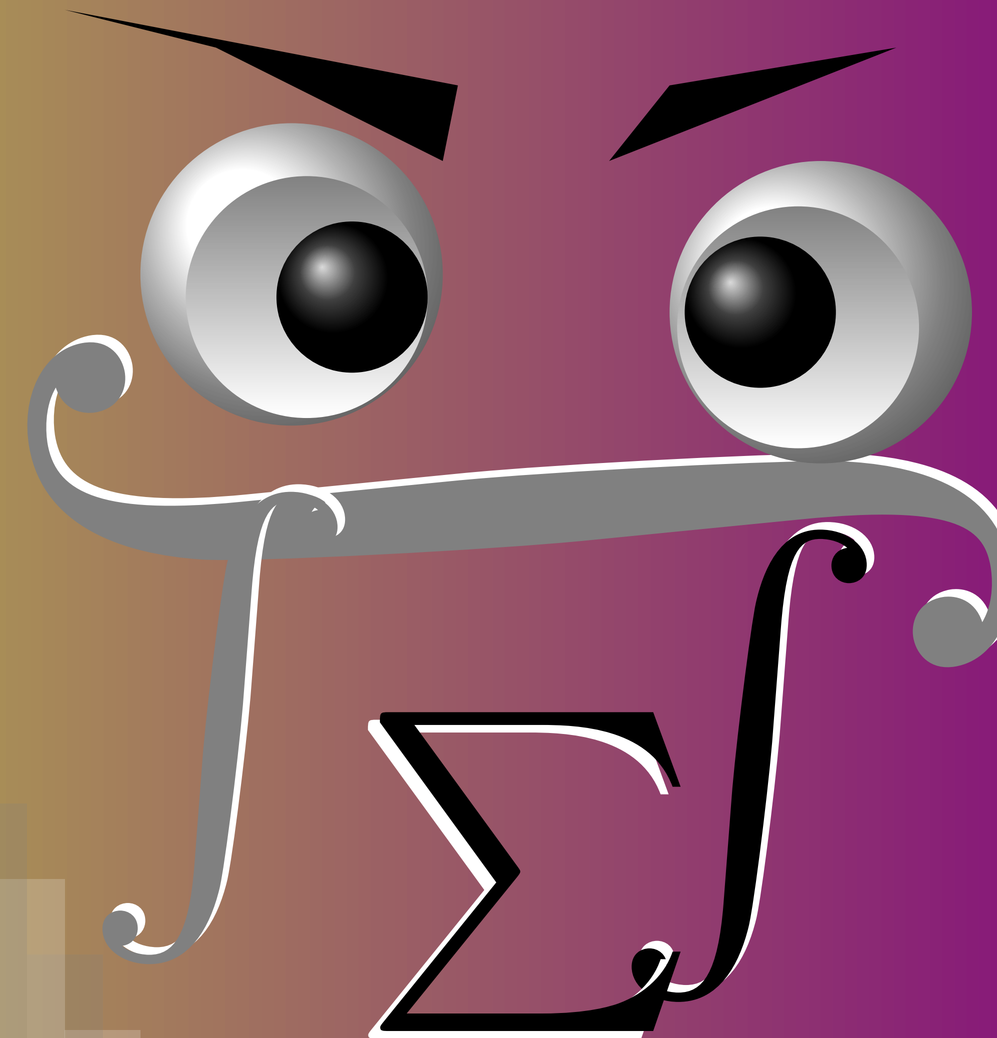
បង្រៀនដោយៈ ហ៊ីង វុទ្ធី



ស៊ីតចំនួនពិត

រៀបរៀងដោយៈ ហ៊ីង វុទ្ធី

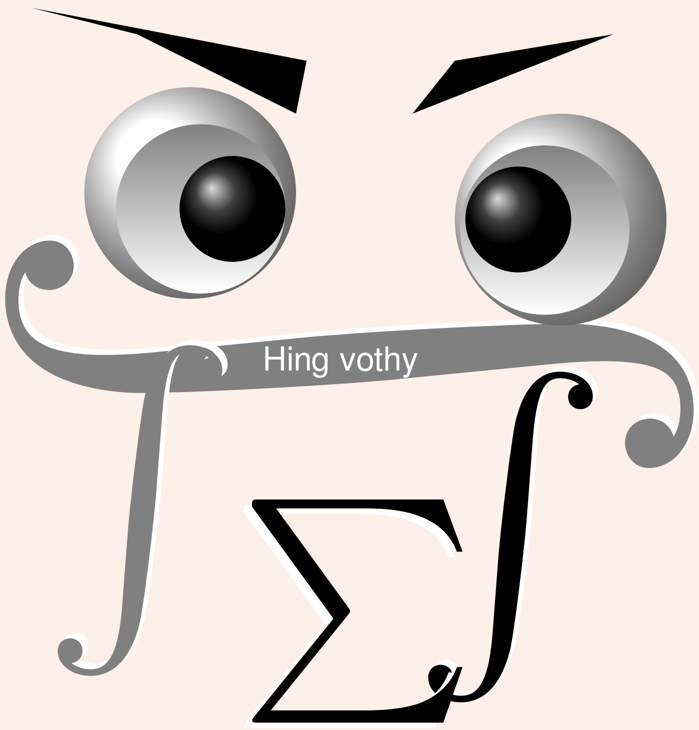
Gmail: hingvuthy300@gmail.com

មាតិកា

I មេរៀន

II លំហាត់

I



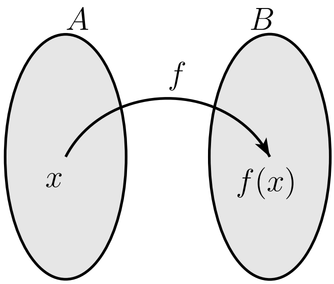
១ ស្វ៊ីតចំនួនពិត

១.១ សញ្ញាណនៃស្វ៊ីត

និយមន័យ ១.១.១ ស្វ៊ីតចំនួនពិត គឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពីសំណុំ $\mathbb{N}$ ទៅសំណុំ $\mathbb{R}$ ឬ $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) = u_n \end{aligned} \quad \text{ឬ} \quad \begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto f(n) = u_n \end{aligned}$$

រំលឹក ១.១.១ គេមានសំណុំ $A, B \neq \emptyset$ ។ បើទំនាក់ទំនង f ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ភ្ជាប់ធាតុនិមួយៗនៃសំណុំ A ទៅនឹងធាតុតែមួយគត់នៃសំណុំ B នោះទំនាក់ទំនង f ហៅថាអនុគមន៍ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ។



ឧទាហរណ៍ ១

គេមានអនុគមន៍ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longmapsto f(n) = 3n - 1$$

គេសង្កេតឃើញថា

បើ $n = 1$ នោះ $f(1) = 3 \times 1 - 1 = 2$

បើ $n = 2$ នោះ $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$

បើ $n = 3$ នោះ $f(3) = 3 \times 3 - 1 = 8$

បើ $n = 4$ នោះ $f(4) = 3 \times 4 - 1 = 11$

....

គេបានចំនួនរៀបតាមលំដាប់ $2, 5, 8, 11, \ldots$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតចំនួនពិត។

ជាទូទៅ ១.១.២ គេតាងស្វ៊ីតដោយ $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} : u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$

ឬ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$

ដែល u_1 ជាតួទី1 u_2 ជាតួទី2 u_3 ជាតួទី3 u_n ជាតួទីn ។

បើ $(u_n)_{n=0,1,2,\ldots}$: $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ ដែល u_0 ជាតួទី1 u_1 ជាតួទី2 u_2 ជាតួទី3 u_n ជាតួទី$n+1$ ។

☞ ស្វ៊ីតដែលមានចំនួនតួរាប់បានហៅថាស្វ៊ីតរាប់អស់ ឬ ស្វ៊ីតកំណត់ ។ ស្វ៊ីតដែលមានចំនួនតួរាប់មិនបានហៅថាស្វ៊ីតអនន្តតួ ឬ ស្វ៊ីតមិនកំណត់ ។

ឧទាហរណ៍ ២

ស្វ៊ីតចំនួនគត់សេស $1, 3, 5, 7, \ldots$ ជាស្វ៊ីតអនន្តតួ ។ ស្វ៊ីត $1, 3, 5, 7, 9, 11$ ជាស្វ៊ីតរាប់អស់ ។

១.២ តួទី n នៃស្វីត

គេមានស្វីត $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}$ គេបាន $u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{3}, ..., u_n = \frac{1}{n}$ ជាតួទីn ។

ឧទាហរណ៍ ៣

កំណត់តួទី n នៃស្វីត $1, 4, 9, 16, ...$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

គេបាន $u_1 = 1 = 1^2 \quad u_2 = 4 = 2^2$

$$u_3 = 9 = 3^2 \quad u_4 = 16 = 4^2$$

....

$$u_{n-1} = (n-1)^2 \quad u_n = n^2$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វីតគឺ $u_n = n^2$

១.៣ អថេរភាពនៃស្វីត

១.៣.១ ស្វីតកើន

និយមន័យ ១.៣.១ គេថាស្វីត (u_n) ជាស្វីតកើនលើ $\mathbb{N}$ កាលណា $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ ឬ $u_{n+1} - u_n > 0$ ឬ $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ដែល $u_n > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤

គេមានស្វីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : 1, 3, 5, 7, ...$ ។ គេសង្កេតឃើញថា $u_1 = 1 < u_2 = 3 < u_3 = 5 < u_4 = 7 < ... < u_n = 2n - 1 < u_{n+1} < ...$ គេថា (u_n) ជាស្វីតកើន ។

ឧទាហរណ៍ ៥

បង្ហាញថាស្វីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វីតកើនដែល $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន $u_n = \frac{2n+1}{n+2} \Longrightarrow u_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} = \frac{2n+3}{n+3}$

ផលដក $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+3}{n+3} - \dfrac{2n+1}{n+2}$

$$= \frac{(2n+3)(n+2) - (2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{2n^2 + 4n + 3n + 6 - 2n^2 - n - 6n - 3}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3}{(n+2)(n+3)} > 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន ■

ឧទាហរណ៍ ៦

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើនដែល $u_n = \sqrt[n]{k}$ ដែល $k > 1$

ដំណោះស្រាយះ គេមាន $k > 1 \Longrightarrow \sqrt[n]{k} > \sqrt[n]{1} \Longleftrightarrow u_n > 1$

ម្យ៉ាងទៀត $k > 1 \Longrightarrow \sqrt[n+1]{k} > \sqrt[n]{1} \Longleftrightarrow u_{n+1} > 1$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Longrightarrow$ ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន ■

១.៣.២ ស្វ៊ីតចុះ

និយមន័យ ១.៣.២ គេថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះលើ $\mathbb{N}$ កាលណា $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ ឬ $u_{n+1} - u_n < 0$ ឬបើប្រើផលចែក $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ដែល $u_n > 0$

ឧទាហរណ៍ ៧

គេមានស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ។

គេសង្កេតឃើញថា $u_1 = 1 > u_2 = \frac{1}{2} > u_3 = \frac{1}{3} > u_4 = \frac{1}{4} > \ldots > u_n = \frac{1}{n} > u_{n+1} > \ldots$ គេថា (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

ឧទាហរណ៍ ៨

សិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Longrightarrow u_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

នោះផលធៀប $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1 \quad , n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ■

១.៣.៣ ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

និយមន័យ ១.៣.៣ គេថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន កាលណាវាជាស្វ៊ីតកើនជានិច្ច ឬ ចុះជានិច្ច

ឧទាហរណ៍ ៩

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន $u_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Longrightarrow u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+2}$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ នាំឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន នាំឲ្យស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ■

ឧទាហរណ៍ ១០

សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \frac{1}{n^2}$

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន $u_n = \frac{1}{n^2} \Longrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

ធ្វើផលសង $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$= \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= -\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} < 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ នាំឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ■

១.៤ ស្វ៊ីតទាល់

១.៤.១ ស្វ៊ីតទាល់លើ

និយមន័យ ១.៤.១ គេថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ កាលណា $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ ដែល $u_n \leq M$

ឧទាហរណ៍ ១១

គេមានស្វ៊ីត (u_n) : $2, 1, 0, -1, -2, \ldots$ ។

គេបាន $u_1 = 2 > u_2 = 1 > u_3 = 0 > u_4 = -1 > \ldots$ គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើ ដែលមានចំនួន 2 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត

១.៤.២ ស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

និយមន័យ ១.៤.២ គេថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម កាលណា $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ដែល $u_n \geq m$

ឧទាហរណ៍ ១២

គេមានស្វ៊ីត $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ ។

គេបាន $u_1 = 3 < u_2 = 5 < u_3 = 7 < u_4 = 9 < \ldots$ គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ដែលមានចំនួន 3 ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត

១.៤.៣ ស្វ៊ីតទាល់

និយមន័យ ១.៤.៣ គេថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ កាលណាវាជាស្វ៊ីតទាល់លើផង និង ទាល់ក្រោមផង $\exists m, M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ដែល $m \leq u_n \leq M$

ឧទាហរណ៍ ១៣

គេមានស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{1}{n}$ ។

គេបាន $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$ ។ គេសង្កេតឃើញថា $u_1 = 1 > u_2 = \dfrac{1}{2} > u_3 = \dfrac{1}{3} > u_4 = \dfrac{1}{4} > \ldots$ គេបានចំនួន 1 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត និងចំនួន 0 ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ព្រោះ $\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$ កាលណា $n \longrightarrow +\infty$ ។ គេបាន $0 \leq u_n \leq 1$ ។

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

២

ស្វ៊ីតនព្វន្ត

២.១ និយមន័យនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

និយមន័យ ២.១.១ ស្វ៊ីតនព្វន្ត គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ ក្រៅពីតួទីមួយ ស្មើតួមុនបន្ទាប់បូកនឹងចំនួនថេរ d មួយ ដែល d ហៅថា ផលសងរួម

តាមនិយមន័យខាងលើ

គេបាន $u_2 = u_1 + d \Rightarrow d = u_2 - u_1$

$$u_3 = u_2 + d \Rightarrow d = u_3 - u_1$$

$$u_4 = u_3 + d \Rightarrow d = u_4 - u_3$$

....

$$u_n = u_{n-1} + d \Rightarrow d = u_n - u_{n-1}$$

នាំឲ្យ $d = u_n - u_{n-1} = \cdots = u_4 - u_3 = u_3 - u_2 = u_2 - u_1$

ជាទូទៅ ២.១.២ ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

$$d = u_n - u_{n-1} = \cdots = u_4 - u_3 = u_3 - u_2 = u_2 - u_1$$

២.២ តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមាន (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ u_1 តួទីn គឺ u_n ហើយផលសងរួម d ។

គេបាន $u_2 = u_1 + d = u_1 + (2-1)d$

$u_3 = u_2 + d = u_1 + d + d = u_1 + 2d = u_1 + (3-1)d$

$u_4 = u_3 + d = u_1 + 2d + d = u_1 + 3d = u_1 + (4-1)d$

$u_5 = u_4 + d = u_1 + 3d + d = u_1 + 4d = u_1 + (5-1)d$

....

$u_n = u_1 + (n-1)d \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$

ជាទូទៅ ២.២.១ តួទី n នៃស្វ៊ីត $u_n = u_1 + (n-1)d$ ឬ $u_n = u_p + (n-p)d$

ឧទាហរណ៍ ១៨

គេមានស្វ៊ីត $4, 11, 18, 25, 32, ...$ ។

១. កំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត ។

២. គណនាតួទី12 ។

៣. តើចំនួន 602 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

៤. តើចំនួន 711 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

ដំណោះស្រាយ៖ ១. យើងមាន $u_1 = 4, u_2 = 11, \Rightarrow d = u_2 - u_1 = 11 - 4 = 7$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d = 4 + (n-1)7$

$= 4 + 7n - 7 = 7n - 3$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត $u_n = 7n - 3$

២. គណនា $u_{12} = 7 \times 12 - 3 = 81$

៣. តាង $u_n = 602$ គេបាន $u_n = 7k - 3$

$7n - 3 = 602$

$7n = 605$

$n = 86.4$

ដោយ $n \notin \mathbb{N}$ នោះចំនួន 602 មិនមែនជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តទេ ។

៤. តាង $u_n = 711$ គេបាន $7n - 3 = 711$

$$7n = 714$$

$$n = 102$$

ដូចនេះ ចំនួន 711 ជាតួទី 102 នៃស្វ៊ីត

■

ឧទាហរណ៍ ១៥

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែល $u_7 = 79$ និង $u_{12} = 64$

ដំណោះស្រាយ៖ យើងមាន $u_7 = 79, u_{12} = 64$ តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$u_7 = u_1 + 6d = 79 \qquad (២១)$$

$$u_{12} = u_1 + 11d = 64 \qquad (២២)$$

យក (២១)-(២២): $-5d = 15 \Rightarrow d = -3$ ជំនួសចូល (២១): $u_1 = 97$

គេបាន $u_n = 97 - 3(n-1) = 100 - 3n$

ដូចនេះ: តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $\boxed{u_n = 100 - 3n}$

■

☞ បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១គឺ u_0 និងមានផលសងរួម d នោះគេបានតួទី n គឺ

$$u_{n-1} = u_0 + (n-1)d \quad \text{នាំឲ្យតួទី} \quad n+1 \quad \text{គឺ} \quad u_n = u_0 + nd \qquad (២៣)$$

ឧទាហរណ៍ ១៦

គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមាន $u_0 = 3, u_1 = 7$ និង $u_2 = 11$ ។ កំណត់តួទី7 និង u_7

ដំណោះស្រាយ៖ តាង $u_0 = 3, u_1 = 7 \Rightarrow d = u_1 - u_0 = 7 - 3 = 4$

គេបាន $u_n = u_0 + nd = 3 + 7n$

នាំឱ្យ តួទី 7 គឺ $u_6 = 3 + 7(4) = 27$

$$u_7 = 3 + 7(4) = 31$$

ដូចនេះ តួទី7 គឺ $u_6 = 45$ និង $u_7 = 52$ ■

២.៣ ផលបូកតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ ។ u_1 និង u_6 ហៅថាតួចុង ។ u_2 និង u_5 ហើយ u_3 និង u_4 ហៅថាតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$

គេបាន $u_1 + u_6 = u_1 + u_1 + 5d = 2u_1 + 5d$

$$u_2 + u_5 = u_1 + d + u_1 + 4d = 2u_1 + 5d$$

$$u_3 + u_4 = u_1 + 2d + u_1 + 3d = 2u_1 + 5d$$

នាំឲ្យ $u_1 + u_6 = u_2 + u_5 = u_3 + u_4$

បើគេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, ..., u_p, ..., u_{n-(p+1)}, ..., u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$

ជាទូទៅ ២.៣.១ ផលបូកតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុង ស្មើនិងផលបូកតួចុងទាំងពីរ ។ គេកំណត់សរសេរដោយ

$$u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = \cdots = u_p + u_{n-(p+1)} = \cdots \quad (២៤)$$

☞ បើ a, b, c ជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត គេបាន $2b = a + c$, (b ហៅថាមធ្យមនព្វន្តនៃ a និង c)

ឧទាហរណ៍ ១៧

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $2, 2x+1, 16$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដំណោះស្រាយៈ $2, 2x+1, 16$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត គេបាន $2(2x+1) = 2+16$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = 9$$

$$\Leftrightarrow 2x = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

ដូចនេះ $x = 4$ ■

ឧទាហរណ៍ ១៨

កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យ $k, 12, k^2-6k$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដំណោះស្រាយៈ $k, 12, k^2-6k$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកាលណា $k + k^2 - 6k = 2(12)$

$$k^2 - 5k - 24 = 0$$

$$(k+3)(k-8) = 0$$

ដូចនេះ $k = -3$, $k = 8$ ■

២.៤ ផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

បើ u_1 ជាតួទី១ និង d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនោះគេបានស្វ៊ីតនព្វន្ត

$$(u_n) : u_1, u_2 = u_1 + d, u_3 = u_1 + 2d, ..., u_n = u_1 + (n-1)d$$

តាង $S_n = u_1 + (u_1 + d) + ... + (u_n - d) + u_n$ (២៥)

ម្យ៉ាងទៀត $S_n = u_n + (u_n - d) + ... + (u_1 + d) + u_1$ (២៦)

យកសមីការ (២៥) បូក (២៦)

គេបាន $2S_n = \underbrace{(u_1+u_n)+(u_1+u_n)+...+(u_1+u_n)+(u_1+u_n)}_{n\text{ តួ}}$

$$2S_n = n(u_1+u_n)$$

$$S_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2} \quad \text{ដែល} \quad u_n = u_1+(n-1)d$$

ជាទូទៅ ២.៤.១ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1+u_n) \text{ ឬ } S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right] \quad , n\in\mathbb{N}$$

ឧទាហរណ៍ ១៩

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $2, 7, 12, 17, 22, ...$ ។ រួចគណនាផលបូក 25 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

ដំណោះស្រាយ៖ គណនា S_n និង S_{25}

យើងមាន $u_1 = 2, u_2 = 7, u_3 = 12 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = 7-2 = 5$

តាមទំនាក់ទំនង $u_n = u_1+(n-1)d$

$$= 2+(n-1)5$$

$$= 5n-3$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(u_1+u_n)$$

$$= \frac{n}{2}(2+5n-3)$$

$$= \frac{n}{2}(5n-1)$$

$$\Rightarrow S_{25} = \frac{25}{2}(5(25)-1) = 1550$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n}{2}(5n-1)$ និង $S_{25} = 1550$ ∎

ឧទាហរណ៍ ២០

គណនាផលបូក $(-7)+(-1)+5+11+...+77$

ដំណោះស្រាយ៖ យក $u_1 = -7, u_2 = -1, u_3 = 5 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = -1 - (-7)$

$= 6$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= -7 + (n-1)6$

$= 6n - 13, u_n = 77$

$77 = 6n - 13$

$6n = 90$

$n = 15$

$$\Rightarrow S_{15} = \frac{n}{2}(u_1 + u_{15})$$

$$= \frac{15}{2}(-7 + 6(15) - 13) = 525$$

ដូចនេះ $(-7) + (-1) + 5 + 11 + 17 + ... + 77 = 525$ ■

៣

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

៣.១ និយមន័យនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

និយមន័យ ៣.១.១ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ ក្រៅពីតួទីមួយ ស្មើតួមុនបន្ទាប់ គុណនឹងចំនួនថេរ q មួយ ដែល q ហៅថាផលធៀបរួម ឬ រេសុង

តាមនិយមន័យខាងលើ គេបាន u_1

$$u_2 = u_1 q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1}$$
$$u_3 = u_2 q \Rightarrow q = \frac{u_3}{u_2}$$
$$u_4 = u_3 q \Rightarrow q = \frac{u_4}{u_3}$$

....

$$u_n = u_{n-1} q \Rightarrow q = \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

នាំឲ្យ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \cdots = \frac{u_n}{u_{n-1}}$

ជាទូទៅ ៣.១.២ ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \ldots = \frac{u_n}{u_{n-1}}$

៣.២ តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ u_1 តួទីn គឺ u_n ហើយផលធៀបរួម q ។

គេបាន u_1

$$u_2 = u_1 q = u_1 q^{2-1}$$

$$u_3 = u_2 q = u_1 q^2 = u_1 q^{3-1}$$

$$u_4 = u_3 q = u_1 q^3 = u_1 q^{4-1}$$

$$u_5 = u_4 q = u_1 q^4 = u_1 q^{5-1}$$

....

$$u_n = u_1 q^{n-1} \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$$

ជាទូទៅ ៣.២.១ តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $u_n = u_1 q^{n-1}$

ឧទាហរណ៍ ២១

គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $3, 6, 12, 24, 48, ...$

១. កំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត ។

២. គណនាតួទី13 ។

៣. តើចំនួន $1,536$ ជាតួទីប៉ុន្មាន ?

ដំណោះស្រាយ៖ ១. យើងមាន $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 9 \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{6}{3} = 2$

គេបាន $u_n = u_1 q^{n-1} = 3(2)^{n-1}$

ដូចនេះ៖ តួទីn នៃស្វ៊ីត $u_n = 3(2)^{n-1}$

២. គណនា $u_{13} = 3(2)^{13-1} = 3(2)^{12} = 12,288$

៣. តាងចំនួន $1,536$ ជាតួទីk គេបាន $u_k = 1,536$ តែ

$$\begin{aligned} u_k = 3(2)^{k-1} &\Leftrightarrow 3(2)^{k-1} = 1536 \\ &\Leftrightarrow 2^{k-1} = 512 = 2^9 \\ &\Rightarrow k = 9 \end{aligned}$$

ដូចនេះ៖ ចំនួន $1,536$ ជាតួទី 9 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

■

☞ បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១គឺ u_0 និងមានផលធៀបរួម q នោះគេបានតួទីn គឺ $u_{n-1} = u_0 q^{n-1}$ នាំឲ្យតួទី $n+1$ គឺ $u_n = u_0 q^n$

ឧទាហរណ៍ ២២

គេឲ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយដែលមាន $u_0 = 1, u_1 = 5$ និង $u_2 = 25$ ។ កំណត់តួទី7 និង u_7

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន $u_0 = 1, u_1 = 5 \Rightarrow q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{1} = 5$

គេបាន $u_n = u_0 q^n = 1(5)^n = 5^n$

តួទី7 គឺ $u_6 = 5^6 = 15,625$, $u_7 = 5^7 = 78,125$

ដូចនេះ តួទី7 គឺ $u_6 = 15,625$ និង $u_7 = 78,125$ ■

៣.៣ ផលគុណតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ ។ u_1 និង u_6 ហៅថាតួចុង ។ u_2 និង u_5 ហើយ u_3 និង u_4 ហៅថាតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។ តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 q^{n-1} d$

គេបាន $u_1.u_6 = u_1.u_1.q^5 = u_1^2.q^5$

$u_2.u_5 = u_1.q.u_1.q^4 = u_1^2.q^5$

$u_3.u_4 = u_1.q^2.u_1.q^3 = u_1^2.q^5$

នាំឲ្យ $u_1.u_6 = u_2.u_5 = u_3.u_4$

បើគេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p, \ldots, u_{n-(p+1)}, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$

ជាទូទៅ ៣.៣.១ ផលគុណតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុង ស្មើនិងផលគុណតួចុងទាំងពីរ ។

គេកំណត់សរសេរដោយ៖

$$u_1.u_n = u_2.u_{n-1} = u_3.u_{n-2} = \ldots = u_p.u_{n-(p+1)} = \cdots \qquad (៣១)$$

☞ បើ a, b, c ជាបីតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គេបាន $b^2 = a.c$
(b ហៅថាមធ្យមធរណីមាត្រនៃ a និង c)

ឧទាហរណ៍ ២៣

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $2, x+2, 32$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដំណោះស្រាយ៖ $2, x+2, 32$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ គេបាន $(x+2)^2 = 2(32)$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

ដូចនេះ $x = 6$ ■

៣.៤ ផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើ u_1 ជាតួទី១ និង q ជាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះគេតាង

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

នាំឲ្យ $$qS_n = qu_1 + qu_2 + qu_3 + ... + qu_{n-2} + qu_{n-1} + qu_n$$

$$qS_n = u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_{n-1} + u_n + qu_n$$

នាំឲ្យ $$S_n - qS_n = qu_n - u_1 = q.u_1q^{n-1} - u_1 = u_1(q^n - 1)$$

សមមូល $$S_n(q-1) = u_1(q^n - 1)$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q-1} \quad , q \neq 1$$

ជាទូទៅ ៣.៤.១ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $S_n = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q-1}$, $q \neq 1$ និង $n \in \mathbb{N}$

ឧទាហរណ៍ ២៨

គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីត $1, 2, 4, 8, 16, ..., 1024$

ដំណោះស្រាយ៖ តាង $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{1} = 2$

គេបាន $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$

$$= \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

តាង $u_n = 1024$ ដែល $u_n = u_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$

គេបាន $2^{n-1} = 1024$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{10}$$

$$\Rightarrow n - 1 = 10$$

$$\Leftrightarrow n = 11$$

$$\Rightarrow S_{11} = 2^{11-1} = 2^{11} - 1 = 2047$$

ដូចនេះ $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024 = 2047$ ■

៣.៥ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{u_1 q^n}{q - 1} - \frac{u_1}{q - 1}$ ដែល $q \neq 0$

បើ $|q| < 1$ នោះ $q^n \longrightarrow 0$ កាលណា $n \longrightarrow +\infty$

គេបាន $S_\infty = 0 - \frac{u_1}{q - 1} = \frac{u_1}{1 - q}$ កាលណា $n \longrightarrow +\infty$ ។

ជាទូទៅ ៣.៥.១ ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + ... + u_1 q^{n-1} + ...$ ដែល $|q| < 1$ កំណត់ដោយ $S_\infty = \frac{u_1}{1 - q}$

☞ បើ $|q| > 1$ នោះ S_∞ មិនអាចកំណត់បាន

ឧទាហរណ៍ ២៥

គណនាផលបូកតួនៃស្វីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$.

ដំណោះស្រាយ៖ តាង $u_1 = \frac{1}{4}, u_2 = \frac{1}{8}$ និង $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$ ដោយ $|q| < 1$

នាំឲ្យ $S_\infty = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$ ។ ■

ឧទាហរណ៍ ២៦

សរសេរចំនួនទសភាគខួប $3.\overline{45}$ ជាចំនួនសនិទានដែលមានទំរង់ $\frac{a}{b}$

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន $3.\overline{45} = 3 + 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \dots$ ចាប់ពីតួទីពីរទៅជាផលបូកនៃស្វីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $u_1 = 0.45 = \frac{45}{100}, u_2 = 0.0045 = \frac{45}{10000}$ និង $q = \frac{45}{10000} \times \frac{100}{45} = \frac{1}{100} < 1$

តាមរូបមន្ត $S_\infty = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{45}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{45}{100} \times \frac{100}{99} = \frac{45}{99}$

គេបាន $3.\overline{45} = 3 + \frac{45}{99} = \frac{342}{99} = \frac{38}{11}$

ដូចនេះ $3.\overline{45} = \frac{38}{11}$ ■

៤ ផលបូកនៃស៊ីតផ្សេងៗ

៤.១ និមិត្តសញ្ញាផលបូកនឹងផលគុណនៃស៊ីត

៤.១.១ ផលបូកនៃស៊ីត $\sum$

ក្នុងការសរសេរផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $u_1, u_2, u_3, .., u_n$ គេប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$ អានថា ស៊ិចម៉ា ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ ដែល k យកតម្លៃពី $1, 2, 3, ..., n$ ។

ឧទាហរណ៍ ២៧

១. $1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k$

២. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$

៣. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$

៤. $10^2 + 11^2 + 12^2 + ... + 50^2 = \sum_{k=10}^{50} k^2$

៥. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

លក្ខណៈ ១ ផលបូក $\sum$

១. $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

២. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

៣. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

៤. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \pm 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2$

■ **សម្រាយបញ្ជាក់៖** ១. $\sum_{k=1}^{n} c = c + c + c + \ldots + c = cn$

២.
$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n$$
$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$$
$$= c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

៣.
$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n)$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

៤.
$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 \pm 2a_k b_k + b_k^2)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \pm \sum_{k=1}^{n} 2a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \pm 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2$$

■

៤.១.២ ផលគុណនៃស្វ៊ីតតាងដោយ $\prod$

ផលគុណ n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) : $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ។

តាងដោយ $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1.a_2.a_3.....a_n$ ។

លក្ខណៈ ២ ផលគុណ $\prod$

១. $$\prod_{k=0}^{n}(\lambda.u_k) = \lambda^{n+1}\prod_{k=0}^{n} u_k$$

២. $$\prod_{k=0}^{n}(u_k.v_k) = \prod_{k=0}^{n} u_k.\prod_{k=0}^{n} v_n$$

៣. $$\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{u_k}{v_k}\right) = \frac{\prod_{k=0}^{n} u_k}{\prod_{k=0}^{n} v_k} \quad , \quad \prod_{k=0}^{n} v_k \neq 0$$

■ **សម្រាយបញ្ជាក់៖** ១. $$\prod_{k=0}^{n}(\lambda.u_k) = \lambda u_0.\lambda u_1.\lambda u_2.....\lambda u_n$$

$$= \underbrace{\lambda.\lambda.\lambda.....\lambda}_{n+1}.u_0.u_1.u_2.....u_n$$

$$= \lambda^{n+1}\prod_{k=0}^{n} u_k$$

២. $$\prod_{k=0}^{n}(u_k.v_k) = u_0.v_0.u_1.v_1.....u_n.v_n$$

$$= u_0.u_1.....u_n.v_0.v_1.....v_n$$

$$= \prod_{k=0}^{n} u_k.\prod_{k=0}^{n} v_n$$

៣. $\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{u_k}{v_k}\right)=\frac{u_0}{v_0}\cdot\frac{u_1}{v_1}\cdot\frac{u_2}{v_2}\cdots\cdot\frac{u_n}{v_n}$

$$=\frac{\prod_{k=0}^{n}u_k}{\prod_{k=0}^{n}v_k}\quad,\quad\prod_{k=0}^{n}v_k\neq 0$$

■

៤.២ វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

និយមន័យ ៤.២.១ បើ $P(n)$ ជាសំណើដែលទាក់ទងនឹងចំនួនគត់ n ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ គេត្រូវ

- ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះ $n=1$
- ឧបមាថា $P(n)$ ពិតចំពោះតម្លៃ n
- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ពិត នាំអោយគេបាន $P(n+1)$ ពិត ។

ឧទាហរណ៍ ២៨

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$

ដំណោះស្រាយ៖ តាងសំណើ $P(n):1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$

ចំពោះ $n=1$ នោះ $P(1):1=\frac{1(1+1)}{2}=1$ ពិត

ឧបមាថា $P(n):1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $P(n+1):1+2+3+....+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ពិត

យើងមាន $P(n):1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$ បូកអង្គទាំងពីរនឹង $n+1$

គេបាន $1+2+3+....+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\quad \text{(ie. } P(k) \text{ ពិត)}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួចគណិតវិទ្យាគេបានសំណើ $P(n)$ ពិត

ដូចនេះ $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ■

ឧទាហរណ៍ ២៩

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2^{n+1}+3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$

ដំណោះស្រាយ៖ ចំពោះ $n=1$ នោះ $2^{1+1}+3^{2\times1-1}=2^2+3=7$ ជាពហុគុណនៃ 7 ពិត

ឧបមាថា $n=k$ ពិត គឺ $2^{k+1}+3^{2k-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ឬ $2^{k+1}+3^{2k-1}=7q\ ,\ q\in\mathbb{Z}$

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $n=k+1$ គឺស្រាយថា $2^{k+2}+3^{2k+1}$ ជាពហុគុណនៃ 7

យើងមាន $2^{k+1}+3^{2k+1}=2\times 2^{k+1}+3^2\times 3^{2k-1}$

$$=2\times 2^{k+1}+2\times 3^{2k-1}+7\times 3^{2k-1}$$

$$=2(2^{k+1}+3^{2k-1})+7\times 3^{2k-1}$$

$$=2(7q)+7\times 3^{2k-1}$$

$$=7(2q+3^{2k-1})=7p\ ,\ p=2q+3^{2k-1}\in\mathbb{Z}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួចគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $2^{n+1}+3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ■

ឧទាហរណ៍ ៣០

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\geq n^2\ ,\forall n\in\mathbb{N}$

ដំណោះស្រាយ៖ ចំពោះ $n=1$ នោះ $1\geq 1$ ពិត

ឧបមាថា $n=k$ ពិត គឺ $\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)\geq k^2$

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $n=k+1$ គឺស្រាយថា $\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}i\right)\geq(k+1)^2$

យើងមាន
$$\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}i\right)\geq(k+1)^2$$
$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{1}{k+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i+(k+1)\right)\geq(k+1)^2$$
$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)+(k+1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k}i+1\geq k^2+2k+1$$
$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)+(k+1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{1}{k+1}\frac{k(k+1)}{2}\geq k^2+2k$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)+(k+1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{k}{2}\geq k^2+2k \qquad (៤១)$$

ដោយ
$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)\geq k^2$$
$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\frac{k(k+1)}{2}\geq k^2$$
$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)(k+1)\geq 2k$$

នាំឲ្យសមីការ (៤១) : $\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)+(k+1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{k}{2}\geq k^2+2k$
$$k^2+2k+\frac{k}{2}\geq k^2+2k$$
$$\frac{k}{2}\geq 0\,,\forall k\in\mathbb{N}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួចគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\geq n^2\,,\ \forall n\in\mathbb{N}$ ■

៤.៣ ស៊្វីតមានទំរង់ $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^p$

វិធាន ១

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$ ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវ

- ប្រើសមភាព $(k+1)^{p+1} - k^{p+1} \quad , \quad p = 1, 2, 3, ...$
- តាង $f(k) = k^{p+1} \Longrightarrow f(k+1) = (k+1)^{p+1}$
- ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន $\sum_{k=1}^{n} [f(k+1) - f(k)] = f(n+1) - f(1)$

ឧទាហរណ៍ ៣១

គណនាផលបូក $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

ដំណោះស្រាយ៖ គេមានសមភាព $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^2 - k^2\right] = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2.S_n + n$$

$$(n+1)^2 - (n+1) = 2.S_n$$

$$(n+1)n = 2.S_n$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ដូចនេះ៖ $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ■

ឧទាហរណ៍ ៣២

គណនាផលបូក $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

ដំណោះស្រាយ៖ គេមានសមភាព $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$

គេបាន $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right]=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{n}k^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}$$

$$(n+1)^3-1=3.S_n+3.\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$3.S_n=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{2(n+1)^3-2(n+1)-3n(n+1)}{2}$$

$$6.S_n=(n+1)\left(2(n+1)^2-2-3n\right)$$

$$=(n+1)(2n^2+4n+2-2-3n)$$

$$=(n+1)(2n^2+n)$$

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n=1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ ■

ឧទាហរណ៍ ៣៣

គណនាផលបូក $S_n=1^3+2^3+3^3+...+n^3$

ដំណោះស្រាយ៖ គេមានសមភាព $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$

គេបាន $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4-\sum_{k=1}^{n}k^4=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}$

$$(k+1)^4-1=4S_n+6.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4.\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$(n+1)^4-(n+1)=4S_n+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)$$

$$
\begin{aligned}
4S_n &= (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)\\
&= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right]\\
&= (n+1)(n^3+3n^2+3n+1-1-2n^2-n-2n)\\
&= (n+1)(n^3+n^2)\\
4S_n &= n^2(n+1)^2\\
S_n &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$ ■

រូបមន្ត ១ តាមឧទាហរណខាងលើគេបានរូបមន្តដែលត្រូវចងចាំ ដើម្បីប្រើសម្រាប់គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតផ្សេងៗ ៖

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

ឧទាហរណ៍ ៣៨

គណនា

1. $\sum_{i=1}^{20} 2i$
2. $\sum_{k=1}^{20} k(k+3)$
3. $\sum_{i=1}^{n} 2i$
4. $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)$

ដំណោះស្រាយ៖ ១. $\sum_{i=1}^{20} 2i = 2\sum_{k=1}^{20} i = 2.\frac{20(20+1)}{2} = 20\times 21 = 420$

២.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} k(k+3) &= \sum_{k=1}^{20}(k^2+3k)\\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 + 3\sum_{k=1}^{20} k\\ &= \frac{20(20+1)(20\times 2+1)}{6} + 3.\frac{20(20+1)}{2}\\ &= 3500\end{aligned}$$

៣. $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{k=1}^{n} i = 2.\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$

៤.
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2i-1) &= 2\sum_{k=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\\ &= 2.\frac{n(n+1)}{2} - n\\ &= n(n+1) - n\\ &= n^2 + n - n\\ &= n^2\end{aligned}$$

■

៤.៤ ស៊ីតមានទំរង់ $p + pp + ppp + ... + ppp...pp$

តាង $S_n = p + pp + ppp + ... + \underbrace{pp...pp}_{n \text{ តួ}}$, $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = p(1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111...1}_{n \text{ តួ}})$$

$$9S_n = p(9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{999...9}_{n \text{ តួ}})$$

$$\frac{9}{p}S_n = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + ... + (10^n-1)$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n) - (\underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{n \text{ តួ}})$$

$$= 10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$$

$$\frac{9}{p}S_n = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$$

$$S_n = \frac{p\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$$

ឧទាហរណ៍ ៣៥

គណនាផលបូក $S_n = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99...99}_{2017 \text{ តួ}}$

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន $S_n = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99...99}_{2017 \text{ តួ}}$

គេបាន $S_n = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + ... + (10^{2017}-1)$

$$= 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{2017} - (\underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{2017 \text{ តួ}})$$

$$= 10 \times \frac{10^{2017} - 1}{10 - 1} - 2017$$

$$S_n = \frac{10^{2018} - 9(2017) - 10}{9}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{10^{2018} - 18163}{9}$ ■

ឧទាហរណ៍ ៣៦

គណនាផលបូក $S_n = 7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{777\ldots7}_{n \text{ តួ}}$

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន $S_n = 7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{777\ldots7}_{n \text{ តួ}}$

គេបាន $S_n = 7(1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ តួ}})$

$$9S_n = 7(9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{n \text{ តួ}})$$

$$\frac{9}{7}S_n = (10-1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \ldots. + (10^n - 1)$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - (\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ តួ}})$$

$$= 10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$$

$$\frac{9}{7}S_n = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$$

$$S_n = \frac{7\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$$

ដូចនេះ៖ $S_n = \dfrac{7\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$ ■

ឧទាហរណ៍ ៣៧

គណនាផលបូក $S_n = 12 + 1212 + 121212 + \ldots + \underbrace{121212\ldots1212}_{n \text{ តួលេខ } 12}$

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន $S_n = 12 + 1212 + 121212 + \cdots + \underbrace{121212\ldots1212}_{n \text{ តួលេខ } 12}$

គេបាន $$S_n = 12\left(1+101+10101+...+1\underbrace{010101...0101}_{n-1 \text{ គូលេខ } 01}\right)$$

$$99S_n = 12\left(99+9999+999999+\cdots+\underbrace{999999\cdots9999}_{n \text{ គូលេខ } 99}\right)$$

$$\frac{99}{12}S_n = (10^2-1)+(10^4-1)+(10^6-1)+...+(10^{2n}-1)$$

$$= 10^2+10^4+10^6+\cdots+10^{2n}-(\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{n \text{ ដងលេខ } 1})$$

$$= 100\times\frac{100^n-1}{100-1}-n$$

$$= \frac{100^{n+1}-100-99n}{99}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{12\left(100^{n+1}-99n-100\right)}{99^2}$ ■

៤.៥ ស៊្វីតដែលមានទំរង់ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k.a_{k+1}}$

វិធាន ២

គេមាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k.a_{k+1}} = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + ... + \frac{1}{a_na_{n+1}}$

តាង $a_{k+1} - a_k = d$ ឋេរ $d \neq 0$ ដើម្បីគណនាគណនាផលបូកនេះ គេត្រូវ

- បម្លែងតួ $\frac{1}{a_ka_{k+1}} = \frac{1}{d} \times \frac{a_{k+1} - a_k}{a_ka_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$
- យក $f(k) = \frac{1}{a_k}$ នាំឲ្យ $f(k+1) = \frac{1}{a_{k+1}}$
- ធ្វើប្រមាណវិធីបូក

  គេបាន $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k.a_{k+1}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}[f(k) - f(k+1)]$

  $= \frac{1}{d}[f(1) - f(n+1)]$

ឧទាហរណ៍ ៣៨

គណនាផលបូក $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

ដំណោះស្រាយ៖ តាង $d = (k+1) - k = 1$ ដោយ $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

គេបាន

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n}{n+1}$ ■

៤.៦ ស៊្វីតមានទំរង់ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}}$

វិធាន ៣

គេមាន $S_n = \frac{1}{a_1a_2a_3} + \frac{1}{a_2a_3a_4} + \frac{1}{a_3a_4a_5} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$

តាង $a_{k+2} - a_k = d$ ថេរ $d \neq 0$ ដើម្បីគណនាគណនាផលបូកនេះ គេត្រូវ

- បម្លែងតួ $\frac{1}{a_ka_{k+1}a_{k+2}} = \frac{1}{d} \times \frac{a_{k+2}-a_k}{a_ka_{k+1}a_{k+2}}$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_ka_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}\right)$$

- យក $f(k) = \frac{1}{a_ka_{k+1}}$ និង $f(k+1) = \frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}$
- ធ្វើប្រមាណវិធី

គេបាន $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_ka_{k+1}a_{k+2}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}[f(k) - f(k+1)]$

$$= \frac{1}{d}\left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k+1)\right]$$

$$= \frac{1}{d}[f(1) - f(n+1)]$$

ឧទាហរណ៍ ៣៩

គណនាផលបូក $S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ដំណោះស្រាយ៖ តាង $d = (k+2) - k = 2$

យើងមាន $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-k}{2k(k+1)(k+2)}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(1+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

ដូចនេះ $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$ ■

៤.៧ ស្វ៊ីតមានទំរង់ $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$

វិធាន ៤

បើ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត និង (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ ដើម្បីគណនាផលបូក

$$S_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+...+a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

គេត្រូវ គណនា S_n-qS_n រួចទាញរក S_n

ឧទាហរណ៍ ៤០

គណនា $S_n=1+2.2+3.2^2+4.2^3+...+n.2^{n-1}$

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន $S_n=1+2.2+3.2^2+4.2^3+...+n.2^{n-1}$

$$\Longrightarrow 2S_n=2+2.2^2+3.2^3+4.2^4+...+n.2^n$$

គេបាន $S_n-2S_n=1+2+2^2+2^3+...+2^{n-1}-n.2^n$

$$-S_n=1\times\frac{2^n-1}{2-1}-n.2^n$$

$$S_n=n.2^n-2^n+1$$

$$=1+2^n(n-1)$$

ដូចនេះ $S_n=1+2^n(n-1)$ ■

៤.៨ កំណត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស្វ៊ីត

៤.៨.១ ផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស្វ៊ីត

វិធាន ៥

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) : $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ តាងស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់មួយនៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស្វ៊ីត (b_n) : $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ ។ តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤១

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n) : 2, 4, 8, 14, 22, 32, ...$

ដំណោះស្រាយ៖ តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។ ស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់1នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស្វ៊ីត $(b_n) : 2, 4, 6, 8, ...$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី1ស្មើ 2 និងផលសងរួមស្មើ 2 នោះគេបាន $b_n = 2 + 2(n-1) = 2n$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \\ &= 2 + \frac{2n(n-1)}{2} \\ &= 2 + n^2 - n \\ &= n^2 - n + 2 \end{aligned}$$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $a_1 = 1^2 - 1 + 2 = 2$ ពិត

ដូចនេះ (a_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $a_n = n^2 - n + 2$ ∎

៤.៨.២ ផលសងតួលំដាប់ទីពីរនៃស្វ៊ីត

វិធាន ៦

គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ តាងស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់មួយនៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ គេបានស្វ៊ីត (b_n) : $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ ។

តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \geq 2$

និងតាង c_n ជាផលសងលំដាប់មួយនៃស្វ៊ីត (b_n) ឬ ផលសងលំដាប់ពីរនៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$ គេបាន (c_n) : $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ ។

តួទី n នៃស្វ៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤២

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) : $4, 18, 48, 100, 180, 294, \cdots$

ដំណោះស្រាយ៖ តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។ ស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់1នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស្វ៊ីត (b_n) : $14, 30, 52, 80, 114, \dots$

តាងស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់1នៃស្វ៊ីត (b_n) ដែលកំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$ ។

គេបានស្វ៊ីត (c_n) : $16, 22, 28, 34, \dots$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី 1 ស្មើ 16 និងផលសងរួមស្មើ 6 នោះ $c_n = 16 + 6(n-1) = 16 + 6n - 6 = 6n + 10$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន
$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 14 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k+10) \\ &= 14 + 6\sum_{k}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n} 10 \\ &= 14 + \frac{6n(n-1)}{2} + 10n \\ &= 3n^2 + 7n + 4 \end{aligned}$$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $b_1 = 3.1^2 + 7.1 + 4 = 14$ ពិត

នាំឲ្យ $b_n = 3n^2 + 7n + 4$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន
$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 4 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k^2 + 7k + 4) \\
&= 4 + 3\sum_{k}^{n-1} k^2 + 7\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n-1} 4 \\
&= 4 + \frac{3n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{7n(n-1)}{2} + 4(n-1) \\
&= 4n + \frac{1}{2}(n-1)(2n^2 - n + 7n) \\
&= 4n + (n-1)(n^2 + 3n) \\
&= 4n + n^3 + 3n^2 - n^2 - 3n \\
&= n^3 + 2n^2 + n
\end{aligned}$$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $a_1 = 1^3 + 2.1^2 + 1 = 4$ ពិត

ដូចនេះ ស្ទីត (a_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $a_n = n^3 + 2n^2 + n$ ■

៥

ទំនាក់ទំនងតួនៃស៊ីត

៥.១ កំណត់តួទី n ដោយប្រើស៊ីតជំនួយ

៥.១.១ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a.u_n + f(n)$

វិធាន ៧

គេអោយស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = a.u_n + f(n)$ ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស៊ីតគេត្រូវះ

※ **ករណី** $a \neq 1$

១. រកស៊ីត (r_n) មានទំរង់តាមអនុគមន៍នៃ $f(n)$ ដែលផ្ទៀផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើននៃសមីការ

$r_{n+1} = a.r_n + f(n)$

២. ធ្វើផលសង $u_{n+1} - r_{n+1} = a(u_n - r_n)$ តាងស៊ីតជំនួយ $v_n = u_n - r_n$

៣. ស៊ីត (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចទាញរកតួ u_n ។

※ **ករណី** $a = 1$

១. គេមាន $u_{n+1} = u_n + f(n)$ សមមូល $u_{n+1} - u_n = f(n)$

២. តាង $v_n = u_{n+1} - u_n = f(n)$ នោះ (v_n) ជាផលសងលំដាប់ទី១នៃស៊ីត (u_n)

៣. ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$ ឬ $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

☞ គេអាចរក r_n តាម $f(n)$ ចំពោះ $a,b,c,A,B,C,\alpha,\beta,\gamma$ ជាចំនួនថេរ

- បើ $f(n)=c$ តាង $r_n=\alpha$
- បើ $f(n)=an+b$ តាង $r_n=\alpha n+\beta$
- បើ $f(n)=an^2+bn+c$ តាង $r_n=\alpha n^2+\beta n+\gamma$
- បើ $f(n)=a^n$ តាង $r_n=\alpha.a^n$
- បើ $f(n)=(An+B)a^n$ តាង $r_n=(\alpha n+\beta)a^n$
- បើ $f(n)=(An^2+Bn+C)a^n$ តាង $r_n=(\alpha n^2+\beta n+\gamma)a^n$

ឧទាហរណ៍ ៤៣

គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) មួយកំណត់ដោយ: $\begin{cases} u_1=1 \\ 3u_{n+1}=2u_n+3 \end{cases}$ ។

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត ។

ដំណោះស្រាយ៖ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $u_1=1;\ 3u_{n+1}=2u_n+3$ ឬ $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}+1$

តាង $r_n=\alpha$ នាំឲ្យ $r_{n+1}=\alpha$ ដោយ r_n ផ្ទៀតផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន (u_n)

គេបាន $3r_{n+1}=2r_n+3$

$$3\alpha=2\alpha+3$$

$$\alpha=3$$

នោះ $r_n=r_{n+1}=3$ ធ្វើផលសង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+1-r_{n+1}$

$$u_{n+1}-3=\frac{2}{3}u_n+1-3$$

$$u_{n+1}-3=\frac{2}{3}(u_n-3)$$

តាង

$$v_n=u_n-3\Leftrightarrow v_{n+1}=u_{n+1}-3 \qquad (៥១)$$

គេបាន $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $v_1 = u_1 - 3 = 1 - 3 = -2$ និង $q = \frac{2}{3}$ នោះ $v_n = v_1 q^{n-1} = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ តាម (៥១)

គេបាន $u_n = v_n + 3 = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ■

ឧទាហរណ៍ ៤៤

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 3$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$

ដំណោះស្រាយ៖ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 3$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ (r_n) : $r_n = \alpha.n + \beta \Rightarrow r_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta$

$$r_{n+1} = 2r_n - n + 1$$

គេបាន
$$\alpha(n+1) + \beta = 2(\alpha n + \beta) - n + 1$$

$$n(\alpha - 1) + \beta - \alpha + 1 = 0$$

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \beta - \alpha + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow r_n = n$

$\Rightarrow r_{n+1} = n + 1$

ធ្វើផលសង $u_{n+1} - r_{n+1}$ គេបាន៖ $u_{n+1} - r_{n+1} = 2u_n - n + 1 - (n+1)$

$$u_{n+1} - (n+1) = 2u_n - 2n$$
$$= 2(u_n - n)$$

តាង

$$v_n = u_n - n \Leftrightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) \qquad (៥២)$$

គេបាន $v_{n+1} = 2v_n \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 2$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $q = 2$,
$v_1 = u_1 - 1 = 3 - 1 = 2 \Longleftrightarrow v_n = v_1.q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

តាមសមីការ (៥២) គេបាន $2^n = u_n - n \Rightarrow u_n = 2^n + n$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = 2^n + n$ ∎

ឧទាហរណ៍ ៤៥

គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 2 \end{cases}$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

ដំណោះស្រាយ៖ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $u_1 = 5, u_{n+1} = 3u_n - 2n + 2$

តាងស្វ៊ីត $(r_n) : r_n = \alpha.n + \beta \Rightarrow r_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta$, $(\alpha, \beta$ ជាចំនួនថេរ)

គេបាន: $r_{n+1} = 3r_n - 2n + 2$

$$\alpha(n+1) + \beta = 3(\alpha n + \beta) - 2n + 2$$

$$\alpha n + \alpha + \beta = 3\alpha n + 3\beta - 2n + 2$$

$$0 = 2\alpha n + 3\beta - 2n + 2$$

$$0 = (\alpha - 1)2n + 2\beta - \alpha + 2$$

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ 2\beta - \alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow r_n = n - \dfrac{1}{2} \Rightarrow r_{n+1} = (n+1) - \dfrac{1}{2}$

ធ្វើផលសង $u_{n+1} - r_{n+1}$

គេបាន $u_{n+1} - r_{n+1} = 3u_n - 2n + 2 - \left[(n+1) - \dfrac{1}{2}\right]$

$$u_{n+1} - \left[(n+1) - \frac{1}{2}\right] = 3u_n - 3n + \frac{3}{2}$$

$$= 3\left[u_n - \left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$$

តាង

$$v_n = u_n - \left(n - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - \left[(n+1) - \frac{1}{2}\right] \quad (៥៣)$$

គេបាន $v_{n+1}=3v_n \Leftrightarrow \dfrac{v_{n+1}}{v_n}=3$ ជាស្វីតធរណីមាត្រដែល

$$q=3\ ,\ v_1=u_1-\left(1-\frac{1}{2}\right)=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow v_n=v_1.q^{n-1}=\frac{9}{2}\times 3^{n-1}=\frac{3^{n+1}}{2}$$

តាមសមីការ (៥៣) គេបាន $\dfrac{3^{n+1}}{2}=u_n-\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow u_n=\dfrac{3^{n+1}}{2}+\left(n-\dfrac{1}{2}\right)$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វីត (u_n) គឺ $u_n=\dfrac{3^{n+1}}{2}+\left(n-\dfrac{1}{2}\right)$ ■

ឧទាហរណ៍ ៨៦

គេឲ្យស្វីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}:\begin{cases}u_1 &=5\\ u_{n+1} &=u_n+n^2+2n+1\end{cases}$ ។

កំណត់តួទី n នៃស្វីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ កំណត់តួទី n នៃស្វីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ $u_1=5,\ u_{n+1}=u_n+n^2+2n+1$ គេបាន $u_{n+1}-u_n=n^2+2n+1$

តាង $v_n=u_{n+1}-u_n=n^2+2n+1$ នោះ v_n ជាផលសងលំដាប់១នៃ (u_n)

ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន $u_n=u_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}v_k$

$$\begin{aligned}&=5+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+2k+1)\\&=5+\sum_{k=1}^{n-1}k^2+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1\\&=5+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+2\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)\\&=\frac{1}{6}.n(n-1)(2n-1)+n(n-1)+n+4\end{aligned}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វីុត (u_n) គឺ $u_n = \frac{1}{6}.n(n-1)(2n-1)+n(n-1)+n+4$ ■

៥.២ កំណត់តួទូទៅនៃទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = f(u_n)$

៥.២.១ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = \frac{u_n+\alpha}{u_n+\beta}$

វិធាន ៨

គេឲ្យស្វីុត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1} = \frac{u_n+\alpha}{u_n+\beta} \qquad (៥៤)$$

ដើម្បីកំណត់តួទីn នៃស្វីតគេត្រូវ សមីកាសំគាល់ $\lambda = \frac{\lambda+\alpha}{\lambda+\beta}$

$$\lambda(\lambda+\beta) = \lambda+\alpha$$

$$\lambda^2+\beta\lambda-\lambda-\alpha = 0$$

$$\lambda^2+(\beta-1)\lambda-\alpha = 0$$

- ករណី $\Delta = [-(\beta-1)]^2+4\alpha \neq 0$ នោះសមីការមានឫសពីរ $\lambda_1,\lambda_2 = \frac{-(\beta-1)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ តាង ស្វីត $v_n = \frac{u_n-\lambda_1}{u_n-\lambda_2}$ ចំពោះ $\lambda_1 > \lambda_2$ ហើយបង្ហាញថា (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ទាញរក u_n ។
- ករណី $\Delta = [-(\beta-1)]^2+4\alpha = 0$ នោះសមីការមានឫសឌុប $\lambda = \frac{-(\beta-1)}{2}$
  តាង $v_n = \frac{1}{u_n-\lambda}$ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វីតនព្វន្ត ហើយគណនា v_n រួចទាញរក u_n ។

ឧទាហរណ៍ ៤៧

គេឲ្យទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n+6}{u_n+2}\end{cases}$ ។ កំណត់តួទូទៅនៃស្វីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

ដំណោះស្រាយៈ កំណត់តួទៅទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}_0$

គេមាន $u_{n+1} = \dfrac{u_n+6}{u_n+2}$ មានសមីការសំគាល់

$$\lambda = \frac{\lambda+6}{\lambda+2}$$
$$\lambda(\lambda+2) = \lambda+6$$
$$\lambda^2+2\lambda-\lambda-6=0$$
$$\lambda^2+\lambda-6=0$$
$$(\lambda-2)(\lambda+3)=0$$
$$\lambda=2, \lambda=-3$$

តាង $v_n = \dfrac{u_n-\lambda_1}{u_n-\lambda_2}$ ដែល $\lambda_1 = 2 > \lambda_2 = -3$ នាំឲ្យ $v_n = \dfrac{u_n-2}{u_n+3}$ $\quad (I)$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-3}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+6}{u_n+2}$

$$= \frac{\dfrac{u_n+6}{u_n+2}-2}{\dfrac{u_n+6}{u_n+2}} = \frac{u_n+6-2u_n-4}{u_n+2} \times \frac{u_n+2}{u_n+6+3u_n+6}$$
$$= -\frac{1}{4} \times \frac{u_n-2}{u_n+3} = -\frac{1}{4}v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = -\dfrac{1}{4}$ និង $v_0 = \dfrac{u_0-2}{u_0+3} = -\dfrac{1}{4}$

នាំឲ្យ $v_n = v_0.q^n = -\dfrac{1}{4} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$

តាមសមីការ (I) គេបាន

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{u_n-2}{u_n+3} = \frac{u_n+3-5}{u_n+3}$$
$$= 1 - \frac{5}{u_n+3}$$
$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1 = -\frac{5}{u_n+3}$$
$$u_n+3 = -\frac{5}{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}$$
$$u_n = -\frac{5}{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1} - 3$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = -\dfrac{5}{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1} - 3$ ■

ឧទាហរណ៍ ៤៨

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_{n+1} & = \dfrac{4u_n - 1}{4u_n} \end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ កំណត់តួទៅទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}_0$

គេមាន $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{4u_n}$

មានសមីការសំគាល់

$$\lambda = \frac{4\lambda - 1}{4\lambda}$$

$$4\lambda^2 = 4\lambda - 1$$

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

តាង $v_n = \dfrac{1}{u_n - \lambda}$ ដែល $\lambda = \dfrac{1}{2}$ នោះ

$$v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \qquad (៥៥)$$

គេបាន $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - \dfrac{1}{2}} - \dfrac{1}{u_n - \dfrac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{\dfrac{4u_n - 1}{4u_n} - \dfrac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \dfrac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{4u_n - 1}{4u_n} - \dfrac{2u_n}{4u_n}} - \frac{1}{u_n - \dfrac{1}{2}}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{4u_n}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$
$$= \frac{4u_n}{2u_n - 1} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} = \frac{2u_n}{u_n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2\left(u_n - \frac{1}{2}\right)}{u_n - \frac{1}{2}} = 2$$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន ផលសងរួម $d = 2$ និង $v_0 = \frac{1}{u_0 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$

នាំឲ្យ $v_n = v_0 + nd = \frac{2}{5} + 2n$ តាមសមីការ (៥៥)

គេបាន
$$v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$
$$\frac{2}{5} + 2n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$
$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2n + \frac{2}{5}}$$
$$u_n = \frac{1}{2n + \frac{2}{5}} + \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះ $n \in \mathbb{N}_0$ គឺ $u_n = \frac{1}{2n + \frac{2}{5}} + \frac{1}{2}$ ■

៥.២.២ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

៥.២.៣ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

គេអោយស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad (៥៦)$$

ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតគេត្រូវ៖

សរសេរសមីការ $\lambda^2 = a\lambda + b \Leftrightarrow \lambda^2 - a\lambda - b = 0$ ដែល $\Delta = a^2 + 4b$ ជាសមីការសម្គាល់នៃ (៥៦)

របៀបទី១

វិធាន ៩

- បើ $\Delta \neq 0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឬសពីរជាចំនួនពិតគឺ $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ គេបាន

$$\begin{cases} u_{n+2} - \lambda_1 u_{n+1} = \lambda_2(u_{n+1} - \lambda_1 u_n) \\ u_{n+2} - \lambda_2 u_{n+1} = \lambda_1(u_{n+1} - \lambda_2 u_n) \end{cases}$$

ឬ $\begin{cases} v_{n+1} = \lambda_2 v_n \\ w_{n+1} = \lambda_1 w_n \end{cases}$

ដែល $v_n = u_{n+1} - \lambda_1 u_n$ និង $w_n = u_{n+1} - \lambda_2 u_n$

ដោះស្រាយរក v_n និង w_n នោះគេអាចរក u_n បានតាមទំនាកទំនង v_n និង w_n

- ករណី $\Delta = 0$ នោះសមីការមានឬសឌុប $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \dfrac{a}{2}$ តាង

$$v_n = u_{n+1} - \lambda u_n \qquad (៥៧)$$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \lambda u_{n+1}$$
$$= p u_{n+1} + q u_n - \lambda u_{n+1}$$
$$= (p - \lambda) u_{n+1} + q u_n$$

$$v_{n+1} = (p - \lambda)\left(u_{n+1} + \frac{q}{p - \lambda}\right)$$

យក $v_n = u_{n+1} + \dfrac{q}{p - \lambda} \Rightarrow v_{n+1} = (p - \lambda) v_n$ នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេស៊ុយុង $r = (p - \lambda)$ និង$v_1 = u_2 - r\lambda u_1$

គេបាន $v_n = (u_2 - r u_1)(p - \lambda)^{n-1}$

យក (៥៧) ចែកនឹង r^{n+1} : $\dfrac{v_n}{r^{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{r^{n+1}} - \dfrac{u_n}{r^n}$

តាង $w_n = \dfrac{u_n}{r^n} \Rightarrow w_{n+1} - w_n = \dfrac{v_n}{r^{n+1}}$ គេបាន (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = \dfrac{v_n}{r^{n+1}}$ និង $w_1 = \dfrac{u_1}{r}$ នោះគេអាចរក w_n បាន រួចគណនា u_n តាមទំនាកទំនង $w_n = \dfrac{u_n}{r^n}$

ឧទាហរណ៍ ៥៩

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_1=1, u_2=3, u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$ ។

ដំណោះស្រាយះ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

គេមាន $u_1=1, u_2=3, u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n \Leftrightarrow u_{n+2}-3u_{n+1}+2u_n=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-3\lambda+2=0$, $\Delta>0$ មានឬសពីរ $\lambda_1=1$ និង $\lambda_2=2$

តាង $\begin{cases} v_n=u_{n+1}-\lambda_1 u_n=u_{n+1}-u_n \\ w_n=u_{n+1}-\lambda_2 u_n=u_{n+1}-2u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1} \\ w_{n+1}=u_{n+2}-2u_{n+1} \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} v_{n+1}=\lambda_2 v_n \\ w_{n+1}=\lambda_1 w_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{n+1}=2v_n \text{ , } v_1=u_2-u_1=3-1=2 \\ w_{n+1}=w_n \text{ , } w_1=u_2-2u_1=3-2(1)=1 \end{cases}$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q=2 \Rightarrow v_n=v_1.q^{n-1}=2.2^{n-1}=2^n$

គេបាន

$$u_{n+1}-u_n=2^n \qquad (៥៨)$$

និង (w_n) ជាស្វ៊ីតថេរនោះគេបាន $w_{n+1}=w_n=\cdots=w_2=w_1=1$

គេបាន

$$u_{n+1}-2u_n=1 \qquad (៥៩)$$

យកសមីការ (៥៨) ដក (៥៩) គេបាន $u_{n+1}-u_n-(u_{n+1}-2u_n)=2^n-1$

$$u_n=2^n-1$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n=2^n-1$ ■

ឧទាហរណ៍ ៤០

ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $u_1 = 0, u_2 = 2,$ $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) នេះ

ដំណោះស្រាយ៖ កំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត (u_n)

គេមាន $u_1 = 0, u_2 = 2, u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, $\Delta > 0$ មានឫស $\lambda_1 = 2$ និង $\lambda_2 = 3$

តាង $\begin{cases} v_n = u_{n+1} - 2u_n \\ w_n = u_{n+1} - 3u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} \\ w_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1} \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} v_{n+1} = 3v_n \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases}$

ដោយ (v_n) និង (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$(v_n) : q = 3, v_1 = u_2 - 2u_1 = 2 \Rightarrow u_n = v_1.q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$

គេបាន

$$u_{n+1} - 2u_n = 2 \times 3^{n-1} \qquad (៥១០)$$

$(w_n) : q = 2, w_1 = u_2 - 3u_1 = 2 \Rightarrow w_n = w_1.q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

គេបាន

$$u_{n+1} - 3u_n = 2^n \qquad (៥១១)$$

យកសមីការ (៥១០) ដក (៥១១)

គេបាន $u_{n+1} - 2u_n - (u_{n+1} - 3u_n) = 2 \times 3^{n-1} - 2^n$

$$u_n = 2 \times 3^{n-1} - 2^n$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n = 2 \times 3^{n-1} - 2^n$ ■

ឧទាហរណ៍ ៩១

ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_1 = 1, u_2 = 4, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) នេះ

ដំណោះស្រាយៈ កំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត (u_n)

គេមាន $u_1 = 1, u_2 = 4, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ ឬ $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, $\Delta = 0$ មានឫសឌុប $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$

តាង $v_n = u_{n+1} - \lambda u_n = u_{n+1} - 3u_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - 3u_{n+1} \\ &= 6u_{n+1} - 9u_n - 3u_{n+1} \\ &= 3u_{n+1} - 9u_n \\ &= 3(u_{n+1} - 3u_n) \\ v_{n+1} &= 3v_n \end{aligned}$$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $q = 3; v_1 = u_2 - 3u_1 = 4 - 3(1) = 1$

នាំឲ្យ $v_n = v_1.q^{n-1} = 3^{n-1}$

គេបាន

$$u_{n+1} - 3u_n = 3^{n-1} \qquad (៥១២)$$

យកសមីការ (៥១២) ចែកនឹង 3^{n-1}

គេបាន $\frac{u_{n+1}}{3^{n-1}} - 3\frac{u_n}{3^{n-1}} = 1$ ឬ $\frac{u_{n+1}}{3^{n-1}} - \frac{u_n}{3^{n-2}} = 1$

តាង

$$w_n = \frac{u_n}{3^{n-2}} \Rightarrow w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n-1}} \qquad (៥១៣)$$

គេបាន $w_{n+1} - w_n = 1$ នោះ (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែល $d = 1, w_1 = \frac{u_1}{3^{1-2}} = 3$

នាំឲ្យ $w_n = w_1 + (n-1)d$

$$= 3 + (n-1)1$$

$$= n + 2$$

តាម (៥១៣) គេបាន $n + 2 = \dfrac{u_n}{3^{n-2}} \Rightarrow u_n = (n+2)3^{n-2}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n = (n+2)3^{n-2}$ ■

របៀបទី២

វិធាន ១០

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ (៥១៤)

- បើ $\Delta > 0$ នោះសមីការ (៥១៤) មានឫសពីរគឺ $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$
  ចំពោះ $n \in \mathbb{N}_0$ គេបានតួទូទៅ $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n \quad , A, B \in \mathbb{R}$
- បើ $\Delta = 0$ នោះសមីការ (៥១៤) មានឫសឌុបគឺ $\lambda = \dfrac{a}{2}$
  គេបានតួទូទៅ $u_n = (A + (n+1)B)\,\lambda^n \ , A, B \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$

$$u_n = (A + nB)\,\lambda^n \ , A, B \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$$

ឧទាហរណ៍ ៩២

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត Fibonacci ដែលកំណត់ដោយ $f_0 = 0, f_1 = 1$ និង $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ចំពោះ $n \geq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត Fibonacci

គេមានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, $\Delta = \sqrt{5}$ និងមានឫសពីរ $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

គេបាន $f_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

ចំពោះ $f_0 = 0 \Longrightarrow f_0 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$

$$A + B = 0 \Longrightarrow A = -B \qquad (៥១៥)$$

ចំពោះ $f_1 = 1 \Longrightarrow f_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \qquad (៥១៦)$$

យកសមីការ (៥១៥) ជំនួសចូល (៥១៦)

គេបាន
$$-B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$
$$B\left(-1-\sqrt{5}+1-\sqrt{5}\right) = 2$$
$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Longrightarrow A = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$\Longrightarrow f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ } f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$ ■

ឧទាហរណ៍ ៨៣

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $u_0 = 0, u_1 = \sin\alpha$ និង $u_{n+2} = 2\cos\alpha . u_{n+1} - u_n$ ចំពោះ $n \geq 0$ និង $\alpha \neq n\pi$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 2\cos\alpha\lambda + 1 = 0$ ដែល $\Delta = (2\cos\alpha\lambda)^2 - 4$

នោះ $\lambda_1,\lambda_2=\dfrac{2\cos\alpha\pm\sqrt{4\cos^2\alpha-4}}{2}=\cos\alpha\pm\sqrt{\cos^2\alpha-1}$

$$=\cos\alpha\pm\sqrt{-\sin^2\alpha}\ ,\cos^2\alpha-1=-\sin^2\alpha$$

$$=\cos\alpha\pm i\sin\alpha$$

គេបាន

$$u_n=A\lambda_1^n+B\lambda_2^n=A(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n+B(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n \tag{៥១៧}$$

ចំពោះ $u_0=0\Longrightarrow u_0=A(\cos\alpha+i\sin\alpha)^0+B(\cos\alpha-i\sin\alpha)^0$

$$A+B=0\Longrightarrow B=-A \tag{៥១៨}$$

ចំពោះ $u_1=\sin\alpha\Longrightarrow u_1=A(\cos\alpha+i\sin\alpha)^1+B(\cos\alpha-i\sin\alpha)^1$

$$A(\cos\alpha+i\sin\alpha)+B(\cos\alpha-i\sin\alpha)=\sin\alpha \tag{៥១៩}$$

យកសមីការ (៥១៨) ជំនួសចូល (៥១៩)

គេបាន $A(\cos\alpha+i\sin\alpha)-A(\cos\alpha-i\sin\alpha)=\sin\alpha$

$$A\left(\cos\alpha+i\sin\alpha-\cos\alpha+i\sin\alpha\right)=\sin\alpha\ ,\alpha\neq0$$

$$A2i\sin\alpha=\sin\alpha$$

$$A2i=1$$

$$A=\frac{1}{2i}$$

$$B=-\frac{1}{2i}$$

ជំនួសចូល (៥១៧) គេបាន
$$u_n = \frac{1}{2i}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - \frac{1}{2i}(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n$$
$$= \frac{1}{2i}\left[(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n\right]$$
$$= \frac{1}{2i}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha - \cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$
$$= \sin n\alpha$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ } u_n = \sin n\alpha}$ ■

ឧទាហរណ៍ ៩៤

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_1 = 3, u_2 = 27$ និង $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)

គេមានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 = 6\lambda - 9 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

ដែល $\Delta = (-6)^2 + 4(-9) = 0$ នោះសមីការមានឫសឌុប $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{6}{2} = \lambda = 3$

គេបាន

$$u_n = (A + nB)\lambda^n = (A + nB)3^n \quad (៥២០)$$

ចំពោះ $n = 1$ និង $u_1 = 3$ គេបាន $u_1 = (A + B)3$ ឬ $3 = (A + B)3$

$$A + B = 1 \quad (៥២១)$$

ចំពោះ $n = 2$ និង $u_2 = 27$ គេបាន $u_2 = (A + 2B)3^2$ ឬ $27 = (A + 2B)9$

$$A + 2B = 3 \quad (៥២២)$$

យកសមីការ (៥២២) ដក (៥២១) $A+2B-(A+B)=3-1$

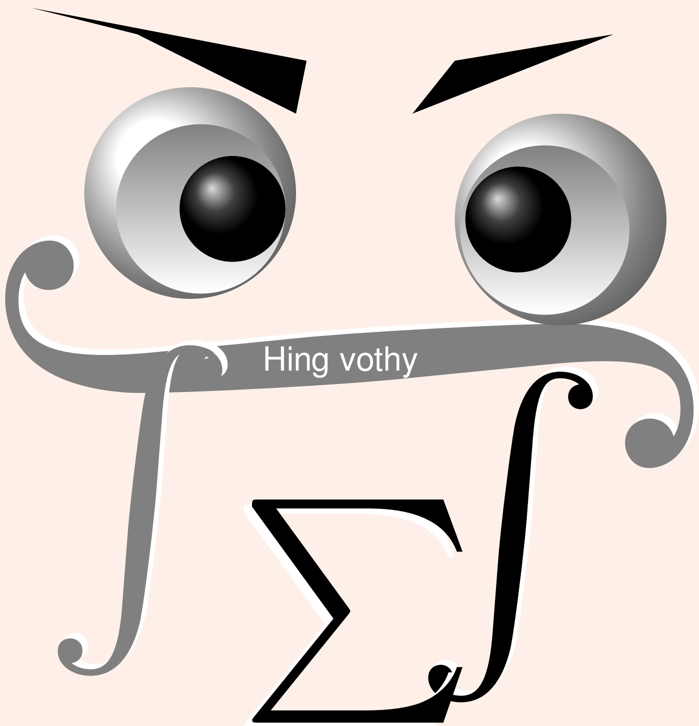
$$B=2$$

$$A=1-B$$

$$=1-2=-1$$

ជំនួសចូល (៥២០) គេបាន $u_n=(-1+2n)3^n=3^n(2n-1)$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តួទូទៅនៃស្វ៊ីត } (u_n) \text{ គឺ } u_n=3^n(2n-1)}$ ■


Hing vothy

៥.៣ លំហាត់ក្នុងមេរៀនស្ទីតចំនួនពិត

លំហាត់ ១ ចូរបំពេញតួនៃស្ទីតក្នុងចន្លោះខាងក្រោម៖

១. $1, 5, 9, \quad , \quad ,$

២. $5, 10, 15, 20, \quad , \quad ,$

៣. $1, 3, 6, 10, \quad , \quad ,$

៤. $1, 5, 14, 30, 55, \quad , \quad ,$

៥. $80, 72, 56, \quad , \quad ,$

៦. $8, 16, 24, 32, \quad , \quad ,$

៧. $2, 5, 8, 11, \quad , \quad ,$

៨. $36, 31, 26, 21, \quad , \quad ,$

៩. $96, 89, 82, 75, \quad , \quad ,$

១០. $1, 4, 16, 64, \quad , \quad ,$

១១. $37, \quad , 55, 64, \quad ,$

១២. $59, \quad , 51, 47, \quad ,$

លំហាត់ ២ សរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស្ទីតខាងក្រោម៖

១. $1, 3, 9, 27, \cdots$

២. $4, 12, 36, 108, \cdots$

៣. $12, 15, 21, 30, \cdots$

៤. $3, 6, 12, 24, 48, \cdots$

៥. $3, 6, 11, 18, \cdots$

៦. $160, 80, 40, 20, \cdots$

៧. $1, 7, 13, 19, \cdots$

៨. $2, 6, 18, 54, \quad , \quad ,$

៩. $480, 240, 120, 60, \quad , \quad ,$

លំហាត់ ៣ សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្ទីតនីមួយៗខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ៖

១. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

២. $u_n = \dfrac{2n-1}{n^2+1}$

៣. $u_n = \dfrac{n^3+2n^2-1}{n^2+n}$

៤. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+2n+1}$

៥. $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n(n+1)}$

៦. $u_n = \sqrt{2n^2-1} - n$

៧. $u_n = 7 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

៨. $u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 1$

៩. $u_1 = 2, u_n = 2 + 3u_{n+1}$

១០. $u_1 = 1, u_2 = 3,$

$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}, n \geq 3$

លំហាត់ ៤ សរសេរបួនតួដំបូងនៃស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2n^2 + 1$ ។ តើចំនួន 163 និង 883 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្ទីត ?

លំហាត់ ៥ គេឲ្យស្ទីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 12$

និង $u_n = an^2 + bn + c$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a, b, c និង c ។

លំហាត់ ៦ កំណត់តួទី n ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $1, 3, 5, 7, 9, \cdots$

២. $5, 7, 9, 11, 13, \cdots$

៣. $1, 2, 4, 8, 16, \cdots$

៤. $-3, -1, 1, 3, 5, \cdots$

៥. $2, 2, 2, 2, 2, \cdots$

៦. $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \cdots$

៧. $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots$

៨. $\frac{1}{2.3}, \frac{2}{3.4}, \frac{3}{4.5}, \frac{4}{5.6}, \cdots$

៩. $\frac{1}{1.2.3}, \frac{1}{2.3.4}, \frac{1}{3.4.5}, \cdots$

១០. $1, \frac{1}{1.3}, \frac{1}{1.3.5}, \frac{1}{1.3.5.7}, \cdots$

លំហាត់ ៧

១. គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = 3^{1-\frac{1}{n}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។ កំណត់តួ u_{2n-1} ។

២. គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = (-1)^n(2n^3 - 5n^2 + 3n - 1)$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។ កំណត់តួ u_{2n-1} ។

៣. គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_{n+1} = 3u_n + 5$ ចំពោះគ្រប់ $n = 0, 1, 2, 3, ...$ និង u_0 ជាតួទី១។ កំណត់តួ u_{2n-1} ។

លំហាត់ ៨

១. គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយទំនាក់ទំនង $u_0 = k + \frac{1}{k}$ និង $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n = k^{2^n} + \frac{1}{k^{2^n}}$ ដែល $k > 1$ ។

២. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើន៖

១. $u_n = \frac{n}{3-2n}$ ២. $u_n = \frac{n^2+1}{n+2}$ ៣. $u_n = -\frac{4}{n+2}$

៣. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតចុះ៖

១. $u_n = \frac{1}{n+1}$ ២. $u_n = \frac{2}{3^n}$ ៣. $u_n = \frac{2n}{n^2} + 5$

៤. សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

១. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \frac{1}{n^2}$

២. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = (2n-1)^2$

៣. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2^{n+1}3^n$

៤. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

៥. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \sqrt[n]{k}$ ដែល $0 < k < 1$

៥. បង្ហាញថាស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{n+1}{e^n}$ ជាស៊ីតទាល់ ។

៦. គេឲ្យស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = (3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}}$ ។ បង្ហាញថាស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស៊ីតចុះ ។

៧. សិក្សាភាពកើន ភាពចុះ និង ភាពទាល់នៃស៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{3^n}{(n+1)^2}$

២. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$

៣. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$

៤. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}$

៥. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{4^n}{2^n+222}$

៦. ស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_1, u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{2}$

៨. តើស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ខាងក្រោមជាស៊ីតទាល់ ឬ ទេ ?

១. $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$

២. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}$

៣. $u_n = \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}$

៤. $u_n = \dfrac{\pi^n}{n}$

៥. $u_n = \dfrac{n^2+n}{n^3+2n^2-2}$

៦. $u_1 = 1, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$

៧. $u_n = \dfrac{n}{e^n}$

៨. $u_n = (-1)^n \dfrac{n^2+3}{\sqrt[4]{n^9+3n^3+4}}$

៥.៤ លំហាត់ក្នុងមេរៀនស្វ៊ីតនព្វន្ត

លំហាត់ ៩ រក u_n ចំពោះស្វ៊ីតនិមួយៗខាងក្រោម៖

១. $5, 7, 9, 11, 13, \cdots$

២. $1, 6, 11, 16, 21, \cdots$

៣. $8, 14, 20, 26, 32, \cdots$

៤. $60, 51, 42, 33, 24, \ldots$

៥. $4, 0, -4, -8, -12, \ldots$

៦. $\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$ ។

លំហាត់ ១០ គេឲ្យស្វ៊ីត $7, 18, 29, 40, 51, \ldots$ រក u_n និង u_{20} ។

លំហាត់ ១១ រក u_n និង u_{13} ចំពោះស្វ៊ីត $200, 310, 420, 530, 640, \ldots$ ។

លំហាត់ ១២ គេឲ្យស្វ៊ីត $17, 10, 3, -4, -11, \ldots$ រក u_n និង u_{19} ។

លំហាត់ ១៣ តើចំនួន 1000 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត $9, 16, 23, 30, 37, \ldots$?

លំហាត់ ១៤ តើចំនួន 500 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត $28, 50, 72, 94, 116, \ldots$?

លំហាត់ ១៥ រក u_n ចំពោះករណីនិមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_5 = 17$ និង $u_9 = 33$

២. $u_4 = 43$ និង $u_{10} = 97$

៣. $u_8 = -8$ និង $u_{14} = -11$ ។

លំហាត់ ១៦ កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យស្វ៊ីតនិមួយៗខាងក្រោមជាស្វ៊ីតនព្វន្ត៖

១. $k-1, 11, 2k-1$

២. $4k-2, 18, 9k-1$

៣. $k^2+4, 29, 3k$ ។

លំហាត់ ១៧ គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនិមួយៗខាងក្រោម៖

១. $2+5+8+11+14+\ldots$

២. $8+10+12+14+16+\ldots$

៣. $80+77+74+71+68+\ldots$

៤. $2008+1996+1984+1972+1960+\ldots$

៥. $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{7}{6}+\frac{3}{2}+\frac{11}{6}+\ldots$ ។

លំហាត់ ១៨ គណនា S_7 នៃផលបូកស្វ៊ីត $8+15+22+29+36+\ldots$ ។

លំហាត់ ១៩ គេឲ្យតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_n = 5n-3$ គណនា S_{12} ។

លំហាត់ ២០ រកផលបូកពហុគុណនៃ7 នៅចន្លោះ 100 និង 300 ។

លំហាត់ ២១ គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $4, 15, 26, 37, \ldots$ ។

១. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២. រួចគណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

លំហាត់ ២២ គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = \frac{n}{2} + \frac{2n}{3}$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

១. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន ។

២. កំណត់តួទី 1 និងតួទី 22 រួចគណនាផលបូក 22 ដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

លំហាត់ ២៣ គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $9, 5, 1, -3, -7, \dots$ ។

១. គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត ។

២. តើចំនួន -67 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

លំហាត់ ២៤ គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $-2, 0, 2, 4, 6, \dots$ ។

១. គណនាតួទី 18 និងតួទី 37 នៃស្វ៊ីត ។

២. តើចំនួន 222 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

លំហាត់ ២៥ រកតួទី n និងតួទី 33 នៃស្វ៊ីតនព្វន្តនិមួយៗខាងក្រោម ៖

១. $1, 7, 13, \dots$ ២. $-9, -4, 1, \dots$ ៣. $6, \frac{11}{2}, 5, \dots$

លំហាត់ ២៦ រកចំនួនតួនៃស្វ៊ីតនិមួយៗខាងក្រោម៖

១. $-2, 3, 8, \dots, 303$ ២. $2, 8, 14, \dots, 116$

៣. $7, \frac{27}{4}, \frac{13}{2}, \dots, -18$ ៤. $1, -3, -7, \dots, -251$

៥. $1, 8, 15, \dots, 120$ ៦. $-7, 1, 9, 17, \dots, 177$

លំហាត់ ២៧ រកតួទី1 និងផលសងរួម d នៃស្វ៊ីតនព្វន្តក្នុងករណីនិមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_4 = 11$ និង $u_7 = -1$

២. $u_3 = 18$ និង $u_7 = 30$

៣. $u_2 - u_3 + u_5 = 10$ និង $u_1 + u_6 = 17$

លំហាត់ ២៨ គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = \frac{3n-2}{5}$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

១. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន

២. រួចគណនាផលបូក 30 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ។

លំហាត់ ២៩ គណនាផលបូក n តួដំបូង និង 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនិមួយៗខាងក្រោម៖

១. $-3, 1, 5, \dots$	៣. $-7, -3, 1, \dots$	៥. $-2, 5, 12, \dots$
២. $52, 49, 46, \dots$	៤. $1, 1.1, 1.2, \dots$	៦. $200, 175, 150, \dots$

លំហាត់ ៣០ តើចំនួន 109 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $-8, -5, -2, 1, \dots$ ។

លំហាត់ ៣១ គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $5, 8, 11, 14, \dots$ ។ តើផលបូកប៉ុន្មានតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះមានតម្លៃស្មើ 98 ?

លំហាត់ ៣២ គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $5, 7, 9, 11, \dots$ ។ តើផលបូកប៉ុន្មានតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះមានតម្លៃស្មើ 621 ?

លំហាត់ ៣៣ គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $3, 6, 9, 12, 15, \dots$ និងស្វ៊ីតនព្វន្ត $3, 7, 11, 15, 19, \dots$ ។ តើក្នុងចំណោម 111 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

លំហាត់ ៣៤ ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានតួទីបីស្មើ -20 និងតួទី 11 ស្មើ 20 ។ បង្ហាញថាផលបូក 13 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះស្មើសូន្យ ។

លំហាត់ ៣៥ ស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានតួទីបីស្មើ 18 និងតួទី 7 ស្មើ 30 ។ គណនាផលបូក 33 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

លំហាត់ ៣៦ កំណត់ចំនួនតួ n តិចបំផុតដើម្បីឲ្យផលបូក $S_n = (3-2.1) + (3-2.2) + (3-2.3) + \dots + (3-2n)$ មានតម្លៃតូចជាង -100 ។

លំហាត់ ៣៧ គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $55, 51, 47, \dots$ ។ កំណត់តម្លៃ n ដែលធ្វើឲ្យផលបូក n តួដំបូង S_n មានតម្លៃអតិបរមា ។ រួចកំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ S_n ។

លំហាត់ ៣៨ តើស្វ៊ីតនិមួយៗខាងក្រោមនេះ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តឬទេ ? បើវាជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ចូរកំណត់តួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់វា៖

១. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2n - 3$

២. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 4 - 3n$

៣. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = n^2 + 1$

៤. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{2(n-3)}{5}$

លំហាត់ ៣៩ បង្ហាញថាបីចំនួនខាងក្រោមបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត៖

១. $\dfrac{1}{x-1}, \dfrac{x}{x^2-1}, \dfrac{1}{x+1}$

២. $(a^2+b^2)^2, (a^4+b^4), (a^2-b^2)^2$

៣. $\dfrac{2}{x+1}, \dfrac{x+1}{2x}, \dfrac{x^2+1}{x(x+1)}$

៤. $(a^2-2ab-b^2)^2, (a^2+b^2)^2, (a^2+2ab-b^2)^2$

លំហាត់ ៤០ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យបីចំនួនខាងក្រោមបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត៖

១. $(1+x)^2, (3+x)^2, (9+x)^2$ ២. $(2-x)^2, 2x, 2+x$

៣. $a^2(b+x), b^2(a+x), x^2(a+b)$ ៤. $\dfrac{3x+1}{3}, 1+x, \dfrac{3x+5}{3}$

លំហាត់ ៤១ កំណត់លក្ខខ័ណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីឲ្យបីចំនួន

$(x^2-2x-1), (x^2-1), (x^2+2x-1)$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

លំហាត់ ៤២ រកតួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់ស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កាលណាគេស្គាល់៖

១. $u_4 = 15$ និង $S_5 = 55$ ២. $u_3+u_5 = 4$ និង $S_{12} = 129$

៣. $S_5 = 35$ និង $u_4u_5 = 130$ ៤. $u_5+u_3 = -4$ និង $u_2u_4 = -3$

៥. $u_1+u_7 = 4$ និង $u_3^2+u_7^2 = 122$ ៦. $u_1.u_2 = 96$ និង $u_1+u_2 = 20$

លំហាត់ ៤៣ រកបីតួបន្ទាប់គ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ បើគេដឹងថាផលបូករបស់វាស្មើ 3 និងផលគុណរបស់វាស្មើ -15 ។

លំហាត់ ៤៤ កំណត់បីចំនួនតគ្នា a, b, c នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ បើគេដឹងថា៖

១. $a+b+c = 36$ និង $abc = 1428$

២. $a+b+c = 30$ និង $abc = 910$

៣. $a+b+c = -9$ និង $abc = 48$

៤. $a+b+c = 18$ និង $a^2+b^2+c^2 = 206$

៥. $a+b+c = 171$ និង $a^2+b^2+c^2 = 9845$

៦. $a+b+c = 24$ និង $a^2+b^2+c^2 = 210$

៧. $a+b+c = 24$ និង $a^4+b^4+c^4 = 15392$

៨. $a+b+c = abc$ ដែល $a, b, c \in \mathbb{N}$

លំហាត់ ៤៥ រង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងមួយតំរៀបតគ្នា បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួមស្មើ 21 ម៉ែត្រ ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងនេះ ។

លំហាត់ ៤៦ រង្វាស់មុំក្នុងទាំងបួននៃចតុកោណមួយតំរៀបតគ្នា បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ហើយមុំ

ដែលតូចជាងគេមានរង្វាស់ 45 ដឺក្រេ ។ គណនារង្វាស់មុំក្នុងបីផ្សេងទៀតនៃចតុកោណនេះ ។

លំហាត់ ៤៧ គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, ..., u_{999}$ ។ កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យ u_k និង u_{888+k} ជាតួនៅស្មើចំងាយពីតួចុងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

លំហាត់ ៤៨ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. បើ a, b, c ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

២. បើ $\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{b+c}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ a^2, b^2, c^2 ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

៣. $\dfrac{a}{b(a-b)}, \dfrac{a+b}{2ab}, \dfrac{b}{a(b-a)}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ចំពោះគ្រប់ $a \neq 0$ និង $b \neq 0$ ។

លំហាត់ ៤៩ បើ a, b, c ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត បង្ហាញថា
$\frac{2}{9}(a+b+c)^3 = a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$ ។

លំហាត់ ៥០ គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_{13} = 2u_6$ និងផលបូក 15 តួដំបូង $S_{15} = 615$ ។ រកបីតួតំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

លំហាត់ ៥១ កំណត់តួទីមួយ និងផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយ បើគេដឹងថាផលបូក n តួដំបូង ៖

១. $S_n = \dfrac{n^2}{2}$

២. $S_n = 3n^2$

៣. $S_n = 4n^2 - 5n$

លំហាត់ ៥២ គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលមានផលបូក n តួដំបូង $S_n = n^2 + 5n$ ។ គណនា u_n និង u_{n+1} ។ រួចបង្ហាញថាស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ នេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

លំហាត់ ៥៣ គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលមានផលបូក n តួដំបូង $S_n = an^2 + bn$ ។ បង្ហាញថាស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ នេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត រួចគណនាតួទីមួយ និងផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនេះជាអនុគមន៍នៃ a និង b ។

លំហាត់ ៥៤ នៅក្នុងស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ មានតួទីមួយស្មើ 12 និងផលសងរួមស្មើ 3 ។ ប្រសិនបើផលបូក $2k$ តំបូងស្មើពាក់កណ្តាលផលបូក $3k$ តំបូង តើ k មានតម្លៃស្មើប៉ុន្មាន ?

លំហាត់ ៥៥ គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_1 = 7$ និងផលសងរួម $d = 3$ តើផលបូកប៉ុន្មានតួដំបូងដែលមានតម្លៃស្មើ 205 ។

លំហាត់ ៥៦ កម្មករម្នាក់ស្រោចទឹកកូនកៅស៊ូចំនួន 32 ដើម ។ កូនកៅស៊ូនោះដាំជាជួរ ឃ្លាតៗពីគ្នាប្រវែង 3 ម៉ែត្រពីមួយដើមទៅមួយដើម ។ ក្នុងការស្រោចកម្មករនោះប្រើធុងទឹកតែមួយគត់ ហើយមួយ

ដើមស្រោចចំនួនមួយធុង ។ ដើម្បីស្រោចកូនកៅស៊ូទាំង 32 ដើមនេះ តើកម្មករត្រូវដើរអស់ចំងាយផ្លូវប៉ុន្មានម៉ែត្រ ? បើប្រភពទឹកស្ថិតនៅជាជួរជាមួយដើមកៅស៊ូ និងមានចំងាយ 5 ម៉ែត្រពីដើមទីមួយ ។

លំហាត់ ៥៧ គេមានបួនចំនួនបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ បើផលបូកពីរតួដំបូងស្មើនិង 60 និងផលគុណពីរតួផ្សេងទៀតស្មើនិង 75 ចូរកំណត់ចំនួនទាំងបួននៃស្វ៊ីតនព្វន្តនោះ ។

លំហាត់ ៥៨ គេមានប្រាំបីចំនួនបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ បើតួទីមួយស្មើនិង 7 ហើយផលបូកប្រាំបីតួនេះស្មើនិង 196 ចូរកំណត់ប្រាំបីចំនួននៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

លំហាត់ ៥៩ គេមានបួនចំនួន a, b, c, d ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ បើ $a + b + c + d = 22$ និង $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 166$ ចូរកំណត់ចំនួន a, b, c, d ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

លំហាត់ ៦០ គណនាបួនចំនួន a, b, c, d នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ដែលមានផលសងរួមស្មើ 4 និង $abcd = 585$ ។

លំហាត់ ៦១ គណនាបួនចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ បើគេដឹងថាផលបូកបួនតួនេះស្មើ 20 និងផលបូកចម្រាស់បួនតួនេះស្មើ $\dfrac{25}{24}$ ។

លំហាត់ ៦២

១. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ ដែលគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតនេះជាចំនួនខុសពីសូន្យ ។
បង្ហាញថា $\dfrac{1}{u_1.u_2} + \dfrac{1}{u_2.u_3} + \dfrac{1}{u_3.u_4} + ... + \dfrac{1}{u_n.u_{n+1}} = \dfrac{n}{u_1.u_{n+1}}$ ។

២. គណនាផលបូក $S_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$ ។

លំហាត់ ៦៣ គេឲ្យពីរចំនួន u_0 និង u_1 គេបង្កើតចំនួន

$u_2 = u_0 + u_1, u_3 = u_1 + u_2, ..., u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$ ។

បង្ហាញថា $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} = u_{n+1} - u_1$ ។

លំហាត់ ៦៤ គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលមានតួទីមួយ $u_1 = 1$ ។ គណនាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះក្នុងករណីខាងក្រោម៖

១. ផលធៀបតួទី 8 និងតួទី 3 ស្មើនឹង 4 ។

២. ផលដកការេនៃតួទី 10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3 ។

លំហាត់ ៦៥ គេឲ្យ a, b, c ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\cot a, \cot b, \cot c$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះគេបាន $\sin^2 a, \sin^2 b, \sin^2 c$ ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

៥.៥ លំហាត់មេរៀនស្វីតធរណីមាត្រ

លំហាត់ ៦៦ កំណត់ផលធៀបរួមនៃស្វីតធរណីមាត្រ និង សរសេរបីតួបន្ទាប់ទៀតនៃស្វីតនិមួយៗខាងក្រោម៖

១. $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, ...$

២. $8, 4\sqrt{2}, 4, 2\sqrt{2}, ...$

៣. $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, ...$

លំហាត់ ៦៧ កំណត់តួទីn និង តួទី 15 នៃស្វីតធរណីមាត្រនិមួយៗខាងក្រោម៖

១. $625, 125, 25, 5, 1, ...$

២. $5, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, ...$

៣. $1, \sqrt{7}, 7, 7\sqrt{7}, 49, ...$

លំហាត់ ៦៨ តើស្វីតធរណីមាត្រនិមួយៗខាងក្រោមមានចំនួនប៉ុន្មានតួ ?

១. $1, 2, 4, 8, 16, ..., 1024$

២. $5, 10, 20, ..., 5.2^n$

៣. $x^7, -x^6, x^5, ..., x^{-7}$

លំហាត់ ៦៩ គេមានស្វីតធរណីមាត្រ $3, 12, 48, ...$ ។

១. គណនាតួទី9 នៃស្វីត ។

២. តើចំនួន 12288 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វីត ?

៣. គណនាផលបូក 30 តួដំបូងនៃស្វីត ។

លំហាត់ ៧០ គេឲ្យស្វីតធរណីមាត្រ $2, 4, 8, 16, ...$ ។

១. គណនាតួទី6 នៃស្វីត ។

២. តើចំនួន 8192 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វីត ?

៣. គណនាផលបូក 23 តួដំបូងនៃស្វីត ។

លំហាត់ ៧១ សរសេរបួនតួដំបូងនៃស្វីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ រួចបង្ហាញថាវាជាស្វីតធរណីមាត្រ ។

លំហាត់ ៧២ រកតួទី១ និង ផលធៀបរួមនៃស្វីតធរណីមាត្រ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ នីមួយៗខាងក្រោម បើគេស្គាល់៖

១. $u_3 = 1$ និង $u_7 = 81$

២. $u_3 = 10$ និង $u_6 = 80$

៣. $u_2 + u_3 = 9$ និង $u_7 = 8u_4$

៤. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

៥. $S_n = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3^{n+1}}$

៦. $u_1 + u_2 = 18$ និង $u_2 + u_3 = 36$

លំហាត់ ៧៣ គេមានស្វីតធរណីមាត្រ $5, 15, 45, ...$ ។ គណនាផលបូក n តួដំបូង S_n នៃស្វីត

ធរណីមាត្រនេះ ។ រក u_n រួចបង្ហាញថា $3u_n = 2S_n + 5$ ។

លំហាត់ ៧៤ គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនិមួយៗខាងក្រោម រួចសរសេរជារាង $a(1-b^n)$ ដែល $a, b \in \mathbb{R}$

១. $3, 12, 48, ...$

២. $125, -25, 5, ...$

៣. $4, 2, 1, ...$

៤. $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$

លំហាត់ ៧៥ គេមាន u_1, u_2, u_3 ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ កំណត់រក u_1 និងផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ បើគេស្គាល់៖

១. $u_1 + u_2 + u_3 = 28$ និង $u_1u_2u_3 = 512$

២. $u_1 + u_2 + u_3 = 13$ និង $u_1u_2u_3 = -64$ ។

លំហាត់ ៧៦ គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 3^{n-2}$ គណនាផលបូក n តួដំបូង និងផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

លំហាត់ ៧៧ គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_2 = 405$ និង $u_5 = -120$ ។ គណនាតួទី 7 និងផលបូក 7 តួដំបូងតួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

លំហាត់ ៧៨ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យបីចំនួន $x, 2x + 6, 4x + 36$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

លំហាត់ ៧៩ រកបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ បើគេដឹងថា៖

១. ផលបូកបីតួនេះស្មើ 26 និងផលគុណបីតួនេះស្មើ 216 ។

២. ផលបូកបីតួនេះស្មើ 21 និងផលគុណបីតួនេះស្មើ 21 ហើយផលធៀបរួមរបស់វាតូចជាង 1 ។

លំហាត់ ៨០ រកពីរចំនួន a និង b ដែលបីតួ $a, b, 10$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តផង និងស្វ៊ីតធរណីមាត្រផង ។

លំហាត់ ៨១ តើគេត្រូវថែមប៉ុន្មានទៅលើចំនួន $3, 24, 94$ ដើម្បីឲ្យបានបីតួបន្តបន្ទាប់គ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

លំហាត់ ៨២ គេឲ្យផលបូក $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n+1} = 1022$ ។ គណនាតម្លៃ n ។

លំហាត់ ៨៣ គេមានមុំក្នុងទាំងបីនៃត្រីកោណមួយបង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។ បើមុំដែលតូចជាងគេមានរង្វាស់ 20 ដឺក្រេ គណនារង្វាស់មុំដែលធំជាងគេ ។

លំហាត់ ៨៤ គណនាតម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $a, 28, b$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើ $a+b=119$ ។

លំហាត់ ៨៥ រកបីចំនួននៃស្វីតធរណីមាត្រ ។ គេដឹងថា បើគេថែមចំនួន 24 លើតួទី 2 នោះវាក្លាយជាស្វីតនព្វន្ត រួចបើគេថែមចំនួន 432 លើតួទី 3 នៃស្វីតនព្វន្តទៅទៀត វាក្លាយជាស្វីតធរណីមាត្រវិញ ។

លំហាត់ ៨៦ គណនាបីចំនួន a,b,c នៃស្វីតធរណីមាត្រមួយ បើគេដឹងថា៖

១. $a+b+c=310$ និង $b^2=10c$

២. $a+b+c=156$ និង $a^2+b^2+c^2=13104$ ។

លំហាត់ ៨៧ គេឲ្យស្វីតធរណីមាត្រមួយដែលមានផលបូកប្រាំតួដំបូងស្មើ 5 និងផលបូកប្រាំតួបន្ទាប់ទៀតស្មើ 1215 ។ កំណត់តួទីមួយ និងផលសងរួមនៃស្វីតធរណីមាត្រនេះ ។

លំហាត់ ៨៨ គេឲ្យស្វីតធរណីមាត្រមួយដែលមានផលបូកប្រាំតួដំបូងស្មើ 5 និងផលបូកពីតួទីប្រាំតួដល់តួទីប្រាំបួនស្មើ 80 ។ កំណត់តួទីមួយ និងផលសងរួមនៃស្វីតធរណីមាត្រនេះ ។

លំហាត់ ៨៩ គេឲ្យស្វីតធរណីមាត្រ $u_1,u_2,u_3,....,u_{2012}$ ។ កំនត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យ u_k និង u_{1987+k} ជាតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុងនៃស្វីតធរណីមាត្រនេះ ។

លំហាត់ ៩០ គេមានការេមួយដែលជ្រុងមានរង្វាស់ a គេសង់ការេមួយទៀតក្នុងការេនេះ ដោយឲ្យកំពូលជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃជ្រុងការេមុន ការសង់តាមរបៀបនេះជាបន្តបន្ទាប់គេបានស្វីតមួយ ។

១. គណនាក្រលាផ្ទៃរបស់ការេទី n និងគណនាផលបូកក្រលាផ្ទៃនៃ n ការេដំបូង ។

២. គណនាបរិមាត្ររបស់ការេទី n និងគណនាផលបូកបរិមាត្រនៃ n ការេដំបូង ។

លំហាត់ ៩១ គេមានត្រីកោណសម័ង្សមួយដែលជ្រុងដែលជ្រុងមានរង្វាស់ a គេសង់ត្រីកោណសម័ង្សមួយទៀតក្នុងត្រីកោណសម័ង្សនេះដោយឲ្យកំពូលជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃជ្រុងត្រីកោណសម័ង្សមុន ការសង់តាមរបៀបនេះជាបន្តជាបន្តបន្ទាប់គេបានស្វីតមួយ ។

1. គណនាបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណសម័ង្សទី n និងគណនាផលបូកបរិមាត្រនៃ n ត្រីកោណសម័ង្សដំបូង ។
2. គណនាក្រលាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណសម័ង្សទី n និងគណនាផលបូកក្រលាផ្ទៃនៃ n ត្រីកោណសម័ង្សដំបូង ។

លំហាត់ ៩២ បើ a,b,c ជាស្វីតធរណីមាត្រ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបីចំនួនខាងក្រោមជាស្វីតធរណីមាត្រដែរ៖

១. a^2, b^2, c^2 ២. $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ ៣. $\frac{1}{a^k}, \frac{1}{b^k}, \frac{1}{c^k}$ ។

លំហាត់ ៨៣ គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

១. $S_n = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111...11}_{n}$

២. $S_n = 3 + 33 + 333 + ... + \underbrace{333...33}_{n}$

៣. $S_n = 7 + 77 + 777 + ... + \underbrace{777...77}_{n}$

៤. $S_n = 5 + 55 + 555 + ... + \underbrace{555...55}_{n}$ ។

លំហាត់ ៨៤ បើ a, b, c, d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. $(a-d)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$

២. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

៣. $(a+b+c)(b+c+d)(a-b+c)(b-c+d) = (ab+bc+cd)^2$ ។

លំហាត់ ៨៥ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ a, b, c, d, e មួយមានផលធៀបរួមជាចំនួនគត់ធំជាងមួយ ហើយបឋម និងតួទីមួយ ។ កំណត់ស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះដើម្បីឲ្យបាន $6a^2 = e - b$ ។

លំហាត់ ៨៦ គេឲ្យចំនួនពិត a, b និងស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយដែលកំណត់ដោយ $u_{n+1} = au_n + b$

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_{n+2} - u_{n+1} = a(u_{n+1} - u_n)$ ។

២. បើ $v_n = u_{n+1} - u_n$ តើស្វ៊ីត (v_n) ជាស្វ៊ីតអ្វី ?

លំហាត់ ៨៧ សរសេរចំនួនទសភាគខួបខាងក្រោម ជាចំនួនសនិទានដែលមានទំរង់ $\frac{a}{b}$

១. $0.\overline{9}$ ៣. $2.3\overline{5}$ ៥. $0.0\overline{12}$

២. $0.\overline{34}$ ៤. $5.\overline{354}$ ៦. $1.7\overline{23}$ ។

លំហាត់ ៨៨ ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិត នៃសមីការ $3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad (E)$ ។ គេមានស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកើនដែលមាន u_3 និង u_4 នៃស្វ៊ីតនេះជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។ កំណត់ផលធៀបរួម និងតួទីមួយនៃស្វ៊ីតនេះ ។

៥.៦ លំហាត់ផលបូកនៃស៊ីតផ្សេងៗ

លំហាត់ ៩៩ បង្ហាញថា

១. $2^n > n^2$ ចំពោះ $\forall n \geq 5$ ។

២. $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k-1} = 2^k - 1$ ចំពោះ $k \geq 1$ ។

៣. $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។

៤. $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។

៥. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។

៦. $n! > n^3$ ចំពោះ $n \geq 6$ ។

៧. $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + n(n!) = (n+1)! - 1$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។

លំហាត់ ១០០ បើ $r \neq 1$ បង្ហាញថា $a + ar + ar^2 + ... + ar^n = \dfrac{a(r^{n+1}-1)}{r-1}$ ចំពោះ $n \in \mathbb{N}_0$ ។

លំហាត់ ១០១ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $7^n - 1$ ជាពហុគុណនៃ 6 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ១០២ បង្ហាញថា $4^n - 1$ ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ១០៣ បង្ហាញថា $5^n + 3$ ជាពហុគុណនៃ 4 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ១០៤ បង្ហាញថា $6^n - 1$ ជាពហុគុណនៃ 5 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ១០៥ បង្ហាញថា $8^n - 1$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ១០៦ បង្ហាញថា $9^n - 1$ ជាពហុគុណនៃ 8 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ១០៧ បង្ហាញថា $12^n + 10$ ជាពហុគុណនៃ 11 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ១០៨ បង្ហាញថា $13^n + 11$ ជាពហុគុណនៃ 12 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ១០៩ បង្ហាញថា $14^n - 1$ ជាពហុគុណនៃ 13 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ១១០ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា $1 + 2 + 4 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$ ។

លំហាត់ ១១១ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$ ។

លំហាត់ ១១២ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា $1 + 5 + 25 + ... + 5^{n-1} = \dfrac{1}{4}(5^n - 1)$ ។

លំហាត់ ១១៣ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា $1 + 5 + 9 + ... + (4n-3) = n(2n-1)$ ។

លំហាត់ ១១៤ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា $2 + 5 + 8 + ... + (3n-1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ ។

លំហាត់ ១១៥ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$
បង្ហាញថា $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ ។

លំហាត់ ១១៦ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+...+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}$ ។

លំហាត់ ១១៧ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$ ។

លំហាត់ ១១៨ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{4^3}+...+\dfrac{1}{4^n}=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$ ។

លំហាត់ ១១៩ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1^4+2^4+3^4+...+n^4=1+(4n-4)^2$ ។

លំហាត់ ១២០ គណនាផលបូក ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

១. $A=11+12+13+....+100$

២. $B=13^2+14^2+15^2+...+50^2$

៣. $C=10^3+11^3+12^3+...+30^3$

៤. $S_n=1.2+2.3+3.4+...+n(n+1)$

៥. $S_n=1.4+2.7+3.10+...+n(3n+1)$

៦. $S_n=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n+1)(n+2)$

៧. $S_n=2.4.6+4.6.8+6.8.10+...+2n(2n+2)(2n+4)$

៨. $S_n=1.3+2.9+3.27+...+n3^n$

៩. $S_n=2+4x+6x^2+8x^3+...+2nx^{n-1}$

១០. $S_n=\dfrac{1}{4.5}+\dfrac{1}{5.6}+\dfrac{1}{6.7}+...+\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}$

១១. $S_n=\dfrac{2}{1.5}+\dfrac{2}{5.9}+\dfrac{2}{9.13}+...+\dfrac{2}{(4n-3)(4n+1)}$

១២. $S_n=1.2^2+2.3^2+3.4^2+...+(n-1)n^2$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ។

១៣. $S_n=3+33+333+...+\underbrace{333...33}_{n \text{ ដងលេខ } 3}$

១៤. $S_n=13+1313+131313+...+\underbrace{131313...1313}_{n \text{ ដងលេខ } 13}$

លំហាត់ ១២១ គេឲ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ។

១. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

២. គណនាផលបូក 999 តួដំបូងនៃស្វីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

៣. គណនា $A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}$

លំហាត់ ១២២ គណនាផលបូក $S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+n}$ ។

លំហាត់ ១២៣ គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=1}^{n} 2k$

២. $\sum_{k=1}^{n} (k^2 - 2k + 1)$

៣. $\sum_{k=1}^{n} (3k-1)^2$

៤. $\sum_{k=1}^{n} (k^2 + 2k - 1)$

៥. $\sum_{k=1}^{n} (2k^2 + 3k - 7)$

៦. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}$

លំហាត់ ១២៤ កំណត់តួទី n នៃស្វីត $(u_n) : 1, 5, 11, 19, 29, 41, ...$ ។

លំហាត់ ១២៥ កំណត់តួទី n នៃស្វីត $(u_n) : 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...$ ។

លំហាត់ ១២៦ កំណត់តួទី n នៃស្វីត $(u_n) : 3, 8, 16, 27, 41, 58, ...$ ។

គណនាផលបូក n តួតំបូងនៃស្វីត (u_n) ។

លំហាត់ ១២៧ កំណត់តួទី n នៃស្វីត $(u_n) : 1, 4, 11, 22, 37, 56, ...$ ។

គណនាផលបូក n តួតំបូងនៃស្វីត (u_n) ។

លំហាត់ ១២៨ កំណត់តួទី n នៃស្វីត $(u_n) : 1, 12, 37, 82, 153, 256, ...$ ។

លំហាត់ ១២៩ កំណត់តួទី n នៃស្វីត $(u_n) : 1, 7, 23, 55, 109, 191, ...$ ។

គណនាផលបូក n តួបំបូងនៃស្វីត u_n ។

លំហាត់ ១៣០ កំណត់តួទី n នៃស្វីត $(u_n) : 1, 4, 17, 46, 97, 176, ...$ ។

គណនាផលបូក n តួបំបូងនៃស្វីត u_n ។

៥.៧ លំហាត់ក្នុងមេរៀនទំនាក់ទំនងតួនៃស្វ៊ីត

លំហាត់ ១៣១ កំណត់តួទី n នៃទំនាក់ទំនងស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_1 = 1\ ;\ u_{n+1} = u_n + 3$

២. $u_1 = -1\ ;\ u_{n+1} = -5u_n - 1$

៣. $u_1 = -2\ ;\ u_{n+1} = u_n + 5$

៤. $u_1 = 3\ ;\ u_{n+1} = 4u_n - 10$

៥. $u_1 = 1\ ;\ u_{n+1} = -2u_n + 3$

៦. $u_1 = 2\ ;\ u_{n+1} = 7u_n - 4$

៧. $u_1 = 2\ ;\ u_{n+1} = u_n + 3n$

៨. $u_1 = -3\ ;\ u_{n+1} = u_n + n^2$

លំហាត់ ១៣២ កំណត់តួទី n នៃទំនាក់ទំនងស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_1 = 1, \quad u_{n+1} = 2u_n + n + \dfrac{1}{2}$

២. $u_1 = 3, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n^2$

៣. $u_1 = \dfrac{1}{2}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 2$

៤. $u_1 = 4, \quad u_{n+1} = 5u_n - n^2 + 3$

៥. $u_1 = 7, \quad u_{n+1} = 6u_n + 2 - n$

៦. $u_1 = -1, \quad u_{n+1} = 4u_n - n^3$

លំហាត់ ១៣៣ រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

៤. $\begin{cases} u_1 = 0, u_2 = 3 \\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 8 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

៥. $\begin{cases} u_1 = 5, u_2 = 11 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n \end{cases}$

៣. $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 15 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n \end{cases}$

៦. $\begin{cases} u_1 = 9, u_2 = 13 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 21u_n \end{cases}$

លំហាត់ ១៣៤ រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះ $n \in \mathbb{N}_0$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_0 = 5, u_1 = 8 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 8 \\ u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} \end{cases}$

៣. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2} \end{cases}$

៤. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_n = 5u_{n-1} - 3u_{n-2} \end{cases}$

៥. $\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 7 \\ u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} \end{cases}$

៦. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 2u_{n-2} \end{cases}$

លំហាត់ ១៣៥ រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n - 1} \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{3u_n + 4} \end{cases}$

៣. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4u_n - 1} \end{cases}$

៤. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{4u_n + 2} \end{cases}$

៥. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

៦. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 7}{2u_n} \end{cases}$

៥.៨ ឯកសារយោង

[1] Discrete Mathematics

[2] R.B. Manfrino et al, *Topics in Algebra and Analysis*, Springer Internation Publishing Switzerland 2015

[3] 178 exercices demathématiques pour Terminale S, Stéphane PASQUET, 24 mars 2016

[4] Theory and Problems of DISCRETE MATHEMATICS Third Edition, SCHAUM'S OUTLINE OF , Copyright 2007,1997,1976 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

[5], David M.Burton, *Elementary Number Theory* , University of New Hampshire.

[6],MATHEMATICS FOR THE INTERNATIONAL STUDENT Mathematics HL (Core) second edition.

[7], Maths HL 3rd Edition published in 2004 by IBID Press, 2nd imprint published in 2005 Reprinted 2007.

[8] 178 exercices de mathématiques pour Terminale S ,Stéphane PASQUET, 24 mars 2016

[9] សៀវភៅគណិតវិទ្យាកំរិតខ្ពស់ថ្នាក់ទី១១ របស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា ។