B)=0.6$ និង $P(A\cap B)=0.2$ ។ រក

ក. $P(A')$ ខ. $P(B')$ គ. $P(A\cup B)$

ឃ. $P(A'\cap B)$ ង. $P(A'\cup B')$ ច. $P(A'\cap B')$ ។

ចម្លើយ

គេមាន $P(A)=0.3$, $P(B)=0.6$ និង $P(A\cap B)=0.2$

ក. គណនា $P(A')$

គេមាន $P(A')=1-P(A)$

$P(A')=1-0.3$

$P(A')=0.7$

ដូចនេះ $P(A')=0.7$ ។

ខ. គណនា $P(B')$

គេមាន $P(B')=1-P(B)$

$=1-0.6=0.4$

ដូចនេះ $P(B')=0.4$

គ. គណនា $P(A\cup B)$

តាម $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=0.3+0.6-0.2$

$=0.7$

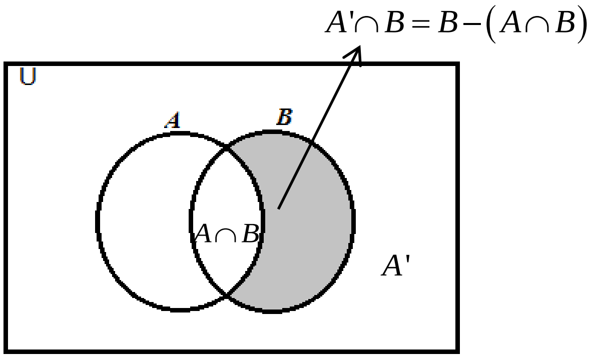
ដូចនេះ $P(A\cup B)=0.7$ ។

ឃ. គណនា $P(A'\cap B)$

គេមាន $P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$ ព្រោះ

$P(A'\cap B)=0.6-0.2=0.4$

ដូចនេះ $P(A'\cap B)=0.4$



ង. គណនា $P(A'\cup B')$

គេមាន $P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$

$=1-0.2$

$=0.4$

ដូចនេះ $P(A'\cup B')=0.4$

ច. គណនា $P(A'\cap B')$

គេមាន $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$

$=1-0.7$

$=0.3$

ដូចនេះ $P(A'\cap B')=0.3$

៥. គេឱ្យ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរមិនទាក់ទងគ្នា ហើយ $P(A\cap B)=0.1$ និង $P(A\cup B)=0.6$ ។ ចូរគណនា $P(A)$ និង $P(B)$ ។

ចម្លើយ

គណនា $P(A)$ និង $P(B)$ ចំពោះ $P(A\cup B)=0.6$ និង $P(A\cap B)=0.1$

ករណី A និង B ជាព្រឹត្តការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា

នោះ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$$0.1=x\times y \qquad (1)$$

តាង $x=P(A)$ និង $y=P(B)$

ហើយ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$0.6=x+y-0.1$

$x+y=0.7 \qquad (2)$

តាម (1) គេបាន $x=\dfrac{0.1}{y}$ ជំនួសក្នុង (2) នោះ

$\dfrac{0.1}{y}+y=0.7$

$0.1+y^2=0.7y$

$1+10y^2=7y$

$10y^2-7y+1=0$

មាន

$\Delta=7^2-4.10.1=9$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{7-3}{20}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$

$x_2=\dfrac{7+3}{20}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$

- ចំពោះ $x=\dfrac{1}{5}$ នោះ $y=\dfrac{1}{10x}=\dfrac{1}{10\times\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{2}$
- ចំពោះ $x=\dfrac{1}{2}$ នោះ $y=\dfrac{1}{10\times\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{5}$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{1}{5}$ និង $P(B)=\dfrac{1}{2}$ ហើយ $P(A)=\dfrac{1}{2}$ និង $P(B)=\dfrac{1}{5}$

៦. គេឱ្យ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរដែល $P(A)=0.5$ និង $P(B)=0.4$ ។
ចូរគណនា $P(A\cup B)$ ក្នុងករណីខាងក្រោម ៖

ក. A និង B មិនចុះសំរុងគ្នា

ខ. A និង B មិនទាក់ទងគ្នា ។

ចម្លើយ

គណនា $P(A\cup B)$ ដែលមាន $P(A)=0.5$ និង $P(B)=0.4$

ក. A និង B មិនចុះសម្រុងគ្នា មាន $A\cap B=\varnothing$

គេបាន $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=0.5+0.4$

$=0.9$

ដូចនេះ $P(A\cup B)=0.9$

ខ. A និង B មិនទាក់ទងគ្នា គេបាន $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

គេបាន $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=0.5+0.4-0.5\times 0.4$

$=0.9-0.2$

$=0.7$

ដូចនេះ $P(A\cup B)=0.7$

៧. A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរដែល $P(A\cup B)=0.8$ និង $P(A\cap B)=0.15$ ។

ក. តើ $P(A)$ អាចប្រែប្រួលពីណា ដល់ណា ?

ខ. គណនា $P(A)$ និង $P(B)$ ក្នុងករណីដែលព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរមិនទាក់ទងគ្នា ។

ចម្លើយ

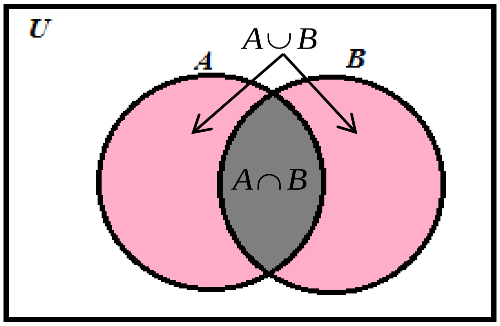
ក. តើ $P(A)$ អាចប្រែប្រួលពីណាដល់ណា? ដែល $P(A\cup B)=0.8$; $P(A\cap B)=0.15$

គេមាន $A\cap B\subset A\subset A\cup B$

$P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$

$0.15\le P(A)\le 0.8$

មើលរូប ៖



ដូចនេះ $0.15 \le P(A) \le 0.8$

ខ. គណនា $P(A)$ និង $P(B)$ ក្នុងករណីព្រឹត្តិការណ៍ទាំងពីរមិនទាក់ទងគ្នា

គេមាន $P(A)=x$ និង $P(B)=y$

ករណីមិនទាក់ទងគ្នា

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$
$$0.15=xy$$
$$x=\frac{0.15}{y} \qquad (1)$$

ហើយ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$0.8=x+y-0.15$$
$$x+y=0.95 \qquad (2)$$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) នាំឱ្យ

$$\frac{0.15}{y}+y=0.95$$
$$\Leftrightarrow 15+100y^2=95y$$
$$\Leftrightarrow 100y^2-95y+15=0$$
$$\Leftrightarrow 20y^2-19y+3=0$$

មាន $\Delta=19^2-4.20.3$

$$=361-240$$
$$=121$$

$$\Delta=11^2$$
$$y_1=\frac{19-11}{40}=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$$
$$y_2=\frac{19+11}{40}=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$$

ចំពោះ $y_1=\frac{1}{5} \Rightarrow x=\frac{15}{100\times\frac{1}{5}}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$

ចំពោះ $y_2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15}{100 \times \frac{3}{4}} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5}$

ដូចនេះ $P(A) = \frac{3}{4}$ និង $P(B) = \frac{1}{5}$ ហើយ $P(A) = \frac{1}{5}$ និង $P(B) = \frac{3}{4}$

៨. ថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សប្រុស ១០នាក់ និងសិស្សស្រី ២០នាក់ ដែលក្នុងនោះពាក់កណ្តាលសិស្សប្រុស និងពាក់កណ្តាលសិស្សស្រីមានភ្នែកពណ៌ត្នោត ។ គ្រូហៅសិស្សម្នាក់មកកាន់ក្តារខៀនដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគ្រូហៅចំសិស្សប្រុស ឬសិស្សស្រីមានភ្នែកពណ៌ត្នោត ។

ចម្លើយ

រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគ្រូហៅចំសិស្សប្រុស ឬសិស្សស្រីមានភ្នែកពណ៌ត្នោត

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ហៅចំសិស្សប្រុសមានភ្នែកពណ៌ត្នោត

G ជាព្រឹត្តិការណ៍ហៅចំសិស្សស្រីមានភ្នែកពណ៌ត្នោត

- ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C_5^1 = 5$
- ចំនួនករណីស្រប $n(G) = C_{10}^1 = 10$
- ចំនួនករណីអាច $n(S) = C_{30}^1 = 30$

នាំឱ្យ $P(B \cup G) = P(B) + P(G)$

$$= \frac{5}{30} + \frac{10}{30}$$

$$= \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $P(B \cup G) = \frac{1}{2}$

៩. គ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរត្រូវបានបោះព្រមគ្នាហើយ គេធ្វើផលបូកលេខដែលនៅមុខខាងលើ ។ រកប្រូបាប ដែលគេបានផលបូកនោះស្មើ ៥ ឬស្មើ៨ ។

ចម្លើយ

រកប្រូបាបដែលគេមានផលបូកនោះស្មើ5 ឬ ស្មើ8

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍បានផលបូកស្មើ5

B ជាព្រឹត្តិការណ៍បានផលបូកស្មើ8

- ចំនួនករណីស្រប $n(A)=4$ ព្រោះផលបូកស្មើ5មាន $(2,3),(3,2),(1,4)$ និង $(4,1)$ ។
- ចំនួនករណីស្រប $n(B)=5$ ព្រោះផលបូកស្មើ8មាន $(2,6),(6,2),(5,3),(3,5)$ និង $(4,4)$ ។
- ចំនួនករណីអាច $n(S)=36$

នាំឱ្យ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$$=\frac{4}{36}+\frac{5}{36}$$

$$=\frac{9}{36}$$

ដូចនេះ $P(A\cup B)=\frac{1}{4}$ ។

១០. នៅលើក្រដាសកាតុង ១០០ រាងការេប៉ុនគ្នា និងដូចគ្នាមានចុះលេខរៀងពី ១ដល់ ១០០ ។ គេចាប់យកក្រដាសកាតុងនេះ មួយដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យ ៖

ក. យកបានក្រដាសកាតុងដែលគ្មានលេខ ៥ ។

ខ. យកបានក្រដាសកាតុងដែលមានលេខរៀងចែកដាច់នឹង២ ឬចែកដាច់នឹង៥ ឬចែកដាច់នឹង២ផង ចែកដាច់នឹង ៥ផង ។

ចម្លើយ

ក. រកប្រូបាបដែលគេយកបានក្រដាសកាតុងដែលគ្មានលេខ5

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ

- ចំនួនករណីស្រប $n(C)=90$ ព្រោះមានលេខ5គឺ $5,15,25,35,45,55,65,75,85,95$ ។
- ចំនួនករណីអាច $n(S)=C_{100}^{1}=100$

នាំឱ្យ $P(C)=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$

ដូចនេះ $P(C)=\frac{9}{10}$

ខ. រកប្រូបាបដែលចាប់បានក្រដាសកាតុងដែលមានលេខចែកដាច់នឹង 2 ឬចែកដាច់នឹង 5 ឬ ចែកដាច់នឹង 2 ផង ចែកដាច់នឹង 5 ផង

- តាង R ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានលេខចែកដាច់នឹង 2

  ចំនួនករណីស្រប $n(B)=50$ ព្រោះលេខគូមាន 50 ហើយចែកដាច់នឹង 2

នោះ $P(B)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

- តាង C' ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានលេខចែកដាច់នឹង 5

  គេបាន $P(C')=1-P(C)$

  $$=1-\frac{9}{10}$$

  $$P(C')=\frac{1}{10}$$

- ប្រូបាបដែលចែកដាច់ 2 នឹង 5

  ចំនួនករណីស្រប $n(B\cap C')=10$ ព្រោះលេខចែកដាច់ 2 នឹង 5 ជាពហុគុណរវាង 2 នឹង 5 គឺ $PPCM(2,5)=10$ នោះលេខចែកដាច់នឹង 10 គឺមាន 10 លេខ

នាំឱ្យ $P(B\cap C')=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$

គេបាន ប្រូបាបដែលលេខចែកដាច់នឹង 2 ឬចែកដាច់នឹង 5 ឬចែកដាច់នឹង 2 ផង ចែកដាច់នឹង 5 ផងគឺ

$$P\left[B\cup C'\cup(B\cap C')\right]=P(B)+P(C')+P(B\cap C')$$

$$=\frac{5}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$$

$$=\frac{7}{10}$$

ដូចនេះ $P\left[B\cup C'\cup(B\cap C')\right]=\frac{7}{10}$

១១. គេមានកាក់ ៩ដែលចុះលេខពី $1, 2, \dots, 9$ ។ គេចាប់យកកាក់ ៤ដោយចៃដន្យរួចរៀបជាជួរដេក ។ គណនាប្រូបាប ដើម្បីឱ្យគេបានចំនួនគូ ។

ចម្លើយ

គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេបានចំនួនគូ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានលេខគូ

$\underline{6}\ \ \underline{7}\ \ \underline{8}\ \ \underline{4} \rightarrow$ លេខគូមាន4 គឺ 2,4,6 និង8

- ខ្ទង់ទី១មាន6 លេខ
- ខ្ទង់ទី២មាន7 លេខ
- ខ្ទង់ទី៣មាន8 លេខ
- ខ្ទង់ទី៤មាន4 លេខ

តាមគោលការណ៍គ្រឹះនៃរាប់

គេបាន $n(A)=6\times7\times8\times4$

ចំនួនករណីអាច $n(S)=9\times8\times7\times6$ ព្រោះ $\underbrace{\underline{9}\ \ \underline{8}\ \ \underline{7}\ \ \underline{6}}_{4\text{ ខ្ទង់}}$

នាំឱ្យ $P(A)=\dfrac{6\times7\times8\times4}{9\times8\times7\times6}=\dfrac{4}{9}$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{4}{9}$ ។

១២. គេហូតយកបៀ ២សន្លឹកដោយចៃដន្យពីក្នុងបៀមួយហ៊ូដែលមាន ៥២សន្លឹក ។ គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេហូតបាន :

ក. ជួងទាំងពីរសន្លឹក

ខ. ជួងមួយសន្លឹក និងកឺមួយសន្លឹក ។

ចម្លើយ

គណនាប្រូបាបដើម្បីហូតបាន

ក. ជួងទាំងពីរសន្លឹក

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ហូតបានជួងទាំងពីរសន្លឹក

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C_{13}^{2}=\dfrac{12\times13}{2}=48$

ចំនួនករណីស្រប $n(S)=C_{52}^{2}=\dfrac{51\times52}{2}=1326$

នាំឱ្យ $P(A)=\frac{48}{1326}=0.036$

ដូចនេះ $P(A)=0.036$ ។

ខ. ជួងមួយសន្លឹកនិង កឺមួយសន្លឹក

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ

- ចំនួនករណីស្រប $n(B)=\frac{169}{1326}=0.127$

ដូចនេះ $P(B)=0.127$ ។

១៣. ក្នុងប្រអប់មួយមានកាត ១០សន្លឹក ដែលចុះលេខរៀងគ្នាពី ១ ដល់ ១០ ។ គេលូកយកកាត ២ សន្លឹកចេញពីក្នុងប្រអប់ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាប P ដើម្បីឱ្យផលបូកលេខនៃកាតទាំងពីរជាចំនួនសេសបើ ៖

ក. កាតទាំងពីរសន្លឹកយកព្រមគ្នា ។

ខ. កាតទាំងពីរសន្លឹកយកម្តងមួយៗ ដោយមិនដាក់ចូលវិញ ។

គ កាតទាំងពីរសន្លឹកយកម្តងមួយៗ ដោយដាក់ចូលវិញ ។

ចម្លើយ

រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យផលបូកលេខនៃកាតទាំងពីរជាចំនួនសេសបើ ៖

ក. កាតទាំងពីរសន្លឹកយកព្រមគ្នា

ចំណាំ ៖ លេខពី 1 ដប់10 មានសេស5 និងគូ5 ហើយដើម្បីឱ្យផលបូកលេខកាតជាចំនួនសេសលុះត្រាតែយកបានគូមួយ និងសេសមួយ ។

របៀបទី១៖

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ហួតបានកាតពីរដែលមានផលបូកជាចំនួនសេស

- ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C_5^1\times C_5^1=5\times 5=25$
- ចំនួនករណីអាច $n(S)=C_{10}^2=45$

នាំឱ្យ $P(A)=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{5}{9}$

របៀបទី២៖

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ មានន័យថាយកបានសេសមួយ និងគូមួយ ឬគូមួយ និងសេសមួយ

នាំឱ្យ $P(A)=\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}+\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{50}{90}=\frac{5}{9}$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{5}{9}$

ខ. កាតទាំងពីរសន្លឹកយកម្តងមួយៗដោយមិនដាក់ចូលវិញ

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍យកកាតទាំងពីរបានផលបូកជាចំនួនសេស ដោយយកម្តងមួយៗមិនដាក់ចូលវិញ មានន័យថា យកបានសេសមួយ និងគូមួយ ឬគូមួយ និងសេសមួយ

នាំឱ្យ $P(B)=\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}+\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{9}$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{5}{9}$

គ. កាតទាំពីរសន្លឹកយកម្តងមួយៗ ដោយដាក់ចូលវិញ

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ ដោយយកម្តងមួយៗ ហើយដាក់ចូលវិញមានន័យថាយកបានសេសមួយ និងគូមួយ គូមួយ និងសេសមួយ

នាំឱ្យ $P(C)=\frac{5}{10}\times\frac{5}{10}+\frac{5}{10}\times\frac{5}{10}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $P(C)=\frac{1}{2}$

១៤. គេហូតយកបៀ ៣សន្លឹកចេញពីបៀក្នុងហ៊ូបៀដែលមាន ៥២សន្លឹកដោយចៃដន្យ ។

ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេហូតបានសន្លឹកបៀតែមួយទឹក ។

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេហូតបានសន្លឹកអាត់យ៉ាងតិចពីរសន្លឹក ។

ចម្លើយ

ក. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេហូតបានសន្លឹកបៀតែមួយតឹក

របៀបទី១៖

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ហូតបានសន្លឹកបៀតែមួយតឹក មានន័យថាបានការ៉ូទាំងបី ឬកឺទាំងបី ឬជួងទាំងបី ឬភិចទាំងបី

គេបាន $P(A)=\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}\times\frac{11}{50}+\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}\times\frac{11}{50}+\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}\times\frac{11}{50}+\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}\times\frac{11}{50}$

$$= 4\times\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}\times\frac{11}{50} = \frac{6\times 11}{51\times 25} = \frac{66}{1275} = 0.051$$

ដូចនេះ $P(A) = 0.051$

របៀបទី២៖

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ

- ចំនួនករណីស្រប $n(A) = 4C_{13}^{3} = 4\times\frac{13\times 12\times 11}{3!}$ មានលេខ4 ព្រោះហូតបានតឹកតែមួយ អាចហូតបានកឺទាំងបី ឬជួងទាំងបី ឬភិចទាំងបី ឬការ៉ូទាំងបី
- ចំនួនករណីអាច $n(S) = C_{52}^{3} = \frac{52\times 51\times 50}{3!}$

នាំឱ្យ $P(A) = \frac{4\times 13\times 12\times 11}{52\times 51\times 50} = 0.051$

ដូចនេះ $P(A) = 0.051$

ខ. រកប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេហូតបានសន្លឹកអាត់យ៉ាងតិចពីរសន្លឹក

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ហូតបានសន្លឹកអាត់យ៉ាងតិចពីរសន្លឹក មានន័យថាបានអាត់ពីរសន្លឹក ឬបានអាត់ទាំងបីសន្លឹក

* ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C_4^2\times C_{48}^1 + C_4^3$
  $= 6\times 48 + 4$
  $= 292$
* ចំនួនករណីអាច $n(S) = C_{52}^{3} = 22100$

នាំឱ្យ $P(B) = \frac{292}{22100} = 0.013$

ដូចនេះ $P(B) = 0.013$

១៥. ក្នុងប្រអប់មួយមានអំពូលភ្លើងចំនួន ១៥ ក្នុងនោះមានអំពូលខូច(មិនឆេះ) ចំនួន ៥ ។ គេយកអំពូលភ្លើង ៣ចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ ។

ក. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានអំពូលល្អទាំង៣

ខ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានអំពូលខូចតែ១

គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានអំពូលខូច មួយយ៉ាងតិច ។

ចម្លើយ

ក. រកប្រូបាបគេចាប់បានអំពូលល្អទាំងបី

អំពូលសរុប15មានខូច5ហើយចាប់យក3

តាង D ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានអំពូលល្អទាំងបី

- ចំនួនករណីស្រប $n(D)=C_{10}^{3}=\frac{10\times 9\times 8}{6}=120$
- ចំនួនករណីអាច $n(S)=C_{15}^{3}=\frac{15\times 14\times 13}{6}=455$

នាំឱ្យ $P(D)=\frac{120}{455}=0.26$

ដូចនេះ $P(D)=0.26$

ខ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានអំពូលខូចតែមួយ

តាង E ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ មានន័យថាបានអំពូលខូច 1 និងល្អ2

- ចំនួនករណីស្រប $n(E)=C_{5}^{1}\times C_{10}^{2}=5\times\frac{10\times 9}{2}=225$

នាំឱ្យ $P(E)=\frac{225}{455}=0.49$

ដូចនេះ $P(E)=0.49$

គ. រកប្រូបាបដែលគេចាប់បានអំពូលខូចយ៉ាងតិចមួយ

តាង F ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានអំពូលខូចយ៉ាងតិចមួយ

គេបាន $P(F)=1-P(D)$

$=1-0.26$

$=0.74$

ដូចនេះ $P(F)=0.74$

១៦. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលពណ៌ក្រហម4 ខ្មៅ5 និងពណ៌ស6 ។គេទាញយកប៊ូល2 ព្រមគ្នាពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ។រកប្រូបាបដែល

ក. ប៊ូលក្រហមយ៉ាងតិចមួយត្រូវគេទាញចេញ។

ខ. ប៊ូលដែលគេទាញចេញមានពណ៌ខុសគ្នា។

ចម្លើយ

រកប្រូបាបដែល

ក. ប៊ូលក្រហមយ៉ាងតិចមួយត្រូវគេទាញចេញ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ប៊ូលក្រហមយ៉ាងតិចមួយត្រូវគេទាញចេញ

ដោយក្នុងថង់មានប៊ូល15 ហើយគេទាញប៊ូល2 ព្រមគ្នានោះករណីដែលអាចកើតឡើងគឺ

$$n(s)=C(15,2)=\frac{15!}{13!\times 2!}=105$$

ហើយប៊ូលក្រហមយ៉ាងតិចមួយត្រូវគេទាញចេញនោះករណីស្របដែលកើតឡើងគឺ

$$n(A)=C(4,1)\times C(11,1)+C(4,2)=(\frac{4!}{3!\times 1!}\times\frac{11!}{10!\times 1!})+\frac{4!}{2!\times 2!}=(4\times 11)+6=50$$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{n(s)}{n(A)}=\frac{50}{105}=\frac{10}{21}$

ខ. ប៊ូលដែលគេទាញចេញមានពណ៌ខុសគ្នា

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ប៊ូលដែលគេទាញចេញមានពណ៌ខុសគ្នា

នោះប៊ូលដែលទាញចេញអាចជាប៊ូលពណ៌ក្រហមនិងស រឺក្រហមនិងខ្មៅ រឺសនិងខ្មៅ

$$\Rightarrow n(B)=C(4,1)\times C(6,1)+C(4,1)\times C(5,1)+C(5,1)\times C(6,1)=(4\times 6)+(4\times 5)+(5\times 6)=24+20+30=74$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{74}{105}$$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{74}{105}$

១៧. នៅក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ូល 12 ដែលគេសរសេរពី 1 លេខដល់ 5។ គេចាប់យកប៊ូល 3 ចេញពីក្នុងប្រអប់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

ក. គេចាប់បានប៊ូលទាំង 3 លេខសុទ្ធតែចែកដាច់និង 3។

ខ. គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់ដែលលេខចែកដាច់និង 3។

គ. គេចាប់បានប៊ូលមានលេខតាមលំដាប់កើននៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=3$។

ឃ. គេចាប់បានប៊ូលមានលេខតាមលំដាប់បង្កើតបានស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q=\frac{1}{2}$។

ចម្លើយ

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

ក. គេចាប់បានប៊ូលទាំង 3 លេខសុទ្ធតែចែកដាច់និង 3

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍គេចាប់បានប៊ូលទាំង 3 លេខសុទ្ធតែចែកដាច់និង 3

ដោយ ក្នុងប្រអប់មានប៊ូលចំនួន 12 ចុះលេខ $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ ហើយជ្រើសរើសយក 3 ដោយចៃដន្យ។

នោះគេបាន $n(s)=C(12,3)=\frac{12!}{8!\times 3!}=220$ ហើយពហុគុណនៃ 3 គឺ $\{3,6,9,12\}$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលប៊ូលទាំង 3 លេខសុទ្ធតែចែកដាច់និង 3 គឺ $P(A)=\frac{4}{220}=\frac{1}{55}$

ខ. គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់ ដែលលេខចែកដាច់និង 3

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់ដែលលេខចែកដាច់និង 3

នោះគេបាន $n(B)=C(4,1)\times C(8,2)=\frac{4!}{3!\times 1!}\times\frac{8!}{6!\times 2!}=112$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលគេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់ដែលលេខចែកដាច់និង 3 គឺ $P(B)=\frac{112}{220}=\frac{28}{55}$

គ. គេចាប់បានប៊ូលមានលេខតាមលំដាប់កើននៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=3$

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេចាប់បានប៊ូលមានលេខតាមលំដាប់កើននៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=3$

ដោយ គេរៀបជាស្វ៊ីតកើនដែលមានផលសងរួម $d=3$ នោះ

គេបាន

$\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6,9\},\{4,7,10\},\{5,8,11\},\{6,9,12\}$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលគេចាប់បានប៊ូលមានលេខតាមលំដាប់កើននៃស្វីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=3$ គឺ $P(C)=\frac{6}{220}=\frac{3}{110}$

ឃ. គេចាប់បានប៊ូលមានលេខតាមលំដាប់បង្កើតបានស្វីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q=\frac{1}{2}$

តាង D ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេចាប់បានប៊ូលមានលេខតាមលំដាប់បង្កើតបានស្វីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q=\frac{1}{2}$ ហើយ a,b,c ជាចំនួនតាមលំដាប់ស្វីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q=\frac{1}{2}$

នោះគេបាន $b=\frac{1}{2}a$ និង $c=\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}a$

គេបាន a,b,c ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលជាពហុគុណនៃ 4 នោះ a អាចយកតម្លៃ $4,8$ និង 12 ។

យើងបានស្វីត $\{4,2,1\},\{8,4,2\},\{12,6,3\}$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលគេចាប់បានប៊ូលមានលេខតាមលំដាប់បង្កើតបានស្វីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q=\frac{1}{2}$ គឺ $P(D)=\frac{3}{220}$

១៨. គេឱ្យ $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{7}{12}$, $P(A/B)=\frac{3}{7}$ ។ គណនា $P(A\cup B)$ ។

ចម្លើយ

គណនា $P(A\cup B)$

គេមាន $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{7}{12}$, $P(A/B)=\frac{3}{7}$

គេបាន $P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)=\frac{3}{7}\times\frac{7}{12}=\frac{1}{4}$

នាំឱ្យ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{7}{12}-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{6}{12}+\frac{7}{`2}-\frac{3}{12}=\frac{5}{6}$$

ដូចនេះ $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$

១៩. គេឱ្យ $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{3}{10}$ និង $P(A\cup B)=\frac{7}{10}$ ។ គណនា $P(A/B)$ ។

ចម្លើយ

គណនា $P(A/B)$

គេមាន $P(A)=\frac{3}{5}$, $P(B)=\frac{3}{10}$, $P(A\cup B)=\frac{7}{10}$

គេបាន $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$$=\frac{3}{5}+\frac{3}{10}-\frac{7}{10}$$

$$=\frac{1}{5}$$

$P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

នាំឱ្យ $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{3}$

ដូចនេះ $P(A/B)=\frac{2}{3}$

២០. ថង់មួយមានប៊ូលស3មានលេខខុសគ្នានិងប៊ូលខ្មៅ2មានលេខខុសគ្នា។ គេចាប់យកប៊ូលម្តងមួយៗចំនួន2ដងដោយចៃដន្យចេញពីក្នុងថង់ដោយដាក់ចូលវិញ។

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់លើកទី1បានប៊ូលស

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់លើកទី2 បានប៊ូលខ្មៅ

ក. ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A,B និង $A\cap B$ ។

ខ. តើព្រឹត្តិការណ៍ A និង B អាស្រ័យគ្នាឬទេ?

គ. គណនា $P(A/B)$ និង $P(B/A)$

ចម្លើយ

ដោយក្នុងថង់មានប៊ូលចំនួន 5 ហើយគេចាប់យកប៊ូលម្តងមួយៗចំនួន 2 ដង ដោយចែដន្យចេញពីក្នុងថង់ដោយដាក់ចូលវិញ។ នោះគេបាន លទ្ធផលនិមួយៗជាចម្លាស់ច្រំដែលនោះ គេបានលំហសំណាក $n(s)=5^2=25$ ។ គេចាប់លើកទី1បានប៊ូលសនោះ $n(A)=3^2=9$ ។ គេចាប់លើកទី2 បានប៊ូលខ្មៅនោះ $n(B)=2^2+3\times 2=10$ និងព្រឹត្តិការណ៍នៃ $n(A\cap B)=3\times 2=6$ ។

ក. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A,B និង $A\cap B$

$$P(A)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

$$P(B)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$

$$P(A\cap B)=\frac{6}{25}$$

ខ. តើព្រឹត្តិការណ៍ A និង B អាស្រ័យគ្នាឬទេ?

ដោយ $P(A)\times P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$ និង $P(A\cap B)=\frac{6}{25}$

នោះគេបាន $P(A)\times P(B)=P(A\cap B)=\frac{6}{25}$

ដូចនេះ A និង B ជាព្រិត្តិការណ៍ទាក់ទងគ្នា

គ. គណនា $P(A/B)$ និង $P(B/A)$

$$P(A/B)=P(A)=\frac{3}{5}$$

$$P(B/A)=P(B)=\frac{2}{5}$$

២១. គេឱ្យ $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{8}{15}$ និង $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$ ។

ក. គណនា $P(B)$

ខ. $P(A'\cup B)$ ។

ចម្លើយ

គេមាន $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{8}{15}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

ក. គណនា $P(B)$

គេមាន $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

នាំឱ្យ $P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(A)$

$$=\frac{8}{15}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{8+3-5}{15}$$

$$=\frac{2}{5}$$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{2}{5}$

ខ. គណនា $P(A'\cup B)$

គេមាន $P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)$

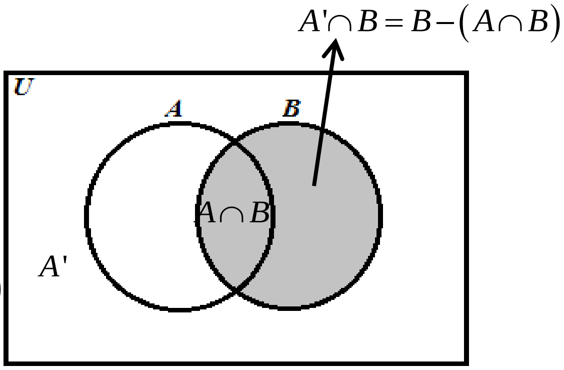
តែ $P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

ហើយ $P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

នាំឱ្យ $P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(B)+P(A\cap B)$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{13}{15}$$

ដូចនេះ $P(A'\cup B)=\frac{13}{15}$

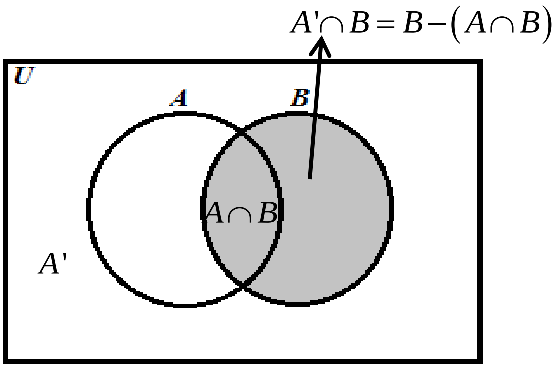


២២. បង្ហាញថាបើ A និង B ជាព្រឹត្តិកាណ៍ចៃដន្យ នោះគេបាន $P(A/B)=1-P(A'/B)$ ។

ចម្លើយ

បង្ហាញថាបើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ចៃដន្យនោះ $P(A/B)=1-P(A'/B)$

រូបៈ



របៀបទី១ៈ

គេមាន $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

តែ $P(A\cap B)=P(B)-P(A'\cap B)$

នាំឱ្យ $P(A/B)=\dfrac{P(B)-P(A'\cap B)}{P(B)}$

$$=1-\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}$$

$$=1-P(A'/B)$$

ដូចនេះ $P(A/B)=1-P(A'/B)$

របៀបទី២៖

គេមាន $P(A/B)=1-P(A'/B)$

$$\Leftrightarrow P(A/B)+P(A'/B)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)+P(A'\cap B)}{P(B)}=1$$

$\Leftrightarrow \dfrac{P(B)}{P(B)}=1$ ព្រោះ $B=(A'\cap B)\cup(A\cap B)\Rightarrow P(B)=P(A'\cap B)+P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow 1=1$ ពិត

ដូចនេះ $P(A/B)=1-P(A'/B)$

២៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ A, B និង C ដែល A និង B មិនចុះសំម្រុងគ្នា នោះ គេបាន $P(A\cup B/C)=P(A/C)+P(B/C)$ ។

ចម្លើយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ A,B និង C ដែល A មិនចុះសម្រុងគ្នា

គេបាន $P(A\cup B/C)=P(A/C)+P(B/C)$

គេមាន $P(A\cup B/C)=P\left[(A\cup B)/C\right]$

$$=\frac{P\left[(A\cup B)\cap C\right]}{P(C)}$$

$$=\frac{P\left[(A\cap C)\cup(B\cap C)\right]}{P(C)}$$

$$=\frac{P(A\cap C)+P(B\cap C)}{P(C)}$$
$$=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}+\frac{P(B\cap C)}{P(C)}$$
$$=P(A/C)+P(B/C)$$

ដូចនេះ $P(A\cup B/C)=P(A/C)+P(B/C)$

២៤. A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ចៃដន្យ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(A\cap B)=P(A'\cap B')$ ។

ចម្លើយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(A\cap B)=P(A'\cap B')$

គេមាន $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$

គេបាន $P(A')=P(B')=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

នាំឱ្យ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \qquad (1)$$

ហើយ $P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន $P(A\cap B)=P(A'\cap B')$

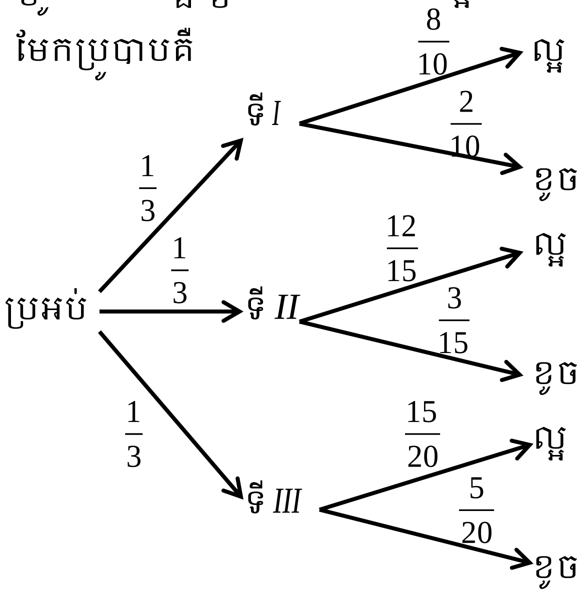
ដូចនេះ $P(A\cap B)=P(A'\cap B')$

២៥. គេមានប្រអប់៣ដូចគ្នា ។ ប្រអប់ទី I មានផលិតផល ១០ដែលក្នុងនោះមានផលិតផលល្អ ៨។ ប្រអប់ទី II មានផលិតផល ១៥ដែលក្នុងនោះមានផលិតផលល្អ ១២ , ប្រអប់ទី III មានផលិតផល២០ ដែលក្នុងនោះមានផលិតផលល្អ ១៥ ។ គេយកប្រអប់មួយ រួចគេចាប់យកផលិតផលមួយពីក្នុងប្រអប់នោះដោយចៃដន្យ ។ គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យគេចាប់បានផលិតផលល្អ ។

ចម្លើយ

គណនាប្រូបាប ដើម្បីឱ្យបានផលិតផលល្អ

គេបាន មែកប្រូបាបគឺ



តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានផលិតផលល្អ

តាមមែកប្រូបាបខាងលើ យើងបាន ៖

$$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{8}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{12}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{15}{20}$$
$$=0.26+0.26+0.25$$
$$=0.77$$

ដូចនេះ $P(A)=0.77$

២៦. សៅ , សែន , សុខ ជាអ្នកប្រមាញ់ដៃត្រង់ខុសៗគ្នា ។ សៅដែលជាអ្នកដៃត្រង់ជាងគេ បាញ់ត្រូវ ៧គ្រាប់ក្នុង ១០គ្រាប់ សែនត្រូវ ៥ដង សុខដែលអន់ភ្នែក ១ដង ក្នុង១០គ្រាប់ ។ អ្នកប្រមាញ់ទាំងបីចេញដំណើរស្មើគ្នា បាញ់ស្មើគ្នា តម្រង់លើទន្សាយតែមួយ ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ ខាងក្រោម ៖

ក. ទន្សាយនោះត្រូវគេបាញ់ត្រូវ

ខ. ទន្សាយត្រូវគេបាញ់ត្រូវ តែសុខបាញ់ខុស

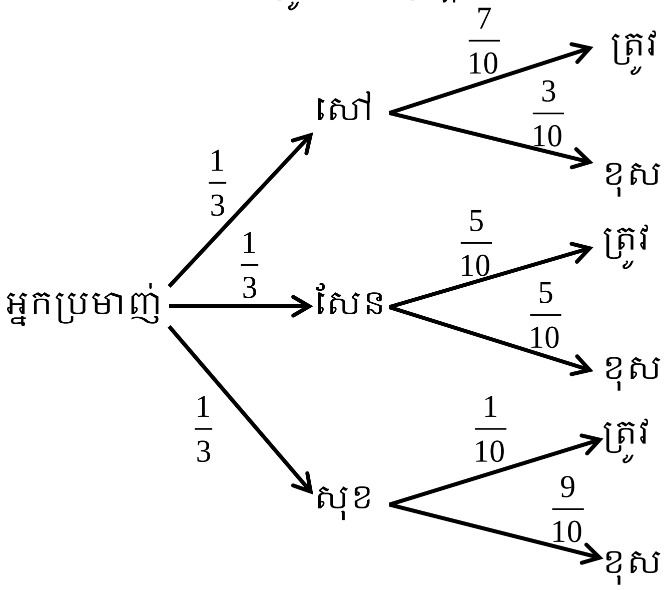
គ. សុខតែម្នាក់ឯងបានបាញ់ត្រូវទន្សាយនោះ ។

សម្គាល់ ៖ គេសន្មត់ថាលទ្ធផលនៃអ្នកប្រមាញ់ទាំងបីមិនទាក់ទងគ្នាទេ ។

ចម្លើយ

គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម ៖

យើងបានមែកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នេះគឺ



ក. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលទន្សាយត្រូវគេបាញ់ត្រូវ

តាង A ព្រឹត្តិការណ៍ដែលទន្សាយត្រូវគេបាញ់ត្រូវ

តាមមែកប្រូបាបខាងលើ គេបាន $P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}=0.43$

ដូចនេះ $P(A)=0.43$

ខ. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលទន្សាយត្រូវគេបាញ់ត្រូវ តែសុខបាញ់ខុស

តាង B ព្រឹត្តិការណ៍ដែលទន្សាយត្រូវគេបាញ់ត្រូវ តែសុខបាញ់ខុស

តាមមែកប្រូបាបខាងលើ គេបាន $P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{9}{10}=0.69$

ដូចនេះ $P(B)=0.69$

គ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍សុខតែម្នាក់ឯងបាញ់ត្រូវទន្សាយ

តាង C ព្រឹត្តិការណ៍សុខតែម្នាក់ឯងបាញ់ត្រូវទន្សាយ

តាមមែកប្រូបាបខាងលើ គេបាន $P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}=0.3$

ដូចនេះ $P(C)=0.3$

២៧. គេមានម៉ាស៊ីន A,B និង C ផលិតវត្ថុដូចគ្នា។ ម៉ាស៊ីន A ផលិតបាន 50%, B ផលិតបាន 30% និង C ផលិតបាន 20% ។ គេដឹងថាវត្ថុដែលផលិតដោយម៉ាស៊ីន A មានខូច 3%,ម៉ាស៊ីន B មានខូច 4% និង ម៉ាស៊ីន C មានខូច 4% ។

ក. រកប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូច។

ខ. ក្នុងចំណោមវត្ថុ 1000 តើម៉ាស៊ីន A ធ្វើខូចចំនួនប៉ុន្មាន?ម៉ាស៊ីន B ធ្វើខូចចំនួនប៉ុន្មាន? ម៉ាស៊ីន C ធ្វើខូចចំនួនប៉ុន្មាន?

ចម្លើយ

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលម៉ាស៊ីន A ផលិតវត្ថុ

B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលម៉ាស៊ីន B ផលិតវត្ថុ

C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលម៉ាស៊ីន C ផលិតវត្ថុ

D ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលម៉ាស៊ីនផលិតវត្ថុខូច

ក. រកប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូច

- រកប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូចផលិតដោយម៉ាស៊ីន A

$P(A\cap D)=P(A)\times P(D/A)$

$P(D/A)=3\%=0.03$, $P(A)=50\%=0.5$

$\Rightarrow P(A\cap D)=0.5\times 0.03=0.015$

❖ រកប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូចផលិតដោយម៉ាស៊ីន B

$P(B\cap D)=P(B)\times P(D/B)$

$P(D/B)=4\%=0.04$, $P(B)=30\%=0.3$

$\Rightarrow P(B\cap D)=0.3\times 0.04=0.012$

❖ រកប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូចផលិតដោយម៉ាស៊ីន C

$P(C\cap D)=P(C)\times P(D/C)$

$P(D/C)=4\%=0.04$, $P(C)=20\%=0.2$

$\Rightarrow P(C\cap D)=0.2\times 0.04=0.008$

នោះគេបាន ប្រូបាបដែលមានវត្ថុខូចគឺ

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$$
$$=0.015+0.012+0.008$$
$$=0.035$$

ខ. ក្នុងចំណោមវត្ថុ 1000 តើម៉ាស៊ីន A ធ្វើខូចចំនួនប៉ុន្មាន?ម៉ាស៊ីន B ធ្វើខូចចំនួនប៉ុន្មាន?ម៉ាស៊ីន C ធ្វើខូចចំនួនប៉ុន្មាន?

❖ រកចំនួនវត្ថុខូចដោយដឹងថាផលិតដោយម៉ាស៊ីន A

តាមទ្រឹស្តីបទបាយ៉េសគេបាន

$$P(A/D)=\frac{P(D/A)\times P(A)}{P(D)}$$
$$=\frac{0.03\times 0.5}{0.035}$$
$$=0.428$$

នោះគេបានម៉ាស៊ីន A ធ្វើខូចចំនួន $1000\times 0.428=428$

❖ រកចំនួនវត្ថុខូចដោយដឹងថាផលិតដោយម៉ាស៊ីន B

តាមទ្រឹស្តីបទបាយ៉េសគេបាន

$$P(B/D)=\frac{P(D/B)\times P(B)}{P(D)}$$
$$=\frac{0.04\times 0.3}{0.035}=0.34$$

នោះគេបាន ម៉ាស៊ីន B ធ្វើខូចចំនួន $1000\times0.343=343$

❖ រកចំនួនវត្ថុខូចដោយដឹងថាផលិតដោយម៉ាស៊ីន C

តាមទ្រឹស្តីបទបាយ៉េសគេបាន

$$P(C/D)=\frac{P(D/C)\times P(C)}{P(D)}$$

$$=\frac{0.04\times0.2}{0.035}$$

$$=0.229$$

នោះគេបាន ម៉ាស៊ីន C ធ្វើខូចចំនួន $1000\times0.229=229$

២៨. នៅក្នុងការចុះស្រង់ទិន្នន័យស្តីពីអ្នកកើតជម្ងឺគ្រុនចាញ់នៅប្រទេសកម្ពុជាបានអោយដឹងថា មនុស្សប្រុសកើតជម្ងឺដែលជាក្មេងមាន 5% វ័យជំទង់មាន 7.5% និង មនុស្សចាស់មាន 10% ។ គេដឹងថា ក្នុងចំណោមមនុស្សប្រុសទាំងអស់មានក្មេង 30% វ័យជំទង់ 25% និង មនុស្សចាស់ 45% ។

តើមនុស្សប្រុសនៅកម្ពុជាប៉ុន្មានភាគរយកើតជម្ងឺគ្រុនចាញ់?

ចម្លើយ

រកចំនួនមនុស្សប្រុសនៅកម្ពុជាដែលកើតជម្ងឺគ្រុនចាញ់

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍មនុស្សកើតជម្ងឺគ្រុនចាញ់

A_1 ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃក្មេងប្រុស $\Rightarrow P(A_1)=30\%=0.3$

A_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃវ័យជំទង់ $\Rightarrow P(A_2)=25\%=0.25$

A_3 ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃមនុស្សចាស់ $\Rightarrow P(A_3)=45\%=0.45$

ដោយ $P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.3+0.25+0.45=1$ ដែលព្រឹត្តិការណ៍ A_1, A_2, A ជាបំណែកនៃសំណុំព្រឹត្តិការណ៍មនុស្សប្រុស។ ម្យ៉ាងទៀតមនុស្សប្រុសកើតជម្ងឺដែលជាក្មេងមាន 5% វ័យជំទង់មាន 7.5% និង មនុស្សចាស់មាន 10%

$\Rightarrow P(B/A_1)=0.05$

$P(B/A_2)=0.075$

$P(B/A_3)=0.1$

$$\Rightarrow P(B)=P(B/A_1)\times P(A_1)+P(B/A_2)\times P(A_2)+P(B/A_3)\times P(A_3)$$

$$=(0.05\times0.3)+(0.075\times0.25)+(0.1\times0.45)$$

$$=0.07875$$

$$=7.875\%$$

ដូចនេះ មនុស្សប្រុសកើតជម្ងឺមាន 7.875%

២៩. ប្រូបាបដែលជើងយន្តហោះមួយចេញដំណើរទាន់ពេលកំណត់គឺ $P(D)=0.83$ ប្រូបាបដែលវាមកទាន់ពេលកំណត់ គឺ $P(A)=0.82$ និង ប្រូបាបដែលវាចេញដំណើរ និង មកទាន់ពេលកំណត់គឺ $P(A\cap D)=0.78$ ។ រកប្រូបាបដែលយន្តហោះ ៖

ក. មកទាន់ពេលកំណត់ក្នុងលក្ខខណ្ឌដែលវាចេញដំណើរទាន់ពេលកំណត់។

ខ. ចេញដំណើរទាន់ពេលក្នុងលក្ខខណ្ឌដែលវាមកទាន់ពេលកំណត់។

ចម្លើយ

រកប្រូបាប

បម្រាប់ $P(D)=0.83$, $P(A)=0.82$, $P(A\cap D)=0.78$

ក. មកទាន់ពេលកំណត់ក្នុងលក្ខខណ្ឌដែលវាចេញដំណើរទាន់ពេលកំណត់

ប្រូបាបនៃ A ក្រោមលក្ខខណ្ឌ D កំណត់ដោយ

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}$$

$$=\frac{0.78}{0.83}=0.94$$

ខ. ចេញដំណើរទាន់ពេលក្នុងលក្ខខណ្ឌដែលវាមកទាន់ពេលកំណត់

ប្រូបាបនៃ D ក្រោមលក្ខខណ្ឌ A កំណត់ដោយ

$$P(D/A)=\frac{P(A\cap D)}{P(A)}=\frac{0.78}{0.82}=0.95$$

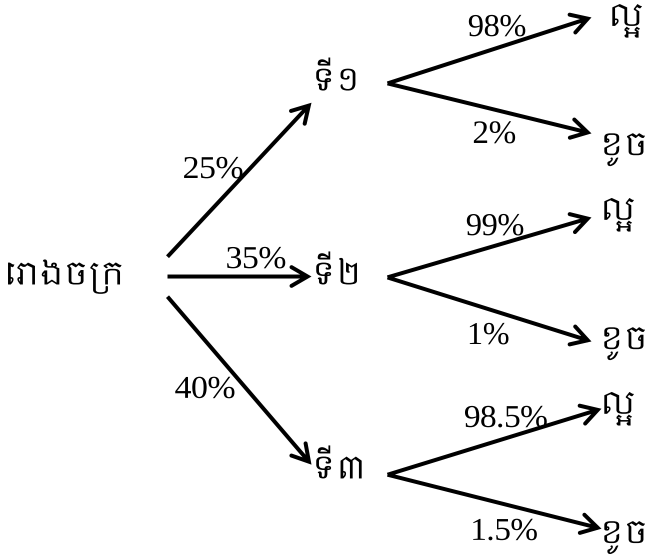
៣០. រោងចក្រ បីផលិតម្ជូបកំប៉ុង ។ រោងចក្រទី1 ទី2 ទី3 ផលិតបាន ២៥% , ៣៥% , ៤០% នៃផលិតផលម្ជូបកំប៉ុងសរុប ដែលស្តុកទុកក្នុងឃ្លាំងមួយ ។ អត្រាម្ជូបកំប៉ុងខូចរបស់រោងចក្រទាំង៣ ស្មើរៀងគ្នានឹង ២% , ១% , ១.៥% ។ គេយកម្ជូបកំប៉ុងមួយកំប៉ុងពីឃ្លាំង ។

ក. គណនាប្រូបាប ដើម្បីឱ្យគេយកបានម្ជូបកំប៉ុងដែលខូចគុណភាព

ខ. បើគេយកម្ជូបកំប៉ុងខូចគុណភាព ។ តាមគំនិតរបស់អ្នក តើម្ជូបកំប៉ុងដែលខូច គុណភាពនេះជារបស់រោងចក្រមួយណា ?

ចម្លើយ

យើងបាន មែកប្រូបាបនៃការផលិតម្ជូបកំប៉ុងគឺ



ក. គណនាប្រូបាប ដើម្បីឱ្យគេយកបានម្ជូបកំប៉ុងដែលខូចគុណភាព

តាង A ព្រឹត្តិការណ៍យកបានម្ជូបកំប៉ុងដែលខូចគុណភាព

តាមមែកប្រូបាប គេបាន

$$P(A) = 25\% \times 2\% + 35\% \times 1\% + 40\% \times 1.5\%$$
$$= \frac{25}{100} \times \frac{2}{100} + \frac{35}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{15}{100}$$
$$= 0.0145$$

ដូចនេះ $P(A) = 0.0145$

ខ. តាមគំនិតខ្ញុំ ម្ជូបកំប៉ុងដែលខូចគុណភាព ជារបស់រោងចក្រទី៣ ព្រោះភាគរយនៃការខូចរបស់រោងចក្រទី៣មាន 0.6% ធំជាងភាគរយនៃការខូចរបស់រោងចក្រទី១ និងទី២មាន 0.5% និង 0.35% ។

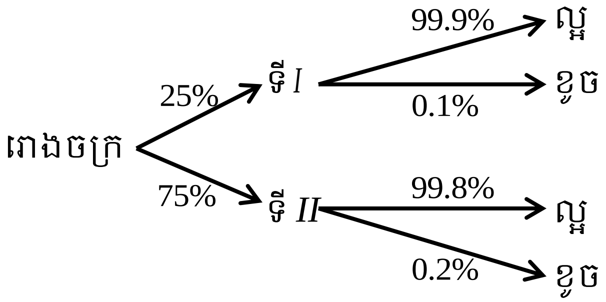
៣១. រោងចក្រពីរផលិតអំពូលអគ្គីសនី 220V ដូចគ្នា ។ ទិន្នផលនៃរោងចក្រទី II ស្មើនឹង៣ដង ទិន្នផលរោងចក្រទី I ។ អត្រាខូចរបស់អំពូលដែលផលិតដោយរោងចក្រទី I និងទី II គឺ 0,1% និង 0.2% ។ ឧបមាថា អំពូលដែលដាក់លក់នៅលើទីផ្សារ ជាអំពូលដែលផលិតដោយ រោងចក្រទាំងពីរនេះ ។ គេទិញអំពូលមួយដោយចៃដន្យ ។

ក. គណនាប្រូបាបដែលនាំឱ្យគេទិញប៉ះអំពូលខូច

ខ. ប្រសិនបើគេទិញប៉ះអំពូលខូច តាមយោបល់របស់អ្នក តើអំពូលខូចនេះជាផលិតផលរបស់រោងចក្រមួយណា ?

ចម្លើយ

មែកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ ផលិតអំពូលអគ្គីសនី របស់រោងចក្រទាំងពីរ គឺ



ក. គណនាប្រូបាប ដែលនាំឱ្យទិញប៉ះអំពូលខូច

តាង A ព្រឹត្តិការណ៍ ទិញប៉ះអំពូលខូច

តាមមែកប្រូបាប គេបាន

$$P(A) = 25\% \times 0.1\% + 75\% \times 0.2\%$$
$$= 0.00025 + 0.0015$$
$$= 0.00175$$

ដូចនេះ $P(A) = 0.00175$

ខ. តាមយោបល់ខ្ញុំ ប្រសិនបើគេទិញប៉ះអំពូលខូចអំពូលខូច នោះជាផលិតផលរបស់រោងចក្រទី II ព្រោះភាគរយខូចរបស់រោងចក្រទី II មាន 0.15% ច្រើនជាងភាគរយខូចរបស់រោងចក្រទី I មាន 0.025% ។

៣២. សុខ និង សៅ ចូលសម្ភាសន៍ ដើម្បីជ្រើសរើសកន្លែងធ្វើការពីកន្លែងដែលមានមុខតំណែងដូចគ្នា ។ ប្រូបាបដែលជ្រើសរើសសុខ គឺ $\frac{1}{7}$ និងប្រូបាបដែលជ្រើសរើសសៅ មាន$\frac{1}{5}$។

រកប្រូបាបដែល ៖

ក. អ្នកទាំងពីរនឹងត្រូវជ្រើសរើស

ខ. តែម្នាក់គត់ចំណោមពីរនាក់នឹងត្រូវជ្រើសរើស ។

គ. គ្មាននណាម្នាក់ ចំណោមពីរនាក់នឹងត្រូវជ្រើសរើស ។

ឃ. យ៉ាងតិចម្នាក់ក្នុងចំណោមពីរនាក់ នឹងត្រូវជ្រើសរើស

ចម្លើយ

រកប្រូបាបដែល

ក. អ្នកទាំងពីរនឹងត្រូវជ្រើសរើស

យើងមាន ប្រូបាបដែលជ្រើសរើសសុខគឺ $\frac{1}{7}$

ប្រូបាបដែលជ្រើសរើសសៅគឺ$\frac{1}{5}$

តាង A ព្រឹត្តិការណ៍ដែលសុខនិងសៅត្រូវបានជ្រើសរើស

យើងបាន ប្រូបាបដែលអ្នកទាំងពីរត្រូវបានជ្រើសរើសគឺ $P(A)=\frac{1}{7}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{35}=0.028$

ដូចនេះ $P(A)=0.028$

ខ. តែម្នាក់ ក្នុងចំណោមអ្នកទាំងពីរ ត្រូវជ្រើសរើស

តាង B ព្រឹត្តិការណ៍ដែលម្នាក់ក្នុងចំណោមអ្នកទាំងពីរ ត្រូវជ្រើសរើស

យើងបាន បើគេជ្រើសរើសម្នាក់ នោះអាចជ្រើសរើសសុខ ឬសៅ ។

-បើរើសសុខ នោះសៅមិនត្រូវបានរើស

-បើរើសសៅ នោះសុខមិនត្រូវបានរើស

ដោយ ប្រូបាបជ្រើសរើសសុខ $\frac{1}{7}$ នោះប្រូបាបមិនជ្រើសរើសសុខមាន $1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

តែ ប្រូបាបជ្រើសរើសសៅ$\frac{1}{5}$ នោះប្រូបាបមិនជ្រើសរើសសៅមាន $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

នាំឱ្យ $P(B)=\frac{1}{7}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{6}{7}=0.28$

ដូចនេះ $P(B)=0.28$

គ. គ្មានអ្នកណាម្នាក់ នឹងត្រូវជ្រើសរើស

តាង C ព្រឹត្តិការណ៍គ្មានអ្នកណាម្នាក់ នឹងត្រូវជ្រើសរើស

បើគ្មានអ្នកណាម្នាក់ នឹងត្រូវជ្រើសរើសនោះ សុខ និងសៅនឹងមិនត្រូវមានគេជ្រើសរើស

នាំឱ្យ $P(C)=\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}=0.685$

ដូចនេះ $P(C)=0.685$

ឃ. យ៉ាងតិចម្នាក់ក្នុងចំណោមពីរនាក់ នឹងត្រូវជ្រើសរើស

តាង D ព្រឹត្តិការណ៍យ៉ាងតិចម្នាក់ក្នុងចំណោមពីរនាក់ នឹងត្រូវជ្រើសរើស

គេបាន D ព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយពីព្រឹត្តិការណ៍ C

នាំឱ្យ $P(D)=1-P(C)$

$=1-0.685$

$=0.315$

ដូចនេះ $P(D)=0.315$

៣៣. ក្នុងប្រអប់ A, B និង C មានបាល់ពណ៌ស និងបាល់ពណ៌ខ្មៅ ។ ប្រអប់ A មានបាល់ពណ៌ស ២ និង បាល់ពណ៌ខ្មៅ ៣ ហើយ ប្រអប់ B មានបាល់ពណ៌ស ១ និងបាល់ពណ៌ខ្មៅ ៤ និង ប្រអប់ C មានបាល់ពណ៌កស ៣ និង បាល់ពណ៌ខ្មៅ១ ។ យើងរើសប្រអប់មួយដោយ ចៃដន្យ ហើយចេញពីប្រអប់នេះ យើងរើសយកបាល់មួយ ។ ឧបមាថា យកបានបាល់ពណ៌ស ។

រកប្រូបាបដែលបាល់ចេញពីប្រអប់ A ។

ចម្លើយ

តាង W ជាបាល់ពណ៌ស

ប្រអប់ A	ប្រអប់ B	ប្រអប់ C
●●●○○	●●●●○	○○○●

យើងបាន $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$ និង $P(W/A)=\frac{2}{5}$, $P(W/B)=\frac{1}{5}$, $P(W/C)=\frac{3}{4}$

ដូចនេះ តាមរូបមន្ត *Bayes* គឺ $P(A/W)=\dfrac{P(A).P(W/A)}{P(A).P(W/A)+P(B).P(W/B)+P(C).P(W/C)}$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{8}{27}$$

ដូចនេះ $P(A/W)=\dfrac{8}{27}$

៣៤. តើគេត្រូវទំលាក់គ្រាប់ឡុកឡាក់យ៉ាងតិចប៉ុន្មានដើម្បីអោយប្រូបាបមានយ៉ាងតិចគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចេញលេខ 6 ធំជាងឬស្មើ 0.9 ?

ចម្លើយ

ចំនួនគ្រាប់ឡុកឡាក់ដែលត្រូវទំលាក់

តាង n ជាចំនួនគ្រាប់ឡុកឡាក់ដែលត្រូវទំលាក់ $(n\in IN)$

$A=$ "មានយ៉ាងតិចគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចេញលេខ 6"

$A_i=$ "គ្រាប់ឡុកឡាក់ទី i ចេញលេខ 6" $(i=\overline{1,n})$

$\overline{A}$ និង $\overline{A_i}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយរបស់ A និង A_i

$\Rightarrow \overline{A}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$ ($\overline{A_i}$ មិនទាក់ទងគ្នា) ដែល $P(\overline{A_i})=\dfrac{5}{6}$

ដូច្នេះ $P(\overline{A})=P(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i})=\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})=(\dfrac{5}{6})^n$

$\Rightarrow P(A)=1-P(\overline{A})=1-(\dfrac{5}{6})^n$

តែ $P(A)\geq 0.9\Leftrightarrow 1-(\dfrac{5}{6})^n\geq 0.9$

$$\Leftrightarrow (\frac{5}{6})^n\leq 0.1\Leftrightarrow n.\log\frac{5}{6}\leq\log 0.1$$

$$\Leftrightarrow n(\log 5-\log 6)\leq -1$$

$$\Rightarrow n\geq\frac{-1}{\log 5-\log 6}=12.65$$

ដូចនេះ ដើម្បីអោយប្រូបាបមានយ៉ាងតិចគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយចេញលេខ 6 ធំជាងឬស្មើនិង 0.9 គេត្រូវទំលាក់គ្រាប់ឡុកឡាក់យ៉ាងតិចបំផុតចំនួន $n=13$ គ្រាប់។

៣៥. គេមានប្រអប់ 3 ដូចគ្នា។ ប្រអប់ទី I មានផលិតផល 10 ដែលក្នុងនេះមានផលិតផលល្អ 8 ។ ប្រអប់ទី II មានផលិតផល 15 ដែលក្នុងនេះមានផលិតផលល្អ 12 ។ ប្រអប់ទី III មានផលិតផល 20 ដែលក្នុងនេះមានផលិតផលល្អ 15 ។ គេយកប្រអប់មួយរួចគេចាប់យកផលិតផលមួយពីក្នុងប្រអប់នេះដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបដើម្បីអោយគេយកបានផលិតផលល្អ។

ចម្លើយ

តាង A="យកបានផលិតផលល្អ"

B_1 = "យកបានប្រអប់ទី I"

B_2 = "យកបានប្រអប់ទី II"

B_3 = "យកបានប្រអប់ទី III"

$P(A)$ ជាប្រូបាបដែលត្រូវរក

គេបាន : $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$

តាមរូបមន្ត ប្រូបាបសរុប

$P(A)=P(B_1).P(A/B_1)+P(B_2).P(A/B_2)+P(B_3).P(A/B_3)$

គេបាន $P(A)=(\frac{1}{3}\times\frac{8}{10})+(\frac{1}{3}\times\frac{12}{5})+(\frac{1}{3}\times\frac{15}{20})=\frac{47}{60}$

$P(A)=0.7833$

៣៦. យុវជន 3 នាក់បាញ់កាំភ្លើងម្នាក់មួយគ្រាប់តំរង់ទៅគោលដៅមួយ។ ប្រូបាប៊ីលិតេដែលនាំអោយអ្នកទី 1 ទី 2 និងទី 3 បាញ់ត្រូវគោលដៅស្មើរៀងគ្នានិង $0.7;0.8;0.5$ ។ គណនាប្រៅបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយ ៖

a. មានមួយគ្រាប់ចំគោលដៅ។

b. មាន 2 គ្រាប់ចំគោលដៅ។

c. បាញ់ខុសទាំង 3 គ្រាប់។

d. មានមួយគ្រាប់យ៉ាងតិចចំគោលដៅ។

e. គ្រាប់ទី 1 បាញ់ត្រូវដោយដឹងថាមាន 2 គ្រាប់ចំគោលដៅ។

ចម្លើយ

តាង A_i = អ្នកទី i បាញ់ចំគោលដៅ $i=\overline{1,3}$

(A_i ជាព្រឹត្តការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា)

គេបាន $P(A_1)=0.7$ $P(A_2)=0.8$ $P(A_3)=0.5$

$P(\overline{A_1})=0.3$ $P(\overline{A_2})=0.2$ $P(\overline{A_3})=0.5$

a. មានមួយគ្រាប់ចំគោលដៅ

តាង A=″មានមួយគ្រាប់បាញ់ចំគោលដៅ″

គេបាន $A=(A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3)$

ប្រូបាបដែលនាំអោយមានមួយគ្រាប់ចំគោលដៅគឺ

$$P(A)=P(A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3)$$

$$=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)$$

$$=(0.7\times0.2\times0.5)+(0.3\times0.8\times0.5)+(0.3\times0.2\times0.5)$$

$$=0.22$$

b. មាន 2 គ្រាប់ចំគោលដៅ

តាង B=″មាន 2 គ្រាប់បាញ់ចំគោលដៅ″

គេបាន $B=(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3})\cup(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3)\cup(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3)$

ប្រូបាបដែលនាំអោយមានមួយគ្រាប់ចំគោលដៅគឺ

$$P(B)=P(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3})+P(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3})$$

$$=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})+P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)+P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)$$

$$=(0.7\times0.8\times0.5)+(0.7\times0.2\times0.5)+(0.3\times0.8\times0.5)$$

$$=0.47$$

c. បាញ់ខុសទាំង 3 គ្រាប់

ប្រូបាបដែលនាំអោយបាញ់ខុសទាំងបីគ្រាប់គឺ

$$P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$=0.3\times 0.2\times 0.5$$

$$=0.03$$

d. មានមួយគ្រាប់យ៉ាងតិចចំគោលដៅ

ប្រូបាបនេះគឺ $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})=1-P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3})$

$$=1-0.3=0.97$$

e. គ្រាប់ទី 1 បាញ់ត្រូវដោយដឹងថាមាន 2 គ្រាប់ចំគោលដៅ

ប្រូបាបនេះគឺ $$P(A_1/B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}\qquad (1)$$

ប៉ុន្តែ $$A_1\cap B=A_1\cap\left[(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3})\cup(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3)\cup(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3)\right]$$

$$=(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3})\cup(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3)$$

$$(1)\Rightarrow P\left(A_1/B\right)=\frac{P(A_1\cap A_2\cap\overline{A_3})+P(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})+P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)}{P(B)}$$

$$=\frac{0.27+0.07}{0.47}=0.7447$$

៣៧. ប្រអប់មួយមានឃ្លីខ្មៅ 4 ឃ្លីស 6 ។រកប្រូបាបដែលនាំអោយ :

a. យកឃ្លី 3 ព្រមគ្នាបានឃ្លីខ្មៅទាំងអស់។

b. យកឃ្លី 3 ព្រមគ្នាបានឃ្លី 2 មានពណ៌ដូចគ្នា។

c. យកឃ្លី 3 (ចាប់យកម្តងមួយរួចដាក់វិញ)បានឃ្លីពណ៌ខ្មៅ។

d. គេចុះលេខ 1 ដល់លេខ 10 លើឃ្លីទាំងនេះ។គេចាប់យកឃ្លី(ចាប់យកម្តងមួយដោយមិនដាក់វិញ)មករៀបតាមលំដាប់។ រកប្រូបាបដើម្បីអោយឃ្លីទាំង 3 រៀបបានចំនួន 132 ។

ចម្លើយ

a. យកឃ្លី 3 ព្រមគ្នាបានឃ្លីខ្មៅទាំងអស់

តាង $A=$″យកឃ្លីពណ៌ខ្មៅ3″

$P(A)$ ជាប្រូបាបដែលត្រូវរក

គេបាន $P(A)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=0.0333$

b. យកឃ្លី 3 ព្រមគ្នាបានឃ្លី 2 មានពណ៌ដូចគ្នា

ឃ្លី 2 មានពណ៌ដូចគ្នាមានន័យថា"ខ្មៅ2 ស1 ឬ ខ្មៅ 1 ស2"

តាង $B=$យកបានឃ្លី 2 មានពណ៌ដូចគ្នា

គេបាន $P(A)=\frac{C_4^2\times C_6^1+C_4^1\times C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{96}{120}=0.8$

c. យកឃ្លី 3 (ចាប់យកម្តងមួយរួចដាក់វិញ)បានឃ្លីពណ៌ខ្មៅ

តាង $C_i=$ "យកបានឃ្លីខ្មៅនៅលើកទី i " $(i=\overline{1,3})$

C_i ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា

ប្រូបាបដែលនាំអោយគរយកបាបឃ្លីខ្មៅ 3គឺ

$$P(\bigcap_{i=1}^{3}C_i)=P(C_1)\times P(C_2)\times P(C_3)=\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}=0.064$$

d. រកប្រូបាបដើម្បីអោយឃ្លីទាំង 3 រៀបបានចំនួន 132

តាង $D=$ "យកបានឃ្លីបីរៀបបានលេខ 132 "

$D_j=$ "យកបានឃ្លីដែលមានលេខ j " $(j=\overline{1,10})$

D_j ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលទាក់ទងគ្នា

ដូច្នេះ ប្រូបាបដែលនាំអោយឃ្លីបានលេខ 132គឺ

$$P(D)=P(D_1)\times P(D_3/D_1)\times P(D_2/D_1D_3)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}$$

$$P(D)=\frac{1}{720}$$

៣៨. ប្រូបាបដែលនាំអោយម៉ាស៊ីនខូចបន្ទាប់ពីដំណើរការផលិតបានមួយថ្ងៃស្មើនិង α (α ចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែលការរបស់វាអាចចោលបាន)។ គណនាប្រូបាបដែលនាំអោយម៉ាស៊ីននេះដំណើរការផលិត5ថ្ងៃមិនខូច។

ចម្លើយ

តាង $A_i =$ "ម៉ាស៊ីនខូចនៅថ្ងៃទី i (A_i មិនទាក់ទងគ្នា)

$\overline{A_i}$ "ម៉ាស៊ីនមិនខូចថ្ងៃទី i "

$A =$ "ម៉ាស៊ីនមិនខូចបន្ទាប់ពីដំណើរផលិតបានថ្ងៃ5"

គេបាន $A = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$

តាមសម្មិតកម្ម $P(A_i) = \alpha \Rightarrow P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 1 - \alpha$

ប្រូបាបដែលនាំអោយម៉ាស៊ីនំណើរការផលិតបាន5ថ្ងៃមិនខូចគឺ

$$P(A) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}) = \prod_{i=1}^{5} P(A_i)$$

$$= \left[P(A_i)\right]^5 = (1-\alpha)^5 = 1 - 5\alpha + 10\alpha^2 - 10\alpha^3 + 5\alpha^4 - \alpha^5$$

$$= 1 - 5\alpha + \alpha^2(10 - 10\alpha + 5\alpha^2 - \alpha^3)$$

$= 1 - 5\alpha$ (α^2 ព្រោះអាចចោលបាន)

ដូចនេះ $P(A) = 1 - 5\alpha$

៣៩. រោងចក្រពីរផលិតអំពូលអគ្គីសនី $220V$ ដូចគ្នា។ ទិន្នផលនៃរោងចក្រទី II ស្មើនិង 3 ដងទិន្នផលនៃរោងចក្រទី I ។ អត្រាខូចរបស់អំពូលដែលផលិតដោយរោងចក្រទី I និងទី II គឺ 0.1% និង 0.2% ។ ឧបមាថាអំពូលដែលផលិតដាក់លក់នៅលើទីផ្សារជាអំពូលដែលផលិតដោយរោងចក្រទាំងពីរនេះ។ គេទិញអំពូលមួយដោយចៃដន្យ។

a. គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដែលនាំអោយគេទិញប៉ះអំពូលខូច។

b. បើគេទិញប៉ះអំពូលខូចតាមយោបល់របស់អ្នកតើអំពូលនេះផលិតផលរបស់រោងចក្រណា?

ចម្លើយ

a. គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដែលនាំអោយគេទិញប៉ះអំពូលខូច

តាង $A_i =$ "ទិញប៉ះអំពូលខូចដែលផលិតដោយរោងចក្រទី i "

$B =$ "ទិញប៉ះអំពូលខូច "

តាមសម្មតិកម្ម $P(A_1) = \dfrac{1}{4}$; $P(A_2) = \dfrac{3}{4}$

តាមរូបមន្តប្រូបាបប៊ីលីតេសរុបប្រូបាបដែលនាំអោយទិញប៉ះអំពូលខូចគឺ

$$P(B)=P(A_1)\times P(B/A_1)+P(A_2)\times P(B/A_2)$$

$$\frac{1}{4}\times 0.1\%+\frac{3}{4}\times 0.2\%=\frac{0.007}{4}=0.00175$$

b. បើគេទិញប៉ះអំពូលខូចតើវាជារបស់រោងចក្រណា?

ប្រូបាបដែលនាំអោយអំពូលនេះជារបស់រោងចក្រទី I

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)\times P(B/A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\times 0.1\%}{0.00175}=0.14285$$

ប្រូបាបដែលនាំអោយអំពូលនេះជារបស់រោងចក្រទី II

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)\times P(B/A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{4}\times 0.2\%}{0.00175}=0.85714$$

តាមលទ្ធផលខាងលើបញ្ជាក់ថាជាទូទៅអំពូលខូចនេះជាផលិតផលរបស់រោងចក្រទី II

៤០. ក្នុងចំណោមរថយន្តទេសចរណ៍ និង រថយន្តដឹកទំនិញដែលបើកបរឆ្លងកាត់ស្ថានីយ៍ X មាន 60% ជារថយន្តដឹកទំនិញ។ ប្រូបាបដែលនាំអោយរថយន្តទេសចរណ៍ចូលចាក់សាំងក្នុងស្ថានីយ៍ X ស្មើនិង 0.2 ចំណែកឯរថយន្តដឹកទំនិញស្មើរនិង 0.1 ។ រថយន្តមួយចូលចាក់សាំងក្នុងស្ថានីយ៍នេះ។គណនាប្រូបាបដែលនាំអោយរយន្តដឹកនេះជារថយន្តដឹកទំនិញ។

ចម្លើយ

តាង $A=$ "រថយន្តដែលបើកតាត់ស្ថានីយ៍ជារថយន្តទេសចរណ៍"

$\bar{A}$"រថយន្តដែលបើកកាត់ស្ថានីយ៍ជារថយន្តដឹកទំនិញ"

$B=$"ចូលចាក់សាំង"

តាមសម្មតិកម្ម $P(\overline{A})=60\%=0.6$; $P(A)=0.4$; $P(B/A)=0.2$; $P(B/\overline{A})=0.1$

ប្រូបាបដែលនាំអោយរថយន្តដែលចូលចាក់សាំងជារថយន្តដឹកទំនិញគឺ

$$P(\overline{A}/B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\times P(B/\overline{A})}{P(A)\times P(B/A)+P(A)\times P(B/\overline{A})}\quad (Bayes)$$

$$=\frac{0.6\times 0.1}{0.4\times 0.2+0.6\times 0.1}=0.4286=\frac{0.6\times 0.1}{0.4\times 0.2+0.6\times 0.1}=0.4286$$

៤១. ប្រូបាបដែលនាំអោយយុទ្ធជនម្នាក់បាញ់ត្រូវបច្ចាមិត្តស្មើរនិង p ថេរ។ យុទ្ធជននេះបាញ់តំរង់ទៅគោលដៅ។ ឧបមាថាការបាញ់ក្នុងមួយគ្រាប់ៗមិនរងឥទ្ធិពលទៅវិញទៅមកទេ។

a. បន្ទាប់ពីបាញ់អស់ n គ្រាប់ ចូររកប្រូបាបដែលនាំអោយគាត់បាញ់ត្រូវគោលដៅយ៉ាងតិចមួយគ្រាប់។

b. តើត្រូវជ្រើសរើស n បែបណាដើម្បីអោយប្រូបាប(ក្នុងសំណួរទី a)ធំជាងតម្លៃ $r(0<r<1)$?

c. គេអោយ $p=0.2$ ។ តើគាត់ត្រូវបាញ់យ៉ាងហោចណាស់ប៉ុន្មានគ្រាប់ដើម្បីអោយប្រូបាបបាញ់ត្រូវគោលដៅយ៉ាងតិចមួយគ្រាប់ធំជាងតម្លៃ $r=0.9$?

ចម្លើយ

a. ប្រូបាបបាញ់ត្រូវមួយគ្រាប់យ៉ាងតិច

តាង $A=$ "បាញ់ត្រូវបច្ចាមិត្រយ៉ាងតិចមួយគ្រាប់"

$\overline{A}=$ "បាញ់ខុសទាំងអស់"

$A_i=$ "គ្រាប់ទី i បាញ់ត្រូវ" $\Rightarrow \overline{A_i}=$ "គ្រាប់ទី i បាញ់ខុស"

គេបាន $\overline{A}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

តាមសម្មតិកម្ម $P(A_i)=p \Rightarrow P(\overline{A_i})=1-P(A_i)=1-p$

ប្រូបាបបាញ់ខុសទាំងអស់គឺ $P(\overline{A})=P(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i})=\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})=(1-p)^n$

ប្រូបាបបាញ់ត្រូវមួយគ្រាប់យ៉ាងតិចគឺ $P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-p)^n$

b. កំណត់ n ដើម្បីអោយ $P(A)>r(0<r<1)$

$$P(A)>r \Leftrightarrow 1-(1-p)^n>r$$

$$\Leftrightarrow (1-p)^n<1-r \Leftrightarrow n.\lg(1-p)<\lg(1-r)$$

$$\Rightarrow n>\frac{\lg(1-r)}{\lg(1-p)} \quad (\text{ព្រោះ } 0<1-r<1 \Rightarrow \lg(1-r)<0)$$

ដូចនេះ គេត្រូវយក $n>\dfrac{\lg(1-r)}{\lg(1-p)}$

c. អនុវត្តន៍ $p=0.2$

ក្នុងករណីនេះ $n>\dfrac{\lg(1-r)}{\lg(1-0.2)}=\dfrac{\lg(1-r)}{\lg 0.8}$

ចំពោះ $r=0.9\Rightarrow n>\frac{\lg(1-0.9)}{\lg(0.8)}=\frac{\lg(0.1)}{\lg(0.8)}=\frac{-1}{-0.0969}=10.32$

ដើម្បីអោយប្រូបាបបាញ់ត្រូវមួយគ្រាប់យ៉ាងតិចធំជាង $r=0.9$ គេត្រូវបាញ់យ៉ាងតិចបំផុតចំនួន $n=11$ គ្រាប់។

៤២. តាមការអង្កេតបានអោយដឹងថាមានតែសិស្ស 40% ប៉ុណ្ណោះដែលបានរំលឹកមេរៀនមុនទៅសាលា។ ថ្ងៃនោះគេហៅសិស្ស 5 នាក់សួរដោយចៃដន្យ។គណនាប្រូបាបដើម្បីអោយមានសិស្ស k នាក់រំលឹកមេរៀន។ អនុវត្តន៍: $k=0;k=1;k=2;k=5$ ។

ចម្លើយ

ប្រូបាបដើម្បីអោយមានសិស្ស k នាក់ បានរំលឹកមេរៀន

តាមសម្មតិកម្មមានសិស្ស 40% បានរំលឹកមេរៀនដូចនេះ

$$p=40\%=0.4\Rightarrow q=1-p=1-0.4=0.6$$

ប្រូបាបដើម្បីអោយមានសិស្ស $k(0\le k\le 5)$ នាក់បានរំលឹកមេរៀនគឺ

$$P(k)=C_5^k p^k q^{5-k}=\frac{5!}{k!(5!-k!)}\times(0.4)^k\times(0.6)^{5-k}$$

អនុវត្តន៍

$$k=0: P(0)=\frac{5!}{0!5!}\times(0.4)^0\times(0.6)^5=0.07776$$

$$k=1: P(1)=\frac{5!}{1!4!}\times(0.4)^1\times(0.6)^4=0.2592$$

$$k=2: P(2)=\frac{5!}{2!3!}\times(0.4)^2\times(0.6)^3=0.3456$$

$$k=5: P(5)=\frac{5!}{0!5!}\times(0.4)^5\times(0.6)^0=0.01024$$

៤៣. តាមរបាយការណ៍បានអោយដឹងថាក្នុងចំណោមទូរទស្សនិកជនទាំងអស់មាន 20% ចូលចិត្តទស្សនាកម្មវិធីពត៌មាន។ គេជ្រើសរើសទស្សនិកជន 100 នាក់ដោយចៃដន្យ។

a. គណនាប្រូបាបប៊ីលីតេដើម្បីអោយមាន 24 នាក់ចូលចិត្តកម្មវិធីពត៌មាន។

b. គណនាប្រូបាបដើម្បីអោយមានមិនលើសពី 12 នាក់ចូលចិត្តកម្មវិធីពត៌មាន។

ចម្លើយ

a. គណនាប្រូបាបប៊ីលីតេដើម្បីអោយមាន 24 នាក់ចូលចិត្តកម្មវិធីពត៌មាន

តាមសម្មតិកម្ម $p=20\%=0.2 \Rightarrow q=1-p=0.8$; $n=100$

$np=100\times 0.2=20 \quad k=24$

$\Rightarrow \sqrt{npq}=\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}=4$

គេបាន $X_k=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{24-20}{4}=1$

តាមតារាង $\varphi(X_k)=\varphi(1)=0.2420$

ប្រូបាបប៊ីលីតេដែលនាំអោយអោយមាន 24 នាក់ចូលចិត្តកម្មវិធីពត៌មានគឺ

$P(24)\approx\frac{\varphi(X_k)}{\sqrt{npq}}=\frac{0.2420}{4}=0.0605$

b. គណនាប្រូបាបដើម្បីអោយមានមិនលើសពី 12 នាក់ចូលចិត្តកម្មវិធីពត៌មាន

គេបាន $k_1=0 \;\; k_2=12$

ដូចនេះ $\alpha=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{0-20}{4}=-5\Rightarrow\varphi(-5)=-\varphi(5)=-0.49999997$

$\beta=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{12-20}{4}=-2\Rightarrow\varphi(-2)=-\varphi(2)=-0.47725$

ប្រូបាបដើម្បីអោយមានមិនលើសពី 12 នាក់ចូលចិត្តកម្មវិធីពត៌មានគឺ

$P(0\le k\le 12)\approx\varphi(-2)-\varphi(-5)=0.49999997-0.47725=0.02275$

៤៤. តាមពត៌មានពីក្រុមហ៊ុន *MOBITEL* បានអោយដឹងថាក្នុងមួយម៉ោងមានអតិថិជន 300 នាក់បានទូរស័ព្ទទៅសួរអំពីរទឹកប្រាក់ក្នុគណនីរបស់ខ្លួន។ គណនាប្រូបាបដើម្បីអោយក្នុង 1 នាទីមានអតិថិជន 2 នាក់ទូរស័ព្ទទៅសួរអំពីរទឹកប្រាក់ក្នុងគណនីរបស់ខ្លួន។

ចម្លើយ

ប្រូបាបដែលនាំអោយមានអតិថិជន 2 នាក់ទូរស័ព្ទទៅសួរអំពីរទឹកប្រាក់ក្នុងគណនីរបស់ខ្លួន

តាមសម្មតិកម្មក្នុងមួយនាទីមានអ្នកសួរ $\frac{300}{60}=5$ នាក់

គេបាន $\lambda=5 \;\; k=2$

ប្រូបាបដែលនាំមានអតិថិជន 2 នាក់ទូរស័ព្ទទៅសួរអំពីរទឹកប្រាក់ក្នុងគណនីរបស់ខ្លួនគឺ

$$P(2) \approx \frac{e^{-5}5^2}{2!} = 0.084$$

៤៥. ការផ្ញើឥវ៉ាន់តាមយន្តហោះមួយកំរបាត់ណាស់ ។ តាមការធ្វើគំរូសាកល្បងទៅលើចំនួន 1000 ជើងហោះហើរ គេរកឃើញថាមានឥវ៉ាន់ចំនួន 300 បានបាត់ ។

ចូររកប្រូបាបដែលឥវ៉ាន់មិនបាត់

ចម្លើយ

គេមាន ទំហំគំរូ $n = 1000$

ប្រូបាបដែលមិនបាត់គឺ $p = 0.7$

មធ្យម និងវ៉ារ្យង់គឺ $E(X) = V(X) = 0.3 = \mu$

តាមរូបមន្ត $P(X = k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$ នាំឱ្យ

$$P(X = 0) = \frac{(0.3)^0 e^{-0.3}}{0!} = 0.7408$$

ដូចនេះ $P(X = 0) = 74.08\%$ ដែលឥវ៉ាន់មិនបាត់ ។

សម្គាល់ ៖ កាលណា n មានតម្លៃកាន់តែធំ ហើយ p មានតម្លៃតូចដែល $np = \lambda$ ថេរនោះ

$$P_n(k) \simeq \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

៤៦. ផលិតផលខូចដែលផលិតដោយម៉ាស៊ីនមួយមានប្រូបាប 0.005 ។ គេប្រើម៉ាស៊ីននេះផលិត 1000 ផលិតផល ។ គណនាប្រូបាបដើម្បីឱ្យមាន :

ក. ផលិតផលខូចមួយ

ខ. ផលិតផលខូចមិនលើសពី២

គ. បើគេផលិត 2000 ផលិតផល តើមានផលិតផលខូចជាមធ្យមប៉ុន្មាន ?

ចម្លើយ

តាមសម្មតិកម្ម :

- ចំនួនគំរូពិត $n = 1000$
- ប្រូបាបឈ្នះគឺ $p = 0.005$
- មធ្យម $\mu = np = 1000 \times 0.005 = 5$

យើងបាន $P(X = k) = \dfrac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} \quad , \; k = 0,1,2,...$

ក. រកប្រូបាបផលិតផលខូចមួយ

យើងបាន $P(X = 1) = \dfrac{e^{-5}5^1}{1!} = 0.0337$

ដូចនេះ ប្រូបាបផលិតផលខូចមួយគឺ 3.37%

ខ. ប្រូបាបផលិតផលខូចមិនលើសពី២

យើងមាន $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!} + \frac{e^{-5}5^2}{2!}$$

$$= 0.1247$$

ដូចនេះ ប្រូបាបផលិតផលខូចមិនលើសពី២ គឺ 12.47%

គ. រកចំនួនផលិតផលខូចជាមធ្យម

យើងមាន មធ្យម $\mu = 0.005$ និងចំនួនផលិតផលសរុប $N = 2000$

នាំឱ្យ $\mu' = NP = 2000 \times 0.005 = 10$

ដូចនេះ ផលិតផលធ្វើខូចជាមធ្យមគឺ 10 គ្រឿង ។

៤៧. មេធាវីមួយក្រុមមានជំនឿជាក់ថា រាល់ពេលគាត់ការពារកូនក្តីរបស់គាត់មួយលើកៗ ប្រូបាប ដែលនាំឱ្យគាត់ទទួលបានជោគជ័យ (ដោះស្រាយបញ្ហាឱ្យកូនក្តី) ស្មើនឹង 0.6 ។ ឧបមាថាគាត់ការពារកូនក្តីរបស់គាត់ ៤លើក ។ តាង X ជាចំនួនដងដែលគាត់ទទួលបានជោគជ័យ ។ រកបំណែងចែកប្រូបាបនៃ X ។

ចម្លើយ

ដោយ $P(X=x)$: ប្រូបាបនៃចំនួនដងដែលគាត់ទទួលបានជោគជ័យជាប្រូបាបទ្វេធា ដែលមាន $n=4$ និង $P=0.6$ ។

$$\Rightarrow P(X=x)=\binom{4}{x}(0.6)^x(0.4)^{4-x} \text{ ចំពោះ } x=0,1,2,3,4$$

- ករណី $x=0$: $P(X=0)=\binom{4}{0}(0.6)^0(0.4)^4=0.026$
- ករណី $x=1$: $P(X=1)=\binom{4}{1}(0.6)^1(0.4)^3=0.115$
- ករណី $x=2$: $P(X=2)=\binom{4}{2}(0.6)^2(0.4)^2=0.346$
- ករណី $x=3$: $P(X=3)=\binom{4}{3}(0.6)^3(0.4)^1=0.346$
- ករណី $x=4$: $P(X=4)=\binom{4}{4}(0.6)^4(0.4)^0=0.130$

៤៨. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលក្រហម 4 និងពណ៌ខៀវ 6 ។ គេចាប់យកប៊ូល 2 ពីក្នុងថង់ ម្តងមួយៗ ដោយដាក់ចូលវិញ ។ តាង X ជាចំនួនប៊ូលពណ៌ក្រហមគេចាប់បាន ។ រកសង្ឃឹមគណិត, វ៉ារ្យង់ និង គំលាតស្តង់ដានៃ X ។

ចម្លើយ

ដោយ X : ជាអថេរចៃដន្យទ្វេធាដែលមាន $n=2$ និង $p=\frac{4}{10}=0.4$

- សង្ឃឹមគណិតនៃ X

  $E(X)=\mu=np=2\times 0.4=0.8$
- វ៉ារ្យង់ $\sigma^2(X)=np(1-p)=2.(0.4)(0.6)=0.48$
- គំលាតស្តង់ដា $\sigma(X)=\sqrt{\sigma^2(X)}=\sqrt{0.48}=0.69$

៤៩. ក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយ គេត្រូវការជ្រើសរើសបុគ្គលិកបម្រើការងារ នៅតាមអង្គភាពផ្សេងៗ ។ បុគ្គលិកដែលដាក់ $C.V$ មកជាមធ្យមមានចំនួន 4 ក្នុងមួយសប្តាហ៍ ។ រកបំណែងចែកប្រូបាបនៃអថេរចៃដន្យ X តាងអោយចំនួនបុគ្គលិកដែលបានដាក់ $C.V$ មកក្នុងមួយសប្តាហ៍នេះ ។

តើប្រូបាបដែលមានបុគ្គលិកចំនួន 6 នាក់ដាក់ $C.V$ មកនៅក្នុងសប្តាហ៍នេះស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ចម្លើយ

☆ បំណែងចែកប្រូបាប :

ដោយ X តាងអោយចំនួនបុគ្គលិកដែលបានដាក់ $C.V$ មកជាអថេរចៃដន្យព័រសុង ដែលមាន $\mu=4$

ដូចនេះ $P(X,4)=\dfrac{e^{-4}4^X}{X!}$ ចំពោះ : $X=0,1,2,3,\dots$

☆ ចំនួនបុគ្គលិកដាក់ $C.V$ មកចំនួន 6 នាក់

នោះ $X=6$ គេបាន :

$$P(6,4)=\frac{e^{-4}4^6}{6!}=\sum_{X=0}^{6}P(X,4)-\sum_{X=0}^{5}P(X,4)$$
$$=0.8893-0.7851$$
$$=0.1042$$

ដូចនេះ $P(6,4)=0.1042$

៥០. ក្នុងស្បោងមួយមានឃ្លី 30 ដែលចុះលេខពី១ ដល់លេខ៣០ ។ គេលូកយកឃ្លីហើយ កត់លេខវារួចដាក់ចូលក្នុងស្បោងវិញ ។ A ជាព្រឹត្តិការណ៍លូកបាន ឃ្លីចុះលេខជាពហុគុណនៃ3។ គេលូកយកឃ្លី 4 បន្តបន្ទាប់គ្នា ។

ក. រកប្រូបាបដែលលូកបានឃ្លីជាពហុគុណនៃ3 ចំនួន 4 គ្រាប់ , 3គ្រាប់ , 2 គ្រាប់ , 1 គ្រាប់ និងមិនបានសោះ ។

ខ. សង់តារាងបំណែងចែកប្រូបាប

គ. គណនាសង្ឃឹមគណិត , វ៉ារ្យង់ និង គំលាតស្តង់ដានៃអថេរចៃដន្យ តាងឱ្យព្រឹត្តិការណ៍ A ខាងលើ ។

ចម្លើយ

ក. រកប្រូបាបដែលលូកបានឃ្លីជាពហុគុណនៃ3 ចំនួន 4 គ្រាប់ , 3គ្រាប់ , 2 គ្រាប់ ,1 គ្រាប់ និងមិនបានសោះ

តាង X ជាអថេរចៃដន្យនៃព្រឹត្តិការណ៍លូកចាប់បានឃ្លីចុះលេខជាពហុគុណនៃ3

យើងបាន $X = 0,1,2,3,4$ ដោយលូកឃ្លី 4 ដងនោះ $n = 4$

ដោយ ឃ្លី30 មានឃ្លី10 ជាពហុគុណនៃ3 គឺ $3,6,9,12,15,18,21,24,27,30$ ហើយការលូកយកឃ្លីមួយដាក់ចូលវិញ បានប្រូបាបដូចគ្នាជាមួយនឹង ការលូកម្តងៗ គឺ តាមច្បាប់ទ្វេធាគេបាន

$$P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

តាមរូបមន្ត $P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$

- $P(X=4) = C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(1-\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$
- $P(X=3) = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(1-\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$
- $P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$
- $P(X=1) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1-\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$
- $P(X=0) = C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(1-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

ខ. សង់តារាងបំណែងចែកប្រូបាប

X	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

គ. គណនា

☆ សង្ឃឹមគណិត

តាមរូបមន្ត $E(X)=np$

ដោយ $n=4$, $p=\frac{1}{3}$ $E(X)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

ដូចនេះ $E(X)=\frac{4}{3}$

☆ គណនាវ៉ារ្យង់

តាមរូបមន្ត $V(X)=npq$ ដែល $q=1-p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $n=4$

$$V(X)=4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$$

ដូចនេះ $V(X)=\frac{8}{9}$

☆ គំលាតស្តង់ដា

$$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ដូចនេះ $\sigma=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

៥១. ប្រូបាបនៃរោងចក្រមួយផលិតអំពូលខូចគុណភាពស្មើនឹង 0.002 ។ គណនាប្រូបាប ដែលនាំឱ្យ 1000 អំពូលមាន ៖

ក. 4 អំពូលយ៉ាងច្រើនខូចគុណភាព

ខ. 4 អំពូលយ៉ាងតិចខូចគុណភាព

ចម្លើយ

ក. គណនាប្រូបាបដែលមាន 4 អំពូលយ៉ាងច្រើនខូចគុណភាព

តាង X ជាអថេរចៃដន្យនៃរោងចក្រមួយផលិតអំពូលខូចគុណភាព

ប្រូបាបនៃរោងចក្រផលិតអំពូលខូចគុណភាព គឺ $p=0.002$

ក្នុងចំណោម $n=1000$ អំពូល , $x\le 4$ ឬ $0\le x\le 4$

$\Rightarrow P(0\le X\le 4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$

តាមច្បាប់ព័រសុង គេបាន $P(X=x)=\dfrac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$

ដោយ $\mu=np=1000\times 0.002=2$

នោះ $P(X=0)=\dfrac{e^{-2}2^{0}}{0!}=e^{-2}$

☆ $P(X=1)=\dfrac{e^{-2}2^{1}}{1!}=2e^{-2}$

☆ $P(X=2)=\dfrac{e^{-2}2^{2}}{2!}=2e^{-2}$

☆ $P(X=3)=\dfrac{e^{-2}2^{3}}{3!}=\dfrac{4}{3}e^{-2}$

☆ $P(X=4)=\dfrac{e^{-2}2^{4}}{4!}=\dfrac{2}{3}e^{-2}$

គេបាន $P(0\le X\le 4)=e^{-2}+2e^{-2}+2e^{-2}+\dfrac{4}{3}e^{-2}+\dfrac{2}{3}e^{-2}=7e^{-2}$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលមាន 4 អំពូលយ៉ាងច្រើនខូចគុណភាព គឺ $P(0\le X\le 4)=7e^{-2}$

ខ. គណនាប្រូបាបដែលមាន 4 អំពូលយ៉ាងតិចខូចគុណភាព គឺ $X\ge 4$

គេបាន $P(X\ge 4)=1-P(0\le X\le 3)$

$$=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right]$$

$$=1-\left(e^{-2}+2e^{-2}+2e^{-2}+\frac{4}{3}e^{-2}\right)$$

$$=\frac{3-19e^{-2}}{3}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបដែលមាន 4 អំពូលយ៉ាងតិចខូចគុណភាព គឺ $P(X\ge 4)=\dfrac{3-19e^{-2}}{3}$

ឯកសារយោង

- ☆ សៀវភៅប្រូបាប រៀបរៀងដោយគរុនិស្សិតជំនាន់ទី ១៨,១៩,២០ នៃវិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ
- ☆ ស្ថិតិ (វិទ្យាសាស្ត្រពិត) ឆ្នាំ ២០១១ - ២០១២ និពន្ធដោយ សាស្ត្រាចារ្យ លី ស្រួច (RUPP)
- ☆ សៀវភៅលំហាត់គណិតវិទ្យាសំរាប់គ្រូ និងសិស្ស មធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ របស់វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ (ភាគទី១-១៥)
- ☆ សៀវភៅគណិតវិទ្យារបស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ថ្នាក់ទី១០ ,១១ និង១២ បោះពុម្ពឆ្នាំ ២១០៤
- ☆ *Introduction to Probability , Leif Mejlbro , 2009*
- ☆ *Royal University of Agriculture Statistics by Leng Bunhor*
- ☆ *Multifactorial from Wolfram Mathworld (Mathworld.wolfram.com ,Double Factorial)*