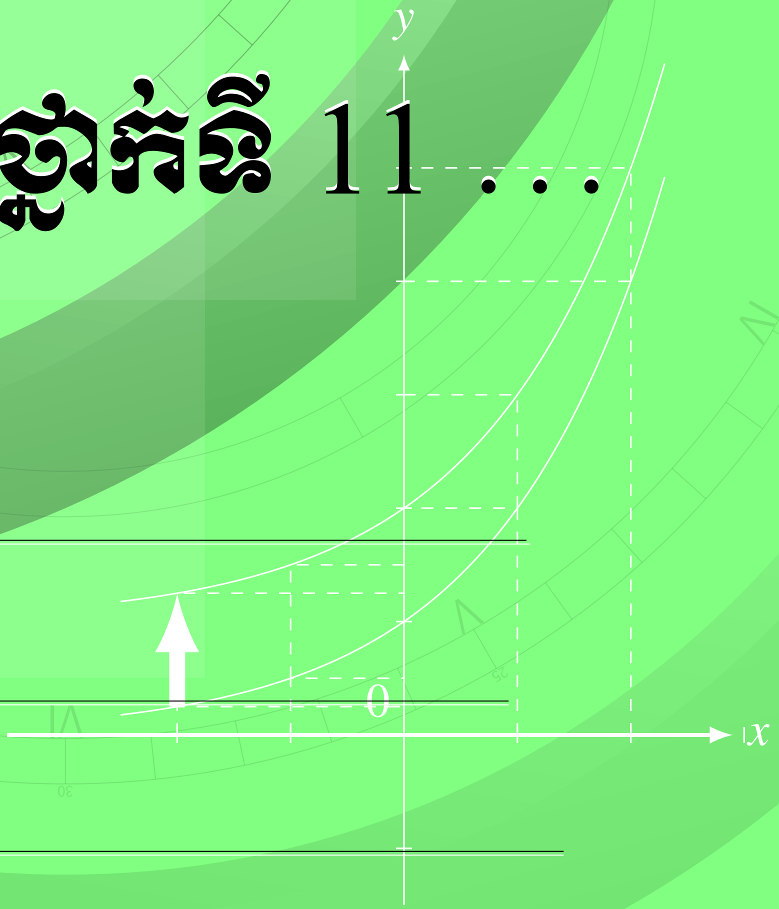
TexBook School

មានបង្រៀនថ្នាក់បំប៉នលើមុខវិជ្ជា គណិត រូប គីមី

សៀវភៅកិច្ចការផ្ទះ

គណិត ថ្នាក់ទី 11 ...



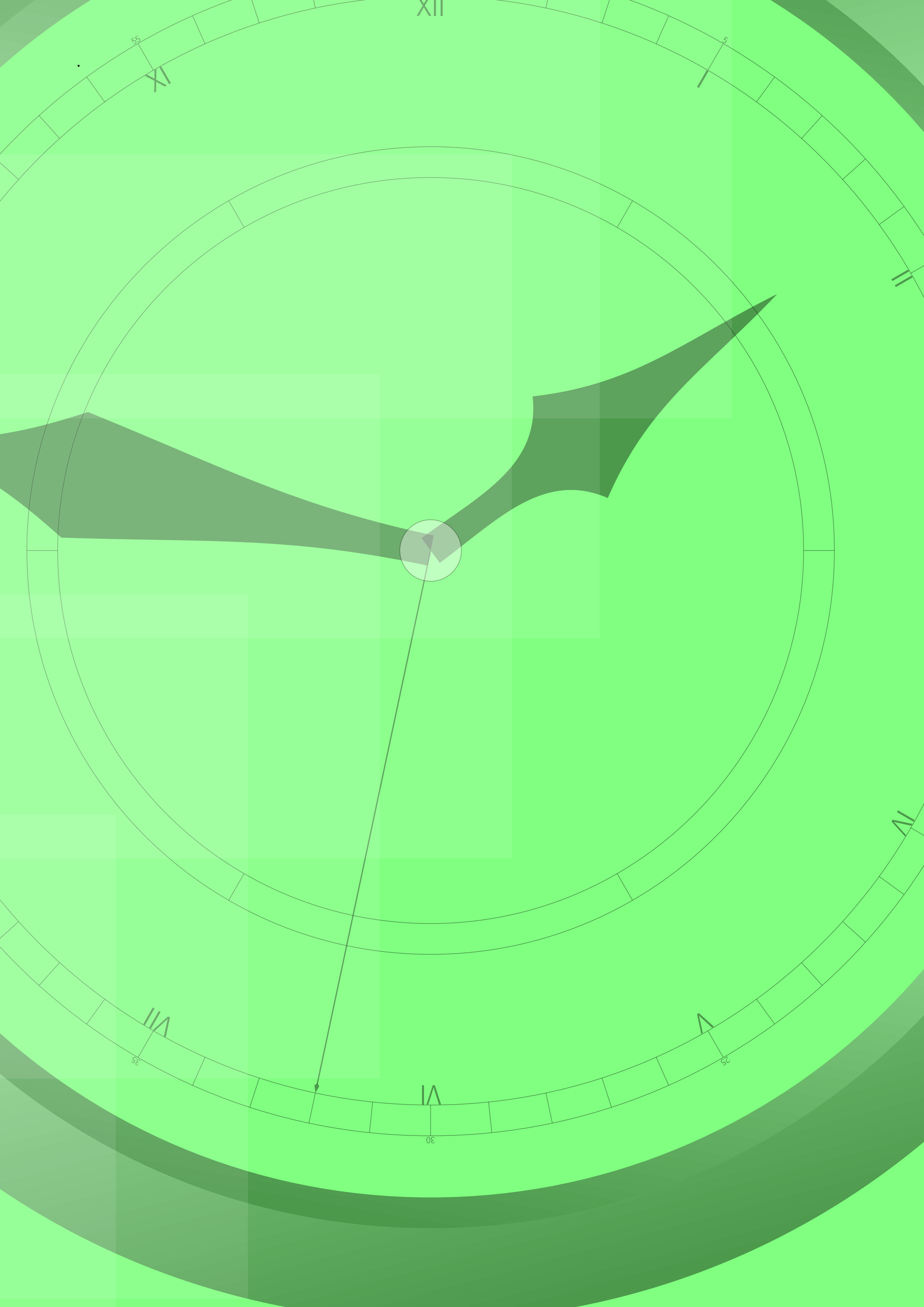
ឈ្មោះ ______________________________

ភេទ ______________________________

លេខរៀង ______________________________

បង្រៀនដោយ៖ ______________________________

ឆ្នាំសិក្សា ២០២..... ដល់ ២០២.....



អារម្ភកថា

សួស្តីប្អូនៗថ្នាក់ទី11! ដោយសារតែប្អូនរៀនផ្នែកមេរៀននិងមានលំហាត់តិច គឺ មិនទាន់គ្រប់គ្រាន់អាចអោយប្អូនយល់ពីមេរៀនច្បាស់នោះទេ ។ ដើម្បីអោយប្អូនៗយល់មេរៀនបានច្បាស់និងអាចពង្រឹងសមត្ថភាពអោយកាន់តែល្អប្រសើរទាល់ប្អូនអនុវត្តន៍លំហាត់អោយបានច្រើនទើបអាចយល់ពីមេរៀនច្បាស់។ ហេតុនេះហើយទើបសៀវភៅមួយក្បាលនេះលេចជារូបរាងឡើង។

សៀវនេះត្រូវបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំណងចង់អោយសិស្សដោះស្រាយលំហាត់បានកាន់តែច្រើនដើម្បីអោយពួកគាត់យល់ពីមេរៀនកាន់តែច្បាស់ជាងមុន ។

ក្នុងនាមជាអ្នករៀបរៀង ខ្ញុំបាទនឹងរងចាំនូវការរិះគន់ដើម្បីកែលម្អជានិច្ច។ ខ្ញុំជឿជាក់ថាសៀវភៅនេះនៅតែមានកំហុសកើតមានឡើង ហេតុនេះហើយខ្ញុំសូមអភ័យទោសទុកជាមុនរាល់កំហុសទាំងអស់ដែលកើតមានឡើង។ ប្រសិនបើប្អូនៗ រកឃើញនូវកំហុសក្នុងសៀវភៅនេះ សូមទំនាក់ទំនងមកកាន់ខ្ញុំបាទតាមរយះ *facebook* : *Hing Vothy*

Tel : 016 434 006

បោះពុម្ពឆ្នាំ ២០២២

លោកគ្រូ ហុីង វុទ្ធី

មាតិកា

១ **ស្វ៊ីតចំនួនពិត** ... ១

១.១ សញ្ញាណានិងតួទី n នៃស្វ៊ីត ... ១

១.២ អថេរភាពនៃស្វ៊ីត ... ១

១.៣ លំហាត់ ... ២

២ **ស្វ៊ីតនព្វន្ត** ... ១១

២.១ លំហាត់ ... ១១

៣ **ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ** ... ២៧

៣.១ លំហាត់ ... ២៧

៤ **ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតផ្សេងៗ** ... ៣៩

៤.១ និមិត្តសញ្ញា $\sum$ និង $\prod$ សម្រាប់ផលបូកតួនៃស្វ៊ីត ... ៣៩

៤.១.១ រូបមន្តផលបូកសំខាន់ៗ ... ៣៩

៤.១.២ របៀបកំណត់តួទី n ... ៤០

៤.២ លំហាត់ ... ៤១

៥ **ទំនាក់ទំនងតួនៃស្វ៊ីត** ... ៥៥

៥.១ កំណត់តួទី n ដោយប្រើស្វ៊ីតជំនួយ ... ៥៥

៥.១.១ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a \cdot u_n + f(n)$ ... ៥៥

៥.២ កំណត់តួទូទៅនៃទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = f(u_n)$ ... ៥៦

៥.២.១ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \alpha}{u_n + \beta}$ ... ៥៦

៥.២.២ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ ... ៥៦

៥.៣ លំហាត់ ... ៥៨

៦ **វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា** ... ៦៣

៦.១ លំហាត់ ... ៦៤

៧ **អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល** ... ៧៣

៧.១ ស្វ័យគុណ ... ៧៣

៧.២ ឫសទី n ... ៧៣

៧.៣ អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ... ៧៤

៧.៤ សមីការនិងវិសមីការអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ... ៧៧

៧.៤.១ សមីការអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ... ៧៧

៧.៤.២ វិសមីការអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ... ៧៧

៧.៥ អនុវត្តន៍អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ... ៧៩

៧.៦ អនុវត្តន៍អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ... ៧៩

៧.៧ លំហាត់មេរៀន ៩០

៨ អនុគមន៍លោការីត ៩៩

៨.១ អនុគមន៍ច្រាស ៩៩

៨.២ អនុគមន៍លោការីត ១០០

៨.២.១ សញ្ញាណនៃអនុគមន៍លោការីត ១០០

៨.២.២ លក្ខណៈនៃលោការីត ១០១

៨.២.៣ ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត ១០៣

៨.២.៤ លក្ខណៈក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត ១០៤

៨.៣ សមីការនិងវិសមីការលោការីត ១០៥

៨.៣.១ សមីការលោការីត ១០៥

៨.៣.២ វិសមីការលោការីត ១០៥

៨.៤ លំហាត់ ១០៧

៩ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ១២៩

៩.១ រង្វាស់មុំ ១២៩

៩.២ ប្រវែងធ្នូ និង ក្រឡាផ្ទៃ ១៣០

៩.៣ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ១៣០

៩.៣.១ សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ១៣២

៩.៤ លំហាត់ ១៣៤

១០ រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ១៤១

១០.១ លំហាត់ ១៤២

១១ សមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ ១៤៧

១១.១ សមីការ $\cos, \sin, \tan$ និង $\cot$ ១៤៧

១១.១.១ សមីការ $\cos x = a$ ១៤៧

១១.១.២ សមីការ $\sin x = a$ ១៤៧

១១.១.៣ សមីការ $\tan x = a$ ១៤៨

១១.១.៤ សមីការ $\cot x = a$ ១៤៨

១១.២ សមីការមានរាង $a\cos x + b\sin x = c$ ១៤៩

១១.៣ សមីការរាង ១៥១

១១.៤ វិសមីការត្រីកោណមាត្រ ១៥២

១១.៥ លំហាត់ ១៥៤

១២ ម៉ាទ្រីសនិងដេទែរមីណង់ ១៦៥

១២.១ សញ្ញាណនៃម៉ាទ្រីស ១៦៥

១២.១.១ និយមន័យ ១៦៥

១២.១.២ ប្រភេទនៃម៉ាទ្រីស ១៦៥

១២.២ ប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស ១៦៦
១២.២.១ ម៉ាទ្រីសស្មើគ្នា ១៦៦
១២.២.២ វិធីបូកនិងវិធីដកនៃម៉ាទ្រីស ១៦៦
១២.២.៣ ផលគុណរវាងមួយចំនួនពិតនឹងម៉ាទ្រីស ១៦៧
១២.២.៤ វិធីគុណនៃម៉ាទ្រីស ១៦៧
១២.៣ ម៉ាទ្រីសច្រាស ១៦៨
១២.៤ លំហាត់ ១៦៩

១៣ ដេរីវេទីណាល់ ១៧៥

១៣.១ ដេរីវេទីណាល់លំដាប់2 . . . . ១៧៥
១៣.២ ដេរីវេទីណាល់លំដាប់3 . . . . ១៧៥
១៣.២.១ ក្បួនរបស់សារុស ១៧៥
១៣.២.២ ក្បួនមីន័រ ១៧៦
១៣.៣ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរតាមរូបមន្តក្រាម័រ ១៧៧
១៣.៣.១ ប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី១មានពីរអញ្ញាតិ ១៧៧
១៣.៣.២ ប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី១មានបីអញ្ញាតិ ១៧៨
១៣.៤ លំហាត់ ១៨១

១៤ លីមីតនៃអនុគមន៍ ១៨៩

១៤.១ លីមីត ១៨៩
១៤.១.១ សញ្ញាណលីមីត ១៨៩
១៤.១.២ ប្រមាណវិធីលើលីមីត ១៨៩
១៤.២ លីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ ១៩១
១៤.៣ លីមីតខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ ១៩២
១៤.៤ លីមីតអនន្តនៃអនុគមន៍ ១៩៣
១៤.៤.១ លីមីតរាងមិនកំណត់ $\infty - \infty$ និង $\frac{\infty}{\infty}$ ១៩៣
១៤.៥ លំហាត់ ១៩៤

១៥ ដេរីវេ ២០១

១៥.១ អត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យម ២០១
១៥.១.១ ដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ ២០១
១៥.១.២ ដេរីវេ ២០២
១៥.១.៣ រូបមន្តដេរីវេ ២០២
១៥.១.៤ ដេរីវេទី២ . . . . ២០៤
១៥.២ លំហាត់ ២០៥

១៦ អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ ២១១

១៦.១ បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង ២១១
១៦.២ ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ ២១៣
១៦.២.១ អនុគមន៍កើន - ចុះ ២១៤

១៦.២.២ អនុគមន៍កើន-ចុះ ដោយប្រើដេរីវេ ២១៥
១៦.៣ បរមាធៀប ២១៨
១៦.៣.១ បរមាធៀបដោយប្រើដេរីវេទី១ ..... ២១៨
១៦.៣.២ បរមាធៀបដោយប្រើដេរីវេទី២ ..... ២២០
១៦.៤ ការអនុវត្តដេរីវេទី២ ..... ២២០
១៦.៤.១ ចំណុចរបត់ ២២០
១៦.៥ ការអនុវត្ត ក្នុងការដោះស្រាយចំណោទបរមា ២២១
១៦.៦ លំហាត់ ២២៨

១៧ អថេរភាព និងក្រាបនៃអនុគមន៍ ២៣៣
១៧.១ របៀបសិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ២៣៣
១៧.២ រូបមន្តដេរីវេ ២៣៣
១៧.៣ ដែនកំណត់ ២៣៣
១៧.៤ **ផ្ចិតឆ្លុះ ឬ អ័ក្សឆ្លុះនៃខ្សែកោង** ២៣៤
១៧.៤.១ **ភាពគូ-ភាពសេស** ២៣៤
១៧.៤.២ **ផ្ចិតឆ្លុះ ឬ អ័ក្សឆ្លុះ** ២៣៤
១៧.៤.៣ **រូបមន្តបម្លែងគិលអ័ក្ស** ២៣៤
១៧.៥ **ខ្សែកោងកាត់តាមចំណុចនឹង** ២៣៤
១៧.៦ **អាស៊ីមតូត** ២៣៥
១៧.៧ **សិក្សាអនុគមន៍** $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ ២៣៦
១៧.៨ **អនុគមន៍** $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ ២៤២
១៧.៨.១ **ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍** ២៤២
១៧.៨.២ **អាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេក** ២៤៣
១៧.៨.៣ **សិក្សាអនុគមន៍** $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ ២៤៥
១៧.៩ លំហាត់ ២៤៩

១៨ វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ២៥១
១៨.១ តម្រុយក្នុងលំហ ២៥១
១៨.២ កូអរដោនេនៃចំណុចក្នុងលំហ ២៥១
១៨.៣ កូអរដោនេវ៉ិចទ័រក្នុងលំហនិងណាមនៃវ៉ិចទ័រ ២៥២
១៨.៣.១ លក្ខណ:កូអរដោនេ ២៥៣
១៨.៤ ផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ ២៥៣
១៨.៥ សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហនិងចម្ងាយពីចំណុចទៅបន្ទាត់ ២៥៤
១៨.៦ សមីការប្លង់និងចម្ងាយពីចំណុចទៅប្លង់ ២៥៥
១៨.៧ សមីការស្វ៊ែ និងចម្ងាយពីប្លង់ទៅស្វ៊ែ ២៥៦
១៨.៨ លំហាត់ ២៥៨

ថ្នាក់ទី ____________________

គោត្តនាម នាម ____________________

ភេទ ____________________

លេខរៀង____________________

ស្វ៊ីតចំនួនពិត

១.១ សញ្ញាណនិងតួទី n នៃស៊្វីត

១. ចំនួនរៀបតាមលំដាប់ ហៅថាស៊្វីតនៃចំនួនពិត។

ឧទាហរណ៍៖ $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

២. ស៊្វីតរាប់អស់គឺជាស៊្វីតដែលគេអាចរាប់ចំនួនតួបាន (គេអាចស្គាល់តួចុងក្រោយនៃស៊្វីត)

ឧទាហរណ៍៖ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

៣. ស៊្វីតអនន្តតួគឺជាស៊្វីតដែលគេមិនអាចរាប់ចំនួនតួនៃស៊្វីតបាន (កំណត់មិនបានតួចុងក្រោយនៃស៊្វីត)

ឧទាហរណ៍៖ $2, 4, 8, 16, \dots$

ជាទូទៅ ស៊្វីតចំនួនពិត គឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពី $\mathbb{N}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។ ឧទាហរណ៍៖ $f(n) = u_n = 2n - 1$

!
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ
- $\mathbb{R}$ សំណុំចំនួនពិត
- គេតាងស៊្វីតដោយ (a_n) ឬ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ហៅថាតួនៃស៊្វីត (a_n)

a_1 ជាតួទី 1 និង a_n ជាតួទី n។

ចំណាំ៖ បើគេសិក្សាលើចំនួនគត់ $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ នោះ ស៊្វីត(a_n) ផ្តើមពីតួ $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ ដែល a_0 ជាតួទី 1

១.២ អថេរភាពនៃស៊្វីត

១. ស៊្វីតកើន	របៀបសិក្សាស៊្វីតកើន
វិធីទី១	-បើ $u_1 < u_1 < \cdots < u_{n-1} < u_n < \cdots$ នោះ (u_n) ជាស៊្វីតកើន។
វិធីទី២	-បើ $u_{n+1} - u_n > 0$ នោះ (u_n) ជាស៊្វីតកើន។
វិធីទី៣	-បើ $u_n > 0, \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ នោះ (u_n) ជាស៊្វីតកើន។
២. ស៊្វីតចុះ	របៀបសិក្សាស៊្វីតចុះ
វិធីទី១	-បើ $u_1 > u_2 > \cdots > u_{n-1} > u_n > \cdots$ នោះ (u_n) ជាស៊្វីតចុះ។
វិធីទី២	-បើ $u_{n+1} - u_n < 0$ រឺ $u_{n+1} < u_n$ នោះ (u_n) ជាស៊្វីតចុះ។
វិធីទី៣	-បើ $u_n > 0, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ នោះ (u_n) ជាស៊្វីតចុះ។
៤. ស៊្វីតមិនកើន ឬមិនចុះ	- បើ $u_{n+1} - u_n =$ (មិនថេរ) នោះ (u_n) ជាស៊្វីតមិនកើន ឬមិនចុះ

៣. ស៊្វីតម៉ូណូតូន	-(u_n) ជាស៊្វីតម៉ូណូតូនកាលណា $u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \cdots$ ឬ មាន $u_1 > u_2 > \cdots > u_n > \cdots$ -(u_n) ជាស៊្វីតកើន រឺ ស៊្វីតចុះ
៤. ស៊្វីតទាល់	-(u_n) ជាស៊្វីតទាល់កាលណា (u_n) ជាស៊្វីតទាល់លើផងនិងទាល់ក្រោមផង
ស៊្វីទាល់លើ	-(u_n) ទាល់លើកាលណា $\exists M \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N} \quad : u_n \leq M$
ស៊្វីតទាល់ក្រោម	-(u_n) ទាល់ក្រោមកាលណា $\exists m \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N} \quad : u_n \geq m$
៥. ស៊្វីតថេរ	- បើ $u_{n+1} - u_n = 0$ នោះ (u_n) ជាស៊្វីតថេរ។ - បើ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ នោះ (u_n) ជាស៊្វីតថេរ។

១.៣ លំហាត់

លំហាត់ ១

កំណត់បីតួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

ក. $1, 5, 14, 30, 55, \ldots$

ខ. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$

គ. $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$

ឃ. $1, 7, 17, 31, 49, \ldots$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២

ចូរបំពេញតួនៃស្វ៊ីតក្នុងចន្លោះខាងក្រោម៖

ក. $3, 6, 9, 12, \ldots, \ldots, \ldots$

ខ. $0, 3, 8, 15, \ldots, \ldots, \ldots$

លំហាត់ ៣

សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតដែលមានតួទី n កំណត់ដោយ $u_n = n(n+2)$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤

សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតដែលមានតួទី n កំណត់ដោយ $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥

សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតដែលមានតួទី n កំណត់ដោយ $u_n = 3^n$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៦

សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតដែលមានតួទី n កំណត់ដោយ $u_n = (-1)^{n-1} \cdot 5^{n+1}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៧

គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = 4n+3$។ កំណត់ u_{17} និង u_{24}។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៨

គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = \frac{n^2}{2^n}$។ កំណត់ u_7 ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៩

គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = (-1)^{2n-1} \cdot n^3$។ កំណត់ u_9។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១០

គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = \dfrac{n(n-2)}{n+3}$ ។ កំណត់ u_{20} ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១១

សរសេរផលបូកប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 3$ និង $u_n = 3u_{n-1} + 2$ ចំពោះ $n > 1$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១២

សរសេរផលបូកប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដោយ $u_1 = -1$ និង $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{n}$ ចំពោះ $n \geqslant 2$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៣

សរសេរផលបូកប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដោយ $u_1 = u_2 = 2$ និង $u_n = u_{n-1} - 1$ ចំពោះ $n > 2$។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៤

សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ៖

1. $u_n = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
2. $u_1 = 1, u_{n+1} = 5u_n + 2$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៥

សរសេរប្អូនតួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 3n^2 - 2$ ។ តើចំនួន 241 និង 240 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត?

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៦

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4$ និង $u_n = an^2 + bn + c$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៧

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2n+1$ ជាស្វ៊ីតកើន។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ ជាស្វ៊ីតចុះ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៩

តើស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលកំណត់ដោយ $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}$ ជាស្វ៊ីតកើន ឬ ជាស្វ៊ីតចុះ?

ចម្លើយ

លំហាត់ ២០

សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីត $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{1}{n^3}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២១

សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីត $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \sqrt[n]{k}$ ដែល $k > 1$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២២

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{n+1}{e^n}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៣

សិក្សាភាពកើន-ភាពចុះ និងភាពទាល់នៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \dfrac{3^n}{(n+1)^2}$ ។

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ______________________

គោត្តនាម នាម ______________________

ភេទ ______________________

លេខរៀង______________________

ស្វ៊ីតនព្វន្ត

- និយមន័យ៖ ស្វ៊ីតនព្វន្ត គឺជាស្វ៊ីតចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗក្រៅពីតួទីមួយ ស្មើតួមុនបន្ទាប់បូកនឹងចំនួនថេរ d មួយ ដែល d ហៅថា ផលសងរួម
- ផលសងរួមគឺ $d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \cdots = u_n - u_{n-1}$
- តួទីn គឺ $u_n = u_1 + (n-1)d$
- ផលបូកn តួនៃស្វ៊ីតគឺ $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$
- បើ u_1, u_2, u_3 ជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះមធ្យមនព្វន្តគឺ $u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2}$

២.១ លំហាត់

លំហាត់ ២៤

ចូរគូសសញ្ញា $\surd$ ក្នុងប្រអប់ខាងមុខចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវ៖

១. តើមួយណាជាស្វ៊ីតនព្វន្តចំពោះស្វ៊ីតចំនួនពិតខាងក្រោម៖

☐ $1, 5, 9, 13, \ldots$ ☐ $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$

☐ $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$ ☐ $1^4, 2^4, 3^4, 4^4, \ldots$

២. បើ X, Y, Z ជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ ចូរជ្រើសរើសមធ្យមនព្វន្តចំពោះចម្លើយនីមួយៗខាងក្រោម៖

☐ $Y = \frac{X+Z}{2}$ ☐ $Z = \frac{X+Y}{2}$ ☐ $X = \sqrt{YZ}$ ☐ $XY = Z^2$

៣. តើមួយណាជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តចំពោះស្វ៊ីតចំនួនពិតខាងក្រោម៖

☐ $2, 4, 8$ ☐ $1, 5, 10$ ☐ $1, 3, 7$ ☐ $-3, -6, -9$

៤. រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឲ្យ $2, x+1, 10$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

ចម្លើយ៖ ☐ $x = 3$ ☐ $x = 4$ ☐ $x = 5$ ☐ $x = 6$

លំហាត់ ២៥

ចូរផ្គូផ្គងចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវខាងក្រោម៖

ស្វ៊ីតនព្វន្ត	ផលសងរួម	ចម្លើយ
1. $1,3,5,7,\dots$	ក. $d=3$	1. $\to$ ច
2. $-1,2,5,8,\dots$	ខ. $d=-10$	2. $\to\dots$
3. $2,1,0,-1,\dots$	គ. $d=1$	3. $\to\dots$
4. $5,\frac{11}{2},6,\frac{13}{2},\dots$	ឃ. $d=\frac{1}{2}$	4. $\to\dots$
5. $3,4,5,6,\dots$	ង. $d=-1$	5. $\to\dots$
6. $40,30,20,10,\dots$	ច. $d=2$	6. $\to\dots$

លំហាត់ ២៦

តើស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោមនេះ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តឬទេ ? បើវាជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ចូរកំណត់តួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់វា៖

១. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=2n-3$

២. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=4-3n$

៣. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=n^2+1$

៤. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\frac{2(n-3)}{5}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៧

រក u_n ចំពោះស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $5, 7, 9, 11, 13, \dots$

២. $1, 6, 11, 16, 21, \dots$

៣. $8, 14, 20, 26, 32, \dots$

៤. $60, 51, 42, 33, 24, \dots$

៥. $4, 0, -4, -8, -12, \dots$

៦. $\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៨

គេឱ្យស្វ៊ីត $7, 18, 29, 40, 51, \ldots$ ។ រក u_n និង u_{20} ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៩

រក u_n និង u_{13} ចំពោះស្វ៊ីត $200, 310, 420, 530, 640, \ldots$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៣០

គេឱ្យស្វ៊ីត $17, 10, 3, -4, -11, \ldots$ ។ រក u_n និង u_{19} ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៣១

តើចំនួន 1000 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត $9, 16, 23, 30, 37, \ldots$?

ចម្លើយ

លំហាត់ ៣២

តើចំនួន 500 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វីត $28, 50, 72, 94, 116, \ldots$?

ចម្លើយ

លំហាត់ ៣៣

រក u_n ចំពោះករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_5 = 17$ និង $u_9 = 33$

២. $u_4 = 43$ និង $u_{10} = 97$

៣. $u_8 = -8$ និង $u_{14} = -11$ ។

ចម្លើយ

បង្ហាញថាបីចំនួនខាងក្រោមបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត៖

១. $\frac{1}{x-1}, \frac{x}{x^2-1}, \frac{1}{x+1}$

២. $(a^2+b^2)^2, (a^4+b^4), (a^2-b^2)^2$

៣. $\frac{2}{x+1}, \frac{x+1}{x}, \frac{x^2+1}{x(x+1)}$

៤. $(a^2-2ab-b^2)^2, (a^2+b^2)^2, (a^2+2ab-b^2)^2$

ចម្លើយ

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួនខាងក្រោមបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត៖

១. $(1+x)^2, (3+x)^2, (9+x)^2$

២. $(2-x)^2, 2x, 2+x$

៣. $a^2(b+x), b^2(a+x), x^2(a+b)$

ចម្លើយ

រកតួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់ស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កាលណាគេស្គាល់៖

១. $u_4 = 15$ និង $S_5 = 55$

២. $u_3 + u_5 = 4$ និង $S_{12} = 129$

៣. $u_5 + u_3 = 4$ និង $u_2 u_4 = -3$

៤. $S_5 = 35$ និង $u_4 u_5 = 130$

៥. $u_1 + u_7 = 4$ និង $u_3^2 + u_7^2 = 122$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៣៧

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $2+5+8+11+14+\cdots$

២. $8+10+12+14+16+\cdots$

៣. $80+77+74+71+68+\cdots$

៤. $2008+1996+1984+1972+1960+\cdots$

៥. $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{7}{6}+\frac{3}{2}+\frac{11}{6}+\cdots$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៣៨

គេឱ្យតួទី n នៃស្វីតនព្វន្ត $u_n = 5n - 3$ គណនា S_{12} ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៣៩

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $4, 15, 26, 37, \ldots$ ។

១. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២. រួចគណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤០

គេឱ្យស្ទីតនព្វន្ត $9, 5, 1, -3, -7, \dots$ ។

១. គណនាតួទី n នៃស្ទីត ។

២. តើចំនួន -67 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្ទីតនព្វន្តនេះ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤១

កំណត់បីចំនួនពិតតគ្នា a, b, c នៃស្ទីតនព្វន្តមួយ បើគេដឹងថា៖

១. $a+b+c=30$ និង $abc=910$

២. $a+b+c=18$ និង $a^2+b^2+c^2=206$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤២

រង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងមួយតំរៀបគ្នា បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួមស្មើ 21 ម៉ែត្រ ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងនេះ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤៣

ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. បើ a,b,c ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២. បើ $\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{b+c}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ a^2, b^2, c^2 ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤៤

១. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ ដែលគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតនេះជាចំនួនខុសពីសូន្យ ។
បង្ហាញថា $\frac{1}{u_1\cdot u_2}+\frac{1}{u_2\cdot u_3}+\frac{1}{u_3\cdot u_4}+\cdots+\frac{1}{u_n\cdot u_{n+1}}=\frac{n}{u_1\cdot u_{n+1}}$ ។

២. គណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤៥

គេឱ្យពីរចំនួន u_0 និង u_1 គេបង្កើតចំនួន

$u_2=u_0+u_1, u_3=u_1+u_2, \ldots, u_{n+1}=u_{n-1}+u_n$ ។

បង្ហាញថា $u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}=u_{n+1}-u_1$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលមានតួទីមួយ $u_1 = 1$ ។ គណនាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះក្នុងករណីខាងក្រោម៖

១. ផលធៀបតួទី 8 និងតួទី 3 ស្មើនឹង 4 ។

២. ផលដកការេនៃតួទី 10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3 ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤៧

គេឱ្យ a,b,c ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\cot a,\cot b,\cot c$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេបាន $\sin^2 a,\sin^2 b,\sin^2 c$ ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ______________________

គោត្តនាម នាម ______________________

ភេទ ______________________

លេខរៀង______________________

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

- និយមន័យៈ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗក្រៅពីតួទី១ ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរ q មួយដែល q ហៅថាផលធៀបរួម ឬរេសុយុង។
- ផលធៀបរួមគឺ $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_3}{u_2} = \cdots = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$
- តួទីn គឺ $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$
- ផលបូកn តួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $S_n = \dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$ ដែល $q \neq 1$ និង $n \in \mathbb{N}$
- ផលបូកអនន្តតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $S_\infty = \dfrac{u_1}{1-q}$ ដែល $|q| < 1$
- បើ u_1, u_2, u_3 ជាបីតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះមធ្យមធរណីមាត្រគឺ $u_2 = \sqrt{u_1 \cdot u_3}$

៣.១ លំហាត់

លំហាត់ ៥៨

កំណត់ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ និងសរសេរបីតួបន្ទាប់ទៀតនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោមៈ

១. $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$

២. $8, 4\sqrt{2}, 4, 2\sqrt{2}, \ldots$

៣. $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤៩

កំណត់តួទី n និង តួទី 15 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $625, 125, 25, 5, 1, \ldots$

២. $5, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, \ldots$

៣. $1, \sqrt{7}, 7, 7\sqrt{7}, 49, \ldots$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥០

តើស្វ៊ីតធរណីមាត្រនីមួយៗខាងក្រោមមានចំនួនប៉ុន្មានតួ ?

១. $1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 1024$

២. $5, 10, 20, \ldots, 2560$

៣. $x^7, x^6, x^5, \ldots, x^{-7}$, $x \neq 1$ និង $x > 0$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥១

គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $3, 12, 48, \ldots$ ។

១. គណនាតួទី 9 នៃស្វ៊ីត ។

២. តើចំនួន 12288 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត?

៣. គណនាផលបូក 30 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥២

សរសេរបួនតួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ រួចបង្ហាញថាវាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤៣

រកតួទី១ និង ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ នីមួយៗខាងក្រោម បើគេស្គាល់៖

១. $u_3 = 1$ និង $u_7 = 81$

២. $u_2 + u_3 = 9$ និង $u_7 = 8u_4$

៣. $S_n = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3^{n+1}}$

៤. $u_1 + u_2 = 18$ និង $u_2 + u_3 = 36$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤៤

គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $5, 15, 45, \dots$ ។ គណនាផលបូក n តួដំបូង S_n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះ ។ រក u_n រួចបង្ហាញថា $3u_n = 2S_n + 5$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥៥

គេមាន u_1, u_2, u_3 ជាស្វីតធរណីមាត្រ ។ កំណត់រក u_1 និងផលធៀបរួម q នៃស្វីតធរណីមាត្រ បើគេស្គាល់៖

១. $u_1 + u_2 + u_3 = 28$ និង $u_1 u_2 u_3 = 512$ ២. $u_1 + u_2 + u_3 = 13$ និង $u_1 u_2 u_3 = -64$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥៦

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $x, 2x+6, 4x+36$ បង្កើតបានជាស្វីតធរណីមាត្រ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥៧

រកបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ បើគេដឹងថា ផលបូកបីតួនេះស្មើ 26 និងផលគុណបីតួនេះស្មើ 216 ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥៨

រកពីរចំនួន a និង b ដែលបីតួ $a, b, 10$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តផង និងស្វ៊ីតធរណីមាត្រផង ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥៩

តើគេត្រូវថែមប៉ុន្មានទៅលើចំនួន $3, 24, 94$ ដើម្បីឱ្យបានបីតួបន្តបន្ទាប់គ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៦០

គេឱ្យផលបូក $2+2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}=1022$ ។ គណនាតម្លៃ n ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៦១

គណនាតម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $a, 28, b$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ បើ $a+b=119$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៦២

គណនាបីចំនួន a, b, c នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ បើគេដឹងថា៖

១. $a+b+c=310$ និង $b^2=10c$

២. $a+b+c=13$ និង $a^2+b^2+c^2=91$ ។

ចម្លើយ

បើ a,b,c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបីចំនួនខាងក្រោមជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែរៈ

១. a^2,b^2,c^2 ២. $\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}$ ៣. $\frac{1}{a^k},\frac{1}{b^k},\frac{1}{c^k}$ ។

ចម្លើយ

គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

១. $S_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ ផងលេខ } 1}$

២. $S_n = 3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333\ldots33}_{n \text{ ផងលេខ } 3}$

៣. $S_n = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{777\ldots77}_{n \text{ ផងលេខ } 7}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៦៨

បើ a,b,c,d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. $(a-d)^2=(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$

២. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

៣. $(a+b+c)(b+c+d)(a-b+c)(b-c+d)=(ab+bc+cd)^2$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៦៦

គេឱ្យចំនួនពិត a,b និងស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយដែលកំណត់ដោយ $u_{n+1}=au_n+b$

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_{n+2}-u_{n+1}=a(u_{n+1}-u_n)$ ។

២. បើ $v_n=u_{n+1}-u_n$ តើស្វ៊ីត (v_n) ជាស្វ៊ីតអ្វី ?

ចម្លើយ

លំហាត់ ៦៧

សរសេរចំនួនទសភាគខួបខាងក្រោម ជាចំនួនសនិទានដែលមានទំរង់ $\frac{a}{b}$

១. $0.\overline{8}$ ២. $0.\overline{34}$ ៣. $2.3\overline{5}$ ៤. $5.3\overline{54}$

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ______________________

គោត្តនាម នាម ______________________

ភេទ ______________________

លេខរៀង______________________

ផលបូកតួនៃស៊ីតផ្សេងៗ

៤.១ និមិត្តសញ្ញា $\sum$ និង $\prod$ សម្រាប់ផលបូកតួនៃស៊ីត

ជាទូទៅ ៤.១.១ គេតាងនិមិត្តសញ្ញា $\sum$ តាងដោយផលបូកនៃចំនួនដែលមានច្រើនតួ

ក. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

ខ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{កត្តានៃ}k} = n\cdot c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ

គ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka_k = k\sum_{k=1}^{n} a_k$ ដែល $k\in\mathbb{R}$

ឃ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (b_k\pm c_k) = \sum_{k=1}^{n} b_k \pm \sum_{k=1}^{n} c_k$

ជាទូទៅ ៤.១.២ គេតាងនិមិត្តសញ្ញា $\prod$ តាងដោយផលគុណនៃចំនួនដែលមានច្រើនតួ

ក. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k = u_1\cdot u_2\cdot u_3\cdot\cdots\cdot u_n$

ខ. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} c = \underbrace{c\cdot c\cdot c\cdot\cdots\cdot c}_{n\text{កត្តានៃ}c} = c^n$

គ. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} ka_k = k\prod_{k=1}^{n} a_k$ ដែល $k\in\mathbb{R}$

ឃ. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (b_k\pm c_k) \neq \prod_{k=1}^{n} b_k \pm \prod_{k=1}^{n} c_k$

៤.១.១ រូបមន្តផលបូកសំខាន់ៗ

១. ផលបូក n តួដំបូងនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

២. ផលបូកការេ n តួដំបូងនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

៣. ផលបូកគូប n តួដំបូងនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

៤. ផលបូកស៊ីប n តួដំបូងនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ:

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

៥. ផលបូកនៃចំនួនថេរ c:

$$c+c+c+\cdots+c = \sum_{k=1}^{n} c = nc$$

៦. ផលបូកនៃចំនួនគត់គូរ:

$$2+4+6+8+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n}2k=n(n+1)$$

៧. ផលបូកនៃចំនួនគត់សេស:

$$1+3+5+7+9+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

៤.១.២ របៀបកំណត់តួទី n

ក្នុងផ្នែកនេះយើងនឹងធ្វើការសិក្សាទៅលើការកំណត់តួទី n ដែលមិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ឬជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១. របៀបកំណត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស្វ៊ីត

ក. ផលសងតួលំដាប់ទី 1

ជាទូទៅ ៤.១.៣ គេមានស្វ៊ីត $(a_n): a_1,a_2,a_3,\dots,a_n$ ហើយ $b_1=a_2-a_1, b_2=a_3-a_2,\dots,b_{n-1}=a_n-a_{n-1}$។ ស្វ៊ីត $(b_n): b_1,b_2,b_3,\dots,b_n$ ហៅថាផលសងលំដាប់ទី 1 នៃស្វ៊ីត (a_n)។

ជាទូទៅ ៤.១.៤ គេមានស្វ៊ីត (a_n)។ តាង $b_n=a_{n+1}-a_n, n=1,2,3,\dots$ គេបាន b_n ជាផលសងលំដាប់ទី 1។ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ ចំពោះ $n\geq 2$។

ខ. ផលសងទូទៅលំដាប់ទី 2

ជាទូទៅ ៤.១.៥ រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

- គេមានស្វ៊ីត (a_n)។
- តាង $b_n=a_{n+1}-a_n,\quad n=1,2,3,\dots$ ដែល (b_n) ជាផលសងលំដាប់ទី 1។
- តាង $c_n=b_n-b_{n+1},\quad n=1,2,3,\dots$ ដែល (c_n) ជាផលសងលំដាប់ទី 2។
- ទាញរកតួទី n នៃស្វ៊ីត (c_n)
- រកតួទី n នៃស្វ៊ីត b_n តាម $b_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k$ ចំពោះ $n\geq 2$។
- រកតួទី n នៃស្វ៊ីត a_n តាម $a_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ ចំពោះ $n\geq 2$។

៤.២ លំហាត់

លំហាត់ ៦៨

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$

២. $\sum_{k=1}^{25}k$

៣. $\sum_{k=100}^{200}k$

៤. $\sum_{k=1}^{55}(3k-2)$

៥. $\sum_{k=1}^{90}(2-7k)$

៦. $\sum_{k=13}^{46}(9+2k)$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៦៩

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=3}^{n} 3$

២. $\sum_{k=1}^{n} 2k$

៣. $\sum_{k=10}^{n} k^3$

៤. $\sum_{k=1}^{n} (k^2-2k+1)$

៥. $\sum_{k=1}^{n} (3k-1)^2$

៦. $\sum_{k=1}^{n} (k^2+2k-1)$

ចម្លើយ

បង្ហាញថា

១. $\sum_{k=1}^{n^2} k - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n^3-1)}{2}$

២. $\sum_{k=1}^{n+2} (2k+3) = (n+2)(n+6)$

៣. $\sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៧១

គណនាផលបូក ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

១. $A = 11 + 12 + 13 + \cdots + 100$

២. $B = 13^2 + 14^2 + 15^2 + \cdots + 50^2$

៣. $C = 10^3 + 11^3 + 12^3 + \cdots + 30^3$

៤. $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$

ចម្លើយ

គណនាផលបូក ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

១. $S_n = 1\cdot 4 + 2\cdot 7 + 3\cdot 10 + \cdots + n(3n+1)$

២. $S_n = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$

៣. $S_n = 1\cdot 3 + 2\cdot 9 + 3\cdot 27 + \cdots + n3^n$

៤. $S_n = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 4^2 + \cdots + (n-1)n^2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។

ចម្លើយ

គណនាផលបូក ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

១. $S_n = 8 + 88 + 888 + \cdots + \underbrace{888\ldots88}_{n \text{ ដងលេខ } 8}$

២. $S_n = 13 + 1313 + 131313 + \cdots + \underbrace{131313\ldots1313}_{n \text{ ដងលេខ } 13}$

ចម្លើយ

គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ។

១. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

២. គណនាផលបូក 999 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

៣. គណនា $A = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៧៥

គណនាផលបូក $A_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៧៦

គណនា $S_n=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

ចម្លើយ

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=1}^{n} k!k$

២. $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

៣. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

៤. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៧៨

គណនាផលបូក
$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2011^2}+\frac{1}{2012^2}}$$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៧៩

គណនាផលគុណ $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥០

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n): 1, 5, 11, 19, 29, 41, \dots$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥១

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n): 1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥២

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n): 3, 8, 16, 27, 41, 58, \ldots$ ។

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n) ។

ចម្លើយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n) : 1, 12, 37, 82, 153, 256, \ldots$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥៤

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n) : 1, 7, 23, 55, 109, 191, \ldots$ ។

គណនាផលបូក n តួបំបូងនៃស្វ៊ីត a_n ។

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ______________________

គោត្តនាម នាម ______________________

ភេទ ______________________

លេខរៀង______________________

ទំនាក់ទំនងតួនៃស៊ីត

៥.១ កំណត់តួទី n ដោយប្រើស៊ីតជំនួយ

វិធាន ១

គេអោយស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = a\cdot u_n + f(n)$ ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស៊ីតគេត្រូវ៖

⁎ **ចំពោះ** $a = 1$

- គេមាន $u_{n+1} = u_n + f(n)$ សមមូល $u_{n+1} - u_n = f(n)$
- តាង $v_n = u_{n+1} - u_n = f(n)$ នោះ (v_n) ជាផលសងលំដាប់ទី១នៃស៊ីត (u_n)
- ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$ ឬ $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

៥.១.១ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a\cdot u_n + f(n)$

វិធាន ២

គេអោយស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = a\cdot u_n + f(n)$ ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស៊ីតគេត្រូវ៖

⁎ **ចំពោះ** $a \neq 1$

- រកស៊ីត (r_n) មានទម្រង់តាមអនុគមន៍នៃ $f(n)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើននៃសមីការ $r_{n+1} = a\cdot r_n + f(n)$
- ធ្វើផលសង $u_{n+1} - r_{n+1} = a(u_n - r_n)$ តាងស៊ីតជំនួយ $v_n = u_n - r_n$
- (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចទាញរកតួ u_n ។

៥.២ កំណត់តួទូទៅនៃទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=f(u_n)$

៥.២.១ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=\dfrac{u_n+\alpha}{u_n+\beta}$

វិធាន ៣

គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1}=\frac{u_n+\alpha}{u_n+\beta} \qquad (៥១)$$

ដើម្បីកំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីតគេត្រូវ សមីកាសម្គាល់ $\lambda=\dfrac{\lambda+\alpha}{\lambda+\beta}$

$$\lambda(\lambda+\beta)=\lambda+\alpha$$

$$\lambda^2+\beta\lambda-\lambda-\alpha=0$$

$$\lambda^2+(\beta-1)\lambda-\alpha=0$$

- ករណី $\Delta=[-(\beta-1)]^2+4\alpha>0$ នោះសមីការមានឫសពីរ $\lambda_1,\lambda_2=\dfrac{-(\beta-1)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ តាង ស្វ៊ីត $v_n=\dfrac{u_n-\lambda_1}{u_n-\lambda_2}$ ចំពោះ $\lambda_1>\lambda_2$ ហើយបង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ទាញរក u_n ។
- ករណី $\Delta=[-(\beta-1)]^2+4\alpha=0$
  នោះសមីការមានឫសឌុប $\lambda=\dfrac{-(\beta-1)}{2}$
  តាង $v_n=\dfrac{1}{u_n-\lambda}$ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយគណនា v_n រួចទាញរក u_n ។

៥.២.២ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$

គេអោយស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0 \qquad (៥២)$$

ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតគេត្រូវ៖

សរសេរសមីការ $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ ដែល $\Delta=b^2+4ac$ ជាសមីការសម្គាល់នៃ (៥២)

វិធាន ៤

※ **របៀបទី១**

- បើ $\Delta > 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនពិតគឺ $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

គេបាន $\begin{cases} u_{n+2}-\lambda_1 u_{n+1} = \lambda_2(u_{n+1}-\lambda_1 u_n) \\ u_{n+2}-\lambda_2 u_{n+1} = \lambda_1(u_{n+1}-\lambda_2 u_n) \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} v_{n+1} = \lambda_2 v_n \\ w_{n+1} = \lambda_1 w_n \end{cases}$

ដែល $v_n = u_{n+1}-\lambda_1 u_n$ និង $w_n = u_{n+1}-\lambda_2 u_n$

ដោះស្រាយរក v_n និង w_n នោះគេអាចរក u_n បានតាមទំនាក់ទំនង v_n និង w_n

- ករណី $\Delta = 0$ នោះសមីការមានឫសឌុប $\lambda = \dfrac{-b}{2a}$ តាង

$$v_n = u_{n+1}-\lambda u_n \qquad (៥៣)$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2}-\lambda u_{n+1} \\ &= pu_{n+1}+qu_n-\lambda u_{n+1} \\ &= (p-\lambda)u_{n+1}+qu_n \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = (p-\lambda)\left(u_{n+1}+\frac{q}{p-\lambda}\right)$$

យក $v_n = u_{n+1}+\dfrac{q}{p-\lambda}$ នោះ (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុងយ៉ុង $r=(p-\lambda)$ និង$v_1 = u_2 -$

$$\Rightarrow v_{n+1} = (p-\lambda)v_n$$

$r\lambda u_1$

គេបាន $v_n = (u_2 - ru_1)(p-\lambda)^{n-1}$

យក (៥៣) ចែកនឹង r^{n+1} : $\dfrac{v_n}{r^{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{r^{n+1}} - \dfrac{u_n}{r^n}$

តាង $w_n = \dfrac{u_n}{r^n} \Rightarrow w_{n+1}-w_n = \dfrac{v_n}{r^{n+1}}$ គេបាន (w_n) ជាស្វីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = \dfrac{v_n}{r^{n+1}}$ និង $w_1 = \dfrac{u_1}{r}$

នោះគេអាចរក w_n បាន រួចគណនា u_n តាមទំនាក់ទំនង $w_n = \dfrac{u_n}{r^n}$

៥.៣ លំហាត់

លំហាត់ ៨៨

ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោម៖

1. កំណត់តួទី 5 បើ $a_1 = 4$ និង $a_{n+1} = 5a_n - 2$
2. កំណត់តួទី 6 បើ $a_1 = 2$ និង $a_{n+1} = 6a_n - 4n$
3. កំណត់តួទី 7 បើ $a_1 = 1, a_2 = 2$ និង $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៨៦

ស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = pa_n + q$ ។ គណនាតម្លៃ p និង q បើគេដឹងថាតួទី 3 ស្មើ 6 និងតួទី 5 ស្មើ 86។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៨៧

គេឲ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយកំណត់ដោយ $u_1 = 1$ និង $3u_{n+1} = 2u_n + 3$ ។ ចូរកំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៨៨

គេឲ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយកំណត់ដោយ $u_1 = 3$ និង $3u_{n+1} = 2u_n - n + 1$ ។ ចូរកំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៨៩

គេឲ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 + 2n + 1 \end{cases}$ ។ ចូរកំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៩០

គេឲ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2} \end{cases}$ ។ ចូរកំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៩១

គេឲ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $u_1 = 0, u_2 = 2$ និង $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$ ។
ចូរកំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៩២

គេឲ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $u_1=1, u_2=4$ និង $u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n$ ។
ចូរកំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ____________________
គោត្តនាម នាម ________________
ភេទ ____________________
លេខរៀង____________________

វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

និយមន័យ ៦.០.១ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ជាសំណើពិត គេត្រូវ៖

- ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះ $n = 1$
- ឧបមាថា $P(k)$ ពិតចំពោះតម្លៃ $n = k$
- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(k)$ ពិត នាំឱ្យគេបាន $P(k+1)$ ពិត ។

ឧទាហរណ៍ ១

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

ចម្លើយ៖

តាងសំណើ $P(n): 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $P(1): 1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ ពិត

ឧបមាថា $P(k): 1+2+3+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $P(k+1): 1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ ពិត

យើងមាន $P(k): 1+2+3+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ បូកអង្គទាំងពីរនឹង $k+1$

គេបាន
$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (\text{មានន័យថា } P(k) \text{ ពិត}) \end{aligned}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាគេបានសំណើ $P(k)$ ពិត

ដូចនេះ $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

ឧទាហរណ៍ ២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2^{n+1}+3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$

ចម្លើយ៖

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $2^{1+1}+3^{2\times1-1} = 2^2+3 = 7$ ជាពហុគុណនៃ 7 ពិត

ឧបមាថា $n = k$ ពិត គឺ $2^{k+1}+3^{2k-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ឬ $2^{k+1}+3^{2k-1} = 7q$, $q \in \mathbb{Z}$

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $n=k+1$ គឺស្រាយថា $2^{k+2}+3^{2k+1}$ ជាពហុគុណនៃ 7

យើងមាន $2^{k+2}+3^{2k+1}=2\times 2^{k+1}+3^2\times 3^{2k-1}$

$$=2\times 2^{k+1}+2\times 3^{2k-1}+7\times 3^{2k-1}$$

$$=2(2^{k+1}+3^{2k-1})+7\times 3^{2k-1}$$

$$=2(7q)+7\times 3^{2k-1}$$

$2^{k+1}+3^{2k-1}=7q\ ,q\in\mathbb{Z}$

$$=7(2q+3^{2k-1})=7p\ ,\ p=2q+3^{2k-1}\in\mathbb{Z}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $2^{n+1}+3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$

៦.១ លំហាត់

លំហាត់ ៩៣

បង្ហាញតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n : $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៩៤

ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា បង្ហាញថា $\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\cdots+\frac{1}{9^n}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៩៥

ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា បង្ហាញថា $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(1+2+3+\cdots+n)\geq n^2$។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៩៦

ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

១. បង្ហាញថាចំនួន $13^n + 11$ ចែកដាច់នឹង 12។

២. បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ៩៧

បង្ហាញតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ចំពោះ $n \geq 5$

១. $2^n > n^2$

២. $4n < 2^n$

៣. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1) > 2^n$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៩៨

បង្ហាញចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$: $\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៩៩

បង្ហាញតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n : $2n < (n+2)!$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១០០

បង្ហាញថា $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n > 1$។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១០១

បង្ហាញតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n : $(1+x)^n \geq 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$ ដែល $x \geq 0$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១០២

បង្ហាញចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

1. ចំនួន $8^n - 1$ចែកដាច់នឹង 7
2. ចំនួន $3^n + 11$ ចែកដាច់នឹង 12
3. ចំនួន $3n + 3 - 4^{4n+2}$ ចែកដាច់នឹង 11

ចម្លើយ

លំហាត់ ១០៣

គេមានស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$ និង $u_0=0$។ ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាបង្ហាញថា៖

1. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n, $u_n\le 2$។
2. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n, $u_{n+1}\le u_n$។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១០៤

ពន្លាតកន្សោម $(a-b)^6$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១០៥

កំណត់តួទីប្រាំ នៃពន្លាត $(a+b)^{10}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១០៦

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេធា ចូរពន្លាតកន្សោមខាងក្រោម៖

១. $(3x-1)^4$

២. $(2x+y)^6$

៣. $(a+b)^6$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១០៧

សរសេរពន្លាតកន្សោមខាងក្រោមដោយប្រើ $\sum$

១. $(x-y)^5$

២. $(2x+y)^6$

៣. $(a+b)^{12}$

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ______________

គោត្តនាម នាម ______________

ថ្ងៃទី ______________

លេខរៀង ______________

អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

៧.១ ស្វ័យគុណ

ស្វ័យគុណ n នៃចំនួន a ជាផលគុណនៃ n កត្តា ដែលកត្តានិមួយៗស្មើនឹង a ។ គេសរសេរ $\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{ កត្តា}}=a^n$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

- a^n អានថា a ស្វ័យគុណ n
- n ហៅថានិទស្សន្ត ដែល $n\in\mathbb{N}$
- a ហៅថា គោលនៃស្វ័យគុណ ។

រូបមន្ត 1 បើ a,b ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ហើយ m,n ជាចំនួនគត់ គេបាន៖

1. $a^m\times a^n=a^{m+n}$
2. $(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m$
3. $(ab)^n=a^n\times b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$
5. $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n=\dfrac{1}{a^n}$
6. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$
7. $a^0=1$
8. $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

ឧទាហរណ៍ ៣

សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម៖

1. $(-2)^2(-2)^3$
2. $(2^3)^4$
3. $(3x^2y^3)(x^3y^4)$
4. $\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^5$
5. $\dfrac{5^7}{125^2}$
6. $(3x^3y^4z^5)^6$

៧.២ ឫសទី n

បើ x ជាឫសការេនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន a គេបាន $x^2=a$ នោះ $x=\pm\sqrt{a}$

បើ x ជាឫសគូបនៃចំនួនពិត a គេបាន $x^3=a$ នោះ $x=\sqrt[3]{a}$

ជាទូទៅ ៧.២.១ បើ a ជាចំនួនពិត និង $n\geq 2$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន គេបាន

- $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ បើ n គូ
- $\sqrt[n]{a^n}=a$ បើ n សេស ។

ឧទាហរណ៍ ៤

គណនា

1. $\sqrt{\frac{16}{25}}$
2. $\sqrt[3]{-27}$
3. $\sqrt[4]{16}$
4. $\sqrt[6]{64x^6}$
5. $\sqrt{(x-1)^2}$

រូបមន្ត 2 បើ a,b ជាចំនួនពិត ហើយ $n,m \geq 2$ និង $k \geq 2$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមានគេបាន៖

- $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
- $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$

ឧទាហរណ៍ ៥

គណនា

1. $\sqrt[3]{64}$
2. $\sqrt{\frac{81}{x^2}}$
3. $\sqrt[3]{625}$
4. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$
5. $\sqrt[9]{8}$
6. $\sqrt[3]{625}$

៧.៣ អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមាន $2^3 = 8$ បើគេប្តូ លេខ 3 ទៅជា x និងលេខ 8 ទៅជា y នោះគេបាន $y = 2^x$ ។ គេហៅអនុគមន៍ $y = 2^x$ ថាជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ព្រោះគោលជាចំនួនថេរវិជ្ជមានខុសពី 1 និងនិទស្សន្តជាអថេរ ។

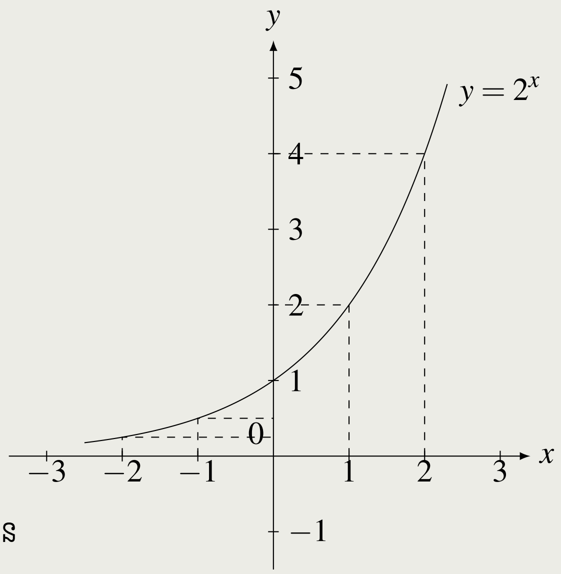
និយមន័យ ៧.៣.១ អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y = f(x) = a^x$ ដែល $x \in \mathbb{R}$ ហើយ a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានខុសពី 1 ។

ឧទាហរណ៍ ៦

គណនាតម្លៃលេខ និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = 2^x$ ។

តារាងតម្លៃលេខត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4



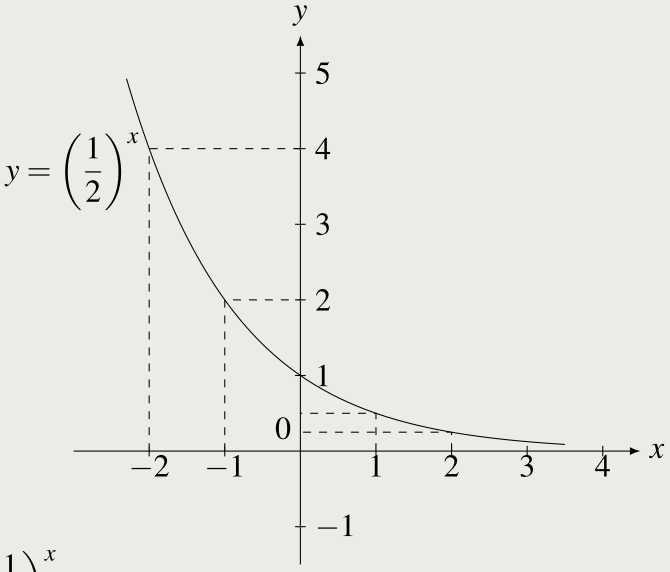
យើងសង្កេតឃើញថាតម្លៃ x កើន គេបានតម្លៃត្រូវគ្នានៃ $y = 2^x$ កើន ហើយក្រាបរបស់វាកាត់អ័ក្ស $(y'y)$ ត្រង់ចំណុច $(0,1)$ ។

ឧទាហរណ៍ ៧

គណនាតម្លៃលេខ និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ។

តារាងតម្លៃលេខត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$



យើងសង្កេតឃើញថាតម្លៃ x កើន គេបានតម្លៃត្រូវគ្នានៃ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ចុះ

ហើយក្រាបរបស់វាកាត់អ័ក្ស $(y'y)$ ត្រង់ចំណុច $(0,1)$ ។

ជាទូទៅ ៧.៣.២ អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y=a^x$ ដែល $a>0, a\neq 1$ និង $x\in\mathbb{R}$ មានក្រាប៖

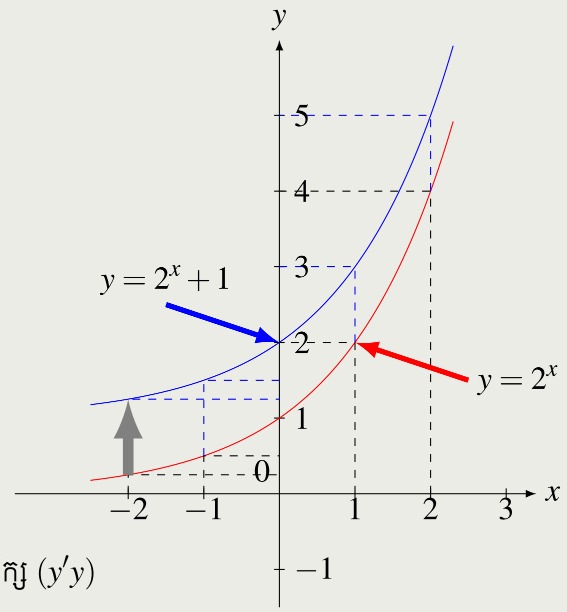
- បើ $a>1$ នោះ $y=a^x$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ហើយមានក្រាបកើនពីឆ្វេងទៅស្តាំ ។
- បើ $0<a<1$ នោះ $y=a^x$ ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ច ហើយមានក្រាបចុះពីឆ្វេងទៅស្តាំ ។
- អនុគមន៍ $y=a^x$ វិជ្ជមានជានិច្ច និងមានក្រាបកាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំណុច $(0,1)$ ជានិច្ច ។

ឧទាហរណ៍ ៨

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=2^x+1$ ។

តារាងតម្លៃលេខត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y=2^x$	$y=2^x+1$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	1	2
1	2	3
2	4	5



តាមក្រាបគេសង្កេតឃើញថា ដើម្បីសង់ក្រាប $y=2^x+1$

ដំបូងគេសង់ក្រាប $y=2^x$ រួចរំកិលចំនួនមួយឯកតាឡើងលើស្របអ័ក្ស $(y'y)$

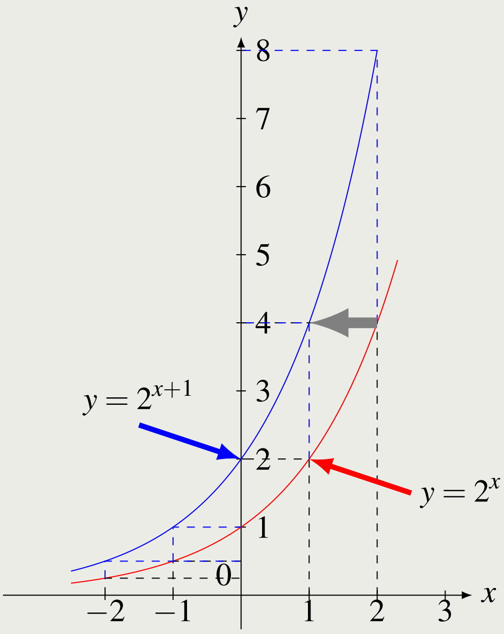
គេបានក្រាប $y=2^x+1$ ។

ឧទាហរណ៍ ៩

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=2^{x+1}$ ។

តារាងតម្លៃលេខត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y=2^x$	$y=2^{x+1}$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{1}{2}$	1
0	1	2
1	2	4
2	4	8



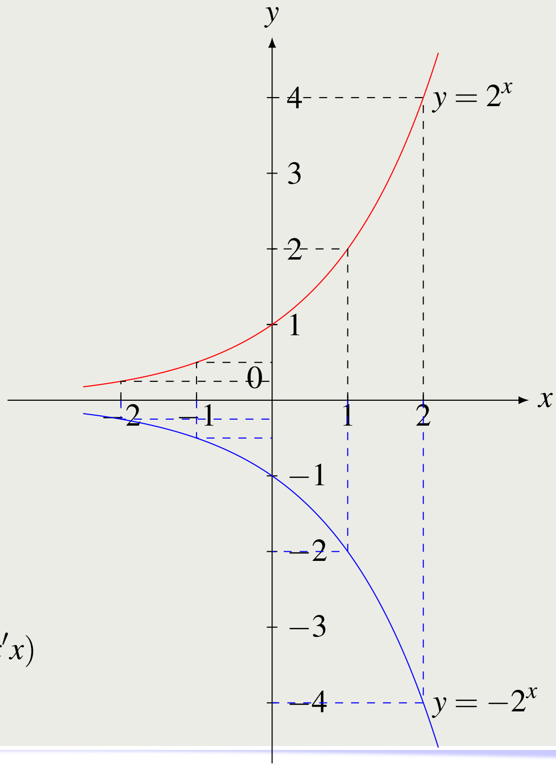
តាមក្រាបគេសង្កេតឃើញថា ដើម្បីសង់ក្រាប $y=2^{x+1}$ ដំបូងគេសង់ក្រាប $y=2^x$ រួចរំកិលចំនួនមួយឯកតាទៅខាងឆ្វេងស្របអ័ក្ស $(x'x)$ គេបានក្រាប $y=2^{x+1}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១០

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=-2^x$ ។

តារាងតម្លៃលេខត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y=2^x$	$y=-2^x$
-2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	1	-1
1	2	-2
2	4	-4



តាមក្រាបគេសង្កេតឃើញថា ដើម្បីសង់ក្រាប $y=-2^x$ ដំបូងគេសង់ក្រាប $y=2^x$ រួចគូសក្រាបឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស $(x'x)$ គេបានក្រាប $y=-2^x$ ។

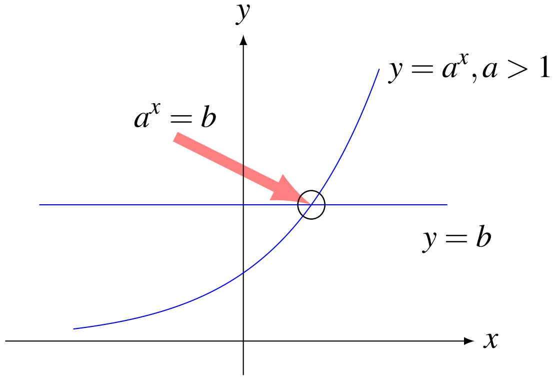
ជាទូទៅ ៧.៣.៣ ដើម្បីសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍៖

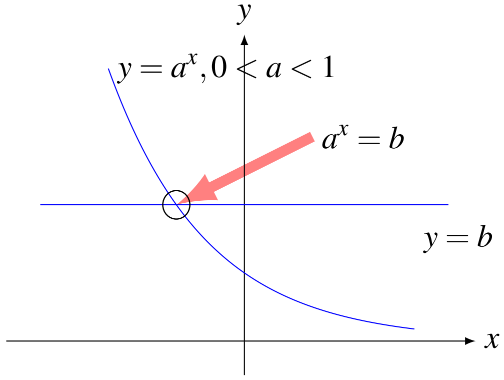
- $y=a^x+q$ គេត្រូវសង់ក្រាប $y=a^x$ រួចធ្វើបម្លែងកិលស្របអ័ក្ស $(y'y)$ ចំនួន q ឯកតាឡើងលើបើ $q>0$ ហើយចំនួន q ឯកតាចុះក្រោមបើ $q<0$ ។
- $y=a^{x+p}$ គេត្រូវសង់ក្រាប $y=a^x$ រួចធ្វើបម្លែងកិលស្របអ័ក្ស (xx') ចំនួន p ឯកតាទៅខាងឆ្វេងបើ $p>0$ ហើយចំនួន p ឯកតាទៅខាងស្តាំបើ $q<0$ ។
- $y=-a^x$ គេត្រូវសង់ក្រាប $y=a^x$ រួចគូសក្រាបឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $(x'x)$ គេបានក្រាប $y=-a^x$ ។

៧.៤ សមីការនិងវិសមីការអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

៧.៤.១ សមីការអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេតែមួយគេឃើញ បន្ទាត់ $y=b$ ដែល $b>0$ កាត់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=a^x, a>0, a\neq 1$ ត្រង់មួយចំណុច ។ គេថាតម្លៃអាប់ស៊ីស x តែមួយគត់នៃចំនួនគត់នៃចំណុចប្រសព្វ ជាឫសនៃសមីការ $a^x=b$ ។ សមីការ $a^x=b$ ដែល $a>0, a\neq 0$ ហើយ $b>0$ ហៅថា សមីការអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ។ បំណកស្រាយតាមក្រាប





ជាទូទៅ ៧.៤.១ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a វិជ្ជមានខុសពី 1 គេបាន $a^x=a^k \iff x=k$ ។

ឧទាហរណ៍ ១១

ដោះស្រាយសមីការ៖

1. $3^{x+1}=27$
2. $2^x=\dfrac{1}{32}$

ចម្លើយ៖

1. $3^{x+1}=27 \iff 3^{x+1}=3^3$
   $x+1=3$
   $\therefore \quad x=2$
2. $2^x=\dfrac{1}{32} \iff 2^x=\dfrac{1}{2^5}$
   $2^x=2^{-5}$
   $\therefore \quad x=-5$

៧.៤.២ វិសមីការអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមានអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y=a^x$ ដែល $a>0, a\neq 1$ និង $x\in\mathbb{R}$

- បើ $a>1$ វិសមីការ $\begin{cases} a^x\geq a^k & \iff x\geq k \\ a^x\leq a^k & \iff x\leq k \end{cases}$
- បើ $0<a<1$ វិសមីការ $\begin{cases} a^x\geq a^k & \iff x\leq k \\ a^x\leq a^k & \iff x\geq k \end{cases}$

ឧទាហរណ៍ ១២

ដោះស្រាយវិសមីការ

1. $2^x\leq\dfrac{1}{16}$
2. $3^{1-x}<\dfrac{3}{\sqrt{3}}$
3. $(0.5)^x\leq\dfrac{1}{64}$
4. $4^x-6\cdot 2^x+8<0$

ចម្លើយៈ

1. $2^x \le \dfrac{1}{16} \Longleftrightarrow 2^x \le \dfrac{1}{2^3}$

$$x \le 2^{-3}$$

$$x \le -3$$

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x \in (-\infty, -3]$ ។

2. $3^{1-x} < \dfrac{3}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow 3^{1-x} < 3^{1-\frac{1}{2}}$

$$3^{1-x} < 3^{\frac{1}{2}}$$

$$1 - x < \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} < x$$

$$x > \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x \in \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ ។

3. $(0\cdot 5)^{x+1} \le \dfrac{1}{64} \Longleftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{6}$

$$x + 1 \ge 6$$

$$x \ge 5$$

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x \in [5, +\infty)$ ។

4. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0 \Longleftrightarrow (2^x)^2 - 2(3)(2^x) + 8 < 0$

តាង $t = 2^x$ ដែល $t > 0$ គេបានវិសមីការ

$t^2 - 3t + 8 < 0$

បើ $t^2 - 3t + 8 = 0$ នោះ $t = 2, t = 4$

សញ្ញានៃ $t^2 - 3t + 8$

t	0		2		4		$+\infty$
$t^2 - 3t + 8$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញា គេបាន $t \in (2, 4)$

ចំពោះ $t = 2$ គេបាន $2^x = 2$ នោះ $x = 1$

ចំពោះ $t = 4$ គេបាន $2^x = 4$ នោះ $x = 2$

ដោយ $t \in (2, 4)$ នោះ $x \in (1, 2)$ ។

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x \in (1, 2)$ ។

៧.៥ អនុវត្តន៍អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

៧.៦ អនុវត្តន៍អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេកំណត់តាងនិមិត្តសញ្ញាដូចខាងក្រោម៖

- P ប្រាក់ដើម (Original Principle)
- A ឬ A_n ទឹកប្រាក់ដែលទទួលបាន (Compound Amount of P ro Accumulated Value or Maturity Value)
- i អត្រាការប្រាក់ប្រចាំគ្រា (The interest rate per period)

ឧបមាថាការសន្សំបែបការប្រាក់សមាសមួយ ដែលមានបាក់ P និង អត្រាការប្រាក់ i ធ្វើមូលធនកម្មការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ (i) យើងអាចស្រាយបំភ្លឺដូចតទៅ៖

- នៅដើមឆ្នាំទី១ ៖ ចាប់ផ្តើមសន្សំប្រាក់ដើម P
- នៅដំណាច់ឆ្នាំទី1 ៖ $A_1 = P + Pi = P(1+i)$
- នៅដំណាច់ឆ្នាំទី2 ៖ $A_2 = A_1 + A_1 i = P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2$
- នៅដំណាច់ឆ្នាំទី3 ៖ $A_3 = A_2 + A_2 i = P(1+i)^2 + P(1+i)^2 i = P(1+i)^3$

  −

- នៅដំណាច់ឆ្នាំទីn ៖ $A_n = P(1+i)^n$

ដូចនេះ ទឹកប្រាក់សរុបដែលទទួលបាន (Maturity Value) នៅដំណាច់ឆ្នាំ n អាចគណនា

តាមរូបមន្តគ្រឹះ $$A = P(1+i)^n \qquad (៧១)$$

!
- បើការទូទាត់ការប្រាក់ 1 ឆ្នាំម្តង $A = P(1+i)^t$
- បើការទូទាត់ការប្រាក់ 1 ឆមាសម្តង $A = P\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2t}$
- បើការទូទាត់ការប្រាក់ 1 ត្រីមាសម្តង $A = P\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4t}$
- បើការទូទាត់ការប្រាក់ 1 ខែម្តង $A = P\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12t}$

ជាទូទៅ ៧.៦.១ បើ n ជាចំនួនដងនៃការទូទាត់ប្រាក់ក្នុងមួយឆ្នាំ គេបានរូបមន្ត $A = P\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$

៧.៧ លំហាត់មេរៀន

លំហាត់ ១០៨

គណនាតម្លៃកន្សោមខាងក្រោម៖

១. $\sqrt[4]{0.0016\times 81}$
២. $\sqrt[3]{36}\times\sqrt[3]{162}$
៣. $\sqrt[5]{128\times 256}$
៤. $\sqrt[3]{24}\times\sqrt[3]{54}$
៥. $\left(0.01\times\dfrac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$
៦. $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\times\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$

ចម្លើយ៖

១. $\sqrt[4]{0.0016\times 81}$

២. $\sqrt[3]{36}\times\sqrt[3]{162}$

៣. $\sqrt[5]{128\times 256}$

៤. $\sqrt[3]{24}\times\sqrt[3]{54}$

៥. $\left(0.01\times\dfrac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$

៦.
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\times\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} &= \sqrt[6]{(1+\sqrt{2})^2}\times\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}\\ &= \sqrt[6]{(1-2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2)(3-2\sqrt{2})}\\ &= \sqrt[6]{(3-2\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}\\ &= \sqrt[6]{3^2-(2\sqrt{2})^2}\\ &= \sqrt[6]{9-8}\\ &= 1\end{aligned}$$

លំហាត់ ១០៩

គណនាតម្លៃកន្សោមខាងក្រោម៖

១. $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\times\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$
២. $\sqrt{4-2\sqrt{2}}\times\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}$
៣. $(0.25)^{\frac{3}{2}}$

ចម្លើយ៖

១.
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\times\sqrt[3]{7-\sqrt{22}} &= \sqrt[3]{(7-\sqrt{22})(7-\sqrt{22})}\\ &= \sqrt[3]{7^2-(\sqrt{22})^2}\\ &= \sqrt[3]{49-22}\\ &= \sqrt[3]{27}\\ &= 3\end{aligned}$$

២. $\sqrt{4-2\sqrt{2}}\times\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}$

៣. $(0.25)^{\frac{3}{2}}$

សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម៖

១. $A=\dfrac{64^{\frac{1}{3}}\times 16^{-\frac{1}{2}}}{32^{\frac{1}{5}}}$

២. $B=\dfrac{81^{\frac{1}{4}}\times 8^{\frac{1}{3}}}{36^{\frac{1}{2}}}$

៣. $D=\dfrac{(t-1)^{\frac{1}{2}}+(t-1)^{-\frac{1}{2}}}{(t-1)^{\frac{1}{2}}}$

៤. $F=\dfrac{t^{\frac{3}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}}$

៥. $G=\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}-\dfrac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}},\begin{pmatrix}a,b & \neq 0\\ a & \neq \pm b\end{pmatrix}$

៦. $H=\left(\dfrac{a}{a^3-b^3}\right)\left(\dfrac{ab^2}{a^2-b^2}\right)^{-1}$

៧. $I=\left(\dfrac{t^3}{t^5}\right)\left(\dfrac{t^4}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$

៨. $E=\left(\dfrac{1}{6}x^{-1}y^3\right)^{-2}\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)^{-2}\left(\dfrac{-2x^2}{y^3}\right)^{-4}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១១១

បង្ហាញថា

១. $\dfrac{(27)^{n+2}-6\cdot 3^{3(n+1)}}{3^{n}\,.\,9^{n+2}}=7$

២. $(y+a)^2=4ax$ បើ $x=\dfrac{a}{(1+t)^2}$ និង $y=\dfrac{a(1-t)}{1+t}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១១២

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម៖

១. $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}=1$

២. $\sqrt[6]{\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}}\div\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}=\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}}$

៣. $\sqrt[n+1]{a\cdot\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{a}\quad,(a>0)$

៤. $\sqrt[2n+2]{a^3\cdot\sqrt[n]{a^3}}=\sqrt[2n]{a^3}\quad,(a>0)$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

១. $2^x = 32$

២. $3^x = 81$

៣. $5^x = 625$

៤. $16^x = 64$

៥. $3^x = \frac{9}{\sqrt[3]{9}}$

៦. $(0.2)^x = 0.008$

៧. $(0.5)^x = \frac{1}{128}$

៨. $(0.4)^x = \frac{25}{4}$

៩. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{256}$

១០. $3^{-x} = \frac{1}{243}$

១១. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1.5$

១២. $\left(\frac{2}{7}\right)^x = \frac{343}{8}$

១៣. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{64}{27}$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

១. $2^{2x} = 16$

២. $3^{2x} = 27$

៣. $3^{x+1} = 9$

៤. $2^{5x} = (128)^{-1}$

៥. $(0.5)^{-2x} = 0.125$

៦. $8^{x-3} = 16$

៧. $17^{3x} = 1$

៨. $9^{2x+1} = \frac{1}{27}$

៩. $\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}} = 7^{2x}$

១០. $9^{4x-1} = \frac{1}{81}$

១១. $32^{x} = 16^{1-x}$

១២. $3^{3x}27^{2x-1} = 81$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

១. $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 0.125$

២. $\left(\sqrt{7}\right)^{3x+1} = 49$

៣. $4^x 16^{3x-1} = 32$

៤. $5^x.5^{x-1} = 25$

៥. $2^x \cdot 3^x = 216$

៦. $2^x \cdot 5^x = 0.001$

៧. $2^{x-1} \cdot 5^{x-1} - 0.001$

៨. $4^{x-1} \cdot 7^{x-1} = \frac{1}{28}$

៩. $(\sqrt{3})^x(\sqrt{12})^x = \frac{1}{6}$

១០. $5^x + 5^{x-1} = 30$

១១. $3^x + 3^{x+1} = 12$

១២. $100 \cdot \sqrt[x]{0.1} = 100^x$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

១. $3^{2x-1}\cdot 5^{3x+2}=\frac{9}{5}\cdot 5^{2x}\cdot 3^{3x}$

២. $6^{x}+6^{x+1}=2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}$

៣. $3^{2x}-2\cdot 3^{2x-1}-2\cdot 3^{2x}=1$

៤. $9^{x}-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}$

៥. $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$

៦. $2^{x}-2^{x-2}=3$

៧. $2^{x^2}\div 4^{x}=8$

៨. $5^{x+1}+5^{x}=750$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១១៧

១. $27^{x-\frac{2}{3}}-9^{x-1}=2\cdot 3^{2x-1}-2\cdot 3^{3x-1}$

២. $3\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x}=5\cdot 6^{x}$

៣. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-x-\frac{1}{2}+\frac{2}{x}}=5\sqrt{5}$

៤. $5^{1+\frac{2}{x}}-7\cdot 10^{\frac{1}{2}}-2\cdot 4^{2x-1}=0$

៥. $6\cdot 2^{2x}-13\cdot 6^{x}+6\cdot 3^{2x}=0$

៦. $4^{x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

៧. $3\cdot 16^{x}+37\cdot 36^{x}=26\cdot 81^{x}$

៨. $27^{x}+12^{x}=2\cdot 8^{x}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១១៨

១. $3^{2x^2+6x-9}+4\cdot 15^{x^2+3x-5}=3\cdot 5^{2x^2+6x-9}$

២. $5\cdot 2^{3x-3}-3\cdot 2^{5-3x}+7=0$

៣. $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}=12\cdot 3^x+3^{x+1}$

៤. $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10$

៥. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y & = 75 \\ 3^y \cdot 5^x & = 45 \end{cases}$

២. $\begin{cases} 3^x \cdot 3^y & = 27 \\ 3^x + 3^y & = 12 \end{cases}$

៣. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y & = 108 \\ 2^x + 3^y & = 31 \end{cases}$

៤. $\begin{cases} 9^{x+y} & = 729 \\ 3^{x-y-1} & = 1 \end{cases}$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

១. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$

២. $\begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3x-2y-3} = 1 \end{cases}$

៣. $\begin{cases} (0.3)^x \cdot (0.3)^{y-5} = 1 \\ (2^x)^y = 64 \end{cases}$

៤. $\begin{cases} 8^{(1-x)(1-y)} = 64 \\ 243^{xy} = 729^{x+y} \end{cases}$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

1. $2^x > \sqrt{2}$
2. $3^x \geq 27$
3. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{27}$
4. $(0.1)^x > 1000$
5. $(0.3)^x \geq \frac{100}{9}$
6. $2^{x-1} < \frac{1}{64}$
7. $7^{x+1} \leq \sqrt[5]{7}$
8. $3^{x-3} \geq \frac{1}{9\sqrt{3}}$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

១. $25^{-4x} \geq 5\sqrt{5}$

២. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x} \leq \frac{24}{81}$

៣. $16^{4-x} \geq 0.125$

៤. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

៥. $\left(\frac{1}{49}\right)^{6x} > 7 \cdot \sqrt[3]{49}$

៦. $10^{x-2} > 0.01$

៧. $2^{x} < \sqrt[4]{2^3}$

៨. $27^{x} \cdot 3^{1-x} \leq \frac{1}{3}$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយវិសមីការ

១. $(0.2)^x < 25$

២. $(0.4)^x < \dfrac{125}{8}$

៣. $12^x < \sqrt[3]{144}$

៤. $(0.1)^x > 10$

៥. $10^x > \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

៦. $5^x \geq \sqrt[3]{25}$

៧. $(0.7)^x > \dfrac{100}{49}$

៨. $5^{x^2-7x+12} > 1$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១២៨

ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

១. $3^{\frac{1}{x}+3}+3^{\frac{1}{x}}>84$

២. $3^{4x^2-3x+\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}$

៣. $\left(\frac{1}{7}\right)^{-9x^2-8x+3}<7^{-7x^2}$

៤. $6^{x^2-7x+12}\geq 1$

៥. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5x+8}\leq\frac{1}{9}$

៦. $2^{x^2-8x+18}\geq 8$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

១. $\left(\dfrac{\sqrt{23}}{5}\right)^{x^2-5} < \left(\dfrac{23}{25}\right)^{2x}$

២. $e^{x^2-3} > e^{2x}$

៣. $e^{x(x^2-1)} \geq 1$

៤. $e^2 \cdot e^{x(x^2-4)} \geq e^{x-2}$

៥. $(x^2+x+1)^x < 1$

៦. $(x^2-8x+16)^{x-6} < 1$

៧. $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

១. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geq \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

២. $2^{x^2}\cdot 5^{x^2} < 10^{-3}\cdot(10^{3-x})^2$

៣. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4} > 5^{x+1}-5^{x+2}$

៤. $2^{2x-1}-2^{2x-3}-2^{2x-5} > 2^{7-x}+2^{5-x}-2^{3-x}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១២៧

មីងសយបានយកប្រាក់មួយចំនួនទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយ ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 6% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ រយៈពេល៧ឆ្នាំក្រោយមកគាត់បានដកប្រាក់ពីធនាគារនោះវិញ ដោយទទួលបានប្រាក់សរុបចំនួន 300$ ។ តើមីងសយមានប្រាក់ដើមចំនួនប៉ុន្មាន ?

ចម្លើយ

លំហាត់ ១២៨

មនុស្សម្នាក់មានអាយុ 30 ឆ្នាំ បានយកប្រាក់ 50,000៛ ទៅផ្ញើនៅធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 4% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើគាត់មានប្រាក់សរុបចំនួនប៉ុន្មានបើបច្ចុប្បន្នគាត់មានអាយុ 65 ឆ្នាំ ?

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ____________________

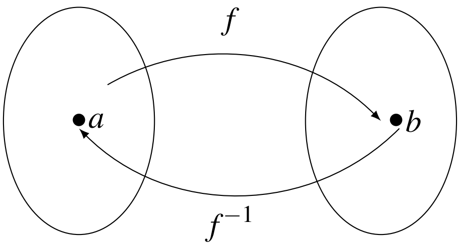
គោត្តនាម នាម ____________________

ភេទ ____________________

លេខរៀង____________________

អនុគមន៍លោការីត

៨.១ អនុគមន៍ច្រាស



និយមន័យ ៨.១.១ បើ (a,b) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x)$ ហើយ (b,a) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f^{-1}(x)$ នោះ $f^{-1}(x)$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

វិធាន ៥

ដើម្បីរកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ f គេត្រូវ៖

- ជំនួស $f(x)$ ដោយ y រួចប្តូរ x ទៅជា y និង y ទៅជា x គេបានសមីការថ្មី បន្ទាប់មកទាញរកតម្លៃ y ។
- បើសមីការថ្មីនេះមិនតាង y ជាអនុគមន៍នៃ x ទេ នោះអនុគមន៍ f គ្មានអនុគមន៍ច្រាសទេ ។
- ជំនួស y ដោយ $f^{-1}(x)$ ឬ y^{-1} ។

ឧទាហរណ៍ ១៣

រកអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)=2x+1$ រួចសង់ក្រាបក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

ចម្លើយ៖

គេមាន $f(x)=2x+1$ គេអាចសរសេរ $y=2x+1$

ប្តូរ x ជា y និង y ជា x នោះគេបាន $x=2y+1 \Longrightarrow y=\dfrac{x-1}{2}$

គេបានអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)=2x+1$ គឺ $f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{2}$

សង់ក្រាប

$f(x)=2x+1$

បើ $x=-1 \Longrightarrow f(1)=-1$

$x=0 \Longrightarrow f(0)=1$

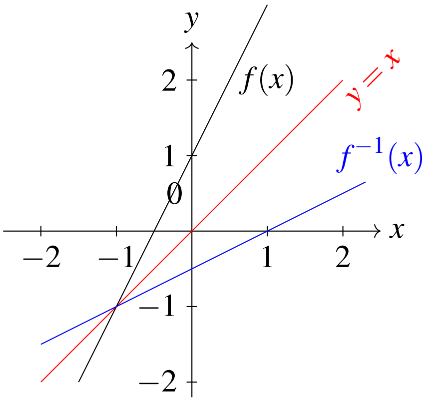
$x=1 \Longrightarrow f(1)=3$

$f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{2}$

បើ $x=-1 \Longrightarrow f^{-1}(1)=-1$

$x=1 \Longrightarrow f^{-1}(0)=0$

$x=3 \Longrightarrow f^{-1}(1)=1$



គេសង្កេតឃើញថាចំណុច $(0,1)$ នៅលើក្រាប $f(x) = 2x+1$ និងចំណុច $(1,0)$ នៅលើក្រាប $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។ ដូចនេះក្រាបនៃ $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ ជារូបភាពឆ្លុះនៃក្រាប $f(x) = 2x+1$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

! ក្រាបនៃ f^{-1} ជារូបភាពឆ្លុះនៃក្រាប f ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

៨.២ អនុគមន៍លោការីត

៨.២.១ សញ្ញាណនៃអនុគមន៍លោការីត

គេមានសមីការអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $2^x = 3$ គេប្រើសញ្ញា $\log_2 3$ ដើម្បីកំណត់សម្គាល់អោយតម្លៃនៃ x គឺ $x = \log_2 3$ ដែល $\log_2 3$ អានថា លោការីតគោល 2 នៃ 3 ។ បើ $y = 2^x$ ដែល $y > 0$ នោះគេបាន $x = \log_2 y$ ចំពោះ $x = \log_2 y$ បើគេប្តូរ x ជា y និង y ជា x គេបាន $y = \log_2 x$ ឬ $f(x) = \log_2 x$ ហៅថាអនុគមន៍លោការីតគោល 2 នៃ x ដែលជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $y = 2^x$ ។

និយមន័យ ៨.២.១ បើ $y = a^x$ នោះគេបាន $x = \log_a y,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$ ហើយ $f(x) = a^x$ មានអនុគមន៍ច្រាស $f^{-1}(x) = \log_a x$ ជាអនុគន៍លោការីតគោល a នៃ x ។

ចំណាំ ៨.២.២ • ករណី $a = 10$ គេបាន $\log_{10} x$ ហៅថា **លោការីតទសភាគ** គេអាចសរសេរដោយងាយ $\log x$ ឬ $\lg x$ ។

• ករណី $a = e$ គេបាន $\log_e x$ ហៅថា **លោការីតនេពែ** គេអាចសរសេរដោយងាយ $\ln x$ ។

ឧទាហរណ៍ ១៨

គណនា

1. $\log_2 8$
2. $\log_3 81$
3. $\log_4 1024$

ចម្លើយ៖ តាមអនុគមន៍ច្រាស $y = a^x$ សមមូល $x = \log_a y$

1. $\log_2 8$

   តាង $\log_2 8 = x \Longleftrightarrow 2^x = 8 \Longleftrightarrow 2^x = 2^3$

   គេបាន $x = 3$

2. $\log_3 81$

   តាង $\log_3 81 = x \Longleftrightarrow 3^x = 81 \Longleftrightarrow 3^x = 3^4$

   គេបាន $x = 4$

3. $\log_4 1024$

   តាង $\log_4 1024 = x \Longleftrightarrow 4^x = 1024 \Longleftrightarrow 4^x = 4^5$

   គេបាន $x = 5$

៤.២.២ លក្ខណៈនៃលោការីត

ចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន x,y និង a ដែល $a \neq 1$ គេបាន៖

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^n = n\log_a x$
6. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$
7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $,a,b,c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
8. $a^{\log_a x} = x$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

1. $\log_a 1 = 0 \Longleftrightarrow a^0 = 1$
2. $\log_a a = 1 \Longleftrightarrow a^1 = a$
3. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

   តាង $M = \log_a x \Longleftrightarrow a^M = x$

   និង $N = \log_a y \Longleftrightarrow a^N = y$

   គេបាន $xy = a^M.a^N$

   $\Longleftrightarrow xy = a^{M+N}$

   $\Longleftrightarrow \log_a(xy) = M + N$

   $\Longleftrightarrow \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

   តាង $M = \log_a x \Longleftrightarrow a^M = x$

   និង $N = \log_a y \Longleftrightarrow a^N = y$

   គេបាន $\frac{x}{y} = \frac{a^M}{a^N}$

   $\Longleftrightarrow \frac{x}{y} = a^{M-N}$

   $\Longleftrightarrow \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = M - N$

   $\Longleftrightarrow \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^n = n\log_a x$

   តាង $M = \log_a x \Longleftrightarrow a^M = x$

   $\Longleftrightarrow (a^M)^n = x^n$

   $\Longleftrightarrow a^{nM} = x^n$

   $\Longleftrightarrow nM = \log_a x^n$

   $\Longleftrightarrow n\log_a x = \log_a x^n$
6. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

   តាង $M = \log_a x \Longleftrightarrow a^M = x$

   $\Longleftrightarrow \log_x a^M = \log_x x$

   $\Longleftrightarrow M\log_x a = \log_x x$

   $\Longleftrightarrow M\log_x a = 1$

   $\Longleftrightarrow M = \frac{1}{\log_x a}$

   $\Longleftrightarrow \log_a x = \frac{1}{\log_x a}$
7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $,a,c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

   តាង $M = \log_a b \Longleftrightarrow a^M = b$

   $\Longleftrightarrow \log_c a^M = \log_c b$

   $\Longleftrightarrow M\log_c a = \log_c b$

   $\Longleftrightarrow M = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

   $\Longleftrightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
8. $a^{\log_a x} = x \Longleftrightarrow \log_a x = \log_a x$

ឧទាហរណ៍ ១៥

គណនា

1. $\log_3 1$
2. $\log_3 3$
3. $\log_2 3 + \log_2 5$
4. $\log_4 xy - \log_4 y$
5. $\log 1,000$
6. $\log_{27} 3$
7. $\log_3 5 . \log_{25} 27$
8. $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2\log_{\frac{3}{4}} 5}$

ចម្លើយ៖

1. $\log_3 1 = 0$
2. $\log_3 3 = 1$
3. $\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2(3 \times 5) = \log_2 15$
4. $\log_4 xy - \log_4 y = \log_4\left(\frac{xy}{y}\right) = \log_4 x$
5. $\log 1,000 = \log 10^3 = 3\log 10 = 3$
6. $\log_{27} 3 = \frac{1}{\log_3 27} = \frac{1}{\log_3 3^3} = \frac{1}{3\log_3 3} = \frac{1}{3}$
7. $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 25} = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 3^3}{\log 5^2}$

   $= \log_3 5 \cdot \frac{3\log_3 3}{2\log_3 5} = \frac{3}{2}$
8. $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2\log_{\frac{3}{4}} 5} = \left(\frac{1}{\frac{4}{3}}\right)^{-2\log_{\frac{3}{4}} 5} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2\log_{\frac{3}{4}} 5}$

   $= \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{3}{4}} 5^2} = 5^2 = 25$

ឧទាហរណ៍ ១៦

សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម៖

1. $A = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$ ។
2. $B = a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$ ។

ចម្លើយ៖

1. គេបាន $A = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 5} \frac{\log_2 5}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 8}$

   $\therefore \quad A = \frac{1}{\log_2 2^3} = \frac{1}{3}$
2. គេបាន $B = a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}}$

   $= a^{\sqrt{\log_a b}} - \left(a^{\log_a b}\right)^{\sqrt{\log_b a}}$

   $= a^{\sqrt{\log_a b}} - a^{\log_a b}\left(a^{\log_a b}\right)^{-\frac{1}{2}}$

   $= a^{\sqrt{\log_a b}} - a^{\sqrt{\log_a b}}$

   $\therefore \quad B = 0$

៨.២.៣ ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត

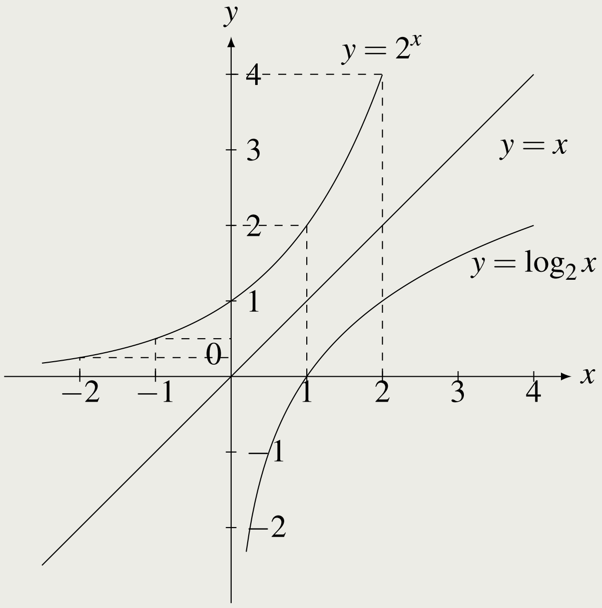
ឧទាហរណ៍ ១៧

គណនាតម្លៃលេខ និងសង់ក្រាបនៃអនុគន៍ $y=\log_2 x$

តារាងតម្លៃលេខត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y=2^x$
-2	$1/4$
-1	$1/2$
0	1
1	2
2	4

x	$y=\log_2 x$
$1/4$	-2
$1/2$	-1
1	0
2	1
4	2



យើងសង្កេតឃើញថាតម្លៃ x កើន គេបានតម្លៃត្រូវគ្នានៃ $y=\log_2 x$ កើន ហើយក្រាបវាកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(1,0)$ ។ ដោយអនុគន៍ $y=\log_2 x$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $y=2^x$ ដូចនេះក្រាបរបស់វាឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

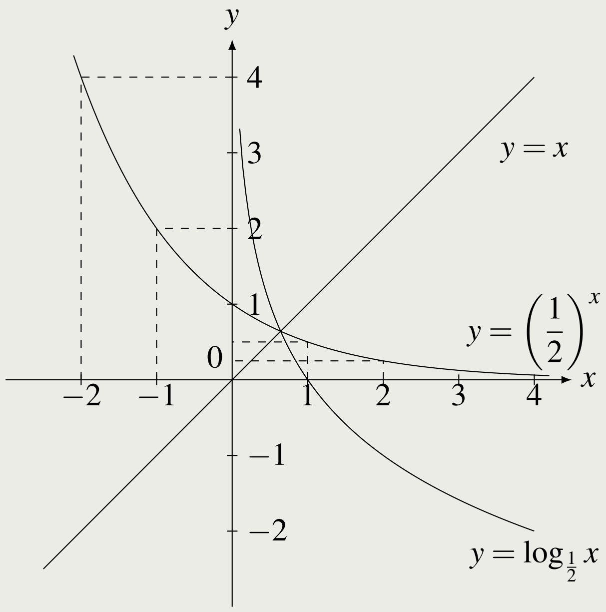
ឧទាហរណ៍ ១៨

គណនាតម្លៃលេខ និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

តារាងតម្លៃលេខត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y=(1/2)^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	$1/2$
2	$1/4$

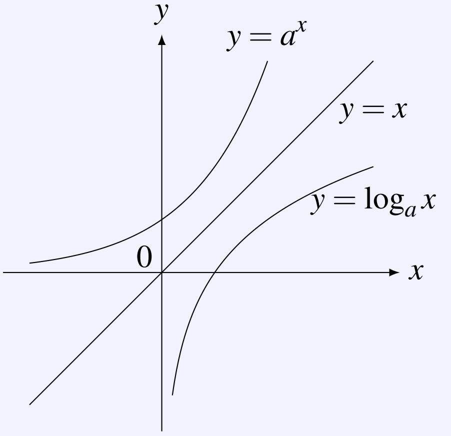
x	$y=\log_{\frac{1}{2}} x$
4	-2
2	-1
1	0
$1/2$	1
$1/4$	2



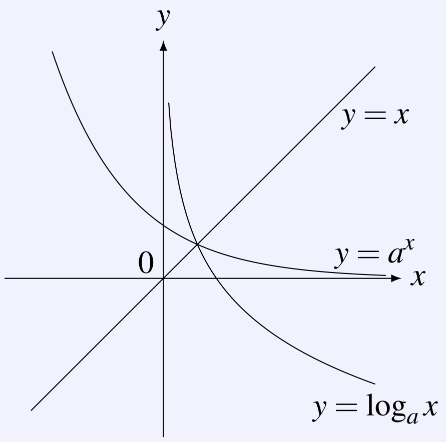
យើងសង្កេតឃើញថា តម្លៃ x កើន គេបានតម្លៃត្រូវគ្នានៃ $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ ចុះហើយក្រាបវាកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(1,0)$ ។ ដោយអនុគមន៍ $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ដូចនេះក្រាបរបស់វាឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

ជាទូទៅ ៨.២.៣ អនុគមន៍ $y=a^x$ និង $y=\log_a x$ ដែល $a\neq 1, a>0$ មានក្រាបដូចខាងក្រោម៖

※ ករណី $a>1$



※ ករណី $0<a<1$



យើងសង្កេតឃើញថា៖

- បើ $a>1$ អនុគមន៍ $y=\log_a x$ ជាអនុគមន៍កើន ហើយមានក្រាបកើនពីឆ្វេងទៅស្តាំ
  - ករណី $0<x<1$ តម្លៃ $y=\log_a x<0$
  - ករណី $x>1$ តម្លៃ $y=\log_a x>0$
- បើ $0<a<1$ អនុគមន៍ $y=\log_a x$ ជាអនុគមន៍ចុះ ហើយមានក្រាបចុះពីឆ្វេងទៅស្តាំ
  - ករណី $0<x<1$ តម្លៃ $y=\log_a x>0$
  - ករណី $x>1$ តម្លៃ $y=\log_a x<0$
- អនុគមន៍ $y=\log_a x$ មានក្រាបកាត់ចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(1,0)$ ជានិច្ច ។
- អនុគមន៍ $y=\log_a x$ មានដែនកំណត់ $x>0$ ជានិច្ច ។ មានន័យថា ក្រាបស្ថិតនៅខាងស្តាំអ័ក្ស $y'oy$ ។
- អនុគមន៍ $y=\log_a x$ និង $y=a^x$ មានក្រាបឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។

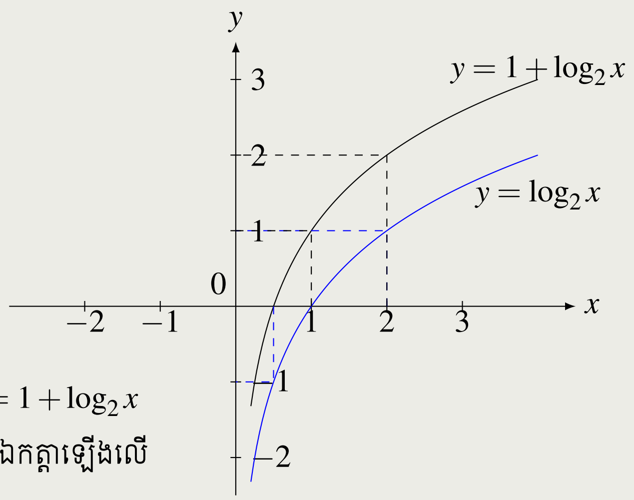
៨.២.៤ លក្ខណៈក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត

ឧទាហរណ៍ ១៩

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=1+\log_2 x$ ។

តារាងតម្លៃលេខត្រូវគ្នានៃ x និង y

x	$y=\log_2 x$	$y=1+\log_2 x$
$\frac{1}{2}$	-1	0
1	0	1
2	1	2



តាមក្រាបគេសង្កេតឃើញថា ដើម្បីសង់ក្រាប $y=1+\log_2 x$ ដំបូងគេសង់ក្រាប $y=\log_2 x$ រួចរំកិលចំនួន 1 ឯកត្តាឡើងលើ ស្របអ័ក្ស $(y'y)$ គេបាន $y=1+\log_2 x$ ។

៨.៣ សមីការនិងវិសមីការលោការីត

៨.៣.១ សមីការលោការីត

បើ $x>0, a>0, a\neq 1$ នោះសមីការ $\log_a x = \log_a k \iff x = k$ ។

ឧទាហរណ៍ ២០

ដោះស្រាយសមីការ $\log_3(x-12)=2$ ។

ចម្លើយ៖

សមីការ $\log_3(x-12)=2$ មានន័យកាលណា $x-12>0 \iff x>12$

គេបាន $\log_3(x-12)=2 \iff \log_3(x-12)=2.\log_3 3=\log_3 3^2$

$$\iff x-12=3^2$$

$$\iff x=21$$

ឧទាហរណ៍ ២១

ដោះស្រាយសមីការ $8^{2x+1}=4^{5-x}$

ចម្លើយ៖

គេមាន $8^{2x+1}=4^{5-x} \Leftrightarrow \log 8^{2x+1}=\log 4^{5-x}$

$$\Leftrightarrow (2x+1)\log 8=(5-x)\log 4$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)\log 2^3=(5-x)\log 2^2$$

$$\Leftrightarrow 3(2x+1)\log 2=2(5-x)\log 2$$

$$\Leftrightarrow 6x+3=10-2x$$

$$\Rightarrow 8x=7$$

$$\therefore \quad x=\frac{7}{8}$$

៨.៣.២ វិសមីការលោការីត

តាមក្រាបយើងសង្កេតឃើញថា

- បើ $a>1$ អនុគមន៍ $y=\log_a x$ ជាអនុគមន៍កើន ហើយមានក្រាបកើនពីឆ្វេងទៅស្តាំ

  គេបាន $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1<x_2$

  $\log_a x_1>\log_a x_2 \iff x_1>x_2$

- បើ $0<a<1$ អនុគមន៍ $y=\log_a x$ ជាអនុគមន៍ចុះ ហើយមានក្រាបចុះពីឆ្វេងទៅស្តាំ

  គេបាន $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1>x_2$

  $\log_a x_1>\log_a x_2 \iff x_1<x_2$

ជាទូទៅ ៨.៣.១

- បើ $a > 1$ វិសមីការ $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) & > 0 \\ f(x) & < g(x) \end{cases}$
- បើ $0 < a < 1$ វិសមីការ $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) & > 0 \\ f(x) & > g(x) \end{cases}$

ឧទាហរណ៍ ២២

ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_2(3x+4) < \log_2 x^2$

ចម្លើយ៖

វិសមីការមានន័យកាលណា $3x+4 > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{4}{3}$

គេបាន $3x+4 < x^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 > 0$

តាង $f(x) = x^2 - 3x - 4$ បើ $f(x) = 0$

នោះ $(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 4$ ឬ $x = -1$

សញ្ញានៃ $f(x)$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដោយ $f(x) > 0$ នោះ $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ និង $x > -\dfrac{4}{3}$

ដូចនេះ វិសមីការមានសំណុំចម្លើយ $x \in (4, +\infty)$

៨.៤ លំហាត់

លំហាត់ ១២៩

កំណត់អនុគមន៍ច្រាស់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $f(x)=\frac{5x}{2}-1$
2. $g(x)=x^2+1$
3. $h(x)=\sqrt{x-1}$
4. $p(x)=\sqrt{x^2+1}$
5. $x^2+y^2=1$
6. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៣០

គណនាចំនួនខាងក្រោម៖

1. $\log_2 32$
2. $\log_{\frac{1}{2}} 16$
3. $\log_4 \frac{1}{32}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៣១

គណនាចំនួនខាងក្រោម៖

1. $\log_{100} 0.1$
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27}$
3. $\log_7 \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$
4. $(0.2)^{4+\log_{\frac{1}{5}} 25}$
5. $(1.5)^{2-\log_{\frac{3}{2}} 21}$
6. $8^{\log_2 5+\log_2 3}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៣២

1. គណនាតម្លៃនៃអនុគមន៍ $y=\log_5 x$ ចំពោះ $x=625, x=1, x=0.2$ និង $x=\sqrt[4]{5}$ ។
2. រកតម្លៃ x នៃអនុគមន៍ $y=\log_6 x$ ចំពោះ $y=-2, y=-1, y=0, y=0.5$ និង $y=5$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៣៣

គណនាចំនួនខាងក្រោម៖

1. $\log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$
2. $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2\log_{\frac{3}{4}} 5}$
3. $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}$
4. $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$
5. $\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៣៤

គណនាចំនួនខាងក្រោម៖

1. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$
2. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36}$
3. $\log_2 \log_2 \sqrt[4]{\sqrt{2}}$
4. $\log_2 \log_2 \log_2 a^{4\log_a 2}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៣៥

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $y=\log_2(8-2x)$
2. $y=\log_3(x^2+5x-6)$
3. $y=\log_{0.1}(4-x^2)$
4. $y=\log_5(3-x)^2$
5. $y=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{9-x^2}$
6. $y=\log_5\dfrac{1}{\log_5(x-2)}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៣៦

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $y=\log\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$
2. $y=\log_{0.8}(2x^2+x-3)$
3. $y=\log_{(x-2)}(x^2-8x+15)$
4. $y=\log\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$
5. $y=\log\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}\right)$
6. $y=\log\left(\log^2 x-5\log x+6\right)$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៣៧

1. គេឲ្យ $a = \log 2$ និង $b = \log_2 7$ ។ គណនា $\log 56$ ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ។
2. គេឲ្យ $a = \log 5$ និង $b = \log_2 3$ ។ គណនា $\log_{30} 8$ ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ។
3. គេឲ្យ $a = \log_{25} 7$ និង $b = \log_2 5$ ។ គណនា $\log_{\sqrt[3]{5}} \dfrac{49}{8}$ ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៣៨

1. គេឲ្យ $a = \log_{14} 7$ និង $b = \log_{14} 5$ ។ គណនា $\log_{35} 28$ ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ។
2. គេឲ្យ $a = \log_{12} 27$ ។ គណនា $\log_6 16$ ជាអនុគមន៍នៃ a ។
3. គេឲ្យ $\log_{ab} a = 4$ ។ គណនា $\log_{ab} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៣៩

សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម៖

1. $\dfrac{1}{\log_a n}+\dfrac{1}{\log_{a^2} n}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{a^p} n},(p>0,a>0,a\neq 1)$

2. $\dfrac{\left(\log_a \sqrt{a^2-1}\right)\left(\log_{\frac{1}{a}} \sqrt{a^2-1}\right)^2}{\left(\log_{a^2}\left(a^2-1\right)\right)\left(\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[6]{a^2-1}\right)}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៤០

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $\log_5 x=-3$
2. $\log_x 4=-0.5$
3. $\log_2(x+1)-\log_2 x=\log_2 3$
4. $\log_{10}(x^2+1)-2\log_{10} x=1$
5. $\log_{10}(x^2+1)=1+\log_{10}(x-2)$
6. $\log_2(x+3)=1-\log_2(x-2)$
7. $\log_6(x+5)+\log_6 x=2$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $\log_3(x-2)+\log_3(x-4)=2$
2. $\log_2 x-\log_2(x-1)=3\log_2 4$
3. $\log_{10}(x+2)-\log_{10}x=2\log_{10}4$
4. $\log_{10}(x+1)-\log_{10}(x-1)=\log_{10}3$
5. $\log_2(x+1)-\log_2(x-1)=4$
6. $\log_{10}(x+3)-\log_{10}x=\log_{10}x+\log_{10}2$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $\log_3(x-12)=2$
2. $\log_x 16-\log_x 2=0.5$
3. $\log_2 x+\log_8 x=8$
4. $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=6$
5. $\log_2 x+\log_8 2=8$
6. $\log_2(9-2^x)=3-x$
7. $x^{\log x}=100x$
8. $\log_x 2+\log_x 3=\dfrac{1}{3}$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $\log_5(x+10)=2$
2. $\ln(x-1)+\ln(x-3)=3\ln 2$
3. $\log(x-3)+\log(x-2)=1-\log 5$
4. $\log_2(x+2)+\log_2(3x-4)=4$
5. $\log_{a^2} x+\log_{x^2} a=1, (a>0, a\neq 1)$
6. $\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $x^{\log_3 x} = 81$
2. $x^{\log_x (x-2)^2} = 9$
3. $17^{\ln x} = 34 - x^{\ln 17}$
4. $\log_x 4x^2 \log_2^2 x = 4$
5. $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$
6. $\log_{\frac{x+5}{3}} 3 = \log_{\frac{-1}{x+1}} 3$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $\log_2 \log_2 \log_2 x = 0$
2. $\log_{x^2-1}(x^3+6) = \log_{x^2-1}(4x^2-x)$
3. $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$
4. $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_2 x \cdot \log_{2\sqrt{2}} x \cdot \log_4 x = 54$

ចម្លើយ

ដោយប្រើរូបមន្ត $x=a^{\log_a x}$ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $3^{x+4}-5^{x+3}=3^x-5^{x+2}$
2. $4^x+6^x-9^x=0$
3. $7^{2x}-6\cdot 7^x+5=0$
4. $3^{x+1}+\dfrac{18}{3^x}-29=0$
5. $3^x\cdot 8^{\frac{x}{x+2}}=6$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៤៧

1. $3 \cdot 9^x + 5 \cdot 6^x - 2^{2x+1} = 0$
2. $3^{2x+1} + 8^{x+1} - 72^x = 24$
3. $3^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} = 2^{2x^2-6x+3}$
4. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 1.5$
5. $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 2.5$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៤៨

ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

1. $\log_4(6x-8)>2$
2. $\log_2(-x^2+4x+5)>0$
3. $\log(x^2-2x-3)\geq 0$
4. $\log_3(x+1)+\log_3 x<\log_3 2$

ចម្លើយ

1. $\log_{0.5}(x-2) < \log_{0.5}\left(\dfrac{-2}{x+1}\right)$
2. $\log_a\left(\dfrac{x^2-x}{x^2+1}\right) < 0 \quad ,(a>0, a\neq 1)$
3. $\log_{0.1}\left(\dfrac{x^2+75}{x-4}\right) - \log_{0.1}(x-4) \leq -2$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $\log_4 x - \log_2 x - 5 > 5$
2. $2\log_4 x - \log_4^2 x \leq \frac{3}{4}$
3. $\log_{0.5} \log_8 \left(\frac{x^2+8x}{x-3}\right) < 0$
4. $\log_x \log_9 (3x-9) < 1$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $\log_2(2^x-1)\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2)>-2$
2. $\dfrac{\log_2^2 x-3\log_2 x+3}{\log_2 x-1}<1$
3. $\log_2(18-2^x)\cdot\log_2\left(\dfrac{18-2^x}{8}\right)\leq -1$, តាង $t=\log_2(18-2^x)$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

1. $\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} \geq 2$
2. $\log_x(x^3 - x^2 - 2x) < 3$
3. $\log_{4x-3} x^2 > 1$
4. $1 + \log_2(x+1) \geq \log_{x-1} 4$
5. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

1. $2\log_5\sqrt{x}-2\geq \log_x\dfrac{1}{5}$
2. $\sqrt{\log_x 2x^3}\geq \log_x 2x$
3. $\log_{\frac{x+1}{2}}\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)<0$
4. $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\dfrac{24-2x-x^2}{14}\right)>1$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨៤

លោកតាសំយកប្រាប់ចំនួន 2,50,000រៀល ទៅផ្ញើនៅធនាគារដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 7% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ ធនាគារទូទាត់អត្រាការប្រាក់មួយខែម្តង។ តើរយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំទើបប្រាក់របស់គាត់កើនស្មើនឹងពីរដង។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨៥

យាយសាន យកប្រាប់ចំនួន 5,840,000រៀល ទៅផ្ញើនៅធនាគារដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 9% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ ធនាគារទូទាត់អត្រាការប្រាក់មួយឆមាសម្តង។ តើរយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំទើបប្រាក់របស់គាត់កើនដល់ 7,400,000 រៀល។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨៦

ពូសុខ យកប្រាប់ចំនួន 3,680,000រៀល ទៅផ្ញើនៅធនាគារដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ 9% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ ធនាគារទូទាត់អត្រាការប្រាក់មួយត្រីមាសម្តង។ តើរយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំទើបប្រាក់របស់គាត់កើនដល់ 5,460,000។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨៧

ពូសុយទិញរថយន្តមួយគ្រឿងថ្លៃ 38500 ដុល្លា ។ បើរថយន្តនោះចុះថ្លៃក្នុងអត្រាការប្រាក់ 15% ក្នុងមួយឆ្នាំ។ តើរយៈពេល 7 ឆ្នាំក្រោយ រថយន្តគាត់នៅសល់ថ្លៃប៉ុន្មាន ?

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ______________________

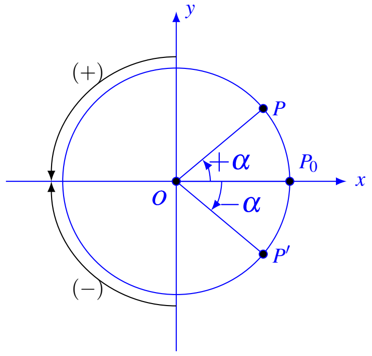
គោត្តនាម នាម ______________________

ភេទ ______________________

លេខរៀង______________________

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

៩.១ រង្វាស់មុំ



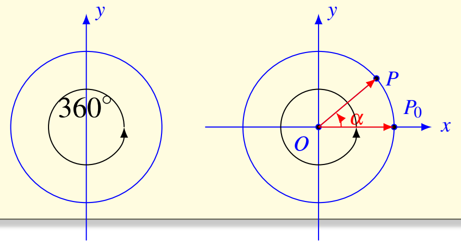
• **ទិសដៅ**

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេយក $\overrightarrow{OP}$ និង $\overrightarrow{OP_0}$ មកកំណត់មុំ។

- វ៉ិចទ័រវិលប្រាស់ទ្រនិចនាឡិកាបង្កើតបានមុំ **វិជ្ជមាន** គឺ $\left(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP}\right) = \alpha$
- វ៉ិចទ័រវិលស្របទ្រនិចនាឡិកាបង្កើតបានមុំ **អវិជ្ជមាន** គឺ $\left(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP'}\right) = -\alpha$

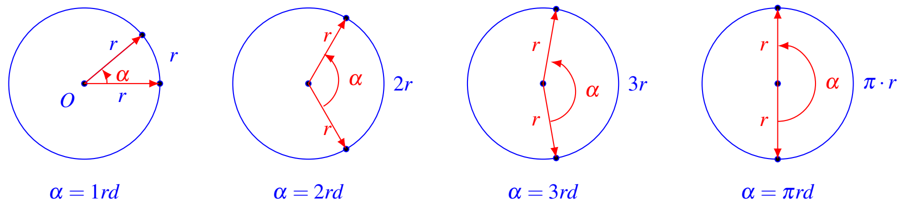
ជាទូទៅ ៩.១.១ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP_0}$ និង $\overrightarrow{OP}$ កំណត់បានមុំ $\alpha + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$

! មុំ α និង $\alpha + 360^\circ$ មានរង្វាស់មុំខុសគ្នាតែមានវ៉ិចទ័រគល់ និង ចុងដូចគ្នា។



• **រង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់**

និយមន័យ ៩.១.២ មុំ 1 រ៉ាដ្យង់ ជារង្វាស់មុំផ្ចិតដែលស្កាត់ធ្នូមួយមានប្រវែងស្មើនិងប្រវែងកាំរង្វង់។ គេសរសេរ $1rd$។



- តែ πr ជាពាក់កណ្តាលនៃរង្វង់នោះរង្វាស់មុំគឺ 180° នាំឲ្យ $\pi rd = 180^\circ$។

គេទាញបាន $\begin{cases} \pi rd = 180^\circ \\ 1rd = \dfrac{1}{180^\circ} \approx 57.3^\circ \\ 1^\circ = \dfrac{\pi}{180^\circ} \approx 0.017 \end{cases}$

! រង្វាស់មុំដែលជាអនុគមន៍នៃ π អាចសរសេរដោយមិនប្រើ rd បាន។
ឧទាហរណ៍៖ មុំ $\alpha = \dfrac{\pi}{3} rd$ គេសរសេរ $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

• ទំនាក់ទំនងរវាងដឺក្រេ, ក្រាត និង រ៉ាដ្យង់

- ខ្នាតនៃរង្វាស់ធ្នូ ឬ មុំមាន៣យ៉ាងគឺ៖ ដឺក្រេ $(\circ)$, ក្រាត (gr) និង រ៉ាដ្យង់ (rd)។
- ក្នុងរង្វង់ទាំងមូលមានរង្វាស់មុំស្មើ 360° ឬ $400gr$ ឬ $2\pi rd$

បើ $(de),(gr),(rd)$ ជារង្វាស់មុំផ្ចិតតែមួយ (ឬរង្វាស់ធ្នូត្រូវគ្នា) គិតជាដឺក្រេ, ក្រាត និង រ៉ាដ្យង់ នោះគេបានសមាមាត្រ៖

$$\boxed{\frac{de}{180^\circ}=\frac{gr}{200}=\frac{rd}{\pi}}$$

> ! ទំនាក់ទំនងរវាង ដឺក្រេ, មីនុត និង សេកុង
> - $1^\circ=60'$
> - $1'=60"$
> - $1^\circ=60'=3600"$

៩.២ ប្រវែងធ្នូ និង ក្រឡាផ្ទៃ

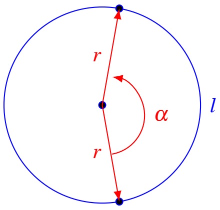
• ប្រវែងធ្នូ

១ជុំរង្វង់$=$ បរិមាត្រ ត្រូវនឹងប្រវែងមុំធ្នូ 2π

ប្រវែងធ្នូ l ត្រូវនឹងមុំ α

តាមសមាមាត្រ

$$\frac{l}{\text{បរិមាត្រ}}=\frac{\alpha}{2\pi}$$



ដោយ បរិមាត្រ $=p=2\pi r$

គេបាន $l=r\times\alpha$ (l ជាប្រវែងធ្នូ)

> ! ធ្នូពីរមានគល់តែមួយ មានចុងត្រួតស៊ីគ្នា កាលណាផលដករង្វាស់ពីជគណិតនៃធ្នូទាំងពីរ ជាពហុគុណនៃ 2π (ចែកដាច់នឹង 2)។

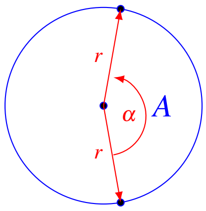
ឧទាហរណ៍៖ $\overrightarrow{AP}=233^\circ$ និង $\overrightarrow{AP'}=81^\circ$ ជាធ្នូមានចុង P និង P' ត្រួតស៊ីគ្នា ព្រោះថា $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AP'}=233^\circ-81^\circ=152^\circ$។

ក្រឡាផ្ទៃ តាមសមាមាត្រ

$$\frac{A}{\text{ក្រឡាផ្ទៃរង្វង់}}=\frac{\alpha}{2\pi}$$

$$A=\frac{\alpha\times\pi r^2}{2\pi}$$

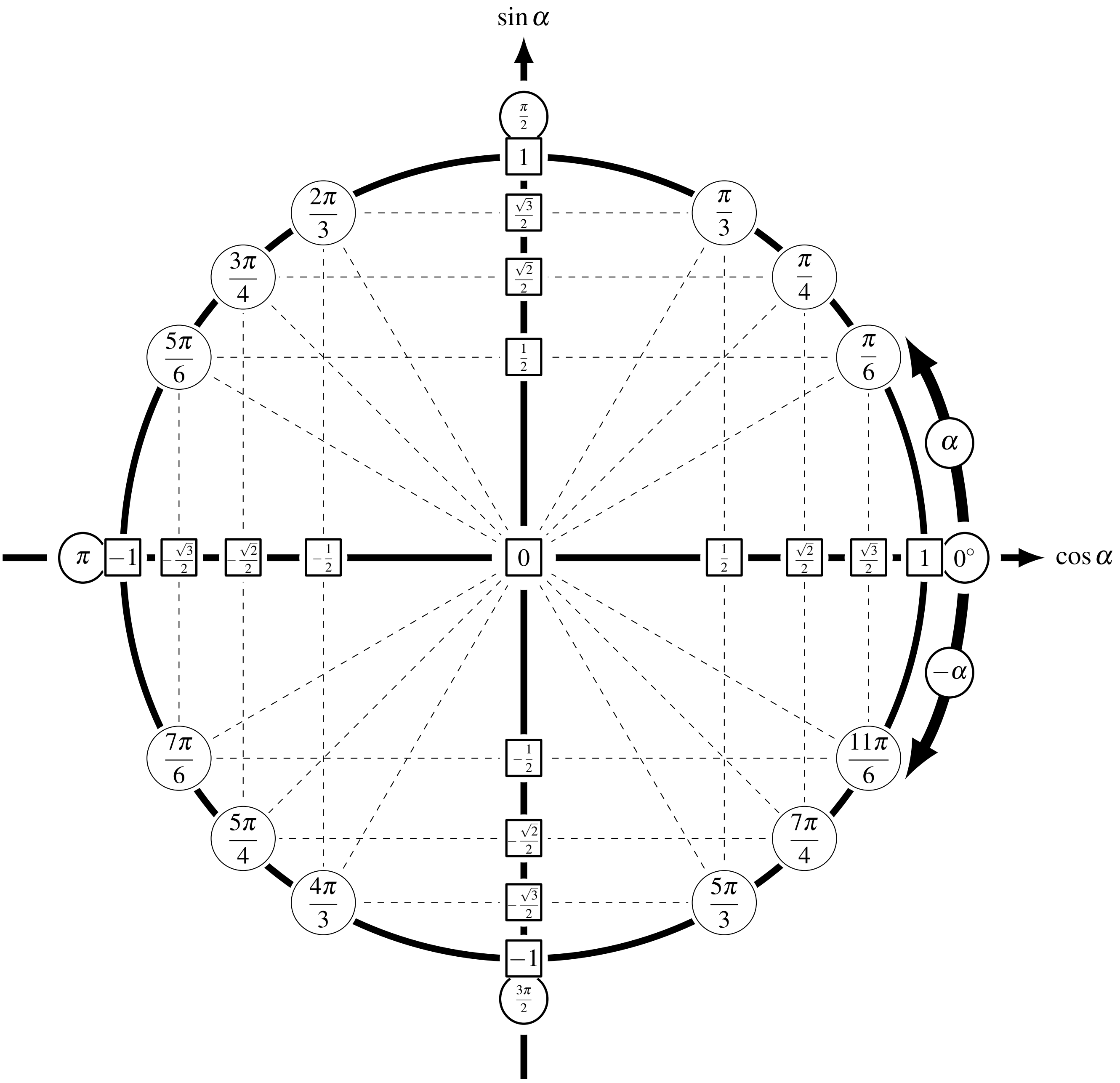
$$A=\frac{1}{2}r^2\alpha$$



៩.៣ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

• រង្វង់ត្រីកោណមាត្រ

និយមន័យ ៩.៣.១ រង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ជារង្វង់ដែលមានផ្ចិតស្ថិតនៅគល់នៃតម្រុយអរតូណរមេ និងកាំមានរង្វាស់ស្មើ 1 (ឯកតា)។



• តារាងនៃមុំពិសេស

α-ដឺក្រេ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
α-រ៉ាដ្យង់	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\|\|$	0
$\cot\alpha$	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\|\|$	0	$\|\|$

- **មុំផ្សេងៗ**

- មុំផ្ទុយ

$$\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$$
$$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot(\alpha)$$

- មុំបំពេញ

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$$

- មុំដែលមានផលសងស្មើ π

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan(\alpha)$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot(\alpha)$$

- មុំដែលមានផលសងស្មើ $\frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

- មុំបន្ថែម

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

- មុំ $\alpha,\alpha+2k\pi$ និង $\alpha+k\pi$ ចំពោះ $k\in\mathbb{Z}$

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha$$

- **ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

  - $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
  - $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
  - $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$
  - $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
  - $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$
  - $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$
  - $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$
  - $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$
  - $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

!

- $\sin(k\pi+\theta)=\begin{cases}\sin\theta & \text{បើ } k \text{ គូ}\\ -\sin\theta & \text{បើ } k \text{ សេស}\end{cases}$
- $\cos(k\pi+\theta)=\begin{cases}\cos\theta & \text{បើ } k \text{ គូ}\\ -\cos\theta & \text{បើ } k \text{ សេស}\end{cases}$

៩.៣.១ សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ក. ដែនកំណត់

- អនុគមន៍ $y=\sin x$ និង $y=\cos x$ មានដែនកំណត់គឺ $\mathbb{R}$។
- អនុគមន៍ $y=\tan x$ មានដែនកំណត់គឺ $\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\},\quad k\in\mathbb{Z}$។
- អនុគមន៍ $y=\cot x$ មានដែនកំណត់គឺ $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\},\quad k\in\mathbb{Z}$។

ខ. ខួបនៃអនុគមន៍

និយមន័យ ៩.៣.២ f ជាអនុគមន៍ដែលមានដែនកំណត់ D។ f ជាអនុគមន៍មានខួប p លុះត្រាតែ p ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $\forall x \in D, \quad f(x+kp) = f(x)$។

ជាទូទៅ ៩.៣.៣ $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in D, \quad f(x+kp) = f(x)$

!

- អនុគមន៍ $y = \sin ax$ និង $y = \cos ax$ មានខួប $p = \dfrac{2\pi}{|a|}$
- អនុគមន៍ $y = \tan ax$ និង $y = \cot ax$ មានខួប $p = \dfrac{\pi}{|a|}$

គ. ភាពគូនិងសេស

និយមន័យ ៩.៣.៤ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ D។

- f ជាអនុគមន៍គូលុះត្រាតែគ្រប់ $x \in D, -x \in D : f(-x) = f(x)$ ។
- f ជាអនុគមន៍សេសលុះត្រាតែគ្រប់ $x \in D, -x \in D : f(-x) = -f(x)$ ។

!

- ក្រាបនៃអនុគមន៍សេសមានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ។
- ក្រាបនៃអនុគមន៍គូមានអ័ក្សអរដោនេជាអ័ក្សឆ្លុះ។

៩.៤ លំហាត់

ឧទាហរណ៍ ២៣

ចូរបម្លែងមុំដឺក្រេទៅជារ៉ាដ្យង់ និង មុំជារ៉ាដ្យង់ទៅដឺក្រេ៖

1. 200°
2. 225°
3. -100°
4. -240°
5. $\dfrac{2\pi}{3}$
6. $\dfrac{5\pi}{6}$
7. $-\dfrac{-7\pi}{2}$
8. $-\dfrac{11\pi}{6}$

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ២៤

គេមាន $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ ដែល $\pi<\theta<2\pi$ ។ គណនា

1. $\sin\theta\cdot\cos\theta$
2. $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$
3. $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៥

គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម៖

1. $A = \dfrac{8\cos^3\theta - 2\sin^3\theta + \cos\theta}{2\cos\theta - \sin^3\theta}$ ដោយស្គាល់ $\tan\theta = 2$ ។
2. $B = \dfrac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta - 2\cos^2\theta}$ ដោយស្គាល់ $\cot\theta = 3$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៦

សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម៖

1. $\cos^2\theta + \cos^2\theta \cdot \cot^2\theta$
2. $\sin^2\theta + \sin^2\theta \cdot \tan^2\theta$
3. $\sqrt{\sin^2\theta \cdot (1 + \cot\theta) + \cos^2\theta \cdot (1 + \tan\theta)}$

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ២៧

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម៖

1. $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=1+2\tan^2\alpha$

2. $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\tan\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ២៨

រកខួបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $y=\sin\dfrac{2}{3}x$
2. $y=-2\sin\dfrac{1}{4}x$
3. $y=2\cos\dfrac{1}{4}x$
4. $y=\tan\dfrac{1}{4}x$
5. $y=\cot\dfrac{1}{3}x$
6. $y=\sin 2x+\cos x$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៩

រកភាពគូ និងសេស នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម៖

1. $y = x - \sin 2x$
2. $y = x^2 \cdot \cos^2 x$
3. $y = \sin 5x + \sin 3x + 5\sin x \cdot \cos 2x, x \in \mathbb{R}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៣០

គេឲ្យ $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ និង $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ។ គណនា $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ និង $\cot\alpha$ ។

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ៣១

គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម៖

1. $\dfrac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$ បើគេដឹងថា $\sin x = \dfrac{3}{5}$ ហើយ $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ។
2. $\dfrac{\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x}{2\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 4\cos^2 x}$ បើគេដឹងថា $\cot x = -3$

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ៣២

សម្រួលកន្សោម $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ ដែល $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ។

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ____________________

គោត្តនាម នាម ________________

ភេទ ____________________

លេខរៀង____________________

រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ

១. រូបមន្តផលបូកនិងផលដក

- $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\cos\beta$
- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$
- $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$
- $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

២. រូបមន្តមុំឌុប

- $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
- $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
- $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

  $=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

៣. រូបមន្តកន្លះមុំ

- $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$
- $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$
- $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$
- $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

៤. បំលែងពីផលគុណទៅផលបូក

- $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$
- $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$
- $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$
- $\sin\beta\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

៥. បំលែងពីផលបូកទៅជាផលគុណ

- $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\cos p-\cos q=-2\sin\dfrac{p+q}{2}\cdot\sin\dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p+\sin q=2\sin\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$
- $\sin p-\sin q=2\sin\dfrac{p-q}{2}\cdot\cos\dfrac{p+q}{2}$
- $\tan p+\tan q=\dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cdot\cos q}$
- $\cot p+\cot q=\dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\cdot\sin q}$
- $\tan p-\tan q=\dfrac{\sin(p-q)}{\cos p\cdot\cos q}$
- $\cot p-\cot q=\dfrac{\sin(p-q)}{\sin p\cdot\sin q}$

១០.១ លំហាត់

ឧទាហរណ៍ ៣៣

គេមាន $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ និង $\sin\beta = \frac{1}{3}$ ដែល $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ និង $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ។
គណនា $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\tan(\alpha-\beta)$ និង $\cot(\alpha-\beta)$ ។

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ៣៤

គេមាន $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ ដែល $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ។ គណនា $\cos 2\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}$ និង $\sin 3\alpha$ ។

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ៣៥

គេមាន $\alpha = 18^\circ$ និង $2\alpha = 180^\circ - 3\alpha$ ។ គណនា $\cos 36^\circ$ ។

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ៣៦

គេមាន $\sin\alpha + \cos\beta = \frac{5}{4}$ និង $\cos\alpha + \sin\beta = \frac{5}{4}$ ហើយ $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$ ។ គណនា $\sin(\alpha+\beta)$ និង $\tan(\alpha+\beta)$ ។

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ៣៧

ចូរបង្ហាញសមភាពខាងក្រោម៖

1. $\tan(a+b)-\tan a-\tan b=\tan a\cdot\tan b\cdot\tan(a+b)$
2. $\dfrac{\cos^3 a-\cos 3a}{\cos a}+\dfrac{\sin^3 a+\sin 3a}{\sin a}=3\ ,\cos a,\sin a\neq 0$

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ៣៨

សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម៖

1. $\sin 4x-4\sin 3x+6\sin 2x-4\sin x$
2. $\dfrac{\sin a+\sin 3a+\sin 5a}{\cos a+\cos 3a+\cos 5a}$

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ៣៩

ចូរបង្ហាញសមភាពខាងក្រោម៖

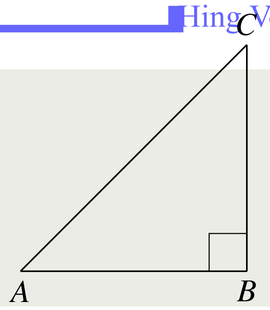
1. $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$
2. $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ៤០

គេមាន $\triangle ABC$ និង A,B,C ជាមុំក្នុងត្រីកោណ។

1. បើគេដឹងថា $\sin A+\sin B+\sin C=1$ ។ គណនា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
2. បង្ហាញថា $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$ ។



ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ____________________

គោត្តនាម នាម ____________________

ភេទ ____________________

លេខរៀង____________________

សមីការនិងវិសមីការត្រីកោណមាត្រ

១១.១ សមីការ $\cos, \sin, \tan$ និង $\cot$

១១.១.១ សមីការ $\cos x = a$

ជាទូទៅ ១១.១.១ សមីការ $\cos x = a$ គេអាចសរសេរ $\cos x = \cos\alpha$ មានចម្លើយ $x = \alpha + 2k\pi$ ឬ $x = -\alpha + 2k\pi$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$

!

សមីការ $\cos x = a$

- បើ $|a| > 1$ នោះសមីការគ្មានចម្លើយ
- បើ $|a| \leq 1$ នោះសមីការមានចម្លើយ
- បើ $a = 1$ នោះសមីការមានចម្លើយ $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- បើ $a = -1$ នោះសមីការមានចម្លើយ $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$
- បើ $a = 0$ នោះសមីការមានចម្លើយ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- បើ $\cos u(x) = \cos v(x)$ នោះ $u(x) = \pm v(x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ឧទាហរណ៍ ៤១

ដោះស្រាយសមីការ $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ ។

ចម្លើយ៖ $2\cos x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos x = \cos\frac{5\pi}{6}$$

ដូចនេះ $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ឬ $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$

១១.១.២ សមីការ $\sin x = a$

ជាទូទៅ ១១.១.២ សមីការ $\sin x = a$ គេអាចសរសេរ $\sin x = \sin\alpha$ មានចម្លើយ $x = \alpha + 2k\pi$ ឬ $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$

> ! សមីការ $\sin x = a$
> - បើ $|a| > 1$ នោះសមីការគ្មានចម្លើយ
> - បើ $|a| \leq 1$ នោះសមីការមានចម្លើយ
> - បើ $a = 1$ នោះសមីការមានចម្លើយ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
> - បើ $a = -1$ នោះសមីការមានចម្លើយ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
> - បើ $a = 0$ នោះសមីការមានចម្លើយ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
> - បើ $\sin u(x) = \sin v(x)$ នោះ $u(x) = v(x) + 2k\pi$ ឬ $u(x) = \pi - v(x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ឧទាហរណ៍ ៤២

ដោះស្រាយសមីការ $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ។

ចម្លើយះ $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

គេបាន $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$ ឬ $2x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ដូចនេះសមីការមានឬស $x = k\pi$ ឬ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$

១១.១.៣ សមីការ $\tan x = a$

> ជាទូទៅ ១១.១.៣ សមីការ $\tan x = a$ អាចសរសេរ $\tan x = \tan\alpha$ មានចម្លើយ $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

> ! បើ $\tan u(x) = \tan v(x)$ កាលណា $u(x) = v(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
>
> ដែល u និង v ជាអនុគមន៍នៃ x និង $\cos u(x) \neq 0, \cos v(x) \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤៣

ដោះស្រាយសមីការ $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ។

ចម្លើយះ $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\tan x = \tan\frac{\pi}{6}$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

១១.១.៤ សមីការ $\cot x = a$

> ជាទូទៅ ១១.១.៤ សមីការ $\cot x = a$ អាចសរសេរ $\cot x = \cot\alpha$ មានចម្លើយ $x = \alpha + k\pi$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$ ។

> ! សមីការ $\cot u(x) = \cot v(x)$ កាលណា $u(x) = v(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
>
> ដែល u និង v ជាអនុគមន៍នៃ x និង $\sin u(x) \neq 0, \sin v(x) \neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤៤

ដោះស្រាយសមីការ $\cot\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ ។

ចម្លើយ៖ $\cot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\cot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cot\frac{\pi}{6}$

គេបាន $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\pi$

នាំឲ្យ $2x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+k\pi$

ដូចនេះ $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

១១.២ សមីការមានរាង $a\cos x+b\sin x=c$

1. **របៀបទី១៖**
   - បម្លែងសមីការនេះទៅជារាង $\cos(x-\alpha)=\frac{c}{r}$ ដែល $r=\sqrt{a^2+b^2}, r\geq 0$ និង $\cos\alpha=\frac{a}{r}$ ឬ $a=r\cos\alpha, \sin\alpha=\frac{b}{r}$ ឬ $b=r\sin\alpha$ ។ សមីការ $a\cos x+b\sin x=c$ អាចសរសេរទៅជារាង $r\cos\alpha.\cos x+r\sin\alpha.\sin x=c$
   $$r(\cos\alpha.\cos x+\sin\alpha.\sin x)=c$$
   $$r\cos(x-\alpha)=c$$
   $$\cos(x-\alpha)=\frac{c}{r}$$
   - បើ $\frac{c}{r}\in[-1,1]$ មានមុំ β មួយដែល $\cos\beta=\frac{c}{a}$ នោះគេបាន $\cos(x-\alpha)=\cos\beta$
   - បើ $\frac{c}{r}\notin[-1,1]$ នោះសមីការ $\cos(x-\alpha)=\frac{c}{r}$ គ្មានចម្លើយ។
2. **របៀបទី២៖** គេប្រើរូបមន្ត $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ និង $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ ដែល $t=\tan\frac{x}{2}, x\neq\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ ដើម្បីបម្លែងសមីការ $a\cos x+b\sin x=c$ ទៅជាសមីការដឺក្រេទី២ដែលមាន t ជាអញ្ញាត។
   រួចដោះស្រាយសមីការដោយប្រើរូបមន្ត $\tan\frac{x}{2}=\tan\alpha$ ។

! វិធីនេះអាចបាត់ឫសត្រង់ $x=\pi+2k\pi$ ។ ដូចនេះ ដំបូងគេត្រូវពិនិត្យមើលថាតើ $x=\pi+2k\pi$ ជាឫសរបស់សមីការ $a\cos x+b\sin x=c$ ឬទេ?

ឧទាហរណ៍ ៤៩

ដោះស្រាយសមីការ $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ។

ចម្លើយ៖ ប្រើរបៀបទី១៖

តាង $r=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$

នាំឲ្យ $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ នាំឲ្យ $\alpha=\frac{\pi}{4}$

គេបាន $$\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$\sin x.\cos\frac{\pi}{4}+\cos x.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$$
គេបាន $x+\frac{\pi}{4}+2k\pi$ នាំឲ្យ $x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$

ឬ $x+\frac{\pi}{4}+\pi-2k\pi$ នាំឲ្យ $x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ឬ $x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

ឧទាហរណ៍ ៤៦

ដោះស្រាយសមីការ $2\sin x-3\cos x=3$ ។

ចម្លើយ៖ ប្រើរបៀបទី២៖

ផ្ទៀងផ្ទាត់: ចំពោះ $x=\pi+2k\pi$ គេបាន $2\sin\pi-3\cos\pi=3$

$$2(0)-3(-1)=3$$

$3=3$ ពិត

តាង $t=\tan\frac{x}{2}, x\neq\pi+2k\pi$ ដែល $\begin{cases}\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$

គេបាន $2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)-3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)=3$

$$\frac{4t-3+3t^2}{1+t^2}=3$$

$$3t^2+4t-3=3(1+t^2)$$

$$3t^2+4t-3=3+3t^2$$

$$4t=6\Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

ចំពោះ $t=\frac{3}{2}$ គេបាន $\tan\frac{x}{2}=\frac{3}{2}$ យក $\tan\alpha=\frac{3}{2}$

$$\tan\frac{x}{2}=\tan\alpha$$

គេបាន $\frac{x}{2}=\alpha+k\pi\Rightarrow x=2\alpha+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x=2\alpha+2k\pi$ ឬ $x=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

១១.៣ សមីការរាង

ជាទូទៅ ១១.៣.១ សមីការមានរាង $a\cos^2x+b\cos x+c=0$

$$a\sin^2x+b\sin x+c=0$$

$$a\tan^2x+b\tan x+c=0$$

$$a\cot^2x+b\cos x+c=0$$

គេត្រូវតាងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនពិត x ដោយ X ឬ Y ឬ t (ដាក់លក្ខណ្ឌ) ដើម្បីឲ្យក្លាយទៅជាសមីការដឺក្រេទី២ ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី២ ដែលមានអញ្ញាត X ឬ Y ឬ t ។

ឧទាហរណ៍ ៤៧

ដោះស្រាយសមីការ $2\cos^2x-3\sqrt{2}\cos x+2=0$ ។

ចម្លើយ៖ តាង $t=\cos x$ ដែល $-1\leq x\leq 1$

គេបាន $2t^2-3\sqrt{2}t+2=0$

តាម $\Delta=b^2-4ac=(-3\sqrt{2})^2-4(2)(2)=18-16=2$

គេបាន $t=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\sqrt{2}+2}{2(2)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ឬ $=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\sqrt{2}-2}{2(2)}=\sqrt{2}>1$ មិនយក

ចំពោះ $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ គេបាន $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$$

នាំឲ្យ $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ឬ $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$

១១.៤ វិសមីការត្រីកោណមាត្រ

ជាទូទៅ ១១.៤.១ ចំពោះ $k\in\mathbb{Z}$

- $\cos x\geq\cos\alpha$ នោះ $-\alpha+2k\pi\leq x\leq\alpha+2k\pi$
- $\cos x\leq\cos\alpha$ នោះ $-\alpha+2k\pi\geq x\geq\alpha+2k\pi$
- $\sin x\geq\sin\alpha$ នោះ $\alpha+2k\pi\leq x\leq\pi-\alpha+2k\pi$
- $\sin x\leq\sin\alpha$ នោះ $\alpha+2k\pi\geq x\geq\pi-\alpha+2k\pi$
- $\tan x\geq\tan\alpha$ នោះ $\alpha+k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+k\pi$
- $\tan x\leq\tan\alpha$ នោះ $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x\leq\alpha+k\pi$
- $\cot x\geq\cot\alpha$ នោះ $k\pi<x\leq\alpha+k\pi$
- $\cot x\leq\cot\alpha$ នោះ $\alpha+k\pi\leq x<\pi+k\pi$

ឧទាហរណ៍ ៤៨

ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

1. $2\cos x+1<0$
2. $\sin x\geq\frac{1}{2}$
3. $\tan x\geq-1$
4. $\cot x<\frac{\sqrt{3}}{3}$

ចម្លើយ៖

1. $2\cos x+1<0$

$$\cos x<-\frac{1}{2}$$
$$\cos x<\cos\frac{2\pi}{3}$$
$\Rightarrow -\frac{2\pi}{3}+2k\pi>x>\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ: $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi>x>\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

2. $\sin x\geq\frac{1}{2}$

$\sin x\geq\sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ: $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

3. $\tan x\geq-1$

$\tan x\geq\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{4}+k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ: $-\frac{\pi}{4}+k\pi$

4. $\cot x<\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot x<\cot\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\pi+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\pi+k\pi$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

១១.៥ លំហាត់

លំហាត់ ១៨៨

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ខ. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

គ. $\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

ឃ. $\cos^2 x = 1$

ង. $\sin\sqrt{x} = -1$

ច. $\cot x = 1$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨៩

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\frac{1}{\cos 2x} = \sqrt{2}$

ខ. $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

គ. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ឃ. $\cot\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៤៩

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $\cos\frac{x}{2}-\cos\pi=0$
2. $\frac{1}{\sin 2x}-\sin\frac{\pi}{2}=0$
3. $2\sin 2x-\sqrt{2}=0$
4. $\sqrt{2}+2\cos 2x=0$

ចម្លើយ

លំហាត់ ៥០

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}=0$
3. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ៩១

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
2. $\tan 3x = \sqrt{3}$
3. $\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \sqrt{3}$
4. $2\tan x.\cos x + 1 = 2\cos x + \tan x$

ចម្លើយ

ឧទាហរណ៍ ៩២

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $\cot x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
2. $\cos 3x = \sqrt{3}$
3. $\cot\left(\dfrac{x}{2} - 3\right) = -1$
4. $3\cot x - \sqrt{3} = 0$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៦០

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមដោយដឹងថា $0 \leq x < 2\pi$៖

ក. $2\cos^2 x - \cos x = 1$

ខ. $2\sin^2 x - 3\sin x = -1$

គ. $\cos^2 x + \sin x = 1$

ឃ. $2\sin 2x - \sqrt{2} = 0$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៦១

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមដោយដឹងថា $0 \leq x < 2\pi$៖

ក. $\cos 4x(\cos x - 1) = 0$

ខ. $\sin^2 x - 2\sin x = 0$

គ. $2\cos^2 x + 3\cos x = 0$

ឃ. $\tan^2 x + \tan x - 12 = 0$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៦២

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\tan^3 3x - 2\sin^3 3x = 0$

គ. $\sin 2x + \tan x = 2$

ខ. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}\sin x.\cos x$

ឃ. $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} = 4\tan x$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៦៣

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x.\cos 2x$

គ. $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$

ខ. $\sin 2(x - \pi) - \sin(3x - \pi) = \sin x$

ឃ. $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៦៨

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $\sin x + 7\cos x = 5$

ខ. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

គ. $2\sin x - 3\cos x = 3$

ឃ. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៦៩

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $2\sin x - \cos x = 3$
2. $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{6}\cos x = 2$
3. $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x - 1 = 0$
4. $\cos x - 3\sin x = 2$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៦៦

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមដោយដឹងថា $0 \leq x < 2\pi$៖

ក. $2\cos^2 x - \cos x = 1$

ខ. $2\sin^2 x - 3\sin x = -1$

គ. $\cos^2 x + \sin x = 1$

ឃ. $2\sin 2x - \sqrt{2} = 0$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៦៧

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

ក. $3\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$

ខ. $2\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$

គ. $4\sin^2 x - 2\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\sin x + \sqrt{6} = 0$

ឃ. $\tan^2 x + 5\tan x = 2(1 + \tan^2 x)$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៦៨

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $7\cos^2 x + 6\sqrt{3}\sin x.\cos x - \sin^2 x + 2 = 0$
2. $3\sin^2 x + 3\sin x.\cos x - 6\cos^2 x = 0$
3. $\sin 2x + \tan x - 2 = 0$
4. $3\sin^2 x - 2\sin x.\cos x + 5\cos^2 x = 3$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៦៩

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

1. $\sin 3x + 2\cos - 2 = 0$
2. $\sin 2x + \tan x - 2 = 0$
3. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \cos 3x$
4. $1 + \cot 2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៧០

ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម៖

ក. $2\cos x \leq -\sqrt{2}$

ខ. $-\sqrt{2}\sin x + 1 \geq 0$

គ. $\sqrt{3}\tan x - 1 < 0$

ឃ. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, (-\pi \leq x < \pi)$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៧១

ដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម ដោយដឹងថា $0 \leq x \leq 2\pi$៖

ក. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2}$

ខ. $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq -1$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៧២

ចូរដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម:

ក. $\sin x > \dfrac{1}{2}$

ខ. $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

គ. $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$

ឃ. $\cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ង. $\tan x > 1$

ច. $\tan x \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ឆ. $\tan x \leq \sqrt{3}$

ចម្លើយ

ចូរដោះស្រាយវិសមីការខាងក្រោម:

1. $\sin(3x-1)>0$
2. $\cos(2x-3)<0$
3. $\sqrt{2}\cos x-1<0$
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$
5. $-\sqrt{2}\sin x+1\geq 1$
6. $\sqrt{3}\tan x-1<0$
7. $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\sqrt{3}}{3}$
8. $\cot\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\geq\sqrt{3}$
9. $\sqrt{3}\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ____________________

គោត្តនាម នាម ____________________

ភេទ ____________________

លេខរៀង____________________

ម៉ាទ្រីសនិងដេទែរមីណង់

១២.១ សញ្ញាណនៃម៉ាទ្រីស

១២.១.១ និយមន័យ

> ជាទូទៅ ១២.១.១ ម៉ាទ្រីស គឺជាការរៀបចំនួនជារាងចតុកោណកែងជាក់ក្នុងជង្វៀប។ គេកំណត់តាងម៉ាទ្រីសដោយអក្សរធំ ដូចជា $A,B,C,\dots$ និងជាតុនៃម៉ាទ្រីសតាងដោយអក្សរតូច។ ម៉ាទ្រីស A មានលំដាប់ $m\times n$
>
> កំណត់ដោយ៖ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

១២.១.២ ប្រភេទនៃម៉ាទ្រីស

ក. **ម៉ាទ្រីសសូន្យ៖** ម៉ាទ្រីសដែលមានជាតុទាំងអស់ស្មើនឹងសូន្យ ។ ឧទាហរណ៍៖

១. ម៉ាទ្រីសសូន្យលំដាប់ 2×2 គឺ $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

២. ម៉ាទ្រីសសូន្យលំដាប់ 1×2 គឺ $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

ខ. **ម៉ាទ្រីសការេ៖** ជាម៉ាទ្រីសមានចំនួនជួរដេកស្មើនឹងចំនួនជួរឈរ

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$ ឧទាហរណ៍៖

១. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

២. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

គ. **ម៉ាទ្រីសឯកតា៖** ជាម៉ាទ្រីសដែលមានជាតុនៅលើអង្កត់ទ្រូងពិសេស $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\cdots=a_{nn}=1$ ហើយជាតុផ្សេងទៀតស្មើនឹងសូន្យ ។ ឧទាហរណ៍៖

១. $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

២. $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

១២.២ ប្រមាណវិធីលើម៉ាទ្រីស

១២.២.១ ម៉ាទ្រីសស្មើគ្នា

និយមន័យ ១២.២.១ ម៉ាទ្រីសពីរស្មើគ្នា កាលណាម៉ាទ្រីសទាំងពីរមានលំដាប់ដូចគ្នានិងមានធាតុត្រូវគ្នាស្មើរៀងគ្នា។

! $\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y&z\\\alpha&\beta&\gamma\end{bmatrix}$ លុះត្រាតែ $x=a, y=b, z=c, \alpha=d, \beta=e$ និង $\gamma=f$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤៣

រកតម្លៃ x, y និង z បើ $\begin{bmatrix}x&1\\3&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&z\\3&-2\end{bmatrix}$ ។

ចម្លើយ៖ គេបាន $x=2, y=-2$ និង $z=1$

១២.២.២ វិធីបូកនិងវិធីដកនៃម៉ាទ្រីស

និយមន័យ ១២.២.២ ម៉ាទ្រីសពីរអាចបូក ឬដក គ្នាបានលុះត្រាតែម៉ាទ្រីសទាំងពីរនោះមានលំដាប់ដូចគ្នា ហើយគេបូក ឬដក ធាតុត្រូវរៀងគ្នា។

! $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\pm\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\pm x&b\pm y\\c\pm z&d\pm w\end{bmatrix}$

ឧទាហរណ៍ ៤៤

គេឲ្យ $A=\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix}$ និង $\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}$ ។

ក. $A+B$

ខ. $A-B$

ចម្លើយ៖

ក. $$A+B=\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+1&2+3\\0+(-1)&1+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&5\\-1&3\end{bmatrix}$$

ខ. $$A-B=\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-1&2-3\\0-(-1)&1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1\\1&-1\end{bmatrix}$$

១២.២.៣ ផលគុណមួយចំនួនពិតនឹងម៉ាទ្រីស

ជាទូទៅ ១២.២.៣ បើ $k \in \mathbb{R}$ និងមានម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ គេបាន $Ak = \begin{bmatrix} ak & bk \\ ck & dk \end{bmatrix}$

ឧទាហរណ៍ ៨៨

គេមាន $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ។ គណនា $2A$ និង $-3A$ ។

ចម្លើយ៖

- $$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) & 2(2) \\ 2(3) & 2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$
- $$-3A = -3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(1) & -3(2) \\ -3(3) & -3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \end{bmatrix}$$

១២.២.៤ វិធីគុណនៃម៉ាទ្រីស

ជាទូទៅ ១២.២.៤ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}$

ឧទាហរណ៍ ៨៦

គេមាន $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ ។ គណនា AB ។

ចម្លើយ៖ គេបាន
$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-1)(-3)+(3)(-4) & (-1)(2)+(3)(1) \\ (4)(-3)+(-2)(-4) & (4)(2)+(-2)(1) \\ (5)(-3)+(0)(-4) & (5)(2)+(0)(1) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}$$

១២.៣ ម៉ាទ្រីសច្រាស

ជាទូទៅ ១២.៣.១ • បើម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ដែល $ad-bc\neq 0$ នោះម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A គឺ $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

- បើ $ad-bc=0$ នោះ A គ្មានម៉ាទ្រីសច្រាសទេ។
- បើ A^{-1} ជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីស A នោះគេបាន $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ ដែល I ជាម៉ាទ្រីសឯកតា។

ឧទាហរណ៍ ៤៧

រកម៉ាទ្រីស A^{-1} ដែល $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ។

ចម្លើយ៖ ដោយ $3(2)-1(4)=6-4$

$$=2\neq 0$$

គេបាន $A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ឧទាហរណ៍ ៤៨

រកម៉ាទ្រីសA^{-1} ដែល $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ។

ចម្លើយ៖ ដោយ $(1)(4)-(3)(2)=4-6$

$$=-2\neq 0$$

គេបាន $A^{-1}=-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

១២.៤ លំហាត់

លំហាត់ ១៧៤

រកតម្លៃ a,b,c និង d បើ $\begin{bmatrix} 2 & 2b \\ c & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2d & d \\ 4 & 3a \end{bmatrix}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៧៥

រកតម្លៃអថេរចំពោះសមភាពនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ a & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 3 \\ 5 & c \end{bmatrix}$

ខ. $\begin{bmatrix} a & 5 & b \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & -1 \\ d & 9 & 2 \end{bmatrix}$

គ. $\begin{bmatrix} a \\ 6 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

ឃ. $\begin{bmatrix} x & y \\ 9 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ c & -2 \\ 3 & d \end{bmatrix}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៧៦

គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & 3\\ 9 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 7\\ 10 & 6\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 7 & -4\end{bmatrix}$ និង $D=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -13 & 4\end{bmatrix}$

គណនា

ក. $A+B$ ខ. $B-A$ គ. $B+D$ ឃ. $C+D$ ង. $A-B$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៧៧

គឲ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}3 & 21\\ 16 & -4\\ 3 & 8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}9 & -24\\ -9 & 14\\ -7 & 9\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}4 & -9\\ 3 & 10\end{bmatrix}$ និង $D=\begin{bmatrix}5 & 5\\ -13 & 5\end{bmatrix}$ ។ គណនា

ក. $3A+B$

ខ. $B-A+C$

គ. $2C+5C-4D$

ឃ. $-A+3(B-A)$

ង. $2(3C)-7D$

ច. $-A+2(D+C)$

ចម្លើយ

គណនា AB ចំពោះករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 8\end{bmatrix}$

ខ. $A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\\ 3 & -4\end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & 0\\ -4 & -1\end{bmatrix}$

គ. $A=\begin{bmatrix}5 & 6 & -3\\ -2 & 5 & 1\\ 10 & -5 & 5\end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 8 & 1 & 4\\ 4 & -2 & 9\end{bmatrix}$

ឃ. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៧៩

គេឲ្យ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -7 \\ a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 3c \end{bmatrix}$ ។ រកតម្លៃ a, b និង c ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨០

គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ និង $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & k \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ។

ក. គណនា A^2 និង A^{-1} ដែលជាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A

ខ. រកតម្លៃ k ដើម្បីឲ្យ AB ជាម៉ាទ្រីសឯកតា ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨១

គេឲ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -5 & -4\end{bmatrix}$ និង $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ ។ គណនា

ក. AB និង $(AB)^{-1}$

ខ. A^{-1} , B^{-1} និង $B^{-1}A^{-1}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨២

រកម៉ាទ្រីស X ដែល៖

ក. $\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 2\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}-11\\ 9\end{bmatrix}$

ខ. $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}X=2\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨៣

រកតម្លៃ p,q,a និង b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ក. $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

គ. $\begin{bmatrix} -1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

ខ. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ b \end{bmatrix}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨៤

ក្នុងសមីការ $M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ចូរប្រាប់លំដាប់នៃម៉ាទ្រីស M និងរកម៉ាទ្រីស M ។

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ____________________

គោត្តនាម នាម ____________________

ភេទ ____________________

លេខរៀង____________________

ដេទែរមីណង់

១៣.១ ដេទែរមីណង់លំដាប់2

ជាទូទៅ ១៣.១.១ គេមាន $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ គេបានដេទែមីណង់នៃ A កំណត់ដោយ $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

ឧទាហរណ៍ ៨៩

គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសនីមួយៗខាងក្រោម៖

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$

ចម្លើយ៖

1. $\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$
$= (4)(3) - (6)(7)$
$= 12 - 42 = 30$

2. $\det(B) = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}$
$= (6)(8) - (-4)(-1)$
$= 48 - 4 = 44$

១៣.២ ដេទែរមីណង់លំដាប់3

១៣.២.១ ក្បួនរបស់សារូស

ជាទូទៅ ១៣.២.១ គេមាន $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ គេបានដេទែមីណង់នៃ A

កំណត់ដោយ $\det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1$

ឧទាហរណ៍ ៦០

គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

ចម្លើយ៖ $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$$=(1)(-3)(-1)+(2)(5)(-4)+(3)(6)(0)-(-4)(-3)(3)-(0)(5)(1)-(-1)(6)(2)$$

$$=-61$$

១៣.២.២ ក្បួនមីន័រ

ជាទូទៅ ១៣.២.២ គេមាន $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ គេបានដេទែមីណង់នៃ A

កំណត់ដោយ $\det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-b_1a_2c_3+b_1a_3c_2+c_1a_2b_3-c_1a_3b_2$$

$$=a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$$

ឧទាហរណ៍ ៦១

គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

ចម្លើយ៖ $\det(A)=\begin{vmatrix}1&2&3\\6&-3&5\\-4&0&-1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-3&5\\0&-1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}6&5\\-4&-1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}6&-3\\-4&0\end{vmatrix}$

$$=1[(-3)(-1)-(0)(5)]-2[(6)(-1)-(-4)(5)]+3[(6)(0)-(-4)(-3)]$$
$$=3-28-36$$
$$=-61$$

១៣.៣ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែរតាមរូបមន្តក្រាមែរ

១៣.៣.១ ប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី១មានពីរអញ្ញាតិ

ជាទូទៅ ១៣.៣.១ គេមាន $\begin{cases}a_1x+b_1y&=m_1\\a_2x+b_2y&=m_2\end{cases}$

- $D=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$
- $D_x=\begin{vmatrix}m_1&b_1\\m_2&b_2\end{vmatrix}$
- $D_y=\begin{vmatrix}a_1&m_1\\a_2&m_2\end{vmatrix}$

$+$ បើ $D\neq 0$ នោះប្រព័ន្ធសមីការមានឫស $x=\dfrac{D_x}{D}$ និង $y=\dfrac{D_y}{D}$

$+$ បើ $D=0$ និង $D_x\neq 0$ ឬ $(D_y\neq 0)$ នោះប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ

$+$ បើ $D=0$ និង $D_x=0$ ឬ $(D_y=0)$ នោះប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់។

ឧទាហរណ៍ ៦២

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases}3x+7y&=-6\\4x-2y&=26\end{cases}$ ខ. $\begin{cases}4x-5y&=13\\-8x+10y&=18\end{cases}$

ចម្លើយ៖

ក. តាង $D=\begin{vmatrix}3&7\\4&-2\end{vmatrix}=(3)(-2)-(4)(7)=-6-28=-34$

$$D_x=\begin{vmatrix}-6&7\\26&-2\end{vmatrix}=(-6)(-2)-(26)(7)=-170$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3&-6\\4&26\end{vmatrix}=(3)(26)-(4)(-6)=102$$

គេបាន $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-170}{-34}=5$ និង $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{102}{-34}=-3$

ខ. តាង $D=\begin{vmatrix}4 & -5\\ -8 & 10\end{vmatrix}=(4)(10)-(-8)(-5)=0$

$$D_x=\begin{vmatrix}13 & -5\\ 18 & 10\end{vmatrix}=(13)(10)-(18)(-5)=170$$

$$D_y=\begin{vmatrix}4 & 13\\ -8 & 18\end{vmatrix}=(4)(18)-(-8)(13)=176$$

គេបាន ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ

១៣.៣.២ ប្រព័ន្ធសមីការដឺក្រេទី១មានបីអញ្ញាតិ

ជាទូទៅ ១៣.៣.២ គេមាន $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z &= m_1\\ a_2x+b_2y+c_2z &= m_2\\ a_3x+b_3y+c_3z &= m_3\end{cases}$

- $D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$
- $D_x=\begin{vmatrix}m_1 & b_1 & c_1\\ m_2 & b_2 & c_2\\ m_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$
- $D_y=\begin{vmatrix}a_1 & m_1 & c_1\\ a_2 & m_2 & c_2\\ a_3 & m_3 & c_3\end{vmatrix}$
- $D_z=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & m_1\\ a_2 & b_2 & m_2\\ a_3 & b_3 & m_3\end{vmatrix}$

+ បើ $D\neq 0$ នោះប្រព័ន្ធសមីការមានឫស $x=\dfrac{D_x}{D}, y=\dfrac{D_y}{D}$ និង $z=\dfrac{D_z}{D}$
+ បើ $D=0$ និង $D_x\neq 0, D_y\neq 0$ ឬ $(D_z\neq 0)$ នោះប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ
+ បើ $D=0$ និង $D_x=0, D_y=0$ ឬ $(D_z=0)$ នោះប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយច្រើនរាប់មិនអស់។

ឧទាហរណ៍ ៦៣

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

ក. $\begin{cases}x+2y+3z &= 2\\ -2x+y+2z &= 1\\ 4x-y &= 3\end{cases}$

ខ. $\begin{cases}2x+2y+2z &= 0\\ -2x+5y+2z &= 1\\ 8x+y+4z &= -1\end{cases}$

ចម្លើយះ

ក. $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&1&2\\4&-1&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&2\\4&0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2&1\\4&-1\end{vmatrix}$

$=1[(1)(0)-(-1)(2)]-2[(-2)(0)-(4)(2)]+3[(-2)(-1)-(4)(1)]$

$=2+16-6=12$

$D_x=\begin{vmatrix}2&2&3\\1&1&2\\3&-1&0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1&1\\3&-1\end{vmatrix}$

$=2[(1)(0)-(-1)(2)]-2[(1)(0)-(3)(2)]+3[(1)(-1)-(3)(1)]$

$=4+12-12=4$

$D_y=\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&1&2\\4&3&0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&2\\4&0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2&1\\4&3\end{vmatrix}$

$=1[(1)(0)-(3)(2)]-2[(-2)(0)-(4)(2)]+3[(-2)(3)-(4)(1)]$

$=-6+16-30=-20$

$D_z=\begin{vmatrix}1&2&2\\-2&1&1\\4&-1&3\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&1\\-1&3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&1\\4&3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&1\\4&-1\end{vmatrix}$

$=1[(1)(3)-(-1)(1)]-2[(-2)(3)-(4)(1)]+2[(-2)(-1)-(4)(1)]$

$=4+20-4=20$

ដូចនេះ $x=\frac{D_x}{D}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}, y=\frac{D_y}{D}=\frac{-20}{12}=-\frac{5}{3}$ និង $z=\frac{D_z}{D}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$

ខ. $D=\begin{vmatrix}2&2&2\\-2&5&2\\8&1&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}5&2\\1&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&2\\8&4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&5\\8&1\end{vmatrix}$

$=2[(5)(4)-(1)(2)]-2[(-2)(4)-(8)(2)]+2[(-2)(1)-(8)(5)]$

$=36+48-84=0$

$D_x=\begin{vmatrix}0&2&2\\1&5&2\\-1&1&4\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}5&2\\1&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&2\\-1&4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&5\\-1&1\end{vmatrix}$

$=0[(5)(4)-(1)(2)]-2[(1)(4)-(-1)(2)]+2[(1)(1)-(-1)(5)]=0$

ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយរាប់មិនអស់។ រកចម្លើយរាប់មិនអស់របស់ប្រព័ន្ធ សមីការនេះ

យក $z = t, t \in \mathbb{R}$ នោះគេបាន $\begin{cases} 2x+2y+2t=0 & (1) \\ -2x+5y+2t=1 & (2) \\ 8x+y+4t=-1 & (3) \end{cases}$

យកសមីការ (1) បូក $(2): 7y+4t=1 \Rightarrow y=\dfrac{1-4t}{7}$

យកសមីការ $4(1)$ ដក $(3): 7y+4t=1 \Rightarrow y=\dfrac{1-4t}{7}$

ជំនួសចូលសមីការ $(1): x=-t-\dfrac{1-4t}{7}=\dfrac{-7t-1+4t}{7}=-\dfrac{1+3t}{7}$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមាន ចម្លើយរាប់មិនអស់គឺ $x=-\dfrac{1+3t}{7}$ និង $y=\dfrac{1-4t}{7}$ ដែល $t \in \mathbb{R}$

១៣.៤ លំហាត់

លំហាត់ ១៨៥

គណនាដេទែរមីណង់ខាងក្រោម៖

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨៦

គណនាដេទែរមីណង់ខាងក្រោម៖

ក. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ខ. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ គ. $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨៧

គណនាដេទែរមីណង់ខាងក្រោម៖

ក. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$ ខ. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ គ. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៨៨

គណនាដេទែរមីណង់ខាងក្រោម៖

ក. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ខ. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ គ. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{vmatrix}$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមដោយប្រើតាមរូបមន្តក្រាម័រះ

1. $\begin{cases} \frac{3}{4}x - y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = -6 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 15 = -6y \end{cases}$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមដោយប្រើតាមរូបមន្តក្រាមែរ៖

1. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 2x+7y=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមដោយប្រើតាមរូបមន្តក្រាម័រៈ

1. $\begin{cases} 2x+3y+2z=14 \\ 4x+2y-z=15 \\ x+y+2z=8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y-3z=10 \\ 4x+y-z=-10 \\ 3x-7y+2z=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x+y+3z=2 \\ x-7y-3z=-4 \\ 4x-2y-6z=1 \end{cases}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៩២

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមដោយប្រើតាមរូបមន្តក្រាមែរ៖

1. $\begin{cases} x-y+z=-1 \\ -x+y-z=1 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-y+z=5 \\ x+y-z=-2 \\ 4x-2y+3z=12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+7y-3z=8 \\ -x+3y+z=-4 \\ 3x-2y+4z=5 \end{cases}$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោមដោយប្រើតាមរូបមន្តក្រាម័រ៖

1. $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 2x+y-3z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+3y+3z=5 \\ x-2y+z=-4 \\ 3x-y-z=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-7+2z=7 \\ 3x+4y-5z=-5 \\ 2x-y+3z=12 \end{cases}$

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ______________________

គោត្តនាម នាម ______________________

ភេទ ______________________

លេខរៀង______________________

លីមីតនៃអនុគមន៍

១៤.១ លីមីត

១៤.១.១ សញ្ញាណលីមីត

ជាទូទៅ ១៤.១.១ បើ x ខិតជិត a ហើយអនុគមន៍ $f : y = f(x)$ ខិតជិតតម្លៃ b ណាមួយនោះគេកំណត់សរសេរដោយ $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ។

១៤.១.២ ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim_{x \to a} f(x)$ និង $\lim_{x \to a} g(x)$ មានអត្ថិភាពនោះ:

- $\lim_{x \to a} c = c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- $\lim_{x \to a} cf(x) = c.\lim_{x \to a} f(x)$
- $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

ឧទាហរណ៍ ៦៤

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x \to 1} 3$

ខ. $\lim_{x \to 2} x^2$

គ. $\lim_{x \to -1} 3x$

ឃ. $\lim_{x \to 0} (x^2 + 3x - 1)$

ង. $\lim_{x \to 1} [(3+x)(x-2)]$

ច. $\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x-2}$

ចម្លើយ៖

ក. $\lim_{x \to 1} 3 = 3$

ខ. $\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$

គ. $\lim_{x \to -1} 3x = 3 \lim_{x \to -1} x = 3(-1) = -3$

ឃ. $\lim_{x \to 0} (x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \to 0} x^2 + 3\lim_{x \to 0} x - \lim_{x \to 0} 1 = 0^2 + 3(0) - 1 = -1$

ង. $\lim_{x \to 1} [(3+x)(x-2)] = \lim_{x \to 1} (3+x) \cdot \lim_{x \to 1} (x-2)$

$$= (3+1)(1-2) = 4(-1) = -4$$

ច. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}=\dfrac{3+3}{3-2}=6$

១៤.២ លីមីតរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

ដាទូទៅ ១៤.២.១ បើ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

- គេត្រូវបំបែក $f(x)=(x-a)A(x)$ និង $g(x)=(x-a)B(x)$
- គណនា $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)A(x)}{(x-a)B(x)}=\lim_{x\to a}\frac{A(x)}{B(x)}$ ដែល $\lim_{x\to a}B(x)\neq 0$

ឧទាហរណ៍ ៦៤

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x-2}$ ខ. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$ គ. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+x-2}$

ចម្លើយ៖

ក. $\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x-2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}3=3$

ខ. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x+3x+6}{x^2+2x-2x-4}$

$=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)+3(x+2)}{x(x+2)-2(x+2)}$

$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to -2}\frac{x+3}{x-2}$

$=\frac{-2+3}{-2-2}=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$

គ. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+x-2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2x-3x+3}{x^2-x+2x-2}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{2x(x-1)-3(x-1)}{x(x-1)+2(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+2)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x+2}$

$=\frac{2(1)-3}{1+2}$

$=\frac{-1}{3}$

$=-\frac{1}{3}$

១៤.៣ លីមីតខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ

ជាទូទៅ ១៤.៣.១ • បើ $f(x)$ ខិតជិត L កាលណា x ខិតជិត a ពីខាងឆ្វេង នោះ L ជាលីមីតខាងឆ្វេងនៃ $f(x)$ ហើយ កំណត់សរសេរដោយ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$

• បើ $f(x)$ ខិតជិត R កាលណា x ខិតជិត a ពីខាងស្តាំ នោះ R ជាលីមីតខាងស្តាំនៃ $f(x)$ ហើយ កំណត់សរសេរដោយ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = R$

ឧទាហរណ៍ ៦៦

គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \begin{cases} 2x \text{ បើ } x > 0 \\ x^3 \text{ បើ } x \le 0 \end{cases}$

ក. ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ ។

ខ. ចូរប្រៀបធៀបតម្លៃនៃលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ ។

ចម្លើយ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x$

$= 2(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^3$

$= 0^3 = 0$

ខ. ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

ជាទូទៅ ១៤.៣.២ អនុគមន៍ $y = f(x)$ មានលីមីតត្រង់ a កាលណាលីមីតខាងឆ្វេង ស្មើនឹងលីមីតខាងស្តាំ។ មានន័យថា $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ សមមូល $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ ។

ឧទាហរណ៍ ៦៧

គេឲ្យអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \begin{cases} 3x+1 \text{ បើ } x < 2 \\ -x+8 \text{ បើ } x \ge 2 \end{cases}$ ។ តើអនុគមន៍ f មានលីមីតត្រង់ 2 ដែរឬទេ ?

ចម្លើយ៖ ដោយ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x+1) = 3(2)+1 = 7$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x+8) = -2+8 = 6$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មិនមានលីមីតត្រង់ 2 ទេ។

១៤.៤ លីមីតអនន្តនៃអនុគមន៍

ជាទូទៅ ១៤.៤.១
- $\lim_{x\to\pm\infty} ax^2 = \begin{cases} +\infty \text{ បើ } a>0 \\ -\infty \text{ បើ } a<0 \end{cases}$
- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x} = 0$ ដែល $a\in\mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍ ៦៨

ចូរគណនាលីមីតនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to-\infty} 2x^2$ ខ. $\lim_{x\to-\infty} -3x^2$ គ. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2}$ ឃ. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^3}$

ចម្លើយ៖

ក. $\lim_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$

ខ. $\lim_{x\to-\infty} -3x^2 = -\infty$

គ. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

ឃ. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^3} = 0$

១៤.៤.១ លីមីតរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$ និង $\frac{\infty}{\infty}$

ជាទូទៅ ១៤.៤.២ ចំពោះ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាពហុធា:
- បើ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ មានរាងមិនកំណត់ $\infty-\infty$
  ត្រូវដាក់ $f(x)$ ជាផលគុណកត្តានៃដឺក្រេធំជាងគេជាកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី។
- បើ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$
  ត្រូវដាក់ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាផលគុណកត្តានៃដឺក្រេធំជាងគេជាកត្តារួម ហើយសម្រួលដឺក្រេនោះ រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី។

ឧទាហរណ៍ ៦៩

ចូរគណនាលីមីតនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to+\infty} (x^2-x+1)$ ខ. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-2}$

ចម្លើយ៖

ក. $\lim_{x\to+\infty} (x^2-x+1) = \lim_{x\to+\infty} \left[x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]$

$= +\infty$ ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ និង $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

ខ. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}$

$= 2$ ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

១៤.៥ លំហាត់

លំហាត់ ១៩៨

ចូរគណនាលីមីតនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to 0} 2009$

ខ. $\lim_{x\to 1}\left(-\frac{2008}{2007}\right)$

គ. $\lim_{x\to -1} x$

ឃ. $\lim_{x\to -2}(2x+4)$

ង. $\lim_{x\to 1}(5x^4-3x^3+2x^2-x+2)$

ច. $\lim_{x\to 1}[(x^2+x)(3x-4)]$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៩៨

ចូរគណនាលីមីតនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to 3}\frac{x}{x^2+1}$

ខ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

គ. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x-1}$

ឃ. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

ង. $\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x+4}$

ច. $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}}{x-2}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៩៦

ចូរគណនាលីមីតនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{x}{x-3}\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៩៧

ចូរគណនាលីមីតនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ ដែល $n\geq 1$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៩៨

ចូរគណនាលីមីតនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to\pm\infty} 4x^2$ ខ. $\lim_{x\to\pm\infty} -3x^2$ គ. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{2}{x^2}\right)$

ចម្លើយ

លំហាត់ ១៩៩

ចូរគណនាលីមីតនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to+\infty}(x^2+x)$ ខ. $\lim_{x\to\pm\infty}(x^2-2x+3)$ គ. $\lim_{x\to-\infty}(2x^3+x^2-3x+1)$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២០០

ចូរគណនាលីមីតនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x+1)$ ខ. $\lim_{x\to-\infty}(1+3x^2+x^3)$ គ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{2x+3}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២០១

ចូរគណនាលីមីតនីមួយៗខាងក្រោមៈ

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-x}{2x-1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x^2+2}$ គ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2}{x-1}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-2x}{x^2+3}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២០២

ចូរគណនាលីមីតនីមួយៗខាងក្រោមៈ

ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x^2}{1-x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2+x+1}{2x+1}$ គ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-2x}{x^2+x+1}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២០៣

គេឲ្យអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=x^2$ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២០៤

f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x \text{ បើ } x \neq 1 \\ 5 \text{ បើ } x = 1 \end{cases}$ ។ ចូរគណនា $\lim_{x \to 1} f(x)$ និង $f(1)$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២០៥

ចូរកំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 5$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២០៦

ចូរកំណត់តម្លៃ m និង n ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - mx + 8}{x^2 - (n+2)x + 2n} = \dfrac{1}{5}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២០៧

គេឲ្យអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\begin{cases}3x-1 & \text{បើ } x<1\\ 2x & \text{បើ } x\geq 1\end{cases}$ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២០៨

គេឲ្យអនុគមន៍ g ដែល $g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{បើ } x\leq 0\\ 2x & \text{បើ } x>0\end{cases}$ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ____________________

គោត្តនាម នាម ____________________

ភេទ ____________________

លេខរៀង____________________

ដេរីវេ

១៥.១ អត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យម

ជាទូទៅ ១៥.១.១ បើអថេរ x ប្រែប្រួលពី a ទៅ b ហើយអនុគមន៍ $y=f(x)$ ប្រែប្រួលពី $f(a)$ ទៅ $f(b)$ នោះផលធៀប $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ហៅថាអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃ $y=f(x)$ កាលណា x ប្រែលប្រួលពី a ទៅ b ។

ឧទាហរណ៍ ៧០

រកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃប្រាក់ចំណូ $R(x)=x^2+5x$ គិតជាពាន់រៀននៃការលក់ស្រូវ x តោន កាលណា x ប្រែប្រួលពី 10 តោនទៅ 13 តោន ។

ចម្លើយ៖ គេបាន អត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃប្រាក់ចំណូល

$$\begin{aligned}\frac{\Delta R}{\Delta x}&=\frac{R(13)-R(10)}{13-10}\\&=\frac{(13^2+5\times 13)-(10^2+5\times 10)}{3}\\&=\frac{84}{3}=26\text{ ពាន់រៀលក្នុង១តោន}\end{aligned}$$

១៥.១.១ ដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ

ជាទូទៅ ១៥.១.២ ដេរីវេ $f'(a)$ នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ នៅត្រង់ $x=a$

កំណត់ដោយ $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ឬ $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ដែល $x=a+h$ ឬ $h=x-a$

ឧទាហរណ៍ ៧១

រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^3$ នៅត្រង់ $x=1$ ។

ចម្លើយ៖ គេមាន $f(x)=x^3$ នាំឲ្យ $f(1)=1^3=1$

គេបាន $f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 1^2+1+1=3$

ដូចនេះ $f'(1)=3$

១៥.១.២ ដេរីវេ

និយមន័យ ១៥.១.៣ អនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ x កំណត់ដោយ:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \text{ ឬ } f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

គេអានថា ដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ធៀបនឹងអថេរ x ។ ដែនកំណត់នៃ f' ផ្ទុកជាតុ x ទាំងអស់ដែលស្ថិតនៅ ក្នុងដែនកំណត់នៃ f ហើយលីមីតវាកំណត់ត្រង់ x ទាំងនោះ។

! គេអាចសរសេរដេរីវេធៀបនឹងអថេរ x ដោយ $y', \dot{y}, f'(x), D_x(y)$ ឬ $\frac{dy}{dx}$

ឧទាហរណ៍ ៧២

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2+3x$ ។

ក. ចូររកដេរីវេ $f'(x)$

ខ. ចូររក $f'(0)$ និង $f'(-1)$ ។

ចម្លើយ៖

ក. គេមាន $f(x)=x^2+3x$ នាំឲ្យ $f(x+h)=(x+h)^2+3(x+h)=x^2+2xh+h^2+3x+3h$

គេបាន $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+3x+3h-(x^2+3x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+3x+3h-x^2-3x}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+3)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}(2x+h+3)$

$= 2x+3$

ដូចនេះ $f'(x)=2x+3$

ខ. $f'(0)=2(0)+3=3$ និង $f'(-1)=2(-1)+3=-2+3=1$

១៥.១.៣ រូបមន្តដេរីវេ

ជាទូទៅ ១៥.១.៤ ចំពោះ c ជាចំនួនថេរនិង u, v ជាអនុគមន៍នៃ x គេបាន:

- $(c)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $(c.u)' = c.u'$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u.v)' = u'v + v'u$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

ឧទាហរណ៍ ៧៣

ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $y = -\frac{2007}{2008}$ ខ. $y = -x^2$ គ. $y = \frac{3}{5}.x^5$

ចម្លើយ៖

ក. $y = -\frac{2007}{2008} \Rightarrow y' = \left(-\frac{2007}{2008}\right)' = 0$

ខ. $y = -x^2 \Rightarrow (-x^2)' = -2x^{2-1} = -2x$

គ. $y = \frac{3}{5}.x^5 \Rightarrow y' = \left(\frac{3}{5}x^2\right)' = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

ឧទាហរណ៍ ៧៤

ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $y = x^2 + 4x$ គ. $y = x^4 - 2x^2 + 3x - 2$ ង. $y = x(x-1)$

ខ. $y = x^3 - 3x^2$ ឃ. $y = (2x-1)^4$ ច. $y = (x^2-2)(3x^2+x)$

ចម្លើយ៖

ក. $y = x^2 + 4x \Rightarrow y' = (x^2+4x)'$
$$= (x^2)' + 4(x)'$$
$$= 2x + 4$$

ខ. $y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = (x^3 - 3x^2)'$
$$= (x^3)' - 3(x^2)'$$
$$= 3x^2 - 6x$$

គ. $y = x^4 - 2x^2 + 3x - 2 \Rightarrow y' = (x^4)' - 2(x^2)' + 3x'$
$$= 4x^3 - 4x + 3$$

ឃ. $y = (2x-1)^4 \Rightarrow y' = \left[(2x-1)^4\right]'$
$$= 4(2x-1)'(2x-1)^{4-1}$$
$$= 4(2)(2x-1)^3$$
$$= 8(2x-1)^3$$

ង. $y=x(x-1)\Rightarrow y'=[x(x-1)]'$

$$=x'(x-1)+(x-1)'x$$
$$=x-1+x$$
$$=2x-1$$

ច. $y=(x^2-2)(3x^2+x)\Rightarrow y'=[(x^2-2)(3x^2+x)]'$

$$=(x^2-2)'(3x^2+x)+(3x^2+x)'(x^2-2)$$
$$=2x(3x^2+x)+(6x+1)(x^2-2)$$
$$=6x^3+2x^2+6x^3-12x+x^2-2$$
$$=12x^3+3x^2-12x-2$$

ឧទាហរណ៍ ៧៥

ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $y=\dfrac{x}{x-1}$ ខ. $y=\dfrac{x+1}{x^2}$ គ. $y=\dfrac{1}{2x+1}$

ចម្លើយ៖

ក. $y=\dfrac{x}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{x'(x-1)-(x-1)'x}{(x-1)^2}$

$$=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

ខ. $y=\dfrac{x+1}{x^2}\Rightarrow y'=\dfrac{(x+1)'x^2-(x^2)'(x+1)}{(x^2)^2}$

$$=\frac{x^2-2x(x+1)}{x^4}=\frac{x^2-2x^2-2x}{x^4}=-\frac{x+2}{x^3}$$

គ. $y=\dfrac{1}{2x+1}\Rightarrow y'=-\dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$$=-\frac{2}{(2x+1)^2}$$

១៥.១.៤ ដេរីវេទី២

និយមន័យ ១៥.១.៥ បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានដេរីវេទី១ តាងដោយ $f'(x)$ ហើយ $f'(x)$ មានដេរីវេម្តងទៀត នោះដេរីវេនៃ $f'(x)$ នេះហៅថាដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលតាងដោយ $f''(x)$ ឬ y'' ។

ឧទាហរណ៍ ៧៦

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=4x^3-12x^2+3$

ក. រកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $f'(x)=0$

ខ. រកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $f''(x)=0$ ។

ចម្លើយ៖

ក. គេមាន $f(x)=4x^3-12x^2+3\Rightarrow f'(x)=12x^2-24x$

គេបាន $f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-24x=0$

$$12x(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow 12x=0 \Rightarrow x=0$$

ឬ $x-2=0 \Rightarrow x=2$

ដូចនេះ $f'(x)=0$ លុះត្រាតែ $x=0$ ឬ $x=2$

ខ. គេមាន $f'(x)=12x^2-24x \Rightarrow f''(x)=24x-24$

គេបាន $f''(x)=0 \Leftrightarrow 24x-24=0$

$$\Leftrightarrow x=\frac{24}{24}$$

$$=1$$

ដូចនេះ $f''(x)=0$ លុះត្រាតែ $x=1$

១៥.២ លំហាត់

លំហាត់ ២០៩

ក្នុងការឃោសនាពាណិជ្ជកម្ម x ថ្ងៃ គេលក់ដាច់ទស្សនាវដ្ដីបានចំនួន $S(x)=x^2+20x+200$ ក្បាល។ ចូររកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃ $S(x)$ ក្នុងរយៈពេលពី $x=5$ ទៅ $x=10$ ថ្ងៃ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២១០

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=10+\frac{40}{x}$ ។ ចូររកអត្រាបម្រែបម្រួលនៃ f កាលណា x ប្រែប្រួលពី 1 ទៅ 10 ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២១១

តម្លៃ v នៃរថយន្តមួយបន្ទាប់ពី t ឆ្នាំក្រោយមកកំណត់ដោយ $v(t)=\frac{10000}{t}+6000$ ។ ដោយ $v(t)=\frac{10000}{t}+6000$ ។ ចូររកអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃតម្លៃរថយន្ត កាលណា t ប្រែប្រួលពី 2 ឆ្នាំទៅ 5 ឆ្នាំ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២១២

ដោយប្រើនិយមន័យ ចូររកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x) = 2022$ នៅត្រង់ $x = 2$

គ. $g(x) = x^2 - 4x + 5$ នៅត្រង់ $x = 2$

ខ. $f(x) = -x^2 + 4x$ នៅត្រង់ $x = -1$

ឃ. $y = x^3 - 2$ នៅត្រង់ $x = 0$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២១៣

ចូររកដេរីវេ $f'(x)$ ដោយប្រើនិយមន័យនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម៖

1. $f(x) = 3x^2$

2. $f(x) = 2x^3 - 1$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២១៤

ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

1. $y=(2x+1)(4x-3)$
2. $y=(3x^2-1)(4x+1)$
3. $y=(x^2-3)(-x^2+x+1)$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២១៥

ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

1. $y=\dfrac{x}{x-4}$
2. $y=\dfrac{3x+4}{2x-1}$
3. $y=\dfrac{(1-x)(x^2+2)}{x^2-3}$
4. $y=\dfrac{1}{2x-1}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២១៦

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = -4x^3 + x^2 + 14x - 1$ ។

ក. ចូររកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $f'(x) = 0$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

ខ. ចូររកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $f''(x) = 0$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f''(x)$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២១៧

អនុគមន៍ g ដែល $g(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$ ។

ក. ចូររកដេរីវេទី១ និងដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ g ។

ខ. ចូរសិក្សាសញ្ញានៃដេរីវេទី១ និងសញ្ញានៃដេរីវេទី២។

ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ____________________

គោត្តនាម នាម ____________________

ភេទ ____________________

លេខរៀង____________________

អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

១៦.១ បន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង

ទ្រឹស្តីបទ ១៦.១.១ បើ x_0 ជារបស់ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f នោះ បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង $f(x)$ ត្រង់ចំណុច (x_0,y_0) មានសមីការ $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ ។

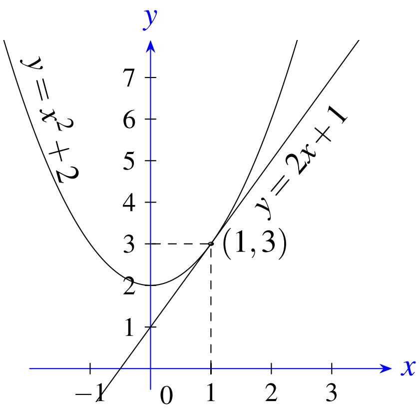
ឧទាហរណ៍ ៧៧

រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការ $y=x^2+2$ ត្រង់ចំណុច $(1,3)$

ចម្លើយ៖ យើងមាន $y=x^2+2$ និង $x_0=1, y_0=3$

ដោយ $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+1)$$
$$=1+1=2$$



គេបាន $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

$$y-3=2(x-1)$$
$$y=2x-2+3$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាប៉ូលត្រង់ចំណុច $(1,3)$ គឺមានសមីការ $y=2x+1$

វិធាន ៦

ដើម្បីរកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $y=f(x)$ ត្រង់ $x=x_0$

- **ជំហានទី១** រកតម្លៃ $f(x_0)$ គឺស្គាល់ចំណុចប៉ះ $(x_0, f(x_0))$
- **ជំហានទី២** រក $f'(x)$ និងទាញរកតម្លៃ $f'(x_0)$
- **ជំហានទី៣** សរសេរជាទម្រង់ $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

ឬ $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x)$

ឧទាហរណ៍ ៧៨

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x\neq -2$ និងមានក្រាប (C) ។ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x_0=1$ ។

ចម្លើយ៖ រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x_0=1$

- **ជំហានទី១** រកតម្លៃ $f(x_0)$

បើ $x_0=1$ នោះ $f(x_0)=f(1)=\dfrac{1^2+3(1)+6}{1+2}$

$=\dfrac{10}{3}$

- **ជំហានទី២** គណនា $f'(x)$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+3x+6}{x+2}$

នោះគេបាន $f'(x)=\dfrac{(2x+3)(x+2)-(x^2+3x+6)}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{2x^2+7x+\cancel{6}-x^2-3x-\cancel{6}}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

នាំឱ្យ $f'(x_0)=f'(1)=\dfrac{1(1+4)}{(1+2)^2}=\dfrac{5}{9}$

- **ជំហានទី៣** តាមរូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

$$y-\frac{10}{3}=\frac{5}{9}(x-1)$$

$$y=\frac{5}{9}x-\frac{5}{9}+\frac{10}{3}$$

$$=\frac{5}{9}x+\frac{-5+30}{9}$$

$$y=\frac{5}{9}x+\frac{25}{9}$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x_0=1$ គឺ $y=\dfrac{5}{9}(x+5)$

១៦.២ ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

រំលឹកសញ្ញាពហុធាក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$

១. ពហុធាដឺក្រេទី១ មានមួយអញ្ញាត x មានរាង $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$
គេឱ្យ $f(x)=0$ គេបាន $ax+b=0$ សមមូល $ax=-b$ សមមូល $x=-\dfrac{b}{a}$
គេបានសញ្ញានៃ $f(x)=$ a $x+b$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	មានសញ្ញាផ្ទុយ a	0	មានសញ្ញាដូច a

គេពិនិត្យមើលតែសញ្ញារបស់ a នៃ $ax+b$

២. ពហុធាដឺក្រេទី២ មានមួយអញ្ញាត x មានរាង $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$
គេឱ្យ $f(x)=0$ គេបាន $ax^2+bx+c=0$

- បើ $x=\alpha, x=\beta$ និង $\alpha<\beta$ ជាឫសរបស់សមីការ $f(x)=0$ ដែល $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
នោះគេបានសញ្ញានៃ $f(x)=$ a x^2+bx+c ,$a\neq 0$

ពិនិត្យមើលតែសញ្ញារបស់ a នៃ ax^2+bx+c

x	$-\infty$	α		β	$+\infty$
$f(x)$	សញ្ញាដូច a	0	សញ្ញាផ្ទុយ a	0	សញ្ញាដូច a

- បើ $x=\alpha$ ជាឫសរបស់សមីការ $f(x)=0$ ដែល $\alpha\in\mathbb{R}$ នោះគេបានសញ្ញានៃ $f(x)=$ a x^2+bx+c ,$a\neq 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	សញ្ញាដូច a	0	សញ្ញាដូច a

- បើឫសរបស់សមីការ $f(x)=0$ ជាមិនមែនជារបស់ $\mathbb{R}$ មានន័យថាសមីការគ្មានឫស
នោះគេបានសញ្ញានៃ $f(x)=$ a x^2+bx+c ,$a\neq 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	សញ្ញាដូច a	

វិធាន ៧

បើគេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$

- រកដែនកំណត់នៃ f គឺឱ្យ $B(x)\neq 0$
- សិក្សាសញ្ញានៃ $A(x)$ និង $B(x)$ នៅក្នុងដែនកំណត់
- សិក្សាសញ្ញានៃ $f(x)$ ដោយយកសញ្ញានៃ $A(x)$ ចែកនឹងសញ្ញានៃ $B(x)$

ដោយសារប្រមាណវិធីចែក និងគុណសញ្ញាចេញលទ្ធផលដូចគ្នាដូចនេះខាងក្រោមនេះខ្ញុំលើកយកតែប្រមាណវិធីគុណមកបង្ហាញ ។

!
- $(-)(-)=+$
- $(+)(+)=+$
- $(-)(+)=-$
- $(+)(-)=-$

ឧទាហរណ៍ ៧៩

សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+2}$ ។

ចម្លើយ៖ អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x+2\neq 0$ នាំឱ្យ $x\neq -2$

នាំឱ្យដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

បើ $3x+1=0$ នាំឱ្យ $3x=-1$ នាំឱ្យ $x=-\dfrac{1}{3}$

គេបានសញ្ញានៃ $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+2}$

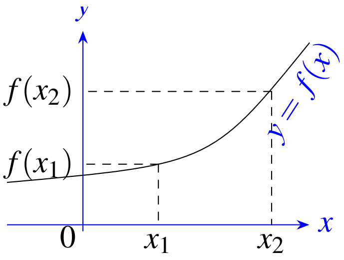
x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x+1$			$-$		0	$+$	
$x+2$		$-$	0		$+$		
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញាគេបាន

- $f(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(-2,-\dfrac{1}{3})$
- $f(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(-\infty,-2)\cup(-\dfrac{1}{3},+\infty)$
- $f(x)=0$ ចំពោះតម្លៃ $x=-\dfrac{1}{3}$

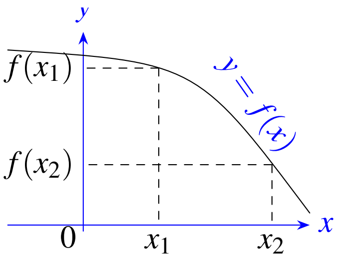
១៦.២.១ អនុគមន៍កើន - ចុះ

គេថា f ជាអនុគមន៍កើន លុះត្រាតែក្រាបរបស់វាកើនពីឆ្វេងទៅស្តាំ ។ មានន័យថាពេល x កើននោះ y ក៏កើនដែរ ។



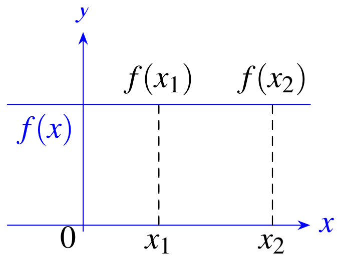
រូប២.១

គេថា f ជាអនុគមន៍ចុះ លុះត្រាតែក្រាបរបស់វាចុះពីឆ្វេងទៅស្តាំ ។ មានន័យថាពេល x កើននោះ y ចុះ ។



រូប២.២

គេថា f ជាអនុគមន៍ថេរ លុះត្រាតែក្រាបរបស់វាជាបន្ទាត់ដេក ស្រប នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ មានន័យថាពេល x កើននោះ y ថេរ ។



រូប២.៣

តាមក្រាបខាងលើយើងកំណត់បាននិយមន័យ១៦.២.១ ដូចខាងក្រោម ៖

និយមន័យ ១៦.២.១ បើ f កំណត់លើចន្លោះ I ដែល $\forall x_1,x_2 \in I$ នោះគេបាន៖

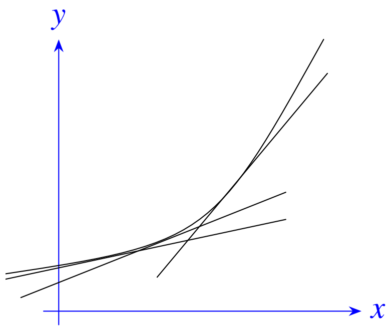
១. f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ I លុះត្រាតែ បើ $x_1 < x_2$ នោះ $f(x_1) < f(x_2)$ ។

២. f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ I លុះត្រាតែ បើ $x_1 < x_2$ នោះ $f(x_1) > f(x_2)$ ។

៣. f ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ I លុះត្រាតែ ចំពោះ $x_1 \neq x_2$ គេបាន $f(x_1) = f(x_2)$ ។

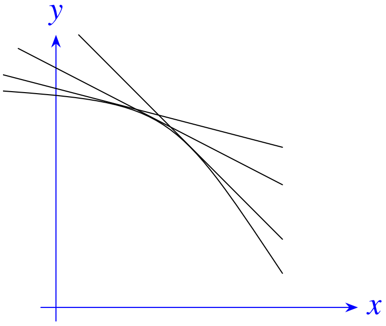
១៦.២.២ អនុគមន៍កើន-ចុះ ដោយប្រើដេរីវេ

ក្នុង រូប ទី១៖ យើង សង្កេតឃើញ ថា គ្រប់ បន្ទាត់ប៉ះ នឹង ក្រាប តាង អនុគមន៍ កើន ទាំងអស់ នោះ សុទ្ធតែ កើន ពីឆ្វេង ទៅ ស្តាំ នោះ មេគុណប្រាប់ទិស នៃ បន្ទាត់ប៉ះ ត្រង់ គ្រប់ ចំណុច ទាំងអស់ នៃ ក្រាប សុទ្ធតែ ជា ចំនួនវិជ្ជមាន នោះ គេ បាន $f'(x) \geq 0$ ចំពោះ គ្រប់ $x \in D_f$ ។



រូបទី១

ក្នុង រូប ទី២៖ យើង សង្កេតឃើញ ថា គ្រប់ បន្ទាត់ប៉ះ នឹង ក្រាប តាង អនុគមន៍ ចុះ ទាំងអស់ នោះ សុទ្ធតែ ចុះពី ឆ្វេង ទៅ ស្តាំ នោះ មេគុណប្រាប់ទិស នៃ បន្ទាត់ប៉ះ ត្រង់ គ្រប់ ចំណុច ទាំងអស់ នៃ ក្រាប សុទ្ធតែជាចំនួនអវិជ្ជមាន នោះគេបាន $f'(x) \leq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D_f$ ។



រូបទី២

តាមរូបទី១ និងរូបទី២ ខាងលើយើងអាចកំណត់បាននូវទ្រឹស្តីបទ១៦.២.២ នៃអនុគមន៍ដូចខាងក្រោម ។

> ទ្រឹស្តីបទ ១៦.២.២ ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និងមានដេរីវេលើ (a,b) ។
> ១. បើ $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a,b)$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន លើចន្លោះ $[a,b]$
> ២. បើ $f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a,b)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ លើចន្លោះ $[a,b]$
> ៣. បើ $f'(x) = 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a,b)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ថេរ លើចន្លោះ $[a,b]$

ឧទាហរណ៍ ៨០

ចូរសិក្សាភាពកើន ឬ ភាពចុះនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ។

ចម្លើយ៖ ដោយ $f'(x) = (x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4$

បើ $f'(x) = 0$ នោះ $2x - 4 = 0$ នាំឱ្យ $x = 2$

បើ $f'(x) > 0$ នោះ $2x - 4 > 0$ នាំឱ្យ $x > 2$

បើ $f'(x) < 0$ នោះ $2x - 4 < 0$ នាំឱ្យ $x < 2$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty, 2]$

f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $[2, +\infty)$

ឧទាហរណ៍ ៨១

សិក្សាភាពកើន ឬ ភាពចុះនៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$ ។

ចម្លើយ៖ អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2 + 3x + 2 \neq 0$ បើ $x^2 + 3x + 2 = 0$ មាន $a = 1, b = 3, c = 2$ តាម $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(1)(2) = 1 > 0$

គេបាន $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - \sqrt{1}}{2} = -2$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$

រកដេរីវេ $f'(x)$ គេបាន

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(-x^2-2x+3)'(x^2+3x+2)-(x^2+3x+2)'(-x^2-2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}\\
&= \frac{(-2x-2)(x^2+3x+2)-(2x+3)(-x^2-2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}\\
&= \frac{-2x^3-6x^2-4x-2x^2-6x-4+2x^3+4x^2-6x+3x^2+6x-9}{(x^2+3x+2)^2}\\
&= \frac{-x^2-10x-13}{(x^2+3x+2)^2}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{-x^2-10x-13}{(x^2+3x+2)^2}$

សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

គ្រប់ $x\in\mathscr{D}_f$ គេបាន $(x^2+3x+2)^2>0$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $-x^2-10x-13$

បើ $-x^2-10x-13=0$ មាន $a=-1, b'=\dfrac{b}{2}=\dfrac{-10}{2}=-5, c=-13$

តាម $\Delta'=(b')^2-ac=(-5)^2-(-1)(-13)=25-13=12>0$

គេបាន $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{-(-5)-\sqrt{12}}{-1}=\dfrac{5-2\sqrt{3}}{-1}=-5+2\sqrt{3}$

$x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{-(-5)+\sqrt{12}}{-1}=\dfrac{5+2\sqrt{3}}{-1}=-5-2\sqrt{3}$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		$-5-2\sqrt{3}$		-2		$-5+2\sqrt{3}$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	

សិក្សាភាពកើន ឬ ភាពចុះនៃអនុគមន៍

តាមតារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ គេបាន

- $f'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(-\infty,-5-2\sqrt{3})\cup(-5+2\sqrt{3},-1)\cup(-1,+\infty)$
  នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះ $(-\infty,-5-2\sqrt{3}),(-5+2\sqrt{3},-1)$ និង $(-1,+\infty)$ ។
- $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(-5-2\sqrt{3},-2)\cup(-2,-5+2\sqrt{3})$
  នោះ f ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះ $(-5-2\sqrt{3},-2)$ និង $(-2,-5+2\sqrt{3})$ ។

១៦.៣ បរមាធៀប

និយមន័យ ១៦.៣.១ អនុគមន៍ f មានជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ (a,b) ដែល $x_0 \in (a,b)$ ។

- បើ $f(x_0)$ មានតម្លៃធំបំផុត ដែល $f(x_0) \geq f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [a,b]$ នោះគេថា f មានចំណុច **អតិបរមាធៀបត្រង់** x_0 ។
- បើ $f(x_0)$ មានតម្លៃតូចបំផុត ដែល $f(x_0) \leq f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [a,b]$ នោះគេថា f មានចំណុច **អប្បបរមាធៀបត្រង់** x_0 ។

១៦.៣.១ បរមាធៀបដោយប្រើដេរីវេទី១

ទ្រឹស្តីបទ ១៦.៣.២ អនុគមន៍ f មានជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ (a,b) និងមាន $x_0 \in (a,b)$ ដែល $f'(x_0) = 0$ ។

១. បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ x_0 នោះ $f(x_0)$ ជាតម្លៃអប្បបរមានៃ f ។

២. បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ x_0 នោះ $f(x_0)$ ជាតម្លៃអតិបរមានៃ f ។

ឧទាហរណ៍ ៨២

រកតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = x^2 + 4x$ ។

ចម្លើយ៖ គេមាន $f(x) = x^2 + 4x$

នោះ $f'(x) = (x^2 + 4x)' = 2x + 4 = 2(x+2)$

ចំពោះ $f'(x) = 0$ នោះ $2(x+2) = 0$ នាំឱ្យ $x = -2$

សញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$

តាមតារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ គេបាន $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ $x = -2$

នោះ $f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = 4 - 8 = -4$ ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = -2$

ដូចនេះ $f(-2) = -4$ ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = -2$

ឧទាហរណ៍ ៨៣

រកតម្លៃបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ ។

ចម្លើយ៖ គេមាន $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ នោះ $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$

បើ $f'(x) = 0$ នោះ $3(-x^2 + 4x - 3) = 0 \Leftrightarrow (-x+1)(x-3) = 0$

$$\Rightarrow x = 1, x = 3$$

សញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$ 1 3 $+\infty$
f'(x)	$-$ 0 $+$ 0 $-$

តាមតារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

គេបាន $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ $x=1$

នោះ $f(1)=-(1)^3+6(1)^2-9(1)+4=0$ ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$

និង $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ $x=3$

នោះ $f(3)=-(3)^3+6(3)^2-9(3)+4=4$ ជាតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=3$

ដូចនេះ $f(1)=0$ ជាអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ និង $f(3)=4$ ជាអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=3$

ឧទាហរណ៍ ៨៨

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ ។

១. រកដែនកំណត់នៃអនុគន៍ f

២. គណនា $f'(x)$

៣. សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

៤. សិក្សាភាពកើន ឬភាពចុះនៃ f

៥. រកបរមាធៀបនៃ $f(x)$

ចម្លើយ៖

១. រកដែនកំណត់នៃ f

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

២. រកដេរីវេ $f'(x)$

$$\begin{aligned}
\text{គេបាន } f'(x) &= \frac{(x^2+x-2)'(x-2)-(x-2)'(x^2+x-2)}{(x-2)^2}\\
&= \frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x-2)}{(x-2)^2}\\
&= \frac{2x^2-4x+x-2-x^2-x+2}{(x-2)^2}\\
&= \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}
\end{aligned}$$

៣. សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

ដោយ $(x-2)^2>0$ គ្រប់ $x\in\mathscr{D}_f$ គេបាន f' យកសញ្ញាតាម x^2-4x ។ បើ $x^2-4x=0$ នោះ $x=0$ ឬ $x=4$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

៤. សិក្សាភាពកើន ឬ ភាពចុះនៃអនុគមន៍ $f(x)$

តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)$ គេបាន $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty,0)$ និង $(4,+\infty)$ ។ $f'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(0,2)\cup(2,4)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $(0,2)$ និង $(2,4)$ ។

៥. រកបរមាធៀបនៃ $f(x)$

តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)$ គេបាន $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=0$ នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=0$ ដែល $f(0)=1$ ។

និង $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=4$ នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=4$ ដែល $f(4)=9$ ។

១៦.៣.២ បរមាធៀបដោយប្រើដេរីវេទី២

ទ្រឹស្តីបទ ១៦.៣.៣ អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ (a,b) និងមាន $x_0 \in (a,b)$ ដែល $f'(x_0)=0$ ។

១. បើ $f''(x_0)>0$ នោះ $f(x_0)$ ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ ។

២. បើ $f''(x_0)<0$ នោះ $f(x_0)$ ជាតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=x_0$ ។

ឧទាហរណ៍ ៨៥

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x^3-3x+3-1$ ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានអតិបរធៀបមួយនិងអប្បបរមាធៀបមួយ ។

ចម្លើយ៖ យើងមាន $f(x)=x^3-3x+2$ គេបាន $f'(x)=3x^2-3$

នាំឱ្យ $f''(x)=6x$ បើ $f'(x)=0$ នោះ $3x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2-1=0$

$$x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

• ចំពោះ $x=-1$ នោះ $f''(-1)=6(-1)=-6<0$ តាមទ្រឹស្តីបទ១៦.៣.៣

នាំឱ្យ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$

• ចំពោះ $x=1$ នោះ $f''(1)=6(1)=6>0$ តាមទ្រឹស្តីបទ១៦.៣.៣

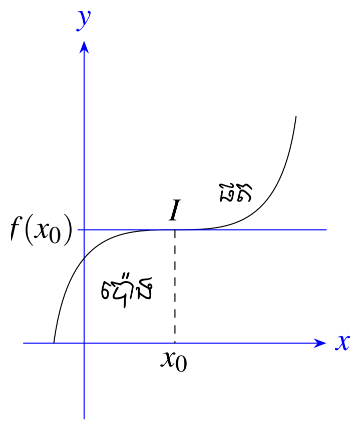
នាំឱ្យ f មានអប្បរមាធៀបត្រង់ $x=1$

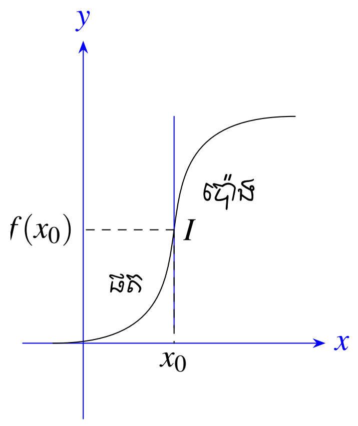
១៦.៤ ការអនុវត្តដេរីវេទី២

១៦.៤.១ ចំណុចរបត់

និយមន័យ ១៦.៤.១ បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបើកមួយដែលមានផ្ទុក x_0 និងបើ f ប្តូរភាពប៉ោងទៅផត ឬភាពផតទៅប៉ោង ត្រង់ I និងមានបន្ទាត់ប៉ះមួយកាត់ត្រង់ I នោះ៖

$I(x_0, f(x_0))$ ហៅថាជាចំណុចរបត់នៃក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។





របៀបកំណត់ចំណុចរបត់

១. រក $f''(x)$

២. កំណត់តម្លៃ $x=c$ ដែលធ្វើឱ្យ $f''(c)=0$ ឬ $f''(x)$ កំណត់មិនបានត្រង់ $x=c$

៣. កំណត់សញ្ញា $f''(x)$ នៅខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំនៃតម្លៃ $x=c$ ដែលរកឃើញ ។ បើ $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាត្រង់ $x=c$ នោះ $(c, f(c))$ ជាចំណុចរបត់នៃអនុគមន៍ f ។

ឧទាហរណ៍ ៨៦

រកចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង $f(x)=x^3-2x+3$ ។

ចម្លើយ៖ យើងមាន $f(x)=x^3-2x+3$

គេបាន $f'(x)=(x^3-2x+3)'$

$$=3x^2-2$$

$$f''(x)=(3x^2-2)'=6x$$

យក $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0$

$$\Leftrightarrow x=0$$

តារាងសញ្ញានៃ $f''(x)$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f''(x)$	$-$ 0 $+$

ដោយ f'' ប្តូរសញ្ញាត្រង់ $x=0$ ដែល $f(0)=0^3-2(0)+3=3$

ដូចនេះ $(0,3)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង $f(x)$

១៦.៥ ការអនុវត្ត ក្នុងការដោះស្រាយចំណោទបរមា

ការអនុវត្តចំណុចបរមាក្នុងដំណោះស្រាយចំណោទបញ្ហា នៅក្នុងផ្នែកនេះយើងអាចដោះស្រាយបានតាមពីររបៀបគឺ ៖

១. **ប្រើដេរីវេទី១៖**

- បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ x_0 និង $f'(x_0)=0$
  នោះ $f(x_0)$ ជាតម្លៃអប្បបរមានៃ f ។
- បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ x_0 និង $f(x_0)=0$
  នោះ $f(x_0)$ ជាតម្លៃអតិបរមានៃ f ។

២. **ប្រើដេរីវេទី២៖**

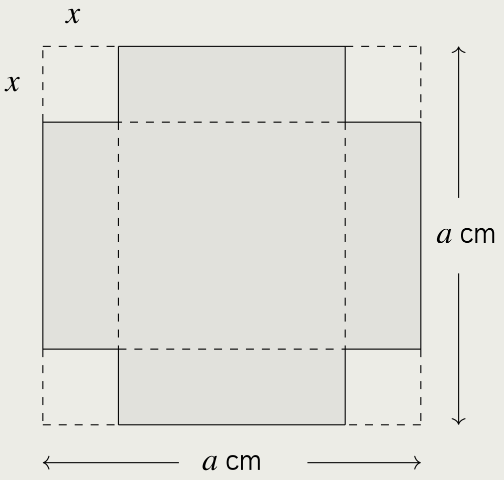
- បើ $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$ នោះ $f(x_0)$ ជាតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ x_0
- បើ $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$ នោះ $f(x_0)$ ជាតម្លៃអតិបរមាត្រង់ x_0

វិធាន ៨: របៀបដោះស្រាយចំណោទបរមា

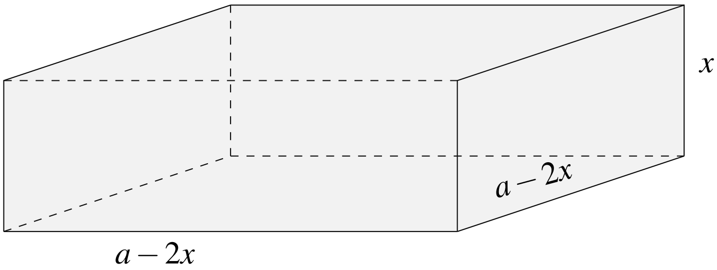
- ជំហានទី១៖ គូសរូប តាមសម្មតិកម្មដែលគេឱ្យ
- ជំហានទី២៖ បង្កើតរូបមន្តជាអនុគមន៍នៃ x ។ ឧបមាថា $V(x)$ ជារូបមន្តដែលយើងបង្កើត ដែលធ្វើឱ្យមានចំណុចបរិមា
- ជំហានទី៣៖ គណនា $V'(x)$ ហើយឱ្យ $V'(x)=0$ រួចទាញរកតម្លៃ x
- ជំហានទី៤៖
  - ទាញរកតម្លៃបរមាធៀបដោយប្រើដេរីវេទី១ ។
  - ទាញរកតម្លៃបរមាធៀបដោយប្រើដេរីវេទី២ ។

ឧទាហរណ៍ ៨៧

គេយកក្រដាសក្រាស់មួយផ្ទាំងរាងជាការេ ដែលមានរង្វាស់ជ្រុង a cm មកធ្វើជាប្រអប់មួយដែលគ្មានគម្រប ។ គេកាត់យកចេញនូវការេតូចៗចំនួនបួនដែលមានរង្វាស់ជ្រុង x cm ដូចក្នុងរូប ។ គេបត់ផ្នែកដែលនៅសល់ឱ្យបានជាប្រអប់មួយ មានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែង ដែលមានបាតជាការេ ។ រករង្វាស់ជ្រុង x នៃការេដែលត្រូវកាត់យកចេញ ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត។ រកមាឌធំបំផុតនោះ ។



ចម្លើយ៖ រករង្វាស់ជ្រុង x នៃការេដែលកាត់ចេញ



មាឌនៃប្រអប់ $=$ ក្រឡាផ្ទៃបាត $\times$ កម្ពស់

គេបាន $V(x)=(a-2x)\times(a-2x)\times x$

$V(x)=x(a-2x)^2, a-2x>0$

នាំឱ្យ $V'(x)=x'(a-2x)^2+x[2(a-2x)'(a-2x)^{2-1}]\quad,\{(uv)'=u'v+v'u\}$

$=(a-2x)^2+x\times 2(a-2x)^1\times(-2)$

$=(a-2x)(a-2x-4x)$

$V'(x)=(a-2x)(a-6x)$

ចំពោះ $V'(x)=0$ គេបាន $a-2x=0\Rightarrow x=\frac{a}{2}$ ឬ $a-6x=0\Rightarrow x=\frac{a}{6}$

ដោយ $a-2x>0$ នោះ $a>2x\Rightarrow x<\frac{a}{2}$ យក $x=\frac{a}{6}$ ព្រោះ $0<\frac{a}{6}<\frac{a}{2}$

ពិនិត្យមើល $V''(x)=(a-2x)'(a-6x)+(a-2x)(a-6x)'$

$=-2(a-6x)+(a-2x)(-6)$

$V''\left(\frac{a}{6}\right)=-2\left(a-6\times\frac{a}{6}\right)+\left(a-2\times\frac{a}{6}\right)(-6)$

$=-2(0)+(\frac{3a-a}{3})(-6)=2a(-2)=-4a<0$

ដោយ $V'\left(\frac{a}{6}\right)=0$ និង $V''\left(\frac{a}{6}\right)<0$ តាមទ្រឹស្តីបទ??

គេបាន $V\left(\frac{a}{6}\right)$ ជាតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=\frac{a}{6}$

ដូចនេះ ប្រអប់មានមាឌធំបំផុត កាលណាគេយក $x=\frac{a}{6}$ cm

គេបាន មាឌធំបំផុតគឺ $V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{a}{6}\left(a-2\times\frac{a}{6}\right)^2=\frac{a}{6}\times\left(\frac{6a-2a}{6}\right)^2$

$$=\frac{a}{6}\times\left(\frac{4a}{6}\right)^2=\frac{a}{6}\times\left(\frac{2a}{3}\right)^2=\frac{a}{6}\times\frac{4a^2}{9}$$

ដូចនេះ ប្រអប់មានមាឌធំបំផុតគឺ $V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27}$ cm^3

ឧទាហរណ៍ ៨៨

គេយកក្រដាសក្រាស់មួយផ្ទាំងជារាងចតុកោណកែងដែលមានទទឹង 30 cm និងបណ្តោយ 50 cm មកធ្វើជាប្រអប់មួយដែលគ្មានគម្រប ។ គេកាត់យកចេញនៅការេតូចៗចំនួនបួនប៉ុនៗគ្នា ហើយគេបត់ផ្នែកដែលនៅសល់ជាប្រលេពីប៉ែតកែង ។ រករង្វាស់ជ្រុងនៃការេដែលត្រូវកាត់ចេញដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំ បំផុត ។

ចម្លើយ៖ តាង x cm ជាជ្រុងនៃការេដែលត្រូវកាត់ចេញ

ដែល $x>0$ និង $30-2x>0\Rightarrow 30>2x\Rightarrow x<15$ ឬ $0<x<15$

មាឌនៃប្រលេពីប៉ែតកែង $=$ ក្រលាផ្ទៃបាត $\times$ កម្ពស់

គេបាន $V(x)=(30-2x)\times(50-2x)\times x$

$$V(x)=(30-2x)\times(50x-2x^2)$$

$$\Rightarrow V'(x)=(30-2x)'(50x-2x^2)+(30-2x)(50x-2x^2)'$$

$$=-2(50x-2x^2)+(30-2x)(50-4x)$$

$$=-100x+4x^2+1500-120x-100x+8x^2$$

$$=12x^2-320x+1500$$

$$=2(6x^2-160x+750)$$

ចំពោះ $V'(x)=0$

គេបាន $6x^2-160x+75=0, a=6, b'=\frac{-160}{2}=-80, c=750$

តាម $\Delta'=(b')^2-ac=(-80)^2-6(750)=1900=10^2\times19$

គេបាន $x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{80\pm10\sqrt{19}}{6}=\frac{40\pm5\sqrt{19}}{3}$

- បើ $x_1=\frac{40+5\sqrt{19}}{3}<15$ នោះ $40+5\sqrt{19}<45$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{19}<45-40=5$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{19}\right)^2<1^2$$

$$\Leftrightarrow 19<1 \quad \text{មិនពិត}$$

មានន័យថា $x_1\notin(0,15)$

- បើ $x_2 = \dfrac{40-5\sqrt{19}}{3} < 15$ នោះ $40-5\sqrt{19} < 45$

$$\Leftrightarrow -5\sqrt{19} < 45-40 = 5$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{19} < 1$$
$$\Leftrightarrow (-\sqrt{19})^2 > 1^2$$
$$\Leftrightarrow 19 > 1$$

មានន័យថា $x_2 \in (0,15)$

ពិនិត្យមើលសញ្ញានៃ $V'(x)$

x	0		$\frac{40-5\sqrt{19}}{3}$		15
$V'(x)$		$+$	0	$-$	

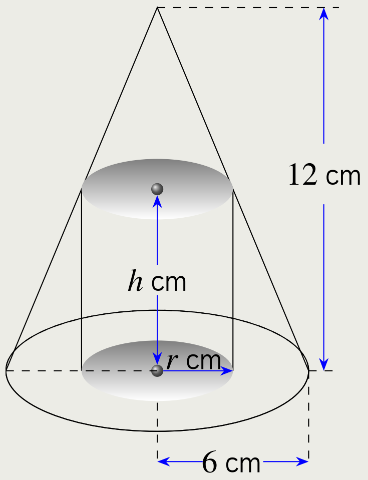
ដោយ $V'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ $x = \dfrac{40-5\sqrt{19}}{3}$

គេបាន $V\left(\dfrac{40-5\sqrt{19}}{3}\right)$ ជាតម្លៃអតិបរមា

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត កាលណាគេយក $x = \dfrac{40-5\sqrt{19}}{3}$ cm

ឧទាហរណ៍ ៨៩

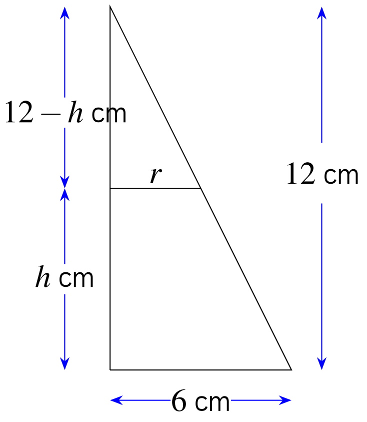
រកកាំ r និងកម្ពស់ h នៃស៊ីឡាំង ដើម្បីឱ្យស៊ីឡាំងមានមាឌធំបំផុតដែល អាចចារឹកក្នុងកោនបរិវត្តន៍មួយ ដែលមានកម្ពស់ 12 cm និងកាំបាត 6 cm ដូចរូបខាងស្តាំ។



ចម្លើយ៖ រកកាំ r និងកម្ពស់ h នៃស៊ីឡាំង

មាឌរបស់ស៊ីឡាំង $=$ មេគុណរង្វង់ $\times$ កាំ $\times$ កាំ $\times$ កម្ពស់
គេបាន

$$V = \pi r^2 h \qquad (១៦១)$$



តាមរូបខាងស្តាំ គេមានត្រីកោណពីរដូចគ្នា
នោះគេបានផលធៀប

$$\frac{12-h}{r} = \frac{12}{6}$$

$$12 - h = 2r$$

$$h = 12 - 2r \qquad (១៦២)$$

យកសមីការ (១៦២) ជំនួសចូល (១៦១) គេបាន

$$V = \pi r^2(12-2r) = 12\pi r^2 - 2\pi r^3 \qquad (១៦៣)$$

ដោយស៊ីឡាំងចារឹកក្នុងកោណគេបាន $0 \le r \le 6$ នោះ V ជាអនុគមន៍នៃ r និងជាប់លើ $[0,6]$

យកសមីការ (១៦៣) ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង r

គេបាន $\frac{dV}{dr} = 12\pi \times 2r^{2-1} - 2\pi \times 3r^{3-1}$

$= 24\pi r - 6\pi r^2$

ឱ្យ $\frac{dV}{dr} = 0$ គេបាន $24\pi r - 6\pi r^2 = 0$ សមមូល $6\pi r(4-r) = 0$

នាំឱ្យ $r = 0$ ឬ $4 - r = 0 \Rightarrow r = 4$

ពិនិត្យមើលសញ្ញានៃ $\frac{dV}{dr} = -6\pi r^2 + 24\pi r$

r	0		4		6
$\frac{dV}{dr}$	0	$+$	0	$-$	

ចន្លោះឫសមានសញ្ញាផ្ទុយពី -6π

សញ្ញាដូចពីចន្លោះឫស

ដោយ $\frac{dV}{dr}$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ $r = 4$

គេបាន $V(4)$ ជាតម្លៃអតិបរមា ។ គេយក $r = 4$ ជំនួសចូលសមីការ (១៦២)

គេបាន $h = 12 - 2(4) = 12 - 8 = 4$

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យស៊ីឡាំងមានមាឌធំបំផុតគេត្រូវយក $r = 4$ cm និង $h = 4$ cm

ឧទាហរណ៍ ៩០

ABC ជាត្រីកោណសម័ង្សដែលមានវិមាត្រស្មើនឹង 25 cm ។ M ជាចំណុចមួយនៅលើ AB ដែល $AM = x$ cm ។ គេសង់ចតុកោណកែង $MNPQ$ ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែង $MNPQ$ មានតម្លៃធំបំផុត ។

ចម្លើយ៖ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែង $MNPQ$ មានតម្លៃធំបំផុត

តាង $S(x)$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែង $MNPQ$

គេបាន $S(x) = MN \times MQ$

ដោយ $MN \| AC$ នោះ BMN ជាត្រីកោណសម័ង្ស

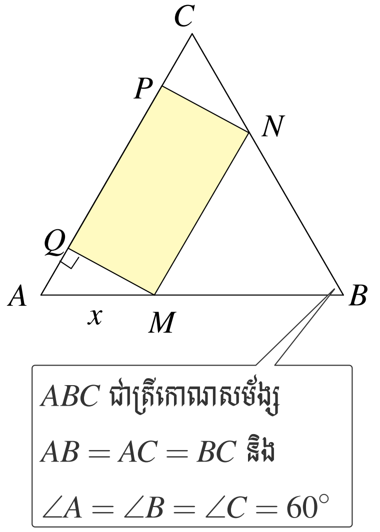
គេបាន $MN = MB = 25 - x$

ក្នុងត្រីកោណ AMQ

មាន $\sin A = \dfrac{MQ}{AM}$

សមមូល $\sin 60^\circ = \dfrac{MQ}{x}$

នាំឱ្យ $MQ = x\sin 60^\circ = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$



គេបាន $S(x) = (25 - x)\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}(25x - x^2)}{2}$$

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(25 - 2x)$$

បើ $S'(x) = 0$ នោះ៖ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(25 - 2x) = 0$

$$\Rightarrow 25 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{25}{2}$$

សញ្ញានៃ $S'(x)$

x	0		$\frac{25}{2}$		25
$S'(x)$		$+$	0	$-$	

ចន្លោះឫសមានសញ្ញាផ្ទុយពី -6π

សញ្ញាផ្ទុយពីចន្លោះឫស

ដោយ $S'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ $x = \dfrac{25}{2}$ នោះ $S\left(\dfrac{25}{2}\right)$ ជាតម្លៃអតិបរមា

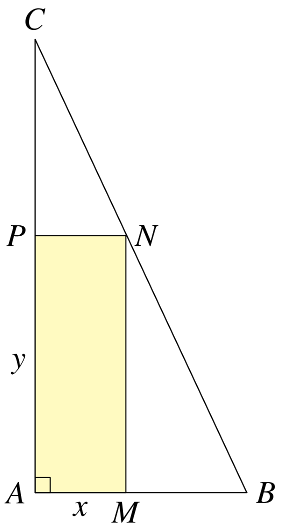
ដូចនេះ៖ $x = \dfrac{25}{2}$ cm

ឧទាហរណ៍ ៩១

ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ដែលមានវិមាត្រ $AB = 7$ cm និង $AC = 15$ cm ។ $AMNP$ ជាចតុកោណកែងចារឹកក្នុងត្រីកោណកែង ABC ដែលមានវិមាត្រ x, y ចំពោះ $0 < x < y$ ។ រក x និង y ដើម្បីឱ្យ $AMNP$ មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត ។

ចម្លើយ៖ រក x និង y ដើម្បីឱ្យចតុកោណ $AMNP$ មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត

តាង $S(x)$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែង $AMNP$
គេបាន $S(x) = AM \times AP = xy$



តាមរូប $\Delta ABC \sim \Delta MNB$ (ដំណូចΔ)

គេបាន $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{MB}{MN}$

$= \dfrac{AB - AM}{MN}$

$\dfrac{7}{15} = \dfrac{7 - x}{y}$

$y = \dfrac{15(7 - x)}{7}$

គេបាន $S(x) = x \times \dfrac{15(7 - x)}{7}$

$= \dfrac{15}{7} \times (7x - x^2)$

$S'(x) = \dfrac{15}{7} \times (7 - 2x)$

បើ $S'(x) = 0$ នោះ៖ $\dfrac{15}{7} \times (7 - 2x) = 0 \Rightarrow 7 - 2x = 0$

$\Rightarrow 7 = 2x$

$\Rightarrow x = \dfrac{7}{2}$

សញ្ញានៃ $S'(x)$ ដែល $0 < x < 7$, $0 < y < 15$ និង $0 < x < y$

x	0		$\frac{7}{2}$		7
$S'(x)$		$+$	0	$-$	

ដោយ $S'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ $x = \dfrac{7}{2}$ នោះ៖ $S\left(\dfrac{7}{2}\right)$ ជាតម្លៃអតិបរមា

បើ $x = \dfrac{7}{2}$ នោះ៖ $y = \dfrac{15(7 - \frac{7}{2})}{7} = \dfrac{15}{7} \times \dfrac{7}{2} = \dfrac{15}{2}$

ដូចនេះ៖ $x = \dfrac{7}{2}$ cm និង $y = \dfrac{15}{2}$ cm

១៦.៦ លំហាត់

លំហាត់ ២១៨

ក. ចូររកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y=-x^2+x+3$ ត្រង់ $x=2$ ។

ខ. ចូររកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y=-x^3+3x+4$ ត្រង់ $x=2$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២១៩

អនុគមន៍ $f(x)=2x^3-16x+11$ មានក្រាប C ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុច $A(2,-5)$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -10 ហើយប៉ះនឹងក្រាប C ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២២០

អនុគមន៍ $f(x)=4x^3+9x^2-30x+1$ មានក្រាប C ។

ក. រកកូអរដោនេនៃគ្រប់ចំណុចប៉ះនៃក្រាប C ដែលមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក ។

ខ. រកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះទាំងនោះ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២២១

អនុគមន៍ $y=3x^2-4x+1$ កំណត់នៅលើ $\mathbb{R}$ និងមានក្រាប C ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ $y=-\frac{x}{5}+2$ ។

ខ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ $y=x+5$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២២២

ចូរសិក្សាទិសដៅអថេរភាព រកអតិបរមា និងអប្បបរមា ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍នីមួយៗដូចខាងក្រោម:

ក. $y=-x^3+3x^2+4$ ខ. $y=x(x-3)^2$ គ. $y=-x^2(x-1)^2$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២២៣

អនុគមន៍ $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+2$ មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ និងមានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=2$ ។

ក. រកតម្លៃនៃចំនួនពិត a និង b ។

ខ. រកផលដករវាងតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាធៀបនៃ f ។

ចម្លើយ

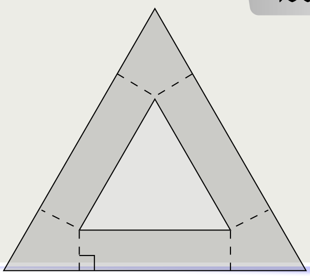
លំហាត់ ២២៨

អនុគមន៍ $f(x)=x^4+29$ និង $g(x)=4x^3$ មានក្រាប C_1 និង C_2 ។ បន្ទាត់ D ស្របអ័ក្សអរដោនេកាត់ក្រាប C_1 និង C_2 រៀងគ្នាត្រង់ A និង B ។ រកប្រវែងអប្បបរមានៃអង្កត់ $[AB]$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២២៩

បន្ទះស័ង្កសីរាងត្រីកោណសម័ង្សមួយមានជ្រុងប្រវែង a ។
គេកាត់យកចេញពីផ្នែកត្រង់កំពូលទាំងបីនូវចតុកោណប៉ុនៗគ្នា។
គេបត់ផ្នែកនៅសល់ឲ្យបានជាប្រអប់មួយដែលមាន រាងជាព្រីសត្រីមុខនិយ័ត
ហើយគ្មានគម្របៗ រកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យប្រអប់មានមាឌធំបំផុត។



ចម្លើយ

ថ្នាក់ទី ______________________

គោត្តនាម នាម ______________________

ភេទ ______________________

លេខរៀង______________________

អថេរភាព និងក្រាបនៃអនុគមន៍

១៧.១ របៀបសិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f

1. រកដែនកំណត់
2. ទិសដៅអថេរភាព
   - គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (បើមាន)
   - គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា
   - រកចំណុចបរមា (អតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀប)
   - រកចំណុចរបត់(បើមាន)
   - សង់តារាងអថេរភាព
3. សំណង់ក្រាប
   - រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(y=0)$
   - រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអ័ក្សអរដោនេ $(x=0)$
   - បង្ហាញថាក្រាបតាងអនុគមន៍មានអ័ក្សឆ្លុះ ឬផ្ចិតឆ្លុះ (បើមាន)
   - សង់ក្រាប

១៧.២ រូបមន្តដេរីវេ

ចំពោះ $k \in \mathbb{R}$ និង u, v ជាអនុគមន៍នៃ x គេបាន:

- $y = k \Rightarrow y' = 0$
- $ykx \Rightarrow y' = k$
- $y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$
- $y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x^2}$
- $y = \dfrac{1}{x^n} \Rightarrow y' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
- $y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v'$
- $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$
- $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

១៧.៣ ដែនកំណត់

- អនុគមន៍ពហុធា $f(x)$ មានន័យគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$
- អនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ មានន័យកាលណា $q(x) \neq 0$

១៧.៤ ផ្ចិតឆ្លុះ ឬ អ័ក្សឆ្លុះនៃខ្សែកោង

១៧.៤.១ ភាពគូ-ភាពសេស

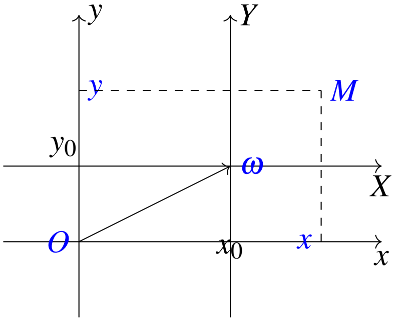
- ចំពោះ $\forall x,\ -x \in D$ គេបាន $f(-x) = -f(x)$ គេថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍សេស ហើយក្រាបវាមានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ ។
- ចំពោះ $\forall x,\ -x \in D$ គេបាន $f(-x) = f(x)$ គេថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍គូ ហើយក្រាបវាមានអ័ក្សអរដោនេ $(y'oy)$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ ។

១៧.៤.២ ផ្ចិតឆ្លុះ ឬ អ័ក្សឆ្លុះ

- ចំណុច $I(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f លុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x) = 2b$ ។
- បន្ទាត់ $x = a$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f លុះត្រាតែ $f(2a-x) = f(x)$ ។

១៧.៤.៣ រូបមន្តបម្លែងកិលអ័ក្ស

យកចំណុច $M(x,y)$ ក្នុងតម្រុយ (xoy) ។ រំកិលគល់ o ទៅត្រង់ចំណុច $\omega(x_0,y_0)$ នោះអ័ក្ស $(x'x)$ រំកិលទៅរក (ωX) និង $(y'y)$ រំកិលទៅរក (ωY) ។ កូអរដោនេនៃចំណុច M ធៀបនិងតម្រុយថ្មី $(X\omega Y)$ គឺ $M(X,Y)$ ។



គេបាន $\begin{cases} x &= x_0 + X \\ y &= y_0 + Y \end{cases}$ ហៅថារូបមន្តបម្លែងកិលអ័ក្ស ។

១៧.៥ ខ្សែកោងកាត់តាមចំណុចនឹង

ដើម្បីបង្ហាញថាខ្សែកោង C_m កាត់តាមចំណុចនឹងជានិច្ច និងគណនាចំណុចនឹង ទោះជា m ប្រែប្រួល គេត្រូវ៖

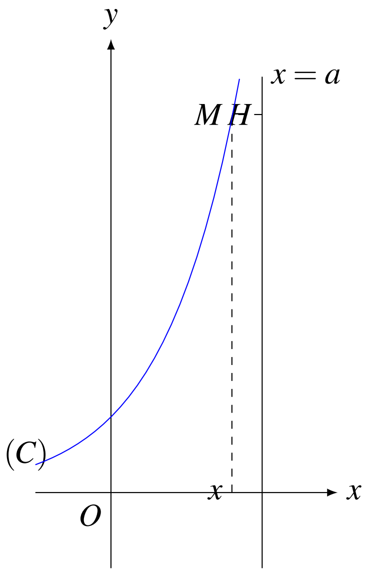
- សរសេរអនុគមន៍ $y = f_m(x)$ ឲ្យទៅជារាង $Am + B = 0, (A$ និង B ជាអនុគមន៍នៃ x និង $y)$ ឬ $Am^2 + Bm + C = 0, (A, B$ និង C ជាអនុគមន៍នៃ x និង $y)$ ឬ .... ។
- ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង C_m កាត់តាមចំណុចនឹងមិនអាស្រ័យ m គេទាញបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} A &= 0 \\ B &= 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} A &= 0 \\ B &= 0 \\ C &= 0 \end{cases}$ ឬ ...
- ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការរក x និង y
- ចំណុចដែលមានកូអរដោនេ (x,y) គឺជាចំណុចនឹងដែលខ្សែកោង C_m កាត់តាម ។
- បើប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ នោះគ្មានចំណុចនឹង ។

សំគាល់

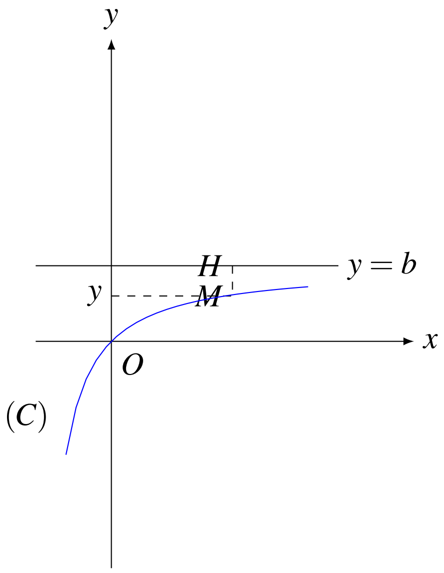
បើខ្សែកោងកាត់តាមចំណុចនឹងមួយ ហើយគេសួររកលក្ខណៈពិសេសរបស់ខ្សែកោងត្រង់ចំណុចនឹងនោះ គឺគេចង់ឲ្យបង្ហាញថា ខ្សែកោងទាំងអស់មានបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ចំណុចនឹងនោះ ។ ដូចនេះ ដេរីវេត្រង់ចំណុចនឹងនោះជាចំនួនថេរ (មិនជាប់ m) ។

១៧.៦ អាស៊ីមតូត

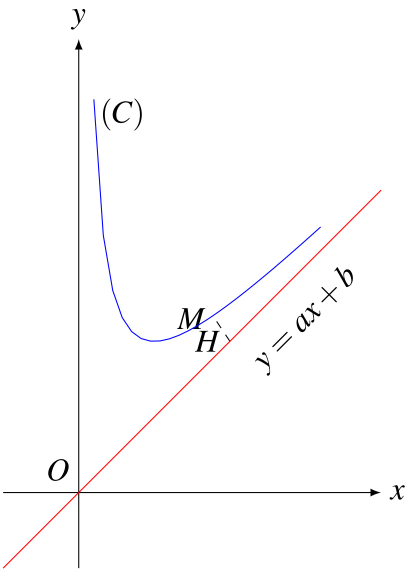
បន្ទាត់ D ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ លុះត្រាតែចម្ងាយពី M ទៅបន្ទាត់ D ខិតទៅជិតសូន្យ កាលណា M រត់នៅលើខ្សែកោង C ហើយខិតឆ្ងាយអនន្ត ។



អាស៊ីមតូតឈរ



អាស៊ីមតូតដេក



អាស៊ីមតូតទ្រេត

អាស៊ីមតូតឈរ

បើ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ គ្មានន័យត្រង់ $x=a$ នោះបន្ទាត់ $x=a$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

អាស៊ីមតូតដេក

បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ (b ជាចំនួនថេរ) នោះបន្ទាត់ $y=b$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

អាស៊ីមតូតទ្រេត

វិធាន ៩

បន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបរបស់អនុគមន៍ f កាលណា $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ ឬ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ ។

បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ អាចសរសេរជារាង $f(x)=ax+b+\varepsilon(x)$ គេបាន $f(x)-(ax+b)=\varepsilon(x)$ ដែល $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$ ឬ $\lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon(x)=0$ នោះបន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

វិធាន ១០

បន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបរបស់អនុគមន៍ f កាលណា $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ និង $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$

១៧.៧ សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ គេត្រូវរក៖

1. ដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{q}{p}\}$
2. សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច $f(x)=mx+n+\dfrac{k}{px+q}$
3. សិក្សាទិសដៅអថិរភាព
   - រកដេរីវេ $f'(x)$
   - សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$
   - សិក្សាភាពកើន ឬ ភាពចុះនៃអនុគមន៍ $f(x)$
   - រកបរមាធៀបនៃ $f(x)$ (អតិបរមាធៀប ឬ អប្បបរមាធៀប)
   - គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់
   - រកអាស៊ីមតូត (អាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេត)
   - តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f
4. សង់ក្រាប
   - រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និង អក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$ ដោយឲ្យ $y=0$ រក x ។
   - រកចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និង អក្សអរដោនេ $(y'oy)$ ដោយឲ្យ $x=0$ រក y ។
   - រកផ្ចិតឆ្លុះ $I(a,b)$ ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេត ។ រួចបង្ហាញថាចំណុច $I(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះដោយប្រើរូបមន្ត $f(2a-x)+f(x)=2b$ ។

ឧទាហរណ៍ ៩២

សិក្សាអថិរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ ។

ចម្លើយ៖

1. ដែនកំណត់
   អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$
   ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ។
2. សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច
   ធ្វើប្រមាណវិធីចែកពហុធា គេបាន $f(x)=x+3+\dfrac{4}{x-2}$ ។
3. សិក្សាទិសដៅអថិរភាព
   - រកដេរីវេ $f'(x)$

គេបាន $f'(x) = \dfrac{(x^2+x-2)'(x-2)-(x-2)'(x^2+x-2)}{(x-2)^2}$

$$= \frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x-2)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x+x-2-x^2-x+2}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

- សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

  ដោយ $(x-2)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in D_f$ គេបាន $f'(x) = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$ យកសញ្ញាតាម x^2-4x ។ បើ $x^2-4x = 0$ នោះ $x = 0$ ឬ $x = 4$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- សិក្សាភាពកើន ឬ ភាពចុះនៃអនុគមន៍ $f(x)$ តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)$ គេបាន $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty,0)$ និង $(4,+\infty)$ ។ $f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (0,2)\cup(2,4)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $(0,2)$ និង $(2,4)$ ។
- រកបរមាធៀបនៃ $f(x)$

  តាមតារាងសញ្ញា $f'(x)$ គេបាន ដោយ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x = 0$ នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ ដែល $f(0) = 1$ ។ និង $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x = 4$ នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = 4$ ដែល $f(4) = 9$ ។
- គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+3+\dfrac{4}{x-2}\right) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+3+\frac{4}{x-2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}\left(x+3+\frac{4}{x-2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}\left(x+3+\frac{4}{x-2}\right) = +\infty$$

- អាស៊ីមតូត

  ដោយ $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។ គេមាន $f(x) = x+3+\dfrac{4}{x-2}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+3)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-2} = 0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x+3$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f
- តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	9	↗	$+\infty$

4. សង់ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និង អក្ស $(x'ox)$

  បើ $y=0$ គេបាន $\frac{^2+x-2}{x-2}=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \quad (x\neq 2)$ ដែល $a=1,b=1,c=-2$

  តាម $a+b+c=1+1-2=0$ នោះ $x=1, x=\frac{c}{a}=\frac{-2}{1}=-2$

- ផ្ចិតឆ្លុះ

  $I(a,b)$ ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតគេមានសមីការអាស៊ីមតូតឈរ $x=2$ សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x+3$ គេបាន $x=2 \Rightarrow y=2+3=5$ នោះ $I(2,5)$ បង្ហាញថាចំណុច $I(2,5)$ ជាផ្ចិតឆុះនៃក្រាប ដោយប្រើរូបមន្ត $f(2a-x)+f(x)=2b$ យើងត្រូវបង្ហាញថា $f(4-x)+f(x)=10$

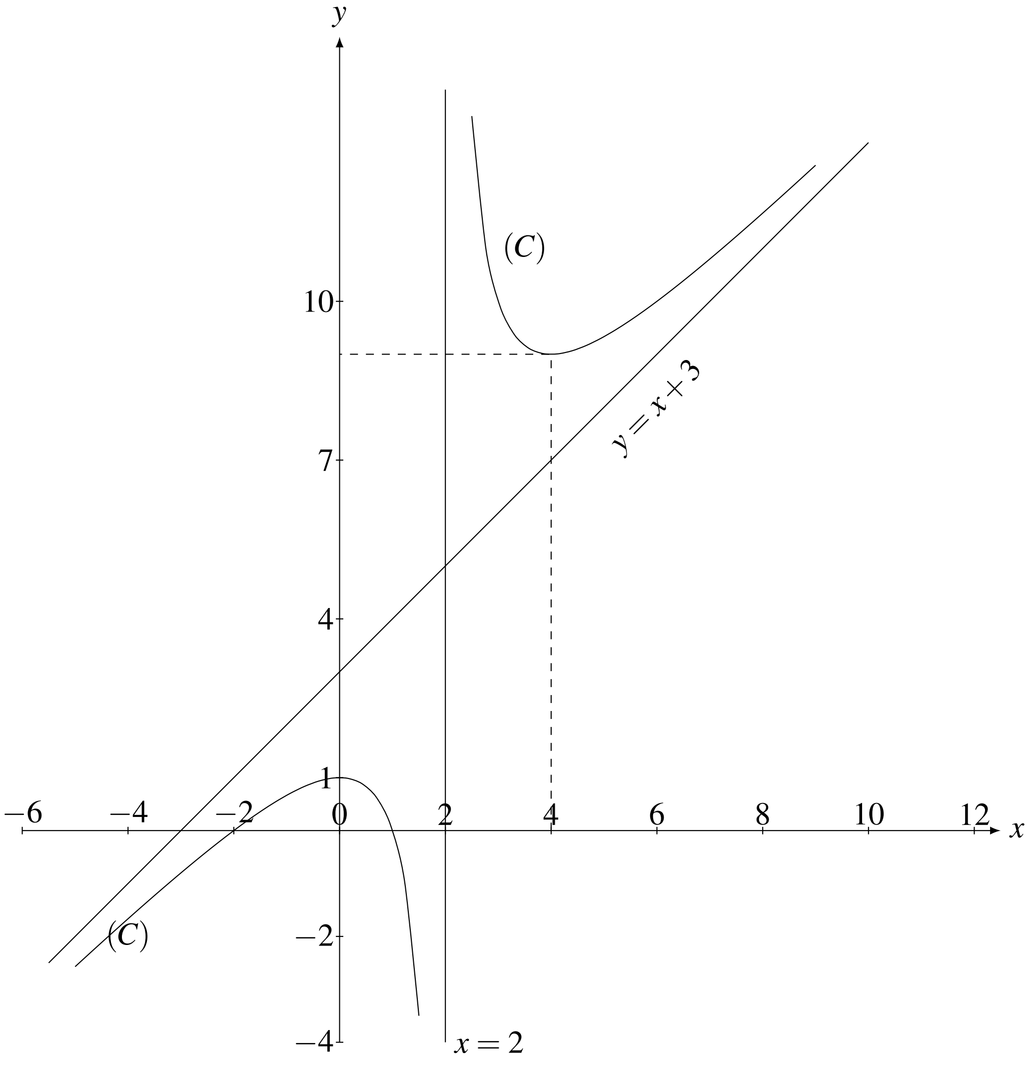
  ដោយ $f(x)=x+3+\frac{4}{x-2}$

  $$\begin{aligned}\Longrightarrow f(4-x)&=4-x+3+\frac{4}{4-x-2}\\&=7-x+\frac{4}{2-x}\\&=7-x-\frac{4}{x-2}\end{aligned}$$

  គេបាន $f(4-x)+f(x)=x+3+\frac{4}{x-2}+7-x-\frac{4}{x-2}=10$ ពិត

  ដូចនេះ ចំណុច $I(2,5)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។

- ក្រាប



ឧទាហរណ៍ ៩៣

សិក្សាអថិរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{x+1}$ ។

ចម្លើយ៖

1. ដែនកំណត់

   អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$

   ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ។

2. សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច

   ធ្វើប្រមាណវិធីចែកពហុធា គេបាន $f(x)=-x+1+\dfrac{4}{x+1}$ ។

3. សិក្សាទិសដៅអថិរភាព

   - រកដេរីវេ $f'(x)$

     គេបាន $$f'(x)=\frac{(-x^2-2x+3)'(x+1)-(x+1)'(-x^2-2x+3)}{(x+1)^2}$$
     $$=\frac{(-2x-2)(x+1)-(-x^2-2x-3)}{(x+1)^2}$$
     $$=\frac{-2x^2-2x-2x-2+x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$
     $$=\frac{-x^2-2x-5}{(x+1)^2}$$

   - សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

     ដោយ $(x+1)^2>0$ គ្រប់ $x\in D_f$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x-5}{(x+1)^2}$ យកសញ្ញាតាម $-x^2-2x-5$ ។

     បើ $-x^2-2x-5=0$ ដែលមាន $a=-1,b=-2,c=-5$

     តាម $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(-1)(-5)=-16<0$ គេបាន ត្រីធា $-x^2-2x-5$ យកសញ្ញាតាមមេគុណ a ដោយ $a=-1<0\Rightarrow -x^2-2x-5<0$ នោះ $f'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D_f$ ។

   - សិក្សាភាពកើន ឬ ភាពចុះនៃអនុគមន៍ $f(x)$

     តាមការសិក្សាសញ្ញាដេរីវេខាងលើ គេបាន $f'(x)<0,\forall x\in D_f$

     ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះចំពោះគ្រប់ $x\in D_f$ ។

   - រកបរមាធៀបនៃ $f(x)$ ៖ f គ្មានបរមាធៀប

   - គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-1+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x-1+\frac{4}{x+1}\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left(-x-1+\frac{4}{x+1}\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(-x-1+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

   - អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបអនុគមន៍ f ។

គេមាន $f(x)=-x-1+\dfrac{4}{x+1}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x+1}=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមាន សមីការ $y=-x-1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

- តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$-\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

4. សង់ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និង អ័ក្ស $(x'ox)$

បើ $y=0 \quad \Rightarrow \dfrac{-x^2-2x+3}{x+1}=0$

$$\Rightarrow -x^2-2x+3=0$$

$$\Rightarrow x=1, x=-3$$

ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $(x'ox)$ ត្រង់ $(x=1,y=0)$ និង $(x=-3,y=0)$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និង អ័ក្ស $(y'oy)$

បើ $x=0\Rightarrow y=f(0)=\dfrac{-0^2-2(0)+3}{0+1}=3$

ដូចនេះ ក្រាបកាត់អ័ក្ស $(y'oy)$ ត្រង់ $(x=0,y=3)$ ។

- ផ្ចិតឆ្លុះ

$I(a,b)$ ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតទ្រេតគេមានសមីការអាស៊ីមតូតឈរ $x=-1$

សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេ $y=-x-1$ គេបាន $x=-1\Rightarrow y=-(-1)-1=0$ នោះ $I(-1,0)$ បង្ហាញថាចំណុច

$I(-1,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបដោយប្រើរូបមន្ត $f(2a-x)+f(x)=2b$

យើងត្រូវបង្ហាញថា $f(-2-x)+f(x)=0$

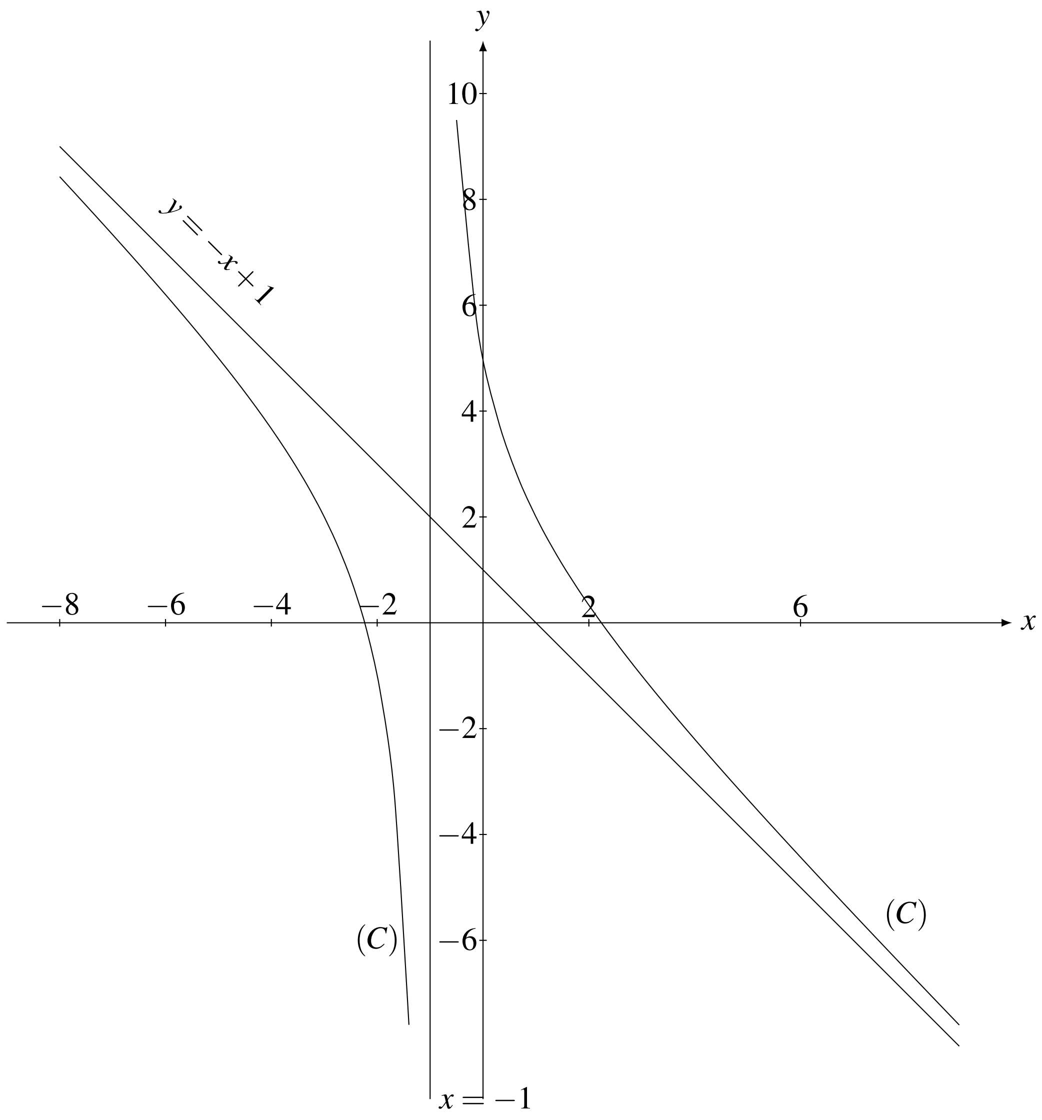
ដោយ $\quad f(x)=-x-1+\dfrac{4}{x+1}$

$$\begin{aligned} f(-2-x)&=-(-2-x)-1+\frac{4}{-2-x+1}\\ &=1+x+\frac{4}{-1-x}\\ &=1+x-\frac{4}{x+1}\end{aligned}$$

គេបាន $f(-2-x)+f(x)=-x-1+\dfrac{4}{x+1}+x+1-\dfrac{4}{x+1}=0$ ពិត

ដូចនេះ ចំណុច $I(-1,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។

- ក្រាប



១៧.៨ អនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

១៧.៨.១ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $px^2+qx+r \neq 0$

- បើ $px^2+qx+r=0$ មានឫសពីរតាងដោយ x_1 និង x_2 (ឧបមាថា $x_1 < x_2$) គេបាន $D_f = \mathbb{R}\setminus\{x_1, x_2\}$ ។
- បើ $px^2+qx+r=0$ មានឫសឌុប $x_1 = x_2 = x_0$ គេបាន $D_f = \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ ។
- បើ $px^2+qx+r=0$ គ្មានឫស គេបាន $D_f = \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ ៩៨

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $f(x) = \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$
2. $f(x) = \dfrac{3x^2-18x+25}{x^2+2x+1}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+2}{2x^2+2x+3}$

ចម្លើយ៖

1. $f(x) = \dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-12}$ អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+x-12 \neq 0$
   បើ $x^2+x-12=0$ មាន $a=1, b=1, c=-12$ តាម $\Delta = b^2-4ac = 1^2-4(1)(-12) = 49 = 7^2 > 0$ គេបាន $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{7^2}}{2(1)} = -4; x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{7^2}}{2(1)} = 3$
   ដូចនេះ $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-4, 3\}$ ។
2. $f(x) = \dfrac{3x^2-18x+25}{x^2+2x+1}$ អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+2x+1 \neq 0$
   បើ $x^2+2x+1=0$ មាន $a=1, b=2, c=1$ តាម $\Delta = b^2-4ac = 2^2-4(1)(1) = 0$ គេបាន $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2(1)} = -1$
   ដូចនេះ $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ។
3. $f(x) = \dfrac{x^2+2=4x+2}{2x^2+2x+3}$ អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $2x^2+2x+3 \neq 0$
   បើ $2x^2+2x+3=0$ មាន $a=2, b=2, c=3$ តាម $\Delta = b^2-4ac = 2^2-4(2)(3) = -20 < 0$ គេបានសមីការគ្មានឫសនាំឲ្យ $D_f = \mathbb{R}$ ។

១៧.៨.២ អាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេក

អាស៊ីមតូតឈរ

ចំនួនអាស៊ីមតូតឈរ គឺអាស្រ័យនឹងឫសសមីការ $px^2+qx+r=0$

- បើ $\Delta = q^2-4pr>0$ នោះសមីការមានឫសពីរ x_1,x_2 គេបានបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=x_1$ និង $x=x_2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) និងក្រាបមានមែកបីដាច់គ្នា។
- បើ $\Delta = q^2-4pr=0$ នោះសមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=x_0$ គេបានបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=x_0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) និងក្រាបមានមែកពីដាច់គ្នា ។
- បើ $\Delta = q^2-4pr<0$ នោះសមីការគ្មានឫស គេបានក្រាបគ្មានអស៊ីមតូតឈរទេ និង ក្រាបមានមែកតែមួយគត់ ។

អាស៊ីមតូតដេក

អនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ មានអាស៊ីមតូតដេកមួយជានិច្ច ។

គេបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}=\dfrac{a}{p}$

ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=\dfrac{a}{p}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

ឧទាហរណ៍ ៩៨

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}$
2. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x+4}$
3. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2+4x+5}$

ចម្លើយ៖ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេក

1. $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}$ អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+3x+2\neq 0$ បើ $x^2+3x+2=0$ មាន $a=1,b=3,c=2$

   តាម $\Delta=b^2-4ac=3^2-4(1)(2)=1>0$

   គេបាន $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-\sqrt{1}}{2}=-2; x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+\sqrt{1}}{2}=-1$

   នាំឲ្យ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$

   អាស៊ីមតូតឈរ

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-1}\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)(x+2)}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)(x+2)}=\pm\infty$$

   ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-1$ និង $x=-2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

   អាស៊ីមតូតដេក

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(-1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=1$$

   ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=1$ ជាសមីការបន្ទាត់អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

2. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x+4}$ អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+4x+4\neq 0$ បើ $x^2+4x+4=0$ មាន $a=1,b=4,c=4$

តាម $\Delta=b^2-4ac=4^2-4(1)(4)=0$

គេបាន $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4}{2(1)}=-2$ នាំឲ្យ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

អាស៊ីមតូតឈរ

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{-2}\frac{x^2-4x+3}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4x+3}{(x+2)^2}=+\infty$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ខាង $+\infty$ ។

អាស៊ីមតូតដេក

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x+3}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=1$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=1$ ជាសមីការបន្ទាត់អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

3. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2+4x+5}$ អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+4x+5\neq 0$ បើ $x^2+4x+5=0$ មាន $a=1,b=4,c=5$

តាម $\Delta=b^2-4ac=4^2-4(1)(5)=-4<0$

គេបានសមីការគ្មានឫស នាំឲ្យ $D_f=\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ ក្រាបតាងអនុគមន៍ f គ្មានអាស៊ីមតូតឈរ ។

អាស៊ីមតូតដេក

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-3x+2}{x^2+4x+5}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=2$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=2$ ជាសមីការបន្ទាត់អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

១៧.៨.៣ សិក្សាអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

1. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍
2. ទិសដៅអថិរភាព
   - រកដេរីវេ $f'(x)$
   - សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$
   - សិក្សាភាពកើន ឬ ភាពចុះនៃអនុគមន៍
   - តម្លៃបរមាធៀប
   - លីមីតចុងដែនកំណត់
   - អាស៊ីមតូត
   - សង់តារាងអថិរភាព
3. សង់ក្រាប
   - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និង អក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$ (ឲ្យ $y=0$ រក x)
   - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និង អក្សអរដោយនេ $(y'oy)$ (ឲ្យ $x=0$ រក y)
   - ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និង អាស៊ីមតូតដេក
   - គូសក្រាប

ឧទាហរណ៍ ៩៦

សិក្សាអថិរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}$ ។

ចម្លើយ៖

1. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍

   អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x^2+3x+2\neq 0$ បើ $x^2+3x+2=0$ មាន $a=1,b=3,c=2$

   តាម $\Delta=b^2-4ac=3^2-4(1)(2)=1>0$

   គេបាន $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-\sqrt{1}}{2}=-2; x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+\sqrt{1}}{2}=-1$

   ដូចនេះ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$ ។

2. ទិសដៅអថិរភាព
   - រកដេរីវេ $f'(x)$

     គេបាន
     $$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{(-x^2-2x+3)'(x^2+3x+2)-(x^2+3x+2)'(-x^2-2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}\\ &=\frac{(-2x-2)(x^2+3x+2)-(2x+3)(-x^2-2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}\\ &=\frac{-2x^3-6x^2-4x-2x^2-6x-4+2x^3+4x^2-6x+3x^2+6x-9}{(x^2+3x+2)^2}\\ &=\frac{-x^2-10x-13}{(x^2+3x+2)^2}\end{aligned}$$

     ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{-x^2-10x-13}{(x^2+3x+2)^2}$ ។
   - សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

គ្រប់ $x\in D_f$ គេបាន $(x^2+3x+2)^2>0$ នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $-x^2-10x-13$ បើ $-x^2-10x-13=0$

មាន $a=-1,b=-10,c=-13$ តាម $\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4(-1)(-13)=100-52=48>0$

គេបាន $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-10)-\sqrt{48}}{2(-1)}=\dfrac{10-4\sqrt{3}}{-2}=-5+2\sqrt{3}\approx-1.5$

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-10)+\sqrt{48}}{2(-1)}=\dfrac{10+4\sqrt{3}}{-2}=-5-2\sqrt{3}\approx-8.5$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		-8.5		-2		-1.5		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

- សិក្សាភាពកើន ឬ ភាពចុះនៃអនុគមន៍

  តាមតារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ គេបាន

  $f'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(-\infty,-8.5)\cup(-1.5,-1)\cup(-1,+\infty)$

  នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះនៅលើចន្លោះ $(-\infty,-8.5),(-1.5,-1)$ និង $(-1,+\infty)$ ។

  $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(-8.5,-2)\cup(-2,-1.5)$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះ $(-8.5,-2)$ និង $(-2,-1.5)$ ។

- តម្លៃបរមាធៀប

  តាមតារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ គេបាន

  $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=-8.5$ នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=-8.5$ ដែល $f(-8.5)=\dfrac{-(-8.5)^2-2(-8.5)+3}{(-8.5)^2+3(-8.5)+2}=-1.07$

  $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ត្រង់ $x=-1.5$ នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-1.5$ ដែល $f(-1.5)=\dfrac{-(-1.5)^2-2(-1.5)+3}{(-1.5)^2+3(-1.5)+2}=-14.97$

- លីមីតចុងដែនកំណត់

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=-1$$

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=\frac{3}{(-1)(0^-)}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=\frac{3}{(-1)(0^+)}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=\frac{4}{(0^-)(1)}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2}=\frac{4}{(0^+)(1)}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

- អាស៊ីមតូត

  ដោយ $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=\pm\infty$ និង $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\pm\infty$

  ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x=-2$ និង $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = -1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបតាង f ។

- តារាងអថិរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		-8.5		-2		-1.5		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1	↘	-1.07	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-14.97	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

3. សង់ក្រាប

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និង អក្សអាប់ស៊ីស $(x'ox)$

បើ $y = 0$ គេបាន $\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2} = 0 \Leftrightarrow -x^2-2x+3 = 0$

តាម $a+b+c = -1-2+3 = 0$ គេបាន $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{-1} = -3$

ដូចនេះ ក្រាបប្រសព្វជាមួយអក្ស $(x'ox)$ ត្រង់ $(1,0)$ និង $(-3,0)$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និង អក្សអរដោនេ $(y'oy)$

បើ $x = 0$ គេបាន $y = f(0) = \dfrac{-0^2-2(0)+3}{0^2+3(0)+2} = \dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ ក្រាបប្រសព្វជាមួយអក្ស $(y'oy)$ ត្រង់ $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និង អាស៊ីមតូតដេក

សមីការអាប់ស៊ីសរវាងក្រាប និង អាស៊ីមតូតដេក

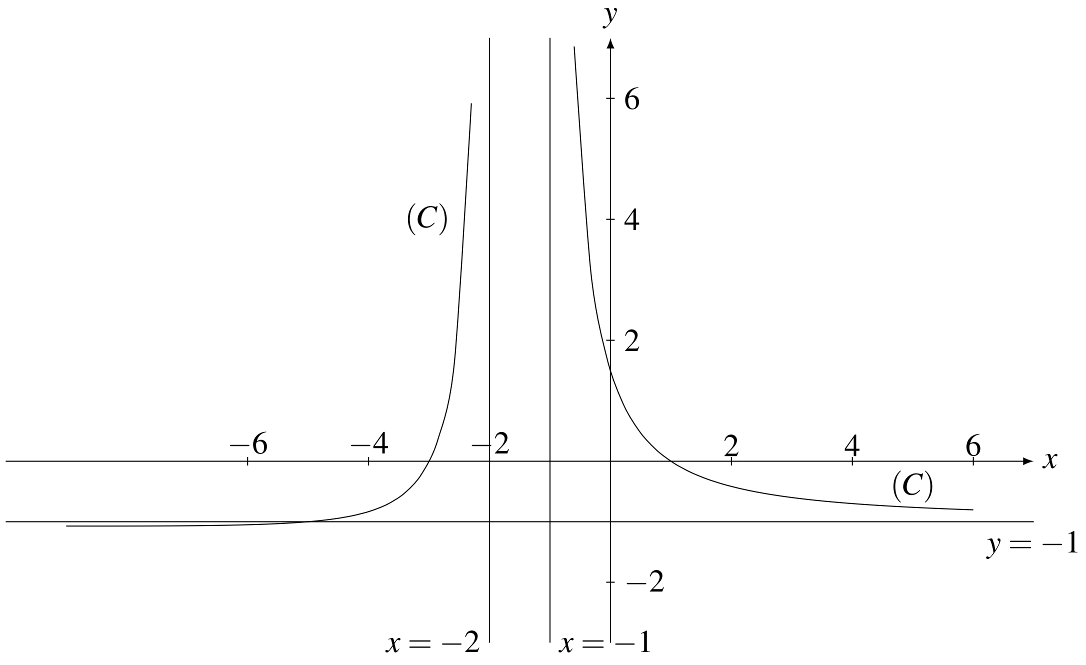
គេបាន $\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2+3x+2} = -1$

$$-x^2-2x+3 = -x^2-3x-2$$

$$x = -5$$

ដូចនេះ ក្រាបប្រសព្វជាមួយអាស៊ីមតូតដេកត្រង់ $x = -5$ ។

- ក្រាប


y
6
4
2
(C)
−6
−4
−2
2
4
6
x
(C)
y = −1
−2
x = −2
x = −1

១៧.៩ លំហាត់

លំហាត់ ២២៦

រកគ្រប់អាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$

ខ. $f(x)=\dfrac{x^2+7x+5}{3x-2}$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-5x+8}{2x^2+5x-7}$

ឃ. $f(x)=\dfrac{1-x}{3x^2-x+4}$

ឧទាហរណ៍ ៩៧

សិក្សាអថិរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $f(x)=\dfrac{6x^2+x+7}{x^2-15x+20}$
2. $f(x)=\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-15x+50}$
3. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{4-x^2}$

ឧទាហរណ៍ ៩៨

សិក្សាអថិរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $f(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{x+2}$
2. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$
3. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$
4. $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$

ថ្នាក់ទី ____________________

គោត្តនាម នាម ________________

ភេទ ____________________

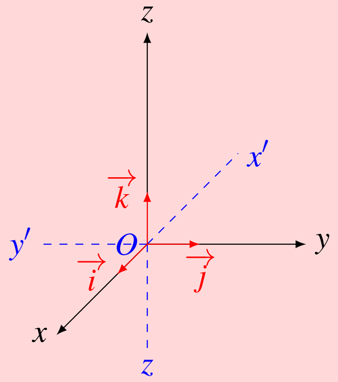
លេខរៀង____________________

វ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

១៨.១ តម្រុយក្នុងលំហ

និយមន័យ ១៨.១.១ តម្រុយក្នុងលំហ គឺគ្រប់ចតុជាតុ $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែល 0 ជាគល់តម្រុយ និង $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងដែលឋិតនៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

- $(x'x)$ ហៅថាអក្សអាប់ស៊ីស
- $(y'y)$ ហៅថាអក្សអរដោនេ
- $(z'z)$ ហៅថាអក្សកូត
- $\vec{i},\vec{j}$ និង $\vec{k}$ ហៅថាវ៉ិចទ័រឯកតា ។

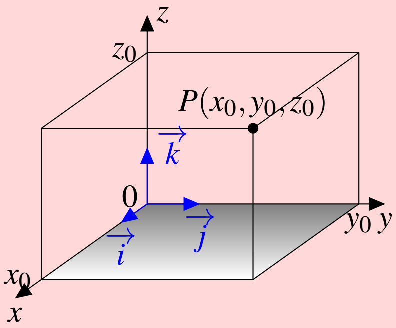


១៨.២ កូអរដោនេនៃចំណុចក្នុងលំហ

និយមន័យ ១៨.២.១ នៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ បើគេមានចំណុច $P(x,y,z)$ កាលណា $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ។ ដែល (x,y,z) ហៅថាកូអរដោនេនៃចំណុច P ។

ចំពោះកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រឯកតា៖

- $\vec{i}=(1,0,0)$
- $\vec{j}=(0,1,0)$
- $\vec{k}=(0,0,1)$

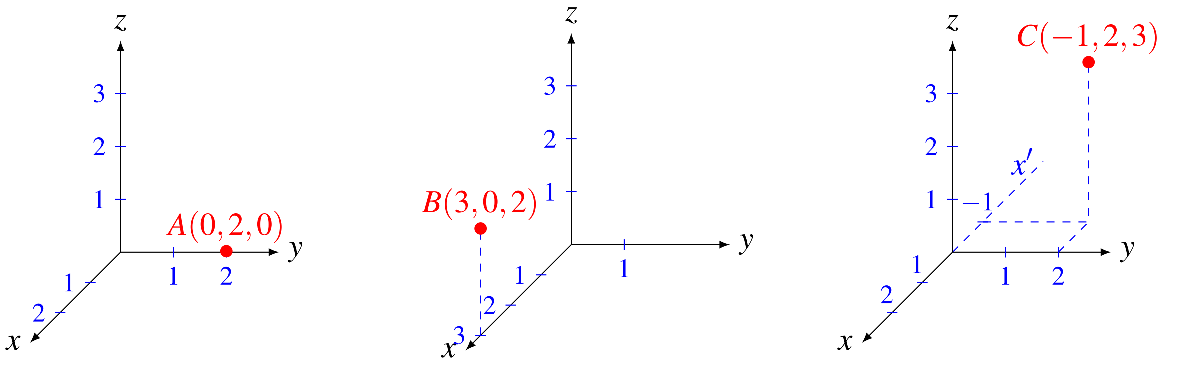


ឧទាហរណ៍ ៩៩

ចូរដៅចំណុច A,B,C ក្នុងតម្រុយផ្សេងគ្នា ។

១. $A(0,2,0)$ ២. $B(3,0,2)$ ៣. $C(-1,2,3)$

ដំណោះស្រាយ៖ ដៅចំណុច A,B,C ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$



១៨.៣ កូអរដោនេវ៉ិចទ័រក្នុងលំហនិងណមនៃវ៉ិចទ័រ

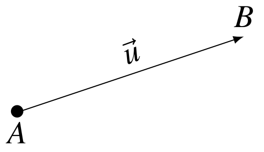
គេឲ្យចំណុច $A(x_A,y_A,z_A)$ និង $B(x_B,y_B,z_B)$ នោះវ៉ិចទ័រ

- $\overrightarrow{AB}$ កំណត់ដោយ $\overrightarrow{BA}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$
- $\overrightarrow{AB}=(x_A-x_B,y_A-y_B,z_A-z_B)$

▶ ចម្ងាយពីចំណុច A ទៅ B កំណត់ដោយ

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

ឬ $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$



ឧទាហរណ៍ ១០០

គេឲ្យពីរចំណុច $A(2,1,3)$ និង $B(3,5,2)$ នៅក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{BA}$ ។

ខ. គណនាចម្ងាយ $|\overrightarrow{OA}|,|\overrightarrow{OB}|$ និង $|\overrightarrow{AB}|$ ។

ចម្លើយ៖

ក. គេបាន $\overrightarrow{OA}=(2-0,1-0,3-0)=(2,1,3)$

$\overrightarrow{OB}=(3-0,5-0,2-0)=(3,5,2)$

$\overrightarrow{AB}=(3-2,5-1,2-3)=(1,4,-1)$

$\overrightarrow{BA}=(2-3,1-5,3-1)=(-1,-4,1)$

ខ. គេបាន $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$ ឯកតាប្រវែង

$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3^2+5^2+2^2}=\sqrt{9+25+4}=\sqrt{38}$ ឯកតាប្រវែង

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

១៨.៣.១ លក្ខណៈកូអរដោនេ

ក. បើ $P(x,y,z)$ និង $P'(x',y',z')$ ជាពីរចំណុចនៃលំហប្រកបដោយតម្រុយ $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$។ គេបាន

- $P=P' \Leftrightarrow x=x', y=y'$ និង $z=z'$
- $P\neq P' \Leftrightarrow x\neq x', y\neq y'$ និង $z\neq z'$
- $\overrightarrow{P'P}$ មានកូអរដោនេ $(x'-x, y'-y, z'-z)$
- ចំណុចកណ្ដាលនៃ $\overrightarrow{PP'}$ មានកូអរដោនេ $\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2},\frac{z+z'}{2}\right)$ ។

ខ. បើ $\vec{u}=(x,y,z)$ និង $\vec{v}=(x',y',z')$ ជាពីរវ៉ិចទ័រក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយ $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$។ គេបាន

- $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow x=x', y=y'$ និង $z=z'$
- $\vec{u}\neq\vec{v}\Leftrightarrow x\neq x', y\neq y'$ និង $z\neq z'$
- $\vec{u}-\vec{v}=(x-x', y-y', z-z')$
- $\forall k\in\mathbb{R}$ វ៉ិចទ័រ $k\vec{u}=(kx,ky,kz)$
- $\forall k,k'\in\mathbb{R}$ វ៉ិចទ័រ $k\vec{u}+k'\vec{v}=(kx+k'x', ky+ky', kz+kz')$

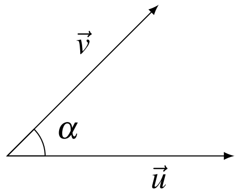
១៨.៤ ផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ

បើ $\overrightarrow{u}=(a,b,c)$ និង $\overrightarrow{v}=(x,y,z)$

នោះ $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\cos\alpha$

ឬ $\vec{u}\cdot\vec{v}=ax+by+cz$

• $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ កាលណា $\vec{u}\perp\vec{v}$



ឧទាហរណ៍ ១០១

at គេឲ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ដែល $|\vec{u}|=\frac{\sqrt{2}}{2}, |\vec{v}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\theta=90^\circ$ ដែល θ ជាមុំដែលផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

bt គេឲ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ដែល $|\vec{u}|=\frac{\sqrt{3}}{2}, |\vec{v}|=\sqrt{3}$ និង $\theta=120^\circ$ ដែល θ ជាមុំដែលផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

ចម្លើយ៖

ក. គេបាន $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos 90^\circ \text{ តែ } \cos 90^\circ$$

$$=1\times 0$$

$$=0$$

ខ. គេបាន $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}\times\cos 120^\circ \text{ តែ} \cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\times-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{3}{4}$$

១៨.៥ សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហនិងចម្ងាយពីចំណុចទៅបន្ទាត់

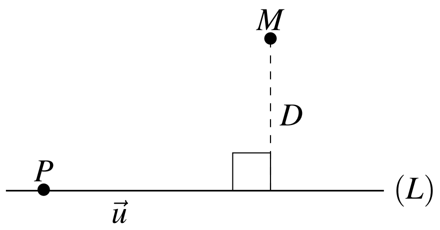
បន្ទាត់ L ស្របនឹង $\vec{u}=(a,b,c)$ និងកាត់តាម $P(x_0,y_0,z_0)$ នោះ៖

▶ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L គឺ

$x=x_0+at, y=y_0+bt, z=z_0+ct, t\in\mathbb{R}$

▶ បើ $a,b,c\neq 0$ នោះសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L គឺ

$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$



ឧទាហរណ៍ ១០២

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1,-1,1)$ ហើយស្របនិងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(1,2,3)$ ។

ចម្លើយ៖ រកមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L គេមាន ចំណុច $A(1,-1,1)$ និងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1,2,3)$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច A

គឺ $\begin{cases} x &= x_A+at \\ y &= y_A+bt \\ z &= z_A+ct \end{cases}$ គេបាន $\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= -1+2t \\ z &= 1+3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

សមីការបន្ទាត់ឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L គឺ $\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_a}{c}$

គេបាន $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$

ឧទាហរណ៍ ១០៣

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $A(\sqrt{2},-1,\sqrt{3})$ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ $M: x=1+3t, y=-1-3t, z=2+\dfrac{1}{2}t, t\in\mathbb{R}$ ។

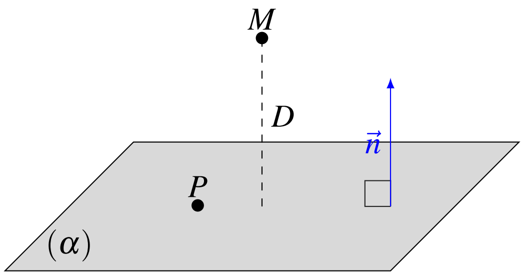
ចម្លើយ៖ រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L មានចំណុច $A(\sqrt{2},-1,\sqrt{3})$ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ M នោះវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ L គឺ $\vec{u}_L=\vec{u}_M=(3,-3,\dfrac{1}{2})$ គេបាន

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត L គឺ $\begin{cases} x=\sqrt{2}+3t \\ y=-1-3t \\ z=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L គឺ $\dfrac{x-\sqrt{2}}{3}=\dfrac{y+1}{-3}=2(z-\sqrt{3})$

១៨.៦ សមីការប្លង់និងចម្ងាយពីចំណុចទៅប្លង់

$P(x_0,y_0,z_0)$ ឋិតនៅលើប្លង់ (α)
និង $\vec{n}=(a,b,c)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់
នោះសមីការប្លង់ (α) :



- ទំរង់ស្តង់ដា (α) : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
- ទំរង់ទូទៅ (α) : $ax+by+cz+d=0$
- ចម្ងាយពី M ទៅប្លង់ (α) គឺ $D=d[M,(\alpha)]=\dfrac{|\overrightarrow{PM}.\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

ឬ $D=d[M,(\alpha)]=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ឧទាហរណ៍ ១០៨

ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ គេឲ្យពីរចំណុច $A(4,3,2)$ និង $B(2,-4,6)$ ។ ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (α) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយអរតូកូណាល់នឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។

ចម្លើយ៖ ដោយ $\overrightarrow{AB}=(2-4,-4-3,6-2)=(-2,-7,4)$

គេបាន $(\alpha): -2(x-4)-7(y-3)+2(z-2)=0$

$$-2x+8-7y+21+2z-4=0$$

$$-2x-7y+2z+25=0$$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(\alpha): -2x-7y+2z+25=0$

ឧទាហរណ៍ ១០៩

ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ គេឲ្យចំណុច $A(-3,1,2)$ និងប្លង់ (α) ដែលមានសមីការ $2x-y+z-2=0$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ មួយទៅនឹងប្លង់ (α) ។ គណនា $|\vec{n}|$

ខ. គណនា $d[A,(\alpha)]$ ។

ចម្លើយ៖

ក. តាង $\vec{n}=(a,b,c)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (α)

គេបាន $ax+by+cz+d=2x-y+z-2$

នាំឲ្យ $a=2, b=-1, c=1$ និង $d=-2$

ដូចនេះ $\vec{n}=(2,-1,1)$

នាំឲ្យ $|\vec{n}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$ ឯកតាប្រវែង

ខ. គេបាន $d[A,(\alpha)] = \frac{|2(-3)-(1)+(2)-2|}{|\vec{n}|}$
$= \frac{|-6-1+2-2|}{\sqrt{6}}$
$= \frac{|-7|}{\sqrt{6}}$
$= \frac{7\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$
$= \frac{7\sqrt{6}}{6}$ ឯកតាប្រវែង

១៨.៧ សមីការស្វ៊ែ និងចម្ងាយពីប្លង់ទៅស្វ៊ែ

ស្វ៊ែមានផ្ចិត $I(a,b,c)$ និងកាំ R កំណត់ដោយ៖

▶ សមីការស្តង់ដា $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

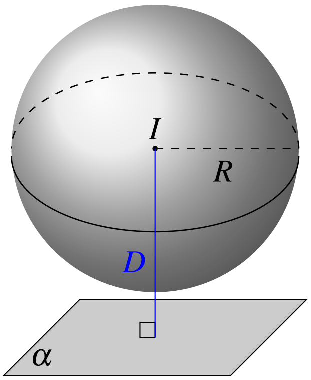
▶ សមីការទូទៅ $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

▶ បើ $D=R$ នោះប្លង់ α ប៉ះស្វ៊ែត្រង់ចំណុចមួយ

▶ បើ $D<R$ នោះប្លង់ α កាត់ស្វ៊ែបានរង្វង់មួយ

▶ បើ $D>R$ នោះប្លង់ α មិនកាត់ស្វ៊ែទេ

ដែល $D=d[I,(\alpha)]$



ឧទាហរណ៍ ១០៦

សរសេរសមីការស្តង់ដា និងសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ S ដែលមានផ្ចិត $I(1,2,3)$ និងកាំ $R=\sqrt{3}$ ។

ចម្លើយ៖ សរសេរសមីការស្តង់ដា និងសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ S

គេមាន ផ្ចិត $I(1,2,3)$ និងកាំ $R=\sqrt{3}$

គេបាន សមីការស្តង់ដា $S:\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(\sqrt{3})^2$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9=3$

សមីការទូទៅ $S:\ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+11=0$

ឧទាហរណ៍ ១០៧

រកកូអរដោនេផ្ចិត C និងកាំ r នៃស្វ៊ែ $S:\ x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z+2=0$

ចម្លើយ៖ រកផ្ចិត I និងកាំ r

គេមាន $S:\ x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z+2=0$

$x^2-2x+1+y^2+2y+1+z^2+2\times 2z+4=4$

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=2^2$

$\therefore\ I(1,-1,-2)\quad ,r=2$

ឧទាហរណ៍ ១០៨

រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ S ដែលមានចំណុច $A(1,2,3)$ និង $B(2,-1,-2)$ ។

ចម្លើយៈ រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ S

គេឲ្យ ចំណុច $A(1,2,3)$ និង $B(2,-1,-2)$

នោះផ្ចិត $I\left(\frac{1+2}{2},\frac{2-1}{2},\frac{3-2}{2}\right)=I\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

និងកាំ $r=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(1-2)^2+(2+1)^2+(3+2)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{1+9+25}=\frac{\sqrt{35}}{2}$

គេបានសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ S : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{35}}{2}\right)^2$

១៨.៨ លំហាត់

លំហាត់ ២២៧

គេឲ្យបីចំណុច $A(-2,3,-1), B(4,-7,5)$ និង $C(3,-6,0)$ ។

ក. ចូរដៅចំណុច A, B និង C ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

ខ. សរសេរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{OC}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ និង $\overrightarrow{k}$ ។

គ. គណនាប្រវែង $|\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{OB}|, |\overrightarrow{OC}|, |\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{AC}|$ និង $|\overrightarrow{BC}|$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២២៨

ក. ចូរសង់ចំណុច $P(2,4,5)$ និង$Q\left(-\frac{3}{2}, -2, \frac{5}{2}\right)$ នៅក្នុងតម្រុយ $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ។

ខ. គេឲ្យបីវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$ និង $\overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + \overrightarrow{OK}$ ។ ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច P, M និង Q ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២២៩

គណនាកន្សោមខាងក្រោម៖

ក. $2\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)-4\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$

ខ. $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)+\frac{3}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

គ. $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)+\frac{1}{2}\left(-\vec{a}+3\vec{b}\right)$

ឃ. $\frac{1}{5}\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)-\frac{5}{3}\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៣០

គណនា $\vec{x}$ ជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$

1. $2\left(\vec{a}+\vec{x}\right)+5\left(\vec{x}+\vec{b}\right)=\vec{0}$

2. $5\vec{x}-3\vec{a}=\vec{x}+\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៣១

គេឲ្យ $\vec{a}=(2,-3,0),\vec{b}=(-3,2,5)$ និង $\vec{c}=(6,0,-3)$ ។ ចូររកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ដែល

ក. $\vec{u}=3\vec{a}-4\vec{b}$

ខ. $\vec{v}=2(\vec{a}+\vec{b})-3(\vec{b}-2\vec{c})$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៣២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច $A(0,1,1),B(3,3,4)$ និង $C(5,1,4)$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CA}$ រួចសរសេរជាអនុគមន៍នៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i},\vec{j}$ និង $\vec{k}$ ។

ខ. បើគេយកវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{CA}$ ។ កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៣៣

នៅក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x,y,z),\vec{v}=(-2,1,3)$ និង $\vec{w}=(1,-3,5)$ ។ កំណត់តម្លៃ x,y និង z ដើម្បីឲ្យ $\vec{u}=2\vec{v}+3\vec{w}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៣៤

គេឲ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC ដែលមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ a ។ គណនាជាអនុគមន៍នៃ a ចំពោះផលគុណស្កាលែដូចខាងក្រោម:

ក. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ខ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៣៥

គេឲ្យពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ហើយ θ ជាមុំផ្គុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងករណីខាងក្រោម:

ក. $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

ខ. $|\vec{u}| = \sqrt{3+2\sqrt{2}}, |\vec{v}| = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ និង $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៣៦

គេឲ្យត្រីកោណកែងសមបាត ABC មួយកែងត្រង់ B ដែលមានបាត $AC = 7\text{cm}$ ។ គណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៣៧

គណនា $|\vec{u}|, |\vec{v}|, \vec{u}\cdot\vec{v}$ និង $\cos\theta$ នៃគូវ៉ិចទ័រខាងក្រោម:

1. $\vec{u} = (2,3,-1)$ និង $\vec{v} = (1,-2,3)$
2. $\vec{u} = (-1,1,2)$ និង $\vec{v} = (-2,3,1)$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៣៨

ចូររកផលគុណស្កាលែនៃគូវ៉ិចទ័រខាងក្រោម:

ក. $\vec{u}=(-2,2,3)$ និង $\vec{v}=(4,5,6)$

ខ. $\vec{a}=(1,1,2)$ និង $\vec{b}=(2,-1,1)$

គ. $\vec{a}=(1,-1,4)$ និង $\vec{b}=(2,1,2)$

ឃ. $\vec{u}=4\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ និង $\vec{v}=-2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៣៩

ក្នុងតម្រុយ $(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ គេឲ្យបីចំណុច $A(2,1,0),B(0,2,1)$ និង $C(0,-1,4)$ ។

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ខ. គណនាមុំ θ ជាមុំដែលផ្គុំឡើងដោយ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៤០

គេឲ្យ $\vec{u}=(2,-1,4)$ និង $\vec{v}=(-4,5,3)$ ។ កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត k ដែល $\vec{u}-k\vec{v}$ និង $\vec{u}$ កែងគ្នា។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៤១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ គេឲ្យបីចំណុច $A(2,5,3),B(3,2,4)$ និង $C(-1,3,0)$ ។

1. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$
2. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ កែងនិង $\overrightarrow{AC}$
3. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៤២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ គេឲ្យបីចំណុច $A(2,-1,4),B(3,-2,5)$ និង $C(-1,6,2)$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ រួចគណនាផលគុណស្កាលែនៃ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។

ខ. H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច C លើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។ គណនាប្រវែង AH និងប្រវែង CH រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ACH និងត្រីកោណ ABC ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៤៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ គេឲ្យបីចំណុច $A(2,3,0),B(3,3,3)$ និង $C(1,-1,4)$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច D ដើម្បីឲ្យ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. គណនាផលគុណស្កាលែនៃ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AD}$ ។ H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច D លើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។ គណនាប្រវែង AH ។

គ. គណនា $\cos\theta$ ដែល θ ជាមុំផ្គុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AD}$ រួចទាញរកតម្លៃ $\sin\theta$ ។

ឃ. គណនាប្រវែង DH និងផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៨៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ គេឲ្យពីរចំណុច $A(-1,-2,3)$ និង $B(1,3,2)$ ។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ AB ។

ខ. គណនាចម្ងាយពីចំណុចគល់ O ទៅបន្ទាត់ AB ។

គ. គណនាប្រវែង AB រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ OAB ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៨៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ គេឲ្យពីរចំណុច $A(2,1,-2)$ និង $B(-1,3,2)$ ។ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ AB ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៤៦

ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ គេឲ្យចំណុច $A(2,4,5)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(3,-1,-2)$ ។ កំណត់សមីការប្លង់ (α) ដែលកាត់តាម A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{a}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៤៧

ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ គេឲ្យពីរចំណុច $A(3,2,5)$ និង $B(4,-2,1)$ ។ កំណត់សមីការប្លង់ (α) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយអរតូកូណាល់ទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៤៨

ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ គេឲ្យបីចំណុច $A(2,4,5), B(-5,-2,3)$ និង $C(3,-1,-2)$ ។ កំណត់សមីការប្លង់ (α) ដែលកាត់តាមចំណុច C ហើយអរតូកូណាល់ទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៤៩

កំណត់សមីការប្លង់ (α) ដែលកាត់តាមបីចំណុច $A(4,0,0), B(2,0,3)$ និង $C(0,-1,4)$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៥០

ក. ចូររកចម្ងាយពីចំណុច $A(3,1,4)$ ទៅនឹងប្លង់ $(\alpha): x-2y+2z+3=0$ ។

ខ. ចូររកចម្ងាយពីចំណុច $O(0,0,0)$ ទៅនឹងប្លង់ $(\alpha): 3x+2y-4z+5=0$ ។

គ. ចូររកចម្ងាយពីចំណុច $M(2,1,1)$ ទៅនឹងប្លង់ $(\alpha): 2x-y+4z-16=0$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៥១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2,2,2), B(1,-1,2)$ និង $C(2,0,1)$ ។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ l កាត់តាមចំណុច A និង B ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ P កាត់តាមចំណុច C ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(1,2,3)$ ។ ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច B ទៅប្លង់ P ។

គ. បន្ទាត់ l ប្រសព្វប្លង់ P ត្រង់ D ។ កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច D ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៨២

រកសមីការស្វ៊ែរខាងក្រោម:

ក. ដែលមានផ្ចិតត្រង់ $(1,-2,-3)$ និងមានកាំស្មើ 5 ។

ខ. ដែលមានផ្ចិតត្រង់ $(4,-2,3)$ ហើយប៉ះទៅនឹងប្លង់ (xoy) ។

គ. ដែលមានផ្ចិតត្រង់ $(2,-3,5)$ ហើយប៉ះទៅនិងប្លង់ (yoz) ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៨៣

រកសមីការស្វ៊ែរ រួចកំណត់ផ្ចិត និងកាំនៃស្វ៊ែរនីមួយៗខាងក្រោម:

ក. $x^2+y^2+z^2+18x-10z+91=0$

ខ. $9x^2+9y^2+9z^2-6x+18y+1=0$

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៨៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ គេឲ្យចំណុច $A(-2,1,5)$ និង $B(4,-3,-1)$ ។ រកសមីការស្វ៊ែរដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៨៥

គេឲ្យចំណុច $A(0,3,0), B(0,1,-2)$ និង $C(2,3,-2)$ ។

ក. តើត្រីកោណ ABC ជាប្រភេទត្រីកោណអ្វី?

ខ. រកសមីការស្វ៊ែរ ដែលកាត់តាមចំណុច A,B,C និង 0 ជាគល់តម្រុយ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៨៦

ស្វ៊ែរមួយមានផ្ចិត $(3,7,4)$ និងកាំស្មើ 5 ហើយប្រសព្វជាមួយប្លង់ (xoy) និង (yoz) បានរង្វង់ពីរ។ រកផ្ចិត និងកាំនៃរង្វង់និមួយៗនោះ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៨៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូអរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2,0,0), B(0,3,0)$ និង $C(0,0,4)$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់ ABC រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុចគល់ O មកប្លង់ ABC ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC រួចទាញរកមាឌចតុមុខ $OABC$ ។

ចម្លើយ

លំហាត់ ២៨៨

នៅក្នុងតម្រុយអរតូអរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2,2,6), B(2+2\sqrt{2},0,4)$ និង $C(2+2\sqrt{2},4,4)$ ។

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។

ខ. គណនា AB, AC និងមុំ $\angle BAC$ ។ ទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

គ. សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ d ដែលកាត់តាមចំណុច A និង B ។

ចម្លើយ